



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Efecto Autler-Townes por transiciones atómicas
prohibidas

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

PRESENTA:

Alberto Del Ángel Medina

TUTORA

Dra. Rocío Jáuregui Renaud

Ciudad de México, 2019





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Del Ángel

Medina

Alberto

55 61 13 73 34

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física

311157732

2. Datos del tutor

Dra.

Rocío

Jáuregui

Renaud

3. Datos del sinodal 1

Dr.

Eugenio

Ley

Koo

4. Datos del sinodal 2

Dr.

José Ignacio

Jiménez

Mier y Terán

5. Datos del sinodal 3

Dr.

Fernando

Ramírez

Martínez

6. Datos del sinodal 4

Dr.

Daniel

Sahagún

Sánchez

7. Datos del trabajo escrito

Efecto Autler-Townes por transiciones atómicas prohibidas

59 p

2019

פלאיה דעת ממני; נשגבה, לא-אוכל לה.

Tal conocimiento es demasiado maravilloso para mí; !alto es, no lo puedo comprender!
Salmo 139:6.

Agradecimientos

Este trabajo no pudo haber sido escrito sin las siguientes personas:

- Mis padres, María Medina y Andrés Del Ángel, a quienes y amo y agradezco su incondicional apoyo a lo largo de la vida. Blanca, a quien guardo en un lugar especial de mi corazón.
- Mi asesora, la doctora Rocío Jáuregui, a quien tengo en la más alta de las estimas, de quién he aprendido el significado de ser físico y que el camino de la excelencia se recorre por medio del trabajo duro, sin perder de vista la felicidad.
- Los miembros del jurado, los doctores Eugenio Ley Koo, José Ignacio Jiménez Mier y Terán, Fernando Ramírez Martínez y Daniel Sahagún Sánchez, por ser parte de este trabajo, por su calidez hacía mí y por sus acertados comentarios y correcciones.
- Samuel Corona, Isael Herrera, Daniel Guadarrama, Melissa Santos y Rodrigo García, por su amistad cálida y sincera a lo largo de los años.
- *Alejandra.*

Resumen

Se realizó la descripción analítica y la comparación con datos experimentales del efecto Autler-Townes detectado en la fluorescencia de la transición $6^2P_{3/2} \leftrightarrow 5^2S_{1/2}$ del átomo alcalino de Rubidio 87, ^{87}Rb , interactuando con dos láseres a través de transiciones atómicas dipolares y cuadrupolares eléctricas. Utilizando un modelo simplificado de tres niveles para la estructura hiperfina del átomo e incorporando efectos de selección de velocidades del átomo y polarizaciones, direcciones de propagación e intensidades de los láseres, se resolvió la matriz de densidad del sistema para el caso estacionario, obteniendo una solución aproximada para la fluorescencia del estado $|6^2P_{3/2}\rangle$. Los resultados del modelo fueron comparados con los datos obtenidos experimentalmente por el equipo del Laboratorio de Átomos Fríos del Instituto de Ciencias Nucleares, UNAM. Los resultados del modelo y los experimentales se encuentran en buen acuerdo.

El contenido de este trabajo se divide en seis partes, donde se explica la estructura de átomos alcalinos, la teoría de transiciones dipolares y cuadrupolares eléctricas, los modelos de 2 y 3 niveles y el estudio de su dinámica utilizando la ecuación de Lindblad, el efecto Autler-Townes por transiciones atómicas prohibidas en el ^{87}Rb , el análisis de la fluorescencia del estado $|6^2P_{3/2}\rangle$, la comparación con los datos experimentales y las conclusiones.

Índice general

| | |
|---|-----------|
| 1. Introducción | 1 |
| 2. Estructura de átomos alcalinos | 3 |
| 2.1. Modelo de partículas independientes | 3 |
| 2.2. Estados electrónicos en un campo central | 5 |
| 2.3. Estructura fina e hiperfina de átomos alcalinos | 5 |
| 2.3.1. Estructura fina | 5 |
| 2.3.2. Estructura hiperfina | 6 |
| 3. Interacción de un átomo alcalino con luz | 8 |
| 3.1. Interacción de un átomo con campos electromagnéticos | 8 |
| 3.2. Acoplamiento por una transición dipolar eléctrica | 9 |
| 3.2.1. Probabilidad de transición por emisión espontánea de radiación dipolar eléctrica | 10 |
| 3.3. Acoplamiento por transiciones de orden superior | 11 |
| 3.3.1. Acoplamiento por una transición dipolar magnética | 11 |
| 3.3.2. Acoplamiento por una transición cuadrupolar eléctrica | 12 |
| 3.4. Reglas de selección para transiciones dipolares y cuadrupolares eléctricas | 13 |
| 3.4.1. Descomposición de \mathbf{H}_{int} en términos de tensores esféricos | 13 |
| 3.4.2. Cálculo de los elementos de matriz de \mathbf{H}_{int} | 15 |
| 4. Modelos simplificados del átomo: efectos ópticos asociados a transiciones atómicas | 17 |
| 4.1. Átomos de dos y tres niveles | 17 |
| 4.1.1. Modelo de Jaynes-Cummings | 18 |
| 4.1.2. Modelos de tres niveles | 19 |
| 4.2. Matriz de densidad y ecuación de Lindblad | 20 |
| 4.3. Efectos ópticos asociados a transiciones atómicas | 21 |
| 4.3.1. EIT | 21 |
| 4.3.2. Efecto Autler-Townes | 24 |
| 5. Efecto Autler-Townes por transiciones atómicas prohibidas | 28 |
| 5.1. Átomo de Rubidio de tres niveles con dos transiciones dipolares eléctricas y una cuadrupolar eléctrica | 28 |
| 5.2. Montaje experimental | 29 |
| 5.2.1. Sistema de láseres | 29 |
| 5.2.2. Sistema de detección | 30 |
| 5.3. Efecto Autler-Townes en la transición $6^2P_{3/2} \rightarrow 5^2S_{1/2}$ | 31 |
| 5.4. Solución estacionaria a las ecuaciones de movimiento | 33 |
| 5.5. Efecto Doppler y ensanchamiento de líneas espectrales | 36 |
| 5.6. Resultados | 37 |
| 6. Conclusiones | 44 |
| 6.1. Trabajo a futuro | 45 |
| 7. Apéndices | 46 |

Capítulo 1

Introducción

En el contexto del estudio de la interacción de radiación electromagnética con materia a nivel cuántico, consideremos un campo electromagnético monocromático, oscilante y altamente coherente (tal como un láser), que se encuentra sintonizado alrededor de la frecuencia asociada a la transición entre dos niveles de energía, $|a\rangle$, $|b\rangle$, de un sistema cuántico cuyo espectro de energías está cuantizado. Si sólo uno de los niveles se acopla con un tercero $|c\rangle$ y se sondea la absorción de esta segunda transición utilizando un segundo campo electromagnético, se observa que debido al acoplamiento de los niveles $|a\rangle$ y $|b\rangle$ con el primer campo, la absorción del tercer nivel $|c\rangle$ se desdobra en dos partes, como si ambos niveles estuvieran acoplados al tercero. Al desdoblamiento del espectro de absorción del tercer nivel se le conoce como *efecto Autler-Townes* o desdoblamiento Stark dinámico, el cual fue originalmente observado y descrito por Stanley Autler y Charles Townes en 1955 en el estudio de las transiciones atómicas en el régimen de microondas en la molécula de sulfuro de carbonilo [1]. El efecto Autler-Townes es bastante general y aparece en campos muy variados de la investigación tales como sistemas superconductores [2], espectroscopía óptica de alta resolución, electrodinámica cuántica en cavidades y enfriamiento por medio de láseres, entre otros [3]. Esto es debido a que cualquier sistema cuántico que pueda ser efectivamente tratado como uno de tres niveles interactuando con campos electromagnéticos es susceptible de mostrarlo.

Un aspecto fundamental es la forma en la que los campos y la materia interactúan. En el régimen de velocidades no relativistas y para longitudes de onda de los campos en el régimen óptico y de las microondas ($\lambda \geq 400$ nm), la forma predominante de interacción entre radiación y materia es la *dipolar eléctrica*. Ya que las longitudes de onda de los campos son mucho mayores al tamaño característico del sistema, las variaciones espaciales de la parte eléctrica de los campos a lo largo de este son despreciables, mientras que, debido a que el sistema se mueve a una velocidad mucho menor a la de la luz, la interacción con la parte magnética de los campos también es despreciable. Es interesante entonces preguntarnos bajo qué condiciones es posible observar transiciones entre diferentes niveles de energía del sistema debidas a interacciones de órdenes superiores bajo los mismos regímenes arriba mencionados y que son conocidas como *transiciones prohibidas*, pues no cumplen con las reglas de selección dadas por las transiciones dipolares eléctricas. Ejemplos de transiciones de orden superior son las debidas a la interacción dipolar magnética entre el momento angular total del sistema y la componente magnética de los campos o la cuadrupolar eléctrica, en la cual la variación espacial de la componente eléctrica es significativa.

El objetivo de este trabajo es la descripción analítica y la comparación con datos experimentales del efecto Autler-Townes registrado en el decaimiento espontáneo de la transición $6^2P_{3/2} \leftrightarrow 5^2S_{1/2}$ en el átomo de Rubidio 87, ^{87}Rb , cuando están presentes tanto transiciones dipolares como cuadrupolares eléctricas, el cual fue observado en una serie de experimentos llevados a cabo por el equipo del Laboratorio de Átomos Fríos del Instituto de Ciencias Nucleares de la Universidad Nacional Autónoma de México. Para átomos en el estado base $|5^2S_{1/2}\rangle$, estos fueron llevados al estado $|5^2P_{3/2}\rangle$ por medio de una transición dipolar eléctrica utilizando un láser con longitud de onda de 780 nm y posteriormente a $|6^2P_{3/2}\rangle$ por una transición cuadrupolar eléctrica inducida por un láser con longitud de onda de 911 nm. En este trabajo proponemos un modelo de la fluorescencia del estado $|6^2P_{3/2}\rangle$ que intenta incorporar el mayor número de factores involucrados en el experimento tales como la velocidad del átomo y las direcciones, polarizaciones e intensidad de los láseres.

El contenido de este trabajo es el siguiente: ya que el Rubidio es un átomo alcalino, en el capítulo dos desarrollamos la teoría necesaria para la descripción de estados de átomos alcalinos en términos de los números cuánticos del núcleo y el electrón de valencia; además, presentaremos las correcciones a los estados de energía del átomo debido a la estructura fina e hiperfina. En el capítulo tres presentamos la teoría de la interacción entre ondas electromagnéticas planas y monocromáticas y un átomo alcalino, poniendo especial atención en el cálculo de las reglas de selección, elementos de matriz y tasas de decaimiento espontáneo de las transiciones atómicas

dipolares y cuadrupolares eléctricas. En el capítulo cuatro presentamos el estudio de modelos simplificados de un átomo alcalino interactuando con dos ondas electromagnéticas. Presentamos el átomo de dos y tres niveles junto con el formalismo de la matriz de densidad como paradigma para el estudio de la dinámica de átomos alcalinos interactuando con ondas electromagnéticas y estudiaremos dos efectos ópticos asociados a transiciones atómicas: la transparencia inducida electromagnéticamente (EIT por sus siglas en inglés) y el efecto Autler-Townes, ambos mediante transiciones atómicas dipolares eléctricas. En el capítulo cinco describimos de manera breve el montaje experimental a través del cual se observó el efecto Autler-Townes por transiciones cuadrupolares eléctricas. Hacemos el análisis de la fluorescencia del estado $|6^2P_{3/2}\rangle$ utilizando la solución analítica aproximada a la ecuación de Lindblad para el caso estacionario y, posteriormente, incorporando los efectos de ensanchamiento de línea y la selección de velocidades del átomo dados por los perfiles espectrales de los láseres y el efecto Doppler respectivamente, haremos una comparación del modelo con los datos experimentales, los cuales se encuentran en buen acuerdo entre sí. En el capítulo seis presentamos las conclusiones de este escrito, resaltando los aspectos que deben mejorarse en nuestro modelo, así como las perspectivas a futuro en esta dirección de trabajo. Finalmente, el capítulo siete consta de una serie de apéndices, en los cuales mostramos los valores numéricos de varias constantes, necesarios para la reproducción de los resultados mostrados en este trabajo, el cálculo detallado de las soluciones a la ecuación de Lindblad para el caso estacionario y el cálculo detallado de las propiedades de la fluorescencia del estado $|6^2P_{3/2}\rangle$.

Capítulo 2

Estructura de átomos alcalinos

En este capítulo presentamos la teoría necesaria para la descripción de los estados de átomos alcalinos. Debido a que los átomos son sistemas compuestos por muchos cuerpos, es necesario realizar aproximaciones que nos permitan simplificar su estudio. Para el caso de los átomos alcalinos, demostramos que pueden ser tratados de manera efectiva como un sistema compuesto por el núcleo y un sólo electrón. Además, presentamos las correcciones a los niveles de energía del sistema debido a la interacción espín-órbita que resultan en la estructura fina y la interacción entre los momentos dipolar magnético y cuadrupolar eléctrico del núcleo con los campos magnético y eléctrico generados por el electrón que resultan en la estructura hiperfina del átomo.

2.1. Modelo de partículas independientes

Un átomo neutro de número atómico Z consiste en un núcleo pesado con carga eléctrica Ze (con e la carga del electrón) rodeado por Z electrones (con carga $-e$ y masa m_e). Debido a que la masa del núcleo es mucho mayor a la de los electrones, podemos asumir que este es estacionario y escribir el Hamiltoniano del sistema visto desde el marco de referencia del núcleo [4] :

$$\mathbf{H} = \sum_{j=1}^Z \left[\frac{\mathbf{p}_j^2}{2m_e} - \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{Ze^2}{r_j} \right] + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \sum_{j \neq k}^Z \frac{e^2}{r_j - r_k}. \quad (2.1)$$

donde $\mathbf{p}_j = i\hbar\nabla_j$ es el momento canónico conjugado de los operadores radiales, r_j , y angulares, θ_j , ϕ_j , medidos con respecto al origen y ϵ_0 es la permitividad eléctrica en el vacío. El término entre corchetes representa la energía cinética más la potencial del j -ésimo electrón en presencia del campo eléctrico generado por el núcleo y la segunda suma es la energía asociada a la repulsión entre todos los posibles pares de electrones. El problema a resolver es la ecuación de Schrödinger estacionaria:

$$\mathbf{H}\psi = E\psi, \quad (2.2)$$

con $\psi \equiv \psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_Z)$ la función de onda del sistema. Debido a que los electrones son fermiones idénticos, las soluciones físicamente aceptables a la ecuación (2.2) son sólo aquellas para las cuales el estado completo, en términos de la posición y el espín, es antisimétrico ante el intercambio de cualesquiera dos electrones. Debido a que el término dentro la segunda suma en la ecuación (2.1) es una función de la forma $U(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k)$, la función de onda del sistema no es separable, i.e. $\psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_Z) \neq \psi_1(\mathbf{r}_1) \cdots \psi_Z(\mathbf{r}_Z)$. Adicionalmente, notamos que este término es del mismo orden que la energía potencial, por lo cual no podemos tratarlo como una perturbación. Para entender mejor el efecto del término de repulsión, reescribimos (2.1) como:

$$\mathbf{H} = \sum_{j=1}^Z \frac{\mathbf{p}_j^2}{2m_e} - \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \sum_{j=1}^Z \left[\frac{Ze^2}{r_j} - \sum_{k=1}^Z \frac{e^2}{r_j - r_k} \right].$$

De esta forma podemos ver que la acción del término de repulsión entre pares de electrones es reducir el efecto del campo del núcleo sobre el j -ésimo electrón debido a la presencia de los demás $Z - 1$ electrones. Una manera de atacar el problema debida originalmente a Slater y Hartree [5] es la *aproximación de campo central*, la cual está basada en el modelo de partículas independientes y supone lo siguiente:

- Cada electrón experimenta un potencial efectivo que representa la atracción del núcleo y el efecto promedio de la interacción repulsiva o de apantallamiento entre uno y $N - 1$ electrones:

$$V(\mathbf{r}_j) = - \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{Z - S(\mathbf{r}_j)}{r_j} e^2. \quad (2.3)$$

donde $S(\mathbf{r}_j)$ es el apantallamiento que experimenta el j -ésimo electrón.

- El potencial efectivo posee simetría esférica al ser promediado sobre la distribución espacial de carga [6]:

$$V(\mathbf{r}_j) \equiv \langle V(\mathbf{r}_j, \boldsymbol{\theta}_j, \boldsymbol{\phi}_j) \rangle. \quad (2.4)$$

Esta última suposición es fundamental para todo el desarrollo de este trabajo. Es necesario hacer notar que la forma explícita de $V(\mathbf{r})$ nos es desconocida debido a los términos de apantallamiento. Los modelos más utilizados son el autoconsistente de Hartree y el estadístico semiclásico de Thomas-Fermi [9]. Bajo este esquema podemos separar el Hamiltoniano como $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1$, donde

$$\mathbf{H}_0 = \sum_{j=1}^Z \left[\frac{\mathbf{p}_j^2}{2m_e} + V(\mathbf{r}_j) \right]; \quad (2.5)$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 &= \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \left[\sum_{j \neq k}^Z \left(\frac{Ze^2}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|} \right) - \sum_{j=1}^Z \left(\frac{Ze^2}{|\mathbf{r}_j|} + V(\mathbf{r}_j) \right) \right] \\ &= \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \left[\sum_{j \neq k}^Z \left(\frac{Ze^2}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|} \right) - \sum_{j=1}^Z S(\mathbf{r}_j) \right]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Podemos ver que el término de repulsión se ve aminorado por los términos de apantallamiento. La aproximación de campo central asume que los términos de apantallamiento a primer orden son de tal forma que $\mathbf{H}_1 \approx \mathbf{0}$ y podemos resolver únicamente para H_0 [9]:

$$\mathbf{H}_0 \Psi = \sum_{j=1}^Z \left[\frac{\mathbf{p}_j^2}{2m_e} + V(\mathbf{r}_j) \right] \Psi = E_T \Psi. \quad (2.7)$$

Ahora la función de onda del sistema Ψ es separable en el producto de las funciones de onda de cada electrón $\psi_j(\mathbf{r}_j)$ dado por el determinante de Slater [9]:

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_Z) = \frac{1}{\sqrt{Z!}} \begin{vmatrix} \psi_1(\mathbf{r}_1) & \cdots & \psi_Z(\mathbf{r}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1(\mathbf{r}_Z) & \cdots & \psi_Z(\mathbf{r}_Z) \end{vmatrix},$$

lo cual nos garantiza que Ψ corresponde a un estado totalmente antisimétrico. Las funciones de onda $\psi_j(\mathbf{r}_j)$ que son soluciones a las ecuaciones de la forma:

$$\left(\frac{\mathbf{p}_j^2}{2m_e} + V(\mathbf{r}_j) \right) \psi_j = E_j \psi_j, \quad (2.8)$$

las cuales son productos de funciones de los operadores radiales y angulares (incluyendo la función de espín $\chi(m_s)$):

$$\psi_j^{n,l,m_l}(\mathbf{r}_j, \boldsymbol{\theta}_j, \boldsymbol{\phi}_j, m_s) = R_l^n(\mathbf{r}_j) Y_l^{m_l}(\boldsymbol{\theta}_j, \boldsymbol{\phi}_j) \chi(m_s), \quad (2.9)$$

con $R_l^n(\mathbf{r}_j)$ la parte radial y $Y_l^{m_l}(\boldsymbol{\theta}_j, \boldsymbol{\phi}_j)$ el esférico armónico de la parte angular. En la notación de Dirac, podemos describir al estado de cada electrón en términos de sus números cuánticos:

$$|\psi\rangle_j = |n, l, m_l, m_s\rangle_j. \quad (2.10)$$

Los números n , l y m_l cumplen las reglas de cuantización para potenciales con simetría esférica [4]

$$n \in \mathbb{N} \quad (2.11a)$$

$$l \in [0, 1, \dots, n-1] \quad (2.11b)$$

$$m_l \in [-l, -l+1, \dots, 0, 1, \dots, l-1, l] \quad (2.11c)$$

$$d(n) = \sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = n^2, \quad (2.11d)$$

mientras que $m_s = \pm 1/2$ (en unidades de \hbar) es la proyección en $\hat{\mathbf{z}}$ del espín total \mathbf{S} del electrón. El número de posibles valores que puede tomar m_l es $(2l + 1)$. La energía total del sistema es la suma de las energías individuales de los electrones:

$$E_T = \sum_{j=1}^Z E_j. \quad (2.12)$$

Ya que los operadores de momento angular total $\mathbf{L} = \sum_{j=1}^Z \mathbf{L}_j$ y espín total $\mathbf{S} = \sum_{j=1}^Z \mathbf{S}_j$ conmutan con \mathbf{H}_0 , podemos especificar el estado de los Z electrones en términos de los eigenestados de \mathbf{H}_0 , del operador de momento angular total $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S} = \sum_{j=1}^Z (\mathbf{L}_j + \mathbf{S}_j)$, con eigenvalores $\hbar\sqrt{j(j+1)}$ y su proyección \mathbf{J}_z , con eigenvalores $M = \sum_{j=1}^Z (m_l^j + m_s^j)$ [6]:

$$|\Psi\rangle = |\alpha, J, M\rangle, \quad (2.13)$$

donde $|\Psi\rangle$ es en general una combinación lineal de estados formados por determinantes de Slater, sobre los cuales, para cada determinante, se fijan n y l , mientras que se dejan variar m_l y m_s [7]. α es un parámetro adicional que nos dice información adicional acerca de la parte radial de las funciones de onda.

2.2. Estados electrónicos en un campo central

Como vimos en la sección anterior, bajo la aproximación de campo central la energía total del sistema depende únicamente del número de electrones que ocupan cada uno de los niveles de energía individuales $E_j \equiv E_j^{n,l}$, lo cual implica que la energía total depende de la distribución de electrones con respecto a los números n y l . A esta distribución la conocemos como *configuración electrónica* [5]. En el lenguaje de la espectroscopía atómica, una *capa electrónica* es el conjunto de orbitales con el mismo número n , para los cuales hay n^2 orbitales (ec.2.11 d). El conjunto de todos los electrones con los mismos números n y l es llamada una *subcapa* y contiene a lo más $2(2l + 1)$ electrones. Una subcapa es *cerrada* si está ocupada por el máximo número de electrones. El punto crucial acerca de las capas cerradas es que para cada electrón con números m_l, m_s tiene que existir otro con números $-m_l, -m_s$; como el número de electrones en una subcapa cerrada es par, la contribución de esta al momento angular total del sistema \mathbf{J} es nula.

Es el caso de los *átomos alcalinos*, tal como el Rubidio, el tener todos sus electrones en subcapas cerradas salvo uno (el electrón de valencia), lo cual nos permite tratar de manera efectiva al átomo como un sistema compuesto por el núcleo más la nube electrónica y un solo electrón en la capa más externa y cuya ecuación de Schrödinger es la (2.8). Para el caso particular del Rubidio, esta configuración es equivalente a la de un átomo de Criptón, ^{36}Kr , más un electrón de valencia.

2.3. Estructura fina e hiperfina de átomos alcalinos

Una vez establecida la forma en la que trataremos al átomo, discutiremos primero las correcciones a los niveles de energía dados por la ecuación (2.8).

2.3.1. Estructura fina

La primera es la interacción entre el momento magnético del electrón debido a su espín $\boldsymbol{\mu}_S$ y el campo efectivo, conocida como interacción espín-órbita ($\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$) que, junto con la corrección relativista, dan como resultado a la *estructura fina*.

Ya que el electrón de valencia orbita alrededor del núcleo y la nube de electrones, experimenta un campo magnético de la forma:

$$\mathbf{B} = -\left(\frac{\mathbf{p}}{m_e c}\right) \times \mathbf{E}, \quad (2.14)$$

donde $\mathbf{E} = \nabla V(\mathbf{r})/e$ es el campo eléctrico debido al núcleo y la nube. Como el electrón tiene un momento magnético, $\boldsymbol{\mu}_S = e\mathbf{S}/m_e c$, existe una interacción con el campo magnético \mathbf{B} de la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{LS} &= -\boldsymbol{\mu}_S \cdot \mathbf{B} \\ &= -\left(\frac{e\mathbf{S}}{m_e c}\right) \cdot \left[\frac{\mathbf{p}}{m_e c} \times \frac{1}{e} \frac{dV}{dr} \left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)\right] \\ &= \left(\frac{1}{m_e c}\right)^2 \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} (\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}). \end{aligned} \quad (2.15)$$

El término de interacción es correcto salvo un factor de 2, que se corrige cuando consideramos la precesión del espín del electrón (mejor conocida como precesión de Thomas) [6]. Aplicando teoría de perturbaciones, tomando como base de estados los eigenestados de los operadores \mathbf{L}^2 , \mathbf{S}^2 , \mathbf{J}^2 y \mathbf{J}_z del electrón de valencia, obtenemos que de un estado determinado por los números n, l se obtienen dos con una diferencia de energía entre sí, a primer orden [6]:

$$\Delta_{nlJ} = \frac{1}{2m_e^2 c^2} \left\langle \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \right\rangle_{nl} \frac{\hbar^2}{2} \begin{bmatrix} l \\ -(l+1) \end{bmatrix} \begin{matrix} J = l + 1/2 \\ J = l - 1/2 \end{matrix} \quad (2.16)$$

En términos de la constante de estructura fina, $\alpha \approx 1/137$, la corrección a las energías debida a la estructura fina son del orden de $\alpha^4 m_e c^2$, mientras que las energías de átomos hidrogenoides son del orden de $\alpha^2 m_e c^2$. Los posibles eigenvalores del momento angular total, \mathbf{J} , cumplen la *regla triangular*:

$$|L - S| \leq J \leq L + S. \quad (2.17)$$

2.3.2. Estructura hiperfina

La mayoría de los núcleos con un número impar de protones poseen espín nuclear $I\hbar$ [7], que es par o impar si el número de masa del átomo es par o impar respectivamente. De esta forma, el núcleo tiene un momento dipolar magnético:

$$\boldsymbol{\mu}_I = \mu_n g_I \mathbf{I}, \quad (2.18)$$

donde $\mu_n = \mu_0 m_e / m_p$ es el magnetón nuclear y g_I el factor giromagnético del núcleo. La orientación de \mathbf{I} está cuantizada en la dirección del campo magnético $\mathbf{B}_J(r)$ en la posición del núcleo generado por el momento angular total del electrón de valencia. El espín nuclear junto con el momento angular total del electrón definen el momento angular total atómico \mathbf{F} :

$$\mathbf{F} = \mathbf{J} + \mathbf{I}. \quad (2.19)$$

El campo magnético en el núcleo promediado en el tiempo apunta en la dirección de \mathbf{J} [7]:

$$\mathbf{B}_J = \left(\frac{\mathbf{B}(0) \cdot \mathbf{J}}{|\mathbf{J}|^2} \right) \mathbf{J}. \quad (2.20)$$

El hamiltoniano de interacción, \mathbf{H}_M , queda como:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_M &= -\mathbf{B}_J \cdot \boldsymbol{\mu}_I \\ &= -\mu_n g_I \left(\frac{\mathbf{B}(0) \cdot \mathbf{J}}{|\mathbf{J}|^2} \right) \mathbf{J} \cdot \mathbf{I} \\ &\equiv A_{\text{hfs}} (\mathbf{J} \cdot \mathbf{I}). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Con A_{hfs} la constante dipolar magnética de la estructura hiperfina [8]. Ya que $\boldsymbol{\mu}_I$ es muy pequeño, aplicamos teoría de perturbaciones para obtener las correcciones a la energía:

$$\begin{aligned} \Delta_M &= A_{\text{hfs}} \langle \alpha, J, F, I | \mathbf{J} \cdot \mathbf{I} | \alpha, J, F, I \rangle \\ &= \left(\frac{1}{2} \right) A_{\text{hfs}} [F(F+1) - J(J+1) - I(I+1)] \\ &\equiv \left(\frac{1}{2} \right) A_{\text{hfs}} \cdot C. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Además del momento dipolar magnético, si $I \geq 1$, el núcleo tiene además un momento cuadrupolar eléctrico $\mathbf{Q}_{\mu\nu}$ que interactúa con los gradientes del campo eléctrico generado por el electrón de valencia, dando como resultado más niveles hiperfinos. La energía total de los niveles hiperfinos es [8]:

$$\Delta_M + \Delta_Q = \frac{1}{2} A_{\text{hfs}} \cdot C + B_{\text{hfs}} \cdot \left[C(C+1) - \left(\frac{4}{3} \right) J(J+1)I(I+1) \right], \quad (2.23)$$

donde B_{hfs} es la constante cuadrupolar de la estructura hiperfina [8]. El orden de las correcciones asociadas a la estructura hiperfina depende completamente del átomo que se esté estudiando, siendo del orden de la estructura fina para átomos muy ligeros o para configuraciones altamente excitadas, y mucho mayores que la fina para átomos muy pesados [7]. Para átomos hidrogenoides, en términos de la constante de estructura fina, la corrección es de orden $\alpha^4 m_e c^2 (m_e / m_p)$. Los posibles valores del número cuántico de \mathbf{F} son:

$$|J - I| \leq F \leq J + I. \quad (2.24)$$

Tomando en cuenta las correcciones de estructura fina e hiperfina, el estado completo de un átomo alcalino depende de los siguientes números cuánticos: n , el número cuántico principal; L , el momento angular orbital del electrón; J , el momento angular total del electrón; F , el momento angular total del átomo y m_f la proyección magnética de \mathbf{F} ; explícitamente:

$$|\psi\rangle_{\text{alcalino}} = |n, L, J, F, m_f\rangle. \quad (2.25)$$

El átomo con el que trabajaremos en detalle a lo largo de este trabajo es el isótopo 87 del Rubidio, ^{87}Rb , el cual es un átomo alcalino y cuyos niveles de energía que nos interesan mostramos a continuación:

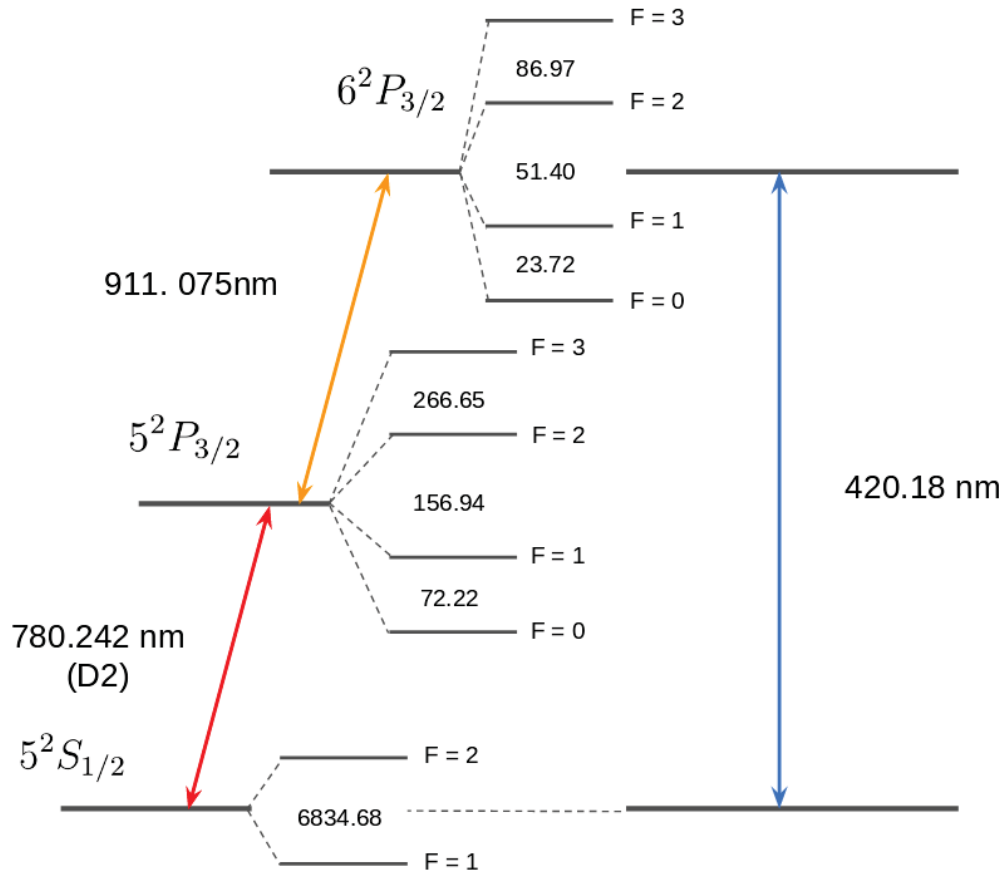


Figura 2.1. Niveles de energía del ^{87}Rb . La líneas azul y roja corresponden a una transiciones dipolares eléctricas y la amarilla a una cuadrupolar eléctrica. El número entero en cada nivel representa el número cuántico principal n , las letras $S \leftrightarrow L = 0$ y $P \leftrightarrow L = 1$ representan los valores del momento angular orbital del electrón, mientras que las fracciones que se encuentran debajo son el valor del momento angular total del electrón J . La letra F representa el momento angular total atómico correspondiente a los efectos de la estructura hiperfina. Los números en medio de dos valores diferentes de F corresponden a las frecuencias asociadas a la energía de transición entre los distintos niveles y están en unidades de MHz.

