Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Los números surreales y sus dos facetas más importantes: como generalización del continuo lineal, y como unificación de todos los números

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

Juan Carlos Martínez Vázquez

TUTOR

M. en C. Manuel Alejandro Lara Mary

Ciudad Universitaria, CDMX, 2018

Hoja de datos del Jurado

1. **Datos del alumno**

   Martínez

   Vázquez

   Juan Carlos

   55 72 13 10 04

   Universidad Nacional Autónoma de México

   Facultad de Ciencias

   Matemáticas

   405096831

2. **Datos del tutor**

   M. en C.

   Manuel Alejandro

   Lara

   Mary

3. **Datos del sinodal 1**

   Dr.

   David

   Meza

   Alcántara

4. **Datos del sinodal 2**

   M. en C.

   Rafael

   Rojas

   Barbachano

5. **Datos del sinodal 3**

   Dr.

   Osvaldo Alfonso

   Téllez

   Nieto

6. **Datos del sinodal 4**

   M. en C.

   Luis Jesús

   Turcio

   Cuevas

7. **Datos del trabajo escrito**

   Los números surreales y sus dos facetas más importantes: como generalización del continuo lineal, y como unificación de todos los números

   111 p.

   2018

Agradecimientos

Los primeros en aparecer en esta lista de agradecimientos son, evidentemente, quienes encarnan el principal motivo de mis aspiraciones: mi padre y mi madre. Por supuesto, también han sido el mayor pilar en donde me he apoyado, tanto material como espiritualmente.

Agradezco también a mis hermanos y a sus respectivas familias: sin ustedes no habría llegado a la humilde cima a la que ahora estoy arribando.

A todos aquellos que, por largos o breves períodos de tiempo, prestaron sus servicios de mecenazgo a mi causa, y a quienes favorecieron un lugar dónde refugiarme.

Un agradecimiento especial a mi tutor de tesis, Manuel Lara, por su infinita paciencia y gran sabiduría. Así también, agradezco a cada uno de mis sinodales por sus oportunas observaciones y valiosas sugerencias.

Y, en general, a todas las personas que han contribuido, directa o indirectamente, a que este trabajo haya podido llegar a su fin.

Prólogo

Uno de los problemas centrales en la matemática del siglo XIX fue, sin duda, el de la fundamentación del continuo matemático. Fue así como se llegó a consolidar el sistema de los números reales, el cual se volvió el prototipo ideal de *continuo lineal* (aún hoy en día lo sigue siendo en muchas ramas de las matemáticas), en gran medida, gracias a que el continuo de los reales resulta bastante adecuado en la representación analítica de todo fenómeno de tipo continuo. De este modo, bajo esta visión, se asumió que el continuo de los reales, que es de tipo aritmético, debe ser isomorfo al continuo lineal de tipo geométrico. A esta suposición se le suele llamar *axioma de Cantor-Dedekind*, en honor a ambos matemáticos, quienes fueron los primeros en sostener esta concepción.

El siglo XX vino a ser el escenario en donde el concepto de continuo lineal pudo sufrir muchas refinaciones y generalizaciones: una de ellas descansa en la estructura de los números surreales. Estos números fueron descubiertos (o inventados) por John H. Conway mientras trabajaba en Teoría Combinatoria de Juegos, en donde, a partir de la clase de los juegos, obtiene como subestructura a los números surreales, clase que logra unificar a la mayoría de las estructuras numéricas, las más usadas y conocidas. Estos números fueron popularizados por Donald Knuth en su famosa novela matemática (ver [5]), y fue quien acuñó el adjetivo de *surreal*.

Los objetivos principales de esta tesis son los siguientes tres:

1. Dar una descripción más detallada de la construcción de los números surreales y establecer sus propiedades de campo;
2. Demostrar que logramos rescatar, es decir, incluir, a los números reales, ordinales e infinitesimales, así como a muchas más estructuras numéricas que aparecen en variadas ramas de la matemática; y, por último,
3. Dar razones de peso para quedar convencidos de que, efectivamente, la clase de los surreales es la generalización definitiva del continuo lineal.

El primer objetivo se atacará del primer capítulo al quinto capítulo, presentando en los primeros cuatro la construcción de los surreales y un par de alternativas para formalizarles; en el quinto se corroboran sus propiedades de campo.

En el capítulo 6 se verifica que tanto la estructura de los reales como la de los ordinales, tal cual les conocemos en la cotidianidad del quehacer matemático, están contenidas en la de los surreales. La adhesión de números infinitesimales se establece desde el principio. De este modo cubrimos el segundo objetivo. Claro que hay que esperar hasta el último capítulo para ver de qué manera el sistema de los hiperreales queda inmerso en la clase de los surreales, al igual que muchas otras estructuras más que pretenden modelar el continuo lineal. Precisamente en este último capítulo atacaremos el tercer objetivo. Aquí vamos a introducir un tipo de estructuras que vendrán a formalizar lo que entendemos por continuo lineal; estas estructuras serán campos ordenados que llamaremos *real-closed*.[1] Veremos que la clase de los surreales extiende a cualquier estructura de esta naturaleza, lo que se traduce a que cualquier modelo del continuo lineal que propongamos ahora o en el futuro tendrá una copia isomorfa dentro de los números surreales, convirtiéndole en lo que genuinamente podemos denominar *el continuo absoluto lineal*.

Cubiertos los anteriores tres puntos de fundamental importancia, sólo queda esperar que esta área de estudio tan novedosa y vasta —como lo son los números surreales— pueda llegar a una sección más amplia de la comunidad matemática mexicana (ya que, hasta la fecha, no son demasiados los entendidos en el tema), y que los interesados sean capaces de abordar con más prontitud a las bases, y logren participar en toda esta horda de investigación que promete bastante.

Ciudad de México, noviembre del 2018.

[1] En español sería *real-cerrado*. Hemos decidido conservar el término en inglés.

Índice general

Hoja de datos del Jurado III

Agradecimientos V

Prólogo VII

1. Todos los números, los grandes y los pequeños 1
1.1. Antecedentes . . . 1
1.1.1. Los números naturales . . . 1
1.1.2. Los números ordinales . . . 2
1.1.3. La recta racional . . . 3
1.1.4. Los números reales . . . 3
1.2. Rumbo a la construcción de los números surreales . . . 4
1.2.1. Días de la creación . . . 5
1.2.2. Los ordinales y sus negativos . . . 6
1.2.3. Los racionales diádicos . . . 8
1.2.4. Números infinitesimales . . . 9

2. Los números surreales 11
2.1. La jerarquía de los cumpleaños . . . 11
2.2. Dos modos de pertenencia . . . 12
2.3. Inducción surreal . . . 13
2.4. El orden . . . 14
2.5. La recta surreal . . . 16

3. Simplicidad 19
3.1. Cortaduras y números . . . 19
3.2. Muchas cortaduras para un solo número . . . 21
3.3. Un radical giro a la simplicidad . . . 22
3.4. El teorema de simplicidad . . . 24

4. La clase de las cortaduras 25
4.1. Inducción en cortaduras . . . 26
4.2. Cómo ordenar cortaduras . . . 27
4.3. Cortes equivalentes . . . 29
4.4. Clases de equivalencia . . . 31
4.5. Teoría General de Juegos . . . 32
4.6. Las reglas de Conway . . . 33

5. La recta surreal **35**
5.1. El negativo de un número . . . 36
5.2. La suma . . . 36
5.3. Cómo trabajan la suma y la resta . . . 37
5.4. Multiplicación . . . 41
5.5. Cómo trabaja la multiplicación . . . 42
5.6. Recíprocos multiplicativos . . . 43
5.7. Cómo trabaja la división . . . 44
5.8. Los números surreales conforman un campo . . . 46

6. Reales y Ordinales **51**
6.1. Los Reales . . . 51
6.2. Ordinales . . . 56

7. El árbol surreal **59**
7.1. La jerarquía de los cumpleaños . . . 61
7.2. La jerarquía de la simplicidad . . . 62
7.3. El árbol canónico . . . 63
7.4. El árbol surreal . . . 66

8. El Campo Universal **71**
8.1. Árboles binarios lexicográficamente ordenados . . . 73
8.2. Campos ordenados s-jerárquicos . . . 78
8.3. La universalidad de los números surreales . . . 79

Epílogo **83**

Capítulo 1

Todos los números, los grandes y los pequeños

Estamos a poca distancia de comenzar a explorar este extenso y magnífico mundo que conforman los números surreales, mundo en donde encontraremos entes ya bastante familiares, como son los números reales y los ordinales; y también otros un tanto extravagantes y antes no concebidos, tales como $\frac{1}{\infty}$, $\sqrt{\infty}$, $e - \infty$, ∞^π, etcétera.[1] Es decir, nuestro nuevo mundo es un lugar de unificación, en donde coexisten en perfecta armonía casi todos los números que conocemos y, además, muchos otros que pudieran parecernos muy extraños, como es el caso de aquellos que resultan de combinaciones algebraicas antes no permitidas (por ejemplo, un irracional con un ordinal). Y por ahí es muy probable que nos hallemos muchos más de quienes nunca antes hubiéramos sospechado su existencia.

Para poder abordar este sistema tan vasto, es necesario describir un poco el proceso de su construcción, así como sus generalidades más importantes y, de esta manera, quien aún no le conoce logre, con soltura y confianza, dar los primeros pasos que lo adentrarán en estos nuevos horizontes.

1.1. Antecedentes

Las ideas capitales que permitirán la creación de los números surreales no son en realidad tan novedosas como pudieran parecer en un primer estudio: están presentes, en formas restringidas, en la construcción de los números ordinales y los números reales. Es por esto que primero vamos a señalar de qué van tales construcciones, para después tratar de unificarlas y englobarlas en la construcción de los surreales.

1.1.1. Los números naturales

Empezamos, naturalmente —ya que son el punto de partida—, con los números naturales. Sabemos que éstos los construimos recursivamente, valiéndonos de conjuntos de naturales fabricados previamente. Más en concreto, un número natural es el conjunto de todos aquellos números naturales anteriormente creados. O bien, pensemos las cosas así: una vez que dispongamos de un conjunto de números naturales, este mismo conjunto es precisamente el siguiente natural a construir. En un principio parece no haber sitio de dónde partir, puesto que aún no tenemos número alguno; sin embargo, la clave está en que no necesitamos partir de números, sino de un conjunto de números. Disponemos de algún conjunto de números? ¡Desde luego!, ahí está el conjunto vacío para salvar el día (¡nadie

[1] En lugar de «∞» ponga cualquier ordinal infinito. La razón de usar el símbolo «∞» es mera mercadotecnia.

puede alegar que el conjunto vacío no sea un conjunto de números!). De este modo, «$\emptyset$» es nuestro primer número natural y es denotado comúnmente por «0».

Aparece en seguida un nuevo conjunto de números naturales: $\{0\}$, al cual denotamos por «1», y como $0 \in 1$, suena razonable poner a 1 a la derecha de 0. Luego aparece $2 := \{0, 1\}$, y lo ponemos a la derecha tanto de 0 como de 1. En general, una vez que se hayan construido los números

$$0 < 1 < 2 < ... < n,$$

el siguiente número natural es

$$S(n) := \{0, 1, 2, ..., n\}$$

llamado ***el sucesor*** de n, el cual, como ya debió haberse notado, se convierte en el nuevo extremo derecho. Siguiendo este proceso indefinidamente, obtenemos a todos los números naturales, y denotamos por «$\mathbb{N}$» al conjunto que los reúne (hemos dado nuestro primer *paso al infinito*).

1.1.2. Los números ordinales

A continuación, el proceso se bifurca de dos modos. Uno de ellos es seguir la ruta natural de ir agregando, paso a paso y de forma recursiva, un nuevo número al extremo derecho; y esta es precisamente la vía que se sigue para construir a la clase de los números ordinales (que denotaremos por «**On**»), vía que no es otra cosa que la generalización de esta idea (debida a Von Neumann) de «ser el conjunto de todo aquello construido anteriormente».

Entonces, $\mathbb{N}$ es el primer ordinal que aparece después de los números naturales, reclamando el último puesto en el orden que se va dando. Este primer ordinal infinito se denota como «ω» cuando se quiere hacer énfasis en que se trata de un número.

Luego aparece el siguiente nuevo extremo derecho, el cual es el conjunto $\mathbb{N} \cup \{\omega\}$, y se denota comúnmente por «$\omega + 1$».

El siguiente es «$\omega + 2$», quien es el conjunto $\mathbb{N} \cup \{\omega, \omega + 1\}$; y así aparecen todos los números ordinales de la forma $\omega + n$, donde n es un número natural, para de este modo dar el segundo paso al infinito (a un infinito «más arriba»), obteniendo el conjunto

$$\mathbb{N} \cup \{\omega,\ \omega + 1,\ \omega + 2, ...\}$$

el cual es nuestro siguiente número infinito, quedando a la derecha de todo mundo, y lo denotamos por $\omega + \omega$, o también por $\omega \cdot 2$.

Siguiendo la misma lógica, aparecen los números de la forma $\omega \cdot 2 + n$, donde $n \in \mathbb{N}$; y enseguida, el conjunto

$$\mathbb{N} \cup \{\omega,\ \omega + 1,\ \omega + 2, ...\} \cup \{\omega \cdot 2,\ \omega \cdot 2 + 1,\ \omega \cdot 2 + 2, ...\}$$

se convierte en el siguiente número ordinal por arriba de todo mundo. A tal número lo denotamos por $\omega + \omega + \omega$, o bien por $\omega \cdot 3$.

Como ya se ve venir, deberán aparecer los números de la forma $\omega \cdot n$, con $n \in \mathbb{N}$, de donde inmediatamente aparece $\omega \cdot \omega$, o también ω^2.

Luego, los ordinales de la forma ω^n, donde $n \in \mathbb{N}$, y con esto, el ordinal ω^ω. Este proceso obviamente no tiene para cuando parar, y por eso, con todo el rigor de la palabra, se prolonga indefinidamente, superando cualquier salto infinito, de modo que, por muy grande que se haya hecho esta colección, siempre habrá ordinales nuevos para agregar (y esta es la razón por la cual la clase de los ordinales tiene que ser una clase propia).

1.1.3. La recta racional

La otra vía de la bifurcación va en sentido de la construcción de los números racionales. Y la idea es obtener éstos a partir de los naturales, con el objetivo de que las operaciones básicas −suma, producto, resta y cociente− sean operaciones bien definidas. La suma y el producto, como dicta la tradición, se definen recursivamente, mientras que las otras dos, la resta y la división, se definen como sus operaciones inversas respectivas. Estas dos últimas son las que causan problemas: no son operaciones *cerradas.*

Con el fin de cerrar a la resta y a la división, nos damos a la tarea de agregar cosas (esto se logra vía clases de equivalencia), todo lo necesario para que cualquier resultado de operar con alguna de ellas quede dentro de nuestro alcance. De este modo, aparecen los números negativos con el propósito de cerrar la resta (y así obtenemos a $\mathbb{Z}$, el conjunto de los números enteros), y las fracciones para cerrar la división, obteniendo un sistema numérico algebraicamente consistente (en jerga cotidiana, hemos conformado un campo). A estos números le llamamos racionales y al conjunto que los engloba lo denotamos por $\mathbb{Q}$.

Desde $\mathbb{N}$ hasta $\mathbb{Q}$ podemos inducir un orden que resulta ser lineal. Lo que se hace comúnmente es establecer quiénes son los racionales positivos, considerando $\frac{a}{b} > 0$ siempre que $ab > 0$;[2] ya de este modo, para cualesquiera $x, z \in \mathbb{Q}$, se define $x < z$ siempre y cuando $z - x > 0$. Es fácil ver que esta relación ordena linealmente a $\mathbb{Q}$, es decir, $(\mathbb{Q}, <)$ es un conjunto linealmente ordenado, estructura a la que llamamos *recta racional.*

1.1.4. Los números reales

Ya hemos construido a los números naturales a partir de «la nada», y luego nos hemos extendido hasta los números racionales, en donde ya están bien definidas las operaciones aritméticas básicas. Pero, por si esto no fuera suficiente, aún podemos extender un «poco» más nuestro sistema, con la finalidad de establecer otra operación de índole ligeramente diferente: nos referimos a los *procesos límite.*

Es bien sabido que, en la recta racional, no todos los procesos límite son *cerrados.* El sentido de cerradura aquí para un proceso límite (nos restringiremos sólo a nuestro caso $\mathbb{Q}$) lo entendemos así: cualquier sucesión de Cauchy de números racionales *converge* a un número racional; es decir, toda sucesión convergente «de verdad converge». De este modo, existen sucesiones que tienen como límite un número racional, mientras que otras sólo nos sugieren que se aproximan a algo, pero nunca llegan a hacerlo; en otras palabras, aquello a lo que se están aproximando resulta ser un punto fuera de nuestro sistema $\mathbb{Q}$ hasta ahora construido. En calidad de ejemplo, tome la sucesión (x_n) dada por $x_1 = 2$ y $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n})$, la cual converge a $\sqrt{2}$ (y ya sabemos muy bien que $\sqrt{2}$ no es racional).

A cada punto (racional o no) que sea límite de una sucesión de racionales, le llamamos *punto límite.* Vemos entonces que hay algunos cuantos puntos límite (en realidad, una infinidad pasmosa) que no están incluidos en la recta racional. A la ausencia de cada uno de estos puntos es a lo que comúmente llamamos *hoyo.*

Puesto que deseamos que todo proceso límite sea cerrado, el trabajo ahora es inventar (es decir, construir) esos puntos límite que nos faltan (nuestro objetivo es encontrar, definir, objetos que sirvan para *tapar* todos los hoyos que hay en la recta racional). ¿Cómo le hacemos? Vamos a darle la vuelta al asunto, usando las famosas cortaduras que alguna vez usara Dedekind (en el fondo, vamos a proceder exactamente como lo hizo Dedekind). Haremos aquí un breve paréntesis para establecer alguna terminología acerca de estas famosas cortaduras (por si acaso no fueran tan famosas).

[2] Aquí, a y b son enteros. Como ya se sabe, $\mathbb{N}$ también induce un orden lineal en $\mathbb{Z}$.

Una ***cortadura*** (también le llamaremos ***corte***) es un par (A, B) en donde todo elemento de A es menor que todo elemento de B. Necesariamente, debemos tener definido de antemano un orden lineal para $A \cup B$. Cuando todos los elementos de A sean menores que todos los elementos de B, escribiremos «$A < B$». A y B se denominan las *partes izquierda* y *derecha* del corte (o también *lados izquierdo* y *derecho*), respectivamente. Si $x = (A, B)$, entonces denotaremos $L_x := A$ y $R_x := B$.

La intuición y la práctica nos permiten observar que todo punto límite (racional o no) divide a la recta racional en dos partes ajenas que la agotan por completo, quedando una de ellas totalmente a la izquierda de la otra. Es decir, cada punto límite determina una cortadura en $\mathbb{Q}$. Pero también visceversa: cada cortadura en $\mathbb{Q}$ determina un único punto límite. Así las cosas, tenemos una relación biunívoca entre cortaduras y puntos límite, lo que nos permite identificar a cada uno de éstos con un corte, y visceversa. De este modo, podemos reducir el problema de hallar los punto límite que nos faltan, a la tarea más sencilla y completamente factible de considerar a las cortaduras que correspondan a esos puntos límite.

Podemos ver que existen tres tipos de cortaduras:

Tipo I:

$$-\infty - - - - - - - - - - - - -](- - - - - - - - - - - - + \infty$$

Tipo II:

$$-\infty - - - - - - - - - - - - -)[- - - - - - - - - - - - + \infty$$

Tipo III:

$$-\infty - - - - - - - - - - - - -)hoyo(- - - - - - - - - - - +\infty$$

En los tipos I y II, el punto límite que corresponde a la cortadura aparece como extremo, de la parte izquierda en el primer caso, de la derecha en el segundo. Para el tercer tipo no tenemos punto límite que le corresponda, sin embargo, intuímos que *debe* estar ahí: lo que hay es un hoyo *en medio* de la cortadura. Pues bien, si queríamos un objeto para tapar ese hoyo, ahí lo tenemos: la cortadura misma nos va a servir para lograr nuestro cometido.

En resumen, lo que hacemos es lo siguiente:
Sea (A, B) una cortadura en $\mathbb{Q}$. Tal cortadura debe ser de la forma de alguna de las tres anteriores. Si el corte es del tercer tipo, entonces vamos a definir un nuevo nuevo número: $x := (A, B)$. Decidimos que $A < x < B$.
Los números reales vendrán a ser entonces:

$$\mathbb{R} := \mathbb{Q} \cup \{\text{cortaduras en } \mathbb{Q} \text{ de tipo III}\}.$$

De este modo, y definitivamente, logramos cerrar la operación *toma de límite*.

1.2. Rumbo a la construcción de los números surreales

Todo lo que hemos hecho en la sección anterior es, a grandes rasgos y con poca formalidad, lo que se hace tradicionalmente en cualquier curso básico de Teoría de Conjuntos.

Tanto los números ordinales como los reales son de vital importancia en casi cualquier parte del desarrollo de las matemáticas, y es por eso que son los sistemas numéricos de principal interés. Los ordinales se obtienen como una generalización de los naturales, siguiendo una idea fundamental y bastante intuitiva: la recursión; mientras que los reales surgen gracias al uso del concepto de cortadura.

Lo que haremos nosotros ahora, será tomar estas dos ideas geniales y combinarlas para obtener un único y poderoso sistema que abarque tanto a los ordinales como a los reales, así como a muchos números más conocidos o por conocer: nuestro ambicioso proyecto es construir un sistema de números a los cuales llamaremos *números surreales*. Al recurso de combinar ambas ideas, recursión y cortaduras, le llamaremos ***método Conway***, en honor a John Horton Conway (no olvidemos que Conway es el creador de los números surreales).

Pero antes de proceder con esta tarea, introduciremos terminología que será de gran utilidad en el futuro.

1.2.1. Días de la creación

Hablar de *pasos en la recursión* resulta ser un poco huidizo, en el sentido de no ser una idea realmente formal, aunque sí muy intuitiva: entendemos que, por ejemplo, el paso 1 es cuando construimos al 1 a partir del 0. Notemos entonces que la concepción está completamente ligada a la idea misma de número ordinal: cada ordinal α es construido en el paso α. Serán pues los ordinales quienes nos ayudarán a formalizar tal idea.

Siguiendo el espítitu de Conway, visualizaremos estos pasos como días sucesivos en donde van *naciendo* nuestros números, o en donde van *siendo creados*. Diremos así que 0 nace el día 0, ω nace el día ω, etcétera, etcétera. Emulando el lenguaje coloquial, hablaremos de *cumpleaños* para referirnos a los días de nacimiento (y así, el cumpleaños del 0 es el día cero, y el de ω es el día *omega*).

Para algunos, probablemente parezca un parangón medio descabellado; pero si lo reflexionamos un poco, cada paso sucesivo realmente se asemeja a una jornada de trabajo, en donde se realiza una tarea específica; y así como Dios creó el mundo en días sucesivos, nosotros también creamos números del mismo modo: siendo rigurosos, construir números y crear un universo no parecen ser actividades de distinta naturaleza.[3]

Definamos entonces, para cada ordinal α, los siguientes conjuntos:

M_α, constituido por todos los números nacidos desde el día 0 hasta el día α («M» por *make numbers*).

O_α, que reúne a todos aquellos números que han nacido en algún día anterior al día α («O» por *old numbers*).

N_α, el cual contiene los números nacidos exactamente el día α («N» por *new numbers*).

Estos conjuntos serán más manipulables a la hora de establecer propiedades de interés, y la gran ventaja es que ya se puede trabajar formalmente con ellos. Así, a la hora de encontrarnos con marañas formales, podemos hablar de los conjuntos N_α, O_α y M_α, en lugar del día α.

Veamos cómo lucen estos conjuntos para algunos días en particular:

1) **Día 0:** $O_0 = \emptyset$, $M_0 = N_0 = \{0\}$.

2) **Día 1:** $O_1 = \{0\}$, $N_1 = \{1\}$ y $M_1 = \{0, 1\}$.

[3] En la novela de D. Knuth se hace el guiño, más que obvio, hacia la alegoría de la creación del universo, donde se comparan las labores de J. Conway con las del dios judeo-cristiano, que crea el universo en siete días.

3) **Día 2:** $O_2 = \{0, 1\}$, $N_2 = \{2\}$ y $M_2 = \{0, 1, 2\}$.

4) **Día $k + 1$:** $O_{k+1} = \{0, 1, ..., k\}$, $N_{k+1} = \{k + 1\}$ y $M_{k+1} = \{0, 1, ..., k + 1\}$.

5) **Día ω:** $O_\omega = \mathbb{N}$, $N_\omega = \{\omega\}$, $M_\omega = \mathbb{N} \cup \{\omega\}$.

Obsérvese que, por lo menos en los primeros días:

1) $O_\alpha \cup N_\alpha = M_\alpha$.

2) $N_\alpha \cap N_\beta = \emptyset$, cuando $\alpha \neq \beta$.

3) $O_\alpha \subseteq O_\beta$ y $M_\alpha \subseteq M_\beta$ cuando $\alpha \leq \beta$.

1.2.2. Los ordinales y sus negativos

Ya hemos visto una manera sencilla de construir números de forma perpetua (aunque un poco tediosa de formalizar), capaz de superar todo tamaño posible, toda infinitud posible. Estos números son los ordinales, quienes generalizan a los naturales.

Es muy razonable preguntarnos sobre la decisión de extender el sistema por la derecha en lugar de hacerlo por la izquierda, y claramente la elección es mera convención, finalmente una cuestión de gusto y estilo. Aún más sutil, e igual de válido, es el preguntarnos si la extensión se puede hacer en ambos sentidos siguiendo la misma idea. Es decir, que al mismo tiempo en que vayan naciendo los positivos, puedan ir apareciendo los negativos, a cualquier altura ordinal. ¿Cómo hacemos para que surjan simultáneamente el 1 y el -1, digamos? Recordemos cuál era nuestra vía de creación del 1: la pertenencia. El 0 es un objeto bien definido (es el conjunto vacío), así que debe haber un conjunto al que pertenezca y sólo a él: precisamente es el 1, aquel que fue definido como $\{0\}$. ¿Cómo obtenemos entonces al -1? Obviamente ya no podemos pensar en la pertenencia, dado que el conjunto $\{0\}$ es único. Sin embargo, podríamos definir otro tipo de pertenencia, una cosa así como la *antipertenencia*, que nos daría un nuevo conjunto al que pertenecería el 0, aunque de un modo distinto. Tal nuevo conjunto sería el -1, y en tal caso, el 0 *antipertenecería* a tal conjunto, y la antipertenencia establecería el orden inverso que impone la pertenencia. De este modo, siempre que un número antipertenezca a otro, el primero debería ser mayor que el segundo (en nuestro caso debemos tener que -1 es menor que 0), caso inverso a lo que pasa con la pertenencia, en donde el pertenecido es menor a quien pertenece. Como todo este rollo de la antipertenencia parece algo extravagante y de dudosa reputación,[4] intentemos cambiar a un escenario en donde podamos trabajar dentro de lo permitido. Es decir, aterricemos esta concepción de «dos formas de pertenecer» al terreno de la Teoría de Conjuntos; para esto deberán servirnos los pares ordenados de conjuntos, en concreto, las cortaduras.

Así pues, si trabajamos las cosas de tal manera que la naturaleza de los números es la de pares ordenados de conjuntos de números (en lugar de tratarlos como conjuntos de números), podemos ordenar a su izquierda todo lo que pertenezca a su primera entrada, y ordenamos a la derecha todo aquello que se halle en la segunda. Como queremos imponer un orden lineal, tales pares de conjuntos deben ser cortaduras, para así evitar anomalías como que el mismo par quede a la derecha de alguien que está a la derecha de otro que esté a la derecha de tal par; en otras palabras, podríamos tener $x < z < x$, para números x y z (sería factible la no conciliación de la irreflexividad y la transitividad).

La forma de construir y ordenar a los números se da entonces de la siguiente manera: si $x = (L_x, R_x)$ es una cortadura, entonces es un número, y forzamos a que $L_x < x < R_x$.

