UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

LA GRAN RETÍCULA DE PRERRADICALES DE RETÍCULAS

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:

SEBASTIÁN PARDO GUERRA

DIRECTOR DE TESIS:
DR. HUGO ALBERTO RINCÓN MEJÍA
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM.

DR. JOSÉ RÍOS MONTES
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM.
DR. JUAN MORALES RODRÍGUEZ,
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM.

CIUDAD DE MÉXICO, MARZO 2019.

La gran retícula de prerradicales de retículas

La matemática es la ciencia que usa
palabras fáciles para expresar ideas difíciles.

Índice general

Introducción

La Teoría de Retículas se ha vuelto una herramienta indispensable para el estudio del Álgebra, en particular para la Teoría de Anillos.

Jonathan Golan presentó un estudio sistemático de la retícula de las teorías de torsión hereditarias. En su tratado Torsion Theories [9], hace una recolección de resultados acerca de la estructura de esta retícula.

Bican, Kepka, Němec hicieron un estudio de los prerradicales en su libro Modules, Rings and Preradicals [7]. En este libro desarrollaron una buena cantidad de la Teoría de Módulos y Anillos por medio de sus relaciones con diversas clases de prerradicales. Obtuvieron muchas caracterizaciones por medio de las propiedades de diversos prerradicales en la categoría de módulos. Además, dieron muchos ejemplos de prerradicales para diferentes clases de anillos.

En su libro Rings of quotients [12], Bo Stenström usó el concepto de *big lattice* con respecto a los prerradicales y a otras estructuras cuyos objetos eran demasiado numerosos para ser los elementos de un conjunto, pero que aparte de esto, tenían una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva donde existían supremos e ínfimos para familias de estos objetos. Stenström presentó muchos conceptos interesantes acerca de los prerradicales, definiendo los prerradicales idempotentes, los radicales, los prerradicales exactos izquierdos y los radicales que preservan epimorfismos. Stenström introduce las principales operaciones entre ellos; la composición y la operación coproducto. Entre los teoremas que usan ideas reticulares, Stenström demuestra la existencia de un menor radical por arriba de cada prerradical, de un mayor prerradical idempotente por debajo de cada prerradical y de un menor prerradical exacto izquierdo por arriba de un prerradical dado. Introdujo también las clases de pretorsión y las clases libres de pretorsión asociadas con un prerradical, relacionando propiedades de estas clases con propiedades de sus prerradicales correspondientes.

Francisco Raggi y sus colaboradores comenzaron el estudio de los preradicales desde el punto de vista la de Teoría de Retículas. Denotaron por *R-pr* la gran retícula de prerradicales en la categoría $R-mod$ de los módulos izquierdos unitarios para un anillo asociativo con 1, R. Raggi y sus colaboradores desarrollaron métodos para el estudio de la gran retícula R-pr, demostrando entre otras cosas, que es completa, atómica, coatómica, con pseudocomplementos fuertes y superiormente continua. Encontraron relaciones de distributividad para las operaciones de composición y cocomposición respecto a supremos e ínfimos arbitrarios. Esto permitió entre otras cosas, demostrar la existencia de importantes prerradicales asociados con un prerradical. Cada prerradical tiene un igualador, un anulador, un coigualador y un totalizador. Al estudiar la relación entre los prerradicales y los módulos fuertemente invariantes de un módulo, descubrieron que todos los prerradicales que al ser calculados en un módulo M dan lugar a un submódulo fuertemente invariante N, forman un subintervalo de la retícula R-pr. Al menor elemento de este subintervalo lo denotaron α_N^M y, al mayor ω_N^M. Esto condujo al descubrimiento de la existencia de los módulos inyectivos principales. Un módulo inyectivo E es inyectivo principal cuando hay una correspondencia uno a uno entre el conjunto de los prerradicales exactos izquierdos y el conjunto de los submódulos fuertemente invariantes de E.

Por otra parte, una importante línea de investigación dentro del álgebra es la de extender los teoremas relacionados con la estructura reticular de los módulos, a un contexto puramente reticular. Entre los ejemplos notables, están la versión reticular del teorema de Hopkins y Levitsky incluida en el libro de Albu y Nastasescu, *Finiteness conditions in Module Theory*. Otro ejemplo es el teorema reticular de Osofski y Smith.

El libro de Calugareanu, *Lattice Concepts in Module Theory* hace una recopilación de los aspectos reticulares más importantes que ocurren en la Teoría de Módulos, incluye una buena cantidad de generalizaciones reticulares de importantes teoremas y conceptos de la Teoría de Módulos.

El concepto de morfismo lineal introducido por Albu y Iosif permitió la construcción de la categoría $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ de las retículas modulares completas, cuyos objetos son las retículas modulares completas y cuyos morfismos son los morfismos lineales. Albu y Iosif introdujeron los prerradicales para esta categoría, y demostraron numerosos resultados.

Motivados por el contexto descrito, en este trabajo se introduce la gran retícula de los prerradicales para la categoría $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, la cual llamamos $\mathcal{L}_{pr}$. Para ella extendemos algunos resultados reportados en la literatura para la gran retícula R-pr como los mencionados en los párrafos anteriores.

Las partes centrales de este trabajo fueron expuestas en el 34^{th} Ohio State University-Denison Mathematics Conference, realizado en el campus de Columbus de la Universidad del estado de Ohio, EUA, del 18 al 20 de Mayo del 2018. Posteriormente, el trabajo se expuso en el 51 Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana llevado a cabo en Villahermosa Tabasco,

México, del 21 al 26 de Octubre del 2018.
El examen de candidatura tuvo como fecha el día 16 de Mayo del 2017 donde se presentaron por primera vez los resultados e ideas centrales que llevaron a desarrollar este trabajo de investigación.

Capítulo 1

Preliminares

Denotamos por $\mathcal{L}$ a la clase de todas las retículas completas. Esta clase es una categoría, cuyos morfismos son los morfismos usuales de retículas. Al mayor y menor elemento de una retícula L, los representaremos por 1_L y 0_L, respectivamente.

Dada una retícula L y $a \leq b$ en L, escribimos

$$b/a = \{x \in L \mid a \leq x \leq b\}.$$

Un intervalo inicial de b/a es cualquier intervalo de la forma c/a, donde $c \in b/a$. Así, un intervalo inicial de la retícula L es cualquier intervalo de la forma $a/0$, con $a \in L$. Un intervalo inicial $a/0$ es simple, si $a/0 = \{0, a\}$.

Definición 1.0.1. *[1, Definition 1.1]*
Sea $f : L \longrightarrow L'$ una función entre las retículas L y L', con elementos mayores y menores 0_L, 1_L, y $0_{L'}$, $1_{L'}$, respectivamente. Decimos que f es un morfismo lineal si existe $k \in L$, llamado el núcleo de f, y $a' \in L'$, tal que se cumplen las siguientes afirmaciones:

i) $f(x) = f(x \vee k)$, *para toda* $x \in L$,

ii) f *induce un isomorfismo de retículas* $\bar{f} : 1_L/k \longrightarrow a'/0_{L'}$, *tal que*

$$\bar{f}(x) = f(x),\ \forall x \in 1_L/k.$$

Ejemplo. *Sea $\varphi : M \longrightarrow M'$ un morfismo de módulos. Si $\mathcal{L}(M)$ y $\mathcal{L}(M')$ denotan las retículas de submódulos de M y M' respectivamente, la función $f : \mathcal{L}(M) \longrightarrow \mathcal{L}(M')$ definida por $f(N) = \varphi(N)$, para cada $N \leq M$, es un morfismo lineal con núcleo $Ker\varphi$.*

Notemos primero que en la retícula de submódulos $\mathcal{L}(M)$, si $L, N \leq M$, entonces

$$N \wedge L = N \cap L \text{ y } N \vee L = N + L.$$

Así, al definir $f : \mathcal{L}(M) \longrightarrow \mathcal{L}(M')$ *por* $f(N) = \varphi(N)$ *se tiene que para cualquier* $N \leq M$,

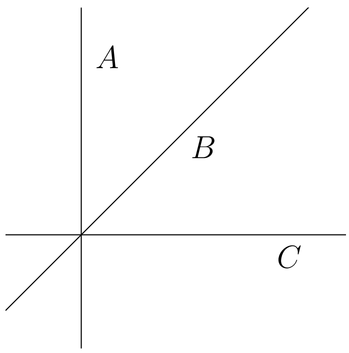
$$f(N \vee Ker\varphi) = f(N + Ker\varphi) = \varphi(N + Ker\varphi) = \varphi(N) = f(N).$$

Por otra parte, por el Teorema de la Correspondencia, φ *induce una biyección* $\bar{\varphi}$ *entre el conjunto de submódulos de* M *que contienen a* $Ker\varphi$ *y el conjunto de submódulos de* $\varphi(M)$. *Nótese que* $\bar{\varphi}(L) = \varphi(L)$, *para cualquier* L *tal que* $Ker\varphi \leq L \leq M$. *Tomando esto en cuenta, se sigue que*

$$\bar{f} : \mathcal{L}(M/Ker\varphi) \longrightarrow \mathcal{L}(\varphi(M)),$$

definida por $\bar{f}(L) = \varphi(L) = f(L)$ *es un isomorfismo de retículas. Por lo tanto,* f *es un morfismo lineal.*

Observación. *Los morfismos lineales no necesariamente son morfismos de retículas. En efecto, consideremos la siguiente figura en el plano* $\mathbb{R}^2$



donde A *representa el eje* y, B *representa la recta identidad y* C *representa el eje* x. *Sea* $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2/C$ *el morfismo de módulos, que asigna a cada vector* $\hat{x}$ *su clase* $\hat{x} + C$. *Así, se tiene el morfismo lineal* $f : \mathcal{L}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^2/C)$, *con regla de correspondencia* $W \longmapsto \varphi(W)$. *Notemos que*

$$\begin{gathered} f(A \cap B) = \varphi(A \cap B) = (0 + C)/C = 0, \\ f(A) = \varphi(A) = (A + C)/C = \mathbb{R}^2/C, \\ f(B) = \varphi(B) = (B + C)/C = \mathbb{R}^2/C. \end{gathered}$$

Con esto en cuenta, se sigue que

$$0 = f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B) = \mathbb{R}^2/C,$$

es decir, f *no es un morfismo de retículas.*

Notación. Si $f : L \longrightarrow L'$ es un morfismo lineal, denotaremos por $n(f) \in L$ al núcleo de f. Al elemento $a' \in L'$ tal que $\bar{f} : 1_L/n(f) \longrightarrow a'/0_{L'}$ es un isomorfismo de retículas, lo denotaremos por $a' := f(1_L)$.

Algunas propiedades de los morfismos lineales son las siguientes:

Proposición 1.0.2. *[1, Proposition 1.3, (4)]*
Sea $f : L \longrightarrow L'$ un morfismo lineal. Entonces

$$f(x \vee y) = f(x) \vee f(y),\ \forall x, y \in L$$

Demostración. Sean $f : L \longrightarrow L'$ un morfismo lineal y $x, y \in L$. Como f es un morfismo lineal, si $n(f)$ es el núcleo de f, se tiene un isomorfismo de retículas $\bar{f} : 1_L/n(f) \longrightarrow f(1_L)/0_{L'}$ tal que $\bar{f}(x) = f(x)$, $\forall x \in 1_L/n(f)$.
Sean $x_1 = x \vee n(f)$ y $y_1 = y \vee n(f)$. Nótese que, como $x_1, y_1 \in 1_L/n(f)$, entonces $x_1 \vee y_1 \in 1_L/n(f)$. Tomando esto en cuenta, se tiene que

$$f(x \vee y) = f(x \vee y \vee n(f)) = f(x \vee n(f) \vee y \vee n(f)) = f(x_1 \vee y_1) = \bar{f}(x_1 \vee y_1).$$

Como $\bar{f}$ es un isomorfismo de retículas, se sigue que

$$\bar{f}(x_1 \vee y_1) = \bar{f}(x_1) \vee \bar{f}(y_1).$$

Por lo tanto,

$$\begin{gathered} f(x \vee y) = \bar{f}(x_1 \vee y_1) = \bar{f}(x_1) \vee \bar{f}(y_1) \\ = \bar{f}(x \vee n(f)) \vee \bar{f}(y \vee n(f)) = f(x \vee n(f)) \vee f(y \vee n(f)) = f(x) \vee f(y). \end{gathered}$$

□

Corolario 1.0.3. *[1, Corollary 1.4]*
Sea $f : L \longrightarrow L'$ un morfismo lineal. Entonces f es una función creciente.

Demostración. Sean $x, y \in L$ tales que $x \leq y$. Entonces

$$f(y) = f(y \vee x) = f(y) \vee f(x).$$

Por lo tanto, $f(x) \leq f(y)$. □

Corolario 1.0.4. *[1, Corollary 1.5]*
Sea $f : L \longrightarrow L'$ un morfismo lineal. Entonces

$$f(0_L) = 0_{L'}.$$

Demostración. Sea $f : L \longrightarrow L'$ un morfismo lineal con núcleo $n(f)$. Entonces f induce un isomorfismo de retículas $\bar{f} : 1_L/n(f) \longrightarrow f(1_L)/0_{L'}$, tal que $\bar{f}(x) = f(x)$, $\forall x \in 1_L/n(f)$. Tomando esto en cuenta,

$$f(n(f)) = \bar{f}(n(f)) = 0_{L'},$$

de donde se sigue que $0_{L'} \leq f(0_L) \leq f(n(f)) = 0_{L'}$. Por lo tanto,

$$f(0_L) = 0_{L'}.$$

$\square$

Lema 1.0.5. *[2, Lemma 0.6]*
Sea $f : L \longrightarrow L'$ un morfismo lineal. Entonces se cumplen las siguentes afirmaciones:

i) f conmuta con yuntas arbitrarias, es decir,

$$f(\bigvee_{i\in I} x_i) = \bigvee_{i\in I} f(x_i),$$

para cualquier familia $\{x_i\}_{i\in I}$ de elementos en L.

ii) f preserva intervalos, es decir, para cualquier $u \leq v$ en L, se tiene que $f(v/u) = f(v)/f(u)$.

Demostración. *i)*
Sea $f : L \longrightarrow L'$ un morfismo lineal. Si $n(f)$ es el núcleo de f, entonces se tiene el isomorfismo de retículas $\bar{f} : 1_L/n(f) \longrightarrow f(1_L)/0_{L'}$ con regla de correspondencia $\bar{f}(x) = f(x)$, $\forall x \in 1_L/n(f)$. Ahora, para cualquier familia de elementos $\{x_i\}_{i\in I}$ en L, se tiene que

$$f(\bigvee_{i\in I} x_i) = f((\bigvee_{i\in I} x_i) \vee n(f)) = f(\bigvee_{i\in I}(x_i \vee n(f))) = \bar{f}(\bigvee_{i\in I}(x_i \vee n(f))).$$

Como $\bar{f}$ es un isomorfismo de retículas, $\bar{f}$ conmuta con yuntas arbitrarias, por lo que

$$\bar{f}(\bigvee_{i\in I}(x_i \vee n(f))) = \bigvee_{i\in I} \bar{f}(x_i \vee n(f)) = \bigvee_{i\in I} f(x_i \vee n(f)) = \bigvee_{i\in I} f(x_i).$$

ii)
Sean $f : L \longrightarrow L'$ un morfismo lineal con núcleo $n(f)$ y el isomorfismo de retículas $\bar{f} : 1_L/n(f) \longrightarrow f(1_L)/0_{L'}$ inducido por f. Notemos que si $\iota : f(1_L)/0_{L'} \hookrightarrow L'$ es el morfismo lineal de inclusión y $\varphi : L \longrightarrow 1_L/n(f)$ es el morfismo lineal canónico, con regla de correspondencia $\varphi(x) = x \vee n(f)$, $\forall x \in L$, entonces $f = \iota \circ \bar{f} \circ \varphi$. En efecto, para cualquier $x \in L$, se tiene que

$$f(x) = \bar{f}(x \vee n(f)) = \bar{f}(\varphi(x)) = \iota(\bar{f}(\varphi(x))) = [\iota \circ \bar{f} \circ \varphi](x).$$

Observemos que el morfismo lineal φ preserva intervalos, es decir, si $u \leq v$, entonces $\varphi(v/u) = \varphi(v)/\varphi(u)$. Como φ es un morfismo lineal, entonces es una función creciente, por lo que $\forall x \in v/u$, se tiene que

$$\varphi(u) \leq \varphi(x) \leq \varphi(v).$$

Así, $\varphi(v/u) \subseteq \varphi(v)/\varphi(u)$.
Por otra parte, si $y \in \varphi(v)/\varphi(u)$, es decir, $u \vee n(f) \leq y \leq v \vee n(f)$, se sigue que

$$u \leq (u \vee n(f)) \wedge v \leq y \wedge v \leq (v \vee n(f)) \wedge v = v,$$

lo cual implica que $y \wedge v \in v/u$.
Ahora, como $n(f) \leq u \vee n(f) \leq y$, entonces $n(f) \leq y$. Tomando esto en cuenta, por modularidad tenemos que

$$\varphi(y \wedge v) = (y \wedge v) \vee n(f) = y \wedge (v \vee n(f)) = y,$$

es decir, el elemento $y \wedge v \in v/u$ es tal que $\varphi(y \wedge v) = y$. Por lo tanto,

$$\varphi(v)/\varphi(u) \subseteq \varphi(v/u),$$

con lo cual $\varphi(v)/\varphi(u) = \varphi(v/u)$.

Ahora, como $\bar{f}$ es un isomorfismo de retículas, entonces $\bar{f}$ preserva intervalos. Así,

$$\bar{f}(\varphi(v)/\varphi(u)) = \bar{f}(\varphi(v))/\bar{f}(\varphi(u)) = \bar{f}(v \vee n(f))/\bar{f}(u \vee n(f)) = f(v)/f(u).$$

Como el morfismo lineal φ preserva intervalos, se tiene que

$$\bar{f}(\varphi(v)/\varphi(u)) = \bar{f}(\varphi(v/u)) = \iota[\bar{f}(\varphi(v/u))] = (\iota \circ \bar{f} \circ \varphi)(v/u) = f(v/u).$$

Por lo tanto, $f(v/u) = f(v)/f(u)$. □

Proposición 1.0.6. *[1, Lemma 2.1]*
Sean L, L', L'' retículas modulares completas y $L \xrightarrow{f} L'$, $L' \xrightarrow{g} L''$ morfismos lineales. Entonces la composición $g \circ f : L \longrightarrow L''$ es un morfismo lineal.

Demostración. Sean $L = 1_L/0_L$, $L' = 1_{L'}/0_{L'}$, $L'' = 1_{L''}/0_{L''}$ y $f : L \longrightarrow L'$, $g : L' \longrightarrow L''$ morfismos lineales. Como f es un morfismo lineal, existen $n(f) \in L$ tal que $f(x) = f(x \vee n(f))$, para toda $x \in L$, y un isomorfismo de retículas $1_L/n(f) \xrightarrow{\bar{f}} f(1_L)/0_{L'}$, inducido por f, tal que $\bar{f}(x) = f(x)$, para toda $x \in 1_L/n(f)$. Asimismo, por ser g un morfismo lineal, existen $n(g) \in L'$ tal que $g(x) = g(x \vee n(g))$, $\forall x \in L'$, y un isomorfismo de retículas $1_{L'}/n(g) \xrightarrow{\bar{g}} g(1_{L'})/0_{L''}$, inducido por g, tal que $\bar{g}(x) = g(x)$, $\forall x \in 1_{L'}/n(g)$.

