UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

UNA CARACTERIZACIÓN INTRÍNSECA DE ESPACIOS G-PSEUDOCOMPACTOS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO (A) EN CIENCIAS

PRESENTA:
L.M.A JESUS EDUARDO MATA CANO

DIRECTOR DE LA TESIS: DRA. NATELLA ANTONYAN
INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS SUPERIORES DE MONTERREY CAMPUS CIUDAD DE MÉXICO

CIUDAD DE MEXICO, NOVIEMBRE 2018

Índice general

Introducción

El admirable papel que desempeña el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ en el estudio de espacios topológicos se debe al hecho de que las funciones continuas de un "buen" espacio X a $\mathbb{R}$ determinan la topología de X. En el caso equivariante la familia de todas las funciones continuas de X en $\mathbb{R}$ es demasiado grande para reflejar la estructura equivariante de X, y la familia de todas las funciones invariantes de X en $\mathbb{R}$ es muy pequeña para capturar la topología de X. Sin embargo, existen otro tipo de funciones continuas relacionadas con acciones que llenan este hueco. Éstas son las llamadas funciones G-uniformes introducidas por de Vries [12] bajo el nombre de funciones α-uniformes.

Definición 0.1. Sea X un G-espacio. Entonces una función continua $f : X \to \mathbb{R}$ es llamada G-uniforme si para todo $\varepsilon > 0$, existe una vecindad U de la identidad en G tal que $|f(gx) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in X, g \in U$.

Las funciones G-uniformes de X a $\mathbb{R}$ son útiles especialmente cuando se tratan preguntas relacionadas con compactaciones equivariantes de G-espacios y linealización de acciones (ver [12], [16], [6], [22], [21], [7] y [4]).

En este trabajo se estudia con cierto detalle el papel que juegan las funciones G-uniformes. Recordemos que un espacio de Hausdorff completamente regular X es llamado pseudocompacto si y solo si cualquier función continua $f : X \to \mathbb{R}$ es acotada (ver por ejemplo, [17, Cap. 3, Secc. 3.10]). Varios artículos de J. de Vries [13], [14] y S. Antonyan [3], [5] fueron dedicados a la búsqueda de la versión correcta para pseudocompacidad en el área de los grupos topológicos de transformaciones. El rumbo que toma este trabajo se encuentra más relacionado con el enfoque dado por de Vries. En [13] aparecen las siguientes definiciones sugeridas para G-pseudocompacidad:

Un G-espacio X se dice tener la propiedad
(G-P_1), si toda función G-uniforme $f : X \to \mathbb{R}$ está acotada.
(G-P_2), si toda función G-uniforme $f : X \to \mathbb{R}$ alcanza sus extremos.
(G-P_3), si no existe una sucesión infinita localmente finita $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos abiertos no vacíos mutuamente disjuntos $B_n \subset X$ con la propiedad de que existe una vecindad U de la identidad en G y puntos $x_n \in B_n$, $n \geq 1$ tales que $U(x_n) \subset B_n$.

En [13] J. de Vries adoptó (G-P_3) como definición de G-pseudocompacidad y demostró que es equivalente a (G-P_2) siempre que el grupo actuante G sea localmente compacto. Esto llevó a de Vries en [14] al hecho de que, para un grupo localmente compacto G, su noción de G-pseudocompacidad coincide simplemente con la de pseudocompacidad ordinaria. Por otro lado, incluso para un grupo localmente compacto G, la propiedad (G-P_1) no implica pseudocompacidad ordinaria (ver Ejem. 3.4, Cap. 3). Sin embargo ninguna caracterización intrínseca de (G-P_1) había sido dada hasta [1], hecha por N. Antonyan.

El trabajo que se presenta a continuación consta de tres capítulos. El Capítulo 1 presenta algunos preliminares y resultados de interés para el desarrollo del texto, está conformado por tres secciones; la primera contiene conceptos y propiedades básicas referentes a los espacios pseudocompactos, complementando el contenido del capítulo con caracterizaciones que resultan importantes en el estudio de estos espacios topológicos; la segunda parte se centra en el área de los grupos topológicos, introduciendo así algunos resultados y definiciones básicas necesarios para el desarrollo del texto; la tercera y última parte concierne a la categoría de los grupos topológicos de transformaciones, hablando sobre resultados que son de utilidad para el complemento de este trabajo.

Este trabajo está basado principalmente en los estudios realizados por N. Antonyan en [1] y [2], por lo que se adopta la propiedad (G-P_1) como definición de G-pseudocompacidad y se da en el Capítulo 3 una caracterización intrínseca de esta "nueva" G-pseudocompacidad en el campo de los espacios G-normales introducidos por Megrelishvili [22]. De esta manera, en el Capítulo 2 se expone la demostración de una versión equivariante cuantitativa del bien conocido Lema de Urysohn, así mismo lo que se puede catalogar como una versión equivariante del Teorema de Tietze clásico en topología general.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo introducimos algunos conceptos básicos, propiedades y afirmaciones como parte del desarrollo del texto en función de los requerimientos necesarios para la lectura del mismo. Dicho capítulo está conformado por tres secciones. En la primera se habla de espacios pseudocompactos en el sentido ordinario[1] y algunas caracterizaciones de los mismos. En la segunda sección nos adentramos en los conceptos básicos requeridos sobre los grupos topológicos. Y en la última sección, nos referimos a los resultados que son de nuestra importancia en la categoría de los G-espacios.

1.1. Espacios Pseudocompactos

E. Hewitt, en 1948, introdujo el concepto de espacio pseudocompacto [18]; desde ese entonces hasta el presente múltiples generalizaciones y variaciones de este concepto han sido definidos. La intención de este capítulo es presentar algunos resultados clásicos en el tema de una manera sucinta.

Todo espacio considerado en este capítulo se supone que es completamente regular, Hausdorff y no vacío.

Como de costumbre, $\mathbb{R}$ es el espacio de los números reales con la topología usual, y $[0,1]$ es el subespacio de $\mathbb{R}$ formado por el intervalo unitario.

Para todo espacio topológico X, denotaremos por $C(X)$ al conjunto de funciones continuas con valores reales definidas en X. $C^*(X)$ denotará al subconjunto de $C(X)$ que consta de funciones acotadas. Con los símbolos $\mathrm{cl}_X(A)$ e $\mathrm{int}_X(A)$, o simplemente $\mathrm{cl}(A)$ e $\mathrm{int}(A)$ si no hay posibilidad de confusión, denotaremos la cerradura y el interior, respectivamente, de un subconjunto A en un espacio X. Para un punto x en el espacio X, $\mathcal{V}(x)$ denotará la colección de vecindades de x en X. Denotaremos por ω al

[1] Refiérase al Capítulo 3 para un estudio de la pseudocompacidad equivariante.

primer cardinal infinito. Los términos usados y no definidos en esta sección pueden ser consultados en [17].

Definición 1.1. Un espacio X es pseudocompacto si para toda función continua $f : X \to \mathbb{R}$, $f[X]$ es acotado, es decir $C^*(X) = C(X)$.

Como la imagen continua de espacios compactos es compacta, y los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$ son acotados, entonces cualquier espacio compacto es pseudocompacto, y dado que $id : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no es acotada, entonces $\mathbb{R}$ no es pseudocompacto. Además la pseudocompacidad no es hereditaria, pues $[0, 1]$ es compacto pero su subconjunto abierto $(0, 1)$, el cual es homeomorfo a $\mathbb{R}$, no lo es.

Es normal hacerse preguntas sobre si la pseudocompacidad es una propiedad topológica, es decir, si se preserva bajo homeomorismos, el siguiente resultado responde positivamente dicha pregunta.

Proposición 1.2. *La imagen continua de un espacio pseudocompacto es pseudocompacto.*

Demostración. Sea X un espacio pseudocompacto y sea $f : X \to Y$ una función continua y sobreyectiva, donde Y es otro espacio topológico. Si Y no es pseudocompacto entonces existe una función continua $h : Y \to \mathbb{R}$ tal que $h[Y]$ no es acotado. Pero nótese que como X si es pseudocompacto $h \circ f : X \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que $(h \circ f)[X] = h[f[X]] = h[Y]$ es acotado. Lo cual es una contradicción. $\square$

Tomemos en cuenta los siguientes conceptos: $Z \subset X$ es un *conjunto zero* si para alguna $f \in C(X)$ se tiene que $Z = f^{-1}[\{0\}]$. El complemento de un conjunto zero es llamado *cozero*. Se dice que $A \subset X$ está C-encajado (C^*-encajado) si para toda $f \in C(A)$ ($f \in C^*(A)$), existe $F \in C(X)$ ($F \in C^*(X)$) tal que $F \restriction_A = f$. Todo subconjunto C-encajado de X es C^*-encajado.

Diremos que una familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ tiene la propiedad de la intersección finita (p. i. f.) si para toda subfamilia finita no vacía $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$, se tiene que $\bigcap \mathcal{F}' \neq \emptyset$.

Una colección $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X es *localmente finita* si para todo punto $x \in X$, existe una vecindad V de x tal que la colección $\{C \in \mathcal{C} : C \cap V \neq \emptyset\}$ es finita.

Teorema 1.3. *Para un espacio topológico X, los siguientes son equivalentes:*

(1) X es pseudocompacto;

(2) cualquier familia localmente finita de conjuntos abiertos es finita;

(3) para cualquier familia de conjuntos abiertos $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ con la p. i. f. $\bigcap\{\mathrm{cl}(U_n) : n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$;

(4) toda cubierta abierta numerable de X tiene una subcolección finita cuya unión es densa en X;

(5) Cualquier cubierta numerable de conjuntos cozero en X tiene una subcubierta finita;

(6) X no tiene copias del conjunto de los números naturales que estén C-encajadas.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2): Supóngase que 2) no se cumple, entonces existe una familia $\mathcal{F} := \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ infinita localmente finita y si $n \neq m$ entonces $U_n \neq U_m$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se escoge $x_n \in U_n$; como X es Tychonoff, también para todo $n \in \mathbb{N}$ existe una función continua $f_n : X \to [0, n]$ tal que $f_n(x_n) = n$ y $f_n[X \setminus U_n] \subset \{0\}$. Como la subcolección de elementos en $\mathcal{F}$ que contiene a un punto dado $x \in X$ es finita, la función $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ está bien definida.

Veamos que f es continua. Sea $x \in X$ arbitrario, tal que $f(x) \in (a, b)$ y sea O una vecindad de x tal que $C := \{n \in \mathbb{N} : O \cap U_n \neq \emptyset\}$ es finito. Sea $C_1 = \{n \in \mathbb{N} : f_n(x) > 0\}$. Si $j \in C_1$ entonces $f_j(x) > 0$ es decir $x \in O \cap U_j$ por lo que $j \in C$ y además $f(y) = \sum_{n \in C_1} f_n(y)$ para todo $y \in O$. La función $\sum_{n \in C_1} f_n \in C(X)$ pues es suma finita de funciones continuas, por lo que existe una vecindad abierta W de x tal que $\sum_{n \in C_1} f_n(y) \in (a, b)$ si $y \in W$. Sea $V = O \cap W$ vecindad de x. Entonces V es vecindad de x y además se tiene que $f[V] \subset (a, b)$. Por lo tanto f es continua, pero no es acotada.

2) $\Rightarrow$ 3): Se procede por reducción al absurdo. Supóngase que existe una familia de conjuntos abiertos $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ con la propiedad de la intersección finita y que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{cl}(U_n) = \emptyset$.

Para todo $n \in \mathbb{N}$ se define $W_n = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{cl}(U_i)$ el cual no es vacío. Nótese que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} [X \setminus \mathrm{cl}(U_n)]$ entonces para cada $x \in X$ existe n_0 tal que $x \notin \mathrm{cl}(U_{n_0})$ por lo que $x \notin W_{n_0}$. Dado que W_{n_0} es cerrado y X regular, existe O abierto con $x \in O$ y $O \cap W_{n_0} = \emptyset$. Así que para todo $n \geq n_0$ se tiene $O \cap W_n = \emptyset$ pues $W_n \subset W_{n_0}$. Si se define $V_n := \bigcap_{i=1}^{n} U_i$, el párrafo anterior demuestra que la familia $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ es localmente finita, y por hipótesis resulta ser finita.

Sea n_1 tal que para todo $n \geq n_1$ se tiene que $V_n = V_{n_1}$. Entonces $V_{n_1} \subset U_n \subset \mathrm{cl}(U_n)$ para todo $n \leq n_1$. Ahora si $n > n_1$, dado que $V_{n_1} = V_n \subset U_n \subset \mathrm{cl}(U_n)$, entonces $V_{n_1} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{cl}(U_n)$. Como por hipótesis $V_{n_1} \neq \emptyset$, se tiene que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{cl}(U_n) \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción.

3) $\Rightarrow$ 4): Se procede por reducción al absurdo. Sea $\mathcal{C} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ una cubierta abierta de X, tal que para todo conjunto finito $F \subset \mathbb{N}$ sucede que $X \setminus \bigcup_{n \in F} \mathrm{cl}(U_n) \neq \emptyset$, es decir, $\mathrm{cl}\left(\bigcup_{n \in F} U_n\right) = \bigcup_{n \in F} \mathrm{cl}(U_n)$ no es densa en X.

Para todo $n \in \mathbb{N}$ se define $W_n = X \setminus \mathrm{cl}(U_n)$. Como $\bigcap_{i=1}^{r} W_{n_i} = X \setminus \bigcup_{i=1}^{r} \mathrm{cl}(U_{n_i}) \neq \emptyset$ por hipótesis, entonces $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ tiene la p.i.f.

Por hipótesis, se tiene que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{cl}\,(W_n) \neq \emptyset$. Por otro lado,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus U_n) = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = \emptyset;$$

pero $\mathrm{cl}\,(X \setminus \mathrm{cl}(U_n)) \subset X \setminus U_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto

$$\emptyset \neq \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{cl}(W_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{cl}\,(X \setminus \mathrm{cl}(U_n)) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus U_n) = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = \emptyset,$$

lo cual es una contradicción.

4) $\Rightarrow$ 5): Sea $\{C_n : n \in \mathbb{N}\}$ una cubierta de conjuntos cozero de X y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n \in C(X)$ tal que $C_n = f_n^{-1}[\mathbb{R} \setminus \{0\}]$. Se describe al conjunto cozero de la siguiente manera: si $h_n = \min\{|f_n|, \frac{1}{2^{n+1}}\}$, entonces $h_n^{-1}[\mathbb{R} \setminus \{0\}] = C_n$. Ahora se define $g_k(x) = \sum_{n=1}^{k} h_n(x)$ y sea $D_k = g_k^{-1}[\mathbb{R} \setminus \{0\}]$, el cual es un conjunto cozero. Veamos que $D_k = \bigcup_{n=1}^{k} C_n$; si $x \in D_k$ entonces $g_k(x) = \sum_{n \leq k} h_n(x) > 0$, por lo que existe $n_0 \leq k$ tal que $h_{n_0}(x) > 0$; por lo tanto $x \in h_{n_0}^{-1}[\mathbb{R} \setminus \{0\}] = C_{n_0}$. De manera análoga se prueba que $\bigcup_{n=1}^{k} C_n \subset D_k$. De lo último se tiene que la familia de conjuntos cozero $\mathcal{D} = \{D_k : k \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta creciente de X.

Caso 1): Si para algún k se tiene que $D_k = X$, entonces hemos terminado.

Caso 2): Supóngase que para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $D_k \neq X$. Se renombra la familia $\mathcal{D}$ de tal manera que $D_k \subsetneq D_{k+1}$. Sea $g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i(x)$, aplicando un argumento de convergencia uniforme (ver [17, Teorema 1.4.7, Cap. 1, Secc. 4]) es posible observar que g es una función continua. Bajo las hipótesis mencionadas, como $g(x) \in (0,1]$ para todo $x \in X$, tenemos que $1/g \in C(X)$.

Aún más, si $n > 0$, existe $k_n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m > k_n$ resulta que $\sum_{i=m}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{1}{n}$. Sea $x_n \in D_{k_n+1} \setminus D_{k_n}$. Se tiene lo siguiente

$$g(x_n) = \sum_{i=k_n+1}^{\infty} g_i(x_n) = \sum_{i=k_n+1}^{\infty} h_i(x_n) \leq \sum_{i=k_n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{1}{n}$$

Ahora, si $F_n = \left(\frac{1}{g}\right)^{-1}[[n,\infty)]$ y $V_n = \left(\frac{1}{g}\right)^{-1}[(n,\infty)]$, entonces F_n es cerrado y V_n es abierto y ambos son no vacíos para todo $n < \omega$. Si $O_n = X \setminus F_n$, se tiene que $\mathcal{O} = \{O_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta de X. Nótese que $\bigcup_{i=1}^{n} O_i = \left(\frac{1}{g}\right)^{-1}[[0,n)]$, y $(\bigcup_{i=1}^{n} O_i) \cap V_n = \emptyset$. Así la familia $\mathcal{O}$ no tiene subcolecciones finitas que sean densas.

5) $\Rightarrow$ 6): Supóngase que $D \subset X$ es un subespacio discreto infinito numerable de X el cual está C-encajado en X. Para fines prácticos, sea $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ una numeración

fiel de D con $x_n \neq x_m$ si $n \neq m$, y sea $f : D \to \mathbb{R}$ definida como $f(x_n) = n$. Supóngase que $\tilde{f}$ es una extensión continua de f en todo X y se define $C_n = \{x \in X : \tilde{f}(x) < n\}$.

La familia $\{C_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta de X formada por conjuntos cozero. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_n \notin C_1 \cup \cdots \cup C_n$. Así $\{C_n : n \in \mathbb{N}\}$ no tiene subcubiertas finitas.

