



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Aspectos fundamentales de la teoría de Morse

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

Hector Gonzalez Alvarado

TUTORA

Laura Ortiz Bobadilla





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mis padres, Ruth y Miguel Ángel.

Introducción.

La teoría de Morse puede definirse como el estudio de las relaciones entre las funciones definidas en una variedad y la forma de ésta. En particular, se analizan los puntos críticos no degenerados de funciones definidas en variedades. De la información obtenida de éstos, es posible deducir la forma (topología) de las variedades.

En el texto encontraremos tres capítulos en los que se desarrolla la teoría de Morse. En el primer capítulo únicamente presentaremos los objetos de trabajo, es decir, las variedades, las cuales tienen una construcción básicamente pensada a partir de subconjuntos que localmente son iguales (bajo homeomorfismo) a abiertos de un espacio euclidiano. Se definen también las transformaciones entre variedades y los campos vectoriales definidos en éstas. Para ello, recordamos la noción de espacio tangente a una variedad. Gran parte de los conceptos y resultados fueron desarrollados a partir de [7] y [8].

El segundo capítulo inicia con la definición de función de Morse. Se demuestra el conocido lema de Morse; éste nos dice cómo se ve la función en vecindades de un punto crítico de una variedad. La descripción local está dada por medio de las cartas coordinadas. Posteriormente, definimos la signatura de un punto y probamos que ésta es un invariante bajo cambio de coordenadas. Esta signatura distinguirá entre los puntos críticos que son máximos, mínimos o de tipo silla. Después se prueba la existencia de las funciones de Morse, la idea de la demostración se basa en que cerca de una función suave (en el espacio de los 2-jet), siempre puede encontrarse una función de Morse.

En este mismo capítulo, presentamos un campo vectorial de tipo gradiente y demostramos su existencia en cualquier variedad. Es posible hacer la descomposición en asas de una variedad diferenciable M mediante una función de Morse y un campo vectorial tipo gradiente definidos en ella. El número de asas que se requieren y sus respectivos índices, son determinados por la función de Morse, las transformaciones de pegado de las distintas asas están determinadas por el campo vectorial gradiente. Con todo ello es posible dar una descripción simple de las variedades. Finalizamos el capítulo con algunos ejemplos en los que se da la descripción del atlas, una función de Morse y su identificación.

El tercer y último capítulo está dedicado enteramente a la homología. Damos una introducción definiendo en un inicio los complejos celulares. Éstos son,

en algunos casos, más simples para trabajar que los complejos simpliciales habitualmente usados al definir homología (simplicial). Definimos la homología de un complejo. Al rango de cada q grupo de homología se le conoce como el q -número de Betti. Se sabe que la suma alternada de estos números es la característica de Euler. Demostramos una identificación entre los complejos celulares y las asas de una variedad; con ello probamos la desigualdad de Morse. Ésta proporciona una cota superior para los números de Betti, dada por la cantidad de puntos críticos de índice q (misma signatura que el rango de su homología). La desigualdad de Morse, da como consecuencia, una cota a la característica de Euler.

Índice general

1. Conceptos básicos.	9
1.1. Variedades y sus transformaciones.	9
1.1.1. Variedad diferenciable.	9
1.1.2. Transformaciones entre variedades.	11
1.2. Espacio tangente y campos vectoriales.	16
2. Teoría de Morse.	27
2.1. Funciones de Morse.	27
2.2. Caracterización de variedades	50
2.2.1. Descripción de las variedades como cuerpos con asas.	63
3. Teoría de Morse y homología.	89
3.1. Grupos de Homología	89
3.2. Desigualdad de Morse	96

Capítulo 1

Conceptos básicos.

1.1. Variedades y sus transformaciones.

El concepto de variedad diferenciable es básicamente el de un objeto geométrico formado por partes, esto quiere decir que tendremos objetos que son localmente parecidos a abiertos simplemente conexos de un espacio euclidiano (el espacio euclidiano modelo para nosotros será \mathbb{R}^m , o sea la recta, el plano, el espacio, etc...), que iremos identificando de una manera "suave", para así dar la descripción completa de una estructura para dicho objeto.

1.1.1. Variedad diferenciable.

Sea M un espacio topológico, daremos a éste la siguiente estructura:

- (i) Sea $\phi : W \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^m$ una aplicación biyectiva continua con inversa continua (homeomorfismo), donde U es un abierto en \mathbb{R}^m y W es un abierto en M . Al par ordenado (W, ϕ) le decimos carta de M .

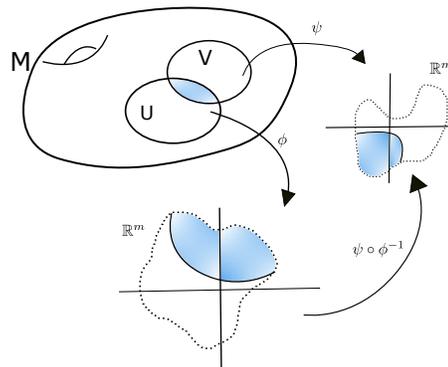


Figura 1.1: Variedad

- (ii) Sean $(W, \phi), (V, \psi)$ cartas tales que $W \cap V \neq \emptyset$, entonces $\phi \circ \psi^{-1} : \psi(W \cap V) \rightarrow \phi(W \cap V)$ y $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(W \cap V) \rightarrow \psi(W \cap V)$ son los cambios de cartas, y éstos como en la figura 1.1, podemos ver que van de un dominio en \mathbb{R}^m a \mathbb{R}^m . Decimos que dos cartas son compatibles si la intersección de los dominios es vacía ó sus cambios de cartas son C^∞ .
- (iii) Dada una familia $\mathfrak{A} = \{(W_\alpha, \phi_\alpha) \mid \alpha \in I, (W_\alpha, \phi_\alpha) \text{ es carta de } M\}$. Decimos que \mathfrak{A} es un atlas para M si:
- Los elementos de \mathfrak{A} son compatibles.
 - Si $M = \bigcup_{\alpha \in I} W_\alpha$.
- (iv) Dados $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ atlas de M , decimos que son equivalentes si $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ es un atlas; es decir, que todo elemento de \mathfrak{A} es compatible con \mathfrak{B} y viceversa. Se mostrará después que ésta es una relación de equivalencia.
- (v) Una estructura diferenciable será un atlas \mathfrak{A} máximo en la relación antes definida para un atlas dado. Aquí podemos ver que ya dado un atlas al unirle todas las cartas que son le compatibles, es decir, el conjunto dado por $\mathfrak{B} = \{(U, \phi) \mid (U, \phi) \sim (W, \psi), \text{ tal que } (W, \psi) \in \mathfrak{A}\}$ es una estructura diferenciable para M .

Definición 1.1. *Definimos una variedad diferenciable como el par ordenado (M, \mathfrak{A}) , donde M es un espacio topológico Hausdorff, segundo numerable, y \mathfrak{A} es una estructura diferenciable para M .*

Observación 1.

- a) Si toda transformación de una carta en una variedad es homeomorfismo de M en un abierto de dimensión m , decimos que M es de dimensión m ó que M es una m -variedad.
- b) La relación en (iv) es de equivalencia. En efecto, es claro que es reflexiva y simétrica pues $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{A} = \mathfrak{A}$ y $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B} = \mathfrak{B} \cup \mathfrak{A}$. Veamos que es transitiva. Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ y \mathfrak{D} tres atlas, tales que \mathfrak{A} es equivalente a \mathfrak{B} y \mathfrak{B} a \mathfrak{D} . Queremos ver que \mathfrak{A} es equivalente a \mathfrak{D} , es decir, toda carta de \mathfrak{A} es equivalente a toda carta de \mathfrak{D} . Consideremos dos cartas $(W, \phi) \in \mathfrak{A}$ y $(V, \psi) \in \mathfrak{D}$. Hay que demostrar que para todo punto en $W \cap V$ las composiciones $\phi \circ \psi^{-1}$ y $\psi \circ \phi^{-1}$ son diferenciables. Sea $p \in W \cap V$, entonces hay un carta $(U, \varphi) \in \mathfrak{B}$ que es compatible con ϕ y ψ . Notemos que $\phi \circ \psi^{-1} = (\phi \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \psi^{-1})$ y $\psi \circ \phi^{-1} = (\psi \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \phi^{-1})$, entonces las composiciones entre paréntesis son diferenciables por ser compatibles, por lo tanto $\phi \circ \psi^{-1}$ y $\psi \circ \phi^{-1}$ son diferenciables por ser composición de transformaciones diferenciables, entonces se cumple lo que queríamos demostrar; como el punto en la intersección es arbitrario, entonces son compatibles. Así la relación es de equivalencia.

También podemos hablar de una **variedad con frontera**, de la misma manera en que se habla de variedad, sólo que el espacio modelo de una variedad con frontera de dimensión m es $H^m = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_m \geq 0\}$ y definimos la frontera de tal variedad como los elementos que con su carta caen en la frontera de H^m . Si la frontera de una variedad es vacía decimos que ésta es simplemente una variedad en el sentido de la definición 1.1. Será poco usado este concepto por eso es que no se profundizará en él.

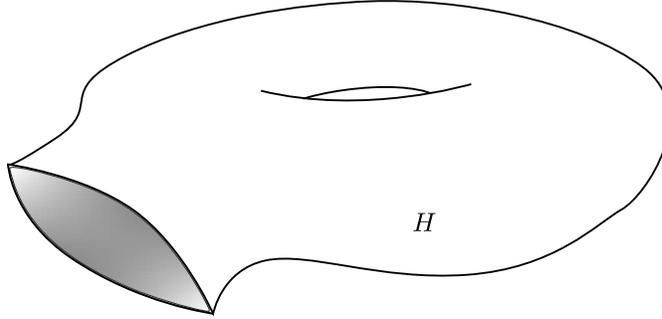


Figura 1.2: Variedad con frontera.

1.1.2. Transformaciones entre variedades.

Como en casi todas las ramas de las matemáticas se habla de los objetos de estudio y de una manera de interactuar entre ellos. En el caso de las variedades diferenciables hablaremos de las transformaciones (o aplicaciones) diferenciables, que ayudarán a establecer relaciones entre las variedades y comprender qué características topológicas, diferenciables o analíticas comparten. Con ellas será posible clasificarlas y establecer para cada clase el representante más sencillo posible.

Para definir las aplicaciones diferenciables nos basaremos en la estructura de la variedad, es decir, dado que las variedades son localmente como espacios euclidianos, podremos tratar estas transformaciones como una aplicación de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m . Si tomamos un punto en el dominio y su carta, después vemos el punto imagen y su respectiva carta en el contradominio, hacemos la composición de las cartas y la transformación debidamente, y ésta será una nueva transformación que irá de un espacio euclidiano en otro. Lo anterior facilita el análisis ya que ahora las asociamos a funciones de \mathbb{R}^m en \mathbb{R}^n conocidas por cálculo diferencial.

Definición 1.2. Sean M una m -variedad y N una n -variedad, ambas diferenciables, $f : M \rightarrow N$ una transformación, $p \in M$. f es una transformación k -diferenciable (o \mathcal{C}^k) en p , si para toda carta (U, ϕ) de p y carta (V, ψ) de $f(p)$ en N , la transformación $\psi^{-1} \circ f \circ \phi : \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^n$ es k -diferenciable en $\phi(p)$ (o \mathcal{C}^k) (ver figura 1.3)

Diremos que f es k -diferenciable (\mathcal{C}^k) en $A \subseteq M$, si f es k -diferenciable (\mathcal{C}^k) en todo punto de A .

Para asociar estructuras diferenciables de una variedad a otra hablaremos de los difeomorfismos. Éstos nos permitirán establecer cuándo las variedades mantienen un gran parentesco en forma y suavidad (topología y estructura diferenciable).

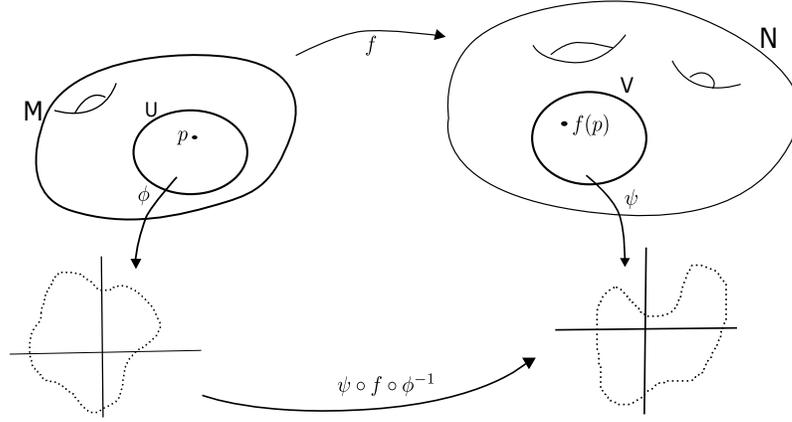


Figura 1.3: Transformación diferenciable

Definición 1.3. Sea $f : M \rightarrow N$ una transformación entre M y N variedades diferenciables; decimos que es f un difeomorfismo si es biyectiva, diferenciable y su inversa es diferenciable.

Definición 1.4. Dos variedades son difeomorfas si existe un difeomorfismo entre ellas, en cuyo caso denotaremos $M \approx N$.

Consideremos M una variedad diferenciable de dimensión m , $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ función ¹ y (U, ϕ) carta de M , observemos que ϕ va de U en \mathbb{R}^m y es biyectiva, entonces ϕ^{-1} va de $\phi(U) \subseteq \mathbb{R}^m$ en U . Si componemos con f obtenemos la función $f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, por lo tanto podemos pensar en las derivadas parciales de esta función; si $i \in \{1, \dots, m\}$ tenemos

$$\frac{\partial f \circ \phi^{-1}}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_m).$$

Ahora bien, si $(x_1, \dots, x_m) \in \phi(U)$, entonces existe un único punto $q \in U$ tal que $\phi(q) = (x_1, \dots, x_m)$. Si sustituimos en la derivada parcial tenemos que

$$\frac{\partial f \circ \phi^{-1}}{\partial x_i}(\phi(q)).$$

Así, la derivada parcial queda asociada a un punto en la variedad.

¹Una función es una transformación que tiene como contradominio un campo (en nuestro caso \mathbb{R})

Definición 1.5. Sea M una m -variedad diferenciable, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ función, $p \in M$ y (U, ϕ) carta de p en M , entonces definimos la i -ésima derivada parcial de f en p , dada por ϕ como

$$\frac{\partial f}{\partial \phi_i}(p) := \frac{\partial f \circ \phi^{-1}}{\partial x_i}(\phi(p)),$$

para toda $i \in \{1, \dots, m\}$.

Para la teoría de Morse los puntos que proporcionan más información son aquellos donde las derivadas parciales son cero, a éstos se les conoce como puntos críticos. Estos puntos nos servirán para identificar el tipo topológico de la variedad.

Definición 1.6. Sea M una m -variedad diferenciable, $p \in M$ y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en p . Decimos que p es punto crítico de f en (U, ϕ) si $\frac{\partial f}{\partial \phi_i}(p) = 0$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Al valor que toma f en p , $f(p) = c \in \mathbb{R}$, se le llama valor crítico.

Es importante observar que esta definición en variedades es invariante bajo cambios de cartas.

Proposición 1.7. Sean $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función, $p \in M$ un punto crítico de f en (W, ϕ) . Para cualquier (V, ψ) tal que $p \in V$ tenemos que $\frac{\partial f}{\partial \psi_i}(p) = 0$ para toda $i \in \{1, \dots, n\}$.

Demostración. Consideremos la derivada parcial para la carta (V, ψ) , para ello, antes observemos que $f \circ \psi^{-1} = f \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \psi^{-1}$, luego por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f \circ \psi^{-1}}{\partial x_i}(\psi(p)) &= \frac{\partial f \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \psi^{-1}}{\partial x_i}(\psi(p)) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f \circ \phi^{-1}}{\partial y_j}(\phi(\psi(\psi^{-1}(p)))) \cdot \frac{\partial \phi_j \circ \psi^{-1}}{\partial x_i}(\psi(p)). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Recordando que p es punto crítico de (U, ϕ) tenemos

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f \circ \phi^{-1}}{\partial y_j}(\phi(p)) \cdot \frac{\partial \phi_j \circ \psi^{-1}}{\partial x_i}(\psi(p)) = \sum_{j=1}^n 0 \cdot \frac{\partial \phi_j \circ \psi^{-1}}{\partial x_i}(\psi(p)) = 0.$$

Por consiguiente p es punto crítico de f en la carta (V, ψ) . \square

De esta manera, ser punto crítico está bien definido en una función de una variedad diferenciable.

Recordando la teoría de puntos críticos en funciones de \mathbb{R}^m en \mathbb{R} , el Hessiano identifica si éstos son degenerados o no degenerados. En el caso de funciones de variedades también usamos la matriz Hessiana para clasificar los puntos críticos, a continuación definiremos la matriz Hessiana usando una carta.

Definición 1.8. Sean $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función, $p \in M$ punto crítico de f , y (W, ϕ) una carta de p en M . Definimos la matriz Hessiana (o el Hessiano) de f como:

$$H_f^\phi(p) := \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi_1 \partial \phi_1}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial \phi_m \partial \phi_1}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \phi_1 \partial \phi_m}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial \phi_m \partial \phi_m}(p) \end{bmatrix}.$$

Si el determinante del Hessiano en p es cero decimos que p es un punto crítico degenerado, en caso contrario el punto crítico es no degenerado.

Proposición 1.9. La propiedad de ser punto crítico no degenerado es invariante bajo cambios de cartas. Además, $H_f^\psi = (J_\psi^\phi(p))^T \cdot H_f^\phi(p) \cdot J_\psi^\phi(p)$, donde $J_\psi^\phi(p)$ es la matriz derivada del cambio de cartas $(\phi \circ \psi^{-1}) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ en el punto $\psi(p)$.

Demostración. Si la dimensión de M es m , las transformaciones ϕ y ψ se escriben como $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_m)$ y $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_m)$. Consideremos los índices i y k , de la ecuación (1.1) la derivada parcial respecto al cambio de cartas es

$$\frac{\partial f}{\partial \psi_i}(p) = \frac{\partial(f \circ \psi^{-1})}{\partial x_i}(\psi(p)) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x_j}(\phi(p)) \cdot \frac{\partial(\phi_j \circ \psi^{-1})}{\partial x_i}(\psi(p)). \quad (1.2)$$

La definición de la segunda derivada parcial es

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \psi_k \partial \psi_i}(p) = \frac{\partial^2(f \circ \psi^{-1})}{\partial x_k \partial x_i}(\psi(p)) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial(f \circ \psi^{-1})}{\partial x_i} \right) (\psi(p)). \quad (1.3)$$

Sustituimos (1.2) en (1.3)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial \psi_k \partial \psi_i}(p) &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial(f \circ \psi^{-1})}{\partial x_i} \right) (\psi(p)) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x_j}(\phi(p)) \cdot \frac{\partial(\phi_j \circ \psi^{-1})}{\partial x_i}(\psi(p)) \right). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Como la derivada parcial respecto a x_k es lineal, entonces

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x_j}(\phi(p)) \frac{\partial(\phi_j \circ \psi^{-1})}{\partial x_i}(\psi(p)) \right) \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x_j}(\phi(p)) \frac{\partial(\phi_j \circ \psi^{-1})}{\partial x_i}(\psi(p)) \right). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Con la regla del producto de la derivada parcial, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x_j}(\phi(p)) \frac{\partial(\phi_j \circ \psi^{-1})}{\partial x_i}(\psi(p)) \right) &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x_j}(\phi(p)) \right) \frac{\partial(\phi_j \circ \psi^{-1})}{\partial x_i}(\psi(p)) \\ &\quad + \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x_j}(\phi(p)) \frac{\partial^2(\phi_j \circ \psi^{-1})}{\partial x_k \partial x_i}(\psi(p)) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Notemos que $(f \circ \phi^{-1} \circ \phi) = (f \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \psi^{-1} \circ \psi)$, aplicando esto a la derivada de $(f \circ \phi^{-1})$, tenemos que

$$\frac{\partial f \circ \phi^{-1}}{\partial x_j}(\phi(p)) = \frac{\partial(f \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \psi^{-1})}{\partial x_j}(\psi(p))$$

A ésta le aplicamos la derivada parcial respecto a x_k y usamos regla de la cadena

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x_j}(\phi(p)) \right) &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial(f \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \psi^{-1})}{\partial x_j}(\psi(p)) \right) \\ &= \sum_{l=1}^m \frac{\partial^2(f \circ \phi^{-1})}{\partial x_l \partial x_j}(\phi(p)) \frac{\partial(\phi_l \circ \psi^{-1})}{\partial x_i}(\psi(p)) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Sustituimos (1.7) en (1.6) y tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x_j}(\phi(p)) \frac{\partial(\phi_j \circ \psi^{-1})}{\partial x_i}(\psi(p)) \right) &= \left(\sum_{l=1}^m \frac{\partial^2(f \circ \phi^{-1})}{\partial x_l \partial x_j}(\phi(p)) \frac{\partial(\phi_l \circ \psi^{-1})}{\partial x_i}(\psi(p)) \right) \\ &\quad \frac{\partial(\phi_j \circ \psi^{-1})}{\partial x_i}(\psi(p)) + \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x_j}(\phi(p)) \frac{\partial^2(\phi_j \circ \psi^{-1})}{\partial x_k \partial x_i}(\psi(p)) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Por último sustituimos (1.8) en la suma (1.5), después en (1.4), entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial \psi_k \partial \psi_i}(p) &= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{l=1}^m \frac{\partial^2(f \circ \phi^{-1})}{\partial x_l \partial x_j}(\phi(p)) \cdot \frac{\partial(\phi_l \circ \psi^{-1})}{\partial x_k}(\psi(p)) \right) \cdot \frac{\partial(\phi_j \circ \psi^{-1})}{\partial x_i}(\psi(p)) \\ &\quad + \sum_{j=1}^m \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x_j}(\phi(p)) \cdot \frac{\partial^2(\phi_j \circ \psi^{-1})}{\partial x_k \partial x_i}(\psi(p)) \end{aligned}$$

Si p es un punto crítico, entonces $\frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x_j}(\phi(p)) = 0$, para toda j , entonces la suma se reduce a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \psi_k \partial \psi_i}(p) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{l=1}^m \frac{\partial^2(f \circ \phi^{-1})}{\partial x_l \partial x_j}(\phi(p)) \cdot \frac{\partial(\phi_l \circ \psi^{-1})}{\partial x_k}(\psi(p)) \right) \cdot \frac{\partial(\phi_j \circ \psi^{-1})}{\partial x_i}(\psi(p))$$

Por otro lado, observemos qué pasa cuando multiplicamos el i -ésimo renglón de la matriz $J_\psi^\phi(p)$ por la j -ésima columna de H_f^ϕ :

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial(\phi_1 \circ \psi^{-1})}{\partial x_i}(p), \dots, \frac{\partial(\phi_m \circ \psi^{-1})}{\partial x_i}(p) \right] \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial^2(f \circ \phi^{-1})}{\partial x_j \partial x_1}(p) \\ \vdots \\ \frac{\partial^2(f \circ \phi^{-1})}{\partial x_j \partial x_m}(p) \end{bmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{\partial(\phi_k \circ \psi^{-1})}{\partial x_i}(p) \cdot \frac{\partial^2(f \circ \phi^{-1})}{\partial x_j \partial x_k}(p) \end{aligned}$$

Así, todo el i -ésimo renglón de la multiplicación de estas dos matrices se expresa de la forma

$$\left[\sum_{k=1}^m \frac{\partial(\phi_k \circ \psi^{-1})}{\partial x_i}(p) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k}(p), \dots, \sum_{k=1}^m \frac{\partial(\phi_k \circ \psi^{-1})}{\partial x_i}(p) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_k}(p) \right]$$

Entonces, multiplicar ese i -ésimo renglón por la j -ésima columna de $J_\psi^\phi(p)$ es

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{k=1}^m \frac{\partial(\phi_k \circ \psi^{-1})}{\partial x_i}(p) \cdot \frac{\partial^2(f \circ \phi^{-1})}{\partial x_1 \partial x_k}(p), \dots, \sum_{k=1}^m \frac{\partial(\phi_k \circ \psi^{-1})}{\partial x_i}(p) \cdot \frac{\partial^2(f \circ \phi^{-1})}{\partial x_m \partial x_k}(p) \right] \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial(\phi_1 \circ \psi^{-1})}{\partial x_j}(p) \\ \vdots \\ \frac{\partial(\phi_n \circ \psi^{-1})}{\partial x_j}(p) \end{bmatrix} \\ &= \sum_{l=1}^m \left(\sum_{k=1}^m \frac{\partial^2(f \circ \phi^{-1})}{\partial x_l \partial x_k}(\phi(p)) \cdot \frac{\partial(\phi_k \circ \psi^{-1})}{\partial x_i}(\psi(p)) \right) \cdot \frac{\partial(\phi_l \circ \psi^{-1})}{\partial x_j}(\psi(p)) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial \psi_k \partial \psi_i}(p) \end{aligned}$$

De este modo ambos coeficientes en las matrices son el mismo, y tenemos que el determinante abre multiplicaciones, entonces $\det(H_f^\psi(p)) = \det(J_\psi^\phi(p))^T \cdot \det(H_f^\phi(p)) \cdot \det(J_\psi^\phi(p))$. Por consiguiente, ser punto crítico no-degenerado es invariante bajo cambio de cartas. \square

Así tenemos una relación del Hessiano en un punto, con distintas cartas. Por lo que, denotaremos al Hessiano como $H_f(p)$, sin importar en qué cartas estemos trabajando (ya que podemos elegir la carta del punto, donde el Hessiano sea mas simple).

1.2. Espacio tangente y campos vectoriales.

Daremos una noción muy importante de la topología diferencial que es la de espacio tangente a una variedad. Tratándose de una variedad de dimensión 2, es decir, una superficie, por ejemplo; \mathbb{R}^2 o una vecindad contenida en \mathbb{R}^2 . Para

estos, el espacio tangente a un punto se puede ver geoméricamente como un plano que toca de forma tangente a la variedad en el punto. Para el caso de dimensión m , la noción geométrica es análoga.

Daremos una definición algebraica del espacio tangente en un punto, puesto que nos da un estudio y forma de trabajo conveniente, después definiremos las curvas en una variedad, y cómo trabajar con ellas para la teoría de Morse.

Empezaremos por decir qué es una derivación. Esta noción será parte de la construcción de los espacios tangentes.

Definición 1.10. Sean M una variedad diferenciable, denotamos al conjunto de funciones infinitamente diferenciales como $\mathfrak{C}(M) := \{f : M \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es función } \mathcal{C}^\infty\}$ y $p \in M$. Definimos una derivación en p como una función $\partial : \mathfrak{C}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, dadas $f, g \in \mathfrak{C}(M)$ y $a \in \mathbb{R}$, v cumple:

- I) $\partial(f + g) = \partial(f) + \partial(g)$
- II) $\partial(af) = a \cdot \partial(f)$
- III) $\partial(f \cdot g) = g(p) \cdot \partial(f) + f(p) \cdot \partial(g)$

A las primeras dos se les conoce como condiciones de linealidad y la última es conocida como la propiedad de Leibniz.

Definición 1.11. (Espacio tangente) Definimos el espacio tangente a M en $p \in M$ como

$$T_p(M) := \{\partial \mid \partial \text{ es derivación en } p\}.$$

El espacio tangente en un punto es un espacio vectorial de dimensión finita, sobre el campo \mathbb{R} con las siguientes operaciones:

- $(\partial + \partial')(f) := \partial(f) + \partial'(f)$.
- $(a \cdot \partial)(f) := a \cdot \partial(f)$ con $a \in \mathbb{R}$.

De modo que este espacio tiene una base. Para darla explícitamente haremos las siguientes construcciones.

Sean M una variedad diferenciable y $p \in M$, tomamos una carta (U, ϕ) , y $f \in \mathfrak{C}(M)$. Recordando cómo está definida una derivada parcial de la función podemos definir la siguiente transformación

$$\left. \frac{\partial}{\partial \phi_i} \right|_p (f) := \frac{\partial f}{\partial \phi_i}(p).$$

Es claro que de esta manera la derivada parcial de una función en un punto es una derivación, por lo tanto pertenece al espacio tangente a M en p .

También definimos las funciones componentes de la carta con $i = 1, \dots, m$, $\phi_i(p) = \pi_i \circ \phi(p)$, donde $\pi_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\pi_i(x_1, \dots, x_m) = x_i$.

A continuación daremos dos lemas auxiliares.

Lema 1.11.1. (*Existencia de funciones tope*) Sean $U \subseteq M$ abierto, y $K \subseteq U$ compacto en M . Entonces, existe $\beta : M \rightarrow \mathbb{R}$ función \mathcal{C}^∞ , V abierto y L compacto tales que:

1. $0 \leq \beta(p) \leq 1$, para toda $p \in M$.
2. $\beta(p) = 1, \forall p \in V, K \subseteq V$.
3. $\beta(p) = 0, \forall p \in \text{int}(M \setminus L)$, donde $V \subseteq L \subseteq U$

A β se le conoce como función tope o pastel, la figura 1.4 da una idea de lo que es una función pastel.

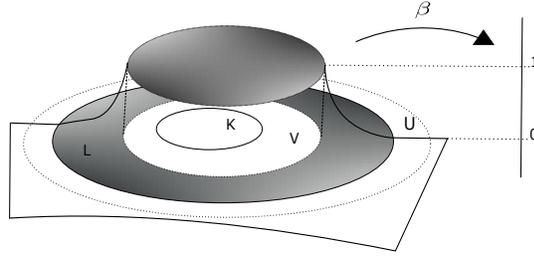


Figura 1.4: Función pastel o tope.

La demostración del lema 1.11.1 puede ser encontrada en [5].

Lema 1.11.2. Sean $\partial \in T_p(M)$, $f, g \in \mathcal{C}(M)$ y (U, ϕ) carta de p en M :

1. Si $f = g$ en U , entonces $\partial(f) = \partial(g)$.
2. Si f es constante en U , entonces $\partial(f) = 0$.

Demostración. Para probar 1., tomamos la función $F = f - g$, así $F(q) = f(q) - g(q) = 0$ en U .

Para poder aplicar una derivación de $T_p M$ necesitamos una función que nos ayude a evaluar F en los puntos de U y en $M \setminus U$. Por lo tanto, usaremos el lema 1.11.1 para encontrar tal función. Como p es un punto interior de $\phi(U)$, ϕ es un difeomorfismo y la cerradura de una vecindad es compacta en \mathbb{R}^m , tenemos que K es compacto y $K \subseteq U$. Por el lema 1.11.1 existe $\beta : M \rightarrow \mathbb{R}$ función tope; así $\beta(p) = 0$ para toda $q \in \text{int}(M \setminus U)$. Lo que está sucediendo en esta construcción puede ser visto en la figura 1.5, donde las partes sombreadas son las que va a caer al cero con F y β respectivamente.

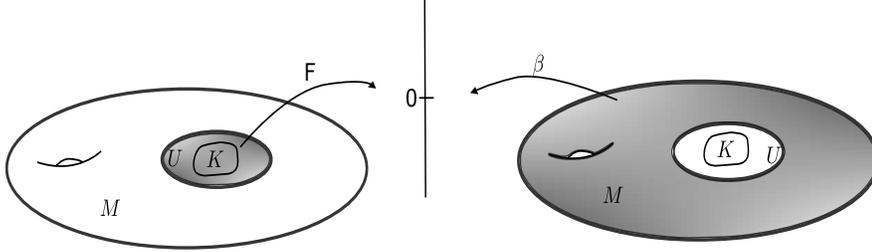


Figura 1.5

Ahora podemos aplicar una derivación del espacio $T_p M$ a $(F \cdot \beta)$, recordando la propiedad de Leibniz

$$\partial(F \cdot \beta) = \beta(p)\partial(F) + F(p)\partial(\beta),$$

como $F(q) = 0$ para todo $q \in U$ y $\beta(q) = 0$ en el complemento de U , se sigue que $(F \cdot \beta)(q) = 0$ para todo $q \in M$, entonces

$$0 = \partial(0) = \partial(F \cdot \beta) = \beta(q)\partial(F) + 0 = \beta(q)\partial(F).$$

Pero $\beta(p) \neq 0$ en U , por lo que $\partial(F) = 0$. Entonces, $\partial(f - g) = 0$ y así $\partial(f) = \partial(g)$, lo que concluye la prueba del primer inciso.

Para la prueba de 2), observemos que la función constante uno en U , es decir, $1 : \mathfrak{C}(U) \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $1(f) = 1$, puede ser extendida a la función constante uno en todo $\mathfrak{C}(M)$. Por el lema 1.11.1, aplicando de nuevo la propiedad de Leibniz de v una derivación, al producto $1 \cdot 1$ tenemos

$$\partial(1) = \partial(1 \cdot 1) = 1 \cdot \partial(1) + 1 \cdot \partial(1) = \partial(1) + \partial(1).$$

Por lo tanto, restando uno de los lados $d(1) = 0$. Si $c \in \mathbb{R}$, entonces la valuación $\partial(c) = c \cdot \partial(1) = c \cdot 0 = 0$, lo que demuestra el segundo inciso. \square

Lema 1.11.3. Si $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y $\bar{0} \in \mathbb{R}^m$, entonces existen $F_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ con $i = 1, \dots, m$, tales que $F = f(\bar{0}) + \sum_{i=1}^m x_i \cdot F_i$.

Demostración. Sea $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ dada por $\alpha(t) = (tx_1, \dots, tx_m)$, entonces a la transformación $(F \circ \alpha)(t) = F(tx_1, \dots, tx_m)$ le calculamos la derivada respecto a t . Para cada punto (x_1, \dots, x_m) , con la regla de la cadena tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t}(tx_1, \dots, tx_m) &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial F}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_m) \cdot \frac{\partial (tx_i)}{\partial t} \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial F}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_m) \cdot x_i. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Integrando la igualdad anterior, por el teorema fundamental del cálculo se tiene que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial t}(tx_1, \dots, tx_m) dt &= F(1 \cdot x_1, \dots, 1 \cdot x_m) - F(0, \dots, 0) \\ &= F(x_1, \dots, x_m) - F(0, \dots, 0) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Sustituimos (1.10) en (1.9) con la integral respectiva y aplicamos la linealidad de la integral

$$\begin{aligned} F(x_1, \dots, x_m) &= \int_0^1 \sum_{i=1}^m \frac{\partial F}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_m) \cdot x_i dt \\ &= \sum_{i=1}^m \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_m) \cdot x_i dt \end{aligned} \quad (1.11)$$

Ya que x_i y t son variables independientes para toda i , entonces podemos sacar x_i de la integral

$$\sum_{i=1}^m \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_m) \cdot x_i dt = \sum_{i=1}^m x_i \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_m) dt. \quad (1.12)$$

Definimos $F_i(x_1, \dots, x_m) = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_m) dt$, entonces de (1.11) y (1.12) tenemos $F(x_1, \dots, x_m) - F(0, \dots, 0) = \sum_{i=1}^m x_i F_i(x_1, \dots, x_m)$, y así $F(x_1, \dots, x_m) = F(0, \dots, 0) + \sum_{i=1}^m x_i F_i(x_1, \dots, x_m)$. \square

Ahora con todo esto, podemos dar explícitamente una base para el espacio tangente.