Ahora, por modularidad se tiene que

$$\Big(f(1_L) \vee n(g)\Big)/n(g) \cong f(1_L)/\Big(f(1_L) \wedge n(g)\Big),$$

donde

$$\Big(f(1_L) \vee n(g)\Big)/n(g) \leq 1_{L'}/n(g) \text{ y } f(1_L)/\Big(f(1_L) \wedge n(g)\Big) \leq f(1_L)/0_{L'}.$$

Afirmamos que $n(g \circ f) = (\bar{f})^{-1}\Big(f(1_L) \wedge n(g)\Big)$, es decir, se cumplen las siguientes dos condiciones:

i) $\forall x \in L, \ \ (g \circ f)(x) = (g \circ f)\Big(x \vee n(g \circ f)\Big)$

ii) Se tiene un isomorfismo de retículas

$$(g \hat{\circ} f) : 1_L/n(g \circ f) \longrightarrow g(f(1_L))/0_{L''}$$

tal que $\overline{(g \circ f)}(x) = (g \circ f)(x)$, para toda $x \in 1_L/n(g \circ f)$.

Sea $x \in L$ y $w := (\bar{f})^{-1}\Big(f(1_L) \wedge n(g)\Big)$. Nótese que, como

$$0_{L'} \leq f(1_L) \wedge n(g) \leq f(1_L)$$

y $1_L/n(f) \xrightarrow{\bar{f}} f(1_L)/0_{L'}$ es un isomorfismo de retículas tal que $\bar{f}(x) = f(x)$, $\forall x \in 1_L/n(f)$, entonces $w = (\bar{f})^{-1}\Big(f(1_L) \wedge n(g)\Big) \in 1_L/n(f)$ y

$$f(w) = \bar{f}(w) = \bar{f}\Big((\bar{f})^{-1}(f(1_L) \wedge n(g))\Big) = f(1_L) \wedge n(g).$$

Así, por la Proposición 1.0.2 y el Corolario 1.0.3, tenemos que

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x \vee w) &= g\Big(f(x \vee w)\Big) = g\Big(f(x) \vee f(w)\Big) = g\Big(f(x) \vee (f(1_L) \wedge n(g))\Big) \\ &\leq g\Big(f(x) \vee n(g)\Big) = g(f(x)) = (g \circ f)(x).\end{aligned}$$

Asimismo, por la Proposición 1.0.2 y el Corolario 1.0.3, se sigue que

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \leq g\Big(f(x) \vee f(w)\Big) = g\Big(f(x \vee w)\Big) = (g \circ f)(x \vee w).$$

Por lo tanto, $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x \vee w)$, para toda $x \in L$.

Por otra parte, por modularidad y el hecho de que toda restricción de un isomorfismo de retículas sigue siendo un isomorfismo de retículas, se tiene que la composición

$$\begin{aligned}1_L/(\bar{f})^{-1}\Big(f(1_L) \wedge n(g)\Big) &\xrightarrow{\bar{f}_|} f(1_L)/\Big(f(1_L) \wedge n(g)\Big) \\ &\cong \Big(f(1_L) \vee n(g)\Big)/n(g) \xrightarrow{\bar{g}_|} g(f(1_L))/0_{L''}\end{aligned}$$

es un isomorfismo de retículas tal que $\forall x \in 1_L/(\bar{f})^{-1}(f(1_L) \wedge k')$

$$(\bar{g} \circ \bar{f})(x) = \bar{g}(\bar{f}(x)) = \bar{g}(f(x)) = g(f(x)) = (g \circ f)(x),$$

es decir, $\overline{(g \circ f)} = \bar{g} \circ \bar{f}$. □

Proposición 1.0.7. *Sea L una retícula modular completa. Entonces la función identidad $Id : L \longrightarrow L$, con regla de correspondencia $Id_L(x) = x$, $\forall x \in L$, es un morfismo lineal.*

Demostración. Sean $L = 1_L/0_L$ una retícula modular completa e Id_L la función identidad en L. Notemos que el núcleo de Id_L es $k = 0$. En efecto, por una parte, $Id_L(x \vee 0) = Id_L(x)$, para toda $x \in L$. Por otra parte, la función Id_L induce un isomorfismo de retículas, a saber, Id_L, tal que

$$Id_L(x) = x = Id_L(x), \text{ para toda } x \in 1_L/0_L = L.$$

□

Con esto en cuenta, denotaremos por $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ a la categoría cuya clase de objetos es la clase $\mathcal{M}$ de todas las retículas modulares completas y cuyos morfismos entre objetos son los morfismos lineales.

Capítulo 2

Prerradicales en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$.

A lo largo de este capítulo, consideraremos a la categoría $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ de retículas modulares completas.

2.1. La gran retícula de prerradicales de retículas modulares completas.

T. Albu y M. Iosif introducen en [2] la siguiente

Definición 2.1.1. *[2, Definition 1.1]*
Un prerradical de retículas es un funtor

$$\sigma : \mathcal{L}_{\mathcal{M}} \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$$

tal que satisface las siguientes condiciones:

i) Para toda $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, $\sigma(L)$ es un subobjeto de L.

ii) Para cualquier morfismo lineal $f : L \longrightarrow L'$ en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$,

$$\sigma(f) : \sigma(L) \longrightarrow \sigma(L')$$

es la restricción y correstricción de f a $\sigma(L)$ y $\sigma(L')$ respectivamente.

En [1, Proposition 2.2 (5)], T. Albu y M. Iosif muestran que los subobjetos de cualquier retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ se pueden considerar como intervalos iniciales de la forma $a/0_L$, para alguna $a \in L$. Esto nos lleva a la siguiente

Definición 2.1.2. *Un prerradical de retículas completas es un funtor*

$$\sigma : \mathcal{L}_{\mathcal{M}} \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$$

tal que satisface las siguientes condiciones:

i) Para toda $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, $\sigma(L) = a/0_L \leq L$, *para alguna* $a \in L$. *Es decir,* $\sigma(L)$ *es un intervalo inicial de* L.

ii) Para cualquier morfismo lineal $f : L \longrightarrow L'$ *en* $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$,

$$f_{\lfloor}^{\upharpoonright} : \sigma(L) \longrightarrow \sigma(L')$$

es la restricción y correstricción de f *a* $\sigma(L)$ *y* $\sigma(L')$ *respectivamente, es decir, se tiene el siguiente diagrama conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] & L' \\ \sigma(L) \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "f_{\lfloor}^{\upharpoonright}"] & \sigma(L'). \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

Observación. *Para cualquier* $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, *cada prerradical de retículas* σ *induce una función* $L \overset{\sigma_{*_L}}{\longrightarrow} L$, *definida de la siguiente manera: para* $a \in L$, $\sigma_{*_L}(a)$ *está dado por*

$$\sigma_{*_L}(a)/0_L = \sigma(a/0_L).$$

Tomando esto en cuenta, se tiene que

$$\begin{aligned} \sigma = \tau \quad &\Longleftrightarrow \quad \sigma_{*_L} = \tau_{*_L}, \text{ para cualquier } L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}} \\ &\Longleftrightarrow \quad \sigma_{*_L}(1_L) = \tau_{*_L}(1_L), \text{ para cualquier } L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}. \end{aligned}$$

Si el contexto es claro, se omitirá el índice L en σ_{*_L}.

Notación. Sea σ un prerradical de retículas modulares completas y $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$. Denotaremos

$$\sigma(L) := \sigma_*(1_L)/0_L.$$

Observación. *Si* $f : L \longrightarrow L'$ *es un morfismo lineal y* σ *es un prerradical de retículas modulares completas, entonces la restricción y correstricción de* f *a* $\sigma(L)$ *y* $\sigma(L')$, *respectivamente, es un morfismo lineal. En efecto, sean* $n(f)$ *el núcleo de* f *y* $f_{\lfloor}^{\upharpoonright} : \sigma_*(1_L)/0_L \longrightarrow \sigma_*(1_{L'})/0_{L'}$. *Ahora, si* $y \in \sigma_*(1_L)/0_L$, *como* $y \leq \sigma_*(1_L)$, *por el Corolario 1.0.3 y por modularidad se sigue que*

$$\begin{aligned} f_{\lfloor}^{\upharpoonright}(y) \;&\leq\; f_{\lfloor}^{\upharpoonright}\Big(y \vee (n(f) \wedge \sigma_*(1_L))\Big) \;= f_{\lfloor}^{\upharpoonright}\Big((y \vee n(f)) \wedge \sigma_*(1_L)\Big) \\ &\leq\; f(y \vee n(f)) \wedge f(\sigma_*(1_L)) \;= f(y) \wedge f(\sigma_*(1_L)) = f(y) = f_{\lfloor}^{\upharpoonright}(y), \end{aligned}$$

es decir, $f_{\lfloor}^{\upharpoonright}(y) = f_{\lfloor}^{\upharpoonright}\Big(y \vee (n(f) \wedge \sigma_*(1_L))\Big)$, $\forall y \in \sigma_*(1_L)/0_L$.

Por otra parte, como

$$\varphi : \sigma_*(1_L)/\Big(n(f) \wedge \sigma_*(1_L)\Big) \longrightarrow \Big(\sigma_*(1_L) \vee n(f)\Big)/n(f),$$

con regla de correspondencia $\varphi(x) = x \vee n(f)$*, es un isomorfismo y la restricción de un isomorfismo de retículas a cualquier intervalo sigue siendo un isomorfismo de retículas, se tiene que*

$$\bar{f}^{\upharpoonleft}_{\downharpoonleft} \circ \varphi : \sigma_*(1_L)/\Big(n(f) \wedge \sigma_*(1_L)\Big) \longrightarrow f(\sigma_*(1_L))/0_{L'}$$

es un isomorfismo de retículas tal que

$$\begin{aligned} (\bar{f}^{\upharpoonleft}_{\downharpoonleft} \circ \varphi)(x) &= f^{\upharpoonleft}_{\downharpoonleft}(\varphi(x)) = f^{\upharpoonleft}_{\downharpoonleft}(x \vee n(f)) \\ = f(x \vee n(f)) = f(x) &= f^{\upharpoonleft}_{\downharpoonleft}(x),\ \forall x \in \sigma_*(1_L)/\Big(n(f) \wedge \sigma_*(1_L)\Big). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f^{\upharpoonleft}_{\downharpoonleft}$ *es un morfismo lineal con núcleo* $n(f^{\upharpoonleft}_{\downharpoonleft}) = n(f) \wedge \sigma_*(1_L)$.

Proposición 2.1.3. σ *es un prerradical de retículas modulares completas si y sólo si,* $\forall L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$

a) $\sigma(L) = a_L/0_L$*, para alguna* $a_L \in L$.

b) Para todo morfismo lineal $f : L \longrightarrow L'$, $f(\sigma_*(1_L)) \leq \sigma_*(1_{L'})$

Demostración. $\Longrightarrow$) Sea σ un prerradical de retículas completas. Obsérvese que i), de la definición de prerradical de retículas modulares completas, es lo mismo que a). Sean $L, L' \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ y $f : L \longrightarrow L'$ un morfismo lineal. Como σ es un prerradical de retículas modulares completas, entonces $\sigma(L) = \sigma_*(1_L)/0_L$ y $\sigma(L') = \sigma_*(1_{L'})/0_{L'}$. Tomando esto en cuenta, se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] & L' \\ \sigma_*(1_L)/0_L \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "f^{\upharpoonleft}_{\downharpoonleft}"] & \sigma_*(1_{L'})/0_{L'}, \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

donde $f^{\upharpoonleft}_{\downharpoonleft}$ es la restricción y correstricción de f a $\sigma(L)$ y $\sigma(L')$, respectivamente. De esta manera, se sigue que $f(\sigma_*(1_L)) \leq \sigma_*(1_{L'})$.

$\Longleftarrow$) Basta demostrar que b) implica ii). Sea $f : L \longrightarrow L'$ un morfismo lineal tal que $f(\sigma_*(1_L)) \leq \sigma_*(1_{L'})$. Por el Lema 1.0.5, tenemos que

$$f\Big(\sigma(L)\Big) = f\Big(\sigma_*(1_L)/0_L\Big) = f(\sigma_*(1_L))/0_{L'} \leq \sigma_*(1_{L'})/0_{L'}.$$

Esto implica que el diagrama

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr, "f"] & & L' \\ \sigma(L) = \sigma_*(1_L)/0_L \arrow[u, "\iota"] \arrow[rr, "f_{\downharpoonright}^{\upharpoonright}"] & & \sigma_*(1_{L'})/0_{L'} = \sigma(L'), \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

es conmutativo, es decir, $f_{\downharpoonright}^{\upharpoonright} : \sigma(L) \longrightarrow \sigma(L')$ es la restricción y correstricción de f a $\sigma(L)$ y $\sigma(L')$, respectivamente. $\square$

Observación. *Un prerradical de retículas modulares completas es un subfuntor del funtor identidad $Id_{\mathcal{L}_M}$ en la categoría $\mathcal{L}_M$.*

Denotaremos por $\mathcal{L}_{pr}$ a la clase de todos los prerradicales de retículas modulares completas. A esta clase, se le puede dotar de un orden parcial de la siguiente manera: si $\sigma, \tau \in \mathcal{L}_{pr}$, entonces $\sigma \preceq \tau$ si y sólo si $\sigma(L) \leq \tau(L)$, para cualquier $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, esto es, si y sólo si $\sigma_*(1_L) \leq \tau_*(1_L)$, para toda $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$.

Observación. *Si $\{\tau_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es una clase de prerradicales de retículas modulares completas y $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, entonces*

$$\{(\tau_\alpha)_*(1_L) \mid \alpha \in I\} \subseteq L.$$

Como L es una retícula modular completa, para este subconjunto de L existe tanto un supremo como un ínfimo.

Proposición 2.1.4. *Sean $\{\tau_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una clase de prerradicales de retículas modulares completas y $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$. Entonces*

$$(\bigtriangledown_{\alpha\in I}\ \tau_\alpha)(L) := \Big(\bigvee\nolimits_{\alpha\in I}(\tau_\alpha)_*(1_L)\Big)/0_L$$

es un prerradical de retículas modulares completas y es la menor cota superior de la familia $\{\tau_\alpha\}_{\alpha\in I}$.

Demostración. Sea $f : L \longrightarrow L'$ un morfismo lineal. Ahora, para cada $\alpha \in I$, se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr, "f"] & & L' \\ (\tau_\alpha)_*(1_L)/0_L \arrow[u, "\iota"] \arrow[rr, "f_{\downharpoonright}^{\upharpoonright}"] & & (\tau_\alpha)_*(1_{L'})/0_{L'}, \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

de donde se sigue que $f\Big((\tau_\alpha)_*(1_L)/0_L\Big) \leq (\tau_\alpha)_*(1_{L'})/0_{L'}$.

Así, por el Lema 1.0.5, se tiene

$$f\Big(\Big(\bigvee_{\alpha\in I}(\tau_\alpha)_*(1_L)\Big)/0_L\Big) = \Big(\bigvee_{\alpha\in I} f((\tau_\alpha)_*(1_L))\Big)/0_{L'}$$
$$\leq \Big(\bigvee_{\alpha\in I}(\tau_\alpha)_*(1_{L'})\Big)/0_{L'}.$$

Por lo tanto, el diagrama

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr, "f"] & & L' \\ \Big(\bigvee_{\alpha\in I}(\tau_\alpha)_*(1_L)\Big)/0_L \arrow[u, "\iota"] \arrow[rr, "f_{\downharpoonleft}^{\upharpoonleft}"] & & \Big(\bigvee_{\alpha\in I}(\tau_\alpha)_*(1_{L'})\Big)/0_{L'}. \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Veamos ahora que, si $\{\tau_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es una clase de prerradicales de retículas modulares completas, entonces $(\bigtriangledown_{\alpha\in I}\ \tau_\alpha)$ es la menor de las cotas superiores para la clase $\{\tau_\alpha\}_{\alpha\in I}$. En efecto, sea $\sigma \in \mathcal{L}_{pr}$ tal que $\tau_\alpha \preceq \sigma$, para cada $\alpha \in I$. Entonces, para toda $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, se tiene que $(\tau_\alpha)_*(1_L) \leq \sigma_*(1_L)$. Tomando esto en cuenta, se tiene que $\Big(\bigvee_{\alpha\in I}(\tau_\alpha)_*(1_L)\Big) \leq \sigma_*(1_L)$. Por lo tanto,

$$(\bigtriangledown_{\alpha\in I}\ \tau_\alpha)(L) = \Big(\bigvee_{\alpha\in I}(\tau_\alpha)_*(1_L)\Big)/0_L \leq \sigma_*(1_L)/0_L = \sigma(L).$$

□

De ahora en adelante, usaremos la siguiente notación:

$$\Big(\curlyvee_{\alpha\in I}\ \tau_\alpha\Big)(L) := \Big(\bigvee_{\alpha\in I}(\tau_\alpha)_*(1_L)\Big)/0_L.$$

Proposición 2.1.5. *Sean $\{\tau_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una clase de prerradicales de retículas modulares completas y $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$. Entonces*

$$(\triangle_{\alpha\in I}\ \tau_\alpha)(L) := \Big(\bigwedge_{\alpha\in I}(\tau_\alpha)_*(1_L)\Big)/0_L$$

es un prerradical de retículas modulares completas y es la mayor cota inferior de la familia $\{\tau_\alpha\}_{\alpha\in I}$.

Demostración. Sea $f : L \longrightarrow L'$ un morfismo lineal. Veamos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr, "f"] & & L' \\ \Big(\bigwedge_{\alpha\in I}(\tau_\alpha)_*(1_L)\Big)/0_L \arrow[u, "\iota"] \arrow[rr, "f_{\downharpoonleft}^{\upharpoonleft}"] & & \Big(\bigwedge_{\alpha\in I}(\tau_\alpha)_*(1_{L'})\Big)/0_{L'}. \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

Por una parte, para cada $\alpha \in I$, se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr, "f"] & & L' \\ (\tau_\alpha)_*(1_L)/0_L \arrow[u, "\iota"] \arrow[rr, "f\restriction^{\uparrow}_{\downarrow}"] & & (\tau_\alpha)_*(1_{L'})/0_{L'}, \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

de donde se sigue que $f\Big((\tau_\alpha)_*(1_L)/0_L\Big) = f((\tau_\alpha)_*(1_L))/0_{L'} \leq (\tau_\alpha)_*(1_{L'})/0_{L'}$. Esto implica que

$$\Big(\bigwedge_{\alpha\in I} f((\tau_\alpha)_*(1_L))\Big)/0_{L'} \leq \Big(\bigwedge_{\alpha\in I}(\tau_\alpha)_*(1_{L'})\Big)/0_{L'}.$$

Por otra parte, para cada $\alpha \in I$, se cumple que

$$\Big(\bigwedge_{\alpha\in I}(\tau_\alpha)_*(1_L)\Big) \leq (\tau_\alpha)_*(1_L).$$

Por el Corolario 1.0.3, se tiene que

$$f\Big(\bigwedge_{\alpha\in I}(\tau_\alpha)_*(1_L)\Big) \leq f((\tau_\alpha)_*(1_L)),$$

con lo cual

$$f\Big(\bigwedge_{\alpha\in I}(\tau_\alpha)_*(1_L)\Big) \leq \Big(\bigwedge_{\alpha\in I} f((\tau_\alpha)_*(1_L))\Big).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f\Big(\bigwedge_{\alpha\in I}(\tau_\alpha)_*(1_L)/0_L\Big) &= f\Big(\bigwedge_{\alpha\in I}(\tau_\alpha)_*(1_L)\Big)/0_{L'} \\ &\leq \Big(\bigwedge_{\alpha\in I} f((\tau_\alpha)_*(1_L))\Big)/0_{L'}. \end{aligned}$$

lo cual implica la conmutatividad del diagrama.