6) $\Rightarrow$ 1): Supóngase que X no es pseudocompacto, es decir, existe $f \in C(X)$ tal que f no está acotada, es posible definir

$$C_1 = \{x \in X : 1 < f(x)\}$$

(podemos suponer que f toma solo valores no negativos) y para cada $n \in \mathbb{N}$, si tomamos $x_n \in C_n$ definimos

$$C_{n+1} = \{x \in X : \max\{n, f(x_n)\} < f(x)\}$$

Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, $C_n \neq \emptyset$. Sea $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Sea $O_1 := f^{-1}\left[(-\infty, f(x_2))\right]$ y, para $n > 1$, $O_n := f^{-1}\left[(f(x_{n-1}), f(x_{n+1}))\right]$. De la construcción se sigue que $O_n \cap A = \{x_n\}$; por lo tanto A es discreto. Se prueba que A está C-encajado en X. Se definen los siguientes conjuntos

$$F_0 = \{x \in X : f(x) \leq 1\} \cup \{x \in X : f(x_2) \leq f(x)\}$$

y para $n \geq 1$

$$F_n = \{x \in X : f(x) \leq f(x_n)\} \cup \{x \in X : f(x_{n+2}) \leq f(x)\}$$

Afirmación: Cada F_n es cerrado y $x_{n+1} \notin F_n$. Se hace el caso $n = 0$ los demás son análogos.

Sea $y \notin F_0$, entonces $f(y) > 1$ y $f(y) < f(x_2)$ por lo que $y \in f^{-1}\left[(1, f(x_2))\right]$. De igual manera, si $y \in f^{-1}\left[(1, f(x_2))\right]$ entonces $y \notin F_0$. En vista de que f es una función continua y $X \setminus F_0 = f^{-1}\left[(1, f(x_2))\right]$ se concluye que F_0 es cerrado.

Ahora supóngase que $x_{n+1} \in F_n$, por definición $f(x_{n+1}) \leq f(x_n)$ ó $f(x_{n+2}) \leq f(x_{n+1})$. Si sucede lo primero entonces se tiene que $x_{n+1} \in f^{-1}\left[(-\infty, f(x_n)]\right]$ lo que implica que $x_{n+1} \in O_n$, es decir $A \cap O_n = \{x_n, x_{n+1}\}$ lo cual es una contradicción. Análogamente se prueba el caso en que $f(x_{n+2}) \leq f(x_{n+1})$. Con esto termina la afirmación.

Ahora, si $h : A \to \mathbb{R}$ es continua, para cada $n \geq 0$ existe $f_n \in C(X)$ tal que $f_n\left[F_n\right] \subset \{0\}$ y $f_n(x_{n+1}) = h(x_{n+1})$. Se define $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ como $\tilde{f}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$. Si $x \in X$ como $\{f^{-1}\left[(-\infty, n)\right]\}_{n \in \mathbb{N}}$ es cubierta de X, existe n tal que $f(x) < n$ y como $n < f(x_{n+1})$, pues $x_{n+1} \in C_{n+1}$, se sigue que $x \in F_{n+1}$. Más aún, $x \in f^{-1}\left[(-\infty, n)\right] \subset F_m$ para todo $m \geq n + 1$, lo cual implica que $\tilde{f}(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$ (por supuesto, esta es cierta para todo $y \in f^{-1}\left[(-\infty, n)\right]$).

Como $\sum_{i=1}^{n} f_i \in C(X)$, se sigue que para $\varepsilon > 0$ existe O abierto en X tal que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} f_i\right)[O] \subset \left(\sum_{i=1}^{n} f_i(x) - \varepsilon, \sum_{i=1}^{n} f_i(x) + \varepsilon\right)$$

y $x \in O$. Sea $V = f^{-1}[(-\infty, n)] \cap O$, el cual es una vecindad abierta de x en X que satisface que si $y \in V$,

$$\tilde{f}(y) = \sum_{i=1}^{n} f_i(y) \in \left(\sum_{i=1}^{n} f_i(x) - \varepsilon, \sum_{i=1}^{n} f_i(x) + \varepsilon\right)$$

lo cual prueba que $\tilde{f} \in C(X)$.

Si $x_n \in A$ entonces $\tilde{f}(x_n) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x_n)$. Pero para todo $m \geq n$, $x_n \in F_m$, y por lo tanto $f_m(x_n) = 0$. Además, $f_{n-1}(x_n) = h(x_n)$. Y si $k < n-1$, se tiene que $x_n \in F_k$; por lo tanto $f_k(x_n) = 0$. Se concluye que $\tilde{f}(x_n) = f_{n-1}(x_n) = h(x_n)$, y que $\tilde{f}$ es una extensión continua de h. $\square$

Como consecuencia del Teorema 1.3 se obtienen los siguientes corolarios.

Corolario 1.4. *Para un espacio topológico X los siguientes son equivalentes:*

(1) X es pseudocompacto.

(2) Toda cubierta abierta localmente finita de X es finita.

(3) Toda cubierta abierta localmente finita de X tiene una subcubierta finita.

Demostración. La implicación (1) $\Rightarrow$ (2) se sigue de (2) en el Teorema 1.3. La implicación (2) $\Rightarrow$ (3) es obvia.

(3) $\Rightarrow$ (1): Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua. Como $\{(n-1, n+1) : n \in \mathbb{Z}\}$ es una cubierta abierta localmente finita de $\mathbb{R}$, entonces $\{f^{-1}[(n-1, n+1)] : n \in \mathbb{Z}\}$ es una cubierta abierta localmente finita de X. Así que existe $\{n_1, ..., n_r\} \subset \mathbb{Z}$ tal que $\{f^{-1}[(n_i - 1, n_i + 1)] : i \in \{1, ..., r\}\}$ cubre X. Como consecuencia, si $s = \max\{n_i : i \in \{1, ..., r\}\}$, obtenemos que para todo $x \in X$, $|f(x)| \leq \text{máx}\{|s-1|, |s+1|\}$ y por lo tanto f está acotada. $\square$

Corolario 1.5. *Para un espacio topológico X los siguientes son equivalentes:*

(1) X es pseudocompacto.

(2) Si $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de subconjuntos abiertos no vacíos de X tales que para todo $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+1} \subset W_n$, entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} cl(W_n) \neq \emptyset$.

Demostración. Obsérvese que la afirmación (2) es equivalente a (3) en el Teorema 1.3. □

Una colección de subconjuntos $\mathcal{C}$ de X es *discreta* en X si para cada $x \in X$ existe una vecindad V de x, tal que $|\{C \in \mathcal{C} : C \cap V \neq \emptyset\}| \leq 1$. Como toda familia discreta es localmente finita, del Teorema 1.3 (2), en un espacio X pseudocompacto cualquier familia discreta de subconjuntos abiertos resulta ser finita y por el hecho de las equivalencias en el mismo Teorema 1.3, si toda familia discreta de subconjuntos abiertos de un espacio X es finita, este último resulta ser pseudocompacto.

Definición 1.6. Sea X un espacio topológico y sea $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos abiertos no vacíos de X. Diremos que un punto $x \in X$ es un *punto límite* de $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si para toda vecindad V de x, $|\{n \in \mathbb{N} : U_n \cap V \neq \emptyset\}| = \aleph_0$.

Lema 1.7. *Un espacio X es pseudocompacto si y solo si para cada familia numerable de conjuntos abiertos no vacíos de X existe un punto límite de tal familia.*

Demostración. Supóngase que X es pseudocompacto y que existe una familia $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ de subconjuntos abiertos no vacíos tales que para cada $x \in X$, existe una vecindad V de x tal que $|\{n \in \mathbb{N} : U_n \cap V \neq \emptyset\}| < \aleph_0$. Entonces $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ es localmente finita y, de acuerdo con (2) Teorema 1.3, $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ resulta ser finita. Por lo tanto, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq m_0$, $U_n = U_{m_0}$. Sea $x \in U_{m_0}$. Entonces para toda vecindad V de x, $\{m \in \mathbb{N} : m \geq m_0\} \subset \{m \in \mathbb{N} : U_m \cap V \neq \emptyset\}$; lo cual es una contradicción.

Ahora, por la afirmación mencionada antes de la Definición 1.6, si X no es pseudocompacto, existe una familia discreta infinita de conjuntos abiertos no vacíos de X y cualquier subfamilia numerable de esta carece de puntos límite. □

Recordemos que un espacio topológico X es llamado *numerablemente compacto* si toda cubierta numerable de X tiene una subcubierta finita.

Como consecuencia del inciso (5) del Teorema 1.3, se tiene lo siguiente:

Corolario 1.8. *Todo espacio numerablemente compacto es pseudocompacto.*

El siguiente resultado proporciona condiciones de cuando un espacio pseudocompacto es necesariamente un espacio numerablemente compacto.

Teorema 1.9. *Sea X un espacio pseudocompacto. X es numerablemente compacto si y solo si todo subespacio cerrado discreto numerable F de X puede ser separado de cualquier subconjunto cerrado ajeno a F con subconjuntos abiertos disjuntos.*

Demostración. Supóngase que X no es numerablemente compacto. Entonces existe una cubierta $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ abierta numerable de X que no tiene subcubiertas finitas.

Se elige $x_1 \in X$, como $\mathcal{U}$ es cubierta, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x_1 \in U_{n_1}$. Por hipótesis $X \setminus \bigcup_{i=1}^{n_1} U_i \neq \emptyset$. A continuación se elige $x_2 \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{n_1} U_i$, como $\mathcal{U}$ es cubierta, entonces existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $x_2 \in U_{n_2}$ con $n_1 < n_2$. Supóngase que se han construido $n_1, ..., n_k \in \mathbb{N}$ y $x_1, x_2, ..., x_k \in X$ tales que $n_1 < n_2 < ... < n_k$, $x_1 \in U_{n_1}$ y $x_j \in U_{n_j} \setminus \bigcup_{i=1}^{n_{j-1}} U_i$ para cada $j \in \{2, ..., k\}$. Como $\cup_{i=1}^{n_k} U_i \neq X$, existen $x_{n_{k+1}} \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{n_k} U_i$ y $n_{k+1} \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2, ..., n_k\}$ tales que $x_{n_{k+1}} \in U_{n_{k+1}}$. Así, de manera recursiva, se ha construido el punto $x_{k+1} \in U_{n_{k+1}} \setminus \bigcup_{i=1}^{n_k} U_i$.

El proceso anterior permite definir un conjunto infinito numerable $D := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ y una familia de conjuntos abiertos $\mathcal{A} = \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ disjuntos dos a dos, donde $A_n := U_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} U_i$. De esta manera $A_n \cap D = \{x_n\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo que D es un subespacio discreto. Ahora, sea $x \in X$ fijo, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in U_k$, además U_k contiene a lo más una colección finita $\mathcal{F}$ de elementos de D. Así $(U_k \setminus \mathcal{F}) \cup \{x\}$ es una vecindad de x que no tiene puntos de D, a excepción posiblemente de x. Esto demuestra que D no tiene puntos de acumulación, por lo que se puede concluir que D es cerrado.

El conjunto $H = \{x \in X : \forall V \in \mathcal{V}(x)(|\{n \in \mathbb{N} : V \cap A_n \neq \emptyset\}| = \omega)\}$ es cerrado y es disjunto a D; por hipótesis existen U y W subconjuntos abiertos y ajenos tales que $H \subset U$ y $D \subset W$. Entonces, $\{A_n \cap W : n \in \mathbb{N}\}$ es una familia infinita localmente finita de conjuntos abiertos; lo cual es imposible dado que X es pseudocompacto.

La otra implicación se sigue del hecho de que en cada espacio numerablemente compacto todo subespacio cerrado discreto es finito. □

Definición 1.10. Un espacio X se dice que es *pseudonormal* si para cada par de subconjuntos cerrados disjuntos F y G de X, donde uno de ellos es numerable, existen dos subconjuntos abiertos disjuntos A y B tales que $F \subset A$ y $G \subset B$.

Como era de esperarse, todo espacio normal es pseudonormal. Obsérvese que todo espacio numerablemente compacto es pseudonormal.

Corolario 1.11. *Todo espacio pseudonormal y pseudocompacto es numerablemente compacto.*

Este hecho nos permite ver que compacidad y pseudocompacidad son propiedades equivalentes en la clase de los espacios metrizables. De hecho, cada espacio metrizable es normal, y la compacidad y compacidad numerable son equivalentes en la clase de los espacios metrizables.

Proposición 1.12. *Si X es un espacio metrizable, entonces X es compacto si y solo si X es pseudocompacto.*

Corolario 1.13. *Un espacio X es pseudocompacto si y solo si para cada $f \in C(X)$, $f[X]$ es compacto.*

Recordemos que un subconjunto F de un espacio X es *regularmente cerrado* si cumple que $\mathrm{cl}_X(\mathrm{int}_X F) = F$.

Proposición 1.14.

(1) Si X tiene un subespacio denso pseudocompacto, entonces X es pseudocompacto.

(2) Si todo subconjunto cerrado de un espacio X es pseudocompacto, entonces X es numerablemente compacto.

(3) Todo subespacio regularmente cerrado de un espacio pseudocompacto es pseudocompacto.

(4) La suma topológica libre $\oplus\{X_s : s \in S\}$ es pseudocompacta si y solo si cada X_s es pseudocompacto y S es finito.

Demostración. (1): Sea $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ una cubierta abierta de X y $D \subset X$ un subespacio denso. Entonces $\{U_n \cap D : n \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta de D. Como por hipótesis D es pseudocompacto por (4) Teorema 1.3 existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{cl}_D\left(\bigcup_{i=1}^{n_0}(U_i \cap D)\right) = D$. Entonces

$$D = \left[\mathrm{cl}_X\left(\bigcup_{i=1}^{n_0}(U_i \cap D)\right)\right] \cap D \subset \mathrm{cl}_X\left(\bigcup_{i=1}^{n_0}(U_i \cap D)\right) \subset \mathrm{cl}_X\left(\bigcup_{i=1}^{n_0} U_i\right).$$

Por lo tanto, $X = \mathrm{cl}_X D \subset \mathrm{cl}_X\left(\mathrm{cl}_X\left(\bigcup_{i=1}^{n_0} U_i\right)\right) = \mathrm{cl}_X\left(\bigcup_{i=1}^{n_0} U_i\right)$. De ahí que X es pseudocompacto.

(2): Supóngase que X no es numerablemente compacto. Entonces existe $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ subespacio cerrado discreto infinito de X. La colección $\{\{x_n\} : n \in \mathbb{N}\}$ es una familia localmente finita de subconjuntos abiertos de D. Por hipótesis D es pseudocompacto, como es cerrado por (2) Teorema 1.3 D tiene que ser finito y llegamos a una contradicción.

(3): Sea X un espacio pseudocompacto y F un subconjunto propio regularmente cerrado de X. Es decir $F = \mathrm{cl}_X(\mathrm{int}_X F)$ y $X \setminus F \neq \emptyset$. Sea $\mathcal{H} = \{O_n \cap F : n \in \mathbb{N}\}$ una cubierta para F donde O_n es un subconjunto abierto de X para todo $n \in \mathbb{N}$. Obsérvese que como

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty}(O_n \cap F) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n$$

entonces $\mathcal{H}' = \{O_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{X \setminus F\}$ es una cubierta abierta de X. Así que existe una subcolección finita de $\mathcal{H}'$ cuya unión es densa en X. Por lo tanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{cl}_X\left(\bigcup_{i=1}^{n_0} O_i\right) \cup \mathrm{cl}_X(X \setminus F) = X$. Afirmamos que

$$\mathrm{cl}_F\left(\bigcup_{i=1}^{n_0}(O_i \cap F)\right) = F.$$

Notemos que

(a) $\mathrm{cl}_F\left(\bigcup_{i=1}^{n_0}(O_i \cap F)\right) = \mathrm{cl}_X\left(\bigcup_{i=1}^{n_0}(O_i \cap F)\right)$ pues F es cerrado, y

(b) $\mathrm{int}_X(F) \subset \mathrm{cl}_X\left(\bigcup_{i=1}^{n_0} O_i\right)$ por el hecho de que $\mathrm{cl}_X(X \setminus F) = X \setminus \mathrm{int}_X(F)$, y entonces $\mathrm{int}_X(F) \subset \mathrm{cl}_X\left(\bigcup_{i=1}^{n_0} O_i\right)$.

Sea $z \in F$ y O un abierto con $z \in O$. por definición $\mathrm{int}_X(F) \cap O \neq \emptyset$. Entonces existe $w \in \mathrm{int}_X(F) \cap O$ y también existe W abierto de X tal que $w \in W \subset F$. Se tiene que $w \in W \cap O \subset F \cap O \subset F$. Así $(W \cap O) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n_0} O_i\right) \neq \emptyset$. Debido a que

$$(W \cap O) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n_0} O_i\right) = \left[(W \cap O) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n_0} O_i\right)\right] \cap F$$

se concluye que $O \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n_0}(O_i \cap F)\right) \neq \emptyset$, y por lo tanto $\mathrm{cl}_F\left(\bigcup_{i=1}^{n_0}(O_i \cap F)\right) = F$.

(4): Si $X = \oplus\{X_s : s \in S\}$ es pseudocompacto, X_s siendo un subconjunto regularmente cerrado de X para todo $s \in S$, entonces cada X_s es pseudocompacto. Aún más, dado que la familia $\{X_s : s \in S\}$ es localmente finita en X, resulta que es finita.

En orden de probar la otra implicación, supóngase que existe $f \in C(X)$ la cual no es acotada. Existe $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X$ con $x_n \neq x_m$ si $n \neq m$ y $|f(x_n)| > n$. Entonces, existe $s_0 \in S$ y $A \subset \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ con A infinito y $A \subset X_{s_0}$. Por lo tanto, $f \restriction_{X_{s_0}}$ es continua y no acotada; lo cual contradice la pseudocompacidad de X_{s_0}. □

Definición 1.15. Un espacio topológico X es llamado un *espacio de Baire* si para cualquier sucesión $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos abiertos densos de X, la intersección $\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$ es un subconjunto denso de X.

El siguiente teorema fue demostrado por J. Colmez en [10].

