Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Representaciones lineales y cohomología de grupos finitos. Un acercamiento a las representaciones proyectivas de grupos finitos y sus aplicaciones

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

Carlos Enrique Gómez Vilchis

TUTOR

Dr. Noé Bárcenas Torres

Ciudad Universitaria, CD. MX., 2019

1. **Datos del alumno**
   Gómez
   Vilchis
   Carlos Enrique
   56450111
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Matemáticas
   309038207

2. **Datos del tutor**
   Dr
   Noé
   Bárcenas
   Torres

3. **Datos del sinodal 1**
   Dr
   Omar
   Antolín
   Camarena

4. **Datos del sinodal 2**
   Dr
   Valente
   Santiago
   Vargas

5. **Datos del sinodal 3**
   Dra
   Diana
   Avella
   Alaminos

6. **Datos del sinodal 4**
   Dra
   Edith Corina
   Sáenz
   Valadez

7. **Datos del trabajo escrito**
   Representaciones lineales y cohomología de grupos finitos. Un acercamiento a las representaciones proyectivas de grupos finitos y sus aplicaciones
   55p
   2019

A mi madre María del Carmen Vilchis Rubí,
con todo mi cariño, por darme todo el amor y el apoyo incondicional,
y que gracias a estos he podido seguir cumpliendo mis metas.

Agradecimientos.

Agradezco de manera especial a mi madre, que lamentablemente ya no está con nosotros, por haberme dado el cariño, el apoyo y las herramientas para convertirme en la persona que ahora soy y poder seguir desarrollandome de manera personal y profesional.

Agradezco infinitamente a mi familia, mis padres Jaime Gómez Flores y María del Carmen Vilchis Rubí por darme todo el cariño, el apoyo y la formación para poder llegar a donde he llegado y poder seguir cumpliendo mis metas, a mis hermanos Jaime Alberto Gómez Vilchis e Itzel Gómez Vilchis por darme tanto cariño y compartir tantas cosas juntos.

A mi asesor, Noé Bárcenas Torres, por darme la oportunidad de hacer esta investigación bajo su dirección, por su paciencia y comprensión.

A mis sinodales Omar Antolín Camarena y Diana Avella Alaminos por sus observaciones y sugerencias.

A los proyectos PAPIIT IA 100117 y PAPIIT IN 100119, por el apoyo para la realización de esta tesis.

A mis amigos Diego, Alan, Axel y Balam por estar siempre ahí en las buenas y en las malas, y por tantas cosas que hemos compartido.

A mis amigos de la facultad Carlos Yonca, Alejandro Puga y Daniel Núñez por su amistad y por compartir ese gusto y entusiasmo por las matemáticas.

Finalmente agradezco a los que no fueron mencionados, pero de alguna manera ayudaron a la realización de esta tesis y a mi formación profesional.

Índice general

Introducción

La teoría de representaciones lineales de grupos ha tenido y sigue teniendo mucha interacción con ramas muy variadas de las matemáticas e incluso con la física. Al estudiar la relación que hay entre las representaciones lineales de un grupo y el cociente de ésta con su centro surge la noción de representación proyectiva (debida a Schur)[**Kar85**], la cual desde sus fundamentos interacciona con otra rama muy interesante, la cohomología de grupos. La teoría de representaciones proyectivas ha sido estudiada tanto para resolver problemas de la teoría de grupos como para estudiar ciertos fenómenos que ocurren en mecánica cuántica (por ejemplo para hacer modelos muy simples de teoría cuántica de campos [**DW90**]), o en topología algebraica.

Los objetivos de este trabajo son presentar parte de la teoría y varios ejemplos de dos ramas muy interesantes que son la teoría de cohomología y la teoría de representaciones de grupos, para ver cómo confluyen en la teoría de representaciones proyectivas de grupos finitos, así como dar un breve acercamiento a manera de motivación mediante los grupos de representaciones proyectivas y el doble de Drinfeld a áreas donde se aplica la teoría de representaciones proyectivas, como lo es la K-teoría G-equivariante.

Para esto, el presente trabajo se estructura de la siguiente manera:

En el capítulo 1, se dan las definiciones y varios ejemplos de G-módulos y G-homomorfismos para después dar la definición de resolución proyectiva de $\mathbb{Z}$ y con esto definir el n-ésimo grupo de cohomología con respecto a una resolución proyectiva. Se demuestra que el n-ésimo grupo de cohomología con coeficientes es invariante bajo resoluciones proyectivas y se definen los grupos de cohomología con coeficientes de un grupo G. Se da la construcción de la resolución proyectiva barra para dar el isomorfismo entre el n-ésimo grupo de cohomología con coeficientes y el cociente entre los n-cociclos y los n-cobordes. Para ello me he basado en las fuentes [**Bro07**], [**Vil03**] y [**Zal01**].

En el capítulo 2, se da la definición de extensiones centrales de G por un grupo abeliano A y se ve el caso de las extensiones escindibles. Esto motiva a ver el caso general utilizando secciones normalizadas y se llega a la clasificación de las extensiones centrales de G por A mediante el segundo grupo de cohomología de G con coeficientes en A. El contenido de este capítulo está basado en [**Bro12**].

El objetivo del capítulo 3 es presentar la teoría básica de representaciones lineales de grupos finitos y de la teoría de caracteres, con algunos ejemplos, para con esto dar una introducción a la teoría de representacioes proyectivas (o representaciones α-torcidas) de grupos finitos. Para ello en la sección 3.1 se da la definición de representación lineal, de subrepresentaciones y de representaciones irreducibles, con algunos ejemplos. En seguida se demuestra que toda representación lineal es suma directa de representaciones irreducibles, así como el Lema de Schur. En la sección 3.2 se construye la teoría básica de caracteres de grupo y la podemos dividir en tres partes. En la primera parte se da la definición de carácter de una representación, así como propiedades básicas, el carácter de la suma directa y del producto tensorial de dos representaciones, así como varios ejemplos. En la segunda parte se define un producto interno en el espacio vectorial de las funciones de G en $\mathbb{C}$, se demuestra que los caracteres de las representaciones irreducibles forman un conjunto ortonormal en este espacio vectorial, se ve el concepto de multiplicidad de una representación irreducible en otra representación y se demuestra uno de los resultados más importantes de la teoría de caracteres, el cual dice que los caracteres determinan las representaciones de un grupo finito. En la tercera parte se definen las funciones de clase, se demuestra que los caracteres de las representaciones irreducibles forman una base del espacio vectorial de las funciones de clase y se ve otro resultado muy importante que consiste en que el número de representaciones irreducibles de un grupo finito es igual al número sus clases de conjugación. Para la teoría de representaciones lineales nos hemos basado en los libros [**Ser12**] y [**Zal06**].

En la sección 3 del capítulo 3 se da una pequeña introducción a la teoría de representaciones proyectivas. Se presenta el concepto de representación proyectiva de un grupo finito y se fundamenta con lo visto en el capítulo 2. Se ve un ejemplo concreto de una representación α-proyectiva del grupo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ y se demuestra que los caracteres α-proyectivos determinan a este tipo de representaciones. Finalizamos este capítulo mencionando las relaciones que hay entre las representaciones lineales de un grupo G y los $\mathbb{C}G$-módulos y entre las representaciones proyectivas de G asociadas a un cociclo α y los $\mathbb{C}^{\alpha}G$-módulos.

En la sección 1 del capítulo 4 construimos el anillo universal de un semianillo y definimos el anillo de representaciones de un grupo. Damos un ejemplo para el grupo diédrico de orden 4. En la sección 2 definimos el grupo de representaciones α-torcidas de G y mostramos que este grupo está inmerso en el grupo de representaciones lineales de la extensión central asociada a α. Finalmente hacemos un brevísimo acercamiento a manera de comentarios a la relación que hay entre el grupo de representaciones del Doble de Drinfeld y la K-teoría equivariante. Para la teoría de representaciones proyectivas nos hemos basado en [**Kar85**], [**Dwy08**] y [**Wit96**].

Los requisitos de conocimientos previos para leer este trabajo (o al menos esa fue la intención del autor) son haber llevado los tres primeros cursos de álgebra moderna, o por lo menos tener clara la noción de grupo, homomorfismo de grupos, anillo, módulo, sucesión exacta y módulo proyectivo.

Capítulo 1

Cohomología de grupos

El objetivo de este capítulo es introducir el concepto de cohomología de grupos así como algunos ejemplos y algunas equivalencias.

1.1. G-Módulos y G-Homomorfismos

Definición 1.1.1 Para un grupo G se define el anillo entero de grupo por:

$$\mathbb{Z}G = \Big\{ \sum_{g\in G} a_g g \mid a_g \in \mathbb{Z} \text{ y } a_g = 0 \text{ para toda } g \text{ excepto un número finito} \Big\}$$

con las operaciones:

$$\left(\sum_{g\in G} a_g g\right) + \left(\sum_{g\in G} b_g g\right) = \sum_{g\in G} (a_g + b_g) g$$

$$\left(\sum_{g\in G} a_g g\right) \left(\sum_{g\in G} b_g g\right) = \sum_{g\in G} \left(\sum_{hk=g} a_h b_k\right) g$$

Para cualquier grupo G, $\mathbb{Z}G$ es un anillo con unidad, donde el 1 corresponde a $\sum_{g\in G} a_g g$ con $a_e = 1, a_g = 0$ para toda $g \neq e$, donde e es el neutro de G.

Ejemplos.

1. Consideremos a $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ el grupo cíclico de orden n, para algún n natural, $\mathbb{Z}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} := \{\sum_{i=0}^{n-1} a_i i | a_i \in \mathbb{Z}, 0 \leq i \leq n-1\}$. Por otro lado consideremos al anillo cociente $\mathbb{Z}[t]/(t^n - 1)$, donde los elementos son de la forma $\sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i$.

   Es fácil ver que la asignación $\sum_{i=0}^{n-1} a_i i \mapsto \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i$ es un isomorfismo. Por lo que $\mathbb{Z}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}[t]/(t^n - 1)$.

2. D_3 es el grupo de simetrías de un triángulo equilátero y sus elementos se pueden escribir de forma única como $1, r, r^2, s, sr, sr^2$, donde r es la

rotación por un ángulo de $2\pi/3$ y s es la reflexión con respecto una bisectriz del triángulo fija. También podemos definir este grupo como $D_3 = \langle r, s | r^3 = 1, s^2 = 1, srs = r^{-1}\rangle$. A partir de esto es fácil ver que $\mathbb{Z}D_3 \cong \mathbb{Z}[r,s]/(r^3-1, s^2-1, srs-r^{-1})$.

Definición 1.1.2 Sea A un grupo abeliano escrito aditivamente y sea G un grupo arbitrario. Decimos que A es un G-módulo (izquierdo) si viene equipado con un homomorfismo $\varphi : G \longrightarrow Aut(A)$ donde $Aut(A)$ es el grupo de automorfismos de A. Esta definición es equivalente a que A venga equipado con una función $\varphi : G \times A \longrightarrow A$ denotada por $\varphi(g,a) = ga$ que cumple que:

(a) $1a = a$, $a \in A$

(b) $(gh)a = g(ha)$, $g, h \in G$ y $a \in A$

(c) $g(a+b) = ga + gb$, $g \in G$, $a, b \in A$

Es decir, existe una acción (izquierda) de grupos de G en A que respeta la operación en A.

Sea A un G-módulo, podemos darle de manera natural una estructura de $\mathbb{Z}G$-módulo como sigue

$$\left(\sum_{g\in G} a_g g\right)(x) = \sum_{g\in G} a_g\,(gx) \text{ para } \sum_{g\in\ G} a_g g \in \mathbb{Z}G \text{ y } x \in A.$$

Recíprocamente si A es un $\mathbb{Z}G$-módulo, A es abeliano y consideramos la función $\varphi : G \times A \longrightarrow A$ dada por $\varphi(\theta, a) = \theta a$, donde θ, considerado en $\mathbb{Z}$G es el elemento dado por $\sum_{g\in G} a_g g$, con $a_g = \begin{cases} 0 & \text{si } g \neq \theta \\ 1 & \text{si } g = \theta \end{cases}$. Es fácil ver que $1a = a$, $(gh)a = g(ha)$, $g(a+b) = ga + gb$, por lo que φ es un homomorfismo y por lo tanto A es un G-módulo. Así a todo G-módulo podemos darle una estructura de $\mathbb{Z}G$-módulo y viceversa.

Ejemplos 1.1.3

(a) Si A es cualquier grupo abeliano, A puede hacerse un G-módulo con la acción trivial, esto es, $ga = a$ para toda $a \in A$ y toda $g \in G$. En este caso decimos que A es un G-módulo trivial, que es equivalente a que $\varphi : G \longrightarrow Aut(A)$ satisface $\varphi(G) = \{Id\}$.

(b) Consideremos el campo de los números complejos $\mathbb{C}$ y el grupo cíclico de orden n $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Definimos la acción $\varphi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ como

$$\varphi(m, z) = e^{m2\pi i/n} z.$$

Veamos que efectivamente φ es una acción de grupos.

(1) $\varphi(1, z) = e^{2\pi i/n} z = z$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

(2) $\varphi(l, \varphi(m, z)) = e^{l2\pi i/n}(e^{m2\pi i/n} z) = e^{(l+m)2\pi i/n} z = \varphi(l+m, z)$ para todo $l, m \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $z \in \mathbb{C}$.

Definición 1.1.4 Sea A un G-módulo. Definimos:

(1) $A^G = \{a \in A \mid ga = a$ para toda $g \in G\}$, esto es, el máximo G-submódulo trivial de A y

(2) $A_G = G/\langle ga = a \mid a \in A, g \in G\rangle$, que es el módulo cociente maximal de A en donde G actúa trivialmente.

Definición 1.1.5 Si A y B son G-módulos, un G-homomorfismo es un homomorfismo de grupos $\varphi : A \longrightarrow B$ tal que $\varphi(ga) = g\varphi(a)$, $g \in G$, $a \in A$, o equivalentemente un G-homomorfismo es un morfismo de $\mathbb{Z}G$-módulos.

Para dos G-módulos A y B (escritos aditivamente) denotamos por: $\mathrm{Hom}_G(A, B)$ al grupo de G-homomorfismos de A en B con la suma de funciones $(\varphi+\psi)(a) = \varphi(a) + \psi(a)$ como operación del grupo, y por $\mathrm{Hom}(A, B)$ al grupo de homomorfismos de grupos de A en B.

Proposición 1.1.6 El grupo $\mathrm{Hom}(A, B)$ tiene una estructura de G-módulo dada por: $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, B)$, $g \in G$, $g \circ \varphi \in$Hom(A, B), donde

$$(g \circ \varphi)(a) = g\varphi\left(g^{-1}a\right)$$

Demostración. Sean $g, h \in G$, $\varphi, \psi \in$Hom(A, B), entonces:

(a) $(1 \circ \varphi)(a) = 1\varphi\left(1^{-1}a\right) = 1\varphi(1a) = \varphi(a)$, esto es, $1 \circ \varphi = \varphi$.

(b) $(gh)\circ(\varphi)(a) = (gh)\left(\varphi\left((gh)^{-1}a\right)\right) = g\left(h\left(\varphi\left(h^{-1}\left(g^{-1}a\right)\right)\right)\right)$, esto es $(gh)(\varphi) = g(h(\varphi))$.

(c) $g \circ (\varphi + \psi) = g(\varphi + \psi)\left(g^{-1}a\right) = g\left(\varphi\left(g^{-1}a\right) + \psi\left(g^{-1}a\right)\right) = g\varphi\left(g^{-1}a\right) + g\psi\left(g^{-1}a\right)$, esto es, $g \circ (\varphi + \psi) = g\varphi + g \circ \psi$.

□

Observación 1.1.7 Nótese que si φ es un G-homomorfismo de A a B entonces para todo $g \in G$ $g \circ \varphi = \varphi$, luego $\varphi \in$(Hom$(A, B))^G$. Recíprocamente si $\varphi \in$(Hom$(A, B))^G$, sea $a \in A$, $g \in G$,

$$\varphi(ga) = (g \circ \varphi)(ga) = g\varphi\left(g^{-1}(ga)\right) = g\varphi(1a) = g\varphi(a),$$

por tanto $\mathrm{Hom}_G(A, B)$=(Hom$(A, B))^G$.

Observación 1.1.8 Si A es un G-módulo y consideramos a $\mathbb{Z}$ como G-módulo trivial, entonces por la observación anterior se tiene que $\mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}, A) = (\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, A))^G$. Ahora consideremos $\theta\colon \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, A) \longrightarrow A$ dada por $\theta(\varphi) = \varphi(1)$. Veamos que θ es un isomorfismo:

Sea $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, A)$ tal que $\theta(\varphi) = 0 = \varphi(1)$ por ser φ homomorfismo y como 1 genera a $\mathbb{Z}$, entonces $\varphi(z) = 0$ para toda $z \in \mathbb{Z}$, por lo tanto θ es inyectiva. Ahora sea $a \in A$ definimos $\psi : \mathbb{Z} \longrightarrow A$ como $\psi(1) = a$ y extendiendo ψ a $\mathbb{Z}$ se tiene que θ es suprayectiva.

Por lo tanto $A^G \cong (\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, A))^G$ =Hom$_G(\mathbb{Z}, A)$.

1.2. Cohomología de grupos

Definición 1.2.1 Una resolución proyectiva P de $\mathbb{Z}$ es una sucesión exacta de G-módulos

$$P : ... \longrightarrow P_n \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \longrightarrow ... \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\partial_0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

donde se considera $\mathbb{Z}$ como G-módulo trivial y cada P_i es un G-módulo proyectivo. Esto es, para cada $n \geq 0$ $ker(\partial_n) = im(\partial_{n+1})$ y ∂_0 es epimorfismo.

Ahora dada una resolución proyectiva P de $\mathbb{Z}$ y A un G-módulo. Se tiene la siguiente sucesión:

$$0 \xrightarrow{\partial_0^*} Hom_G(P_0, A) \xrightarrow{\partial_1^*} Hom_G(P_1, A) \xrightarrow{\partial_2^*} ...$$

$$... \longrightarrow Hom_G(P_{n-1}, A) \xrightarrow{\partial_n^*} Hom_G(P_n, A) \longrightarrow ...$$

donde $\partial_n^*(\varphi)= \varphi \circ \partial_n$ para cada $n \geq 1$ y ∂_0^* es el morfismo cero.

Notemos que $\partial_{n+1}^* \circ \partial_n^* =(\partial_n \circ \partial_{n+1})^* = 0^* = 0$, esto es, im $\partial_n^* \subseteq ker\partial_{n+1}^*$.

Definición 1.2.2 Se define el n-ésimo grupo de cohomología de A con respecto a la resolución proyectiva P, para cada $n \geq 0$ natural, como el grupo

$$H^n(P, A) = ker(\partial_{n+1}^*)/im(\partial_n^*),$$

y definimos $\partial_0^* = 0$.