Veamos ahora que, si $\{\tau_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es una clase de prerradicales de retículas modulares completas, entonces $(\triangle_{\alpha\in I}\ \tau_\alpha)$ es la mayor de las cotas inferiores para la clase $\{\tau_\alpha\}_{\alpha\in I}$. En efecto, sea $\sigma \in \mathcal{L}_{pr}$ tal que $\sigma \preceq \tau_\alpha$, para cada $\alpha \in I$. Entonces, para toda $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, se tiene que $\sigma_*(1_L) \leq (\tau_\alpha)_*(1_L)$. Tomando esto en cuenta, se sigue que $\sigma_*(1_L) \leq \Big(\bigwedge_{\alpha\in I}(\tau_\alpha)_*(1_L)\Big)$. Por lo tanto,

$$\sigma(L) = \Big(\sigma_*(1_L)/0_L\Big) \leq \Big(\bigwedge_{\alpha\in I}(\tau_\alpha)_*(1_L)\Big)/0_L = (\triangle_{\alpha\in I}\ \tau_\alpha)(L).$$

$\square$

De ahora en adelante, usaremos la siguiente notación:

$$\Big(\curlywedge_{\alpha\in I}\ \tau_\alpha\Big)(L) := \Big(\bigwedge_{\alpha\in I}(\tau_\alpha)_*(1_L)\Big)/0_L.$$

Las dos proposiciones anteriores nos permiten establecer el siguiente

Corolario 2.1.6. *$\mathcal{L}_{pr}$ es una gran retícula, donde $\curlyvee, \curlywedge$ son los operadores supremo e ínfimo, respectivamente, entre dos prerradicales de retículas modulares completas.*

Definición 2.1.7. *Sean $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ y $\tau, \sigma \in \mathcal{L}_{pr}$. Definimos el producto de τ y σ por*

$$(\tau \cdot \sigma)(L) = \tau_*(\sigma_*(1_L))/0_L.$$

Proposición 2.1.8. *Sean $\tau, \sigma \in \mathcal{L}_{pr}$. Entonces $\tau \cdot \sigma$ es un prerradical de retículas modulares completas.*

Demostración. Notemos que si $\sigma \in \mathcal{L}_{pr}$, entonces la restricción y correstricción del morfismo lineal $f : L \longrightarrow L'$ a $\sigma(L)$ y $\sigma(L')$, respectivamente, es un morfismo lineal. Ahora, como τ y σ son prerradicales de retículas modulares completas, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "f"] & L' \\
\sigma_*(1_L)/0_L \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "f_\downharpoonright^\upharpoonright"] & \sigma_*(1'_{L'})/0_{L'} \arrow[u, "\iota"'] \\
\tau_*(\sigma_*(1_L))/0_L \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "(f_\downharpoonright^\upharpoonright)_\downharpoonright^\upharpoonright"] & \tau_*(\sigma_*(1'_{L'}))/0_{L'},\arrow[u, "\iota"']
\end{tikzcd}$$

de donde se obtiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "f"] & L' \\
\tau_*(\sigma_*(1_L))/0_L \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "(f_\downharpoonright^\upharpoonright)_\downharpoonright^\upharpoonright"] & \tau_*(\sigma_*(1'_{L'}))/0'_{L}. \arrow[u, "\iota"']
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $\tau \cdot \sigma$ es un prerradical de retículas modulares completas. □

Definición 2.1.9. *Sean $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ y $\sigma, \tau \in \mathcal{L}_{pr}$. Definimos el coproducto de σ y τ por:*

$$(\sigma : \tau)(L) = (\sigma : \tau)_*(1_L)/0_L \text{ donde } (\sigma : \tau)_*(1_L)/\sigma_*(1_L) =: \tau\Big(1_L/\sigma_*(1_L)\Big).$$

Proposición 2.1.10. *Sea $\sigma, \tau \in \mathcal{L}_{pr}$. Entonces $(\sigma : \tau)$ es un prerradical de retículas modulares completas.*

Demostración. Sean $L, L' \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, $f : L \longrightarrow L'$ un morfismo lineal con núcleo $n(f)$ y $\sigma, \tau \in \mathcal{L}_{pr}$. Nótese que la función

$$\hat{f} : 1_L/\sigma_*(1_L) \longrightarrow f(1_L)/f(\sigma_*(1_L)),$$

con regla de correspondencia $\hat{f}(x) := f(x)$ es un morfismo lineal con núcleo $n(f) \vee \sigma_*(1_L)$. En efecto, por el Corolario 1.0.3 y el Lema 1.0.5, para toda $x \in 1_L/\sigma_*(1_L)$, se tiene que

$$\begin{aligned} &\hat{f}\Big(x \vee \Big(n(f) \vee \sigma_*(1_L)\Big)\Big) \\ &= f\Big(x \vee \Big(n(f) \vee \sigma_*(1_L)\Big)\Big) = f(x) \vee f(n(f)) \vee f(\sigma_*(1_L)) \\ &= f(x) = \hat{f}(x). \end{aligned}$$

Ahora, como f es un morfismo lineal, entonces f induce un isomorfismo de retículas $1_L/n(f) \xrightarrow{\bar{f}} f(1_L)/0_L$ tal que $\bar{f}(x) = f(x)$. Esto implica que

$$(\bar{f})_| : 1_L/\Big(n(f) \vee \sigma_*(1_L)\Big) \longrightarrow f(1_L)/f\Big(n(f) \vee \sigma_*(1_L)\Big) = f(1_L)/f(\sigma_*(1_L))$$

es un isomorfismo de retículas tal que $\forall x \in 1_L/\Big(n(f) \vee \sigma_*(1_L)\Big)$,

$$(\bar{f})_|(x) = f(x) = \hat{f}(x).$$

Por lo tanto, $\hat{f}$ es un morfismo lineal cuyo núcleo es $n(\hat{f}) = n(f) \vee \sigma_*(1_L)$.

Por otra parte, como σ es un prerradical de retículas modulares completas, se satisface que $f[\sigma_*(1_L)] \leq \sigma_*(1_{L'})$. Tomando esto en cuenta, se tiene el morfismo lineal canónico $\rho : 1_{L'}/f[\sigma_*(1_L)] \longrightarrow 1_{L'}/\sigma_*(1_{L'})$, con regla de correspondencia $\rho(x) := x \vee \sigma_*(1_L)$ y núcleo $n(\rho) = \sigma_*(1_{L'})$.

Nótese que la composición $\rho \circ \iota \circ \hat{f}$ es un morfismo lineal, donde ι denota al morfismo lineal de inclusión. Así, como τ es un perradical de retículas modulares completas, se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 1_L/\sigma_*(1_L) \arrow[r, "\hat{f}"] & f(1_L)/f(\sigma_*(1_L)) \arrow[r, "\iota"] & 1_{L'}/f(\sigma_*(1_L)) \arrow[r, "\rho"] & 1_{L'}/\sigma_*(1_{L'}) \\ \tau\Big(1_L/\sigma_*(1_L)\Big) \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "(\hat{f})\restriction"] & \tau\Big(f(1_L)/f(\sigma_*(1_L))\Big) \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "\iota\restriction"] & \tau\Big(1_{L'}/f(\sigma_*(1_L))\Big) \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "\rho\restriction"] & \tau\Big(1_{L'}/\sigma_*(1_{L'})\Big), \arrow[u, "\iota"] \end{tikzcd}$$

el cual implica que

$$(\rho \circ \iota \circ \hat{f})\Big(\tau\Big(1_L/\sigma_*(1_L)\Big)\Big)) \leq \tau\Big(1_{L'}/\sigma_*(1_{L'})\Big),$$

es decir, $\rho\Big(f\Big(\tau\Big(1_L/\sigma_*(1_L)\Big)\Big)\Big) \leq \tau\Big(1_{L'}/\sigma_*(1_{L'})\Big)$.

Por lo tanto,

$$f((\sigma : \tau)_*(1_L)) \leq \rho\Big(f\Big(\tau\Big(1_L/\sigma_*(1_L)\Big)\Big)\Big) \leq (\sigma : \tau)_*(1_{L'}),$$

con lo cual, $(\sigma : \tau)$ es un prerradical de retículas modulares completas. $\square$

Proposición 2.1.11. *Sean $\sigma, \tau \in \mathcal{L}_{pr}$. Entonces*

$$\sigma \cdot \tau \preceq \sigma \curlywedge \tau \preceq \sigma \curlyvee \tau \preceq (\sigma : \tau).$$

Demostración. Sean $\sigma, \tau \in \mathcal{L}_{pr}$ y $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$.

a) $\sigma \cdot \tau \preceq \sigma \curlywedge \tau$.

Como σ es un prerradical de retículas modulares completas, se tiene que

$$\sigma_*(\tau_*(1_L))/0_L = \sigma(\tau_*(1_L)/0_L) \leq \tau_*(1_L)/0_L,$$

así como el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\tau_*(1_L)/0_L \arrow[r, "\iota"] & 1_L/0_L \\
\sigma_*(\tau_*(1_L))/0_L \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "\iota\restriction"] & \sigma_*(1_L)/0_L. \arrow[u, "\iota"']
\end{tikzcd}$$

Nótese que $\sigma_*(\tau_*(1_L)) \leq \sigma_*(1_L)$. Por lo tanto,

$$\sigma_*(\tau_*(1_L)) \leq \Big(\sigma_*(1_L) \wedge \tau_*(1_L)\Big),$$

con lo cual

$$\sigma_*(\tau_*(1_L))/0_L \leq \Big(\sigma_*(1_L) \wedge \tau_*(1_L)\Big)/0_L,$$

es decir,

$$(\sigma \cdot \tau)(L) \preceq (\sigma \curlywedge \tau)(L).$$

b) $\sigma \curlywedge \tau \preceq \sigma \curlyvee \tau$.

Notemos que

$$\sigma_*(1_L) \leq \Big(\sigma_*(1_L) \vee \tau_*(1_L)\Big) \text{ y } \tau_*(1_L) \leq \Big(\sigma_*(1_L) \vee \tau_*(1_L)\Big).$$

Así, $\Big(\sigma_*(1_L) \wedge \tau_*(1_L)\Big) \leq \Big(\sigma_*(1_L) \vee \tau_*(1_L)\Big)$. Esto implica que

$$(\sigma \curlywedge \tau)(L) = \Big(\sigma_*(1_L) \wedge \tau_*(1_L)\Big)/0_L \leq \Big(\sigma_*(1_L) \vee \tau_*(1_L)\Big)/0_L = (\sigma \curlyvee \tau)(L).$$

c) $\sigma \curlyvee \tau \preceq (\sigma : \tau)$
Por definición, $(\sigma : \tau)(L) = (\sigma : \tau)_*(1_L)/0_L$ donde

$$(\sigma : \tau)_*(1_L)/\sigma_*(1_L) = \tau(1_L/\sigma_*(1_L)).$$

Nótese que $\sigma_*(1_L) \leq (\sigma : \tau)_*(1_L)$. Ahora, como τ es un prerradical de retículas modulares completas, se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 1_L/0_L \arrow[rr, "\rho"] & & 1_L/\sigma_*(1_L) \\ \tau_*(1_L)/0_L \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "\rho\restriction"] & (\sigma : \tau)_*(1_L)/\sigma_*(1_L), \arrow[ur, "\iota"'] & \end{tikzcd}$$

el cual implica que

$$\Big(\tau_*(1_L) \vee \sigma_*(1_L)\Big)/\sigma_*(1_L) \leq (\sigma : \tau)_*(1_L)/\sigma_*(1_L),$$

es decir, $\tau_*(1_L) \leq (\sigma : \tau)_*(1_L)$.
Así, $\Big(\sigma_*(1_L) \vee \tau_*(1_L)\Big) \leq (\sigma : \tau)_*(1_L)$, por lo que

$$(\sigma \curlyvee \tau)(L) = \Big(\sigma_*(1_L) \vee \tau_*(1_L)\Big)/0_L \leq (\sigma : \tau)_*(1_L)/0_L = (\sigma : \tau)(L).$$

□

2.2. Los prerradicales de retículas α_N^M y ω_N^M.

Definición 2.2.1. *Sea L una retícula modular completa y N un intervalo inicial de L. Decimos que N es un intervalo inicial totalmente invariante de L si $f(N) \leq N$, para todo $f \in End_{\mathcal{L_M}}(L)$.*

Observación. *Si N es un intervalo inicial totalmente invariante de la retícula L, entonces para cualquier $f \in End_{\mathcal{L_M}}(L)$, se tiene que $f(1_N) \leq 1_N$. Nótese también que $0_N = 0_L$.*

Proposición 2.2.2. *Sean $L \in \mathcal{L_M}$ y N un intervalo inicial totalmente invariante de L. Si $K \in \mathcal{L_M}$ y definimos*

$$\alpha_N^L(K) = \Big(\bigvee_{f \in Hom_{\mathcal{L_M}}(L,K)} f(1_N)\Big)/0_K,$$

se tiene que α_N^L es un prerradical de retículas modulares completas.

Demostración. Sea $h : K \longrightarrow K'$ un morfismo lineal. Veamos que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "h"] & K' \\ \alpha_L^M(K) \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "h\restriction"] & \alpha_L^M(K') \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Por el Lema 1.0.5, se tiene que

$$\begin{aligned} h\Big(\alpha_N^L(K)\Big) &= h\Big(\Big(\bigvee\{f(1_N) \mid f \in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L,K)\}\Big)/0_K\Big) \\ &= \Big(\bigvee\{(h \circ f)(1_N) \mid f \in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L,K)\}\Big)/0_{K'} \\ &\leq \Big(\bigvee\{g(1_N) \mid g \in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L,K')\}\Big)/0_{K'} \\ &= \alpha_N^L(K'). \end{aligned}$$

Por lo tanto, el diagrama es conmutativo, y así α_N^L es un prerradical de retículas modulares completas. $\square$

Observación. *Si N es un intervalo inicial totalmente invariante de L, entonces*

$$\alpha_N^L(L) = 1_N/0_L = N.$$

Por una parte, como N es un intervalo inicial totalmente invariante de L, se tiene que

$$1_N \geq \bigvee\nolimits_{f \in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L,L)} f(1_N),$$

lo cual implica que

$$1_N/0_L \geq \Big(\bigvee\nolimits_{f \in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L,L)} f(1_N)\Big)/0_L = \alpha_N^L(L).$$

Por otra parte, el morfismo lineal Id_L satisface que $Id_L(1_N) = 1_N$. Así,

$$\bigvee\nolimits_{f \in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L,L)} f(1_N) \geq 1_N.$$

Por lo tanto,

$$\alpha_N^L(L) = \Big(\bigvee\nolimits_{f \in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L,L)} f(1_N)\Big)/0_L \geq 1_N/0_L.$$

Definición 2.2.3. *Sea N un intervalo inicial totalmente invariante de L. Entonces, para cada $K \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$,*

$$\omega_N^L(K) = \Big(\bigwedge_{f\in Hom_{\mathcal{L_M}}(K,L)}[f^{-1}(f(1_K)\wedge 1_N)]\Big)/0_K.$$

Lema 2.2.4. *Sean N un intervalo inicial totalmente invariante de L y $K \in \mathcal{L_M}$. Entonces $\omega_N^L(K)$ es el mayor intervalo inicial I de K tal que $g(I) \leq N$, $\forall g \in Hom_{\mathcal{L_M}}(K,L)$.*

Demostración. Sea $f : K \longrightarrow L$ un morfismo lineal con núcleo $n(f)$. Nótese que

$$[0_K, f^{-1}(f(1_K)\wedge 1_N)] = f^{-1}(f(K)\cap N).$$

En efecto, por una parte, si $x \leq f^{-1}(f(1_K)\wedge 1_N)$, entonces por el Corolario 1.0.3, se sigue que $f(x) \leq f(1_K)\wedge 1_N \in f(K)\cap N$, es decir,

$$[0_K, f^{-1}(f(1_K)\wedge 1_N)] \subseteq f^{-1}(f(K)\cap N).$$

Por otra parte, si $x \in K$ es tal que $f(x) \in f(K)\cap N$, entonces $f(x) \leq f(1_K)\wedge 1_N$. Ahora, como

$$f(1_K)\wedge 1_N \geq f(x) = f(x\vee n(f)),$$

y $\bar{f} : 1_K/n(f) \longrightarrow f(1_K)/0_L$ es el isomorfismo de retículas inducido por f, se tiene que

$$f^{-1}(f(1_K)\wedge 1_N) \geq f^{-1}(f(x\vee n(f))) = x\vee n(f) \geq x.$$

Así,

$$f^{-1}(f(K)\cap N) \subseteq [0_K, f^{-1}(f(1_K)\wedge 1_N)].$$

Por lo tanto,

$$[0_K, f^{-1}(f(1_K)\wedge 1_N)] = f^{-1}(f(K)\cap N).$$

Tomando esto en cuenta, si $x \in K$ es tal que $f(x) \in N$, para toda $f \in Hom_{\mathcal{L_M}}(K,L)$, entonces

$$x \leq \bigwedge_{f\in Hom_{\mathcal{L_M}}(K,L)}[f^{-1}(f(1_K)\wedge 1_N)].$$

Ahora, sea $g : K \longrightarrow L$ un morfismo lineal. Obsérvese que

$$\bigwedge_{f\in Hom_{\mathcal{L_M}}(K,L)}[f^{-1}(f(1_K)\wedge 1_N)] \leq g^{-1}(g(1_K)\wedge 1_N).$$

Por el Corolario 1.0.3, se sigue que

$$\begin{aligned} g\Big((\bigwedge_{f\in Hom_{\mathcal{L_M}}(K,L)}[f^{-1}(f(1_K)\wedge 1_N)]\Big) &\leq g\Big(g^{-1}(g(1_K)\wedge 1_N)\Big) \\ &= g(1_K)\wedge 1_N \leq 1_N. \end{aligned}$$

Así, $g\Big(\bigwedge_{f\in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(K,L)}[f^{-1}(f(1_K)\wedge 1_N])\Big)\leq 1_N$, lo cual implica que

$$g\Big(\Big(\bigwedge_{f\in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(K,L)}[f^{-1}(f(1_K)\wedge 1_N)]\Big)/0_K\Big)\subseteq N.$$

Por lo tanto, $g(\omega_N^L(K))\subseteq N$, para toda $g\in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(K,L)$; esto es, $\omega_N^L(K)$ es el mayor intervalo inicial de K con esta propiedad. $\square$

Proposición 2.2.5. *$\omega_N^L(K)$ es un intervalo inicial totalmente invariante de K.*

Demostración. Sea $h:K\longrightarrow K$ un morfismo lineal. Si $g:K\longrightarrow L$ es cualquier morfismo lineal, entonces $g\circ h:K\longrightarrow L$ es un morfismo lineal. Ahora, por el Lema 2.2.4, se tiene que

$$g(h(\omega_N^L(K)))=(g\circ h)(\omega_N^L(K))\subseteq N.$$

Como $\omega_N^L(K)$ es el mayor intervalo inicial de K tal que $g(\omega_N^L(K))\leq N$, $\forall g\in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(K,L)$, se sigue que

$$h(\omega_N^L(K))\leq\omega_N^L(K).$$

Por lo tanto, $\omega_N^L(K)$ es un intervalo inicial totalmente invariante de K. $\square$

Observación. *$\omega_N^L(K)$ es el mayor intervalo inicial totalmente invariante de K tal que $g(\omega_N^L(K))\leq N$, para toda $g\in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(K,L)$.*