[4] Pues no es ni lo uno ni lo otro: es una idea muy razonable que nos permite concebir una nueva teoría, la cual sirve de soporte para la construcción de los números surreales. Véase la segunda sección del capítulo dos (2.2).

No debemos dejar de advertir que esta vía es la misma que se siguió cuando construimos y ordenamos a los números reales.

Reiniciemos, pues, los días de la creación, trabajando ahora con este método (método Conway, no lo olvidemos). En el día cero definitivamente creamos al 0, y sólo al 0, pero ya no será ahora el conjunto vacío: debe ser una cortadura de números. El primer corte que podemos formar es, claramente, $(\emptyset, \emptyset)$ (asegúrese que de verdad se trata de una cortadura; sólo hay que ver que $\emptyset < \emptyset$), cuya información respecto al orden es: «nada hay a mi derecha, nada hay a mi izquierda». Como antes de la creación del cero nada existe (carecemos de número alguno), obviamente el 0 cumple tal cosa, y por eso definimos $0 := (\emptyset, \emptyset)$.

Pero aquí ha aparecido un corte que puede parecer extraño para muchos: ¿qué acaso las partes de una cortadura no deberían ser distintas al vacío? Sí, es cierto, eso le sirvió muy bien a Dedekind, pero, obviamente, a nosotros nos conviene la postura contraria: ¿cómo podríamos entonces crear algo, cuando sólo disponemos del conjunto vacío? (Nótese que tramposamente hemos permitido, en la misma definición de cortadura dada en la sección anterior, que cualquiera de sus partes pueda ser vacía.)

Para el día uno, los siguientes cortes son $(\{0\}, \emptyset)$ y $(\emptyset, \{0\})$. (Se ve claramente que $(\{0\}, \{0\})$ no es una cortadura, pues no podemos tener $0 < 0$. Nótese también que la presencia del conjunto vacío sigue siendo determinante.) El par $(\{0\}, \emptyset)$ reza: «el 0 a mi izquierda, nadie a mi derecha», mientras que $(\emptyset, \{0\})$ nos dice justamente lo contrario. De este modo, obtenemos simultáneamente dos números nuevos a partir del 0, uno a la izquierda, el otro a la derecha, a quienes se nos antoja llamar, por razones obvias, -1 y 1, respectivamente. Para el día 1, por lo tanto, han nacido ya:

$$-1 < 0 < 1$$

De este modo, los conjuntos N_1 y M_1 ahora son más grandes: $N_1 = \{-1, 1\}$ y $M_1 = \{-1, 0, 1\}$ (O_1 sigue teniendo únicamente al cero).

¡Bien!, lo que sigue parece ya una fácil extensión: el 2 debe ser la cortadura que tiene en su primera entrada a todos los anteriores (es decir, su parte izquierda es M_1), y en su segunda, nada; mientras que el -2 es el corte $(\emptyset, M_1)$, teniendo:

$$-2 < -1 < 0 < 1 < 2$$

Los conjuntos O, N y M siguen cambiando:

$$\begin{aligned} O_2 &= \{-1, 0, 1\} \\ N_2 &= \{-2, 2\} \\ M_2 &= \{-2, -1, 0, 1, 2\} \end{aligned}$$

En el día 3 nacen:

$$\begin{aligned} 3 &:= (M_2, \emptyset) \\ -3 &:= (\emptyset, M_2) \end{aligned}$$

agregándose a la lista de la siguiente manera:

$$-3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3$$

Aquí tenemos que:

$$\begin{aligned} O_3 &= \{-2, -1, 0, 1, 2\} \\ N_3 &= \{-3, 3\} \\ M_3 &= \{-3 - 2, -1, 0, 1, 2, 3\} \end{aligned}$$

De aquí, el proceso de construcción de los ordinales y sus negativos es ya bastante obvio y, para el día $k+1$, tenemos:

$$\begin{aligned} k+1 &:= (M_k, \emptyset) \\ -(k+1) &:= (\emptyset, M_k) \end{aligned}$$

Para el día ω, los primeros números transfinitos ahora son:

$$\begin{aligned} \omega &:= (\mathbb{Z}, \emptyset) \\ -\omega &:= (\emptyset, \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Los conjuntos M_ω, N_ω y O_ω también han cambiado considerablemente:

$$\begin{aligned} O_\omega &= \mathbb{Z} \\ N_\omega &= \{-\omega, \omega\} \\ M_\omega &= \{-\omega\} \cup \mathbb{Z} \cup \{\omega\} \end{aligned}$$

1.2.3. Los racionales diádicos

Con notorio y desbordante regocijo, observamos que se ha hecho algo bueno, bastante bueno: hemos redefinido a los números ordinales y han aparecido sus negativos (faltaría ver que, en efecto, estamos hablando rigurosamente de los inversos aditivos, luego de definir concretamente una suma). Con toda esta motivación, le seguimos sacando provecho a la fabulosa idea que nos permitió tal empresa: el uso de cortaduras en la creación de los números de forma recursiva; es decir, el método Conway. La recursión es la de siempre: la de los números ordinales. El aporte es que ahora vamos creando dos nuevos números en cada paso, mientras que, originalmente, sólo nacía uno. Todo gracias a que pensamos a los números, no como conjuntos de números previos, sino más bien, como cortaduras de números previos.

Podemos ahora ser algo más quisquillosos, y darnos cuenta de que hubo muchas cortaduras que pasamos por alto. Por ejemplo, en el día dos, cuando nacen 2 y -2, hay un par de cortaduras que dejamos en el olvido: $(\{-1,0\},\{1\})$ y $(\{-1\},\{0,1\})$. ¿A qué números corresponden? El corte $(\{-1,0\},\{1\})$ nos habla de un número x que cumple $0 < x < 1$. Como sabemos por experiencia, existen muchos números que cumplen tal propiedad, así que tenemos un dilema si es que queremos elegir sólo uno. ¿Cuál sería entonces la elección correcta? ¿Cómo podemos saberlo? Hay que recordar que no sólo estamos reconstruyendo todos los números que conocemos de toda la vida: también nos interesa que constituyan las estructuras de siempre, tanto algebraica, como de orden. De este modo, los nombres de los entes que vamos viendo aparecer dependen fundamentalmente de cómo definamos las operaciones. Permítasenos, por tanto, elegir los números, que sabemos de antemano son los adecuados, y en un futuro próximo veremos que todo encaja correctamente. De cualquier manera, la elección resulta ser la más sencilla, desde un punto de vista constructivo: tomaremos siempre el punto medio (para los cortes con partes vacías, carece de sentido hablar de un punto medio; no obstante, estos son precisamente los ordinales y sus negativos). De esta manera, tenemos:

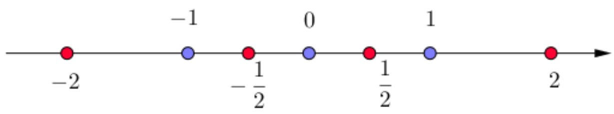
$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &:= (\{-1,0\},\{1\}) \\ -\frac{1}{2} &:= (\{-1\},\{0,1\}) \end{aligned}$$

pues $\frac{1}{2}$ es el punto medio entre 0 y 1, y $-\frac{1}{2}$ lo es de -1 y 0, y así se hará con el resto.

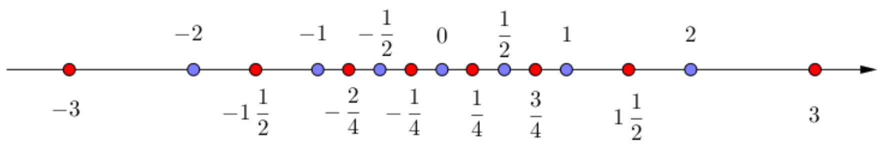
Veamos cómo han cambiado los conjuntos M, O y N. En los días 0 y 1 obviamente no hay cambios, ya que a la hora de construir números no hay lugar donde podamos tomar puntos medios. Para el día 2 ya es diferente:

$$\begin{aligned} O_2 &= \{-1, 0, 1\} \\ N_2 &= \{-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\} \\ M_2 &= \{-2, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 2\} \end{aligned}$$

ordenados en la siguiente forma:



Para el día 3 tenemos:



donde los puntos azules son los elementos de O_3 (con sus nombres escritos arriba de la línea) y los rojos, de N_3 (abajo de la línea).

De este modo, agregando siempre los puntos medios, a la vez que los extremos, iremos viendo que la fila de números que vamos construyendo a pasos, se irá haciendo cada vez más larga y densa, semejándose a la recta racional. De hecho, tal recta que obtendremos en el primer salto infinito es precisamente la conformada por los números diádicos, aquellos que tienen la forma $\frac{m}{2^n}$.

Puesto que el conjunto de los números diádicos, el cual será denotado por $\mathbb{D}$, es, al igual que $\mathbb{Q}$, denso en $\mathbb{R}$, podemos alegrarnos por estar a un paso de construir a todos los reales: simplemente repetimos el mismo método que aplicamos cuando pasamos de $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$, al fin que todo aquello que le falta a $\mathbb{D}$ para llegar a $\mathbb{R}$, son también puntos límite, por lo que el efecto seguirá siendo el mismo.

1.2.4. Números infinitesimales

Una vez que nos damos cuenta de la enorme eficacia del método Conway, no estamos dispuestos a abandonarlo. Estamos más bien ansiosos por ver qué nuevos adeptos tendremos en el club que estamos armando, el cual, de entrada, tiene ya a todos los diádicos, y está a un paso, el paso ω, de agregar a los reales.

Hemos visto ya cómo, mediante cortaduras (y un proceso recursivo que es bastante familiar), nos evitamos un duro trabajo, desde $\mathbb{N}$ hasta $\mathbb{R}$, en donde tenemos que recurrir dos veces a las clases de equivalencia. Sin dejar de lado, además, que podemos seguir construyendo números nunca antes vistos, dado que el proceso se puede continuar al nivel de cualquier ordinal.

Pues bien, en el día ω, nuestro primer salto al infinito, nacen los números reales, obtenidos como cortaduras de números diádicos: los irracionales como $\sqrt{2}$ y π, y los racionales que nos faltaban, como $\frac{1}{3}$, ya que todos ellos son límite de alguna sucesión en $\mathbb{D}$. Tenemos además los primeros números infinitos, ω y $-\omega$, los cuales ahora corresponden, respectivamente, con los cortes $(\mathbb{D}, \emptyset)$ y $(\emptyset, \mathbb{D})$. Pero, ¿serán éstos todo lo que hemos conseguido? ¿O habrá otros números que se han unido al club?

Consideremos el corte $(\mathbb{D}^- \cup \{0\},\ \mathbb{D}^+)$. ¿A qué número corresponde? Veamos: debe ser un número positivo, pues el 0 pertenece a su parte izquierda; pero a la vez debe ser menor que todo diádico positivo... es hora de maravillarnos, pues nos hemos encontrado con un número infinitesimal. Por ser el primer infinitesimal positivo en aparecer,[5] nos atrevemos a denotarlo por $\frac{1}{\omega}$. Una vez definidas las operaciones, veremos que, efectivamente, este nuevo número y ω son recíprocos multiplicativos.

Claramente, y del mismo modo, tendremos por todos lados, en el día ω, nuevos números infinitamente próximos a cualquier diádico, basta tomar una cortadura en donde ese diádico sea un extremo de alguna de las partes del corte.

[5]El negativo es $(\mathbb{D}^-,\ \mathbb{D}^+ \cup \{0\})$.

Capítulo 2

Los números surreales

Si continuamos eternamente construyendo números vía el método Conway, superando cualquier salto al infinito, obtenemos una clase de números verdaderamente asombrosa (la cual necesariamente es propia), tal como se había prometido al inicio del anterior capítulo. A esta colección la denotamos por «**No**», y a sus elementos les llamamos *números surreales* (el adjetivo «surreal» fue acuñado por Knuth, y la notación «**No**» es debida a Conway). Cada $x \in \mathbf{No}$ queda definido como un corte que incluye a todos los números surreales que han nacido en días previos. Denotamos a las partes izquierda y derecha de x por L_x y R_x, respectivamente (de este modo, $x = (L_x, R_x)$).

Vienen grandes ventajas con los números surreales:

1. Los procesos de construcción de los ordinales y los reales se funden en uno solo (recursivo todavía). Los ordinales y los reales son objetos de la misma naturaleza.
2. Aparecen números infinitesimales.
3. Aparece una cantidad inmensa y magnífica de nuevos números. El simple hecho de obtener ordinales negativos ya es en sí bastante formidable.

2.1. La jerarquía de los cumpleaños

Existe una jerarquía natural dada por la naturaleza de la construcción, la cual es recursiva, y tiene como soporte a los números ordinales. Esta jerarquía se introdujo al inicio de esta sección. Recordemos:

Para cada ordinal α, se tienen los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} N_\alpha &:= \{\text{números nacidos el día } \alpha\} \\ O_\alpha &:= \{\text{números nacidos antes del día } \alpha\} \\ M_\alpha &:= \{\text{números nacidos hasta el día } \alpha\} \end{aligned}$$

Es evidente que tales conjuntos cumplen las siguientes propiedades:

1) Cada $x \in \mathbf{No}$ cae en un único N_α. A α le hemos llamado el cumpleaños de x; le empezaremos a denotar $cumpl(x)$.

2) Si $\alpha = cumpl(x)$, entonces $L_x \cup R_x = O_\alpha$.

3) $O_\alpha \cup N_\alpha = M_\alpha$, para todo $\alpha \in \mathbf{On}$.

4) $O_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} M_\alpha$.

5) $N_\alpha \cap N_\beta = \emptyset$, cuando $\alpha \neq \beta$.

6) $N_\alpha \subset O_\beta$ si y sólo si $\alpha < \beta$.

7) $O_\alpha \subseteq O_\beta$ si y sólo si $\alpha \leq \beta$.

8) $M_\alpha \subseteq M_\beta$ si y sólo si $\alpha \leq \beta$.

En los capítulo 7 y 8 (*El árbol surreal* y *El campo universal*, respectivamente) ahondaremos más en estos temas de jerarquías.

2.2. Dos modos de pertenencia

Si $x \in \mathbf{No}$, hemos dicho que podemos denotar $x = (L_x, R_x)$. A los elementos de $L_x \cup R_x$ los llamaremos, también, *elementos de* x, y usaremos la notación «$y \in x$» para referirnos a «$y \in L_x \cup R_x$». De acuerdo a ello, tenemos que $y \in x$ si y sólo si $cumpl(y) < cumpl(x)$. La razón es que $N_{cumpl(y)} \subseteq O_{cumpl(x)}$ (o sea, gracias a las propiedades 1 y 4). Por otro lado, si $cumpl(x) \leq cumpl(z)$, entonces $y \in x$ implica $y \in z$. Esto ocurre, ya que $O_{cumpl(x)} \subseteq O_{cumpl(x)}$ (propiedades 1 y 5).

Por añadidura, $y \in^L x$, $y \in^R x$, significan $y \in L_x$ y $y \in R_x$, y se leerá *y es elemento izquierdo de x*, y *y es elemento derecho de x*, respectivamente. Claramente, $y \in x$ si y sólo si $y \in^L x$ o $y \in^R x$. Además, si $u \in^L x$ y $v \in^R x$, entonces $u < v$, pues x es una cortadura.

Usaremos a menudo las notaciones $\{x^L\}$ y $\{x^R\}$ para representar también a los lados izquierdo y derecho de x, respectivamente; es decir,

$$\{x^L\} := L_x \quad \text{y} \quad \{x^R\} := R_x,$$

siempre y cuando no haya ambigüedades. De este modo, x^L variará sobre L_x, mientras que x^R lo hará sobre R_x; y entonces, al hablar de *un* x^L, por ejemplo, nos estaremos refiriendo a algún elemento izquierdo de x (es decir, a algún elemento de L_x); mientras que, al hablar de *todos los* x^L, estaremos pensando en todos los elementos izquierdos de x. Así las cosas, siempre se tiene $x^L < x^R$.

Ojo: el que x^L y x^R sean variables no lo aporta la literal x. Por ejemplo, para $2 = (\{-1, 0, 1\}, \emptyset)$, la notación 2^L se refiere a cualquiera de los surreales 1, -1 y 0; y desde luego que el 2 no influye en nada para que 2^L esté variando. También es importante notar que x^L y x^R se están trabajando como variables *acotadas*.

Las relaciones «$\in^L$» y «$\in^R$» rescatan la primigenia idea de *pertenencia-antipertenencia*, que se vislumbró en el capítulo anterior (segunda subsección de la sección 2), cuando empezamos a considerar a los ordinales en dos sentidos. El objetivo, evidentemente, era diferenciar entre dos pertenencias de distinta naturaleza, entre dos formas de pertenecer, con el fin de obtener la construcción simultánea de ordinales positivos y negativos, siguiendo desarrollos paralelos, pero en direcciones opuestas.

La introducción de las cortaduras permitió concebir estos dos modos de pertenencia; sin embargo, la idea concebida desde esta perspectiva, aunque más razonable, se antoja un tanto artificial; mientras que la original, que parece más intuitiva, quedó relegada, en el olvido. No obstante, hemos vuelto a ella, aunque sea, a modo de guiño. Y, para que confiemos en que podemos pensar en términos de pertenencia-antipertenencia, pongamos las cosas de la siguiente manera:

Si la relación primitiva «$\in$» dentro de la Teoría de Conjuntos es sustituida por dos primitivas «$\in^L$» y «$\in^R$», distintas entre sí, tenemos ante nosotros una nueva teoría con objetos de la forma $\{x^L\}|\{x^R\}$, que logran diferenciar entre dos tipos de elementos. Así mismo, podemos identificar cualquier conjunto A con el objeto $A\,|\,\emptyset$; más aún, podemos hablar de *anticonjuntos* $\emptyset\,|\,A$, de manera que esta nueva teoría generaliza a la Teoría de Conjuntos, extendiéndola propiamente.

Todos los conceptos inmiscuidos en la TC, así como los axiomas, tienen cabida en esta nueva teoría. El vacío, por ejemplo, es $\emptyset\,|\,\emptyset$. Un *par ordenado* es simplemente un objeto $\{x\}|\{y\}$. Cuando queramos considerar los pares no ordenados, sencillamente tomaremos $\{x, y\}|\,\emptyset$.

La contención se define igual, sólo que ahora se consideran ambas pertenencias: $x \subseteq z$ si y sólo si $y \in^L x$ implica $y \in^L z$ y $y \in^R x$ implica $y \in^R z$. El axioma de extensión seguirá luciendo igual:

$$x = z \text{ si y sólo si } x \subseteq z \subseteq x.$$

Esta manera de ver las relaciones «$\in^L$» y «$\in^R$», como se concibieron originalmente en el capítulo previo, es más natural, pero la teoría que se desprende aún deberá desarrollarse y, en última instancia, debemos corroborar que es correcta. Sin embargo, podemos nosotros adoptar este enfoque, siempre y cuando seamos capaces de aterrizarlo todo a los asuntos de las cortaduras, las cuales tienen sustento en una teoría ya bastante aceptada, es decir, la Teoría de Conjuntos.

2.3. Inducción surreal

Dado que el proceso recursivo ha sido modificado, es de esperar que el principio de inducción inherente cambie a su vez. Cuando exclusivamente construimos ordinales, el principio de inducción se ve así:

Sean α un ordinal y P una propiedad; suponga que α satisface P siempre y cuando todos los ordinales menores que α también satisfagan P. Entonces $P(\alpha)$, para todo α ordinal.

Ahora bien, reflexionemos que los ordinales menores que α son precisamente todos aquellos nacidos antes que α. Esto nos lleva directo a la siguiente reformulación:

Si $P(\alpha)$ siempre que $P(\beta)$, para todo ordinal β nacido previamente, entonces $P(\alpha)$, para todo ordinal α.

Este nuevo enunciado corresponde a la recursión ordinal ordinaria, antes de introducir el método Conway, es decir, antes de meter cortaduras. Una vez trabajando el método Conway, la recursión comienza a agregar una cantidad de objetos sustancialmente mayor en cada paso del proceso (y entre más avanzado vaya el proceso, mayor será esa cantidad agregada). A esta nueva recursión es a la que llamamos recursión surreal. El principio de inducción inherente a ella será:

Si $P(x)$, siempre que $P(x')$, para todo número x' nacido antes que x, entonces $P(x)$ para todo surreal x.

Dado que $x = (L_x, R_x)$, donde $L_x \cup R_x = O_\alpha$, para algún ordinal α, es evidente que los surreales nacidos antes que x son todos los elementos x^L y x^R de x. De este modo, para demostrar que una propiedad específica se cumple para un surreal arbitrario x, es suficiente corroborar que se sigue de la validez de $P(x')$, para todo $x' \in x$ (o sólo de algunos cuantos). Es este el principio de inducción surreal al que nos vamos a apegar, y queda enunciado como sigue:

Si $P(x)$ *siempre que* $P(x^L)$ *y* $P(x^R)$*, para todos los* x^L *y* x^R*, entonces* $P(x)$ *para todo* $x \in \mathbf{No}$.

El método de prueba que se desprende de este principio, se describe a continuación.

Sea P una propiedad. Nuestra intención es demostrar $P(x)$, para todos los surreales x. Para lograrlo, procedemos como sigue:

1) Se fija un surreal arbitrario $x = (L_x, R_x)$.

2) Se asume que todos los surreales x^L y x^R cumplen P. Esta es la *hipótesis de inducción.*

3) Se procede a demostrar que x también cumple P.

Si el punto 3 es exitoso, entonces podemos asegurar que todos los números surreales cumplen P.

Por otro lado, tendremos a menudo dobles inducciones o, incluso, triples y, a veces, múltiples (esto último, quizás ya es exagerado). Tal situación ocurrirá, claramente, cuando la propiedad P acepte más de un argumento.

Así las cosas, si queremos demostrar $P(x, z)$, para surreales arbitrarios x y z, se procede de la siguiente manera:

1) Se fijan $x = (L_x, R_x)$ y $z = (L_z, R_z)$.

2) Se asume que se cumplen $P(x', z')$, $P(x', z)$ y $P(x, z')$, donde $x' \in x$, $z' \in z$ (hipótesis inductiva).

3) Se procede a demostrar que también se cumple $P(x, z)$.

En el caso de la inducción triple, para tres surreales arbitrarios x, y y z, tendremos que asumir como hipótesis inductiva las siguientes: $P(x', y', z')$, $P(x', y', z)$, $P(x', y, z')$, $P(x, y', z')$, $P(x', y, z)$, $P(x, y, z')$ y $P(x, y, z')$. Cuando crece el número de argumentos que puede aceptar la propiedad, obviamente las combinaciones se multiplican.

Así las cosas, si en P participa aunque sea sólo un surreal de $(L_x \cup L_y \cup L_z) \cup (R_x \cup L_y \cup R_z)$, es esto suficiente para aceptarla como parte de la hipótesis.

2.4. El orden

Hemos tratado de establecer que la manera de ir alineando a los números recae completamente en la forma que tienen éstos como pares de conjuntos de números más viejos. Sin embargo, hasta ahora, sólo sabemos cómo ordenar a cada número respecto de los nacidos antes que éste. El hecho de que logremos determinar cómo «alinear», en cada día, a los nuevos números con todos los nacidos previamente no significa que también podamos discernir cómo quedan «alineados» entre ellos. Por ejemplo, que logremos decir que 0 es mayor que -1 y menor que 1 no significa que 1 sea mayor que -1: esto valdría si suponemos que hay transitividad, hecho que no tiene por qué darse, al menos, claro, que lo demostremos. En otras palabras, sin apelar a la transitividad, el que sepamos cómo comparar 0 tanto con 1 como con -1 no nos da información de cómo comparar estos dos últimos.

Es esta, pues, la trampa maliciosa, de la cual el lector por supuesto pudo haberse percatado: dimos, «medio a oscuras», una regla para comparar cada número con aquellos creados previamente, pero nos faltó dar una regla para comparar entre sí aquellos nacidos el mismo día. Claro que la intuición nos ha llevado a compararlos entre ellos de manera indirecta a través de los nacidos con anterioridad, valiéndonos de que el orden, en última instancia, debe ser transitivo, de lo contrario no podemos tener siquiera una brizna de esperanza de que resultará ser un orden. He aquí donde radica nuestro «fraude».

Necesitamos por tanto añadir más condiciones a nuestras definiciones para que seamos capaces de comparar los números que nos faltan sin necesidad de usar la transitividad, o, en el extremo de los casos, ver si la transitividad se puede deducir de lo poco que tenemos.

Lo que haremos es lo más sencillo y burdo: simplente añadimos una regla que nos diga cómo comparar los elementos que nos hacen falta. Para inspirar este paso, vamos a considerar que la transitividad, en última estancia, debe cumplirse.

Para comparar un par de números surreales $x, z \in N_\alpha$, pensamos intuitivamente en cómo deben comportarse dos puntos en una recta numérica: si x está a la izquierda de z entonces todo mundo que esté a la izquierda de x debe también estar a la izquierda de z y, recíprocamente, todo mundo a la derecha de z debe estar a la derecha de x. Así las cosas, como $L_x < x < z < R_z$, debemos tener que $L_x < z$ y $x < R_z$. Esta conjunción de desigualdades, que se establece entre cada elemento de N_α con O_α, será suficiente para comparar, dos a dos, todos los elementos de N_α, sea cual sea el ordinal α.

En resumen, la relación de orden para los surreales se ha introducido de la siguiente manera:

Definición 2.1 Sean $x, z \in \mathbf{No}$ tales que $x \neq z$. Entonces, $x < z$ si y sólo si:

1) $L_x < z$ y $x < R_z$, cuando $cumpl(x) = cumpl(z)$;

2) $x \in L_z$, cuando $cumpl(x) < cumpl(z)$;

3) $z \in R_x$, cuando $cumpl(x) > cumpl(z)$.

De este modo, todo surreal x satisface $L_x < x < R_x$, como se pidió en un principio, siendo comparables cualesquiera par de números nacidos en distintos días, pues si $cumpl(z) < cumpl(x)$, entonces $z \in x$, con lo que $z < x$ sii $z \in^L x$ (por el segundo inciso), y $z > x$ sii $z \in^R x$ (por 3).[1] El primer ítem termina la labor comparando entre sí todos los elementos nacidos el mismo día.

El pedir $x \neq z$, excluye la posibilidad de que $x < x$, sin importar qué surreal sea x. Es decir, «$<$» es una relación irreflexiva, y una consecuencia inmediata de esto, es que $L_x \cap R_x = \emptyset$.

Pues bien, podemos estar contentos de haber logrado una muy buena definición para nuestro presunto orden lineal; sin embargo, aún podemos hacer más por él. Es relevante notar que la inspiración que nos llevó a la definición de $x < z$ cuando x y z han nacido el mismo día, se acomoda perfectamente en los otros casos. En otras palabras, es lógico esperar que la definición conseguida para el caso en que $cumpl(x) = cumpl(z)$, también aplique cuando $cumpl(x) \neq cumpl(z)$ y, de hecho, así sucede. Por ejemplo, en el punto 2, si $x \in L_z$, entonces $x < z$; luego, $L_x < x < z$ implica $L_x < z$, mientras que $x < z < R_z$

[1] Esto refuerza la noción de las dos formas de pertenencia.

nos lleva a $x < R_z$. Obviamente, esto no es prueba alguna, precisamente porque estamos invocando a una transitividad aún no demostrada. Sin embargo, podemos darle la vuelta, con un poco de esfuerzo.

Teorema 2.4.1 *Sean $x, z \in \mathbf{No}$ tales que $x \neq z$. Entonces, $x < z$ si y sólo si $L_x < z$ y $x < R_z$.*

Demostración. Sean $\alpha := \mathit{cumpl}(x)$ y $\beta := \mathit{cumpl}(z)$. Cuando $\alpha = \beta$ nada hay por hacer, así que vamos a suponer que $\alpha \neq \beta$. Para la ida, se considerará sólo que $\alpha < \beta$, puesto que el caso $\alpha > \beta$ es análogo. Así las cosas, $\alpha < \beta$ y $x < z$ implican $x \in^L z$, y esto a su vez que $x < R_z$ (pues z es una cortadura). Ahora sólo falta ver que $L_x < z$. Sea $y \in L_x$. Entonces $y \in x$; y, dado que $\alpha < \beta$, se tiene $y \in z$. Entonces $y \in L_z$, pues si $y \in R_z$, tendríamos $y > x$ (ya que $R_z > x$), y esto contradice la elección de y (en última instancia, contradice la irreflexividad de «$<$»). De este modo, se tiene que $y < z$, y, como y fue elegido arbitrario, se concluye que $L_x < z$, y con esto termina la prueba de la ida.

