



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

**FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES
ARAGON**

“APUNTES DE TEORÍA DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS PARA EL ÁREA DE INGENIERÍA EN SISTEMAS ELECTRÓNICOS Y DE TELECOMUNICACIONES EN UN PLANTEL DE NIVEL SUPERIOR EN LA CIUDAD DE MEXICO”.

**TESIS PARA OBTENER EL TÍTULO DE
INGENIERO MECÁNICO ELECTRICISTA
ÁREA: ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA**

**PRESENTA:
TORRES CHAVARRÍA DAVID ARTURO**

ASESOR: MTRO.VÍCTOR MANUEL SÁNCHEZ MORALES

Bosques de Aragón, Estado de Mexico, marzo de 2019



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

OBJETIVO GENERAL

“ELABORAR Y PROPONER APUNTES DE TEORÍA DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS PARA SU USO EN EL ÁREA DE INGENIERÍA EN SISTEMAS ELECTRÓNICOS Y DE TELECOMUNICACIONES EN UN PLANTEL DE NIVEL SUPERIOR EN LA CIUDAD DE MEXICO”.

OBJETIVOS PARTICULARES

- Dar una interpretación física a las leyes de los circuitos a partir de las leyes de conservación de la carga y la energía.
- Desarrollar las relaciones constitutivas de los principales elementos que forman a un circuito eléctrico.
- Analizar y diseñar circuitos eléctricos aplicando diversas técnicas de la teoría de circuitos.

INTRODUCCIÓN

La Universidad de la Ciudad de México (UCM) fue creada el 26 de abril de 2001 por el Gobierno del Distrito Federal. El 16 de diciembre del 2004, la UCM obtuvo la autonomía por medio de la publicación de la Ley de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México, aprobada por la Asamblea Legislativa del Distrito Federal (ALDF). Su misión y visión, sus objetivos, sus programas y planes de estudio, sus estrategias y actividades se enfocan, de acuerdo con su Ley, prioritariamente a la formación de ciudadanos y ciudadanas con capacidad para analizar la realidad de manera crítica, con comprensión multidimensional de los problemas sociales y con conocimientos y herramientas científicas y humanistas suficientes para plantear soluciones viables, de alto compromiso y pertinencia. Fue hasta febrero del 2010 cuando el primer Consejo Universitario aprobó el Estatuto General Orgánico de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México (UACM) y el 7 de mayo del 2010 inició sus trabajos la administración 2010-2014.¹

El objetivo del trabajo de tesis es tener una fuente de consulta para la materia de circuitos eléctricos, la cual será descrita a continuación.

- Nombre del curso: Teoría de los circuitos
- Plan de estudios del que forma parte y nivel: carreras de Ingeniería de Sistemas Electrónicos Industriales y de Ingeniería en Sistemas Electrónicos y de Telecomunicaciones, pertenecientes al ciclo superior del Colegio de Ciencia y Tecnología.
- Semestre en que se imparte: 5to.

Se puede considerar a los circuitos eléctricos como una de las herramientas más poderosas con las que cuenta un ingeniero para resolver problemas, debido a la gran cantidad de aplicaciones y la utilidad de sus técnicas de análisis, por lo que, un curso de la teoría de los circuitos es de vital importancia para la formación del ingeniero.

¹ <https://www.uacm.edu.mx/UACM/Historia>, pagina recuperada junio 5 de 2018

Particularmente del área eléctrica, pues las técnicas de análisis que en él se muestran serán fundamentales para el ejercicio profesional.

Panorámica de su estructura y contenidos: El curso se encuentra dividido en cinco temas principales. En el primer tema se presenta al estudiante el desarrollo, utilizando los conceptos de conservación de la carga y la energía, de las relaciones entre potencial y corriente eléctricos que definen a los elementos básicos de un circuito eléctrico. Se explica el principio de operación y la correcta utilización de los instrumentos, básicos, de medición de señales eléctricas. En el segundo tema se muestra al estudiante la necesidad del uso de modelos matemáticos para representar el comportamiento de circuitos eléctricos, así como las limitaciones que implica el uso de modelos matemáticos lineales de parámetros concentrados. Se definen las leyes de Kirchoff de Ohm y la utilidad de éstas en el análisis de circuitos con elementos lineales de parámetros concentrados. En el tercer tema se muestran los métodos básicos de análisis de circuitos, esto es, el método de mallas y el método de nodos. Se muestra la utilidad e importancia del principio de superposición aplicado a los circuitos eléctricos lineales, se presentan algunos de los teoremas más útiles en el análisis de circuitos y finalmente se demuestra la utilidad de los programas de simulación de circuito. En el cuarto tema se presenta la respuesta en el tiempo que presenta un circuito eléctrico, se muestra el comportamiento de varios casos de ejemplo, clásicos, con excitación constante y con excitación senoidal. Se presenta el concepto de fasor y su aplicabilidad en el análisis de circuitos. Se presenta el análisis en estados senoidal permanente y finalmente se muestra los conceptos de impedancia y admitancia. En el quinto tema se presenta el concepto de potencia aplicado a los circuitos eléctricos y las diferentes formas en que se puede expresar y se desarrolla el concepto de factor de potencia, poniendo énfasis en la interpretación física del mismo.

Relación de la asignatura con otras del plan de estudios: la asignatura de teoría de los circuitos es de fundamental importancia para las carreras de ingeniería del área eléctrica, debido a que en ésta se presentan los fundamentos del análisis de circuitos. Por lo que, existe una gran relación con la mayoría de las asignaturas del plan de

estudios, por ejemplo: dispositivos electrónicos I, Electrónica digital I, Modelado de sistemas físicos, etc.

Propósitos generales.

El estudiante será capaz de entender y aplicar las leyes que gobiernan el comportamiento de los circuitos eléctricos y sus limitaciones para:

- Dar una interpretación física a las leyes de los circuitos a partir de las leyes de conservación de la carga y la energía.
- Desarrollar las relaciones constitutivas de los principales elementos que forman a un circuito eléctrico.
- Analizar y diseñar circuitos eléctricos aplicando diversas técnicas de la teoría de circuitos.
- Interpretar los resultados del análisis de circuitos tanto en el tiempo como en el dominio de la frecuencia.
- Entender el concepto de potencia aplicado a los circuitos eléctricos, así como las diferentes clasificaciones de esta.

Metodología general

A continuación, se presentan algunas sugerencias en relación con la metodología a utilizar por el profesor.

- Exposición teórica (es fundamental el estudio previo de los temas por el estudiante), definición y exploración guiada por el profesor.
- Con el fin de promover el interés del estudiante, motivar el trabajo de investigación de los temas del curso, mediante la búsqueda bibliográfica o por Internet.
- Elaboración de tareas de casa cuyos resultados se puedan aprovechar a lo largo del curso.
- Desarrollo de ejercicios de análisis en el aula de clases para su posterior prueba y simulación con ayuda de programas de simulación como por ejemplo el programa SIMULINK de MATLAB, Circuitmaker y Electronic workbench.

Evaluación diagnóstica

Se propone la aplicación de un instrumento escrito que sirva como diagnóstico del estado académico de los estudiantes. Los temas propuestos para tal instrumento son: operaciones con números complejos, álgebra matricial, solución de ecuaciones diferenciales ordinarias de coeficientes constantes de primer y segundo orden, concepto de señal variante en el tiempo.

La ponderación de los reactivos de dichos exámenes se realizará en función de la complejidad del ejercicio a resolver. El número de reactivos deberá ser adecuado para ser resueltos por el estudiante un tiempo máximo de una hora y media.

Índice general

Índice general	I
1. Parámetros eléctricos y sistemas de unidades	1
1.1. Tipos de elementos	1
1.1.1. El resistor, interpretación física, propiedades, unidades y relación constitutiva	1
1.1.2. El capacitor, interpretación física, propiedades, unidades y relación constitutiva	2
1.1.3. El inductor, interpretación física, propiedades, unidades y relación constitutiva	2
1.2. Sistema de unidades (prefijos)	3
1.2.1. Sistema Internacional	3
1.2.2. Unidades eléctricas derivadas	4
1.2.3. Prefijos de mayor uso en circuitos eléctricos	4
1.3. Instrumentos de medición	4
1.3.1. El voltmetro, principio de operación, uso y aplicaciones	4
1.3.2. El ampermetro, principio de operación, uso y aplicaciones	5
1.3.3. El ohmetro, principio de operación, uso y aplicaciones	5
1.3.4. El osciloscopio, principio de operación, uso y aplicaciones	6
2. Leyes eléctricas	7
2.1. Elementos de un circuito eléctrico	7
2.2. Leyes de Kirchhoff	8
2.2.1. Ley de voltajes de Kirchhoff, su relación con el principio de conservación de la energía, limitaciones y aplicabilidad	8
2.2.2. Ley de corrientes de Kirchhoff, su relación con el principio de conservación de la carga, limitaciones y aplicabilidad	9
2.3. Ley de Ohm, limitaciones y aplicabilidad	9
2.4. Principio de superposición	9
2.4.1. Propiedades de homogeneidad y aditividad de los modelos lineales	9
2.4.2. Enunciado y prueba del principio de superposición	10
2.4.3. Aplicabilidad del principio de superposición	10

3. Técnicas fundamentales para el análisis de circuitos	15
3.1. Análisis de nodos	15
3.1.1. Método de análisis de nodos por inspección	15
3.1.2. Método sistemático de análisis de nodos	16
3.2. Análisis de mallas	20
3.2.1. Método de análisis de mallas por inspección	20
3.2.2. Método sistemático de análisis de mallas	21
3.3. Teoremas de Thévenin y Norton	25
3.3.1. Teorema de Thévenin	25
3.3.2. Teorema de Norton	27
3.3.3. Transformación de fuentes	30
3.4. (Transformación delta-estrella)	32
4. Respuesta de los circuitos	34
4.1. Circuitos RC, RL y RLC	34
4.1.1. Circuito RC, RL y RLC con fuente de voltaje constante, gráficas de voltaje y corriente	34
4.2. Respuesta natural y forzada	54
4.2.1. Respuesta a entrada cero del circuito RLC	54
4.2.2. Respuesta a estado cero del circuito RLC	55
4.3. La función escalón como excitación	59
4.3.1. Definición y propiedades de la función escalón	59
4.3.2. La función escalón como excitación para el circuito RLC	61
4.4. Señal excitatriz senoidal	63
4.4.1. Definición y propiedades de la función senoidal	63
4.4.2. La función senoidal como excitación para el circuito RLC	69
4.5. Análisis senoidal en estado estacionario	73
4.5.1. Definición de estado estacionario senoidal	73
4.5.2. Relación del estado estacionario con la respuesta permanente	74
4.5.3. Concepto de fasor	74
4.5.4. Conceptos de impedancia y admitancia en un circuito	83
4.5.5. Método fasorial de análisis de circuitos, limitaciones y aplicabilidad	91
5. Potencia eléctrica	95
5.1. Potencia instantánea	95
5.1.1. Cálculo de la potencia instantánea	95
5.1.2. Interpretación física de la potencia instantánea en términos de la energía	97
5.2. Potencia promedio	97
5.2.1. Cálculo de la potencia promedio	97
5.2.2. Interpretación física de la potencia promedio en términos de la energía	99
5.3. Valores efectivos	99
5.3.1. Definición de valor efectivo o RMS	99
5.3.2. Valor RMS para diferentes formas de onda	100

5.4.	Potencia compleja	101
5.4.1.	Cálculo de la potencia compleja para circuitos con excitación sinusoidal	101
5.4.2.	Potencia activa y potencia reactiva en circuitos con excitación sinusoidal	102
5.4.3.	Triángulo de potencias	104
5.4.4.	Factor de potencia	105

Capítulo 1

Parámetros eléctricos y sistemas de unidades

1.1. Tipos de elementos

1.1.1. El resistor, interpretación física, propiedades, unidades y relación constitutiva

El resistor es un elemento pasivo (consume o absorbe energía), físicamente esta cantidad denota la oposición al paso de la corriente eléctrica, se mide en Ohms [Ω], la resistencia está dada por la pendiente de su curva característica en el plano corriente-tensión como se muestra en la Figura 1.1

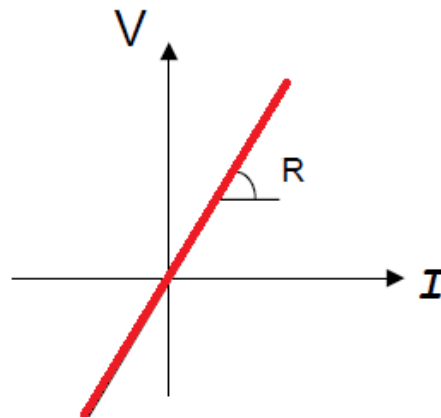


Figura 1.1: Resistor lineal

$$V = RI$$

1.1.2. El capacitor, interpretación física, propiedades, unidades y relación constitutiva

El capacitor es un elemento pasivo (consume o absorbe energía), capaz de almacenar energía mediante el campo eléctrico entre sus placas, físicamente almacena energía en el periodo de carga, misma que entrega en el periodo de descarga. Se mide en Farads [F], la capacitancia está dada por la pendiente de su curva característica en el plano tensión-carga como se muestra en la Figura 1.2

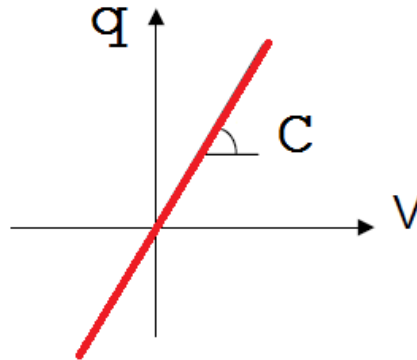


Figura 1.2: Capacitor lineal

$$q = CV_C, \text{ pero } i_C = \frac{dq}{dt}$$

así pues con $C = cte$

$$i_C = C \frac{dV_C}{dt} \text{ [A]}$$

$$V_C = \frac{1}{C} \int_0^t i_C dt + V(0) \text{ [V]}$$

1.1.3. El inductor, interpretación física, propiedades, unidades y relación constitutiva

El inductor es un elemento pasivo (consume o absorbe energía), físicamente es capaz de almacenar energía mediante el campo magnético producido en sus devanados, se mide en Henries [H], esta dada por la pendiente de su curva característica en el plano corriente-flujo magnético como se muestra en la Figura 1.3

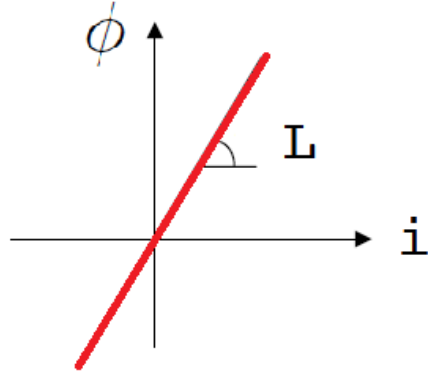


Figura 1.3: Inductor lineal

$$\phi = Li, \text{ pero } V_L = \frac{d\phi}{dt}$$

así pues con $L = cte$

$$V_L = L \frac{di_L}{dt} \text{ [V]}$$

$$i_L = \frac{1}{L} \int_0^t V_L dt + i(0) \text{ [A]}$$

1.2. Sistema de unidades (prefijos)

1.2.1. Sistema Internacional

El Sistema Internacional de Unidades (SI), adoptado en 1960 por la Conferencia General de Pesos y Medidas se constituye por siete unidades básicas, mostradas en la Tabla 1.1

MAGNITUD FÍSICA	NOMBRE	SÍMBOLO
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Corriente eléctrica	ampere	A
Temperatura termodinámica	kelvin	K
Cantidad de sustancia	mol	mol
Intensidad luminosa	candela	cd

Tabla 1.1: Unidades básicas del SI.

1.2.2. Unidades eléctricas derivadas

Las unidades eléctricas básicas, obtenidas a partir de las unidades fundamentales del SI, se muestran en la Tabla 1.2

MAGNITUD FÍSICA	UNIDAD	SÍMBOLO	U. DERIVADAS	U. BÁSICAS
Tensión	Volt	V	$J.C^{-1}$	$m^2.kg.s^{-3}.A^{-1}$
Energía	Joul	J	N.m	$m^2.kg.s^{-2}$
Potencia	Watt	W	$J.s^{-1}$	$m^2.kg.s^{-3}$
Resistencia eléctrica	Ohm	Ω	$V.A^{-1}$	$m^2.kg.s^{-3}.A^{-2}$
Capacitancia	Farad	F	$C.V^{-1}$	$m^{-2}.kg^{-1}.s^4.A^2$
Inductancia	Henry	H	$V.A^{-1}s$	$m^2.kg.s^{-2}.A^{-2}$
Densidad de flujo magnético	Weber	Wb	V.s	$m^2.kg.s^{-2}.A^{-1}$
Frecuencia	Hertz	Hz		s^{-1}

Tabla 1.2: Unidades eléctricas.

1.2.3. Prefijos de mayor uso en circuitos eléctricos

El SI utiliza el sistema decimal para relacionar unidades más grandes y más pequeñas con la unidad fundamental, emplea prefijos para indicar las distintas potencias de 10. Algunos de los prefijos mas usuales se muestran en la Tabla 1.3

FACTOR	PREFIJO	SÍMBOLO	FACTOR	PREFIJO	SÍMBOLO
10^{18}	exa	E	10^{-1}	deci	d
10^{15}	peta	P	10^{-2}	centi	c
10^{12}	tera	T	10^{-3}	mili	m
10^9	giga	G	10^{-6}	micro	μ
10^6	mega	M	10^{-9}	nano	n
10^3	kilo	k	10^{-12}	pico	p
10^2	hecto	h	10^{-15}	femto	f
10	deca	da	10^{-18}	atto	a

Tabla 1.3: Prefijos de mayor uso.

1.3. Instrumentos de medición

1.3.1. El voltmetro, principio de operación, uso y aplicaciones

El voltmetro es un instrumento para medir la diferencia de potencial o tensión entre dos puntos de un circuito eléctrico. Para efectuar la medición, el voltmetro deberá colocarse en paralelo sobre los puntos donde se quiera tomar la lectura como se muestra en la Figura 1.4.

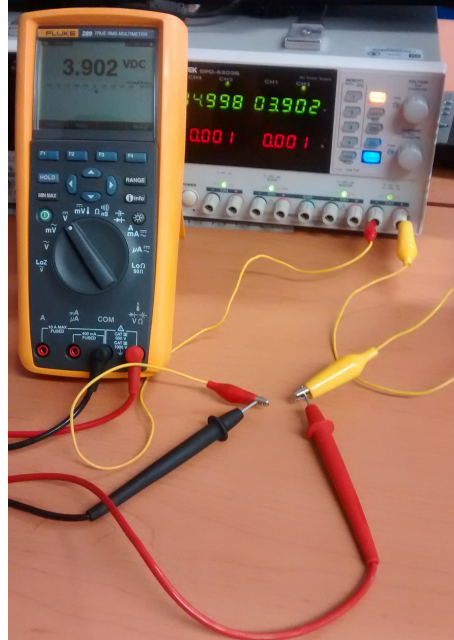


Figura 1.4: Medición de tensión o voltaje

Esto lleva a que el voltmetro deberá tener una resistencia interna muy grande para evitar lecturas erróneas en la medición.

1.3.2. El ampermetro, principio de operación, uso y aplicaciones

Un ampermetro es un instrumento que se utiliza para medir la intensidad de corriente que está circulando por un circuito eléctrico.

Para efectuar la medición, el ampermetro se coloca en serie en el circuito en el que queremos efectuar la medición, es decir, es como cortar el cable en un punto e intercalar entre los dos extremos del cable el ampermetro. Esto es lo que se llama colocarlo en serie con el circuito. Al colocarlo así, toda la corriente del circuito circula por el ampermetro.

1.3.3. El ohmetro, principio de operación, uso y aplicaciones

El ohmetro es un instrumento que se emplea para medir la resistencia en los circuitos eléctricos y de los componentes eléctricos.

Los extremos donde se efectúa la medición son importantes para encontrar fallas, circuitos con resistencia cero forman fáciles caminos para que la corriente circule. Un corto circuito ocurre cuando dos conductores que debían estar separados entran en contacto, la resistencia de un corto circuito es cero ohmios. Un camino conductor roto se denomina circuito abierto, la resistencia de un circuito abierto es infinita.

Los ohmetros operan aplicando una pequeña tensión al circuito bajo prueba, esta tensión es usualmente mucho menor a un volt. Los circuitos del ohmetro miden la corriente resultante a partir

del voltaje aplicado, la resistencia del circuito es calculada y mostrada. Los ohmetros pueden ser dañados aún por pequeñas tensiones.

1.3.4. El osciloscopio, principio de operación, uso y aplicaciones

El osciloscopio es un dispositivo de visualización gráfica que muestra señales eléctricas variables en el tiempo. El eje vertical denominado Y, representa la tensión, mientras que el eje horizontal denominado X, representa el tiempo. Un osciloscopio digital se muestra en la Figura 1.5

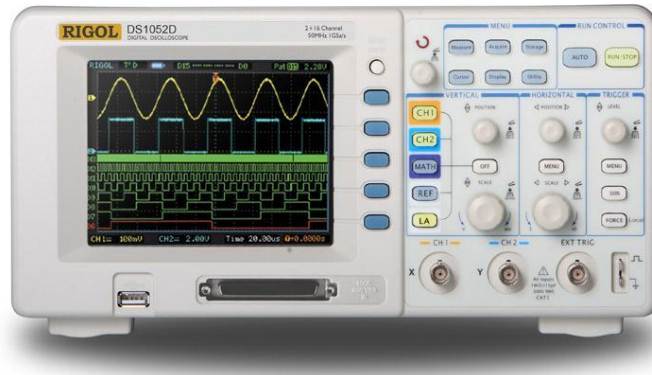


Figura 1.5: Osciloscopio

Mediante el uso del osciloscopio se puede medir un gran número de fenómenos, provisto del transductor adecuado (elemento que convierte una magnitud física en señal eléctrica) será capaz de medir el valor de una presión, ritmo cardíaco, potencia de sonido, nivel de vibraciones en un coche, etc.

Capítulo 2

Leyes eléctricas

2.1. Elementos de un circuito eléctrico

Es importante identificar los elementos principales que se encuentran comúnmente en un circuito eléctrico, así pues, los conceptos nodo, malla y rama resultan útiles en la aplicación de las técnicas de análisis de circuitos que se verán a detalle mas adelante, para este fin la Figura 2.1 sera de utilidad

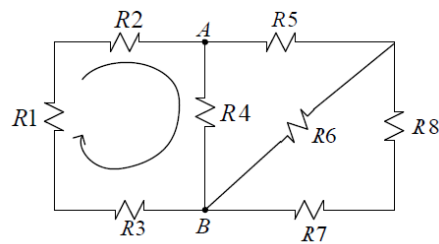


Figura 2.1: Elementos de un circuito eléctrico

- Un nodo es un punto de conexión de dos o más elementos del circuito, como se muestra el punto A de la Figura 2.1
- Una malla es cualquier trayectoria cerrada a través del circuito en la cual ningún nodo se encuentra más de una vez.
- Una rama es una parte de un circuito que contiene sólo un elemento y los nodos extremos del elemento, por ejemplo la rama R4, está entre los nodos A y B en la Figura 2.1

Entre los elementos mas importantes del circuito, se encuentran las fuentes, su importancia radica en que generalmente son las que entregan a todo el circuito la energía suficiente para su funcionamiento, estas se clasifican en dos tipos

- **Fuentes independientes:** Son elementos que proporcionan ya sea una tensión especifica o corriente especifica, independientemente de la corriente que pase por ella o la tensión entre sus nodos, la Figura 2.2 muestra una fuente de corriente y tensión respectivamente.

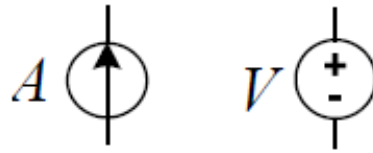


Figura 2.2: Fuentes independientes

- Fuentes independientes:** Son elementos que proporcionan un valor ya sea de tensión o de intensidad de corriente, controlados por medio de otras tensiones o corrientes existentes en el circuito. En la Figura 2.3 se muestran los cuatro tipos de fuentes dependientes, donde α , β , χ y σ , son constantes

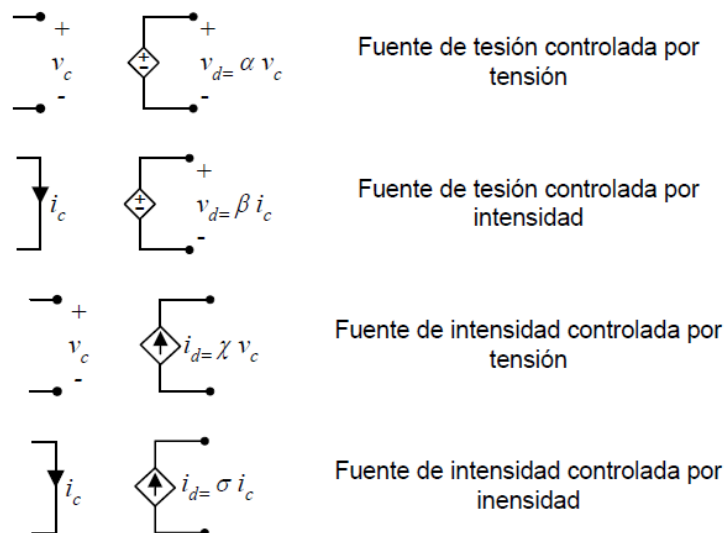


Figura 2.3: Tipos de fuentes dependientes

2.2. Leyes de Kirchhoff

2.2.1. Ley de voltajes de Kirchhoff, su relación con el principio de conservación de la energía, limitaciones y aplicabilidad

Para cualquier circuito eléctrico de parámetros concentrados, para cualquiera de sus lazos (trayectoria cerrada) y en todo tiempo, la suma algebraica de los voltajes de rama alrededor del lazo es cero.

$$\sum_{i=1}^n V_i = 0$$

Teorema 2.2.1 *Con LVK el número de ecuaciones de malla linealmente independientes que se pueden obtener es igual a $(n - 1)$, donde n es el número de mallas principales*

2.2.2. Ley de corrientes de Kirchhoff, su relación con el principio de conservación de la carga, limitaciones y aplicabilidad

Para cualquier circuito de parámetros concentrados, para cualquiera de sus nodos y en todo tiempo, la suma algebraica de todas las corrientes de rama que salen del nodo es cero.

$$\sum_{j=1}^n i_j = 0$$

Teorema 2.2.2 *Con LCK se pueden obtener solo $(n - 1)$ ecuaciones linealmente independientes, donde n es el número de nodos principales.*

2.3. Ley de Ohm, limitaciones y aplicabilidad

La ley de Ohm establece que la tensión (V) a lo largo de un resistor, es directamente proporcional a la corriente (i) que fluye a través del resistor.

Esto es $V \propto i$, para formar la igualdad se requiere una constante de proporcionalidad.

Esta constante es la resistencia, la cual es una propiedad de los materiales y puede cambiar si se alteran condiciones internas o externas del elemento, por ejemplo la temperatura. Se obtiene experimentalmente como $R = \frac{\rho \ell}{A}$, donde ρ es la resistividad propia del material, ℓ es su longitud y A su area transversal.

Así la ley de Ohm se convierte en $V = Ri$, la cuál es valida solo en metales homogéneos por las razones anteriores.

2.4. Principio de superposición

2.4.1. Propiedades de homogeneidad y aditividad de los modelos lineales

Se dice que un sistema lineal, si satisface dos propiedades

- Homogeneidad
- Superposición

Sean Z_1 y Z_2 dos funciones de la variable “t” y α, β dos números reales cualesquiera diferentes de cero, entonces la relación

$$F\{\alpha Z_1(t)\} = \alpha F\{Z_1(t)\} \text{ (Homogeneidad)}$$

$$F\{Z_1(t) + Z_2(t)\} = F\{Z_1(t)\} + F\{Z_2(t)\} \text{ (Aditividad)}$$

así

$$F\{\alpha Z_1(t) + \beta Z_2(t)\} = \alpha F\{Z_1(t)\} + \beta F\{Z_2(t)\}$$

2.4.2. Enunciado y prueba del principio de superposición

El principio de superposición establece que:

“Cuando causa y efecto están relacionados linealmente, entonces el efecto total (de las causas actuando conjuntamente) es igual a la suma de los efectos de cada causa actuando individualmente.”

2.4.3. Aplicabilidad del principio de superposición

En circuitos eléctricos, los efectos de las fuentes en el sobre el circuito, es equivalente a la suma de los efectos individuales de cada fuente. Para aplicar superposición las fuentes de tensión se ponen en corto circuito y las fuentes de corriente se ponen en circuito abierto.

Lo anterior se ilustra mediante el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.4.1 Considere el circuito mostrado en la Figura 2.4, obtener la tensión en el resistor de 4Ω

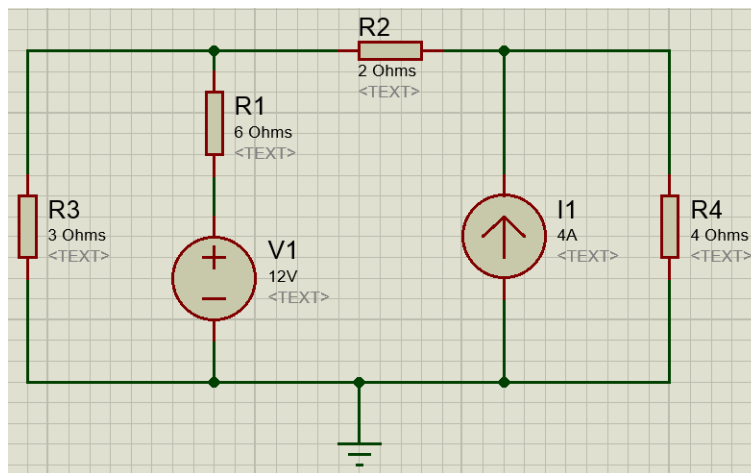
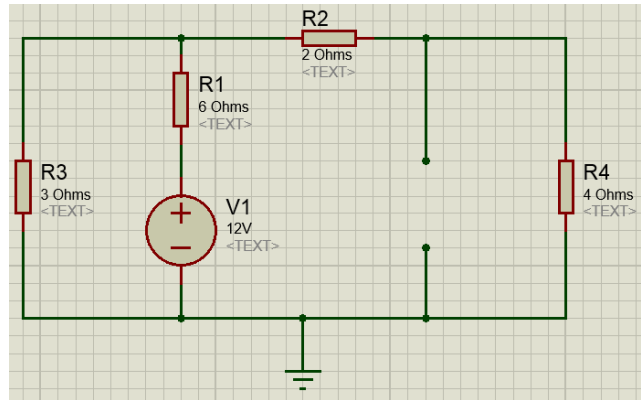


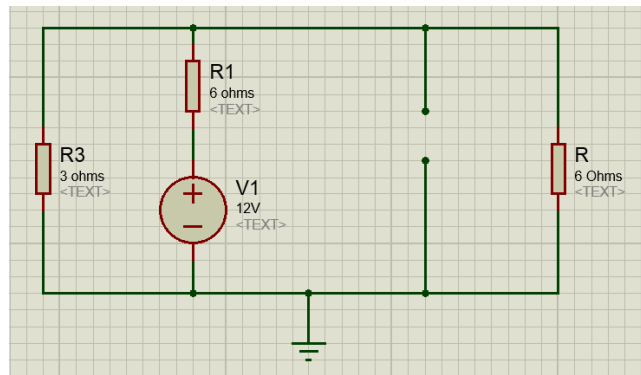
Figura 2.4: Circuito para el ejemplo 1.4.1

Resolución:

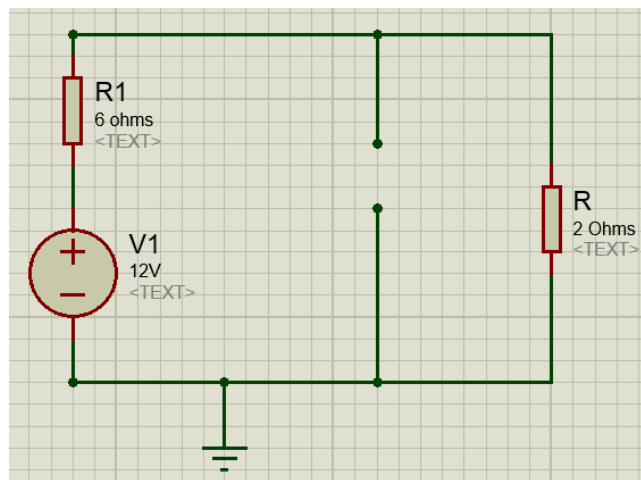
- *Efecto de la fuente independiente de tensión*
La fuente de corriente se pone en circuito abierto



reduciendo los resistores en serie

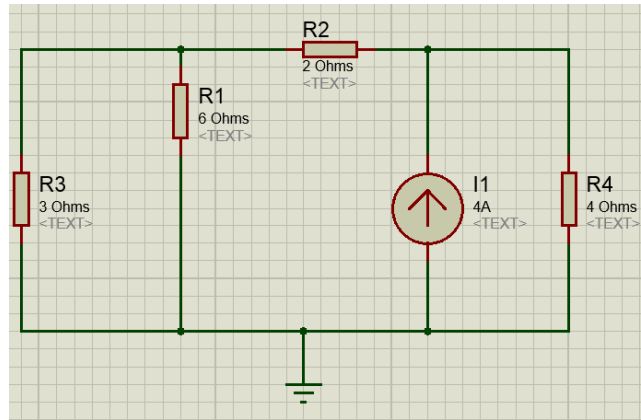


al observar la Figura, los resistores de 3Ω y 6Ω están en paralelo, reduciendo

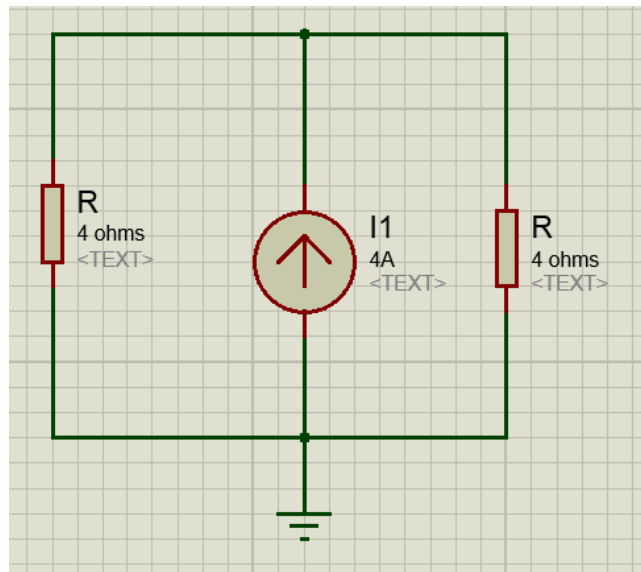


aplicando divisor de voltaje $V_4^{FV} = \left(\frac{2}{2+6}\right) 12$
 $V_4^{FV} = 3[V]$

