



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

---

FACULTAD DE CIENCIAS  
GRÁFICAS DE  
TRANSFORMACIÓN  
ARISTA-CORTE

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
**matemático**

PRESENTA:

**Juan Fernando Peláez Menaldo**

DIRECTORA DE TESIS:

Dra. María del Rocío Sánchez López  
Ciudad de México

Fecha: Abril 2019





Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



## Hoja de datos del jurado

## 1. Datos del alumno

Apellido paterno	Peláez
Apellido materno	Menaldo
Nombre(s)	Juan Fernando
Telefono	5528969012
Universidad	Universidad Nacional Autonoma de México
Carrera	Matemáticas
Número de cuenta	409062506

## 2. Datos del tutor

Grado	Dra.
Nombre(s)	María del Rocío
Apellido paterno	Sánchez
Apellido materno	López

## 3. Datos del sinodal 1

Grado	Dra.
Nombre(s)	Hortensia
Apellido paterno	Galeana
Apellido materno	Sánchez

## 4. Datos del sinodal 2

Grado	Dr.
Nombre(s)	Ricardo
Apellido paterno	Strausz
Apellido materno	Santiago

## 5. Datos del sinodal 3

Grado	Mat.
Nombre(s)	Laura
Apellido paterno	Pastrana
Apellido materno	Ramírez

## 6. Datos del sinodal 4

Grado	M. en C.
Nombre(s)	Loiret Alejandría
Apellido paterno	Dosal
Apellido materno	Trujillo

## VI

### 7. Datos del trabajo escrito

Título	Gráficas de transformación arista-corte
Número de páginas	115 p
Año	2019

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>3</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>7</b>
1.1. Definiciones básicas . . . . .	7
1.2. Caminos y conexidad. . . . .	12
1.3. Árboles . . . . .	17
1.4. Bloques . . . . .	21
1.5. Gráficas asociadas . . . . .	27
<b>2. Gráfica de aristas y vértices de corte.</b>	<b>47</b>
<b>3. Conexidad de <math>G^{xy}</math></b>	<b>55</b>
3.1. Conexidad de $G^{++}$ . . . . .	55
3.2. Conexidad de $G^{+-}$ . . . . .	58
3.3. Conexidad de $G^{-+}$ . . . . .	65
3.4. Conexidad de $G^{--}$ . . . . .	68
<b>4. Iteraciones de <math>G^{xy}</math></b>	<b>73</b>
4.1. Isomorfismo de $G^{++}$ con $G$ . . . . .	75
4.2. Isomorfismo de $G^{(+-)^n}$ con $G$ . . . . .	76
4.3. Isomorfismo de $G^{(-+)^n}$ con $G$ . . . . .	81
4.4. Isomorfismo de $G^{(--)^n}$ con $G$ . . . . .	95
<b>Conclusiones</b>	<b>111</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>113</b>



# Introducción

Las gráficas asociadas son gráficas que surgen a partir de una gráfica  $G$  como son: la gráfica complemento, la gráfica de líneas, la gráfica de bloques, la gráfica de vértices de corte, la gráfica de bloques y vértices de corte, la gráfica total, por mencionar algunas.

En particular, la gráfica total de una gráfica  $G$ , denotada por  $T(G)$ , es la gráfica que tiene como vértices a  $V(G) \cup E(G)$  y dos vértices  $x$  y  $y$  en  $T(G)$  son adyacentes en  $T(G)$  si y solo si:

- $\{x, y\} \subseteq V(G)$  y  $x$  y  $y$  son adyacentes en  $G$ .
- $\{x, y\} \subseteq E(G)$  y  $x$  y  $y$  son adyacentes en  $G$ .
- $\{x\} \subseteq V(G)$ ,  $\{y\} \subseteq E(G)$  y  $x$  y  $y$  son incidentes en  $G$ .

Wu y Meng en "Basic properties of total transformation graphs" generalizan la definición de gráfica total e introducen la gráfica de transformación total (total transformation graph), denotada por  $G^{xyz}$ , donde  $x$ ,  $y$  y  $z$  toman valores del conjunto  $\{+, -\}$ , la cual se define como:

$V(G^{xyz}) = V(G) \cup E(G)$  y dos vértices  $x$  y  $y$  en  $G^{xyz}$  son adyacentes en  $G^{xyz}$  si y sólo si:

- $\{x, y\} \subseteq V(G)$ ,  $x = +$  y  $x$  y  $y$  son adyacentes en  $G$ .
- $\{x, y\} \subseteq V(G)$ ,  $x = -$  y  $x$  y  $y$  no son adyacentes en  $G$ .
- $\{x, y\} \subseteq E(G)$ ,  $y = +$  y  $x$  y  $y$  son adyacentes en  $G$ .
- $\{x, y\} \subseteq E(G)$ ,  $y = -$  y  $x$  y  $y$  no son adyacentes en  $G$ .
- $\{x\} \subseteq V(G)$ ,  $\{y\} \subseteq E(G)$ ,  $z = +$  y  $x$  y  $y$  son incidentes en  $G$ .
- $\{x\} \subseteq V(G)$ ,  $\{y\} \subseteq E(G)$ ,  $z = -$  y  $x$  y  $y$  no son incidentes en  $G$ .

Note que si  $G^{xyz} = G^{+++}$ , entonces la gráfica de transformación total es la gráfica  $T(G)$ .

Por otro lado B. Basavanadoud, H. P. Patil, Jaishri B. Veeragoudar en “On the block-transformation graphs, graph-equations and diameters” introducen la definición de la gráfica transformación de bloques (block-transformation graph), denotada por  $G^{\alpha\beta\gamma}$ , donde  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  toman valores del conjunto  $\{0, 1\}$ , la cual se define como sigue:

$V(G^{\alpha\beta\gamma}) = V(G) \cup U(G)$ , donde  $U(G)$  es el conjunto de bloques de  $G$ , y para cada  $x$  y  $y$  en  $V(G^{\alpha\beta\gamma})$  se tiene que  $(x, y) \in E(G^{\alpha\beta\gamma})$  si ocurre alguno de los siguientes casos:

- $\{x, y\} \subseteq V(G)$ ,  $\alpha = 1$  y  $x$  y  $y$  son adyacentes en  $G$ .
- $\{x, y\} \subseteq V(G)$ ,  $\alpha = 0$  y  $x$  y  $y$  no son adyacentes en  $G$ .
- $\{x, y\} \subseteq U(G)$ ,  $\beta = 1$  y  $x$  y  $y$  son bloques que comparten vértices en  $G$ .
- $\{x, y\} \subseteq U(G)$ ,  $\beta = 0$  y  $x$  y  $y$  son bloques que no comparten vértices en  $G$ .
- $\{x\} \subseteq V(G)$  y  $\{y\} \subseteq U(G)$ ,  $\gamma = 0$  y  $x$  no es un vértice del bloque  $y$  en  $G$ .
- $\{x\} \subseteq V(G)$  y  $\{y\} \subseteq U(G)$ ,  $\gamma = 1$  y  $x$  es un vértice del bloque  $y$  en  $G$ .

B. Basavanagoud y Veena R. Desai, motivados por las dos construcciones anteriores, en “On the line-cut transformation graphs  $G^{xy}$ ” introdujeron una nueva gráfica asociada, llamada la gráfica de aristas y vértices de corte (line-cut transformation graph), denotado por  $G^{xy}$ , la cual tiene como vértices al conjunto de aristas  $E(G)$  y el conjunto de vértices de corte de  $G$   $W(G)$ . En el trabajo de tesis veremos propiedades de esta gráfica como son: el orden, el tamaño, su relación con otras gráficas, la conexidad de  $G^{xy}$ , las iteraciones de  $G^{xy}$ , el isomorfismo entre  $G$  y la gráfica  $G^{xy}$ .

En el capítulo 1 se dan algunas definiciones básicas de la teoría de gráficas; así como algunos resultados sobre árboles, conexidad, bloques, vértices de corte. También veremos algunas propiedades sobre la gráficas de líneas y la gráfica de saltos.

En el capítulo 2 se da la definición de la gráfica de aristas y vértices de corte y se ven algunas propiedades estructurales de esta gráfica. Demostramos que la gráfica de líneas  $L(G)$  de  $G$  es una subgráfica inducida de  $G^{++}$  y de  $G^{+-}$ , mientras que por otro lado la gráfica de saltos  $J(G)$  de  $G$  es una

subgráfica inducida de  $G^{-+}$  y  $G^{--}$ . Por último se deduce el orden y tamaño de  $G^{xy}$ .

En el capítulo 3 se ven las condiciones necesarias y suficientes para que se cumpla la conexidad de  $G^{xy}$  a partir de la conexidad de  $G$ .

Finalmente en el capítulo 4 veremos como se definen las iteraciones de  $G^{xy}$ . En la sección 1 de este capítulo estudiaremos la relación de isomorfismo que existe entre la gráfica  $G$  y la gráfica  $G^{++}$ . En la sección 2 de este capítulo veremos las condiciones para que la iteración  $G^{(+)^n}$  sea isomorfa con  $G$ . En la sección 3 de este capítulo veremos las condiciones para que la iteración  $G^{(-)^n}$  sea isomorfa con  $G$ , y en la sección 4 de este capítulo veremos las condiciones para que la iteración  $G^{(--)^n}$  sea isomorfa con  $G$ .



# Capítulo 1

## Preliminares

En este capítulo se dan algunas definiciones básicas de la teoría de gráficas; así como algunos resultados sobre árboles, conexidad, bloques. Caracterizaremos a los vértices de corte, veremos algunas propiedades sobre la gráficas de líneas y la gráfica de saltos.

### 1.1. Definiciones básicas

**Definición 1.1.1.** Una **gráfica**  $G$  consiste de un conjunto finito no vacío de objetos, llamados vértices, y de un conjunto de parejas no ordenadas de distintos vértices, llamadas aristas.

Denotamos por  $V(G)$  al conjunto de vértices y por  $E(G)$  al conjunto de aristas de  $G$ .

Consideremos el siguiente ejemplo:

Sea  $G$  la gráfica con conjunto de vértices  $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  y conjunto de aristas  $\{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_1), (v_4, v_5), (v_5, v_2)\}$ . A la gráfica  $G$  la podemos representar geoméricamente en el plano como sigue: a cada vértice  $v_1, v_2, v_3, v_4$  y  $v_5$  le asociamos un punto en el plano y a cada aristas  $(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_1), (v_4, v_5)$  y  $(v_5, v_2)$  le asociamos una línea que une a los dos puntos correspondientes a los vértices que definen la arista. En la figura 1.1 se muestra la representación geométrica de la gráfica anteriormente dada.

Una gráfica se dice que es **trivial** si tiene un solo vértice. Sea  $(u, v)$  una arista de  $G$ , entonces decimos que los vértices  $u$  y  $v$  son **extremos** de la arista  $(u, v)$ .

**Definición 1.1.2.** Se dice que dos vértices de una gráfica son **adyacentes** si son extremos de una misma arista.

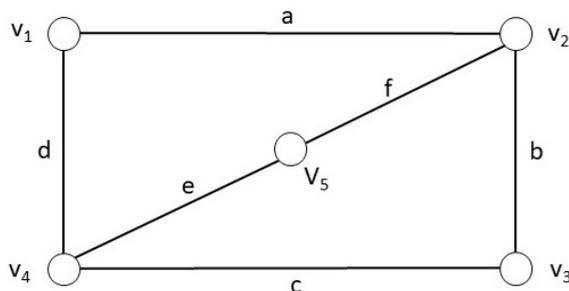


Figura 1.1: Ejemplo de una gráfica

**Definición 1.1.3.** Se dice que dos aristas son **adyacentes** si tienen un extremo en común.

**Definición 1.1.4.** Se dice que un vértice y una arista son **incidentes** si el vértice es extremo de la arista.

**Definición 1.1.5.** El **grado** de un vértice  $v$  es el número de aristas que inciden en él, denotado por  $\delta(v)$ .

**Definición 1.1.6.** El **grado máximo** de una gráfica  $G$ , denotado por  $\Delta(G)$ , y el **grado mínimo**, denotado por  $\delta(G)$ , se definen como  $\max\{\delta(v) : v \in V(G)\}$  y  $\min\{\delta(v) : v \in V(G)\}$ , respectivamente.

**Proposición 1.1.7.** Si  $G$  es una gráfica con conjunto de vértices  $\{v_1, \dots, v_p\}$  y  $q$  aristas, entonces  $\sum_{i=1}^p \delta(v_i) = 2q$ .

*Demostración.* Para cada arista  $e$  en  $E(G)$  consideremos el conjunto de incidencias  $I_e = \{(v, e) \in V(G) \times E(G) : v \text{ es extremo de } e\}$ . Note que por cada arista  $e = (v_i, v_j)$  en  $E(G)$  tenemos que  $\{(v_i, e), (v_j, e)\} = I_e$  y además para cada par de aristas distintas  $a$  y  $b$  de  $G$  se tiene que  $I_a \cap I_b = \emptyset$ . Esto implica que  $\sum_{e \in E(G)} |I_e| = 2q$ . Por otro lado como el grado de un vértice  $v$  es el

número de aristas que inciden en él, entonces si  $e_v^1, \dots, e_v^{\delta(v)}$  son aristas que inciden en  $v$  tenemos que  $\{(v, e_v^1), \dots, (v, e_v^{\delta(v)})\} \subseteq \bigcup_{e \in E(G)} I_e$ , lo cual implica

que  $\bigcup_{i=1}^p \{(v_i, e_{v_i}^1), \dots, (v_i, e_{v_i}^{\delta(v_i)})\} = \bigcup_{e \in E(G)} I_e$ . Así,  $\sum_{e \in E(G)} |I_e| = \sum_{i=1}^p \delta(v_i)$ , por de-

finición del conjunto de incidencias. Por lo tanto,  $2q = \sum_{e \in E(G)} |I_e| = \sum_{i=1}^p \delta(v_i)$ ,

lo que implica que  $\sum_{i=1}^p \delta(v_i) = 2q$ .  $\square$

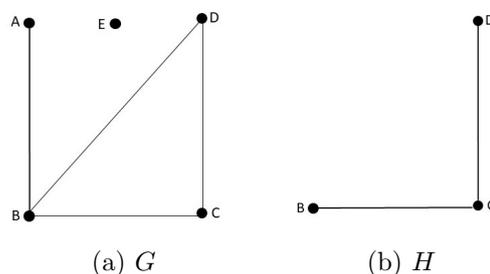


Figura 1.2: Gráfica  $G$  y subgráfica de  $G$  del ejemplo 1.1.15

**Definición 1.1.8.** La **vecindad** de un vértice  $v$ , denotado como  $N(v)$ , está dada por todos los vértices adyacentes a  $v$ ; es decir,  $N(v) = \{y \in V(G) : (v, y) \in E(G)\}$ .

Note que la definición de vecindad implica que el grado del vértice  $v$  es el número de vecinos que tiene; es decir,  $\delta(v) = |N(v)|$ .

**Definición 1.1.9.** Un **vértice aislado** es un vértice con grado 0. Una **hoja** es un vértice con grado 1.

**Definición 1.1.10.** Decimos que una arista es **final** si uno de sus extremos es una hoja.

**Definición 1.1.11.** El **tamaño** de una gráfica  $G$  es el número de aristas de  $G$ .

**Definición 1.1.12.** El **orden** de una gráfica  $G$  es el número de vértices de  $G$ .

**Ejemplo 1.1.13.** Sea  $G$  la gráfica con  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  y  $E(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$  como lo indica la figura 1.1. Entonces,  $\Delta(G) = 3$ ,  $\delta(G) = 2$ , el tamaño de  $G$  es 6 y el orden de  $G$  es 5. La vecindad de  $v_1$  es  $N(v_1) = \{v_2, v_4\}$ .

**Definición 1.1.14.** Una gráfica  $H$  es una **subgráfica** de  $G$ , denotado como  $H \subseteq G$ , si  $V(H) \subseteq V(G)$  y  $E(H) \subseteq E(G)$ .

**Ejemplo 1.1.15.** En la figura 1.2 exhibimos a una gráfica  $G$  y a una subgráfica  $H$  de  $G$ . Además tenemos que,  $E$  es un vértice aislado,  $A$  es una hoja y la arista  $(A, B)$  es final, todo esto en  $G$ .

**Definición 1.1.16.** Una gráfica  $H$  es una **subgráfica inducida** de  $G$  si  $V(H) \subseteq V(G)$  y para los vértices  $v$  y  $w$  en  $V(H)$  se tiene que  $(v, w) \in E(G)$  si y sólo si  $(v, w) \in E(H)$ .

**Definición 1.1.17.** Sean  $G$  una gráfica y  $S$  un subconjunto de  $V(G)$ . La subgráfica de  $G$  inducida por  $S$ , denotado por  $G[S]$ , es la gráfica tal que  $V(G[S]) = S$  y  $E(G[S]) = \{(v, w) \in E(G) : \{v, w\} \subseteq S\}$ .

**Ejemplo 1.1.18.** En la figura 1.3 exhibimos una subgráfica inducida  $H$  de una gráfica  $G$ .

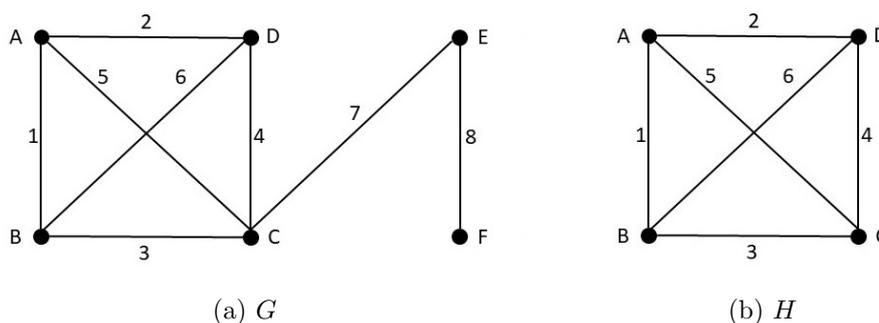


Figura 1.3: Gráfica  $G$  y  $H$  una subgráfica inducida de  $G$

**Definición 1.1.19.** Sean  $G$  una gráfica y  $\beta$  un subconjunto de  $E(G)$ . La subgráfica de  $G$  inducida por el conjunto de aristas  $\beta$ , denotado por  $G[\beta]$ , es la gráfica tal que  $V(G[\beta]) = \{w \in V(G) : w \text{ es incidente con alguna arista de } \beta\}$  y  $E(G[\beta]) = \beta$ .

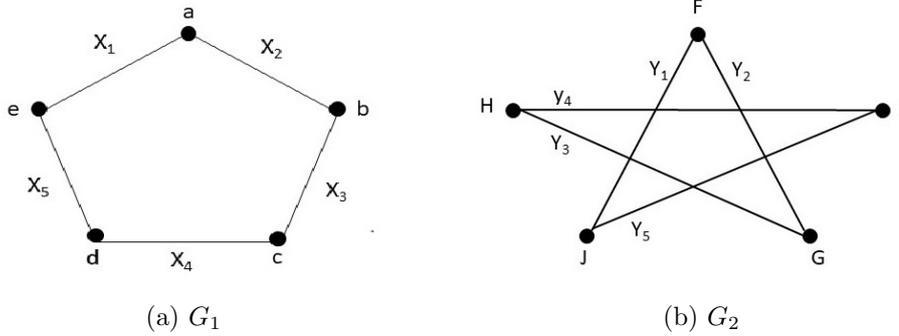
**Notación 1.1.20.** Sean  $G$  una gráfica y  $\{u, v\}$  un subconjunto de vértices distintos de  $V(G)$  tal que  $(u, v) \notin E(G)$ . Denotamos por  $G + (u, v)$  a la gráfica que tiene como vértices a  $V(G)$  y como aristas a  $E(G) \cup \{(u, v)\}$ .

**Notación 1.1.21.** Sean  $G$  una gráfica y  $(u, v)$  una arista que pertenece a  $E(G)$ . Denotamos por  $G - (u, v)$  a la gráfica que tiene como vértices a  $V(G)$  y como aristas a  $E(G) - \{(u, v)\}$ .

**Notación 1.1.22.** Sean  $G$  una gráfica y  $c$  un vértice que pertenece a  $V(G)$ . Denotamos como  $G - c$  a la gráfica que tiene como vértices a  $V(G) - \{c\}$  y como aristas a  $E(G) - \{(c, x) \in E(G) : x \in V(G)\}$ .

**Definición 1.1.23.** Sean  $G_1$  y  $G_2$  gráficas.

1. La unión de las gráficas  $G_1$  y  $G_2$ , denotado por  $G_1 \cup G_2$ , es la gráfica tal que  $V(G_1 \cup G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$  y  $E(G_1 \cup G_2) = E(G_1) \cup E(G_2)$ .
2. La intersección de las gráficas  $G_1$  y  $G_2$ , denotado por  $G_1 \cap G_2$ , es la gráfica tal que  $V(G_1 \cap G_2) = V(G_1) \cap V(G_2)$  y  $E(G_1 \cap G_2) = E(G_1) \cap E(G_2)$ . En este caso  $G_1$  y  $G_2$  deben tener al menos un vértice en común.

Figura 1.4: Gráfica  $G_1$  y  $G_2$  del ejemplo 1.1.26

**Definición 1.1.24.** Sean  $G$  y  $H$  dos gráficas. Decimos que  $G$  es igual a  $H$ , denotado por  $G = H$ , si  $V(G) = V(H)$  y  $E(G) = E(H)$ .

**Definición 1.1.25.** Dos gráficas  $G$  y  $H$  son **isomorfas**, denotado por  $G \cong H$ , si existe una función biyectiva  $f : V(G) \rightarrow V(H)$  tal que  $(u, v) \in E(G)$  si y solo si  $(f(u), f(v)) \in E(H)$ .

**Ejemplo 1.1.26.** Sean  $G_1$  y  $G_2$  dos gráficas como indica la figura 1.4. Entonces un isomorfismo entre  $G_1$  y  $G_2$  está dado por :

$$\begin{aligned} f(a) &= F \\ f(b) &= G \\ f(c) &= H \\ f(d) &= I \\ f(e) &= J \end{aligned}$$

**Proposición 1.1.27.** Sean  $G$ ,  $H$  y  $J$  tres gráficas. Si  $G \cong H$  y  $H \cong J$  entonces  $G \cong J$ .

*Demostración.* Por demostrar que existe una función biyectiva  $h : V(G) \rightarrow V(J)$  tal que  $(u, v) \in E(G)$  si y solo si  $(h(u), h(v)) \in E(J)$ .

Como por hipótesis  $G$  es isomorfa a  $H$ , entonces por definición existe una función biyectiva  $f : V(G) \rightarrow V(H)$  tal que  $(u, v) \in E(G)$  si y solo si  $(f(u), f(v)) \in E(H)$ . Por otro lado como  $H$  es isomorfa a  $J$ , entonces por definición existe una función biyectiva  $g : V(H) \rightarrow V(J)$  tal que  $(x, y) \in E(H)$  si y solo si  $(g(x), g(y)) \in E(J)$ . Lo que implica que  $g \circ f : V(G) \rightarrow V(J)$  es una función biyectiva tal que  $(u, v) \in E(G)$  si y solo si  $(f(u), f(v)) \in E(H)$  si y solo si  $(g[f(u)], g[f(v)]) \in E(J)$ .

Por lo tanto,  $G$  es una gráfica isomorfa a  $J$ .  $\square$

**Definición 1.1.28.** Un conjunto de vértices  $S$  de una gráfica  $G$  es **independiente** si y solo si ninguna pareja de vértices en el conjunto es adyacente.

En otras palabras,  $S \subseteq V(G)$  es independiente en  $G$  si y solo si la subgráfica inducida por  $S$  en  $G$ , no posee aristas.

**Definición 1.1.29.** Un **conjunto independiente maximal** es un conjunto independiente que si le añadimos cualquier otro vértice de  $G$  entonces el conjunto deja de ser independiente.

**Definición 1.1.30.** Una gráfica **bipartita** es una gráfica  $G$  cuyo conjunto de vértices se puede partir en dos conjuntos independientes no vacíos y disjuntos. A dicha partición le llamaremos bipartición.

**Definición 1.1.31.** Una gráfica **bipartita completa** es una gráfica bipartita con partición de sus vértices  $\{V_1, V_2\}$  en conjuntos independientes, en el cual cada vértice de  $V_1$  está unido por una arista a cada vértice de  $V_2$ .

Si  $|V_1| = m$  y  $|V_2| = n$ , la gráfica bipartita completa es denotada por  $K_{m,n}$ . Si  $m = 1$  o  $n = 1$  entonces  $K_{m,n}$  es llamada estrella, denotada por  $S_k$ , donde  $k = n$  si  $m = 1$  o  $k = m$  si  $n = 1$ .

**Definición 1.1.32.** Una gráfica **completa** es una gráfica  $G$  donde para cualesquiera dos vértices  $u$  y  $v$  en  $V(G)$ , tenemos que la arista  $(u, v)$  está en  $E(G)$ .

Si  $G$  es una gráfica completa de orden  $n$ , entonces  $G$  es denotada por  $K_n$ .

## 1.2. Caminos y conexidad.

**Definición 1.2.1.** Un **camino**  $C$  es una sucesión de vértices de  $G$ ,  $C = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_k)$  tal que  $x_i$  es adyacente a  $x_{i+1}$  para cada  $i$  en  $\{0, 1, \dots, k-1\}$ .

Denotaremos por  $C^{-1}$  al camino  $(x_k, x_{k-1}, \dots, x_1, x_0)$ .

**Definición 1.2.2.** La **longitud** del camino  $C = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_k)$  se define como el número  $k$ , denotado por  $l(C)$ .

**Definición 1.2.3.** Sea  $C = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_k)$  un camino:

1. Si  $x_0 = x_k$ , entonces  $C$  es un camino cerrado.
2. Si  $C$  es cerrado, de longitud al menos 3, que no repite vértices salvo  $x_0 = x_k$ , entonces  $C$  es un ciclo.

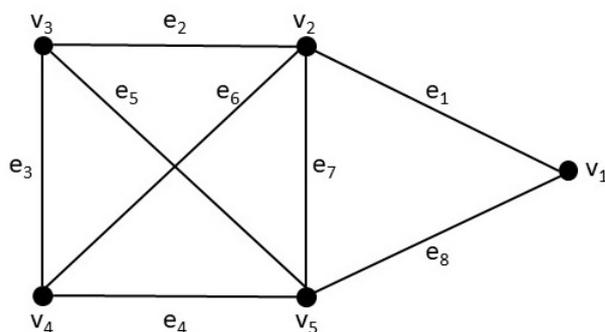


Figura 1.5: Gráfica \$G\$ del ejemplo 1.2.4

3. Si \$C\$ no repite aristas, entonces \$C\$ es un paseo.
4. Si \$C\$ no repite vértices, entonces \$C\$ es una trayectoria.

**Notación.**

1. Si \$C\$ es un ciclo de longitud \$n\$, entonces \$C\$ se denota por \$C\_n\$.
2. Si \$C\$ es un camino (trayectoria) que comienza en \$u\$ y termina en \$v\$, entonces diremos que \$C\$ es un \$uv\$-camino (\$uv\$-trayectoria).
3. Si \$C\$ es un camino y \$W\$ es un camino tal que \$C = (x\_0, \dots, x\_k)\$ y \$W = (y\_0 = x\_k, \dots, y\_m)\$, entonces el camino \$(x\_0, \dots, x\_k = y\_0, \dots, y\_m)\$ es denotado por \$C \cup W\$.
4. Sean \$P\$ un camino tal que \$P = (x\_0, x\_1, \dots, x\_n)\$ y \$x\_i\$ y \$x\_j\$ dos vértices en \$P\$, con \$i < j\$. El camino \$(x\_i, x\_{i+1}, \dots, x\_{j-1}, x\_j)\$ es denotado por \$(x\_i, P, x\_j)\$.

**Ejemplo 1.2.4.** Sea \$G\$ una gráfica donde \$V(G) = \{v\_1, v\_2, v\_3, v\_4, v\_5\}\$ y \$E(G) = \{e\_1, e\_2, e\_3, e\_4, e\_5, e\_6, e\_7, e\_8\}\$ como lo indica la figura 1.5. Entonces, \$S = \{v\_1, v\_4\}\$ es un conjunto independiente y es maximal; \$P\_1 = (v\_1, v\_2, v\_1, v\_5, v\_4, v\_3)\$ es un camino con \$l(P\_1) = 5\$, \$P\_2 = (v\_1, v\_2, v\_1, v\_5, v\_4, v\_3, v\_4, v\_2, v\_1)\$ es un camino cerrado, \$P\_3 = (v\_1, v\_2, v\_3, v\_4, v\_5, v\_1)\$ es un ciclo, \$P\_4 = (v\_1, v\_2, v\_4, v\_5, v\_3, v\_4)\$ es un paseo y \$P\_5 = (v\_1, v\_2, v\_4, v\_3, v\_5)\$ es una trayectoria.

**Definición 1.2.5.** La distancia entre dos vértices \$u\$ y \$v\$ de \$G\$ se define como \$\min\{l(C) : C \text{ es una } uv\text{-trayectoria}\}\$, denotada por \$d\_G(u, v)\$. Si no hay \$uv\$-trayectorias, entonces la distancia se define como infinita.

**Definición 1.2.6.** Sea \$G\$ una gráfica.

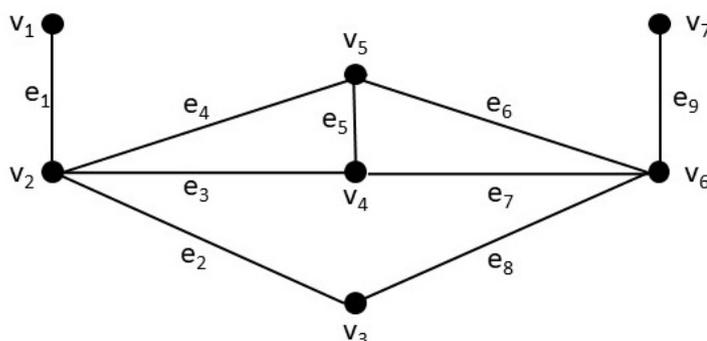


Figura 1.6: Gráfica \$G\$ del ejemplo 1.2.7

1. La excentricidad de un vértice \$v\$, denotada por \$e(v)\$, se define como el \$\max\{d\_G(v, u) : u \in V(G)\}\$.
2. El radio de \$G\$, denotado por \$r(G)\$, se define como el \$\min\_{v \in V(G)} \{e(v)\}\$.
3. El diámetro de \$G\$, denotado por \$d(G)\$, es el \$\max\_{v \in V(G)} \{e(v)\}\$.

**Ejemplo 1.2.7.** Sea \$G\$ una gráfica con \$V(G) = \{v\_1, v\_2, v\_3, v\_4, v\_5, v\_6, v\_7\}\$ y \$E(G) = \{e\_1, e\_2, e\_3, e\_4, e\_5, e\_6, e\_7, e\_8, e\_9\}\$ como lo indica la figura 1.6. Las distancias del vértice \$v\_1\$ hacia el resto de los vértices son: \$d\_G(v\_1, v\_2) = 1\$, \$d\_G(v\_1, v\_3) = 2\$, \$d\_G(v\_1, v\_4) = 2\$, \$d\_G(v\_1, v\_5) = 2\$, \$d\_G(v\_1, v\_6) = 3\$, \$d\_G(v\_1, v\_7) = 4\$; lo que implica que \$e(v\_1) = 4\$. Note que \$e(v\_2) = 3\$, \$e(v\_3) = 2\$, \$e(v\_4) = 2\$, \$e(v\_5) = 2\$, \$e(v\_6) = 3\$, \$e(v\_7) = 4\$. Por lo tanto, el radio de \$G\$ es 2 y el diámetro de \$G\$ es 4.

**Teorema 1.2.8.** Sean \$G\$ una gráfica y \$u\$ y \$v\$ dos vértices en \$V(G)\$. Todo \$uv\$-camino en \$G\$ contiene una \$uv\$-trayectoria.

*Demostración.* Sea \$C = (u = x\_0, x\_1, \dots, x\_{k-1}, v = x\_k)\$ un \$uv\$-camino en \$G\$. Por demostrar que \$C\$ contiene una \$uv\$-trayectoria. Si \$C\$ es un camino que no repite vértices, entonces \$C\$ es una trayectoria. Si \$C\$ es un camino que repite vértices, sea \$x\_i = x\_j\$ tal que \$i \neq j\$ y \$0 \leq i \leq j \leq k\$, entonces si quitamos el camino \$(x\_i, C, x\_j)\$ del camino \$C\$ podemos construir el camino \$C\_1 = (x\_0, C, x\_i) \cup (x\_j, C, v)\$. Si el camino \$C\_1\$ no repite vértices, entonces \$C\_1\$ es una \$uv\$-trayectoria. Si \$C\_1\$ repite vértices entonces repetimos el procedimiento anterior hasta obtener un \$uv\$-camino que no repite vértices lo cual siempre ocurre ya que \$|V(C)|\$ es finito.

Por lo tanto, todo \$uv\$-camino en \$G\$ contiene una \$uv\$-trayectoria. \$\square\$

**Definición 1.2.9.** Una gráfica  $G$  es **conexa** si para cualquier par de vértices  $u$  y  $v$  en  $V(G)$  existe un  $uv$ -camino.

**Nota.** Si  $G$  es una gráfica conexa con al menos dos vértices entonces cada vértice en  $G$  tiene grado al menos 1.

Por definición de gráfica conexa tenemos que para cualquier par de vértices  $u$  y  $v$  en  $G$  existe un  $uv$ -camino, entonces en particular tenemos que  $u$  es adyacente a un vértice  $v_0$ , lo que implica que el grado de  $u$  es mayor o igual a 1, ya que  $G$  tiene al menos dos vértices.

Una gráfica  $G$  que no es conexa decimos que es **inconexa**.

**Teorema 1.2.10.** *Sea  $G$  una gráfica.  $G$  es conexa si y solo si existe un camino que pasa por todos los vértices de  $G$ .*

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ] Sea  $C=(x_0, x_1, \dots, x_k)$  un camino en  $G$  tal que  $C$  contiene el máximo número de vértices de  $G$ . Afirmamos que  $V(C) = V(G)$ . Procediendo por contradicción, supongamos que existe un vértice  $w$  en  $V(G)$  tal que  $w$  no pertenece a  $C$ , entonces al ser  $G$  conexa existe un  $x_k w$ -camino, digamos  $C'$ . Entonces  $C \cup C'$  es un camino que contiene más vértices de  $G$  que  $C$  contradiciendo la elección de  $C$ . Por lo tanto,  $V(C) = V(G)$ .

$\Leftarrow$ ] Sea  $C=(x_0, x_1, \dots, x_k)$  un camino que pasa por todos los vértices de  $G$ . Sean  $u$  y  $v$  cualesquiera dos vértices en  $V(G)$ , demostraremos que existe un  $uv$ -camino en  $G$ . Como  $u$  y  $v$  pertenecen al camino  $C$ , suponemos que  $u = x_i$  y  $v = x_j$ , con  $i < j$ , entonces  $(x_i, C, x_j)$  es un camino que une a  $u$  con  $v$  y como  $u$  y  $v$  eran cualesquiera dos vértices, entonces  $G$  es conexa.  $\square$

**Corolario 1.2.11.** *Sea  $G$  una gráfica.  $G$  es conexa si y solo si existe un camino cerrado que pasa por todos los vértices de  $G$*

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ] Sea  $G$  una gráfica conexa. Por demostrar que existe un camino cerrado que pasa por todos los vértices de  $G$ .

Por el teorema 1.2.10, existe un camino  $C=(x_0, x_1, \dots, x_k)$  que pasa por todos los vértices de  $G$ . Si  $C$  es cerrado, entonces  $C$  es el camino buscado, de otra manera como  $G$  es conexa entonces existe un  $x_k x_0$ -camino, digamos  $C'$ . Entonces  $C \cup C'$  es un camino cerrado que pasa por todos los vértices de  $G$ .

$\Leftarrow$ ] Sea  $C=(x_0, x_1, \dots, x_k, x_0)$  un camino cerrado que pasa por todos los vértices de  $G$ . Al ser  $C$  un camino que pasa por todos los vértices de  $G$ , por teorema 1.2.10 tenemos que  $G$  es conexa.  $\square$

**Proposición 1.2.12.** *Sea  $G$  una gráfica conexa con al menos un vértice de grado uno, digamos  $v$ , entonces  $G - v$  es una gráfica conexa.*

*Demostración.* Por demostrar que para cualesquiera dos vértices  $u$  y  $w$  en  $V(G - v)$  existe una trayectoria que los une en  $G - v$ .

Sean  $u$  y  $w$  cualquier par de vértices en  $V(G - v)$  y  $C$  una trayectoria entre los vértices  $u$  y  $w$  en  $G$  ( $C$  existe porque  $G$  es conexa). Note que la trayectoria  $C$  no pasa por el vértice  $v$  porque de otra manera al ser  $u$ ,  $v$  y  $w$  tres vértices diferentes, entonces  $v$  tendría grado al menos dos contradiciendo que  $v$  tiene grado uno. Por lo tanto,  $C$  no pasa por  $v$ , lo que implica que  $C$  está contenida en  $G - v$  y así existe una  $uw$ -trayectoria en  $G - v$ . Con esto concluimos que  $G - v$  es una gráfica conexa.  $\square$

**Definición 1.2.13.** Sea  $G$  una gráfica. Entonces una **componente conexa** de  $G$  es una subgráfica conexa de  $G$  y máxima por contención con la propiedad de ser conexa.

**Definición 1.2.14.** Un **puente** en  $G$  es una arista tal que al quitarla de  $G$  incrementa el número de componentes conexas.

**Observación 1.2.15.** Si  $G$  es una gráfica,  $e = (u, v)$  es un puente en  $G$  y  $n$  es el número de componentes conexas de  $G$ , entonces  $G - e$  tiene exactamente  $n + 1$  componentes conexas y además  $u$  queda en una componente conexa y  $v$  queda en una componente conexa diferente a la de  $u$ .

*Demostración.* Sea  $m$  el número de componentes conexas de  $G - e$ . Por demostrar que  $m = n + 1$  y  $u$  y  $v$  pertenecen a distintas componentes conexas en  $G - e$ .

Al ser  $e = (u, v)$  un puente en  $G$ , entonces  $G - e$  incrementa el número de componentes conexas, lo que implica que  $m \geq n + 1$ .

Como  $u$  y  $v$  son adyacentes, entonces  $u$  y  $v$  pertenecen a la misma componente conexa en  $G$ . Sean  $P_i$ , con  $1 \leq i \leq n$ , las componentes conexas de  $G$ , sin pérdida de generalidad supongamos que  $u$  y  $v$  pertenecen a la componente conexa  $P_n$ . Como  $P_j$  con  $1 \leq j \leq n - 1$  son componentes conexas en  $G$  y  $e$  no pertenece a ninguna de ellas y  $V(G) = V(G - e)$  tenemos que  $P_j$ , con  $1 \leq j \leq n - 1$ , son componentes conexas de  $G - e$ . Así, las componentes de  $G - e$  se incrementan dividiendo a  $P_n$ . Supongamos que  $H_1, H_2, \dots, H_k$  son las componentes conexas que resultan de dividir a  $P_n$ , con  $k \geq 2$ .