Ya que hemos definido los estados con los que haremos la descripción del átomo de Rubidio, presentaremos la teoría de la interacción de estos con ondas electromagnéticas.

Capítulo 3

Interacción de un átomo alcalino con luz

En este capítulo desarrollamos la teoría de la interacción entre luz clásica y un átomo alcalino, que da como resultado las transiciones entre los varios niveles energéticos de la estructura hiperfina del átomo. Primero planteamos el Hamiltoniano de interacción y a continuación hacemos un desarrollo en series de este para reconocer los diferentes mecanismos a través de los cuales son llevadas a cabo las transiciones atómicas. Calculamos propiedades de las transiciones dipolares y cuadrupolares eléctricas tales como ritmos de decaimiento espontáneo, los elementos de matriz del Hamiltoniano de interacción que acoplan diferentes niveles y las reglas de selección.

3.1. Interacción de un átomo con campos electromagnéticos

Los campos eléctrico \mathbf{E} y magnético \mathbf{B} , en la norma de Coulomb [11], se pueden escribir en términos del potencial vectorial $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad , \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (3.1)$$

En este trabajo, aproximamos la luz de un láser como una onda electromagnética monocromática, que consiste en dos campos eléctrico y magnético oscilantes, transversales y perpendiculares entre sí. La onda posee un vector de onda \mathbf{k} y una frecuencia ω . En términos de \mathbf{A} se escribe como [10]

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = A_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \boldsymbol{\epsilon} \quad (3.2a)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = iB_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \frac{\mathbf{k}}{k} \times \boldsymbol{\epsilon} \quad (3.2b)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -iE_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \boldsymbol{\epsilon}, \quad (3.2c)$$

donde $k = \omega/c$, $E_0 = \omega A_0$, $B_0 = E_0/c$ y $\boldsymbol{\epsilon}$ el vector unitario de polarización. Si asumimos que la nube electrónica y el núcleo forman un sistema con carga e y es además estacionario, el Hamiltoniano de un átomo alcalino equivale al del electrón de valencia moviéndose en un campo electromagnético:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{1}{2m_e} (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + V(\mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{2m_e} \mathbf{p}^2 + V(\mathbf{r}) + \left\{ \left(\frac{e}{m_e} \right) \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} + \frac{e^2}{2m_e} \mathbf{A}^2 \right\} \\ &= \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_{int}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

\mathbf{H}_0 es el Hamiltoniano del electrón bajo la aproximación de campo central y \mathbf{H}_{int} el de interacción con el campo electromagnético. El orden de magnitud del segundo término de \mathbf{H}_{int} lo podemos estimar calculando la energía promedio que aporta en un ciclo al Hamiltoniano total [12]

$$\begin{aligned} \langle U_{A^2} \rangle &= \frac{e^2}{2m_e} \langle \mathbf{A}^2 \rangle \\ &= \frac{e^2 I}{m_e \epsilon_0 c \omega^2}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

donde I es la intensidad de la onda. Para ondas en el régimen óptico $\omega \approx 1 \times 10^{15}$ Hz, lo cual nos permite ignorar este término. Desarrollando el primer término obtenemos:

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_{int} &= \left(\frac{e}{m_e} \right) \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} \\ &= \left(\frac{eA_0}{m_e} \right) (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\epsilon}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} e^{-i\omega t} \\ &= eE_0 \mathbf{D} e^{-i\omega t},\end{aligned}\tag{3.5}$$

donde hemos definido al *Operador de transición*:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{\omega m_e} (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\epsilon}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})},\tag{3.6}$$

el cual es el responsable de las transiciones entre los varios niveles energéticos del átomo. Los radios atómicos de átomos alcalinos se encuentran entre 25pm y 260pm [13]. Para ondas en el régimen óptico el producto $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \approx 1 \times 10^{-3}$ es mucho menor a 1, permitiéndonos expandir la exponencial del operador de transición en series de potencias equivalentes a la expansión multipolar de una distribución de carga localizada. A primer orden:

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \frac{1}{\omega m_e} (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\epsilon}) (1 + i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})) + \mathcal{O}((i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})^2) \\ &= \left\{ \frac{1}{\omega m_e} (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\epsilon}) \right\} + \left\{ \left(\frac{i}{\omega m_e} \right) (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\epsilon}) (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \right\} \\ &= \mathbf{D}^{(0)} + \mathbf{D}^{(1)}.\end{aligned}\tag{3.7}$$

Como veremos más adelante, $\mathbf{D}^{(0)}$ es el responsable de las llamadas *transiciones dipolares eléctricas*, mientras que $\mathbf{D}^{(1)}$ corresponde a las transiciones de orden superior *dipolar magnética* y *cuadrupolar eléctrica*. En la siguiente sección reescribiremos a $\mathbf{D}^{(0)}$ en términos de \mathbf{r} y calcularemos el acoplamiento entre dos niveles conectados por una transición dipolar eléctrica.

3.2. Acoplamiento por una transición dipolar eléctrica

Dado un operador \mathbf{q}_i y su conjugado \mathbf{p}_i , para cualquier función $F(\mathbf{p})$ se cumple la siguiente ecuación [6] :

$$[\mathbf{q}_i, F(\mathbf{p})] = i\hbar \frac{\partial F(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}_i}.\tag{3.8}$$

En particular, para el Hamiltoniano de la ecuación (3.3):

$$[\mathbf{r}, \mathbf{H}] = \frac{i\hbar}{m_e} \mathbf{p}.\tag{3.9}$$

El elemento de la matriz asociada a \mathbf{p} para dos eigenestados de \mathbf{H}_0 , $|a\rangle$ y $|b\rangle$, es:

$$\begin{aligned}\langle b|\mathbf{p}|a\rangle &= -\frac{im_e}{\hbar} \langle b|[\mathbf{r}, \mathbf{H}]|a\rangle \\ &= \frac{im_e}{\hbar} (\langle b|\mathbf{H}\mathbf{r}|a\rangle - \langle b|\mathbf{r}\mathbf{H}|a\rangle) \\ &= \frac{im_e}{\hbar} \langle b|\mathbf{r}|a\rangle \hbar(\omega_b - \omega_a) \\ &= im_e \omega_{ba} \langle b|\mathbf{r}|a\rangle,\end{aligned}\tag{3.10}$$

donde ω_{ba} es la frecuencia asociada a la energía de transición entre los estados $|b\rangle$ y $|a\rangle$. A orden cero el elemento de la matriz asociada a \mathbf{H}_{int} queda como:

$$\begin{aligned}\langle b|\mathbf{H}_{int}^{(0)}|a\rangle &= eE_0 \langle b|\mathbf{D}^{(0)}|a\rangle e^{-i\omega t} \\ &= \frac{eE_0}{\omega m_e} \langle b|(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\epsilon})|a\rangle e^{-i\omega t} \\ &= \frac{\omega_{ba}}{\omega} \langle b|e\mathbf{r}|a\rangle \cdot iE_0 e^{-i\omega t} \boldsymbol{\epsilon} \\ &\equiv \frac{\omega_{ba}}{\omega} \left(-\langle b|\mathbf{p}|a\rangle \cdot \mathbf{E}^{(0)}(t) \right).\end{aligned}\tag{3.11}$$

De esta forma resulta claro que las transiciones llevadas a cabo por $\mathbf{H}_{int}^{(0)}$ sean llamadas dipolares eléctricas pues representa la energía de interacción entre el momento dipolar eléctrico del átomo $\mathbf{p} = e\mathbf{r}$ [14] y un campo eléctrico homogéneo en el espacio y variable en el tiempo $\mathbf{E}^{(0)}$.

3.2.1. Probabilidad de transición por emisión espontánea de radiación dipolar eléctrica

La teoría que hemos desarrollado hasta este punto predice que la evolución temporal de un estado atómico alcalino excitado $|\psi\rangle = |n, L, J, F, m_F\rangle$ está descrita por la ecuación (2.8) cuya solución es:

$$|\psi(t)\rangle = |n, L, J, F, m_F\rangle e^{-iE_T t/\hbar}. \quad (3.12)$$

En caso de no haber radiación presente el átomo preparado en el estado $|\psi\rangle$ en $t = 0$ permanecerá igual para todo tiempo futuro, lo cual contradice las observaciones experimentales del *decaimiento espontáneo*. El punto clave para incorporar el decaimiento espontáneo en nuestra teoría es notar que para una perturbación dependiente del tiempo tal como es nuestro caso, la probabilidad $P_{ab}(t)$ de que el electrón pase de un estado $|a\rangle$ al estado $|b\rangle$ (con $E_a < E_b$) por absorción de un fotón es la misma a la de decaer del estado $|b\rangle$ al $|a\rangle$ $P_{ba}(t)$ [6]. A este fenómeno lo conocemos como *emisión estimulada*, y la probabilidad de transición es:

$$P_{ab}(t) = \frac{H_{ab}^2}{\hbar^2} \left[\frac{\sin((\omega_{ba} - \omega)t/2)}{(\omega_{ba} - \omega)^2} \right]. \quad (3.13)$$

Con $H_{ab} = \langle b|\mathbf{p}|a\rangle \cdot \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$. Considerando el caso más realista de una onda, es decir no monocromática, no polarizada e incoherente, la densidad de energía $U = \epsilon_0 E_0^2/2$ se reemplaza por $\rho(\omega)d\omega$, la densidad de energía en un rango de frecuencias $d\omega$ y $P_{ab}(t)$ toma la forma:

$$P_{ab}(t) = \frac{2}{\epsilon_0 \hbar} |\langle b|\mathbf{p}|a\rangle|^2 \int_0^\infty \rho(\omega) \left[\frac{\sin((\omega_{ba} - \omega)t/2)}{(\omega_{ba} - \omega)^2} \right] d\omega. \quad (3.14)$$

Como la función entre corchetes se vuelve muy estrecha en la región donde $\omega \approx \omega_{ba}$, podemos aproximar a $\rho(\omega)$ como constante y sacarla fuera de la integral,

$$\begin{aligned} P_{ab}(t) &\approx \frac{2}{\epsilon_0 \hbar} |\langle b|\mathbf{p}|a\rangle|^2 \rho(\omega_{ba}) \int_0^\infty \left[\frac{\sin((\omega_{ba} - \omega)t/2)}{(\omega_{ba} - \omega)^2} \right] d\omega \\ &\approx \pi \frac{\rho(\omega_{ba})}{\epsilon_0 \hbar} |\langle b|\mathbf{p}|a\rangle|^2 t \rightarrow \frac{\pi}{3} \frac{\rho(\omega_{ba})}{\epsilon_0 \hbar} |\langle b|\mathbf{p}|a\rangle|^2 t, \end{aligned} \quad (3.15)$$

donde el factor 1/3 proviene de promediar $|\langle b|\mathbf{p}|a\rangle|^2$ sobre todas las posibles polarizaciones y direcciones. Definimos el ritmo de transición R

$$R = \dot{P}_{ab} = \frac{\pi}{3} \frac{\rho(\omega_{ba})}{\epsilon_0 \hbar} |\langle b|\mathbf{p}|a\rangle|^2. \quad (3.16)$$

Suponiendo que tenemos una población de N átomos en un contenedor cerrado a temperatura T , sea N_a el número de átomos en el estado $|a\rangle$, N_b los que se encuentran en el $|b\rangle$ y A el ritmo de emisión espontánea. Entonces la población de átomos migrando de $|b\rangle$ a $|a\rangle$ de manera espontánea es AN_b , por emisión estimulada es $B_{ab}\rho(\omega_{ab})N_b$ y la de $|a\rangle$ migrando a $|b\rangle$ es $B_{ba}\rho(\omega_{ba})N_a$. La evolución de la población en el estado $|b\rangle$ está dada por la ecuación:

$$\dot{N}_b = -AN_b - B_{ab}\rho(\omega_{ab})N_b + B_{ba}\rho(\omega_{ba})N_a \quad (3.17)$$

Pero si el sistema está en equilibrio térmico las poblaciones deben mantenerse fijas, es decir $\dot{N}_b = 0$ y por tanto:

$$\begin{aligned} \rho(\omega_{ba}) &= \frac{AN_b}{B_{ba}N_a - B_{ab}N_b} \\ &= \frac{A}{\left(\frac{N_a}{N_b}\right)B_{ba} - B_{ab}}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Por otro lado, si la energía total del sistema es constante, la distribución de poblaciones es de la forma:

$$\frac{N_a}{N_b} = e^{\hbar\omega_{ba}/K_B T}. \quad (3.19)$$

La densidad de energía está dada por la ley de radiación de cuerpo negro:

$$\rho(\omega_{ba}) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega_{ba}^3}{e^{\hbar\omega_{ba}/K_B T} - 1}. \quad (3.20)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.19) y (3.20) en (3.18) obtenemos que la igualdad se da si y sólo si:

- $B_{ab} = B_{ba}$. El ritmo de transición de absorción es el mismo que el de emisión estimulada.

$$\blacksquare A = \frac{\hbar\omega_{ba}^3}{\pi^2c^3}B_{ab}.$$

Pero $B_{ab} = R$ y por tanto:

$$A = \frac{\omega_{ba}^3}{3\pi c^3 \epsilon_0 \hbar} |\langle b|\mathbf{p}|a\rangle|^2, \quad (3.21)$$

la cual corresponde a la regla de Fermi para transiciones dipolares eléctricas. El ritmo de decaimiento espontáneo o probabilidad de transición dipolar (desde ahora llamado A_1 según la notación de la referencia [15]) es muy importante para nuestro estudio pues nos dice el tiempo natural en el que el estado excitado $|b\rangle$ se mantiene estable antes de decaer al $|a\rangle$, además de que nos permite comparar las diferentes probabilidades de transición debidas a diferentes procesos [15].

3.3. Acoplamiento por transiciones de orden superior

Primero reescribimos a $\mathbf{D}^{(1)}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{(1)} &= \frac{i}{\omega m_e} (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\epsilon})(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \\ &= \frac{i}{\omega m_e} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{p}), \end{aligned} \quad (3.22)$$

lo cual es válido pues los productos $(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\epsilon})$ y $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ conmutan entre sí. Todavía más:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{(1)} &= \left(\frac{i}{\omega m_e}\right)(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{p}) + \left(\frac{i}{2\omega m_e}\right)[(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}) - (\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{k} \cdot \mathbf{p})] \\ &= \left(\frac{i}{2\omega m_e}\right)[(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\epsilon})(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) - (\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{k} \cdot \mathbf{p})] + \left(\frac{i}{2\omega m_e}\right)[(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\epsilon})(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + (\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{k} \cdot \mathbf{p})] \\ &= \mathbf{D}_{M1} + \mathbf{D}_{E2}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Donde hemos definido a los operadores:

$$\mathbf{D}_{M1} = \frac{i}{2\omega m_e} [(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{p}) - (\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{k} \cdot \mathbf{p})] \quad (3.24)$$

$$\mathbf{D}_{E2} = \frac{i}{2\omega m_e} [(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{p}) + (\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{k} \cdot \mathbf{p})], \quad (3.25)$$

y el Hamiltoniano de interacción a primer orden queda como:

$$\mathbf{H}_{int}^{(1)} = eE_0(\mathbf{D}_{M1} + \mathbf{D}_{E2})e^{-i\omega t}. \quad (3.26)$$

Como veremos enseguida, el término \mathbf{D}_{M1} corresponde a transiciones dipolares magnéticas, mientras que \mathbf{D}_{E2} a transiciones cuadrupolares eléctricas.

3.3.1. Acoplamiento por una transición dipolar magnética

Notamos que el operador \mathbf{D}_{M1} , a través de la siguiente identidad:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \quad (3.27)$$

puede ser escrito, al sustituir $\mathbf{a} = \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \boldsymbol{\epsilon}$, $\mathbf{c} = \mathbf{r}$ y $\mathbf{d} = \mathbf{p}$ como:

$$\mathbf{D}_{M1} = \frac{i}{2\omega m_e} [(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\epsilon})]. \quad (3.28)$$

El primer producto corresponde al momento angular orbital del electrón $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ mientras que el segundo es el vector de dirección del campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ (eq(2.2b)). Sustituyendo la ecuación (3.2b) tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{M1} &= \frac{i}{2\omega m_e} \left(\frac{k}{-iB_0}\right) \mathbf{L} \cdot \mathbf{B}^{(0)} e^{i\omega t} \\ &= -\left(\frac{1}{ecB_0}\right) \frac{e}{2m_e} \mathbf{L} \cdot \mathbf{B}^{(0)} e^{i\omega t} \\ &= -\left(\frac{1}{ecB_0}\right) \boldsymbol{\mu}_L \cdot \mathbf{B}^{(0)} e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

con $\boldsymbol{\mu}_L$ el momento dipolar magnético orbital del electrón y $\mathbf{B}^{(0)}$ el campo magnético homogéneo.

El elemento de matriz asociada a \mathbf{H}_{int} , $\langle b|\mathbf{H}_{M1}|a\rangle$, debido a \mathbf{D}_{M1} es:

$$\begin{aligned}\langle b|\mathbf{H}_{M1}|a\rangle &= -\frac{E_0}{cB_0} \langle b|\boldsymbol{\mu}_L|a\rangle \cdot \mathbf{B}^{(0)} \\ &= -\langle b|\boldsymbol{\mu}_L|a\rangle \cdot \mathbf{B}^{(0)}.\end{aligned}\quad (3.30)$$

En la última ecuación sólo hemos escrito el momento magnético del electrón debido a su momento angular orbital \mathbf{L} . Una descripción completa de la física de las transiciones dipolares magnéticas entre los varios estados del átomo implica no sólo incorporar el momento del núcleo $\boldsymbol{\mu}_I$ y el espín del electrón $\boldsymbol{\mu}_S$ dentro del término $\langle b|\boldsymbol{\mu}|a\rangle$, sino además es necesario tomar en cuenta los efectos relativistas debido al espín del núcleo y al del electrón. Ya que en este trabajo estas transiciones no son relevantes para la descripción de los sistemas que nos interesan, no proseguiremos en su desarrollo.

3.3.2. Acoplamiento por una transición cuadrupolar eléctrica

Utilizando la ecuación (3.8), el operador \mathbf{D}_{E2} toma la forma:

$$\mathbf{D}_{E2} = \frac{1}{2\hbar\omega} [(\mathbf{H}\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{r}) - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{r}\mathbf{H})]. \quad (3.31)$$

El elemento de matriz que conecta a dos niveles mediante una transición cuadrupolar es:

$$\begin{aligned}e^{i\omega t} \langle b|\mathbf{H}_{E2}|a\rangle &= eE_0 \langle b|\mathbf{D}_{E2}|a\rangle \\ &= \frac{eE_0}{2\hbar\omega} \langle b|[(\mathbf{H}\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{r}) - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{r}\mathbf{H})]|a\rangle \\ &= \frac{eE_0}{2} \frac{\omega_{ba}}{\omega} \langle b|(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{r})|a\rangle \\ &= \frac{eE_0}{2c} \omega_{ba} \langle b|(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{r})|a\rangle,\end{aligned}\quad (3.32)$$

donde hemos hecho uso de la relación de dispersión $c = \omega/k$ para pasar de la tercera a la cuarta línea. La forma presente de $\langle b|\mathbf{H}_{E2}|a\rangle$ no nos revela el carácter cuadrupolar de la transición, sin embargo, utilizando la convención de suma de Einstein desarrollamos los productos interiores:

$$\begin{aligned}e^{i\omega t} \langle b|\mathbf{H}_{E2}|a\rangle &= C\epsilon_i k_j \langle b|\mathbf{r}^i \mathbf{r}^j|a\rangle \\ &= \frac{C}{3} \epsilon_i k_j \langle b|(3\mathbf{r}^i \mathbf{r}^j - \mathbf{r}^i \mathbf{r}^i \delta_{ij})|a\rangle \\ &= -\frac{1}{3} \frac{\omega_{ba}}{2\omega} \left(\mathbf{k} \cdot \langle b|\bar{\mathbf{Q}}|a\rangle \cdot \mathbf{E}^{(0)} \right),\end{aligned}\quad (3.33)$$

con $\bar{\mathbf{Q}}^{ij} = -e(3\mathbf{r}^i \mathbf{r}^j - \mathbf{r}^i \mathbf{r}^i \delta_{ij})$ el momento cuadrupolar eléctrico del átomo. Para pasar de la primera a la segunda línea en la deducción anterior utilizamos el hecho de que los vectores \mathbf{k} y $\boldsymbol{\epsilon}$ son perpendiculares entre sí ($k_i \epsilon^i = 0$) para poder agregar el término $\mathbf{r}^i \mathbf{r}^i \delta_{ij}$ pero preservando la igualdad.

Haciendo un tratamiento similar al de la subsección (3.2.1) el ritmo de decaimiento espontáneo tanto para la transición dipolar magnética como la cuadrupolar eléctrica es:

$$A_{M1} = A_{E2} = \frac{e^2 \omega_{ba}^5}{\pi \epsilon_0 \hbar c^5} \left| \langle b|(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{r})|a\rangle \right|^2. \quad (3.34)$$

Para átomos hidrogenoides, el cociente entre el ritmo de transición dipolar eléctrico y el de las de orden superior es [15] :

$$\begin{aligned}\frac{A_{E2}}{A_{E1}} &\approx \frac{3}{40} \left(\frac{Z\alpha}{2} \right)^2 \\ &\approx 10^{-6},\end{aligned}\quad (3.35)$$

lo cual nos permite anticipar dos cosas: que el efecto de las transiciones cuadrupolares eléctricas en el tiempo en el que se mantiene estable un nivel dado es despreciable si alguna transición dipolar eléctrica hacia ese nivel está permitida; lo segundo es que las escalas de tiempo en las cuales ocurren las transiciones debidas a los diferentes mecanismos que hemos desarrollado a lo largo de este capítulo son muy diferentes entre sí. Como veremos en los siguientes capítulos, estas diferencias de tiempo pueden ser reducidas al incrementar la potencia del láser que induce las transiciones cuadrupolares, dando como resultado efectos ópticos tales como la transparencia inducida electromagnéticamente (EIT) y el efecto Autler-Townes.

3.4. Reglas de selección para transiciones dipolares y cuadrupolares eléctricas

Ya que hemos establecido la forma en que interactúan la luz, como una onda semiclásica, y un átomo alcalino, buscamos saber cuáles son los niveles energéticos de la estructura fina e hiperfina que se encuentran conectados por transiciones eléctricas. Dada la forma del Hamiltoniano \mathbf{H}_0 podemos anticipar que una transición entre dos niveles $|a\rangle$, $|b\rangle$ es posible sólo si los momentos angulares y la energías del átomo y la luz se conservan a lo largo de la interacción.

Es el *teorema de Wigner-Eckart* el que nos da una expresión formal de las leyes de conservación del momento angular en mecánica cuántica conocidas como *reglas de selección* [16]. El teorema establece que dado un operador tensorial de rango k , $\mathbf{T}^{(k)}$ y dos estados con momento angular j y j' , existe una constante $\langle \alpha' j' || \mathbf{T}^{(k)} || \alpha j \rangle$ tal que $\forall m, m'$ y q se satisface que [12]

$$\begin{aligned} \langle \alpha_2 j_2 m_2 | \mathbf{T}_q^{(k)} | \alpha_1 j_1 m_1 \rangle &= \langle j_1, m_2 k q | j_2 m_2 \rangle \langle \alpha_2 j_2 || \mathbf{T}^{(k)} || \alpha_1 j_1 \rangle \\ &= (-1)^{j_1 - k + m'_1} \sqrt{2j_2 + 1} \begin{pmatrix} j_2 & j_1 & k \\ -m_1 & m_2 & q \end{pmatrix} \langle \alpha_2 j_2 || \mathbf{T}^{(k)} || \alpha_1 j_2 \rangle, \end{aligned} \quad (3.36)$$

donde $\mathbf{T}_q^{(k)}$ es la q -ésima componente del operador $\mathbf{T}^{(k)}$, $\begin{pmatrix} j_2 & j_1 & k \\ -m_1 & m_2 & q \end{pmatrix}$ es el símbolo 3j- de Wigner y $\langle \alpha_2 j_2 || \mathbf{T}^{(k)} || \alpha_1 j_2 \rangle$ es llamado el *elemento de matriz reducido*. El símbolo 3j- es un número real que representa el acoplamiento de los momentos angulares de dos sistemas y en el cuál están expresadas todas las reglas de selección:

$$|j_2 - j_1| \leq k \leq j_2 + j_1 \quad (3.37a)$$

$$m_i \in [-l_i, \dots, 0, \dots, l_i] \quad i \in [1, 2], \quad q \in [-k, \dots, 0, \dots, k] \quad (3.37b)$$

$$m_1 - m_2 = q \quad (3.37c)$$

$$j_1 + j_2 + k \in \mathbb{Z}. \quad (3.37d)$$

Si cualesquiera de estas reglas no es cumplida, entonces en automático el símbolo 3j- es igual a 0 [17]. De esta forma el cálculo de los elementos de matriz entre dos niveles, que generalmente es laborioso, se reduce al de la constante $\langle \alpha' j' || \mathbf{T}^{(k)} || \alpha j \rangle$ y al del símbolo 3-j. En la siguiente sección reescribiremos los elementos de matriz (3.10) y (3.32) en términos de tensores esféricos y determinaremos las reglas de selección para transiciones dipolares y cuadrupolares eléctricas.

