UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Grietas de Hausdorff y dónde encontrarlas

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

Gabriel Cachoa Ocampo

TUTOR

II

Dr. David Meza Alcántara

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD.MX., 2019

Agradecimientos

Quiero agradecer al Dr. David Meza Alcántara por toda su confianza, por toda su paciencia, por todo su apoyo y por todo su tiempo y trabajo que hicieron posible la realización de este trabajo. Gracias también a mis sinodales: el Dr. Fernando Hernández Hernández, la Dra. Gabriela Campero Arena, el M. en C. Fernando Nuñez Rosales y el Dr. Alejandro Dario Rojas Sánchez por su muy cuidadosa lectura, sus muy pertinentes comentarios, su paciencia y su apoyo.
Investigación realizada gracias al Programa UNAM-DGAPA-PAPIIT IA106017 - “Estructuras sobre conjuntos numerables”, coordinado por el Dr. David Meza Alcántara.

Grietas de Hausdorff y dónde encontrarlas

por

Gabriel Cachoa Ocampo

Resumen

El presente trabajo consiste en una exposición de resultados de Hausdorff, Mazur y Todorčevič sobre grietas en álgebras de la forma $\mathscr{P}(\omega)/\mathscr{I}$ donde $\mathscr{I}$ es un ideal sobre un conjunto numerable con algún grado de definibilidad. Especificamente las grietas de Hausdroff en $\mathscr{P}(\omega)/fin$, las gritas de Hausdorff en $\mathscr{P}(\omega)/\mathscr{I}$ con $\mathscr{I}$ ideal F_σ (Mazur) y cuando $\mathscr{I}$ es un ideal analítico (Todorčevič).

Grietas de Hausdorff y dónde encontrarlas

by

Gabriel Cachoa Ocampo

Abstract

This paper displays the results of Hausdorff, Mazur and Todorčevič on gaps in algebras $\mathscr{P}(\omega)/\mathscr{I}$ when $\mathscr{I}$ is an ideal with a degree of definability. Particularly, Hausdorff gaps in $\mathscr{P}(\omega)/fin$ (Hausdorff) and Hausdorff gaps in $\mathscr{P}(\omega)/\mathscr{I}$ when $\mathscr{I}$ is a F_σ ideal (Mazur) and when $\mathscr{I}$ is an analytic ideal (Todorčevič).

Índice general

Introducción

0.1. Introducción

Hay un hecho que resulta fundamental, en el que un estudiante de matemáticas es introducido desde un primer curso de cálculo: la completez de la recta real. El conjunto de números reales posee propiedades estructuralmente muy ricas. Como estructura algebráica es un campo, como espacio topológico es un espacio métrico y como orden es un orden lineal. Más aún, la topología inducida por su métrica y la topología inducida por su orden coinciden. La característica fundamental del conjunto de números reales es su completez. Como orden y como espacio métrico no tiene hoyos. De hecho, es el único orden salvo isomorfismos que cumple ser lineal, separable y completo.

La completez, y en especial la completez de $\mathbb{R}$, se puede expresar de muchas formas. Una de ellas es la siguiente: Sean $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $B = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones tales que A es creciente, B es decreciente y que cualquier elemento de A es menor que cualquier elemento de B. Entonces existe un elemento c en $\mathbb{R}$ tal que es mayor que todos los elementos de A y menor que todos los elementos B.

Ésta última caracterización nos permite generalizar la completez para órdenes. En lugar de tomar sucesiones de longitud ω podemos utilizar el número transfinito ω_1. El número ω_1 es el primer buen orden no numerable, es decir que no es equipotente a $\mathbb{N}$.

A una pareja de ω_1-sucesiones $A = (a_\xi)_{\xi\in\omega_1}$ creciente, $B = (b_\xi)_{\xi\in\omega_1}$ decreciente, tal que todos

los elementos de A estén por abajo de todos los elementos de B y tal que no hay ningún elemento del orden que se quede en medio la vamos a llamar **grieta de Hausdorff**. En $\mathbb{R}$ no hay grietas de Hausdorff pues los elementos consecutivos de una de las sucesiones determinan una familia de intervalos abiertos y ajenos, $(a_\xi, a_{\xi+1})$ con $\xi \in \omega_1$, y en la recta real no puede haber más que una cantidad numerable de intervalos abiertos ajenos. Se pueden construir órdenes triviales que sí poseen grietas de Hausdorff. A saber, el orden de ω_1 concatenado con el orden inverso de ω_1 (denotado ω_1^*); en este caso, el orden en su totalidad es la grieta de Hausdorff.
Un ejemplo de orden no trivial que sí posee una grieta de Hausdorff es $\mathscr{P}(\omega)/fin$. El orden está definido por el cociente de $\mathscr{P}(\omega)$ con la relación de equivalencia de la **casi-igualdad** denotada por $=_*$. Decimos que $a =_* b$ si y sólo si $a \Delta b \in fin$. El orden sobre $\mathscr{P}(\omega)/fin$ es la **casi igualdad** denotada por $\subseteq_*$. Decimos que $a \subseteq_* b$ si y sólo si $a \setminus b \in fin$.
$\mathscr{P}(\omega)/fin$ es un álgebra booleana. Es decir, es un órden parcial en el que para cualesquiera dos elementos existen un ínfimo y un supremo que se distribuyen el uno al otro, en el que cada elemento tiene un complemento y en el que existen un mínimo y máximo globales. En este orden existen tantos elementos incomparables como números reales, como testigo podemos tomar a cualquier familia casi ajena maximal. No pueden existir sucesiones numerables monótonas crecientes que tengan como supremo al máximo global y, de igual manera, no existen sucesiones numerables decrecientes que tengan como ínfimo al mínimo global. Este orden cumple que para cualquier par de sucesiones numerables tal que una es creciente, la otra es decreciente y tal que todos los elementos de la sucesión creciente están por abajo de todos los elementos de la sucesión decreciente, existe un elemento que se queda en medio de las dos sin embargo sí posee una grieta de Hausdorff.
Este asombroso hecho fue descubierto por Felix Hausdorff ([4],[5]). Una pregunta muy natural a hacernos es: ¿en qué órdenes parciales, específicamente álgebras booleanas, podemos encontrar una grieta de Hausdorff? De hecho, matemáticos como Krystoff Mazur ([8]), Stevo Todorčevič ([9], [10]) e Ilijas Farah ([2]) se han planteado esta pregunta y han dado respuestas

bastante amplias en este terreno. En particular, han descubierto en qué álgebras booleanas del tipo de $\mathscr{P}(\omega)/\mathscr{I}$ podemos encontrar grietas de Hausdorff. Para entender sus descubrimientos debemos ponernos en el contexto de la complejidad topológica de subconjuntos de $\mathscr{P}(\omega)$.

El conjunto fin de todos los subconjuntos finitos de ω cumple con tener al conjunto vacío y no tener a ω, con estar cerrado bajo uniones finitas y con estar cerrado bajo subconjuntos. Cuando una familia de conjuntos de ω cumple esto lo llamamos **ideal**. La razón por la cual la casi-igualdad sí define una relación de equivalencia es que fin es un ideal. Análogamente a como definimos la casi-igualdad y la casi-contención, para cualquier otro ideal $\mathscr{I}$ se puede definir la $\mathscr{I}$-contención y la $\mathscr{I}$-igualdad. Un conjunto está $\mathscr{I}$-contenido en otro si está contenido salvo por un elemento de $\mathscr{I}$ y un conjunto es $\mathscr{I}$-igual a otro si su diferencia simétrica es un elemento de $\mathscr{I}$. Así, podemos definir el álgebra $\mathscr{P}(\omega)/\mathscr{I}$.

A los ideales como subconjuntos de $\mathscr{P}(\omega)$ los podemos clasificar de acuerdo a su complejidad topológica. Al conjunto $\mathscr{P}(\omega)$ lo podemos reconocer como el producto topológico $\{0,1\}^\omega$ y calcar la topología del espacio Cantor en $\mathscr{P}(\omega)$. Esto nos permite clasificar a las familias de conjuntos de naturales a través de propiedades topológicas: ser abierto, cerrado, magro, medible, denso, etc.

K. Mazur demostró que si $\mathscr{I}$ es un ideal F_σ entonces $\mathscr{P}(\omega)/\mathscr{I}$ tiene una grieta de Hasudorff.

El objetivo de esta tesis es demostrar el resultado de S. Todorčevič: si $\mathscr{I}$ es un ideal analítico entonces $\mathscr{P}(\omega)/\mathscr{I}$ tiene una grieta de Hausdorff.

0.2. Preliminares

Este trabajo de tesis está enmarcado en la teoría de conjuntos estándar de Zermelo-Fraenkel con axioma de elección. Sobre los aspectos de teoría de conjuntos seguimos la notación del libro de Jech [6], sobre los aspectos de topología general seguimos el libro de Tamariz y Casarrubias [1]. Un número ordinal α es el conjunto de números ordinales menores que α. Los números naturales son los ordinales finitos. Un número cardinal es un número ordinal que no es equipotente a ningún número ordinal menor. Las expresiones: $X^Y, X^{<\kappa}, [X]^{<\kappa}, [X]^\kappa$ significan respectivamente: el conjunto de funciones con dominio en Y y codominio en X, el conjunto de sucesiones de elementos de X de longitud estrictamente menor que κ, el conjunto de subconjuntos de X de tamaño estrictamente menor a κ, y el conjunto de subconjuntos de X de tamaño exactamente κ, donde κ es un número cardinal. Dada una función f y un conjunto A, subconjunto del dominio de f, $f[A]$ es la imagen de A bajo f en símbolos: $f[A] := \{f(x) \mid x \in A\}$. Sea $X \times Y$ un producto cartesiano de dos conjuntos. Vamos a convenir la siguiente notación: si $A \subseteq X \times Y$, $\pi_X[A] := \{x \in X \mid \exists y \in Y (x,y) \in A\}$ y $\pi_Y[A] := \{y \in Y \mid \exists x \in X (x,y) \in A\}$ que llamaremos proyecciones sobre X y sobre Y respectivamente. También a los conjuntos: $(A)_x = \{y \in Y \mid (x,y) \in A\}$ y $(A)_y = \{x \in X \mid (x,y) \in A\}$ con $x \in X$ y $y \in Y$. La rebanada sobre x de A y sobre y respectivamente.

Para una familia de conjuntos $\{X_j\}_{j\in J}$ podemos definir su producto cartesiano generalizado $\Pi_{j\in J} X_j$ como la familia de funciones $f : J \to \bigcup_{j\in J} X_j$ tal que $f(j) \in X_j$. Para cada $j \in J$ podemos definir una función $\pi_j : \Pi_{j\in J} X_j \to X_j$ tal que $\pi_j(f) = f(j)$. Es claro que $\pi_j^{-1}[\{y\}]$ es el conjunto de todas las funciones en el producto que cumplen que su j-ésima coordenada vale y. Si los conjuntos X_j son espacios topológicos, podemos dotar a $\Pi_{j\in J} X_j$ con la topología cuyos abiertos subbásicos sean de la forma: $\pi_j^{-1}[U]$ con $j \in J$ y $U \subseteq X_j$ abierto.

Sobre aspectos de teoría descriptiva de conjuntos usaremos notación y resultados del libro de Kechris [7]. Para cualquier espacio topológico X, la σ-álgebra de Borel de X es la $\subseteq$-mínima

σ-álgebra sobre X que contiene a todos los subconjuntos abiertos de X y la denotaremos por $\mathbb{B}(X)$.

En un espacio topológico diremos que un conjunto es G_δ si es la interescción numerable de conjuntos abiertos y diremos que es F_σ si es la unión numerable de conjuntos cerrados. Ya que el complemento de un conjunto abierto es un conjunto cerrado, el complemento de un conjunto G_δ es F_σ y viceversa. Si clasificamos por su "complejidad topológica" a los subconjuntos de un espacio topológico, los más sencillos sería los conjuntos abiertos y cerrados. En $\mathbb{R}$ son los intervalos de la forma: $[a,b]$, (a,b), $[a,\infty)$, (a,∞), etc. Todos los abiertos son G_δ, y todos los cerrados son F_σ. Por ejemplo en $\mathbb{R}$ los conjuntos $(a,b]$ y $[a,b)$ son F_σ y G_δ pero no son ni abiertos ni cerrados. Otro ejemplo son los números racionales ya que es un conjunto F_σ que no es G_δ, la prueba se basa en el Teorema de Categoría de Baire.

A un subconjunto de un espacio topológico lo llamaremos *nunca denso* si el interior de su cerradura es vacío y lo llamaremos *magro* si es la unión numerable de conjuntos nunca densos. También, diremos que un subconjunto de un espacio topológico tiene la *propiedad de Baire* si para algún conjunto abierto, la diferencia simétrica con ese abierto resulte un conjunto magro.

Cuando hablemos de la topología del conjunto de Cantor nos estaremos refiriendo al producto topológico:

$$\mathscr{C} = \Pi_{i\in\omega}\{0,1\} = \{f : \omega \to \{0,1\}\} = 2^\omega.$$

En el que cada factor está dotado con la topología discreta y donde los abiertos subbásicos de la topología están dados por las preimágenes de las proyecciones:

$$\pi_n^{-1}[\{j\}] := \{f \in \mathscr{C} \mid f(n) = j\},$$

con $n \in \omega$ y $j = 0,1$.

Por el teorema de Tychonoff, $\mathscr{C}$ es un espacio topológico compacto. La función: $d(f,g) = \frac{1}{n+1}$

con $n = min\{m \mid f(m) \neq g(m)\}$ es una métrica completa que induce la topología antes descrita, los conjuntos $\pi_n^{-1}[\{j\}]$ son abiertos y cerrados por lo que $\mathscr{C}$ es un espacio cero dimensional y por su puesto ningún punto $f \in \mathscr{C}$ es aislado, para cualquier $f \in \mathscr{C}$ la sucesión $(f(0), 0, 0, ...)$, $(f(0), f(1), 0, 0, ...)$, $(f(0), f(1), f(2), ...)$, ... converge a f. De hecho, se puede demostrar que (salvo homeomorfismos) el conjunto de Cantor es el único espacio compacto, completamente metrizable, cero dimensional y perfecto (célebre teorema de Brower [7]).

A cada subconjunto de números naturales lo podemos identificar con un punto del conjunto de Cantor a través de su función característica. Y cada punto en el conjunto de Cantor determina un subconjunto de naturales como el conjunto de todos los naturales en los que la función vale 1. A través de esta biyección podemos dotar a $\mathscr{P}(\omega) = \{A \mid A \subseteq \omega\}$ con la topología del conjunto de Cantor.

Nosotros pensaremos en el conjunto de Cantor principalmente de dos formas. Como el conjunto 2^ω en el que denotaremos a los abiertos básicos como $\langle f \rangle = \{g \in 2^{<\omega} \mid f \subseteq g\}$ donde $f \in 2^{<\omega}$ o como el conjunto $\mathscr{P}(\omega)$ donde a los abiertos básicos los denotaremos como $\langle x \rangle := \{y \subseteq \omega \mid x \cap [0, \text{máx y } + 1) = x\}$ donde $x \in fin(\omega)$, a estos conjuntos los llamaremos conos. Si $x \subseteq \omega$ es infinito denotaremos el sistema de vecindades $\langle x \cap [0, ...n) \rangle$ como $\langle x \mid n \rangle$.

A una familia $\mathscr{I}$ de subconjuntos de numéros naturales se le llama *ideal* si cumple con tres condiciones:

1. $\emptyset \in \mathscr{I}$, $\omega \notin \mathscr{I}$
2. Si $a, b \in \mathscr{I}$ entonces $a \cup b \in \mathscr{I}$.
3. Si $a \in \mathscr{I}$ y $b \subseteq a$ entonces $b \in \mathscr{I}$.

Intuitivamente, un ideal es una familia de conjuntos pequeños. La noción dual de ideal es la de *filtro*. Un filtro es una familia $\mathscr{F}$ de subconjuntos de números naturales que cumple:

1. $\emptyset \notin \mathscr{F}$, $\omega \in \mathscr{F}$

2. Si $a,b \in \mathscr{F}$ entonces $a \cap b \in \mathscr{F}$.

3. Si $a \in \mathscr{F}$ y $b \supseteq a$ entonces $b \in \mathscr{F}$.

Intuitivamente un filtro es una familia de conjuntos grandes. Si $\mathscr{I}$ es un ideal entonces $\mathscr{I}^1 := \{x^c \mid x \in \mathscr{I}\}$ es un filtro y dualmente si $\mathscr{F}$ es un filtro, $\mathscr{F}^0 = \{x^c \mid x \in \mathscr{F}\}$ es un ideal.

En este trabajo vamos a pensar que todos nuestros ideales y filtros *no son principales*, es decir que los filtros cumplen con tener a todos los subconjuntos de complemento finito ($\mathscr{F} \supseteq cofin$) y todos los ideales con tener a todos los finitos ($\mathscr{I} \supseteq fin$).

Para un ideal $\mathscr{I}$, podemos definir una relación reflexiva y transitiva: $a,b \subseteq \omega$, $a \subseteq_{\mathscr{I}} b$ si y sólo si $a \setminus b \in \mathscr{I}$. Que se lee a está *$\mathscr{I}$-casi contenido* en b, también utilizaremos $<_{\mathscr{I}}$ para denotar esta misma relación. Diremos que dos subconjuntos de naturales son *$\mathscr{I}$-casi iguales* si están mutuamente $\mathscr{I}$-casi contenidos, es decir: $a =_{\mathscr{I}} b$ si y sólo si $a \subseteq_{\mathscr{I}} b$ y $b \subseteq_{\mathscr{I}} a$. O equivalentemente que $a \bigtriangleup b \in \mathscr{I}$. También vamos a decir que dos conjuntos de naturales son *$\mathscr{I}$-ortogonales* si $a \cap b =_{\mathscr{I}} \emptyset$, esto lo denotaremos por $a \perp_{\mathscr{I}} b$. La relación $=_{\mathscr{I}}$ es de equivalencia sobre $\mathscr{P}(\omega)$. El cociente, es decir, la familia de todas las clases de equivalencia de la relación $=_{\mathscr{I}}$ se denota por $\mathscr{P}(\omega)/\mathscr{I}$. En este conjunto, la relación $\subseteq_{\mathscr{I}}$ sí define un orden antisimétrico. De hecho, estas estructuras son álgebras booleanas.

Un álgebra booleana es un orden parcial en el que cualesquiera dos elementos tienen ínfimo y supremo, en el que hay un máximo y un mínimo global y en el que cada elemento tiene un complemento. El ejemplo canónico de álgebra booleana es la potencia de los números naturales (o cualquier conjunto numerable) ordenada parcialmente por la contención. El supremo de dos conjuntos es su unión, el ínfimo entre dos conjuntos es su intersección, el completo de un conjunto es su complemento conjuntista y el máximo y mínimo globales son ω y $\emptyset$ respectivamente. Para las álgebras cociente, el supremo de dos clases de equivalencia es la clase de equivalencia de la unión de representantes, de la misma forma el ínfimo entre dos clases es la clase de la intersección de dos representantes y el complemento de una clase es la clase del complemento de algún representante. Estas operaciones están bien definidas porque $=_{\mathscr{I}}$ es de equivalencia.

El caso particular en el que el ideal sea el formado por todos los subconjuntos finitos de números naturales, al ideal lo denotaremos por fin y diremos únicamente *casi iguales*, *casi contención* y *ortogonales* que denotaremos respectivamente por $\subseteq_*$, $=_*$ y $\perp$.

Vamos a decir que dos familias A, B de subconjuntos de números naturales son ortogonales (respectivamente $\mathscr{I}$-ortogonales) si cumplen que para todos $a \in A$ y $b \in B$: $a \perp b$ ($A \perp_{\mathscr{I}} B$), hecho que denotaremos como $A \perp B$ ($A \perp_{\mathscr{I}} B$). Un conjunto c de números naturales *separa* a las familias A y B si c casi contiene a todos los elementos de A y es ortogonal con todos los elementos de B. Es importante observar que si c separa a las familias A y B entonces $\omega \setminus c = c^c$ también separa a las familias A y B pero en el sentido en el que c^c casi contiene a todos los elementos de B y es ortogonal con todos los elementos de B. Cuando utilicemos a un conjunto para separar a un par de familias ortogonales especificaremos si casi contiene a todos los elementos de A y es ortogonal con todos los elementos de B o si casi contiene a todos los elementos de B y es ortogonal a todos los elementos de A.

Diremos que dos familias $\langle A, B\rangle$ de subconjuntos números naturales son una *grieta* si son ortogonales y no existe ningún $c \in \mathscr{P}(\omega)$ que los separe.

Una grieta $\langle A, B\rangle$ tiene tipo de orden (λ, μ) si $(A, \subseteq_*)$ tiene tipo de orden λ y $(B, \subseteq_*)$ tiene tipo de orden μ^*, donde μ^* es el orden inverso de μ. Una *grieta de Hausdorff* es una grieta de tipo (ω_1, ω_1).

El álgebra $\mathscr{P}(\omega)/fin$ es isomorfa al álgebra $\mathscr{P}(X)/fin(X)$ para cualquier X numerable donde $fin(X)$ es el ideal de conjuntos finitos de X. La relación de isomorfía queda establecida por la biyección entre ω y X. A veces nos será útil cambiar a ω por $\omega \times \omega$, $\omega^{<\omega}$, $[\omega]^{<\omega}$, $2^{<\omega}$, etc.