Si  $u$  y  $v$  pertenecen a  $H_i$ , con  $1 \leq i \leq k$ , entonces existe una componente conexa  $H_j$  para algún  $j$  distinto de  $i$  que no contiene a  $u$  ni a  $v$ . Así, existe un vértice  $w$  en  $H_j$  tal que no hay un  $vw$ -camino en  $G - e$  y no hay un  $uw$ -camino en  $G - e$ , de esta manera no existe un  $vw$ -camino en  $G$  y no existe un  $uw$ -camino en  $G$ . Como  $w$  pertenece a la misma componente conexa que  $u$  y  $v$  en  $G$ , entonces  $P_n$  no es una subgráfica conexa de  $G$ , lo cual contradice que  $P_n$  es una componente conexa. Por lo tanto,  $u$  y  $v$  pertenecen a diferentes componentes conexas en  $G - e$ .

Ahora demostraremos que  $k = 2$ . Supongamos que  $k \geq 3$ . Sean  $H_i$  la componente conexa a la cual pertenece  $u$  y  $H_j$  la componente conexa a la cual pertenece  $v$ , ya que  $k \geq 3$ , entonces existe una componente conexa  $H_r$  a la cual no pertenece  $u$  ni  $v$ . Con el mismo razonamiento dado anteriormente se tendría que  $P_n$  no sería componente conexa de  $G$ .

Por lo tanto, si  $e = (u, v)$  es un puente en  $G$  y  $n$  el número de componentes conexas de  $G$ , entonces  $G - e$  tiene exactamente  $n + 1$  componentes conexas y además  $u$  queda en una componente conexa distinta a la de  $v$ .  $\square$

## 1.3. Árboles

**Definición 1.3.1.** Un árbol es una gráfica conexa y sin ciclos.

**Definición 1.3.2.** Sea  $G$  una gráfica, definimos a un árbol generador de  $G$  como una subgráfica de  $G$  que es un árbol y contiene todos los vértices de  $G$ .

**Proposición 1.3.3.** *Toda arista en un árbol  $G$  es un puente.*

*Demostración.* Supongamos que existe una arista  $e = (u, v)$  en  $G$  tal que  $e$  no es un puente. Sea  $G'$  la gráfica con  $V(G') = V(G)$  y  $E(G') = E(G) - \{e\}$ , entonces al no ser  $e$  un puente en  $G$  tenemos que  $G'$  es conexa. Por lo tanto, existe una  $uv$ -trayectoria en  $G'$ , digamos  $T_1$ , lo que implica que  $T_1 \cup (u, v)$  es un ciclo en  $G$  contradiciendo que  $G$  no tiene ciclos.

Por lo tanto, toda arista en  $G$  es un puente.  $\square$

**Proposición 1.3.4.** *Todo árbol, con orden al menos dos, tiene al menos dos vértices de grado uno.*

*Demostración.* Sea  $G$  un árbol de orden  $n$ .

Probamos por inducción sobre  $n$ .

*Base:* Si  $n = 2$ , entonces el árbol es isomorfo a  $K_2$  y sus dos vértices tienen grado 1.

*Hipótesis de inducción:* Si  $G'$  es un árbol con  $m$  vértices tal que  $2 \leq m \leq n$ , entonces  $G'$  tiene al menos dos vértices de grado uno.

*Paso inductivo:* Sea  $G$  un árbol de orden  $n + 1$ .

Como  $n + 1 \geq 3$  y toda arista en un árbol es un puente, por la proposición 1.3.3, la gráfica  $G - e$  tiene exactamente dos componentes conexas a las cuales llamaremos  $T_1$  y  $T_2$  (por observación 1.2.15). Note que  $T_1$  y  $T_2$  son árboles.

Sin pérdida de generalidad  $u$  está en  $T_1$  y  $v$  está en  $T_2$ . Si  $T_1$  y  $T_2$  tienen al menos 2 vértices cada una, entonces sabemos por la hipótesis de inducción que  $T_1$  y  $T_2$  tienen al menos dos vértices de grado uno. Por lo tanto,  $T_1$  tiene

al menos un vértice de grado 1 diferente a  $u$  y  $T_2$  tiene al menos un vértice de grado 1 diferente a  $v$ . Así,  $G$  tiene al menos dos vértices de grado uno.

Ahora, sin pérdida de generalidad supongamos que  $v$  es un vértice aislado en  $T_2$ , entonces  $v$  es de grado uno en  $G$ . Por otro lado, como  $u$  está en una componente conexa con  $n$  vértices, entonces por hipótesis de inducción existe al menos un vértice de grado 1 diferente a  $u$  en  $T_1$ . Por lo tanto,  $G$  tiene al menos dos vértices de grado uno.  $\square$

**Proposición 1.3.5.** *Sea  $G$  una gráfica.  $G$  es un árbol si y solo si para todo par de vértices de  $G$  existe una única trayectoria que los une.*

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ] Sea  $G$  una gráfica.

Supongamos que  $G$  es un árbol. Por demostrar que para todo par de vértices de  $G$  existe una única trayectoria que los une.

Como  $G$  es un árbol, entonces  $G$  es conexa lo que implica que para cualesquiera dos vértices  $u$  y  $v$  en  $V(G)$  existe al menos una  $uv$ -trayectoria. Supongamos que entre los vértices  $u$  y  $v$  existen dos  $uv$ -trayectorias diferentes, digamos  $C_1$  y  $C_2$ . Si  $C_1$  y  $C_2$  comparten los mismos vértices, entonces al ser trayectorias distintas se tiene que existe una arista  $(x, y)$  en  $C_2$  que no está contenida en  $C_1$ . Como  $\{x, y\} \subseteq V(C_1)$  y  $(x, y) \notin E(C_1)$  tenemos que  $x$  y  $y$  son vértices no consecutivos en  $C_1$ . Sin pérdida de generalidad supongamos que  $x$  aparece antes que  $y$  en la trayectoria  $C_1$ , entonces  $(x, C_1, y) \cup (y, x)$  es un ciclo en  $G$  lo cual contradice que  $G$  sea un árbol. Por lo tanto, supongamos que  $V(C_1) \neq V(C_2)$ .

Sea  $x$  el primer vértice de  $C_1$  que no está en  $C_2$  (sabemos que  $x$  existe ya que  $V(C_1) \neq V(C_2)$ ). Por otro lado, sea  $w$  el primer vértice de la trayectoria  $(x, C_1, v)$  que aparece en  $C_2$  (dicho vértice existe ya que  $(x, C_1, v)$  y  $C_2$  comparten al menos el vértice  $v$ ). Si  $z$  es el vértice anterior a  $x$  en la trayectoria  $C_1$ , entonces por elección de  $x$  se tiene que  $z$  está en  $C_2$ . Por lo tanto, si  $w \in V((z, C_2, v))$  tenemos que  $(z, C_2, w) \cup (w, C_1^{-1}, z)$  es un ciclo lo cual contradice la definición de árbol. Si  $w \in V((u, C_2, z))$  tenemos que  $(w, C_2, z) \cup (z, C_1, w)$  es un ciclo en  $G$ , lo cual no es posible. Por lo tanto, existe una única trayectoria entre  $u$  y  $v$ .

$\Leftarrow$ ] Sea  $G$  una gráfica.

Supongamos que para todo par de vértices  $u$  y  $v$  en  $V(G)$  existe un único camino que los une. Como para todo par de vértices existe un camino que los une, entonces  $G$  es conexa.  $G$  es acíclica ya que en un ciclo cualesquiera dos vértices están conectados por dos trayectorias distintas. Por lo tanto,  $G$  es un árbol.  $\square$

**Proposición 1.3.6.** *Sea  $G$  una gráfica.  $G$  es un árbol si y solo si  $G$  es acíclica y  $G + (u, v)$  contiene un único ciclo para cualquier par de vértices no adyacentes  $u$  y  $v$  de  $V(G)$ .*

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ] Supongamos que  $G$  es un árbol. Sean  $u$  y  $v$  en  $V(G)$  tal que  $(u, v) \notin E(G)$ . Al ser  $G$  un árbol existe una  $uv$ -trayectoria  $P$  en  $G$ , lo que implica que  $(v, u) \cup P$  es un ciclo en  $G + (u, v)$ .

Por demostrar que  $G + (u, v)$  contiene un único ciclo.

Procederemos por contradicción.

Supongamos que  $G + (u, v)$  contiene dos o más ciclos.

Sea  $\gamma$  un ciclo en  $G + (u, v)$  diferente a  $(v, u) \cup P$ . Si la arista  $(u, v)$  no pertenece al ciclo  $\gamma$ , entonces  $\gamma$  es un ciclo en  $G$  lo cual no puede ocurrir porque  $G$  es un árbol. Por lo tanto,  $(u, v) \in E(\gamma)$ .

Supongamos sin pérdida de generalidad que el ciclo  $\gamma$  empieza en el vértice  $u$  y termina con la arista  $(v, u)$ . Como el ciclo  $\gamma$  es distinto al ciclo  $(v, u) \cup P$ , entonces la trayectoria  $(u, \gamma, v)$  es distinta a  $P$ , lo que implica que existen dos  $uv$ -trayectorias distintas en  $G$  lo cual no puede ocurrir por proposición 1.3.5.

Por lo tanto,  $G + (u, v)$  contiene un único ciclo.

$\Leftarrow$ ] Supongamos que  $G$  es acíclica y  $G + (u, v)$  contiene un único ciclo para cualquier par de vértices no adyacentes  $u$  y  $v$  de  $V(G)$ . Como  $G$  no tiene ciclos, entonces solo queda demostrar que  $G$  es conexa.

Por demostrar para cualesquiera dos vértices  $x$  y  $y$  en  $V(G)$  existe una  $xy$ -trayectoria.

Sean  $x$  y  $y$  dos vértices en  $V(G)$ . Si  $x$  y  $y$  son adyacentes, entonces existe una  $xy$ -trayectoria en  $G$ .

Si  $x$  y  $y$  no son adyacentes, entonces por hipótesis en  $G + (x, y)$  existe un único ciclo  $\gamma$  el cual contiene a la arista  $(x, y)$ , porque  $G$  no tiene ciclos. Supongamos sin pérdida de generalidad que  $\gamma$  empieza en el vértice  $x$  y termina con la arista  $(y, x)$ , lo que implica que  $(x, \gamma, y)$  es un  $xy$ -camino. Por lo tanto,  $G$  es conexa y al ser  $G$  una gráfica acíclica se concluye que  $G$  es un árbol.  $\square$

**Teorema 1.3.7.** *Sea  $G$  una gráfica con  $n$  vértices,  $n \geq 1$ . Entonces  $G$  es un árbol si y solo si  $G$  es conexa y tiene  $n - 1$  aristas.*

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ] Sea  $G$  una gráfica con  $n$  vértices,  $n \geq 1$ , tal que  $G$  es un árbol.

Por demostrar que  $G$  es conexa y tiene  $n - 1$  aristas.

Procederemos por inducción sobre  $n$ .

*Base:* Si  $G$  es un árbol con  $n = 1$  vértices, entonces tiene cero aristas, luego  $G$  es conexa y tiene  $n - 1$  aristas.

*Hipótesis de inducción:* Si  $G'$  es una gráfica con  $n - 1$  vértices tal que  $G'$  es un árbol, entonces  $G'$  es conexa y tiene  $n - 2$  aristas.

*Paso inductivo:* Sea  $G$  una gráfica con  $n$  vértices y con  $m$  aristas tal que  $G$  es un árbol.

Si  $n \geq 2$  al ser  $G$  un árbol, por la proposición 1.3.4,  $G$  tiene dos vértices de grado uno. Luego eliminando alguno de los dos vértices de grado uno, digamos  $v$ , y la arista que es incidente a este vértice nos queda una gráfica con  $n - 1$  vértices,  $m - 1$  aristas, la cual es conexa (por la proposición 1.2.12) y acíclica. Por lo tanto,  $G - v$  es un árbol y así de la hipótesis de inducción se sigue que  $G - v$  es conexa y tiene  $n - 2$  aristas. Como  $v$  tiene grado uno, entonces  $G$  tiene  $n - 1$  aristas y  $G$  es conexa.

$\Leftarrow$ ] Sea  $G$  una gráfica conexa con  $n$  vértices y  $n - 1$  aristas.

Por demostrar que  $G$  es un árbol.

Puesto que  $G$  es conexa por hipótesis, entonces solo basta ver que  $G$  es acíclica para que sea un árbol.

Procederemos por inducción sobre  $n$ .

*Base:* Si  $n = 1$ , entonces  $G$  tiene 0 aristas. Por lo tanto,  $G$  es acíclica.

*Hipótesis de inducción:* Si  $G'$  es una gráfica conexa con  $n - 1$  vértices y  $n - 2$  aristas, entonces  $G'$  es acíclica.

*Paso inductivo:* Sea  $G$  una gráfica conexa con  $n$  vértices y  $n - 1$  aristas.

Notemos que  $G$  tiene al menos un vértice de grado uno ya que de otra manera si  $\delta(v) \geq 2$  para todo vértice  $v$  de  $G$ , entonces  $2(n - 1) = \sum_{i=1}^n \delta(v_i) \geq \sum_{i=1}^n 2 = 2n$ , lo que implica que  $2n - 2 \geq 2n$  lo cual no puede ocurrir. Por lo tanto,  $G$  tiene al menos un vértice de grado uno.

Sea  $v$  un vértice de grado uno en  $G$ . Si eliminamos de  $G$  el vértice  $v$  y la arista que es incidente a él, entonces  $G - v$  es una gráfica conexa (por la proposición 1.2.12) con  $n - 1$  vértices y  $n - 2$  aristas. Por lo tanto, de la hipótesis de inducción se sigue que  $G - v$  es acíclica. Como  $v$  tiene grado uno, entonces  $G$  también es acíclica.

Por lo tanto,  $G$  es un árbol.  $\square$

**Teorema 1.3.8.** *Sea  $G$  una gráfica.  $G$  es conexa si y solo si  $G$  tiene al menos un árbol generador.*

*Demostración.*  $\Leftarrow$ ] Sean  $T$  un árbol generador de  $G$  y  $v$  y  $w$  vértices de  $V(G)$ . Demostraremos que existe un  $vw$ -camino en  $G$ .

Como  $V(T) = V(G)$  y  $T$  es conexo, entonces existe un camino entre  $v$  y  $w$  en  $T$ , digamos  $C$ . Puesto que  $T$  es una subgráfica de  $G$ , se sigue que  $C$  es un camino entre  $v$  y  $w$  en  $G$ .

Por lo tanto,  $G$  es conexa.

$\Rightarrow$ ] Sea  $G$  una gráfica conexa con  $n$  vértices.

Por demostrar que  $G$  tiene al menos un árbol generador.

Procederemos por inducción sobre  $n$ .

*Base:* Si  $n = 1$ , entonces  $G$  es conexa y acíclica, lo que implica que  $G$  es el árbol generador buscado.

*Hipótesis de inducción:* Si  $G'$  es una gráfica conexa con  $m$  vértices tal que  $m \leq n - 1$ , entonces  $G'$  tiene al menos un árbol generador.

*Paso inductivo:* Sean  $G$  una gráfica conexa con  $n$  vértices,  $v$  un vértice en  $G$  y  $G_i$  con  $i$  en  $\{1, \dots, p\}$  las componentes conexas de  $G - v$ .

Por la hipótesis de inducción se tiene que cada componente conexa  $G_i$  de  $G - v$  tiene un árbol generador  $T_i$  para cada  $i$  en  $\{1, \dots, p\}$ . Luego, por el teorema 1.3.7 sabemos que  $|V(T_i)| = |E(T_i)| - 1$  para cada  $i$  en  $\{1, \dots, p\}$ .

Por otro lado, como  $G$  es conexa, entonces  $v$  es adyacente al menos a un vértice  $v_i$  en cada  $G_i$ . Sea  $T$  la gráfica con conjunto de vértices  $\bigcup_{i=1}^p V(T_i) \cup \{v\}$  y

conjunto de aristas  $\bigcup_{i=1}^p E(T_i) \cup \{(v_i, v) : v_i \in V(G_i) \text{ para cada } i \text{ en } \{1, \dots, p\}\}$ .

Como cada  $T_i$  es conexa y  $v$  es un vértice que en  $T$  es adyacente a un vértice de cada  $T_i$ , entonces  $T$  es una gráfica conexa.

Ya que  $|E(T)| = \sum_{i=1}^p |E(T_i)| + p = [(\sum_{i=1}^p |V(T_i)|) - p] + p = |V(T)| - 1$ , se sigue del teorema 1.3.7 que  $T$  es un árbol.

Por lo tanto,  $G$  tiene al menos un árbol generador.  $\square$

## 1.4. Bloques

**Definición 1.4.1.** Un **vértice de corte** en  $G$  es un vértice que al quitarlo de  $G$  incrementa el número de componentes conexas.

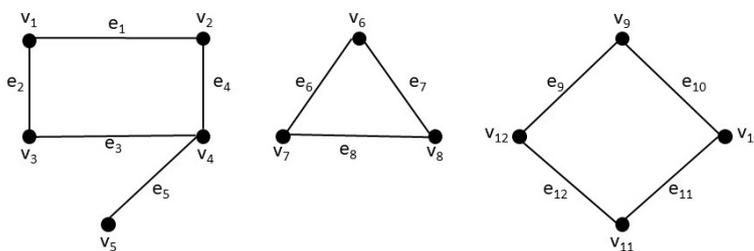
Al conjunto de vértices de corte de una gráfica  $G$  lo denotamos por  $W(G)$ .

**Definición 1.4.2.** Un **bloque**  $B$  de una gráfica  $G$  es una subgráfica de  $G$  máxima por contención con la propiedad de ser conexa y sin vértices de corte.

Al conjunto de bloques de una gráfica  $G$  lo denotamos por  $U(G)$ .

**Definición 1.4.3.** Un bloque de una gráfica  $G$  que contiene exactamente un vértice de corte de  $G$  se le llama **bloque final** de  $G$ .

**Ejemplo 1.4.4.** Sea  $G$  una gráfica donde  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{12}\}$  y  $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_{12}\}$ , como lo indica la figura 1.7. Entonces,  $G$  es una gráfica inconexa que tiene 3 componentes conexas; el vértice  $v_4$  es de corte; los bloques de  $G$  son  $B_1, B_2, B_3$  y  $B_4$  donde  $V(B_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  y  $E(B_1) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ,  $V(B_2) = \{v_4, v_5\}$  y  $E(B_2) = \{e_5\}$ ,  $V(B_3) = \{v_6, v_7, v_8\}$  y  $E(B_3) = \{e_6, e_7, e_8\}$ ,  $V(B_4) = \{v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}\}$  y  $E(B_4) = \{e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}$ ; los bloques  $B_1$  y  $B_2$  son bloques finales.

Figura 1.7: Gráfica  $G$  del ejemplo 1.4.4

**Teorema 1.4.5.** Sean  $G$  una gráfica conexa y  $v$  un vértice de  $G$ .  $v$  es un vértice de corte si y solo si existen  $x$  y  $y$  en  $V(G)$  tales que toda  $xy$ -trayectoria pasa por  $v$ .

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ] Supongamos que  $v$  es un vértice de corte. Por demostrar que existen  $x$  y  $y$  en  $V(G)$  tales que toda  $xy$ -trayectoria pasa por  $v$ .

Como  $v$  es un vértice de corte, entonces  $G - v$  es una gráfica inconexa lo que implica que existen al menos dos vértices digamos  $x$  y  $y$  en  $G - v$  tal que no hay caminos en  $G - v$  que los une. Por otro lado, como  $G$  es conexa, entonces existe al menos un camino en  $G$  que une a  $x$  y  $y$ , lo que implica que todas las trayectorias que unen a  $x$  y  $y$  en  $G$  pasan por  $v$ .

$\Leftarrow$ ] Supongamos que existen  $x$  y  $y$  en  $V(G)$  tal que toda  $xy$ -trayectoria pasa por  $v$ . Por demostrar que  $v$  es un vértice de corte.

Como toda  $xy$ -trayectoria pasa por  $v$ , entonces en  $G - v$   $x$  y  $y$  pertenecen a distintas componentes conexas. Por lo tanto  $G - v$  es inconexa, lo cual implica que por definición  $v$  es un vértice de corte.  $\square$

**Definición 1.4.6.** Sean  $G$  una gráfica,  $W(G)$  el conjunto de los vértices de corte de  $G$  y  $U(G)$  el conjunto de los bloques de  $G$ . Definimos la gráfica de bloques y vértices de corte, denotado por  $B_C(G)$ , como sigue:

- $V(B_C(G)) = W(G) \cup U(G)$ ; y
- Dado  $v$  en  $W(G)$  y  $B$  en  $U(G)$ ,  $(v, B) \in E(B_C(G))$  si y solo si  $v \in B$ .

Note que  $B_C(G)$  es una gráfica bipartita con bipartición  $\{W(G), U(G)\}$ .

**Ejemplo 1.4.7.** En la figura 1.8 se exhibe una gráfica  $G$  y su gráfica de bloques y vértices de corte.

**Teorema 1.4.8.** La gráfica de bloques y vértices de corte de una gráfica conexa es un árbol.

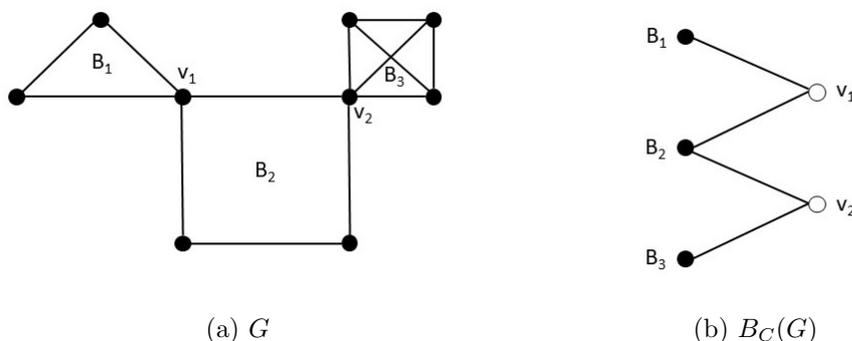


Figura 1.8: Ejemplo de una gráfica  $G$  y su gráfica de bloques y vértices de corte  $B_C(G)$

*Demostración.* Sean  $G$  una gráfica conexa y  $B_C(G)$  su gráfica de bloques y vértices de corte. Por demostrar que  $B_C(G)$  es un árbol; es decir, una gráfica conexa y sin ciclos.

Por demostrar que  $B_C(G)$  es conexa.

Sean  $u$  y  $v$  dos vértices en  $B_C(G)$ . Consideremos tres casos sobre  $u$  y  $v$ .

**Caso 1.**  $u$  y  $v$  son dos vértices de corte en  $G$ .

**subcaso 1.**  $u$  y  $v$  pertenecen al mismo bloque en  $G$ .

Supongamos que  $B$  es un bloque en  $G$  que contiene a  $u$  y a  $v$ , entonces por definición de  $B_C(G)$  se tiene que  $(u, B, v)$  es un camino que une a  $u$  con  $v$  en  $B_C(G)$ .

**subcaso 2.**  $u$  y  $v$  pertenecen a distintos bloques en  $G$ .

Al ser  $G$  conexa, existe un  $uv$ -camino en  $G$ , digamos  $(u, x_0, \dots, x_n, v)$ . Supongamos que  $B_0$  es un bloque que contiene a  $u$ . Sea  $x_{i_1}$  el primer vértice del  $uv$ -camino que no pertenece al bloque  $B_0$ , entonces por elección de  $x_{i_1}$  se tiene que existe un bloque distinto de  $B_0$ , digamos  $B_1$ , tal que  $x_{i_1}$  pertenece a  $B_1$  (sabemos que existe  $x_{i_1}$  porque  $v$  no pertenece a  $B_0$ ). Como  $x_{i_1-1}$  pertenece a  $B_0$  y  $x_{i_1}$  a  $B_1$ , entonces  $x_{i_1-1}$  es un vértice de corte que une al bloque  $B_0$  con el bloque  $B_1$ . Así,  $(u, B_0, x_{i_1-1}, B_1)$  es un camino en  $B_C(G)$ . Siguiendo con el mismo procedimiento podemos llegar a  $v$  en  $B_C(G)$ .

**Caso 2.**  $u$  es un vértice de corte y  $v$  un bloque en  $G$ .

Si  $u$  pertenece al bloque  $v$ , entonces  $u$  y  $v$  son adyacentes en  $B_C(G)$ , por definición de esta gráfica. Por lo tanto, supongamos que  $u$  no pertenece al bloque  $v$ , entonces tomemos un vértice de corte  $w$  en  $G$  que pertenece a  $v$ . Como  $u$  es diferente de  $w$ , entonces por el caso 1 tenemos que existe un  $wu$ -camino en  $B_C(G)$ , digamos  $P$ . Por otro lado, puesto que  $w$  pertenece

al bloque  $v$ , entonces existe una arista que los une en  $B_C(G)$ . Por lo tanto,  $(v, w) \cup P$  es un camino que une a  $u$  con  $v$  en  $B_C(G)$ .

**Caso 3.**  $u$  y  $v$  son bloques en  $G$ .

Si  $u$  y  $v$  tienen un vértice de corte en común, entonces sea  $z$  un vértice de corte que pertenece al bloque  $u$  y al bloque  $v$ . Así  $(u, z, v)$  es un camino en  $B_C(G)$ , por definición de esta gráfica. Por lo tanto, supongamos que no existe un vértice de corte en  $G$  que pertenezca a ambos bloques. Sea  $w$  un vértice de corte que pertenece a  $u$ . Como  $w$  no pertenece al bloque  $v$ , entonces por el caso 2 tenemos que existe un  $wv$ -camino en  $B_C(G)$ , digamos  $P$ . Por otro lado, como  $w$  pertenece al bloque  $u$ , entonces existe una arista que los une en  $B_C(G)$ . Por lo tanto,  $(u, w) \cup P$  es un camino que une a  $u$  con  $v$  en  $B_C(G)$ .

Con lo anterior concluimos que  $B_C(G)$  es conexa.

Por demostrar que  $B_C(G)$  no tiene ciclos.

Procediendo por contradicción, supongamos que  $B_C(G)$  contiene un ciclo  $C$ , con  $C=(B_0, v_0, B_1, v_1, \dots, v_{n-1}, B_n = B_0)$ . Sea  $H$  la subgráfica inducida por todos los vértices de los bloques que pertenecen al ciclo  $C$ .

Demostraremos que  $H$  no tiene vértices de corte; es decir,  $H - v$  es conexa para cada  $v$  en  $V(H)$ .

Sea  $v$  en  $V(H)$ , supongamos sin pérdida de generalidad que  $v \in V(B_0)$ .

Consideremos los siguientes dos casos:

**Caso 1.**  $v \neq v_0$ .

Supongamos que  $v \neq v_0$ . Como  $B_0 - v$  es conexa, entonces por el corolario 1.2.11 se tiene que existe un camino cerrado que pasa por todos los vértices de  $B_0 - v$ , digamos  $C_0$ . Supongamos que  $C_0$  empieza y termina en  $v_0$ . Luego para cada  $i$ , con  $1 \leq i \leq n - 2$ , como  $B_i$  es conexa, entonces sea  $D_i$  un camino que une a  $v_{i-1}$  con  $v_i$ ; por otro lado, por el corolario 1.2.11 sabemos que existe un camino cerrado que pasa por todos los vértices de  $B_i$ , sea  $P_i$  un camino cerrado en  $B_i$  que empieza y termina en  $v_i$ .

**subcaso 1**  $v = v_{n-1}$ .

En este caso como  $B_{n-1}$  es un bloque entonces  $B_{n-1} - v$  es conexa, luego por el corolario 1.2.11 existe un camino cerrado que pasa por todos los vértices de  $B_{n-1}$  que empieza y termina en  $v_{n-2}$  digamos  $C$ . Entonces  $C_0 \cup D_1 \cup P_1 \cup \dots \cup D_i \cup P_i \cup \dots \cup D_{n-2} \cup P_{n-2} \cup C$  es un camino que pasa por todos los vértices de  $H - v$ , entonces por teorema 1.2.10 se tiene que  $H - v$  es conexa.

**subcaso 2**  $v \neq v_{n-1}$ .

En este caso sean  $D_{n-1}$  el camino que une a  $v_{n-2}$  con  $v_{n-1}$  y  $P_{n-1}$  el camino cerrado que pasa por todos los vértices de  $B_{n-1}$  el cual empieza y termina en  $v_{n-1}$ . Entonces  $C_0 \cup D_1 \cup P_1 \cup \dots \cup D_i \cup P_i \cup \dots \cup D_{n-2} \cup P_{n-2} \cup D_{n-1} \cup P_{n-1}$  es un camino que pasa por todos los vértices de  $H - v$ , entonces por teorema

1.2.10 se tiene que  $H - v$  es conexa.

**Caso 2.**  $v = v_0$ .

Sean  $D_i$  y  $P_i$ , con  $2 \leq i \leq n - 1$ , caminos construidos como en el caso 1. Como  $B_1$  es un bloque, entonces  $B_1 - v$  es conexa y por corolario 1.2.11 existe un camino cerrado que pasa por todos los vértices de  $B_1$  que empieza y termina en  $v_1$ , digamos  $C_1$ . Como  $v \neq v_{n-1}$ , al ser  $B_0$  un bloque, entonces  $B_0 - v$  es conexa, lo que implica que existe un camino cerrado, digamos  $C_0$ , que pasa por todos los vértices de  $B_0 - v$ , el cual empieza y termina en  $v_{n-1}$ . Entonces  $C_1 \cup D_2 \cup P_2 \cup \dots \cup D_i \cup P_i \cup \dots \cup D_{n-2} \cup P_{n-2} \cup D_{n-1} \cup P_{n-1} \cup C_0$  es un camino que pasa por todos los vértices de  $H - v$ , entonces por teorema 1.2.10 se tiene que  $H - v$  es conexa.

Por lo tanto, hemos demostrado que  $H$  no tiene vértices de corte, lo cual contradice la maximalidad de cada bloque de  $G$  en  $H$ . Por lo tanto,  $B_C(G)$  no contiene un ciclo.

Así,  $B_C(G)$  es un árbol.  $\square$

**Corolario 1.4.9.** *Si  $G$  es una gráfica conexa que tiene al menos dos bloques, entonces  $G$  contiene al menos un bloque final.*

*Demostración.* Por demostrar que  $G$  contiene al menos un bloque final.

Sea  $B_C(G)$  la gráfica de bloques y vértices de corte de  $G$ , entonces por el teorema 1.4.8 sabemos que  $B_C(G)$  es un árbol y, al tener al menos dos bloques, su orden es mayor a 2. Entonces por la proposición 1.3.4 se tiene que  $B_C(G)$  contiene al menos dos vértices de grado 1, digamos  $v_1$  y  $v_2$ . Debido a que los vértices de corte en  $B_C(G)$  tienen grado al menos 2, ya que cada vértice de corte une al menos a dos bloques en  $G$ , entonces  $v_1$  y  $v_2$  son bloques de  $G$ . Como  $v_1$  y  $v_2$  son adyacentes a exactamente un vértice en  $B_C(G)$ , entonces por definición de gráfica de bloques y vértices de corte se tiene que  $v_1$  y  $v_2$  contienen exactamente un vértice que es de corte en  $G$ . Por lo tanto,  $G$  contiene al menos dos bloques finales, a saber  $v_1$  y  $v_2$ .  $\square$

**Teorema 1.4.10.** *Sean  $G$  una gráfica conexa,  $n$  el número de bloques de  $G$  y  $C(B_i)$  el número de vértices de corte de  $G$  que son vértices del bloque  $B_i$ . Si  $r$  es el número de vértices de corte de  $G$ , entonces  $r = 1 + \sum_{i=1}^n (C(B_i) - 1)$ .*

*Demostración.* Probamos por inducción sobre  $n$ .

*Base:* Si  $n = 1$ , entonces  $G$  es un bloque. Como  $G$  no tiene vértices de corte, se tiene que  $C(G) = 0$  y de esta manera  $r = 0 = 1 + 0 - 1 = 1 + \sum_{i=1}^1 (C(B_1) - 1)$ . Por lo tanto la ecuación se cumple.

*Hipótesis de inducción:* Si  $G'$  es una gráfica conexa con  $n$  bloques y  $C(B'_i)$  es el número de vértices de corte de  $G'$ , que son vértices del bloque  $B'_i$ , entonces el número de vértices de corte de  $G'$  está dado por  $1 + \sum_{i=1}^n (C(B'_i) - 1)$ .

*Paso inductivo:* Sean  $G$  una gráfica conexa con  $n + 1$  bloques y  $C(B_i)$  el número de vértices de corte de  $G$  que son vértices del bloque  $B_i$ .

Demostraremos que si  $r$  es el número de vértices de corte de  $G$ , entonces  $r = 1 + \sum_{i=1}^{n+1} (C(B_i) - 1)$ .

Como  $G$  tiene al menos dos bloques, entonces  $G$  contiene al menos un bloque final. Sean  $B$  un bloque final de  $G$  y  $v$  el único vértice de corte de  $G$  que pertenece a  $B$ . Supongamos sin pérdida de generalidad que  $B = B_{n+1}$ . Sea  $H$  la gráfica obtenida de  $G$  al remover el conjunto de vértices de  $V(B) - v$ . Entonces  $H$  contiene exactamente  $n$  bloques y es conexa, por lo tanto por hipótesis de inducción  $1 + \sum_{i=1}^n (C_H(B_i) - 1)$  es el número de vértices de corte que hay en  $H$ .

Como el bloque que removimos de  $G$  era un bloque final tenemos que  $C_G(B_{n+1}) - 1 = 0$ . Por otro lado, si  $B_i$  es un bloque en  $H$  tal que  $B_i$  no contiene al vértice  $v$ , entonces  $C_H(B_i) = C_G(B_i)$ .

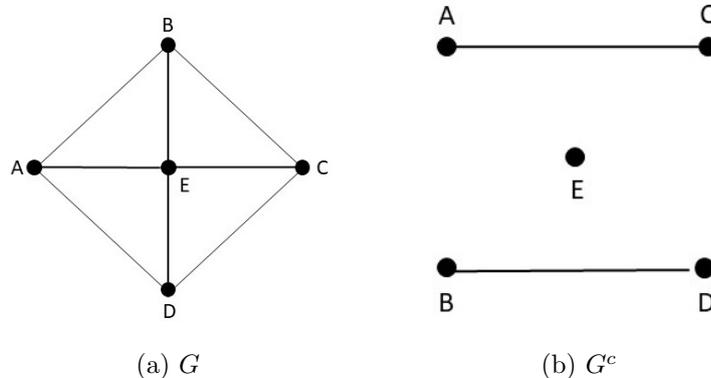
Consideremos los siguientes dos casos:

Caso 1.  $v$  es un vértice de corte en  $H$ .

En este caso, todo bloque  $B_j$  que contiene al vértice  $v$  cumple con que  $C_H(B_j) = C_G(B_j)$ . Así  $r = 1 + \sum_{i=1}^n (C_H(B_i) - 1) = 1 + \sum_{i=1}^n (C_G(B_i) - 1) = 1 + \sum_{i=1}^n (C_G(B_i) - 1) + 0 = 1 + \sum_{i=1}^n (C_G(B_i) - 1) + (C_G(B_{n+1}) - 1) = 1 + \sum_{i=1}^{n+1} (C_G(B_i) - 1)$ .

Caso 2.  $v$  no es un vértice de corte en  $H$ .

En este caso tenemos que  $v$  pertenece a exactamente dos bloques de  $G$ . Supongamos sin pérdida de generalidad que  $v$  pertenece al bloque  $B_n$ , entonces se cumple que  $C_H(B_n) = C_G(B_n) - 1$ , lo que implica que  $1 + \sum_{i=1}^n (C_H(B_i) - 1) = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} (C_H(B_i) - 1) + C_H(B_n) - 1 + C_G(B_{n+1}) - 1 = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} (C_G(B_i) - 1) + (C_G(B_n) - 1) - 1 + C_G(B_{n+1}) - 1$ . Como  $v$  es vértice de corte en  $G$ , entonces el número de vértices de corte de  $G$  es  $(1 + \sum_{i=1}^{n-1} (C_G(B_i) - 1) + (C_G(B_n) - 1) -$

Figura 1.9: Gráfica  $G$  y  $G^c$ 

$1 + C_G(B_{n+1}) - 1) + 1$ ; es decir,  $r = 1 + \sum_{i=1}^{n+1} (C_G(B_i) - 1)$ . □

## 1.5. Gráficas asociadas

**Definición 1.5.1.** El **complemento** de una gráfica  $G$ , denotado por  $G^c$ , tiene como vértices a  $V(G)$  y dos vértices en  $G^c$  son adyacentes si y solo si no son adyacentes en  $G$ .

**Ejemplo 1.5.2.** En la figura 1.9 se presenta una gráfica  $G$  y su complemento.

**Definición 1.5.3.** Dada una gráfica  $G$ , definimos su gráfica de líneas  $L(G)$  como la que cumple que:

- Cada vértice de  $L(G)$  es una arista de  $G$ ; y
- Existe una arista entre dos vértices de  $L(G)$  si y solo si las correspondientes aristas en  $G$  comparten un vértice en  $G$ .

**Ejemplo 1.5.4.** Sea  $G$  una gráfica, donde  $V(G) = \{1, 2, 3, 4\}$  y  $E(G) = \{a, b, c, d, e\}$ . En la figura 1.10 representamos a la gráfica  $G$  y a su gráfica de líneas.

**Teorema 1.5.5.** Una gráfica conexa  $G$  es isomorfa a su gráfica de líneas  $L(G)$  si y solo si  $G$  es un ciclo.

*Demostración.*  $\Leftarrow$ ] Sea  $G$  una gráfica, que es un ciclo, con  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , tal que  $e_i = (v_i, v_{i+1}) \in E(G)$  para cada  $i$  en  $\{1, 2, \dots, n\}$  y  $v_{n+1} = v_1$ .

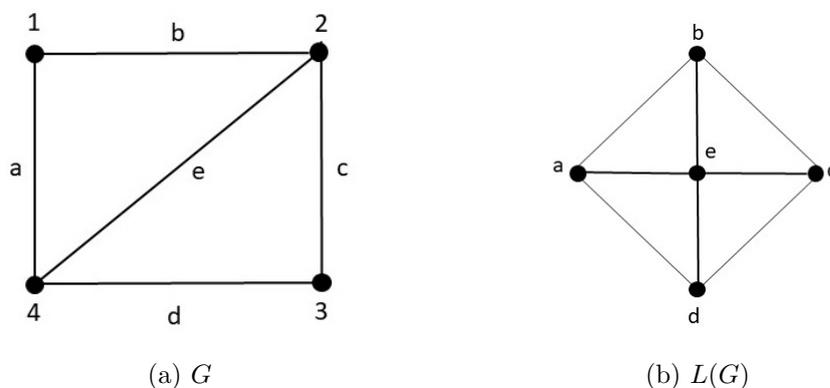


Figura 1.10: Ejemplo de una gráfica  $G$  y su gráfica de líneas  $L(G)$

Como  $e_j$  y  $e_{j+1}$  comparten el vértice  $v_{j+1}$  en  $G$ , entonces tenemos que  $(e_j, e_{j+1}) \in E(L(G))$ . Sea  $f : V(G) \rightarrow V(L(G))$  una función tal que  $f(v_i) = e_i$  para cada  $i$  en  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Como  $f$  es una función biyectiva que preserva adyacencias, entonces  $G \cong L(G)$ .

$\Rightarrow$ ] Sea  $G$  una gráfica con  $n$  vértices y  $m$  aristas.

Supongamos que  $G \cong L(G)$ . Entonces por definición de isomorfismos tenemos que  $m = n$  y esto implica que  $G$  es una gráfica conexa con  $n$  vértices y  $n$  aristas.

Procediendo por contradicción, supongamos que  $G$  no es un ciclo.