Teorema 1.12. *El conjunto $W = \left\{ \frac{\partial}{\partial \phi_i} \Big|_p \mid i = 1, \dots, m \right\}$ es base de $T_p(M)$, de hecho si $\partial \in T_p(M)$, entonces*

$$\partial = \sum_{i=1}^m \partial(\phi_i) \frac{\partial}{\partial \phi_i} \Big|_p.$$

Demostración. Sea (U, ϕ) carta de p en M y $f \in \mathfrak{C}(M)$. Consideremos la función $F = f \circ \phi^{-1}$, aplicamos a F el lema 1.11.3, pero con $\phi^{-1}(0, \dots, 0) = p$, entonces $(f \circ \phi^{-1})(x_1, \dots, x_m) = f(p) + \sum_{i=1}^m \phi_i(q) F_i(\phi^{-1}(x_1, \dots, x_m))$ para todo $(x_1, \dots, x_m) \in \phi(U)$. Si $f_i = (F_i \circ \phi^{-1})$, tenemos que f se ve localmente como

$$f = f(p) + \sum_{i=1}^m \phi_i \cdot f_i.$$

Consideremos una derivación d del espacio $T_p M$, como estas dos funciones son iguales en el abierto U , al aplicar la derivación la igualdad se conserva. Por el

lema 1.11.2, como $f(p)$ es constante, entonces $\partial(f(p)) = 0$. Por la linealidad y la propiedad de Leibniz de v tenemos que

$$\begin{aligned}\partial(f) &= \partial\left(f(p) + \sum_{i=1}^m \phi_i f_i\right) \\ &= \partial(f(p)) + \partial\left(\sum_{i=1}^m \phi_i f_i\right) \\ &= 0 + \sum_{i=1}^m \partial(\phi_i f_i) \\ &= \sum_{i=1}^m F_i(p) \partial(\phi_i) + \phi_i(p) \partial(f_i).\end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad $\phi(p) = \bar{0} \in \mathbb{R}^m$. Observando en la construcción del teorema 2.3 que $F_i(p) = \frac{\partial f}{\partial \phi_i}(p)$, entonces

$$\partial(f) = \sum_{i=1}^m d(\phi_i) \frac{\partial f}{\partial \phi_i}(p).$$

Lo que nos dice que el conjunto W genera a $T_p(M)$.

Ahora demostraremos que W es un conjunto linealmente independiente. Sean $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ tales que

$$0 = \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial}{\partial \phi_i} \Big|_p.$$

Consideremos un subíndice $j \in \{1, \dots, m\}$, y recordemos que la suma es una transformación del espacio de funciones en \mathbb{R} , así que podemos aplicar la suma a la transformación ϕ_j de modo que

$$0 = \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial}{\partial \phi_i} \Big|_p \phi_j = \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial \phi_j}{\partial \phi_i}(p) = \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial(\phi_j \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}(\phi(p)).$$

La función $\phi_j \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ es en realidad la proyección a la entrada j del vector (x_1, \dots, x_m) . Por lo tanto, la i -ésima derivada parcial es cero excepto cuando $i = j$, y la j -ésima derivada parcial de la proyección a la entrada j es uno, por lo que

$$0 = \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial(\phi_j \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}(\phi(p)) = a_j.$$

Como lo anterior es válido para j arbitrario, entonces $a_1 = a_2 = \dots = a_m = 0$. Así el conjunto W es una base para $T_p M$. \square

Recordaremos un teorema que se usa regularmente para la extensión de transformaciones lineales, éste lo usaremos para demostrar un corolario del teorema anterior.

Lema 1.12.1. Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita, los conjuntos $A = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $B = \{w_1, \dots, w_m\}$ bases de V y W respectivamente, y sea $T : A \rightarrow B$ transformación, entonces existe $T' : V \rightarrow W$ transformación lineal, tal que $T' \upharpoonright_A = T$. Aún más, si T es biyectiva, entonces T' es un isomorfismo.

La demostración del lema puede ser consultada en [10].

Corolario 1.12.1. El espacio $T_p M$ es isomorfo a \mathbb{R}^m .

Demostración. Sea e_i el vector en \mathbb{R}^m que tiene un 1 en su i -ésima entrada y cero en las demás, entonces el conjunto $\{e_1, \dots, e_m\}$ es base de \mathbb{R}^m . Por el teorema 1.12, $\left\{ \frac{\partial}{\partial \phi_i} \Big|_p \mid i = 1, \dots, m \right\}$ es base de $T_p M$. Definimos para cada i

$$T \left(\frac{\partial}{\partial \phi_i} \Big|_p \right) = e_i.$$

Entonces, por el lema 1.12.1, existe T' isomorfismo que extiende a T . Por lo tanto $T_p M$ es isomorfo a \mathbb{R}^m . \square

En el cálculo real y vectorial, a cada transformación diferenciable en un punto de su dominio se le asocia una transformación lineal, es decir, la diferencial. En el estudio de las variedades diferenciables encontraremos una transformación análoga, esto es, una transformación lineal que va del espacio tangente en un punto de la variedad diferenciable, al espacio tangente en el punto imagen, esta nueva transformación es conocida como la diferencial.

Definición 1.13. Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, $p \in M$. Definimos la diferencial de f en p como $d_p f(v) := \partial(f)$, donde $\partial \in T_p M$.

Con la definición anterior podemos ver que en caso de tener $f : M \rightarrow N$ una transformación diferenciable, con M y N variedades diferenciables, y para cada $g \in \mathcal{C}(N)$, notamos que $(g \circ f) : M \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces, a esta composición le podemos asociar su diferencial. Por lo tanto, la diferencial para una transformación entre variedades está ya contemplada en la definición anterior.

De este modo, para f , tenemos que $d_p f(v) \in T_{f(p)} N$, es decir, el vector ∂ es mandado al vector $d_p f(\partial)$. El siguiente dibujo nos ayuda a ver la geometría de la diferencial.

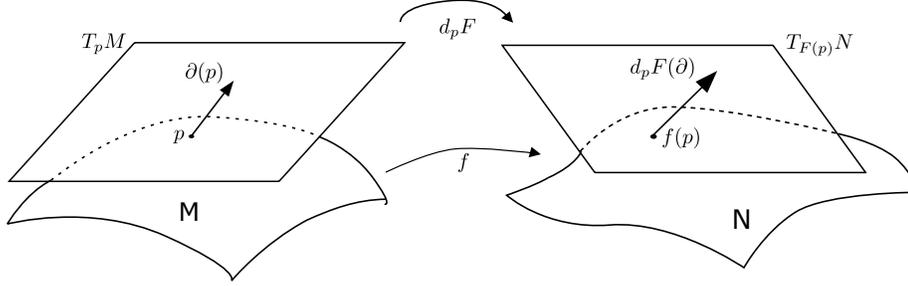


Figura 1.6: La diferencial

Lo que nos dice es que la diferencial lleva vectores tangentes en vectores tangentes. La siguiente proposición dará un entendimiento mejor del comportamiento de la derivada haciendo explícita una regla de correspondencia aplicada a cada elemento en la base del espacio tangente en un punto

Proposición 1.14. *Si $f : M \rightarrow N$ es una transformación diferenciable entre M , una m -variedad, y N , una n -variedad, ambas diferenciables, $p \in M$ y (U, ϕ) carta de p en M , (V, ψ) carta de $f(p)$ en N . Entonces*

$$d_p f \left(\frac{\partial}{\partial \phi_i} \Big|_p \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial(\psi_j \circ f)}{\partial \phi_i}(p) \frac{\partial}{\partial \psi_j} \Big|_{f(p)},$$

para toda $i = 1, \dots, m$.

Demostración. Tenemos que demostrar que estas dos derivaciones tienen la misma regla de correspondencia. Así, sea $i \in \{1, \dots, m\}$ y $g \in \mathfrak{C}(N)$, entonces $d_p f \left(\frac{\partial}{\partial \phi_i} \Big|_p \right)(g) = \frac{\partial}{\partial \phi_i} \Big|_p (g \circ f)$. Por otro lado tenemos que $g \circ f = (g \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ f)$, por la regla de la cadena tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \phi_i} \Big|_p (g \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ f) &= \frac{\partial(g \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ f \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}(\phi(p)) \\ &= \sum_{j=i}^n \frac{\partial(g \circ \psi^{-1})}{\partial x_j}(\psi(f(\phi^{-1}(\phi(p)))))) \cdot \frac{\partial(\psi_j \circ f \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}(\phi(p)) \\ &= \sum_{j=i}^n \frac{\partial(g \circ \psi^{-1})}{\partial x_j}(\psi(f((p)))) \cdot \frac{\partial(\psi_j \circ f \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}(\phi(p)). \end{aligned}$$

Notemos que para toda j , $\frac{\partial(g \circ \psi^{-1})}{\partial x_j}(\psi(f((p))))$ es un real, y $\frac{\partial}{\partial \psi_j} \Big|_{f(p)}$ es una derivación, entonces usando la definición de las derivadas parciales

$$\begin{aligned} \sum_{j=i}^n \frac{\partial(g \circ \psi^{-1})}{\partial x_j}(\psi(f((p)))) \cdot \frac{\partial(\psi_j \circ f \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}(\phi(p)) &= \sum_{j=i}^n \frac{\partial g}{\partial \psi_j}(f(p)) \cdot \frac{\partial(\psi_j \circ f)}{\partial \phi_i}(p) \\ &= \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial(\psi_j \circ f)}{\partial \phi_i}(p) \frac{\partial}{\partial \psi_j} \Big|_{f(p)} \right) (g) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$d_p f \left(\frac{\partial}{\partial \phi_i} \Big|_p \right) (g) = \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial(\psi_j \circ f)}{\partial \phi_i} (p) \frac{\partial}{\partial \psi_j} \Big|_{f(p)} \right) (g)$$

Ya que g es arbitrario entonces, estas dos derivaciones son iguales, lo que demuestra la proposición. \square

En seguida vamos a definir otro concepto, éste consiste en que a cada punto en la variedad le asociamos un vector en su espacio tangente; esta idea es conocida como campo vectorial, para definirlo antes definimos el **haz vectorial** de una variedad M . El haz está definido como la unión disjunta entre espacios vectoriales en los puntos de la variedad, es decir

$$TM := \bigsqcup_{p \in M} T_p M.$$

Definición 1.15. Dada M una m -variedad y $p \in M$, con (U, ϕ) carta de p , un campo vectorial es un mapeo $v : U \rightarrow TM$ tal que

$$v(p) = \sum_{i=1}^m \eta_i(p) \frac{\partial}{\partial \phi_i} \Big|_p.$$

Donde $\eta_i(p) : U \rightarrow \mathbb{R}$ es una función para toda i .

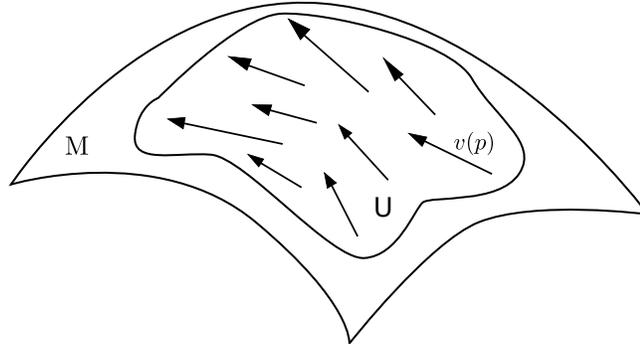


Figura 1.7: Campo vectorial

En caso de que η_1, \dots, η_m sean continuas, decimos que el campo es continuo; si son k -diferenciables decimos que el campo es k -diferenciable.

Un caso especial de campo vectorial es el **campo gradiente**, que está definido por una función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ y las funciones η_i 's son precisamente las derivadas parciales de f , así el campo está dado por

$$v_f = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial \phi_i} \frac{\partial}{\partial \phi_i}.$$

Si f es k -diferenciable, entonces el campo vectorial es de $(k-1)$ -diferenciable.

El siguiente concepto usado en la geometría diferencial es el de la derivada de Lie L_η en un punto p , que puede ser pensado como un producto interno, entre el gradiente de f en p y el vector $\eta = (\eta_1(p), \dots, \eta_m(p))$.

Definición 1.16. Sean $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, v un campo vectorial como en la definición anterior, entonces definimos la derivada de Lie de f en la dirección de v en el punto $p \in M$ como:

$$L_v f(p) := (v \cdot f)(p) = \sum_{i=1}^m v_i(p) \frac{\partial f}{\partial \phi_i}(p).$$

La geometría de la derivada de Lie, nos recuerda al producto interior común en \mathbb{R}^m , entonces podemos decir que la derivada de Lie de una función f en la dirección de un campo v en un punto p , nos da información de la proyección del vector gradiente de la función f en el punto p sobre el vector en p que el campo vectorial v le asigna. De modo que si la derivada de Lie es positiva entonces, f avanza en dirección del campo. Esta noción será de utilidad en las siguiente sección.

Para terminar con la sección hablaremos de un concepto importante para trabajar con campos vectoriales, se trata de las curvas integrales. La idea es que si tenemos un campo vectorial en una variedad, una curva integral es una transformación de \mathbb{R} en la variedad cuya derivada en cada punto, que será un vector tangente a la curva, deberá ser igual a un vector del campo vectorial definido. Pensando en esto damos la siguiente definición, para más sobre esta definición véase [4].

Definición 1.17. Sea $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow M$ transformación diferenciable, $t_0 \in \mathbb{R}$ y $\alpha(t_0) = p_0 \in M$. Sea v campo vectorial en (U, ϕ) carta de p_0 en M . Decimos que α es curva integral de v en p_0 si

$$\frac{d\alpha}{dt}(t) := \frac{d(\phi \circ \alpha)}{dt}(t) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial(\phi_i \circ \alpha)}{\partial t}(t) \frac{\partial}{\partial \phi_i} \Big|_p = v(\alpha(t)),$$

para toda $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, con $\varepsilon > 0$.

Recordemos por el corolario 1.12.1, que el espacio tangente en un punto a una variedad de dimensión m es isomorfo a \mathbb{R}^m , entonces en la definición anterior a la derivada direccional se le puede dar la siguiente asociación, tomando $i \in \{1, \dots, m\}$ y la transformación del corolario 1.12.1

$$T \left(\frac{\partial}{\partial \phi_i} \Big|_p \right) = e_i.$$

Usando la linealidad de H , tenemos que

$$T \left(\frac{\partial(\phi_i \circ \alpha)}{\partial t}(t_0) \frac{\partial}{\partial \phi_i} \right) = \frac{\partial(\phi_i \circ \alpha)}{\partial t}(t_0) \cdot e_i.$$

De manera que a la derivada direccional la podemos ver como el vector

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial(\phi_i \circ \alpha)}{\partial t}(t_0) \frac{\partial}{\partial \phi_i} = \left(\frac{\partial(\phi_1 \circ \alpha)}{\partial t}(t_0), \dots, \frac{\partial(\phi_m \circ \alpha)}{\partial t}(t_0) \right)$$

Esto nos ayudará en algunas de las ideas que se presentan en el siguiente capítulo.

Al punto $\alpha(t_0)$ se le conoce como la condición inicial de α .

Con esto terminamos el primer capítulo; en él hemos definido los conceptos básicos para trabajar la teoría de Morse, como base para la identificación de variedades diferenciables compactas.

Capítulo 2

Teoría de Morse.

2.1. Funciones de Morse.

En esta sección trabajaremos con las funciones de Morse, que muestran algunas propiedades topológicas de las variedades diferenciables en los puntos críticos. Demostraremos primero el lema de Morse, que permite expresar cada función de Morse en una forma estándar, con un cambio de coordenadas conveniente, dicha forma estándar es una suma donde intervienen las funciones coordenadas de una carta.

Definición 2.1. *Sea M una m -variedad diferenciable, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función 2-diferenciable. Decimos que f es de Morse si todos los puntos críticos de f son no degenerados.*

Antes de continuar veamos un lema y una proposición que serán de utilidad para la demostración del lema de Morse.

Lema 2.1.1. *Sea A una matriz de m renglones por m columnas, simétrica, entonces existe P matriz cuadrada invertible, tal que $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$, con D matriz diagonal (i.e. todas sus entradas son cero, excepto tal vez en la diagonal). Aún más la matriz P es ortogonal, es decir, $P^{-1} = P^t$.*

Para una prueba de este resultado véase [10]. Este lema será usado en la prueba de la siguiente proposición.

Observación 2.

- Notemos el caso en que el determinante de A es no cero. Como P es invertible, su determinante es no cero. Ya que D es diagonal su determinante es la multiplicación de sus elementos en la diagonal. Por otro lado $\det D = \det P^t \cdot \det A \cdot \det P \neq 0$ y es matriz diagonal; así, todos los valores en la diagonal de D son no cero.

Proposición 2.2. Sean M una m -variedad diferenciable, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función $\mathcal{C}^2(M)$ y (U, ϕ) una carta de M . Entonces existe (V, ψ) tal que la matriz Hessiana de f es una matriz diagonal.

Demostración. Definimos $F = (f \circ \phi^{-1}) : \phi(U) \rightarrow \mathbb{R}$, notemos que para toda $p \in U$, tenemos

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(\phi(p)) = \frac{\partial^2 (f \circ \phi^{-1})}{\partial x_i \partial x_j}(\phi(p)) = \frac{\partial^2 f}{\partial \phi_i \partial \phi_j}(p),$$

para toda $i, j \in \{1, \dots, m\}$. Notemos que f es \mathcal{C}^2 , entonces F es \mathcal{C}^2 y las segundas derivadas parciales cruzadas de F son iguales, se sigue que la matriz Hessiana es simétrica. Con esto y por el lema 2.1.1, existe P matriz tal que; $P^{-1} = P^t$ y $P^t \cdot H_F(v) \cdot P = D$, para toda $v \in \phi(U)$, con D matriz diagonal.

Definimos $h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, como $h(x_1, \dots, x_m) = P \cdot (x_1, \dots, x_m)^t$, que es una transformación lineal, así que es \mathcal{C}^∞ y su diferencial es $d_v h = P$ para cualquier $v \in \mathbb{R}^m$. Notemos que h es biyectiva, pues $h^{-1} = P^t(x_1, \dots, x_m)^t$. Por lo que, h puede ser pensado como un cambio de cartas en $\phi(U)$.

De la composición $h = id_{\mathbb{R}^m} \circ h$ tenemos que $J_h^{id}(v) = d_v h$ para cualquier $v \in \mathbb{R}^m$. La proposición 1.9 aplicada a $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ nos da que

$$\begin{aligned} H_F^h &= (J_h^{id}(v))^T H_F^{id}(v) J_h^{id}(v) \\ &= d_v h H_F(v) d_v h \\ &= P^t \cdot H_f \cdot P \\ &= D \end{aligned}$$

Con D matriz diagonal, y los coeficientes de la diagonal son justo las segundas derivadas parciales de $(F \circ h)$. Definimos $\psi = (h^{-1} \circ \phi) : M \rightarrow \mathbb{R}^m$. Ahora ϕ difeomorfismo y h es una transformación lineal y por lo tanto un difeomorfismo, de esto tenemos que ψ es difeomorfismo, así que definimos $U = V$. De manera que si $p \in V$, con la definición de ψ tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial \psi_i \partial \psi_j}(p) &= \frac{\partial^2 (f \circ \psi^{-1})}{\partial x_i \partial x_j}(\psi(p)) \\ &= \frac{\partial^2 (f \circ (\phi^{-1} \circ h))}{\partial x_i \partial x_j}(\psi(p)). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Recordamos la definición de $F = (f \circ \phi^{-1})$, la sustituimos en 2.1, entonces

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \psi_i \partial \psi_j}(p) = \frac{\partial^2 (F \circ h)}{\partial x_j \partial x_i}(\psi(p)),$$

para toda $i, j \in \{1, \dots, m\}$. Por lo tanto, la matriz Hessiana de f es diagonal en la carta (V, ψ) . \square

Estamos preparados para el dar el lema de Morse.

Teorema 2.3. [Lema de Morse] Sean $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función 2-diferenciable y M una m -variedad diferenciable. Sea $p_0 \in M$ punto crítico de f , no degenerado, y (U, ψ) una carta de p_0 en M . Entonces existe un abierto $V \subseteq U$, con $p_0 \in V$ y una transformación $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^m$, tal que

$$(f \circ \varphi^{-1})(\varphi_1(p), \dots, \varphi_m(p)) = - \sum_{i=1}^{\lambda} (\varphi_i(p))^2 + \sum_{i=k+1}^m (\varphi_i(p))^2 + C,$$

para todo $p \in V$, donde $f(p_0) = C$.

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\psi(p_0) = (0, \dots, 0)$ en \mathbb{R}^m , ya que si $\psi(p_0) \neq (0, \dots, 0)$ entonces aplicamos la transformación $\psi'(p) = \psi(p) - \psi(p_0)$. Por otra parte, por la proposición 1.7 tenemos $\frac{\partial f}{\partial \psi_i}(p_0) = 0$, para toda i , de manera que suponer que $\psi(p_0)$ va al origen no afecta en lo que haremos para la demostración.

Sea $g(p) = f(p) - C$, se sigue que $g(p_0) = 0$. Consideremos a la función definida por $F = (g \circ \psi^{-1}) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, observemos que si la evaluamos en $\bar{0}$ cumple $F(\bar{0}) = (g \circ \psi^{-1})(0, \dots, 0) = g(p_0) = 0$; como F es composición de funciones 2-diferenciables, entonces es una función 2-diferenciable. Notemos que $\frac{\partial g}{\partial \psi_i} = \frac{\partial}{\partial \psi_i}(f - C) = \frac{\partial f}{\partial \psi_i}$ de manera que las parciales de F quedan

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_i}(0, \dots, 0) &= \frac{\partial (g \circ \psi^{-1})}{\partial x_i}(0, \dots, 0) \\ &= \frac{\partial (g \circ \psi^{-1})}{\partial x_i}(\psi(p_0)) \\ &= \frac{\partial g}{\partial \psi_i}(p_0) \\ &= \frac{\partial f}{\partial \psi_i}(p_0) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Después de esta observación, haremos la demostración por incisos.

(i) Aquí afirmamos por el lema 1.11.3 que existen funciones $F_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, m\}$ tales que

$$F(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^m x_i F_i(x_1, \dots, x_m). \tag{2.3}$$

Si evaluamos en el origen a F_i por la definición en el lema 1.11.3, tenemos que

$$F_i(0, \dots, 0) = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x_i}(0, \dots, 0) dt = \int_0^1 0 dt = 0, \tag{2.4}$$

para toda $i \in \{1, \dots, m\}$.

(ii) Haremos lo mismo para cada F_i , es decir, existen $G_{ij} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F_i = \sum_{j=1}^m x_j G_{ij}$. En este caso es de importancia hacer la construcción ya que será usada en argumentos posteriores.

Aplicando lo mismo que a F en el lema, pero con F_i , se tiene que, por la linealidad de la integral

$$\begin{aligned} F_i(x_1, \dots, x_m) &= \int_0^1 \frac{\partial F_i}{\partial t}(tx_1, \dots, tx_m) dt \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^m x_j \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(tx_1, \dots, tx_m) \right) dt \\ &= \sum_{j=1}^m \int_0^1 x_j \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(tx_1, \dots, tx_m) dt. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Luego, como las variables x_i y t son independientes, entonces

$$\sum_{j=1}^m \int_0^1 x_j \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(tx_1, \dots, tx_m) dt = \sum_{j=1}^m x_j \int_0^1 \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(tx_1, \dots, tx_m) dt. \quad (2.6)$$

Recordando la definición de F_i y que la variable t y las variables x_j son independientes, para toda j , entonces puede entrar la parcial respecto a x_j en la integral

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m x_j \int_0^1 \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(tx_1, \dots, tx_m) dt &= \sum_{j=1}^m x_j \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_m) dt \right) dt \\ &= \sum_{j=1}^m x_j \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_m) \right) dt dt \end{aligned} \quad (2.7)$$

Por otro lado, de la regla de la cadena tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_m) \right) &= \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}(tx_1, \dots, tx_m) \cdot \frac{\partial(t \cdot x_j)}{\partial x_j} \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}(tx_1, \dots, tx_m) \cdot t \end{aligned} \quad (2.8)$$

Sustituimos (2.8) en (2.7) entonces

$$\sum_{j=1}^m x_j \int_0^1 \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(tx_1, \dots, tx_m) dt ds = \sum_{j=1}^m x_j \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}(tx_1, \dots, tx_m) \cdot t dt ds.$$

Definimos $G_{ij}(x_1, \dots, x_m) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}(tx_1, \dots, tx_m) \cdot t dt ds$. Con la ecuación anterior y (2.5) tenemos $F_i = \sum_{j=1}^m x_j G_{ij}$, terminando el inciso ii).

Notemos que $\frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}(0, \dots, 0)$ es una constante no cero, entonces si evaluamos a G_{ij} en el origen tenemos

$$\begin{aligned} G_{ij}(0, \dots, 0) &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}(0, \dots, 0) \cdot t \, dt \, ds \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}(0, \dots, 0) \int_0^1 \int_0^1 t \, dt \, ds \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}(0, \dots, 0) \cdot (1/2). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Como F es 2-diferenciable, con k mayor a dos, las segundas parciales cruzadas son iguales, es decir, $G_{ij} = G_{ji}$ para toda i, j . Observemos que las funciones G_{ij} son los coeficientes del Hessiano de F .

(iii) Definiremos $H_{ij} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, y demostraremos que $F = \sum_{i=1}^m x_i^2 H_{ii}$, además podremos suponer sin pérdida de generalidad que $H_{ij} = 0$, con i distinto de j .

Juntando el inciso i) y ii), tenemos $F = \sum_{i=1}^m x_i \sum_{j=1}^m x_j G_{ij}$, definimos la función como $H_{ij} = \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2}$, con esto F se expresa como $F = \sum_{i \leq j} x_i x_j H_{ij}$.

Si evaluamos en el origen, por la ecuación (2.9)

$$\begin{aligned} H_{ij}(0, \dots, 0) &= 1/2(G_{ij} + G_{ji})(0, \dots, 0) \\ &= 1/2(2G_{ij})(0, \dots, 0) \\ &= 1/2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}(0, \dots, 0) \right). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Por los incisos i) y ii) tenemos que $F = \sum_{i \leq j} x_i x_j H_{ij}$. Además por la proposición 2.2, sin pérdida de generalidad podemos suponer a F de tal manera que su matriz Hessiana sea diagonal en el origen; aún más, ya que su determinante es no cero en p_0 y por la observación 2 los coeficientes de la diagonal son no cero, entonces $F = \sum_{i=1}^m x_i^2 H_{ii}$.

(iv) Definiremos el último cambio de coordenadas $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ dada por $T = (T_1, \dots, T_m)$, tal que $F = -\sum_{i=1}^{\lambda} (T_i)^2 + \sum_{i=\lambda+1}^m (T_i)^2$.

Sea $T_i(x_1, \dots, x_m) = x_i \sqrt{|H_{ii}(x_1, \dots, x_m)|} \in \mathbb{R}$, para toda $i \in \{1, \dots, m\}$, entonces $(T_i)^2 = x_i^2 |H_{ii}|$.

Recordando la definición de H_{ii} y por la ecuación (2.10), tenemos

$$H_{ii}(0, \dots, 0) = 1/2 \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(0, \dots, 0) \neq 0.$$

Como las segundas derivadas parciales de F son continuas y H_{ii} depende de ellas, entonces H_{ii} es continua para toda i . Además, al evaluar en el origen nos

da valor no cero, entonces existe una vecindad del origen de radio δ_i tal que H_{ii} toma valores distintos de cero en la vecindad; así podemos afirmar que H_{ii} toma valores positivos o negativos. Por lo tanto $(T_i)^2 = x_i^2(\pm H_{ii})$ despejando, tenemos $\pm(T_i)^2 = x_i^2 H_{ii}$.

Sustituyendo esto en $F = \sum_{i=1}^m x_i^2 H_{ii}$ tenemos

$$F = \sum_{i=1}^m \pm(T_i)^2.$$

Definimos la transformación $T : V_\delta(0, \dots, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ como $T = (T_1, \dots, T_m)$ con $\delta = \min \{\delta_i \mid i \in \{1, \dots, m\}\}$. Ya que T_i es continua para toda i , entonces T es continua y $F = \sum_{i=1}^m \pm(T_i)^2$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que los primeros λ índices son negativos, entonces

$$F = - \sum_{i=1}^{\lambda} (T_i)^2 + \sum_{i=\lambda+1}^m (T_i)^2. \quad (2.11)$$

Para ver que T es biyectiva notemos que $T_i = x_i \sqrt{|H_{ii}|}$, podemos dividir la raíz ya que la función H_{ii} es no cero en la vecindad, entonces $x_i = \frac{T_i}{\sqrt{|H_{ii}|}}$. Definimos

$$T_i^{-1}(x_1, \dots, x_m) = \frac{x_i}{\sqrt{|H_{ii}|}}.$$

Sea $T^{-1} : T(V_\delta(0, \dots, 0)) \rightarrow V_\delta(0, \dots, 0)$ dada por $T^{-1} = (T_1^{-1}, \dots, T_m^{-1})$, si $v = (x_1, \dots, x_m)$. Tenemos, por definición que para toda i

$$\begin{aligned} T_i^{-1}(T(v)) &= T_i^{-1}(T_1(v), \dots, T_m(v)) \\ &= \frac{T_i(v)}{\sqrt{|H_{ii}|}} \\ &= x_i, \end{aligned}$$

es la proyección a la entrada i . Por lo tanto

$$\begin{aligned} T^{-1}(T(v)) &= (T_1^{-1}(T(v)), \dots, T_m^{-1}(T(v))) \\ &= (x_1, \dots, x_m) \\ &= id_{\mathbb{R}^m}(v). \end{aligned}$$

De manera análoga

$$\begin{aligned} T_i(T^{-1}(v)) &= T_i(T_1^{-1}(v), \dots, T_m^{-1}(v)) \\ &= T_i^{-1}(v) \sqrt{|H_{ii}|} \\ &= \frac{x_i}{\sqrt{|H_{ii}|}} \sqrt{|H_{ii}|} \\ &= x_i. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Así, $T(T^{-1}(v)) = (T_1^{-1}(T(v)), \dots, T_m^{-1}(T(v))) = (x_1, \dots, x_m) = id(v)$, por lo tanto son inversas.

Ya que $\sqrt{|H_{ii}|}$ es continua y no cero, entonces T_i^{-1} es continua para toda i , así concluimos que T^{-1} es continua. Por lo tanto T es un homeomorfismo.

iv) Definiremos el abierto V y la transformación $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Sea $\varphi(p) = (\varphi_1(p), \dots, \varphi_m(p))$, en donde $\varphi_i = (T_i \circ \psi)(p)$ para cada i .

Para definir a V , tenemos $V_\delta(0, \dots, 0) \subseteq Dom(F) = Dom(g \circ \psi^{-1})$, así $V_\delta(0, \dots, 0)$ está contenido en $Im(\psi)$. Consideremos $V = \psi^{-1}(V_\delta(0, \dots, 0))$.

Tenemos que V es un abierto de p_0 . Si $q \in V$, entonces

$$\begin{aligned} f(\varphi^{-1}(\varphi(q))) - C &= g(\varphi^{-1}(\varphi(q))) \\ &= g \circ (\psi^{-1}(\psi(q))) \\ &= (g \circ \psi^{-1})(\psi(q)) \\ &= F(\psi(q)). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Sustituyendo la ecuación (2.11) en (2.13), entonces

$$F(\psi(q)) = - \sum_{i=1}^{\lambda} (T_i(\psi(q)))^2 + \sum_{i=\lambda+1}^m (T_i(\psi(q)))^2.$$

Recordando que $\varphi_i(p) = (T_i \circ \psi)(p)$ tenemos

$$- \sum_{i=1}^{\lambda} (T_i(\psi(q)))^2 + \sum_{i=\lambda+1}^m (T_i(\psi(q)))^2 = - \sum_{i=1}^{\lambda} \varphi_i(q)^2 + \sum_{i=\lambda+1}^m \varphi_i(q)^2 \quad (2.14)$$

Sustituimos (2.14) en (2.13) para obtener

$$f(\varphi^{-1}(\varphi(q))) - C = - \sum_{i=1}^{\lambda} (\varphi_i(q))^2 + \sum_{i=\lambda+1}^m (\varphi_i(q))^2$$

Y por lo tanto tenemos

$$(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(q)) = - \sum_{i=1}^{\lambda} (\varphi_i(q))^2 + \sum_{i=\lambda+1}^m (\varphi_i(q))^2 + C.$$

□

A la suma local de la función se le llama la **forma estándar de f** respecto a (V, φ) y diremos que la suma anterior es la forma estándar de f en la vecindad V . A λ se le dice la *signatura* del punto p con f , y la denotaremos por $sig(p) = \lambda$. Por la proposición 1.9, podemos concluir que λ es un invariante bajo cambio de cartas.

Los siguientes dos corolarios del Lema de Morse argumentan que los puntos críticos son aislados y si M es compacto la cantidad de puntos críticos es finita.

Corolario 2.3.1. *Un punto crítico no-degenerado es aislado.*

Demostración. Tomamos p un punto crítico no-degenerado por el Lema de Morse

$$f \circ \varphi^{-1} = - \sum_{i=1}^{\lambda} \varphi_i^2 + \sum_{i=\lambda+1}^m \varphi_i^2 + C.$$

Si derivamos con respecto a la carta (V, φ) , entonces $\frac{\partial f}{\partial \varphi_i} = -2\varphi_i$, si $0 \leq i \leq \lambda$ y $\frac{\partial f}{\partial \varphi_i} = 2\varphi_i$, si $\lambda + 1 \leq i \leq m$. Por la construcción de la carta sabemos que en la vecindad V de p , la evaluación $\varphi_i(q) = T_i \circ \psi(q) \neq 0$, con T_i definida como en (iii) de la demostración del teorema 2.3, si $q \neq p$ y $q \in V$, entonces las parciales son no cero, por lo que en esa vecindad no hay otro punto crítico más que p . \square

Corolario 2.3.2. *Si M es una variedad diferenciable y compacta, entonces la cantidad de puntos críticos de cualquier función de Morse es finita.*

Demostración. Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ función de Morse, M variedad diferenciable compacta. Supongamos que f tiene una cantidad infinita de puntos críticos, entonces al conjunto de puntos críticos podemos extraerle una sucesión, esta sucesión está en un compacto, por lo tanto tiene una subsucesión convergente. Sea $\{p_n\}_{k=1}^{\infty}$ tal subsucesión y p el punto al que converge.

Tomamos una carta (U, ϕ) de p . Por definición de convergencia, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que si $n \geq N$, entonces $p_n \in U$. Por lo tanto si $n \geq N$, las derivadas $\frac{\partial f}{\partial \phi_i}(p_n) = 0$, para toda i , pues la sucesión es de puntos críticos de f . Como f es al menos 2-diferenciable, sus parciales son continuas, entonces la sucesión $\{\frac{\partial f}{\partial \phi_i}(p_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $\frac{\partial f}{\partial \phi_i}(p)$, para toda i . Pero $\frac{\partial f}{\partial \phi_i}(p_n) = 0$, entonces $\frac{\partial f}{\partial \phi_i}(p) = 0$, para toda i , y así p es punto crítico (no-degenerado pues f es de Morse) lo que contradice el hecho de que estos puntos son aislados, por lo tanto sólo debe haber un numero finito de ellos. \square

En lo que sigue las variedades importantes serán las variedades compactas, pues en ellas podemos asegurar que el conjunto de puntos críticos es finito.

El objetivo primordial de esta sección es demostrar que para cualquier función de clase \mathcal{C}^2 definida en una variedad diferenciable y compacta es posible encontrar una función de Morse tan cercana a la primera como se desee (ver Teorema 2.7). Para ello tenemos que definir lo que será para nosotros la noción de cercanía.

Definición 2.4. *(Funciones $(\mathcal{C}^2, \varepsilon)$ -cercanas en compactos) Sea M una m -variedad diferenciable, $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$, funciones \mathcal{C}^k , con k un natural mayor a dos, $K \subseteq M$ compacto. Diremos que f es $(\mathcal{C}^2, \varepsilon)$ -cercana a g en K si, para toda $p \in K$, existe $\varepsilon > 0$ tal que:*

$$a) \quad |f(p) - g(p)| < \varepsilon.$$

$$b) \quad \left| \frac{\partial f}{\partial \phi_i}(p) - \frac{\partial g}{\partial \phi_i}(p) \right| < \varepsilon, \text{ para toda } i \in \{1, \dots, m\}.$$

$$c) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial \phi_i \partial \phi_j}(p) - \frac{\partial^2 g}{\partial \phi_i \partial \phi_j}(p) \right| < \varepsilon \text{ para toda } i, j \in \{1, \dots, m\},$$

con (U, ϕ) carta de p en M , y $\phi^{-1}(V_\varepsilon(\phi(p))) \subseteq U$.

En caso de que ε sea arbitrario sólo diremos que son \mathcal{C}^2 -cercanas en K .

Para dar esta definición en toda la variedad supondremos compacidad en M , entonces haremos la siguiente construcción.

