

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ECONOMÍA

“MODELACIÓN Y PRONÓSTICO DE LA
ESTRUCTURA DE TASAS DE INTERÉS EN
MÉXICO: 2004-2018”

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE LICENCIADO EN
ECONOMÍA

PRESENTA:

GERARDO ROCHA BENIGNO

DIRECTOR DE TESIS: DR. JUAN LUIS ORDAZ DÍAZ

MÉXICO, CIUDAD DE MÉXICO A 10 DE MARZO DE 2019





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

ÍNDICE

RESUMEN	3
INTRODUCCIÓN	6
CAPÍTULO 1. DEFINICIONES Y MARCO TEÓRICO	11
CAPÍTULO 2. EL MERCADO DE BONOS SOBERANOS EN MÉXICO	31
CAPÍTULO 3. MODELOS.....	37
CAPÍTULO 4. DATOS	51
CAPÍTULO 5. APLICACIÓN DE LOS MODELOS	56
CONCLUSIONES	76
REFERENCIAS	78
APÉNDICES.....	81

RESUMEN

El ajuste y pronóstico de la curva de rendimiento de bonos soberanos es un ejercicio que interesa tanto a instituciones públicas como privadas. Los bancos centrales que utilizan el objetivo de tasa de interés interbancaria como herramienta de transmisión de política monetaria deben monitorear constantemente las demás tasas de interés de otros activos para asegurar que las acciones tomadas por esta institución tengan el efecto deseado sobre el resto de la economía.

Los agentes privados por su parte, están interesados constantemente en conocer la curva de rendimiento ya que es una herramienta crucial para la asignación de precios no solamente de productos de tasa de interés, sino para la asignación de otros productos financieros como derivados; además, la curva de rendimiento provee de una referencia sobre el rendimiento mínimo que uno puede esperar por una inversión en un proyecto de madurez similar a la de un bono incluido en la curva.

A pesar de lo anterior, el estudio teórico y empírico sobre las fuerzas que determinan la estructura transversal y dinámica de la estructura de tasas de interés es un tópico que continúa generando un gran debate entre economistas y especialistas financieros, así como lo sigue siendo el estudio sobre los mejores métodos econométricos de aplicación de los modelos teóricos.

Una vertiente en el estudio de la estructura de tasas de interés es a través del uso de modelos de factores. Estos modelos pueden ser descritos como modelos en los que, en lugar de utilizar los propios rendimientos de la estructura de tasas de interés para la estimación y pronóstico de esta, se extrae un conjunto de factores comunes a todos los rendimientos.

Las razones del uso de factores sobre los propios rendimientos son las siguientes:

- La alta dimensionalidad que conlleva incluir en el estudio de la dinámica de las estructura de tasas de interés, a los propios rendimientos, generalmente arroja relaciones espurias y matrices de coeficientes insignificantes.

- Parece existir de manera subyacente una estructura común a todos los rendimientos de bonos bajo estudio y que ayuda a estimar a los rendimientos de bonos no incluidos en el análisis.

La mayoría de los estudios generalmente se han hecho analizando la estructura de tasas de interés en países desarrollados, especialmente haciendo uso de datos de la estructura de tasas de interés en Estados Unidos, y no para otro tipo de países como países en vías de desarrollo. Particularmente, para el caso de México, el estudio de la estructura de tasas de interés utilizando estos modelos ha sido limitado a trabajos como Ramos-Francia y Torres (2008), Cortés y Ramos-Francia (2008) y Elizondo (2013).

Dado lo anterior, este trabajo tiene como objetivo contribuir en la reducción de la brecha que persiste en el estudio de la estructura de tasas de interés en México y, especialmente, evaluar el poder de ajuste dentro de la muestra y pronóstico fuera de la muestra de estos modelos. Para esto, se realizó ajuste dentro de la muestra que corresponde desde enero de 2004 hasta diciembre de 2015 y un pronóstico fuera de la muestra que cubre el período que comprende desde enero de 2016 a octubre de 2018.

Los modelos utilizados en el presente trabajo son dos ampliamente utilizados en la caracterización de la estructura de tasas de interés y para el pronóstico de esta: el modelo Nelson-Siegel y el modelo afín de no arbitraje. La principal característica de estos modelos es el uso de un vector de factores no observables extraídos a partir de los mismos rendimientos incluidos en la muestra de análisis y, a través de la estimación y pronóstico de estos factores, realizar inferencia y análisis sobre el comportamiento transversal y dinámico de la estructura de tasas de interés.

Nuestra hipótesis principal es que estos dos modelos tienen un ajuste dentro de la muestra adecuado, medido a través del error absoluto medio y la raíz del error cuadrático medio y, también que tendrán un mejor desempeño en el pronóstico de la estructura de tasas de interés que otros modelos de referencia (caminata aleatoria, VAR(1) y AR(1) sobre rendimientos seleccionados), medidos a través de la raíz del error cuadrático medio.

Los principales resultados de este trabajo son:

- Los modelos de factores son útiles para el ajuste dentro de la muestra de la estructura de tasas de interés en México, ya que a través de la estimación de los coeficientes de los modelos Nelson-Siegel y afín de no arbitraje pueden recuperarse rendimientos de bonos con otras madureces distintas a los rendimientos de bonos utilizados en la estimación y que no están incluidos en la muestra.
- Además, las medidas de bondad de ajuste dentro de la muestra dan evidencia de un buen ajuste, proveyendo de una herramienta útil también para el monitoreo y la asignación de precios de productos de tasa de interés.
- Aunque para pronósticos de 1 mes los pronósticos de los modelos de factores se ven superados en precisión por los de los modelos de referencia para la mayoría de las madureces, el modelo Nelson-Siegel logra predecir con mayor precisión la tasa de corto plazo (1 mes).
- Sin embargo, conforme el horizonte de pronóstico aumenta, los modelos de factores presentan un mejor desempeño; particularmente, el modelo Nelson-Siegel tiende a tener un mejor desempeño en el pronóstico del extremo de corto plazo de la estructura de tasas de interés mientras el modelo afín de no arbitraje tiende a realizar mejores pronósticos del extremo de largo plazo.

INTRODUCCIÓN

Por estructura de tasas de interés o por curva de rendimiento entendemos a un dispositivo gráfico en el que se muestra la relación entre la tasa de interés de una clase de activos, generalmente bonos, respecto del tiempo a la madurez de estos, entendiendo como tiempo a la madurez, al tiempo restante para que el bono expire y el principal sea devuelto al comprador del bono (Audley, Chin y Ramamurthy, 2002).

La estructura de tasas de interés que mayor atención recibe en cada país es la de tasas de interés de bonos soberanos, ya que estos son vistos, generalmente, como los bonos con menor riesgo dentro de ese país y, entonces, esta estructura de tasas de interés constituye una referencia para la determinación de precios de otros bonos y de otros activos financieros.

Debido a lo anterior, la curva de rendimiento de bonos soberanos tiene implicaciones fundamentales sobre las expectativas de los agentes sobre el desenvolvimiento de una determinada economía. Esto ha dado pie a varios estudios utilizando a la estructura de tasas de interés como insumo para la comprensión de otras variables macroeconómicas. Por ejemplo, en Estrella y Hardouvelis (1991) y en Estrella y Mishkin (1995), se utilizan ciertas propiedades de la curva de rendimiento de bonos soberanos del gobierno estadounidense, como el nivel del bono de largo plazo, y la diferencia entre el rendimiento del bono de largo y corto plazo, para determinar si estas características pueden ser utilizadas para el pronóstico de la actividad económica.

Sin embargo, a pesar de la importancia de la curva de rendimiento, el pronóstico de la estructura de tasas de interés ha sido un tópico desarrollado solamente en los últimos años, comenzando con los trabajos de Duffee (2002) y Ang y Piazzesi (2003). En México, el pronóstico de la estructura ha sido aún más reducido, pues el único trabajo que se encuentra en esta línea de investigación corresponde a Elizondo (2013).

Por lo anterior, este trabajo busca reducir la brecha que existe sobre el estudio de ajuste y pronóstico de la estructura de tasas de interés en México. Particularmente, en este trabajo se evaluó la bondad de ajuste y el poder de pronóstico de dos modelos utilizados ampliamente

en la literatura de países desarrollados para el pronóstico de la estructura de tasas de interés: el modelo Nelson-Siegel y el modelo afín de no arbitraje, para un período de análisis comprendido entre enero de 2004 y octubre de 2018. El período de ajuste va desde enero de 2004 a diciembre de 2015, mientras que el período de pronóstico va desde enero de 2016 a octubre de 2018.

La característica fundamental de estos dos modelos es que los rendimientos incluidos en la curva de rendimiento no son utilizados de manera directa en el pronóstico de esta, como se haría en modelos AR, VAR, sino que en primera instancia se estiman los factores comunes a toda la estructura de tasas de interés para, posteriormente, realizar el pronóstico de estos factores y recuperar la estructura de tasas de interés como funciones de los factores pronosticados.

La razón de usar estos dos modelos es que han probado tener un gran poder de ajuste de la estructura de tasas de interés dentro de la muestra y, principalmente, han demostrado tener un mejor desempeño para el pronóstico para la curva de rendimiento para varios horizontes, obteniendo mejores resultados que otros modelos de referencia, como encuentran Diebold y Li (2006) y Elizondo (2013). El desempeño de los modelos para el pronóstico de la estructura de tasas de interés se hace generalmente comparando la raíz del error cuadrático medio.

Otra característica importante, que está más allá del alcance de este trabajo, es que los modelos de factores permiten la incorporación de otros factores que no necesariamente son extraídos de los rendimientos de la curva de rendimiento. Así, en trabajos como en Ang y Piazzesi (2003) y Diebold, Rudebusch y Aruoba (2006), los modelos afín de no arbitraje y Nelson-Siegel son aumentados con variables macroeconómicas de desempleo, inflación y producto.

En este trabajo se hizo uso extensivo de la metodología de Duffie, y Kan (1996) y Ang y Pazzesi (2003) para el caso del modelo afín de no arbitraje, en la que los factores son extraídos a partir del método de análisis de componentes principales, asumiendo que estos guían el comportamiento transversal y dinámico de la estructura de tasas de interés. Mientras

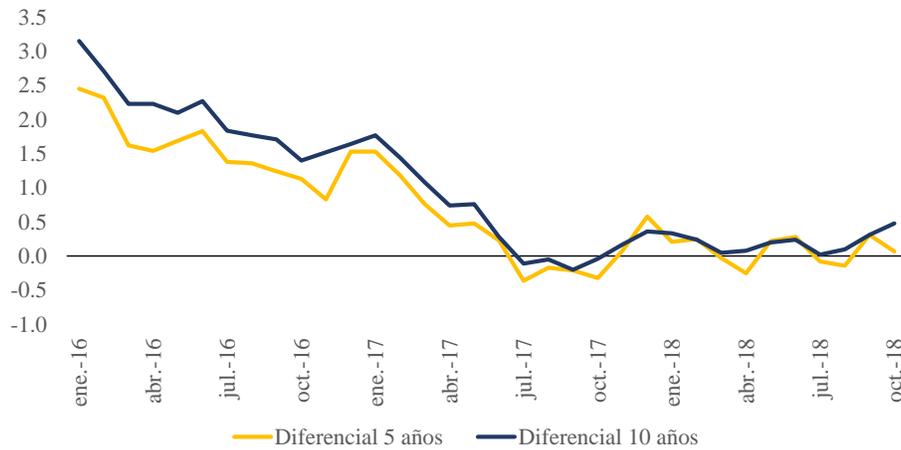
que para el caso del modelo Nelson-Siegel, se hizo uso de la metodología en Diebold y Li (2006), en donde se desarrolla un modelo de tres factores impuestos a partir de un polinomio de Laguerre más una constante.¹

Con respecto a la elección del período a pronosticar, se debe a que a partir de enero de 2016, y hasta octubre de 2018, se observó un aumento en la volatilidad en toda la estructura de tasas de interés de bonos soberanos en México. En este período, el Banco de México aumentó la tasa de interés objetivo de 3.25 por ciento a 7.75 por ciento, un aumento de cuatrocientos cincuenta puntos base. En el mismo período, sin embargo, el diferencial de tasas entre el bono de 5 años y el bono a 1 mes pasó de 2.45 puntos porcentuales en abril de 2016 a tan solo 0.07 por ciento en octubre de 2018, mientras que la diferencia entre la tasa del bono a 10 años y la tasa del bono a 1 mes pasó de 3.15 puntos porcentuales a 0.48 puntos porcentuales en el mismo periodo, indicando un “aplanamiento” de la estructura de tasas de interés de bonos del gobierno federal. En algunos períodos, inclusive, se observó un diferencial negativo de tasas: entre junio y septiembre de 2017, el diferencial entre el bono de 5 años y el bono de 1 mes y el diferencial del bono a 10 años y el bono a 1 mes fueron negativos (Figura 1).

Por lo anterior, si los modelos de factores son capaces de realizar mejores pronósticos que otros modelos de referencia durante períodos de volatilidad, entonces se esperaría que tengan un mejor desempeño en períodos con una volatilidad menor.

¹ Los polinomios de Laguerre son soluciones de ecuaciones diferenciales lineales de la forma $x \frac{d^2y}{dx^2} + (1-x) \frac{dy}{dx} + ny = 0$. Estos polinomios son generalmente vistos como funciones de aproximación.

Figura 1
Diferencial de tasas de bonos soberanos mexicanos
 (enero de 2016-octubre de 2018)



Notas: Elaboración propia con información de Banco de México.

La hipótesis de este trabajo es que los modelos de factores presentan medidas de bondad de ajuste adecuadas dentro de la muestra, con errores pequeños, y que los pronósticos de la estructura de tasas de interés hechos por estos modelos son superiores a los de otros modelos de referencia, a saber, los modelos de caminata aleatoria, VAR(1) y AR(1), midiendo el desempeño a través de la raíz del error cuadrático medio en varios horizontes de pronóstico.

Los datos utilizados en este trabajo son curvas de rendimiento de bonos soberanos con madureces desde 1 hasta 60 meses. La periodicidad de las curvas de rendimiento es mensual y la muestra va desde enero de 2004 hasta octubre de 2018.

La estructura del documento es la siguiente:

En el Capítulo 1 se dan definiciones, teorías de la estructura de tasas de interés y se describe la importancia de la estructura de tasas de interés para agentes públicos y privados, así como para la economía en general.

En el Capítulo 2 se describe el mercado de bonos soberanos en México, dando información sobre cuáles son los principales bonos comerciados y las principales características del mercado.

En el Capítulo 3 se explican las ventajas de utilizar modelos de factores en lugar de modelos que utilizan los propios rendimientos en el ajuste y pronóstico de la curva de rendimiento y se describen las metodologías del modelo Nelson-Siegel y modelo afín de no arbitraje.

En el Capítulo 4 se describen los datos utilizados y las principales características de la curva de rendimiento dentro del período de análisis.

En el Capítulo 5 se muestran los resultados obtenidos de aplicar los modelos afín de no arbitraje y Nelson-Siegel. Se realizan estimaciones de los factores y de hace un ajuste dentro de una submuestra de 144 períodos que va desde enero de 2004 hasta diciembre de 2015. Posteriormente se realiza el pronóstico de los factores y la recuperación de la curva de rendimiento y se compara el poder de pronóstico de los modelos de factores con el de los modelos de referencia a través de la raíz del error cuadrático medio; adicionalmente se realiza la prueba de Diebold y Mariano para corroborar que los pronósticos de los modelos de factores sean estadísticamente distintos de los de los modelos de referencia.

Por último, las conclusiones contrastan los resultados con las hipótesis y exploran las posibles causas de los resultados obtenidos.

CAPÍTULO 1. DEFINICIONES Y MARCO TEÓRICO

En esta sección se introducen conceptos, definiciones y teorías relacionadas con la estructura de tasas de interés que serán utilizadas en el documento.

1.1. Definiciones

Bonos

Los bonos son obligaciones financieras que una entidad emite con la promesa de pagar una suma específica de dinero en una fecha en el futuro. Los bonos son llamados instrumentos de renta fija porque los bonos ofrecen pagos acordados entre el emisor y la persona que compra el bono (Fabozzi, 2000). Dos tipos de bonos son los que tienen mayor relevancia para el mercado financiero: los bonos cupón cero y los bonos con cupones.

Los bonos con cupones son bonos en los que al comprador le es pagado un interés fijo (cupones) de manera periódica hasta el tiempo a la madurez de este, fecha en la que le es pagado el interés y una cantidad final, llamada valor par (o principal) (Mishkin, 2010). Un bono con valor de \$100 con pagos semestrales de \$5 y una madurez de 10 años es un ejemplo de un bono con cupones. Los cupones generalmente se expresan en una tasa anual; en nuestro ejemplo anterior, la tasa cupón es de 10% (5% semestral).

Los bonos cupón cero o bonos con descuento, son bonos que son comprados por debajo de su valor par, el cuál es devuelto al comprador en la fecha de madurez (Mishkin, 2010). Los bonos con descuento solamente pagan este valor y no pagan cupones (de ahí su nombre). Un bono cupón cero es un bono que garantiza al tenedor el pago de una cantidad especificada durante la venta de este (Brigo, Mercurio, 2006).

Tiempo a la madurez de un bono

Anteriormente mencionamos los conceptos de madurez y tiempo a la madurez. El tiempo a la madurez de un bono es el tiempo (en días, meses, años, etc.) que falta entre el tiempo presente, y el tiempo en que el emisor del bono realizará el pago del principal. Si el principal

del bono no es pagado a la madurez de este, puede entenderse que el emisor de dicho bono ha incurrido en una situación de default (Fabozzi, 2000).

Las tres razones de mayor peso para poner especial atención a la madurez de un bono son (Fabozzi, 2000):

- El tiempo a la madurez indica el tiempo en que el tenedor del bono puede esperar el pago del principal y realizar planes de acuerdo a esta fecha.
- El rendimiento ofrecido por un bono depende, manteniendo lo demás constante, del tiempo a la madurez restante. Generalmente la tasa de interés es más elevada para bonos con mayor tiempo a la madurez debido a que los inversionistas tienen que privarse de la disposición de los recursos durante un período de tiempo mayor (aunque, como se verá más adelante, este no siempre es el caso).
- El precio del bono fluctuará en el tiempo que le resta de tiempo a la madurez conforme las tasas de interés en el mercado también lo hagan, resultando, entonces, en una relación proporcional entre el tiempo a la madurez del bono y la volatilidad en el precio de este.

Precio del bono

Dado el tiempo a la madurez, la tasa cupón y el valor par de un bono, el precio del bono en un punto del tiempo es la suma de los flujos futuros traídos a valor presente a alguna tasa de descuento relevante. Asumiendo que la tasa se compone continuamente, la relación entre el precio del bono y la tasa de interés es:

$$P = \sum_{i=1}^n \frac{c}{m} e^{-r_i t_i} + B e^{-r_n t_n} \quad (1)$$

Donde P es el precio de mercado del bono, c es la tasa cupón del bono (si el bono es vendido a descuento, c tiene valor cero), m es el número de veces que el bono otorga cupones al año,

B es el valor par del bono, t_i se refiere al periodo del tiempo, y r_i es la tasa de interés aplicable en cada uno de los periodos.

Usualmente se utilizan dos tasas de interés aplicables, el rendimiento a la madurez y la tasa cupón cero, las cuales se explican a continuación.

Rendimiento a la madurez

El rendimiento a la madurez es la tasa de interés que iguala el valor presente de todos los flujos futuros traídos a valor presente con el valor de mercado del bono. Para el cálculo del rendimiento a la madurez, se asume que la tasa de descuento relevante es la misma para todos los periodos. De esta forma, la ecuación (1) se convierte en:

$$P = \sum_{i=1}^n \frac{c}{m} e^{-rt_i} + B e^{-rt_n} \quad (2)$$

Tasa cupón cero

Las tasas cupón cero son las tasas de descuento utilizadas en la asignación de precios de bonos cupón cero. El precio de un bono cupón cero es asignado a partir de la formula (2) del rendimiento a la madurez tomando $c = 0$. Sin embargo, no puede asumirse que el rendimiento a la madurez de un bono cupón cero es igual al rendimiento a la madurez de un bono que otorga cupones (e.g. que el rendimiento de un Bono M con madurez restante de un año es igual que el rendimiento a la madurez de un Cete a un año), ya que algo del rendimiento del bono ya ha sido devuelto al tenedor del bono con cupones.

Las tasas cupón cero son las de mayor importancia porque revelan completamente la información respecto del comportamiento de las tasas de interés.

Tasa forward

Las tasa forward son tasas que pueden ser extraídas implícitamente a partir de tasas cupón cero (Hull, 2012). Estas tasas son tasas cupón cero que se acuerdan en una fecha futura T_1

para un préstamo que se pagará en el período T_2 (donde $T_2 > T_1$). La tasa forward se obtiene por medio de la siguiente formula (Hull, 2012):

$$r_f = \frac{r_2 T_2 - r_1 T_1}{T_2 - T_1} \quad (3)$$

Donde r_f es la tasa forward, r_1 es la tasa cupón cero observada en el momento actual para la fecha T_1 , y r_2 es la tasa cupón cero para la fecha T_2 .

La fórmula anterior puede escribirse como:

$$r_f = r_2 + (r_2 - r_1) \left(\frac{T_1}{T_2 - T_1} \right) \quad (4)$$

Si tomamos intervalos de tiempo infinitesimalmente pequeños y denotamos $r_2 = r$ y $T_1 = T$, la ecuación 4 se convierte en:

$$r_f = r + T \frac{\partial r}{\partial T} \quad (5)$$

La expresión anterior se conoce como la tasa forward instantánea, porque es la tasa forward vigente en un futuro inmediato y que termina en ese mismo momento. Retomando la ecuación (2), en su expresión en tiempo continuo, el precio de un bono cupón cero con valor nominal de \$1 es $P(T) = e^{-rT}$, por lo que $r = -\frac{\ln(P(T))}{T}$ y teniendo en cuenta que $\frac{\partial r}{\partial T} = -\frac{\partial \ln P(T)}{\partial T} \frac{1}{T} + \frac{\ln P(T)}{T^2}$ obtenemos:

$$r_f = -\frac{\partial}{\partial T} \ln P(T) \quad (6)$$

Riesgo

El rendimiento que un agente obtiene de un bono tiene varios componentes de riesgo al que debe hacer frente, entre los que se encuentran, principalmente, el riesgo de mercado, el de crédito, el de inflación, el de liquidez, y el legal.

Cuando un agente decide vender un bono antes de que concluya el tiempo a la madurez, el rendimiento proviene de dos componentes: del valor de mercado del bono y de los flujos de dinero que haya recibido (Dattatreya y Fabozzi, 2005); si el bono es mantenido hasta que concluya el tiempo a la madurez, entonces el rendimiento que el agente obtiene es el rendimiento a la madurez (Mishkin, 2010). Como hemos visto, el precio de un bono se encuentra relacionado inversamente con la tasa de interés utilizada para descontar los flujos futuros, por lo que el rendimiento que obtiene el agente de vender el bono antes de que concluya el tiempo a la madurez se verá afectado negativamente si en el curso la tasa de interés ha aumentado y positivamente si la tasa de interés ha disminuido. Bajo esta situación, se dice que existe riesgo de mercado o de tasa de interés.