- Efecto de la fuente independiente de corriente
La fuente de tensión se pone en cortocircuito



reduciendo resistores se puede obtener



haciendo uso del divisor de corriente $i_{4\Omega} = \left(\frac{4}{4+4}\right) = 2[A]$

con Ley de Ohm, $V_4^{FC} = R_{4\Omega}i_{4\Omega} = (4)(2) = 8[V]$

Finalmente aplicando el principio de superposición $V_{4\Omega} = V_4^{FV} + V_4^{FC}$

$$V_{4\Omega} = (3 + 8) = 11[V]$$

Ejemplo 2.4.2 Determine la tensión en cada resistor lineal para el circuito mostrado en la Figura 2.5

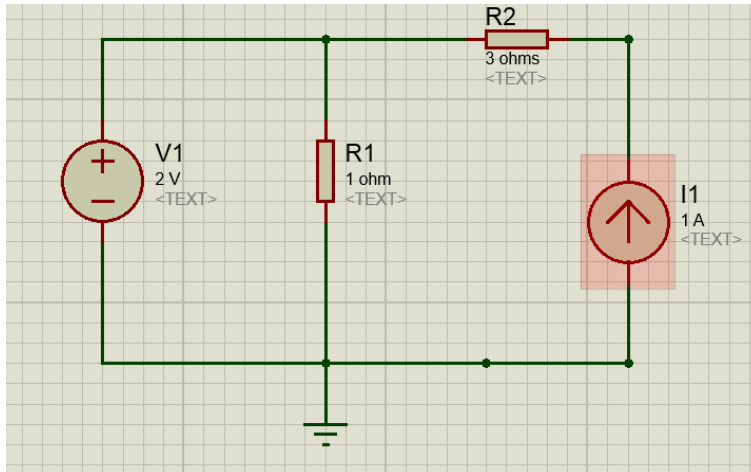
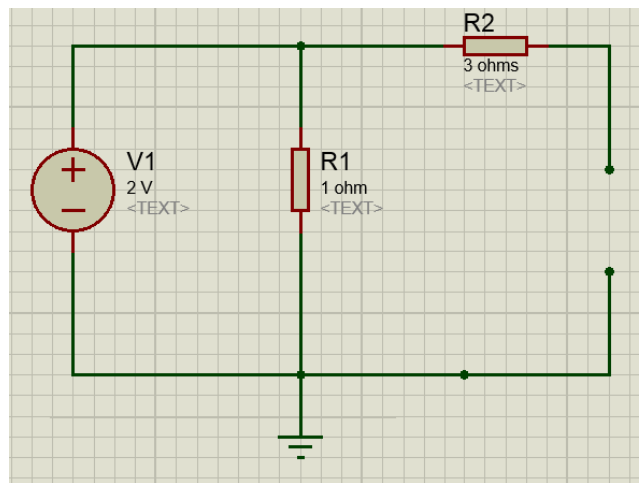


Figura 2.5: Circuito para el ejemplo 1.4.2

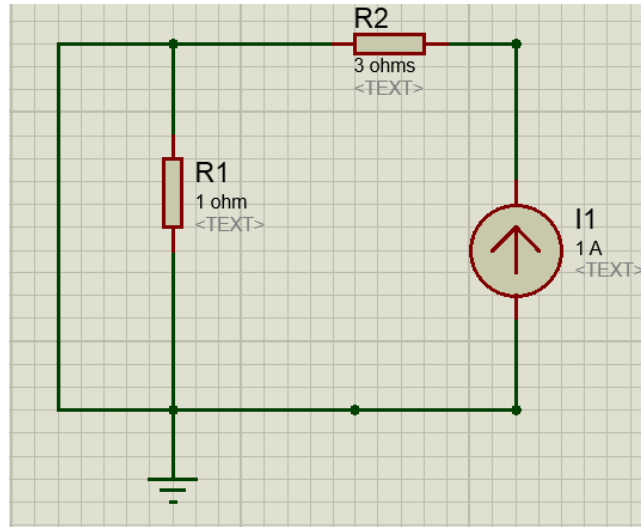
Resolución

1. Abriendo la fuente independiente de corriente



En el resistor $R_{3\Omega}$ no fluye corriente, ya que esta del lado del circuito abierto el cual tiene una impedancia infinita, por lo tanto $V_{R_{3\Omega}} = 0[V]$, el resistor $R_{1\Omega}$ como queda en paralelo con la fuente, tiene su misma tensión o voltaje, por ende $V_{R_{1\Omega}} = 2[V]$.

2. Cortocircuitando la fuente independiente de tensión



La corriente eléctrica fluye hacia la trayectoria con menos oposición, es decir hacia el cortocircuito, por lo tanto en el resistor $R_{1\Omega}$ no fluye corriente y $V_{R_{1\Omega}} = 0[V]$. Con ley de Ohm para el resistor $R_{3\Omega}$, $V_{R_{3\Omega}} = (3\Omega)(1A) = 3[V]$

Finalmente aplicando el principio de superposición

$$V_{R_{3\Omega}} = V_{R_{3\Omega}}^{FV} + V_{R_{3\Omega}}^{FC}$$

,

$$V_{R_{1\Omega}} = V_{R_{1\Omega}}^{FV} + V_{R_{1\Omega}}^{FC}$$

Por lo tanto $V_{R_{3\Omega}} = 3[V]$ y $V_{R_{1\Omega}} = 2[V]$

Capítulo 3

Técnicas fundamentales para el análisis de circuitos

3.1. Análisis de nodos

3.1.1. Método de análisis de nodos por inspección

Este análisis es aplicable cuando todas las fuentes en un circuito eléctrico, son fuentes independientes de corriente, con lo cual no es necesario aplicar la Ley de Corrientes de Kirchhoff para obtener el sistema de ecuaciones.

En general, si un circuito con fuentes independientes de corriente tiene N nodos distintos al de referencia, las ecuaciones de tensiones nodales pueden escribirse en terminos de las admitancias como:

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1N} \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{N1} & Y_{N2} & \cdots & Y_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix}$$

matricialmente $[Y][V] = [I]$, donde

Y_{kk} es la suma de las admitancias conectadas al nodo k

$Y_{kj} = Y_{jk}$ es el negativo de las admitancias que conectan directamente a los nodos k y j , con $k \neq j$

V_k es la tensión desconocida de nodo

I_k es la suma de todas las fuentes de corriente independientes conectadas directamente al nodo k , las corrientes que entran se consideran positivas.

Ejemplo 3.1.1 *Obtener por inspección el sistema de ecuaciones para los nodos del circuito eléctrico mostrado en la Figura 3.1*

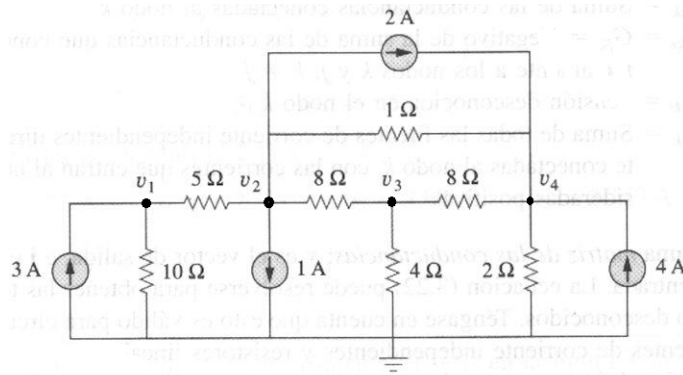


Figura 3.1: Análisis de nodos por inspección

Resolución:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{5}\right) & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{5} & \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{1}\right) & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{1} \\ 0 & -\frac{1}{8} & \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4}\right) & -\frac{1}{8} \\ 0 & -\frac{1}{1} & -\frac{1}{8} & \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 - 1 \\ 0 \\ 4 + 2 \end{bmatrix}$$

3.1.2. Método sistemático de análisis de nodos

Se hace aplicando Ley de Corrientes de Kirchhoff (LCK) en cada nodo, las incógnitas son las tensiones de nodo. Se obtiene un conjunto de ecuaciones linealmente independientes y con las tensiones de nodo se obtienen tensiones y corrientes de rama. Lo cual se ilustra mediante el siguiente ejemplo: Considere el circuito mostrado en la Figura 3.2

Por convención

- Corrientes que entran al nodo son positivas
- Corrientes que salen del nodo son negativas
- El voltaje o tensión en el nodo de referencia es cero

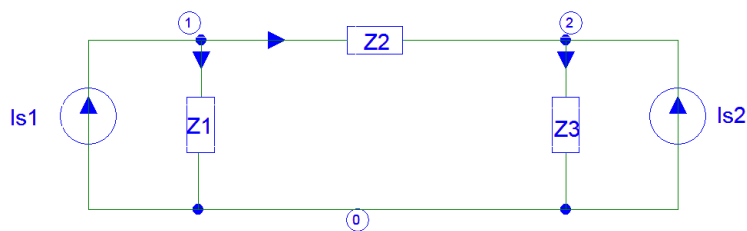


Figura 3.2: Análisis de nodos

1. Se elige un nodo de referencia 0 y se ubican los nodos principales, en este caso 1 y 2

2. Se aplica LCK para cada nodo principal (emplear ley de Ohm para expresar la corriente de rama en terminos de las diferencias de tensión nodales y las impedancias conectadas)
3. Se forma un sistema de ecuaciones L.I y se resuelve

De la Figura 3.2, aplicando LCK en

- nodo 1: $I_{S_1} = \frac{V_1 - V_0}{Z_1} + \frac{V_1 - V_2}{Z_2}$, realizando operaciones y agrupando, se tiene

$$I_{S_1} = V_1 \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right) + V_2 \left(\frac{-1}{Z_2} \right) \quad (3.1)$$

- nodo 2: $I_{S_2} + \frac{V_1 - V_2}{Z_2} = \frac{V_2 - V_0}{Z_3}$, realizando operaciones y agrupando, se tiene

$$I_{S_2} = \left(\frac{-1}{Z_2} \right) V_1 + V_2 \left(\frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} \right) \quad (3.2)$$

Escribiendo matricialmente las ecuaciones (3.1) y (3.2)

$$\begin{bmatrix} I_{S_1} \\ I_{S_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} & \frac{-1}{Z_2} \\ \frac{-1}{Z_2} & \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

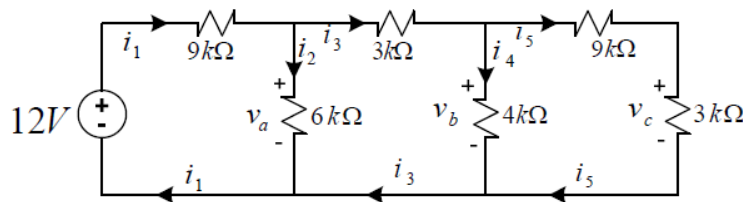
Haciendo uso del concepto admitancia

$$\begin{bmatrix} I_{S_1} \\ I_{S_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 + Y_2 & -Y_2 \\ -Y_2 & Y_2 + Y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Generalizando $[I_{S_n}] = [Y_n][V_n]$

realizando operaciones matriciales $[V_n] = [Y_n]^{-1}[I_{S_n}]$, se obtienen todas las tensiones de nodo y con ley de Ohm se pueden determinar todas las corrientes de malla.

Ejemplo 3.1.2 Obtener las tensiones en los nodos del circuito eléctrico mostrado en la Figura 3.3



Resolución:

Ubicando los nodos del circuito y la referencia

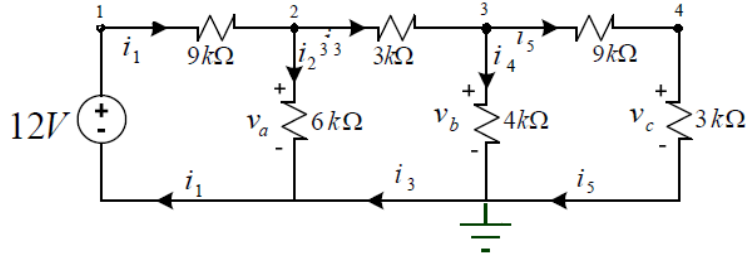


Figura 3.3: Circuito para el ejemplo

Aplicando LCK en los nodos

1. $i_1 = i_1 \Rightarrow 1.33 \times 10^{-3} = \frac{V_1 - V_2}{9k\Omega}$
2. $i_1 = i_2 + i_3 \Rightarrow 1.33 \times 10^{-3} = \frac{V_1 - V_2}{9k\Omega} = \frac{V_2 - 0}{6k\Omega} + \frac{V_2 - V_3}{3k\Omega}$
3. $i_3 = i_4 + i_5 \Rightarrow \frac{V_2 - V_3}{3k\Omega} = \frac{V_3 - 0}{4k\Omega} + \frac{V_3 - V_4}{9k\Omega}$
4. $i_5 = i_5 \Rightarrow \frac{V_3 - V_4}{9k\Omega} = \frac{V_4 - 0}{3k\Omega}$

factorizando y simplificando, se puede obtener el siguiente sistema de ecuaciones

1. $1.33 \times 10^{-3} = \frac{1}{9k\Omega} V_1 - \frac{1}{9k\Omega} V_2$
2. $1.33 \times 10^{-3} = -\frac{1}{9k\Omega} V_1 + \left(\frac{1}{9k\Omega} + \frac{1}{6k\Omega} + \frac{1}{3k\Omega}\right) V_2 - \frac{1}{3k\Omega} V_3$
3. $0 = -\frac{1}{3k\Omega} V_2 + \left(\frac{1}{3k\Omega} + \frac{1}{4k\Omega} + \frac{1}{9k\Omega}\right) V_3 - \frac{1}{9k\Omega} V_4$
4. $0 = -\frac{1}{9k\Omega} V_3 + \left(\frac{1}{9k\Omega} + \frac{1}{3k\Omega}\right) V_4$

reescribiendo en forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1.33 \times 10^{-3} \\ 1.33 \times 10^{-3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.11 \times 10^{-4} & -1.11 \times 10^{-4} & 0 & 0 \\ -1.11 \times 10^{-4} & 6.11 \times 10^{-4} & -3.33 \times 10^{-4} & 0 \\ 0 & -3.33 \times 10^{-4} & 6.94 \times 10^{-4} & -1.11 \times 10^{-4} \\ 0 & 0 & -1.11 \times 10^{-4} & 4.49 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}$$

Pero la tensión en el nodo 1 está dada por la tensión de la fuente, por lo tanto $V_1 = 12[V]$, lo cual proporciona un grado de libertad, es decir, elimina una ecuación del sistema, esta ecuación es la que corresponde al renglón 1 y columna 1 del sistema matricial, así pues se tiene

$$\begin{bmatrix} 1.33 \times 10^{-3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.11 \times 10^{-4} & -3.33 \times 10^{-4} & 0 \\ -3.33 \times 10^{-4} & 6.94 \times 10^{-4} & -1.11 \times 10^{-4} \\ 0 & -1.11 \times 10^{-4} & 4.49 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}$$

resolviendo la ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.11 \times 10^{-4} & -3.33 \times 10^{-4} & 0 \\ -3.33 \times 10^{-4} & 6.94 \times 10^{-4} & -1.11 \times 10^{-4} \\ 0 & -1.11 \times 10^{-4} & 4.49 \times 10^{-4} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1.33 \times 10^{-3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente las tensiones nodales son $V_1 = 12[V]$, $V_2 = 3[V]$, $V_3 = 1.47[V]$ y $V_4 = 0.3655[V]$

Ejemplo 3.1.3 Determinar las tensiones de nodo para el circuito mostrado en la Figura 3.4

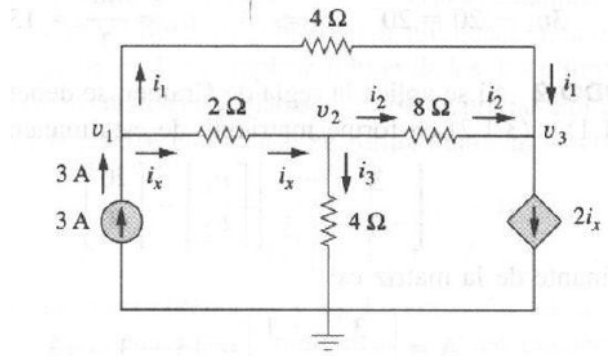


Figura 3.4: Circuito para el ejemplo

Resolución:

Aplicando LCK en los nodos

1. $3 = i_x + i_1$
2. $i_x = i_2 + i_3$
3. $i_1 + i_2 = 2i_x$

Con ley de Ohm, expresando las corrientes en términos de sus tensiones de nodo, pero con $i_x = \frac{V_1 - V_2}{2\Omega}$ se tiene lo siguiente

$$3 = \frac{V_1 - V_2}{2\Omega} + \frac{V_1 - V_3}{4\Omega}$$

$$\frac{V_1 - V_2}{2\Omega} = \frac{V_2 - 0}{4\Omega} + \frac{V_2 - V_3}{8\Omega}$$

$$\frac{V_1 - V_3}{4\Omega} + \frac{V_2 - V_3}{8\Omega} = 2 \left(\frac{V_1 - V_2}{2\Omega} \right)$$

factorizando y reescribiendo

$$3 = \left(\frac{1}{2\Omega} + \frac{1}{4\Omega} \right) V_1 - \frac{1}{2\Omega} V_2 - \frac{1}{4\Omega} V_3$$

$$0 = -\frac{1}{2\Omega} V_1 + \left(\frac{1}{2\Omega} + \frac{1}{4\Omega} + \frac{1}{8\Omega} \right) V_2 - \frac{1}{8\Omega} V_3$$

$$0 = \left(\frac{-1}{4\Omega} + 1\Omega \right) V_1 + \left(-\frac{1}{8\Omega} - 1\Omega \right) V_2 + \left(\frac{1}{8\Omega} + \frac{1}{4\Omega} \right) V_3$$

escribiendo el sistema en forma matricial $I_n = Y_n V_n$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.75 & -0.5 & -0.25 \\ -0.5 & 0.875 & -0.125 \\ 0.75 & -1.125 & 0.375 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

Finalmente realizando la operación matricial $V_n = Y_n^{-1} I_n$, se obtienen todas las tensiones nodales, así pues las tensiones son $V_1 = 4.8[V]$, $V_2 = 2.4[V]$ y $V_3 = -2.4[V]$

3.2. Análisis de mallas

3.2.1. Método de análisis de mallas por inspección

Este análisis es aplicable cuando todas las fuentes en un circuito eléctrico, son fuentes independientes de tensión o voltaje, con lo cual no es necesario aplicar la Ley de Voltajes de Kirchhoff para obtener el sistema de ecuaciones.

En general, si un circuito con fuentes independientes de corriente tiene N mallas, las ecuaciones de corrientes de malla pueden escribirse en terminos de las impedancias como:

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1N} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{N1} & Z_{N2} & \cdots & Z_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix}$$

matricialmente $[Z][I] = [V]$, donde

Z_{kk} es la suma de las impedancias en la malla k

$Z_{kj} = Z_{jk}$ es el negativo de la suma de las impedancias en común de las mallas k y j , con $k \neq j$

I_k es la corriente desconocida de malla, en sentido horario

V_k es la suma en sentido horario de todas las fuentes independientes de tensión o voltaje en la malla k .

Ejemplo 3.2.1 Obtener por inspección el sistema de ecuaciones para las mallas del circuito eléctrico mostrado en la Figura 3.5

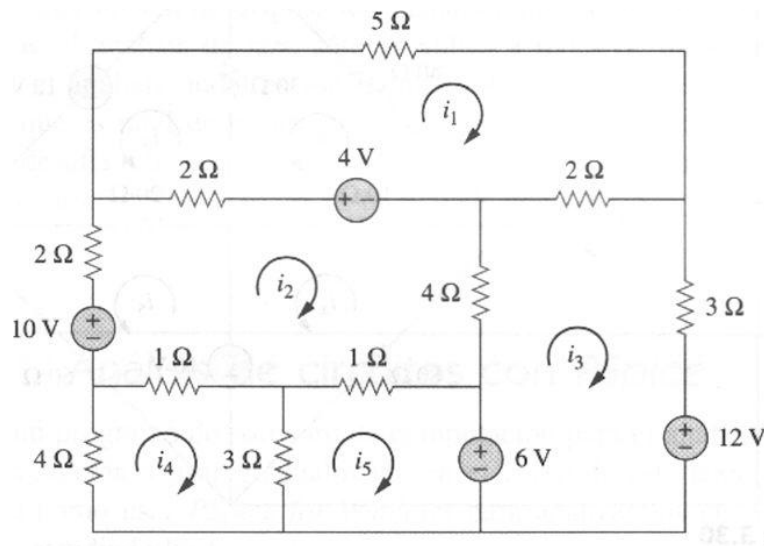


Figura 3.5: Análisis de mallas por inspección

Resolución:

$$\begin{bmatrix} (2+2+5) & -2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & (2+2+4+1+1) & -4 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & (2+3+4) & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & (1+3+4) & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & (1+3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 10-4 \\ 6-12 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}$$

3.2.2. Método sistemático de análisis de mallas

Se hace aplicando Ley de Voltajes de Kirchhoff (LVK) en cada malla, las incógnitas son las corrientes de malla. Se obtiene un conjunto de ecuaciones linealmente independientes y con las corrientes de malla se obtienen las corrientes y voltajes de rama. Lo cual se ilustra mediante el siguiente ejemplo, considere el circuito mostrado en la Figura 3.6, por convención se considera

- Fuentes donde la corriente circule de la terminal (-) a la terminal (+), se considera con signo positivo.
- Fuentes donde la corriente circule de la terminal (+) a la terminal (-), se considera con signo negativo.

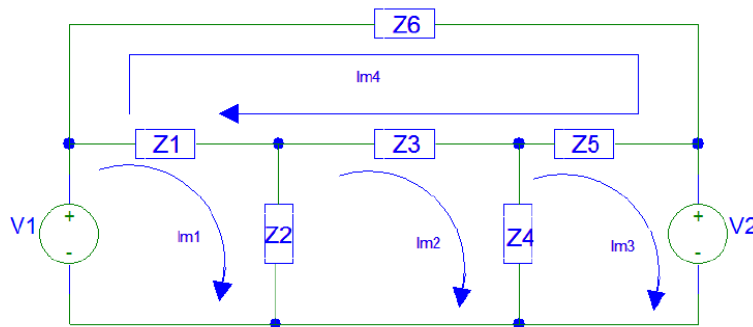


Figura 3.6: Análisis de mallas

1. Identificar las n mallas principales y asignar las corrientes de malla i_1, i_2, \dots, i_n a las n mallas.
2. Se aplica LVK a cada una de las mallas (emplear ley de Ohm para expresar las tensiones o voltajes de rama en términos de las corrientes de malla).
3. Se forma un sistema de ecuaciones L.I y se resuelve

De la Figura 3.2, aplicando LVK en

- Malla 1: $V_1 = I_1(Z_1 + Z_2) - I_2Z_2 - I_4Z_1$
- Malla 2: $0 = (Z_2 + Z_3 + Z_4)I_2 - I_1Z_2 - I_4Z_3 - I_3Z_4$
- Malla 3: $-V_2 = (Z_4 + Z_5)I_3 - I_2Z_4 - I_4Z_5$
- Malla 4: $0 = (Z_1 + Z_3 + Z_5 + Z_6)I_4 - I_1Z_1 - I_2Z_3 - I_3Z_5$

Escribiendo el sistema anterior en forma matricial, se llega a

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \\ -V_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (Z_1 + Z_2) & -Z_2 & 0 & -Z_1 \\ -Z_2 & (Z_2 + Z_3 + Z_4) & -Z_4 & -Z_3 \\ 0 & -Z_4 & (Z_4 + Z_5) & -Z_5 \\ -Z_1 & -Z_3 & -Z_5 & (Z_1 + Z_3 + Z_5 + Z_6) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix}$$

Generalizando $[V_m] = [Y_m][I_m]$

realizando operaciones matriciales $[I_m] = [Z_m]^{-1}[V_m]$, se obtienen todas las corrientes de malla y con ley de Ohm se pueden determinar todas las tensiones o voltajes de rama.

El análisis de mallas no es tan general como lo es el de nodos, el análisis de mallas solo es aplicable a circuitos con disposición plana, esto es, que se puede dibujar en un plano, sin que ninguna de las ramas se cruce, de lo contrario es un circuito no planar y no es aplicable el análisis por mallas, en la Figura 3.7 se ilustra un ejemplo de estas disposiciones.

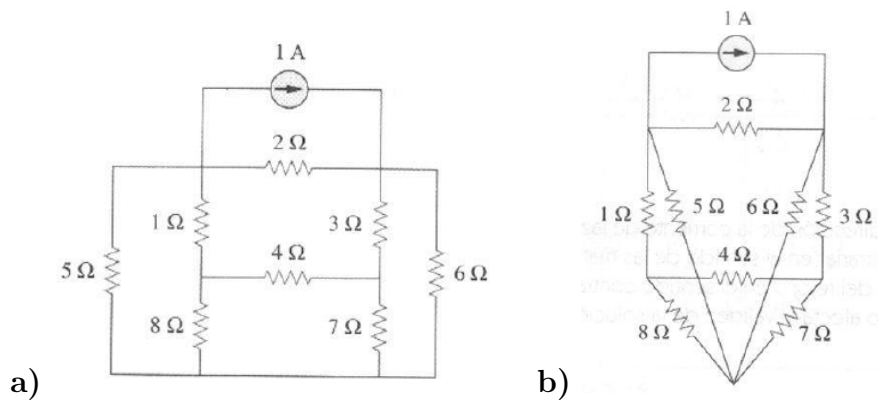
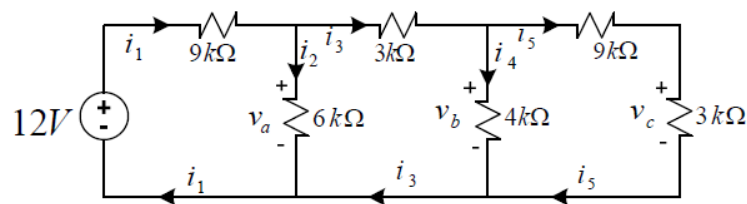


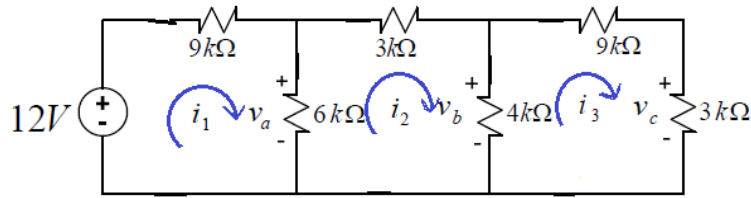
Figura 3.7: Representación de circuitos.
a) Disposición planar, b) Disposición no planar

Ejemplo 3.2.2 Calcular las tensiones de rama indicadas en la Figura 3.2.2, empleando análisis por mallas



Resolución:

Identificando mallas principales y asignando corrientes de malla



Aplicando LVK en las mallas

1. $12 = (9k\Omega + 6k\Omega)i_1 - 6k\Omega i_2$
2. $0 = -6k\Omega i_1 + (6k\Omega + 3k\Omega + 4k\Omega)i_2 - 4k\Omega i_3$
3. $0 = -4k\Omega i_2 + (4k\Omega + 9k\Omega + 3k\Omega)i_3$

escribiendo el sistema de ecuaciones en forma matricial

$$\begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (9k\Omega + 6k\Omega) & -6k\Omega & 0 \\ -6k\Omega & (6k\Omega + 3k\Omega + 4k\Omega) & -4k\Omega \\ 0 & -4k\Omega & (4k\Omega + 9k\Omega + 3k\Omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}$$

reescribiendo en forma matricial

$$\begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15k\Omega & -6k\Omega & 0 \\ -6k\Omega & 13k\Omega & -4k\Omega \\ 0 & -4k\Omega & 16k\Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}$$

resolviendo la operación matricial para obtener la corrientes de malla

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15k\Omega & -6k\Omega & 0 \\ -6k\Omega & 13k\Omega & -4k\Omega \\ 0 & -4k\Omega & 16k\Omega \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

las corrientes de malla son $i_1 = 1.0 \times 10^{-3} [A]$, $i_2 = 0.5 \times 10^{-3} [A]$ e $i_3 = 0.125 \times 10^{-3} [A]$

calculando las tensiones de rama

$$V_a = (6k\Omega)(1.0 - 0.5) \times 10^{-3} [A] = 3 [V]$$

$$V_b = (4k\Omega)(0.5 - 0.125) \times 10^{-3} [A] = 1.5 [V]$$

$$V_c = (3k\Omega)(0.125 \times 10^{-3} [A]) = 0.375 [V]$$

Ejemplo 3.2.3 Calcular V_0 para el circuito eléctrico mostrado en la Figura 3.8

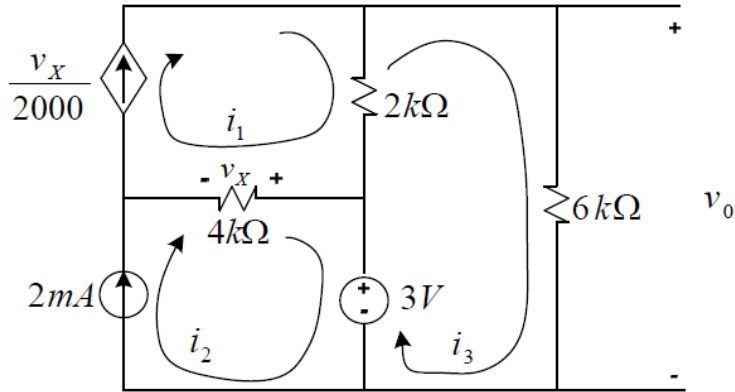


Figura 3.8: Circuito para el ejemplo

Resolución:

- En la malla 1, la corriente esta dada por la corriente de la fuente dependiente de corriente controlada por voltaje, es decir $i_1 = \frac{V_x}{2000}$, pero $V_x = 4(i_1 - i_2)$, sustituyendo el valor de V_x y simplificando términos, se tiene

$$0 = i_1 - 2i_2 \quad (3.3)$$

- En la malla 2, la corriente esta dada por la corriente que proporciona la fuente independiente de corriente, así pues

$$2 \times 10^{-3} = i_2 \quad (3.4)$$

- Aplicando LVK en la malla 3, se tiene

$$3 = (2 + 6)k\Omega i_3 - 2k\Omega i_1 \quad (3.5)$$

reescribiendo las ecuaciones (3.3), (3.4) y (3.5) en forma matricial, se tiene

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \times 10^{-3} \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 \times 10^3 & 0 & 8 \times 10^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}$$

obteniendo las corrientes al resolver la ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 \times 10^3 & 0 & 8 \times 10^3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \times 10^{-3} \\ 3 \end{bmatrix}$$

las corrientes de malla, obtenidas son

$$i_1 = 0.0040[A], \quad i_2 = 0.0020[A] \quad e \quad i_3 = 0.0014[A]$$

$$\text{Por lo tanto } V_0 = (6k\Omega)(0.0014[A]) = 8.4[V]$$

3.3. Teoremas de Thévenin y Norton

3.3.1. Teorema de Thévenin

Para un circuito lineal con una o más fuentes de tensión y/o corriente, y con fuentes dependientes de cualquier tipo, puede sustituirse por una fuente de tensión o voltaje, llamado voltaje de Thévenin en serie con una resistencia conectada a una carga. Como se ilustra en la Figura 3.9

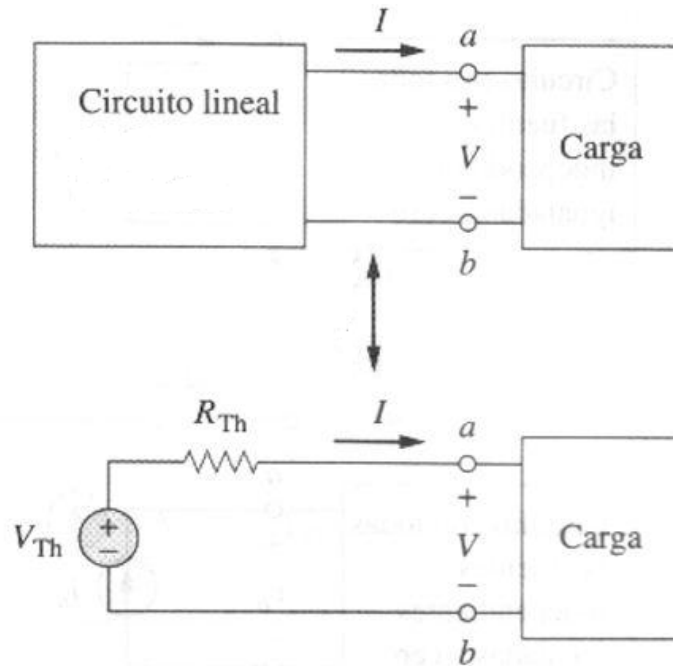
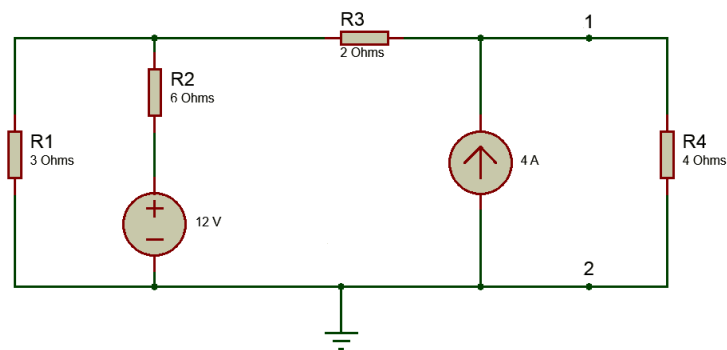


Figura 3.9: Teorema de Thévenin

Ejemplo 3.3.1 Para el circuito mostrado en la Figura 3.3.1, reemplazar la red a la izquierda de las terminales 1 – 2 por su equivalente de Thévenin y emplear el resultado para calcular la tensión en el resistor de 4Ω

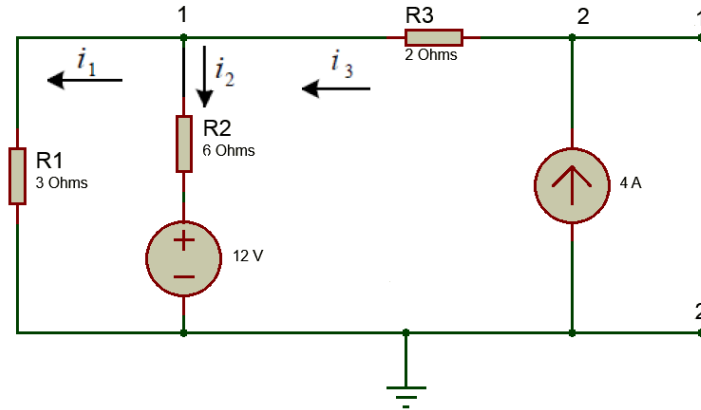


Resolución:

Aplicando el teorema

1. Cálculo de V_{TH}

aplicando análisis de nodos para obtener la tensión entre las terminales 1-2



con LCK en los nodos

$$a) i_2 + i_3 = i_1 \Rightarrow \frac{V_2 - V_1}{2} = \frac{V_1}{3} + \frac{V_1 - 12}{6}$$

$$b) i_3 = 4 \Rightarrow 4 = \frac{V_2 - V_1}{2}$$

reordenando y simplificando términos, se puede escribir

$$2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right) V_1 - \frac{1}{2} V_2$$

$$4 = -\frac{1}{2} V_1 + \frac{1}{2} V_2$$

escribiendo en forma matricial de la forma $I=YV$

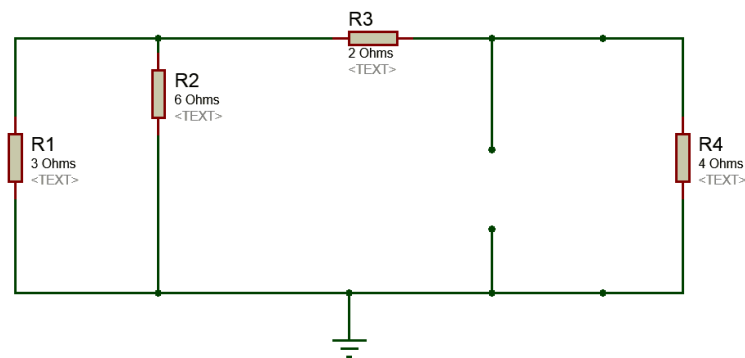
$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

resolviendo la ecuación matricial anterior, las tensiones obtenidas son: $V_1 = 12[V]$ y $V_2 = 20[V]$, pero $V_2 = V_{TH} = 20[V]$

2. Cálculo de R_{TH}

para el cálculo de la R_{TH} , todas las fuentes de tensión se cortocircuitan y todas las fuentes de corriente se ponen en circuito abierto.



