



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA

**Estudio teórico-experimental de la
imbibición para un fluido pseudoplástico.**

TESIS

Que para obtener el título de

Ingeniero Mecánico

P R E S E N T A N

Maximino Ventura Sánchez.

Juan Guillermo Cervantes.

DIRECTOR DE TESIS

DR. J. Melesio Sánchez Huerta



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2019



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedicatoria.

A mi Madre.

A mi hermano Fredy.

A mi abuelo Vicente Sánchez †



Agradecimientos

En estas líneas quiero agradecer a Dios por cuidarme siempre, por darme la fortaleza para seguir de pie en los momentos complicados, y a todas aquellas personas que hicieron posible la culminación de este trabajo y que de alguna manera compartieron y estuvieron conmigo en los momentos difíciles, alegres y tristes. Estas palabras son para ustedes.

A mis padres por darme la vida y cuidarme siempre, a mi madre por todo su amor y apoyo pero sobre todo gracias infinitas por su paciencia y comprensión. Me faltan palabras para agradecer todas las veces que me brindó su apoyo en todas las decisiones que he tomado a lo largo de mi vida. Gracias por permitirme explorar el mundo y trazar mi propio camino. Gracias MAMÁ!!

A mi hermano Fredy. Por creer siempre en mí y acompañarme todo este tiempo, por el esfuerzo, paciencia, por sus maravillosos consejos y el gran sacrificio que hizo para que terminara mi carrera profesional, por esos 18 años de sacrificio en los Estados Unidos para darme una vida mejor. Gracias por ser un gran hermano y a la vez como un PADRE.

A la Universidad Nacional Autónoma de México(UNAM) y a la Facultad de Ingeniería(FI) por haberme permitirme formarme en ella.

A mi director de tesis, el Dr. José Melesio Sánchez Huerta, por permitirme realizar esta investigación y que con su experiencia, conocimiento y motivación me orientó para la culminación de ésta, por su dirección y apoyo.

Al Programa Universitario de Estudios de la Diversidad Cultural y la Interculturalidad(PUIC) que a través del Sistema de Becas para Estudiantes de Pueblos Indígenas y Afrodescendientes (SBEI) me brindó un apoyo económico durante mi vida universitaria, a cada uno de los que conforman el programa por sus amables atenciones, buen trato y por su amistad. A todos un enorme agradecimiento.

A mi tutora del SBEI, Karina Pérez, por su apoyo durante toda mi carrera universitaria, por su comprensión, sus consejos, por darme ánimo siempre para culminar este trabajo, por estar siempre disponible para escucharme en los momentos difíciles, por compartir momentos agradables y además por ser una gran amiga.

A mis hermanos que con sus palabras me hacían sentir orgulloso de lo que soy y ojalá algún día pueda llegar a ser su fuerza para seguir avanzando en este camino.

En especial a Rosalba y Pablo por estar conmigo en los momentos difíciles y ayudarme a seguir adelante. A todos mis hermanos por todo su cariño.

A mis amigos por todos esos momentos que compartimos juntos, por haber hecho mi etapa universitaria un trayecto inolvidable. A Antonio Vucetich y Óscar Morales por sus enseñanzas y consejos que siempre tengo presente, por compartir risas y alegrías haciéndome sentir como en casa.

A Endy por estar conmigo en los momentos difíciles y alegres durante el desarrollo de este trabajo, por los ánimos, comprensión y por hacer de mi vida más feliz.

Resumen.

En este trabajo se estudia de manera teórico y experimental la evolución temporal del frente de imbibición para fluidos no-newtonianos en una celda de Hele-Shaw bajo gradientes de temperatura. El fluido de trabajo es una solución acuosa, al 4% de carboximetilcelulosa (CMC), cuya viscosidad tiene un comportamiento según la ley de potencia. Para el modelo matemático se resuelve el perfil de velocidades considerando un flujo unidimensional, considerando que la viscosidad varía de acuerdo a la ley de potencia. La ecuación diferencial que describe el comportamiento temporal del frente de imbibición se resuelve numéricamente mediante un esquema de diferencias finitas centradas con sus respectivas condiciones iniciales. Para validar los resultados del modelo teórico se estudian tres condiciones de temperatura, gradiente positivo G_+ , Negativo G_- y el caso isotérmico, $G=0$. Los resultados muestran los efectos de la temperatura durante el ascenso capilar. En el caso del gradiente negativo se observa una disminución significativa de la velocidad del frente de imbibición respecto a los otros dos casos.

Índice

1. Introducción.	1
2. Antecedentes.	3
2.1. Propiedades del fluido.	3
2.2. Tipos de fluidos.	5
2.2.1. Fluidos Newtonianos.	5
2.2.2. Fluidos no Newtonianos.	6
2.3. Justificación.	19
3. Modelo Matemático.	20
3.1. Presión capilar.	21
3.2. Esfuerzo cortante.	21
3.3. Modelo para el caso isotérmico.	22
3.3.1. Ecuación de cantidad de movimiento.	22
3.3.2. Fuerza de fricción en las paredes.	25
3.3.3. Peso del fluido.	25
3.3.4. Balance de fuerzas.	26
3.4. Modelo matemático para los gradientes negativo y positivo de tem- peraturas.	28
3.4.1. Presión capilar.	28
3.4.2. Fuerzas de fricción en las paredes.	29
3.4.3. Peso del Fluido.	31
3.4.4. Balance de fuerzas.	31
4. Metodología experimental.	34
5. Resultados.	39
6. Conclusiones	42
7. Bibliografía.	44
8. Apéndice A.	47
9. Apéndice B.	51



1. Introducción.

La imbibición en fracturas y medios porosos homogéneos siempre ha sido de interés para científicos e ingenieros por su complejidad inherente y a su práctico uso en muchas áreas tecnológicas como: la cromatografía, el tratamiento de textiles y papel, secado de tinta, aceite mejorado recuperación y humectabilidad de los metales.

En un medio poroso, la cinética de penetración del fluido humectante se caracteriza frecuentemente por la distancia de penetración promedio del frente, $h(t)$, el cual se mide en muestras de arenisca o papel secante, a través del contraste entre las secas y las zonas embebidas (húmedas).

El flujo capilar se produce naturalmente en los depósitos de petróleo y agua debido a que están bajo la acción del gradiente geotérmico o, de forma forzada, durante la inyección de un fluido con una temperatura superior o inferior a la in situ temperatura del depósito. La imbibición bajo fuertes gradientes también aparece durante el secado de los medios porosos debido a la existencia de temperaturas elevadas de los fluidos que se producen.

En este trabajo se estudia de manera teórica y experimental el comportamiento temporal del frente de imbibición para fluidos No-Newtonianos en una celda de Hele Shaw bajo gradientes de temperatura.

El fluido de trabajo es una solución acuosa de Carboximetil celulosa, CMC, con concentración en peso de 4%, cuyo índice de comportamiento de acuerdo a la ley de potencia es de $n = 0.56$.

Para conocer el perfil de velocidades dentro de la celda se emplea



las ecuaciones de Navier-Stokes para un flujo unidimensional con sus respectivas condiciones de frontera. El comportamiento de la viscosidad está descrito por la ley de potencia. La solución de la ecuación diferencial resultante se realiza a través de un esquema numérico de diferencias finitas centrales con sus respectivas condiciones iniciales y de frontera. Los resultados se presentan de manera gráfica, en donde se pueden comparar los tiempos de ascenso capilar para las tres condiciones de temperatura analizadas.

El trabajo está dividido en 6 capítulos, en el capítulo 1 se da una breve explicación del estudio que se lleva a cabo; en el capítulo 2 se presenta un resumen de las investigaciones más importantes que son la base para el desarrollo de este trabajo de tesis. Para el capítulo 3 se detalla la obtención del modelo matemático que describe el ascenso temporal del fluido dentro de la celda y su solución numérica.

El capítulo 4 contiene la explicación de la metodología experimental, se detallan los pasos tanto para la preparación del fluido como la realización de los experimentos. En el capítulo 5 se analizan los resultados de los experimentos y del modelo teórico, se realizan comparaciones entre los resultados experimentales y teórico. Los resultados derivados de los experimentos ayudan a validar el modelo matemático. Finalmente en el capítulo 6 se dan las conclusiones de todo el trabajo, sobre los experimentos, el modelo teórico y los resultados analizados.



2. Antecedentes.

2.1. Propiedades del fluido.

Existen distintas definiciones para un fluido, muchas de ellas son fenomenológicas y algunas representativas son las siguientes:

1. Sustancia que se deforma continuamente al ser sometida a un esfuerzo cortante.
2. Material que adopta la forma del recipiente que la contiene.
3. Cuerpo cuyas moléculas cambian su posición con mucha facilidad.

Una definición única que sea totalmente aceptada para un fluido no existe ya que muchas de ellas describen lo que es un fluido, por lo que la definición formal que se maneja de un fluido para este trabajo es: un fluido es aquel material que se deforma de manera continua bajo la acción de un esfuerzo cortante, ver figura 1.

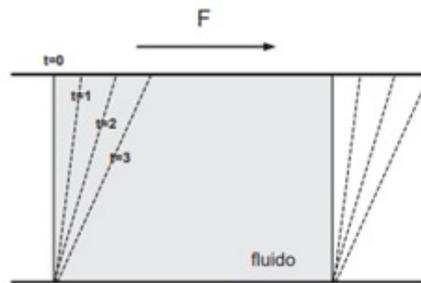


Figura 1: Fluido en deformación cortante.

Algunas propiedades importantes para este trabajo se definen a continuación.

Densidad: La densidad es una magnitud escalar que mide la cantidad de masa por unidad de volumen:

$$\rho = \frac{m}{V}$$



Donde: m es la masa y V es el volumen y sus unidades en SI es $\frac{kg}{m^3}$. La densidad puede cambiar como función de la temperatura, T , y de la presión, P , y en general se caracteriza por aumentar con la presión y disminuir con la temperatura.

Viscosidad: Es la medida de la resistencia a la deformación que presentan los fluidos al aplicarles un esfuerzo. Mide la afinidad que tienen las moléculas a permanecer juntas, a mayor afinidad, mayor resistencia a fluir. La viscosidad solo se manifiesta cuando hay flujo porque de otra manera, no es posible saber su valor.

$$F_r = \mu A \frac{U}{H}$$

Donde F_r es la fuerza cortante, A es el área de contacto, U es la velocidad a la que se desplaza la placa superior, H es la distancia entre las placas y μ es la viscosidad dinámica del fluido. Sus unidades en SI son: Pa.s. La ecuación anterior puede ser escrita de la manera siguiente:

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

Tensión superficial: Es la propiedad de la interfaz entre dos fluidos que mide que tan diferentes son. Mide la fuerza que actúa tangencialmente por unidad de longitud en el borde de una superficie de un líquido en equilibrio. Si mide la tensión entre un líquido y el aire se denomina tensión superficial; si mide la tensión entre dos líquidos (o dos fluidos) se denomina tensión interfacial. Sus unidades en SI son: N/m.



Tabla. 1. Valores típicos de viscosidad de fluidos comunes, a condiciones estándar.

fluido	μ , Pa s.	ν , m ² /s
agua destilada	1.0×10^{-3}	1.0×10^{-6}
miel	2 a 10	1.4 a 7.1
gasolina	6.0×10^{-3}	8.8×10^{-6}
etanol	1.1×10^{-3}	1.4×10^{-6}
sangre	3.5×10^{-3}	2.1×10^{-6}
mercurio	1.5×10^{-3}	1.1×10^{-7}
aire	18.3×10^{-6}	15.3×10^{-6}
hidrógeno	8.8×10^{-6}	9.8×10^{-7}
dioxido de carbono	14.8×10^{-6}	7.5×10^{-6}
vidrio	1×10^{17}	4×10^{15}
manto terrestre	1×10^{24}	4×10^{22}

2.2. Tipos de fluidos.

2.2.1. Fluidos Newtonianos.

Son aquellos en los que la relación esfuerzo de corte-velocidad de deformación es lineal $\tau = c\dot{\epsilon}$. A esta relación de proporcionalidad se le denomina viscosidad, razón por la cual este tipo de fluidos se describen como linealmente viscosos. Estos fluidos mantienen su viscosidad durante el tiempo sin importar su entorno, el único cambio en su viscosidad se obtiene al agregar calor o frío a la sustancia.

La razón de sus nombres es debido a Sir Isaac Newton en 1687 quien estableció una relación constitutiva para un fluido viscoso; para estos fluidos el esfuerzo de corte aplicado y la deformación producida es proporcional. Sir Isaac Newton, quien estableció las leyes elementales de la mecánica clásica, pionero de la mecánica de fluidos, estableciendo una ley sobre la viscosidad la cual lleva su nombre. En dicha ley de la viscosidad, Newton establece que cuando se mueve un fluido, en forma “laminar”, existe una relación directamente proporcional entre los esfuerzos o tensiones aplicadas y los gradientes (aumentos, disminuciones) de la velocidad del flujo, siendo la constante de proporcionalidad una propiedad física del fluido llamada viscosidad.



2.2.2. Fluidos no Newtonianos.

En este caso la relación es no lineal, presentándose fenómenos de almacenamiento de energía a la vez de los disipativos característicos de los fluidos, a este tipo de medios se les denomina fluidos viscosos no lineales ($\tau = c\dot{\gamma}^n; n \neq 1$).