Sean $\mathscr{I}$ y $\mathscr{J}$ dos ideales sobre ω y sea $\Phi : \mathscr{P}(\omega) \to \mathscr{P}(\omega)$ tal que

$$a \subseteq_{\mathscr{I}} b \Leftrightarrow \Phi(a) \subseteq_{\mathscr{J}} \Phi(b)$$

entonces podemos definir una funcion $\Phi_* : \mathscr{P}(\omega)/\mathscr{I} \to \mathscr{P}(\omega)/\mathscr{J}$ de la siguiente manera para $[a]_{=_\mathscr{I}} \in \mathscr{P}(\omega)/\mathscr{I}$ definimos $\Phi_*([a]_{=_\mathscr{I}}) = [\Phi(a)]_{=_\mathscr{J}}$. Esta definición clarmente no depende de los representantes de las clases de equivalencia. A lo largo del trabajo dada una función $\Phi : \mathscr{P}(\omega) \to \mathscr{P}(\omega)$ utilizaremos esta definición para la función Φ_* y en vez de escribir $\Phi_*([a]_{=_\mathscr{I}})$ vamos a escribir $\Phi_*(a)$. Vamos a decir que Φ_* tiene un levantamiento continuo si la función Φ es continua. Si s es una sucesión finita de números naturales tal que $N = \max s$ e i es un número natural, vamos a denotar $s^\frown i$ como la sucesión $s \cup \{(N+1, i)\}$. Si s es un conjunto finito de números naturales e i es un número natural tal que $i \notin s$ vamos a denotar $s^\frown i$ como el conjunto $s \cup \{i\}$.

Capítulo 1

Grietas de Hausdorff en $\mathscr{P}(\omega)/fin$

El objetivo de este capítulo es probar la existencia de grietas de Hausdorff en $\mathscr{P}(\omega)/fin$, lo que es un hecho crucial en nuestro trabajo. Cuando querramos encontrar una grieta en alguna otra álgebra booleana lo que haremos será encontrar un encaje desde $\mathscr{P}(\omega)/fin$ que "preserve la grieta" que vamos a construir en este capítulo.

La prueba que realizaremos se basa en la que aparece en libro de R. Frankiewicz y P. Zbierski [3]. Primero vamos a probar que si $\langle A,B\rangle$ es una grieta en $\mathscr{P}(\omega)/fin$ de tipo (κ,ω) entonces $\kappa > \omega$ con lo que vamos a concluir que no existen grietas de tipo (ω,ω) en $\mathscr{P}(\omega)/fin$, un célebre resultado de Rothberger. Después vamos a probar que existe una grieta de Hausdorff en $\mathscr{P}(\omega)/fin$.

1.1. Grietas de Rothberger en $\mathscr{P}(\omega)/fin$

Para el desarrollo de esta sección vamos a recurrir al número de acotación $\mathfrak{b}$ para lo que necesitamos lo siguiente.

Definición 1.1.1. *Sean $f,g \in \omega^\omega$, decimos que $f \leq_* g$ si y sólo si $\{n \in \omega \mid g(n) < f(n)\} \in fin$.*

Lema 1.1.2. *Si $F \subseteq \omega^\omega$ es contable entonces está $\leq_*$-acotada.*

Demostración. Sea F una familia contable de ω^ω. Elegimos una enumeración: $F = (g_n)_{n\in\omega}$ y definimos $f(j) = max\{g_n(j)+1 \mid n \leq j\}$. Así, si $j \in \omega$, $\{n \in \omega \mid f(n) < g_j(n)\}$ tiene a lo más j elementos. Por tanto: $g_j \leq_* f$. $\square$

Por otro lado existe $F \subseteq \omega^\omega$ que no está $\leq_*$-acotado, ω^ω mismo. Definimos $\mathfrak{b}$ como el mínimo cardinal para el que existe un subconjunto de ω^ω no $\leq_*$acotado, entonces:

$$\omega < \mathfrak{b} \leq 2^\omega.$$

Por la desigualdad anterior, como corolario al siguiente teorema se seguirá no hay (ω,ω)-grietas en $\mathscr{P}(\omega)/fin$.

Teorema 1.1.3 (Rothberger)**.** *Si K es una* (κ,ω)*-grieta en* $\mathscr{P}(\omega)/fin$*, entonces* $\mathfrak{b} \leq \kappa$*.*

Demostración. Sea $\langle (a_\xi)_{\xi\in\kappa}, (b_n)_{n\in\omega}\rangle$ una (κ,ω)-grieta en $\mathscr{P}(\omega)/fin$.
Primero, definimos $(b'_n)_{n\in\omega}$ por recursión sobre ω, sea $b'_0 = b_0 \cup \{0\}$ y $b'_{n+1} = (b_{n+1} \setminus b_n) \cup \{n\}$. La sucesión $(b'_n)_{n\in\omega}$ es una cubierta de ω en conjuntos infinitos y mutuamente casi ajenos. Vamos a probar que $\langle (a_\xi)_{\xi\in\kappa}, (b'_n)_{n\in\omega}\rangle$ es una grieta.
Es claro que $\langle (a_\xi)_{\xi\in\kappa}, (b'_n)_{n\in\omega}\rangle$ es una pareja ortogonal, vamos a probar por contradicción que no existe un elemento que la separe. Supongamos que existe c tal que $(a_\xi)_{\xi\in\kappa} \subseteq^* c$ y $c \perp (b'_n)_{n\in\omega}$. Vamos a probar que dicha c también separa a $\langle (a_\xi)_{\xi\in\kappa}, (b_n)_{n\in\omega}\rangle$. Es claro que $a_\xi \subseteq_* c$ y por lo tanto sólo debemos argumentar que para toda n se cumple que $c \perp b_n$. Lo haremos por inducción sobre ω primero $b_0 =^* b'_0$ como $b_0 \perp c$ entonces $b'_0 \perp c$, ahora si suponemos indutivamente que $c \perp b_n$ para $n \in \omega$ entonces

$$\begin{aligned} c \cap b_{n+1} &= (c \cap (b_{n+1} \setminus b_n)) \cup (c \cap b_n) \\ &=^* \left(c \cap b'_n\right) \cup (c \cap b_n) \\ &=^* \emptyset \cup \emptyset. \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que $c \perp b_{n+1}$ y que c separa a $\langle (a_\xi)_{\xi\in\kappa}, (b_n)_{n\in\omega}\rangle$ lo que es una contradicción.

Sea $h_n : b'_n \to \{n\} \times \omega$ suprayectiva, definimos $h = \bigcup_{n\in\omega} h_n$. La imagen de cada b'_n es la enésima línea vertical de $\omega \times \omega$ que llamaremos E_n. Como $h[a_\xi] \cap E_n \in fin$ para toda $\xi \in \kappa$ y $n \in \omega$, $\langle (h[a_\xi])_{\xi\in\kappa}, (E_n)_{n\in\omega}\rangle$ es una grieta en $\mathscr{P}(\omega\times\omega)/fin$.

Para cada $\xi \in \kappa$, sea $f_\xi : \omega \to \omega$ definida como $f_\xi(n) = max(E_n \cap h[a_\xi])$. Sea $F = (f_\xi)_{\xi\in\kappa}$. Ahora, basta que exhibamos que F no está $\leq_*$-acotada.

Supongamos que existe $f \in \omega^\omega$ que $\leq_*$-acota a F y definimos $A(f) := \{(n, j) \mid j \leq f(n)\}$. Para cada $\xi \leq \kappa$, $h[a_\xi] \subseteq^* A(f)$ y también para cada $n \in \omega$, $E_n \cap A(f) \in fin$. Así que $A(f)$ separa a $\langle (h[a_\xi])_{\xi\in\kappa}, (E_n)_{n\in\omega}\rangle$ y por lo tanto $h^{-1}[A(f)]$ separa a $\langle (a_\xi)_{\xi\in\kappa}, (b'_n)_{n\in\omega}\rangle$ lo cual es una contradicción. □

Teorema 1.1.4. *Existe una $(\mathfrak{b}, \omega)$-grieta en $\mathscr{P}(\omega)/fin$.*

Demostración. Consideramos $F = \{F_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{b}}$ una familia de funciones no $\leq_*$-acotada. Entonces $K = \langle (A(f_\alpha))_{\alpha\in\mathfrak{b}}, (E_n)_{n\in\omega}\rangle$ es una $(\mathfrak{b}, \omega)$-grieta, pues si algún conjunto la separara, dado que sería ortogonal a la familia de ejes verticales tomando el máximo en cada eje podemos definir una función que acota a F, lo que es una contradicción. □

1.2. Grietas de Hausdorff en $\mathscr{P}(\omega)/fin$

Teorema 1.2.1 (Hausdorff)**.** *Existe una grieta de Hausdorff en $\mathscr{P}(\omega)/Fin$.*

La prueba de este teorema es una construcción por recursión hasta ω_1. Para garantizar que las familias $\langle (a_\xi)_{\xi\in\omega_1}, (b_\xi)_{\xi\in\omega_1}\rangle$ que construyamos formen una grieta, la condición que vamos a pedir es que cada a_α esté "cerca" de cada $\{b_\xi\}_{\xi\in\alpha}$ con $\alpha < \omega_1$.

Notación 1.2.2. *Sea $\langle (a_\xi)_{\xi\in\omega_1}, (b_\xi)_{\xi\in\omega_1}\rangle$ una pareja de ω_1-sucesiones ortogonales. Vamos a* *decir que a_α está* cerca *de $\{b_\xi\}_{\xi\in\alpha}$ si y sólo si:*

$$\forall n\in\omega \quad |\{\xi\in\alpha \mid (a_\alpha\cap b_\xi)\subseteq[0,n)\}|<\omega.$$

Lema 1.2.3. *Si $\langle(a_\xi)_{\xi\in\omega_1},(b_\xi)_{\xi\in\omega_1}\rangle$ es un par de familias ortogonales en $\mathscr{P}(\omega)/fin$ tales que a_α está cerca de $\{b_\xi\}_{\xi\in\alpha}$ para cada $\alpha\in\omega_1$, entonces $\langle(a_\xi)_{\xi\in\omega_1},(b_\xi)_{\xi\in\omega_1}\rangle$ es una grieta de Hausdorff.*

Demostración. Primero tenemos que observar que si a_α está cerca de $\{b_\xi\}_{\xi\in\alpha}$ y $a_\alpha\subseteq c$, entonces c está cerca $\{b_\xi\}_{\xi\in\alpha}$, pues para cada $n\in\omega$,

$$\{\xi\in\alpha \mid (c\cap b_\xi)\subseteq[0,n)\}\subseteq\{\xi\in\alpha \mid (a_\alpha\cap b_\xi)\subseteq[0,n)\}.$$

Así, si suponemos que c separa a este par de familias, entonces para cada $\alpha\in\omega_1$, c está cerca de $\{b_\xi\}_{\xi\in\alpha}$.

Por otro lado, podemos definir una función $f:\omega_1\to\omega$ tal que

$$f(\xi)=min\{n\in\omega \mid c\cap b_\xi\subseteq[0,n)\}.$$

Está bien definida porque $c\perp b_\xi$ para toda $\xi<\omega_1$. Como $\omega_1=\bigcup_{n\in\omega}f^{-1}[\{n\}]$ entonces podemos considerar $N\in\omega$ tal que $f^{-1}[\{N\}]$ es infinito. Tomamos un ordinal $\alpha\leq\omega_1$ tal que $f^{-1}[\{N\}]\cap\alpha$ sea infinito, entonces el conjunto $\{\xi\in\alpha \mid (c\cap b_\xi)\subseteq N\}$ es infinito y por lo tanto no es cierto que c esté cerca de $\{b_\xi\}_{\xi\in\alpha}$, lo cual es una contradicción. □

Ahora podemos a probrar el Teorema 1.2.1.

Demostración. (del Teorema 1.2.1) Vamos a definir por recursión dos familias $(a_\xi)_{\xi\in\omega_1}$ y $(b_\xi)_{\xi\in\omega_1}$ en $\mathscr{P}(\omega)/fin$ que cumplan que para toda $\alpha<\omega_1$,

1. $|\omega\setminus(a_\alpha\cup b_\alpha)|=\aleph_0$,

2. $a_\alpha \cap b_\alpha = \emptyset$,

3. si $\alpha < \beta < \omega_1$ entonces $a_\alpha \subset_* a_\beta$ y $b_\alpha \subset_* b_\beta$, y

4. $\forall \alpha < \omega_1 \quad a_\alpha$ está cerca de $\{b_\xi\}_{\xi \in \alpha}$.

La condición 1 garantizará que no nos acabemos a ω en el paso α, la condición 2 garantizará que las familias sean ortogonales, la condición 3 que las familias sean isomorfas a ω_1 (con respecto a la casi contención) y la condición 4 que no haya una c que separe a la familia ortogonal.

Vamos a definir por recursión sobre ω_1 a las dos familias. Primero, definimos $a_0 = \{3n\}_{n\in\omega}$ y $b_0 = \{3n+2\}_{n\in\omega}$ y es claro que cumplen las cuatro condiciones. Si suponemos definidos a_α y b_α, tomamos $x, y, z \subseteq \omega \setminus (a_\alpha \cup b_\alpha)$ ajenos tales que $\mid x \mid = \mid y \mid = \mid z \mid = \aleph_0$. Definimos $a_{\alpha+1} = a_\alpha \cup x$, $b_{\alpha+1} = b_\alpha \cup z$. Es fácil ver que estas familias cumplen las condiciones 1, 2 y 3. Para ver que cumplen la condición 4 basta notar que para cada $\xi \in \alpha$ se tiene que $a_{\alpha+1} \cap b_\xi = (x \cap b_\xi) \cup (a_\alpha \cap b_\xi) = a_\alpha \cap b_\xi$ porque x es ajeno con cada b_ξ y por lo tanto

$$\{\xi \in \alpha \mid (a_\alpha \cap b_\xi) \subseteq [0,n)\} = \{\xi \in \alpha \mid (a_{\alpha+1} \cap b_\xi) \subseteq [0,n)\} =$$
$$\{\xi \in \alpha + 1 \mid (a_{\alpha+1} \cap b_\xi) \subseteq [0,n)\}.$$

Sea $\gamma < \omega_1$ un ordinal límite y supongamos que para cada $\xi \in \gamma$ hemos definido a_ξ y b_ξ.

Primero, hay que notar que $(\omega \setminus (a_\xi \cup b_\xi))_{\xi\in\gamma}$ es una sucesión monótona decreciente contable por lo que existe un $H \subseteq \omega$ infinito tal que para todo $\xi \in \gamma$ se cumple que $H \subseteq_* \omega \setminus (a_\xi \cup b_\xi)$. Sobre $E = \omega \setminus H$ vamos a definir a a_γ y a b_γ, es decir $a_\gamma \subseteq E$ y $b_\gamma = E \setminus a_\gamma$. Así garantizaremos las condiciones 1, 2 y 3.

Si fijamos $\langle (a_\xi)_{\xi\in\gamma}, (b_\xi)_{\xi\in\gamma} \rangle$, es una familia ortogonal numerable por lo que existe una c que la separa y sin perdida de generalidad podemos suponer que $c \subseteq E$ porque $c \cap E$ también es un separador. Un candidato para a_γ bien podría ser c, sin embargo podría ser que c no estuviera cerca de la familia $\{b_\xi\}_{\xi\in\gamma}$. Es importante notar que como a_η está cerca de $\{b_\xi\}_{\xi\in\eta}$ por la condición 4 y $c \supseteq a_\eta$ entonces sí se cumple que c está cerca de $\{b_\xi\}_{\xi\in\eta}$ para cada $\eta < \gamma$, pero no necesariamente que c este cerca de $\{b_\xi\}_{\xi\in\gamma}$.

Definiremos una familia $(C_n)_{n\in\omega}$ de subconjuntos de E tal que $\langle (C_n)_{n\in\omega}, (b_\xi)_{\xi\in\gamma}\rangle$ determine una familia ortogonal separada por un elemento que sí cumpla estar cerca de la familia $\{b_\xi\}_{\xi\in\gamma}$.

Primero, para cada natural definamos

$$W_k := \{\eta < \gamma \mid (b_\eta \cap c) \subseteq [0,k)\}.$$

Por recursión sobre ω vamos a definir una familia $(C_n)_{n\in\omega}$ que cumpla: $C_n \subseteq E$, $C_n \perp b_\eta$ para toda $\eta < \gamma$, $C_n \subseteq_* C_{n+1}$ y C_n está cerca de $\{b_\eta \mid \eta \in W_n\}$.

Sea $C_0 = c$ y supongamos definidos $C_0,...,C_n$ entonces hay dos casos que W_n sea finito o infinito.

Si W_n es un conjunto finito, entonces definimos $C_{n+1} = C_n$.

Ahora supongamos que W_n es infinito entonces vamos a probar que W_n es cofinal en γ. Si suponemos que existe $\beta < \gamma$ tal que $W_n \subseteq \beta$ entonces $W_n \subseteq \{\eta < \beta \mid c \cap b_\eta \subseteq [0,n)\}$ pero este conjunto es finito porque c está cerca de $\{b_\xi\}_{\xi\in\gamma}$, lo cual es una contradicción.

Así que podemos enumerar a W_n como una sucesión creciente y cofinal en γ, $W_n = \{\eta_i \mid i \in \omega\}$.

Sea $j_n \in b_{\eta_n} \setminus (b_{\eta_0} \cup \cdots \cup b_{\eta_{n-1}})$ y definimos los conjuntos $D = \{j_k \mid k \in \omega\}$ y $C_{n+1} = C_n \cup D$. $D \perp b_{\eta_i}$ para toda $i \in \omega$ pues $\mid D \cap b_{\eta_i} \mid = 1$ y como $\sup(\eta_i)_{i\in\omega} = \gamma$ se tiene que $D \perp b_\eta$ para toda $\eta < \gamma$ y por lo tanto que $C_{n+1} \perp b_\eta$ para toda $\eta < \gamma$. También es claro que D está cerca de $\{b_{\eta_i} \mid i \in \omega\}$ y por tanto que C_{n+1} está cerca de $\{b_\eta \mid \eta \in \gamma\}$. Lo que concluye la recursión.

Ahora, sea A que rellena a $\langle (C_n)_{n\in\omega}, (b_\xi)_{\xi\in\gamma})\rangle$. Entonces, A está cerca de $\{b_\xi\}_{\xi\in\gamma}$ lo que garantiza la condición 4. Sea $a_\gamma = A$ y $b_\gamma = E \setminus A$. $\square$

Capítulo 2

Grietas de Hausdorff en cocientes pseudosólidos y magros

El objetivo de este capítulo es encontrar las grietas de Hausdorff sobre los cocientes $\mathscr{P}(\omega)/\mathscr{I}$ cuando el ideal $\mathscr{I}$ es pseudosólido.

Un ideal $\mathscr{I}$ es *pseudosólido* si existe una partición $\{L_n \mid n \in \omega\}$ de ω y una familia $\{\mathscr{F}_n \mid n \in \omega\}$ de conjuntos hereditarios, es decir cerrados bajo subconjuntos, tales que para cualquier $n \in \omega$:

1. $L_n \in \mathscr{I}$,
2. $\mathscr{F}_n \subseteq \mathscr{P}(L_n)$,
3. $L_n \notin \overline{\cup}[\mathscr{F}_n \times \mathscr{F}_n]$, y
4. Si $x \in \mathscr{I}$ entonces existe un $N \in \omega$ tal que para toda $k > N$ se cumple que $x \cap L_k \in \mathscr{F}_k$.

Donde $\overline{\cup}$ es la función $\overline{\cup} : \mathscr{P}(\omega) \times \mathscr{P}(\omega) \to \mathscr{P}(\omega)$ tal que $\overline{\cup}(x,y) = x \cup y$ de la que hablaremos posteriormente.

Intuitivamente un ideal pseudosólido es aquel para el que existe una partición $(\{L_i\})$ de ω tal que para cada elemento L_i de la partición existe una familia $\mathscr{F}_i$ de subconjuntos "pequeños" de L_i de forma que si $x \in \mathscr{I}$ entonces para casi todos los L_i's el conjunto $x \cap L_i$ es "pequeño" ($x \cap L_i \in \mathscr{F}_i$).

Vamos a explorar el artículo de 1989 "*F_σ ideals and $\omega_1\omega_1^*$-gaps in Boolean algebras $\mathscr{P}(\omega)/\mathscr{I}$*" de Krzysztof Mazur ([8]) donde definió el concepto de ideal pseudosólido y argumentó que es una clase bastante amplia de ideales, incluso comentó que todos los ideales coanalíticos que conocía son pseudosólidos y preguntó: ¿Existe algún ideal coanalítico (o inclusive Borel) que no sea pseudosólido? Comentó también que consistentemente (bajo $MA + \neg CH$) existen ideales magros no pseudosólidos. En este artículo Mazur demuestra una caracterización para ideales F_σ que le permite construir una diversidad de ejemplos y demuestra que para ideales $\mathscr{I}$ que sean *pseudosólidos* y para ideales *magros* el álgebra $\mathscr{P}(\omega)/\mathscr{I}$ tiene una grieta de Hausdorff. Demostraremos la caracterización combinatoria de Mazur de ideales F_σ ya que nos permitirá construir ejemplos de ideales F_σ que es una clase de ideales que cumplen ser pseudosólidos y magros, construiremos otros ejemplos de ideales pseudosólidos: los ideales sólidos, demostraremos que los cocientes sobre ideales pseudosólidos tienen grietas de Hausdorff, demostraremos la caracterización de ideales magros de Talagrand y por último demostramos que bajo la suposición $2^\omega < 2^{\omega_1}$ en los cocientes magros también hay grietas de Hausdorff.