Veamos a continuación que no importa la resolución proyectiva escogida, es decir, el n-ésimo grupo de cohomología es invariante bajo resoluciónes proyectivas. Esto se da justamente gracias a la propiedad que define a los módulos proyectivos.

Teorema 1.2.3 Si P y P' son dos resoluciones proyectivas de $\mathbb{Z}$, entonces

$$H^n(P, A) \cong H^n(P', A)$$

para toda $n = 0, 1, ...$

Para demostrar el teorema anterior necesitamos los siguientes dos lemas técnicos que muestran el porqué es necesario pedir que los módulos de las resoluciones sean precisamente proyectivos.

Lema 1.2.4. Si P y P' son dos resoluciones proyectivas de $\mathbb{Z}$, entonces existen $\varepsilon_n : P'_n \to P_n$ tales que

$$\partial_n \circ \varepsilon_n = \varepsilon_{n-1} \circ \partial'_n, \text{ para toda } n \geq 0.$$

Demostración. Por inducción sobre n.

Sea $\varepsilon_{-1} := Id_{\mathbb{Z}}$. Como P'_0 es proyectivo existe $\varepsilon_0 : P'_0 \to P_0$ tal que $\partial_0 \circ \varepsilon_0 = \partial'_0 = \varepsilon_{-1} \circ \partial'_0$.

$$\begin{tikzcd}
 & P'_0 \arrow[dl, "\varepsilon_0"'] \arrow[d, "\partial'_0"] & \\
P_0 \arrow[r, "\partial_0"'] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ahora supongamos construidos $\varepsilon_i : P'_i \to P_i$ tales que $\partial_i \circ \varepsilon_i = \varepsilon_{i-1} \circ \partial'_i$ para todo $i = 0, 1, ..., n$. Por un lado se tiene que

$$\partial_n \circ \varepsilon_n \circ \partial'_{n+1} = \varepsilon_{n-1} \circ \partial'_n \circ \partial'_{n+1} = \varepsilon_{n-1} \circ 0 = 0$$

Por lo tanto $im(\varepsilon_n \circ \partial'_{n+1}) \subset ker(\partial_n) = im(\partial_{n+1})$

Por ser P'_{n+1} proyectivo existe un homomorfismo $\varepsilon_{n+1} : P'_{n+1} \to P_{n+1}$ tal que $\partial_{n+1} \circ \varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n \circ \partial'_{n+1}$.

$$\begin{tikzcd}
& P'_{n+1} \arrow[dl, "\varepsilon_{n+1}"'] \arrow[d, "\varepsilon_n \circ \partial'_{n+1}"] & \\
P_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"'] & im(\partial_{n+1}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

□

Lema 1.2.5. Sean $\varepsilon_n : P'_n \to P_n$ y $\delta_n : P_n \to P'_n$ dadas en el lema anterior. Entonces existen homomorfismos:

$h_n : P_n \to P_{n+1}$ tales que

$$\partial_{n+1} h_n + h_{n-1} \partial_n = Id - \varepsilon_n \delta_n \tag{1.1}$$

y $f_n : P'_n \to P'_{n+1}$ tales que

$$\partial'_{n+1} f_n + f_{n-1} \partial'_n = Id - \delta_n \varepsilon_n \tag{1.2}$$

para toda $n \geq 0$.

Demostración. Por inducción sobre n. Sea $h_{-1} : \mathbb{Z} \to P_0$ el morfismo cero, sea $x \in P_0$, entonces

$$\partial_0((Id - \varepsilon_0\delta_0)(x)) = \partial_0(x) - \partial_0\varepsilon_0\delta_0(x) = \partial_0(x) - \partial'_0\delta_0(x) = \partial_0(x) - \partial_0(x) = 0.$$

Por tanto $im(Id - \varepsilon_0\delta_0) \subseteq ker(\partial_0) = im(\partial_1)$. Como P_0 es un módulo proyectivo existe $h_0 : P_0 \to P_1$ tal que

$$Id - \varepsilon_0\delta_0 = \partial_1 h_0 = \partial_1 h_0 + h_{-1}\partial_0.$$

$$\begin{tikzcd}
& P_0 \arrow[dl, "h_0"'] \arrow[d, "Id - \varepsilon_0\delta_0"] & \\
P_1 \arrow[r, "\partial_1"'] & im(\partial_1) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ahora supongamos construidos $h_1, ..., h_n$ tales que satisfacen (1.1). De manera parecida queremos utilizar la propiedad que define a los módulos proyectivos. Para esto veamos que $im(Id - \varepsilon_n\delta_n - h_{n-1}\partial_n) \subseteq im(\partial_{n+1}) = ker(\partial_n)$. En efecto, si $x \in P_n$

$$\partial_n((Id - \varepsilon_n\delta_n - h_{n-1}\partial_n)(x)) = \partial_n(x) - \partial_n\varepsilon_n\delta_n(x) - \partial_n h_{n-1}\partial_n(x)$$

$$= \partial_n(x) - \varepsilon_{n-1}\partial'_n\delta_n(x) - \partial_n h_{n-1}\partial_n(x) = \partial_n(x) - \varepsilon_{n-1}\delta_{n-1}\partial_n(x) - \partial_n h_{n-1}\partial_n(x) =$$

$$(Id - \varepsilon_{n-1}\delta_{n-1})\partial_n(x) - \partial_n h_{n-1}\partial_n(x) =$$
$$\partial_n h_{n-1}\partial_n(x) - h_{n-2}\partial_{n-1}\partial_n(x) - \partial_n h_{n-1}\partial_n(x) = 0.$$

Por lo tanto existe $h_{n+1} : P_{n+1} \to P_{n+2}$ tal que $\partial_{n+1}h_{n+1} = Id - \varepsilon_{n+1}\delta_{n+1} - h_n\partial_{n+1}$

$$\begin{tikzcd} & P_{n+1} \arrow[dl, "h_{n+1}"'] \arrow[d, "Id-\varepsilon_{n+1}\delta_{n+1}-h_n\partial_{n+1}"] & \\ P_{n+2} \arrow[r, "\partial_{n+2}"'] & im(\partial_{n+2}) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Se procede de manera análoga para los homomorfismos $f_n : P'_n \to P'_{n+1}$. □

Ahora ya tenemos todas las herramientas para demostrar el Teorema 1.2.3.

Demostración (Teorema 1.2.3). Demostremos el isomorfismo entre $H^n(P, A)$ y $H^n(P', A)$ para toda $n \geq 0$. Definimos a $\varepsilon_n^* : Hom_G(P_n, A) \to Hom_G(P'_n, A)$ como $\varepsilon_n^*(\varphi) = \varphi \circ \varepsilon_n$. Sea $\varphi \in ker(\partial_{n+1}^*)$, entonces

$$\partial'^*_{n+1}(\varepsilon_n(\varphi)) = \varphi \circ \varepsilon_n \circ \partial'_{n+1} = \varphi \circ \partial_{n+1} \circ \varepsilon_{n+1} = \varepsilon_{n+1}^*(\partial_{n+1}^* \circ \varphi) = 0$$

esto es, $\varepsilon_n^*(ker(\partial_{n+1}^*)) \subseteq ker(\partial'^*_{n+1})$.

Ahora sea $\psi \in im(\partial_n^*)$, entonces $\psi = \partial_n^*(\varphi)$ para algún $\varphi \in Hom_G(P_{n-1}, A)$, luego

$$\varepsilon_n^*(\psi) = \varepsilon_n^*(\partial_n^*(\varphi)) = \varphi \circ \partial_n \circ \varepsilon_n = \varphi \circ \varepsilon_{n-1} \circ \partial'_n = \partial'^*_n(\varepsilon_{n-1}^*(\varphi))$$

es decir $\varepsilon_n^*(im(\partial_n^*)) \subseteq im(\partial'^*_n)$.

Análogamente se obtiene $\delta_n^*(ker(\partial'^*_{n+1})) \subseteq ker(\partial_{n+1}^*)$ y $\delta_n^*(im(\partial'^*_n)) \subseteq im(\partial_n^*)$.

Por lo tanto, tenemos morfismos inducidos

$$\overline{\varepsilon_n^*} : H^n(P, A) \to H^n(P', A) \text{ y } \overline{\delta_n^*} : H^n(P', A) \to H^n(P, A)$$

Veamos que son inversos.

Sea $\varphi \in ker(\partial_{n+1}^*)$, entonces $(\partial_{n+1}h_n + h_{n-1}\partial_n)^*(\varphi) = \varphi\partial_{n+1}h_n + \varphi h_{n-1}\partial_n = 0 + \varphi h_{n-1}\partial_n = \partial_n^*(\varphi h_{n-1}) \in im(\partial_n^*)$, por lo tanto, $\overline{(\partial_{n+1}h_n + h_{n+1}\partial_n)^*} = 0 = \overline{(Id - \varepsilon_n\delta_n)^*} = \overline{Id^*} - \overline{\delta_n^*\varepsilon_n^*}$, de donde $\overline{Id^*} = Id = \overline{\delta_n^*}\,\overline{\varepsilon_n^*}$.

De manera similar, sea $\psi \in ker(\partial'^*_{n+1})$, entonces $(\partial'_{n+1}f_n + f_{n-1}\partial'_n)^*(\psi) = \psi\partial'_{n+1}f_n + \psi f_{n-1}\partial'_n = 0 + \psi f_{n+1}\partial'_n = \partial'^*_n(\psi f_{n-1}) \in im(\partial'^*_n)$, por lo tanto, $\overline{(\partial'_{n+1}f_n + f_{n-1}\partial'_n)^*} = 0 = \overline{(Id - \delta_n\varepsilon_n)^*}$, de donde se sigue que $Id = \overline{\varepsilon^*}\,\overline{\delta^*}$. □

Definición 1.2.6 Para un G-módulo A y $n = 0, 1, ...$, definimos el n-ésimo grupo de cohomología de G con coeficientes en A $H^n(G, A)$ como $H^n(P, A)$, donde P es cualquier resolución proyectiva de $\mathbb{Z}$.

Teorema 1.2.7 Sea A un G-módulo, entonces $H^0(G, A) = A^G$.

Demostración. Sea P una resolución proyectiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$

$$P : \; ... \longrightarrow P_n \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \longrightarrow ... \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\partial_0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Ahora $H^0(G,A) = ker(\partial_1^*)/\text{im } \partial_0^* = ker\partial_1^*$ por definición. Por otro lado el funtor contravariante $\text{Hom}_G(\ ,A)$ es exacto derecho, entonces la sucesión:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_G(\mathbb{Z},A) \longrightarrow \text{Hom}_G(P_0,A) \xrightarrow{\partial_1^*} \text{Hom}_G(P_1,A)$$

es exacta, por lo tanto $A^G \cong \text{Hom}_G(\mathbb{Z},A) = ker(\partial_1^*) = H^0(G,A)$.

$\square$

Ejemplo 1.2.8 Consideremos el grupo cíclico infinito generado por t, esto es $G = \{t^i | i \in \mathbb{Z}\}$, entonces $\mathbb{Z}G \cong \mathbb{Z}[t,t^{-1}]$. Considere la siguiente sucesión:

$$... \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \tag{1.3}$$

donde $\varepsilon\left(\sum_{\sigma\in G} a_\sigma \sigma\right) = \sum_{\sigma \in G} a_\sigma$. Veamos que la sucesión es exacta:

Primero veamos que el morfismo multiplicar por $(t-1)$ es un monomorfismo. Sea $\sum_{i=-m}^n a_i t^i \in \mathbb{Z}G$ tal que $(t-1)\left(\sum_{i=-m}^n a_i t^i\right) = 0$, entonces

$$0 = \sum_{i=-m}^{n} a_i t^{i+1} - \sum_{i=-m}^{n} a_i t^i = \sum_{i=-m}^{n+1} (a_{i-1} - a_i) t^i$$

luego si $m \leq i \leq n+1$ $a_{i-1} - a_i = 0$, pero $a_{m-1} = 0 = a_{n+1}$ por lo tanto $a_i = 0$ para toda $m \leq i \leq n$.

Ahora sea $\sum_{i=-m}^n a_i t^i \in \mathbb{Z}G$, entonces

$$\varepsilon\left((t-1)\left(\sum_{i=-m}^{n} a_i t^i\right)\right) = \varepsilon\left(\sum_{i=-m}^{n} a_i t^{i+1} - \sum_{i=-m}^{n} a_i t^i\right) =$$

$$\varepsilon\left(\sum_{i=-m}^{n} a_i t^{i+1}\right) - \varepsilon\left(\sum_{i=-m}^{n} a_i t^i\right) =$$

$$= \sum_{i=-m}^{n} a_i - \sum_{i=-m}^{n} a_i = 0$$

Por lo tanto $im(t-1) \subseteq ker(\varepsilon)$. Ahora sea $\sum_{i=-m}^n a_i t^i \in \mathbb{Z}G$ tal que $\sum_{i=-m}^n a_i = 0$.

Observemos que $a_i = -\sum_{k=-m}^{i-1} a_k - \sum_{k=i+1}^{n} a_k$ y que $\sum_{k=-m}^{i} a_k = -\sum_{k=i+1}^{n} a_k$

Ahora $\sum_{i=-m}^n \left(-\sum_{k=-m}^i a_k\right) t^i \in \mathbb{Z}G$. Multiplicando por $(t-1)$:

$$\left(\sum_{i=-m}^{n}\left(-\sum_{k=-m}^{i} a_k\right) t^i\right)(t-1) =$$

$$= \sum_{i=-m}^{n}\left(-\sum_{k=-m}^{i} a_k\right) t^{i+1} + \left(\sum_{k=-m}^{i} a_k\right) t^i =$$

$$= \sum_{i=-m}^{n}\left(-\sum_{k=-m}^{i} a_k\right) t^{i+1} + \left(-\sum_{k=i+1}^{n} a_k\right) t^i =$$

$$= \sum_{i=-m}^{n} \left(- \sum_{k=-m}^{i-1} a_k - \sum_{k=i+1}^{n} a_k \right) t^i = \sum_{i=-m}^{n} a_i t^i$$

Esto prueba que $im(t-1) = ker(\varepsilon)$. Por lo tanto la sucesión es exacta. Por lo que se tiene la siguiente resolución proyectiva de $\mathbb{Z}$:

$$P: \; ... \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}G \xrightarrow{(t-1)} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Sea A un G-módulo, entonces por el Teorema 1.2.7 $H^0(G,A) = A^G$. Ahora $H^1(G,A) = ker(0^*)/im(t-1)^* = A/\{(t-1)a | a \in A\} = A_G$. Si $n > 1$ entonces $H^n(G,A) = 0$.

Ejemplo 1.2.9 Considere el grupo cíclico de orden n $G = \langle t | t^n = 1 \rangle$. $\mathbb{Z}G = \mathbb{Z}[t]/\langle t^n - 1 \rangle$. Sea $N \in \mathbb{Z}G$, $N = \sum_{i=0}^{n-1} t^i$. Veamos que la siguiente sucesión es exacta.

$$P: \; ... \longrightarrow \mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{N} \mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Claramente $Nt = N$ por lo que $N(t-1) = 0$, entonces $im(t-1) \subseteq ker(N)$. Ahora sea $\sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i \in ker(t-1)$, esto es $\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i\right)(t-1) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^{i+1} - a_i t^i = 0$ eso implica que $\sum_{i=0}^{n-1} a_i t^{i+1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i$ entonces $a_i = a_{i+1}$, para todo $i = 0, 1, ..., n-2$, por tanto $a_i = a$ para todo $i = 0, 1, ..., n-1$, $a \in \mathbb{Z}G$ y se cumple que

$$aN = a \sum_{i=0}^{n-1} t^i = \sum_{i=0}^{n-1} a t^i$$

Por lo que $ker(t-1) \subseteq im(N)$ y por lo tanto la sucesión P es una resolución proyectiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. Ahora $\mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}G, A) \cong A$ por tanto obtenemos:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{(t-1)^*} A \xrightarrow{(N)^*} A \xrightarrow{(t-1)^*} A \longrightarrow ...$$

donde $(t-1)^*(a) = (t-1)(a) = ta - a$, $(N)^*(a) = Na$.

Por lo que podemo concluir que

$$\text{si n=0 } H^0(G,A) = A^G$$

$$\text{si } n \text{ es impar } H^n(G,A) = \frac{(ker(N)^*)}{im((t-1)^*)} = \frac{ker(NA)}{(t-1)A},$$

$$\text{si } n \text{ es par } H^n(G,A) = \frac{ker((t-1)^*)}{im(N^*)} = \frac{A^G}{NA}.$$

para $n \geq 0$.

1.3. Resolución proyectiva barra.

En esta sección veremos una manera de dar una resolución proyectiva dado un grupo arbitrario, lo cual es útil para dar un modelo especiffico de los grupos de cohomología para cualquier grupo G.

Sea G un grupo, consideremos el producto directo de G consigo mismo $n+1$ veces $G^{n+1} = G \times ... \times G$ y sea $A_n = \mathbb{Z}G^{n+1}$ el anillo de grupo de G^{n+1}.

Notemos que A_n es un G-módulo con la acción de G en A_n

$$g\left(\sum_{(g_0,...,g_n)\in G^{n+1}} a_{(g_0,...,g_n)}(g_0,...,g_n)\right) = \sum_{(g_0,...,g_n)\in G^{n+1}} a_{(g_0,...,g_n)}(gg_0,...,gg_n)$$

y por la definición de anillo entero de grupo A_n es un $\mathbb{Z}$-módulo libre con base $\{(x_0,...,x_n)|x_i \in G\}$.

Proposición 1.3.1 Para cada $n \geq 0$ A_n es un $\mathbb{Z}G$-módulo libre con base

$\{(1,x_1,...,x_n)|x_i \in G\}$.

Demostración. Sea $x \in A_n$, entonces:

$$x = \sum_{(g_0,...,g_n)\in G^{n+1}} a_{(g_0,...,g_n)}(g_0,...,g_n) =$$

$$= \sum_{(g_0,...,g_n)\in G^{n+1}} a_{(g_0,...,g_n)} g_0(1, g_0^{-1}g_1,...,g_0^{-1}g_n) =$$

$$= \sum_{(g_1,...,g_n)\in G^{n}} \left(\sum_{g_0\in G} a_{(g_0,...,g_n)} g_0(1, g_0^{-1}g_1,...,g_0^{-1}g_n)\right),$$

es decir$\{(1, g_0^{-1}g_1,...,g_0^{-1}g_n)|g_i \in G\} = \{(1,x_1,...,x_n)|x_i \in G\}$ genera a A_n como $\mathbb{Z}G$-módulo.