Así pues, los resistores R_1 y R_2 están en paralelo, al obtener su resistor equivalente, este ultimo queda en serie con el resistor R_3 $R_{equiv} = \frac{6(3)}{6+3} = 2\Omega$
 $R_{TH} = R_{equiv} + R_3$, por lo tanto $R_{TH} = 4$

Reconectando al circuito original, como se muestra en la Figura 3.10

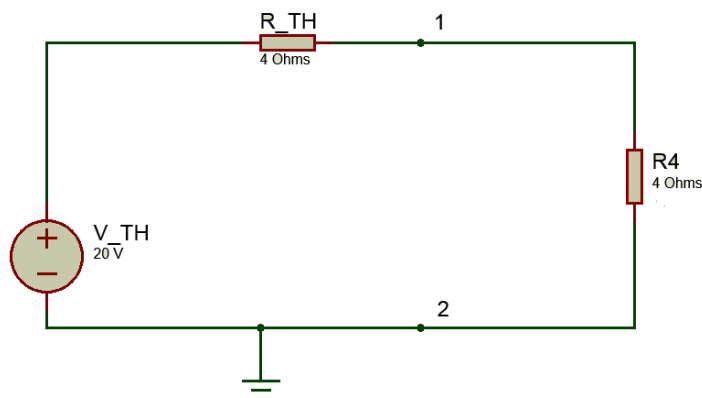


Figura 3.10: Aplicando el teorema de Thévenin

con divisor de tension, se tiene $V_{4\Omega} = \frac{4}{4+4}(20) = 10[V]$

3.3.2. Teorema de Norton

Para un circuito lineal con una o más fuentes de tensión y/o corriente, y con fuentes dependientes de cualquier tipo, puede sustituirse por una fuente de corriente, corriente de Norton en paralelo con una resistencia conectada a una carga. Como se ilustra en la Figura 3.11

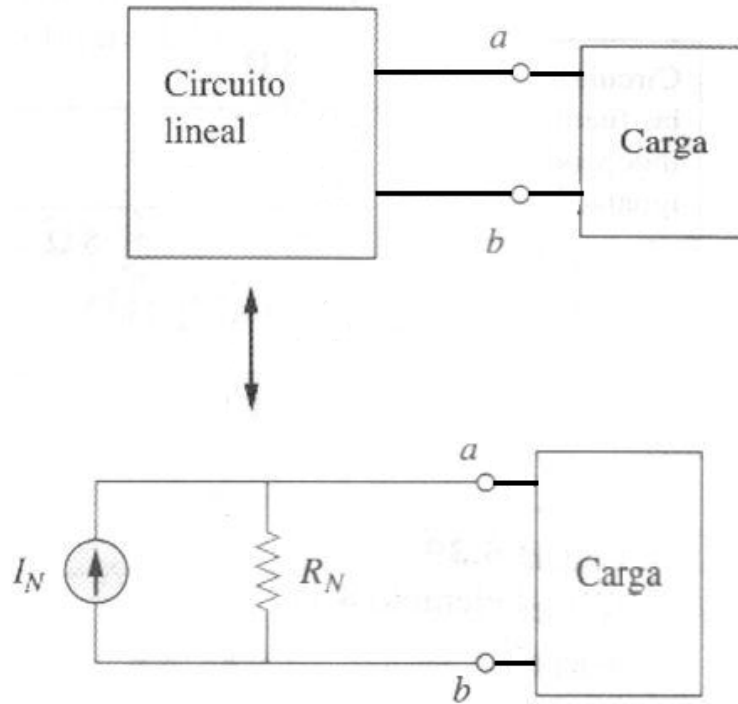
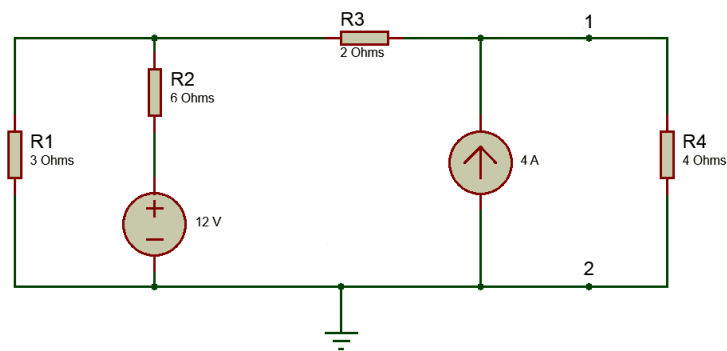


Figura 3.11: Teorema de Norton

Ejemplo 3.3.2 Para el circuito mostrado en la Figura 3.3.2, reemplazar la red a la izquierda de las terminales 1 – 2 por su equivalente de Norton y emplear el resultado para calcular la tensión en el resistor de 4Ω



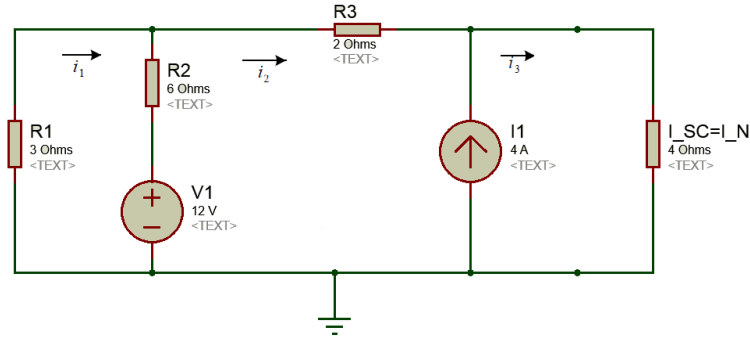
captionCircuito para el ejemplo

Resolución:

Aplicando el teorema, se necesita obtener la i_N y la R_N

1. Calculo de la $i_{sc} = i_N$

como puede observarse en la Figura 1, la corriente $i_{sc} = i_N$ es la suma de la corriente de la fuente (i_3) mas la corriente de la malla 2



aplicando análisis de malla en las mallas 1 y 2

$$-12 = (3 + 6)i_1 - 6i_2$$

$$12 = (2 + 6)i_2 - 6i_1$$

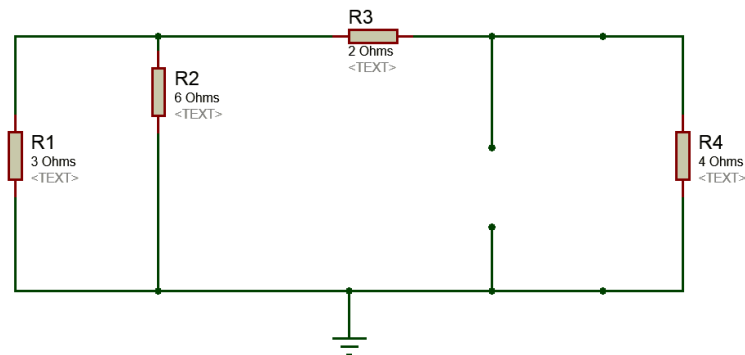
reescribiendo en forma matricial

$$\begin{bmatrix} -12 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

resolviendo la ecuación matricial, las corrientes obtenidas son $i_1 = -0.666[A]$ e $i_2 = 1[A]$, anteriormente se estableció que $i_N = i_2 + 4[A]$, por lo tanto $i_N = 5[A]$

2. Calculo de la R_N

para el calculo de la R_N , todas las fuentes de tensión se cortocircuitan y todas las fuentes de corriente se ponen en circuito abierto.



Así pues, los resistores R_1 y R_2 están en paralelo, al obtener su resistor equivalente, este ultimo queda en serie con el resistor R_3

$$R_{equiv} = \frac{6(3)}{6+3} = 2\Omega$$

$$R_N = R_{equiv} + R_3, \text{ por lo tanto } R_N = 4$$

Reconectando al circuito original, como se muestra en la Figura 3.12

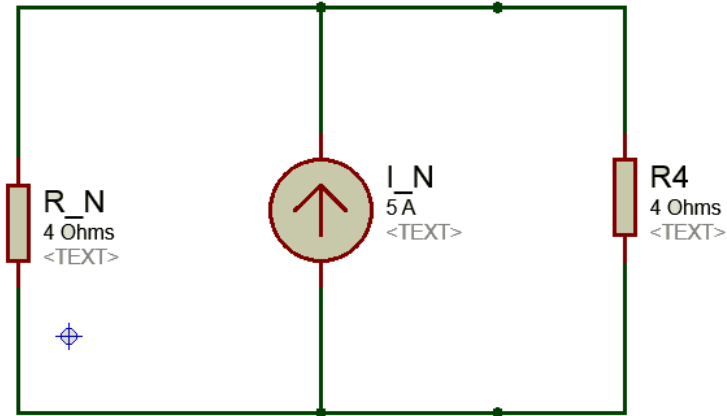


Figura 3.12: Aplicando el teorema de Norton

con divisor de corriente, se tiene $i_{4\Omega} = \frac{4}{4+4}(5) = 2.5[A]$
 Finalmente $V_{4\Omega} = (4\Omega)(2.5[A]) = 10[V]$

3.3.3. Transformación de fuentes

La transformación de fuentes es otra herramienta para simplificar circuitos, así pues, una transformación de fuentes es el proceso de reemplazar una fuente de tensión V_s en serie con un resistor R , por una fuente de corriente i_s en paralelo con un resistor R o viceversa, este proceso se ilustra en la Figura 3.13

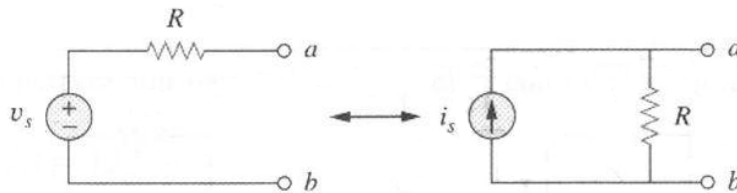


Figura 3.13: Transformación de fuentes independientes

Los dos circuitos de la Figura 3.13 son equivalentes si mantienen la misma relación tensión-corriente en las terminales a-b, es decir si las fuentes se “apagan”, la resistencia en ambos circuitos es R , así mismo cuando las terminales a-b están en cortocircuito la corriente entre a-b es $i_{sc} = \frac{V_s}{R}$ en el circuito de la izquierda, mientras que en el circuito de la derecha $i_{sc} = i_s$, con lo que $\frac{V_s}{R} = i_s$, en consecuencia los dos circuitos son equivalentes.

Ejemplo 3.3.3 Encuentre i_0 en el circuito de la Figura 3.14 aplicando transformación de fuentes

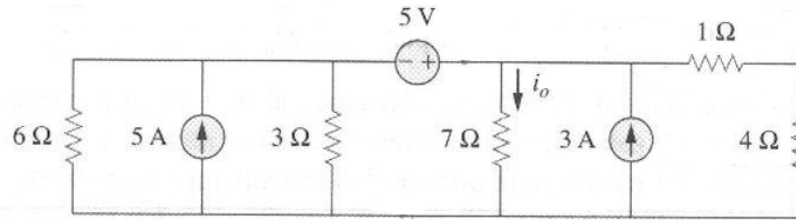
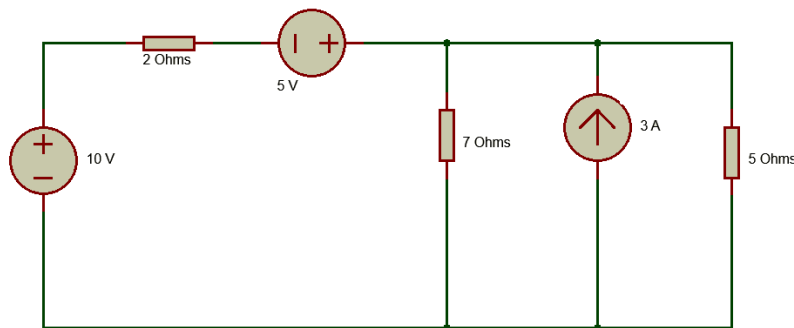


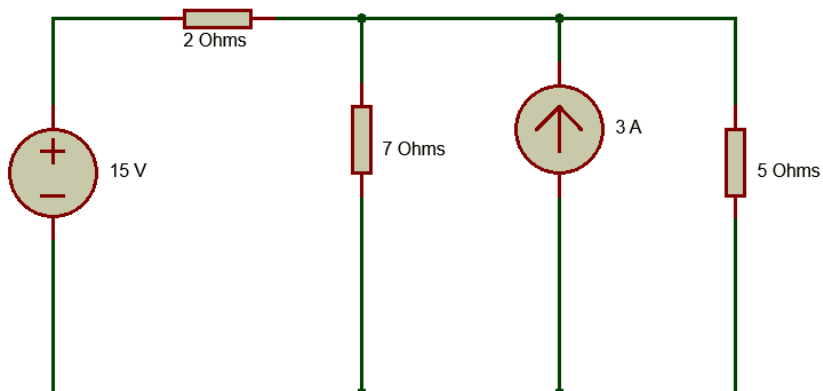
Figura 3.14: Circuito para el ejemplo

Resolución

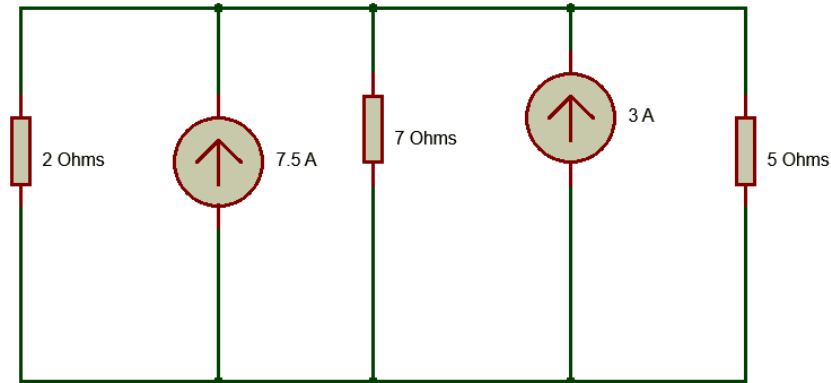
Al observar el circuito de la Figura 3.14 los resistores de 6Ω y 3Ω están en paralelo, reduciendo estos resistores $R = \left(\frac{6(3)}{6+3}\right) = 2\Omega$ y transformando a fuente de tensión la fuente de corriente del extremo izquierdo del circuito de la Figura 3.14 y además reduciendo los resistores de 1Ω y 4Ω que están conectados en serie, en el extremo derecho del circuito así pues, $V_s = 5A(2\Omega) = 10V$ con lo que se tiene



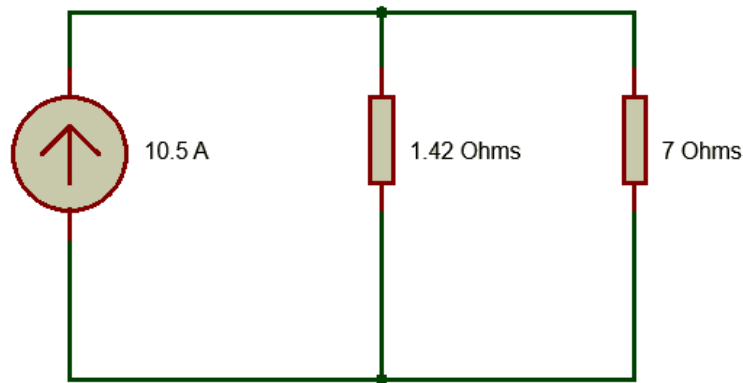
reduciendo las fuentes de voltaje, se tiene



transformando a fuente independiente de corriente la fuente de voltaje, así pues, se tiene $i_s = \frac{15V}{2\Omega} = 7.5A$



Finalmente reduciendo fuentes independientes de corriente y las resistencias de 2Ω y 5Ω que están en paralelo, se tiene el siguiente circuito



aplicando divisor de corriente

$$i_0 = \frac{1.42}{1.42 + 7}[\Omega](10.5[A]) = 1.78[A]$$

3.4. (Transformación delta-estrella)

La identificación de conexiones en serie y en paralelo facilita el análisis de un circuito. En situaciones en las que no existen tales combinaciones, se recurre a la transformación de fuentes. Sin embargo existe otra técnica que facilita por mucho estas simplificaciones y es la llamada conversión delta estrella ($\Delta - Y$) que surge de la teoría de redes.

Una forma muy didáctica para obtener las relaciones de transformación entre una conexión y la otra, es inscribir una estrella dentro del triángulo formado por la delta, como se muestra en la Figura 3.15

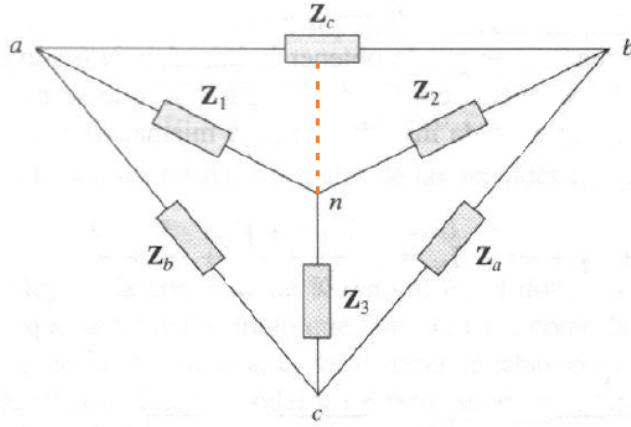


Figura 3.15: Transformación delta-estrella

En la Tabla 3.1 para transformar de una delta a estrella, la rama de la estrella se obtiene mediante un cociente, donde el numerador es el producto de los lados que se unen en el vértice que contiene a la rama y el denominador es la suma de los tres lados de la delta. Mientras que para

Transformación $\Delta \rightarrow \mathbf{Y}$	Transformación $\mathbf{Y} \rightarrow \Delta$
$Z_1 = \frac{Z_b Z_c}{Z_a + Z_b + Z_c}$	$Z_a = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_1}$
$Z_2 = \frac{Z_a Z_c}{Z_a + Z_b + Z_c}$	$Z_b = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_2}$
$Z_3 = \frac{Z_a Z_b}{Z_a + Z_b + Z_c}$	$Z_c = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_3}$

Tabla 3.1: Transformación delta-estrella y viceversa.

transformar de una estrella a una delta, el lado de la delta se obtiene de un cociente, cuyo numerador es la suma de productos de par en par recorriendo las ramas de la estrella y el denominador es la rama de la estrella, que se pueda unir con una línea imaginaria perpendicular al lado de la delta como se ilustra en la Figura 3.15.

Capítulo 4

Respuesta de los circuitos

4.1. Circuitos RC, RL y RLC

Para el análisis de este tipo de circuitos, también se aplicaran las leyes de Kirchhoff, las cuales a diferencia de los circuitos resistivos, darán como resultado ecuaciones diferenciales, por la naturaleza propia de los elementos pasivos (capacitores e inductores), así pues los circuitos RC y RL son caracterizados por una ecuación diferencial de primer orden, debido a que contienen un elemento pasivo capacitor e inductor respectivamente, mientras que el circuito RLC está caracterizado por una ecuación de segundo orden, debido a que contiene dos elementos pasivos que son el capacitor e inductor.

4.1.1. Circuito RC, RL y RLC con fuente de voltaje constante, gráficas de voltaje y corriente

El circuito RC básico se muestra en la Figura 4.1

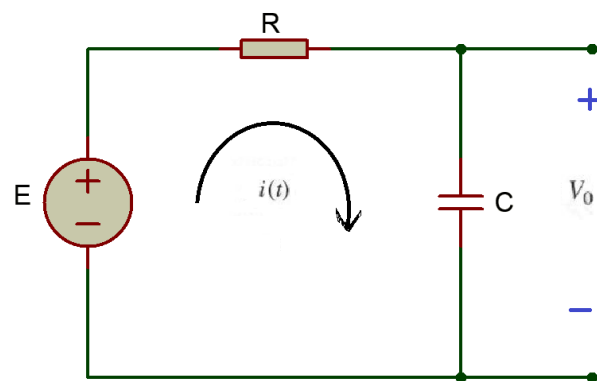


Figura 4.1: Circuito RC básico

con LVK para el circuito de la Figura 4.1

$$E = Ri_R + V_C \quad (4.1)$$

como los elementos están conectados en serie $i_R = i_C$ y $V_0 = V_C$ y la corriente en el capacitor esta dada por

$$i_C = C \frac{dV_C}{dt} = C \frac{dV_0}{dt} \quad (4.2)$$

sustituyendo la ecuación (4.2) en (4.1), se tiene

$$E = RC \frac{dV_0}{dt} + V_0$$

normalizando y reordenando términos, se obtiene la ecuación diferencial que representa al circuito RC

$$\frac{dV_0}{dt} + \frac{1}{RC} V_0 = \frac{E}{RC} \quad (4.3)$$

debido a la naturaleza de la ecuación (4.3) cuya solución será la respuesta total del sistema y estará formada por dos partes, una que será la respuesta transitoria y la otra que será la respuesta permanente, las cuales se definen de la siguiente manera

$$\text{respuesta permanente} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \text{respuesta}_{total} \quad (4.4)$$

$$\text{respuesta transitoria} \rightarrow \text{respuesta}_{total} - \text{respuesta}_{permanente} \quad (4.5)$$

Es importante señalar que también debido a la fuente de excitación del sistema (en este caso las fuentes de tensión o de corriente para el circuito) se tienen otros dos tipos de respuesta

- **Respuesta libre:** Depende de las interconexiones de los elementos que forman el circuito y los valores de los elementos pasivos.
- **Respuesta forzada:** Es el efecto que tienen una o mas fuentes independientes sobre los capacitores e inductores del circuito.

estas respuestas están relacionadas directamente con la forma de resolver ecuaciones diferenciales, la respuesta libre esta asociada a la parte homogénea (ecuación diferencial igualada a cero) y la respuesta forzada esta directamente relacionada con la solución particular de la ecuación diferencial, que depende de la naturaleza de la fuente. Con los métodos de operador aniquilador y variación de parámetros se pueden observar estas respuestas claramente, pero estos métodos de solución llegan ser muy extensos y complicados, sin embargo una herramienta poderosa es la transformada de Laplace y es el método mas usual para resolver circuitos eléctricos modelados con ecuaciones diferenciales.

Así pues, considerando condiciones iniciales cero y aplicando transformada de Laplace a la ecuación (4.3), se tiene

$$sV_0(s) + \frac{1}{RC} V_0(s) = \frac{E}{RC} \frac{1}{s}$$

factorizando a V_0

$$V_0(s) \left[s + \frac{1}{RC} \right] = \frac{E}{RC} \frac{1}{s}$$

despejando a $V_0(s)$ y expresando como fracciones parciales

$$\begin{aligned} V_0(s) &= \frac{E}{RC} \frac{1}{s(s + \frac{1}{RC})} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \frac{1}{RC}} \\ &= \frac{E}{RC} = A \left(s + \frac{1}{RC} \right) + B(s) \end{aligned}$$

resolviendo las fracciones parciales

- Para $A \mid_{s=0} \Rightarrow \frac{E}{RC} = A \frac{1}{RC}$; $A = E$
- Para $B \mid_{s=-\frac{1}{RC}} \Rightarrow \frac{E}{RC} = -\frac{1}{RC} B$; $B = -E$

así pues, se tiene

$$V_0(s) = E \left\{ \frac{1}{s} \right\} - E \left\{ \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \right\}$$

Finalmente aplicando antitransformada para regresar al dominio del tiempo, se obtiene el voltaje o tensión a la salida del circuito RC

$$V_0(t) = \underbrace{E}_{\text{respuesta permanente}} - \underbrace{Ee^{-\frac{1}{RC}t}}_{\text{respuesta transitoria}} \quad [V]$$

$$V_0(t) = E \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t} \right) [V] \quad (4.6)$$

el factor RC se denomina constante de tiempo del sistema y se representa por la letra griega τ ya que implica, que $RC = \left(\frac{V}{I} \right) \left(\frac{Q}{V} \right) = \frac{Q}{I} = s$ es decir tiene unidades de tiempo, de tal modo que $\tau = RC[s]$, esto significa que en una constante de tiempo la función alcanza el 63.21 % de su valor final, es decir $e^{-\frac{t}{\tau}} = e^{-\frac{\tau}{\tau}} = e^{-1} = 0.3679$.

El comportamiento de la tensión de salida para el circuito RC en relación a la constante de tiempo, se muestra en la Figura 4.2

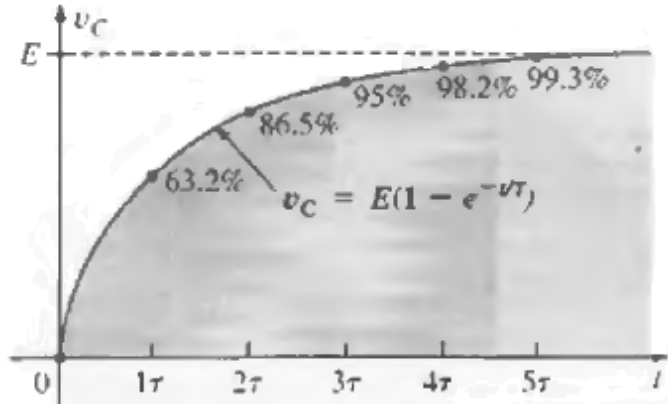


Figura 4.2: Tensión del capacitor en modo carga

Por otra parte la corriente del circuito es $i(t) = C \frac{dV_0}{dt}$ entonces se puede establecer

$$i(t) = \frac{E}{R} \left[e^{-\frac{1}{RC}t} \right] [A] \quad (4.7)$$

y su comportamiento en relación a la constante de tiempo se muestra en la Figura 4.3

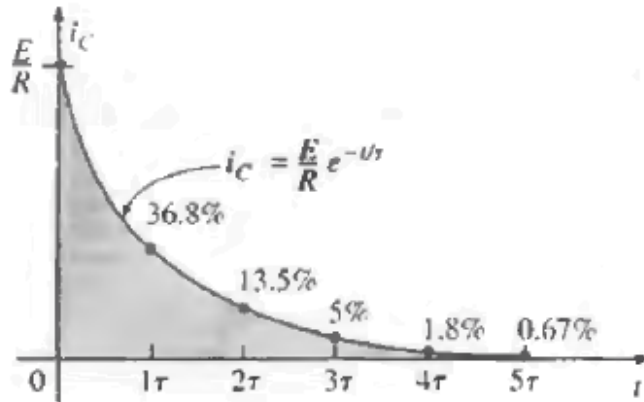


Figura 4.3: Corriente del capacitor en modo carga

Ejemplo 4.1.1 El interruptor del circuito de la Figura 4.4 ha estado cerrado mucho tiempo y se abre en $t = 0[s]$. Hallar $V(t)$ para $t \geq 0$ y calcular la energía almacenada por el capacitor

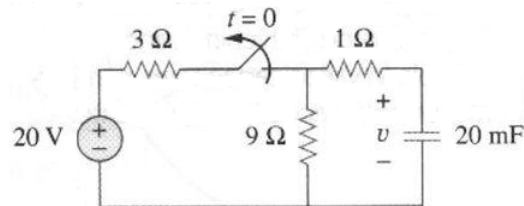
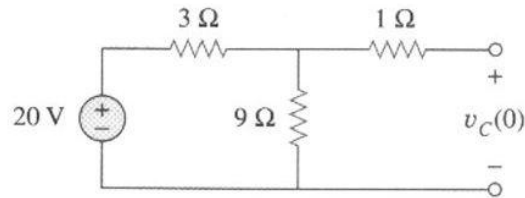


Figura 4.4: Circuito para el ejemplo

Resolución

En $t < 0$ el interruptor esta cerrado y el capacitor se comporta como un circuito abierto para la fuente de CD, por lo que se tiene el siguiente circuito

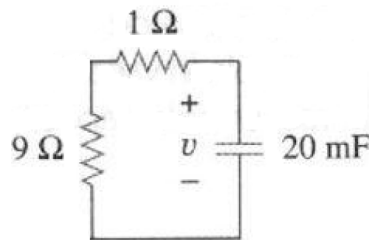


con divisor de tensión se tiene

$$V_C(t) = \left(\frac{9}{9+3} \right) (20) = 15[V] \text{ con } t < 0$$

por lo tanto también el instante $t = 0$, $V_C(t) = 15[V]$

Ahora para $t > 0$ el interruptor ya está abierto y por lo tanto se tiene el siguiente circuito (ojo ya no esta conectada la fuente pero el capacitor quedó cargado)



así pues la constante de tiempo está dada por

$$\tau = R_{equiv}C$$

$$\tau = (9 + 1)(20 \times 10^{-3}) = 0.2[s]$$

con base en el modelo de primer orden sin fuente, la tensión en el capacitor para $t \geq 0$ es

$$V_C(t) = 15e^{-\frac{t}{0.2}}[V]$$

Finalmente la energía almacenada está dada por $W_C = \frac{1}{2}CV^2$, así pues

$$W_C = \frac{1}{2}(20 \times 10^{-3})(15)^2$$

$$W_C = 2.25[J]$$

Ejemplo 4.1.2 Determinar $V(0)$ y $V(2\text{ms})$ del circuito mostrado en la Figura 4.5

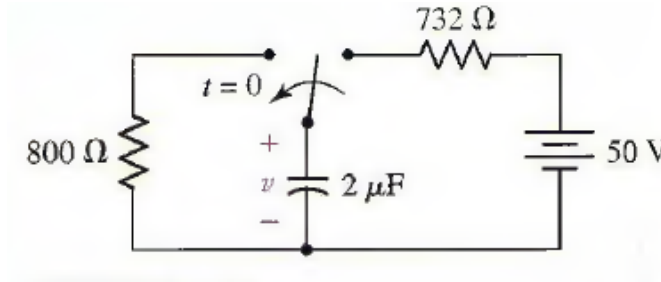
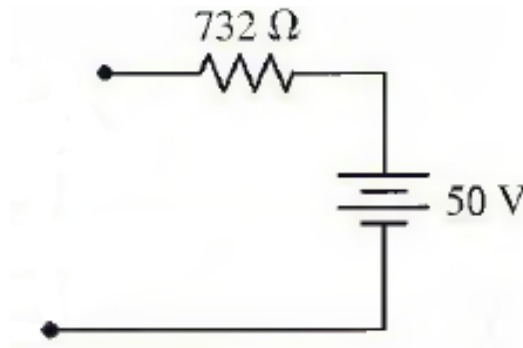


Figura 4.5: Circuito para el ejemplo

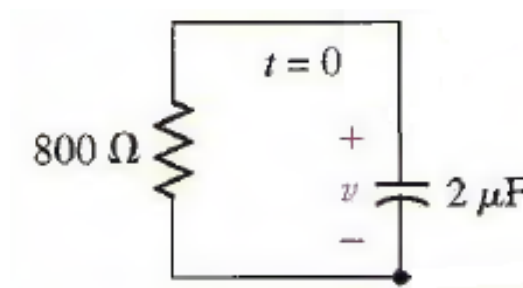
Resolución

En $t < 0$ se tiene el siguiente circuito



ya que el capacitor se comporta como un circuito abierto ante la fuente de CD, lo cual implica físicamente que el capacitor ya está cargado y alcanzó la tensión de la fuente, por lo tanto $V(0) = 50[\text{V}]$

Ahora en $t = 0$ se tiene el siguiente circuito



así pues, su constante de tiempo es $\tau = RC = 800(2 \times 10^{-6}) = 0.0016[\text{s}] = 1.6 \times 10^{-3}[\text{s}]$ del modelo de primer orden $V(t) = V_0 e^{\frac{-t}{RC}}$, se puede establecer

$$V(t) = 50e^{\frac{-t}{1.6 \times 10^{-3}}} [\text{V}]$$

Finalmente evaluando la tensión para $t = 2\text{ms}$, se tiene

$$V(2 \times 10^{-3}) = 50e^{-\frac{2 \times 10^{-3}}{1.6 \times 10^{-3}}} [V]$$

$$V(2 \times 10^{-3}) = 14.32[V]$$

Ejemplo 4.1.3 a) Encuentre la expresión matemática para el comportamiento de la tensión en el capacitor del circuito de la Figura 4.6 si el interruptor se mueve a la posición 1 en $t = 0[s]$.

