



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS DE LA TIERRA  
INSTITUTO DE GEOFÍSICA

INVERSIÓN 1D DE DATOS DE RESISTIVIDAD Y CARGABILIDAD  
DE SEGUNDAS DIFERENCIAS DE POTENCIAL EMPLEANDO 2  
FUENTES SUPERPUESTAS ENFOCADAS

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
DOCTORA EN CIENCIAS DE LA TIERRA

P R E S E N T A:

Aide Esmeralda López González

COMITÉ TUTOR

Dr. Andrés Tejero Andrade  
Facultad de Ingeniería

Dr. René Chávez Segura  
Instituto de Geofísica

Dr. Arturo Iglesias Mendoza  
Instituto de Geofísica

JURADO EXAMINADOR

- 1) Dr. René Chávez Segura  
Instituto de Geofísica
- 2) Dra. Claudia Arango Galván  
Instituto de Geofísica
- 3) Dr. Andrés Tejero Andrade  
Facultad de Ingeniería
- 4) Dr. Carlos Flores Luna

Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, CICESE

- 5) Dr. Marco Antonio Pérez Flores

Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, CICESE



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# CERTIFICADO

## Registro Público del Derecho de Autor

Para los efectos de los artículos 13, 162, 163 fracción I, 164 fracción I, 168, 169, 209 fracción III y demás relativos de la Ley Federal del Derecho de Autor, se hace constar que la **OBRA** cuyas especificaciones aparecen a continuación, ha quedado inscrita en el Registro Público del Derecho de Autor, con los siguientes datos:

**AUTORES:** LOPEZ GONZALEZ AIDE ESMERALDA  
TEJERO ANDRADE ANDRES

**TITULO:** PROGRAMA DE INVERSION 1D DE DATOS DE RESISTIVIDAD Y CARGABILIDAD DE SEGUNDAS DIFERENCIAS DE POTENCIAL EMPLEANDO 2 FUENTES SUPERPUESTAS ENFOCADAS

**RAMA:** PROGRAMAS DE COMPUTACION

**TITULAR:** UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO (CON FUNDAMENTO EN EL ARTICULO 83 DE LA L.F.D.A.)

Con fundamento en lo establecido por el artículo 168 de la Ley Federal del Derecho de Autor, las inscripciones en el registro establecen la presunción de ser ciertos los hechos y actos que en ellas consten, salvo prueba en contrario. Toda inscripción deja a salvo los derechos de terceros. Si surge controversia, los efectos de la inscripción quedarán suspendidos en tanto se pronuncie resolución firme por autoridad competente.

Con fundamento en los artículos 2, 208, 209 fracción III y 211 de la Ley Federal del Derecho de Autor; artículos 64, 103 fracción IV y 104 del Reglamento de la Ley Federal del Derecho de Autor; artículos 1, 3 fracción I, 4, 8 fracción I y 9 del Reglamento Interior del Instituto Nacional del Derecho de Autor, se expide el presente certificado.

---

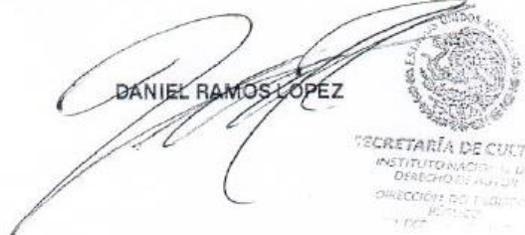
**Número de Registro:** 03-2018-121312155200-01

---

México D.F., a 19 de diciembre de 2018

**SUBDIRECTOR DE REGISTRO DE OBRAS Y CONTRATOS**

**DANIEL RAMOS LOPEZ**



## Agradecimientos

Agradezco al Programa de Becas de **CONACyT** que me brindó a través del **Posgrado en Ciencias de la Tierra** con el **Instituto de Geofísica**, la oportunidad de continuar mis estudios de doctorado y a la **Facultad de Ingeniería** por confiar en mí para continuar en la docencia en donde he encontrado vocación y el medio para transmitir el conocimiento que he adquirido. A **Araceli Chamán, Erika Ulloa** y **Laura Mendoza**, que desde el área administrativa dieron la cara y el apoyo necesario para hacer lo que se tiene que hacer, fueron siempre muy amables conmigo y merecen mi reconocimiento y gratitud.

Me siento también agradecida con mi tutor **Andrés Tejero** quien ha sabido guiarme en el desarrollo de la tesis y también me dio la libertad para proponer, crear, cuestionar y buscar mis propias respuestas. Me dio motivos para no declinar y seguir adelante.

En estos 4 años recorrí un camino de autodeterminación y autoconocimiento en muchos sentidos, por ello quiero darle las gracias a mi compañero de vida **Juan Carlos Uresti**, de quien y con quien he aprendido en el camino del crecimiento humano.

En la base de todo, siempre estuvo el apoyo de mi **familia y amigos**, brindando siempre la tranquilidad de la seguridad de que puedo contar con alguien, su apoyo es invaluable para mí. Fui encontrando personas que empecé a valorar y me valoraron. Otras que aún en la distancia sigo sintiendo su presencia y que desde donde se encuentran guardan un espacio para mí y el lazo que nos une.

Gracias a todos, son seres humanos valiosos y grandes en su ser.

*Inicié estudiando a la polarización  
y encontré la valoración  
de los opuestos en la vibración.*

*La Tierra vibra como todos  
pero se relaja siempre después de todo;  
procura disipar la tensión  
que inducimos los geoelectrónicos  
después de cada medición.*

*Continué con la polarización  
pero me llevó a la comprensión  
de los efectos de dos fuentes  
actuando por superposición.*

*Estas fuentes actúan en sentidos opuestos  
y en tiempos distintos  
pero eso no importa  
porque trabajan para los mismos objetivos.*

*La simetría de la solución  
es relevante en la interpretación  
ya que se procesa la información  
pensando en el enfoque de la inducción.*

*Fuentes enfocadas son  
y equilibrio se requiere en la posición  
para mantener al dato  
libre lo más posible  
de cualquier contaminación.*

*Las dos caras definen a la moneda  
así como la verdad objetiva  
necesita al menos de dos puntos de vista.*

*Así, esta tesis investiga  
cuál de todas es la solución verdadera,  
y para ello se requirió establecer un problema:  
modelar la respuesta con dos fuentes, una en cada ladera.*

*En **Fuentes Enfocadas**  
se requirió la **FE** misma  
debido a que en ella  
pocos creían.*

# Contenido

|   |           |
|---|-----------|
| <b>ÍNDICE DE FIGURAS</b> .....  | 3         |
| <b>ÍNDICE DE TABLAS</b> .....   | 4         |
| <b>RESUMEN</b> .....  | 7         |
| <b>ABSTRACT</b> .....   | 8         |
| <br>  |           |
| <b>1. INTRODUCCIÓN</b> .....  | <b>9</b>  |
| 1.1 Generalidades .....   | 9         |
| 1.2 Antecedentes.....   | 10        |
| 1.3 Trabajos previos.....   | 11        |
| 1.4 Sobre el contenido de esta tesis .....  | 11        |
| 1.5 Hipótesis.....  | 12        |
| 1.6 Objetivos .....   | 13        |
| 1.6.1    Objetivo general .....   | 13        |
| 1.6.2    Objetivos particulares.....  | 13        |
| <br>  |           |
| <b>2. MARCO TEÓRICO</b> .....   | <b>14</b> |
| 2.1 Ecuaciones de Maxwell para medios dispersivos.....  | 14        |
| 2.2 Definición de cargabilidad y resistividad .....   | 18        |
| 2.2.1    Valores aparentes negativos de PI.....   | 20        |
| 2.3 Fuentes enfocadas (FS) .....  | 21        |
| 2.3.1    Resistividad aparente de segundas diferencias y para fuentes enfocadas .....                         | 23        |
| 2.3.2    Cargabilidad aparente de segundas diferencias y para fuentes enfocadas .....                         | 24        |
| 2.3.3    Punto de atribución y profundidad de investigación para fuentes enfocadas .....                      | 25        |
| 2.4 Consideraciones para los datos aparentes e invertidos .....   | 26        |
| 2.4.1    Procesamiento de datos de segundas diferencias para fuentes enfocadas .....                          | 26        |
| 2.4.2    Consideraciones para contactos verticales en interpretaciones 1D .....                               | 28        |
| 2.5 Inversión de los datos de resistividad y cargabilidad de segundas diferencias para Fuentes Enfocadas..... | 29        |
| 2.5.1    Inversión por cristalización simulada rápida (Fast Simulating Annealing, FSA).....                   | 30        |
| 2.6 Consideraciones para la práctica en campo y para la inversión.....  | 31        |
| <br>  |           |
| <b>3. METODOLOGÍA</b> .....   | <b>33</b> |
| 3.1 Diagrama de flujo.....  | 33        |
| 3.2 Información que solicita el ejecutable al inicio.....   | 36        |
| 3.2.1    Archivo de datos de ENTRADA.....   | 36        |
| 3.2.2    Archivo de datos de SALIDA.....  | 37        |
| 3.2.3    Archivo de datos de COSTOS: para RHO y MU.....   | 38        |
| 3.2.4    Porcentaje (%) de rango en Resistividad .....  | 39        |
| 3.2.5    Porcentaje (%) de rango en Cargabilidad .....  | 39        |
| 3.2.6    Porcentaje (%) de rango en Espesores .....   | 40        |
| 3.2.7    Número de perturbaciones.....  | 40        |
| 3.3 Cálculo del Modelo Directo .....  | 40        |

|  |           |
|--|-----------|
| <b>4. MODELOS TEÓRICOS .....</b>   | <b>42</b> |
| 4.1 Perfil con modelo de 3 capas .....   | 42        |
| 4.2 Modelo de Oldenburg y Li (1994).....   | 43        |
| 4.2.1 Muestra de un perfil del modelo modificado de Oldenburg y Li (1994) .....  | 45        |
| 4.2.2 Pseudosecciones 2D del modelo modificado de Oldenburg y Li (1994).....   | 47        |
| <br>   |           |
| <b>RESULTADOS Y SU DISCUSIÓN.....</b>  | <b>49</b> |
| <br>   |           |
| 5.1 Resultados de inversiones del modelo de 3 capas.....   | 49        |
| 5.1.1 Resultados de inversiones del modelo de 3 capas sin ruido en los datos<br>aparentes.....   | 50        |
| 5.1.2 Resultados de inversiones del modelo de 3 capas con ruido aleatorio del 10%<br>en los datos.....   | 52        |
| 5.2 Resultados del modelo modificado de Oldenburg y Li (1994).....   | 54        |
| 5.2.1 Resultados del modelo del perfil de la posición 640m sin efectos laterales.....  | 55        |
| 5.2.2 Resultados del modelo 2D modificado de Oldenburg y Li (1994). .....  | 56        |
| 5.2.3 Resultados de datos aparentes de SPD para FS del modelo modificado de<br>Oldenburg y Li (1994) .....   | 59        |
| 5.2.4 Inversión de los perfiles del modelo modificado de Oldenburg y Li (1994),<br>con el programa de inversión 1D .....   | 61        |
| 5.2.5 Resultados del uso del filtro .....  | 61        |
| 5.2.6 Resultados de datos aparentes de SPD y FS del modelo modificado de<br>Oldenburg y Li (1994) para el perfil de la posición 640m con efectos<br>laterales..... | 62        |
| 5.2.7 Pseudosección de los cortes geoelectricos de los 21 perfiles del modelo<br>modificado de Oldenburg y Li (1994).....  | 65        |
| 5.2.8 Prueba adicional con arreglo Wenner-Schlumberger (2D).....   | 66        |
| 5.3 Discusión de resultados .....  | 67        |
| 5.3.1 Discusión sobre los resultados del modelo de 3 capas .....   | 67        |
| 5.3.2 Discusión sobre los resultados del modelo modificado de Oldenburg y Li<br>(1994).....  | 67        |
| <br>   |           |
| <b>CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES .....</b>  | <b>70</b> |
| <br>   |           |
| 6.1 Conclusiones.....  | 70        |
| 6.2 Recomendaciones.....   | 71        |
| 6.2.1 Respecto al programa de inversión .....  | 71        |
| 6.2.2 Respecto a la práctica en campo.....   | 72        |
| <br>   |           |
| <b>REFERENCIAS.....</b>  | <b>73</b> |
| <b>ANEXO A.....</b>  | <b>77</b> |
| <b>ANEXO B.....</b>  | <b>98</b> |

## Índice de figuras

|  |    |
|--|----|
| Figura 2-1. Esquema de los electrodos para la toma de datos. L=fuente izquierda. R=fuente derecha. Ambas fuentes son equidistantes respecto al electrodo C y están conformadas por electrodos de corriente dipolares. M, C y N son los electrodos de potencial y tienen las mismas coordenadas tanto para la fuente izquierda como para la fuente derecha. Los números 1 y 2 representan los canales de lectura del potencial entre los electrodos M-C y C-N, respectivamente. Estos canales son medidos simultáneamente en equipos automatizados. La distancia entre los electrodos de potencial es “a”. N es el nivel de la lectura..... | 21 |
| Figura 2-2. Comportamiento del flujo de corriente eléctrica en un semiespacio con una esfera resistiva, con la fuente de lado izquierdo (a) y derecho (b), respectivamente.....  | 22 |
| Figura 2-3. Comportamiento del flujo de corriente eléctrica en un semiespacio con una esfera resistiva superponiendo la fuente izquierda y derecha. ....   | 23 |
| Figura 2-4. Perfiles de resistividad y cargabilidad observados originales (Rho y Mu obs) y filtrados (Rho y Mu Filt).....  | 28 |
| Figura 3-1 Esquema del diagrama de flujo del programa de inversión 1D de datos de resistividad y cargabilidad de segundas diferencias de potencial empleando fuentes enfocadas.....  | 35 |
| Figura 4-1 Resistividades aparentes del modelo de 3 capas de la Tabla 1, para un arreglo de Fuentes Enfocadas (FS) y Schlumberger (Sch).....   | 43 |
| Figura 4-2. Cargabilidades aparentes del modelo de 3 capas de la Tabla 1, para un arreglo de Fuentes Enfocadas (FS-MU) y Schlumberger (Sch-MU).....  | 43 |
| Figura 4-3. Modelo de Oldenburg y Li (1994) en tonos de escala de grises para resistividad y cargabilidad (a y c) y sus datos aparentes en pseudosección (b y d) respectivamente.....  | 44 |
| Figura 4-4. Modelo modificado de Oldenburg y Li de 1994. Izquierda: modelo de resistividades. Derecha: modelo de cargabilidades. ....  | 45 |
| Figura 4-5. Datos de resistividad aparente tomados con el arreglo de SPD para FS (FS) y con el Schlumberger (SCH), obtenidos a partir del modelo de 4 capas tomado a partir del modelo modificado de Oldenburg y Li de 1994 correspondiente a la posición 640m de la Figura 4-4. ....  | 46 |
| Figura 4-6. Datos aparentes de cargabilidad tomados con el arreglo de SPD para FS (FS-MU) y con el Schlumberger (SCH-MU), obtenidos a partir del modelo de 4 capas tomado a partir del modelo modificado de Oldenburg y Li de 1994 correspondiente a la posición 640m de la Figura 4-4. ....   | 46 |
| Figura 4-7. Datos aparentes por canal por fuente, modelados en EarthImager (2D) a partir del modelo modificado de Oldenburg y Li (1994). L representa a la fuente izquierda y R a la derecha. MC corresponde al canal 1 y CN al canal 2, de acuerdo con la Figura 2-1. Los rectángulos en línea gruesa, representan a los cuerpos del modelo original. ....  | 48 |
| Figura 5-1. Curvas de resistividad del arreglo de SPD para FS (FS-INV) con su respectivo modelo de inversión (FS-MOD) y el modelo de la inversión con arreglo Schlumberger (SCH-INV) con su correspondiente modelo invertido (SCH-MOD). El modelo original de 3 capas corresponde al de la Figura 4-1 (MODELO).....  | 51 |
| Figura 5-2. Curvas de cargabilidad del arreglo de SPD para FS invertido (FS-INV) con su respectivo modelo de inversión (FS-MOD) y el modelo de la inversión con arreglo Schlumberger (SCH-INV) con su correspondiente modelo invertido (SCH-MOD). El modelo original de 3 capas corresponde al de la Figura 4-1 (MODELO).....  | 51 |
| Figura 5-3. Curvas de resistividad aparente (FS-AP) y de resistividad invertida (FS-INV) del arreglo de SPD para FS con el modelo de 3 capas con ruido añadido de 10% de la Figura 4-1 (M. Original).....  | 53 |

|   |    |
|---|----|
| Figura 5-4. Curvas de cargabilidad aparente con ruido (FS-AP) y de cargabilidad invertida (FS-INV) del arreglo de SPD para FS con el modelo de 3 capas con ruido añadido de 10% de la Figura 4-1 (M. Original).....   | 53 |
| Figura 5-5. Curvas de resistividad aparente (SCH-AP) y de resistividad invertida (SCH-INV) del arreglo Schlumberger con el modelo de 3 capas con ruido añadido de 10% de la Figura 4-1 (M. Original) y el modelo de la inversión con arreglo Schlumberger (M. INV). .....   | 54 |
| Figura 5-6. Curvas de cargabilidad aparente (SCH-AP) y de resistividad invertida (SCH-INV) del arreglo Schlumberger con el modelo de 3 capas con ruido añadido de 10% de la Figura 4-1 (M. Original) y el modelo de la inversión con arreglo Schlumberger (M. INV). .....   | 54 |
| Figura 5-7. Curvas de resistividad invertida del arreglo de SDP para FS (FS-INV) y del arreglo Schlumberger (SCH-INV) con sus respectivos modelos de inversión (FS-M. INV y SCH-M. INV) de la Tabla 5 (M. Original). .....  | 56 |
| Figura 5-8. Curvas de cargabilidad invertida del arreglo de SDP para FS (FS-INV) y del arreglo Schlumberger (SCH-INV) con sus respectivos modelos de inversión (FS-M. INV y SCH-M. INV) de la Tabla 5 (M. Original). .....  | 56 |
| Figura 5-9. Secciones de los datos invertidos con EarthImager 2D. L corresponde a la fuente izquierda; R a la fuente derecha; MC al canal 1 y CN al canal 2. Los rectángulos en líneas gruesas color negro, representan a los cuerpos del modelo original. Los rectángulos en color rojo representan la interpretación de las anomalías. ....   | 58 |
| Figura 5-10. Pseudosecciones con datos aparentes de segundas diferencias de potencial (SPD) para las fuentes izquierda (L) y derecha (R), así como para las fuentes enfocadas (FS). Todos estos datos fueron filtrados a profundidad con el método de mínimos cuadrados móviles recursivos. Los rectángulos en líneas gruesas color negro, representan a los cuerpos del modelo original..... | 60 |
| Figura 5-11. Estas pseudosecciones fueron construidas con los datos invertidos con el programa, filtrados en X e Y. Los rectángulos en líneas gruesas color negro, representan a los cuerpos del modelo original.....   | 61 |
| Figura 5-12. Pseudosecciones de resistividad (lado izquierdo) y cargabilidad (lado derecho) construidas con datos invertidos de FS sin filtro en X. Los rectángulos en líneas gruesas color negro, representan a los cuerpos del modelo original. ....  | 62 |
| Figura 5-13. Curvas de resistividad aparente con efectos laterales (SCH-AP) y de sus datos invertidos (SCH-INV) del arreglo Schlumberger con el modelo de la Tabla 2 (M. Original) y el modelo de la inversión con arreglo SPD con FS (M. INV). .....   | 63 |
| Figura 5-14. Curvas de cargabilidad aparente con efectos laterales (SCH-AP) y de sus datos invertidos (SCH-INV) del arreglo Schlumberger con el modelo de la Tabla 2 (M. Original) y el modelo de la inversión con arreglo SPD con FS (M. INV). .....   | 63 |
| Figura 5-15. Curvas de resistividad aparente con efectos laterales (FS-AP) y de sus datos invertidos (FS-INV) del arreglo de SDP para FS con el modelo de la Tabla 2 (M. Original) y el modelo de la inversión con arreglo SPD con FS (M. INV). .....   | 64 |
| Figura 5-16. Curvas cargabilidad aparente con efectos laterales (FS-AP) y de sus datos invertidos (FS-INV) del arreglo de SDP para FS con el modelo de la Tabla 2 (M. Original) y el modelo de la inversión con arreglo SPD con FS (M. INV). .....  | 64 |
| Figura 5-17. Curvas de resistividad aparente de fuentes enfocadas del modelo de la Tabla 5, (Modelo) con efectos laterales de la modelación 2D con EarthImager (FS-CON y SCH-CON) y, sin estos efectos (FS-SIN y SCH-SIN).....  | 65 |
| Figura 5-18. Curvas de cargabilidad aparente de fuentes enfocadas del modelo de la Tabla 5, (Modelo) con efectos laterales de la modelación 2D con EarthImager (FS-CON y SCH-CON) y, sin estos efectos (FS-SIN y SCH-SIN).....  | 65 |
| Figura 5-19. Pseudosecciones construidas con la interpolación de los modelos de las inversiones 1D de los 21 perfiles del modelo de Oldenburg y Li (1994). Al lado izquierdo se   |    |

|              |  |    |
|--------------|--|----|
|              | encuentras las resistividades y al derecho cargabilidades. Los rectángulos en líneas gruesas color negro, representan a los cuerpos del modelo original. Los rectángulos en color rojo representan la interpretación de las anomalías. ....  | 66 |
| Figura 5-20. | Resistividades (izquierda) y cargabilidades (derecha) invertidas con el software EarthImager 2D de datos obtenidos con arreglo Wenner-Schlumberger para el modelo de la Figura 4-4. Los rectángulos en líneas gruesas color negro, representan a los cuerpos del modelo original. .... | 67 |

## Índice de tablas

|  |    |
|--|----|
| Tabla 1. Formato de datos de entrada del programa.....   | 36 |
| Tabla 2. Formato de datos de salida del programa.....  | 38 |
| Tabla 3. Formato de datos de salida del programa.....  | 39 |
| Tabla 4. Modelo de 3 capas.....  | 42 |
| Tabla 5. Modelo del perfil en $x=640\text{m}$ .....  | 45 |
| Tabla 6. Resultados de los modelos de 3 capas sin ruido aleatorio.....   | 50 |
| Tabla 7. Resultados de los modelos de 3 capas con ruido aleatorio de 10%.....  | 52 |
| Tabla 8. Resultados de modelos de inversión 1D con arreglos Schlumberger y SPD para FS del modelo de 4 capas, a partir de los datos de un perfil (posición 640 m) del modelo modificado de Oldenburg y Li (1994), sin efectos laterales..... | 55 |
| Tabla 9. Resultados de modelos de inversión 1D con el arreglo de SPD para FS del modelo de 4 capas, a partir de los datos de un perfil (640m) del modelo modificado de Oldenburg y Li (1994), con efectos laterales.....                     | 62 |

## Resumen

Se propone la inversión de datos de resistividad y de polarización inducida PI obtenidos de las segundas diferencias del potencial (SPD) empleando dos fuentes colineales superpuestas enfocadas (FS). El esquema de inversión elegido para este programa, es el de cristalización simulada rápida (FSA), ya que al no requerir de la inversa de una matriz, puede incluir valores de cargabilidad aparentes negativos, valores pequeños de las diferencias y un rango amplio de los parámetros, sin necesidad de que el modelo inicial sea el más cercano a la solución, como en el caso de mínimos cuadrados. El modelo de cargabilidad empleado corresponde al del dominio del tiempo. Adicionalmente, se implementó una subrutina basada en mínimos cuadrados para suavizar los datos tanto de entrada como en cada iteración. Los datos que alimentan al programa, provienen de la superposición modificada de dos fuentes eléctricas, con las SPD que son obtenidas de datos contiguos de arreglos dipolo-dipolo. Cada dato es producido por fuentes equidistantes al punto de atribución. Los datos 1D sintéticos que se probaron, de 3 y 4 capas mostraron tanto visual como cuantitativamente, una mejoría sustancial para la interpretación en comparación con el arreglo Schlumberger convencional (con una fuente). Por otro lado, se generó una pseudo-sección con datos invertidos 1D, cuyos resultados mostraron problemas por variaciones laterales, lo cual establece el precedente de la necesidad de implementar un programa de inversión 2D para los datos de SPD para FS. Tanto la adquisición como la inversión de datos de fuentes enfocadas (que se sustenta en la linealidad de los campos eléctricos), empleando segundas diferencias del potencial (que realzan los cambios de las curvas), son una aproximación a un futuro no muy lejano para la prospección eléctrica, en el que probablemente se podrá contar con equipo multifuentes con los ya existentes multi- canales, para cualquier objetivo de exploración, profundo o somero: petróleo, minería, contaminación, geotecnia, geohidrología y arqueología.

## Abstract

The inversion of resistivity and Induced Polarization (PI) data obtained from the second potential differences (SPD) using two superimposed focused collinear sources (FS) is proposed in this thesis. The inversion scheme chosen for this program is the Fast Simulating Annealing (FSA), since by not requiring the inverse of a matrix, it can include negative apparent chargeability values, small values of the differences and a wide range of parameters, without the need for the initial model to be the closest to the solution, as in the case of least squares. The chargeability model used corresponds to the time domain. Additionally, a subroutine based on least squares was implemented to smooth the data both in input data and each iteration. The data that feed the program comes from the modified superposition of two electrical sources, with the SPD that are obtained from contiguous data of dipole-dipole arrays. Each data is produced by sources equidistant from the point of attribution. The synthetic 1D data that were tested with 3 and 4 layers, showed both visually and quantitatively, a substantial improvement for the interpretation compared to the conventional Schlumberger arrangement (with one source). On the other hand, a pseudo-section was built with 1D inversion data, whose results showed lateral variations problems, which establishes the precedent of the need to implement a 2D inversion program for SPD data using FS. Both the acquisition and inversion of data from focused sources (based on the linearity of electric fields), using second potential differences (which enhance the changes in the curves), are a further approximation in electric prospecting not too distant from today, in which it will probably be possible to have multi-source equipment with the already existing multi-channels, for any exploration objective, deep or shallow: oil, mining, pollution, geotechnics, geohydrology and archeology.

# CAPÍTULO

# 1 ● INTRODUCCIÓN

## 1.1 Generalidades

En la última década, los avances en la adquisición, procesamiento e interpretación de los métodos electromagnéticos han ido incrementándose específicamente en los métodos de corriente directa (DC) para datos de cargabilidad de Polarización Inducida (PI). La aplicación del método ha estado presente desde sus orígenes en la exploración de hidrocarburos en 1934 (Seigel *et al.*, 2007) y en años recientes, ha sido ampliado su uso, por ejemplo para la identificación de arcillas y turbas, discriminación litológica y localización y caracterización de suelos contaminados, así como mantos acuíferos (Sogade *et al.* 2006; Vacquier *et al.* 1957; Vanhala *et al.* 1992, Weller y Börner 1996; Slater and Sandberger 2000; Slater y Lesmes 2002; Abdel *et al.* 2006; Sirhan y Hamidi 2003); por lo que el método de PI ha sido una herramienta importante para la exploración minera y ambiental, ya que apoya y aporta información clave en la interpretación de datos en DC.

Tradicionalmente en el dominio del tiempo, se ha interpretado la cargabilidad global normalizada, esto es, la integración de la curva de decaimiento del potencial en todo el intervalo de tiempo de muestreo. Sin embargo, se ha demostrado matemáticamente que la cargabilidad puede resaltar mejor los efectos de algunos contaminantes en ciertas ventanas de tiempo (para el caso ambiental), o en frecuencias mediante la transformada de Fourier (Vanhala *et al.* 1992). Pero para ello, antes bien se tienen que filtrar las curvas del decaimiento del potencial, ya que son perturbadas fácilmente por diferentes fuentes de ruido.

Por otro lado, los problemas en la calidad de los datos en DC están principalmente relacionados con la geometría de los electrodos (Gazoty *et al.* 2013), potencial espontáneo (SP), el acoplamiento inductivo electromagnético (EM), la forma de onda del transmisor (Fiandaca *et al.*, 2012), los materiales de los electrodos (LaBrecque y Daily, 2008) y la inducción entre los canales de medición simultánea (Dahlin y Leroux 2012), así como por efectos de formaciones laterales (Davydycheva *et al.*, 2006; Flores *et al.*, 2012; LaBrecque y Daily, 2008).

Sin embargo, esos problemas en su mayoría han sido resueltos con la automatización instrumental que optimiza la relación señal ruido (Seigel *et al.*, 2007); el uso de filtros especiales (Hallof, 1974; Hallof y Pelton, 1980), procesamiento del potencial obtenido en el campo con equipo multicanal (Fiandaca *et al.* 2012; LaBrecque *et al.* 2007), y con la determinación del error

en función de las resistencias, obtenidas con medidas normales y recíprocas que permiten cuantificar el error de la fase (Flores *et al.*, 2012). A su vez, se han hecho propuestas para la cuantificación del error de las curvas de decaimiento en el dominio del tiempo (Flores *et al.*, 2018), considerando las características generales del decaimiento y la consistencia espacial de las mediciones, para cuantificar la desviación de las curvas respecto a un modelo suavizado y con ello se estima el error aleatorio.

En todo lo mencionado hasta aquí, se supone que la adquisición de los datos de resistividad como de cargabilidad se han realizado comúnmente con arreglos tradicionales con una fuente: Dipolo-Dipolo, Polo-Dipolo, Polo-Polo, Wenner, Schlumberger y Wenner Schlumberger, los cuales tienen sus ventajas y desventajas dependiendo del tamaño y profundidad del objetivo en relación con el tamaño de la distancia eléctrica, condiciones del subsuelo y técnicas de lecturas automatizadas (por ejemplo, el equipo de medición Syscal Pro Standard and Switch - Iris Instruments, 2005- puede leer hasta 10 canales de lectura simultáneamente).

Todo indica que el futuro de la geofísica, al menos en métodos electromagnéticos en corriente continua, está en la adquisición de datos con equipos multi-fuente y con lecturas multi-canal, lo cual implica una mayor cantidad de datos y recursos computacionales para procesar e invertir volúmenes de información de grandes magnitudes.

## 1.2 Antecedentes

De acuerdo con Davydycheva *et al.* (2006, 2011) y con Davydycheva y Rykhliniski (2011), se puede mejorar considerablemente la calidad de la información mediante el uso de una fuente adicional, basándose a su vez en la teoría y funcionamiento de las herramientas Laterolog, las cuales enfocan la corriente para disminuir los efectos del lodo de perforación. Esto fue aplicado para exploración de hidrocarburos en Rusia.

El empleo de fuentes enfocadas ha sido publicado además, para la detección de túneles con radar de penetración terrestre (GPR, por sus siglas en inglés) por Davydycheva y Frenkel (2012) y Frenkel y Davydycheva (2010) en donde se ha demostrado lo factible del método para llegar a una profundidad de penetración suficiente así como la sensibilidad para detectar túneles de hasta 2x2 m, sabiendo que resultaría casi imposible para GPR en medios con subsuelos de 20  $\Omega$ m.

Sin embargo, los programas actuales de inversión comercial y libre (demos) de exploración somera, sólo consideran una fuente (Advanced Geosciences Inc., 2009; Geotomo Software, 2010) lo cual, de acuerdo con las últimas técnicas de adquisición, parece no ser suficiente para la obtención de mejores resultados en la interpretación cuantitativa.

En el uso de dos fuentes, Davydycheva *et al.* (2006, 2011) han propuesto un parámetro denominado *cargabilidad instantánea*, el cual puede ser expresado como la suma de dos fuentes (A y B), como sigue

$$\mu(t) = \sum_{AB} \frac{\Delta^2 V(t)}{\Delta V(t)} \quad (1)$$

Donde  $\mu$  es la cargabilidad instantánea,  $V$  es el potencial en términos del tiempo,  $\Delta$  representa la primera diferencia de potencial y  $\Delta^2$  significa la segunda diferencia del potencial. Esta metodología es capaz de disminuir los errores debidos a formaciones laterales adyacentes y heterogeneidades superficiales que pueden enmascarar cuerpos profundos (Davydycheva *et al.*, 2006).

### 1.3 Trabajos previos

Dado el entorno descrito anteriormente, se elaboró una tesis de maestría (López-González, 2014) con la propuesta de dos nuevos parámetros para ser investigados, basados en la metodología reportada por Davydycheva *et al.* (2006). Estos parámetros son la resistividad  $\rho_a^{(SPD)}$  y cargabilidad  $\mu_a^{(SPD)}$  de segundas diferencias de potencial (SPD), con los cuales se supone que actúan dos fuentes simultáneamente, manejando los parámetros por superposición. Estos parámetros, aun siendo aparentes, probaron encontrar anomalías asociadas a zonas de alto contenido mineral, correlacionadas con datos de muestreo de suelos, en una zona de cultivo (López-González *et al.*, 2019).

Dados los resultados favorables de los parámetros  $\rho_a^{(SPD)}$  y  $\mu_a^{(SPD)}$ , el trabajo presente pretende dar continuación a la línea de investigación en multi-fuentes bajo régimen estacionario, siendo el programa de inversión 1D la meta inmediata, ya que no existe software comercial ni libre que lo lleve a cabo.

### 1.4 Sobre el contenido de esta tesis

En el capítulo 2, se establecen los principios teóricos correspondientes a la teoría electromagnética, desde las ecuaciones de Maxwell para medios dispersivos/polarizables, las definiciones de resistividad y cargabilidad obtenidas con una fuente y una diferencia de potencial simple, hasta llegar a las definiciones de resistividad y cargabilidad de segundas diferencias para fuentes enfocadas. En todas las suposiciones, se establece como condición, que el medio se comporta como un semiespacio homogéneo e isótropo; este es el medio con el cual pueden definirse anomalías. Por otro lado, debido a que se modelan e invierten datos de polarización inducida (PI), se establecen algunos conceptos importantes para la interpretación

de cargabilidades aparentes, como los efectos negativos que tienen sobre éstas los cortes geoelectrónicos tipos K o Q, o la distribución de resistividades en medios no-homogéneos y/o los acoplamientos inductivos o capacitivos. Adicionalmente, el segundo capítulo presenta la teoría para filtrar los datos, ya que, al obtener segundas diferencias de potencial, es posible encontrarnos con ruidos numéricos que requieran ser suavizados, para lo cual, en este trabajo, se propone el empleo de un filtro de suavizamiento polinomial de 5 puntos cuyos coeficientes son determinados por mínimos cuadrados. Por último, se establecen los fundamentos teóricos del modelo de inversión empleado para el programa, que es el tema principal de esta tesis. En este sentido, el modelo de inversión establecido es el de cristalización simulada rápida (FSA por sus siglas en inglés).

El tercer capítulo, contiene la metodología y las características del programa de inversión, desde los datos de entrada hasta las características de los datos de salida. Se explican las subrutinas, funciones y módulos creados, los cuales se encuentran en detalle en un anexo.

El capítulo cuarto muestra los modelos teóricos propuestos para la experimentación del programa de modelación directa, que posteriormente fueron invertidos con el programa de inversión 1D. Sus resultados se presentan en el capítulo 5, así como su discusión.

El capítulo final, el número 6, contiene las conclusiones y sus respectivas recomendaciones. En esta sección, se establece el precedente para implementar en lo futuro un programa de inversión 2D y 3D con un sistema multi-fuente, al menos para dos fuentes actuando simultáneamente por superposición.

Tal vez en poco tiempo, pueda existir el equipo de medición en donde se apliquen en la realidad las dos o n-fuentes simultáneamente, para métodos geofísicos de exploración geoelectrónica. O al menos, se puede decir que el futuro de los métodos electromagnéticos está en los datos medidos con equipos multi-fuentes y multi-canales.

## **1.5 Hipótesis**

La inversión 1D de datos de resistividad y cargabilidad de segundas diferencias de potencial para fuentes enfocadas con el método de cristalización simulada rápida, encontrará con mayor precisión el modelo de capas, que con un arreglo convencional de una fuente.

## 1.6 Objetivos

### 1.6.1 Objetivo general

Crear un programa de inversión 1D para interpretar cuantitativamente datos de resistividad y cargabilidad de segundas diferencias potencial para arreglos de dos fuentes enfocadas con el método de cristalización simulada.

### 1.6.2 Objetivos particulares

- a) Crear modelos teóricos de resistividades y cargabilidades de segundas diferencias de potencial con fuentes enfocadas para medios homogéneos e isótropos.
- b) Emplear un algoritmo para el suavizamiento de los datos del inciso a).
- c) Invertir los datos de resistividad y cargabilidad del inciso b), con el método de cristalización simulada rápida.
- d) Probar el programa de inversión 1D con datos provenientes de un modelo teórico 2D, e interpretar con pseudosecciones.

# CAPÍTULO

## 2.

## MARCO TEÓRICO

El núcleo de la teoría de la prospección eléctrica, como parte de los fenómenos electromagnéticos, se basa en las ecuaciones de Maxwell bajo las consideraciones de campo estacionario. Sin embargo, estas ecuaciones no incluyen en la teoría clásica, al parámetro de la polarización inducida (PI) llamado *cargabilidad*, por lo que se han introducido términos como teoría *geo-electromagnética/geo-eléctrica no clásica* (Kamenetsky, 2011). Lo interesante de la PI es que aunque no está completamente entendido el fenómeno, la cargabilidad sigue dando de qué hablar en la literatura, y el aporte de este parámetro ha sido casi indispensable para apoyar y mejorar la interpretación en la prospección geoelectrónica.

### 2.1 Ecuaciones de Maxwell para medios dispersivos

Usualmente se obtiene la definición de resistividad a partir de las ecuaciones de Maxwell en consideración de estado estacionario. En el caso de la cargabilidad, parámetro relacionado a las características dieléctricas del medio, no se encuentra de la misma manera; aun cuando existe una relación entre estos dos parámetros, debido a lo complejo que puede ser el fenómeno de polarización inducida.

El fenómeno de PI se ha descrito de dos maneras, de acuerdo a las características de los materiales que componen el medio: polarización electrónica y de membrana, donde la primera se presenta comúnmente en investigaciones para la exploración minera, y la segunda se observa más en problemas de contaminación (Sogade *et al.*, 2006).

Independientemente de los materiales que generan la respuesta de PI, hasta la fecha no se ha podido llegar a una comprensión completa del fenómeno. Sin embargo, el primero en proponer un modelo fue Seigel (1959) en el dominio del tiempo, a partir del cual muchos investigadores han basado sus trabajos e incluso, se desarrollaron programas de modelación e inversión de uso comercial.

En el modelo espectral, se propone que el fenómeno de PI no sólo es generado por la conductividad del medio sino también por los parámetros  $\epsilon$  y  $\tau$ , la primera relacionada con la homogeneidad del medio y la segunda con el tamaño de grano/poro. Este modelo está basado

en la teoría de circuitos eléctricos donde se considera al subsuelo como un sistema capacitivo (Pelton *et al.*, 1978).

Por otro lado, en el dominio de la frecuencia, Wong (1979) define el fenómeno de PI como la *dispersión en bajas frecuencias* de la conductividad o resistividad entre los materiales de la tierra y los fluidos que se encuentran en contacto, es decir hay necesidad de considerar el estudio del campo electromagnético (EM) en medios dispersivos.

En otras palabras, la PI se encuentra en la frontera entre las condiciones de la prospección eléctrica y la electromagnética. Por ello, es necesario establecer las condiciones pertinentes para describir matemáticamente el fenómeno, como se verá a continuación.

Primero se debe considerar que el medio que se quiere prospectar, al cual se aplicará una corriente eléctrica, es un semiespacio homogéneo. Se ha considerado que las rocas son macro-homogéneas, dado que son un medio natural compuesto de micro-heterogeneidades. Estas rocas pueden ser caracterizadas, usando campos EM sobre un volumen pequeño, con los parámetros EM del medio:  $\epsilon$  (permitividad eléctrica),  $\mu$  (permeabilidad magnética) y  $\sigma$  (conductividad eléctrica), según Kamenetsky (2011). Experimentalmente y teóricamente se ha evidenciado la dispersión de sus parámetros.