Vamos ahora con el regreso. Si $\alpha < \beta$, se tiene que $x \in z$; entonces $x \in^L z$, o bien, $x \in^R z$. Lo segundo no es posible, ya que $x < R_z$ (hipótesis), así que se debe tener $x \in^L z$. Del mismo modo, cuando $\beta < \alpha$, se tiene que $z \in^R x$ al descartar $z \in^L x$. En cualquier caso, se concluye que $x < z$, de acuerdo a las cláusulas 1) y 2) de la definición 2.1. ■

De este modo, una definición equivalente y más compacta de «$<$» es:

Definición 2.2 $x < z$ si y sólo si $x \neq z$ y $L_x < z$ y $x < R_z$.

Puesto que $L_x < x < R_x$, para todo $x \in \mathbf{No}$, la definición puede incluir el caso $x = z$, teniendo ahora definido, más bien, un orden refexivo:

Definición 2.3 $x \leq z$ si y sólo si $L_x < z$ y $x < R_z$.

El orden estricto queda ahora como: $x < z$ si y sólo si $x \neq z$ y $x \leq z$.

Esta última definición es la que tomaremos como «oficial»; sin embargo, a la hora de proceder en las demostraciones, usaremos indistintamente las tres, dado que son todas equivalentes entre sí.

2.5. La recta surreal

Y bien, ya tenemos todo para verificar que, efectivamente, los números surreales han quedado alineados, tal como se ha venido presumiendo desde el capítulo anterior.

Lema 2.5.1 *Sean $x, z \in \mathbf{No}$ tales que $x \neq z$, y tales que $\mathit{cumpl}(x) \neq \mathit{cumpl}(z)$. Entonces, no puede ocurrir $x < z < x$.*

Demostración. Supongamos que $x < z < x$. Si $\mathit{cumpl}(x) < \mathit{cumpl}(z)$ entonces $x \in L_z$ y $x \in R_z$. Esto indica que $L_z \cap R_z \neq \emptyset$, lo cual no es posible, debido a la irreflexividad (como se ha observado anteriormente). Ocurre lo mismo cuando $\mathit{cumpl}(x) > \mathit{cumpl}(z)$. Luego, las desigualdades $x < z$ y $x > z$ no pueden darse al mismo tiempo. ■

Lema 2.5.2 *Sean $x, z \in \mathbf{No}$ tales que $x \neq z$, y tales que $\mathit{cumpl}(x) = \mathit{cumpl}(z)$. Entonces, $L_x \not< z$, o bien, $z \not< R_x$. Es decir, no puede cumplirse $L_x < z < R_x$.*

Demostración. Asumamos, por el contrario, que $L_x < z < R_x$. Recordemos que también se tiene $L_z < z < R_z$. Puesto que *cumpl*$(x) =$ *cumpl*(z), se tiene que $L_x \cup R_x = L_z \cup R_z$. Como $(L_x, R_x) \neq (L_z, R_z)$, debe ocurrir que $L_x \neq L_z$, o bien, que $R_x \neq R_z$. Si $L_x \neq L_z$, entonces $L_x \subset L_z$, o bien, $L_x \cap R_z \neq \emptyset$. Si L_x interseca a R_z, tomamos $y \in L_x$ tal que $y \in R_z$; luego, ya que $L_x < z < R_z$, se tiene $y < z < y$. Sin embargo, como $y \neq x$ y *cumpl*$(y) <$ *cumpl*(z), en virtud del anterior lema, esto no puede ocurrir. Si $L_x \subset L_z$, entonces existe $y \in L_z$ tal que $y \notin L_x$, así que $y \in R_x$, y por lo tanto, $y \in L_z \cap R_x$; luego, como $L_z < z < R_x$, llegamos otra vez al mismo absurdo $y < z < y$.

Cuando $R_x \neq R_z$, el argumento se repite para llegar a la misma contradicción. ■

Teorema 2.5.3 *La relación «<» es asimétrica.*

Demostración. Sean $x, z \in \mathbf{No}$ tales que $x < z$. Recalquemos que $x \neq z$. Si *cumpl*$(x) \neq$ *cumpl*(z), el lema 2.5.1 impide $x > z$. Si *cumpl*$(x) =$ *cumpl*(z), entonces $L_x < z$, dado que $x < z$. El lema 2.5.2 prohíbe $L_x < z < R_x$, así que $z \not< R_x$. De este modo, se excluye la posibilidad de que $x > z$. ■

Teorema 2.5.4 *La relación «<» es transitiva.*

Demostración. Sean $x, y, z \in \mathbf{No}$. Tenemos que demostrar que $x < y < z$ implica $x < z$. Atención, porque este es el momento en que hacemos uso, por vez primera, del método de inducción surreal. Aquí procede una inducción triple. Aclaremos una cosa: en el proceso de la prueba, no tenemos por qué usar todas las partes de la hipótesis de inducción, así que no es necesario mencionarlas a todas. Sin embargo, por ser esta la primera vez en que se aplica el método, haremos una excepción:

1) $x' < y' < z'$ implica $x' < z'$,

2) $x' < y' < z$ implica $x' < z$,

3) $x' < y < z'$ implica $x' < z'$,

4) $x < y' < z'$ implica $x < z'$,

5) $x' < y < z$ implica $x' < z$,

6) $x < y' < z$ implica $x < z$,

7) $x < y < z'$ implica $x < z'$,

donde $x' \in x$, $y' \in y$ y $z' \in z$.

Ahora, debemos probar que $x < z$, asumiendo que $x < y < z$. De que $x < y$, se tiene que $L_x < y$ (sólo esta parte nos interesa), y de $y < z$ se sigue $y < R_z$ (ídem). Y listo, ya estamos en posición de rematar la prueba: de que $L_x < y < z$, se sigue que $L_x < z$, por la transitividad asegurada en la quinta hipótesis; mientras que $x < y < R_z$ implica $x < R_z$, gracias a la hipótesis 7.

Tenemos, por tanto, que $L_x < z$ y $x < R_z$. Es decir, $x < z$, por lo que, en virtud del principio de inducción surreal, la transitividad queda demostrada (y no deje de notarse que sólo se usaron las hipótesis 5 y 7). ■

Teorema 2.5.5 *El orden estricto «<» es tricotómico.*

Demostración. Sean $x, z \in \mathbf{No}$. Debemos probar que $x = z$, o bien, $x < z$, o bien, $x > z$, y lo haremos aplicando de nuevo el método de inducción surreal, teniendo ahora una inducción doble. Por segunda y quizás última vez, exponemos todas las hipótesis inductivas:

1) $x' = z'$, $x' < z'$ o $x' > z'$,

2) $x' = z$, $x' < z$ o $x' > z$,

3) $x = z'$, $x < z'$ o $x > z'$,

donde $x' \in x$ y $z' \in z$.

Cuando $cumpl(x) \neq cumpl(z)$, la primera definición que dimos de «<» automáticamente asegura que ocurre $x < z$, o bien, $x > z$, y sólo una de estas opciones. Así que únicamente trataremos el caso en que $cumpl(x) = cumpl(z)$. Supongamos entonces que $z \not\leq x$. Probaremos que $x < z$. Tenemos entonces que alguna de las relaciones

$$L_z < x, \quad z < R_x$$

no se cumple. Si $L_z \not< x$, entonces algún z^L no cumple $z^L < x$, por lo que $x \leq z^L$, gracias a la tercera hipótesis. De este modo, $x \leq z^L < z$, y, por transitividad, tenemos que $x < z$. En el segundo caso se tiene que $z \not< x^R$, para algún x^R y, por la segunda hipótesis inductiva, $z \geq x^R$, y dado que $x^R > x$, se tiene que $z > x$. En cualquiera de los casos, se concluye lo deseado. ■

Conclusión: La clase de los surreales resulta ser una línea, a la cual llamaremos *Recta Surreal.*

Obviamente aún nos falta introducir las operaciones y verificar que «se portan bien» para poder hablar propiamente de una «recta surreal». Esto se hará hasta el quinto capítulo.

Capítulo 3

Simplicidad

En el capítulo previo hemos realizado una obra bastante positiva. Al intentar integrar los métodos fundamentales de construcción de los reales y los ordinales, hemos diseñado un nuevo método: el método Conway, el cual nos ha servido para obtener a los números surreales.

El nuevo objetivo es *simplificar* las *formas* de estos números surreales, facilitándonos de forma decisiva todo el trabajo subsecuente.

3.1. Cortaduras y números

El nuevo espíritu, luego del triunfo del método Conway, es el siguiente:

Todo número es una cortadura. Toda cortadura es un número.

Sin embargo, la segunda parte de esta consigna no es del todo cierta. Hemos considerado implícitamente a las cortaduras tal como lo hizo Dedekind, tomando todo lo que tenemos a la mano, en su día correspondiente de la creación, para llenar las partes de cada corte. Es decir, para cada día α, todos los cortes (A, B) que definen números, cumplen $A \cup B = O_\alpha$. No obstante, recordemos que la definición que hemos dado de cortadura es más sencilla: simplemente un par (A, B) tal que $A < B$. Esto, claro, fue establecido así, anticipadamente, ya que nuestro objetivo, desde el principio, era introducir todos los cortes posibles, así estuvieran *incompletos*.

Queda claro entonces que tenemos dos tipos de cortadura: de aquellas que prefería Dedekind y las que no. Es decir, las que «arrasan con todo lo disponible» y las que «se conforman con poco». Conscientes ya de este hecho, parece que es factible dar un paso en la nomenclatura. Dado un ordinal α, y un corte (A, B) en O_α, si $A \cup B = O_\alpha$, diremos que tal corte es O_α-***completo***. Ahora, diremos que el corte es ***completo*** si es O_α-completo, para algún ordinal α. Así las cosas, lo que estamos diciendo es que, para definir números, sólo se han usado cortes completos.

Con sólo echar un vistazo a los ejemplos proporcionados en el anterior capítulo, nos damos cuenta de que la descripción de los números surreales, como cortaduras, se va complicando a medida que vamos avanzando en los días de construcción. Resultaría entonces conveniente, y muy deseable, poder representar a cada nuevo número sólo mediante unos pocos de los previamente creados, que sean, obviamente, suficientes para describir al número en cuestión. Vayamos viendo cómo podemos simplificar algunos de esos números ya definidos.

Como primer ejemplo, por ser muy sencillo, pensemos en el día 2, cuando ha nacido $\frac{1}{2}$, el que habíamos definido como $(\{-1, 0\}, \{1\})$. Con este corte rescatábamos toda la información acerca de cómo debía compararse $\frac{1}{2}$ respecto de 1, 0 y -1. Sin embargo, debido a la transitividad, 1 y 0 son suficientes para decirnos cómo incluir al nuevo número en la fila. Es decir, podemos definir al número $\frac{1}{2}$ como $(\{0\}, \{1\})$, y seguimos teniendo la misma información de que debemos poner a $\frac{1}{2}$ entre 0 y 1, teniendo por añadidura que $-1 < \frac{1}{2}$, dado que $-1 < 0$.

Nuestro trabajo es entonces sustituir cada corte O_α-completo por uno que no lo sea (que es en lo que se traduce *simplificar* lo más posible estos cortes), y así, hacer más sencilla la descripción de cada número surreal. Este será un trabajo que se nos agradecerá en un día no muy lejano: seguramente en el día ω... o quizás antes.

Siguiendo, pues, esta idea, podemos también definir a cada número natural $k+1$ como $(\{k\}, \emptyset)$, pensando que, en el día k, todos los números (nacidos hasta ese día) están alineados de tal modo que k es el mayor de todos. En este caso, el par $(\{k\}, \emptyset)$ nos sugiere: *pongan a* $k+1$ *a la derecha de* k; y de este modo, gracias a la transitividad, el nuevo máximo viene a ser precisamente $k+1$.

No dejemos de advertir la significativa diferencia entre este nuevo corte, y el corte k-completo $(M_k, \emptyset)$, el cual definía en un principio a $k+1$, donde

$$M_k = \bigcup_{i=0}^{k-1} \{\frac{m}{2^{k-i}} - i \mid -2^{k-i} \leq m \leq 0\} \cup \bigcup_{i=0}^{k-1} \{\frac{m}{2^{k-i}} + i \mid 0 \leq m \leq 2^{k-i}\}.$$

Es obvio que la parte izquierda de $k+1$ se irá complicando cada vez más, a medida que los días pasen. Para fines prácticos, es preferible usar su nueva *forma* $(\{k\}, \emptyset)$.

Podemos también simplificar la representación de ω, recordando el motivo de su existencia: ω es el primero en nacer que es mayor que todo número natural. Una representación más acorde con la intuición debería ser el corte $(\mathbb{N}, \emptyset)$, y esta forma ya nos recuerda bastante a la definición tradicional, que vimos al principio del primer capítulo, en donde ω es precisamente el conjunto de todos los números naturales. Asimismo podemos definir cada número natural $k+1$ también como el corte $(\{0, ..., k\}, \emptyset)$, y tenemos ante nosotros, olvidándonos de la parte derecha de la cortadura (al fin que es vacía), una definición muy similar a la de Von Neumann (aquella definición que dice que un número natural es el conjunto de los naturales anteriores).

Vemos entonces que, tanto la definición conjuntista, como la nueva a través de pares, tienen el mismo objetivo: poner al número natural $k+1$ por encima de los naturales previamente construidos, para luego posicionar a ω encima de todos ellos (como se planteó en el primer capítulo).

Siguiendo con día ω, recordemos que $\frac{1}{\omega} = (\{\mathbb{D}^- \cup \{0\},\ \mathbb{D}^+)$. Es más cómodo expresar a este infinitesimal por $(\{0\},\ \mathbb{D}^+)$, a la vez que es má sugerente, ya que los infinitesimales son precisamente los que están por abajo de cualquier número real positivo (información contenida en la parte derecha) sin ser nunca cero (lo que dice la parte izquierda).

En este mismo día, hemos dicho, ha nacido $\frac{1}{3}$, junto a todos los racionales que no son diádicos. Es fácil ver que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{2i}} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{2i+1}}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, y que las sucesiones

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{2i}}\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{y} \quad \left(\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{2i+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

convergen a $\frac{1}{3}$.

De este modo, $\frac{1}{3}$ puede ser descrito perfectamente por el corte

$$\left(\left\{\frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4},\ \frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6},\dots\right\},\left\{\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2^3},\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^5},\dots\right\}\right).$$

Para apreciar las ventajas de este corte, hay que ver cómo queda descrito $\frac{1}{3}$ si nos obligamos a usar todos los diádicos:

$$\frac{1}{3}=\left(\bigcup_{x\in\{\sum_{i=1}^{n}2^{-2i}\}_{n\in\mathbb{N}}}\{\mathbb{D}\leq x\},\bigcup_{x\in\{\frac{1}{2}-\sum_{i=1}^{n}2^{-(2i+1)}\}_{n\in\mathbb{N}}}\{\mathbb{D}\geq x\}\right)$$

Para terminar con el día ω, vamos a ejemplicar a un irracional:

$$\sqrt{2}=(\{x\in\mathbb{D}^+|\ x^2<2\},\{x\in\mathbb{D}^+|\ 2<x^2\}).$$

Otro ejemplo se ve en el día $\omega+\omega$, en donde definimos $\frac{\omega}{2}$ como

$$(\bigcap_{k=0}^{\infty}\{M_{\omega+k}<\omega-k\},\bigcup_{k=0}^{\infty}\{M_{\omega+k}\geq\omega-k\})$$

el cual se puede describir también por el corte $(\mathbb{N},\{\omega-k\mid k\in\mathbb{N}\})$ (figura 2.1), si lo que queremos es cargar con la información de cómo debe ordenarse respecto de los que ya estaban.

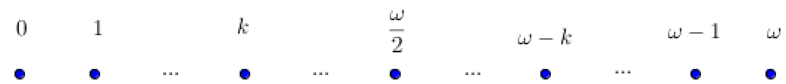


Figura 2.1.

Podemos ver, apelando a la transitividad, que cualquier número x que cumpla

$$\mathbb{N}<x<\{\omega-k\mid k\in\mathbb{N}\}$$

también satisface

$$\bigcap_{k=0}^{\infty}\{M_{\omega+k}<\omega-k\}<x<\bigcup_{k=0}^{\infty}\{M_{\omega+k}\geq\omega-k\}$$

y viceversa.

3.2. Muchas cortaduras para un solo número

Con un poco de ingenio y observación (a veces un poco más, otras, bastante poco), hemos logrado representar a cada número de una forma más *simple*, al no exigirnos usar todos aquellos otros números que ya han sido construidos en días anteriores.

Es evidente que, a medida que transcurran los días de la creación, las representaciones que puede tener un número se multiplican aceleradamente. Como sencilla muestra, tenemos a ω, el cual puede representarse de infinitas formas, tomando en la parte izquierda cualquier conjunto que sea *cofinal* con $\mathbb{N}$. Están, por ejemplo, los enteros, los pares, los impares, las potencias de 2, los mismísimos números primos, y un largo etcétera. Tal vez la manera más sencilla de ver que tenemos una infinidad de cortes que representan a ω, es considerar los conjuntos $\{n \in \mathbb{N} \mid n > k\}$, donde k es cualquier número natural. Evidentemente tenemos un corte diferente para cada k en $\mathbb{N}$.

Siguiendo este hilo, una vez que tengamos un corte (A, B) y sepamos que corresponde a un cierto número x, no podemos sencillamente escribir $x = (A, B)$, pues llegaríamos a que muchos pares ordenados distintos serían iguales. Sin embargo, es posible optar por una vía óptima, haciendo analogía con los números racionales, en donde distintas fracciones son en realidad el mismo número. La justificación de fondo radica en que no estamos insinuando una identidad con el número en cuestión, sino más bien estamos trabajando representaciones. Esta idea es fácilmente formalizable mediante clases de equivalencia, y es, de hecho, el camino que se toma de costumbre.

Pues bien, haciendo analogía con las fracciones, podemos denotar $x = \dfrac{A}{B}$. Sin embargo, debido a algunas cuestiones técnicas y prácticas, optaremos por una notación más conveniente:

$$x = A \mid B.$$

Esta notación se utilizará en lo sucesivo para cualquier corte (A, B), inclusive los completos, aún sabiendo que, en su caso, se cumple la igualdad

$$A \mid B = (A, B).$$

Por supuesto que no es nuestro objetivo el obtener nuevos números al considerar los cortes incompletos, sino sólo tener una manera de simplificar las expresiones, para con ello simplicar las cosas, y así, simplificarnos la vida.

3.3. Un radical giro a la simplicidad

Volviendo a la consigna que motivó la incursión de los cortes incompletos, podemos sentirnos satisfechos porque estamos siendo fieles a lo dictado; y, aunque no de forma completamente íntegra, lo que tenemos es algo bastante aceptable:

Todo número es una cortadura. Toda cortadura representa un número.

Pero seamos honestos, o tal vez, conscientes, y preguntémonos si de verdad esto último es garantizable. ¿Será cierto que a cualquier cortadura le podemos asociar un número? Debemos reflexionar un poco y darnos cuenta de que esta pregunta aún no tiene respuesta. Para poder ir en su búsqueda, podemos primero arribar cuestiones que sean factibles de enfrentar cuando el corte es completo; tal vez esta manera de proceder nos arroje un poco de luz en los queveres del resto de las cortaduras.

Sea entonces (A, B) una cortadura completa. De este modo, (A, B) es un auténtico número, al cual designamos por x. Denotemos por α a su cumpleaños.[1] Una de las cosas que satisface x, es el hecho de que x *está entre* A y B, es decir, $A < x < B$. Por otro lado, es inaceptable esperar que x sea el único número entre A y B; basta pensar en un pequeño ejemplo: cuando $x = \frac{1}{2} = (\{-1, 0\}, \{1\})$ (para variar). En posteriores días, nuevos

[1] Es decir, el día en que nació, recordando la terminología introducida en el anterior capítulo.

números irán apareciendo entre A y B; por ejemplo, todos los de la forma $\frac{1}{2^n}$. Sin embargo, ninguno de los nacidos antes o el mismo día que x, puede estar entre A y B. Esto es fácil de ver, ya que todos los nacidos antes que x conforman el conjunto O_α, y como (A, B) es una cortadura completa, debemos tener que todo elemento de O_α, o bien está en A, o bien en B. Respecto a los que han nacido el mismo día, recordemos el lema 2.5.2: este nos dice que, si z es un surreal distinto de x, pero que ha nacido el mismo día, entonces no puede satisfacer $A < z < B$.

Así las cosas, podemos advertir que x cumple una propiedad muy importante: de todos los números entre A y B, es el primero en nacer. En este caso diremos que x es ***el más simple*** entre A y B.

¡Bien!, tenemos una pista de cómo deberían comportarse los demás cortes, los que no son completos, respecto a los números que representan: vamos a querer que, si en general (A, B) es una cortadura cualquiera y x es el surreal que representa, entonces x debe ser el punto más simple entre A y B. Sin embargo, hasta aquí no hemos hecho otra cosa que llevar el problema a un escenario distinto: ahora debemos garantizar que siempre hay un punto más simple entre cualesquiera A y B que conformen un corte de números surreales. Pero no hay que desanimarnos, porque desde luego que estamos en condiciones de resolver este nuevo conflicto. Aunque, con el fin de aterrizar esta nueva idea de *simplicidad*, vamos a explorar algunos ejemplos, comenzando desde *cero*.

En los días 0 y 1 no tenemos nada que indagar, pues los cortes ya no se pueden simplificar más (simplificar alguno de los dos cortes del día 1 es caer en el corte $(\emptyset, \emptyset)$, pero este es precisamente el 0).

El día 2 es ya un poco más interesante. Empecemos primero con el corte $(\{-1\}, \{1\})$. De todos los números nacidos hasta el día 2, los únicos que están entre -1 y 1 son: $-\frac{1}{2}$, 0 y $\frac{1}{2}$. De estos tres, 0 es el primero en nacer, y por lo tanto, el más simple. Así que $(\{-1\}, \{1\})$ representa al 0, por lo que podemos denotar:

$$0 = \{-1\} \mid \{1\}$$

Con el fin de facilitar la lectura vamos a aligerar la notación:

$$0 = \{-1 \mid 1\}$$

En lo sucesivo, usaremos esta convención siempre que sea deseable, sobre todo, cuando sea posible.

Para el corte $(\emptyset, \{1\})$, vemos que los puntos entre $\emptyset$ y $\{1\}$, hasta el día 2, son 0 y -1, pues claramente $\emptyset < 0 < 1$ y $\emptyset < -1 < 1$. Ahora bien, como 0 es el primero en nacer, es él el más simple, y por tanto podemos escribir $0 = \{\ \mid 1\}$. De forma análoga se puede ver que $0 = \{-1 \mid\ \}$.

Así las cosas (se deja al lector verificar los demás casos, obviamente), podemos establecer que:

$$\begin{array}{rcl}
-2 & = & \{\ \mid -1\} \ = \ \{\ \mid -1,\ 0\} \ = \ \{\ \mid -1,\ 1\} \ = \ \{\ \mid -1,\ 0,\ 1\} \\
-1 & = & \{\ \mid 0\} \ = \ \{\ \mid 0,\ 1\} \\
-\dfrac{1}{2} & = & \{-1 \mid 0\} \ = \ \{-1 \mid 0,\ 1\} \\
0 & = & \{\mid\} \ = \ \{-1 \mid\ \} \ = \ \{\ \mid 1\} \ = \ \{-1 \mid 1\} \\
\dfrac{1}{2} & = & \{0 \mid 1\} \ = \ \{-1,\ 0 \mid 1\}
\end{array}$$

$$1 = \{0 \mid \ \} = \{-1,\ 0 \mid \ \}$$
$$2 = \{1 \mid \ \} = \{0,\ 1 \mid \ \} = \{-1,\ 1 \mid \ \} = \{-1,\ 0,\ 1 \mid \ \}$$

Aunque pueda parecer evidente, es necesario resaltar que los únicos puntos intermedios que se han tomado en consideración, para cada uno de los cortes, son sólo aquellos que han nacido hasta el día 2. Es obvio el por qué de esto: todos los números que vienen después quedan fuera de la jugada, pues ninguno de ellos puede ser candidato a ser el más simple, ya que necesitaría haber nacido antes. Esto es bastante cómodo, pues no tendremos que extendernos mucho cada vez que andemos buscando el número que determinado corte represente.

En resumen, la manera de proceder, en general, es la siguiente: siendo (A, B) un corte de números surreales, consideramos un día α que acote estrictamente el cumpleaños de cada número en $A \cup B$; de los nacidos hasta el día α tomamos sólo aquellos puntos y tales que $A < y < B$; y, por último, se determina quién nació primero.

Teniendo esto en mente, intente el lector clasificar todos los cortes posibles en O_3, tal como se ha hecho para O_2. Intente también discernir qué números representan los cortes $(\{0\}, \{3\})$ y $(\{1\}, \{13\})$.

3.4. El teorema de simplicidad

Ahora sí, procedamos a testificar la existencia del más simple, entre cualesquiera dos conjuntos A, B de números surreales que conformen un corte.

Lema 3.4.1 *Sean $x, z \in$ **No** nacidos el mismo día, tales que $x < z$. Entonces $R_x \cap L_z \neq \emptyset$.*

Demostración. Si suponemos que $R_x \cap L_z = \emptyset$, entonces $R_x \subseteq R_z$ y, por tanto, $z < R_x$. Como $x < z$, también se tiene $L_x < z$. Así las cosas, $L_x < z < R_x$, pero esto contradice el lema 1.4.3, ya que $x \neq z$ y $cumpl(x) = cumpl(z)$. ■

Teorema 3.4.2 (Primer teorema de simplicidad) *Sea (A, B) una cortadura de números surreales. Entonces existe el número surreal más simple entre A y B.*

Demostración. Sea α un ordinal tal que $A \cup B \subseteq O_\alpha$. Sea $y := (A, O_\alpha - A) \in$ **No**. Evidentemente, $A < y < B$, dado que $B \subseteq O_\alpha \setminus A$. De este modo, la clase constituida por surreales que están entre A y B, no es vacía. Sea entonces μ el mínimo cumpleaños de todos aquellos que están en dicha clase. Se demostrará que sólo hay un número entre A y B que nace el día μ. Sean $x, z \in N_\mu$ tales que $A < x < z < B$. Entonces, por el lema anterior, se tiene que $R_x \cap L_z \neq \emptyset$. De este modo, existe $u \in O_\mu$ tal que $u \in R_x$ y $u \in L_z$, es decir, $x < u < z$. Así las cosas, si se tiene que $A < u < B$ y $cumpl(u) < \mu$, contradiciendo la minimalidad de μ. ■

Resumiendo, si tenemos un corte (A, B) de números surreales, entonces, en virtud del teorema anterior, existe $x \in$ **No** tal que:

1) $A < x < B$.

2) Si $A < z < B$ y $z \neq x$, entonces $cumpl(x) < cumpl(z)$.

Decimos que x es el punto *más simple* entre A y B, y denotamos $x = A \mid B$.

Capítulo 4

La clase de las cortaduras

En los primeros capítulos hemos obtenido a los números surreales, los cuales son cortaduras completas que, a su vez, se conforman de números surreales. Es decir, cada número surreal se construye formando un corte a partir de *todos* los números nacidos previamente. Después, hemos visto que es preferible *simplificar* estos cortes, puesto que tales simplificaciones son más «sugerentes», y más fáciles de manipular. De hecho, cuando los días de la creación estén ya muy avanzados, en bastantes situaciones será imposible expresar a nuestros números como cortes completos, pues si bien apenas estamos adentrando en la estructura de **No**, podemos sospechar que llegará a niveles absurdos de complejidad.