Si  $G$  no contiene ningún ciclo, entonces como  $G$  es conexa se tiene que  $G$  es un árbol, lo que implica que  $m = n - 1$  lo que contradice que  $m = n$  (por el teorema 1.3.7). Por lo tanto,  $G$  es conexa y contiene al menos un ciclo sin ser  $G$  un ciclo.

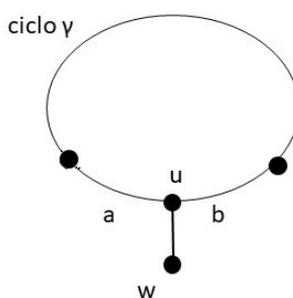


Figura 1.11: Ciclo  $\gamma$  de la gráfica  $G$

Sea  $T$  un árbol generador de  $G$  el cual existe por el teorema 1.3.8. Como

$G$  contiene un ciclo tenemos que  $E(T) \subset E(G)$ , lo que implica que  $n - 1 = |V(L(T))| < |V(L(G))| = n$ , entonces  $L(G)$  tiene exactamente un vértice más que  $L(T)$ , digamos  $a = (u, v)$ . Por lo tanto,  $|E(G)| = |E(T)| + 1$  lo que implica que  $G$  tiene exactamente un ciclo  $\gamma$  (Por la proposición 1.3.6).

Como  $G$  es una gráfica conexa que tiene exactamente un ciclo, a saber  $\gamma$ , pero  $G$  no es un ciclo, entonces existen  $u$  en los vértices de  $\gamma$  y  $w$  en  $V(G) - V(\gamma)$  tal que  $(u, w) \in E(G)$ . Por lo tanto, si  $a$  y  $b$  son las dos aristas de  $E(\gamma)$  que inciden en el vértice  $u$  (ver figura 1.11), entonces  $a$ ,  $b$  y  $(u, w)$  forman un ciclo de longitud 3 en  $L(G)$ , el cual es distinto de  $L(\gamma)$  ( $L(\gamma) \cong \gamma$  por el regreso del teorema 1.5.5) porque  $(u, w)$  no pertenece a los vértices de  $L(\gamma)$ . Por lo tanto,  $L(G)$  tiene al menos dos ciclos distintos y como  $G$  tiene exactamente un ciclo, entonces esto contradice que  $G \cong L(G)$ . Por lo tanto, no es posible que  $G$  no sea un ciclo.

Así,  $G$  es un ciclo.  $\square$

**Definición 1.5.6.** Dada una gráfica  $G$  y su gráfica de líneas  $L(G)$ , definimos la iteración  $L^n(G)$  como sigue:

- $L^1(G) = L(G)$ .
- $L^n(G) = L(L^{n-1}(G))$  para  $n \geq 2$ .

**Corolario 1.5.7.** Si  $\gamma$  es un ciclo en  $G$ , entonces  $L^m(\gamma)$  es un ciclo isomorfo a  $\gamma$  en  $L^m(G)$  para toda  $m$  en  $\mathbb{N}$ .

*Demostración.* Sea  $\gamma$  un ciclo en  $G$ . Por demostrar que  $L^m(\gamma)$  es un ciclo isomorfo a  $\gamma$  en  $L^m(G)$  para toda  $m \in \mathbb{N}$ .

Probamos por inducción sobre  $m$ .

*Base:* Si  $m = 1$ .

Sea  $\gamma$  un ciclo en  $G$ , entonces por el teorema 1.5.5  $\gamma$  es isomorfo a su gráfica de líneas  $L^1(\gamma)$ . Puesto que  $L(\gamma)$  es subgráfica de  $L(G)$  entonces  $\gamma$  es isomorfo a un ciclo de  $L(G)$ .

Por lo tanto,  $\gamma$  es un ciclo isomorfo a  $L^1(\gamma)$  en  $L^1(G)$ .

*Hipótesis de inducción:* Si  $\gamma$  es un ciclo en  $G$ , entonces  $L^n(\gamma)$  es un ciclo isomorfo a  $\gamma$  en  $L^n(G)$  para  $1 \leq n \leq m - 1$ .

*Paso inductivo:* Por demostrar que  $L^m(\gamma)$  es un ciclo isomorfo a  $\gamma$  en  $L^m(G)$ .

Por hipótesis de inducción  $L^{m-1}(\gamma) \cong \gamma$  en  $L^{m-1}(G)$ . Por otro lado, como  $L^{m-1}(\gamma)$  es un ciclo, entonces por el teorema 1.5.5 se tiene que  $L(L^{m-1}(\gamma)) \cong L^{m-1}(\gamma)$  en  $L(L^{m-1}(G))$ , lo que implica que  $L^m(\gamma) \cong L^{m-1}(\gamma)$  en  $L^m(G)$ .

Por lo tanto, por la proposición 1.1.27 tenemos que  $L^m(\gamma) \cong \gamma$  en  $L^m(G)$ .  $\square$

**Teorema 1.5.8.** *Sea  $G$  una gráfica de tamaño  $q \geq 1$ . Si  $G$  es conexa, entonces  $L(G)$  es conexa.*

*Demostración.* Sea  $G$  una gráfica conexa. Por demostrar que para cualquier par de vértices  $a$  y  $b$  en  $V(L(G))$  existe un  $ab$ -camino en  $L(G)$ .

Sean  $e$  y  $f$  dos vértices en  $L(G)$ . Si  $e$  y  $f$  son adyacentes en  $L(G)$ , entonces en  $L(G)$   $(e, f)$  es un camino. Por lo tanto, supongamos que  $e$  y  $f$  son aristas que no son adyacentes en  $G$ .

**Afirmación.** Existe un camino en  $G$  que contiene a las aristas  $e$  y  $f$ .

Sean  $u$  y  $v$  los extremos de  $e$  y  $w$  y  $z$  los extremos de  $f$ . Al ser  $G$  conexa existe un  $uw$ -camino, digamos  $W_1 = (u = x_0, \dots, x_k = w)$ .

- Si  $x_1$  es  $v$  y  $x_{k-1}$  es  $z$ , entonces como la arista que une a  $u$  con  $v$  es  $e$  y la arista que une a  $w$  con  $z$  es  $f$  tenemos que  $W_1$  es un camino en  $G$  que contiene a las aristas  $e$  y  $f$ .
- Si  $x_1$  no es  $v$  y  $x_{k-1}$  es  $z$ , entonces tenemos que  $W_1$  es un camino en  $G$  que contiene a la arista  $f$  pero no necesariamente a la arista  $e$ . Así,  $C_2 = (v, u = x_0) \cup W_1$  es un camino en  $G$  que contiene a las aristas  $e$  y  $f$ .
- Si  $x_1$  es  $v$  y  $x_{k-1}$  no es  $z$ , entonces análogamente al caso anterior, se tiene que  $P_3 = W_1 \cup (x_k = w, z)$  es un camino en  $G$  que contiene a las aristas  $e$  y  $f$ .
- Si  $x_1$  no es  $v$  y  $x_{k-1}$  no es  $z$ , entonces  $P_4 = (v, u = x_0) \cup W_1 \cup (x_k = w, z)$  es un camino en  $G$  que contiene a las aristas  $e$  y  $f$ .

Por lo tanto, al ser  $G$  conexa se tiene que para cualquier par de aristas  $e$  y  $f$  en  $E(G)$  existe un camino que las contiene.

**Observación 1.5.9.** *Sea  $P = (x_0, x_1, \dots, x_{l-1}, x_l)$  un camino en  $G$  tal que  $a_i = (x_i, x_{i+1})$  para cada  $i$  en  $\{0, 1, \dots, l-2, l-1\}$ . Entonces  $(a_0, a_1, \dots, a_{l-2}, a_{l-1})$  es un camino en  $L(G)$ .*

Por la afirmación anterior sabemos que existe  $W$  un camino en  $G$  que contiene a las aristas  $e$  y  $f$ , luego de la observación anterior  $W$  induce un camino  $W_L$  en  $L(G)$ , donde  $e$  y  $f$  son vértices del camino  $W_L$ . Sin pérdida de generalidad, si el vértice  $e$  aparece antes que el vértice  $f$ , entonces  $(e, W_L, f)$  es un camino que une a  $e$  y a  $f$  en  $L(G)$ .

Por lo tanto, para cualquier par de vértices  $a$  y  $b$  en  $L(G)$  existe un  $ab$ -camino en  $L(G)$ .  $\square$

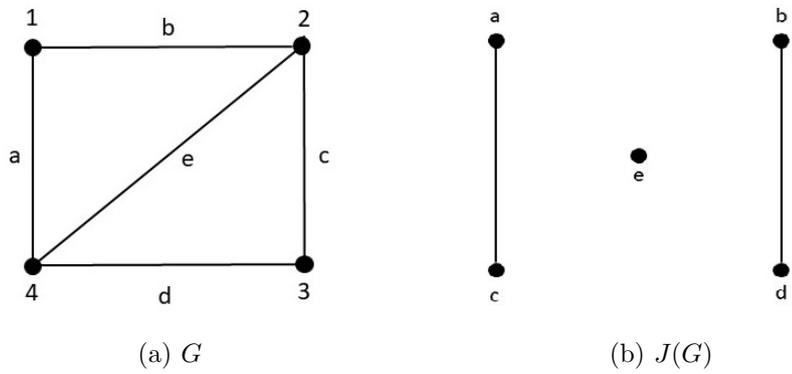


Figura 1.12: Ejemplo de una gráfica  $G$  y su gráfica de saltos  $J(G)$

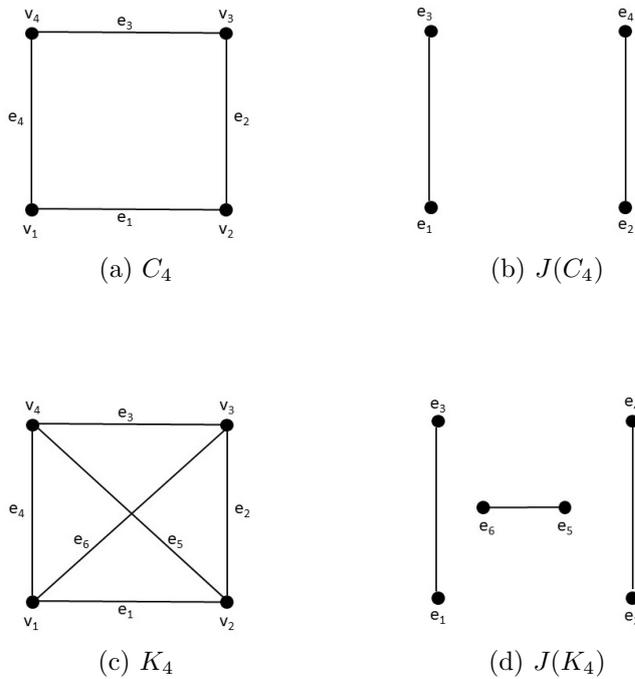


Figura 1.13: Ejemplos de gráficas conexas y sus gráficas de saltos inconexas

**Definición 1.5.10.** Dada una gráfica  $G$ , definimos su gráfica de saltos  $J(G)$  como la que cumple que:

- Cada vértice de  $J(G)$  representa una arista de  $G$ ; y
- Existe una arista entre dos vértices de  $J(G)$  si y solo si las correspondientes aristas en  $G$  no comparten un vértice en  $G$ .

**Ejemplo 1.5.11.** Sea  $G$  una gráfica, donde  $V(G) = \{1, 2, 3, 4\}$  y  $E(G) = \{a = (1, 4), b = (1, 2), c = (2, 3), d = (4, 3), e = (2, 4)\}$ . Su gráfica de saltos  $J(G)$  está representada en la figura 1.12.

**Observación 1.5.12.** *Note que si tenemos una gráfica  $G$  su gráfica de saltos  $J(G)$  es el complemento de su gráfica de líneas  $L(G)$  como se ve en las figuras 1.9, 1.10 y 1.12.*

Como vimos en el teorema 1.5.8, sabemos que si  $G$  es conexa, entonces  $L(G)$  es conexa. En el caso de la gráfica de saltos no es suficiente que  $G$  sea conexa para que  $J(G)$  sea conexa como se ve en los ejemplos de la figura 1.13.

En el siguiente teorema se establecen las condiciones para que  $J(G)$  sea conexa.

**Teorema 1.5.13.** *Sea  $G$  una gráfica de tamaño  $q \geq 1$  tal que  $G \not\cong C_4$  y  $G \not\cong K_4$ . Entonces  $J(G)$  es conexa si y solo si  $G$  no contiene una arista que sea adyacente a todas las otras aristas de  $G$ .*

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ] Si  $q = 1$ , entonces tenemos que  $J(G)$  es conexa y  $G$  no contiene una arista que sea adyacente a las otras aristas de  $G$ . Supongamos que  $q \geq 2$ .

Por demostrar que para cualquier arista  $e$  en  $G$  existe una arista  $f$  en  $G$  tal que  $e$  y  $f$  no son adyacentes.

Sea  $e$  una arista en  $G$ . Como  $e$  es un vértice de  $J(G)$  y  $J(G)$  es conexa, entonces tenemos que el grado del vértice  $e$  en  $J(G)$  es mayor o igual a 1; es decir, existe  $f$  un vértice en  $J(G)$  tal que  $(e, f)$  es una arista en  $J(G)$  y por definición de la gráfica de saltos  $e$  y  $f$  son aristas en  $G$  que no son adyacentes en  $G$ .

Por lo tanto, hemos demostrado que  $G$  no contiene una arista que sea adyacente a todas las otras aristas de  $G$ .

$\Leftarrow$ ] Por demostrar que  $J(G)$  es conexa; es decir, para cualesquiera dos vértices  $u$  y  $v$  en  $V(J(G))$  existe un  $uv$ -camino en  $J(G)$ .

Por definición de la gráfica de saltos tenemos que cada vértice de  $J(G)$  representa una arista de  $G$ ; es decir,  $V(J(G)) = E(G)$ . Sean  $e_1$  y  $e_2$  dos aristas en  $E(G)$ .

**Caso 1.**  $e_1$  y  $e_2$  no son adyacentes en  $G$ .

En este caso  $\{e_1, e_2\} \subseteq V(J(G))$  y  $e_1$  y  $e_2$  son dos vértices adyacentes en  $J(G)$ . Por lo tanto, existe un  $e_1e_2$ -camino en  $J(G)$ .

**Caso 2.**  $e_1$  y  $e_2$  son adyacentes en  $G$ .

Por hipótesis  $e_1$  no es adyacente a alguna arista en  $G$  y  $e_2$  no es adyacente a alguna arista en  $G$ .

Consideremos dos subcasos.

- Existe una arista  $e_3$  que no sea adyacente a  $e_1$  ni a  $e_2$ .

En este caso, por definición de gráfica de saltos tenemos que  $\{e_1, e_2, e_3\} \subseteq V(J(G))$  y  $(e_1, e_3) \in E(J(G))$  y  $(e_2, e_3) \in E(J(G))$ . Por lo tanto,  $C_1 = (e_1, e_3, e_2)$  es un camino en  $J(G)$  que une a  $e_1$  con  $e_2$ .

- No existe una arista  $e_3$  que no sea adyacente a  $e_1$  ni a  $e_2$ .

**Afirmación.** Existe  $e_4$  que es adyacente a  $e_2$  y no es adyacente a  $e_1$  y existe  $e_5$  que es adyacente a  $e_1$  y no es adyacente a  $e_2$ .

Como  $e_1$ , por hipótesis, no es adyacente a todas las aristas en  $G$ , entonces existe una arista  $e_4$  en  $G$  que no es adyacente a  $e_1$  pero como no existe una arista que no sea adyacente a  $e_1$  ni a  $e_2$ , entonces  $e_4$  es adyacente a  $e_2$ .

Por otro lado, puesto que  $e_2$  por hipótesis no es adyacente a todas las aristas en  $G$ , entonces con un razonamiento similar al anterior podemos decir que existe una arista  $e_5$  tal que es adyacente a  $e_1$  pero no es adyacente a  $e_2$ .

Si  $e_4$  y  $e_5$  no son adyacentes en  $G$  tenemos que  $\{e_1, e_2, e_4, e_5\} \subseteq V(J(G))$  y  $C_2 = (e_1, e_4, e_5, e_2)$  es un camino en  $J(G)$  que une a  $e_1$  con  $e_2$ .

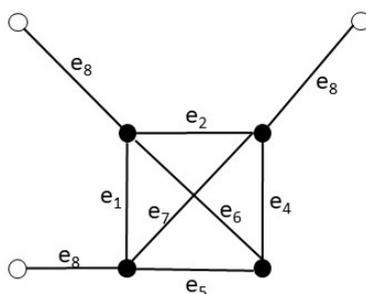
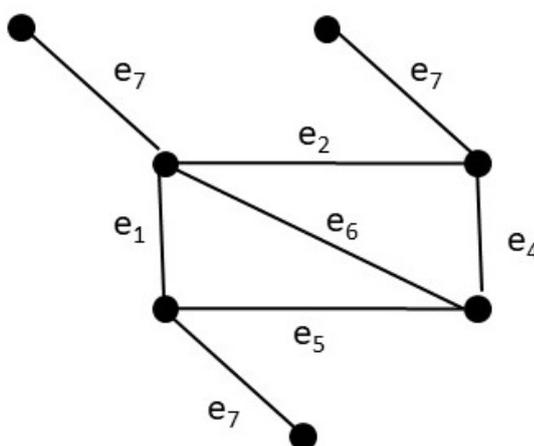
Si  $e_4$  y  $e_5$  son adyacentes en  $G$ , entonces  $G[\{e_1, e_2, e_4, e_5\}] \cong C_4$  y como  $G \not\cong C_4$ , entonces existe  $e_6$  en  $E(G) - \{e_1, e_2, e_4, e_5\}$ .

Si  $e_6$  es adyacente a  $e_1, e_2, e_4$  y  $e_5$ , entonces como  $e_6$  no es adyacente a todas las aristas en  $G$ , se tiene que existe otra arista  $e_7$  en  $E(G) - \{e_1, e_2, e_4, e_5, e_6\}$  que no es adyacente a  $e_6$ .

Si  $e_7$  es adyacente a  $e_1, e_2, e_4$  y  $e_5$ , entonces  $G[\{e_1, e_2, e_4, e_5, e_6, e_7\}] \cong K_4$  y como  $G \not\cong K_4$ , se sigue que existe  $e_8$  en  $E(G) - \{e_1, e_2, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ .

Como no existe una arista que no sea adyacente a  $e_1$  ni a  $e_2$ , entonces tenemos tres casos como se ve en la figura 1.14: si  $e_8$  es adyacente a  $e_2$  pero no a  $e_1$  entonces  $P_3 = (e_1, e_8, e_5, e_2)$  es un  $e_1e_2$ -camino en  $J(G)$ ; si  $e_8$  es adyacente a  $e_1$  y a  $e_2$  entonces  $P_4 = (e_1, e_4, e_8, e_5, e_2)$  es un  $e_1e_2$ -camino en  $J(G)$ ; si  $e_8$  es adyacente a  $e_1$  y no es adyacente a  $e_2$  entonces  $P_5 = (e_1, e_4, e_8, e_2)$  es un  $e_1e_2$ -camino en  $J(G)$ .

Si  $e_7$  no es adyacente a  $e_1, e_2, e_4$  y  $e_5$  al mismo tiempo, entonces como no existe una arista que no sea adyacente a  $e_1$  ni a  $e_2$ , tenemos tres

Figura 1.14: Posibles casos de  $e_8$  en el teorema 1.5.13Figura 1.15: Posibles casos de  $e_7$  en el teorema 1.5.13

casos respecto a  $e_7$ : si  $e_7$  es adyacente a  $e_2$  pero no a  $e_1$ ,  $e_7$  es adyacente a  $e_1$  y a  $e_2$ ,  $e_7$  es adyacente a  $e_1$  y no es adyacente a  $e_2$ . Con un razonamiento análogo al hecho con  $e_8$  tenemos que existe un  $e_1e_2$ -camino en  $J(G)$ , ver figura 1.15.

Si  $e_6$  no es adyacente a  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_4$  y  $e_5$  al mismo tiempo, entonces note que en el párrafo anterior podemos sustituir  $e_7$  por  $e_6$  y concluimos que existe un  $e_1e_2$ -camino en  $J(G)$ .

Por lo tanto, hemos demostrado que  $J(G)$  es conexa.  $\square$

**Definición 1.5.14.** Dada una gráfica  $G$ , definimos a la **corona** de la gráfica  $G$ , denotada por  $cor(G)$ , como la gráfica obtenida de  $G$  al añadir un nuevo vértice  $u$  por cada vértice  $v$  en  $V(G)$  y la arista correspondiente  $(u, v)$ .



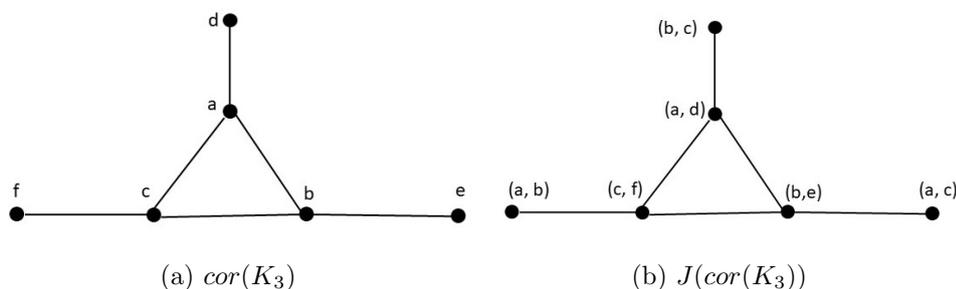


Figura 1.17:  $cor(K_3)$  y su gráfica de saltos  $J(cor(K_3))$

Como por hipótesis  $G \cong J(G)$ , entonces por definición de isomorfismos tenemos que  $m = n$  y esto implica que  $G$  es una gráfica conexa con  $n$  vértices y  $n$  aristas.

Note que  $G$  tiene al menos un ciclo ya que si  $G$  no contiene ningún ciclo, entonces como  $G$  es conexa se tiene que  $G$  es un árbol, lo que implica que  $m = n - 1$  (por el teorema 1.3.7), lo cual contradice que  $m = n$ . Por lo tanto,  $G$  es conexa y contiene al menos un ciclo.

Sea  $T$  un árbol generador de  $G$ , el cual sabemos que existe por el teorema 1.3.8. Como  $T$  es un árbol generador de  $G$ , entonces por el teorema 1.3.7 sabemos que  $|E(T)| = n - 1$ , lo cual implica que  $|V(J(T))| = n - 1$ . Puesto que  $G$  contiene al menos un ciclo, tenemos que  $E(T) \subset E(G)$ , lo que implica que  $n - 1 = |V(J(T))| < |V(J(G))| = n$ , entonces  $J(G)$  tiene exactamente un vértice más que  $J(T)$ , digamos  $b = (u, v)$ . Por lo tanto,  $|E(G)| = |E(T)| + 1$  y así  $G$  contiene un único ciclo  $\gamma$  (Por la proposición 1.3.6).

**Afirmación 1.**  $G$  no tiene una trayectoria de longitud 5.

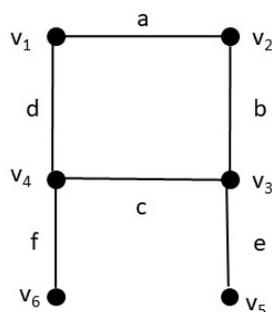
Procediendo por contradicción, supongamos que  $G$  tiene una trayectoria de longitud 5, digamos  $C_1 = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$ . Supongamos que  $a_i = (v_i, v_{i+1})$  con  $i \in \{1, \dots, 5\}$ , entonces  $(a_1, a_3, a_5, a_1)$  es un ciclo de longitud 3 en  $J(G)$ , y  $(a_1, a_4, a_2, a_5, a_1)$  es un ciclo de longitud 4 en  $J(G)$ , lo que implica que  $J(G)$  tiene al menos dos ciclos y entonces está no es isomorfa a  $G$  porque en  $G$  hay un único ciclo.

Por lo tanto,  $G$  no tiene una trayectoria de longitud 5.

Sea  $\gamma = (v_1, v_2, \dots, v_k, v_1)$ , con  $k \geq 3$ , el único ciclo que tiene  $G$ .

- Si  $\gamma$  es un ciclo de longitud mayor o igual a 6.

Entonces en particular  $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$  es una trayectoria de longitud 5, lo cual contradice la afirmación 1.

Figura 1.18: Subgráfica de  $G$ 

Por lo tanto,  $G$  no contiene un ciclo de longitud mayor o igual a 6.

- Si  $\gamma$  es un ciclo de longitud 5.

Como por hipótesis  $G$  es conexa,  $G$  contiene un único ciclo y  $G$  no es  $C_5$ , entonces existe un vértice  $w$  en  $V(G) - V(C_5)$  tal que  $w$  es adyacente a un vértice del ciclo  $C_5$ , supongamos sin pérdida de generalidad que  $w$  es adyacente a  $v_1$ . Entonces  $(w, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$  es una trayectoria de longitud 5, lo cual contradice la afirmación 1.

Por lo tanto,  $G$  no contiene un ciclo de longitud 5.

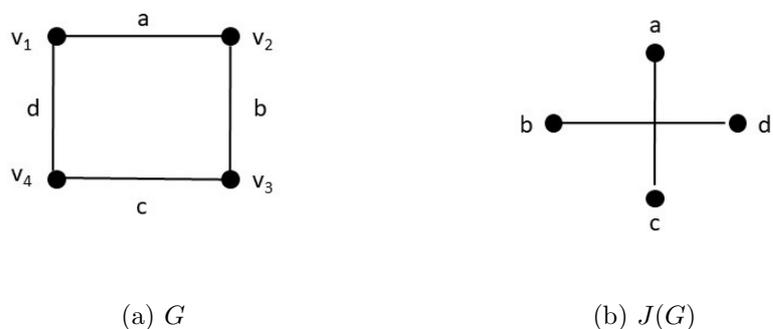
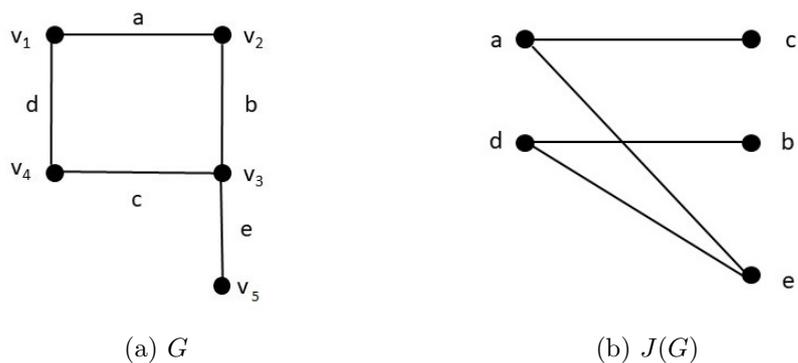
- Si  $\gamma$  es un ciclo de longitud 4.

Como  $G$  no tiene trayectorias de longitud 5, entonces  $G$  no tiene una subgráfica como indica la figura 1.18.

Por otro lado, si  $G$  es  $C_4$ , entonces  $J(G)$  es acíclica, como se muestra en la figura 1.19, lo que implica que  $G$  y  $J(G)$  no son isomorfas. Por lo tanto,  $G$  no es  $C_4$ .

Como  $G$  no es  $C_4$ ,  $G$  es conexa y  $G$  contiene un único ciclo  $\gamma$ , de longitud 4, entonces existe un vértice  $v_5$  en  $V(G) - V(C_4)$  tal que  $v_5$  es adyacente a un vértice de  $C_4$ , supongamos sin pérdida de generalidad que  $v_5$  es adyacente a  $v_3$ . Entonces  $G$  y  $J(G)$  tienen como subgráficas a las gráficas de la figura 1.20.

$G$  no puede ser la gráfica que indica la figura 1.20a porque  $G$  no es isomorfa a su gráfica de saltos exhibida en la figura 1.20b. Así, puesto que  $\gamma$  es el único ciclo de  $G$  y  $G$  es conexa, entonces existe un vértice  $w$  tal que  $w \in V(G) - \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  y  $w$  es adyacente a algún vértice del conjunto  $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ .

Figura 1.19: La gráfica  $C_4$  y  $J(C_4)$ Figura 1.20: Subgráfica de la gráfica  $G$  y su gráfica de saltos

Si  $w$  es adyacente a  $v_2$  o  $v_4$ , entonces  $G$  tendría una subgráfica isomorfa a la gráfica 1.18, lo cual ya dijimos que no puede ocurrir.

Si  $w$  es adyacente a  $v_5$ , entonces  $(v_4, v_1, v_2, v_3, v_5, w)$  es una trayectoria de longitud 5 en  $G$ , lo cual no es posible.

Si  $w$  es adyacente a  $v_1$ , entonces  $G$  y  $J(G)$  tienen como subgráficas a las gráficas indicadas en la figura 1.21, lo cual no puede ocurrir porque  $J(G)$  tiene más de un ciclo lo cual implica que  $G$  y  $J(G)$  no son isomorfas.

Si  $w$  es adyacente a  $v_3$ , entonces  $J(G)$  contiene como subgráfica a la

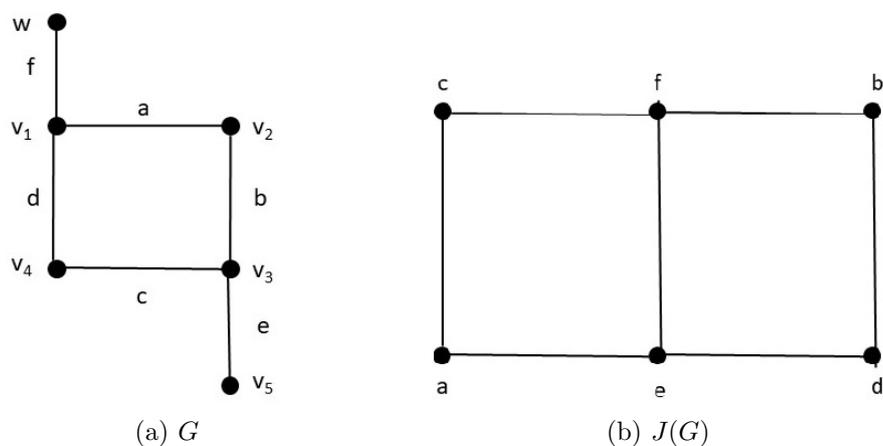


Figura 1.21: La subgráfica de  $G$  si  $w$  es adyacente a  $v_1$  y su gráfica de saltos en  $J(G)$

gráfica dada en la figura 1.22b lo cual implica que, al ser  $G$  isomorfa con  $J(G)$ ,  $G$  tendría una subgráfica como la que se ve en la figura 1.22b lo cual no puede ocurrir por lo visto en el caso cuando  $w$  es adyacente a  $v_1$ . Por lo tanto,  $w$  no puede ser adyacente a  $v_3$ .

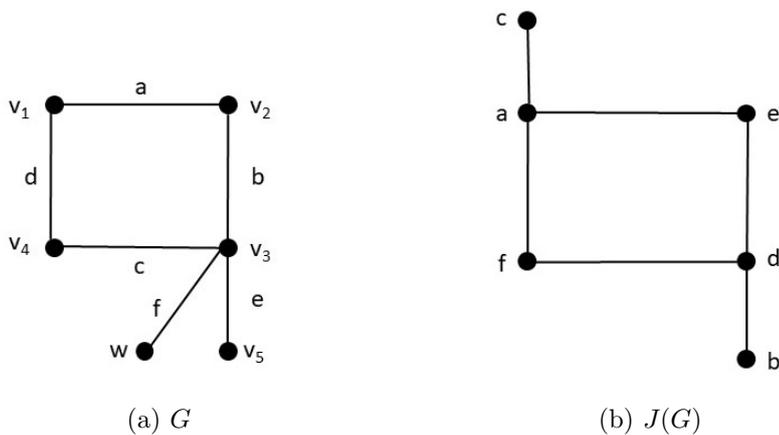


Figura 1.22: Una subgráfica de  $G$  si  $w$  es adyacente a  $v_3$  y su gráfica de saltos en  $J(G)$

Por lo tanto, como  $w$  no puede ser adyacente a ningún vértice del

conjunto  $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ , ya que genera una contradicción, entonces se concluye que  $\gamma$  no es un ciclo de longitud 4.

- Si  $\gamma$  es un ciclo de longitud 3 y sus vértices son  $a, b$  y  $c$ .

Primero veamos que  $G$  no puede tener como subgráfica a las estructuras de las imágenes 1.23, 1.24, 1.25 y 1.26 debido a que sus respectivas gráficas de saltos  $J(G)$  tiene más de un ciclo.

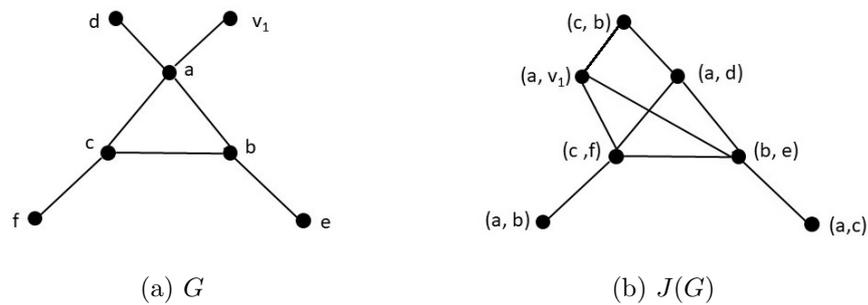


Figura 1.23: La gráfica  $G$  y su gráfica de saltos  $J(G)$

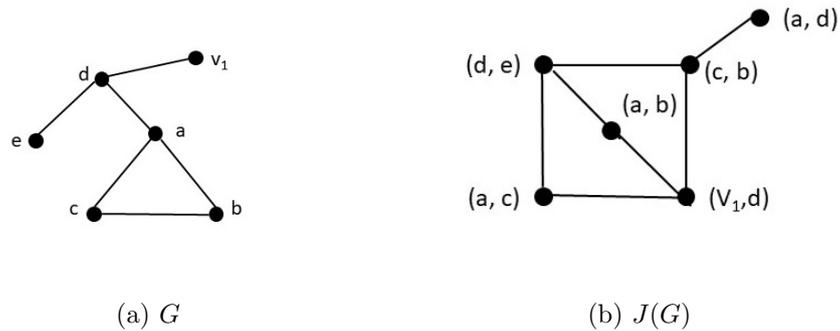


Figura 1.24: La gráfica  $G$  y su gráfica de saltos  $J(G)$

Tampoco la gráfica de la figura 1.27 puede ser una subgráfica de  $G$  porque tiene una trayectoria de longitud 5.

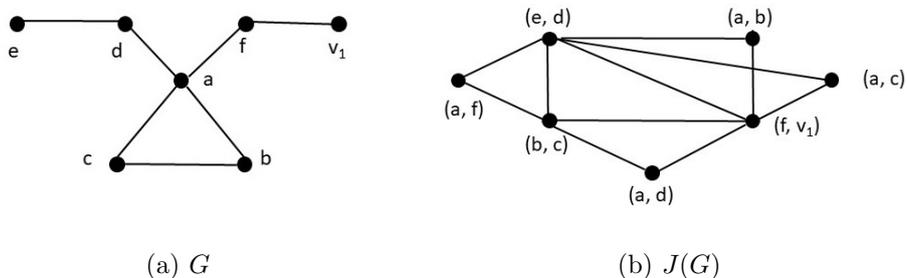


Figura 1.25: La gráfica  $G$  y su gráfica de saltos  $J(G)$

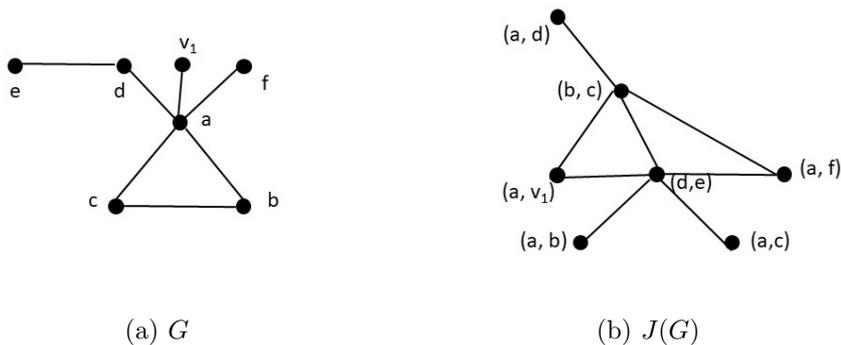


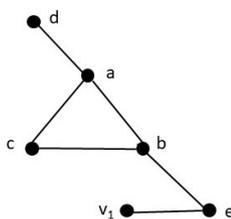
Figura 1.26: La gráfica  $G$  y su gráfica de saltos  $J(G)$

Si  $G$  es un ciclo de longitud 3, entonces  $J(G)$  consiste de tres vértices aislados, lo cual no puede ocurrir. Por lo tanto,  $G$  tiene más vértices fuera del ciclo.

De la conexidad de  $G$  tenemos que existe un vértice  $d$  fuera del ciclo  $\gamma$  el cual es adyacente a uno de los vértices de  $\gamma$ . Supongamos sin pérdida de generalidad que  $d$  es adyacente al vértice  $a$ .

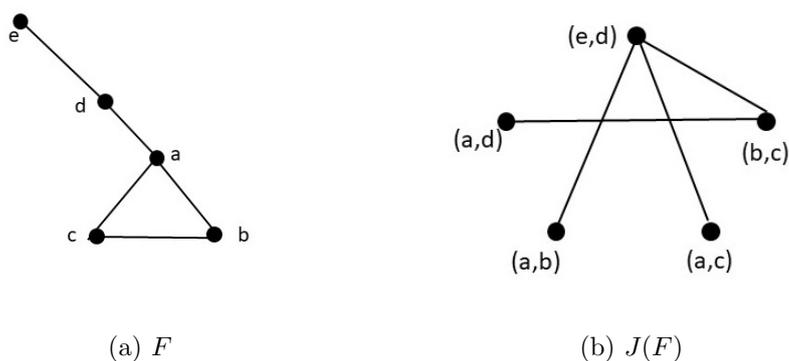
Si todos los vértices fuera del ciclo son adyacentes a  $a$ , entonces la arista  $(a, b)$  es adyacente a todas las aristas de la gráfica  $G$ , lo que implica que en  $J(G)$  el vértice  $(a, b)$  es aislado lo cual no puede ocurrir.

Por la conexidad de  $G$ , debido a que  $G$  tiene exactamente un ciclo y

Figura 1.27: Subgráfica de  $G$ 

puesto que no todas las aristas de  $G$  son incidentes con  $a$  tenemos que existe un vértice  $e$  fuera del ciclo  $\gamma$ , distinto de  $d$ , el cual es adyacente a un vértice del conjunto  $\{b, c, d\}$ .

- Si  $e$  es adyacente a  $d$ , entonces  $G$  tiene como subgráfica a la gráfica de la figura 1.28a.

Figura 1.28: La gráfica  $F$  y su gráfica de saltos  $J(F)$ 

Como la gráfica  $F$  y su gráfica de saltos  $J(F)$  vistas en la figura 1.28 no son isomorfas, entonces  $G$  no puede ser la gráfica  $F$ , lo que implica que existe un vértice  $v_1$  que es adyacente a algún vértice del conjunto  $\{a, d, b, c, e\}$ . Si  $v_1$  es adyacente a  $e$ , entonces  $G$  tiene una trayectoria de longitud 5, a saber  $(v_1, e, d, a, c, b)$ , lo cual no puede ocurrir.