La corriente en encendido está definida como  $\mathbf{I}(t) = I \cdot \mathbf{u}(t)$  y en apagado  $\mathbf{I}(t) = I \cdot [1 - \mathbf{u}(t)]$ , donde  $\mathbf{u}(t)$  es la función de Heaviside (también conocida como función escalón):

$$\mathbf{u}(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } t < 0 \\ 1, & \text{para } t > 0 \end{cases} \quad (2)$$

Kamenetsky (2011), escribe las ecuaciones de Maxwell para medios dispersivos/polarizables considerando que no hay cargas libres de la siguiente manera:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}(t)}{\partial t} \quad (3.a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma * \mathbf{E} + \frac{\partial(\epsilon * \mathbf{E})}{\partial t} \quad (3.b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (3.c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.d)$$

Donde  $\mathbf{E}$  es el vector del campo eléctrico en;  $\mathbf{H}$  es el vector del campo magnético;  $\mathbf{D}$  es el vector de inducción eléctrica  $\mathbf{B}$  es el vector de inducción magnética y  $\mathbf{D}$  es el vector de desplazamiento eléctrico;  $\mu$  es la permeabilidad magnética,  $\sigma$  la conductividad eléctrica y  $\epsilon$  la permitividad dieléctrica. Estos campos están relacionados con las propiedades de los materiales mediante las siguientes ecuaciones, también llamadas constitutivas:

$$\mathbf{j}_c = \sigma * \mathbf{E} \quad (4.a)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon * \mathbf{E} \quad (4.b)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (4.c)$$

Aquí viene el cómo se introduce a la polarización en las ecuaciones de Maxwell. De acuerdo con Kamenetsky (2011), Kormiltsev (1989) fue el primero en incluir la PI en las ecuaciones de la electrodinámica. Para ello, se necesita emplear la integral de Duhamel, expresada con el símbolo \*:

$$f * F = \frac{d}{dt} \int_0^t f(\lambda) \cdot F(t - \lambda) d\lambda \quad (5)$$

Otras relaciones útiles, basadas en la integral de Duhamel, que servirán para esbozar una teoría electromagnética del fenómeno de PI son:

$$f * F = f(0)F(t) + \int_0^t \frac{\partial f(\lambda)}{\partial \lambda} F(t - \lambda) d\lambda \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (f * F) = f(0) \frac{\partial F(t)}{\partial t} + \left. \frac{\partial f(t)}{\partial t} \right|_{t=0} F(t) + \int_0^t \frac{\partial^2 f(\lambda)}{\partial \lambda^2} F(t - \lambda) d\lambda \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (F * f) = f * \frac{\partial F}{\partial t} \quad (8)$$

Donde  $F$  y  $f$  son las componentes del campo y los parámetros del medio, respectivamente. En condiciones iniciales  $F(0) = \mathbf{0}$ , la integral se reduce a:

De la ecuación 3.b, se define que las corrientes totales están constituidas por las corrientes de conducción y las corrientes de desplazamiento eléctrico. Para analizar la contribución de cada una en el fenómeno de PI es conveniente analizarlas por separado.

### Corrientes de conducción

De la ecuación (4.a) y (6), se tiene:

$$\mathbf{J} = \sigma * \mathbf{E} = \sigma(0)\mathbf{E}(t) + \int_0^t \frac{\partial \sigma(\lambda)}{\partial \lambda} \mathbf{E}(t - \lambda) d\lambda \quad (9)$$

Donde  $\sigma(0)$  representa a la conductividad verdadera del medio.

Se observa entonces que las corrientes de conducción en medios dispersivos contienen una contribución adicional por parte de la derivada temporal de la conductividad. Si se considera que este cambio de la conductividad en el tiempo es suficientemente lento y se desprecia este aporte, entonces, las corrientes de conducción se expresan como:

$$\mathbf{J}_c = \sigma(0)\mathbf{E} \quad (10)$$

### Corrientes de desplazamiento eléctrico

En medios dispersivos existen corrientes de desplazamiento adicionales, proporcionales a la primera y segunda derivadas de la permitividad, que se pueden observar en la ecuación (3.b) y (7), se obtiene:

$$J_d(t) = \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon * E) = \varepsilon(0) \frac{\partial E(t)}{\partial t} + \left. \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial t} \right|_{t=0} E(t) + \int_0^t \frac{\partial^2 \varepsilon(\lambda)}{\partial \lambda^2} E(t - \lambda) d\lambda \quad (11)$$

Suponiendo que la permitividad cambia lo suficientemente lento para despreciar el último término de la ecuación anterior (11), entonces:

$$J_d(t) = \varepsilon(0) \frac{\partial E(t)}{\partial t} + \left. \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial t} \right|_{t=0} E(t) \quad (12)$$

El primer término de la ecuación 12 representa a las corrientes de desplazamiento comunes, con valor constante  $\varepsilon(0)$  y el segundo término es la contribución a las corrientes de desplazamiento eléctrico debido a un cambio temporal en la permitividad eléctrica.

Considerando un campo eléctrico que varía como una función escalón:

$$J_d(\infty) = \varepsilon(0)E\delta(t) + \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial t} Eu(t) = \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial t} E \quad \text{para } t > 0 \quad (13)$$

Se puede observar que las corrientes de desplazamiento normales son proporcionales a  $\varepsilon(0)$ , las cuales no existen en  $t > 0$ . Al usar corrientes eléctricas tipo función escalón, las corrientes de desplazamiento ( $\varepsilon(0)E\delta(t)$ ) tampoco existen en tiempos mayores a 1  $\mu$ s.

Las corrientes totales para medios dispersivos bajo las condiciones consideradas, se expresan entonces como:

$$J_t(t) = \left( \sigma(t) + \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial t} \right) Eu(t) \quad (14)$$

En la ecuación (14) es imposible separar las contribuciones de cada tipo de corrientes, por lo que es conveniente definir dicha ecuación como sólo corrientes de conducción, lo cual conlleva a definir una función de conductividad como:

$$\sigma(t) = \sigma(0) + \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial t} \quad (15)$$

$$J_c(t) = \sigma(t)Eu(t) \quad (16)$$

Por tanto, los parámetros  $\sigma$  y  $\varepsilon$  no son considerados independientes del tiempo en medios dispersivos. Lo descrito anteriormente explica que al haber inhomogeneidades en la distribución de las características electromagnéticas del medio, existe variación temporal de los parámetros eléctricos del mismo, la cual no se puede medir directamente, sólo se miden los efectos totales sobre el campo a través de la diferencia del potencial.

Si se sabe que la polarización del medio está definida por la dispersión en bajas frecuencias (Wong, 1979), entonces proviene de las características intrínsecas del medio como la conductividad  $\sigma(t)$  (o su inverso, resistividad) y de los cambios temporales de la permitividad dieléctrica  $\frac{\partial \epsilon(t)}{\partial t}$ . Con ello, se describe físicamente a la resistividad y al origen de la cargabilidad, a partir de las ecuaciones de Maxwell.

## 2.2 Definición de cargabilidad y resistividad

Hasta aquí, se ha descrito el comportamiento eléctrico en medios dispersivos durante el tiempo de carga. Sin embargo, en la práctica, el fenómeno de PI se observa en el tiempo de descarga, esto es, después del corte de la corriente.

Como se ha mencionado previamente, el término de cargabilidad ( $m$ ) fue introducido por Seigel (1959) para la modalidad en el dominio del tiempo, para el cual propone que la cargabilidad reduce la conductividad verdadera del medio como se muestra en la ecuación 17

$$\sigma_t = \sigma(0)(1 - m) \quad (17)$$

Donde se supone que la conductividad del medio  $\sigma(0)$  permanece constante; es decir, que con respecto a la conductividad, el medio se considera disipativo.

Seigel es quien propone obtener la cargabilidad midiendo el voltaje después del corte ( $\varphi_0$ ), mientras que la resistividad o conductividad, se mide durante el envío de corriente al medio ( $\varphi_{DC}$ ), de modo tal que:

$$\varphi_0 = \frac{I}{\sigma(0)} K \quad \text{y} \quad \varphi_{DC} = \frac{I}{\sigma(0)(1-m)} K \quad (18)$$

Donde  $K$  es el factor geométrico que depende del arreglo electródico empleado;  $I$  es la corriente.

Con lo anterior, se puede calcular la cargabilidad como:

$$M = \frac{\varphi_{DC} - \varphi_0}{\varphi_{DC}} = \frac{1 - (1-m)}{1} = m \quad (19)$$

La expresión (19) indica que la cargabilidad intrínseca del medio es el parámetro  $m$ . Si el medio no es homogéneo e isótropo, la cargabilidad será la aparente ( $m_a$ ).

Tanto el modelo electrodinámico como el estacionario son equivalentes en el fondo, al considerar que la corriente total está formada por las corrientes de conducción y las corrientes generadas al polarizarse el medio. Si consideramos que con respecto a la conductividad el

factor  $\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\varepsilon(t)}{\sigma(0)} \right)$  permanece inalterado, dicho factor es equivalente o parecido al parámetro para determinar el balance de corrientes de desplazamiento eléctrico entre las corrientes de conducción. Entonces, se puede escribir:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\varepsilon(t)}{\sigma(0)} \right) = -m(t) \quad (20)$$

Con las ecuaciones (14), (15), (17) y (20), la conductividad se puede escribir como:

$$\sigma(t) = \sigma(0) \left[ 1 + \frac{\frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial t}}{\sigma(0)} \right] = \sigma(0)(1 - m(t)) \quad (21)$$

De modo, que la conductividad en estado estacionario se define como:

$$\sigma_{DC} = \sigma(0)(1 - m(t)|_{t=\infty}) \quad (22)$$

Donde  $m(t)|_{t=\infty}$  es la cargabilidad evaluada habiendo establecido el estado estacionario, y se determina con la ecuación (19).

Otros autores como Slater y Lesmes (2002), Sogade *et al.* (2006) definen dicho parámetro normalizado por el tiempo, como se muestra en la ecuación 20:

$$m(t) = \frac{\int_{T_1}^{T_2} e(t) dt}{\int_{T_1}^{T_2} E(0) dt} = \frac{\int_{T_1}^{T_2} \frac{dV(t)}{dx} dt}{\int_{T_1}^{T_2} \frac{dV(0)}{dx} dt} \cong \frac{\int_{T_1}^{T_2} \Delta V(t) dt}{\int_{T_1}^{T_2} \Delta V(0) dt} = \frac{\int_{T_1}^{T_2} \Delta V(t) dt}{\Delta T \Delta V(0)} \quad (23)$$

Considerando que  $e(t)$  es el campo eléctrico después del corte,  $E(0)$  es el campo eléctrico estacionario,  $\Delta V(t)$  (mV) es la diferencia del potencial después del corte de la corriente,  $\Delta V(0)$  es la diferencia del potencial observado antes del corte y  $\Delta t = T_2 - T_1$  es la duración de la ventana de tiempo.

La cargabilidad  $m(t)$  para un semiespacio homogéneo e isótropo, no se ve alterada si los potenciales en la ecuación (23) se normalizan por la corriente  $I$  (A), es decir (López-González, 2014):

$$m(t) = \frac{\int_{T_1}^{T_2} \overline{\Delta V(t)} dt}{\Delta T \overline{\Delta V(0)}} \quad (24)$$

Donde  $\overline{\Delta V(t)} = \Delta V(t)/I$  y  $\overline{\Delta V(0)} = \Delta V(0)/I$

La resistividad ( $\rho$ ) del semiespacio homogéneo e isótropo, entonces, se puede definir como:

$$\rho = \overline{\Delta V(0)} K \quad (25)$$

Si el semiespacio no es homogéneo e isotrópico, las ecuaciones (24) y (25) definen la cargabilidad aparente ( $m_a$ ) y la resistividad aparente ( $\rho_a$ ), respectivamente.

### 2.2.1 Valores aparentes negativos de PI

Para obtener y/o modelar datos de cargabilidad, es necesario hablar de lo que puede ocurrir cuando se tienen ciertas configuraciones en la distribución de las resistividades del medio. Esta información será útil para invertir los datos aparentes de resistividad y cargabilidad de segundas diferencias del potencial, ya que se supondrá un medio 1D.

De acuerdo con Nabighian y Elliot (1976), es posible encontrar valores negativos en curvas de cargabilidad aparente, las cuales ocurren en cambios laterales de resistividad como en diques, cuerpos tridimensionales, etcétera. También ocurren en secuencias de  $m$  capas en configuraciones de resistividad tipo  $K$  ( $\rho_1 < \rho_2 > \rho_3$ ) o  $Q$  ( $\rho_1 > \rho_2 > \rho_3$ ), de manera que las capas superiores sean polarizables. Las tipo  $K$  crearán respuestas negativas más pronunciadas que las tipo  $Q$ . En los casos de arreglos dipolo-dipolo, con separaciones  $n=0.5$  a 6, la contribución o el efecto de la primera capa polarizable afectará a las demás mediciones de polarización y enmascarará o cancelará parcialmente la respuesta IP de las capas subyacentes.

Desde un punto de vista más reciente, en términos de la función de sensibilidad la cual procede de la Derivada de Fréchet (McGillivray y Oldenburg, 1990), existe otra manera generalizada de explicar cargabilidades negativas aparentes “si las zonas polarizables se encuentran principalmente localizadas en zonas de sensibilidad negativa (en imágenes de sensibilidad), y existe cargabilidad baja o nula en la zona de sensibilidad positiva, se obtendrán cargabilidades aparentes negativas” (Dahlin y Loke, 2015). Los casos en los que ocurren datos negativos aparentes en PI, generalmente se producen cuando se tiene una capa polarizable somera.

Cabe hacer notar, que “la derivada de Frechet es independiente de la resistividad para un medio homogéneo. Sin embargo, es dependiente de la distribución de resistividad para un medio no-homogéneo” (Dahlin y Loke, 2015).

Existen otras dos causas que generan datos negativos de cargabilidad (Dahlin y Loke, 2015): el acoplamiento inductivo y el capacitivo. El primero ocurre en los primeros tiempos de decaimiento, y la manera de minimizarlo o eliminarlo no está muy claro, debido a que no se ha podido determinar con precisión los límites por ser complicada la modelación. El capacitivo se da en la práctica, en casos con resistencia de contacto alta (por ejemplo, aquella dada en suelos y rocas porosas), y puede reducirse este problema con cables conectados a fuente por un lado y de medición por separado.

### 2.3 Fuentes enfocadas (FS)

Como se describió en la introducción, el empleo de fuentes enfocadas en métodos electromagnéticos fue propuesto originalmente por Davydycheva *et al.* (2006), en donde muestra que al actuar dos fuentes simultáneas colineales se puede enfocar la corriente verticalmente hacia abajo, de manera que se disminuyen los efectos de ruido ocasionados por la polarización del electrodo, la resistencia de contacto, efecto de las formaciones adyacentes laterales, acoplamiento de la respuesta de PI con efectos EM de las formaciones y a las heterogeneidades superficiales que enmascaran la respuesta de cuerpos profundos (sustrayendo datos tomados en 2 frecuencias diferentes).

La ecuación (26) muestra una de las expresiones que proponen (Davydycheva *et al.*, 2006), la cual está basada en las ventajas de las segundas diferencias del potencial. Sin embargo, al ser el denominador la primera diferencia de potencial, el cual no está procesado para disminuir el ruido en la señal, aún contiene errores producidos por ruido de diferentes fuentes.

$$\sum_{AB} \frac{\Delta V^2(t)}{\Delta V(t)} \quad (26)$$

Dadas las ventajas del uso de las segundas diferencias del potencial de los trabajos de Davydycheva *et al.* (2006), en el trabajo de maestría (López-González, 2014) se propuso una metodología para definir nuevos parámetros de PI y resistividad, basados en las segundas diferencias del potencial para ser aplicados a cualquier problema de exploración, somero o profundo y tratar de reducir aún más los ruidos en los datos, especialmente aquellos denominados sistemáticos.

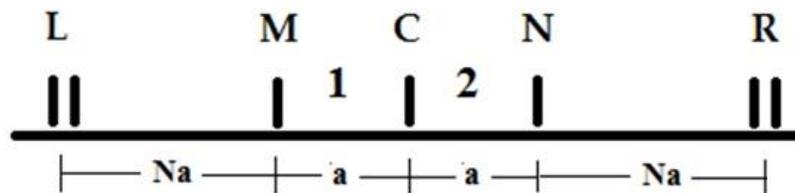


Figura 2-1. Esquema de los electrodos para la toma de datos. L=fuente izquierda. R=fuente derecha. Ambas fuentes son equidistantes respecto al electrodo C y están conformadas por electrodos de corriente dipolares. M, C y N son los electrodos de potencial y tienen las mismas coordenadas tanto para la fuente izquierda como para la fuente derecha. Los números 1 y 2 representan los canales de lectura del potencial entre los electrodos M-C y C-N, respectivamente. Estos canales son medidos simultáneamente en equipos automatizados. La distancia entre los electrodos de potencial es “a”. N es el nivel de la lectura.

La adquisición de los datos que se pueden invertir con el programa de esta tesis, deben estar distribuidos en perfil (1D, parecido a un sondeo eléctrico vertical) que provengan de arreglos dipolo-dipolo, de modo tal que cada dato que se invierte, procede de 4 datos:

- 2 datos tomados de manera contigua (con los canales 1 y 2 de la Figura 2-1) con los electrodos de corriente A y B del lado izquierdo (L) del electrodo M, y
- 2 datos tomados de manera contigua con la misma posición que los 2 datos anteriores, pero con la fuente A y B del lado derecho (R) del electrodo N.

Con el par de datos de cada fuente, se calculan las segundas diferencias de potencial por fuente. Después, se superponen estas segundas diferencia para obtener los parámetros de fuentes enfocadas. Las expresiones matemáticas se muestran en los subcapítulos siguientes.

Para visualizar lo que ocurriría al usar fuentes enfocadas, se muestran a continuación las Figuras 2-2 y 2-3, que se crearon empleando el software libre de GeoSci Developers (2015-2018). La primera tiene el propósito de mostrar el comportamiento de una esfera resistiva en un semiespacio, de modo que la esfera polariza las cargas sobre su superficie, de acuerdo con el paso de corriente.

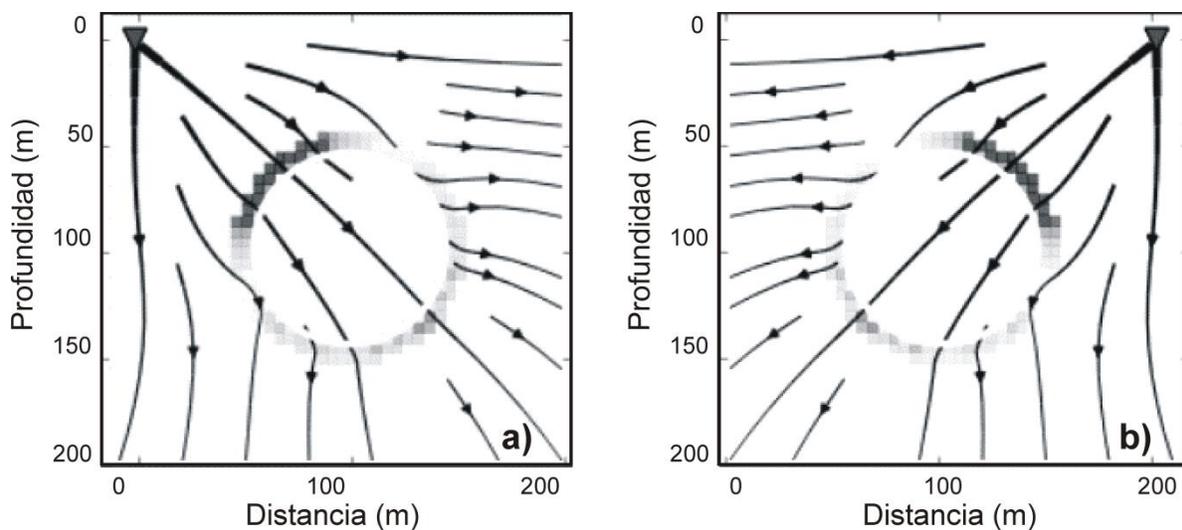


Figura 2-2. Comportamiento del flujo de corriente eléctrica en un semiespacio con una esfera resistiva, con la fuente de lado izquierdo (a) y derecho (b), respectivamente.

Bajo la suposición de la superposición de fuentes (de la Figura 2-1), se muestra la Figura 2-3, que se creó empalmando las dos imágenes de la figura anterior. Con ello se presenta un esquema de visualización, sobre lo que pasaría con las cargas alrededor del cuerpo al emplear dos fuentes simultáneas. El efecto de usar 2 (o n-fuentes), se puede traducir como si estuviéramos iluminando a los cuerpos desde diferentes direcciones para poder “verlos”.

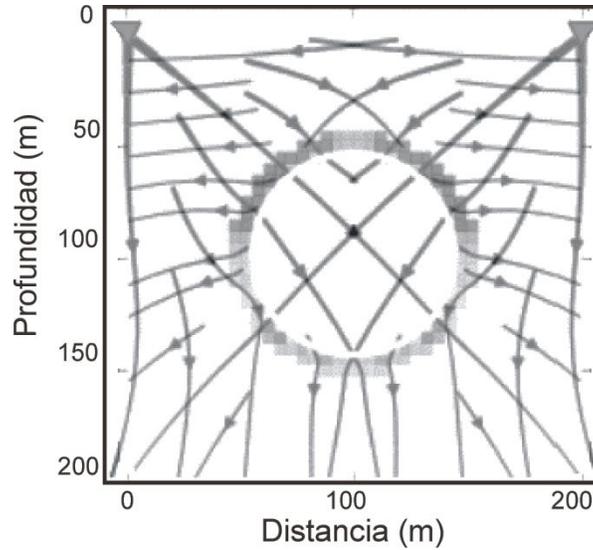


Figura 2-3. Comportamiento del flujo de corriente eléctrica en un semiespacio con una esfera resistiva superponiendo la fuente izquierda y derecha.

Establecido el fundamento físico de fuentes enfocadas, se muestra brevemente a continuación el desarrollo de las expresiones generales de la resistividad y cargabilidad aparentes para arreglos enfocados, que fueron empleadas para obtener los datos que requiere el programa de inversión 1D.

### 2.3.1 Resistividad aparente de segundas diferencias y para fuentes enfocadas

Considerando que en el semiespacio homogéneo e isótropo existe un campo eléctrico producido por una fuente, (Figura 2-1, fuente izquierda), el campo eléctrico asociado sería  $\mathbf{E}(\vec{r})$ , del cual se considerará la componente en  $X$  ( $E(\vec{r})$ ). Al obtener su derivada en la dirección  $X$  se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} E(\vec{r}) = \frac{\partial^2 V(\vec{r})}{\partial x^2} \quad (27)$$

De la ecuación (27) se pueden determinar las segundas diferencias del potencial

$$\frac{d^2 V}{dx^2} \Delta^2 x \cong \frac{\Delta^2 V}{\Delta^2 x} \Delta^2 x = \Delta^2 V(\vec{r}, t = 0) \quad (28)$$

Donde  $\Delta^2 V(\vec{r}, t = 0)$  es el potencial de las segundas diferencias evaluado en  $t=0$ , esto es, en estado estacionario. En adelante, se empleará la siguiente notación para efectos de abreviatura:  $\Delta V^2(0)$ .

Si la ecuación (27) es evaluada para  $z=0$  en forma numérica con tres electrodos como se muestra en la Figura 2-1 (fuente L y electrodos de potencial M, C y N), se puede obtener la resistencia de segundas diferencias del potencial ( $\Delta^2 R$ ).

$$\Delta^2 R = \overline{\Delta^2 V(0)} = \overline{\Delta V(0)}_1 - \overline{\Delta V(0)}_2 = R_1 - R_2 \quad (\text{A.3})$$

Donde  $\overline{\Delta V(0)}$  indica la diferencia de potencial normalizada por la corriente I.

$$\text{Si } R_1 = \frac{\rho_1}{K_1} \text{ y } R_2 = \frac{\rho_2}{K_2}$$

$$\text{Entonces: } R_1 - R_2 = \frac{\rho_1}{K_1} - \frac{\rho_2}{K_2} = \frac{K_2 \rho_1 - K_1 \rho_2}{K_1 K_2}$$

Si suponemos que estamos en medios homogéneos e isótropos,  $\rho_1 = \rho_2$ , entonces:  $R_1 - R_2 = \rho^{SPD} \frac{K_2 - K_1}{K_1 K_2}$

Por tanto, la resistividad de segundas diferencias de potencial ( $\rho^{SPD}$ ) definida para medios homogéneos e isótropos queda definida como (López González *et al.*, 2019):

$$\rho^{SPD} = \Delta^2 R \Delta^2 k \quad (29)$$

Donde el factor geométrico de segundas diferencias está dado por  $\Delta^2 k = \frac{K_2 K_1}{K_2 - K_1}$  y La ecuación (29), es la resistividad aparente de segundas diferencias ( $\rho_a^{SPD}$ ) y está definida para semiespacios heterogéneos y anisótropos.

Si se toman datos leyendo primeramente con la fuente de la izquierda y posteriormente con la fuente de la derecha (esto es equivalente a hacer dos levantamientos), se pueden obtener las segundas diferencias del potencial de cada fuente, normalizando por sus correspondientes corrientes  $I(\overline{\Delta^2 V})$ .

Si se aplica el principio de superposición y si sumamos las segundas diferencias de potencial de ambas fuentes ( $\sum \overline{\Delta^2 V}$ ), siguiendo un proceso similar a la resistividad de segundas diferencias, entonces la resistividad enfocada está dada por la siguiente expresión (López González *et al.*, 2019):

$$\rho^{FS} = \frac{1}{2} \sum \Delta^2 R \Delta^2 k = \frac{1}{2} \sum \overline{\Delta V^2(0)} \Delta^2 k \quad (30)$$

Si el semiespacio es heterogéneo y anisótropo la ecuación (30) también expresa la resistividad aparente para fuentes enfocadas ( $\rho_a^{FS}$ ).

### 2.3.2 Cargabilidad aparente de segundas diferencias y para fuentes enfocadas

La ecuación (19) define la cargabilidad de la primera diferencia del potencial, obtenida tanto del estado estacionario como después del corte de la corriente, entonces en forma similar a la obtención de la resistividad de segundas diferencias, se puede definir una cargabilidad de segundas diferencias (López González *et al.*, 2019).

$$m^{SPD}(t) = \frac{\int_{T_1}^{T_2} \overline{\Delta^2 V(t)} dt}{\Delta T \overline{\Delta^2 V(0)}} = m_1(t) \frac{\overline{\Delta V_1(0)}}{\overline{\Delta V^2(0)}} - m_2(t) \frac{\overline{\Delta V_2(0)}}{\overline{\Delta V^2(0)}} \quad (31)$$

Donde  $m_1(t)$  y  $m_2(t)$  son las cargabilidades de los canales 1 y 2 (Figura 2-1). Si el medio fuese homogéneo e isótropo entonces  $m_1(t) = m(t)$ , por tanto  $m^{SPD}(t)$  sería igual a la cargabilidad del medio. Sin embargo, al no cumplirse dicha condición, la ecuación (30) define la *cargabilidad aparente de segundas diferencias* ( $m_a^{SPD}(t)$ ).

Entonces, para un semiespacio homogéneo, isótropo y polarizable, la cargabilidad de SPD para fuentes enfocadas se expresa como:

$$m^{FS}(t) = \frac{\int_{T_1}^{T_2} \Sigma \overline{\Delta^2 V(t)} dt}{\int_{T_1}^{T_2} \Sigma \overline{\Delta^2 V(0)} dt} = m^{SPD}(t)_L \frac{\int_{T_1}^{T_2} \overline{\Delta^2 V_L(0)} dt}{\int_{T_1}^{T_2} \Sigma \overline{\Delta^2 V(0)} dt} + m^{SPD}(t)_R \frac{\int_{T_1}^{T_2} \overline{\Delta^2 V_R(0)} dt}{\int_{T_1}^{T_2} \Sigma \overline{\Delta^2 V(0)} dt} \quad (32)$$

Si el semiespacio es heterogéneo y anisótropo la ecuación (32) también expresa la cargabilidad aparente para fuentes enfocadas ( $m_a^{FS}(t)$ ).

### 2.3.3 Punto de atribución y profundidad de investigación para fuentes enfocadas

Con el objetivo de visualizar la distribución de los parámetros observados en el espacio, es costumbre asignar las coordenadas ( $X, Z$ ) para cada valor observado. La coordenada  $X$  es el punto medio de la línea que une los dipolos de transmisión y recepción, como es el caso para un arreglo tetra polar. Para el caso de fuentes enfocadas, a la coordenada  $X$  le corresponde el punto medio entre ambos dipolos de transmisión, justo debajo del electrodo C (Figura 2-1).

Para la coordenada  $Z$ , se han tenido variaciones en la manera de calcular su valor. Evjen (1938) fue el primero en definir la profundidad de investigación como la profundidad en donde se logra la máxima contribución en la señal medida para una capa delgada y horizontal del suelo. Hallof (1957), Alpin (1966), Edwards (1977), Barker (1989) y Loke (2010), han mostrado que la profundidad máxima de investigación (profundidad de la mediana  $Z_e$ ) es la que mejor se acerca a la profundidad real del cuerpo.  $Z_e$  es la profundidad en la cual el área bajo la curva de la función de sensibilidad, es igual a la mitad del total del área bajo dicha curva.

Gómez-Treviño y Esparza (2014) y Gómez-Treviño y Flores (2015), han propuesto una teoría alternativa para re-plantear conceptualmente los aportes del medio al potencial eléctrico, no sólo bajo el concepto de contribuciones elementales, sino también desde el punto de vista de la función de sensibilidad con variaciones locales de resistividad. Estos trabajos traen al presente conceptos que se dan por hecho, pero que podrían ayudar a mejorar las interpretaciones en cuanto a la profundidad, considerando las variaciones de la resistividad de los modelos iniciales.

Debido a que el enfoque principal de este trabajo de tesis es obtener la inversión 1D de datos de SPD para FS, la profundidad de investigación de estos datos, está basada en la función de sensibilidad para un semiespacio homogéneo e isótropo, resolviendo la ecuación (33).

$$U = 4Z_e^2 \quad (33.a)$$

$$kk = 1/AM - 1/BM - 2(1/AC - 1/BC) + 1/AN - 1/BN \quad (33.b)$$

$$kk = 2 \left( \frac{1}{\sqrt[2]{AM^2+U}} - \frac{1}{\sqrt[2]{BM^2+U}} - 2 \left( \frac{1}{\sqrt[2]{AC^2+U}} - \frac{1}{\sqrt[2]{BC^2+U}} \right) + \frac{1}{\sqrt[2]{AN^2+U}} - \frac{1}{\sqrt[2]{BN^2+U}} \right) \quad (33.c)$$

Donde:  $AM$ ,  $BM$ ,  $AC$ ,  $BC$ ,  $AN$  y  $BN$  son distancias electródicas (Figura 2-1) y  $Z_e$  es la profundidad de la mediana;  $kk$  es el factor geométrico de las  $SPD$ . La ecuación 27.c se resuelve con un esquema de iteración de punto fijo para  $U$  y de la ecuación 27.a se determina la profundidad de investigación  $Z_e$ .

De acuerdo con López-González *et al.* (2019), la profundidad de investigación para el arreglo de fuentes enfocadas, aplicando la función de la ecuación 13 es 25% menor comparado con el arreglo dipolo-dipolo tradicional.

## 2.4 Consideraciones para los datos aparentes e invertidos

Como se sugiere en todo trabajo geoelectrico, es recomendable que los datos observados sean procesados para disminuir el ruido aleatorio, incluso, los cálculos numéricos pueden ocasionar ruido numérico. Por ello, los datos de resistividad y cargabilidad de SPD para FS no son la excepción, por lo que se presenta a continuación la propuesta de su filtrado.

### 2.4.1 Procesamiento de datos de segundas diferencias para fuentes enfocadas

La ejecución numérica de las segundas diferencias marca las anomalías tanto de resistividad como de cargabilidad con mayor eficacia que con arreglos de una fuente (ver Capítulo 4). Sin embargo, debido a la geometría de los dispositivos, estas diferencias pueden arrojar valores suficientemente pequeños en los cálculos numéricos como para generar lo que se conoce como “dientes de sierra” o también ruido numérico aleatorio. Debido a lo anterior, es conveniente aplicar filtros que suavicen o disminuyan este tipo de señales y que preserven los momentos altos, lo que sin duda, abre un abanico de posibles filtros a elegir.

Para este trabajo se optó por aplicar filtros de suavizamiento tipo pasa-bajas en el dominio del tiempo, con el procedimiento de mínimos cuadrados publicado por Savitzky y Golay

(1964). Este filtro es implementado para hacerlo móvil, de manera que el valor del dato central es remplazado por la convolución de los coeficientes obtenidos de una combinación lineal, ajustando un polinomio de grado  $M$  y aplicando el criterio de mínimos cuadrados, esto es, que la suma de los cuadrados de las diferencias entre los valores observados y los calculados sea el mínimo sobre el intervalo considerado.

Uno de los fundamentos para aplicar este filtro es que la serie de datos deben estar equiespaciados, esto es  $f_i \equiv f(t_i)$  donde  $t_i \equiv t_0 + i\Delta$  para un espaciado constante  $\Delta$  y una  $i = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$

De la teoría del filtrado digital se sabe que se puede remplazar un dato  $f_i$  por una combinación lineal  $g_i$  de la función misma y de un número de vecinos cercanos, esto se puede expresar como (Press et al., 1986):

$$g_i = \sum_{n=-n_L}^{n=n_R} c_n f_{i+n} \quad (34)$$

Donde  $n$  es el índice que indica el coeficiente que se está considerando, así como el valor de la función  $f$ ;  $i$  es el índice que indica la muestra que se está filtrando y  $g_i$  es el valor filtrado de  $f$ .  $n_L$  es el número de puntos usados a la izquierda del punto que ocupa el dato y  $n_R$  es el número de puntos a la derecha del dato.

Por tanto, la ventana de promedios móviles para un número fijo  $n_L = n_R$ , se calcula  $g_i$  como el promedio de los datos desde el punto  $f_{i-n_L}$  hasta  $f_{i+n_R}$ ; con  $c_n = 1/(n_L + n_R + 1)$ , con un total de coeficientes de  $c = n_L + n_R + 1$ .

La construcción de la matriz a resolver para encontrar los coeficientes del filtro de Savitzky-Golay está basada en los polinomios de grado  $M$  en  $i$ ,  $a_0 + a_1 i + \dots + a_M i^M$  de la siguiente manera:

$$A_{ij} = i^j \quad (35)$$

Donde  $i = -n_L, \dots, n_R$  y  $j = 0, \dots, M$ ;  $M$  es el grado del polinomio (Press et al., 1986). Ajustando por mínimos cuadrados, los  $n$ -ésimos coeficientes se obtienen al encontrar la diagonal principal ( $0_m$ ) de la inversa de la matriz  $A$  transpuesta por  $A$ , como sigue:

$$c_n = \sum_{m=0}^M \{(A^T \cdot A)^{-1}\}_{0m} n^m \quad (36)$$

Este procedimiento ha probado ser suficiente en las pruebas de modelación y, dado que la distancia espacial entre cada par de datos es constante aproximadamente, no se requiere calcular los coeficientes en cada movimiento de la ventana. El grado del polinomio establecido para esta tesis fue  $M=2$ , de modo que la ventana consiste de  $n=5$  datos ( $2M+1$ ).

Como se mencionó anteriormente, este filtro requiere intervalos de muestreo uniformes en la abscisa y que los puntos que conforman los datos, sean más o menos suaves o continuos.

Ambas condiciones se cumplen en el caso de los datos para fuentes enfocadas de segundas diferencias. Además, el filtro de Savitzky-Golay presenta dos características deseables: preserva la anchura de las funciones y los valores altos.

Aunque el suavizado de los datos tanto de entrada como en la modelación ayuda a disminuir efectos no deseados en las anomalías, es necesario realizar un análisis formal de ruido, el cual se escapa de los límites de la propuesta de tesis, pero se deja como parte de la línea de investigación futura.

Para ejemplificar los efectos de ruido y el filtrado en los perfiles, basta con mostrar uno en la Figura 2-4, donde se puede apreciar el ruido numérico en las curvas de datos con la presencia del efecto de “dientes de sierra”, tanto en resistividad como en cargabilidad. Es notorio el suavizamiento sin perder la forma de las curvas.

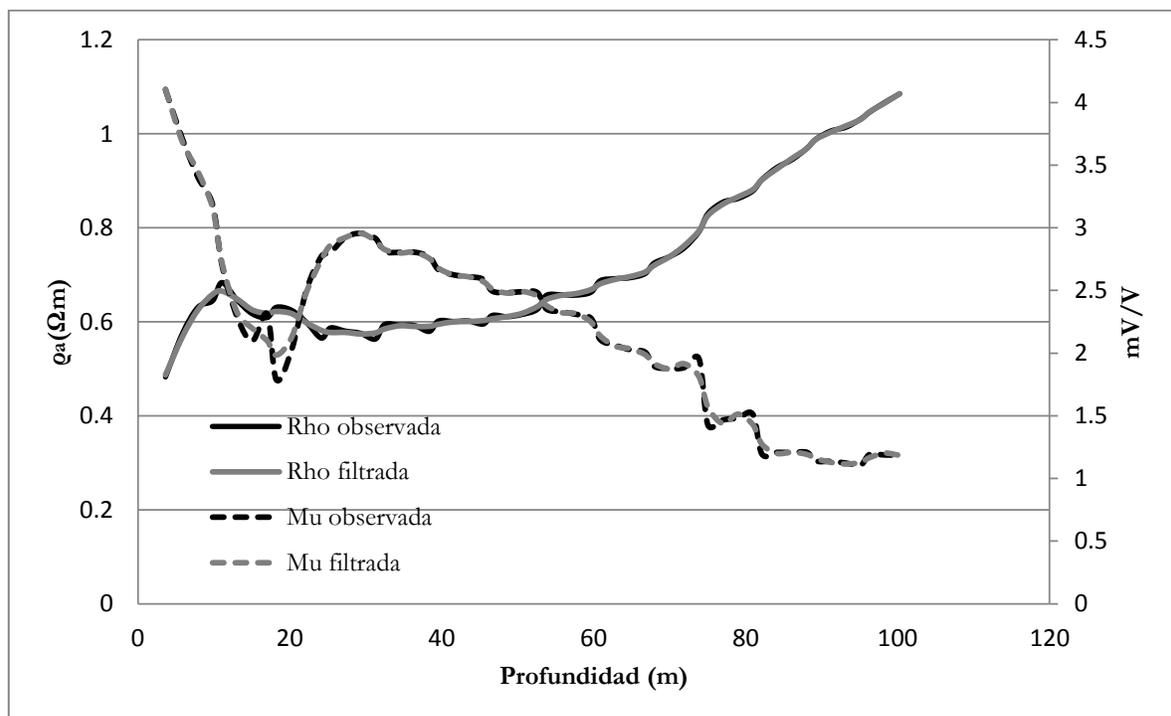


Figura 2-4. Perfiles de resistividad y cargabilidad observados originales (Rho y Mu obs) y filtrados (Rho y Mu Filt).

#### 2.4.2 Consideraciones para contactos verticales en interpretaciones 1D

En esta tesis se empleará, además de un modelo simple de 3 capas, un modelo-prueba 2D (ver Capítulo 4), y para ello es necesario establecer algunos detalles sobre los efectos que tienen los contactos verticales para interpretaciones 1D.

En la teoría de Sondeos Eléctricos Verticales (SEV), se considera que el semiespacio es estratificado horizontalmente, y cada estrato es un medio homogéneo e isótropo en sí mismo e infinito. Sin embargo, es difícil en la realidad que se den estas condiciones. Por ello, se debe considerar y definir el concepto de contacto vertical, el cual es una *discontinuidad lateral constituida por un contacto vertical que divide a la primera capa en dos partes de resistividades respectivas  $\rho_1$  y  $\rho_2$*  (Orellana, 1982). Con esta definición, y con la condición de haber establecido el arreglo de fuentes enfocadas con arreglos dipolo-dipolo, se debe tener en cuenta que este tipo de arreglo en particular, tiene alto grado de resolución en detectar dichas discontinuidades (Vedrintsev, 1960).

Dependiendo de la posición de los electrodos de corriente y de medición del potencial, con respecto al contacto lateral, y los valores de resistividad de las capas, las implicaciones de dichos contactos en las resistividades son variadas. En general, existe un efecto de “pantalla” o *screening*, que afecta a las porciones derechas de las curvas a lo largo del eje de los espaciamientos o distancias (Vedrintsev, 1960). Por otro lado, Dey *et al.* (1975) mostraron que los arreglos que más se ven afectados por cambios laterales son el unipolar y el polo-dipolo. Sin embargo, el arreglo dipolo-dipolo también es susceptible a dichos cambios laterales.

## 2.5 Inversión de los datos de resistividad y cargabilidad de segundas diferencias para Fuentes Enfocadas

Usualmente, el método empleado para la inversión de datos geoelectricos ha sido el de mínimos cuadrados, el cual requiere como modelo inicial un modelo cercano al esperado (esto es, con el mínimo error), el cual no necesariamente se conoce. Además, en algunos programas (Oldenburg y Li, 1994) es necesario implementar un algoritmo llamado “positividad” para la obtención de cargabilidades invertidas positivas.

El método de Cristalización Simulada Rápida (FSA, Fast Simulating Annealing por sus siglas en inglés), al no requerir de la inversa de una matriz, puede incluir valores de cargabilidad aparentes negativos, valores pequeños de las diferencias y un rango amplio de solución de los parámetros, sin necesidad de que el modelo inicial sea el más cercano a la solución. Por todo lo anterior, se eligió este esquema para la creación del programa de inversión de esta tesis.