Construcción 1. *Presentaremos una manera de dar compactos K_i finitos en M compacta, tales que su unión sean justo M .*

Sea \mathfrak{A} un atlas de la variedad, entonces $M \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} U_\alpha$, como M es compacto, existe una cantidad finita de abiertos U_1, \dots, U_n , tales que $M = \bigcup_{k=1}^n U_k$. Sean ϕ_1, \dots, ϕ_n , las transformaciones que hacen que las cartas $(U_1, \phi_1), \dots, (U_n, \phi_n)$ estén en \mathfrak{A} , de este modo $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^m$ es un difeomorfismo, para toda i .

Sean $i \in \{1, \dots, n\}$, y $\bar{x} \in \phi_i(U_i)$. Como ϕ_i es difeomorfismo y U_i es abierto, así $\phi_i(U_i)$ es abierto en \mathbb{R}^m . Así, por definición existe $\varepsilon' > 0$ tal que la vecindad $V_{\varepsilon'}(\bar{x}) = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^m \mid \|\bar{y} - \bar{x}\| < \varepsilon'\} \subseteq \phi_i(U_i)$.

Por otro lado, dado $r > 0$ sea $\overline{V_r(\bar{x})} = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^m \mid \|\bar{y} - \bar{x}\| \leq r\}$. Por lo tanto, si $\bar{y} \in \overline{V_r(\bar{x})}$, entonces $\|\bar{y} - \bar{x}\| < r$. Por lo que, $\|\bar{y} - \bar{x}\| \leq r$, y así $V_r(\bar{x}) \subseteq \overline{V_r(\bar{x})}$.

Sea $\varepsilon = \varepsilon'/2$, es claro que $\varepsilon < \varepsilon'$. Dado $\bar{y} \in \overline{V_\varepsilon(\bar{x})}$, por definición tenemos $\|\bar{y} - \bar{x}\| \leq \varepsilon < \varepsilon'$, concluimos que $\overline{V_\varepsilon(\bar{x})} \subseteq V_{\varepsilon'}(\bar{x})$. De lo anterior tenemos que $V_\varepsilon(\bar{x}) \subseteq \overline{V_\varepsilon(\bar{x})} \subseteq V_{\varepsilon'}(\bar{x}) \subseteq \phi_i(U_i)$, se sigue que $\overline{V_\varepsilon(\bar{x})} \subseteq \phi_i(U_i)$. Ya que ϕ_i es homeomorfismo tenemos que $\phi_i^{-1}(\overline{V_\varepsilon(\bar{x})}) \subseteq U_i$. También $\overline{V_\varepsilon(\bar{x})}$ es cerrado en \mathbb{R}^m , entonces $\phi_i^{-1}(\overline{V_\varepsilon(\bar{x})})$ es cerrado en M variedad compacta, por lo tanto $\phi_i^{-1}(\overline{V_\varepsilon(\bar{x})})$ es compacto.

Por construcción $\bigcup_{\bar{x} \in \phi_i(U_i)} \phi_i^{-1}(V_\varepsilon(\bar{x})) = U_i$, sustituyendo vemos que

$$M = \bigcup_{k=1}^n U_k = \bigcup_{k=1}^n \left(\bigcup_{x \in U_k} \phi_k^{-1}(V_\varepsilon(\bar{x})) \right).$$

Por la compacidad de M , existe una cantidad finita de puntos $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r \in \mathbb{R}^m$ y $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r > 0$, tales que $\phi_{i_j}^{-1}(\bar{x}_j) \subseteq U_{i_j}$, donde $i_j \in \{1, \dots, n\}$ y i_j depende del índice $j \in \{1, \dots, r\}$, y

$$M \subseteq \bigcup_{j=1}^r \phi_{i_j}^{-1}(V_{\varepsilon_j}(\bar{x}_j)). \quad (2.15)$$

Recordemos que $\phi_{i_j}^{-1}(V_{\varepsilon_j}(\bar{x}_j)) \subseteq \phi_{i_j}^{-1}(\overline{V_{\varepsilon_j}(\bar{x}_j)}) \subseteq U_{i_j}$, entonces $\bigcup_{j=1}^r \phi_{i_j}^{-1}(V_{\varepsilon_j}(\bar{x}_j)) \subseteq \bigcup_{j=1}^r \phi_{i_j}^{-1}(\overline{V_{\varepsilon_j}(\bar{x}_j)}) \subseteq \bigcup_{k=1}^n U_k$, aplicándolo en la ecuación (2.15), tenemos que

$$M \subseteq \bigcup_{j=1}^r \phi_{i_j}^{-1}(V_{\varepsilon_j}(\bar{x}_j)) \subseteq \bigcup_{j=1}^r \phi_{i_j}^{-1}(\overline{V_{\varepsilon_j}(\bar{x}_j)}) \subseteq \bigcup_{k=1}^n U_k. \quad (2.16)$$

Definimos $K_i = \bigcup \{\phi_i^{-1}(\overline{V_{\varepsilon_j}(\overline{x_j})}) \mid \overline{x_j} \in \phi_i(U_i)\}$, notemos que es compacto por que es unión finita de compactos. Por lo tanto, tenemos que $K_i \subseteq U_i$ y por (2.16) concluimos que

$$M = \bigcup_{i=1}^n K_i = \bigcup_{i=1}^n U_i.$$

Terminando la construcción 1.

Es importante recordar esta construcción, pues será usada para otro resultado más adelante. Ahora la usaremos para extender nuestra definición de cercanía en toda una variedad diferenciable y compacta.

Definición 2.5. (*Funciones $(\mathcal{C}^2, \varepsilon)$ -cercanas*) Sean M una m -variedad diferenciable y compacta. Sea $\{K_i \mid i = 1, \dots, n\}$ el conjunto de compactos visto en la construcción 1 y $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ funciones al menos \mathcal{C}^2 , diremos que son $(\mathcal{C}^2, \varepsilon)$ -cercanas en M si, f está $(\mathcal{C}^2, \varepsilon)$ -cerca de g en K_i , para toda $i \in \{1, \dots, n\}$. Si ε es arbitraria solo diremos que f es \mathcal{C}^2 -cercana a g .

Antes de dar el teorema de la existencia de funciones de Morse y ver cómo es usada la \mathcal{C}^2 -cercanía, presentaremos unos lemas que nos ayudarán en la construcción de la función de Morse.

Para el primer lema usaremos el teorema de Sard, que nos dice la medida que tiene el conjunto de puntos críticos de una transformación entre variedades diferenciables. Para presentar este teorema generalizaremos el concepto de valor y punto crítico de la manera siguiente; sea $F : M \rightarrow N$ una transformación \mathcal{C}^2 entre variedades diferenciables de misma dimensión, y sean $p \in M$ y $F(p) \in N$, (U, ϕ) y (V, ψ) cartas de los puntos p y $F(p)$ respectivamente, p es un punto crítico de F si $\det(d_{\phi(p)}(\psi \circ F \circ \phi^{-1})) = 0$, a $F(p)$ lo llamamos valor crítico.

Teorema 2.6. (*Teorema de Sard*) Sean $h : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ con $U \subseteq M$ abierto y M una m -variedad. Entonces, el conjunto de valores críticos de h tiene medida cero en \mathbb{R}^m .

Para la demostración del resultado véase [5]. Una consecuencia importante de este teorema es que el conjunto de valores regulares (los que no son críticos) es denso en \mathbb{R}^m . El siguiente lema será utilizado para encontrar las funciones de Morse, construidas en cada abierto de la variedad.

Lema 2.6.1. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^m$ un abierto, $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función al menos \mathcal{C}^2 . Entonces existen $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ tal que la función $T : U \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$T(x_1, \dots, x_m) = F(x_1, \dots, x_m) - \sum_{k=1}^m a_k x_k,$$

es función de Morse. Más aún, dada $\varepsilon > 0$ podemos escoger los valores a_1, \dots, a_m de tal manera que $\sum_{k=1}^m |a_k| < \varepsilon$.

Demostración. Definimos la función

$$h(x_1, \dots, x_m) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_m), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_m}(x_1, \dots, x_m) \right).$$

Sea $p = (x_1, \dots, x_m)$. Notemos que la derivada parcial de h respecto a x_i es $\frac{\partial h}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_1}, \dots, \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_m} \right)$, para toda $i = 1, \dots, m$. Así, la matriz derivada de h es

$$d_p h = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_m \partial x_1}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_m}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_m \partial x_m}(p) \end{bmatrix} = H_F(p).$$

El punto p es punto crítico de h si, y sólo si $\det(d_p h) = 0$, y este determinante es cero por la igualdad anterior si, y sólo si $\det(H_F(p)) = 0$.

Sea $\varepsilon > 0$ y $V_\varepsilon(\bar{0}) \subseteq \mathbb{R}^m$. Por el teorema de Sard 2.6 el conjunto de valores regulares de h es denso, entonces existe $(a_1, \dots, a_m) \in V_\varepsilon(\bar{0})$ tal que la imagen inversa $h^{-1}\{(a_1, \dots, a_m)\}$ no tiene puntos críticos. Definimos la función

$$T(x_1, \dots, x_m) = F(x_1, \dots, x_m) - \left(\sum_{k=1}^m a_k x_k \right).$$

Observamos por la linealidad de las parciales que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, \dots, x_m) &= \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(F(x_1, \dots, x_m) - \left(\sum_{k=1}^m a_k x_k \right) \right) \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, \dots, x_m) - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(\sum_{k=1}^m a_k x_k \right) \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}(x_1, \dots, x_m) - 0 \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}(x_1, \dots, x_m). \end{aligned}$$

Para toda $i, j \in \{1, \dots, m\}$, con lo cual $H_T(p) = H_F(p)$, por tanto sus determinantes son iguales.

Veamos que T es de Morse. Si p es un punto crítico de T , entonces sus parciales son cero y usamos la linealidad de la derivada parcial

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial T}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial F}{\partial x_i}(p) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{k=1}^m a_k x_k \right) \\ &= \frac{\partial F}{\partial x_i}(p) - \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} (a_k x_k) \\ &= \frac{\partial F}{\partial x_i}(p) - \sum_{k=1}^m a_k \frac{\partial}{\partial x_i} (x_k). \end{aligned}$$

Recordemos que $\frac{\partial}{\partial x_i}(x_k) = 0$ si $k \neq i$ y $\frac{\partial}{\partial x_i}(x_k) = 1$ si $k = i$, entonces

$$0 = \frac{\partial T}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial F}{\partial x_i}(p) - a_k.$$

Entonces $\frac{\partial F}{\partial x_i}(p) = a_i$, para toda i , de manera que h , evaluado en p , nos da

$$h(p) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_m}(p) \right) = (a_1, \dots, a_m).$$

El valor $h(p)$ es entonces un valor regular y, en ese caso, p es un punto no crítico de h , por lo que el $\det(H_F(p)) \neq 0$, si y sólo si $\det(H_T(p)) \neq 0$. Por lo tanto p es punto crítico no-degenerado de T , entonces T es de Morse en U .

Más aún, como $(a_1, \dots, a_m) \in V_\varepsilon(\bar{0})$, entonces $\sum_{k=1}^m |a_k| < \varepsilon$. \square

Observación 3.

- Notemos que en el lema 2.6.1, la transformación T tiene el mismo Hessiano que F .
- En el lema siguiente usaremos la construcción 1; para esto usamos el conjunto de funciones de las cartas $\{\phi_i \mid i = 1, \dots, n\}$. Supondremos que con estas transformaciones tanto f como g tienen sus matrices Hessianas diagonales, veremos que esta suposición extra no afectará el teorema de existencia.

Lema 2.6.2. *Sean K un compacto en M una m -variedad diferenciable, $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ función \mathcal{C}^2 tal que todos sus puntos críticos en K son no-degenerados, entonces toda función \mathcal{C}^2 , que sea \mathcal{C}^2 -cercana a g tiene sus puntos críticos no-degenerados en K .*

Demostración. Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase \mathcal{C}^2 , que es \mathcal{C}^2 -cercana a g en K .

Recordemos que $M = \bigcup_{i=1}^m K_i$ por la construcción 1. Tomamos (U_i, ϕ_i) una carta tal que $U_i \cap K \neq \emptyset$ tal que las funciones f y g tienen sus matrices Hessianas diagonales. Ahora, tenemos los siguientes casos:

- Si p no es punto crítico de g en U_i , entonces $\frac{\partial g}{\partial(\phi_i)_j}(p) \neq 0$ para alguna $j \in \{1, \dots, m\}$, por lo tanto $\sum_{k=1}^m \left| \frac{\partial g}{\partial(\phi_i)_k}(p) \right| > 0$.
- Si p es punto crítico de g , entonces es no degenerado y $|\det(H_g(p))| > 0$.

Observando ahora que f está \mathcal{C}^2 -cerca de g , se tiene que dado $\varepsilon > 0$ se cumplen las desigualdades a), b) y c) de la definición 2.4, para toda $p \in K$. Por el inciso b) de dicha definición

$$\left\| \frac{\partial g}{\partial(\phi_i)_k}(p) \right| - \left| \frac{\partial f}{\partial(\phi_i)_k}(p) \right| < \left| \frac{\partial g}{\partial(\phi_i)_k}(p) - \frac{\partial f}{\partial(\phi_i)_k}(p) \right| < \varepsilon, \quad (2.17)$$

para toda $k \in \{1, \dots, m\}$. Con las segundas parciales tenemos

$$\left| \frac{\partial^2 g}{\partial(\phi_i)_k \partial(\phi_i)_j}(p) \right| - \left| \frac{\partial^2 f}{\partial(\phi_i)_k \partial(\phi_i)_j}(p) \right| < \left| \frac{\partial^2 g}{\partial(\phi_i)_k \partial(\phi_i)_j}(p) - \frac{\partial^2 f}{\partial(\phi_i)_k \partial(\phi_i)_j}(p) \right| < \varepsilon. \quad (2.18)$$

Sea $\varepsilon \leq \min \left\{ \frac{1}{2} \left| \frac{\partial g}{\partial(\phi_i)_k}(p) \right|, \frac{1}{2} \left| \frac{\partial^2 g}{\partial(\phi_i)_k \partial(\phi_i)_j}(p) \right| \mid k, j \in \{1, \dots, m\} \right\}$. Primero veamos qué sucede si p no es punto crítico de g , entonces de la ecuación (2.17) tenemos

$$\left| \frac{\partial g}{\partial(\phi_i)_k}(p) \right| - \left| \frac{\partial f}{\partial(\phi_i)_k}(p) \right| < \varepsilon \leq \frac{1}{2} \left| \frac{\partial g}{\partial(\phi_i)_k}(p) \right|.$$

Abriendo el valor absoluto se tiene

$$-\frac{1}{2} \left| \frac{\partial g}{\partial(\phi_i)_k}(p) \right| \leq \left| \frac{\partial g}{\partial(\phi_i)_k}(p) \right| - \left| \frac{\partial f}{\partial(\phi_i)_k}(p) \right| \leq \frac{1}{2} \left| \frac{\partial g}{\partial(\phi_i)_k}(p) \right|.$$

Tomamos la parte derecha de la desigualdad y despejamos la derivada parcial de f

$$\frac{1}{2} \left| \frac{\partial g}{\partial(\phi_i)_k}(p) \right| = \left| \frac{\partial g}{\partial(\phi_i)_k}(p) \right| - \frac{1}{2} \left| \frac{\partial g}{\partial(\phi_i)_k}(p) \right| \leq \left| \frac{\partial f}{\partial(\phi_i)_k}(p) \right|.$$

Ya que p no es punto crítico de g , entonces alguna derivada parcial es no cero. Sumando todas las parciales de f y g , podemos ver que

$$0 < \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \left| \frac{\partial g}{\partial(\phi_i)_k}(p) \right| \leq \sum_{k=1}^m \left| \frac{\partial f}{\partial(\phi_i)_k}(p) \right|.$$

De aquí vemos que entonces alguna derivada parcial de f es no cero. Por lo que si p no es punto crítico de g , entonces p no es punto crítico de f . En otras palabras, f tiene a lo más como puntos críticos a los puntos críticos de g .

En el caso de p ser punto crítico de g , entonces con el inciso b) de la definición 2.4, recordando por la observación 3 que supondremos las segundas derivadas parciales cruzadas cero para f y g , y recordando como definimos ε , tenemos

$$\left| \frac{\partial^2 g}{\partial(\phi_i)_j \partial(\phi_i)_j}(p) \right| - \left| \frac{\partial^2 f}{\partial(\phi_i)_j \partial(\phi_i)_j}(p) \right| < \varepsilon \leq \frac{1}{2} \left| \frac{\partial^2 g}{\partial(\phi_i)_j \partial(\phi_i)_j}(p) \right|,$$

para toda j . De igual manera, abriendo el valor absoluto, y despejando la segunda derivada parcial de f tenemos

$$0 < \frac{1}{2} \left| \frac{\partial^2 g}{\partial(\phi_i)_j \partial(\phi_i)_j}(p) \right| \leq \left| \frac{\partial^2 f}{\partial(\phi_i)_k \partial(\phi_j)_j}(p) \right|.$$

Multiplicando todos los índices nos da

$$0 < \left(\frac{1}{2} \right)^m \prod_{j=1}^m \left| \frac{\partial^2 g}{\partial(\phi_i)_j \partial(\phi_i)_j}(p) \right| \leq \prod_{j=1}^m \left| \frac{\partial^2 f}{\partial(\phi_i)_k \partial(\phi_j)_j}(p) \right|. \quad (2.19)$$

El Hessiano de f y g es diagonal, entonces tenemos las dos igualdades

$$\prod_{j=1}^m \left| \frac{\partial^2 g}{\partial(\phi_i)_j \partial(\phi_i)_j}(p) \right| = |\det(H_g(p))| \quad \prod_{j=1}^m \left| \frac{\partial^2 f}{\partial(\phi_i)_k \partial(\phi_j)_j}(p) \right| = |\det H_f(p)|.$$

Con esto y la desigualdad (2.19) tenemos que $0 < (1/2)^m |\det(H_g(p))| \leq |\det(H_f(p))|$. Por lo tanto, el determinante del Hessiano de f es no cero, y entonces el punto crítico p es no degenerado.

Por lo que si p es un punto crítico no-degenerado de g , también lo es para f en U_i , para toda $i \in \{1, \dots, n\}$, como el conjunto de abiertos $\{U_i \mid i = 1, \dots, m\}$ cubre a M , entonces cubre a K . Como este proceso fue hecho con las funciones ϕ_i , para toda $i \in \{1, \dots, m\}$, ya que los puntos críticos de f son a lo más los de g y son no degenerados en K . \square

Teorema 2.7. Sean M una m -variedad diferenciable y compacta, $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ función \mathcal{C}^2 . Entonces, existe $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ función de Morse tal que f es \mathcal{C}^2 -cercana a g .

Si bien este teorema es fundamental en lo que haremos su demostración es muy larga y técnica, por lo que se recomienda al lector omitirla en una primera lectura.

Demostración. Sabemos que hay compactos y abiertos tales que $M \subseteq \bigcup_{i=1}^n K_i \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i$, además $K_i \subseteq U_i$, para toda $i \in \{1, \dots, n\}$. Por la proposición 2.2 podemos suponer que el Hessiano de g respecto a ϕ_i en los puntos de cada U_i , es una matriz diagonal. Haremos la construcción de la función f por inducción sobre i .

El primer paso es $f_0 = g$, y el primer compacto $C_0 = \emptyset$. Supongamos construido el mapeo $f_{l-1} : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que todos su puntos críticos son no-degenerados en $C_{l-1} = \bigcup_{i=1}^{l-1} K_i$ y f_{l-1} es \mathcal{C}^2 -cercana a f_{l-2} . Construyamos $f_l : M \rightarrow \mathbb{R}$.

Con la carta (U_l, ϕ_l) , y con el lema 2.6.1, si $U = \phi_l(U_l)$ y $F = (f_k \circ \phi_l^{-1})$ sabemos que existen $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ y una transformación que etiquetaremos por

$$T_l(x_1, \dots, x_m) = f_{l-1}(\phi_l^{-1}(x_1, \dots, x_m)) - \left(\sum_{i=1}^m a_i x_i \right), \quad (2.20)$$

que es de Morse en U y $\sum_{i=1}^m |a_i| < \varepsilon$, con ε arbitraria.

Hay una biyección entre U y U_l dada por la transformación ϕ_l , pues es homeomorfismo. Entonces a cada punto $(x_1, \dots, x_m) \in U$ le corresponde un punto $p \in U_l$, por tanto $\phi_l(p) = (x_1, \dots, x_m)$, y así podemos decir que T_l tiene dominio en U_l . Sean $(\phi_l)_j$ las funciones coordenadas de ϕ_l para toda $j \in \{1, \dots, m\}$, entonces $x_j = (\phi_l(p))_j$ para toda j . Entonces la ecuación 2.20 se vuelve

$$T(\phi_l(p)) = f_l(p) - \sum_{i=1}^m a_i (\phi_l)_i(p).$$

Para extender la función T_l a toda la variedad usamos el lema 1.11.1, con K_l y U_l , entonces existe una $\beta_l : M \rightarrow \mathbb{R}$ función \mathcal{C}^∞ , V_l abierto y L_l compacto, tales que; $K_l \subseteq V_l \subseteq L_l \subseteq U_l$, $0 \leq \beta \leq 1$ y $\beta = 1$ en K_l .

Definimos $f_l : M \rightarrow \mathbb{R}$, si como

$$f_l(p) = \begin{cases} f_{l-1}(p) - \beta_l(p) \cdot \left(\sum_{i=1}^m a_i(\phi_l)_i(p) \right) & \text{en } U_l. \\ f_{l-1}(p) & \text{en } \text{int}(M \setminus L_l). \end{cases} \quad (2.21)$$

Notemos que está bien definida pues si $p \in U_l \cap \text{int}(M \setminus L_l)$, entonces $\beta_l(p) = 0$, y así $f_l(p) = f_{l-1}(p)$, por lo que esta función pega bien en la intersección. Demostraremos que f_l cumple que es \mathcal{C}^2 -cercana a f_{l-1} y tiene sus puntos críticos no-degenerados.

i) Puntos críticos no degenerados en C_l .

De la definición 2.21, tenemos que en $\text{int}(M \setminus L_l)$ la función $f_l = f_{l-1}$, entonces sus puntos críticos son no-degenerados en C_{l-1} .

También si $p \in K_l \subseteq V_l$, entonces $\beta_l(p) = 1$. Por tanto, de la definición 2.21 tenemos $f_l(p) = T_l(p)$, por la proposición 2.6.1, f_l tiene todos sus puntos críticos no-degenerados en K_l . Concluimos entonces que los puntos críticos de f_l son no-degenerados en $C_l = \bigcup_{i=1}^l K_i$.

ii) f_l es $(\mathcal{C}^2, \varepsilon/n)$ -cercana de f_{l-1} en C_l , con ε arbitraria.

Observemos que en el caso en que $p \in \text{int}(M \setminus L_l)$ (dada la definición 2.21) f_l es igual a f_{l-1} , así que no hay nada que demostrar; sin embargo, en el caso de que $p \in L_l$ tenemos que:

a) Por demostrar $|f(p) - g(p)| < \varepsilon/n$.

Vemos que $(\phi_l)_i = x_i$, donde $(\phi_l)_i$ son las funciones coordenadas de la carta ϕ_l , éstas son un continuas y tienen dominio L_l compacto, entonces alcanzan su máximo en algún punto $p'_i \in L_l$ para cada $(\phi_l)_i$. Sea $m_0 = \max_{i=1, \dots, m} |(\phi_l)_i(p'_i)|$, con la definición de 2.21 y desigualdad del triángulo se tiene

$$\begin{aligned} |f_{l-1}(p) - f_l(p)| &= \left| f_{l-1}(p) - f_{l-1}(p) + \beta(p) \left(\sum_{i=1}^m a_i(\phi_l)_i(p) \right) \right| \\ &= \left| \beta(p) \sum_{i=1}^m a_i(\phi_l)_i(p) \right| \\ &\leq |\beta(p)| \sum_{i=1}^m |a_i(\phi_l)_i(p)|. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Ya que $0 \leq \beta \leq 1$ y $|(\phi_l)_i(p)| \leq m_0$ (pues m_0 es el máximo de las funciones coordenadas), entonces

$$\begin{aligned} |\beta(p)| \sum_{i=1}^m |a_i(\phi_l)_i(p)| &\leq 1 \cdot \sum_{i=1}^m |a_i| m_0 \\ &= m_0 \sum_{i=1}^m |a_i| \end{aligned} \quad (2.23)$$

Entonces de (2.22) y (2.23) tenemos que $|f_{l-1}(p) - f_l(p)| \leq m_0 \sum_{i=1}^m |a_i|$. Por lo tanto, si $\sum_{i=1}^m |a_i| < \varepsilon/(m_0 n)$, tenemos que $|f_{l-1}(p) - f_l(p)| < \varepsilon/n$. Así el inciso a) quedaría demostrado.

b) Por demostrar que $\left| \frac{\partial f_{l-1}}{\partial(\phi_l)_j}(p) - \frac{\partial f_l}{\partial(\phi_l)_j}(p) \right| < \varepsilon/n$, para toda $j \in \{1, \dots, m\}$.

En este inciso es importante recordar que dada una función coordenada entonces su derivada parcial es

$$\frac{\partial(\phi_l)_i}{\partial(\phi_l)_j}(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (2.24)$$

Ya que β es una función \mathcal{C}^∞ , entonces sus parciales son \mathcal{C}^∞ y van de una variedad compacta M en \mathbb{R} , por lo que cada derivada parcial alcanza su máximo en algún punto $p'_i \in M$ para toda $i \in \{1, \dots, m\}$.

Sea $m_1 = \max_{i=1, \dots, m} \left| \left(\frac{\partial \beta}{\partial(\phi_l)_i}(p'_i) \right) \right|$, tomando un índice $j \in \{1, \dots, m\}$ con la definición (2.21) y la linealidad de las derivadas parciales tenemos

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f_{l-1}}{\partial(\phi_l)_j}(p) - \frac{\partial f_l}{\partial(\phi_l)_j}(p) \right| &= \left| \frac{\partial f_{l-1}}{\partial(\phi_l)_j}(p) - \frac{\partial}{\partial(\phi_l)_j} \left(f_{l-1}(p) - \beta(p) \sum_{i=1}^m a_i(\phi_l)_i(p) \right) \right| \\ &= \left| \frac{\partial f_{l-1}}{\partial(\phi_l)_j}(p) - \frac{\partial f_{l-1}}{\partial(\phi_l)_j}(p) + \frac{\partial}{\partial(\phi_l)_j} \left(\beta(p) \sum_{i=1}^m a_i(\phi_l)_i(p) \right) \right| \\ &= \left| \frac{\partial}{\partial(\phi_l)_j} \left(\beta(p) \sum_{i=1}^m a_i(\phi_l)_i(p) \right) \right|. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Ahora, usando la regla de Leibniz tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial(\phi_l)_j} \left(\beta(p) \sum_{i=1}^m a_i(\phi_l)_i(p) \right) = \frac{\partial \beta}{\partial(\phi_l)_j}(p) \sum_{i=1}^m a_i(\phi_l)_i(p) + \beta(p) \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial(\phi_l)_i}{\partial(\phi_l)_j}(p). \quad (2.26)$$

Sustituyendo (2.26) en (2.25) y por la desigualdad del triángulo, entonces

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial f_{l-1}}{\partial(\phi_l)_j}(p) - \frac{\partial f_l}{\partial(\phi_l)_j}(p) \right| &= \left| \frac{\partial \beta}{\partial(\phi_l)_j}(p) \sum_{i=1}^m a_i x_i + \beta(p) \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial(\phi_l)_i}{\partial(\phi_l)_j}(p) \right| \\
&\leq \left| \frac{\partial \beta}{\partial(\phi_l)_j}(p) \right| \left| \sum_{i=1}^m a_i (\phi_l)_i(p) \right| + \left| \beta(p) \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial(\phi_l)_i}{\partial(\phi_l)_j}(p) \right| \\
&\leq \left| \frac{\partial \beta}{\partial(\phi_l)_j}(p) \right| \sum_{i=1}^m |a_i| |(\phi_l)_i(p)| + |\beta(p)| \sum_{i=1}^m \left| a_i \frac{\partial(\phi_l)_i}{\partial(\phi_l)_j}(p) \right|.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Recordamos que $|(\phi_l)_i(p)| \leq m_0$ para toda i , pues es el máximo de las funciones coordenadas. También $\left| \frac{\partial \beta}{\partial(\phi_l)_j}(p) \right| \leq m_1$ para toda j , pues es el máximo de las parciales de β . Por otro lado de (2.24) tenemos que $\sum_{i=1}^m \left| a_i \frac{\partial(\phi_l)_i}{\partial(\phi_l)_j}(p) \right| = |a_j|$, entonces la ecuación (2.27) queda

$$\left| \frac{\partial \beta}{\partial(\phi_l)_j}(p) \right| \sum_{i=1}^m |a_i| |(\phi_l)_i(p)| + |\beta(p)| \sum_{i=1}^m \left| a_i \frac{\partial(\phi_l)_i}{\partial(\phi_l)_j}(p) \right| \leq m_1 \sum_{i=1}^m |a_i| m_0 + |\beta(p)| |a_j|. \tag{2.28}$$

Ya que $0 \leq \beta \leq 1$ y $|a_j| \leq \sum_{i=1}^m |a_i|$, entonces $|\beta(p)| |a_j| \leq \sum_{i=1}^m |a_i|$, sustituimos en 2.28 y tenemos

$$\begin{aligned}
m_1 \sum_{i=1}^m |a_i| m_0 + |\beta(p)| |a_j| &\leq m_1 m_0 \sum_{i=1}^m |a_i| + \sum_{i=1}^m |a_i| \\
&= (m_1 m_0 + 1) \sum_{i=1}^m |a_i|.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Por lo tanto de (2.29), (2.28) y (2.27), tenemos que

$$\left| \frac{\partial f_{l-1}}{\partial(\phi_l)_j}(p) - \frac{\partial f_l}{\partial(\phi_l)_j}(p) \right| \leq (m_1 m_0 + 1) \sum_{i=1}^m |a_i|.$$

Si $\sum_{i=1}^m |a_i| < \varepsilon / (n(m_1 m_0 + 1))$, entonces $\left| \frac{\partial f_{l-1}}{\partial(\phi_l)_j}(p) - \frac{\partial f_l}{\partial(\phi_l)_j}(p) \right| < \varepsilon / n$.

- c) Por demostrar $\left| \frac{\partial^2 f_{l-1}}{\partial(\phi_l)_k \partial(\phi_l)_j}(p) - \frac{\partial^2 f_l}{\partial(\phi_l)_k \partial(\phi_l)_j}(p) \right| < \varepsilon / n$, para toda $k, j \in \{1, \dots, m\}$.

De nuevo, dado que β es \mathcal{C}^∞ , entonces las segundas derivadas parciales son continuas, y van de M en \mathbb{R} . Por ser M una variedad compacta, éstas alcanzan un máximo en algún punto $p_{jk}''' \in M$ para cada $j, k \in \{1, \dots, m\}$.

Definimos $m_2 = \max_{j, k \in \{1, \dots, m\}} \left| \left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial(\phi_l)_k \partial(\phi_l)_j}(p_{jk}''') \right) \right|$. Sean $j, k \in \{1, \dots, m\}$,

por definición de f_l tenemos

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial^2 f_{l-1}}{\partial(\phi_l)_k \partial(\phi_l)_j}(p) - \frac{\partial^2 f_l}{\partial(\phi_l)_k \partial(\phi_l)_j}(p) \right| \\ &= \left| \frac{\partial^2 f_{l-1}}{\partial(\phi_l)_k \partial(\phi_l)_j}(p) - \frac{\partial^2}{\partial(\phi_l)_k \partial(\phi_l)_j} \left(f_{l-1}(p) - \beta(p) \sum_{i=1}^m a_i(\phi_l)_i(p) \right) \right|. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Ahora usando la linealidad de la segunda derivada parcial tenemos que

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial^2 f_{l-1}}{\partial(\phi_l)_k \partial(\phi_l)_j}(p) - \frac{\partial^2}{\partial(\phi_l)_k \partial(\phi_l)_j} \left(f_{l-1}(p) - \beta(p) \sum_{i=1}^m a_i(\phi_l)_i(p) \right) \right| \\ &= \left| \frac{\partial^2 f_{l-1}}{\partial(\phi_l)_k \partial(\phi_l)_j}(p) - \frac{\partial^2 f_{l-1}}{\partial(\phi_l)_k \partial(\phi_l)_j}(p) + \frac{\partial^2}{\partial(\phi_l)_k \partial(\phi_l)_j} \left(\beta(p) \sum_{i=1}^m a_i(\phi_l)_i(p) \right) \right| \\ &= \left| \frac{\partial}{\partial(\phi_l)_k} \left(\frac{\partial}{\partial(\phi_l)_j} \left(\beta(p) \sum_{i=1}^m a_i(\phi_l)_i(p) \right) \right) \right|. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Por lo tanto, de (2.30) y (2.31), tenemos la ecuación

$$\left| \frac{\partial^2 f_{l-1}}{\partial(\phi_l)_k \partial(\phi_l)_j}(p) - \frac{\partial^2 f_l}{\partial(\phi_l)_k \partial(\phi_l)_j}(p) \right| = \left| \frac{\partial}{\partial(\phi_l)_k} \left(\frac{\partial}{\partial(\phi_l)_j} \left(\beta(p) \sum_{i=1}^m a_i(\phi_l)_i(p) \right) \right) \right|. \quad (2.32)$$

Sustituimos la ecuación (2.26) en (2.32), entonces

$$\left| \frac{\partial}{\partial(\phi_l)_k} \left(\frac{\partial}{\partial(\phi_l)_j} \left(\beta(p) \sum_{i=1}^m a_i(\phi_l)_i(p) \right) \right) \right| = \left| \frac{\partial}{\partial(\phi_l)_k} \left(\frac{\partial \beta}{\partial(\phi_l)_j}(p) \sum_{i=1}^m a_i(\phi_l)_i(p) + \beta(p) a_j \right) \right|. \quad (2.33)$$

Usamos la linealidad de la derivada parcial, entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial(\phi_l)_k} \left(\frac{\partial \beta}{\partial(\phi_l)_j}(p) \cdot \sum_{i=1}^m a_i x_i + \beta(p) \cdot a_j \right) &= \frac{\partial}{\partial(\phi_l)_k} \left(\frac{\partial \beta}{\partial(\phi_l)_j}(p) \cdot \sum_{i=1}^m a_i x_i \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial(\phi_l)_k} (\beta(p) a_j) \\ &= \frac{\partial}{\partial(\phi_l)_k} \left(\frac{\partial \beta}{\partial(\phi_l)_j}(p) \cdot \sum_{i=1}^m a_i x_i \right) \\ &\quad + a_j \frac{\partial \beta}{\partial(\phi_l)_k}(p). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Por otro lado, por la regla del producto tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial(\phi_l)_k} \left(\frac{\partial\beta}{\partial(\phi_l)_j}(p) \cdot \sum_{i=1}^m a_i x_i \right) &= \frac{\partial^2\beta}{\partial(\phi_l)_k \partial(\phi_l)_j}(p) \sum_{i=1}^m a_i (\phi_l)_i(p) \\ &+ \frac{\partial\beta}{\partial(\phi_l)_j}(p) \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial(\phi_l)_i}{\partial(\phi_l)_k}(p). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Haciendo uso de la igualdad (2.24) en (2.35), obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial(\phi_l)_k} \left(\frac{\partial\beta}{\partial(\phi_l)_j}(p) \cdot \sum_{i=1}^m a_i x_i \right) &= \frac{\partial^2\beta}{\partial(\phi_l)_k \partial(\phi_l)_j}(p) \sum_{i=1}^m a_i (\phi_l)_i(p) \\ &+ \frac{\partial\beta}{\partial(\phi_l)_j}(p) \cdot a_k. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Sustituimos (2.36) en (2.34), con valor absoluto nos da

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\partial}{\partial(\phi_l)_k} \left(\frac{\partial\beta}{\partial(\phi_l)_j}(p) \sum_{i=1}^m a_i (\phi_l)_i(p) + \beta(p) a_j \right) \right| \\ &= \left| \frac{\partial^2\beta}{\partial(\phi_l)_k \partial(\phi_l)_j}(p) \sum_{i=1}^m a_i (\phi_l)_i(p) + a_k \frac{\partial\beta}{\partial(\phi_l)_j}(p) + a_j \frac{\partial\beta}{\partial(\phi_l)_k}(p) \right|. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Usando la desigualdad del triángulo tenemos que

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\partial^2\beta}{\partial(\phi_l)_k \partial(\phi_l)_j}(p) \sum_{i=1}^m a_i (\phi_l)_i(p) + a_k \frac{\partial\beta}{\partial(\phi_l)_j}(p) + a_j \frac{\partial\beta}{\partial(\phi_l)_k}(p) \right| \\ &\leq \left| \frac{\partial^2\beta}{\partial(\phi_l)_k \partial(\phi_l)_j}(p) \sum_{i=1}^m a_i (\phi_l)_i(p) \right| + \left| \frac{\partial\beta}{\partial(\phi_l)_j}(p) a_k \right| + \left| a_j \frac{\partial\beta}{\partial(\phi_l)_k}(p) \right|. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Recordando la definición de m_0 , m_1 y m_2 tenemos que $\left| \frac{\partial\beta}{\partial(\phi_l)_i}(p) \right| \leq m_1$, $\left| \frac{\partial^2\beta}{\partial(\phi_l)_k \partial(\phi_l)_j}(p) \right| \leq m_2$ y $|(\phi_l)_j(p)| \leq m_0$ para toda $j, k \in \{1, \dots, m\}$, entonces, aplicado a (2.38) se tiene

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\partial^2\beta}{\partial(\phi_l)_k \partial(\phi_l)_j}(p) \sum_{i=1}^m a_i (\phi_l)_i(p) \right| + \left| \frac{\partial\beta}{\partial(\phi_l)_j}(p) a_k \right| + \left| a_j \frac{\partial\beta}{\partial(\phi_l)_k}(p) \right| \\ &\leq m_2 \sum_{i=1}^m |a_i| m_0 + m_1 a_k + m_1 a_j \\ &\leq m_2 m_0 \sum_{i=1}^m |a_i| + m_1 \sum_{i=1}^m |a_i| + m_1 \sum_{i=1}^m |a_i| \\ &= (m_2 m_0 + 2m_1) \sum_{i=1}^m |a_i|. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Por lo tanto de (2.39), (2.38), (2.37) en (2.30), tenemos que

$$\left| \frac{\partial^2 f_{l-1}}{\partial(\phi_l)_k \partial(\phi_l)_j}(p) - \frac{\partial^2 f_l}{\partial(\phi_l)_k \partial(\phi_l)_j}(p) \right| \leq (m_2 m_0 + 2m_1) \sum_{i=1}^m |a_i|.$$

Si $\sum_{i=1}^m |a_i| < \varepsilon/n(m_2 m_0 + 2m_1)$, entonces

$$\left| \frac{\partial^2 f_{l-1}}{\partial(\phi_l)_k \partial(\phi_l)_j}(p) - \frac{\partial^2 f_l}{\partial(\phi_l)_k \partial(\phi_l)_j}(p) \right| < \varepsilon/n.$$

De los resultados en a), b) y c) podemos ver que si damos $\varepsilon > 0$, y definimos $\varepsilon'_l = \min\{\varepsilon/(nm_0), \varepsilon/n(m_0 m_1 + 1), \varepsilon/n(m_0 m_2 + 2m_1)\}$, elegimos a_1, \dots, a_m reales tales que

$$\sum_{i=1}^m |a_i| < \varepsilon'_l,$$

se concluye que, f_l es $(\mathcal{C}^2, \varepsilon/n)$ -cercana a f_{l-1} .