Si  $v_1$  es adyacente a  $b$  o  $c$ , entonces  $G$  tiene como subgráfica isomorfa a la gráfica de la figura 1.27, lo cual no puede ocurrir, porque  $G$  no tiene trayectorias de longitud 5.

Si  $v_1$  es adyacente a  $d$ , entonces  $G$  tiene como subgráfica a la gráfica de la figura 1.24a, lo cual no es posible.

Si  $v_1$  es adyacente a  $a$ , entonces  $G$  contiene como subgráfica a la gráfica de la figura 1.29a. Como las gráficas  $F$  y  $J(F)$  de la figura 1.29 no son isomorfas, entonces  $G$  no puede ser la gráfica  $F$ .

Por la conexidad de  $G$  y como  $G$  contiene un único ciclo, entonces existe un vértice  $f$  que es adyacente a algún vértice del conjunto  $\{a, b, c, d, e, v_1\}$ .

Si  $f$  es adyacente a  $v_1$ , entonces  $G$  tiene como subgráfica isomorfa a la gráfica de la figura 1.25a, lo cual no puede ocurrir porque  $J(G)$  tiene más ciclos que  $G$ .

Si  $f$  es adyacente a  $a$ , entonces  $G$  tiene como subgráfica isomorfa a la gráfica de la figura 1.26a, lo cual no puede ocurrir porque  $J(G)$  tiene más ciclos que  $G$ .

Si  $f$  es adyacente a  $d$  a  $e$  a  $b$  o a  $c$  se ve de manera análoga a cuando  $v_1$  era adyacente a estos vértices, lo cual nos lleva a una contradicción.

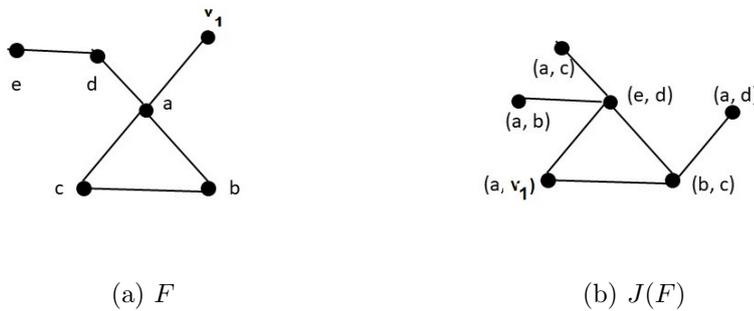


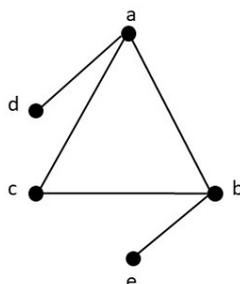
Figura 1.29: La gráfica  $F$  y su gráfica de saltos  $J(F)$

Por lo tanto  $e$  no es adyacente a  $d$ .

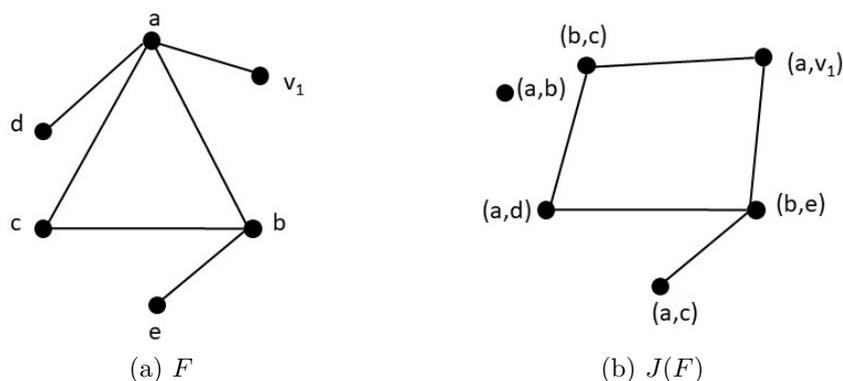
- Si  $e$  es adyacente a  $b$  o a  $c$ .

Sin pérdida de generalidad supongamos que  $e$  es adyacente a  $b$ . Por lo tanto,  $G$  tiene como subgráfica a la gráfica de la figura 1.30.

Como  $F$  no es isomorfa a su gráfica de saltos, entonces  $G$  no puede ser la gráfica  $F$ . Como  $G$  es conexa y contiene un único

Figura 1.30: Subgráfica de  $G$ 

ciclo, entonces existe un vértice  $v_1$  el cual es adyacente a algún vértice del conjunto  $\{a, b, c, d, e\}$ .

Figura 1.31: La gráfica  $F$  y su gráfica de saltos  $J(F)$ 

Note que  $v_1$  no puede ser adyacente a  $e$  o  $d$  ya que  $G$  tendría como subgráfica a la gráfica de la figura 1.27, lo cual no es posible porque  $G$  no tiene trayectorias de longitud 5.

Si  $v_1$  es adyacente a  $a$  o a  $b$  el resultado es el mismo. Por lo tanto, supongamos sin pérdida de generalidad que  $v_1$  es adyacente al vértice  $a$ . Por lo tanto  $G$  contiene como subgráfica a la gráfica  $F$  de la figura 1.31a, lo que implica que  $J(F)$  es una subgráfica de  $J(G)$ .

Como  $G$  es isomorfa a su gráfica de saltos  $J(G)$ , entonces  $G$  contiene una subgráfica isomorfa a  $J(F)$ , lo cual no puede ocurrir porque  $G$  no puede contener un ciclo de longitud 4.

Si  $v_1$  es adyacente al vértice  $c$ , entonces  $G$  contiene una subgráfica isomorfa a  $cor(K_3)$  como se ve en la figura 1.17a.

Luego  $G = F$ , porque de otra manera, de la conexidad de  $G$  y como  $G$  tiene un único ciclo, entonces  $G$  tendría un vértice  $f$  distinto a los vértices en el conjunto  $\{a, b, c, d, e, v_1\}$  el cual es adyacente a algún vértice del conjunto  $\{a, b, c, d, e, v_1\}$ , lo cual no puede ocurrir porque  $G$  tendría como subgráfica a la gráfica de la figura 1.23a o tendría como subgráfica a la gráfica de la figura 1.27 lo cual ya vimos que no puede ocurrir.

Por lo tanto,  $G$  es isomorfa a  $cor(K_3)$ .

□

**Definición 1.5.17.** Dada una gráfica  $G$  y su gráfica de saltos  $J(G)$ , definimos la iteración  $J^n(G)$  como sigue:

- $J^1(G) = J(G)$ .
- $J^n(G) = J(J^{n-1}(G))$  para  $n \geq 2$ .

**Corolario 1.5.18.** Sea  $C_5$  un ciclo en  $G$ , entonces  $J^m(C_5)$  es un ciclo isomorfo a  $C_5$  en  $J^m(G)$  para todo  $m$  en  $\mathbb{N}$ .

*Demostración.* Sea  $C_5$  un ciclo en  $G$ . Por demostrar que  $J^m(C_5)$  es un ciclo isomorfo a  $C_5$  en  $J^m(G)$  para toda  $m$  en  $\mathbb{N}$ .

Probamos por inducción sobre  $m$ .

*Base:* Si  $m = 1$ .

En este caso por el teorema 1.5.16 se tiene que  $C_5$  es isomorfo a su gráfica de saltos  $J^1(C_5)$ . Puesto que  $J(C_5)$  es subgráfica de  $J(G)$  entonces  $C_5$  es isomorfo a un ciclo en  $J(C_5)$ .

Por lo tanto,  $C_5$  es un ciclo isomorfo a  $J^1(C_5)$  en  $J^1(G)$ .

*Hipótesis de inducción:* Supongamos que  $J^n(C_5)$  es un ciclo que es isomorfo a  $C_5$  en  $J^n(G)$  para  $1 \leq n \leq m - 1$ .

*Paso inductivo:* Por demostrar que  $J^m(C_5)$  es un ciclo isomorfo a  $C_5$  en  $J^m(G)$ .

Por hipótesis de inducción tenemos que  $J^{m-1}(C_5) \cong C_5$  en  $J^{m-1}(G)$ , entonces por el teorema 1.5.16 se tiene que  $J(J^{m-1}(C_5)) \cong J^{m-1}(C_5)$ . Así  $J(J^{m-1}(C_5)) \cong J^{m-1}(C_5) \cong C_5$  y por la proposición 1.1.27 se tiene que  $J(J^{m-1}(C_5)) \cong C_5$ . Puesto que  $J(J^{m-1}(C_5)) = J^m(C_5)$ ,  $J(J^{m-1}(G)) = J^m(G)$  y  $J(J^{m-1}(C_5))$  es una subgráfica de  $J(J^{m-1}(G))$ , tenemos que  $J^m(C_5)$  es un ciclo isomorfo a  $C_5$  en  $J^m(G)$ . □



## Capítulo 2

# Gráfica de aristas y vértices de corte.

En este capítulo se da la definición de la gráfica de aristas y vértices de corte y se ven algunas propiedades estructurales de esta gráfica. Demostramos que la gráfica de líneas  $L(G)$  de  $G$  es una subgráfica inducida de  $G^{++}$  y de  $G^{+-}$ , mientras que por otro lado la gráfica de saltos  $J(G)$  de  $G$  es una subgráfica inducida de  $G^{-+}$  y  $G^{--}$ . Por último se deduce el orden y tamaño de  $G^{xy}$ .

**Definición 2.0.1.** Sean  $G$  una gráfica y  $xy$  una permutación del conjunto  $\{+, -\}$ . La gráfica de aristas y vértices de corte  $G^{xy}$  es la gráfica tal que  $V(G^{xy}) = E(G) \cup W(G)$  y para  $u$  y  $v$  en  $E(G) \cup W(G)$ , se tiene que  $(u, v)$  está en  $E(G^{xy})$  si y solo si ocurre alguno de los siguientes casos:

- Si  $x = +$ ,  $\{u, v\} \subseteq E(G)$  y  $u$  y  $v$  son adyacentes en  $G$ .
- Si  $x = -$   $\{u, v\} \subseteq E(G)$  y  $u$  y  $v$  no son adyacentes en  $G$ .
- Si  $y = +$ ,  $u \in E(G)$  y  $v \in W(G)$ , y  $u$  y  $v$  son incidentes en  $G$ .
- Si  $y = -$ ,  $u \in E(G)$  y  $v \in W(G)$ , y  $u$  y  $v$  no son incidentes en  $G$ .

**Ejemplo 2.0.2.** Sea  $G$  una gráfica donde  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$  y  $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ , ver figura 2.1a. Sus 4 gráficas de aristas y vértices de corte están representadas en la figura 2.1.

De la definición de  $G^{xy}$  podemos deducir los siguientes resultados.

**Proposición 2.0.3.** Sean  $G$  una gráfica y  $G^{+y}$  su gráfica de aristas y vértices de corte. Si  $L(G)$  es la gráfica de líneas de  $G$ , entonces  $L(G) = G^{+y}[E(G)]$ .

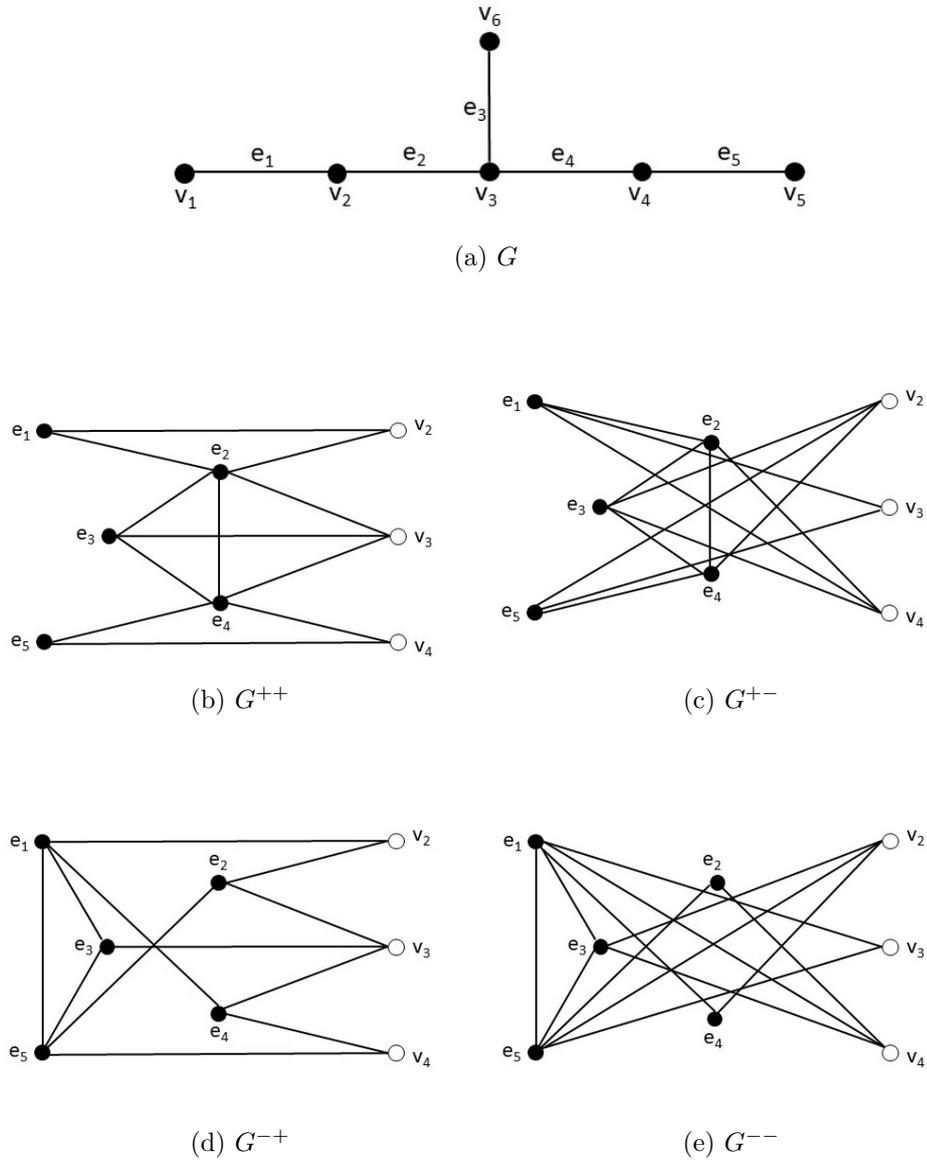


Figura 2.1: Ejemplo de una gráfica  $G$  y sus 4 gráficas de aristas y vértices de corte

*Demostración.* Sea  $G$  una gráfica. Por demostrar que  $L(G) = G^{+y}[E(G)]$ , con  $y \in \{+, -\}$ ; es decir,  $V(L(G)) = V(G^{+y}[E(G)])$  y  $E(L(G)) = E(G^{+y}[E(G)])$ .

1. Sea  $L(G)$  la gráfica de líneas de  $G$ . Por definición  $V(L(G)) = E(G)$  y  $V(G^{+y}[E(G)]) = E(G)$ , lo que implica que  $V(L(G)) = V(G^{+y}[E(G)])$ .
2. Por demostrar que  $(v, w) \in E(G^{+y}[E(G)])$  si y solo si  $(v, w) \in E(L(G))$ .

$\Rightarrow$ ] Por hipótesis  $(v, w) \in E(G^{+y}[E(G)])$ , lo que implica que  $(v, w) \in E(G^{+y})$  y  $\{v, w\} \subseteq E(G)$ , por definición de gráfica inducida por vértices. Así,  $v$  y  $w$  comparten un vértice en  $G$ , por definición de  $G^{+y}$ , lo que nos lleva a que existe una arista entre  $v$  y  $w$  en  $L(G)$ . Por lo tanto,  $(v, w) \in E(L(G))$ .

$\Leftarrow$ ] Por hipótesis tenemos que  $(v, w) \in E(L(G))$ , entonces por definición  $v$  y  $w$  son aristas que comparten un vértice en  $G$ . Luego, por definición de la gráfica de aristas y vértices de corte  $G^{+y}$  tenemos que  $(v, w) \in E(G^{+y})$ .

Por lo tanto,  $(v, w) \in E(G^{+y}[E(G)])$  si y solo si  $(v, w) \in E(L(G))$ .

Por 1 y 2 tenemos que  $L(G) = G^{+y}[E(G)]$ . □

**Proposición 2.0.4.** *Sean  $G$  una gráfica y  $G^{-y}$  su gráfica de aristas y vértices de corte. Si  $J(G)$  es la gráfica de saltos de  $G$ , entonces  $J(G) = G^{-y}[E(G)]$ .*

*Demostración.* Sea  $G$  una gráfica. Por demostrar que  $J(G) = G^{-y}[E(G)]$  con  $y \in \{+, -\}$ ; es decir,  $V(J(G)) = V(G^{-y}[E(G)])$  y  $E(J(G)) = E(G^{-y}[E(G)])$ .

1. Sea  $J(G)$  la gráfica de saltos de  $G$ . Por definición  $V(J(G)) = E(G)$  y  $V(G^{-y}[E(G)]) = E(G)$  entonces  $V(J(G)) = V(G^{-y}[E(G)])$ .
2. Por demostrar  $(v, w) \in E(G^{-y}[E(G)])$  si y solo si  $(v, w) \in E(J(G))$ .

$\Rightarrow$ ] Por hipótesis  $(v, w) \in E(G^{-y}[E(G)])$ , entonces por definición de gráfica inducida por vértices tenemos que  $(v, w) \in E(G^{-y})$  con  $\{v, w\} \subseteq E(G)$ . Por definición de  $G^{-y}$  tenemos que  $v$  y  $w$  no son adyacentes en  $G$ , lo que implica que existe una arista entre  $v$  y  $w$  en  $J(G)$ . Por lo tanto,  $(v, w) \in E(J(G))$ .

$\Leftarrow$ ] Por hipótesis tenemos que  $(v, w) \in E(J(G))$ , entonces por definición de gráfica de saltos tenemos que  $v$  y  $w$  son aristas que no comparten un vértice en  $G$ . Luego por definición de la gráfica de aristas y vértices de corte  $G^{-y}$  tenemos que  $(v, w) \in E(G^{-y})$ , entonces  $(v, w) \in E(G^{-y}[E(G)])$ .

Por lo tanto,  $(v, w) \in E(G^{-y}[E(G)])$  si y solo si  $(v, w) \in E(J(G))$ .

Por 1 y 2 tenemos que  $J(G) = G^{-y}[E(G)]$ . □

**Teorema 2.0.5.** *Sea  $G$  una gráfica conexa no trivial con  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ ,  $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_q\}$ ,  $W(G) = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ ,  $U(G) = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ ,  $d_i$  el grado del vértice  $v_i$  en  $G$ ,  $L_i$  el número de aristas que inciden en el vértice de corte  $c_i$  en  $G$  y  $C(B_i)$  el número de vértices de corte de  $G$  que son vértices del bloque  $B_i$ . Entonces*

1. El orden de  $G^{xy}$  es  $q + 1 + \sum_{i=1}^n (C(B_i) - 1)$
2. El tamaño de  $G^{+-}$  es  $-q + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p d_i^2 + \sum_{i=1}^m (q - L_i)$ .
3. El tamaño de  $G^{-+}$  es  $\binom{q+1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p d_i^2 + \sum_{i=1}^m (L_i)$ .
4. El tamaño de  $G^{--}$  es  $\binom{q+1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p d_i^2 + \sum_{i=1}^m (q - L_i)$ .
5. El tamaño de  $G^{++}$  es  $-q + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p d_i^2 + \sum_{i=1}^m L_i$ .

*Demostración.* Sea  $G$  una gráfica conexa y no trivial.

Por demostrar que el orden de  $G^{xy}$  es  $q + 1 + \sum_{i=1}^n (C(B_i) - 1)$ ; es decir

$$|V(G^{xy})| = q + 1 + \sum_{i=1}^n (C(B_i) - 1).$$

Por hipótesis  $G$  es una gráfica de orden  $p$  y tamaño  $q$ , entonces su gráfica de aristas y vértices de corte  $G^{xy}$  por definición tiene  $V(G^{xy}) = E(G) \cup W(G)$  y como  $W(G) \cap E(G) = \emptyset$  tenemos que el orden de  $G^{xy}$  es  $|E(G)| + |W(G)|$ .

Como  $|E(G)| = q$  tenemos que el orden de  $G^{xy}$  es  $q + |W(G)|$ .

Por demostrar  $|W(G)| = 1 + \sum_{i=1}^n (C(B_i) - 1)$  con  $C(B_i)$  el número de vértices de corte de  $G$  que son vértices del bloque  $B_i$ .

Suponemos que  $G$  no tiene vértices de corte. Como el orden de  $G^{xy}$  es  $q + |W(G)|$  y  $G$  es conexa entonces  $|W(G)| = 0 = 1 + 0 - 1 = 1 + \sum_{i=1}^1 (0 - 1) =$

$1 + \sum_{i=1}^n (C(B_i) - 1)$ . Por lo tanto, si  $G$  no tiene vértices de corte el orden de

$$G^{xy} \text{ es } q + 1 + \sum_{i=1}^n (C(B_i) - 1).$$

Si  $G$  tiene uno o más vértices de corte por el teorema 1.4.10 tenemos que el número de vértices de corte de  $G$  es  $1 + \sum_{i=1}^n (C(B_i) - 1)$ .

Por lo tanto, si  $G$  es una gráfica conexa no trivial, entonces el orden de  $G^{xy}$  es  $q + 1 + \sum_{i=1}^n (C(B_i) - 1)$ .

1. Por demostrar que el tamaño de  $G^{+-}$  es  $-q + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p d_i^2 + \sum_{i=1}^m (q - L_i)$

El tamaño de  $G^{+-}$  es su número de aristas y por definición de  $G^{+-}$  se tiene que  $(u, v) \in E(G^{+-})$  si  $\{u, v\} \subseteq E(G)$  y  $u$  y  $v$  son adyacentes en  $G$  o si  $u \in E(G)$  y  $v \in W(G)$  y  $u$  y  $v$  no son incidentes en  $G$ .

En  $G$  dos aristas  $e_1, e_2$  son adyacentes si tienen un extremo en común, digamos  $v_1$ . Ese vértice  $v_1$  es el único que hace adyacente a  $e_1$  y  $e_2$ . Entonces si un vértice  $v_i$  tiene grado  $d_i$  tenemos que existen  $\binom{d_i}{2}$  conjuntos  $\{e_i, e_j\}$  tal que  $e_i$  y  $e_j$  son aristas que tienen al vértice  $v_i$  en común en  $G$ . Por lo tanto el número total de subconjuntos  $\{u, v\}$  de  $E(G)$  tal que  $u$  y  $v$  son adyacentes en  $G$  es

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p \binom{d_i}{2} &= \sum_{i=1}^p \frac{(d_i)!}{2!(d_i-2)!} = \sum_{i=1}^p \frac{d_i(d_i-1)}{2} = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^p d_i^2 - \sum_{i=1}^p d_i \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^p d_i^2 \right) - \frac{2q}{2} = -q + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p d_i^2. \end{aligned}$$

Por otro lado sean  $e_i$  en  $E(G)$  y  $c_i$  en  $W(G)$ . Sabemos que  $e_i$  y  $c_i$  no son incidentes en  $G$  si el vértice  $c_i$  no es extremo de  $e_i$ , como  $L_i$  es el número de aristas que inciden en el vértice de corte  $c_i$  en  $G$ , entonces  $c_i$  no es extremo de  $q - L_i$  aristas en  $G$ . Por lo tanto, el número de aristas que no son incidentes con un vértice de corte de  $G$ , al existir  $m$  vértices de corte en  $G$  es  $\sum_{i=1}^m (q - L_i)$ .

Por lo tanto, el tamaño de  $G^{+-}$  es  $-q + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p d_i^2 + \sum_{i=1}^m (q - L_i)$ .

2. Por demostrar que el tamaño de  $G^{-+}$  es  $\binom{q+1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p d_i^2 + \sum_{i=1}^m L_i$ .

El tamaño de  $G^{-+}$  es su número de aristas y por definición de  $G^{-+}$  se tiene que  $(u, v) \in E(G^{-+})$  si  $\{u, v\} \subseteq E(G)$  y  $u$  y  $v$  no son adyacentes en  $G$  o si  $u \in E(G)$  y  $v \in W(G)$  y  $u$  y  $v$  son incidentes en  $G$ .

Dos aristas  $e_1$  y  $e_2$  en  $G$  no son adyacentes si no tienen un extremo en común. Como tenemos que existen  $\binom{q}{2}$  parejas de aristas en  $G$ , entonces si le restamos el número de parejas de aristas que son adyacentes obtenemos el número de parejas de aristas que no son adyacentes en

$G$ ; es decir

$$\begin{aligned} \binom{q}{2} - \left(-q + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p d_i^2\right) &= \frac{q!}{2!(q-2)!} + q - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p d_i^2 = \\ \frac{q(q-1)}{2} + q - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p d_i^2 &= \frac{q(q-1) + 2q}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p d_i^2 = \\ \frac{q^2 - q + 2q}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p d_i^2 &= \frac{q^2 + q}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p d_i^2 = \\ \frac{q(q+1)}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p d_i^2 &= \frac{(q+1)!}{2(q-1)!} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p d_i^2 = \binom{q+1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p d_i^2. \end{aligned}$$

Por otro lado, sean  $e_i$  en  $E(G)$  y  $c_i$  en  $W(G)$ . Como  $e_i$  y  $c_i$  son incidentes en  $G$  si el vértice  $c_i$  es extremo de  $e_i$  y sabemos que  $L_i$  es el número de aristas que inciden en el vértice de corte  $c_i$  en  $G$ , entonces  $c_i$  es extremo de  $L_i$  aristas. Por lo tanto, el número de aristas que son incidentes con un vértice de corte de  $G$  al existir  $m$  vértices de corte en  $G$  es  $\sum_{i=1}^m L_i$ .

Por lo tanto, el tamaño de  $G^{-+}$  es  $\binom{q+1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p d_i^2 + \sum_{i=1}^m L_i$ .

3. Por demostrar que el tamaño de  $G^{--}$  es  $\binom{q+1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p d_i^2 + \sum_{i=1}^m (q - L_i)$ .

Por definición de  $G^{--}$  se tiene que  $(u, v) \in E(G^{--})$  si  $\{u, v\} \subseteq E(G)$  y  $u$  y  $v$  no son adyacentes en  $G$  o si  $u \in E(G)$  y  $v \in W(G)$  y  $u$  y  $v$  no son incidentes en  $G$ .

Por 2 tenemos que  $\binom{q+1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p d_i^2$  es el número de parejas de aristas que no son adyacentes en  $G$ . Por 1 sabemos que el número de aristas que no son incidentes con un vértice de corte de  $G$  es  $\sum_{i=1}^m (q - L_i)$ .

Por lo tanto, el tamaño de  $G^{--}$  es  $\binom{q+1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p d_i^2 + \sum_{i=1}^m (q - L_i)$ .

4. Por demostrar que el tamaño de  $G^{++}$  es  $-q + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p d_i^2 + \sum_{i=1}^m L_i$ .

Por definición de  $G^{++}$  se tiene que  $(u, v) \in E(G^{++})$  si  $\{u, v\} \subseteq E(G)$  y  $u$  y  $v$  son adyacentes en  $G$  o si  $u \in E(G)$  y  $v \in W(G)$  y  $u$  y  $v$  son incidentes en  $G$ .

Por 1 tenemos que  $-q + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p d_i^2$  es el número de parejas de aristas que son adyacentes en  $G$ . Por 2 sabemos que el número de aristas que son incidentes con un vértice de corte de  $G$  es  $\sum_{i=1}^m L_i$ .

Por lo tanto, el tamaño de  $G^{++}$  es  $-q + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p d_i^2 + \sum_{i=1}^m L_i$ .

□



# Capítulo 3

## Conexidad de $G^{xy}$

En este capítulo se ven las condiciones necesarias y suficientes para que se cumpla la conexidad de  $G^{xy}$  a partir de la conexidad de  $G$ .

### 3.1. Conexidad de $G^{++}$

**Teorema 3.1.1.** *Dada una gráfica  $G$  sin vértices aislados,  $G^{++}$  es conexa si y solo si  $G$  es conexa.*

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ] Supongamos que  $G^{++}$  es conexa. Por demostrar que  $G$  es conexa; es decir, para cualquier par de vértices  $u$  y  $v$  en  $V(G)$  existe un  $uv$ -camino en  $G$ .

Sean  $u$  y  $v$  dos vértices en  $G$ . Demostraremos que existe un  $uv$ -camino en  $G$ .

Como  $G$  no tiene vértices aislados, si  $u$  y  $v$  comparten una arista, entonces  $(u, v)$  es un camino en  $G$ . Por lo tanto, supongamos que  $u$  y  $v$  son vértices que no son adyacentes en  $G$ .

Consideremos tres casos sobre  $u$  y  $v$ .

**Caso 1.**  $u$  y  $v$  son vértices de corte en  $G$ .

Como  $u$  y  $v$  son vértices de corte en  $G$ , entonces  $\{u, v\} \subseteq V(G^{++})$  lo que implica que existe un  $uv$ -camino en  $G^{++}$ , porque  $G^{++}$  es conexa.

Sea  $P=(u = x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, v = x_k)$  una trayectoria más corta que una a  $u$  con  $v$  en  $G^{++}$ . Como no existe una arista que una a  $u$  con  $v$  en  $G^{++}$  tenemos que  $k \geq 2$  y  $x_1 \in E(G)$ . Supongamos que  $x_1 = (u, w_1)$ . Sea  $x_i$  el primer vértice de corte en  $G$  que aparece en  $(x_1, P, v)$ , sabemos que  $x_i$  existe porque al menos  $v$  es un vértice de corte en  $G$  que está en  $(x_1, P, v)$ .

Por elección de  $i$  sabemos que todos los  $x_j$  con  $j < i$  son aristas en  $G$ .

**Observación 1.1**  $x_j$ , con  $1 < j < i$ , no tienen como extremo a  $u$ .

Procediendo por contradicción supongamos que existe  $x_j$  tal que  $x_j$  tiene como extremo a  $u$ . Entonces esto implicaría que la trayectoria  $(u, x_j) \cup (x_j, P, v)$  es de longitud menor que  $P$ , lo cual no es posible.

Como  $x_1 = (u, w_1)$ , entonces tenemos que  $x_2 \in E(G)$  y, por definición de  $G^{++}$ ,  $x_2$  comparte un vértice en  $G$  con  $x_1$ . Luego por la observación anterior  $x_2 = (w_1, w_2)$ . Del mismo modo  $x_3$ , por definición de  $G^{++}$ , es una arista en  $G$  que comparte un vértice con  $x_2$ , ese vértice que comparten no puede ser  $w_1$  ya que de otra manera la trayectoria  $(u, x_1, x_3) \cup (x_3, P, v)$  sería de menor longitud que  $P$ , lo cual no es posible. Entonces  $x_3 = (w_2, w_3)$  con  $w_3 \neq w_1$ . Así  $(u, w_1, w_2, w_3)$  es un camino en  $G$ . Seguimos el mismo procedimiento hasta llegar a  $x_{i-1}$  la cual es una arista incidente en  $G$  con el vértice  $x_i$ , donde  $x_{i-1} = (w_{i-2}, w_{i-1})$  y  $\{u, w_1, \dots, w_{i-2}, w_{i-1}\}$  son distintos dos a dos. Note que  $x_i \notin \{w_1, w_2, \dots, w_{i-3}, w_{i-2}\}$  ya que de otra manera si  $x_i = w_j$ , con  $1 \leq j \leq i-2$ , entonces la trayectoria  $(u, P, w_j) \cup (x_j, P, v)$  sería de longitud menor que  $P$ , lo cual no es posible, lo que implica que por definición de  $G^{++}$  tenemos que  $x_i = w_{i-1}$ . Por lo tanto,  $(u, w_1, w_2, \dots, w_{i-2}, w_{i-1} = x_i)$  es una trayectoria en  $G$ . Si  $x_i = v$  ya tenemos una trayectoria entre  $u$  y  $v$  en  $G$ , de otra manera volvemos a hacer el mismo procedimiento en  $(x_i, P, v)$ . De esta manera es posible encontrar un camino entre  $u$  y  $v$  en  $G$ .

**Caso 2.**  $u$  no es un vértice de corte en  $G$  y  $v$  es un vértice de corte en  $G$ .

Como  $u$  no es un vértice aislado en  $G$ , entonces sean  $x_1$  una arista en  $G$  que es incidente en  $u$  y  $w_1$  un vértice en  $G$  tal que  $x_1 = (u, w_1)$ . Puesto que  $G^{++}$  es conexa tenemos que existe un  $x_1v$ -camino en  $G^{++}$ . Sea  $P' = (x_1, \dots, v = x_k)$  una  $x_1v$ -trayectoria más corta en  $G^{++}$ . Sea  $x_i$  el primer vértice de corte en  $G$  que aparece en  $P'$  sabemos que  $x_i$  existe porque al menos  $v$  es un vértice de corte en  $G$  que está en  $P'$ . Con el mismo procedimiento que en el caso 1 garantizamos la existencia de un  $uv$ -camino en  $G$ .

**Caso 3.** Ni  $u$  ni  $v$  son vértices de corte en  $G$ .

Como ni  $u$  ni  $v$  son vértices aislados en  $G$ , entonces sean  $x_1$  una arista en  $G$  incidente en  $u$  y  $w_1$  un vértice en  $G$  tal que  $x_1 = (u, w_1)$ ,  $x_n$  una arista en  $G$  incidente en  $v$  y  $w_n$  un vértice en  $G$  tal que  $x_n = (v, w_n)$ . Puesto que  $G^{++}$  es conexa tenemos que existe un  $x_1x_n$ -camino en  $G^{++}$ . Sea  $P'' = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  una trayectoria más corta que une a  $x_1$  con  $x_n$  en  $G^{++}$ .

Consideremos los siguientes dos casos sobre los vértices de  $P''$ .

- Existe un vértice de corte  $w$  en  $G$  que está en  $P''$ .

Supongamos que  $w = x_j$  para algún  $j$  en  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Como  $(x_1, P'', w)$  es una trayectoria de una arista de  $G$  a un vértice de corte de  $G$  en  $G^{++}$ , entonces por el caso 2 existe un  $uw$ -camino en  $G$ . Sea  $C = (w, P'', x_n)$  entonces la trayectoria  $C^{-1}$  es una trayectoria en  $G^{++}$  que va de una

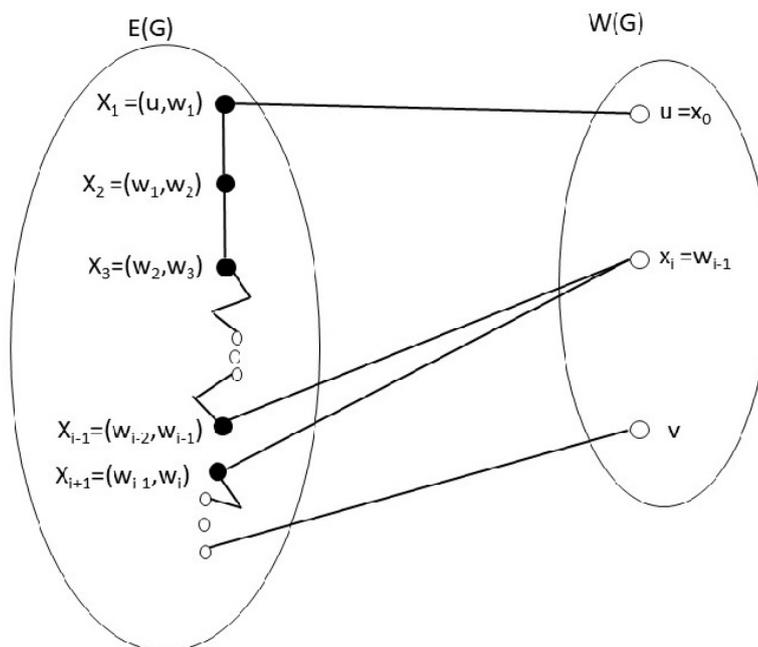


Figura 3.1: Gráfica de  $G^{++}$

arista de  $G$  a un vértice de corte de  $G$  en  $G^{++}$ , entonces por el caso 2 existe un  $x_n w$ -camino en  $G$ . Por lo tanto, existe un  $uv$ -camino en  $G$ .

- No existe un vértice de corte  $w$  en  $G$  que está en  $P''$ .

Sean  $P'' = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  una trayectoria de longitud más corta que une a  $x_1$  con  $x_n$  en  $G^{++}$  y  $x_i = (w_{i-1}, w_i)$  con  $i = \{1, 2, \dots, n\}$ .

**Observación 2.1** No existen  $w_i$  y  $w_j$  tal que  $w_i = w_j$  con  $i < j$ .

Procediendo por contradicción, supongamos que existen dos vértices  $w_i$  y  $w_j$  tal que  $w_i = w_j$  en  $\{w_0, w_1, w_2, \dots, w_n\}$ . Note que  $w_i$  y  $w_j$  no pueden ser dos vértices consecutivos en la trayectoria  $P''$  ya que si lo fueran entonces como  $x_i = (w_{i-1}, w_i)$  y  $x_j = (w_i, w_{i+1})$  entonces tendríamos que  $w_{i-1} = w_i$  entonces  $x_i$  sería un lazo lo cual no puede ocurrir. Entonces, tenemos que  $x_{i+1} = (w_i, w_{i+1})$  y  $x_{j+1} = (w_j, w_{j+1})$  son vértices de  $G^{++}$  en la trayectoria  $P''$  y como por hipótesis  $w_i = w_j$  tenemos que  $(u, P'', x_{i+1}) \cup (x_{j+1}, P'', v)$  sería una trayectoria de menor longitud que  $P''$  lo cual contradice que  $P''$  lo es. Por lo tanto, no existen  $w_i$  y  $w_j$  tal que  $w_i = w_j$  con  $i < j$ .

Así por observación 2.1 tenemos que  $(w_0 = u, w_1, w_2, \dots, w_{n-1}, w_n = v)$  es un camino en  $G$ .

Por lo tanto, si  $G^{++}$  es conexa entonces  $G$  es conexa.

⇐] Sea  $G$  una gráfica conexa. Por demostrar que  $G^{++}$  es conexa. Es decir para cualquier par de vértices  $a$  y  $b$  en  $V(G^{++})$  existe un  $ab$ -camino en  $G^{++}$ . Sean  $a$  y  $b$  vértices en  $G^{++}$ .

**Caso 1**  $a$  y  $b$  son aristas en  $G$ .

Por el teorema 1.5.8 y por la proposición 2.0.3 tenemos que existe un  $ab$ -camino en  $G^{++}$ .

**Caso 2**  $a$  es una arista en  $G$  y  $b$  es un vértice de corte de  $G$ .

Por definición de gráfica de aristas y vértices de corte  $G^{++}$ ,  $b$  es adyacente en  $G^{++}$  con aristas que son incidentes con  $b$  en  $G$ . Sea  $e$  una arista incidente con  $b$  en  $G$ , entonces por el caso 1 existe un  $ae$ -camino en  $G^{++}$ . Sea  $C_1 = (a, x_0, \dots, x_k, e)$  el camino que une a  $a$  con  $e$  en  $G^{++}$ . Como  $b$  y  $e$  son adyacentes en  $G^{++}$  tenemos que  $C_2 = (a, x_0, \dots, x_k, e, b)$  es el camino que une a  $a$  con  $b$  en  $G^{++}$ .

Por lo tanto, si  $a$  es una arista en  $G$  y  $b$  un vértice de corte en  $G$ , entonces existe un  $ab$ -camino en  $G^{++}$ .