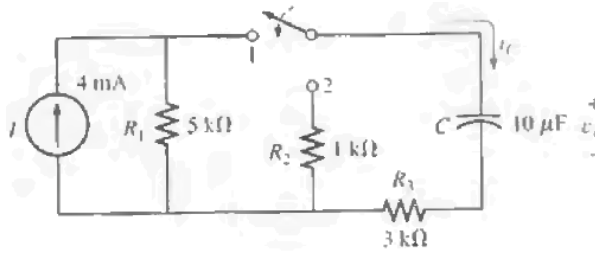


Figura 4.6: Circuito para el ejemplo

b) Repita el inciso a) para i_C .

c) Encuentre la expresión matemática para la respuesta de V_C e i_C , si el interruptor se mueve a la posición 2 en $t = 1\tau$ de la fase de carga.

Resolución

a) Como nos interesa el comportamiento de la tensión en el capacitor y observando la topología del circuito, se puede transformar la fuente de corriente en fuente de tensión como se muestra en la Figura 4.7

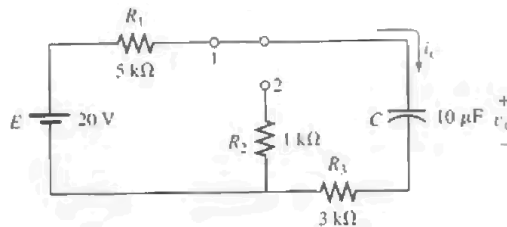


Figura 4.7: Aplicando transformación de fuentes

$E = R_1(I) = 5k\Omega(4mA) = 20[V]$, la constante de tiempo para el circuito operando bajo esta condición se puede obtener como

$$\tau_1 = (R_1 + R_3)C = (8K\Omega)(10\mu F) = 80 \times 10^{-3}[s]$$

con ayuda de la ecuación (4.6), la tensión en el capacitor es

$$V_C = 20 \left(1 - e^{-\frac{t}{80 \times 10^{-3}}} \right) [V]$$

b) Con ayuda de la ecuación (4.7) la corriente en el capacitor se puede obtener como

$$i_C = \frac{E}{R_1 + R_3} e^{\frac{-t}{\tau_1}} = \frac{20V}{8k\Omega} e^{\frac{-t}{80 \times 10^{-3}}}$$

$$i_C = 2.5 \times 10^{-3} e^{\frac{-t}{80 \times 10^{-3}}} [A]$$

c) En $t = \tau_1$ el circuito opera como se muestra en la Figura 4.8

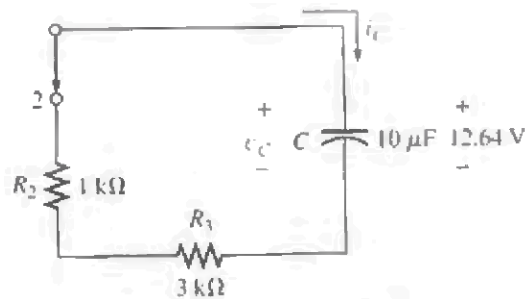


Figura 4.8: Condición de operación en $t = \tau_1$

En una constante de tiempo, el capacitor tiene el 63.21% de la tensión de la fuente, es decir $V_C = V_1 = 0.632(20) = 12.64[V]$. La constante de tiempo para esta condición de operación se obtiene como

$$\tau_2 = (R_2 + R_3)C = (4K\Omega)(10\mu F) = 40 \times 10^{-3}[s]$$

como ahora la fuente de tensión está desconectada, la tensión del capacitor esta dada por

$$V_C = V_1 e^{\frac{-t}{\tau_2}}$$

$$V_C = 12.64 e^{\frac{-t}{40 \times 10^{-3}}} [V]$$

En $t = 1\tau$ la tensión en el capacitor está aumentando hasta el 63.21%, la corriente ha disminuido hasta el 36.68%, es decir $i_C = (0.368)(2.5[mA]) = 0.92[mA]$

dado que en esta condición de operación el circuito se quedo sin la fuente de excitación, la corriente ue fluye a traves del capacitor está dada por

$$i_C = -I_1 e^{\frac{-t}{\tau_2}} [A]$$

$$= -\frac{V_1}{R_2 + R_3} e^{\frac{-t}{\tau_2}} [A]$$

$$= -\frac{12.64[V]}{4k\Omega} e^{\frac{-t}{40 \times 10^{-3}}}$$

Finalmente

$$i_C = -3.16 \times 10^{-3} e^{\frac{-t}{40 \times 10^{-3}}} [A]$$

El circuito RL básico se muestra en la Figura 4.9

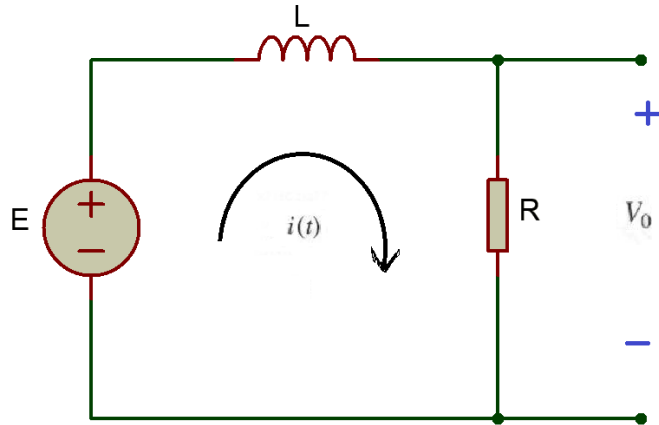


Figura 4.9: Circuito RL básico

Con LVK en la malla del circuito de la Figura 4.9, se tiene

$$E = V_L + Ri(t) \quad (4.8)$$

como los elementos están conectados en serie $i_R = i_L = i(t)$ y $V_0 = V_R$ y la tensión en el inductor esta dada por

$$V_L = L \frac{di_L}{dt} = L \frac{di(t)}{dt} \quad (4.9)$$

sustituyendo la ecuación (4.9) en (4.8), se tiene

$$E = L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t)$$

normalizando y reordenando términos, se obtiene la ecuación diferencial que representa al circuito RL

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L}i(t) = \frac{1}{L}E \quad (4.10)$$

Considerando condiciones iniciales igual a cero y aplicando transformada de Laplace a la ecuación (4.10), se tiene

$$sI(s) + \frac{R}{L}I(s) = \frac{\frac{1}{L}E}{s}$$

factorizando a $I(s)$

$$I(s) \left[s + \frac{R}{L} \right] = \frac{\frac{1}{L}E}{s}$$

despejando a $I(s)$ y expresando como fracciones parciales

$$I(s) = \frac{\frac{1}{L}E}{s \left(s + \frac{R}{L} \right)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \frac{R}{L}}$$

$$= \frac{1}{L}E = A \left(s + \frac{R}{L} \right) + B(s)$$

resolviendo las fracciones parciales

- Para $A \mid_{s=0} \Rightarrow \frac{1}{L}E = A \frac{R}{L}; A = \frac{E}{R}$
- Para $B \mid_{s=-\frac{R}{L}} \Rightarrow \frac{1}{L}E = B \frac{-1}{L}; B = -\frac{E}{R}$

así pues, se tiene

$$I(s) = \frac{E}{R} \left\{ \frac{1}{s} \right\} - \frac{E}{R} \left\{ \frac{1}{s + \frac{R}{L}} \right\}$$

Finalmente aplicando antitransformada para regresar al dominio del tiempo, se obtiene la corriente que fluye a través del circuito RL

$$i(t) = \underbrace{\frac{E}{R}}_{\text{respuesta permanente}} - \underbrace{\frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t}}_{\text{respuesta transitoria}}$$

$$i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) [A] \quad (4.11)$$

de la ecuación (4.11) se puede observar claramente que la constante de tiempo para el circuito RL es $\tau = \frac{L}{R}$ la cual tiene unidades de tiempo, esto se verifica despejando L de la ecuación (4.9) y de la ley de Ohm $R^{-1} = \frac{I}{V}$, sustituyendo en la constante de tiempo se tiene

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{VsI}{IV} = [s]$$

el comportamiento de la corriente respecto a su constante de tiempo se muestra en la Figura 4.10

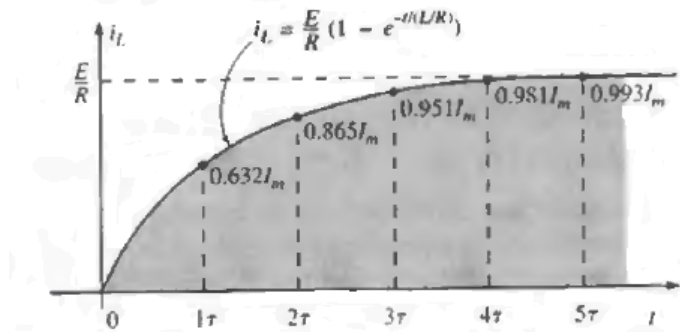


Figura 4.10: Comportamiento de la corriente en un circuito RL

Por otra parte la tensión V_0 del circuito es V_R y con ayuda de la ecuación (4.11) así pues $V_0 = Ri(t)$ entonces

$$V_0 = R \left[\frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \right] [V]$$

con lo que se tiene

$$V_0 = E \left[1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right] [V]$$

y su comportamiento respecto a la constante de tiempo se muestra en la Figura 4.11

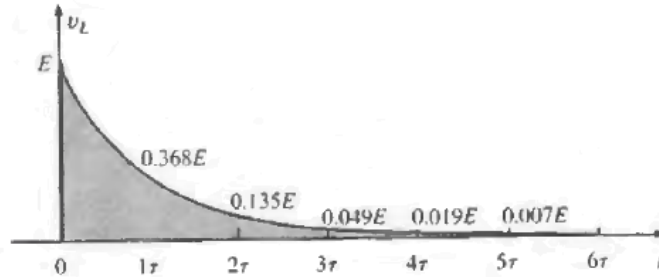


Figura 4.11: Comportamiento de la tensión en un circuito RL

Ejemplo 4.1.4 En el circuito mostrado en la Figura 4.12, obtener la tensión o voltaje indicado en $t = 200\text{ms}$

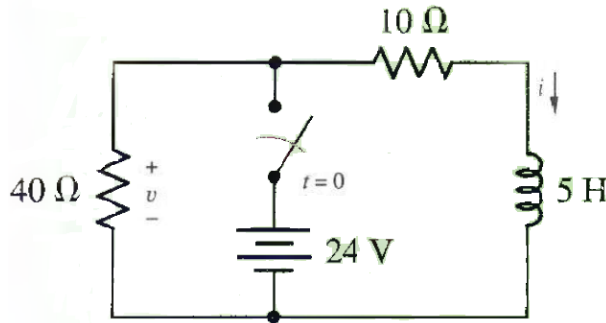


Figura 4.12: Circuito para el ejemplo

Resolución

Como primer paso, es necesario determinar las condiciones del circuito antes de que se abra el interruptor. En el instante $t \leq 0$, el circuito está conectado por un largo lapso de tiempo, como se muestra en la Figura 4.13

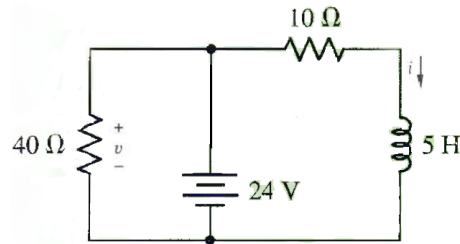


Figura 4.13: Comportamiento del circuito en $t \leq 0$

el inductor se comporta como un corto circuito ante una fuente de CD, y la corriente en el circuito está determinada por $i(0) = i_L(0) = \frac{24V}{10\Omega} = 2.4[A]$, una vez obtenida la corriente, se puede determinar la tensión $V(0) = 40(-2.4) = -96[V]$ (el signo menos se debe a la polaridad de la tensión y la convención de la circulación para la corriente).

En $t \geq 0$ el interruptor se abre y el circuito resultante se muestra en la Figura 4.14

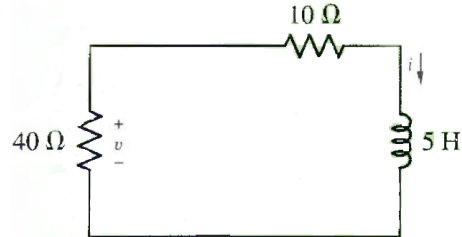


Figura 4.14: Comportamiento del circuito en $t \geq 0$

Aplicando LVK con la polaridad indicada para V , se tiene

$$-V + 10i + 5\frac{di}{dt} = 0 \quad (4.12)$$

pero también

$$i = \frac{-V}{40} \quad (4.13)$$

Sustituyendo (4.13) en la ecuación (4.12) reordenando términos y simplificando se tiene

$$\frac{dV}{dt} + 10V = 0 \quad (4.14)$$

Resolviendo la ecuación (4.14) mediante Transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dV}{dt}\right\} + 10\mathcal{L}\{V\} = \mathcal{L}\{0\}$$

$$sV(s) - V(0) + 10V(s) = 0$$

$$(s + 10)V(s) - (-96) = 0$$

$V(s) = \frac{-96}{s+10}$, aplicando anti-transformada

$$V(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-96}{s+10}\right\}$$

finalmente $V(t) = -96e^{-10t}[V]$ y evaluando en 200ms

$$V(0.2) = -96e^{-10(0.2)} = -12.99[V]$$

Ejemplo 4.1.5 Para el circuito mostrado en la Figura 4.15, suponiendo que $i(0) = 10[A]$, calcular $i(t)$ e $i_x(t)$

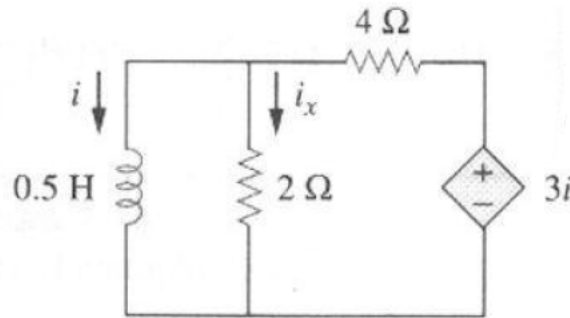
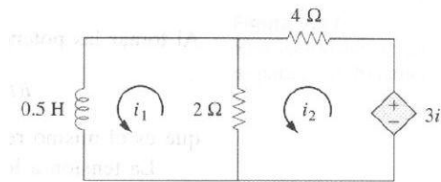


Figura 4.15: Circuito para el ejemplo

Resolución

Aplicando LVK



▪ Malla 1:

$$0.5 \frac{di_1}{dt} + 2i_1 - 2i_2 \quad (4.15)$$

▪ Malla 2:

$$6i_2 - 2i_1 - 3i \quad (4.16)$$

De la fuente dependiente es claro que $i = i_1$ bajo esta consideración y sustituyendo en la ecuación (4.16) se obtiene que

$$i_2 = \frac{5}{6}i_1 \quad (4.17)$$

sustituyendo (4.17) en (4.15) se obtiene la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{di}{dt} + \frac{2}{3}i = 0 \quad (4.18)$$

resolviendo (4.18) mediante Transformada de Laplace

$$sI(s) - I(0) + \frac{2}{3}I(s) = 0$$

$$\left(s + \frac{2}{3}\right)I(s) = 10$$

$I(s) = \frac{10}{s + \frac{2}{3}}$ aplicando anti-transformada se obtiene finalmente

$$i(t) = 10e^{-\frac{2}{3}t} [V]$$

dado que el inductor y el resistor de 2Ω están conectados en paralelo, tendrán la misma tensión la cual se puede obtener mediante la corriente que fluye a través del inductor

$$V_L = L \frac{di}{dt}$$

$$V_L = -\frac{2}{3}(0.5)(10)e^{-\frac{2}{3}t} = -\frac{10}{3}e^{-\frac{2}{3}t}$$

Finalmente $i(x) = \frac{V_L}{R_{2\Omega}}$

$$i(x) = -1.6667e^{-\frac{2}{3}t} [A]$$

Ejemplo 4.1.6 El interruptor del circuito de la Figura 4.16 ha estado cerrado mucho tiempo, en $t = 0$, el interruptor se abre. Calcular $i(t)$ para $t > 0$.

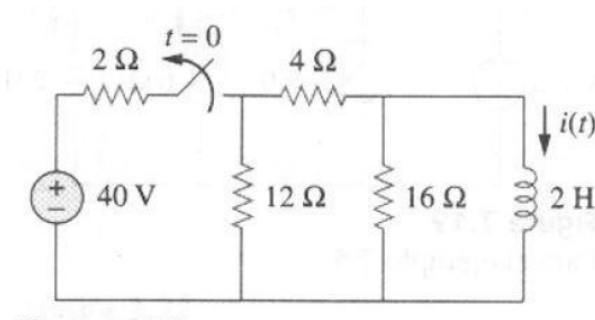


Figura 4.16: Circuito para el ejemplo

Resolución

En $t < 0$ el interruptor está cerrado y el inductor se comporta como un corto circuito ante la fuente de CD, como se muestra en la Figura 4.18

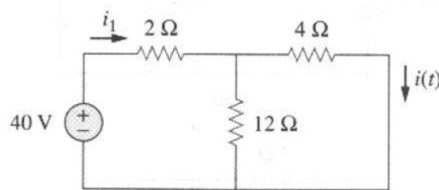


Figura 4.17: Compartamiento del circuito en $t < 0$

para obtener i_1 , haciendo la reducción de los resistores de 12Ω y 4Ω en paralelo y el resultante equivalente en serie con el de 2Ω

$$i_1 = \frac{40V}{(2 + 3)\Omega} = 8[A]$$

ahora aplicando divisor de corriente para el circuito de la Figura 4.18 para obtener $i(t)$ en $t = 0$

$$i(t) = i(0^-) = \frac{12}{12+4}(i_1) = \frac{12}{12+4}(8) = 6[A] \text{ en } t < 0$$

En $t > 0$ se desconecta la fuente de tensión y el circuito se comporta como se muestra en la Figura

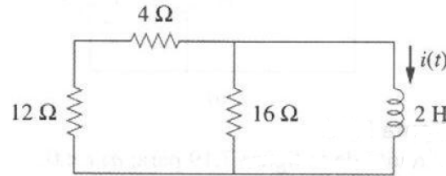


Figura 4.18: Compartamiento del circuito en $t > 0$

Reduciendo los resistores a uno solo equivalente junto al inductor (Es decir obtener la resistencia de Thévenin)

$$R_{equiv} = (12 + 4) \parallel 16 = 8\Omega$$

asi pues la constante de tiempo del circuito es $\tau = \frac{L}{R_{equiv}} = \frac{2}{8} = \frac{2}{8}[s]$ Considerando el modelo del circuito RL básico sin fuente $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0$ resolviendo por Transformada de Laplace

$$sI(s) - I(0) + \frac{R}{L}I(s) = 0$$

$$\left(s + \frac{R}{L}\right) I(s) = I(0)$$

$$I(s) = I(0) \frac{1}{\left(s + \frac{R}{L}\right)}$$

aplicando anti-transformada $i(t) = I(0)e^{-\frac{R}{L}t} = I(0)e^{-\frac{t}{\tau}}[A]$ Finalmente sustituyendo las condiciones iniciales y la constante de tiempo

$$i(t) = 6e^{-4t}[A]$$

El circuito RLC básico se muestra en la Figura 4.19

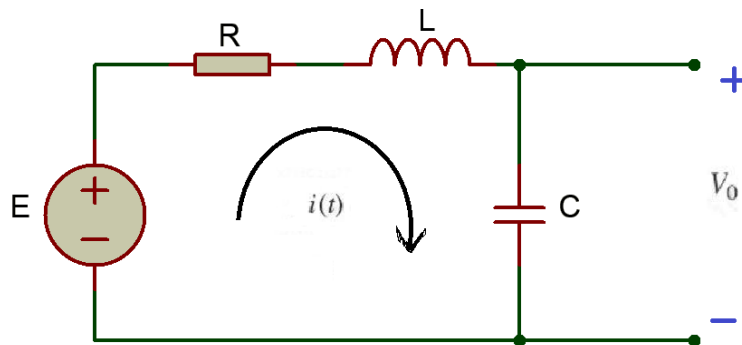


Figura 4.19: Circuito RLC básico

Con LVK en la malla principal del circuito mostrado en la Figura 4.19

$$E = V_R + V_L + V_C \quad (4.19)$$

como los elementos están conectados en serie, necesariamente se cumple con que $i(t) = i_R = i_L = i_C$ y además $V_0 = V_C$ con las leyes de elemento

$$\begin{aligned} V_R &= Ri \\ V_L &= L \frac{di}{dt} \\ i_C &= C \frac{dV_C}{dt} \end{aligned} \quad (4.20)$$

sustituyendo las leyes de elemento, dadas por la ecuación (4.20) en la ecuación (4.19), se obtiene

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + V_0 = E$$

pero $i(t) = i_C$, entonces

$$RC \frac{dV_0}{dt} + L \frac{d}{dt} \left(C \frac{dV_0}{dt} \right) + V_0 = E$$

simplificando, normalizando y reordenando términos, se llega a la ecuación diferencial, que representa a la tensión de salida del circuito RLC

$$\frac{d^2 V_0}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dV_0}{dt} + \frac{1}{LC} V_0 = \frac{1}{LC} E \quad (4.21)$$

Empleando transformada de laplace para resolver la ecuación (4.21), se tiene

$$s^2 V_0(s) + \frac{R}{L} s V_0(s) + \frac{1}{LC} V_0(s) = \frac{E}{s}$$

factorizando a $V_0(s)$

$$V_0(s) \left[s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{1}{LC} \right] = \frac{E}{s}$$

despejando a $V_0(s)$ y expresando como fracciones parciales

$$\begin{aligned} V_0(s) &= \frac{\frac{E}{LC}}{s \left(s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{1}{LC} \right)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + D}{\left(s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{1}{LC} \right)} \\ &= \frac{E}{LC} = A \left(s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{1}{LC} \right) + (Bs + D)s \end{aligned}$$

por igualdad de polinomios, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 0 &= A + B \\ 0 &= A \frac{R}{L} + D \\ \frac{E}{LC} &= \frac{A}{LC} \end{aligned} \quad (4.22)$$

resolviendo el sistema de ecuaciones (4.22), se tiene que $A = E$, $B = -E$ y $D = -\frac{E}{LC}$

Hasta aquí se podrán preguntar ¿Y porque no trabajar con la corriente que fluye por el circuito? a lo cual se responderá haciendo el análisis también

Retomando la ecuación (4.19) y obteniendo V_C de (4.20) $V_C = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt$ se puede escribir la siguiente expresión

$$Ri(t) + L \frac{di}{dt} + V_C = E$$

$$Ri(t) + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt = E$$

derivando para eliminar la integral, reordenando términos y normalizando la derivada de mayor orden, se tiene

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{RC} i = \frac{1}{L} \frac{dE}{dt} \quad (4.23)$$

aplicando Transformada de Laplace a (4.23) y considerando condiciones iniciales igual a cero, se tiene

$$\left(s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{1}{LC} \right) I(s) = \frac{E}{L} \frac{1}{s} \quad (4.24)$$

Notese que la expresión entre los paréntesis del miembro derecho de la ecuación (4.24) tiene el mismo polinomio característico $s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{1}{LC} = 0$ que la expresión obtenida anteriormente para la tensión, lo cual significa que es indistinto trabajar con la corriente a través del inductor o con la tensión en el capacitor. Obteniendo las raíces del polinomio

$$s_{1,2} = \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - 4(1)\left(\frac{1}{LC}\right)}}{2} \quad (4.25)$$

con un poco de algebra, es posible escribir

$$s_1 = -\underbrace{\frac{R}{2L}}_{\alpha} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2}}$$

$$s_2 = -\underbrace{\frac{R}{2L}}_{\alpha} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2}}$$

escribiendo las ecuaciones anteriores de manera simplificada

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

Es de suma importancia analizar el comportamiento de la raíz cuadrada en las ecuaciones anteriores, ya que de este depende el tipo de solución va a tener la ecuación (4.21), así pues se tienen tres casos

1. Si $\alpha > \omega_0$, se tienen raíces reales y negativas, por lo que la respuesta del sistema es sobre-amortiguada, como se muestra en la Figura 4.20

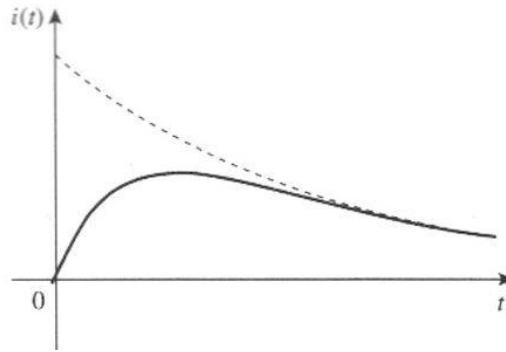


Figura 4.20: Respuesta sobre-amortiguada

y su respuesta es de la forma $f(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$, siendo s_1 y s_2 las raíces del polinomio en s .

2. Si $\alpha = \omega_0$, se tienen raíces reales repetidas, por lo que la respuesta del sistema es críticamente amortiguada, como se muestra en la Figura 4.21

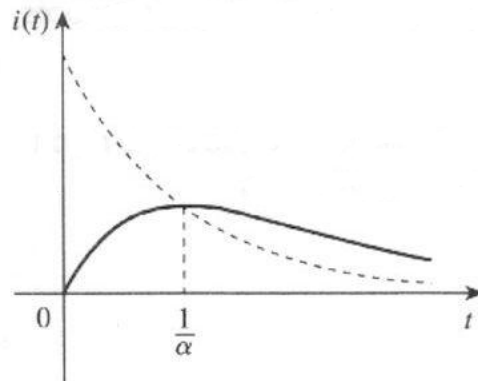


Figura 4.21: Respuesta críticamente amortiguada

y su respuesta es de la forma $f(t) = (A_2 + A_1) e^{-\alpha t}$

3. Si $\alpha < \omega_0$, se tienen raíces complejas, por lo que la respuesta del sistema es subamortiguada, como se muestra en la Figura 4.22

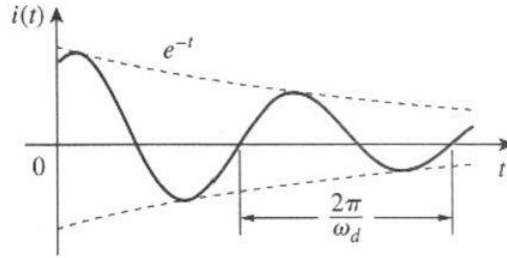


Figura 4.22: Respuesta subamortiguada

y su respuesta es de la forma $f(t) = e^{-\alpha t} (B_1 \cos(\omega_d t) + B_2 \sin(\omega_d t))$, con ω_d siendo la parte imaginaria de las raíces.

Es importante aclarar que las A 's y B 's son constantes que se determinarán mediante las condiciones iniciales.

La Figura 4.23 muestra un circuito RLC en paralelo básico

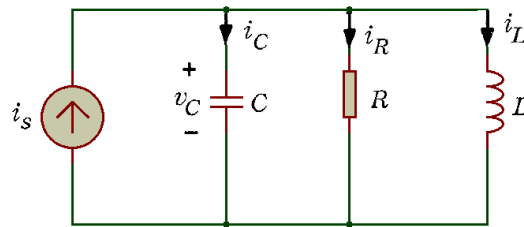


Figura 4.23: Circuito RLC paralelo básico

por propiedades de la conexión en paralelo $V_C = V_R = V_L$ y recordando que $i_C = C \frac{dV_C}{dt}$ y $V_L = L \frac{di_L}{dt}$ con LCK en el nodo es posible establecer

$$i_s = i_C + i_R + i_L \quad (4.26)$$

de la ley de Ohm $i_R = \frac{V}{R}$ y con $V_C = V_L$ se puede escribir (4.26) como

$$i_s = C \frac{d}{dt} \left(L \frac{di_L}{dt} \right) + \frac{L}{R} \frac{di_L}{dt} + i_L$$

simplificando, reordenando términos y normalizando, se obtiene la ecuación diferencial que modela al circuito RLC paralelo

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC} i_L = \frac{1}{LC} i_s \quad (4.27)$$

aplicando Transformada de Laplace a (4.27) considerando condiciones iniciales igual a cero, se obtiene

$$\left(s^2 + \frac{1}{RC} s + \frac{1}{LC} \right) I(s) = \frac{1}{LC} I_s \quad (4.28)$$

obteniendo las raíces de la ecuación asociada al miembro izquierdo de (4.28)

$$s_{1,2} = \frac{-\frac{1}{RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2 - 4(1)\left(\frac{1}{LC}\right)}}{2}$$

con un poco de algebra es posible escribir

$$s_1 = -\underbrace{\frac{1}{2RC}}_{\alpha} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2}}$$

$$s_2 = -\underbrace{\frac{1}{2RC}}_{\alpha} - \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2}}$$

escribiendo las ecuaciones anteriores de manera simplificada

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

con las raíces s_1, s_2 , los parámetros α y ω_0 se determina el tipo de respuesta del circuito exactamente igual como se hizo para el circuito RLC serie.

Ejemplo 4.1.7 Para el circuito mostrado en la Figura 4.24, R_1 representa la resistencia interna de la fuente y R_2 denota la resistencia de los devanados del inductor L , bajo estas consideraciones obtener la ecuación diferencial que representa el comportamiento de la tensión de salida del circuito, además si $E = 5[V]$, $R_1 = 50[\Omega]$, $L = 50[mH]$, $R_2 = 50[\Omega]$ y $C = 0.22[\mu F]$ determinar el comportamiento de la respuesta del sistema.

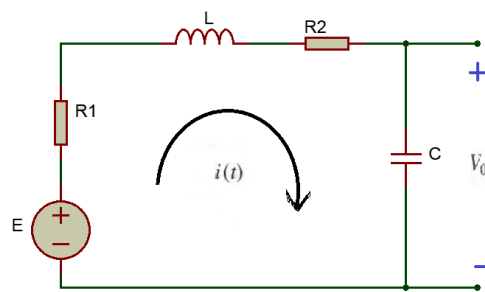


Figura 4.24: Circuito para el ejemplo

Resolución

Como los elementos están conectados en serie, la corriente que fluye por ellos es la misma, así pues $i = i_R = i_L = i_C$ además $V_0 = V_C$ con las leyes de elemento para el resistor equivalente, el inductor y el capacitor dadas respectivamente por

$$V_{R_{equiv}} = (R1 + R2)i = Ri$$

$$V_L = L \frac{di}{dt}$$

$$i_C = C \frac{dV_C}{dt}$$

Aplicando LVK en la malla

$$V_{R_{equiv}} + V_L + V_C = E$$

sustituyendo las leyes de elemento en la ecuación anterior, teniendo en cuenta que $\frac{di}{dt} = C \frac{d^2V_0}{dt^2}$

$$RC \frac{dV_0}{dt} + LC \frac{d^2V_0}{dt^2} + V_0 = E$$

reordenando términos y normalizando, se tiene

$$\frac{d^2V_0}{dt^2} + \frac{R_{equiv}}{L} \frac{dV_0}{dt} + \frac{1}{LC} V_0 = \frac{1}{LC} E$$

Para determinar el tipo de respuesta, bastará obtener los parámetros α y ω_0

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{100\Omega}{2(50 \times 10^{-3}[\times H])} = 1000$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{50 \times 10^{-3}(0.22 \times 10^{-6})}} = 9.534 \times 10^3$$

dado que $\alpha < \omega_0$, la respuesta del sistema será **Subamortiguada**

4.2. Respuesta natural y forzada

4.2.1. Respuesta a entrada cero del circuito RLC

La respuesta natural depende de las interconexiones de los elementos pasivos del circuito (resistores, capacitores e inductores) sin tener conectada una fuente de excitación, es decir la ecuación diferencial que representa al circuito esta igualada a cero, se obtienen ecuaciones como las (4.21) y (4.23) pero igualadas a cero, al resolverlas, se obtiene la parte homogénea, que es respuesta natural del sistema.

Cabe destacar que si no hay alguna fuente que actúe en el circuito después de que se termina la conmutación, esto implica que el circuito no tiene fuente y la respuesta natural equivale a la respuesta total.