Proposición 2.2.6. *ω_N^L es un prerradical de retículas modulares completas.*

Demostración. Sean $K,K'\in\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ y $h:K\longrightarrow K'$ un morfismo lineal. Veremos que

$$h(\omega_N^L(K))\leq\omega_N^L(K').$$

Ahora, si $g:K'\longrightarrow L$ es cualquier morfismo lineal, entonces $g\circ h:K\longrightarrow L$ es un morfismo lineal. Por el Lema 2.2.4, se tiene que

$$g(h(\omega_N^L(K)))=(g\circ h)(\omega_N^L(K))\leq N.$$

Como $\omega_N^L(K')$ es el mayor intervalo inicial de K' tal que $g(\omega_N^L(K'))\leq N$, $\forall g\in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(K',L)$, se sigue que

$$h(\omega_N^L(K))\leq\omega_N^L(K').$$

Por lo tanto, ω_N^L es un prerradical de retículas modulares completas. $\square$

Observación. *Sea N un intervalo inicial totalmente invariante de L. Entonces*

$$\omega_N^L(L) = 1_N/0_L = N.$$

En efecto, por una parte, como N es un intervalo inicial totalmente invariante de L, $f(1_N) \leq 1_N$, para cada $f \in Hom_{\mathcal{L}_\mathcal{M}}(L, L)$. Esto implica que $1_N \leq [f^{-1}(f(1_L) \wedge 1_N)]$, para cualquier $f \in Hom_{\mathcal{L}_\mathcal{M}}(L, L)$. Tomando esto en cuenta, se tiene que

$$1_N \leq \bigwedge\nolimits_{f \in Hom_{\mathcal{L}_\mathcal{M}}(L,L)} \Big(f^{-1}(f(1_L) \wedge 1_N)\Big).$$

Por otra parte, como la función identidad $Id_L : L \longrightarrow L$ es un morfismo lineal, se sigue que

$$\begin{aligned}\bigwedge\nolimits_{f \in Hom_{\mathcal{L}_\mathcal{M}}(L,L)} \Big(f^{-1}(f(1_L) \wedge 1_N)\Big) &\leq Id_L^{-1}(Id(1_L) \wedge 1_N) \\ &= Id_L^{-1}(1_L \wedge 1_N) = Id_L^{-1}(1_N) = 1_N.\end{aligned}$$

Observación. *Si N es un intervalo inicial totalmente invariante de L, entonces*

$$\alpha_N^L(L) = N = \omega_N^L(L).$$

Proposición 2.2.7. *Sean $\sigma \in \mathcal{L}_{pr}$ y N un intervalo inicial totalmente invariante de L. Entonces $\sigma(L) = N$ si y sólo si $\alpha_N^L \preceq \sigma \preceq \omega_N^L$.*

Demostración. $\Longrightarrow$)
Supongamos que $\sigma(L) = N$. Ahora, para cualquier morfismo lineal $L \xrightarrow{f} K$, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] & K \\ \sigma(L) = N \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "f_{\downharpoonleft}^{\upharpoonright}"] & \sigma(K). \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

Esto implica que $f(\sigma_*(1_L)) = f(1_N) \leq \sigma_*(1_K)$, para cada morfismo lineal $L \xrightarrow{f} K$. Tomando esto en cuenta, se sigue que

$$\bigvee\nolimits_{f \in Hom_{\mathcal{L}_\mathcal{M}(L,K)}} f(1_N) \leq \sigma_*(1_K).$$

Así,

$$\alpha_N^L(K) = \Big(\bigvee\nolimits_{f \in Hom_{\mathcal{L}_\mathcal{M}(L,K)}} f(1_N)\Big)/0_K \leq \sigma_*(1_K)/0_K = \sigma(K).$$

Análogamente, para cada morfismo lineal $K \xrightarrow{f} L$, se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "f"] & L \\ \sigma(K) \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "f\restriction"] & \sigma(L) = N, \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

de donde se sigue que $f(\sigma_*(1_K)) \leq \sigma_*(1_L) = 1_N$, $\forall f \in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(K, L)$. Esto implica que $\sigma_*(1_K) \leq f^{-1}(f(1_K) \wedge 1_N)$, para todo morfismo lineal $K \xrightarrow{f} L$. Tomando esto en cuenta, se sigue que

$$\sigma_*(1_K) \leq \bigwedge_{f \in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(K,L)} [f^{-1}(f(1_K) \wedge 1_N)],$$

con lo cual,

$$\sigma(K) = \sigma_*(1_K)/0_K \leq \Big(\bigwedge_{f \in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}(K,L)}} [f^{-1}(f(1_K) \wedge 1_N)]\Big)/0_K = \omega_N^L(K).$$

$(\Longleftarrow$

Si $\alpha_N^L \preceq \sigma \preceq \omega_N^L$, entonces

$$N = \alpha_N^L(L) \leq \sigma(L) \leq \omega_N^L(L) = N,$$

es decir, $\sigma(L) = N$. □

Definición 2.2.8. *Sea $\sigma \in \mathcal{L}_{pr}$. Decimos que σ es idempotente si $\sigma \cdot \sigma = \sigma$.*

Proposición 2.2.9. *Sea $L \in \mathcal{L}$. Entonces α_L^L es idempotente.*

Demostración. Sean $L, K \in \mathcal{L}_{pr}$. Por una parte,

$$\alpha_L^L(K) = \Big(\bigvee_{f \in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L,K)} f(1_L)\Big)/0_K$$

Ahora,

$$(\alpha_L^L \cdot \alpha_L^L)(K) = (\alpha_L^L)(\alpha_L^L(K)) = \alpha_L^L\Big(\Big(\bigvee_{f \in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L,K)} f(1_L)\Big)/0_K\Big)$$

$$= \Big(\bigvee_{g \in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L, \bigvee_{f \in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L,K)} f(1_L)/0_K)} g(1_L)\Big)/0_K.$$

Nótese que, si $f \in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L, K)$, entonces

$$L \xrightarrow{f} f(1_L)/0_K \xrightarrow{\iota} \Big(\bigvee_{f\in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L,K)} f(1_L)\Big)/0_K,$$

donde ι denota al morfismo de inclusión. Tomando esto en cuenta,

$$\iota\circ f : L \longrightarrow \Big(\bigvee_{f\in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L,K)} f(1_L)\Big)/0_K,$$

con lo cual, se tiene que

$$f(1_L) = \iota(f(1_L)) = (\iota\circ f)(1_L) \leq \bigvee_{g\in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L,\bigvee_{f\in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L,K)} f(1_L)/0_K)} g(1_L).$$

Así,

$$\Big(\bigvee_{f\in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L,K)} f(1_L)\Big)/0_K \leq \Big(\bigvee_{g\in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L,\bigvee_{f\in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L,K)} f(1_L)/0_K)} g(1_L)\Big)/0_K.$$

Por otra parte, si

$$L \xrightarrow{g} \Big(\bigvee_{f\in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L,K)} f(1_L)\Big)/0_K,$$

entonces

$$L \xrightarrow{g} \Big(\bigvee_{f\in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L,K)} f(1_L)\Big)/0_K \overset{\iota}{\hookrightarrow} K.$$

Esto implica que

$$g(1_L) = \iota(g(1_L)) = (\iota\circ g)(1_L) \leq \bigvee_{f\in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L,K)} f(1_L),$$

con lo cual,

$$\Big(\bigvee_{g\in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L,\bigvee_{f\in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L,K)} f(1_L)/0_K)} g(1_L)\Big)/0_K \leq \Big(\bigvee_{f\in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L,K)} f(1_L)\Big)/0_K.$$

Por lo tanto,

$$(\alpha_L^L \cdot \alpha_L^L)(K) = \alpha_L^L(K).$$

□

Definición 2.2.10. *Sea $\sigma \in \mathcal{L}_{pr}$. Decimos que σ es un radical si $(\sigma : \sigma) = \sigma$.*

Proposición 2.2.11. *Sea $L \in \mathcal{L}$. Entonces ω_0^L es un radical.*

Demostración. Sean $L, K \in \mathcal{L}$ y $f : K \longrightarrow L$ un morfismo lineal con núcleo $n(f)$. Nótese que, por definición,

$$\omega_0^L(K) = \Big(\bigwedge_{f \in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(K,L)} [f^{-1}(f(1_K) \wedge 0)]\Big)/0$$

$$= \Big(\bigwedge_{f \in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(K,L)} f^{-1}(0)\Big)/0 = \Big(\bigwedge_{f \in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(K,L)} n(f)\Big)/0,$$

con lo cual

$$(\omega_0^L)_*(1_K) = \bigwedge_{f \in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(K,L)} n(f).$$

Obsérvese también que,

$$(\omega_0^L : \omega_0^L)(K) = (\omega_0^L : \omega_0^L)_*(1_K)/0,$$

donde

$$[(\omega_0^L : \omega_0^L)_*(1_K)]/(\omega_0^L)_*(1_K) = (\omega_0^L)[1_K/(\omega_0^L)_*(1_K)].$$

Así, como $(\omega_0^L)_*(1_K) = \bigwedge_{f \in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(K,L)} n(f)$, se tiene que

$$(\omega_0^L)[1_K/(\omega_0^L)_*(1_K)]$$

$$= \Big(\bigwedge_{g \in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(1_K/[\bigwedge_{f \in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(K,L)} n(f)],L)} g^{-1}(g(1_K) \wedge 0)\Big)/[(\omega_0^L)_*(1_K)]$$

$$= \Big(\bigwedge_{g \in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(1_K/[\bigwedge_{f \in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(K,L)} n(f)],L)} g^{-1}(0)\Big)/[(\omega_0^L)_*(1_K)]$$

$$= \Big(\bigwedge_{g \in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(1_K/[\bigwedge_{f \in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(K,L)} n(f)],L)} n(g)\Big)/[(\omega_0^L)_*(1_K)].$$

Tomando esto en cuenta, basta demostrar que

$$\bigwedge_{g\in Hom_{\mathcal{L_M}}(1_K/[\bigwedge_{f\in Hom_{\mathcal{L_M}}(K,L)} n(f)],L)} n(g) = \bigwedge_{f\in Hom_{\mathcal{L_M}}(K,L)} n(f).$$

Ahora, por una parte, si

$$\rho : K \longrightarrow 1_K/\Big(\bigwedge_{f\in Hom_{\mathcal{L_M}}(K,L)} n(f)\Big)$$

es el morfismo lineal canónico, entonces para cada morfismo lineal

$$g \in Hom_{\mathcal{L_M}}\Big(1_K/\Big(\bigwedge_{f\in Hom_{\mathcal{L_M}}(K,L)} n(f)\Big), L\Big),$$

se tiene el morfismo lineal $g\circ\rho : K \longrightarrow L$. Notemos que, como

$$n(g) \geq \bigwedge_{f\in Hom_{\mathcal{L_M}}(K,L)} n(f),$$

para cada $g \in Hom_{\mathcal{L_M}}\Big(1_K/\Big(\bigwedge_{f\in Hom_{\mathcal{L_M}}(K,L)} n(f)\Big), L\Big)$, entonces

$$(\bar{\rho})^{-1}(n(g)) = n(g).$$

Así,

$$n(g\circ\rho) = (\bar{\rho})^{-1}(\rho(1_K)\wedge n(g)) = (\bar{\rho})^{-1}(1_K\wedge n(g)) = (\bar{\rho})^{-1}(n(g)) = n(g).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} &\bigwedge_{f\in Hom_{\mathcal{L_M}}(K,L)} n(f) \\ \leq &\bigwedge_{g\in Hom_{\mathcal{L_M}}(1_K/[\bigwedge_{f\in Hom_{\mathcal{L_M}}(K,L)} n(f)],L)} n(g\circ\rho) \\ = &\bigwedge_{g\in Hom_{\mathcal{L_M}}(1_K/[\bigwedge_{f\in Hom_{\mathcal{L_M}}(K,L)} n(f)],L)} n(g). \end{aligned}$$

Por otra parte, sean $f \in Hom_{\mathcal{L_M}}(K,L)$ y $\bar{f} : 1_K/n(f) \longrightarrow f(1_K)/0$ el isomorfismo de retículas inducido por f. Ahora, si

$$\rho : \Big(1_K/\bigwedge_{f\in Hom_{\mathcal{L_M}}(K,L)} n(f)\Big) \longrightarrow 1_K/n(f)$$

es el morfismo lineal canónico y $\iota : f(1_K)/0 \hookrightarrow L$ el morfismo lineal de inclusión, entonces

$$\Big(1_K/\bigwedge_{f\in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(K,L)} n(f)\Big) \xrightarrow{\rho} 1_K/n(f) \xrightarrow{\bar{f}} f(1_K)/0 \overset{\iota}{\hookrightarrow} L,$$

es decir,

$$\iota\circ\bar{f}\circ\rho \in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}\Big(1_K/\Big(\textstyle\bigwedge_{f\in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(K,L)} n(f)\Big), L\Big).$$

Como $n(\iota\circ\bar{f}\circ\rho) = n(f)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
&\bigwedge_{g\in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(1_K/[\bigwedge_{f\in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(K,L)} n(f)],L)} n(g)\\
&\leq \bigwedge_{f\in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(K,L)} n(\iota\circ\bar{f}\circ\rho)\\
&= \bigwedge_{f\in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(K,L)} n(f).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\bigwedge_{g\in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(1_K/[\bigwedge_{f\in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(K,L)} n(f)],L)} n(g) = \bigwedge_{f\in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(K,L)} n(f).$$

□

Proposición 2.2.12. *Sea L una retícula completa y $a \in L$. Entonces*

$$\alpha_a^L(K) = \Big(\textstyle\bigvee_{f\in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}(L,K)}} f(a)\Big)/0_K$$

es un prerradical de retículas.

Demostración. Sea $a \in L$ un elemento totalmente invariante y $K \xrightarrow{h} K'$ un morfismo lineal de retículas. Veamos que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "h"] & K' \\
\alpha_a^L(K)/0_K \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "h_|"] & \alpha_a^L(K')/0_{K'} \arrow[u, "\iota"']
\end{tikzcd}$$

conmuta. Notemos que

$$\alpha_a^L(K) = \Big(\bigvee\{f(a) \mid f \in Hom_{\mathcal{L}_\mathcal{M}}(L,K)\}\Big)/0_K$$
y
$$\alpha_a^L(K') = \Big(\bigvee\{g(a) \mid g \in Hom_{\mathcal{L}_\mathcal{M}}(L,K')\}\Big)/0_{K'}.$$

Así, por el Lema 1.0.5, se sigue que

$$\begin{aligned} h\Big(\alpha_a^L(K)\Big) &= h\Big(\Big(\bigvee\{f(a) \mid f \in Hom_{\mathcal{L}_\mathcal{M}}(L,K)\}\Big)/0_K\Big) \\ &\Big(\bigvee\{(h\circ f)(a) \mid f \in Hom_{\mathcal{L}_\mathcal{M}}(L,K)\}\Big)/0_{K'} \\ &\leq \Big(\bigvee\{g(a) \mid g \in Hom_{\mathcal{L}_\mathcal{M}}(L,K')\}\Big)/0_{K'} \\ &= \alpha_a^L(K'). \end{aligned}$$

Por lo tanto, el diagrama conmuta y así, α_a^L es un prerradical de retículas. $\square$

2.3. El Soclo y Radical en $\mathcal{L}_{pr}$

En esta sección presentamos diversos resultados que aparecen en los trabajos [4] y [8] con el propósito de hacer autocontenido. Cabe señalar que con excepción del Lema 2.3.7 y de la Proposición 2.3.10 hemos modificado las demostraciones adecuándolas al caso general.

Proposición 2.3.1. *[4, Lemma 2.1 (1)] Sea $f : L \longrightarrow L'$ un morfismo lineal. Si $a \in L$ es un átomo, entonces $f(a) = 0$ ó $f(a)$ es un átomo en L'.*

Demostración. Sea $f : L \longrightarrow L'$ un morfismo lineal y $a \in L$ un átomo. Supongamos que $f(a) \neq 0$. Como f es un morfismo lineal, existe $n(f) \in L$ tal que

$$\bar{f} : 1_L/n(f) \longrightarrow f(1_L)/0_{L'},$$

es un isomorfismo de retículas, cuya regla de correspondencia es $\bar{f}(x) = f(x)$, $\forall x \in 1_L/n(f)$.
Notemos que $(a \vee n(f)) \in 1_L/n(f)$ es tal que $f(a \vee n(f)) = f(a)$. Además, como $f(a) \neq 0$, se cumple que $a \nleq n(f)$; de lo contrario, $f(a) \leq f(n(f)) = 0$. Tomando esto en cuenta, por ser a un átomo de L se sigue que $a \wedge n(f) = 0$.

Ahora, por la ley modular, se tiene que

$$(a \vee n(f))/n(f) \cong a/(a \wedge n(f)) = a/0,$$

es decir, $(a \vee n(f))/n(f)$ es un átomo en $1/n(f)$. Así, por ser $\bar{f}$ un isomorfismo de retículas, se concluye que $\bar{f}((a \vee n(f))/n(f)) = f(a)/0$ es un átomo en L'. $\square$

Notación. Sea L una retícula modular completa. Denotaremos por $\mathcal{A}_L$ al conjunto de átomos de la retícula L.

Proposición 2.3.2. *[4, Proposition 2.2] Sea L una retícula modular completa. Entonces*

$$Soc(L) := \Big(\bigvee_{a\in\mathcal{A}_L} a\Big)/0$$

es un prerradical de retículas modulares completas.

Demostración. Sea $f : L \longrightarrow L'$ un morfismo lineal. Veamos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr, "f"] & & L' \\ \Big(\bigvee_{a\in\mathcal{A}_L} a\Big)/0_L \arrow[u, "\iota"] \arrow[rr, "f|_{\downarrow}^{\uparrow}"] & & \Big(\bigvee_{a'\in\mathcal{A}_{L'}} a'\Big)/0_{L'} \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

Por la Proposición 2.3.1, para cualquier $a \in \mathcal{A}_L$ se tiene que $f(a) = 0$ ó $f(a) \in \mathcal{A}_{L'}$. Por otra parte, por el Lema 1.0.2, se sigue que

$$f\Big(\Big(\bigvee_{a\in\mathcal{A}_L} a\Big)/0_L\Big) = \Big(\bigvee_{a\in\mathcal{A}_L} f(a)\Big)/0_{L'}.$$

Así,

$$f\Big(\Big(\bigvee_{a\in\mathcal{A}_L} a\Big)/0_L\Big) = \Big(\bigvee_{a\in\mathcal{A}_L} f(a)\Big)/0_{L'} \leq \Big(\bigvee_{a'\in\mathcal{A}_{L'}} a'\Big)/0_{L'},$$

con lo cual, el diagrama conmuta. □

Definición 2.3.3. *Sean L una retícula modular completa y $a \in L$. Decimos que a es un elemento **superfluo** si $a \vee b \neq 1_L$, para cualquier $b \in L$ y $b \neq 1_L$.*

Proposición 2.3.4. *[4, Lemma 2.1 (2)] Sean $f : L \longrightarrow L'$ un morfismo lineal y $s \in L$ un elemento superfluo. Entonces $f(s)$ es un elemento superfluo en L'.*

Demostración. Sean $f : L \longrightarrow L'$ un morfismo lineal y $s \in L$ un elemento superfluo. Supongamos que $f(s)$ no es superfluo en L'. Entonces, existe $b' \in L'$, con $b' \neq 1_{L'}$, tal que $f(s) \vee b' = 1_{L'}$. Ahora, como $f(s) \leq f(1_L)$, por modularidad se sigue que

$$\begin{aligned} f(1_L) &= f(1_L) \wedge 1_{L'} \\ &= f(1_L) \wedge (f(s) \vee b') \leq f(s) \vee (f(1_L) \wedge b') \\ &\leq f(1_L) \vee f(1_L) = f(1_L), \end{aligned}$$

es decir, $f(s) \vee (f(1_L) \wedge b') = f(1_L)$.