3.4.1. Descomposición de \mathbf{H}_{int} en términos de tensores esféricos

Para escribir al operador radial $\mathbf{r} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ como uno esférico, definimos la *base de helicidad*:

$$\hat{e}_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{e}_x \pm i \hat{e}_y) \quad \hat{e}_0 = \hat{e}_z, \quad (3.38)$$

donde no hemos escrito a los vectores unitarios en negritas como en las secciones anteriores. Los vectores de la base de helicidad cumplen:

$$\hat{e}_m \cdot \hat{e}_{m'}^* = \delta_{mm'} \quad (3.39a)$$

$$\hat{e}_m^* = (-1)^m \hat{e}_{-m}, \quad (3.39b)$$

de tal forma todo vector \mathbf{v} se descompone como:

$$\mathbf{v} = \sum_{m=-1}^1 \mathbf{v} \cdot \hat{e}_m^* \hat{e}_m \equiv \sum_{m=-1}^1 v_m \hat{e}_m. \quad (3.40)$$

Las componentes del operador radial, \mathbf{r} , en esta base son:

$$\begin{aligned} r_{\pm 1} &= \mathbf{r} \cdot \hat{e}_{\pm 1}^* = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (x \pm iy) \\ &= \sqrt{\frac{4\pi}{3}} r Y_1^{\pm 1}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

donde $Y_1^{\pm 1}$ es el esférico armónico Y_l^m con $l = 1$ y $m = \pm 1$. Para la componente $m = 0$ tenemos:

$$r_0 = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} r Y_1^0 \quad (3.42a)$$

$$\Rightarrow \mathbf{r} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} r \sum_{m=-1}^1 Y_1^m \hat{e}_m. \quad (3.42b)$$

Ya que hemos obtenido la expresión para \mathbf{r} en términos de los esféricos armónicos, podemos desarrollar los términos del Hamiltoniano de interacción. Para calcular los elementos de matriz del Hamiltoniano de interacción reescribimos, usando la convención de la suma de Einstein, los productos de las ecuaciones (3.10) y (3.32):

$$\begin{aligned} (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\epsilon}) &= \left(\sqrt{\frac{4\pi}{3}} r Y_1^m \hat{e}_m \right) (\epsilon_m \hat{e}^n) \\ &= \sqrt{\frac{4\pi}{3}} r Y_1^m \epsilon_n \delta_m^n \\ &= \sqrt{\frac{4\pi}{3}} r Y_1^m \epsilon_m, \quad m \in [-1, 0, 1]. \end{aligned} \quad (3.43)$$

De la misma forma $(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r})$ es:

$$(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}) = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} r Y_1^m k_m, \quad (3.44)$$

y su producto

$$(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{r}) = \frac{4\pi}{3} r^2 \epsilon_{m_1} k_{m_2} Y_1^{m_1} Y_1^{m_2}. \quad (3.45)$$

El producto de armónicos esféricos $Y_1^{m_1} Y_1^{m_2}$ es [16] :

$$Y_1^{m_1} Y_1^{m_2} = \sqrt{\frac{9}{4\pi}} \sum_{L=0}^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sum_{M=-L}^L (-1)^M \sqrt{2L+1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & L \\ m_1 & m_2 & M \end{pmatrix} Y_L^M. \quad (3.46)$$

La suma que va sobre L es la que determinará si $Y_1^{m_1} Y_1^{m_2} = 0$; para $L = 0$:

$$\begin{aligned} (Y_1^{m_1} Y_1^{m_2})|_{L=0} &= \sqrt{\frac{1}{4\pi}} Y_0^0 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ m_1 & m_2 & 0 \end{pmatrix} \\ &\neq 0 \iff m_1 = -m_2. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Sustituyendo en (3.45):

$$\begin{aligned} (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{r})|_{L=0} &= \frac{4\pi}{3} r^2 \epsilon_{m_1} k_{-m_1} Y_1^{m_1} Y_1^{-m_1}|_{L=0} \\ &= \frac{4\pi}{3} r^2 (-1)^{m_1} (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{e}_{m_1}^*) (\boldsymbol{\epsilon} \cdot \hat{e}_{m_1}) (Y_1^{m_1} Y_1^{m_1})|_{L=0} \\ &= \frac{4\pi}{3} r^2 (-1)^{m_1} (\hat{\mathbf{k}} \cdot \boldsymbol{\epsilon}) \delta_{m_1, m_1} (Y_1^{m_1} Y_1^{m_1})|_{L=0} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Para $L = 1$

$$(Y_1^{m_1} Y_1^{m_2})|_{L=1} \propto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.49a)$$

$$= 0 \quad (3.49b)$$

$$\Rightarrow (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{r})|_{L=1} = 0. \quad (3.49c)$$

Finalmente para $L = 2$:

$$(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{r})|_{L=2} = \sqrt{\frac{8\pi}{3}} r^2 \sum_{M=-2}^2 \epsilon^{m_1} k^{m_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m_1 & m_2 & M \end{pmatrix} Y_2^M, \quad (3.50)$$

donde hemos puesto de manera explícita la contracción del armónico esférico Y_2^M con el símbolo 3j-.

Los elementos de matriz para transiciones eléctricas dipolar y cuadrupolar en términos de tensores esféricos son:

$$\langle b|\mathbf{H}_{int}^{(0)}|a\rangle = \langle b|\mathbf{H}_{E1}|a\rangle = eE_c \frac{\omega_{ba}}{\omega} \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \langle b|rY_1^m|a\rangle \epsilon_m e^{-i\omega_c t} \quad (3.51a)$$

$$\langle d|\mathbf{H}_{int}^{(1)}|c\rangle = \langle d|\mathbf{H}_{E2}|c\rangle = \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \frac{eE_p}{2c} \omega_{dc} \sum_{M=-2}^2 \epsilon^{m_1 k m_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m_1 & m_2 & M \end{pmatrix} \langle d|r^2 Y_2^M|c\rangle e^{-i\omega_p t} \quad (3.51b)$$

3.4.2. Cálculo de los elementos de matriz de \mathbf{H}_{int}

En esta sección aplicaremos el teorema de Wigner-Eckart junto con algunos resultados de la teoría de adición de momento angular [18] para obtener expresiones donde la dependencia de los diferentes valores angulares que describen al átomo aparezcan de manera explícita. Comenzando con el término $\langle b|rY_1^M|a\rangle$ de la ecuación (3.51a), para un estado $|a_i\rangle = |n_i, L_i, J_i, F_i, m_i\rangle$, aplicamos el teorema de Wigner-Eckart:

$$\langle b|rY_1^M|a\rangle = (-1)^{F_a-1+m_b} \sqrt{2F_b+1} \begin{pmatrix} F_b & F_a & 1 \\ -m_b & m_a & M \end{pmatrix} \langle n_b, L_b, J_b, F_b || r || n_a, L_a, J_a, F_a \rangle. \quad (3.52)$$

Ya que el momento angular total atómico $\mathbf{F} = \mathbf{J} + \mathbf{I}$ resulta del acoplamiento de tres momentos angulares ($\mathbf{I}, \mathbf{S}, \mathbf{L}$) podemos reescribir $\langle n_b, L_b, J_b, F_b || r || n_a, L_a, J_a, F_a \rangle$ como [18]:

$$\begin{aligned} \langle n_b, L_b, J_b, F_b || r || n_a, L_a, J_a, F_a \rangle &= (-1)^{J_b+I+F_a+1} \sqrt{(2F_a+1)(2F_b+1)} \\ &\times \begin{Bmatrix} J_b & J_a & 1 \\ F_a & F_b & I \end{Bmatrix} \langle n_b, L_b, J_b || r || n_a, L_a, J_a \rangle, \end{aligned} \quad (3.53)$$

donde $\begin{Bmatrix} J_b & J_a & 1 \\ F_a & F_b & I \end{Bmatrix}$ es el símbolo 6j- de Wigner. A su vez, $\langle n_b, L_b, J_b || r || n_a, L_a, J_a \rangle$ queda como:

$$\begin{aligned} \langle n_b, L_b, J_b || r || n_a, L_a, J_a \rangle &= (-1)^{L_b+S+J_a+1} \sqrt{(2J_b+1)(2J_a+1)} \\ &\times \begin{Bmatrix} L_b & L_a & 1 \\ J_a & J_b & S \end{Bmatrix} \langle n_b, L_b || r || n_a, L_a \rangle. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Aplicando el teorema de Wigner-Eckart sobre $\langle n_b, L_b || r || n_a, L_a \rangle$:

$$\langle n_b, L_b || r || n_a, L_a \rangle = (-1)^{L_b} \sqrt{2L_a+1} \begin{pmatrix} L_a & L_b & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \langle n_b || r || n_a \rangle. \quad (3.55)$$

Sustituyendo en la ecuación (3.52) lo obtenido en las ecuaciones (3.53-3.55) tenemos que:

$$\langle b|rY_1^M|a\rangle = (-1)^{\alpha_1} \Pi_{ba} \begin{pmatrix} F_b & F_a & 1 \\ -m_b & m_a & M \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} J_b & J_a & 1 \\ F_a & F_b & I \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} L_b & L_a & 1 \\ J_a & J_b & S \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} L_a & L_b & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \langle n_b || r || n_a \rangle, \quad (3.56)$$

donde hemos definido las constantes:

$$\Pi_{ba} = \sqrt{(2F_a+1)(2F_b+1)^2(2J_b+1)(2J_a+1)(2L_a+1)} \quad (3.57a)$$

$$\alpha_1 = 2F_a + J_b + J_a + m_b + 2L_b + S + I + 1 \quad (3.57b)$$

$$\langle n_b || r || n_a \rangle = \int_0^\infty R_{n_b, L_b}^* r R_{n_a, L_a} r^2 dr. \quad (3.57c)$$

De acuerdo a las propiedades de los símbolos 3j y 6j, las reglas de selección para las transiciones dipolares eléctricas son:

$$\Delta m_{ba} = M_{ba} \quad \Delta F_{ba} = \pm 1 \quad (3.58a)$$

$$\Delta L_{ba} = \pm 1 \quad \Delta S = \Delta I = 0 \quad (3.58b)$$

Haciendo un tratamiento similar para $\langle d|r^2Y_2^M|c\rangle$ obtenemos:

$$\langle d|r^2Y_2^M|c\rangle = (-1)^{\alpha_2}\Pi_{dc} \begin{pmatrix} F_d & F_c & 2 \\ -m_d & m_c & M \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} J_d & J_c & 2 \\ F_c & F_d & I \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} L_d & L_c & 2 \\ J_c & J_d & S \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} L_c & L_d & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \langle n_d||r^2||n_c\rangle, \quad (3.59)$$

con:

$$\Pi_{dc} = \sqrt{(2F_c + 1)(2F_d + 1)^2(2J_d + 1)(2J_c + 1)(2L_c + 1)} \quad (3.60a)$$

$$\alpha_2 = 2F_c + J_d + J_c + m_d + 2L_d + S + I + 1 \quad (3.60b)$$

$$\langle n_d||r^2||n_c\rangle = \int_0^\infty R_{n_d,L_d}^* r^2 R_{n_c,L_c} r^2 dr. \quad (3.60c)$$

Las reglas de selección para transiciones cuadrupolares eléctricas son:

$$\Delta m_{dc} = M_{dc} \quad \Delta F_{dc} = 0, \pm 1, \pm 2 \quad (3.61a)$$

$$\Delta L_{dc} = 0, \pm 2 \quad \Delta S = \Delta I = 0 \quad (3.61b)$$

Esta es la forma más explícita en la que podemos escribir los elementos de matriz que acoplan los diferentes niveles energéticos de un átomo alcalino debido a transiciones eléctricas. Para poder evaluarlos debemos especificar el átomo que queremos estudiar y las diferentes transiciones que en él suceden.

Capítulo 4

Modelos simplificados del átomo: efectos ópticos asociados a transiciones atómicas

El objetivo de este capítulo es presentar y desarrollar las herramientas necesarias para estudiar la dinámica de un átomo alcalino con campos eléctricos, cuando las transiciones son dipolares eléctricas. Primero haremos la aproximación de dos niveles y estudiaremos el modelo de Jaynes-Cummings, de donde surgen conceptos clave para nuestro estudio tales como la *frecuencia de Rabi* y los *estados vestidos*. Extenderemos nuestro estudio de la dinámica del este tipo de sistemas agregando un tercer nivel cuando el campo eléctrico posee dos frecuencias y polarizaciones. Deduciremos la *ecuación de Lindblad*, la cual describe la evolución temporal de sistemas cuánticos de la forma más general posible, pues incorpora efectos de decaimiento espontáneo y desfaseamiento por colisiones. Finalmente, utilizando esta ecuación, describiremos dos efectos ópticos que surgen cuando más de una transición atómica es llevada por los campos: la transparencia inducida electromagnéticamente (EIT) y el efecto Autler-Townes.

4.1. Átomos de dos y tres niveles

Ya que en el capítulo anterior calculamos los elementos de matriz y las reglas de selección para las transiciones de orden dipolar y cuadrupolar eléctricas entre los distintos niveles de energía de un átomo alcalino, estamos en posición de plantear y resolver la dinámica de este interactuando con campos eléctricos. Sin embargo, el espectro de energía del electrón interactuando con el la nube electrónica y el núcleo, a pesar de estar cuantizado, es infinito y las reglas de selección pueden permitir la transición de un estado dado a distintos otros, dando como resultado una dinámica compleja de plantear y analizar. Es necesario entonces simplificar aún más nuestro modelo, reduciendo el número de niveles accesibles al sistema a sólo unos cuantos. Para nuestro estudio de un átomo alcalino interactuando con campos eléctricos, iniciaremos con la *aproximación de dos niveles*, que consiste en suponer que por cada frecuencia del campo, los niveles de energía accesibles al sistema son únicamente dos: un estado base de menor energía y un estado excitado. Los estados son acoplados a través de la interacción con un campo eléctrico monocromático clásico $\mathbf{E}(t)$ o con un único modo cuantizado del campo en una cavidad (originalmente propuesto por Jaynes y Cummings [19]) cuyas frecuencias son muy cercanas a la de transición entre los estados. La aproximación tiene validez bajo las siguientes dos suposiciones:

- La aproximación dipolar: las dimensiones del átomo son mucho menores a la longitud de onda del campo eléctrico (véase la sección 2.1).
- La aproximación de onda rotante (RWA por sus siglas en inglés): solamente los términos del campo eléctrico resonantes con cada transición atómica son tomados en cuenta en la descripción de interacción, mientras que los términos fuera de resonancia se anulan en un tiempo promedio [20].

La aproximación de dos niveles interactuando con un campo es un modelo cuántico clave para la comprensión de la interacción entre radiación y materia, además de ser el paradigma de la óptica cuántica, la óptica no lineal y la teoría cuántica de la información. Históricamente, Einstein lo utilizó para describir los procesos de absorción y emisión estimulada, mientras que Wigner y Weisskopf dieron la primera explicación completamente cuántica del proceso de radiación espontánea [22]. El sistema de dos niveles no sólo es físicamente realista, sino también matemáticamente tratable, pues la ecuación de Schrödinger para este sistema puede ser resuelta de manera exacta por medio de la aproximación de onda rotante, a pesar de que el término de interacción en el Hamiltoniano sea una perturbación dependiente del tiempo y con una amplitud arbitrariamente grande.

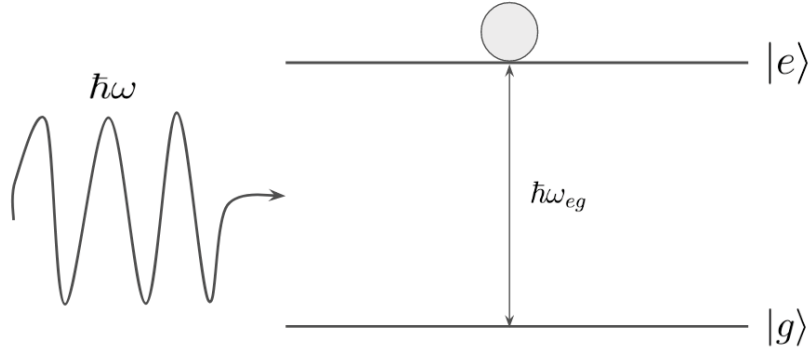


Figura 4.1. Esquema de dos un átomo de dos niveles interactuando con un campo eléctrico con una sola frecuencia ω cercana a la de transición ω_{eg} .

A continuación, para después discutir el inmenso número de aplicaciones que de él emanan, presentaremos brevemente el modelo original de Jaynes-Cummings [19], en el cual un átomo de dos niveles se encuentra interactuando con único modo del campo eléctrico dentro de una cavidad, sin efectos de decaimiento espontáneo.

4.1.1. Modelo de Jaynes-Cummings

Denotamos a los estados base y excitado a través de los kets $|g\rangle$ y $|e\rangle$ respectivamente, con energías $E_g = \hbar\omega_g$ y $E_e = \hbar\omega_e$ tal que $E_e > E_g$. La frecuencia de la transición atómica $|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ la denotamos como $\omega_{eg} = \omega_e - \omega_g$. Asumimos que la frecuencia ω del modo del campo es cercana a ω_{eg} , tal que este se acopla efectivamente a sólo una transición y podemos despreciar las demás. El Hamiltoniano total del sistema es

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_A + \mathbf{H}_F + \mathbf{H}_{int}, \quad (4.1)$$

donde \mathbf{H}_A describe al átomo de dos niveles, \mathbf{H}_F al campo y \mathbf{H}_{int} la interacción entre ambos. Sean los operadores atómicos $\sigma^z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$, $\sigma^+ = |e\rangle\langle g|$ y $\sigma^- = |g\rangle\langle e|$; en términos de ellos el Hamiltoniano del átomo toma la forma:

$$\mathbf{H}_A = \frac{1}{2} \hbar\omega_{ge} \sigma^z. \quad (4.2)$$

El Hamiltoniano del campo es:

$$\mathbf{H}_F = \hbar\omega \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}, \quad (4.3)$$

donde \mathbf{a}^\dagger y \mathbf{a} son los operadores de creación y aniquilación del campo respectivamente. Bajo la aproximación dipolar, la interacción entre el átomo y el campo está dada por:

$$\mathbf{H}_{int} = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(t), \quad (4.4)$$

donde el campo eléctrico tiene la forma $\mathbf{E}(t) = \sqrt{\hbar\omega/\epsilon_0 V} (\mathbf{a}^\dagger e^{i\omega t} + \mathbf{a} e^{-i\omega t})$, con V el volumen de la cavidad; la forma del momento dipolar eléctrico es:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= |g\rangle\langle e| \langle g|\mathbf{p}|e\rangle + |e\rangle\langle g| \langle e|\mathbf{p}|g\rangle \\ &= p_{ge} \sigma^- + p_{eg} \sigma^+. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Sustituyendo en la ecuación 4.4 obtenemos:

$$\mathbf{H}_{int} = \hbar g (\sigma^+ + \sigma^-) (\mathbf{a} e^{-i\omega t} + \mathbf{a}^\dagger e^{i\omega t}). \quad (4.6)$$

Pasamos a la imagen de interacción al aplicar sobre el Hamiltoniano la transformación unitaria $\mathbf{U}(t)$

$$\mathbf{U}^\dagger(t) \mathbf{H}_{int} \mathbf{U}(t) = \hbar g \left(\mathbf{a}^\dagger \sigma^- e^{i(\omega - \omega_{eg})t} + \mathbf{a}^\dagger \sigma^+ e^{i(\omega + \omega_{eg})t} + \sigma^+ \mathbf{a} e^{-i(\omega - \omega_{eg})t} + \sigma^- \mathbf{a} e^{-i(\omega + \omega_{eg})t} \right), \quad (4.7)$$

donde $g = -p_{ge} \sqrt{\hbar\omega/\epsilon_0 V} / \hbar$ y

$$\mathbf{U}(t) = e^{-i(\mathbf{H}_A + \mathbf{H}_F)t/\hbar}. \quad (4.8)$$

El término $\mathbf{a}^\dagger \sigma^-$ corresponde a los procesos de transición del estado excitado al base y la creación de un fotón, mientras que el término $\sigma^+ \mathbf{a}$ describe al proceso inverso. Notamos que ambos suceden cerca de la resonancia $\Delta = \omega - \omega_{eg} \approx 0$, mientras que los términos que oscilan como la suma de frecuencias $\pm(\omega + \omega_{eg})$ describen procesos no resonantes en donde el átomo y el campo son excitados o desexcitados simultáneamente.

La aproximación de onda rotante consiste en despreciar estos términos pues no conservan la energía del sistema. Aplicando la RWA, el Hamiltoniano total del sistema toma la forma:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2}\hbar\omega_{eg}\boldsymbol{\sigma}_z + \hbar\omega\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a} + \hbar g(\boldsymbol{\sigma}^+\mathbf{a} + \mathbf{a}^\dagger\boldsymbol{\sigma}^-). \quad (4.9)$$

Un sistema de dos niveles acoplado a un sólo modo del campo dentro de la cavidad es conocido como el modelo de *Jaynes-Cummings*. Como estamos describiendo al sistema átomo-campo, la base de estados la especificamos en términos de los eigenestados del Hamiltoniano del átomo \mathbf{H}_A , $\{|g\rangle, |e\rangle\}$ y los estados de número de fotones, $\{|n\rangle | n \in \mathbb{N}\}$ del Hamiltoniano del campo \mathbf{H}_F . Diagonalizando el Hamiltoniano obtenemos sus eigenvalores:

$$\hbar\omega_{\pm} = E(|e, n\rangle) + \hbar\left(\frac{1}{2}\Delta \pm \bar{\Omega}\right), \quad (4.10)$$

donde $E(|e, n\rangle) = \hbar(n\omega + \omega_{eg}/2)$ es la energía del estado $|e, n\rangle$ y $\bar{\Omega} = \sqrt{(n+1)g^2 + (\Delta/2)^2}$. Los respectivos eigenestados son:

$$|a^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_{\pm}}}[(\bar{\Omega} \mp \frac{1}{2}\Delta)|e, n\rangle + g\sqrt{n+1}|g, n+1\rangle], \quad (4.11)$$

donde $N_{\pm} = (\bar{\Omega} \mp \frac{1}{2}\Delta)^2 + g^2(n+1)$. Los estados $|a^{\pm}\rangle$ son conocidos como *estados del átomo vestidos por la luz* [28], los cuales son superposiciones simétrica y antisimétrica de los estados "desnudos", $|e, n\rangle$ y $|g, n+1\rangle$. En la imagen de interacción, la evolución de un estado está dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar}\mathbf{H}_{int}|\psi\rangle. \quad (4.12)$$

Supongamos que en resonancia total, $\Delta = 0$, preparamos al sistema en el estado $|g, n+1\rangle$; al tiempo t el estado es:

$$|g, n+1\rangle(t) = \cos(\sqrt{n+1}gt)|g, n+1\rangle - i\sin(\sqrt{n+1}gt)|e, n\rangle, \quad (4.13)$$

lo cual nos muestra que el estado del átomo de dos niveles y el campo oscila entre los dos estados accesibles con una frecuencia $\Omega \equiv \sqrt{n+1}g$ llamada *frecuencia de Rabi*, la cual es una medida de la intensidad del acoplamiento entre el átomo y el campo. En general, para $t \neq 0$, el estado del átomo y el campo se encuentra *entrelazado*, pues no es factorizable en términos de productos de estados individuales del átomo y el campo. Si preparamos al átomo en el estado excitado $|e\rangle$ en ausencia de campo $|n=0\rangle$, el sistema al tiempo t es:

$$|e, 0\rangle(t) = \cos(\Omega t)|e, 0\rangle - i\sin(\Omega t)|g, 1\rangle. \quad (4.14)$$

Lo cual significa que el átomo decae espontáneamente de manera periódica y reversible, contrario a la situación semiclásica, en la cual un campo eléctrico con con amplitud nula no es capaz de inducir excitaciones en el átomo. Este fenómeno puramente cuántico es el fundamento de la electrodinámica cuántica de cavidades [20].

4.1.2. Modelos de tres niveles

Además de sondear la absorción y emisión de un sistema de dos niveles utilizando absorción en resonancia y emisión por fluorescencia, existen las técnicas de doble resonancia. Para estos casos es necesario incorporar más de dos niveles a nuestro sistema de interés, pues es necesario acoplar otra frecuencia del campo con una segunda resonancia. Bajo este esquema existen dos situaciones para las transiciones, ya sea que sólo una de ellas sea llevada por un modo fuertemente acoplado, o que ambas lo sean. La primera situación (que es de gran interés para nuestro estudio) fue estudiada con detalle por Autler y Townes en 1955. Un átomo de tres niveles llevado por dos modos del campo que son resonantes con sus transiciones conlleva a una variedad de fenómenos físicos notables asociados con transiciones de dos fotones, los cuales han sido observados en procesos Raman tanto estimulados, como espontáneos; en espectroscopía libre de Doppler, en generación de armónicos y procesos de suma de frecuencias, en ionización de dos fotones, en atrapamiento coherente de poblaciones a través de procesos adiabáticos y en propagación de pulsos a través de medios, entre otros [22]. Denotando al segundo estado excitado como $|s\rangle$, los tres posibles esquemas de niveles atómicos bajo transiciones atómicas dipolares son el de escalera Ξ , el V , y el Λ , representados en la siguiente figura:

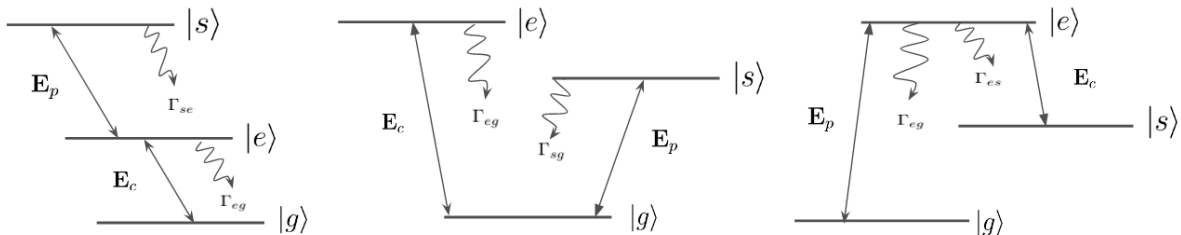


Figura 4.2. Esquemas Ξ , V y Λ para un átomo de 3 niveles.

En el esquema de escalera Ξ , las dos transiciones dipolares permitidas son $|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ y $|e\rangle \leftrightarrow |s\rangle$, mientras que la transición $|s\rangle \leftrightarrow |g\rangle$ es dipolo-prohibida. Notamos que cuando el átomo es llevado al estado de mayor excitación $|s\rangle$, este decaerá al estado base a través de la emisión espontánea en cascada de dos fotones con frecuencias cercanas a las asociadas a las transiciones $|s\rangle \rightarrow |e\rangle$ y $|e\rangle \rightarrow |g\rangle$. Una situación interesante en la que se empleó este esquema fue la creación de parejas de fotones correlacionados producidos por efecto cascada en las transiciones $4p^{21}S_0 \rightarrow 4s4p^1P_1 \rightarrow 4s^{21}S_0$ del átomo de Calcio para las pruebas experimentales de las desigualdades de Bell llevadas a cabo por Aspect y su equipo [23].

Para el esquema V , el átomo tiene dos transiciones dipolares permitidas del estado base a los dos excitados $|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ y $|g\rangle \leftrightarrow |s\rangle$ pero la transición $|s\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ es prohibida. Este esquema ha sido aplicado en sistemas de iones atrapados como una posible realización de Qubits para cómputo cuántico, propuesto David Wineland et al. en 1998 [24].

Para el esquema Λ , tomando $E_e > E_s > E_g$, el estado excitado $|e\rangle$ posee dos transiciones dipolares permitidas $|e\rangle \leftrightarrow |g\rangle$ y $|e\rangle \leftrightarrow |s\rangle$ sin embargo $|s\rangle \leftrightarrow |g\rangle$ es dipolo-prohibida y además el estado $|s\rangle$ es metaestable. El esquema Λ es muy importante pues nos permite modelar los fenómenos de atrapamiento coherente de poblaciones (CPT) a través del proceso STIRAP (Stimulated Raman Adiabatic Passage) y la transparencia inducida electromagnéticamente (EIT por sus siglas en inglés) [25].

Ya que modelaremos de manera clásica a los modos del campo eléctrico que interactúan con el átomo, extendemos la definición de la frecuencia de Rabi, que apareció en el modelo de Jaynes-Cummings como la frecuencia de oscilación de la probabilidad de encontrar al átomo y al campo en alguno de los dos estados accesibles, a su forma clásica, definiéndola como:

$$\langle j | -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(t) | i \rangle = -\hbar \Omega_{ij} e^{-i\omega_k t}, \quad (4.15)$$

donde ω_k es la frecuencia del k -ésimo modo del campo que se acopla con la transición $|j\rangle \langle i|$.