Aún tenemos que fijarnos qué pasa en el caso de que algún compacto con índice s , menor a l , tenga intersección no vacía con L_l . En ese caso, tenemos que ver lo que pasa en el cambio de cartas, es decir, hacer que la resta de las derivadas parciales y las segundas derivadas parciales de f_l y f_{l-1} , respecto a la carta (U_s, ϕ_s) , sean menores que ε . Para esto sólo restaría analizar la situación de los dos últimos incisos en la definición 2.6.2, pues para el primer inciso no usamos cambios de carta. Así, hacemos los incisos restantes:

b') Por demostrar $\left| \frac{\partial f}{\partial(\phi_s)_j}(p) - \frac{\partial g}{\partial(\phi_s)_j}(p) \right| < \varepsilon/n$, para toda $j \in \{1, \dots, m\}$.

Análogamente al inciso a), tenemos

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f_{l-1}}{\partial(\phi_s)_j}(p) - \frac{\partial f_l}{\partial(\phi_s)_j}(p) \right| &= \left| \frac{\partial f_{l-1}}{\partial(\phi_s)_j}(p) - \frac{\partial}{\partial(\phi_s)_j} \left(f_{l-1}(p) - \beta(p) \sum_{i=1}^m a_i (\phi_l)_i(p) \right) \right| \\ &\leq \left| \frac{\partial \beta}{\partial(\phi_s)_j}(p) \sum_{i=1}^m a_i (\phi_l)_i(p) + \beta(p) \cdot \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial(\phi_l)_i}{\partial(\phi_s)_j}(p) \right|. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Ya que los cambios de carta son \mathcal{C}^∞ , entonces son continuas y van del compacto M en \mathbb{R} , por lo que alcanzan un máximo en algún punto $q'_{ij} \in M$.

Sea $s_1 = \max_{j,i \in \{1, \dots, m\}} \left\{ \left| \frac{\partial(\phi_l)_i}{\partial(\phi_s)_j} \right| \right\}$.

El cambio de cartas no afecta la existencia del máximo para las parciales de β , sea m'_1 el máximo de la parcial de β respecto a la carta ϕ_s , con esto y la desigualdad (2.40) tenemos

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f_{l-1}}{\partial(\phi_s)_j}(p) - \frac{\partial f_l}{\partial(\phi_s)_j}(p) \right| &\leq m'_1 m_0 \sum_{i=1}^m |a_i| + s_1 \sum_{i=1}^m |a_i| \\ &= (m'_1 m_0 + s_1) \sum_{i=1}^m |a_i|. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si pedimos que $\sum_{i=1}^m |a_i| < \varepsilon/n(m'_1 m_0 + s_1)$, entonces

$$\left| \frac{\partial f_{l-1}}{\partial(\phi_s)_j}(p) - \frac{\partial f_l}{\partial(\phi_s)_j}(p) \right| < \varepsilon/n.$$

c') Por demostrar $\left| \frac{\partial^2 f_{l-1}}{\partial(\phi_s)_k \partial(\phi_s)_j}(p) - \frac{\partial^2 f_l}{\partial(\phi_s)_k \partial(\phi_s)_j}(p) \right| < \varepsilon/n$, para cualquier $k, j \in \{1, \dots, m\}$.

De manera similar, las segundas derivadas parciales en el cambio de cartas son continuas con dominio M compacto, luego $\frac{\partial^2(\phi_l)_i}{\partial(\phi_s)_k \partial(\phi_s)_j}$ alcanzan su máximo en $q''_{ijk} \in M$ para toda $i, j, k \in \{1, \dots, m\}$. Definimos $s_2 = \max_{i,j,k \in \{1, \dots, m\}} \left| \left(\frac{\partial^2(\phi_l)_i}{\partial(\phi_s)_k \partial(\phi_s)_j}(q''_{ijk}) \right) \right|$.

Por otro lado, ya que β es \mathcal{C}^∞ , entonces las segundas derivadas parciales de la función son continuas, así éstas alcanzan su máximo en algún punto $q'''_{jk} \in M$, para toda j, k . Sea $m'_2 = \max_{j,k \in \{1, \dots, m\}} \left| \left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial(\phi_s)_k \partial(\phi_s)_j}(q'''_{jk}) \right) \right|$; por definición y desigualdad del triángulo tenemos

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial^2 f_{l-1}}{\partial(\phi_s)_k \partial(\phi_s)_j}(p) - \frac{\partial^2 f_l}{\partial(\phi_s)_k \partial(\phi_s)_j}(p) \right| \\ & \leq \left| \frac{\partial}{\partial(\phi_s)_k} \left(\frac{\partial \beta}{\partial(\phi_s)_j}(p) \sum_{i=1}^m a_i(\phi_l)_i(p) + \beta(p) \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial(\phi_l)_i(p)}{\partial(\phi_s)_j}(p) \right) \right| \\ & = \left| \frac{\partial}{\partial(\phi_s)_k} \left(\frac{\partial \beta}{\partial(\phi_s)_j}(p) \sum_{i=1}^m a_i(\phi_l)_i(p) \right) + \frac{\partial}{\partial(\phi_s)_k} \left(\beta(p) \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial(\phi_l)_i(p)}{\partial(\phi_s)_j}(p) \right) \right| \\ & \leq \left| \frac{\partial}{\partial(\phi_s)_k} \left(\frac{\partial \beta}{\partial(\phi_s)_j}(p) \sum_{i=1}^m a_i(\phi_l)_i(p) \right) \right| + \left| \frac{\partial}{\partial(\phi_s)_k} \left(\beta(p) \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial(\phi_l)_i(p)}{\partial(\phi_s)_j}(p) \right) \right| \end{aligned} \quad (2.41)$$

Ahora usamos la regla de producto para la derivada parcial

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial(\phi_s)_k} \left(\frac{\partial \beta}{\partial(\phi_s)_j}(p) \sum_{i=1}^m a_i(\phi_l)_i(p) \right) &= \frac{\partial^2 \beta}{\partial(\phi_s)_k \partial(\phi_s)_j}(p) \sum_{i=1}^m a_i(\phi_l)_i(p) \\ & \quad + \frac{\partial \beta}{\partial(\phi_s)_j}(p) \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial(\phi_l)_i(p)}{\partial(\phi_s)_k}(p), \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial(\phi_s)_k} \left(\beta(p) \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial(\phi_l)_i(p)}{\partial(\phi_s)_j}(p) \right) &= \frac{\partial \beta}{\partial(\phi_s)_k}(p) \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial(\phi_l)_i(p)}{\partial(\phi_s)_j}(p) \\ & \quad + \beta(p) \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial^2(\phi_l)_i(p)}{\partial(\phi_s)_k \partial(\phi_s)_j}(p) \end{aligned} \quad (2.43)$$

En (2.42) con valor absoluto, por la desigualdad del triángulo tenemos

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial^2 \beta}{\partial(\phi_s)_k \partial(\phi_s)_j}(p) \sum_{i=1}^m a_i (\phi_l)_i(p) + \frac{\partial \beta}{\partial(\phi_s)_j}(p) \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial(\phi_l)_i(p)}{\partial(\phi_s)_k}(p) \right| \\ & \leq \left| \frac{\partial^2 \beta}{\partial(\phi_s)_k \partial(\phi_s)_j}(p) \right| \sum_{i=1}^m |a_i| |(\phi_l)_i(p)| + \left| \frac{\partial \beta}{\partial(\phi_s)_j}(p) \right| \sum_{i=1}^m |a_i| \left| \frac{\partial(\phi_l)_i(p)}{\partial(\phi_s)_k}(p) \right| \end{aligned} \quad (2.44)$$

Tenemos que $\left| \frac{\partial^2 \beta}{\partial(\phi_s)_k \partial(\phi_s)_j}(p) \right| \leq m'_2$, $|(\phi_l)_i(p)| \leq m_0$, $\left| \frac{\partial \beta}{\partial(\phi_s)_j}(p) \right| \leq m'_1$ y $\left| \frac{\partial(\phi_l)_i(p)}{\partial(\phi_s)_k}(p) \right| \leq s_1$ para toda $i, j, k \in \{1, \dots, m\}$, así

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial^2 \beta}{\partial(\phi_s)_k \partial(\phi_s)_j}(p) \right| \sum_{i=1}^m |a_i| |(\phi_l)_i(p)| + \left| \frac{\partial \beta}{\partial(\phi_s)_j}(p) \right| \sum_{i=1}^m |a_i| \left| \frac{\partial(\phi_l)_i(p)}{\partial(\phi_s)_k}(p) \right| \\ & \leq m'_2 m_0 \sum_{i=1}^m |a_i| + m'_1 s_1 \sum_{i=1}^m |a_i| \end{aligned} \quad (2.45)$$

Por lo tanto de (2.45), (2.44) en (2.42), tenemos que

$$\left| \frac{\partial}{\partial(\phi_s)_k} \left(\frac{\partial \beta}{\partial(\phi_s)_j}(p) \sum_{i=1}^m a_i (\phi_l)_i(p) \right) \right| \leq m'_2 m_0 \sum_{i=1}^m |a_i| + m'_1 s_1 \sum_{i=1}^m |a_i|. \quad (2.46)$$

Análogamente en (2.43) vemos que

$$\left| \beta(p) \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial^2(\phi_l)_i(p)}{\partial(\phi_s)_k \partial(\phi_s)_j}(p) \right| \leq m'_1 s_1 \sum_{i=1}^m |a_i| + s_2 \sum_{i=1}^m |a_i|. \quad (2.47)$$

Por lo tanto, de (2.47) y (2.46), en (2.41) implica que

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 f_{l-1}}{\partial(\phi_s)_k \partial(\phi_s)_j}(p) - \frac{\partial^2 f_l}{\partial(\phi_s)_k \partial(\phi_s)_j}(p) \right| & \leq m'_2 m_0 \sum_{i=1}^m |a_i| + m'_1 s_1 \sum_{i=1}^m |a_i| \\ & \quad + m'_1 s_1 \sum_{i=1}^m |a_i| + s_2 \sum_{i=1}^m |a_i| \\ & = (m'_2 m_0 + 2m'_1 s_1 + s_2) \sum_{i=1}^m |a_i|. \end{aligned}$$

De la desigualdad anterior, si pedimos $\sum_{i=1}^m |a_i| < \varepsilon/n(m'_2 m_0 + 2m'_1 s_1 + s_2)$, entonces $\left| \frac{\partial^2 f_{l-1}}{\partial(\phi_s)_k \partial(\phi_s)_j}(p) - \frac{\partial^2 f_l}{\partial(\phi_s)_k \partial(\phi_s)_j}(p) \right| < \varepsilon/n$. Sea

$$\varepsilon'_l = \text{mín} \{ \varepsilon/(m'_2 m_0 + 2m'_1 s_1 + s_2), \varepsilon/(m'_1 m_0 + s_1) \},$$

si $\sum_{i=1}^m |a_i| < \text{mín} \{ \varepsilon'_l, \varepsilon'_l \}$, concluimos que f_l es $(\mathcal{C}^2, \varepsilon/n)$ -cercana a f_{l-1} . Ya que hemos demostrado que para toda $l \in \{1, \dots, n\}$, f_l es $(\mathcal{C}^2, \varepsilon/n)$ -cercana a f_{l-1} . Ahora definiremos la función f y demostraremos que es \mathcal{C}^2 -cercana a g .

iii) Definición de la función f .

Definimos $f = f_n$. Como tiene sus puntos críticos no degenerados en el conjunto $C_n = \bigcup_{i=1}^n K_i = M$, luego es de Morse. Para demostrar que es cercana a g observamos lo siguiente.

a) Por demostrar que $|f(p) - g(p)| < \varepsilon$.

Tenemos que $f_n - f_0 = f_n - f_{1-1} + f_{1-1} - f_0$, si aplicamos esto con f_1, \dots, f_n tenemos que $f_n - f_0 = \sum_{i=0}^{n-1} f_{i+1} - f_i$. Ahora con la desigualdad del triángulo tenemos que

$$|f(p) - g(p)| = |f_n(p) - f_0(p)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |f_{i+1}(p) - f_i(p)|$$

Por el inciso i) tenemos que $|f_{i+1} - f_i| < \varepsilon/n$ para toda i , entonces

$$\begin{aligned} |f(p) - g(p)| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} |f_{i+1}(p) - f_i(p)| \\ &< \sum_{i=0}^{n-1} (\varepsilon/n) = n(\varepsilon/n). \end{aligned}$$

b) $\left| \frac{\partial f}{\partial \phi_i}(p) - \frac{\partial g}{\partial \phi_i}(p) \right| < \varepsilon$, para toda $i \in \{1, \dots, m\}$.

De manera análoga al inciso a), tenemos que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \phi_i}(p) - \frac{\partial g}{\partial \phi_i}(p) \right| \leq \sum_{i=0}^n \left| \frac{\partial f_{i+1}}{\partial \phi_i}(p) - \frac{\partial f_i}{\partial \phi_i}(p) \right|.$$

Por el inciso ii), tenemos que $\left| \frac{\partial f_{i+1}}{\partial(\phi_i)_j}(p) - \frac{\partial f_i}{\partial(\phi_i)_j}(p) \right| < \varepsilon$, para toda i . Entonces,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \phi_i}(p) - \frac{\partial g}{\partial \phi_i}(p) \right| \leq \sum_{i=0}^n \left| \frac{\partial f_{i+1}}{\partial \phi_i}(p) - \frac{\partial f_i}{\partial \phi_i}(p) \right| < \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon/n = \varepsilon.$$

c) $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial \phi_i \partial \phi_j}(p) - \frac{\partial^2 g}{\partial \phi_i \partial \phi_j}(p) \right| < \varepsilon/n$ para toda $i, j \in \{1, \dots, m\}$.

Análogamente a a) y b) vemos $\left| \frac{\partial^2 f_{i+1}}{\partial(\phi_i)_k \partial(\phi_i)_j}(p) - \frac{\partial^2 f_i}{\partial(\phi_i)_k \partial(\phi_i)_j}(p) \right| < \varepsilon/n$ para toda i . Por lo tanto, tenemos

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial \phi_j \partial \phi_i}(p) - \frac{\partial^2 g}{\partial \phi_j \partial \phi_i}(p) \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \left| \frac{\partial^2 f_{i+1}}{\partial \phi_j \partial \phi_i}(p) - \frac{\partial^2 f_i}{\partial \phi_j \partial \phi_i}(p) \right| < \varepsilon.$$

Como ε es arbitraria, podemos concluir que f es \mathcal{C}^2 -cercana a g .

□

Notemos que la cercanía es arbitraria, además de que la fuerza de este teorema está en que podríamos dar incluso una función constante que claramente es \mathcal{C}^2 , el resultado nos asegura que hay una función de Morse cercana a la constante.

2.2. Caracterización de variedades

En esta sección daremos una clasificación topológica de las variedades compactas. Para iniciar usaremos los campos vectoriales, empezando por recordar al campo gradiente, que es un campo donde los coeficientes en la base son las parciales de una función definida en la variedad.

Sean M una m -variedad diferenciable compacta, y f una función de Morse definida en M , por el corolario 2.3.2 hay una cantidad finita de puntos críticos de f en M . Sean p_1, \dots, p_n los puntos críticos de f , con n natural positivo. Si λ_j es la signatura de p_j , también denotamos a los valores críticos como $f(p_j) = c_j$, entonces el lema de Morse dice que, podemos ver a f en una carta (U_j, ϕ_j) de p_j punto crítico como

$$f = - \sum_{i=1}^{\lambda_j} (\phi_j)_i^2 + \sum_{i=\lambda_j+1}^m (\phi_j)_i^2 + c_j. \quad (2.48)$$

Derivamos la función y tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial (\phi_j)_k} &= \frac{\partial}{\partial (\phi_j)_k} \left(- \sum_{i=1}^{\lambda_j} (\phi_j)_i^2 + \sum_{i=\lambda_j+1}^m (\phi_j)_i^2 + c_j \right) \\ &= - \sum_{i=1}^{\lambda_j} \frac{\partial (\phi_j)_i^2}{\partial (\phi_j)_k} + \sum_{i=\lambda_j+1}^m \frac{\partial (\phi_j)_i^2}{\partial (\phi_j)_k} + \frac{\partial c_j}{\partial (\phi_j)_k} \\ &= \pm 2(\phi_j)_k. \end{aligned} \quad (2.49)$$

El signo es negativo si $0 < k \leq \lambda_j$ y es positivo si $\lambda_j + 1 \leq k \leq m$. Por lo tanto, el campo gradiente de f , dentro del abierto U_j es

$$v_f = - \sum_{i=1}^{\lambda_j} 2(\phi_j)_i \frac{\partial}{\partial (\phi_j)_i} + \sum_{i=\lambda_j+1}^m 2(\phi_j)_i \frac{\partial}{\partial (\phi_j)_i}.$$

Pensando en este campo vectorial y aplastando un poco de dimensión en los ejes coordenados de \mathbb{R}^m , podemos tener los casos que se muestran en la figura 2.1, dependiendo de la signatura del punto p_j .

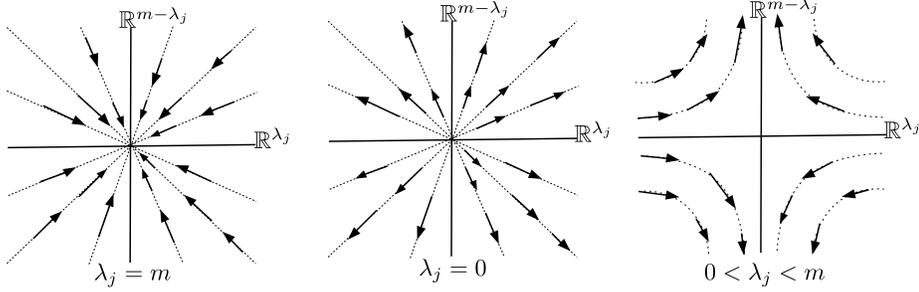


Figura 2.1: Casos de un campo vectorial para una $sig(p_j) = \lambda_j$

En la figura 2.1, en el caso de la signatura igual a m , se dice que p_j es un punto tipo nodo atractor; en el caso de la signatura igual a 0 se dice que es nodo repulsor y si la signatura no es ninguno de estos dos le decimos un punto tipo silla.

Más adelante se verá que esta manera de ver a la variedad dará información global para identificarla. Daremos primero una definición de los campos vectoriales que alrededor de puntos críticos se pueden ver geoméricamente como en la figura 2.1.

Definición 2.8. Sea M una m -variedad, v un campo vectorial en M y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse. Decimos que v es del tipo gradiente de f , si se cumple que:

- I) $(v \cdot f)(p) > 0$ para todo p que no es punto crítico (i.e. la derivada de Lie es positiva donde no hay puntos críticos).
- II) Si p es punto crítico de f , entonces existe (U, ϕ) carta tal que el campo localmente se ve como

$$v(q) = - \sum_{i=1}^{\lambda} 2\phi_i(q) \frac{\partial}{\partial \phi_i} + \sum_{i=\lambda+1}^m 2\phi_i(q) \frac{\partial}{\partial \phi_i}.$$

Para toda $q \in U$ y donde λ es la signatura de p .

Ahora el siguiente teorema nos dice que teniendo una función de Morse inmediatamente tenemos un campo del tipo gradiente.

Teorema 2.9. Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de Morse, con M compacta. Existe v un campo vectorial tipo gradiente para f .

Demostración. Como M es compacta entonces hay una cantidad finita de puntos críticos, sean p_0, \dots, p_n los puntos críticos, tomamos U_1, \dots, U_n abiertos tal que f se ve localmente como en (2.48).

Sea \mathfrak{A} atlas de M , tomamos la siguiente familia de abiertos en la variedad $\{U \subseteq M \mid (U, \phi) \in \mathfrak{A}, p_i \notin U, \text{ para toda } i\} \cup \{U_1, \dots, U_n\}$. Por construcción, la

familia es cubierta abierta de M , por la compacidad, hay una cantidad finita de elementos de la familia que la cubren. Pero, por la manera de tomar la familia, los abiertos U_i de los puntos críticos p_i necesariamente están en la subcubierta finita. Suponiendo que hay s elementos del otro uniendo tenemos que si $n + s = N$, entonces

$$M \subseteq \bigcup_{i=1}^N U_i.$$

Ahora recordando la construcción 1, podemos crear K_1, \dots, K_N compactos que cubran a M y $K_i \subseteq U_i$, para toda i .

De esta manera, tomamos para cada carta (U_i, ϕ_i) , el campo v_i definido como

$$v_i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial(\phi_i)_j} \cdot \frac{\partial}{\partial(\phi_i)_j}.$$

De manera que hay N campos vectoriales definidos en U_1, \dots, U_N , los abiertos correspondientes, para juntarlos usaremos el lema 1.11.1 en los N abiertos, es decir. Para cada abierto U_i y compacto K_i existe $\beta_i : M \rightarrow \mathbb{R}$ función \mathcal{C}^∞ y existen $K_i \subseteq V_i \subseteq L_i \subseteq U_i$ donde V_i abierto y L_i compacto, tales que:

- $\beta_i \equiv 0$ en $M \setminus L_i$.
- $\beta_i \equiv 1$ en V_i .

Definimos el campo vectorial

$$v(p) = \sum_{i=1}^N \beta_i(p) v_i(p).$$

Demostraremos que este campo es del tipo gradiente de f .

Para demostrar I) en la definición 2.8, consideremos un punto $p \in M$ que no sea punto crítico, entonces hay al menos una derivada parcial no cero en p , es decir, para alguna $i \in \{1, \dots, N\}$ tenemos que

$$v_i \cdot f(p) = \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial(\phi_i)_j}(p) \right)^2 > 0.$$

Entonces $v \cdot f(p) \geq v_i \cdot f(p) > 0$, por lo que $v \cdot f(p) > 0$ y eso concluye el inciso I).

Para el inciso II), si $p = p_i$ es punto crítico, entonces en su respectiva carta, por el Lema de Morse f se ve localmente como (2.48). Sea $q \in V_i$, recordando la definición del campo gradiente en la sección 1.2 y por (2.49), tenemos que

$$\begin{aligned} v_i(q) &= \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial \phi_i}(q) \frac{\partial}{\partial(\phi_i)_j} \\ &= - \sum_{j=1}^{\lambda_i} 2(\phi_i)_j(q) \frac{\partial}{\partial(\phi_i)_j} + \sum_{j=\lambda_i}^m 2(\phi_i)_j(q) \frac{\partial}{\partial(\phi_i)_j}. \end{aligned}$$

Sea V' vecindad de p suficientemente pequeña de manera que $V' \cap V_l = \emptyset$, para toda $l \neq i$, entonces $h_l(q) = 0$. Por consiguiente,

$$v(q) = - \sum_{j=1}^{\lambda_i} 2(\phi_i)_j(q) \frac{\partial}{\partial(\phi_i)_j} + \sum_{j=\lambda_i}^m 2(\phi_i)_j(q) \frac{\partial}{\partial(\phi_i)_j}.$$

En tal caso $U = V'$.

Por lo tanto v es un campo del tipo gradiente de f . \square

En otras palabras, este teorema nos dice que en toda variedad compacta hay un campo vectorial que tiene puntos críticos con comportamiento tipo silla o nodo.

Para nuestro siguiente resultado hablaremos de la **sección** de una variedad, si $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ función de Morse y $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq b$, la sección es

$$M_{[a,b]} := \{p \in M \mid a \leq f(p) \leq b\}.$$

Si $a = b$, entonces a esta sección se le conoce como la curva de nivel a de f .

Podemos empezar a hacer nuestra clasificación por secciones. Para esto veremos que si en una sección donde no hay puntos críticos de f , entonces no debe haber ningún cambio en la forma de la variedad al ir pasando por las curvas de nivel de f . Antes presentaremos dos teoremas importantes para la demostración del primer teorema de identificación.

Teorema 2.10. *(Teorema de existencia y unicidad) Sea v campo vectorial en $U \subseteq M$ abierto y $p_0 \in U$, entonces existe $U_0 \subseteq U$, $\varepsilon > 0$, tal que para todo $q \in U_0$ existe $\alpha : [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \rightarrow U_0$ curva integral del campo v y $\alpha(t_0) = q$, y para toda $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ tenemos que $\frac{d\alpha}{dt}(t) = v(\alpha(t)) = v(q)$. Aún más, la solución es única y depende diferenciablemente de la condición inicial q .*

La demostración de este teorema puede ser vista en [1]. El resultado nos ayudará a ver que en un campo vectorial existen las curvas integrales. El siguiente teorema nos dirá cómo se ven las soluciones de la ecuación definida por el campo vectorial bajo un cambio de cartas, cuando no hay punto críticos en el campo vectorial definido.

Teorema 2.11. *(Teorema de rectificación) Sea v campo vectorial definido en U abierto de M , tal que $v(p) \neq \bar{0}$ para todo $p \in U$, entonces existe $V \subseteq U$ y $\psi : V \rightarrow \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^m$ tal que $d_v\psi = e_1 = \frac{\partial}{\partial\phi_1}$.*

De hecho si v es k -diferenciable, entonces ψ es k -diferenciable.

Demostración. Como v es campo vectorial en U , podemos tomar ϕ la función correspondiente al abierto U , sea $p_0 \in U$ y $v(p_0) = (v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{R}^m$, por hipótesis $v(p_0) \neq \bar{0}$; supongamos sin pérdida de generalidad que $v_1 \neq 0$. Ahora si p es un punto en la variedad, por el teorema 2.10 existe la solución con condición inicial p . Sea $\alpha_p(t)$ dicha solución, luego $\alpha_p(t_0) = p$.

Definimos a $T : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ dada por $T(p, t) = \alpha_p(t)$, como las soluciones dependen diferenciablemente de la condición inicial y también de la variable t , cada α es diferenciable, entonces T es diferenciable. Haciendo un cálculo de su derivada tenemos que

$$\frac{dT}{dt}(t_0, p) = \frac{d\alpha_p}{dt}(t_0) = v(p).$$

Para las demás derivadas parciales de α calculamos la expansión de Taylor de la función $(\phi \circ \alpha) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$, tenemos que

$$\begin{aligned} (\phi \circ \alpha_p)(t) &= \phi(\alpha_p(t_0)) + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{t^i}{i!} \right) \frac{\partial^i(\phi \circ \alpha_p)}{\partial t}(t_0) \\ &= \phi(p) + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{t^i}{i!} \right) \frac{\partial^i(\phi \circ \alpha_p)}{\partial t}(t_0) \end{aligned}$$

Entonces, la j -ésima derivada parcial de la transformación T es por definición

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \phi_i}(t, p) &= \frac{\partial \alpha_p}{\partial \phi_i}(t_0) \\ &= \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left(\phi(p) + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{t^i}{i!} \right) \frac{\partial^i(\phi \circ \alpha_p)}{\partial t}(t_0) \right). \end{aligned}$$

Por consiguiente, por la linealidad de la derivada parcial tenemos

$$\frac{\partial T}{\partial \phi_i}(t, p) = \frac{\partial}{\partial \phi_i}(\phi(p)) + \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{t^i}{i!} \right) \frac{\partial^i(\phi \circ \alpha_p)}{\partial t}(t_0) \right).$$

Notemos que $\frac{\partial^i(\phi \circ \alpha_p)}{\partial t}(t_0)$ es constante, y que t no depende de la carta. Entonces, $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^i}{i!} \frac{\partial^i(\phi \circ \alpha_p)}{\partial t}(t_0)$ también es constante para la parcial de ϕ_i , por lo tanto

$$\frac{\partial}{\partial \phi_i} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{t^i}{i!} \right) \frac{\partial^i(\phi \circ \alpha_p)}{\partial t}(t_0) \right) = 0.$$

Así, $\frac{\partial T}{\partial \phi_i}(t, p) = \frac{\partial \phi}{\partial \phi_i}(p)$, que por la ecuación 2.24 tenemos que en realidad es el vector e_i . Con esto la matriz derivada de T es

$$D_{(0,p)}T = \begin{bmatrix} v_1(p) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ v_2(p) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ v_3(p) & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ v_m(p) & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Hemos supuesto que $v_1(p_0) \neq 0$, entonces $\det(D_{(0,p_0)}T) \neq 0$ por el teorema de la función inversa hay una vecindad $V' \subseteq U$ donde T es un difeomorfismo (tiene una inversa diferenciable). Observamos que

$$D_{(0,p)}T(e_1) = v(p).$$

Por lo tanto, el cambio de cartas que buscamos es $\psi = T^{-1}$, con el abierto $V = T(V')$. \square

Presentaremos así el primer teorema de identificación en caso de que una función no tenga puntos críticos.

Teorema 2.12. *Sea M una variedad compacta, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de Morse, $a < b$ reales tales que en $M_{[a,b]}$ no hay puntos críticos de f , entonces $M_{[a,b]}$ es difeomorfa a $f^{-1}(\{a\}) \times [0, 1]$.*

Demostración. Tomamos un campo vectorial v del tipo gradiente de f , sabemos que este campo no tiene puntos críticos en la sección, es decir, $v(p) \neq 0$ pues no hay puntos críticos de f en la sección, aún más $v_f \cdot f > 0$, sea (U, ϕ) carta en $M_{[a,b]}$, notamos que la forma de v es

$$v(p) = \sum_{i=1}^m v_i(p) \frac{\partial}{\partial \phi_i}.$$

Definiremos un nuevo campo vectorial w tal que su derivada de Lie sea 1, lo que querrá decir que la proyección del campo w en el gradiente es constante y positiva; entonces las soluciones de la ecuación diferencial definida por el campo vectorial avanzarán de manera constante sobre las las curvas de nivel de f . Sea w el campo definido como

$$w(p) = \frac{1}{(v \cdot f)(p)} v(p).$$

Hacemos el cálculo para la derivada de Lie del campo w

$$\begin{aligned} (w \cdot f)(p) &= \sum_{i=1}^m \frac{1}{(v \cdot f)(p)} v_i(p) \frac{\partial f}{\partial \phi_i} \\ &= \frac{1}{(v \cdot f)(p)} \sum_{i=1}^m v_i(p) \frac{\partial f}{\partial \phi_i} \\ &= \frac{1}{(v \cdot f)(p)} (v \cdot f)(p) = 1. \end{aligned}$$

Si $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow M_{[a,b]}$ es solución de la ecuación diferencial definida por el campo w , entonces la derivada de la función $(f \circ \alpha)$ por la regla de la cadena tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}(t) &= \frac{d(f \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \alpha)}{dt}(t) \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}(\phi(\alpha(t))) \cdot \frac{d(\phi^{-1} \circ \alpha)}{dt}(t) \end{aligned}$$

Recordando que α es solución de la ecuación diferencial definida por el campo w , entonces $\frac{d(\phi^{-1} \circ \alpha)}{dt}(t) = w(\alpha(t)) = \frac{1}{(v \cdot f)(p)}(v_1(\alpha(t)), \dots, v_m(\alpha(t)))$, por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}(t) &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial \phi_i}(\alpha(t)) \cdot \frac{1}{(v \cdot f)(\alpha(t))} v_i(\alpha(t)) \\ &= \frac{1}{(v \cdot f)(p)}(v \cdot f)(p) = 1. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Del estudio de curvas en \mathbb{R}^m sabemos que si una curva está contenida en las curvas de nivel de una función, entonces la derivada de Lie vale cero, con esto y (2.50) concluimos que las soluciones de este campo son transversales a las curvas de nivel de f . Aún más, este movimiento es creciente pues la derivada de Lie en la curva es positiva.

Ahora tomamos un punto p_0 en la imagen inversa de $a \in \mathbb{R}$. Por el teorema 2.11 hay una vecindad V'_0 donde el campo se ve como el campo que tiene cero en todas su entradas excepto en la primera. Luego por el teorema 2.10, hay una vecindad $V_0 \subseteq V'_0$ y ε_0 donde existen las curvas integrales del campo vectorial, sea α solución con condición inicial en p_0 . Si $t_1 = t_0 + \varepsilon_0$ consideramos el punto $\alpha(t_1) = p_1 \in M_{[a,b]}$. En el punto p_1 de nuevo usamos los teoremas 2.10 y 2.11, que nos proporcionan V_1 vecindad de p_1 y ε_1 , donde existen la soluciones del campo. Ahora tomamos la solución β con condición inicial en p_1 , notemos que $\beta(t'_1) = p_1 = \alpha(t_1)$, como β y α son únicas, tiene que pasar que son iguales en donde se intersecan las imágenes de α y β , es decir, β es una extensión de la solución α con condición inicial p_0 . Continuamos inductivamente con esta construcción de vecindades y extendemos α por todo $M_{[a,b]}$.