**Caso 3**  $a$  y  $b$  son vértices de corte en  $G$ .

Al ser  $G$  conexa existe un  $ab$ -camino en  $G$ , digamos  $C_3 = (a, y_0, \dots, y_k, b)$ . Como  $a$  es incidente con la arista  $f = (a, y_0)$  en  $G$ , tenemos que  $(a, f) \in E(G^{++})$ , de la misma manera tenemos que para  $g = (y_k, b)$   $(b, g) \in E(G^{++})$ . Luego por el caso 1 existe un  $fg$ -camino en  $G^{++}$ , digamos  $C'_3 = (f, z_0, \dots, z_k, g)$ , lo que implica que  $(a, f) \cup C'_3 \cup (g, b)$  es un camino en  $G^{++}$  que une a  $a$  con  $b$ .

Por lo tanto, si  $a$  y  $b$  son vértices de corte en  $G$ , entonces existe un  $ab$ -camino en  $G^{++}$ .

Por lo tanto, si  $G$  es conexa, entonces  $G^{++}$  es conexa. □

## 3.2. Conexidad de $G^{+-}$

Ahora veamos qué sucede con la gráfica  $G^{+-}$ .

Note que no es suficiente que  $G$  sea una gráfica, con  $q \geq 2$ , para que  $G^{+-}$  sea conexa. Para ver esto construyamos una gráfica  $G$  con al menos dos aristas.

- Sean  $B_1, B_2, \dots, B_n$  bloques ajenos por vértices, con  $n \geq 2$ , donde al menos dos bloques tienen al menos una arista y  $G = \bigcup_{i=1}^n B_i$ .

Como  $G$  es la unión de  $n$  bloques, entonces  $G$  no tiene vértices de corte. Por otro lado, sean  $e_1$  una arista del bloque  $B_1$  y  $e_2$  una arista de un bloque diferente a  $B_1$ , entonces al ser  $e_1$  y  $e_2$  aristas en diferentes

bloques,  $e_1$  y  $e_2$  no son incidentes en un vértice en común y más aún ninguna de las aristas del bloque  $B_1$  es incidente con una arista de  $\bigcup_{i=2}^n B_i$ . Por lo tanto, no existe un camino entre  $e_1$  y  $e_2$  en  $G^{+-}$ . Así,  $G^{+-}$  no es conexa.

- Ahora consideremos a la gráfica  $G = K_{1,p}$ .

Como  $G$  es una estrella, entonces  $G$  tiene un vértice de corte, digamos  $v$ . Puesto que  $v$  es un vértice en  $G^{+-}$  que tiene grado cero entonces  $G^{+-}$  no es conexa.

- Sea  $G = K_{1,p} \cup K_{1,r}$  con  $\{p, r\} \subseteq \mathbb{N}$  y  $K_{1,p}$  y  $K_{1,r}$  ajenas en vértices.

Como  $G$  es la unión de dos estrellas, entonces  $G$  tiene dos vértices de corte, digamos  $u$  y  $v$  con  $u \in V(K_{1,p})$  y  $v \in V(K_{1,r})$ . Ya que  $u$  y  $v$  son vértices en  $G^{+-}$  y, por definición de  $G^{+-}$ ,  $v$  y  $u$  son adyacentes en  $G^{+-}$  a las aristas que no son incidentes en  $G$ , entonces  $v$  es adyacente en  $G^{+-}$  a todos los vértices en  $E(K_{1,p})$  y  $u$  es adyacente en  $G^{+-}$  a todos los vértices en  $E(K_{1,r})$ . Por otro lado, por construcción de  $G$  no existe ninguna arista incidente en  $u$  que sea adyacente a una arista incidente en  $v$ , lo que implica que en  $G^{+-}$  no hay aristas entre  $E(K_{1,r})$  y  $E(K_{1,p})$ , lo que implica que  $G^{+-}$  no es conexa.

- Sean  $B_1, B_2, \dots, B_n$  bloques ajenos por vértices y  $K_{1,p}$  una estrella ajena por vértices a cada uno de estos bloques. Consideremos  $G = K_{1,p} \cup (\bigcup_{i=1}^n B_i)$ .

$G$  tiene un vértice de corte, digamos  $v_1$ . Sea  $e_1$  una arista de la estrella  $K_{1,p}$ . Como  $e_1$  es un vértice que no es adyacente a  $v_1$  en  $G^{+-}$  y como  $e_1$  no es incidente a un vértice en común con ninguna de las aristas de los bloques  $B_i$  en  $G$ , en particular, digamos  $e_j$ , entonces no existe un camino entre  $e_1$  y  $e_j$  en  $G^{+-}$ . Por lo tanto, tenemos que  $G^{+-}$  no es conexa.

Note que si a cualquiera de las anteriores cuatro gráficas le unimos vértices aislados tenemos que cada uno de esos vértices es un bloque en  $G$  y  $G^{+-}$  sigue siendo inconexa.

El siguiente teorema establece las condiciones para que  $G^{+-}$  sea conexa.

**Teorema 3.2.1.** *Para cualquier gráfica  $G$  sin vértices aislados con tamaño  $q \geq 2$ ,  $G^{+-}$  es conexa si y solo si*

1.  $G \neq K_{1,p}$ ,

2.  $G \neq K_{1,p} \cup K_{1,r}$  con  $K_{1,p}$  y  $K_{1,r}$  ajenos por vértices.
3.  $G \neq \bigcup_{i=1}^n B_i$ ; con  $B_1, \dots, B_n$  bloques ajenos por vértices.
4.  $G \neq K_{1,p} \cup \left(\bigcup_{i=1}^n B_i\right)$ ; con  $B_1, \dots, B_n$  bloques ajenos por vértices y  $K_{1,p}$  una estrella ajena por vértices a cada uno de estos bloques.

*Demostración.*  $\Leftarrow$ ] Sea  $G$  una gráfica que satisface las condiciones 1, 2, 3, y 4.

Por demostrar que  $G^{+-}$  es conexa.

**Caso 1**  $G$  es conexa.

Consideremos los siguientes dos subcasos sobre  $G$ .

- $G$  es un bloque.

Como  $G$  es un bloque, entonces  $G$  no tiene vértices de corte. Lo que implica que  $V(G^{+-}) = E(G)$ . Así, la proposición 2.0.3 nos lleva a que  $L(G) = G^{+-}[E(G)]$ ; es decir,  $G^{+-} = L(G)$ . Luego por el teorema 1.5.8  $L(G)$  es conexa y por lo tanto tenemos que  $G^{+-}$  es conexa.

- $G$  tiene al menos un vértice de corte.

Por la proposición 2.0.3, como  $L(G)$  es una subgráfica inducida de  $G^{+-}$  y por el teorema 1.5.8,  $L(G)$  es conexa, entonces  $L(G)$  es una subgráfica conexa de  $G^{+-}$ . Luego al ser  $G$  una gráfica conexa que cumple la condición 1, se tiene que para todo vértice de corte en  $G$  existe al menos una arista a la que no es incidente. Por lo tanto todo vértice de corte de  $G$  es adyacente con al menos una arista en  $G^{+-}$ . Por lo tanto,  $G^{+-}$  es conexa.

**Caso 2**  $G$  es inconexa.

Sean  $G_1, G_2, \dots, G_n$  las componentes conexas de  $G$ . Por la condición 3 existe una componente conexa  $G_i$  tal que  $G_i$  tiene al menos un vértice de corte el cual también es un vértice de corte de  $G$ .

Consideramos los siguientes dos casos:

- $G$  tiene solo un vértice de corte.

Sea  $c$  en  $V(G^{+-})$  el único vértice de corte de  $G^{+-}$ , note que  $c$  también es el único vértice de corte de  $G_i$ . En este caso por la condición 4 se tiene que  $G_i$  no es una estrella. Como  $G_i$  no es una estrella, entonces existe una arista  $a$  en  $G_i$  tal que  $a$  no es incidente en  $c$  lo que implica que  $(a, c) \in E(G^{+-})$ . Por lo tanto, para que  $G^{+-}$  sea conexa es suficiente

demostrar que para cualesquiera dos aristas  $b$  y  $d$  de  $G$  existe un  $bd$ -camino en  $G^{+-}$ .

Sea  $\{e, f\}$  un subconjunto de  $E(G)$ .

Note que por la proposición 2.0.3 y por la definición de gráfica de líneas se tiene que

$$G^{+-}[E(G)] = L(G) = \bigcup_{k=1}^n L(G_k). \quad (3.1)$$

Si  $e$  y  $f$  son aristas en  $G$  que pertenecen a la misma componente conexa en  $G$ , entonces por 3.1 y por el teorema 1.5.8, existe un  $ef$ -camino en  $G^{+-}$ .

Si  $e$  y  $f$  son aristas en  $G$  que no pertenecen a la misma componente conexa en  $G$ , entonces tenemos los siguientes dos casos

- $e$  y  $f$  no pertenecen a la misma componente conexa que  $c$  en  $G$ .  
En este caso tenemos que  $(e, c, f)$  es el camino que une a  $e$  con  $f$  en  $G^{+-}$ .
- $e$  o  $f$  pertenecen a la misma componente conexa que  $c$  en  $G$ .  
Sin pérdida de generalidad, digamos que  $e$  no pertenece a la misma componente conexa que  $c$  en  $G$ . Entonces por la definición de  $G^{+-}$  tenemos que  $(e, c) \in E(G^{+-})$ . Por otro lado como  $a$  y  $f$  pertenecen a la componente conexa  $G_i$ , entonces por 3.1 y por el teorema 1.5.8 existe un  $af$ -camino en  $G^{+-}$ , digamos  $C_1$ . Por lo tanto,  $(e, c, a) \cup C_1$  es un camino entre  $e$  y  $f$  en  $G^{+-}$ .

Por lo tanto, si  $G$  tiene un solo vértice de corte, entonces  $G^{+-}$  es conexa.

- $G$  tiene dos o más vértices de corte.
  - Todos los vértices de corte de  $G$  están en una sola componente conexa.  
Sean  $G_1, \dots, G_i, \dots, G_n$  las componentes conexas de  $G$ ,  $G_i$  la componente conexa que contiene todos los vértices de corte de  $G$  y  $w_1, w_2, \dots, w_k$  los vértices de corte de  $G_i$ , con  $k \geq 2$ . Luego por el teorema 1.5.8  $L(G_j)$  es conexa para toda  $j$ , con  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ .  
Sea  $a_j$  una arista de la componente conexa  $G_j$ , con  $j \neq i$ , note que  $a_j$  no es incidente a los vértices de corte de  $G_i$ , lo que implica que  $(a_j, w_r) \in E(G^{+-})$  para toda  $j$ , con  $j \in \{1, 2, \dots, n\} - \{i\}$ , y para toda  $r$ , con  $r \in \{1, 2, \dots, k\}$ , (por definición de  $G^{+-}$ ). Entonces

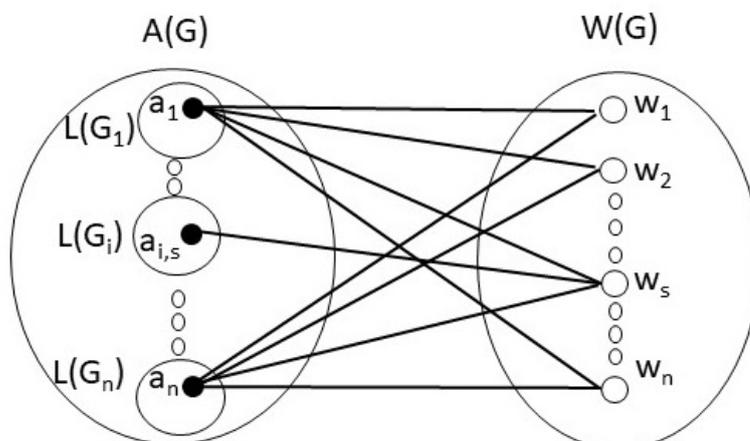


Figura 3.2: Gráfica de  $G^{+-}$  con vértices de corte en una misma componente

$a_j$  es incidente a los vértices de corte de  $G_i$  en  $G^{+-}$ . Por otro lado como  $G_i$  no es una estrella entonces para cada vértice de corte  $w_s$  en  $G_i$ , con  $s \in \{1, 2, \dots, r\}$ , existe una arista  $a_{i,s}$  en  $G_i$  tal que  $a_{i,s}$  no es incidente al vértice de corte  $w_s$ , lo que implica que  $(a_{i,s}, w_s) \in E(G^{+-})$  (por definición de  $G^{+-}$ , ver figura 3.2). Por lo tanto,  $G^{+-}$  es conexa por lo dicho anteriormente y por 3.1.

- Existen al menos dos componentes conexas de  $G$  con vértices de corte.

Sean  $u$  y  $v$  dos vértices de corte de  $G$ . Veremos que existe un  $uv$ -camino en  $G^{+-}$ .

Si  $G$  es la unión de al menos tres componentes conexas, entonces como  $G$  es una gráfica sin vértices aislados tenemos que en cada componente conexa de  $G$  existe al menos una arista.

Como  $G$  tiene al menos tres componentes conexas tenemos que existe una arista  $e$  en  $G$  a la cual ni  $u$  ni  $v$  son incidentes en  $G$ , entonces  $(u, e, v)$  es un  $uv$ -camino en  $G^{+-}$ .

Si  $G$  tiene exactamente dos componentes conexas, digamos  $G_1$  y  $G_2$ , entonces por la condición 2 tenemos que estas componentes conexas no son estrellas. Si  $u$  y  $v$  están en la misma componente conexa, sin pérdida de generalidad, digamos  $G_1$ , entonces al tener  $G_2$  al menos una arista, digamos  $e$ , tenemos que  $(u, e, v)$  es un  $uv$ -camino en  $G^{+-}$ . Si  $u$  y  $v$  pertenecen a distintas componentes conexas, supongamos sin pérdida de generalidad que  $u \in V(G_1)$  y  $v \in V(G_2)$ . Como  $G_1$  no es una estrella, entonces existe una arista  $a$  en  $G_1$  tal que  $a$  no es incidente en  $u$ , lo que implica

que  $(a, u) \in E(G^{+-})$  y puesto que  $a$  y  $v$  pertenecen a distintas componentes conexas tenemos que  $a$  no es incidente en  $v$  en  $G$  lo que implica que  $(a, v) \in E(G^{+-})$ . Así,  $(u, a, v)$  es un  $uv$ -camino en  $G^{+-}$ .

Por lo tanto, para cualesquiera dos vértices de corte  $u$  y  $v$  de  $G$  existe un  $uv$ -camino en  $G^{+-}$ .

Sean  $e$  y  $f$  dos vértices en  $G^{+-}$  que son aristas en  $G$ . Veremos que existe un  $ef$ -camino en  $G^{+-}$ .

- $e$  y  $f$  son aristas en  $G$  que pertenecen a una misma componente conexa.

Sea  $G_i$  la componente conexa de  $G$  tal que  $e$  y  $f$  pertenecen a  $E(G_i)$ . Como existen al menos dos componentes conexas con vértices de corte en  $G$ , entonces existe un vértice de corte, digamos  $c$ , que no pertenece a la componente conexa  $G_i$  en  $G$ , lo que implica que ni  $e$  ni  $f$  son incidentes en  $c$ . Por lo tanto,  $(e, c, f)$  es un  $ef$ -camino en  $G^{+-}$ .

- $e$  y  $f$  son aristas en  $G$  que no pertenecen a la misma componente conexas de  $G$ .

Sean  $G_i$  una componente conexa de  $G$  tal que  $e \in E(G_i)$  y  $G_j$  una componenante conexa de  $G$  tal que  $f \in E(G_j)$ . Como existen al menos dos componentes conexas con vértices de corte, entonces existe un vértice de corte  $c_1$  tal que  $e$  no es incidente en  $c_1$ , lo que implica que  $(c_1, e) \in E(G^{+-})$  y también existe un vértice de corte  $c_2$  tal que  $f$  no es incidente en  $c_2$ , entonces  $(c_2, f) \in E(G^{+-})$ . Y por lo anteriormente visto tenemos que existe un  $c_1c_2$ -camino en  $G^{+-}$ , digamos  $C$ . Por lo tanto  $(e, c_1) \cup C \cup (c_2, f)$  es un camino que une a  $e$  y  $f$  en  $G^{+-}$ .

Sean  $c$  un vértice de corte de  $G$  y  $e$  una arista de  $G$ . Por demostrar que existe un  $ec$ -camino en  $G^{+-}$ .

Si  $c$  no es incidente a  $e$  en  $G$ , por definición de  $G^{+-}$ , se tiene que  $(e, c) \in E(G^{+-})$ .

Si  $c$  es incidente a  $e$ , entonces  $e$  y  $c$  pertenecen a la misma componente conexa y como  $G$  tiene más de dos componentes con vértices de corte, entonces sea  $c_1$  un vértice de corte en una componente conexa distinta a la de  $c$ . Por otro lado, sabemos que existe un  $cc_1$ -camino en  $G^{+-}$ , digamos  $C$ , y puesto que  $e$  y  $c_1$  pertenecen a distintas componentes conexas, entonces  $(e, c_1) \in E(G^{+-})$ . Por lo tanto,  $C \cup (e, c_1)$  es un camino en  $G^{+-}$  que une a  $c$  con  $e$ .

Así,  $G^{+-}$  es conexa.

$\Rightarrow$ ] Sea  $G$  una gráfica con  $q \geq 2$  tal que  $G^{+-}$  es conexa. Por lo visto anteriormente en los ejemplos se concluye que  $G$  cumple las condiciones 1, 2, 3 y 4.  $\square$

Ahora veamos que sucede con la gráfica  $G^{-+}$ .

No es suficiente que  $G$  sea una gráfica, con  $q \geq 2$ , para que  $G^{-+}$  sea conexa como se observa en las figuras 3.3, 3.4, 3.5 y 3.6.

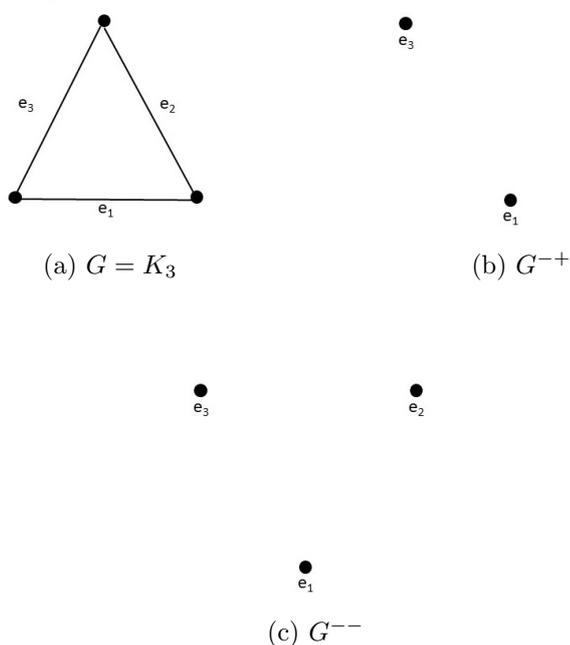


Figura 3.3: Ejemplo de una gráfica  $G$ , con  $q \geq 2$ , y sus respectivas gráficas asociadas  $G^{-+}$  y  $G^{--}$

Note que si a cualquiera de las anteriores cuatro gráficas le unimos vértices aislados tenemos que cada uno de esos vértices es un bloque en  $G$  y  $G^{+-}$  sigue siendo inconexa.

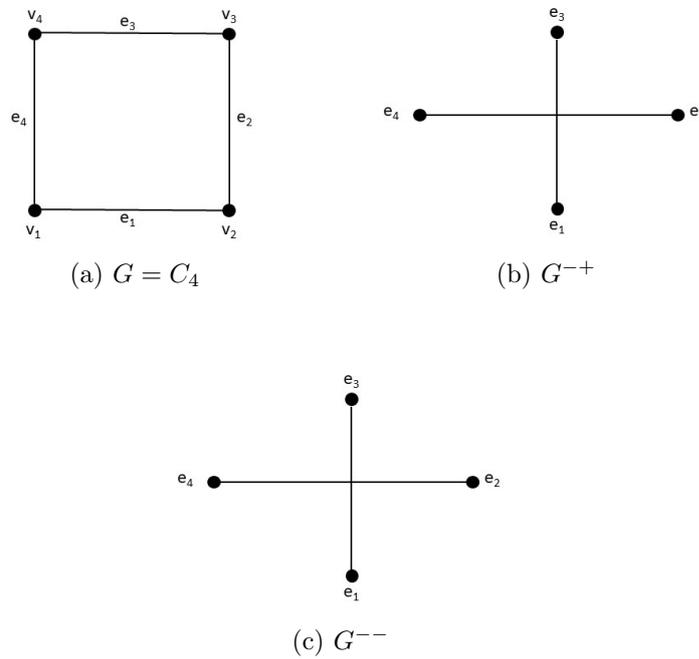


Figura 3.4: Ejemplo de una gráfica  $G$ , con  $q \geq 2$ , y sus respectivas gráficas asociadas  $G^{-+}$  y  $G^{-}$

### 3.3. Conexidad de $G^{-+}$

**Teorema 3.3.1.** *Para cualquier gráfica  $G$  sin vértices aislados con tamaño  $q \geq 2$ ,  $G^{-+}$  es conexa si y solo si*

1.  $G \neq K_3$ ,
2.  $G \neq C_4$ ,
3.  $G \neq K_4$ ,
4.  $G \neq K_4 - x$  (donde  $x$  es cualquier arista en  $K_4$ ),

y  $G$  no tiene una arista  $(u, v)$  que es adyacente a todas las otras aristas tal que  $u$  y  $v$  no son vértices de corte.

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ] Sea  $G$  una gráfica, con  $q \geq 2$ , tal que  $G^{-+}$  es conexa. Por lo visto anteriormente en los ejemplos de las figuras 3.3, 3.4, 3.5 y 3.6, se tiene que  $G$  cumple las condiciones 1, 2, 3 y 4.

Por otro lado, si  $G$  tiene una arista  $(u, v)$  que es adyacente a todas las otras aristas tal que  $u$  y  $v$  no son vértices de corte, entonces tenemos que

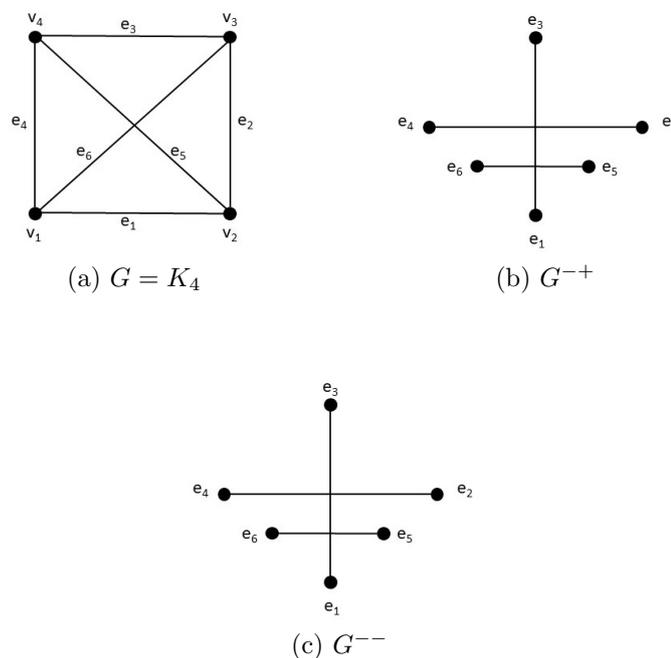


Figura 3.5: Ejemplo de una gráfica  $G$ , con  $q \geq 2$ , y sus respectivas gráficas asociadas  $G^{-+}$  y  $G^{--}$

$(u, v)$  no es adyacente a ningún vértice en  $G^{-+}$  que es una arista en  $G$  y al no ser  $u$  y  $v$  vértices de corte tenemos que  $(u, v)$  no es adyacente en  $G^{-+}$  a ningún vértice que es un vértice de corte en  $G$ . Por lo tanto,  $(u, v)$  es un vértice aislado en  $G^{-+}$ , lo que implica que  $G^{-+}$  es inconexa, lo cual no es posible.

Por lo tanto,  $G$  no tiene una arista  $(u, v)$  que es adyacente a todas las otras aristas tal que  $u$  y  $v$  no son vértices de corte.

$\Leftarrow$ ] Sea  $G$  una gráfica, con  $q \geq 2$ , que cumple las condiciones 1, 2, 3 y 4 y  $G$  no tiene una arista  $(u, v)$  que es adyacente a todas las otras aristas tal que  $u$  y  $v$  no son vértices de corte.

Por demostrar que  $G^{-+}$  es conexa.

Consideremos los siguientes casos

**Caso 1**  $G$  es una gráfica conexa.

Tenemos dos subcasos.

- $G$  es un bloque.

En este caso  $G^{-+} = J(G)$  y como se cumplen las condiciones del teorema 1.5.13 tenemos que  $G^{-+}$  es conexa.

- $G$  es una gráfica que tiene al menos un vértice de corte.

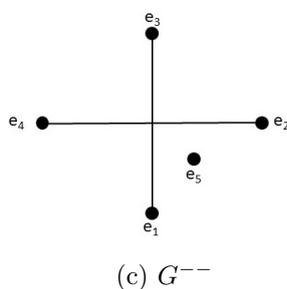
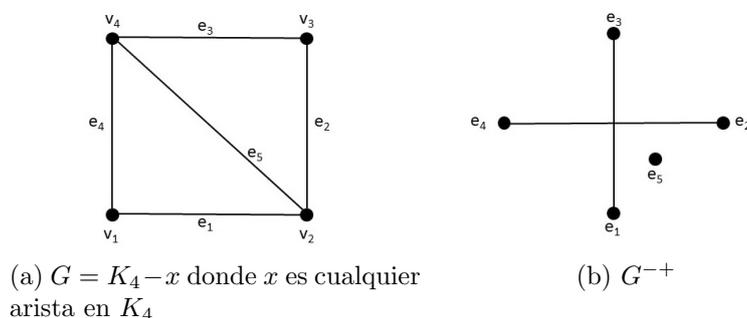


Figura 3.6: Ejemplo de una gráfica  $G$ , con  $q \geq 2$ , y sus respectivas gráficas asociadas  $G^{-+}$  y  $G^{--}$

Veamos los siguientes casos.

- $G$  no tiene una arista que es adyacente a todas las otras aristas.  
Por la proposición 2.0.4 sabemos que  $J(G)$  es una subgráfica inducida de  $G^{-+}$  y por el teorema 1.5.13 tenemos que  $J(G)$  es una subgráfica conexa de  $G^{-+}$  y como los vértices de corte de  $G$  tienen grado al menos uno en  $G$ , entonces  $G^{-+}$  es una gráfica conexa.
- $G$  es una gráfica que contiene al menos una arista, digamos  $e$ , que es adyacente a todas las otras aristas.  
Al ser  $e$  adyacente a todas las otras aristas de  $G$ , entonces por hipótesis  $e$  es incidente con un vértice de corte de  $G$ , digamos  $c$ , entonces tenemos que  $(e, c) \in E(G^{-+})$ .  
Sea  $f$  una arista en  $G$  tal que  $e \neq f$ . Por demostrar que existe un  $ef$ -camino en  $G^{-+}$ . Consideremos los siguientes dos casos:  
Si  $f$  es incidente a  $c$ , en  $G$  entonces  $(f, c) \in E(G^{-+})$ ; por lo tanto, tenemos que  $(e, c, f)$  es un camino en  $G^{-+}$ .  
Si  $f$  no es incidente a  $c$ . Al ser  $c$  un vértice de corte en  $G$  tenemos que la gráfica  $G - c$  tiene dos o más componentes conexas. Sea  $G_1$

la componente de  $G - c$  que contiene a  $f$  y sea  $H$  una componente conexa de  $G - c$  distinta a  $G_1$ . Como  $G$  es una gráfica conexa, entonces  $c$  es adyacente a al menos un vértice de la componente conexa  $H$ , digamos  $w$ , si la arista  $(c, w) = e$ , entonces  $e$  no sería adyacente a  $f$ , lo cual no puede ocurrir; por lo tanto,  $(c, w) \neq e$ . Así,  $((c, w), f) \in E(G^{-+})$ , lo que implica que  $(e, c, (c, w), f)$  es un camino en  $G^{-+}$ .

Sea  $v$  un vértice de corte de  $G$  diferente a  $c$ . Por demostrar que existe un  $ev$ -camino en  $G^{-+}$ .

Al ser  $v$  un vértice de corte, entonces  $v$  tiene al menos una arista que es incidente a  $v$ , digamos  $e_k$ , entonces  $(v, e_k) \in E(G^{-+})$  y como existe un camino entre  $e$  y cualquier otra arista de  $G$  en  $G^{-+}$ , entonces existe un  $ee_k$ -camino en  $G^{-+}$ , digamos  $P$ . Así  $P \cup (e_k, v)$  es un  $ev$ -camino en  $G^{-+}$ .

Al existir un camino entre cualquier vértice de corte de  $G$  y  $e$  en  $G^{-+}$  y al existir un camino entre cualquier arista de  $G$  y  $e$  en  $G^{-+}$ , tenemos que  $G^{-+}$  es conexa.

**Caso 2**  $G$  es una gráfica no conexa.

Por la proposición 2.0.4 y el teorema 1.5.13 tenemos que  $J(G)$  es una subgráfica conexa de  $G^{-+}$ .

Como ningún vértice de corte es aislado, entonces todo vértice de corte de  $G$  es adyacente a un vértice en  $G^{-+}$ .

Por lo tanto,  $G^{-+}$  es conexa.  $\square$

Ahora veamos que sucede con la gráfica  $G^{--}$ .

No es suficiente que  $G$  sea una gráfica con  $q \geq 2$  para que  $G^{--}$  sea conexa. Si consideremos a la gráfica  $G = K_{1,p}$ , sea  $v$  el vértice de corte de  $G$ ; anteriormente vimos en  $G^{+-}$  que  $v$  es un vértice aislado, análogamente podemos deducir que  $v$  es un vértice aislado en  $G^{--}$ , por definición de dicha gráfica. Concluyendo que  $G^{--}$  es inconexa. En las figuras 3.3, 3.4, 3.5 y 3.6 podemos observár más ejemplos donde  $G^{--}$  es una gráfica inconexa.

Note que si a cualquiera de las gráficas anteriores le unimos vértices aislados tenemos que cada uno de esos vértices es un bloque en  $G$  y  $G^{--}$  sigue siendo inconexa.

### 3.4. Conexidad de $G^{--}$

**Teorema 3.4.1.** *Para cualquier gráfica  $G$  sin vértices aislados con tamaño  $q \geq 2$ ,  $G^{--}$  es conexa si y solo si*

1.  $G \neq K_{1,p}$ ,
2.  $G \neq K_3$ ,
3.  $G \neq C_4$ ,
4.  $G \neq K_4$ ,
5.  $G \neq K_4 - x$  (donde  $x$  es cualquier arista en  $K_4$ ),

y  $G$  no tiene una arista  $(u, v)$  que es adyacente a todas las otras aristas.

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ] Sea  $G$  una gráfica, con  $q \geq 2$ , tal que  $G^{--}$  es conexa. Por lo visto anteriormente en los ejemplos de las figuras 3.3, 3.4, 3.5 y 3.6, se tiene que  $G$  cumple las condiciones 2, 3, 4, 5 y la condición 1 se cumple por lo justificado en el párrafo anterior a este teorema.

Ahora vamos a demostrar que  $G$  no tiene una arista  $(u, v)$  que es adyacente a todas las otras aristas.

Procediendo por contradicción, supongamos que  $G$  tiene una arista  $(u, v)$  que es adyacente a todas las otras aristas. Note que bajo esta suposición se tiene que  $G$  es conexa puesto que  $G$  no tiene vértices aislados

- $G$  no tiene vértices de corte.

En este caso como  $(u, v)$  es adyacente a todas las otras aristas de  $G$ , por definición de  $G^{--}$  tenemos que  $(u, v)$  no es adyacente a ningún vértice en  $G^{--}$ . Por lo tanto,  $(u, v)$  es un vértice aislado en  $G^{--}$ , lo que implica que  $G^{--}$  es inconexa, lo cual no es posible.

- $G$  tiene vértices de corte.

- $u$  o  $v$  (o ambos) son los únicos vértices de corte en  $G$ .

Por definición de  $G^{--}$  tenemos que  $(u, v)$  no es adyacente a ningún vértice en  $G^{--}$  el cual es una arista en  $G$  y como los únicos vértices de corte de  $G$  son  $u$  o  $v$  (o ambos) tenemos que  $(u, v)$  no es adyacente en  $G^{--}$  a un vértice que es un vértice de corte en  $G$ . Por lo tanto,  $(u, v)$  es un vértice aislado en  $G^{--}$ , lo que implica que  $G^{--}$  es inconexa, lo cual no es posible.

- $G$  tiene un vértice de corte que no es incidente en  $(u, v)$ .

Sean  $c$  un vértice de corte de  $G$ , con  $c \in V(G) - \{u, v\}$ , y  $G_1, G_2, \dots, G_n$  las componentes conexas de  $G - c$ , con  $n \geq 2$ . Como  $(u, v)$  no es incidente en  $c$ , entonces  $(u, v)$  está contenida en alguna de las componentes conexas de  $G - c$ ; sin pérdida de generalidad

supongamos que  $(u, v)$  es una arista de  $G_1$ . Note que  $|V(G_i)| = 1$  para cualquier  $i$ , con  $i \in \{2, \dots, n\}$ , ya que si existiera  $G_j$ , para algún  $j \neq 1$ , tal que  $|V(G_j)| > 1$ , entonces al ser  $G$  conexa existiría una arista en  $G_j$  que no es adyacente a  $(u, v)$ , lo cual no es posible. Por otro lado,  $c$  no es adyacente a ningún vértice de  $G_i$  para cualquier  $i$ , con  $i \in \{2, \dots, n\}$ , ya que de otra manera la arista que uniera a  $c$  con un vértice de  $G_i$  no sería adyacente a  $(u, v)$ . Así  $G$  no es conexa, contradiciendo que  $G$  es una gráfica conexa.

Por lo tanto, como los casos anteriores contienen siempre una contradicción tenemos que  $G$  no tiene una arista  $(u, v)$  que es adyacente a todas las otras aristas.

$\Leftarrow$ ] Sea  $G$  una gráfica, con  $q \geq 2$ , que cumple las condiciones 1, 2, 3, 4, 5 y  $G$  no tiene una arista que sea adyacente a todas las otras aristas.

Por demostrar  $G^{--}$  es conexa.

Note que al cumplirse las hipótesis del teorema 1.5.13 tenemos que  $J(G)$  es conexa.

Consideremos los siguientes casos:

**Caso 1**  $G$  es una gráfica conexa.

Analizaremos los siguientes dos subcasos

- $G$  es un bloque.

Como  $G$  es un bloque, entonces  $G$  no tiene vértices de corte, lo que implica que  $G^{--} = J(G)$ . Así se concluye que  $G^{--}$  es conexa.

- $G$  tiene al menos un vértice de corte.

Por la proposición 2.0.4 tenemos que  $G^{--}[A(G)] = J(G)$  y como  $J(G)$  es conexa, entonces para ver que  $G^{--}$  es conexa solo basta probar que para cualquier vértice de corte  $w$  de  $G$  existe  $a$  en las aristas de  $G$  tal que  $(a, w) \in E(G^{--})$ .

Sea  $w$  un vértice de corte de  $G$ . Como no existe una arista que sea adyacente a todas las demás aristas de  $G$ , entonces existe una arista  $a$  que no es incidente a  $w$ , lo que implica que  $(a, w) \in E(G^{--})$ .

Por lo tanto  $G^{--}$  es conexa.

**Caso 2**  $G$  es una gráfica inconexa.

Sean  $G_1, G_2, \dots, G_n$  las componentes conexas de  $G$ . Si existe una componente  $G_i$  de  $G$  tal que  $G_i$  es la única componente de  $G$  que tiene aristas, entonces el resto de las componentes conexas consisten de un solo vértice. Por lo tanto,  $G^{--} = G_i^{--}$  y así por el caso 1 se tiene que  $G^{--}$  es conexa.

Ahora supongamos que existe más de una componente conexa que tiene aristas.

Si  $G$  no tiene vértices de corte, entonces por la proposición 2.0.4 tenemos que  $G^{--} = J(G)$  y como  $J(G)$  es conexa se concluye que  $G^{--}$  es conexa.

Si  $G$  tiene al menos un vértice de corte para ver que  $G^{--}$  es conexa solo basta probar que para cualquier vértice de corte  $w$  de  $G$  existe  $a$  en las aristas de  $G$  tal que  $(a, w) \in E(G^{--})$ , ya que por la proposición 2.0.4 tenemos que  $G^{--}[A(G)] = J(G)$ .

Sea  $w$  un vértice de corte de  $G$ . Como no existe una arista que sea adyacente a todas las demás aristas de  $G$ , entonces existe una arista  $a$  que no es incidente en  $w$ , lo que implica que  $(a, w) \in E(G^{--})$ .

Por lo tanto  $G^{--}$  es conexa.  $\square$



# Capítulo 4

## Iteraciones de $G^{xy}$

En este capítulo veremos como se define la iteración de  $G^{xy}$ ; demostraremos que  $L^n(G)$  es una subgráfica de  $G^{(+y)^n}$  y también probaremos que  $J^n(G)$  es subgráfica de  $G^{(-y)^n}$ . En la sección 1 estudiaremos la relación de isomorfismo que existe entre la gráfica  $G$  y la gráfica  $G^{++}$ . En la sección 2 veremos las condiciones para que  $G^{(+-)^n}$  sea isomorfa con  $G$ . En la sección 3 veremos las condiciones para que  $G^{(-+)^n}$  sea isomorfa con  $G$ , y en la sección 4 veremos las condiciones para que  $G^{(--)^n}$  sea isomorfa con  $G$ .

**Definición 4.0.1.** Dada una gráfica de aristas y vértices de corte  $G^{xy}$ , definimos la iteración de  $G^{xy}$  como sigue:

- $G^{(xy)^1} = G^{xy}$ .
- $G^{(xy)^n} = [G^{(xy)^{n-1}}]^{xy}$  para  $n \geq 2$ .

**Ejemplo 4.0.2.** Sea  $G$  una gráfica donde  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$  y  $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ , ver figura 4.1a. Un ejemplo de iteraciones de  $G$  está representado en la figura 4.1.

**Lema 4.0.3.** Sean  $G$  una gráfica no trivial y  $n$  en  $\mathbb{N}$ . Si  $L^n(G)$  es no vacía, entonces  $L^n(G)$  es una subgráfica de  $G^{(+y)^n}$ .

*Demostración.* Sea  $G$  una gráfica no trivial. Por demostrar que  $L^n(G)$  es una subgráfica de  $G^{(+y)^n}$  si  $L^n(G)$  es no vacía.

Probamos por inducción sobre  $n$ .

*Base.* Si  $n = 1$ , por la proposición 2.0.3  $G^{+y}[E(G)] = L(G)$ , entonces tenemos que  $L(G)$  es una subgráfica de  $G^{+y}$  lo que implica que  $L^1(G)$  es una subgráfica de  $G^{(+y)^1}$ .

Por lo tanto,  $L^1(G)$  es una subgráfica de  $G^{(+y)^1}$ .

*Hipótesis de inducción:* Si  $L^{n-1}(G)$  es una gráfica no vacía, entonces  $L^{n-1}(G)$  es una subgráfica de  $G^{(+y)^{n-1}}$ .