Sean $\alpha_{(x_1,...,x_n)} \in \mathbb{Z}G$, $\alpha_{(x_1,...,x_n)} = \sum_{x_0\in G} \alpha_{(x_0,x_1,...,x_n)}x_0$, $\alpha_{(x_0,x_1,...,x_n)} \in \mathbb{Z}$,

tales que $\sum_{(x_1,...,x_n)\in G^n} \alpha_{(x_1,...,x_n)}(1,x_1,...,x_n) = 0$. Entonces

$$\sum_{(x_1,...,x_n)\in G^n} \alpha_{(x_1,...,x_n)}(1,x_1,...,x_n) =$$

$$= \sum_{(x_1,...,x_n)\in G^n} \left(\sum_{x_0\in G} \alpha_{(x_0,x_1,...,x_n)}x_0\right)(1,x_1,...,x_n) =$$

$$= \sum_{(x_0,...,x_n)\in G^{n+1}} \alpha_{(x_0,...,x_n)}(x_0, x_0x_1,...,x_0x_n) = 0$$

como A_n es un $\mathbb{Z}$-módulo libre y $(x_0, x_0x_1,...,x_0x_n)$ son básicos de A_n, entonces $\alpha_{(x_0,...,x_n)} = 0$ para todo $(x_0,...,x_n) \in G^{n+1}$ y por tanto $\alpha_{(x_1,...,x_n)} = 0$.

□

Ahora, cada A_i es un $\mathbb{Z}G$-módulo proyectivo por ser libre. Construyamos una resolución proyectiva de $\mathbb{Z}$, para esto escribimos $P_i = A_i$ y definimos $\partial_n : P_n \longrightarrow P_{n-1}$ para cada $n \geq 1$ por

$$\partial_n(g_0,...,g_n) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i(g_0,g_1,...,\hat{g}_i,...,g_n)$$

donde el símbolo $\hat{g}_i$ significa que el elemento g_i no aparece, esto es,

$$(g_0, g_1, ..., \hat{g}_i, ..., g_n) = (g_0, g_1, ..., g_{i-1}, g_{i+1}, ..., g_n).$$

Si $g \in G$, entonces:

$$g(\partial_n(g_0, g_1, ..., g_n)) = g\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i(g_0, g_1, ..., \hat{g}_i, ..., g_n)\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i(gg_0, gg_1, ..., g\hat{g}_i, ..., gg_n) =$$

$$= \partial_n(gg_0, gg_1, ..., gg_n) = \partial_n(g(g_0, g_1, ..., g_n)),$$

por lo tanto ∂_n es un G-homomorfismo.

Ahora, $\partial_0 : P_0 = A_0 = \mathbb{Z}G \longrightarrow \mathbb{Z}$ está dada por $\partial_0(g) = 1$ para toda $g \in G$.

Proposición 1.3.2 La sucesión de G-módulos

$$P : \ ... \longrightarrow P_n \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \longrightarrow ... \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\partial_0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

es exacta.

Demostración. Para $n = 0, 1, ...$ se tiene

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n(g_0, g_1, ..., g_n) = \partial_{n-1}\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i(g_0, g_1, ..., \hat{g}_i, ..., g_n)\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\Bigg(\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j(g_0, g_1, ..., \hat{g}_j ..., \hat{g}_i, ..., g_n) +$$

$$\sum_{j=i+1}^{n}(-1)^{j-1}(g_0, g_1, ..., \hat{g}_i, ..., \hat{g}_j, ..., g_n)\Bigg)$$

Para cualesqueira dos índices $0 \leq r < s \leq n$, el elemento

$$(g_0, ..., \hat{g}_r, ..., \hat{g}_s, ..., g_n)$$

aparece exactamente dos veces en la expresión anterior y su coeficiente es $(-1)^{r+s} + (-1)^{r+s-1} = 0$, lo cual prueba que $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$. Por tanto $im(\partial_n) \subseteq ker(\partial_{n-1})$

Ahora sean $h_n : P_{n-1} \longrightarrow P_n$, $h_n(g_0, ..., g_{n-1}) = (1, g_0, ..., g_{n-1})$, $n \geq 1$. Definimos también $h_0 : P_{-1} = \mathbb{Z} \longrightarrow P_0$, $h_0(1) = 1 \in \mathbb{Z}G = P_0$. Se tiene que:

$(\partial_n h_n + h_{n-1}\partial_{n-1})(g_0, ..., g_{n-1}) =$

$$= \partial(1, g_0, ..., g_{n-1}) + h_{n-1}\left(\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i(g_0, g_1, ..., \hat{g}_i, ..., g_{n-1})\right) =$$

$$= (g_0, ..., g_{n-1}) + \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i+1}(1, g_0, ..., \hat{g}_i, ..., g_{n-1}) +$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i((1, g_0, ..., \hat{g_i}, ..., g_{n-1}) = (g_0, ..., g_{n-1}),$$

esto es $\partial_n h_n + h_{n-1}\partial_{n-1} = Id_{P_{n-1}}$, $n \geq 1$ Ahora si $x \in ker(\partial_{n-1})$,

$$x = Id_{P_{n-1}}(x) = \partial_n h_n(x) + h_{n-1}\partial_{n-1}(x) =$$
$$= \partial_n(h_n(x)) + h_{n-1}(0) = \partial_n(h_n(x))$$

esto es $x = \partial_n(h_n(x)) \in im(\partial_n)$, lo cual prueba la exactitud de la sucesión.

□

La resolución de la proposición anterior recibe el nombre de resolución canónica. Para terminar este capítulo veremos una resolución isomorfa a la canónica, la cual nos permitirá dar una forma explícita a los elementos del n-ésimo grupo de cohomología de G con coeficientes. Esto será de vital importancia para el siguiente capítulo.

Consideremos el $\mathbb{Z}G$-módulo libre Q_n que tiene como base $\{[g_1|g_2|...|g_n]|g_i \in G\}$ para $n \geq 1$ y a Q_0 el $\mathbb{Z}G$-módulo libre generado por el símbolo [ ].

Lema 1.3.3. Para toda $n \geq 0$ $Q_n \cong P_n$.

Demostración. Sean $\varphi_n : Q_n \to P_n$ definido como

$$\varphi_n[g_1|g_2|...|g_n] := (1, g_1, g_1g_2, ..., g_1g_2...g_n)$$

y $\psi_n : P_n \to Q_n$ definido como

$$\psi_n(g_0, ..., g_n) := g_0[g_0^{-1}g_1|g_1^{-1}g_2|...|g_{n-1}^{-1}g_n].$$

Veamos que son inversos.

$$\psi_n \circ \varphi_n[g_1|...|g_n] = \psi_n(1, g_1, g_1g_2, ..., g_1g_2...g_n)$$
$$= 1[1g_1|g_1^{-1}g_1g_2|...|(g_1...g_{n-1})^{-1}g_1...g_{n-1}g_n] = [g_1|...|g_n],$$

por totro lado

$$\varphi_n \circ \psi_n(g_0, g_1, ..., g_n) = \varphi_n(g_0[g_0^{-1}g_1|...|g_{n-1}^{-1}g_n]$$
$$g_0(1, g_0^{-1}g_1, g_0^{-1}g_1g_1^{-1}g_2, ..., g_0^{-1}g_1g_1^{-1}...g_{n-1}^{-1}g_{n-1}g_n) = (g_0, g_1, ..., g_n)$$

□

Por lo que para cada $n \geq 0$ tenemos un morfismo $d_n : Q_n \to Q_{n-1}$ definido por $d_n := \psi_{n-1} \circ \partial_n \circ \varphi_n$, claramente el siguiente cuadrado conmuta

$$\begin{tikzcd} P_n \arrow[r, "\partial_n"] & P_{n-1} \arrow[d, "\psi_{n-1}"] \\ Q_n \arrow[u, "\varphi_n"] \arrow[r, "d_n"'] & Q_{n-1} \end{tikzcd}$$

Hagamos la composición de los morfismos

$$d_n[g_1|...|g_n] = \psi_{n-1} \circ \partial_n \circ \varphi_n[g_1|...|g_n] = \psi_{n-1} \circ \partial_n(1, g_1, g_1g_2, ..., g_1g_2...g_n)$$

$$= \psi_{n-1}(g_1, g_1g_2, ..., g_1g_2...g_n) + \psi_{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i(1, g_1, ..., g_1\hat{...}g_i, ..., g_1...g_n)\right)$$

$$+(-1)^n\psi_{n-1}(1, g_1, ..., g_1...g_n)$$

$$= g_1[g_2|...|g_n] + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i[g_1|...|g_{i-1}|g_ig_{i+1}|...|g_n] + (-1)^n[g_1|...|g_{n-1}] \tag{1.4}$$

Proposición 1.3.4. La sucesión de $\mathbb{Z}G$-módulos libres

$$Q: \ ... \to Q_n \xrightarrow{d_n} Q_{n-1} \to ... \to Q_1 \xrightarrow{d_1} Q_0 \xrightarrow{d_0} \mathbb{Z} \to 0$$

Es una resolución proyectiva de $\mathbb{Z}$.

Demostración. Las sucesiones Q y P son isomorfas y P es una resolución proyectiva de $\mathbb{Z}$ por lo tanto Q es una resolución proyectiva de $\mathbb{Z}$.

□

A esta resolución proyectiva se le llama resolución proyectiva barra, y nos encamina a las siguientes definiciones,

Definición 1.3.5. Sea A un $\mathbb{Z}G$-módulo y

$$Q: \ ... \to Q_n \xrightarrow{d_n} Q_{n-1} \longrightarrow ... \longrightarrow Q_1 \xrightarrow{d_1} Q_0 \xrightarrow{d_0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

la resolución proyectiva barra de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$.

(a) Se define el conjunto de las n-cadenas de G con valores en A $C^n(G, A)$, como $C^n(G, A) :=\mathrm{Hom}_G(Q_n, A)$.

(b) Se define el conjunto de los n-cociclos como $Z^n(G, A) = ker(d_n^*)$.

(c) Se define el conjunto de los n-cobordes como $B^n(G, A) = im\ d_{n-1}^*$ para $n \geq 0$

Por lo que podemos concluir que.

$$H^n(G, A) = \frac{Z^n(G, A)}{B^n(G, A)}.$$

Capítulo 2

Extensiones de grupos.

2.1. Definiciones.

Definición 2.1.1 Una extensión de un grupo G por un grupo N es una sucesión exacta corta de grupos

$$1 \to N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} G \to 1 \tag{2.1}$$

Una segunda extensión de G por N

$$1 \to N \xrightarrow{f'} E' \xrightarrow{g'} G \to 1$$

se dice que es equivalente a (2.1) si existe un homomorfismo $\varphi : E \longrightarrow E'$ tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
 & & E \arrow[dd, "\varphi"] \arrow[dr, "g"] & & \\
1 \arrow[r] & N \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & & G \arrow[r] & 1 \\
 & & E' \arrow[ur, "g'"'] & &
\end{tikzcd}$$

Observación 2.1.2 En la definición anterior φ resulta ser isomorfismo.

Demostración.

(a) Sea $x \in ker\ \varphi$, entonces $g(x) = g'(\varphi(x)) = g'(1) = 1$. Así $x \in ker g = im f$. Sea $y \in N$ tal que $f(y) = x$ entonces $f'(y) = \varphi(f(y)) = \varphi(x) = 1$. Como f es monomorfismo $y = 1$ así $x = 1$. Por lo tanto φ es monomorfismo.

(b) Sea $z \in E'$. Como g es epimorfismo, existe $x \in E'$ tal que $g(x) = g'(z)$, $g(x) = g'(\varphi(x))$. Entonces $g'(z\varphi(x)^{-1}) = g'(z)g'(\varphi(x))^{-1} = g'(z)g'(z)^{-1} = 1$. Por tanto existe $y \in N$ tal que $f'(y) = \varphi(f(y)) = z\varphi(x)^{-1}$, luego $\varphi(f(y))\varphi(x) = \varphi(f(y)x) = z$. Por lo tanto φ es epimorfismo.

$\square$

En lo siguiente consideraremos las extensiones donde el $ker(N)$ es un grupo abeliano A (escrito aditivamente) y trataremos de clasificarlas salvo equivalencia.

Definición 2.1.3 Una extensión abeliana de G por A es una sucesión exacta corta de grupos, denotada por

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1$$

donde A es un grupo abeliano escrito aditivamente.

Proposición 2.1.4 Si $0 \to A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \to 1$ es una extensión abeliana de G por A, entonces hay una acción de G en A dada de manera conónica por la extensión de la siguiente manera:

$$i(g \circ a) = \tilde{g}i(a)\tilde{g}^{-1} \text{ donde } \tilde{g} \in \pi^{-1}(g)$$

es decir $g \circ a = i^{-1}(\tilde{g}i(a)\tilde{g}^{-1})$.

Demostración. $i(A) = ker(\pi)$ y $ker(\pi)$ es normal en E, por lo tanto para todo $g \in G$ y $\tilde{g} \in \pi^{-1}(g)$, $\tilde{g}i(a)\tilde{g}^{-1} \in i(A)$. Veamos que no depende de la elección de $\tilde{g} \in \pi^{-1}(g)$. Sean $\tilde{g}$, $\tilde{h} \in \pi^{-1}(g)$ entonces

$$\tilde{g}i(a)\tilde{g}^{-1} = \tilde{g}(\tilde{h}^{-1}\tilde{h})i(a)(\tilde{h}^{-1}\tilde{h})\tilde{g}^{-1} = (\tilde{g}\tilde{h}^{-1})(\tilde{h}i(a)\tilde{h}^{-1})(\tilde{h}\tilde{g}^{-1})$$

$$= (\tilde{g}\tilde{h}^{-1})(\tilde{h}\tilde{g}^{-1})(\tilde{h}i(a)\tilde{h}^{-1}) = \tilde{h}i(a)\tilde{h}^{-1}$$

pues $\tilde{g}\tilde{h}^{-1}$, $\tilde{h}\tilde{g}^{-1} \in Ker\pi = i(A)$ y A es abeliano, por lo tanto está bien definida.

Ahora $1 \circ a = i^{-1}(bi(a)b^{-1}) = i^{-1}(bb^{-1}i(a)) = i^{-1}(i(a)) = a$, donde $b \in i(A)$.

Además $h\circ(g\circ a) = h\circ i^{-1}(\tilde{g}i(a)\tilde{g}^{-1}) = i^{-1}(\tilde{h}ii^{-1}(\tilde{g}i(a)\tilde{g}^{-1})\tilde{h}^{-1}) = i^{-1}(\tilde{h}\tilde{g}i(a)\tilde{g}^{-1}\tilde{h}^{-1}) = i^{-1}((\tilde{h}\tilde{g})i(a)(\tilde{h}\tilde{g})^{-1}) = (gh) \circ a$

$\square$

Notemos que esta acción de G en A es trivial si y sólo si $i(A)$ está contenido en el centro de E. A este tipo de extensiones se les llama extensiones centrales.

2.2. Extensiones escindibles.

Definición 2.2.1 Sea $0 \to A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \to 1$ una extensión de G por A. Decimos que la extensión se escinde por la derecha si existe un homomorfismo $s : G \to E$ tal que $\pi s = Id_G$. A s se le llama sección de π.

Definición 2.2.2 Dados dos grpos H, N y un homomorfismo $\phi : H \to Aut(N)$ definimos el producto semidirecto de N por H como el conjunto $N \times H$ dotado con la operación

$$(n_1, h_1)(n_2, h_2) = (n_1\phi(h_1)(n_2), h_1h_2).$$

Se denota por $N \rtimes H$.

Proposición 2.2.3 Sea $0 \to A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \to 1$ una extensión abeliana de G por A que se escinde por la derecha, entonces es equivalente a la extensión $0 \to A \xrightarrow{i'} A \rtimes G \xrightarrow{\pi'} G \to 1$, donde $i'(a) = (a, 1)$ y $\pi'(a, g) = g$.

Demostración. Sea $\varphi : A \rtimes G \to E$ definido por $\varphi(a, g) = i(a)s(g)$, veamos que φ es un homomorfismo:

$$\varphi((a, g)(b, h)) = \varphi(a + g \circ b, gh) = i(a + g \circ b)s(gh)$$
$$= i(a)i(g \circ b)s(g)s(h) = i(a)s(g)i(b)s(g)^{-1}s(g)(h)$$
$$= i(a)s(g)i(b)s(h) = \varphi(a, g)\varphi(b, h)$$

además $\varphi(0, 1) = i(0)s(1) = 1$. Por otro lado se cumple $\varphi i'(a) = \varphi(a, 1) = i(a)s(1) = i(a)$ y $\pi\varphi(a, g) = \pi(i(a)s(g)) = \pi(i(a))\pi(s(g)) = g = \pi'(g)$.

□

A la extensión $0 \to A \xrightarrow{i'} A \rtimes G \xrightarrow{\pi'} G \to 1$ se le llama extensión trivial de G por A.

2.3. Clasificación de extensiones abelianas

En la sección anterior vimos que si una extensión abeliana $0 \to A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \to 1$ se escinde por la derecha entonces es equivalente a la extensión trivial. Ahora consideraremos el caso general donde dada

$$0 \to A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \to 1 \tag{2.2}$$

una extensión abeliana de G por A. Utilizando el Axioma de Elección, podemos escoger una función $s : G \to E$ tal que $\pi s = Id_G$ y $s(1) = 1$ la cual no necesariamente es un homomorfismo. A estas funciones les llamamos secciones normales de π.

Definición 2.3.1 Dada $s : G \to E$ una sección normal de π. Definimos $\alpha : G \times G \to A$ una función dada por:

$$\alpha(g, h) = i^{-1}(s(g)s(h)s(gh)^{-1}) \tag{2.3}$$

por lo que $s(g)s(h) = i(\alpha(g, h))s(gh)$. α está bien definida pues i es inyectiva y $s(g)s(h)s(gh) \in ker\pi = i(A)$. Tal α es normalizada en el siguiente sentido.

Observación 2.3.2 Sea $g \in G$, entonces:

$\alpha(g, 1) = i^{-1}(s(g)1s(g)^{-1}) = i^{-1}(s(g)s(g)^{-1}) = 0$ y

$\alpha(1, g) = i^{-1}(1s(g)s(g)^{-1}) = i^{-1}(1) = 0$.

A α le llamaremos conjunto de factores asociado a (2.2) y a s.

Proposición 2.3.3 Dada una sucesión exacta (2.2) y una sección normal de π, $s : G \to E$, la función $\varphi : A \times G \to E$ dada por $\varphi(a, g) = i(a)s(g)$ es una biyección.

Demostración. Sean $(a, g), (b, h) \in G \times A$ tales que $i(a)s(g) = i(b)s(h)$, entonces $i(b)^{-1}i(a)s(g) = s(h)$ aplicando π tenemos que $\pi(i(b)^{-1}i(a)s(g)) =$

$\pi(i(b^{-1}a))\pi(s(g)) = g = \pi(s(h)) = h$. Por lo tanto $g = h$. Ahora $i(a)s(g) = i(b)s(g)$ implica $i(a) = i(b)$ y como i es inyectiva $a = b$. Por lo tanto φ es inyectiva.