2.1. Ideales F_σ

Los ideales F_σ son una amplia gama de ideales. Primero vamos a argumentar que F_σ es el mínimo grado de complejidad topológica que puede tener un ideal, es decir que los ideales no pueden ser abiertos, cerrados ni G_δ. Aunque es suficiente probar que los ideales no pueden ser G_δ, si lo demostramos en el orden propuesto vamos a desarrollar resultados que utilizaremos posteriormente.

Lema 2.1.1. *Sea $a \subseteq \omega$ infinito y $F \subseteq \mathscr{P}(\omega)$ es cerrado. Si $fin(a) \subseteq F$ entonces $a \in F$.*

Demostración. Sean $a \subseteq \omega$ infinito y $F \subseteq \mathscr{P}(\omega)$ cerrado tales que $fin(a) \subseteq F$. Basta observar que a es un punto de acumulación de $fin(a)$. Dado que si tomamos un abierto subbásico U que tenga a a como elemento entonces existe $n \in \omega$ tal que $\langle a \mid n \rangle \subseteq U$. y por lo tanto $a \cap [0,N) \in U \cap fin(a)$ para N suficientemente grande. $\square$

Un ideal $\mathscr{I}$ no puede ser cerrado ya que $fin \subseteq \mathscr{I}$ y si fuera cerrado eso implicaría que $\omega \in \mathscr{I}$.

Lema 2.1.2. *Los conjuntos fin y $cofin$ son densos en $\mathscr{P}(\omega)$.*

Demostración. Sea U un abierto y sea $x \in fin$ tal que $\langle x \rangle \subseteq U$.
Es claro que fin es denso ya que $x \cap [0,N) \in U \cap fin$ para N suficientemente grande. Para ver que $cofin$ es denso tomemos $N = \sup x$ entonces $x \cup [N,\infty) \in \langle x \rangle \subseteq U$. $\square$

Por lo tanto, un ideal $\mathscr{I}$ no puede contener a un conjunto abierto U no vacío porque existiría $x \in U \cap cofin$ y los ideales no pueden contener conjuntos cofinitos. A partir de este hecho también podemos ver que si $\mathscr{I}$ es un ideal, como $fin \subseteq \mathscr{I}$ entonces $\mathscr{I}$ es denso. El siguiente lema nos permite ver que los ideales tampoco pueden ser G_δ.

Lema 2.1.3. *Sea $\mathscr{I}$ un ideal entonces el filtro dual $\mathscr{I}^1$ es homeomorfo a $\mathscr{I}$.*

Demostración. Sea $\mathscr{I}$ un ideal, basta ver que la función: $sw : \mathscr{P}(\omega) \to \mathscr{P}(\omega)$ definida por $sw(x) = \omega \setminus x$ es un homeomorfismo, pues $sw[\mathscr{I}] = \mathscr{I}^1$. Claramente la función es biyectiva y coincide con su inversa $sw = sw^{-1}$ por lo tanto sólo debemos demostrar que es continua. Vamos a demostrar que $sw^{-1}[\langle x \rangle]$ es abierto para cualquier $x \in fin$, si $a = sw(x) \cap [0,N]$ donde N es el máximo de x entonces $\langle a \rangle \subseteq sw^{-1}[\langle x \rangle]$. $\square$

Así, si existiera $\mathscr{I}$ un ideal que fuera G_δ su filtro dual $\mathscr{I}^1$ también sería G_δ y como $cofin \subseteq \mathscr{I}^1$ también tendríamos que $\mathscr{I}^1$ es denso. Pero por el Teorema de Categoría de Baire [7] aplicado a $\mathscr{P}(\omega)$ no puede haber dos conjuntos G_δ densos y ajenos.

Una propiedad estructural topológica importante que cumplen los ideales F_σ es que son conjuntos magros. La demostración consiste en probar que si $\mathscr{I} = \cup_{n\in\omega} F_n$ con F_n cerrado entonces cada F_n es nunca denso.

Proposición 2.1.4. *Si $\mathscr{I}$ es un ideal F_σ entonces es magro.*

Demostración. Sea $\mathscr{I}$ un ideal F_σ y sea $\{F_n \mid n \in \omega\}$ una familia de conjuntos cerrados tales que $\bigcup_{n\in\omega} F_n = \mathscr{I}$. Vamos a demostrar que cada uno de los F_n es un conjunto nunca denso, para esto supongamos que para algún $n \in \omega$ el conjunto F_n se cumple que $int(F_n) \neq \emptyset$. Entonces $int(F_n) \subseteq F_n \cap U = U \subseteq F_n \subseteq \mathscr{I}$ pero $\mathscr{I}$ no puede contener conjuntos abiertos no vacíos. $\square$

En esta sección utilizaremos las funciones $\overline{\cup} : \mathscr{P}(\omega) \times \mathscr{P}(\omega) \to \mathscr{P}(\omega)$ y $\overline{\cap} : \mathscr{P}(\omega) \times \mathscr{P}(\omega) \to \mathscr{P}(\omega)$ definidas por:

$$\overline{\cup}(x,y) = x \cup y \qquad \overline{\cap}(x,y) = x \cap y$$

Estas funciones son continuas ya que si $a = x \cup y$ entonces $\overline{\cup}^{-1}[\langle a \rangle] \supseteq \langle x \rangle \times \langle y \rangle$. Análogamente si $b = x \cap y$ entonces $\overline{\cap}^{-1}[\langle a \rangle] \supseteq \langle x \rangle \times \langle y \rangle$. A partir de este hecho podemos demostrar que si tenemos una familia de conjuntos $H \subseteq \mathscr{P}(\omega)$ cerrada entonces si la cerramos bajo subconjuntos o bajo uniones binarias seguirá siendo cerrada.

Lema 2.1.5. *Sea $H \subseteq \mathscr{P}(\omega)$ cerrado entonces:*

1. *$A = \overline{\cap}[H \times \mathscr{P}(\omega)]$ es cerrado y hereditario tal que $\bigcup A = \bigcup H$.*

2. *$B = \overline{\cup}[H \times H]$ es cerrado tal que $\bigcup B = \bigcup H$ y si $a, b \in H$ entonces $a \cup b \in B$.*

Demostración. Sea $H \subseteq \mathscr{P}(\omega)$ como H es un subconjunto cerrado de un compacto entonces H también es compacto así que el producto $H \times \mathscr{P}(\omega)$ también es compacto por ser el producto de compactos. Así que A es la imagen continua de un compacto entonces A es compacto y en particular es cerrado. Para ver que se cumple que $\bigcup A = \bigcup H$ es suficiente observar que

$$\begin{aligned} x \in \bigcup A &\Leftrightarrow \exists a \in \overline{\cap}[H \times \mathscr{P}(\omega)] \quad x \in a \\ &\Leftrightarrow \exists b, c \in H \quad x \in b \cup c \\ &\Leftrightarrow \exists b \in H \quad x \in B. \end{aligned}$$

Ahora vamos a probar que A es hereditario. Sea $a \in A$ y $b \subseteq a$ entonces existen $h \in H$ y $c \subseteq \omega$ tal que $a = h \cap c$. Sea $d = c \cap b$ entonces $b = h \cap c \cap b = h \cap (c \cap b) \in \overline{\cap}[H \times \mathscr{P}(\omega)]$.
La prueba del segundo inciso es análoga a la anterior. Primero, B es cerrado por ser la image continua de un compacto y es claro que si $a, b \in H$ entonces $a \cup b \in B$. $\square$

Gracias a este lema podemos demostrar que para cualquier conjunto $H \subseteq \mathscr{P}(\omega)$ que sea F_σ y hereditario existe una sucesión $\{H_n \mid n \in \omega\}$ que cumple ser $\subseteq$-creciente de conjuntos cerrados y hereditarios y que $\cup_{n \in \omega} H_n = H$.

Lema 2.1.6. *Sea $H \subseteq \mathscr{P}(\omega)$ un conjunto F_σ y hereditario entonces existe una sucesión $\{H_n \mid n \in \omega\}$ que cumple para cualesquiera $n, m \in \omega$:*

1. *el conjunto H_n es cerrado y hereditario,*

2. *si $n < m$ entonces $H_n \subseteq H_m$,*

3. *para cualesquiera $a, b \in H_n$ se tiene que $a \cup b \in H_{n+1}$, y*

4. *se tiene que $H = \bigcup_{n \in \omega} H_n$.*

Demostración. Sea $H \subseteq \mathscr{P}(\omega)$ un conjunto F_σ, es decir $H = \cup_{n \in \omega} F_n$ donde cada F_n es cerrado. Vamos a definir por recursión a la sucesión $(H_n)_{n \in \omega}$. H_0 es la cerradura bajo subconjuntos de F_0 y definimos H_n como la cerradura bajo subconjuntos de $\bigcup_{k<n} H_k \cup F_n$ que por el lema 2.1.5 es un conjunto cerrado y hereditario. También por el lema 2.1.5 podemos hacer que la sucesión $\{H_n \mid n \in \omega\}$ que cumpla que si $a, b \in H_n$ entonces $a \cup b \in H_{n+1}$. $\square$

Podemos establecer una versión más particular del lema 2.1.6 para ideales F_σ en el que los elementos de la sucesión $(H_n)_{n\in\omega}$ sean conjuntos nunca densos. Esto se debe a que si inicialmente los elementos de la sucesión $(F_n)_{n\in\omega}$ son nunca densos entonces también lo serán elementos de la sucesión $(H_n)_{n\in\omega}$.

Este lema nos permite expresar a los ideales F_σ de una forma "bonita", estos H_n son los que nos permitirán construir la partición $\{L_n \mid n \in \omega\}$ y la familia $\{\mathscr{F}_n \mid n \in \omega\}$ para verificar que en efecto los ideales F_σ son pseudosólidos.

Proposición 2.1.7. *Los ideales F_σ son pseudosólidos.*

Demostración. Sea $\mathscr{I}$ un ideal F_σ y $\{H_n \mid n \in \omega\}$ una sucesión como en el lema 2.1.6 donde además cada H_n es nunca denso. Vamos a encontrar una sucesión creciente de números naturales $(l_n)_{n\in\omega}$ que cumpla que para cada $n \in \omega$:

$$[l_n, l_{n+1}) \notin H_{n+1}.$$

La definimos por recursión sobre ω de la siguiente forma: Primero definimos $l_0 = 0$. Ahora demos por definido l_n y supongamos que para cualquier $l > l_n$ se cumple que $[l_n, l) \in H_{n+1}$ entonces la sucesión de intervalos $[l_n, l_n+1), [l_n, l_n+2), ..., [l_n, l_n+M)$ estaría contenida en H_{n+1} para cualquier M. Dicha sucesión converge a $[l_n, \infty)$ y como H_{n+1} es cerrado $[l_n, \infty) \in H_n \subseteq \mathscr{I}$ lo que es imposible porque $[l_n, \infty)$ es cofinito. Por lo tanto, existe un $l \in \omega$ tal que $[l_n, l) \notin H_{n+1}$ y definimos l_{n+1} como el primer natural que cumple esta propiedad.

Ahora, definimos $L_n = [l_n, l_{n+1})$ y $\mathscr{F}_n = \mathscr{P}(L_n) \cap H_n$. Como $L_n \notin H_{n+1}$ entonces $L_n \notin \overline{\cup}[\mathscr{F}_n \times \mathscr{F}_n]$.

Falta verificar que si $x \in \mathscr{I}$ entonces existe una $N \in \omega$ tal que para todo $k > N$ se cumple que $x \cap L_k \in \mathscr{F}_k$. Pero en efecto, si $x \in \mathscr{I} = \bigcup_{n\in\omega} H_n$ entonces existe $N \in \omega$ tal que $x \in H_N$ y como H_N es cerrado bajo subconjuntos tenemos que $x \cap L_N \in \mathscr{P}(L_N) \cap H_N$ y como la sucesión $(H_n)_{n\in\omega}$ es $\subseteq$-creciente entonces tenemos que $x \in H_k$ para $k > N$ y por lo tanto $x \cap L_k \in \mathscr{F}_k$. $\square$

El ideal de conjuntos finitos de ω es un ideal F_σ ya que para cada $a \in fin$ el conjunto $\{a\}$ es cerrado en $\mathscr{P}(\omega)/fin$ y fin es numerable. La clase de ideales F_σ es muy amplia, en el artículo [8] Mazur dio una caracterización de los ideales F_σ que permite fabricar una gran variedad de ejemplos.

Teorema 2.1.8. *Un ideal $\mathscr{I}$ es F_σ si y sólo si existe una función $f : fin \to \mathbb{R}^+$ que satisface:*

1. *Si $a \subseteq b$ entonces $f(a) \leq f(b)$,*

2. *$f(a \cup b) \leq f(a) + f(b)$,*

3. *$\lim_{n\to\infty} f([0,n)) = +\infty$, y*

4. *$\mathscr{I} = \{x \subseteq \omega \mid \lim_{n\to\infty} f(x \cap [0,n)) < \infty\}$.*

Antes de pasar a la prueba del Teorema 2.1.8 cabe mencionar que lo podemos reescribir utilizando la siguiente notación:

Definición 2.1.9. *Una función $\mu : \mathscr{P}(\omega) \to \mathbb{R}^+$ es una submedida inferiormente semicontinua si cumple que:*

1. *$\mu(\emptyset) = 0$,*

2. *Si $a \subseteq b$ entonces $\mu(a) \leq \mu(b)$,*

3. *Para cualesquiera $a, b \in \mathscr{P}(\omega)$, $\mu(a \cup b) \leq \mu(a) + \mu(b)$, y*

4. *Para cualquier $a \in \mathscr{P}(\omega)$, $\mu(a) = \lim_{n\to\infty} \mu(a \cap [0,n))$.*

Con una función así podemos definir los siguientes conjuntos:

$$Fin(\mu) = \{a \subseteq \omega \mid \mu(a) < \infty\}, \quad y \quad Exh(\mu) = \{a \subseteq \omega \mid \lim_{n\to\infty} \mu(a \setminus [0,n)) = 0\}.$$

El teorema anterior lo podemos escribir como: Un ideal $\mathscr{I}$ es F_σ si existe una medida inferiormente semicontinua μ tal que $\mathscr{I} = Fin(\mu)$. La función μ es una extensión de la función f donde $\mu(a) = \text{lím}_{n\to\infty} f(a \cap [0,n))$.

Demostración. (Del Teorema 2.1.8) Supongamos que $\mathscr{I}$ es un ideal F_σ y tomemos $\{H_n \mid n \in \omega\}$ como en el lema 2.1.6 donde además cada H_n es nunca denso, entonces podemos definir $f : fin \to \mathbb{R}^+$ como:

$$f(a) = min\{n \mid a \in H_n\}.$$

Ahora vamos a ver que cumple las cuatro condiciones:
(1.) Si $a \subseteq b$ entonces $a \in H_{f(b)}$ por lo tanto $f(a) \leq f(b)$.
(2.) Si $f(a) = f(b)$ entonces $a, b \in H_{f(a)}$ y por lo tanto $f(a \cup b) \leq f(a) + 1 \leq f(a) + f(b)$. Si $f(a) < f(b)$ entonces $a \in H_{f(b)}$ y $a \cup b \in H_{f(b)+1}$ por lo tanto $f(a \cup b) \leq f(b) + 1 \leq f(b) + f(a)$.
(3.) Para cualquier $n \in \omega$ se tiene que $\{[0,k) \mid k \in \omega\} \not\subseteq H_n$ pues ω es un punto de acumulación de $\{[0,n) \mid n \in \omega\}$ y H_n es cerrado.
(4.) Si $x \in \mathscr{I}$ entonces podemos tomar $n \in \omega$ el primer natural tal que $x \in H_n$ por lo que tendríamos que $\text{lím}_{k\to\infty} f(x \cap [0,k)) = n$. Por otro lado, si $\text{lím}_{n\to\infty} f(x \cap [0,n)) < \infty$ podemos tomar $n \in \omega$ tal que $\text{lím}_{k\to\infty} f(x \cap [0,k)) = n$ entonces tendríamos que $\{x \cap [0,k) \mid k \in \omega\} \subseteq H_n$ y como H_n es cerrado $x \in H_n \subseteq \mathscr{I}$.
Ahora, si suponemos que existe una función $f : fin \to \mathbb{R}^+$ como en el teorema, definiremos a la familia $\{H_n \mid n \in \omega\}$, para cada $n \in \omega$ sea

$$H_n = \{x \subseteq \omega \mid \lim_{k\to\infty} f(x \cap [0,k)) \leq n\}.$$

Vamos a demostrar que $\mathscr{I} = \cup_{n\in\omega} H_n$. Si $x \in \mathscr{I}$ entonces existe una $N \in \omega$ tal que $\text{lím}_{n\to\infty} f(x \cap [0,n)) < N$, así que $x \in H_N$. Si $x \in H_n$ para alguna $n \in \omega$, entonces para toda $k \in \omega$ $f(x \cap [0,k)) = n$ entonces $\text{lím}_{k\to\infty} f(x \cap [0,k)) = n$ y por lo tanto $x \in \mathscr{I}$.

Para ver que los conjuntos H_n son cerrados primero hay que mostrar que para cualesquiera $k,i \in \omega$ el conjunto $\{x \subseteq \omega \mid f(x \cap [0,k)) = i\}$ es un abierto y cerrado de $\mathscr{P}(\omega)$. Sean $k,i \in \omega$, vamos a llamar $a_0, a_1, ..., a_{2^k}$ a los subconjuntos de $[0,k)$ tales que $f(a_j) = i$ para $j < 2^k$. Si $x \subseteq \omega$ es tal que $f(x \cap [0,k)) \leq i$ entonces $x \cap [0,k) = a_j$ para alguna $j < 2^k$ por lo que

$$\{x \subseteq \omega \mid f(x \cap [0,k)) \leq i\} = \bigcup \{\langle a_j \rangle \mid a < 2^k\}.$$

Por lo que el conjunto $\{x \subseteq \omega \mid f(x \cap [0,k)) = i\}$ es la unión finita de abiertos y cerrados básicos y por lo tanto también es un abierto y cerrado. Ahora, para ver que cada H_n es cerrado debemos observar que

$$x \in H_n \Leftrightarrow \lim_{k \to \infty} f(x \cap [0,k)) \leq n$$

como $(x \cap [0,k))$ es una sucesión $\supseteq$-creciente y como f tambien es creciente entonces,

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \forall k \in \omega \quad f(x \cap [0,k)) \leq n \\
&\Leftrightarrow \forall k \in \omega \quad \exists i \leq n \quad f(x \cap [0,k)) \leq i \\
&\Leftrightarrow x \in \bigcap_{k \in \omega} \big(\bigcup_{i=0}^{n} \{x \subseteq \omega \mid f(x \cap [0,k)) \leq i\} \big).
\end{aligned}$$

Por lo que H_n es un conjunto cerrado. □

Ahora, podemos dar ejemplos de ideales F_σ. Por ejemplo podemos definir el ideal de ramas en $2^{<\omega}$. Si $f,g \in 2^{<\omega}$ vamos a decir que $f < g$ si $f \supset g$, esta relación define un orden parcial sobre $2^{<\omega}$. Por *rama* queremos decir una cadena maximal de $2^{<\omega}$.

Definición 2.1.10. *El ideal $\mathscr{I}_r$ está definido de la siguiente manera: $x \in \mathscr{I}_r$ si x está contenido en a lo más una cantidad finita de ramas.*

Proposición 2.1.11. *Para cualquier $x \subseteq 2^{<\omega}$, $x \in \mathscr{I}_r$ si y sólo si existe $n \in \omega$ tal que cada anticadena de x tiene a lo más n elementos.*

Demostración. Sea $x \in \mathscr{I}_r$ entonces existen $c_0, ..., c_n \subseteq 2^{<\omega}$ cadenas tal que $x \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} c_i$. Si tomamos $a \subseteq x$ anticadena en x entonces $\mid a \cap c_i \mid = 1$ porque a es una anticadena y además $a = \bigcup_{i=0}^{n} c_i \cap a$ y por lo tanto $\mid a \mid \leq n$.