Un fluido no Newtoniano es aquella en la cual su viscosidad o la resistencia a fluir varía con el gradiente de tensión que se le aplica, lo que significa que se deforma en la dirección de la fuerza a la cual es sometida. Y con esto resulta que un fluido No-Newtoniano no tiene un valor de viscosidad definido y constante; y por estas características dichos fluidos son parte de una ciencia denominada Reología, la cual estudia y analiza los fenómenos de flujo y deformación [26] y las propiedades mecánicas de los gases, líquidos, plásticos y el estudio de sustancias que fluyen pero que su comportamiento no está regido por las propiedades que rigen a los fluidos comunes.

- Comportamiento Pseudo-Plástico.

Característico de materiales de elevada viscosidad, disueltas o fundidas, cuya viscosidad disminuye rápidamente, cuando aumenta el esfuerzo. La función característica o reograma más típico es el de Ostwald

$$\frac{du}{dy} = f(\tau, t)$$

donde $\frac{du}{dy}$ es la velocidad de deformación y τ es el esfuerzo cortante, dentro de esta clasificación se pueden mencionar, polímeros en disolución, tinta de impresión, mermelada, etc.



El modelo de ley de potencia de Ostwald-de-Waele puede modelar fluidos pseudo-plásticos cuando el exponente, que caracteriza la ley, es mayor que uno. Algunos ejemplos de fluidos pseudo-plásticos son: pinturas, gomas, sangre, suspensiones, etcétera. Esta ley modela los fluidos newtonianos cuando n es igual a uno, y cuando n es menor que uno, representa a fluidos dilatantes. Como ejemplos de estos fluidos, se pueden citar, entre otros, el azúcar, tierra húmeda, soluciones en bórax.

- Comportamiento Plástico

Son materiales esencialmente parecidos a los pseudo-plásticos pero necesitan una tensión mínima para que exista una deformación continua. El reograma de Bingham tiene una función característica.

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{\eta} (\tau - f)$$

Por ejemplo, pasta dentífrica, pomadas, grasas, chocolate, tinta de bolígrafo, etc.

- Comportamiento Tixotrópico

La viscosidad depende de la velocidad de deformación y del tiempo. Entre este tipos de fluidos se destacan, Pinturas (pequeñas rugosidades desaparecen con el tiempo), mayonesa, ketchup (tardan un tiempo en recuperar su forma), etc.

- Comportamiento Dilatante

El aumento sobre proporcional de la viscosidad con T_0 , incluso para un esfuerzo cortante elevado, el valor casi infinito de la viscosidad es la característica de comportamiento de una sustancia dilatante. Un reograma típico el de Ostwald: $\frac{du}{dy} = k\tau^n ; n < 1$



Por ejemplo Arena húmeda, almidón en agua, depósitos de pintura de aceite, etc

- Comportamiento Irreversible

Algunas sustancias tienen una variación de la viscosidad con el tiempo de esfuerzo de tipo Tixotrópico, pero la modificación de la viscosidad es irreversible y no hay regeneración estructural durante el tiempo de reposo.

El comportamiento de estos grupos se puede ver de manera gráfica en la Figura 2, donde se aprecia el comportamiento de algunos de ellos.

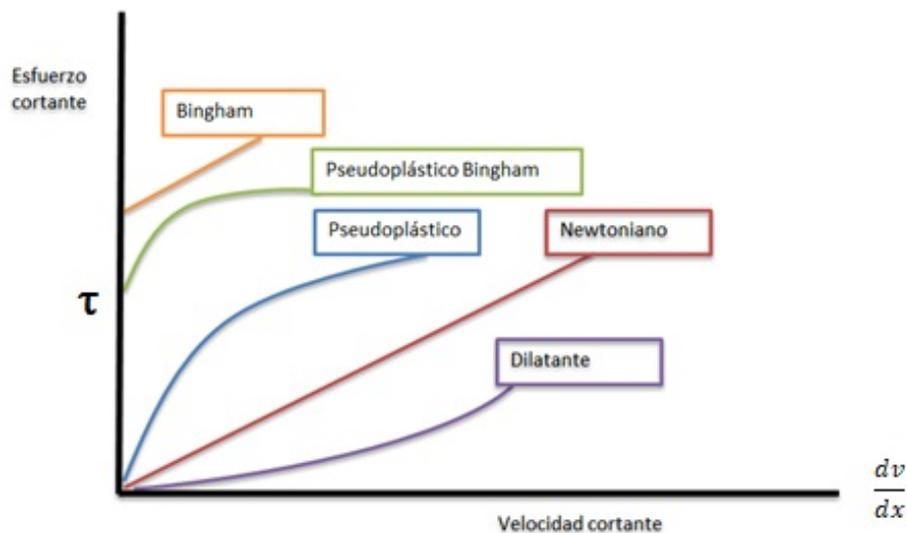


Figura 2: Diagrama reológico, donde dv/dx es la velocidad cortante o tasa de deformación y τ es el esfuerzo cortante

Se puede observar en los fluidos que la resistencia al flujo depende de la velocidad y, por lo tanto, de su velocidad de deformación y esto también ocurre en los sólidos con relación a su deformación. Estudios más detallados revelan la existencia de linealidad en la relación de cargas aplicadas respecto a velocidad de deformación, como los sólidos de Hooke. Pero también existen otros que no se puede encontrarles la relación de linealidad.



El estudio del comportamiento de fluidos Newtonianos y No-Newtonianos en sistemas confinados por superficies sólidas es de gran importancia para diversas áreas como la recuperación de hidrocarburos [1], flujo en medios porosos[2], transporte de líquido en plantas [3], microfluidos [4,5] y aplicaciones médicas [6]. El flujo que se genera por efectos de la presión capilar, $P_c = 2\sigma \cos\theta/R_0$, donde R_0 es el radio del capilar, θ es el ángulo de contacto entre la interface fluido-fluido con la superficie sólida, se ha estudiado de manera teórica [8-10] a partir de estos estudios se establece que el ascenso del fluido sigue una ley de comportamiento de la forma $h \sim \sqrt{t}$, conocida como Ley de Washburn, donde h es la altura del frente de imbibición y t es tiempo transcurrido [8], En el caso de medios porosos el cambio de geometría resulta difícil de modelar por lo que se considera a éste como un conjunto de capilares [11-17] además si el medio esta fracturado, éstas se pueden analizar como un flujo entre placas planas [12]. Para flujo en un medio poroso, Pearson [13] presenta un resumen de las aproximaciones más empleadas para fluidos newtonianos y de algunas para no newtonianos. En general durante el ascenso capilar diversos factores modifican la evolución del frente de imbibición, para fluidos newtonianos se ha estudiado la variación del ángulo de contacto [18], el cambio en la geometría, y la influencia de la temperatura tanto en la viscosidad como en la tensión superficial [13,14]. En el caso de fluidos no-newtonianos se han presentado estudios en capilares cilíndricos [19] y micro canales [20], empleando la ley de potencia para la viscosidad, y cambios en la sección del capilar en el estudio de capilares cónicos [21,22]

A continuación se presenta un resumen de los artículos que son base para este trabajo de tesis.

En Primer lugar se presenta un trabajo relacionado con el ascenso capilar en una celda de Hele-Shaw bajo un gradiente de temperatura

el cual es la base teórica y experimental de este trabajo. En esta investigación el enfoque que le dan los autores [12] es sobre imbibición en fracturas verticales.

Para la parte teórica formulan un problema para un flujo unidimensional en el cual supone leyes lineales para la dependencia con la temperatura de la viscosidad dinámica y la tensión superficial. El diagrama del problema se muestra en la Figura 3.

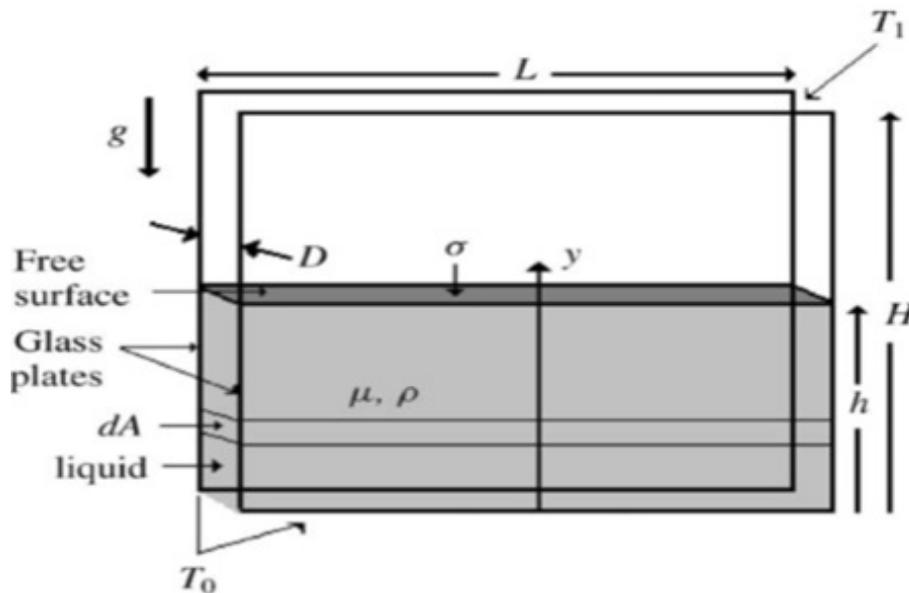


Figura 3: Vista esquemática de los parámetros geométricos y físicos durante la imbibición en una celda Hele-Shaw. Cada placa transparente tiene una longitud L y la altura H y la separación entre ellos D y al tiempo t , la altura de subida es $y(t)$. La celda está bajo el campo de gravedad, g , y tiene un gradiente de temperatura longitudinal, constante $G = \Delta T / H$. La superficie libre del líquido sólo es representativa y dA indica el elemento de área diferencial.

En este caso se considera que durante la imbibición se desarrolla un flujo de Poiseuille entre las placas, por lo que la presión capilar está dada por: $P_c = \frac{2\sigma \cos\theta}{D}$ donde θ es el ángulo de contacto y el esfuerzo cortante en las paredes internas está dada por $\tau = \mu \bar{u} / D$, donde \bar{u} es la velocidad media del flujo y μ es la viscosidad dinámica. La ecuación de equilibrio resultante para el problema es la siguiente:



$$\frac{2\sigma(h(t))}{D} \cos\theta (LD) - \rho g D L h - \int_0^{h(t)} \tau_w dA = 0$$

Dada la existencia de un gradiente lineal de temperatura $T(y = h) = T_0 + Gh$, los autores proponen una variación con la temperatura tanto para la viscosidad como para la tensión superficial de la siguiente forma $\mu = \mu_0 \left[1 + \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{d\mu}{dT} \right) Gy \right]$ y $\sigma = \sigma_0 \left[1 + \frac{1}{\sigma_0} \left(\frac{d\sigma}{dT} \right) Gh \right]$. Por lo tanto, la ecuación resultante es:

$$2\sigma(h(t)) \cos\theta - \rho g D h - \frac{12}{D} \frac{dh}{dt} \int_0^{h(t)} \mu(y) dy = 0$$

Finalmente resolviendo esta ecuación e introduciendo variables adimensionales y finalmente se obtiene la ecuación adimensional:

$$1 + (B - 1) \xi - (\xi + A\xi^2) \frac{d\xi}{d\tau}$$

Donde $A = \frac{\mu' Gh_\infty}{2\mu_0}$ y $B = \frac{\sigma' Gh_\infty}{\sigma_0}$

Los resultados teóricos y experimentales se muestran en la figura 4, como se observa, los resultados muestran una muy buena predicción del ascenso capilar.

En este sentido los mismos autores presentan un trabajo para la imbibición en un medio poroso bajo un gradiente de temperatura constante[23]. Se considera teóricamente la imbibición en una muestra porosa a través de la ecuación de Darcy unidimensional, que incluye la presión capilar y la presión hidrostática.(Fig. 5)

Se considera que el flujo a bajas velocidades en el medio poroso se

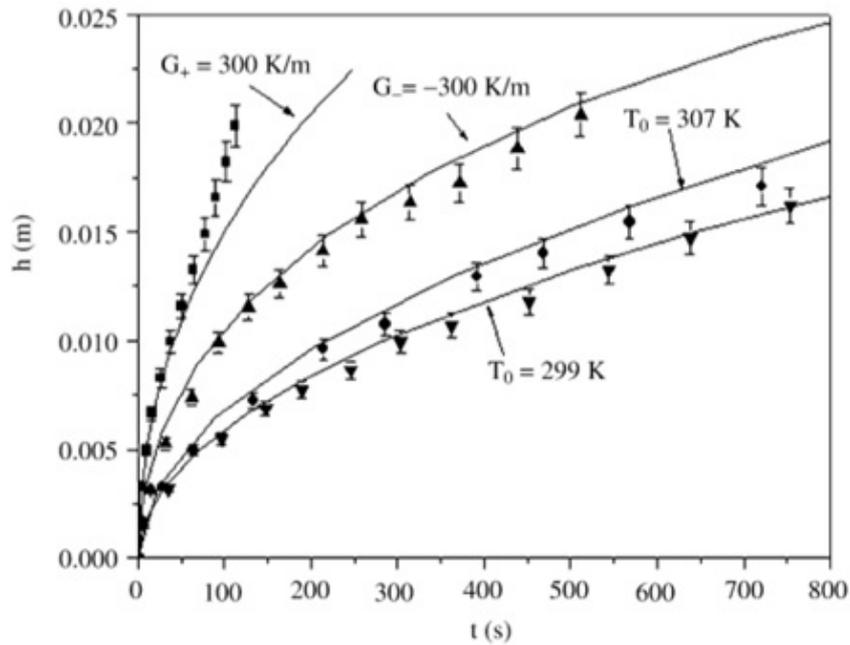


Figura 4: Comparación de resultados teóricos y experimentales.