4.2. Matriz de densidad y ecuación de Lindblad

Como mencionamos en la subsección 3.2.1, el Hamiltoniano del sistema es incapaz de incorporar los efectos de decaimiento espontáneo de los estados excitados del átomo cuando este interactúa con las diferentes frecuencias del campo. Es por esto que para resolver la dinámica del sistema tomando en cuenta este efecto debemos utilizar el formalismo de la *matriz de densidad* [20]. Definimos la matriz de densidad ρ del átomo como

$$\begin{aligned} \rho &:= \sum_l p_l |\psi_l\rangle \langle \psi_l| \\ &= \sum_l p_l \sum_{m,n} (c_m^l)^* c_n^l |m_l\rangle \langle n_l| \\ &\equiv \sum_l \sum_{m,n} \rho_{mn}^l |m_l\rangle \langle n_l|, \end{aligned} \quad (4.16)$$

donde la suma corre sobre los estados $|\psi_l\rangle = \sum_{k=1}^3 c_k^l |k_l\rangle$, con $|k_l\rangle$ un eigenestado del Hamiltoniano \mathbf{H}_0 , p_l es la probabilidad de que el átomo se encuentre en el estado $|\psi_l\rangle$ antes de realizar alguna medición y $\rho_{mn}^l = p_l (c_m^l)^* c_n^l$. Los elementos diagonales de la matriz de densidad ρ_{nn}^l , conocidos como *poblaciones*, representan la probabilidad de encontrar al átomo en el estado $|\psi_l\rangle$ después de realizar una medición, mientras que los elementos fuera de la diagonal ρ_{nm}^l son conocidos como *coherencias*, pues en su forma polar se escriben como $\rho_{nm}^l = r_n r_m e^{i(\phi_n - \phi_m)}$, lo cual nos muestra que dependen de una fase relativa $\Delta\phi = \phi_n - \phi_m$. Las propiedades de la matriz de densidad son:

$$\rho = \rho^\dagger \quad (4.17a)$$

$$\text{tr}(\rho) = \sum_l p_l \sum_n |c_n^l|^2 = 1 \quad (4.17b)$$

$$\langle \mathbf{A} \rangle = \text{tr}(\mathbf{A}\rho) \quad (4.17c)$$

$$\rho^2 = \sum_l p_l^2 |\psi_l\rangle \langle \psi_l| = \rho \iff p_l^2 = 1. \quad (4.17d)$$

La última propiedad de la matriz de densidad es esencial para hacer la distinción entre estados *puros*, para los cuales conocemos con certeza sus preparación ($p_l = 1$) y los *mixtos*, para los cuales sólo conocemos la

probabilidad de encontrarse en alguno de los posibles estados $|\psi_l\rangle$, y por tanto $p_l < 1$. La evolución de la matriz de densidad se obtiene notando que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} &= \sum_l p_l \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} |\psi_l\rangle \right) \langle \psi_l| + |\psi_l\rangle \left(\frac{\partial}{\partial t} \langle \psi_l| \right) \right] \\ &= - \sum_l p_l \frac{i}{\hbar} (\mathbf{H} |\psi_l\rangle \langle \psi_l| - |\psi_l\rangle \langle \psi_l| \mathbf{H}) \\ &= - \frac{i}{\hbar} [\mathbf{H}, \rho].\end{aligned}\tag{4.18}$$

Esta expresión es conocida como la *ecuación de Von Neumann*, la cual determina la evolución del sistema cuando se encuentra aislado. La ecuación de evolución más general que preserva todas las propiedades de la matriz de densidad (4.17a-4.17d) y que incorpora los efectos de decaimiento espontáneo y desfaseamiento es conocida como *ecuación maestra en la forma de Lindblad* y está dada por [20] :

$$\dot{\rho} = - \frac{i}{\hbar} [\mathbf{H}, \rho] + \mathcal{L}[\rho],\tag{4.19}$$

donde $\mathcal{L}[\rho]$ es el operador *Lindbladiano* de la forma:

$$\mathcal{L}[\rho] = \sum_{n,m} \frac{1}{2} \Gamma_{nm} (2\mathbf{A}_n \rho \mathbf{A}_m^\dagger - \{\mathbf{A}_m^\dagger \mathbf{A}_n, \rho\}),\tag{4.20}$$

con \mathbf{A}_m una base ortonormal de operadores y Γ_{nm} los ritmos de decaimiento o de desfaseamiento entre los estados $|n\rangle$ y $|m\rangle$. En nuestro caso, identificamos a Γ_{nm} con el ritmo de decaimiento espontáneo del nivel $|n\rangle$ a $|m\rangle$ y a los operadores $\mathbf{A}_n = \sigma_{nm} = |n\rangle \langle m|$ [25]. Ya que hemos planteado la ecuación de evolución temporal de la matriz de densidad incluyendo los términos de decaimiento espontáneo, describiremos en la siguiente sección dos fenómenos ópticos que surgen en transiciones atómicas llevadas a cabo por campos eléctricos: la transparencia inducida electromagnéticamente y el efecto Autler-Townes.

4.3. Efectos ópticos asociados a transiciones atómicas

4.3.1. EIT

La transparencia inducida electromagnéticamente es un fenómeno en el cual, a través de dos fuentes altamente coherentes de luz tales como láseres, las propiedades ópticas lineales y no lineales de un material cambian drásticamente, volviéndolo transparente dentro de un rango de frecuencias cercanas a la de absorción, además de un incremento extremo en su dispersión que da como resultado pulsos de luz ultra lenta, laseo sin inversión de poblaciones y procesos altamente eficientes de conversión de frecuencias tales como mezclado de 4 ondas, entre otros [25].

Las condiciones necesarias para observar EIT son dos láseres cuyas frecuencias son cercanas a las de transición de los diferentes niveles. Reescribiendo en el esquema Λ los niveles como $|g\rangle \rightarrow |1\rangle$, $|e\rangle \rightarrow |3\rangle$ y $|s\rangle \rightarrow |2\rangle$, un láser débilmente acoplado a los niveles $|1\rangle$, $|3\rangle$ llamado de "prueba" se encarga de medir el espectro de absorción de la transición $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$; por otro lado, un láser fuertemente acoplado llamado de control es sintonizado cerca de la frecuencia de resonancia de la transición $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ (véase figura 4.3.). El estado $|2\rangle$ es metaestable, lo que significa que su ritmo de decaimiento espontáneo al estado $|1\rangle$, Γ_{21} , es mucho menor comparado con los demás ritmos de decaimiento Γ_{31} y Γ_{32} . Como veremos enseguida, la aparición de EIT es debida a la interferencia destructiva entre las transiciones a un mismo nivel [25]. Recordando que la frecuencia de Rabi asociada a la transición de un nivel a otro es:

$$\Omega_{ij} e^{-i\omega_k t} = - \frac{1}{\hbar} \langle j | \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(t) | i \rangle,$$

el Hamiltoniano del sistema es:

$$\mathbf{H} = \sum_{j=1}^3 \hbar \omega_{jj} |j\rangle \langle j| - \hbar \Omega_{13} (|3\rangle \langle 1| e^{-i\omega_p t} + |1\rangle \langle 3| e^{i\omega_p t}) - \hbar \Omega_{23} (|3\rangle \langle 2| e^{-i\omega_c t} + |2\rangle \langle 3| e^{i\omega_c t}),\tag{4.21}$$

donde ω_p y ω_c son las frecuencias de los láseres de prueba y control respectivamente. Bajo la aproximación de onda rotante, los términos que van como $e^{-i\omega_j t}$ y $e^{i\omega_j t}$ corresponden a las transiciones del estado inferior al superior y viceversa a través de los procesos de absorción y emisión de un fotón respectivamente [28]. Para eliminar la dependencia temporal del Hamiltoniano, proponemos la siguiente transformación unitaria \mathbf{U} :

$$\mathbf{U} = |1\rangle \langle 1| e^{-i\omega_p t} + |2\rangle \langle 2| e^{-i\omega_c t} + |3\rangle \langle 3|.\tag{4.22}$$

Sabemos que los estados se transforman como $|\tilde{a}\rangle = \mathbf{U}|a\rangle$, mientras que, partiendo de la ecuación de Schrödinger, podemos obtener la transformación del Hamiltoniano:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{H}}|\tilde{a}\rangle &= i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\tilde{a}\rangle = i\hbar\left(\mathbf{U}\frac{\partial}{\partial t}|a\rangle + \frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t}|a\rangle\right) \\ &= i\hbar\left(\frac{1}{i\hbar}\mathbf{U}\mathbf{H}\mathbf{U}^\dagger|a\rangle + \frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t}\mathbf{U}^\dagger|a\rangle\right) \\ &= \left(\mathbf{U}\mathbf{H}\mathbf{U}^\dagger + i\hbar\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t}\mathbf{U}^\dagger\right)|\tilde{a}\rangle,\end{aligned}\tag{4.23}$$

donde en la segunda línea usamos el hecho de que por ser \mathbf{U} una transformación unitaria, $\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U} = \mathbb{I}$. Omitiendo el uso de tildes sobre los operadores y estados, pero quedando en claro la aplicación de la transformación, el Hamiltoniano queda como:

$$\mathbf{H} = \hbar \begin{bmatrix} \omega_p + \omega_{11} & 0 & -\Omega_{13} \\ 0 & \omega_c + \omega_{22} & -\Omega_{23} \\ -\Omega_{13} & -\Omega_{23} & \omega_3 - \omega_1 - \omega_p \end{bmatrix}.\tag{4.24}$$

Todavía más, podemos hacer un reescalamiento en el Hamiltoniano al sumar un operador diagonal constante, $\mathbf{A} = -2(\omega_1 + \omega_p)\mathbb{I}$, sin cambiar la dinámica del sistema:

$$\mathbf{H} = \hbar \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\Omega_{13} \\ 0 & \Delta_{31} - \Delta_{32} & -\Omega_{23} \\ -\Omega_{13} & -\Omega_{23} & \Delta_{31} \end{bmatrix}.\tag{4.25}$$

donde $\Delta_{31} = \omega_{31} - \omega_p$ y $\Delta_{32} = \omega_{32} - \omega_c$ son los *desentonamientos* entre las frecuencias de transición de los niveles atómicos y los láseres. Para el caso en que $\Delta_{31} = \Delta_{32} = \Delta$, los eigenestados del Hamiltoniano son:

$$\begin{aligned}|a^+\rangle &= \sin\theta\sin\phi|1\rangle + \cos\phi|3\rangle + \cos\theta\sin\phi|2\rangle \\ |a^0\rangle &= \cos\theta|1\rangle - \sin\theta|2\rangle \\ |a^-\rangle &= \sin\theta\cos\phi|1\rangle - \sin\phi|3\rangle + \cos\theta\cos\phi|2\rangle,\end{aligned}\tag{4.26}$$

donde hemos expresado las amplitudes de probabilidad en términos de los ángulos de mezclado θ , ϕ definidos por:

$$\tan\theta = \frac{\Omega_{13}}{\Omega_{23}}\tag{4.27a}$$

$$\tan 2\phi = \frac{\sqrt{\Omega_{13}^2 + \Omega_{23}^2}}{\Delta}\tag{4.27b}$$

Podemos ver que a través de la acción de los láseres, los estados que diagonalizan el Hamiltoniano del sistema son superposiciones de los estados atómicos de la misma manera que en el caso de los estados vestidos del átomo por la luz. Notamos que mientras el estado $|a^0\rangle$ tiene energía $\hbar\omega_0 = 0$, los estados $|a^\pm\rangle$ son equidistantes con respecto a $|a^0\rangle$ con una energía:

$$\hbar\omega^\pm = \frac{\hbar}{2}\left(\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 + \Omega_{13}^2 + \Omega_{23}^2}\right).\tag{4.28}$$

Debido a que el estado $|a^0\rangle$ no tiene contribución del estado $|3\rangle$, entonces para un átomo preparado inicialmente en este estado no existe la posibilidad de ser excitado, lo cual implica que no puede absorber ni emitir. Para ver el origen de EIT utilizando la imagen de estados vestidos, considerando el límite en que el láser de prueba está muy débilmente acoplado a la transición ($\Omega_{13} \ll \Omega_{23}$), $\sin\theta \rightarrow 0$, $\cos\theta \rightarrow 1$, y $|a^0\rangle$ se vuelve idéntico a $|1\rangle$ a partir del cual no puede ocurrir ninguna excitación. Si además el sistema está en resonancia con ambas transiciones ($\Delta \rightarrow 0$), entonces $\sin\phi = \cos\phi \rightarrow 1/\sqrt{2}$ y $|a^\pm\rangle$ se convierten en:

$$|a^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle \pm |3\rangle).$$

De esta forma podemos ver claramente la desaparición de la absorción y emisión del sistema, pues durante las transiciones $|a^+\rangle \leftrightarrow |a^0\rangle$, $|a^-\rangle \leftrightarrow |a^0\rangle$ las amplitudes de probabilidad del estado $|3\rangle$ de los estados $|a^\pm\rangle$ tienen el mismo peso e interfieren de manera destructiva al sumarse (Figura 4.3).

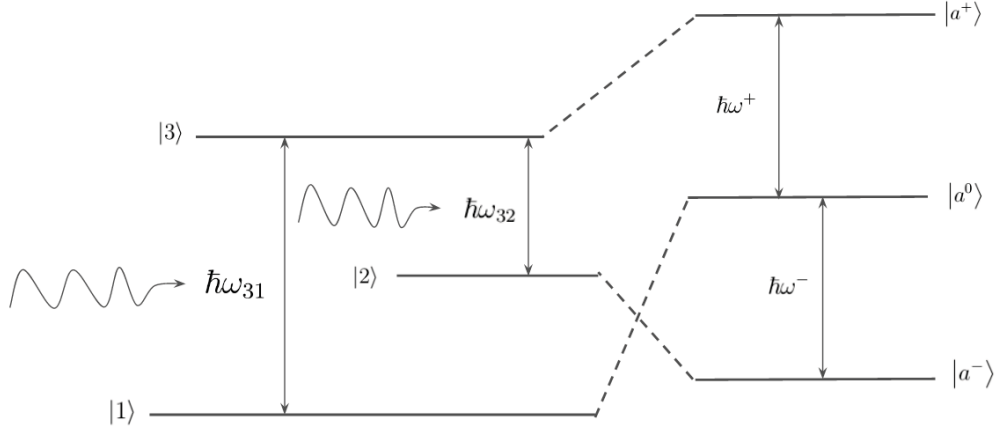


Figura 4.3. Esquema de 3 niveles en configuración Λ y formación de superposición de estados que diagonalizan al Hamiltoniano (4.25) para la observación de EIT.

De las muchas aplicaciones que surgen EIT, solamente discutiremos las modificaciones a la respuesta óptica lineal del material. La ecuación de Lindblad del átomo es

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[\mathbf{H}, \rho] + \frac{\Gamma_{31}}{2}[2\sigma_{13}\rho\sigma_{31} - \{\sigma_{33}, \rho\}] + \frac{\Gamma_{32}}{2}[2\sigma_{23}\rho\sigma_{32} - \{\sigma_{33}, \rho\}] + \frac{\Gamma_{21}}{2}[2\sigma_{12}\rho\sigma_{21} - \{\sigma_{22}, \rho\}]. \quad (4.29)$$

La polarización generada en el medio atómico por los campos aplicados es de gran interés, pues determina la dinámica de los campos electromagnéticos. La podemos expresar como el número promedio de dipolos eléctricos (orientados en la dirección del campo ϵ) formados en el medio por unidad de volumen:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t) &= \frac{N}{V} \langle \mathbf{p} \rangle \epsilon \\ &= \frac{N}{V} \text{tr}(\mathbf{p}\rho) \epsilon \\ &= \frac{N}{V} (p_{31}\rho_{13}e^{-i\omega_p t} + p_{32}\rho_{23}e^{-i\omega_c t} + c.c.) \epsilon, \end{aligned} \quad (4.30)$$

donde en la última línea hemos aplicado la transformación $\rho \rightarrow \mathbf{U}^\dagger \rho \mathbf{U}$ para recuperar la dependencia temporal en los elementos de la matriz de densidad. Las soluciones estacionarias de la ecuación (4.29) ($\dot{\rho} = 0$) con condiciones iniciales $\rho_{11}|_{t=0} = 1$, $\rho_{ij} = 0|_{t=0}$ y a primer orden en Ω_{13} para la componente ρ_{13} es:

$$\rho_{13} = \frac{\Omega_{13}(\Gamma_{21} - (\Delta_{31} - \Delta_{32}))}{\Omega_{23}^2/2 + 2(i\Delta_{31} - \Gamma_3)(i(\Delta_{31} - \Delta_{32}) - \Gamma_{21})}, \quad (4.31)$$

con $\Gamma_3 = (\Gamma_{31} + \Gamma_{32})/2$ el ritmo de decaimiento espontáneo total del estado $|3\rangle$. Ya que estamos suponiendo que el láser de prueba se acopla muy débilmente a la transición $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$, la dependencia de la polarización en función de los campos eléctricos es lineal de la forma:

$$\mathbf{P}(t) = \epsilon_0 \chi E(t) \epsilon. \quad (4.32)$$

Igualando los términos que oscilan como $e^{-i\omega_p t}$ en las ecuaciones (4.30) y (4.32) obtenemos la susceptibilidad lineal del medio para el láser de prueba $\chi(\Omega_{23}, \Delta_{31}, \Delta_{32})$:

$$\chi = \frac{N}{V} \frac{2|p_{13}|^2}{\epsilon_0 \hbar} \frac{(\Gamma_{21} - (\Delta_{31} - \Delta_{32}))}{\Omega_{23}^2/2 + 2(i\Delta_{31} - \Gamma_3)(i(\Delta_{31} - \Delta_{32}) - \Gamma_{21})} \quad (4.33)$$

Esta expresión contiene muchas de las características de EIT. Notamos que la susceptibilidad predice un doblete Stark dinámico en la absorción ($\text{Im}(\chi)$) de la resonancia atómica $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ debido a la presencia de un campo no perturbativo. Para el caso de resonancia de dos fotones (conocido como resonancia de Raman [20]), la susceptibilidad lineal, y consecuentemente la absorción y dispersión (Figura 4.4.) ($\text{Im}(\chi)$ y $\text{Re}(\chi)$ respectivamente) del medio, se anulan en el caso límite en el que $\Gamma_{21} \rightarrow 0$, independientemente de la intensidad del acoplamiento Ω_{23} .

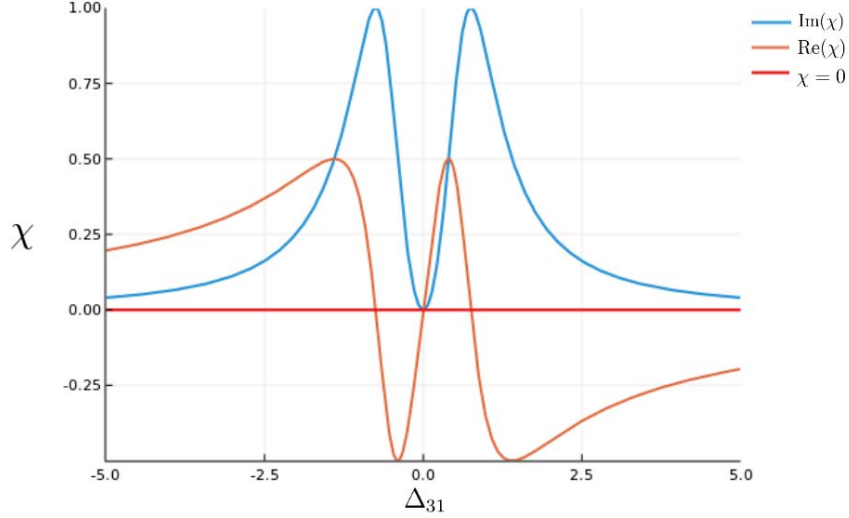


Figura 4.4. Perfil de absorción ($\text{Im}(\chi)$) y dispersión ($\text{Re}(\chi)$) en función del desentonamiento de la transición $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$, Δ_{31} en el caso límite $\Gamma_{21} = 0$. Notamos que en un intervalo alrededor de $\Delta_{31}=0$ el medio se vuelve transparente y sin dispersión.

En contraste con el comportamiento de una sola resonancia, la dispersión en un sistema EIT cerca de la resonancia de dos fotones resulta en velocidades de grupo ultra lentas para pulsos de luz [25].

4.3.2. Efecto Autler-Townes

Originalmente descubierto por Stanley Autler y Charles Townes en 1955 en la transición de microondas de la molécula de sulfuro de carbonilo (OCS) [1], el efecto Autler-Townes es un tipo de efecto Stark dinámico, en el cual un campo eléctrico oscilante y altamente coherente es sintonizado a una frecuencia muy cercana a la de resonancia de una transición, la cual adquiere dos componentes cuando uno de los dos niveles está acoplado a un tercero por otro campo fuertemente acoplado. Al correspondiente doblete se le conoce como *doblete Autler-Townes* o desdoblamiento Stark dinámico [3], el cual aparece en campos de investigación muy variados tales como la espectroscopía óptica de alta resolución, la electrodinámica cuántica en cavidades y el enfriamiento utilizando láseres.

Dado un átomo de tres niveles en el esquema de escalera Ξ ($|g\rangle \rightarrow |1\rangle$, $|e\rangle \rightarrow |2\rangle$ y $|s\rangle \rightarrow |3\rangle$), las transiciones dipolo-permitidas son $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ y $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$. Un láser de control fuertemente acoplado se sintoniza a una frecuencia muy cercana a la transición $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$, mientras que uno de prueba muy débilmente acoplado a la transición $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ se encarga de sondear la absorción al estado $|3\rangle$. El Hamiltoniano del sistema es:

$$\mathbf{H} = \sum_{j=1}^3 \hbar\omega_{jj} |j\rangle\langle j| - \hbar\Omega_{12}(|2\rangle\langle 1| e^{-i\omega_c t} + |1\rangle\langle 2| e^{i\omega_c t}) - \hbar\Omega_{23}(|3\rangle\langle 2| e^{-i\omega_p t} + |2\rangle\langle 3| e^{i\omega_p t}). \quad (4.34)$$

Eliminamos la dependencia temporal del Hamiltoniano aplicando la transformación \mathbf{U} :

$$\mathbf{U} = |1\rangle\langle 1| e^{-i\omega_c t} + |2\rangle\langle 2| + |3\rangle\langle 3| e^{i\omega_p t}. \quad (4.35)$$

De esta manera el Hamiltoniano toma la forma:

$$\mathbf{H} = \hbar \begin{bmatrix} \omega_{11} + \omega_c & -\Omega_{12} & 0 \\ -\Omega_{12} & \omega_{22} & -\Omega_{23} \\ 0 & -\Omega_{23} & \omega_{33} - \omega_p \end{bmatrix}. \quad (4.36)$$

Reescalamos con $\mathbf{A} = -\hbar(\omega_{11} + \omega_c)\mathbb{I}$ y obtenemos:

$$\mathbf{H} = \hbar \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_{12} & 0 \\ -\Omega_{12} & \Delta_{21} & -\Omega_{23} \\ 0 & -\Omega_{23} & \Delta_{21} + \Delta_{32} \end{bmatrix}, \quad (4.37)$$

con $\Delta_{21} = \omega_{21} - \omega_c$ y $\Delta_{32} = \omega_{32} - \omega_p$ los desentonamientos entre las transiciones y los láseres de control y prueba respectivamente. Para el caso en el que $\Delta_{21} = -\Delta_{32}$, los eigenestados del Hamiltoniano son:

$$\begin{aligned} |a^-\rangle &= \cos\phi \cos\theta |1\rangle + \sin\phi |2\rangle + \cos\phi \sin\theta |3\rangle \\ |a^0\rangle &= -\sin\theta |1\rangle + \cos\theta |3\rangle \\ |a^+\rangle &= \cos\theta \sin\phi |1\rangle - \cos\phi |2\rangle + \sin\phi \sin\theta |3\rangle. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Donde de nuevo hemos expresado las amplitudes de probabilidad de los estados en términos de los ángulos de mezclado θ y ϕ definidos por las relaciones:

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{\Omega_{23}}{\Omega_{12}} \\ \tan 2\phi &= 2 \frac{\sqrt{\Omega_{12}^2 + \Omega_{23}^2}}{\Delta_{21}}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Las energías de los estados $|a^\pm\rangle$ son:

$$\hbar\omega^\pm = \frac{\hbar}{2} \left(\Delta_{21} \pm \sqrt{\Delta_{21}^2 + 4(\Omega_{12}^2 + \Omega_{23}^2)} \right), \quad (4.40)$$

mientras que para el estado $|a^0\rangle$, $\hbar\omega^0 = 0$. Ya que el láser de prueba está débilmente acoplado ($\Omega_{23} \ll \Omega_{12}$), tenemos que $\sin\theta \rightarrow 0$ y $\cos\theta \rightarrow 1$; mientras que muy cerca de la resonancia de dos fotones ($\Delta_{21} \approx \Delta_{32} \rightarrow 0$), $\sin\phi = \cos\phi = 1/\sqrt{2}$ y los eigenestados toman la forma (figura 4.5.):

$$\begin{aligned} |a^0\rangle &= |3\rangle \\ |a^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle \pm |2\rangle). \end{aligned} \quad (4.41)$$

Los cuales son similares a los eigenestados que diagonalizan el Hamiltoniano de EIT. Podemos ver que a través de la acción del láser de control, los estados desnudos $|1\rangle, |2\rangle$ se acoplan para formar los estados $|a^\pm\rangle$. Debido a que tanto $|a^+\rangle$ como $|a^-\rangle$ tienen una componente del estado intermedio $|2\rangle$, dos transiciones van a aparecer: $|a^+\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ y $|a^-\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ con frecuencias de transición $\omega^+ - \omega^0$ y $\omega^0 - \omega^-$ respectivamente. De esta forma, el espectro de absorción del estado $|3\rangle$, que sin la acción del láser de control corresponde a un pico centrado en ω_{32} , se separa en dos partes. La formación de este doblete corresponde al efecto Autler-Townes y su aparición como resultado de una transición cuadrupolar eléctrica en el átomo de Rubidio 87 (^{87}Rb) en un esquema que no corresponde a ninguno de los tres mencionados en la sección anterior es el tema central de este trabajo.

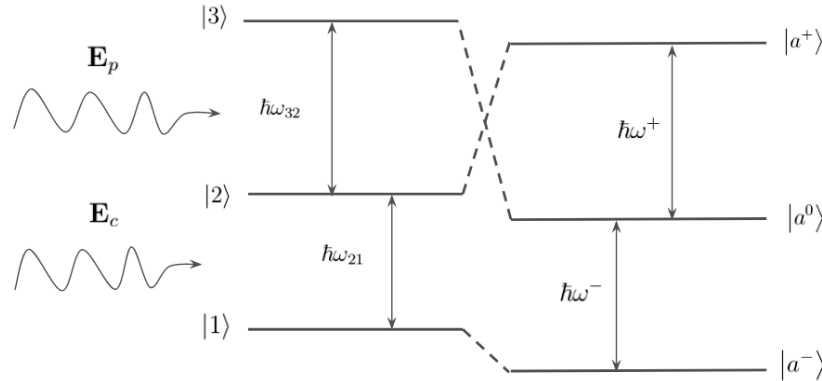


Figura 4.5. Esquema de 3 niveles en escalera y formación de los estados vestidos del átomo por la luz $|a^\pm\rangle$. Notamos que surgen 2 transiciones entre los estados vestidos y el estado $|3\rangle$ que dan como resultado el doblete Autler-Townes.

Notamos que las energías de los estados $|a^\pm\rangle$ corresponden a los brazos de una hipérbola dados por la ecuación 4.40 mostrados en la figura 4.6. Las posiciones del doblete se centran alrededor de las frecuencias de transición $\omega^+ - \omega^0$ y $\omega^0 - \omega^-$ (en nuestro caso, debido al reescalamiento \mathbf{A} aplicado al Hamiltoniano, obtuvimos que $\omega^0 = 0$). En el caso límite en el que $\Delta_{21} = 0$, las componentes se centran alrededor de $\Omega_{12} - \omega^0$ y $\omega^0 - \Omega_{12}$, es decir que el doblete es simétrico en altura y posición. Para el otro caso límite en el que $\Delta_{21}^2 \gg \Omega_{21}^2$, la componente debida a $|a^+\rangle$ se centra alrededor de Δ_{21} y la debida a $|a^-\rangle$ en ω^0 .

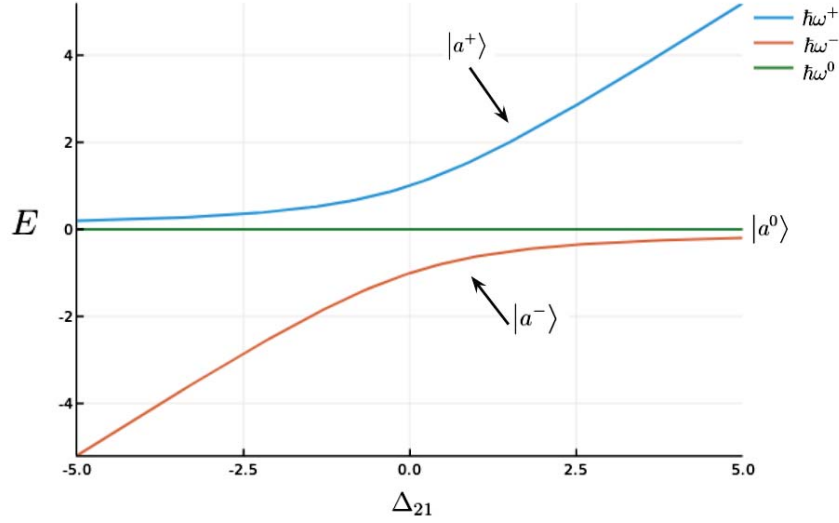


Figura 4.6. Diagrama de energías (en unidades arbitrarias) de los estados $|a^\pm\rangle$ y $|a^0\rangle$ correspondientes a los brazos de una hipérbola con semieje Ω_{12} .