Daremos, por tanto, un paso más en la generalización que hemos hecho de la construcción de nuestros números (no nos olvidemos del método Conway, aquel consiste en seguir el proceso recursivo, formando cortaduras completas en cada paso). Vamos ahora pues, a considerar, en cada día de la creación, absolutamente todos los cortes posibles, no sólo los completos. Obtendremos, de este modo, una clase mucho más amplia: la clase de las cortaduras, la cual denotaremos por **Co**. Cada elemento de esta nueva clase será una cortadura que comprenda, no sólo números, sino todo tipo de cortes, todos aquellos nacidos en días previos.

Obviamente, todos los conceptos definidos para números tienen sentido para cortaduras: partes o lados L_x, R_x, pertenencias «$\in^L$», «$\in^R$», individuos x^L, x^R, orden, inducción, etcétera, etcétera. La jerarquía de los cumpleaños también sigue teniendo sentido: se tienen los conjuntos

$$\begin{aligned} N_\alpha^* &:= \{\text{cortaduras nacidas el día } \alpha\} \\ O_\alpha^* &:= \{\text{cortaduras nacidas antes del día } \alpha\} \\ M_\alpha^* &:= \{\text{cortaduras nacidas hasta el día } \alpha\} \end{aligned}$$

los cuales cumplen todas las propiedades que cumplen los conjuntos N_α, O_α y M_α (enunciandas en el capítulo 2) excepto la que involucra la condición de «completitud» de los números. Se tiene, además, que $N_\alpha \subseteq N_\alpha^*$, $O_\alpha \subseteq O_\alpha^*$ y $M_\alpha \subseteq M_\alpha^*$, para todo $\alpha \in \mathbf{On}$ (se da la igualdad exclusivamente para los días 0 y 1, y para el día 2 se tiene solamente $O_2 = O_2^*$).

Podemos asímismo hablar también de completitud para las cortaduras en general, usando los conjuntos O^*, sólo que debemos tener cuidado de no caer en ambigüedades. Podemos decir, entonces, que un corte x es $*$-completo si y sólo si es O_α^*-completo, para algún $\alpha \in \mathbf{On}$.

Para construir esta clase, **Co**, evidentemente, también comenzamos por 0, y nos seguimos al día 1 con 1 y -1. Las cosas cambian para el día 2, pues ahora, aparte de los números 2, -2, $\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{2}$, se tienen en cuenta cortaduras que no son O_2-completas. Estas son:[1]

$$\begin{aligned}
0' &= (\emptyset, \{1\})\\
0'' &= (\{-1\}, \emptyset)\\
0^* &= (\{-1\}, \{1\})\\
2' &= (\{1\}, \emptyset)\\
-2' &= (\emptyset, \{-1\})\\
(\frac{1}{2})' &= (\{0\}, \{1\})\\
-(\frac{1}{2})' &= (\{-1\}, \{0\})
\end{aligned}$$

además de los ya famosos surreales $1 = (\{0\}, \emptyset)$, $0 = (\emptyset, \emptyset)$ y $-1 = (\emptyset, \{0\})$, los cuales no son cortes O_2-completos, pero sí O_1-completos. En esta situación, tenemos que

$$\begin{aligned}
O_2^* &= O_2 = \{-1,\ 0,\ 1\}\\
N_2^* &= \{-2,\ -2',\ -(\frac{1}{2}),\ -(\frac{1}{2})',\ 0',\ 0'',\ 0^*,\ (\frac{1}{2}),\ (\frac{1}{2})',\ 2',\ 2\}\\
M_2^* &= \{-2,\ -2',\ -1,\ -\frac{1}{2},\ -(\frac{1}{2})',\ 0',\ 0'',\ 0^*,\ 0,\ \frac{1}{2},\ (\frac{1}{2})',\ 1,\ 2,\ 2'\}
\end{aligned}$$

El panorama se torna más complicado para el día 3, pues ahora nuestros cortes no sólo deben conformar números, sino también cortes incompletos creados previamente. Podemos tener, por ejemplo, los siguientes:

$$\begin{aligned}
(\frac{1}{2})^* &= (\{0, 0^*\}, \{1\})\\
(\frac{1}{2})'' &= (\{0'\}, \{1, 2'\})\\
3' &= (\{-2', 2\}, \emptyset)\\
3^{\mathbf{Co}} &= (O_3^*, \emptyset)
\end{aligned}$$

entre otros (como dato curioso, obsérvese que $3^{\mathbf{Co}}$ es O_3^*-completo).

No dejemos de insistir en que $\mathbf{No} \subset \mathbf{Co}$. De hecho, podemos construir primero a la clase $\mathbf{Co}$, y a partir de ella definir a los surreales de la siguiente manera:

$x \in \mathbf{Co}$ es un número surreal si y sólo si
  a) Todos los elementos de $L_x \cup R_x$ son, a su vez, números surreales.
  b) Todos los números surreales nacidos antes que x, o bien están en L_x, o bien, en R_x.

La parte b) no dice otra cosa más que los surreales son cortes completos, mientras que la parte a) prohíbe conformar números a partir de cortes que no son números.

4.1. Inducción en cortaduras

Evidentemente, el método de inducción, del que hemos hablado para números surreales, no perderá su naturaleza a la hora de considerar a todos los cortes posibles. O sea, que la inducción sigue funcionando de la misma forma que para surreales:

[1] Los nombres a usar son deliberados y de ningún modo canónicos u oficiales. En última instancia, todos aquellos ceros etiquetados corresponderán con el 0, y de la misma manera ocurre para todo lo demás.

Sea P una propiedad y $x \in \mathbf{Co}$. Suponga que, si todos sus elementos x^L y x^R cumplen P, entonces x también cumple P.

Entonces $P(x)$, para todo $x \in \mathbf{Co}$.

Hablar de inducción en **Co** tiene su justificación, más profunda que el curioso hecho de que **Co** sea también una clase con inducción. Seguimos con la idea de que llegará, con el correr de los días de la creación, un momento lo suficientemente avanzado como para que muchos surreales sean incapaces de representarse a sí mismos, y tengamos que hacerlo por medio de cortes incompletos. En fin, que tenemos la ligera sospecha (y así sucederá) de que, para abordar cuestiones referentes a los surreales, tengamos que decidirlas por medio de cortaduras, sean o no completas. De este modo, andaremos por el devenir de los días de la creación demostrando propiedades interesantes, pero para cortes en general, no para números. Y es por esta razón que hemos introducido la inducción en **Co**.

Sin embargo, a nosotros lo que nos interesa es que tales propiedades hablen exclusivamente de números. ¿Cómo podríamos proceder para lograrlo? Podemos obrar de la siguiente manera:

Primero, dado que $\mathbf{No} \subset \mathbf{Co}$, entonces cada una de las propiedades del tipo «para todo» (de naturaleza universal) se heredan de la clase más extensa a la más pequeña. El problema recae entonces en las de tipo «existe». Si la propiedad en cuestión es de tipo existencial, podemos demostrarla para cortes (lo cual, ciertamente, no en todos los casos será un dilema de fácil resolución). Es decir, podemos comenzar exhibiendo un corte $x \in \mathbf{Co}$ que testifique la propiedad y, de ahí, debemos ingeniárnosla para verificar que el surreal $L_x \mid R_x$ también es un testigo.

Una de las convicciones que se nos ha quedado arraigada, luego de la experiencia con el concepto de simplicidad, radica en que todo corte es, en esencia, el mismo objeto que el surreal al cual representa. Así las cosas, debemos considerar que esta premisa nos lleva a la muy razonable conclusión de que, si cierta propiedad se cumple para cierta cortadura, entonces también debe cumplirse para el número que ésta representa (si la cortadura es completa, se acaba el misterio). Esta suposición es bastante aceptable, pero, obviamente, dista mucho de tener sólidos sustentos matemáticos. Sin embargo, es posible pasar de un terreno al otro (de lo aceptable a lo demostrable), y de hecho tenemos dos alternativas, las cuales exploraremos en las próximas secciones.

De este modo, una vez que logremos solidificar este planteamiento de que cortes y números son esencialmente lo mismo, entonces podemos garantizar que toda propiedad que se cumpla para cortaduras se satisface también para números; y así, quedará plenamente justificado el cambio de inducción surreal por inducción en cortaduras.

4.2. Cómo ordenar cortaduras

Se ha dicho ya que todas las definiciones dadas para números tienen cabida en la tierra de todas las cortaduras posibles, es decir, en **Co**. Antes que cualquier cosa, nos interesará ver si las propiedades que cumplen los surreales, las pocas que se han visto, también las cumplen las cortaduras en general. Por ejemplo, el orden. Para números surreales tenemos tres definiciones equivalentes (sustancialmente, sólo dos, pues la tercera y la segunda difieren muy poco). Sin embargo, para demostrar tales equivalencias, nos hemos apoyado decisivamente en que los surreales son cortes completos. Vamos, por tanto, a tomar sólo la tercera definición como oficial, y a partir de ella intentaremos averiguar qué cualidades de orden parcial se cumplen en esta nueva plataforma, las cuales pueden fallar, por supuesto, ya que estamos «hinchando» nuestro *universo* (obviamente, también intentaremos rescatar la primera y segunda definiciones).

Definición 4.1 («$\leq$» y «$<$» para cortes) Sean $x, z \in \mathbf{Co}$. Se define:

i) $x \leq z$ si y sólo si $L_x < z$ y $x < R_z$

ii) $x < z$ si y sólo si $x \leq z \not\leq x$.

Hay que remarcar algunos puntos importantes:

1) Vemos que $x \leq x$ si y sólo si $L_x < x < R_x$. Para el caso de los números, esto último es inmediato de la definición (recordemos que teníamos $x < z$ sii $x \in^L z$ o $z \in^R x$, dependiendo de los días en que hayan nacido x y z), y en su caso la reflexividad es más que obvia. Sin embargo, aquí ya no tenemos modo de conectar $x \leq x$ con $L_x < x < R_x$, o ya no es nada claro.

2) Evidentemente, $x < z$ implica $x \ngeq z$. Al considerar la contrapositiva, vemos una manera de descartar igualdades estrictas: si $z \leq x$, entonces $x \not< z$.

3) Si x y z son comparables, entonces $x \not\leq z$ implica $z \leq x$, por definición, simplemente. Más aún, si $x \not< z$, entonces también se tiene $z \leq x$, pues $x \not< z$ implica $x \not\leq z$, o bien, $z \leq x$: en ambos casos se tiene $z \leq x$, gracias a que x y z son comparables.

4) Si nos fijamos en algún corte x, vemos que ya no lo estamos comparando con cada uno de aquellos nacidos anteriormente, ya que $L_x \cup R_x$ puede o no cargar con todos ellos. Esto implica el riesgo de perder la comparabilidad en general, como se puede advertir. Vamos a ver que esto no ocurre, pues está de fondo la transitividad, que permite comparar indirectamente a quienes la definición deja fuera.

5) La transitividad se demuestra casi de la misma forma que se hizo para números, pues hay que recordar que en aquellos momentos no se ha usado que los surreales son cortes completos.

6) La antisimetría ya no se cumple. Basta asomarnos a los primeros días, en el día 2 o el 3, por ejemplo. Ahí encontramos varios casos que sirven como contraejemplo para una pretendida antisimetría. Específicamente, los cortes 0 y 0^*, cumplen $0 \leq 0^*$ y $0 \geq 0^*$, pero $0 \neq 0^*$.

Teorema 4.2.1 *Sean $x, y, z \in \mathbf{Co}$. Entonces:*

1) $x \leq y \leq z$ *implica* $x \leq z$ *(transitividad).*

2) $x \leq x$ *(reflexividad).*

3) $x \not\leq z$ *implica* $z \geq x$ *(comparabilidad).*

Demostración.

1) Para probar la transitividad, vamos a suponer que $x \leq y \leq z$. Sean x^L y z^R arbitrarias. Como $x \leq y$, se tiene que $x^L < y$, y como $y \leq z$, se sigue inductivamente que $x^L \leq z$, al aplicar transitividad a $x^L \leq y \leq z$. La desigualdad $z \leq x^L$ no puede darse, ya que $y \leq z \leq x^L$ implicaría inductivamente que $y \leq x^L$, y esto, a su vez, que $L_x \not< y$, lo que contradice la hipótesis $x \leq y$. De este modo, se tiene $x^L < z$, y de igual forma se ve que $x < z^R$. Como x^L y z^R son arbitrarios, podemos concluir que $x \leq z$.

2) Vamos ahora con la reflexividad. Sea x^L un elemento arbitrario de x. Para lograr demostrar que $x^L < x$, vamos a ver primero que $x^L \leq x$. Para esto, debemos verificar que

$x^L < x^R$ y que $x^{LL} < x$, para todos los x^R y x^{LL} (x^{LL} varía sobre los elementos de x^L, es decir, $x^{LL} = (x^L)^L$). Lo primero se cumple obviamente, ya que x es un corte. La segunda parte es más sutil. Hay que remarcar que la veracidad de la desigualdad $x^L < x$ requiere de la veracidad de $x^{LL} < x$. Por un lado, sabemos que $x^{LL} < x^L < x^R$, por hipótesis de inducción y por que $x \in \mathbf{Co}$ (remarquemos que una hipótesis inductiva es $x^L \leq x^L$, y esto implica $x^{LL} < x^L$). Entonces, por transitividad, se tiene $x^{LL} < x^R$. De este modo, ahora todo se reduce a comprobar que $x^{LLL} < x$ (es la parte que nos falta para verificar que $x^{LL} < x$). Como debe advertirse, esto, a su vez, nos llevará a la cuestión de la veracidad de $x^{LLLL} < x$, y así sucesivamente. Dado que la construcción de las cortaduras tiene su punto de partida en el conjunto vacío, entonces este proceso nos llevará al vacío, y como vacuamente $\emptyset < x$, debemos tener que todas estas desigualdades deseadas realmente se cumplen. De este modo, $x^{LL} < x$, y como $x^L < x^R$, como ya se había mencionado, se concluye que $x^L \leq x$.

Para rematar la prueba, sólo nos falta asegurar que $x^L \not\geq x$; para esto, volvamos a remarcar que $x^L \leq x^L$ (hipótesis de inducción), así que no se puede dar $x < x^L$, y, por ende, tampoco $x \leq x^L$. Así las cosas, tenemos que $x^L < x$, y en consecuencia, $L_x < x$.

De manera similar, llegamos a que $x < R_x$, y así podemos concluir que $x \leq x$.

3) Resta ahora verificar que todas las cortaduras son comparables dos a dos: supongamos que $z \nleq x$. Debemos probar que $x \leq z$. De que $z \nleq x$ se sigue, de la definición, que existe z^L tal que $z^L \nless x$, o bien, existe x^R tal que $z \nless x^R$.

Si $z^L \nless x$, para algún z^L, entonces $z^L \geq x$, ya que, inductivamente, z^L y x son comparables (recordemos el punto 3 de la lista anterior). Por otro lado, sabemos ya que $z > z^L$, así que, aplicando transitividad a $z \geq z^L \geq x$, se tiene que $z \geq x$.

Cuando $z \nless x^R$, para algún x^R, se llega al mismo resultado siguiendo un tratamiento similar. ■

Tenemos, por lo tanto, que nuestra relación ya no es un orden al considerar todos los cortes, pues falla la antisimetría. Sin embargo, las demás propiedades, reflexividad y transitividad, prevalecen, y cuando ocurre esto se dice que la relación es un *preorden.* De esta manera, el teorema anterior nos dice que la relación «$\leq$» establece un preorden total en la clase **Co** de las cortaduras.

4.3. Cortes equivalentes

Como habíamos dicho, uno de los paradigmas nuevos, a raíz de la simplicidad, es que cada número es la misma cosa que los cortes que le representan. Habíamos dicho también que esta concepción dista mucho de ser rigurosa, y por tanto no podemos confiarnos en echar mano de ella de forma deliberada, hasta que tengamos la convicción de que no estamos construyendo castillos en el aire.

Ha llegado el momento de darle un poco de seriedad a esta atractiva idea, exponiéndola en otros términos. Veamos de qué se trata.

En la sección anterior, logramos establecer un preorden en la clase de las cortaduras. Este preorden, de forma natural, suministra una relación de equivalencia, que denotaremos por «$\equiv$». Toda relación de equivalencia —en bastantes situaciones— puede pensarse como la igualdad; es decir, que cada relación de equivalencia es, en esencia, la igualdad. Estamos, pues, a punto de virar la interesante idea que traemos, hacia un terreno más trabajable.

Si nosotros pudiéramos demostrar que cada cortadura es equivalente —vía la relación «$\equiv$»— con el surreal que representa, entonces podríamos cambiar la sentencia: *todo corte es, en esencia, el surreal al cual representa*; por: *la relación «$\equiv$» es, en esencia, la igualdad.*

El plan para esta sección es por tanto ver que, si un corte corresponde con un número surreal, entonces éstos deben ser equivalentes entre sí, módulo la relación «$\equiv$».

Definición 4.2 (Equivalencia entre cortaduras) Sean $x, z \in \mathbf{Co}$. Se define:

$$x \equiv z \text{ si y sólo si } x \leq z \leq x.$$

Teorema 4.3.1 *Sean $x, y, z \in \mathbf{Co}$. Entonces:*

1) $x \equiv x$ *(reflexividad).*

2) $x \equiv z$ *implica* $z \equiv x$ *(simetría).*

3) $x \equiv y \equiv z$ *implica* $x \equiv z$ *(transitividad).*

Es decir, la relación «$\equiv$» es de equivalencia en la clase **Co**.

Demostración. La reflexividad y la transitividad se siguen inmediatamente de las propiedades respectivas del preorden; la simetría es consecuencia inmediata de la definición:

1) $x \equiv x$ si y sólo si $x \leq x \leq x$.

2) $x \equiv z$ si y sólo si $x \leq z \leq x$ si y sólo si $z \leq x \leq z$ si y sólo si $z \equiv x$.

3) $x \equiv y \equiv z$ si y sólo si $x \leq y \leq x$ y $y \leq z \leq y$ si y sólo si $x \leq y \leq z$ y $z \leq y \leq x$. Esto implica $x \leq z \leq x$, es decir, $x \equiv z$. ■

Lema 4.3.2 *Sean $x, z \in \mathbf{Co}$ tales que $x < z$. Entonces existe $y \in L_z \cup R_x$ tal que $x \leq y \leq z$.*

Demostración. De que $x \ngeq z$ se tiene, por definición de «$\leq$», que algún x^R satisface $x^R \leq z$; o bien, algún z^L cumple $z^L \geq x$. En el primer caso tenemos $x < x^R \leq z$, y en el segundo, $x \leq z^L < z$. En ambos casos tenemos $x \leq y \leq z$, para algún $y \in R_x \cup L_z$. ■

Teorema 4.3.3 (Segundo teorema de simplicidad)

Sean $x, z \in \mathbf{Co}$. Supongamos que

1) $L_z < x < R_z$.

2) *Si $L_z < y < R_z$, entonces $y \notin L_x \cup R_x$.*

Entonces $x \equiv z$.

Demostración. Si $x \ngeq z$, por el lema anterior, existe $y \in R_x \cup L_z$ tal que $x \leq y \leq z$. Tenemos , por 1), que $L_z < x$, así que $L_z < x \leq y \leq z < R_z$. Por transitividad, se tiene $L_z < y < R_z$, y entonces, por 2), vemos que $y \notin R_x$. Por otro lado, como $y > L_z$, descartamos entonces que y sea elemento de L_z, y de este modo, $y \in R_x$, y ya hemos llegado a una contradicción. Luego, $x \geq z$, y de la misma forma se ve que $x \leq z$. En consecuencia, $x \equiv z$. ■

Al teorema precedente lo hemos denominado *segundo teorema de simplicidad*, debido a que sus hipótesis equivalen a decir que x es el más simple entre L_z y R_z, cuando x es un surreal. En este sentido, resulta ser una generalización del primer teorema de simplicidad (teorema 3.4.2), que se había establecido sólo para surreales. En tal caso, su conclusión es que cada surreal es equivalente a cualquier corte que le represente, con lo que se culmina nuestro objetivo, el cual dejamos enunciando de la siguiente manera:

Corolario 4.3.4 *Sean* $x \in \mathbf{No}$ *y* $z \in \mathbf{Co}$. *Si* $x = L_z \,|\, R_z$, *entonces* $x \equiv z$.

Demostración. Como x es el surreal más simple tal que $L_z < x < R_z$, claramente cumple con las hipótesis del teorema anterior. De modo que $x \equiv z$. ■

4.4. Clases de equivalencia

El trabajo de la sección anterior nos permite, como hemos señalado ya, cambiar la consigna que traíamos de principio —pensar a cada corte como un número surreal, aquél al que representan— por una nueva: pensar a la relación «≡» como la igualdad. Esta relación se puede colapsar a la igualdad mediante clases de equivalencia, el cual es un método bastante común en matemáticas. De esta manera, se identifica a la igualdad con nuestra relación de equivalencia, y así logramos sustentar la nueva consigna. Sin embargo, el hecho de que **No** sea una clase propia nos puede causar problemas con este método y, en efecto, cada clase de equivalencia, módulo «≡», inevitablemente resultará ser una clase propia. No obstante, no debemos preocuparnos por esta falla, pues se pueden redefinir los conceptos para que tales clases de equivalencia sean conjuntos, valiéndonos del concepto de *rango* que hay en la jerarquía de los bien fundados. La idea es, dado un número z cualquiera, restringir la cantidad de cortaduras con las que z es equivalente; poner un tope hasta cierta *altura*, para que llegue un momento en que dejen de aparecer nuevos cortes equivalentes a z. Veamos, a grandes rasgos, cómo podemos proceder.

Primero, recordemos quiénes son los *conjuntos bien fundados*: para cada ordinal α, definamos P_α como la unión de las potencias de los conjuntos P_β, para todo $\beta < \alpha$. Es decir:

$$P_\alpha := \bigcup_{\beta<\alpha} \wp(P_\beta).$$

El *rango* de un conjunto x es entonces el mínimo α tal que $x \in P_\alpha$. Así las cosas, en el proceso de la creación vamos ir seleccionando con más cuidado los cortes que se vayan agregando en cada paso; el criterio a seguir es: considerar todas «las componentes» del corte (es decir, los elementos de sus partes izquierda y derecha) y checar sus rangos; si el rango de una componente es mayor que la cortadura en cuestión, lo sacamos de juego; en caso contrario, lo dejamos ser parte del corte. De este modo, cada cortadura se conformará por cortaduras de rango menor al suyo. A este tipo de cortaduras les podemos denominar *cortes bien fundados*, por si se quiere distinguir de todos aquellos cortes que se han descartado: los que tienen componentes que les superan en rango.

La relación de orden «≤» se define como siempre; asimismo con la relación «≡». Para establecer las clases de equivalencia, vamos también a agregar restricciones de acuerdo al rango de los bien fundados. Para $x \in \mathbf{Co}$, se define «$[x]$» como la colección de todos los cortes y, con el mínimo rango posible, tales que $y \equiv x$. Entonces, un número surreal viene a ser una clase $[x]$, donde $x \in \mathbf{Co}$. Es decir, podemos definir a la clase de los surreales como:

$$\mathbf{No} := \{[x] \mid x \in \mathbf{Co}\}.$$

Desde luego, podemos esperar que cada número surreal sea ya un conjunto bien definido, ya que estará completamente inmerso en algún P_α.

4.5. Teoría General de Juegos

Otra manera de establecer la equivalencia entre la igualdad y la relación «$\equiv$», es hacerlo así, tal cual: decidir que

$$x = z \ \text{ si y sólo si } \ x \equiv z.$$

Antes de botar esta tesis al bote de la basura, respiremos hondo y mantengamos la calma. La reacción natural, al recibir esta noticia, es considerarla un error de impresión, o un desatino del autor, o alguna otra cosa por el estilo: claramente —lo hemos visto a lo largo de la tesis—, existen cortaduras distintas que son equivalentes entre sí, módulo la relación «$\equiv$». Como ejemplo trivial, considere los cortes $(\emptyset, \emptyset)$ y $(\{-1\}, \{1\})$.

Para salir de este embrollo, vamos a remontarnos al segundo capítulo, sección dos, para recordar aquella posible nueva teoría que involucra dos pertenencias en lugar de una. En esta teoría estábamos considerando objetos de la forma $A \,|\, B$, en donde la contención queda definida ligeramente diferente:

$$x \subseteq z \ \text{ sii } \ y \in^L x \Rightarrow y \in^L z \ \text{ y } \ y \in^R x \Rightarrow y \in^R z.$$

En estos nuevos terrenos, parece que tenemos una teoría prometedora a la cual, obviamente, habría que agregar algunos tópicos más a la hora de formalizarla.

Vamos ahora a ser quisquillosos con el axioma de extensionalidad, que dicta:

$$x = z \ \text{ sii } \ x \subseteq z \subseteq x.$$

Una parte de esta equivalencia, la «ida», es un axioma lógico. La otra, el «regreso», es la parte interesante. Nosotros aceptamos sin chistar que esto se vale, debido a la familiaridad que tenemos, intuitivamente, con el concepto de conjunto. Sin embargo, siendo estrictos, la relación dada por $x \subseteq z \subseteq x$ es simple y llanamente una relación de equivalencia, y lo que establece el axioma de extensionalidad es que podemos tomar la doble contención como la igualdad. Vamos, pues, a ir más lejos al preguntarnos: ¿podemos cambiar la doble contención por cualquier otra relación de equivalencia y seguir teniendo teorías válidas? ¿Qué relaciones nos dan teorías consistentes? ¿Todas? ¿O habrá restricciones? De no haberlas, podemos estar preparados para ver venir la gran oleada de teorías, una por cada relación de equivalencia que se nos ocurra. Por supuesto, ello no significa que cada teoría obtenida tenga que ser interesante.

Para el caso que nos atañe, con la relación «$\equiv$», nos gustaría ver qué cosas aparecen, o perecen, o cambian, en esta nueva teoría, cuyos objetos bien pueden denominarse *Biconjuntos*, *Conjuntos dobles*, o, por razones históricas, sencillamente podemos llamarles *Juegos*.[2] Por tal razón, la nueva teoría queda bautizada como *Teoría General de Juegos* (o simplemente, *Teoría de Juegos*).

Así las cosas, las cortaduras, en lugar de ser pares de conjuntos ordenados, serán ahora juegos de la forma $A \,|\, B$, en donde $A < B$. Y, si dos cortes son equivalentes, entonces son iguales. La consecuencia más fuerte, al trabajar con esta nueva óptica, es que cada surreal será lo mismo que cada corte que le representa, que era el sueño que teníamos de principio. Esto quiere decir que ya no será necesario distinguir entre cortes y números, puesto que las clases **No** y **Co** coinciden.

¡Qué sencillo ha sido! Tal parece que esta vez sí nos conviene abandonar la Teoría de Conjuntos y abrazar esta nueva, la Teoría de Juegos. Sin embargo, como ya hemos señalado en la sección 2.2, aún faltaría desarrollarla. Así que esta alternativa es, por el momento,

[2] Como ya comentamos en el prólogo, los números surreales fueron descubiertos por Conway mientras trabajaba en Teoría Combinatoria de Juegos. La clase de los surreales es una subestructura de la clase de los juegos. Éstos se corresponden perfectamente con los objetos de nuestra «nueva» teoría.

para aquellos más intrépidos. Para los que prefieren caminar sobre suelo seguro, queda la opción de formar clases de equivalencia restringidas, tal como se ha descrito en la sección anterior.

Por último, es oportuno señalar un abuso de notación al que estaremos recurriendo frecuentemente:

Para $x \in \mathbf{No}$ hemos acordado usar L_x y R_x para denotar las partes izquierda y derecha, respectivamente. El problema radica en que cada número surreal tendrá infinidad de representaciones, con lo cual las partes izquierdas y derechas variarán en muchas ocasiones. Debemos estar atentos a que no se produzcan ambigüedades.

4.6. Las reglas de Conway

En su novela matemática, Donald E. Knuth describe la construcción de los números surreales, basada en dos sencillas reglas —que denomina *reglas de Conway*—, de las cuales una nos dice cómo obtener estos números, y la otra establece la manera en cómo deben ordenarse. Nosotros introduciremos una regla extra: precisamente el axioma de extensionalidad como lo hemos modificado en el anterior apartado.