Teorema 1.16. *Todo espacio pseudocompacto es un espacio de Baire.*

Demostración. Sea X un espacio pseudocompacto, sea $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos abiertos densos de X y sea U un conjunto abierto no vacío de X arbitrario. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $U \cap D_n \neq \emptyset$. Como X es un espacio regular, se sigue que existe W_0 subconjunto abierto tal que $\emptyset \neq W_0 \subset \mathrm{cl}(W_0) \subset U \cap D_0$, esto implica que $\emptyset \neq W_0 \cap D_0 \cap D_1 = W_0 \cap D_1 \subset U \cap D_1$. Así que existe W_1 abierto tal que $\emptyset \neq W_1 \subset \mathrm{cl}(W_1) \subset W_0 \cap D_1 \subset U \cap D_1$. Continuando con este procedimiento recursivamente, obtenemos una familia decreciente $\{W_n\}_{n=1}^{\infty}$ de conjuntos abiertos de X con la propiedad de la intersección finita. Por el inciso (3) del Teorema 1.3 tenemos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{cl}(W_n) \neq \emptyset$ y dado que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{cl}(W_n) \subset U \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n\right)$ entonces $U \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n\right) \neq \emptyset$. Como U fue un subconjunto abierto no vacío arbitrario, $\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$ es denso en X. □

1.2. Grupos topológicos

Como antecedente del concepto abstracto de grupo topológico se conoce al introducido en 1925 y mencionado en 1927 por F. Leja en [20], trabajo en el cual se establece por primera vez la noción de grupo topológico. A continuación se menciona en síntesis la evolución del concepto a lo largo del tiempo y el trabajo de distintos matemáticos: el Programa de Klein (1872) que estudia las geometrías a través de los grupos de transformaciones asociados; el concepto introducido por Sophus Lie de Grupo Continuo de Transformaciones como solución de un sistema de ecuaciones diferenciales; los Grupos Clásicos de la geometría; y para terminar el quinto problema de Hilbert (1900) en el que propone definir y desarrollar el concepto de grupo continuo de transformaciones eliminando la condición de diferenciabilidad[2]. Los términos usados y no definidos en esta sección, así como más propiedades de grupos topológicos fueron tomados de [25], [8], [11].

Sabemos que todo conjunto permite la introducción de una topología; pero si se quiere aprovechar la presencia de la operación de grupo, se debe relacionar de alguna manera la operación con la topología. La siguiente definición es la que presenta las mejores condiciones para desarrollar tanto la topología como el álgebra, estando ambas presentes.

Definición 1.17. Un conjunto G con una operación binaria $\cdot$ y una familia τ de subconjuntos de G se llama grupo topológico si

I) $(G, \cdot)$ es un grupo.

II) (G, τ) es un espacio topológico.

III) Las funciones $\mu\colon G \times G \to G$ y $\iota\colon G \to G$ dadas por $\mu(x, y) = x \cdot y$ y $\iota(x) = x^{-1}$ son continuas, donde x^{-1} es el inverso de x.

De aquí en adelante se prescindirá de la notación $\cdot$ para operación solo escribiendo xy en lugar de $x \cdot y$.

La condición (III) de la definición anterior se puede reescribir de la siguiente manera: si x e y son elementos de G, para cada $U \in \mathcal{V}(xy)$ existen vecindades $V \in \mathcal{V}(x)$ y $W \in \mathcal{V}(y)$ tales que $V \cdot W \subset U$, donde

$$V \cdot W = \{vw : v \in V, w \in W\};$$

y para cada $U \in \mathcal{V}(x^{-1})$ existe $V \in \mathcal{V}(x)$ tal que $V^{-1} \subset U$, donde

$$V^{-1} = \{v^{-1} : v \in V\}.$$

[2]El cual estaba mal formulado de esa manera, si se toman minuciosamente los detalles técnicos que acompañan al enunciado. La pregunta que en realidad se buscaba responder era ¿Es cualquier grupo localmente euclideo un grupo de Lie?.

Se denotará a lo largo de este capítulo, así como en alguno otro que se haga mención de lo siguiente, a e como el elemento identidad de un grupo G.

Existe una caracterización alternativa de grupo topológico que en ocasiones resulta más útil:

Lema 1.18. *Sean $(G, \cdot)$ un grupo y τ una topología en G. Entonces $(G, \cdot, \tau)$ es un grupo topológico si y sólo si la función $\nu\colon G \times G \to G$, donde $\nu(x, y) = xy^{-1}$ es continua.*

Demostración. Si G es un grupo topológico, es claro que la función ν es continua, pues el producto y la operación de tomar inversos son continuos y $\nu(x, y) = \mu(x, \iota(y))$, donde las funciones μ y ι son las de la definición (1.17). Por otro lado, obsérvese que $\iota(y) = \nu(e, y)$ y $\mu(x, y) = \nu(x, \iota(y))$. Por la definición de topología producto, μ y ι resultan continuas si ν lo es. $\square$

Ejemplo 1.19. Considere el conjunto de lo números reales $\mathbb{R}$ con la suma usual y con la topología métrica, es decir, aquella generada por las vecindades básicas $\{B_\varepsilon(x) : x \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\}$, donde $B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R} : |y - x| < \varepsilon\}$.

Claramente $\mathbb{R}$ es un grupo algebraico. Además, las operaciones $\mu\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\iota\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas como $\mu(x, y) = x + y$ y $\iota(x) = -x$ respectivamente, son continuas.

Así $\mathbb{R}$ es un grupo topológico aditivo.

Para A y B subconjuntos de un grupo topológico G se usará la siguiente notación:

$$AB = \mu(A \times B) = \{ab : a \in A, b \in B\}$$

$$A^{-1} = \iota(A) = \{a^{-1} : a \in A\}$$

$$AB^{-1} = \nu(A \times B) = \{ab^{-1} : a \in A, b \in B\}$$

$$A^2 = AA = \{a_1 a_2 : a_1 \in A, a_2 \in A\} \quad \text{y} \quad \text{asi} \quad \text{respectivamente.}$$

Quizá la primera ventaja que se obtiene al trabajar con grupos topológicos es que la operación de grupo hace indistinguibles las propiedades locales en el grupo desde el punto de vista de la topología.

Teorema 1.20. *Considérese un grupo topológico G. Si $g \in G$ es un elemento fijo arbitrario, entonces las funciones $\varphi_g(x) = xg$ y $\sigma_g(x) = gx$, $x \in G$, de G en sí mismo, son homeomorfismos[3]. La inversión $f\colon G \to G$, definida por $f(y) = y^{-1}$, también es un homeomorfismo.*

[3]Nótese que estas funciones son transiciones de las acciones traslación μ de G en G por la izquierda y la derecha, respectivamente

Demostración. Se probará la afirmación para φ_g, la traslación por derecha. Por la definición de grupo topológico, φ_g es continua. La inversa de φ_g es $\varphi_{g^{-1}}$ puesto que $\varphi_{g^{-1}}(\varphi(a)) = \varphi_{g^{-1}}(ag) = agg^{-1} = a$. Esto automáticaménte convierte a φ_g en biyectiva, además es continua, por lo que φ_g resulta ser un homeomorfismo. Si $a \in G$, entonces $f(a^{-1}) = a$, por lo que f es sobreyectiva. La inversa de f es ella misma y, por lo tanto, f es un homeomorfismo. □

La función $y \to y^{-1}$ es un homeomorfismo involutivo, es decir $\iota^2 = e_G$, por tanto $(A^{-1})^{-1} = A$. Cuando $A = A^{-1}$, se dice que A es *simétrico*.

Los resultados siguientes nos permitirán estudiar las propiedades topológicas locales de un grupo topológico G en un solo punto, que por simplificar siempre tomaremos como la identidad e del grupo.

Definición 1.21. Un espacio topológico se dice que es *homogéneo* si para cualesquiera dos puntos $x, y \in X$ existe un homemorfismo $\varphi\colon X \to X$ tal que $\varphi(x) = y$.

Intuitivamente un espacio es homogéneo si se pueden "intercambiar de lugar" cualesquiera dos elementos dentro de él.

Corolario 1.22. *Todo grupo topológico G es un espacio homogéneo.*

Demostración. Se debe probar que dados dos elementos arbitrarios $g, h \in G$, existe un homeomorfismo de G en si mismo que mande un elemento en el otro. Obsérvese que sí $\varphi = \varphi_{hg^{-1}}$, entonces φ es un homeomorfismo y $\varphi(g) = h$ □

Definición 1.23. Decimos que una función biyectiva $f\colon G \to G'$ entre dos grupos topológicos G y G' es un *isomorfismo topológico* si f y f^{-1} son homomorfismos continuos. Si $G = G'$, el isomorfismo f se llama *automorfismo topológico*. Dos grupos topológicos son *topológicamente isomorfos* si existe un isomorfismo topológico de uno al otro.

Describir la topología en un grupo topológico es generalmente una tarea más sencilla que hacerlo en un espacio topológico arbitrario. En virtud de la homogeneidad de G, para probar que G satisface cierta propiedad local bastará probarlo para un punto, en particular para el elemento identidad e de G. Así por ejemplo, es suficiente que $\{e\}$ sea abierto o cerrado o bien tenga una base de vecindades $\mathcal{V}(e)$ numerable, para que G sea discreto, o T_1, o satisfaga el primer axioma de numerabilidad respectivamente. Como e es un elemento muy especial de G y cualquier vecindad de g en G es de la forma gU o Ug con U una vecindad de e, el papel que juegan las vecindades de e son muy importante.

Teorema 1.24. *Sea G un grupo topológico, y sea $\mathcal{V}(e)$ una base local para la identidad e del grupo. Entonces las familias $\{gU\}$ y $\{Ug\}$, donde g toma los valores en los elementos de G y U varía sobre todos los elementos de $\mathcal{V}(e)$, son bases para la topología del grupo G.*

Demostración. Sea W un conjunto abierto no vacío en G y a un elemento arbitrario de W. Dado que la función $f(g) = a^{-1}g$ es un homeomorfismo, transforma el abierto W en el abierto $a^{-1}W$, el cual contiene a la identidad e. Como $\mathcal{V}(e)$ es una base local para e, existe $U \in \mathcal{V}(e)$ tal que $e \in U \subset a^{-1}W$. Por lo tanto,

$$a \in aU \subset aa^{-1}W = W$$

lo cual demuestra que $\{gU; g \in G, U \in \mathcal{V}(e)\}$ es una base del grupo topológico G. En forma similar se prueba que $\{Ug; g \in G, U \in \mathcal{V}(e)\}$ es una base. $\square$

También se puede formar una base local para la identidad conformada por vecindades simétricas.

Lema 1.25. *Si G es un grupo topológico y $U \in \mathcal{V}(e)$ entonces existe $V \in \mathcal{V}(e)$ tal que $V^{-1} = V \subset U$. Por lo tanto, las vecindades simétricas de la identidad e constituyen una base local para e.*

Demostración. Sean $U \in \mathcal{V}(e)$ y $f(x) = x^{-1}$. Como f es un homeomorfismo de G sobre G, $f(U) = U^{-1}$ es abierto en $e \in U^{-1}$, así que $V = U \cap U^{-1}$ es abierto, $V^{-1} = V$ y $e \in V \subset U$. $\square$

La identidad de un grupo topológico tiene aún otra propiedad muy importante, admite una base local formada por subconjuntos cerrados.

Lema 1.26. *Sea G un grupo topológico.*

(1) Si $U \in \mathcal{V}(e)$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $V \in \mathcal{V}(e)$ con $V^n \subset U$ ($V^n = V \cdot ... \cdot V, n$ factores).

(2) Si $U \in \mathcal{V}(e)$, entonces existe $V \in \mathcal{V}(e)$ con $cl_G(V) \subset U$. En particular, las vecindades cerradas de e constituyen una base local de la identidad cuyos elementos son subconjuntos cerrados.

Demostración. (1) Sea $U \in \mathcal{V}(e)$; utilicemos inducción sobre n. Para $n = 1$ hacemos $V = U$. Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo y supongamos que el resultado es válido para n; es decir, existe $W \in \mathcal{V}(e)$ tal que $W^n \subset U$ y queremos encontrar una vecindad V de e tal que $V^{n+1} \subset U$. Como la multiplicación $\mu(x, y) = xy$ es continua y $\mu(e, e) = e$, existen $V_1, V_2 \in \mathcal{V}(e)$ tales que $V_1V_2 \subset W$. Sea $V = V_1 \cap V_2$. Entonces $V \in \mathcal{V}(e)$ y $V^2 \subset W$, de donde

$$V^{n+1} = V \cdot V \cdot V^{n-1} \subset W \cdot W^{n-1} \subset U,$$

lo que termina la inducción.

(2) Sea $V \in \mathcal{V}^*(e)$ (donde $\mathcal{V}^*(e)$ denota la base de vecindades abiertas y simétricas) tal que $V^2 \subset U$. Si $x \in \mathrm{cl}_G(V)$, entonces $xV \cap V \neq \emptyset$; es decir, existen $v_1, v_2 \in V$ con $xv_1 = v_2$, por lo cual $x = v_2v_1^{-1} \in VV^{-1} = V^2 \subset U$. Así que $\mathrm{cl}_G(V) \subset U$. $\square$

Los subconjuntos compactos de grupos topológicos tienen propiedades similares a los puntos, lo mismo que en topología general. Como ejemplo de ello, basta referirnos a los axiomas de separación. Ahora bien, en grupos topológicos tenemos lo siguiente.

Proposición 1.27. *Para un compacto K de un grupo topológico, se tiene:*

(1) Cada vecindad A de K en G contiene abiertos de la forma UK y KU' donde U y U' son vecindades abiertas de e.

(2) Si C es un cerrado de G entonces CK y KC son cerrados.

(3) Para cada vecindad N de e existe una vecindad V de e tal que $k^{-1}Vk \subset N$ para todo $k \in K$.

Demostración. (1): Para cada $k \in K$, sea N_k una vecindad de e que cumple $N_k k \subset A$ y sea U_k una vecindad abierta de e con $U_k^2 \subset N_k$. Puesto que $\{U_k k : k \in K\}$ cubre a K, podemos encontrar $k_1, k_2, ..., k_n$ en K de manera que $\{U_{k_i} k_i; i = 1, ...n\}$ cubra a K. Si $U = \bigcap_{i=1}^n U_{k_i}$, entonces $UK \subset \bigcup_{i=1}^n UU_{k_i} k_i \subset \bigcup_{i=1}^n U_{k_i}^2 k_i \subset \bigcup_{i=1}^n N_{k_i} k_i \subset A$. Para construir U' se considera una vecindad N_k' de e tal que $kN_k' \subset A$ y se sigue el procedimiento análogo al anterior.

(2): Se mostrará que para un cerrado arbitrario C de G, el conjunto $G \setminus CK$ es abierto. Si $g \notin CK$ entonces $gK^{-1} \cap C = \emptyset$ pues $gk^{-1} \notin C$ para todo $k \in K$. Aplicando (1) a la vecindad $G \setminus C$ del compacto gK^{-1} obtenemos U, una vecindad de e, tal que $UgK^{-1} \subset G \setminus C$, de lo cual se infiere que la vecindad Ug de g está contenida en $G \setminus CK$.

(3): Dada una vecindad N de e, la continuidad de $(g_1, g_2, g_3) \to g_1 g_2 g_3$ implica la existencia de una vecindad simétrica W de e que cumple $W^3 \subset N$. Por ser K compacto, hay un conjunto $\{k_1, ..., k_n\}$ en K tal que $K \subset \bigcup_{i=1}^n k_i W$. Si $k \in K$, $k = k_j w$ para alguna $j \in \{1, ..., m\}$ y algún $w \in W$. Entonces el conjunto abierto $V = \bigcup_{i=1}^n k_i W k_i^{-1}$ satisface $k^{-1}Vk \subset w^{-1}(k_j^{-1}Vk_j)w \subset W^{-1}WW = W^3 \subset N$. Nótese que V no depende del punto $k \in K$. □

Proposición 1.28. *Todo grupo topológico G es regular. Además G es de Hausdorff si y sólo si $\{e\}$ es cerrado.*

Demostración. Teniendo en cuenta la homgeneidad de G, es suficiente probar que e y cualquier cerrado C que no contiene a e tienen vecindades ajenas. Con este fin, considérese una vecindad abierta W de e que cumpla $WW^{-1} \subset G \setminus C$, de aquí se sigue que $W \cap CW = \emptyset$ y obtenemos las vecindades ajenas W de e y CW de C.

Evidentemente si G es de Hausdorff, $\{e\}$ es cerrado. Ahora si $\{e\}$ es un cerrado de G, lo son todos los puntos de G, es decir G es T_1 y como es regular entonces es de Hausdorff. □

Observación: Es oportuno aclarar que no se está suponiendo que los grupos topológicos son de Hausdorff ya que con mucha frecuencia se asume que si lo son, o bien cumplen la condición equivalente "$\{e\}$ es cerrado". Para que esto suceda es suficiente que G sea un espacio T_0, ya que siempre es posible encontrar una vecindad de e que no contenga a un elemento dado g distinto de e.

Proposición 1.29. *Sea G un grupo topológico. Para H subgrupo de G tenemos:*

(1) H como subespacio de G es un grupo topológico.

(2) La función cociente $q\colon G \to G/H$ de G en el espacio de las clases laterales derechas (o izquierdas) definida como $q(g) = Hg$ (o $q(g) = gH$), es continua y abierta.

(3) El espacio cociente G/H es homegéneo.

(4) Si H es un subgrupo normal entonces G/H es un grupo topológico.

Demostración. (1) La función $(h_1, h_2) \to h_1 h_2^{-1}$ de $H \times H$ sobre H es continua por ser la restricción a H de la función ν de $G \times G$ a G, definida en el Lema (1.18).

(2) La función q resulta ser continua por el hecho de que se equipa al espacio G/H con la topología cociente generada por q.

Ahora sea U un abierto en G y como $q^{-1}(q(U)) = HU = \bigcup_{h\in H} hU$ es abierto en G, pues hU es abierto en G para cada $h \in H$. Por lo tanto $q(U)$ es abierto en G/H.

(3) Para $a \in G$ fijo, la función $\psi_a\colon G/H \to G/H$ definida por $\psi_a(Hg) = H(ga), Hg \in G/H$ es un homeomorfismo. Es inmediato ver que ψ_a está bien definida y que es biyectiva. Además, $(\psi_a)^{-1} = \psi_{a^{-1}}$, por lo que basta probar que ψ_a es abierta. Sea $q\colon G \to G/H$ la función cociente y sea $U^* = q(U)$ un abierto de G/H, donde U es un abierto de G. Entonces $\psi_a(U^*) = q(Ua)$ es un conjunto abierto ya que Ua es abierto en G. Por tanto, ψ_a es abierta y así esta misma es un homeomorfismo. Para terminar basta observar que dadas $Ha, Hb \in G/H$, el homeomorfismo $\psi_{a^{-1}b}(Ha) = Hb$.