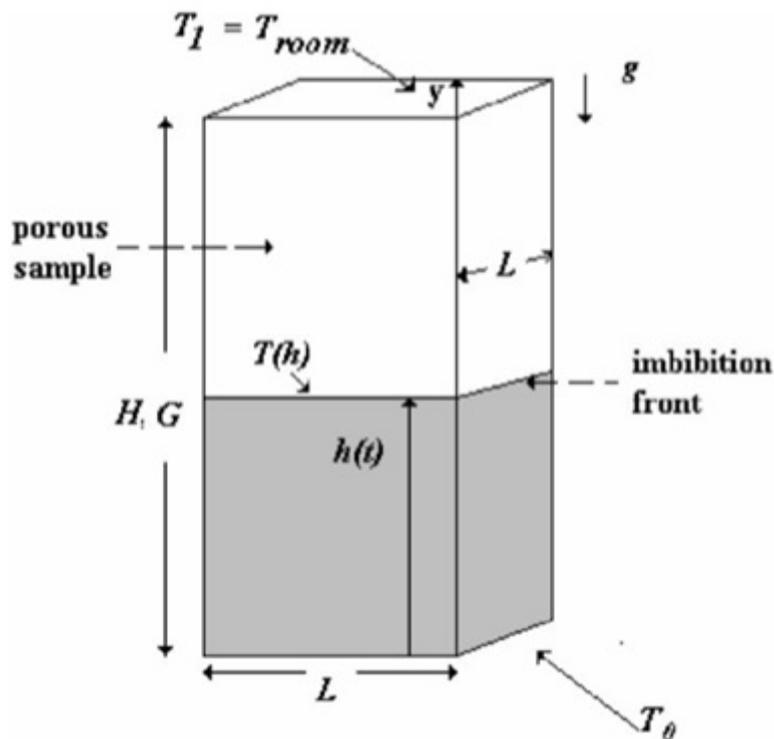


Figura 5: Vista esquemática de la región embebida (zona gris) y del frontal de imbibición instantáneo $h(t)$. El bloque tiene altura H y el área de la sección transversal L_2 , se encuentra debajo del campo de gravedad g y un gradiente de temperatura longitudinal $G = (T_1 - T_0)/H$. Aquí, T_0 es la temperatura en la cara inferior y T_1 es la temperatura en la cara superior.

rige por la ley de Darcy unidimensional, el cual establece una relación entre la velocidad de filtración y los gradientes de presión.



$$\bar{v} = -\frac{d^2}{c_2\mu(y(T))} \left[\frac{dp}{dy} + \phi\rho g \right]$$

Donde p es la presión y $c_2\mu(y(T))$ es la viscosidad dinámica dependiente de la altura, que bajo diferentes alturas toma valores distintos por depender de la temperatura, g es la aceleración de la gravedad, ρ es la densidad del fluido. Y suponiendo que la permeabilidad K está relacionada con el diámetro medio de poro $K \sim d^2$ por lo tanto c_2 es otra constante adimensional que también depende de ϕ .

La ecuación para la caída de presión está representada por la siguiente ecuación:

$$\Delta P = \int_0^{h(t)} dP = -\frac{C_2 dh}{d^2 dt} \int_0^{h(t)} [\mu(y(T))] dy - \phi\rho gh$$

De igual manera se considera la variación de la viscosidad y tensión superficial con la temperatura asumiendo las siguientes expresiones $\mu(y(T)) = \mu_0 \left[1 + \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{d\mu}{dT} \right) Gy \right]$, donde μ_0 es la viscosidad en un valor de referencia y $\sigma(h(T)) = \sigma_0 \left[1 + \frac{1}{\sigma_0} \left(\frac{d\sigma}{dT} \right) Gh \right]$, donde $\sigma' = \frac{d\sigma}{dT}$ es el coeficiente de temperatura. Considerando que:

$$A = \frac{\mu' Gh_0}{2\mu_0} \quad B = \frac{\sigma' Gh_0}{\sigma_0}$$

Finalmente, la ecuación diferencial resultante que se obtiene es:

$$1 + (B - 1)\xi - (\xi - A\xi^2) \frac{d\xi}{d\tau}$$



Cuando $\xi = 0 \rightarrow \tau = 0$, la solución es:

$$\tau = \left[\frac{B - A - 1}{(B - 1)^2} \right] \xi + \left[\frac{A}{2(B - 1)} \right] \xi^2 + \left[\frac{A - B + 1}{(B - 1)^3} \right] \text{Ln} [1 + (B - 1) \xi].$$

Con la solución se observa una competencia entre los gradientes A y B , y de alguna manera modulan la evolución del frente $\xi(T)$ bajo gradientes de temperatura.

Los experimentos se realizaron en una roca de arenisca Berea, sujeta a un gradiente de temperatura, tres condiciones de temperatura se estudiaron. Los gradientes de temperatura impuestos se muestran en la Figura 6.

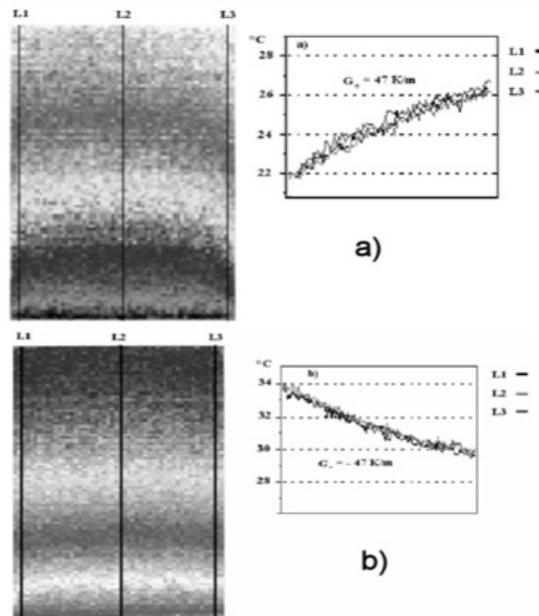


Figura 6: Termografía típica de una cara de la roca seca (arenisca de Berea) y gráfico de la temperatura como función de y para $G > 0$ y b) Termografía típica del mismo tipo de roca y gráfico de la temperatura como función de y para $G < 0$.

Finalmente, en la figura 7 se presenta los resultados teóricos como experimentales y como se observa muestran una muy buena correspondencia.

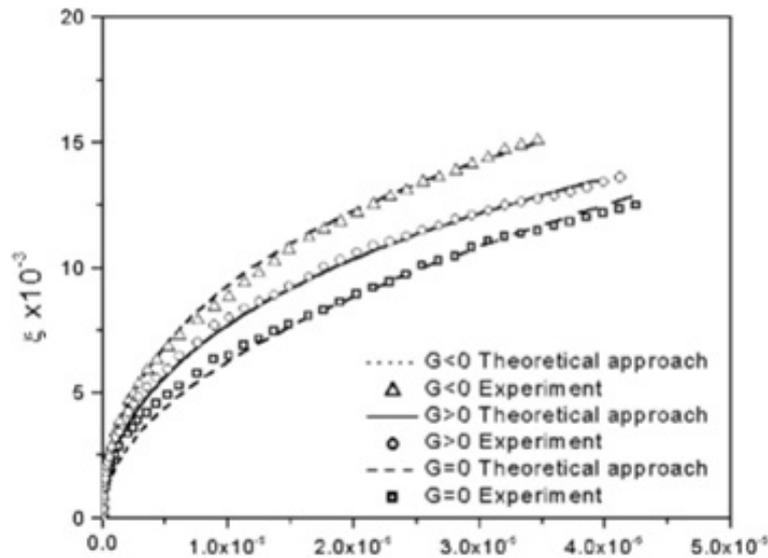


Figura 7: Gráfico sin dimensiones de los perfiles teóricos $\xi()$ (curvas) y puntos experimentales (símbolos) para los diversos valores de G considerados en este trabajo: $G = 0$ donde $T_0 = T_1 = T_{room} = 295.2K(\diamond)$, $G < 0$ donde $G^- = -47K/m(\blacktriangle)$, y $G > 0$ donde $G^+ = 47K/m(^{\circ})$. Los símbolos son del tamaño de las barras de error.

Por otra parte, para el caso de fluidos no newtonianos[27], es importante considerar el cambio de la viscosidad con la temperatura, en este sentido se han presentado pocos trabajos en las cuales se considere la influencia de la temperatura. El siguiente trabajo se propone una expresión para el cambio de la viscosidad por efectos de la temperatura. El artículo trata determinar valores fiables α adecuados para problemas de transferencia de calor laminar. Esto con la finalidad de una mejor predicción de transferencia de calor y caída de presión para líquidos con viscosidad dependiente de la temperatura. El estudio se basa en investigaciones hecho por Sieder y Tate [27] quienes estudiaron la transferencia de calor en un intercambiador de calor tubular a una temperatura constante de pared. Teniendo como premisa que la convección térmica en condiciones no isoviscosas se retarda si la viscosidad de la pared aumenta y se intensifica si la viscosidad disminuye. La recomendación para expresar el efecto de la variación de la viscosidad fue:



$$Nu_M = Nu_{M*} \left(\frac{\bar{\mu}_B}{\bar{\mu}_w} \right)^{0.14} \quad (1)$$

La potencia 0.14 se obtiene por regresión de datos experimentales, Nu_M es el número de Nusselt real y Nu_{M*} es el valor correspondiente al caso de flujo independiente de la temperatura (isoviscous). Las viscosidades $\bar{\mu}_B$ y $\bar{\mu}_W$ se relacionaron con las temperaturas promedio de la masa y la pared, respectivamente, obtenidos con los valores de entrada y salida de la sección de transferencia de calor. La ecuación (1) se obtuvo con un número limitado de experimentos de transferencia de calor, por lo que puede obtenerse de manera teórica con la siguiente ecuación:

$$Nu_M = Nu_{M*} \left(\frac{\bar{\mu}_B}{\bar{\mu}_w} \right)^{\alpha_{ST}} \quad (2)$$

Que depende de la longitud del intercambiador de calor, de la relación de viscosidad y, de las condiciones generales del equipo de intercambiador de calor.

También es importante considerar que la viscosidad aumenta de manera exponencial cuando aumenta la temperatura y para describir el comportamiento, el modelo adecuado considerado es:

$$\mu(T) = \mu_0 \exp\left(-\frac{T - T_0}{T_V}\right) \quad (3)$$

Este modelo contiene dos constantes con significado físico sencillo: μ_0 es la viscosidad a la temperatura T_0 , T_V es una propiedad del material y es igual a la diferencia de temperatura correspondiente a la relación de viscosidad $1 / \exp[27]$.



El exponente real α de (2) puede calcularse de datos numéricos usando:

$$\alpha_{ST} = \frac{Tv \ln (N\mu_M/N\mu_{M^*})}{(T_w(0) + T_w(x))/2 - (T_M(0) + T_M(x))/2} \quad (4)$$

En este modelo final, $(T_w(0) + T_w(x))/2$ es la temperatura promedio de la pared en la entrada y salida en el intercambiador de calor y $(T_M(0) + T_M(x))/2$ corresponde a la temperatura promedio de la masa. Con esta ecuación se puede obtener el valor de α aunque puede ser impreciso, por lo que los investigadores experimentales aceptan el valor $\alpha_{ST} = 0.14$ sabiendo que puede fallar cuando la viscosidad es variable.

Para obtener las soluciones numéricas, para el estudio de transferencia de calor en tuberías circulares con temperaturas de pared constantes, se adecuaron la correlación ST el cual depende de una coordenada longitudinal, definido como:

$$z = \frac{x\lambda}{\rho cpUB^2}$$

Donde B (figura 8) es la distancia entre la pared de transferencia de calor y la línea de transferencia de calor cero, se consideraron otras configuraciones de transferencia de calor como las que de la figura 8 en donde se puede ver la relación de B.

Se resolvieron de manera numérica las configuraciones de tubo circular(R), conducto plano (F2) y el intercambio térmico en una pared (F1); con flujo laminar desarrollado usando líquidos newtonianos(N) y fluidos de ley de potencia (NN) y las condiciones de contorno: Temperatura constante de la pared (CWT) y Flujo de calor de pared constante (CHF).

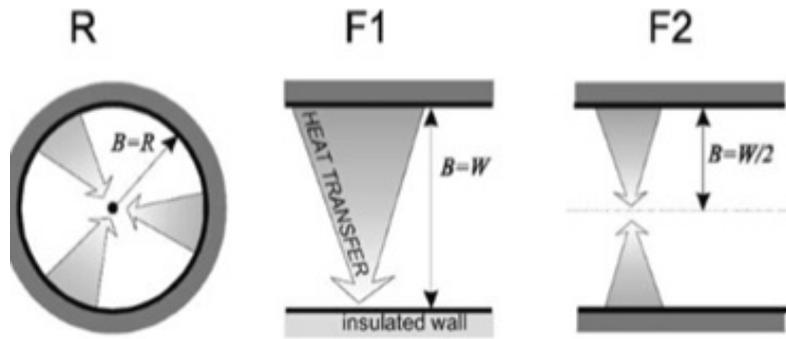


Figura 8: Configuración de los problemas de transferencia de calor. Sección transversal de canal circular y canal plano calentado asimétricamente y simétricamente.