Las tres reglas de Conway son las siguientes:

Regla C1: *Cómo construir surreales.*
Si (A, B) es una cortadura de números surreales, entonces el par $A \,|\, B$ es un número surreal. Todos los surreales se construyen de esta manera.

Regla C2: *Cómo alinear surreales.*
Si x y z son números surreales, entonces $x \leq z$ si y sólo si $L_x < z$ y $x < R_z$. Además, $x < z$ si y sólo si $x \leq z \nleq x$.

Regla C3: *Cuándo dos surreales son iguales.*
Si x y z son números surreales, entonces $x = z$ si y sólo si $x \equiv z$.

En lo sucesivo, a menudo trabajaremos con los números surreales en torno a estas tres reglas, considerando más bien a la Teoría de Juegos. De este modo, podemos estar alternando entre ésta y la Teoría de Conjuntos. Por ejemplo, si x es un corte, entonces las notaciones «$u \in L_x \cup R_x$» y «$u \in x$» significan lo mismo, pero en diferentes contextos, la primera dentro de la TC, y la segunda dentro de la TJ.

Antes de cerrar este capítulo, es importante hacer notar un detalle crucial. Observemos que las dos primeras reglas de Conway parecen estar encerradas en un dilema de circularidad, pues se necesita tener alineados a los surreales del corte que define un nuevo surreal, y, a su vez, necesitamos tener ya construidos a los surreales para poder hablar de orden. No obstante, podemos ver que esto no es así, pues, como se vio en el primer capítulo, ambas reglas se van intercalando en el proceso recursivo, evitando la circularidad.

Capítulo 5

La recta surreal

En el primer capítulo se demostró que **No** tiene estructura de orden lineal, y por tal motivo le hemos llamado *recta surreal*. Sin embargo, para que una línea pueda ganarse la denominación de recta numérica, necesita primero contar con estructura algebraica.

Pues bien, se ha llegado la hora de definir las operaciones que nos servirán para darle esa estructura a los números surreales, y poder llamarle, cómodamente, recta surreal.

El espíritu de las definiciones es que tales operaciones se deben comportar de la forma usual, es decir, que con las operaciones así definidas logremos darle estructura de campo a la clase de los surreales. Queremos también, no está de más decirlo, que con cada definición se estén obteniendo números de verdad; o sea, que tanto $-x$, $x+z$ como xz, correspondan con alguna cortadura de números surreales.

Antes de dar las definiciones pertinentes, recordemos que:

Los números surreales se construyen a partir de dos sencillas reglas, que denominamos *reglas de Conway*, las cuales se entrelazan dentro de un proceso recursivo cuyos pasos podemos entender como "días de la creación de todos los números".

La primer regla, C1, nos dice que todo número surreal es un par $A \,|\, B$, donde A y B son conjuntos de números surreales tales que $A < B$. El número surreal $A \,|\, B$ es el *más simple* entre A y B, es decir, que, de todos los números que hay entre A y B, él es el primero en nacer. Si $x = A \,|\, B$, entonces denotaremos a A y a B como L_x y R_x, respectivamente, siempre y cuando no haya ambigüedades (como ya comentamos en el capítulo pasado, esto es un abuso de notación).

La segunda regla, C2, permite alinear a todos los números. Si x y z son números surreales, entonces $x \leq z$ si y sólo si $L_x < z$ y $x < R_z$; y $x < z$ si y sólo si $x \leq z$ pero $z \nleq x$.

Una tercera regla, C3, establece que $x = z$ sii $x \leq z \leq x$. Es decir, nos asegura que se cumple la antisimetría de «$\leq$».

Si $x \in$ **No**, entonces $u \in^L x$ denotará $u \in L_x$, y se leerá «u es un elemento izquierdo de x». Análogamente, $u \in^R x$ significa $u \in R_x$ y se lee «u es elemento derecho de x». Si $u \in^L x$, entonces u se denota por x^L; y si $u \in^R x$, escribimos $u = x^R$. Por tanto, podemos usar $\{x^L\}$ y $\{x^R\}$ para representar a los lados izquierdo y derecho de x, respectivamente. De este modo, tenemos la *notación genérica*

$$x = \{x^L \mid x^R\}.$$

Siguiendo por el mismo hilo, introducimos más notación conveniente:

$$\{x^L, z^R\} := \{x^L\} \cup \{z^R\}.$$

Lo mismo hacemos para las otras combinaciones posibles (inclusive, se pueden combinar partes izquierdas y derechas de un mismo número).

Extenderemos este enfoque lo más que podamos. Denotaremos, por ejemplo,

$$\{x^R - z^L\} := \{u - v \mid u \in R_x,\ v \in L_z\}.$$

También:

$$\{x^L z + xz^R\} := \{uz + xv \mid u \in L_x,\ v \in R_z\}.$$

De este modo logramos simplificar considerablemente la notación al definir nuevos números a partir de otros números dados. Por ejemplo, podemos definir el corte

$$(\{u - v \mid u \in R_x,\ v \in L_z\}, \{uz + xv \mid u \in L_x,\ v \in R_z\} \cup \{uz + xv \mid u \in L_x,\ v \in L_z\}),$$

el cual podemos escribir, según nuestras convenciones, en la forma

$$(\{x^R - z^L\}, \{x^L z + xz^R,\ x^L z + xz^L\}).$$

El número surreal que corresponde a este corte es

$$\{x^R - z^L \mid x^L z + xz^R,\ x^L z + xz^L\}.$$

5.1. El negativo de un número

Comenzamos definiendo $-x$ a partir de un número x. Nuestra labor será dar un par de conjuntos (A, B), tal que $-x$ sea el punto más simple entre A y B; es decir, que de todos los puntos entre A y B, $-x$ sea el primero en nacer. La idea es pensar en aquellas propiedades que sabemos de antemano se deben cumplir. En este caso, para todos los números x^L y x^R, se tiene que

$$x^L < x < x^R$$

y, por tanto, también que

$$-x^R < -x < -x^L,$$

como resultado de multiplicar por menos.

Luego, parece conveniente definir:

$$-x := \{-x^R \mid -x^L\}.$$

Es decir, $-x$ debe ser el primer número surreal en nacer que se queda por arriba de $\{-x^R\}$ y por abajo de $\{-x^L\}$, lo cual es muy razonable de esperar, puesto que todo número z nace al mismo tiempo que $-z$; y, además, x era el punto más simple entre $\{x^L\}$ y $\{x^R\}$, por lo cual no es descabellado asegurar que $-x$ es el más simple entre $\{-x^L\}$ y $\{-x^R\}$.

Dada la ostentosidad de haber elegido el término *negativo*, debemos esperar que $-x$ sea el inverso aditivo de x, en términos de la suma que se define a continuación.

5.2. La suma

Sabemos que $x^L < x < x^R$ y $z^L < z < z^R$; de aquí se debe tener que

$$x^L + z^L < x + z < x^R + z^R,$$

pues la suma y el orden deben ser compatibles; así, podemos definir

$$x + z \ := \ \{x^L + z^L \mid x^R + z^R\}$$

cumpliendo por lo menos que $x+z$ está entre $\{x^L+z^L\}$ y $\{x^R+z^R\}$. Sin embargo, también debería cumplirse que

$$x^L+z^L < \{x^L+z,\ x+z^L,\ x^R+z,\ x+z^R\} < x^R+z^R$$

es decir, todos los surreales de la forma $x^L+z,\ x+z^L,\ x^R+z\ y\ \ x+z^R$, están entre $\{x^L+z^L\}$ y $\{x^R+z^R\}$, y no sabemos a ciencia cierta si $x+z$ ha nacido antes que todos ellos.

Sin embargo, dado que

$$\{x^L+z,\ x+z^L\} < x+z < \{\ x^R+z,\ x+z^R\}$$

podemos refinar la pretendida definición, tomando $(\{x^L+z,\ x+z^L\},\{x^R+z,\ x+z^R\})$ en lugar de $(\{x^L+z^L\},\{x^R+z^R\})$.

Definamos pues

$$x+z := \{x^L+z,\ x+z^L \mid x^R+z,\ x+z^R\}$$

Ahora toca al lector creer en el autor (quien ya se sabe la historia), y confiar en que esta definición es buena, pues rescata todas las propiedades deseadas de campo linealmente ordenado referentes a la suma.

5.3. Cómo trabajan la suma y la resta

A lo largo del proceso de construcción de los números surreales, fuimos nombrando a muchos de los entes que nos iban apareciendo. Esto se hacía de forma deliberada, arbitraria, aduciendo que la razón de los nombres se justificaría una vez que estuvieran definidas las operaciones. Hemos llegado ya a ese momento, así que veamos que los números se comportan de la forma esperada de acuerdo a las etiquetas que les hemos puesto. En este apartado comenzamos con la suma y la resta, que son las operaciones de las que ya disponemos.

Hay que observar que, de manera natural, nuestra suma ha quedado definida recursivamente. Lo mismo ocurre con las demás operaciones. En tal caso, a la hora de analizar cómo trabajan tales, debemos acatarnos a esta jerarquía recursiva: la jerarquía de los cumpleaños.

El primer número en nacer ha sido nombrado «cero». Entonces, estamos obligados a corroborar que este primer número realmente es un neutro aditivo. Es decir, habría que ver que se tiene: $x+0=x$,[1] para cualquier $x \in \mathbf{No}$. Debemos, por tanto, contrastar al cero con cada número surreal, y, de nueva cuenta, lo más recomendable es seguir la jerarquía de los cumpleaños.

Comenzamos poniendo a prueba al cero consigo mismo. Por definición de la suma, se tiene que

$$0+0 \;=\; \{0^L+0,\ 0+0^L \mid 0^R+0,\ 0+0^R\};$$

y ya que «0» no tiene elementos ni izquierdos ni derechos, claramente, $0+0=\{\ \mid\ \}=0$.

Con el «1» ocurre algo similar:

$$\begin{aligned} 1+0 &= \{0 \mid\ \}+\{\ \mid\ \} \\ &= \{1^L+0,\ 1+0^L \mid 1^R+0,\ \ 1+0^R\} \end{aligned}$$

[1]También habría que ver que $0+x=x$, para cada $x \in \mathbf{No}$; sin embargo, como sabemos que la conmutatividad ha de valerse, esto sería excesivo.

Aquí, el único sobreviviente es $1^L + 0$, así que:

$$1 + 0 \;=\; \{1^L + 0 \mid \} \;=\; \{0 + 0 \mid \}$$

Ahora, nosotros acabamos de probar que $0 + 0 = 0$, por lo que:

$$1 + 0 \;=\; \{0 \mid \} \;=\; 1$$

Con el -1 pasa lo mismo:

$$\begin{aligned} -1 + 0 &= \{ \mid 0\} + \{ \mid \} \\ &= \{ \mid 0 + (-1)^R\} \\ &= \{ \mid 0 + 0\} \;=\; \{ \mid 0\} \;=\; -1 \end{aligned}$$

Con esto, estamos convencidos que «0» realmente se comporta como un neutro, siquiera hasta el día 1. Notemos la necesidad de saber de antemano que la propiedad se cumple para los nacidos en el día 0, para poder demostrar que también se verifica para los que nacieron el siguiente día, el día 1. Desde aquí ya se va viendo que nuestras pruebas vendrán siendo principalmente inductivas, y de hecho así será en todos los casos, por lo menos en los resultados principales. Intentemos pues, ya desde este momento, demostrar que $0 := \{ \mid \}$ es el neutro de la suma que hemos recientemente definido.

Proposición 5.3.1 *Sea $x \in \mathbf{No}$. Entonces $x + 0 = x$.*

Demostración. Queremos ver que $x+0 = x$. Para esto, observemos que no hay números de la forma $x + 0^L$ ni $x + 0^R$, por lo que $x + 0 = \{x^L + 0 \mid x^R + 0\}$. Las hipótesis de inducción son: $x^L + 0 = x^L$ y $x^R + 0 = x^R$. Así las cosas:

$$\{x^L + 0 \mid x^R + 0\} \overset{HI}{=} \{x^L \mid x^R\} = x.$$

En consecuencia, $x + 0 = x$. ■

Ya encarrilados y emocionados con el reciente pequeño éxito, no está de más intentar obtener otras propiedades algebraicas de interés. Probemos suerte con la conmutatividad.

Proposición 5.3.2 *La suma es conmutativa.*

Demostración. Sean $x, z \in \mathbf{No}$. Tenemos inductivamente que la conmutatividad se vale para todas los $(x + z)^L$ y $(x + z)^R$. Así que:

$$\begin{aligned} x + z &= \{x^L + z,\ x + z^L \mid x^R + z,\ x + z^R\} \\ &\overset{HI}{=} \{z + x^L,\ z^L + x \mid z + x^R,\ z^R + x\} \;=\; z + x \end{aligned}$$

Luego, $x + z = z + x$. ■

Estamos conmocionados por lo sencillo que ha resultado establecer la conmutatividad. Y ¿qué hay de la asociatividad? ¿Podemos esperar correr con la misma suerte? No perdemos nada con intentarlo.

Proposición 5.3.3 *Sean $x, y, z \in \mathbf{No}$. Entonces $x + (y + z) = (x + y) + z$.*

Demostración. Por inducción, la asociatividad se cumple para todos los elementos de $x+(y+z)$. Además, los elementos $(y+z)^L$ de $y+z$ son de la forma y^L+z y $y+z^L$. y $z^L \in^L z$. De este modo:

$$\begin{aligned} L_{x+(y+z)} &= \{x^L+(y+z),\ x+(y+z)^L\} \\ &= \{x^L+(y+z),\ x+(y^L+z),\ x+(y+z^L)\} \\ &\overset{HI}{=} \{(x^L+y)+z,\ (x+y^L)+z,\ (x+y)+z^L\} \\ &= \{(x+y)^L+z,\ (x+y)+z^L\} \ = \ L_{(x+y)+z} \end{aligned}$$

donde se han usado las identidades (muy sencillas de verificar):

$$\begin{aligned} \{x+(y+z)^L\} &= \{x+(y^L+z),\ x+(y+z^L)\} \\ \{(x+y)^L+z\} &= \{(x^L+y)+z,\ (x+y^L)+z\} \end{aligned}$$

la primer de ellas en la segunda igualdad, y la segunda en la penúltima.

Cambiando elementos izquierdos por derechos, es claro que también se tiene

$$R_{x+(y+z)} = R_{(x+y)+z}.$$

De este modo vemos que los cortes que definen a $x+(y+z)$ y a $(x+y)+z$ son iguales, y por lo tanto, $x+(y+z)=(x+y)+z$. ■

Hasta aquí, hemos demostrado, no con mucho esfuerzo, que la clase de los surreales, bajo la suma, conforma un monoide conmutativo, con el «0» como neutro. Para llegar a la categoría de grupo conmutativo nos falta sólo un paso: asegurar que todo mundo tiene inverso aditivo. Estos inversos serán precisamente aquellos que hemos denominado *negativos*. Como estamos entusiasmados, lo normal sería lanzarnos desde ahora por esa nueva meta. Pero antes de esto, vamos a tratar algunos casos particulares, y ya de paso seguir verificando que las etiquetas que hemos dado a algunos de nuestros números —en los primeros capítulos— funcionan congruentemente, por lo menos en cuanto a la suma y la resta.

Vamos primero con el «2». Deberíamos esperar que $1+1=2$, desde luego; y, en efecto:

$$\begin{aligned} 1+1 &= \{0\mid\ \}+\{0\mid\ \} \\ &= \{1+1^L \mid 1+1^R\} \\ &= \{1+0\mid\ \} \ = \ \{1\mid\ \} \ = \ 2 \end{aligned}$$

Aquí, además de la propiedad de neutro aditivo del «0», hemos usado la conmutatividad de la suma, ya que, en general, $x+x=\{x+x^L \mid x+x^R\}$.

Por otro lado:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}+\frac{1}{2} &= \{0\mid 1\}+\{0\mid 1\} \\ &= \{(\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^L \mid \frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^R\} \\ &= \{\frac{1}{2}+0 \mid \frac{1}{2}+1\} \\ &= \{\frac{1}{2} \mid \frac{1}{2}+1\} \end{aligned}$$

Como «1» es el más simple entre «$\frac{1}{2}$» y «$1+\frac{1}{2}$», tenemos que $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$, lo cual nos sugiere que la definición de «$\frac{1}{2}$» va por buen camino.

Veamos ahora si «$\frac{1}{4}$» corre con la misma suerte al sumarlo consigo mismo. ¿Que esperamos obtener? Un medio, por supuesto:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}+\frac{1}{4} &= \{0 \mid \frac{1}{2}\} + \{0 \mid \frac{1}{2}\} \\
&= \{(\frac{1}{4}+(\frac{1}{4})^L \mid \frac{1}{4}+(\frac{1}{4})^R\} \\
&= \{\frac{1}{4}+0 \mid \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\} \\
&= \{\frac{1}{4} \mid \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\}
\end{aligned}$$

Esta última expresión corresponde a «$\frac{1}{2}$», ya que $\frac{1}{4} < \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, y todos aquellos más simples —«0» y «1»— quedan fuera.

Vamos ahora a jugar con expresiones que involucren a la resta. El negativo de un surreal x es, por definición, $-x = \{-x^R \mid -x^L\}$. De este modo, el negativo de «1» es: $-1 = \{-1^R \mid -1^L\} = \{ \mid -0\}$. Claramente, $-0 = 0$, tanto por la definición de inversos (pues ya vimos que $0+0 = 0$), como por la de negativos (clarísimo: $-0 = \{-0^R \mid -0^L\} = \{ \mid \}$). Entonces, $-1 = \{ \mid -0\} = \{ \mid 0\}$, lo cual es congruente con la nomencatura que veníamos usando al principio de la tesis. Un sencillo análisis es más que suficiente para confiar que los demás negativos también han recibido nomenclaturas correctas.

Sigamos explorando:

$$\begin{aligned}
1-1 &= 1+-1 \\
&= \{0 \mid \} + \{ \mid 0\} \\
&= \{0-1 \mid 1+0\} \\
&= \{-1 \mid 1\} \;=\; 0
\end{aligned}$$

Así las cosas, el negativo de «1» es también su inverso aditivo.

Tenemos también que

$$\begin{aligned}
1-\frac{1}{2} &= 1+-\frac{1}{2} \\
&= \{0 \mid \} + \{-1 \mid 0\} \\
&= \{1^L+-\frac{1}{2},\ 1+(-\frac{1}{2})^L \mid 1^R+-\frac{1}{2},\ 1+(-\frac{1}{2})^R\} \\
&= \{0-\frac{1}{2},\ 1-1 \mid 1+0\} \\
&= \{-\frac{1}{2},\ 0 \mid 1\} \;=\; \{0 \mid 1\} \;=\; \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Del mismo modo se demuestra que $\frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$. Con esto, podemos ver que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}-\frac{1}{2} &= \frac{1}{2}+-\frac{1}{2} \\
&= \{0 \mid 1\} + \{-1 \mid 0\} \\
&= \{(\frac{1}{2})^L+-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}+(-\frac{1}{2})^L \mid (\frac{1}{2})^R+-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}+(-\frac{1}{2})^R\} \\
&= \{0-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}-1 \mid 1-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}+0\} \\
&= \{-\frac{1}{2} \mid \frac{1}{2}\} \;=\; 0
\end{aligned}$$

Se va viendo, pues, que los negativos corresponden con los inversos aditivos. Podríamos seguir así, indefinidamente, pero mejor vamos a intentar demostrarlo en general:

Proposición 5.3.4 *Para cada* $x \in \mathbf{No}$, $x - x = 0$.

Demostración. Sea $x = \{x^L \mid x^R\} \in \mathbf{No}$. Tenemos que

$$\begin{aligned} x + -x &= \{x^L \mid x^R\} + \{-x^R \mid -x^L\} \\ &= \{x^L + -x,\ x + -x^R \mid x^R - x,\ x - x^R\}. \end{aligned}$$

Puesto que $x^L < x$, deberíamos tener que $x^L - x^L < x - x^L$, sumando $-x^L$ a ambos lados de la desigualdad; y de aquí tenemos que $x - x^L > 0$, aplicando la hipótesis de inducción. Los otros tres casos llevan a conclusiones similares. Tenemos, por tanto, que:

$$x - x^R < 0 < x - x^L$$
$$x^L - x < 0 < x^R - x.$$

Así las cosas, «0» debe ser el más simple entre L_{x+-x} y R_{x+-x} (puesto que es, de hecho, el más simple de todos los números surreales); luego, por simplicidad, $0 = x + -x$. ∎

Y hasta aquí todo parece bastante bello y feliz: hemos establecido que la suma recién definida le da estructura de grupo abeliano a los números surreales. Sin embargo, tenemos un problema, y es que estamos dando por hecho, en esta última prueba, que la suma es compatible con el orden. Esta misma compatibilidad ha sido también utilizada en los casos particulares que se trataron. Por otro lado, aún nos queda la tarea de verificar que $x + z$ y $-x$ son números surreales siempre que x y z lo sean. Todo esto se demostrará en la siguiente sección, así que lo supondremos válido provisionalmente.

5.4. Multiplicación

Para establecer la cortadura que define al producto xz, necesitamos pensar en dos conjuntos que acoten a xz a partir de lo que sabemos de x y z.

Tomando elementos arbitrarios x^L, x^R, z^L y z^R de x y z, tenemos que

$$x^L < x < x^R$$

$$z^L < z < z^R$$

por lo que $x - x^L$, $z - z^L$, $x^R - x$ y $z^R - z$ son positivos, y por tanto, los productos $(x - x^L)(z - z^L)$, $(x^R - x)(z^R - z)$, $(x - x^L)(z^R - z)$ y $(x^R - x)(z - z^L)$ también lo son. Luego, al desarrollar estos productos, tenemos que

$$xz + x^L z^L - xz^L - x^L z > 0$$

$$x^R z^R + xz - x^R z - xz^R > 0$$

$$xz^R + x^L z - xz - x^L z^R > 0$$

$$x^R z + xz^L - x^R z^L - xz > 0$$

y de aquí claramente se sigue que

$$\left\{ \begin{matrix} x^L z + xz^L - x^L z^L, \\ x^R z + xz^R - x^R z^R \end{matrix} \right\} < xz < \left\{ \begin{matrix} x^L z + xz^R - x^L z^R, \\ x^R z + xz^L - x^R z^L \end{matrix} \right\}$$

Por tanto, definamos el producto de x con z como

$$xz := \left\{ \begin{matrix} x^L z + xz^L - x^L z^L, \\ x^R z + xz^R - x^R z^R \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} x^L z + xz^R - x^L z^R, \\ x^R z + xz^L - x^R z^L \end{matrix} \right\}$$

5.5. Cómo trabaja la multiplicación

Al igual que con la suma, los surreales también forman un grupo abeliano con el producto (sin contemplar al cero, claro está). Estas demostraciones resultan igualmente rutinarias[2] (aunque más elaboradas en cuanto a notación, como puede adivinarse con sólo comparar las definiciones), con la notable excepción de la prueba de existencia de inversos multiplicativos. Esta última se pospondrá hasta la sección final, mientras que las demostraciones de las demás propiedades se omitirán, aunque, como muestra, sólo comprobaremos que «1» es realmente el neutro para la multiplicación.

Proposición 5.5.1 *Sea* $x \in \mathbf{No}$. *Entonces:*

1) $x \cdot 0 = 0.$

2) $x \cdot 1 = x.$

Demostración.
1) Como $L_0 = R_0 = \emptyset$, entonces ninguno de los elementos de $x \cdot 0$ es válido, pues cada uno de ellos debe involucrar al menos un elemento de 0. Así, $x \cdot 0 = \{\ |\ \} = 0$.

2) El único elemento izquierdo de «1» es el «0». Además, no tiene elemento derechos, por lo que ninguna de las formas «$x' \cdot 1 + x \cdot 1^R - x' \cdot 1^R$» es válida. De este modo, se tiene que:

$$\begin{aligned}
x \cdot 1 &= \left\{ \begin{matrix} x^L \cdot 1 + x \cdot 1^L - x^L \cdot 1^L \\ x^R \cdot 1 + x \cdot 1^R - x^R \cdot 1^R \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} x^L \cdot 1 + x \cdot 1^R - x^L \cdot 1^R \\ x^R \cdot 1 + x \cdot 1^L - x^R \cdot 1^L \end{matrix} \right\} \\
&= \{x^L \cdot 1 + x \cdot 0 - x^L \cdot 0 \mid x^R \cdot 1 + x \cdot 0 - x^R \cdot 0\} \\
&= \{x^L \cdot 1 + 0 - 0 \mid x^R \cdot 1 + 0 - 0\} \qquad \text{(Proposición anterior)} \\
&= \{x^L \cdot 1 \mid x^R \cdot 1\} \qquad \text{(0 es neutro)} \\
&\overset{HI}{=} \{x^L \mid x^R\} \;=\; x
\end{aligned}$$

■

La demostración de que el producto distribuye a la suma es igualmente rutinaria, y también se omite. Hasta aquí llevamos entonces todo lo necesario para decir que **No** es un anillo conmutativo con unitario. Esto nos ayudará por el momento para dar una definición alternativa, más conveniente en algunos casos, del producto.

Proposición 5.5.2 *Si* $x, z \in \mathbf{No}$, *entonces:*

$$xz := \left\{ \begin{matrix} xz - (x - x^L)(z - z^L), \\ xz - (x^R - x)(z^R - z) \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} xz - (x - x^L)(z^R - z), \\ xz - (x^R - x)(z - z^L) \end{matrix} \right\}$$

Por último, vamos a comprobar que los números «$\frac{1}{2}$» y «$\frac{1}{\omega}$» son, efectivamente, los inversos multiplicativos de «2» y «ω», respectivamente.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \cdot 2 &= \{0 \,|\, 1\}\{1 \,|\ \} \\
&= \{\frac{1}{2} \cdot 1 + 0 \cdot 2 - 1 \cdot 0 \,|\, \{\frac{1}{2} \cdot 1 + 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1\} \\
&= \{\frac{1}{2} \,|\, \frac{1}{2} + 2 - 1\} \\
&= \{\frac{1}{2} \,|\, \frac{1}{2} + 1\}
\end{aligned}$$

[2] No obstante, estas pruebas tienen sus ligeros detalles, puesto que se basan en pequeños resultados que hay también que verificar. De cualquier manera, estos también se demuestran fácilmente. Para ver estas pruebas, se puede consultar el capítulo 1 de [1].

Puesto que $0 < \frac{1}{2} < 1 < \frac{1}{2} + 1$ (usando compatibilidad de suma y orden), entonces «1» es el más simple entre «$\frac{1}{2}$» y «$\frac{1}{2} + 1$», es decir, $1 = \{\frac{1}{2} \,|\, \frac{1}{2} + 1\}$. Entonces, en efecto, tenemos que $\frac{1}{2} \cdot 2 = 1$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\omega} \cdot \omega &= (\{0\} \,|\, \mathbb{D}^+)(\mathbb{N} \,|\, \emptyset) \\ &= (\omega \cdot 0 + \frac{1}{\omega} \cdot \mathbb{N} - 0 \cdot \mathbb{N}) \,|\, (\frac{1}{\omega} \cdot \mathbb{N} + \omega \cdot \mathbb{D}^+ - \mathbb{N} \cdot \mathbb{D}^+)\end{aligned}$$

Dado que $\mathbb{N} < \omega$, tenemos que $\frac{1}{\omega} \cdot \mathbb{N} < 1$. Por otro lado, $\mathbb{N} < \omega$ también implica $\mathbb{N} \cdot \mathbb{D}^+ < \omega \cdot \mathbb{D}^+$, y ya que $1 + \mathbb{N} \cdot \mathbb{D}^+ \subseteq \mathbb{N} \cdot \mathbb{D}^+$, debemos tener que $1 + \mathbb{N} \cdot \mathbb{D}^+ < \omega \cdot \mathbb{D}^+$. Así las cosas, se tiene:

$$0 < \frac{1}{\omega} < 1 < \omega \cdot \mathbb{D}^+ - \mathbb{N} \cdot \mathbb{D}^+ < \frac{1}{\omega} \cdot \mathbb{N} + \omega \cdot \mathbb{D}^+ - \mathbb{N} \cdot \mathbb{D}^+;$$

luego, $1 = (\omega \cdot 0 + \frac{1}{\omega} \cdot \mathbb{N} - 0 \cdot \mathbb{N}) \,|\, (\frac{1}{\omega} \cdot \mathbb{N} + \omega \cdot \mathbb{D}^+ - \mathbb{N} \cdot \mathbb{D}^+)$, por lo que $\frac{1}{\omega} \cdot \omega = 1$.