Por otro lado sea $x \subseteq 2^{<\omega}$ tal que cualquier $a \subseteq x$ anticadena es finita. Sea $\{c_i \mid i \in I\}$ una familia de cadenas ajenas tal que $x \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} c_i$ y tal que para todo $i \in I$ se cumple que $x \cap c_i \neq \emptyset$. Sea $x_i \in x \cap c_i$ entonces $(x_i)_{i \in I}$ es una anticadena de cardinalidad $\mid I \mid$. Y por la hipótesis, toda anticadena debe es a lo más finita entonces I es finito. □

Proposición 2.1.12. *El ideal de ramas de $2^{<\omega}$, $\mathscr{I}_r$, es F_σ.*

Demostración. Vamos a definir: $f : [2^{<\omega}]^{<\omega} \to \mathbb{R}^+$ como:

$$f(a) = \text{la máxima cardinalidad de una anticadena contenida en } a.$$

La función cumple que si $a \subseteq b$ entonces $f(a) \leq f(b)$ porque toda anticadena en a es una anticadena en b, si $x \subseteq a \cup b$ es una anticadena entonces $x \cap a$ y $x \cap b$ son anticadenas en a y en b respectivamente. Como $x = (x \cap a) \cup (x \cap b)$ entonces $f(a \cup b) \leq f(a) + f(b)$. También como la cardinalidad de la máxima anticadena en $[0, n)$ es n se cumple que $\lim_{n \to \infty} f([0, n)) = \infty$. Por el teorema 2.1.8, $\mathscr{I}^{(f)} = \{x \subseteq \omega \mid f(x \cap [0, n)) < \infty\}$ es un ideal F_σ y es claro que $\mathscr{I}_r = \mathscr{I}^{(f)}$. □

Definición 2.1.13. *Un ideal es sumable si existe una función $g : \omega \to \mathbb{R}^+$ que cumple $\Sigma_{n \in \omega} g(n) = \infty$ y se cumple que un conjunto x pertenece al ideal si y sólo si $\Sigma_{n \in x} g(n) < \infty$. En este caso, denotamos al ideal como $\mathscr{I}_g$.*

Proposición 2.1.14. *Los ideales sumables son F_σ.*

Demostración. Sea $\mathscr{I}_g$ un ideal sumable, entonces definimos $f : fin \to \mathbb{R}^+$ como $f(a) = \Sigma_{n \in a} g(n)$. Es claro que la función f cumple que si $a \subseteq b$ entonces $f(a) \leq f(b)$ porque $\Sigma_{n \in a} g(n) \leq$

$\Sigma_{n\in a}g(n)+\Sigma_{n\in b\setminus a}g(n)$, también es claro que $f(a\cup b)\leq f(a)+f(b)$ pues $\mid a\cup b\mid\leq\mid a\mid+\mid b\mid$ y también es claro que se cumple que $\lim_{n\to\infty}f(n)=+\infty$ porque $\omega\notin\mathscr{I}_g$ y eso quiere decir que $\Sigma_{n\in\omega}g(n)=\infty$. Por el teorema 2.1.8, $\mathscr{I}^{(f)}=\{x\subseteq\omega\mid f(x\cap[0,n))<\infty\}$ es F_σ y es claro que $\mathscr{I}^{(f)}=\mathscr{I}_g$. □

Es interesante notar que los ideales sumables nos permiten construir una amplia gama de ejemplos de ideales F_σ, perp no todos los ideales F_σ son sumables. Por ejemplo $\mathscr{I}_r$. Si suponemos que $\mathscr{I}_r=\mathscr{I}_g$ para alguna función $g:2^{<\omega}\to\mathbb{R}$, como tenemos que cada cadena de $2^{<\omega}$ pertenece a $\mathscr{I}_r$ entonces también tenemos que para cada $\varepsilon>0$

$$\{s\in 2^{<\omega}\mid g(s)<\varepsilon\}\text{ es denso en }2^{<\omega},$$

ya que para cualquier $a\in 2^{<\omega}$ podemos encontrar un $s\in 2^{<\omega}$ tal que $s\supset a$ y $g(s)<\varepsilon$. Para ver esto basta que tomemos una rama que contenga a a. Como ésta es un elemento de $\mathscr{I}_r$ podemos encontrar una sucesión de elementos $<$-mayores que a cuyas imágenes bajo g formen una sucesión convergente a 0. A partir de este hecho podemos construir una sucesión de elementos incompatibles $(s_n)_{n\in\omega}$ en $2^{<\omega}$ tal que $g(s_n)<\frac{1}{2^n}$ por lo que $(s_n)_{n\in\omega}\in\mathscr{I}_g\setminus\mathscr{I}_r$.
No sólo los ideales F_σ son sumables, de hecho Mazur probó que existe un ideal F_σ que no está contenido en ningún ideal sumable. Pero la prueba de este hecho se escapa de los límites de este trabajo.

2.2. Ideales Sólidos

No todos los ideales pseudosólidos son F_σ, para mostrar la amplia variedad de ideales que son pseudosólidos Mazur sugiere el concepto de ideal *sólido*.

Definición 2.2.1. *Un ideal $\mathscr{I}$ es sólido si existe un conjunto $H\subseteq\mathscr{P}(\omega)$ hereditario, es decir cerrado bajo subconjuntos, y F_σ tal que $\mathscr{I}\subseteq H$ y $\bar{\cup}[H\times H]$ es un conjunto magro.*

Proposición 2.2.2. *Si $\mathscr{I}$ es un ideal sólido entonces es pseudosólido.*

Para probar esta proposición necesitaremos primero un lema.

Lema 2.2.3. *Sea $H \supseteq fin$ un conjunto hereditario y F_σ y tal que $H' = \bar{\cup}[H \times H]$ es magro. Entonces existen dos sucesiones crecientes $\{H_n : n \in \omega\}$ y $\{H'_n : n \in \omega\}$ de conjuntos hereditarios y cerrados y una sucesión de números naturales $(l_n)_{n\in\omega}$ tales que:*

1. $\bigcup_{n\in\omega} H_n = H$,

2. $\bigcup_{n\in\omega} H'_n = H'$,

3. *Para cualquier $n \in \omega$ se cumple que $\bar{\cup}[H_n \times H_n] = H'_{n+1}$, y*

4. *para cualquier $n \in \omega$ se cumple que $[l_n, l_{n+1}) \notin H'_{n+1}$.*

Demostración. (del Lema 2.2.3) Por el Lema 2.1.6 es suficiente que construyamos la sucesión de números naturales del lema, lo haremos por recursión sobre ω. Primero sea $l_0 = 0$, luego suponemos definido l_n y que no existe $l > l_n$ que satisfaga 4. tendríamos que para todo $l > l_n [l_n, l) \in H'_n$. Ahora, como H'_n es cerrado y hereditario entonces tendemos que $\mathscr{P}(\omega \setminus l_n) \subseteq H'_n \subseteq H'$. Pero esto contradiría que H' sea magro. □

Demostración. (De la Proposición 2.2.2) Sea $\mathscr{I}$ un ideal sólido, entonces podemos tomar $H \supseteq \mathscr{I}$ como en la definición de ideal sólido. Sean $(l_n)_{n\in\omega}$ y $\{H_n : n \in \omega\}$ sucesiones como en el lema 2.2.3. Para cada $n \in \omega$ definimos $L_n = [l_n, l_{n+1})$ y $\mathscr{F}_n = H_n \cap \mathscr{P}(L_n)$.
Es claro que $L_n \in \mathscr{I}$ porque cada L_n es finito, como $\mathscr{F}_n = H_n \cap \mathscr{P}(L_n)$ es claro que $\mathscr{F}_n \subseteq \mathscr{P}(L_n)$ y que $L_n \notin H'_{n+1} \supset \bar{\cup}[\mathscr{F}_n \times \mathscr{F}_n]$. Además, si $x \in \mathscr{I} \subseteq \bigcup_{n\in\omega} H_n$ como $\{H_n : n \in \omega\}$ es una sucesión creciente de conjuntos entonces existe una $n \in \omega$ tal que $x \in H_k$ para cualquier $k > n$. Así, tenemos que si $k > n$ entonces $x \cap L_n \in H_k \cap \mathscr{P}(L_k) = \mathscr{F}_k$. □

En principio la definición de ideal sólido es más sencilla que la de ideal pseudosólido, en esencia un ideal es sólido si está contenido en algo parecido a un ideal F_σ. El conjunto H de la definición no es necesariamente un ideal F_σ ya que puede no estar cerrado en uniones finitas, pero que cuando lo cerremos en uniones binarias siga siendo "chiquito". Por ejemplo, los ideales F_σ son sólidos también aquellos ideales que sean intersecciones arbitrarias de ideales F_σ. Analicemos otros dos ejemplos de familias de ideales sólidos, los ideales de Erdös- Ulam y el ideal de nunca densos de $2^{<\omega}$.

Los ideales de *Erdös-Ulam* se definen de la siguiente manera:

Definición 2.2.4. *Vamos a decir que una función $f:\omega\to\mathbb{R}^+$ es de Erdös-Ulam si $\Sigma_{n\in\omega}f(n)=\infty$ y*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{\Sigma_{k<n}f(k)}=0.$$

Para cada función f de Erdös-Ulam definimos el ideal $\mathscr{I}^f$ como:

$$x\in\mathscr{I}^f\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{\Sigma_{k\in x\cap n}f(k)}{\Sigma_{k<n}f(k)}=0.$$

Proposición 2.2.5. *Para cualquier función $f:\omega\to\mathbb{R}^+$ de Erdös-Ulam el ideal $\mathscr{I}^f$ es sólido.*

Demostración. Sea $f:\omega\to\mathbb{R}^+$ de Erdös-Ulam entonces definamos:

$$H^f:=\left\{x\subseteq\omega\mid\limsup\frac{\Sigma_{k\in x\cap n}f(k)}{\Sigma_{k<n}f(k)}\leq\frac{1}{3}\right\}.$$

Claramente se cumple que H^f es hereditario y que $\mathscr{I}^f\subseteq H^f$. Hay que observar que:

$$\bar{\cup}[H^f\times H^f]\subseteq G^f=\left\{x\subseteq\omega\mid\limsup\frac{\Sigma_{k\in x\cap n}f(k)}{\Sigma_{k<n}f(k)}\leq\frac{2}{3}\right\}$$

Basta demostrar que G^f es un conjunto magro ya que eso garantizará que $\bar{\cup}[H^f\times H^f]$ también sea magro, la demostración para probar que H^f es F_σ es análoga. Definamos $g:\mathscr{P}(\omega)\times\omega\to\mathbb{R}^+$ como

$$g(x,n)=\frac{\Sigma_{k\in x\cap n}f(k)}{\Sigma_{k<n}f(k)}.$$

Primero observemos que la función g es continua pues si $g(x,n) = a$ y tomamos $\varepsilon > 0$ entonces para todo $y \in \langle x \mid n \rangle$ tenemos que $g(y,n) = a$ y por lo tanto

$$g(\langle x \mid n \rangle \times \{n\}) \subseteq (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

ahora observemos que

$$\begin{aligned} G^f &= \left\{ x \subseteq \omega \mid \limsup_n g(x,n) \leq \frac{2}{3} \right\} \\ &= \bigcup_{n>0} \bigcap_{k>n} \left\{ x \subseteq \omega \mid g(x,k) \leq \frac{2}{3} \right\} \\ &= \bigcup_{n>0} \bigcap_{k>n} \left\{ x \subseteq \omega \mid (x,k) \in g^{-1} \left[\left[0, \frac{2}{3} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, G^f es la unión numerable de conjuntos cerrados nunca densos, así que G^f es magro y F_σ. $\square$

El ideal $\mathscr{I}_{nd}$ de conjuntos nunca densos de $2^{<\omega}$ que definimos de la siguiente manera:

Definición 2.2.6. *Un conjunto $x \subseteq 2^{<\omega}$ pertenece al ideal $\mathscr{I}_{nd}$ si y sólo si:*

$$\forall s \in 2^{<\omega} \quad \exists t \supseteq s \quad \langle t \rangle \cap x = \emptyset.$$

Proposición 2.2.7. *El ideal $\mathscr{I}_{nd}$ es sólido.*

Demostración. Para ver que es un ideal sólido definimos el conjunto H_{nd} de la siguiente manera:

$$x \in H_{nd} \Leftrightarrow \exists n \left[\exists t \in 2^n \left(\langle t \rangle \cap x = \emptyset \right) \& \forall s \in 2^n \exists r \supseteq s \left(\langle r \rangle \cap x = \emptyset \right) \right]$$

Es claro que $\mathscr{I}_{nd} \subseteq H_{nd}$, para ver que el conjunto H_{nd} es F_σ vamos a reescribirlo. Primero, debemos notar que en la definición de H_{nd} podemos cambiar los cuantificadores universales por intersecciones y los cuantificadores existenciales por uniones de la siguiente forma:

$$H_{nd} = \bigcup_{n\in\omega}\left[\bigcup_{t\in 2^n}\{x \subseteq 2^{<\omega} \mid x\cap\langle t\rangle = \emptyset\} \cap \bigcap_{s\in 2^n}\bigcup_{r\supset s}\{x \subseteq 2^{<\omega} \mid \langle r\rangle \cap x = \emptyset\}\right]$$

Vamos a implementar notación para que sea más sencilla la prueba, llamemos $A_t = \{x \subseteq 2^{<\omega} \mid x\bigcap\langle t\rangle = \emptyset\}$ para cada $t \in 2^{<\omega}$. Con esta notación el conjunto H_{nd} se puede escribir como

$$H_{nd} = \bigcup_{n\in\omega}\left[\bigcup_{t\in 2^n} A_t \cap \bigcap_{s\in 2^n}\bigcup_{r\supseteq s} A_r\right].$$

Es suficiente que demostremos que el conjunto A_t es cerrado para cada $t \in 2^{<\omega}$ pues esto implicaría que $\bigcup_{t\in 2^n} A_t$ es cerrado por ser la unión finita de cerrados, que $\bigcup_{r\supseteq s} A_r$ es F_σ por ser la unión numerable de cerrados, que $\bigcap_{s\in 2^n}\bigcup_{r\supseteq s} A_r$ es F_σ y también que H_{nd} es F_σ.

El conjunto A_t es una familia de conjuntos tal que ningún conjunto posee una extensión de t. En otras palabras $A_t = \{x \subseteq 2^{<\omega} \mid x\cap\langle t\rangle = \emptyset\} = \bigcap_{r\supseteq t}\{x \subseteq 2^{<\omega} \mid r \notin \langle t\rangle\}$. Como para cada $r \in 2^{<\omega}$ el conjunto $\{x \subseteq 2^{<\omega} \mid r \notin \langle t\rangle\}$ es abierto y cerrado entonces también A_t es conjunto cerrado por ser la intersección numerable de conjuntos cerrados. También es claro que para cualquier $t \in 2^\omega$ el conjunto A_t es nunca denso porque para cualquier abierto U en $\mathscr{P}(2^{<\omega})$ podemos encontrar un abierto $V \subseteq U$ tal que $V \subseteq \langle t\rangle$.

Ahora llamemos $H'_{nd} = \bigcup_{t\in 2^{<\omega}} A_t$. El conjunto H'_{nd} es magro porque A_t es un cerrado nunca denso para cada $t \in 2^{<\omega}$. Además, se cumple que $\bar{\cup}[H_{nd} \times H_{nd}] \subseteq H'_{nd}$ pues si $x, y \in H_{nd}$ entonces existen $n_x, n_y \in \omega$ de la definición de H_{nd} y sin pérdida de generalidad $n_x \leq n_y$ sea $t \in 2^{n_x}$ tal que $\langle t\rangle \cap x = \emptyset$ y la extendemos a $s \in 2^{n_y}$ para encontrar $r < s$ tal que $\langle r\rangle \cap x = \emptyset$, ahora es obvio que $\langle r\rangle \cap (x \cup y) = \emptyset$. $\square$

2.3. Grietas en cocientes pseudosólidos

Teorema 2.3.1. *Si $\mathscr{I}$ es un ideal pseudosólido entonces $\mathscr{P}(\omega)/\mathscr{I}$ tiene una grieta de Hausdorff.*

Para llevar a cabo la demostración de este teorema necesitaremos primero establecer nociones de cercanía, como en la demostración del teorema de grietas de Hausdorff en $\mathscr{P}(\omega)/fin$, y de la misma manera debemos probrar una secuencia de lemas.

Definición 2.3.2. *Sean $(L_n)_{n\in\omega}$ y $(\mathscr{F}_n)_{n\in\omega}$ como en la definición de ideal pseudosólido y para cada $n\in\omega$ sea $\mathscr{F}'_n = \bigcup[\mathscr{F}_n\times\mathscr{F}_n]$. Para un ordinal α, sea $(a_\xi)_{\xi\in\alpha}$ una sucesión $<_{\mathscr{I}}$-creciente en $\mathscr{P}(\omega)/\mathscr{I}$ y sea $b\subseteq\omega$. Si $b>_{\mathscr{I}} a_\xi$ para toda $\xi<\alpha$, vamos a decir que $(a_\xi)_{\xi\in\alpha}$ está* ***$\mathscr{I}$-cerca*** *de b si:*

$$\forall n\in\omega\{\xi\in\alpha:\forall i\geq n\left[(a_\xi\setminus b)\cap L_i\in\mathscr{F}'_i\right]\}\text{ es finito}$$

y vamos a decir que $(a_\xi)_{\xi\in\alpha}$ está ***$\mathscr{I}$-muy cerca*** *de b si:*

$$\forall n\in\omega\{\xi\in\alpha:\forall i\geq n\left[(a_\xi\setminus b)\cap L_i\in\mathscr{F}_i\right]\}\text{ es finito.}$$

Aunque estas dos nociones parecen iguales, la diferencia radica en que $\mathscr{I}$-cerca pide que el conjunto $(a_\xi\setminus b)\cap L_i$ sea elemento de $\mathscr{F}_i$ mientras que $\mathscr{I}$-muy cerca pide que sea elemento de $\mathscr{F}'_i$. Es claro que si $(a_\xi)_{\xi\in\alpha}$ está $\mathscr{I}$-muy cerca de b entonces $(a_\xi)_{\xi\in\alpha}$ está $\mathscr{I}$-cerca de b.

Lema 2.3.3. *Sea $(a_\xi)_{\xi\in\alpha}$ $\mathscr{I}$-cerca de b y tal que $\forall\xi\in\alpha(a_\xi<_{\mathscr{I}} c<_{\mathscr{I}} b)$ entonces $(a_\xi)_{\xi\in\alpha}$ está $\mathscr{I}$-muy cerca de c.*

Demostración. Como $c<_{\mathscr{I}} b$ entonces $c\setminus b\in\mathscr{I}$, como $\mathscr{I}$ es pseudosólido existe $k_0\in\omega$ tal que $(c\setminus b)\cap L_i\in\mathscr{F}_i$ para cada $i>k_0$. De la misma manera, como $a_\xi<_{\mathscr{I}} c$ tenemos que $a_\xi\setminus c\in\mathscr{I}$ por lo que existe $k_1\in\omega$ tal que si $i>k_1$ entonces $((a_\xi\setminus c)\cap L_i)\in\mathscr{F}_i$. Ahora observemos que si $N = max\{k_0, k_1\}$ entonces para $i > N$ tenemos que

$$a_\xi \setminus b \subseteq (a_\xi \setminus c) \cup (c \setminus b),$$

e intesectando con L_i tenemos que

$$(a_\xi \setminus b) \cap L_i \subseteq ((a_\xi \setminus c) \cap L_i) \cup ((c \setminus b) \cap L_i),$$

y por lo tanto

$$\{\xi \mid (a_{x_i} \setminus b) \cap L_i \in \mathscr{F}_i'\} \supseteq \{\xi \mid (a_{x_i} \setminus c) \cap L_i \in \mathscr{F}_i\}.$$

Pero el primero conjunto es finito por lo que el segundo también y por lo tanto tenemos que $(a_\xi)_{\xi \in \alpha}$ está $\mathscr{I}$-muy creca de c. □

Lema 2.3.4. *Si $(a_\xi)_{\xi \in \omega_1}$ y $(b_\xi)_{\xi \in \omega_1}$ son dos sucesiones en $\mathscr{P}(\omega)/\mathscr{I}$ tales que:*

1. $\forall \xi < \eta < \omega_1 \left(a_\xi <_{\mathscr{I}} a_\eta <_{\mathscr{I}} b_\eta <_{\mathscr{I}} b_\alpha\right)$, *y*

2. $\forall \eta < \omega_1 \quad (a_\xi)_{\xi < \eta}$ *está $\mathscr{I}$-cerca de b_η*

Entonces no existe $c \in \mathscr{P}(\omega)/\mathscr{I}$ tal que: $\forall \xi < \omega_1 \quad a_\xi <_{\mathscr{I}} c <_{\mathscr{I}} b_\xi$.