Obtuvieron soluciones numéricas completas para cada una de las configuraciones, con esto se obtiene información acerca del valor de α . Como α es una función de la longitud adimensional de z , de los cambios de viscosidad y del índice de flujo no-Newtoniano, n . Pero también depende de las condiciones de contorno, así como del tipo de número de Nusselt, sin embargo, los efectos que tienen en el cambio de la viscosidad son menor e incluso se pueden descuidar en la práctica. Por lo que finalmente, la distancia que utilizan los intercambiadores de calor es mínima y con eso es suficiente para tener un valor cercano a los experimentales, con los resultados teóricos es demostrado que se ha medido con precisión, porque los valores teóricos de α son 0.14 ± 0.01 .

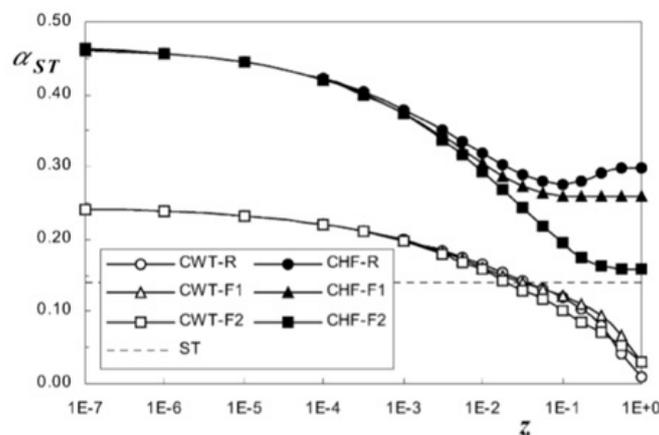


Figura 9: Diferentes enfoques $\alpha_X, \alpha_M, \alpha_{ST}$ para las correcciones de transferencia de calor para $n = 1$ y $\psi \rightarrow 0$



2.3. Justificación.

La principal motivación de este trabajo, se fundamenta a la poca información encontrada en relación al proceso de imbibición con fluidos no newtonianos, es claro que este trabajo presenta una aportación novedosa no desarrollada con anterioridad. Así mismo, este trabajo forma parte importante de una serie de trabajos realizados previamente en la línea de investigación de flujos capilares bajo gradiente de temperatura. Por lo cual, este trabajo representa una investigación novedosa en el campo de fluidos capilares.

3. Modelo Matemático.

En este trabajo se estudia la evolución temporal del frente de imbibición de un fluido No-Newtoniano en una celda de Hele Shaw, bajo gradientes de temperatura. La penetración del fluido en las placas es generada por la presión capilar $P_{Cap} = \frac{2\sigma \cos\theta}{D}LD$, donde L es el largo de las placas, D es la separación entre placas θ es el ángulo de contacto del fluido con la superficie sólida, ver figura 10, durante el movimiento del fluido se generan esfuerzos cortantes en las paredes además, con el ascenso, la columna del fluido que se forma produce una fuerza adicional por efectos de la gravedad, por lo que el flujo capilar se ve frenado paulatinamente tanto por las fuerza de fricción como el peso del fluido.

Finalmente el ascenso del fluido se detiene en su totalidad alcanzando una altura de equilibrio (H_{eq}), cabe mencionar que esta altura depende fuertemente de los gradientes de temperatura impuestos en la celda.

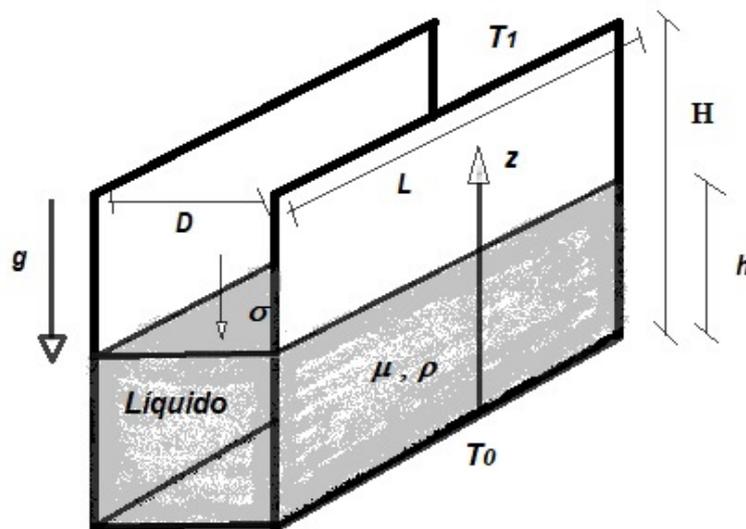


Figura 10: Esquema del ascenso capilar en una celda de Hele-Shaw bajo gradientes de temperatura. Se muestra los detalles geométricos y propiedades físicas del fluido.



3.1. Presión capilar.

Como se menciona anteriormente, la presión capilar es la que genera la fuerza con la que el fluido asciende entre las placas, este comportamiento se puede expresar de la siguiente manera:

$$F_{cap} = \int \frac{2\sigma \cos \theta}{D} dA_T.$$

por lo que la expresión resultante es:

$$F_{cap} = 2\sigma \cos \theta L. \quad (5)$$

Una de las fuerzas que aparece cuando existen flujos confinados y en movimientos, es la fuerza debido a los esfuerzos cortantes en las paredes, en el caso de flujos en capilares esta fuerza es de gran importancia ya que es la principal razón por la cual el fluido deja de moverse.

Para estimar esta fuerza en un fluido no newtoniano, se emplea la ley de potencia para el comportamiento de la viscosidad y se modifica la ley de viscosidad de Newton para el esfuerzo cortante.

3.2. Esfuerzo cortante.

El fluido de trabajo es un fluido Pseudoplástico con un índice de comportamiento menor a la unidad, como se menciona anteriormente se emplea la ley de potencia y la ley de viscosidad de Newton para determinar la fuerza debida a esfuerzos cortantes.

Ley de potencia para la viscosidad:

$$\mu = k(\dot{\gamma})^{n-1} = k \left(\frac{du}{dx} \right)^{n-1}$$



Ley de viscosidad de Newton

$$\tau_w = k\dot{\gamma} = k \left(\frac{du}{dx} \right)$$

Esfuerzo cortante para un fluido No-newtoniano.

$$\tau = k(\dot{\gamma})^n = k \left(\frac{du}{dx} \right)^n$$

Donde: τ es el esfuerzo cortante, $\frac{du}{dx}$ es la velocidad de deformación (s⁻¹), k es el índice de consistencia dimensional (*Pa.s*) y “ n ” es el índice de comportamiento.

Para la Ley de la potencia se trabaja específicamente con “ $n < 1$ ” en un fluido pseudoplástico.

Para obtener una expresión analítica para el esfuerzo cortante es necesario calcular el perfil de velocidades del fluido dentro de las placas, para ello se emplea la ecuación de Navier-Stokes en dirección vertical “ Z ”.

3.3. Modelo para el caso isotérmico.

3.3.1. Ecuación de cantidad de movimiento.

Usando la ecuación de cantidad de movimiento, pero solo en dirección de z ya que se considera que el flujo es unidimensional.

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (6)$$



Las condiciones de frontera son:

$$|u|_{x=D/2} = 0$$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$$

Desarrollando la ecuación de cantidad de movimiento junto con la ley de potencia para la viscosidad la ecuación resultante es:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = k \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{du}{dx} \right)^n \quad (7)$$

Resolviendo la ecuación anterior con sus respectivas condiciones de frontera se puede demostrar que:

$$\frac{\partial P}{\partial z} x = k \left(\frac{du}{dx} \right)^n \quad (8)$$

De la ecuación anterior se obtiene una expresión para la derivada de la velocidad, sin embargo queda de manera explícita el gradiente de presiones el cual debe de ser estimado.

$$\frac{du}{dx} = \left(\frac{\partial P}{\partial z} \frac{x}{k} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (9)$$



De la ecuación anterior se puede demostrar que la velocidad promedio dentro de las placas esta determinada por la siguiente expresión:

$$\bar{u} = \left(\frac{1}{k} \frac{\partial P}{\partial z} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{n}{n+1} \left(\frac{D}{2} \right)^{\frac{n+1}{n}} \quad (10)$$

Por otra parte, se puede estimar el gasto como $Q = \int \bar{u} dA$, donde: Q es el flujo másico, \bar{u} es la velocidad promedio y dA es el diferencial del área en las placas por donde fluye. Entonces la ecuación resulta:

$$Q = \int u dA = \left(\frac{1}{k} \frac{\partial P}{\partial z} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{n}{n+1} \left(\frac{D}{2} \right)^{\frac{n+1}{n}} LD.$$

Con esta expresión, se puede obtener el cambio de presión con respecto a la dirección “ z ”.

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \left[\frac{Q}{\frac{n}{n+1} \left(\frac{D}{2} \right)^{\frac{n+1}{n}} LD} \right]^n k. \quad (11)$$

Sustituyendo la ecuación (9) en la ecuación (11).

$$\frac{du}{dx} = \left[\frac{Q}{\frac{n}{n+1} \left(\frac{D}{2} \right)^{\frac{n+1}{n}} LD} \right] x^{\frac{1}{n}} \quad (12)$$



3.3.2. Fuerza de fricción en las paredes.

Con la expresión anterior, es posible obtener una expresión general para las fuerzas de fricción en las paredes.

$$F_f = \int k \left[\frac{Q}{\frac{n}{n+1} \left(\frac{D}{2} \right)^{\frac{n+1}{n}} L D} \right]^n x L dz \quad (13)$$

Por otra parte considerando que el perfil de velocidades es razonablemente plano, se puede aproximar la velocidad promedio de ascenso como $\bar{u} = \frac{dh}{dt}$, de esta manera la ecuación resultante para la fuerza de fricción es:

$$F_f = k \left[\frac{\frac{dh}{dt}}{\frac{n}{n+1} \left(\frac{D}{2} \right)^{\frac{n+1}{n}}} \right]^n \left(\frac{D}{2} \right) L h(t). \quad (14)$$

3.3.3. Peso del fluido.

Con la expresión de la fuerza capilar y de las fuerzas de fricción en las paredes de las placas, solo resta una ecuación más para describir completamente todas las fuerzas que intervienen en el fenómeno, el cual es peso de la columna del fluido de trabajo que se expresa de la siguiente manera.

$$W_{fluid0} = \int \rho g h(t) dA$$

donde: ρ es la densidad del fluido ($kg \cdot m^{-3}$), g es la gravedad ($m \cdot s^{-2}$) y $h(t)$ la altura del fluido que asciende que es función de tiempo (s),



por lo que el peso del fluido está determinado por:

$$W_{fluid0} = \rho g D L h(t). \quad (15)$$

3.3.4. Balance de fuerzas.

El balance de las fuerzas que determina todas las fuerzas que interviene en el proceso se puede expresar como:

$$F_{capilar} - W_{fluido} - F_{fricción} = 0.$$

Sustituyendo las ecuaciones (5), (14) y (15), la ecuación diferencial dimensional resultante es.

$$\frac{2\sigma \cos\theta}{D} LD - \rho g D L h(t) - k \left[\frac{\left(\frac{D}{2}\right)^{\frac{1}{n}}}{\frac{n}{n+1} \left(\frac{D}{2}\right)^{\frac{n+1}{n}}} \right]^n \left(\frac{dh}{dt} \right)^n L h = 0 \quad (16)$$

Para facilitar la manipulación del modelo, se proponen las siguientes variables adimensionales $\xi = \frac{h}{H_{eq}}$, donde H_{eq} es la altura de equilibrio y h es la altura del fluido $\tau = \frac{t}{t_c}$, donde t_c es el tiempo característico y t es el tiempo en (s).

Sustituyendo las nuevas variables en el modelo (16).



$$2\sigma\cos\theta L - \rho g D L H_{eq}\xi - k \left[\frac{\left(\frac{D}{2}\right)^{\frac{1}{n}}}{\frac{n}{n+1} \left(\frac{D}{2}\right)^{\frac{n+1}{n}}} \right]^n \left(\frac{dH_{eq}\xi}{dt_c\tau} \right)^n L H_{eq}\xi = 0$$

Simplificando esta ecuación.

$$1 - \xi - \left[\frac{H_{eq}}{t_c} \frac{k^{\frac{1}{n}} H_{eq}^{\frac{1}{n}}}{(2\sigma\cos\theta)^{\frac{1}{n}}} \frac{\left(\frac{D}{2}\right)^{\frac{1}{n}}}{\frac{n+1}{n} \left(\frac{D}{2}\right)^{\frac{n+1}{n}}} \right]^n \left(\frac{d\xi}{d\tau} \right)^n \xi = 0$$

Por lo que la altura de equilibrio y el tiempo característico quedan determinados de la siguiente manera:

$$H_{eq} = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g D}$$

$$t_c = \left[\frac{(2n+2)}{nD} \frac{k^{\frac{1}{n}} H_{eq}^{\frac{n+1}{n}}}{(2\sigma\cos\theta)^{\frac{1}{n}}} \right]$$

Finalmente la ecuación diferencial adimensional resultante es:

$$1 - \xi - \left(\frac{d\xi}{d\zeta} \right)^n \xi = 0 \quad (17)$$

La solución de la ecuación diferencial se realiza mediante un esquema de diferencias finitas centradas.



$$1 - \xi_i - \left(\frac{\xi_{i+1} - \xi_{i-1}}{\tau_{i+1} - \tau_{i-1}} \right)^n \xi_i = 0$$

Con su respectiva condición inicial .

$$\xi_{\tau=0} = 0$$

La ecuación anterior representa el flujo capilar isotérmico en una celda de Hele - Shaw, como parte de este trabajo es también analizar los efectos de la temperatura en el ascenso temporal del frente de imbibición.