Debemos notar que, igual que ocurría con la suma, hemos hecho uso de la compatibilidad del producto con el orden (y también de la suma con el orden). Tampoco hemos garantizado que si multiplicamos números surreales obtenemos fielmente números surreales. Esto queda pendiente, pero prometemos demostralo antes de concluir el capítulo.

5.6. Recíprocos multiplicativos

Motivar la definición ya no es tarea sencilla. Probablemente Conway la obtuvo luego de varios ensayos y errores. Esta definición se dará para una clase especial de números surreales positivos: aquellos que prescindan de elementos izquierdos negativos, pero incluyan al cero como tal (como elemento izquierdo). A estos números los vamos a denominar *positivos puros*, sólo para facilitar el discurso en este capítulo. Al describir cómo obtener recíprocos para números positivos puros, indirectamente estaremos encontrando los recíprocos de todos los positivos en general, ya que todo número positivo corresponde con un número positivo puro específico. Veamos cómo lograrlo:

Lema 5.6.1 *Sea $x = I \,|\, D$ un número surreal positivo. Definamos:*

$$L := \{0\} \cup \{u \in I \mid u > 0\}.$$

Entonces $x = L \,|\, D$.

Demostración. Claramente, (L, D) es un corte de números surreales, dado que (I, D) lo es; por tanto, tiene sentido hablar del número surreal $L \,|\, D$. Claramente, $L < x < D$, ya que $x > 0$ y $\{u \in I \mid u > 0\} \subseteq I$. Además, si consideramos $u \in I$, podemos tener $u \leq 0$, o bien, $u > 0$. En el segundo caso, se sigue que $u \in L$, y de este modo, ningún $u \in I$ cumple $u > L$. Obviamente tampoco se puede tener $u < D$, si $u \in D$. De este modo, $L < x < D$, pero ninguno de sus elementos en $I \cup D$ lo es. Apelando al teorema de simplicidad, se tiene que $x = L \,|\, D$. ∎

El surreal $L \,|\, D$ es, claramente, un número positivo puro. Este lema nos asegura, por tanto, que todo número surreal positivo se puede «purificar», lo que nos asegura que podemos encontrarle recíproco a todos los positivos. Y ¿qué hay de los surreales negativos? Pues no hay de qué preocuparse, ya que cada surreal negativo obtiene su recíproco de forma indirecta a través de su inverso aditivo (el cual es positivo), y el lector puede muy fácilmente dar cuenta de ello.

Así las cosas, dado $x \in \mathbf{No}$, definimos:

$$\frac{1}{x} := \left\{ \begin{array}{c|c} 0,\ \frac{1}{x^R}(1+(x^R-x)\hat{x}^L), & \frac{1}{x^L}(1+(x^L-x)\hat{x}^L), \\ \frac{1}{x^L}(1+(x^L-x)\hat{x}^R) & \frac{1}{x^R}(1+(x^R-x)\hat{x}^R) \end{array} \right\},$$

donde $\hat{x} = \frac{1}{x}$.

Antes de seguir, es necesario hacer aclaraciones. Podemos notar que la definición de cada elemento de $\frac{1}{x}$, $\hat{x}'' \neq 0$, depende de otro de sus elementos $\hat{x}'$; y, además, de algún elemento x' de x junto con su recíproco multiplicativo $\frac{1}{x'}$. De este modo, la definición de $\frac{1}{x}$ inmiscuye dos procesos recursivos: uno que va calculando el recíproco de cada elemento de x; y otro que nos permite obtener cada elemento de $\frac{1}{x}$, con excepción del «0», mediante elementos previos (de $\frac{1}{x}$). Este último proceso recursivo se da en ω pasos.

De hecho, podemos empezar considerando al cero, quien, por definición, es un elemento izquierdo de $\frac{1}{x}$: esta es nuestra *base*. Luego, a partir de «0», de los elementos x' de x y sus recíprocos $\frac{1}{x'}$ ya calculados, construimos, en un segundo paso, nuevos elementos $\hat{x}'$ de $\frac{1}{x}$. Luego, estos nuevos $\hat{x}'$, nos servirán para construir los siguientes $\hat{x}''$, al combinarlos con individuos x' y sus recíprocos $\frac{1}{x'}$ (siguiendo la receta que nos da la definición de $\frac{1}{x}$). Luego, con los elementos $\hat{x}''$ construimos, de la misma manera, nuevos elementos para $\frac{1}{x}$, y continuamos así sucesivamente.

Más explícitamente:

$$\frac{1}{x} = \hat{x} := \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n^L \;\Big|\; \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n^R,$$

donde

$$\begin{aligned} X_0^L &= \{0\}, \quad X_0^R = \emptyset \\ X_{n+1}^L &= X_n^L \cup \left\{ \frac{1}{x^R}(1+(x^R-x)\hat{x}^L) \mid \hat{x}^L \in X_n^L \right\} \cup \left\{ \frac{1}{x^L}(1+(x^L-x)\hat{x}^R) \mid \hat{x}^R \in X_n^R \right\} \\ X_{n+1}^R &= X_n^R \cup \left\{ \frac{1}{x^L}(1+(x^L-x)\hat{x}^L) \mid \hat{x}^L \in X_n^L \right\} \cup \left\{ \frac{1}{x^R}(1+(x^R-x)\hat{x}^R) \mid \hat{x}^R \in X_n^R \right\} \end{aligned}$$

Así las cosas, como tenemos dos recursiones mezcladas, podemos valernos de dos métodos de prueba por inducción: la de números surreales, y la de números naturales. Esta última es el famoso principio de inducción matemática, con el cual ya estamos bastante familiarizados.

5.7. Cómo trabaja la división

Vamos a dar un ejemplo para clarificar un poco la definición que se ha dado de recíproco multiplicativo. El ejemplo a elegir es «$\frac{1}{2}$».[3]

[3] En [1], pag. 21, podemos encontrar otro ejemplo (al pie de página).

Como $2 = \{0\,1\,|\,\}$ no tiene elementos derechos y sólo uno izquierdo no nulo, la definición de su recíproco se simplifica notoriamente:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} &= \left\{0,\ \frac{1}{2^L}(1+(2^L-2)\hat{2}^R)\ \middle|\ \frac{1}{2^L}(1+(2^L-2)\hat{2}^L)\right\} \\
&= \{0,\ \frac{1}{1}(1+(1-2)\hat{2}^R)\,|\,\frac{1}{1}(1+(1-2)\hat{2}^L)\} \\
&= \{0,\ 1-\hat{2}^R\,|\,1-\hat{2}^L\}
\end{aligned}$$

En todos los casos se tiene el mismo valor inicial (es decir, la base): $\{0\,|\,\}$. Luego, no aparecen nuevo elementos izquierdos, y tenemos sólo un elemento derecho:

$$1-\hat{2}^L = 1-0 = 1,$$

obteniendo, entonces, $\{0\,|\,1\}$.

Hasta aquí, podemos ver fácilmente que el proceso se estabiliza y ya no obtenemos nada nuevo en los pasos ulteriores. De este modo, $\frac{1}{2} = \{0\,|\,1\}$, lo cual cuadra a la perfección con la nomenclatura acuñada.

Por último, toca verificar que los recíprocos están bien definidos. Es decir, que a cada surreal corresponde un inverso multiplicativo, y que este es precisamente su recíproco que se ha definido en la sección anterior. Desde luego, nos ocuparemos sólo de números positivos puros.

Teorema 5.7.1 *Sea $x \in$ **No** un número positivo puro. Entonces:*

1) $x \cdot L_{\hat{x}} < 1 < x \cdot R_{\hat{x}}$.

2) $\frac{1}{x} \in$ **No**.

3) $L_{x\hat{x}} < 1 < R_{x\hat{x}}$.

4) $\frac{1}{x} \cdot x = 1$.

Demostración.

1) Cada elemento $\hat{x}'' > 0$ es de la forma

$$\hat{x}'' = \frac{1}{x'}(1+(x'-x)\hat{x}') \tag{5.1}$$

donde $\hat{x}'$ es, a su vez, un elemento de $\frac{1}{x}$ y x' lo es de x. Entonces:

$$\begin{aligned}
x\hat{x}'' &= x\left(\frac{1+(x'-x)\hat{x}'}{x'}\right) \\
&= \frac{x+(x'-x)x\hat{x}'}{x'}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1-\left(1-\frac{x+(x'-x)x\hat{x}'}{x'}\right) \\
&= 1-\frac{(x'-x)-(x'-x)x\hat{x}'}{x'} \\
&= 1-\frac{(1-x\hat{x}')(x'-x)}{x'}
\end{aligned}$$

de donde claramente se sigue que

$$1 - x\hat{x}'' \;=\; (1 - x\hat{x}')\frac{x' - x}{x'} \tag{5.2}$$

De esta última ecuación ya es fácil demostrar inductivamente que $\hat{x}''$ cumple (1) siempre que $\hat{x}'$ también lo cumpla. Por ejemplo, si x' y $\hat{x}'$ son elementos derechos, entonces $\hat{x}''$ es un elemento derecho; además, $x' - x > 0$, $\frac{1}{x'} > 0$ (pues 0 es un elemento izquierdo de $\frac{1}{x'}$ por definición), y, asumiendo inductivamente que $\hat{x}'$ cumple (1), también se tiene $1 < x\hat{x}'$. Luego, $1 - x\hat{x}'' = (1 - x\hat{x}')\frac{x'-x}{x'} < 0$, por lo que, $1 < x\hat{x}''$. Así se prueban los otros casos. Además, como «0» es un elemento izquierdo de $\hat{x}$ y $x \cdot 0 = 0$, la base de inducción claramente se satisface.

2) Del inciso anterior tenemos que $L_{\hat{x}} < R_{\hat{x}}$ al cancelar x. Luego, $(L_{\hat{x}}, R_{\hat{x}})$ es una cortadura, y por tanto, $\frac{1}{x}$ es un número surreal.

3) Tenemos que

$$\begin{aligned}
(x\hat{x})' &= x'\hat{x} + x\hat{x}' - x'\hat{x}' \\
&= x'\hat{x} - (x' - x)\hat{x}' \\
&= x'\hat{x} + 1 - (1 + (x' - x)\hat{x}') \\
&= x'\hat{x} + 1 - x'\left(\frac{1 + (x' - x)\hat{x}'}{x'}\right) \\
&= x'\hat{x} + 1 - x'\hat{x}'' \\
&= x'(\hat{x} - \hat{x}'') + 1
\end{aligned}$$

donde se ha usado la ecuación 5.1 en la penúltima igualdad. Luego, todo elemento de $x\hat{x}$ es de la forma $x'(\hat{x} - \hat{x}'') + 1$. De este modo, si $x'\hat{x} + x\hat{x}' - x'\hat{x}'$ es un elemento derecho de $x\hat{x}$, entonces x' y $\hat{x}'$ son de distinto tipo (o sea, uno es izquierdo y el otro derecho), por lo que $\hat{x}''$ debe ser un elemento izquierdo de $\hat{x}$. Así, $(\hat{x} - \hat{x}'') > 0$, y por tanto, $x'(\hat{x} - \hat{x}'') + 1 > 1$. Análogamente, $x'(\hat{x} - \hat{x}'') + 1 < 1$ si $(x\hat{x})'$ es un elemento izquierdo.

4) Claramente, «0» es un elemento izquierdo de $x\hat{x}$. Puesto que $L_{x\hat{x}} < 1 < R_{x\hat{x}}$, por simplicidad, tenemos que $1 = x\hat{x}$. ■

5.8. Los números surreales conforman un campo

Para terminar de justificar el título de esta sección, sólo basta verificar un par de cosas. Primero, que nuestras operaciones son cerradas y compatibles con el orden. Y, en segundo lugar, que los recíprocos multiplicativos están bien definidos, es decir, que el recíproco de cada número surreal es también su inverso multiplicativo.

Vamos a comenzar comprobando que la suma está bien definida, y que es compatible con el orden. Lo ideal sería tratar cada uno de estos problemas por separado, dada la importancia de cada uno de ellos; sin embargo, con estos dos ocurre lo mismo que con las dos primeras reglas de Conway: se van entreverando en el proceso recursivo de la construcción de los números. Y así como sucedía con las reglas de Conway, aquí también se asomará una falsa circularidad, ya que, para demostrar que la suma está bien definida, necesitamos asumir que es compatible con el orden, y viceversa.

Teorema 5.8.1 *Sean* $x, y, z \in \mathbf{No}$*. Entonces:*

1) $x + z \leq y + z$ *si y sólo si* $x \leq y$.

2) $x + z = y + z$ *si y sólo si* $x = y$.

3) $x + z < y + z$ *si y sólo si* $x < y$.

4) $x + z \in \mathbf{No}$.

Demostración.

1) $\Rightarrow$) Si $x \not\leq y$, entonces alguna de las relaciones $L_x < y$ o bien, $x < R_y$, no se satisface. Si $L_x \not< y$, entonces existe un x^L tal que $x^L \not< y$, y por lo tanto $x^L \geq y$ (dado que el orden es total). Obtenemos entonces inductivamente que $x^L + z \geq y + z$; luego, dado que $y + z \geq x + z$ (hipótesis), por transitividad tenemos que $x^L + z \geq x + z$, pero esto contradice el hecho de que $x + z$ es un número surreal (en virtud del cuarto inciso), ya que, por definición de la suma, $x^L + z$ es un elemento izquierdo de $x + z$.

Análogamente, si $x \not< R_y$, entonces existe un elemento derecho y^R de y tal que $x \geq y^R$, por lo que $x + z \geq y^R + z$, y por tanto, $y + z \geq y^R + z$, contradiciendo que $y + z < R_{y+z}$ (pues $y + z$ es un surreal).

De este modo, se debe tener que $L_x < y$ y que $x < R_y$, es decir, que $x \leq y$.

$\Leftarrow$) Para ver que $x + z \leq y + z$, debemos demostrar que se cumplen ambas desigualdades: $L_{x+z} < y + z$, y $x + z < R_{y+z}$ (estamos asumiendo implícitamente que $x + z$ y $y + z$ son números surreales).

Si $L_{x+z} \not< y + z$, entonces $y + z \leq$ algún $(x + z)^L$. Así que

i) $x^L + z \geq y + z$, para algún x^L; o bien,
ii) $x + z^L \geq y + z$, para algún z^L.

i) Obtenemos inductivamente que $x^L \geq y$, y por lo tanto, $L_x \not< y$, pero esto contradice que $x \leq y$.

ii) Como $y \geq x$, tenemos por inducción que $y + z^L \geq x + z^L$, y por transitividad llegamos a que $y + z^L \geq y + z$, y aplicando de nuevo la hipótesis inductiva nos queda, al cancelar y, que $z^L \geq z$, contradiciendo que $L_z < z$.

Como ambos casos nos llevan a contradicciones, debemos tener que $L_{x+z} < y + z$. De manera análoga se ve que $x + z < R_{y+z}$, y de este modo, se concluye que $x + z \leq y + z$.

2) Aplicando el inciso anterior (además, reflexividad y antisimetría):

$$
\begin{aligned}
x = y \quad & \text{sii} \quad x \leq y \ \text{ y } \ x \geq y \\
& \text{sii} \quad x + z \leq y + z \ \text{ y } \ x + z \geq y + z \quad \text{sii} \quad x + z = y + z
\end{aligned}
$$

3) Es inmediato de los dos anteriores.

4) Puesto que x es un número surreal, tenemos que $x^L < x$, para todo elemento izquierdo x^L. Inductivamente, tenemos que $x^L + z < x + z$, por el inciso 3. De la misma manera tenemos que $x + z^L < x + z$, para todo z^L. Como los elementos de $x + z$ son sólo de la forma $x^L + z$, o bien, $x + z^L$, debemos tener que $L_{x+z} < x + z$. Análogamente, tenemos que $x + z < R_{x+z}$, y por lo tanto, $x + z$ es un número surreal. ∎

Toca el turno al producto, y, así como sucedió para la suma, aquí también tendremos que demostrar varios resultados a la vez, ya que están íntimamente relacionadas dentro del proceso recursivo. La aparente circularidad es más compleja aquí. Además de sufrir la misma peculiaridad que en el caso de la suma, tambén tenemos un lema extra, cuya demostración requiere del teorema al cual precede, y a su vez, el teorema necesita del lema para su prueba.

Lema 5.8.2 *Denotemos por $P(a, b : x, z)$ a la desigualdad $az + bx \leq ax + bz$. Entonces:*[4]
S1) *Si $P(a, b : x, z)$ entonces $P(x, z : a, b)$.*
S2) *Si $P(a, b : x, z)$ entonces $P(b, a : z, x)$.*
T1) *Si $P(a, b : x, z)$ y $P(b, c : x, z)$, entonces $P(a, c : x, z)$.*
T2) *Si $P(a, b : x, y)$ y $P(a, b : y, z)$, entonces $P(a, b : x, z)$.*
R1) *Si $a = b$ entonces $P(a, b : x, z)$.*
R2) *Si $x = z$ entonces $P(a, b : x, z)$.*

Demostración. S1 y S2 son muy fáciles de verificar. T1 se obtiene al sumar ambas desigualdades $P(a, b : x, z)$ y $P(b, c : x, z)$, y cancelar términos. T2 se sigue claramente de S1 y T1. Para ver que se cumple R1, notamos que si $a = b$ entonces $az = bz$ y $ax = bx$. Luego, $az + bx = ax + bz$, cumpliéndose $P(a, b : x, z)$ al darse la igualdad. De $x = z$, por R1, se sigue $P(x, z : a, b)$, y, por S1, tenemos $P(a, b : x, z)$, y esto prueba R2 (también se puede tratar igual que R1). ■

Teorema 5.8.3 *Para $a, b, x, z \in \mathbf{No}$ tenemos que:*

1) *Si $a = b$, entonces $ax = bx$.*

2) *Si $a \leq b$ y $x \leq z$, entonces $P(a, b : x, z)$.*

3) *La desigualdad en $P(a, b : x, z)$ se vuelve estricta si partimos de desigualdades estrictas.*

4) *$xz \in \mathbf{No}$.*

Demostración.
1) Supongamos que $a = b$. Para ver que $ax = bx$ debemos demostrar que $L_{ax} < bx < R_{ax}$ y que $L_{bx} < ax < R_{bx}$; es decir, hay que probar que

$$\left\{ \begin{matrix} a^L x + ax^L - a^L x^L, \\ a^R x + ax^R - a^R x^R \end{matrix} \right\} < bx < \left\{ \begin{matrix} a^L x + ax^R - a^L x^R, \\ a^R x + ax^L - a^R x^L \end{matrix} \right\}$$

y que

$$\left\{ \begin{matrix} b^L x + bx^L - b^I x^L, \\ b^R x + bx^R - b^R x^R \end{matrix} \right\} < ax < \left\{ \begin{matrix} b^L x + bx^R - b^L x^R, \\ b^R x + bx^L - b^R x^L \end{matrix} \right\};$$

y hasta este punto, no debemos perder de vista que ya se está asumiendo que tanto ax como bx son números surreales.

Probaremos sólo que $a^L x + ax^L - a^L x^L < bx$. Las demás desigualdades se pueden obtener de forma análoga.

De que $a^L < b$ y $x^L < x$ se sigue, por el tercer inciso, que $a^L x + bx^L < a^L x^L + bx$. Inductivamente tenemos que $ax^L = bx^L$, por lo que $a^L x + ax^L = a^L x + bx^L$, de donde se sigue que $a^L x + ax^L < a^L x^L + bx$, y de aquí tenemos que $a^L x + ax^L - a^L x^L < bx$.

[4]Sólo para poner a trabajar la mnemotecnia: S1 parece ser una especie de simetría, al igual que S2; T1 y T2, recuerdan la transitividad; y por último, R1 y R2, son algo parecido a la reflexividad.

2) Supongamos que $a \leq b$ y $x \leq z$. Nuestra intención es probar $P(a, b : x, z)$, es decir, deseamos verificar la desigualdad $az + bx \leq ax + bz$. Por R1 y R2 del lema anterior, el dilema está resuelto si $a = b$ o $x = z$; así que sólo consideraremos el caso en que $a < b$ y $x < z$. De que $a < b$ se sigue que hay un a^R tal que $a < a^R < b$, o bien, un b^L tal que $a < b^L < b$. De que $a < a^L < b$ y $x < z$, inductivamente se sigue $P(a, a^L : x, z)$ y $P(a^L, b : x, z)$, de donde, por (P4), obtenemos $P(a, b : x, z)$. De la misma forma obtenemos $P(a, b : x, z)$ de $a < b^L < b$ y $x < z$.

3) Inmediato de los incisos anteriores.

4) Para cerciorarnos de que $xz \in \mathbf{No}$, tenemos que probar que $L_{xz} < R_{xz}$. Es decir, debemos verificar que:

$$\left\{ \begin{matrix} x^L z + xz^L - x^L z^L, \\ x^R z + xz^R - x^R z^R \end{matrix} \right\} < x'z + xz' - x'z'$$

donde x' y z' son elementos de distinto tipo (es decir, si $x' \in^R x$, entonces $z' \in^L z$, y viceversa).

Como son análogas, se demostrará sólo la desigualdad

$$x^{L_1} z + xz^L - x^{L_1} z^L < x^{L_2} z + xz^R - x^{L_2} z^R$$

Tenemos ahora dos casos: I. $x^{L_1} \leq x^{L_2}$, o bien, II. $x^{L_2} < x^{L_1}$.

Caso I. De que $x^{L_1} \leq x^{L_2}$ y $z^L < z$, tenemos que $x^{L_1} z + x^{L_2} z^L \leq x^{L_1} z^L + x^{L_2} z$, al haber aplicado el segundo inciso. De aquí se sigue claramente que

$$x^{L_1} z + xz^L - x^{L_1} z^L \leq x^{L_2} z + xz^L - x^{L_2} z^L \tag{5.3}$$

Por otro lado, de $x^{L_2} < x$ y $z^L < z^R$, se sigue, también por el inciso anterior, que $x^{L_2} z^R + xz^L < x^{L_2} z^L + xz^R$, y por tanto,

$$x^{L_2} z + xz^L - x^{L_2} z^L < x^{L_2} z + xz^R - x^{L_2} z^R \tag{5.4}$$

De las desigualdades 5.3 y 5.4, por transitividad, tenemos lo buscado:

$$x^{L_1} z + xz^L - x^{L_1} z^L < x^{L_2} z + xz^R - x^{L_2} z^R.$$

El caso II es análogo. ■

En conclusión, los surreales conforman un campo, así que ya podemos con toda calma llamarle *recta surreal*.

Capítulo 6

Reales y Ordinales

Se ha afirmado, en el arranque del primer capítulo, que la clase de los números surreales es capaz de contener a todos los números, tanto los grandes como los pequeños. Hemos proporcionado muchos surreales que corresponden, de acuerdo al orden definido, con números infinitesimales: cumplen con estar entre el cero y todos los positivos. Esto es bastante motivador, considerando que la aceptación de los números infinitesimales le costó bastante tiempo al mundo matématico, hasta que lograron definirse de una forma un tanto rebuscada. Tenemos, pues, entre nosotros, números infinitesimales que se acercan más al espíritu de la época en que fueron concebidos: simplemente ser cantidades tan pequeñas como se desee. Asímismo, hemos logrado introducir los ordinales, los números diádicos, entre muchos otros, irracionales unos, inimaginables otros.

Sin embargo, si hablamos de números reales, aún no podemos estar seguros de que tales números sean exactamente los reales de toda la vida, puesto que estamos trabajando con objetos de distinta naturaleza. Así las cosas, todavía nos queda la tarea de comprobar que los reales recién obtenidos son los reales que nosotros conocemos.

Esto también es un problema para los números ordinales: decidir que $(\mathbb{N}, \emptyset)$, por ejemplo, corresponde con el ordinal ω parece bastante arbitrario, y entonces debemos asegurarnos de que, también en este caso, estamos hablando de los ordinales ya conocidos. Estas dos tareas son el objetivo del presente capítulo.

El camino que se sigue para lograr este tipo de cometidos es, usualmente, delimitar las propiedades que caracterizan a la estructura en cuestión; luego, demostrar que nuestro sistema cumple con tales características para poder concluir que tiene la estructura deseada. Nosotros procederemos de igual manera en ambos casos. Comenzamos con los números reales.

6.1. Los Reales

Una vez que propongamos nuestro sistema que fungirá como el conjunto de los reales, lo primero es preguntarnos: ¿cuáles son aquellas peculiaridades que caracterizan a los números reales? Luego, intentar demostrar que nuestro sistema las tiene. Como es sabido, estas características son: ausencia de extremos, no numerabilidad, separabilidad y completitud.

Definición 6.1 $x \in \mathbf{No}$ es un ***número real*** si y sólo si cumple las siguientes condiciones:

R1) $|x| < n$ para algún $n \in \mathbb{Z}^+$.

R2) $x = \{x - 1,\ x - \frac{1}{2},\ x - \frac{1}{3}, ... \mid ..., x + \frac{1}{3},\ x + \frac{1}{2},\ x + 1\}$.

O más compacto: $x = \{x - \frac{1}{m} \mid x + \frac{1}{m}\}_{m \in \mathbb{Z}^+}$.

Denotaremos por $\mathbb{R}$ a la colección de los números reales. Más adelante se podrá ver que no es una clase propia.

La primera condición de la definición deja fuera de juego a cualquier surreal que acote a los números enteros. Estos números «naturalmente inalcanzables» distan mucho de parecerse a nuestros números reales, quienes son incapaces de acotar a $\mathbb{Z}$, según la propiedad arquimediana. Podemos llamarles *números ilimitados*.

La segunda condición pone de manifiesto que es posible «llegar» al número en cuestión en un límite de omega pasos, cosa que no sucede con números de carácter infinitesimal. De antemano sabemos que habrá números infinitamente cercanos a cualquier número real; es de esperar que también haya «vecinos infinitesimales» a cualquier nivel de la construcción (a partir del nivel ω, por supuesto). Es en este sentido que usamos el término *carácter infinitesimal*.

Es decir, un número real será todo aquél número surreal limitado que no tenga carácter infinitesimal. En este sentido, la definición de «número real» actúa más bien como restricción a todos aquellos que no se comportan como los reales tradicionales.

El objetivo es entonces, como ya hemos mencionado, comprobar que la estructura de $\mathbb{R}$ cumple con los requisitos que caracterizan a los reales de nuestra vida diaria. Pero antes de eso tenemos también que garantizar que esta clase realmente tiene estructura de campo ordenado. Esta primera fase comienza demostrando que las fracciones diádicas son, de hecho, números reales.

Lema 6.1.1 *Sea $n \in \mathbb{N}$. Sea $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{D}$ tal que q divide a 2^n. Entonces:*

$$x = \{x - \frac{1}{2^n} \mid x + \frac{1}{2^n}\}.$$

Demostración. La prueba es por inducción sobre n. Para $n = 0$, queremos ver que $x = \{x - 1 \mid x + 1\}$. Como q divide a 2^0, se tiene que $q = 1$, y por tanto, $x = p \in \mathbb{Z}$. Así, x proviene de un corte (L_x, R_x) en donde $L_x, R_x \subseteq \mathbb{Z}$.

Como no hay enteros entre $x-1$ y x, y tampoco entre x y $x+1$, podemos deducir que no hay ningún elemento de x entre $x-1$ y $x+1$. Por simplicidad, se tiene que $x = \{x-1 \mid x+1\}$.

Vamos ahora sobre el paso inductivo. Suponemos, para $n + 1$, que $x = \frac{p}{q}$ es tal que q divide a 2^{n+1}. Tenemos entonces que q es de la forma 2^m, con $m \leq n + 1$. Sea $z := \{x - \frac{1}{2^{n+1}} \mid x + \frac{1}{2^{n+1}}\}$. Demostraremos que $2x = 2z$, y así $x = z$.