Demostración. La demostración la haremos por contradicción, supongamos que sí existe $c \in \mathscr{P}(\omega)/\mathscr{I}$ tal que: $\forall \xi < \omega_1 \quad a_\xi <_{\mathscr{I}} c <_{\mathscr{I}} b_\xi$. Entonces, por el lema anterior tenemos que para cada $\alpha < \omega_1$ la familia $(a_\xi)_{\xi < \alpha}$ *está $\mathscr{I}$-muy cerca de c*. Vamos a definir la función $F : \omega \to \omega$ como:

$$F(\alpha) := min\{n \in \omega : \forall i > n[(a_\alpha \setminus c) \cap L_i \in \mathscr{F}_i\}.$$

Como $\{a_\xi \mid \xi < \alpha\}$ está $\mathscr{I}$-muy cerca de c, cada $F^{-1}[\{a\}]$ es infinito, pero ω_1 no es unión numerable de conjuntos finitos, lo que muestra una contradicción. □

Definición 2.3.5. *Sea $\mathscr{I}$ es un ideal pseudosólido y sea $\{L_n : n \in \omega\}$ como en la definición de ideal pseudosólido. Entonces definimos la función $\phi_{\mathscr{I}} : \mathscr{P}(\omega) \to \mathscr{P}(\omega)$ como:*

$$\phi_{\mathscr{I}}(x) = \bigcup_{i \in x} L_i.$$

Lema 2.3.6. *La función $\phi_{\mathscr{I}}$ determina un encaje del álgebras $\mathscr{P}(\omega)/fin$ en el álgebra $\mathscr{P}(\omega)/\mathscr{I}$. Es decir, para cualquiesquiera $a, b \in \mathscr{P}(\omega)/fin$ se cumple que:*

$$a \subset^* b \Leftrightarrow \Phi_{\mathscr{I}}(a) <_{\mathscr{I}} \Phi_{\mathscr{I}}(b).$$

Demostración. Primero supongamos que $a \subset^* b$. Entonces tenemos que demostrar que $\Phi_{\mathscr{I}}(a) \setminus \Phi_{\mathscr{I}}(b) \in \mathscr{I}$. Por definición tenemos que

$$\Phi_{\mathscr{I}}(a) \setminus \Phi_{\mathscr{I}}(b) = \bigcup_{i \in a} L_i \setminus \bigcup_{i \in b} L_i.$$

Los conjuntos L_i son ajenos, entonces tenemos que

$$\Phi_{\mathscr{I}}(a) \setminus \Phi_{\mathscr{I}}(b) = \bigcup_{i \in a \setminus b} L_i.$$

Y además tenemos que $L_i \in \mathscr{I}$ para toda $i \in \omega$ y que $a \setminus b$ es finito, entonces

$$\Phi_{\mathscr{I}}(a) \setminus \Phi_{\mathscr{I}}(b) \in \mathscr{I}.$$

Por otro lado, si suponemos que $\Phi_{\mathscr{I}}(a) \setminus \Phi_{\mathscr{I}}(b) \in \mathscr{I}$ entonces por la definición de $\Phi_{\mathscr{I}}$ y que los L_i son ajenos tenemos que

$$\Phi_{\mathscr{I}}(a \setminus b) = \bigcup_{a \setminus b} L_i \in \mathscr{I}.$$

Como $\mathscr{I}$ es pseudsólido entonces existe una $N \in \omega$ tal que para todo $k > N$

$$\left(\bigcup_{i \in a \setminus b} L_i \right) \cap L_k \in \mathscr{F}_k$$

Como para todo $k \in \omega$ el conjunto $\mathscr{F}_k$ es hereditario, si $i \in a \setminus b$ entonces:

$$L_i \cap L_k \in \mathscr{F}_k$$

Pero como $L_k \notin \mathscr{F}_k$ entonces $k \notin a \setminus b$ para ninguna $k > N$, por lo que $a \setminus b$ es finito. $\square$

Demostración. (Del teorema 2.3.1) Vamos a demostrar que si $\mathscr{I}$ es un ideal pseudosólido y $\langle (a_\xi)_{\xi<\omega_1}, (b_\xi)_{\xi<\omega_1} \rangle$ es la grieta de Hausdorff que construimos en el teorema 1.2.1 entonces $\langle (\Phi_{\mathscr{I}}(a_\xi))_{\xi<\omega_1}, (\Phi_{\mathscr{I}}(b_\xi))_{\xi<\omega_1} \rangle$ es una grieta de Hausdorff en $\mathscr{P}(\omega)/\mathscr{I}$.
Para cualesquiera $\alpha < \beta < \omega_1$ tenemos que

$$a_\alpha \subset^* a_\beta \subset^* b^c_\beta \subset^* b^c_\alpha.$$

Por lo que tenemos que

$$\Phi_{\mathscr{I}}(a_\alpha) <_{\mathscr{I}} \Phi_{\mathscr{I}}(a_\beta) <_{\mathscr{I}} \Phi_{\mathscr{I}}(b^c_\beta) <_{\mathscr{I}} \Phi_{\mathscr{I}}(b^c_\alpha).$$

Es suficiente que mostremos que para cada $\eta < \omega_1$ la sucesión $(\Phi(a_\xi))_{\xi<\eta}$ está $\mathscr{I}$-muy cerca de $\Phi(b^c_\eta)$. Es decir que para cualquier $\eta < \omega_1$ y para cualquier $n \in \omega$ se cumple que

$$\{\xi < \eta : \forall i > n(\Phi_{\mathscr{I}}(a_\xi) \setminus \Phi_{\mathscr{I}}(b^c_\eta)) \cap L_i \in \mathscr{F}_i\} \text{ es un conjunto finito.}$$

Supongamos que existe $\eta_0 < \omega_1$ y $n_0 \in \omega$ tales que:

$$\{\xi < \eta_0 : \forall i > n_0(\Phi_{\mathscr{I}}(a_\xi) \setminus \Phi_{\mathscr{I}}(b^c_{\eta_0})) \cap L_i \in \mathscr{F}_i\} \text{ es infinito.}$$

Es decir el conjunto

$$\{\xi < \eta_0 : \forall i > n_0(\Phi_{\mathscr{I}}(a_\xi \setminus b^c_{\eta_0})) \cap L_i \in \mathscr{F}_i\} \text{ es infinito.}$$

Por la definición de $\Phi_{\mathscr{I}}$ y como los L_i son ajenos tenemos que para toda $i > n_o$

$$\text{si } (\Phi_{\mathscr{I}}(a_\xi \setminus b^c_{\eta_0})) \cap L_i \in \mathscr{F}_i \text{ entonces } i \notin a_\xi \setminus b^c_{\eta_0}.$$

Por lo que tenemos que

$$\{\xi < \eta_0 : \forall i > n_0(\Phi_{\mathscr{I}}(a_\xi \setminus b^c_{\eta_0})) \cap L_i \in \mathscr{F}_i\} = \{\xi < \eta_0 : a_\xi \setminus b^c_{\eta_0} \subseteq n_0\}.$$

Es decir para cada $\xi < \eta_0$ el conjunto

$$(\star)\{\alpha < \eta_0 : a_\xi \setminus b^c_\alpha \subseteq n_0\} \text{ es infinito,}$$

ya que $n_0 \supseteq a_\xi \setminus b^c_{\eta_0} = \bigcup_{\alpha<\eta_0} a_\xi \setminus b_\alpha \supseteq a_\xi \setminus b_\alpha$.
Que el conjunto $\star$ sea infinito es una contradicción pues la grieta que construimos en $\mathscr{P}(\omega)/fin$ cumple que para cualquier $\eta < \omega_1$ y $n \in \omega$:

$$\{\xi < \eta : a_\eta \cap b_\xi \subseteq n\} \text{ es un conjunto finito.}$$

Es decir para cualesquiera $\eta < \omega_1$ y $n \in \omega$:

$$\{\xi < \eta : a_\eta \setminus b_\xi^c \subseteq n\} \text{ es un conjunto finito.}$$

Así que las familas $\langle (\Phi_{\mathscr{I}}(a_\xi))_{\xi\in\omega}, (\Phi_{\mathscr{I}}(b_\xi^c))_{\xi\in\omega}\rangle$ cumplen las hipótesis del lema 2.3.4 por tanto no existe $c \in \mathscr{P}(\omega)/\mathscr{I}$ tal que para toda $\alpha < \omega_1$:

$$a_\alpha <_{\mathscr{I}} c <_{\mathscr{I}} b_\alpha^c -$$

Por lo que entonces no existe $c \in \mathscr{P}(\omega)/\mathscr{I}$ tal que para toda $\alpha < \omega_1$

$$a_\alpha <_{\mathscr{I}} c, \quad \text{y} \quad b_\alpha \perp_{\mathscr{I}} c.$$

Por lo tanto, $\langle (\Phi_{\mathscr{I}}(a_\xi))_{\xi\in\omega}, (\Phi_{\mathscr{I}}(b_\xi))_{\xi\in\omega}\rangle$ es una grieta de Hausdorff en $\mathscr{P}(\omega)/\mathscr{I}$. $\square$

2.4. Grietas de Hausdorff en cocientes magros

Ahora vamos a trabajar sobre los cocientes $\mathscr{P}(\omega)/\mathscr{I}$ cuando $\mathscr{I}$ es un ideal magro. Un teorema importante debido a M. Talagrand y S.-A. Jalali-Naini consiste en caracterizar combinatoriamente a los ideales magros como aquellos para los que existe una partición de ω en intervalos tal que no hay ningún elemento en el ideal que contenga a una infinidad de esos intervalos. También podemos caracterizarlos topológicamente como los ideales que poseen la propiedad de Baire.

Teorema 2.4.1. *Si $\mathscr{I}$ es un ideal magro tal que $\mathscr{I} \subseteq \cup_{n\in\omega} F_n$ con F_n nunca denso entonces existe una sucesión $(x_n)_{n\in\omega}$ de números naturales y una sucesión $(d_n)_{n\in\omega}$ de conjuntos finitos no vacíos tales que para cada $n, m \in \omega$,*

1. $x_0 = 0$,

2. *para cada $n < m$ se cumple que $x_n < x_m$,*

3. *$d_n \subseteq [x_n, x_{n+1})$, y*

4. *Para cualquier $s \subseteq [0, x_n)$ se cumple que $\langle s \cup d_n \rangle \cap F_n = \emptyset$.*

Demostración. Vamos a definir por recursión a la sucesión (x_n), primero definamos $x_0 = 0$ y supongamos definidos $x_0 < ... < x_k$. Primero vamos a nombrar como $\{s_i \mid i \leq 2^{x_k}\}$ a los elementos de $\mathscr{P}([0, x_k])$ entonces como F_k es nunca denso podemos encontrar un conjunto finito $v_1 \subseteq \omega$ tal que $v_1 \cap [0, x_k] = \emptyset$ y $\langle v_1 \cup s_1 \rangle \cap F_k = \emptyset$. De la misma forma podemos encontrar un conjunto finito v_2 tal que $v_2 \cap ([0, x_k] \cup v_1) = \emptyset$ y $\langle s_2 \cup v_1 \cup v_2 \rangle \cap F_k = \emptyset$ y de hecho podemos definir toda una sucesión $\{v_i \mid i \leq 2^{x_k}\}$ que cumpla la misma propiedad. Entonces definimos:

$$d_n = \bigcup_{i \leq 2^{x_k}} v_i \qquad x_{n+1} = \sup d_n + 1$$

Si $s \subseteq [0, x_n)$ entonces $s = s_j$ para alguna $j \leq 2^{x_n}$ entonces:

$$F_k \cap \langle s_j \cup d_n \rangle \subset F_k \cap \langle s_j \cup v_1 \cup ... \cup v_j \rangle = \emptyset$$

□

Corolario 2.4.2. *(Teorema de Talagrand) Sea $\mathscr{I}$ es un ideal. $\mathscr{I}$ es magro si y sólo si existe una sucesión estrictamente creciente de números naturales $(x_n)_{n\in\omega}$ tal que ningún elemento de $\mathscr{I}$ contiene a una infinidad de intervalos $[x_n, x_{n+1})$.*

Demostración. Sea $\mathscr{I}$ un ideal magro tal que $\mathscr{I} \subseteq \cup_{n\in\omega} F_n$ donde cada F_n es nunca denso y sean $(x_n)_{n\in\omega}$ una sucesión de números naturales y una $(d_n)_{n\in\omega}$ una sucesión de conjuntos finitos no vacíos como en el teorema anterior. Sea $A \in \mathscr{I}$, supongamos que el conjunto $M = \{k \in \omega : [x_n, x_{n+1}) \subseteq A\}$ es infinito y definamos $\bar{A} = \cup_{k\in M} d_k$. Como $d_k \subseteq [x_k, x_{k+1}) \subseteq A$ entonces $\bar{A} \subseteq A$ y por lo tanto $\bar{A} \in \mathscr{I} \subseteq \bigcup_{n\in\omega} F_n$. Entonces existe $n \leq M$ tal que $\bar{A} \in F_n$ pero

$\bar{A} \in \langle d_n \rangle \cap F_n = \emptyset$, lo que es una contradicción.

Por otro lado, supongamos que $\mathscr{I}$ es un ideal tal que existe una sucesión estrictamente creciente $(x_n)_{n\in\omega}$ tal que ningún elemento de $\mathscr{I}$ contiene a una infinidad de intervalos $I_n = [x_n, x_{n+1})$. Primero debemos notar que

$$\mathscr{I} \subseteq \bigcup_{n\in\omega} \{a \subseteq \omega \mid \quad \forall k > n \quad I_n \setminus a \neq \emptyset\}.$$

Ahora es suficiente que probemos que para cada $n \in \omega$ el conjunto $\{a \subseteq \omega \mid \quad \forall k > n \quad I_n \setminus a \neq \emptyset\}$ es cerrado y nunca denso. Para cada $n \in \omega$ podemos reescribir al conjunto de la siguiente forma

$$\begin{aligned} &\{a \subseteq \omega \mid \forall k > n \quad I_n \setminus a \neq \emptyset\} = \\ &\bigcap_{k>n} \{a \subseteq \omega \mid I_k \setminus a \neq \emptyset\} = \\ &\bigcap_{k>n} \bigcup_{i\in I_k} \{a \subseteq \omega \mid i \notin a\} \end{aligned}$$

Como $\{a \subseteq \omega \mid i \notin a\}$ es cerrado nunca denso, también $\bigcup_{i\in I_k}\{a \subseteq \omega \mid i \notin a\}$ es cerrado nunca denso por ser la unión finita de cerrados nunca densos y $\bigcap_{k>n}\bigcup_{i\in I_k}\{a \subseteq \omega \mid i \notin a\}$ es cerrado nunca denso por ser la intersección numerable de conjuntos cerrados nunca densos. □

Corolario 2.4.3. *(W. Just, A. Krawczyk) Si $\mathscr{I}$ es un ideal magro entonces existe $c \subseteq \omega$ infinito y $h : \mathscr{P}(\omega)/fin \to \mathscr{P}(c)/\mathscr{I}$ encaje entre álgebras booleanas.*

Demostración. Sea $\mathscr{I} = \bigcup_{n\in\omega} F_n$ con F_n un cerrado nunca denso y tales que para toda $n \in \omega$ se cumple que $F_n \subseteq F_{n+1}$. Primero vamos a definir $c = \cup_{n\in\omega} d_n$ y $h(a) = \cup_{n\in a} d_n$, y ahora vamos a demostrar que:

$$a \subset^* b \Leftrightarrow h(a) <_{\mathscr{I}} h(b).$$

Si suponemos que $a \subset^* b$ entonces:

$$h(a) \setminus h(b) = \cup_{n \in a} d_n \setminus \cup_{n \in b} d_n = \cup_{n \in a \setminus b} d_n,$$

y éste último es un conjunto finito porque es la unión finita de conjuntos finitos por lo que es un elemento de $\mathscr{I}$.

En cambio, si suponemos que $h(a) <_{\mathscr{I}} h(b)$ entonces $\cup_{n \in a \setminus b} d_n \in \mathscr{I} \subseteq \cup_{k \in \omega} F_k$ es decir que existe $k \in \omega$ tal que $\cup_{n \in a \setminus b} d_n \in F_k$. Como $\cup_{n \in a \setminus b} d_n \in \langle \cup_{k<n} d_n \rangle$ para cada $n \in a \setminus b$ implica que si $\cup_{n \in a \setminus b} d_n \in F_k$ entonces $k \notin a \setminus b$ y de hecho como la sucesión (F_n) es $\subseteq$-creciente para cualquier $j > k$ tenemos que $j \notin a \setminus b$. Por lo que el conjunto $a \setminus b$ es finito. $\square$

Para construir una grieta de Hausdorff en los cocientes $\mathscr{P}(\omega)/\mathscr{I}$ con $\mathscr{I}$ magro vamos a construir un orden sobre el conjunto $2^{<\omega_1} \times \{0,1\}$ junto con un encaje τ de este orden en $\mathscr{P}(\omega)/fin$ el cual suponiendo que $2^\omega < 2^{\omega_1}$ poseerá una una cadena que τ enviará en una grieta de Hausdorff y que será preservada por el encaje h.

Definición 2.4.4. *La relación $\prec$ en $2^{<\omega_1} \times \{0,1\}$ está definida de la siguiente manera:*

$$(s,\varepsilon) \prec (s',\varepsilon') \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon = \varepsilon' = 0 \quad y \quad s \subseteq s', \ o \\ \varepsilon = \varepsilon' = 1 \quad y \quad s' \subseteq s, \ o \\ \varepsilon < \varepsilon' \quad y \quad y \quad s \cup s' \textit{ es una función.} \end{cases}$$

Está claro que esta relación ordena parcialmente a $2^{<\omega_1} \times \{0,1\}$, el orden restringido a $2^{<\omega_1} \times \{0\}$ es el orden usual en $2^{<\omega_1}$ y resringido a $2^{<\omega_1} \times \{1\}$ es el antiorden de $2^{<\omega_1}$ cualquier elemento de $2^{<\omega_1} \times \{1\}$ es mayor que cualquier elemento de $2^{<\omega_1} \times \{0\}$ si las primeras entradas son funciones compatibles.

Ahora vamos a definir una función $\tau : 2^{<\omega_1} \times \{0,1\} \to \mathscr{P}(\omega)/fin$ tal que:

$$(s,\varepsilon) \prec (s',\varepsilon') \Leftrightarrow \tau((s,\varepsilon)) \subset^* \tau((s',\varepsilon')).$$

Proposición 2.4.5. *Existe un encaje $\tau : 2^{<\omega_1} \times \{0,1\} \to \mathscr{P}(\omega)/fin$.*

Demostración. Vamos a decir que $long(s,\varepsilon) = \min\{\alpha : \alpha \notin \mathrm{dom}(s)\}$ para $\varepsilon \in \{0,1\}$. La construcción de esta función τ la haremos por recursión sobre $\alpha = long(s,\varepsilon)$.

Si $long(s,\varepsilon) = 0$ entonces definimos $\tau((s,0)) = \emptyset$ y $\tau((s,1)) = \omega$.

Supongamos que hemos definido $\tau((s,\varepsilon))$ con $\varepsilon \in \{0,1\}$ para cualquier (s,ε) tal que $long(s,\varepsilon) = \xi$ y sea $s : \xi \to \{0,1\}$. En el paso sucesor debemos definir de τ para los puntos: $(s^\frown 0,0), (s^\frown 1,0), (s^\frown 0,1)$, y $(s^\frown 1,1)$ pues son los sucesores inmediatos de $(s,0)$ y $(s,1)$ en donde ya definimos la función τ. El conjunto $\tau((s,1)) \setminus \tau((s,0))$ es infinito por lo que podemos partirlo en tres conjuntos x_0, x_1, x_2 infinitos y ajenos. Entonces, definimos:

$$\tau((s^\frown 0,0)) = \tau((s,0)) \cup x_0 \qquad \tau((s^\frown 0,1)) = \tau((s,0)) \setminus x_1$$
$$\tau((s^\frown 1,0)) = \tau((s,0)) \cup x_1 \qquad \tau((s^\frown 1,1)) = \tau((s,0)) \setminus x_0.$$

Por último supongamos que hemos definido $\tau((s,\varepsilon))$ con $\varepsilon \in \{0,1\}$ para cualquier (s,ε) tal que $long(s,\varepsilon) < \xi$ para algún $\xi < \omega_1$ ordinal límite. Es decir que para cualesquiera $s : \xi \to \omega : 1$ y $\alpha < \beta < \xi$:

$$\tau((s \restriction \alpha,0)) \subset^* \tau((s \restriction \beta,0)) \subset^* \tau((s \restriction \beta,1)) \subset^* \tau((s \restriction \alpha,1)).$$

Es decir que $\langle (\tau(s \restriction \alpha,0))_{\alpha<\xi}, (\tau(s \restriction \alpha,1)^c)_{\alpha<\xi} \rangle$ es una pareja ortogonal numerable entonces existe $c \in \mathscr{P}(\omega)/fin$ tal que para cualquier $\alpha < \xi$:

$$\tau(s \restriction \alpha,0) \subset^* c \subset^* \tau(s \restriction \alpha,0).$$

Entonces definimos $\tau((s,0)) = c$ y vamos a definir $\tau((s,1)) = y$ donde y es un conjunto que cumpla que:

$$\forall \beta < \alpha \qquad \tau((s,0)) \subset^* y \subset^* \tau((s \upharpoonright \beta, 1)).$$

Si suponemos que dicho y no existiera entonces $(\tau(s \upharpoonright \beta, 1) \setminus \tau(s,0))_{\beta<\alpha}$. Lo que sería una sucesión monótona, creciente y contable que no tiene supremo $\mathscr{P}(\omega)/fin$, lo cual sabemos que no existe. $\square$

Teorema 2.4.6. *Si $2^\omega < 2^{\omega_1}$ entonces existe $b : \omega_1 \to \{0,1\}$ tal que:*

$$\langle (h(\tau((b \upharpoonright \xi, 0))))_{\xi<\omega_1}, (h(\tau((b^c \upharpoonright \xi, 1))))_{\xi<\omega_1} \rangle.$$

es una grieta de Hausdoff en $\mathscr{P}(\omega)/\mathscr{I}$ donde τ es el encaje de la proposición 2.4.5.

Demostración. Supongamos que para cada $b : \omega_1 \to \{0,1\}$ existe una y_b que cumple que:

$$\forall \xi < \omega_1 h(\tau((b \upharpoonright \xi, 0))) <_{\mathscr{I}} y_b <_{\mathscr{I}} h(\tau((b \upharpoonright \xi, 1))).$$

Vamos a demostrar que esta asociación es inyectiva. Sean $b_0, b_1 : \omega_1 \to \{0,1\}$, sea $\alpha < \omega_1$ el primer ordinal en el que $b_0(\alpha) \neq b_1(\alpha)$ sin pérdida de generalidad podemos suponer que $b_0(\alpha) = 0$ y $b_1(\alpha) = 1$ y llamaremos $t = b_0 \upharpoonright \alpha = b_1 \upharpoonright \alpha$. De acuerdo con la definición de τ tenemos que $\tau((t,1)) \setminus \tau((t,0)) = x_0 \cup x_1 \cup x_2$ por lo que tenemos que:

$$\emptyset <_{\mathscr{I}} h(x_0) <_{\mathscr{I}} h\tau((b_0 \upharpoonright \alpha+1, 0))) <_{\mathscr{I}} y_{b_0}, \text{ y}$$

$$y_{b_1} <_{\mathscr{I}} h\tau((b_1 \upharpoonright \alpha+1, 1))) = \tau((t,1)) \setminus h(x_0).$$

Lo que implica que $y_{b_0} \neq y_{b_1}$ pero no pueden existir funciones inyectivas de 2^{ω_1} en $\mathscr{P}(\omega)$ pues contradice que $2^\omega < 2^{\omega_1}$. $\square$

Capítulo 3

Grietas de Hausdorff en cocientes analíticos

Para probar que las álgebras $\mathscr{P}(\omega)/\mathscr{I}$ con $\mathscr{I}$ un ideal analítico tienen una grieta de Hausdorff vamos a utilizar la misma técnica que utilizamos en el capítulo anterior. Vamos a probar que si $\mathscr{I}$ es un ideal analítico entonces existe un encaje continuo $\Phi : \mathscr{P}(\omega)/fin \to \mathscr{P}(\omega)/\mathscr{I}$ y después vamos a probar que la imagen de la grieta de Hausdorff en $\mathscr{P}(\omega)/fin$ bajo ese encaje es una grieta de Hausdorff en $\mathscr{P}(\omega)/\mathscr{I}$. Primero vamos a probar que dicho encaje existe y después vamos a probar que bajo dicho encaje la imagen de una grieta de Hausdorff también es una grieta de Hausdorff.