El riesgo de crédito se refiere al riesgo de que el emisor del bono incumpla con la obligación de pagar y con el riesgo de que el precio del bono tenga un peor desempeño que el de otros bonos similares (Dattatreya y Fabozzi, 2005).

El crecimiento generalizado de los precios tiene un efecto negativo sobre el precio de un bono porque condiciona al agente a una situación con un menor poder de compra, ya que la mayoría de bonos son emitidos con tasas fijas. Por lo tanto, los bonos son instrumentos con un componente de riesgo inflacionario y, como se verá más adelante, las tasas de interés reflejan las tasas de inflación esperadas por los agentes dentro del mercado.

La capacidad de un activo financiero de ser vendido y comprado a la vez que se incurre en bajos costos para estas operaciones se refiere a la liquidez. Un activo con estas características se dice que tiene liquidez y los bonos también comparten esta característica. Sin embargo, en determinados momentos, (por ejemplo, frente a un empeoramiento de las condiciones económicas), la capacidad de un bono de ser vendido o comprado puede disminuir,

manifestándose como un aumento en la diferencia entre el precio de compra y el precio de venta.² Frente a esta situación, el agente encara un riesgo de liquidez.

Por último, el riesgo legal de un bono se refiere al riesgo que el agente encara por mantener el bono y que en este periodo las autoridades emitan regulaciones que afecten el precio de del bono, como implantación de impuestos adicionales sobre el este.

Estructura de tasas de interés o curva de rendimiento

La estructura temporal de tasas de interés es un dispositivo gráfico en la que se muestra la relación entre el rendimiento de una clase de activos con diferente tiempo a la madurez. En la mayoría de los casos, esta clase de activos son bonos, por lo que, de aquí en adelante, por estructura de tasas de interés o curva de rendimiento nos referiremos a aquellas en las que se grafican rendimientos de bonos.

Otras consideraciones adicionales deben ser tomadas en cuenta para la construcción de curvas de rendimiento o estructuras de tasas de interés que únicamente referirnos a la clase de activos contenidos en la curva. En especial, las curvas de rendimiento deben contener bonos de calidad crediticia similar, en la que el emisor de los bonos, entidades financieras gubernamentales o corporativas, cuenten con un perfil de riesgo parecido asignado comúnmente por instituciones llamadas calificadoras (Fabozzi, 2000).

De lo anterior se deriva que la construcción de curvas de rendimiento generalmente se hace para bonos emitidos por instituciones corporativas o por instituciones gubernamentales, pero sin combinar bonos de ambas entidades. Para el caso de entidades corporativas, pueden existir varias curvas de rendimiento hechas a partir de los distintos niveles de riesgo asignados por la institución calificadora, mientras que, para el caso de curvas de rendimiento gubernamentales, la construcción de curvas de rendimiento se hace para bonos emitidos por entidades federales, estatales o municipales. En México, los bonos de mayor relevancia son los bonos emitidos por el Gobierno Federal, destacando los Cetes y los Bonos M, cuya

² Esta diferencia se llama frecuentemente *bid-ask spread*

descripción se hará más adelante. Para este documento, las tasas de interés de estos dos últimos instrumentos son el insumo principal para la elaboración de las curvas de rendimiento.

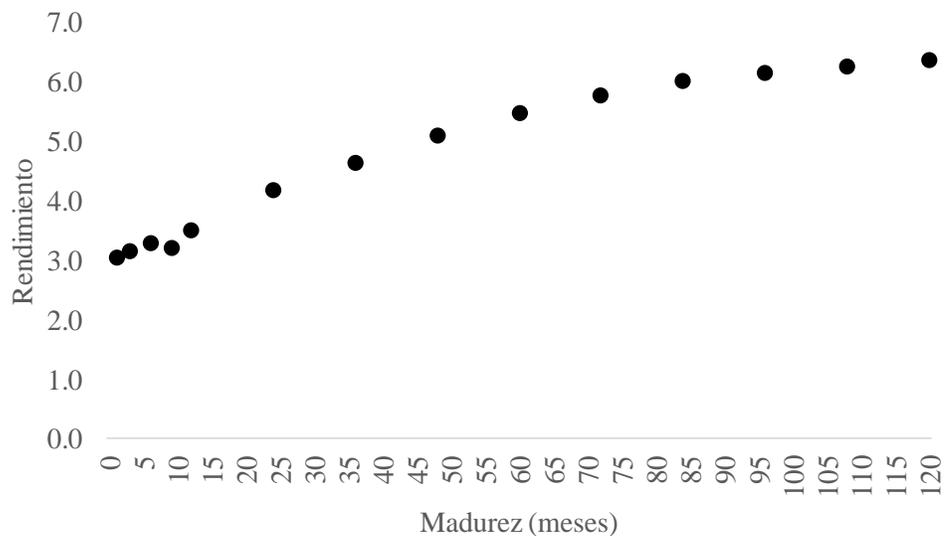
Por último, la construcción de curvas de rendimiento usualmente es realizada utilizando rendimientos de bonos cupón cero. Aunque es posible utilizar el rendimiento a la madurez de los bonos, esto no es recomendable debido a que dos bonos con cupones con el mismo tiempo la madurez, el mismo valor par y la misma periodicidad de pago de cupones, pero con distinta tasa cupón, tendrán distintos rendimientos a la madurez (Ross, Westerfield y Jordan, 2016).

En la práctica, la principal complicación que surge en la construcción de curvas de rendimiento es que generalmente los bonos cupón cero son emitidos con madureces de corto plazo, usualmente de hasta un año, mientras que los bonos con cupones son emitidos con madureces superiores a un año, por lo que la construcción de una curva de rendimiento donde se representen únicamente tasas cupón cero se limitaría a la inclusión de bonos de muy corto plazo. Sin embargo, es posible construir curvas de rendimiento cupón cero, ya que puede derivarse tasas cupón cero con mayor madurez a partir de bonos con cupones y un conjunto de bonos cupón cero, mediante una técnica llamada bootstrapping.³

La Figura 2 muestra la estructura de tasas de interés de bonos emitidos por el gobierno federal mexicano-el 31 de junio de 2015 con madureces de 3,6, 9, 12, 24, 36, 60, 72, 84, 96, 108 y 120 meses. En el eje de las abscisas se muestra la madurez del bono y en el eje de las ordenadas, la tasa de interés observada en ese día para cada uno de los bonos.

³ Esta técnica es detallada en el Apéndice A1.

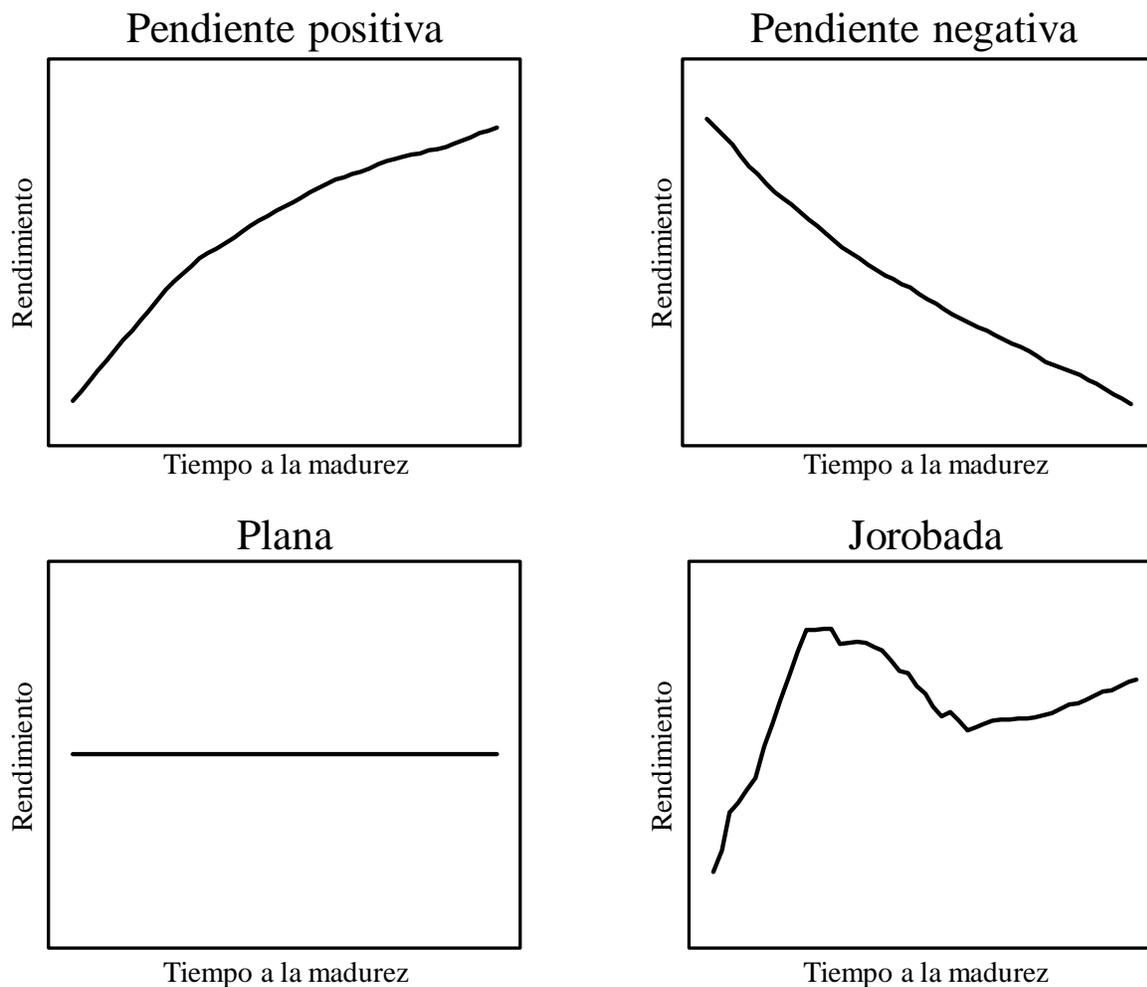
Figura 2
Curva de rendimiento de bonos soberanos mexicanos
(31 de junio de 2015, porcentaje)



Notas: Elaboración propia con información de Valmer.

Generalmente, la curva de rendimiento presenta una pendiente positiva y una forma cóncava, ya que, intuitivamente, los agentes usualmente esperan una mayor compensación por mantener bonos con mayor tiempo a la madurez, ya que esto implica una mayor incertidumbre respecto las condiciones futuras. Sin embargo, otras formas también han sido observadas: plana, con pendiente negativa y jorobada (Figura 3).

Figura 3
Diferentes formas de la curva de rendimiento



Fuente: Elaboración propia

Las distintas formas de la curva de rendimiento mostradas en la figura anterior son el resultado de la dinámica de los agentes en el mercado (Stander, 2005), sin embargo, no existe un consenso claro sobre las causas de cada una de ellas. Las teorías sobre la curva de rendimiento son explicadas a continuación.

1.2. La curva de rendimiento de bonos soberanos

A pesar de poder construirse diferentes curvas de rendimiento a partir de varios instrumentos que tengan calidad crediticia similar, la curva de rendimiento de mayor interés es la de bonos

emitidos por el gobierno federal o soberanos. Los bonos soberanos son emitidos para que el gobierno federal pueda financiar su gasto y, debido a que los componentes de riesgo son menores que los bonos emitidos por otro tipo de instituciones, la tasa de interés que los agentes demandan de los bonos del gobierno federal suele ser menor a la tasa de interés de bonos emitidos por otras instituciones.

Generalmente, los bonos soberanos son los bonos de mayor liquidez y también son los de menor riesgo de crédito, ya que la probabilidad de que un gobierno incumpla en el pago de sus obligaciones es menor que la de otras entidades. Es por eso, que la curva de rendimiento de estos bonos tiene importancia crítica porque puede ser utilizada para derivar precios de otros activos financieros, además de proveer una referencia del rendimiento mínimo necesario para la inversión en otros bonos con la misma madurez.

Esta curva no solamente es útil para extraer información de los bonos utilizados para su construcción, sino que también aporta información sobre las condiciones económicas y principalmente, sobre las expectativas de los agentes que interactúan en el mercado de bonos soberanos (Piazzesi, 2009). Como se dijo anteriormente, la curva de rendimiento de bonos soberanos en Estados Unidos fue utilizada por Estrella y Hardouvelis (1991), Estrella y Mishkin (1997) y Evans y Marshall (1998) para el pronóstico de la actividad económica real.

1.3. Teorías de la curva de rendimiento

Actualmente, no se tiene un consenso sobre los determinantes de la curva de rendimiento y existen varias teorías que intentan explicar la forma que esta toma. Sin embargo, la teoría de las expectativas, la teoría de los mercados y la teoría de la prima por riesgo de liquidez son las que mayor aceptación tienen en la ciencia económica. A continuación, se da una breve explicación de estas teorías. La mayor parte de esta sección proviene de Mishkin (2009).

Teoría de las expectativas

La teoría de las expectativas o teoría pura de las expectativas declara que las tasas de interés de largo plazo son un promedio de las tasas de interés de corto plazo que las personas esperan que ocurran en el futuro durante la vida del bono de largo plazo. El supuesto principal de la

teoría de las expectativas es que las preferencias de los consumidores sobre dos bonos respecto de la madurez de estos son irrelevantes y lo que determina entonces la preferencia de estos dos bonos es su rendimiento: los inversores no mantendrán bonos con un rendimiento esperado menor que los de otro con madurez distinta. Con lo anterior, el supuesto principal de la teoría de las expectativas es que bonos con madureces distintas son sustitutos perfectos si y solo si el rendimiento esperado de ambos bonos es el mismo.

Tomemos por ejemplo dos bonos, uno con madurez de dos años y otro con madurez de un año, ambos con un valor nominal de \$1. Si tomamos la estrategia de comprar el bono con madurez a dos años y la tasa de interés anual de este bono es i_{2t} , al término de estos dos años, obtendremos un rendimiento compuesto neto de:

$$(1 + i_{2t})(1 + i_{2t}) - 1 = 2i_{2t} + (i_{2t})^2 \quad (7)$$

Como $(i_{2t})^2$ es una cantidad pequeña, podemos asumir que es cero y entonces el rendimiento neto en (7) es $2i_{2t}$.

Ahora analicemos la estrategia de mantener dos bonos con madurez de un año, manteniendo el primero durante el primer año y manteniendo el segundo durante el segundo año. La tasa de interés de mantener este bono durante el primer año es conocida y la denotaremos por i_t ; para el segundo periodo, supongamos que la tasa de interés del bono de un año es i_{t+1}^e . El rendimiento compuesto neto de esta estrategia es:

$$(1 + i_t)(1 + i_{t+1}^e) - 1 = i_{t+1}^e + i_t + i_{t+1}^e i_t \quad (8)$$

De manera similar, como $i_{t+1}^e i_t$ es una cantidad muy pequeña, podemos asumir que es cero y el rendimiento esperado de la estrategia de mantener dos bonos de corto plazo es $i_{t+1}^e + i_t$.

Bajo la teoría de las expectativas, el rendimiento obtenido por mantener un bono de dos años debe ser igual al rendimiento promedio obtenido de mantener dos bonos de corto plazo durante dos años seguidos, uno después del otro:

$$2i_{2t} = i_{t+1}^e + i_t \quad (9)$$

$$i_{2t} = \frac{i_{t+1}^e + i_t}{2}$$

Extendiendo la teoría a n años, el rendimiento que se obtiene de mantener un bono con madurez de n años con valor nominal de \$1 y con una tasa de interés de i_{nt} es⁴:

$$(1 + i_{nt})^n - 1 = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} i_{nt}^k - 1 \quad (10)$$

En la parte derecha de la ecuación 10 se observa que cuando $k = 0$, entonces $\frac{n!}{k!(n-k)!} i_{nt}^k = 1$ y cuando $k = 1$, entonces $\frac{n!}{k!(n-k)!} i_{nt}^k = ni_{nt}$. El resto de los términos de la sumatoria son muy pequeños, por lo que podemos asumir que son cero, así la ecuación se reduce a ni_{nt} .

Denotemos por i_{t+k}^e a la tasa de interés del bono con madurez a 1 año que se espera en el periodo $t + k$ donde $k = 1: (n - 1)$. Entonces la estrategia de mantener bonos con madurez de un año de manera sucesiva durante n años nos dará un rendimiento de:

$$(1 + i_t) \prod_{k=1}^{n-1} (1 + i_{t+k}^e) - 1 \quad (11)$$

⁴ La ecuación 10 es una forma específica del teorema del binomio, el cual dice que la siguiente identidad es válida: $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{n-k} y^k$.

La expresión 11 es engorrosa de expandir, pero un análisis simple nos dice que obtendremos la siguiente suma: $(i_t + i_{t+1}^e + \dots + i_{t+n-1}^e)$, y que el resto de términos son muy pequeños, por lo que podemos asumir que son igual a cero.

De nueva forma, bajo la teoría de las expectativas tendremos que:

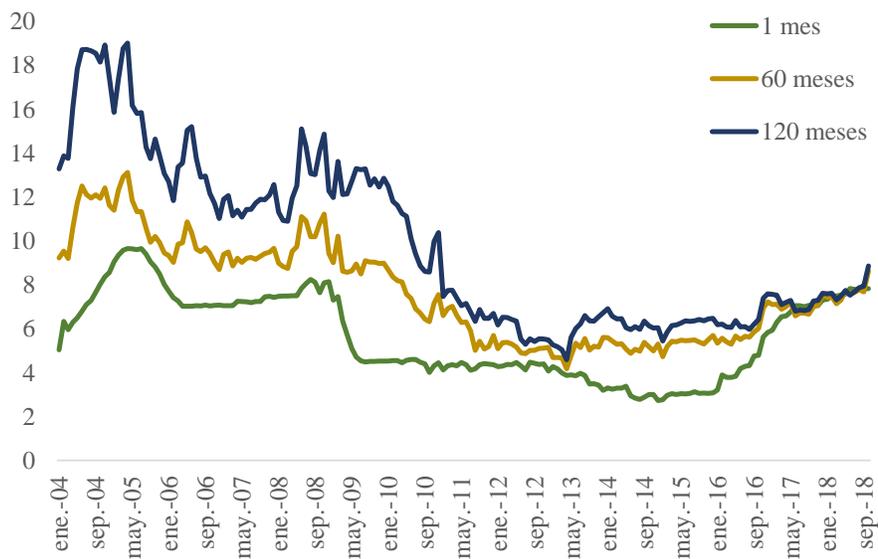
$$ni_{nt} = i_t + i_{t+1}^e + \dots + i_{t+n-1}^e$$
$$i_{nt} = \frac{i_t + i_{t+1}^e + \dots + i_{t+n-1}^e}{n} \quad (12)$$

Analizando la ecuación (12) observamos que las tasas de largo plazo son un promedio de las tasas de corto plazo y que si se espera que las tasas de corto plazo suban o que disminuyan, entonces las tasas de largo plazo también tenderán a subir o bajar.

Bajo la teoría pura de las expectativas, la curva de rendimiento con pendiente positiva sugiere que los agentes esperan que las tasas de interés de corto plazo observadas en el futuro aumenten; si la curva de rendimiento es plana, los agentes esperan que las tasas de interés futuras se mantengan sin cambios, si la curva de rendimiento tiene pendiente negativa, entonces los agentes esperan que las tasas de interés de corto plazo futuras disminuyan; por último, bajo esta teoría, si la curva de rendimiento tiene una forma jorobada, entonces los agentes esperan que en el mediano plazo las tasas de corto plazo aumenten y que en el largo plazo, las tasas de interés futuras disminuyan.

La teoría de las expectativas explica porque las tasas de interés de bonos de distintas madureces se mueven en la misma dirección de manera simultánea, tal como se observa en la Figura 4 para el caso de mexicano.

Figura 4
Rendimientos de bonos soberanos en México



Fuente: Elaboración propia con información de Valmer.

Como se ha mencionado anteriormente, la forma más común que toma la curva de rendimiento es aquella con pendiente positiva. Entonces, bajo la teoría de las expectativas, la curva de rendimiento muestra que los agentes esperan que las tasas de interés aumenten en el futuro, lo cual no se ha observado en México, ya que la Figura 4 muestra que mientras las tasas de corto plazo (1 mes) han disminuido en ciertos periodos y aumentado en otros, los niveles de las tasas de interés de mayor plazo han ido disminuyendo gradualmente.

Teoría de mercados segmentados

La teoría de mercados segmentados argumenta que la estructura de tasas de interés representa varios segmentos de mercados de bonos, cada uno de estos representado por un bono con madurez particular y donde estos son independientes los unos de los otros. Por lo tanto, el rendimiento de cada bono es determinado únicamente por la oferta y demanda de ese bono.

El supuesto principal de la teoría de mercados segmentados es opuesto al de la teoría de las expectativas: bonos con distintas madureces no son sustitutos entre sí. El supuesto se basa en que las preferencias de los agentes están determinadas también por bonos con madureces específicas y por lo tanto no preferirán bonos de otras madureces inclusive si estos otros

bonos tienen un rendimiento esperado mayor. Por ejemplo, pueden existir agentes que prefieren bonos de corto plazo porque pueden ser vistos como bonos sin riesgo o pueden existir agentes con preferencias con bonos de mayor madurez porque esperan realizar uso del capital y de los intereses justo después de que el bono madure.

Bajo la teoría de mercados segmentados, las diferentes formas que puede tomar la estructura de tasas de interés están determinadas por la tasa de equilibrio de la oferta y demanda de cada uno de los bonos incluidos en la estructura de tasas de interés.

La teoría de mercados segmentados, a diferencia de la teoría pura de expectativas, no explica el movimiento simultáneo de las tasas de corto y largo plazo, ya que bajo esta teoría, no debería presentarse este suceso ya que el nivel de tasa de interés de los bonos de una madurez específica es determinado completamente por la oferta y demanda de estos bonos y no por la oferta y demanda de bonos con otras madureces.

Esta teoría, sin embargo, puede ayudar a explicar la forma habitual de la curva de rendimiento porque generalmente la demanda de bonos de corto plazo es mayor que la de bonos de largo plazo, lo que implica que los precios de los bonos de corto plazo sean mayores y tengan un rendimiento menor que los de largo plazo.

Teoría de prima de riesgo por liquidez y teoría de hábitats preferidos

La teoría de la prima por liquidez explica que las tasas de interés de largo plazo son determinadas por el promedio igualmente ponderado de las tasas de corto plazo que los agentes esperan que ocurran en el futuro más una prima de riesgo por liquidez derivada de mantener bonos con mayor madurez; como ya se ha mencionado, los agentes encaran varios tipos de riesgo por mantener bonos, entre los que se encuentra el riesgo de mercado: mantener bonos con mayor madurez puede derivar en un menor rendimiento si las tasas de interés de corto plazo se desvían por encima de su nivel esperado. Bajo el esquema anterior, los agentes demandarán una prima adicional por mantener bonos con mayor madurez, la cual se denomina prima por riesgo de liquidez y según la teoría de la prima de riesgo por liquidez, esta responde a la oferta y demanda de estos bonos. Esta teoría puede ser vista como una combinación de la teoría pura de las expectativas y la teoría de mercados segmentados.