Tenemos la familia de vecindades $A = \{V_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, afirmamos que esta familia es finita. Para esto, observemos que la imagen de α está en $M_{[a,b]}$ compacto, y la imagen de α es cerrada, así que es compacta. Como A es cubierta abierta de la imagen de α , hay una cantidad finita de elementos de A que cubren a la curva. Después α avanza a través de las curvas de nivel de manera constante y monótona, ya que por la ecuación (2.50) la derivada es positiva. Como con una cantidad finita de elementos A la solución fue cubierta, con esto concluimos que llegamos a la curva de nivel de b .

Si $\{V \cap U \mid p \in f^{-1}(\{a\})\}$ es cubierta de la curva de nivel de $f^{-1}(\{a\})$, donde U es abierto de p dado por el teorema 2.10 y V es un abierto de p dado por el teorema 2.11. Como la curva de nivel $f^{-1}(\{a\})$ es cerrada en M , entonces es compacta, luego hay una cantidad finita de abiertos que la cubren.

Por último extendemos cada una de las vecindades hasta llegar a la curva de nivel de b , con lo que tenemos cubierta toda la sección con curvas que son solución del campo w . Podemos observar que, todas las curvas tienen que llegar en un tiempo T pues hicimos que cada curva tenga velocidad constante 1 en todo punto por la ecuación 2.50.

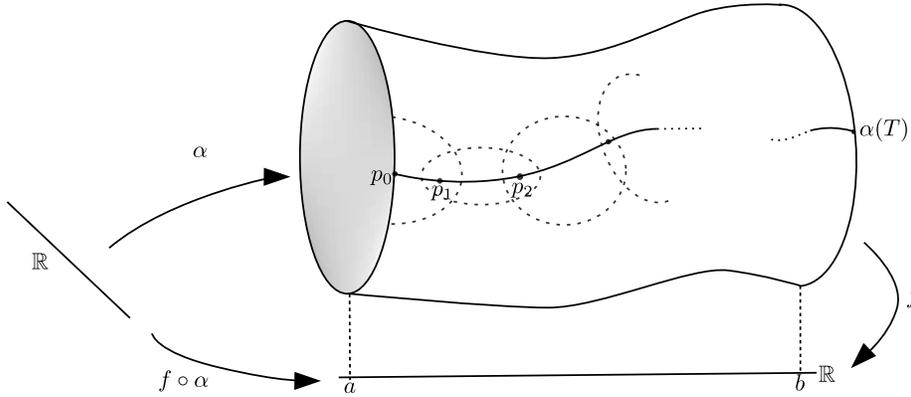


Figura 2.2: Solución a través de la sección

Definimos la transformación $H : f^{-1}(\{a\}) \times [0, 1] \rightarrow M_{[a,b]}$ mediante la regla de correspondencia

$$H(p, t) = \alpha_p(t \cdot T).$$

Donde α_p es la solución de la ecuación inducida por w , con condición inicial $\alpha_p(0) = p$, con $p \in f^{-1}(\{a\})$.

Sean $p, q \in M_{[a,b]}$ y $t, s \in [0, 1]$, tal que $(p, t) \neq (q, s)$, supongamos $q \neq p$ entonces hay dos casos

- Si están en la misma curva solución α , tenemos que esta curva es inyectiva, por lo que necesariamente $t \neq s$. Pues si $t = s$, en ese caso tenemos que $\alpha(s) = \alpha(t)$, y así $p = q$ lo que es una contradicción.
- Si están en distintas curvas solución, entonces $H(p, t) \neq H(q, s)$.

Ahora si suponemos que $s \neq t$ tenemos de nuevo dos casos; si p y q están en la misma curva α , ya que ésta es inyectiva implica que $\alpha(t) \neq \alpha(s)$, luego $H(p, t) \neq H(q, s)$ y si están en distintas curvas entonces $H(p, t) \neq H(q, s)$. Por lo tanto H es inyectiva. La sobreyectividad se da por la construcción. Por último, la diferenciabilidad está dada por la dependencia de condiciones iniciales en el teorema 2.10.

La transformación inversa de H tiene la siguiente asociación. Sea q punto en $M_{[a,b]}$, tomamos la solución α_p con condición inicial $p \in f^{-1}(\{a\})$ y $t' \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha_p(t') \in f^{-1}(\{b\})$, también que pasa por q , es decir, existe t valor tal que $\alpha_p(t) = q$. Recordando que este tiempo aún no está entre 0 y 1, le asociamos $H^{-1}(q) = (p, t'/T)$, esta transformación por el teorema 2.10 es diferenciable, por lo que H es difeomorfismo. \square

Este teorema nos dice que si no hay puntos críticos de una función, entonces todas las curvas de nivel son difeomorfas, o sea, no hay cambios en esa parte de la variedad.

Después de los resultados podemos observar que hemos estado ocupando fuertemente que la variedad es compacta, veamos qué es lo que pasa en caso de no ser compacta una variedad como espacio topológico. Para ello, demos una función de clase \mathcal{C}^∞ sin puntos críticos, pero que las curvas de nivel no sean difeomorfas. Tomamos el plano \mathbb{R}^2 , entonces éste visto como variedad no es compacto, y definimos a $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente manera

$$f(x, y) = \frac{-1}{e^x} + f_1(x, y) + f_2(x, y).$$

Donde las funciones auxiliares f_1 y f_2 , son

$$f_1(x, y) = \begin{cases} xye^{-1/xy} & x > 0 \text{ y } y > 0. \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$f_2(x, y) = \begin{cases} -xye^{1/xy} & x > 0 \text{ y } y < 0. \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Definimos los conjuntos $C_1 = \{(x, y) | x > 0, y > 0\}$, $C_2 = \{(x, y) | x < 0, y > 0\}$, $C_3 = \{(x, y) | x < 0, y < 0\}$ y $C_4 = \{(x, y) | x > 0, y < 0\}$. Considerando a f_1 , sea $y > 0$ fija, si $x \rightarrow 0$, entonces $xy \rightarrow 0$, también $e^{-1/xy} \rightarrow 0$, por lo tanto $xye^{-1/xy} \rightarrow 0$ lo mismo ocurre en el caso de tomar $x > 0$ constante y el límite cuando $y \rightarrow 0$. Por lo tanto, la función f_1 está bien definida y es continua en $C_1 \cup C_2 \cup C_4$. Análogamente f_2 está bien definida y es continua en $C_2 \cup C_3 \cup C_4$. Concluimos que f está bien definida y es continua.

Tenemos que $g_1(x, y) = xye^{-1/xy}$, $g_2(x, y) = -xye^{1/xy}$ y la constante 0, son de clase \mathcal{C}^∞ en \mathbb{R}^2 , y éstas son parte de la definición de f_1 y f_2 . Ya que la definición de f depende de éstas, veamos las derivadas parciales de las funciones g_1 , g_2 . Así

$$\frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y) = ye^{-1/xy} + \frac{e^{-1/xy}}{x}.$$

Si $y > 0$ fija y $x \rightarrow 0$, entonces $ye^{1/xy} \rightarrow 0$ y $\frac{e^{-1/xy}}{x} \rightarrow 0$, por lo que $\frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y) \rightarrow 0$. Si $x > 0$ es fija y $y \rightarrow 0$, entonces $ye^{-1/xy} \rightarrow 0$, $\frac{e^{-1/xy}}{y} \rightarrow 0$. Por otro lado

$$\frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y) = xe^{-1/xy} + \frac{e^{-1/xy}}{y}.$$

De manera similar a la derivada parcial de g_1 respecto a x , tenemos que esta derivada parcial también tiende a 0 haciendo fija una variable y la otra que tienda a 0. Como f_1 en $C_2 \cup C_3$ vale 0, por lo que estas derivadas parciales se pegan bien en los ejes coordenados, y así las parciales de f_1 están bien definidas y son continuas en todo el plano. Por tanto, f_1 es diferenciable en el plano.

De hecho, si continuamos haciendo este proceso de derivación respecto a cualquiera de las variables, notaremos que las n -ésimas derivadas parciales de f_1 pegan bien y son continuas, consecuentemente f_1 es \mathcal{C}^∞ en todo el plano. Análogamente, se hace el análisis de la función f_2 .

Ya que la suma de funciones \mathcal{C}^∞ es \mathcal{C}^∞ , f es de clase \mathcal{C}^∞ en \mathbb{R}^2 .

Observamos que esta función no tiene puntos críticos en todo el plano pues

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{e^x} + ye^{-1/xy} + \frac{e^{-1/xy}}{x} & \text{si } x > 0 \text{ y } y > 0. \\ \frac{1}{e^x} - ye^{1/xy} + \frac{e^{1/xy}}{x} & \text{si } x > 0 \text{ y } y < 0. \\ \frac{1}{e^x} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Notemos que en $x, y > 0$ y $x, y < 0$ no hay nada que analizar pues la derivada parcial de f es positiva, y en otro caso la función $1/e^x$ nunca toma el valor cero, entonces f no tiene puntos críticos.

Ahora veremos que dos curvas de nivel de esta función no son difeomorfas, tomaremos la curva de nivel de -1 y 0 .

Para la primera notamos que las funciones f_1 y f_2 no están definidas para valores negativos, esto es, $f_1, f_2 \geq 0$. Por otro lado, $\frac{-1}{e^x} = -1$ si, y sólo si $x = 0$, en ese caso f toca la curva de nivel -1 sólo cuando $x = 0$, para cualquier valor de y . Por lo tanto, la curva de nivel del valor -1 de f es todo el eje x .

Para la segunda veamos qué pasa si $x > 0$ y $y > 0$, así $f_2 = 0$. Por lo tanto,

$$f(x, y) = \frac{-1}{e^x} + xye^{-1/xy} = 0. \quad (2.51)$$

Aplicando un cambio de variable $x = u + v$ y $y = u - v$, en la ecuación (2.51) tenemos

$$(u^2 - v^2)e^{-1/(u^2 - v^2)} + \frac{-1}{e^{u+v}} = 0. \quad (2.52)$$

La función exponencial da valores reales positivos, entonces sea

$$C(u, v) = \frac{\frac{1}{e^{u+v}}}{e^{-1/(u^2 - v^2)}},$$

En la ecuación (2.52), despejando a C tenemos

$$u^2 - v^2 = C(u, v). \quad (2.53)$$

Notemos que si $x = 0$, implica que $u = v$ pero $C(u, u) = 1$. Por otro lado, $u^2 - v^2 = 0$, concluimos que $1 = 0$ lo que es una contradicción. Análogo el caso de $y = 0$. Por lo tanto, la curva definida por (2.53) es de una curva contenida en C_1 pues no toca los ejes coordenados. Análogamente, se hace lo mismo para el caso $x > 0$ y $y < 0$.

En consecuencia la curva de nivel 0 no es conexa y la de -1 si, entonces no son homeomorfas, lo que hace notar lo importante que es que la variedad sea compacta para nuestros resultados.

También hay que notar que a pesar de que esta función es \mathcal{C}^∞ , no es analítica. La

esencia de esto está en la construcción de f , basada principalmente en funciones tope, que son \mathcal{C}^∞ pero no analíticas, de hecho si sucede que la función es analítica es condición suficiente para tener algunos resultados importantes pero, por lo pronto nos basaremos únicamente en la teoría siguiendo que nuestras variedades sean cerradas, es decir, que la frontera como variedad es vacía y que la variedad es compacta. Por tanto, desde ahora siempre supondremos en nuestros resultados que M es **cerrada**, a menos que se diga lo contrario.

El siguiente resultado nos permitirá suponer que todos los valores críticos de una función de Morse son distintos, pues si una función de Morse f tuviera dos valores críticos iguales, podríamos perturbarla ligeramente y obtener otra función de Morse g cuyos valores críticos sean distintos. Esto será utilizado para hacer el procedimiento de identificación de una variedad al ir analizando cada uno de los puntos críticos de una función de Morse.

Teorema 2.13. *Sean M una m -variedad diferenciable, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse, y p_1, \dots, p_n los puntos críticos de f . Entonces, existe $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse, tal que; g es \mathcal{C}^2 -cercana a f , tienen los mismos puntos críticos y $g(p_i) \neq g(p_j)$ para todo $i \neq j$.*

Demostración. Sean p_i, p_j puntos críticos distintos tales que $c_i = c_j$, donde $f(p_i) = c_i$ y $f(p_j) = c_j$. Sea (V_i, ϕ) carta de p_i donde f se ve de manera estándar, y sea $\varepsilon > 0$ tal que si p_j está en V_i , entonces $\varepsilon < \|\phi(p_j) - \phi(p_i)\|/4$, si no está en V_i , entonces ε es arbitraria.

Usamos el lema 1.11.1, con el abierto $U = \phi^{-1}(V_{2\varepsilon}(\phi(p_i)))$ y $K = \phi^{-1}(\overline{V_\varepsilon(\phi(p_i))})$, ya que ϕ es homeomorfismo K es compacto, entonces existe $h : M \rightarrow \mathbb{R}$, W abierto, y L compacto tal que; $K \subseteq W \subseteq L \subseteq U$, h vale uno en W y cero en $\text{int}(M \setminus L)$.

Sea $a \in \mathbb{R}$ arbitrario, pondremos condiciones en a para que $g(p) = f(p) + ah(p)$, garantice lo siguiente:

1. $\sum_{l=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial \phi_l} \right)^2 - \sum_{l=i}^m \left(\frac{\partial g}{\partial \phi_l} \right)^2 < b$, en M con b real positivo arbitrario.
2. $0 < \sum_{l=i}^m \left(\frac{\partial g}{\partial \phi_l} \right)^2 (p)$, para toda $p \in U \setminus K$.
3. g es \mathcal{C}^2 -cercana a f .

Para demostrar 1, observemos que h fuera de U vale 0, así $g = f + a0 = f$, con lo que g tiene los mismos valores y puntos críticos de f en esa zona. Si tomamos un punto $q \in W$, ahí $h(q) = 1$, entonces $g(q) = f(q) + a$. Obtenemos las derivadas parciales, recordando que a es una constante, en tal caso para toda $l \in \{1, \dots, m\}$ tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial \phi_l}(q) = \frac{\partial g}{\partial \phi_l}(q). \quad (2.54)$$

Por lo que, también en W se tienen los mismos puntos críticos.

Notemos que en el exterior de U tenemos que $f = g$ y en W las segundas derivadas parciales de f y g son iguales por la ecuación (2.54), entonces los puntos críticos son no-degenerados. Por lo tanto en el exterior de U y W , g es de Morse.

Falta ver que g en $U \setminus K$ es de Morse. Sea $A_0 = \max \left\{ \left| \frac{\partial h}{\partial \phi_l}(p_l) \right| \mid l = 1, \dots, m \right\}$, con p_l el punto donde cada derivada parcial alcanza su valor máximo, para toda l . En tal caso, por definición y por la linealidad de la derivada parcial, se tiene que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \phi_l}(q) - \frac{\partial g}{\partial \phi_l}(q) \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial \phi_l}(q) - \frac{\partial}{\partial \phi_l}(f + ah)(q) \right| = \left| a \frac{\partial h}{\partial \phi_l} \right| \leq aA_0.$$

Sean $A_1 = \max \left\{ \left| \frac{\partial f}{\partial \phi_l}(p'_l) \right| \mid l = 1, \dots, m \right\}$ y $A_2 = \max \left\{ \left| \frac{\partial g}{\partial \phi_l}(p''_l) \right| \mid l = 1, \dots, m \right\}$, donde p'_l y p''_l es donde las parciales alcanzan su valor máximo respectivamente. Hacemos la siguiente operación

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial \phi_l} \right)^2 - \left(\frac{\partial g}{\partial \phi_l} \right)^2 &= \left(\frac{\partial f}{\partial \phi_l} \right)^2 - \frac{\partial f}{\partial \phi_l} \frac{\partial g}{\partial \phi_l} + \frac{\partial f}{\partial \phi_l} \frac{\partial g}{\partial \phi_l} - \left(\frac{\partial g}{\partial \phi_l} \right)^2 \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial \phi_l} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial \phi_l} - \frac{\partial g}{\partial \phi_l} \right) + \left(\frac{\partial g}{\partial \phi_l} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial \phi_l} - \frac{\partial g}{\partial \phi_l} \right) \end{aligned} \quad (2.55)$$

Recordando la definición de A_0 , A_1 , A_2 tenemos que

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \phi_l} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial \phi_l} - \frac{\partial g}{\partial \phi_l} \right) + \left(\frac{\partial g}{\partial \phi_l} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial \phi_l} - \frac{\partial g}{\partial \phi_l} \right) \leq (A_1)(aA_0) + (A_2)(aA_0). \quad (2.56)$$

Por lo tanto de la ecuación (2.56) en (2.55), tenemos que podemos acotar la diferencia $\left(\frac{\partial f}{\partial \phi_l} \right)^2 - \left(\frac{\partial g}{\partial \phi_l} \right)^2 \leq a(A_1A_0 + A_2A_0)$. Si ahora consideramos la suma sobre los índices, entonces $\sum_{l=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial \phi_l} \right)^2 - \sum_{l=1}^m \left(\frac{\partial g}{\partial \phi_l} \right)^2 \leq \sum_{l=1}^m a(A_0A_1 + A_0A_2) = maA_0(A_1 + A_2)$. Sea b un real arbitrario, entonces si $a < b/(mA_0(A_1 + A_2))$. Concluimos que $\sum_{l=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial \phi_l} \right)^2 - \sum_{l=1}^m \left(\frac{\partial g}{\partial \phi_l} \right)^2 < b$.

Para demostrar 2, vemos que $U \setminus K \subseteq V_i$, entonces

$$f = - \sum_{l=1}^{\lambda_i} (\phi_l)^2 + \sum_{l=\lambda_i+1}^m (\phi_l)^2 + c_i.$$

Si usamos al campo vectorial tipo gradiente de f y calculamos su derivada de

Lie, entonces

$$\begin{aligned}
 v \cdot f &= \sum_{l=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial \phi_l} \right)^2 \\
 &= \sum_{l=1}^{\lambda_i} (-2\phi_l)^2 + \sum_{l=\lambda_i+1}^m (2\phi_l)^2 \\
 &= 4 \left(\sum_{l=1}^m (\phi_l)^2 \right). \tag{2.57}
 \end{aligned}$$

Sea $q \in U \setminus K$, como $K = \phi^{-1}(\overline{V_\varepsilon(\phi(p_i))})$, se cumple que $\varepsilon < \|\phi(q)\|$. Desarrollando esta desigualdad

$$\begin{aligned}
 \varepsilon &< \|\phi(q)\| = \sqrt{(\phi_1(q))^2 + \dots + (\phi_m(q))^2} \\
 4\varepsilon^2 &< 4((\phi_1(q))^2 + \dots + (\phi_m(q))^2) \\
 4\varepsilon^2 &< (v \cdot f)(q). \tag{2.58}
 \end{aligned}$$

Del inciso 1, si despejamos las derivadas parciales de f , tenemos que

$$\sum_{l=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial \phi_l}(q) \right)^2 < b + \sum_{l=1}^m \left(\frac{\partial g}{\partial \phi_l}(q) \right)^2.$$

Juntando las ecuaciones (2.57), (2.58) y el inciso 1, se sigue que

$$4\varepsilon^2 < (v \cdot f)(q) = \sum_{l=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial \phi_l}(q) \right)^2 < b + \sum_{l=1}^m \left(\frac{\partial g}{\partial \phi_l}(q) \right)^2.$$

Quitando la desigualdad de en medio y despejando la suma de las parciales de g , vemos que

$$4\varepsilon^2 - b < \sum_{l=1}^m \left(\frac{\partial g}{\partial \phi_l}(q) \right)^2.$$

Si pedimos que $b < 4\varepsilon^2$, entonces $a < 4\varepsilon^2/(mA_0(A_1 + A_2))$. Podemos concluir que $0 < 4\varepsilon^2 - b$. Por lo tanto,

$$0 < 4\varepsilon^2 - b < \sum_{l=1}^m \left(\frac{\partial g}{\partial \phi_l}(q) \right)^2.$$

Terminando el inciso 2. Como $\sum_{l=1}^m \left(\frac{\partial g}{\partial \phi_l}(q) \right)^2$ es una suma de números no negativos entonces al menos alguno de los sumandos es no cero. Por lo tanto, el cuadrado de una de las derivadas parciales de g es no cero, y así una de las derivadas parciales de g en q es no cero. Por lo que, el punto q no es punto crítico de g . Entonces el punto 2 dice que en $U \setminus K$ la función g no tiene puntos críticos. Concluimos que, como f es de Morse, entonces g es de Morse en M .

Ahora demostraremos que f es \mathcal{C}^2 -cercana a g . Primero en $M \setminus U$ tenemos que f y g son iguales, por lo que no hay nada que demostrar. Entonces, sea $q \in U$ sea $\varepsilon' = 4\varepsilon^2$ y sea $A_3 = \max \left\{ \left| \frac{\partial^2 h}{\partial \phi_s \partial \phi_l}(p_3) \right| \mid s, l \in \{1, \dots, m\} \right\}$. Entonces hacemos que $a < \min \{ \varepsilon'/A_3, \varepsilon'/(mA_0(A_1 + A_2)) \}$. Para demostrar los incisos i), ii) y iii) de la definición de $(\mathcal{C}^2, \varepsilon')$ -cercanía, tenemos:

i) Primero

$$|f(q) - g(q)| = |ah(q)| < a < \varepsilon'.$$

ii) Sea $l \in \{1, \dots, m\}$, luego

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \phi_l}(q) - \frac{\partial g}{\partial \phi_l}(q) \right| = \left| a \frac{\partial h}{\partial \phi_l} \right| \leq aA_0 < \frac{4\varepsilon}{mA_0(a_1 + A_2)} A_0 < \varepsilon'.$$

iii) Sean $s, l \in \{1, \dots, m\}$, vemos que

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial \phi_s \partial \phi_l}(q) - \frac{\partial^2 g}{\partial \phi_s \partial \phi_l}(q) \right| = \left| a \frac{\partial^2 h}{\partial \phi_s \partial \phi_l}(q) \right| < aA_3 < (\varepsilon'/A_3)A_3 = \varepsilon'.$$

Como ε es arbitraria y $\varepsilon' = 4\varepsilon$, implica que ε' es arbitraria, y así se cumple el punto 3. Como consecuencia, g es \mathcal{C}^2 -cercana a f .

Por último notemos que $h(p_i) = 1$ pues la función h vale uno en U , entonces $g(p_i) = f(p_i) + a$ y como p_j no está en U , entonces $h(p_j) < 1$, entonces $ah(p_j) < a$, por lo tanto $g(p_j) = f(p_j) + ah(p_j) < f(p_i) + a = g(p_i)$. Con esto terminamos la demostración del teorema. \square

2.2.1. Descripción de las variedades como cuerpos con asas.

Empezaremos a hacer el análisis de una variedad avanzando por las curvas de nivel y caracterizando lo que sucede alrededor de los puntos críticos. Sea M una m -variedad cerrada, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ función de Morse, sean p_0, \dots, p_n los puntos críticos de f tales que $f(p_i) = c_i$ para toda i , más aún suponemos que $c_0 < c_2 < \dots < c_n$ por el teorema 2.13.

Luego definimos para $t \in \mathbb{R}$, el conjunto

$$M_t := \{p \in M \mid f(p) \leq t\}.$$

Como M es compacta y f continua, entonces f alcanza su máximo y su mínimo en la imagen, también si un punto es máximo o mínimo, entonces es punto crítico, por eso tenemos que c_0 es mínimo y c_n es máximo. Sea (U_0, ϕ) carta de p_0 , entonces la forma estándar de f en la vecindad U_0 es

$$f = \sum_{i=1}^m (\phi_i)^2 + c_0. \quad (2.59)$$

Si (U_n, ψ) carta de p_n , análogamente

$$f = - \sum_{i=1}^m (\psi_i)^2 + c_n. \quad (2.60)$$

Por lo tanto la signatura de p_0 es 0 y de p_n es m . También notemos que si $t \leq c_0$ entonces $M_t = \emptyset$, y si $t \geq c_n$, entonces $M_t = M$.

Sea $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeño de modo que las vecindades de radio ε de la imagen de p_i con ϕ_i , esté contenida en la imagen del abierto U_i , para toda i .

0-asa de dimensión m .

Iniciamos el análisis con el conjunto $M_{c_0+\varepsilon}$. Si $q \in \phi^{-1}(V_\varepsilon(\phi(p_0)))$, entonces $f(q) < c_0 + \varepsilon$. Recordando la forma estándar de f tenemos que si $q \in M_{c_0+\varepsilon}$, entonces por la ecuación (2.59) que

$$f(q) = (\phi_1(q))^2 + \dots + (\phi_m(q))^2 + c_0 < c_0 + \varepsilon.$$

Despejando tenemos que $(\phi_1(q))^2 + \dots + (\phi_m(q))^2 < \varepsilon$. Recordamos ahora que la parte izquierda de esta desigualdad es la norma euclidiana del punto $\phi(q) \in \mathbb{R}^m$, con $q \in M_{c_0+\varepsilon}$ arbitrario. Esta es la definición de una vecindad de radio $\sqrt{\varepsilon}$ y centro en $\phi(p_0)$.

Sea $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $T(x_1, \dots, x_m) = (1/\sqrt{\varepsilon})(x_1, \dots, x_m)$ la cual es biyectiva pues su inversa es $T^{-1}(x_1, \dots, x_m) = \sqrt{\varepsilon}(x_1, \dots, x_m)$; como ambas transformaciones son diferenciables, T es un difeomorfismo.

Sea $D^m = \{(x_1, \dots, x_m) \mid x_1^2 + \dots + x_m^2 \leq 1\}$, entonces componiendo la transformación T y la carta ϕ tenemos que $(T \circ \phi) : M_{c_0+\varepsilon} \rightarrow D^m$ es un difeomorfismo. En este caso a $M_{c_0+\varepsilon}$ se le llama una 0-asa de dimensión m (ver figura 2.3).

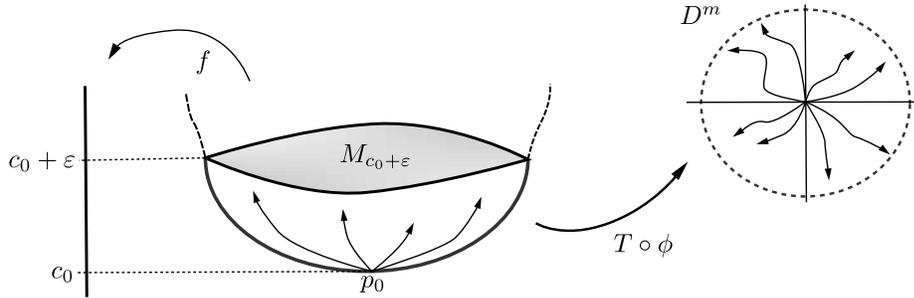
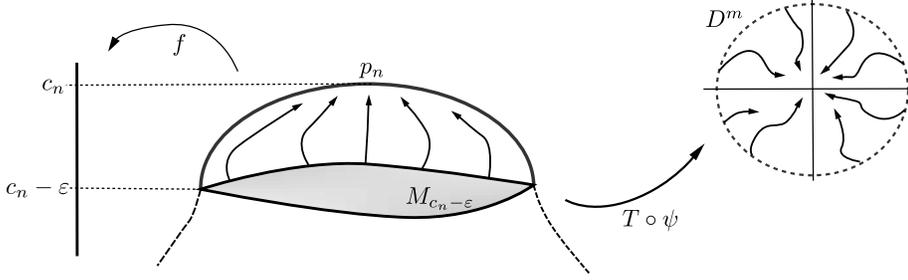


Figura 2.3: 0-asa

m -asa de dimensión m .

Para el punto p_n , si $q \in M_{[c_n-\varepsilon, c_n]}$, entonces $c_n + \varepsilon < f(q)$ sustituyendo el valor de f por su forma estándar (ecuación (2.60)), obtenemos $(\psi_1(q))^2 + \dots + (\psi_m(q))^2 < \varepsilon$, entonces $M_{[c_n-\varepsilon, c_n]}$ es difeomorfo a D^m con $(T \circ \psi)$. En este caso llamamos a $M_{c_n+\varepsilon}$ una m -asa de dimensión m (ver figura 2.4).

Figura 2.4: m -asa

La diferencia entre una 0-asa y una m -asa no está en su tipo topológico, pues ambas son homeomorfas al disco D^m , sino en la forma de pegarlas al conjunto de nivel correspondiente al punto crítico que tenemos previamente. Al ir por las curvas de nivel en una cero asa, esto es, de c_0 a $c_0 + \epsilon$, el difeomorfismo se va moviendo del centro del disco D^m a su frontera, observando que la frontera de D^m es $S^{m-1} = \{(x_1, \dots, x_m) \mid x_1^2 + \dots + x_m^2 = 1\}$, y en una m -asa es al ir por la curva de nivel desde $c_n - \epsilon$ a c_n , vamos desde la frontera de S^{m-1} al centro del disco D^m , como se muestra en las figuras 2.3 y 2.4.

λ -asa de dimensión m .

Ahora veamos lo que pasa cuando la signatura del punto no es ni 0, ni m , sea p_i un punto crítico con signatura $0 < \lambda_i < m$, para darnos una idea del tipo de conjuntos primero veremos el caso en que la dimensión de la variedad sea $m = 2$, en ese caso $\lambda_i = 1$ y si (U_i, ϕ) es la carta de p_i , sabemos que en dicha carta f se ve como

$$f = -(\phi_1)^2 + (\phi_2)^2 + c_i.$$

Entonces la región $M_{c_i - \epsilon} \cap \phi^{-1}(V_\epsilon(\phi(p_i)))$ está formada por los puntos que cumplen que

$$f(q) = -(\phi_1(q))^2 + (\phi_2(q))^2 + c_i \leq c_i - \epsilon.$$

Despejando épsilon para ver de qué conjunto se trata

$$(\phi_1(q))^2 - (\phi_2(q))^2 \geq \epsilon. \quad (2.61)$$

La ecuación (2.61) describe la parte exterior de una hipérbola horizontal con focos en $(\pm\epsilon, 0)$. Ahora si hacemos la cuenta con m no necesariamente 2, nos da

$$f = -\sum_{j=1}^{\lambda_i} (\phi_j)^2 + \sum_{j=\lambda_i+1}^m (\phi_j)^2 + c_i.$$

Entonces la región $M_{c_i - \epsilon} \cap \phi^{-1}(V_\epsilon(\phi(p_i)))$ es

$$-\sum_{j=1}^{\lambda_i} (\phi_j(q))^2 + \sum_{j=\lambda_i+1}^m (\phi_j(q))^2 + c_i \leq c_i - \epsilon.$$

De nuevo despejando

$$\sum_{j=1}^{\lambda_i} (\phi_j(q))^2 - \sum_{j=\lambda_i+1}^m (\phi_j(q))^2 \geq \varepsilon.$$

Una idea geométrica de estas regiones se observa en la figura 2.6.

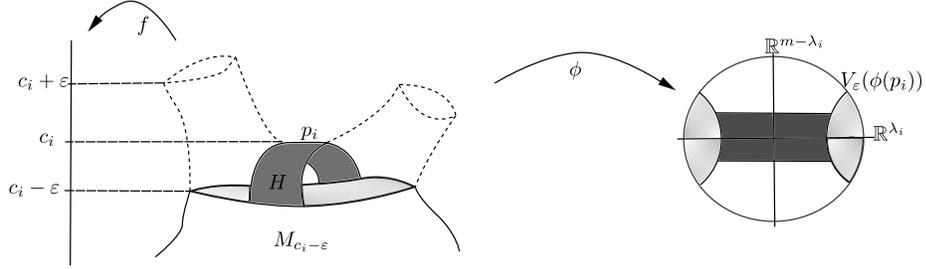


Figura 2.5: λ_i -asa

Para hacernos una idea de cómo es $M_{[c_i-\varepsilon, c_i]}$, sea $\delta < \varepsilon$ de esta manera si pedimos que

$$\sum_{j=\lambda_i+1}^m (\phi_j)^2 < \delta, \quad (2.62)$$

y si las primeras λ_i entradas de la función coordenada ϕ son cero, entonces estamos en $\{\bar{0}\} \times \mathbb{R}^{m-\lambda_i}$. Así el conjunto definido por la ecuación (2.62) del punto p_i , es un disco de dimensión $m - \lambda_i$ con norma $\sqrt{\delta}$.

Si hacemos que $\phi_i(p) = 0$ para toda $i \geq \lambda_i$, entonces

$$f(p) = \sum_{j=1}^{\lambda_i} (\phi_j(p))^2 < \varepsilon.$$

La ecuación anterior nos dice que las coordenadas $(\phi_1, \dots, \phi_{\lambda_i})$ de la carta son difeomorfas a un disco de radio $\sqrt{\varepsilon}$. En la figura 2.6 representamos estos conjuntos.

Definimos el siguiente conjunto que corresponde a la parte más sombreada de la figura 2.6,

$$H := \left\{ p \in M_{[c_i-\varepsilon, c_i]} \mid \sum_{j=\lambda_i+1}^m (\phi_j)^2 < \delta, f(p) \geq \varepsilon - c_i \right\}.$$

Proposición 2.14. H es difeomorfo a $D^{\lambda_i} \times D^{m-\lambda_i}$.

Demostración. Definimos la transformación $F : H \rightarrow D^{\lambda_i} \times D^{m-\lambda_i}$ con sus funciones coordenadas, esto es $F = (F_1, \dots, F_m)$ de tal manera que si $1 \leq j \leq \lambda_i$

$$F_j(p) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\sum_{j=\lambda_i+1}^m (\phi_j(p))^2 + \varepsilon}} \phi_j(p).$$

En caso de que $\lambda_i \leq j \leq m$, entonces

$$F_j(p) = (1/\delta)\phi_j(p).$$

Si tomamos un punto $p \in H \subseteq V_i$, con V_i vecindad de p_i , entonces $f(p)$ se ve como

$$f(p) = -\sum_{j=1}^{\lambda_i} (\phi_j(p))^2 + \sum_{j=\lambda_i+1}^m (\phi_j(p))^2 + c_i \geq c_i - \varepsilon.$$

Quitando c_i y multiplicando por -1 ,

$$\sum_{j=1}^{\lambda_i} (\phi_j(p))^2 - \sum_{j=\lambda_i+1}^m (\phi_j(p))^2 \leq \varepsilon$$

Ahora despejando la suma de las primeras λ_i entradas,

$$\sum_{j=1}^{\lambda_i} (\phi_j(p))^2 \leq \varepsilon + \sum_{j=\lambda_i+1}^m (\phi_j(p))^2;$$

es decir,

$$\frac{1}{\left(\sum_{j=\lambda_i+1}^m (\phi_j(p))^2 + \varepsilon\right)} \sum_{j=1}^{\lambda_i} (\phi_j(p))^2 \leq 1.$$

Sacando la raíz positiva se tiene

$$\frac{1}{\sqrt{\sum_{j=\lambda_i+1}^m (\phi_j(p))^2 + \varepsilon}} \sqrt{\sum_{j=1}^{\lambda_i} (\phi_j(p))^2} \leq 1. \quad (2.63)$$

Observemos que el lado izquierdo de (2.63), es la norma de las primeras λ_i funciones coordenadas de F , se sigue que $\|(F_1, \dots, F_{\lambda_i})\| \leq 1$. Así estas coordenadas viven en el disco de radio 1, por lo tanto van a D^{λ_i} .

Si $\lambda_i < j \leq m$, entonces $F_j(q) = (1/\delta)\phi_j(q)$, por lo tanto por definición de H tenemos que

$$\sum_{j=\lambda_i+1}^m (\phi_j(p))^2 \leq \delta.$$

De aquí,

$$\frac{1}{\delta} \sum_{j=\lambda_i+1}^m (\phi_j(p))^2 \leq 1,$$

y sacando la raíz cuadrada,

$$\sqrt{\frac{1}{\delta} \sum_{j=\lambda_i+1}^m (\phi_j(p))^2} \leq 1. \quad (2.64)$$

La suma izquierda de la ecuación (2.64) es la norma de las últimas $m - \lambda_i$ entradas de F , entonces $\|(F_{\lambda_i+1}, \dots, F_m)\| \leq 1$. Por lo tanto, el conjunto donde las primeras λ_i entradas son cero, es difeomorfo a $D^{m-\lambda_i}$. Concluimos que, con estas condiciones F manda H a $D^{\lambda_i} \times D^{m-\lambda_i}$.