El método de FSA es un método alternativo para encontrar el mínimo global de una función de error, que involucra una gran cantidad de variables independientes (en nuestro caso, esto equivale a  $3n-1$  variables, siendo  $n$  el número de capas:  $n$ -valores de resistividades,  $n$ -valores de cargabilidades y  $n-1$ -valores de espesores). Dicho método, ha sido empleado en problemas de optimización como el caso famoso del problema del vendedor, quien tiene que atravesar varias ciudades hasta regresar al punto de inicio del viaje, de modo que la ruta debe ser la más corta posible.

### 2.5.1 Inversión por cristalización simulada rápida (Fast Simulating Annealing, FSA)

Antes de exponer los conceptos necesarios para describir el método de FSA, es conveniente iniciar con su antecesor, este es, el método de cristalización simulada (SA).

De acuerdo con Sen y Stoffa (1995), SA proviene de los problemas de la mecánica estadística, los cuales involucran el análisis de las propiedades de una gran cantidad de átomos en muestras de líquidos o sólidos. La analogía se encuentra entre los parámetros (modelo de parámetros) del problema de optimización y las partículas en un sistema idealizado. El proceso de cristalización inicia cuando un sólido es calentado incrementando la temperatura de tal modo que todas las partículas están distribuidas de manera aleatoria en fase líquida. Después se va enfriando de tal manera que las partículas se arreglan así mismas en un estado (en términos de procesos estocásticos, cada configuración de partículas se denomina *estado*) de baja energía, simulando el proceso de cristalización hasta alcanzar el estado de mínima energía. Este último, está dado por la función de densidad de probabilidad de Gibbs o Boltzmann, que se describe como sigue:

$$P(E_i) = \frac{\exp\left(-\frac{E_i}{T}\right)}{\sum_{j \in S} \exp\left(-\frac{E_j}{T}\right)} = \frac{1}{Z(T)} \exp\left(-\frac{E_i}{T}\right) \quad (37)$$

Donde:  $Z(T) = \sum_{j \in S} \exp\left(-\frac{E_j}{KT}\right)$

$E_i$  es el estado de energía  $i$ -ésimo,  $K$  es la constante de Boltzmann,  $S$  es el conjunto conformado por todas las configuraciones posibles,  $T$  es la temperatura.

La temperatura se disminuye gradualmente, de modo tal que cuando  $T \rightarrow 0$ , se va obteniendo el modelo más probable al estado mínimo global. Si se enfría rápidamente, se llegará a un mínimo local.

Desde los trabajos de Kirkpatrick et al (1983), el algoritmo de Metrópolis ha sido empleado en múltiples aplicaciones. Este criterio establece que dado un modelo  $m_i$ , si se le hace una perturbación pequeña, se obtendrá un nuevo modelo  $m_j$ , esto es:

$$m_j = m_i + \Delta m_i$$

Con lo que se obtendrá una variación de energía:

$$\Delta E_{ij} = E_{m_j} - E_{m_i} \quad (38)$$

El modelo elegido será entonces aceptado en función del valor de la variación energética  $\Delta E_{ij}$ . Si  $\Delta E_{ij} \leq 0$  y de acuerdo a la probabilidad:

$$P = \exp\left(-\frac{\Delta E_{ij}}{T}\right) \quad (39)$$

Que se conoce como el *Criterio de Metrópolis*.

Para el problema geoelectrico desarrollado en esta tesis, la función de energía o de costo del modelo  $m$  i-ésimo ( $E_{m_i}$ ) elegida, es el error entre los datos observados  $d_i^{obs}$  y los estimados  $d_i^{est}$ , mediante la norma L2, de tal manera que se tiene:

$$E_{m_i} = 100 * \left[ \frac{\sum_{k=1}^N \left( (d_i^{est} - d_i^{obs}) / d_i^{obs} \right)^2}{N} \right]^{1/2} \quad (40)$$

Donde N es el número total de datos.

Para asegurar una convergencia rápida con temperaturas que estuvieran en función del número de perturbaciones (esto para asegurar que la elección del modelo se diera en enfriamiento controlado, ya que el Criterio de Metrópolis está delimitado por valores muy altos de T), se empleó la versión llamada cristalización simulada rápida (Fast Simulating Annealing, FSA), la cual de acuerdo con Szu y Hartley (1987), muestra que una condición necesaria y suficiente para la convergencia del mínimo global para SA está dada por la siguiente condición de enfriamiento:

$$T(k) = \frac{T_0}{k} \quad (41)$$

Donde  $T(k)$  es la temperatura en la iteración k y  $T_0$  es una temperatura inicial suficientemente alta. Esta versión de SA emplea una distribución de Cauchy, la cual presenta una “cola más plana” que una distribución Gaussiana (Sen y Stoffa, 1995).

SA en sus diferentes variantes, se ha publicado para fines de inversión de datos geofísicos, desde datos de resistividad 1D (Sharma, 2012), datos gravimétricos (Nava-Flores *et al.*, 2016), hasta ondas Rayleigh multimodales (Beatty *et al.*, 2002).

Por otro lado, debido a la naturaleza de SA, los rangos proporcionados para cada parámetro, pueden arrojar valores intrínsecos negativos, sobre todo en los datos PI, por lo cual se agregó una restricción al programa de modo que el rango no puede extenderse fuera de [0,0.9].

## 2.6 Consideraciones para la práctica en campo y para la inversión

Dadas las características del arreglo enfocado, es de suma importancia mantener en campo la simetría de las dos fuentes con respecto al punto de atribución central. Esto implica a su vez, que la distancia eléctrica debe ser constante para evitar el uso de corrección de las

resistividades por errores del factor geométrico (Zhou y Dahlin, 2003). En este sentido, se sugiere consultar una propuesta de corrección contenida en la patente de Tejero y López-González (2016).

Además, para que el filtrado de los datos sea aplicable, tanto 1D como 2D (en pseudosección), la distancia vertical entre los puntos de atribución debe ser constante también, debido a que los coeficientes del filtro dependen del equi-espaciamiento. Si no se cumple esta condición, será necesario modificar el cálculo del filtro en el programa de inversión, de modo que se calculen los coeficientes automáticamente para cada configuración que sea necesaria. En otras palabras, habrá que crear el filtrado generalizado, sin importar los cambios en las distancias de los puntos de atribución a profundidad

Por otro lado, cuando se trate de proporcionar los parámetros de inversión, es recomendable asignar rangos congruentes para cada parámetro y de preferencia que sean acordes con la geología o que haya congruencia con la observación de las curvas de datos aparentes. Dado lo anterior, se podrá invertir con menor número de perturbaciones. Si se desconoce el rango aproximado, se sugiere proporcionar rangos amplios, pero eso implica que será necesario aumentar el número de perturbaciones.

Cuando el número de perturbaciones es excesivamente grande, puede producir errores en la inversión, debido a que el argumento de la función exponencial en el criterio de metrópolis, tenderá a un valor muy grande al disminuir la temperatura casi a cero.

# CAPÍTULO

# 3.

# METODOLOGÍA

El programa de modelación numérica de la respuesta de la superposición de dos fuentes eléctricas enfocadas, se escribió en Compaq Visual FORTRAN 2000 y las gráficas de los datos observados con los invertidos, así como el comportamiento del RMS para resistividad y cargabilidad de todos los perfiles fueron programados en Python 3.1 (sus resultados se encuentran en el Anexo A).

Todos los archivos, tanto de entrada como de salida se guardan en formato de texto (.txt).

## 3.1 Diagrama de flujo

El diagrama de flujo (ver Figura 3-1) muestra el proceso de inversión. Este aplica para datos de resistividad y cargabilidad. De acuerdo al programa principal (Anexo A.1), primero se invierten los datos de resistividad y espesores hasta ajustar al mejor modelo. Después se invierten las cargabilidades que requieren los voltajes en estado estacionario del mejor modelo de la inversión de resistividad y espesores.

1. Se filtran los datos observados de entrada (Anexo A.11).
2. Se calculan las distancias, factores geométricos y profundidades, subrutina DISTYPROF (Anexo A.3), la cual utiliza la función de sensibilidad (Tejero *et al.*, 2015).
3. Se obtienen las resistividades y cargabilidades del modelo inicial (ver apartado 3.3), así como sus respectivos errores RMS.
4. Si el error en ambos parámetros (resistividad y cargabilidad) es menor o igual al 5%, se imprimen los datos del modelo original (llamando a la subrutina IMPRIM, del Anexo A8); si no, se inicia el proceso de FSA para datos de resistividad primero (llamando a la subrutina FSARHO, del a Anexo A.6), y después, para cargabilidad (empleando la subrutina FSAMU, del Anexo A.7).
5. Se perturba el modelo inicial (**modp**) dentro del rango proporcionado por el usuario con la función subrutina Aleat (Anexo A.13), así como se obtiene una nueva temperatura (**Ti**).

6. Se calcula el modelo directo de los parámetros perturbados del paso anterior.
7. Si el error es menor o igual a cero, el modelo se acepta; si no, se emplea el Criterio de Metrópolis (CM).
8. Si el CM acepta el modelo, se guarda y se inicia otra iteración (**i**); si no, se regresa al paso 5.
9. Si se llega al número de perturbaciones máximo (dado por el usuario), se termina la inversión de resistividades, se guardan los voltajes en DC y comienza la inversión de cargabilidades, repitiéndose los pasos del 5 al 8.
10. Al terminar la inversión de cargabilidades, se imprimen los resultados finales (se llama a la subrutina IMPRIM, ver Anexo A.8) y se llega al fin del programa.

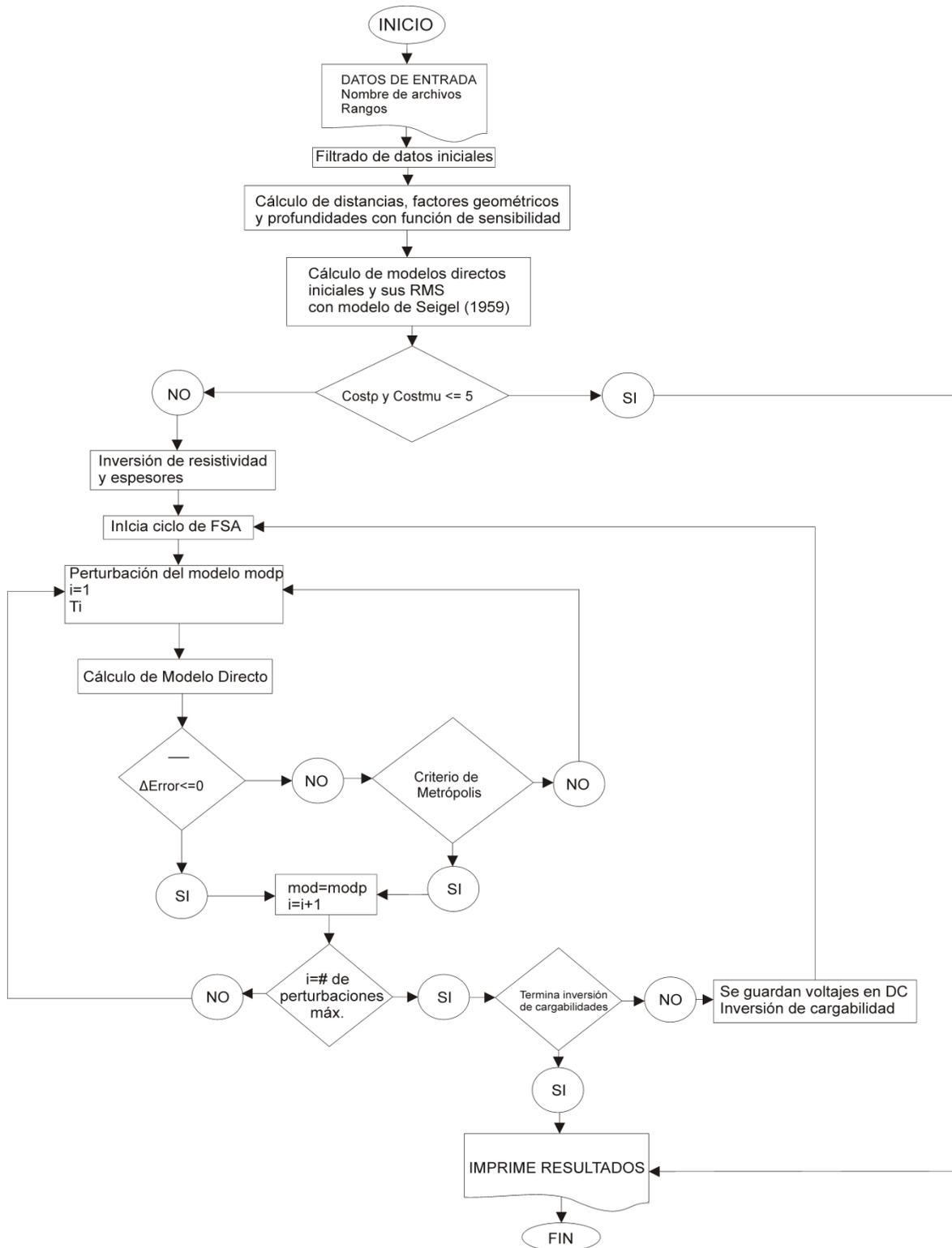


Figura 3-1 Esquema del diagrama de flujo del programa de inversión 1D de datos de resistividad y cargabilidad de segundas diferencias de potencial empleando fuentes enfocadas.

### 3.2 Información que solicita el ejecutable al inicio.

Para ejecutar el programa de inversión, es necesario tener a la mano los archivos de datos listos y una idea clara de los intervalos en los que pueden fluctuar los modelos que puedan ajustar mejor a los datos. A continuación, la lista solicitada:

1. Nombre del archivo de datos de ENTRADA.
2. Nombre del archivo de datos de SALIDA.
3. Nombre del archivo de COSTOS para Rho (resistividades).
4. Nombre del archivo de COSTOS para Mu (cargabilidades).
5. Porcentaje (%) de rango en Resistividad.
6. Porcentaje (%) de rango en Cargabilidad.
7. Porcentaje (%) de rango en Espesores.
8. Número de perturbaciones.

#### 3.2.1 Archivo de datos de ENTRADA

Para el archivo de entrada, es necesario que la siguiente información (Tabla 1) se proporcione en el orden indicado, ya que de lo contrario el programa podrá generar errores en los resultados o simplemente no funcionará correctamente.

Tabla 1. Formato de datos de entrada del programa.

| Número de datos (m)      |                   |              |      |      |       |       |             |            |
|--------------------------|-------------------|--------------|------|------|-------|-------|-------------|------------|
| Número de capas(n)       |                   |              |      |      |       |       |             |            |
| <b>Resistividad(1)</b>   | cargabilidad(1)   | espesor(1)   |      |      |       |       |             |            |
| <b>Resistividad(2)</b>   | cargabilidad(2)   | espesor(2)   |      |      |       |       |             |            |
| ...                      | ...               | ...          |      |      |       |       |             |            |
| <b>Resistividad(n-1)</b> | cargabilidad(n-1) | espesor(n-1) |      |      |       |       |             |            |
| <b>Resistividad(n)</b>   | cargabilidad(n)   |              |      |      |       |       |             |            |
| <b>AL(1)</b>             | BL(1)             | M(1)         | C(1) | N(1) | AR(1) | BR(1) | $\rho_a(1)$ | $\mu_a(1)$ |
| <b>AL(2)</b>             | BL(2)             | M(2)         | C(2) | N(2) | AR(2) | BR(2) | $\rho_a(1)$ | $\mu_a(1)$ |
| ...                      | ...               | ...          | ...  | ...  | ...   | ...   | ...         | ...        |
| <b>AL(m)</b>             | BL(m)             | M(m)         | C(m) | N(m) | AR(m) | BR(m) | $\rho_a(m)$ | $\mu_a(m)$ |

A partir de la tercera fila de la Tabla 1, se encuentran los datos del modelo inicial. El número entre paréntesis corresponde al número de capa, por lo que habrá  $n$  datos de resistividad,  $n$  datos de cargabilidad y  $n-1$  datos de los espesores, ya que como sabrá el usuario, la última capa se considera como semiespacio homogéneo. El modelo que se proporcione debe ser pensado y analizado por el usuario, de su experiencia en observar datos aparentes, dependerá el éxito de la inversión. Se recomienda hacer más de una prueba con diferentes modelos iniciales, de modo tal que se llegue al modelo más congruente con la geología de campo y los cambios de inflexión en la curva.

Por último, los datos que se requieren son las posiciones en la dirección  $x$  (o distancia horizontal) de los electrodos de corriente y de potencial. Éstos se encuentran en la Tabla 1 como AL BL M C N AR BR, que corresponden a las coordenadas de la fuente de la izquierda (AL y BL), después las coordenadas de los electrodos de potencial (de acuerdo con la Figura 1.1) y al final, las coordenadas de la fuente de la derecha (AR y BR). El número que se encuentra en paréntesis, corresponde al número de medición, que puede llegar hasta  $m$  datos.

Cabe decir, que la distancia entre los electrodos de corriente de cada fuente debe ser igual, lo mismo ocurre para los electrodos de potencial. Además, la distancia entre el electrodo B de la fuente izquierda y el electrodo B de la fuente derecha, es simétrica respecto al electrodo C. Por tanto, la distancia entre los electrodos M y N es simétrica respecto al electrodo C. Si estas distancias no cumplen con los requisitos mencionados, no se conservará el centro del sondeo bajo el electrodo C, y se cometerán errores en el cálculo de la curva de resistividad y cargabilidad, lo que ocasionará un aviso de error por distancias.

### 3.2.2 Archivo de datos de SALIDA

Este es el archivo que contiene los resultados de la inversión. En la primera sección (ver Tabla 2), se presenta la información relacionada con el modelo inicial: parámetros y RMS de resistividad y cargabilidad. La segunda sección presenta los parámetros de la última iteración aceptada de la inversión, con sus respectivos RMS. Por último, se presenta el número del dato, su posición (XC), su profundidad de investigación (ProfENF), la resistividad aparente de cada dato (Rdat), la resistividad invertida del último modelo (RMOD), la cargabilidad global aparente (MGdat) y las cargabilidades invertidas del modelo final (MMOD).

| Tabla 2. Formato de datos de salida del programa. |                   |                   |              |             |            |            |
|---|-------------------|-------------------|--------------|-------------|------------|------------|
| <b>número de capas(n)</b>                         |                   |                   |              |             |            |            |
| <b>MODELO INICIAL</b>                             |                   |                   |              |             |            |            |
| <b>Capa</b>                                       | RES               | Mu                | Espesor      |             |            |            |
| 1   | resistividad(1)   | cargabilidad(1)   | espesor(1)   |             |            |            |
| 2   | resistividad(2)   | cargabilidad(2)   | espesor(2)   |             |            |            |
| ...   | ...               | ...               | ...          |             |            |            |
| n-1   | resistividad(n-1) | cargabilidad(n-1) | espesor(n-1) |             |            |            |
| n   | resistividad(n)   | cargabilidad(n)   |              |             |            |            |
| <b>RMS modelo inicial de Resistividad (%):</b>    |                   |                   |              |             |            |            |
| Valor del RMS                                     |                   |                   |              |             |            |            |
| <b>RMS modelo inicial de Cargabilidad (%):</b>    |                   |                   |              |             |            |            |
| Valor del RMS                                     |                   |                   |              |             |            |            |
| <b>MODELO DE INVERSIÓN</b>                        |                   |                   |              |             |            |            |
| <b>Capa</b>                                       | RES               | Mu                | Espesor      |             |            |            |
| 1   | resistividad(1)   | cargabilidad(1)   | espesor(1)   |             |            |            |
| 2   | resistividad(2)   | cargabilidad(2)   | espesor(2)   |             |            |            |
| ...   | ...               | ...               | ...          |             |            |            |
| n-1   | resistividad(n-1) | cargabilidad(n-1) | espesor(n-1) |             |            |            |
| n   | resistividad(n)   | cargabilidad(n)   |              |             |            |            |
| <b>RMS Inversión Resistividad (%):</b>            |                   |                   |              |             |            |            |
| Valor del RMS de Resistividad                     |                   |                   |              |             |            |            |
| <b>RMS Inversión Cargabilidad (%):</b>            |                   |                   |              |             |            |            |
| Valor del RMS de Cargabilidad                     |                   |                   |              |             |            |            |
| <b>#DATO</b>                                      | XC                | ProfENF           | Rdat         | RMOD        | MGdat      | MMOD       |
| 1   | BL(1)             | M(1)              | $\rho_a(1)$  | $\rho_a(1)$ | $\mu_a(1)$ | $\mu_a(1)$ |
| 2   | BL(2)             | M(2)              | $\rho_a(2)$  | $\rho_a(2)$ | $\mu_a(2)$ | $\mu_a(2)$ |
| ...   | ...               | ...               | ...          | ...         | ...        | ...        |
| <b>AL(m)</b>                                      | BL(m)             | M(m)              | $\rho_a(m)$  | $\rho_a(m)$ | $\mu_a(m)$ | $\mu_a(m)$ |

### 3.2.3 Archivo de datos de COSTOS: para RHO y MU

Los costos tanto para resistividad como para cargabilidad, así como los valores de todos los parámetros en cada iteración aceptada (i) se imprimen con el formato que aparece en la Tabla 3. Con este archivo, se podrá graficar los RMS de todos los modelos a lo largo de todas las iteraciones.

Tabla 3. Formato de datos de salida del programa.

| Costos de la inversión: No.iteracion, CostR o CostM, y parámetros de resistividad y cargabilidad |                     |             |     |             |            |     |            |
|--|---------------------|-------------|-----|-------------|------------|-----|------------|
| <b>Iter(1)</b>   | CostR(1) o CostM(1) | $\rho_1(1)$ | ... | $\rho_n(1)$ | $\mu_1(1)$ | ... | $\mu_n(1)$ |
| <b>Iter(2)</b>   | CostR(2) o CostM(2) | $\rho_1(2)$ | ... | $\rho_n(2)$ | $\mu_1(2)$ | ... | $\mu_n(2)$ |
| ...  | ...                 | ...         | ... | ...         | ...        | ... | ...        |
| <b>Iter(i)</b>   | CostR(n) o CostM(n) | $\rho_1(i)$ | ... | $\rho_n(i)$ | $\mu_1(i)$ | ... | $\mu_n(i)$ |

### 3.2.4 Porcentaje (%) de rango en Resistividad

Este valor en % corresponde al porcentaje que supone el usuario sobre el valor inicial de resistividad; aplica para todas las capas. Este rango deberá estar dado por el conocimiento geológico-geofísico que tenga el usuario, el cual corresponderá a un porcentaje de los valores iniciales de resistividad propuestos. En la inversión se utilizará este valor para establecer el rango en el cual se perturbarán los modelos, de modo tal que para cada valor de resistividad inicial se le restará este porcentaje para obtener el valor mínimo, y se le aumentará ese mismo porcentaje para obtener el valor máximo.

La única cláusula para elegir el porcentaje, es evitar dar rangos que lleven a las resistividades con valores negativas.

### 3.2.5 Porcentaje (%) de rango en Cargabilidad

Este valor, tendrá el mismo propósito que el del punto anterior. Debido a que tenemos la restricción de valores de cargabilidad en un intervalo  $[0, 1)$ , se integraron en el proceso de la inversión dos restricciones:

- si el valor mínimo obtenido es menor a cero, el programa está restringido para no aceptar dicho valor y en consecuencia, se utilizará 0.000001,
- para el máximo valor del rango ocurre algo similar: si el máximo es mayor o igual a uno, se asignará el valor de 0.9.

Por tanto, el usuario podrá dar porcentajes de rango que considere, y si proporciona valores que arrojen valores mínimos o máximos fuera del rango de cargabilidades permitidas, no tendrá problemas durante la inversión y obtendrá valores permitidos de acuerdo a la modelación teórica de PI.

### 3.2.6 Porcentaje (%) de rango en Espesores

Al igual que los dos puntos anteriores, el rango que se pide en porcentaje para espesores sirve para obtener el valor mínimo y máximo de los intervalos de los espesores de las n-1 capas. En este caso, no hay restricción en el programa de inversión, por lo cual, el usuario deberá ser congruente y evitar dar rangos que excedan la profundidad de investigación máxima de los datos, así como evitar dar valores negativos.

### 3.2.7 Número de perturbaciones

Este valor debe ser entero mayor o igual a 1. Durante las pruebas de ejecución, se pudo apreciar que al tener mayor incertidumbre sobre cuál es el modelo que mejor ajuste, mayor debe ser el número de iteraciones. El programa puede fallar si se excede el número de iteraciones si el rango se encuentra cercano al o los valores de los parámetros del mejor modelo, y esto se debe a que si la temperatura sigue disminuyendo y el error no disminuye al mismo ritmo, se producirá una disminución en el argumento del exponencial de la función de densidad de Gibbs o Boltzmann (ver Capítulo 2), lo cual a su vez, generará una indeterminación.

## 3.3 Cálculo del Modelo Directo

El modelo directo es la parte más importante de cualquier programa de inversión. Este modelo directo para una sola fuente es bien conocido, e incluso es relativamente sencillo encontrar softwares libres en línea que lo calculan. En nuestro caso, lo complicado radica en la programación de las segundas diferencias con fuentes enfocadas.

El procedimiento para el modelado directo para resistividad consiste de los siguientes pasos:

1. Se guardan en memoria los parámetros del modelo en RESIDIR (Anexo A.4).
2. Se calculan los potenciales estacionarios con la subrutina MODIR (Anexo A.9) que emplea la función ZHANKS de Anderson (1979, ver Anexo A.14). Esta función necesita a su vez de la función KERNEL (Anexo A.12). Con MODIR se calculan resistividades por canal por fuente, luego resistividades de segundas diferencias de potencial y por último resistividades de fuentes enfocadas con la subrutina.
3. Una vez calculadas las resistividades de FS del modelo, se comparan con los datos observados filtrados para obtener el vector de discrepancias y con ello el costo del modelo. Todo lo anterior se ejecuta en la subrutina RESIDIR.
4. Se guardan los potenciales sumados de ambas fuentes, los potenciales de segundas diferencias y los potenciales por canal por fuente. Todos estos potenciales se calculan suponiendo que la respuesta de la fuente izquierda es igual a la de la fuente derecha.

Para el modelo directo de cargabilidad:

1. Se guardan en memoria los parámetros del modelo en CARGADIR (Anexo A.5).
2. Se calculan potenciales estacionarios con la subrutina MODIM (Anexo A.10) que emplea la función ZHANKS de Anderson (1979, ver Anexo A.14). Esta función necesita a su vez de la función KERNEL (Anexo A.12). Con MODIM, se llaman los potenciales guardados en el paso 4 del programa MODIR y se calculan las cargabilidades por canal por fuente, cargabilidades de segundas diferencias de potencial y cargabilidades de fuentes enfocadas.
3. Una vez calculadas las cargabilidades de FS del modelo, se comparan con los datos observados filtrados para obtener el vector de discrepancias y con ello el costo del modelo. Todo lo anterior se ejecuta en la subrutina CARGADIR.

# CAPÍTULO

# 4.

## MODELOS TEÓRICOS

### 4.1 Perfil con modelo de 3 capas

Usualmente, para probar que una propuesta teórica funciona, se procede a emplear un modelo sencillo. El objeto de proponer un modelo simple, es proporcionar pruebas de que los métodos propuestos funcionan y son congruentes con modelos conocidos.

En este caso, se propone un modelo de 3 capas como el que se muestra en la Tabla 4, para obtener la respuesta 1D con el arreglo de SPD con FS, y adicionalmente, una prueba con el arreglo Schlumberger, que será en lo procedente, el arreglo conocido que será un referente para comparar. Los datos del arreglo Schlumberger fueron modelados con el software EarthImager 1D (Advanced Geosciences Inc., 2009), el cual está basado en el método de inversión de mínimos cuadrados. Para los datos del arreglo de SPD para FS, se recurrió a la subrutina RESIDIR (Anexo A.4).

**Tabla 4. Modelo de 3 capas.**

| # Capa | Rho ( $\Omega\text{m}$ ) | $m$ (mV/V) | Espesor (m) |
|--------|--------------------------|------------|-------------|
| 1      | 10                       | 25         | 3           |
| 2      | 100                      | 50         | 15          |
| 3      | 10                       | 25         |             |

Los datos de este modelo, cuyas curvas son suaves y sin ruido (Figura 4-1), son curvas ideales en todo trabajo de interpretación de datos geoelectricos. De hecho, es recomendable suavizar los datos aparentes con algún filtro antes de invertir, lo cual, es una subrutina que se integró en el programa de inversión de esta tesis. El software comercial no contiene ninguna función de filtro para datos 1D ni 2D (Advanced Geosciences Inc., 2009).

Como se aprecia en la Figura 4-1, el modelo con el arreglo Schlumberger muestra el punto más alto de la curva por debajo del punto más alto de la curva de FS, lo cual muestra que el arreglo de fuentes enfocadas se aproxima más a los valores de resistividad del modelo original que el arreglo convencional, incluso desde los datos aparentes. Además, el caso de la anomalía de FS, presenta cambios de dirección más agudos que la del arreglo Schlumberger.

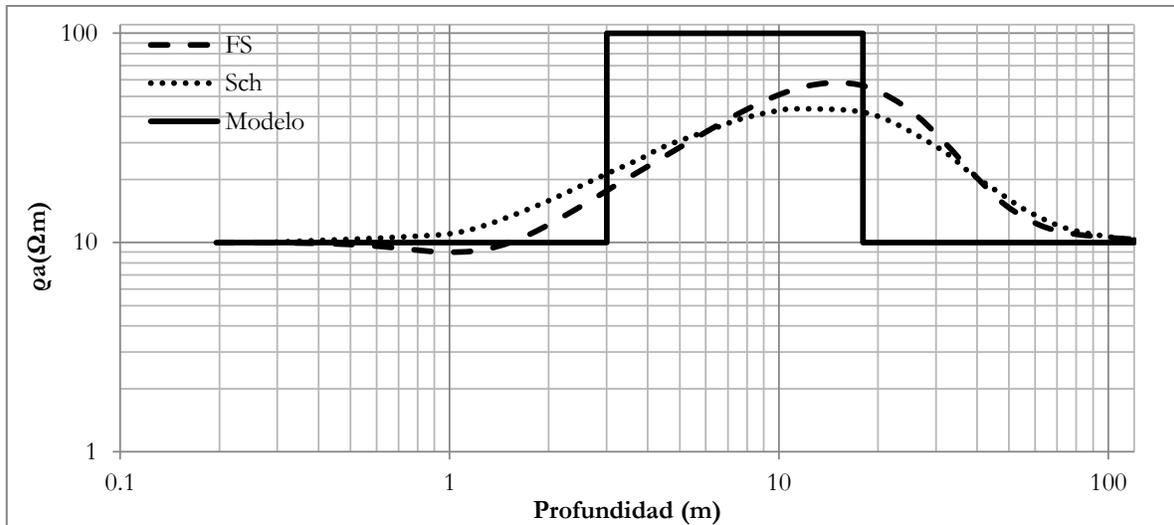


Figura 4-1 Resistividades aparentes del modelo de 3 capas de la Tabla 1, para un arreglo de Fuentes Enfocadas (FS) y Schlumberger (Sch).

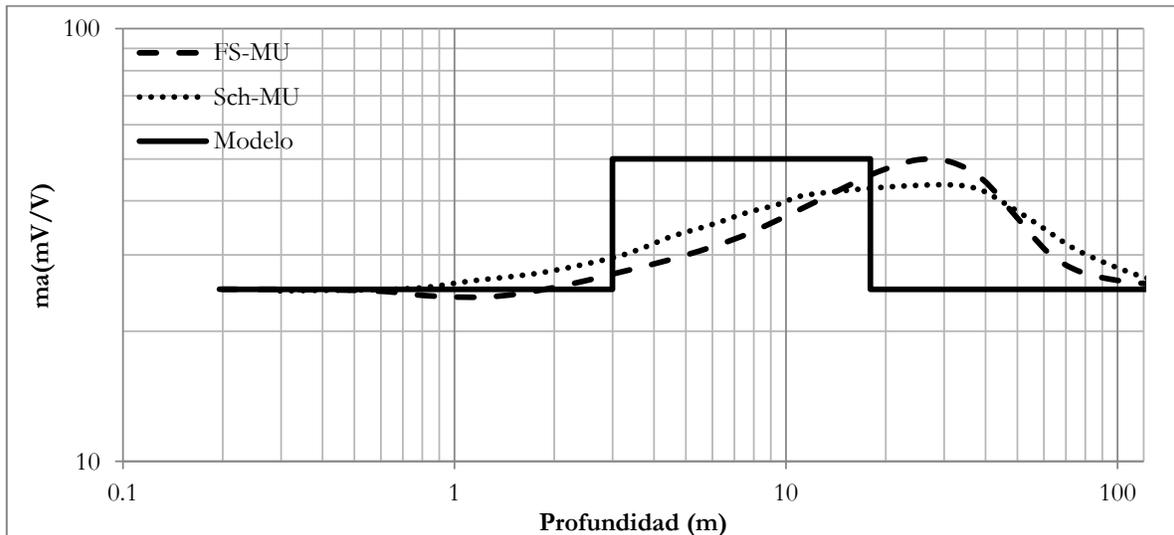


Figura 4-2. Cargabilidades aparentes del modelo de 3 capas de la Tabla 1, para un arreglo de Fuentes Enfocadas (FS-MU) y Schlumberger (Sch-MU).

Algo semejante ocurre para el caso de los datos de PI (Figura 4-2), sólo que en este caso, los datos de FS sí alcanzan los valores máximos de cargabilidad de las capas, a diferencia de los datos del arreglo Schlumberger, los cuales se mantienen por debajo en su punto más alto.

## 4.2 Modelo de Oldenburg y Li (1994)

Para probar el programa de inversión con un modelo más complicado y que contenga datos de cargabilidad, se recurrió al modelo de la Figura 4-3 de Oldenburg y Li (1994), el cual fue

modificado como se observa en la Figura 4-4. Este modelo es considerado como “bastante” simple. Sin embargo, se debe considerar que contiene cambios laterales y verticales, que incluyen cortes geoelectricos complicados para la interpretación de la cargabilidad, como se mencionó en el capítulo 2.

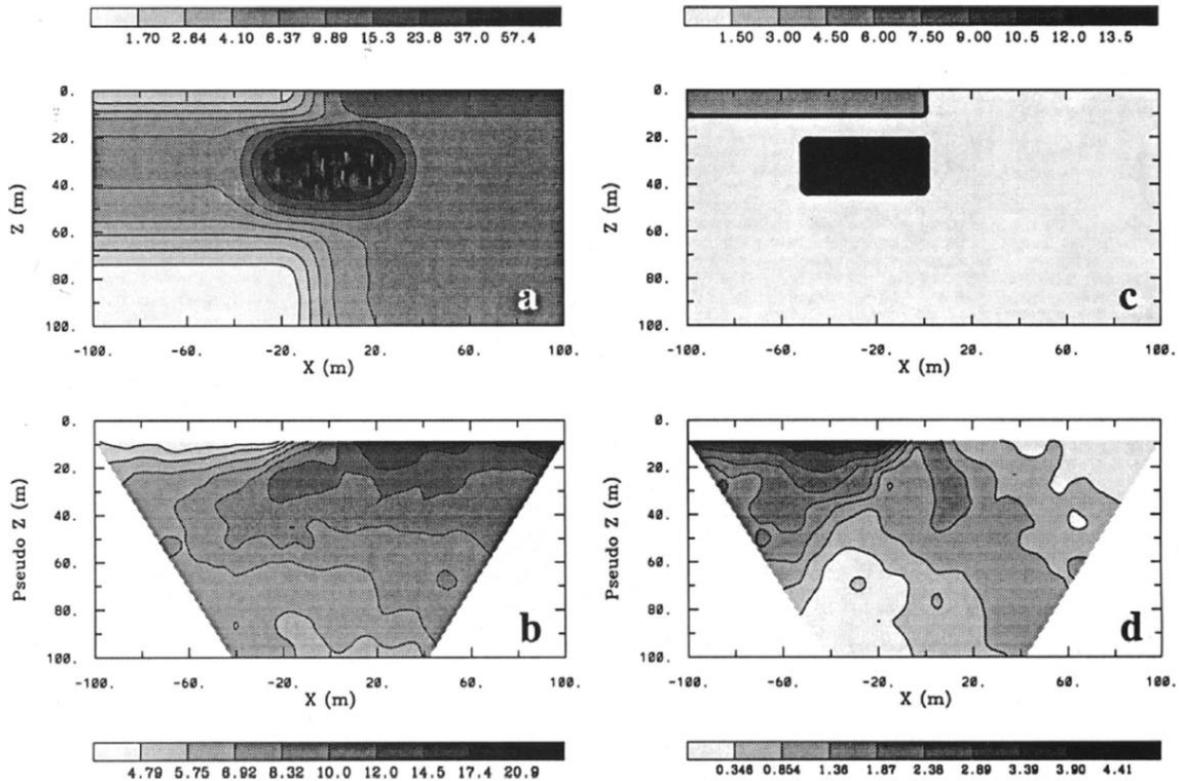


Figura 4-3. Modelo de Oldenburg y Li (1994) en tonos de escala de grises para resistividad y cargabilidad (a y c) y sus datos aparentes en pseudosección (b y d) respectivamente.

Recordando que la profundidad de SPD para FS es 25% menor que el arreglo dipolo-dipolo tradicional, se extendieron tanto en la profundidad como en la longitud X las dimensiones del modelo de la Figura 4-3, tanto en el modelo de resistividad como de cargabilidad, como se presenta en la Figura 4-4.

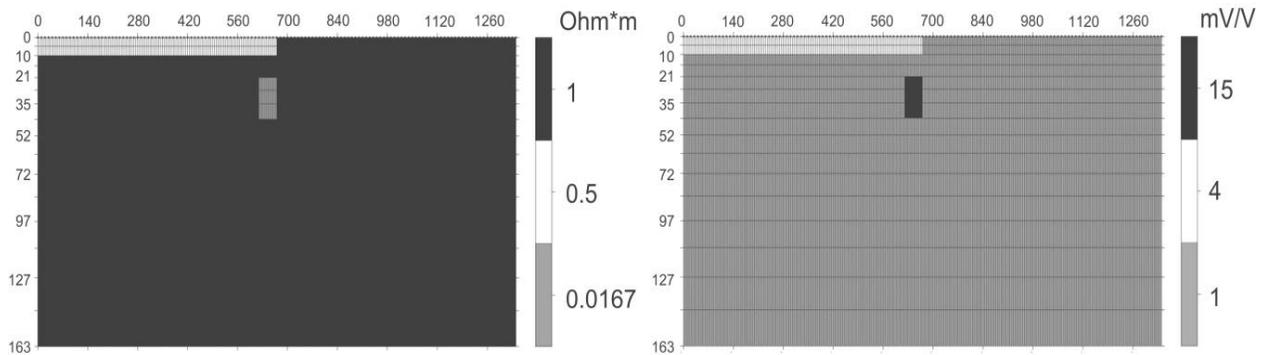


Figura 4-4. Modelo modificado de Oldenburg y Li de 1994. Izquierda: modelo de resistividades. Derecha: modelo de cargabilidades.

#### 4.2.1 Muestra de un perfil del modelo modificado de Oldenburg y Li (1994)

Para conocer la respuesta de un perfil del modelo de la Figura 4-4, se modeló dicha respuesta con el corte geoelectrico 1D de la posición  $x = 640$  m con los parámetros mostrados en la Tabla 5. La respuesta del arreglo de SPD para FS fue modelada con el programa RESIDIR (Anexo A.4) y para el arreglo Schlumberger, se empleó el programa de EarthImager 1D (Advanced Geosciences Inc., 2009). Las respuestas de los dos arreglos se encuentran en las Figuras 4-5 y 4-6. En cualquier otra posición del modelo, se hubiera tenido un corte geoelectrico más simple, de 2 o 1 capa, lo cual no sería representativo de la complejidad del modelo, para eso, ya se probó con el modelo de 3 capas en la primera sección de este capítulo.

**Tabla 5. Modelo del perfil en  $x=640$ m**

| # Capa | $\rho$ ( $\Omega$ m) | $m$ (mV/V) | Espesor (m) |
|--------|----------------------|------------|-------------|
| 1      | 0.5                  | 4          | 10          |
| 2      | 1                    | 1          | 10          |
| 3      | 0.167                | 15         | 25          |
| 4      | 1                    | 1          |             |

Como puede apreciarse, se tiene un corte eléctrico tipo KH en la Figura 4-5. La curva de resistividades aparentes de SPD para FS muestra 3 cambios de inflexión que se acercan a los cambios de las 4 capas del corte geoelectrico. En el caso del arreglo Schlumberger, la curva apenas presenta 2 puntos de inflexión con lo que se observa un estilo de curva de 3 capas.