(4) Supongamos finalmente que H es un subgrupo normal de G. Las operaciones multiplicación μ' e inversión ι' del grupo cociente G/H hacen los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} G\times G \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "q\times q"'] & G \arrow[d, "q"] \\ G/H\times G/H \arrow[r, "\mu'"'] & GH \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "q"'] & G \arrow[d, "q"] \\ G/H \arrow[r, "\iota'"'] & G/H \end{tikzcd}$$

Debido a que $q\times q$ es una identificación abierta, la continuidad de $\mu'(q\times q) = q\mu$ implica, por la propiedad universal del cociente, la continuidad de μ'. Análogamente de $\iota' q = q\iota$ se sigue la continuidad de ι' $\square$

Proposición 1.30. *Sea G un grupo topológico y H un subgrupo cerrado de G. Entonces G/H es un espacio regular y por tanto un espacio de Hausdorff.*

Demostración. Por hipótesis, H es cerrado en G. Entonces aH es cerrado en G para todo $a \in G$ y $(G/H)\backslash\{aH\} = \{xH : xH \neq aH\} = q(G\backslash aH)$ es abierto en G/H, lo cual quiere decir que el complemento de cada punto $aH \in G/H$ es abierto; por tanto cada punto aH es cerrado en G/H y este último es un espacio T_1. Para demostrar que el espacio es regular, es suficiente probar que para todo U^* en G/H que contenga a $eH = H$, existe un abierto V^* en G/H también conteniendo a H tal que $\mathrm{cl}_{G/H}(V^*) \subset U^*$. Sea $U^* = q(U)$ para alguna vecindad abierta de la identidad e en G; entonces existe un abierto $V \subset G$ con $e \in V$ y tal que $VV^{-1} \subset U$. Como la función q es continua se deduce que $H \in \mathrm{cl}_{G/H}(V^*) = \mathrm{cl}_{G/H}(q(V)) \subset q(U) = U^*$. □

Ahora, si H es un subgrupo compacto de G, la función $q : G \to G/H$ no solo es abierta, si no que adquiere más propiedades, para ser más específicos, esta se convierte en una función perfecta, es decir, cerrada y de fibras compactas. Dicha propiedad nos será de gran utilidad para posteriores ejemplos y resultados. Para poder observar esto último, primero se enunciarán algunas propiedades previas.

Teorema 1.31. *Si G es un grupo topológico y H es un subgrupo compacto de G, entonces la función cociente $q : G \to G/H$ es una función cerrada.*

Demostración. Suponiendo que A es cerrado en G, se probará que el complemento de $q(A)$ es abierto en G/H. Considérese $x \in G$ tal que $q(x) \notin q(A)$. Entonces $x \notin AH$. Dado que AH es cerrado, existe una vecindad U de x tal que $U \cap (AH) = \emptyset$. Como U es abierto, entonces $q(U)$ es un abierto en G/H que contiene a $q(x)$ y ajeno a $q(A)$. De lo contrario, sea $z \in q(U) \cap q(A)$, es decir $z = q(a) = q(u)$ para ciertos $a \in A$ y $u \in U$. Por lo tanto, $a^{-1}u \in U$ y $u \in AH$, lo cual es una contradicción. Como xH fue un elemento arbitrario de $(G/H) \setminus q(A)$ se concluye que $(G/H) \setminus q(A)$ es abierto. □

El siguiente resultado es básico de topología general.

Proposición 1.32. *Si $f : X \to Y$ es una función perfecta entre espacios topológicos, entonces para todo subconjunto compacto $Z \subset Y$, su imagen inversa $f^{-1}(Z)$ es compacto en X. En particular, si Y es compacto, entonces X lo es.*

Demostración. Primero notemos que si $y \in Z$ y U es una vecindad abierta de $f^{-1}(y)$, entonces existe una vecindad W de y tal que $f^{-1}(W) \subset U$. Esto último se puede ver si se define a $W := Y\backslash f(X\backslash U)$. Claramente $y \in W$ y W es abierto por ser f cerrada. Por lo tanto $f^{-1}(W) \subset U$.
Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de $f^{-1}(Z)$. Por hipótesis para toda $y \in Z$, $f^{-1}(y)$ es compacto. Como $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(Z) \subset \bigcup_{U\in\mathcal{U}} U$, entonces existe $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ finito tal que

$f^{-1}(y) \subset \bigcup_{U\in\mathcal{U}_0} U$. Si llamamos $U_y := \bigcup_{U\in\mathcal{U}_0} U$, resulta ser una vecindad abierta de $f^{-1}(y)$. Por el primer párrafo, entonces existe un V_y abierto en Y tal que $y \in V_y$ y $f^{-1}(V_y) \subset U_y$. Puesto que Z es compacto, la familia $\{V_y : y \in Z\}$ tiene una subcubierta finita $\{V_y : y \in Z'\}$, en donde Z' es un subconjunto finito de Z ; entonces la subfamilia finita $\{U_y : y \in Z'\}$ de $\mathcal{U}$ es una cubierta de $f^{-1}(Z)$. □

Teorema 1.33. *Sea G un grupo topológico y H un subgrupo compacto de G. Si $Q \subset G/H$ es compacto, entonces $P = q^{-1}(Q)$ es compacto, donde $q : G \to G/H$ es la función canónica.*

Demostración. Basta probar que q es perfecta. De la Proposición 1.32 y el Teorema 1.31 se sabe que q es cerrada. Ahora si $x \in G$, entonces $q^{-1}(q(x)) = xH$ que es compacto. Así que q es perfecta y la compacidad de $q^{-1}(Q)$ se deduce del teorema anterior. □

Ejemplo 1.34. El grupo del círculo se define como:

$$\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

Obsérvese que como $\mathbb{Z}$ es un subgrupo cerrado y normal de $\mathbb{Z}$ (pues $\mathbb{R}$ es abeliano), entonces $\mathbb{T}$ es un grupo topológico. Dadas dos clases de equivalencia $x+\mathbb{Z}$, $y+\mathbb{Z}$, éstas son iguales si y solo si $x-y \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, en cada clase $y+\mathbb{Z}$ existe un representante $x \in y+\mathbb{Z}$ con $x \in [0,1]$. Considérese la circunferencia unitaria $\mathbb{S}^1$ en el plano complejo $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ definida como $\mathbb{S}^1 = \{e^{2\pi ix} : x \in [0,1]\}$ y la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ dada por $f(x) = e^{2\pi ix}$. Si z es un entero, claramente $f(x+z) = f(x)$, por lo que f es constante en cada clase de equivalencia de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{R}$.

Para ver que $\mathbb{T}$ es isomorfo topológicamente a $\mathbb{S}^1$, considérese el homomorfismo canónico $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dado por $p(x) = x + \mathbb{Z}$ y la función $\phi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{S}^1$ dada por $\phi(x+\mathbb{Z}) = f(x) = e^{2\pi ix}$. La función ϕ está bien definida pues f es constante en cada elemento de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Se tiene entonces el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{R}/\mathbb{Z} \arrow[d, "\phi"] \\
 & \mathbb{S}^1
\end{tikzcd}$$

en el cual p y f son homomorfismos continuos abiertos, por lo que ϕ también lo es. Sin embargo, ϕ es una biyección ya que si $\phi(x+\mathbb{Z}) = \phi(y+\mathbb{Z})$ entonces $e^{2\pi ix} = e^{2\pi iy}$ y $e^{2\pi i(x-y)} = 1$. Además, es un hecho conocido de variable compleja que esto último ocurre si y solo si $x - y \in \mathbb{Z}$, es decir, tenemos que $x+\mathbb{Z} = y+\mathbb{Z}$, y ϕ es una biyección. Además como $p([0,1]) = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ y $[0,1]$ es compacto, también $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ lo es. Hemos probado entonces que el grupo del círculo $\mathbb{T}$ es compacto.

1.3. G-espacios y espacios de órbitas

Las ideas básicas y resultados de la teoría de G-espacios o grupos topológicos de transformaciones, así como las nociones no definidas en la presente sección, se pueden encontrar en [24], [8], [26] y [11].

Definición 1.35. Sea G un grupo topológico con elemento identidad e. Se dice que G *actúa* o bien *opera* (por la izquierda) en un espacio topológico X y que X es un *G-espacio* cuando existe una función continua $\theta\colon G \times X \to X$, llamada *acción* de G en X que satisface:

I) $\theta(e, x) = x$ para cada $x \in X$.

II) $\theta(h, \theta(g, x)) = \theta(hg, x)$ para todo $g, h \in G$ y $x \in X$.

En la práctica $\theta(g, x)$ se escribe simplemente gx; así tenemos: $ex = x$ y $h(gx) = (hg)x$; también se utilizarán las notaciones $g \cdot x$ o bien $g * x$ en lugar de gx.

Se dice que G *actúa por la derecha* en X cuando existe una función $(x, g) \to xg$ tal que para toda $x \in X$ y toda $g, h \in G$ $xe = x$ y $(xg)h = x(gh)$. Puntualmente una *G-acción*, ó simplemente *acción*, significará siempre una acción por la izquierda.

Ejemplo 1.36. Sea $\theta\colon (\mathbb{R}, +) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, con $\theta(t, (x, y)) = (x+t, y)$. Se comprueba que θ es una acción de $(\mathbb{R}, +)$ sobre $\mathbb{R}^2 : (x+0, y) = (x, y)$ y $\theta(t_1, (t_2+x, y)) = \theta(t_1+t_2+x, y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$ y todo $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

La acción θ de G en X induce para cada $g \in G$ la transformación

$$\theta_g\colon X \to X, \quad \theta_g(x) = \theta(g, x)$$

que llamaremos *transición*. Las propiedades (I) y (II) implican que θ_g es biyectiva; en efecto, θ_e es la función identidad 1_X y $\theta_{hg} = \theta_h\theta_g$, por consiguiente $(\theta)_{g^{-1}} = (\theta_g)^{-1}$. Sea $Biy(X)$ el grupo de las permutaciones de X, es decir, el grupo de todas las transformaciones biyectivas de X en si mismo, con la operación composición. La correspondencia $g \to \theta_g$ define un homomorfismo

$$\Theta\colon G \to Biy(X) \quad \Theta(g) = \theta_g$$

que llamaremos *homomorfismo inducido por θ*. Por eso es intuitivo usar el término grupo topológico de transformaciones, o G-espacio, para referirse a la terna (G, X, θ) donde $\theta\colon G \times X \to X$ es una acción continua del grupo topológico G en un espacio topológico X; obviamente cada $\theta_g\colon X \to X$ es un homeomorfismo.

El siguiente resultado será de utilidad posteriormente.

Lema 1.37. *Sean $f : A \to B$ y $\beta : B \to C$ dos funciones continuas entre espacios topológicos. Si f es sobreyectiva y la composición βf es cerrada, entonces β es cerrada.*

Demostración. Sea $F \subset B$ cerrado. Como $f^{-1}(F)$ es cerrado en A, $\beta f(f^{-1}(F))$ es cerrado en C. Pero f es sobreyectiva, por lo tanto $ff^{-1}(F) = F$, de ahí que $\beta(F)$ es cerrado en C. □

Definición 1.38. Sea G un grupo topológico, H un subgrupo de G, $x \in X$ y $A \subset X$.

- $H(A) = \{ha; h \in H, a \in A\}$.
- A es un conjunto invariante[4] en X respecto a la acción dada de G en X si $GA = A$.
- $G(x) = \{gx; g \in G\}$ es la órbita de x.
- El conjunto de órbitas se denota X/G.
- La proyección obital se define como $\pi\colon X \to X/G$, donde $\pi(x) = Gx \in X/G$.
- $G_A = \{g \in G; gA = A\}$ es el estabilizador de A.
- $G_x = \{g \in G; gx = x\}$ es el grupo de isotropía de x.
- x es un punto fijo o estacionario si $G_x = G$.
- $X[H] = \{x \in X : H \subset G_x\}$ es el conjunto de puntos H-fijos.

Proposición 1.39. *A es un conjunto invariante si y sólo si $gA \subset A$ para todo $g \in G$.*

Demostración. Si A es un conjunto invariante entonces claramente $gA \subset A$ para cada g. Ahora si $gA \subset A$ para todo g entonces

$$A = (gg^{-1})A = g(g^{-1}A) \subset gA$$

y de aquí se obtiene la igualdad $A = gA$ para todo g, lo que implica que $GA = \bigcup_{g \in A} gA = A$. Obsérvese que A es invariante si y sólo si su estabilizador es todo G. □

Directamente de las definiciones se concluye lo siguiente:

- Para todo conjunto invariante A la restricción de la acción θ al producto $G \times A$ es una acción de G en A.

[4]Cuando no haya confusión, se usará el término “conjunto invariante” omitiendo la frase “respecto de la acción dada”

- Para cada subgrupo H de G la restricción de θ a $H \times X$ es una acción de H en X.

Proposición 1.40. *Dos órbitas o bien son iguales o son ajenas.*

Demostración. Sean x_1 y x_2 dos puntos de X. Si $x \in G(x_1) \cap G(x_2)$ existen g_1 y g_2 en G tales que $g_1x_1 = x = g_2x_2$. Entonces $x_1 = g_1^{-1}g_2x_2 \in G(x_2)$ y $x_2 = g_2^{-1}g_1x_1 \in G(x_1)$, de donde $G(x_1) \subset G(x_2) \subset G(x_1)$. Por lo que $G(x_1) = G(x_2)$. $\square$

Proposición 1.41. *El estabilizador G_A de cualquier subconjunto A de X es un subgrupo de G.*

Demostración. Si $g \in G_A$ entonces $gA = A$ luego $A = g^{-1}A$ y entonces $g^{-1} \in G_A$. Para elementos g y h en G_A tenemos que $(gh)A = g(hA) = gA = A$ por lo tanto $gh \in G_A$, además $e \in G_A$ claramente. $\square$

En particular, el estabilizador de x o grupo de isotropía G_x es efectivamente un grupo y es el mayor subgrupo de G que fija a x. Ahora bien, que un punto x_0 permanezca estacionario o fijo durante la acción equivale a que su estabilizador sea G, esto es, $x_0 \in X[G]$ si y sólo si $G_{x_0} = G$.

Proposición 1.42. *Para todo $g \in G$ y para cada $x \in X$, $G_{gx} = gG_xg^{-1}$.*

Demostración. Del hecho que $gG_xg^{-1}(gx) = gG_xx = \{gx\}$ tenemos que $gG_xg^{-1} \subset G_{gx}$ para todo x y todo g; en particular para el punto gx y el elemento g^{-1} se infiere de lo anterior que $g^{-1}G_{gx}g \subset G_{g^{-1}gx} = G_x$. Por lo tanto $G_{gx} \subset gG_xg^{-1}$ y de aquí se tiene la igualdad buscada. $\square$

Definición 1.43. Se dice que una acción de G en X es:

- trivial si $G_x = G$ para todo $x \in X$;
- libre si $G_x = \{e\}$ para todo $x \in X$;
- efectiva o fiel si $\bigcap_{x \in X} G_x = \{e\}$;
- transitiva si tiene una sola órbita.

Cuando G actúa trivialmente en X, $gx = x$ para todo $g \in G$ y todo $x \in X$, esto es, todo elemento de X es un punto fijo, que se expresa por $X[G] = X$. La acción trivial es la más "perezosa" pues no mueve un solo punto de X.

Por el contrario, si G actúa libremente, todo elemento g de G distinto de e mueve a cada punto de X, es decir, $gx \neq x$ para todo $x \in X$. Esto es pedir mucho más que no tener puntos fijos, simbólicamente $X[G] = \emptyset$. A veces la acción es *semilibre*, esto significa que $G_x = G$ o $G_x = \{e\}$ para cada $x \in X$; en tal caso G actúa libremente en el conjunto invariante $X \setminus X[G]$.

La efectividad de la acción de G en X equivale a que si $g \neq e$ entonces $gx \neq x$ para algún x. Toda acción libre es evidentemente efectiva.

Es claro que una acción de G en X es transitiva si y sólo si para x_1 y x_2 en X existe un $g \in G$ tal que $x_2 = gx_1$. Obsérvese que cuando la acción además de ser transitiva es libre, el elemento g de G tal que $x_2 = gx_1$ es único.

Es interesante que las propiedades topológicas del grupo y del espacio proporcionan ahora más información sobre sus órbitas y su espacio orbital; a su vez, la existencia de ciertos tipos de acciones implican algunas propiedades topológicas de los grupos y de los grupos de isotropía.

Definición 1.44. Diremos que X es un G-espacio libre o efectivo o transitivo si la acción es libre o efectiva o transitiva respectivamente y naturalmente un G-espacio discreto o de Hausdorff o metrizable significa que el espacio en el que actúa G tiene esa propiedad topológica.

De lo visto hasta el momento se concluye lo siguiente:

- Si X es un G-espacio entonces es un H-espacio para todo subgrupo H de G.
- Si A es un conjunto invariante de un G-espacio entonces A es un G-espacio.

La relación que tiene una función continua con la acción de un grupo G en un espacio X es de suma importancia para nuestros fines.

Definición 1.45. Sean X e Y dos G-espacios. Se dice que una función continua $f : X \to Y$ es *equivariante* o G-función, si $f(gx) = gf(x)$ para todo $x \in X$ y $g \in G$. En caso de que se cumpla que $f(gx) = f(x)$ para todo $g \in G$ y $x \in X$, la función f recibe el nombre de *G-invariante* o solo *invariante*.

El espacio de clases laterales, o cociente, de un grupo topológico G con un subgrupo cerrado H puede ser considerado un G-espacio, donde G actúa sobre G/H con la acción $(g_1, g_2H) \mapsto g_1g_2H$.