Ahora sean $e \in E$ y $g = \pi(e)$, entonces $es(g)^{-1} \in ker\pi = i(A)$. Por lo tanto existe $a \in A$ tal que $i(a) = es(g)^{-1}$, luego $\varphi(a, g) = i(a)s(g) = e$. Por lo tanto φ es suprayectiva.

$\square$

Queremos definir una operación en $A \times G$ que lo haga grupo y que haga a φ un isomorfismo.

Notemos que

$$i(a)s(g)i(b)s(h) = i(a)i(g \circ b)s(g)s(h)$$

$$= i(a + g \circ b)i(\alpha(g, h))s(gh) = i(a + g \circ b + \alpha(g, h))s(gh)$$

Esto inspira la siguiente definición

Definición 2.3.4. Definimos una operación para el conjunto $A \times G$ como:

$$(a, g)(b, h) = (a + g \circ b + \alpha(g, h), gh) \tag{2.4}$$

Proposición 2.3.5. La operación (2.3) es asociativa si y sólo si

$$\alpha(g, h) + \alpha(gh, k) = g \circ (h, k) + \alpha(g, hk) \tag{2.5}$$

para cualesquiera $g, h, k \in G$

Demostracón. Sean $(a, g), (b, h), (c, k) \in A \times G$

$$[(a, g)(b, h)](c, k) = (a + g \circ b + \alpha(g, h), gh)(c, k)$$

$$= (a + g \circ b + \alpha(g, h) + gh \circ c + \alpha(gh, k), ghk) \tag{2.6}$$

y por otro lado

$$(a, g)[(b, h)(c, k)] = (a, g)(b+h\circ c+\alpha(h, k), hk) = (a+g\circ(b+h\circ c+\alpha(h, k))+\alpha(g, hk), ghk)$$

$$= (a + g \circ b + gh \circ c + g \circ \alpha(h, k) + \alpha(g, hk), ghk) \tag{2.7}$$

(2.5)=(2.6) si y sólo si $\alpha(g, h) + \alpha(gh, k) = g \circ \alpha(h, k) + \alpha(g, hk)$.

$\square$

Proposición 2.3.6. Dado un grupo G y un G-módulo A. Sea $\alpha : G \times G \to A$ una función tal que:

1. $$\alpha(1, g) = 0 = \alpha(g, 1) \tag{2.8}$$

2. $$\alpha(g, h) + \alpha(gh, k) = g \circ \alpha(h, k) + \alpha(g, hk) \tag{2.9}$$

entonces $A \times G$ con la operación (2.3) es un grupo.

Demostración. Por la proposición 2.3.5 la operación (2.4) es asociativa. Sean $(a,g),(b,h) \in A \times G$ entonces

$$(0,1)(a,g) = (0 + 1 \circ a + \alpha(1,g), 1g) = (a+0,g) = (a,g)$$

$$(a,g)(0,1) = (a + g \circ 0 + \alpha(g,1), g1) = (a+0+0,g) = (a,g)$$

por lo tanto $(0,1)$ es el neutro de la operación.

Sea $b = (-g^{-1} \circ a) - g^{-1} \circ \alpha(g,g^{-1})$, $b \in A$ y

$$(a,g)(b,g^{-1}) = (a + g \circ ((-g^{-1} \circ a) - g^{-1} \circ \alpha(g,g^{-1})) + \alpha(g,g^{-1}), gg^{-1})$$

$$= (a-(gg^{-1} \circ a)-(gg^{-1} \circ \alpha(g,g^{-1}))+\alpha(g,g^{-1}),1) = (a-a-\alpha(g,g^{-1})+\alpha(g,g^{-1}),1) = (0,1).$$

Por otro lado, sea $b' = -g^{-1} \circ a - \alpha(g^{-1},g)$, entonces $b' \in A$ y

$$(b',g^{-1})(a,g) = (-g^{-1} \circ a - \alpha(g^{-1},g) + g^{-1} \circ a + \alpha(g^{-1},g), g^{-1}g) = (0,1)$$

Ahora, como α cumple (2.9), se tiene

$$g^{-1} \circ \alpha(g,g^{-1}) = \alpha(g^{-1},g)+\alpha(g^{-1}g,g^{-1})-\alpha(g^{-1},gg^{-1}) = \alpha(g^{-1},g)+0+0 = \alpha(g^{-1},g)$$

Por lo tanto $b = b'$. En consecuencia (a,g) tiene inverso $\forall (a,g) \in A \times G$.

□

Al grupo $A \times G$ con la operación (2,4) lo denotamos por G_α.

Definimos las funciones $i' : A \to G_\alpha$ como $i'(a) = (a,1)$ y $\pi' : G_\alpha \to G$ como $\pi'(a,g) = g$, las cuales son morfismos inyectivo y suprayectivo respectivamente. Es claro que $ker\pi' = i'(A)$, por lo que tenemos la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \to A \xrightarrow{i'} G_\alpha \xrightarrow{\pi'} G \to 1$$

Proposición 2.3.7. Las extensiones $0 \to A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \to 1$ y $0 \to A \xrightarrow{i'} G_\alpha \xrightarrow{\pi'} G \to 1$ son equivalentes.

Demostración. Consideremos la biyección $\varphi : E_\alpha \to E$. Por la Proposición 2.3.3. φ es un isomorfismo.

Tenemos que $\varphi \circ i'(a) = \varphi((a,1)) = i(a)s(1) = i(a)1 = i(a)$.

Por otro lado $\pi \circ \varphi((a,g)) = \pi(i(a)s(g) = \pi(i(a))\pi(s(g)) = 1g = g = \pi'((a,g))$.

□

Con lo que hemos desarrollado en esta sección hemos establecido la siguiente correspondencia

$$\begin{pmatrix} \text{extensiones (2.2)} \\ \text{con una sección normal} \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \text{funciones } \alpha : G \times G \to A \\ \text{que satisfacen (2.8) y (2.9)} \end{pmatrix}$$

La condición (2.9) la podemos escribir de la siguiente manera:

$$g \circ \alpha(h,k) - \alpha(gh,k) + \alpha(g,hk) - \alpha(g,h) = 0 \tag{2.10}$$

que es la condición de ser un 2-cociclo. Es decir las funciones que satisfacen (2.9) son precisamente los elementos de $Z^2(G, A)$.

Ahora veamos que la elección de la sección normalizada de π en (2.2) corresponde precisamente a modificar α por un coborde, es decir por un elemento de $B^2(G, A)$.

Observación 2.3.8. Sea $s' : G \to E$ una sección normalizada de π en (2.2), entonces $s'(g) = i(c(g))s(g)$ para alguna función $c : G \to A$ tal que $c(1) = 0$.

Demostración. Como $\pi(s'(g)) = g = \pi(s(g))$ entonces $s'(g)$ y $s(g)$ varían por un elemento en $ker\pi = i(A)$, es decir para cada $g \in G$ existe $a_g \in A$ tal que $s'(g) = i(a_g)s(g)$. Definimos $c : G \to A$ como $c(g) = a_g$. Ahora $1 = s'(1) = i(c(1))s(1) = i(c(1))1 = i(c(1))$. Por lo tanto $c(1) = 0$.

$\square$

Ahora si calculamos el conjunto de factores de la sección s' de la observación anterior tenemos:

$$i(c(g))s(g)i(c(h))s(h) = i(c(g))i(g \circ c(h))s(g)s(h)$$

$$= i(c(g) + g \circ c(h))i(\alpha(g, h))s(gh)$$
$$= i(c(g) + g \circ c(h) + \alpha(g, h) - c(gh))s(gh)$$

Así, el nuevo conjunto de factores es

$$(g, h) \longmapsto c(g) + g \circ c(h) + \alpha(g, h) - c(gh)$$

el cual es igual a $\alpha + \partial_1^*(c)$, donde $\partial_1^* : C^1(G, A) \to C^2(G, A)$ es el morfismo de la resolución barra.

Hemos demostrado el siguiente teorema.

Teorema2.3.9 Sea A un G-módulo y $\mathcal{E}(G, A)$ el conjunto de clases de equivalencia de las extensiones abelianas de G por A, donde la acción de A coincide con la acción determinada por la extensión. Entonces se tiene una biyección

$$\mathcal{E}(G, A) \approx H^2(G, A).$$

$\square$

Capítulo 3

Representaciones lineales y proyectivas de grupos finitos.

3.1. Definiciones y resultados básicos.

Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$, el conjunto $GL(V)$ son todos los isomorfismos lineales de V en V. Este conjunto tiene una estructura de grupo con la composición de funciones como operación.

Definición 3.1.1. Sea G un grupo. Una representación lineal de G en V es un homomorfismo $\rho : G \longrightarrow GL(V)$.

Para cada $g \in G$ denotamos por $\rho(g) := \rho_g$. Sean $g, h \in G$ se tiene:

1. $\rho_g : V \to V$ es un isomorfismo lineal
2. $\rho_{gh} = \rho_g \circ \rho_h$
3. $\rho_e = Id_V$ donde e en el neutro de G
4. $\rho_{g^{-1}} = \rho_g^{-1}$

Dada una representación lineal $\rho : G \to GL(V)$. La función $* : G \times V \longrightarrow V$ definida como $*(g, v) = g * v = \rho_g(v)$ es una acción de G en V, esto se deduce de 2. y 3.

En lo que sucesivo supondremos a G un grupo finito y a V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita.

La definición anterior se puede poner en términos de matrices. Si damos una base $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ de V, existe un isomorfismo $GL(V) \cong GL(n, \mathbb{C})$. Esto induce un homomorfismo que seguiremos llamando ρ, tal que a cada $g \in G$ le asocia una matriz invertible $\rho(g) \in GL(n, \mathbb{C})$, nótese que este homomorfismo depende de la base de V escogida.

Dada $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ con V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión n. Definimos el grado de ρ como $dim(V) = n$.

Definición 3.1.2 Sean $\rho^1 : G \to GL(V_1)$ y $\rho^2 : G \to GL(V_2)$ dos representaciones lineales. Decimos que ρ^1 y ρ^2 son equivalentes (o isomorfas) si existe un isomorfismo $T : V_1 \longrightarrow V_2$ tal que $T \circ \rho^1_g = \rho^2_g \circ T$ para todo $g \in G$ es decir si el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\rho^1_g"] \arrow[d, "T"'] & V_1 \arrow[d, "T"] \\ V_2 \arrow[r, "\rho^2_g"] & V_2 \end{tikzcd}$$

Para todo $g \in G$.

Notemos que si ρ^1 y ρ^2 son equivalentes entonces tienen el mismo grado. La equivalencia de representaciones es una relación de equivalencia.

Ejemplos:

1. Sea G grupo, $\rho : G \to GL(\mathbb{C})$ definido como $\rho_g = Id_{\mathbb{C}}$ para todo $g \in G$. Esta es una representación de G en $\mathbb{C}$ llamada representación trivial.

2. Sea G un grupo finito de orden n y V un espacio vectorial de dimensión n con base $\{e_g | g \in G\}$ indexada por los elementos de G. A esta base la llamaremos base regular de V. Entonces la función que manda $R_g(e_h) = e_{gh}$ para todo $h \in G$ la podemos extender de manera lineal a todo V para toda $g \in G$. Esto nos da una representación $R : G \to GL(V)$ llamada representación regular de G. Esta representación tiene grado igual al orden de G.

3. Sea $C_n = \langle t | t^n = 1 \rangle$ el grupo cíclico de orden n, definimos $\rho : C_n \to GL(\mathbb{C})$ como $\rho_t(v) = \omega v$ donde ω es la raíz n-ésima primitiva de la unidad. Entonces se cumple: $\rho_{t^l}\rho_{t^r}(v) = \omega^l(\omega^r v) = \omega^{l+r} v = \rho_{t^{l+r}}(v)$ y $\rho_1(v) = \rho_{t^n}(v) = \omega^n v = 1v = v$ por lo que ρ es una representación de C_n de grado 1.

4. Consideremos al grupo diédrico de orden 8 $D_4 = \langle r^4 = s^2 = 1, s^{-1}rs = r^{-1} \rangle$ y el homomorfismo definido en los generadores

$$r \mapsto R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; s \mapsto S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Es fácil ver que $R, S \in GL(2, \mathbb{R})$, $R^4 = S^2 = Id$ y que $S^{-1}RS = R^{-1}$. Por lo que esta asignación define una representación de D_4 de orden 2. R es la rotación de 90 grados contra las manecillas del reloj alrededor del origen y S es la reflexión con respecto al eje X y juntas generan el grupo de simetrías de cuadrado. Por lo que esta asignación define una representación de D_4 de orden 2.

Subrepresentaciones.

Definición 3.1.3. Sea $\rho : G \to GL(V)$ una representación lineal con G un grupo finito. Decimos que un subespacio W de V es invariante o estable bajo G si dado un elemento $w \in W$ $\rho_g(w) \in W$ para toda $g \in G$.

En este caso la restricción $\rho_g|_W$ de W en sí mismo es un isomorfismo y lo denotamos por ρ^W, además para todo $g, h \in G$ se cumple que $\rho_g^W \rho_h^W = \rho_{gh}^W$ por lo tanto $\rho_h^W : G \to GL(W)$ es una representación lineal de G en W.

Ejemplo: Sea $\rho : G \to GL(V)$ la representación regular de G y sea $W \subseteq V$ el subespacio generado por el elemento $x = \sum_{g \in G} e_g$. Entonces tenemos

$$\rho_h(\sum_{g \in G} e_g) = \sum_{g \in G} \rho_h(e_g) = \sum_{g \in G} e_{gh} = \sum_{g \in G} e_g$$

pues multiplicar por un elemento es una biyección de G en G. Por lo tanto ρ^W es una subrepresenctación de ρ.

Ahora consideremos la representación trivial $\sigma : G \to GL(\mathbb{C})$ y el isomorfismo $T : W \to \mathbb{C}$ definido por $\lambda x \mapsto \lambda$.

Entonces se cumple $T \circ \rho_g^W(\lambda x) = T(\lambda \rho_g(x)) = T(\lambda x) = \lambda$, por otro lado $\sigma(T(\lambda x)) = \sigma(\lambda) = \lambda$. Por lo tanto la subrepresentación ρ^W es equivalente a la representación trivial.

Recordemos un par de resultados de álgebra lineal. Sea V un espacio vectorial y $W, W' \subseteq V$ subespacios de V, entonces V es la suma directa de W y W' ($W \oplus W' = V$) si y sólo todo elemento $v \in V$ se escribe de manera única como $v = w + w'$ donde $w \in W$ y $w' \in W'$. El otro resultado que recordaremos es el siguiente: dado un subespacio W de V existe otro subespacio W' tal que es complemento de W, es decir, $W \oplus W' = V$. Esto nos servirá para el siguiente teorema.

Teorema 3.1.4. Sea $\rho : G \to GL(V)$ una representacion lineal, sea $W \subseteq V$ un subespacio G-invariante. Entonces existe un subespacio $W^0 \subseteq V$ G-invariante que es complemento de W.

Demostración. Sea W' complemento de W y sea $p : V \to W$ la proyección tal que a cada $v = w + w' \in V$ $p(v) = w$.

Definimos

$$p^0 := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_g \circ p \circ \rho_g^{-1}$$

Como $\rho_g|_W$ es un isomorfismo de W en W entonces $\rho_g^{-1}(w) \in W$ para todo $w \in W$. Sea $w \in W$, entonces $p \circ \rho_g^{-1}(w) = \rho_g(w)$. Luego

$$p^0(w) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_g \circ p \circ \rho_g^{-1}(w) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_g \circ \rho_g^{-1}(w) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} w = w$$

Por lo tanto $p^0 : V \to V$ es una proyección sobre W.

Sabemos que $V = ker(p^0) \oplus Im(p^0) = ker(p^0) \oplus W$. Sea $W^0 = ker(p^0)$.

Veamos que W^0 es G-invariante. Sea $h \in G$. Notemos que

$$\rho_h^{-1} \circ p^0 \circ \rho_h = \rho_h^{-1} \circ \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_g \circ p \circ \rho_g^{-1} \right) \circ \rho_h = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_h^{-1} \circ \rho_g \circ p \circ \rho_g^{-1} \circ \rho_h$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_{h^{-1}g} \circ p \circ \rho_{h^{-1}g}^{-1} = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \rho_s \circ p \circ \rho_s^{-1} = p^0$$

Por lo tanto $p^0 \circ \rho_h = \rho_h \circ p^0$ para todo $h \in G$.

Sea $x \in W^0$ entonces $p^0(x) = 0$, luego $p^0 \circ \rho_g(x) = \rho_g(x) \circ p^0(x) = \rho_g(0) = 0$. Por lo tanto $\rho_g(x) \in W^0$ para toda $g \in G$.

□

Sea $\rho : G \to GL(V)$ una representación lineal. Si W_1, $W_2 \subseteq V$ son dos subespacios G-invariantes tales que $V = W_1 \oplus W_2$. Cada $x \in V$ se escribe de manera única como $x = x_1 + x_2$, con $x_1 \in W_1$ y $x_2 \in W_2$. Entonces se tiene: $\rho_g(x) = \rho_g(x_1 + x_2) = \rho_g(x_1) + \rho_g(x_2) = \rho_g^{W_1}(x_1) + \rho_g^{W_2}(x_2)$. Por lo tanto las subrepresentaciones ρ^{W_1} y ρ^{W_2} determinan la representación ρ. En este caso decimos que la representación ρ es suma directa de las representaciones ρ^{W_1} y ρ^{W_2}.

Por otro lado si β_1 y β_2 son bases de W_1 y W_2 respectivamente, entonces $\beta = \beta_1 \cup \beta_2$ es una base de V. Escribiendo a la matriz asociada a ρ_g respecto a la base β se tiene

$$[\rho_g]_\beta = \begin{pmatrix} [\rho_g]_{\beta_1} & 0 \\ 0 & [\rho_g]_{\beta_2} \end{pmatrix}$$

Definición 3.1.6. Sea $\rho : G \to GL(V)$ una representación lineal. Decimos que ρ es una representación irreducible o simple si para todo $W \subseteq V$ subespacio G-invariante $W = V$ ó $W = 0$.

Notemos que si $\rho : G \to GL(V)$ es una representación de grado 1 entonces es irreducible. Esto es claro pues si $W \subseteq V$ es un subespacio, entonces $\dim(W) \leq \dim\,(V)$, entonces $\dim(W)$=0 o $\dim(W)$=$\dim(V)$, por lo que $W = 0$ o $W = V$.