3.4. Modelo matemático para los gradientes negativo y positivo de temperaturas.

Para analizar los efectos de la temperatura se analizan los efectos tanto en la tensión superficial como en la viscosidad.

3.4.1. Presión capilar.

Como se menciona con anterioridad, la fuerza capilar esta representada por la siguiente expresión:

$$F_{cap} = \int \frac{2\sigma \cos \theta}{D} dA_T$$

Para considerar los efectos de la temperatura se considera una expansión en series de Taylor para el coeficiente de tensión superficial considerando sólo la primer derivada [12]



$$\sigma(h(T)) = \sigma_0 \left(1 \pm \frac{1}{\sigma_0} \left(\frac{d\sigma}{dT} \right) Gh \right)$$

Donde σ_0 es la tensión superficial a $T = T_0$, G es el gradiente de temperatura y se define como $G = (T_0 - T_1)/H$, (ver figura 10).

Por lo que la expresión para la tensión superficial queda de la siguiente manera

$$F_{cap} = 2 \left[\sigma_0 \pm \left(\frac{d\sigma}{dT} \right) \sigma h \right] \cos\theta L \quad (18)$$

3.4.2. Fuerzas de fricción en las paredes.

Usando la ecuación de cantidad de movimiento y las mismas condiciones de frontera de la ecuación (6). Se maneja el mismo procedimiento del desarrollo del modelo que en el caso isotérmico:

$$\int \frac{\partial P}{\partial z} dx = k \left(\frac{du}{dx} \right)^n$$

obteniendo el perfil de velocidades resultante del flujo:

$$\frac{du}{dx} = \left(\frac{\partial P}{\partial z} \frac{x}{k} \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (19)$$

Se toman las mismas consideraciones que el caso isotérmico.



$$\bar{u} = \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)^{\frac{1}{n}} * \frac{n}{n+1} \left(\frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{D}{2} \right)^{\frac{n+1}{n}} \quad (20)$$

Siguiendo el mismo desarrollo para el caso isotérmico.

$$\frac{du}{dx} = \left[\frac{Q}{\frac{n}{n+1} \left(\frac{D}{2} \right)^{\frac{n+1}{n}} LD} \right] \quad (21)$$

Por lo que, la ecuación de fuerzas de fricción en las paredes resulta:

$$F_f = \int k \left[\left(\frac{\frac{dh}{dt}}{\frac{n}{n+1} \left(\frac{D}{2} \right)^{\frac{n+1}{n}}} \right) x^{\frac{1}{n}} \right]^n Ldz \quad (22)$$

Para considerara los efectos de la temperatura en la viscosidad, Kamil Wichterle [24] proponen una expresión para el comportamiento del coeficiente de congruencia adimensional de la siguiente forma.

$$k(T) = k_0 e^{-n \frac{T_y - T_0}{T_v}}$$

En donde: k_0 en el índice de consistencia dimensional evaluado a una temperatura T_0 , y T_v [23] es una propiedad del material cuyo valor es igual a la diferencia de temperatura correspondiente a la relación de viscosidad $1/exp$ y T_y es la temperatura local del fluido.

La ecuación para la fuerza de fricción esta determinada por la siguiente expresión:



$$F_f = \beta^n \left(\frac{D}{2} \right) Lk_0 \int e^{-n \frac{T_y - T_0}{T_v}} dy$$

Donde: $\beta = \left[\frac{\frac{dh}{dt}}{\frac{n}{n+1} \left(\frac{D}{2} \right)^{\frac{n}{n+1}}} \right]$, para obtener la solución a esta integral, asumimos un modelo lineal para el gradiente de temperatura para T_y :

$$T_y = T_1 \pm Gy$$

Finalmente la ecuación resultante para la fricción en las paredes.

$$F_f = - \left[\frac{\frac{dh}{dt}}{\frac{n}{n+1} \left(\frac{D}{2} \right)^{\frac{n+1}{n}}} \right]^n \left(\frac{D}{2} \right) \frac{T_v Lk_0}{\pm Gn} \left[e^{\frac{\mp n Gh}{T_v}} - 1 \right] \quad (23)$$

3.4.3. Peso del Fluido.

Para el caso del peso del fluido no influye para los gradientes de temperaturas, por lo que se utiliza la misma ecuación (15).

3.4.4. Balance de fuerzas.

La ecuación resultante para el balance de fuerzas queda expresado por la siguiente ecuación.

$$2 \left[\sigma_0 \pm \left(\frac{d\sigma}{dT} \right) G_y \right] \cos\theta L - \rho g D L h + \left[\frac{\frac{dh}{dt}}{\frac{n}{n+1} \left(\frac{D}{2} \right)^{\frac{n+1}{n}}} \right]^n \left(\frac{D}{2} \right) \frac{T_v Lk_0}{\pm Gn} \left[e^{\frac{\mp n Gh}{T_v}} - 1 \right] = 0$$

De igual manera se emplean las siguientes variables adimensionales



propuesta para el caso isotérmico $\xi = \frac{h}{H_{eq}}$, y $\tau = \frac{t}{t_c}$.

$$2 \left[\sigma_0 \pm \left(\frac{d\sigma}{dT} \right) GH_{eq}\xi \right] \cos\theta L - \rho g DL H_{eq}\xi + \frac{T_v L k_0}{\pm G n} \left[\frac{\left(\frac{D}{2} \right)^{\frac{1}{n}}}{\frac{n}{n+1} \left(\frac{D}{2} \right)^{\frac{n+1}{n}}} \right]^n \left(\frac{dH_{eq}\xi}{dt_c \tau} \right)^n \left[e^{\mp \frac{nGH_{eq}}{T_v} \xi} - 1 \right] = 0$$

Para este caso la altura de equilibrio y el tiempo característico quedan de la siguiente manera.

$$H_{eq} = \frac{2\sigma \cos\theta}{\rho g D}$$

$$t_c = \left[\frac{1}{2n\sigma_0 \cos\theta |G|} \frac{T_v}{K_0} \left(\frac{H_{eq}}{\frac{n}{n+1} \frac{D}{2}} \right)^n \right]^{\frac{1}{n}}$$

La ecuación diferencial resultante para el gradiente positivo.

$$[1 + B\xi] - \xi + \left(\frac{d\xi}{d\tau} \right)^n [e^{-\alpha\xi} - 1] = 0$$

Mientras que para el gradiente negativo.

$$[1 - B\xi] - \xi - \left(\frac{d\xi}{d\tau} \right)^n [e^{\alpha\xi} - 1] = 0$$

Donde:

$$\alpha = n \frac{H_{eq}}{T_v} G = \frac{2n\sigma_0 \cos\theta}{\rho g D} G$$



$$B = \frac{2\sigma' \cos \theta G}{\rho g D}$$

Las ecuaciones diferenciales son resueltas numéricamente mediante un esquema de diferencias finitas centradas con su respectiva condición inicial.

$$\xi_{\tau=0} = 0$$



4. Metodología experimental.

Para los experimentos se emplea una celda de Hele-Shaw formada por dos placas de cristal de longitud $L=7.9 \times 10^{-2}$ m de altura $H=2.6 \times 10^{-2}$ m, con una separación $D=1 \times 10^{-2}$ m, ver Figura 11.

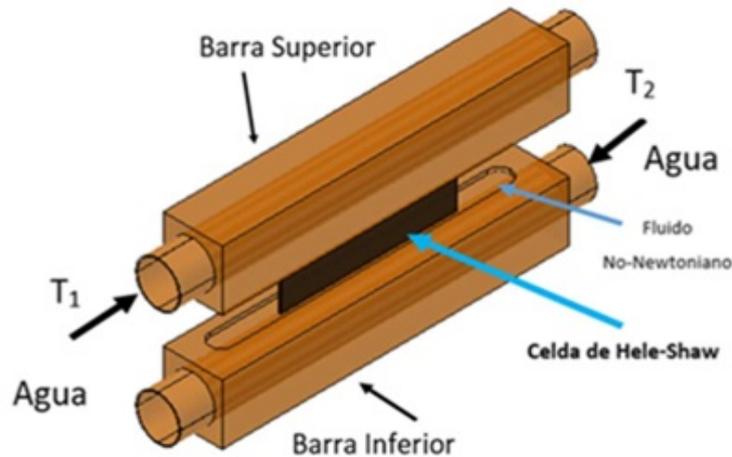


Figura 11: Esquema del dispositivo experimental, como se observa en la parte inferior el fluido de trabajo está contenido en depósito fabricado sobre la misma barra.

Los experimentos se realizan en dos etapas. Primero se establece el gradiente de temperatura en la celda y posteriormente se induce el flujo capilar.

Para establecer el gradiente de temperatura, $G = \delta T/H$, donde $\delta T = T_2 - T_1$. Las placas de cristal se colocan entre dos barras de cobre de sección cuadrada de una pulgada de espesor, a estas barras se les realiza un barreno en cada extremo se conectan mangueras provenientes de dos baños térmicos para tener un buen control de la temperatura $0.1^\circ C$. Una vez conectadas las mangueras se hace fluir agua a lo largo de los barrenos realizados en las barras, ver Figura 12. La barra inferior tiene un depósito de 2 mm de profundidad que se extiende a lo largo de la misma y este sirve para colocar el fluido de trabajo. Por otro lado, la barra superior tiene una ranura de 2mm de profundidad y del ancho de la celda de Hele-Shaw para poderla sujetar



y tener un buen contacto entre la celda y el cobre lo que garantiza una buena transferencia de calor.

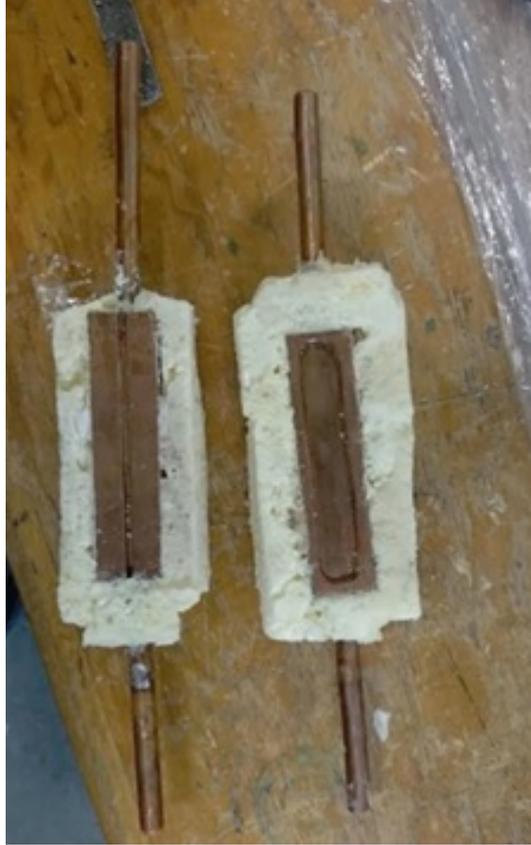


Figura 12: Barra de cobre superior e inferior para la sujeción del celda de Hele-Shaw y calentamiento del fluido de trabajo.



Figura 13: Dispositivo experimental, celda de Hele-Shaw montada y en contacto con el fluido de trabajo.

Una vez colocada la celda de Hele-Shaw en la barra superior se apoya la misma en la barra inferior a un costado del depósito pero sin



tocar el fluido con este contacto entre la base de la celda y la superficie de la barra de cobre, ver figura 13.

Para garantizar la formación de un gradiente de temperatura se deja pasar un periodo de tiempo de 30 minutos. La temperatura ambiente se mantuvo a 297.5 K para verificar la estabilidad del gradiente de temperatura se utilizó una cámara térmica (modelo FLIR Thermacam-P40) con una resolución de 0.1°C y una sensibilidad de 0.08°C a temperatura de 30°C la cual estuvo monitoreando en todo momento la temperatura en la celda de Hele-Shaw.

Una vez que el gradiente de temperatura se ha establecido en la celda de Hele-Shaw y comprobada la estabilidad de este mismo con ayuda de la cámara térmica, se procede a levantar levemente la celda unida a la barra superior con ayuda de unos elevadores colocados por los extremos y llevar la parte inferior de la celda hacia a la superficie del fluido que está en el depósito de la barra inferior este proceso se realiza en un tiempo muy corto con lo que se evita la modificación del gradiente de temperatura.

El flujo capilar ascendente se graba con una videocámara digital con una resolución de $1/30$ s, lo que permite medir distancias de 0.3mm. Cada punto experimental se repite tres veces y se reportan los resultados promedio de cada evento, las mediciones se realizaron al centro de las celda para evitar efectos de borde además, en cada experimento se emplearon placas nuevas de cristal para evitar algún efecto de histéresis.