Como las cartas son diferenciables y cada uno de los pasos para definir las funciones coordenadas de F son diferenciables, tenemos que F es diferenciable; la inversa es $F^{-1}(x_1, \dots, x_m) = \phi^{-1}(F_1^{-1}(x_1, \dots, x_m), \dots, F_m^{-1}(x_1, \dots, x_m))$, donde si $1 \leq j \leq \lambda_i$

$$F_j^{-1}(x_1, \dots, x_m) = \sqrt{\sum_{j=\lambda_i+1}^m (\phi_j(p))^2 + \varepsilon \phi_j(p)}.$$

En el caso $\lambda_i \leq j \leq m$, tenemos $F(x_1, \dots, x_m) = (\delta)x_j$.

Por lo tanto, F es un difeomorfismo. \square

Como observación, definamos $\varphi : \partial D^{\lambda_i} \times D^{m-\lambda_i} \rightarrow \partial(M_{c_i-\varepsilon} \cup H)$ como $\varphi = F^{-1}|_{\partial D^{\lambda_i} \times D^{m-\lambda_i}}$. A esta transformación se le conocerá como mapeo de pegado.

Para completar la clasificación de la sección hasta llegar al punto p_i , haremos referencia a las siguientes construcciones:

- Primero consideramos para dos espacios topológicos X y Y , a $X \sqcup Y := (X \times \{0\}) \cup (Y \times \{1\})$, espacio con la siguiente topología, sea $i_1 : X \rightarrow X \sqcup Y$ definida por $i_1(x) = (x, 0)$ e $i_2 : Y \rightarrow X \sqcup Y$, $i_2(y) = (y, 1)$, entonces decimos que un conjunto $U \subseteq X \sqcup Y$ es abierto si y sólo si $i_1^{-1}(U)$ y $i_2^{-1}(U)$ son abiertos, en sus respectivas topologías.

A este espacio se le conoce como la unión disjunta de X y Y .
- Sea $g : A \subseteq X \rightarrow B \subseteq Y$ transformación continua, A y B cerrados, definimos el espacio $X \bigcup_g Y := (X \sqcup Y / \sim)$ que es el espacio topológico cociente, con su topología cociente donde la relación de equivalencia está dada por $(x, j) \sim (y, l)$ si y sólo si $(x = y \text{ y } j = l)$ ó $(j < l \text{ y } g(x) = y)$.

A este espacio se le llama el espacio cociente de X con Y , en A con $f(A)$ y a g se le conoce como mapeo de pegado.

Después de revisar estas dos construcciones tenemos el siguiente resultado

Teorema 2.15. *Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de Morse, con p punto crítico de f con signatura $0 < \lambda < m$ y $f(p) = c$, entonces*

$$M_{c+\varepsilon} \approx M_{c-\varepsilon} \bigcup_{\varphi} (D^{\lambda} \times D^{m-\lambda}).$$

A la primera parte del producto se llama **núcleo del asa** y la segunda es el **co-núcleo**.

Demostración. Por la proposición 2.14, H es difeomorfo a $D^{\lambda} \times D^{m-\lambda}$, en consecuencia

$$M_{c-\varepsilon} \bigcup H \approx M_{c-\varepsilon} \bigcup_{\varphi} (D^{\lambda} \times D^{m-\lambda}). \quad (2.65)$$

Sea $M' = M_{c+\varepsilon} \setminus (M_{c-\varepsilon} \bigcup H')$, donde H' es el mismo que H pero con $\delta' < \delta$, ya que no hay puntos críticos de la frontera de $\partial(M_{c-\varepsilon} \bigcup H')$ a $\partial M'$ por lo que podemos aplicar el teorema 2.12, con $\partial(M_{c-\varepsilon} \bigcup H')$ (frontera dentro de M) como la curva de nivel. De esta manera, si tomamos el campo vectorial tipo gradiente a f en M' y con el mismo procedimiento del teorema 2.12, el flujo lleva la frontera $\partial(M_{c-\varepsilon} \bigcup H')$ en la curva de nivel $f^{-1}(\{c + \varepsilon\})$. Por lo tanto $\partial(M_{c-\varepsilon} \bigcup H') \times [0, 1]$ difeomorfo a M' .

Para terminar tomamos $M'' = (M_{c-\varepsilon} \bigcup H) \setminus (M_{c-\varepsilon} \bigcup H')$. Tenemos nuevamente que M'' es difeomorfo a $\partial(M_{c-\varepsilon} \bigcup H) \times [0, 1]$ pues no hay puntos críticos en M'' . Podemos concluir de ambas situaciones que M'' y M' son difeomorfos a $\partial(M_{c-\varepsilon} \bigcup H') \times [0, 1]$, entonces $M'' \approx M'$. Por lo tanto

$$M_{c+\varepsilon} = (M_{c-\varepsilon} \bigcup H') \bigcup M' \approx (M_{c-\varepsilon} \bigcup H') \bigcup M'' = M_{c-\varepsilon} \bigcup H. \quad (2.66)$$

Entonces por las ecuaciones (2.65) y (2.66), tenemos

$$M_{c+\varepsilon} \approx M_{c+\varepsilon} \bigcup H \approx M_{c-\varepsilon} \bigcup_{\varphi} (D^{\lambda} \times D^{m-\lambda}).$$

Con lo que demostramos el teorema. □

Daremos una definición para poder hacer una identificación de las variedades. Al tipo de conjuntos con los que serán identificadas las variedades los llamaremos cuerpos con asa, o esferas con asa.

Definición 2.16. *A una variedad que es obtenida a partir de tomar un disco de dimensión m , y después pegar distintas asas por medio de sus mapeos de pegado, éstas con diferentes signaturas, se le conoce como una m -esfera con asas o un m -cuerpo con asas. Para ser más precisos, este concepto se define con los siguientes pasos:*

1. A D^m se le llama una esfera con 0-asas ó un m -cuerpo con 0-asas.

2. La variedad $D^m \bigcup_{\phi_1} (D^{\lambda_1} \times D^{m-\lambda_1})$ donde $\phi_1 : \partial D^{\lambda_1} \times D^{m-\lambda_1} \longrightarrow \partial D^m$ es el mapeo de pegado, se le dice una m -esfera con una λ_1 -asa, se denotará por $\mathcal{H}(D^m; \phi_1)$.
3. Si tenemos $N = \mathcal{H}(D^m; \phi_1, \dots, \phi_{k-1})$ definido tomamos el espacio

$$N \bigcup_{\phi_k} (D^{\lambda_k} \times D^{m-\lambda_k})$$

Y el mapeo de pegado

$$\phi_k : \partial D^{\lambda_k} \times D^{m-\lambda_k} \longrightarrow \partial \mathcal{H}(D^m; \phi_1, \dots, \phi_{k-1})$$

Que denotaremos por $\partial \mathcal{H}(D^m; \phi_1, \dots, \phi_k)$, se le llamara el m -cuerpo con una λ_k -asa.

Después de esta definición viene el teorema de la sección que caracteriza las variedades cerradas en cuerpos con asa, y nos ayudará en aplicaciones posteriores. Antes haremos uso de este otro lema.

Lema 2.16.1. *Sea M una m -variedad cerrada, $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ función de Morse, $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y $M_{[a,b]}$ no tiene puntos críticos, entonces M_a es difeomorfo a M_b .*

Demostración. Observemos que $M_b = M_{[a,b]} \bigcup M_a$, sea $\delta > 0$ tal que en $M_{[a-\delta,a]}$ no hay puntos críticos esto es posible ya que los puntos críticos de f en M son finitos. También se cumple que $M_{[a-\delta,b]}$ no tiene puntos críticos. Entonces, por el teorema 2.12, tenemos que

$$M_{[a-\delta,a]} \approx_{h_1} f^{-1}(\{a-\delta\}) \times [1, 0] \approx_{h_2} M_{[a-\delta,b]}. \quad (2.67)$$

Donde h_1 y h_2 son los difeomorfismos correspondientes, notemos que en el teorema 2.12, las transformaciones cumplen que si $q \in f^{-1}(\{a-\delta\})$, entonces $h_1(p) = (p, 0)$ y $h_2^{-1}(p, 0) = p$.

Entonces $(h_2^{-1} \circ h_1) : M_{[a-\delta,a]} \longrightarrow M_{[a-\delta,b]}$ es el difeomorfismo dado por la ecuación (2.67). Por lo tanto definimos el difeomorfismo que lleva M_a en M_b como,

$$F(p) = \begin{cases} p & \text{si } f(p) \leq a - \delta \\ (h_2^{-1} \circ h_1)(p) & \text{si } a - \delta \leq f(p) \leq a \end{cases}$$

Notemos que si $q \in f^{-1}(\{a-\delta\})$, entonces $h_2^{-1}(h_1(p)) = h_2^{-1}(p, 0) = p$, entonces F está bien definida. Además las funciones de F son difeomorfismos, por lo que F es difeomorfismo. \square

Teorema 2.17. *(De descripción de variedades compactas) Sean $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse y M una variedad cerrada. Entonces, M es difeomorfa a un m -cuerpo con asas.*

Demostración. Ya que M es compacta, por el corolario 2.3.2 hay una cantidad finita de puntos críticos, y por el teorema 2.13 los valores críticos son distintos. Sean p_1, \dots, p_n los puntos críticos y $c_1 < c_2 < \dots < c_n$ sus imágenes; es decir, los respectivos valores críticos. Además $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ las signaturas correspondientes. Procederemos por inducción sobre los índices de puntos críticos:

Para $i=0$, el punto p_0 es un mínimo por lo que $M_{c_0+\varepsilon} \approx D^m$.

La hipótesis de inducción para $k-1$ es; para el punto p_{k-1} el nivel $M_{c_{k-1}+\varepsilon} \approx \mathcal{H}(D^m; \phi_1, \dots, \phi_{k-1})$. Hagamos la demostración para el índice k .

Por el teorema 2.15 existe $H : M_{c_k+\varepsilon} \rightarrow M_{c_k-\varepsilon} \cup_{\psi_k} D^{\lambda_k} \times D^{m-\lambda_k}$ difeomorfismo y $H|_{\partial M_{c_k-\varepsilon}} = Id_M$, y el mapeo de pegado es $\psi_k : \partial D^{\lambda_k} \times D^{m-\lambda_k} \rightarrow \partial M_{c_k-\varepsilon}$.

Por hipótesis de inducción existe $G : M_{c_{k-1}+\varepsilon} \rightarrow \mathcal{H}(D^m; \phi_1, \dots, \phi_{k-1})$, también podemos deducir que ya que en $M_{[c_{k-1}+\varepsilon, c_k-\varepsilon]}$ no hay puntos críticos, por el lema 2.16.1, existe $F : M_{c_{k-1}+\varepsilon} \rightarrow M_{c_k-\varepsilon}$ difeomorfismo, estas tres transformaciones están representadas en el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc} M_{c_k+\varepsilon} & \xrightarrow{H} & M_{c_k-\varepsilon} \cup_{\psi_k} D^{\lambda_k} \times D^{m-\lambda_k} \\ & \searrow F^{-1} & \\ M_{c_{k-1}+\varepsilon} & \xrightarrow{G} & \mathcal{H}(D^m; \phi_1, \dots, \phi_{k-1}) \end{array}$$

Sea $L : M_{c_k+\varepsilon} \rightarrow \mathcal{H}(D^m; \phi_1, \dots, \phi_{k-1}) \cup_{\phi_k} D^{\lambda_k} \times D^{m-\lambda_k}$ dada por

$$L(p) = \begin{cases} H(p) & \text{si } p \in M_{[c_k-\varepsilon, c_k+\varepsilon]} \\ (G \circ F^{-1} \circ H)(p) & \text{si } p \in M_{c_k-\varepsilon} \end{cases}$$

Ya que L está definido por transformaciones que son difeomorfismos, entonces F es difeomorfismo. Falta ver que L está bien definida. Para esto, definimos el mapeo de pegado ϕ_k , que se deduce del diagrama siguiente

$$\begin{array}{ccc} \partial D^{\lambda_k} \times D^{m-\lambda_k} & \xrightarrow{\psi_k} & \partial M_{c_k-\varepsilon} \\ \downarrow \phi_k & & \downarrow F^{-1}|_{\partial M_{c_k-\varepsilon}} \\ \partial \mathcal{H}(D^m; \phi_1, \dots, \phi_{k-1}) & \xleftarrow{G|_{\partial M_{c_k+\varepsilon}}} & \partial M_{c_k+\varepsilon} \end{array}$$

Así, $\phi_k = (G|_{\partial M_{c_k+\varepsilon}} \circ F^{-1}|_{\partial M_{c_k-\varepsilon}} \circ \psi_k)$.

Ya que en $M_{c_k-\varepsilon} \cup_{\psi_k} D^{\lambda_k} \times D^{m-\lambda_k}$ hay una relación de equivalencia, donde si $v \in D^{\lambda_k} \times D^{m-\lambda_k}$ y $p \in \partial M_{c_k-\varepsilon}$, entonces $v \sim p$ si, y sólo si $\psi_k(v) = p$. Ahora, claramente $G(F^{-1}(\psi_k(v))) = G(F^{-1}(p))$, se sigue que $\phi_k(v) = (G \circ F^{-1} \circ \psi_k)(v) = (G \circ F^{-1})(p)$, y así $H(v) \sim G(F^{-1}(H(p)))$, por lo tanto L está bien definida. Concluimos que $L \approx \mathcal{H}(D^m; \phi_1, \dots, \phi_k)$. \square

Finalizamos la sección con algunos ejemplos y aplicaciones de la teoría de Morse.

Ejemplo 2.1. (La esfera de dimensión m)

Definimos el conjunto $\mathbb{S}^m := \{\bar{x} \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \|\bar{x}\| = 1\}$. Definimos su atlas de la siguiente manera, los abiertos positivos serán

$$U_j^+ := \{(x_1, \dots, x_{m+1}) \in \mathbb{S}^m \mid x_j > 0\}.$$

Definimos la proyección positiva como la transformación $\phi_j^+ : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, tal que $(\pi_i \circ \phi_j^+)(x_1, \dots, x_{m+1}) = x_i$ si $0 \leq i < j$ y $(\pi_i \circ \phi_j^+)(x_1, \dots, x_{m+1}) = x_{i+1}$ si $j < i \leq m$. Donde $\pi_i(x_1, \dots, x_{m+1}) = x_i$, la proyección canónica. En otras palabras, podemos denotar a las proyecciones positivas como la transformación $\phi_j^+(x_1, \dots, x_{m+1}) = (x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_{m+1})$, donde \hat{x}_j significa quitar la coordenada j del vector (x_1, \dots, x_{m+1}) .

Así la inversa es $(\phi_j^+)^{-1}(x_1, x_2, \dots, x_m) = (x_1, \dots, \sqrt{1 - \sum_{i=1}^m (x_i)^2}, \dots, x_m)$, con la raíz en la entrada j .

De manera similar definimos las proyecciones negativas (U_j^-, ϕ_j^-) , pero tomando la entrada $x_j < 0$ y designamos un signo menos en la entrada j de la inversa (donde está la raíz). De esta manera si $\mathfrak{A} = \{(U_i^+, \phi_i^+) \mid 0 \leq i \leq m+1\} \cup \{(U_i^-, \phi_i^-) \mid 0 \leq i \leq m+1\}$, entonces $\mathbb{S}^m \subseteq (\bigcup_{i=1}^m U_i^+) \cup (\bigcup_{i=1}^m U_i^-) = \bigcup \mathfrak{A}$. Además las proyecciones positivas y negativas son difeomorfismos, en consecuencia \mathfrak{A} es un atlas para \mathbb{S}^m .

Sea $H_j^+ := \{(x_1, \dots, x_{m+1}) \mid x_j > 0\} \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$, notemos que este conjunto es abierto en \mathbb{R}^{m+1} , análogamente se define el conjunto H_j^- . También recordemos que un subespacio topológico de un espacio euclidiano es compacto si, y sólo si es cerrado y acotado. Ahora, notemos que con $U_j^+ = H_j^+ \cap \mathbb{S}^m$ y $U_j^- = H_j^- \cap \mathbb{S}^m$, para toda j , luego \mathbb{S}^m es subespacio de \mathbb{R}^{m+1} . Además \mathbb{S}^m es cerrado y acotado en \mathbb{R}^{m+1} , por lo tanto es compacto.

La función altura de \mathbb{S}^m

Sea $f : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x_1, \dots, x_{m+1}) = x_{m+1}$ conocida como la función altura de la esfera. Ésta es diferenciable, pues es lineal. Calculemos las derivadas parciales de la función respecto cada uno de los abiertos con índice $j < m+1$:

$$\frac{\partial f}{\partial \phi_i^+}(x_1, \dots, x_{m+1}) = \frac{\partial x_{m+1}}{\partial x_i} = 0, \text{ si } i \neq j.$$

$$\frac{\partial f}{\partial \phi_{m+1}^+}(x_1, \dots, x_{m+1}) = \frac{\partial x_{m+1}}{\partial x_{m+1}} = 1.$$

Así, en estas cartas no hay puntos críticos de f . Hagamos el cálculo en el abierto U_{m+1}^+ . La regla de correspondencia en este caso es $f(x_1, \dots, x_{m+1}) = \sqrt{1 - \sum_{i=1}^m (x_i)^2}$, por lo que las derivadas parciales de f son

$$\frac{\partial f}{\partial \phi_j^+}(x_1, \dots, x_{m+1}) = \frac{-x_j}{\sqrt{1 - \sum_{i=1}^m (x_i)^2}}, \text{ en el caso } j \neq m+1.$$

Así $\frac{\partial f}{\partial \phi_j^+}(x_1, \dots, x_{m+1}) = 0$ si, y sólo si $x_j = 0$, para todo $j \neq m+1$, por lo que el punto está obligado a ser $N = (0, 0, \dots, 1)$, que definiremos como el polo norte de la esfera. De manera similar, para las cartas negativas se ve que el único punto crítico es el polo sur $S = (0, \dots, -1)$.

De esta manera el polo norte es un máximo y el polo sur un mínimo, y la signatura para N es 0, la de S es $m+1$. Por lo que, con los resultados anteriores tenemos que $\mathbb{S}^m \approx D^m \bigcup_{\phi} D^m$ unidas por la frontera de ambos discos.

Del ejemplo anterior demostraremos primero un lema y una proposición.

Lema 2.17.1. *Si $f : S^m \rightarrow S^m$ es un homeomorfismo, entonces existe un homeomorfismo $F : D^m \rightarrow D^m$, tal que $F|_{S^m} = f$.*

Demostración. Definimos $F(\bar{0}) = \bar{0}$ y si $v \neq 0$, entonces $F(v) = \|v\| f\left(\frac{v}{\|v\|}\right)$, que está bien definida. Notemos que la norma de un vector es una función continua y f es continua, por lo tanto F es continua. La inversa de esta transformación es $F^{-1}(w) = \|w\| f^{-1}\left(\frac{w}{\|w\|}\right)$ si $w \neq 0$ y $F^{-1}(\bar{0}) = \bar{0}$, ya que

$$\begin{aligned} F(F^{-1}(w)) &= F\left(\|w\| f^{-1}\left(\frac{w}{\|w\|}\right)\right) \\ &= \left\| \|w\| f^{-1}\left(\frac{w}{\|w\|}\right) \right\| f\left(\frac{\|w\| f^{-1}\left(\frac{w}{\|w\|}\right)}{\|w\|}\right) \\ &= \|w\| \left\| f^{-1}\left(\frac{w}{\|w\|}\right) \right\| f\left(f^{-1}\left(\frac{w}{\|w\|}\right)\right) \\ &= \|w\| \left\| f^{-1}\left(\frac{w}{\|w\|}\right) \right\| \frac{w}{\|w\|}. \end{aligned} \tag{2.68}$$

Ya que $f^{-1}\left(\frac{w}{\|w\|}\right) \in S^m$, entonces su norma vale 1, aplicándolo a la ecuación (2.68) tenemos

$$F(F^{-1}(w)) = \|w\| \left(\frac{w}{\|w\|}\right) = w. \tag{2.69}$$

De manera análoga $F^{-1}(F(v)) = v$, se sigue que son inversas, como son continuas, tenemos que F es un homeomorfismo.

Ahora notemos que si $v \in S^m$, entonces $\|v\| = 1$ y así $F(v) = f(v)$. Por lo tanto, F extiende a f , con lo que terminamos el lema. \square

Proposición 2.18. Sean M una m -variedad cerrada y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función, tal que f sólo tiene dos puntos críticos, entonces M es homeomorfo a S^m .

Demostración. Como M tiene sólo dos puntos críticos, uno de ellos es máximo y el otro es mínimo. Denotaremos N' al máximo y S' al mínimo. Sea $\varepsilon > 0$, tal que no se toquen las vecindades de las cartas de los máximos (N' y N) con los mínimos (S' y S), respectivamente.

Por el teorema 2.15, tenemos que $M_{N-\varepsilon}$ es difeomorfo a $D^m =: D_S$. Definimos a $F_S : M_{N-\varepsilon} \rightarrow D_S$ como este difeomorfismo. También $M_{[N-\varepsilon, N]}$ es difeomorfo $D^m =: D_N$, sea $F_N : M_{[N-\varepsilon, N]} \rightarrow D_N$ el difeomorfismo.

Así $M \approx D_S \sqcup_{\varphi} D_N$, la aplicación de pegado es $\varphi : \partial D_N \rightarrow \partial D_S$, donde ∂D_S es difeomorfo a $\partial M_{N-\varepsilon}$.

Por el ejemplo 1, se tiene que $\mathbb{S}_{N-\varepsilon}^m$ es difeomorfa a D_S , sea T_S este difeomorfismo. Y $\mathbb{S}_{[N-\varepsilon, N]}^m$ es difeomorfo a D_N , sea T_N este difeomorfismo. De manera que $\mathbb{S}^m \approx D_S \sqcup_{\psi} D_N$, con $\psi : \partial D_N \rightarrow \partial D_S$ la aplicación de pegado.

Así tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \partial D_N & \xrightarrow{\varphi'} & \partial D_N \\ F_N^{-1} \downarrow & & \uparrow T_N \\ \partial M_{N-\varepsilon} & \xrightarrow{F_S} \partial D_S \xrightarrow{T_S^{-1}} & \partial \mathbb{S}_{N-\varepsilon}^m \end{array} \quad (2.70)$$

El diagrama anterior tiene la forma de la siguiente figura.

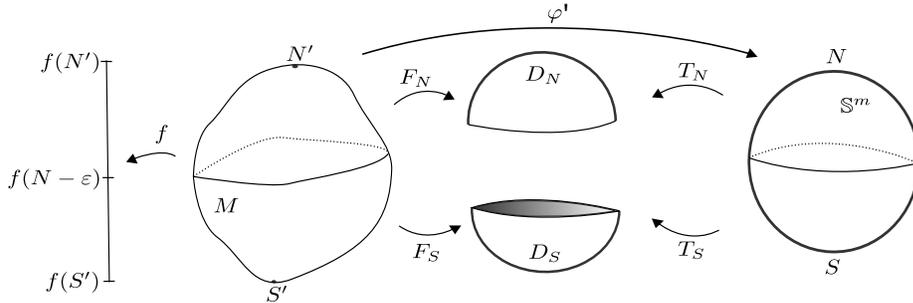


Figura 2.6

A la composición de todas estas transformaciones la llamamos φ' ; es decir $\varphi' = (T_N \circ T_S^{-1}) \circ (F_S \circ F_N^{-1})$. Por último, φ' es un difeomorfismo entre dos esferas de dimensión m , por el lema 2.17.1 existe $H_1 : D_N \rightarrow D_N$ homeomorfismo tal que $H_1|_{S^m} = \varphi'$. Por lo tanto, definimos H como

$$H(p) = \begin{cases} (F_S \circ T_S^{-1})(p) & \text{si } p \in M_{N-\varepsilon} \\ (T_N^{-1} \circ H_1 \circ F_N)(p) & \text{si } p \in M_{[N-\varepsilon, N]} \end{cases}$$

Hay que ver que H está bien definida, solo habría que ver que en la curva de nivel $M_{\{N-\varepsilon\}}$ las transformaciones h_1 y $(F_S \circ T_S^{-1})$ son iguales. Si $p \in M_{\{N-\varepsilon\}}$, entonces podemos aplicar F_N y $F_N(p)$ está en ∂D_N , en ese caso podemos aplicar φ' y es igual a $(T_N \circ T_S^{-1}) \circ (F_S \circ F_N^{-1})$, en ese caso $H(p) = (T_N^{-1} \circ ((T_N \circ T_S^{-1}) \circ (F_S \circ F_N^{-1}) \circ F_N)(p) = (T_S^{-1} \circ F_S)(p)$. Luego, H está bien definida.

Después, ya que H en su construcción está formado por homeomorfismos, se sigue que H es un homeomorfismo. Con lo cual, concluimos la demostración. \square

Ejemplo 2.2. La variedad $M = \mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^n$, $m \leq n$.

Sean $f_m : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{R}$ y $f_n : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$, tales que $f_n(x_1, \dots, x_n) = x_n$ y $f_m(x_1, \dots, x_m) = x_m$, definimos $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ con la siguiente regla de correspondencia $f(x, y) = (f_n(x) + a)(f_m(y) + b)$, y $1 < a < b$.

Entonces tenemos cuatro puntos críticos no-degenerados. Pensando que N_n y S_n son los puntos críticos de \mathbb{S}^n y los puntos, N_m y S_m son los puntos críticos de \mathbb{S}^m , los puntos críticos de M con f se calculan de la misma manera pues las primeras n variables no dependen de las últimas m variables, entonces para las primeras n entradas tienen parcial

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(f_m + b) = 0.$$

Esto pasa si, y sólo si $f_m + b = 0$ ó $\frac{\partial f_n}{\partial x_i} = 0$. Vemos que despejando f_m en la primer ecuación se tiene, $f_m = -b < -1$ lo cual no es posible. Entonces $\frac{\partial f_n}{\partial x_i} = 0$. Por lo tanto, f tiene los mismos puntos críticos que f_n en las primeras n entradas.

De manera similar se hace el cálculo para las últimas m entradas, entonces f tiene los mismos puntos críticos que f_m .

Así, los puntos críticos de f son; (N_m, N_n) con signatura $n + m$, (S_m, N_n) con signatura n , (N_m, S_n) con signatura m y (S_m, S_n) con signatura 0. Recordemos que las signaturas se obtienen de la suma de cada una de las signaturas de los puntos críticos correspondientes.

Con lo cual, la identificación de esta variedad es $\mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^n \approx D^{m+n} \sqcup D^m \times D^n \sqcup (D^n \times D^m) \sqcup D^{m+n}$.

El caso particular con $m = 1$ y $n = 1$, es $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, es difeomorfo a $D^2 \sqcup (D^1 \times D^1) \sqcup (D^1 \times D^1) \sqcup D^2$. A M se le conoce como el toro de dimensión 2 y genero 1. El pegado de las asas puede ser visto en la siguiente figura.

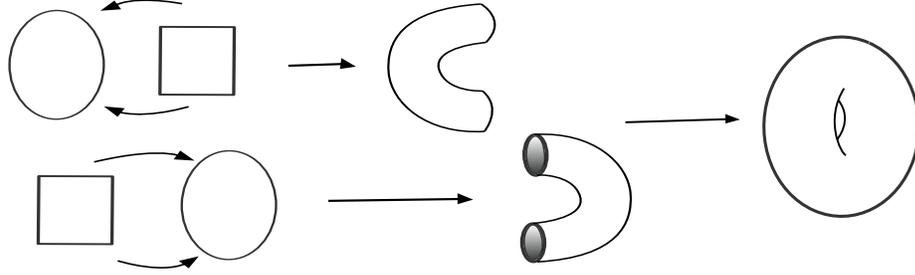


Figura 2.7

Ejemplo 2.3. *Espacio proyectivo \mathbb{RP}^m .*

El espacio proyectivo está definido como un espacio cociente. Primero tomamos \mathbb{R}^{m+1} sin el origen y la relación: $(x_1, \dots, x_{m+1}) \sim (y_1, \dots, y_{m+1})$ si y sólo si, existe $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $(x_1, \dots, x_{m+1}) = \alpha(y_1, \dots, y_{m+1})$.

Consideramos el espacio:

$$\mathbb{RP}^m := ((\mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\}) / \sim) = \{[(x_1, \dots, x_{m+1}) \mid x_i \in \mathbb{R} \text{ para toda } i]\}$$

La proyección canónica es la transformación que manda cada punto a su clase de equivalencia, es decir, la transformación $\Pi : \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{RP}^m$, $\Pi(x_1, \dots, x_{m+1}) = [(x_1, \dots, x_{m+1})]$, de manera que un conjunto $U \subseteq \mathbb{RP}^m$ es abierto si, y sólo si $\Pi^{-1}(U)$ es abierto.

Definimos $\pi = \Pi|_{S^m} : S^m \rightarrow \mathbb{RP}^m$. Si $v \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, entonces $\Pi(v) = [v]$ cae en \mathbb{RP}^m . Por otro lado, $w = \frac{v}{\|v\|} \in S^m$, de donde $\|v\|w = v$, así $[v] = [w]$ y $\pi(w) = [v]$. Por lo tanto, π es una transformación sobreyectiva.

Por definición de π y la topología de \mathbb{RP}^m , tenemos que si U es abierto en \mathbb{RP}^m entonces $\Pi^{-1}(U)$ es abierto en \mathbb{R}^m . Por otro lado, los abiertos de S^m son la intersección de abiertos de \mathbb{R}^{m+1} con S^m , entonces $\Pi^{-1}(U) \cap S^m$ es abierto en la esfera. Por último, por la definición de la transformación π tenemos que $\pi^{-1}(U) = \Pi^{-1}(U) \cap S^m$, el cual es abierto. Por lo tanto, π es una transformación continua.

Así, como S^m es compacta y π continua y sobre, entonces $\pi(S^m) = \mathbb{RP}^m$ es compacto.

Definimos la función $f : \mathbb{RP}^m \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$f([(x_1, \dots, x_{m+1})]) = \frac{a_1 x_1^2 + \dots + a_{m+1} x_{m+1}^2}{\|(x_1, \dots, x_{m+1})\|^2}$$

Con $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{m+1}$, la regla de correspondencia de f está en términos de las coordenadas de un representante, veamos que la función está bien definida; es decir, que el valor no depende del representante. De esta manera

si $(x_1, \dots, x_{m+1}) = \alpha(y_1, \dots, y_{m+1})$, entonces $[x_1, \dots, x_{m+1}] = [y_1, \dots, y_{m+1}]$, y así

$$\begin{aligned}
 f([y_1, \dots, y_{m+1}]) &= \frac{a_1 y_1^2 + \dots + a_{m+1} y_{m+1}^2}{\|(y_1, \dots, y_{m+1})\|^2} \\
 &= \frac{a_1 (\alpha x_1)^2 + \dots + a_{m+1} (\alpha x_{m+1})^2}{\|\alpha(x_1, \dots, x_{m+1})\|^2} \\
 &= \frac{\alpha^2 a_1 x_1^2 + \dots + a_{m+1} x_{m+1}^2}{\alpha^2 \|(x_1, \dots, x_{m+1})\|^2} \\
 &= \frac{a_1 x_1^2 + \dots + a_{m+1} x_{m+1}^2}{\|(x_1, \dots, x_{m+1})\|^2} \\
 &= f([x_1, \dots, x_{m+1}]).
 \end{aligned} \tag{2.71}$$

Lo que demuestra que la función está bien definida.

Consideremos los siguientes conjuntos $U_i := \{[x_1, \dots, x_{m+1}] \mid x_i \neq 0\} \subseteq \mathbb{R}\mathbb{P}^m$, el cual es abierto pues $\Pi^{-1}(U_i) = \{(x_1, \dots, x_{m+1}) \mid x_i \neq 0\}$, éste es abierto en \mathbb{R}^{m+1} . Sea $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^m$ transformación que esta dada por la regla, $\phi_i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{m+1}) = \frac{1}{x_i}(x_1, \dots, \tilde{x}_i, \dots, x_{m+1})$, con $1 \leq i \leq m+1$. Así, tenemos las cartas (U_i, ϕ_i) , hay que ver si están bien definidas, para esto tomamos dos puntos relacionados, es decir, si $(x_1, \dots, x_{m+1}) = \alpha(y_1, \dots, y_{m+1})$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
 \phi_i(y_1, \dots, y_m) &= \frac{1}{y_i}(y_1, \dots, \tilde{y}_i, \dots, y_{m+1}) \\
 &= \frac{1}{\alpha x_i}(\alpha x_1, \dots, \alpha \tilde{x}_i, \dots, \alpha x_{m+1}).
 \end{aligned} \tag{2.72}$$

Observemos que quitar la entrada αx_i es lo mismo que quitar la entrada x_i , es decir, $(\alpha x_1, \dots, \alpha \tilde{x}_i, \dots, \alpha x_{m+1}) = \alpha(x_1, \dots, \tilde{x}_i, \dots, x_{m+1})$, esto en la ecuación (2.72) nos da que

$$\begin{aligned}
 \phi_i(y_1, \dots, y_m) &= \frac{\alpha}{\alpha x_i}(x_1, \dots, \tilde{x}_i, \dots, x_{m+1}) \\
 &= \phi_i(x_1, \dots, x_m),
 \end{aligned}$$

para toda i . En ese caso, las funciones están bien definidas.

Ahora si $\phi_i^{-1}(x_1, \dots, x_m) = [x_1, \dots, 1, \dots, x_m]$, donde el 1 lo colocamos en la entrada i -ésima, entonces

$$\begin{aligned}
 \phi_i(\phi_i^{-1}(x_1, \dots, x_m)) &= \phi_i([x_1, \dots, 1, \dots, x_m]) \\
 &= \frac{1}{1}(x_1, \dots, \tilde{1}, \dots, x_m) \\
 &= (x_1, \dots, x_m)
 \end{aligned}$$

Análogamente $(\phi_i^{-1} \circ \phi_i) = Id_{\mathbb{R}\mathbb{P}^m}$, para toda i , luego son biyectivas.

Hacemos la siguiente observación, dada la definición de $\mathbb{R}\mathbb{P}^m$ como espacio cociente, tenemos que una transformación $\phi : \mathbb{R}\mathbb{P}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ es continua si, y

sólo si $(\phi \circ \Pi)$ es continua. Primero suponemos ϕ continua. Sea U abierto en \mathbb{R}^m ; así, $\phi^{-1}(U)$ es abierto en $\mathbb{R}P^m$, y en tal caso $\Pi^{-1}(\phi^{-1}(U)) = (\phi \circ \Pi)^{-1}(U)$ es abierto en \mathbb{R}^m , por definición $(\phi \circ \Pi)$ es continua. En el regreso, suponemos $(\phi \circ \Pi) = \Pi^{-1} \circ \phi^{-1}$ continua, por la definición de la topología cociente Π es continua. Por lo tanto, si U es abierto en \mathbb{R}^m , tenemos que $\Pi^{-1}(\phi^{-1}(U))$ es abierto, esto pasa si, y sólo si $\phi^{-1}(U)$ es abierto, en consecuencia ϕ tiene que ser continua. Así, queda demostrada la observación.

Con esto probaremos que las transformaciones ϕ_i son continuas.

Si $(x_1, \dots, x_m) \in \pi^{-1}(U_i)$, entonces $x_i \neq 0$, así

$$\phi_i(\Pi(x_1, \dots, x_{m+1})) = \frac{1}{x_i}(x_1, \dots, \tilde{x}_i, \dots, x_{m+1}).$$

Esta regla de correspondencia es de una transformación continua, con lo cual la composición es continua.

Sea $U \subseteq U_i$ abierto, la imagen inversa de U bajo la transformación inversa de ϕ_i es $(\phi_i^{-1})^{-1}(U) = \tilde{U}$ con

$$\tilde{U} = \{(x_1, \dots, \tilde{x}_i, \dots, x_{m+1}) \mid [x_1, \dots, x_{m+1}] \in U\}.$$

El conjunto \tilde{U} es abierto, y así ϕ_i^{-1} es continua. Por lo tanto, la transformación ϕ_i es un homeomorfismo para toda i .