4.2.2. Respuesta a estado cero del circuito RLC

La respuesta forzada depende del efecto que tienen las fuentes independientes sobre los elementos del circuito, es decir se tienen las ecuaciones como las (4.21) y (4.23) pero ahora están evaluadas a la función que representa a la fuente de excitación, al resolverlas se tiene la solución particular, aquí es donde se determinan las constantes a partir de las condiciones iniciales, lo cuál se ilustra mediante los siguiente ejemplos

Ejemplo 4.2.1 Para el circuito mostrado en la Figura 4.25, obtener la respuesta total para $V_C(t)$

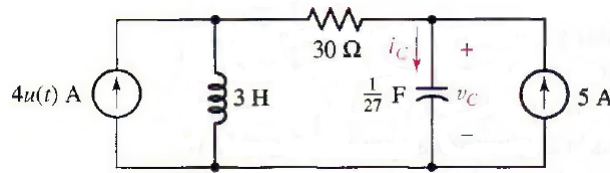


Figura 4.25: Circuito para el ejemplo

Resolución

1. **Obteniendo la respuesta natural:** al desconectar las fuentes se tiene un circuito RLC serie, se procede a calcular las raíces del polinomio mediante la ecuación (4.25) y los parámetros α y ω_0 mediante los valores de los elementos del circuito, así pues

$$s_{1,2} = \frac{-\frac{30}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{30}{3}\right)^2 - 4(1)\left(\frac{1}{27}\right)}}{2}$$

con lo que $s_1 = -1$, $s_2 = -9$ y además $\alpha = 5$ y $\omega_0 = 3$
ya que $\alpha > \omega_0$ el circuito tendrá una respuesta sobreamortiguada de la forma

$$V_{C_n}(t) = Ae^{-t} + Be^{-9t} \quad (4.29)$$

2. **Obteniendo la respuesta forzada:** en esta parte se debe analizar el circuito para obtener las condiciones iniciales
 - En $t < 0$ únicamente está conectada la fuente de 5A por la definición de la función escalón (como se verá mas adelante), y el inductor se comporta como un cortocircuito y el capacitor como circuito abierto ante la fuente de CD, el circuito es el que se muestra en la Figura 4.26

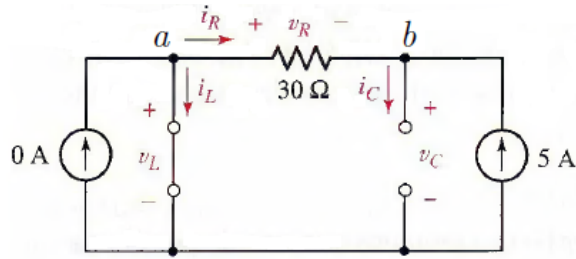


Figura 4.26: Comportamiento del circuito en $t < 0$

bajo estas condiciones $V_L(0^-) = 0$ ya que la corriente es CD por lo tanto es una constante, $i_C(0^-) = 0$ ya que el capacitor está en circuito abierto.

Con LCK en el nodo b $i_R(0^-) + 5[A] = i_C(0^-)$, por lo tanto $i_R(0^-) = -5[A]$
 con LCK en el nodo a $i_L(0^-) + i_R(0^-) = 0$, por lo tanto $i_L(0^-) = -i_R(0^-) = 5[A]$

ahora con LVK en la malla $V_R(0^-) + V_C(0^-) = 0$, pero $V_R(0^-) = 30[\Omega]5[A] = 150[V]$,
 por lo tanto $V_C(0^-) = -150[V]$

- En $t > 0$ se activa la fuente de corriente de $4A$ donde v e i cambiarán abruptamente debido a la función escalón, el comportamiento del circuito es como se muestra en la Figura 4.27

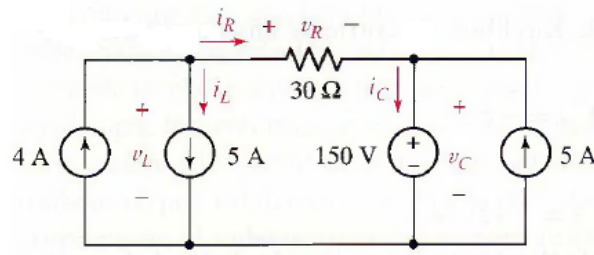


Figura 4.27: Comportamiento del circuito en $t > 0$

dado que i_L y V_C no pueden cambiar abruptamente, en $t = 0^+$ el inductor almacena corriente y el capacitor almacena tensión haciendo el papel de fuentes, se tiene que $V_C(0^+) = 150[V]$ e $i_L(0^+) = 5[A]$

con LCK en el nodo a : $4[A] = i_L(0^+) + i_R(0^+)$, $i_R(0^+) = -1[A]$
 con LCK en el nodo b : $i_R(0^+) + 5[A] = i_C(0^+)$, $i_C(0^+) = 4[A]$

Así pues la respuesta forzada es

$$V_{C_f}(t) = 150[V]$$

ahora solo resta determinar la derivada de las condiciones iniciales, para esto se comienza con los elementos almacenadores de energía, de este modo partiendo de

$$i_C = C \frac{dV_C}{dt}$$

despejando la derivada de la tensión en el capacitor y evaluando en $t = 0^+$

$$\frac{dV_C}{dt} \Big|_{t=0^+} = \frac{i_C(0^+)}{C} = \frac{4}{\frac{1}{27}} = 108 \left[\frac{V}{s} \right]$$

Entonces la respuesta total es la suma de la respuesta natural y la respuesta forzada

$$V_C(t) = 150 + Ae^{-t} + Be^{-9t} \quad (4.30)$$

ahora solo hay que determinar el valor de las constantes A y B , con lo cual hacemos uso de las condiciones iniciales y sus derivadas, así pues evaluando (4.30) en $t = 0^+$, se tiene

$$V_C(0^+) = 150 + A + B \quad (4.31)$$

derivando respecto al tiempo a (4.30) se tiene $\frac{dV_C}{dt} = -Ae^{-t} - 9Be^{-9t}$, evaluando la derivada en $t = 0^+$, se obtiene

$$108 = -A - 9B \quad (4.32)$$

resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (4.31) y (4.32) se obtiene que $A = 13.5$ y $B = -13.5$

Finalmente la respuesta total del circuito es

$$V_C(t) = 150 + 13.5 (e^{-t} - e^{-9t}) [V]$$

Ejemplo 4.2.2 Para el circuito de la Figura 4.28, hallar $i(t)$, suponiendo que el circuito ha estado cerrado mucho tiempo antes de que se abra el interruptor en $t = 0^-$

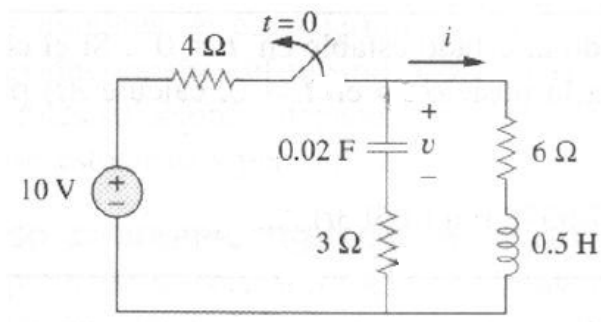


Figura 4.28: Circuito para el ejemplo

Resolución

En $t < 0$ el circuito estuvo cerrado mucho tiempo, por lo tanto ya alcanzó el estado estable donde el inductor se comporta como cortocircuito y el capacitor como un circuito abierto ante la fuente de CD, así pues el circuito bajo este escenario es el que se muestra en la Figura 4.29

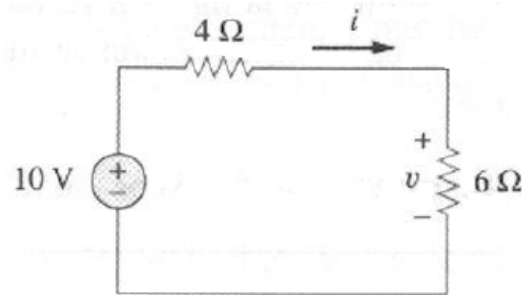


Figura 4.29: Comportamiento del circuito en $t < 0$

Así pues es posible establecer:

$$i(0) = \frac{10[\text{V}]}{10[\Omega]} = 1[\text{A}] \rightarrow \text{corriente inicial que fluye en el inductor}$$

$$V(0) = 6[\Omega]i(0) = 6[\text{V}] \rightarrow \text{tensión inicial del capacitor}$$

En $t > 0$ el interruptor está abierto y la fuente se desconecta, (por lo tanto el circuito se queda sin fuente de excitación, lo cual implica que la respuesta natural del circuito será la respuesta total del sistema) el circuito para esta condición de operación se muestra en la Figura 4.30

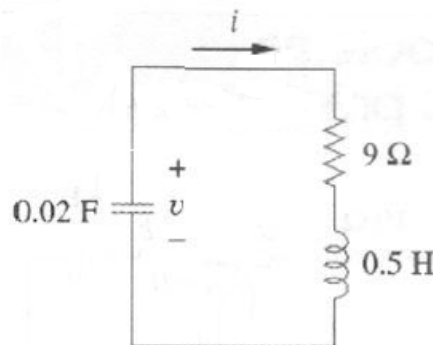


Figura 4.30: Comportamiento del circuito en $t > 0$

Observando el circuito de la Figura 4.30 se tiene un circuito RLC sin fuente, del modelo genérico dado por la ecuación (4.23) pero sin la fuente de tensión, se obtienen los parámetros siguientes

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{9}{2(0.5)} = 9$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0.5(0.02)}} = 10 \text{ y las raíces del polinomio son de la forma } s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$s_{1,2} = -9 \pm j4.354$$

cuya respuesta será subamortiguada ya que $\alpha < \omega_0$ y de acuerdo al modelo genérico tendrá la forma

$$i(t) = e^{-9t} [B_1 \cos(4.354t) + B_2 \sin(4.354t)] \quad (4.33)$$

Obteniendo las constantes B_1 y B_2 mediante las condiciones iniciales, es decir, en $t = 0$

- Obteniendo B_1 a partir de $i(0)$: Evaluando (4.33) en $t = 0$, se tiene que $i(0) = B_1$ y previamente se obtuvo que $i(0) = 1$. Por lo tanto $B_1 = 1$.
- Obteniendo B_2 a partir de $i'(0)$: Aplicando LVK en la malla del circuito de la Figura 4.30, se tiene

$$V_C(0) + Ri(0) + L \frac{di(0)}{dt} = 0$$

$$\frac{di(0)}{dt} = i'(0) = -\frac{1}{L} [Ri(0) + V(0)]$$

previamente se obtuvo que $V(0) = 6$ y tomando en cuenta la polaridad de la tensión en el capacitor y la dirección de la corriente en el circuito, se tiene

$$\frac{di(0)}{dt} = i'(0) = -2[9(1) - 6] = -6\left[\frac{A}{s}\right] \quad (4.34)$$

tomando la derivada de (4.33) e igualando con (4.34)

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = -9e^{-9t} [B_1 \cos(4.359t) + B_2 \sin(4.359t)] + e^{-9t} (4.359) [-B_1 \sin(4.359t) + B_2 \cos(4.359t)]$$

$$-6 = -9B_1 + 4.359B_2, \text{ anteriormente se obtuvo que } B_1 = 1, \text{ por lo tanto } B_2 = 0.6882$$

Finalmente sustituyendo las constantes en (4.33) se tiene la corriente que fluye por el circuito

$$i(t) = e^{-9t} [\cos(4.354t) + 0.6882 \sin(4.354t)] [A]$$

4.3. La función escalón como excitación

4.3.1. Definición y propiedades de la función escalón

La función escalón unitario esta definida en $t = 0$, donde cambia abruptamente de 0 a 1, se representa como $u(t)$ y es cero para valores negativos de t y uno para valores positivos de t , además es adimensional y en términos matemáticos se representa como

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ 1, & \text{si } t > 0 \end{cases} \quad (4.35)$$

esta función particularmente es muy útil en el análisis de circuitos, sirve como una representación aceptable de las señales de conmutación de circuitos interruptores, en la Figura 4.31 se muestra de manera gráfica la función escalón unitario

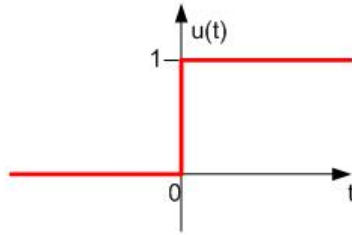


Figura 4.31: Función escalón unitario

Si el cambio abrupto ocurre en $t = t_0$ (donde $t > 0$) en lugar de $t = 0$, la función escalón unitario se convierte en

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < t_0 \\ 1, & \text{si } t > t_0 \end{cases} \quad (4.36)$$

lo cual implica que $u(t)$ se atrasa t_0 segundos como se muestra en la Figura 4.32

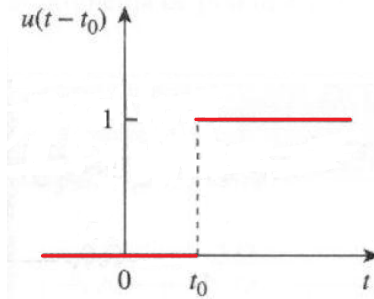


Figura 4.32: Función escalón unitario cuando el cambio ocurre en t_0

Si el cambio ocurre en $t = -t_0$, la función escalón unitario se convierte en

$$u(t + t_0) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < -t_0 \\ 1, & \text{si } t > -t_0 \end{cases} \quad (4.37)$$

lo cual implica que $u(t)$ está adelantada t_0 segundos como se muestra en la Figura 4.33

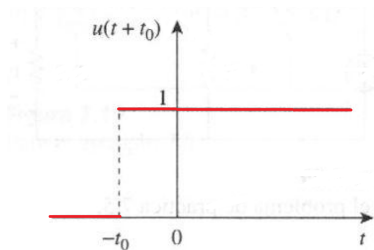


Figura 4.33: Función escalón unitario cuando el cambio ocurre en $-t_0$

Se usa a la función escalón para representar un cambio abrupto de tensión o corriente, por ejemplo la tensión

$$v(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < t_0 \\ V_0, & \text{si } t > t_0 \end{cases} \quad (4.38)$$

la tensión (4.38) puede expresarse en términos de la función escalón unitario como

$$v(t) = V_0 u(t - t_0)$$

4.3.2. La función escalón como excitación para el circuito RLC

La respuesta al escalón se obtiene al aplicar súbitamente la fuente de excitación. Para obtener la respuesta al escalón se considera el comportamiento de la corriente en el circuito de la Figura 4.34

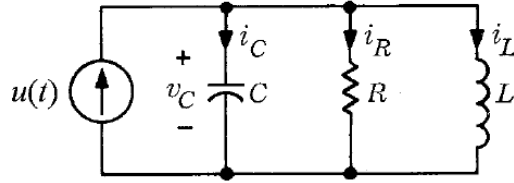


Figura 4.34: Función escalón como excitación

el circuito de la Figura 4.34 es un circuito RLC en paralelo con una fuente de excitación escalón unitario, cuyo comportamiento es idéntico a la ecuación (4.27) con la salvedad que la excitación ahora es la función escalon unitario, así pues la dinámica del circuito es

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC} i_L = \frac{1}{LC} u(t) \quad (4.39)$$

donde la respuesta $i(t)$ estará formada por una respuesta libre y una respuesta forzada, al ser una ecuación diferencial de segundo orden, para el caso de que el sistema tenga una respuesta sobreamortiguada (raíces reales distintas), la respuesta natural tendrá la forma

$$i_{L_n}(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad (4.40)$$

para el caso de una respuesta críticamente amortiguada (raíces reales repetidas), la respuesta natural tendrá la forma

$$i_{L_n}(t) = (A_1 + A_2) e^{-\alpha t} \quad (4.41)$$

y la respuesta forzada tendrá el valor final de la fuente

$$i_{L_f}(t) = 1 \quad t > 0 \quad (4.42)$$

la respuesta total es de la forma

$$i_L(t) = A_1 e^{s_1 t} + B e^{s_2 t} + 1 \quad (4.43)$$

para el caso de una respuesta sobreamortiguada, considerando condiciones iniciales iguales a cero (tanto el capacitor como el inductor no están cargados) por lo tanto $i_L(0) = 0$ y $\frac{di_L(0)}{dt} = 0$. Obteniendo el valor de las constantes mediante las condiciones iniciales, en $t = 0$

$$0 = A_1 + A_2 + 1 \quad (4.44)$$

derivando (4.40) se obtiene

$$\frac{di_L}{dt} = A_1 s_1 e^{s_1 t} + A_2 s_2 e^{s_2 t} \quad (4.45)$$

evaluando (4.45) en $t = 0$

$$0 = A_1 s_1 + A_2 s_2 \quad (4.46)$$

resolviendo el sistema de ecuaciones formado por (4.44) y (4.46) se obtiene que $A_1 = \frac{s_2}{s_1 + s_2}$ y $A_2 = \frac{-s_1}{s_1 + s_2}$ Finalmente la respuesta total es

$$i(t) = \left[\frac{1}{s_1 + s_2} (s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t}) + 1 \right] u(t)[A] \quad (4.47)$$

para una respuesta subamortiguada, se tienen raíces complejas de la forma $s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d$ o en coordenadas polares como se ilustra en la Figura 4.35

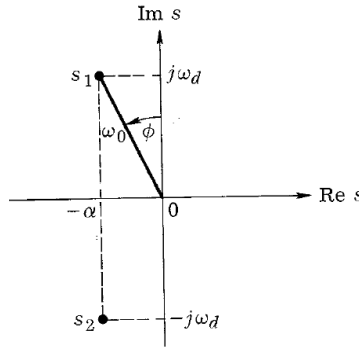


Figura 4.35: Representación de las raíces

$s_{1,2}$ en forma rectangular y polar con $\omega_0 = \sqrt{\omega_d^2 + \alpha^2}$ y $\phi = \tan^{-1} \left(\frac{\alpha}{\omega_d} \right)$

así pues, el miembro derecho de la ecuación (4.47) puede escribirse como

$$\frac{1}{s_1 + s_2} (s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t}) = \frac{1}{2j\omega_d} \omega_0 e^{-\alpha t} \left[\underbrace{e^{j(\omega_d t - \frac{\pi}{2} - \phi)} - e^{-j(\omega_d t - \frac{\pi}{2} - \phi)}}_{2j \sin(\omega_d t - \frac{\pi}{2} - \phi)} \right] \quad (4.48)$$

ya que haciendo uso de las leyes de los exponentes y propiedades de la función exponencial es posible obtener

$$s_2 e^{s_1 t} = \omega_0 e^{-j(\frac{\pi}{2} + \phi)} e^{(-\alpha + j\omega_d)t} = \omega_0 e^{-\alpha t + j\omega_d t - j\frac{\pi}{2} - j\phi}$$

$$s_1 e^{s_2 t} = \omega_0 e^{-\alpha t} e^{j(\omega_d t - \frac{\pi}{2} - \phi)}$$

y análogamente

$$s_1 e^{s_2 t} = \omega_0 e^{-\alpha t} e^{-j(\omega_d t - \frac{\pi}{2} - \phi)}$$

Con la definición del seno $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

reescribiendo el miembro derecho de (4.48)

$$\begin{aligned} &= \frac{\omega_0}{2j\omega_d} e^{-\alpha t} \underbrace{2j \sin\left(\omega_d t - \frac{\pi}{2} - \phi\right)}_{-\cos(\omega_d t - \phi)} \\ &= -\frac{\omega_0}{\omega_d} e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t - \phi) \end{aligned}$$

por lo tanto la respuesta total es de la forma

$$i_L(t) = \left[-\frac{\omega_0}{\omega_d} e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t - \phi) + 1 \right] u(t) [A]$$

4.4. Señal excitatriz senoidal

4.4.1. Definición y propiedades de la función senoidal

Una función senoidal, es una señal que tiene la forma de una función seno o coseno y es variable con el tiempo, así una corriente senoidal se conoce usualmente como corriente alterna. Los circuitos excitados por fuentes de corriente o tensión senoidales se llaman circuitos de CA.

Considerando una tensión senoidal de la forma

$$v(t) = V_m \sin(\omega t) \tag{4.49}$$

de (4.49) se tiene que:

V_m es la amplitud de la senoide
 ω es la frecuencia angular en $[\frac{rad}{s}]$
 ωt es el argumento de la senoide

En la Figura 4.36a) se muestra la función senoidal como función de su argumento y en la Figura 4.36b) como función del tiempo

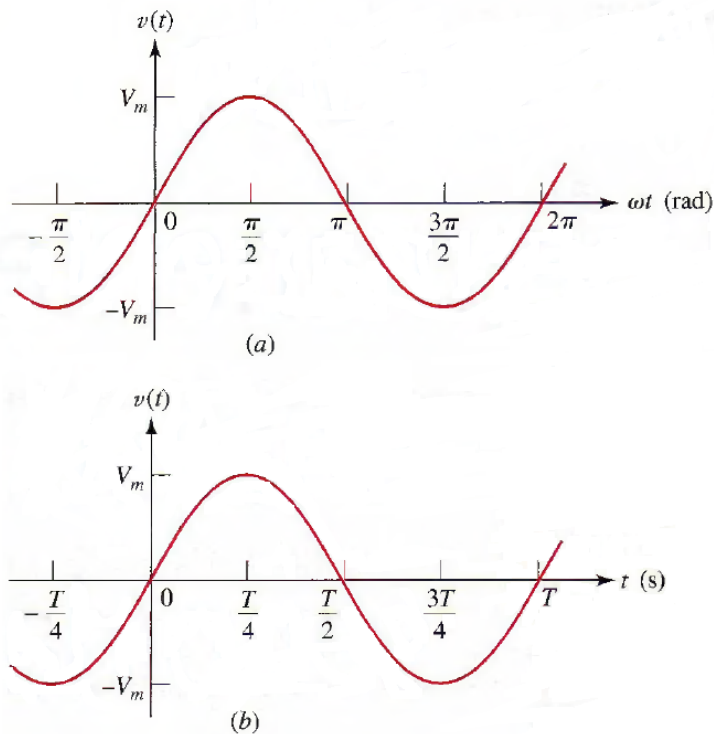


Figura 4.36: Función senoidal: a) como función de ωt , b) como función de t .

de la Figura 4.36 es evidente ver que la función senoidal se repite cada T segundos, donde T se denomina periodo de la senoide, además $\omega T = 2\pi$, de donde

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (4.50)$$

dado que $v(t)$ se repite cada T segundos, se demuestra que reemplazando t por $t + T$ en (4.49) es posible obtener

$$\begin{aligned} v(t + T) &= V_m \sin(t + T) = V_m \sin\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) \\ &= V_m \sin(\omega t + 2\pi) = V_m \sin(\omega t) = v(t) \end{aligned}$$

por lo tanto

$$v(t + T) = v(t) \quad (4.51)$$

lo cual implica que v tiene el mismo valor en $t + T$ que en t , por lo tanto es una señal periódica, el periodo T de una función es el tiempo que tarda en recorrer un ciclo completo, el recíproco de esta cantidad es el número de ciclos por segundo, a lo cual se le conoce como frecuencia y se mide en Hertz [Hz]

$$f = \frac{1}{T} \quad (4.52)$$

de las ecuaciones (4.50) y (4.52) se obtiene la frecuencia angular, la cual tiene unidades de $\left[\frac{rad}{s}\right]$

$$\omega = 2\pi f \quad (4.53)$$

Considerando la expresión mas general de una senoide

$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \phi) \quad (4.54)$$

donde ωt es el argumento y ϕ es la fase. Tanto el argumento como la fase pueden estar en radianes o grados.

En la Figura 4.37 se tienen dos señales senoidales v_1 y v_2

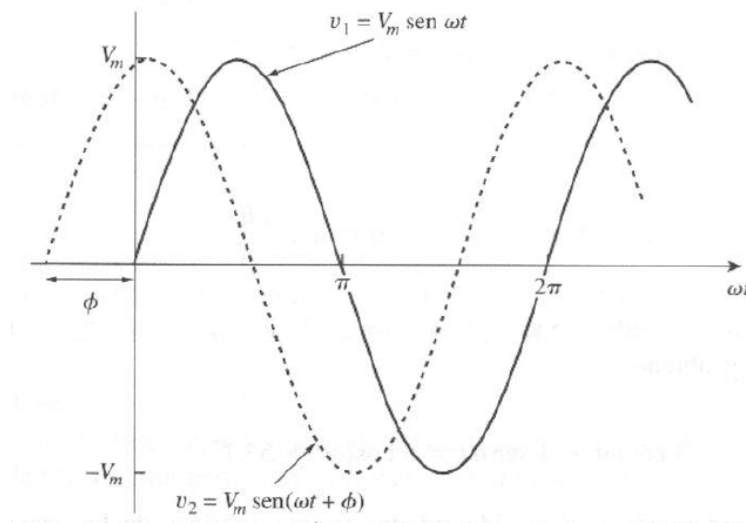


Figura 4.37: Señales senoidales con diferentes fases

la senoide v_2 en la Figura 4.37 inicia primero en el tiempo, por lo tanto se dice que v_2 se adelanta a v_1 en ϕ grados o radianes, o también que v_1 se atrasa en ϕ grados o radianes a v_2 , así pues, si $\phi \neq 0$ las señales están defasadas y si $\phi = 0$ las señales están en fase, es decir, alcanzan sus valores máximos y mínimos exactamente en el mismo tiempo, es importante señalar que se pueden comparar a v_1 y v_2 porque operan a la misma frecuencia, no es necesario que tengan la misma amplitud.

Una senoide puede expresarse en forma de seno o coseno, cuando se comparan dos señales senoidales es de mucha utilidad expresar ambas como seno o coseno con amplitudes positivas, esto se realiza empleando identidades trigonométricas

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$$

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

con estas identidades, resulta fácil demostrar que

$$\sin(\omega t \pm 180^\circ) = -\sin(\omega t)$$

$$\cos(\omega t \pm 180^\circ) = -\cos(\omega t)$$

$$\sin(\omega t \pm 90^\circ) = \pm \cos(\omega t)$$

$$\cos(\omega t \pm 90^\circ) = \mp \sin(\omega t)$$

haciendo uso de estas relaciones se puede transformar una senoide de la forma seno a coseno y viceversa.

Ejemplo 4.4.1 Hallar la amplitud, fase, periodo y frecuencia de la senoide $v(t) = 12 \cos(50t + 10^\circ)$

Resolución

- La amplitud es $V_m = 12[V]$
- La fase es $\phi = 10^\circ$
- La frecuencia angular es $\omega = 50 \left[\frac{rad}{s}\right]$
- El periodo se obtiene a partir de la frecuencia angular $\omega = 2\pi f$, recordando que $f = \frac{1}{T}$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{50} = 0.1257[s]$$

- La frecuencia es $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.1257} = 7.958[Hz]$

Ejemplo 4.4.2 Dada la senoide $5 \sin(4\pi t - 60^\circ)$ obtener amplitud, fase, frecuencia angular, periodo y frecuencia

Resolución

- La amplitud es $V_m = 5[V]$
- La fase es $\phi = -60^\circ$
- La frecuencia angular es $\omega = 4\pi \left[\frac{rad}{s}\right]$
- El periodo se obtiene a partir de la frecuencia angular

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4\pi} = 0.5[s]$$

- La frecuencia es $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.5} = 2[Hz]$

Ejemplo 4.4.3 Calcular el ángulo entre $v_1 = -10 \cos(\omega t + 50^\circ)$ y $v_2 = 12 \sin(\omega t - 10^\circ)$ e indicar cual está adelantada

Resolución

Para este tipo de ejercicios es importante observar que al comparar dos señales senoidales:

- Deben escribirse como ondas seno o coseno (ambas)
- Deben expresarse con amplitud positiva
- Deben tener la misma frecuencia angular
- La diferencia suele expresarse por un ángulo menor o igual a 180°

Sean

$$v_1 = -10 \cos(\omega t + 50^\circ) \quad (4.55)$$

y

$$v_2 = 12 \sin(\omega t - 10^\circ) \quad (4.56)$$

entonces, pasando (4.55) a amplitud positiva

$$v_1 = 10 \cos(\omega t + 50^\circ - 180^\circ)$$

$$v_1 = 10 \cos(\omega t - 130^\circ)$$

convirtiendo a señal coseno

$$v_1 = 10 \sin(\omega t - 130^\circ + 90^\circ)$$

$$v_1 = 10 \sin(\omega t - 140^\circ)$$

pasando a la misma frecuencia que (4.56) se tiene

$$v_1 = 10 \sin(\omega t - 10^\circ - 30^\circ) \quad (4.57)$$

Comparando (4.57) y (4.56)

$$\frac{v_1 = 10 \sin(\underbrace{\omega t - 10^\circ - 30^\circ})}{v_2 = 12 \sin(\underbrace{\omega t - 10^\circ})}$$

Lo cual implica que v_1 se atrasa 30° respecto a v_2 o equivalentemente v_2 se adelanta 30° a v_1

Ejemplo 4.4.4 Hallar el ángulo de fase entre $i_1 = -4 \sin(377t + 25^\circ)$ e $i_2 = 5 \cos(377t - 40^\circ)$, ¿ i_1 se adelanta o atrasa de i_2 ?

Resolución

Sean

$$i_1 = -4 \sin(377t + 25^\circ) \quad (4.58)$$

e

$$i_2 = 5 \cos(377t - 40^\circ) \quad (4.59)$$

Pasando (4.58) a argumento positivo

$$i_1 = 4 \sin(377t + 25^\circ + 180^\circ)$$

$$i_1 = 4 \sin(377t + 205^\circ) \quad (4.60)$$

Ahora pasando (4.59) a forma senoidal

$$i_2 = 5 \sin(377t - 40^\circ + 90^\circ)$$

$$i_2 = 5 \sin(377t + 50^\circ) \quad (4.61)$$

pasando (4.60) al mismo argumento de (4.61)

$$\overline{i_1 = 4 \sin(\underbrace{377t + 50^\circ}_{+155^\circ}) \quad | \quad i_2 = 5 \sin(\underbrace{377t + 50^\circ})}$$

Finalmente comparando i_1 e i_2 se observa que i_1 se adelanta 155° respecto a i_2 o equivalentemente i_2 se atrasa 155° a i_1

Ejemplo 4.4.5 Determinar el ángulo mediante el cuál i_1 está retrasada respecto a $v_1 = 120 \cos(120\pi - 40^\circ)[V]$ si

a) $i_1 = 2.5 \cos(120\pi t + 20^\circ)$

b) $i_1 = 1.4 \sin(120\pi t - 70^\circ)$

Resolución

a) Como nos interesa encontrar retraso, expresando a i_1 con su ángulo complementario

$$i_1 = 2.5 \cos(120\pi t - 340^\circ) \quad (4.62)$$

expresando a (4.62) en el mismo argumento que v_1 y comparando, se tiene

$$\overline{v_1 = 120 \cos(\underbrace{120\pi - 40^\circ}) \quad | \quad i_1 = 2.5 \cos(\underbrace{120\pi t - 40^\circ - 300^\circ})}$$

Por lo tanto i_1 se atrasa 300° respecto a V_1

b) Como nos interesa retraso, expresando i_1 como señal coseno, se tiene

$$i_1 = 1.4 \cos(120\pi t - 70^\circ - 90^\circ)$$

$$i_1 = 1.4 \cos(120\pi t - 160^\circ) \quad (4.63)$$

expresando a (4.63) en el mismo argumento que v_1 y comparando, se tiene

$$\overline{v_1 = 120 \cos(\underbrace{120\pi - 40^\circ}) \quad | \quad i_1 = 1.4 \cos(\underbrace{120\pi t - 40^\circ - 120^\circ})}$$

Por lo tanto i_1 se atrasa 120° a v_1

4.4.2. La función senoidal como excitación para el circuito RLC

Un circuito lineal e invariante con el tiempo, con entrada senoidal, tiene una respuesta de la forma

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) \quad \forall t \quad (4.64)$$

donde la solución particular $y_p(\cdot)$ es una senoidal de la misma frecuencia que la entrada y $y_h(\cdot)$ es solución de la ecuación diferencial homogénea. La descomposición de la respuesta se ilustra mediante el siguiente ejemplo

Ejemplo 4.4.6 Considerando el circuito RLC-serie mostrado en la Figura 4.38, cuya entrada es una fuente cosenoidal que se conecta cuando $t = 0$

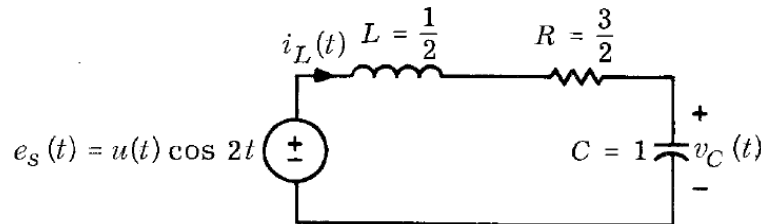


Figura 4.38: Circuito RLC con excitación senoidal

obtener la respuesta completa de la onda de salida de la tensión en el capacitor, con las siguientes especificaciones: $e_s = \cos(2t)u(t)$, $C = 1[F]$, $R = \frac{2}{3}[\Omega]$, $L = \frac{1}{2}[L]$, con las condiciones iniciales dadas por $v(0) = V_0 = 1[V]$ e $i_L(0) = I_0 = 2[A]$

Resolución

Con LVK en la malla del circuito de la Figura 4.38

$$v_L(t) + v_R(t) + v_C(t) = e_s(t) \quad (4.65)$$

con las leyes de elemento para la tensión en el inductor

$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad (4.66)$$

y la corriente en el capacitor

$$i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} \quad (4.67)$$

sustituyendo la tensión del inductor en (4.65)

$$L \frac{di_L(t)}{dt} + Ri_L(t) + v_C = e_s(t) \quad (4.68)$$

la corriente que circula en la malla del circuito es $i_L = i_C = i$, sustituyendo (4.67) en (4.68) se tiene

$$LC \frac{d^2v_C(t)}{dt^2} + RC \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = e_s(t) \quad (4.69)$$

aplicando las especificaciones de los elementos del circuito a (4.69), se tiene el modelo que describe el comportamiento de la señal de salida del circuito, en este caso la tensión en placas del capacitor

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + \frac{3}{2} \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = u(t) \cos(2t) \quad (4.70)$$

Ahora se procede a resolver la ecuación diferencial (4.70) de dos maneras para conocer la respuesta del sistema e ilustrar la complejidad que esto conlleva, el primer método de solución empleado es el de coeficientes indeterminados el cual ilustra claramente quien es y_h y y_p y el como determinarlas, el segundo método es la transformada de Laplace (TL), con él se evita calcular las constantes debidas a las condiciones iniciales. Para este tipo de señales existe el análisis fasorial que se estudia en la siguiente sección el cual es mas sencillo y mas rápido que los dos anteriores.