Veamos primero que

$$\begin{aligned} 2z &= \{z + x - \frac{1}{2^{n+1}} \mid z + x + \frac{1}{2^{n+1}}\} \\ 2x &= \{2x - \frac{1}{2^n} \mid 2x + \frac{1}{2^n}\} \end{aligned}$$

La primera igualdad es sencillamente la suma $z+z$. Para la segunda, usamos la hipótesis de inducción, pues $2x = 2\frac{p}{q} = \frac{2}{2^m}p = \frac{p}{2^{m-1}}$, y así podemos ver que el denominador de $2x$ divide a 2^n (pues $m - 1 \leq n$), y por tanto, $2x = \{2x - \frac{1}{2^n} \mid 2x + \frac{1}{2^n}\}$.

Para terminar con la prueba, vamos a demostrar que $2x$ es el más simple entre $z + x - \frac{1}{2^{n+1}}$ y $z + x + \frac{1}{2^{n+1}}$. Se tiene que $2x < z + x + \frac{1}{2^{n+1}}$, puesto que $x - \frac{1}{2^{n+1}} < z$ (sumamos $x + \frac{1}{2^{n+1}}$ a ambos lados), y de forma similar se tiene que $z + x - \frac{1}{2^{n+1}} < 2x$. Luego,

$$z + x - \frac{1}{2^{n+1}} < 2x < z + x + \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Por otro lado, tenemos que $z+x+\frac{1}{2^{n+1}} < 2x+\frac{1}{2^n}$, puesto que $z < x+\frac{1}{2^{n+1}}$ (se suma $x+\frac{1}{2^{n+1}}$). Análogamente se tiene que $2x-\frac{1}{2^n} < z+x-\frac{1}{2^{n+1}}$. Luego, ningún elemento de $2x$ está entre $z+x-\frac{1}{2^{n+1}}$ y $z+x+\frac{1}{2^{n+1}}$, y por tanto podemos concluir que $2x$ es el surreal más simple entre $z+x-\frac{1}{2^{n+1}}$ y $z+x+\frac{1}{2^{n+1}}$.

Como $2z=\{z+x-\frac{1}{2^{n+1}} \mid z+x+\frac{1}{2^{n+1}}\}$, por simplicidad, tenemos que $2x=2z$, y por lo tanto, $x=z$. ■

Teorema 6.1.2 *Los racionales diádicos son números reales.*

Demostración. Sea $x:=\frac{m}{2^n}$. Si $m>0$, entonces $\frac{m}{2^n}\leq m$. Luego, $-(m+1)<\frac{m}{2^n}<m+1$. De igual forma tendremos que $-(1-m)<\frac{m}{2^n}<1-m$, si $m<0$. De este modo vemos que se satisface la primera condición de la definición de número real.

Para la segunda, basta observar, en virtud del lema anterior, que $x=\{x-\frac{1}{2^n} \mid x+\frac{1}{2^n}\}$, de donde se ve que x es el más simple entre $\{x-\frac{1}{k}\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$ y $\{x+\frac{1}{k}\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$. Luego, por simplicidad, se tiene que $x=\{x-\frac{1}{k} \mid x+\frac{1}{k}\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$. ■

Muy bien: hemos corroborado que $\mathbb{D}\subseteq\mathbb{R}$, lo cual no podría ser de otra manera. Esto es sumamente necesario, ya que vamos a identificar cada número real con una cortadura de números diádicos, análogo a como hizo Dedekind.

Sigamos, pues, con la primera fase de nuestra empresa.

Teorema 6.1.3 *Si $x,z\in\mathbb{R}$, entonces $-x,\ x+z,\ xz\in\mathbb{R}$.*

Demostración. Supongamos que x y z son números reales. Demostraremos que xz también es un número real. Ver que $-x$ y $x+z$ también son reales resulta sencillo y se omiten las pruebas de ello (intente el lector reproducir tales pruebas). La primera condición es inmediata, ya que una cota para xz es el producto de las cotas de x y z.

Por otro lado, tenemos que $x=\{x-\frac{1}{n} \mid x+\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ y $z=\{z-\frac{1}{m} \mid z+\frac{1}{m}\}_{m\in\mathbb{Z}^+}$. Probaremos que $xz=\{xz-\frac{1}{nm} \mid xz+\frac{1}{nm}\}_{n,m\in\mathbb{Z}^+}$, y de aquí se sigue, evidentemente, que $xz=\{xz-\frac{1}{k} \mid xz+\frac{1}{k}\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$.

Sabemos que (ver proposición 5.5.2):

$$xz=\left\{\begin{array}{c} xz-(x-x^L)(z-z^L) \\ xz-(x^R-x)(z^R-z) \end{array}\middle|\begin{array}{c} xz-(x-x^L)(z^R-z) \\ xz-(x^R-x)(z-z^L) \end{array}\right\}$$

Para n y m arbitrarias se tiene que

$$x-x^L=x-(x-\frac{1}{n})=\frac{1}{n}$$

$$x^R-x=(x+\frac{1}{n})-x=\frac{1}{n}$$

$$z-z^L=z-(z-\frac{1}{m})=\frac{1}{m}$$

$$z^R-z=(z+\frac{1}{m})-z=\frac{1}{m}$$

por lo que $xz=\{xz-\frac{1}{nm} \mid xz+\frac{1}{nm}\}_{n,m\in\mathbb{Z}^+}$. Esto prueba la segunda condición de la definición de número real. ■

Pues bien, acabamos de corroborar que la suma, el producto y la toma de inversos aditivos son operaciones cerradas en $\mathbb{R}$. Sólo resta ver que los recíprocos multiplicativos de números reales también son números reales. Lo tratamos por separado debido a que su prueba es un tanto más elaborada.

La demostración radica en que podemos intuir, de entrada, que todo número ilimitado tendrá un recíproco de carácter infinitesimal y visceversa. En otras palabras, si un surreal x cumple la condición R1), su recíproco deberá cumplir R2); y si x cumple la segunda condición, al inverso multiplicativo no le quedará de otra que cumplir la primera.

Teorema 6.1.4 *Si $x \in \mathbb{R}$, entonces $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}^+$. Entonces existe un entero positivo m tal que $-m < x < m$; además, x tiene la forma $\{x - \frac{1}{n} \mid x + \frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$. Recordemos que x también tiene la forma $\{0,\ x^L \mid x^R\}$, cuyos elementos no nulos son todos positivos (es decir, hemos *purificado*[1] a x). Así las cosas, si tomamos un x^L de esta última forma, por simplicidad encontramos $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $x - x^L \geq \frac{1}{k}$, de donde tenemos que $\frac{1}{x-x^L} \leq k$. Como $x \geq x - x^L$, podemos asegurar que $\frac{1}{x} \leq k$, y así, $\frac{1}{x}$ cumple la primera condición.

Para verificar que se satisface la segunda, vamos a ver que $\frac{1}{x}$ es el más simple entre $\{\frac{1}{x} - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ y $\{\frac{1}{x} + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$; para esto, es suficiente demostrar que cada elemento izquierdo de $\frac{1}{x}$ está por abajo de algún $\frac{1}{x} - \frac{1}{n}$, y cada elemento derecho de $\frac{1}{x}$ está por arriba de algún $\frac{1}{x} + \frac{1}{n}$. Como ambas situaciones son análogas, se analizará sólo lo que ocurre para elementos izquierdos. Sea pues, $u \in^L \frac{1}{x}$. Entonces u tiene la forma $\frac{1+(x^L-x)(\frac{1}{x})^R}{x^L}$, o bien, $\frac{1+(x^R-x)(\frac{1}{x})^L}{x^R}$, donde $(\frac{1}{x})^L$ y $(\frac{1}{x})^R$ son elementos de $\frac{1}{x}$ que aparecen antes que u en la construcción de $\frac{1}{x}$ (nuevamente remitimos a la sección 5.6).

En el primer caso tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} - u &= \frac{1}{x} - \frac{1 + (x^L - x)(\frac{1}{x})^R}{x^L} \\
&= \frac{x^L - x - x(x^L - x)(\frac{1}{x})^R}{xx^L} \\
&= \frac{x(x - x^L)(\frac{1}{x})^R - (x - x^L)}{xx^L} \\
&= \frac{(x - x^L)(x(\frac{1}{x})^R - 1)}{xx^L} \\
&= \frac{1}{x^L}(x - x^L)\left(\frac{x(\frac{1}{x})^R - 1}{x}\right) \\
&= \frac{1}{x^L}(x - x^L)\left(\left(\frac{1}{x}\right)^R - \frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

Por hipótesis de inducción en la construcción de $\frac{1}{x}$, se tiene $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $(\frac{1}{x})^R \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{k}$ y, por lo tanto, $(\frac{1}{x})^R - \frac{1}{x} \geq \frac{1}{k}$. Además, como $x = \{x - \frac{1}{n} \mid x + \frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$, el elemento x^L debe tener la forma $x - \frac{1}{h}$, para algún $h \in \mathbb{Z}^+$; de este modo, $x - x^L = x - (x - \frac{1}{h}) = \frac{1}{h}$. Esto también nos dice que $\frac{1}{x^L}$ es un número real, de acuerdo a los teoremas anteriores; así que debe existir $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\frac{1}{x^L} < m$, de donde se sigue que $x^L > \frac{1}{m}$. Así las cosas, tenemos que

$$\frac{1}{x} - u = \frac{1}{x^L}(x - x^L)\left(\left(\frac{1}{x}\right)^R - \frac{1}{x}\right) \geq \frac{1}{mhk}$$

.

Similarmente, en el segundo caso se llega a que

$$\frac{1}{x} - u = \frac{1}{x^R}(x^R - x)\left(\frac{1}{x} - \left(\frac{1}{x}\right)^L\right)$$

[1] Véase el capítulo anterior, sección 5.6.

en donde, por las mismas razones que en el primer caso, se tiene que el recíproco de algún entero positivo acota por abajo a $\frac{1}{x} - u$. De este modo, $u \leq \frac{1}{x} - \frac{1}{N}$, para algún entero positivo N.

De la misma forma se llega a que, si v es un elemento derecho de $\frac{1}{x}$, entonces $v \geq \frac{1}{x} - \frac{1}{M}$, para algún entero positivo M. Con esto, vemos que $\frac{1}{x}$ es el surreal más simple entre $\{x - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ y $\{x + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$, por lo que $\frac{1}{x} = \{x - \frac{1}{n} \mid x + \frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$. Con esto ya podemos afirmar que $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}$. ■

Por lo tanto, $\mathbb{R}$ es un subcampo de **No**; y puesto que **No** está ordenado linealmente, podemos garantizar que $\mathbb{R}$ es un campo ordenado.

Sigue ahora, como ya hemos mencionado, cumplir con la tarea tradicional de Dedekind, sólo que nosotros vamos a poner de base únicamente a los racionales diádicos.

Teorema 6.1.5 *Cada número real x corresponde con una única cortadura (L, R) (es decir, $x = L \mid R$), en donde:*

i) L y R son conjuntos no vacíos de fracciones diádicas.
ii) L no tiene máximo y R no tiene mínimo.
iii) A lo más un diádico se queda fuera de $L \cup R$.
iv) Para $y, z \in \mathbb{D}$, se tiene que: $y < y' \in L$ implica $y \in L$, y $z > z' \in R$ implica $z \in R$.

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}$. Vamos a demostrar la existencia de la cortadura que cumple con (i), (ii), (iii) y (iv). La unicidad es muy fácil de verificar y se omite.

Sean $L := \{r \in \mathbb{D} \mid r < x\}$ y $R := \{r \in \mathbb{D} \mid x < r\}$. Como $x \in \mathbb{R}$, hay una cota $m \in \mathbb{Z}^+$ de x; de este modo, tanto L como R son no vacíos, y esto prueba (i). Por otro lado, si tomamos $r \in R$, tenemos que $r - x > 0$, y $r - x \in \mathbb{R}$; entonces debe existir $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\frac{1}{2^n} < r - x$, por lo que $x < r - \frac{1}{2^n}$, y dado que $r - \frac{1}{2^n} \in \mathbb{D}$, podemos ver que R no tiene mínimo. De igual forma se prueba que L no tiene máximo, y con esto se termina de probar (ii). En cuanto a (iii), si tenemos un diádico r fuera de $L \cup R$, entonces no podemos tener $r < x$ ni $r > x$, así que no nos queda de otra que tener $r = x$. Para (iv), sean $z \in \mathbb{D}$ y $z' \in R$, y suponga que $z' < z$. Esto implica inmediatamente que $x < z$, luego, $z \in R$. La otra implicación se obtiene de forma análoga. ■

Corolario 6.1.6 *La clase $\mathbb{R}$ de los números reales es un conjunto.*

Demostración. La clase $\mathbb{R}$ está contenida en la clase de todas las cortaduras de números diádicos, la cual no es propia. ■

Teorema 6.1.7 *Cualquier cortadura como en el teorema anterior define un único número real.*

Demostración. Sea (L, R) una cortadura que cumpla con (i), (ii), (iii) y (iv) del teorema anterior. Nuestro deber es probar que $x := L \mid R$ es un número real (la unicidad es trivial, y nuevamente se omite).

Primero, como $L, R \neq \emptyset$, ciertamente hay un par de racionales diádicos $\frac{p}{2^q}$ y $\frac{n}{2^m}$ tales que $\frac{p}{2^q} < x < \frac{n}{2^m}$, con $q, m \in \mathbb{Z}$. De aquí es muy sencillo ver que x está acotado por algún entero positivo.

Por otro lado, veamos que $x = \{x - \frac{1}{2^n} \mid x + \frac{1}{2^n}\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$. Sea $r \in R$. Como R no tiene mínimo, tomemos otro elemento, digamos, r', tal que $r' < r$. Luego, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$\frac{1}{2^m} < r - r'$, por lo que $r' < r - \frac{1}{2^m}$, y en consecuencia, $x < r - \frac{1}{2^m}$. Puesto que $r - \frac{1}{2^m} \in \mathbb{D}$, se sigue que $r - \frac{1}{2^m} \in R$. Además, se tiene $x + \frac{1}{2^m} < r$, lo que nos dice que r no puede estar entre $\{x - \frac{1}{2^n}\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ y $\{x + \frac{1}{2^n}\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$.

De manera similar se puede ver que tampoco los elementos izquierdos logran colarse entre $\{x - \frac{1}{2^n}\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ y $\{x + \frac{1}{2^n}\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$; luego, x es el punto más simple entre $\{x - \frac{1}{2^n}\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ y $\{x + \frac{1}{2^n}\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$, y por tanto, $x = \{x - \frac{1}{2^n} \mid x + \frac{1}{2^n}\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$. En conclusión, x es un número real. ■

El golpe final es verificar que nuestros números reales cumplen con las propiedades que caracterizan a los números reales de toda la vida, aquellas que hemos mencionado al principio de la sección: ausencia de extremos, no numerabilidad, separabilidad y completez. Esto se deduce inmediatamente a partir de los resultados ya demostrados.

Corolario 6.1.8

1) $\mathbb{R}$ *no tiene extremos.*

2) $\mathbb{R}$ *es no numerable.*

3) $\mathbb{D}$ *es un denso numerable en* $\mathbb{R}$.

4) $\mathbb{R}$ *es completo.*

Demostración.

1) Más que evidente.

2) El total de cortaduras como en el teorema 6.1.5 es una cantidad no numerable, debido a que $\mathbb{D}$ es un conjunto infinito.

3) Sean $x, z \in \mathbb{R}$ tales que $x < z$. Entonces hay un corte C_x de racionales diádicos como en el teorema 6.1.5 para x y otro C_z para z de la misma índole. La parte derecha de C_x se intersecta con la parte izquierda de C_z en al menos un diádico.

4) Es exactamente lo que afirma el teorema 6.1.7. ■

6.2. Ordinales

Para corroborar que los ordinales que hemos venido introduciendo son los ordinales de toda la vida, vamos a ver que cumplimos con dos propiedades cruciales: la primera es que cada ordinal tiene que *coleccionar* a todos los ordinales que son menores a él. En este caso, como veremos adelante, coleccionaremos por la parte izquierda (y también se ha visto en los ejemplos dados). La segunda propiedad es el Principio del Mínimo Ordinal. Con verificar que se cumplen estas dos, tenemos todo el derecho de asegurar que hemos conseguido rescatar a la clase de los ordinales.

Definición 6.2 $\alpha \in \mathbf{No}$ es un ***número ordinal*** si y sólo si tiene la forma $L \mid \emptyset$. Denotamos a la clase de los ordinales por «**On**».

Lema 6.2.1 *Dado cualquier* $x \in \mathbf{No}$, *la clase de los ordinales menores que* x *no es una clase propia.*

Es decir, la colección $\mathbf{On}_x := \{\alpha \in \mathbf{On} \mid \alpha < x\}$ *es un conjunto.*

Demostración. Para $\alpha < x$ tenemos que existe x^L tal que $\alpha \leq x^L < x$, puesto que $\alpha \ngeq x$ y $R_\alpha = \emptyset$. Así las cosas, tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbf{On}_x &= \{\alpha \in \mathbf{On} \mid \alpha \leq \text{ algún } x^L\} \\ &= \{\alpha \in \mathbf{On} \mid \alpha < \text{ algún } x^L\} \,\cup\, \{\alpha \in \mathbf{On} \mid \alpha = \text{ algún } x^L\}.\end{aligned}$$

El segundo uniendo es precisamente el subconjunto $\{x^L \mid x^L \text{ es ordinal}\}$ de L_x; mientras que

$$\{\alpha \in \mathbf{On} \mid \alpha < \text{ algún } x^L\} = \bigcup_{x^L} \mathbf{On}_{x^L}.$$

Por hipótesis de inducción, $\mathbf{On}_{x^L}$ es conjunto para todo x^L. Luego, $\bigcup_{x^L} \mathbf{On}_{x^L}$ es conjunto y por lo tanto, $\mathbf{On}_x$ también lo es. ■

Teorema 6.2.2 $\alpha = \{$*ordinales* $< \alpha \mid \quad \}$*, para cualquier* $\alpha \in \mathbf{On}$.

Demostración. Por ser ordinal, α tiene la forma $L_\alpha \mid \emptyset$. Además, por el lema anterior, $\mathbf{On}_\alpha$ es un conjunto, así que es permitido hablar del número ordinal $\beta := \mathbf{On}_\alpha \mid \emptyset$. Es claro que $L_\alpha < \beta$, pues de lo contrario, tendríamos $y \in L_\alpha$ tal que $\beta \leq y$, resultando de aquí que $\beta < \alpha$, y por tanto $\beta \in \mathbf{On}_\alpha$, contradiciendo que $\mathbf{On}_\alpha < \beta$.

Suponga ahora que hay un $\gamma \in \mathbf{On}_\alpha$ tal que $\gamma > L_\alpha$. Entonces $R_\gamma = \emptyset$, por definición de número ordinal. Así las cosas, se tiene $L_\alpha < \gamma$ y $\alpha < R_\gamma$, por lo que $\alpha \leq \gamma$, contradiciendo el hecho de que $\gamma \in \mathbf{On}_\alpha$. Luego, ningún elemento de β puede ser mayor que todos los miembros de L_α, y por lo tanto, β es el más simple tal que $\beta > L_\alpha$. Por el teorema de simplicidad, $\beta = \alpha$. ■

Lema 6.2.3 *Dada una colección C no vacía de surreales, la clase de ordinales menores que todos los elementos de C, es conjunto.*

Demostración. Sea $z \in C$, y definamos

$$C_z := \{x \in C \mid x \leq z\}.$$

Defina también, para cada clase arbitraria A de surreales,

$$\mathbf{On}_A := \{\alpha \in \mathbf{On} \mid \alpha < A\}.$$

Es fácil ver que $\mathbf{On}_C = \mathbf{On}_{C_z}$. También es fácil notar que $\mathbf{On}_{C_z} < C_z$, de donde se sigue que $\mathbf{On}_{C_z} \subseteq \mathbf{On}_z$. El lema 6.2.1 asegura que $\mathbf{On}_z$ es conjunto, por lo que $\mathbf{On}_C$, la clase de ordinales menores que todos los elementos de C, también debe serlo. ■

Teorema 6.2.4 (Principio del Mínimo Ordinal) *Cualquier clase (conjunto o no) de ordinales tiene un mínimo.*

Demostración. Sea C una colección no vacía de ordinales. Por el lema anterior, $\mathbf{On}_C$ es conjunto. Sea entonces $\delta := \mathbf{On}_C \mid \emptyset$.

Vemos que δ acota inferiormente a C, es decir, para todo $\alpha \in C$, se tiene que $\delta \leq \alpha$, ya que $L_\delta = \mathbf{On}_C < \alpha$ y $\delta < \emptyset = R_\alpha$. Por otro lado, vemos que no se puede dar la desigualdad $\delta < C$, pues de ser así, tendríamos $\delta \in \mathbf{On}_C$, y por tanto, se cumpliría que $\delta < \delta$, una contradicción. Tenemos por tanto que $\delta = \alpha$, para algún $\alpha \in C$, es decir, $\delta \in C$, luego, C tiene mínimo y es δ. ■

Con esto, hemos cumplido el objetivo de esta sección. Como un plus, se demuestra otra propiedad importante de los ordinales: todo conjunto de ordinales tiene supremo.

Teorema 6.2.5 *Para cada conjunto de ordinales hay un ordinal que lo acota superiormente.*

Demostración. Sea S un conjunto de ordinales. Entonces el ordinal $S \mid \emptyset$ es la cota buscada. ■

Corolario 6.2.6 *Cualquier conjunto de ordinales admite supremo.*

Demostración. Se sigue inmediatamente de los dos teoremas anteriores. ■

Capítulo 7

El árbol surreal

Buenos y agradables resultados hemos obtenido en los capítulos previos, comprobando que los surreales realmente rescatan a nuestros dos sistemas más famosos y útiles, que son $\mathbb{R}$ y **On**. Además, los hemos ordenado linealmente, y le hemos dado estructura de campo.

Pues bien, las buenas noticias no paran aquí: el siguiente objetivo es dotarlo de estructura de árbol binario. Recordemos primero algunos conceptos pertinentes:

Un ***árbol*** $(A, \prec)$ es una clase parcialmente ordenada tal que, para cada $x \in A$, la clase de los ***predecesores*** de x:

$$S(x) := \{y \in A \mid y \prec x\}$$

es un conjunto bien ordenado por «$\prec$». Comúnmente, llamamos ***nodos*** a los elementos de A.

Al conjunto $S(x)$ se le conoce como ***segmento inicial*** definido por x. Con más frecuencia, le llamaremos ***rama*** definida por x, o sencillamente, x-***rama***. Más aún, podemos definir a una x-rama como un segmento inicial $S(x)$ que está bien ordenado por «$\prec$». De este modo, podemos decir que $(A, \prec)$ es un árbol si y sólo si todo segmento inicial es una rama.

El Teorema de Enumeración establece que $(S(x), \prec)$ es isomorfo a $(\mathbf{On}_\alpha, <)$ para algún $\alpha \in \mathbf{On}$. El ***tipo de orden*** de $(S(x), \prec)$ se define entonces como

$$\tau((S(x), \prec)) := \alpha.$$

O, más sencillo, $\tau(S(x)) = \alpha$. El ***rango*** de $x \in A$, escrito $\rho(x)$, es el tipo de orden de $(S(x), \prec)$. Es decir:

$$\rho(x) := \tau(S(x)).$$

Dado $\alpha \in \mathbf{On}$, el α-ésimo ***nivel*** de A es

$$Niv(\alpha) := \{x \in A \mid \rho(x) = \alpha\}.$$

Una ***raíz*** de A es un elemento de rango 0. De este modo:

$$Niv(0) = \{x \in A \mid x \text{ es una raíz de } A\}.$$

Para nuestros fines, vamos a considerar árboles de una única raíz.[1]

La ***altura*** de A, denotada $alt(A)$, es el mínimo ordinal α tal que $Niv(\alpha)$ es vacío. Si $Niv(\alpha) \neq \emptyset$, para todo ordinal α, entonces $alt(A) := \mathbf{On}$.

Si $x, z \in A$, diremos que z es ***sucesor inmediato*** de x sii $x \prec z$ y $\rho(z) = \rho(x) + 1$. También diremos que z es *hijo* de x. Si además tenemos una $\prec$-cadena $(x_\alpha)_{\alpha<\beta}$, entonces

[1] Cuando existe la posiblidad de tener más de una raíz, solemos llamarles *bosques*.

diremos que z es ***sucesor inmediato*** de la cadena sii $x_\alpha \prec z$, para todo $\alpha < \beta$, y $\rho(z)$ es el primer ordinal que queda por arriba de todos los rangos $\rho(x_\alpha)$. También diremos que z es *heredero* de $(x_\alpha)_{\alpha<\beta}$.

Diremos que A es ***binario*** sii cada uno de sus elementos tiene a los más dos hijos, y cada cadena de longitud $\beta \in \mathbf{Lim}$ tiene a lo más un heredero.

Establecido esto, veamos de qué forma los números surreales se van comportando como árbol binario. Vamos a dar primero una breve descripción; ya luego nos centraremos en la formalización, en las secciones subsecuentes.

Uno de los detalles interesantes que se pueden observar, al menos en los albores de la creación, es que por cada número concebido en cierto día nacen, al siguiente, dos nuevos números, a la izquierda y a la derecha del número en cuestión. Esto nos sugiere que cada número nacido en un día α tiene dos sucesores inmediatos, los cuales nacen el día $\alpha+1$ (ver figura 7.1). Llamaremos a éstos, sucesores izquierdo y derecho, de acuerdo a la posición en la que aparece cada uno respecto del número original.

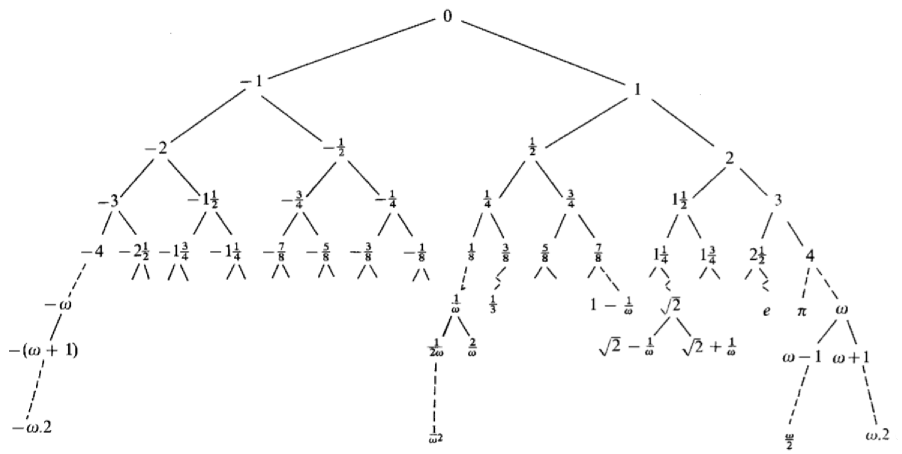


Figura 7.1. Los primeros días del árbol surreal.

Regresemos pues a los primeros días de la creación. El cero es el primero en nacer (nace el día cero), como podemos recordar, siendo una cortadura (la única, de hecho) con las dos partes vacías. Para el día uno nacen el 1 y el -1, y sólo ellos, a la derecha e izquierda de 0, respectivamente. Así, 1 es el sucesor derecho del 0, mientras que -1 es su sucesor izquierdo. Para el siguiente día, el día dos, nacen los hijos de 1: el 2 y el $\frac{1}{2}$, derecho e izquierdo, respectivamente. Análogamente, -2 y $-\frac{1}{2}$ son sucesores izquierdo y derecho de -1.

Y así, en general, cada número se ve ahora como un nodo del cual se ramifican dos hijos, posicionándose a la izquierda y derecha, según el orden de la recta surreal, introducido en anteriores capítulos. Una vez que agotamos todos los días finitos, obtenemos ω-sucesiones de nodos, en donde cada nodo $(k+1)$-ésimo es sucesor inmediato del nodo k-ésimo. Estas sucesiones son precisamente ramas de longitud ω. Nos puede costar más trabajo intuir que cada rama tiene un único sucesor inmediato, pero se verá en las siguientes secciones que esto en realidad ocurre así.