Teorema 3.1.7. Toda representación lineal $\rho : G \to GL(V)$ es suma directa de representaciones irreducibles.

Demostración. Procederemos por inducción sobre n =dim(V). Si dim(V)=1, por la observación anterior ρ es irreducible por lo que se cumple trivialmente.

Supongamos que se cumple para todo espacio de dimensión menor a n. Sea $\rho : G \to GL(V)$ una representación lineal tal que $\dim(V) = n$. Si ρ es irreducible, ya habremos acabado. Supongamos que no, entonces existen dos subespacios W_1, $W_2 \subseteq V$ G-invariantes tales que $V = W_1 \oplus W_2$. Entonces $\dim(W_i) <\dim(V)$ con $i = 1, 2$. Por la hipótesis de inducción W_1 y W_2 son suma directa de subespacios G-invariantes irreducibles, por lo tanto V es suma directa de subespacios G-invariantes irreducibles.

□

Podemos preguntarnos si la descomposición de una representación lineal en subrepresentaciones irreducibles es única. La respuesta es negativa como lo muestra el siguiente ejemplo, pero como veremos más adelante, la descomposición si es única salvo isomorfismo.

Ejemplo. Considere la representación trivial de $\rho : G \to GL(V)$ tal que $\rho(g) = Id_V$ para todo $g \in G$, donde G es un grupo arbitrario y $\dim(V) > 1$. Es claro que todo subespacio $W \subseteq V$ es G-invariante. Por lo tanto, toda descomposición de V en suma directa de subespacios de dimensión uno, es una descomposición de ρ en suma directa de representaciones irreducibles.

Teorema 3.1.8. (Lema de Schur) Sean $\rho^1 : G \to GL(V_1)$ y $\rho^2 : G \to GL(V_2)$ dos representaciones irreducibles de G y sea $T : V_1 \to V_2$ una transformación lineal tal que $\rho^2 \circ T = T \circ \rho^1$. Entonces:

(1) Si ρ^1 y ρ^2 no son equivalentes, entonces $T = 0$.

(2) Si $\rho^1 = \rho^2$ (en particular $V_1 = V_2$), entonces T es una homotecia, es decir, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $T = \lambda Id_V$.

Demostración. Supongamos que $T \neq 0$, entonces $ker(T) \neq V_1$. Sea $v \in ker(T)$, entonces $T(\rho^1(v)) = \rho^2_g(T(v)) = \rho^2_g(0) = 0$ para todo $g \in G$, por lo que $ker(T) \subseteq V_1$ es un subespacio G-invariante y como ρ^1 es una representación irreducible, entonces $ker(T) = 0$. Por lo tanto T es inyectiva.

Por otro lado, sea $w \in im(T)$, entonces existe $v \in V_1$ tal que $T(v) = w$. Luego $\rho^2_g(w) = \rho^2_g(T(v)) = T(\rho^1_g(v)) \in im(T)$ para todo $g \in G$. Por lo tanto $im(T) \subseteq V_2$ es un subespacio G-invariante, de donde se sigue que $im(T) = V_2$. Por lo tanto T es un isomorfismo.

Ahora supongamos que $\rho^1 = \rho^2 = \rho$, sea $V = V_1 = V_2$. Consideremos $\lambda \in \mathbb{C}$ un valor propio de T y el subespacio $ker(T - \lambda Id_V) \subseteq V$. Sea $v \in ker(T - \lambda Id_V)$. Entonces

$$(T - \lambda Id_V)(\rho_g(v)) = T(\rho_g(v)) - \lambda\rho_g(v) = \rho_g(T(v)) - \rho_g(\lambda v)$$

$$= \rho_g((T - \lambda Id_V)(v)) = \rho_g(0) = 0$$

Por lo tanto $ker(T - \lambda Id_V)$ es un subespacio G-invariante y $v \neq 0$ pues es un vector propio. Por tanto $ker(T - \lambda Id_V) \neq 0$ y como ρ es una representación irreducible $ker(T - \lambda Id_V) = V$. Por lo tanto $T(v) = \lambda v$ para todo $v \in V$ $\square$

Corolario. Toda representación irreducible $\rho : G \to GL(V)$ de un grupo G abeliano es de grado 1.

Demostración. Sean $g, h \in G$, entonces

$$\rho_h \circ \rho_g = \rho_{hg} = \rho_{gh} = \rho_g \circ \rho_h$$

Por el Lema de Schur $\rho_g : V \to V$ es una homotecia, por lo que cualquier subespacio $W \subseteq V$ es G-invariante. Como ρ es irreducible esto sucede sólo si $\dim(V)$=1.

$\square$

3.2. Teoría de caracteres de grupos finitos.

Sea V un espacio vectorial de dimensión n y $A : V \to V$ una transformación lineal, cuya matriz en una base $\{e_i | 1 \leq i \leq n\}$ es (a_{ij}). La traza de A está definida como:

$$Tr(A) = \sum_i a_{ii}.$$

Recordemos que si $A = QMQ^{-1}$ con $M, Q \in M(n, \mathbb{C})$ y Q invertible, entonces $Tr(A) = Tr(M)$.

Así podemos definir la traza de un operador lineal $T : V \to V$ usando la matriz asociada a T en cualquier base de V.

Definición 3.2.1. Sea $\rho : G \to GL(V)$ una representación lineal de grado n. Definimos el carácter de la representación ρ como la aplicación

$$\chi_\rho : G \to \mathbb{C} \text{ definida como } \chi_\rho(g) = Tr(\rho_g)$$

Decimos que el carácter χ_ρ es de grado n.

La importancia de esta aplicación proviene del hecho de que (como veremos más adelante) caracteriza a la representación ρ.

Ejemplos.

1. Si $\rho : G \to GL(V)$ es la representación trivial, $\rho_g = Id$ para todo $g \in G$, entonces $\chi(g) = Tr(\rho_g) = n$ para todo $g \in G$, donde n =dim(V).

2. Sea $\rho : G \to GL(V)$ la representación regular, donde $|G| = n$ =dim(V) y V tiene como base $\{v_g\}_{g \in G}$ la base regular. Notemos que $\rho_h(v_g) = v_g$ si y sólo si $h = 1$. Entonces si $[\rho_g]$ es la matriz asociada a la transformación ρ_g en la base regular, se tiene:

   a) si $g \neq 1$ la diagonal de $[\rho_g]$ consiste de ceros.

   b) si $g = 1$ la diagonal de $[\rho_g]$ consiste de unos.

   Por lo que se tiene:
   $$\chi(g) = \begin{cases} 0 & \text{si } g \neq 1 \\ 1 & \text{si } g = 1 \end{cases}$$

Lema 3.2.2. Sea $\rho : G \to GL(V)$ una representación lineal de grado n. Entonces el operador $\rho_g : V \to V$ es diagonalizable para todo $g \in G$.

Demostración. Sea $g \in G$ fijo y $W = \langle g \rangle \subseteq G$ el subgrupo generado por g. Consideremos $\rho^W : W \to GL(V)$ la restricción de ρ a W. Como W es abeliano ρ^W se descompone como suma directa de representaciones de grado 1. Entonces existe una base β de V tal que

$$[\rho_g^W]_\beta = [\rho_g]_\beta = \begin{pmatrix} [\rho_g]_{\beta_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & [\rho_g]_{\beta_n} \end{pmatrix}$$

donde cada $[\rho_g]_{\beta_i} \in GL(1, \mathbb{C})$ para toda $i = 1, ..., n$. Entonces existen $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ tales que $[\rho_g]_{\beta_i} = \lambda_i$. Por lo tanto

$$[\rho_g]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

□

Proposición 3.2.3. Sea χ el carácter de una representación $\rho : G \to GL(V)$ de grado n. Entonces se cumple lo siguiente:

1. $\chi(1) = n$ donde 1 es el neutro de G.
2. $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$, donde $\overline{\chi(g)}$ es el conjugado de $\chi(g)$.
3. $\chi(hgh^{-1}) = \chi(g)$, para todo $g, h \in G$.

Demostración. Para 1. tenemos que $\rho_1 = Id_V$, entonces $\chi(1) = Tr(\rho_1) = n$, pues dim(V)=n. Ahora por el Lema 3.2.2 $\chi(g)$ es la suma directa de los valores propios de ρ_g para $g \in G$ fijo. Sean $\lambda_1, ..., \lambda_n$ estos valores propios y sea r el orden de g y $[\rho_g]$ la matriz diagonal formada por los valores propios. Entonces $[\rho_g]^r$ =$[\rho_{g^r}]$= Id. Por lo que $\lambda_i^r = 1$ para toda $i = 1, ..., n$. Por lo tanto $\lambda_1, ..., \lambda_n$ son raíces r-ésimas de la unidad. Entonces $\lambda_i^{-1} = \overline{\lambda_i}$ para toda $i = 1, ..., n$. Por lo que

$$\overline{\chi(g)} = \overline{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{-1} = Tr([\rho_g]^{-1}) = Tr([\rho_{g^{-1}}]) = \chi([\rho_{g^{-1}}])$$

Ahora para demostrar 3. tenemos

$$\chi(hgh^{-1}) = Tr(\rho_{hgh^{-1}}) = Tr(\rho_h\rho_g\rho_{h^{-1}}) = Tr(\rho_g) = Tr(g) = \chi(g).$$

□

Una función $f : G \to \mathbb{C}$ que cumple la condición 3. de la Proposición 3.2.3, o equivalentemente que sea constante en las clases de conjugación de G, se le llama función de clase.

Proposición 3.2.4. Sean $\rho^1 : G \to GL(V_1)$ y $\rho^2 : G \to GL(V_2)$ dos representaciones lineales de G, y χ_1, χ_2 sus caracteres respectivamente. Entonces se cumple:

1. El carácter de la representación suma directa, denotado por $\chi_1 \oplus \chi_2$ es igual a $\chi_1 + \chi_2$.
2. El carácter de la representación producto tensorial, denotado por $\chi_1 \otimes \chi_2$, es igual a $\chi_1 \cdot \chi_2$.

Demostración. Sea $g \in G$, la matriz asociada a la representación $(\rho^1 \oplus \rho^2)_g$ es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

donde A_1 y A_2 son las matrices de las representaciones ρ_g^1 y ρ_g^2 respectivamente. Luego se tiene

$$\chi_1 \oplus \chi_2(g) = Tr(A) = Tr(A_1) + Tr(A_2) = \chi_1(g) + \chi_2(g).$$

Ahora para 2, escribimos a las representaciones ρ^1 y ρ^2 de la siguiente manera $\rho_g^1 = (r_{i_1 j_1}(g))$ y $\rho_g^2 = (r_{i_2 j_2}(g))$, entonces por la fórmula de la matriz asociada al producto tensorial de las representaciones se tiene

$$\chi_1 \otimes \chi_2(g) = \sum_{i_1, i_2} r_{i_1 i_1}(g) r_{i_2 i_2}(g) = \Big(\sum_{i_1} r_{i_1 i_1}(g)\Big)\Big(\sum_{i_2} r_{i_2 i_2}(g)\Big) = \chi_1(g) \cdot \chi_2(g).$$

□

El siguiente resultado es una consecuencia del Lema de Schur.

Corolario 3.2.5. Sean $\rho^1 : G \to GL(V_1)$ y $\rho^2 : G \to GL(V_2)$ dos representaciones irreducibles de G y $h : V_1 \to V_2$ una transformación lineal. Definimos

$$h^0 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\rho_g^2)^{-1} \circ h \circ \rho_g^1$$

Entonces:

1. Si ρ^1 y ρ^2 no son isomorfas, entonces $h^0 = 0$.
2. Si $\rho^1 = \rho^2$, en particular $V_1 = V_2 = V$, entonces $h^0 = \lambda Id_V$ es una homotecia, donde $\lambda = (1/n)Tr(h)$ con n=dim(V).

Demostración. h^0 es una transformación lineal de V_1 a V_2. Sea $\sigma \in G$, entonces

$$\begin{aligned}
\rho_\sigma^2 \circ h^0 \circ (\rho_\sigma^1)^{-1} &= \tfrac{1}{|G|} \textstyle\sum_{g \in G} \rho_\sigma^2 \circ (\rho_g^2)^{-1} \circ h \circ \rho_g^1 \circ (\rho_\sigma^1)^{-1} \\
&= \tfrac{1}{|G|} \textstyle\sum_{g \in G} (\rho_{\sigma^{-1}}^2)^{-1} \circ (\rho_g^2)^{-1} \circ h \circ \rho_g^1 \circ \rho_{\sigma^{-1}}^1 \\
&= \tfrac{1}{|G|} \textstyle\sum_{g \in G} (\rho_{g\sigma^{-1}}^2)^{-1} \circ h \circ \rho_{g\sigma^{-1}}^1 = h^0
\end{aligned}$$

Por lo tanto para todo $\sigma \in G$ $\rho_\sigma^2 \circ h^0 = h^0 \circ \rho_\sigma^1$. Por lo que podemos aplicar el lema de Schur, así obtenemos 1. y que h^0 es una homotecia.

Ahora si $\rho^1 = \rho^2$, entonces

$$Tr(h^0) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} Tr((\rho_g^2)^{-1} \circ h \circ \rho_g^1) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} Tr(h) = Tr(h)$$

Como $h^0 = \lambda Id_V$ entonces $Tr(h^0) = n\lambda$, donde n =dim(V). Luego $Tr(h^0) = Tr(h) = n\lambda$, por lo tanto $\lambda = (1/n)Tr(h)$.

□

Si escribimos a las representaciones ρ^1 y ρ^2 como matrices, de la siguiente manera, $\rho_g^1 = (r_{i_1 j_1}(g))$ y $\rho_g^2 = (r_{i_2 j_2}(g))$, el corolario anterior lo podemos reescribir como sigue

Corolario 3.2.6.

(1) Si ρ^1 y ρ^2 no son isomorfas, es decir, si $(r_{i_1j_1})$ y $(r_{i_2j_2})$ no son similares, entonces:

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} r_{i_2j_2}(g^{-1})r_{j_1i_1}(g) = 0$$

para toda i_1, i_2, j_1, j_2

(2) Si $V_1 = V_2$ y $(r_{i_1j_1}) = (r_{i_2j_2})$, entonces:

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} r_{i_2j_2}(g^{-1})r_{j_1i_1}(g) = \frac{1}{n}\delta_{i_1i_2}\delta_{j_1j_2}$$

Demostración. Sean $(x_{j_2j_1})$ es la matriz asociada a la transformación lineal $h : V_1 \to V_2$ y $(x^0_{i_2i_1})$ la matriz asociada a la transformación h^0 en las bases anteriormente utilizadas, entonces:

$$x^0_{i_2i_1} = \frac{1}{|G|}\sum_{j_1,j_2,g\in G} r_{i_2j_2}(g^{-1})x_{j_2j_1}r_{j_1i_1}(g) \tag{3.1}$$

Por el Corolario 3.2.5. $x^0_{i_2i_1} = 0$ para toda i_1, i_2. En la parte derecha de la igualdad (3.1) se tiene un sistema de ecuaciones lineales, tal que para todos los posibles valores de $x_{j_2j_1}$, se anula. De donde se sigue que los coeficientes de este sistema de ecuaciones deben ser todos cero. Por lo tanto

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} r_{i_2j_2}(g^{-1})r_{j_1i_1}(g) = 0.$$

Para todo i_1, i_2, j_1, j_2.

Para demostrar (2) se tiene que por el Corolario 3.2.5. $h^0 = \lambda$, es decir $x^0_{i_2i_1} = \lambda\delta_{i_2i_1}$, donde $\delta_{i_2i_1}$ denota la función delta de Kronecker, esto es

$$\delta_{i_2i_1} = \begin{cases} 1 & \text{si } i_2 = i_1 \\ 0 & \text{si } i_2 \neq i_1 \end{cases}.$$

Con $\lambda = \frac{1}{n}Tr(x_{j_2j_1}) = \frac{1}{n}\sum_{j_1,j-2} x_{j_2j_1}\delta_{j_1j_2}$. De aquí obtenemos:

$$\frac{1}{|G|}\sum_{j_1,j_2,g\in G} r_{i_2j_2}(g^{-1})x_{j_2j_1}r_{j_1i_1}(g) = \frac{1}{n}\sum_{j_1,j-2}\delta_{j_1j_2}\delta_{i_1i_2}x_{j_2j_1}$$

igualando los coeficientes del sistema de ecuaciones lineales anterior, se tiene

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} r_{i_2j_2}(g^{-1})r_{j_1i_1}(g) = \frac{1}{n}\delta_{i_1i_2}\delta_{j_1j_2}.$$

□

Ortogonalidad de caracteres.

Sean $\varphi, \psi : G \to \mathbb{C}$ dos funciones, definimos:

$$\langle\varphi, \psi\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\varphi(g)\overline{\psi(g)} \tag{3.2}$$

Proposición 3.2.7. $\langle\varphi,\psi\rangle$ es un producto interior en el $\mathbb{C}$-espacio vectorial de las funciones de G a $\mathbb{C}$.

Demostración. Sean φ,ψ,τ funciones de G a $\mathbb{C}$ y $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$.

(a) Es lineal en la primera entrada:

$$\langle\alpha\varphi+\beta\tau,\psi\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(\alpha\varphi(g)+\beta\tau(g))\overline{\psi(g)}$$

$$=\alpha\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\varphi(g)\overline{\psi(g)}+\beta\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\tau(g)\overline{\psi(g)}=\alpha\langle\varphi,\psi\rangle+\beta\langle\tau,\psi\rangle.$$

(b) Es aditivo y conjugado en la segunda entrada:

$$\langle\varphi,\alpha\tau+\beta\psi\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\varphi(g)(\overline{\alpha\tau(g)+\beta\psi(g)})$$

$$\overline{\alpha}\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\varphi(g)\overline{\tau(g)}+\overline{\beta}\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\varphi(g)\overline{\psi(g)}=\overline{\alpha}\langle\varphi,\tau\rangle+\overline{\beta}\langle\varphi,\psi\rangle.$$

(c) $\langle\psi,\varphi\rangle=\overline{\langle\varphi,\psi\rangle}$

$$\langle\psi,\varphi\rangle=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\psi(g)\overline{\varphi(g)}=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\varphi(g)\overline{\psi(g)}}=\frac{1}{|G|}\overline{\sum_{g\in G}\varphi(g)\overline{\psi(g)}}=\overline{\langle\varphi,\psi\rangle}$$

(d) $\langle\varphi,\varphi\rangle>0$ para toda $\varphi\neq 0$:
si $\varphi\neq 0$ existe $g\in G$ tan que $\varphi(g)\neq 0$, entonces

$$\langle\varphi,\varphi\rangle=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\varphi(g)\overline{\varphi(g)}=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\|\varphi(g)\|^2>0.$$

□

Teorema 3.2.8.