1. **Método de los coeficientes indeterminados:** Normalizando a la ecuación (4.70), además la función de conmutación o switcheo ocurre en $t = 0$, se tiene

$$\frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + 3 \frac{dv_C(t)}{dt} + 2v_C(t) = 2 \cos(2t) \quad (4.71)$$

- Resolviendo la parte homogénea:
resolviendo la ecuación homogénea asociada de (4.80):
aplicando el operador D a (4.70), se obtiene

$$P(D) = (D^2 + 3D + 2)v = 0 \quad (4.72)$$

escribiendo (4.72) con una ecuación auxiliar de m

$$P(m) = m^2 + 3m + 2$$

y obteniendo sus raíces

$$(m + 1)(m + 2) = 0 \quad \alpha_1 = -1 \quad \alpha_2 = -2$$

por lo tanto la solución de la ecuación homogénea asociada es

$$v_h = k_1 e^{-t} + k_2 e^{-2t} \quad (4.73)$$

- Obteniendo el operador anulador:

$$q(x) = 2 \cos(2t)$$

como es una función coseno sus raíces deben ser complejas

$$\beta_1 = 2i \quad \beta_2 = -2i$$

obteniendo el operador $P_1(D)$, a partir de sus raíces

$$P_1(D) = (D + 2i)(D - 2i)$$

$$P_1(D) = (D^2 + 4)$$

- Resolviendo la parte no homogénea:
aplicando el operador anulador a (4.72) se tiene

$$(D^2 + 4)(D^2 + 3D + 2)v = 0$$

cuyas raíces son: $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = -2$, $\alpha_3 = 2i$ y $\alpha_4 = -2i$, así pues la respuesta total será de la forma

$$v = \underbrace{k_1 e^{-t} + k_2 e^{-2t}}_{v_h} + \underbrace{k_3 \cos(2t) + k_4 \sin(2t)}_{v_p} \quad (4.74)$$

sustituyendo v_p en (4.70) para obtener los coeficientes, así pues se tiene que

$$v'_p = -2k_3 \sin(2t) + 2k_4 \cos(2t)$$

$$v''_p = -4k_3 \cos(2t) - 4k_4 \sin(2t)$$

sustituyendo v_p , v'_p y v''_p en (4.70) se tiene

$$-4k_3 \cos(2t) - 4k_4 \sin(2t) + 3[-2k_3 \sin(2t) + 2k_4 \cos(2t)] + 2[k_3 \cos(2t) + k_4 \sin(2t)] = 2 \cos(2t)$$

$$-4k_3 \cos(2t) - 4k_4 \sin(2t) - 6k_3 \sin(2t) + 6k_4 \cos(2t) + 2k_3 \cos(2t) + 2k_4 \sin(2t) = 2 \cos(2t)$$

reduciendo términos semejantes e igualando las funciones coseno y seno, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} -2k_3 + 6k_4 &= 2 \\ -6k_3 - 2k_4 &= 0 \end{aligned} \quad (4.75)$$

resolviendo el sistema de ecuaciones (4.75) se obtienen $k_3 = \frac{-1}{10}$ y $k_4 = \frac{3}{10}$

Por lo tanto sustituyendo k_3 y k_4 en (4.74) obtenemos la respuesta total dada por

$$v_C(t) = \underbrace{k_1 e^{-t} + k_2 e^{-2t}}_{v_h} + \underbrace{-\frac{1}{10} \cos(2t) + \frac{3}{10} \sin(2t)}_{v_p} \quad (4.76)$$

solo resta por determinar las constantes k_1 y k_2 , mediante las condiciones iniciales, y las condiciones iniciales requeridas son:

- $v_C(0) = 1[V]$ (es dato)
- se requiere la derivada de la tensión del capacitor en $t = 0$, para lo cual se hace uso de la ecuación (4.67) y el hecho que $i_C = i_L$, así pues es posible obtener

$$\frac{dv(0)}{dt} = v'_C(0) = \frac{i_L(0)}{C} = \frac{2}{1} = 2 \left[\frac{V}{s} \right]$$

Así pues evaluando $v_C(0)$ con la primera condición inicial, se tiene

$$1 = k_1 + k_2 - \frac{1}{10} \quad (4.77)$$

obteniendo la derivada de (4.76), se tiene

$$\frac{dv_C}{dt} = v' = -k_1 e^{-t} - 2k_2 e^{-2t} + \frac{2}{10} \sin(2t) + \frac{6}{10} \cos(2t)$$

evaluando en la segunda condición inicial

$$2 = -k_1 - 2k_2 + \frac{6}{10} \quad (4.78)$$

resolviendo el sistema de ecuaciones dado por (4.77) y (4.78) se tiene que $k_1 = 3.6$ y $k_2 = -2.5$

Finalmente la respuesta total del circuito esta dada por

$$v_C(t) = \underbrace{3.6e^{-t} - 2.5e^{-2t}}_{v_h} - \underbrace{\frac{1}{10} \cos(2t) + \frac{3}{10} \sin(2t)}_{v_p} \quad (4.79)$$

2. **Transformada de Laplace:** Empleando Transformada de Laplace, primeramente se normaliza a la ecuación (4.70) y debido a que la función de conmutación o switcheo ocurre en $t = 0$, así pues, se tiene

$$\frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + 3 \frac{dv_C(t)}{dt} + 2v_C(t) = 2 \cos(2t) \quad (4.80)$$

aplicando TL a (4.80)

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} \right\} + 3 \mathcal{L} \left\{ \frac{dv_C(t)}{dt} \right\} + 2 \mathcal{L} \{v_C(t)\} = 2 \mathcal{L} \{\cos(2t)\}$$

$$[s^2 V_C(s) - s v_C(0) - v'_C(0)] + 3 [s V_C(s) - v_C(0)] + 2 V_C(s) = \frac{2s}{s^2 + 4}$$

sustituyendo las condiciones iniciales, se tiene

$$[s^2 V_C(s) - s - 2] + 3 [s V_C(s) - 1] + 2 V_C(s) = \frac{2s}{s^2 + 4}$$

factorizando a $V_C(s)$ y reordenando términos, se tiene

$$(s^2 + 3s + 2) V_C(s) = (s + 5) + \frac{2s}{s^2 + 4}$$

$$V_C(s) = \frac{s + 5}{s^2 + 3s + 2} + \frac{2s}{(s^2 + 4)(s^2 + 3s + 2)}$$

descomponiendo en fracciones parciales

- $\frac{s+5}{s^2+3s+2} = \frac{s+5}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$
 $= A(s+2) + B(s+1) = s+5$
 - a) Sí $s = -1$, $A = 4$
 - b) Sí $s = -2$, $B = -3$

$$\blacksquare \frac{2s}{(s^2+4)(s^2+3s+2)} = \frac{As+B}{s^2+4} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{s+2}$$

$$2s = (As + B)(s^2 + 3s + 2) + C(s^2 + 4)(s + 2) + D(s^2 + 4)(s + 1)$$

$$2s = [As^3 + 3As^2 + 2As + Bs^2 + 3Bs + 2B] + C[s^3 + 2s^2 + 4s + 8] + D[s^3 + s^2 + 4s + 4]$$

por igualdad de polinomios, se puede establecer el siguiente sistema de ecuaciones

$$A + C + D = 0$$

$$3A + B + 2C + D = 0$$

$$2A + 3B + 4C + 4D = 2$$

$$2B + 8C + 4D = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se llega a que $A = \frac{-1}{10}$, $B = \frac{3}{5}$, $C = \frac{-2}{5}$ y $D = \frac{1}{2}$

una vez determinadas las constante de la expansión en fracciones parciales se obtiene

$$V_C(s) = 4 \left(\frac{1}{s+1} \right) - 3 \left(\frac{1}{s+2} \right) + \frac{-\frac{1}{10}s + \frac{3}{5}}{s^2+4} - \frac{2}{5} \left(\frac{1}{s+1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s+2} \right)$$

reduciendo términos semejantes se tiene

$$V_C(s) = 3.6 \left(\frac{1}{s+1} \right) - 2.5 \left(\frac{1}{s+2} \right) - \frac{1}{10} \left(\frac{s}{s^2+4} \right) + \frac{3}{5} \left(\frac{1}{s^2+4} \right)$$

aplicando antitransformada de Laplace para obtener la señal en el tiempo

$$v_C(t) = 3.6\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+1} \right\} - 2.5\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+2} \right\} - \frac{1}{10}\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2+4} \right\} + \frac{3}{5(2)}\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{s^2+4} \right\}$$

finalmente la tensión en placas del capacitor es

$$v_C(t) = \underbrace{3.6e^{-t} - 2.5e^{-2t}}_{y_h} - \underbrace{\frac{1}{10} \cos(2t) + \frac{3}{10} \sin(2t)}_{y_p} [V]$$

4.5. Análisis senoidal en estado estacionario

4.5.1. Definición de estado estacionario senoidal

En CA, considerando un circuito arbitrario, lineal e invariante con el tiempo y excitado por una sola fuente senoidal. Si todas las frecuencias naturales están en la parte izquierda del plano complejo, entonces independientemente del estado inicial, la respuesta se convertirá en senoidal como $t \rightarrow \infty$. Esta respuesta senoidal es llamada respuesta senoidal de estado estable o estado estacionario, la cuál se obtendrá fácilmente mediante el método fasorial.

4.5.2. Relación del estado estacionario con la respuesta permanente

El término respuesta permanente se usa como sinónimo de respuesta forzada, aunque con respuesta permanente lleva implícito el que no cambia con el tiempo, lo cual es válido para respuestas forzadas, pero la respuesta senoidal de estado estacionario o estable, definitivamente cambia con el tiempo. El estado estacionario se refiere a la condición que alcanza el sistema después de que se anula la respuesta transitoria o natural.

4.5.3. Concepto de fasor

Las señales senoidales se expresan fácilmente en términos de fasores, lo cual simplifica trabajar con ellas. Un fasor es un número complejo que representa la amplitud y la fase de una señal senoidal, los fasores proporcionan un medio sencillo para trabajar con circuitos en CA.

De la teoría de números complejos recordando que un número complejo z puede escribirse en forma rectangular como $z = x + jy$, donde $j = \sqrt{-1}$ (para no confundir con la corriente eléctrica) donde x es la parte real y y es la parte imaginaria. El número complejo z puede escribirse de forma polar o exponencial como

$$z = r\angle\phi = re^{j\phi}$$

donde r es la magnitud de z y ϕ la fase z y se obtienen a partir de x e y como

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

pero si se conocen r y ϕ se puede obtener x e y como

$$x = r \cos(\phi)$$

$$y = r \sin(\phi)$$

así pues, z puede escribirse como

$$z = x + jy = r\angle\phi = r(\cos(\phi) + j \sin(\phi))$$

estas relaciones se obtienen a partir de la Figura 4.39

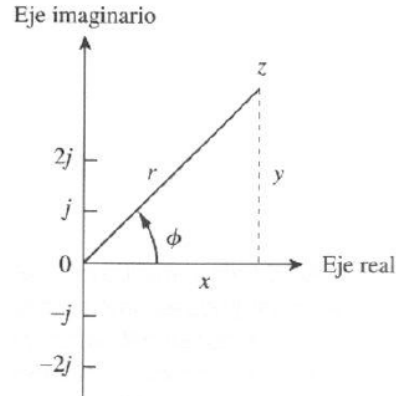


Figura 4.39: Representaciones de un número complejo

es importante aclarar que la suma y resta de números complejos es mas sencilla en forma rectangular, así como la multiplicación y division en forma polar.

La representación fasorial se basa en la identidad de Euler

$$e^{\pm j\phi} = \cos(\phi) \pm j \sin(\phi) \quad (4.81)$$

con lo cual se puede considerar al coseno y al seno como las partes real (\Re) e imaginaria (\Im) del número complejo, respectivamente

$$\cos(\phi) = \Re\{e^{j\phi}\} \quad (4.82)$$

$$\sin(\phi) = \Im\{e^{j\phi}\} \quad (4.83)$$

Dada una señal senoidal de la forma $v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$ se emplea la ecuación (4.82) para obtener su representación fasorial como

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi) = \Re \left\{ V_m e^{j(\omega t + \phi)} \right\} \quad (4.84)$$

mediante propiedades de la función exponencial

$$v(t) = \Re \left(V_m e^{j\phi} e^{j\omega t} \right)$$

$$v(t) = \Re \left(\mathbf{V} e^{j\omega t} \right) \quad (4.85)$$

donde $\mathbf{V} = V_m e^{j\phi} = V_m \angle \phi$ es la representación fasorial de $v(t)$.

Un fasor es un número complejo que al girar en sentido antihorario en un círculo de radio V_m en el plano complejo a una velocidad angular ω forma una señal senoidal, como se muestra en la Figura 4.40

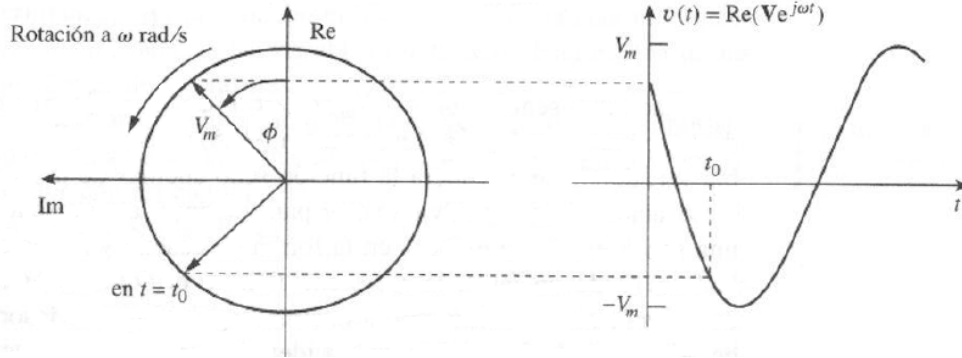


Figura 4.40: Representación fasorial de una señal senoidal

para obtener la señal senoidal correspondiente a un fasor, se multiplica el fasor por el factor de tiempo $e^{j\omega t}$ como se indica en la ecuación (4.85), esta transformación se resume del siguiente modo

$$v(t) = \underbrace{V_m \cos(\omega t + \phi)}_{\text{Rep. en el tiempo}} \Leftrightarrow \underbrace{\mathbf{V} = V_m \angle \phi}_{\text{Rep. en el dominio fasorial}} \quad (4.86)$$

en la ecuación (4.86) se ha suprimido el factor de tiempo $e^{j\omega t}$, la frecuencia no se muestra explícitamente en el dominio fasorial, porque ω es constante, pero la respuesta depende de ω . Por esta razón, el dominio fasorial también se conoce como dominio frecuencial.

Algunas ventajas importantes del dominio fasorial son:

1. La suma de señales senoidales de la misma frecuencia equivale a sumar sus fasores correspondientes (teniendo en cuenta que la suma se realiza en forma rectangular)
2. Derivar una señal senoidal equivale a multiplicar su fasor correspondiente por $j\omega$

$$\frac{dv}{dt} \Leftrightarrow j\omega \mathbf{V}$$

3. Integrar una señal senoidal equivale a dividir su fasor correspondiente por $j\omega$

$$\int v dt \Leftrightarrow \frac{\mathbf{V}}{j\omega}$$

4. $v(t)$ es la representación instantánea o en el dominio del tiempo, mientras \mathbf{V} es la representación de frecuencia o dominio fasorial.
5. $v(t)$ depende del tiempo, mientras que \mathbf{V} no.
6. $v(t)$ siempre es real y no tiene ningún término complejo, mientras que \mathbf{V} siempre es un número complejo.

En la solución de ecuaciones diferenciales mediante el método fasorial, algunas propiedades del operador $\mathbb{R}e\{.\}$ son

1. Es lineal, sean z_1 y z_2 dos funciones complejas de la variable real t , sean α y β dos números reales cualesquiera. Entonces

- $\Re \{ \alpha z_1(t) \} = \alpha \Re \{ z_1(t) \}$ (Homogeneidad)
- $\Re \{ z_1(t) + z_2(t) \} = \Re \{ z_1(t) \} + \Re \{ z_2(t) \}$ (Aditividad)
- $\Re \{ \alpha z_1(t) + \beta z_2(t) \} = \alpha \Re \{ z_1(t) \} + \beta \Re \{ z_2(t) \}$ (superposición)

2. Sea \mathbf{A} un número complejo cuya representación polar es $A_m e^{j\phi}$ esto implica que

$$\frac{d}{dt} (\Re \{ \mathbf{A} e^{j\omega t} \}) = \Re \left\{ \frac{d}{dt} \mathbf{A} e^{j\omega t} \right\} = \Re \{ j\omega \mathbf{A} e^{j\omega t} \}$$

$$\therefore \frac{d}{dt} \Re \{ \cdot \} = \Re \left\{ \frac{d}{dt} (\cdot) \right\}$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{A} e^{j\omega t} = j\omega \mathbf{A} e^{j\omega t}$$

3. Sean \mathbf{A} y \mathbf{B} dos números complejos

i) $\Re \{ \mathbf{A} e^{j\omega t} \} = \Re \{ \mathbf{B} e^{j\omega t} \} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{B}$

ii) Si $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ esto implica que $\Re \{ \mathbf{A} e^{j\omega t} \} = \Re \{ \mathbf{B} e^{j\omega t} \}$

Ejemplo 4.5.1 Obtener los fasores de las señales

a) $i = 6 \cos(50t - 40^\circ)[A]$

b) $v = -4 \sin(30t + 50^\circ)[V]$

Resolución

a) *Expresando a i en forma exponencial haciendo uso del operador \Re*

$$i = \Re \left\{ 6e^{j(50t-40^\circ)} \right\} = \Re \left\{ \underbrace{6e^{-j40^\circ}} e^{j50t} \right\}$$

$$\therefore \mathbf{I} = 6 \angle -40^\circ [A]$$

b) *Como el fasor se obtiene con la parte real, se debe expresar a v con amplitud positiva y en forma coseno, lo cual se logra mediante identidades trigonométricas*

$$v = -4 \sin(30t + 50^\circ)$$

$$v = 4 \cos(30t + 50^\circ + 90^\circ)$$

$$v = 4 \cos(30t + 140^\circ)$$

expresando a v en forma exponencial

$$v = \Re \left\{ 4e^{j(30t+140^\circ)} \right\} = \Re \left\{ \underbrace{4e^{j140^\circ}} e^{j30t} \right\}$$

$$\therefore \mathbf{V} = 4 \angle 140^\circ [A]$$

Ejemplo 4.5.2 Expresar las siguientes señales senoidales como fasores

i) $v(t) = -7 \cos(2t + 40^\circ)[V]$

ii) $i(t) = 4 \sin(10t + 10^\circ)[A]$

Resolución

i) Pasando v a amplitud positiva

$$v(t) = -7 \cos(2t + 40^\circ)$$

$$v(t) = 7 \cos(2t + 40^\circ + 180^\circ)$$

$$v(t) = 7 \cos(2t + 220^\circ)$$

expresando en forma exponencial

$$v(t) = \operatorname{Re} \left\{ 7e^{j(2t+220^\circ)} \right\}$$

$$v(t) = \operatorname{Re} \left\{ \underbrace{7e^{j220^\circ}} e^{j2t} \right\}$$

$$\therefore \mathbf{V} = 7 \angle 220^\circ [V]$$

ii) Pasando i a una forma coseno

$$i(t) = 4 \sin(10t + 10^\circ)$$

$$i(t) = 4 \cos(10t + 10^\circ - 90^\circ)$$

$$i(t) = 4 \cos(10t - 80^\circ)$$

escribiendo en forma exponencial

$$i(t) = \operatorname{Re} \left\{ 4e^{j(10t-80^\circ)} \right\}$$

$$i(t) = \operatorname{Re} \left\{ \underbrace{4e^{-j80^\circ}} e^{j10t} \right\}$$

$$\therefore \mathbf{I} = 4 \angle -80^\circ [A]$$

Ejemplo 4.5.3 Transformar la función $3 \cos(600t) - 5 \sin(600t + 100^\circ)$ a la su forma fasorial

Resolución

Transformando toda la función a una forma coseno

$$3 \cos(600t) + 5 \cos(600t + 100^\circ + 90^\circ)$$

$$3 \cos(600t) + 5 \cos(600t + 190^\circ)$$

expresando en forma exponencial

$$\operatorname{Re} \left\{ \underbrace{3e^{j0}} e^{j600t} \right\} + \operatorname{Re} \left\{ \underbrace{5e^{j190}} e^{j600t} \right\}$$

$$3\angle 0^\circ + 5\angle 90^\circ$$

convirtiendo numeros complejos a la forma rectangular y realizando la suma

$$3 + (-4.942 - j0.868)$$

$$-1.924 - j0.868$$

convirtiendo a forma polar, se obtiene el fasor

$$2.11\angle -155.7^\circ$$

Ejemplo 4.5.4 Hallar las senoides representadas por los fasores

a) $\mathbf{I} = -3 + j4[A]$

b) $\mathbf{V} = j8e^{-j20}[V]$

Resolución

a) expresando en forma polar a \mathbf{I}

$$5\angle 126.87^\circ$$

en forma exponencial es posible escribir

$$i(t) = \operatorname{Re} \{ 5e^{j126.87} e^{j\omega t} \}$$

$$\therefore i(t) = 5 \cos(\omega t + 126.87^\circ)[A]$$

b) Dado que $j = 1\angle 90^\circ$

$$\mathbf{V} = (1\angle 90^\circ)(8\angle -20^\circ) = 8\angle 70^\circ$$

entonces

$$v(t) = \operatorname{Re} \{ 8e^{j70} e^{j\omega t} \}$$

$$\therefore v(t) = 8 \cos(\omega t + 70^\circ)[V]$$

Ejemplo 4.5.5 Aplicando el metodo fasorial, determinar la corriente $i(t)$ en un circuito, descrita por la ecuación integrodiferencial

$$4i + 8 \int i dt - 3 \frac{di}{dt} = 50 \cos(2t + 75^\circ) \quad (4.87)$$

Resolución

En la ecuación (4.87) se observa que la entrada (fuente de excitación) es sinusoidal, la cual se denota arbitrariamente como e_s , de tal modo que $e_s = 50 \cos(2t + 75^\circ) = \operatorname{Re} \{ 50e^{j75^\circ} e^{j2t} \} = \operatorname{Re} \{ \mathbf{E}e^{j2t} \}$ cuyo fasor es

$$\mathbf{E} = 50\angle 75^\circ \quad (4.88)$$

como la entrada es cosenoidal, la salida también lo sera y tendrá la forma $i(t) = I_m \cos(2t + \phi)$ cuya forma fasorial es

$$i(t) = \operatorname{Re} \{ \mathbf{I}e^{j2t} \} \quad (4.89)$$

Sustituyendo (4.87) en (4.89) se tiene

$$4\Re\{\mathbf{I}e^{j2t}\} + 8 \int \Re\{\mathbf{I}e^{j2t}\} dt - 3\frac{d}{dt}\Re\{\mathbf{I}e^{j2t}\} = \Re\{\mathbf{E}e^{j2t}\}$$

haciendo uso de las propiedades del operador $\Re\{\cdot\}$ se tiene

$$\begin{aligned}\Re\{4\mathbf{I}e^{j2t}\} + \Re\left\{8 \int \mathbf{I}e^{j2t} dt\right\} - \Re\left\{3\frac{d}{dt}\mathbf{I}e^{j2t}\right\} &= \Re\{\mathbf{E}e^{j2t}\} \\ \Re\{4\mathbf{I}e^{j2t}\} + \Re\left\{\frac{8}{2j}\mathbf{I}e^{j2t}\right\} - \Re\{3(2j)\mathbf{I}e^{j2t}\} &= \Re\{\mathbf{E}e^{j2t}\}\end{aligned}$$

factorizando términos semejantes

$$\Re\left\{\left(4 + \frac{8}{2j} - 6j\right)\mathbf{I}e^{j2t}\right\} = \Re\{\mathbf{E}e^{j2t}\}$$

realizando las operaciones con los números complejos y por la propiedad de igualdad, se obtiene

$$(4 - j10)\mathbf{I} = \mathbf{E}$$

despejando al fasor \mathbf{I} y pasando $(4 - j10)$ a forma polar

$$\mathbf{I} = \frac{50\angle 75^\circ}{10.77\angle -68.19^\circ}$$

$$\mathbf{I} = 4.642\angle 143.19^\circ = 4.642e^{j143.19}$$

regresando al dominio del tiempo

$$i = \Re\{4.642e^{j143.19}e^{j2t}\}$$

$$\therefore i(t) = 4.642 \cos(2t + 143.19^\circ)[A]$$

Ejemplo 4.5.6 Obtener la tensión del resistor para la siguiente excitación

$$\frac{dv_R(t)}{dt} + 8 \int v_R(t) dt + 4v_R(t) = 2i(t) \quad (4.90)$$

con $i(t) = 5 \cos(10t + 30^\circ)$

Resolución

La entrada es

$$\begin{aligned}i(t) &= (2)(5) \cos(10t + 30^\circ) = \Re\{10e^{j30}e^{j10t}\} \\ i(t) &= \Re\{\mathbf{I}e^{j10t}\}\end{aligned} \quad (4.91)$$

cuyo fasor es

$$\mathbf{I} = 10\angle 30^\circ \quad (4.92)$$

como la entrada es cosenoidal, la salida también será cosenoidal de la forma

$$v_R(t) = V_m \cos(10t + \phi) = \Re\{V_m e^{j\phi} e^{j10t}\}$$

$$v_R(t) = \Re \{ \mathbf{V}_R e^{j10t} \} \quad (4.93)$$

Así pues, sustituyendo (4.91) y (4.93) en (4.90)

$$\frac{d}{dt} \Re \{ \mathbf{V}_R e^{j10t} \} + 8 \int \Re \{ \mathbf{V}_R e^{j10t} \} dt + 4 \Re \{ \mathbf{V}_R e^{j10t} \} = \Re \{ \mathbf{I} e^{j10t} \}$$

aplicando propiedades del operador \Re se tiene

$$\begin{aligned} \Re \left\{ \frac{d}{dt} \mathbf{V}_R e^{j10t} \right\} + \Re \left\{ 8 \int \mathbf{V}_R e^{j10t} dt \right\} + \Re \{ 4 \mathbf{V}_R e^{j10t} \} &= \Re \{ \mathbf{I} e^{j10t} \} \\ \Re \{ (j10) \mathbf{V}_R e^{j10t} \} + \Re \left\{ \frac{8}{j10} \mathbf{V}_R e^{j10t} \right\} + \Re \{ 4 \mathbf{V}_R e^{j10t} \} &= \Re \{ \mathbf{I} e^{j10t} \} \end{aligned}$$

factorizando términos semejantes

$$\Re \left\{ \left(j10 + \frac{8}{j10} + 4 \right) \mathbf{V}_R e^{j10t} \right\} = \Re \{ \mathbf{I} e^{j10t} \}$$

realizando las operaciones con los números complejos y haciendo uso de la propiedad de igualdad del operador \Re

$$\left(j10 + \frac{8}{j10} + 4 \right) \mathbf{V}_R = \mathbf{I}$$

despejando \mathbf{V}_R , pasando los números complejos a forma polar y sustituyendo (4.92), se obtiene

$$\mathbf{V}_R = \frac{\mathbf{I}}{(4 + j9.2)} = \frac{10 \angle 30^\circ}{10.03 \angle 66.5^\circ}$$

$$\mathbf{V}_R = 0.996 \angle -36.5^\circ$$

regresando al dominio del tiempo

$$v_R(t) = \Re \{ 0.996 e^{-j36.5^\circ} e^{j10t} \}$$

$$\therefore v_R(t) = 0.996 \cos(10t - 36.5^\circ) [V]$$

Ejemplo 4.5.7 Retomando el **Ejemplo 4.4.6** el modelo que describe el comportamiento de la señal de salida del circuito, esta dado por la ecuación diferencial

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + \frac{3}{2} \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = u(t) \cos(2t) \quad (4.94)$$

el polinomio característico es

$$\frac{1}{2} s^2 + \frac{3}{2} s + 1$$

normalizando

$$s^2 + 3s + 2$$

obteniendo las raíces

$(s + 1)(s + 2)$, donde $s_1 = -1$ y $s_2 = -2$

la solución de la parte homogénea es

$$v_h = k_1 e^{-t} + k_2 e^{-2t} \quad (4.95)$$

Ahora obteniendo la v_p mediante fasores, la entrada es cosenoidal $e_s = \mathbb{R}e \{2e^{j0}e^{j2t}\}$, cuyo fasor es

$$\mathbf{E} = 2\angle 0^\circ$$

como la entrada es cosenoidal, la salida también será cosenoidal de la forma

$$\begin{aligned} v_C(t) &= V_C \cos(2t + \phi) = \mathbb{R}e \{V_C e^{j\phi} e^{j2t}\} \\ v_C(t) &= \mathbb{R}e \{\mathbf{V}_C e^{j2t}\} \end{aligned} \quad (4.96)$$

sustituyendo (4.96) en (4.94) se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{R}e \left\{ \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{V}_C e^{j2t} \right\} + \mathbb{R}e \left\{ \frac{3}{2} \frac{d}{dt} \mathbf{V}_C e^{j2t} \right\} + \mathbb{R}e \{ \mathbf{V}_C e^{j2t} \} &= \mathbb{R}e \{ \mathbf{E} e^{2t} \} \\ \mathbb{R}e \left\{ \frac{1}{2} (2j)^2 \mathbf{V}_C e^{j2t} \right\} + \mathbb{R}e \left\{ \frac{3}{2} (2j) \mathbf{V}_C e^{j2t} \right\} + \mathbb{R}e \{ \mathbf{V}_C e^{j2t} \} &= \mathbb{R}e \{ \mathbf{E} e^{2t} \} \end{aligned}$$

factorizando términos semejante

$$\mathbb{R}e \{ (-2 + 3j + 1) \mathbf{V}_C e^{j2t} \} = \mathbb{R}e \{ \mathbf{E} e^{2t} \}$$

por igualdad de números complejos

$$(-1 + 3j) \mathbf{V}_C = \mathbf{E}$$

despejando al fasor tensión

$$\mathbf{V}_C = \frac{\mathbf{E}}{(-1 + 3j)} = \frac{1\angle 0^\circ}{3.162\angle 109.4^\circ} = 0.316\angle -108.4^\circ$$

regresando al dominio del tiempo se obtiene

$$\therefore v_p = 0.316 \cos(2t - 108.4^\circ) \quad (4.97)$$

La solución completa es $v_h + v_p$

$$v_C(t) = k_1 e^{-t} + k_2 e^{-2t} + 0.316 \cos(2t - 108.4^\circ) \quad (4.98)$$

las constantes k_1 y k_2 se obtienen a partir de las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} v_C(0) = 1 &= k_1 + k_2 + 0.316 \cos(-108.4^\circ) \\ k_1 + k_2 &= 1.1 \end{aligned} \quad (4.99)$$

$$\begin{aligned} \frac{dv(0)}{dt} = 2 &= -k_1 - 2k_2 - 2(0.316) \sin(-108.4^\circ) \\ k_1 + 2k_2 &= -1.4 \end{aligned} \quad (4.100)$$

resolviendo el sistema de ecuaciones dado por (4.99) y (4.100) se obtiene $k_1 = 3.6$ y $k_2 = -2.5$

$$\therefore v_C(t) = 3.6e^{-t} - 2.5e^{-2t} + 0.316 \cos(2t - 108.4^\circ)[V]$$

con ayuda de identidades trigonométricas

$$v_C(t) = 3.6e^{-t} - 2.5e^{-2t} - \frac{1}{10} \cos(2t) + \frac{3}{10} \sin(2t)[V]$$

con lo cual se obtiene exactamente el mismo resultado que el **Ejemplo 4.4.6**, de una forma mas sencilla y rápida.

4.5.4. Conceptos de impedancia y admitancia en un circuito

La importancia del análisis fasorial radica en que se pueden definir relaciones algebraicas entre la tensión y la corriente en inductores y capacitores en el dominio fasorial o de la frecuencia, simplificando el análisis del estado senoidal permanente estableciendo la relación entre la tensión y la corriente fasorial de cada uno de los tres elementos pasivos.

El resistor: En la Figura 4.41a) la corriente que circula por el resistor es senoidal de la forma $i(t) = I_m \sin(\omega t + \phi)$

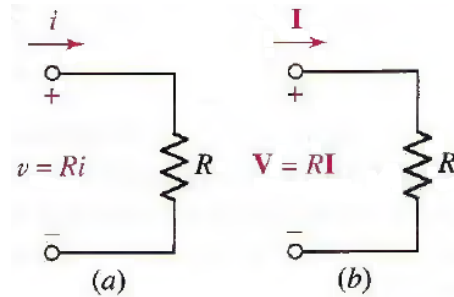


Figura 4.41: Relación tensión-corriente para el resistor: a) en el dominio del tiempo, b) en el dominio de la frecuencia

con la ley de Ohm, se tiene

$$v(t) = i(t)R$$

$$v = RI_m \sin(\omega t + \phi)$$

expresando en forma fasorial la corriente

$$\mathbf{V} = RI_m \angle \phi$$

por propiedades de las señales senoidales, si la entrada es senoidal, entonces su salida también lo será, por lo que el fasor tensión tendrá la forma

$$\mathbf{V} = RI \tag{4.101}$$

lo que indica que la relación tensión-corriente en el dominio fasorial sigue siendo la ley de Ohm, como se muestra en la Figura 4.41b), el diagrama fasorial para el resistor se muestra en la Figura 4.42

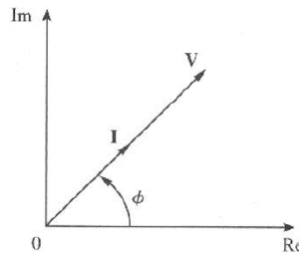


Figura 4.42: Diagrama fasorial para el resistor

con la ecuación (4.101) y la Figura 4.42 se concluye que la tensión y la corriente están en fase.