Para poder comparar los efectos de la temperatura se establece que tanto el gradiente positivo como negativo tengan el mismo valor, es decir, $|G + | = |G - | = 400\text{K}/\text{m}$, los gradientes se mantuvieron in-



variantes antes y durante los experimentos. Como evidencia la Figura 14, muestra las termografías para los tres casos estudiados: Gradiente positivo, Gradiente negativo y el caso isotérmico, $G = 0$. Las temperaturas establecidas fueron $35^\circ C$ en la parte caliente y $25^\circ C$ para la fría.

Las propiedades promedio del fluido pueden considerarse cercanas a las del agua [25] dado el bajo porcentaje de CMC; densidad $\rho_f = 1020 Kg/m^3$, difusividad térmica $\alpha_f = 9.40 \times 10^{-8} m^2/s$, la difusividad térmica de sólido $\alpha_s = 7.46 \times 10^{-7} m^2/s$, el ángulo de contacto $\theta = 0.5$ rad, estimado con el método sessile [25], los valores de viscosidad se obtienen de los resultados reportados por Pinho [26].

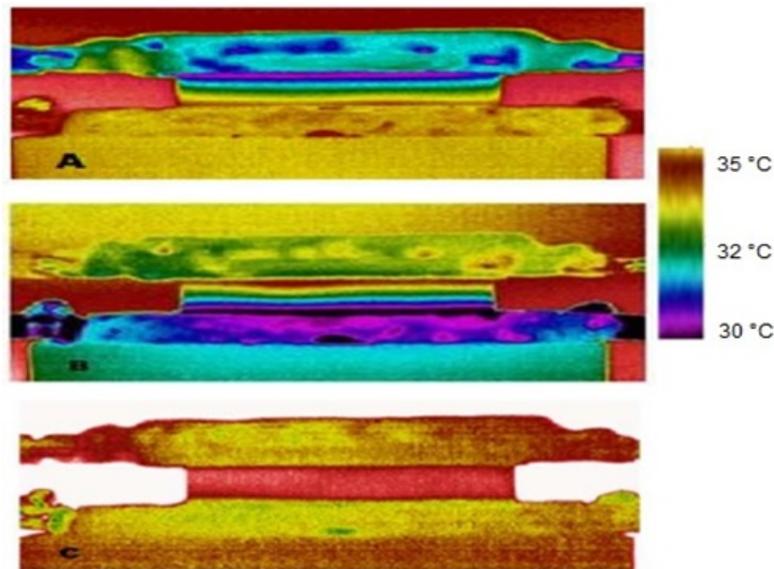


Figura 14: Se muestran las Termografías para los casos estudiados, (A) Gradiente negativo $G = -680K/m$, (B) Gradiente positivo $G = 680K/m$, y (C) Isotérmico $G = 0$ con una temperatura de $308K$

Por otro lado, es importante mencionar que el tiempo difusivo característico para establecer la temperatura en la celda es $t_{Ds} = \varepsilon_2/\alpha_s = 2$ seg y el tiempo característico para alcanzar una temperatura homogénea en el fluido que asciende por la celda es $t_{Df} = D_2/\alpha_f = 0.01s$. Por lo cual el fluido que asciende alcanza de manera inmediata la temperatura de las paredes.



Por otra parte el fluido de trabajo se prepara disolviendo 4 g de CMC por litro de agua, en un recipiente con agua se agrega el CMC en polvo y se agite hasta disolver al CMC y formar una solución homogénea. El fluido se deja reposar 24 horas para que las burbujas de aire que se forman desaparezcan totalmente como se muestra en la figura 15.



Figura 15: Preparación del fluido de trabajo.



5. Resultados.

En este Capítulo se muestran tanto los resultados experimentales como los resultados del modelo teórico para el comportamiento del frente de imbibición para un fluido Pseudoplástico en una celda de Hele Shaw bajo gradientes de temperatura.

Se muestra los resultados de las tres condiciones de temperatura y se observa los efectos de estos en el ascenso temporal capilar.

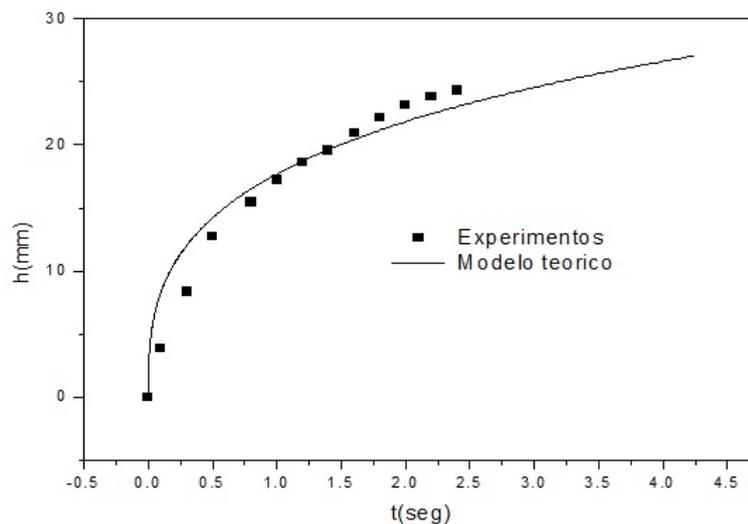


Figura 16: En la gráfica se muestra la comparación, para caso el isotérmico ($G=0$), de los resultados experimentales [•] contra los resultados teóricos [—]. Los resultados experimentales muestran buena correspondencia respecto a los resultados teóricos con un error máximo del 10 %, excepto al inicio del movimiento del fluido donde el ascenso es instantáneo.

La gráfica de la fig. 16 se realiza una comparación de los resultados experimentales contra los resultados teóricos para el caso isotérmico, con una temperatura de 308 K , en una solución de 4 % cuyo índice de comportamiento es de $n = 0.56$; se observa una buena correspondencia entre los resultados experimentales y los resultados teóricos con un error mínimo el cual puede considerarse bastante aceptable en los resultados. Sin embargo cabe mencionar que al inicio el ascenso se realiza manera súbita y el error de correspondencia es más notable.

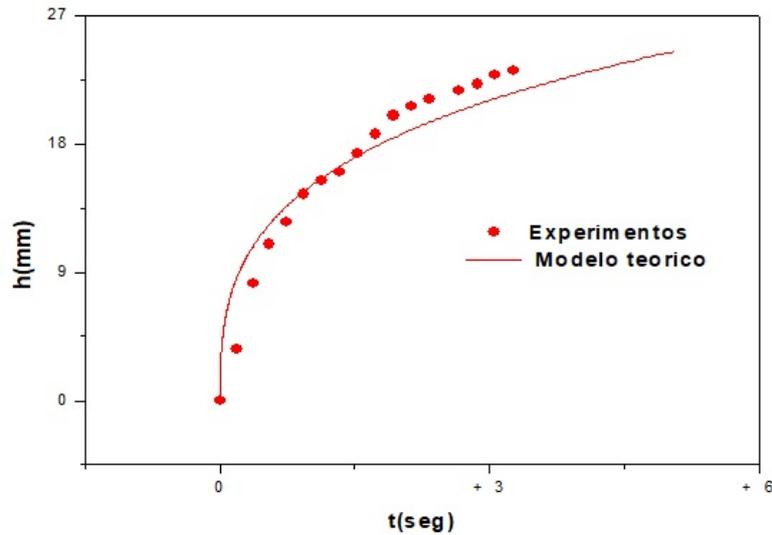


Figura 17: En la gráfica se muestra la comparación para el caso de gradiente positivo ($G > 0$), $G = 200 [K/m]$, de los resultados experimentales [●] contra los resultados teóricos [—]. Los resultados experimentales tienen pequeños saltos, pero siguen la misma tendencia y el ascenso del fluido es más lento.

En la figura 17, se presenta el caso de gradiente positivo ($G > 0$), tiene un comportamiento similar al caso isotérmico. En la figura 18 se muestra la condición de gradiente negativo, en este caso es más notable que el ascenso del fluido es mucho más lento respecto a los casos anteriores en los cuales en poco tiempo el fluido alcanza una mayor altura.

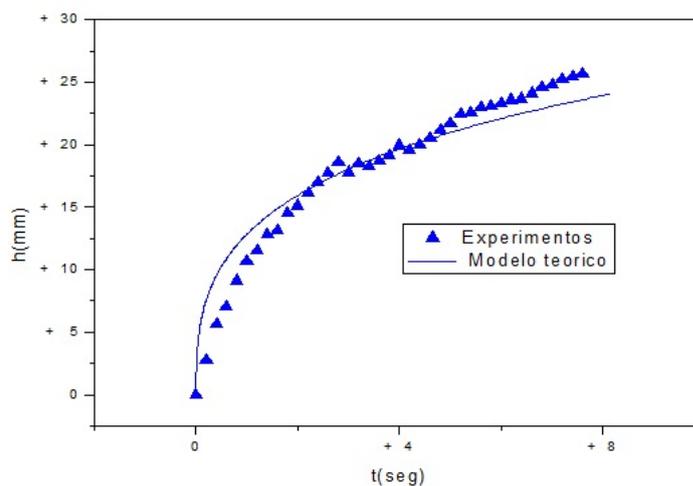


Figura 18: En la gráfica se muestra la comparación para el caso de gradiente negativo ($G < 0$), de los resultados experimentales [▲] contra los resultados teóricos [—]. Los resultados muestran buena correspondencia con un error máximo de 10% exceptuando al principio del fluido que sigue existiendo un ascenso súbito.



En la figura 19 se comparan todos los resultados tanto experimentales y teóricos de las tres condiciones de temperatura. En estas gráficas se puede observar de mejor manera los efectos de la temperatura, en el que el gradiente negativo es más lento que las otras dos.

Como se observa el caso isotérmico asciende más rápido en comparación de los casos del gradiente positivo y negativo.

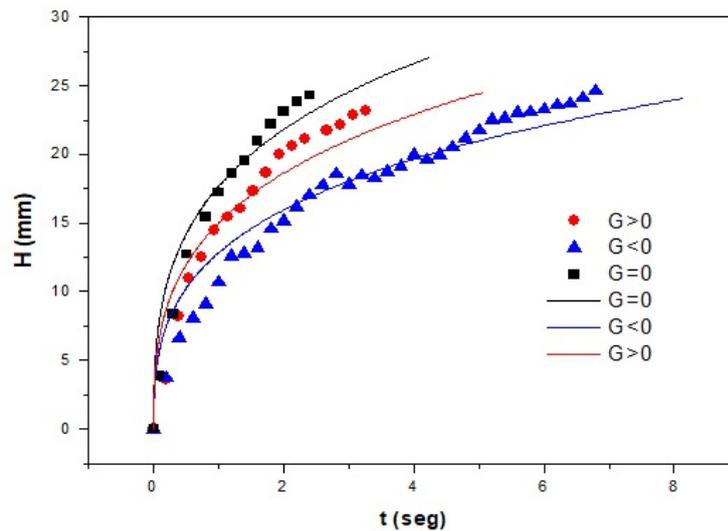


Figura 19: En la gráfica se muestra la comparación de las tres condiciones de temperatura: caso isotérmico [\bullet , $-$] color negro, gradiente positivo [\bullet , $-$] color rojo y el gradiente negativo [\blacktriangle , $-$] color azul, en una solución al 4% ($n = 0.56$).



Finalmente como se observa en la figura 20, el ascenso capilar para un fluido no newtoniano es mas lento que para el caso de un fluido newtoniano.

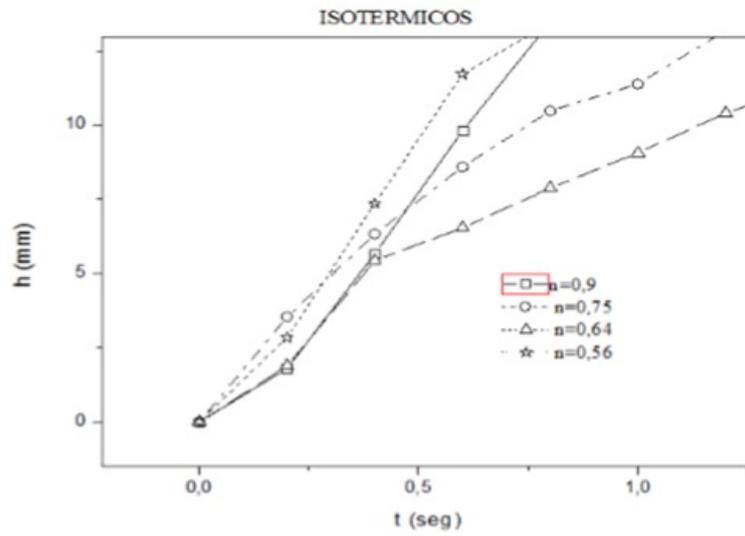


Figura 20: Detalle del inicio del ascenso capilar, para G+. El ascenso no es súbito como el caso de un fluido newtoniano.



6. Conclusiones

Los resultados que se obtuvieron tanto para la parte experimental, así como del modelo teórico muestran una buena correspondencia, para el caso isotérmico tiene una mejor tendencia una gráfica con la otra (ver fig. 16), la variación importante que tiene es en la entrada del fluido, donde para el modelo teórico el salto es instantáneo y para este caso también se resalta el tiempo (2.5 s) en el cual alcanza una altura de equilibrio, mucho más rápido a los otros dos casos.