(1) Si χ es el carácter de una representación irreducible, entonces $\langle\chi,\chi\rangle=1$.

(2) Si χ_1 y χ_2 son los caracteres de dos representaciones irreducibles no isomorfas, entonces $\langle\chi_1,\chi_2\rangle=0$, es decir, son ortogonales.

Demostración. Sea $\rho: G\to GL(V)$ una representación irreducible y χ su carácter. Sea $(r_{ij}(g))$ la matriz asociada a ρ_g en alguna base de V, ahora como $\chi(g)=\sum_i r_{ii}(g)$, entonces

$$\begin{aligned}\langle\chi,\chi\rangle=\langle\textstyle\sum_i r_{ii},\sum_j r_{jj}\rangle &= \textstyle\sum_{i,j}\langle r_{ii},r_{jj}\rangle\\ &= \textstyle\sum_{i,j}\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}r_{ii}(g^{-1})r_{jj}(g)\\ &= \textstyle\sum_{i,j}\frac{1}{n}\delta_{ij} \text{ por el Corolario 3.2.6 (2)}\\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}=1\end{aligned}$$

Para demostrar (2) sean ρ^1, ρ^2 dos representaciones irreducibles no isomorfas y $(r_{i_1j_1}(g))$, $(r_{i_2j_2}(g))$ las matrices asociadas a ρ_g^1 y ρ_2^g en alguna base. Si χ_1 y χ_2 son los caracteres de ρ^1 y ρ^2 respectivamente, entonces

$$\begin{aligned}
\langle \chi_1, \chi_2 \rangle &= \langle \textstyle\sum_{i_1} r_{i_1i_1}, \sum_{i_2} r_{i_2i_2} \rangle \\
&= \textstyle\sum_{i_1,i_2} \langle r_{i_1i_1}, r_{i_2i_2} \rangle \\
&= \textstyle\sum_{i_1,i_2} \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} r_{i_1i_1}(g^{-1}) r_{i_2i_2}(g) = 0 \text{ por el Corolario 3.2.6 (1)}
\end{aligned}$$

□

Corolario 3.2.9. Sea $\rho : G \to GL(V)$ una representación lineal de G con carácter φ, supongamos que se descompone como suma directa de representaciones irreducibles

$$V = W_1 \oplus ... \oplus W_k$$

Si W es una representación irreducible con carácter χ, entonces el número de W_i isomorfos a W es igual al producto escalar $\langle \varphi, \chi \rangle$. Este número no depende de la descomposición de V.

Demostración. Sea χ_i el carácter de W_i, entonces $\varphi = \chi_1 + ... + \chi_k$, por lo que $\langle \varphi, \chi \rangle = \langle \chi_1, \chi \rangle + ... + \langle \chi_k, \chi \rangle$. Donde

$$\langle \chi_i, \chi \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad W \text{ es isomorfo a } W_i \\ 0 & \text{si} \quad W \text{ no es isomorfo a } W_i \end{cases}$$

De donde se sigue el resultado. Ahora como el carácter de V no depende de su descomposición, entonces el número de subrepresentaciones irreducibles de V isomorfas a W no depende de la descomposición de V.

□

Definición 3.2.10. Sea $\rho : G \to GL(V)$ una representación lineal con carácter φ y $\rho' : G \to GL(W)$ una representación irreducible con carácter χ. Definimos la multiplicidad de ρ' en ρ como $\langle \varphi, \chi \rangle$. Por el corolario anterior está bien definida la multiplicidad ya que no depende de la descomposición de V.

Corolario 3.2.11. Dos representaciones con el mismo carácter son isomorfas.
Demostración. Sean ρ^1, ρ^2 dos representaciones lineales de G, sean χ_1, χ_2 sus respectivos caracteres. Supongamos que $\chi_1 = \chi_2$. Sean $\{\varphi_i | i \in I\}$ las representaciones irreducibles de G. Por el corolario anterior la multiplicidad de φ_i en ρ_1 es igual a la multiplicidad de φ_i en ρ_2. De donde se sigue que son isomorfas.

□

Notemos que, por el resultado anterior, los caracteres determinan, salvo isomorfismo, a las representaciones lineales de un grupo finito, es decir, el estudio de las representaciones lineales de un grupo finito se reduce al estudio de sus caracteres.

Sea $\rho : G \to GL(V)$ una representación lineal, descomponiendo a V como suma directa de irreducibles tenemos

$$V = m_1W_1 \oplus ... \oplus m_kW_k$$

donde m_iW_i denota la suma directa de W_i consigo mismo i veces y m_i es la multiplicidad de W_i en V.

Proposición 3.2.12 Si χ es el carácter de una representación lineal $\rho : G \to GL(V)$, entonces

(1) $\langle \chi, \chi \rangle = \sum_{i=1}^{k} m_i^2$.

(2) $\langle \chi, \chi \rangle > 0$.

(3) $\langle \chi, \chi \rangle = 1$ si y sólo si χ es irreducible.

Demostración. Como $V = m_1W_1 \oplus ... \oplus m_kW_k$, sea χ_i el carácter de la representación irreducible W_i, entonces $\chi = m_1\chi_i + ... + m_k\chi_k$, luego

$$\langle \chi, \chi \rangle = \langle \sum_{i=1}^{k} m_i\chi_i, \sum_{j=1}^{k} m_j\chi_j \rangle = \sum_{i,j} m_im_j\langle \chi_i, \chi_j \rangle$$

$$= \sum_{i,j} m_im_j\delta_{ij} = \sum_{i=1}^{k} m_i^2.$$

Ahora como $m_i > 0$ para toda $i \in \{i, ..., k\}$ entonces $\langle \chi, \chi \rangle = \sum_{i=1}^{k} m_i^2 > 0$.

Supongamos que $\langle \chi, \chi \rangle = 1$, esto pasa si y sólo si algún $m_i = 1$ y $m_j = 0$ para toda $j \neq i$. Por lo tanto ρ es irreducible.

□

Corolario 3.2.13. Toda representación irreducible ρ de un grupo finito G está contenida en la representación regular con multiplicidad igual al grado de ρ.

Demostración. Sea ρ_r la representación regular de G y χ_r su carácter. Sea χ un carácter irreducible de G, recordemos que $\chi_r(g) = \begin{cases} 0 & \text{si } g \neq 1 \\ 1 & \text{si } g = 1 \end{cases}$, entonces

$$\langle \chi, \chi_r \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^{-1})\chi_r(g) = \frac{1}{|G|}\chi(1)\chi_r(1) = \frac{1}{|G|}|G|m = m$$

donde m es el grado de ρ.

□

Corolario 3.2.14. Sea G un grupo finito, se satisfacen:

(1) G tiene un número finito de representaciones irreducibles no isomorfas $\rho_1, ..., \rho_k$ para algún $k \in \mathbb{N}$.

(2) Si el grado de ρ_i es igual a m_i para toda $i \in \{1, ..., k\}$, entonces los grados $m_1, ..., m_k$ satisfacen $\sum_{i=1}^{k} m_i^2 = |G|$.

(3) Sea $g \in G$, si $g \neq 1$ entonces $\sum_{i=1}^{k} m_i\chi_i(g) = 0$.

Demostración. Como toda representación irreducible de G está contenida en la representación regular de grado $|G| < \infty$, entonces sólo hay un número finito de sumandos directos de la representación regular. Por tanto de representaciones irreducibles de G.

Ahora sean $\chi_1, ..., \chi_k$ los caracteres irreducibles de G con grados $m_1, ..., m_k$ respectivamente, entonces

$$\langle \chi_r, \chi_r \rangle = \sum_{i=1}^{k} m_i^2$$

Por otro lado

$$\langle \chi_r, \chi_r \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_r(g^{-1}) \chi_r(g) = \frac{1}{|G|} \chi_r(1) \chi_r(1) = |G|$$

Ahora sea $g \in G$ $g \neq 1$, entonces

$$0 = \chi_r(g) = \sum_{i=1}^{k} m_i \chi_i(g).$$

Que es lo que queríamos demostrar.

□

Notemos que si $\rho_1, ..., \rho_r$ son caracteres irreducibles de un grupo finito G con grados $m_1, ..., m_r$ respectivamente, entonces éstas son todas las representaciones irreducibles de G si y sólo si $\sum_{i=1}^{r} m_i^2 = |G|$.

Funciones de clase.

Una función $f : G \to \mathbb{C}$ se llama función de clase si para todo $g, h \in G$ $f(hgh^{-1}) = f(g)$, es decir, f es constante en las clases de conjugación de G.

Sea $\mathcal{F} := \{f : G \to \mathbb{C} \mid f \text{ es constante en las clases de conjugación de } G\}$, es fácil ver que con las operaciones de la suma de funciones $(f+k)(g) = f(g)+k(g)$ y el producto escalar usual $(\alpha f)(g) = \alpha f(g)$, $\mathcal{F}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.

En lo siguiente veremos que los caracteres irreducibles de G forman una base de $\mathcal{F}$ y que la dimensión de $\mathcal{F}$ es igual al número de clases de conjugación de G, pero antes necesitamos un lema.

Lema 3.2.15. Sean $f : G \to \mathbb{C}$ una función de clase y $\rho : G \to GL(V)$ una representación lineal. Sea $\rho_f : V \to V$ la función lineal definida como

$$\rho_f := \sum_{g \in G} f(g) \rho_g.$$

Si ρ es irreducible de grado n y carácter χ, entonces ρ_f es una homotecia de razón

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} f(g) \chi(g) = \frac{|G|}{n} \langle f, \overline{\chi} \rangle.$$

Demostración. Veamos que ρ_f satisface la condición del Lema de Schur. Sea $h \in G$, entonces

$$\rho_h^{-1} \rho_f \rho_h = \sum_{g \in G} \rho_{h^{-1}} f(g) \rho_g \rho_h = \sum_{g \in G} f(g) \rho_{h^{-1}gh}$$

Sea $u = h^{-1}gh$, entonces $g = huh^{-1}$ y como la asignación $u \mapsto huh^{-1}$ es un isomorfismo de G en G, se sigue que

$$\rho_h^{-1}\rho_f\rho_h = \sum_{huh^{-1}\in G} f(huh^{-1})\rho_u = \sum_{huh^{-1}\in G} f(u)\rho_u = \sum_{u\in G} f(u)\rho_u = \rho_f.$$

Por lo tanto $\rho_g\rho_h = \rho_h\rho_f$, entonces por el Lema de Schur ρ_f es una homotecia de razón

$$\lambda = \frac{1}{n}Tr(\sum_{g\in G} f(g)\rho_g) = \frac{1}{n}\sum_{g\in G} f(g)\chi(g) = \frac{|G|}{n|G|}\sum_{g\in G} f(g)\overline{\overline{\chi}} = \frac{|G|}{n}\langle f, \overline{\chi}\rangle.$$

□

Teorema 3.2.16. Los caracteres irreducibles de G, $\chi_1, ..., \chi_k$ forman una base ortonormal de $\mathcal{F}$.

Demostración. Ya hemos demostrado que los caracteres irreducibles forman un sistema ortonormal en $\mathcal{F}$. Basta ver que los caracteres irreducibles de G generan a $\mathcal{F}$. Sea $f \in \mathcal{F}$. Supongamos que f es ortogonal a cada $\overline{\chi_i}$, $i \in \{1, ..., k\}$, es decir, $\langle f, \overline{\chi_i}\rangle = 0$. Sea ρ una representación lineal de G, entonces

$$\rho_f = \sum_{g\in G} f(g)\rho_g = \sum_{i,g\in G} m_i f(g)\rho_g^i = |G|\sum_{i=1}^{k}\langle f, \overline{\chi_i}\rangle = 0.$$

Ahora consideremos la representación regular $R : G \to GL(V)$, donde $\beta = \{v_g | g \in G\}$ es base de V. Sea $v_1 \in G$, entonces

$$R_f(v_1) = \sum_{g\in G} f(g)R_g(v_1) = \sum_{g\in G} f(g)v_g = 0$$

por lo que tenemos una combinación lineal de los elementos de la base β igual a cero, entonces $f(g) = 0$ para toda $g \in G$. De donde se sigue el resultado.

□

Teorema 3.2.17. El número de representaciones irreducibles de un grupo finito G es igual al número de clases de conjugación de G.

Demostración. Sean $C_1, ..., C_r$ las distintas clases de conjugación de G, consideremos las funciones $f_i \in \mathcal{F}$ con $i \in \{1, ..., r\}$ como sigue

$$f_i(g) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad g \in C_i \\ 0 & \text{si} \quad g \notin C_i \end{cases}$$

Veamos que $\{f_i \mid i = 1, ..., r\}$ es una base de $\mathcal{F}$. Sean $f \in \mathcal{F}$, $\lambda_i = f(g)$ donde $g \in C_i$, entonces $f = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i f_i$.

Ahora sea $\sum_{i=1}^{r} \mu_i f_i = 0$ una combinación lineal, tomando a un elemento g por cada C_i, se tiene que $\sum_{i=1}^{r} \mu_i f_i(g) = \mu_i = 0$, por lo tanto los coeficientes de la combinación lineal son todos cero. Por lo que la dimensión de $\mathcal{F}$ es igual al número de clases de conjugación de G.

□

Ahora utilicemos lo que hemos desarrollado hasta ahora para describir todas las representaciones irreducibles de algunos grupos finitos.

Ejemplos:

1. **El grupo cíclico de orden n, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.**

   Primero, $GL(\mathbb{C})$ son las matrices invertibles de 1×1, es decir los elementos de $\mathbb{C}$ invertibles, por lo tanto $GL(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathbb{C}^*$

   Ahora sea $\omega = e^{2\pi i/n}$ la raíz n-ésima primitiva de la unidad, sea $j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Definimos
   $$\rho^j : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^* \text{ como } \rho^j_i = (\omega^j)^i$$
   $j \in \{0, ..., n-1\}$. Veamos que éstas son n representaciones de grado 1 y por tanto n representaciones irreducibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
   $$\rho^j_0 = (\omega^j)^0 = 1, \ \rho^j_i \circ \rho^j_l = (\omega^j)^i(\omega^j)^l = (\omega^j)^{i+l} = \rho^j_{i+l}$$
   Por lo tanto $\rho^0, ..., \rho^{n-1}$ son n representaciones irreducibles. Como $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ es abeliano de orden n entonces tiene n clases de conjugación. Por lo tanto estas representaciones son todas las representaciones irreducibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

2. **El grupo diédrico de orden 8,** D_4.

   $D_4 := \{r, s | r^4 = 1 = s^2, rsr = r^{-1}\}$. Cada elemento de D_4 se puede escribir de manera única de la forma r^k, con $0 \leq k \leq 3$ o de la forma sr^k con $0 \leq k \leq 3$, es decir $D_4 = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$.

   Notemos que si una representación tiene orden uno entonces la representación evaluada en algún elemento del grupo es igual a su carácter evaluada en el mismo elemento. D_4 tiene cuatro representaciones de grado uno (y por lo tanto irreducibles) las cuales describiremos a continuación a partir de sus caracteres.

   a) la representación trivial
   $$\chi_1(r^k) = 1 = \chi_1(sr^k), \text{ para toda } k = 0, 1, 2, 3.$$

   b)
   $$\chi_2(r^k) = 1, \chi_2(sr^k) = -1, \text{ para toda } k = 0, 1, 2, 3.$$
   Claramente es un homeomorfismo de grupos, veamos que cumple las relaciones que definen a D_4.
   $$\chi_2(r^4) = 1, \ , \chi_2(s^2) = (-1)^2 = 1, \ \chi_2(srs) = (-1)1(-1) = 1 = \chi_2(r^{-1}).$$
   Por lo tanto χ_2 es el carácter de una repesentación de grado 1 de D_4.

   c)
   $$\chi_3(r^k) = (-1)^k \ , \chi_3(sr^k) = (-1)^k \text{ para toda } k = 0, 1, 2, 3.$$
   Veamos que cumple las relaciones que definen a D_4.
   $$\chi_3(r^4) = (-1)^4 = 1, \chi_3(s^2) = (-1)^0(-1)^0 = 1, \chi_3(srs) = -1 = \chi_3(r^{-1}).$$
   lo que muestra que χ_3 es el carácter de una representación irreducible de grado 1 de D_4.

d)
$$\chi_4(r^k) = (-1)^k,\ \chi_4(sr^k) = (-1)^{k+1}, \text{ para toda } k = 0,1,2,3.$$

Verifiquemos que cumplen las relaciones de D_4.

$$\chi_4(s = \chi_4(sr^0) = -1, \text{ entonces } \chi_4(s^2) = 1$$

$$\chi_4(srs) = (-1)^3 = -1 = \chi_4(r^3) = \chi_4(r^{-1}).$$

Por lo tanto tenemos 4 representaciones irreducibles de D_4.

Ahora consideremos la representación del ejemplo 4 de la sección 3.1

$$r \mapsto A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ s \mapsto B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculando esta representación en todos los elementos de D_4, se tiene:

$$r^2 \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -0 & -1 \end{pmatrix},\ r^3 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$sr \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ sr^2 \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ sr^3 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora, si χ es el carácter de esta representación, entonces $\chi(1) = 2$ y $\chi(r^2) = -2$ y para todo elemento distinto de 1 y r^2 el carácter vale cero. Calculando la norma de χ nos queda

$$\langle \chi, \chi \rangle = \frac{1}{8}(2^2 + (-2)^2) = 1$$

Por lo tanto esta representación es irreducible.

Como las representaciones anteriores cumplen que la suma de los cuadrados de sus grados es igual al orden de D_4, entonces éstas son, salvo isomorfismo, todas las representaciones irreducibles de D_4.

3.3. Representaciones proyectivas de grupos finitos.

Definición 3.3.1. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Una representación proyectiva de un grupo finito G es una función $\rho : G \to GL(V)$ tal que existe una función $\alpha : G \times G \to \mathbb{C}^*$, que satisfacen:

(a) $\rho(g)\rho(h) = \alpha(g,h)\rho(gh)$ para todo $g, h \in G$

(b) $\rho(1) = Id$

Notemos que una representación proyectiva de G es casi una representación lineal exceptuando por la multiplicación con la función α.

Proposición 3.3.2. Dada una representación proyectiva $\rho : G \to GL(V)$ con $\alpha : G \times G \to \mathbb{C}^*$ la función asociada a ρ, satisface que α es un 2-cociclo de G con coeficientes en $\mathbb{C}^*$ (considerado como G-módulo con la acción trivial), es decir satisface:

1) $\alpha(1,g) = 1 = \alpha(g,1)$, para todo $g \in G$.

2) $\alpha(g,h)\alpha(gh,k) = \alpha(h,k)\alpha(g,hk)$ para todo $g,h,k \in G$.