Proposición 1.46. *Sea G un grupo topológico y sean H, L subgrupos cerrados de G. Entonces existe una G-función $f : G/L \to G/H$ entre los G-espacios cocientes si y solo si L es conjugado a un subgrupo de H.*

Demostración. $\Rightarrow$): Supóngase que $aLa^{-1} \subset H$ para algún $a \in G$. Se define $f : G/L \to G/H$ como $f(gL) = ga^{-1}H$. Está bien definida pues si $g_1L = g_2L$, entonces $g_2^{-1}g_1 \in L$ y por hipótesis $ag_2^{-1}g_1a^{-1} \in H$, de ahí que $ag_2^{-1}g_1a^{-1}H = H \in G/H$ de donde se deduce que $g_1a^{-1}H = g_2a^{-1}H$. La equivarianza se da de la siguiente línea de igualdades

$$f(gg_1L) = gg_1a^{-1}H = g(g_1a^{-1}H) = gf(g_1L)$$

$\Leftarrow$): Supóngase que existe $f : G/L \to G/H$, G-función. Nótese que para todo $gL \in G/H$, $G_{gL} \subset G_{f(gL)}$. Pues si $h \in G_{gL}$ entonces $hf(gL) = f(hgL) = f(gL)$ por lo tanto $h \in G_{f(gL)}$. Además como $G_{gL} = gLg^{-1}$ para todo $gL \in G/L$ [Proposición 1.42] entonces existe un $\tilde{g} \in G$ tal que $f(gL) = \tilde{g}H$ y

$$G_{gL} = gLg^{-1} \subset G_{f(gL)} = G_{\tilde{g}H} = \tilde{g}H\tilde{g}^{-1}.$$

Haciendo $g_2 := \tilde{g}^{-1}g$ se tiene que $g_2Lg_2^{-1} \subset H$. □

Proposición 1.47. *La acción $\theta\colon G\times X \to X$ es abierta y, cuando G es finito, θ también es cerrada.*

Demostración. La prueba es consecuencia inmediata de la siguiente observación, $\theta(S \times E) = \cup_{g\in S} gE$ para todo $S \subset G$ y todo $E \subset X$. □

Para cada $x \in X$ la acción θ induce la función *movimiento* $\theta^x\colon g \to gx$ claramente continua y con imagen la órbita $G(x)$.

Ya que G actúa continua y transitivamente por traslación en G y también en Gx, el movimiento es equivariante por su definición. Incluso G actúa continuamente en el espacio de las clases laterales derechas por traslación izquierda, esto es, consideramos al espacio cociente G/G_x con la acción $g'(gG_x) = (g'gG_x)$. Ahora bien, dado que $\theta^x(g) = \theta^x(h)$ si y sólo si $h^{-1}g \in G_x$, el movimiento θ^x determina una función biyectiva del espacio G/G_x sobre la órbita Gx,

$$\bar{\theta^x}\colon G/G_x \to Gx,\ \bar{\theta^x}(gG_x) = gx.$$

La continuidad de $\bar{\theta^x}$ resulta del teorema de transgresión aplicado al diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\theta^x"] \arrow[dr, "q"'] & & Gx \\ & G/G_x \arrow[ur, "\bar{\theta^x}"'] & \end{tikzcd}$$

donde q es la proyección orbital, y es equivariante porque

$$\bar{\theta^x}(g'(gG_x)) = \bar{\theta^x}(g'gG_x) = g'gx = g'\bar{\theta^x}(gG_x).$$

Teorema 1.48. *Sea G un grupo compacto y X un G-espacio de Hausdorff, entonces la acción $\theta : G \times X \to X$ es cerrada.*

Demostración. Sea $C \subset G\times X$ un conjunto cerrado. Por demostrar que $\theta(C)$ es cerrado en X. Sea $y \in \mathrm{cl}_X(\theta(C))$, entonces existe una red $\{(g_\alpha, x_\alpha)\}$ en C tal que $g_\alpha x_\alpha \rightsquigarrow y$ por continuidad de la acción. Por la compacidad de G la red $\{g_\alpha\}$ tiene una subred

$\{g_{\alpha_i}\}$ tal que $g_{\alpha_i} \rightsquigarrow g$ para algún $g \in G$. Se tiene que $x_{\alpha_i} = g_{\alpha_i}^{-1}(g_{\alpha_i}x_{\alpha_i}) \rightsquigarrow g^{-1}y$, por lo tanto (g_{α_i}, x_α) converge a $(g, g^{-1}y) \in C$ puesto que C era cerrado, de ahí que $y = g(g^{-1}y) \in \theta(C)$. □

Corolario 1.49. *Si G es un grupo compacto y X un G-espacio, entonces $G(A)$ es cerrado para todo $A \subset X$ cerrado, y $G(A)$ es compacto si A es compacto.*

Proposición 1.50.

(1) Si G es compacto o conexo, las órbitas son compactas o conexas respectivamente.

(2) Si X es T_1 entonces los grupos de isotropía (o estabilizadores) son cerrados y si además θ es efectiva, G es de Hausdorff.

(3) La función biyectiva y equivariante $\bar{\theta}^x \colon G/G_x \to Gx$ es un homeomorfismo cuando G es compacto y X es de Hausdorff.

Demostración. Si G es compacto o conexo, $Gx = \theta^x(G)$ también lo es.
Ahora si $\{x\}$ es cerrado en X entonces $G_x = (\theta^x)^{-1}(x)$ es cerrado en G; así cuando X es T_1, $\ker\Theta = \cap G_x$ es cerrado y por lo tanto $G/\ker\Theta$ es un grupo de Hausdorff, donde Θ es el homomorfismo inducido por θ (ver Pág. 19). Concluimos la demostración de (2) recordando que θ es efectiva si y sólo si $\ker\Theta = \{e\}$.
Finalmente, cuando G es compacto y X es de Hausdorff, la función biyectiva equivariante $\bar{\theta}^x$ es cerrada y por tanto es un homeomorfismo. □

El *espacios de órbitas* o espacio orbital de un espacio X en donde actúa G es el conjunto de órbitas X/G provisto de la topología cociente respecto a la proyección orbital $\pi \colon X \to X/G$.

Proposición 1.51. *La proyección orbital π es abierta y cuando G es finito π es también cerrada.*

Demostración. Sea U un abierto de X, $\pi^{-1}\pi(U) = GU = \cup_{g\in G} gU$ es unión de abiertos en X por lo tanto $\pi(U)$ es abierto en X/G. Cuando G es finito, si C es cerrado en X entonces $\pi^{-1}\pi(C)$ es unión finita de cerrados gC, luego es cerrado, por tanto $\pi(C)$ es cerrado en X/G. □

A continuación veremos algunas propiedades topológicas tales que si X tiene esa propiedad también la tiene el espacio orbital X/G.

Proposición 1.52.

(1) Si X es conexo, localmente conexo, compacto o localmente compacto también lo es X/G respectivamente.

(2) Si X es primero numerable o segundo numerable, entonces X/G también lo es, respectivamente.

(3) Cuando G es finito, si X es T_1 o de Hausdorff o regular o normal; entonces X/G también lo es, respectivamente.

Demostración. Puesto que π es una identificación abierta, si C es una vecindad conexa o compacta de x en X, $\pi(C)$ es vecindad conexa o compacta de $\pi(x)$, respectivamente, entonces de inmediato se cumple (1). Ahora bien, (2) es consecuencia de lo siguiente: Si $\mathcal{B}$ es una base de X (o base de vecindades de x en X) entonces $\pi(\mathcal{B}) = \{\pi(V) : V \in \mathcal{B}\}$ es base de X/G (o base de vecindades de $\pi(x) \in X/G$).

Supongamos ahora que G es un grupo finito. Si X es T_1, también lo es X/G porque π es identificación cerrada. Para los casos restantes, consideramos dos conjuntos ajenos P y Q de X/G que son, o bien dos puntos o un punto y un cerrado o dos cerrados según sea X de Hausdorff o regular o normal, respectivamente. Dado que cada conjunto $\pi^{-1}(P)$ y $\pi^{-1}(Q)$ es finito o cerrado, entonces en cada caso estos conjuntos ajenos tienen vecindades ajenas. Por consiguiente existe una vecindad abierta U de $\pi^{-1}(P)$ tal que $\pi^{-1}(Q) \cap \mathrm{cl}_X(U) = \emptyset$, luego la intersección $Q \cap \pi(\mathrm{cl}_X(U))$ es vacía, y así hemos encontrado las vecindades abiertas ajenas $\pi(U)$ y $(X/G) \setminus \pi(\mathrm{cl}_X(U))$ de P y Q respectivamente. $\square$

Capítulo 2

Versiones equivariantes de teoremas clásicos

Es conocido que las funciones G-uniformes juegan el papel de las funciones continuas en el campo de los G-espacios. Por lo tanto, es natural esperar versiones equivariantes del Lema de Urysohn o el teorema de extension de Tietze-Urysohn para funciones G-uniformes. Este tipo de resultados fueron obtenidos antes por Megrelishvili [22, Teorema 1] y de Vries [13, p. 660]. En este capítulo presentamos una versión equivariante cuantitativa del Lema de Urysohn, la cual necesitaremos en el capítulo siguiente y una versión del Teorema de Tietze la cual involucra funciones G-uniformes. Naturalmente a lo largo del capítulo consideraremos a X como un espacio Tychonoff y G un grupo topológico de Hausdorff.

Recordemos la siguiente definición:

Definición 2.1. Sea X un G-espacio. Entonces una función continua $f : X \to \mathbb{R}$ es llamada *G-uniforme* si para todo $\varepsilon > 0$, existe una vecindad U de la identidad en G tal que $|f(gx) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in X, g \in U$.

2.1. Una versión equivariante del Lema de Urysohn

Con motivo de contrastar los teoremas, tanto en su versión de topología general y la versión que involucra acciones de grupos sobre espacios topológicos, se enuncia la primera versión sin demostración.

Teorema 2.2. *Para cualquier par de subconjuntos cerrados disjuntos A y B de un espacio topológico normal existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $A \subset f^{-1}(0)$ y $B \subset f^{-1}(1)$*

Para un subconjunto K de un grupo G y un entero positivo n, denotaremos por K^n al conjunto de todos los productos de la forma $g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdots g_n$, donde cada $g_i \in K$, $i \in \{1, ..., n\}$.

La siguiente noción de espacios G-normales fue introducida por Megrelishvili en [22]:

Definición 2.3. Sea X un G-espacio.

(1) Dos subconjuntos A y B de X son llamados *G-disjuntos* si existe una vecindad $O \subset G$ de la identidad tal que $O(A) \cap O(B) = \emptyset$.

(2) X es llamado *G-normal* si para cualesquiera dos subconjuntos cerrados G-disjuntos A y B de X, existen subconjuntos abiertos G-disjuntos U y V tales que $A \subset U$ y $B \subset V$.

De la definición se pueden desprender las siguientes afirmaciones.

Lema 2.4. *Sea X un G-espacio y sean A, B subconjuntos de X tales que $A \cap B = \emptyset$ y alguno de los dos es G-invariante, entonces A y B son G-disjuntos.*

Demostración. Supóngase que A y B no son G-disjuntos y sin pérdida de generalidad que A es G-invariante. Por demostrar que $A \cap B \neq \emptyset$.
Sea U vecindad de la identidad en G, por hipótesis $U(A) \cap U(B) \neq \emptyset$, como A es G-invariante $U(A) \subseteq A$, se tiene que $A \cap U(B) \neq \emptyset$. Entonce $a = gb$ para ciertos $a \in A$, $b \in B$ y $g \in U$. Como $g^{-1}a = b$ dado que A es G-invariante se tiene que $A \cap B \neq \emptyset$. $\square$

Lema 2.5. *Sean A, B subconjuntos cerrados de un G-espacio X tales que $A \cap B = \emptyset$ y alguno de los dos es compacto, entonces A y B son G-disjuntos.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad supóngase que A es compacto. Dado que $A \cap B = \emptyset$, se sigue que $A \subset X \backslash B$ donde $X \backslash B$ es abierto. Por continuidad de la acción en los puntos de la forma (e, a), donde e denota a la identidad en G y $a \in A$, se tiene que para todo $a \in A$ existe V_a vecindad de a y U_a vecindad de la identidad tales que $hy \in X \backslash B$ siempre que $h \in U_a$ y $y \in V_a$.

Por compacidad de A, la cubierta $\{V_a : a \in A\}$ de A, tiene una subcubierta finita $\{V_i : i \in \{1, ..., n\}\}$. Considérese $W := \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ vecindad de la identidad en G. Entonces $W\left(\bigcup_{i=1}^{n} V_i\right) \subset X \backslash B$, pues si $h \in W$ y $z \in \bigcup_{i=1}^{n} V_i$ entonces existe $1 \leq j \leq n$ tal que $z \in V_j$ y $hz \in X \setminus B$. Además del hecho que $W(A) \subset W\left(\bigcup_{i=1}^{n} V_i\right)$ se sigue que $W(A) \cap B = \emptyset$.

Por la continuidad de las funciones multiplicación y $g \mapsto g^{-1}$ en G, existe una vecindad simétrica de la identidad O tal que $O^2 \subset W$. Afirmamos que $O(A) \cap O(B) = \emptyset$. Supóngase lo contrario, entonces existe $g_1 a = g_2 b$ para ciertos $a \in A$, $b \in B$, $g_1, g_2 \in O$, entonces $g_2^{-1}g_1a = b$, es decir $O^2(A) \cap B \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción, pues como $O^2 \subset W$ implica que $O^2(A) \subset W(A)$ y se tenía que $W(A) \cap B = \emptyset$. $\square$

Proposición 2.6. *Cualquier función continua de un G-espacio X con valores reales, la cual es constante fuera de un subconjunto compacto, es necesariamente G-uniforme.*

Demostración. Sea X un G-espacio, A un subconjunto compacto de X, $c \in \mathbb{R}$ fijo y $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = c$ para toda $x \in X \backslash A$. Sea $\varepsilon > 0$. Por demostrar f es G-uniforme.

Por continuidad de f para todo $a \in A$ existe W_a vecindad de a tales que

$$|f(z) - f(a)| < \varepsilon/2$$

siempre que $z \in W_a$. Por la continuidad de la acción en los puntos de la forma (e, a), para todo $a \in A$ existe U_a vecindad de la identidad en G y V_a vecindad de a en X tales que $hy \in W_a$ siempre que $h \in U_a$ y $y \in V_a$. Como A es compacto la cubierta $\{V_a : a \in A\}$ tiene una subcubierta finita $\{V_{a_i} : 1 \leq i \leq n\}$. Por la continuidad de las funciones multiplicación y $g \mapsto g^{-1}$ en G, para cada $1 \leq i \leq n$ existe una vecindad simétrica de la identidad O_{a_i} tal que $O_{a_i}^2 \subset U_{a_i}$. Ahora tomemos en cuenta a $O := \bigcap_{i=1}^n O_{a_i}$ vecindad de la identidad y $W' = \bigcup_{i=1}^n O_{a_i}(V_{a_i})$. Notemos que $A \subset \bigcup_{i=1}^n V_{a_i} \subset W'$, pues $V_{a_i} \subset O_{a_i}(V_{a_i})$, ya que O_{a_i} contiene la identidad.

Afirmamos que O es la vecindad buscada. Sea $g \in O$ arbitrario y considérese los siguientes casos:
Caso 1): Supóngase que $x \in W'$, entonces $x \in O_{a_j}(V_{a_j})$ para algún $j \in \{1, 2, ..., n\}$. Dado que $x \in O_{a_j}(V_{a_j}) \subset O_{a_j}^2(V_{a_j}) \subset U_{a_j}(V_{a_j}) \subset W_{a_j}$ y que $gx \in O_{a_j}^2(V_{a_j}) \subset U_{a_j}(V_{a_j}) \subset W_{a_j}$, se tiene que

$$|f(gx) - f(x)| \leq |f(gx) - f(a_j)| + |f(x) - f(a_j)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Caso 2): Ahora sea $x \notin W'$ y supóngase que $gx \in A$, entonces $gx \in V_{a_k}$ para algún $1 \leq k \leq n$, como O es simétrica entonces $g^{-1} \in O_{a_k}$ por lo que $x = g^{-1}(gx) \in O_{a_k}(V_{a_k})$ lo cual es una contradicción y se tiene que $gx \notin A$.
De ahí que para todo $g \in O$ y $x \notin W'$

$$0 = |c - c| = |f(gx) - f(x)| < \varepsilon$$

$\square$

Corolario 2.7. *Toda función continua con valores reales de un G-espacio compacto es G-uniforme.*

Lema 2.8. *Sea X un G-espacio, entonces toda función continua invariante $f : X \to \mathbb{R}$ es G-uniforme.*

Demostración. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua e invariante. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario y considérese a $U = G$ como vecindad de la identidad en G, sea $x \in X$ cualquier punto, se tiene lo siguiente

$$0 = |f(x) - f(x)| = |f(gx) - f(x)| < \varepsilon$$

por lo tanto f es G-uniforme. □

Los conjuntos G-disjuntos y las funciones G-uniformes están relacionados íntimamente.

Lema 2.9. *Sea G un grupo cualquiera, X un G-espacio, $h : X \to \mathbb{R}$ una función G-uniforme y $[a, b]$, $[c, d]$ intervalos disjuntos de $\mathbb{R}$. Entonces los conjuntos $K = h^{-1}[[a, b]]$ y $L = h^{-1}[[c, d]]$ son G-disjuntos.*

Demostración. Supóngase que $a \leq b < c \leq d$. Sea $0 < \varepsilon < (c - d)/2$ arbitrario. Como h es G-uniforme existe U vecindad de la identidad en G tal que $|h(gx) - h(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in X$ y $g \in U$. Entonces $U(K) \cap L = \emptyset$. De lo contrario, existe $g \in U$ y $k \in K$ tales que $gk \in L$. Entonces tenemos que $h(k) \in [a, b]$ y $h(gk) \in [c, d]$. Por otro lado $|h(gk) - h(k)| < \varepsilon$, afirmando que $h(gk) \in [a-\varepsilon, b+\varepsilon]$. Dado que $[a-\varepsilon, b+\varepsilon] \cap [c, d] = \emptyset$, se tiene una contradicción.

Ahora, cualquier vecindad V simétrica de la identidad que satisfaga $V^2 \subset U$ cumple con $V(K) \cap V(L) = \emptyset$. □

En particular tenemos lo siguiente.