La ecuación de Lindblad del átomo es:

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] + \frac{\Gamma_{32}}{2}[2\sigma_{23}\rho\sigma_{32} - \{\sigma_{33}, \rho\}] + \frac{\Gamma_{21}}{2}[2\sigma_{12}\rho\sigma_{21} - \{\sigma_{22}, \rho\}]. \quad (4.42)$$

Haciendo un tratamiento similar al de EIT, la susceptibilidad lineal $\chi(\Omega_{12}, \Delta_{21}, \Delta_{32})$ del láser de prueba para el caso estacionario $\dot{\rho} = 0$ con condiciones iniciales $\rho_{11}|_{t=0} = 1$, $\rho_{ij}|_{t=0} = 0$ es:

$$\chi = \frac{N}{V} \frac{4|p_{23}|^2}{\epsilon_0 \hbar} \frac{\Omega_{12}(2i\Delta_{32} + \Gamma_{32} + \Gamma_{21})}{4\Omega_{12}^2(2i\Delta_{21} + \Gamma_{21}) + (2i\Delta_{21} + \Gamma_{21})(2i\Delta_{32} + \Gamma_{32} + \Gamma_{21})(2i(\Delta_{32} + \Delta_{21}) + \Gamma_{32})}. \quad (4.43)$$

A diferencia del espectro de absorción para EIT, el cual se anulaba en el caso de resonancia de dos fotones, para el doblete Autler-Townes, el mínimo central tiende de manera asintótica a 0 en función del inverso de la frecuencia de Rabi Ω_{12} . De esta forma, a medida que el acoplamiento del láser de control con la transición $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ aumenta, se forma una ventana de semi-transparencia cada vez más ancha (figura 4.7.).

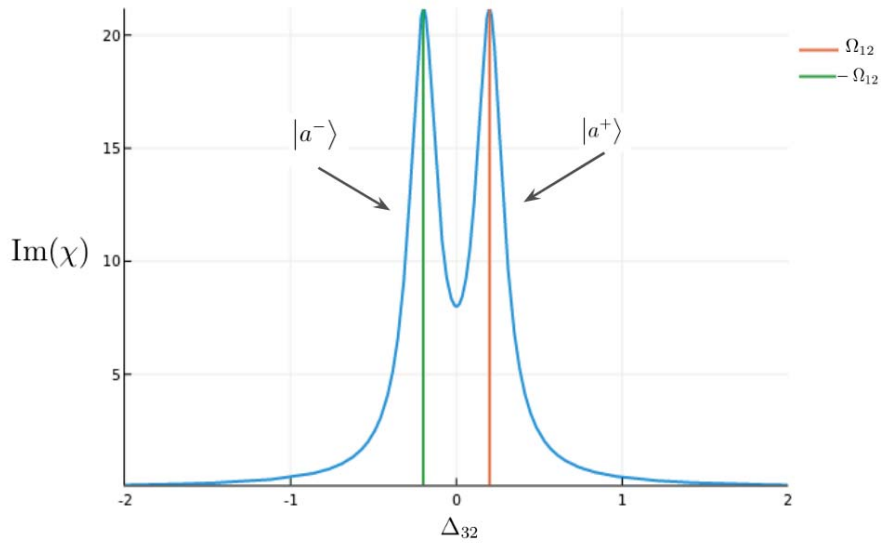


Figura 4.7. Doblete Autler-Townes (en unidades arbitrarias) para el caso de resonancia en la transición $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$. Los máximos se encuentran a la misma altura y a la misma distancia con respecto al mínimo central.

Para transiciones en el régimen óptico ($\omega \approx 10^{15}\text{Hz}$), el doblete Autler-Townes ha sido detectado desde hace varias décadas en la fluorescencia emitida por los niveles excitados en el esquema de escalera Ξ en experimentos utilizando vapores atómicos [26]. Se ha observado que la intensidad de la luz de fluorescencia no sólo es proporcional a la absorción de la transición $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$, sino también a la población del nivel $|3\rangle$. Ya que el

ensanchamiento Doppler a temperatura ambiente es mucho mayor al de las transiciones en el régimen óptico [3], el efecto Autler-Townes se pierde cuando se promedia sobre todas las posibles velocidades del átomo. Sin embargo, es posible eliminar el ensanchamiento Doppler a través de la *espectroscopía de absorción saturada*.

Habiendo presentado el efecto Autler-Townes en el esquema de escalera Ξ con dos transiciones dipolares, dedicaremos el siguiente capítulo al análisis de la aparición del doblete Autler-Townes en la fluorescencia de la transición $6^2P_{3/2} \rightarrow 5^2S_{1/2}$ del átomo de Rubidio 87, ^{87}Rb , la cual es el resultado de una combinación de una transición dipolar eléctrica de los estados $5^2S_{1/2} \leftrightarrow 5^2P_{3/2}$ y de una cuadrupolar eléctrica de los estados $5^2P_{3/2} \leftrightarrow 6^2P_{3/2}$.

Capítulo 5

Efecto Autler-Townes por transiciones atómicas prohibidas

En este capítulo presentaremos la aparición del efecto Autler-Townes en la fluorescencia del estado $|6^2P_{3/2}\rangle$ de la estructura hiperfina del átomo de Rubidio 87, ^{87}Rb , al que para llegar, se utilizaron tanto transiciones dipolares como cuadrupolares eléctricas. Primero plantearemos el modelo de tres pasos, en el cual un átomo que se encuentra en el estado $|5^2S_{1/2}\rangle$ pasa al estado $|5^2P_{3/2}\rangle$ por medio de una transición dipolar eléctrica y termina en $|6^2P_{3/2}\rangle$ por una transición cuadrupolar eléctrica. Describiremos brevemente el montaje experimental a través del cual fue observado el efecto y posteriormente realizaremos el análisis teórico de la fluorescencia al obtener una solución aproximada a la ecuación de Lindblad del sistema para el caso estacionario. Posteriormente, tomando en cuenta los efectos de ensanchamiento de línea por la interacción del átomo con los láseres y el efecto de selección de velocidades debido al arreglo contrapropagante de los láseres, elaboraremos un modelo teórico con el cual compararemos los datos experimentales.

5.1. Átomo de Rubidio de tres niveles con dos transiciones dipolares eléctricas y una cuadrupolar eléctrica

El átomo que estudiaremos es el de Rubidio. En particular su isótopo 87, ^{87}Rb , cuyo espín nuclear es $I = 3/2$ y nos interesan tres transiciones en un esquema modificado de escalera: una dipolar eléctrica (conocida como línea D_2 [8]) $5^2S_{1/2} \leftrightarrow 5^2P_{3/2}$ (que denotamos como $|1\rangle$ y $|2\rangle$ respectivamente) llevada a cabo por un láser de control que se acopla fuertemente a la transición con una frecuencia ω_c muy cercana a la de transición ω_{780} equivalente a una longitud de onda $\lambda \approx 780\text{nm}$ [8]; una cuadrupolar eléctrica $5^2P_{3/2} \leftrightarrow 6^2P_{3/2}$ ($|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$) [29] mediada por un láser de prueba que, debido a su carácter cuadrupolar, se acopla débilmente a la transición y cuya frecuencia es cercana a ω_{911} equivalente a $\lambda \approx 911\text{nm}$. Por último, tenemos una transición dipolar eléctrica $6^2P_{3/2} \rightarrow 5^2S_{1/2}$ ($|3\rangle \rightarrow |1\rangle$) que no es llevada por ningún láser y que resulta en la emisión por decaimiento espontáneo de luz con longitud de onda $\lambda \approx 420\text{nm}$ y que podemos identificar con el fenómeno de *fluorescencia* [28].

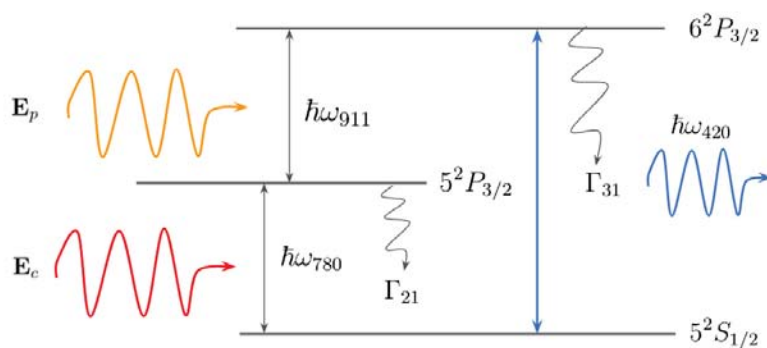


Figura 5.1. Esquema modificado de escalera Ξ de la estructura hiperfina del átomo de ^{87}Rb . La transición $5^2S_{1/2} \leftrightarrow 5^2P_{3/2}$ es dipolar eléctrica y está mediada por un láser a baja potencia con longitud de onda centrada en 780 nm y la transición cuadrupolar $5^2P_{3/2} \leftrightarrow 6^2P_{3/2}$ es llevada por un láser a alta potencia con longitud de onda centrada en 911 nm.

Notamos que, a diferencia de los esquemas de 3 niveles presentados en el capítulo anterior, en este esquema no hay un nivel que se acople a los dos restantes a través de transiciones dipolares; en cambio, tenemos que el nivel $|5^2P_{3/2}\rangle$ está conectado a los dos niveles restantes a través de una transición dipolar y una cuadrupolar. Esta situación resulta inusual, pues como vimos en la subsección 3.3.2. del capítulo 3, las transiciones dipolares eléctricas son aproximadamente un millón de veces más frecuentes que las cuadrupolares cuando ambas están presentes. Es natural, entonces, preguntarnos si es posible observar la transición del estado $|5^2S_{1/2}\rangle$ al $|6^2P_{3/2}\rangle$ a través del $|5^2P_{3/2}\rangle$. La respuesta es *afirmativa* si la potencia del láser de prueba, débilmente acoplado por el carácter cuadrupolar de la transición, es mucho mayor a la del láser de control, de tal manera que se reproduzcan las condiciones para la observación del efecto Autler-Townes. En la siguiente sección describiremos brevemente el experimento a través del cual fue observado el efecto Autler-Townes en las transiciones atómicas del Rubidio arriba descritas, el cual fue realizado en el laboratorio de Átomos Fríos del Instituto de Ciencias Nucleares, ICN, UNAM.

5.2. Montaje experimental

A continuación mostramos un esquema simplificado del arreglo experimental utilizado para la detección del doblete Autler-Townes por transiciones atómicas prohibidas en la fluorescencia de la transición $6^2P_{3/2} \rightarrow 5^2S_{1/2}$ del átomo de Rubidio 87:

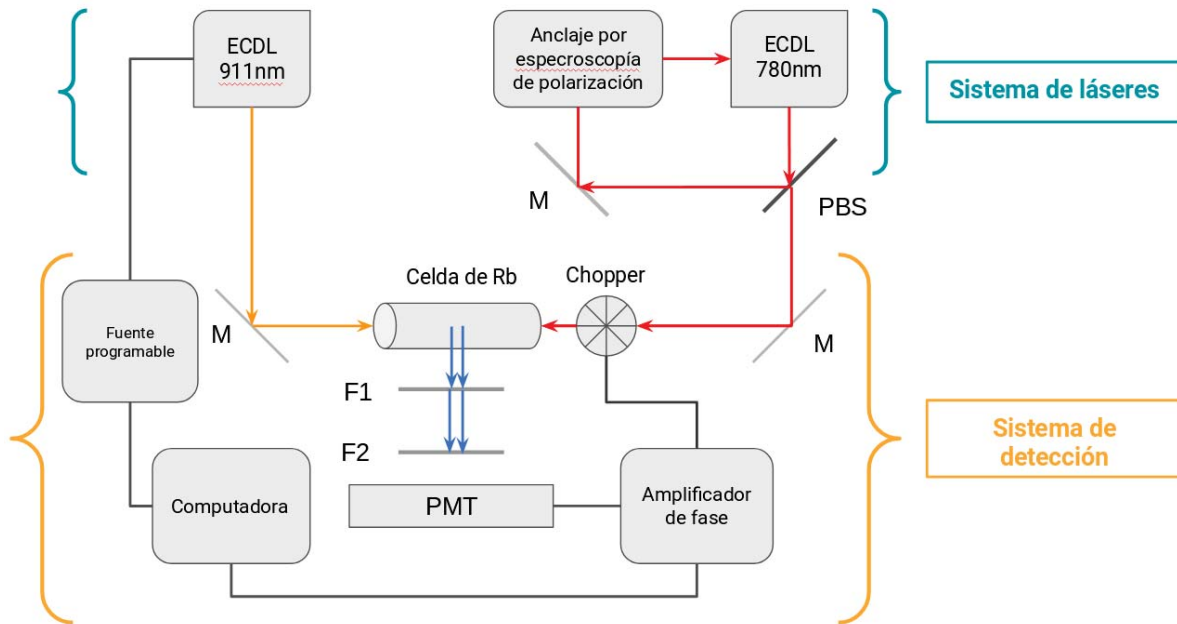


Figura 5.2 Esquema experimental de la detección del doblete Autler-Townes por fluorescencia de la transición $6^2P_{3/2} \rightarrow 5^2S_{1/2}$. El arreglo consta de dos partes: el sistema de láseres que llevan las transiciones y el sistema de detección de la fluorescencia. La letra **M** corresponde a un espejo; **PBS** a un divisor de haz polarizado y **F1** y **F2** a dos lentes con focos f_1 y f_2 respectivamente.

El montaje experimental se separa en dos partes: el sistema de láseres, con los cuales se llevan a los átomos preparados en el estado $|5^2S_{1/2}\rangle$ al $|6^2P_{3/2}\rangle$ a través de una transición cuadrupolar eléctrica, y el sistema de detección, con el cual la luz emitida por fluorescencia es colectada, separada del ruido y amplificada, para después ser analizada.

5.2.1. Sistema de láseres

Los láseres utilizados en el experimento fueron de diodo de cavidad externa (ECDL por sus siglas en inglés), ambos fabricados en el laboratorio. Para el láser de 780 nm, su ancho de banda es menor a $2\pi \cdot 6$ MHz; posee un perfil elíptico con ejes mayor y menor de 5 mm y 2.5 mm respectivamente [27]. La potencia del láser fue a partir de $100 \mu\text{W}$, de tal manera que se mantuviera por debajo de la potencia de saturación reportada en [8]. Para garantizar la resonancia del láser con la transición $5^2S_{1/2} \leftrightarrow 5^2P_{3/2}$, se utilizó la técnica de anclaje por espectroscopía de polarización [27].

El segundo láser con longitud de onda $\lambda \approx 911.07$ nm es sintonizable, tiene un ancho de banda menor a $2\pi \cdot 7.5$ MHz, con un perfil elíptico con ejes mayor y menor de 4.5 mm y 2.3 mm respectivamente. Su perfil transversal de intensidad es Gaussiano y se llegó a utilizar a una potencia máxima de 100 mW [27].

5.2.2. Sistema de detección

El sistema de detección consta de 4 partes:

- Una celda de Rubidio de 25 mm de diámetro y 75 mm de largo, que contiene una mezcla de isótopos ^{85}Rb y ^{87}Rb . La celda fue colocada de tal forma que ambos láseres incidieran perpendicularmente a su superficie y de manera contrapropagante para eliminar el ensanchamiento Doppler en las líneas de emisión de los átomos.
- Dos tubos fotomultiplicadores (PMT) con detección óptima en un rango de $\lambda \in [400 \text{ nm}, 420 \text{ nm}]$. Para poder maximizar la captura de la fluorescencia recolectada en una sola dirección, se acoplaron los PMT con la celda de Rubidio a través de un arreglo de dos lentes: una biconvexa con foco $f_1 = 25.4$ mm colocada a la distancia focal con respecto del centro de la celda y cuyo efecto fue dar un mayor ángulo sólido de captura de luz. La segunda lente es una plano-convexa con foco $f_2 = 35$ mm, ubicada a una distancia $f_1 + f_2$ con respecto a la primera lente y cuyo efecto fue el de enfocar y llenar lo mejor posible el área efectiva de detección de los PMT.
- Detección de señales en fase utilizando un amplificador de señales y un Chopper: debido a la baja probabilidad de detección de la fluorescencia por la transición cuadrupolar, se utilizó un amplificador de señales que permite discriminar los picos de la estructura hiperfina del ruido debido a otras señales y los aparatos. El Chopper permite al amplificador de señales discriminar el ruido proveyendo una frecuencia de referencia; en este caso, el Chopper fue colocado en el camino óptico del láser de control.
- Un programa de adquisición de datos hecho en LabVIEW, a través del cual se controlaron varios parámetros del láser de prueba tales como longitud de onda, temperatura de operación, potencia y polarización. El programa permite realizar barridos, variando los diferentes parámetros del láser en intervalos ajustables. La información se recolecta en un módulo de adquisición de datos, que va hacia la computadora y permite observar en tiempo real los espectros a medida que se van barriendo los parámetros [27].

Variando la potencia del láser de excitación dipolar y la longitud de onda del de excitación cuadrupolar, se obtuvo una serie de espectros de la fluorescencia de la transición $6^2P_{3/2} \rightarrow 5^2S_{1/2}$ a temperatura ambiente, $T = 20^\circ\text{C}$, de los cuales ejemplificamos con 5 donde se forma claramente el doblete Autler-Townes:

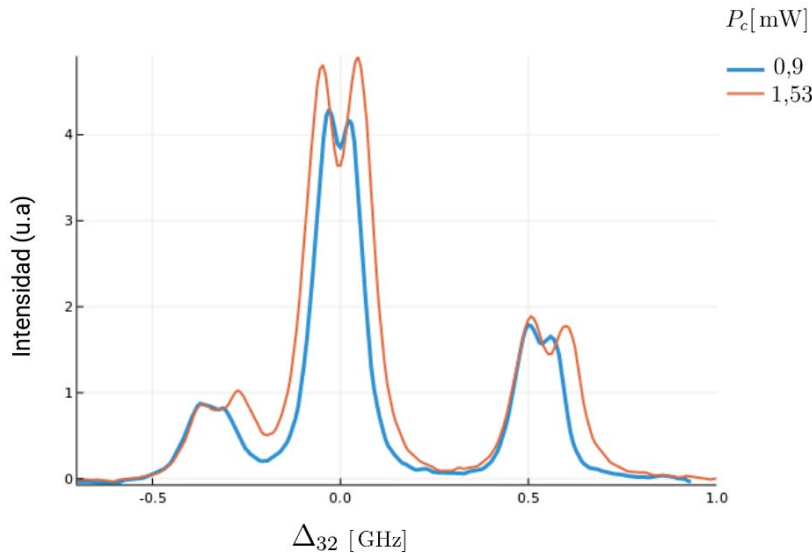


Figura 5.3.a. Dobletes Autler-Townes por fluorescencia de la transición $6^2P_{3/2} \rightarrow 5^2S_{1/2}$.

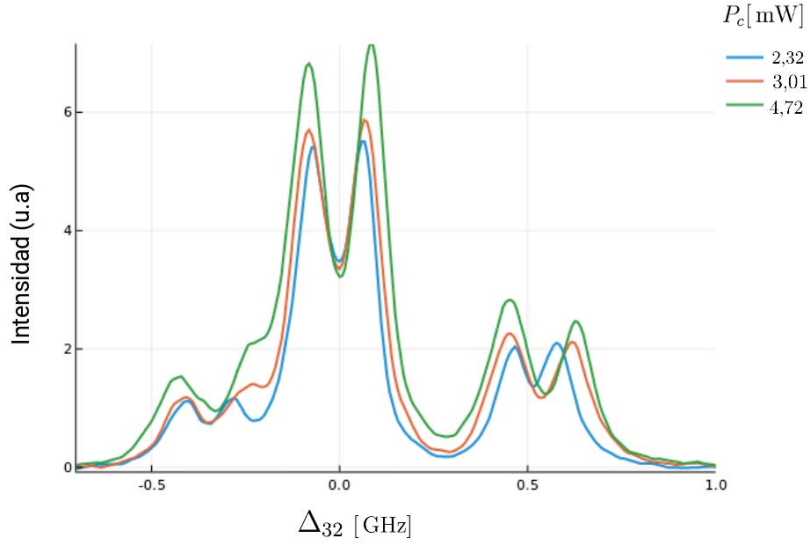


Figura 5.3.b. Dobletes Autler-Townes por fluorescencia de la transición $6^2P_{3/2} \rightarrow 5^2S_{1/2}$. Los tres dobletes corresponden a las transiciones de los estados hiperfinos $|F_3 = F_2\rangle$, $|F_3 = F_2 - 1\rangle$, $|F_3 = F_2 - 2\rangle$ [27].

Notamos que los dobletes son asimétricos, lo cual sucede porque el láser de excitación dipolar no se encuentra perfectamente sintonizado con la frecuencia de la transición. Los dobletes crecen en tamaño y anchura a medida que aumenta la potencia, mientras que los mínimos centrales decrecen ligeramente. Habiendo descrito el montaje experimental con el cual fue observado el doblete Autler-Townes por transiciones atómicas dipolares y cuadrupolares, procederemos a hacer su análisis teórico tomando en cuenta los aspectos experimentales tales como la dirección, polarización y potencia de los láseres.

5.3. Efecto Autler-Townes en la transición $6^2P_{3/2} \rightarrow 5^2S_{1/2}$

La notación espectroscópica nos da la información del nivel energético y los momentos angulares del electrón y el núcleo de los estados $|5^2S_{1/2}\rangle = |1\rangle = |5, 0, 1/2, F_1, m_1\rangle$, $|5^2P_{3/2}\rangle = |2\rangle = |5, 1, 3/2, F_2, m_2\rangle$ y $|6^2P_{3/2}\rangle = |3\rangle = |6, 1, 3/2, F_3, m_3\rangle$. Para poder evaluar los elementos de matriz (3.51a) y (3.51b) que acoplan los diferentes niveles de la estructura hiperfina, debemos especificar la polarización de los láseres así como el estado hiperfino $|F_j, m_j\rangle$ en el que se encuentra el átomo. Tomando en cuenta el montaje experimental, a fin de minimizar el ensanchamiento en las líneas espectrales debido al efecto Doppler, haremos la suposición de que ambos haces tienen polarización lineal y que se propagan sobre un mismo eje pero en direcciones contrarias: $\hat{\mathbf{k}}_{911} = -\hat{\mathbf{k}}_{780}$. Supondremos también que los únicos estados accesibles al sistema son aquellos para los cuales la probabilidad de la transición $5^2P_{3/2} \leftrightarrow 6^2P_{3/2}$ es máxima; sin embargo, un análisis detallado de la evolución de la distribución de la población en los diferentes estados hiperfinos en función de la polarización de la luz se puede encontrar en [29].

Para el láser de excitación cuadrupolar acoplado a la transición $5^2P_{3/2} \leftrightarrow 6^2P_{3/2}$, tomamos el vector de polarización a lo largo del eje z , $\epsilon_{911} = \hat{\mathbf{e}}_z = \hat{\mathbf{e}}_0$, mientras que se propaga en la dirección x , $\hat{\mathbf{k}}_{911} = \hat{\mathbf{e}}_x$. Dadas la polarización y la dirección del láser, los estados hiperfinos que cumplen con las reglas de selección para transiciones cuadrupolares eléctricas (ec.3.61a y 3.61b) y que maximizan el valor del elemento de matriz $\langle 3|\mathbf{H}_{E_2}|2\rangle$ son:

$$|F_2 = 2, m_2 = 1\rangle \leftrightarrow |F_3 = 0, m_3 = 0\rangle. \quad (5.1)$$

Sustituyendo en la ecuación (3.51b) obtenemos:

$$\langle 3|\mathbf{H}_{E_2}|2\rangle = -\frac{\sqrt{10\pi}}{150} \frac{E_p}{c} \omega_{911} \langle n = 6 || er^2 || n = 5 \rangle e^{-i\omega_p t}, \quad (5.2)$$

de donde obtenemos la frecuencia de Rabi cuadrupolar, Ω_{23} :

$$\Omega_{23} = \frac{\sqrt{10\pi}}{150} \frac{E_p}{c} \frac{\omega_{911}}{\hbar} \langle n = 6 || er^2 || n = 5 \rangle. \quad (5.3)$$

Para el láser de excitación dipolar acoplado a la transición $5^2S_{1/2} \leftrightarrow 5^2P_{3/2}$, tomando la polarización del láser paralela a la del láser de excitación cuadrupolar, $\epsilon_{780} = \hat{\mathbf{e}}_z = \hat{\mathbf{e}}_0$, la transición entre los estados $|F_1 = 1, m_1 = 1\rangle$,

$|F_2 = 2, m_2 = 1\rangle$ es la más probable [8] y el elemento de matriz es:

$$\langle 2|\mathbf{H}_{E_1}|1\rangle = -\frac{\sqrt{30\pi}}{18} \frac{\omega_{780}}{\omega_c} E_c \langle J = 3/2||er||J = 1/2\rangle e^{-i\omega_c t}, \quad (5.4)$$

y la frecuencia de Rabi para la transición dipolar, Ω_{12} , es:

$$\Omega_{12} = \frac{\sqrt{30\pi}}{18} \frac{\omega_{780}}{\omega_c} \frac{E_c}{\hbar} \langle J = 3/2||er||J = 1/2\rangle. \quad (5.5)$$

Los valores numéricos de las frecuencias de Rabi junto con los demás parámetros de interés se encuentran en el Apéndice 1. Es muy importante aclarar que, mientras que el elemento de matriz reducida $\langle J = 3/2||er||J = 1/2\rangle$ ha sido medido experimentalmente y reportado en [8], ya que no conocemos la forma exacta del potencial $V(\mathbf{r})$ que experimenta el electrón de valencia debido a la acción conjunta del carozo y el núcleo, no podemos resolver la ecuación de Schrödinger (2.8) para obtener su función de onda, y por tanto, tampoco podemos calcular de manera exacta la frecuencia de Rabi de la transición cuadrupolar eléctrica. A pesar de esto, podemos aproximar el valor del elemento de matriz reducida de la transición cuadrupolar utilizando como primera aproximación el radio atómico del Rubidio medido de manera empírica y reportado en [13]:

$$\langle n = 6||er^2||n = 5\rangle \approx 22ea_0^2, \quad (5.6)$$

donde $a_0 \approx 5.29 \times 10^{-11}\text{m}$ es el radio de Bohr. Con el cálculo de la subsección 3.3.2 del capítulo 3, para luz no polarizada e incoherente, aproximamos el orden de magnitud del ritmo de decaimiento espontáneo del estado $|6^2P_{3/2}\rangle$ al $|5^2P_{3/2}\rangle$, Γ_{32} :

$$\Gamma_{32} \approx 0.015 \text{ Hz}. \quad (5.7)$$

Comparado con el ritmo de decaimiento de la transición dipolar, $\Gamma_{21} \approx 38.1 \times 10^6 \text{ Hz}$ [8], el ritmo de decaimiento espontáneo Γ_{32} es despreciable.

El Hamiltoniano total del sistema en este esquema tiene la misma estructura del Hamiltoniano del sistema de tres niveles en escalera Ξ es:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_{E_1} + \mathbf{H}_{E_2} \\ &= \sum_{j=1}^3 \hbar\omega_{jj} |j\rangle\langle j| - \hbar\Omega_{12} (|2\rangle\langle 1| e^{-i\omega_c t} + |1\rangle\langle 2| e^{i\omega_c t}) - \hbar\Omega_{23} (|3\rangle\langle 2| e^{-i\omega_p t} + |2\rangle\langle 3| e^{i\omega_p t}). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Aplicando la transformación $\mathbf{U}(t)$ (4.35) y reescalando de la misma manera que en el esquema de escalera con transiciones dipolares, obtenemos el Hamiltoniano independiente del tiempo:

$$\mathbf{H} = \hbar \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_{12} & 0 \\ -\Omega_{12} & \Delta_{21} & -\Omega_{23} \\ 0 & -\Omega_{23} & \Delta_{21} + \Delta_{32} \end{bmatrix}, \quad (5.9)$$

con $\Delta_{21} = \omega_{21} - \omega_c$ y $\Delta_{32} = \omega_{32} - \omega_p$ los desentonamientos entre los láseres y las transiciones y $\omega_{21} = \omega_{780}$, $\omega_{32} = \omega_{911}$ las frecuencias de transición. La ecuación de Lindblad del sistema es:

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar} [\mathbf{H}, \rho] + \frac{\Gamma_{21}}{2} [2\sigma_{12}\rho\sigma_{21} - \{\sigma_{22}, \rho\}] + \frac{\Gamma_{31}}{2} [2\sigma_{13}\rho\sigma_{31} - \{\sigma_{33}, \rho\}], \quad (5.10)$$

la cual, escrita en componentes toma la forma:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{ij} &= -\frac{i}{\hbar} \sum_{k=1}^3 (H_{ik}\rho_{kj} - \rho_{ik}H_{kj}) + \frac{\Gamma_{31}}{2} [2\rho_{33} |1\rangle\langle 1| - \sum_{k=1}^3 (\rho_{3k} |3\rangle\langle k| + \rho_{k3} |k\rangle\langle 3|)] \\ &+ \frac{\Gamma_{21}}{2} [2\rho_{22} |1\rangle\langle 1| - \sum_{k=1}^3 (\rho_{2k} |2\rangle\langle k| + \rho_{k2} |k\rangle\langle 2|)], \end{aligned} \quad (5.11)$$

donde $i, j \in [1, 3]$, lo cual resulta en un total de 9 componentes, de las cuales, debido a que $\rho_{ij} = \rho_{ji}^*$ (propiedad (4.17a) de la matriz de densidad), solamente necesitamos de 6 para resolver la dinámica del sistema.