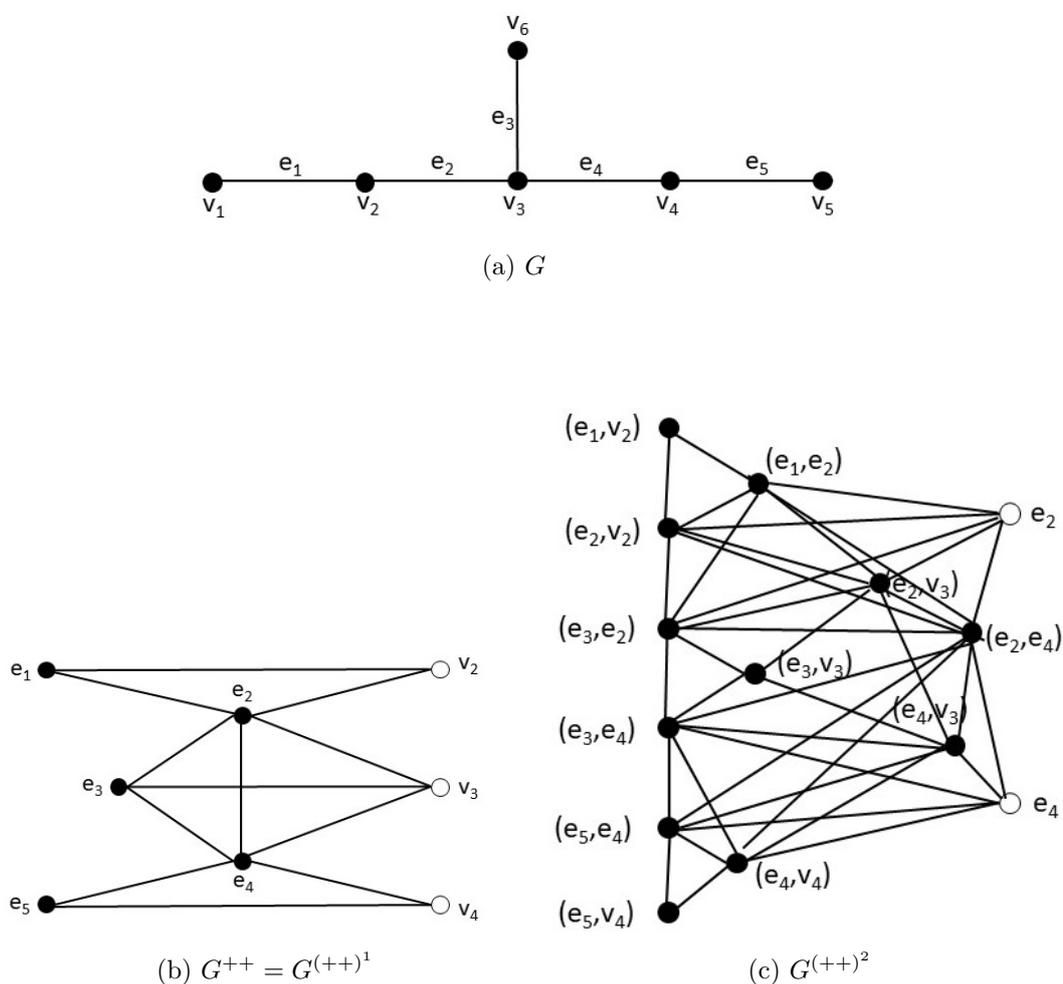


Figura 4.1: Ejemplo de una gráfica  $G$  y sus dos primeras iteraciones

*Paso inductivo:* Supongamos que  $L^n(G)$  es no vacía. Por demostrar que  $L^n(G)$  es una subgráfica de  $G^{(+y)^n}$ .

Como  $L^n(G)$  es no vacía entonces  $L^{n-1}(G)$  es no vacía. Así, por la hipótesis de inducción se tiene que  $L^{n-1}(G)$  es una subgráfica de  $G^{(+y)^{n-1}}$  entonces  $L(L^{n-1}(G))$  es una subgráfica de  $L(G^{(+y)^{n-1}})$ .

Puesto que  $(G^{(+y)^{n-1}})^{+y}[E(G^{(+y)^{n-1}})] = L(G^{(+y)^{n-1}})$  por la proposición 2.0.3, entonces  $L^n(G)$  es una subgráfica de  $(G^{(+y)^{n-1}})^{+y} = G^{(+y)^n}$ .  $\square$

**Lema 4.0.4.** *Sea  $G$  una gráfica no trivial y  $n$  en  $\mathbb{N}$ . Si  $J^n(G)$  es no vacía, entonces  $J^n(G)$  es una subgráfica de  $G^{(-y)^n}$ .*

*Demostración.* Sea  $G$  una gráfica no trivial. Por demostrar que  $J^n(G)$  es una subgráfica de  $G^{(-y)^n}$  si  $J^n(G)$  es no vacía.

Probamos por inducción sobre  $n$ .

*Base:* Si  $n = 1$ , por la proposición 2.0.4 tenemos que  $J(G) = G^{-y}[E(G)]$ , entonces se sigue que  $J(G)$  es una subgráfica de  $G^{-y}$ , lo que implica que  $J^1(G)$  es una subgráfica de  $G^{(-y)^1}$ .

Por lo tanto,  $J^1(G)$  es una subgráfica de  $G^{(-y)^1}$ .

*Hipótesis de inducción:* Si  $J^{n-1}(G)$  es una gráfica no vacía, entonces  $J^{n-1}(G)$  es una subgráfica de  $G^{(-y)^{n-1}}$ .

*Paso inductivo:* Supongamos que  $J^n(G)$  es no vacía. Por demostrar que  $J^n(G)$  es una subgráfica de  $G^{(-y)^n}$ .

Como  $J^n(G)$  es no vacía, entonces  $J^{n-1}(G)$  es no vacía. Así, por la hipótesis de inducción se tiene que  $J^{n-1}(G)$  es una subgráfica de  $G^{(-y)^{n-1}}$ , entonces  $J(J^{n-1}(G))$  es una subgráfica de  $J(G^{(-y)^{n-1}})$ .

Puesto que por la proposición 2.0.4 se tiene que  $(G^{(-y)^{n-1}})^{-y}[E(G^{(-y)^{n-1}})] = J(G^{(-y)^{n-1}})$ , entonces  $J^n(G)$  es una subgráfica de  $(G^{(-y)^{n-1}})^{-y} = G^{(-y)^n}$ .  $\square$

## 4.1. Isomorfismo de $G^{++}$ con $G$

El siguiente resultado fue demostrado en [5]. La demostración que se presenta es una prueba desarrallada por nosotros; no se sabe si nuestra prueba es similar a la que se presenta en [5] ya que no fue posible encontrar el artículo tanto en línea como en forma física.

**Teorema 4.1.1.** *Sea  $G$  una gráfica conexa.  $G$  es isomorfa a su gráfica de aristas y vértices de corte  $G^{++}$  si y solo si  $G$  es un ciclo.*

*Demostración.*  $\Leftarrow$ ] Sea  $G$  un ciclo. Por demostrar  $G$  es isomorfa a su gráfica de aristas y vértices de corte  $G^{++}$ .

Como  $G$  es un ciclo, entonces por el teorema 1.5.5 se tiene que  $G$  es isomorfa a su gráfica de líneas  $L(G)$ . Por otro lado, puesto que  $G$  es un bloque, se tiene que  $|W(G)| = 0$ , lo que implica que  $G^{++} = G^{++}[E(G)]$  y por proposición 2.0.3 tenemos que  $G^{++}[E(G)] = L(G)$ . Por lo tanto,  $G$  es isomorfa a su gráfica de aristas y vértices de corte  $G^{++}$ .

$\Rightarrow$ ] Sea  $G$  una gráfica conexa con  $n$  vértices que es isomorfa a su gráfica de aristas y vértices de corte  $G^{++}$ . Por demostrar que  $G$  es un ciclo.

Como  $G$  es conexa, entonces por el teorema 1.3.8 se sigue que  $G$  tiene al menos un árbol generador, digamos  $T$ . Por el teorema 1.3.7 sabemos que  $T$  tiene  $n - 1$  aristas, lo que implica que la gráfica de aristas y vértices de corte  $G^{++}$  tiene al menos  $n - 1$  vértices. Puesto que  $G$  y  $G^{++}$  son isomorfas, se sigue que ambas gráficas tienen  $n$  vértices, lo que implica que  $|W(G)| = 1$  o  $|E(G) - E(T)| = 1$ .

**Afirmación.-**  $W(G) = \emptyset$ .

Procediendo por contradicción, supongamos que  $W(G) \neq \emptyset$ . Entonces se tiene que  $E(G) = E(T)$ , lo que implica que  $G$  es un árbol. Sean  $v$  un vértice de corte de  $G$  y  $v_i$  y  $v_j$  dos vértices adyacentes a  $v$  ( $v_i$  y  $v_j$  existen porque  $v$  es un vértice de corte). Por lo tanto,  $v$ ,  $(v, v_j)$  y  $(v_i, v)$  forman un ciclo de longitud 3 en la gráfica de aristas y vértices de corte  $G^{++}$ . Lo cual no es posible, porque  $G$  es un árbol y  $G$  y  $G^{++}$  son isomorfas.

Por lo tanto,  $G$  no tiene vértices de corte.

Así, de la afirmación se concluye que  $|E(G) - E(T)| = 1$ .

Como  $T$  es un árbol y  $G$  tiene una arista más que  $T$ , digamos  $(u, v)$ , entonces  $T + (u, v) = G$  y por proposición 1.3.6  $T + (u, v)$  es una gráfica que contiene un único ciclo.

Ahora vamos a demostrar que  $G$  es un ciclo.

Procediendo por contradicción supongamos que  $G$  tiene un ciclo sin ser  $G$  un ciclo.

Sea  $\gamma$  el único ciclo en  $G$ . Notemos que  $L(\gamma)$  es un ciclo en  $G^{++}$  porque  $L(G) = G^{++}[E(G)]$ , por la proposición 2.0.3. Por otro lado, puesto que  $\gamma$  es único en  $G$ , pero  $G$  no es un ciclo, se tienen que existen  $u$  en los vértices de  $\gamma$  y  $w$  en  $V(G) - V(\gamma)$  tal que  $(u, w) \in E(G)$ . Por lo tanto, si  $a$  y  $b$  son las dos aristas de  $\gamma$  que inciden en el vértice  $u$ , entonces  $a$ ,  $b$  y  $(u, w)$  forman un ciclo de longitud 3 en  $G^{++}$ , el cual es distinto de  $L(\gamma)$  porque  $(u, w)$  no pertenece a los vértices de  $L(\gamma)$ , lo cual no es posible porque  $G^{++}$  tiene un único ciclo (ya que  $G^{++}$  y  $G$  son isomorfas). Por lo tanto, no es posible que  $G$  no sea un ciclo.

Así,  $G$  es un ciclo. □

## 4.2. Isomorfismo de $G^{(+ -)^n}$ con $G$

**Teorema 4.2.1.** *Sea  $G$  una gráfica conexa. Entonces  $L(G) = G^{+-}$  si y solo si  $G$  es un bloque.*

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ] Sea  $G$  una gráfica conexa, con  $p$  vértices y  $q$  aristas, tal que  $L(G) = G^{+-}$ .

Por demostrar que  $G$  es un bloque.

Procediendo por contradicción, supongamos que  $G$  no es un bloque, lo que implica por la conexidad, que  $G$  tiene al menos un vértice de corte; es decir  $|W(G)| \geq 1$ . Por otro lado, por definición  $L(G)$  tiene  $q$  vértices y  $G^{+-}$  tiene  $q + |W(G)|$  vértices. Puesto que  $|W(G)| \geq 1$ , se sigue que  $q + |W(G)| > q$ , lo cual contradice que  $L(G) = G^{+-}$ .

Por lo tanto,  $G$  no tiene vértices de corte. Así  $G$  es un bloque.

$\Leftarrow]$  Sea  $G$  una gráfica conexa. Supongamos que  $G$  es un bloque.

Por demostrar que  $L(G) = G^{+-}$ .

Al ser  $G$  un bloque tenemos que  $G$  no tiene vértices de corte, lo que implica que  $G^{+-} = G^{+-}[E(G)]$ . Por otro lado, por la proposición 2.0.3 se tiene que  $G^{+-}[E(G)] = L(G)$ . Así,  $L(G) = G^{+-}$ .  $\square$

**Teorema 4.2.2.** *Sea  $G$  una gráfica conexa.  $G$  es isomorfa a su gráfica  $G^{+-}$  si y solo si  $G$  es un ciclo.*

*Demostración.*  $\Leftarrow]$  Supongamos que  $G$  es un ciclo. Por demostrar que  $G$  es isomorfa a su gráfica de aristas y vértices de corte  $G^{+-}$ .

Como  $G$  es un ciclo, entonces por el teorema 1.5.5  $G$  es isomorfa a su gráfica de líneas  $L(G)$ . Por otro lado, como  $G$  es un bloque, entonces por el teorema 4.2.1 tenemos que  $L(G) = G^{+-}$ . Por lo tanto,  $G$  es isomorfa a su gráfica de aristas y vértices de corte  $G^{+-}$ .

$\Rightarrow]$  Sea  $G$  una gráfica conexa que es isomorfa a su gráfica  $G^{+-}$ . Por demostrar  $G$  es un ciclo.

Como  $G$  es conexa entonces por el teorema 1.3.8  $G$  tiene al menos un árbol generador. Sea  $T$  el árbol generador de  $G$ , al ser  $T$  un árbol por el teorema 1.3.7  $T$  tiene  $n - 1$  aristas, lo que implica que la gráfica de aristas y vértices de corte  $G^{+-}$  tiene  $n - 1$  vértice de  $T$  y al ser  $G$  y  $G^{+-}$  isomorfas por hipótesis, entonces  $G$  y  $G^{+-}$  tienen  $n$  vértices, lo que implica que  $G$  tiene exactamente un vértice de corte o  $G$  tiene exactamente una arista más que  $T$ .

**Afirmación.-**  $G$  no tiene vértices de corte.

Procediendo por contradicción, supongamos que  $G$  tiene un vértice de corte.

Como  $G$  tiene un vértice de corte, entonces  $G$  tiene exactamente  $n - 1$  aristas (para que  $G$  y  $G^{+-}$  tengan la misma cantidad de vértices). Por lo tanto, puesto que  $G$  es conexa, se sigue del teorema 1.3.7 que  $G$  es un árbol.

Sea  $v$  un vértice de corte de  $G$ , entonces supongamos que  $G - v$  tiene  $k$  componentes conexas. Para cada  $i$  en  $\{1, \dots, k\}$  sea  $G_i$  una componente conexa de  $G - v$ . Ya que  $G$  es conexa, se tiene que  $v$  es adyacente a al menos un vértice de  $G_i$  para cada  $i$  en  $\{1, \dots, k\}$ . Afirmamos que  $v$  es adyacente a exactamente un vértice en cada  $G_i$ . Supongamos que existen  $G_i$  y  $u$  y  $w$  en  $V(G_i)$  tales que  $u$  y  $w$  son adyacentes a  $v$  en  $G$ . Sea  $P$  un  $uw$ -camino en  $G_i$ , entonces  $P \cup (w, v) \cup (v, u)$  es un ciclo en  $G$ , lo cual no puede ocurrir ya que  $G$  es un árbol. Por lo tanto, para cada  $i$  en  $\{1, \dots, k\}$  existe un vértice  $v_i$  en  $V(G_i)$  tal que  $(v, v_i) \in E(G)$ .

Ahora afirmamos que cada componente  $G_i$  tiene exactamente un vértice. Supongamos que  $G_i$  es una componente conexa tal que existe  $w$  en  $V(G) -$

$\{v_i\}$ . Al ser  $G_i$  una componente conexa, entonces existe una  $v_i w$ -trayectoria en  $G_i$ , digamos  $Q$ . Entonces tenemos que  $(v, v_i) \cup Q$  es una  $vw$ -trayectoria en  $G$  y al ser  $G$  un árbol, por la proposición 1.3.5, se tiene que esa trayectoria es única en  $G$ , lo que implica que en  $G - v_i$  no hay  $vw$ -trayectorias. Por lo tanto,  $v$  y  $v_i$  son dos vértices de corte en  $G$  lo cual no es posible. Por lo tanto, cada componente  $G_i$  tiene exactamente un vértice.

Lo demostrado anteriormente implica que  $G$  es isomorfa a  $K_{1,k}$  y así en  $G^{+-}$   $v$  es un vértice aislado, lo cual no es posible porque  $G$  es conexa y  $G^{+-}$  es isomorfa a  $G$ .

Por lo tanto,  $G$  no tiene vértices de corte.

Como  $T$  es un árbol y  $G$  tiene una arista más que  $T$ , digamos  $(u, v)$ , entonces  $T + (u, v) = G$  y por la proposición 1.3.6  $T + (u, v)$  es una gráfica que contiene un único ciclo.

Procediendo por contradicción; supongamos que  $G$  tiene un ciclo sin ser  $G$  un ciclo.

Sea  $\gamma$  el único ciclo en  $G$ . Notemos que  $L(\gamma)$  es un ciclo en  $G^{+-}$  porque  $L(G) = G^{+-}[E(G)]$ , por la proposición 2.0.3. Por otro lado, puesto que  $\gamma$  es único en  $G$  pero  $G$  no es un ciclo, se tienen que existen  $u$  en los vértices de  $\gamma$  y  $w$  en  $V(G) - V(\gamma)$  tal que  $(u, w) \in E(G)$ . Por lo tanto, si  $a$  y  $b$  son las dos aristas de  $\gamma$  que inciden en el vértice  $u$ , entonces  $a$ ,  $b$  y  $(u, w)$  forman un ciclo de longitud 3 en  $G^{+-}$ , el cual es distinto de  $L(\gamma)$  porque  $(u, w)$  no pertenece a los vértices de  $L(\gamma)$ , lo cual no es posible porque  $G^{+-}$  tiene un único ciclo (ya que  $G^{+-}$  y  $G$  son isomorfas). Por lo tanto, no es posible que  $G$  no sea un ciclo.

Así,  $G$  es un ciclo. □

**Corolario 4.2.3.** *Sea  $G$  una gráfica conexa no trivial,  $G$  es isomorfa a  $G^{(+-)^n}$  si y solo si  $G$  es un ciclo.*

*Demostración.*  $\Leftarrow$ ] Sea  $G$  un ciclo. Por demostrar que  $G$  es isomorfa a  $G^{(+-)^n}$  con  $n \geq 1$ .

Probamos por inducción sobre  $n$ .

*Base:* Si  $n = 1$ , por definición  $G^{(+-)^1} = G^{+-}$ . Por otro lado, por la proposición 2.0.3 se tiene que  $G^{+-}[E(G)] = L(G)$  y puesto que  $G$  es un bloque (ya que  $G$  es un ciclo) se sigue del teorema 4.2.2 que  $G$  es isomorfa a su gráfica  $G^{+-}$ .

Por lo tanto,  $G$  es isomorfa a  $G^{+-} = G^{(+-)^1}$ .

*Hipótesis de inducción:* Si  $m$  es tal que  $1 \leq m \leq n - 1$ , entonces  $G$  es isomorfa a  $G^{(+-)^m}$ .

*Paso inductivo:* Por demostrar que  $G$  es isomorfa a  $G^{(+-)^n}$ .

Por definición tenemos que  $G^{(+-)^n} = [G^{(+-)^{n-1}}]^{+-}$ . Por otro lado por la hipótesis de inducción tenemos que  $G$  es isomorfa a  $G^{(+-)^{n-1}}$ , lo que implica

que  $G^{(+ -)^{n-1}}$  es un ciclo. Entonces por el teorema 4.2.2 se tiene que  $G^{(+ -)^{n-1}}$  es isomorfo a  $[G^{(+ -)^{n-1}}]^{+ -}$ .

Por lo tanto,  $G$  es isomorfa a  $G^{(+ -)^n}$ .

$\Rightarrow$ ] Sea  $G$  una gráfica conexa no trivial tal que  $G$  es isomorfa a  $G^{(+ -)^n}$ .

Por demostrar que  $G$  es un ciclo.

Si  $n = 1$ , entonces por el teorema 4.2.2 tenemos que  $G$  es un ciclo.

Por lo tanto, supongamos que  $n \geq 2$ .

La siguiente afirmación nos ayudará a demostrar que  $G$  es un ciclo.

**Afirmación 1.** Si  $v$  es un vértice en  $G$  y  $e_1, e_2$  y  $e_3$  son tres aristas distintas que inciden en  $v$ , entonces  $\gamma = (e_1, e_2, e_3, e_1)$  es un ciclo en  $L(G)$  el cual es isomorfo a un ciclo en  $G^{(+ -)^n}$ .

Como  $e_1, e_2$  y  $e_3$  inciden en el mismo vértice, entonces por la definición de gráfica de líneas se tiene que  $\gamma = (e_1, e_2, e_3, e_1)$  es un ciclo en  $L(G)$ . Por el corolario 1.5.7 se tiene que, para  $n \geq 2$ ,  $L^{n-1}(\gamma)$  es un ciclo isomorfo a  $\gamma$  en  $L^{n-1}(L(G)) = L^n(G)$ . Luego del lema 4.0.3 se sigue que  $L^{n-1}(\gamma)$  está contenido en  $G^{(+ -)^n}$ . Por lo tanto  $\gamma$  es un ciclo en  $L(G)$  isomorfo a un ciclo en  $G^{(+ -)^n}$ , a saber  $L^{n-1}(\gamma)$ .

Para demostrar que  $G$  es un ciclo vamos a proceder por contradicción suponiendo que  $G$  no es un ciclo.

**Caso 1.**  $G$  es acíclica.

En este caso, como  $G$  es conexa, se tiene que  $G$  es un árbol.

**Afirmación 2.**  $\delta(v) \leq 2$  para cada  $v$  en  $V(G)$ .

Procediendo por contradicción, supongamos que existe  $v$  un vértice de grado al menos 3. Sean  $e_1, e_2$  y  $e_3$  tres aristas de  $E(G)$  que son incidentes en  $v$ , entonces por la afirmación 1 se tiene que  $\gamma = (e_1, e_2, e_3, e_1)$  es un ciclo isomorfo a un ciclo en  $G^{(+ -)^n}$ , lo cual no es posible porque  $G^{(+ -)^n}$  es isomorfo a  $G$  la cual es acíclica.

Por lo tanto, para todo vértice  $v$  de  $G$  tenemos que  $\delta(v) \leq 2$ .

**Afirmación 3.-**  $G$  no tiene una trayectoria de longitud 4.

Procediendo por contradicción supongamos que  $G$  tiene una trayectoria de longitud 4.

Sea  $C_2 = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$  una trayectoria en  $G$  de longitud 4. Por ser  $G$  un árbol se sigue de la proposición 1.3.5 que esa trayectoria es la única que une al vértice  $v_1$  con  $v_5$ , lo que implica que  $v_2$  es un vértice de corte en  $G$ . Por otro lado, como las aristas  $(v_3, v_4)$  y  $(v_4, v_5)$  no son incidentes en  $v_2$  en  $G$  no es incidente en  $G$ , entonces  $v_2, (v_3, v_4)$  y  $(v_4, v_5)$  forman un ciclo de longitud 3 en  $G^{+ -}$ , digamos  $C_3$ . Por el corolario 1.5.7 se tiene que  $C_3$  es isomorfo a  $L^{m-1}(C_3)$  en  $L^{m-1}(G^{+ -})$  para toda  $m \geq 2$ . Luego por el lema 4.0.3 se tiene que  $L^{m-1}(G^{+ -})$  es una subgráfica de  $(G^{+ -})^{(+ -)^{m-1}}$  y como  $(G^{+ -})^{(+ -)^{m-1}} = G^{(+ -)^m}$  se tiene que  $L^{m-1}(C_3)$  es un ciclo en  $G^{(+ -)^m}$  para

todo  $m \geq 2$ , lo cual contradice la hipótesis de que  $G$  es isomorfo a  $G^{(+-)^n}$  porque estamos suponiendo que  $G$  es acíclica.

Por lo tanto,  $G$  no tiene una trayectoria de longitud 4 o mayor.

**Afirmación 4.-**  $G$  no tiene trayectorias de longitud 3.

Procediendo por contradicción, supongamos que  $D_1 = (v_1, v_2, v_3, v_4)$  es una trayectoria de longitud 3 en  $G$ . Note que  $V(G) = V(D_1)$  ya que de otra manera si  $V(G) - V(D_1) \neq \emptyset$  entonces por la conexidad de  $G$  existe  $w$  en  $V(G) - V(D_1)$  tal que  $w$  es adyacente a un vértice de  $D_1$ . Si  $w$  es adyacente a  $v_2$  o  $v_3$ , entonces estos vértices tendrían grado 3 o mayor lo cual no puede ocurrir por la afirmación 2. Si  $w$  es adyacente a  $v_1$  o a  $v_4$ , entonces tendríamos una trayectoria de longitud 4, lo cual no puede ocurrir por la afirmación 3. Por lo tanto,  $G = D_1$ , así  $G^{+-}$  es una trayectoria de longitud 4. Luego de la demostración de la afirmación 3 se tiene que  $G^{(+-)^2}$  contiene un ciclo de longitud 3 el cual es isomorfo a un ciclo en  $G^{(+-)^m}$  con  $m > 2$ . Lo cual no es posible porque  $G$  es acíclica y  $G^{(+-)^n}$  es isomorfa a  $G$ .

Por lo tanto,  $G$  no tiene una trayectoria de longitud 3.

**Afirmación 5.-**  $G$  no tiene una trayectoria de longitud 2.

Procediendo por contradicción, supongamos que  $D_2 = (v_1, v_2, v_3)$  es una trayectoria de longitud 2 en  $G$ . Note que  $V(G) = V(D_2)$  ya que de otra manera si  $V(G) - V(D_2) \neq \emptyset$  entonces por la conexidad de  $G$  existe  $w$  en  $V(G) - V(D_2)$  tal que  $w$  es adyacente a un vértice de  $D_2$ . Si  $w$  es adyacente a  $v_2$ , entonces  $v_2$  tendría grado 3 lo cual no puede ocurrir por la afirmación 2. Por otro lado, si  $w$  es adyacente a  $v_1$  o a  $v_3$  entonces  $G$  tendría una trayectoria de longitud 3 lo cual contradice la afirmación 4. Así  $G = D_2$ , lo que implica que  $G^{+-}$  consiste de una trayectoria de longitud uno y un vértice aislado y esto nos lleva a que  $G^{(+-)^2}$  es un vértice aislado. Por lo tanto,  $G^{(+-)^m}$ , con  $m \geq 3$ , es la gráfica vacía. De esta manera podemos ver que  $G$  no es isomorfa a  $G^{(+-)^n}$ , lo cual es una contradicción.

Por lo tanto,  $G$  no es una trayectoria de longitud 2.

De las afirmaciones anteriores se tiene que  $G$  no contiene trayectorias de longitud 2 o mayor y puesto que  $G$  es conexa y no trivial se deduce que  $G$  es isomorfo a  $K_2$ , lo que implica que  $G^{+-}$  es un vértice aislado. Por lo tanto,  $G^{(+-)^m}$  con  $m \geq 2$  es la gráfica vacía, lo cual contradice la hipótesis de que  $G$  es isomorfa a  $G^{(+-)^n}$ .

**Caso 2.**  $G$  tiene al menos un ciclo.

Supongamos que  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_k$  son todos los ciclos de  $G$ . Por el corolario 1.5.7 y por el lema 4.0.3 se sigue que cada ciclo  $\gamma_i$  es isomorfo a un ciclo de  $G^{(+-)^n}$ , a saber  $L^n(\gamma_i)$ .

Consideremos al ciclo  $\gamma_1$ , como  $G$  no es un ciclo y  $G$  es conexa, se tienen que existen  $u$  en los vértices de  $\gamma_1$  y  $w$  en  $V(G)$  tal que  $(u, w) \in E(G) - E(\gamma)$ . Por lo tanto, si  $a$  y  $b$  son las dos aristas de  $\gamma_1$  que inciden en el vértice  $u$ ,

entonces  $\gamma = (a, b, (u, w), a)$  forman un ciclo de longitud 3 en  $L(G)$ , el cual es distinto a  $L(\gamma_i)$  con  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Luego por el corolario 1.5.7 tenemos que  $L^{m-1}(\gamma)$  es isomorfo a  $\gamma$  en  $L^m(G)$  para cada  $m \geq 2$  y por el lema 4.0.3 al ser  $L^m(G)$  no vacía tenemos que  $L^m(G)$  es una subgráfica de  $G^{(+)^m}$ . Por lo tanto,  $L^{n-1}(\gamma)$  es un ciclo en  $G^{(+)^n}$  el cual es distinto a  $L^n(\gamma_i)$  para toda  $i$  en  $\{1, \dots, k\}$ . Por lo tanto,  $G^{(+)^n}$  tiene al menos  $k+1$  ciclos, lo cual contradice que  $G$  y  $G^{(+)^n}$  tienen la misma cantidad de ciclos porque son isomorfas.

Como los casos 1 y 2 producen una contradicción, concluimos que  $G$  es un ciclo.  $\square$

### 4.3. Isomorfismo de $G^{(-+)^n}$ con $G$

**Teorema 4.3.1.** *Sea  $G$  una gráfica conexa. Entonces  $J(G) = G^{-+}$  si y solo si  $G$  es un bloque.*

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ] Supongamos que  $G$  tiene  $q$  aristas y  $J(G) = G^{-+}$ . Por demostrar que  $G$  es un bloque. Como  $G$  es conexa, entonces solo resta demostrar que  $G$  no tiene vértices de corte.

Procediendo por contradicción, supongamos que  $G$  no es bloque; es decir,  $G$  tiene al menos un vértice de corte. Puesto que  $G$  tiene  $q$  aristas, entonces  $|V(J(G))| = q$  y como  $G$  tiene al menos un vértice de corte entonces  $|V(G^{-+})| \geq q+1$ , lo que implica que  $|V(J(G))| \neq |V(G^{-+})|$ . Por lo tanto,  $J(G) \neq G^{-+}$ , lo cual contradice que  $J(G) = G^{-+}$ .

Por lo tanto,  $G$  no tiene vértices de corte.

Así,  $G$  es un bloque.

$\Leftarrow$ ] Supongamos que  $G$  es un bloque. Por demostrar  $J(G) = G^{-+}$ .

Por la proposición 2.0.4 se tiene que  $J(G) = G^{-+}[E(G)]$  y como  $G$  es un bloque, entonces  $G$  no tiene vértices de corte, lo que implica que  $J(G) = G^{-+}$ .  $\square$

**Teorema 4.3.2.** *Sea  $G$  una gráfica conexa.  $G$  es isomorfa a su gráfica  $G^{-+}$  si y solo si  $G$  es  $C_5$  o  $K_{1,p}$  para algún natural  $p \geq 2$ .*

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ] Supongamos que  $G$  es isomorfa a su gráfica  $G^{-+}$ . Por demostrar que  $G$  es  $K_{1,p}$  o  $C_5$ .

Procediendo por contradicción supongamos que  $G$  es distinta a  $C_5$  y a  $K_{1,p}$ .

Consideremos dos casos sobre  $G$ .

- $G$  es un bloque.

Como  $G$  no tiene vértices de corte, entonces, en particular,  $G$  no es isomorfa a  $cor(K_3)$ , y puesto que  $G$  no es  $C_5$  entonces se sigue del

teorema 1.5.16 que  $G$  no es isomorfa a su gráfica de saltos. Por otro lado, por teorema 4.3.1 se tiene que  $J(G) = G^{-+}$ .

Por lo tanto,  $G$  no es isomorfa a su gráfica de aristas y vértices de corte  $G^{-+}$ , lo cual no es posible.

- $G$  no es un bloque.

Supongamos que  $G$  tiene  $n$  vértices.

Como  $G$  no es un bloque, entonces  $G$  tiene al menos un vértice de corte. Por otro lado, puesto que  $G$  es una gráfica conexa, se sigue del teorema 1.3.8 que  $G$  tiene al menos un árbol generador  $H$ . Luego, por el teorema 1.3.7 se tiene que  $G$  posee al menos  $n - 1$  aristas (las aristas del árbol generador de  $G$ ).

Note que  $G$  no contiene ciclos, de otra manera  $G$  tendría al menos  $n$  aristas, las aristas de  $H$  más una arista  $e$  en  $G$  que pertenece a un ciclo y  $e \notin E(H)$ . Como por hipótesis  $G$  tiene al menos un vértice de corte, tenemos que la gráfica de aristas y vértices de corte  $G^{-+}$  tendría al menos  $n + 1$  vértices, lo que implica que  $G^{-+}$  no es isomorfa a  $G$  (ya que  $G$  solo tiene  $n$  vértices), lo cual es una contradicción. Por lo tanto,  $G$  no contiene ciclos, y así  $G = H$ .

Por otro lado, si  $G$  tiene 2 o más vértices de corte, entonces la gráfica  $G^{-+}$  tiene al menos  $n + 1$  vértices, lo que implica que  $G^{-+}$  no es isomorfa a  $G$  (ya que  $G$  tiene  $n$  vértices), lo cual no es posible. Por lo tanto,  $G$  tiene exactamente un vértice de corte, digamos  $c$ .

Como  $G$  no es de la forma  $K_{1,p}$ , entonces existe al menos una arista en  $G$ , digamos  $(a, b)$ , tal que  $(a, b)$  no es incidente en  $c$ . Recuerde que al ser  $G$  un árbol, por la proposición 1.3.5, se tiene que existe una única trayectoria que une a cualquier par de vértices en  $G$ . Sea  $P = (c = x_0, x_1, \dots, x_k = a)$  una  $ca$ -trayectoria en  $G$ . Si  $k = 1$ , entonces  $(x_0 = c, x_1 = a, b)$  es una  $cb$ -trayectoria, la cual es única en  $G$ , lo que implica que en  $G - a$  no hay trayectorias entre  $c$  y  $b$ , lo cual diría que  $a$  es un vértice de corte, lo cual es una contradicción con el hecho de que  $G$  solo tiene un vértice de corte. Si  $k \geq 2$ , entonces de la misma manera podemos asegurar que  $x_1$  es un vértice de corte, lo cual no es posible.

Por lo tanto, como los dos casos sobre  $G$  no pueden ser posibles, entonces  $G$  es isomorfa a  $K_{1,p}$  o  $C_5$ .

⇐] Supongamos que  $G$  es isomorfa a  $K_{1,p}$  o a  $C_5$ . Por demostrar que  $G$  es isomorfa a su gráfica de aristas y vértices de corte  $G^{-+}$ .

Si  $G$  es isomorfa a  $C_5$ , entonces por el teorema 1.5.16  $G$  es isomorfa a su gráfica de saltos y como  $G$  es un bloque, entonces por el teorema 4.3.1 tenemos que  $J(G) = G^{-+}$ . Por lo tanto,  $G$  es isomorfa a su gráfica de aristas y vértices de corte  $G^{-+}$ .

Si  $G = K_{1,p}$ , con  $p \geq 2$ , entonces  $G$  tiene un vértice de corte, digamos  $v$ , el cual es incidente a todas las aristas de  $G$  (que son  $p$  aristas), lo que implica que en  $G^{-+}$  todos los vértices que son aristas en  $G$  son adyacentes a  $v$ . Por otro lado, todas las aristas en  $G$  son adyacentes entre si, ya que todas las aristas inciden en el vértice  $v$ , lo que implica que en  $G^{-+}$  ningún vértice que es una arista en  $G$  es adyacente a otro vértice que es una arista en  $G$ .

Por lo tanto,  $G^{-+}$  es isomorfa a  $K_{1,p}$ , lo que implica que  $G$  y  $G^{-+}$  son isomorfas.  $\square$

**Corolario 4.3.3.** *Sea  $G$  una gráfica conexa no trivial,  $G$  es isomorfa a  $G^{(-+)^n}$  si y solo si  $G$  es isomorfa a  $C_5$  o a  $K_{1,p}$  para algún natural  $p \geq 2$ .*

*Demostración.*  $\Leftarrow$ ] Supongamos que  $G$  es isomorfa a  $C_5$  o a  $K_{1,p}$  para algún natural  $p \geq 2$ . Por demostrar que  $G$  es isomorfa a  $G^{(-+)^n}$ , con  $n \geq 1$ .

Probamos por inducción sobre  $n$ .

*Base:* Si  $n = 1$ , entonces por definición  $G^{(-+)^1} = G^{-+}$ . Por otro lado, por el teorema 4.3.2 tenemos que  $G$  es isomorfa a su gráfica  $G^{-+}$ .

Por lo tanto,  $G$  es isomorfa a  $G^{-+} = G^{(-+)^1}$ .

*Hipótesis de inducción:* Si  $m$  es tal que  $1 \leq m \leq n - 1$ , entonces  $G$  es isomorfa a  $G^{(-+)^m}$ .

*Paso inductivo:* Por demostrar que  $G$  es isomorfa a  $G^{(-+)^n}$ .

Por definición tenemos que  $G^{(-+)^n} = [G^{(-+)^{n-1}}]^{-+}$ . Por otro lado, de la hipótesis de inducción se tiene que  $G \cong G^{(-+)^{n-1}}$ , lo que implica que  $G^{(-+)^{n-1}}$  es isomorfa a  $C_5$  o a  $K_{1,p}$ . Entonces por el teorema 4.3.2 se tiene que  $G^{(-+)^{n-1}} \cong [G^{(-+)^{n-1}}]^{-+}$ .

Por lo tanto, por la proposición 1.1.27 se tiene que  $G$  es isomorfa a  $[G^{(-+)^{n-1}}]^{-+} = G^{(-+)^n}$ .

$\Rightarrow$ ] Supongamos que  $G$  es isomorfa a  $G^{(-+)^n}$ . Por demostrar que  $G$  es isomorfa a  $C_5$  o a  $K_{1,p}$ .

Si  $n = 1$ , entonces por el teorema 4.3.2 tenemos que  $G$  es isomorfa a  $K_{1,p}$  o  $C_5$ .

Por lo tanto, supongamos que  $n \geq 2$ .

Para demostrar que  $G$  es isomorfa a  $K_{1,p}$  o  $C_5$ .

Consideremos dos casos sobre  $G$ .

**Caso 1.**  $G$  es acíclica.

En este caso, como  $G$  es conexa se tiene que  $G$  es un árbol.

**Afirmación 1.-**  $G$  no tiene una trayectoria de longitud 3.

Procediendo por contradicción, supongamos que  $C_1 = (v_1, v_2, v_3, v_4)$  es una trayectoria de longitud 3 en  $G$ . Luego, por ser  $G$  un árbol se sigue de la proposición 1.3.5 que esa trayectoria es la única que une al vértice  $v_1$  con el vértice  $v_4$ , lo que implica que  $v_2$  y  $v_3$  son vértices de corte en  $G$ .

Como las aristas  $(v_1, v_2)$  y  $(v_3, v_4)$  no son adyacentes en  $G$ , entonces ambas aristas son vértices adyacentes en  $G^{-+}$ . Por otro lado,  $(v_1, v_2)$  es adyacente a  $v_2$  en  $G^{-+}$  y  $(v_3, v_4)$  es adyacente a  $v_3$  en  $G^{-+}$ ; finalmente, tanto  $v_2$  como  $v_3$  son adyacentes al vértice  $(v_2, v_3)$  en  $G^{-+}$ , lo que implica que  $\gamma = ((v_1, v_2), v_2, (v_2, v_3), v_3, (v_3, v_4), (v_1, v_2))$  es un ciclo de longitud 5 en  $G^{-+}$ .