Lema 2.10. *Todo G-espacio compacto es G-normal.*

Demostración. Sea X un G-espacio compacto, dado que X es Hausdorff entonces es normal. Sean A, B subconjuntos cerrados G-disjuntos arbitrarios de X. Por Lema de Urysohn existe $f : X \to [0, 1]$ continua tal que $A \subset f^{-1}(0)$ y $B \subset f^{-1}(1)$. Por el Corolario 2.7 f es G-uniforme, así que existe W vecindad de la identidad en G tal que $|f(gx) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in X$ y $g \in W$, con $0 < \varepsilon < 1/4$.
Considérese $U = f^{-1}([0, 1/4))$ y $V = f^{-1}((3/4, 1])$ abiertos en X, es claro que $A \subset U$ y $B \subset V$. Por Lema 2.9 tenemos que U y V son G-disjuntos. Esto termina la prueba. □

Lema 2.11. *Sea G un grupo cualquiera, X un G-espacio, K un subconjunto compacto de G, A un subconjunto cerrado de X, y U una vecindad del conjunto $K(A) = \{ka : k \in K, a \in A\}$. Entonces*

(1) existe una vecindad O de A tal que $K(O) \subset U$;

(2) si, además, X es un G-espacio normal, entonces para cualquier conjunto compacto $K_1 \subset G$ que cumpla que $K_1K_1 \subset K$, existe un conjunto abierto V en X tal que $K_1(A) \subset V$ y $K_1(cl_X(V)) \subset V$.

Demostración. (1): Sea $a \in A$ fijo. Entonces para cada $k \in K$ existen vecindades V_k y O_k de k y a, respectivamente, tales que $V_k(O_k) \subset U$, esto por continuidad de la acción. Por la compacidad de K su cubierta abierta $\{V_k : k \in K\}$ tiene una subcubierta finita $\{V_{k_1}, ..., V_{k_p}\}$. Sean $V_a = \bigcup_{i=1}^p V_{k_i}$ y $O_a = \bigcap_{i=1}^p O_{k_i}$. Entonces V_a y O_a son vecindades de K y a, respectivamente, y $V_a(O_a) \subset U$, en particular $K(O_a) \subset U$. Puesto que a fue tomado arbitrariamente, considérese a $O := \bigcup_{a \in A} O_a$. Veamos que $K(O) \subset U$. Sea $ky \in K(O)$, entonces existe $a \in A$ tal que $y \in O_a$, por lo cual $ky \in K(O_a) \subset U$. Así O es la vecindad buscada de A.

(2): Se define $A_1 := K_1(A)$. Como $K_1(A_1) = K_1K_1(A) \subset K(A) \subset U$, por la primera parte del lema, existe W vecindad de A_1 tal que $K_1(W) \subset U$. Dado que A_1 es cerrado en X, esto por [Cap. 1, Secc. 1.3, Corolario 1.49], de la normalidad de X existe una vecindad V de A_1 con $\mathrm{cl}_X(V) \subset W$. Entonces V es la vecindad deseada. □

Lema 2.12. *Sea G un grupo localmente compacto. Entonces cada G-espacio normal es G-normal.*

Demostración. Sea X un G-espacio normal y A, B dos subconjuntos cerrados G-disjuntos de X. Por definición, existe $U \subset G$ vecindad de la unidad tal que $U(A) \cap U(B) = \emptyset$. Sea $V_1 \subset G$ una vecindad simétrica de la identidad tal que $V_1^2 \subset U$. Como G es localmente compacto, existe una vecindad V_2 de la identidad en G tal que $V_2 \subset \mathrm{cl}_G(V_2) \subset U$ y $\mathrm{cl}_G(V_2)$ compacto. Si consideramos a $V := V_1 \cap V_2$, entonces $V = V^{-1}$, es decir, es simétrica y $V^2 \subset U$. Además, del hecho que $\mathrm{cl}_G(V) \subset \mathrm{cl}_G(V_2)$ se sigue que $\mathrm{cl}_G(V) \subset U$ y es compacto.

Debido a que $(\mathrm{cl}_G(V))(A) \subset U(A)$ y $(\mathrm{cl}_G(V))(B) \subset U(B)$ observamos que $(\mathrm{cl}_G(V))(A) \cap (\mathrm{cl}_G(V))(B) = \emptyset$. Como $(\mathrm{cl}(V))(B)$ es cerrado por [Cap. 1, Secc. 1.3, Corolario 1.49], por Lema 2.11 inciso (1), existe una vecindad O de A tal que

$$(\mathrm{cl}_G(V))(O) \cap (\mathrm{cl}_G(V))(B) = \emptyset$$

Por la normalidad de X, existe O_1 vecindad de A tal que $\mathrm{cl}_X(O_1) \subset O$. Entonces $(\mathrm{cl}_G(V))(O_1) \subset (\mathrm{cl}_G(V))(O)$ y así $(\mathrm{cl}_G(V))(O_1) \cap (\mathrm{cl}_G(V))(B)$ es vacío. Como $(\mathrm{cl}_G(V))(\mathrm{cl}_X(O_1))$ es cerrado, aplicando de nuevo el inciso (1) del Lema 2.11, obtenemos una vecindad O_2 de B tal que $(\mathrm{cl}_G(V))(\mathrm{cl}_X(O_1)) \cap (\mathrm{cl}_G(V))(\mathrm{cl}_X(O_2)) = \emptyset$.

En particular $V(O_1) \cap V(O_2) = \emptyset$, mostrando que son las vecindades buscadas G-disjuntas de A y B, respectivamente. □

Para otros ejemplos de espacios G-normales hacemos la referencia al lector a [23], donde también se encuentran ejemplos de G-espacios normales pero que no son G-

normales donde el grupo actuante no es localmente compacto. La respuesta a la siguiente pregunta permanece abierta.

Pregunta 2.13. Sea G un grupo localmente compacto. Existe un G-espacio G-normal cuyo espacio topológico base no sea normal?

A continuación se presenta una versión equivariante *cuantitativa* del bien conocido Lema de Urysohn, el cual será de apoyo para el capítulo siguiente.

Teorema 2.14. *Sea G un grupo topológico, X un G-espacio normal, A y B subconjuntos cerrados de X. Supóngase que $\mathcal{K} = \{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de subconjuntos compactos simétricos de G que contienen a la identidad tales que $K_0(A) \cap B = \emptyset$ y $K_{n+1}K_{n+1} \subset K_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Entonces, existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que*

(1) $A \subset f^{-1}(0)$ y $B \subset f^{-1}(1)$; y

(2) $|f(gx) - f(x)| < 1/2^{n-2}$ para todo $x \in X$ y $g \in K_{n+1}$, $n = -1, 0, 1, \ldots$

Demostración. La prueba consiste en una apropiada manipulación de la bien conocida demostración del Lema de Urysohn. (Ver, por ejemplo [9, Teorema 6.17, Cap. 6, Secc. 3]).

A cada número racional $r \in [0, 1]$ de la forma $r = k/2^n$ con $k = 0, 1, \ldots, 2^n$, $n \geq 1$ (llamado número racional diádico), se le asocia un conjunto abierto $\Gamma(r) \subset X$ tal que cumple las siguientes condiciones

(I) $A \subset \Gamma(0)$, $X \setminus B = \Gamma(1)$;

(II) $K_{n+1}\left(\mathrm{cl}_X(\Gamma(k/2^n))\right) \subset \Gamma((k+1)/2^n)$ para todo $n \geq 0$ y $k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$;

(III) $\mathrm{cl}_X(\Gamma(r)) \subset \Gamma(s)$ siempre que $r < s$.

Se demostrará la existencia de dicha sucesión de conjuntos $\Gamma(k/2^n) \subset X$, $n \geq 0$, por inducción sobre n.

Sea $n = 0$. Por Lema 2.11 inciso (2), se sigue del hecho que $K_0(A) \cap B = \emptyset$ y $K_1K_1 \subset K_0$, que existe un conjunto abierto W tal que $K_1(A) \subset W$ y $K_1\left(\mathrm{cl}_X(W)\right) \subset X \setminus B$, es decir $K_1\left(\mathrm{cl}_X(W)\right) \cap B = \emptyset$. Tomamos $\Gamma(0) = W$ y $\Gamma(1) = X \setminus B$. Como K_1 contiene a la identidad en G, W es vecindad de A. Por lo que se tiene que

$$A \subset \Gamma(0) \quad \text{y} \quad K_1\left(\mathrm{cl}_X(\Gamma(0))\right) \subset \Gamma(1).$$

Ahora supóngase que los conjuntos $\Gamma(k/2^n)$, $k = 0, \ldots, 2^{n-1}$, han sido construidos. Se pretende construir los conjuntos de la forma $\Gamma(k/2^n)$, $k = 0, \ldots, 2^n$.

Es suficiente considerar el caso en que k es impar, a saber $k = 2m + 1$, para algún $m \in \mathbb{N}$.

Entonces $(k+1)/2^n = (2m+1+1)/2^{n-1} = 2(m+1)/2^n = (m+1)/2^{n-1}$ y $(k-1)/2^n = (2m-1+1)/2^n = m/2^{n-1}$. Como los conjuntos $\Gamma(m/2^{n-1})$ y $\Gamma((m+1)/2^{n-1})$ ya están definidos por hipótesis inductiva, se tiene que

$$K_n\left(\mathrm{cl}_X(\Gamma(m/2^{n-1}))\right) \subset \Gamma((m+1)/2^{n-1}).$$

Dado que $K_{n+1}K_{n+1} \subset K_n$, de nuevo por (2) Lema 2.11 existe $V \subset X$ abierto tal que

$$K_{n+1}\left(\mathrm{cl}_X(\Gamma(m/2^{n-1}))\right) \subset V \quad \text{y} \quad K_{n+1}\left(\mathrm{cl}_X(V)\right) \subset \Gamma((m+1)/2^{n-1}).$$

Haciendo $\Gamma(k/2^n) = V$ se obtienen los conjuntos $\Gamma(k/2^n)$ $k = 0, 1, ..., 2^n$ que satisfacen las condiciones (I), (II) y (III). El caso k par, es análogo. Esto completa el paso inductivo.

Ahora se define la función $f : X \to [0,1]$ como,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \notin \Gamma(1) \\ \inf\{r : x \in \Gamma(r)\}, & \text{si } x \in \Gamma(1) \end{cases}$$

Por definición de f, $f(x) \in [0,1]$ para todo $x \in X$, $A \subset f^{-1}(0)$ y $B \subset f^{-1}(1)$, pues $A \subset \Gamma(0) \subset \mathrm{cl}_X(\Gamma(0)) \subset \Gamma(1)$.

Veamos que f es continua. Basta observar que $f^{-1}[[0,a)]$ y $f^{-1}[(b,1]]$ son abiertos en X, donde $0 \leq a$, $b \leq 1$.

De hecho, si $x \in f^{-1}[[0,a)]$, entonces existe un racional diádico $r < a$ tal que $x \in \Gamma(r)$. Esto significa que $f^{-1}[[0,a)] = \bigcup_{r<a} \Gamma(r)$, por lo que, $f^{-1}[[0,a)]$ es abierto.

Si $x \in f^{-1}[(b,1]]$, entonces existe un racional diádico $q > b$ tal que $x \notin \Gamma(q)$. Por propiedad (III) existe $s \in (b,q)$ tal que $x \notin \mathrm{cl}_X(\Gamma(s))$. Pues $\mathrm{cl}_X(\Gamma(s)) \subset \Gamma(q)$ y $x \in X \setminus \Gamma(q) \subset X \setminus \mathrm{cl}_X(\Gamma(s))$. Por consiguiente $f^{-1}[(b,1]] = \bigcup_{s>q}(X \setminus \mathrm{cl}_X(\Gamma(s)))$, por lo tanto $f^{-1}[(b,1]]$ es abierto.

Ahora veamos que $|f(gx) - f(x)| < 1/2^{n-2}$ siempre que $x \in X$ y $g \in K_{n+1}$ con $n \geq -1$.

Sea $x \in X$ fijo, y $g \in K_{n+1}$ con $n \geq -1$. Si $n = -1, 0, 1$ entonces es evidente que $|f(gx) - f(x)| < 1/2^{n-2}$.

Supóngase que $n \geq 2$, y se escoge $0 \leq k \leq 1/2^n$ tal que $(k-1)/2^n \leq f(x) < k/2^n$.

La desigualdad $f(x) < k/2^n$ implica que $x \in \Gamma(k/2^n)$, pues de la definición existe $r \in [f(x), k/2^n)$ racional diádico tal que $x \in \Gamma(r)$ y por la propiedad (III), en la parte de arriba, $\mathrm{cl}_X(\Gamma(r)) \subset \Gamma(k/2^n)$, implicando que $x \in \Gamma(k/2^n)$.

Com $g \in K_{n+1}$, de la propiedad (II) se sigue $gx \in K_{n+1}(\mathrm{cl}_X(\Gamma(k/2^n))) \subset \Gamma((k+1)/2^n)$.
Por la definición de f, se tiene que $f(gx) \leq (k+1)/2^n$.

La desigualdad $(k-1)/2^n \le f(x)$ implica que $x \notin \Gamma((k-2)/2^n)$. Como $g^{-1} \in K_{n+1}$ y $x = g^{-1}(gx)$, se sigue de la propiedad (II) que $gx \notin \Gamma((k-3)/2^n)$. Por lo tanto, $f(gx) \ge (k-3)/2^n$.

Así que, $(k-3)/2^n \le f(gx) \le (k+1)/2^n$. Por lo tanto, $|f(gx) - f(x)| \le 1/2^{n-2}$. □

El teorema anterior nos lleva a la siguiente prueba (ver [1, Corolario 2.7]) de la versión equivariante del Lema de Urysohn. (ver [22], [16]).

Corolario 2.15. *Sea G un grupo localmente compacto, X un G-espacio normal, y A, B subconjuntos cerrados G-disjuntos de X. Entonces existe una función G-uniforme $f : X \to [0,1]$ tal que $A \subset f^{-1}(0)$ y $B \subset f^{-1}(1)$.*

Demostración. Como A y B son G-disjuntos y G es localmente compacto, existe una vecindad simétrica $U \subset G$ de la identidad tal que $\mathrm{cl}_G(U)$ es compacta y $(\mathrm{cl}_G(U))(A) \cap B = \emptyset$ (justo como en la demostración del Lema 2.12). Sea $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de vecindades simétricas $U_n \subset G$ de la identidad tal que $U_0 = U$ y $\mathrm{cl}_G(U_{n+1})\mathrm{cl}_G(U_{n+1}) \subset U_n$ para toda $n \ge 0$. Entonces la sucesión $\mathcal{K} = \{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ donde $K_n := \mathrm{cl}_G(U_n)$, $n = 0, 1, ...,$ satisface las condiciones (I), (II) y (III) del Teorema 2.14. Sea $f : X \to [0,1]$ una función G-uniforme correspondiente a la sucesión $\mathcal{K}$.

Ahora, para un $\varepsilon > 0$ dado, sea $n \ge 0$ tal que $1/2^{n-2} < \varepsilon$. Entonces, por el Teorema 2.14 para cada $x \in X$ y $g \in U_{n+1} \subset K_{n+1}$, se tiene que $|f(gx) - f(x)| < 1/2^{n-2}$. Dado que $1/2^{n-2} < \varepsilon$ la prueba está completa. □

2.2. Teorema de Tietze para funciones G-uniformes

Dada la importancia de teoremas como el de extensión de Tietze en topología general, es común esperar resultados análogos, o generalizaciones, para el caso donde se involucran acciones de grupos sobre espacios topológicos. Con la finalidad de contrastar dicha generalización al caso de los G-espacios enunciamos, sin demostración, el Teorema de Tietze en su versión sin acciones de grupos.

Teorema 2.16 (Teorema de extensión Tietze)**.** *Sea X un espacio topológico normal, entonces toda función continua $f : A \to [0,1]$, definida en algún subconjunto cerrado A de X, tiene una extensión continua a todo X.*

A continuación se presenta una versión equivariante del importante resultado que se acaba de mencionar, en el sentido de que ahora se involucran funciones G-uniformes y espacios G-normales.

Teorema 2.17. *Sea G un grupo localmente compacto, X un G-espacio G-normal, y A un subconjunto cerrado de X. Entonces cualquier función G-uniforme $f : A \to [0,1]$ puede ser extendida a una función G-uniforme $f^* : X \to [0,1]$.*

Demostración. Primero nótese que el intervalo $[0,1]$ es homeomorfo al intervalo $J := [-1,1]$, pues la transformación lineal $\gamma(x) = 2x - 1$ es tal que $\gamma([0,1]) = [-1,1]$. Por lo que basta probar que toda función G-uniforme $f : A \to J$ se puede extender a una función G-uniforme $f^* : X \to J$.

Afirmación. Para cada función G-uniforme $h : A \to J$ y $c \in [0,1]$, tal que $|h(x)| \leq c$, $x \in A$, existe una función G-uniforme $\phi : X \to J$ que satisface las siguientes condiciones

$$|\phi(x)| \leq \frac{1}{3}c \quad \text{para} \quad x \in X \tag{2.1}$$

$$|h(x) - \phi(x)| \leq \frac{2}{3}c \quad \text{para} \quad x \in A. \tag{2.2}$$

Demostración de la afirmación. Como h es G-uniforme, entonces h es continua por definición, de ahí que $K := h^{-1}\left([-c, -\frac{1}{3}c]\right)$ y $L := h^{-1}\left([\frac{1}{3}c, c]\right)$ son cerrados en A, por lo tanto son cerrados en X. Por Lema 2.9 K y L son G-disjuntos. Ahora, por Corolario 2.15, existe una función G-uniforme $k : X \to [0,1]$ tal que $K \subset k^{-1}(0)$ y $L \subset k^{-1}(1)$.