Para probar que existe el encaje, en la primera y segunda sección desarrollaremos una prueba que sólo utiliza hechos generales de conjuntos analíticos y de la propiedad de Baire.

Para probar que los encajes continuos preservan las grietas de Hausdorff, en la tercera y cuarta sección vamos a estudiar la teoría que Stevo Todorčevič presenta en sus dos artículos: "Analytic Gaps" [9] y "Gaps in analytic quotients" [10].

3.1. Los conjuntos analíticos de un espacio polaco

En esta sección vamos a motivar la definición de conjunto analítico y probar una caracterización de la definición de conjunto analítico.

La teoría descriptiva de conjuntos lidia con los subconjuntos de *números reales* (o semejantes) que se pueden describir de una forma simple en términos de su estructura topológica, es decir, si son abiertos, cerrados, imágenes de una función continua, etc. Podríamos decir que el tema central son preguntas que son difíciles de responder sobre conjuntos arbitrarios pero fáciles cuando se restringen a conjuntos cuya descripción es simple. El mejor ejemplo de esto es la hipótesis del continuo. Es un enunciado irresoluble para conjuntos arbitrarios, pero es verdadera para conjuntos abiertos, cerrados, G_δ, F_σ, etc. Los espacios en los que trabaja la teoría descriptiva de conjuntos se llaman **espacios polacos**. Un espacio X es polaco si y sólo si es completamente metrizable y separable. La propiedad de ser espacio polaco es topológica ya que la separabilidad y la completa metrizabilidad lo son, es necesario postular la separabilidad en el sentido de que no es una consecuencia de admitir una métrica completa, por ejemplo $(\mathbb{R}, \mathscr{P}(\mathbb{R}))$ que es completamente metrizable y no separable. Son ejemplos de espacios polacos con sus topologías usuales los siguentes conjuntos: $\mathbb{R}^n$, y $\mathbb{C}^n$, con $n \in \omega$, los espacios de sucesiones ℓ^p, y los espacios de funciones $\mathscr{L}^p(\lambda)$, con $1 \leq p \leq \infty$ y λ la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$.

Los espacios polacos son espacios topológicos estructuralmente muy ricos. Por ejemplo, la metrizabilidad y la separabilidad garantizan que sean espacios normales segundo numerables. Es una propiedad contablemente productiva, contablemente aditiva, y hereditaria únicamente a subconjuntos G_δ. La máxima cardinalidad de una familia de espacios polacos tal que su producto resulte un espacio polaco es $\aleph_0$. Esto se debe a que cualquier producto no numerable de espacios no triviales no es primero numerable. También, $\aleph_0$ es la máxima cardinalidad de una familia de espacios polacos tal que su suma resulte polaca, puesto que la suma topológica una cantidad no numerable de espacios nunca es separable. La prueba de estos resultados está fuera de las limitaciones de este trabajo. El siguiente teorema es el que motiva la definición de conjuntos analíticos.

Teorema 3.1.1. *Si X es un espacio polaco entonces existe $F \subseteq \mathcal{N}$ cerrado y $f : F \to X$ biyección continua.*
Donde $\mathcal{N} = \omega^\omega$ con la topología usual del producto.

Para probar este teorema necesitamos primero el siguiente lema.

Lema 3.1.2. *Sea X un espacio polaco, $F \subseteq X$ un conjunto F_σ y $\varepsilon > 0$ entonces existe $(F_n)_{n\in\omega}$ una sucesión de subconjuntos F_σ, ajenos dos a dos, tal que $\bigcup_{n\in\omega} F_n = F$ y tal que para cada $i \in \omega$ se cumple que $diam(F_i) < \varepsilon$ y que $cl(F_i) \subseteq F$.*

Demostración. Sea F un conjunto F_σ entonces existe una sucesión $\subseteq$-creciente $(C_n)_{n\in\omega}$ de subconjuntos cerrados de X tal que $F = \bigcup_{n\in\omega} C_n$. Tenemos que $F = \bigcup_{n\in\omega}(C_{n+1} \setminus C_n)$. Para cada $n \in \omega$ tenemos que $(C_{n+1} \setminus C_n) = (C_{n+1} \cap C_n^c) = \bigcup_{i\in\omega} C_{n+1} \cap B_i$ donde $(B_i)_{i\in\omega}$ es sucesión de conjuntos F_σ ajenos de diámetro estrictamente menor a ε y tal que $C_n^c = \bigcup_{i\in\omega} B_i$.
Llamemos $E_n^i = C_{n+1} \cap B_i$. Por lo tanto $F = \bigcup_{i,n\in\omega} E_n^i$. Además es claro que $cl(E_j^i) \subseteq cl(C_{n+1} \setminus C_n) \subseteq C_{n+1} \subseteq F$. □

Demostración. (del Teorema 3.1.1) Primero vamos a constuir una familia $(F_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$ de subconjuntos de X que cumpla:

1. F_s es F_σ,

2. $F_{s^\frown i} \subseteq F_s$,

3. Si $i \neq j$ entonces $F_{s^\frown i} \cap F_{s^\frown j} = \emptyset$,

4. $F_\emptyset = X$,

5. $F_s = \bigcup_{i\in\omega} F_{s\frown i} = \bigcup_{i\in\omega} cl(F_{s\frown i})$, y

6. $diam(F_s) \leq 2^{-long(s)}$.

La construcción de esta familia sea hace por recursión sobre $\omega^{<\omega}$ y es inmediata por el lema anterior. Definimos $F_\emptyset = X$ y si suponemos definido F_s por el lema anterior podemos encontrar una familia $(F_n)_{n\in\omega}$ que cumple con las condiciones requeridas y definimos $F_{s\frown n} = F_n$.
A través de dicha familia podemos construir: $D = \{x \in \mathscr{N} \mid \bigcap_{n\in\omega} F_{x\restriction n} \neq \emptyset\} \subseteq \mathscr{N}$, las "ramas" de la familia $(F_s)_{s\in\omega^\omega}$. Y definimos la función $f : D \to X$ como $f(x) \in \cap_{n\in\omega} F_{x|n}$.
Es claro que la función f es inyectiva y sobre, para ver que es continua es suficiente ver que $f^{-1}[U]$ es abierto de D para cualquier U abierto en X. Si tomamos $x \in f^{-1}[U]$ entonces $f(x) \in U$ es decir que $\cap_{n\in\omega} F_{x\restriction n} \subseteq U$, como el diámetro de los conjuntos F_s tiende a cero entonces existe una N suficientemente grande tal que $F_{x\restriction N} \subseteq U$ por lo tanto $\langle x \mid N\rangle \subseteq f^{-1}[U]$.
El conjunto D es cerrado para probarlo tomamos una sucesión $(x_n)_{n\in\omega}$ en D tal que $(x_n)_{n\in\omega} \to x \in \mathscr{N}$ y debemos probar que $x \in D$ es decir que $\bigcap_{n\in\omega} F_{x\restriction n} \neq \emptyset$. Como $x_k \in D$ tenemos que el conjunto $\bigcap_{n\in\omega} F_{x_k\restriction n} \neq \emptyset$ entonces podemos escoger $y_k \in \bigcap_{n\in\omega} F_{x_k\restriction n}$ para cada $k \in \omega$. Ahora vamos a probrar que la sucesión $(y_k)_{k\in\omega}$ es de Cauchy. Sea $\varepsilon > 0$, primero tomamos $N, k \in \omega$ tal que $diam(F_{x_k\restriction N}) < \varepsilon$ luego como $(y_k)_{k>N} \subseteq F_{x_k\restriction N}$ entonces $d(y_k, y_{k+1}) < diam(F_{x_k\restriction N}) < \varepsilon$ para $k > N$. Como X es polaco entonces existe $y \in X$ tal que $(y_k) \to y$. Por último vamos a argumentar que $y \in \bigcap_{n\in\omega} F_{x\restriction n}$. Supongamos que existe N tal que $y \notin F_{x\restriction N}$. Tomemos $K = min\{k \in \omega : F_{x_k|N} \not\subseteq F_{x|N}\}$, entonces $(y_k)_{k>N_K} \subseteq F_{x_k\restriction N_k} \subseteq F_{n|N}$ pero esto contradice que $(y_k) \to y$. □

El teorema anterior nos permite "codificar" a los espacios polacos como imágenes continuas de subconjuntos cerrados de $\mathscr{N}$. Esta propiedad nos habla de otro grado de complejidad topológica para subconjuntos de espacios polacos.

Definición 3.1.3. *En un espacio polaco X un conjunto $A \subseteq X$ es* analítico *si existe $f : \mathscr{N} \to X$ continua tal que $A = f[\mathscr{N}]$.*

Mientras que un espacio polaco es analítico podríamos preguntarnos cuáles son sus subconjuntos que son analíticos. El siguiente lema es una primera respuesta.

Lema 3.1.4. *Si X es polaco y $F \subseteq X$ es un conjunto cerrado, entonces F es analítico.*

Demostración. Si $F \subseteq X$ es un subconjunto cerrado de un espacio polaco, también es polaco y por el teorema 3.1.1 es analítico. □

Para el objetivo de nuestro trabajo necesitaremos caracterizar a los subconjuntos analíticos a través de diferentes maneras. En lo que resta de esta sección daremos una primera caracterización. El siguiente lema además de ayudarnos a dar la caracterización establecerá que todos los conjuntos Borel son analíticos.

Lema 3.1.5. *Si B es un conjunto Borel de un espacio polaco X entonces B es la proyección de un conjunto cerrado de $X \times \mathscr{N}$.*

Demostración. Consideramos a la familia

$$P := \{A \subseteq X \mid A = \pi_X(F), F \subseteq X \times \mathscr{N} \text{cerrado}\}.$$

Para probar que $\mathbb{B}(X) \subseteq P$ es suficiente probar que contiene a todos los conjuntos abiertos, a todos los cerrados y que es cerrada bajo intersecciones y uniones contables.

Es claro que contiene a todos los conjuntos cerrados de X. Como todo conjunto abierto es la unión numerable de conjuntos cerrados es suficiente probar que esta familia está cerrada bajo uniones e intersecciones numerables.

Sea $(A_n)_{n\in\omega}$ una sucesión en P. Para cada $n \in \omega$, sea $F_n \subset X \times \mathscr{N}$ tal que

$$A_n = \pi_X(F_n).$$

Vamos a definir el conjunto $F \subseteq X \times (\omega \times \omega^\omega)$ como

$$(x,n,s) \in F \Leftrightarrow (x,s) \in F_n.$$

Vamos a probar que el conjunto F es cerrado de $X \times (\omega \times \mathscr{N})$. Sea $\{(x_k,n_k,s_k) \mid k \in \omega\} \subseteq F$ una sucesión tal que $(x_k,n_k,s_k) \to (x,n,s)$. Como ω es un espacio discreto entonces existe una N tal que si $i > N$ entonces $n_i = n$. Así que cuando $i > N$ se cumple que $(x_i,n,s_i) \in F$ es decir que $(x_i,s_i) \in F_n$, como el conjunto F_n es cerrado de $X \times \mathscr{N}$ entonces $(x,s) \in F_n$ y por lo tanto $(x,n,s) \in F$.

Ahora observemos que en efecto la proyección de F sobre X es $\bigcup_{n\in\omega} A_n$

$$\begin{aligned} x \in \pi_X(F) &\Leftrightarrow \exists n \in \omega \quad \exists a \in \mathscr{N} \quad (x,a) \in F_n \\ &\Leftrightarrow \exists n \in \omega \quad (x \in \pi_X(F_n)) \\ &\Leftrightarrow \exists n \in \omega \quad x \in A_n \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{n\in\omega} A_n. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\bigcup_{n\in\omega} A_n \in P$. Ahora, para demostrar que $\bigcap_{n\in\omega} A_n \in P$ debemos notar que el espacio $\mathscr{N}^\omega$ es polaco por lo que existe una función continua y suprayectiva $f : \mathscr{N} \to \mathscr{N}^\omega$. A través de esta función podemos “codificar continuamente” a los conjuntos A_n y por lo tanto también a $\bigcap_{n\in\omega} A_n$ como

$$x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \Leftrightarrow \forall n \in \omega \quad \exists a_n \in \mathscr{N} \quad (x,a_n) \in F_n.$$

A la sucesión $\{a_n\} \subseteq \mathscr{N}$ la podemos ver como un elemento de $\mathscr{N}^\omega$ y de hecho, como f es supreyectiva, la podemos ver como una $f(b)$ para alguna $b \in \mathscr{N}$, por lo tanto

$$x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \Leftrightarrow \exists b \in \mathscr{N} \quad \forall n \in \omega \quad (x, f(b)(n)) \in F_n.$$

Podemos cambiar el cuantificador $\forall n \in \omega$ por una intersección sobre ω, y así

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n &\Leftrightarrow \exists b \in \mathscr{N} \quad (x,b) \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \{(x,c) \mid (x, f(c)(n)) \in F_n\} \\ &\Leftrightarrow x \in \pi_X \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} \{(x,c) \mid (x, f(c)(n)) \in F_n\} \right). \end{aligned}$$

Para probar que el conjunto $\bigcap_{n=0}^{\infty}\{(x,c) \mid (x, f(c)(n)) \in F_n\}$ es cerrado basta ver que cada uno de sus intersecandos es cerrado. Sea $n \in \omega$. Para probar que el conjunto $\{(x,c) \mid (x, f(c)(n)) \in F_n\}$ es cerrado vamos a definir $h : X \times \mathscr{N} \to X \times \mathscr{N}$ como $h(x,a) = (x, f(a)(n))$. Esta función es continua pues si tomamos la sucesión $(x_k, a_k) \subseteq X \times \mathscr{N}$ tal que converge a (x,a) entonces $h(x_k, a_k) = (x_k, f(a_k)(n)) \to (x, f(a)(n))$ porque f es continua. Ya que el conjunto F_n es cerrado el conjunto $\{(x,c) \mid (x, f(c)(n)) \in F_n\}$ también lo es pues $h^{-1}[F_n] = \{(x,c) \mid (x, f(c)(n)) \in F_n\}$. Por lo tanto, $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$ y $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ son elementos de P. □

Teorema 3.1.6. *Si $A \subseteq X$ con X un espacio polaco, son equivalentes:*

1. *A es analítico.*
2. *A es la imagen continua de algún conjunto Borel (para algún espacio polaco Y).*
3. *A es la proyección de algún conjunto Borel de $X \times Y$ (para algún espacio polaco Y).*
4. *A es la proyección de un conjunto cerrado de $X \times \mathscr{N}$.*

Demostración. (1. $\Rightarrow$ 4.) Si A es un conjunto analítico podemos tomar $f : \mathscr{N} \to X$ tal que $f(\mathscr{N}) = A$, así A es la proyección del conjunto $\{(f(x), x) \mid x \in \mathscr{N}\}$ que es un conjunto cerrado de $X \times \mathscr{N}$. (4. $\Rightarrow$ 3.) Se sigue de que todos los conjuntos cerrados son Borel y $\mathscr{N}$ es polaco. (3. $\Rightarrow$ 2.) Se sigue de que el producto de dos espacios polacos es polaco. (2. $\Rightarrow$ 1.) Todo conjunto Borel de un espacio polaco es un conjunto analítico, y la imagen continua de un analítico es un analítico porque la composición de funciones continuas es continua. $\square$

3.2. La propiedad de Baire y una cierta minimalidad de $\mathscr{P}(\omega)/fin$

El objetivo de esta sección es probar que si $\mathscr{I}$ es un ideal analítico entonces existe un encaje continuo con respecto a la topología de $\mathscr{P}(\omega)$, $\Phi : \mathscr{P}(\omega)/fin \to \mathscr{P}(\omega)/\mathscr{I}$. Para esto vamos a dar otra caracterización de los conjuntos analíticos para probar que tienen la propiedad de Baire. La propiedad de Baire tiene origen en el Teorema de Categoría de Baire establece que la intersección numerable de un conjuntos abiertos densos de $\mathbb{R}$ es no vacía. La demostración de este teorema es facilmente trasladable a cualquier espacio polaco pues usa exclusivamente el hecho de que $\mathbb{R}$ admite una métrica completa y un denso numerable.

El concepto de conjunto nunca denso retrata a una familia de conjuntos "chiquitos", son chiquitos pues evaden a todo un abierto denso. Los conjuntos magros pueden ser "grandes" en otro sentido, por ejemplo en $\mathbb{R}$ el conjunto de números racionales es magro y denso. Más bien el concepto de magro retrata a aquellos conjuntos que se pueden ver como la unión a lo más contable de conjuntos que "sí son chiquitos". El Teorema de Categoría de Baire establece que el total nunca es un magro y una consecuencia inmediata es que ninguno de sus subconjuntos G_δ densos es magro.

Este concepto también nos permite identificar a aquellos conjuntos que son "casi abiertos", es decir aquellos que son abiertos salvo por un conjunto magro.

Definición 3.2.1. *En un espacio polaco X, un conjunto $A \subseteq X$ tiene la* propiedad de Baire *si existe $G \subseteq X$ abierto tal que $A \Delta G$ es un conjunto magro.*

Los conjuntos magros tienen la propiedad de Baire pues son “casi el vacío” y también los conjuntos abiertos tienen esta propiedad pues $G\Delta G = \emptyset$. Si un conjunto tiene la propiedad de Baire, también su complemento la tiene.

Proposición 3.2.2. *Si $(A_n)_{n\in\omega}$ es una sucesión de conjuntos en X que cumple la propiedad de Baire, entonces $\bigcup_{n\in\omega}^{\infty} A_n$ cumple la propiedad de Baire.*

Demostración. Para cada $n \in \omega$ sea G_n un abierto tal que $A_n\Delta G_n$ es magro, entonces

$$\left(\bigcup_{n\in\omega}^{\infty} A_n\right) \Delta \left(\bigcup_{n\in\omega}^{\infty} G_n\right) \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} (A_n\Delta G_n).$$

Cada $A_n\Delta G_n$ es magro por hipótesis y la unión numerable de magros es magra. Como $(\bigcup_{n\in\omega}^{\infty} A_n)\,\Delta\,(\bigcup_{n\in\omega}^{\infty} G_n)$ es subconjunto de un conjunto magro, también es magro. □

Todos los abiertos tienen la propiedad de Baire, si un conjunto tiene la propiedad de Baire entonces también la tiene su complemento y las uniones numerables preservan la propiedad de Baire. Por lo tanto, la colección de conjuntos que cumple la propiedad de Baire forma una σ-álgebra que contiene a los conjuntos abiertos y por lo tanto a todos los conjuntos Borel. Es bastante claro que todo conjunto Borel tiene la propiedad de Baire. De hecho, lo podemos escribir como el siguiente lema.

Lema 3.2.3. *En un espacio polaco, todos los conjuntos Borel tienen la propiedad de Baire.*

Pero, ¿y los conjuntos analíticos? Al final de esta sección probaremos que la respuesta sea afirmativa. Para esto, un resultado que nos será de mucha utilidad es que cualquier subconjunto de un espacio polaco se puede “aproximar” con un conjunto que tenga la propiedad de Baire.

Teorema 3.2.4. *Para cualquier $S \subseteq X$ de un espacio polaco X existe un conjunto $A \subseteq X$ tal que $S \subseteq A$ y que cumplen la propiedad de Baire tal que si $Z \subseteq A \setminus S$ que cumpla que cumple la propiedad de Baire entonces Z es magro.*

Demostración. Primero, vamos a denotar por $\mathscr{O}$ a una base numerable para la topología de X. Para $S \subseteq X$ definimos

$$D(S) := \{x \in X \mid \text{ para cada } U \in \mathscr{O} \text{ si } x \in U \text{ entonces } U \cap S \text{ no es magro}\}.$$

$D(S)$ es el conjunto de puntos que tienen un sistema de vecindades en el que S es no magro, es decir que su complemento es la unión de conjuntos abiertos donde S es magro. Así que $D(S)$ es un conjunto cerrado. El conjunto $S \setminus D(S)$ es la unión de los conjuntos $S \cap U$ donde $U \in \mathscr{O}$ y $S \cap U$ es magro. Ya que $\mathscr{O}$ es numerable $S \setminus D(S)$ es un conjunto magro. Definimos

$$A = S \cup D(S).$$

Este conjunto tiene la propiedad de Baire porque $A = (S \setminus D(S)) \cup D(S)$, es la unión de un conjunto magro con un conjunto cerrado.
Sea $Z \subseteq A \setminus S$ que cumple la propiedad de Baire y supongamos que no es un conjunto magro. Entonces existe $U \in \mathscr{O}$ tal que $U \setminus Z$ es magro; asi que $U \cap S$ es magro. Ya que $U \cap Z \neq \emptyset$ y $Z \subseteq D(S)$ existe $x \in U$ tal que $x \in D(S)$ y por tanto $U \cap S$ no es magro, lo que es una contradicción. $\square$

Ahora vamos a caracterizar a los conjuntos analíticos como el resultado de una operación conjuntista. Si $(A_s)_{s \in \omega^{<\omega}}$ es una familia de conjuntos indexada por el conjunto de sucesiones finitas de números naturales entonces definimos la operación de Suslin como:

$$\mathscr{A}\left(\{A_s\}_{s \in \omega^{<\omega}}\right) := \bigcup_{a \in \omega^\omega} \bigcap_{n=0}^{\infty} A_{a \restriction n}.$$

Lema 3.2.5. *Un conjunto $A \subseteq X$ de un espacio polaco X es analítico si y sólo si es el resultado de la operación de Suslin aplicada a una familia de conjuntos cerrados de X.*

Demostración. Primero, sea $(F_s)_{\omega^{<\omega}}$ una familia de subconjuntos cerrados de X y sea $A = \mathscr{A}(\{A_s\}_{s\in\omega^{<\omega}})$. Debemos probar que A es analítico.