Por otro lado, en el caso de los datos aparentes de cargabilidad (Figura 4-6), los datos correspondientes al arreglo de FS alcanzan los valores máximos y mínimos del modelo y los puntos de inflexión se ajustan de manera cercana a los cambios de capa. Para el caso del arreglo Schlumberger, se puede describir que los cambios de inflexión de la curva son menos pronunciados que la de FS con lo que a simple vista es difícil percibir el cambio entre la primera y la segunda capa.

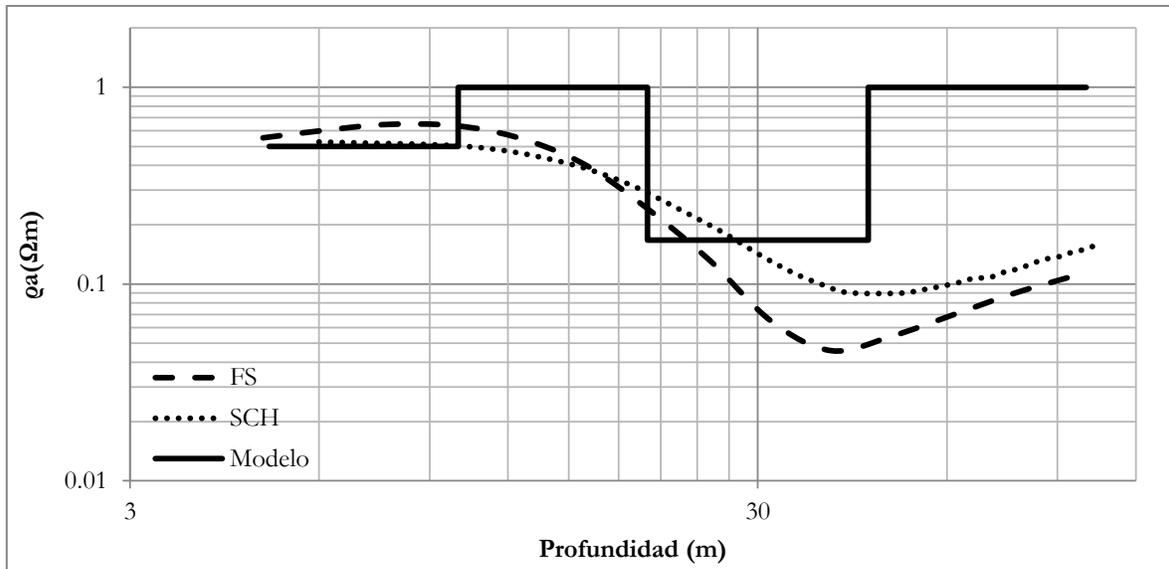


Figura 4-5. Datos de resistividad aparente tomados con el arreglo de SPD para FS (FS) y con el Schlumberger (SCH), obtenidos a partir del modelo de 4 capas tomado a partir del modelo modificado de Oldenburg y Li de 1994 correspondiente a la posición 640m de la Figura 4-4.

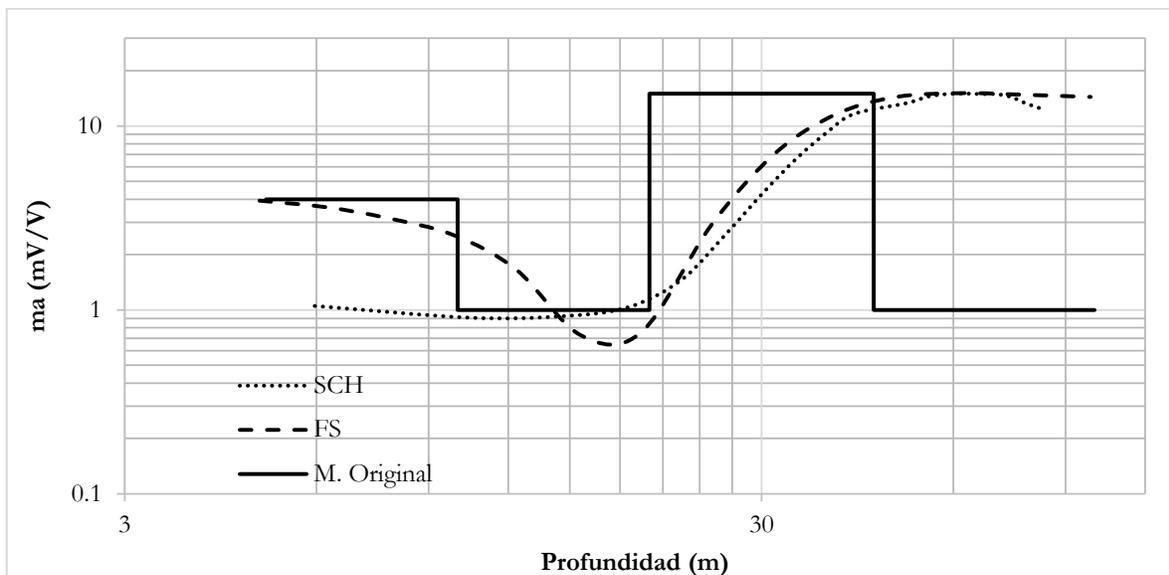


Figura 4-6. Datos aparentes de cargabilidad tomados con el arreglo de SPD para FS (FS-MU) y con el Schlumberger (SCH-MU), obtenidos a partir del modelo de 4 capas tomado a partir del modelo modificado de Oldenburg y Li de 1994 correspondiente a la posición 640m de la Figura 4-4.

#### 4.2.2 Pseudosecciones 2D del modelo modificado de Oldenburg y Li (1994)

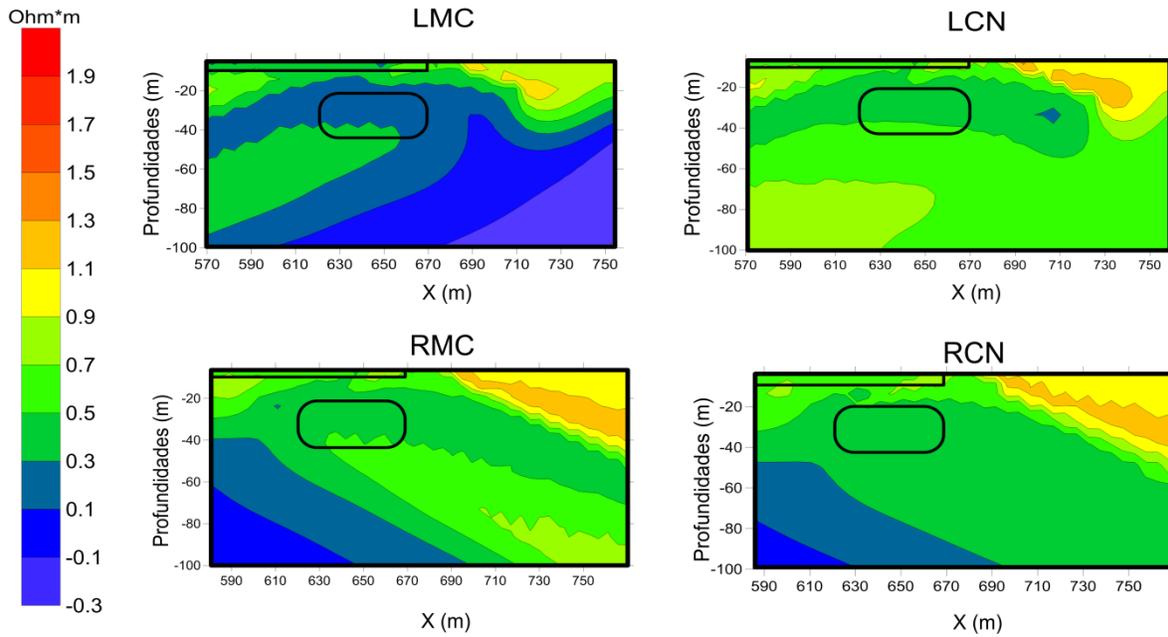
Los datos aparentes 2D fueron obtenidos generando primero archivos de comando por fuente y por canal como se observa de la Figura 2-1 con el software EarthImager 2D (Advanced Geosciences Inc., 2009) que al igual que el EarthImager 1D emplea mínimos cuadrados para invertir. Las pseudosecciones se muestran en la Figura 4-7, y están restringidas en las distancias que se manejaron en el modelo de la Figura 4-3, esto es, 200 m de longitud total y 100 m de profundidad. Estos modelos no fueron creados con ruido aleatorio.

En la Figura 4-7 se encuentran valores negativos de resistividad y cargabilidad. Para el primer caso, se debe aclarar que los datos aparentes originales no contienen datos de resistividad negativa, estos valores pueden explicarse debido al método de interpolación, que para este caso se empleó el de Kriging, lo que significa que sólo aparecen negativos por la presentación gráfica interpolada. En el caso de que sí se tuvieran valores negativos en los arreglos convencionales, estos datos serían considerados como aislados o también conocidos como “outliers” en inglés, los cuales se eliminan del conjunto de datos para evitar errores cuando se inicia el proceso de inversión.

Por otro lado, los valores negativos de cargabilidad sí fueron obtenidos, no son producto del método de interpolación. Para explicar dicho comportamiento, remitimos al lector a ver la Figura 4-3, en donde se muestra el modelo de resistividad se presenta en la zona central (posiciones 620 m a 670 m), un corte tipo KH. El corte geoelectrico tipo K produce, de acuerdo con lo mencionado en el apartado 2.2.1 entre otros factores, valores de cargabilidades negativas, lo cual es corroborado al obtener los datos aparentes como se muestra en la Figura 4-7.

Una vez obtenidos los datos aparentes (Fig. 4-7), se calcularon los datos de las segundas derivadas y fuentes enfocadas con las fórmulas de los parámetros expresados en el capítulo 2, de modo que se obtuvieron datos por perfil cada 10m, siendo en total 21 perfiles. El primer perfil se encuentra en la coordenada  $x = 570$  m y el último en  $x = 770$  m. En esta figura se muestra en las pseudosecciones de cargabilidad, valores muy bajos en la zona cercana del cuerpo central, que de acuerdo con lo visto en el capítulo 2, esto se debe a los efectos que causan las distribuciones de las resistividades.

**RESISTIVIDADES**



**CARGABILIDADES**

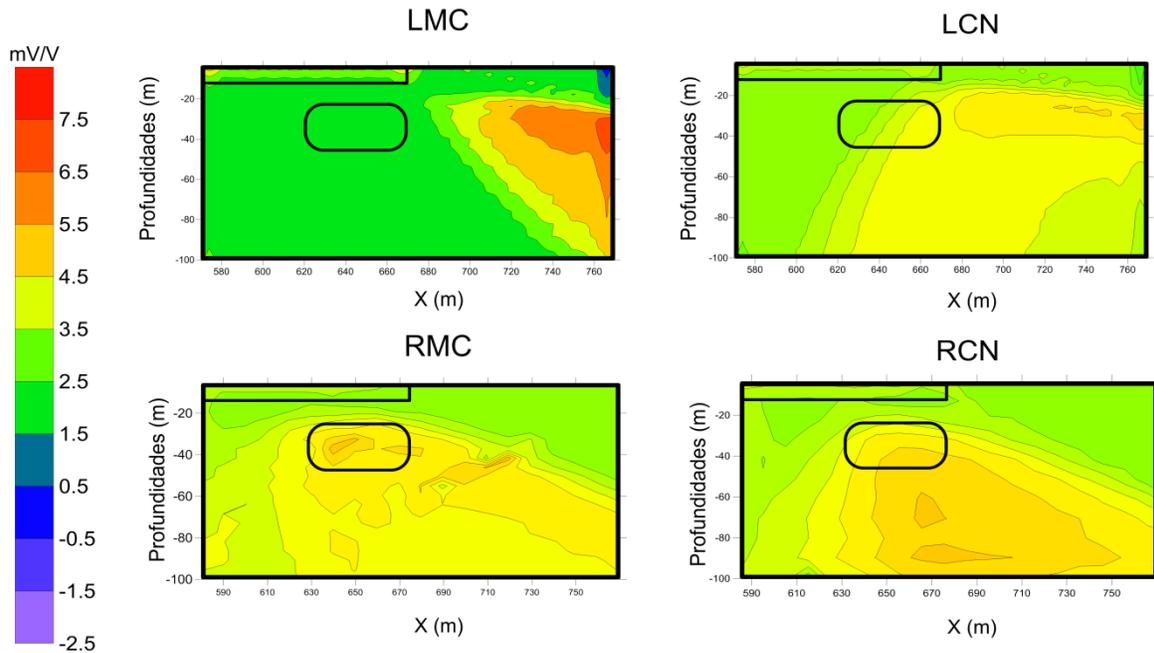


Figura 4-7. Datos aparentes por canal por fuente, modelados en EarthImager (2D) a partir del modelo modificado de Oldenburg y Li (1994). L representa a la fuente izquierda y R a la derecha. MC corresponde al canal 1 y CN al canal 2, de acuerdo con la Figura 2-1. Los rectángulos en línea gruesa, representan a los cuerpos del modelo original.

# CAPÍTULO

# 5.

## RESULTADOS Y SU DISCUSIÓN

La interpretación de datos 1D en métodos eléctricos en la literatura del estado del arte contemporáneo ha sido casi inexistente, debido a los avances tecnológicos en los equipos de medición y en el uso de software cada vez más sofisticado. En el trabajo presente, dada la propuesta del uso de FS, se ha recurrido a las ideas de los años en los que abundaban dichos perfiles 1D, como se verá en este apartado. En palabras del Dr. Kurt Strack, quien escribió el prefacio del libro titulado *Transit Geo-electromagnetics* (Kamenetski, 2011): “muchas ideas de las décadas pasadas fueron reinventadas”, hablando de métodos electromagnéticos en el dominio del tiempo. Con esto se establece la necesidad de regresar a los orígenes para mejorar y crear propuestas para utilizar las herramientas de nuestros tiempos.

Sin más preámbulo, en este capítulo se presentarán primero los resultados de las inversiones de los datos con 1 canal, mostrados en el Capítulo 4. Con esto, se observarán los resultados de tomografías tradicionales de una fuente usando el método de inversión de mínimos cuadrados que es uno de los métodos más comerciales. Después se muestran los resultados de aplicar las SPD y FS a datos aparentes, que es el paso previo de la inversión 1D de dichos datos con el trabajo de esta tesis. Más adelante se muestran los efectos del filtro usado, que se incorporó al programa de inversión. Por último, se presentan pruebas adicionales con otros arreglos usando el mismo modelo para comparar sus resultados con la propuesta de tesis.

### 5.1 Resultados de inversiones del modelo de 3 capas

El modelo teórico de 3 capas presentado en el capítulo anterior sentó las bases para probar el programa de inversión del trabajo presente. En esta sección, se presentan las pruebas de la

inversión del modelo mencionado con datos sin ruido y, otra prueba con datos que contienen ruido aleatorio de hasta 10%.

5.1.1 Resultados de inversiones del modelo de 3 capas sin ruido en los datos aparentes

A continuación se presentan en la Tabla 6, los resultados de las inversiones del modelo de la Figura 4-1 (del capítulo 4), con el programa de fuentes enfocadas y el de EarthImager (Advanced Geosciences Inc., 2009), para el arreglo Schlumberger.

**Tabla 6. Resultados de los modelos de 3 capas sin ruido aleatorio**

| #<br>Capa  | Modelo original                |               |                | Modelo invertido con FS     |               |                | Modelo invertido con Schlumberger |               |                |
|------------|--------------------------------|---------------|----------------|-----------------------------|---------------|----------------|-----------------------------------|---------------|----------------|
|            | $\rho$<br>( $\Omega\text{m}$ ) | $m$<br>(mV/V) | Espesor<br>(m) | $\rho$ ( $\Omega\text{m}$ ) | $m$<br>(mV/V) | Espesor<br>(m) | $\rho$ ( $\Omega\text{m}$ )       | $m$<br>(mV/V) | Espesor<br>(m) |
| 1          | 10                             | 25            | 3              | 10                          | 25            | 3              | 9.86                              | 25.02         | 2.53           |
| 2          | 100                            | 50            | 15             | 100                         | 50            | 15             | 65.47                             | 46.67         | 23.34          |
| 3          | 10                             | 25            |                | 10                          | 25            |                | 9.89                              | 24.64         |                |
| <b>RMS</b> |                                |               |                | <b>1.2</b>                  | <b>0.86</b>   |                | <b>2.6</b>                        | <b>3.2</b>    |                |

Tanto en el software comercial EarthImager como en el de inversión creado para este trabajo de tesis, es posible modificar el número de capas. Sin embargo, en el de FS es el usuario quien decide desde el inicio, en el archivo de datos de entrada, el número de capas a modelar. En el caso del EarthImager 1D, el software propone un modelo de n capas inicial y después, si el usuario decide, puede apilar varias capas contiguas con resistividades parecidas. Para el caso del modelo de 3 capas propuesto invertido con EarthImage 1D, se optó por apilar capas, de modo que se obtuviera el menor error RMS con el menor número de capas (Figura 5-1).

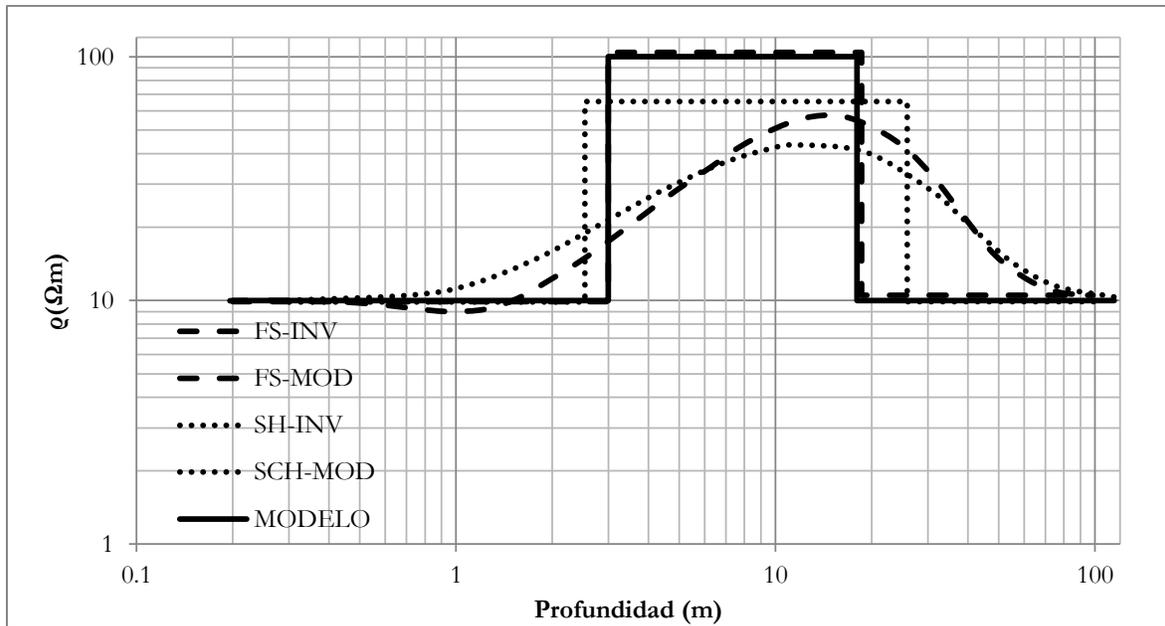


Figura 5-1. Curvas de resistividad del arreglo de SPD para FS (FS-INV) con su respectivo modelo de inversión (FS-MOD) y el modelo de la inversión con arreglo Schlumberger (SCH-INV) con su correspondiente modelo invertido (SCH-MOD). El modelo original de 3 capas corresponde al de la Figura 4-1 (MODELO).

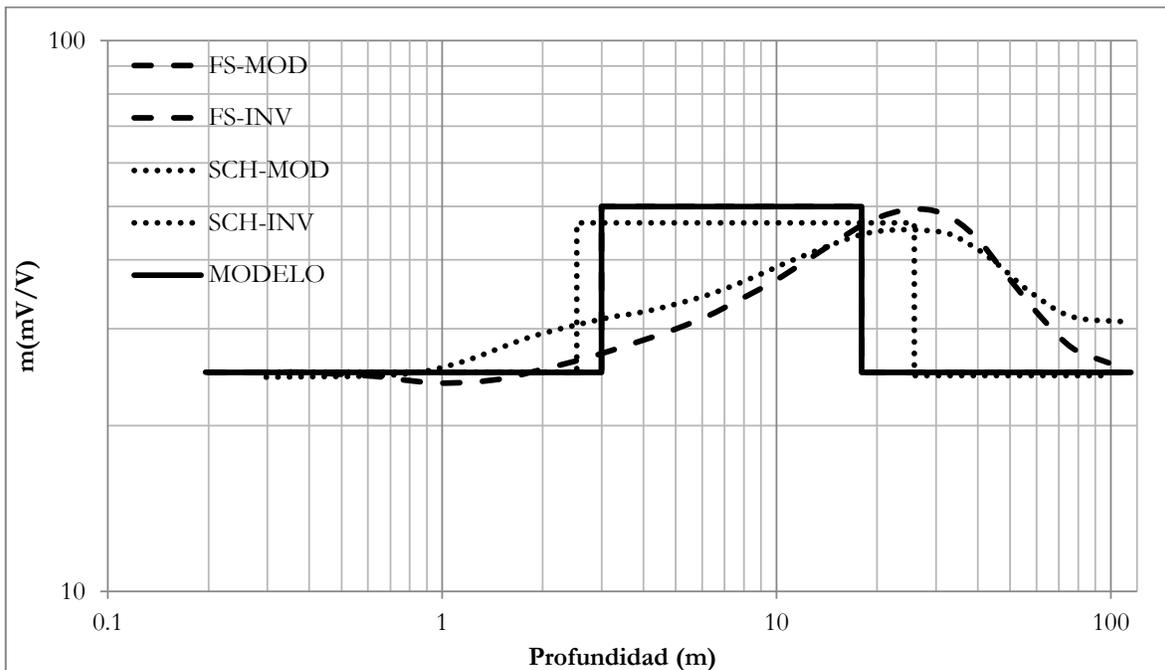


Figura 5-2. Curvas de cargabilidad del arreglo de SPD para FS invertido (FS-INV) con su respectivo modelo de inversión (FS-MOD) y el modelo de la inversión con arreglo Schlumberger (SCH-INV) con su correspondiente modelo invertido (SCH-MOD). El modelo original de 3 capas corresponde al de la Figura 4-1 (MODELO).

5.1.2 Resultados de inversiones del modelo de 3 capas con ruido aleatorio del 10% en los datos

Debido a que en la realidad es usual que los datos tomados en campo presenten ruido aleatorio (además de los ruidos sistemáticos y por corrientes telúricas) a los datos aparentes obtenidos con el programa de modelo directo, tanto de resistividad como de cargabilidad de SPD para FS (Anexos A.4 Y A.5), se les añadió 10 % de ruido de manera aleatoria con la subrutina Aleat (Anexo A.13). En el caso del arreglo Schlumberger, se agregó ruido aleatorio con una función de Excel, dado que el programa de modelación del programa EarthImager no lo ofrece en su menú de opciones.

**Tabla 7. Resultados de los modelos de 3 capas con ruido aleatorio de 10%**

| #<br>Capa  | Modelo original                |               |                | Modelo invertido con FS     |               |                | Modelo invertido con Schlumberger |               |                |
|------------|--------------------------------|---------------|----------------|-----------------------------|---------------|----------------|-----------------------------------|---------------|----------------|
|            | $\rho$<br>( $\Omega\text{m}$ ) | $m$<br>(mV/V) | Espesor<br>(m) | $\rho$ ( $\Omega\text{m}$ ) | $m$<br>(mV/V) | Espesor<br>(m) | $\rho$ ( $\Omega\text{m}$ )       | $m$<br>(mV/V) | Espesor<br>(m) |
| 1          | 10                             | 25            | 3              | 10                          | 25            | 3              | 9.82                              | 24.57         | 2.37           |
| 2          | 100                            | 50            | 15             | 100                         | 50            | 15             | 54.19                             | 47.05         | 28.42          |
| 3          | 10                             | 25            |                | 10                          | 25            |                | 9.64                              | 24.31         |                |
| <b>RMS</b> |                                |               |                | <b>3.31</b>                 | <b>6.22</b>   |                | <b>6.95</b>                       | <b>15.06</b>  |                |

En el caso de fuentes enfocadas, no hubo necesidad de iniciar el proceso de inversión, ya que el programa filtra los datos de entrada para suavizarlos, por lo que, tanto para resistividad (Figura 5-3) como para cargabilidad (Figura 5-4), el modelo final fue igual al inicial (ver Tabla 7).

Para el arreglo Schlumberger, como se puede observar de la Figura 5-5, las capas primera y tercera de la inversión de resistividad (SCH-INV) son casi iguales a las del modelo original, pero la segunda tiene un espesor casi del doble de tamaño y una resistividad casi de la mitad del modelo original.

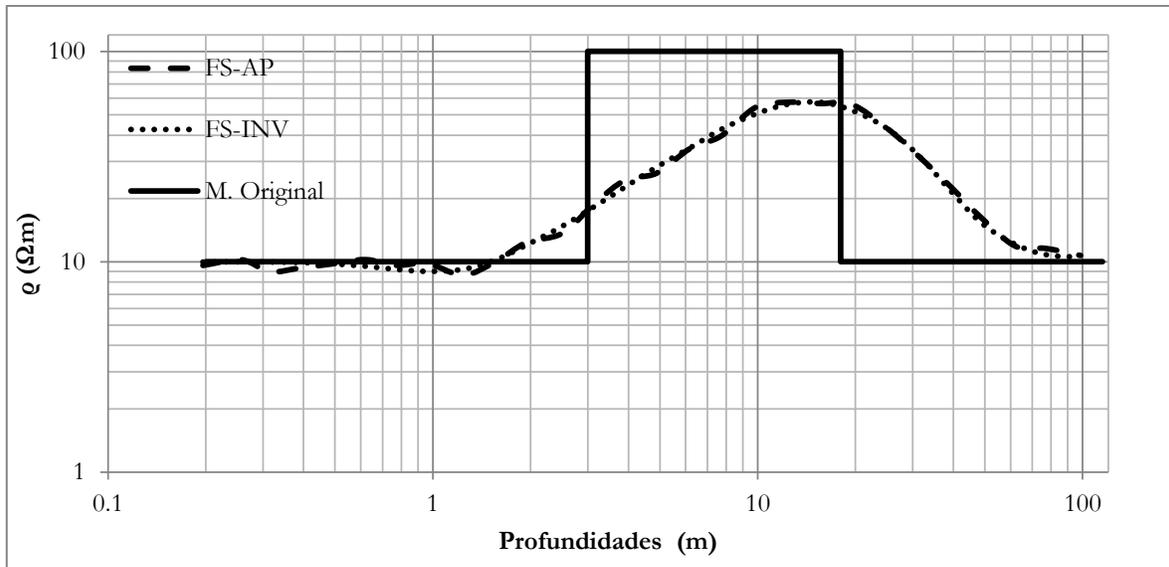


Figura 5-3. Curvas de resistividad aparente (FS-AP) y de resistividad invertida (FS-INV) del arreglo de SPD para FS con el modelo de 3 capas con ruido añadido de 10% de la Figura 4-1 (M. Original).

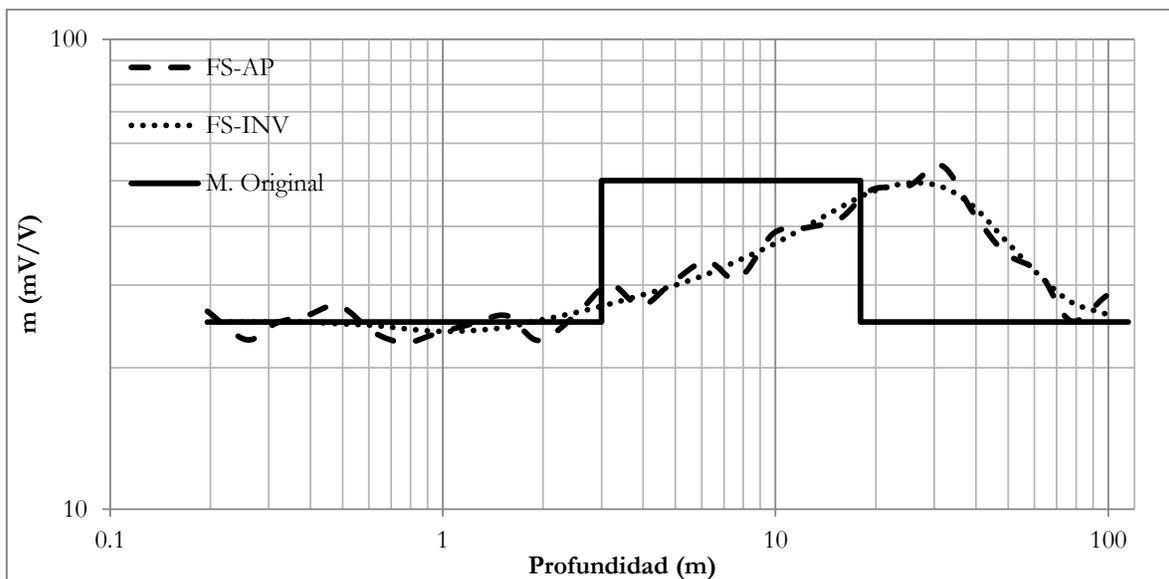


Figura 5-4. Curvas de cargabilidad aparente con ruido (FS-AP) y de cargabilidad invertida (FS-INV) del arreglo de SPD para FS con el modelo de 3 capas con ruido añadido de 10% de la Figura 4-1 (M. Original).

En el caso de los datos de PI, tanto en FS como en el arreglo Schlumberger, el ajuste presenta mayor error RMS en general que para resistividad, siendo mayor el error para Schlumberger que para FS.

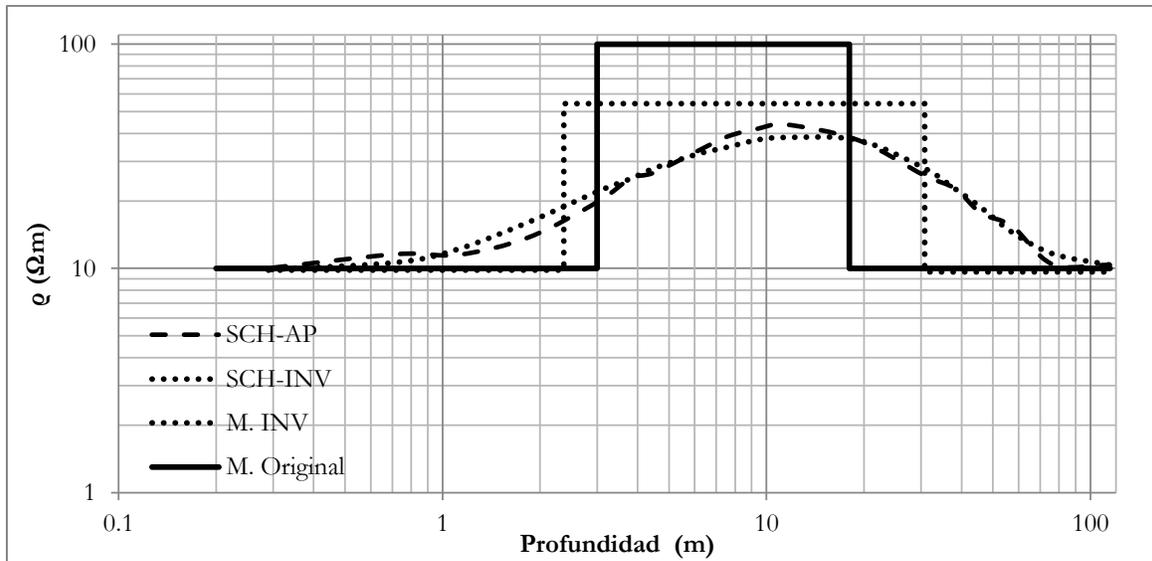


Figura 5-5. Curvas de resistividad aparente (SCH-AP) y de resistividad invertida (SCH-INV) del arreglo Schlumberger con el modelo de 3 capas con ruido añadido de 10% de la Figura 4-1 (M. Original) y el modelo de la inversión con arreglo Schlumberger (M. INV).

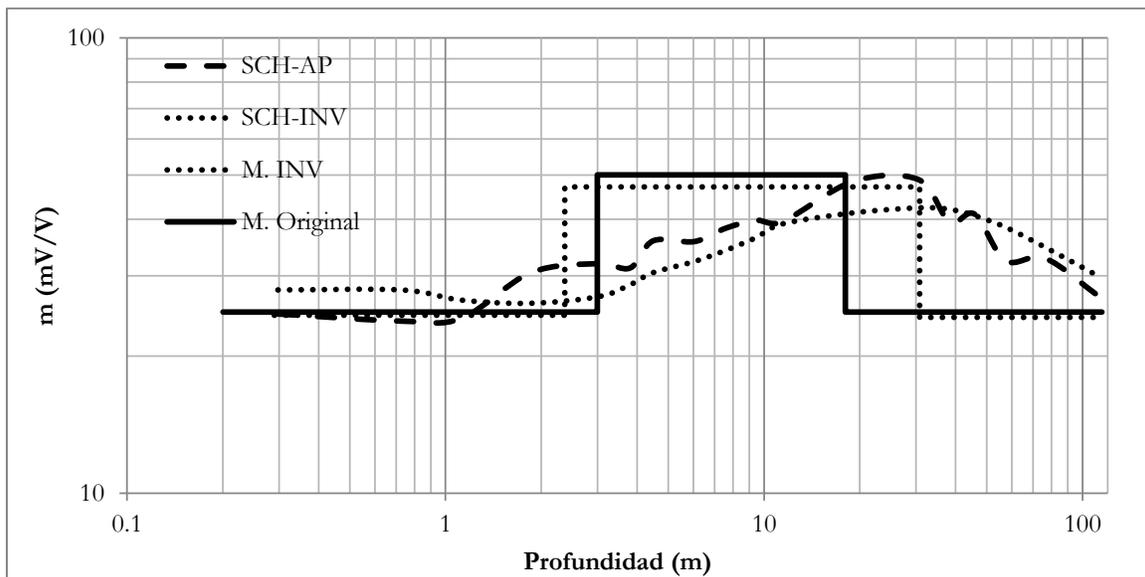


Figura 5-6. Curvas de cargabilidad aparente (SCH-AP) y de resistividad invertida (SCH-INV) del arreglo Schlumberger con el modelo de 3 capas con ruido añadido de 10% de la Figura 4-1 (M. Original) y el modelo de la inversión con arreglo Schlumberger (M. INV).

## 5.2 Resultados del modelo modificado de Oldenburg y Li (1994)

En esta sección, se presentan los resultados de las inversiones del modelo modificado de Oldenburg y Li (1994). Primero, los resultados del perfil de la posición 640m con los arreglos

Schlumberger y de SPD para FS, con datos modelados sin efectos laterales (calculados conforme a la sección 4.2.1 del Capítulo 4). Después, se presentan los datos invertidos 2D con el programa EarthImager por canal, por fuente, para mostrar las respuestas que se tendrían con el arreglo dipolo-dipolo convencional y con ello, establecer la referencia comparativa. Más adelante, se muestran los resultados de los datos del perfil de la posición 640m, pero con datos que presentan efectos laterales, producidos por el modelo completo 2D, cuyos datos aparentes fueron modelados con el programa EarthImager 2D.

### 5.2.1 Resultados del modelo del perfil de la posición 640m sin efectos laterales

Los resultados de inversión del modelo de la Tabla 2, se muestran en la Tabla 8 y las Figuras 5.7 y 5.8. El error mínimo que se obtuvo tanto para resistividad como para cargabilidad fue del arreglo de FS con RMS de 2.71% y 3.17% respectivamente, mientras que para el arreglo Schlumberger es de 6.1 y 13.8%. La diferencia entre estos dos arreglos es bastante significativa. Si se tuviera que elegir el mejor modelo a juzgar por el error RMS, el modelo con arreglo SPD para FS sería el mejor modelo.

**Tabla 8. Resultados de modelos de inversión 1D con arreglos Schlumberger y SPD para FS del modelo de 4 capas, a partir de los datos de un perfil (posición 640 m) del modelo modificado de Oldenburg y Li (1994), sin efectos laterales.**

| #<br>Capa  | Modelo original                |               |                | Modelo invertido con FS     |               |                | Modelo invertido con Schlumberger |               |                |
|------------|--------------------------------|---------------|----------------|-----------------------------|---------------|----------------|-----------------------------------|---------------|----------------|
|            | $\rho$<br>( $\Omega\text{m}$ ) | $m$<br>(mV/V) | Espesor<br>(m) | $\rho$ ( $\Omega\text{m}$ ) | $m$<br>(mV/V) | Espesor<br>(m) | $\rho$<br>( $\Omega\text{m}$ )    | $m$<br>(mV/V) | Espesor<br>(m) |
| 1          | 0.5                            | 4             | 10             | 0.501                       | 4             | 9.82           | 0.58                              | 1.19          | 8.07           |
| 2          | 1                              | 1             | 10             | 1.06                        | 1             | 9.63           | 1.069                             | 0.051         | 12.05          |
| 3          | 0.017                          | 15            | 25             | 0.017                       | 15            | 25.1           | 0.018                             | 14.78         | 28.87          |
| 4          | 1                              | 1             |                | 1.08                        | 1             |                | 1.23                              | 1.013         |                |
| <b>RMS</b> |                                |               |                | <b>2.71</b>                 | <b>3.17</b>   |                | <b>6.1</b>                        | <b>13.8</b>   |                |

Los modelos de capas obtenidos con la inversión de SPD con FS de las Figura 5-7 y 5-8, se acercan bastante al modelo original. Para el arreglo Schlumberger, el modelo de capas de resistividad se parece visualmente al modelo original, pero para PI, no ocurre lo mismo.

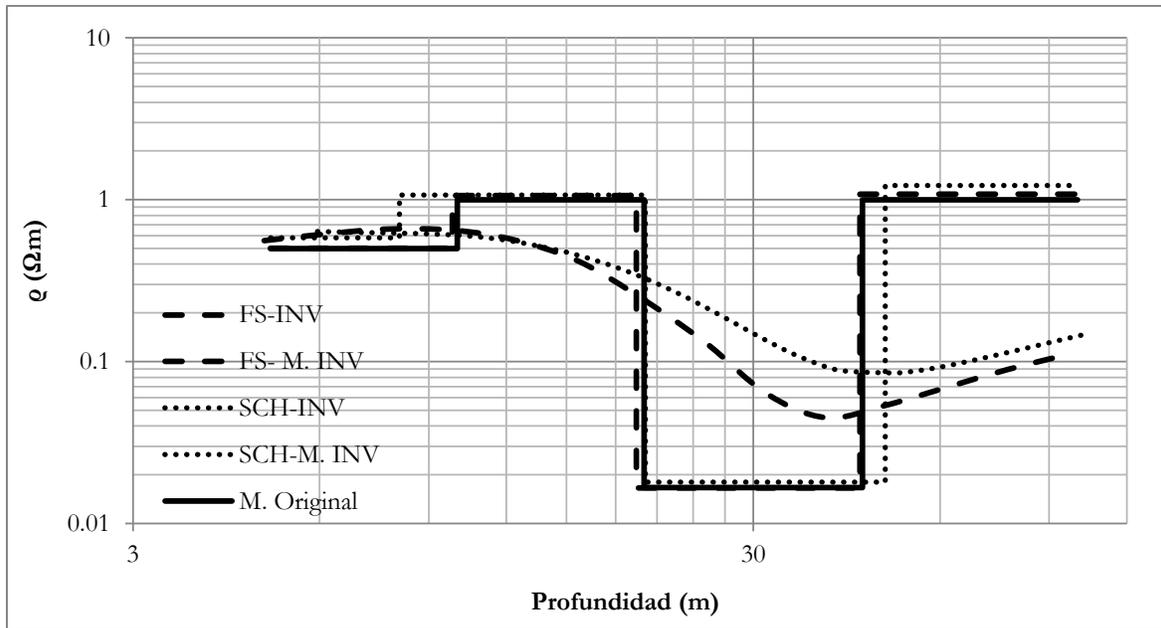


Figura 5-7. Curvas de resistividad invertida del arreglo de SDP para FS (FS-INV) y del arreglo Schlumberger (SCH-INV) con sus respectivos modelos de inversión (FS-M. INV y SCH-M. INV) de la Tabla 5 (M. Original).