Las cartas son compatibles ya que si $[\bar{x}] = [x_1, \dots, x_{m+1}] \in U_i \cap U_j$, con $i \neq j$, se sigue que $x_j \neq 0 \neq x_i$, luego

$$\begin{aligned} (\phi_j \circ \phi_i^{-1})[\bar{x}] &= \phi_j([x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_j, \dots, x_m]) \\ &= \frac{1}{x_j}(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, \tilde{x}_j, \dots, x_m). \end{aligned}$$

Que claramente es diferenciable.

Tenemos el atlas $\mathfrak{A} = \{(U_i, \phi_i) \mid i \in \{1, \dots, m+1\}\}$, entonces el espacio proyectivo es una variedad compacta de dimensión m .

Trabajamos con las cartas de el atlas \mathfrak{A} . Sea $\bar{x} = (x_1, \dots, x_m)$, con la composición $(f \circ \phi_i^{-1})$ obtenemos

$$(f \circ \phi_i^{-1})(\bar{x}) = \frac{a_1 x_1^2 + \dots + a_i + \dots + a_{m+1} x_m^2}{\|(x_1, \dots, 1, \dots, x_m)\|^2}$$

Por lo tanto, si $j \geq i$ las parciales quedan de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial(\phi_i)_j}(\bar{x}) &= \frac{2a_{j+1}x_j \|(x_1, \dots, 1, \dots, x_m)\|^2 - (2x_j)(a_1 x_1^2 + \dots + a_i + \dots + a_{m+1} x_m^2)}{\|(x_1, \dots, 1, \dots, x_m)\|^4} \\ &= \frac{2x_j((a_{j+1} - a_1)x_1^2 + \dots + (a_{j+1} - a_{m+1})x_m^2 + (a_{j+1} - a_j)x_j^2 + (a_{j+1} - a_i))}{\|(x_1, \dots, 1, \dots, x_m)\|^4} \end{aligned} \tag{2.73}$$

Para encontrar los puntos críticos, hacemos $\frac{\partial f}{\partial(\phi_i)_j}(\bar{x}) = 0$, para toda j . Primero notemos que para $j = m$, la ecuación (2.73) nos da

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial(\phi_i)_m}(\bar{x}) &= \frac{2x_m((a_{m+1} - a_1)x_1^2 + \dots + (a_{m+1} - a_{m+1})x_m^2 + (a_{m+1} - a_m)x_m^2 + (a_{m+1} - a_i))}{\|(x_1, \dots, 1, \dots, x_m)\|^4} \\ &= \frac{2x_m((a_{m+1} - a_1)x_1^2 + \dots + (a_{m+1} - a_m)x_m^2 + (a_{m+1} - a_i))}{\|(x_1, \dots, 1, \dots, x_m)\|^4} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Ya que $a_{m+1} > a_l$, para toda $l \in \{1, \dots, m\}$, entonces $a_{m+1} - a_i > 0$ y así $((a_{m+1} - a_1)x_1^2 + \dots + (a_{m+1} - a_m)x_m^2 + (a_{m+1} - a_m)x_m^2 + (a_{m+1} - a_i)) > 0$. Por lo tanto la parcial si $j = m$ es cero, si y sólo si $x_m = 0$. Ahora tomemos $j = m - 1$, entonces la ecuación (2.73) nos da

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial(\phi_i)_{m-1}}(\bar{x}) &= \frac{2x_{m-1}((a_m - a_1)x_1^2 + \dots + (a_m - a_{m+1})x_m^2 + (a_m - a_{m-1})x_{m-1}^2 + (a_m - a_i))}{\|(x_1, \dots, 1, \dots, x_m)\|^4} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Análogamente a $\frac{\partial f}{\partial(\phi_i)_m}$, tenemos que

$$((a_{m+1} - a_1)x_1^2 + \dots + (a_{m+1} - a_m)x_m^2 + (a_{m+1} - a_m)x_m^2 + (a_{m+1} - a_i)) > 0,$$

por lo que $\frac{\partial f}{\partial(\phi_i)_{m-1}}(\bar{x}) = 0$ si, y sólo si $x_{m-1} = 0$. De manera similar, podemos argumentar que x_i, \dots, x_{m+1} son todos cero.

Por otro lado, si $j < i$, la derivada parcial de f queda

$$\frac{\partial f}{\partial(\phi_i)_j}(\bar{x}) = \frac{2x_j((a_j - a_1)x_1^2 + \dots + (a_j - a_{m+1})x_m^2 + (a_j - a_j)x_j^2 + (a_j - a_i))}{\|(x_1, \dots, 1, \dots, x_m)\|^4}.$$

Usemos que las variables x_i, \dots, x_{m+1} , son todas cero, en tal caso

$$\frac{\partial f}{\partial(\phi_i)_j}(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, \dots, 0) = \frac{2x_j((a_j - a_1)x_1^2 + \dots + (a_j - a_{i-1})x_{i-1}^2 + (a_j - a_i))}{\|(x_1, \dots, 1, \dots, x_m)\|^4}. \quad (2.76)$$

Tomamos $j = 1$, de la ecuación (2.76), tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial(\phi_i)_1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, \dots, 0) &= \frac{2x_1((a_1 - a_1)x_1^2 + \dots + (a_1 - a_{i-1})x_{i-1}^2 + (a_1 - a_i))}{\|(x_1, \dots, 1, \dots, x_m)\|^4} \\ &= \frac{2x_1((a_1 - a_2)x_2^2 + \dots + (a_1 - a_{i-1})x_{i-1}^2 + (a_1 - a_i))}{\|(x_1, \dots, 1, \dots, x_m)\|^4} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ya que $a_1 < a_l$, para toda $l \in \{2, \dots, i\}$, implica que $(a_1 - a_i) < 0$, y por lo tanto $((a_1 - a_2)x_2^2 + \dots + (a_1 - a_{i-1})x_{i-1}^2 + (a_1 - a_i)) < 0$; así para que la primera derivada parcial de f sea cero, se tiene que $x_1 = 0$. De manera análoga se demuestra que x_2, \dots, x_{i-1} con todos cero.

Por lo que, el punto crítico en esa carta es $p_i = \phi_i^{-1}(0, \dots, 0) = [0, \dots, 1, \dots, 0]$,

donde el uno se encuentra en la entrada i -ésima.

Para el cálculo del Hessiano tomamos otro índice $k \neq i$ y $k \neq j$. Debido a que se complica más el cálculo usaremos la notación de suma, entonces

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial \phi_k \partial \phi_j}(x_1, \dots, x_m) \\ &= \frac{2x_j(2(a_{m+1} - a_k)x_k) \|(x_1, \dots, 1, \dots, x_k)\|^4}{\|(x_1, \dots, 1, \dots, x_k)\|^8} \\ &= \frac{2 \|(x_1, \dots, 1, \dots, x_k)\|^2 (2x_k)(2x_j) \left(\sum_{l \neq j, i}^m (a_j - a_l)x_l^2 + (a_j - a_i) \right)}{\|(x_1, \dots, 1, \dots, x_k)\|^2}. \end{aligned}$$

Al evaluar en el punto p_i , las entradas j, k son cero, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial \phi_k \partial \phi_j}(p_i) = 0.$$

Tomemos ahora los mismos índices, es decir

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial \phi_j \partial \phi_j}(x_1, \dots, x_m) \\ &= \frac{\left(2 \left(\sum_{l \neq j, i}^m (a_j - a_l)x_l^2 + (a_j - a_i) \right) + 0 \right) \|(x_1, \dots, 1, \dots, x_m)\|^4}{\|(x_1, \dots, 1, \dots, x_m)\|^8} \\ &= \frac{\|(x_1, \dots, 1, \dots, x_m)\|^2 (2x_j) \left(2x_j \left(\sum_{l \neq j, i}^m (a_j - a_l)x_l^2 + (a_j - a_i) \right) \right)}{\|(x_1, \dots, 1, \dots, x_m)\|^8}. \end{aligned}$$

Evaluando en p_i , todos los términos son cero excepto el i -ésimo, la norma nos da 1, entonces solo sobra la parte constante, es decir

$$\frac{\partial f}{\partial \phi_j \partial \phi_j}(p_i) = 2(a_j - a_i).$$

Por lo que el Hessiano nos queda de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} 2(a_1 - a_i) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2(a_2 - a_i) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2(a_3 - a_i) & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2(a_{m+1} - a_i) \end{bmatrix}$$

(observemos que en la diagonal no se toma el índice i) con lo que el determinante es no cero para toda i , en consecuencia son $m + 1$, puntos críticos.

La signatura depende de qué tan grande es i . Por ejemplo para el punto p_1 ,

todas las a_j 's son mayores que a_1 , entonces $2(a_j - a_1) \geq 0$ para toda j , así la diagonal del Hessiano en p_1 no tiene signos negativos. Luego p_2 , a_1 es menor que la constante a_2 , entonces $2(a_1 - a_2) < 0$ y si $j \geq 2$ se tiene que $2(a_j - a_2) \geq 0$, entonces tiene un signo negativo. Así p_1 tiene signatura cero y p_2 signatura uno. En general el punto p_i , tiene signatura $i - 1$. De esta manera:

$$\mathbb{R}P^m \approx D^m \sqcup (D^1 \times D^{m-1}) \sqcup \dots \sqcup (D^{m-1} \times D^1) \sqcup D^m$$

El caso particular $m = 1$ tenemos que $\mathbb{R}P^1 \approx D^1 \sqcup D^1 \approx S^1$. Para el siguiente caso $m = 2$, tenemos que $\mathbb{R}P^2 \approx D^2 \sqcup (D^1 \times D^1) \sqcup D^2$. Las primeras dos formas de hacer el primer pegado $D^2 \sqcup (D^1 \times D^1)$, son como se muestran en la figura

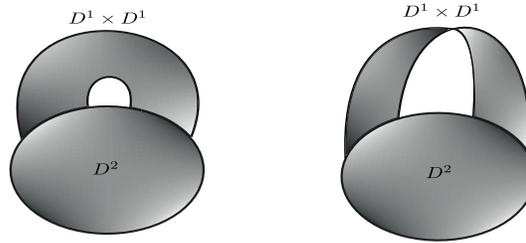


Figura 2.8

Notemos que en la parte izquierda de la figura 2.8, la frontera del pegado es difeomorfa a una unión disconexa $S^1 \sqcup S^1$, para hacer el pegado con D^2 tendríamos que cortar la frontera $\partial D^2 = S^1$, lo que no es posible sin generar una discontinuidad en el pegado. Por lo tanto, este pegado no es al que es difeomorfo $\mathbb{R}P^2$. En cambio, el pegado derecho en la figura 2.8 es conocido como una banda de Moebius. Éste tiene por frontera a S^1 . Con lo cual, el pegado de la frontera de D^2 con la banda es posible. Así, $\mathbb{R}P^2$ es difeomorfo a el pegado del disco D^2 (por su frontera) a la banda de Moebius.

Ejemplo 2.4. *El grupo de las rotaciones en \mathbb{R}^m , $SO(m)$.*

Consideremos el espacio de matrices

$$M_{m \times m}(\mathbb{R}) = \{A \mid A \text{ es matriz de } m \times m \text{ de coeficientes reales}\}.$$

Por A_i entenderemos la columna i de la matriz A , diremos que la columna es unitaria si

$$\|A_i\|^2 = a_{1i}^2 + a_{2i}^2 + \dots + a_{mi}^2 = 1;$$

dos columnas son ortogonales si su producto interior da cero, es decir, si $i \neq j$

$$A_i \cdot A_j = a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \dots + a_{mi}a_{mj} = 0.$$

Al pedir que una matriz tenga sus columnas unitarias y ortogonales entre si,

se puede deducir que $AA^t = I_m$, donde A^t es la matriz transpuesta de A , y la matriz I_m es la identidad de tamaño m . Esto se ve gracias a que

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \|A_1\|^2 & A_1 \cdot A_2 & \dots & A_1 \cdot A_m \\ A_2 \cdot A_1 & \|A_2\|^2 & \dots & A_2 \cdot A_m \\ \vdots & & \ddots & \\ A_m \cdot A_1 & A_m \cdot A_2 & \dots & \|A_m\|^2 \end{bmatrix} = I_m \end{aligned}$$

Si calculamos el determinante $\det(AA^t) = \det(I_m) = 1$. Como $\det(A^t) = \det(A)$, obtenemos $\det(A)^2 = 1$, por tanto $\det(A) = \pm 1$. Definimos el grupo de rotaciones como

$$SO(m) := \{A \in M_{m \times m} \mid A \text{ tiene columnas ortogonales, unitarias y } \det(A) = 1\}.$$

Este conjunto es efectivamente un grupo con la operación producto de matrices. Ahora como subconjunto del espacio de matrices de orden m , podemos demostrar que es cerrado, con la topología generada por la norma $\|A\|_M = \sqrt{\|A_1\|^2 + \dots + \|A_m\|^2}$, donde $\|A_j\|$ es la norma euclidiana en \mathbb{R}^m de las columnas de la matriz, ya que éstas en realidad son un vector transpuesto.

Sea $B \in \overline{SO(m)}$, entonces existe $(B_n)_{n=1}^\infty \subseteq SO(m)$ sucesión tal que B_n converge a B , con la norma $\|\cdot\|_M$. Recordemos que el determinante es una función continua pues es suma y producto de proyecciones, y las proyecciones son continuas, entonces $\det(B_n) = 1$ para toda n , por lo tanto $\det(B) = 1$, así $B \in SO(m)$. Esto dice que el conjunto es cerrado.

Definimos la proyección natural desde $\{A \in M_{2 \times 2} \mid \|A_i\| = 1, i = 1, \dots, m\}$ a \mathbb{R}^{m^2} , como

$$\pi(A) = (A_1^t, A_2^t, \dots, A_m^t) \in \mathbb{R}^{m^2}.$$

Ésta es un homeomorfismo a $S^m \times S^m \times \dots \times S^m$ (m veces). El producto de m espacios compactos, es compacto. Dado el homeomorfismo anterior tenemos que $\pi^{-1}(S^m \times \dots \times S^m) = \{A \mid \|A_i\| = 1, i = 1, \dots, m\}$, así el conjunto es compacto. Observemos que $SO(m) \subseteq \{A \mid \|A_i\| = 1, i = 1, \dots, m\}$ y es cerrado. Un conjunto cerrado en un conjunto compacto, es compacto. Por lo tanto, $SO(m)$ es compacto.

Para ver la dimensión de este espacio, veamos que la primera columna tiene una restricción $\|A_1\| = 1$, entonces la dimensión del espacio generado por la primera columna es $m - 1$. La segunda columna tiene la restricción $\|A_2\| = 1$ y de ortogonalidad con la primera columna, es decir, $A_1 \cdot A_2 = 0$, o sea dos restricciones, así la dimensión del espacio generado por la segunda columna es $m - 2$.

Continuando de esta manera, tenemos que la dimensión de la j -ésima columna es $m-j$, debido a las restricciones impuestas en ella por la definición de $SO(m)$. Ya que la dimensión de $SO(m)$ está dada por la suma de las dimensiones de los espacios que generan las columnas de las matrices que lo conforman, tenemos que la suma de los primeros $m-1$ números, es decir, $\sum_{j=1}^{m-1} j = m(m-1)/2$ es la dimensión de $SO(m)$, por lo tanto $\dim(SO(m)) = m(m-1)/2$.

Definimos la siguiente función $f : SO(m) \rightarrow \mathbb{R}$, como

$$f(A) = c_1 a_{11} + c_2 a_{22} + \dots + c_m a_{mm}.$$

Con $1 < c_1 < c_2 < \dots < c_m$, haremos las siguientes afirmaciones:

i) Los puntos críticos de f son de la forma

$$E = \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \pm 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \pm 1 \end{bmatrix}$$

Para demostrar esto primero veremos que todo punto crítico es de esa forma y luego que si es de esta forma entonces es punto crítico.

Sea A un punto crítico y sea B_θ^{ij} con $i < j$, la matriz tal que $b_{ii} = \cos \theta$, $b_{ij} = -\sin \theta$, $b_{ji} = \sin \theta$, $b_{jj} = \cos \theta$, los índices restantes de la diagonal son 1 y los demás índices son cero. A B_θ^{ij} la nombraremos la matriz de rotación en el eje (i, j) por un ángulo θ , con esta matriz definimos la curva $\alpha_\theta : [0, 2\pi] \rightarrow SO(m)$ dada por

$$\alpha_\theta(A) = A \cdot B_\theta^{ij}.$$

Notemos que $\det(B_\theta^{ij}) = 1$. Sea $1 \leq k \leq m$ tenemos dos casos si $k \neq i, j$, se sigue que $\|(B_\theta^{ij})_k\| = 1$, pues en esta columna tiene cero todas sus entradas y 1 en la k -ésima. Si $k = i$ o $k = j$, entonces $\|(B_\theta^{ij})_k\| = (\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = 1$.

Por otro lado, con $k \neq l$ ambos índices distintos de i, j tenemos $(B_\theta^{ij})_k \cdot (B_\theta^{ij})_l = 0$ pues son 0 sus entradas, y 1 en la entrada k y l respectivamente, pero $k \neq l$, por lo tanto el producto es 0. Si $k = i$ y $j = l$, implica que el producto nos da $(B_\theta^{ij})_i \cdot (B_\theta^{ij})_j = \sin \theta \cos \theta - \cos \theta \sin \theta = 0$. En consecuencia, $B_\theta^{ij} \in SO(m)$.

Con lo cual la curva $\alpha_\theta(A)$ cae en el espacio $SO(m)$. Ahora, sean α_{kl} las entradas de la matriz α_θ , hacemos el siguiente cálculo

$$(f \circ \alpha_\theta) = \sum_{l=1}^m c_l \alpha_{ll},$$

para $\alpha_{ll} = \sum_{k=1}^m a_{lk}b_{kl}$, donde estos coeficientes son cero si $l \neq i, j$, lo que nos deja es

$$(f \circ \alpha_\theta)(A) = \sum_{l=1}^m c_l \alpha_{ll}.$$

Los dos coeficientes importantes son α_{ii} y α_{jj} . Recordando qué los define, todos los coeficientes son cero excepto si $k = i, j$, así

$$\alpha_{ii} = a_{ii}b_{ii} + a_{ij}b_{ji}$$

y

$$\alpha_{jj} = a_{ji}b_{ij} + a_{jj}b_{jj}.$$

Sustituyendo los coeficientes de la matriz B_θ^{ij} , tenemos

$$\alpha_{ii} = a_{ii} \cos \theta + a_{ij} \sin \theta$$

$$\alpha_{jj} = -a_{ji} \sin \theta + a_{jj} \cos \theta.$$

Por lo tanto la derivada direccional respecto a θ , es

$$\frac{df(AB_\theta)}{d\theta} = c_i (a_{ii}(-\sin \theta) + a_{ij} \cos \theta) + c_j (a_{ji}(-\cos \theta) + a_{jj} \sin \theta).$$

Lo siguiente es evaluar en $\theta = 0$, que es como estar justo en el punto de cero rotación, o sea, en el "punto" A . En tal caso,

$$\left. \frac{df(AB_\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=0} = c_i a_{ji} - c_j a_{ij}.$$

Dado que A es un punto crítico no hay avance respecto a las curvas de nivel, lo que nos dice que cualquier curva tiene su derivada direccional en el punto A igual a cero, entonces $c_i a_{ij} = c_j a_{ji}$.

Si tomamos ahora la curva α'_θ , definida como $\alpha'_\theta(\theta) = (B_\theta^{ij} A)$ con un cálculo similar al anterior obtenemos que $c_i a_{ji} = c_j a_{ij}$, pero $c_i \neq c_j$, por lo que a_{ij} y a_{ji} son cero. Esto pasa para cualquier par de índices distintos. Recordando que las columnas deben ser unitarias, tenemos $\|A_i\|^2 = 1$, sustituyendo $a_{ii} = \pm 1$. Por lo tanto, $A = E$.

Ahora si tomamos la matriz E y la curva α_θ de rotación, podemos calcular la derivada direccional, notemos que E no depende de θ , entonces es constante, así

$$\frac{d(EB_\theta)}{d\theta} = E \frac{d(B_\theta)}{d\theta}.$$

La derivada de B_θ , es una matriz que después evaluaremos en $\theta = 0$, que es básicamente derivar cada una de las entradas de la matriz y después evaluar los

coeficientes, entonces obtenemos la matriz $\left. \frac{d(B_\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=0}$, con las entradas $b'_{ji} = 1$, $b'_{ij} = -1$. El siguiente diagrama ayuda a entender mejor lo que pasa

$$\left. \frac{d(B_\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=0} = \begin{bmatrix} & i & j \\ i & -\sin \theta & -\cos \theta \\ j & \cos \theta & -\sin \theta \end{bmatrix}_{\theta=0} = \begin{bmatrix} & i & j \\ i & 0 & -1 \\ j & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Los índices superiores indican la columna y los laterales los renglones, y las demás entradas valen cero. Por lo tanto, la multiplicación de $\left. \frac{d(B_{\theta=0})}{d\theta} \right|_{\theta=0}$ con la matriz E , nos da

$$E \cdot \left. \frac{d(B_\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=0} = \begin{bmatrix} & i & j \\ i & \pm 1 & 0 \\ j & 0 & \pm 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} & i & j \\ i & 0 & -1 \\ j & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & i & j \\ i & 0 & -(\pm 1) \\ j & \pm 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esta matriz puede ser pensada como un vector V_{ij} con la proyección π , donde la entrada $((i-1)m+j)$ vale ± 1 , al igual que la entrada $((j-1)m+i)$, esto es

$$\pi \begin{bmatrix} & i & j \\ i & 0 & -(\pm 1) \\ j & \pm 1 & 0 \end{bmatrix} = (a_{11} = 0, a_{21}, \dots, a_{ji} = \pm 1, \dots, a_{ji} = -(\pm 1), \dots, a_{mm} = 0).$$

Tomamos $\beta = \{V_{ij} \mid i < j, i, j \in \{1, \dots, m\}\}$, donde todos los vectores tendrán entradas distintas de cero. En total son $m(m-1)/2$ vectores, entonces son base para el espacio tangente en el punto A , ya que el espacio tangente tiene la misma dimensión que $SO(m)$.

Ahora, calculando la derivada direccional respecto a A , en dirección de cada V_{ij} , tenemos que esto en realidad es el producto entre el gradiente de la función f en el punto, por el vector, que se calcula de la siguiente manera

$$\nabla f(E) = \begin{bmatrix} c_1 & & & \\ & c_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_m \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$\nabla f(E) * V_{ij} = \begin{bmatrix} c_1 & & & \\ & c_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_m \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} & i & j \\ i & 0 & -(\pm 1) \\ j & \pm 1 & 0 \end{bmatrix} = \widehat{0}.$$

Donde $*$ es el producto escalar de vectores en \mathbb{R}^{2m} . Así, este producto nos da la matriz cero para cualquier V_{ij} . Ya que $\beta = \{V_{ij} \mid i < j, i, j \in \{1, \dots, m\}\}$ forma una base para el espacio tangente y el gradiente de f por la proposición 1.14 se puede ver en términos de esta base, entonces E es un punto crítico.

ii) Los puntos críticos son no-degenerados.

El cálculo del Hessiano se realiza pensando en la idea anterior de rotaciones. Tomaremos $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{m(m-1)/2}$, ángulos que ayudarán a generar todas la direccionales del tangente, entonces para cada ángulo están sus matrices de rotación. Sea $\theta, \psi \in \{\theta_1, \dots, \theta_{m(m-1)/2}\}$, sean d_{ij} los coeficientes de la multiplicación $(AB_\theta^{ij} B_\psi^{kl})$, entonces

$$\frac{\partial^2 f(AB_\theta^{ij} B_\psi^{kl})}{\partial\theta\partial\psi} = \frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\psi} \left(\sum_{l=1}^m c_l d_{ll} \right).$$

Con las propiedades de linealidad de las derivadas parciales, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\psi} \left(\sum_{l=1}^m c_l d_{ll} \right) &= \sum_{l=1}^m c_l \frac{\partial^2 d_{ll}}{\partial\theta\partial\psi} \\ &= f \left(\frac{\partial^2 (AB_\theta^{ij} B_\psi^{kl})}{\partial\theta\partial\psi} \right). \end{aligned} \quad (2.77)$$

Ya que la matriz B_θ^{ij} es constante al derivar respecto a ψ , y B_ψ^{ij} respecto a θ , y la matriz A es constante para θ y ψ , entonces

$$\frac{\partial^2 (AB_\theta^{ij} B_\psi^{kl})}{\partial\theta\partial\psi} = A \cdot \frac{d(B_\theta^{ij})}{d\theta} \cdot \frac{d(B_\psi^{kl})}{d\psi}. \quad (2.78)$$

Sustituyendo (2.78) en (2.77), tenemos que

$$\frac{\partial^2 f(AB_\theta^{ij} B_\psi^{kl})}{\partial\theta\partial\psi} = f \left(A \cdot \frac{d(B_\theta^{ij})}{d\theta} \cdot \frac{d(B_\psi^{kl})}{d\psi} \right).$$

Por otro lado, hacemos el cálculo de la multiplicación de las matrices cuando $\theta = \psi = 0$, entonces

$$\begin{aligned} A \cdot \frac{d(B_\theta^{ij})}{d\theta} \Big|_{\theta=0} \cdot \frac{d(B_\psi^{kl})}{d\psi} \Big|_{\psi=0} &= A \cdot \begin{bmatrix} i & j \\ j & \cos \theta & -\sin \theta \end{bmatrix}_{\theta=0} \begin{bmatrix} k & l \\ l & \cos \psi & -\sin \psi \end{bmatrix}_{\psi=0} \\ &= A \cdot \begin{bmatrix} i & j \\ i & 0 & -1 \\ j & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & l \\ k & 0 & -1 \\ l & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Esta multiplicación da algo distinto de cero sólo en caso de que $i = k$ y $j = l$, por lo tanto

$$\frac{\partial^2 f(AB_\theta^{ij} B_\psi^{kl})}{\partial\theta\partial\psi} = -(c_i(\pm 1) + c_j(\pm 1)).$$

Así, con este cálculo, tenemos el siguiente diagrama que muestra al Hessiano

$$\begin{bmatrix} & (1, 2) & (1, 3) & \dots & (m-1, m) \\ (1, 2) & \frac{\partial^2}{\partial\theta_1\partial\theta_1} & \frac{\partial^2}{\partial\theta_1\partial\theta_2} & \dots & \frac{\partial^2}{\partial\theta_1\partial\theta_{(m(m-1)/2)}} \\ (1, 3) & \frac{\partial^2}{\partial\theta_2\partial\theta_1} & \frac{\partial^2}{\partial\theta_2\partial\theta_2} & \dots & \frac{\partial^2}{\partial\theta_2\partial\theta_{(m(m-1)/2)}} \\ \vdots & & & \ddots & \\ (m-1, m) & \frac{\partial^2}{\partial\theta_{(m(m-1)/2)}\partial\theta_1} & \frac{\partial^2}{\partial\theta_{(m(m-1)/2)}\partial\theta_2} & \dots & \frac{\partial^2}{\partial\theta_{(m(m-1)/2)}\partial\theta_{(m(m-1)/2)}} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} & (1, 2) & (1, 3) & \dots & (m-1, m) \\ (1, 2) & -(c_1(\pm 1) + c_2(\pm 1)) & & & \\ (1, 3) & & -(c_1(\pm 1) + c_3(\pm 1)) & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ (m-1, m) & & & & -(c_{m-1}(\pm 1) + c_m(\pm 1)) \end{bmatrix}$$

De manera que el determinante no es cero, y por consiguiente todos los puntos críticos son no-degenerados. Más aún, los puntos críticos deben tener determinante igual a 1, pero esto no siempre es cierto, entonces en realidad sólo hay la mitad de puntos críticos en $SO(m)$. Esto es, ya que en la diagonal de E , hay 2^m combinaciones de signos, sólo 2^{m-1} de esos puntos están en $SO(m)$.

La signatura de cada punto depende de la cantidad de signos negativos en la diagonal de la matriz Hessiana de f en tal punto. Así, que el análisis de la signatura de cada punto se puede hacer de manera combinatoria.

Sea $\varepsilon_i = \pm 1$, el signo en el renglón i y columna i de la matriz E . Así,

$$\frac{\partial^2 f(AB_\theta^{ij} B_\psi^{kl})}{\partial\theta\partial\psi} = -(c_i\varepsilon_i + c_j\varepsilon_j).$$

Recordemos que definimos f con la condición $1 < c_1 < c_2 < \dots < c_m$. Notemos los dos casos más simples, esto es, $\varepsilon_i = 1$ para toda i y $\varepsilon_i = -1$ para toda i . En el primer caso, todos los elementos en la diagonal son negativos, luego la signatura de ese punto es $m(m-1)/2$. Por el contrario, en el segundo caso todos los elementos de la diagonal tienen signo positivo, por lo que la signatura de ese punto es 0.

Ahora, si $\varepsilon_m = 1$ y $\varepsilon_i = -1$ para toda $i \leq m$. Ya que $c_i < c_m$, implica que $c_i - c_m < 0$, y así hay $m-1$ signos negativos. Pero $c_m - c_i > 0$ y $c_j + c_i > 0$ para toda i, j , por lo que los demás signos son positivos. En este caso, la signatura del punto es $m-1$. Un caso análogo nos da si $\varepsilon_{m-1} = 1$ y los demás tienen valor de -1 , el cambio está en que tendríamos $c_i - c_{m-1} < 0$ para $i < m-1$, lo que nos dice que hay $m-2$ signos negativos y los demás valores en la diagonal tienen signo positivo. Por lo tanto, la signatura es $m-2$.

En general, si tenemos $i_1 < i_2 < \dots < i_n$ con $0 < n < m$ tales que $\varepsilon_{i_j} = 1$ y los demás son -1 , tenemos que habrá $(i_1 - 1) + \dots + (i_n - 1)$ signos negativos

y los otros serán positivos. Por lo tanto, la signatura será $\sum_{j=i}^n (i_j - 1)$. En consecuencia la identificación de $SO(m)$ es

$$SO(m) \approx D^{m'} \sqcup \left(\bigsqcup_{\substack{0 < n < m \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m}} D^\lambda \times D^{m-\lambda} \right) \sqcup D^{m'}$$

Donde $m' = m(m-1)/2$ y $\lambda = \sum_{j=i}^n (i_j - 1)$ al uniendo correspondiente.

En particular $SO(2) \approx D^1 \sqcup D^1 \approx S^1$. Por otro lado para $SO(3)$, tenemos que los puntos tienen signatura 0, 1, 2, 3 al igual que el espacio $\mathbb{R}\mathbb{P}^3$, entonces $SO(3) \approx D^3 \sqcup (D^1 \times D^2) \sqcup (D^2 \times D^1) \sqcup D^3 \approx \mathbb{R}\mathbb{P}^3$. Se puede demostrar que $SO(3)$ es homotópicamente equivalente a $\mathbb{R}\mathbb{P}^3$, la forma de hacer esta identificación explícitamente puede ser vista en [3].

Capítulo 3

Teoría de Morse y homología.

En este capítulo básicamente nos ocuparemos en hacer una aplicación útil para la teoría de homología de variedades con la teoría de Morse. Antes haremos una introducción a lo que son las células y la orientación que se les puede dar, para de esta manera definir cuando una variedad es orientable.

Después probaremos un teorema en la teoría de Morse, donde mostramos una desigualdad que relaciona los puntos críticos con los números de Betti.

3.1. Grupos de Homología

Lo primero que definiremos es una **célula de dimensión λ o λ -célula**:

$$e^\lambda := \{\bar{x} \in \mathbb{R}^\lambda \mid \|\bar{x}\| < 1\}$$

En caso de que λ sea cero, $e^0 = \{\bar{0}\}$, o sea, únicamente el origen. Recordando la definición de un disco podemos observar que $\bar{e}^\lambda = D^\lambda$. A continuación, presentamos la definición de un complejo celular pensado como una unión de células de distinta dimensión, pegadas para formar un cuerpo. De esta manera podemos formar objetos como cubos, esferas, dodecaedros y más.

Definición 3.1. *La definición de un complejo celular se hará de manera recursiva sobre la dimensión, empezando por dimensión 0:*

1. Sea $X^0 := e_1^0 \sqcup e_2^0 \sqcup \dots \sqcup e_{k_0}^0$, con k_0 entero positivo o cero.
2. Suponiendo construido un $(\lambda - 1)$ -complejo Y , donde $\lambda - 1$ nos dice la mayor dimensión de las células que contiene Y . Sea

$$e_1^\lambda \sqcup e_2^\lambda \sqcup \dots \sqcup e_{k_\lambda}^\lambda,$$

unión de k_λ células y h una transformación que va de cada una de las fronteras de la unión de células al complejo Y , es decir,

$$h : e_1^\lambda \sqcup e_2^\lambda \sqcup \dots \sqcup e_{k_\lambda}^\lambda \longrightarrow Y.$$

Además h continua. Entonces, definimos al λ - complejo celular como

$$X = Y \bigcup_h e_1^\lambda \sqcup e_2^\lambda \sqcup \dots \sqcup e_{k_\lambda}^\lambda$$

En lo que sigue solo mencionaremos al complejo celular X sin recordar la dimensión. Ahora definimos como $X^\lambda := \{e^\lambda \mid e^\lambda \in X\}$ como el λ -esqueleto de X , en el caso que λ es cero se pueden pensar como los vértices del complejo.

Con esta definición tenemos cuerpos geométricos en abstracto. Pensemos en una orientación para ellos, ésta estará dada por $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$, conjunto de campos vectoriales que al evaluar en cualquier parte de una célula resultará ser una base para el espacio tangente en ese punto, es decir, si $p \in e^n$, entonces $\beta_p := \{v_1(p), \dots, v_n(p)\}$ es base de $T_p e^n$. Por lo tanto, **la orientación de e^n** será $\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$, y la denotaremos por $\langle e^n \rangle$.

En el caso de tener otra orientación $\langle w_1, w_2, \dots, w_n \rangle$ tenemos para cada $p \in e^n$, una transformación lineal $L_p : T_p e^n \longrightarrow T_p e^n$, tal que $L_p(v_i(p)) = w_i(p)$, entonces el determinante de la matriz asociada a esta transformación tendrá un signo, en caso de ser positivo diremos que ambos órdenes tienen la misma orientación, en caso de ser negativo diremos que tienen orientación contraria.

Con ello definiremos la orientación de una variedad. Primero observemos que en la definición de una variedad, los abiertos de una carta pueden ser considerados difeomorfos a e^n , en lugar de solo a abiertos de \mathbb{R}^m . Así, podemos dar la siguiente construcción.

Primero sea U abierto de M , una m -variedad, entonces por lo que mencionamos en el párrafo anterior, existe $\phi : U \longrightarrow e^m$ difeomorfismo. Con ello daremos una orientación al abierto U . Primero gracias a la biyectividad de ϕ a cada punto p en U le corresponde uno y sólo uno en e^m , dado por $\phi(p)$. Ya que e^m es orientable, a cada punto $\phi(p)$ lo corresponde una orientación $\langle v_1(\phi(p)), \dots, v_m(\phi(p)) \rangle$. Por lo que, una orientación para cada punto $p \in U$ será el correspondiente orden de $\phi(p)$, es decir, que $\langle v_1(\phi(p)), \dots, v_m(\phi(p)) \rangle$ es un orden de $p \in U$. Así, la orientación de U es $\langle v_1, \dots, v_m \rangle$.

Ahora, sea M una m -variedad, (U, ϕ) y (V, ψ) cartas en M , supongamos que su intersección es no vacía. Así, sea $p \in U \cap V$, si $\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ orientación en U , $\langle w_1, w_2, \dots, w_n \rangle$ orientación en V . Así, la transformación que lleve w_i a v_i , para toda i , se evalúa en el punto $\psi(p)$ y nos da una matriz, su determinante nos da un signo. Diremos que U y V tienen la misma orientación en p si este determinante es positivo. Por lo tanto, tenemos la siguiente definición.

Definición 3.2. Si M es una m -variedad suave y \mathfrak{A} el atlas de M , decimos que $(U, \phi), (V, \psi)$ en \mathfrak{A} tienen la misma orientación si $U \cap V = \emptyset$ o bien si para cada punto $p \in U \cap V$, se tiene que U tiene la misma orientación que V en p .

Definición 3.3. (*Orientación de una variedad*) Sea M variedad diferenciable, si todas las cartas en M tienen la misma orientación, entonces la variedad es orientada.