El supuesto principal de la teoría de la prima de riesgo por liquidez es que bonos con distintas madureces son sustitutos no perfectos, lo que significa que el rendimiento esperado de un bono tiene efecto sobre el rendimiento esperado de otros bonos con distintas madureces, pero que los agentes pueden preferir bonos con madureces específicas. Bajo esta teoría, los agentes prefieren bonos con menor madurez porque tienen menor riesgo de tasas de interés y la prima de riesgo por liquidez que demandan los agentes es mayor para bonos con mayor madurez, ya que el riesgo de tasas de interés es mayor.

Bajo el argumento anterior, la tasa de interés de un bono con madurez de n años es:

$$i_{nt} = \frac{i_t^e + \dots + i_{t+n}^e}{n} + L_{nt} \quad (13)$$

Donde L_{nt} es la prima por riesgo asociada por mantener un bono de n años de madurez.

La teoría de la prima de riesgo por liquidez puede ayudar a explicar la pendiente positiva vista habitualmente en la curva de rendimiento. Como la prima por riesgo de liquidez es mayor para bonos con mayor madurez aun cuando no se esperan cambios en las tasas de corto plazo, la estructura de tasas de interés tendrá pendiente positiva.

Además, también puede explicar una probable pendiente negativa de la curva de rendimiento, porque si las tasas de interés de corto plazo son relativamente altas respecto a las tasas de interés de largo plazo, entonces los agentes esperan que las tasas de interés de corto plazo futuras disminuyan aun cuando las distintas primas de riesgo se mantengan sin cambios. Lo anterior también implica que los agentes esperan que las tasas de interés futuras disminuyan sustancialmente porque las primas de riesgo por liquidez son positivas.

De manera similar, la teoría de hábitats preferidos explica que los agentes tienen preferencias por bonos de determinadas madureces sobre otros con distintas madureces, por lo que están dispuestos a mantener bonos con madureces distintas solamente si se les da una compensación por esto o si estos bonos tienen un rendimiento esperado mayor que los rendimientos del hábitat preferido.

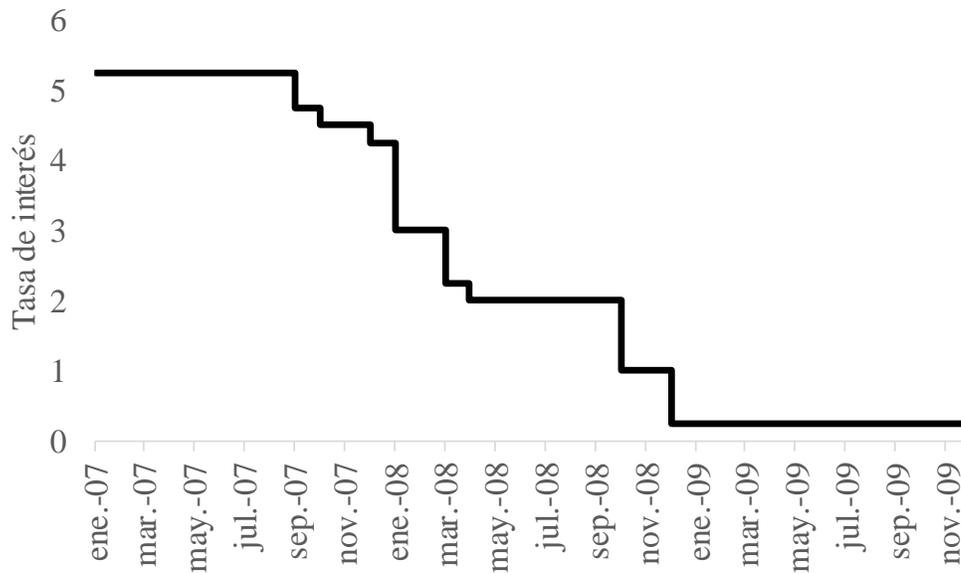
1.4. Importancia de la curva de rendimiento

De cumplirse la teoría económica, la estructura de tasas de interés refleja las expectativas de los agentes respecto de las tasas de interés futuras, junto con primas de componentes de riesgo. Por lo tanto, las instituciones públicas y privadas pueden tomar decisiones con base en la curva de rendimiento.

Por ejemplo, los bancos centrales cuentan con la capacidad de influir en el extremo izquierdo de la curva de rendimiento y la forma de conducir la política monetaria (medido a través de la tasa objetivo) revela que puede estar respondiendo ante shocks macroeconómicos que puedan desviar al banco central de mantener su objetivo de inflación o de crecimiento económico (Piazzesi, 2009). Por lo tanto, uno de los objetivos de los bancos centrales es influir sobre todo el nivel general de la estructura de tasas de interés, inclusive de las maduresces de muy largo plazo y que son las que tienen verdadera relevancia para la economía y la demanda agregada (Piazzesi (2009), ya que las decisiones de consumo de bienes duraderos o inversiones residenciales se hacen con base al nivel de estas tasas (por ejemplo, al momento de adquirir una hipoteca, o un crédito automotriz).

De hecho, es posible encontrar evidencia de lo anterior. Durante la crisis económica mundial de 2007-2009, la Reserva Federal incurrió en una fuerte serie de recorte a la tasa de fondos federales que empezó en septiembre de 2007 con una tasa de 5.25 por ciento y concluyó en diciembre de 2008 con una tasa de 0-0.25 por ciento en un intento por estimular la economía estadounidense (Figura 5).

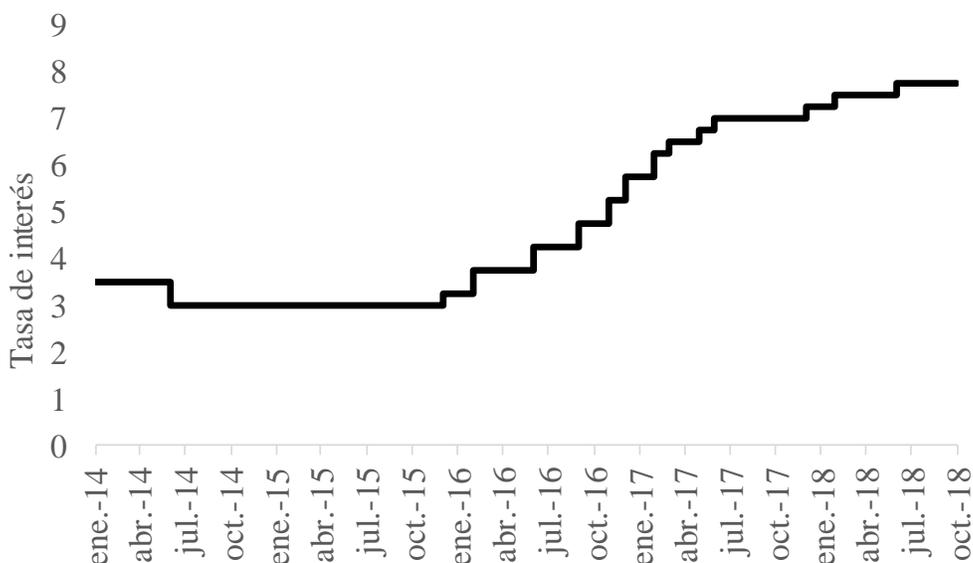
Figura 5
Tasa de fondos federales estadounidenses



Notas: Elaboración propia con información de Federal Reserve of New York.

El caso mexicano es otro ejemplo de lo anterior, ya que después de un período de baja inflación en 2014 y 2015, a partir de 2016 las tasas de referencias de Banxico aumentaron para hacer frente ante el aumento de los precios y del tipo de cambio. Este comportamiento se observó durante todo 2017 y 2018.

Figura 6
Tasa objetivo de Banxico



Notas: Elaboración propia con información de Banco de México.

Adicionalmente a las decisiones de política monetaria, a las instituciones públicas también les concierne la colocación de deuda, y la curva de rendimiento es la base de decisión sobre la madurez de esta nueva deuda a constituir ya que la colocación de deuda es un ejercicio que debe tener en cuenta la relación entre bonos de distinta madurez y como los cambios en el rendimiento de un bono con una madurez afectan en el cambio en el rendimiento de otros bonos con madureses distintas (esta relación se define como convexidad).

Además, las tasas de largo plazo, al ser determinadas mayormente por fuerzas de mercado, contienen información sobre las expectativas de los agentes sobre el futuro de la economía, incluida la inflación (Gibson, Lhabitant, Talay, 2001). Por esto, el pronóstico de los rendimientos de largo plazo constituye una base para la decisión de inversión por parte de empresas.

Por su parte, practicantes financieros también han desarrollado especial interés por saber lo que la estructura de tasas de interés puede decirnos de su forma actual y de la que puede adquirir en distintos puntos del tiempo. Obtener un ajuste que represente adecuadamente los

valores “justos” de rendimientos de bonos con distintas madureces es de vital importancia en la asignación de precios no solo de bonos, sino también de otros instrumentos financieros, como derivados basados en tasas de interés.

Por otra parte, también parece existir una correspondencia entre las características de curva de rendimiento y el futuro comportamiento de la economía. Por ejemplo, en la literatura que comenzó con Estrella y Hardouvelis (1991) y Estrella y Mishkin (1996), se utiliza la pendiente de la curva de rendimiento (la diferencia entre el rendimiento del bono a 10 años y el bono a 3 meses) como predictores de actividad económica real; en particular, los autores encuentran para la economía estadounidense, que una pendiente positiva vista en el presente está asociada con un incremento en la actividad económica real en el futuro, mientras que una pendiente negativa está asociada con una contracción. Esta metodología ha sido aplicada para el caso mexicano por Reyna, Zalazar y Salgado (2008) y por Ceballos (2016).

A pesar de todo lo anterior y con el hecho de que varios estudios empíricos muestran que los fundamentales macroeconómicos juegan un papel importante en la determinación de las tasas de interés de corto plazo, especialmente la inflación (Dewatcher y Lyrio, 2002), estos no cuentan con la suficiente capacidad predictiva para explicar el comportamiento de los bonos de madurez larga, indicando la existencia de factores no observables los cuales inciden en la determinación de estas tasas. Por ejemplo, Ang y Piazzesi (2003) encuentran que los factores macroeconómicos de inflación y desempleo afectan los bonos de corto plazo estadounidense, pero que gran parte de la variación de los rendimientos de largo plazo de la curva son determinados por factores latentes. Dewatcher, Lyrio y Maes (2001) encuentran resultados similares.

CAPÍTULO 2. EL MERCADO DE BONOS SOBERANOS EN MÉXICO

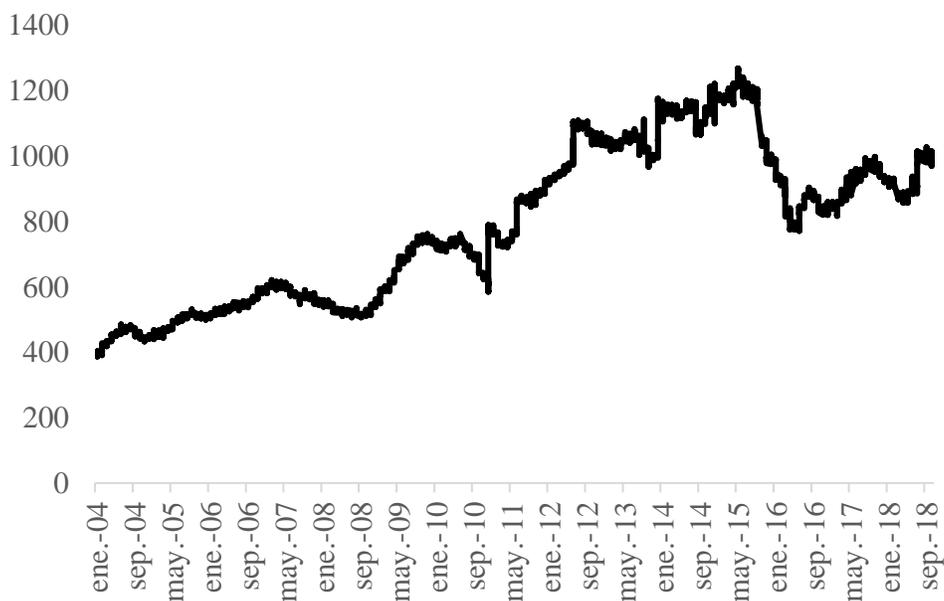
El mercado de bonos soberanos en México está constituido principalmente por 4 tipos distintos: Certificados de la tesorería (Cetes), Bonos M, Bondes D y Udibonos. A continuación, se describen las características de cada uno de estos.

Certificados de la tesorería

Los Certificados de la Tesorería (Cetes) son los instrumentos de renta fija con mayor antigüedad de emisión por el Gobierno Federal, emitiéndose por primera vez en enero de 1978. Estos bonos son cupón cero, por lo que se venden a descuento (es decir, por debajo de su valor nominal, de 10 pesos) y una vez concluido el tiempo a la madurez, el comprador recibe el valor nominal. Los plazos a los que son emitidos estos instrumentos son 28 días, 91 días y plazos cercanos a los seis meses (entre 156 a 182 días) y un año (entre 300 y 364 días). La colocación de estos títulos la realiza el Banco de México mediante subasta. La principal función de estos títulos es la regulación de la política monetaria de Banco de México.

En octubre de 2018, el monto total en circulación de Cetes fue de 972 mil millones de pesos a precios de 2018. Este valor aproximadamente es 2.5 veces superior al observado en enero de 2004 (Figura 7).

Figura 7
Saldo en circulación de Cetes
 (enero 2004 – octubre 2018, miles de millones de pesos de 2018)



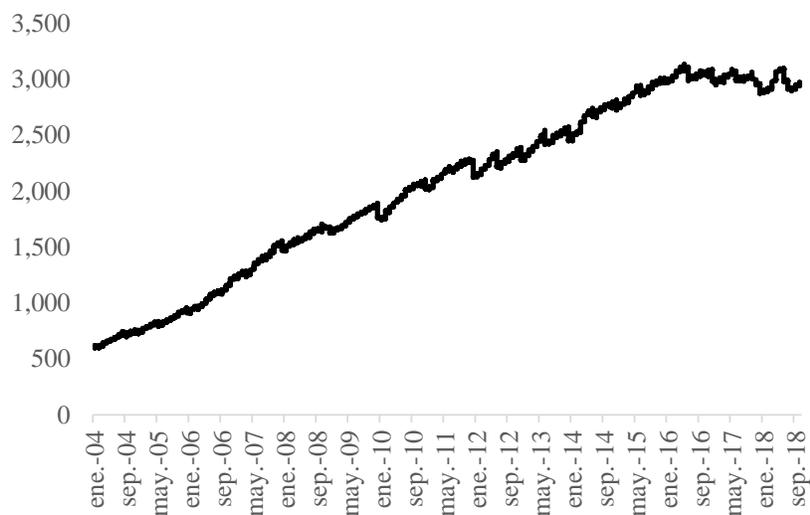
Notas: Elaboración propia con información de Banco de México.

Bonos M

Los Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal con Tasa Fija (Bonos M) son títulos con tiempo a la madurez mayor a un año y son emitidos para el financiamiento de proyectos de desarrollo. Estos instrumentos pagan cupones cada seis meses y la tasa es dada a conocer por el Gobierno Federal a los inversionistas a través de la Convocatoria a la Subasta de Valores Gubernamentales de la serie a emitir, lo que significa que la tasa cupón es fija a lo largo de la vida de estos bonos.

A octubre de 2018, el saldo real a precios de 2018 en circulación fue de 2,968 miles de millones de pesos, cinco veces mayor al saldo en circulación de 2004 (Figura 8). El crecimiento del saldo en circulación ha sido constante en el período de observación.

Figura 8
Saldo en circulación de Bonos M
 (enero 2004 – octubre 2018, miles de millones de pesos de 2018)



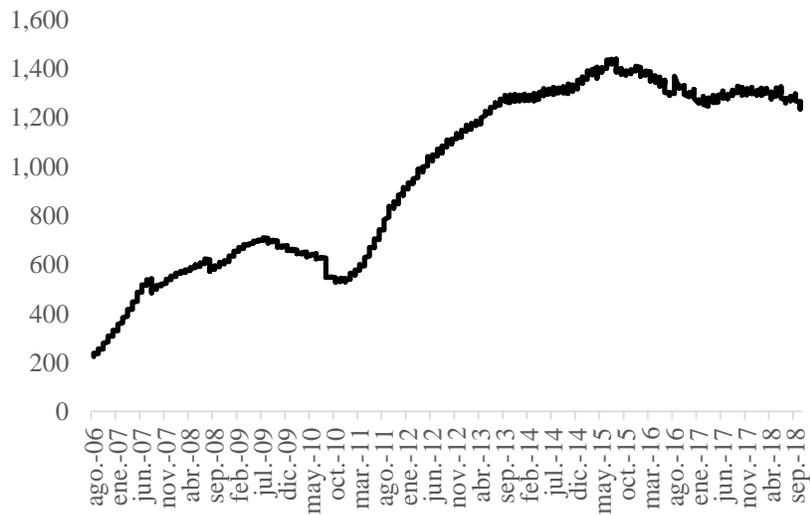
Notas: Elaboración propia con información de Banco de México.

Bondes D

Los Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal son títulos colocados por la Secretaría de Hacienda y Crédito Público con el objetivo de fortalecer la estructura de la deuda del Gobierno Federal. El valor par de estos bonos es de 100 pesos, el tiempo a la madurez es cualquiera con múltiplos de 28 días, aunque inicialmente se emitieron con madureces entre 1 y 5 años.

Los Bonos D fueron emitidos por primera vez en agosto de 2006. En octubre de 2018, el saldo real en circulación de estos instrumentos fue de 1,249 miles millones de pesos, 5.6 veces más que en agosto de 2016 (Figura 9).

Figura 9
Saldo en circulación de Bonos D
 (agosto 2006 – octubre 2018, miles de millones de pesos de 2018)

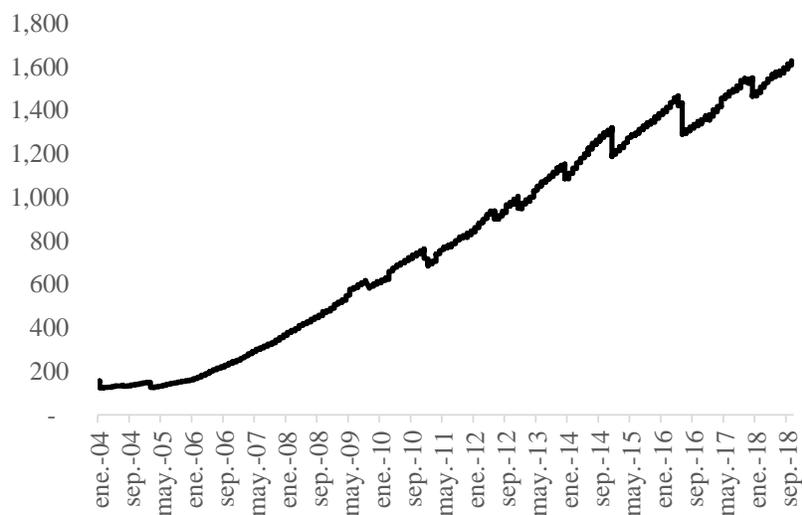


Notas: Elaboración propia con información de Banco de México.

Udibonos

Los Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal Denominados en Unidades de Inversión son instrumentos de renta fija que protegen al tenedor del bono ante cambios no esperados en el crecimiento de los precios ya que pagan una tasa real que se fija al momento de la fecha de emisión de los títulos; el valor par de estos bonos es de 100 pesos y pagan cupones semestralmente. La primera emisión de estos títulos fue en mayo de 1996. Actualmente no existen madureces definidas para la emisión de estos títulos pero la madurez se especifica en múltiplos de 182 días (seis meses). El saldo real en circulación en octubre de 2018 de estos bonos fue de 1,628 miles de millones de pesos (Figura 10).

Figura 10
Saldo en circulación de Udibonos
 (enero 2004 – octubre 2018, miles de millones de pesos de 2018)



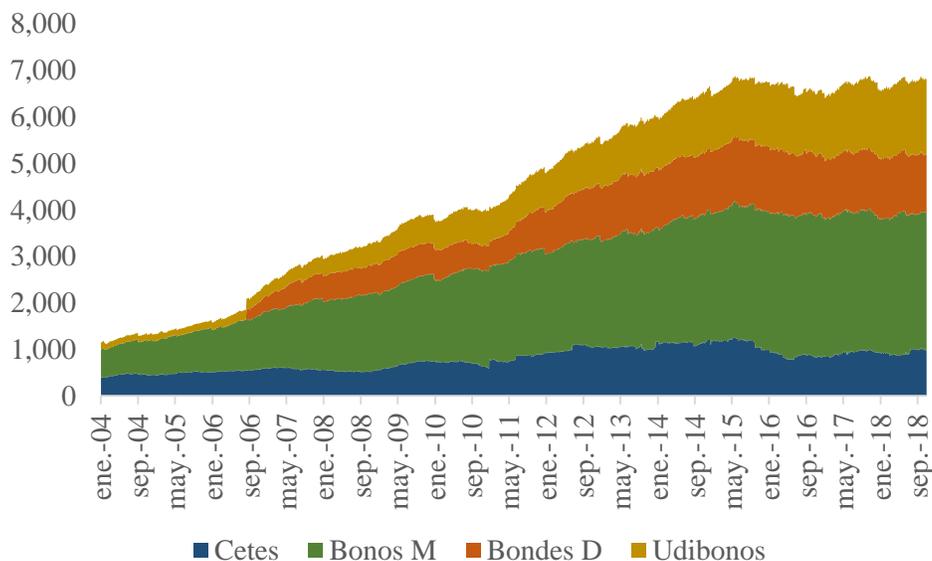
Notas: Elaboración propia con información de Banco de México.

Estructura del mercado de bonos soberanos en México

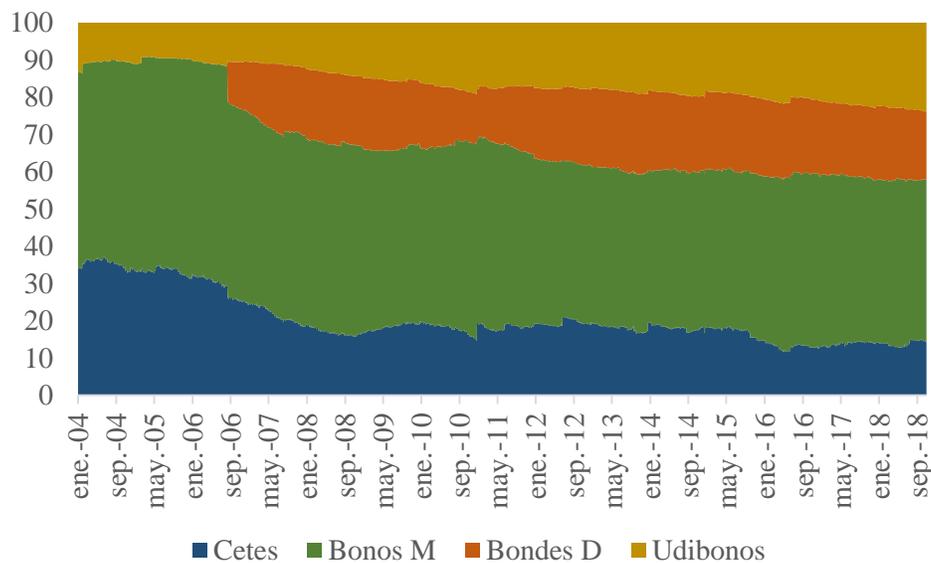
En octubre de 2018, el saldo de bonos emitidos por el Gobierno Federal fue de 6,817 miles de millones de pesos reales de 2018. Los bonos con mayor participación son los Bonos M (43.5%), seguidos de los Udibonos (23.9% en octubre de 2018), Bondes D (18.3% en octubre de 2018) y Cetes (14.3% en octubre de 2018) (Figura 9.a). Es importante señalar que durante el período de estudio la participación de Cetes ha caído considerablemente, ya que en enero de 2004 la participación de estos bonos fue de 34.2%, para agosto de 2006, cuando los Bondes D fueron emitidos por primera vez, la participación cayó a 26.3%, aunque la participación de Bonos M y Udibonos también se redujo finalmente, en octubre de 2018, la participación cayó a 14.3%. Una razón importante de esta caída se debe a que el Gobierno Federal ha incrementado la emisión de deuda a través de Bonos y Bondes D (Figura 11.b).