Explícitamente:

$$\dot{\rho}_{11} = -i\Omega_{12}(\rho_{12} - \rho_{21}) + \Gamma_{31}\rho_{33} + \Gamma_{21}\rho_{22} \quad (5.12a)$$

$$\dot{\rho}_{22} = i[\Omega_{12}(\rho_{12} - \rho_{21}) - \Omega_{23}(\rho_{23} - \rho_{32})] - \Gamma_{21}\rho_{22} \quad (5.12b)$$

$$\dot{\rho}_{33} = i\Omega_{23}(\rho_{23} - \rho_{32}) - \Gamma_{31}\rho_{33} \quad (5.12c)$$

$$\dot{\rho}_{12} = -i[\Omega_{12}(\rho_{11} - \rho_{22}) + \Omega_{23}\rho_{13}] + \frac{1}{2}(2i\Delta_{21} - \Gamma_{21})\rho_{12} \quad (5.12d)$$

$$\dot{\rho}_{13} = -i(\Omega_{23}\rho_{12} - \Omega_{12}\rho_{23}) + \frac{1}{2}[2i(\Delta_{32} + \Delta_{21}) - \Gamma_{31}]\rho_{13} \quad (5.12e)$$

$$\dot{\rho}_{23} = -i[\Omega_{23}(\rho_{22} - \rho_{33}) - \Omega_{12}\rho_{13}] + \frac{1}{2}[2i\Delta_{23} - (\Gamma_{31} + \Gamma_{21})]\rho_{23}. \quad (5.12f)$$

Ya que $\rho_{ji} = \rho_{ij}^*$, entonces $\rho_{ij} - \rho_{ji} = 2i \text{Im}(\rho_{ij})$, lo cual implica que todos los elementos de la diagonal son reales y podemos interpretarlos como las probabilidades de ocupar los estados hiperfinos $\{|j\rangle | j \in [1, 3]\}$ antes de realizar una medición; además, notamos que $\sum_j \dot{\rho}_{jj} = 0 \forall t$, lo cual implica la conservación de la probabilidad a lo largo de toda la evolución del sistema. Podemos obtener mucha de la física del sistema al inspeccionar las ecuaciones de movimiento: un átomo que se encuentra inicialmente en el estado $|5^2S_{1/2}\rangle$ transita hacia el estado $|5^2P_{3/2}\rangle$ a un ritmo dado por la frecuencia de Rabi Ω_{12} mientras que tiene la posibilidad de decaer espontáneamente a un ritmo Γ_{21} . Posteriormente, el átomo transita a $|6^2P_{3/2}\rangle$ a un ritmo Ω_{23} , decae espontáneamente a $|5^2S_{1/2}\rangle$ a un ritmo Γ_{31} y comienza de nuevo el ciclo.

Como mencionamos en la sección 5.1., en una situación en la que están involucradas transiciones tanto dipolares como cuadrupolares eléctricas, el efecto de las posteriores se vuelve despreciable debido a la baja probabilidad de observarlas; este hecho se ve reflejado en las frecuencias de Rabi. En el caso de una onda plana monocromática, la potencia, P , de un láser está relacionada con la amplitud del campo a través de la fórmula:

$$P_j = \frac{c\epsilon_0}{2} n A_j |\mathbf{E}_j|^2, \quad (5.13)$$

donde A_j es el área superficial del j-ésimo láser y $n \approx 1$ es el índice de refracción dentro de la celda. En el caso en que ambos láseres tengan la misma potencia, la diferencia entre las magnitudes de las frecuencias de Rabi es:

$$\frac{\Omega_{23}}{\Omega_{12}} \approx 1.314 \times 10^{-4}. \quad (5.14)$$

Esto nos dice que los procesos que se llevan a cabo durante la evolución del sistema ocurren a escalas de tiempo radicalmente distintas. De este hecho podemos predecir que antes de que se lleven a cabo transiciones cuadrupolares, las poblaciones de los niveles $|5^2S_{1/2}\rangle$ y $|5^2P_{3/2}\rangle$ llegarán a una situación de quasi-equilibrio antes de que haya posibilidad de que el átomo transite al estado $|6^2P_{3/2}\rangle$. Si hacemos la diferencia entre las potencias de los láseres igual a la reportada en el experimento, $P_c \approx 100 \mu\text{W}$ para el láser de control y $P_p \approx 100 \text{mW}$ para el láser de prueba, el cociente de las frecuencias de Rabi se vuelve:

$$\frac{\Omega_{23}}{\Omega_{12}} \approx 4.56 \times 10^{-3}. \quad (5.15)$$

A pesar de sólo haber reducido un orden de magnitud, el efecto de la diferencia de potencias entre los láseres fue suficiente para observar experimentalmente el efecto Autler-Townes cuando están involucradas transiciones atómicas prohibidas. Esta diferencia de escalas de tiempo no solo representa un reto experimental, sino también uno teórico y computacional: ya que los coeficientes de las ecuaciones de movimiento tienen diferencias de tres órdenes de magnitud, estas son *rígidas*, lo cual significa que para ciertos métodos numéricos, las soluciones a las ecuaciones diferenciales son altamente inestables a menos que la partición del intervalo de evolución sea arbitrariamente pequeño. Esto resulta en soluciones divergentes o con fuertes oscilaciones alrededor del valor correcto y con un gasto de tiempo de cómputo extremadamente grande [30]. Notamos que este problema es exclusivamente computacional, pues en principio, si es posible resolver analíticamente las ecuaciones de movimiento, el problema de rigidez desaparece.

Es por esto que debemos emplear métodos eficientes para resolver las ecuaciones de movimiento de la matriz de densidad, siendo una solución analítica aproximada para el caso estacionario $\dot{\rho} = \mathbf{0}$ nuestra primera opción.

5.4. Solución estacionaria a las ecuaciones de movimiento

Ya que, como mostramos en la sección anterior, la frecuencia de Rabi asociada a transiciones cuadrupolares Ω_{23} es mucho menor a la de transiciones dipolares Ω_{12} , podemos expandir en series de Ω_{23} las soluciones a

las ecuaciones de movimiento en el caso estacionario $\dot{\rho}_{ij} = 0$. Los resultados que mostraremos en esta sección fueron obtenidos a través de la paquetería para cálculos simbólicos *SymPy* [31] del lenguaje de programación *Julia* y las funciones nativas de *Wolfram Mathematica* suponiendo que la temperatura del sistema es 0 para eliminar el ensanchamiento de líneas por efecto Doppler y que las frecuencias de los láseres son exactamente los valores reportados experimentalmente (Apéndice 1. Tabla 3.) de tal forma que sus perfiles espectrales son funciones delta de Dirac. Debido a que varios de los procedimientos son demasiado complicados y con el fin de evitar volver este texto engorroso, escribiremos solamente los resultados pero adjuntaremos en el apéndice los códigos necesarios para reproducirlos.

Como nos interesa la fluorescencia del estado $|6^2P_{3/2}\rangle$, calculamos la población ρ_{33} para el caso estacionario $\dot{\rho}_{ij} = 0$ y suponiendo que el átomo está preparado inicialmente en el estado $|5^2S_{1/2}\rangle$ ($\rho_{11}|_{t=0} = 1$ y $\rho_{ij} = 0$ para $i \neq 1, j \neq 1$).

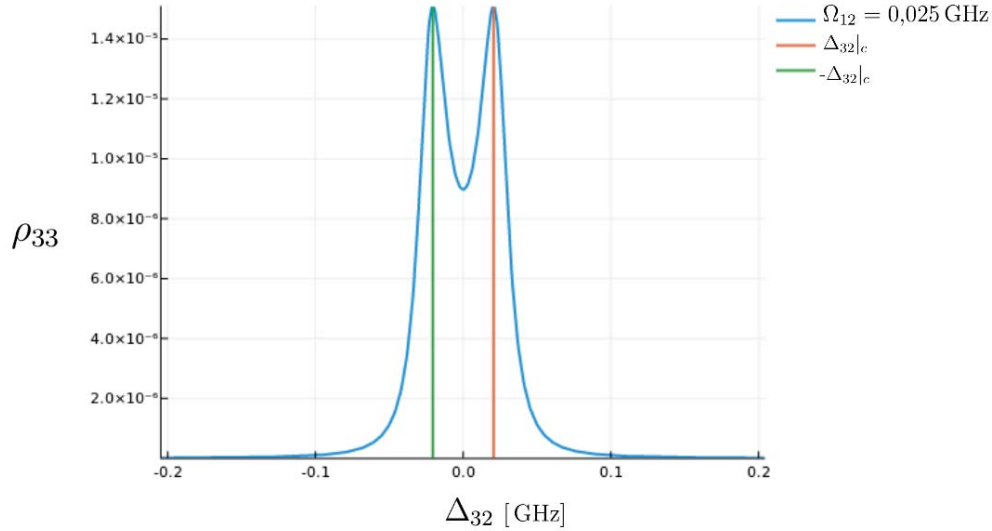


Figura 5.4. Doblete Autler-Townes por fluorescencia de la transición $6^2P_{3/2} \rightarrow 5^2S_{1/2}$ para el caso de resonancia total entre el láser de control ω_{780} y la transición $5^2S_{1/2} \leftrightarrow 5^2P_{3/2}$. Las líneas anaranjada y verde corresponden a los desintonamientos críticos $\pm\Delta_{32}|_c$ (e.c. 5.17), en los cuales se ubican los máximos del doblete. Notamos que el doblete posee las mismas características del doblete formado por transiciones dipolares eléctricas en el esquema de escalera Ξ .

Las potencias impares de Ω_{23} , Ω_{23}^{2n+1} en la expansión se anulan, por lo cual el término a más pequeño en la expansión corresponde al de segundo orden:

$$\rho_{33}^{(2)} = \frac{16\Omega_{23}^2\Omega_{12}^2[\Gamma_{31}[(\Gamma_{21}+\Gamma_{31})^2+4\Delta_{32}^2]+4\Omega_{12}^2(\Gamma_{21}+\Gamma_{31})]}{\Gamma_{31}[\Gamma_{21}^2+4\Delta_{21}^2+8\Omega_{12}^2][(\Gamma_{21}+\Gamma_{31})^2+4\Delta_{23}^2][\Gamma_{31}^2+4(\Delta_{21}+\Delta_{32})^2]+8\Omega_{12}^2[\Gamma_{31}(\Gamma_{31}+\Gamma_{21})-4\Delta_{32}(\Delta_{32}+\Delta_{21})]+16\Omega_{12}^4}, \quad (5.16)$$

de cual podemos obtener varios resultados interesantes tales como los puntos críticos y los correspondientes máximos y mínimos al derivarla con respecto al desintonamiento de la transición cuadrupolar Δ_{32} . Primero notamos que para el caso más general en el que el láser de control también está desintonizado de la transición $5^2S_{1/2} \leftrightarrow 5^2P_{3/2}$, $\Delta_{21} \neq 0$, al hallar los desintonamientos críticos del láser de prueba, $\Delta_{32}|_c$, obtenemos un polinomio de quinto orden para $\Delta_{32}|_c$ de la forma:

$$\sum_{k=0}^5 a_k \Delta_{32}|_c^k = 0,$$

donde a_k son constantes y $a_0 \neq 0$. Por el teorema de Abel-Ruffini, la ecuación no posee soluciones algebraicas y por tanto es necesario recurrir a métodos numéricos para resolverla. Este resultado implica que la energía del estado vestido $|a^0\rangle$ es distinta de cero (ec. 4.40, subsección 4.3.2.) y por tanto el mínimo central del doblete se encuentra recorrido del 0.

Para el caso en el que $\Delta_{21} = 0$, el polinomio es de la forma:

$$\Delta_{32}|_c(a_4\Delta_{32}|_c^4 + a_2\Delta_{32}|_c^2 + a_0) = 0,$$

de donde obtenemos un mínimo centrado en $\Delta_{32}|_c = 0$. La ecuación entre paréntesis es de tipo bicuártica, por lo cual hay 4 desintonamientos críticos: 2 puramente imaginarios que corresponden a los mínimos del doblete

ubicados en $\pm\infty$ y dos reales de la forma:

$$\Delta_{32}^2|_c = \frac{1}{4\Gamma_{31}} \left[2\Omega_{12}(\Gamma_{21} + 2\Gamma_{31})\sqrt{4\Omega_{12}^2 + \Gamma_{21}\Gamma_{31} + \Gamma_{31}^2} - (\Gamma_{21} + \Gamma_{31})(4\Omega_{12}^2 + \Gamma_{21}\Gamma_{31} + \Gamma_{31}^2) \right]. \quad (5.17)$$

Observamos que la posición de los máximos depende solamente de la frecuencia de Rabi Ω_{12} y los ritmos de decaimiento espontáneo Γ_{21} y Γ_{31} . Todavía más, a partir de esta expresión podemos obtener la frecuencia de Rabi crítica $\Omega_{12}|_c$ a partir de la cual se forma el doblete:

$$\Omega_{12}|_c = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(\Gamma_{21} + \Gamma_{31})^3}{2\Gamma_{21} + 3\Gamma_{31}}} \approx 0.014455 \text{ GHz}. \quad (5.18)$$

En términos de la potencia del láser de control, el valor de $\Omega_{12}|_c$ corresponde a $P_c = 64.033 \mu\text{W}$, la cual está por debajo de la reportada en el experimento. Notamos que la formación del doblete depende exclusivamente de los ritmos de decaimiento espontáneo entre los estados hiperfinos, los cuales son constantes naturales del sistema.

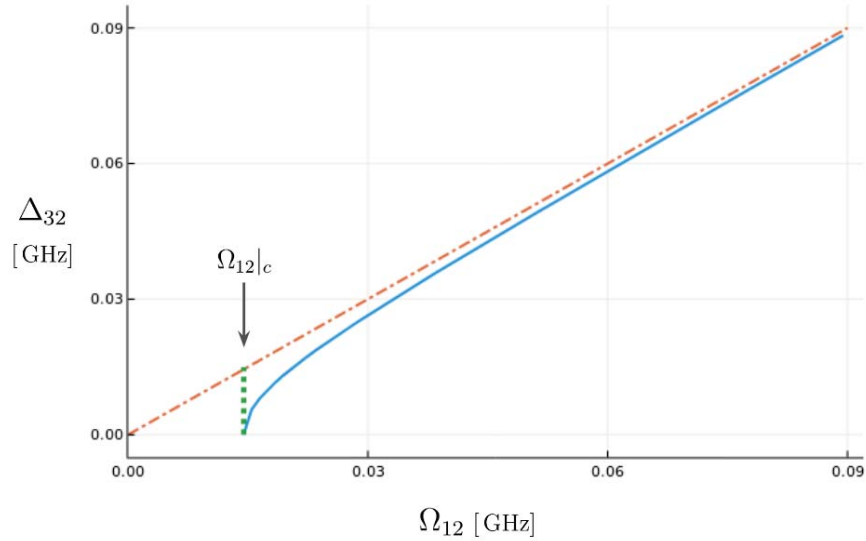


Figura 5.5. Desintonamiento crítico $\Delta_{32}|_c$ contra frecuencia de Rabi del láser de control Ω_{12} correspondiente a la posición de los máximos del doblete Autler-Townes. La recta quebrada anaranjada $f(\Omega_{12}) = \Omega_{12}$ corresponde a la asíntota del desintonamiento crítico, mientras que la línea verde punteada se sitúa en la frecuencia crítica a partir de la cual se forma del doblete.

Por tanto, cuando la transición $5^2S_{1/2} \leftrightarrow 5^2P_{3/2}$ está en resonancia total con el láser de control, $\Delta_{21} = 0$, el doblete Autler-Townes por fluorescencia dado por la ecuación (5.16) se comporta de la misma manera que aquel obtenido por absorción en transiciones dipolares eléctricas en el esquema de escalera: es simétrico, con un mínimo centrado en $\Delta_{32} = 0$ y dos máximos a la misma altura situados en $\pm\Delta_{32}|_c$. En el límite $\Omega_{12} \gg \Gamma_{21}, \Gamma_{31}$, los máximos del doblete tienden a un valor constante dado por:

$$\lim_{\Omega_{12} \rightarrow \infty} \rho_{33}|_c = \frac{2\Omega_{23}^2}{\Gamma_{31}(2\Gamma_{31} + \Gamma_{21})} \approx 1.6191 \times 10^{-5}, \quad (5.19)$$

la cual es la máxima probabilidad de encontrar al átomo en el estado $|6^2P_{3/2}\rangle$. A pesar de que la altura límite de los máximos es proporcional al cuadrado de la frecuencia de Rabi de la transición cuadrupolar Ω_{23} , esto no cambia el rango de potencias a partir del cual se está en el límite asintótico.

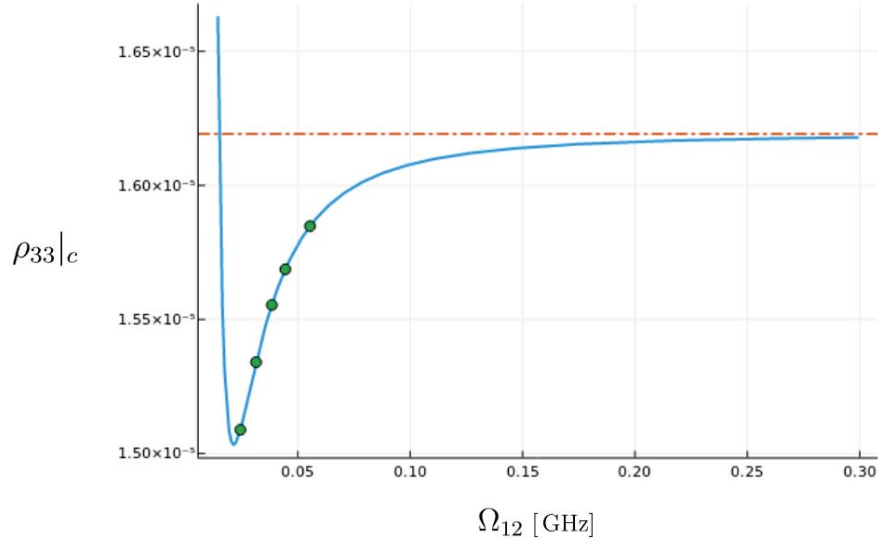


Figura 5.6. Maximos del doblete Autler-Townes en funci3n de la frecuencia de Rabi Ω_{12} graficados a partir de la frecuencia crítica $\Omega_{12}|_c$. Los puntos verdes corresponden a las frecuencias asociadas a los espectros experimentales y se encuentran en un rango donde los máximos crecen. La altura de los máximos tiende a un valor asint3tico (ec.5.19) que depende de la intensidad del acoplamiento cuadrupolar de la transici3n $5^2 P_{3/2} \leftrightarrow 6^2 P_{3/2}$.

El mínimo central tiende rápidamente a 0 a medida que Ω_{12} aumenta (Figura 5.7), lo cual es contradictorio al comportamiento de los mínimos centrales de los espectros experimentales, donde estos decrecen levemente a pesar de las variaciones grandes en la potencia.

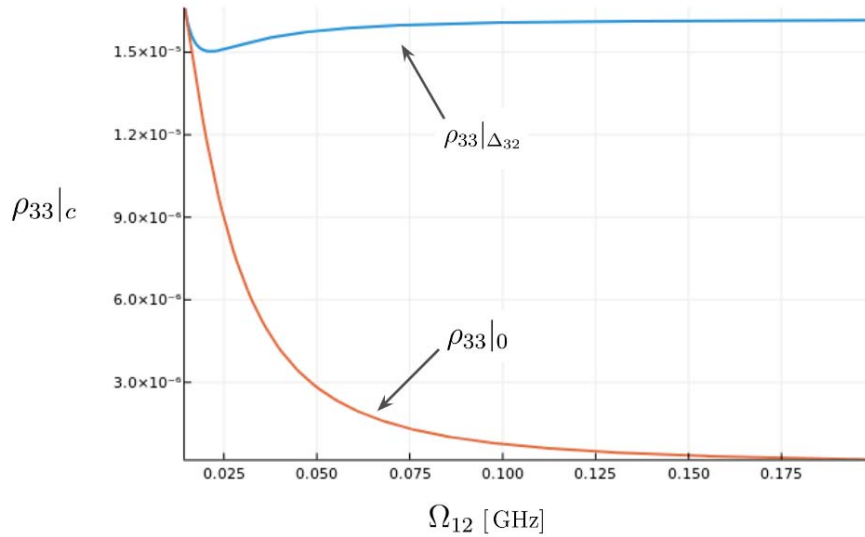


Figura 5.7. Comportamiento de máximos (curva azul) y mínimos (curva anaranjada) del doblete Autler-Townes en funci3n de la frecuencia de Rabi Ω_{12} a partir del valor crítico $\Omega_{12}|_c$. A diferencia del comportamiento experimental, mientras que el máximo tiende a un valor constante dado por la ecuaci3n (5.19), el mínimo central decae rápidamente a 0.

5.5. Efecto Doppler y ensanchamiento de líneas espectrales

Para poder reproducir los resultados experimentales con nuestro modelo, debemos considerar dos aspectos importantes: el efecto de ensanchamiento de las líneas espectrales debido a los anchos de banda de los lsers y la selecci3n de las posibles velocidades del átomo debido al arreglo contrapropagante de los haces. Considerando el hecho de que los átomos de Rubidio se mueven libremente dentro de la celda, las frecuencias de los lsers

que el átomo recibe se ven recorridas por la acción del efecto Doppler:

$$\begin{aligned}\omega'_j &= \omega_j \pm \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_j \\ &= \omega_j \left(1 \pm \frac{v}{c} \cos \theta_j\right),\end{aligned}\quad (5.20)$$

donde ω_j es la frecuencia del j -ésimo láser vista por el átomo en reposo y θ_j el ángulo entre el vector de onda del láser y la velocidad del átomo, la cual supondremos que sigue la distribución unidimensional de velocidades de Maxwell-Boltzmann:

$$f(v_\alpha)dv_\alpha = \left(\frac{m}{2\pi K_B T}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{mv_\alpha^2}{2K_B T}\right)dv_\alpha, \quad (5.21)$$

donde $\alpha \in [x, y, z]$, $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K es la constante de Boltzmann, T la temperatura absoluta del sistema y $m = 1.443 \times 10^{-25}$ Kg la masa del isótopo 87 de Rubidio. Para el arreglo que hemos planteado, en el cual los haces son contrapropagantes sobre el eje x , podemos asignar sin pérdida de generalidad el signo positivo al láser de prueba y el negativo al de control, indicando que el átomo se acerca hacia uno mientras se aleja del otro. Notamos que, debido al corrimiento que experimentan ambas frecuencias, sólo aquellas velocidades del átomo para las cuales los desentonamientos recorridos, Δ'_{21} y Δ'_{32} , se aproximan a 0, es que podremos observar las dos transiciones que nos interesan. Considerando las posibles velocidades que el átomo pudiera tener a una temperatura T dentro de la celda, integramos la expresión analítica para $\rho_{33}^{(2)}$ con la distribución de Maxwell-Boltzmann para obtener el valor esperado, $\rho_{33}^{(D)}$:

$$\rho_{33}^{(D)}(\Delta_{21}, \Delta_{32}) = \int_0^\infty \rho_{33}^{(2)}(\Delta_{21} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_{780}, \Delta_{32} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_{911}) \cdot f(v_\alpha)dv_\alpha, \quad (5.22)$$

donde supondremos que $\hat{k}_{780} = -\hat{k}_{911}$.

Por otro lado, cualquier espectro obtenido experimentalmente es el resultado de la *convolución* entre el perfil espectral natural de la fuente con aquellos de los láseres con los que interactúa o con el perfil del aparato de medición [15] [32]. La convolución entre dos funciones $f(\Delta)$ y $g(\Delta)$ se define como:

$$\begin{aligned}[f * g](\Delta) &= \int_{-\infty}^\infty f(\Delta') \cdot g(\Delta - \Delta')d\Delta' \\ &= \int_{-\infty}^\infty g(\Delta') \cdot f(\Delta - \Delta')d\Delta'.\end{aligned}\quad (5.23)$$

Los perfiles espectrales de los láseres los supondremos Gaussianos:

$$G(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}\right), \quad (5.24)$$

donde σ es el ancho de banda del láser. La expresión final para la población del estado $|6P_{3/2}\rangle$, ρ_{33}^f , que resulta de combinar los efectos de ensanchamiento por ambos láseres y la selección de velocidades es:

$$\rho_{33}^f(\Delta_{21}, \Delta_{32}) = \int_{-\infty}^\infty d\Delta'_2 \int_{-\infty}^\infty d\Delta'_1 \cdot \rho_{33}^{(D)}(\Delta'_1, \Delta'_2) \cdot G_{780}(\Delta_{21} - \Delta'_1) \cdot G_{911}(\Delta_{32} - \Delta'_2). \quad (5.25)$$

En la siguiente sección presentaremos los resultados de incorporar los efectos de las posibles velocidades del átomo y los perfiles espectrales de los láseres en nuestro modelo. Resolviendo las integrales de manera numérica, primero mostraremos el efecto de cada uno por separado y probaremos que solamente cuando consideramos ambos efectos es que reproducimos los resultados experimentales.

5.6. Resultados

Al integrar la población del estado $|6^2P_{3/2}\rangle$ sobre las posibles velocidades del átomo (ec.5.22), el comportamiento de los máximos y mínimo central del doblete se modifica de manera sustancial: en lugar de aproximarse a un valor constante, los máximos crecen linealmente con la frecuencia de Rabi Ω_{12} , mientras que los mínimos centrales decaen hacia 0 con mayor rapidez en comparación con los dados por la ecuación (5.16) (figura 5.8). Los desentonamientos críticos de los espectros integrados sobre las velocidades crecen de manera lineal pero con una pendiente menor comparada con la de la ecuación (5.16). Notamos que en nuestro modelo, todos los desentonamientos experimentales, salvo el primero, se encuentran sobre esta recta (figura 5.10). Calculando la anchura a media altura (FWHM por sus siglas en inglés), obtenemos que los espectros que resultan de la

selección de velocidades son más angostos que los dados por la ecuación (5.16) a medida que aumenta la la frecuencia de Rabi Ω_{12} . Podemos ver entonces que el considerar la selección de velocidades dada por los haces contrapropagantes resulta en un doblete Autler-Townes más alto en sus máximos, pero con una profundidad mayor y hasta 1.5 veces más estrecho comparado con los espectros experimentales.

Al aplicar las convoluciones, encontramos que para $\sigma_{780} = \sigma_{911} = 2\pi \cdot 4$ MHz, las características de los dobletes teóricos son los más parecidos a los experimentales. Primero notamos que los mínimos centrales decaen a un ritmo mucho más lento, lo cual se ve reflejado en el cociente entre el máximo del doblete y su mínimo central, $\rho_{33}^{(D)}|_{\Delta_{32}}/\rho_{33}^{(D)}|_0$, e implica que la formación del doblete ocurre a una potencia mayor a la calculada para la población desnuda (ec. (5.18)) y que depende de los anchos de banda de los láseres. Como puede apreciarse en la figura 5.9, tanto para el caso en el que se integra la población sobre las velocidades como para en el que no, el cociente entre los máximos y mínimos centrales crece de manera exponencial en función de la frecuencia de Rabi Ω_{12} , mientras que los cocientes experimentales se mantienen bastante más cerca a la curva que corresponde a los cocientes de los espectros convolucionados. A pesar de esto, el cociente experimental de mayor potencia (4.72 mW) es 4 veces más pequeño que el correspondiente a las convoluciones y hasta 15 veces más pequeño para la población integrada sobre las velocidades. Los anchos de los espectros convolucionados corren paralelos a los correspondientes de la ecuación (5.16), con una diferencia de 0.056 GHz, mientras que los comportamientos de los desentonamientos críticos de los máximos y mínimo central son iguales a los que predice la ecuación (5.16) (figuras 5.10 y 5.11). El resultado de la convolución entre la población y los perfiles espectrales de los láseres son dobletes Autler-Townes más anchos, menos profundos y con una ventana de transparencia más ancha, pues los máximos están más separados entre sí en comparación con el caso en el que integramos sobre las velocidades.

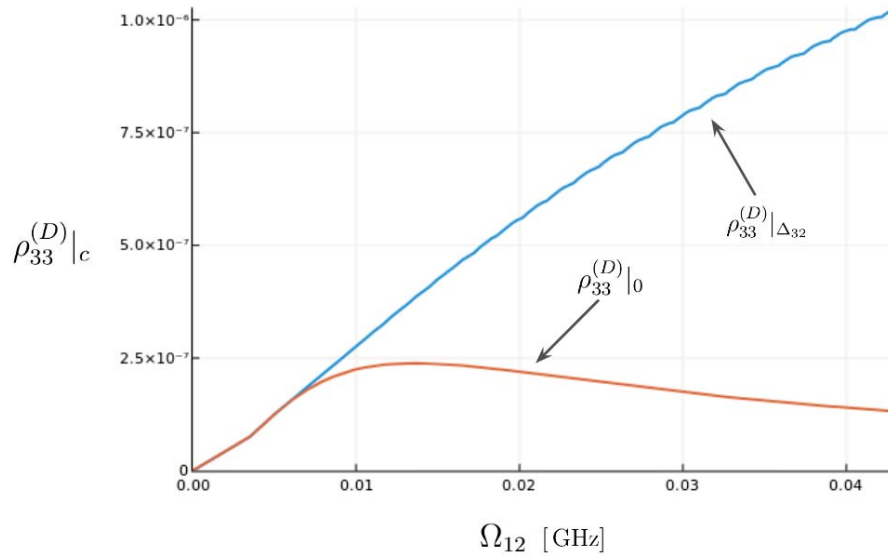


Figura 5.8. Comportamiento de máximos (curva azul) y mínimos (curva anaranjada) del doblete Autler-Townes promediado sobre diferentes velocidades posibles del átomo en función de la frecuencia de Rabi Ω_{12} . Los máximos aumenten linealmente con la frecuencia mientras que los mínimos decaen hacia 0.