Sea $F = \{(x,r) \in X \times \mathscr{N} \mid \forall n \in \omega \quad x \in A_{r\restriction n}\}$. Se puede ver que $F = \bigcap_{n\in\omega} \bigcup_{s\in\omega^n} A_s \times \langle s \rangle$. Se prueba que $\bigcup_{s\in\omega^n} A_s \times \langle s \rangle$ es cerrado pues si $(x_k, r_k) \to (x,r)$ entonces existe un $N \in \omega$ tal que si $k > N$ entonces tenemos que $r_k \cap [0,N) = r \cap [0,N)$ por lo que $x_k \in A_{r\restriction n}$ y por lo tanto $(x,r) \in A_{r\restriction N} \times r \cap [0,N)$. Por último observemos que $\pi_X(F) = A$. Recíprocamente, si A es analítico existe $f : \mathscr{N} \to X$ tal que $f[\mathscr{N}] = A$. Para cada $a \in \omega^\omega$

$$\{f(a)\} \subseteq \bigcap_{n\in\omega} f[\langle a \mid n \rangle] \subseteq \bigcap_{n\in\omega} cl_X(f[\langle a \mid n \rangle]).$$

Por lo tanto,

$$A = f[\mathscr{N}] \subseteq \bigcup_{a\in\mathscr{N}} \bigcap_{n=0}^{\infty} cl_X(f[\langle a \mid n \rangle]).$$

La contención $\supset$ se cumple porque si $x \in \bigcup_{a\in\mathscr{N}} \bigcap_{n=0}^{\infty} cl_X(f[\langle a \mid n \rangle])$ entonces existe $a \in \mathscr{N}$ tal que $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} f[\langle a \mid n \rangle]$, es decir que $x = f(a)$. Y por lo tanto A es el resultado de la operación $\mathscr{A}$ aplicada a los conjuntos $cl_X(f[\langle a \mid n \rangle])$. $\square$

Teorema 3.2.6. *En un espacio polaco, todos los conjuntos analíticos tienen la propiedad de Baire.*

Demostración. Sea $A \subseteq X$ un conjunto analítico no vacío. Sea $f : \mathscr{N} \to X$ tal que $f[\mathscr{N}] = A$. Para cada $s \in \omega^{<\omega}$ sea $A_s = f[\langle s \rangle]$. Tenemos que:

$$A = \mathscr{A}\left(\{A_s \mid s \in \omega^{<\omega}\}\right) = \mathscr{A}\left(\{cl(A_s) \mid s \in \omega^{<\omega}\}\right)$$

y que para cada $s \in \omega^{<\omega}$:

$$A_s = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_{s\frown n}.$$

Por el teorema 3.2.4, para cada $s \in \omega^{<\omega}$ existe $B_s \supseteq A_s$ que cumple la propiedad de Baire que cumple que si $Z \subseteq B_s \setminus A_s$ y tiene la propiedad de Baire, entonces es magro. Además, como $cl(A_s)$ tiene la propiedad de Baire, de hecho podemos encontrar un tal B_s que además cumpla que $A_s \subseteq B_s \subseteq cl(A_s)$.

Vamos a definir $B = B_\emptyset$. Como B tiene la propiedad de Baire y $B \supseteq A_\emptyset = A$ es suficiente demostrar que $B \setminus A$ es magro para garantizar que A tenga la propiedad de Baire. Es importante observar que como $A_s \subseteq B_s \subseteq cl(A_s)$ tenemos que:

$$A = \mathscr{A}\left(\{B_s \mid s \in \omega^{<\omega}\}\right)$$

Entonces,

$$B \setminus A = B \setminus \bigcup_{a \in \omega^\omega} \bigcap_{n=0}^{\infty} B_{a \restriction n}$$

Afirmamos que

$$B \setminus \bigcup_{a \in \omega^\omega} \bigcap_{n=0}^{\infty} B_{a \restriction n} \subseteq \bigcup_{s \in \omega^{<\omega}} \left(B_s \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} B_{s \frown k}\right)$$

Para comprabar la contención anterior notemos que si $x \in B$ y

$$x \notin \bigcup_{s \in \omega^{<\omega}} \left(B_s \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} B_{s \frown k}\right)$$

entonces para toda $s \in \omega^{<\omega}$, si $x \in B_s$ entonces existe $k_0 \in \omega$ tal que $x \in B_{s \frown k_o}$. Así, podemos construir recursivamente $k_0, k_1, k_2, ...$ tal que si $a = s^\frown < k_0, k_1, k_2, ... >$ entonces $x \in \bigcap_{k=0}^{\infty} B_{a \restriction k}$ y por tanto $x \notin B \setminus \bigcup_{s \in \omega^\omega} \bigcap_{n=0}^{\infty} B_{a \restriction n}$.

Como $\omega^{<\omega}$ es un conjunto numerable, basta probar que $B_s \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} B_{s \frown k}$ es magro para toda $s \in \omega^{<\omega}$. Como B_s y todas las $B_{s \frown k}$ tienen la propiedad de Baire, también $B_s \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} B_{s \frown k}$ por ser la unión numerable de y diferencia de conjuntos que cumple la propiedad de Baire.

Además, tenemos que para toda $s \in \omega^{<\omega}$,

$$Z = B_s \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} B_{s^\frown k} \subseteq B_s \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} A_{s^\frown k} \subseteq B_s \setminus A_s.$$

Z tiene la propiedad de Baire y $Z \subseteq B_s \setminus A_s$ entonces es magro. □

Hay un hecho que resulta fundamental al estudiar los subconjuntos del Cantor que cumple la propiedad de Baire y es que los ideales que tienen la propiedad de Baire son exactamente los ideales magros.

Teorema 3.2.7. *Si $\mathscr{I}$ es un ideal que cumple la propiedad de Baire entonces $\mathscr{I}$ es un ideal magro.*

Demostración. Sea $\mathscr{I}$ un ideal que cumple la propiedad de Baire y supongamos que $\mathscr{I}$ no es magro. Como $\mathscr{I}$ tiene la propiedad de Baire podemos encontrar conjunto $U = \langle t \rangle$ para alguna $t \in 2^{<\omega}$ tal que es abierto y cerrado y $\mathscr{I} \cap U$ es comagro. Los conjuntos $\mathscr{I}$ y $\mathscr{I}^*$ son homemorfos entonces también son homeomorfos $\mathscr{I} \cap U$ y $\mathscr{I}^* \cap U$ pero esto contradice el Teorema de Categoría de Baire pues no puede haber dos conjuntos comagros y ajenos. □

Proposición 3.2.8. *Si $\mathscr{I}$ es un ideal analítico entonces existe una función $h : \omega \to \omega$ tal que*

$$fin = \{a \subseteq \omega \mid h^{-1}[a] \in \mathscr{I}\}.$$

Demostración. Sea $\mathscr{I}$ un ideal analítico, entonces por el Teorema 3.2.6 tiene la propiedad de Baire y por el Teorema 3.2.7 es magro y por el Teorema 2.4.2 existe una sucesión de números naturales estrictamente creciente $(x_n)_{n\in\omega}$ tal que ningún elemento de $\mathscr{I}$ contiene a una infinidad de intervalos $[x_n, x_{n+1})$. Podemos definir $h : \omega \to \omega$ de la siguiente manera

$$h(n) = k \Leftrightarrow n \in [x_k, x_{k+1}).$$

Si $h^{-1}[a] \in \mathscr{I}$ entonces $h^{-1}[a] = \bigcup_{n\in a} h^{-1}[\{n\}] = \bigcup_{n\in a}[x_n, x_{n+1}) \in \mathscr{I}$. Como ningún elemento de $\mathscr{I}$ contiene una infinidad de intervalos de la sucesión $(x_n)_{n\in\omega}$ entonces a es un conjunto finito. Por otro lado si a es finito es claro que $h^{-1}[a] \in \mathscr{I}$ pues $h^{-1}[a]$ también es un conjunto finito por ser la unión finita de intervalos finitos. □

Teorema 3.2.9. *Si $\mathscr{I}$ es un ideal analítico y $h : \omega \to \omega$ la función del teorema 3.2.7 entonces la función $\Phi_h : \mathscr{P}(\omega) \to \mathscr{P}(\omega)$ definida como*

$$\Phi_h(a) = h^{-1}[a]$$

cumple que

$$a \subseteq^* b \Leftrightarrow \Phi_h(a) \leq_{\mathscr{I}} \Phi_h(b).$$

Demostración. Primero debemos notar que $\Phi_h(a) \setminus \Phi_h(b) = h^{-1}[a] \setminus h^{-1}[b] = h^{-1}[a \setminus b] = \Phi_h(a \setminus b)$, por lo que es suficiente probar que

$$\Phi_h(a) \in \mathscr{I} \Leftrightarrow a \in fin.$$

Es claro que si $a \in fin$ entonces $\Phi_h(a) \in \mathscr{I}$ porque $\Phi_h(a)$ es la unión finita de fibras y cada fibra es un intervalo finito

$$\Phi_h(a) = h^{-1}[a] = \bigcup_{n\in a} h^{-1}[\{a\}] = \bigcup_{n\in a}[a_n, a_n + 1).$$

Donde $(a_n)_{n\in\omega}$ es la sucesión del teorema 2.4.2. Por otro lado si $\Phi_h(a) \in \mathscr{I}$ entonces $h^{-1}[a] \in \mathscr{I}$ y por la propiedad que cumple h tenemos que $a \in fin$. □

El teorema anterior es establece un cierto tipo de minimalidad de $\mathscr{P}(\omega)/fin$ frente a los cocientes analíticos. Pues para cualquier $\mathscr{P}(\omega)/\mathscr{I}$, con $\mathscr{I}$ un ideal analítico, existe un encaje $\Phi_h : \mathscr{P}(\omega) \to \mathscr{P}(\omega)/\mathscr{I}$. De hecho, Φ_h es un encaje continuo pues la función h es finito a uno.

Porque si $x \in fin$ entonces $h^{-1}[x] = \bigcup_{n\in x} h^{-1}[\{n\}] = \bigcup_{n\in x}[a_n, a_{n+1}) \in fin$.

3.3. Grietas Analíticas

En esta sección vamos a estudiar un resultado sobre la complejidad topológica de las grietas de Hausdorff en $\mathscr{P}(\omega)/fin$ que nos ayudará a probar que el encaje de la sección anterior es el buscado. En el Capítulo 1 probamos que en $\mathscr{P}(\omega)/fin$ existen familias ortogonales que no pueden ser separadas, en esta sección vamos a preguntar por el grado de complejidad topológica de estas famiilas. Primero, vamos a dar un ejemplo $\langle A,B\rangle$ de una grieta de Rothberger en $\mathscr{P}(\omega)/fin$ donde A y B son conjuntos Borel y al final de la sección mostraremos que si $\langle A,B\rangle$ es una grieta de Hausdorff en $\mathscr{P}(\omega)/fin$ entonces A y B no pueden ser conjuntos analíticos. De hecho, vamos a probar un resultado más general que tendrá como corolario que las grietas de Hausdorff en $\mathscr{P}(\omega)/fin$ no pueden ser conjuntos analíticos.

Proposición 3.3.1. *Existe $\langle A,B\rangle$ una pareja ortogonal en $\mathscr{P}(\omega)/fin$ tal que A y B son conjuntos Borel y tal que no puede ser separada.*

Demostración. Vamos a definir $a_i := \{2^i(2n+1) \mid n \in \omega\}$ y $A = \{a_i\}_{i\in\omega}$, A es F_σ por ser numerable. También definimos $B = \{b \subseteq \omega \mid \forall n \in \omega \quad a_n \perp b\}$. B también es un conjunto Borel porque

$$\begin{aligned}
B =& \{b \subseteq \omega \mid \forall n \in \omega \quad b \perp a_n\} \\
=& \{b \subseteq \omega \mid \forall n \in \omega \quad b \cap a_n \in fin(a_n)\} \\
=& \bigcap_{n\in\omega} \{b \subseteq \omega \mid b \cap a_n \in fin(a_n)\} \\
=& \bigcap_{n\in\omega} \bigcup_{x\in fin(a_n)} \langle x\rangle.
\end{aligned}$$

Supongamos que las familias $\langle A,B\rangle$ pueden ser separadas por un cierto conjunto c, entonces para cada $n\in\omega$ podemos escoger $x_n \in c\cap a_n$ y podemos definir el conjunto $\bar{b}=\{x_n \mid n\in\omega\}$. El conjunto $\bar{b}$ es un elemento de B pero $\bar{b}\not\perp c$ porque $\bar{b}\subseteq c$. □

La pareja ortogonal que construimos en la proposición anterior es muy parecida a la que construimos en 1.1.4 pues cumple que $\mid A\mid=\omega$ y $\mid B\mid=\mathfrak{b}$. Para ver que esta última igualdad se cumple hay que recordar la prueba del teorema 1.1.3, cada a_n la podemos biyectar con la enésima línea vertical de $\omega\times\omega$ y bajo esa correspondencia un $b\in B$ es una función de ω en ω. Si la familia de funciones de B está $\leq$-acotada, entonces la correspondiente función separaría al par $\langle A,B\rangle$ lo que es una contradicción. Cabe mencionar que el argumento anterior sólo prueba que $\mid B\mid\leq\mathfrak{b}$, la otra desigualda se cumple por la $\subseteq$-maximalidad de B.
Para poder mostrar que las grietas de Hausdorff en $\mathscr{P}(\omega)/fin$ no son analíticas necesitamos las siguientes definiciones.

Definición 3.3.2. *Para cualquier familia $A\subseteq\mathscr{P}(\omega)$ definimos $A^{\perp}:=\{b\subset\omega\mid\forall a\in A\quad a\perp b\}$ y para cualquier par de familias $\langle A,B\rangle$ decimos que:*

1. *A está* numerablemente generada *en $B^{\perp}$ si hay una sucesión numerable $\{c_n\mid n\in\omega\}\subseteq B^{\perp}$ que cumple que para cualquier $a\in A$ existe un c_n tal que $a\subseteq^* c_n$.*

2. *B es σ-dirigida si para cada sucesión $(b_n)_{n\in\omega}\subseteq B$ existe un elemento $b\in B$ tal que $b_n\subseteq^* b$ para cualquier n.*

Ahora podemos enunciar el teorema central de esta sección.

Teorema 3.3.3. *Si A y B son familias ortogonales en $\mathscr{P}(\omega)$ tal que A es analítica, entonces A está numerablemente generada en $B^{\perp}$ si y sólo si cada $B_0\subseteq B$ numerable está separado de A.*

Este teorema es fundamental en el estudio de familias ortogonales en $\mathscr{P}(\omega)$. Como consecuencia inmediata a este teorema podemos probar que las grietas de Hausdorff en $\mathscr{P}(\omega)/fin$

no son conjuntos analíticos. Para demostrar el Teorema 3.3.3 vamos a probar primero una versión más precisa cuyo enunciado necesita las siguientes definiciones. Primero vamos a denotar

$$[\omega]^{<\omega} \otimes [\omega]^{<\omega} := \{(s,t) \in [\omega]^{<\omega} \times [\omega]^{<\omega} :| s |=| t |\}$$

ordenado a través del orden del producto $(x,y) < (a,b) \Leftrightarrow x \subseteq a \quad \& \quad y \subseteq b$.

Definición 3.3.4. *Para un subconjunto $B \subseteq \mathscr{P}(\omega)$, vamos a decir que $\Sigma \subseteq [\omega]^{<\omega}$ es un B-árbol si*

1. $\emptyset \in \Sigma$*, y*

2. *para cada $\sigma \in \Sigma$ el conjunto $\{i \mid \sigma^\frown i \in \Sigma\}$ es infinito y es un elemento de B.*

Ahora podemos enunciar la versión más precisa que nos ayudará a demostrar el Teorema 3.3.3.

Teorema 3.3.5. *Sean A y B dos familias ortogonales y hereditarias en $\mathscr{P}(\omega)$ tal que A es analítica. Si A no es numerablemente generada en $B^\perp$, entonces existe un B-árbol Σ tal que para cualquier $\{s_n \mid n \in \omega\}$ rama en Σ se cumple que $\bigcup_{n\in\omega} s_n \in A$.*

Demostración. (Del Teorema 3.3.5) Sea A como en las hipótesis del teorema tal que no está numerablemente generada en $B^\perp$. Como A es analítica entonces el conjunto $A \cap [\omega]^\omega$ también lo es porque es la interescción de un conjunto analítico con un conjunto G_δ, $[\omega]^\omega$ es G_δ porque su complemento fin es F_σ y la función $\overline{\cap}$ es continua.

Entonces por el teorema 3.1.6 existe un conjunto $F \subseteq \mathscr{N} \times \mathscr{N}$ cerrado cuya proyección sobre la primera entrada es $A \cap [\omega]^\omega$. Ahora, observemos que podemos biyectar a $\mathscr{N}$ con $[\omega]^\omega$ interpretando a cada elemento de $\mathscr{N}$ como una función característica de $\mathscr{P}(\omega)$. Podemos considerar ahora a $F' \subseteq [\omega]^\omega \times [\omega]^\omega$ tal que su proyección bajo la primera entrada es $A \cap [\omega]^\omega$. Podemos construir $T \subseteq [\omega]^{<\omega} \otimes [\omega]^{<\omega}$ tal que sus ramas sean los elementos de F',

$T = \{(x \cap [0,n), y \cap [0,n)) \mid (x,y) \in F', \quad n \in \omega\}$. Podemos caracterizar a este conjunto T como que para cualquier $a \subseteq \omega$ se tiene que $a \in A \cap [\omega]^\omega$ si y sólo si existe una rama $\{(s_n, t_n) \mid n \in \omega\}$ en T tal que $a = \cup_{n \in \omega} s_n$. Si $a \subseteq \omega$ vamos a denotar f_a a la primer rama en T con respecto al orden lexicográfico que cumple con esta propiedad.

Para un $(s,t) \in T$ definimos los conjuntos

$$A(s,t) = \{a \in A \mid (s,t) \in f_a\}, \quad \text{y}$$

$$T_0 := \{(s,t) \in T \mid A(s,t) \text{ está numerablemente generado en } B^\perp\}.$$

T_0 es un subconjunto de T que cumple con ser cerrado bajo sucesores, es decir: si $(s,t) \in T_0$ y $(s,t) < (s',t')$ entonces $(s',t') \in T_0$. Esto se cumple pues si $(s,t) < (s',t')$ entonces $A(s,t) \supset A(s',t')$ y porque un subconjunto de un conjunto numerablemente generado en $B^\perp$ también es numerablemente generado en $B^\perp$. Analogamente, el complemento $T_1 = T \setminus T_0$ es un subconjunto cerrado bajo predecesores. Además T_1 es no vacío porque si $(s,t) = \min T_1$ entonces $A(s,t) = A \notin T_0$ por la suposición de que A no está numerablemente generada en $B^\perp$. Más aún para cada $(s,t) \in T_1$ el conjunto

$$A_1 = A \setminus \bigcup_{(s,t) \in T_0} A(s,t)$$

es no vacío y para cada $a \in A_1$ la rama f_a es un subconjunto de T_1. Y de hecho para cualquier $(s,t) \in T_1$ el conjunto

$$A_1(s,t) := \{a \in A_1 \mid (s,t) \in f_a\}$$

no está numerablemente generado en $B^\perp$ para ningún $(s,t) \in T_1$.

El B-árbol $\Sigma \subseteq [\omega]^{<\omega}$ que buscamos para verificar la conclusión del teorema se construye por recursión junto con una sucesión (s_σ, t_σ) $(\sigma \in \Sigma)$ de elementos de T_1 y una sucesión d_σ $(\sigma \in \Sigma)$

de elementos de B tales que las siguientes condiciones se satisfacen:

1. Si $\tau \supset \sigma$ entonces $(s_\tau, t_\tau) > (s_\sigma, t_\sigma)$,

2. Para toda $\sigma \in \Sigma$ se cumple que $\sigma \subseteq s_\sigma$, y

3. Si denotamos $b_\sigma := \{i \in d_\sigma \mid \sigma^\frown i \in \Sigma\}$ entonces para toda $\sigma \in \Sigma$ se cumple que b_σ es infinito.