Se define la función $\phi : X \to J$ como $\phi(x) = \frac{2}{3}c\left(k(x) - \frac{1}{2}\right)$, $x \in X$. Veamos que esta función es G-uniforme. Sea $x \in X$ fijo y $\delta > 0$ arbitrario, como k es continua existe una vecindad U de x en X tal que

$$|k(y) - k(x)| < \delta \quad \text{para todo} \quad y \in U$$

Sea $z \in U$ arbitrario, tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} |\phi(z) - \phi(x)| &= \left|\frac{2}{3}c\left(k(z) - \frac{1}{2}\right) - \frac{2}{3}c\left(k(x) - \frac{1}{2}\right)\right| \\ &= \left|\frac{2}{3}c\left(k(z) - k(x)\right)\right| \\ &\leq \left|\frac{2}{3}c\right||k(z) - k(x)| < \left|\frac{2}{3}c\right| \cdot \delta < \delta \end{aligned}$$

por lo que ϕ es continua. Ahora dado $\varepsilon > 0$ como k es G-uniforme, existe O vecindad de la identidad en G tal que $|k(gx) - k(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ para todo $g \in O$ y $x \in X$. Sean $x \in X$ y $g \in O$ arbitrarios, entonces

$$\begin{aligned} |\phi(gx) - \phi(x)| &= \left|\frac{2}{3}c\left(k(gx) - \frac{1}{2}\right) - \frac{2}{3}c\left(k(x) - \frac{1}{2}\right)\right| \\ &= \left|\frac{2}{3}c\left(k(gx) - k(x)\right)\right| < \frac{1}{3}c \cdot \varepsilon < \varepsilon \end{aligned}$$

lo cual prueba que ϕ es G-uniforme como se quería.

Falta observar que $\phi(x)$ cumple las condiciones (2.1) y (2.2). Como $0 \leq k(x) \leq 1$ para $x \in X$, entonces $|k(x) - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}$ y por lo tanto $|\phi(x)| = \left|\frac{2}{3}c\left(k(x) - \frac{1}{2}\right)\right| \leq \frac{2}{3}c \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}c$.

Para la condición (2.2) considérese 3 casos:
(i) Si $x \in L$, entonces $k(x) = 1$ y por lo tanto $\phi(x) = \frac{1}{3}c$. Por otro lado, $\frac{1}{3}c \leq h(x) \leq c$ de ahí que $|h(x) - \phi(x)| \leq \frac{2}{3}c$.
(ii) Similarmente si $x \in K$, entonces $k(x) = 0$ y $\phi(x) = -\frac{1}{3}c$. Además $-c \leq h(x) \leq -\frac{1}{3}c$ por lo tanto $|h(x) - \phi(x)| \leq \frac{2}{3}c$.
(iii) Si $x \in A \setminus (L \cup K)$ entonces $|h(x)| \leq \frac{1}{3}c$, por otro lado $|\phi(x)| \leq \frac{1}{3}c$ para todo $x \in X$. Por lo tanto $|h(x) - \phi(x)| \leq \frac{2}{3}c$ como se quería.
Esto termina la prueba de la afirmación.

Ahora aplicamos la afirmación para definir, por inducción, una sucesión $\phi_1, \phi_2, ...$ de funciones G-uniformes del espacio X al intervalo J que satisfaga las siguientes condiciones

$$|\phi_n(x)| \leq \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \quad \text{para} \quad x \in X \tag{2.3}$$

$$|f(x) - \sum_{j=1}^{n} \phi_j(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n} \quad \text{para} \quad x \in A. \tag{2.4}$$

La existencia de ϕ_1 se debe al hecho de tomar a $h = f$ y $c = 1$ en la afirmación previa. Supóngase que las funciones G-uniformes $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_{m-1}$ ya están definidas y satisfacen las condiciones (2.3) y (2.4).

Como $h = f - \left(\sum_{j=1}^{m-1} \phi_j\right) \restriction_A$ es una función G-uniforme definida sobre A, tomando $c = \left(\frac{2}{3}\right)^{m-1}$ y aplicando de nuevo la afirmación anterior obtenemos una función G-uniforme ϕ. Ahora, denotando por ϕ_m a la función ϕ, esta satisface las condiciones (2.1) y (2.2). Así tenemos

$$|\phi_m(x)| \leq \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{m-1} \quad \text{para} \quad x \in X$$

$$|f(x) - \sum_{j=1}^{m} \phi_j(x)| = |h(x) - \phi_m(x)| \leq \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{m-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{m} \qquad x \in A.$$

Esto completa el paso inductivo.

De la desigualdad (2.3) se infiere que la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones G-uniformes de X al intervalo J, donde $f_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \phi_j(x)$ para $x \in X$, es uniformemente convergente (ver [17, Teorema 1.4.7, Cap. 1, Secc. 4]). Por consiguiente el límite $f^* : X \to J$ es continua. Por la condición (2.4) tenemos que para $x \in A$, $f^*(x) = f(x)$.

Solo queda ver que f^* es G-uniforme. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Por convergencia uniforme existe $n_0 > 0$ tal que $|f^*(x) - f_{n_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ para todo $x \in X$. Dado que f_{n_0} es una función G-uniforme, existe O vecindad de la identidad en G tal que $|f_{n_0}(gy) - f_{n_0}(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$ para todo $y \in X$ y $g \in O$. Se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} |f^*(gy) - f^*(y)| &\leq |f^*(gy) - f_{n_0}(gy)| + |f_{n_0}(gy) - f_{n_0}(y)| + |f_{n_0}(y) - f^*(y)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

para todo $y \in X$ y para todo $g \in O$. Así f^* es una función G-uniforme y es la extensión deseada de f. □

En seguida introducimos una modificación de la definición de función G-uniforme.

Definición 2.18. Sea X un G-espacio y A un subconjunto de X. Entonces una función continua $f : A \to \mathbb{R}$ es llamada G-uniforme siempre que exista una vecindad de la identidad $U \subset G$ tal que f se extiende a una función continua $f' : U(A) \to \mathbb{R}$ de tal manera que la siguiente propiedad se cumple:

para cada $\varepsilon > 0$, existe una vecindad de la identidad O en G tal que $O \subset U$ y $|f'(ga) - f(a)| < \varepsilon$ para todo $g \in O$, $a \in A$.

Corolario 2.19. *Sea G un grupo localmente compacto, X un espacio G-normal, y A un subconjunto cerrado de X. Entonces toda función G-uniforme $f : A \to (-1, 1)$ puede ser extendida a una función G-uniforme $f^* : X \to (-1, 1)$.*

Demostración. Tomando en cuenta la Definición 2.18, sea U una vecindad de la identidad tal que $f : A \to (-1, 1)$ se extiende a una función $f' : U(A) \to (-1, 1)$ y sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Entonces existe V vecindad de la identidad tal que $V \subset U$ y $|f'(ga) - f(a)| < \varepsilon/2$ para todo $g \in V$ y $a \in A$.

Debido a que G es localmente compacto existe otra vecindad simétrica W de la identidad en G tal que $\mathrm{cl}_G(W)$ es compacta y $W^4 \subset V$ [Cap. 1, Secc. 3, Lema 1.26 (1)].

Por la compacidad de $\mathrm{cl}_G(W)$, el conjunto $C = \mathrm{cl}_G(W)(A)$ es cerrado en X (ver demostración de [Cap. 1, Secc. 3, Teorema 1.48]) y dado que $W\mathrm{cl}_G(W) \subset V$ (ver demostración de [Cap. 1, Secc. 3, Lema 1.26 (1)]), obtenemos que

$$W(C) = W\mathrm{cl}_G(W)(A) \subset V(A) \subset U(A)$$

Ahora considérese a la función $\gamma = f' \restriction_{W(C)}: W(C) \to (-1, 1)$, veamos que es G-uniforme con la Definición 2.18. Primero nótese que como $\mathrm{cl}_G(W) \subset W^2$ entonces $WW\mathrm{cl}_G(W) \subset W^4 \subset U$. Considerando a la vecindad de la identidad W tiene sentido contemplar a la función $\alpha = f' \restriction_{WW(C)}: WW(C) \to (-1, 1)$ como una extensión de γ, pues $W(C) \subset WW(C)$ y $\alpha \restriction_{W(C)} = f' \restriction_{W(C)} = \gamma$.

Ahora sean $g \in W$ y $x \in W(C)$ arbitrarios, entonces $x = g_1g_2a$ para ciertos $g_1 \in W$, $g_2 \in \mathrm{cl}_G(W)$ y $a \in A$. Tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} |\alpha(gx) - \gamma(x)| &= |\alpha(gg_1g_2a) - \gamma(g_1g_2a)| \\ &= |f'(gg_1g_2a) - f'(g_1g_2a)| \\ &\leq |f'(gg_1g_2a) - f(a)| + |f(a) - f'(g_1g_2a)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

pues $gg_1g_2 \in W^4 \subset V$ y $g_1g_2 \in W^2 \subset V$ y como ε era arbitrario concluimos que γ es una función G-uniforme en el sentido de la Definición 2.18.

Con un argumento similar al anterior es posible observar que tenemos una función G-uniforme $\eta = f' \restriction_C : C \to [-1,1]$ y por el Teorema 2.17, existe una función G-uniforme $F : X \to [-1,1]$ que es extensión de η. Consideremos al subconjunto cerrado $B = F^{-1}(-1) \bigcup F^{-1}(1)$ de X. Por el hecho de que $F(W(A)) \subset F(C) \subset (-1,1)$, se observa que $W(A) \cap B = \emptyset$,por lo tanto, A y B son G-disjuntos.

De acuerdo con el Teorema 2.15, existe una función G-unoforme $\lambda : X \to [0,1]$ tal que $A \subset \lambda^{-1}(1)$ y $B \subset \lambda^{-1}(0)$. La función buscada está definida como sigue:

$$f^*(x) = \lambda(x) \cdot F(x) \quad \text{para} \quad x \in X.$$

De hecho, f^* es continua, al ser el producto de dos funciones continuas, y si $x \in A$, entonces $f^*(x) = 1 \cdot \eta(x) = \eta(x) \in (-1,1)$. Si $x \in B$, entonces $f^*(x) = 0 \cdot F(x) = 0 \in (-1,1)$. Si $x \notin B$, entonces $|F(x)| < 1$, y por lo tanto, $|f^*(x)| < 1$. De esta manera, $f^*(x) \in (-1,1)$ para todo $x \in X$, así que, $f^* : X \to (-1,1)$ está bien definida.

Solo falta ver que f^* es G-uniforme. Sea $\varepsilon' > 0$ arbitrario. Es posible escoger una vecindad de la identidad O en G tal que

$$|\lambda(gx) - \lambda(x)| < \varepsilon'/2 \quad \text{y} \quad |F(gx) - F(x)| < \varepsilon'/2 \quad \text{para todo} \quad x \in X, g \in O.$$

Entonces

$$\begin{aligned} |f^*(gx) - f^*(x)| &= |\lambda(gx)F(gx) - \lambda(x)F(x)| \\ &\leq \lambda(gx) \cdot |F(gx) - F(x)| + |F(x)| \cdot |\lambda(gx) - \lambda(x)| \\ &< \varepsilon'/2 + \varepsilon'/2 = \varepsilon', \end{aligned}$$

para todo $x \in X$ y $g \in O$. Por lo cual f^* es G-uniforme. □

De manera similar puede ser demostrado el siguiente corolario.

Corolario 2.20. *Sea G un grupo localmente compacto, X un espacio G-normal, y A un subconjunto cerrado de X. Entonces toda función G-uniforme $f : A \to (-1,1]$ se puede extender a una función G-uniforme $f^* : X \to (-1,1]$.*

Capítulo 3

Una caracterización intrínseca de espacios G-pseudocompactos

En este capítulo se aborda el concepto de espacio G-pseudocompacto en el sentido de N. Antonyan, el cuál acuñó en [1], de está manera se da una caracterización de dichos espacios que no depende de las definiciones establecidas dadas por de Vries y S. Antonyan en [13], [14], [3] y [5], respectivamente.

Definición 3.1. Un G-espacio X es llamado *G-pseudocompacto* si toda función G-uniforme $f : X \to \mathbb{R}$ es acotada.

De la definición, claramente, todo G-espacio pseudocompacto es G-pseudocompacto. El recíproco no es cierto, incluso cuando $G = \mathbb{R}$ como lo muestra el siguiente ejemplo tomado de [14].

Primero nos remitimos a la siguiente definición:

Definición 3.2. Un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ es llamado *relativamente denso*, si existe un número $l > 0$ tal que $\mathbb{R} = A + [0, l]$.

Un punto $x \in X$ en un $\mathbb{R}$-espacio (o flujo continuo) es llamado *casi-periódico* (del inglés *almost periodic*), si para cualquier vecindad U de x, el conjunto $\mathcal{D}(x.U) = \{t \in \mathbb{R} : tx \in U\}$ es relativamente denso en $\mathbb{R}$ (ver [15, Cap. II, (3.1)]).

Proposición 3.3. *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$, entonces A es relativamente denso si y solo si existe un compacto $K \subset \mathbb{R}$ tal que para todo $s \in \mathbb{R}$, $(K + s) \cap A \neq \emptyset$.*

Demostración. $\Rightarrow$): Se procede por contrapuesta. Sea $l > 0$ arbitrario. Por demostrar que $A + [0, l] \subsetneq \mathbb{R}$. $[0, l]$ es compacto en $\mathbb{R}$, por hipótesis existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $([0, l] + s) \cap A = \emptyset$ por lo que $([0, l] + s) \subset \mathbb{R} \setminus A$. Considérese a $p = s + l$ y supóngase que $p = a + u$ para algún $a \in A$ y $u \in [0, l]$, entonces $s + (l - u) = a \in A$, lo cual es una contradicción pues $l - u \in [0, l]$.

$\Leftarrow$): Se procede igual por contrapuesta. Por demostrar que si para todo $l > 0$ $A + [0, l] \subsetneq \mathbb{R}$ entonces para todo $K \subset \mathbb{R}$ compacto existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $(K + s) \cap A = \emptyset$.

Sea $K \subset \mathbb{R}$ compacto fijo, entonces existe $l > 0$ tal que $K \subset [-l, l]$. Por hipótesis $A + [0, l] \subsetneq \mathbb{R}$ por lo que existe $p \in \mathbb{R}$ tal que $p \neq a + u$ para todo $a \in A$ y $u \in [0, l]$. Considérese los siguientes casos:

Caso 1): Supóngase que $p < a + u$ para todo $a \in A$ y para todo $u \in [0, l]$. Sea $s = p - 2l$ y supóngase que $(K + s) \cap A \neq \emptyset$, entonces $a = k + h = k + p - 2l$ para algún $a \in A$ y $k \in K$. Se tiene que $k = a - p + 2l > a - a - l + 2l = l$ lo cual es una contradicción ya que $K \subset [-l, l]$.

Caso 2): Ahora suponemos que $p > a + u$ para todo $a \in A$ y para todo $u \in [0, l]$. Si consideramos a $s = p$ se procede de manera análoga al caso anterior. □

Ejemplo 3.4. Sea $\mathbb{S}^1$ el grupo de los números complejos de norma 1, y sea $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ el toro. Existe una acción interesante del grupo aditivo de los números reales $\mathbb{R}$ en $\mathbb{T}^2$, definida por $t * (e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy}) = (e^{2\pi i(x+t)}, e^{2\pi i(y+\alpha t)})$, donde α es un número irracional fijo, $t \in \mathbb{R}$, $x, y \in [0, 1]$ y $(e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy}) \in \mathbb{T}^2$. Esta acción es llamada *flujo irracional.*

Afirmación. Cada órbita $\mathbb{R}(x)$ del $\mathbb{R}$-espacio $\mathbb{T}^2$ es $\mathbb{R}$-pseudocompacta pero no es pseudocompacta.

Primero veamos que todos los puntos en el flujo irracional del toro $\mathbb{T}^2$ son casi-periódicos.

Sea $x \in \mathbb{T}^2$ arbitrario y sea U una vecindad de x. Dado que cada órbita $\mathbb{R}(x)$ es densa en $\mathbb{T}^2$, se sigue que $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}(U) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} tU$. Dado que $\mathbb{T}^2$ es compacto [Cap. 1 Secc. 1.2 Ejem. 1.34], y cada tU es abierto para cada $t \in \mathbb{R}$, existe un subconjunto finito K de $\mathbb{R}$ tal que $\mathbb{T}^2 = \bigcup_{t \in K} tU$. Como K es finito existe $l > 0$ tal que $K \subset [-l, l] =: K'$. En particular si $s \in \mathbb{R}$ entonces $sx \in tU$ para algún $t \in K \subset K'$, esto es $(-t + s)x \in U$ por lo tanto $(-t + s) \in \mathcal{D}(x, U)$, y como $-t \in K'$ se sigue que $(K' + s) \cap D(x, U) \neq \emptyset$ y por la Proposición 3.3 resulta que el conjunto $\mathcal{D}(x, U)$ es relativamente denso. De esta manera queda probado que x es un punto casi-periódico.

Ahora sea $x_0 \in \mathbb{T}^2$ y $X := \mathbb{R}(x_0)$ la órbita de x_0 en el flujo irracional. Primero que nada, X no es pseudocompacto pues es metrizable pero no es compacto por el hecho de que la acción de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{T}^2$ es libre y ningún punto es periódico. (ver [11, Cap. 4, Secc. 4.2, Propo. 4.4]).

Veamos que X es $\mathbb{R}$-pseudocompacto.

Sea f una función G-uniforme arbitraria. Por la afirmación hecha en la parte de arriba x_0 resulta ser un punto casi-periódico, entonces existe un subconjunto relativamente denso P en $\mathbb{R}$ tal que

$$|f(x_0 + t) - f(x_0)| < 1 \tag{3.1}$$

para toda $t \in P$, esto por continuidad de la función f.

En este caso estamos considerando a X como el conjunto $\mathbb{R}$ con la topología inducida de $\mathbb{T}^2$ (la cual difiere de la topología usual). La acción de $\mathbb{R}$ sobre X está dada por $t * x := x + t$ para $x \in X$ $t \in \mathbb{R}$.

Dado que P es relativamente denso en $\mathbb{R}$ existe un número $l > 0$ tal que $\mathbb{R} = P + [0, l]$. Como f es G-uniforme, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x+s) - f(x)| < 1 \quad \text{para todo} \quad x \in X, s \in \mathbb{R}, |s| < \delta. \tag{3.2}$$

Para todo $u \in [0, l]$ existe una sucesión finita $0 = u_0 < u_1 < \cdots < u_k = u$, donde $k \leq [2l/\delta] + 1 =: k_0$, y $|u_{i+1} - u_i| < \delta$ para $i = 0, 1, ..., k-1$.