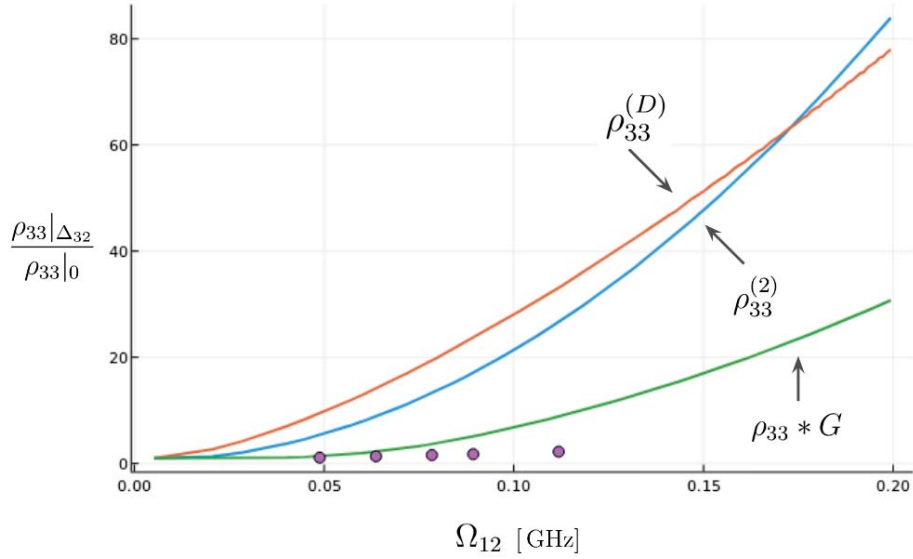


Figura 5.9. Cociente entre el máximo del doblete y el mínimo central para $\rho_{33}^{(2)}$, $\rho_{33}^{(D)}$ y $[\rho_{33}^{(2)} * G_{911} * G_{780}]$ (curvas azul, anaranjada y verde respectivamente) en función de la frecuencia de Rabi Ω_{12} . Los puntos experimentales (en morado) se encuentran mucho más próximos al resultado de las convoluciones.

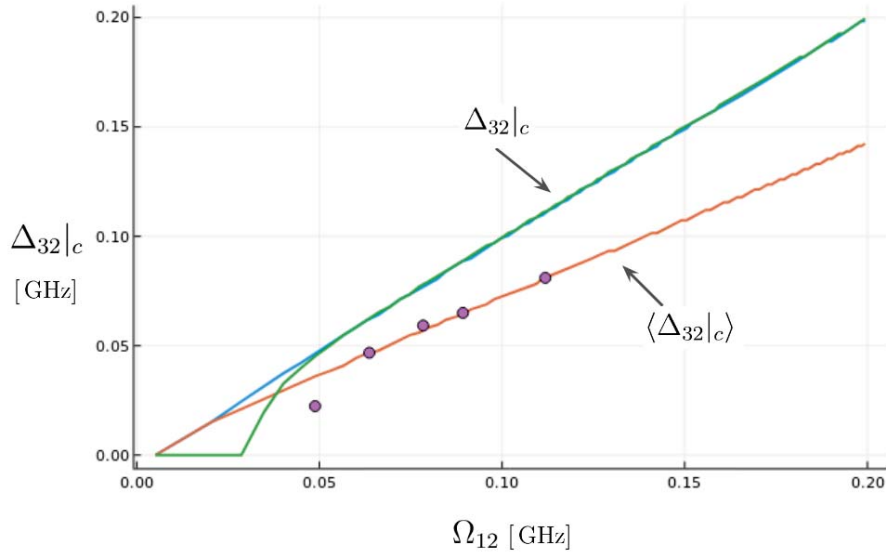


Figura 5.10. Desentonamientos críticos en función de la frecuencia de Rabi Ω_{12} . Las curvas azul y verde corresponden al comportamiento de los desentonamientos de $\rho_{33}^{(2)}$ y $[\rho_{33}^{(2)} * G_{911} * G_{780}]$, mientras que la anaranjada a $\rho_{33}^{(D)}$. Notamos que, salvo el primero, los valores experimentales (puntos morados) se encuentran sobre esta curva.

Al considerar por separado los efectos de las convoluciones y la selección de velocidades, obtuvimos que, por un lado, los anchos espectrales y los cocientes entre los máximos y mínimos centrales teóricos se ajustan mejor a los experimentales cuando aplicamos las convoluciones con los perfiles espectrales de los láseres; sin embargo, las posiciones de los máximos son las mismas que las de la población $\rho_{33}^{(2)}$ y los máximos también tienden a un valor constante a medida que aumenta la potencia del láser, lo cuál es contradictorio al comportamiento de los espectros experimentales. Por otro lado, al integrar la población sobre las posibles velocidades del átomo, obtenemos que los máximos crecen monótonicamente con la potencia del láser de control y que las posiciones de los máximos experimentales se ajustan con los predichos por este efecto; en cambio, los mínimos centrales decrecen a un ritmo mucho más rápido comparados con los de las convoluciones o la población $\rho_{33}^{(2)}$. Esto nos sugiere que al combinar ambos efectos (ec. 5.25), nuestro modelo podrá reproducir los resultados experimentales.

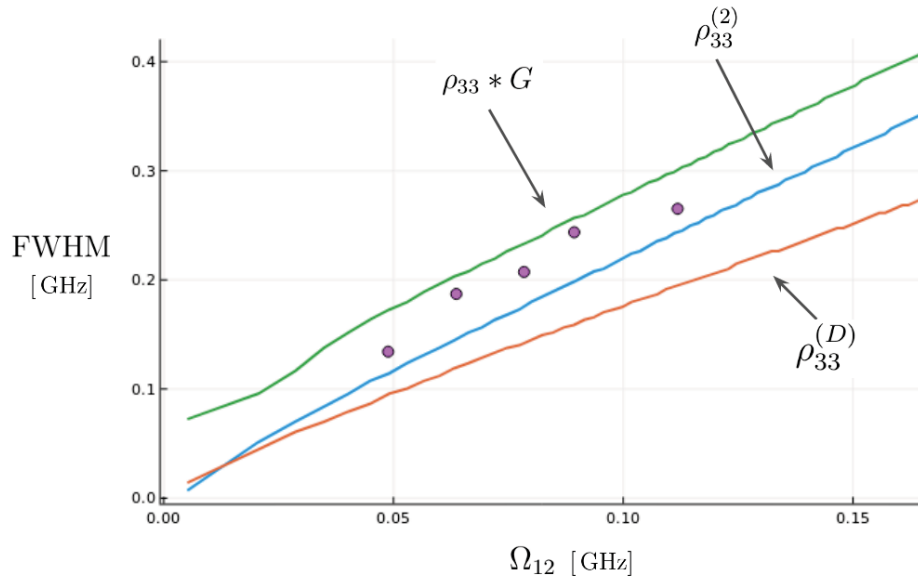


Figura 5.11. Anchura a media altura (FWHM) en función de la frecuencia de Rabi Ω_{12} . Las curvas azul, verde y anaranjada corresponden a las anchuras de los espectros de $\rho_{33}^{(2)}$ y $[\rho_{33}^{(2)} * G_{911} * G_{780}]$ y $\rho_{33}^{(D)}$ respectivamente.

Notamos que los anchos de la población con y sin convoluciones son paralelos entre sí y que los anchos experimentales (puntos morados) se encuentran entre estas dos curvas.

Integrando numéricamente la expresión $\rho_{33}^f(\Delta_{21} = 0, \Delta_{32})$ a diferentes potencias del láser de control, obtenemos los siguientes resultados: la curva de cocientes entre máximo y mínimo central se acerca todavía más a los puntos experimentales en comparación con sólo aplicar las convoluciones, siendo que el cociente del espectro teórico a 4.72 mW reescalado es sólo dos veces más grande. Si aumentáramos alguno de los anchos de banda de los láseres para ajustar más la curva de cocientes teóricos a los datos experimentales, los puntos ubicados en las primeros dos espectros se vuelven 1, lo cual implica que el doblete Autler-Townes aún no ha sido formado.

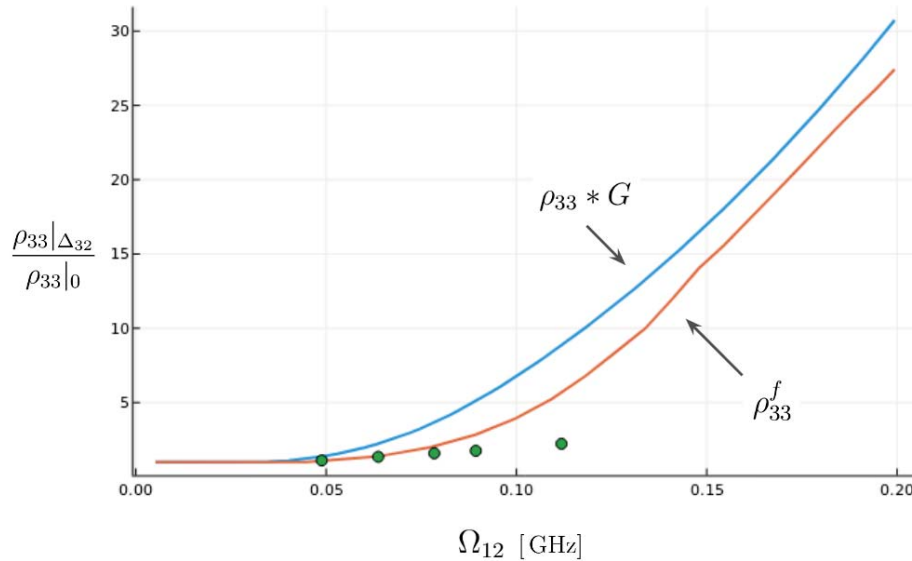


Figura 5.12. Cociente entre máximos y mínimo central para ρ_{33}^f y $[\rho_{33}^{(2)} * G_{911} * G_{780}]$ (curvas azul y anaranjada) en función de la frecuencia de Rabi Ω_{12} . El cociente de los espectros de ρ_{33}^f se ajustan mejor a los cocientes experimentales en comparación con los dados por las convoluciones.

Ya que para todos los casos estamos suponiendo que el láser de control está completamente sintonizado con la transición dipolar, $\Delta_{21} = 0$, los espectros resultantes siguen siendo simétricos, con ambos máximos a la misma distancia del mínimo centrado en $\Delta_{32} = 0$. Notamos que las posiciones de los máximos de ρ_{33}^f se encuentran ligeramente más alejadas de las posiciones experimentales en comparación con las de los espectros de $\rho_{33}^{(D)}$, las cuales se ajustan mejor con los puntos experimentales (figura 5.13). Sin embargo, observamos que ρ_{33}^f predice mejor la posición del primer doblete y que para la posición del máximo del doblete de 4.72 mW, la diferencia es de 0.011 GHz.

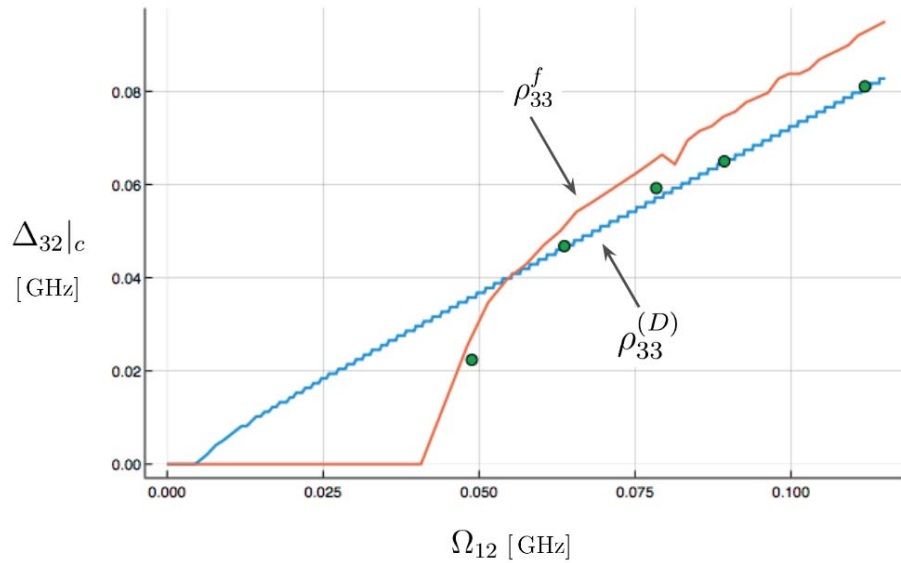


Figura 5.13. Posiciones de los máximos para ρ_{33}^f y $\rho_{33}^{(D)}$ (curvas anaranjada y azul respectivamente) en función de la frecuencia de Rabi Ω_{12} . Los puntos experimentales (en verde) se encuentran mejor ajustados a la curva de $\rho_{33}^{(D)}$, sin embargo ρ_{33}^f predice mejor la posición del primer doblete.

Las anchuras a media altura de los espectros de ρ_{33}^f son similares a las de los espectros de $[\rho_{33}^{(2)} * G_{911} * G_{780}]$ en la región de frecuencias que nos interesa. Este resultado nos sugiere que al reducir el ancho de banda de alguno de los láseres, nos acercaríamos más a los valores experimentales; sin embargo, hacer esto resultaría en mínimos centrales más profundos por el efecto Doppler.

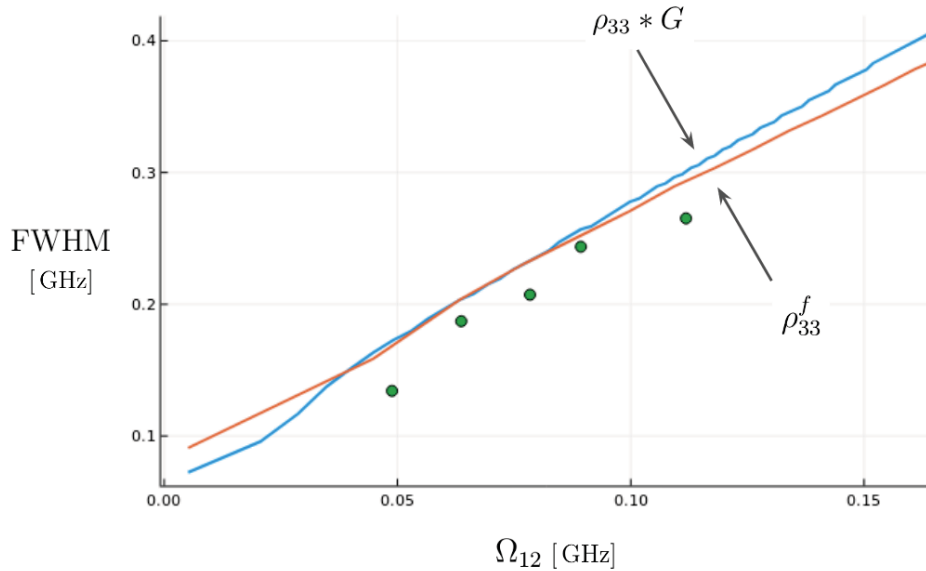


Figura 5.14. Anchura a media altura en función de la frecuencia de Rabi Ω_{12} . La curva azul representa las anchuras de los espectros correspondientes a $[\rho_{33}^{(2)} * G_{911} * G_{780}]$, mientras que la naranja a ρ_{33}^f . En la región de frecuencias de Rabi en las que fueron medidos los espectros experimentales, los anchos de los espectros para ambos casos teóricos son los mismos.

A continuación presentamos los espectros que resultan de nuestro modelo comparados con los experimentales (figuras 5.15-5.19). Ya que la intensidad de los espectros experimentales es arbitraria, ajustamos la altura del segundo espectro experimental (a una potencia de 1.53 mW) tal que sea la misma que el teórico a la misma potencia y multiplicamos los demás espectros experimentales por el mismo factor W_F con un valor numérico:

$$W_F = 8.62144 \times 10^{-8}. \quad (5.26)$$

Además, reproducimos los dos dobletes restantes correspondientes a las transiciones de los estados hiperfinos $|F_3 = F_2\rangle$ y $|F_3 = F_2 - 1\rangle$ de los espectros experimentales generando dos copias del doblete teórico central, ubicados en las distancias reportadas, tales que la relación entre sus máximos con el máximo central sean iguales

a las de los espectros experimentales. Las curvas azules sólidas corresponden a los espectros experimentales, mientras que los teóricos a las curvas anaranjadas quebradas. En las notas al pie de página se encuentran las potencias reportadas y las posiciones de los mínimos centrales de los dobletes izquierdo, $\Delta_{32}|_0^{\text{izq}}$, y derecho, $\Delta_{32}|_0^{\text{der}}$, con respecto al mínimo central.

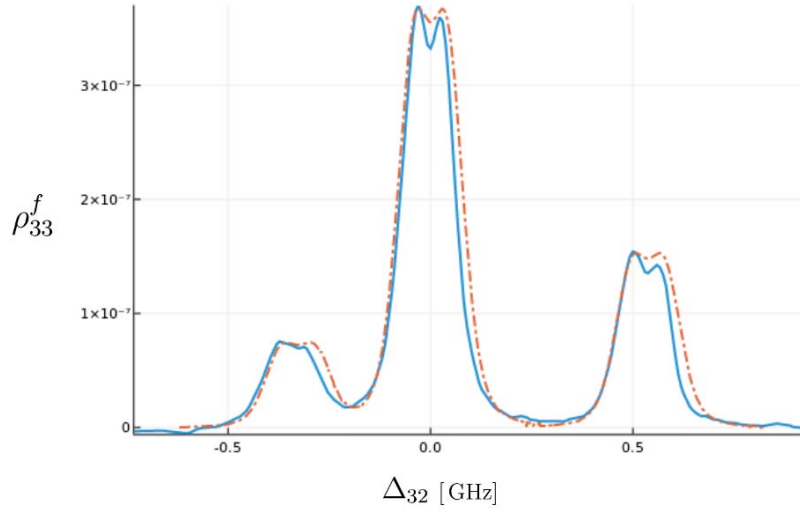


Figura 5.15. $\Omega_{12} = 0.048835$ GHz, $\Delta_{32}|_0^{\text{izq}} = -0.3280$ GHz, $\Delta_{32}|_0^{\text{der}} = 0.5368$ GHz. Las curvas sólidas azules corresponden a los espectros experimentales multiplicados por el factor $W_F = 8.6214 \times 10^{-8}$ y las anaranjadas quebradas a los ajustes teóricos.

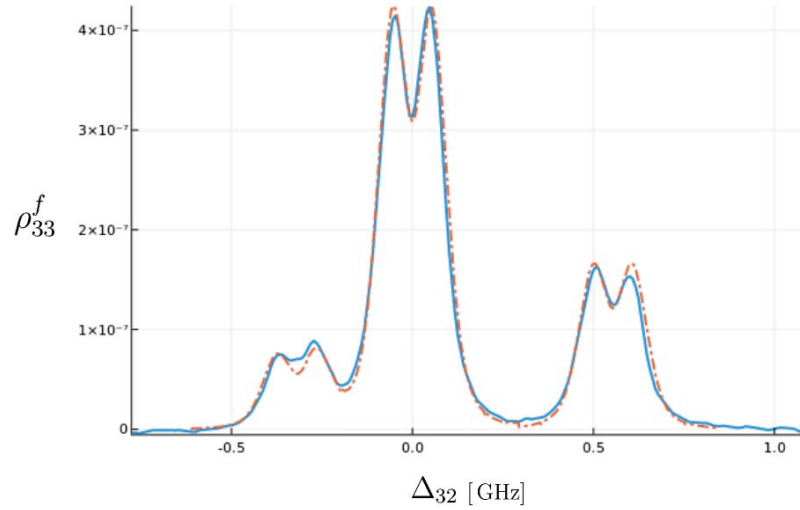


Figura 5.16. $\Omega_{12} = 0.063673$ GHz, $\Delta_{32}|_0^{\text{izq}} = -0.3196$ GHz, $\Delta_{32}|_0^{\text{der}} = 0.5535$ GHz.

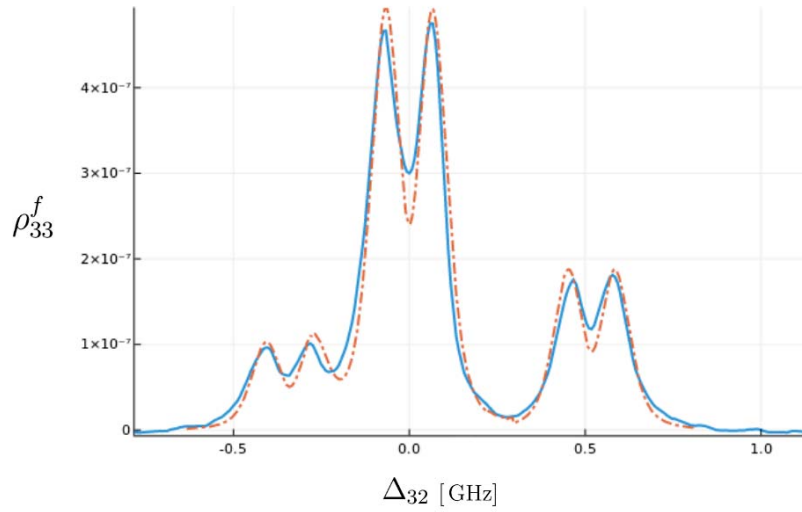


Figura 5.17. $\Omega_{12} = 0.078406$ GHz, $\Delta_{32}|_0^{\text{izq}} = -0.3404$ GHz, $\Delta_{32}|_0^{\text{der}} = 0.5181$ GHz. Las curvas sólidas azules corresponden a los espectros experimentales multiplicados por el factor de peso $W_F = 8.6214 \times 10^{-8}$ y las anaranjadas quebradas a los ajustes teóricos.

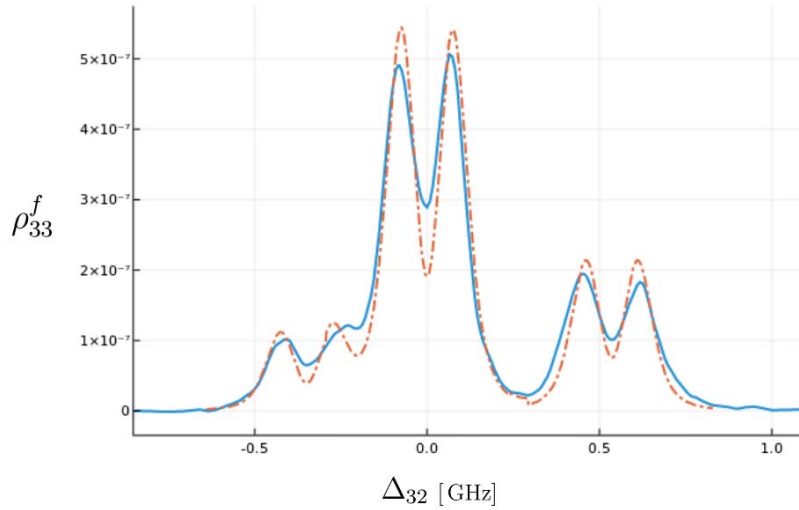


Figura 5.18. $\Omega_{12} = 0.089308$ GHz, $\Delta_{32}|_0^{\text{izq}} = -0.3492$ GHz, $\Delta_{32}|_0^{\text{der}} = 0.5360$ GHz.

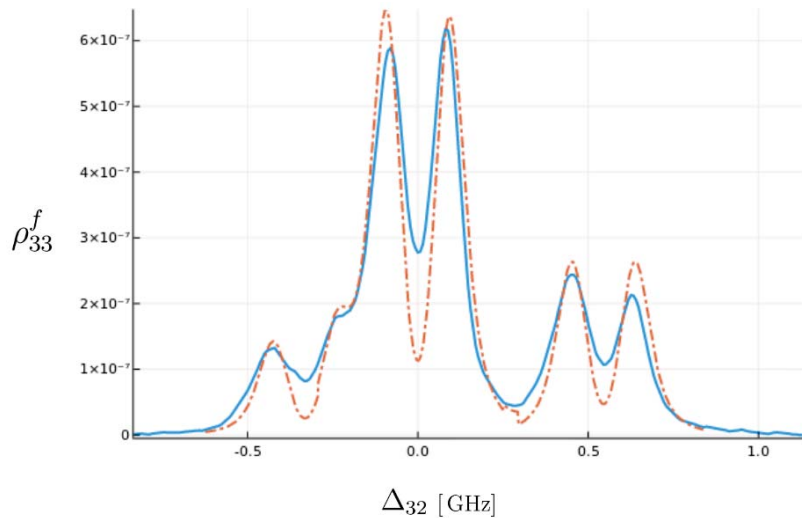


Figura 5.19. $\Omega_{12} = 0.111836$ GHz, $\Delta_{32}|_0^{\text{izq}} = -0.3314$ GHz, $\Delta_{32}|_0^{\text{der}} = 0.5451$ GHz.

Capítulo 6

Conclusiones

Utilizando el formalismo de la matriz de densidad construimos un modelo teórico del efecto Autler-Townes observado experimentalmente en la fluorescencia del estado $|6^2P_{3/2}\rangle$ al $|5^2S_{1/2}\rangle$ del átomo de Rubidio 87, utilizando un esquema de tres niveles con dos transiciones dipolares y una cuadrupolar eléctricas. El esquema de tres niveles que hemos propuesto es diferente al de escalera Ξ con dos transiciones dipolares eléctricas permitidas, pues el estado $|6^2P_{3/2}\rangle$ de mayor energía decae de manera directa al de menor energía, $|5^2S_{1/2}\rangle$, por medio de una transición dipolar eléctrica, mientras que el estado intermedio, $|5^2P_{3/2}\rangle$, se encuentra conectado con $|6^2P_{3/2}\rangle$ a través de una transición cuadrupolar eléctrica y con $|5^2S_{1/2}\rangle$ por una transición dipolar eléctrica. A pesar de que los resultados obtenidos por nuestro modelo se encuentran en buen acuerdo con los experimentales, es necesario recalcar que se encuentra sobresimplificado. Las suposiciones que hemos realizado a lo largo de este trabajo son las siguientes:

- **Aproximación de tres niveles.** De todos los estados hiperfinos de las tres transiciones que nos interesan en el átomo de ^{87}Rb , sólo hemos escogido aquellos para los cuales las frecuencias de Rabi dipolar y cuadrupolar, Ω_{12} y Ω_{23} , son máximas. Un análisis completo de la dinámica del sistema debería incluir en la matriz de densidad todos los diferentes estados hiperfinos de las transiciones $5^2S_{1/2} \leftrightarrow 5^2P_{3/2}$, $5^2P_{3/2} \leftrightarrow 6^2P_{3/2}$ y $6^2P_{3/2} \leftrightarrow 5^2S_{1/2}$, lo cual, en particular para la tercera transición, reproduciría las dos líneas restantes observadas experimentalmente y que ha sido hecho de manera semiclásica en [29].
- **Existencia de otra transición y sumideros.** Además de las tres transiciones que consideramos en este trabajo, el estado $|6^2P_{3/2}\rangle$ puede decaer dipolarmente de manera espontánea al estado $|6^2S_{1/2}\rangle$ a un ritmo $\Gamma = 4.506 \times 10^6$ Hz, el cual es comparable al ritmo de decaimiento espontáneo de la transición $5^2S_{1/2} \leftrightarrow 5^2P_{3/2}$. Por otro lado, existen estados hiperfinos $|5^2S_{1/2}, F_j, m_j\rangle$ llamados sumideros, para los cuales hay oportunidad de decaimiento desde el estado $|5^2P_{3/2}\rangle$ pero que, debido a las reglas de selección, no tienen posibilidad de volver a ser excitados por medio del láser de excitación dipolar. Si incorporáramos sumideros en nuestro modelo, entonces sería necesario resolver las ecuaciones diferenciales de manera numérica sobre un intervalo de tiempo finito, pues la solución estacionaria sería aquella en la que el átomo se encuentra con certeza en un sumidero y de la cual no podemos obtener información acerca de la fluorescencia de $|6^2P_{3/2}\rangle$.
- **Configuración espacial y polarizaciones de los láseres.** En este trabajo asumimos que los ejes de propagación de los láseres son perfectamente antiparalelos, $\hat{k}_{780} = -\hat{k}_{911}$, lo cual nos permitió utilizar la distribución de velocidades de Maxwell-Boltzmann unidimensional (ec.(5.21)) para integrar la población aproximada, $\rho_{33}^{(2)}$, sobre las posibles velocidades del átomo. Experimentalmente, esta situación sólo puede ser aproximada, por lo que deberíamos incluir todas las componentes de los vectores de propagación de los haces e integrar sobre la distribución tridimensional de velocidades de Maxwell-Boltzmann.
Las polarizaciones de los láseres las hemos tomado lineales y paralelas entre sí, pero no podemos asegurar que ese haya sido el caso experimental. Como vimos en el cálculo de los elementos de matriz del Hamiltoniano de interacción entre el átomo y los láseres (capítulo 3, subsección 3.4.2.), el rol de las polarizaciones en la dinámica de las transiciones entre los estados hiperfinos es de fundamental importancia. Un estudio detallado de la distribución de la probabilidad de ocupación en los diferentes estados hiperfinos en función de la polarización de los haces fue realizado en [29].
- **Otras simplificaciones** tales como asumir que el láser de excitación dipolar se encuentra en resonancia total con la transición $5^2S_{1/2} \leftrightarrow 5^2P_{3/2}$, $\Delta_{21} = 0$. Aproximamos el elemento de matriz reducida del momento cuadrupolar eléctrico del átomo, $\langle n = 6 || e r^2 || n = 5 \rangle$, utilizando radios atómicos empíricos debido a nuestra ignorancia de las funciones de onda del electrón de valencia y como consecuencia despreciamos el

ritmo de decaimiento espontáneo de la transición $5^2P_{3/2} \leftrightarrow 6^2P_{3/2}$. Variamos los anchos de banda de los láseres sobre los rangos reportados para poder ajustar las anchuras lo mejor posible y no consideramos los efectos adicionales de ensanchamiento debido a los aparatos de medición con los que interactúa la luz de fluorescencia.