Por otra parte, si $n(f)$ es el núcleo de f, entonces se tiene el isomorfismo de retículas inducido por f, $1_L/n(f) \xrightarrow{\bar{f}} f(1_L)/0_{L'}$, con regla de correspondencia $\bar{f}(x) = f(x)$, $\forall x \in 1_L/n(f)$. Nótese que $f(1_L) \wedge b' \in f(1_L)/0_{L'}$, con lo cual, existe $b \in 1_L/n(f)$ tal que $\bar{f}(b) = f(b) = f(1_L) \wedge b'$. Observemos también que $b \neq 1_L$; de lo contrario, si $b = 1_L$, entonces $f(1_L) = f(b) = f(1_L) \wedge b'$, lo cual implica que $f(1_L) \leq b'$. De esta manera, $f(s) \leq f(1_L) \leq b'$, con lo cual, $1_{L'} = f(s) \vee b' = b' \neq 1_{L'}$, lo que es una contradicción.

Tomando esto en cuenta,

$$f(s \vee b) = f(s) \vee f(b) = f(s) \vee (f(1_L) \wedge b') = f(1_L).$$

Ahora, como $s \vee b \geq b \in 1_L/n(f)$, y $\bar{f}$ es un isomorfismo de retículas, se sigue que $s \vee b = 1$, contradiciendo que s es un elemento superfluo en L.

Por lo tanto, $f(s)$ es un elemento superfluo en L'. $\square$

Proposición 2.3.5. *[4, Proposition 2.2] Sea L una retícula modular completa. Si S_L denota al conjunto de elementos superfluos de L, entonces*

$$Rad(L) := \Big(\bigvee_{a \in S_L} a\Big)/0$$

es un prerradical de retículas.

Demostración. Sea $f : L \longrightarrow L'$ un morfismo lineal. Notemos que si S_L y $S_{L'}$ denotan al conjunto de elementos superfluos de L y L', respectivamente, entonces por la Proposición 2.3.4 se tiene que $f(s) \in S_{L'}$, $\forall s \in S_L$. Ahora, por el Lema 1.0.2,

$$f\Big(\Big(\bigvee_{a \in S_L} a\Big)/0\Big) = \Big(\bigvee_{a \in S_L} f(a)\Big)/0 \leq \Big(\bigvee_{a' \in S_{L'}} a'\Big)/0,$$

con lo cual, el diagrama

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] & L' \\ \Big(\bigvee_{a \in S_L} a\Big)/0 \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "f\restriction"] & \Big(\bigvee_{a' \in S_{L'}} a'\Big)/0. \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

es conmutativo. $\square$

Definición 2.3.6. *Sea L una retícula modular completa. El **radical** de L, denotado por $Jac(L)$, es la intersección de todos los elementos máximos de L.*

Notemos que si $\mathcal{M}_L$ denota al conjunto de elementos máximos de la retícula L, entonces

$$Jac(L) = \bigwedge_{m\in\mathcal{M}_L} m.$$

Lema 2.3.7. *[8, Lemma 7.6] Si $a \in L$ es un elemento superfluo, entonces $a \leq Jac(L)$.*

Demostración. Sean $a \in L$ un elemento superfluo y $m \in L$ un elemento máximo. Como $m \neq 1$, siendo a un elemento superfluo, se tiene que $a \vee m \neq 1$. Ahora, como $m \leq a \vee m \neq 1$ y m es un elemento máximo, se sigue que $m = a \vee m$, es decir, $a \leq m$. Como este argumento se satisface para cualquier elemento máximo m de L,

$$a \leq \bigwedge_{m\in\mathcal{M}_L} m = Jac(L).$$

Corolario 2.3.8. *Sea L una retícula completa. Entonces*

$$Rad(L) = \left(\bigvee_{a\in S_L} a\right) \leq \left(\bigwedge_{m\in\mathcal{M}_L} m\right) = Jac(L).$$

Recordemos que en una retícula modular completa L, un elemento $a \in L$ es compacto si para cada subconjunto X de L tal que $a \leq \bigvee X$, existe un subconjunto finito $F \subseteq X$ tal que $a \leq \bigvee F$.

Definición 2.3.9. *Una retícula completa L es compactamente generada si todo elemento en L es una yunta de elementos compactos.*

Proposición 2.3.10. *[4, Proposition 3.1] Sea L una retícula compactamente generada. Entonces*

$$Jac(L) = Rad(L).$$

Demostración. Obsérvese que, por el Corolario 2.3.8, basta demostrar que

$$Jac(L) \leq Rad(L).$$

Supongamos que L es una retícula modular compactamente generada. Veamos que

$$\bigwedge_{m\in\mathcal{M}_L} m \leq \bigvee_{s\in S_L} s.$$

Como L es compactamente generada, $Jac(L) = \bigwedge_{m\in\mathcal{M}_L} m$ es una yunta de elementos compactos de L, con lo cual, podemos escoger $c \in L$ un elemento compacto, tal que $c \leq Jac(L)$.

Demostraremos que $c \in S_L$. Sea $y \in L$ tal que $c \vee y = 1$. Veamos que la única manera en que esto puede suceder es cuando $y = 1$. De lo contrario, $y \in L \setminus \{1\}$, y así, $c \nleq y$, ya que el caso $c \leq y$ implica que $1 = c \vee y = y \neq 1$. Sea

$$A_y = \{z \in L \mid y \leq z \text{ y } c \nleq z\}.$$

Nótese que $A_y \neq \varnothing$, puesto que $y \in A_y$. Ahora, si $\varnothing \neq T \subset A_y$ es una cadena, denotemos por $t = \bigvee_{a \in T} a$. Obsérvese que $t \in A_y$, ya que, en caso contrario, como $y \leq a \leq \bigvee_{a \in T} a = t$, tendríamos que $c \leq t$, con lo cual existiría un conjunto finito F de T tal que $c \leq \bigvee F$, es decir, $c \leq a$, para algún $a \in T$ (puesto que T es una cadena), lo cual es una contradicción. Esto muestra que A_y es un conjunto inductivo. Así, por el Lema de Zorn, A_y tiene un elemento máximo m.

Veamos ahora que $m \in M_L$. Sea $u \in L$ con $m \leq u$. Por una parte, si $c \leq u$, entonces $1 = c \vee y \leq u \vee m = u$, es decir, $u = 1$. Por otra parte, si $c \nleq u$, entonces $u \in A_y$: en efecto, ya que se cumple que $y \leq m \leq u$ y $c \nleq u$. Como m es un elemento máximo en A_y, se sigue que $u = m$. Por lo tanto, $m \in \mathcal{M}_L$, con lo cual $c \leq Jac(L) \leq m$, contradiciendo el hecho de que $m \in A_y$.

Esto muestra que la hipótesis de que $y \neq 1$ conduce a una contradicción, por lo que necesariamente se satisface que $y = 1$, mostrando así que $c \in S_L$. De esta manera, tenemos que

$$Jac(L) = \{c \in L \mid c \text{ es compacto y } c \leq Jac(L)\} \leq \bigvee_{s \in S_L} s = Rad(L).$$

□

Observación. *Cuando nos restringimos a la clase de retículas modulares completas compactamente generadas, entonces $Jac(L)$ es un prerradical de retículas que coincide con el prerradical $Rad(L)$.*

2.4. Operadores y propiedades distributivas.

En esta sección demostraremos que dado un prerradical de retículas σ y $\{\tau_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia arbitraria de prerradicales de retículas, el producto y el coproducto distribuyen a la cuña y yunta.

Proposición 2.4.1. *Sea $\{\tau_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una clase de prerradicales de retículas y $\sigma \in \mathcal{L}_{pr}$. Entonces*

$$\left(\curlyvee_{\alpha \in I} \tau_\alpha\right) \cdot \sigma = \curlyvee_{\alpha \in I} \left(\tau_\alpha \cdot \sigma\right)$$

Demostración. Sea $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$. Nótese que, como

$$\Big(\curlyvee_{\alpha \in I} \ \tau_\alpha\Big)\Big(\sigma_*(1_L)/0_L\Big) = \Big(\bigvee_{\alpha \in I} (\tau_\alpha)_*(\sigma_*(1_L))\Big)/0_L,$$

entonces $\left(\curlyvee_{\alpha\in I} \ \tau_\alpha\right)_*(\sigma_*(1_L)) = \bigvee_{\alpha\in I} (\tau_\alpha)_*(\sigma_*(1_L))$.

Ahora, por una parte,

$$\begin{aligned} &\Big((\curlyvee_{\alpha\in I} \tau_\alpha)\cdot\sigma\Big)(L) \\ &= \Big(\Big(\curlyvee_{\alpha\in I} \ \tau_\alpha\Big)_*(\sigma_*(1_L))\Big)/0_L \\ &= \Big(\bigvee_{\alpha\in I} (\tau_\alpha)_*(\sigma_*(1_L))\Big)/0_L. \end{aligned}$$

Por otra parte, como $(\tau\cdot\sigma)_*(1_L) = \tau_*(\sigma_*(1_L))$, entonces

$$\Big(\curlyvee_{\alpha\in I} \ (\tau_\alpha\cdot\sigma)\Big)(L) = \Big(\bigvee_{\alpha\in I} (\tau_\alpha\cdot\sigma)_*(1_L)\Big)/0_L = \Big(\bigvee_{\alpha\in I} (\tau_\alpha)_*(\sigma_*(1_L))\Big)/0_L.$$

Por lo tanto,

$$\Big(\curlyvee_{\alpha\in I} \ \tau_\alpha\Big)\cdot\sigma = \curlyvee_{\alpha\in I} (\tau_\alpha\cdot\sigma).$$

□

Proposición 2.4.2. *Sea* $\{\tau_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *una clase de prerradicales de retículas y* $\sigma\in\mathcal{L}_{pr}$. *Entonces*

$$(\curlywedge_{\alpha\in I} \tau_\alpha)\cdot\sigma = \curlywedge_{\alpha\in I} (\tau_\alpha\cdot\sigma)$$

Demostración. Sea $L\in\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$. Notemos que, como

$$\Big(\curlywedge_{\alpha\in I} \ \tau_\alpha\Big)\Big(\sigma_*(1_L)/0_L\Big) = \Big(\bigwedge_{\alpha\in I} (\tau_\alpha)_*(\sigma_*(1_L))\Big)/0_L,$$

entonces $\left(\curlywedge_{\alpha\in I} \ \tau_\alpha\right)_*(\sigma_*(1_L)) = \bigwedge_{\alpha\in I} (\tau_\alpha)_*(\sigma_*(1_L))$.

Ahora, por una parte,

$$\begin{aligned} &\Big((\curlywedge_{\alpha\in I} \tau_\alpha)\cdot\sigma\Big)(L) \\ &= \Big(\Big(\curlywedge_{\alpha\in I} \ \tau_\alpha\Big)_*(\sigma_*(1_L))\Big)/0_L \\ &= \Big(\bigwedge_{\alpha\in I} (\tau_\alpha)_*(\sigma_*(1_L))\Big)/0_L. \end{aligned}$$

Por otra parte, como $(\tau\cdot\sigma)_*(1_L) = \tau_*(\sigma_*(1_L))$, entonces

$$\Big(\curlywedge_{\alpha\in I} \ (\tau_\alpha\cdot\sigma)\Big)(L) = \Big(\bigwedge_{\alpha\in I} (\tau_\alpha\cdot\sigma)_*(1_L)\Big)/0_L = \Big(\bigwedge_{\alpha\in I} (\tau_\alpha)_*(\sigma_*(1_L))\Big)/0_L.$$

Por lo tanto,

$$\Big(\curlywedge_{\alpha\in I} \ \tau_\alpha\Big)\cdot\sigma = \curlywedge_{\alpha\in I} (\tau_\alpha\cdot\sigma).$$

□

Proposición 2.4.3. *Sea* $\{\tau_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *una clase de prerradicales de retículas y* $\sigma \in \mathcal{L}_{pr}$*. Entonces*

$$(\sigma : \curlyvee_{\alpha\in I}\ \tau_\alpha) = \curlyvee_{\alpha\in I}\ (\sigma : \tau_\alpha).$$

Demostración. Sea $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$. Por definición,

$$(\sigma : \tau)(L) = (\sigma : \tau)_*(1_L)/0_L \text{ donde } (\sigma : \tau)_*(1_L)/\sigma_*(1_L) = \tau\Big(1_L/\sigma_*(1_L)\Big).$$

Ahora, por una parte,

$$\Big(\curlyvee_{\alpha\in I}\ (\sigma : \tau_\alpha)\Big)(L) = \Big(\bigvee_{\alpha\in I}\ (\sigma : \tau_\alpha)_*(1_L)\Big)/0_L,$$

donde $(\sigma : \tau_\alpha)_*(1_L)/\sigma_*(1_L) = \tau_\alpha\Big(1_L/\sigma_*(1_L)\Big)$. Si denotamos por $L' = 1_L/\sigma_*(1_L)$, entonces

$$(\tau_\alpha)_*(1_{L'}) = (\sigma : \tau_\alpha)_*(1_L).$$

Tomando esto en cuenta, tenemos que

$$\Big(\curlyvee_{\alpha\in I}\ (\sigma : \tau_\alpha)\Big)(L) = \Big(\bigvee_{\alpha\in I}\ (\sigma : \tau_\alpha)_*(1_L)\Big)/0_L = \Big(\bigvee_{\alpha\in I}\ (\tau_\alpha)_*(1_{L'})\Big)/0_L.$$

Por otra parte,

$$(\sigma : \curlyvee_{\alpha\in I}\ \tau_\alpha)(L) = (\sigma : \curlyvee_{\alpha\in I}\ \tau_\alpha)_*(1_L)/0_L,$$

donde $(\sigma : \curlyvee_{\alpha\in I}\ \tau_\alpha)_*(1_L)/\sigma_*(1_L) = \Big(\curlyvee_{\alpha\in I}\ \tau_\alpha\Big)\Big((1_L/\sigma_*(1_L)\Big)$. Notemos que

$$\Big(\curlyvee_{\alpha\in I}\ \tau_\alpha\Big)_*(1_{L'}) = (\sigma : \curlyvee_{\alpha\in I}\ \tau_\alpha)_*(1_L).$$

Como $\Big(\curlyvee_{\alpha\in I}\ \tau_\alpha\Big)_*(1_{L'}) = \bigvee_{\alpha\in I}\ (\tau_\alpha)_*(1_{L'})$, se tiene que

$$\begin{aligned}(\sigma : \curlyvee_{\alpha\in I}\ \tau_\alpha)(L) &= (\sigma : \curlyvee_{\alpha\in I}\ \tau_\alpha)_*(1_L)/0_L \\ &= \Big(\curlyvee_{\alpha\in I}\ \tau_\alpha\Big)_*(1_{L'})/0_L = \Big(\bigvee_{\alpha\in I}\ (\tau_\alpha)_*(1_{L'})\Big)/0_L.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$(\sigma : \curlyvee_{\alpha\in I}\ \tau_\alpha) = \curlyvee_{\alpha\in I}\ (\sigma : \tau_\alpha).$$

□

Proposición 2.4.4. *Sea $\{\tau_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una clase de prerradicales de retículas y $\sigma \in \mathcal{L}_{pr}$. Entonces*

$$(\sigma : \curlywedge_{\alpha\in I}\ \tau_\alpha) = \curlywedge_{\alpha\in I}\ (\sigma : \tau_\alpha).$$

Demostración. Sea $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$. Por una parte,

$$\Big(\curlywedge_{\alpha\in I}\ (\sigma : \tau_\alpha)\Big)(L) = \Big(\bigwedge_{\alpha\in I} (\sigma : \tau_\alpha)_*(1_L)\Big)/0_L,$$

donde $(\sigma : \tau_\alpha)_*(1_L)/\sigma_*(1_L) = \tau_\alpha\Big(1_L/\sigma_*(1_L)\Big)$. Si denotamos por $L' = 1_L/\sigma_*(1_L)$, entonces

$$(\tau_\alpha)_*(1_{L'}) = (\sigma : \tau_\alpha)_*(1_L).$$

Tomando esto en cuenta, se tiene que

$$\Big(\curlywedge_{\alpha\in I}\ (\sigma : \tau_\alpha)\Big)(L) = \Big(\bigwedge_{\alpha\in I} (\sigma : \tau_\alpha)_*(1_L)\Big)/0_L = \Big(\bigwedge_{\alpha\in I} (\tau_\alpha)_*(1_{L'})\Big)/0_L.$$

Por otra parte,

$$(\sigma : \curlywedge_{\alpha\in I}\ \tau_\alpha)(L) = (\sigma : \curlywedge_{\alpha\in I}\ \tau_\alpha)_*(1_L)/0_L,$$

donde $(\sigma : \curlywedge_{\alpha\in I}\ \tau_\alpha)_*(1_L)/\sigma_*(1_L) = \Big(\curlywedge_{\alpha\in I}\ \tau_\alpha\Big)\Big(1_L/\sigma_*(1_L)\Big)$. Nótese que

$$\Big(\curlywedge_{\alpha\in I}\ \tau_\alpha\Big)_*(1_{L'}) = (\sigma : \curlywedge_{\alpha\in I}\ \tau_\alpha)_*(1_L).$$

Como $\Big(\curlywedge_{\alpha\in I}\ \tau_\alpha\Big)_*(1_{L'}) = \bigwedge_{\alpha\in I} (\tau_\alpha)_*(1_{L'})$, se sigue que

$$\begin{aligned}&(\sigma : \curlywedge_{\alpha\in I}\ \tau_\alpha)(L) = (\sigma : \curlywedge_{\alpha\in I}\ \tau_\alpha)_*(1_L)/0_L \\ &= \Big(\curlywedge_{\alpha\in I}\ \tau_\alpha\Big)_*(1_{L'})/0_L = \Big(\bigwedge_{\alpha\in I} (\tau_\alpha)_*(1_{L'})\Big)/0_L.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$(\sigma : \curlywedge_{\alpha\in I}\ \tau_\alpha) = \curlywedge_{\alpha\in I}\ (\sigma : \tau_\alpha).$$

□

Proposición 2.4.5. *La clase de todos los prerradicales idempotentes es cerrada bajo yuntas arbitrarias.*

Demostración. Sea $\{\sigma_i\}_{i\in I}$ una clase de prerradicales de retículas idempotentes. Nótese que, para toda $\sigma, \tau \in \mathcal{L}_{pr}$, se tiene que $(\sigma \cdot \tau) \preceq \sigma$, con lo cual, se sigue que

$$\Big(\curlyvee_{i\in I} \ \sigma_i \cdot \curlyvee_{i\in I} \sigma_i\Big) \preceq \curlyvee_{i\in I} \sigma_i.$$

Notemos también que, para cualesquiera $\sigma, \tau, \rho \in \mathcal{L}_{pr}$ tales que $\sigma \preceq \tau$, entonces $\rho \cdot \sigma \preceq \rho \cdot \tau$. Así, como $\Big(\curlyvee_{i\in I} \ \sigma_i \cdot \curlyvee_{i\in I} \sigma_i\Big) = \curlyvee_{i\in I} \Big(\sigma_i \cdot \curlyvee_{i\in I} \sigma_i\Big)$ y para toda $j \in I$ se tiene que $\sigma_j \preceq \curlyvee_{i\in I} \sigma_i$, entonces

$$\sigma_j = (\sigma_j \cdot \sigma_j) \preceq \Big(\sigma_j \cdot \curlyvee_{i\in I} \sigma_i\Big).$$