La ecuación (3.2) implica que

$$|f(x+u) - f(x)| \leq \sum_{i=0}^{k-1} |f(x+u_{i+1}) - f(x+u_i)| < k \leq k_0 \tag{3.3}$$

para cada $x \in X$ y cada $u \in [0, l]$. Sin embargo, para todo $s \in \mathbb{R}$ existen $t \in P$ y $u \in [0, l]$ tales que $s = t + u$, entonces por (3.1) y (3.3), tenemos que

$$|f(x_0+s) - f(x_0)| \leq |f(x_0+t+u) - f(x_0+t)| + |f(x_0+t) - f(x_0)| \leq k_0 + 1,$$

lo que implica que f está acotada en $X = \{x_0 + s : s \in \mathbb{R}\}$, como se buscaba.

Sin embargo, el siguiente resultado es verdadero.

Proposición 3.5. *Sea G un grupo compacto. Entonces un G-espacio X es G-pseudocompacto si y solo si es pseudocompacto.*

Demostración. Solo la suficiencia requiere de prueba. Para ello, sea X un espacio G-pseudocompacto y $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua. Se define la función $f^* : X \to \mathbb{R}$ por $f^*(x) = \sup_{g \in G} |f(gx)|$. Veamos que f^* es continua.

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario y sea $x_0 \in X$. Por continuidad de f para todo $g \in G$ existen vecindades V_g de gx_0 tales que

$$|f(gx_0) - f(y)| < \varepsilon/2 \quad \text{siempre que} \quad y \in V_g. \tag{3.4}$$

Por continuidad de la acción en el punto $(g, x_0) \in G \times X$, existe una vecindad O_g de g en G y una vecindad U_g de x_0 en X tales que $O_g U_g = \{hx : h \in O_g, x \in U_g\} \subset V_g$.

Por compacidad de G, su cubierta abierta $\{O_g : g \in G\}$ tiene una subcubierta finita $\{O_{g_1}, O_{g_2}, ..., O_{g_k}\}$. Considérese al conjunto $U = \bigcap_{i=1}^{k} U_{g_i}$ como vecindad de x_0 en X. Verifiquemos que $|f^*(x) - f^*(x_0)| < \varepsilon$, siempre que $x \in U$.

De hecho, como para todo $g \in G$ existe $j \in \{1, ..., k\}$ tal que $g \in O_{g_j}$, como $x \in U_{g_j}$, para todo $x \in U$, se tiene entonces que $gx \in O_{g_j} U_{g_j} \subset V_{g_j}$. Así por (3.4), $|f(gx_0) - f(gx)| < \varepsilon/2$. Tenemos lo siguiente:

$$|f(gx_0) - f(gx)| < \varepsilon/2 \quad \text{para todo} \quad x \in U \quad \text{y cada} \quad g \in G.$$

Tomando supremos, esto nos lleva a que $|f^*(x) - f^*(x_0)| < \varepsilon$ siempre que $x \in U$, como se buscaba.

f^* es G-invariante, pues si $g \in G$ es cualquier elemento y $x \in X$ es arbitrario se tiene que

$$f^*(gx) = \sup_{g' \in G} |f(gg'x)| = \sup_{\tilde{g} \in G} |f(\tilde{g}x)| = f^*(x),$$

y como toda función G-invariante es G-uniforme ([Cap. 2 Secc. 2.1 Lema2.8], entonces f^* es G-uniforme, como por hipótesis X es G-pseudocompacto, f^* resulta estar acotada. Note que $|f(x)| = |f(ex)| \leq \sup_{g \in G} |f(gx)| = |f^*(x)|$ para todo $x \in X$, por lo que f resulta estar acotada. Esto concluye la prueba. $\square$

Ahora volcamos nuestra atención a la caracterización intrínseca de G-pseudocompacidad. Primero, una definición.

Definición 3.6. Una familia (infinito) numerable $\{U_1, U_2, ...\}$ de subconjuntos de un G-espacio X es llamada *una familia esencial* si existen puntos $x_n \in U_n$, $n = 1, 2, ...$, y una vecindad de la identidad $O \subset G$ tal que $O^{2^n}(x_n) \subset U_n$.

El siguiente resultado nos da una caracterización intrínseca de espacios G-pseudocompactos en el campo de los espacios G-normales.

Teorema 3.7. *Sea G un grupo localmente compacto y X un G-espacio G-normal. Entonces X es G-pseudocompacto si y solo si no existe una familia esencial localmente finita disjunta de conjuntos abiertos de X.*

Demostración. Sea X un G-espacio el cual tiene una familia esencial localmente finita disjunta de conjuntos abiertos, digamos, $\{U_1, U_2, ...\}$. Por demostrar, que X no es G-pseudocompacto.

Por definición de familia esencial, existe una vecindad O_1 de la identidad en G y puntos $x_n \in U_n$, $n = 1, 2, ...$, tales que

$$O_1^{2^n}(x_n) \subset U_n \tag{3.5}$$

Como G es localmente compacto existe una vecindad O_2 de la identidad tal que $\mathrm{cl}_G(O_2)$ es compacto, entonces $O := O_1 \cap O_2$ es una vecindad de la identidad en G tal que $\mathrm{cl}(O)$ es compacto, además como $O \subset O_1$ se sigue que $O^{2^n} \subset O_1^{2^n}$ por lo que O cumple (3.5).

Por la compacidad local de G, para cada $p \geq 1$, se puede definir una sucesión $\mathcal{K}^{(p)} = \{K_n^{(p)}\}_{n=0}^{\infty}$ de vecindades compactas de la identidad en G tales que

$$K_i^{(p)} = \mathrm{cl}_G\left(O^{2^{p-i-1}}\right) \quad \text{y} \quad K_{n+1}^{(p)} K_{n+1}^{(p)} \subset K_n^{(p)}$$

para todo $i = 0, 1, ..., p-1$ y $n \geq 0$.

Más adelante la siguiente propiedad evidente de los conjuntos $K_n^{(p)}$ jugará un papel importante en la demostración:

$$K_n^{(p)} = K_{n+1}^{(p+1)}, \quad \text{para todo} \quad p \geq 1, \; n \geq 0. \tag{3.6}$$

Se pretende aplicar el Teorema 2.14 del Capítulo 2 a los conjuntos cerrados $A = \{x_p\}$, $B = X \setminus U_p$ y la sucesión $\mathcal{K}^{(p)}$. Como $K_0^{(p)} = \mathrm{cl}_G\left(O^{2^{p-1}}\right)$, tenemos que $K_0^{(p)} \subset O^{2^p}$, y así se sigue de (3.5) que $K_0^{(p)}(\{x_p\}) \cap (X \setminus U_p) = \emptyset$. Ahora, por [Teo. 2.14, Cap. 2], existe una función continua $f_p : X \to [0, 1]$ tal que

$$f_p(x_p) = 1 \quad \text{y} \quad X \setminus U_p \subset f_p^{-1}(0), \quad \text{y}$$

$$|f_p(gx) - f_p(x)| < 1/2^{n-2} \;\; \text{para todo} \;\; x \in X, g \in K_{n+1}^{(p)}, n = -1, 0, 1, ...$$

Ahora, para cada $p \geq 1$ y $x \in X$, se define $\varphi_p(x) = p f_p(x)$, entonces

$$\varphi_p(x_p) = p \quad \text{y} \quad X \setminus U_p \subset \varphi_p^{-1}(0)$$

$$|\varphi_p(gx) - \varphi_p(x)| < p/2^{n-2} \quad \text{para todo} \quad x \in X, g \in K_{n+1}^{(p)}, n \geq -1. \tag{3.7}$$

Ahora considérese la función $\Phi : X \to \mathbb{R}$ definida como

$$\Phi(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \varphi_p(x), \quad x \in X.$$

La continuidad de la función Φ se sigue de manera estándar, del hecho que las funciones φ_p, con $p \geq 1$, son continuas y de que la familia $\{U_1, U_2, ...\}$ es localmente finita. Además Φ es no acotada por como se construyó. Afirmamos que Φ es G-uniforme.

Sea $\varepsilon > 0$ y sea n lo suficientemente grande de tal manera que $1/2^{n-2} < \varepsilon/C$, donde $C = \sum_{p=1}^{\infty} p/2^{p-1}$. Se sigue de (3.6) y (3.7) que

$$|\varphi_p(gx) - \varphi_p(x)| < p/2^{n+p-3} \quad \text{par todo} \quad x \in X, g \in K_{n+1}^{(1)} = K_{n+p}^{(p)}. \tag{3.8}$$

Lo cual implica que

$$|\Phi(gx) - \Phi(x)| \leq \sum_{p=1}^{\infty} p/2^{n+p-3}.$$

Pero $\sum_{p=1}^{\infty} p/2^{n+p-3} = 1/2^n \sum_{p=1}^{\infty} p/2^{p-1} = C/2^{n-2} < \varepsilon$. Por lo tanto

$$|\Phi(gx) - \Phi(x)| < \varepsilon \quad \text{para todo} \quad x \in X, g \in K_{n+1}^{(p)}.$$

Como Φ es una función G uniforme no acotada se concluye que X no es G-pseudocompacto.

Para el recíproco de la afirmación, supóngase que X no es G-pesudocompacto. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ un función G-uniforme que no está acotada y sea $O \subset G$ vecindad de la identidad tal que

$$|f(gx) - f(x)| < 1 \quad \text{para todo} \quad x \in X, g \in O. \tag{3.9}$$

Puesto que f no está acotada, uno puede escoger puntos $x_n \in X$, $n = 1, 2, ...$, y segmentos abiertos disjuntos $(a_n, b_n) \subset \mathbb{R}$ de tal manera que

$$f(x_n) = (a_n + b_n)/2 \quad \text{y} \quad a_n - b_n > 2^{n+1}. \tag{3.10}$$

A continuación, se define $U_n = f^{-1}[(a_n, b_n)]$, para $n = 1, 2, ...$ Claramente, cada U_n es un subconjunto abierto no vacío de X, y la sucesión $\{U_1, U_2, ...\}$ es localmente finita.

Afirmamos que $O^{2^n}(x_n) \subset U_n$. Sea $g = g_1 \cdot g_2 \cdots g_{2^n} \in O^{2^n}$ con $g_i \in O$, $1 \leq i \leq 2^n$. Denote

$$h_i = g_{2^n-i+1} \cdot g_{2^n-i+2} \cdots g_{2^n}, \quad 1 \leq i \leq 2^n.$$

Como $h_{i+1} = g_{2^n-i} h_i$ para cada $1 \leq i \leq 2^n - 1$, y $g_{2^n-i} \in O$, se sigue de (3.9) que

$$|f(g_{2^n-i} h_i x_n) - f(h_i x_n)| < 1, \quad 1 \leq i \leq 2^n - 1. \tag{3.11}$$

Dado que $h_{2^n} = g$ y $h_1 = g_{2^n}$, (3.11) implica que

$$\begin{aligned} |f(gx_n) - f(x_n)| \quad &\leq \quad |f(h_{2^n} x_n) - f(h_{2^n-1} x_n)| + |f(h_{2^n-1} x_n) - f(h_{2^n-2} x_n)| \\ &+ \cdots + \quad |f(h_1 x_n) - f(x_n)| < 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = 2^n. \end{aligned}$$

Esto junto con (3.10) implican que $f(gx_n) \in (a_n, b_n)$ o, equivalentemente $gx_n \in U_n$. Así, $O^{2^n}(x_n) \subset U_n$, y $\{U_1, U_2, ...\}$ es una familia esencial localmente finita. □

El hecho de que una familia esencial sea disjunta se puede omitir en el teorema anterior, a saber, se tiene el siguiente resultado.

Corolario 3.8. *Sea G un grupo localmente compacto y X un G-espacio G-normal. Entonces X es G-pseudocompacto si y solo si no existe una familia esencial localmente finita de conjuntos abiertos de X.*

Demostración. Solo la necesidad necesita demostración, la suficiencia está dada en el Teorema anterior. Supóngase que X admite una familia esencial localmente finita de conjuntos abiertos, digamos, $\{U_1, U_2, ...\}$.

Como en la prueba del Teorema 3.7, es posible escoger una vecindad de la identidad en G, digamos O, tal que $\mathrm{cl}_G(O)$ es compacto y los puntos $x_n \in U_n$, $n = 1, 2, ...$, tales que $O^{2^{n+1}}(x_n) \subset U_n$. Como $\mathrm{cl}_G(O^{2^n}) \subset O^{2^{n+1}}$, se tiene que el conjunto $\left(\mathrm{cl}_G(O^{2^n})\right)(x_n)$ es compacto [Coro. 1.49, Cap. 1] y $\left(\mathrm{cl}_G(O^{2^n})\right)(x_n) \subset U_n$. Como $\{U_1, U_2, ...\}$ es localmente finita, para todo $gx_n \in \left(\mathrm{cl}_G(O^{2^n})\right)(x_n)$ existe una vecindad V_g en X que interseca a una cantidad finita de elementos en $\{U_1, U_2, ...\}$, puesto que $\left(\mathrm{cl}_G(O^{2^n})\right)(x_n) \subset \bigcup_{g \in \mathrm{cl}_G(O^{2^n})} V_g$ existe una subcubierta finita tal que $\left(\mathrm{cl}_G(O^{2^n})\right)(x_n) \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{g_i} =: V_n$, además $V_n \subset U_n$ y V_n interseca una cantidad finita de elementos de los conjuntos U_j. En particular, cada V_n interseca una cantidad finita de conjuntos V_j, y $\{V_1, V_2, ...\}$ es esencial. Así, se puede escoger una subsucesión disjunta de $\{V_1, V_2, ...\}$, y así obtener una familia esencial localmente finita disjunta y se sigue del Teorema 3.7 que X no es G-pseudocompacto. $\square$

Bibliografía

[1] Antonyan, N. An instrinsic characterization of G-pseudocompact spaces. *Houston J. Math* ***33***, (2) (2007), 519–530.

[2] Antonyan, N. Extensions of G-uniform maps. *Topology and its Applications* ***230***, (1) (2017), 233–243.

[3] Antonyan, S. A. G-pseudocompact and G-Hewitt spaces. *Russian Math. Surv.* ***35***, (6) (1980), 241–245.

[4] Antonyan, S. A. Equivariant embeddings and ω-bounded groups (Russian). *Vestnik Moskovskogo Universiteta, Matematika* ***49***, (1) (1994), 16–22. English translat.: Moscow Univ. Math. Bull. **49** (1) (1994), 13-16.

[5] Antonyan, S. A. Equivariant pseudocompact and Hewitt spaces (in russian). *in: Proc. Internat. Topol. Conf.* (Leningrado, Agosto, 1983), 17–26. Leningrad Branch Steklov Math. Inst. Publ.

[6] Antonyan, S. A., and Antonyan, N. Free G-spaces and maximal equivariant compactifications. *Annali di Matematica* ***184*** (2005), 407–420.

[7] Antonyan, S. A., and Smirnov, Y. M. Universal objects and bicompact extensions for topological transformation groups. *Doklady. Akad. Nauk. S. S. S. R* ***257***, (3) (1981), 521–526. English translat.: Sovieth Doklady **23** (2) (1981), 279-284.

[8] Bredon, G. *Introduction to compact transformation groups.* Academic Press, EUA, 1972.

[9] Casarrubias, S. F., and Tamariz, M. A. *Elementos de Topología General.* No. 37. Aportaciones Matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana, México, D.F., 2da. Ed. 2015.

[10] Colmez, J. Sur le espaces précompact. *C.R Acad. Paris* ***233*** (1951), 1552–1553.

[11] de Neymet, S. *Introducción a los grupos topológicos de trasnformaciones.* Aportaciones Matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana, México, D.F., 2003.

[12] de Vries, J. Equivariant embeddings of G-spaces. *in: General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra IV, Part B Proc. 4-th Prague Topol. Symp.* (1976), pp. 485–493.

[13] de Vries, J. Compactifications and pseudocompactness. *in: Topology and Applications, Colloquia Math. SOC. Janos Blyai* ***41*** (1983), 655–666.

[14] de Vries, J. On the G-compactification of products. *Pac. J. Math.* ***26***, (2) (1984), 447–470.

[15] de Vries, J. *Elements of Topological Dynamics.* Kluer Academic Publishers, Holanda, 1993.

[16] de Vries, J. On the existence of G-compactifications. *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math.* ***26*** (2005), 275–280.

[17] Engelking, R. *General Topology*, vol. 6. Sigma series in pure mathematics, Berlín, 1989.

[18] Hewitt, E. Rings of real valued functions, i. *Trans. Amer. Math.* ***68*** (1948), 45–99.

[19] Hrusak, M., Tamariz-Mascarúa, A., and Tkachenko, M. *Pseudocompact Topological Spaces: a survey of classic and new results with open problems.* Springer Internationa Publishing, 2018.

[20] Leja, F. Sur la notion du groupe abstrait topologique. *Fundamenta Mathematicae* ***9***, (1) (1927), 37–44.

[21] Megrelishvili, M. A Tychonov G-space not admitting a compact hausdorff G-extension or G-linearization. *Russan Math. Surv.* ***43***, (2) (1988), 177–178.

[22] Megrelishvili, M. Equivariant normality. *Bull. Acad. Sci. Georgian SSR* ***11***, (1) (1998), 17–19.

[23] Megrelishvili, M., and Scar, T. Constructing A Tychonoff G-space wich are not G-Tychonoff. *Topol. Appl.* ***86*** (1998), 69–81.

[24] Palais, R. The clasification of G-spaces. *Memoirs of the AMS* ***36*** (1960).

[25] Tkachenko, M., Villegas, L. M., Hernández, C., and Rendón, O. J. *Grupos Topológicos*. Universidad Autonóma Metropolitana Unidad Iztapalapa, México, 1997.

[26] tom Dieck, T. *Transformation Groups*. Walter de Gruyter, Berlin, 1987.

Índice alfabético