Figura 11

a. Saldo en circulación de bonos soberanos en México
(miles de millones de pesos de 2010)



b. Participación de bonos soberanos en México
(porcentaje)



Notas: Elaboración propia con información de Banco de México.

CAPÍTULO 3. MODELOS

3.1. Modelos de factores

El uso de factores como variables explicativas del comportamiento transversal y temporal de la estructura de tasas de interés presenta varias ventajas sobre el uso de los propios rendimientos para esta tarea. La primera de ellas y, quizá la más evidente, es la reducción de la dimensionalidad (Diebold y Rudebusch, 2013). Se ha demostrado que el uso de unas cuantas variables es suficiente para encontrar correspondencia entre la estructura de tasas de interés y estas variables de interés (por ejemplo, (Bliss, 1997) y (Litterman y Scheinkman, 1991)).

En México, el análisis de componentes principales⁵ para la muestra que va desde enero de 2004, hasta diciembre de 2015, nos demuestra que el primer componente principal explica el 97.6 por ciento de la varianza de la estructura de tasas de interés, el segundo explica el 2.1 por ciento y el tercero el 0.11 por ciento (en conjunto, estos tres componentes explican el 99.8⁶ por ciento de la varianza de la estructura de tasas de interés de rendimientos de CETES).

Cuadro 1
Porcentaje de varianza explicada por los tres primeros componentes principales

Varianza explicada por:	
Primer componente principal	97.6
Segundo componente principal	2.1
Tercer componente principal	0.1

Nota: Se muestran el porcentaje de varianza explicada por los tres primeros componentes principales de rendimientos mensuales de Cetes con madureces que van desde 1 hasta 60 meses. La muestra de datos utilizada va desde enero de 2004, hasta diciembre de 2015.

Fuente: Elaboración propia con datos de Valmer.

⁵ Para mayor información respecto al método de componentes principales, ver Apéndice A2.

⁶ Gibson, Lhabitant y Talay (2011) encuentran de manera similar para diversos países que el primer componente principal explica entre el 80 y 90 por ciento de la varianza de la estructura de tasas de interés, mientras que el segundo y tercero ayudan a explicar el 5-10 por ciento y 1-2 por ciento, respectivamente.

Como explican Bliss (1997) y Diebold y Rudebusch (2013), mientras que los movimientos en los precios de acciones parecen corresponder a factores de carácter idiosincrático o específicos del mercado o de la empresa, mucho de los movimientos en precios de bonos (y por consiguiente en los rendimientos de estos) parece corresponder a características sistemáticas, revelando, por lo tanto, que existe una estructura común que conduce a la estructura de tasas de interés. Esta característica de la estructura de tasas de interés se dice ser operativa en situaciones en las que uno ve un objeto de alta dimensionalidad manejado por un conjunto subyacente de objetos de menor dimensión (Diebold y Rudebusch, 2013). Esta característica fue observada por primera vez por Litterman y Scheikman (1991).

En segundo lugar, la reducción de variables explicativas puede ayudar a eliminar el problema de la multicolinealidad que surgiría en el uso de todas las madureces observables de la estructura de tasas de interés en una estimación sin restricciones como en un VAR de orden p . Este problema, además se ve agravado porque las estimaciones de la matriz de varianzas y covarianzas y la matriz de coeficientes autorregresivos solamente ayudan a explicar la dinámica de los rendimientos incluidos en el modelo.

Una tercera razón para el uso de factores es que su especificación no considera cual es el mecanismo generador de estos. Aunque en este trabajo se utilizan factores estadísticos, la especificación del mecanismo generador puede ser prácticamente cualquiera. Esto permite que los modelos de factores puedan ser fácilmente aumentados mediante la adición de variables que ayuden a encontrar una correspondencia entre la estructura de tasas de interés y estas nuevas variables de interés, usualmente económicas o financieras. Por ejemplo, Ang y Piazzesi (2003) presentan un modelo afín de no arbitraje de tres factores no observables aumentado con variables de producto e inflación para el pronóstico de la estructura de tasas de interés de bonos cupón cero de Estados Unidos, mientras que Gimeno y Marques (2009) reformulan el modelo de Diebold y Li (2006) para agregar la inflación al modelo de tres factores de Nelson-Siegel y extraer las expectativas sobre inflación y tasas de interés del mercado de bonos en España; otros casos similares corresponden a Povola y Vasil (2017), quienes combinan el pronóstico de la estructura de tasas de interés en Alemania mediante el

modelo de tres factores de Nelson-Siegel, con el pronóstico de tres factores del ciclo económico eslovaco y de esta forma realizar pronósticos fuera de la muestra.

Por último, y siguiendo a Diebold y Rudebusch (2013), la teoría económica generalmente invoca la existencia de factores comunes en la asignación de precios de activos financieros. Por ejemplo, el riesgo, a pesar de proceder de innumerables fuentes, es resumido en pocos componentes denominados *factores de riesgo*; otros modelos, como el popular CAPM, inclusive reducen los precios como funciones de únicamente un factor.⁷

3.2. Consideraciones iniciales

En el apartado 1.1 se definió la tasa cupón cero y la tasa forward. En esta sección se describe la relación entre la curva de rendimiento, la curva forward y la curva de descuento. La explicación aquí presentada corresponde a Gibson, Lhabitant y Talay (2001) y a Diebold y Rudebusch (2013).

En un punto de tiempo t , el precio $P_t(\tau)$ de un bono cupón con descuento (cupón cero) con valor nominal al vencimiento de \$1 en τ períodos adelante y con un rendimiento a la madurez $y_t(\tau)$ compuesto continuamente, se define como:

$$P_t(\tau) = e^{-\tau y_t(\tau)} \quad (14)$$

Por lo tanto, $P_t(\tau)$ y $y(\tau)$ están relacionados de manera inversa y cuando τ tiende a infinito, $P_t(\tau)$ tiende a cero por lo que definimos a este como la el factor de descuento. Como τ es variable, definimos $P_t(\tau)$ y $y(\tau)$ como la curva de descuento y curva de rendimiento a la madurez, respectivamente. Despejando para $y(\tau)$:

$$y_t(\tau) = -\frac{\ln P_t(\tau)}{\tau} \quad (15)$$

⁷ Aunque en (Fama y French, 1992) el modelo es expandido, este continúa siendo dimensionalmente bajo.

Ahora, de la ecuación 6 sabemos que la tasa forward instantánea de un contrato establecido en τ y vencido instantáneamente es:

$$f_t(\tau) = -\frac{1}{P(\tau)} \frac{\partial P(\tau)}{\partial \tau} \quad (18)$$

Con la que puede establecerse la siguiente relación:

$$y_t(\tau) = -\frac{\ln P_t(\tau)}{\tau} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau -\frac{1}{P(\tau)} \frac{\partial P(\tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f_t(u) du \quad (19)$$

El rendimiento de un bono cupón cero es, entonces, el promedio igualmente ponderado de todas las tasas forward instantáneas observables entre el t y τ . Este resultado es de suma importancia, porque demuestra que el conocimiento de cualquiera de las tres curvas, nos permite obtener a las otras dos.

3.3. Modelo Nelson – Siegel

El modelo que se ocupa en este trabajo es el presentado por Diebold y Li (2006), quienes utilizan la forma funcional desarrollada por Nelson y Siegel (1987) que consiste en una aproximación de la estructura de tasas de interés mediante una ecuación exponencial paramétrica. Bajo este modelo, la curva forward está definida por la siguiente ecuación:

$$f_t(\tau) = \beta_{1t} + \beta_{2t}e^{-\lambda_t\tau} + \beta_{3t}\lambda_t e^{-\lambda_t\tau} \quad (20)$$

La ecuación (20) puede ser vista como una función de Laguerre; esta familia de ecuaciones consiste en un polinomio multiplicado por un término de decaimiento exponencial, utilizadas para la aproximación de funciones (Nelson y Siegel (1987)).

Para obtener la curva de rendimiento, $y_t(\tau)$, se integra (20) desde cero hasta la madurez τ y se divide entre la madurez:⁸

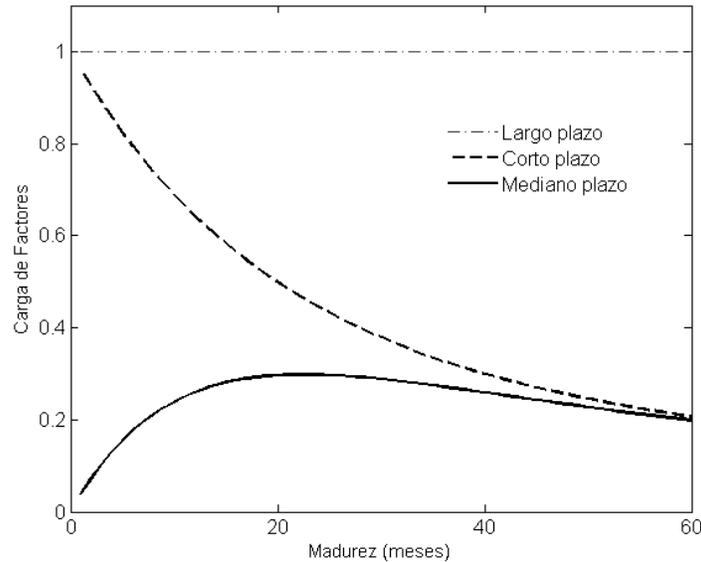
$$y_t(\tau) = \beta_{1t} + \beta_{2t} \left(\frac{1 - e^{-\tau\lambda_t}}{\lambda_t\tau} \right) + \beta_{3t} \left(\frac{1 - e^{-\tau\lambda_t}}{\lambda_t\tau} - e^{-\tau\lambda_t} \right) \quad (21)$$

Diebold y Li (2006) encuentran que los parámetros de la forma funcional del modelo Nelson-Siegel pueden ser identificados bajo ciertas características de la curva de rendimiento. El parámetro λ_t representa la tasa exponencial de decaimiento de (20); valores pequeños de λ_t produce una caída leve y puede ajustar mejor la curva en madureces largas, mientras que los valores altos de λ_t producen caídas rápidas y pueden ajustar mejor las madureces cortas de la curva.

Los parámetros β_{1t} , β_{2t} y β_{3t} son interpretados como factores dinámicos latentes (Diebold y Li, 2006). La carga sobre β_{1t} es 1, y por lo tanto no decae a cero en el límite, por lo que puede interpretarse como el factor de largo plazo. La carga sobre β_{2t} , $\left(\frac{1 - e^{-\tau\lambda_t}}{\lambda_t\tau} \right)$, es una función con límite 1 cuando τ tiende a cero y con límite 0, cuando τ tiende a infinito; por lo tanto, β_{2t} puede ser interpretado como el factor de corto plazo. Por último la carga sobre β_{3t} , $\left(\frac{1 - e^{-\tau\lambda_t}}{\lambda_t\tau} - e^{-\tau\lambda_t} \right)$, tiende a cero cuando τ es tiende a cero, alcanza un máximo, determinado por λ_t y decae a cero cuando τ tiende a infinito; por lo tanto, el parámetro β_{3t} puede ser interpretado como el factor de mediano plazo.

⁸ Tal como se muestra en la ecuación (19).

Figura 12
Carga de factores del modelo Nelson-Siegel



Nota: Cargas sobre factores del modelo Nelson-Siegel $[L1 = 1, L2 = \left(\frac{1-e^{-\lambda_t\tau}}{\lambda_t\tau}\right), L3 = \left(\frac{1-e^{-\lambda_t\tau}}{\lambda_t\tau} - e^{-\lambda_t\tau}\right)]$; $\lambda_t = 0.080$

Dadas las características de los factores β_{1t} , β_{2t} y β_{3t} , estos pueden ser interpretados en términos del nivel, pendiente y curvatura de la curva de rendimiento, tal como lo hacen Litterman y Scheinkman (1991) o Bliss (1997). De la ecuación (21) se observa que $\lim_{\tau \rightarrow \infty} y(\tau) = \beta_{1t}$; esto nos permite identificar β_{1t} como una aproximación del rendimiento del extremo largo de la estructura de tasas de interés, además que un aumento en este parámetro ocasiona un incremento en todos los rendimientos.

Por su parte, β_{2t} puede ser identificado como la pendiente de la curva de rendimiento, ya que la carga impuesta sobre este factor, $\left(\frac{1-e^{-\tau\lambda_t}}{\lambda_t\tau}\right)$, es 1 cuando $\tau \rightarrow 0$, y 0 cuando $\tau \rightarrow +\infty$. En este trabajo asumimos que la pendiente de la curva de rendimiento es la diferencia entre el rendimiento del bono de 60 meses menos el rendimiento del bono de 3 meses.⁹

⁹ Diebold y Li (2006) utilizan el bono con rendimiento a la madurez de 120 meses en lugar del de 60 meses. En este trabajo seguimos a Elizondo (2013).

Por último, β_{3t} puede ser identificado como la curvatura de la estructura de tasas de interés debido a que un incremento de este factor tiene un efecto superior sobre las tasas de mediano plazo que sobre las tasas del extremo corto o del extremo largo la de curva de rendimiento. La curvatura se define como 2 veces el rendimiento del bono de 24 meses menos la suma del rendimiento de 3 meses y el rendimiento del bono a 60 meses.

3.4. Modelo afín de no arbitraje

Los modelos afines de no arbitraje de la estructura de tasas de interés son definidos generalmente como aquellos modelos en los que los rendimientos de bonos cupón cero son modelados mediante el uso de funciones afines de vectores de estado subyacentes (Duffee, 2002). Además de la forma funcional de los modelos afines, una característica importante de estos modelos consiste en la imposición de restricciones entre las ecuaciones que describen a los rendimientos para asegurar la eliminación de oportunidades de arbitraje.¹⁰ La razón de imponer estas restricciones es que, de cumplirse la teoría de expectativas y prima por riesgo de liquidez, entonces los bonos de mayor madurez representan las expectativas ajustadas por riesgo del promedio de tasas de corto plazo futuras y por lo tanto el movimiento en los rendimientos de cualquier madurez afectan a los demás rendimientos de otras madureces, revelando una relación transversal (Piazzesi, 2009).

Imponer restricciones a través de las ecuaciones tiene varias ventajas.¹¹ En primer lugar, se asegura que el comportamiento conjunto y dinámico de los rendimientos sea consistente. Además, el supuesto de no arbitraje parece natural si tenemos en cuenta que los mercados de bonos soberanos son generalmente líquidos y las oportunidades de arbitraje son descartadas fácilmente por la existencia de grandes instituciones de inversión con mesas de arbitraje destinadas a explotar estas oportunidades, teniendo como consecuencia su eliminación.

¹⁰ Coloquialmente, el arbitraje se refiere a una situación en la que un agente es capaz de obtener un beneficio sin incurrir en algún riesgo por obtenerlo.

¹¹ Ang y Piazzesi (2003), y Piazzesi (2009)

En segundo lugar, los modelos afines permiten separar las primas de riesgo de las expectativas de los rendimientos futuros de los inversionistas, por lo que permiten entender lo que los inversores piensan de los bonos largos como inversiones seguras.

En tercer lugar, imponer una restricción entre ecuaciones puede mejorar la eficiencia de las estimaciones; Ang y Piazzesi (2003) demuestran que se mejora el pronóstico fuera de la muestra, aunque atribuyen también que el pronóstico mejora por la combinación de variables económicas y latentes dentro del vector de estado.

Por último, los rendimientos de bonos faltantes en la muestra pueden ser recuperados de un conjunto pequeño de otros rendimientos de tal forma que sea coherente con la condición de no arbitraje. Esto es especialmente útil en mercados no tan desarrollados y donde existen pocos bonos en circulación, ya que generalmente se utilizan técnicas de interpolación para recuperar el rendimiento de bonos cuyas madureces no son observables. Sin embargo, estas técnicas de interpolación también admiten oportunidades de arbitraje.

Dicho lo anterior, los modelos afines describen los rendimientos con tiempo a la madurez τ por la siguiente ecuación:

$$y_t(\tau) = A(\tau) + B'(\tau)x_t + \varepsilon_t(\tau) \quad (22)$$

Respecto a x_t no se tiene ningún supuesto sobre el mecanismo generador de las variables contenidas en este. Por otro lado, para asegurar que no existen oportunidades de arbitraje, las matrices $A(\tau)$ y $B(\tau)$ deben estar configuradas de alguna manera tal que las ecuaciones que describen el ajuste y dinámica de los rendimientos de bonos con madurez τ , se relacionen entre sí. Las restricciones tienen que ser derivadas de parámetros que describen la dinámica de las variables de estado y de las primas de riesgo. A pesar de que el modelo es afín en el vector de estado x_t , las funciones $A(\tau)$ y $B(\tau)$ son funciones no lineales de los parámetros subyacentes.

En el ámbito financiero, los precios de bonos son generalmente asignados con una medida de probabilidad neutral al riesgo Q^* .¹² Los precios de bonos son valores esperados de sus pagos futuros (en el caso de bonos cupón cero, el número de pagos futuros es 1, el del principal), descontados a la tasa de interés libre de riesgo, donde las expectativas son computadas utilizando la medida de probabilidad Q^* . Utilizando la relación entre la curva de descuento y la curva forward, tenemos entonces:

$$P_t(\tau) = E_t^* \left[\exp \left(- \int_t^{t+\tau} r_u du \right) \right] \quad (23)$$

Donde E_t^* denota la expectativa en t bajo Q^* . Por definición si tal medida Q^* existe, entonces el sistema de precios está libre de oportunidades de arbitraje. Además, la unicidad de Q^* es equivalente a que los mercados sean completos (Duffee, 2002).

Bajo la medida neutral al riesgo, los rendimientos en exceso esperados sobre bonos son cero. En otras palabras, la tasa de rendimiento esperada sobre un bono es igual a la tasa de interés libre de riesgo:

$$E_t^* \left[\frac{dP_t(\tau)}{P_t(\tau)} \right] = r_t dt \quad (24)$$

La relación $P_t(\tau) = E_t^* \left[\exp \left(- \int_t^{t+\tau} r_u du \right) \right]$ muestra que cualquier modelo de estructura de tasas de interés consiste de dos partes:

- (i) El cambio de medida de Q a Q^* , donde Q representa la medida de probabilidad real;

¹² Una medida de probabilidad neutral al riesgo es una medida bajo la cual el crecimiento del valor esperado de cualquier portafolio de activos es igual a la tasa de interés libre de riesgo.

(ii) La dinámica de la tasa de corto plazo r , bajo Q^* .

En los modelos de factores, (ii) es reemplazado por el siguiente supuesto:

(ii)' La tasa de corto plazo es una función afín $R(x)$, de x

Lo que significa que x es el vector de estado relevante, un vector de factores. (ii)' implica que la esperanza condicional en $P_t(\tau) = E_t^* \left[\exp \left(- \int_t^{t+\tau} r_u du \right) \right]$ es una función del tiempo a la madurez τ y del vector de estado x_t :

$$P_t(\tau) = F(x_t, \tau) \quad (25)$$

Tomando en cuenta que el mecanismo generador de x_t no es asumido a priori y utilizando la metodología de Ang y Piazzesi (2003), se toman los tres primeros componentes principales¹³ de los rendimientos de bonos con madureces desde 1 a 60 meses y asumen que estos tres factores son suficientes para explicar el comportamiento transversal y dinámico de la estructura de tasas de interés:

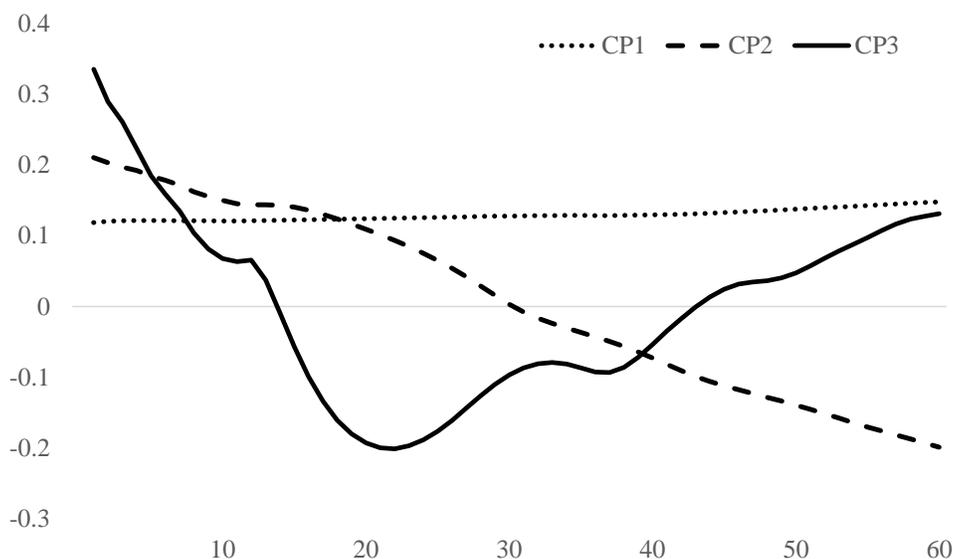
$$x_t = \{CP1_t, CP2_t, CP3_t\} \quad (26)$$

Del mismo modo que Diebold y Li (2006) encuentran que los factores del modelo Nelson-Siegel pueden ser asociados al nivel, pendiente y curvatura de la estructura de tasas de interés, Cortés, Ramos-Francia y Torres (2008) y Elizondo (2013) encuentran que los tres primeros componentes principales pueden igualmente ser asociados a las características de la curva de rendimiento anteriormente mencionadas. Como se observa en la Figura 13, los pesos del primer componente principal no decaen conforme la madurez aumenta, revelando que un aumento en este componente, tendrá un efecto en el nivel de toda la estructura de tasas; por su parte, el segundo componente principal revela tener un menor peso cuando la madurez

¹³ Bliss (1996), Tipping y Bishop (1999) y Tsay (2010) realizan una exhaustiva explicación de este método. En el Apéndice I se da una breve explicación.

aumenta, por lo que puede asociarse con la pendiente de la curva de rendimiento; por último, el tercer componente principal tiene un peso positivo en los extremos corto y largo de la curva de rendimiento, mientras que es negativo para rendimientos de mediano plazo, revelando un impacto en la curvatura de la estructura de tasas.