Tomando esto en cuenta, se sigue que

$$\curlyvee_{i\in I} \sigma_i \preceq \curlyvee_{i\in I} \Big(\sigma_i \cdot \curlyvee_{i\in I} \sigma_i\Big) = \Big(\curlyvee_{i\in I} \ \sigma_i \cdot \curlyvee_{i\in I} \sigma_i\Big).$$

Por lo tanto,

$$\Big(\curlyvee_{i\in I} \ \sigma_i \cdot \curlyvee_{i\in I} \sigma_i\Big) = \curlyvee_{i\in I} \sigma_i.$$

$\square$

Proposición 2.4.6. *La clase de todos los radicales es cerrada bajo cuñas arbitrarias.*

Demostración. Sea $\{\sigma_i\}_{i\in I}$ una clase de radicales. Nótese que, para cualesquiera $\sigma, \tau, \rho \in \mathcal{L}_{pr}$ tales que $\sigma \preceq \tau$, se tiene que $(\sigma : \rho) \preceq (\tau : \rho)$. Como $\curlywedge_{i\in I} \sigma_i \preceq \sigma_j$, para cualquier $j \in I$, entonces

$$\Big(\curlywedge_{i\in I} \ \sigma_i : \sigma_j\Big) \preceq (\sigma_j : \sigma_j) = \sigma_j.$$

Por lo tanto,

$$\Big(\curlywedge_{i\in I} \ \sigma_i : \curlywedge_{i\in I} \sigma_i\Big) = \curlywedge_{i\in I} \Big(\curlywedge_{i\in I} \ \sigma_i : \sigma_i\Big) \preceq \curlywedge_{i\in I} \sigma_i.$$

Por otra parte, dados $\sigma, \tau \in \mathcal{L}_{pr}$, se tiene que $\tau \preceq (\sigma : \tau)$. Tomando esto en cuenta, se sigue que $\sigma_j \preceq \Big(\curlywedge_{i\in I} \ \sigma_i : \sigma_j\Big)$. Esto implica que

$$\curlywedge_{i\in I} \sigma_i \preceq \curlywedge_{i\in I} \Big(\curlywedge_{i\in I} \ \sigma_i : \sigma_i\Big) = \Big(\curlywedge_{i\in I} \ \sigma_i : \curlywedge_{i\in I} \sigma_i\Big).$$

Por lo tanto,

$$\Big(\curlywedge_{i\in I} \ \sigma_i : \curlywedge_{i\in I} \sigma_i\Big) = \curlywedge_{i\in I} \sigma_i.$$

$\square$

2.5. Igualadores, anuladores, co-igualadores y totalizadores

En esta sección veremos que para cualquier σ en $\mathcal{L}_{pr}$, podemos construir nuevos prerradicales de retículas mediante propiedades de cerradura de ciertias clases de prerradicales de retículas. Así mismo, extendemos resultados vistos en [11] al caso reticular.

Proposición 2.5.1. *[11, Proposition 2.1] Sea $\sigma \in \mathcal{L}_{pr}$ y $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$. Entonces*

(i) El prerradical α_L^L es idempotente. Más aún, σ es idempotente si y sólo si $\sigma = \curlyvee\{\alpha_L^L \mid \sigma(L) = L\}$.

(ii) El prerradical $\omega_{0_L}^L$ es un radical. Más aún, σ es un radical si y sólo si $\sigma = \curlywedge\{\omega_{0_L}^L \mid \sigma(L) = 0_L\}$.

Demostración. Sea $\sigma \in \mathcal{L}_{pr}$.
Demostraremos (i). α_L^L es idempotente por la Proposición 2.2.9. Supongamos que σ es un prerradical idempotente. Por la Proposición 2.2.7, para cualquier $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ tal que $\sigma(L) = L$, se tiene que $\alpha_L^L \preceq \sigma$, con lo cual

$$\curlyvee\{\alpha_L^L \mid \sigma(L) = L\} \preceq \sigma.$$

Por otro lado, notemos que para cada $K \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, el morfismo lineal de inclusión $\sigma(K) \xrightarrow{\iota} K$ es un morfismo lineal en $Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(\sigma(K), K)$, con lo cual $\sigma(K) \leq \alpha_{\sigma(K)}^{\sigma(K)}(K)$. Además, por ser σ un prerradical idempotente se tiene que $\sigma(\sigma(K)) = \sigma(K)$. Esto implica que

$$\sigma \preceq \curlyvee\{\alpha_{\sigma(K)}^{\sigma(K)} \mid K \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}\} \preceq \curlyvee\{\alpha_L^L \mid \sigma(L) = L\},$$

obteniendo así la igualdad.

Supongamos ahora que $\sigma = \curlyvee\{\alpha_L^L \mid \sigma(L) = L\}$. Por la Proposición 2.2.9 y la Proposición 2.4.5 se sigue que σ es idempotente.

Veamos ahora (ii). $\omega_{0_L}^L$ es un radical por la Proposición 2.2.11. Supongamos que σ es un radical. Si $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es tal que $\sigma(L) = 0_L$, la Proposición 2.2.7 implica que $\sigma \preceq \omega_{0_L}^L$, con lo cual

$$\sigma \preceq \curlywedge\{\omega_{0_L}^L \mid \sigma(L) = 0_L\}.$$

Por otro lado, si $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ y denotamos $L' = L/\sigma(L)$, por ser σ un radical se sigue que $\sigma(L') = \sigma\Big(L/\sigma(L)\Big) = 0_{L'}$. Ahora, como el morfismo canónico $L \xrightarrow{\rho} L/\sigma(L)$ es un morfismo lineal en $Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L, L/\sigma(L))$, se tiene que

$$\omega_{0_{L'}}^{L'}(L) = \omega_{0_{L'}}^{L/\sigma(L)}(L) \leq \sigma(L).$$

Por ello, se sigue que

$$\curlywedge\{\omega_{0_L}^L \mid \sigma(L) = 0_L\} \preceq \sigma,$$

consiguiendo así la igualdad.

Supongamos ahora que $\sigma = \curlywedge\{\omega_{0_L}^L \mid \sigma(L) = 0_L\}$. Por la Proposición 2.2.11 y la Proposición 2.4.6 se sigue que σ es radical. $\square$

Sea $\sigma \in \mathcal{L}_{pr}$. Consideremos las siguientes clases de retículas modulares completas:

- $\mathcal{A}_e = \{\tau \in \mathcal{L}_{pr} \mid \tau \cdot \sigma = \sigma\}$;
- $\mathcal{A}_a = \{\tau \in \mathcal{L}_{pr} \mid \tau \cdot \sigma = 0\}$;
- $\mathcal{A}_c = \{\tau \in \mathcal{L}_{pr} \mid (\sigma : \tau) = \sigma\}$;
- $\mathcal{A}_t = \{\tau \in \mathcal{L}_{pr} \mid (\sigma : \tau) = 1\}$.

Por las Proposiciones 2.4.1, 2.4.2, 2.4.3 y 2.4.4 todas estas clases son cerradas bajo cuñas y yuntas arbitrarias. Tomando esto en cuenta, se pueden definir los siguientes prerradicles de retículas:

Definición 2.5.2. *[11, Definition 3.1] Sea $\sigma \in \mathcal{L}_{pr}$. Entonces*

- $e(\sigma) := \curlywedge\{\tau \in \mathcal{A}_e\}$ *y se le llama el igualador de* σ*;*
- $a(\sigma) := \curlyvee\{\tau \in \mathcal{A}_a\}$ *y se le llama el anulador de* σ*;*
- $c(\sigma) := \curlyvee\{\tau \in \mathcal{A}_c\}$ *y se le llama el co-igualador de* σ*;*
- $t(\sigma) := \curlywedge\{\tau \in \mathcal{A}_t\}$ *y se le llama el totalizador de* σ*.*

El siguiente resultado es la extensión de [11, Theorem 3.1]

Teorema 2.5.3. *Sea $\sigma \in \mathcal{L}_{pr}$. Entonces las siguientes propiedades se cumplen:*

(i) *(a)* $\sigma \preceq e(\sigma)$*;*
  (b) $e(\sigma)$ *es un prerradical idempotente;*
  (c) $e(\sigma) = \sigma$ *si y sólo si* σ *es idempotente;*
  (d) $e(\sigma) = \curlyvee\{\alpha_{\sigma(L)}^{\sigma(L)} \mid L \in \mathcal{L}_M\}$.

(ii) *(a)* $a(\sigma)$ *es un radical.*
  (b) $a(\sigma) = \curlywedge\{\omega_0^{\sigma(L)} \mid L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}\}$.

(iii) *(a)* $c(\sigma) \preceq \sigma$;

(b) $c(\sigma)$ *es un radical;*

(c) $c(\sigma) = \sigma$ *si y sólo si* σ *es un radical;*

(d) $c(\sigma) = \curlywedge\{(\omega_0^{1_L/\sigma_*(1_L))} \mid L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}\}$.

Demostración. (i)

(a) Notemos que, si $\sigma, \tau \in \mathcal{L}_{pr}$, entonces $\sigma \cdot \tau \preceq \sigma$. En particular, para σ y $e(\sigma)$ se tiene que

$$\sigma = e(\sigma) \cdot \sigma \preceq e(\sigma).$$

(b) Por una parte,

$$\Big(e(\sigma) \cdot e(\sigma)\Big) \cdot \sigma = (e(\sigma)) \cdot \Big((e(\sigma) \cdot \sigma\Big) = e(\sigma) \cdot \sigma = \sigma,$$

es decir, $e(\sigma) \cdot e(\sigma) \in \mathcal{A}_e$. Esto implica que $e(\sigma) \preceq e(\sigma) \cdot e(\sigma)$.
Por otra parte, como $e(\sigma) \cdot e(\sigma) \preceq e(\sigma)$, entonces $e(\sigma) = e(\sigma) \cdot e(\sigma)$.

$(c) \Longrightarrow)$ Supongamos que $e(\sigma) = \sigma$. Como $e(\sigma)$ es idempotente, entonces σ también lo es.

$(\Longleftarrow$ Si σ es idempotente, entonces $\sigma \cdot \sigma = \sigma$, de donde se sigue que $\sigma \in \mathcal{A}_e$. Esto implica que $e(\sigma) \preceq \sigma$. Ahora, como $\sigma = e(\sigma) \cdot \sigma \preceq e(\sigma)$, se tiene que $\sigma = e(\sigma)$.

(d) Como $e(\sigma) \cdot \sigma = \sigma$, entonces para cada $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ se tiene que

$$\sigma(L) = \Big(e(\sigma) \cdot \sigma\Big)(L) = e(\sigma)(\sigma(L)).$$

Ahora, por la Proposición 2.5.1, al ser $e(\sigma)$ un prerradical idempotente, se sigue que

$$e(\sigma) = \curlyvee\{\alpha_N^N \mid e(\sigma)(N) = N\}.$$

En particular, para $N = \sigma(L)$, se cumple que $e(\sigma)(N) = N$. Así,

$$\alpha_{\sigma(L)}^{\sigma(L)} \preceq \curlyvee\{\alpha_N^N \mid e(\sigma)(N) = N\} = e(\sigma).$$

Por lo tanto,

$$\curlyvee\{\alpha_{\sigma(L)}^{\sigma(L)} \mid L \in \mathcal{L}_M\} \preceq e(\sigma).$$

Por otra parte, notemos que

$$\sigma(L) = \Big(\alpha_{\sigma(L)}^{\sigma(L)}\Big)(\sigma(L)) = \Big((\alpha_{\sigma(L)}^{\sigma(L)} \cdot \sigma\Big)(L).$$

Ahora, por la Proposición 2.4.1 y el hecho de que $\sigma \cdot \tau \preceq \sigma \curlywedge \tau \preceq \tau$, para cualesquiera dos prerradicales $\sigma, \tau \in \mathcal{L}_{pr}$, se tiene que

$$\sigma \preceq \curlyvee\Big\{\Big(\alpha^{\sigma(L)}_{\sigma(L)}\Big) \cdot \sigma \mid L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}\Big\} = \Big(\curlyvee \{\alpha^{\sigma(L)}_{\sigma(L)} \mid L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}\}\Big) \cdot \sigma \preceq \sigma.$$

Esto implica que

$$[\curlyvee\{\alpha^{\sigma(L)}_{\sigma(L)} \mid L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}\}] \cdot \sigma = \sigma,$$

es decir,

$$\curlyvee\{\alpha^{\sigma(L)}_{\sigma(L)} \mid L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}\} \in \mathcal{A}_e.$$

Tomando esto en cuenta, se sigue que $e(\sigma) \preceq \curlyvee\{\alpha^{\sigma(L)}_{\sigma(L)} \mid L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}\}$, obteniendo así la otra desigualdad.

(ii)

(a) Obsérvese que, para cualesquiera dos prerradicales $\tau, \sigma \in \mathcal{L}_{pr}$, se satisface que $\sigma \preceq (\sigma : \tau)$. En particular, para $a(\sigma)$, se sigue que $a(\sigma) \preceq (a(\sigma) : a(\sigma))$. Por otra parte, para cualquier $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ se tiene que

$$\begin{aligned}\Big((a(\sigma) : a(\sigma)) \cdot \sigma\Big)(L) &= \Big(a(\sigma) : a(\sigma)\Big)_* \Big(\sigma_*(1_L)/0\Big)\\ &= \Big(a(\sigma) : a(\sigma)\Big)_* (\sigma_*(1_L))/0,\end{aligned}$$

donde

$$\Big(a(\sigma) : a(\sigma)\Big)_* (\sigma_*(1_L))/\Big(a(\sigma)_*(\sigma_*(1_L))\Big) = a(\sigma)_*\Big(\sigma_*(1_L)/a(\sigma)_*(\sigma_*(1_L))\Big).$$

Como $a(\sigma) \in \mathcal{A}_a$, se cumple que $a(\sigma) \cdot \sigma = 0$, con lo cual, $a(\sigma)_*(\sigma_*(1_L)) = 0$. Esto implica que $(a(\sigma) : a(\sigma))_*(\sigma_*(1_L)) = 0$, es decir, $(a(\sigma) : a(\sigma)) \cdot \sigma = 0$. Así, $(a(\sigma) : a(\sigma)) \in \mathcal{A}_a$, de donde se sigue que $(a(\sigma) : a(\sigma)) \preceq a(\sigma)$.
Por lo tanto, $(a(\sigma) : a(\sigma)) = a(\sigma)$, mostrando así que $a(\sigma)$ es un radical.

(b) Por una parte, como $\Big(a(\sigma) \cdot \sigma\Big)(L) = 0$, para toda $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, entonces $a(\sigma)\Big(\sigma_*(1_L)/0\Big) = 0$. Así, por la Proposición 2.2.7 se sigue que $a(\sigma) \preceq \omega_0^{\sigma(L)}$, $\forall L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$. Por lo tanto,

$$a(\sigma) \preceq \curlywedge\{\omega_0^{\sigma(L)} \mid L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}\}.$$

Por otra parte, notemos que para cualquier $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, se satisface que

$$\Big(\omega_0^{\sigma(L)} \cdot \sigma\Big)(L) = \omega_0^{\sigma(L)}(\sigma(L)) = 0.$$

Tomando esto en cuenta, por la Proposición 2.4.2, tenemos que

$$\Big(\curlywedge \{\omega_0^{\sigma(L)} \mid L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}\}\Big) \cdot \sigma = \curlywedge\{\Big(\omega_0^{\sigma(L)} \cdot \sigma\Big) \mid L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}\} = 0.$$

Esto implica que $\curlywedge\{\omega_0^{\sigma(L)} \mid L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}\} \in \mathcal{A}_a$, de donde se sigue que

$$\curlywedge\{\omega_0^{\sigma(L)} \mid L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}\} \preceq a(\sigma).$$

Por lo tanto,

$$a(\sigma) = \curlywedge\{\omega_0^{\sigma(L)} \mid L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}\}.$$

(iii).

(a) Nótese que, para cualesquiera dos prerradicales $\tau, \sigma \in \mathcal{L}_{pr}$, se cumple que $\tau \preceq (\sigma : \tau)$. En particular, para σ y $c(\sigma)$, se tiene que

$$c(\sigma) \preceq (\sigma : c(\sigma)) = \sigma.$$

(b) Como la operación coproducto es asociativa, se sigue que

$$\Big(\sigma : (c(\sigma) : c(\sigma))\Big) = \Big((\sigma : c(\sigma)) : c(\sigma)\Big) = (\sigma : c(\sigma)) = \sigma.$$

Esto implica que $(c(\sigma) : c(\sigma)) \in \mathcal{A}_c$. Como $c(\sigma) \preceq (c(\sigma) : c(\sigma))$, entonces

$$c(\sigma) \preceq (c(\sigma) : c(\sigma)) \preceq c(\sigma),$$

es decir, $c(\sigma) = (c(\sigma) : c(\sigma))$. Por lo tanto, $c(\sigma)$ es un radical.

$(c) \Longrightarrow)$ Si $\sigma = c(\sigma)$, por el inciso (b), se tiene que σ es un radical.
$(\Longleftarrow$ Supongamos que σ es un radical. Entonces $(\sigma : \sigma) = \sigma$, es decir, $\sigma \in \mathcal{A}_c$. Así, por el inciso (a), se sigue que $c(\sigma) \preceq \sigma \preceq c(\sigma)$. Por lo tanto, $c(\sigma) = \sigma$.

(d) Notemos que, como $c(\sigma) \in \mathcal{A}_c$, entonces $(\sigma : c(\sigma)) = \sigma$. Así, para cualquier $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ se cumple que

$$c(\sigma)\Big(1_L/\sigma_*(1_L)\Big) = \sigma_*(1_L)/\sigma_*(1_L) = 0.$$

Ahora, por la Proposición 2.2.7, esto último implica que $c(\sigma) \preceq \omega_0^{(1_L/\sigma_*(1_L))}$. Tomando esto en cuenta, se sigue que

$$c(\sigma) \preceq \curlywedge\{\omega_0^{(1_L/\sigma_*(1_L))} \mid L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}\}.$$

Por otra parte, para cada $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, se tiene que

$$(\sigma : \omega_0^{(1_L/\sigma_*(1_L))})_*(1_L)/\sigma_*(1_L) = \omega_0^{(1_L/\sigma_*(1_L))}\Big(1_L/\sigma_*(1_L)\Big) = 0,$$

es decir, $(\sigma : \omega_0^{(1_L/\sigma_*(1_L))})_*(1_L) = \sigma_*(1_L)$.
Así, por la Proposición 2.4.4, tenemos que

$$\sigma \preceq (\sigma : \curlywedge\{\omega_0^{(1_L/\sigma_*(1_L))} \mid L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}\}) = \curlywedge\{(\sigma : \omega_0^{(1_L/\sigma_*(1_L))}) \mid L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}\} \preceq \sigma.$$

Esto implica que $\curlywedge\{\omega_0^{(1_L/\sigma_*(1_L))} \mid L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}\} \in \mathcal{A}_c$, con lo cual

$$\curlywedge\{\omega_0^{(1_L/\sigma_*(1_L))} \mid L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}\} \preceq c(\sigma).$$

Por lo tanto,

$$c(\sigma) = \curlywedge\{\omega_0^{(1_L/\sigma_*(1_L))} \mid L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}\}.$$

$\square$

T. Albu y M. Iosif demuestran en [3, Proposition 2.1] que todo prerradical en $\mathcal{L}_{pr}$ induce un prerradical en *R-pr* de la siguiente manera: si $M \in R\text{-}Mod$ y $L(M)$ es la retícula de submódulos de M, entonces $L(M) \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$. Así, para cada $\sigma \in \mathcal{L}_{pr}$, se tiene que

$$\sigma(L(M)) = \sigma_*(M)/0.$$

Tomando esto en cuenta, se tiene la regla de correspondencia

$$\sigma \longmapsto \underline{\sigma}$$

donde, para cada $M \in R\text{-}Mod$, $\underline{\sigma}(M) = \sigma_*(M)$.