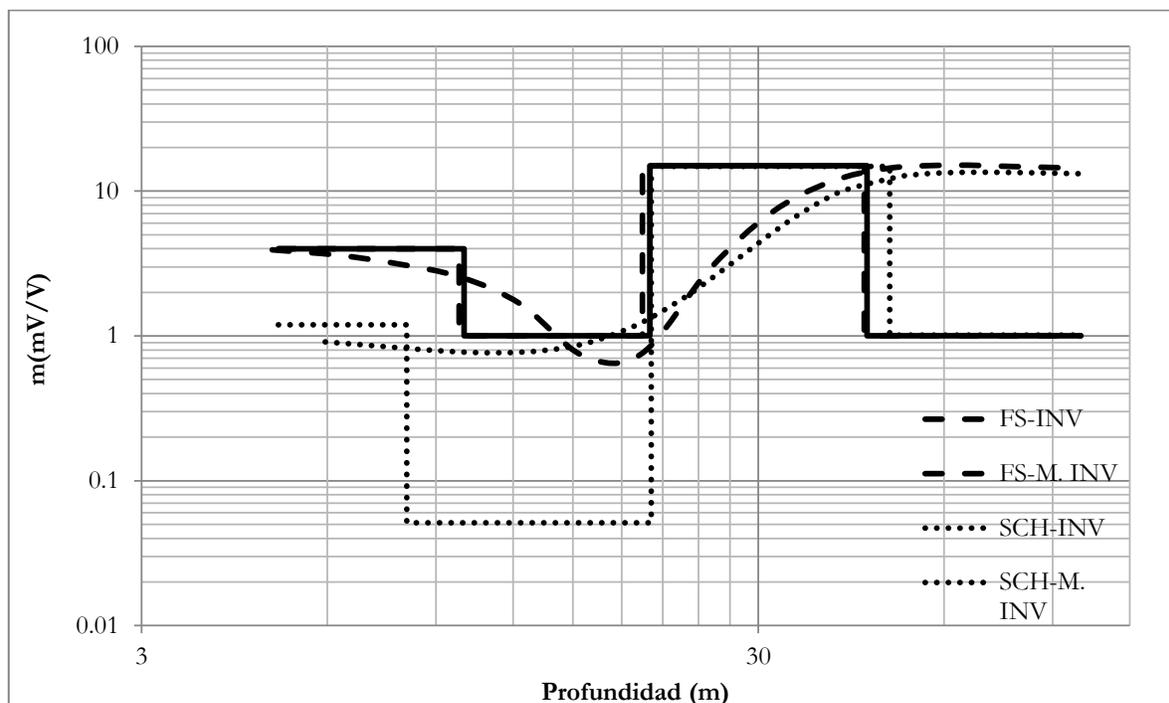


Figura 5-8. Curvas de cargabilidad invertida del arreglo de SDP para FS (FS-INV) y del arreglo Schlumberger (SCH-INV) con sus respectivos modelos de inversión (FS-M. INV y SCH-M. INV) de la Tabla 5 (M. Original).

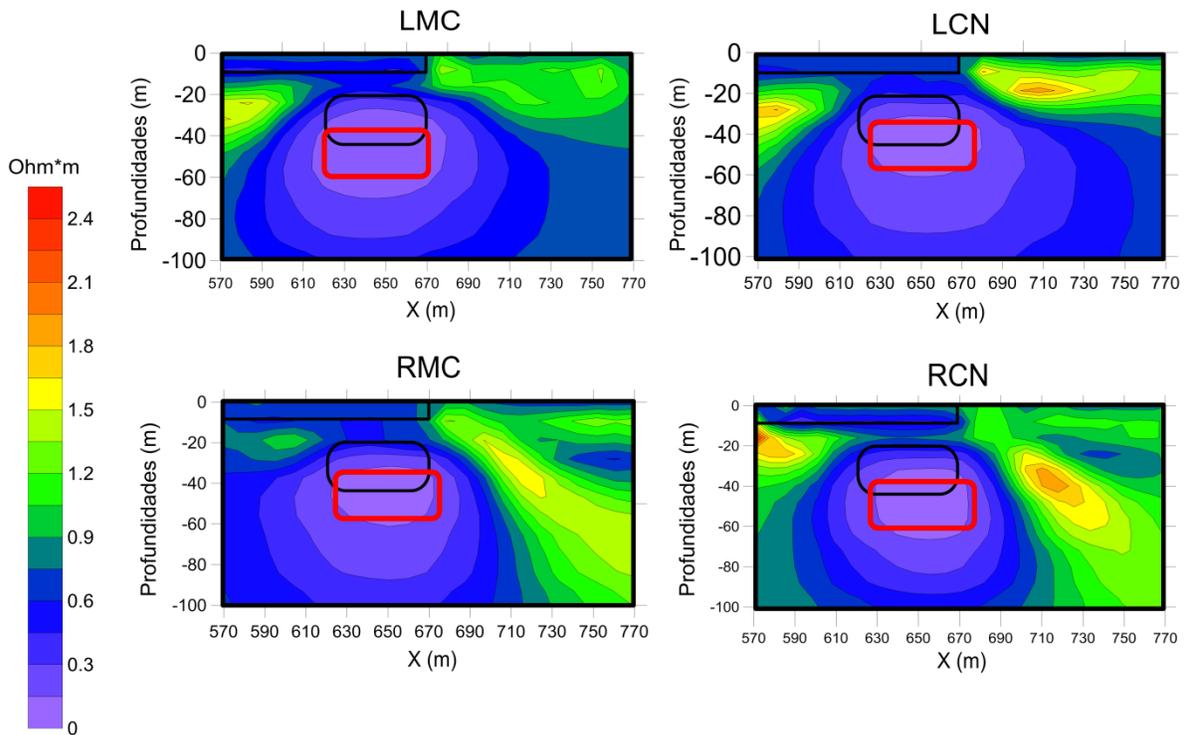
### 5.2.2 Resultados del modelo 2D modificado de Oldenburg y Li (1994).

Se presentan en la Figura 5-9 los resultados de las inversiones por canal por fuente de las pseudosecciones de la Figura 4-7. Como se observa, en las secciones de resistividad, se

aprecian con cierta precisión la capa superior izquierda con límite vertical en el centro de la sección. En el caso del cuerpo rectangular que se encuentra casi al centro, se aprecia una falta de precisión vertical en todos los casos, de modo que se tiene una diferencia casi de 20 m de diferencia entre el modelo original (rectángulos con líneas color negro) con respecto a las anomalías interpretadas (rectángulos con líneas color rojo). Sin embargo, existe consistencia en las 4 secciones de resistividad respecto a la posición del cuerpo en el espacio.

En las secciones de cargabilidad, es un poco más difícil definir el cuerpo superior izquierdo en LCN. Por otro lado, no se puede decir con precisión cuál es el cuerpo rectangular central, en teoría se esperaría ver cuerpos de cargabilidad alta cerca del centro de las secciones, y a juzgar por las anomalías de valores altos, éstas se encuentran en posiciones diferentes en las 4 secciones (rectángulos con líneas en color rojo). Dicho lo anterior, parece ser que las altas cargabilidades no se encuentran en la posición ni horizontal ni vertical esperada.

**RESISTIVIDADES**



**CARGABILIDADES**

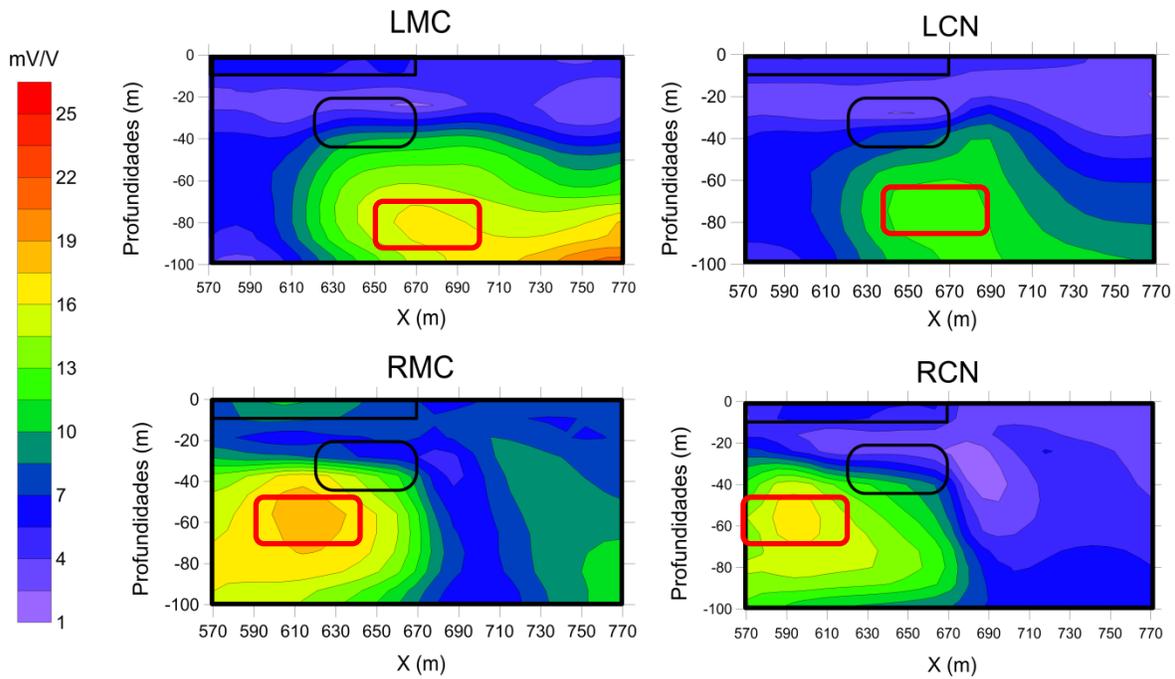


Figura 5-9. Secciones de los datos invertidos con EarthImager 2D. L corresponde a la fuente izquierda; R a la fuente derecha; MC al canal 1 y CN al canal 2. Los rectángulos en líneas gruesas color negro, representan a los cuerpos del modelo original. Los rectángulos en color rojo representan la interpretación de las anomalías.

### 5.2.3 Resultados de datos aparentes de SPD para FS del modelo modificado de Oldenburg y Li (1994)

Una vez establecidas las observaciones de las inversiones tradicionales del modelo, ahora se presentan en la Figura 5-10 las pseudosecciones de los datos aparentes de segundas diferencias de potencial de cada fuente, y para fuentes enfocadas, empleando las ecuaciones mostradas en el capítulo 2 y calculadas con los datos provenientes de la Figura 4-4.

Tanto en las pseudosecciones de SPD por fuente, así como en las de fuentes enfocadas, se observa delimitado el cuerpo o capa de la esquina superior izquierda.

Las mayores resistividades en las SPD por fuente se observan del lado izquierdo y por debajo del cuerpo central original (recuadro negro) para la fuente izquierda (L SPD de la Figura 5-10), y en el centro-lado derecho para la fuente derecha (R SPD de la misma figura).

En el caso de las cargabilidades, las de mayor magnitud se encuentran del lado derecho del cuerpo central original (recuadro negro) para la fuente izquierda, y del lado izquierdo para la fuente derecha. En ambos casos, existe una zona de cargabilidades muy bajas entre la posición más cercana del cuerpo central y la zona de altas cargabilidades. Hay que recordar que en este parámetro, el cuerpo central original tiene un valor de 15 mV/V.

De las pseudosecciones de FS la anomalía asociada al cuerpo central, tanto en resistividad como en cargabilidad, se encuentran centradas en el cuerpo, aunque no es posible delimitarlo verticalmente. Sin embargo, a diferencia de las inversiones de la Figura 5-9, las pseudosecciones de FS de la Figura 5-10 coinciden en la posición horizontal tanto en resistividad como en cargabilidad.

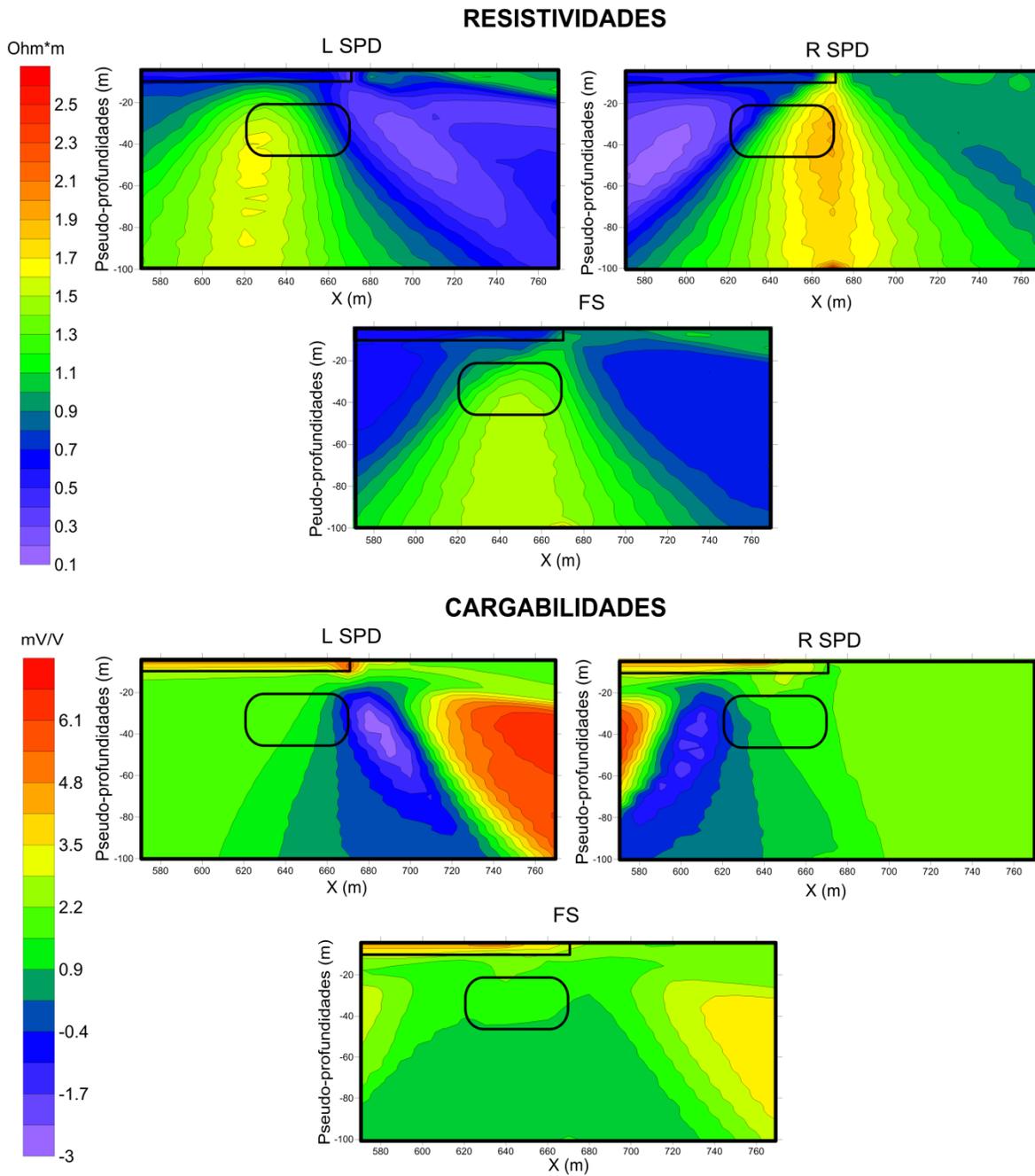


Figura 5-10. Pseudo secciones con datos aparentes de segundas diferencias de potencial (SPD) para las fuentes izquierda (L) y derecha (R), así como para las fuentes enfocadas (FS). Todos estos datos fueron filtrados a profundidad con el método de mínimos cuadrados móviles recursivos. Los rectángulos en líneas gruesas color negro, representan a los cuerpos del modelo original.

#### 5.2.4 Inversión de los perfiles del modelo modificado de Oldenburg y Li (1994), con el programa de inversión 1D

Finalmente, la Figura 5-11 contiene las pseudosecciones de los 21 perfiles 1D invertidos con el programa de esta tesis, interpolados con el método Kriging. Como se observa, en ambas imágenes se aprecia el cuerpo de la esquina superior izquierda. El cuerpo central está delimitado horizontalmente, pero no verticalmente, lo cual puede ser explicado debido a los efectos laterales y/o al esquema de inversión, ya que se está interpolando resultados 1D de datos 2D.

Es importante mencionar que el error de las inversiones para los perfiles de resistividad fue de 6.5 con desviación estándar de 8.8. Para el caso de cargabilidad, el error promedio fue de 8.8 con 3.0 de desviación estándar (ver perfiles en Anexo B). Estos errores son congruentes al observar las pseudosecciones con datos aparentes de fuentes enfocadas de la Figura 5-10, ya que se puede notar que no difieren mucho de las pseudosecciones de datos invertidos con el programa del trabajo presente (Figura 5-10).

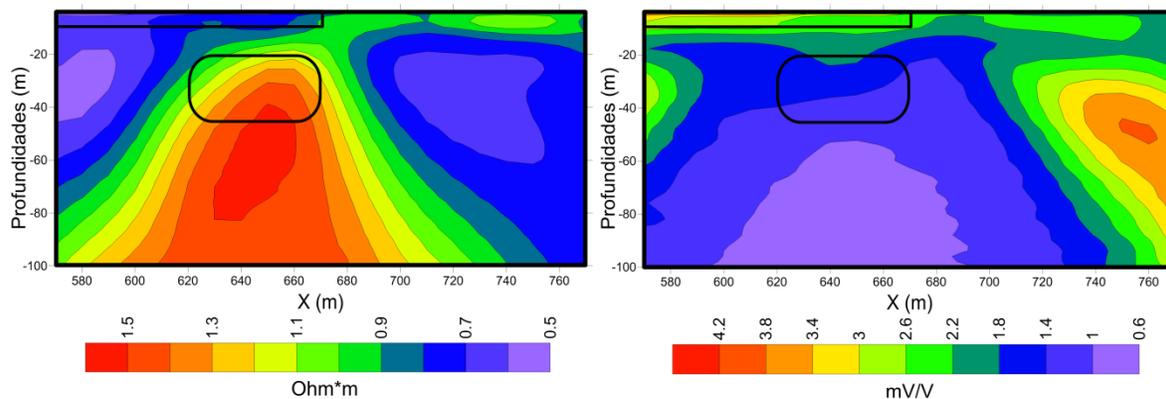


Figura 5-11. Estas pseudosecciones fueron construidas con los datos invertidos con el programa, filtrados en X e Y. Los rectángulos en líneas gruesas color negro, representan a los cuerpos del modelo original.

#### 5.2.5 Resultados del uso del filtro

La Figura 5-12 muestra los datos invertidos en pseudosección sin filtro en la dirección X. Se puede observar que mejoró bastante al ser suavizada, no sólo en la dirección Y (o profundidad) sino también en X, comparada con la Figura 5-11 (con filtro), lo cual muestra la ventaja del uso del filtro Savetzki-Golay mencionado en el capítulo 2, que es uno de los tantos filtros que podrían ser usados. Sin embargo, determinar cuál es el mejor filtro no es motivo de discusión en esta tesis.

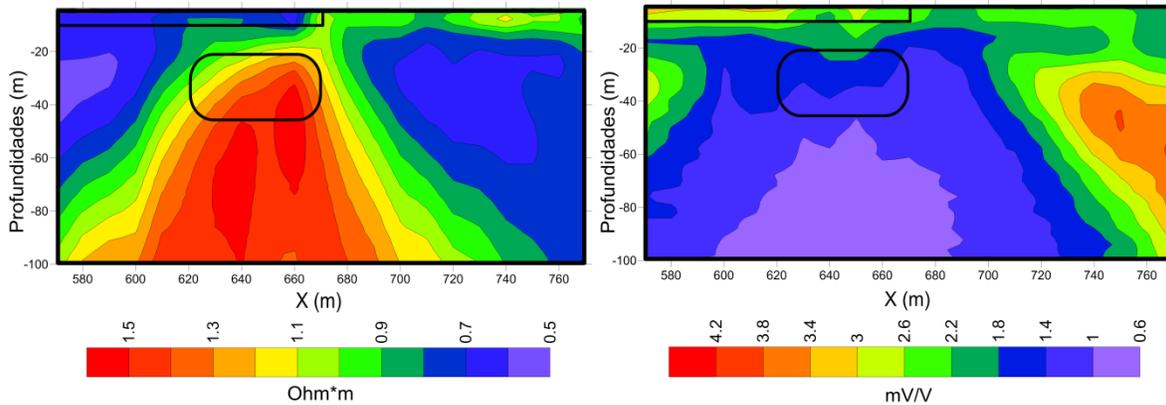


Figura 5-12. Pseudosecciones de resistividad (lado izquierdo) y cargabilidad (lado derecho) construidas con datos invertidos de FS sin filtro en X. Los rectángulos en líneas gruesas color negro, representan a los cuerpos del modelo original.

### 5.2.6 Resultados de datos aparentes de SPD y FS del modelo modificado de Oldenburg y Li (1994) para el perfil de la posición 640m con efectos laterales.

Se presenta los resultados de las inversiones del modelo del perfil de la posición de 640m (que, de hecho es el mismo desde la posición 620 hasta 670), pero con datos aparentes de las modelaciones 2D con el programa de EarthImager 2D, tanto con el arreglo Schlumberger como para FS (Tabla 9).

**Tabla 9. Resultados de modelos de inversión 1D con el arreglo de SPD para FS del modelo de 4 capas, a partir de los datos de un perfil (640m) del modelo modificado de Oldenburg y Li (1994), con efectos laterales.**

| # Capa     | Modelo original             |            |             | Modelo invertido con FS     |             |             | Modelo invertido con Schlumberger |            |             |
|------------|-----------------------------|------------|-------------|-----------------------------|-------------|-------------|-----------------------------------|------------|-------------|
|            | $\rho$ ( $\Omega\text{m}$ ) | $m$ (mV/V) | Espesor (m) | $\rho$ ( $\Omega\text{m}$ ) | $m$ (mV/V)  | Espesor (m) | $\rho$ ( $\Omega\text{m}$ )       | $m$ (mV/V) | Espesor (m) |
| 1          | 0.5                         | 4          | 10          | 0.415                       | 4.6         | 5.53        | 0.522                             | 1.073      | 34.4        |
| 2          | 1                           | 1          | 10          | 1.41                        | 0.23        | 3.89        | 0.923                             | 1.223      | 22.5        |
| 3          | 0.017                       | 15         | 25          | 1.45                        | 0.0003      | 4.8         | 0.146                             | 0.167      | 42.3        |
| 4          | 1                           | 1          |             | 0.508                       | 1.87        | 8.24        | 1.381                             | 3.561      |             |
| 5          |                             |            |             | 2.38                        | 0.0002      | 7.57        |                                   |            |             |
| 6          |                             |            |             | 1.2                         | 0.0001      | 4.34        |                                   |            |             |
| 7          |                             |            |             | 4.12                        | 0.0009      | 14.9        |                                   |            |             |
| 8          |                             |            |             | 1.29                        | 0.87        |             |                                   |            |             |
| <b>RMS</b> |                             |            |             | <b>2.29</b>                 | <b>3.17</b> |             | <b>3.1</b>                        | <b>3.5</b> |             |

Para el caso del perfil de arreglo Schlumberger, se observa que aunque el número de capas fue el adecuado (4), estas capas no corresponden en espesor ni en resistividad o cargabilidad a las originales, como se puede observar en las Figuras 5-13 y 5-14.

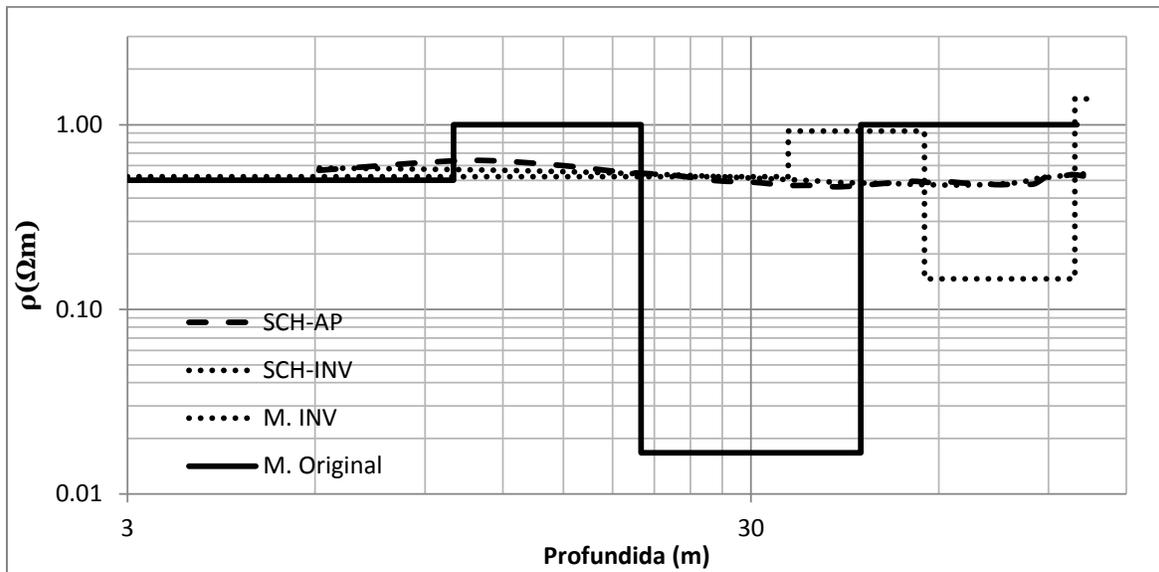


Figura 5-13. Curvas de resistividad aparente con efectos laterales (SCH-AP) y de sus datos invertidos (SCH-INV) del arreglo Schlumberger con el modelo de la Tabla 2 (M. Original) y el modelo de la inversión con arreglo SPD con FS (M. INV).

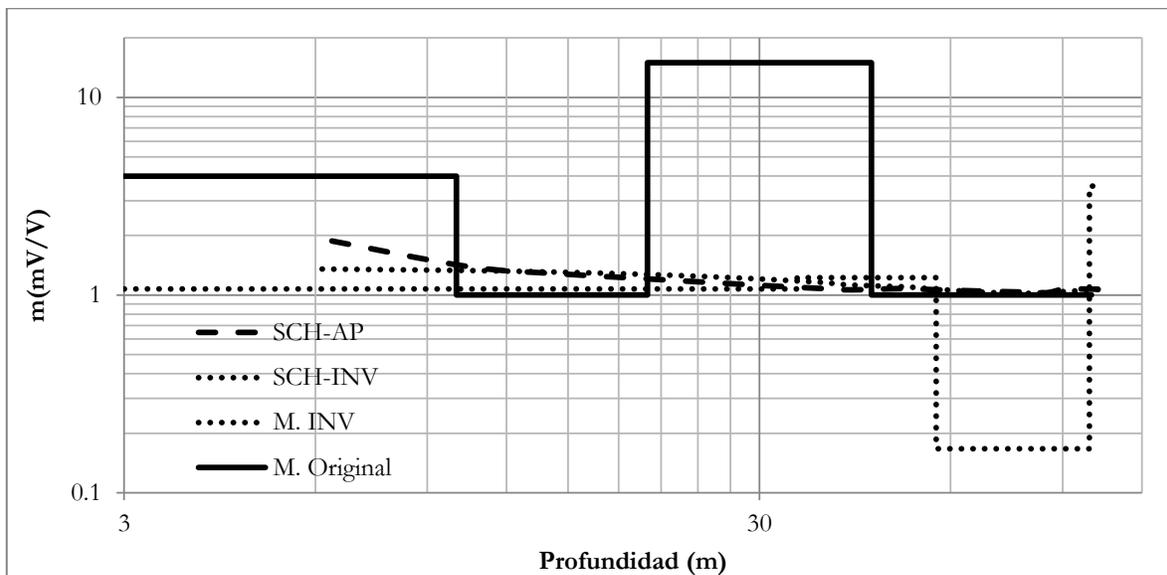


Figura 5-14. Curvas de cargabilidad aparente con efectos laterales (SCH-AP) y de sus datos invertidos (SCH-INV) del arreglo Schlumberger con el modelo de la Tabla 2 (M. Original) y el modelo de la inversión con arreglo SPD con FS (M. INV).

La inversión para FS, tiene mejor ajuste y menor error RMS, así como un modelo de capas en un rango cercano a los datos de resistividad (ver Figura 5-15). Sin embargo, para

cargabilidad no hubo éxito en el modelo de inversión de cargabilidades, en el sentido de que se acercara al modelo original (Figura 5-16).

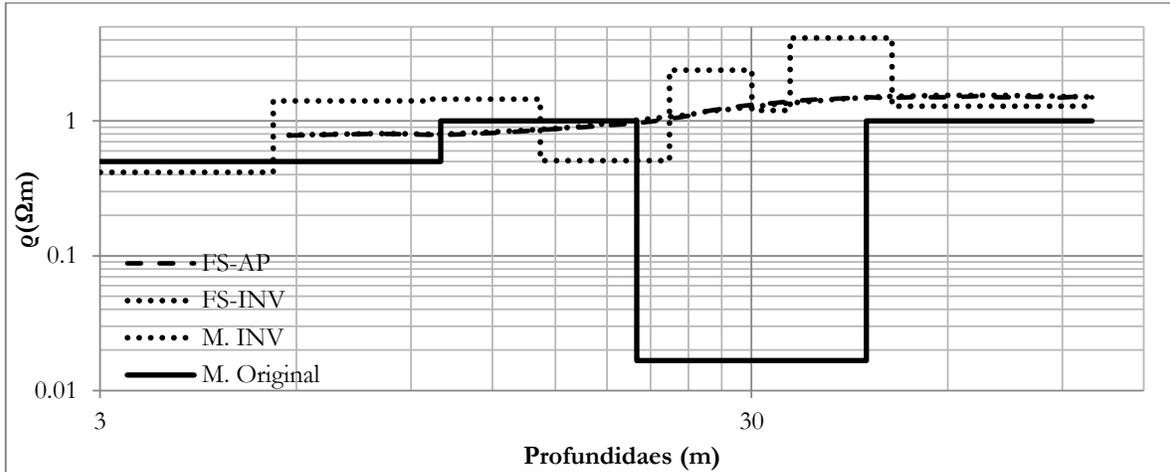


Figura 5-15. Curvas de resistividad aparente con efectos laterales (FS-AP) y de sus datos invertidos (FS-INV) del arreglo de SDP para FS con el modelo de la Tabla 2 (M. Original) y el modelo de la inversión con arreglo SPD con FS (M. INV).

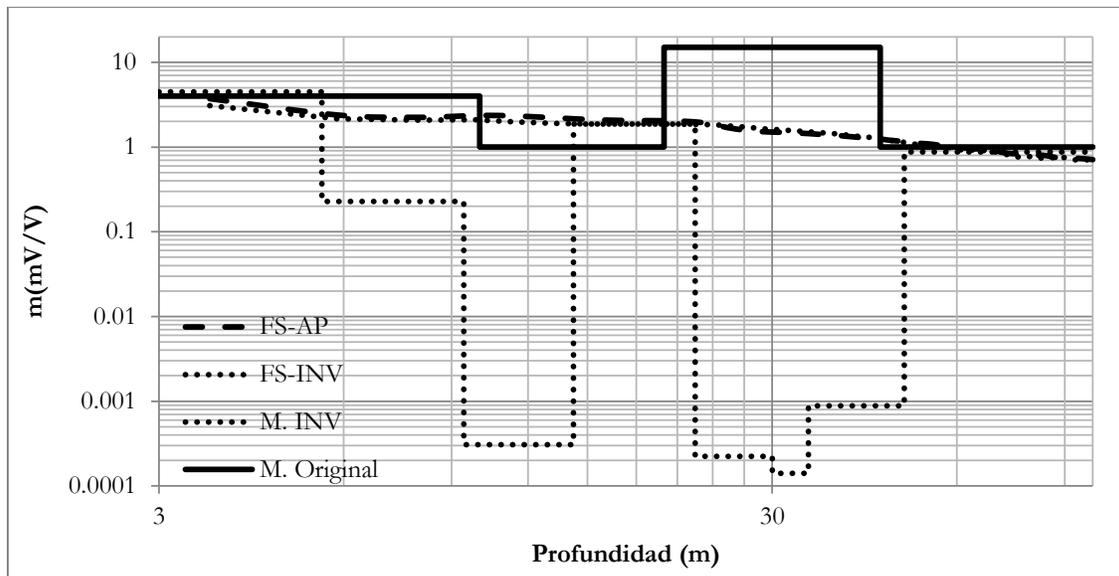


Figura 5-16. Curvas cargabilidad aparente con efectos laterales (FS-AP) y de sus datos invertidos (FS-INV) del arreglo de SDP para FS con el modelo de la Tabla 2 (M. Original) y el modelo de la inversión con arreglo SPD con FS (M. INV).

Tanto para el arreglo Schlumberger como para el caso de FS, se aprecia una diferencia significativa entre los perfiles sin efectos laterales como los que tienen efectos laterales, (ver Figuras 5-17 y 5-18), lo cual muestra que los cambios laterales afectan a la interpretación 1D.

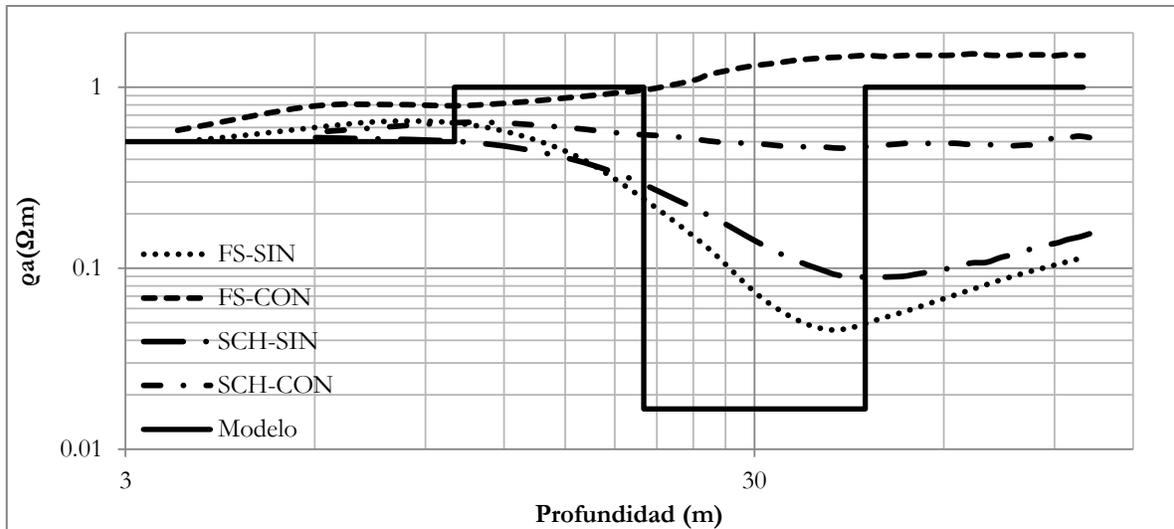


Figura 5-17. Curvas de resistividad aparente de fuentes enfocadas del modelo de la Tabla 5, (Modelo) con efectos laterales de la modelación 2D con EarthImager (FS-CON y SCH-CON) y, sin estos efectos (FS-SIN y SCH-SIN).

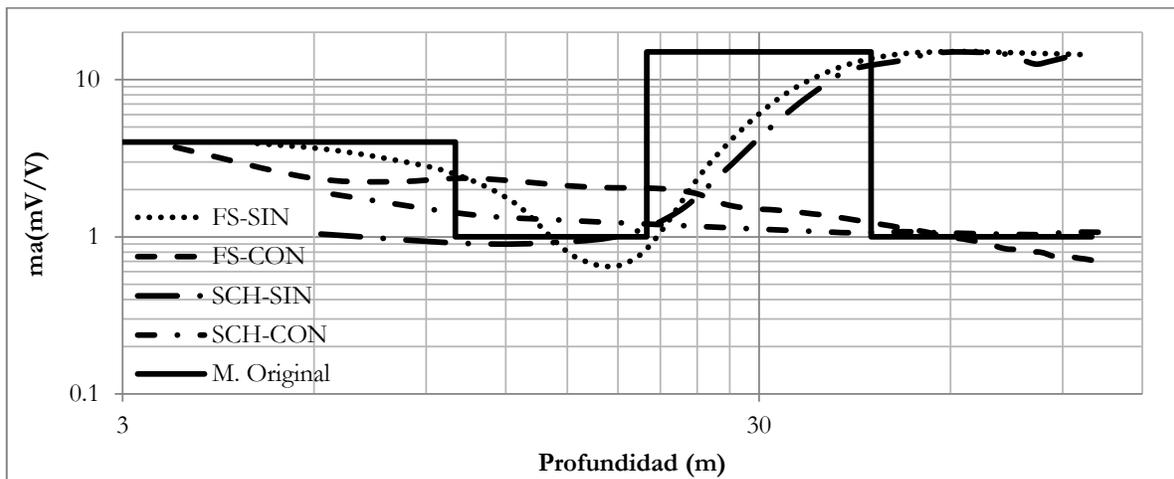


Figura 5-18. Curvas de cargabilidad aparente de fuentes enfocadas del modelo de la Tabla 5, (Modelo) con efectos laterales de la modelación 2D con EarthImager (FS-CON y SCH-CON) y, sin estos efectos (FS-SIN y SCH-SIN).

### 5.2.7 Pseudosección de los cortes geoelectricos de los 21 perfiles del modelo modificado de Oldenburg y Li (1994)

Debido a que la pseudosección con los perfiles invertidos (Figura 5-11) no resulta determinante para la delimitación vertical del cuerpo central del modelo, se muestran a continuación, una representación en pseudosección de los cortes geoelectricos (o modelos intrínsecos) por medio de una interpolación. Los 21 cortes geoelectricos se muestran en el Anexo B. La construcción de esta figura fue colocando los valores de las resistividades y cargabilidades en el punto central del espesor de la capa. En el caso de la última, el valor del

parámetro se colocó en el punto medio entre la profundidad de la última capa y la mayor profundidad alcanzada con el arreglo. Se interpolaron con el método de Kriging.

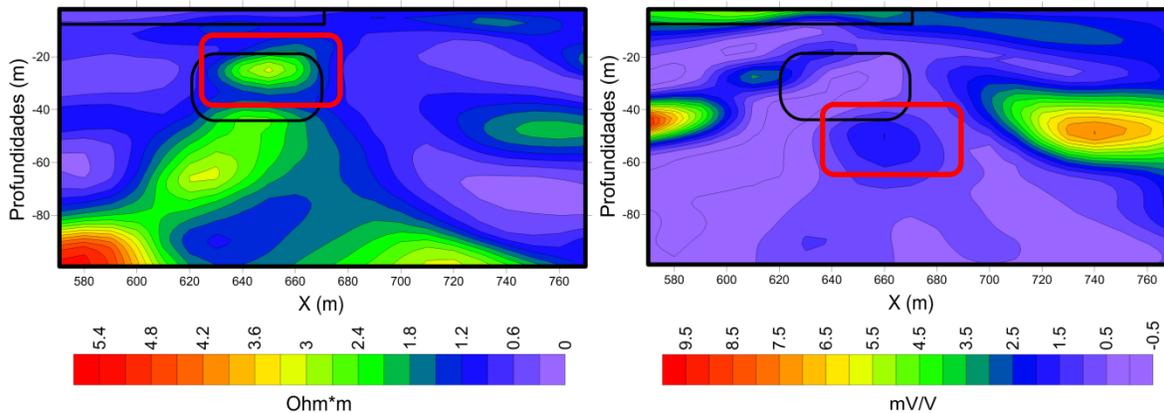


Figura 5-19. Pseudosecciones construidas con la interpolación de los modelos de las inversiones 1D de los 21 perfiles del modelo de Oldenburg y Li (1994). Al lado izquierdo se encuentran las resistividades y al derecho cargabilidades. Los rectángulos en líneas gruesas color negro, representan a los cuerpos del modelo original. Los rectángulos en color rojo representan la interpretación de las anomalías.

Se puede observar que existe una anomalía de resistividad alrededor de los  $2.4 \Omega\text{m}$  (Figura 5-19, lado izquierdo), que a su vez, presenta un halo en tonos azules como una “V” invertida. Algo similar ocurre para la cargabilidad en las mismas posiciones, pero en este caso, el halo se encuentra en colores violeta. Las interpretaciones en rectángulos de color rojo, muestran las posiciones de los máximos en resistividad y mínimos en cargabilidad, rodeados por sus correspondientes mínimos y máximos, representados por los halos antes mencionados.

Los valores negativos de cargabilidad se deben a los rangos numéricos de la interpolación.

### 5.2.8 Prueba adicional con arreglo Wenner-Schlumberger (2D)

A modo comparativo, se llevó a cabo una prueba adicional modelando con arreglo Wenner-Schlumberger el modelo de Oldenburg y Li, cuyas inversiones se muestran en la Figura 5-20. En el caso del cuerpo central, la anomalía de resistividad está bien delimitada tanto horizontal como verticalmente. Sin embargo, la anomalía en cargabilidad alta se encuentra a mayor profundidad y no alcanza a verse el límite inferior.