Figura 13
Pesos de componentes principales de estructuras de tasas de interés en México



Fuente: Elaboración propia con datos de Valmer.

Nota: Se muestran los pesos de los tres primeros componentes principales para rendimiento de Cetes con madureces que van desde 1 hasta 60 meses. La muestra utilizada va desde enero de 2004 hasta diciembre de 2016.

Siguiendo la metodología de Ang y Piazzesi (2003), Ang, Piazzesi y Wei (2005), Gimeno y Marqués (2009) y Elizondo (2013), se asume que x sigue un proceso gaussiano y que puede modelarse mediante un proceso $VAR(1)$:

$$x_t = \mu + \phi x_{t-1} + \Sigma u_t \quad ; \quad u_t \sim N(0, I) \quad (27)$$

Donde μ es un vector de medias, Σ es la matriz de varianzas y covarianzas del término de error, ϕ es la matriz de coeficientes autorregresivos y u_t es un vector de ruido blanco que se

distribuye normalmente, el cual representa la incertidumbre de los valores futuros de las tasas de interés.

Tomando en cuenta el supuesto (ii)', la forma funcional de la tasa de corto plazo r se asume que sigue una forma afín:¹⁴

$$r_t = R(x) = \delta_0 + \delta_1' x_t + \varepsilon_t(1) \quad (28)$$

La elección de los parámetros de la tasa de corto plazo, δ_0 y δ_1 dependen del número de factores en el modelo, en este caso, de tres factores. El método de estimación de los coeficientes se realiza mediante mínimos cuadrados ordinarios.

3.4.1 Aversión al riesgo y condiciones de no arbitraje

Para el desarrollo de esta subsección se utilizaron los trabajos de Ang y Piazzesi (2003), y Gimeno y Marqués (2009). Como se mencionó anteriormente, la condición de no arbitraje garantiza la existencia de una medida neutral al riesgo Q^* , lo que implica que para cualquier activo en la economía que no paga dividendos en $t + 1$ (como los bonos cupón cero), el precio en el momento t es simplemente el valor esperado bajo Q^* del activo en $t + 1$ multiplicado por el factor de descuento. Para convertir la medida neutral al riesgo Q^* a la medida generadora de datos hacemos uso de la derivada de Radon-Nikodym¹⁵, denotada por ξ_{t+1} ; bajo la derivada de Radon-Nikodym, tenemos que para cualquier variable aleatoria Z_{t+1} , $E_t^*[Z_{t+1}] = E_t \left[Z_{t+1} \frac{\xi_{t+1}}{\xi_t} \right]$ (Shreve, 2004). La existencia de no-arbitraje garantiza la existencia de ξ_{t+1} .

Asumimos que ξ_{t+1} sigue un proceso log-normal:

¹⁴ En este trabajo, como se trabaja con madureces mensuales, se toma como la tasa de corto plazo la tasa con madurez igual a un mes

¹⁵ La derivada de Radon-Nikodym es un mecanismo que permite un cambio de medida cuando en el dominio de una variable aleatoria existen dos medidas de probabilidad. Para más información, ver Shreve (2004).

$$\xi_{t+1} = \xi_t \exp \left\{ -\frac{1}{2} \lambda_t' \lambda_t - \lambda_t' \lambda_t u_{t+1} \right\} \quad (29)$$

Donde λ_t son precios de riesgo, los cuales son variables a través del tiempo, que se asumen que siguen un proceso afín al vector de estado x_t :

$$\lambda_t = \lambda_0 + \lambda_1 x_t \quad (30)$$

Las ecuaciones (29) y (30) muestran una relación entre shocks en el vector de estado y ξ_{t+1} y, por lo tanto, que los shocks en el vector de estado tienen efecto sobre todos los rendimientos.

La existencia de una medida neutral al riesgo garantiza la existencia de un kernel de precios m_{t+1} definido como:

$$m_{t+1} = \exp(-r_t) \frac{\xi_{t+1}}{\xi_t} \quad (31)$$

Que permite asegurar que el rendimiento nominal total de un activo, R_{t+1} , satisface:

$$E_t \{ m_{t+1} R_{t+1} \} = 1 \quad (32)$$

Teniendo en cuenta que $r_t = \delta_0 + \delta_1' x_t$ y que $\frac{\xi_{t+1}}{\xi_t} = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \lambda_t' \lambda_t - \lambda_t' \lambda_t u_{t+1} \right\}$ tenemos:

$$m_{t+1} = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \lambda_t' \lambda_t - \lambda_t' \lambda_t u_{t+1} - \delta_0 - \delta_1' x_t \right\} \quad (33)$$

Utilizando la ecuación 32 y escribiendo $R_{t+1} = \frac{P_{t+1}^\tau}{P_t^\tau}$ podemos computar los precios de bonos recursivamente:¹⁶

$$P_t^{\tau+1} = E_t[m_{t+1}P_{t+1}^\tau] \quad (34)$$

Dadas las ecuaciones (32), (33) y (34), el modelo desarrollado es un modelo gaussiano de tres factores que corresponde a la familia de modelos afines discretos y los precios de bonos están dados por:

$$P_t^\tau = \exp\{A(\tau) + B'(\tau)x_t\} \quad (35)$$

Y donde $A(\tau)$ y $B(\tau)$ siguen las siguientes ecuaciones en diferencia:¹⁷

$$A(\tau + 1) = A(\tau) + B'(\tau)\mu - B'(\tau)\Sigma\lambda_0 + \frac{1}{2} B'(\tau)\Sigma\Sigma'B'(\tau) - \delta_0 \quad (36)$$

$$B'(\tau + 1) = B'(\tau)\phi - B'(\tau)\Sigma\lambda_1 - \delta'_1$$

Recordando que el rendimiento compuesto continuamente de un bono con termino a la madurez τ es $y(\tau) = -\frac{\ln P_t(\tau)}{\tau}$, tenemos que $a(\tau) = -\frac{A(\tau)}{\tau}$ y $b(\tau) = -\frac{B(\tau)}{\tau}$.

¹⁶ $\frac{P_{t+1}^\tau}{P_t^\tau}$ es el rendimiento de un bono que en t tiene un término a la madurez $n + 1$ y en $t + 1$ tiene un término a la madurez de n .

¹⁷ En el Apéndice se da mayor detalle de cómo obtener las ecuaciones en diferencia mostradas en (36).

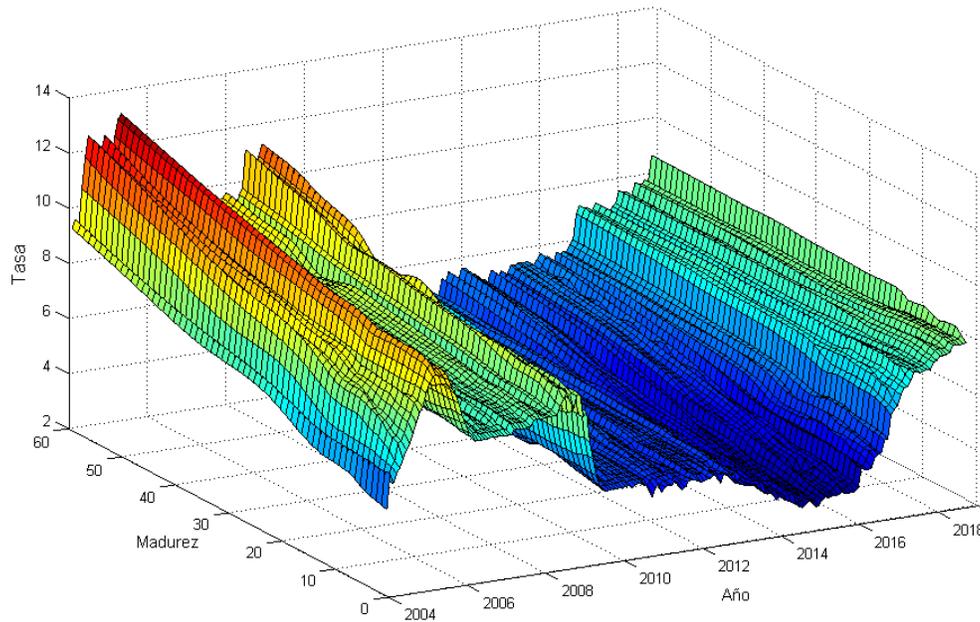
CAPÍTULO 4. DATOS

Para este trabajo se utilizaron curvas de bonos cupón cero con madureces en intervalos mensuales desde 1 hasta 60 meses. La fuente de información es Valmer; este proveedor utiliza información de CETES y Bonos M operados en el mercado primario y secundario para la estimación de la curva cupón cero con madureces diarias. Como Banco de México no emite CETES (bonos cupón cero) con madureces mayores a un año, el proveedor de precios utiliza el método de bootstrapping en el que, a partir de bonos con cupones, se pueden obtener rendimientos de bonos cupón cero con madureces mayores a un año. La obtención de los nodos intermedios se realiza mediante interpolación cúbica.

En este trabajo se utilizaron únicamente madureces mensuales, en los que un mes es equivalente a 30.4375 días. Para obtener rendimientos de múltiplos de este número, se utilizó la técnica de interpolación lineal entre el nodo superior y el nodo inferior más próximos a estos (por ejemplo, para el bono con madurez de un mes se interpoló linealmente utilizando los rendimientos observados para de los bonos con madureces de 30 y 31 días).

Valmer calcula curvas de CETES diariamente, pero en este trabajo se utilizaron únicamente las curvas observadas en el último día del mes. La serie de curvas de rendimiento comienza en enero de 2004 y termina en octubre de 2018. La Figura 14 muestra los rendimientos observados en este período.

Figura 14
Curvas de rendimiento de CETES
(enero de 2004 – octubre de 2018)



Fuente: Elaboración propia con información de Valmer.

Nota: Se muestra la estructura de tasas de interés con periodicidad mensual para rendimientos de CETES con madureces que van desde 1 hasta 60 meses.

En el Cuadro 2 se presenta información estadística de los rendimientos analizados. La media de los rendimientos muestra que, en promedio, la estructura de interés sigue una forma con pendiente positiva (es decir, la curva de rendimiento ha mostrado su característica “normal”), y que la variabilidad de los rendimientos es elevada, especialmente para bonos de mayor madurez (40 y 60 meses). Los coeficientes de autocorrelación muestran, por su parte, la elevada persistencia de los rendimientos, la cual aumenta conforme aumenta la madurez y disminuye cuando el rezago aumenta.

Cuadro 2

Estadísticos descriptivos de curvas de rendimiento

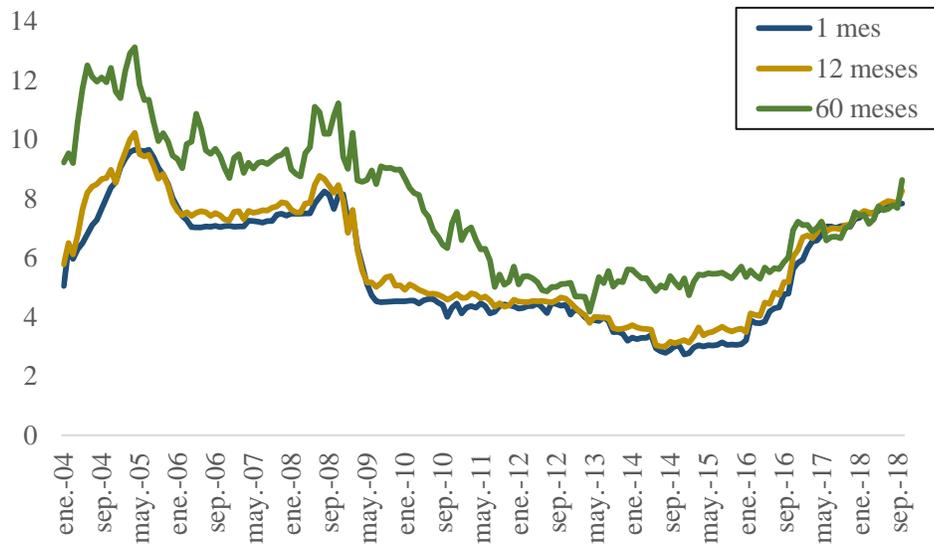
Madurez (meses)	Media	Desv. Est.	Mínimo	Máximo	$\rho(1)$	$\rho(12)$	$\rho(30)$	$\rho(60)$
1	5.681	1.944	2.727	9.654	0.988	0.657	0.229	-0.217
3	5.793	1.970	2.881	10.050	0.987	0.660	0.236	-0.226
6	5.891	1.953	2.961	10.170	0.987	0.672	0.244	-0.227
9	5.943	1.930	3.000	10.198	0.985	0.688	0.259	-0.232
12	5.972	1.921	2.998	10.232	0.985	0.693	0.270	-0.235
15	6.037	1.924	3.044	10.512	0.983	0.680	0.286	-0.229
18	6.124	1.927	3.141	10.627	0.983	0.684	0.305	-0.229
21	6.226	1.925	3.249	10.709	0.983	0.705	0.328	-0.229
24	6.340	1.925	3.380	10.876	0.982	0.725	0.352	-0.225
30	6.596	1.938	3.670	11.224	0.981	0.756	0.390	-0.215
36	6.797	1.945	3.794	11.566	0.981	0.765	0.406	-0.196
48	7.234	2.055	4.105	12.305	0.979	0.757	0.409	-0.140
60 (nivel)	7.665	2.273	4.174	13.119	0.977	0.761	0.420	-0.091
Pendiente	1.872	1.223	-0.527	5.157	0.934	0.311	-0.173	0.394
Curvatura	-0.778	0.677	-2.948	0.482	0.906	0.387	-0.153	0.232

Fuente: Elaboración propia con información de Valmer.

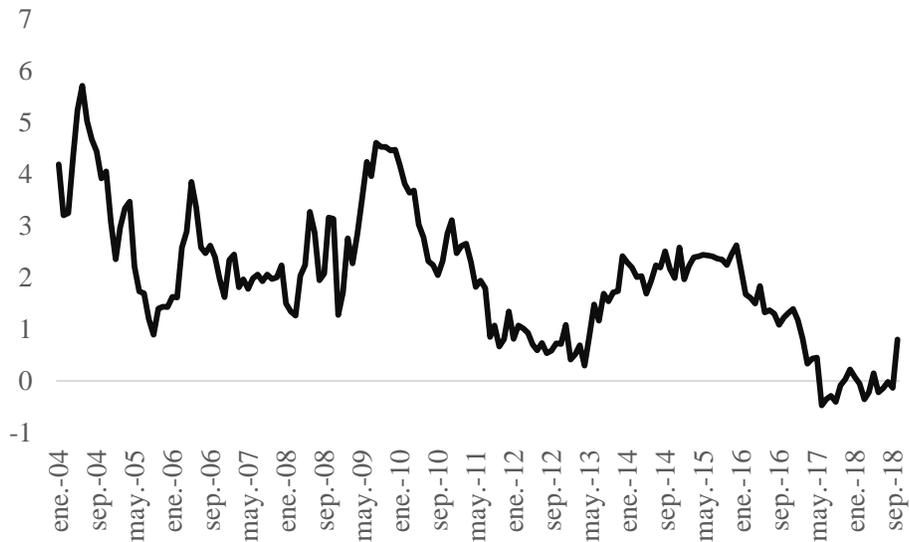
Nota: Se calculan diversos estadísticos para los rendimientos mensuales de CETES con diferentes madureces y para las características relevantes de la estructura de tasas de interés, correspondiente a la muestra que va desde enero de 2004 hasta octubre de 2018. Siguiendo a Elizondo (2013), la pendiente se calcula como la diferencia entre el rendimiento del bono de sesenta meses menos el rendimiento del bono de tres meses y la curvatura como dos veces el rendimiento a 24 meses menos la suma del rendimiento del bono de tres meses y el rendimiento del bono a sesenta meses.

Por otra parte, aunque en el período de estudio los rendimientos muestran una gran variabilidad individual de cada rendimiento, en la Figura 15 puede apreciarse una continua disminución en la variabilidad transversal de la curva de rendimiento, así como una disminución del diferencial entre el rendimiento del bono de largo plazo y el rendimiento del bono de corto plazo.

Figura 15
a. Rendimientos de bonos soberanos en México
 (bonos cupón cero, porcentaje)



b. Diferencial de tasas de interés
 (entre el rendimiento de bono a 60 meses y bono a 1 mes, porcentaje)

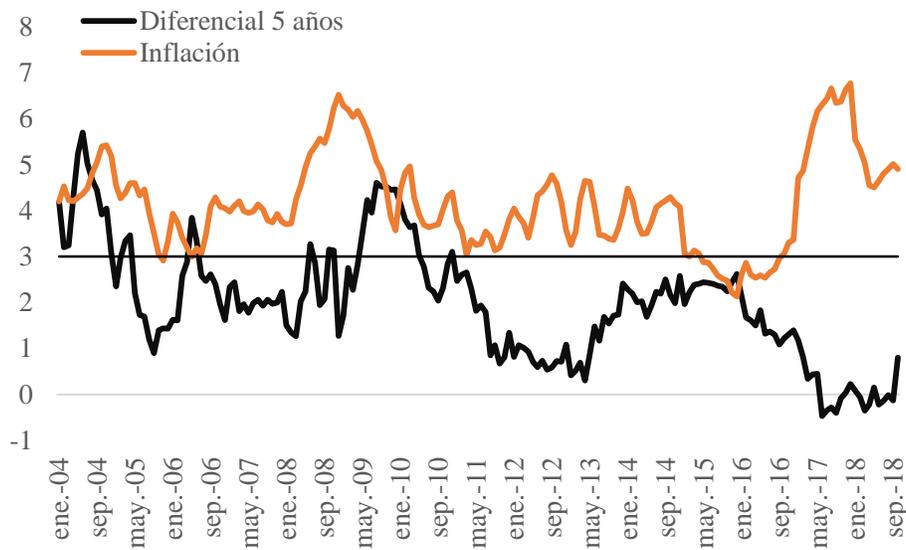


Notas: Elaboración propia con información de Valmer.

La explicación de Aguilar, Elizondo y Roldán (2016), sobre el continuo descenso de las tasas de interés de bonos de largo plazo es atribuido a la convergencia gradual de las expectativas de inflación respecto del objetivo de inflación de Banco de México, que es de 3.0%, por lo

que los agentes demandan una prima de riesgo cada vez menor con el paso del tiempo. Aun así, en la Figura 16 se puede observar que cuando las tasas de inflación comienzan a desviarse por arriba del objetivo de Banco de México, el diferencial entre las tasas de interés de largo y corto plazo, tiende a disminuir, mientras que el diferencial de las tasas de interés de largo y corto plazo tiende a aumentar conforme la inflación converge al objetivo del banco central. Especialmente, de 2016 a 2018, se ha observado un aumento considerable de las tasas de la inflación y un marcado descenso del diferencial de tasas de interés de largo y corto plazo, el cual ha sido negativo durante los períodos en que la inflación ha sido la más elevada: entre junio y octubre de 2017, febrero y abril de 2018, y de junio a septiembre de 2018.

Figura 16
Diferencial de tasas de interés e inflación
 (enero de 2004 – octubre de 2018)



Nota: Se muestra el diferencial de tasas de interés entre CETES de 1 y 60 meses y la tasa de crecimiento del Índice Nacional de Precios al Consumidor.

Fuente: Elaboración propia con información de Valmer e INEGI.

CAPÍTULO 5. APLICACIÓN DE LOS MODELOS

5.1 Ajuste dentro de la muestra

El ajuste de la estructura de tasas de interés utilizando los modelos de factores se hizo tomando una submuestra que abarca desde enero de 2004 hasta diciembre de 2015 (144 meses).

Dentro del modelo Nelson-Siegel, el ajuste de la curva de interés se realizó estimando los parámetros $\theta = \{\beta_{1t}, \beta_{2t}, \beta_{3t}, \lambda_t\}$ de la ecuación (21). Dicha estimación puede hacerse por mínimos cuadrados no lineales, debido al decaimiento exponencial λ_t . Sin embargo, se siguió a Diebold y Li (2006), quienes fijan el valor de λ_t a una constante idéntica para todos los períodos de tiempo. El valor es $\lambda = 0.0609$, debido a que este valor maximiza la carga sobre el factor de mediano plazo β_{3t} cuando $\tau = 24$ meses. Ajustar el valor de λ_t permite entonces estimar $\theta = \{\beta_{1t}, \beta_{2t}, \beta_{3t}\}$ mediante mínimos cuadrados ordinarios para cada uno de los períodos (144 estimaciones, en este caso).

Una vez obtenidos los estimadores $\hat{\theta} = \{\hat{\beta}_{1t}, \hat{\beta}_{2t}, \hat{\beta}_{3t}\}$ para cada uno de los períodos, se recuperan las curvas de rendimiento mediante la ecuación (21). Para ilustrar la capacidad de ajuste del modelo, se presenta en el Cuadro 3 información descriptiva de los residuales.

Se observa que, para madureces de muy corto plazo (hasta 3 meses), el modelo Nelson-Siegel tiende a ajustar por debajo a las tasas de interés y, en términos de la raíz del error cuadrático medio y del error absoluto medio, el ajuste es peor para estas madureces que para el resto. También se observa que los residuales de las madureces del extremo corto y largo de la curva de rendimiento son más variables (variabilidad medida por la desviación estándar). Asimismo, los resultados muestran una elevada persistencia, la cual se vuelve rápidamente pequeña conforme el rezago aumenta. Por último, el error absoluto medio y la raíz del error cuadrático medio dan evidencia de un buen ajuste a lo largo de todas las madureces.

Cuadro 3
Estadísticos descriptiva de residuales: Nelson-Siegel

Madurez (meses)	Media	Desv. Est.	Mínimo	Máximo	$\rho(1)$	$\rho(12)$	$\rho(30)$	$\rho(60)$	Error absoluto medio	Raíz del error cuadrático medio
1	-0.176	0.139	-0.560	0.152	0.664	0.099	-0.096	0.011	0.170	0.018
3	-0.040	0.058	-0.224	0.110	0.406	0.036	-0.223	0.093	0.052	0.006
6	0.062	0.049	-0.029	0.233	0.509	0.262	-0.103	-0.052	0.060	0.006
9	0.074	0.083	-0.120	0.366	0.640	0.005	-0.149	-0.012	0.076	0.009
12	0.035	0.102	-0.187	0.353	0.674	0.241	-0.208	-0.117	0.068	0.009
15	0.016	0.119	-0.439	0.358	0.599	0.050	-0.123	0.075	0.079	0.010
18	0.001	0.128	-0.393	0.245	0.782	0.040	-0.179	-0.138	0.081	0.010
21	-0.011	0.103	-0.352	0.259	0.767	0.084	-0.137	-0.198	0.064	0.008
24	-0.012	0.113	-0.634	0.253	0.719	0.189	0.008	0.051	0.062	0.009
30	0.008	0.084	-0.163	0.286	0.693	0.141	-0.003	-0.178	0.054	0.007
36	-0.042	0.115	-0.564	0.291	0.720	-0.080	-0.145	-0.023	0.077	0.010
48	-0.022	0.067	-0.318	0.097	0.639	0.135	0.068	-0.021	0.044	0.006
60	0.089	0.128	-0.179	0.423	0.788	0.218	0.167	-0.089	0.107	0.012

Fuente: Elaboración propia con información de Valmer.