Vamos a empezar la recursión estableciendo que $\emptyset \in \Sigma$. Así, $s_\emptyset = t_\emptyset = \emptyset$. Ahora supongamos que hemos definido recursivamente hasta tener una $\sigma \in \Sigma$ y $(s_\sigma, t_\sigma) \in T_1$. Entonces $A(s_\sigma, t_\sigma)$ no está numerablemente generado en $B^\perp$, así que en particular $c_\sigma = \cup A(s_\sigma, t_\sigma)$ no es un elemento de $B^\perp$ por ser una cota de $A_1(s_\sigma, t_\sigma)$. Por lo tanto, c_σ no es ortogonal a B entonces podemos encontrar $d_\sigma \in B$ tal que $d_\sigma \cap c_\sigma$ sea infinito. Consideremos el conjunto:

$$b_\sigma := \{i \in c_\sigma \cap d_\sigma \mid i > max(s_\sigma)\}$$

Para cada $i \in b_\sigma$ podemos encontrar un $a_i \in A_1(s_\sigma, t_\sigma)$ tal que $i \in a_i$ y sea (s^i, t^i) un elemento minimal de la rama f_{a_i} tal que $i \in s^i$ e $i \in t^i$. Finalmente, si $i \in b_\sigma$ sea $s_{\sigma^\frown i} = s^i$ y $t_{\sigma^\frown i} = t^i$. Esto concluye nuestra construcción por recursión.

Es claro que el conjunto Σ que construimos es un B-árbol ya que $\emptyset \in \Sigma$ y $\{i \in \omega \mid \sigma \cup \{i\} \in \Sigma\} = b_\sigma \subseteq d_\sigma \in B$ y como B está cerrada bajo subconjuntos $b_\sigma \in B$. Si $\tau \supset \sigma$ con $\tau, \sigma \in \Sigma$ entonces $\tau = \sigma \cup \{i_0, ..., i_n\}$ por lo que $s_\sigma \subset s_{\sigma \cup \{i_0\}} \subset \cdots \subset s_{\sigma \cup \{i_0, ..., i_n\}} = s_\tau$ y analogamente $t_\sigma \subset t_\tau$. Para ver que nuestra segunda condición se satisface basta notar que por hipótesis de recursión tenemos que $\sigma \subset s_\sigma \subset s^i$ y que $i \in s^i$ por lo que $\sigma \cup \{i\} \subset s_{\sigma \cup \{i\}}$. También es claro que la tercera condición se satisface.

Ahora basta ver que la conclusión del teorema se satisface, es decir que cualquier rama de nuestro B-árbol Σ es un elemento de A. Sea $a = \{i_n \mid n \in \omega\}$ un subconjunto infinito de ω

enumerado de forma creciente tal que determina una rama de Σ es decir:

$$\sigma_0 = \emptyset, \qquad \sigma_1 = \{i_0\}, \qquad \sigma_2 = \{i_0, i_1\}, \ ...$$

Entonces para cada $i \in \omega$ los conjuntos $(s_{\sigma_i}, t_{\sigma_i})$ son elementos de T_1 por nuestra construcción y determinan una rama cuya unión es un elemento de A:

$$\bar{a} = \bigcup_{i \in \omega} s_{\sigma_i}$$

Además como $\sigma_i \subseteq s_{\sigma_i}$ tenemos que $a \subseteq \cup_{i \in \omega} s_{\sigma_i} = \bar{a}$ y como A está cerrada bajo subconjuntos $a \in A$. □

Ahora podemos demostrar la equivalencia que establece el Teorema 3.3.3, lo haremos a través de los siguientes dos lemas para hacer explícito el uso del Teorema 3.3.5. El siguiente lema prueba "la ida" del Teorema 3.3.3 y se prueba a través de un cálculo directo.

Lema 3.3.6. *Sean A y B dos familias ortogonales y hereditarias tales que A es analítica. Si A está numerablemente generada en $B^{\perp}$ entonces todo $B_0 \subseteq B$ puede ser separado de A.*

Demostración. Sean A y B dos familias ortogonales tales que A es analítica y cerrada bajo subconjuntos. Si A está numerablemente generada en $B^{\perp}$. existe una sucesión $\{c_n \mid n \in \omega\} \subseteq B^{\perp}$ tal que para todo $a \in A$ existe un número natural $n \in \omega$ tal que $a \subseteq^* c_n$. Y sea $B_0 = \{b_n \mid n \in \omega\} \subseteq B$. Es claro que

$$C = \bigcup_{n \in \omega} \left(c_n \setminus \bigcup_{j<n} b_j \right)$$

es un separador de B_0 y A ya que $C \in B_0^{\perp}$ y para cualquier $a \in A$ se cumple que $a \subseteq^* C$. □

Ahora, la contrapuesta del siguiente lema establece que si todo $B_0 \subseteq B$ numerable está separado de A entonces no existe el B-árbol del Teorema 3.3.5 por lo que A está numerablemente generada en $B^{\perp}$ lo que concluye "el regreso" del Teorema 3.3.3.

Lema 3.3.7. *Sean $\langle A,B\rangle$ un par de familias ortogonales y hereditarias tal que A es analítica. Si existe un B-árbol Σ tal que para cualquier $\{s_n \mid n\in\omega\}$ rama en Σ se cumple que $\bigcup_{n\in\omega} s_n \in A$ entonces existe $B_0\subseteq B$ numerable que no puede ser separado de A.*

Demostración. Sean A y B dos familias ortogonales tales que A es analítica y cerrada bajo subconjuntos y sea Σ un B-árbol tal que todas sus ramas pertenecen a A, es decir que para cualquier $\{s_n \mid n\in\omega\}$ rama en Σ se cumple que $\bigcup_{n\in\omega} s_n\in A$. Como el árbol Σ es un subconjunto de $[\omega]^{<\omega}$ entonces Σ es numerable por lo que el conjunto

$$B_0=\{\{i \mid \sigma\frown i\in\Sigma\} \mid \sigma\in\Sigma\}$$

es numerable y como Σ es un B-árbol entonces $B_0\subseteq B$, vamos a probar que este conjunto es el buscado. Supongamos que B_0 se puede separar de A, es decir que existe un conjunto $C\subseteq\omega$ tal que para toda $b\in B_0$ tenemos que $b\subseteq^* C$ y que para cualquier $a\in A$ se cumple que $a\cap C=^*\emptyset$. Ahora, vamos a encontrar una rama $\{s_n \mid n\in\omega\}$ de Σ de forma que $a=\bigcup_{n\in\omega} s_n\in A$ y cumpla que $a\subseteq^* C$. Vamos a definir esta rama por recursión sobre ω, sea $s_0=\emptyset$, si suponemos definido s_n sea $s_{n+1}=s_n\cup\{j\}$ tal que $j\in\{i \mid s_n\frown i\in\Sigma\}\cap C$. Esta intersección nunca es vacía porque $\{i \mid \sigma\frown i\in\Sigma\}\subseteq^* C$. Así, es fácil ver que $a=\bigcup_{n\in\omega} s_n\subseteq^* C$ y como todas las ramas son elementos de A también tenemos que $a\in A$. □

Ahora, vamos a ver las consecuencias inmediatas del Teorema 3.3.3.

Corolario 3.3.8. *Si A y B son familias ortogonales, σ-dirigidas y analíticas entonces se pueden separar.*

Demostración. Sean A y B dos familias ortogonales, σ-dirigidas y analíticas. Como B es σ-dirigida entonces cualquier $B_0\subseteq B$ contable está separado de A entonces por el Teorema 3.3.3 tenemos que A está numerablemente generada en $B^\perp$. Es decir que existe una sucesión numerable $\{a_n \mid n\in\omega\}\subseteq B^\perp$ que cumple que para cualquier $a\in A$ existe un a_n tal que $a\subseteq^* a_n$.

Además como A es σ-dirigida tenemos también que B está numerablemente generado en $A^{\perp}$ lo que implica que existe una sucesión $\{b_n \mid n \in \omega\} \subseteq A^{\perp}$ que cumple que para cualquier $b \in B$ existe un b_n tal que $b \subseteq b_n$. Ahora, definamos

$$C = \bigcup_{n\in\omega} \left(b_n \setminus \bigcup_{j<n} a_j \right).$$

Vamos a probar que $C \in A^{\perp}$ y que para todo $b \in B$ se cumple que $b \subseteq C$. Sea $a \in A$ observemos que $a \cap C = \bigcup a \cap \left(b_n \setminus \bigcup_{j<n} a_j\right)$. Pero el segundo intersecando es un elemento de $A^{\perp}$ por lo que la intersección debe ser a lo más finita. Por otro lado, para cualquier $b \in B$ existe b_n tal que $b \subseteq^* b_n$ por lo que $b \setminus \bigcup_{j<n} a_j \subseteq^* b_n \setminus \bigcup_{j<n} a_j$. Pero $b \setminus \bigcup_{j<n} a_j = b$ porque $\bigcup_{j<n} a_j$ es un elemento de $B^{\perp}$. □

Como consecuencia inmediata al corolario tenemos que las grietas de Hausdorff que construimos sobre $\mathscr{P}(\omega)/fin$ no son conjuntos analíticos.

3.4. Grietas en cocientes analíticos

En esta sección nuestro objetivo es demostrar el teorema central de la tesis. La técnica que utilizaremos será similar a la que utilizamos en el Capítulo 2 cuando calcamos a través de un encaje $\Phi : \mathscr{P}(\omega) \to \mathscr{P}(\omega)$ a la grieta de Hausdorff en $\mathscr{P}(\omega)/fin$ en el álgebra $\mathscr{P}(\omega)/\mathscr{I}$ donde $\mathscr{I}$ es un ideal pseudosólido. Vamos a introducir una notación para cuando un cierto encaje Φ cumpla esta propiedad.

Definición 3.4.1. *Decimos que un encaje* $\Phi : \mathscr{P}(\omega)/\mathscr{I} \to \mathscr{P}(\omega)/\mathscr{J}$ preserva grietas *si la imagen*

$$\langle \Phi_*[A], \Phi_*[B] \rangle$$

de cada grieta $\langle A,B\rangle$ en el cociente $\mathscr{P}(\omega)/\mathscr{I}$ forma una grieta en el otro cociente $\mathscr{P}(\omega)/\mathscr{J}$.

Al final de la sección 3.2 probamos el Teorema 3.2.9 que establece que existe un encaje continuo de $\Phi_h : \mathscr{P}(\omega)/fin \to \mathscr{P}(\omega)/\mathscr{I}$ cuando el ideal $\mathscr{I}$ es analítico, el teorema central de la tesis establece que cualquier encaje continuo de $\mathscr{P}(\omega)/fin$ en $\mathscr{P}(\omega)/\mathscr{I}$ con $\mathscr{I}$ analítico preserva grietas. La prueba la haremos por contradicción, supondremos que la imagen de una grieta de Hausdorff bajo un encaje continuo sí puede ser separada en $\mathscr{P}(\omega)/\mathscr{I}$ con esto construiremos una familia que caerá dentro de las hipótesis del Teorema 3.3.3 y con ella construiremos un separador para la grieta de Hausdorff en $\mathscr{P}(\omega)/fin$.

Teorema 3.4.2. *Sea $\mathscr{I}$ es un ideal analítico en ω. Entonces todo encaje continuo Φ de $\mathscr{P}(\omega)/fin$ en $\mathscr{P}(\omega)/\mathscr{I}$ preserva grietas de Hausdorff.*

Demostración. Supongamos que $\langle A,B\rangle$ es una grieta de Hausdorff en $\mathscr{P}(\omega)/fin$ pero su imagen $\langle\Phi[A],\Phi[B]\rangle$ no es una grieta en $\mathscr{P}(\omega)/\mathscr{I}$. Entonces existe $c\subseteq\omega$ que separa a $\langle\Phi[A],\Phi[B]\rangle$. Es decir existe un $c\subseteq\omega$ tal que

$$\forall a\in A \quad \Phi(a)\setminus c\in\mathscr{I} \tag{3-1}$$

$$\forall b\in B \quad \Phi(b)\cap c\in\mathscr{I}. \tag{3-2}$$

Ahora vamos a definir $A_* = \{a\subset\omega : \Phi(a)\setminus c\in\mathscr{I}\}$. Primero vamos a demostrar que $A_*\perp B$. Basta notar que para cualquier $a\in A_*$ y $b\in B$ se cumple que

$$\Phi(a\cap b) =_{\mathscr{I}} \Phi_(a)\cap\Phi(b)\subset(\Phi(a)\setminus c)\cup(\Phi(b)\cap c)\in\mathscr{I}$$

de lo que se sigue que $a\cap b\in fin$ pues Φ es un encaje y por lo tanto $A_*\perp B$.

La familia A_* también cumple con ser analítica pues la correspondencia $f(x)=\Phi(x)\setminus c$ es continua y $A_* = f^{-1}[\mathscr{I}]$. Por lo que el par $\langle A_*,B\rangle$ cumple las hipótesis del Teorema 3.3.3 así que A_* está numerablemente generada en $B^\perp$. Tomemos $(c_n)_{n\in\omega} \subseteq B^\perp$ que genera a A_*. Vamos a definir por recursión las siguientes familias de subconjuntos de A_*. Sea $A_0 := \{a \in A_* \mid a \subseteq_{\mathscr{I}} c_0\}$ y si suponemos definido A_n sea $A_{n+1} := \{a \in A_* \mid c_n \subseteq_{\mathscr{I}} a \subseteq_{\mathscr{I}} c_{n+1}\}$. Así tenemos que $A_* = \bigcup_{n\in\omega} A_n$. Probaremos que existe una $N \in \omega$ tal que si $k > N$ entonces $A \cap A_k = \emptyset$. Supongamos que no es cierto y observar que entonces que la sucesión $a_n \in A_* \cap C_n$ cumple que $sup_{n\in\omega}(a_n) = sup_{n\in\omega}(c_n)$ lo cual no es posible porque A es σ-dirigida. Entonces tenemos que para todo $a \in A$ se cumple que $a \subseteq_{\mathscr{I}} c_N$ con $c_N \in B^\perp$ por lo que la pareja $\langle A, B\rangle$ está separada, lo cual es una contradicción. $\square$

Es importante observar que aunque los encajes continuos preservan las grietas de Hausdorff de $\mathscr{P}(\omega)/fin$ en los cocientes $\mathscr{P}(\omega)/\mathscr{I}$ con $\mathscr{I}$ analítico no es cierto que este tipo de encajes preserve cualquier tipo de grietas.

Proposición 3.4.3. *Existe un encaje continuo $\Phi : \mathscr{P}(\omega) \to \mathscr{P}(\omega \times \{0,1\})$ continuo tal que no preserve la grieta de Rothberger de la proposición 3.3.1.*

Demostración. Sea $\langle A, B\rangle$ la grieta de la proposición 3.3.1. Vamos a definir el ideal $\mathscr{I}_1$ sobre $\omega \times \{0,1\}$ como todos los subconjuntos de $\omega \times \{0,1\}$ que estén contenidos en una unión finita de conjuntos de la forma $a \times \{0\}$ y $b \times \{1\}$ con $a \in A$ y $b \in B$. Tomemos $\pi : \omega \times \{0,1\} \to \omega$ la proyección sobre la primera entrada y definamos $\Phi_\pi : \mathscr{P}(\omega) \to \mathscr{P}(\omega \times \{0,1\})$ como $\Phi(x) = \pi^{-1}[x]$, entonces tenemos que $\Phi_\pi[A] = \{a \times \{0,1\} \mid a \in A\}$ y $\Phi_\pi[B] = \{b \times \{0,1\} \mid b \in B\}$. Pero esta pareja ortogonal no es una grieta en el álgebra $\mathscr{P}(\omega \times \{0,1\})/\mathscr{I}$ donde $\mathscr{I}$ es el ideal de conjuntos finitos en $\mathscr{P}(\omega \times \{0,1\})$. Esto se debe a que para cualquier $y \in \Phi_\pi[A]$ tenemos que $y \subseteq_{\mathscr{I}} \omega \times \{1\}$ y $\omega \times \{1\} \perp_{\mathscr{I}} \Phi_\pi[B]$. $\square$

3.5. Espectro de grietas de ideales pseudosólidos

La última proposición de la sección anterior nos ejemplifica que no todos los encajes Φ entre álgebras booleanes preservan todas las grietas. Llamamos "espectro de grietas" de $\mathscr{P}(\omega)/\mathscr{I}$ a todas las posibles parejas ortogonales que formen una grieta en esa álgebra. Para terminar con este trabajo vamos a mostrar que el espectro de grietas de las álgebras $\mathscr{P}(\omega)/\mathscr{I}$ con $\mathscr{I}$ pseudosólido contiene al espectro de grietas del álgebra $\mathscr{P}(\omega)/fin$. Primero necesitamos observar que la siguiente propiedad que cumplen los ideales pseudosólidos.

Lema 3.5.1. *Si $\mathscr{I}$ es un ideal pseudosólido entonces existe una función $h : \omega \to \omega$ y una familia de conjuntos hereditarios $I_n \subseteq h^{-1}[\{n\}]$ tales que para cada $n \in \omega$*

1. $h^{-1}[\{n\}] \in \mathscr{I}$,
2. *para todo $x, y \in I_n$ se tiene que $h^{-1}[\{n\}] \neq x \cup y$, y*
3. *para todo $x \in \mathscr{I}$ existe $N \in \omega$ tal que si $k > N$ entonces $x \cap h^{-1}[\{k\}] \in I_k$.*

La prueba de este lema es obvia ya que la partición L_n de conjuntos que pediamos en la defnción de ideales pseudosólidos la podemos reescribir a través de las fibras de una cierta función $h : \omega \to \omega$. Es decir, $h(k) = n$ si y sólo si $k \in L_n$. Ahora podemos probar el siguiente teorema.

Teorema 3.5.2. *Si $\mathscr{I}$ es un ideal pseudosólido entonces existe $\Phi : \mathscr{P}(\omega)/fin \to \mathscr{P}(\omega)/\mathscr{I}$ que preserva todas las grietas.*

Demostración. El encaje lo vamos a definir a través de la función h del lema como $\Phi(x) = h^{-1}[x]$, donde $x \in \Phi : \mathscr{P}(\omega)/fin$ es una clase de equivalencia módulo fin y $\Phi(x) \in \mathscr{P}(\omega)/\mathscr{I}$ también es una clase de equivalencia módulo $\mathscr{I}$. Ahora vamos a definir la siguiente función auxiliar, $F_h : \mathscr{P}(\omega) \to \mathscr{P}(\omega)$ como $F_h(a) = \{n \in \omega \mid h^{-1}[\{n\}] \setminus a \in I_n\}$. Vamos a probar que se cumplen las siguientes implicaciones para cualquier $a \in \mathscr{P}(\omega)/fin$ y $c \subseteq \omega$:

$$\Phi(a) \setminus c \in \mathscr{I} \Rightarrow a \setminus F_h(c) \in fin, \text{ y}$$
$$\Phi(a) \cap c \in \mathscr{I} \Rightarrow a \cap F_h(c) \in fin.$$

Esta implicaciones nos permiten ver que si tenemos una familia ortogonal $\langle A, B\rangle$ tal que $\langle \Phi[A], \Phi[B]\rangle$ está separada por un cierto conjunto c entonces $\langle A, B\rangle$ también está separada por el conjunto $F_h(c)$.

Solamente vamos a probar la primera implicación porque la segunda es análoga. Si $\Phi(a) \setminus c \in \mathscr{I}$ entonces existe $N \in \omega$ tal que si $k > N$ se cumple que $(\Phi(a) \setminus c) \cap h^{-1}[\{k\}] \in I_k$. Por la defición de Φ esto implicaría que existe $N \in \omega$ tal que si $k > N$ se cumple que $(h^{-1}[a] \setminus c) \cap h^{-1}[\{k\}] \in I_k$, es decir que $(\bigcup_{n \in a} h^{-1}[\{n\}] \setminus c) \cap h^{-1}[\{k\}] \in I_k$. Por lo tanto existe un $N \in \omega$ tal que si para toda $k > N$ si $k \in a$ se cumple que $h^{-1}[\{k\}] \setminus c \in I_k$. Entonces si $k \in a$ y $h^{-1}[\{k\}] \setminus c \notin I_k$ se tiene que $n \leq N$. Por lo que podemos concluir que $a \setminus F_h(c) \in fin$. $\square$

Bibliografía

[1] Fidel Casarrubias Segura and Ángel Tamariz Mascarúa. *Elementos de topología general*, volume 37 of *Aportaciones Matemáticas: Textos [Mathematical Contributions: Texts]*. Sociedad Matemática Mexicana, México; Instituto de Matemáticas, UNAM, México, 2012.

[2] Ilijas Farah. Analytic quotients: theory of liftings for quotients over analytic ideals on the integers. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 148(702):xvi+177, 2000.

[3] Ryszard Frankiewicz and Pawel Zbierski. *Hausdorff gaps and limits*, volume 132. Elsevier, 1994.

[4] Felix Hausdorff. *Die Graduierung nach dem Endverlauf, von F. Hausdorff*. BG Teubner, 1909.

[5] Felix Hausdorff. Summen von $\aleph_1$ mengen. *Fundamenta Mathematicae*, 1(26):241–255, 1936.

[6] Thomas Jech. *Set theory*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003. The third millennium edition, revised and expanded.

[7] Alexander S. Kechris. *Classical descriptive set theory*, volume 156 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995.

[8] Krzysztof Mazur. F_σ-ideals and $\omega_1\omega_1^*$-gaps in the Boolean algebras $P(\omega)/I$. *Fund. Math.*, 138(2):103–111, 1991.

[9] Stevo Todorčevič. Analytic gaps. *Fund. Math.*, 150(1):55–66, 1996.

[10] Stevo Todorčevič. Gaps in analytic quotients. *Fund. Math.*, 156(1):85–97, 1998.