Para los gradientes Negativo y positivo de temperaturas las tendencias son similares, pero difieren en el tiempo al que alcanzan la altura en las placas, esto es, que el fluido es mucho más lento y es más notorio para el gradiente negativo porque tarda más en alcanzar la misma altura a las otras gráficas, ver figura 18.

Con estos resultados analizados, se puede concluir que el modelo teórico es correcto porque sus resultados tienen las mismas tendencias que los resultados del experimento, esto considerando una solución del 4 % (0.56).

Finalmente es claro que los efectos de temperatura afecta notablemente la evolución temporal del frente de imbibición, es decir, la presencia de un gradiente de temperatura afecta la velocidad de penetración de fluido haciendo más lento su avance respecto al caso isotérmico.



7. Bibliografía.

- [1] Morrow, N. R.; Mason, G. *Curr. Opin. Colloid Interface Sci.* 2001, 6, 321.
- [2] Marmur, A. J. *Colloid Interface Sci.* 1989, 129, 278.
- [3] Zimmermann, M. H. *Sci. Am.* 1963, 208, 133.
- [4] de Gennes, P. G.; Brochard-Wyart, F.; Que´re´, D., “Gouttes, Bulles, Perles et Ondes”; Belin: 2002.
- [5] de Gennes, P. G. *ReV. Mod. Phys.* 1985, 57, 827.
- [6] Claudio L. A. Berli • Rau´ l Urteaga Asymmetric capillary filling of non-Newtonian power law fluids.
- [7] Cito S, Ahn Yeh-C, Pallares J, Duarte R, Chen Z, Madou M, Katakis I Visualization and measurement of capillary-driven blood flow using spectral domain optical coherence tomography. *Microfluidics and Nanofluidics*, vol.13.2, pp 227-237.
- [8] Washburn, E. W. 1921 The dynamics of capillary flow. *Phys. Rev.* 17, 273–283.
- [9] Lucas, V. R. 1918 Ueber das zeitgesetz des kapillaren aufstiegs von fl“ussigkeiten. *Kolloid Zeitschrift* 23, 15–22.
- [10] Bell, J. M. & Cameron, F. K. 1906 The flow of liquids through capillary spaces. *J. Phys. Chem.* 10, 658–674.
- [11] A. Medina, A. Pineda, and C.Treviño., “Imbibition Driven by a Temperature Gradient” ., *J. Phys. Soc. Jpn.* 72, pp. 979-982 (2003).
- [12] M.Sanchez, F. Sanchez, C. Pérez Rosales, A.Medina, C.Treviño., (2004). Imbibition in a Hele-Shaw cell under a temperature gradient. *Physics Letters A.* 324 14-21.
- [13] J.R.A. Pearson, P.M.J. Tardy., Models for flow of non-Newtonian and complex fluids through porous media *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 102 (2002) 447–473.
- [14] M. Reyssat, L. Courbin, E. Reyssat and H. S. Stone. Imbibition in geometries with axial variations, (2008), *J. Fluid Mech.*, vol. 615, pp. 335–344.



- [15] V.G. Levich *Physicochemical Hydrodynamics*, (1962), Prentice Hall, Englewood Cliffs. Nj.,
- [16] R. Chebbi., Dynamics of liquid penetration into capillary tubes., *Journal of Colloid and Interface Science* 315 (2007) 255–260.
- [17] S. Middleman. (1995), . *Modeling Axisymmetric Flows*. Academic Press, New York.
- [18] Shouxiang Ma a, Geoffrey Mason b, Norman R. Morrow., Effect of contact angle on drainage and imbibition in regular polygonal tubes., *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects* 117 (1996) 273–291.
- [19] Digilov RM (2008) Capillary rise of a non-Newtonian power law liquid: impact of the fluid rheology and dynamic contact angle. *Langmuir* 24:13663–13667
- [20]] Srivastava N, Burns MA (2006) Analysis of non-Newtonian liquids using a microfluidic capillary viscometer. *Anal Chem* 78:1690–1696
- [21]] Girardo S, Cingolani R, Pisignano D (2007) Microfluidic rheology of non-Newtonian liquids. *Anal Chem* 79:5856–5861
- [22] Md Ashker Ibney Rashid¹, Shadi Ansari¹, Prashant R. Waghmare, David Nobes., Capillary filling of Non-Newtonian fluids 0th Pacific Symposium on Flow Visualization and Image Processing Naples, Italy, 15-18 June, 2015.
- [23] M. Sánchez y A. Medina, Spontaneous imbibition in a porous medium under longitudinal temperature gradients.
- [24] Heat transfer in temperature-dependent non-Newtonian flow. Faculty of Metallurgy and Material Engineering, VSB-Technical University Ostrava, 70833 Ostrava, Czech Republic.
- [25] Paul E. Tippens “Física, Conceptos y Aplicaciones” McGraw-Hill, México, 2007.
- [26] Zitzewitz, P.W. (2004). Física. Colombia: McGraw-Hill.
- [27] E.N. Sieder, G.E. Tate, Heat transfer and pressure drop of liquids in tubes, *Ind. Eng. Chem.* 28 (1936) 1429.



[28] E.B. Christiansen, S.E. Craig, Heat transfer to pseudoplastic fluids in laminar flow, *AICHE J.* 8 (1962)



8. Apéndice A.

Tablas de resultados experimentales para fluido pseudoplástico $n=0.56$.

seg tiempo	seg	ms	mm	mm	mm	mm	mm	mm
	tiempo		h (izq)	h (centro)	h (de recha)	h (de recha)	h (de recha)	h (de recha)
0	0							0
0.16666667	0	5	20	10	0		10	2.08
0.33333333	0	10	35	26	19		26.6666667	5.54666667
0.43333333	0	13	44	40	30		38	7.904
0.6	0	18	50	44	35		43	8.944
0.8	0	24	59	62	46		55.6666667	11.5786667
1	1	0	70	74	61		68.3333333	14.2133333
1.2	1	6	77	80	66		74.3333333	15.4613333
1.4	1	12	81	86	74		80.3333333	16.7093333
1.6	1	18	89	94	82		88.3333333	18.3733333
1.8	1	24	95	103	85		94.3333333	19.6213333
2	2	0	99	107	91		99	20.592
2.2	2	6	103	115	100		106	22.048
2.4	2	12	114	117	105		112	23.296
2.6	2	18	119	121	111		117	24.336
2.8	2	24	125	125	120		123.3333333	25.6533333
3	3	0	125	125	125		125	26

Gradiente de temperatura 4% (25-35)°C evento 1 el enfoque vario a 125 mm de alto

seg tiempo	seg	ms	mm	mm	mm	mm	mm	mm
	tiempo		h (izq)	h (centro)	h (de recha)	h (de recha)	h (de recha)	h (de recha)
0.2	0	6	35	15	0		16.6666667	3.61111111
0.4	0	12	51	33	0		28	6.06666667
0.6	0	18	59	48	30		45.6666667	9.89444444
0.8	0	24	65	55	44		54.6666667	11.84444444
1	1	0	71	65	52		62.6666667	13.5777778
1.2	1	6	79	71	63		71	15.3833333
1.4	1	12	88	84	70		80.6666667	17.4777778
1.6	1	18	92	92	76		86.6666667	18.7777778
1.8	1	24	101	100	81		94	20.3866667
2	2	0	107	108	89		101.3333333	21.9555556
2.2	2	6	110	111	94		105	22.75
2.4	2	12	114	115	96		108.3333333	23.4722222
2.6	2	18	120	120	101		113.6666667	24.6277778
2.8	2	24	120	120	109		116.3333333	25.2055556
3	3	0	120	120	115		118.3333333	25.6388889
3.2	3	6	120	120	120		120	26

Gradiente de temperatura 4% (25-35)°C evento 2 el enfoque vario a 120 mm de alto

seg tiempo	seg	ms	mm	mm	mm	mm	mm	mm
	tiempo		h (izq)	h (centro)	h (de recha)	h (de recha)	h (de recha)	h (de recha)
0.2	0	6	18	11	0		9.66666667	2.09444444
0.4	0	12	38	36	24		32.6666667	7.07777778
0.6	0	18	45	47	35		42.3333333	9.17222222
0.8	0	24	50	55	44		49.6666667	10.7611111
1	1	0	57	64	49		56.6666667	12.2777778
1.2	1	6	62	72	55		63	13.65
1.4	1	12	69	81	60		70	15.1666667
1.6	1	18	72	92	63		75.6666667	16.3944444
1.8	1	24	75	99	66		80	17.3333333
2	2	0	81	104	69		84.6666667	18.3444444
2.2	2	6	88	110	71		89.6666667	19.4277778
2.4	2	12	91	120	73		94.6666667	20.5111111
3	3	0	95	120	76		97	21.0566667
3.2	3	6	100	120	79		99.6666667	21.5944444
3.4	3	12	102	120	82		101.3333333	21.9555556
3.6	3	18	105	120	86		103.6666667	22.4811111

Gradiente de temperatura 4% (25-35)°C evento 3 el enfoque vario a 120 mm de alto



Gradiente Negativo.

seg tiempo	segundos	ms	mm h lizq	mm h centro	mm h derecha	mm h prom. Pan	mm h real
0	0	0					0
0.2	0	6	24	13	0	12.3333333	2.56533333
0.4	0	12	35	31	24	30	6.24
0.6	0	18	45	40	34	39.6666667	8.25066667
0.8	0	24	51	46	45	47.3333333	9.84533333
1	1	0	57	53	53	54.3333333	11.30133333
1.2	1	6	62	60	59	60.3333333	12.54933333
1.4	1	12	65	64	63	64	13.312
1.6	1	18	69	66	70	68.3333333	14.21333333
1.8	1	24	74	71	73	72.6666667	15.11466667
2	2	0	75	75	76	75.3333333	15.66933333
2.2	2	6	80	79	81	80	16.64
2.4	2	12	81	82	85	82.6666667	17.19466667
2.6	2	18	85	82	89	85.3333333	17.74933333
2.8	2	24	88	90	93	90.3333333	18.78933333
3	3	0	90	92	96	92.6666667	19.27466667
3.2	3	6	92	96	99	95.6666667	19.89866667
3.4	3	12	95	102	102	99.6666667	20.73066667
3.6	3	18	97	104	105	102	21.216
3.8	3	24	100	106	108	104.6666667	21.77066667
4	4	0	104	110	110	108	22.464
4.2	4	6	105	114	113	110.6666667	23.01866667
4.4	4	12	107	115	116	112.6666667	23.43466667
4.6	4	18	110	119	120	116.3333333	24.19733333
4.8	4	24	112	120	122	118	24.544
5	5	0	114	124	124	120.6666667	25.09866667
5.2	5	6	115	125	125	121.6666667	25.30666667
5.4	5	12	119	125	125	123	25.584
5.6	5	18	120	125	125	123.3333333	25.65333333
5.8	5	24	122	125	125	124	25.792

Gradiente negativo 4%, la altura en pantalla es de 125mm. Evento 1

seg tiempo	segundos	ms	mm h lizq	mm h centro	mm h derecha	mm h prom. Pan	mm h real
0	0	0					0
0.2	0	6	35	22	0	19	4.11666667
0.4	0	12	52	45	33	43.3333333	9.38888889
0.6	0	18	71	65	59	65	14.08333333
0.8	0	24	85	80	74	79.6666667	17.26111111
1	1	0	96	92	86	91.3333333	19.78888889
1.2	1	6	102	100	94	98.6666667	21.37777778
1.4	1	12	108	108	100	104.6666667	22.67777778
1.6	1	18	112	115	107	111.3333333	24.12222222
1.8	1	24	120	120	114	118	25.56666667
2	2	0	120	120	119	119.6666667	25.92777778
2.2	2	6	120	120	120	120	26
2.4	2	12	81	82	85	82.6666667	17.19466667
2.6	2	18	85	82	89	85.3333333	17.74933333
2.8	2	24	88	90	93	90.3333333	18.78933333
3	3	0	90	92	96	92.6666667	19.27466667
3.2	3	6	92	96	99	95.6666667	19.89866667
3.4	3	12	95	102	102	99.6666667	20.73066667
3.6	3	18	97	104	105	102	21.216
3.8	3	24	100	106	108	104.6666667	21.77066667
4	4	0	104	110	110	108	22.464
4.2	4	6	105	114	113	110.6666667	23.01866667
4.4	4	12	107	115	116	112.6666667	23.43466667
4.6	4	18	110	119	120	116.3333333	24.19733333
4.8	4	24	112	120	122	118	24.544
5	5	0	114	124	124	120.6666667	25.09866667
5.2	5	6	115	125	125	121.6666667	25.30666667
5.4	5	12	119	125	125	123	25.584
5.6	5	18	120	125	125	123.3333333	25.65333333
5.8	5	24	122	125	125	124	25.792