Nota: Se muestran diversos estadísticos de los residuales del ajuste del modelo Nelson-Siegel a los rendimientos de CETES para distintas madureces, correspondiente a la submuestra que va desde enero de 2004 hasta diciembre de 2015.

Los resultados del ajuste dentro de la submuestra del modelo Nelson-Siegel explican por qué es utilizado por varias instituciones públicas como la Reserva Federal o el Banco Central Europeo como herramienta clave para el análisis del mercado financiero y para propósitos de estabilidad financiera (ECB, 2007).

Respecto al modelo afín de no arbitraje, como se mencionó anteriormente, se asume que los rendimientos siguen funciones afines de factores x_t :

$$y_t(\tau) = a(\tau) + b(\tau)x_t + \varepsilon_t \quad (37)$$

En este trabajo, asumimos que los tres primeros componentes principales son los factores observables x_t y que siguen un proceso VAR(1):

$$x_t = \mu + \phi x_{t-1} + \Sigma u_t ; \quad u_t \sim N(0, I) \quad (38)$$

Donde μ es un vector de constantes, Σ es la matriz de varianzas y covarianzas de los errores y ϕ es la matriz de que captura la dinámica del VAR(1). Debido a que los elementos de x_t

son conocidos, los parámetros son estimados mediante mínimos cuadrados ordinarios (MCO).

Una vez hecho lo anterior, se procede a estimar los parámetros de la función afín de la tasa de corto plazo que se muestra en la ecuación (39). Si asumimos que $y_t(1)$ se distribuye normalmente, la estimación de los coeficientes puede realizarse también mediante MCO:

$$y_t(1) = \delta_0 + \delta_1 x_t + \varepsilon_t \quad (39)$$

Donde $\delta_0 = -\hat{A}(\tau)$ y $\delta_1 = -\hat{B}(\tau)$

Para realizar el ajuste de tasas de mayor madurez, se realiza la estimación de las matrices $\hat{A}(\tau)$ y $\hat{B}(\tau)$. Para esto, se hace uso de un algoritmo recursivo no restringido que minimiza el cuadrado de los errores entre las tasas observadas y las tasas estimadas mediante el modelo afín:

$$\hat{A}(\tau + 1) = \hat{A}(\tau) + \hat{B}'(\tau)(\mu - \Sigma\lambda_0) + \frac{1}{2}\hat{B}'(\tau)\Sigma\Sigma'\hat{B}(\tau) - \delta_0 \quad (40)$$

$$B'(\tau + 1) = B'(\tau)(\phi - \Sigma\lambda_1) - \delta_0 \quad (41)$$

El método utilizado para la minimización de la suma de cuadrados de los errores es el de optimización basada en gradiente y el algoritmo utilizado es el de “line-search”¹⁸; los métodos basados en gradiente necesitan un valor inicial desde el cual debe evaluarse la función objetivo. En nuestro caso, λ_0 y λ_1 , los precios de riesgo, no son conocidos, pero inicialmente se asumen que son los mismos que los encontrados por Elizondo (2013):

¹⁸ En el Apéndice 4 se da una explicación del algoritmo utilizado.

$$\lambda_1 = \begin{bmatrix} 0.0003 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1135 & 0 \\ 0 & 0 & 5.9872 \end{bmatrix}; \lambda_0 = [-0.4879 \quad -7.3149 \quad -3.5983] \quad (42)$$

El Cuadro 4 presenta información sobre los residuales del ajuste del modelo afín. Se observa que, a diferencia del modelo Nelson-Siegel, el modelo afín en promedio realiza un buen ajuste para las madureces de corto plazo (1 mes), pero este empeora conforme la madurez aumenta; particularmente, la media de los residuales del ajuste de la tasa de largo plazo es mayor que la media de los residuales del ajuste de las tasas de interés de otras madureces (en términos absolutos). El error absoluto medio y la raíz del error cuadrático medio confirman también que el ajuste es mejor para tasas de corto plazo que para tasas de largo plazo.

También se observa que la variabilidad de los residuales es mayor en el ajuste del modelo afín que la del ajuste del modelo Nelson-Siegel. Por último, la persistencia de los residuales del modelo afín es mayor que la del modelo Nelson-Siegel y, a diferencia de este último modelo, la persistencia se mantiene aun cuando el rezago aumenta.

Cuadro 4 Estadísticos descriptiva de residuales: modelo afín de no arbitraje

Madurez (meses)	Media	Desv. Est.	Mínimo	Máximo	$\rho(1)$	$\rho(12)$	$\rho(30)$	$\rho(60)$	Error absoluto medio	Raíz del error cuadrático medio
1	0.000	0.110	-0.282	0.256	0.498	-0.031	-0.073	0.014	0.085	0.009
3	0.012	0.381	-0.484	0.868	0.975	0.685	0.364	-0.201	0.333	0.032
6	0.125	0.745	-0.890	1.761	0.983	0.724	0.398	-0.210	0.665	0.063
9	0.115	0.970	-1.226	2.229	0.981	0.737	0.409	-0.211	0.873	0.081
12	0.022	1.126	-1.519	2.469	0.980	0.738	0.409	-0.215	1.016	0.094
15	-0.050	1.247	-1.768	2.828	0.979	0.708	0.398	-0.209	1.126	0.104
18	-0.115	1.350	-1.975	2.956	0.980	0.703	0.398	-0.206	1.221	0.112
21	-0.166	1.432	-2.151	3.017	0.980	0.722	0.410	-0.202	1.299	0.120
24	-0.193	1.507	-2.285	3.144	0.978	0.737	0.417	-0.195	1.359	0.126
30	-0.175	1.637	-2.515	3.393	0.977	0.751	0.408	-0.191	1.465	0.137
36	-0.181	1.720	-2.728	3.633	0.978	0.749	0.397	-0.178	1.545	0.144
48	-0.034	1.938	-3.075	4.196	0.974	0.720	0.357	-0.152	1.724	0.161
60	0.218	2.220	-3.311	4.876	0.972	0.715	0.352	-0.144	2.007	0.185

Fuente: Elaboración propia con información de Valmer.

Nota: Se muestran diversos estadísticos de los residuales del ajuste del modelo afín de no arbitraje a los rendimientos de CETES para distintas madureces, correspondiente a la su muestra que va desde enero de 2004 hasta diciembre de 2015.

El Cuadro 5 muestra coeficientes de correlación y el estadístico de la prueba Dickey-Fuller Aumentada (ADF, por sus siglas en inglés)¹⁹ para cada uno de los factores del modelo Nelson-Siegel y del modelo afín de no arbitraje. El estadístico ADF sugiere que los tres factores del modelo Nelson-Siegel pueden tener raíz unitaria, mientras que para los factores del modelo afín de no arbitraje, solo el primer factor puede presentar raíz unitaria²⁰.

¹⁹ La prueba Dickey Fuller Aumentada es una prueba de hipótesis en la que la hipótesis nula es que una raíz unitaria está presente en un modelo autorregresivo.

²⁰ La prueba ADF fue hecha utilizando ningún retraso y con un nivel de significancia de 5%. El nivel crítico es -1.943.

Cuadro 5
Autocorrelación de factores: modelo Nelson-Siegel y afín de no arbitraje

Factor	$\rho(1)$		$\rho(12)$		$\rho(60)$		ADF	
	Nelson-Siegel	Afín de no arbitraje						
$\{\hat{\beta}_1, CP1\}$	0.964	0.984	0.642	0.740	-0.035	-0.208	-0.870	-0.685
$\{\hat{\beta}_2, CP2\}$	0.930	0.924	0.266	0.112	0.306	0.335	-1.247	-2.440
$\{\hat{\beta}_3, CP3\}$	0.928	0.835	0.307	-0.081	0.193	-0.100	-1.202	-3.680

Fuente: Elaboración propia con información de Valmer.

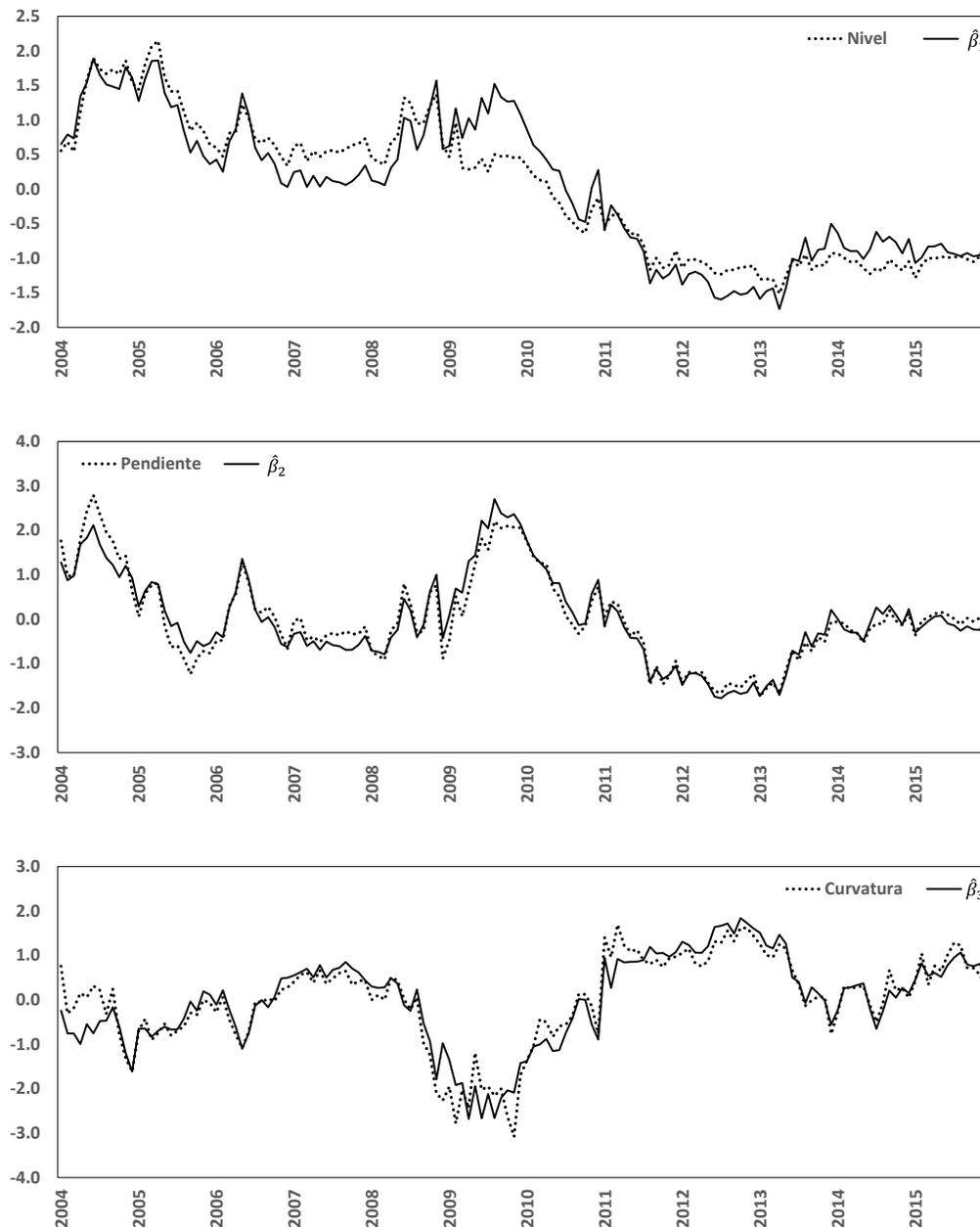
Nota: Se muestran los coeficientes de autocorrelación de los factores del modelo Nelson-Siegel y afín de no arbitraje para distintos horizontes; la última columna muestra el estadístico de la prueba Dickey-Fuller Aumentada.

La Figura 18 muestra los factores $\{\hat{\beta}_{1t}, \hat{\beta}_{2t}, \hat{\beta}_{3t}\}$ del modelo Nelson-Siegel junto con las medidas empíricas de nivel, pendiente y curvatura. La correlación entre los factores estimados y las medidas empíricas es $\rho(\hat{\beta}_{1t}, nivel) = 0.945$, $\rho(\hat{\beta}_{2t}, pendiente) = 0.969$ y $\rho(\hat{\beta}_{3t}, curvatura) = 0.941$.

Por su parte, la Figura 19 muestra los tres componentes principales ($CP1_t, CP2_t, CP3_t$) junto con las mismas medidas empíricas de nivel, pendiente y curvatura. La correlación entre los factores estimados y las medidas empíricas es $\rho(CP1_t, nivel) = 0.980$, $\rho(CP2_t, pendiente) = 0.908$ y $\rho(CP3_t, curvatura) = 0.709$. Destaca que la correlación de los componentes principales sea más débil que la de los factores estimados del modelo Nelson-Siegel.

Tanto la figura 18, como la Figura 19 demuestran que los factores del modelo Nelson-Siegel y los factores del modelo afín de no arbitraje son efectivamente el nivel, pendiente y curvatura de la estructura de tasas de interés en México.

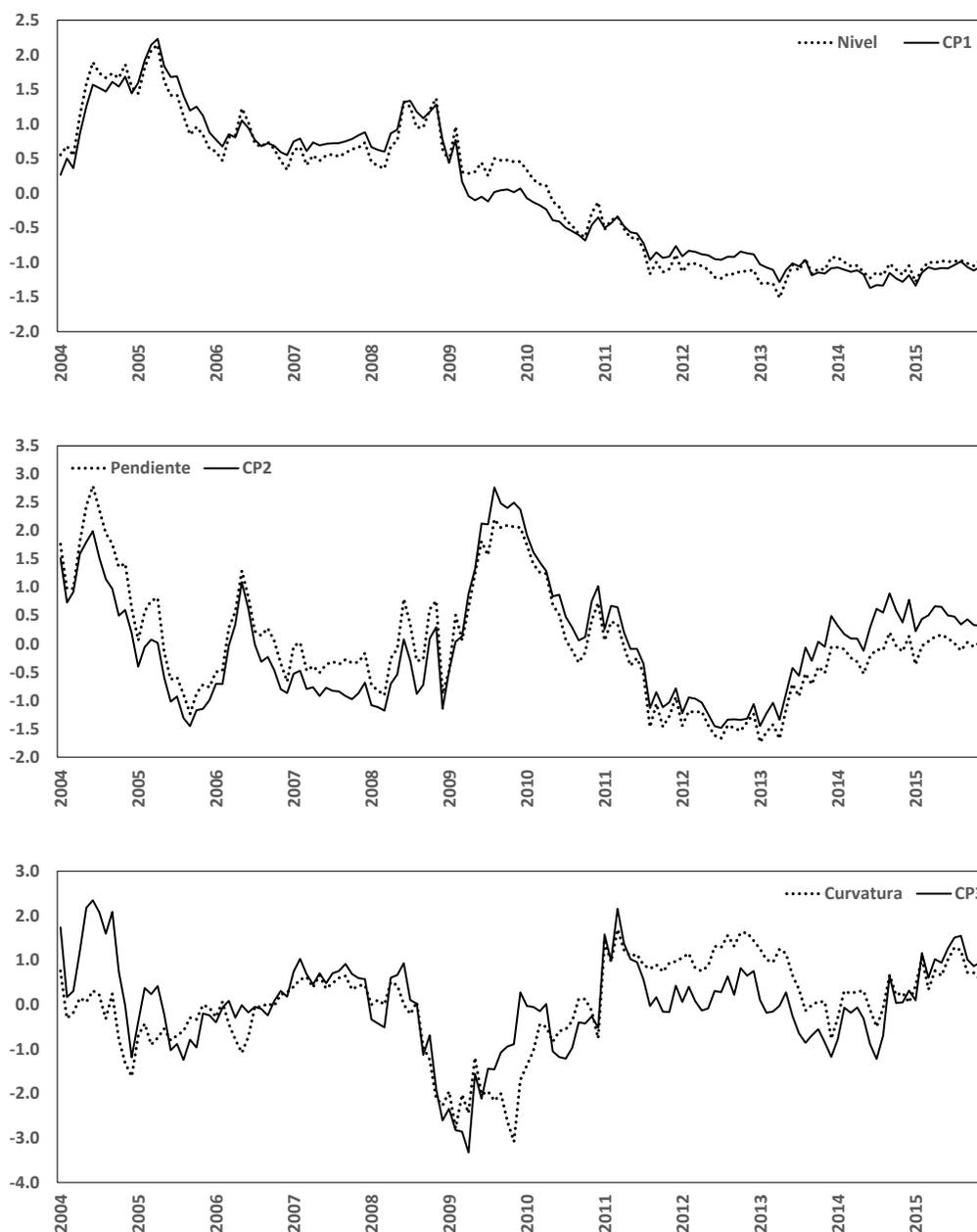
Figura 18
Nivel pendiente y curvatura y factores del modelo Nelson-Siegel



Fuente: Elaboración propia con datos de Valmer.

Nota: Se muestran las medidas empíricas estandarizadas de nivel, pendiente y curvatura y los factores estandarizados del modelo Nelson-Siegel de la estructura de tasas de interés en México utilizando rendimientos mensuales de bonos cupón cero con madureces de 1 a 60 meses para la submuestra que va desde enero de 2004 hasta diciembre de 2015. El nivel se refiere al rendimiento del bono de 60 meses, la pendiente a la diferencia entre el rendimiento del bono de 60 meses y el bono de 3 meses y la curvatura se define como dos veces el rendimiento de 24 meses menos la suma del rendimiento del bono de 3 meses y el rendimiento del bono de 60 meses.

Figura 19
Nivel, pendiente, curvatura y factores del modelo afín de no arbitraje



Fuente: Elaboración propia con datos de Valmer.

Nota: Se muestran las medidas empíricas estandarizadas de nivel, pendiente y curvatura y los factores estandarizados del modelo afín de no arbitraje de la estructura de tasas de interés en México utilizando rendimientos mensuales de bonos cupón cero con madureces de 1 a 60 meses para la submuestra que va desde enero de 2004 hasta diciembre de 2015. El nivel se refiere al rendimiento del bono de 60 meses, la pendiente a la diferencia entre el rendimiento del bono de 60 meses y el bono de 3 meses y la curvatura se define como dos veces el rendimiento de 24 meses menos la suma del rendimiento del bono de 3 meses y el rendimiento del bono de 60 meses.

5.2. Pronóstico fuera de la muestra

El modelo Nelson-Siegel y el modelo afín de no arbitraje intentan predecir la estructura de tasas de interés mediante el pronóstico de los factores y la recuperación de la curva utilizando la forma funcional respectiva. El pronóstico se realiza para la muestra de datos que va desde enero de 2016 hasta octubre de 2018 (34 períodos).

Siguiendo a Diebold y Li (2006), se asume que los factores estimados del modelo Nelson-Siegel $\hat{\theta} = \{\hat{\beta}_{1t}, \hat{\beta}_{2t}, \hat{\beta}_{3t}\}$ son equivalentes a una serie de tiempo multivariada y el pronóstico de la estructura de tasas de interés de este modelo se hace mediante el pronóstico de $\hat{\beta}_{1t}, \hat{\beta}_{2t}, \hat{\beta}_{3t}$:

$$\hat{y}_{t+h|t}(\tau) = \hat{\beta}_{1,t+h|t} + \hat{\beta}_{2,t+h|t} \left(\frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda\tau} \right) + \hat{\beta}_{3,t+h|t} \left(\frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda} \right) \quad (43)$$

Donde se asume que los factores no están relacionados entre sí y siguen un proceso $AR(1)$:

$$\hat{\beta}_{i,t+h|t} = \hat{c}_i + \hat{\gamma}_i \beta_{it}; \quad i = 1, 2, 3 \quad (44)$$

Para el caso del modelo afín de no arbitraje, también se asume que los factores representan una serie de tiempo multivariada. En este caso, siguiendo a Ang y Piazzesi (2003) y a Elizondo (2013), el pronóstico de la estructura de tasas de interés se realiza mediante el pronóstico de las variables de estado x y mediante el uso de las matrices estimadas $\hat{A}(\tau)$ y $\hat{B}(\tau)$:

$$\hat{y}_{t+h|t}(\tau) = A(\tau) + B'(\tau) \hat{x}_{t+h|t} \quad (45)$$

Donde se asume que x sigue un proceso gaussiano modelable mediante un $VAR(1)$:

$$\hat{x}_{t+h|t} = (I + \phi + \dots + \phi^{h-1})\mu + \phi^h x_t \quad (46)$$

Para el pronóstico de la estructura de tasas de interés en México se utilizó la información obtenida en el ajuste hecho a la submuestra que va de enero de 2004 a diciembre de 2015. El pronóstico de la estructura de tasas de interés se hizo para distintos horizontes de la muestra que va de enero de 2016 hasta octubre de 2018.

Para contrastar el poder de pronóstico de los modelos Nelson-Siegel y afín de no arbitraje, se comparó la raíz del error cuadrático medio de los modelos con factores y de modelos de referencia más simples.²¹ Los modelos de referencia utilizados son el de caminata aleatoria y los modelos no restringidos AR(1) y VAR(1) sobre rendimientos seleccionados.

- (1) Caminata aleatoria. Se asume que, para cualquier horizonte, el mejor pronóstico es el valor actual.

$$\hat{y}_{t+h|t}(\tau) = y_t(\tau)$$

Con esto, para todos los horizontes de pronóstico, los valores de la estructura de tasas de interés pronosticados por la caminata aleatoria son los observados en diciembre de 2015.

- (2) Modelo AR(1). Se ajustó un modelo AR(1) sobre los rendimientos con vencimientos de 1, 3, 6, 12, 24, 36 y 60 meses:

$$\hat{y}_{t+h|t}(\tau) = (1 + \gamma_{y(\tau)} + \dots + \gamma_{y(\tau)}^{h-1})\mu_{y(\tau)} + \gamma_{y(\tau)}^h y_t(\tau)$$

Con lo anterior se asume que los rendimientos son independientes entre sí y que siguen un comportamiento normal y pronosticable a partir de un modelo AR(1).

²¹ Ang y Piazzesi (2003), Diebold y Li (2006) y Elizondo (2013) también contrastan los resultados de las estimaciones con las de otros modelos de referencia. Aunque la elección de los modelos de referencia es distinta en cada uno de ellos, la caminata aleatoria y los modelos autorregresivos AR(1) y VAR(1) son comunes a los tres.

(3) Modelo VAR(1). Se ajustó un modelo VAR(1) sobre los rendimientos de 1, 3, 6, 12, 24, 36 y 60 meses:

$$\hat{Y}_{t+h|t} = \hat{c} + \hat{\Gamma}Y_t$$

Los supuestos son que los rendimientos seleccionados tienen una distribución conjunta, la cual se asume que es normal.

Como demuestra Granger (1969) y Granger y Newbold (1986), la minimización del error cuadrático medio (RMSE, por sus siglas en inglés) equivale a la minimización de otras funciones de pérdida utilizadas para evaluar el desempeño de un modelo. Por tal motivo, se utiliza la RMSE para comparar la capacidad de pronóstico de la estructura de tasas de interés del modelo afín y Nelson-Siegel. En este trabajo se define como error de pronóstico a la diferencia entre el valor observado y el valor pronosticado del rendimiento con madurez τ en un horizonte $t + h$: $y_{t+h|t}(\tau) - \hat{y}_{t+h|t}(\tau)$.