Resolvimos para el caso estacionario las ecuaciones de movimiento para las componentes de la matriz de densidad, obteniendo una solución a segundo orden en la frecuencia de Rabi de la transición cuadrupolar Ω_{23} para la población del estado $|6^2P_{3/2}\rangle$. Ya que hemos aproximado la frecuencia de Rabi cuadrupolar del orden de 10^{-5} GHz, y que todos los ordenes impares en la expansión en series se anulan, podemos concluir que las correcciones a los resultados obtenidos de la expresión a segundo orden por los demás términos pares son insignificantes y que no es necesario resolver las ecuaciones diferenciales numéricamente. Hemos logrado identificar de manera precisa los efectos en la población del estado $|6^2P_{3/2}\rangle$ por la selección de velocidades del átomo para el caso en el que ambos láseres son perfectamente contrapropagantes y por las convoluciones con sus perfiles espectrales. Encontramos que la selección de velocidades dada por la configuración contrapropagante de los haces reproduce en buen acuerdo las posiciones y el crecimiento con la potencia de los máximos del doblete, mientras que se vuelven más angostos y más profundos en comparación con la población desnuda. Los efectos de convolucionar la solución con los perfiles espectrales de los láseres son reducir la profundidad del mínimo central y aumentar el ensanchamiento de los dobletes. Al combinar ambos efectos logramos reproducir teóricamente las posiciones y comportamiento de los máximos, el ancho de los espectros y mejorar la proporción de máximo con mínimo central.

Debemos mencionar que, a pesar de que las convoluciones reducen drásticamente el ritmo de caída del mínimo central, los dobletes teóricos siguen siendo demasiado profundos en comparación con los experimentales. Esto podría ser resuelto si tomamos en cuenta que los láseres no son completamente contrapropagantes: podríamos reducir la profundidad de los espectros arrojados por nuestro modelo si consideramos todas las componentes de los vectores de propagación de los láseres e integramos sobre la distribución de velocidades tridimensional de Maxwell-Boltzmann.

6.1. Trabajo a futuro

Como mencionamos al inicio de nuestras conclusiones, a pesar de que nuestro modelo ha dado resultados que se aproximan en buen acuerdo con los experimentales, hemos realizado una serie de suposiciones y simplificaciones sobre todos los objetos que participan en el efecto Autler-Townes cuando están presentes transiciones atómicas prohibidas. Como trabajo a futuro, existen aspectos que se deben mejorar y otros que deben ser tomados en cuenta, tales como:

- Incluir en la dinámica del sistema la otra transición dipolar permitida y los niveles de la estructura hiperfina en la transición $6^2P_{3/2} \leftrightarrow 5^2S_{1/2}$, incluyendo sumideros, y resolver las ecuaciones de la matriz de densidad de forma numérica.
- Considerar el caso general en el cual la transición $5^2S_{1/2} \leftrightarrow 5^2P_{3/2}$ no está en resonancia total con la frecuencia del láser de excitación dipolar: $\Delta_{21} \neq 0$. Intentar obtener las funciones de onda del electrón de valencia del átomo de Rubidio y no ignorar el ritmo de decaimiento espontáneo de la transición cuadrupolar $5^2P_{3/2} \leftrightarrow 6^2P_{3/2}$.
- Calcular e implementar las modificaciones a los ritmos de decaimiento espontáneo de las transiciones por efectos colectivos y los efectos de las direcciones, polarizaciones e intensidad de los láseres [28].

Capítulo 7

Apéndices

Apéndice 1. Tablas de datos

Presentamos en las siguientes tablas los datos utilizados en este trabajo para todos los cálculos. Las unidades son aquellas del sistema internacional, MKS, salvo la frecuencia que escogemos como MHz.

Tabla 1. Constantes físicas fundamentales [8].

| | | |
|------------------------------------|--------------|----------------------------------|
| Velocidad de la luz | c | 2.997924×10^8 m/s |
| Permitividad eléctrica en el vacío | ϵ_0 | 8.854187×10^{-12} F/m |
| Constante de Planck reducida | \hbar | 1.054571×10^{-34} J · s |
| Carga del electrón | e | 1.602176×10^{-19} C |
| Constante de Boltzmann | k_B | 1.380650×10^{-23} J/K |
| Radio de Bohr | a_0 | 0.529177×10^{-10} m |

Tabla 2. Propiedades físicas del ^{87}Rb [8].

| | | |
|------------------------|------------------|-------------------------------|
| Número atómico | Z | 37 |
| Número de nucleones | $Z + N$ | 87 |
| Masa atómica | m | 1.443160×10^{-25} Kg |
| Espín nuclear | I | $3/2 \hbar$ |
| Radio atómico empírico | r_{emp} | 265×10^{-12} m |

Tabla 3. Parámetros experimentales [27].

| | | |
|--|----------------|---------------------------------------|
| Área superficial del láser de excitación dipolar | A_c | 3.927×10^{-5} m ² |
| Área superficial del láser de excitación cuadrupolar | A_p | 3.251×10^{-5} m ² |
| Ancho de banda del láser de excitación dipolar | σ_{780} | $2\pi \cdot 6$ MHz |
| Ancho de banda del láser de excitación cuadrupolar | σ_{911} | $2\pi \cdot 7.5$ MHz |
| Temperatura ambiente | T | 293.15 K |

Tabla 4. Propiedades ópticas de las transiciones $5^2S_{1/2} \leftrightarrow 5^2P_{3/2}$, $5^2P_{3/2} \leftrightarrow 6^2P_{3/2}$ y $6^2P_{3/2} \leftrightarrow 5^2S_{1/2}$ [8], [27].

| | | |
|---|--|---------------------------------------|
| Frecuencia de la transición $5^2S_{1/2} \leftrightarrow 5^2P_{3/2}$ | ω_{780} | $2\pi \cdot 384.230484$ THz |
| Decaimiento espontáneo $5^2S_{1/2} \leftrightarrow 5^2P_{3/2}$ | Γ_{21} | $2\pi \cdot 6.065$ MHz |
| Elemento de matriz reducido del momento dipolar eléctrico | $\langle J = 3/2 er J = 1/2 \rangle$ | $4.227ea_0$ |
| Frecuencia de la transición $5^2P_{3/2} \leftrightarrow 6^2P_{3/2}$ | ω_{911} | $2\pi \cdot 329.080634$ THz |
| Decaimiento espontáneo $5^2P_{3/2} \leftrightarrow 6^2P_{3/2}$ | Γ_{32} | ≈ 0 Hz |
| Elemento de matriz reducido del momento cuadrupolar eléctrico | $\langle n = 6 er^2 n = 5 \rangle$ | $22ea_0^2$ |
| Frecuencia de la transición $6^2P_{3/2} \leftrightarrow 5^2S_{1/2}$ | ω_{420} | $2\pi \cdot 713.791566$ THz |
| Decaimiento espontáneo $6^2P_{3/2} \leftrightarrow 5^2S_{1/2}$ | Γ_{31} | $2\pi \cdot 0.575539$ MHz |
| Frecuencia de Rabi de la transición $5^2S_{1/2} \leftrightarrow 5^2P_{3/2}$ | Ω_{12} | $2\pi \cdot 259.077913\sqrt{P_c}$ MHz |
| Frecuencia de Rabi de la transición $5^2P_{3/2} \leftrightarrow 6^2P_{3/2}$ | Ω_{23} | $2\pi \cdot 0.018481\sqrt{P_p}$ MHz |

Apéndice 2. Cálculo de poblaciones

Escribimos las ecuaciones de las componentes de la matriz de densidad para el caso estacionario:

$$\text{eq1} = -I * g_{12} * (\rho_{12} - \rho_{21}) + G_{31} * \rho_{33} + G_{21} * \rho_{22} == 0;$$

$$\text{eq2} = -I * (g_{12} * (\rho_{11} - \rho_{22}) + g_{23} * \rho_{13}) - (2I * \delta c + G_{21}) * \rho_{12}/2 == 0;$$

$$\text{eq3} = -I * (g_{23} * \rho_{12} - g_{12} * \rho_{23}) - (2I * (\delta c + \delta p) + G_{31}) * \rho_{13}/2 == 0;$$

$$\text{eq4} = I * (g_{12} * (\rho_{11} - \rho_{22}) + g_{23} * \rho_{31}) + (2I * \delta c - G_{21}) * \rho_{21}/2 == 0;$$

$$\text{eq5} = I * (g_{12} * (\rho_{12} - \rho_{21}) - g_{23} * (\rho_{32} - \rho_{23})) - G_{21} * \rho_{22} == 0;$$

$$\text{eq6} = -I * (g_{23} * (\rho_{22} - \rho_{33}) - g_{12} * \rho_{13}) - (2I * \delta p + G_{21} + G_{31}) * \rho_{23}/2 == 0;$$

$$\text{eq7} = I * (-g_{12} * \rho_{32} + g_{23} * \rho_{21}) + (2I * (\delta c + \delta p) - G_{31}) * \rho_{31}/2 == 0;$$

$$\text{eq8} = I * (-g_{12} * \rho_{31} + g_{23} * (-\rho_{33} + \rho_{22})) + (2I * \delta p - G_{21} + G_{31}) * \rho_{32}/2 == 0;$$

$$\text{eq9} = -I * g_{23} * (\rho_{23} - \rho_{32}) - G_{31} * \rho_{33} == 0;$$

$$\text{eq10} = \rho_{11} + \rho_{22} + \rho_{33} == 1;$$

`solucion = Solve[{eq1, eq2, eq3, eq4, eq5, eq6, eq7, eq8, eq9, eq10}, {\rho11, \rho12, \rho13, \rho21, \rho22, \rho23, \rho31, \rho32, \rho33}]`

$$\text{h1}[\delta c] := \rho_{11} / \text{solucion}[[1]]$$

$$\text{h2}[\delta c] := \rho_{12} / \text{solucion}[[1]]$$

$$\text{h3}[\delta c] := \rho_{13} / \text{solucion}[[1]]$$

$$\text{h4}[\delta c] := \rho_{22} / \text{solucion}[[1]]$$

$$\text{h5}[\delta c] := \rho_{23} / \text{solucion}[[1]]$$

$$\text{h6}[\delta c] := \rho_{33} / \text{solucion}[[1]]$$

Simplificamos las soluciones:

$$\text{algo1} = \text{Simplify}[\text{h1}[\delta c], \text{Assumptions} \rightarrow \delta c \in \text{Reals} \& \& g_{12} \in \text{Reals} \& \& g_{23} \in \text{Reals} \& \& \delta p \in \text{Reals}];$$

$$\text{algo2} = \text{Simplify}[\text{h2}[\delta c], \text{Assumptions} \rightarrow \delta c \in \text{Reals} \& \& g_{12} \in \text{Reals} \& \& g_{23} \in \text{Reals} \& \& \delta p \in \text{Reals}];$$

$$\text{algo3} = \text{Simplify}[\text{h3}[\delta c], \text{Assumptions} \rightarrow \delta c \in \text{Reals} \& \& g_{12} \in \text{Reals} \& \& g_{23} \in \text{Reals} \& \& \delta p \in \text{Reals}];$$

$$\text{algo4} = \text{Simplify}[\text{h4}[\delta c], \text{Assumptions} \rightarrow \delta c \in \text{Reals} \& \& g_{12} \in \text{Reals} \& \& g_{23} \in \text{Reals} \& \& \delta p \in \text{Reals}];$$

$$\text{algo5} = \text{Simplify}[\text{h5}[\delta c], \text{Assumptions} \rightarrow \delta c \in \text{Reals} \& \& g_{12} \in \text{Reals} \& \& g_{23} \in \text{Reals} \& \& \delta p \in \text{Reals}];$$

$$\text{algo6} = \text{Simplify}[\text{h6}[\delta c], \text{Assumptions} \rightarrow \delta c \in \text{Reals} \& \& g_{12} \in \text{Reals} \& \& g_{23} \in \text{Reals} \& \& \delta p \in \text{Reals}];$$

Sólo nos interesa la población del estado 6P 3/2. Aproximamos las soluciones en series de potencia del acoplamiento cuadrupolar, g_{23} , para los primeros tres órdenes:

$\rho_{33\text{aprox1}} = \text{Series}[\text{algo6}, \{\mathbf{g23}, 0, 1\}];$

$\rho_{33\text{aprox2}} = \text{Series}[\text{algo6}, \{\mathbf{g23}, 0, 2\}];$

$\rho_{33\text{aprox3}} = \text{Series}[\text{algo6}, \{\mathbf{g23}, 0, 3\}];$

Notamos que los ordenes impares son 0, por lo que el primer término más significativo es el de segundo orden.

$\text{cosa1} = \text{Simplify}[\rho_{33\text{aprox1}}]$

$O[\mathbf{g23}]^2$

$\text{cosa2} = \text{Simplify}[\rho_{33\text{aprox2}}]$

$$-((16(\mathbf{g12}^2(4\mathbf{g12}^2(\mathbf{G21}+\mathbf{G31})+\mathbf{G31}(\mathbf{G21}+2i\delta\mathbf{c})(\mathbf{G21}+\mathbf{G31}+2i\delta\mathbf{p})))\mathbf{g23}^2)/(\mathbf{G31}(8\mathbf{g12}^2+\mathbf{G21}^2+4\delta\mathbf{c}^2)(16\mathbf{g12}^4+8\mathbf{g12}^2(\mathbf{G21}\mathbf{G31}+2i(\mathbf{G31}+2i\delta\mathbf{p})(\delta\mathbf{c}+\delta\mathbf{p}))+(\mathbf{G21}^2-(\mathbf{G31}+2i\delta\mathbf{p})^2)(\mathbf{G31}^2+4(\delta\mathbf{c}+\delta\mathbf{p})^2)))))+O[\mathbf{g23}]^3$$

$\text{cosa3} = \text{Simplify}[\rho_{33\text{aprox3}}] - \text{cosa2}$

$O[\mathbf{g23}]^3$

Apéndice 3. Cálculo de las propiedades de la población $\rho_{33}^{(2)}$

Utilizamos la paquetería SymPy de cálculos simbólicos para Julia para deducir las propiedades del doblete Autler-Townes por fluorescencia

In [1]: `using SymPy`

Declaramos las variables simbólicas

```
In [2]: Δ21 = Sym("\Delta21")
        Δ32 = Sym("\Delta32")
        Γ31 = Sym("\Gamma31")
        Γ21 = Sym("\Gamma21")
        g12 = Sym("g12")
        g23 = Sym("g23")
```

La población del estado $|6^2P_{3/2}\rangle$ a segundo orden en la frecuencia de Rabi cuadrupolar, $\rho_{33}^{(2)}$, es:

$$\rho_{33}^{(2)} = \frac{16\Omega_{23}^2\Omega_{12}^2[\Gamma_{31}[(\Gamma_{21}+\Gamma_{31})^2+4\Delta_{32}^2]+4\Omega_{12}^2(\Gamma_{21}+\Gamma_{31})]}{\Gamma_{31}[\Gamma_{21}^2+4\Delta_{21}^2+8\Omega_{12}^2][(\Gamma_{21}+\Gamma_{31})^2+4\Delta_{23}^2][\Gamma_{31}^2+4(\Delta_{21}+\Delta_{32})^2]+8\Omega_{12}^2[\Gamma_{31}(\Gamma_{31}+\Gamma_{21})-4\Delta_{32}(\Delta_{32}+\Delta_{21})]+16\Omega_{12}^4}$$

```
In [3]: ρ(Δ21,Δ32,g12,g23) = ((16g23.^2).*(g12.^2).*(Γ31.*((Γ31.+Γ21).^2.+4Δ32.^2)
.+4g12.^2.*(Γ31+Γ21)))
./ (Γ31.*(Γ21.^2.+4Δ21.^2.+8g12.^2).*((Γ31.+Γ21).^2.+4Δ32.^2).*(4(Δ32.+Δ21).^2.+Γ31.^2)
.+ 8g12.^2.*(Γ31.*(Γ31.+Γ21).-4Δ32.*(Δ32.+Δ21)).+ 16g12.^4))
```

Out[3]: ρ (generic function with 1 method)

Fijando $\Delta_{21} = 0$, derivamos con respecto al desentonomamiento de la transición cuadrupolar, Δ_{32} , y obtenemos las posiciones de los máximos y mínimos del doblete:

```
In [5]: derivada(Δ21,Δ32,g12,g23) = diff(ρ(Δ21,Δ32,g12,g23),Δ32)
```

Out[5]: derivada (generic function with 1 method)

Igualando la derivada a 0 y resolviendola, la ecuación resultante es un polinomio de quinto orden para Δ_{32} de la forma $\Delta_{32}(a_4\Delta_{32}^4 + a_2\Delta_{32}^2 + a_0) = 0$. Resolviendo la ecuación obtenemos las soluciones:

```
In [7]: solve(subs(derivada(Δ21,Δ32,g12,g23),Δ21,0),Δ32)
```

Out [7]:

$$\left[\begin{array}{c} 0 \\ -\sqrt{\frac{g_{12}(\Gamma_{21}+2\Gamma_{31})\sqrt{\Gamma_{21}\Gamma_{31}+\Gamma_{31}^2+4g_{12}^2}}{2\Gamma_{31}} - \frac{(\Gamma_{21}+\Gamma_{31})(\Gamma_{21}\Gamma_{31}+\Gamma_{31}^2+4g_{12}^2)}{4\Gamma_{31}}} \\ \sqrt{\frac{g_{12}(\Gamma_{21}+2\Gamma_{31})\sqrt{\Gamma_{21}\Gamma_{31}+\Gamma_{31}^2+4g_{12}^2}}{2\Gamma_{31}} - \frac{(\Gamma_{21}+\Gamma_{31})(\Gamma_{21}\Gamma_{31}+\Gamma_{31}^2+4g_{12}^2)}{4\Gamma_{31}}} \\ -\sqrt{\frac{g_{12}(\Gamma_{21}+2\Gamma_{31})\sqrt{\Gamma_{21}\Gamma_{31}+\Gamma_{31}^2+4g_{12}^2}}{2\Gamma_{31}} - \frac{(\Gamma_{21}+\Gamma_{31})(\Gamma_{21}\Gamma_{31}+\Gamma_{31}^2+4g_{12}^2)}{4\Gamma_{31}}} \\ \sqrt{\frac{g_{12}(\Gamma_{21}+2\Gamma_{31})\sqrt{\Gamma_{21}\Gamma_{31}+\Gamma_{31}^2+4g_{12}^2}}{2\Gamma_{31}} - \frac{(\Gamma_{21}+\Gamma_{31})(\Gamma_{21}\Gamma_{31}+\Gamma_{31}^2+4g_{12}^2)}{4\Gamma_{31}}} \end{array} \right]$$

Las segunda y tercera entradas son puramente imaginarias pues todas las variables son reales y positivas. A partir de este resultado calculamos la frecuencia de Rabi dipolar crítica a partir de la cual se forma el doblete.

```
In [8]: cosa1 = solve(subs(derivada(Δ21,Δ32,g12,g23),Δ21,0),Δ32);
```

```
In [38]: cosa2 = cosa1.^2
```

Out [38]:

$$\left[\begin{array}{c} 0 \\ -\frac{g_{12}(\Gamma_{21}+2\Gamma_{31})\sqrt{\Gamma_{21}\Gamma_{31}+\Gamma_{31}^2+4g_{12}^2}}{2\Gamma_{31}} - \frac{(\Gamma_{21}+\Gamma_{31})(\Gamma_{21}\Gamma_{31}+\Gamma_{31}^2+4g_{12}^2)}{4\Gamma_{31}} \\ -\frac{g_{12}(\Gamma_{21}+2\Gamma_{31})\sqrt{\Gamma_{21}\Gamma_{31}+\Gamma_{31}^2+4g_{12}^2}}{2\Gamma_{31}} - \frac{(\Gamma_{21}+\Gamma_{31})(\Gamma_{21}\Gamma_{31}+\Gamma_{31}^2+4g_{12}^2)}{4\Gamma_{31}} \\ \frac{g_{12}(\Gamma_{21}+2\Gamma_{31})\sqrt{\Gamma_{21}\Gamma_{31}+\Gamma_{31}^2+4g_{12}^2}}{2\Gamma_{31}} - \frac{(\Gamma_{21}+\Gamma_{31})(\Gamma_{21}\Gamma_{31}+\Gamma_{31}^2+4g_{12}^2)}{4\Gamma_{31}} \\ \frac{g_{12}(\Gamma_{21}+2\Gamma_{31})\sqrt{\Gamma_{21}\Gamma_{31}+\Gamma_{31}^2+4g_{12}^2}}{2\Gamma_{31}} - \frac{(\Gamma_{21}+\Gamma_{31})(\Gamma_{21}\Gamma_{31}+\Gamma_{31}^2+4g_{12}^2)}{4\Gamma_{31}} \end{array} \right]$$

In [13]: `cosa2 = solve(cosa1[5]^2,g12)`

Out [13]:

$$\left[\begin{array}{c} -\sqrt{\frac{-\Gamma_{21}\Gamma_{31} - \Gamma_{31}^2}{4}} \\ \sqrt{\frac{-\Gamma_{21}\Gamma_{31} - \Gamma_{31}^2}{4}} \\ -\sqrt{\frac{\Gamma_{21}^3}{8\Gamma_{21}+12\Gamma_{31}} + \frac{3\Gamma_{21}^2\Gamma_{31}}{8\Gamma_{21}+12\Gamma_{31}} + \frac{3\Gamma_{21}\Gamma_{31}^2}{8\Gamma_{21}+12\Gamma_{31}} + \frac{\Gamma_{31}^3}{8\Gamma_{21}+12\Gamma_{31}}} \\ \sqrt{\frac{\Gamma_{21}^3}{8\Gamma_{21}+12\Gamma_{31}} + \frac{3\Gamma_{21}^2\Gamma_{31}}{8\Gamma_{21}+12\Gamma_{31}} + \frac{3\Gamma_{21}\Gamma_{31}^2}{8\Gamma_{21}+12\Gamma_{31}} + \frac{\Gamma_{31}^3}{8\Gamma_{21}+12\Gamma_{31}}} \end{array} \right]$$

La frecuencia de Rabi crítica es:

In [14]: `valcrit = factor(simplify(cosa2[4]))`

Out [14]:

$$\frac{\sqrt{\frac{(\Gamma_{21}+\Gamma_{31})^3}{2\Gamma_{21}+3\Gamma_{31}}}}{2}$$

La posición de los máximos en términos del desentonamiento Δ_{32} es:

In [99]: `subs(cosa1[5],g12,valcrit)`

Out [99]:

$$\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{(\Gamma_{21}+\Gamma_{31})^3}{2\Gamma_{21}+3\Gamma_{31}}} (\Gamma_{21} + 2\Gamma_{31}) \sqrt{\Gamma_{21}\Gamma_{31} + \Gamma_{31}^2 + \frac{(\Gamma_{21}+\Gamma_{31})^3}{2\Gamma_{21}+3\Gamma_{31}}} - (\Gamma_{21} + \Gamma_{31}) \left(\Gamma_{21}\Gamma_{31} + \Gamma_{31}^2 + \frac{(\Gamma_{21}+\Gamma_{31})^3}{2\Gamma_{21}+3\Gamma_{31}} \right)}{4\Gamma_{31}}}$$

Lo substituímos en la expresión de la población y calculamos el límite en el que la frecuencia de Rabi dipolar es muy grande

In [9]: `ρen0 = subs(ρ(Δ21,Δ32,g12,g23),Δ21,0);`

In [102]: `limit(ρen0,g12,oo)`

Out [102]:

$$\frac{2g_{23}^2}{\Gamma_{31}(2\Gamma_{31} + \Gamma_{21})}$$

Bibliografía

- [1] Autler, S.H. , Townes, C.H. , (1955), *Stark Effect in Rapidly Varying Fields*, Phys. Rev. 100, 703.
- [2] Sillanpää, Mika A. and Li, Jian and Cicak, Katarina and Altomare, Fabio and Park, Jae I. and Simmonds, Raymond W. and Paraoanu, G. S. and Hakonen, Pertti J., (2009), *Autler-Townes Effect in a Superconducting Three-Level System*, Phys. Rev. Lett. 103, 193601.
- [3] Cohen-Tannoudji, C. (1996), *The Autler-Townes Revisited*, En: Chiao R.Y. (eds) *Amazing Light*. Springer New York, NY.
- [4] Griffiths, D. J. ,(2005), *Introduction to Quantum Mechanics*, 2da Ed, Pearson Education, Inc
- [5] Bransden, B . H. , Joachin, C. J. , (1982),*Physics of Atoms and Molecules*,1era Ed, Longman Publishing Group, p.290-293.
- [6] Sakurai, J. , Napolitano, J. , (2013), *Modern Quantum Mechanics*, 2da Ed, Pearson New International Edition.
- [7] Cowan, D. , (2001), *The Theory of Atomic Structure and Spectra*, Los Alamos series in basic and applied sciences, 1era ed, University of California.
- [8] Steck,Daniel A. , *Rubidium 87 D Line Data*, disponible en línea en <http://steck.us/alkalidata> (revision 2.1.5, 13 de Enero de 2015).
- [9] Woodgate, G.(1983), *Elementary Atomic Structure*,1era Ed, Oxford University Press USA.
- [10] Jackson, D, (1962), *Classical Electrodynamics*, 1era Ed, John Wiley & Sons, Inc.
- [11] Tong, D. (2005), *Classical Dynamics - University of Cambridge Part II Mathematical Tripos*, disponible en línea en <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/dynamics.html>
- [12] Ingolf V. Hertel, Shultz, Claus P., (2015), *Atoms, Molecules and Optical Physics 1. Atoms and Spectroscopy*, 1era Ed, Springer Verlag.
- [13] Slater, J. C. (1964). *Atomic Radii in Crystals*. Journal of Chemical Physics. 41 (10): 3199–3205. Bibcode:1964JChPh..41.3199S. doi:10.1063/1.1725697
- [14] Griffiths, D. J. , (2010), *Introduction to Electrodynamics*, 3da Ed, Pearson Education, Inc.
- [15] Corney, A, (1977), *Atomic and Laser Spectroscopy*, 1era ed, Oxford Univerity Press.
- [16] Weisstein, Eric W. "Wigner-Eckart Theorem."From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/Wigner-EckartTheorem.html>
- [17] Weisstein, Eric W. "Wigner 3j-Symbol."From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/Wigner3j-Symbol.html>
- [18] Gordy, W. , Cook, Robert L., (1984), *Microwave Molecular Spectra*, 2da Ed, Wiley and Sons.
- [19] Jaynes E.T., Cummings F.W. , (1963), *Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser*. Proc. IEEE. 51 (1): 89–109
- [20] Lambropoulos, P, (2007), *Fundamentals of Quantum Optics and Quantum Information*, 1era Ed, Springer.
- [21] Frasca M., (2003), *A modern review of the two-level approximation*, disponible en línea a través de [arXiv:quant-ph/0209056v2](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0209056v2)

- [22] Yoo, H.-I, Eberly, J.H., (1985), *Dynamical theory of an atom with two or three levels interacting with quantized cavity fields*, Physics Reports (Review Section of Physics Letters) 118, No. 5, 239-337.
- [23] Aspect A., Imbert, C., Roger G., (1980), *Absolute measurement of an atomic cascade rate using a two photon coincidence technique. Application to the $4p^{21}S_0 \rightarrow 4s4p^1P_1 \rightarrow 4s^21S_0$ cascade of calcium excited by a two photon absorption*, Optics Communications, Vol 34.
- [24] Wineland D.J. et al., (1998), *Deterministic Entanglement of Two Trapped Ions*, Phys.Rev.Lett. 81, 3631.
- [25] Fleischhauer, M. , Imamoglu, A. , Marangos, J. , (2005), *Electromagnetically induced transparency: Optics in coherent media*, Rev.Mod.Phys. 77, 663
- [26] Shabert A., Keil R., Toschek P.E.,(1975), *Dynamic stark effect of an optical line observed by cross-saturated absorption*, Appl. Phys. 6, 181.
- [27] Ponciano Ojeda, F. (2017), *Estudio de las transiciones prohibidas $5P_{3/2} \rightarrow 6P_J$ por medio de espectroscopía óptica de doble resonancia en átomos de Rubidio*, (Tesis de Maestría en Ciencias Físicas), UNAM, México.
- [28] Cohen-Tannoudji, C. , Dupont-Roc, J. , Grynberg, G. , (2004), *Atom-Photon Interactions: Basic Processes and Applications*, 1era Ed, Wiley-VCH Verlag GmbH & Co.
- [29] Mojica, C. (2017), *Espectroscopía libre de Doppler en el sistema en escalera $5S \rightarrow 5P \rightarrow 5D$ en rubidio atómico: efectos de la polarización de la luz en la transición cuadrupolar eléctrica $5P_{3/2} \rightarrow 6P_{3/2}$* , (Tesis de Doctorado en Ciencias Físicas), UNAM, México.
- [30] Hairer, E, Wanner, G , (1996), *Solving ordinary differential equations II: Stiff and differential-algebraic problems* 2da Ed, Berlin: Springer-Verlag
- [31] <https://github.com/JuliaPy/SymPy.jl>
- [32] Thorne, A.P, (1988), *Spectrophysics*, 2da Ed, Chapman and Hall.