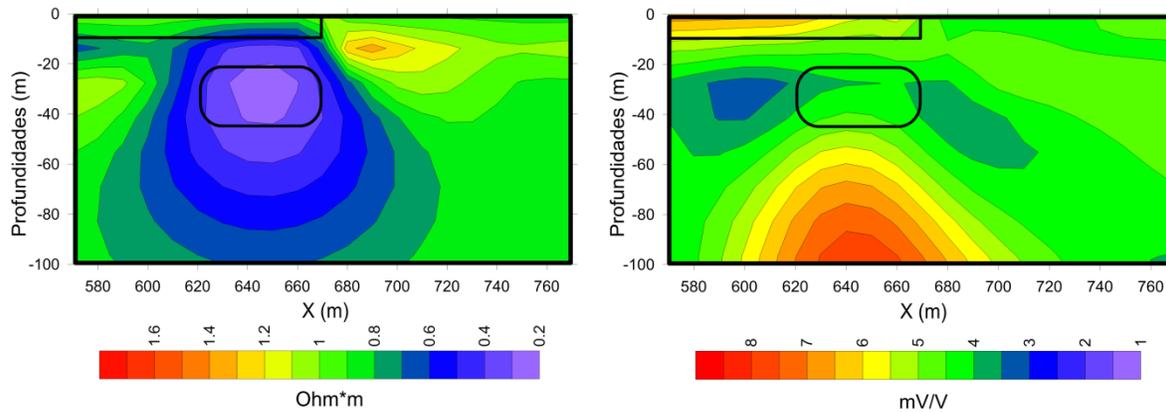


Figura 5-20. Resistividades (izquierda) y cargabilidades (derecha) invertidas con el software EarthImager 2D de datos obtenidos con arreglo Wenner-Schlumberger para el modelo de la Figura 4-4. Los rectángulos en líneas gruesas color negro, representan a los cuerpos del modelo original.

### 5.3 Discusión de resultados

#### 5.3.1 Discusión sobre los resultados del modelo de 3 capas

Desde los datos aparentes, el modelo de 3 capas de las Figuras 4-1 y 4-2 muestran que las curvas de SPD para FS se aproximan mejor al corte geoelectrico del modelo que las del arreglo Schlumberger, además, en las inversiones de estos modelos, el arreglo de FS tuvo menor error RMS que del arreglo Schlumberger (ver Tabla 3 y Figuras 5-1 y 5-2).

En el caso de los modelos de 3 capas con ruido de hasta el 10% añadido, el software comercial para el arreglo Schlumberger no pudo disminuir el error con el modelo inicial de 4 capas con los parámetros originales de la Tabla 7. En el programa de inversión del trabajo presente, no hubo ni la necesidad de iniciar el proceso de inversión, ya que el ajuste de los datos de entrada con la función que suaviza los datos, obtuvo un RMS inicial de 3.31% en resistividad. Por tanto, el modelo que ajustó bien los datos de SPD para FS, fue igual al original. En cuanto a los parámetros de los modelos de inversión, el error de hasta 10% en los datos, generó una diferencia de hasta casi el doble del espesor en la segunda capa del arreglo Schlumberger con respecto al modelo original y una disminución de casi la mitad del valor de la resistividad.

#### 5.3.2 Discusión sobre los resultados del modelo modificado de Oldenburg y Li (1994)

En los perfiles 1D, desde los datos aparentes del perfil de la posición de 640m de la Figura 4-4, se puede apreciar que el arreglo Schlumberger no presenta visualmente cambios significativos en su curvatura para mostrar 4 capas. En el caso de los datos aparentes de FS, sí

son claros dichos cambios y sus inversiones, mostradas en las Figuras 5-7 y 5-8, presentan ambos casos errores bajos (de 2.71 % y 3.17 %), cuyas capas son muy cercanas o casi iguales a las del modelo original. Por otro lado, para el caso del arreglo Schlumberger, sus errores fueron mayores, de 6.1% en resistividad y 13.8 % (Tabla 8) en cargabilidad y sus capas fueron parecidas en forma al modelo original y en valores de resistividad, pero no fue lo mismo para la cargabilidad. Resulta interesante cómo la inversión del modelo modificado de Oldenburg y Li (1994) con el arreglo Schlumberger sin efectos laterales tiene un error mayor al mismo modelo pero con efectos laterales, lo cual se puede comprender dado que los efectos laterales suavizan u ocultan rasgos del modelo original.

Los resultados de las inversiones 2D por canal por fuente con el arreglo Dipolo-Dipolo (Figura 5-9), muestran lo complicado que puede ser la inversión para la cargabilidad, debido a que el modelo no puede ser representado por los efectos negativos que causa el corte geoelectrico. En resistividad todos mostraron en mayor o menor precisión la capa superior izquierda y el cuerpo central. En cargabilidad ninguno acertó.

Por otro lado, cuando se calcularon las pseudosecciones 2D con datos de SPD por fuente (5-10), se observaron los sesgos que causan las posiciones de las fuentes y cómo se generó un efecto tipo abanico. Para las pseudosecciones de SPD para FS, el sesgo se desvanece pero el efecto abanico prevalece. Esto muestra que al enfocar la corriente, al menos por superposición de fuentes, se disminuyen los efectos laterales desde los datos aparentes (de los cuales ya había documentado Davdycheva *et al.*, 2006).

Después de haber invertido los 21 perfiles obtenidos con datos aparentes del modelo 2D, se obtuvieron las secciones interpoladas de resistividad y cargabilidad de SPD para FS invertidas (Figura 5-11) con el programa de inversión del trabajo presente, que se parecen mucho a las pseudosecciones de los mismos datos aparentes (Figura 5-8). Esto muestra que los perfiles 1D en pseudosección delimitan las estructuras de manera horizontal, tanto en resistividad como en cargabilidad (que se puede observar con las formas de las anomalías por nivel o profundidad - López-González *et al.*, 2019), aunque no se alcanzó a encontrar el límite vertical del cuerpo central. Existe un efecto de prolongación a profundidad de la anomalía de este cuerpo, e incluso del cuerpo-estrato de la esquina superior izquierda, que probablemente se está dando debido a la condición del enfoque de la corriente y el esquema de inversión 1D (ver Figura 2-1).

Por otro lado, de las Figuras 5-13 a 5-18, se hizo notar las diferencias que tienen los perfiles calculados con un modelo 1D con respecto a los perfiles modelados en 2D. Con ello, se corrobora y ejemplifica los errores que pueden causar los efectos laterales en la interpretación 1D. Es relevante mencionar que la implementación del filtro en la subrutina de inversión mejoró tanto las curvas por perfil, como la pseudosección 2D (Figuras 5-11 y 5-12, respectivamente). Esto coadyuvó a mejorar el error RMS y a visualizar los perfiles y las pseudosecciones más suaves, lo cual se espera en teoría, ya que se supone que no existen cambios bruscos en el potencial.

En un intento por obtener alguna evidencia de la delimitación vertical del cuerpo central del modelo modificado de Oldenburg y Li, se recurrió a la interpolación de los datos de los modelos intrínsecos invertidos (Figura 5-19), con lo que se pudo encontrar una correspondencia con el cuerpo central en resistividad y cargabilidad. En cargabilidad de los datos intrínsecos de FS se tiene un resultado similar con la inversión de cargabilidad 2D del arreglo Wenner Schlumberger (5-20), en los cuales no se pudo detectar la anomalía de cargabilidad alta correspondiente a los 15 mV/V del modelo original en la profundidad de entre 20 m y 45 m, en vez de ello, se encuentra una zona con cargabilidades de transición entre bajos y altos.

# CAPÍTULO

# 6.

## CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

### 6.1 Conclusiones

Los datos aparentes 1D de SPD para FS probaron mejorar la interpretación cualitativa con respecto a los arreglos convencionales de una fuente, al menos al ser comparados con el arreglo Schlumberger, el cual es un arreglo comúnmente usado en sondeos eléctricos verticales y que, en la disposición de sus electrodos, también es simétrico como el de fuentes enfocadas.

Por otro lado, el suavizamiento en los datos tanto de resistividad como de cargabilidad ayudó en el algoritmo de inversión. Esto se probó al interpretar datos con ruido hasta del 10%, provenientes de modelación directa con cortes geoelectricos 1D. En estas pruebas, el modelo inicial (conocido), no tuvo necesidad de ser invertido debido a la subrutina que suavizó los datos, a tal punto que el RMS disminuyó a menos del 5%.

En cuanto al método de inversión, FSA representa una ventaja respecto al método de mínimos cuadrados ya que no se encuentra restringido por el modelo inicial, lo cual se mostró al tratar de disminuir el error en el modelo de Oldenburg y Li (1994) para el caso de datos sin efectos laterales. Sin embargo, las inversiones de los datos 1D con efectos laterales no pudieron llegar al modelo original, con lo cual se establece la necesidad de continuar el trabajo de investigación con inversión 2D de datos de SPD para FS. Aún con ello, las inversiones fueron buenas al mejorar el error en comparación con el arreglo Schlumberger, invertido con el software comercial.

Una de las premisas y limitantes de la prospección geoelectrica es que no se pueden observar cuerpos pequeños en las curvas de resistividad, a profundidades grandes... tal vez, *iluminando* el subsuelo desde distintos ángulos, a modo de *enfocar la luz*, se pueda disminuir esta limitante con el trabajo que se presenta en estas páginas. En este sentido, las implicaciones de este trabajo son coadyuvar a mejorar la interpretación con certeza de objetivos pequeños o

grandes a distancias someras o profundas. Por ejemplo, en situaciones de contaminación donde se requiere precisión para caracterizar el subsuelo, puede emplearse la metodología propuesta para mejorar desde la toma de los datos hasta la interpretación, la definición de las zonas contaminadas para remediarlas y sanearlas. En el caso de la minería pasa algo semejante para localizar metales diseminados, por ejemplo. Así, se podrían mencionar otras necesidades de exploración del petróleo, hidrogeología o geotecnia, pero todas tienen en común el problema de delimitar con precisión sus objetivos particulares de exploración.

La propuesta de enfocar dos fuentes eléctricas a partir de la superposición matemática (lo cual se sustenta en la linealidad de estos campos), empleando segundas diferencias del potencial (que realzan los cambios de las curvas), es una aproximación a un futuro no muy lejano para la prospección eléctrica, en el que probablemente se podrá contar con equipo multifuentes con los ya existentes multi-canales.

## 6.2 Recomendaciones

### 6.2.1 Respecto al programa de inversión

Las pruebas del programa y toda la investigación realizada para esta tesis, arrojan valiosos aportes para mejorar en lo futuro la inversión de datos de segundas diferencias de potencial para fuentes enfocadas. Entre los puntos a considerar se tienen:

- Realizar un estudio de propagación del error, debido a las operaciones de cálculos de las ecuaciones.
- Ya que existe la posibilidad de mejorar siempre, la profundidad de investigación no es la excepción, por lo que se recomienda implementar un ajuste con el método de Gómez-Treviño y Flores (2015).
- Dado que se hicieron pruebas con datos que fueron tomados de modelación 2D, se debe realizar un esquema de inversión para fuentes enfocadas también 2D, a fin de disminuir el efecto de enfoque de la corriente en la vertical (o a profundidad), en otras palabras, para eliminar la prolongación o tubificación de las anomalías.
- Aunque el filtrado de los datos con la subrutina integrada en el programa de inversión arrojó resultados favorables, no está demás sugerir la creación de un filtro generalizado de mínimos cuadrados, esto es, para cualquier intervalo de muestreo, o bien, probar otros filtros para procesamiento de los datos, tanto para resistividad como para cargabilidad.

### 6.2.2 Respecto a la práctica en campo

Para llevar a la práctica la adquisición de datos para calcular las SPD para FS, se recomienda verificar que las distancias de los electrodos sean exactas y que guarden las proporciones indicadas en la Figura 2-1. En su defecto, se recomienda medir las distancias reales para corregir los datos por variaciones en dichas distancias (Tejero y López, 2016).

## Referencias

- Abdel Aal GZ, Slater LD and Atekwana EA. 2006. Induced-polarization measurements on unconsolidated sediments from a site of active hydrocarbon biodegradation. *Geophysics* **71**(2):H13–H24. (1)
- Anderson, Walter L. 1979. Computer program. Numerical integration of related Hankel transforms of orders 0 and 1 by adaptive digital filtering. *Geophysics*, **44** ( 7 ) : 1287-1305.
- Advanced Geosciences Inc. 2009. Instruction Manual for Earth Imager 1D and 2D Version 2.4.0 Resistivity and IP Inversion Software.35 and 139 p.p, respectively.
- Ávila, Stephanie I. 2016. Regulación de datos de resistividad aparente. Tesis de licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México.
- Beaty, K. S., Schmitt, D. R., and Sacchi, M. 2002. Simulated annealing inversion of multimode Rayleigh wave dispersion curves for geological structure. *Geophysical Journal International*, **151**: 622-631.
- Dahlin T. and Leroux V. 2012. Improvement in time-domain induced polarization data quality with multi-electrode systems by separating current and potential cables. *Near Surface Geophysics* **10**, 545-565.
- Dahlin, T. and Loke, M. H. 2015. Negative apparent chargeability in time-domain induced polarization data. *Journal of Applied Geophysics*, **123**, 322-332.
- Davydycheva, S., Rykhlinski, N., Legeido, P., 2006. Electrical-prospecting method for hydrocarbon search using the induced-polarization effect. *Geophysics*, **71**: G179-G189.
- Davydycheva, S. and Rykhlinski, N. 2011. Focused-source electromagnetic survey versus standard CSEM: 3D modeling in complex geometries. *Geophysics*, **76**: F27-F41.
- Davydycheva, S. and Michael Frenkel. 2012. Detection of Clandestine Tunnels in Complex Environments Using a Mobile Focused-Source Electromagnetic Data Measurement and Processing Unit. *Proceedings of Society of Photo-optical Instrumentation Engineers (SPIE)*, Volume 8361, id. 83610H.
- Dey, A., Meyer, W. H., Morrison, H. F. and Dolan, W. M. 1975. Electric field response of two-dimensional inhomogeneities to unipolar and bipolar electrode configurations. *Geophysics* **40** (4): 630-640.
- Fiandaca G., Auken E., Vest Christiansen A. and Gazoty A. 2012. Time-domain-induced polarization: Full-decay forward modeling and 1D laterally constrained inversion of Cole-Cole parameters. *Geophysics* **77**, E213-E225.
- Flores, A., Kemna, A. and Zimmermann, E. 2012. Data error quantification in spectral induced polarization imaging. *Geophysics*, **77**: E227-E237.
- Flores, A., Gallistl, J., Büker, M., and Williams, K. 2018. Decay curve analysis for data error quantification in time-domain induced polarization imaging. *Geophysics*, **83**, No. 2: E75-E86.
- Frenkel, M. and Davydycheva, S. 2010. A Novel Technology for Fast Detection and Imaging of Subsurface Tunnels. *Proceedings Volume 7669*, 766908-1 to 766908-8.
- Gazoty A., Fiandaca G., Pedersen J., Auken E. and Christiansen A. V. 2013. Data repeatability and acquisition techniques for time-domain spectral induced polarization. *Near Surface Geophysics* **11**: 391-406.
- GeoSci Developers. 2015-2018. Software de acceso libre en línea, para obtener el comportamiento de las líneas de corriente al hacer pasar una fuente puntual sobre una esfera resistiva y otra conductora en un semiespacio. última fecha de visita: 3 de octubre de 2018.

[https://em.geosci.xyz/content/geophysical\\_surveys/dcr/physics.html](https://em.geosci.xyz/content/geophysical_surveys/dcr/physics.html).

- Geotomo Software. 2010. RES2DINV ver. 3.59 for Windows XP/Vista/7 Rapid 2-D Resistivity & IP inversion using the least-squares method. 151 p.p.
- Gianluca Fiandaca, Esben Auken, Anders Vest Christiansen, Auréle Gazoty. 2012. Time-domain-induced polarization: Full-decay forward modeling and 1D laterally constrained inversion of Cole-Cole parameters. *Geophysics*, **77**: E213-E225.
- Gómez-Treviño, E. and Esparza, F. 2014. What is the depth of investigation of a resistivity measurement? *Geophysics* **79**(2), W1-W10.
- Gómez-Treviño, E. and Carlos Flores. 2015. Alternative theory for signal contribution sections and depth of investigation characteristics in electrical prospecting. *Geophysical Prospecting* **63**, 740-749.
- Hallof P. G. 1974. The IP phase measurement and inductive coupling. *Geophysics* **39**, 650-665.
- Hallof P. G. and Pelton W. H. 1980. The removal of inductive coupling effects from spectral IP data. SEG 50<sup>th</sup> Annual International Meeting, Houston, Texas, 16-20 November 1980.
- Iris Instruments. 2005. User's Manual of Syscal Pro Standard & Switch, 48 -72 or 96 Version, 10 channels Resistivity-meter for Resistivity and IP measurements, 85 p.p.
- Kamenetsky F. M., Stettler E. H. and Trigubovich G. M. 2011. Transient Geo-Electromagnetics: Ludwig-Maximilian-University of Munich, Dept. of the Earth and Environmental Sciences, Section Geophysics, Munich, 107-109.
- Kirkpatrick, S., Gelatt, C. D., Jr., and Vecchi, M. P. 1983. Optimization by simulated annealing, *Science*, **220**: 671-680.
- LaBrecque, D., Daily, W. 2008. Assessment of measurement errors for galvanic-resistivity electrodes of different composition. *Geophysics*, **73**: F55-F64.
- LaBrecque D., Daily W. and Adkins P. 2007. Systematic Errors In Resistivity Measurement Systems. 20<sup>th</sup> EEGS Symposium on the Application of Geophysics to Engineering and Environmental Problems. Session: EM Applications I. Publications date: 01 April 2007.
- López-González, Aide E. 2014. Fuentes enfocadas en la polarización inducida y resistividad eléctrica aplicadas en la localización de acumulación de metales, en una parcela de cultivo en el Valle del Mezquital. Tesis de maestría, Universidad Nacional Autónoma de México.
- López-González, Aide E., Tejero, A., Hernández-Martínez, J. L., Prado, B. and Chávez, R. E. 2019. Induced Polarization and Resistivity of Second Potential Differences (SPD) with Focused Sources Applied to Environmental Problems. *Journal of Environmental and Engineering Geophysics*. Accepted Aug 7, 2018.
- McGillivray, P.R. and Oldenburg, D.W. 1990. Methods for calculating Frechet derivatives and sensitivities for the non-linear inverse problem: A comparative study. *Geophysical Prospecting*, **38**, 499-524.
- Richling, Mitch. 1993. Example of the Fortran 90 random number generator. Última fecha de consulta: 25 de septiembre de 2018.  
<https://www.mitchr.me/SS/exampleCode/random/f90Rand.f90.html>.
- Nava-Flores, M., Ortiz-Aleman, C., Orozco-del-Castillo, M. G., Urrutia-Fucugauchi, J., Rodriguez-Castellanos, A., Couder-Castañeda, C. and Trujillo-Alcantara, A. 2016. 3D Gravity modeling of complex salt features in the Southern Gulf of Mexico. *International Journal of Geophysics*. Volume 2016, 1702164, 12 pages.
- Nabighian, Misac N. and Elliot, Charles L. 1976. Negative induced-polarization effects from layered media, *Geophysics*, **41**: 1236-1255.

- Oldenburg, Douglas W. and Li, Yaoguo. 1994. Inversion of induced polarization data, *Geophysics*, Vol. 59, No. 9, 1327-1341.
- Orellana, Ernesto. 1982. *Prospección geoelectrica en corriente continua*, Segunda edición corregida y ampliada. Editorial Paraninfo. Madrid.
- Pelton, W. H., Ward, S. H., Hallof, P. G., Sill, W. R. and Nelson, P. H. 1978. Mineral Discrimination and removal of inductive coupling with multifrequency IP. *Geophysics*, **43**: 588-609.
- Press, W., Teukolsky, S., Vetterling, W. and Flannery, B. 1986. *Numerical Recipes in Fortran 77*. Cambridge University Press.
- Seigel, H., Nabighian, M., Parasnis, D., Vozzof, K. 2007. The early history of the induced polarization method. *The Leading Edge*. 312-321 p.p.
- Savitzky, Abraham and Golay, Marcel J. E. 1964. Smoothing and differentiation of data by simplified least squares procedures, *Analytical Chemistry*, **36** (8): 1627-1639.
- Sen, Mrinal and Stoffa, Paul L. 1995. *Global optimization methods in geophysical inversion*. Advances in exploration geophysics. Series Editor: A.J. Berkhou. Elsevier.
- Sharma, S. P. 2012. vfsares- a very fast simulated annealing FORTRAN program for interpretation of 1D DC resistivity sounding data from various electrode arrays. *Computers & Geosciences*, **42**: 177-188.
- Sirhan A. and Hamidi M. 2013. Detection of soil and groundwater domestic pollution by the electrical resistivity method in the West Bank, Palestina. *Near Surface Geophysics* **11**, 371-380.
- Slater L. and Lesmes D. 2002. IP interpretation in environmental investigations. *Geophysics* **67**, 77-88.
- Slater L. and Sandberg S. 2000. Case History: Resistivity and induced polarization monitoring of salt transport under hydraulic gradients. *Geophysics* **65**, 408-420.
- Sogade, J. A., Scira-Scappuzzo, F., Vichabian, Y., Shi, W., Rodi, W., Lesmes, D. P. and Morgan, F. D. 2006. Induced-polarization detection and mapping of contaminant plumes. *Geophysics*, **71**: B75-B84.
- Tejero, Andrés; Cifuentes, Gerardo; Chávez, René; López-González, Aideé E. y Delgado-Solórzano, Cecilia. 2015. L- and CORNER-arrays for 3D electric resistivity tomography: an alternative for geophysical surveys in urban zones. *Near Surface Geophysics*. **13** (4): 355-367.
- Tejero, Andrés y López-González, Aide E. 2016. Método de exploración geoelectrica superficial para corregir errores en el potencial debido a electrodos no equidistantes usando fuentes enfocadas. México. Número de patente: 03-2016-121514013400-01.
- Teukolsky, Saul A., Vetterling, William T. and Flannery, Brian; 1992. *Numerical Recipes in FORTRAN. The Art of Scientific Computing*. Second Edition. Cambridge University Press. 963 p.p.
- Vacquier, V., Holmes, C., Kintzinger, P. and Lavergne, M. 1957. Prospecting for ground water by induced electrical polarization. *Geophysics*, **22**: 660-687.
- Vanhala, H., Soininen, H., Kukkonen, I. 1992. Detecting organic Chemicals contaminants by spectral-induced polarization method in glacial till environment. *Geophysics*, **57**: 1014-1017.
- Vedrintsev, G. A. 1960. Theory of electric sounding in a medium with lateral discontinuities, *Prikladnaya Geofizika*, Vol. 26, pp 30-69. En Al'pin, L. M., Berdichevskii, M. N., Vedrintsev, G. A. and Zagarmistr, A. M., Dipole methods for measuring earth conductivity, Selected and translated from Russian by George Keller. Colorado School of Mines, Colorado. New York, Consultants Bureau.
- Weller A. and Börner F. D. 1996. Measurements of spectral induced polarization for environmental purposes. *Environmental Geology* **27**, 329-334.

- Zogala, B., Robak, M., Dubiel, R., Zuberek, W. M., Steininger, M. and Wzientek, K. 2009. Geoelectrical method for detection of oil contamination in soils and bioremediation process monitoring. *SAGEEP*, **22**: 348-362.
- Zhou, Bing and Dahlin, Torleif. 2003. Properties and effects of measurement errors on 2D resistivity imaging surveying. *Near Surface Geophysics*, **1**, 105-117.

## Anexo A.1 Programa principal

```

! Programa de inversión 1D de datos de resistividad y cargabilidad de
! segundas diferencias de potencial (SPD) empleando 2 fuentes superpuestas
! enfocadas (FS)
! Se requieren min. 5 datos (debido al filtrado).
! Funciona hasta para 9 capas (incluyendo el semiespacio).
PROGRAM FSAFE
USE PARAM
IMPLICIT NONE
!Parametros locales
character (len=40) :: filein,fileout,costosR,costosM,graficar
real (kind=8)      :: CostR,CostM
integer            :: dta,layer,w,k,kk
intrinsic random_number
!%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
!                                     INICIO
!%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
5999 format('          UNAM          ')
5998 format('  PROGRAMA DE INVERSION 1D DE RESISTIVIDAD  ')
5997 format(' Y CARGABILIDAD DE SEGUNDAS DIFERENCIAS DE POTENCIAL ')
5996 format('  EMPLEANDO 2 FUENTES SUPERPUESTAS ENFOCADAS  ')
5995 format('AIDE  ESMERALDA LOPEZ GONZALEZ Y ANDRES TEJERO ANDRADE')
5994 format('_____')
6000 format(' Escribe el nombre del archivo de datos de ENTRADA:  ',)$
6001 format(' Escribe el nombre del archivo de datos de SALIDA :  ',)$
6002 format(' Escribe el nombre del archivo de COSTOS para RHO:  ',)$
6003 format(' Escribe el nombre del archivo de COSTOS para Mu:  ',)$
6004 format(' Escribe el porcentaje (%) de rango en Resistividad : ',)$
6005 format(' Escribe el porcentaje (%) de rango en Cargabilidad : ',)$
6007 format(' Escribe el porcentaje (%) de rango en Espesores :  ',)$
6006 format(' Escribe el No. de perturbaciones :                ',)$
write(6,5999)
write(6,5998)
write(6,5997)
write(6,5996)
write(6,5995)
write(6,5994)
5000 format(a40)
write(6,6000)
read (5,5000) filein
write(6,6001)
read (5,5000) fileout
write(6,6002)
read (5,5000) costosR
write(6,6003)
read (5,5000) costosM
open (unit=9, file=filein, status='old' ,action='read')
open (unit=10,file=fileout, status='unknown',action='write')
open (unit=11,file=costosR, status='unknown',action='write')
open (unit=12,file=costosM, status='unknown',action='write')
write(6,6004)
read (5,*) rangoR

```

```

write(6,6005)
read (5,*) rangoM
write(6,6007)
read (5,*) rangoE
write(6,6006)
read (5,*) pertur
perturm=pertur
!Se lee número de datos a procesar
read (9,*) ndata
read (9,*) nlayer
nT=3*nlayer-1
!Se asignan dimensiones de las variables
allocate (rho(nlayer),m0(nlayer),espesor(nlayer-1))
allocate (xaL(ndata),xbL(ndata),xm(ndata),xc(ndata))
allocate (xn(ndata),xaR(ndata),xbR(ndata))
allocate (Rdat(ndata),MGdat(ndata),RHOT(nlayer))
allocate (V2L(ndata),V2LR(ndata),SV0(ndata))
allocate (RMOD(ndata),MMOD(ndata))
allocate (discrepR(ndata),discrepM(ndata))
allocate (VabmcL(ndata),VabcnL(ndata))
allocate (VabmcLR(ndata),VabcnLR(ndata))
allocate (VabmcLM(ndata),VabcnLM(ndata))
allocate (mm(nT),mtest(nT),mI(nT),mFin(nT))
allocate (d(ndata),dd(ndata))
! Lee datos del modelo inicial
read (9,*) (rho(layer),m0(layer),espesor(layer),layer=1,nlayer-1)
read (9,*) rho(nlayer),m0(nlayer)
! Lee datos aparentes y posiciones de electrodos
read (9,*) (xaL(dta),xbL(dta),xm(dta),xc(dta),xn(dta),&
            xaR(dta),xbR(dta),Rdat(dta),MGdat(dta),dta=1,ndata)
!Imprime en archivo de salida Del modelo inicial
4000 format (a10,I5)
WRITE(10,4000) 'ncapas:',nlayer
8003 format (T4,'MODELO INICIAL',/,T4,'Capa',T13,'RES',T25,'Mu',T37,'ESPESOR')
write(10,8003)
8004 format (T5,I5,T13,g12.3,T25,g12.3,T37,g12.3)
do layer=1,nlayer-1
    write(10,8004) layer,rho(layer),m0(layer),espesor(layer)
enddo
8005 format (T5,I5,T13,g12.6,T25,g12.6)
write(10,8005) nlayer,rho(nlayer),m0(nlayer)
! FILTRADO DE DATOS DE ENTRADA
CALL FILT (3)
CALL FILT (4)
!%%%%%%%%%%
!                                MODELADO DIRECTO INICIAL
!%%%%%%%%%%
! CALCULA DISTANCIAS Y PROFUNDIDADES
CALL DISTYPROF
! RESISTIVIDADES APARENTES DEL MODELO INICIAL
mtest(1:nlayer)=rho
mtest(nlayer+1:2*nlayer)=m0
mtest(2*nlayer+1:nT)=espesor
CALL RESIDIR(1,CostR)
V2LR=V2L
VabmcLR=VabmcL
VabcnLR=VabcnL
PCT – IGEOF

```

```

8011 format(T4, 'RMS modelo inicial de Resistividad (%):')
8008 format(T4,g12.6)
write(10,8011)
write(10,8008) CostR
write(*,*)
write(*,*) 'Costo inicial de Resistividad:', CostR
! CARGABILIDADES APARENTES DEL MODELO INICIAL
CALL CARGADIR(2, CostM)
write(10,8009)
write(10,8008) CostM
8009 format(T4, 'RMS modelo inicial de Cargabilidad (%):')
write(*,*)
write(*,*) 'Costo inicial Cargabilidad:', CostM
write(*,*)
if (CostM<=5.and.CostR<=5.) then
    go to 100
endif
!%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
!                                     SIMULATING ANNEALING
!%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
!Parametros de cristalización
rangoR=rangoR/100
rangoM=rangoM/100
rangoE=rangoE/100
do k=1,nlayer
    mI(k) =mtest(k)-mtest(k)*rangoR
    mFin(k)=mtest(k)+mtest(k)*rangoR
    mI(nlayer+k) =mtest(nlayer+k)-mtest(nlayer+k)*rangoM
    mFin(nlayer+k)=mtest(nlayer+k)+mtest(nlayer+k)*rangoM
    if (mI(nlayer+k)<0.) then
        mI(nlayer+k)=0.0000001
    elseif (mFin(nlayer+k)>0.99) then
        mFin(nlayer+k)=0.9
    endif
enddo
do kk=2*nlayer+1,nT
    mI(kk) =mtest(kk)-mtest(kk)*rangoE
    mFin(kk)=mtest(kk)+mtest(kk)*rangoE
enddo
!INVERSION CON FSA
CALL FSARHO (CostR)
CALL RESIDIR(1, CostR)
V2LR=V2L
VabmcLR=VabmcL
VabcnLR=VabcnL
write(*,*)
write(*,*) 'Costo final de Resistividad:', CostR
write(*,*)
CALL FSAMU (CostM)
CALL CARGADIR(2, CostM)
write(*,*)
write(*,*) 'Costo final de Cargabilidad:', CostM
write(*,*)
!%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Escribe resultados en archivo de salida
100 CALL IMPRIM (2,1,0.0, CostR, CostM, 1)
do w = 9, 12

```

```

        close (unit=w)
    end do
write(*,*) 'FIN DEL PROGRAMA DE INVERSION 1D DE SPD PARA FS'
END PROGRAM FSAFE

```

## Anexo A.2 Módulo de parámetros

```

MODULE PARAM
IMPLICIT NONE
integer          :: ndata,nparam,nT
integer          :: nlayer,auxx,nf
integer          :: pertur,perturm,per
real (kind=8),allocatable :: rho(:),m0(:),espesor(:)
real (kind=8)      :: rangoR,rangoM,rangoE
INTEGER, DIMENSION (1)  :: seed

real (kind=8),allocatable :: xm(:),xc(:),xn(:)
real (kind=8),allocatable :: xaL(:),xbL(:),xaR(:),xbR(:)
real (kind=8),allocatable :: amL(:),acL(:),anL(:)
real (kind=8),allocatable :: bmL(:),bcL(:),bnL(:)
real (kind=8),allocatable :: amR(:),acR(:),anR(:)
real (kind=8),allocatable :: bmR(:),bcR(:),bnR(:)
real (kind=8),allocatable :: cm(:),cn(:),abL(:),abR(:)
real (kind=8),allocatable :: kgcml(:),kgcnL(:)
real (kind=8),allocatable :: kgmcR(:),kgcnR(:)
real (kind=8),allocatable :: kg2L(:),kg2R(:)
real (kind=8),allocatable :: ProfENF(:)
real (kind=8)          :: RC,MC
real (kind=8),allocatable :: RHOT(:),mm(:),mI(:),mFin(:)
real (kind=8),allocatable :: V2L(:),V2LR(:),SV0(:)
real (kind=8),allocatable :: VabmcL(:),VabcnL(:)
real (kind=8),allocatable :: VabmcLR(:),VabcnLR(:)
real (kind=8),allocatable :: VabmcLM(:),VabcnLM(:)
real (kind=8),allocatable :: Rdat(:),MGdat(:)
real (kind=8),allocatable :: RMOD(:),MMOD(:)
real (kind=8),allocatable :: mtest(:)
real (kind=8),allocatable :: discrepR(:),discrepM(:)
real (kind=8),allocatable :: d(:),dd(:)
integer          :: gs
real (kind=8)    :: AL,Q
real (kind=8)    :: T,Ti,mf

end MODULE PARAM

```

### Anexo A.3 Subrutina de cálculo de distancias, factores geométricos y profundidades.

```

SUBROUTINE DISTYPROF
USE PARAM
IMPLICIT NONE
real (kind=8)      :: pid
real (kind=4), external:: ZMEDIANENF
integer           :: idat
allocate (amL(ndata),acL(ndata),anL(ndata),amR(ndata),acR(ndata),anR(ndata))
allocate (bmL(ndata),bcL(ndata),bnL(ndata),bmR(ndata),bcR(ndata),bnR(ndata))
allocate (cm(ndata),cn(ndata),abL(ndata),abR(ndata))
allocate (kgmcl(ndata),kgcnL(ndata),kgmcr(ndata),kgcnR(ndata),kg2L(ndata),kg2R(ndata))
allocate (ProfENF(ndata))
! Distancias de los electrodos y factores geometricos
pid=8*atan(1.0) !=2pi
do idat=1,ndata
  cm(idat)=abs(xc(idat)-xm(idat))
  cn(idat)=abs(xn(idat)-xc(idat))
  abL(idat)=abs(xbL(idat)-xaL(idat))
  abR(idat)=abs(xbR(idat)-xaR(idat))
  amL(idat)=abs(xm(idat)-xaL(idat))
  acL(idat)=abs(xc(idat)-xaL(idat))
  anL(idat)=abs(xn(idat)-xaL(idat))
  bmL(idat)=abs(xm(idat)-xbL(idat))
  bcL(idat)=abs(xc(idat)-xbL(idat))
  bnL(idat)=abs(xn(idat)-xbL(idat))
  kgmcl(idat)=1.0d0/amL(idat) - 1.0d0/bmL(idat)- 1.0d0/acL(idat) + 1.0d0/bcL(idat)
  kgmcl(idat)=(1.0d0)/kgmcl(idat)
  kgcnL(idat)=1.0d0/acL(idat) - 1.0d0/bcL(idat) - 1.0d0/anL(idat) + 1.0d0/bnL(idat)
  kgcnL(idat)=(1.0d0)/kgcnL(idat)
  kg2L(idat)=kgmcl(idat)*kgcnL(idat)/abs(kgcnL(idat)-kgmcl(idat))
  amR(idat)=abs(xn(idat)-xaR(idat))
  acR(idat)=abs(xc(idat)-xaR(idat))
  anR(idat)=abs(xm(idat)-xaR(idat))
  bmR(idat)=abs(xn(idat)-xbR(idat))
  bcR(idat)=abs(xc(idat)-xbR(idat))
  bnR(idat)=abs(xm(idat)-xbR(idat))
  kgmcr(idat)=1.0d0/amR(idat) - 1.0d0/bmR(idat) - 1.0d0/acR(idat) + 1.0d0/bcR(idat)
  kgmcr(idat)=(1.0d0)/kgmcr(idat)
  kgcnR(idat)=1.0d0/acR(idat) - 1.0d0/bcR(idat) - 1.0d0/anR(idat) + 1.0d0/bnR(idat)
  kgcnR(idat)=(1.0d0)/kgcnR(idat)
  kg2R(idat)=kgmcr(idat)*kgcnR(idat)/abs(kgcnR(idat)-kgmcr(idat))

  if (kg2L(idat)==kg2R(idat)) then
    ProfENF(idat)=ZMEDIANENF(xaL(idat),0.0d0,xbL(idat),0.0d0,xm(idat),0.0d0,xc(idat),0.0d0,xn(idat),0.0d0)
  else
    write (*,*) 'Hay error en la posicion de los electrodos. No cumple con fuentes enfocadas.',idat
  endif
end do
end subroutine DISTYPROF

```

#### Anexo A.4 Subrutina que calcula el modelo directo de resistividad

```

SUBROUTINE RESIDIR(FLAGR,CostoR)
! RESISTIVIDADES APARENTES DEL MODELO INICIAL
USE PARAM
implicit none
INTEGER          :: j,jlayer,jdata
INTEGER,intent(in)  :: FLAGR
real (kind=8),intent(out):: CostoR
real (kind=8)      :: auxr
do jlayer=1,nlayer
    RHOT(jlayer)=mtest(jlayer)
enddo
do jlayer=1,nlayer-1
    espesor(jlayer)=mtest(2*nlayer+jlayer)
enddo
do jdata=1,ndata
    CALL MODIR(jdata)
    RMOD(jdata)=RC
enddo
CALL FILT (FLAGR)
CostoR=0.0
auxr=0.0
Q=0.0
do j=1,ndata
    discrepR(j)=(RMOD(j)-Rdat(j))/Rdat(j)
    auxr=discrepR(j)**2
    Q=Q+auxr
enddo
CostoR=100*dsqrt(Q/ndata)

```

#### Anexo A.5 Subrutina que calcula el modelo directo de cargabilidad y su costo

```

SUBROUTINE CARGADIR (FLAGM,CostoM)
! CARGABILIDADES APARENTES DEL MODELO INICIAL
USE PARAM
implicit none
INTEGER          :: ilayer,idata,i
INTEGER,intent(in)  :: FLAGM
real (kind=8),intent(out):: CostoM
real (kind=8)      :: auxm
do ilayer=1,nlayer
    RHOT(ilayer)=mtest(ilayer)*(1-mtest(nlayer+ilayer))
enddo
do idata=1,ndata
    CALL MODIM(idata)
    MMOD(idata)=MC
enddo
CALL FILT (FLAGM)
CostoM=0.0
Q=0.0
do i=1,ndata
    discrepM(i)=(MMOD(i)-MGdat(i))/MGdat(i)

```

```

        auxm=discrepM(i)**2
        Q=Q+auxm
    enddo
    CostoM=100*dsqrt(Q/ndata)

```

## Anexo A.6 Subrutina que invierte datos de resistividades y espesores

```

SUBROUTINE FSARHO (CostRR)
! Subrutina que invierte datos de resistividad 1D con FSA
USE PARAM
real (kind=8):: RMS1R,RMS0R,CostRRP
real (kind=8):: DELER,PAR,P1R
real (kind=8),intent(in) :: CostRR
integer      :: capa,i,ii,jj,ll
intrinsic random_number
9099 format('Costos de inversion: iteracion, CostR, RHO-MU')
write(11,9099)
per=0
Ti=1200
RMS0R=CostRR
RMS1R=0.0
CALL ALEAT(gs)
seed=gs
CALL RANDOM_SEED(PUT=seed)
do l=1,pertur inicio de loop
    ll=1
    T=Ti/ll
    ! -----PERTURBACIONES-----
    do capa=1,nlayer ! en resistividad
        CALL RANDOM_NUMBER(AL)
        mtest(capa)=mI(capa)+AL*(mFin(capa)-mI(capa))
    enddo
    do capa=2*nlayer+1,nT ! en espesores
        CALL RANDOM_NUMBER(AL)
        mtest(capa)=mI(capa)+AL*(mFin(capa)-mI(capa))
    enddo
!----- MODELO DIRECTO Resistividad -----
    CALL RESIDIR(1,CostRRP)
    RMS1R=CostRRP
! -----ELECCION DE MODELO-----
    DELER=RMS1R-RMS0R
    if (DELER <= 0.0) then
        RMS0R=RMS1R
        mm=mtest
        V2LR=V2L
        VabmcLR=VabmcL
        VabcnLR=VabcnL
        CALL IMPRIM (1,ll+per,RMS0R,0.0,0.0,11)
    else
        PAR=exp(-DELER/T)
        CALL RANDOM_NUMBER(AL)
        P1R=AL
        if (PAR>P1R) then
            RMS0R=RMS1R

```

```

mm= mtest
V2LR=V2L
VabmcLR=VabmcL
VabcnLR=VabcnL
CALL IMPRIM (1,ll+per,RMS0R,0.0,0.0,11)
endif
endif
RMS1R=0.0
enddo ! fin de loop
rho=mm(1:nlayer)
espesor=mm(2*nlayer+1:nT)
mtest=mm
end subroutine FSARHO