El Cuadro 6 muestra la RMSE del pronóstico de la curva de rendimiento a través del modelo afín y del modelo Nelson-Siegel, junto con la RMSE de la caminata aleatoria, el modelo AR(1) y el modelo VAR(1). Los rendimientos mostrados corresponden a los de madureces de 1, 3, 6, 12, 24, 36 y 60 meses. El pronóstico se hizo para horizontes de 1, 12, 24, 30 y 34 meses, que corresponden a pronósticos de la curva de rendimiento observadas en enero de 2016, diciembre de 2016, diciembre de 2017, junio de 2018 y octubre de 2018, respectivamente.

Para el pronóstico con horizonte de un mes (enero de 2016) se observa que la RMSE del modelo afín de no arbitraje es la menor con respecto del resto de modelos para el rendimiento del bono con madurez a 1 mes, mientras que para el modelo Nelson-Siegel, es la mayor. Sin embargo, la capacidad de pronóstico del modelo afín de no arbitraje se degrada rápidamente conforme la madurez aumenta. El modelo con la menor RMSE en la mayoría de las madureces es el modelo VAR(1); únicamente la RMSE del modelo VAR(1) es mayor que la del modelo AR(1) y de la caminata aleatoria para el pronóstico del rendimiento del bono con madurez de 12 meses. El modelo Nelson-Siegel muestra la mayor RMSE para todos los rendimientos de todas las madureces.

Respecto del pronóstico con horizonte de 12 meses (diciembre de 2016), la RMSE de rendimientos de bonos con madureces de hasta 6 meses del modelo Nelson-Siegel es menor respecto del resto de modelos, mientras que para rendimientos de bonos con madureces entre 12 y hasta 24 meses, el modelo afín de no arbitraje es quien muestra la menor RMSE. Para rendimientos de bonos con mayores madureces (36 y 60 meses), el modelo AR(1) es el que muestra la menor RMSE.

Para el pronóstico de horizonte de 24 meses (diciembre de 2017), de nueva cuenta el modelo Nelson-Siegel muestra la menor RMSE para rendimientos de bonos con madureces de hasta 6 meses. Para este horizonte, el modelo afín de no arbitraje muestra la menor RMSE para rendimientos de bonos con madureces entre 12 y 36 meses. Para rendimientos de bonos con madureces de 60 meses, el modelo AR(1) es el que menor RMSE presenta.

Para pronósticos de horizonte de 30 meses (junio de 2018), el modelo Nelson-Siegel presenta la menor RMSE para rendimientos de bonos con madureces entre 1 y 12 meses, mientras que el modelo afín de no arbitraje muestra la menor RMSE para rendimientos de bonos con madureces entre 24 y 36 meses. De nueva cuenta, el modelo AR(1) es el modelo con mejor desempeño en el pronóstico de bonos de madureces de 60, pues es el modelo que presenta la menor RMSE.

Por último, para el pronóstico con horizontes de 34 meses (octubre de 2018), el modelo Nelson Siegel y el modelo afín de no arbitraje son los modelos con la menor RMSE a través de todas las madureces, siendo para el modelo Nelson-Siegel menor para rendimientos de bonos con madureces de hasta 12 meses y menor para el modelo afín de no arbitraje para rendimientos de bonos con madurez entre 24 y 60 meses.

Cuadro 6
Raíz del error cuadrático medio para distintos modelos de predicción

Pronóstico a 1 mes					
Madurez	Nelson-Siegel	Afín de no arbitraje	Caminata aleatoria	AR(1)	VAR(1)
1	0.514	0.044	0.129	0.136	0.053
3	1.057	0.388	0.090	0.096	0.062
6	1.864	0.724	0.098	0.095	0.053
12	3.126	1.316	0.117	0.116	0.133
24	4.116	1.896	0.168	0.166	0.142
36	3.959	1.853	0.211	0.215	0.138
60	3.515	1.984	0.353	0.370	0.257
Pronóstico a 12 meses					
Madurez	Nelson-Siegel	Afín de no arbitraje	Caminata aleatoria	AR(1)	VAR(1)
1	0.636	0.990	1.482	1.526	1.271
3	0.637	0.797	1.448	1.491	1.318
6	1.193	0.735	1.352	1.372	1.318
12	2.301	0.740	1.386	1.395	1.278
24	3.322	1.116	1.326	1.338	1.238
36	3.527	1.296	0.876	0.846	0.919
60	3.347	1.641	0.608	0.553	0.613
Pronóstico a 24 meses					
Madurez	Nelson-Siegel	Afín de no arbitraje	Caminata aleatoria	AR(1)	VAR(1)
1	1.636	2.105	2.854	2.940	2.508
3	1.239	1.890	2.793	2.876	2.533
6	1.020	1.735	2.639	2.679	2.486
12	1.677	1.378	2.577	2.595	2.355
24	2.766	0.989	2.189	2.213	1.999
36	3.096	0.945	1.570	1.511	1.559
60	3.036	1.223	1.013	0.837	1.003

Fuente: Elaboración propia con información de Valmer.

Nota: Se presenta la raíz del error cuadrático medio del pronóstico de rendimientos de bonos cupón cero cero con madureces de 1, 3, 6, 12, 24, 36 y 60 meses de los modelos Nelson-Siegel, afín de no arbitraje, caminata aleatoria, AR(1) y VAR(1). Se realizó el pronóstico para horizontes de 1, 12, 24, 30 y 34 meses hacia adelante. La muestra de rendimientos a pronosticar corresponde de enero de 2016 a octubre de 2018.

Cuadro 6 (continuación)
Raíz del error cuadrático medio para distintos modelos de predicción

Pronóstico a 30 meses					
Madurez	Nelson-Siegel	Afín de no arbitraje	Caminata aleatoria	AR(1)	VAR(1)
1	1.893	2.403	3.244	3.349	2.845
3	1.452	2.194	3.183	3.285	2.872
6	1.064	2.025	3.009	3.057	2.810
12	1.503	1.619	2.919	2.941	2.653
24	2.607	1.052	2.453	2.482	2.223
36	2.960	0.901	1.811	1.738	1.771
60	2.929	1.097	1.200	0.977	1.166

Pronóstico a 34 meses					
Madurez	Nelson-Siegel	Afín de no arbitraje	Caminata aleatoria	AR(1)	VAR(1)
1	2.027	2.560	3.452	3.571	3.024
3	1.577	2.365	3.400	3.515	3.061
6	1.107	2.185	3.211	3.266	2.986
12	1.413	1.779	3.127	3.151	2.835
24	2.500	1.164	2.653	2.686	2.399
36	2.860	0.949	2.006	1.925	1.948
60	2.845	1.051	1.371	1.122	1.320

Fuente: Elaboración propia con información de Valmer.

Nota: Se presenta la raíz del error cuadrático medio del pronóstico de rendimientos de bonos soberanos mexicanos cupón cero con madureces de 1, 3, 6, 12, 24, 36 y 60 meses de los modelos Nelson-Siegel, afín de no arbitraje, caminata aleatoria, AR(1) y VAR(1). Se realizó el pronóstico para horizontes de 1, 12, 24, 30 y 34 meses hacia adelante. La muestra de rendimientos a pronosticar corresponde de enero de 2016 a octubre de 2018.

Para complementar el análisis del pronóstico, se realizó la prueba de Diebold y Mariano (DM), que compara dos pronósticos hechos por dos modelos distintos y evalúa si son distintos o no. La prueba radica en comparar el diferencial de la función de pérdida utilizada para medir el poder de pronóstico del modelo y contrastar la hipótesis nula de que el valor esperado del diferencial de pérdida es cero (significando que los pronósticos son iguales).²²

²² En el Apéndice 6 se muestran los detalles de la prueba.

En el Cuadro 7 se muestran los resultados de la prueba DM para los pronósticos del modelo Nelson-Siegel, respecto de los del modelo afín y modelos de referencia, para las mismas madureces mostradas en el Cuadro 6, y para horizontes de pronósticos de 12, 18 y 24 meses²³.

Para horizontes de 12 meses, la prueba DM sugiere que los pronósticos del modelo Nelson Siegel son estadísticamente distintos que los pronósticos del modelo afín de no arbitraje, a excepción del pronóstico del rendimiento del bono con madurez de 3 meses. La prueba DM no puede rechazar que los pronósticos del modelo Nelson Siegel para rendimientos de bonos con madureces de 6 meses sean distintos que los pronósticos del resto de modelos, pero si se rechaza la hipótesis nula para el resto de rendimientos.

Para horizontes de pronóstico de 18 meses, la prueba DM sugiere que los pronósticos del modelo Nelson-Siegel y del modelo afín para el rendimiento del bono con madurez de 12 meses son estadísticamente iguales. La prueba también sugiere que el pronóstico del rendimiento del bono con madurez de 12 meses del modelo Nelson-Siegel es estadísticamente el mismo que los pronósticos hechos por la caminata aleatoria, el modelo AR(1) y el modelo VAR(1). La prueba DM rechaza la hipótesis nula para el resto de pronósticos.

Respecto del horizonte de 24 meses, la prueba DM rechaza la hipótesis nula de que los pronósticos del modelo Nelson-Siegel sean iguales que los del resto de modelos, a excepción del modelo afín de no arbitraje para el rendimiento del bono con madurez de 12 meses.

Por último, para horizontes de pronóstico de 30 y 34 meses, la prueba DM sugiere que los pronósticos del modelo Nelson-Siegel para el rendimiento del bono con madurez de 12 meses y el modelo afín son estadísticamente iguales. La prueba también sugiere que los pronósticos del modelo Nelson-Siegel y los modelos de referencia del rendimiento del bono con madurez de 24 meses son estadísticamente iguales.

²³ No es posible realizar la prueba de Diebold y Mariano para pronósticos de un mes porque para realizar la prueba, es necesario contar con una serie de tiempo bidimensional de funciones de pérdida de dos modelos distintos.

Cuadro 7
Prueba de Diebold y Mariano para el modelo Nelson-Siegel contra los modelos de referencia

Pronóstico a 12 meses				
Madurez	Afín de no arbitraje	Caminata aleatoria	AR(1)	VAR(1)
1	-3.114	-3.517	-3.392	-3.517
3	-0.792	-2.430*	-2.282	-2.480
6	1.752**	-0.430	-0.356	-0.480
12	6.476	2.452*	2.856	2.420*
24	10.512	5.071	5.439	5.023
36	16.085	8.839	8.700	9.013
60	17.983	10.469	10.278	11.093

Pronóstico a 18 meses				
Madurez	Afín de no arbitraje	Caminata aleatoria	AR(1)	VAR(1)
1	-4.685	-4.828	-4.821	-4.807
3	-3.102	-4.203	-4.150	-4.224
6	-1.259	-2.847	-2.781	-2.884
12	2.361*	-0.637	-0.262	-0.666
24	8.070	2.698	3.174	2.640
36	13.183	6.052	6.037	6.260
60	18.366	8.923	8.818	9.743

Pronóstico a 24 meses				
Madurez	Afín de no arbitraje	Caminata aleatoria	AR(1)	VAR(1)
1	-6.505	-6.505	-6.586	-6.451
3	-4.961	-6.029	-6.041	-6.026
6	-3.021	-4.703	-4.642	-4.739
12	1.034	-2.307*	-1.843**	-2.342*
24	8.201	1.741**	2.410*	1.661**
36	14.954	5.935	6.046	6.236
60	22.690	10.083	10.088	11.316

Fuente: Elaboración propia con información de Valmer.

Nota: Se presentan los valores de los estadísticos de la prueba de Diebold y Mariano aplicados a los errores de los pronósticos del modelo Nelson-Siegel comparados contra el modelo afín de no arbitraje y los modelos de referencia para rendimientos de distintas madureces y distintos horizontes de pronóstico; la hipótesis nula es que los pronósticos hechos por dos modelos distintos son iguales mientras que la hipótesis alternativa es que no lo son. Por lo tanto, la prueba DM es una prueba de dos colas, donde el estadístico presenta una distribución normal estándar. Los valores críticos a un nivel del 1%, 5% y 10% son 2.58, 1.96 y 1.64, respectivamente.

*Se rechaza la hipótesis nula a un nivel de significancia del 5%.

**Se rechaza la hipótesis nula a un nivel de significancia del 10%.

Cuadro 7 (continuación)
Prueba de Diebold y Mariano para el modelo Nelson-Siegel contra los modelos de referencia

Pronóstico a 30 meses				
Madurez	Afín de no arbitraje	Caminata aleatoria	AR(1)	VAR(1)
1	-8.135	-8.016	-8.188	-7.912
3	-6.578	-7.600	-7.703	-7.556
6	-4.645	-6.342	-6.324	-6.368
12	-0.425	-3.904	-3.397	-3.941
24	7.585	0.510	1.336	0.410
36	14.548	4.801	5.068	5.182
60	23.967	9.328	9.566	10.992

Pronóstico a 34 meses				
Madurez	Afín de no arbitraje	Caminata aleatoria	AR(1)	VAR(1)
1	-9.176	-8.996	-9.226	-8.852
3	-7.573	-8.580	-8.745	-8.503
6	-5.657	-7.372	-7.390	-7.389
12	-1.386	-4.896	-4.380	-4.932
24	6.337	-0.508	0.353	-0.612
36	12.247	3.434	3.773	3.829
60	20.000	7.464	7.853	9.221

Nota: se presentan los valores de los estadísticos de la prueba de Diebold y Mariano aplicados a los errores de los pronósticos del modelo Nelson-Siegel comparados contra el modelo afín de no arbitraje y los modelos de referencia para rendimientos de distintas madureces y distintos horizontes de pronóstico; la hipótesis nula es que los pronósticos hechos por dos modelos distintos son iguales mientras que la hipótesis alternativa es que no lo son. Por lo tanto, la prueba DM es una prueba de dos colas, donde el estadístico presenta una distribución normal estándar. Los valores críticos a un nivel del 1%, 5% y 10% son 2.58, 1.96 y 1.64, respectivamente.

*Se rechaza la hipótesis nula a un nivel de significancia del 5%.

**Se rechaza la hipótesis nula a un nivel de significancia del 10%.

Fuente: Elaboración propia con información de Valmer.

La prueba de Diebold y Mariano también se hizo sobre los pronósticos del modelo afín de no arbitraje. Los resultados se muestran en el cuadro 8. Debido a que ya se compararon los pronósticos del modelo Nelson-Siegel y modelo afín de no arbitraje, solo se mencionan los resultados de la prueba DM respecto de los modelos AR(1), VAR(1) y caminata aleatoria.

Para horizontes de pronósticos de 12 meses, la prueba DM sugiere que los pronósticos de los rendimientos de 24 y 36 meses hechos por el modelo afín de no arbitraje son estadísticamente

iguales que los hechos por la caminata aleatoria, el VAR(1) y el AR(1) y se rechaza que sean iguales para el resto de rendimientos de bonos con otras madureces.

Por su parte, para horizontes de pronósticos de 18 meses, no se puede rechazar que el pronóstico del rendimiento del bono con madurez de 36 meses sea estadísticamente distinto que los pronósticos de los modelos de caminata aleatoria, AR(1) y VAR(1), pero si se rechaza para el pronósticos de rendimientos de otras madureces.

Por último, para horizontes de pronóstico de 24, 30 y 34 meses, la prueba DM sugiere que los pronósticos hechos por el modelo afín de no arbitraje para el rendimiento del bono con madurez de 60 meses son iguales que los pronósticos hechos por los modelos de caminata aleatoria, AR(1) y VAR(1), pero rechaza esta hipótesis para el resto de rendimientos de bonos de otras madureces.

Cuadro 8
Prueba de Diebold y Mariano para el modelo afín de no arbitraje contra los modelos de referencia

Pronóstico a 12 meses				
Madurez	Nelson-Siegel	Caminata aleatoria	AR(1)	VAR(1)
1	3.114	-3.729	-3.666	-3.706
3	0.792	-3.587	-3.739	-3.573
6	-1.752**	-2.928	-3.128	-2.939
12	-6.476	-2.129*	-1.968*	-2.143*
24	-10.512	-0.567	-0.350	-0.597
36	-16.085	1.375	1.235	1.496
60	-17.983	3.957	3.818	4.461

Pronóstico a 18 meses				
Madurez	Nelson-Siegel	Caminata aleatoria	AR(1)	VAR(1)
1	4.685	-4.895	-4.951	-4.855
3	3.102	-4.954	-5.219	-4.914
6	1.259	-4.622	-4.910	-4.616
12	-2.361*	-4.140	-4.058	-4.148
24	-8.070	-2.781	-2.526*	-2.814
36	-13.183	-0.996	-1.060*	-0.859
60	-18.366	1.806**	1.755**	2.431*

Pronóstico a 24 meses				
Madurez	Nelson-Siegel	Caminata aleatoria	AR(1)	VAR(1)
1	6.505	-6.493	-6.656	-6.414
3	4.961	-6.721	-7.156	-6.636
6	3.021	-6.498	-6.951	-6.470
12	-1.034	-6.092	-6.065	-6.096
24	-8.201	-4.589	-4.276	-4.626
36	-14.954	-2.503*	-2.518*	-2.323*
60	-22.690	0.937	0.979	1.815**

Fuente: Elaboración propia con información de Valmer.

Nota: Se presentan los valores de los estadísticos de la prueba de Diebold y aplicados a los errores de los pronósticos del modelo afín de no arbitraje comparados contra el modelo Nelson-Siegel y los modelos de referencia para rendimientos de distintas madureces y distintos horizontes de pronóstico; la hipótesis nula es que los pronósticos hechos por dos modelos distintos son iguales mientras que la hipótesis alternativa es que no lo son. Por lo tanto, la prueba DM es una prueba de dos colas, donde el estadístico presenta una distribución normal estándar. Los valores críticos a un nivel del 1%, 5% y 10% son 2.58, 1.96 y 1.64, respectivamente.

*Se rechaza la hipótesis nula a un nivel de significancia del 5%.

**Se rechaza la hipótesis nula a un nivel de significancia del 10%.

Cuadro 8 (continuación)
Prueba de Diebold y Mariano para el modelo afín de no arbitraje contra los modelos de referencia

Pronóstico a 30 meses				
Madurez	Nelson-Siegel	Caminata aleatoria	AR(1)	VAR(1)
1	8.135	-7.949	-8.230	-7.809
3	6.578	-8.247	-8.895	-8.091
6	4.645	-8.109	-8.796	-8.045
12	0.425	-7.809	-7.909	-7.800
24	-7.585	-6.300	-5.986	-6.334
36	-14.548	-4.088	-4.079	-3.889
60	-23.967	-0.491	-0.331	0.613

Pronóstico a 34 meses				
Madurez	Nelson-Siegel	Caminata aleatoria	AR(1)	VAR(1)
1	9.176	-8.903	-9.267	-8.713
3	7.573	-9.213	-10.009	-9.000
6	5.657	-9.141	-9.999	-9.047
12	1.386	-8.844	-9.057	-8.824
24	-6.337	-7.253	-6.997	-7.276
36	-12.247	-5.014	-5.025	-4.829
60	-20.000	-1.543	-1.332	-0.372

Fuente: Elaboración propia con información de Valmer.

Nota: Se presentan los valores de los estadísticos de la prueba de Diebold y Mariano aplicados a los errores de los pronósticos del modelo afín de no arbitraje comparados contra el modelo Nelson-Siegel y los modelos de referencia para rendimientos de distintas madureces y distintos horizontes de pronóstico; la hipótesis nula es que los pronósticos hechos por dos modelos distintos son iguales mientras que la hipótesis alternativa es que no lo son. Por lo tanto, la prueba DM es una prueba de dos colas, donde el estadístico presenta una distribución normal estándar. Los valores críticos a un nivel del 1%, 5% y 10% son 2.58, 1.96 y 1.64, respectivamente.

*Se rechaza la hipótesis nula a un nivel de significancia del 5%.

**Se rechaza la hipótesis nula a un nivel de significancia del 10%.

Fuente: Elaboración propia con información de Valmer.

CONCLUSIONES

Se aplicaron dos modelos de factores utilizados para ajustar y pronosticar la estructura de tasas de interés de bonos cupón cero en México. Los valores bajos que se obtienen de la raíz del error cuadrático medio y absoluto medio a lo largo de toda la estructura de tasas de interés para ambos modelos, sugieren que los resultados del ajuste dentro de la muestra son buenos, destacando particularmente el desempeño del modelo Nelson-Siegel. El buen ajuste y pronóstico que hacen estos modelos demuestra por qué los son utilizados para la asignación de precios de productos derivados. Los resultados de este documento se encuentran en línea con lo encontrado en Ang y Piazzesi (2003), Diebold y Li (2006), y Elizondo (2013).

Actualmente, el Banco de México no calcula de manera periódica curvas de rendimiento como lo hace, por ejemplo, la Reserva Federal y el Banco Central Europeo, quienes lo realizan diariamente, por lo que una aportación de este documento es proveer de modelos parsimoniosos que pueden ser utilizados para esta tarea; especialmente, con base en los resultados obtenidos se propone el modelo Nelson-Siegel como el modelo ideal.

Además, el comportamiento de los factores impuestos por la especificación del modelo Nelson-Siegel y los factores no observables extraídos por el método de análisis de componentes principales y utilizados en la estimación de los coeficientes del modelo afín de no arbitraje demuestran una alta correspondencia con las medidas empíricas de nivel, pendiente y curvatura de la estructura de tasas de interés en México. Estas características observables de la estructura de tasas son utilizadas en la literatura para encontrarles una correspondencia con fundamentales macroeconómicos y este trabajo puede ayudar a dar pie a investigaciones futuras en esta línea.

Respecto al pronóstico en horizontes de 1 mes, como se observa en el Cuadro 6, los modelos de factores desarrollados no logran realizar mejores pronósticos que los de la caminata aleatoria, AR(1) y VAR(1) para rendimientos de bonos de madureces largas, pero sí para rendimientos de bonos de muy corto plazo (1 mes), lo cual es, de alguna manera, alentador, ya que aunque no se logra pronosticar adecuadamente toda la estructura de tasas de interés, que los modelos de factores pronostiquen mejor la tasa de corto plazo en horizontes

pequeños, da una posibilidad de su uso en el pronóstico de estas tasas, una tarea importante por sí misma. Por otra parte, tal como se observa en Diebold y Li (2006) y en Elizondo (2013), en estos tampoco se logra que el pronóstico de la estructura de tasas de interés sea mejor que los hechos por los modelos de referencia, especialmente frente a la caminata aleatoria; esta difícil tarea es muestra de la alta persistencia de los rendimientos.

Aunque en el pronóstico de la estructura de tasas de interés en horizontes pequeños los modelos de factores se ven rebasados frente a los modelos de referencia, el pronóstico mejora y supera a estos modelos conforme el horizonte de pronóstico aumenta. Se obtiene que los modelos de factores tienen un mejor desempeño que los modelos de referencia de caminata aleatoria, AR(1) y VAR(1), demostrando que los modelos de factores son útiles para el pronóstico de tasas de interés para horizontes de largo plazo, proveyendo de una herramienta útil para el monitoreo de tasas de interés. Específicamente, los pronósticos del modelo Nelson-Siegel son mejores para rendimientos del extremo corto de la estructura de tasas de interés, mientras que los pronósticos del modelo afín de no arbitraje son mejores para rendimientos de mayor plazo, un uso combinado de estos dos modelos en el monitoreo del desarrollo de las tasas de interés en horizontes largos los convierte en una sólida herramienta para esta tarea.