Ahora hablaremos de una manera de actuar sobre los órdenes de un complejo X , tomemos el esqueleto $X^\lambda = \{e_1^\lambda, e_2^\lambda, \dots, e_{k_\lambda}^\lambda\}$ y consideremos la siguiente suma formal:

$$C := a_1 \langle e_1^\lambda \rangle + a_2 \langle e_2^\lambda \rangle + \dots + a_{k_\lambda} \langle e_{k_\lambda}^\lambda \rangle,$$

tal que los coeficientes son números enteros, a C le diremos una **cadena de dimensión λ ó λ -cadena**. Definimos entre dos cadenas la suma natural que es sumar coeficiente a coeficiente, y la multiplicación por escalares enteros también está dada por multiplicar coeficiente a coeficiente. Sea el conjunto

$$C^\lambda(X) := \{C \mid C \text{ es una } \lambda\text{-cadena}\}.$$

Con las operaciones anteriores, éste es un módulo izquierdo sobre los enteros, de hecho $C^\lambda(X)$ es isomorfo (hay una homomorfismo biyectivo) a $\bigoplus_{i=1}^{k_\lambda} \mathbb{Z}$. A este grupo se le conoce como el **grupo de cadenas λ dimensional**.

Ahora hablemos de una transformación que lleva $C^\lambda(X)$ a $C^{\lambda-1}(X)$, observando primero que el grupo de dimensión λ está generado por $\langle e_1^\lambda \rangle, \dots, \langle e_{k_\lambda}^\lambda \rangle$, por lo que para determinar la transformación basta hacerlo con la base.

Antes, veamos como dar una orientación a la frontera de una célula e^λ , es decir, orientar a $\partial e^\lambda = \mathbb{S}^{\lambda-1}$. Sea \hat{n} , vector normal a $\mathbb{S}^{\lambda-1}$, sea $w_1, w_2, \dots, w_{\lambda-1}$ orden de $\mathbb{S}^{\lambda-1}$ y $\langle v_1, \dots, v_m \rangle$ orden de e^λ , si la transformación en todo punto de la frontera que lleva $\langle v_1, v_2, \dots, v_\lambda \rangle$ a $\langle \hat{n}, w_1, \dots, w_{\lambda-1} \rangle$ tiene signo positivo, entonces diremos que $\langle w_1, \dots, w_{\lambda-1} \rangle$ es una orientación para $\mathbb{S}^{\lambda-1}$.

Para continuar con la definición recordemos la transformación de pegado $h : \partial e_1^\lambda \sqcup \partial e_2^\lambda \sqcup \dots \sqcup \partial e_{k_\lambda}^\lambda \longrightarrow e_1^{\lambda-1} \sqcup e_2^{\lambda-1} \sqcup \dots \sqcup e_{k_\lambda}^{\lambda-1}$. Restringiendo h a la célula $e^\lambda \in X^\lambda$, tomamos un punto $p \in e_i^{\lambda-1}$, entonces la imagen inversa $h^{-1}(\{p\})$ es un conjunto cerrado en el compacto ∂e^λ , a la función h la podemos considerar diferenciable con una perturbación que será cercana; sin pérdida de generalidad consideraremos la misma función h .

Por el teorema de Sard el conjunto de valores regulares es denso, por lo tanto podemos considerar a p un punto regular de h y un abierto $U \subseteq e_i^\lambda$ de p , que no contenga ningún punto crítico.

Como h no tiene puntos críticos en U , para cada punto en $q \in h^{-1}(U)$ la diferencial tiene determinante no cero, recordando el teorema de la función inversa, éste nos dice que $\exists V_q$ vecindad de q en la frontera, donde h es un difeomorfismo, en otras palabras h es un difeomorfismo local.

Siguiendo los argumentos $h^{-1}(\{p\})$ no puede contener ningún abierto de la frontera, pues en este caso en esos puntos no hay vecindad donde se cumpla ser un difeomorfismo local (todo va a caer a p con h), por lo tanto no tiene interior y esto sólo sucede si este conjunto es discreto.

Una resultado de topología nos dice que si un subespacio de un espacio topológico es cerrado dentro de un compacto, entonces éste es compacto con la topología heredada este resultado se puede ver en [2]. Con lo que, la imagen inversa $h^{-1}(\{p\})$ es compacto con la topología heredada de $\partial e_1^\lambda \sqcup \partial e_2^\lambda \sqcup \dots \sqcup \partial e_{k_\lambda}^\lambda$. Ya que en el párrafo anterior demostramos que este conjunto es discreto, $h^{-1}(\{p\})$ solo puede ser compacto si es cerrado y acotado pues está en un espacio euclidiano, entonces debe ser finito.

Por lo tanto, $h^{-1}(\{p\}) = \{q_1, \dots, q_r\}$, es decir, es finito y en cada punto está determinada $\langle v_1^i, v_2^i, \dots, v_\lambda^i \rangle$ la orientación de la frontera en q_i , mirando la transformación L_{q_i} , que lleva estas orientaciones en la de p , tiene su signo, la suma de estos signos se conoce como el **grado de cobertura de la frontera**, escrita de la siguiente forma:

$$a := \sum_{j=1}^{\lambda} \text{sign}(\det(L_{q_j})).$$

Donde $\text{sign} : \mathbb{R} \rightarrow \{1, -1\}$, es la función que manda cada real al signo que este real tenga. Lo único que queda por determinar es el operador frontera.

Definición 3.4. Definimos $\partial_\lambda : C^\lambda(X) \rightarrow C^{\lambda-1}(X)$ el operador frontera como la función que:

$$\partial_\lambda(\langle e_j^\lambda \rangle) := a_{j1} \langle e_1^{\lambda-1} \rangle + a_{j2} \langle e_2^{\lambda-1} \rangle + \dots + a_{jk_{\lambda-1}} \langle e_{k_{\lambda-1}}^{\lambda-1} \rangle.$$

Donde las constantes a_{ji} son el grado de cobertura de la célula e_j^λ en la respectiva frontera $e_i^{\lambda-1}$ y $\{e_1^\lambda, \dots, e_{k_\lambda}^\lambda\}$, es la base del grupo de cadena $C^\lambda(X)$.

Podemos notar que este operador está determinado por definición en los básicos del grupo de cadena $C^\lambda(X)$, entonces es un homomorfismo.

Presentaremos una construcción alternativa a la de los complejos celulares, esto nos será de ayuda para la demostración de una proposición que nos dice que es lo que pasa con la composición de dos operadores frontera.

Esta construcción es la de los complejos simpliciales. Sea $v_0, \dots, v_l \in \mathbb{R}^n$ puntos, diremos que están en posición general si los vectores $(v_1 - v_0), (v_2 - v_0), \dots, (v_l - v_0)$ son linealmente independientes. Definimos la cerradura convexa como el conjunto

$$\sigma = \{a_0 v_0 + \dots + a_l v_l \mid a_0 + a_1 + \dots + a_l = 1 \text{ y } a_i \geq 0, \text{ para toda } i\}.$$

A esta cerradura convexa se le conoce como el l -simplejo, a los puntos v_0, \dots, v_l se les conoce como los vértices del l -simplejo σ . Podemos notar que dependiendo del valor l , el simplejo puede ser pensado como un vértice, triángulo, tetraedro, etc. Al tomar la cerradura convexa de cualquier subconjunto propio de vértices del simplejo, con el respectivo orden del simplejo, es llamado una cara, para más sobre esta definición véase [9].

De la misma manera que en complejos celulares, a los simplejos podemos asignarles una orientación. Ésta está dada por el orden de aparición de los vértices, esto es $\langle \sigma \rangle = \langle v_0, \dots, v_l \rangle$. Esta orientación tiene otra orientación asociada, que llamamos la orientación contraria, dada por ordenar los vértices empezando por el último y terminando con el primero, es decir, $-\langle \sigma \rangle = \langle v_l, \dots, v_0 \rangle$. Decimos que dos orientaciones son equivalentes, si como decíamos antes, la transformación que llevan los vectores $v_1 - v_0, \dots, v_l - v_0$ en $w_1 - w_0, \dots, w_l - w_0$, tiene determinante con signo positivo.

Definición 3.5. *Un conjunto K de simplejos en \mathbb{R}^m es llamado complejo simplicial euclidiano si:*

1. *Si un simplejo σ está en K , entonces están todas sus caras.*
2. *Si dos simplejos σ, θ están en K e intersecan en algo no vacío, entonces su intersección debe ser una cara en común de σ y θ .*
3. *Si tomamos un punto $p \in K$, entonces para cualquier vecindad sólo se interseca con una cantidad finita de simplejos de K .*

Para un complejo simplicial K , la unión de todos los simplejos en K la denotaremos por $|K|$. Un subconjunto de \mathbb{R}^m obtenido del modo anterior es llamado un poliedro, la topología del poliedro es la que heredada por \mathbb{R}^m . Ahora sea X un espacio topológico, decimos que X es **triangulable** si existe un complejo simplicial euclidiano $|K|$ y $h : |K| \rightarrow X$ un homeomorfismo.

A continuación, veremos que de este modo es más fácil definir el operador frontera. La teoría de complejos de cadena se acopla mejor con la teoría de Morse, por eso es que se usa en este capítulo, a pesar de la sencillez algebraica de los complejos simpliciales.

Para un complejo simplicial $|K|$, consideremos el conjunto de simplejos de dimensión l , la suma formal

$$C := a_1 \langle \sigma_1 \rangle + a_2 \langle \sigma_2 \rangle + \dots + a_{k_l} \langle \sigma_{k_l} \rangle,$$

se llama cadena, al conjunto de todas las cadenas lo llamamos **el grupo de cadenas l -dimensional** denotado $S^l(K)$. En el caso de tener X espacio topológico triangulable, por definición existe $h : |K| \rightarrow X$ homeomorfismo y $|K|$ su complejo simplicial. Para $|K|$ tenemos el grupo de cadena l -dimensional $S^l(K)$ que será denotado por $S^l(X)$, es decir, para hacer referencia a que esta cadena viene de un espacio topológico pondremos el espacio X en lugar de K .

Así, definimos el operador frontera de la siguiente manera

$$\partial' \langle v_0, \dots, v_l \rangle := \sum_{i=1}^l (-1)^i \langle v_0, v_1, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_l \rangle.$$

El gorro en el vector quiere decir que ese vértice fue retirado de nuestro acomodo. Este operador es un homomorfismo y con esta definición es fácil probar que la composición da cero.

Proposición 3.6. $\partial'_\lambda \circ \partial'_{\lambda+1} = 0$, para toda λ positiva o cero.

Demostración. Dada la definición del complejo de cadena, basta con demostrar que esta composición es cero en los elementos básicos de $S^\lambda(K)$. Tomamos $\sigma \in |K|$ uno de estos generadores. Así, $\langle \sigma \rangle = \langle v_0, \dots, v_{\lambda+1} \rangle$, entonces con la definición de los operadores tenemos

$$\begin{aligned} \partial'_\lambda(\partial'_{\lambda+1}(\langle v_0, v_1, \dots, v_{\lambda+1} \rangle)) &= \partial'_\lambda \left(\sum_{i=1}^{\lambda+1} (-1)^i \langle v_0, v_1, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_{\lambda+1} \rangle \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^{\lambda+1} (-1)^{i+j} \langle v_0, v_1, \dots, \widehat{v}_i, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_{\lambda+1} \rangle \end{aligned} \quad (3.1)$$

Haciendo un acomodo en los índices y quitando el caso $i = j$ (éste no es considerado ya que en la primera aplicación i fue quitado, entonces no puede ser quitado de nuevo). Así, tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{\lambda+1} (-1)^{i+j} \langle v_0, v_1, \dots, \widehat{v}_i, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_{\lambda+1} \rangle &= \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \langle v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_{\lambda+1} \rangle \\ &\quad + \sum_{j < i} (-1)^{i+j} \langle v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_{\lambda+1} \rangle \end{aligned} \quad (3.2)$$

Hacemos el siguiente cambio de variable $s = j$ y $k = i + 1$ en (3.2), entonces la suma queda

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{\lambda+1} (-1)^{i+j} \langle v_0, v_1, \dots, \widehat{v}_i, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_{\lambda+1} \rangle &= \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \langle v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_{\lambda+1} \rangle \\ &\quad + \sum_{s < k} (-1)^{s+k-1} \langle v_0, \dots, \widehat{v}_s, \dots, \widehat{v}_k, \dots, v_{\lambda+1} \rangle \\ &= \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \langle v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_{\lambda+1} \rangle \\ &\quad - \sum_{s < k} (-1)^{s+k} \langle v_0, \dots, \widehat{v}_s, \dots, \widehat{v}_k, \dots, v_{\lambda+1} \rangle \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Usando (3.3) en (3.1), tenemos que la composición es cero, entonces para cual-

quier elemento en el complejo simplicial esta composición es cero, pues

$$\begin{aligned} \partial'_\lambda(\partial'_{\lambda+1}(\sum_{i=1}^{k_{\lambda+1}} a_i \langle \sigma_i \rangle)) &= \sum_{i=1}^{k_{\lambda+1}} a_i \partial'_\lambda(\partial'_{\lambda+1}(\langle \sigma_i \rangle)) \\ &= \sum_{i=1}^{k_{\lambda+1}} a_i 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, esta composición es cero. \square

La manera de hacer que los complejos simpliciales entren en los celulares, es demostrando que los complejos celulares son triangulables, además que se identifican las caras con cada una de las células del complejo celular. La demostración de este resultado puede encontrarse en [9]. De modo que el grupo de cadena simplicial tendrá la misma dimensión que la del complejo celular y tomamos el isomorfismo H que manda los básicos de uno en el otro. Así, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} S^{\lambda+1}(X) & \xrightarrow{\partial'_{\lambda+1}} & S^\lambda(X) & \xrightarrow{\partial'_\lambda} & S^{\lambda-1}(X) \\ H \downarrow & & & & \downarrow H \\ C^{\lambda+1}(X) & \xrightarrow{\partial_{\lambda+1}} & C^\lambda(X) & \xrightarrow{\partial_\lambda} & C^{\lambda-1}(X) \end{array} \quad (3.4)$$

Con esto, nos ayudaremos a demostrar la siguiente proposición.

Proposición 3.7. $\partial_\lambda \circ \partial_{\lambda+1} = 0$, para toda λ positiva o cero.

Demostración. Con el diagrama (3.4), si la composición en el grupo simplicial es cero también lo será en el grupo celular, ya que

$$H^{-1} \circ \partial_\lambda \circ \partial_{\lambda+1} = \partial'_\lambda \circ \partial'_{\lambda+1} \circ H^{-1} = 0,$$

como H es isomorfismo manda el cero al cero, luego $\partial_\lambda \circ \partial_{\lambda+1} = H \circ 0 = 0$, por lo que $\partial_\lambda \circ \partial_{\lambda+1} = 0$. Así, la proposición 3.7 está demostrada. \square

Para definir la homología tenemos que hablar antes de otros dos conjuntos, el primero es el **grupo de los ciclos** que está definido como $Z_\lambda(X) := \text{Ker} \partial_\lambda$, tiene este nombre pues geoméricamente pensamos que al ser mandados únicamente al cero no tiene ninguna frontera con el mapeo de pegado. Y definimos el **grupo de fronteras** como $B_\lambda(X) := \text{Im} \partial_{\lambda+1}$, la idea geométrica es justo que estos elementos vienen de ser frontera de alguien en el grupo de cadena superior.

De la proposición 3.7, concluimos que $B_\lambda(X) \subseteq Z_\lambda(X) \subseteq C^\lambda(X)$. Así, podemos dar la siguiente definición.

Definición 3.8. Sea X un complejo celular, definimos el λ -ésimo grupo de homología de X , como:

$$H_\lambda(X) := Z_\lambda(X)/B_\lambda(X)$$

Por la definición de $C^\lambda(X)$, como la homología es un cociente de $C^\lambda(X)$, entonces es isomorfo a $(\oplus_{i=1}^s \mathbb{Z}) \oplus T$, donde T es el grupo de los elementos de orden finito, y se le llama grupo de torsión, la cual no será de nuestro interés en el estudio, por lo que no será tomada en cuenta.

El **rango de H** es el número de sumandos \mathbb{Z} en la descomposición de la homología de X . Este número también se le conoce como el **número de Betti λ -dimensional**, y será denotado como

$$b_\lambda(X) := \text{rang}(H_\lambda(X))$$

3.2. Desigualdad de Morse

En esta sección nos encargaremos de ver la situación homotópica de los cuerpos de asa. Ya que el teorema central de la sección dará una relación uno a uno entre los números de Betti y los puntos que tienen la signatura igual a el número de Betti.

Antes hablaremos brevemente de la condición homotópica de un cuerpo de asa y claro será igual que un complejo celular con ciertas condiciones, para esto hablaremos de los conceptos que la definirán.

Definición 3.9. (*Espacio Cilindro*)

Sean M, N variedades suaves y $h : M \rightarrow N$ continua, definimos el cilindro con base N como $C_N^M := N \cup_h (M \times [0, 1])$.

Definición 3.10. Sea $f, g : M \rightarrow N$ aplicaciones continuas, decimos que son homotópicas si $\exists H : M \times [0, 1] \rightarrow N$ tal que $H(p, 0) = f(p)$ y $H(p, 1) = g(p)$ para toda $p \in M$, y lo denotaremos por $f \sim g$.

Definición 3.11. Sean M y N variedades diferenciables, decimos que M es homotópicamente equivalente a N si existen $f : M \rightarrow N$ y $g : N \rightarrow M$ tales que $f \circ g \sim Id_N$ y $g \circ f \sim Id_M$. Y lo denotaremos por $M \sim N$.

Dada una función continua entre complejos celulares $f : X \rightarrow Y$, podemos definir una función que vaya entre sus homología $f_* : H_\lambda(X) \rightarrow H_\lambda(Y)$ como

$$f_\lambda \left(\sum_{i=1}^{k_\lambda} a_i \langle e_i^\lambda \rangle \right) = \sum_{i=1}^{s_\lambda} f_i(a_1, \dots, a_{k_\lambda}) \langle e_i^\lambda \rangle$$

$$\text{donde } f_i(a_1, \dots, a_{k_\lambda}) = \sum_{j=1}^{k_\lambda} \delta_{ij} a_j \text{ con } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } f(e_i^\lambda) \cap e_j^\lambda \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Si $C = \sum_{i=1}^{k_\lambda} a_i < e_1^\lambda >$ definimos $f_*(C + \text{Im}\partial_\lambda) := f_\lambda(C) + \text{Im}\partial'_\lambda$, con ∂'_λ el operador frontera en el complejo Y . De este homomorfismo se deriva la siguiente propiedad

Lema 3.11.1. *Sean M y N variedades diferenciables y $f, g : M \rightarrow N$ transformaciones. Si $f \sim g$, entonces $f_* = g_*$.*

Y por lo tanto si dos complejos son homótopos, entonces sus homología son iguales.

Estas definiciones las juntaremos para ver que tipo de homotopía tiene un cilindro.

Proposición 3.12. *Sea M y N variedades diferenciables, entonces C_N^M es homotópicamente equivalente a N .*

Demostración. Sea $i : N \rightarrow C_N^M$ definida por $i(p) = [(p, 0)]$, donde los corchetes queremos decir su clase de equivalencia que identifica el espacio N con la base del cilindro.

También definimos $T : C_N^M \rightarrow N$, dada de la siguiente manera, si $[q] \in M$ entonces hay dos casos, si está en el primer uniendo de la definición del cilindro la función es la identidad, si está en el segundo uniendo entonces $q = (p, t)$, en este caso si $t = 0$ de nuevo es la identidad, pero si $0 < t \leq 1$ tenemos que $T([p, t]) = h(p)$, con h el mapeo de pegado del cilindro.

Para ver que está bien definida T resulta de que si p, q puntos que están en el cilindro y $p \sim q$, entonces $h(p) = q$, por lo tanto $T([p]) = h(p) = q = T([q])$. También esta transformación es continua pues la identidad y h lo son.

Vemos que la composición $T \circ i = \text{Id}_N$, entonces $T \circ i \sim \text{Id}_N$. Falta ver que $i \circ T \sim \text{Id}_{C_N^M}$, para esto construimos $H : C_N^M \times [0, 1] \rightarrow C_N^M$, recordando que si $p \in C_N^M$, entonces $p = (p', t)$ si esta en $M \times [0, 1]$. Así

$$H([p], s) = \begin{cases} [p] & \text{si } p \in N \\ [p', ts] & \text{si } p \in M \times [0, 1] \end{cases}.$$

De este modo si $H([p], 1) = [p]$ si $p \in N$, y $H([p], 1) = [(p', t \cdot 1)] = [p]$, entonces $H([p], 1) = \text{Id}_{C_N^M}([p])$. También $H([p], t \cdot 0) = [p]$ si $p \in N$ y por otro lado $H([p], 0) = [(p', 0)] = i([p'])$ como $p' \in M \times [0, 1]$, en ese caso $H([p], 0) = i \circ T(p)$. Por lo que, $i \circ T \sim \text{Id}_{C_N^M}$, y $N \sim C_N^M$. \square

El siguiente resultado es el que relacionará la signatura con cada complejo celular, y como último paso demostraremos la desigualdad de Morse.

Teorema 3.13. *Sea M un m -cuerpo con asas, donde λ es la signatura más grande de los puntos críticos en M . Entonces, existe X complejo celular λ -dimensional, tal que M es homotópicamente equivalente a X .*

Para ser más específicos:

- Existe $h : \partial M \rightarrow X$ transformación, tal que M es homeomorfo a $C_X^{\partial M}$.
- Hay correspondencia uno a uno, entre las λ -asas de M y las λ -células de X .

Demostración. Por el teorema 2.17 y sin pérdida de generalidad, podemos ordenar los índices de los puntos críticos. Así tenemos la siguiente igualdad

$$M = (h_1^0 \sqcup \dots \sqcup h_{k_0}) \cup (h_1^1 \sqcup \dots \sqcup h_{k_1}) \cup \dots \cup (h_1^\lambda \sqcup \dots \sqcup h_{k_\lambda}^\lambda)$$

donde $h_i^l = D^l \times D^{m-l}$ es la l -asa.

Haremos esta demostración por inducción sobre λ , la dimensión de las asas, si $\lambda = 0$, entonces $M = h_1^0 \sqcup \dots \sqcup h_{k_0}$. Si tomamos un punto en cada asa nombramos $X^0 = \{p_1\} \sqcup \dots \sqcup \{p_{k_0}\}$ y $\tau_1 : \partial M = \partial D^m \sqcup \dots \sqcup \partial D^m \rightarrow X^0$ tal que $\tau_1(q_1, \dots, 1_{k_0}) = (0, 0, \dots, 0)$, entonces $M \approx C_{X^0}^{\partial M}$.

Suponemos cierta la propiedad para todo cuerpo que tenga índice mayor menor que λ , ahora lo demostraremos para λ .

Sea H el subcuerpo que tiene todas las asas con índice menor que λ y ψ la transformación de pegado, entonces

$$M = H \bigcup_{\psi} (h_1^\lambda \sqcup \dots \sqcup h_{k_\lambda}^\lambda).$$

Para hacer la prueba simple haremos $k_\lambda = 1$, así $M = H \bigcup_{\psi} D^\lambda \times D^{m-\lambda}$.

Consideremos la función cilindro $\tau_\lambda : D^\lambda \times D^{m-\lambda} \rightarrow D^\lambda \times \{\bar{0}\}$, tal que $\tau_\lambda(x, y) = (x, 0)$, donde $y \in \partial D^{m-\lambda}$.

Con la transformación $T : D^\lambda \times D^{m-\lambda} \rightarrow C_{D^\lambda \times \{\bar{0}\}}^{D^\lambda \times \partial D^{m-\lambda}}$, dado por

$$T(x, y) = \begin{cases} (x, y) & \text{si } y = \bar{0} \\ ((x, y/\|y\|), \|y\|) & \text{si } y \neq \bar{0} \end{cases}$$

Ésta es continua, pues cada una de sus partes lo son y pega bien pues en $y = \bar{0}$ en la primera parte es la identidad y en la segunda (recordando la relación de equivalencia en el cilindro) tenemos $((x, y), 0) \sim (x, y)$, entonces $[(x, y), 0] = [x, y]$, esto es, son el mismo punto en el cilindro.

La transformación inversa se da de la siguiente manera. Si $p \in (D^\lambda \times \{\bar{0}\})$ primero podemos ver al punto como $p = (x, y)$, por lo que $T^{-1}(p) = (x, y)$. Si $p \in ((D^\lambda \times \partial D^{m-\lambda}) \times [0, 1])$, existe $t \in (0, 1]$ tal que $p = ((x, y), t)$. Además $T^{-1}(p) = (x, ty)$, si $t = 0$. Por lo tanto $T^{-1}(p) = (x, y)$.

Es claro que en la primera parte efectivamente son funciones inversas pues T y T^{-1} son la identidad. Para la segunda parte primero calculamos la composición $(T \circ T^{-1})((x, y), t) = T(x, ty)$ recordemos que $y \in \partial D^{m-\lambda}$, entonces $\|y\| = 1$.

Por lo tanto, $T(x, ty) = ((x, ty / \|ty\|), \|ty\|) = ((x, ty/t), t) = ((x, y), t)$. Así, son transformaciones inversas y T es un homeomorfismo. Entonces

$$D^\lambda \times D^{m-\lambda} \sim C_{D^\lambda \times \{\bar{0}\}}^{D^\lambda \times \partial D^{m-\lambda}} = (D^\lambda \times \{\bar{0}\}) \cup_{\tau_\lambda} ((D^\lambda \times \partial D^{m-\lambda}) \times [0, 1]).$$

Utilizamos la hipótesis de inducción en H . Ya que es un cuerpo de asa con índice menor que λ , entonces existe $F : \partial H \rightarrow Y$ homeomorfismo y Y un complejo de cadena $\lambda - 1$ dimensional, tal que $H \sim C_Y^{\partial H}$, con F la función de cilindro.

Haremos la construcción del complejo X a partir de Y y $D^\lambda \times \{\bar{0}\}$ y $h : \partial M \rightarrow X$ la función cilindro a partir de F y τ_λ .

Recordemos a $\psi : \partial D^\lambda \times D^{m-\lambda} \rightarrow \partial H$ el mapeo de pegado, notemos que $\psi(\partial D^\lambda \times D^{m-\lambda}) \subseteq \partial H$, así con la composición $(F \circ \psi) : \partial D^\lambda \times \{\bar{0}\} \rightarrow Y$ funciona como una función de pegado para un complejo, en ese caso $X := (D^\lambda \times \{\bar{0}\}) \cup_{(F \circ \psi)} Y$.

A manera de facilitar la notación nombremos $K := \partial H \setminus (\psi(\partial D^\lambda \times \text{int}(D^{m-\lambda})))$, entonces $\partial M = K \cup \psi(\partial D^\lambda \times \text{int}(D^{m-\lambda}))$.

Empecemos a definir h , en el caso de que $p \in \psi(\partial D^\lambda \times \text{int}(D^{m-\lambda}))$ definimos $h = (\tau_\lambda \circ \psi^{-1}) : \psi(\partial D^\lambda \times \text{int}(D^{m-\lambda})) \rightarrow D^\lambda \times \{\bar{0}\}$, recordemos que $D^\lambda \times \{\bar{0}\}$ se puede pensar como una λ célula. Más aún, esta célula está pegada a Y , si recordamos la definición de X . Luego, si $p \in \partial K$ notemos que éste se puede pensar como la curva de nivel de alguna función en ∂H . Por el teorema 2.12 hay una vecindad V de ∂K tal que $V \approx \partial K \times [0, 1]$, donde la transformación $T' : V \rightarrow \partial K \times [0, 1]$ es el homeomorfismo.

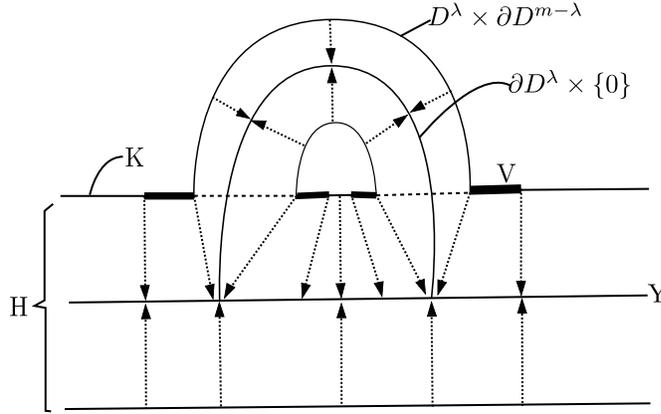


Figura 3.1: Construcción de la transformación h .

Por otro lado, viendo la definición de K , tenemos $\partial K \sim (\partial D^\lambda \times \partial D^{m-\lambda})$, y esta identificación está dada por ψ restringida a la frontera de K .

Tomamos la restricción $\tau_\lambda |_{\psi(\partial K)} : \partial D^\lambda \times \partial D^{m-\lambda} \rightarrow \partial D^\lambda \times \{\bar{0}\}$, definimos el

siguiente cilindro

$$V' = C_{\partial D^\lambda \times \{\bar{0}\}}^{\partial D^\lambda \times \partial D^{m-\lambda}}.$$

Este cilindro une a la frontera de H usando como “altura” a $\partial D^\lambda \times \{\bar{0}\}$, entonces $V' \sim (\partial D^\lambda \times \partial D^{m-\lambda}) \bigcup_\tau V$ (donde τ es una transformación de pegado entre V y $\partial D^\lambda \times \partial D^{m-\lambda}$, esto es, la transformación $\tau = (T' \circ g \circ \psi)$ donde la transformación $g : \partial K \times \{0\} \rightarrow \partial K$ está definida por $g(p, 0) = p$). Este hecho puede observarse en la figura 3.1.

Ahora para hacer la identificación, sea $j' : V' \rightarrow (\partial D^\lambda \times D^{m-\lambda}) \cup (\partial K \times [0, 1])$.

$$j'([x, y]) = \begin{cases} T^{-1}((x, y), t/2) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \text{ o } y = \bar{0} \\ (T' \circ \psi)(T^1((x, y/\|y\|), t/2 - 1/2)) & \text{si } 1/2 \leq t \end{cases}$$

Para hacer la identificación con $(\partial D^\lambda \times D^{m-\lambda}) \cup V$, tomemos a j' , solo que en la segunda parte de la función aplicaremos T' .

Sea $i : V \rightarrow V'$ la inclusión, esto es, $i(p) = [p]$. Entonces $j \circ i = Id_V$, en $\partial K \times \{1\}$ y $(j \circ i) = \tau|_{\partial K}$ en $\partial K \times \{0\}$.

Así definimos

$$h(p) = \begin{cases} F \circ j \circ i(p) & \text{si } p \in V \\ F(p) & \text{si } p \in \partial H \setminus V \\ p & \text{si } p \in H \end{cases}$$

Ésta está bien definida, pues $(j \circ i)(p)$ es la identidad en V , se sigue que $F(j(i(p))) = F(p)$. Y como $j' = j$, por tanto $(j' \circ i) = (j \circ i) = \tau$ en $\partial K \times \{0\}$. Se concluye que, h pega bien en la frontera de K .

De esta manera h es una función de cilindro y el asa se corresponde con la célula $D^\lambda \times \{\bar{0}\}$, lo que finaliza la prueba. \square

Teorema 3.14. (*Desigualdad de Morse*)

Sea M una variedad cerrada, y $f : M \rightarrow R$ de Morse. Para el número k_λ de puntos críticos con signatura λ y el número de Betti $b_\lambda(M)$ tenemos la siguiente desigualdad: $k_\lambda \geq b_\lambda(M)$

Demostración. Sea N la descomposición en asas de M , entonces por el teorema anterior, existe X complejo celular tal que $M \approx N \approx X$.

Sabemos que hay una biyección entre asas y las células de dimensión λ , es decir, el número de asas de dimensión λ en N es el número de λ células en X .

Consideramos la cadena

$$\dots \longrightarrow C^{\lambda+1}(X) \xrightarrow{\partial_{\lambda+1}} C^\lambda(X) \xrightarrow{\partial_\lambda} C^{\lambda-1}(X) \longrightarrow \dots$$

De esta manera $\text{ran}(C_\lambda(X)) = (\text{número de } \lambda \text{ células})$, entonces

$$k_\lambda = \text{ran}(C_\lambda(X)) \geq \text{ran}(\text{Ker}(\partial_\lambda)) \geq \text{ran}(H_\lambda(X)).$$

Así, $b_\lambda(M) \leq k_\lambda$. \square

Como un corolario podemos dar una cota para la característica de Euler, un invariante topológico. De hecho puede ser demostrado lo siguiente.

Teorema 3.15. *(Cota a la característica de Euler)*

Sea X un complejo m -dimensional, k_q el número de q -células contenidas en X , y $b_\lambda(M)$ el número de Betti λ dimensional, entonces

$$\sum_{q=0}^m (-1)^q (k_q) = \sum_{q=0}^m (-1)^q b_q(M) = \chi(M).$$

La demostración completa está en [6]. El corolario de este teorema y el teorema 3.13 es una forma de calcular la característica de Euler con la signatura de los puntos críticos de una variedad cerrada.

Corolario 3.15.1. *Sean M una m -variedad cerrada, f una función de Morse de M , k_λ el número de puntos críticos con signatura λ y $b_\lambda(M)$ el número de Betti λ dimensional, así*

$$\sum_{\lambda=0}^m (-1)^\lambda (k_\lambda) = \sum_{\lambda=0}^m (-1)^\lambda b_\lambda(M) = \chi(M).$$

Haremos los cálculos de la característica de Euler para los ejemplos del capítulo 2.

Ejemplo 3.1. *Si M es una 2-variedad, cerrada.*

En tal caso M por el teorema 3.13, tiene la siguiente descomposición como complejo celular

$$M \approx h^0 \cup_{\phi_1} (h_1^1 \sqcup h_2^1 \sqcup \dots \sqcup h_k^1) \cup_{\phi_2} h^2.$$

Tenemos por el corolario 3.15.1 que $\chi(M) = 1 - k + 1 = 2 - k$. Si $k = 0$, no tenemos 1-asas, entonces M es difeomorfa a \mathbb{S}^2 , y $\chi(M) = 2$. Si $k = 1$, es el caso donde tenemos un 1-asa, éste se dio cuando teníamos al espacio proyectivo $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ el cual, contiene una banda de Moebius, y así $\chi(M) = 1$. El último caso es el de el 1-toro 2-dimensional, donde $k = 2$, luego $\chi(M) = 0$.

Ejemplo 3.2. *Si M es una 3-variedad cerrada.*

Por tanto, tenemos la descomposición como complejo celular siguiente

$$M \approx h^0 \cup_{\phi_1} (h_1^1 \sqcup h_2^1 \sqcup \dots \sqcup h_{k_1}^1) \cup_{\phi_2} (h_1^2 \sqcup h_2^2 \sqcup \dots \sqcup h_{k_2}^2) \cup_{\phi_3} h^3.$$

El único caso de interés es cuando $k_1 = 1 = k_2$, en particular las variedades $SO(3)$ y $\mathbb{R}\mathbb{P}^3$. En ambos casos $\chi(m) = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$. Esta es otra manera de decir que estas dos variedades son homotópicamente equivalentes.

Bibliografía

- [1] Vladimir Igorevich Arnold. «Ordinary Differential Equations». En: *Springer-Verlag* New York (1992).
- [2] James Dugundji. «Topology». En: *Allyn and Bacon* (1966).
- [3] Allen Hatcher. «Algebraic Topology». En: *Cambridge University* (2002).
- [4] Serge Lang. «Differential Manifolds». En: *Springer-Verlag* (1985).
- [5] Jonh M. Lee. «Introduction to Smooth Manifolds». En: *Springer-Verlag* Second Edition (2013).
- [6] William S. Massey. «A Basic Course in Algebraic Topology». En: *Springer-Verlag* (1991).
- [7] Yukio Matsumoto. «An Introduction to Morse Theory». En: *American Mathematical Society* volumen 208 (2002).
- [8] John Milnor. «Morse Theory». En: *Princeton University Press* (1963).
- [9] Shigeyuki Morita. «Geometry of Differential Forms». En: *American Mathematical Society* volumen 201 (2001).
- [10] Lawrence E. Spence Stephen H. Friedberg Arnold J. Insel. «Linear Algebra». En: *Pearson* (2011).