El inductor: En la Figura 4.43a) la corriente que circula por el inductor es senoidal de la forma $i(t) = I_m \sin(\omega t + \phi)$ y recordando que la tensión en sus terminales es $v = \frac{di(t)}{dt}$, entonces la tensión en el inductor es

$$v(t) = -\omega L I_m \sin(\omega t + \phi) \quad (4.102)$$

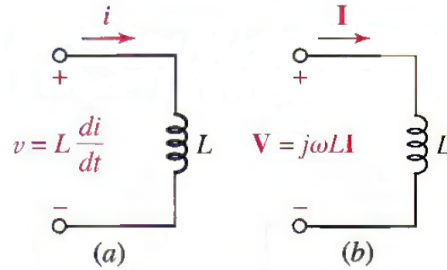


Figura 4.43: Relación tensión-corriente para el inductor: a) en el dominio del tiempo, b) en el dominio de la frecuencia

haciendo uso de identidades trigonométricas expresando a (4.102) como un coseno

$$v(t) = \omega L I_m \cos(\omega t + \phi + 90^\circ) \quad (4.103)$$

expresando (4.103) en forma fasorial

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \omega L I_m e^{j(\phi+90^\circ)} \\ \mathbf{V} &= \omega L I_m e^{\phi} e^{90^\circ} \\ \mathbf{V} &= \omega L I_m \angle \phi + 90^\circ \end{aligned} \quad (4.104)$$

pero el fasor corriente es $\mathbf{I} = I_m \angle \phi$ y además $e^{90^\circ} = j$

$$\therefore \mathbf{V} = j\omega L \mathbf{I}$$

como se muestra en la Figura 4.43b), lo cual indica que hay un defasamiento de 90° entre la tensión y la corriente. Particularmente la corriente se atrasa 90° a la tensión como se ilustra en la Figura 4.44

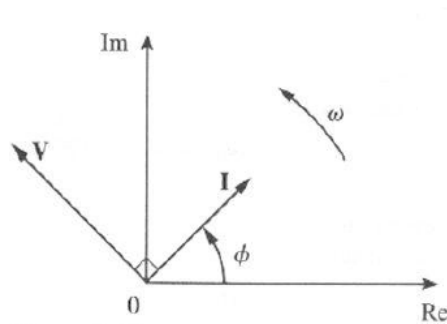


Figura 4.44: Diagrama fasorial para el inductor

El capacitor: la tensión en placas del capacitor es de la forma $v(t) = \cos(\omega t + \phi)$ como se muestra en la Figura 4.45a) y la corriente que fluye a través de sus placas es $i = C \frac{dv(t)}{dt}$, por ende la corriente en el capacitor es

$$i(t) = -\omega CV_m \sin(\omega t + \phi) \quad (4.105)$$

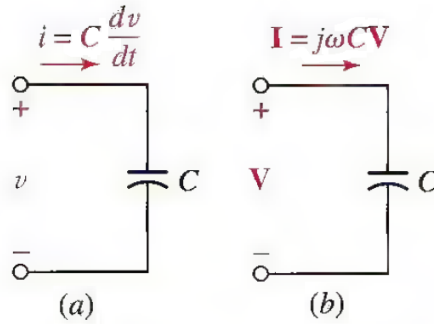


Figura 4.45: Relación tensión-corriente para el capacitor: a) en el dominio del tiempo, b) en el dominio de la frecuencia

pasando (4.105) a forma coseno mediante identidades trigonométricas

$$i(t) = \omega CV_m \cos(\omega t + \phi + 90^\circ) \quad (4.106)$$

expresando (4.106) en forma fasorial

$$\mathbf{I} = \omega CV_m e^{j(\phi+90^\circ)} = \omega CV_m e^{j\phi} e^{j90^\circ}$$

$$\mathbf{I} = \omega CV_m \angle \phi + 90^\circ \quad (4.107)$$

en (4.107) el fasor tensión es $V_m \angle \phi$ y $e^{j90^\circ} = j$ por lo tanto

$$\therefore \mathbf{I} = j\omega C \mathbf{V} \quad (4.108)$$

como se ilustra en la Figura 4.45b).

Despejando al fasor tensión de (4.108), la tensión en terminales del capacitor es

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{I}}{j\omega C}$$

lo cual muestra un defasamiento de 90° entre la tensión y la corriente. Particularmente la corriente se adelanta 90° a la tensión como se muestra en la Figura 4.46

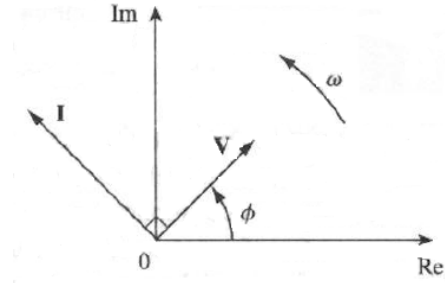


Figura 4.46: Diagrama fasorial para el capacitor

Una vez establecidas las relaciones de tensión-corriente para los elementos pasivos del circuito como

$$\mathbf{V} = R\mathbf{I}, \quad \mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I}, \quad \mathbf{V} = \frac{\mathbf{I}}{j\omega C} \quad (4.109)$$

las expresiones (4.109) pueden escribirse en términos del cociente fasorial entre la tensión y la corriente como

$$\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = R, \quad \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = j\omega L, \quad \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{1}{j\omega C} \quad (4.110)$$

de (4.110) se obtiene la ley de Ohm en forma fasorial como

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z}\mathbf{I}, \quad \text{equivalentemente } \mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} \quad (4.111)$$

en (4.111) \mathbf{Z} se denomina impedancia, es un número complejo y representa la oposición que presenta un circuito al flujo de la corriente senoidal, es una cantidad dependiente de la frecuencia, se mide en Ohms [Ω], es importante aclarar que la impedancia no es un fasor ya que no es una cantidad que varíe senoidalmente.

Al igual que un número complejo, la impedancia puede expresarse en forma rectangular como

$$\mathbf{Z} = R + jX$$

donde

$R = \Re\{\mathbf{Z}\}$, es la resistencia

$X = \Im\{\mathbf{Z}\}$, es la reactancia

y en forma polar como

$$\mathbf{Z} = |\mathbf{Z}| \angle \theta$$

Observaciones

1. Cuando $\omega = 0$ (la excitación es CD), el inductor se comporta como cortocircuito ($\mathbf{Z}_L = 0$) y el capacitor como un circuito abierto ($\mathbf{Z}_C \rightarrow \infty$), lo cual ya se sabía.
2. Para altas frecuencias $\omega \rightarrow \infty$, el inductor se comporta como circuito abierto ($\mathbf{Z}_L \rightarrow \infty$) y el capacitor como un cortocircuito ($\mathbf{Z}_C = 0$).

3. La reactancia X puede ser positiva o negativa, así pues

- La impedancia $\mathbf{Z} = R + jX$ es inductiva o de retraso, ya que la corriente se atrasa de la tensión.
- La impedancia $\mathbf{Z} = R - jX$ es inductiva o de adelanto, ya que la corriente se adelanta a la tensión.

A veces resulta conveniente trabajar con el recíproco de la impedancia, conocido como admitancia la cual tiene unidades de siemens [S], se representa por la letra \mathbf{Y} y se define como el cociente entre la corriente y la tensión fasorial, la cual es un número complejo también se puede escribir en forma rectangular como

$$\mathbf{Y} = G + jB \quad (4.112)$$

donde

$G = \Re\{\mathbf{Y}\}$, es la conductancia

$B = \Im\{\mathbf{Y}\}$, es la suceptancia

En la Tabla 4.1 análogamente a los circuitos CD vistos anteriormente, la reducción de impedancias

ELEMENTO	IMPEDANCIA	ADMITANCIA
Resistor	$\mathbf{Z}_R = R$	$\mathbf{Y}_R = \frac{1}{R}$
Inductor	$\mathbf{Z}_L = j\omega L$	$\mathbf{Y}_L = \frac{1}{j\omega L}$
Capacitor	$\mathbf{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}$	$\mathbf{Y}_C = j\omega C$

Tabla 4.1: Impedancias y admitancias de elementos pasivos.

en serie, paralelo, estrella y delta se hace de la misma manera que los circuitos puramente resistivos.

Ejemplo 4.5.8 Hallar $v(t)$ e $i(t)$ para el circuito mostrado en la Figura 4.47, con $v_s = 10 \cos(4t)$

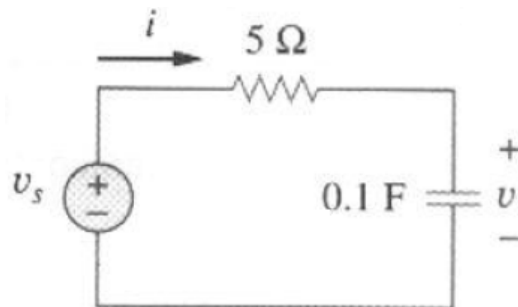


Figura 4.47: Circuito para el ejemplo

Resolución

De la fuente, se tiene que su fasor es $\mathbf{V}_s = 10\angle 0^\circ$ y $\omega = 4$, pasando el circuito de la Figura 4.47 al dominio fasorial o impedancias se tiene

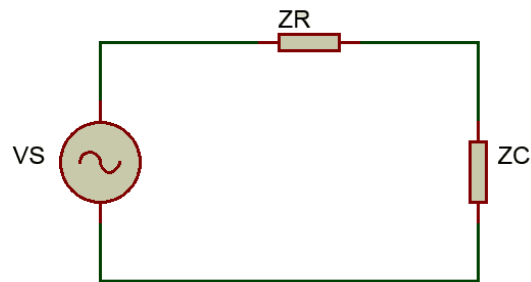


Figura 4.48: Circuito en el dominio fasorial o en impedancias

de la Figura 4.48, se tiene

$$Z = Z_R + Z_C$$

$$Z = R + \frac{1}{j\omega C} = 5 + \left(\frac{1}{j4(0.1)} \right) = 5 - j2.5[\Omega]$$

con la ley de Ohm expresada en fasores, la corriente que fluye por el circuito está dada por

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}} = \frac{10\angle 0^\circ}{5 - j2.5} = \frac{10\angle 0^\circ}{5.590\angle -26.56^\circ} = 1.789\angle 26.56^\circ[\text{A}]$$

así pues, la tensión en terminales del capacitor está dada por

$$\mathbf{V}_C = \mathbf{I}Z_C = \frac{1.789\angle 26.56^\circ}{0.4\angle 90^\circ} = 4.47\angle -63.43^\circ[\text{V}]$$

Regresando al dominio del tiempo los fasores \mathbf{V}_C e \mathbf{I}

$$v_c = 4.47 \cos(4t - 63.43^\circ)[\text{V}]$$

$$i = 1.789 \cos(4t + 26.5^\circ)[\text{A}]$$

i se adelanta 90° a v_c como ya se sabía.

Ejemplo 4.5.9 Determinar $v_0(t)$ en el circuito de la Figura 4.49, para $v_s = 20 \cos(4t - 15^\circ)$

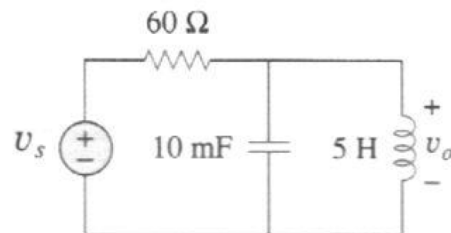


Figura 4.49: Circuito para el ejemplo

Resolución

Pasando el circuito de la Figura a impedancias o dominio fasorial, se tiene

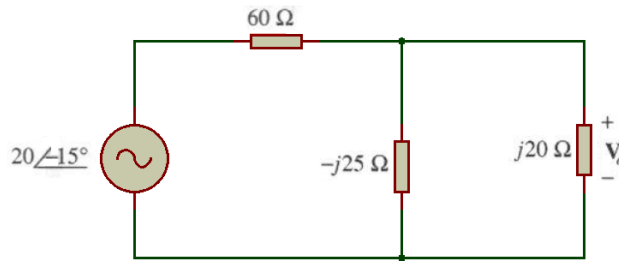


Figura 4.50: Circuito para el ejemplo

reduciendo las impedancias en paralelo del circuito de la Figura 4.50

$$\frac{(-j25)(j20)}{-j25 + j20} = \frac{500}{-j25} = j100$$

se tiene

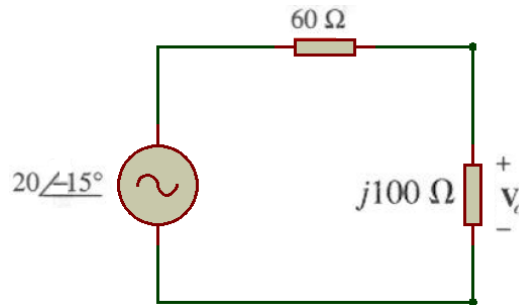


Figura 4.51: Circuito con impedancias reducidas

aplicando divisor de tensión para el circuito de la Figura 4.51 se tiene

$$\mathbf{V}_0 = \frac{j100}{60 + (j100)}(20\angle -15^\circ)$$

realizando las operaciones con números complejos, se obtiene

$$\mathbf{V}_0 = 17.15\angle 15.9^\circ [\text{V}]$$

regresando al dominio del tiempo

$$\therefore v_0 = 17.15 \cos(4t + 15.9^\circ) [\text{V}]$$

Ejemplo 4.5.10 Hallar la corriente I que circula por el circuito de la Figura 4.52

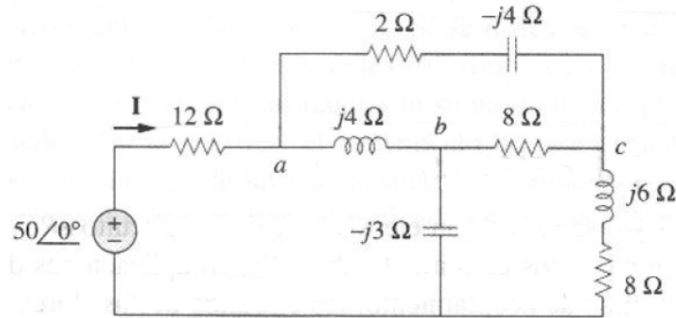


Figura 4.52: Circuito para el ejemplo

Resolución

Notese que los elementos conectados entre los nodos a , b , y c de la Figura 4.52 están conectados en delta, transformando a estrella para proceder a reducir el circuito, se tiene

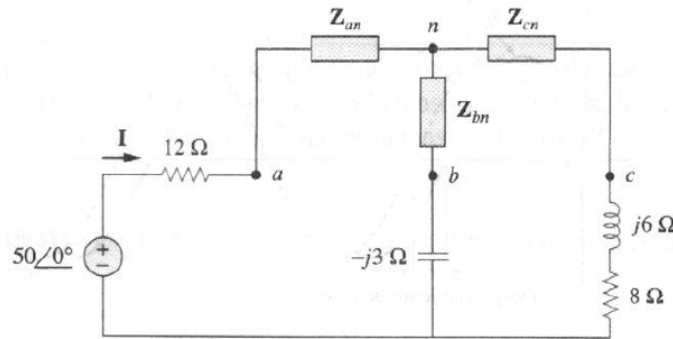


Figura 4.53: Conversión de impedancias de conexión delta a estrella

donde en la Figura 4.53, las impedancias en estrella son las siguientes

$$Z_{an} = \frac{(2 - j4)(4)}{2 - j4 + 8 + j4} = 1.6 + j0.8[\Omega]$$

$$Z_{bn} = \frac{(j4)(8)}{2 - j4 + 8 + j4} = j3.2[\Omega]$$

$$Z_{cn} = \frac{(2 - j4)(8)}{2 - j4 + 8 + j4} = 1.6 - j3.2[\Omega]$$

reduciendo impedancias en serie se tiene en el circuito de la Figura 4.53, se tiene

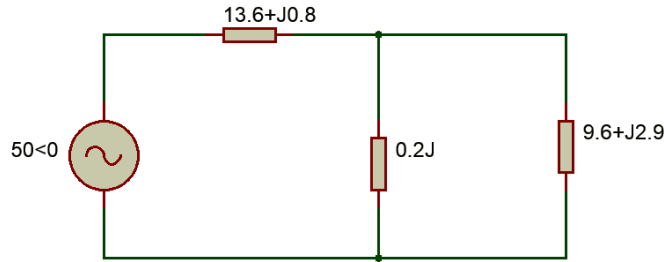


Figura 4.54: Reducción de impedancias en serie

reduciendo las impedancias restantes, se obtiene el circuito mostrado en la Figura 4.55

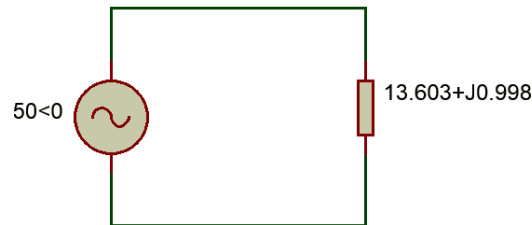


Figura 4.55: Reducción de impedancias

Finalmente realizando las operaciones con los fasores, se tiene que

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{50\angle 0^\circ}{13.603 + j0.998} = \frac{50\angle 0^\circ}{13.63\angle 4.199^\circ} = 3.66\angle -4.199^\circ [A]$$

4.5.5. Método fasorial de análisis de circuitos, limitaciones y aplicabilidad

El método fasorial para el análisis de CA, se llama análisis fasorial y es un tema colateral de la forma más general de la transformada de Fourier, utilizando números complejos. Por tanto una vez desarrollados sus elementos, en general no tienen interpretación física en el dominio del tiempo, tal como ocurre con la transformada de Laplace y la transformada de Fourier.

A semejanza de las transformadas anteriores, el método fasorial solo es aplicable a sistemas electromagnéticos lineales e invariantes con el tiempo, con el caso particular que solo admite excitaciones sinusoidales dando por respuestas en estado permanente también estas señales.

Análogamente al capítulo 3, la metodología de análisis por nodos y mallas, junto a los equivalentes de Thévenin y Norton, es la misma con la diferencia que ahora las matrices incluyen números complejos.

Ejemplo 4.5.11 Determinar $V_1(t)$ y $V_c(t)$ en el siguiente circuito mostrado en la Figura 4.56 con $V(t) = 5 \cos(t)$

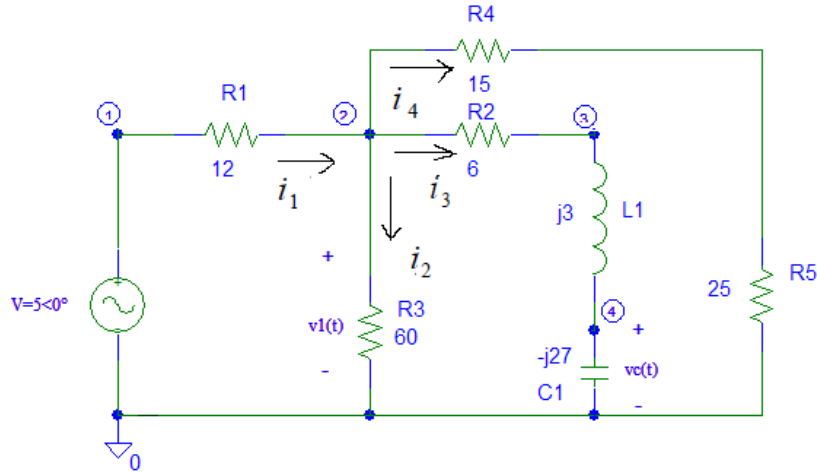


Figura 4.56: Circuito para el ejemplo

Resolución:

Aplicando LCK en los nodos

1. $i_1 = i_1 \Rightarrow \frac{5}{12} = \frac{V_1 - V_2}{12}$
2. $i_1 = i_2 + i_3 + i_5 \Rightarrow \frac{V_1 - V_2}{12} = \frac{V_2}{60} + \frac{V_2 - V_3}{6} + \frac{V_2}{40}$
3. $i_3 = i_3 \Rightarrow \frac{V_2 - V_3}{6} = \frac{V_3 - V_4}{j3}$
4. $i_3 = i_3 \Rightarrow \frac{V_3 - V_4}{j3} = \frac{V_4}{-j27}$

Con ley de Ohm expresando las corrientes en términos de las tensiones de nodo, simplificando y reordenando términos, se tiene

1. $\frac{5}{12} = \left(\frac{1}{12}\right) V_1 - \frac{1}{12} V_2$
2. $\frac{5}{12} = -\frac{1}{12} V_1 + \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{60} + \frac{1}{6} + \frac{1}{40}\right) V_2 - \frac{1}{6} V_3$
3. $0 = -\frac{1}{6} V_2 + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{j3}\right) V_3 - \frac{1}{j3} V_4$
4. $0 = -\frac{1}{j3} V_3 + \left(\frac{1}{j3} - \frac{1}{j27}\right) V_4$

reescribiendo el sistema de ecuaciones en forma matricial

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{12} \\ \frac{5}{12} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{60} + \frac{1}{6} + \frac{1}{40}\right) & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} & \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{j3}\right) & -\frac{1}{j3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{j3} & \left(\frac{1}{j3} - \frac{1}{j27}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}$$

pero la tensión en el nodo 1 esta dada por la fuente de tensión, por lo que se obtiene un grado de libertad, es decir, se elimina una ecuación del sistema y esta corresponde a eliminar el primer renglon y la primera columna del sistema matricial, con lo que se llega a

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{12} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{60} + \frac{1}{6} + \frac{1}{40}\right) & -\frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{j3}\right) & -\frac{1}{j3} \\ 0 & -\frac{1}{j3} & \left(\frac{1}{j3} - \frac{1}{j27}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{60} + \frac{1}{6} + \frac{1}{40}\right) & -\frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{j3}\right) & -\frac{1}{j3} \\ 0 & -\frac{1}{j3} & \left(\frac{1}{j3} - \frac{1}{j27}\right) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{5}{12} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente realizando la operación matricial $V_n = Y_n^{-1}I_n$, se obtienen todas las tensiones nodales, así pues las tensiones son $V_1 = 5 + j0[V]$, $V_2 = 2.8497 - j0.8290[V]$, $V_3 = 2.4870 - j1.4508[V]$ y $V_4 = 2.7979 - j1.6321[V]$

y en su forma fasorial

$V_1 = 5\angle 0^\circ[V]$, $V_2 = 2.967\angle -16.220^\circ[V]$, $V_3 = 2.879\angle -30.25^\circ[V]$ y $V_4 = 3.23\angle -30.25^\circ[V]$.

Las tensiones pedidas son: $V_1(t) = V_2 = 2.967 \cos(t - 16.220^\circ)$ y $V_C(t) = V_4 = 3.23 \cos(t - 30.25^\circ)$

Ejemplo 4.5.12 Obtener $V_1(t)$ y $V_C(t)$ en el circuito mostrado en la Figura 4.57, empleando análisis de mallas

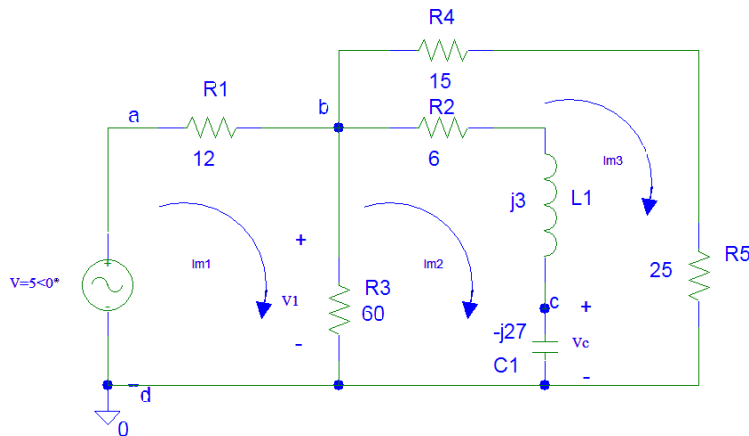


Figura 4.57: Circuito para el ejemplo

Resolución:

Aplicando LVK en las mallas 1, 2 y 3 se tiene

1. $5 = (60 + 12)i_1 - 60i_2$
2. $0 = -60i_1 + [(6 + 60) + j(3 - 27)]i_2 - [6 + j(3 - 27)]i_3$

$$3. 0 = -[6 + j(3 - 27)]i_2 + [(25 + 15 + 6) + j(3 - 27)]i_3$$

reescribiendo en forma matricial y simplificando términos

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 72 & -60 & 0 \\ -60 & 66 - j24 & -6 + j24 \\ 0 & -6 + j24 & 46 - j24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 72 & -60 & 0 \\ -60 & 66 - j24 & -6 + j24 \\ 0 & -6 + j24 & 46 - j24 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Las corrientes de malla obtenidas son: $i_1 = 0.1792 + j0.0691[A]$, $i_2 = 0.1317 + j0.0829[A]$ e $i_3 = 0.0712 - j0.0207[A]$,

y para obtener las tensiones $V_1 = 60(i_1 - i_2)$ y $V_c = (-j27)(i_2 - i_3)$, se tiene

$$V_1 = (0.0475 - j0.0138)(60) = 2.8500 - j0.8280[V] = 2.967\angle -16.199^\circ[V]$$

$$V_C = (0.0605 + 0.1036j)(-j27) = 2.7972 - j1.6335[V] = 3.239\angle -30.28^\circ[V]$$

Finalmente

$$V_1(t) = 2.967 \cos(t - 16.199^\circ)[V]$$

$$V_C(t) = 3.239 \cos(t - 30.28^\circ)[V]$$

Capítulo 5

Potencia eléctrica

5.1. Potencia instantánea

5.1.1. Cálculo de la potencia instantánea

En CD la potencia se define como el producto de la tensión en terminales y la corriente que circula por el circuito, este producto es una cantidad constante.

En CA la tensión y la corriente son senoidales variantes en el tiempo, por lo tanto el producto de ambas es también una cantidad variable. Esta potencia recibe el nombre de potencia instantánea, se mide en Watts [W] y se expresa como

$$p = vi \quad (5.1)$$

La potencia instantánea para cada uno de los elementos básicos de los circuitos eléctricos se define como:

I) Circuito resistivo (no hay defasamiento entre v e i)

Para el circuito resistivo se tiene que

$$v_R = V_p \cos(\omega t)$$

$$i_R = I_p \cos(\omega t)$$

de la definición de potencia instantánea (5.1) se llega a

$p = V_p I_p \cos^2(\omega t)$, empleando identidades trigonométricas, la potencia instantánea para un circuito puramente resistivo está dada por

$$p = \frac{V_p I_p}{2} + \frac{V_p I_p}{2} \cos(2\omega t) \quad (5.2)$$

Observaciones:

- La potencia es ondulatoria con el doble de la frecuencia de oscilación.
- Por el término constante ya no está centrada en el eje del tiempo.
- No es constante ni tampoco alterna pero si varía en el tiempo.

- Es unidireccional, siempre fluye de la fuente hacia la carga.

II) Circuito inductivo (defasamiento de 90° entre v e i)

Para un circuito bajo comportamiento predominantemente inductivo, la tensión y la corriente tienen la siguiente forma

$$v_L = V_p \cos(\omega t)$$

$$i_L = I_p \cos(\omega t - 90^\circ)$$

de la definición de potencia instantánea (5.1) se llega a $p = V_p I_p \cos^2(\omega t) \cos(\omega t - 90^\circ)$, empleando identidades trigonométricas y simplificando, la potencia instantánea para un circuito bajo comportamiento predominantemente inductivo está dada por

$$p = \frac{V_p I_p}{2} \sin(2\omega t) \quad (5.3)$$

Observaciones:

- Es senoidal, del doble de la frecuencia de la tensión y la corriente.
- Tiene valores positivos y negativos por lo tanto es bidireccional, la mitad del ciclo va de la fuente hacia la carga, y la otra mitad de la carga a la fuente.
- Esta potencia se encarga de la formación y desaparición del campo magnético del inductor, es una potencia magnetizante y requiere que la corriente se atrase 90° a la tensión.

III) Circuito capacitivo (defasamiento de -90° entre v e i)

Para un circuito bajo comportamiento predominantemente capacitivo, la tensión y la corriente tienen la siguiente forma

$$v_C = V_p \cos(\omega t)$$

$$i_C = I_p \cos(\omega t + 90^\circ)$$

de la definición de potencia instantánea (5.1) se llega a $p = V_p I_p \cos^2(\omega t) \cos(\omega t + 90^\circ)$, empleando identidades trigonométricas y simplificando, la potencia instantánea para un circuito bajo comportamiento predominantemente capacitivo está dada por

$$p = -\frac{V_p I_p}{2} \sin(2\omega t) \quad (5.4)$$

Observaciones:

- Es senoidal, del doble de la frecuencia de la corriente y la tensión
- Tiene polaridad opuesta a la inductiva
- Es bidireccional, en una mitad del ciclo va de la fuente a la carga, y la otra mitad va de la carga hacia la fuente.
- Esta potencia se encarga de la formación y desaparición del campo eléctrico del capacitor, es necesaria para mantener el campo eléctrico en las placas del capacitor.
- Para que la corriente sea generadora de campos eléctricos, se requiere que esté adelantada 90° con respecto a la tensión del capacitor

5.1.2. Interpretación física de la potencia instantánea en términos de la energía

Dado que la energía en Joules [J] es la integral de la potencia instantánea, se tiene que la energía entregada por la fuente al circuito desde un tiempo t_0 al tiempo t es

$$w(t_0, t) = \int_{t_0}^t p(t)dt = \int_{t_0}^t v(t)i(t)dt [W] \quad (5.5)$$

5.2. Potencia promedio

5.2.1. Cálculo de la potencia promedio

En CA la corriente, la tensión y la potencia tienen valores que varían con el tiempo, por ello no se acostumbra utilizar valores instantáneos por esa dependencia. En circuitos eléctricos se requiere conocer la cantidad promedio de potencia entregada o absorbida en un lapso de tiempo.

El valor promedio para una función periódica cualesquiera se define como

$$V_{prom} = \frac{1}{T} \int_0^T g(t)dt \quad (5.6)$$

aplicando la definición de valor promedio (5.6) a la forma senoidal de la tensión

$$V_{prom} = \frac{1}{T} \int_0^T V_p \cos(\omega t)dt$$

recordando la definición de periodo ($T = \frac{1}{f}$) y con $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$, $T = \frac{2\pi}{\omega}$, es posible expresar

$$V_{prom} = \frac{V_p}{T} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos(\omega t)dt, \text{ resolviendo la integral}$$

$$V_{prom} = \frac{V_p}{T} [\sin(\omega t)]_0^{\frac{2\pi}{\omega}}$$

$$V_{prom} = \frac{V_p}{\omega T} \{ \sin[\omega (\frac{2\pi}{\omega})] - \sin[\omega(0)] \}$$

$$V_{prom} = 0$$

por lo tanto el valor promedio de una señal es cero.

Aplicando valor promedio a la potencia instantánea

a) P_{prom} **Resistor:**

$$P_{prom} = \frac{1}{T} \int_0^T P dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{V_p I_p}{2} + \frac{V_p I_p}{2} \cos(\omega t) \right] dt$$

resolviendo la integral

$$P_{prom} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{V_p I_p}{2} dt + \frac{1}{T} \int_0^T \frac{V_p I_p}{2} \cos(\omega t) dt$$

$$= \frac{V_p I_p}{2T} [T - 0] + \frac{V_p I_p}{2\omega t} [\sin(2\omega t)]_0^T = \frac{V_p I_p}{2} + \frac{V_p I_p}{2\omega t} [\sin(2\frac{2\pi}{T}T) - \sin(0)]$$

$\therefore P_{prom} = \frac{V_p I_p}{2} \rightarrow$ aunque la potencia instantánea sea variable, hay una cantidad promedio de potencia que se transfiere de la fuente al resistor.

b) P_{prom} **Inductor:**

$$P_{prom} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{V_p I_p}{2} \sin(2\omega t) dt, \text{ la cuál sigue siendo senoidal y su valor promedio es cero.}$$

Existe un ir y venir de energía en forma periodica de la fuente al inductor y viceversa, cuyo resultado final al cabo de un periodo T es cero.

c) P_{prom} **Capacitor:**

$$P_{prom} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{-V_p I_p}{2} \sin(2\omega t) dt$$

$$= -\frac{1}{T} \frac{V_p I_p}{2} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin(2\omega t) dt = \frac{1}{T} \frac{V_p I_p}{2} \frac{1}{2\omega} [\cos(2\omega \frac{2\pi}{\omega}) - \cos(0)] = 0, \text{ el valor promedio de una señal senoidal es cero.}$$

Existe un ir y venir de energía en forma periódica de la fuente al capacitor y viceversa, cuyo resultado final al cabo de un periodo T es cero.

Es importante señalar que $p(t)$ es variable en el tiempo, mientras que P no depende del tiempo. Para hallar la potencia instantánea p deben tenerse tanto a v como a i en el tiempo, en cambio la potencia promedio P puede hallarse con la tensión y la corriente en el dominio fasorial, cuyos fasores están dados por

$$\mathbf{V} = V_P \angle \theta_v$$

$$\mathbf{I} = I_P \angle \theta_i$$

se calcula P empleando fasores como

$$\frac{1}{2} \mathbf{V} \mathbf{I}^* = \frac{1}{2} V_p I_P \angle \theta_v - \theta_i$$

$$= \frac{1}{2} V_p I_P [\cos(\theta_v - \theta_i) + j \sin(\theta_v - \theta_i)]$$

la parte real de la expresión anterior equivale a la potencia promedio

$$P = \frac{1}{2} \Re \{ \mathbf{V} \mathbf{I}^* \} = \frac{1}{2} V_p I_P \cos(\theta_v - \theta_i) \quad (5.7)$$

Considerando dos casos especiales para la ecuación (5.7)

- Cuando $\theta_v = \theta_i$ el circuito es puramente resistivo, tanto v e i están en fase

$$\therefore P = \frac{1}{2} V_p I_p = \frac{1}{2} I_p^2 R = \frac{1}{2} |\mathbf{I}|^2 R$$

ya que de la teoría de números complejos $|\mathbf{I}|^2 = \mathbf{I} \times \mathbf{I}^*$, por lo tanto un circuito puramente resistivo absorbe potencia todo el tiempo, como ya se sabía previamente.