REFERENCIAS

Ang, Andrew y Piazzesi, Monika, (2003). "A no-arbitrage vector autoregression of term structure dynamics with macroeconomic and latent variables", *Journal of Monetary Economics*, vol. 4, no. 50, pp. 745-787.

Ang, Andrew, Piazzesi, Monika y Wei, Min, (2005). "What does the yield curve tell us about GDP growth?", *Journal of Econometrics*, no. 131, pp. 359-403.

Bekaert, Geert y Hodrick, Robert J., (2001). "Expectations hypotheses tests", *Journal of Finance*, Vol. 56, pp. 1357-1394.

Bliss, Robert R., (1997). "Movements in the term structure of interest rates", *Federal Reserve Bank of Atlanta, Economic Review*, fourth quarter 1997.

Ceballos, Luis, (2016). "Efectos de sorpresas económicas en la estructura de tasas de interés. Evidencia para Brasil, Chile y México", *El Trimestre Económico*, vol. 83. no. 331.

Christensen, J. H. E., Diebold Francis X. y Rudebusch, Gleen D. (2007). "The affine arbitrage-free class of Nelson-Siegel term structure models", *NBER Working Paper No. W13611*.

Cortés, Josué, F. y Ramos-Francia, Manuel, (2008). "Un modelo afin de la estructura temporal de tasas de interés en México", *Banco de México, Documento de Trabajo no. 2008-09*.

Cox, J.C., J.E. Ingersoll y S.A. Ross (1985). "A theory of the term structure of interest rates". *Econometrica*. 53: 385-407.

Diebold, Francis X. y Li, Canlin, (2006). "Forecasting the term structure of government yields". *Journal of Econometrics* 130, pp. 337-364.

Diebold, Francis X. y Mariano, Roberto, S. (1995). "Comparing Predictive Accuracy", *Journal of Bussines & Economic Statistics*, 13:3, pp. 253-263.

Diebold, Francis X. y Rudebusch, Glenn, D., (2012). “Yield curve modelling and forecasting: the dynamic Nelson-Siegel approach”, Princeton University Press.

Diebold, Francis X., Piazzesi, Monika y Rudebusch, Gleen D. (2005). “Modeling Bond Yields in Finance and Macroeconomics”, Federal Reserve Bank of San Francisco.

Duffie, Darrel y Khan, Rui, (1996). “A yield-factor model of interest rates”, *Mathematical Finance*, vol. 6, pp. 379-406.

ECB (2007). “First release daily euro area government yield curves”, press release on 10 July 2017.

Elizondo, Rocío, (2013). “Pronósticos de la estructura temporal de las tasas de interés en México utilizando un modelo afín”, Banco de México, Documento de Trabajo no. 2013-03.

Estrella, Arturo y Hardouvelis, Gikas A., (1991). “The term structure as a predictor of real economic activity”, *The Journal of finance*, vol. 46, no. 2, pp. 555-576.

Estrella, Arturo y Mishkin, Frederic S., (1995). “Predicting U.S. recessions: financial variables as leading indicators”, Federal Reserve Bank of New York, Research Paper No. 9609

Evans, C.L., Marshall, D.A., 1998. “Monetary policy and the term structure of interest rates: evidence and theory” *Carnegie-Rochester Conference Series in Public Policy* 49, 53-111.

Gibson, R., Lhabitant, F.-S. y Talay, D. (2001) “Modeling the term structure of interest rates: a review of the literatura”, disponible en <http://www2.risklab.ch/ftp/papers/TermStructureSurvey.pdf>.

Gimeno, Ricardo, y Marqués, José M., (2008). “Uncertainty and the price of risk under a nominal convergence process”, Banco de España, Working Paper no. 0906.

Gimeno, Ricardo, y Marqués, José M., (2009). “Extraction of financial market expectations about inflation and interest rates from a liquid market”, Banco de España, Working Paper no. 0802.

Granger, C. W. J. (1969). "Prediction with a generalized cost of error function", *Operations Research Quarterly* Vol. 20, No. 2.

Granger, C. W. J. y Newbold, P., (1973). "Forecasting economic time series", Academic Press, New York, 2nd edition.

Hull, John C., 2012. "Options, futures and other derivatives", Pearson, 8th edition.

Litterman, Robert y Scheinkman, José, (1991). "Common Factors affecting bond returns", *Journal of Fixed Income*, vol. 1, pp. 54-61.

Lütkepohl, Helmut, (2005). "New introduction to multiple time series analysis", Springer.

Márquez, Javier, Nogués, Carlos E. y Vélez, Viviana, (2003). "Un método eficiente para la simulación de curvas de tasas de interés", Banco de México, febrero de 2003.

Nelson, Charles R., y Siegel, Andrew F., (1987) "Parsimonious modeling of yield curves", *The Journal of Business*, vol. 60, no. 4.

Piazzesi, Monika, (2009). "Affine term structure models", *Handbook of Financial Econometrics*, chapter 12.

Reyna, Mario, Salazar, Diana y Salgado, Héctor, (2008). "La curva de rendimiento y su relación con la actividad económica: una aplicación para México", Banco de México, Documento de trabajo no. 2008-15.

Ross, Stephen, Westerfield, Randolph and Jordan Bradford, 2016. "Fundamentals of Corporate Finance", McGraw Hill, 11th edition.

Shreve, E. Steven, (2004). "Stochastic calculus for finance", Springer, 1st edition.

Tipping M. E. y C. M. Bishop. (1999). "Probabilistic principal component analysis," *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, Vol. 61, Núm. 3, pp. 611–622.

Tsay, Ruey S., (2010). "Analysis of financial time series", Wiley, 3rd edition.

APÉNDICES

A1. Método de bootstrapping

El método de bootstrapping es utilizado para encontrar tasas cupón cero a partir de bonos con cupones. La utilidad de este método es que permite encontrar tasas cupón cero con madureces en las que no se emiten este tipo de instrumentos. El método es iterativo, cuyo algoritmo es el siguiente:

1. Encontrar y definir los bonos a incluirse el cálculo de la curva cupón cero. Esta selección incluye tanto a bonos cupón cero, como bonos con cupones.
2. Derivar las tasas de descuento para los bonos cupón cero seleccionados.
3. Derivar los rendimientos cupón cero de los bonos que otorgan cupones.

A manera de ilustración, se da un ejemplo, el cual pertenece a Hull (2012). Supongamos que existen cinco bonos en el mercado, de los cuales, 3, con madureces de 3 meses, 6 meses y 1 año, no otorgan cupones, y los otros dos, con madureces de 1.5 y 2 años otorgan cupones semestralmente a una tasa de 8 y 12 por ciento anual, respectivamente. Todos los cupones tienen un valor par de \$100. La lista de precios y de las características mencionadas se resume a continuación.

Valor par (\$)	Madurez (años)	Cupón anual (pagado semestralmente)	Precio del bono (\$)
100	0.25	0	97.50
100	0.50	0	94.90
100	1.00	0	90.00
100	1.50	8	96.00
100	2.00	12	101.60

El bono a 3 meses (0.25 años) otorga un rendimiento de 2.5\$ al vencimiento. El rendimiento compuesto trimestralmente es $(4 \times 2.5) / 97.5 = 10.256\%$. Por lo tanto, la tasa es anual compuesta continuamente es:

$$4 \ln \left(1 + \frac{0.10256}{4} \right) = 0.10127 = 10.127\%$$

El bono con madurez a seis meses tiene un rendimiento de $(2 \times 5.1) / 94.9 = 10.748\%$. la tasa de interés anual compuesta continuamente es, por lo tanto:

$$2 \ln\left(1 + \frac{0.10748}{2}\right) = 0.10469 = 10.469\%$$

El bono con madurez a un año otorga un rendimiento anual de 10% y compuesto continuamente es:

$$\ln\left(1 + \frac{10}{90}\right) = 0.10536 = 10.127\%$$

El bono con madurez a 1.5 años otorga los siguientes pagos: \$4 a en seis meses, \$4 en un año y \$104 en 1.5 años. Como ya hemos calculado las tasas de descuento de los pagos que se efectuarán en 6 meses y un año, únicamente hace falta conocer la tasa de descuento del pago que se efectuará en 1.5 años:

$$4e^{-0.10469 \times 0.5} + 4e^{-0.10536 \times 1.0} + 104e^{-R \times 1.5} = 96$$

Que se reduce a:

$$e^{-R \times 1.5} = 0.85196$$

Despejando para R:

$$R = -\frac{\ln(0.85196)}{1.5} = 0.10681 = 10.681\%$$

Por lo tanto, el tasa cupón cero de un bono con madurez de 1.5 años es 10.681%.

De manera similar podemos encontrar la tasa cupón cero de un bono con 2 años de madurez:

$$6e^{-0.10469 \times 0.5} + 6e^{-0.10536 \times 1.0} + 6e^{-0.10681 \times 1.5} + 106e^{-R \times 2.0} = 101.6$$

Despejando para R encontramos la tasa cupón cero del bono con madurez a dos años:

$$R = 0.10808 = 10.808\%$$

El cuadro de abajo resume los rendimientos obtenidos mediante el método de bootstrapping.

Madurez (años)	Tasa cupón cero (%) (compuesta continuamente)
0.25	10.127
0.50	10.469
1.00	10.536
1.50	10.681
2.00	10.808

Para encontrar el resto de madureces, se utiliza comúnmente el método de interpolación (lineal, polinómica, etc.) para ajustar el resto de las madureces de los que no se cuenta con información.

A2. Precios recursivos de bonos

Aquí se derivan las ecuaciones en diferencia mostradas en (36) mediante inducción matemática; la explicación de este apéndice pertenece a Ang y Piazzesi (2003).

En este trabajo, para el modelo afín de no arbitraje, se asume que los precios de bonos son funciones exponenciales afines $P_t(\tau) = \exp(A_\tau + B'_\tau X_t)$, por lo que nuestro objetivo es demostrar que esta igualdad se cumple para todos los valores de τ .

Teniendo en cuenta que el valor nominal de un bono es de \$1, el rendimiento del bono de corto plazo $\tau = 1$ en un período de tiempo t está dado por:

$$\begin{aligned}
 P_t(1) &= E_t[m_{t+1}] = \exp(-r_t) \\
 &= \exp(-\delta_0 - \delta_1 X_t)
 \end{aligned}
 \tag{A2.1}$$

Entonces $A_\tau = -\delta_0$ y $B_\tau = -\delta_1$. La hipótesis de inducción es que $P_t(\tau) = \exp(A_\tau + B'_\tau X_t)$ es cierto por lo que procederemos a demostrar que la hipótesis es aplicable para $\tau + 1$:

$$P_t(\tau + 1) = E_t[m_{t+1}P_{t+1}(\tau)] \quad (\text{A2.2})$$

$$= E_t \left[\exp \left\{ -r_t - \frac{1}{2} \lambda_t' \lambda_t - \lambda_t' u_{t+1} + A_\tau + B_\tau' X_{t+1} \right\} \right]$$

$$= E_t \left[\exp \left\{ -\delta_0 - \delta_1 X_t - \frac{1}{2} \lambda_t' \lambda_t - \lambda_t' u_{t+1} + A_\tau + B_\tau' (\mu + \phi x_{t-1} + \Sigma u_t) \right\} \right]$$

$$= E_t \left[\exp \left\{ -\delta_0 - \delta_1 X_t - \frac{1}{2} \lambda_t' \lambda_t - \lambda_t' u_{t+1} + A_\tau + B_\tau' (\mu + \phi x_{t-1} + \Sigma u_t) \right\} \right]$$

$$= \exp \left\{ -\delta_0 + A_\tau + B_\tau' \mu + (B_\tau' \phi - \delta_1) X_t - \frac{1}{2} \lambda_t' \lambda_t \right\} \times E_t [\exp \{ (B_\tau' \Sigma - \lambda_t') u_t \}]$$

Si asumimos que $E(u_t) = 0$ y que la matriz de varianzas y covarianzas $Var(u_t)$ es una matriz degenerada con varios ceros, que sumado a los supuestos sobre λ_1 , implica que $\lambda_t' \lambda_t = \lambda_t' Var(u_t) \lambda_t$, por lo que concluimos con la siguiente ecuación:

$$P_t(\tau + 1) = \exp \left\{ -\delta_0 + A_\tau + B_\tau' (\mu - \Sigma \lambda_0) + \frac{1}{2} B_\tau' \Sigma \Sigma' B_\tau - \delta_1 X_t + B_\tau' \phi X_t - B_\tau' \Sigma X_t \right\} \quad \text{A2.3}$$

Reacomodando términos:

$$P_t(\tau + 1) = \exp \left\{ \left(-\delta_0 + A_\tau + B_\tau' (\mu - \Sigma \lambda_0) + \frac{1}{2} B_\tau' \Sigma \Sigma' B_\tau \right) + (-\delta_1 + B_\tau' (\phi - \Sigma \lambda_t) X_t) \right\} \quad \text{A2.3}$$

Lo que implica las ecuaciones mostradas en (36).

A3. Método de componentes principales

La explicación dada en este apéndice corresponde a Bliss (1997), Tsay (2010) y Bishop y Tipping (1998).

El análisis de componentes principales es una técnica de análisis y procesamiento de datos utilizada para el estudio de la estructura de la covarianza de un conjunto de variables aleatorias.

Consideremos una serie de tiempo k-dimensional $\mathbf{x}_t = (x_{1t}, \dots, x_{kt})'$ con matriz de varianzas y una combinación lineal dada por un vector k-dimensional $\mathbf{w}_i = (w_{i1}, \dots, w_{ik})'$ dado por:

$$y_i = \mathbf{w}_i' \mathbf{x}_t = \sum_{j=1}^k w_{ij} x_{jt} \quad (\text{A.2.1})$$

Asumamos además que $\mathbf{w}_i \mathbf{w}_i' = 1$. Utilizando las propiedades de combinaciones lineales, tenemos que la varianza de y_i y la covarianza de y_i respecto de otra combinación y_j está dada por:

$$\text{Var}(y_i) = \mathbf{w}_i' \Sigma_x \mathbf{w}_i; \quad i = 1, \dots, k \quad (\text{A.2.2})$$

$$\text{Cov}(y_i, y_j) = \mathbf{w}_i' \Sigma_x \mathbf{w}_j; \quad i = 1, \dots, k; \quad i = 1, \dots, j$$

Donde Σ_x es la matriz de varianzas y covarianzas de \mathbf{x}_t .

El principal objetivo del análisis de componentes principales es encontrar combinaciones lineales w_i tal que y_i y y_j no estén relacionadas entre sí y la varianza de y_i sea tan larga como sea posible. Específicamente, buscamos:

1. Que el primer componente principal de \mathbf{x}_t sea la combinación $y_1 = \mathbf{w}'_1 \mathbf{x}_t$ maximice $Var(y_1)$ sujeto a la restricción $\mathbf{w}'_1 \mathbf{w}_1 = 1$.
2. Que el segundo componente principal de \mathbf{x}_t sea la combinación $y_2 = \mathbf{w}'_2 \mathbf{x}_t$ maximice $Var(y_2)$ sujeto a la restricción $\mathbf{w}'_2 \mathbf{w}_2 = 1$ y $Cov(y_1, y_2) = 0$.
3. Que el i -ésimo componente principal de \mathbf{x}_t sea la combinación lineal de $y_i = \mathbf{w}'_i \mathbf{x}_t$ y para todo (i, j) , $Cov(y_i, y_j) = 0$.

Ahora, debido a que Σ_x es una matriz positiva definida, esta tiene una descomposición espectral. Sean $(\lambda_1, \mathbf{e}_1), \dots, (\lambda_k, \mathbf{e}_k)$ los pares de eigenvalores y eigenvectores de Σ_x , donde $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k$, el i -ésimo componente principal de \mathbf{x} es $y_i = \mathbf{e}'_i \mathbf{x} = \sum_{j=1}^k e_{ij} x_j$ para $i = 1, \dots, k$

A4. Optimización basada en gradiente

Para obtener el valor de $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1)$ en el modelo afín de no arbitraje, de tal modo que la suma de errores al cuadrado entre las tasas observadas y las tasas estimadas por el modelo fuesen mínimas, se optimizó sin restricción la función objetivo. El algoritmo utilizado fue el de line-search de la familia de algoritmos de optimización basada en gradiente.

El problema de optimización puede ser establecido como:

$$\begin{aligned} & \min f(x) \\ & \text{respecto de } x \in R^n \end{aligned}$$

Donde x es un n -vector $x = [x_1, \dots, x_n]'$.

En general, el algoritmo line-search se describe comenzando con un número de iteración $k = 0$ y un punto inicial x_k , entonces se verifica lo siguiente:

1. Prueba de convergencia. Si las condiciones de convergencia son satisfechas, entonces podemos detenernos y x_k es la solución.
2. Computación de búsqueda de dirección. Computamos el vector p_k que define la dirección en el espacio de n dimensiones en la que haremos la búsqueda.

3. Computación de longitud del paso. Encontramos un escalar α_k tal que $f(x_k + \alpha_k p_k) < f(x_k)$.
4. Actualizamos las variables de diseño. Fijamos $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$, $k = k + 1$ y regresamos al punto 1.

Gradiente y Matriz Hessiana

El vector gradiente de $f(x)$ está dado por las derivadas parciales con respecto de cada una de las variables independientes.:

$$\nabla f(x) = g(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

El gradiente de una función es un n-vector, pero la segunda derivada de la función de n variables es definida por n^2 derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, i \neq j \quad \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_i}, i = j$$

Si las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ son continuas y los puntos de la función toman uno y solo un valor del rango, entonces las segundas derivadas parciales pueden ser representadas por una matriz simétrica llamada *Hessiana*:

$$\nabla^2 f(x) = H(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_n} \end{bmatrix}$$

Si f es cuadrática, entonces la Hessiana es constante y f puede expresarse como:

$$f(x) = \frac{1}{2} x' H x + g' x + \alpha$$

Condiciones de optimalidad

Las condiciones de optimalidad pueden ser derivadas de la expansión de las series de Taylor de f respecto de x^* :

$$f(x^* + \varepsilon p) = f(x^*) + \varepsilon p' g(x^*) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 p' H(x^* + \varepsilon \theta p) p$$

Donde $\theta \in (0,1)$, ε es un escalar y p es un n -vector.

Para que x^* sea un local mínimo, para cada vector p , debe existir un ε tal que $f(x^* + \varepsilon p) \geq f(x^*)$. Como p y ε son escogidos arbitrariamente, entonces deben cumplirse las siguientes condiciones (de optimalidad):

$$\|g(x^*)\| = 0$$

$H(x^*)$ es semidefinida positiva

A5. Pronóstico

La explicación del pronóstico corresponde a Tsay (2010) y a Lütkepohl (2005). Debido a que los modelos autorregresivos univariantes son un caso especial de los modelos autorregresivos multivariantes, se dará únicamente énfasis en estos últimos modelos.

El pronóstico es una de las aplicaciones más importantes en el análisis de series de tiempo. En un punto dado del tiempo, t , el pronosticador se encuentra en una situación en la que le interesa en realizar inferencia sobre los valores futuros de ciertas variables aleatorias y se encuentra a su disposición un modelo del proceso de generación de datos y un conjunto de estos, Ω_t , el cual contiene la información disponible en t . Asumamos que el modelo es un VAR(p) y que Ω_t contiene los valores pasados y presentes de las variables bajo consideración $\Omega_t = \{y_s | s \leq t\}$, donde $y_s = (y_{1s}, \dots, y_{Ks})'$. El período t , cuando se realiza el pronóstico, es el *origen del pronóstico* y el número de períodos dentro del cual es pronóstico se desea obtener es el *horizonte de pronóstico*. Un predictor, h períodos adelante, es llamado un *predictor de h -períodos*.

Como los pronósticos son hechos por un propósito en particular, una función de costos debe ser asociada a los errores de pronóstico. Un pronóstico será óptimo si minimiza el costo. Para encontrar un pronóstico que sea óptimo en este sentido es casi imposible y demasiado ambicioso. Por tal motivo, minimizar el costo esperado, o la pérdida esperada, es usualmente el objetivo. En la práctica, generalmente se utilizan varias funciones de pérdida.

En el contexto de modelos VAR, los predictores que minimizan el error cuadrático medio (MSE, por sus siglas en inglés) son los que más ampliamente se utilizan, debido a que se ha demostrado que los predictores mínimos MSE de un pronóstico también minimizan un rango de funciones de pérdida distintos al MSE (Granger (1969) y Granger y Newbold (1986)).

Supongamos $y_s = (y_{1s}, \dots, y_{Ks})'$ es un proceso VAR(p). Entonces, el predictor mínimo MSE para el horizonte de pronóstico h al origen del pronóstico es el valor esperado condicional:

$$E_t(y_{t+h}) := E_t(y_{t+h}|\Omega_t) = E_t(y_{t+h}|\{y_s|s \leq t\})$$

Este predictor minimiza el MSE de cada componente de y_t . En otras palabras, si $\bar{y}_t(h)$ es otro predictor en el origen t , h pasos adelante, entonces:

$$\begin{aligned} MSE[\bar{y}_t(h)] &= E\left[(y_{t+h} - \bar{y}_t(h))(y_{t+h} - \bar{y}_t(h))'\right] \geq MSE[E_t(y_{t+h})] \\ &= E\left[(y_{t+h} - E_t(y_{t+h}))(y_{t+h} - E_t(y_{t+h}))'\right] \end{aligned}$$

A6. Prueba de Diebold y Mariano

La prueba de Diebold y Mariano (DM) propuesta en Diebold y Mariano (1995) compara dos pronósticos generados por dos modelos distintos y determina si estos son estadísticamente distintos o no. Denotemos a la función de pérdida del error de pronóstico e_t como $L(e_t)$; si la función de pérdida es el error cuadrático, entonces $L(e_t) = e_t^2$. En t , el diferencial de las funciones de pérdida entre los pronósticos hechos por dos modelos, 1 y 2, es $d_{12t} = L(e_{1t}) - L(e_{2t})$.

La prueba DM no hace supuestos sobre el modelo de donde proviene el pronóstico, sino sobre el diferencial de las funciones de pérdida del error de los pronósticos. Los supuestos son:

$$\text{Supuestos: } \begin{cases} E(d_{12t}) = \mu, \text{ para todo } t \\ \text{cov}(d_{12t}, d_{12(t-\tau)}) = \gamma(\tau), \text{ para todo } t \\ 0 < \text{var}(d_{12t}) = \sigma^2 < \infty \end{cases}$$

La hipótesis nula a probar por medio de la prueba DM es que el valor esperado del diferencial de las funciones de pérdida de dos pronósticos es cero (esto es, $E(d_{12t}) = 0$), mientras que la hipótesis alternativa es que tal valor esperado es distinto de cero ($E(d_{12t}) \neq 0$). La prueba es entonces, una prueba de dos colas, en la que, manteniendo los supuestos, el estadístico DM:

$$DM = \frac{\bar{d}_{12}}{\hat{\sigma}_{\bar{d}_{12}}} \rightarrow N(0,1)$$

Donde $\bar{d}_{12} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T d_{12t}$ es la media del diferencial de error y $\hat{\sigma}_{\bar{d}_{12}}$ es la desviación estándar estimada.