Como  $\gamma$  es un ciclo de longitud 5, entonces por el corolario 1.5.18 se tiene que, para  $n \geq 2$ ,  $J^{n-1}(\gamma)$  es un ciclo isomorfo a  $\gamma$  en  $J^{n-1}(G^{-+})$ . Luego del lema 4.0.4 se sigue que  $J^{n-1}(G^{-+})$  es subgráfica de  $(G^{-+})^{(-+)^{n-1}} = G^{(-+)^n}$ , lo que implica que  $J^{n-1}(\gamma)$  está contenido en  $G^{(-+)^n}$ . Por lo tanto,  $\gamma$  es un ciclo isomorfo a un ciclo en  $G^{(-+)^n}$ , a saber  $J^{n-1}(\gamma)$ . Entonces  $G$  no es isomorfa a  $G^{(-+)^n}$  ya que  $G$  es acíclica.

Por lo tanto,  $G$  no tiene una trayectoria de longitud 3 o mayor.

**Afirmación 2.-**  $|V(G)| \geq 3$ .

Supongamos por contradicción, que  $|V(G)| < 3$ ; es decir  $|V(G)| = 2$ , ya que  $G$  es no trivial. Sean  $v_1$  y  $v_2$  los únicos vértices de  $G$ . Al ser  $G$  conexa se tiene que  $(v_1, v_2)$  es una arista de  $G$ . Entonces  $G^{-+}$  consiste de un vértice aislado y  $G^{(-+)^m}$ , con  $m \geq 2$ , es una gráfica vacía, lo que implica que  $G$  no es isomorfa a  $G^{(-+)^n}$ , lo cual no es posible.

Por lo tanto,  $|V(G)| \geq 3$ .

**Afirmación 3.-**  $G$  es isomorfa a  $K_{1,p}$  para algún  $p \geq 2$ .

Como  $|V(G)| \geq 3$ ,  $G$  es conexa, entonces  $G$  tiene al menos un vértice, digamos  $v$ , que es adyacente a al menos dos vértices  $u$  y  $w$ . Afirmamos que  $N(v) = V(G) - \{v\}$ . Procediendo por contradicción, supongamos que existe  $v_1$  en  $V(G) - N(v) \cup \{v\}$ . Como  $G$  es conexa, entonces  $v_1$  es adyacente a un vértice en  $N(v) \cup \{v\}$ , digamos  $z$ , y puesto que  $v_1$  no es adyacente a  $v$ , se sigue que  $v \neq z$ . Así  $(v_1, z, v, w)$  o  $(v_1, z, v, u)$  es una trayectoria de longitud 3, lo cual no puede ocurrir por la afirmación 1. Por lo tanto,  $N(v) = V(G) - \{v\}$ ; es decir  $G$  es isomorfa a  $K_{1,p}$  para algún  $p \geq 2$ .

**Caso 2.**  $G$  tiene al menos un ciclo.

Como  $G$  y  $G^{(-+)^n}$  son isomorfas, entonces estas gráficas deben tener la misma cantidad de ciclos, en particular la misma cantidad de ciclos de longitud 5. Por lo tanto, observe que si  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$  son todos los ciclos de longitud 5 en  $G$ , entonces por el corolario 1.5.18 y por lema 4.0.4 se sigue que cada ciclo  $\gamma_i$  es isomorfo a un ciclo de  $G^{(-+)^n}$ , a saber  $J^n(\gamma_i)$ . En particular, con el mismo argumento tenemos que  $J(\gamma_i)$  es un ciclo de longitud 5 para toda  $i$  en  $\{1, \dots, k\}$  en  $G^{-+}$ .

**Afirmación 4.-**  $G$  no tiene un ciclo de longitud 6 o mayor.

Procediendo por contradicción, supongamos que  $C_1=(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, \dots, v_k, v_1)$ , con  $k \geq 6$ , es un ciclo en  $G$  de longitud  $k$  como se ve en la figura 4.2a, entonces  $D=((v_1, v_2), (v_3, v_4), (v_{k-1}, v_k), (v_2, v_3), (v_4, v_5), (v_1, v_2))$  es un ciclo de longitud 5 en  $G^{-+}$ , como se ve en la figura 4.2b, en particular  $D$  es un ciclo de longitud 5 en  $J(G) = G^{-+}[E(G)]$ . Note que los vértices de  $D$  provienen del ciclo  $C_1$  el cual es un ciclo de longitud  $k$  con  $k \geq 6$  en  $G$  y como para toda  $i$  en  $\{1, \dots, k\}$  los vértices de  $J(\gamma_i)$  provienen de un ciclo de longitud 5 en  $G$ , entonces  $D$  es distinto a  $J(\gamma_i)$  para toda  $i$  en  $\{1, \dots, k\}$ . Por lo tanto,  $G^{-+}$  tiene al menos  $k + 1$  ciclos de longitud 5.

Como  $D, J(\gamma_1), \dots, J(\gamma_k)$  son ciclos de longitud 5 en  $J(G)$ , entonces por el corolario 1.5.18 se tiene que  $J^{n-1}(D), J^{n-1}(J(\gamma_1)), \dots, J^{n-1}(J(\gamma_k))$  son isomorfos a  $C_5$  en  $J^{n-1}(J(G)) = J^n(G)$ . Luego del lema 4.0.4, como  $J^n(G) = J^{n-1}(J(G))$  es una subgráfica de  $G^{(-+)^n}$ , se sigue que  $J^{n-1}(D), J^{n-1}(J(\gamma_1)), \dots, J^{n-1}(J(\gamma_k))$  están contenidos en  $G^{(-+)^n}$ .

Por lo tanto,  $G^{(-+)^n}$  tiene al menos  $k + 1$  ciclos de longitud 5, y como  $G$  tiene exactamente  $k$  ciclos de longitud 5, entonces tenemos que  $G$  y  $G^{(-+)^n}$  no son isomorfas, lo cual no puede ocurrir.

**Nota:** Con un razonamiento similar al anterior tenemos que si  $G^{(-+)^m}$  tiene un ciclo de longitud 6 para algún  $m \geq 1$ , digamos  $\lambda$ , entonces  $G^{(-+)^k}$  tiene un ciclo de longitud 5 para cada  $k \geq m + 1$ , a saber  $J^r(\lambda)$ , donde  $k = m + r$  para algún  $r \in \mathbb{N}$ .

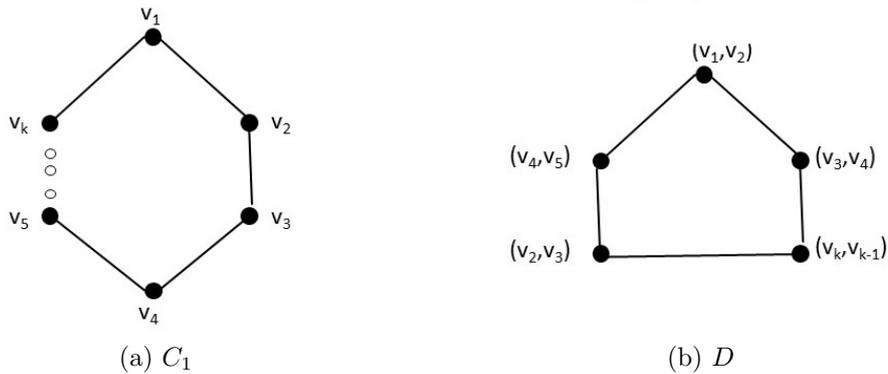


Figura 4.2: Ciclo  $C_1$  en  $G$  y el ciclo  $D$  en  $G^{-+}$

Por lo tanto,  $G$  no tiene un ciclo de longitud mayor o igual a 6.

**Afirmación 5.-** Si  $G$  tiene un ciclo de longitud 5, entonces  $G \cong C_5$ .

Procediendo por contradicción, supongamos que  $G$  no es isomorfa a  $C_5$ . Tomemos al ciclo de longitud 5  $\gamma_1 = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1)$ . Como  $G$  no es  $\gamma_1$ , entonces consideremos dos casos.

- $V(\gamma_1) \subset V(G)$ .

Como  $V(G) - V(\gamma_1) \neq \emptyset$ , entonces por la conexidad de  $G$ , existe un vértice en  $V(G) - V(\gamma_1)$ , digamos  $v_6$ , que es adyacente a un vértice del ciclo  $\gamma_1$ . Supongamos sin pérdida de generalidad que  $v_1$  es adyacente a  $v_6$  como se ve en la figura 4.3a. Entonces  $D = ((v_1, v_6), (v_2, v_3), (v_4, v_5), (v_1, v_2), (v_3, v_4), (v_6, v_1))$  es un ciclo de longitud 5 en  $G^{-+}$  como se ve en la figura 4.3b, en particular  $D$  es un ciclo de longitud 5 en  $J(G) = G^{-+}[E(G)]$ . Note que los vértices de  $D$  provienen de la trayectoria  $(v_6, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ , la cual es una trayectoria de longitud 5 en  $G$ , y como para toda  $i$  en  $\{1, \dots, k\}$  los vértices de  $J(\gamma_i)$  provienen de un ciclo de longitud 5 en  $G$ , entonces  $D$  es distinto a  $J(\gamma_i)$  para todo  $i$  en  $\{1, \dots, k\}$ . Por lo tanto,  $G^{-+}$  tiene al menos  $k + 1$  ciclos de longitud 5.

Como  $D, J(\gamma_1), \dots, J(\gamma_k)$  son ciclos de longitud 5 en  $J(G)$ , entonces por el corolario 1.5.18 se tiene que  $J^{n-1}(D), J^{n-1}(J(\gamma_1)), \dots, J^{n-1}(J(\gamma_k))$  son isomorfos a  $C_5$  en  $J^{n-1}(J(G)) = J^n(G)$ . Luego del lema 4.0.4, como  $J^n(G) = J^{n-1}(J(G))$  es una subgráfica de  $G^{(-+)^n}$ , se sigue que  $J^{n-1}(D), J^{n-1}(J(\gamma_1)), \dots, J^{n-1}(J(\gamma_k))$  están contenidos en  $G^{(-+)^n}$ . Por lo tanto,  $G^{(-+)^n}$  tiene al menos  $k + 1$  ciclos de longitud 5, y como  $G$  tiene exactamente  $k$  ciclos de longitud 5, entonces tenemos que  $G$  y  $G^{(-+)^n}$  no son isomorfas, lo cual no puede ocurrir.

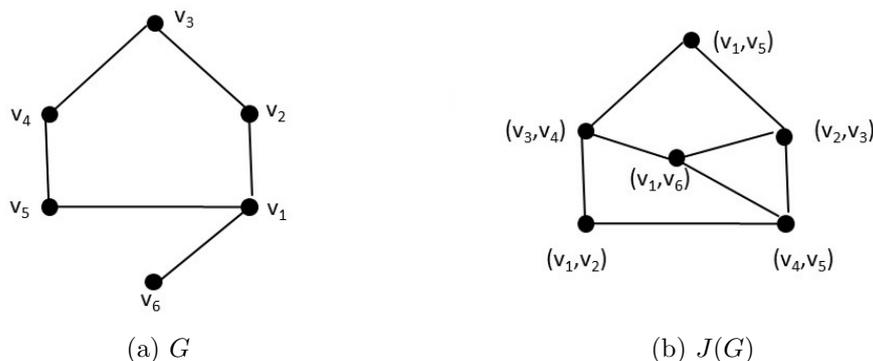


Figura 4.3: Gráfica  $G$  y su gráfica  $G^{-+}[E(G)]$

- $|V(G)| = 5$ .

En este caso como  $G$  es un bloque se sigue del teorema 4.3.1 que  $J(G) = G^{-+}$ .

Como  $G$  no es  $C_5$ , entonces existe una arista entre dos vértices no consecutivos de  $C_5$ , sin pérdida de generalidad supongamos que  $(v_1, v_3) \in$

$E(G)$ . Entonces  $G^{-+}$  tiene como subgráfica a la gráfica que se ve en la figura 4.4b, lo que implica que  $D_2 = ((d, f), (b, e), (a, c), (b, d), (c, e), (d, f))$  es un ciclo de longitud 5 en  $J^2(G)$ . Así,  $D_2$  es un ciclo de longitud 5 en  $G^{(-+)^2}$ , por el lema 4.0.4. Note que los vértices de  $D_2$  provienen de la trayectoria  $(f, d, b, e, c, a)$ , la cual es un trayectoria de longitud 5 en  $G^{-+}$ , y como para toda  $i$  en  $\{1, \dots, k\}$   $J(\gamma_i)$  es un ciclo de longitud 5 en  $G^{-+}$ , entonces  $D$  es distinto de  $J^2(\gamma_i)$  para toda  $i$  en  $\{1, \dots, k\}$ . Por lo tanto,  $G^{(-+)^2}$  tiene al menos  $k + 1$  ciclos de longitud 5. Luego con un razonamiento análogo al caso anterior tenemos que  $G^{(-+)^n}$  tiene al menos  $k + 1$  ciclos de longitud 5, y como  $G$  tiene exactamente  $k$  ciclos de longitud 5, entonces tenemos que  $G$  y  $G^{(-+)^n}$  no son isomorfas, lo cual no puede ocurrir.

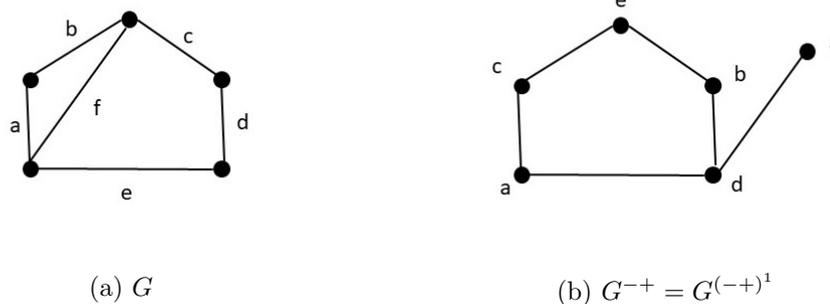


Figura 4.4: Subgráfica de  $G$  y su primera iteración

Por lo tanto, como si  $G$  no es isomorfo a  $C_5$  se genera una contradicción entonces  $G$  debe ser isomorfo a  $C_5$ .

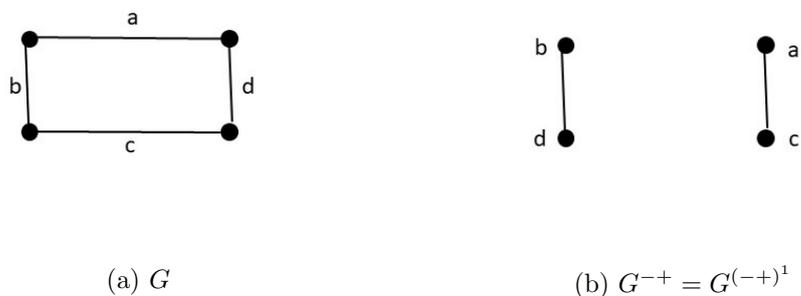
Para las siguientes afirmaciones supongamos que  $G$  no tiene ciclos de longitud 5.

**Afirmación 6.-**  $G$  no tiene un ciclo de longitud 4  $C_4$ .

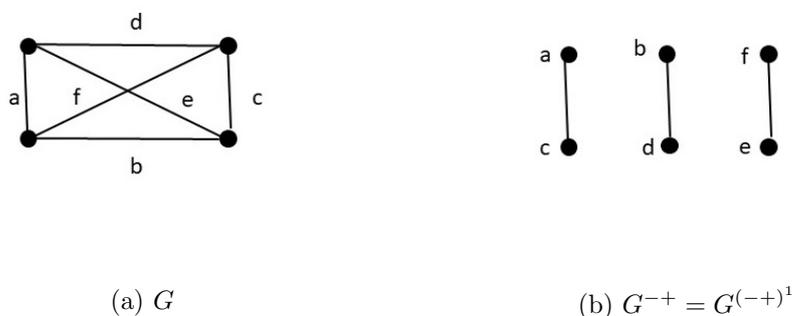
Procediendo por contradicción supongamos que  $G$  tiene al menos un ciclo  $C_4$ . Consideremos dos casos sobre la cardinalidad de  $V(G)$ .

- $|V(G)| = 4$ .

Si  $G = C_4$ , entonces  $G$  y  $G^{-+}$  son como se indica en la figura 4.5, lo que implica que  $G^{(-+)^2}$  es la gráfica completa de dos vértices y  $G^{(-+)^3}$  consiste de un vértice aislado. Finalmente tenemos que  $G^{(-+)^m}$  con  $m \geq 4$  es una gráfica vacía. Por lo tanto,  $G$  y  $G^{(-+)^n}$  no son isomorfas, lo cual no es posible.

Figura 4.5: Subgráfica de  $G$  y su primera iteración

Si  $G$  es completa, como se ve en la figura 4.6a, entonces  $G^{-+}$  es como se indica en la figura 4.6b, lo que implica que  $G^{(-+)^2}$  es la gráfica completa con tres vértices y así  $G^{(-+)^3}$  consiste de tres vértices aislados, de lo cual se deduce que  $G^{(-+)^m}$ , con  $m \geq 4$ , es una gráfica vacía. Por lo tanto,  $G$  y  $G^{(-+)^n}$  no son isomorfas.

Figura 4.6: Subgráfica de  $G$  y su primera iteración

Por lo tanto,  $G$  consiste de un ciclo  $C_4$  que contiene una arista interior, entonces tenemos que  $G^{(-+)}$  consiste de dos aristas no adyacentes y de un vértice aislado, lo que implica que  $G^{(-+)^2}$  es la completa  $K_2$  y así  $G^{(-+)^3}$  consiste de un vértice aislado de lo cual se deduce que  $G^{(-+)^n}$ , con  $m \geq 4$ , es una gráfica vacía. Por lo tanto,  $G$  y  $G^{(-+)^n}$  no son isomorfas.

- $|V(G)| > 4$ .

Supongamos que  $C_4 = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_1)$ .

Como  $V(G) - V(C_4) \neq \emptyset$ , al ser  $G$  conexa existe un vértice, digamos  $v_5$ , en  $V(G) - V(C_4)$  que es adyacente a un vértice del ciclo  $C_4$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $v_1$  es adyacente a  $v_5$ , como se ve en la figura 4.7a.

Si  $v_1$  es vértice de corte, entonces  $(e, c, a, v_1, b, d, e)$  es un ciclo de longitud 6 en  $G^{-+}$ , ver figura 4.7b. Como  $G^{-+}$  tiene un ciclo de longitud 6, entonces por la nota de la afirmación 4 se tiene que  $G^{(-+)^m}$  posee al menos un ciclo de longitud 5 para  $m \geq 2$  y como  $G$  no tiene ciclos de longitud 5 tenemos que  $G$  y  $G^{(-+)^n}$  no son isomorfas.

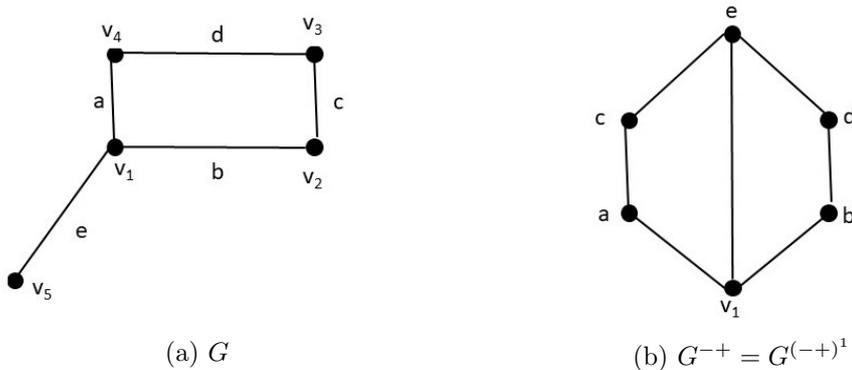


Figura 4.7: Gráfica  $G$  y su primera iteración

Por lo tanto,  $v_1$  no es vértice de corte, lo que implica que para  $v_5$  y  $v_3$  debe existir una  $v_5v_3$ -trayectoria por teorema 1.4.5, digamos  $P$ , que no pasa por el vértice  $v_1$ .

Sea  $z$  el primer vértice de la trayectoria  $P$  tal que  $z \in V(C_4)$ , lo cual ocurre ya que  $v_3 \in V(C_4)$ .

Si  $z = v_2$ , entonces  $(v_5, P, z = v_2) \cup (v_2, v_3, v_4, v_1, v_5)$  es un ciclo de longitud al menos 5 en  $G$ , lo cual no puede ocurrir porque estamos suponiendo que no hay ciclos de longitud 5 y por la afirmación 4.

Si  $z = v_4$ , entonces  $(v_5, P, z = v_4) \cup (v_4, v_3, v_2, v_1, v_5)$  es un ciclo de longitud al menos 5 en  $G$  lo cual no puede ocurrir porque estamos suponiendo que no hay ciclos de longitud 5 y por la afirmación 4.

Por lo tanto  $z = v_3$ . Si el vértice  $v_5$  es adyacente a  $v_3$ , como se ve en la figura 4.8a, entonces  $(a, f, b, d, e, c, a)$  es un ciclo de longitud 6 en  $G^{-+}$ , como se ve en la figura 4.8b, lo cual ya sabemos que no puede suceder. Por lo tanto,  $v_5$  no es adyacente a  $v_3$ , lo que implica que  $(v_5, P, z = v_3)$  es

de longitud al menos 2. Como  $(v_5, P, v_3)$  es de longitud mayor o igual a 2, entonces  $(v_5, P, z = v_3) \cup (v_3, v_2, v_1, v_5)$  es un ciclo de longitud al menos 5 en  $G$  lo cual no puede ocurrir porque estamos suponiendo que  $G$  no tiene ciclos de longitud 5 y por la afirmación 4.

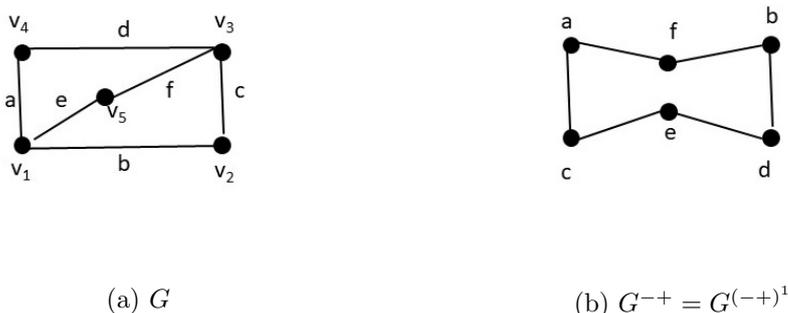


Figura 4.8: Gráfica  $G$  y su primera iteración

Por lo tanto, como los dos casos anteriores nos llevan a una contradicción, entonces  $G$  no tiene un ciclo de longitud 4.

**Afirmación 7.-**  $G$  no tiene un ciclo de longitud 3  $C_3$ .

Procediendo por contradicción, supongamos que  $G$  tiene al menos un ciclo  $C_3$ , digamos  $(v_1, v_2, v_3, v_1)$ .

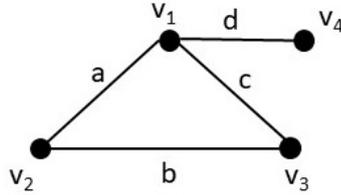
Si  $G = C_3$ , entonces  $G^{-+}$  consiste de tres vértices aislados, lo que implica que  $G^{(-+)^m}$  con  $m \geq 2$  es una gráfica vacía. Por lo tanto,  $G$  y  $G^{(-+)^n}$  no son isomorfas lo cual no es posible.

Por lo tanto, supongamos que  $G \neq C_3$ , entonces por la conexidad de  $G$  existe un vértice fuera del ciclo, digamos  $v_4$ , que es adyacente a un vértice del ciclo  $C_3$ , supongamos sin pérdida de generalidad que  $v_4$  es adyacente a  $v_1$ , como se ve en la figura 4.9a.  $G$  no puede ser la gráfica que se observa en la figura 4.9a ya que de otra manera  $G^{-+}$  es como se indica la figura 4.9b y  $G^{(-+)^2}$  es como se indica en la figura 4.9c.

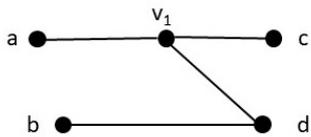
Como  $G^{-+}$  es acíclica y tiene una trayectoria de longitud 3, entonces con un argumento similar al utilizado en la afirmación 1 del caso 1 tenemos que se forma un ciclo de longitud 5 en  $G^{(-+)^2}$  y ese ciclo es isomorfo a un ciclo de longitud 5 en  $G^{(-+)^m}$  con  $m \geq 3$ . Por lo tanto,  $G^{(-+)^n}$  tiene al menos un ciclo de longitud 5, lo que implica que  $G$  y  $G^{(-+)^n}$  no son isomorfas lo cual no puede ocurrir.

Por lo tanto,  $G$  no puede ser la gráfica que se observa en la figura 4.9a.

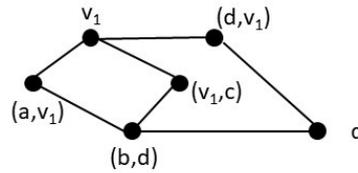
Note que  $v_4$  no es adyacente ni a  $v_3$  ni a  $v_2$ , ya que  $G$  no tiene ciclos de longitud 4.



(a)  $G$ .



(b)  $G^{-+} = G^{(-+)^1}$ .



(c)  $G^{(-+)^2}$ .

Figura 4.9: Ejemplo de una gráfica  $G$  y sus dos primeras iteraciones

Si  $v_1$  no es un vértice de corte, entonces debe existir una  $v_2v_4$ -trayectoria, digamos  $P'$ , que no pasa por el vértice  $v_1$ .

Sea  $z$  el primer vértice de la trayectoria  $P'$  tal que  $z \in V(C_3)$ , lo cual ocurre ya que  $v_2 \in V(C_3)$ .

Como  $z \in \{v_2, v_3\}$ , entonces tenemos que  $G$  tiene el ciclo  $(v_4, P', z = v_2) \cup (z = v_2, v_3, v_1, v_4)$  o el ciclo  $(v_4, P', z = v_3) \cup (z = v_3, v_2, v_1, v_4)$ , los cuales son de longitud al menos 5, pero esto no puede ocurrir porque estamos suponiendo que  $G$  no tiene ciclos de longitud 5 y por la afirmación 4.

Por lo tanto, de lo anterior concluimos que  $v_1$  es un vértice de corte y  $G$  no puede tener solo 4 vértices.

Como  $G$  tiene al menos 5 vértices, entonces por la conexidad de  $G$  existe un vértice  $v_5$  que es adyacente a un vértice de la gráfica de la figura 4.9a.

Consideremos los siguientes tres casos sobre  $v_5$ .

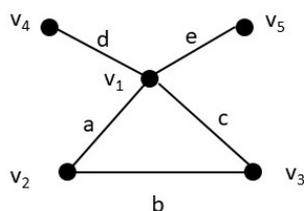
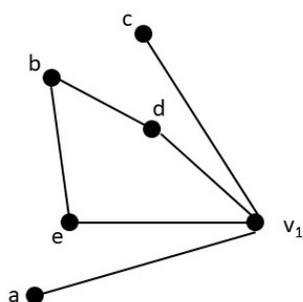
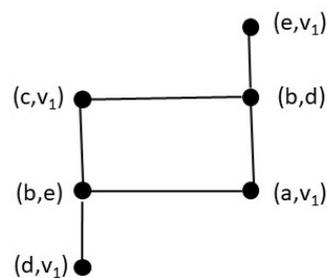
(a)  $G$ (b)  $G^{-+} = G^{(-+)^1}$ (c)  $J(G^{-+})$ .

Figura 4.10: Gráfica  $G$ , su primera iteración y la gráfica de saltos de la iteración

Si  $v_5$  es adyacente a  $v_1$ , entonces como  $v_1$  es vértice de corte de  $G$ , se sigue que la gráfica de la figura 4.10a es subgráfica de  $G$ , lo que implica que la gráfica de la figura 4.10b es subgráfica de  $G^{-+}$ . Así, la gráfica de la figura 4.10c es subgráfica de  $G^{(-+)^2}$  y esto nos lleva a que  $G$  no es isomorfa a  $G^{(-+)^2}$ . Por otro lado, como  $G^{-+}$  tiene un ciclo de longitud 4, con  $|V(G^{-+})| > 4$ , entonces por lo visto en la afirmación 6 (caso cuando  $|V(G)| > 4$ ) si sustituimos  $G$  por  $G^{-+}$  en los argumentos obtenemos que  $G^{(-+)^m}$  con  $m \geq 3$  posee al menos un ciclo de longitud 5. Por lo tanto,  $G$  y  $G^{(-+)^n}$  no son isomorfas lo cual no puede ocurrir.

Por lo tanto,  $v_5$  no es adyacente a  $v_1$ . Más aún, con lo anterior se ha demostrado que  $G$  no tiene subgráficas isomorfas a la gráfica de la figura 4.10a

Si  $v_5$  es adyacente a  $v_3$ , con un argumento similar al que utilizamos para ver que  $v_1$  es vértice de corte en  $G$ , podemos concluir que  $v_3$  es vértice de

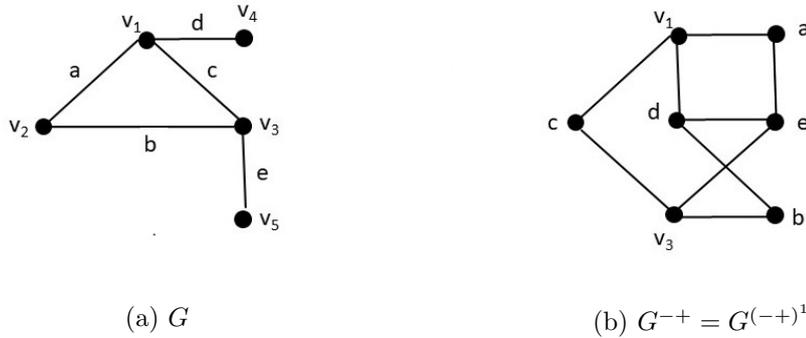


Figura 4.11: Gráfica  $G$  y su primera iteración

corte de  $G$ . Entonces la gráfica de la figura 4.11a es subgráfica de  $G$  y la gráfica de la figura 4.11b es subgráfica de  $G^{-+}$ . Como  $G^{-+}$  tiene un ciclo de longitud 5 se sigue que por el corolario 1.5.18 y por lema 4.0.4 que  $G^{(-+)^m}$ , con  $m \geq 1$ , tiene al menos un ciclo de longitud 5. Por lo tanto,  $G$  y  $G^{(-+)^n}$  no son isomorfas lo cual no puede ocurrir. El argumento es similar si  $v_5$  es adyacente a  $v_2$ .

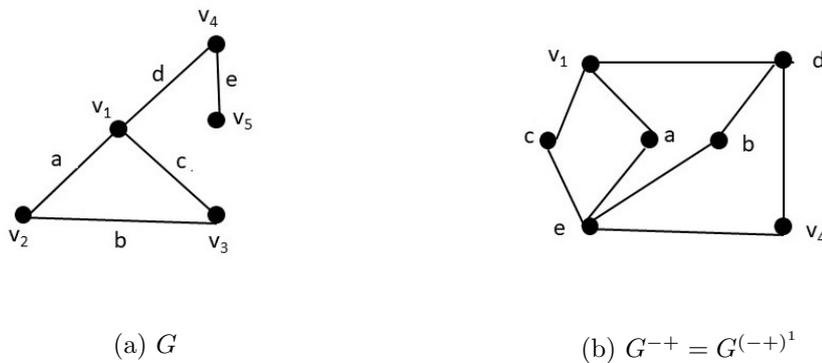


Figura 4.12: Gráfica  $G$  y su primera iteración

Por lo tanto, de lo demostrado anteriormente se sigue que  $v_5$  es adyacente a  $v_4$ . Afirmamos que  $v_4$  es vértice de corte de  $G$ , de otra manera tendríamos una  $v_5v_2$ -trayectoria que no pasa por  $v_4$ , digamos  $Q$ .

Sea  $z$  el primer vértice de la trayectoria  $Q$  tal que  $z \in V(C_3)$ , sabemos que  $z$  existe ya que  $v_2 \in V(C_3)$ . Si  $z \in \{v_2, v_3\}$ , entonces  $G$  tiene un ciclo de longitud al menos 5 ver figuras 4.13a y 4.13b, lo cual no es posible. Por lo tanto,  $z = v_1$  ver figura 4.14, lo que implica que  $G$  tiene una subgráfica

isomorfa a la gráfica de la figura 4.10a, lo cual ya dijimos que no puede suceder. Por lo tanto  $v_4$  es un vértice de corte en  $G$ .

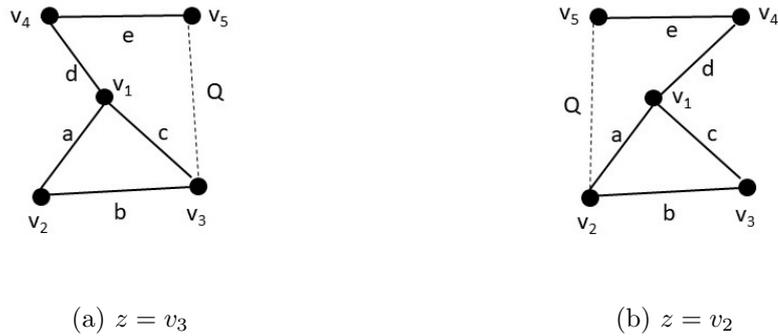


Figura 4.13:  $z \in \{v_2, v_3\}$

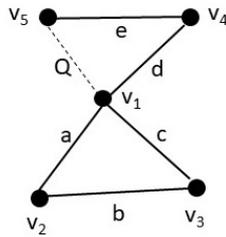


Figura 4.14:  $z = v_1$

Así, se sigue que la gráfica de la figura 4.12b es una subgráfica de  $G^{-+}$ . Como  $(v_1, d, v_4, e, c, v_1)$  es un ciclo de longitud 5 en  $G^{-+}$  se sigue que  $G^{(-+)^m}$ , con  $m \geq 2$ , tiene al menos un ciclo de longitud 5, por el corolario 1.5.18 y por el lema 4.0.4, lo que implica que  $G$  y  $G^{(-+)^n}$  no son isomorfas, lo cual no puede ocurrir.

Por lo tanto,  $G$  no tiene un ciclo de longitud 3.

Así, suponiendo que  $G$  no tiene ciclos de longitud 5 se deduce de las afirmaciones 6 y 7 junto con la afirmación 4 que  $G$  no tiene ciclos, lo cual contradice la suposición del caso 2. Por lo tanto,  $G$  tiene al menos un ciclo de longitud 5 y por la afirmación 5 se concluye que  $G$  es isomorfa a  $C_5$ .  $\square$

## 4.4. Isomorfismo de $G^{(--)^n}$ con $G$

**Teorema 4.4.1.** *Sea  $G$  una gráfica conexa. Entonces  $J(G) = G^{--}$  si y solo si  $G$  es un bloque.*

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ] Supongamos que  $G$  tiene  $q$  aristas y  $J(G) = G^{--}$ . Por demostrar que  $G$  es un bloque. Como  $G$  es conexa, entonces solo resta demostrar que  $G$  no tiene vértices de corte.

Procediendo por contradicción, supongamos que  $G$  no es bloque; es decir,  $G$  tiene al menos un vértice de corte. Puesto que  $G$  tiene  $q$  aristas, entonces  $|V(J(G))| = q$  y como  $G$  tiene al menos un vértice de corte entonces  $|V(G^{--})| \geq q + 1$ , lo que implica que  $|V(J(G))| \neq |V(G^{--})|$ . Por lo tanto,  $J(G) \neq G^{--}$ , lo cual contradice que  $J(G) = G^{--}$ .

Por lo tanto,  $G$  no tiene vértices de corte.

Así,  $G$  es un bloque.

$\Leftarrow$ ] Supongamos que  $G$  un bloque. Por demostrar  $J(G) = G^{--}$ .

Como  $G$  es un bloque, entonces  $G$  no tiene vértices de corte y por proposición 2.0.4 se tiene que  $J(G) = G^{--}[E(G)]$  lo que implica que  $J(G) = G^{--}$ .  $\square$

**Teorema 4.4.2.** *Sea  $G$  una gráfica conexa.  $G$  es isomorfa a su gráfica  $G^{--}$  si y solo si  $G$  es  $C_5$ .*

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ] Supongamos que  $G$  es isomorfa a su gráfica  $G^{--}$ . Por demostrar que  $G$  es  $C_5$ .

Procediendo por contradicción, supongamos que  $G$  no es isomorfa a  $C_5$ . Consideremos dos casos sobre  $G$ .

- $G$  es un bloque.

Como  $G$  no tiene vértices de corte, entonces, en particular,  $G$  no es isomorfa a  $cor(K_3)$ , y puesto que  $G$  no es  $C_5$ , entonces se sigue del teorema 1.5.16 que  $G$  no es isomorfa a su gráfica de saltos. Por otro lado, por el teorema 4.4.1 se tiene que  $J(G) = G^{--}$ .

Por lo tanto,  $G$  no es isomorfa a su gráfica de transformación arista-corte  $G^{--}$ , lo cual no es posible.

- $G$  no es un bloque.

Supongamos que  $G$  tiene  $n$  vértices.

Como  $G$  no es un bloque, entonces  $G$  tiene al menos un vértice de corte. Por otro lado, puesto que  $G$  es una gráfica conexa, se sigue del teorema 1.3.8 que  $G$  tiene al menos un árbol generador  $H$ . Luego, por

el teorema 1.3.7 se tiene que  $G$  posee al menos  $n - 1$  aristas (las aristas del árbol generador de  $G$ ).

Note que  $G$  no contiene ciclos, de otra manera  $G$  tendría al menos  $n$  aristas las aristas de  $H$  más una arista  $e$  en  $G$  que pertenece a un ciclo y  $e \notin E(H)$ . Como por hipótesis  $G$  tiene al menos un vértice de corte, tenemos que la gráfica de transformación arista-corte  $G^{--}$  tendría al menos  $n + 1$  vértices, lo que implica que  $G^{--}$  no es isomorfa a  $G$  (ya que  $G$  solo tiene  $n$  vértices), lo cual es una contradicción. Por lo tanto,  $G$  no contiene ciclos, y así  $G = H$ .

Por otro lado, si  $G$  tiene 2 o más vértices de corte, entonces la gráfica  $G^{--}$  tiene al menos  $n + 1$  vértices, lo que implica que  $G^{--}$  no es isomorfa a  $G$  (ya que  $G$  tiene  $n$  vértices), lo cual no es posible. Por lo tanto,  $G$  tiene exactamente un vértice de corte, digamos  $c$ .

Si todas las aristas de  $G$  son incidentes en  $c$ , entonces  $c$  es un vértice aislado en  $G^{--}$ , lo que implica que  $G$  y  $G^{--}$  no son isomorfas porque  $G$  es conexa. Si existe una arista que no es incidente en  $c$ , digamos  $(a, b)$ , tal que  $(a, b)$  no es incidente en  $c$ . Recuerde que al ser  $G$  un árbol, por la proposición 1.3.5, se tiene que existe una única trayectoria que une a cualquier par de vértices en  $G$ . Sea  $P = (c = x_0, x_1, \dots, x_k = a)$  una  $ca$ -trayectoria en  $G$ . Si  $k = 1$ , entonces  $(x_0 = c, x_1 = a, b)$  es una  $cb$ -trayectoria, la cual es única en  $G$ , lo que implica que en  $G - a$  no hay trayectorias entre  $c$  y  $b$ , lo cual diría que  $a$  es un vértice de corte, lo cual es una contradicción con el hecho de que  $G$  solo tiene un vértice de corte. Si  $k \geq 2$ , entonces de la misma manera podemos asegurar que  $x_1$  es un vértice de corte, lo cual no es posible.