- Cuando $\theta_v = \theta_i = \pm 90^\circ$ se tiene un circuito puramente reactivo y

$$P = \frac{1}{2} V_p I_p \cos(90^\circ) = 0$$

lo cual indica que el circuito puramente reactivo no absorbe potencia promedio, como ya se sabía anteriormente.

5.2.2. Interpretación física de la potencia promedio en términos de la energía

Dado que la energía en Joules [J] es la integral de la potencia promedio, se tiene que la energía entregada por la fuente al circuito desde un tiempo t_0 al tiempo t es

$$w(t_0, t) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^t P_{prom} dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^t v(t) i(t) dt [W] \quad (5.8)$$

5.3. Valores efectivos

5.3.1. Definición de valor efectivo o RMS

Dado que el valor promedio de una función senoidal es cero, habrá que definir otra figura significativa que represente a una cantidad que varía continuamente.

Se supone para este fin el valor eficaz, analizando un circuito resistivo tanto en CA y CD como se muestra en la Figura 5.1

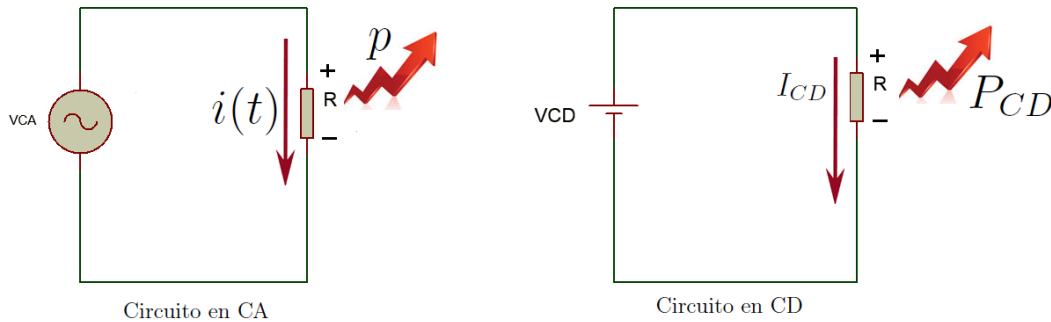


Figura 5.1: Definición de valor eficaz

En el circuito en alterna de la Figura 5.1 la potencia promedio que entrega la fuente es $p = \frac{1}{T} \int_0^T R i^2(t) dt$ y la potencia disipada por el mismo resistor, pero ahora en el circuito de CD es $P_{CD} = R I_{CD}^2$, considerando que las potencias son iguales

$$\Rightarrow R I_{CD}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T R i^2(t) dt$$

$$I_{CD} = \sqrt{\frac{1}{RT} \int_0^T Ri^2(t) dt}$$

el término I_{CD} indica una expresión que permite calcular la corriente equivalente en CD de una corriente en CA con la misma capacidad para entregar energía. Este valor constante recibe el nombre de valor eficaz o raíz media cuadrática (RMS por sus siglas en inglés)

$$I_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}$$

Fisicamente implica que una corriente $i(t)$ variable en el tiempo, tiene una corriente equivalente constante I_{RMS} con la misma capacidad de entregar o absorber potencia que la corriente $i(t)$.

5.3.2. Valor RMS para diferentes formas de onda

Para una señal de tensión se aplica el mismo concepto, llegando a

$$V_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T V^2(t) dt}$$

cuando la señal es senoidal

$$V_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T V_p^2 \cos^2(\omega t) dt}$$

con ayuda de identidades trigonométricas, se puede expresar

$$V_{RMS} = \sqrt{\frac{V_p^2}{2T} \int_0^T \frac{\cos(2\omega t) + 1}{2} dt}$$

$$V_{RMS} = \sqrt{\frac{V_p^2}{2T} \int_0^T \cos(2\omega t) + \int_0^T dt}$$

la primera integral se vuelve cero, ya que es una función senoidal integrada en un ciclo completo, así pues se tiene

$$V_{RMS} = \sqrt{\frac{V_p^2}{2T} \int_0^T dt} = \sqrt{\frac{V_p^2}{2T} T}$$

$$\therefore V_{RMS} = \frac{V_p}{\sqrt{2}}$$

y para una corriente senoidal, su valor eficaz está dado por

$$I_{RMS} = \frac{I_p}{\sqrt{2}}$$

El valor eficaz se obtiene con base en la capacidad de entregar energía o disipar energía de un resistor. El uso del valor eficaz en los circuitos de CA es mas frecuente que el uso de los valores máximos o valores pico ya que una limitante en la operación y diseño de equipo eléctrico es la energía disipada por calor. Los fasores de tensión o corriente se utilizan en base a sus valores eficaces. Con base a lo anterior, la potencia promedio se obtiene como

$$P = V_{RMS}I_{RMS} = \frac{\sqrt{2}V_{RMS}\sqrt{2}I_{RMS}}{2} = V_{RMS}I_{RMS}.$$

5.4. Potencia compleja

5.4.1. Cálculo de la potencia compleja para circuitos con excitación sinusoidal

Considerando el circuito mostrado en la Figura 5.2, el ángulo entre los fasores V e I no es 0° porque el circuito no es resistivo puramente, ni tampoco 90° porque tampoco es inductivo puramente.

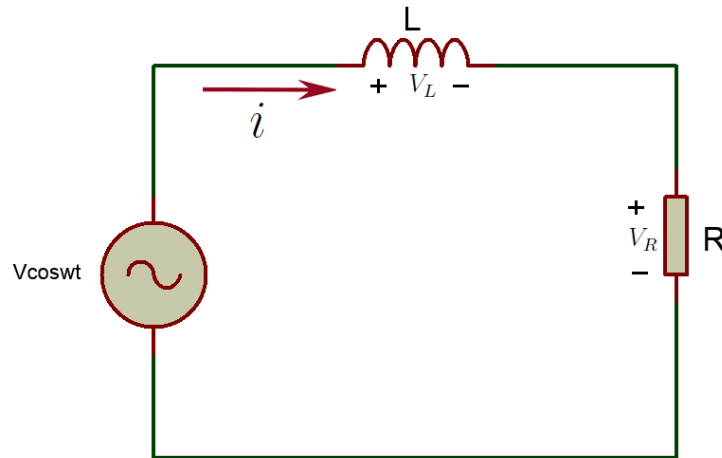


Figura 5.2: Potencia en CA

Así pues la tensión y la corriente tienen la siguiente forma

$$v = \sqrt{2}V_{RMS} \cos(\omega t)$$

$$i = \sqrt{2}I_{RMS} \cos(\omega t - \varphi)$$

donde φ es el ángulo entre los fasores corriente y tensión.

La potencia del circuito es

$$P = vi = 2V_{RMS}I_{RMS} \cos(\omega t) \cos(\omega t - \varphi)$$

empleando identidades trigonométricas

$$\begin{aligned} p &= 2V_{RMS}I_{RMS} \cos(\omega t) [\cos(\omega t) \cos(\varphi) - \sin(\omega t) \sin(\varphi)] \\ &= 2V_{RMS}I_{RMS} \cos^2(\omega t) \cos(\varphi) + 2V_{RMS}I_{RMS} \sin(\omega t) \cos(\omega t) \sin(\varphi) \end{aligned}$$

con ayuda de las identidades trigonométricas:

$$\cos^2(\omega t) = \frac{\cos(2\omega t) + 1}{2}$$

y

$$\sin(2\omega t) = 2 \sin(\omega t) \cos(\omega t)$$

la potencia instantánea del circuito se puede expresar como

$$p_{inst} = V_{RMS}I_{RMS} \cos(2\omega t) \cos(\varphi) + V_{RMS}I_{RMS} \cos(\varphi) + V_{RMS}I_{RMS} \sin(2\omega t) \sin(\varphi) \quad (5.9)$$

5.4.2. Potencia activa y potencia reactiva en circuitos con excitación sinusoidal

La ecuación (5.9) obtenida anteriormente tiene tres sumandos, el de la izquierda y el centro corresponden a la potencia instantánea del resistor multiplicada por $\cos(\varphi)$, la cuál es idéntica a la potencia instantánea del resistor dada por la ecuación (5.2) pero en valores eficaces. Mientras que la potencia promedio es el sumando central de (5.9) el cual es un valor constante

$$P = V_{RMS}I_{RMS} \cos(\varphi) \quad (5.10)$$

la ecuación (5.10) corresponde al valor promedio que la fuente entrega a la carga en un tiempo T y siempre fluye del suministro a la carga.

La potencia promedio es aquella que tiene la capacidad de ejercer trabajo. Esta característica recibe el nombre de potencia activa y su unidad es el Watt [W].

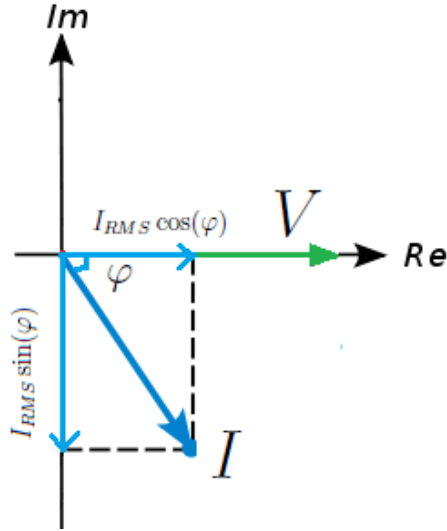


Figura 5.3: Diagrama fasorial del circuito RL

Observando la Figura 5.3, el fasor corriente se encuentra atrasado a un ángulo φ respecto a la tensión aplicada. La proyección de la corriente sobre el eje real en fase con la tensión V recibe el nombre de componente activa de la corriente y es la encargada de generar potencia activa, en donde el producto del valor eficaz de la tensión por la componente activa de la corriente da como resultado P .

El sumando de la derecha de la ecuación (5.9) es la potencia instantánea del inductor multiplicada por $\sin(\varphi)$, la cual es idéntica a la potencia del inductor (5.4) en valores eficaces, en ambas expresiones no hay un término constante lo cuál implica que es bidireccional. Esta potencia es fluctuante y es originada por un elemento reactivo (inductor) con amplitud dada por los valores eficaces de la tensión y la corriente multiplicados por $\sin(\varphi)$, a esta potencia se le denomina reactiva y se denota por la letra Q

$$Q = V_{RMS} I_{RMS} \sin(\varphi)$$

esta potencia fluye en ambas direcciones a diferencia de P y se mide en Volt-ampere-reactivos [VAR].

en la Figura 5.3, la proyección de la corriente sobre el eje imaginario o eje de cuadratura recibe el nombre de componente reactiva de la corriente y es la encargada de generar la potencia reactiva, lo cual se comprueba multiplicando el valor eficaz de la tensión por la componente reactiva de la corriente que da como resultado Q .

Finalmente la potencia aparente o compleja se define como

$$S = P + jQ \tag{5.11}$$

ya que el producto de los valores eficaces de tensión por la corriente expresa la cantidad total de potencia que la fuente entrega a la carga, esta potencia recibe el nombre de potencia aparente se denota por S y su unidad es el Volt-Ampere [VA].

Dado que las potencias activa y reactiva se obtienen mediante las proyecciones de la corriente, sus valores siempre serán menores al valor de la potencia aparente, salvo cuando

- a) El circuito sea puramente resistivo, $P = S$
- b) El circuito sea puramente inductivo o capacitivo, $Q = S$

Una analogía muy común y que facilita el entendimiento de estos conceptos se muestra en la Figura 5.4

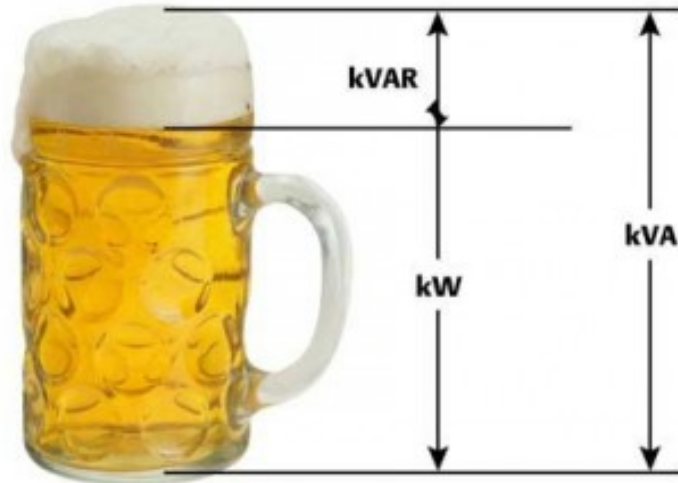


Figura 5.4: Analogía para los conceptos de potencia

5.4.3. Triángulo de potencias

Dado que P y Q se obtienen de proyectar la corriente sobre el eje de la tensión (eje real) y el eje de cuadratura (eje imaginario), entonces dichas potencias se pueden representar mediante un triángulo rectángulo, llamado triángulo de potencias donde el cateto adyacente u horizontal representa a P y el cateto vertical u opuesto representa a Q , mientras el ángulo φ es el ángulo de la impedancia.

La orientación del triángulo se debe al tipo de circuito, ya que es su impedancia la cual define el defasamiento entre la tensión y la corriente.

i) Circuito R-L

Cuya impedancia es $Z = R + jX_L$, donde la parte reactiva debida al inductor se encuentra en la parte positiva del eje imaginario por lo tanto φ es positivo. entonces el triángulo es como se muestra en la Figura 5.5 y consume potencia reactiva positiva (+)

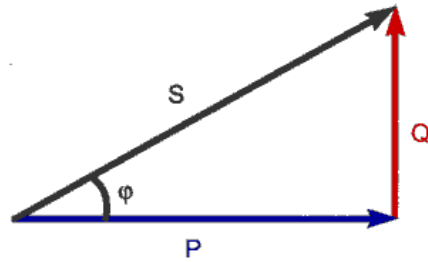


Figura 5.5: Triángulo de potencias para circuitos predominantemente inductivos

ii) **Circuito R-C**

Cuya impedancia es $Z = R - jX_C$, donde la parte reactiva debida al capacitor se encuentra en la parte negativa del eje imaginario por lo tanto φ es negativo. entonces el triángulo es como se muestra en la Figura 5.6 y consume potencia reactiva negativa (-)

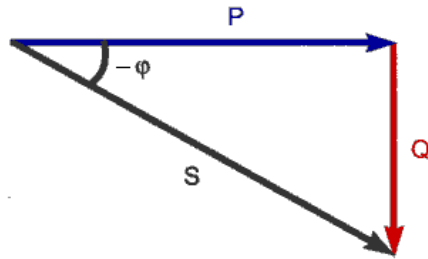


Figura 5.6: Triángulo de potencias para circuitos predominantemente capacitivos

5.4.4. Factor de potencia

Es la relación entre la potencia que produce trabajo y la potencia total consumida o suministrada y se calcula como

$$fp = \frac{P}{S} \tag{5.12}$$

(5.12) en condiciones senoidales

$$fp = \frac{V_{RMS} I_{RMS} \cos(\varphi)}{V_{RMS} I_{RMS}}$$

$$\therefore fp = \cos(\varphi)$$

Observaciones

- Dado que $P < S$ excepto en el caso puramente resistivo, entonces $0 \leq fp \leq 1$.
- Si el defasamiento se da por un inductor, el fp es inductivo o atrasado ya que la corriente se atrasa respecto a la tensión.
- Si el defasamiento se da por un capacitor, el fp es capacitivo o adelantado ya que la tensión se adelanta respecto a la corriente.

- Entre mas pequeño φ el fp se acerca a 1.
- Un fp cercano a 1, implica que casi toda la potencia entregada por la fuente se transforma en trabajo.
- Un fp alejado de la unidad implica que solo una parte de la potencia se transforma en trabajo, la otra parte considerable es potencia reactiva.

Ejemplo 5.4.1 *En referencia al circuito de la Figura 5.7, hallar la potencia promedio suministrada por la fuente y la potencia promedio absorbida por el resistor.*

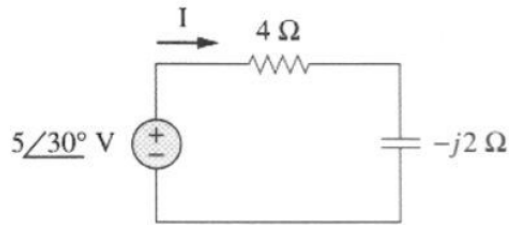


Figura 5.7: Circuito para el ejemplo

Resolución

La impedancia total por donde circula la corriente \mathbf{I} es la suma en serie de la impedancia del resistor y la impedancia del capacitor, dada por

$$\mathbf{Z} = 4 - j2 = 4.472\angle -26.57^\circ [\Omega]$$

así pues la corriente que fluye por el circuito es

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}} = \frac{5\angle 30^\circ}{4.472\angle -26.57^\circ} = 1.118\angle 56.57^\circ [A]$$

la potencia promedio suministrada por la fuente está dada por

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \Re \{ \mathbf{V} \mathbf{I}^* \} \\ &= \frac{1}{2} (5)(1.118) \cos(30^\circ - 56.57^\circ) \\ &\therefore P = 2.5 [W] \end{aligned}$$

Ahora bien, la corriente que fluye por el resistor es

$$\mathbf{I}_R = \mathbf{I} = 1.118\angle 56.57^\circ [A]$$

y la tensión entre sus terminales está dada por

$$\mathbf{V}_R = \mathbf{Z}_R \mathbf{I}_R$$

$$\mathbf{V}_R = 4(1.118\angle 56.57^\circ) = 4.472\angle 56.57^\circ [\text{V}]$$

por lo tanto, la potencia promedio absorbida por el resistor está dada por

$$P = \frac{1}{2}(4.472)(1.118) \cos(56.57^\circ - 56.57^\circ) = 2.5 [\text{W}]$$

la cual es igual a la potencia suministrada por la fuente y se cumple que el capacitor no absorbe potencia promedio

Ejemplo 5.4.2 Determinar la potencia promedio generada por cada fuente y la potencia promedio absorbida por cada elemento pasivo para el circuito de la Figura 5.8

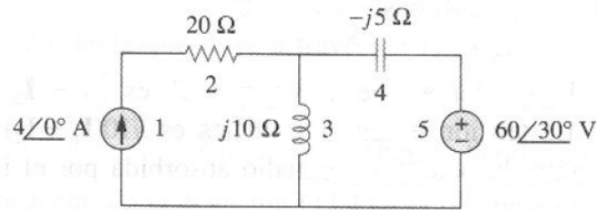


Figura 5.8: Circuito para el ejemplo

Resolución

Aplicando análisis de mallas como se muestra en la Figura 5.9

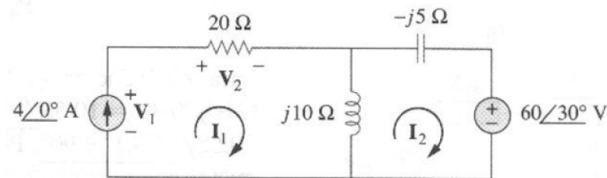


Figura 5.9: Circuito para el ejemplo

debido a la fuente de corriente en la malla 1 del circuito de la Figura 5.9 se tiene

$$\mathbf{I}_1 = 4 [\text{A}]$$

para la malla 2 y recordando la convención de signos (como se muestra en la Figura 5.10):

$$(j10 - j5)\mathbf{I}_2 - j10\mathbf{I}_1 = -60\angle 30^\circ$$

$$j5\mathbf{I}_2 - j10\mathbf{I}_1 = -60\angle 30^\circ$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{-60\angle 30^\circ + j40}{j5} = 10.58\angle 79.1^\circ [\text{A}]$$

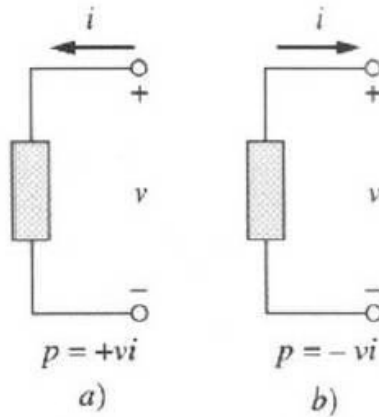


Figura 5.10: Convención pasiva de signos
a) absorción de potencia, b) suministro de potencia

Para la fuente de tensión (elemento 5 del circuito), la corriente que fluye a través de ella es $\mathbf{I}_2 = 10.58\angle 79.1^\circ [\text{A}]$ y la tensión en sus terminales es $\mathbf{V} = 60\angle 30^\circ [\text{V}]$, siguiendo la convención de signos mostrada en la Figura 5.10 la potencia es absorbida por la fuente, por lo tanto su potencia promedio es

$$P_5 = \frac{1}{2}(60)(10.58) \cos(30^\circ - 79.1^\circ) = 207.8[\text{W}]$$

Para la fuente de corriente, la corriente que fluye por ella es $\mathbf{I}_1 = 4\angle 0^\circ$, mientras que su tensión en terminales está dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 &= 20\mathbf{I}_1 + j10(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2) \\ &= 80 + j10[4(-2 - j10.39)] \\ \mathbf{V}_1 &= 184.984\angle 6.21^\circ [\text{V}] \end{aligned}$$

siguiendo la convención de signos, la potencia promedio ahora es suministrada por la fuente, así pues

$$P_1 = \frac{-1}{2}(184.984)(4) \cos(6.21^\circ - 0^\circ) = -367.8[\text{W}]$$

Para el resistor se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 &= 4\angle 0^\circ [\text{A}] \\ \mathbf{V}_R &= 20\mathbf{I}_1 \end{aligned}$$

por definición un resistor siempre absorbe potencia y esta dada por

$$P_2 = \frac{1}{2}(80)(4) = 160[\text{W}]$$

Para capacitor, la corriente que fluye por el es $\mathbf{I}_2 = 10.58\angle 79.1^\circ$ y la tensión entre sus terminales esta dada por

$$\mathbf{V}_C = -j5\mathbf{I}_2 = (5\angle 90^\circ)(10.58\angle 79.1^\circ) = 52.9\angle -10.9^\circ$$

así pues la potencia promedio es

$$P_4 = \frac{1}{2}(52.9)(10.58) \cos(-10.9^\circ - 79.1^\circ) = 0[W]$$

lo cual demuestra que los elementos reactivos no consumen potencia promedio, por lo tanto tampoco el inductor absorbe potencia promedio

$$P_3 = 0[W]$$

Así pues, es importante destacar que la potencia total es suministrada por la fuente de corriente y es igual a la potencia absorbida por la fuente de tensión (es decir se esta cargando) y el resistor.

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = -367.8[W] + 160[W] + 0[W] + 0[W] + 207.78[W] = 0$$

Ejemplo 5.4.3 Hallar el valor rms de la onda de corriente mostrada en la Figura 5.11. Si la corriente fluye a través de una resistencia de $9[\Omega]$ obtener la potencia absorbida por el resistor

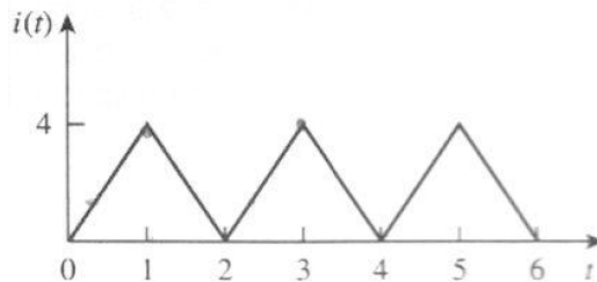


Figura 5.11: Onda de corriente

Resolución

Para obtener la función $i(t)$ los puntos de interés en el eje de las abscisas son $t = 0$, $t = 1$ y $t = 2$ y es claro que se trata de una función tipo rampa, así pues

- Se requiere una función tal que $i = 0$ cuando $t = 0$ e $i = 4$ cuando $t = 1$, lo cual se logra con la función

$$i(t) = 4t, \quad 0 < t < 1$$

- Se requiere una función tal que $i = 4$ cuando $t = 1$ e $i = 0$ cuando $t = 2$, lo cual se logra con la función

$$i(t) = -4(t - 2), \quad 1 < t < 2$$

por lo tanto la función $i(t)$ tiene un periodo $T = 2$ y esta dada por:

$$i(t) = \begin{cases} 4t & \text{si } 0 < t < 1 \\ -4(t - 2) & \text{si } 1 < t < 2 \end{cases}$$

Obteniendo el valor rms

$$I_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}$$

$$I_{rms} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\int_0^1 16t^2 dt + \int_1^2 (16t^2 - 64t + 64) dt \right]}$$

$$I_{rms} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\frac{16}{3} t^3 \Big|_0^1 + \left(\frac{16}{3} t^3 - \frac{64}{2} t^2 + 64t \right) \Big|_1^2 \right]}$$

$$I_{rms} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\frac{16}{3} + \frac{16}{3}(2)^3 - \frac{64}{2}(2)^2 + 64(2) - \frac{16}{3} + \frac{64}{2} - 64 \right]}$$

$$\therefore I_{rms} = 2.309[A]$$

y la potencia consumida por el resistor es

$$P = I_{rms}^2 R = (2.309)^2(9) = 48[W]$$

Ejemplo 5.4.4 Una carga conectada en serie toma una corriente $i(t) = 4 \cos(100\pi + 10^\circ)[A]$ cuando la tensión aplicada es $v(t) = 120 \cos(100\pi - 20^\circ)[V]$, hallar la potencia aparente y el factor de potencia de la carga. Determinar los valores de los elementos que forman la carga conectada.

Resolución

La potencia aparente está dada por

$$S = V_{rms} I_{rms} = \frac{120}{\sqrt{2}} \left(\frac{4}{\sqrt{2}} \right) = 240[VA]$$

el factor de potencia está dado por

$$f.p = \cos(\theta_v - \theta_i) = \cos(-20^\circ - 10^\circ) = \cos(\overbrace{-30^\circ}^{\text{adelanta}}) = 0.866$$

observando las ondas de i y v se aprecia que la corriente se adelanta 30° a la tensión, por lo tanto se trata de una capacitor.

La impedancia del circuito es

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{120 \angle -20^\circ}{4 \angle 10^\circ} = 30 \angle -30^\circ = \underbrace{25.98 - j15}_{\text{capacitor}}[\Omega]$$

y la carga se puede modelar como una resistencia de $25.98[\Omega]$ en serie con un capacitor de

$$X_C = -15 = \frac{-1}{\omega C}$$

$$C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{15(100\pi)} = 212.2[\mu F]$$

Conclusiones

Con el fin de dar seguimiento al aprovechamiento del estudiante se recomienda la realización de tres evaluaciones formativas, donde estas pueden ser escritas, y trabajos de simulación. La primera se aplicará al término del tema tres para corroborar que el estudiante es capaz de modelar y analizar circuitos eléctricos simples, utilizando las leyes de los circuitos. La segunda evaluación se propone incluir sólo el tema cuatro, donde los estudiantes podrán mostrar las habilidades adquiridas en el análisis del estado estacionario senoidal para los circuitos eléctricos. La tercera evaluación tendrá lugar al término del tema cinco, en donde el estudiante demostrará su capacidad para el cálculo de la potencia en circuitos eléctricos.

Al término de cada una de las evaluaciones formativas se hará saber al estudiante sus deficiencias en los temas relacionados y en consecuencia se propondrán estrategias para subsanar tales fallas, como por ejemplo el estudio de lecturas recomendadas, la realización de ejercicios de laboratorio o de simulación para reforzar o clarificar los conocimientos y las asesorías por parte de los profesores del área.

Evaluación de certificación Se propone que el instrumento de certificación sea escrito, en éste se evaluarán los conocimientos adquiridos por el estudiante sobre todos los temas tratados durante el curso. Los principales criterios para la evaluación son: La capacidad del estudiante para obtener modelos matemáticos que representen circuitos eléctricos estáticos y dinámicos, para resolver dichos modelos utilizando técnicas en el tiempo y en la frecuencia, la habilidad para la aplicación de los métodos de nodos y de mallas en el análisis de circuitos

eléctricos, la capacidad para aplicar el método de análisis fasorial a circuitos con excitación senoidal, para interpretar el comportamiento de los circuitos eléctricos a través de análisis temporal y de frecuencia y para calcular las diferentes formas de potencia en circuitos eléctricos.

En relación con lo anterior se propone la siguiente ponderación: Tema 1 (Parámetros eléctricos y sistemas de unidades) – 5%, Tema 2 (Leyes eléctricas) – 5%, Tema 3 (Técnicas fundamentales en el análisis de circuitos) – 35 %, Tema 4 (Respuesta de los circuitos) – 35%, Tema 5 (Potencia) – 20%. Se recomienda que la ponderación de los reactivos esté en función de lo anterior, debiéndose tener cuidado de que el número de reactivos debe ser el adecuado para su solución (por un estudiante) en 1 Hr. 30 min.

Ejemplo 5.4.5 La tensión en las terminales de una carga es $v(t) = 60 \cos(\omega t - 10^\circ)[V]$ y la corriente que fluye a través del elemento en la dirección de la caída de tensión es $i(t) = 1.5 \cos(\omega t + 50^\circ)[A]$ hallar

- a) Las potencias compleja y aparente
- b) Las potencias real y reactiva
- c) El f.p y la impedancia de carga

Resolución

- a) Empleando fasores

$$\mathbf{V}_{\text{rms}} = \frac{60}{\sqrt{2}} \angle -10^\circ$$

y

$$\mathbf{I}_{\text{rms}} = \frac{1.5}{\sqrt{2}} \angle 50^\circ$$

además $\varphi = \theta_v - \theta_i = -10^\circ - 50^\circ = -60^\circ$

la potencia aparente se obtiene como

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}_{\text{rms}} \mathbf{I}_{\text{rms}}^*$$

$$\mathbf{S} = \left(\frac{60}{\sqrt{2}} \angle -10^\circ \right) \left(\frac{1.5}{\sqrt{2}} \angle -50^\circ \right)$$

la potencia compleja es

$$\mathbf{S} = 45 \angle -60^\circ [VA]$$

así mismo la potencia aparente es $S = |\mathbf{S}| = 45 [VA]$

- b) Las potencias real y compleja se obtienen expresando en forma rectangular a \mathbf{S}

$$\mathbf{S} = 22.5 - j38.97 [VA]$$

o equivalentemente

$$P = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos(\varphi) = \frac{60}{\sqrt{2}} \frac{1.5}{\sqrt{2}} \cos(-60^\circ) = 22.5 [W]$$

$$Q = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \sin(\varphi) = \frac{60}{\sqrt{2}} \frac{1.5}{\sqrt{2}} \sin(-60^\circ) = -38.97 [VAR]$$

- c) El factor de potencia es

$$f.p = \cos(\varphi) = \cos(\underbrace{-60^\circ}_{\text{adelantado}}) = 0.5$$

por lo que la impedancia de la carga es

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{60 \angle -10^\circ}{1.5 \angle 50^\circ} = 40 \angle -60^\circ [\Omega]$$

y esta impedancia es capacitiva.

Conclusiones

Con el fin de dar seguimiento al aprovechamiento del estudiante se recomienda la realización de tres evaluaciones formativas, donde estas pueden ser escritas, y trabajos de simulación. La primera se aplicará al término del tema tres para corroborar que el estudiante es capaz de modelar y analizar circuitos eléctricos simples, utilizando las leyes de los circuitos. La segunda evaluación se propone incluir sólo el tema cuatro, donde los estudiantes podrán mostrar las habilidades adquiridas en el análisis del estado estacionario senoidal para los circuitos eléctricos. La tercera evaluación tendrá lugar al término del tema cinco, en donde el estudiante demostrará su capacidad para el cálculo de la potencia en circuitos eléctricos.

Al término de cada una de las evaluaciones formativas se hará saber al estudiante sus deficiencias en los temas relacionados y en consecuencia se propondrán estrategias para subsanar tales fallas, como por ejemplo el estudio de lecturas recomendadas, la realización de ejercicios de laboratorio o de simulación para reforzar o clarificar los conocimientos y las asesorías por parte de los profesores del área.

Evaluación de certificación Se propone que el instrumento de certificación sea escrito, en éste se evaluarán los conocimientos adquiridos por el estudiante sobre todos los temas tratados durante el curso. Los principales criterios para la evaluación son: La capacidad del estudiante para obtener modelos matemáticos que representen circuitos eléctricos estáticos y dinámicos, para resolver dichos modelos utilizando técnicas en el tiempo y en la frecuencia, la habilidad para la aplicación de los métodos de nodos y de mallas en el análisis de circuitos eléctricos, la capacidad para aplicar el método de análisis fasorial a circuitos con excitación senoidal, para interpretar el comportamiento de los circuitos eléctricos a través de análisis temporal y de frecuencia y para calcular las diferentes formas de potencia en circuitos eléctricos.

En relación con lo anterior se propone la siguiente ponderación: Tema 1 (Parámetros eléctricos y sistemas de unidades) – 5%, Tema 2 (Leyes eléctricas) – 5%, Tema 3 (Técnicas fundamentales en el análisis de circuitos) – 35 %, Tema 4 (Respuesta de los circuitos) – 35%, Tema 5 (Potencia) – 20%. Se recomienda que la ponderación de los reactivos esté en función de lo anterior,

debiéndose tener cuidado de que el número de reactivos debe ser el adecuado para su solución (por un estudiante) en 1 Hr. 30 min.

Bibliografía

- Gómez, A., Olivera, J., Problemas Resueltos de Teoría de Circuitos. 1990, Paraninfo, Madrid.
- Hayt W., Análisis de circuitos de Ingeniería, 1993, Ed. Mc Graw-Hill, México.
- Jonhson D., Análisis Básico de Circuitos Eléctricos, 1995, Ed. Prentice Hall Hispanoamericana, México.
- Dorf, Richard C. y Svoboda James A., Circuitos Eléctricos Introducción al Análisis y Diseño, 3era edición, 2000, Ed. Alfaomega.
- D. E. Johnson, J. L. Hilburn, J. R. Johnson, P. D. Scott, Análisis Básico de Circuitos Eléctricos, (1996), Ed. Prentice Hall.

Referencias electrónicas

- <https://www.uacm.edu.mx/>
- <https://www.uacm.edu.mx/OfertaAcademica/CCyT/SistemasElectronicosydeTelecomunicaciones>
- https://www.uacm.edu.mx/Portals/0/OfertaAcademica/CCyT/Programas/CS/ISET/5/Teoria_circuitos.pdf