```

## Anexo A.7 Subrutina que invierte datos de cargabilidades

```

SUBROUTINE FSAMU (CostMM)
! Subrutina que invierte datos de cargabilidad 1D con FSA
USE PARAM
real (kind=8):: RMS1M,RMS0M,CostMMP
real (kind=8):: DELEM,PAM,P1M
real (kind=8),intent(in) :: CostMM
integer      :: iii,f,ff
intrinsic random_number
9099 format('Costos de inversion: iteracion, CostM, RHO-MU')
write(12,9099)
per=0
Ti=1200
RMS0M=CostMM
RMS1M=0.0
CALL ALEAT(gs)
seed=gs
CALL RANDOM_SEED(PUT=seed)
do f=1,perturn !inicio de loop
ff=f
T=Ti/ff
!-----PERTURBACIONES-----
do j=nlayer+1,2*nlayer
CALL RANDOM_NUMBER(AL)
mtest(j)=mI(j)+AL*(mFin(j)-mI(j))
enddo
!----- MODELO DIRECTO Cargabilidad-----
CALL CARGADIR(2,CostMMP)
RMS1M=CostMMP
!-----ELECCION DE MODELO-----
DELEM=RMS1M-RMS0M
if (DELEM <= 0.0) then
RMS0M=RMS1M
mm=mtest
CALL IMPRIM (1,ff+per,RMS0M,0.0,0.0,12)
else
PAM=exp(-DELEM/T)
CALL RANDOM_NUMBER(AL)
P1M=AL

```

```

        if (PAM>P1M) then
            RMS0M=RMS1M
            mm=mtest
            CALL IMPRIM (1,ff+per,RMS0M,0.0,0.0,12)
        endif
    endif
    RMS1M=0.0
enddo ! fin de loop
m0=mm(nlayer+1:2*nlayer)
end subroutine FSAMU

```

## Anexo A.8 subrutina que imprime resultados en archivos de salida

```

SUBROUTINE IMPRIM (FLAGI,QQ,FIN,FINR,FINM,fo)
USE PARAM
implicit none
integer :: FLAGI,fo,QQ,cap,dato
real (kind=8) :: FIN,FINR,FINM
if (FLAGI==1) then
    if (nlayer==2) then
        9002 format (T1,I5,T12,g12.3,T24,g12.3,T36,g12.3,T48,g12.3,T60,g12.3,T72,g12.3)
        write(fo,9002) QQ, FIN,mm(1),mm(2),mm(3),mm(4)
    elseif (nlayer==3) then
        9012 format
        (T1,I5,T12,g12.3,T24,g12.3,T36,g12.3,T48,g12.3,T60,g12.3,T72,g12.3,T84,g12.3,T96,g12.3)
        write(fo,9012) QQ, FIN,mm(1),mm(2),mm(3),mm(4),mm(5),mm(6)
    elseif (nlayer==4) then
        9022 format (T1,I5,T12,g12.3,T24,g12.3,T36,g12.3,T48,g12.3,T60,g12.3,T72,g12.3,T84,g12.3,&
            T96,g12.3,T108, g12.3,T120, g12.3)
        write(fo,9022) QQ, FIN,mm(1),mm(2),mm(3),mm(4),mm(5),mm(6),mm(7),mm(8)
    elseif (nlayer==5) then
        9032 format (T1,I5,T12,g12.3,T24,g12.3,T36,g12.3,T48,g12.3,T60,g12.3,T72,g12.3,T84,g12.3,&
            T96,g12.3,T108, g12.3,T120, g12.3,T132, g12.3,T144, g12.3)
        write(fo,9032) QQ,
        FIN,mm(1),mm(2),mm(3),mm(4),mm(5),mm(6),mm(7),mm(8),mm(9),mm(10)
    elseif (nlayer==6) then
        9042 format (T1,I5,T12,g12.3,T24,g12.3,T36,g12.3,T48,g12.3,T60,g12.3,T72,g12.3,T84,g12.3,&
            T96,g12.3,T108, g12.3,T120, g12.3,T132, g12.3,T144, g12.3,T156,
            g12.3,T168, g12.3)
        write(fo,9042) QQ,
        FIN,mm(1),mm(2),mm(3),mm(4),mm(5),mm(6),mm(7),mm(8),mm(9),mm(10),&
            mm(11),mm(12)
    elseif (nlayer==7) then
        9052 format (T1,I5,T12,g12.3,T24,g12.3,T36,g12.3,T48,g12.3,T60,g12.3,T72,g12.3,T84,g12.3,&
            T96,g12.3,T108, g12.3,T120, g12.3,T132, g12.3,T144, g12.3,T156,
            g12.3,T168, g12.3,&
            T180, g12.3,T192, g12.3)
        write(fo,9052) QQ,
        FIN,mm(1),mm(2),mm(3),mm(4),mm(5),mm(6),mm(7),mm(8),mm(9),mm(10),&
            mm(11),mm(12),mm(13),mm(14)
    elseif (nlayer==8) then
        9062 format (T1,I5,T12,g12.3,T24,g12.3,T36,g12.3,T48,g12.3,T60,g12.3,T72,g12.3,T84,g12.3,&
            T96,g12.3,T108, g12.3,T120, g12.3,T132, g12.3,T144, g12.3,T156,
            g12.3,T168, g12.3,&

```

```

T180, g12.3, T192, g12.3, T204, g12.3, T216, g12.3)
write(fo, 9062) QQ,
FIN, mm(1), mm(2), mm(3), mm(4), mm(5), mm(6), mm(7), mm(8), mm(9), mm(10), &
mm(11), mm(12), mm(13), mm(14), mm(15), mm(16)
elseif (nlayer == 9) then
9072 format (T1, I5, T12, g12.3, T24, g12.3, T36, g12.3, T48, g12.3, T60, g12.3, T72, g12.3, T84, g12.3, &
T96, g12.3, T108, g12.3, T120, g12.3, T132, g12.3, T144, g12.3, T156,
g12.3, T168, g12.3, &
T180, g12.3, T192, g12.3, T204, g12.3, T216, g12.3, T228,
g12.3, T240, g12.3)
write(fo, 9072) QQ,
FIN, mm(1), mm(2), mm(3), mm(4), mm(5), mm(6), mm(7), mm(8), mm(9), mm(10), &
mm(11), mm(12), mm(13), mm(14), mm(15), mm(16), mm(17), mm(18)
endif
else
8006 format (T4, 'MODELO DE INVERSION', /, T4, 'Capa', T13, 'RES', T25, 'Mu', T37, 'ESPESOR')
8005 format (T5, I5, T13, g12.3, T25, g12.3)
8004 format (T5, I5, T13, g12.3, T25, g12.3, T37, g12.3)
write(10, 8006)
do cap = 1, nlayer - 1
write(10, 8004) cap, rho(cap), m0(cap), espesor(cap)
enddo
write(10, 8005) nlayer, rho(nlayer), m0(nlayer)
8007 format (T4, 'RMS Inversion Resistividad (%):')
8008 format (T4, g12.3)
write(10, 8007)
write(10, 8008) FINR
8012 format (T4, 'RMS Inversion Cargabilidad (%):')
write(10, 8012)
write(10, 8008) FINM
! !ESCRIBIR LOS PARÁMETROS FINALES DEL MODELO
8001 format (T1, '#DATO', T12, 'XC', T24, 'ProfENF', T36, 'Rdat', T48, 'RMOD', T60, 'MGdat', T80, 'MMOD')
write(10, 8001)
8002 format (T1, I5, T12, g12.3, T24, g12.3, T36, g12.3, T48, g12.3, T60, g12.3, T80, g12.3)
do dato = 1, ndata
write(10, 8002)
dato, xc(dato), ProfENF(dato), Rdat(dato), RMOD(dato), MGdat(dato), MMOD(dato)
enddo
endif
RETURN
END SUBROUTINE IMPRIM

```

### Anexo A.9 Subrutina que obtiene las resistividades aparentes de segundas diferencias de fuentes enfocadas

```

! MODELO DIRECTO 1D RESISTIVIDAD DE FUENTES ENFOCADAS
! EN SEGUNDAS DIFERENCIAS
! Archivos de lecturas con arreglo BA MCN en L y
! NCM AB en R
! Considera medio estratificado plt,
! rhoapL=rhoapR=rhoapENF=RC

```

```

!%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
!%
SUBROUTINE MODIR(datR)
USE PARAM
IMPLICIT NONE
integer      :: datR
complex (kind=4):: auxR
real (kind=4)  :: radioL
real (kind=8)  :: vamL,vacL,vanL,vbmL,vbcL,vbnL
real (kind=8)  :: rhoap2L
complex (kind=4), external::KERNEL,ZHANKS
!
!-----
!Potenciales de fuente A sobre MCN
radioL=sngl(amL(datR))
auxR=ZHANKS(0,radioL,KERNEL,1.0e-08,nf,1)
vamL=real(auxR)
radioL=sngl(acL(datR))
auxR=ZHANKS(0,radioL,KERNEL,1.0e-08,nf,1)
vacL=real(auxR)
radioL=sngl(anL(datR))
auxR=ZHANKS(0,radioL,KERNEL,1.0e-08,nf,1)
vanL=real(auxR)
! Potenciales de fuente B sobre MCN
radioL=sngl(bmL(datR))
auxR=ZHANKS(0,radioL,KERNEL,1.0e-08,nf,1)
vbmL=-real(auxR)
radioL=sngl(bcL(datR))
auxR=ZHANKS(0,radioL,KERNEL,1.0e-08,nf,1)
vbcL=-real(auxR)
radioL=sngl(bnL(datR))
auxR=ZHANKS(0,radioL,KERNEL,1.0e-08,nf,1)
vbnL=-real(auxR)

VabmL(datR)=vamL+vbmL-(vacL+vbcL)
VabcnL(datR)=vacL+vbcL-(vanL+vbnL)
V2L(datR)=VabmL(datR)-VabcnL(datR)

SV0(datR)=2*V2L(datR) !=V2L+V2R para mu
rhoap2L=kg2L(datR)*(V2L(datR))
RC=rhoap2L ! o = (rhoap2L+rhoap2R)/2
END SUBROUTINE MODIR

```

## Anexo A.10 Subrutina que obtiene las cargabilidades aparentes de segundas diferencias de fuentes enfocadas

```

! MODELO DIRECTO 1D RESISTIVIDAD Y CARGABILIDAD DE FUENTES ENFOCADAS
!
! EN SEGUNDAS DIFERENCIAS
! Archivos de lecturas con arreglo BA MCN en L Y NCM AB en R
! Cálculos sobre cargabilidades globales
!%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
!%
SUBROUTINE MODIM(datM)
USE PARAM
IMPLICIT NONE
PCT – IGEOF

```

```

integer    :: datM
real (kind=4):: radioL
complex (kind=4):: aux
real (kind=8):: vamLM,vacLM,vanLM,vbmLM,vbcLM,vbnLM
real (kind=8):: MuabmcL,MuabcnL,Mu2L
complex (kind=4),external:: KERNEL,ZHANKS
!
!      DECAIMIENTO DEL POTENCIAL
! Potenciales de fuente A sobre MCN
radioL=sngl(amL(datM))
aux=ZHANKS(0,radioL,kernel,1.0e-08,nf,1)
vamLM=real(aux)
radioL=sngl(acL(datM))
aux=ZHANKS(0,radioL,kernel,1.0e-08,nf,1)
vacLM=real(aux)
radioL=sngl(anL(datM))
aux=ZHANKS(0,radioL,kernel,1.0e-08,nf,1)
vanLM=real(aux)
! Potenciales de fuente B sobre MCN
radioL=sngl(bmL(datM))
aux=ZHANKS(0,radioL,kernel,1.0e-08,nf,1)
vbmLM=-real(aux)
radioL=sngl(bcL(datM))
aux=ZHANKS(0,radioL,kernel,1.0e-08,nf,1)
vbcLM=-real(aux)
radioL=sngl(bnL(datM))
aux=ZHANKS(0,radioL,kernel,1.0e-08,nf,1)
vbnLM=-real(aux)

VabmcLM(datM)=vamLM+vbmLM-(vacLM+vbcLM)
VabcnLM(datM)=vacLM+vbcLM-(vanLM+vbnLM)

! CARGABILIDADES con SEIGEL
MuabmcL=(VabmcLR(datM)-VabmcLM(datM))/VabmcLR(datM)
MuabcnL=(VabcnLR(datM)-VabcnLM(datM))/VabcnLR(datM)
! Calculo de segundas diferencias
Mu2L=( MuabmcL*(VabmcLR(datM)/V2LR(datM)) )-( MuabcnL*(VabcnLR(datM)/V2LR(datM)) )
!MC=2*Mu2L*(V2L(dat)/SV0(dat))
MC=Mu2L !Para un medio estratificado

END SUBROUTINE MODIM

```

### Anexo A.11 Subrutina que filtra los datos

```

SUBROUTINE FILT (FLAGF)
USE PARAM
real (kind=8), dimension(5):: A0,A1,A2
real (kind=8):: a,b,z
INTEGER:: FLAGF

A0= [-0.085714285714286,0.342857142857143,0.485714285714286,0.342857142857143,-0.085714285714286]
A1= [-0.200000000000000,-0.100000000000000,0.000000000000000,0.100000000000000,0.200000000000000]
A2= [0.142857142857143,-0.071428571428571,-0.142857142857143,-0.071428571428571,0.142857142857143]
if (FLAGF==1) then

PCT – IGEOF

```

```

      d=RMOD
    elseif (FLAGF==2) then
      d=MMOD
    elseif (FLAGF==3) then
      d=Rdat
    else
      d=MGdat
    endif
  do i=1,3
    a= (A0(1)*d(1)+A0(2)*d(2)+A0(3)*d(3)+A0(4)*d(4)+A0(5)*d(5))
    b=-2.0*(A1(1)*d(1)+A1(2)*d(2)+A1(3)*d(3)+A1(4)*d(4)+A1(5)*d(5))
    z= 4.0*(A2(1)*d(1)+A2(2)*d(2)+A2(3)*d(3)+A2(4)*d(4)+A2(5)*d(5))
    dd(1)=a+b+z
    a= (A0(1)*d(2)+A0(2)*d(3)+A0(3)*d(4)+A0(4)*d(5)+A0(5)*d(6))
    b=-1.0*(A1(1)*d(2)+A1(2)*d(3)+A1(3)*d(4)+A1(4)*d(5)+A1(5)*d(6))
    z= 1.0*(A2(1)*d(2)+A2(2)*d(3)+A2(3)*d(4)+A2(4)*d(5)+A2(5)*d(6))
    dd(2)=a+b+z
    do nff=3,ndata-2
      dd(nff)=(A0(1)*d(nff-2)+A0(2)*d(nff-1)+A0(3)*d(nff)+A0(4)*d(nff+1)+A0(5)*d(nff+2))
    enddo
    a= (A0(1)*d(ndata-4)+A0(2)*d(ndata-3)+A0(3)*d(ndata-2)+A0(4)*d(ndata-1)+A0(5)*d(ndata))
    b=1.0*(A1(1)*d(ndata-4)+A1(2)*d(ndata-3)+A1(3)*d(ndata-2)+A1(4)*d(ndata-1)+A1(5)*d(ndata))
    z=1.0*(A2(1)*d(ndata-4)+A2(2)*d(ndata-3)+A2(3)*d(ndata-2)+A2(4)*d(ndata-1)+A2(5)*d(ndata))
    dd(ndata-1)=a+b+z
    a= (A0(1)*d(ndata-4)+A0(2)*d(ndata-3)+A0(3)*d(ndata-2)+A0(4)*d(ndata-1)+A0(5)*d(ndata))
    b=2.0*(A1(1)*d(ndata-4)+A1(2)*d(ndata-3)+A1(3)*d(ndata-2)+A1(4)*d(ndata-1)+A1(5)*d(ndata))
    z=4.0*(A2(1)*d(ndata-4)+A2(2)*d(ndata-3)+A2(3)*d(ndata-2)+A2(4)*d(ndata-1)+A2(5)*d(ndata))
    dd(ndata)=a+b+z
    d=dd
  enddo
  if (FLAGF==1) then
    RMOD=d
  elseif (FLAGF==2) then
    MMOD=d
  elseif (FLAGF==3) then
    Rdat=d
  else
    MGdat=d
  endif
END SUBROUTINE FILT

```

## Anexo A.12 Función que obtiene el kernel

```

complex (KIND=4) function KERNEL (G)
USE PARAM
implicit none
real (kind=4) :: g
real (kind=8) :: t1
integer :: lay
t1=RHOT(nlayer)
do lay=nlayer-1,1,-1
  t1=(t1 + RHOT(lay)*dtanh(g*espesor(lay)))/(RHOT(lay) + t1*dtanh(g*espesor(lay)))
  t1=RHOT(lay)*t1
enddo

```



```

call RANDOM_NUMBER(rndRealArr)
XX=rndRealArr( int(ran(seedSize)*5)+1 )
Z=XX*( (TAN(XX)-COS(XX))/abs(TAN(XX)-COS(XX)) )
END SUBROUTINE ALEAT

```

#### Anexo A.14 Función que calcula la transformada de Hankel de orden 0 o 1.

```

COMPLEX FUNCTION ZHANKS(N,B,FUN,TOL,NF,NEW)
!
C=====
==
! C COMPLEX HANKEL TRANSFORMS OF ORDER 0 OR 1 FOR RELATED (SAVED) KERNELS
! C AND FIXED TRANSFORM ARGUMENT B.GT.0.
! C
! C--REF: ANDERSON, W.L., 1979, GEOPHYSICS, VOL. 44, NO. 7, P. 1287-1305.
! C
! C--SUBPROGRAM ZHANKS EVALUATES THE INTEGRAL FROM 0 TO INFINITY OF
! C FUN(G) *JN(G *B) *DG, DEFINED AS THE COMPLEX HANKEL TRANSFORM OF
! C ORDER N (=0 OR 1) AND TRANSFORM ARGUMENT B.GT.0. THE METHOD IS BY
! C ADAPTIVE DIGITAL FILTERING OF THE COMPLEX KERNEL FUNCTION FUN,
! C USING DIRECT AND/OR PREVIOUSLY SAVED KERNEL FUNCTION VALUES.
! C
! C--PARAMETERS (ALL INPUT, EXCEPT NF)
! C
! C  N   = ORDER (=0 OR 1) OF THE HANKEL TRANSFORM TO BE EVALUATED.
! C  B   = REAL TRANSFORM ARGUMENT B.GT.0.0 OF THE HANKEL TRANSFORM.
! C      IF NEW=0, B IS ASSUMED EQUAL TO THE LAST B USED WHEN NEW=1
! C      (SEE PARAMETER NEW AND SUBPROGRAM USAGE BELOW).
! C  FUN(G)= EXTERNAL DECLARED COMPLEX FUNCTION NAME (USER SUPPLIED)
! C          OF A REAL ARGUMENT G.GT.0. THIS REFERENCE MUST BE SUPPLIED
! C          EVEN WHEN NEW=0, SINCE THE ADAPTIVE CONVOLUTION
! C          MAY NEED SOME DIRECT FUNCTION CALLS (E.G. IF TOL REDUCED).
! C          IF PARAMETERS OTHER THAN G ARE REQUIRED IN FUN, USE COMMON
! C          IN THE CALLING PROGRAM AND IN SUBPROGRAM FUN. BOTH
! C          REAL AND IMAGINARY PARTS OF THE COMPLEX FUNCTION FUN(G)
! C          MUST BE CONTINUOUS BOUNDED FUNCTIONS FOR G.GT.0.0. FOR A
! C          REAL FUNCTION F1(G), FUN=CMPLX(F1(G),0.0) MAY BE USED.
! C          TWO INDEPENDENT REAL-FUNCTIONS F1(G),F2(G) MAY BE
! C          INTEGRATED IN PARALLEL BY WRITING FUN=CMPLX(F1(G),F2(G)).
! C  TOL  = REQUESTED REAL TRUNCATION TOLERANCE ACCEPTED AT THE FILTER
! C        TAILS FOR ADAPTIVE FILTERING. A TRUNCATION CRITERION IS
! C        DEFINED DURING CONVOLUTION IN A FIXED ABSCISSA RANGE AS
! C        THE MAX. ABSOLUTE CONVOLVED PRODUCT TIMES TOL. TYPICALLY,
! C        TOL.LE.0.00001 WOULD GIVE ABOUT .01 PER CENT ACCURACY
! C        FOR WELL-BEHAVED KERNELS AND MODERATE VALUES OF B. FOR
! C        VERY LARGE OR SMALL B, A VERY SMALL TOL SHOULD BE USED.
! C        IN GENERAL, DECREASING THE TOLERANCE WOULD PRODUCE HIGHER
! C        ACCURACY IN THE CONVOLUTION SINCE MORE FILTER WEIGHTS ARE
! C        USED (UNLESS EXPONENT UNDERFLOWS OCCUR IN THE KERNEL
! C        EVALUATION -- SEE NOTE (1) BELOW).
! C        FOR MAXIMUM ACCURACY POSSIBLE, TOL=0.0 MAY BE USED.
! C  NF   = TOTAL NUMBER OF DIRECT FUN CALLS USED DURING CONVOLUTION

```

```

!C      FOR ANY VALUE OF NEW (NF IS AN OUTPUT PARAMETER).
!C      NF IS IN THE RANGE 21.LE.NF.LE.283 WHEN NEW=1. USUALLY,
!C      NF IS MUCH LESS THAN 283 (OR 0) WHEN NEW=0.
!C      NEW =1 IS REQUIRED FOR THE VERY FIRST CALL TO ZHANKS, OR IF
!C      FORCING DIRECT FUNCTION FUN(G) CALLS, E.G., IF USING
!C      ZHANKS FOR UNRELATED KERNELS.
!C      NEW=1 INITIALIZES COMMON/SAVE/FSAVE(283),GSAVE(283),NSAVE
!C      FOR NSAVE COMPLEX KERNEL VALUES IN FSAVE AND CORRESPONDING
!C      REAL ARGUMENTS IN GSAVE FOR THE GIVEN PARAMETER B.
!C      NEW =0 TO USE RELATED KERNELS (MODIFIED BY USER) CURRENTLY STORED
!C      IN COMMON/SAVE/. FUN IS CALLED ONLY IF REQUIRED
!C      DURING THE CONVOLUTION. ADDITIONAL FUNCTION VALUES WHEN
!C      NEEDED ARE AUTOMATICALLY ADDED TO THE COMMON/SAVE/ BLOCK.
!C
!C      ***** NOTE THAT IT IS THE USERS RESPONSIBILITY TO MODIFY THE
!C      COMMON FSAVE() VALUES FOR NEW=0 CALLS, EXTERNALLY IN
!C      THE USERS CALLING PROGRAM (SEE SUBPROGRAM USAGE BELOW).
!C
!
C=====
==
!C--SUBPROGRAM USAGE-- ZHANKS IS CALLED AS FOLLOWS
!C  ...
!C  COMPLEX Z1,Z2,ZHANKS,FSAVE
!C  COMMON/SAVE/FSAVE(283),GSAVE(283),NSAVE
!C  EXTERNAL ZF1,ZF2
!C  ...
!C  Z1=ZHANKS(N1,B,ZF1,TOL,NF1,1)
!C  DO 1 I=1,NSAVE
!C C--MODIFY FSAVE IN COMMON/SAVE/ TO OBTAIN RELATED ZF2 FROM ZF1.
!C C--E.G. FSAVE(I)=GSAVE(I) *FSAVE(I) -- FOR RELATION ZF2(G)=G *ZF1(G)
!C  1 CONTINUE
!C  Z2=ZHANKS(N2,B,ZF2,TOL,NF2,0)
!C  ...
!C  END
!C  COMPLEX FUNCTION ZF1(G)
!C  ...USER SUPPLIED CODE FOR DIRECT EVALUATION OF ZF1(G), G.GT.0.
!C  END
!C  COMPLEX FUNCTION ZF2(G)
!C  ...USER SUPPLIED CODE FOR DIRECT EVALUATION OF ZF2(G), G.GT.0.
!C  END
!
C=====
==
!C--NOTES
!C  (1). EXP-UNDERFLOW MAY OCCUR IN EXECUTING THIS SUBPROGRAM.
!C      THIS IS OK PROVIDED THE MACHINE SYSTEM CONDITIONALLY SETS
!C      EXP-UNDERFLOW TO 0.0.
!C  (2). ANSI FORTRAN (AMERICAN STANDARD X3.9-1966) IS USED, EXCEPT
!C      DATA STATEMENTS MAY NEED TO BE CHANGED FOR SOME COMPILERS.
!C      TO CONVERT ZHANKS TO THE NEW AMERICAN STANDARD FORTRAN
!C      (X3.9-1978), ADD THE FOLLOWING DECLARATION TO THIS ROUTINE
!C      SAVE Y1,ISAVE
!C  (3). THE FILTER ABCISSA CORRESPONDING TO EACH FILTER WEIGHT
!C      IS GENERATED IN DOUBLE-PRECISION (TO REDUCE ROUND-OFF),
!C      BUT IS USED IN SINGLE-PRECISION IN FUNCTION FUN.
!C  (4). NO CHECKS ARE MADE ON CALLING PARAMETERS (TO SAVE TIME),

```

```

! C      HENCE UNPREDICTABLE RESULTS COULD OCCUR IF ZHANKS
! C      IS CALLED INCORRECTLY (OR IF FUN OR COMMON IS IN ERROR).
!
C=====
==
! C {VAX-11/780 VERSION FORTRAN-77 (X3.9-1978); SEE NOTE(2) ABOVE.}:
!   SAVE Y1,ISAVE
      COMPLEX FUN,C,CMAX,FSAVE
      COMMON/SAVE/FSAVE(283),GSAVE(283),NSAVE
      DOUBLE PRECISION E,ER,Y1,Y
      DIMENSION T(2),TMAX(2)
      DIMENSION WT0(283),WA0(76),WB0(76),WC0(76),WD0(55),&
        WT1(283),WA1(76),WB1(76),WC1(76),WD1(55)
      EQUIVALENCE (WT0(1),WA0(1)),(WT0(77),WB0(1)),(WT0(153),WC0(1)), &
        (WT0(229),WD0(1)),(WT1(1),WA1(1)),(WT1(77),WB1(1)), &
        (WT1(153),WC1(1)),(WT1(229),WD1(1))
      EQUIVALENCE (C,T(1)),(CMAX,TMAX(1))
!----E=DEXP(.2D0), ER=1.0D0/E
      DATA E/1.221402758160169834D0/,ER/.818730753077981859D0/

!-J0-TRANSFORM FILTER WEIGHT ARRAYS (EQUIVALENT TO WT0 ARRAY)
      DATA WA0/&
        2.1969101E-11, 4.1201161E-09,-6.1322980E-09, 7.2479291E-09,&
        -7.9821627E-09, 8.5778983E-09,-9.1157294E-09, 9.6615250E-09,&
        -1.0207546E-08, 1.0796633E-08,-1.1393033E-08, 1.2049873E-08,&
        -1.2708789E-08, 1.3446466E-08,-1.4174300E-08, 1.5005577E-08,&
        -1.5807160E-08, 1.6747136E-08,-1.7625961E-08, 1.8693427E-08,&
        -1.9650840E-08, 2.0869789E-08,-2.1903555E-08, 2.3305308E-08,&
        -2.4407377E-08, 2.6033678E-08,-2.7186773E-08, 2.9094334E-08,&
        -3.0266804E-08, 3.2534013E-08,-3.3672072E-08, 3.6408936E-08,&
        -3.7425022E-08, 4.0787921E-08,-4.1543242E-08, 4.5756842E-08,&
        -4.6035233E-08, 5.1425075E-08,-5.0893896E-08, 5.7934897E-08,&
        -5.6086570E-08, 6.5475248E-08,-6.1539913E-08, 7.4301996E-08,&
        -6.7117043E-08, 8.4767837E-08,-7.2583120E-08, 9.7366568E-08,&
        -7.7553611E-08, 1.1279873E-07,-8.1416723E-08, 1.3206914E-07,&
        -8.3217217E-08, 1.5663185E-07,-8.1482581E-08, 1.8860593E-07,&
        -7.3963141E-08, 2.3109673E-07,-5.7243707E-08, 2.8867452E-07,&
        -2.6163525E-08, 3.6808773E-07, 2.7049871E-08, 4.7932617E-07,&
        1.1407365E-07, 6.3720626E-07, 2.5241961E-07, 8.6373487E-07,&
        4.6831433E-07, 1.1916346E-06, 8.0099716E-07, 1.6696015E-06,&
        1.3091334E-06, 2.3701475E-06, 2.0803829E-06, 3.4012978E-06/
      DATA WB0/&
        3.2456774E-06, 4.9240402E-06, 5.0005198E-06, 7.1783540E-06,&
        7.6367633E-06, 1.0522038E-05, 1.1590021E-05, 1.5488635E-05,&
        1.7510398E-05, 2.2873836E-05, 2.6368006E-05, 3.3864387E-05,&
        3.9610390E-05, 5.0230379E-05, 5.9397373E-05, 7.4612122E-05,&
        8.8951409E-05, 1.1094809E-04, 1.3308026E-04, 1.6511335E-04,&
        1.9895671E-04, 2.4587195E-04, 2.9728181E-04, 3.6629770E-04,&
        4.4402013E-04, 5.4589361E-04, 6.6298832E-04, 8.1375348E-04,&
        9.8971624E-04, 1.2132772E-03, 1.4772052E-03, 1.8092022E-03,&
        2.2045122E-03, 2.6980811E-03, 3.2895354E-03, 4.0238764E-03,&
        4.9080203E-03, 6.0010999E-03, 7.3216878E-03, 8.9489225E-03,&
        1.0919448E-02, 1.3340696E-02, 1.6276399E-02, 1.9873311E-02,&
        2.4233627E-02, 2.9555699E-02, 3.5990069E-02, 4.3791529E-02,&
        5.3150319E-02, 6.4341372E-02, 7.7506720E-02, 9.2749987E-02,&
        1.0980561E-01, 1.2791555E-01, 1.4525830E-01, 1.5820085E-01,&
        1.6058576E-01, 1.4196085E-01, 8.9781222E-02,-1.0238278E-02,&

```

-1.5083434E-01,-2.9059573E-01,-2.9105437E-01,-3.7973244E-02,&  
3.8273717E-01, 2.2014118E-01,-4.7342635E-01, 1.9331133E-01,&  
5.3839527E-02,-1.1909845E-01, 9.9317051E-02,-6.6152628E-02,&  
4.0703241E-02,-2.4358316E-02, 1.4476533E-02,-8.6198067E-03/  
DATA WC0/&  
5.1597053E-03,-3.1074602E-03, 1.8822342E-03,-1.1456545E-03,&  
7.0004347E-04,-4.2904226E-04, 2.6354444E-04,-1.6215439E-04,&  
9.9891279E-05,-6.1589037E-05, 3.7996921E-05,-2.3452250E-05,&  
1.4479572E-05,-8.9417427E-06, 5.5227518E-06,-3.4114252E-06,&  
2.1074101E-06,-1.3019229E-06, 8.0433617E-07,-4.9693681E-07,&  
3.0702417E-07,-1.8969219E-07, 1.1720069E-07,-7.2412496E-08,&  
4.4740283E-08,-2.7643004E-08, 1.7079403E-08,-1.0552634E-08,&  
6.5200311E-09,-4.0284597E-09, 2.4890232E-09,-1.5378695E-09,&  
9.5019040E-10,-5.8708696E-10, 3.6273937E-10,-2.2412348E-10,&  
1.3847792E-10,-8.5560821E-11, 5.2865474E-11,-3.2664392E-11,&  
2.0182948E-11,-1.2470979E-11, 7.7057678E-12,-4.7611713E-12,&  
2.9415274E-12,-1.8170081E-12, 1.1221034E-12,-6.9271067E-13,&  
4.2739744E-13,-2.6344388E-13, 1.6197105E-13,-9.9147443E-14,&  
6.0487998E-14,-3.6973097E-14, 2.2817964E-14,-1.4315547E-14,&  
9.1574735E-15,-5.9567236E-15, 3.9209969E-15,-2.5911739E-15,&  
1.6406939E-15,-8.8248590E-16, 3.0195409E-16, 2.2622634E-17,&  
-8.0942556E-17,-3.7172363E-17, 1.9299542E-16,-3.3388160E-16,&  
4.6174116E-16,-5.8627358E-16, 7.2227767E-16,-8.7972941E-16,&  
1.0211793E-15,-1.0940039E-15, 1.0789555E-15,-9.7089714E-16/  
DATA WD0/&  
7.4110927E-16,-4.1700094E-16, 8.5977184E-17, 1.3396469E-16,&  
-1.7838410E-16, 4.8975421E-17, 1.9398153E-16,-5.0046989E-16,&  
8.3280985E-16,-1.1544640E-15, 1.4401527E-15,-1.6637066E-15,&  
1.7777129E-15,-1.7322187E-15, 1.5247247E-15,-1.1771155E-15,&  
6.9747910E-16,-1.2088956E-16,-4.8382957E-16, 1.0408292E-15,&  
-1.5220450E-15, 1.9541597E-15,-2.4107448E-15, 2.9241438E-15,&  
-3.5176475E-15, 4.2276125E-15,-5.0977851E-15, 6.1428456E-15,&  
-7.3949962E-15, 8.8597601E-15,-1.0515959E-14, 1.2264584E-14,&  
-1.3949870E-14, 1.5332490E-14,-1.6146782E-14, 1.6084121E-14,&  
-1.4962523E-14, 1.2794804E-14,-9.9286701E-15, 6.8825809E-15,&  
-4.0056107E-15, 1.5965079E-15,-7.2732961E-18,-4.0433218E-16,&  
-6.5679655E-16, 3.3011866E-15,-7.3545910E-15, 1.2394851E-14,&  
-1.7947697E-14, 2.3774303E-14,-3.0279168E-14, 3.9252831E-14,&  
-5.5510504E-14, 9.0505371E-14,-1.7064873E-13/  
! C--END OF J0 FILTER WEIGHTS

! C--J1-TRANSFORM FILTER WEIGHT ARRAYS (EQUIVALENT TO WT1 ARRAY)  
DATA WA1/&  
-4.2129715E-16, 5.3667031E-15,-7.1183962E-15, 8.9478500E-15,&  
-1.0767891E-14, 1.2362265E-14,-1.3371129E-14, 1.3284178E-14,&  
-1.1714302E-14, 8.4134738E-15,-3.7726725E-15,-1.4263879E-15,&  
6.1279163E-15,-9.1102765E-15, 9.9696405E-15,-9.3649955E-15,&  
8.6009018E-15,-8.9749846E-15, 1.1153987E-14,-1.4914821E-14,&  
1.9314024E-14,-2.3172388E-14, 2.5605477E-14,-2.6217555E-14,&  
2.5057768E-14,-2.2485539E-14, 1.9022752E-14,-1.5198084E-14,&  
1.1422464E-14,-7.9323958E-15, 4.8421406E-15,-2.1875032E-15,&  
-3.2177842E-17, 1.8637565E-15,-3.3683643E-15, 4.6132219E-15,&  
-5.6209538E-15, 6.4192841E-15,-6.8959928E-15, 6.9895792E-15,&  
-6.5355935E-15, 5.6125163E-15,-4.1453931E-15, 2.6358827E-15,&  
-9.5104370E-16, 1.4600474E-16, 5.6166519E-16, 8.2899246E-17,&  
5.0032100E-16, 4.3752205E-16, 2.1052293E-15,-9.5451973E-16,&  
6.4004437E-15,-2.1926177E-15, 1.1651003E-14, 5.8415433E-16,&

1.8044664E-14, 1.0755745E-14, 3.0159022E-14, 3.3506138E-14,&  
5.8709354E-14, 8.1475200E-14, 1.2530006E-13, 1.8519112E-13,&  
2.7641786E-13, 4.1330823E-13, 6.1506209E-13, 9.1921659E-13,&  
1.3698462E-12, 2.0447427E-12, 3.0494477E-12, 4.5501001E-12,&  
6.7870250E-12, 1.0126237E-11, 1.5104976E-11, 2.2536053E-11/  
DATA WB1/&  
3.3617368E-11, 5.0153839E-11, 7.4818173E-11, 1.1161804E-10,&  
1.6651222E-10, 2.4840923E-10, 3.7058109E-10, 5.5284353E-10,&  
8.2474468E-10, 1.2303750E-09, 1.8355034E-09, 2.7382502E-09,&  
4.0849867E-09, 6.0940898E-09, 9.0913020E-09, 1.3562651E-08,&  
2.0233058E-08, 3.0184244E-08, 4.5029477E-08, 6.7176304E-08,&  
1.0021488E-07, 1.4950371E-07, 2.2303208E-07, 3.3272689E-07,&  
4.9636623E-07, 7.4049804E-07, 1.1046805E-06, 1.6480103E-06,&  
2.4585014E-06, 3.6677163E-06, 5.4714550E-06, 8.1626422E-06,&  
1.2176782E-05, 1.8166179E-05, 2.7099223E-05, 4.0428804E-05,&  
6.0307294E-05, 8.9971508E-05, 1.3420195E-04, 2.0021123E-04,&  
2.9860417E-04, 4.4545291E-04, 6.6423156E-04, 9.9073275E-04,&  
1.4767050E-03, 2.2016806E-03, 3.2788147E-03, 4.8837292E-03,&  
7.2596811E-03, 1.0788355E-02, 1.5973323E-02, 2.3612041E-02,&  
3.4655327E-02, 5.0608141E-02, 7.2827752E-02, 1.0337889E-01,&  
1.4207357E-01, 1.8821315E-01, 2.2996815E-01, 2.5088500E-01,&  
2.0334626E-01, 6.0665451E-02, -2.0275683E-01, -3.5772336E-01,&  
-1.8280529E-01, 4.7014634E-01, 7.2991233E-03, -3.0614594E-01,&  
2.4781735E-01, -1.1149185E-01, 2.5985386E-02, 1.0850279E-02,&  
-2.2830217E-02, 2.4644647E-02, -2.2895284E-02, 2.0197032E-02/  
DATA WC1/&  
-1.7488968E-02, 1.5057670E-02, -1.2953923E-02, 1.1153254E-02,&  
-9.6138436E-03, 8.2952090E-03, -7.1628361E-03, 6.1882910E-03,&  
-5.3482055E-03, 4.6232056E-03, -3.9970542E-03, 3.4560118E-03,&  
-2.9883670E-03, 2.5840861E-03, -2.2345428E-03, 1.9323046E-03,&  
-1.6709583E-03, 1.4449655E-03, -1.2495408E-03, 1.0805480E-03,&  
-9.3441130E-04, 8.0803899E-04, -6.9875784E-04, 6.0425624E-04,&  
-5.2253532E-04, 4.5186652E-04, -3.9075515E-04, 3.3790861E-04,&  
-2.9220916E-04, 2.5269019E-04, -2.1851585E-04, 1.8896332E-04,&  
-1.6340753E-04, 1.4130796E-04, -1.2219719E-04, 1.0567099E-04,&  
-9.1379828E-05, 7.9021432E-05, -6.8334412E-05, 5.9092726E-05,&  
-5.1100905E-05, 4.4189914E-05, -3.8213580E-05, 3.3045496E-05,&  
-2.8576356E-05, 2.4711631E-05, -2.1369580E-05, 1.8479514E-05,&  
-1.5980307E-05, 1.3819097E-05, -1.1950174E-05, 1.0334008E-05,&  
-8.9364160E-06, 7.7278366E-06, -6.6827083E-06, 5.7789251E-06,&  
-4.9973715E-06, 4.3215167E-06, -3.7370660E-06, 3.2316575E-06,&  
-2.7946015E-06, 2.4166539E-06, -2.0898207E-06, 1.8071890E-06,&  
-1.5627811E-06, 1.3514274E-06, -1.1686576E-06, 1.0106059E-06,&  
-8.7392952E-07, 7.5573750E-07, -6.5353002E-07, 5.6514528E-07,&  
-4.8871388E-07, 4.2261921E-07, -3.6546333E-07, 3.1603732E-07/  
DATA WD1/&  
-2.7329579E-07, 2.3633470E-07, -2.0437231E-07, 1.7673258E-07,&  
-1.5283091E-07, 1.3216174E-07, -1.1428792E-07, 9.8831386E-08,&  
-8.5465227E-08, 7.3906734E-08, -6.3911437E-08, 5.5267923E-08,&  
-4.7793376E-08, 4.1329702E-08, -3.5740189E-08, 3.0906612E-08,&  
-2.6726739E-08, 2.3112160E-08, -1.9986424E-08, 1.7283419E-08,&  
-1.4945974E-08, 1.2924650E-08, -1.1176694E-08, 9.6651347E-09,&  
-8.3580023E-09, 7.2276490E-09, -6.2501673E-09, 5.4048822E-09,&  
-4.6739154E-09, 4.0418061E-09, -3.4951847E-09, 3.0224895E-09,&  
-2.6137226E-09, 2.2602382E-09, -1.9545596E-09, 1.6902214E-09,&  
-1.4616324E-09, 1.2639577E-09, -1.0930164E-09, 9.4519327E-10,&  
-8.1736202E-10, 7.0681930E-10, -6.1122713E-10, 5.2856342E-10,&

```

-4.5707937E-10, 3.9526267E-10, -3.4180569E-10, 2.9557785E-10, &
-2.5560176E-10, 2.2103233E-10, -1.9113891E-10, 1.6528994E-10, &
-1.4294012E-10, 1.2361991E-10, -8.2740936E-11 /
!--END OF J1 FILTER WEIGHTS
  NONE=0
  IF(NEW.EQ.0) GO TO 100
  NSAVE=0
!----INITIALIZE KERNEL ABSCISSA GENERATION FOR GIVEN B
  Y1=0.7358852661479794460D0/DBLE(B)
100 ZHANKS=(0.0,0.0)
  CMAX=(0.0,0.0)
  NF=0
  Y=Y1
!----BEGIN RIGHT-SIDE CONVOLUTION AT WEIGHT 131 (EITHER NEW=1 OR 0)
  ASSIGN 110 TO M
  I=131
  Y=Y *E
  GO TO 200
110 TMAX(1)=AMAX1(ABS(T(1)),TMAX(1))
  TMAX(2)=AMAX1(ABS(T(2)),TMAX(2))
  I=I+1
  Y=Y *E
  IF(I.LE.149) GO TO 200
  IF(TMAX(1).EQ.0.0.AND.TMAX(2).EQ.0.0) NONE=1
!----ESTABLISH TRUNCATION CRITERION (CMAX=CMPLX(TMAX(1),TMAX(2))
  CMAX=TOL *CMAX
  ASSIGN 120 TO M
  GO TO 200
!----CHECK FOR FILTER TRUNCATION AT RIGHT END
120 IF(ABS(T(1)).LE.TMAX(1).AND.ABS(T(2)).LE.TMAX(2)) GO TO 130
  I=I+1
  Y=Y *E
  IF(I.LE.283) GO TO 200
130 Y=Y1
!----CONTINUE WITH LEFT-SIDE CONVOLUTION AT WEIGHT 130
  ASSIGN 140 TO M
  I=130
  GO TO 200
!----CHECK FOR FILTER TRUNCATION AT LEFT END
140 IF(ABS(T(1)).LE.TMAX(1).AND.ABS(T(2)).LE.TMAX(2).AND.&
  NONE.EQ.0) GO TO 190
  I=I-1
  Y=Y *ER
  IF(I.GT.0) GO TO 200
!----RETURN WITH ISAVE=1 PRESET FOR POSSIBLE NEW=0 USE.
190 ISAVE=1
!----NORMALIZE BY B TO ACCOUNT FOR INTEGRATION RANGE CHANGE
  ZHANKS=ZHANKS/B
  RETURN
!----SAVE/RETRIEVE PSEUDO-SUBROUTINE (CALL FUN ONLY WHEN NECESSARY)
200 G=SNGL(Y)
  IF(NEW) 300,210,300
210 IF(ISAVE.GT.NSAVE) GO TO 300
  ISAVE0=ISAVE
220 IF(G.EQ.GSAVE(ISAVE)) GO TO 240
  ISAVE=ISAVE+1
  IF(ISAVE.LE.NSAVE) GO TO 220

```

```
      ISAVE=ISAVE0
!----G NOT IN COMMON/SAVE/---- EVALUATE FUN.
      GO TO 300
!----G FOUND IN COMMON/SAVE/---- USE FSAVE AS GIVEN.
240  C=FSAVE(ISAVE)
      ISAVE=ISAVE+1
!----SWITCH ON ORDER N
250  IF(N) 270,260,270
260  C=C *WT0(I)
      GO TO 280
270  C=C *WT1(I)
280  ZHANKS=ZHANKS+C
      GO TO M,(110,120,140)
!----DIRECT FUN EVALUATION (AND ADD TO END OF COMMON/SAVE/)
300  NSAVE=NSAVE+1
      C=FUN(G)
      NF=NF+1
      FSAVE(NSAVE)=C
      GSAVE(NSAVE)=G
      GO TO 250
      END
```

# Anexo B

Curvas de cada perfil del modelo modificado de Oldenburg y Li de 1994.