Por lo tanto, como los dos casos sobre  $G$  no pueden ser posibles, entonces  $G$  es isomorfa a  $C_5$ .

$\Leftarrow$ ] Supongamos que  $G$  es isomorfa a  $C_5$ . Por demostrar que  $G$  es isomorfa a su gráfica de aristas y vértices de corte  $G^{--}$ .

Si  $G$  es isomorfa a  $C_5$ , entonces por el teorema 1.5.16  $G$  es isomorfa a su gráfica de saltos y como  $G$  es un bloque, entonces por el teorema 4.4.1 tenemos que  $J(G) = G^{--}$ . Por lo tanto,  $G$  es isomorfa a su gráfica de aristas y vértices de corte  $G^{--}$ .  $\square$

**Lema 4.4.3.** *Si  $G^{(--)^m}$  tiene un ciclo de longitud al menos 5 para algún  $m \geq 1$ , entonces  $G^{(--)^k}$  tiene un ciclo de longitud 5 para toda  $k \geq m + 1$ .*

*Demostración.* Sea  $C_j = (v_1, v_2, v_3, v_4, \dots, v_j, v_1)$  un ciclo de longitud  $j$  con  $j \geq 5$  en  $G^{(--)^m}$ . Por demostrar que  $G^{(--)^k}$  tiene un ciclo de longitud 5 para toda  $k \geq m + 1$ . Procederemos por inducción sobre  $k$ .

*Base:* Si  $k = m + 1$ , entonces  $D = ((v_1, v_2), (v_3, v_4), (v_j, v_1), (v_2, v_3), (v_j, v_{j-1}), (v_1, v_2))$  es un ciclo de longitud 5 en  $G^{(--)^{m+1}}$ .

Por lo tanto,  $G^{(--)^k}$  tiene un ciclo de longitud 5.

*Hipótesis de inducción:* Si  $k$  es tal que  $m + 1 \leq k \leq n - 1$ , entonces  $G^{(--)^k}$  tiene un ciclo de longitud 5.

*Paso inductivo:* Por demostrar que  $G^{(--)^n}$  tiene un ciclo de longitud 5.

Por la hipótesis de inducción se tiene que  $G^{(--)^{n-1}}$  tiene un ciclo de longitud 5. Sea  $C_5 = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_1)$  el ciclo de longitud 5 en  $G^{(--)^{n-1}}$ , entonces  $D_2 = ((w_1, w_2), (w_3, w_4), (w_5, w_1), (w_2, w_3), (w_4, w_5), (w_1, w_2))$  es un ciclo de longitud 5 en  $[G^{(--)^{n-1}}]^{--} = G^{(--)^n}$ .  $\square$

**Corolario 4.4.4.** *Sea  $G$  una gráfica conexa no trivial,  $G$  es isomorfa a  $G^{(--)^n}$  si y solo si  $G$  es isomorfa a  $C_5$ .*

*Demostración.*  $\Leftarrow$ ] Supongamos que  $G$  es isomorfa a  $C_5$ . Por demostrar que  $G$  es isomorfa a  $G^{(--)^n}$ , con  $n \geq 1$ .

Probamos por inducción sobre  $n$ .

*Base:* Si  $n = 1$ , entonces por definición  $G^{(--)^1} = G^{--}$ . Por otro lado por teorema 4.4.2 tenemos que  $G$  es isomorfa a su gráfica  $G^{--}$ .

Por lo tanto  $G$  es isomorfa a  $G^{--} = G^{(--)^1}$ .

*Hipótesis de inducción:* Si  $m$  es tal que  $1 \leq m \leq n - 1$ , entonces  $G$  es isomorfa a  $G^{(--)^m}$ .

*Paso inductivo:* Por demostrar que  $G$  es isomorfa a  $G^{(--)^n}$ .

Por definición tenemos que  $G^{(--)^n} = [G^{(--)^{n-1}}]^{--}$ . Por otro lado, de la hipótesis de inducción se tiene que  $G \cong G^{(--)^{n-1}}$ , lo que implica que  $G^{(--)^{n-1}}$  es isomorfa a  $C_5$ . Entonces por el teorema 4.4.2 se tiene que  $G^{(--)^{n-1}} \cong [G^{(--)^{n-1}}]^{--}$ .

Por lo tanto, por la proposición 1.1.27 se tiene que  $G$  es isomorfa a  $[G^{(--)^{n-1}}]^{--} = G^{(--)^n}$ .

$\Rightarrow$ ] Supongamos que  $G$  es isomorfa a  $G^{(--)^n}$ . Por demostrar que  $G$  es isomorfa a  $C_5$ .

Si  $n = 1$ , entonces por el teorema 4.4.2 tenemos que  $G$  es isomorfa a  $C_5$ .

Por lo tanto, supongamos que  $n \geq 2$ .

Como  $G$  y  $G^{(--)^n}$  son isomorfas, entonces de haber ciclos en  $G$ , tenemos que estas gráficas deben tener la misma cantidad de ciclos, en particular la misma cantidad de ciclos de longitud 5. Por lo tanto, observe que si  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$  son todos los ciclos de longitud 5 en  $G$ , entonces por el corolario 1.5.18 y por lema 4.0.4 se sigue que cada ciclo  $\gamma_i$  es isomorfo a un ciclo de  $G^{(--)^n}$ , a saber  $J^n(\gamma_i)$ . En particular, con el mismo argumento tenemos que  $J(\gamma_i)$  es un ciclo de longitud 5 para toda  $i$  en  $\{1, \dots, k\}$  en  $G^{--}$ .

**Afirmación 1.-**  $G$  no tiene una trayectoria de longitud 5.

Procediendo por contradicción, supongamos que  $C_1 = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$  es una trayectoria de longitud 5 en  $G$ .

Como las aristas  $(v_1, v_2)$ ,  $(v_3, v_4)$  y  $(v_5, v_6)$  no son adyacentes en  $G$ , entonces  $(v_1, v_2)$  y  $(v_3, v_4)$  son adyacentes en  $G^{--}$  así como  $(v_3, v_4)$  y  $(v_5, v_6)$  son adyacentes en  $G^{--}$ . Por otro lado,  $(v_1, v_2)$ ,  $(v_4, v_5)$  no son adyacentes en  $G$  lo que implica que  $(v_1, v_2)$  es adyacente a  $(v_4, v_5)$  en  $G^{--}$ . Por último tenemos que la arista  $(v_2, v_3)$  no es adyacente a  $(v_4, v_5)$  y  $(v_5, v_6)$  en  $G$  entonces  $(v_2, v_3)$  es adyacente a  $(v_4, v_5)$  y a  $(v_5, v_6)$  en  $G^{--}$ , lo que implica que  $\gamma = ((v_1, v_2), (v_3, v_4), (v_5, v_6), (v_2, v_3), (v_4, v_5), (v_1, v_2))$  es un ciclo de longitud 5 en  $G^{--}$ .

Como  $\gamma$  es un ciclo de longitud 5, entonces por el corolario 1.5.18 se tiene que, para  $n \geq 2$ ,  $J^{n-1}(\gamma)$  es un ciclo isomorfo a  $\gamma$  en  $J^{n-1}(G^{--})$ . Luego del lema 4.0.4 se sigue que  $J^{n-1}(G^{--})$  es subgráfica de  $(G^{--})^{(-)^{n-1}} = G^{(-)^n}$ , lo que implica que  $J^{n-1}(\gamma)$  está contenido en  $G^{(-)^n}$ . Por lo tanto,  $\gamma$  es un ciclo isomorfo a un ciclo en  $G^{(-)^n}$ , a saber  $J^{n-1}(\gamma)$ , lo cual no es posible ya que  $J^{n-1}(\gamma)$  no proviene de un ciclo de longitud 5 en  $G$ .

Por lo tanto,  $G$  no tiene una trayectoria de longitud 5 o mayor.

Para demostrar que  $G$  es isomorfa a  $C_5$  consideremos dos casos sobre  $G$ .

**Caso 1.-**  $G$  tiene al menos un ciclo.

**Afirmación 2.-**  $G$  no tiene un ciclo de longitud 6 o mayor.

Procediendo por contradicción supongamos que  $C_1 = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, \dots, v_k, v_1)$ , con  $k \geq 6$ , es un ciclo de longitud  $k$ , lo que implica que en particular  $G$  tiene una trayectoria de longitud 5, lo cual contradice la afirmación 1.

Por lo tanto,  $G$  no tiene un ciclo de longitud 6 o mayor.

**Afirmación 3.-** Si  $G$  tiene un ciclo de longitud 5, entonces  $G \cong C_5$ .

Procediendo por contradicción, supongamos que  $G$  no es isomorfa a  $C_5$ . Tomemos al ciclo de longitud 5  $\gamma_1 = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1)$ . Como  $G$  no es  $\gamma_1$ , entonces consideremos los siguientes dos casos.

- $V(\gamma_1) \subset V(G)$ .

Como  $V(G) - V(\gamma_1) \neq \emptyset$ , entonces por la conexidad de  $G$ , existe un vértice en  $V(G) - V(\gamma_1)$ , digamos  $v_6$ , que es adyacente a un vértice del ciclo  $\gamma_1$ . Supongamos sin pérdida de generalidad, que  $v_1$  es adyacente a  $v_6$  como se ve en la figura 4.15a. Entonces  $(v_6, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ , es una trayectoria de longitud 5 en  $G$ , lo cual no puede ocurrir por afirmación 1.

- $|V(G)| = 5$ .

En este caso como  $G$  es un bloque se sigue del teorema 4.4.1 que  $J(G) = G^{--}$ .

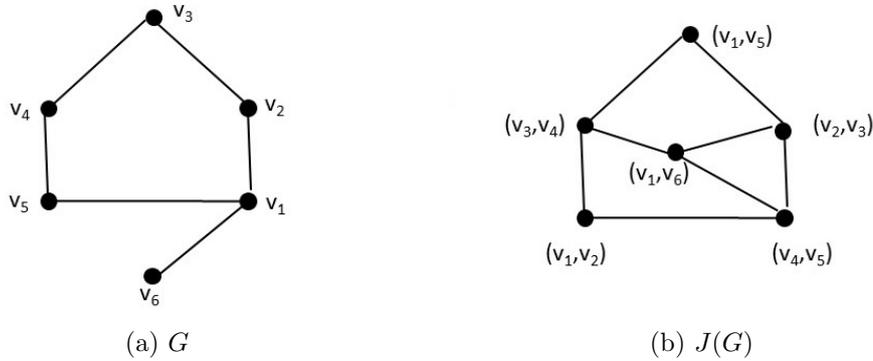


Figura 4.15: Gráfica  $G$  y su gráfica  $G^{--}[E(G)]$

Como  $G$  no es  $C_5$ , entonces existe una arista entre dos vértices no consecutivos de  $C_5$ , sin pérdida de generalidad supongamos que  $(v_1, v_3) \in E(G)$ . Entonces  $G^{--}$  tiene como subgráfica a la gráfica que se ve en la figura 4.16b, lo que implica que  $D_2 = ((d, f), (b, e), (a, c), (b, d), (c, e), (d, f))$  es un ciclo de longitud 5 en  $J^2(G)$ . Así,  $D_2$  es un ciclo de longitud 5 en  $G^{(--)^2}$ , por el lema 4.0.4. Note que los vértices de  $D_2$  provienen de la trayectoria  $(f, d, b, e, c, a)$ , la cual es un trayectoria de longitud 5 en  $G^{--}$ , y como para toda  $i$  en  $\{1, \dots, k\}$   $J(\gamma_i)$  es un ciclo de longitud 5 en  $G^{--}$ , entonces  $D$  es distinto de  $J^2(\gamma_i)$  para toda  $i$  en  $\{1, \dots, k\}$  recordemos que  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$  son todos los ciclos de longitud 5 en  $G$ . Por lo tanto,  $G^{(--)^2}$  tiene al menos  $k + 1$  ciclos de longitud 5. Luego con un razonamiento análogo a la afirmación anterior tenemos que  $G^{(--)^n}$  tiene al menos  $k + 1$  ciclos de longitud 5, y como  $G$  tiene exactamente  $k$  ciclos de longitud 5, entonces tenemos que  $G$  y  $G^{(--)^n}$  no son isomorfas, lo cual no puede ocurrir.

Por lo tanto, como los casos anteriores generan una contradicción entonces  $G$  debe ser isomorfo a  $C_5$ .

Ahora supongamos que  $G$  no tiene ciclos de longitud 5.

**Afirmación 6.**  $G$  no tiene un ciclo de longitud 4  $C_4$ .

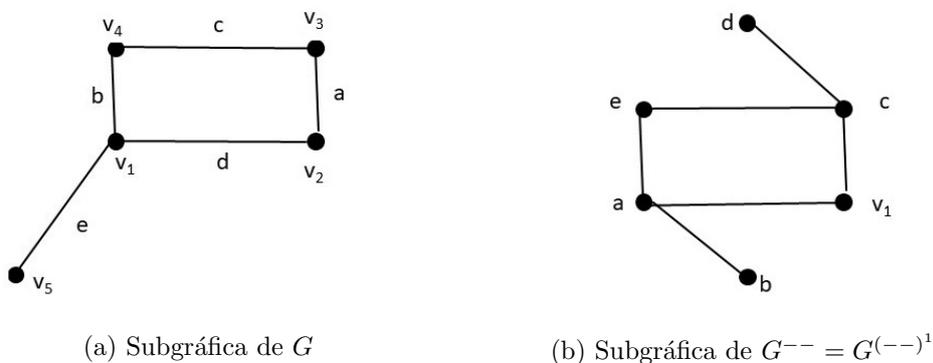
Procediendo por contradicción supongamos que  $G$  tiene al menos un ciclo  $C_4$ . Consideremos dos casos sobre la cardinalidad de  $V(G)$ .

- $|V(G)| = 4$ .

Si  $G = C_4$ , entonces  $G$  y  $G^{--}$  son como se indica en la figura 4.17, lo que implica que  $G^{(--)^2}$  es isomorfa a  $K_2$  y  $G^{(--)^3}$  consiste de un vértice aislado, lo que implica que  $G^{(--)^m}$ , con  $m \geq 4$ , es una gráfica vacía. Por lo tanto,  $G$  y  $G^{(--)^n}$  no son isomorfas, lo cual no es posible.





Figura 4.20: Gráfica  $G$  y su primera iteración

Por lo tanto,  $v_1$  no es vértice de corte en  $G$ , lo que implica que para  $v_5$  y  $v_3$  debe existir una  $v_5v_3$ -trayectoria por teorema 1.4.5, digamos  $P$ , que no pasa por el vértice  $v_1$ .

Sea  $z$  el primer vértice de la trayectoria  $P$  tal que  $z \in V(C_4)$ , lo cual ocurre ya que  $v_3 \in V(C_4)$ .

Si  $z = v_2$ , entonces  $(v_5, P, z = v_2) \cup (v_2, v_3, v_4, v_1, v_5)$  es un ciclo de longitud al menos 5 en  $G$ , lo cual no puede ocurrir porque estamos suponiendo que no hay ciclos de longitud 5 y por la afirmación 2.

Si  $z = v_4$ , entonces  $(v_5, P, z = v_4) \cup (v_4, v_3, v_2, v_1, v_5)$  es un ciclo de longitud al menos 5 en  $G$  lo cual no puede ocurrir porque estamos suponiendo que no hay ciclos de longitud al menos 5 y por la afirmación 2.

Si  $z = v_3$ . Note que el vértice  $v_5$  no es adyacente a  $v_3$ , ya que de otra manera  $G$  tendría como subgráfica a la gráfica que se ve en la figura 4.19, lo cual ya sabemos que no puede suceder. Por lo tanto,  $v_5$  no es adyacente a  $v_3$ , lo que implica que  $(v_5, P, z = v_3)$  es de longitud al menos 2. Como  $(v_5, P, v_3)$  es de longitud mayor o igual a 2, entonces  $(v_5, P, z = v_3) \cup (v_3, v_2, v_1, v_5)$  es un ciclo de longitud al menos 5 en  $G$  lo cual no puede ocurrir.

Por lo tanto, como los dos casos anteriores sobre  $|V(G)|$  nos llevan a una contradicción, entonces  $G$  no tiene un ciclo de longitud 4.

**Afirmación 7.**  $G$  no tiene un ciclo de longitud 3  $C_3$ .

Consideremos las siguientes afirmaciones para demostrar que  $G$  no tiene un ciclo de longitud 3  $C_3$ .

1.  $G$  no puede tener como subgráfica a la gráfica de la figura 4.21a, donde  $v_1$  y  $v_2$  son vértices de corte en  $G$ .

Como se ve en la figura 4.21b,  $G^{--}$  tiene un ciclo de longitud 6 y por el lema 4.4.3 tenemos que  $G^{(--)^k}$  con  $k \geq 2$  tiene un ciclo de longitud 5, lo que implica que  $G$  no es isomorfa a  $G^{(--)^n}$ , porque  $G$  no tiene ciclos de longitud al menos 5.

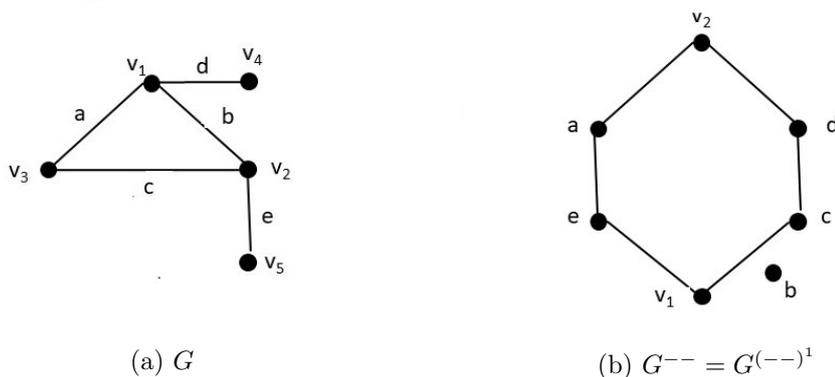


Figura 4.21: Gráfica  $G$  y su primera iteración

Para demostrar que  $G$  no tiene gráficas isomorfas a  $C_3$ ; procediendo por contradicción, supongamos que  $G$  tiene al menos un ciclo  $C_3$ , digamos  $(v_1, v_2, v_3, v_1)$ .

2. Si  $\delta(v_i) \geq 3$  para algún  $i$  en  $\{1, 2, 3\}$ , entonces  $v_i$  es un vértice de corte en  $G$ .

Supongamos que  $w$  es un vértice adyacente a  $v_i$  con  $w \notin V(C_3)$ .

Si  $v_1 = v_i$  no es un vértice de corte, entonces debe existir una  $v_2w$ -trayectoria, digamos  $P'$ , que no pasa por el vértice  $v_1$ .

Sea  $z$  el primer vértice de la trayectoria  $P'$  tal que  $z \in V(C_3)$ , lo cual ocurre ya que  $v_2 \in V(C_3)$ .

Como  $z \in \{v_2, v_3\}$ , entonces tenemos que  $G$  tiene al ciclo  $(w, P', z = v_2) \cup (z = v_2, v_3, v_1, w)$  o el ciclo  $(w, P', z = v_3) \cup (z = v_3, v_2, v_1, w)$ , los cuales son ciclos de longitud al menos 4, pero esto no puede ocurrir porque estamos suponiendo que  $G$  no tiene ciclos de longitud 5 y por la afirmación 2 y 6.

Por lo tanto, de lo anterior concluimos que  $v_1$  es un vértice de corte análogamente se demuestra que  $v_i$  es vértice de corte si  $i$  está en  $\{2, 3\}$ .

3.  $G \neq C_3$ .

Si  $G = C_3$ , entonces  $G^{--}$  consiste de tres vértices aislados, lo que implica que  $G^{(--)^m}$  con  $m \geq 2$  es una gráfica vacía. Por lo tanto,  $G$  y  $G^{(--)^n}$  no son isomorfas lo cual no es posible.

Por lo tanto, supongamos que  $G \neq C_3$ , entonces por la conexidad de  $G$  existe un vértice fuera del ciclo, digamos  $v_4$ , que es adyacente a un vértice del ciclo  $C_3$ , supongamos sin pérdida de generalidad que  $v_4$  es adyacente a  $v_1$ , como se ve en la figura 4.22. Así, del punto anterior concluimos que  $v_1$  es vértice de corte en  $G$ .

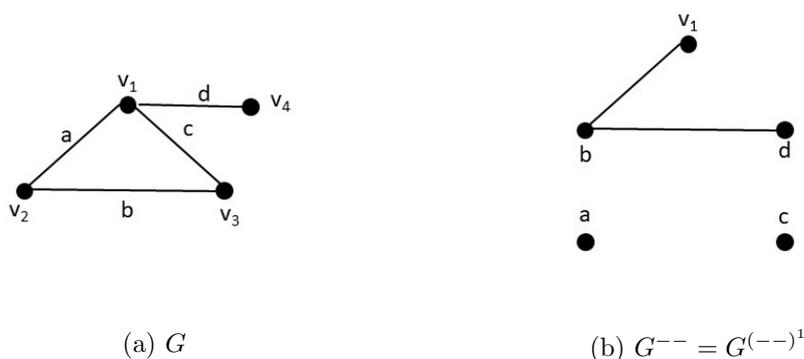


Figura 4.22: Gráfica  $G$  y su primera iteración

4.  $|V(G)| > 4$ .

Procediendo por contradicción, supongamos que  $|V(G)| = 4$ , lo que implica que como  $v_1$  es vértice de corte, entonces  $G$  es la gráfica que se observa en la figura y  $G^{--}$  es como indica la figura. Por lo tanto,  $G^{(--)^2}$  consiste de tres vértices aislados y  $G^{(--)^k}$  con  $k \geq 3$  es un gráfica vacía. Así,  $G$  no es isomorfa a  $G^{(--)^n}$  lo cual no es posible.

Por lo tanto,  $|V(G)| > 4$ .

5. No todas las aristas de  $E(G) - \{E(C_3) \cup \{(v_4, v_1)\}\}$  son incidentes en  $v_1$ .

De otra manera, como se ve en la figura 4.23 tenemos que todas las aristas  $e_i$  con  $1 \leq i \leq t$  son vértices en  $G^{--}$  como se ve en la figura 4.23b, note que  $e_i$  con  $1 \leq i \leq t$ ,  $d$  y  $v_1$  son vértices en  $G^{--}$  que son adyacentes a  $b$  mientras que  $a$  y  $c$  son vértices aislados en  $G^{--}$ , entonces todas las aristas que unen a cada uno de esos vértices con  $b$  en  $G^{--}$

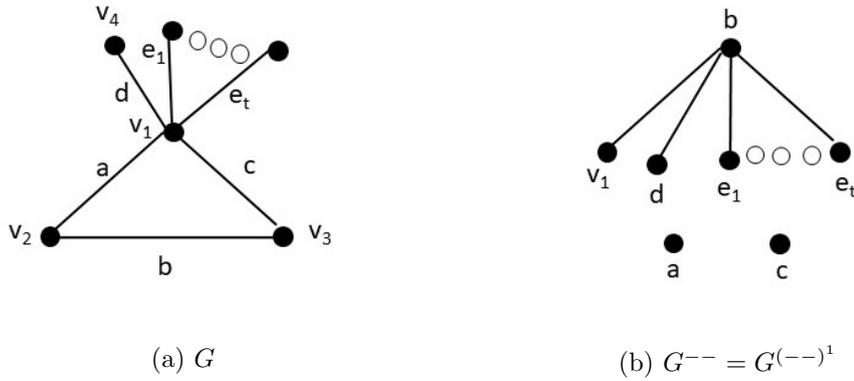


Figura 4.23: Gráfica  $G$  y su primera iteración

son vértices aislados en  $G^{(--)^2}$ , lo que implica que  $G^{(--)^k}$  con  $k \geq 3$  es un gráfica vacía.

Por lo tanto, debe existir una arista en  $E(G) - \{E(C_3) \cup \{(v_4, v_1)\}\}$  que no es incidente en  $v_1$ .

6. No existe un vértice distinto de  $v_1$  que sea adyacente a  $v_4$ .

Si existe un vértice  $v_5$  distinto de  $v_1$  que es adyacente a  $v_4$ , entonces la gráfica de la figura 4.24a es una subgráfica de  $G$ , lo que implica que al ser  $v_1$  vértice de corte en  $G$ , entonces la gráfica de la figura 4.24b es una subgráfica de  $G^{--}$ .

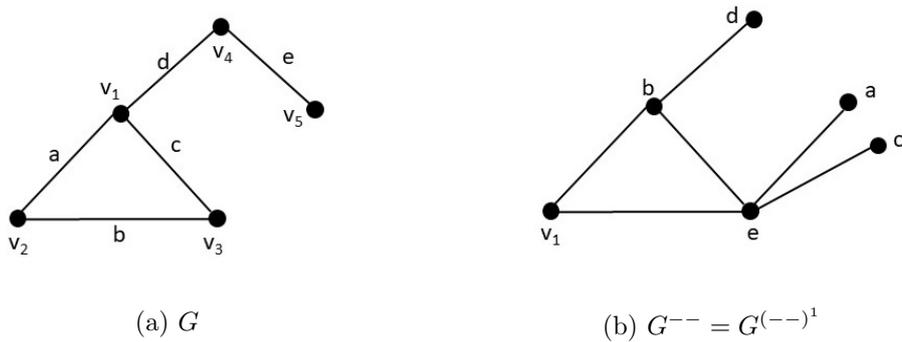


Figura 4.24: Gráfica  $G$  y su primera iteración

Notemos que  $a$  y  $c$  es adyacente a  $b$  en  $G$ , entonces por definición  $a$  no es adyacente a  $b$  y  $c$  no es adyacente a  $b$  en  $G^{--}$ .

Primero veamos que  $e$  es vértice de corte en  $G^{--}$ . Procediendo por contradicción, supongamos que  $e$  no es vértice de corte en  $G^{--}$ , lo que implica que existe una trayectoria entre  $a$  y  $b$  que no pasa por  $e$  de longitud mayor o igual a 2, digamos  $Q$ . Sea  $z$  el primer vértice de la trayectoria  $Q$  tal que  $z \in \{v_1, b\}$  lo cual ocurre ya que el último vértice de la trayectoria es  $b$ . Si  $z = b$ , entonces implica que  $(a, Q, z = b) \cup (b, v_1, e, a)$  es un ciclo de longitud al menos 5, lo que implica que, por el lema 4.4.3,  $G^{(--)^k}$  tiene un ciclo de longitud 5 para toda  $k \geq 2$ ; si  $z = v_1$  como  $a$  es incidente en  $v_1$  en  $G$  entonces no pueden ser adyacentes en  $G^{--}$  lo que implica que la trayectoria  $(a, Q, v_1)$  es de longitud al menos 2, entonces  $(a, Q, z = v_1) \cup (v_1, b, e, a)$  es un ciclo de longitud al menos 5, lo que implica que  $G^{(--)^k}$  tiene un ciclo de longitud 5 para toda  $k \geq 2$  (por el lema 4.4.3). Por lo tanto,  $G$  no es isomorfa a  $G^{(--)^n}$  lo cual no es posible.

Así,  $e$  es vértice de corte en  $G^{--}$ .

Análogamente se demuestra que  $b$  es un vértice de corte en  $G^{--}$ .

Puesto que  $G^{--}$  tiene como subgráfica a la gráfica de la figura 4.21a tenemos que, con un razonamiento análogo al usado en (1) tenemos que  $G^{(--)^2}$  tiene un ciclo de longitud 6 y  $G^{(--)^k}$  tiene un ciclo de longitud 5 para toda  $k \geq 3$ . Así  $G$  no es isomorfa a  $G^{(--)^n}$  lo cual no es posible.

Por lo tanto, no existe un vértice distinto a  $v_1$  que sea adyacente a  $v_4$  en  $G$ .

7. No existe un vértice en  $V(G) - \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  que sea adyacente a  $v_2$  o a  $v_3$ .

Procediendo por contradicción, supongamos que existe  $v_5$  en  $V(G) - \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  tal que  $v_5$  es adyacente a  $v_2$  o a  $v_3$ . Sin pérdida de generalidad supongamos que  $v_5$  es adyacente a  $v_2$ , lo que implica por el punto (2) que  $v_2$  es un vértice de corte, entonces se deduce que  $G$  tiene como subgráfica a la gráfica de la figura 4.21a donde  $v_1$  y  $v_2$  son vértices de corte lo cual contradice el punto (1).

Por lo tanto, no existe un vértice en  $V(G) - \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  que sea adyacente a  $v_2$  o a  $v_3$ .

Como  $|V(G)| > 4$ , entonces por los puntos (5) (6) y (7) tenemos que  $G$  es inconexa lo cual por hipótesis no es posible.

Por lo tanto,  $G$  no tiene un ciclo de longitud 3.

De esta manera hemos demostrado que si  $G$  no tiene ciclos de longitud 5, entonces por afirmación 6 y 7 tenemos que  $G$  no tiene ciclos de longitud 4

y 3 y como por afirmación 2 se tiene que  $G$  tampoco tiene ciclos de longitud 6 o mayor tenemos que  $G$  es acíclica lo cual no es posible por la suposición del caso 1, entonces se concluye que  $G$  si tiene ciclos de longitud 5, lo cual implica por afirmación 3 que  $G \cong C_5$ .

**Caso 2.-**  $G$  es acíclica.

En este caso como  $G$  es conexa se tiene que  $G$  es un árbol.

**Afirmación 8.-**  $G$  no tiene trayectorias de longitud 4.

Procediendo por contradicción, supongamos que  $C_1 = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$  es una trayectoria de longitud 4 en  $G$ . Como  $G$  es un árbol entonces por la proposición 1.3.5 se tiene que la trayectoria que une a  $v_1$  con  $v_5$  es única lo que implica que  $v_2, v_3$  y  $v_4$  son vértices de corte.

Como la arista  $(v_1, v_2)$  no es adyacente a  $(v_3, v_4)$  y no es incidente a  $v_4$ , entonces  $(v_1, v_2)$  es adyacente a  $v_4$  y a  $(v_3, v_4)$  en  $G^{--}$ . Por otro lado, como  $v_2$  no es incidente a las aristas  $(v_3, v_4)$  y  $(v_4, v_5)$  en  $G$  entonces  $v_2$  es adyacente a  $(v_3, v_4)$  y a  $(v_4, v_5)$  en  $G^{--}$ . Por último como la arista  $(v_2, v_3)$  no es adyacente a  $(v_4, v_5)$  y no es incidente a  $v_4$  tenemos que  $(v_2, v_3)$  es un vértice adyacente a  $v_4$  y a  $(v_4, v_5)$  en  $G^{--}$ . Por lo tanto, tenemos que  $\delta = ((v_1v_2), (v_3, v_4), v_2, (v_4, v_5), (v_2, v_3), v_4, (v_1, v_2))$  es un ciclo de longitud 6 en  $G^{--}$ . Por lo tanto, por el lema 4.4.3 tenemos que  $G^{(--)^r}$ , con  $r \geq 2$ , tiene un ciclo de longitud 5, lo cual no es posible ya que  $G^{(--)^n}$  es isomorfo a  $G$  y  $G$  es acíclica.

**Afirmación 9.-**  $G$  no tiene trayectorias de longitud 3.

Procediendo por contradicción, supongamos que  $C_2 = (v_1, v_2, v_3, v_4)$  es una trayectoria de longitud 3 en  $G$  como se ve en la figura 4.25a. Note que  $v_2$  y  $v_3$  son vértices de corte.



(a)  $G$

(b)  $G^{--} = G^{(--)^1}$

Figura 4.25: Gráfica  $G$  y su primera iteración

Si  $G = C_2$ , entonces  $G^{--}$  es como se ve en la figura 4.25b, lo que implica que  $G^{--} \cong G^{(--)^k}$ , con  $k \geq 2$ , lo cual no es posible porque  $G$  es isomorfa a

$G^{(--)^n}$ .

Por lo tanto,  $G$  es distinto a  $C_2$ , lo que implica que por la conexidad de  $G$  existe un vértice  $v_5$  adyacente a algún vértice de la trayectoria  $C_2$ .

Si  $v_5$  es adyacente a  $v_1$  o a  $v_4$ , entonces  $G$  tiene una trayectoria de longitud 4, lo cual no puede ocurrir por afirmación 8.

Si  $v_5$  es adyacente a  $v_2$  o a  $v_3$ , sin pérdida de generalidad supongamos que  $v_5$  es adyacente a  $v_2$ , entonces  $G^{--}$  contiene como subgráfica a la gráfica de la figura 4.26. Afirmamos que  $v_2$  es vértice de corte, de otra manera  $G^{--}$  contiene como subgráfica a la gráfica de la figura 4.19 o  $G^{--}$  contiene un ciclo de longitud al menos 5 lo cual no puede ocurrir ya que por análisis anteriores  $G^{(--)^k}$ , con  $k \geq 2$ , contiene un ciclo de longitud al menos 5 lo cual no puede ocurrir porque  $G$  es isomorfa a  $G^{(--)^n}$  y  $G$  es acíclica.

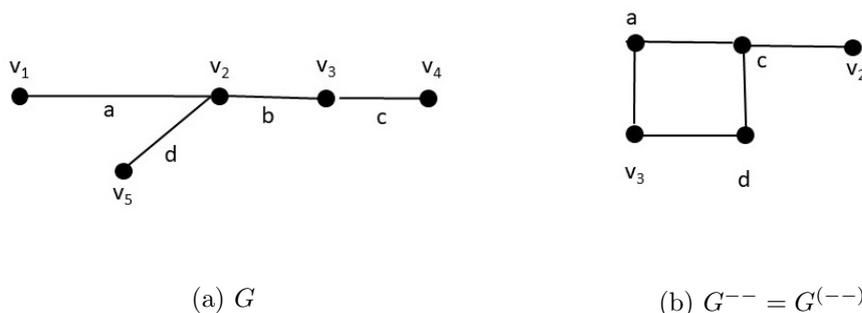


Figura 4.26: Gráfica  $G$  y su primera iteración

Como  $v_2$  es vértice de corte, entonces por afirmación 6 cuando  $|V(G)| > 4$ , se tiene que  $G^{(--)^2}$  contienen un ciclo de longitud 4 y  $G^{(--)^3}$  contiene un ciclo de longitud al menos 6 y  $G^{(--)^k}$ , con  $k \geq 4$ , tiene un ciclo de longitud 5, lo que implica que  $G$  no es isomorfo a  $G^{(--)^n}$ , lo cual no es posible.

Por lo tanto,  $G$  no tiene trayectorias de longitud 3.

**Afirmación 10.-**  $G$  no tiene trayectorias de longitud dos.

Procediendo por contradicción, supongamos que  $G$  tiene al menos una trayectoria de longitud 2. Sea  $(v_1, v_2, v_3)$  una trayectoria de longitud 2 en  $G$ .

Note que  $G$  no es una estrella ya que de lo contrario tenemos que  $G^{--}$  consiste de vértices aislados y  $G^{(--)^k}$ , con  $k \geq 2$ , es una gráfica vacía.

Por lo anterior tenemos que  $V(G) - (N(v_2) \cup \{v_2\}) \neq \emptyset$ . Sea  $v_4$  en  $V(G) - (N(v_2) \cup \{v_2\})$ , luego de la conexidad de  $G$ , existe un vértice en  $N(v_2)$ , digamos  $w$ , que es adyacente a  $v_4$ . Entonces  $(v_4, w, v_2, v_1)$  o  $(v_4, w, v_2, v_3)$  es una trayectoria de longitud 3, lo cual no puede ocurrir por afirmación 9.

Por lo tanto,  $G$  no tiene trayectoria de longitud 2.

De todas las afirmaciones anteriores para este caso, se concluye que  $G$  consiste de dos vértices, digamos  $v_1$  y  $v_2$ , lo que implica que por definición  $G^{--}$  es un vértice aislado y  $G^{(--)^k}$  con  $k \geq 2$  es una gráfica vacía. Por lo tanto,  $G$  no es isomorfa a  $G^{(--)^n}$ , lo cual no es posible.

De esta manera se concluye que el caso 2 no es posible.

□



# Conclusiones

El trabajo de esta tesis se baso principalmente en desarrollar el artículo “On the line-cut transformation graphs  $G^{xy}$ ” de B. Basavanagoud y Veena R. Desai.

En esta tesis pudimos observar que la gráfica de aristas y vértices de corte  $G^{xy}$  es una generalización del concepto de gráfica de líneas  $L(G)$  cuando  $x = +$  y  $G$  no tiene vértices de corte y  $G^{xy}$  es una generalización del concepto de la gráfica de saltos  $J(G)$  cuando  $x = -$  y  $G$  no tiene vértices de corte. En este trabajo vimos cual es el orden de  $G^{xy}$  y cual es el tamaño de  $G^{xy}$ , el cual depende de los valores que toman  $x$  y  $y$ . Establecimos la conexidad de  $G^{xy}$  a partir de la conexidad de  $G$  y vimos cuando  $G$  es isomorfa a su gráfica  $G^{xy}$ ; más aún vimos cuando  $G$  es isomorfa a  $G^{(xy)^n}$  para los casos  $G^{(+)^n}$ ,  $G^{(-)^n}$  y  $G^{(--)^n}$ . Con base en las tres demostraciones de los casos anteriores conjeturamos que  $G^{(++)^n}$  es isomorfa a  $G$  si y solo si  $G$  es un ciclo.

Al parecer el artículo “On the line-cut transformation graphs  $G^{xy}$ ” es el único en el cual se han estudiado algunas propiedades de la gráfica  $G^{xy}$ , ya que haciendo una búsqueda por internet no se encuentran artículos donde se haya trabajado con dicha gráfica.

Sabemos que si  $G$  es una gráfica euleriana, entonces se cumple que  $L(G)$  es una gráfica euleriana y hamiltoniana. Por lo tanto de la definición de  $G^{xy}$  podemos considerar las siguientes preguntas abiertas, las cuales se dejan para futuras investigaciones: ¿Qué condiciones debe cumplir  $G$  para que  $G^{xy}$  sea euleriana? y ¿Qué condiciones debe cumplir  $G$  para que  $G^{xy}$  sea hamiltoniana?

Por otro lado también vale la pena preguntarnos lo siguiente:

- ¿Cuál es el número cromático de  $G^{xy}$ ?
- ¿Cuál es el índice cromático de  $G^{xy}$ ?
- ¿Cuando  $G^{xy}$  tiene un apareamiento perfecto?



# Bibliografía

- [1] M. Aigner, Graphs whose complement and line graphs are isomorphic, *J. Combin. Theory* 7 (1969) 273-275.
- [2] B. Basavanagoud, V. R. Desai, On the line-cut transformation graphs  $G^{xy}$ , *Journal of Mathematical Archive*-6(5), 2015, 107-115.
- [3] G. Chartrand, H. Heiva, E. B. Jarrett, M. Schultz, Subgraph distances in graph defined by edge transfers, *Discrete mathematics* 170 (1997) 63-79.
- [4] F. Harary. *Graph Theory*, CRC Press, 2018.
- [5] V. R. Kulli, M. H. Muddebihal, Lict graph and litact graph of a graph, *J. Analysis and Comput*, 2(1)(2006) 33-43.
- [6] D. West, *Introduction to graph theory*, Pearson, Second edition.
- [7] B. Wu, J. Meng, Basic properties of total transformation graphs, *J. Math. Study*, 34(2001) 109-116.