Demostración. Sea $g \in G$. Por la condición (a) de la definición $\alpha(1,g)Id_V = \rho(1)\rho(g)\rho^{-1}(g) = Id_V\rho(g)\rho^{-1}(g) = Id_V$, análogamente $\alpha(g,1)Id_V = \rho(g)\rho(1)\rho^{-1}(g) = Id_V$, de donde se sigue que $\alpha(1,g) = 1 = \alpha(g,1)$.

Ahora sean $g,h,k \in G$, entonces

$$(\rho(g)\rho(h))\rho(k) = (\alpha(g,h)\rho(gh))\rho(k) = \alpha(g,h)\alpha(gh,k)\rho(ghk)$$

Por otro lado

$$\rho(g)(\rho(h)\rho(k)) = \rho(g)(\alpha(h,k)\rho(hk)) = \alpha(h,k)\alpha(g,hk)\rho(ghk)$$

Como el producto es asociativo en $GL(V)$ implica que

$$\alpha(g,h)\alpha(gh,k) = \alpha(h,k)\alpha(g,hk).$$

□

Ahora entonces cabe la pregunta ¿por qué les llamamos representaciones proyectivas a estas funciones?, que en realidad son dos preguntas ¿por qué les llamamos representaciones? y ¿por qué proyectivas? a la primera pregunta la responderemos en lo siguiente, y consiste en que las representaciones proyectivas son representaciones lineales para la extensión de grupo de G asociada al cociclo α. La segunda pregunta la responderemos más adelante.

Haremos un recordatorio de resultados vistos en el capítulo 2 que nos servirán para demostrar la siguiente proposición y así responder a la primera pregunta.

Dada una extensión central de G por $\mathbb{C}^*$, donde G actúa de manera trivial en $\mathbb{C}^*$.

$$1 \to \mathbb{C}^* \to E \to G \to 1$$

podemos asignarle un 2-cociclo $\alpha : G \times G \to \mathbb{C}^*$. Dotándole al producto cartesiano $\mathbb{C}^* \times G$ la operación

$$(x,g)(y,h) = (xy\alpha(g,h), gh) \tag{3.3}$$

obtenemos un grupo. Lo denotamos por G_α Este grupo satisface que la extensión central

$$1 \to \mathbb{C}^* \to G_\alpha \to G \to 1$$

es equivalente a la primera extensión central.

Ahora veamos que si ρ es una representación proyectiva con el cociclo asociado α, entonces la podemos extender a una representación lineal del grupo G_α.

Proposición 3.3.3. Sea $\rho : G \to GL(V)$ una representación proyectiva de G y α el cociclo asociado. Sea $G_\alpha := \mathbb{C}^* \times G$ con la operación (3.3), entonces la función $\rho' : G_\alpha \to GL(V)$ definida como

$$\rho'(x,g) = x\rho(g)$$

es una representación lineal de G_α.

Demostración. Veamos que ρ' es un homomorfismo. $\rho'(1,1) = 1\rho(1) = I$. Ahora sean $x, y \in \mathbb{C}^*$ y $g, h \in G$, entonces

$$\rho'(x,g)\rho'(y,h) = xy\rho(g)\rho(h) = xy\alpha(g,h)\rho(gh)$$

$$= \rho'(xy\alpha(gh), gh) = \rho'((x,g)(y,h))$$

Por lo tanto ρ' es una representación lineal de G_α.

□

A las representaciones proyectivas de un grupo G donde el 2-cociclo α está fijo les llamaremos representaciones α-proyectivas de G.

Recíprocamente nos podemos preguntar por las representaciones lineales de G_α que restringidas a G son representaciones α-proyectivas. La respuesta la veremos en la siguiente proposición.

Proposición 3.3.4. Sea G_α la extensión central de G por $\mathbb{C}^*$ determinada por el cociclo α, $\Gamma : G \to GL(V)$ una representación lineal tal que para todo $x \in \mathbb{C}$ $\Gamma((x,1)) = xId$. Definimos $\rho : G \to GL(V)$ por

$$\rho(g) = \Gamma((1,g)) \text{ para toda } g \in G$$

entonces ρ es una representación α-proyectiva.

Demostración.

1. $\rho(1) = \Gamma((1,1)) = I$.
2. Sean $g, h \in G$, entonces

$$\rho(g)\rho(h) = \Gamma((1,g))\Gamma((1,h)) = \Gamma((1,g)(1,h)) = \Gamma((\alpha(g,h), gh)) =$$

$$= \Gamma((\alpha(g,h),1))\Gamma((1,gh)) = \alpha(g,h)\Gamma(1,gh) = \alpha(g,h)\rho(gh)$$

□

Notemos que las asignaciones de las Proposiciones 3.3.3 y 3.3.4 entre las representaciones α-proyectivas de G y las representaciones lineales de la extensión central G_α tales que restringidas al centro $\mathbb{C}^*$ actúan como multiplicación escalar, son inversa una de la otra. Por lo que hay una biyección entre éstas.

La respuesta a la pregunta ¿por qué proyectivas? es la siguiente: Una representación proyectiva $\rho : G \to GL(V)$ es equivalente a un homomorfismo de grupos del grupo G al grupo proyectivo lineal $\rho : G \to PGL(V) = GL(V)/F^*$ donde V es un espacio vectorial sobre el campo F.

Veamos un ejemplo de una representación α-proyectiva.

Representación α-proyectiva del grupo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Consideremos el grupo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \langle a, b | a^2 = b^2 = (ab)^2 = e\rangle$ y definimos el 2-cociclo $\alpha \in Z(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{C}^*)$ como

$$\alpha(a^{u_a}b^{u_b}, a^{v_a}b^{v_b}) = (-1)^{u_a v_b}$$

donde $u_a, v_a, u_b, v_b \in \{0,1\}$ y $a^0 = b^0 = e$.

Veamos que efectivamente $\alpha \in Z(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{C}^*)$.

a) $\alpha(e, a^{v_a}b^{v_b}) = (-1)^{0v_b} = 1 = (-1)^{u_a 0} = \alpha(a^{u_a}b^{u_b}, e)$.

b) $\alpha(a^{u_a}b^{u_b}, a^{v_a}b^{v_b})\alpha(a^{u_a+v_a}b^{u_b+v_b}, a^{w_a}b^{w_b}) = (-1)^{u_a v_b}(-1)^{(u_a+v_a)w_b} = (-1)^{u_a v_b + u_a w_b + v_a w_b}$

   Por otro lado

   $\alpha(a^{v_a}b^{v_b}, a^{w_a}b^{w_b})\alpha(a^{u_a}b^{u_b}, a^{v_a}b^{v_b}, a^{v_a+w_a}b^{v_b+w_b}) = (-1)^{v_a w_b}(-1)^{u_a(v_b+w_b)} = (-1)^{v_a w_b + u_a v_b + u_a w_b}$.

   Por lo que α cumple 2) de la Proposición 3.2.2 . Por lo tanto es un 2-cociclo de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Ahora definimos $\rho : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 :\to GL(2, \mathbb{C})$ como

$$\rho(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \rho(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ \rho(b) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix},\ \rho(ab) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

Veamos que ρ es una representación α-proyectiva de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

$$\rho(a)\rho(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \alpha(a,b)\rho(ab)$$

$$\rho(b)\rho(a) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = 1\rho(ba) = \alpha(b,a)\rho(ba)$$

$$\rho(a)\rho(ab) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = (-1)\rho(b) = \alpha(a,ab)\rho(a^2b)$$

$$\rho(ab)\rho(a) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = 1\rho(b)\alpha(ab,a)\rho(aba)$$

$$\rho(ab)\rho(b) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (-1)\rho(a) = \alpha(ab,b)\rho(ab^2)$$

$$\rho(b)\rho(ab) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 1\rho(a) = \alpha(b,ab)\rho(a^2b)$$

Por lo tanto ρ es una representación α-proyectiva de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Por otro lado, restringiendo a α a su imagen, obtenemos un 2-cociclo de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ con valores en $\mathbb{Z}_2$, es decir $\alpha \in H^2(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)$. Por lo tanto existe una extensión central determinada por α.

$$1 \to \mathbb{Z}_2 \to (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)_\alpha \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to 1$$

Donde la operación en $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)_\alpha$ está dada por

$$(x,a)(y,b) = (xy\alpha(a,b), ab).$$

Para facilitar la notación escribiremos $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)_\alpha := \{1, -1, a, -a, b, -b, ab, -ab\}$.

Veamos que $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)_\alpha$ es isomorfo a D_8 el grupo diédrico de orden 8. Definimos $\varphi : (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)_\alpha \to D_8$ por:

$$\varphi(1) = 1, \varphi(ab) = r, \varphi(-ab) = r^3, \varphi(-1) = r^2.$$

$$\varphi(a) = sr, \varphi(b) = s, \varphi(-b) = sr^2, \varphi(-a)sr^3.$$

Claramente φ es una biyección, por lo que basta mostrar que efectivamente es un homomorfismo, lo cual es fácilmente verificable.

Por lo tanto toda representación α-proyectiva de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ se puede extender a una representación lineal de D_8.

Ahora nos podemos preguntar sobre la traza de las representaciones α-proyectivas. Es decir, si al igual que las representaciones lineales, éstas son determinadas por su traza y si son invariantes bajo conjugación. Las respuestas a estas preguntas las veremos a continuación.

Al igual que con las representaciones lineales, decimos que dos representaciones α-proyectivas $\rho_1 : G \to GL(V_1)$, $\rho_2 : G \to GL(V_2)$ son isomorfas si existe un isomorfismo $T : V_1 \to V_2$ tal que para toda $g \in G$ $T \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ T$.

Proposición 3.3.5. Sean $\rho_1 : G \to GL(V_1)$, $\rho_2 : G \to GL(V_2)$ dos representaciones α-proyectivas. ρ_1 y ρ_2 son isomorfas si y sólo si $\forall g \in G$ $Tr(\rho_1(g)) = Tr(\rho_2(g))$.

Demostración. Supongamos que ρ_1 y ρ_2 son isomorfas, entonces existe un isomorfismo $T : V_1 \to V_2$ tal que para todo $g \in G$ $T \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ T$, entonces $\rho_2(g) = T \circ \rho_1(g) \circ T^{-1}$, por lo tanto $Tr(\rho_2(g)) = Tr(T \circ \rho_1(g) \circ T^{-1}) = Tr(\rho_1(g))$.

Inversamente, supongamos que para toda $g \in G$ $Tr(\rho_1(g)) = Tr(\rho_2(g))$. Sean $\rho_1' : G_\alpha \to GL(V_1)$, $\rho_2' : G_\alpha \to GL(V_2)$ las representaciones de G_α que determinan ρ_1 y ρ_2. Entonces

$$Tr(\rho_1'(x,g)) = Tr(x\rho(g)) = xTr(\rho_1(g)) = xTr(\rho_2(g)) = Tr(x\rho_2(g)) = Tr(\rho_2'(x,g))$$

Por lo que existe $T : V_1 \to V_2$ isomorfismo tal que $T \circ (x\rho_1(g)) = T \circ \rho_1'(x,g) = \rho_2'(x,g) \circ T = (x\rho_2(g)) \circ T$, entonces $xT \circ \rho_1(g) = x\rho_2(g) \circ T$, por lo tanto $T \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ T$.

$\square$

Ahora, en cuanto a la pregunta ¿las trazas de las representaciones α-torcidas son invariantes en las clases de conjugación?, la respuesta es negativa como lo muestra la siguiente proposición.

Proposición 3.3.6. Sea $\rho : G \to GL(V)$ una representación α-torcida. Entonces se cumple:

$$Tr(\rho(hgh^{-1})) = \frac{\alpha(hgh^{-1},h)}{\alpha(h,g)} Tr(\rho(g)) \ (*).$$

Demostración.

$$\rho(hgh^{-1}) = \alpha(hg,h^{-1})^{-1}\rho(hg)\rho(h^{-1}) = \alpha(hg,h^{-1})^{-1}\alpha(g,h)^{-1}\rho(h)\rho(g)\rho(h^{-1}).$$

Por otro lado $Id = \rho(h^{-1}h) = \alpha(h^{-1},h)^{-1}\rho(h^{-1})\rho(h)$, entonces $\rho(h^{-1}) = \alpha(h^{-1},h)\rho(h)^{-1}$, sustituyendo se tiene

$$\rho(hgh^{-1}) = \alpha(hg,h^{-1})^{-1}\alpha(h,g)^{-1}\alpha(h^{-1},h)\rho(h)\rho(g)\rho(h)^{-1}.$$

Por ser α un 2-cociclo, se tiene que $\alpha(hgh^{-1}, h) = \alpha(hg, h^{-1})^{-1}\alpha(h^{-1}, h)$.

Por lo tanto

$$\rho(hgh^{-1}) = \alpha(hgh^{-1}, h)\alpha(h, g)^{-1}\rho(h)\rho(g)\rho(h)^{-1}$$

De donde se sigue el resultado.

□

A las funciones de G a $\mathbb{C}$ que cumplen la relación $(*)$ se les llama caracteres α-proyectivos de G.

Notas sobre representaciones de grupos y $\mathbb{C}G$-módulos.

Hemos desarrollado la teoría básica de representaciones lineales y representaciones proyectivas de grupos finitos. Ahora veremos (sin detenernos en todas las demostraciones) que es equivalente pensar las representaciones como homomorfismos del grupo al general lineal de un espacio vectorial o como $\mathbb{C}G$-módulos. Donde

$$\mathbb{C}G := \Big\{ \sum_{g\in G} x_g g \Big| x_g \in \mathbb{C}, g \in G \Big\}$$

y el producto está dado por

$$\left(\sum_{g\in G} x_g g\right)\left(\sum_{g\in G} y_g g\right) = \sum_{g\in G}\left(\sum_{hk=g} x_h y_k\right) g.$$

$\mathbb{C}G$ es un álgebra sobre $\mathbb{C}$, en particular es un anillo.

Sea $\rho : G \to GL(V)$ una representación lineal (V de dimensión finita). Le dotamos a V una estructura de $\mathbb{C}G$-módulo (finitamente generado) como sigue:

$$\left(\sum_{g\in G} x_g g\right) v = \sum_{g\in G} x_g \rho(g)(v).$$

Inversamente si M es un $\mathbb{C}$G-módulo (finitamente generado), en particular es un $\mathbb{C}$-módulo (finitamente generado), es decir, un espacio vectorial (de dimensión finita). Para cada $g \in G$ existe una asignación $m \mapsto gm$ que, por las propiedades de $\mathbb{C}G$-módulo, resulta ser un $\mathbb{C}$-isomorfismo. Más aún, la función $\rho : G \to GL(V)$, $\rho(g)(v) = gv$ es un homomorfismo.

De hecho, hay una correspondencia biyectiva entre las representaciones lineales de dimensión finita de un grupo G y los $\mathbb{C}G$-módulos finitamente generados, la cual respeta isomorfismo, suma directa y producto tensorial.

De forma análoga dado un 2-cociclo $\alpha \in Z^2(G, \mathbb{C}^*)$ definimos el álgebra de grupo "torcido"por $\mathbb{C}^\alpha G =: \sum_{g\in G} x_g\overline{g}$ con las siguiente operaciones:

$$\left(\sum_{g\in G} x_g\overline{g}\right) + \left(\sum_{g\in G} y_g\overline{g}\right) = \sum_{g\in G}(x_g + y_g)\overline{g}$$

$$\left(\sum_{g\in G} x_g\overline{g}\right)\left(\sum_{g\in G} y_g\overline{g}\right) = \sum_{g\in G}\left(\sum_{hk=g} x_h y_k \alpha(h,k)\right)\overline{g}$$

De forma análoga a las representaciones lineales se cumple el siguiente teorema.

Teorema 3.3.5 Sea G un grupo finito. Existe una correspondencia biyectiva entre las representaciones α-proyectivas y de G y los $\mathbb{C}^\alpha G$-módulos, la cual preserva sumas directas e isomorfismos.

Para ver la demostración de este teorema vea [**Kar85**] Teorema 2.5 Capítulo 3.

Capítulo 4

Anillos de representaciones lineales y grupos de representaciones proyectivas.

4.1. Anillos de representaciones de grupos finitos.

Las clases de isomorfismo de las representaciones lineales de un grupo finito forman un monoide conmutativo con la suma directa como operación y un monoide conmutativo con el producto tensorial como operación y la clase de isomorfismo de la representación trivial como neutro de este moniode. Además, el producto tensorial se distribuye sobre la suma directa. Construiremos un anillo universal de las clases de isomorfismo de representaciones de un grupo finito llamado anillo de representaciones de un grupo y calcularemos anillos de representaciones para algunos grupos finitos. Veremos más adelante qué ocurre con las representaciones proyectivas.

Definición 4.1.1. Sea M un conjunto con una operación binaria $+ : M \times M \to M$. Decimos que $(M, +)$ es un semigrupo si la operación es asociativa. Si además $+$ es conmutativa, diremos que $(M, +)$ es un semigrupo conmutativo.

Definición 4.1.2. Dado un conjunto S con dos operaciones $+ : S \times S \to S$ y $\cdot : S \times S \to S$: Decimos que $(S, +, \cdot)$ es un semianillo si $(S, +)$ es un semigrupo con elemento neutro 0, $(S, \cdot)$ es un semigrupo con elemento neutro 1 y el producto se distribuye sobre la suma.

Dado un semianillo conmutativo S queremos construir un anillo conmutativo $K(S)$ que satisfaga lo siguiente:

(a) Existe un morfismo de semianillos $\varphi : S \to K(S)$.

(b) Para todo morfismo de semianillos $f : S \to R$ existe un único morfismo de anillos $\overline{f} : K(S) \to R$ tal que $\overline{f} \circ \varphi = f$, es decir, todo morfismo $f : S \to R$ se factoriza de manera única mediante $\varphi : S \to K(S)$.

Al anillo $K(S)$ le llamaremos el anillo universal de S.

Proposición 4.1.3. Dado un semianillo conmutativo S el anillo universal $K(S)$ existe y es único.

Demostración. Demostremos primero la unicidad.

Supongamos que existe $K'(S)$ y un homomorfismo de semigrupos $\varphi' : S \to K'(S)$ que cumple la propiedad (b).

Como $\varphi : S \to K(S)$ es un homomorfismo y φ' cumple (b), existe $\overline{\varphi} : K'(S) \to K(S)$ homomorfismo de grupos, tal que $\overline{\varphi} \circ \varphi' = \varphi$. Análogamente como φ' es un homomorfismo y φ satisface (b), entonces existe un homomorfismo $\overline{\varphi'} : K(S) \to K'(S)$ tal que $\overline{\varphi'} \circ \varphi = \varphi'$. Entonces

$$(\overline{\varphi} \circ \overline{\varphi'}) \circ \varphi = \overline{\varphi} \circ \varphi' = \varphi = 1_{K(S)} \circ \varphi$$

Por otra parte

$$(\overline{\varphi'} \circ \overline{\varphi}) \circ \varphi' = \overline{\varphi'} \circ \varphi = \varphi' = 1_{K'(S)} \circ \varphi'$$

Ahora como φ se factoriza como $\varphi = (\overline{\varphi} \circ \overline{\varphi'}) \circ \varphi = 1_{K(S)} \circ \varphi$ y la factorización es única, entonces $\overline{\varphi} \circ \overline{\varphi'} = 1_{K(S)}$. Por un razonamiento análogo $\overline{\varphi'} \circ \overline{\varphi} = 1_{K'(S)}$. Por lo tanto $K'(S) \cong K(S)$.