A continuación, para los siguientes ejemplos consideraremos un anillo R asociativo con 1 y su categoría de módulos izquierdos $R\text{-}Mod$.

Ejemplo. *Sean Soc_{R-Mod} y $Soc_{\mathcal{L}_{pr}}$ los prerradicales Soclo en $R\text{-}Mod$ y en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ respectivamente. Entonces*

$$\underline{Soc_{\mathcal{L}_{pr}}} = Soc_{R\text{-}Mod}.$$

Ejemplo. *Sean $Jac_{R\text{-}Mod}$ el prerradical de Jacobson en $R\text{-}Mod$ y $Jac_{\mathcal{L}_{pr}}$ definido en 2.3.6. Como la retícula de submódulos de cualquier módulo es una retícula modular completa, compactamente generada, por la Proposición 2.3.10 se sigue que*

$$\underline{Jac_{\mathcal{L}_{pr}}} = Jac_{R\text{-}Mod}.$$

En [3, Example 2.2], T. Albu y M. Iosif muestran que no todo prerradical de módulos está inducido por algún prerradical de retículas. Aún así, se satisfacen las siguientes propiedades.

Proposición 2.5.4. *Sean $\sigma, \tau \in \mathcal{L}_{pr}$ Se cumple que $\underline{(\sigma \cdot \tau)} = \underline{\sigma} \cdot \underline{\tau}$.*

Demostración. Sean $\sigma, \tau \in \mathcal{L}_{pr}$. Para $M \in R\text{-}Mod$ se tiene que

$$\begin{aligned}(\underline{\sigma \cdot \tau})(M) &= (\sigma \cdot \tau)_*(M) = \sigma_*(\tau_*(M))\\ &= \sigma_*(\underline{\tau}(M)) = \underline{\sigma}(\underline{\tau}(M)) = (\underline{\sigma} \cdot \underline{\tau})(M).\end{aligned}$$

□

Proposición 2.5.5. *Sean $\sigma, \tau \in \mathcal{L}_{pr}$. Se cumple que $\underline{(\sigma : \tau)} = \underline{\sigma} : \underline{\tau}$.*

Demostración. Sean $\sigma, \tau \in \mathcal{L}_{pr}$ y $\underline{\sigma}$ y $\underline{\tau}$ los respectivos prerradicales en R-Mod. Por definición, para $M \in R$-Mod

$$(\underline{\sigma} : \underline{\tau})(M) \text{ es tal que } (\underline{\sigma} : \underline{\tau})(M)/\underline{\sigma}(M) \cong \underline{\tau}\Big(M/\underline{\sigma}(M)\Big).$$

Por otra parte, $\underline{(\sigma : \tau)}(M) = (\sigma : \tau)_*(M)$ donde $(\sigma : \tau)_*(M)$ satisface

$$(\sigma : \tau)_*(M)/\sigma_*(M) \cong \tau_*\Big(M/\sigma_*(M)\Big).$$

Con esto en cuenta,

$$\begin{aligned}(\underline{\sigma} : \underline{\tau})(M)/\sigma_*(M) &= (\underline{\sigma} : \underline{\tau})(M)/\underline{\sigma}(M)\\ &\cong \underline{\tau}\Big(M/\underline{\sigma}(M)\Big) = \tau_*\Big(M/\sigma_*(M)\Big)\\ &= (\sigma : \tau)_*(M)/\sigma_*(M).\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$(\underline{\sigma} : \underline{\tau})(M) = \underline{(\sigma : \tau)}(M).$$

□

Proposición 2.5.6. *Sea $\{\tau_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una clase de prerradicales de retículas modulares completas. Se cumple que*

$$\underline{\curlyvee_{\alpha \in I} \tau_\alpha} = \curlyvee_{\alpha \in I} \underline{\tau_\alpha}.$$

Demostración. Sea $\{\tau_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una clase de prerradicales de retículas modulares completas. Notemos que, para cualquier $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, se tiene que

$$\Big(\curlyvee_{\alpha \in I} \ \tau_\alpha\Big)(L) = \Big(\curlyvee_{\alpha \in I} \ (\tau_\alpha)_*(1_L)\Big)/0,$$

por lo que $\Big(\curlyvee_{\alpha \in I} \ \tau_\alpha\Big)_*(1_L) = \Big(\curlyvee_{\alpha \in I} \ (\tau_\alpha)_*(1_L)\Big)$.
Esto último implica que para cualquier $M \in R$-Mod

$$\begin{aligned}\Big(\underline{\curlyvee_{\alpha \in I} \tau_\alpha}\Big)(M) &= \Big(\curlyvee_{\alpha \in I} \ \tau_\alpha\Big)_*(M) = \Big(\curlyvee_{\alpha \in I} \ (\tau_\alpha)_*(M)\Big)\\ \Big(&= \curlyvee_{\alpha \in I} \ \underline{\tau_\alpha}(M)\Big) = \Big(\curlyvee_{\alpha \in I} \ \underline{\tau_\alpha}\Big)(M)\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\underline{\curlyvee_{\alpha\in I}\ \tau_\alpha} = \curlyvee_{\alpha\in I}\ \underline{\tau_\alpha}.$$

$\square$

Proposición 2.5.7. *Sea $\{\tau_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una clase de prerradicales de retículas mo-culares completas. Se cumple que*

$$\underline{\curlywedge_{\alpha\in I}\ \tau_\alpha} = \curlywedge_{\alpha\in I}\ \underline{\tau_\alpha}.$$

Demostración. Sea $\{\tau_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una clase de prerradicales de retículas modulares completas. Notemos que, para cualquier $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, se tiene que

$$\Big(\curlywedge_{\alpha\in I}\ \tau_\alpha\Big)(L) = \Big(\curlywedge_{\alpha\in I}\ (\tau_\alpha)_*(1_L)\Big)/0,$$

por lo que $\Big(\curlywedge_{\alpha\in I}\ \tau_\alpha\Big)_*(1_L) = \Big(\curlywedge_{\alpha\in I}\ (\tau_\alpha)_*(1_L)\Big)$.
Tomando esto en cuenta, para $M \in R\text{-}Mod$ se sigue

$$\begin{aligned}\Big(\underline{\curlywedge_{\alpha\in I}\ \tau_\alpha}\Big)(M) &= \Big(\curlywedge_{\alpha\in I}\ \tau_\alpha\Big)_*(M) = \Big(\curlywedge_{\alpha\in I}\ (\tau_\alpha)_*(M)\Big)\\ &= \Big(\curlywedge_{\alpha\in I}\ \underline{\tau_\alpha}(M)\Big) = \Big(\curlywedge_{\alpha\in I}\ \underline{\tau_\alpha}\Big)(M)\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\underline{\curlywedge_{\alpha\in I}\ \tau_\alpha} = \curlywedge_{\alpha\in I}\ \underline{\tau_\alpha}.$$

$\square$

Capítulo 3

Propiedades de Cerradura para Clases en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$

Dado cualquier prerradical de retículas modulares completas σ, uno puede asociar dos clases de objetos en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, a saber,

$$\mathcal{T}_\sigma = \{L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}} \mid \sigma_*(1_L) = 1_L\},$$
$$\mathcal{F}_\sigma = \{L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}} \mid \sigma_*(1_L) = 0_L\}.$$

Observación. *De lo anterior, se sigue que*

$$\mathcal{T}_\sigma = \{L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}} \mid \sigma(L) = L\},$$
$$\mathcal{F}_\sigma = \{L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}} \mid \sigma(L) = 0\}.$$

Proposición 3.0.1. *Sea $\sigma \in \mathcal{L}_{pr}$. Son equivalentes:*

(i) Si $L \leq M$ entonces $\sigma(L) = \Big(1_L \wedge \sigma_*(1_M)\Big)/0$

(ii) σ es idempotente y $\mathcal{T}_\sigma$ es cerrada bajo intervalos iniciales.

Demostración. Demostraremos $(i) \Longrightarrow (ii)$. Sea $L \leq M$. Como $\sigma(L) \leq L$, entonces

$$(\sigma \cdot \sigma)(L) = \sigma(\sigma(L)) = \Big(\sigma_*(1_L) \wedge \sigma_*(1_L)\Big)/0_L = \sigma_*(1_L)/0_L = \sigma(L),$$

es decir, σ es idempotente.

Sea $L \in \mathcal{T}_\sigma$ y $a \in L$. Como $L \in \mathcal{T}_\sigma$, entonces

$$\sigma_*(1_L)/0_L = \sigma(L) = L = 1_L/0_L.$$

Así, para $(a/0_L) \leq L$, se tiene que

$$\sigma(a/0_L) = \Big(a \wedge \sigma_*(1_L)\Big)/0_L = \Big(a \wedge 1_L\Big)/0_L = a/0_L.$$

Por lo tanto, $(a/0_L) \in \mathcal{T}_\sigma$.

Demostraremos $(ii) \Longrightarrow (i)$. Sea $L \leq M$. Como σ es un prerradical de retículas modulares completas, se tiene que $\sigma(L) \leq \sigma(M)$, de donde se sigue que $\sigma_*(1_L) \leq 1_L \wedge \sigma_*(1_M) \leq 1_L$. Nótese que esto implica que

$$\Big(1_L \wedge \sigma_*(1_M)\Big)/0_L \leq 1_L/0_L = L.$$

Además, como σ es idempotente, entonces $\sigma(M) \in \mathcal{T}_\sigma$.
Por otra parte, como $\mathcal{T}_\sigma$ es cerrado bajo intervalos iniciales y

$$\Big(1_L \wedge \sigma_*(1_M)\Big)/0_L \leq \sigma_*(1_M)/0_L = \sigma(M),$$

entonces $\Big(1_L \wedge \sigma_*(1_M)\Big)/0_L \in \mathcal{T}_\sigma$. Por ello, se sigue que

$$\Big(1_L \wedge \sigma_*(1_M)\Big)/0_L = \sigma\Big(\Big(1_L \wedge \sigma_*(1_M)\Big)/0_L\Big) \leq \sigma_*(1_L)/0_L.$$

Esto último implica que $\sigma_*(1_L) \leq 1_L \wedge \sigma_*(1_M) \leq \sigma_*(1_L)$, que a su vez implica que $\sigma_*(1_L) = 1_L \wedge \sigma_*(1_M)$. Por lo tanto,

$$\sigma(L) = \sigma_*(1_L)/0_L = \Big(1_L \wedge \sigma_*(1_M)\Big)/0_L.$$

□

Definición 3.0.2. *Sea $\sigma \in \mathcal{L}_{pr}$. Decimos que σ es un prerradical exacto izquierdo si satisface alguna de las condiciones de la Proposición 3.0.1.*

Definición 3.0.3. *Sea $\mathcal{C}$ una clase de $\mathcal{L}_\mathcal{M}$. Decimos que $\mathcal{C}$ es una clase cerrada bajo yuntas si $\mathcal{C}$ es abstracta y para cualquier $L \in \mathcal{L}_\mathcal{M}$, $a \in L$ y cualquier familia $\{a_i\}_{i \in I}$ de elementos en L tales que $a \leq a_i$ y $a_i/a \in \mathcal{C}$, $\forall i \in I$, se tiene que*

$$\Big(\bigvee_{i \in I} a_i\Big)/a \in \mathcal{C}.$$

Definición 3.0.4. *Sea $\mathcal{C}$ una clase en $\mathcal{L}_\mathcal{M}$. Decimos que $\mathcal{C}$ es una clase cerrada bajo epimorfismos si para cualquier $L \in \mathcal{C}$ y cualquier epimorfismo $\varphi : L \longrightarrow L'$, en $\mathcal{L}_\mathcal{M}$, se tiene que $L' \in \mathcal{C}$.*

Definición 3.0.5. *Sea $\mathcal{C}$ una clase en $\mathcal{L}_M$. Decimos que $\mathcal{C}$ es una clase cohereditaria si $\mathcal{C}$ es abstracta y para cualquier $L \in \mathcal{L}_\mathcal{M}$ y $a \leq b \leq c$ en L tales que $(c/a) \in \mathcal{C}$, se tiene que $(c/b) \in \mathcal{C}$.*

Proposición 3.0.6. *Sea $\mathcal{C}$ una clase en $\mathcal{L}_\mathcal{M}$. Entonces $\mathcal{C}$ es una clase cohereditaria si y sólo si $\mathcal{C}$ es una clase cerrada bajo epimorfismos.*

Demostración. $\Longrightarrow$)
Sean $\mathcal{C}$ una clase cohereditaria de retículas en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, $L, L' \in \mathcal{C}$ y $\varphi : L \longrightarrow L'$ un morfismo lineal suprayectivo. Si denotamos por $L = 1_L/0_L$ y $L' = 1_{L'}/0_{L'}$, entonces φ induce un isomorfismo de retículas $\bar{\varphi} : 1_L/k \longrightarrow 1_{L'}/0_{L'}$ donde $k = n(\varphi)$. Ahora, como $1_L/0_L = L \in \mathcal{C}$ y $0 \leq k \leq 1_L$, por ser $\mathcal{C}$ una clase cohereditaria de retículas, se sigue que $1_L/k \in \mathcal{C}$. Por lo tanto,

$$1_{L'}/0_{L'} \cong 1_L/k \in \mathcal{C},$$

con lo cual, $L' \in \mathcal{C}$.

($\Longleftarrow$
Sean $\mathcal{C}$ una clase cerrada bajo epimorfismos lineales, $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ y $a \leq b \leq c$ elementos en L tales que $(c/a) \in \mathcal{C}$. Notemos que el morfismo canónico $\rho : c/a \longrightarrow c/b$, con regla de correspondencia $x \longmapsto x \vee b$ es un morfismo lineal suprayectivo con núcleo $n(\rho) = b$, con lo cual ρ es un epimorfismo lineal. Además, por ser $\mathcal{C}$ una clase cerrada bajo epimorfismos, se sigue que $(c/b) \in \mathcal{C}$, es decir, $\mathcal{C}$ es una clase cohereditaria de retículas. $\square$

Proposición 3.0.7. *Sea $\sigma \in \mathcal{L}_{pr}$. Entonces la clase $\mathcal{T}_\sigma$ es una clase cerrada bajo epimorfismos y bajo yuntas arbitrarias.*

Demostración. Sea σ un prerradical de retículas modulares completas y

$$\mathcal{T}_\sigma = \{L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}} \mid \sigma(L) = L\}.$$

Sean $L \in \mathcal{T}_\sigma$ y $f : L \longrightarrow L'$ un morfismo lineal suprayectivo. Como σ es un prerradical de retículas modulares completas, se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] & L' \\ \sigma(L) = L \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "f\restriction"] & \sigma(L') \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

de donde se sigue que

$$L' = f(L) \leq \sigma(L') \leq L',$$

es decir, $\sigma(L') = L'$. Por lo tanto, $L' \in \mathcal{T}_\sigma$.

Sean ahora $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ una retícula modular completa, $a \in L$, y $\{a_i\}_{i \in I}$ una familia de elementos en L, con $a \leq a_i$, tales que $(a_i/a) \in \mathcal{T}_\sigma$, $\forall i \in I$. Veamos que

$$\left(\bigvee_{i \in I} a_i\right)/a \in \mathcal{T}_\sigma,$$

esto es,

$$\sigma\Big(\Big(\bigvee_{i\in I} a_i\Big)/a\Big) = \Big(\bigvee_{i\in I} a_i\Big)/a.$$

Nótese que, por ser σ un prerradical de retículas modulares completas, se cumple que

$$\sigma\Big(\Big(\bigvee_{i\in I} a_i\Big)/a\Big) \leq \Big(\bigvee_{i\in I} a_i\Big)/a.$$

Ahora, para cada $j \in I$, se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
a_j/a \arrow[r, "\iota"] & \Big(\bigvee_{i\in I} a_i\Big)/a \\
\sigma(a_j/a) = a_j/a \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "\iota\restriction"] & \sigma\Big(\Big(\bigvee_{i\in I} a_i\Big)/a\Big), \arrow[u, "\iota"']
\end{tikzcd}$$

de donde se sigue que

$$a_j/a \leq \sigma\Big(\Big(\bigvee_{i\in I} a_i\Big)/a\Big),$$

para cualquier $j \in I$. Tomando esto en cuenta, tenemos que

$$a_j/a \leq \sigma\Big(\Big(\bigvee_{i\in I} a_i\Big)/a\Big) = \sigma_*\Big(\bigvee_{i\in I} a_i\Big)/a,$$

con lo cual,

$$a \leq a_j \leq \sigma_*\Big(\bigvee_{i\in I} a_i\Big), \ \forall j \in I.$$

Como L es una retícula modular completa,

$$a \leq \Big(\bigvee_{i\in I} a_i\Big) \leq \sigma_*\Big(\bigvee_{i\in I} a_i\Big),$$

lo cual implica que

$$\Big(\bigvee_{i\in I} a_i\Big)/a \leq \sigma_*\Big(\bigvee_{i\in I} a_i\Big)/a = \sigma\Big(\Big(\bigvee_{i\in I} a_i\Big)/a\Big).$$

Por lo tanto,

$$\sigma\Big(\Big(\bigvee_{i\in I} a_i\Big)/a\Big) = \Big(\bigvee_{i\in I} a_i\Big)/a.$$

□

Sean $\mathcal{C}$ una clase en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ cerrada bajo epimorfismos y yuntas arbitrarias y $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$. Nótese que, si denotamos por

$$T_L = \{a \in L \mid (a/0) \in \mathcal{C}\},$$

entonces

$$t(L) = \Big(\bigvee_{a \in T_L} a\Big)/0 \in \mathcal{C}.$$

Más aún, se tiene la siguiente

Proposición 3.0.8. *Sean $\mathcal{C}$ una clase en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ cerrada bajo epimorfismos y yuntas arbitrarias y $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$. Entonces*

$$t(L) := \Big(\bigvee_{a \in T_L} a\Big)/0$$

es un prerradical de retículas modulares completas.

Demostración. Sea $f : L \longrightarrow L'$ un morfismo lineal. Observemos primero que si $a \in T_L$ es tal que $f(a) \neq 0$, entonces $f(a) \in T_{L'}$. En efecto, como la composición

$$a/0 \overset{\iota}{\hookrightarrow} L \xrightarrow{f} L'$$

es un morfismo lineal, entonces el morfismo

$$(f_{|_{a/0}} \circ \iota) : a/0 \longrightarrow f(a)/0$$

es un morfismo lineal suprayectivo. Así, como $(a/0) \in \mathcal{C}$, y $\mathcal{C}$ es una clase cerrada bajo epimorfismos, se sigue que $f(a)/0 \in \mathcal{C}$, es decir, $f(a) \in T_{L'}$.