GRADIENTE NEGATIVO 4%, ALTURA EN PANTALLA DE 120mm. EVENTO 2



seg tiempo	segundos	ms	mm h izq	mm h centro	mm h derecha	mm h prom. Pan	mm h real
0	0	0					0
0.2	0	6	24	13	0	12.3333333	2.56533333
0.4	0	12	35	31	24	30	6.24
0.6	0	18	45	40	34	39.6666667	8.25066667
0.8	0	24	51	46	45	47.3333333	9.84533333
1	1	0	57	53	53	54.3333333	11.3013333
1.2	1	6	62	60	59	60.3333333	12.5493333
1.4	1	12	65	64	63	64	13.312
1.6	1	18	69	66	70	68.3333333	14.2133333
1.8	1	24	74	71	73	72.6666667	15.1146667
2	2	0	75	75	76	75.3333333	15.6693333
2.2	2	6	80	79	81	80	16.64
2.4	2	12	81	82	85	82.6666667	17.1946667
2.6	2	18	85	82	89	85.3333333	17.7493333
2.8	2	24	88	90	93	90.3333333	18.7893333
3	3	0	90	92	96	92.6666667	19.2746667
3.2	3	6	92	96	99	95.6666667	19.8986667
3.4	3	12	95	102	102	99.6666667	20.7306667
3.6	3	18	97	104	105	102	21.216
3.8	3	24	100	106	108	104.6666667	21.7706667
4	4	0	104	110	110	108	22.464
4.2	4	6	105	114	113	110.6666667	23.0186667
4.4	4	12	107	115	116	112.6666667	23.4346667
4.6	4	18	110	119	120	116.3333333	24.1973333
4.8	4	24	112	120	122	118	24.544
5	5	0	114	124	124	120.6666667	25.0986667
5.2	5	6	115	125	125	121.6666667	25.3066667
5.4	5	12	119	125	125	123	25.584
5.6	5	18	120	125	125	123.3333333	25.6533333
5.8	5	24	122	125	125	124	25.792

Gradiente negativo 4%, la altura en pantalla es de 125mm. Evento 3



Isotérmico.

seg	ms	mm	mm	mm	mm	mm	mm
tiempo		h (izq)	h (centro)	h (derecha)	hprom. Pantalla	hprom. Real	
0	29	29	24	32	28.33333333	6.138888889	Isotérmico 4% 25°C evento 1
1	7	41	33	35	36.33333333	7.872222222	
1	13	46	36	37	39.66666667	8.594444444	
2	4	59	53	48	53.33333333	11.55555556	
2	13	66	59	55	60	13	
4	14	85	84	83	84	18.2	
4	26	91	89	88	89.33333333	19.35555556	
5	7	103	90	96	96.33333333	20.87222222	
5	33	105	103	99	102.33333333	22.17222222	
6	11	108	106	105	106.33333333	23.03888889	
6	28	108	108	106	107.33333333	23.25555556	
7	14	112	113	110	111.66666667	24.19444444	
8	13	118	117	110	115	24.91666667	
9	0	120	120	115	118.33333333	25.63888889	

seg	ms	mm	mm	mm	mm	mm	mm
tiempo		h (izq)	h (centro)	h (derecha)	hprom. Pantalla	hprom. Real	
0	12	10	10	9	9.666666667	2.185507246	Isotérmico 4% 25°C evento 2
0	20	22	22	18	20.66666667	4.672463768	
0	25	27	27	25	26.33333333	5.953623188	
1	3	34	33	32	33	7.460899565	
1	9	39	28	34	33.66666667	7.611594203	
1	16	43	43	39	41.66666667	9.420289855	
1	24	46	45	42	44.33333333	10.02318841	
2	1	48	46	45	46.33333333	10.47536232	
3	11	52	54	49	51.66666667	11.68115942	
3	23	56	57	54	55.66666667	12.58550725	
4	2	58	60	56	58	13.11304348	
4	9	58	61	59	59.33333333	13.41448275	
4	20	61	62	62	61.66666667	13.94202899	
5	10	67	72	67	68.66666667	15.52463768	
5	25	72	80	70	74	16.73043478	
6	27	78	92	79	83	18.76521739	
8	8	89	105	85	93	21.02608696	
8	24	92	108	88	96	21.70434783	
9	24	100	115	91	102	23.06086957	

seg	ms	mm	mm	mm	mm	mm	mm
tiempo		h (izq)	h (centro)	h (derecha)	hprom. Pantalla	hprom. Real	
1	2	25	24	22	23.66666667	5.127777778	Isotérmico 4% 25°C evento 3 el enfoque vario a 120 mm de alto
1	11	34	30	29	31	6.716666667	
1	21	41	38	35	38	8.233333333	
2	0	46	44	40	43.33333333	9.388888889	
2	8	50	49	43	47.33333333	10.25555556	
2	18	55	54	46	51.66666667	11.19444444	
3	2	63	59	52	58	12.56666667	
3	13	67	61	57	61.66666667	13.36111111	
3	25	71	65	63	66.33333333	14.37222222	
4	14	77	72	67	72	15.6	
4	25	81	75	74	76.66666667	16.61111111	
5	14	86	80	77	81	17.55	
5	26	89	86	79	84.66666667	18.34444444	
6	8	93	90	82	88.33333333	19.13888889	
6	26	96	96	90	94	20.36666667	
8	10	106	107	109	107.33333333	23.25555556	
8	26	110	109	109	109.33333333	23.68888889	
9	21	115	115	110	113.33333333	24.55555556	
10	16	120	120	110	116.66666667	25.27777778	



9. Apéndice B.

Programa usado para la solución numérica del modelo.

```
subroutine iniciales
use var
implicit none

      Y(1)    = 0.d0
      tao(1)  = 0.d0
      X(1)    = 0.d0
      taod(1) = 0.d0
      taocp(1) = 0.d0
      taocn(1) = 0.d0
      taodp(1) = 0.d0
      taodn(1) = 0.d0
end subroutine iniciales
```

Entrada:

```
subroutine input
use var
implicit none

n=0.56d0
H = 2.5d-2 !Altura
k1= 1.0d-3 !Radio
R0= 0.3d-3 !Radio
roc= 1.0d3  !densidad
g = 9.81d0 !Gravedad
sigma= 70d-3 !Tensión superficial
sigmaP=70d-3 ! evaluada a la temprartura fria gradiente positivo
sigmaN=40d-3 !evaluada a la temperatura caliente gradiente negativo
conver = 1.8d-5
cose=.94d0 !0.94d0
mun=0.717d0 ! Se usa para el gradinte positivp, por lo que se evalua ala temperatura mas fría
mup=0.54588d0 !sE USA PARA EL GRADIENTE NEGATIVO por lo que se valua a la temperatura ams caliente
Tinf=30.d0 + 273.15d0
Tsup=35.d0 + 273.15d0
dsigma= -3.428d-4
DE=0.1d-3
TV= 60.0d0
k0=0.44d0
!jms+d4?x
end subroutine input
```



Malla.

```
subroutine malla
use var
implicit none
! ***** CONO CONVERGENTE *****
do i=1,imax,1

Y(i) = ( (i-1.d0)/(imax-1.d0) )**2.d0

! ((1.d0/B0**0.5d0)-a)*(i-1.d0)/(imax)

end do
! ***** CONO DIVERGENTE *****
do i=1,imax,1

X(i) = ( (i-1.d0)/(imax-1.d0) )**1.0d0

!
! (((i-1.d0)/(imax-1.d0))/1.d0)**3.d0
! (4100.d0-i)*( (i-1.d0)/(imax-1.d0)**2.d0 )
end do

end subroutine malla
```

Programa.

```
call input

alfa = abs((R1-R0) /H)

a = R0/(H*alfa)

teta=0.4d0

B0= (roo*g*H*H*alfa)/(3.d0*sigma*cos(teta))
ac= R1/(H*alfa)
c1=(ac*ac/4)
C2=1.d0/(27.d0*B0**3.d0)
GT=abs((Tsup-Tinf)/H)

M=2*3.141516d0*sqrt(1.d0+((1.d0/alfa)**2.d0))!M es la pendiente del cono
|
tkn=(8.d0*M*mup*H)/(alfa*sigma*teta)

!***** PLACA *****

call iniciales
alfaP=(2.d0*n*sigmaP*cose*GT)/(roo*g*DE*TV)
alfaN=(2.d0*n*sigmaN*cose*GT)/(roo*g*DE*TV)
BP=(dsigma*GT*2.d0*cose)/(roo*g*DE)
HeqP=((2.d0*sigma*cose)/(roo*g*DE))
HeqN=((2.d0*sigmaP*cose)/(roo*g*DE))
HeqN=((2.d0*sigmaN*cose)/(roo*g*DE))

tc1P=((TV*k0)/(2.d0*n*sigmaP*cose*GT))
tc2P= ((2.d0*n*HeqP)+2.d0*HeqP)/(DE*n)**n
tcP=(tc1P*tc2P)**(1/n)
```



```
tc1N=((TV*k0)/(2.d0*n*sigmaN*cose*GT))
tc2N= (((2.d0*n*HeqN)+2.d0*HeqN)/(DE*n) )**n
tcN=(tc1N*tc2N)**(1/n)

T1= ((K0)**(1.d0/n))*(Heq)**((n+1.d0)/n)
T2= (1.d0/(2.d0*sigma*cose) )**(1.d0/n)
Tc3= ((2.d0*n+2.d0)/(n*DE))
TCI= T1*T2*Tc3 *(T1/T2)**(n)

!***** TERMINA PLACA *****

!pause
!write(*,*) a,B0, alfa,ac,M,tkn,tkp
!pause

call malla

print *,'INICIA DIVERGENTE'
pause
!* ***** PARA EL CONO DIVERGENTE *****
!*** ISOTERMICO
print *,'+----- ISOTERMICO-----+'
write(*,*) Heq
write(*,*) tcP
write(*,*) tcN
write(*,*) TCI
        pause
open(unit=6,file='sal_Divergente.dat')

do i=2,imax,1
ac es la a pero para el caso divergente
dc= ac + X(i)
ec= X(i)- X(i-1)

        if(2*a<x(i)) close(unit=6)
        if(2*a<x(i))exit

taod(i)= ( ec/ ((1.d0-X(i))/X(i))**(1/n) )+ taod(i-1)!***** PLACA ISOTERMICA *****
taoi(i)= taod(i)*TCI
! ( (X(i)*dc*ec) / ( (ac*dc)-(B0*ac*((dc*dc*dc)-(ac*ac*ac))) )+ taod(i-1)

        if(taod(i)<taod(i-1))close (unit=6)
        if(taod(i)<taod(i-1))exit

        Xr(i)=x(i)*Heq
        write(6,*) taoi(i),Xr(i)
        write(*,*) taoi(i),Xr(i),dc

end do

close (unit=6)
```



```
print *, 'Inicia Divergente Positivo'
PAUSE

open(unit=8, file='sal_Divergente_positivo.dat')

do i=2, imax, 1
!   ac es la a pero para el caso divergente
    dc= ac + X(i)
    ec= X(i)-X(i-1)

    if(a<y(i)) close(unit=8)
    if(a<y(i)) exit

    T=(Tinf-Tsup)*x(i)+Tsup
    dmu=-7.6458d11*exp(-0.1*T)  !-0.96636d0+ (0.006387d0*T)-(1.d-5)*T*T
    BB=(1.d0/mun)*dmu*GT*H
    AA=(1.d0/sigmaP)*dsigma*GT*H

    taodp(i)= ( ec/ ( (x(i)-(1.d0+BP*X(i))) / ( (exp(-alfaP*x(i)))-1) ) ) ** (1/n) + taodp(i-1))
    taop(i)=taodp(i)*tcP

    if(taodp(i)<taodp(i-1))close (unit=8)
    if(taodp(i)<taodp(i-1))exit

    Xr(i)=x(i)*HeqP
    write(8,*) taop(i),Xr(i)
    write(*,*) taop(i),Xr(i)

end do

close (unit=8)

print *, 'Inicia Divergente Negativo'
pause

open(unit=4, file='sal_Divergente_negativo.dat')

do i=2, imax, 1
!   ac es la a pero para el caso divergente
    dc= ac + X(i)
    ec= X(i)-X(i-1)

    if(a<y(i)) close(unit=8)
    if(a<y(i)) exit

    T=(Tinf-Tsup)*x(i)+Tsup
    dmu=-7.6458d11*exp(-0.1*T)  !-0.96636d0+ (0.006387d0*T)-(1.d-5)*T*T
    BB=(1.d0/mup)*dmu*GT*H
    AA=(1.d0/sigmaN)*dsigma*GT*H

    taodn(i)= ( ec/(( (1.d0-BP*X(i))-x(i)) / ((exp(alfaN*x(i)))-1) ) ) ** (1/n) + taodn(i-1))
    taon(i)=taodn(i)*tcN

    xr(i)=x(i)*HeqN
    if(taodn(i)<taodn(i-1))close (unit=8)
    if(taodn(i)<taodn(i-1))exit

    write(4,*) taon(i),Xr(i)
    write(*,*) taon(i),Xr(i)

end do

close (unit=4)
```



```
!***** CONO DIVERGENTE *****
  open(unit=6,file='sal_Divergente.dat')

  do i=1,imax,1

    write(6,*) taod(i),X(i)
    !write(*,*) tao(i),Y(i)

! if(taoc(i)<taoc(i-1))exit

    end do
  close (unit=6)

!***** CONO DIVERGENTE POSITIVO *****
  open(unit=8,file='sal_Divergente_positivo.dat')

  do i=1,imax,1

    write(8,*) taodp(i),X(i)
    !write(*,*) tao(i),Y(i)

! if(taoc(i)<taoc(i-1))exit

    end do

  close (unit=8)

!***** CONO DIVERGENTE NEGATIVO *****
  open(unit=4,file='sal_Divergente_negativo.dat')

  do i=1,imax,1

    write(4,*) taodn(i),X(i)
    !write(*,*) tao(i),Y(i)

! if(taoc(i)<taoc(i-1))exit

    end do

  close (unit=4)
```