Ahora veamos la existencia de $K(S)$.

En $S \times S$ definimos la siguiente relación $(a, b) \sim (c, d)$ si y sólo si existe $u \in S$ tal que $a+d+u = c+b+u$. Veamos que esta relación es de equivalencia. Claramente se da la reflexivilidad y la simetría, revisemos que se cumple la transitividad. Supongamos que $(a, b) \sim (c, d)$ y $(c, d) \sim (e, f)$, entonces existen $u, v \in M$ tales que

$$a + d + u = c + b + u \text{ y } c + f + v = e + d + v$$

Entonces

$$a + f + (d + c + u + v) = e + b + (d + c + u + v)$$

Por lo tanto $(a, b) \sim (e, f)$.

Por lo que es una relación de equivalencia. Designamos por $[a, b]$ a la clase de equivalencia de (a, b).

Sea $K(S)$ el conjunto de clases de equivalencia y definimos las operaciones en $K(S)$ por

$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]$$

y

$$[a, b][c, d] = [ac + bd, bc + ad]$$

Veamos que las operaciones estén bien definidas. Sean $(a, b), (c, d), (e, f), (g, h) \in S \times S$, supongamos que $(a, b) \sim (c, d)$ y $(e, f) \sim (g, h)$, entonces existen $u, v \in S$ tales que $a + d + u = c + b + u$ y $e + h + v = g + f + v$, entonces

$$(a + e) + (d + h) + (u + v) = (b + f) + (c + g) + (u + v)$$

Por lo tanto $(a+e, b+f) \sim (c+g, d+h)$ es decir $[a+e, b+f] = [c+g, d+h]$, por lo que esta poeración está bien definida.

Ahora notemos que si $(a,b) \sim (c,d)$ entonces $(au, bu) \sim (cu, du)$. Supongamos que $(a,b) \sim (c,d)$ y $(e,f) \sim (g,h)$, entonces

$$[a,b][e,f] = [ae{+}bf, be{+}af] = [ae,be]{+}[bf,af] = [ce,de]{+}[df,cf] = [ce{+}df, de{+}cf]$$

$$= [ce,cf] + [df,de] = [cg,ch] + [dh,dg] = [cg+dh, ch+dg] = [c,d][g,h]$$

Por lo tanto, las dos operaciones están bien definidas.

Veamos ahora que $K(S)$ es un anillo conmutativo con uno que satisface (a) y (b).

1. $(K(S), +)$ es un grupo abeliano

   Notemos que para todo $a,b \in S$ $[a,a] = [b,b]$ pues $a{+}b{+}u = b{+}a{+}u$ para todo $u \in S$ y $[u,u] + [a,b] = [u+a, u+b] = [a,b] = [a,b] + [u,u]$, por lo que para todo $u \in S$ $[u,u]$ es el neutro aditivo. Lo denotaremos por $[0,0]$. Ahora $[a,b] + [b,a] = [a+b, a+b] = [0,0] = [b+a, a+b] = [b,a] + [a+b]$, de donde cada elemento tiene inverso aditivo.

2. Sea $u \in S$ y consideremos a 1 el neutro multiplicativo de S. Luego se cumple

   $$[1{+}u, u][a,b] = [(1{+}u)a{+}ub, ua{+}(1{+}u)b] = [a{+}(ua{+}ub), b{+}(ua{+}ub)] = [a,b]$$

   y

   $$[a,b][1{+}u, u] = [a(1{+}u){+}bu, b(1{+}u){+}au] = [a{+}(au{+}bu), b{+}(au{+}bu)] = [a,b]$$

   Por lo tanto $[1+u, u]$ es el elemento uno de $K(S)$.

3. Sean $a,b,c,d,e,f \in S$

   $$[a,b]([c,d]{+}[e,f]) = [a,b][c{+}e, d{+}f] = [a(c{+}e){+}b(d{+}f), b(c{+}e){+}a(d{+}f)]$$

   $$= [ac{+}ae{+}bd{+}bf, bc{+}be{+}ad{+}af] = [ac{+}bd, bc{+}ad]{+}[ae{+}bf, be{+}af]$$

   $$= [a,b][c,d] + [a,b][e,f].$$

Ahora veamos que $K(S)$ satisface (a) y (b).

Definimos $\varphi : S \to K(S)$ por $\varphi(a) = [a+u, u]$ para algún $u \in S$ arbitrario. φ es un morfismo de semianillos pues $\varphi(a+b) = [a+b+u, u] = [a+b+u+u, u+u] = [a+u,u] + [b+u,u] = \varphi(a) + \varphi(b)$ y $\varphi(a)\varphi(b) = [a+u,u][b+u,u] = [ab + (au+bu+uu+uu), au+bu+uu+uu] = [ab+u, u]$.

Sea $f : S \to R$ un morfismo de semianillos con R un anillo conmutativo. Definimos $\overline{f} : K(S) \to R$ por $\overline{f}[a,b] = f(a) - f(b)$, claramente $\overline{f} \circ \varphi = f$. Basta ver que $\overline{f}$ es único. Sea $g : K(S) \to R$ un morfismo tal que $g \circ \varphi = f$. Notemos que $[a,b] = [a+u, u] + [u, b+u]$ y $[b+u, u] + [u, b+u] = [0,0]$. Luego $g[a,b] = g[a{+}u, u]{+}g[u, b{+}u] = g{\circ}\varphi(a){+}g[u, b{+}u]$ y $g[b{+}u, u]{+}g[u, b{+}u] = [0,0]$, entonces $g[c, b+c] = -g\varphi(b)$, por lo que $g[a,b] = g\varphi(a) - g\varphi(b) = f(a) - f(b)$. $\square$

Notemos que para la construcción de $K(S)$ no necesitamos que S tenga neutro aditivo. En general si $(S, +, \cdot)$ satisface $(S, +)$ es un semigrupo conmutativo, $(S, \cdot)$ es un monoide conmutativo y el producto se distribuye sobre la suma podemos construir el anillo universal $K(S)$.

Denotemos por $Rep(G)$ el conjunto de clases de isomorfismo de representaciones lineales de G. Se tiene que $(Rep(G), \oplus)$ es un semigrupo conmutativo y $(Rep(G), \otimes)$ es un monoide conmutativo con elemento neutro la clase de la representación trivial, además el producto tensorial de representaciones se distribuye sobre la suma directa. Al anillo $K(Rep(G))$ le llamamos anillo de representaciones de G y lo denotamos por $R(G)$.

Veamos algunos ejemplos de anillos de representaciones.

El anillo de representaciones de $\mathbb{Z}_n$.

Las representaciones irreducibles de $\mathbb{Z}_n$ son de la forma $\rho^k = \omega^k$ con $\omega = e^{2\pi i/n}$, $k \in \{1, 2, ..., n\}$ y toda representación lineal de $\mathbb{Z}_n$ es suma directa de representaciones irreducibles. Consideremos a $\mathbb{Z}[\omega] = \{\sum_{i=1}^n m_i\omega^i | m_i \in \mathbb{Z}\}$.

Definimos $f : Rep(\mathbb{Z}_n) \to \mathbb{Z}[\omega]$ como sigue. Sea $\rho = m_1\rho^1 \oplus ... \oplus m_n\rho^n$ una representación de $\mathbb{Z}_n$, donde m_i es la multiplicidad de ρ^i en ρ, $f(\rho) = m_1\omega^1 + ... + m_n\omega^n$. Entonces existe un morfismo de anillos $\overline{f} : R(\mathbb{Z}_n) \to \mathbb{Z}[\omega]$ tal que $\overline{f} \circ \varphi = f$. Veamos que $\overline{f}$ es un isomorfismo.

Sean $\left[\bigoplus_{i=1}^n m_i\omega^i, \bigoplus_{i=1}^n r_i\omega^i\right], \left[\bigoplus_{i=1}^n l_i\omega^i, \bigoplus_{i=1}^n s_i\omega^i\right] \in R(\mathbb{Z}_n)$ tales que $\sum_{i=1}^n (m_i - r_i)\omega^i = \sum_{i=1}^n (l_i - s_i)\omega^i$. Entonces $\bigoplus_{i=1}^n (m_i + s_i)\omega^i = \bigoplus_{i=1}^n (l_i + r_i)\omega^i$, luego $\left[\bigoplus_{i=1}^n m_i\omega^i, \bigoplus_{i=1}^n r_i\omega^i\right] = \left[\bigoplus_{i=1}^n l_i\omega^i, \bigoplus_{i=1}^n s_i\omega^i\right]$. Por lo tanto $\overline{f}$ es inyectiva.

Ahora sea $\sum_{i=1}^n m_i\omega^i \in \mathbb{Z}[\omega]$, entonces $\sum_j m_{i_j}\omega^{i_j} + \sum_k m_{i_k}\omega^{i_k}$ donde los m_j son los enteros no negativos y los m_k son los negativos. Entonces $\overline{f}[\bigoplus_j m_{i_j}\omega^{i_j}, \bigoplus_k |m_{i_k}|\omega^{i_k}] = \sum_{i=1}^n m_i\omega^i$. Por lo tanto $\overline{f}$ es supraeyectiva.

Por tanto $R(\mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}[\omega]$.

El anillo de representaciones de D_2.

Recordemos que $D_2 = \langle r, s | r^2 = s^2 = 1\rangle$ y este grupo es abeliano, por lo que podemos escribir a sus elementos de forma única como $D_2 = \{1, r, s, sr\}$. Es fácil ver que las siguientes cuantro funciones son representaciones de grado uno de D_2.

	1	r	s	rs
ψ_1	1	1	1	1
ψ_2	1	1	-1	-1
ψ_3	1	-1	1	-1
ψ_4	1	-1	-1	1

Ahora notemos que $\psi_2(x)\psi_3(x) = \psi_4(x)$, $\psi_3(x)\psi_4(x) = \psi_2(x)$ y $\psi_2(x)\psi_4(x) = \psi_3(x)$ para todo $x \in D_2$. Por lo que podemos concluir que

$R(D_2) \cong \{a + bi + cj + dk | a, b, c, d \in \mathbb{Z}, i^2 = j^2 = k^2 = 1, ij = k, ik = j, jk = i\}$.

Ahora, si tenemos dos representaciones α-proyectivas de G, $\rho^i : G \to GL(V_i)$, $i \in \{1, 2\}$, notemos que

$$(\rho^1 \otimes \rho^2(g))(\rho^1 \otimes \rho^2(h)) = (\rho^1(g) \otimes \rho^2(g))(\rho^1(h) \otimes \rho_2(h))$$

$$= \rho^1(g)\rho^1(h) \otimes \rho^2(g)\rho^2(h) = \alpha(g,h)\rho^1(gh) \otimes \alpha(g,h)\rho^2(gh)$$
$$= \alpha^2(g,h)(\rho^1(gh) \otimes \rho^2(gh)).$$

Por lo tanto el producto tensorial de dos representaciones α-proyectivas no resulta una representación α-proyectiva, por lo que si consideramos a $Rep_\alpha(G)$ como el conjunto de clases de isomorfismo de representaciones α-proyectivas de G pero sí una reprsentación α^2-proyectiva, este conjunto no es un semigrupo con respecto a la operación de producto tensorial, pero si lo es con respecto a la suma directa. Así entonces, $R_\alpha(G) := K(Rep_\alpha(G))$ no es un anillo pero sí un grupo abeliano. El conjunto que sí resulta ser anillo es $\oplus_{n=0}^{\infty} R_{\alpha^n}(G)$.

4.2. Grupos de representaciones proyectivas.

En la Proposición 3.3.3 vimos que toda representación α-proyectiva de G $\rho : G \to GL(V)$ determina una representación lineal de G_α, $\rho' : G_\alpha \to GL(V)$ definida por
$$\rho'(x,g) = x\rho(g).$$

Ahora, si dos representaciones α-proyectivas $\rho_i : G \to GL(V_i)$ $i = 1,2$ son isomorfas, es decir, existe un isomorfismo $T : V_1 \to V_2$ tal que $T \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ T$ para todo $g \in G$, entonces

$$T \circ \rho_1'(x,g) = xT\rho_1(g) = x\rho_2(g)T = \rho_2'(x,g) \circ T.$$

Es decir, esta asignación respeta clases de isomorfismo. Por lo que existe una función $\overline{\psi} : R_\alpha(G) \to R(G_\alpha)$ definida por $\psi(\rho) = \rho'$, la cual respeta sumas directas de representaciones. Por la propiedad (b) de la definición 4.1.2. existe un homomorfismo $\overline{\psi} : R_\alpha(G) \to R(G_\alpha)$.

Proposición 4.2.1. $\overline{\psi} : R_\alpha(G) \to R(G_\alpha)$ es un monomorfismo.

Demostración. Sean $\rho_1 : G \to GL(V_1)$, $\rho_2 : G \to GL(V_2)$ dos representaciones α-proyectivas de G, tales que $\overline{\psi}[\rho_1,\rho_2] = \psi(\rho_1) - \psi(\rho_2) = [0,0]$, entonces existe un isomorfismo $T : V_1 \to V_2$ tal que

$$T \circ \psi(\rho_1)(x,g) = \psi(\rho_2)(x,g) \circ T \text{ para todo } (x,g) \in G_\alpha,$$

luego
$$T \circ \rho_1(g) = T \circ \psi(\rho_1)(1,g) = \psi(\rho_2)(1,g) \circ T = \rho_2(g) \circ T.$$

Por lo tanto $[\rho_1,\rho_2] = [0,0]$.

$\square$

Es decir hay una copia del grupo $R_\alpha(G)$ en el anillo $R(G_\alpha)$.

Por el último ejemplo del capítulo anterior podemos concluir que $R_\alpha(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \leq R(D_8)$.

La teoría de representaciones proyectivas de grupos finitos es bastante interesante, pero aquí nos detendremos en ésta, dándole paso al esbozo de cómo interacciona ésta con K-teoría equivariante.

Notas sobre representaciones del Doble de Drinfeld.

Para el propósito de esta tesis consideraremos la definición del Doble de Drinfeld dada en el artículo [**ACM03**] y sólo consideraremos su estructura de álgebra sobre $\mathbb{C}$.

Sea G un grupo finito, definimos el Doble de Drinfeld de G como $D(G) := \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}} (\mathbb{C}G)^*$, donde $(\mathbb{C}G)^*$ es el espacio dual visto como $\mathbb{C}$-espacio vectorial.

Notemos que $D(G)$ tiene una estructura de $\mathbb{C}G$-módulo y es isomorfo al producto tensorial de la representación regular con sigo misma. Por tanto podemos pensar a $D(G)$ como representación lineal de grado $|G|^2$.

Ahora sea $\omega \in H^3(G, \mathbb{C}^\times)$, definimos a $D^\omega(G)$ como el $\mathbb{C}$-espacio vectorial cuya base está dada por $\{\delta_g \otimes \overline{x}\}_{x,g\in G}$ y cuyo producto definido a continuación se extiende linealmente

$$(\delta_g \otimes x)(\delta_h \otimes y) = \theta_g(x,y)\delta_x\delta_{xhx^{-1}} \otimes \overline{xy} = \begin{cases} \theta_g(x,y)\delta_g\overline{xy} & \text{si } g = xhx^{-1} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Donde

$$\theta_g(x,y) = \frac{\omega(g,x,y)\omega(x,y,(xy)^{-1}gxy)}{\omega(x,x^{-1}gx,y)}.$$

El neutro multiplicativo está dado por $1_{D^\omega(G)} = \sum_{g\in G} \delta_g\overline{1}$.

Las representaciones de $D^\omega(G)$ (o equivalentemente los $D^\omega(G)$-módulos), así como su grupo de representaciones son muy estudiadas gracias a la relación que hay entre éstas y la K-teoría G equivariante torcida de G, es decir, se cumple el siguiente teorema.

Teorema El grupo de representaciones del doble de Drinfeld-torcido es isomorfo a la teoría K-torcida de G.

$$R(D^\omega(G)) \cong^{\tau(\omega)} K_G(G^c).$$

[**Wil08**]

Además las representaciones de $D^\omega(G)$ tienen asociadas unas funciones llamadas caracteres elípticos, las cuales cumplen la función de los caracteres para las representaciones lineales y de los α-caracteres para las representaciones α-proyectivas.

Este es un ejemplo de cómo las representaciones de grupos son un tema con mucha interacción con grandes ramas de las matemáticas que se siguen desarrollando en nuestros días.

Bibliografía

[ACM03] D. Altschuler, A. Coste and J. M. Maillard, *Representation Theory of Twisted Group Double*, available as **arXiv:hep-th/0309257** (2003).

[Bro12] Kenneth S. Brown, *Cohomology of groups*, Vol. 87. Springer Science & Business Media, 2012.

[Bro07] Kenneth S. Brown, *Lectures on the cohomology of groups*, *Cohomology of groups and algebraic K-theory* no.12 (2007), 131-166.

[DW90] Robbert Dijkgraaf and Edward Witten, *Topological gauge theories and group cohomology*, *Communications in Mathematical Physics* 129.2 (1990), 393-429.

[Dwy080] Christopher Dwyer, *Twisted equivariant K-theory for proper actions of discrete groups*, *K-theory* 38.2 (2008), 95-111.

[Kar85] Gregory Karpilovsky, *Projective representations of finite groups*, Vol 94, Marcel Dekker Inc, 1985.

[Ser12] Jean-Pierre Serre, *Linear representations of finite groups*, Vol 42, Springer Science & Business Media, 2012.

[Vil03] Gabriel Daniel Villa Salvador, *Introducción a la teoría de las funciones algebraicas*, Fondo de Cultura Económica, 2003.

[Wil08] Simon Willerton and col., *The twisted Drinfeld double of a finite group via gerbes and finite groupoids*, *Algebraic & Geometric Topology*, 8.3 (2008), 1419-1457.

[Wit96] S. J. Witherspoon, *The representation ring of the twisted quantum double of a finite group*, *Canadian Journal of Mathematics* 48.6 (1996), 1324-1338.

[Zal01] Felipe Zaldivar, *Cohomología de Galois de campos locales*, Vol. 17, Sociedad Matemática Mexicana, 2001.

[Zal06] Felipe Zaldivar, *Introducción a la teoría de grupos*, Vol. 32, Reverte, 2006.