Ahora, por la Proposición 1.0.2, se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "f"] & L' \\
\Big(\bigvee_{a \in T_L} a\Big)/0 \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "f_{\downharpoonright}^{\upharpoonright}"] & \Big(\bigvee_{a' \in T_{L'}} a'\Big)/0, \arrow[u, "\iota"']
\end{tikzcd}$$

es decir,

$$f\Big(\Big(\bigvee_{a \in T_L} a\Big)/0\Big) = \Big(\bigvee_{a \in T_L} f(a)\Big)/0 \leq \Big(\bigvee_{a' \in T_{L'}} a'\Big)/0.$$

Por lo tanto, t es un prerradical de retículas modulares completas. $\square$

Observación. *El prerradical t es un prerradical idempotente. En efecto, sean $\mathcal{C}$ una clase en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ cerrada bajo epimorfismos y yuntas arbitrarias y $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$. Ahora, como se notó anteriormente, si $T_L = \{a \in L \mid (a/0) \in \mathcal{C}\}$, entonces*

$$t(L) = \Big(\bigvee_{a \in T_L} a\Big)/0 \in \mathcal{C}.$$

Esto implica que $t(L)$ es el mayor intervalo inicial de L en $\mathcal{C}$. Por ello, se sigue que

$$(t \cdot t)(L) = t(t(L)) = t\Big(\Big(\bigvee_{a \in T_L} a\Big)/0\Big) = \Big(\bigvee_{a \in T_L} a\Big)/0 = t(L).$$

Definición 3.0.9. *Sea $\mathcal{C}$ una clase en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$. Decimos que $\mathcal{C}$ es una clase cerrada bajo cuñas arbitrarias si $\mathcal{C}$ es abstracta y para cualquier $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, $a \in L$ y cualquier familia $\{a_i\}_{i \in I}$ de elementos en L, tales que $a_i \leq a$ y $a/a_i \in \mathcal{C}$, $\forall i \in I$, se tiene que*

$$a/\Big(\bigwedge_{i \in I} a_i\Big) \in \mathcal{C}.$$

Definición 3.0.10. *Sea $\mathcal{C}$ una clase en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$. Decimos que $\mathcal{C}$ es una clase cerrada bajo monomorfismos, si para cualquier $L \in \mathcal{C}$ y cualquier monomorfismo lineal $\varphi : L' \longrightarrow L$ en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, se tiene que $L' \in \mathcal{C}$.*

Definición 3.0.11. *Sea $\mathcal{C}$ una clase en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$. Decimos que $\mathcal{C}$ es una clase hereditaria si $\mathcal{C}$ es abstracta y para cualquier $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ y $a \leq b \leq c$ en L tales que $(c/a) \in \mathcal{C}$, se tiene que $(b/a) \in \mathcal{C}$.*

Proposición 3.0.12. *Sea $\mathcal{C}$ una clase en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$. Entonces $\mathcal{C}$ es una clase cerrada bajo monomorfismos si y sólo si $\mathcal{C}$ es una clase hereditaria.*

Demostración. $\Longrightarrow$) Sean $\mathcal{C}$ una clase en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ cerrada bajo monomorfismos y $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, con $a \leq b \leq c$ en L tales que $(c/a) \in \mathcal{C}$. Ahora, como el morfismo lineal de inclusión $\iota : b/a \hookrightarrow c/a$ es un monomorfismo lineal, y $(c/a) \in \mathcal{C}$, se sigue que $(b/a) \in \mathcal{C}$, es decir, $\mathcal{C}$ es una clase hereditaria.

($\Longleftarrow$ Sean $\mathcal{C}$ una clase hereditaria en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ y $L \in \mathcal{C}$. Supongamos que $L' \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ y $L' \overset{\varphi}{\longrightarrow} L$ es un monomorfismo lineal. Entonces φ induce un isomorfismo de retículas $\bar{\varphi} : 1_{L'}/0_{L'} \longrightarrow a/0_L$, para alguna $a \in L$. Por lo tanto, se tiene que

$$L' = 1_{L'}/0_{L'} \overset{\varphi = \bar{\varphi}}{\cong} a/0_L \leq 1_L/0_L = L.$$

Ahora, como $0 \leq a \leq 1_L$ y $1_L/0_L = L \in \mathcal{C}$, por ser $\mathcal{C}$ una clase hereditaria en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, se sigue que

$$L' = (1_{L'}/0_{L'}) \cong (a/0) \in \mathcal{C},$$

mostrando así que $\mathcal{C}$ es una clase cerrada bajo monomorfismos. $\square$

Definición 3.0.13. *Sea $\mathcal{C}$ una clase en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$. Decimos que $\mathcal{C}$ es una clase cerrada bajo productos, si para cualquier familia $\{L_i\}_{i\in I}$ de retículas modulares completas en $\mathcal{C}$, se tiene que*

$$\prod_{i\in I} L_{i\in I} \in \mathcal{C}.$$

Proposición 3.0.14. *Sea $\sigma \in \mathcal{L}_{pr}$. Entonces la clase $\mathcal{F}_\sigma$ es cerrada bajo monomorfismos y productos.*

Demostración. Sea $L \in \mathcal{F}_\sigma$ y $\varphi : L' \longrightarrow L$ un monomorfismo lineal. Como σ es un prerradical de retículas modulares completas, se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} L' \arrow[r, "\varphi"] & L \\ \sigma(L') \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "\varphi\restriction"] & 0 = \sigma(L) \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

Obsérvese que, como la restricción de un morfismo lineal a un intervalo inicial, induce a un morfismo lineal, entonces $\varphi_|$ es un monomorfismo lineal. Esto último implica que $\sigma(L') = 0$, es decir, $L' \in \mathcal{F}_\sigma$.

Supongamos ahora que $\{L_i\}_{i\in I}$ es una familia de retículas en $\mathcal{F}_\sigma$. Notemos que el producto $\prod_{i\in I} L_i$ es una retícula acotada, completa y modular. Más aún, para cada $j \in I$, tenemos el morfismo lineal $\prod_{i\in I} L_i \xrightarrow{\rho_j} L_j$, con regla de correspondencia $(x_i)_{i\in I} \longmapsto x_j$ y nucleo

$$(x_i)_{i\in I} = \begin{cases} 1_{L_i} & \text{si } i \neq j \\ 0_{L_i} & \text{si } i = j \end{cases}$$

Tomando esto en cuenta, para cada $j \in I$, se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \prod_{i\in I} L_i \arrow[r, "\rho_j"] & L_j \\ \sigma(\prod_{i\in I} L_i) \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "(\rho_j)\restriction"] & 0 = \sigma(L_j) \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

de donde se sigue que

$$(\rho_j \circ \iota)\Big(\sigma\Big(\prod_{i\in I} L_i\Big)\Big) = 0, \, \forall j \in I.$$

Esto implica que $\sigma(\prod_{i\in I} L_i) = 0$, es decir, $\mathcal{F}_\sigma$ es una clase cerrada bajo productos. □

Proposición 3.0.15. *Sea $\sigma \in \mathcal{L}_{pr}$. Entonces la clase $\mathcal{F}_\sigma$ es cerrada bajo cuñas arbitrarias.*

Demostración. Sean $L \in \mathcal{L}_M$, $a \in L$, y $\{a_i\}_{i \in I}$ una familia de elementos en L tales que $a_i \leq a$ y $a/a_i \in \mathcal{F}_\sigma$, $\forall i \in I$. Nótese que, como $\mathcal{F}_\sigma$ es una clase cerrada bajo productos y la familia $\{a/a_i\}_{i \in I}$ es tal que $a/a_i \in \mathcal{F}_\sigma$, para toda $i \in I$, entonces $\Big(\prod_{i \in I} a/a_i \Big) \in \mathcal{F}_\sigma$.

Ahora, la función

$$a/\Big(\bigwedge_{i \in I} a_i \Big) \xrightarrow{f} \prod_{i \in I} a/a_i,$$

con regla de correspondencia $x \longmapsto (x \vee a_i)_{i \in I}$ es un morfismo lineal inyectivo. En efecto, si

$$f(x) = (x \vee a_i)_{i \in I} = \bar{0} \in \Big(\prod_{i \in I} a/a_i \Big),$$

entonces $x \vee a_i \leq a_i$, $\forall i \in I$; es decir, $x \leq a_i$, $\forall i \in I$. Esto último implica que $x \leq \Big(\bigwedge_{i \in I} a_i \Big)$. Como $x \in a/\Big(\bigwedge_{i \in I} a_i \Big)$, se sigue que $x = \bigwedge_{i \in I} a_i$. Ahora notemos que $n(f) = \Big(\bigwedge_{i \in I} a_i \Big)$: para cualquier $x \in a/ \bigwedge_{i \in I} a_i$ se tiene que

$$\begin{aligned} f\Big(x \vee \Big(\bigwedge_{i \in I} a_i \Big)\Big) &= \Big(\Big(x \vee \Big(\bigwedge_{i \in I} a_i \Big)\Big) \vee a_i\Big)_{i \in I} \\ &= \Big(x \vee \Big(\Big(\bigwedge_{i \in I} a_i \Big) \vee a_i\Big)\Big)_{i \in I} \\ &= \Big(x \vee a_i\Big)_{i \in I} = f(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto, f es un morfismo lineal inyectivo. Así, como $\mathcal{F}_\sigma$ es una clase cerrada bajo monomorfismos, tenemos que

$$\Big(a/ \bigwedge_{i \in I} a_i\Big) \in \mathcal{F}_\sigma.$$

$\square$

Sea $\mathcal{C}$ una clase en $\mathcal{L}_\mathcal{M}$ cerrada bajo monomorfimos y cuñas arbitrarias. Si $L \in \mathcal{L}_\mathcal{M}$, denotamos por

$$F_L = \{a \in L \mid 1_L/a \in \mathcal{C}\}.$$

Observación. *Si $\mathcal{C}$ es una clase en $\mathcal{L}_\mathcal{M}$ cerrada bajo monomorfismos y cuñas arbitrarias, entonces para cualquier $L \in \mathcal{L}_\mathcal{M}$ se cumple que*

$$\Big(\bigwedge_{a \in F_L} a \Big) \in F_L.$$

Tomando esto en cuenta, se tiene la siguiente

Proposición 3.0.16. *Sean $\mathcal{C}$ una clase en $\mathcal{L}_\mathcal{M}$ cerrada bajo monomorfismos y cuñas arbitrarias y $L \in \mathcal{L}_\mathcal{M}$. Entonces*

$$r(L) := \Big(\bigwedge_{a\in F_L} a\Big)/0_L$$

es un perrradical de retículas modulares completas.

Demostración. Sea $f : L \longrightarrow L'$ un morfismo lineal con núcleo $n(f)$. Veamos que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[rr, "f"] & & L' \\
\Big(\bigwedge_{a\in F_L} a\Big)/0_L \arrow[u, "\iota"] \arrow[rr, "f\restriction"] & & \Big(\bigwedge_{a'\in F_{L'}} a'\Big)/0_{L'} \arrow[u, "\iota"']
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Sea $a' \in F_{L'}$, es decir, $1_{L'}/a' \in \mathcal{C}$. Notemos lo siguiente:

(i) Si $0_{L'} \leq a' \leq f(1_L)$, entonces existe $a \in 1_L/n(f)$ tal que $f(a) = a'$. Afirmamos que $a \in F_L$. En efecto, como

$$1_L/n(f) \overset{\bar{f}}{\cong} f(1_L)/0_{L'}$$

es un isomorfismo de retículas, entonces

$$1_L/a \overset{\bar{f}}{\cong} f(1_L)/a',$$

de donde se sigue que

$$1_L/a \overset{\bar{f}}{\cong} f(1_L)/a' \overset{\iota}{\hookrightarrow} 1_{L'}/a' \in \mathcal{C},$$

que a su vez implica que $1_L/a \in \mathcal{C}$, es decir, $a \in F_L$.

(ii) Si $a' \not\leq f(1_L)$, entonces por modularidad se tiene que

$$f(1_L)/\Big(a' \wedge f(1_L)\Big) \cong \Big(f(1_L) \vee a'\Big)/a',$$

de donde se sigue que

$$f(1_L)/\Big(a' \wedge f(1_L)\Big) \cong \Big(f(1_L) \vee a'\Big)/a' \overset{\iota}{\hookrightarrow} 1_{L'}/a' \in \mathcal{C},$$

es decir, $f(1_L)/\Big(a' \wedge f(1_L)\Big) \in \mathcal{C}$.

Ahora, como

$$\bar{f} : 1_L/n(f) \longrightarrow f(1_L)/0_{L'}$$

es un isomorfismo de retículas, entonces

$$1_L/f^{-1}\Big(a' \wedge f(1_L)\Big) \cong f(1_L)/\Big(a' \wedge f(1_L)\Big) \in \mathcal{C}.$$

Por lo tanto, $f^{-1}\Big(a' \wedge f(1_L)\Big) \in F_L$.

Tomando esto en cuenta, se tiene que

$$\bigwedge_{a\in F_L} a \leq \Big(\bigwedge_{\substack{f(a)=a'\in F_{L'} \\ 0_{L'}\leq f(a)=a'\leq f(1_L)}} a\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{\substack{a'\in F_{L'} \\ a'\nleq f(1_L)}} f^{-1}\Big(a' \wedge f(1_L)\Big)\Big).$$

Por la Proposición 1.0.3, se sigue que

$$\begin{aligned}
f\Big(\bigwedge_{a\in F_L} a\Big) &\leq f\Big(\Big(\bigwedge_{\substack{f(a)=a'\in F_{L'} \\ 0_{L'}\leq f(a)=a'\leq f(1_L)}} a\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{\substack{a'\in F_{L'} \\ a'\nleq f(1_L)}} f^{-1}\Big(a' \wedge f(1_L)\Big)\Big)\Big) \\
&\leq f\Big(\bigwedge_{\substack{f(a)=a'\in F_{L'} \\ 0_{L'}\leq f(a)=a'\leq f(1_L)}} a\Big) \wedge f\Big(\bigwedge_{\substack{a'\in F_{L'} \\ a'\nleq f(1_L)}} f^{-1}\Big(a' \wedge f(1_L)\Big)\Big) \\
&\leq \Big(\bigwedge_{\substack{f(a)=a'\in F_{L'} \\ 0_{L'}\leq f(a)=a'\leq f(1_L)}} f(a)\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{\substack{a'\in F_{L'} \\ a'\nleq f(1_L)}} f\Big(f^{-1}\Big(a' \wedge f(1_L)\Big)\Big)\Big) \\
&= \Big(\bigwedge_{\substack{a'\in F_{L'} \\ 0_{L'}\leq a'\leq f(1_L)}} a'\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{\substack{a'\in F_{L'} \\ a'\nleq f(1_L)}} \Big(a' \wedge f(1_L)\Big)\Big) \\
&= \bigwedge_{a'\in F_{L'}} a'.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$f\Big(\bigwedge_{a\in F_L} a/0_L\Big) = f\Big(\bigwedge_{a\in F_L} a\Big)/0_L \leq \Big(\bigwedge_{a'\in F_{L'}} a'\Big)/0_{L'}.$$

es decir, el diagrama es conmutativo. □

Observación. *Si $\mathcal{C}$ es una clase en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ cerrada bajo monomorfismos y cuñas arbitrarias y $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, entonces el prerradical de retículas modulares completas r es un radical.*
En efecto, notemos que, al ser $\mathcal{C}$ una clase cerrada bajo cuñas arbitrarias, entonces

$$1_L/\Big(\bigwedge_{a\in F_L} a\Big) \in \mathcal{C},$$

es decir, $\Big(\bigwedge_{a\in F_L} a\Big) \in F_L$.
Esto implica que $\Big(\bigwedge_{a\in F_L} a\Big)$ *es el menor elemento en L con la propiedad de que*

$$1_L/\Big(\bigwedge_{a\in F_L} a\Big) \in \mathcal{C}.$$

Ahora, como $r_*(1_L) = \Big(\bigwedge_{a\in F_L} a\Big)$*, se sigue que*

$$\begin{aligned}(r:r)_*(1_L)/r_*(1_L) &= r\Big(1_L/r_*(1_L)\Big) = r\Big(1_L/\Big(\bigwedge_{a\in F_L} a\Big)\Big)\\ &= 0_{\left(1_L/\left(\bigwedge_{a\in F_L} a\right)\right)} = \Big(\bigwedge_{a\in F_L} a\Big) = r_*(1_L).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(r:r)_*(1_L) = r_*(1_L)$*, es decir,* $(r:r) = r$.

Capítulo 4

Conclusiones y proyecciones.

Este trabajo muestra una estrecha relación entre la gran retícula de prerradicales de módulos y la gran retícula de prerradicales de retículas. Como los operadores definidos en R-pr, tanto los resultados que se tienen sobre ellos, se extienden a la gran retícula $\mathcal{L}_{pr}$, nos hace pensar que ambas estructuras algebráicas son similares desde un punto de vista categórico.

En [1] T. Albu y M. Iosif definen el concepto de retículas lineales inyectivas. En la sección 3 de este trabajo, extienden bajo ciertas condiciones, resultados de inyectividad en módulos a retículas acotadas. En la sección 4 del mismo, hacen 6 preguntas abiertas; dos de ellas hablan de dar condiciones suficientes o necesarias para asegurar la inyectividad de un módulo a través de la inyectividad de su retícula modular asociada, y viceversa.

Una manera de abordar este problema podría ser considerando a los prerradicales de retículas modulares completas. Esto, además de resolver las preguntas abiertas hechas por T. Albu y M. Iosif, nos permitirían extender más resultados de prerradicales de módulos a prerradicales de retículas, ya que en R-pr se tienen prerradicales de módulos que se definen mediante cápsulas inyectivas de algún módulo; por ejemplo, los prerradicales $\alpha_S^{E(S)}$, donde S es un módulo simple y $E(S)$ su cápsula inyectiva, así como los prerradicales ω_0^E donde E es un módulo inyectivo.

Otra manera de abordar este problema es determinando ciertas condiciones para retículas modulares completas L de tal forma que la clase cogenerada por L sea una clase de torsión de retículas modulares completas ya que, como se sabe para clases de R-módulos, una teoría de torsión es hereditaria si sólo si es cogenerada por un módulo inyectivo.

Bibliografía

[1] T. Albu, M. Iosif, *The category of linear modular lattices*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie 56 (104)(2013), no. 1, 33-46.

[2] T. Albu, M. Iosif, *Lattice preradicals with applications to Grothendieck categories and torsion theories*, J. Algebra 444 (2015), 339-366.

[3] T. Albu, M. Iosif, *Lattice preradicals versus module preradicals*, Ann. Univ. Buchar. Math. Ser. 6 (64) (2015), no. 1, 19–34.

[4] T. Albu, M. Iosif, *On socle and radical of modular lattices* , Ann. Univ. Buchar. Math. Ser. 5 (63) (2014), no. 1, 187–194.

[5] T. Albu, C. Nastasescu, *Relative finiteness in Module Theory*, Marcel Dekker, 1984

[6] F. Anderson, K. Fuller, *Rings and categories of modules*, Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 13. Springer-Verlag, New York, 1992.

[7] L. Bican, T. Kepka, P. Němec, *Rings, Modules and Preradicals*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker, 1982.

[8] G. Calugareanu, *Lattice concepts of module theory*, Kluwer texts in the Mathematical Sciences, vol. 22, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

[9] J. Golan, *Torsion theories*, Longman Scientific and Technical, 1986.

[10] F. Raggi, J. Ríos, H. Rincón, R. Fernández-Alonso, C. Signoret, *The lattice structure of preradicals*, Comm. Algebra 30 (2002), no. 3, 1533–1544.

[11] F. Raggi, J. Ríos, H. Rincón, R. Fernández-Alonso, C. Signoret, *The lattice structure of prerradicals II: Partitions*, J. Algebra Appl. vol. 1, no. 2, (2002), 201-214.

[12] B. Stenström, *Rings of quotients, An introduction to methods of ring theory*, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 217. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975.