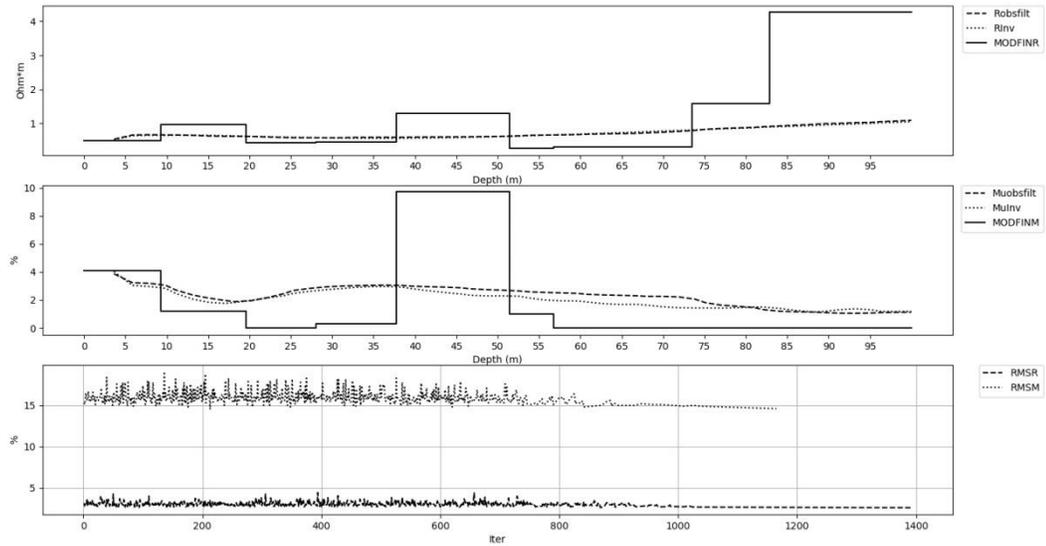


Figura Anexo B.1. Posición  $x=570$ .

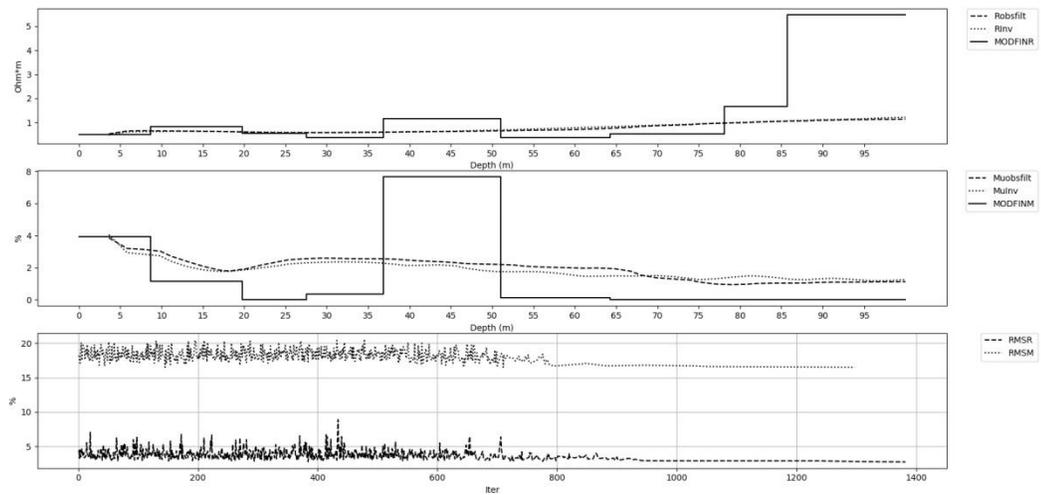


Figura Anexo B.2. Posición  $x=580$ .

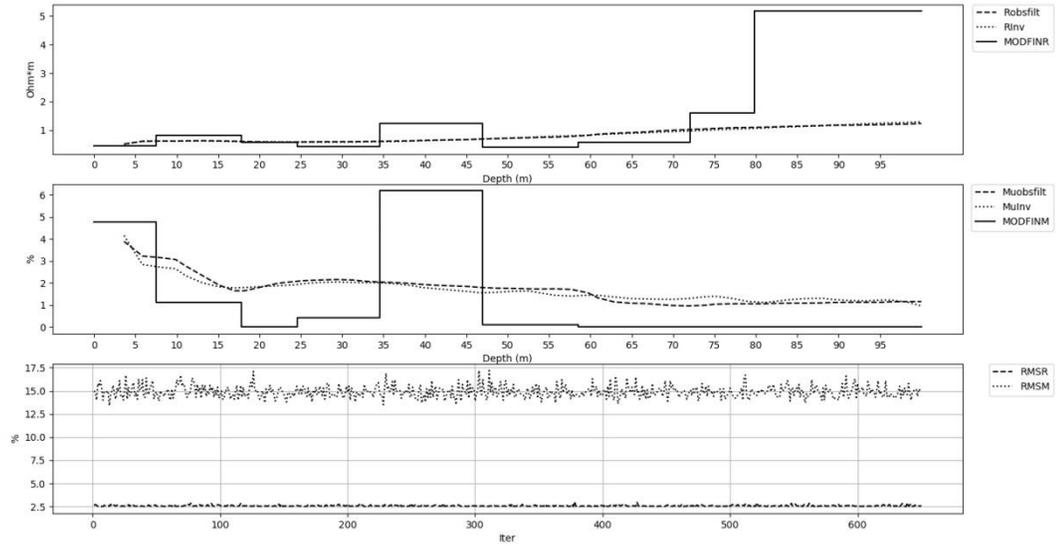


Figura Anexo B.3. Posición  $x=590$ .

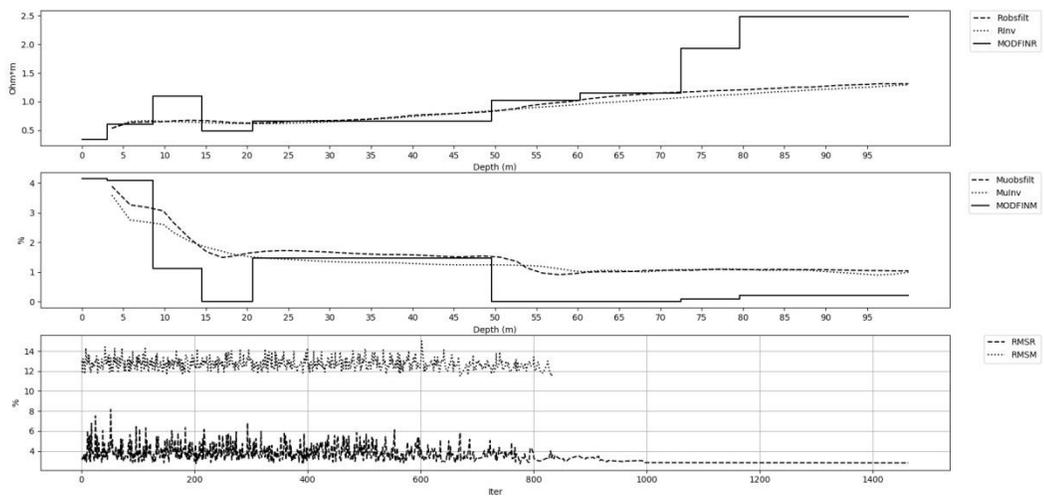


Figura Anexo B.4. Posición  $x=600$ .

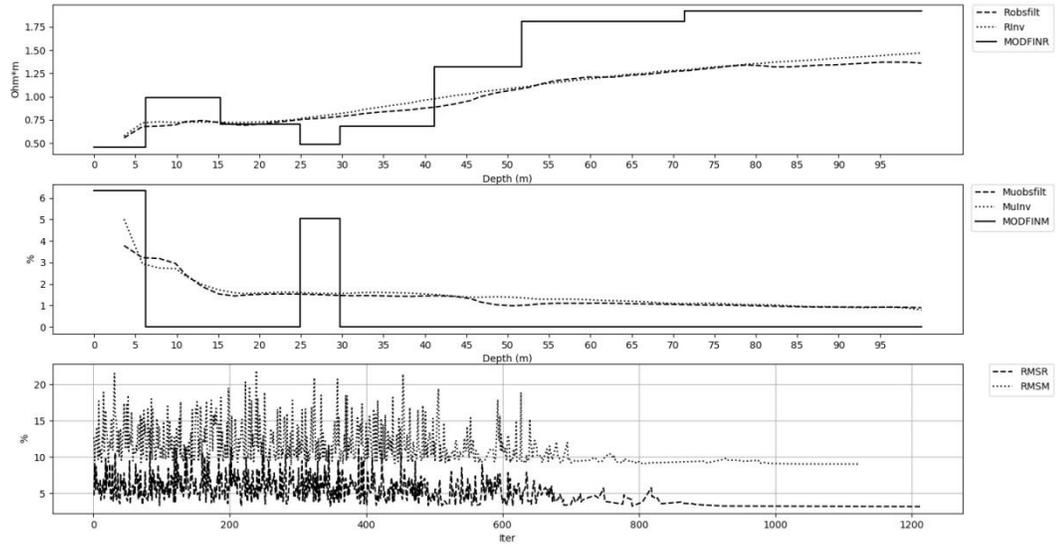


Figura Anexo B.5. Posición  $x=610$ .

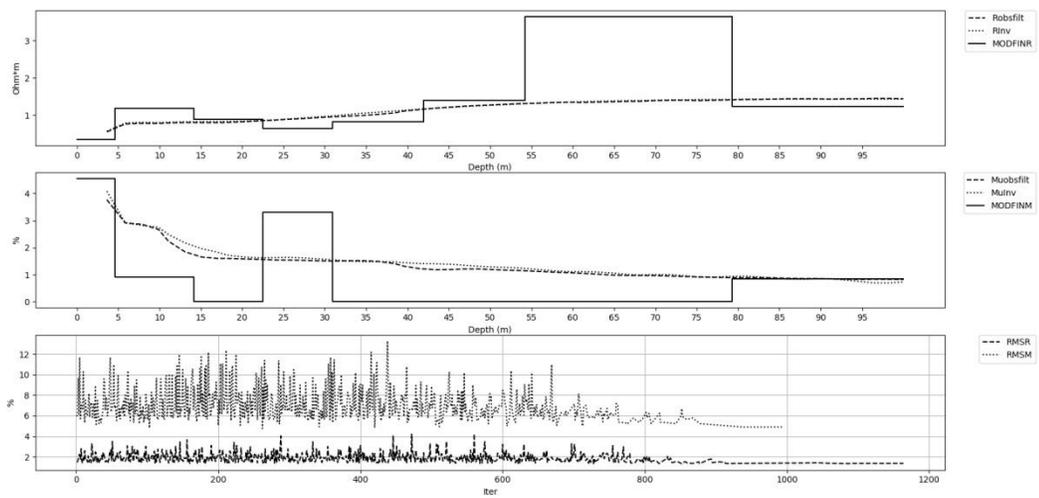


Figura Anexo B.6. Posición  $x=620$ .

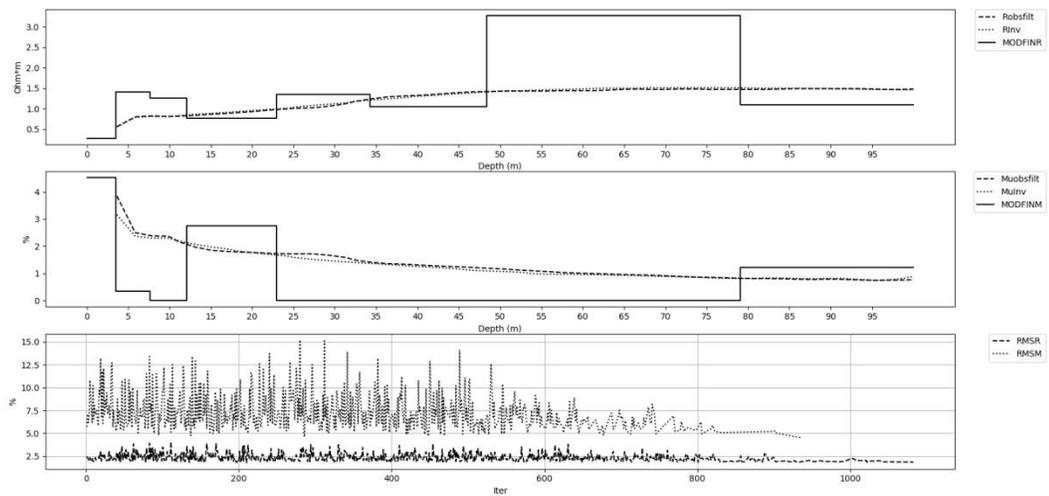


Figura Anexo B.7. Posición  $x=630$ .

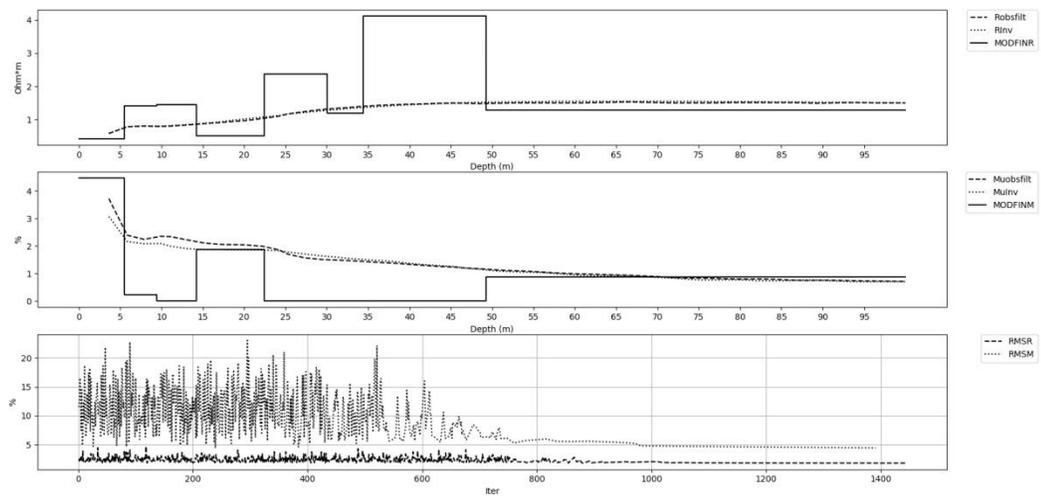


Figura Anexo B.8. Posición  $x=640$ .

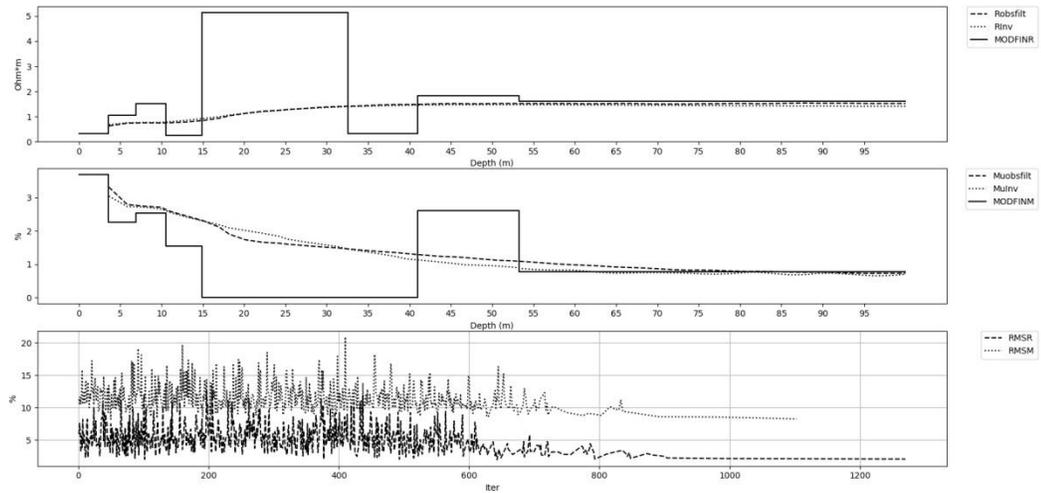


Figura Anexo B.9. Posición  $x=650$ .

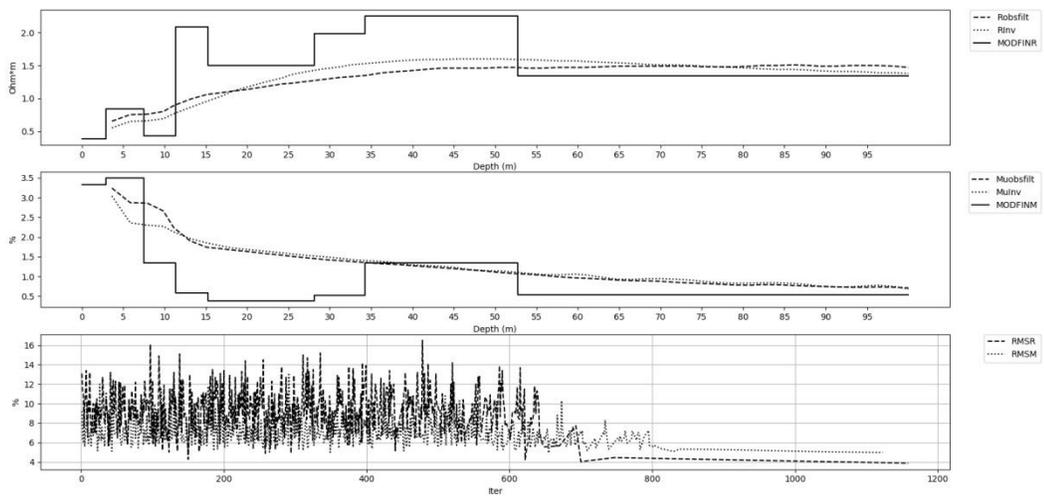


Figura Anexo B.10. Posición  $x=660$ .

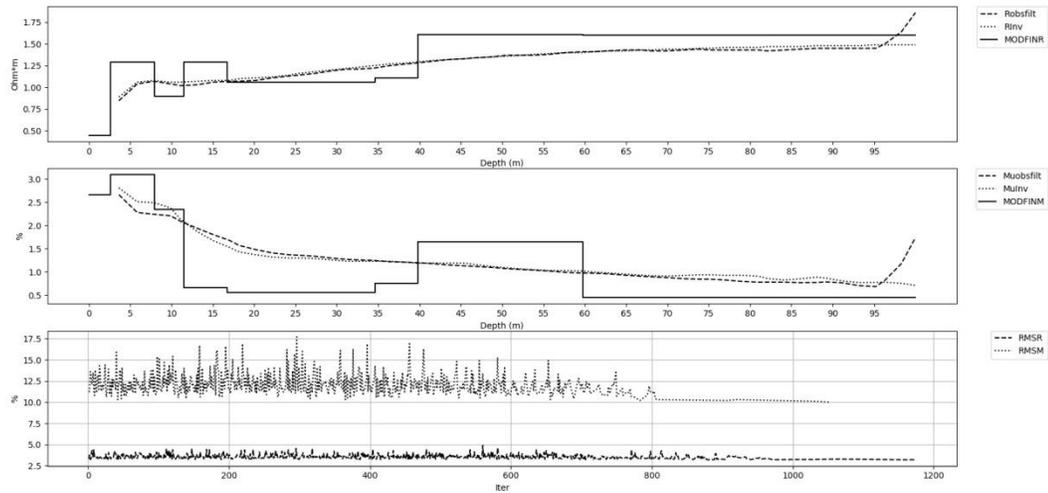


Figura Anexo B.11. Posición x=670.

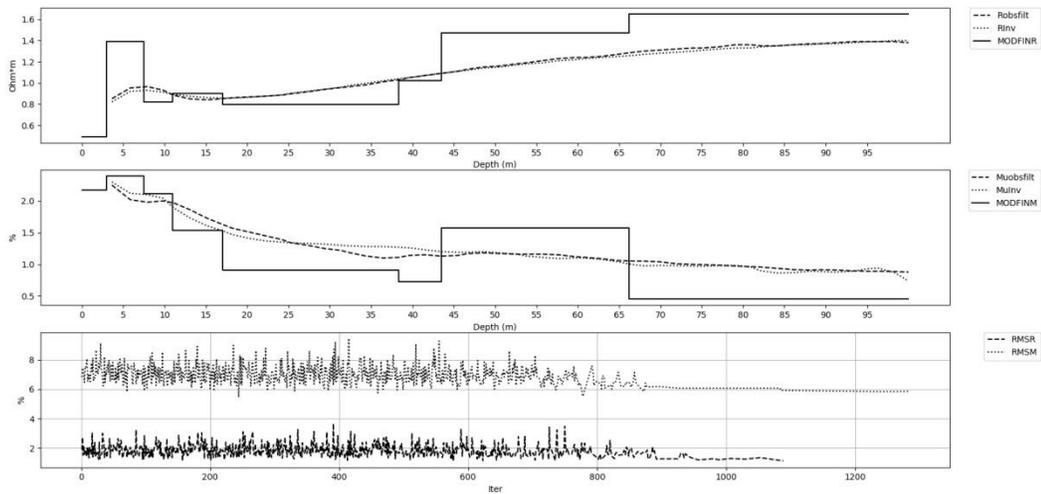


Figura Anexo B.12. Posición x=680.

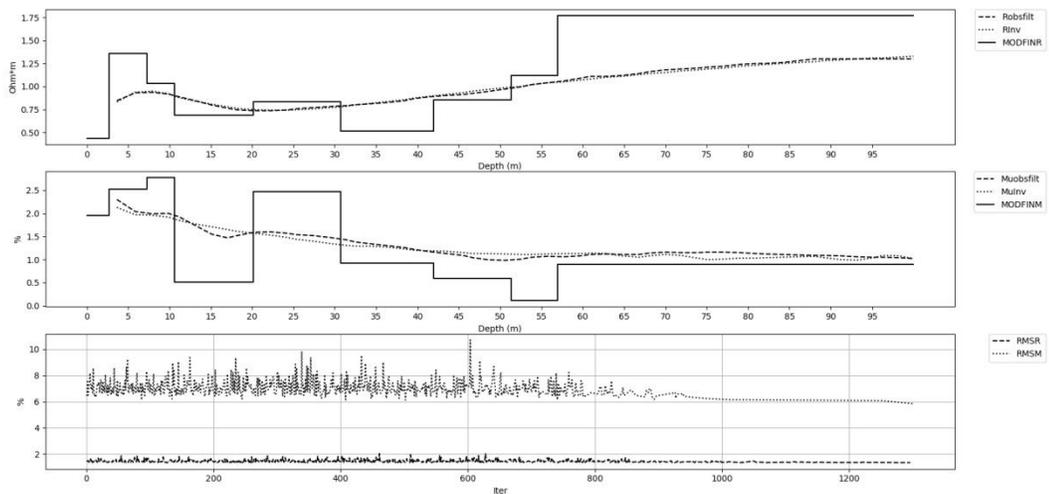


Figura Anexo B.13. Posición x=690.

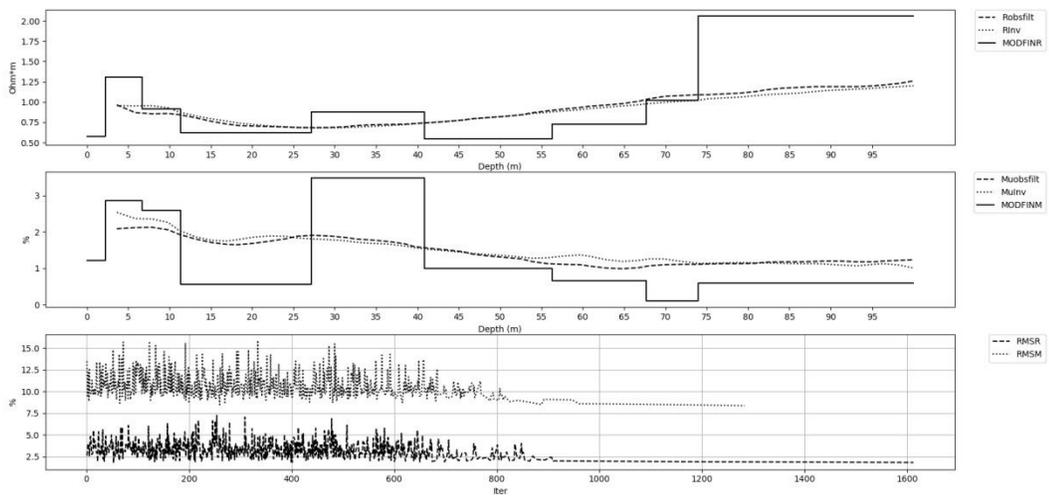


Figura Anexo B.14. Posición x=700.

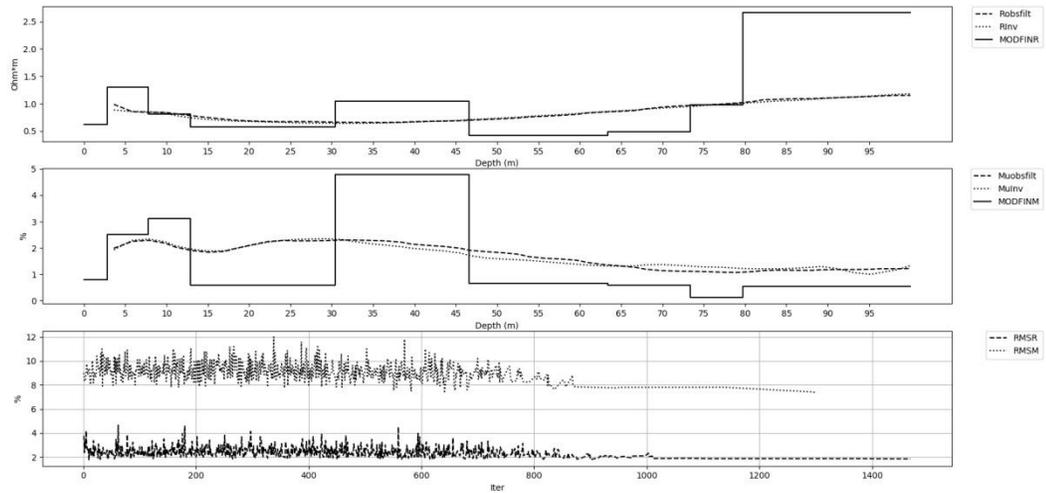


Figura Anexo B.15. Posición  $x=710$ .

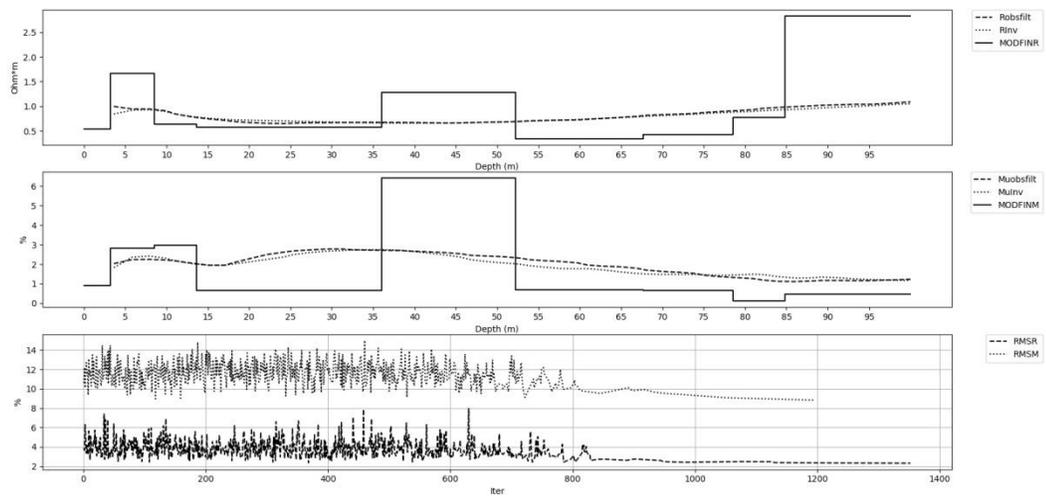


Figura Anexo B.16. Posición  $x=720$ .

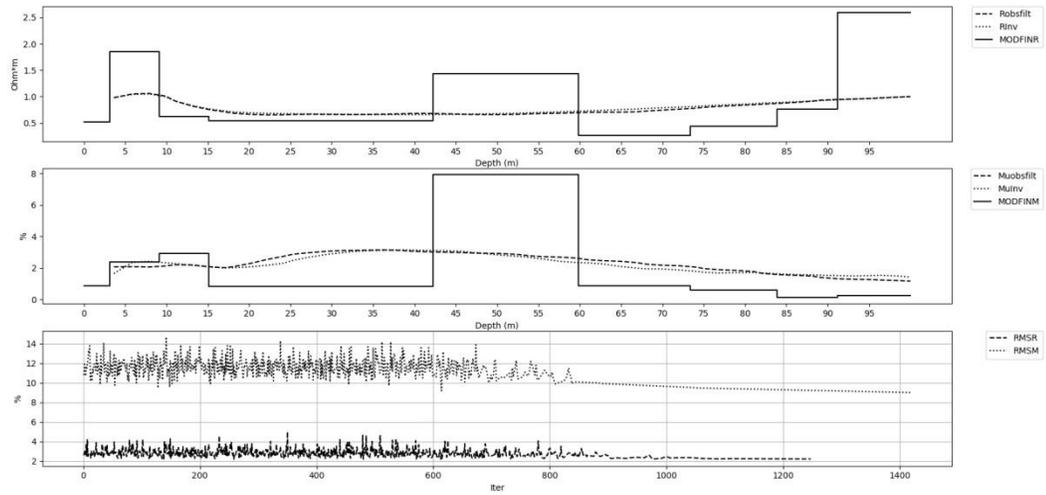


Figura Anexo B.17. Posición  $x=730$ .

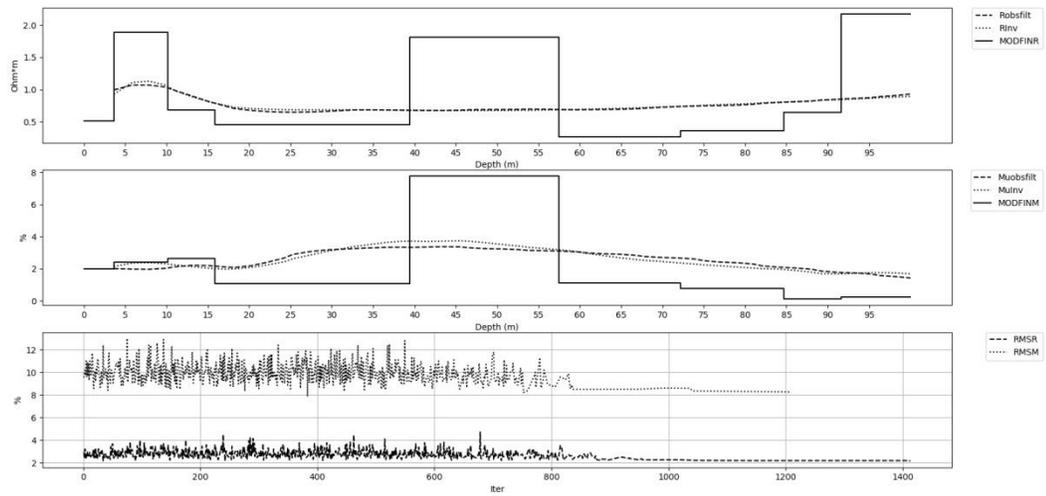


Figura Anexo B.18. Posición  $x=740$ .

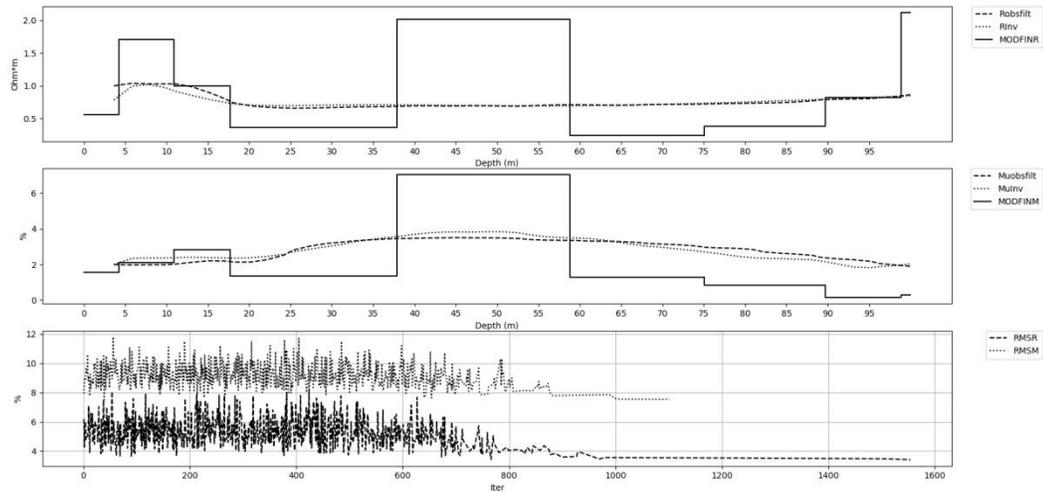


Figura Anexo B.19. Posición  $x=750$ .

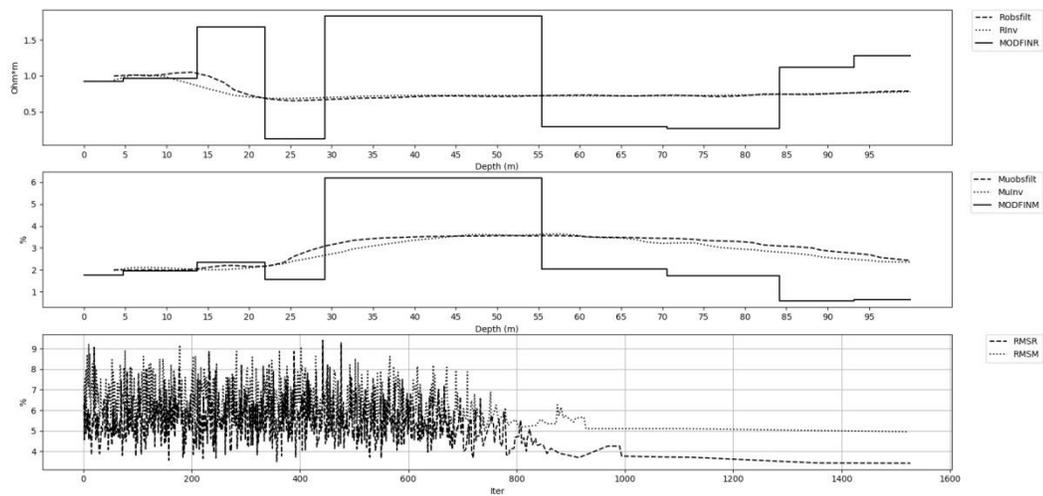


Figura Anexo B.20. Posición  $x=760$ .

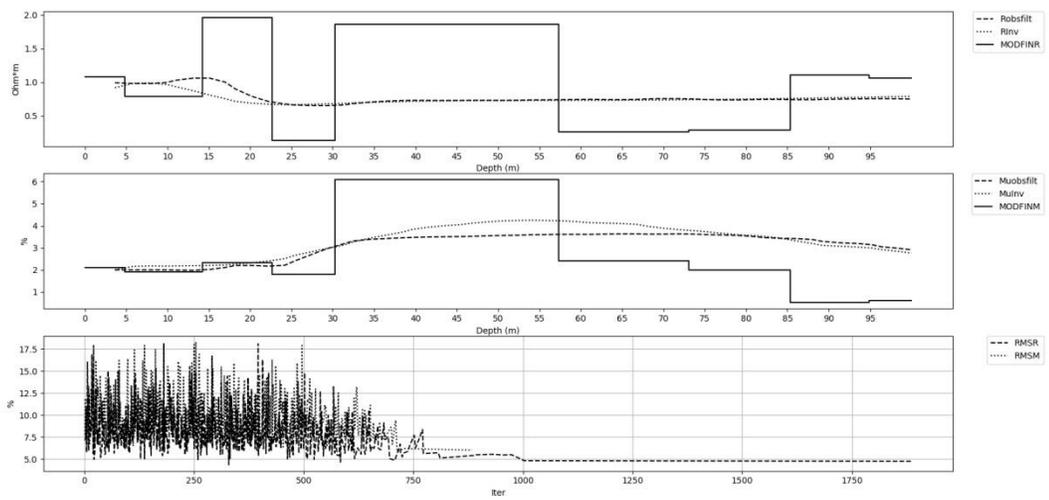


Figura Anexo B.21. Posición  $x=770$ .