Si tomamos la rama que siempre opta por los sucesores derechos, el heredero de ésta es ω. Análogamente, $-\omega$ es el heredero de la rama que toma la vía de los sucesores izquierdos. Variar las elecciones de sucesores derechos e izquierdos nos llevarán a obtener ramas con herederos reales; mientras que elegir el camino de puros sucesores izquierdos, o bien derechos, a partir de cierto punto que no sea la raíz, nos lleva a números infinitamente cercanos a números reales (si nos movemos primero a la derecha, y a partir de ahí siempre hacia la izquierda, obtenemos al número infinitesimal $\frac{1}{\omega}$). Siguiendo la ruta adecuada, podemos aproximarnos a cualquier número que nos propongamos.

Una vez superado el día ω, podemos comenzar la tarea de asignar sucesores derechos e izquierdos, y preparnos para obtener nuevas ramas, ahora de longitud $\omega+\omega$; luego, repetir este proceso en todos los pasos límite. De esta manera, análogo a un fractal, tendremos funcionando el árbol binario en todas las escalas que imaginemos, a cualquier altura.

7.1. La jerarquía de los cumpleaños

En el primer capítulo se ha introducido la idea intuitiva de días de nacimiento —o cumpleaños—, y se ha llegado ya la hora de formalizarla un poco. Esta idea, de que los surreales van naciendo en días consecutivos, establece una jerarquía natural, sostenida por el buen orden de los números ordinales. Al tomar cualquier subconjunto no vacío de números surreales podemos saber quiénes han nacido primero, al considerar los cumpleaños de todos ellos. Estos cumpleaños, por ser ordinales, fijan un mínimo. Concretamente, queremos hacer hincapié en que los números surreales están ordenados por *niveles*, dependiendo del momento en que nacen. Atendemos a esta jerarquía, que llamaremos ***jerarquía de los cumpleaños*** (o simplemente ***jerarquía c***), porque es quien da la pauta para ir visualizando a **No** como árbol binario.

Como ya se había dicho en el primer capítulo, vamos a definir el concepto de *cumpleaños* desde una perspectiva conjuntista. Introducimos entonces los conjuntos: N_α, en donde están todos los que nacen el día α; O_α, que recolecta todo aquello que nace antes del día α; y M_α, que es la unión de O_α y N_α, es decir, este conjunto congrega a todos aquellos que nacen el día α o cualquier otro día anterior. Esta definición claramente es recursiva.

Definición 7.1 Para cada ordinal α, se definen:

$$\begin{aligned}
M_\alpha &:= \{(L\,|\,R) \,:\, L,R \subseteq O_\alpha \ \text{ y } \ L<R\}\\
O_\alpha &:= \bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta\\
N_\alpha &:= M_\alpha - O_\alpha
\end{aligned}$$

Teorema 7.1.1

1) $M_\alpha, N_\alpha, O_\alpha \subseteq \mathbf{No}$.

2) $M_\alpha \subset M_\beta$ *y* $O_\alpha \subset O_\beta$, *siempre que* $\alpha<\beta$.

3) *Sean* $A \subseteq \mathbf{On}$ *y* $\delta = \min A$. *Entonces* $\bigcap_{\alpha\in A} M_\alpha = M_\delta$.

4) $N_\alpha \cap N_\beta = \emptyset$ *siempre que* $\alpha \neq \beta$.

Demostración.

1) Supongamos inductivamente que todo M_β, con $\beta<\alpha$, es un conjunto de números surreales. De aquí se sigue que O_α también es un conjunto de surreales. Para ver que M_α también lo es, tomamos $x = L\,|\,R$ con $L,R \subseteq O_\alpha$ y $L<R$. De este modo, (L,R) es una cortadura de números surreales, por lo que debe tenerse que $x \in \mathbf{No}$. Por último, claramente $N_\alpha \subseteq \mathbf{No}$, por estar contenido en M_α.

2) Si $\alpha<\beta$, es obvio que $\bigcup_{\gamma<\beta} M_\gamma$ contiene a $\bigcup_{\gamma<\alpha} M_\gamma$, es decir, $O_\alpha \subseteq O_\beta$. Por otra parte, si $x = L\,|\,R \in M_\alpha$, entonces $L,R \subseteq O_\alpha \subseteq O_\beta$. Así, $x \in M_\beta$, y por lo tanto, $M_\alpha \subseteq M_\beta$.

3) Es inmediato del hecho de que $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es una cadena.

4) Sin pérdida de generalidad, suponga que $\alpha < \beta$. Como N_β y O_β son ajenos, basta ver que $N_\alpha \subseteq O_\beta$. Sea $x \in N_\alpha$. Como $N_\alpha = M_\alpha - O_\alpha$, se sigue que $x \in M_\alpha$, y como $\alpha < \beta$, se tiene que $x \in \bigcup_{\gamma<\beta} M_\gamma$ (M_α es uno de los uniendos), es decir, $x \in O_\beta$. ■

Teorema 7.1.2 *La clase de los surreales es la unión ajena de los N_α's.*

Demostración. Gracias a los puntos 1 y 4 del teorema anterior, sólo resta probar que $\mathbf{No} \subseteq \bigcup_{\alpha\in\mathbf{On}} N_\alpha$. Sea entonces $x \in \mathbf{No}$. Inductivamente, tenemos que cada uno de los elementos de x está en algún N_α. Sea $A := \{\alpha \mid x' \in N_\alpha \text{ para algún } x' \in x\}$, y sea $\delta := \sup A$ (por el corolario 6.2.6, el supremo existe, ya que A es conjunto). Entonces, todos los elementos de x están en M_δ, y en consecuencia, x está en cualquier M_β tal que $\beta > \delta$, lo que nos asegura que $\{\alpha \mid x \in M_\alpha\} \neq \emptyset$.

Sea $\mu := \min\{\alpha \mid x \in M_\alpha\}$. Claramente $x \notin M_\gamma$, para cualquier $\gamma < \mu$, por lo que $x \notin \bigcup_{\gamma<\mu} M_\gamma$, es decir, $x \notin O_\mu$. Puesto que $x \in M_\mu$, debe tenerse $x \in N_\mu$.

Así, podemos concluir que $\mathbf{No} \subseteq \displaystyle\bigcup_{\alpha\in\mathbf{On}} N_\alpha$. ■

Definición 7.2 Si $x \in N_\alpha$, decimos que α es el **cumpleaños** de x, y denotamos $\mathit{cumpl}(x) := \alpha$.

7.2. La jerarquía de la simplicidad

Tal vez ya estemos ansiosos por ver de qué forma la recta surreal se puede transformar en un árbol. Vamos ahora a introducir una jerarquía un poco más compleja, basándonos en la simplicidad. Será esta jerarquía la que le brinde esta nueva estructura de árbol binario a los surreales, y le vamos a llamar ***jeraquía s***, de simplicidad.

Recordemos que, dado un conjunto no vacío de surreales, a aquél que ha nacido primero le denominamos *el más simple*. De este modo, nuestra idea prima de simplicidad está ligada a la jerarquía c; sin embargo, ahora queremos exigirle un poco más a esta concepción, de modo que establezcamos una jerarquía más precisa, la cual pretendemos que sea la *jerarquía de simplicidad*. Recordemos también que el más simple de los números que se encuentran entre dos conjuntos A y B de números surreales, es precisamente el número surreal $A \mid B$. Lo que nosotros queremos es definir una relación de «*ser más simple*» entre cualesquiera dos números surreales x y z. Para cuando $\mathit{cumpl}(x) = \mathit{cumpl}(z)$, no tiene sentido preguntarse quién es más simple (la simplicidad viene involucrando implícitamente el contraste entre las «edades»), así que vamos a suponer, sin pérdida de generalidad, que $\mathit{cumpl}(x) < \mathit{cumpl}(z)$. De entrada, esto ya no permite que $x = z$. Puesto que x nace antes que z, lo que queremos establecer es que x sea más simple que z. Para lograrlo, vamos a pedir sencillamente que $L_x < z < R_x$, lo que vendrá a refinar la concepción que teníamos sobre simplicidad en un principio, olvidándonos de todos los que quedan fuera de L_x y R_x, pues son irrelevantes para los análisis que nos incumben.

En resumen, para $x, z \in \mathbf{No}$ tales que $\mathit{cumpl}(x) < \mathit{cumpl}(z)$, si $L_x < z < R_x$, entonces diremos que x es ***más simple*** que z, y vamos a denotar $x <_s z$. También diremos que $x < z$ en la jerarquía s.

Por último, vamos a delimitar a los sucesores inmediatos. En este punto, estamos asumiendo provisionalmente que $\mathbf{No}$ es un árbol binario, como efectivamente resultará.

Teorema 7.2.1

1) *Dado $x \in \mathbf{No}$, existen $y, z \in \mathbf{No}$ únicos tales que $x <_s \{y, z\}$ y $cumpl(y) = cumpl(z) = cumpl(x) + 1$; es decir, todo número surreal x tiene exactamente dos hijos.*

2) *Dado un ordinal límite α y una $<_s$-cadena $(x_\beta)_{\beta<\alpha}$ de números surreales, existe $z \in \mathbf{No}$ tal que $x_\beta <_s z$, para cada $\beta < \alpha$, y si y es otro número surreal y mayor que cada x_β en la jerarquía s, entonces $cumpl(z) < cumpl(y)$. Es decir, toda rama tiene un único sucesor inmediato.*

Demostración.
1) Tales números son $z := L_x \cup \{x\} \,|\, R_x$ y $y := L_x \,|\, R_x \cup \{x\}$. Claramente, y es el sucesor izquierdo y z el derecho.
2) Tal sucesor se obtiene como: $z := \bigcup_{\beta<\alpha} L_{x_\alpha} \,|\, \bigcup_{\beta<\alpha} R_{x_\alpha}$. ■

7.3. El árbol canónico

Contra lo esperado, no nos lanzaremos a demostrar directamente que $(\mathbf{No}, <_s)$ es un árbol binario. Lo que vamos a hacer es definir *el árbol canónico* y demostraremos que éste, efectivamente, es un árbol binario; le daremos un orden, y demostraremos que este orden es total (en el fondo, es el orden lexicográfico) y también lo denotaremos por «$<$». El plan es, en realidad, hacer ver que el árbol canónico y la recta surreal son isomorfos como órdenes totales, y así, con ayuda de este isomorfismo, «copiar» el orden de árbol del árbol canónico, brindándole estructura de árbol binario a la clase de los surreales.

Pues bien, ¿cómo se define el árbol canónico? Sencillo: nos fijamos que, siguiendo la jerarquía s, podemos ir «moviéndonos» a través de los sucesores inmediatos de dos maneras posibles: hacia la izquierda y hacia la derecha, o bien, «brincando» hasta el heredero si de una rama infinita se tratara, tal y como se ha descrito al principio del capítulo.

Si etiquetamos los movimientos hacia la izquierda con signos «$-$», y con signos «$+$» los movimientos hacia la derecha, estaremos codificando cada número surreal con alguna sucesión de signos «$+$» y «$-$», asignando entonces a cada número una cadena de signos.

Por ejemplo, el 1, que es el sucesor derecho de 0, le corresponde la sucesión $(+)$, y al -1, de forma análoga, le corresponde la cadena $(-)$. El 0 no es sucesor de nadie, así que vamos a asignarle la sucesión $\emptyset$. Hay que observar que cada una de estas sucesiones delimita al número del cual se obtuvo: $\emptyset$ dice claramete que no debemos movernos, y por tanto, estamos parados en la raíz, es decir, el 0. «$+$» ordena avanzar hacia la derecha, y «$-$», hacia la izquierda, cayendo en el 1 y el -1, respectivamente.

Esta idea es susceptible de extenderse a todos los nodos, en todos los niveles, ya que todo mundo tiene, o bien un sucesor derecho, o bien un sucesor izquierdo.

¿A qué número corresponde la sucesión $(++--+)$? Lo vemos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \emptyset &= 0 \\ (+) &= 1 \\ (++) &= 2 \\ (++-) &= 1\frac{1}{2} \\ (++--) &= 1\frac{1}{4} \\ (++--+) &= 1\frac{3}{8} \end{aligned}$$

Para números nacidos el día ω, tendremos cadenas de longitud ω. Por ejemplo, las sucesiones $(++++...)$ y $(+---...)$ de longitud ω corresponden a ω y $\frac{1}{\omega}$, respectivamente.

De este modo, los números surreales se pueden ver como cadenas de signos «+» y «−», las cuales llamaremos *expansiones binarias*. El árbol binario es la colección que constituyen todas estas expansiones binarias. En esta sección vamos a formalizar esta construcción, realizando con ello las demostraciones pertinentes de las aseveraciones que se han hecho aquí un poco a la ligera.

Definición 7.3 Una ***expansión binaria*** b es cualquier α-sucesión en $\{-,+\}$, donde α es un ordinal. La ***longitud*** de b es el ordinal α que corresponde a su dominio $\mathbf{On}_\alpha$,[2] y es denotada por $\ell(b)$.

A la colección de todas las posibles expansiones binarias le denominamos ***árbol binario canónico*** (o simplemente **árbol canónico**) y se denota por $\mathbf{B}$. Es decir:

$$\mathbf{B} := \{b : \mathbf{On}_\alpha \to \{-,+\} \mid \alpha \in \mathbf{On}\}.$$

El primer reto es comprobar que el árbol binario canónico $\mathbf{B}$ es, efectivamente, un árbol binario. Empezaremos viendo que de verdad se comporta como tal, definiendo una relación «$<_s$» de la siguiente manera:

Para $a, b \in \mathbf{B}$, $a <_s b$ si y sólo si b extiende propiamente a a (si y sólo si $a \subset b$).

Teorema 7.3.1 $(\mathbf{B}, <_s)$ *es un árbol binario.*

Demostración. Por tratarse de la contención, claramente estamos hablando de un orden parcial, y la sucesión $\emptyset \to \{-,+\}$ (el vacío) es claramente la única raíz.

Sea b una expansión binaria. Para verificar que $(S(b), <_s)$ está bien ordenado, necesitamos primero ver que es una cadena. Supongamos lo contrario, es decir, vamos a asumir que $S(b)$ no es una cadena y con esto llegaremos a un absurdo. Entonces existen $x, y \in S(b)$ distintos no comparables entre sí, es decir, tales que $x \not<_s y$ y $y \not<_s x$. Entonces x y y difieren en el ξ-ésimo término, para algún $\xi < \text{mín}\{\beta, \delta\}$. Como $x, y <_s b$, se tiene que $\xi < \alpha$ y que $x_\xi = b_\xi = y_\xi$, lo cual es imposible, ya que $x_\xi \neq y_\xi$. Así, $(S(b), <_s)$ es una cadena.

Ahora, si tomamos un subconjunto no vacío X de $S(b)$, entonces debe haber una sucesión en X de longitud mínima, ya que las longitudes son números ordinales. Vamos a denotar por m a esta sucesión, y demostraremos que es el elemento mínimo de X. Sea $x \in X$. Como $S(b)$ es una cadena, x y m son comparables, por lo que una extiende a la otra, lo que lleva a que el dominio de una está inmerso en el de la otra. Puesto que la longitud de m es la mínima, se debe tener que $m <_s x$. Luego, $m = \text{mín}\, X$. Luego, $(\mathbf{B}, <_s)$ es un árbol.

Para terminar, hay que verificar que es binario, pero esto ya es sencillo, pues cualquier expansión tiene exactamente dos sucesores inmediatos, que se obtienen al agregar un signo «+» o un signo «−»; además, toda cadena tiene como sucesor inmediato a la unión. ∎

Observación 7.3.2 $\ell(b) = \rho(b)$*, para toda expansión binaria* $b \in \mathbf{B}$.

Una vez convencidos de que tenemos un genuino árbol binario, el siguiente paso es introducir el orden que nos llevará hacia el isomorfismo entre $\mathbf{No}$ y $\mathbf{B}$ que nos ayudará a copiar la estructura de árbol. En marcha.

---

[2] Recordemos que $\mathbf{On}_\alpha = \{\beta \in \mathbf{On} \mid \beta < \alpha\}$.

Definición 7.4 Dadas $a, b \in \mathbf{B}$, definimos $\quad a < b \quad \Leftrightarrow \quad a_\beta < b_\beta \quad$ donde β es el primer ordinal en donde a y b difieren.

Es necesario ahora hacer unas aclaraciones. Podría ser que a y b nunca difieran y, sin embargo, ser distintas expansiones, por ejemplo, $a = (+)$ y $b = (+-)$. En tal caso, extendemos la expansión de longitud más pequeña poniendo ceros hasta igualar la longitud de la otra. En el ejemplo, obtenemos $a^* = (+, 0)$ de a. Para comparar a^*_β con b_β estamos pensando que $- < 0 < +$; así, en nuestro mismo ejemplo, a^* y b difieren en $\beta = 1$, teniendo por ello que $b_1 = - < 0 = a^*_1$. Comparamos entonces b con a de la misma forma como se compara con a^*. De este modo resulta que $b < a$.

Como la anomalía descrita (el hecho de vernos forzados a meter ceros) sólo ocurre cuando una expansión extiende propiamente a la otra, podemos pensar las cosas de la siguiente manera: si $a <_s b$ y $\beta = \ell(a)$, entonces $a < b$ siempre que $b_\beta = +$, y $b < a$ cuando $b_\beta = -$, puesto que el término β-ésimo de b será comparado con un cero. Así, en nuestro ejemplo tenemos que $\ell(a) = 1$ y que $b_1 = -$, lo que nos lleva, siguiendo esta idea, a que $b < a$. Este modesta caracterización se establece en el siguiente resultado.

Proposición 7.3.3 *Sean $a, b \in \mathbf{B}$ tales que $a <_s b$. Sea $\beta = \ell(s)$. Entonces:*

1) $a < b$ *si y sólo si* $b_\beta = +$.

2) $b < a$ *si y sólo si* $b_\beta = -$.

Demostración. Sea $a^* = (a^*_\gamma)_{\gamma < \ell(b)}$ dada por

$$a^*_\gamma := \begin{cases} a_\gamma & \text{si} \;\; \gamma < \beta \\ 0 & \text{si} \;\; \beta \leq \gamma < \ell(b) \end{cases}$$

Antes de proceder con la prueba, observemos primero que:
i) $a^*_\gamma = b_\gamma$ si $\gamma < \beta$.
ii) $a^*_\gamma \neq b_\gamma$ si $\beta \leq \gamma < \ell(b)$.
iii) β es el primer ordinal en donde a^* y b difieren.

Demostremos estos tres puntos:
i) Si $\gamma < \beta$, tenemos por definición que $a^*_\gamma = a_\gamma$. Por otro lado, puesto que b extiende a a, debemos tener necesariamente que $b_\gamma = a_\gamma$ (pues $\beta = \ell(a)$). Así, $a^*_\gamma = b_\gamma$.
ii) Si $\beta \leq \gamma < \ell(b)$, tenemos por un lado que $a^*_\gamma = 0$; y por otro lado, $b_\gamma \in \{+, -\}$. Luego, $a^*_\gamma \neq b_\gamma$.
iii) Se sigue inmediatamente de *i)* y *ii)*.

Con estas observaciones ya es fácil probar la proposición:
1) $a < b \;\Leftrightarrow\; a^* < b \;\Leftrightarrow\; a^*_\beta < b_\beta \;\Leftrightarrow\; 0 < b_\beta \;\Leftrightarrow\; b_\beta = +$.
2) $a > b \;\Leftrightarrow\; a^* > b \;\Leftrightarrow\; a^*_\beta > b_\beta \;\Leftrightarrow\; 0 > b_\beta \;\Leftrightarrow\; b_\beta = -$. ■

Todo lo anterior nos garantiza el objetivo buscado:

Teorema 7.3.4 $(\mathbf{B}, <)$ *es una clase linealmente ordenada.*

Demostración. Sean $a, b \in \mathbf{B}$. Si a y b son $<_s$-comparables, entonces también son $<$-comparables, gracias a la propocisión anterior. Si no son $<_s$-comparables, entonces debe existir un ordinal en donde difieran, pues de lo contrario, estaríamos diciendo que nunca difieren. Sea entonces β el primer ordinal en donde a y b difieren. Usando la definición, podemos comparar a a con b. Así que debe ser un orden total. ■

7.4. El árbol surreal

En este apartado vamos a establecer el isomorfismo entre $(\mathbf{No}, <)$ y $(\mathbf{B}, <)$, que, como hemos repetido ya varias veces, es quien le permitirá a **No** copiar la estructura de árbol binario de **B**. Manos a la obra.

Definición 7.5 Sea $x \in \mathbf{No}$. Sea $\alpha = cumpl(x)$. Para cada $\beta \leq \alpha$ definimos:

1) La β-ésima cortadura de x:

$$C^\beta(x) := (\{O_\beta < x\}, \{O_\beta > x\})$$

2) La β-ésima **aproximación** de x:

$$x^\beta := \{O_\beta < x \mid O_\beta > x\}$$

Note que los elementos de x^β son precisamente todos los elementos de O_β. Así mismo, es importante adelantar que estos x^β's son los nodos que constituirán la rama para x. De esta manera, cada x^β puede visualizarse como la intersección entre N_β y la rama que define x. Vamos ir poco a poco estableciendo los detalles de este hecho.

Proposición 7.4.1 *Sean $x \in \mathbf{No}$ y $\alpha = cumpl(x)$. Para cualquier $\beta < \alpha$ se tiene:*

1) $x^\beta \in \mathbf{No}$.

2) $x^\beta \neq x$.

3) $cumpl(x^\beta) = \beta$.

Demostración.
1) Se ve claramente que $C^\beta(x)$ es en verdad una cortadura.

2) Como todos los elementos de x^β están en O_β, entonces $x^\beta \in O_\alpha$, y por tanto $x^\beta \notin M_\alpha - O_\alpha = N_\alpha$. Como $x \in N_\alpha$, se concluye que $x^\beta \neq x$.

3) Si $x^\beta \in O_\beta$, entonces no se puede tener $x^\beta < x$ ni $x^\beta > x$ (de ser así, x^β sería uno de sus propios elementos, lo cual no es posible). La única opción sería entonces que $x^\beta = x$, pero esto contradice el inciso anterior. Por lo tanto, $x^\beta \notin O_\beta$. Luego, como $x^\beta \in M_\beta$, se sigue que $x^\beta \in M_\beta - O_\beta = N_\beta$, es decir, $cumpl(x^\beta) = \beta$. ■

Lema 7.4.2 *Sean $x, z \in \mathbf{No}$, $\alpha \in \mathbf{On}$ y $\beta \leq \alpha$. Entonces:*

1) $C^\beta(x^\beta) = C^\beta(x)$.

2) *Si $y \in N_\beta$ es tal que $\{O_\beta < x\} < y < \{O_\beta > x\}$ entonces $y = x^\beta$.*

3) $x = x^\alpha$.

4) $C^\beta(x) = C^\beta(z)$ *si y sólo si* $x^\beta = z^\beta$.

Demostración.
1) Se sigue de la definición de x^β y del hecho de que todo número surreal z cumple $L_z < z < R_z$.

2) Como $\beta = cumpl(y)$, entonces y debe ser el más simple entre $\{O_\beta < x\}$ y $\{O_\beta > x\}$. Así, por simplicidad, debemos tener que $y = x^\beta$.

3) Inmediato del inciso anterior.

4) Si $C^\beta(x) = C^\beta(z)$ entonces, por 1), $C^\beta(x) = C^\beta(z^\beta)$. De aquí es fácil ver que $\{O_\beta < x\} < z^\beta < \{O_\beta > x\}$, así que, por 2), tenemos que $z^\beta = x^\beta$. Recíprocamente, si $x^\beta = z^\beta$, entonces $C^\beta(x^\beta) = C^\beta(z^\beta)$, y, por 1), $C^\beta(x) = C^\beta(z)$. ∎

Definición 7.6 Definimos:

1) La función **signo,** $sg : \mathbf{No} - \{0\} \longrightarrow \{+, -\}$, dada por

$$sg(x) = \begin{cases} + & \text{si} \quad x > 0 \\ - & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

2) La función **expansión**, $E : \mathbf{No} \longrightarrow \mathbf{B}$, definida por

$$E(x) := (sg(x - x^\beta))_{\beta<\alpha}$$

donde $\alpha = cumpl(x)$.

3) Para cada $\beta < \alpha$, $E_\beta(x) := sg(x - x^\beta)$.

Proposición 7.4.3

1) *E está bien definida.*

2) *Para $x \in N_\alpha$, si $\beta < \alpha$ entonces $E(x^\beta) = E(x)\restriction_\beta$.*

Demostración.
1) Cada número surreal x tiene una única β-ésima aproximación por cada $\beta < cumpl(x)$ Por otro lado, por el segundo inciso de la proposición 7.4.1, $x - x^\beta \neq 0$, por lo que $E(x)$ es una genuina expansión binaria, para todo $x \in \mathbf{No}$.

2) Sea $\gamma < \beta$. Si $x^\gamma < x$, entonces $x^\gamma \in \{O_\beta < x\}$, por lo que $x^\gamma < x^\beta$, por definición de x^β. De la misma forma se ve que $x^\gamma > x^\beta$, si $x^\gamma > x$. En consecuencia, $E_\gamma(x^\beta) = E_\gamma(x)$, para todo $\gamma < \beta$. ∎

Teorema 7.4.4 *E es una función inyectiva.*

Demostración. La prueba es por inducción en **On**. Sean $x, z \in \mathbf{No}$ tales que $E(x) = E(z)$. Sea α el cumpleaños común de x y z (observe que $cumpl(x) = \ell(E(x)) = \ell(E(z)) = cumpl(z)$). De que $E(x) = E(z)$, se sigue que $E(x)\restriction_\beta = E(z)\restriction_\beta$, para todo $\beta < \alpha$. Por el segundo inciso de la proposición anterior, se tiene $E(x^\beta) = E(z^\beta)$, si $\beta < \alpha$. Ahora tenemos, inductivamente, que $x^\beta = z^\beta$, siempre que $\beta < \alpha$. Demostraremos que x y z definen la misma cortadura en O_α, y así tendremos, por los incisos 3) y 4) del lema 7.4.2, que $x = x^\alpha = z^\alpha = z$.

Supongamos que $C^\alpha(x) \neq C^\alpha(z)$; tenemos así, sin pérdida de generalidad, que existe $y \in O_\alpha$ tal que $x < y < z$ (ver figura 7.2).

Como $y \in O_\alpha$, entonces $y \in N_\gamma$, para algún $\gamma < \alpha$. Se sigue entonces que $y \in O_{\gamma+1}$ y además $x < y < z$. Con esto tenemos de inmediato que x define en $O_{\gamma+1}$ una cortadura distinta a la que define z, teniendo así que $x^{\gamma+1} \neq z^{\gamma+1}$, contradiciendo la hipótesis de inducción. Luego, $C^\alpha(x) = C^\alpha(z)$, teniendo así que $x = z$. ∎

Lema 7.4.5 *Sean $x, z \in \mathbf{No}$ y sea $\beta \leq \text{mín}\{cumpl(x),\ cumpl(z)\}$. Si $x^\beta < z^\beta$ entonces $\{O_\beta > x\} \cap \{O_\beta < z\} \neq \emptyset$.*

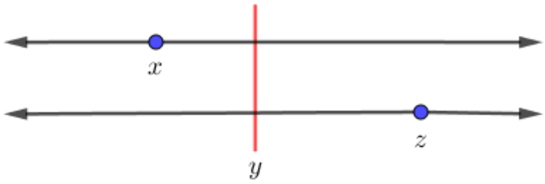


Figura 7.2. Ambas rectas representan al conjunto O_α.

Demostración. Se sigue del primer inciso de la proposición anterior y del lema 4.3.2. ■

Teorema 7.4.6 *Si $x, z \in \mathbf{No}$, entonces $x < z$, siempre que $E(x) < E(z)$.*

Demostración. Sean $x, z \in \mathbf{No}$ tales que $E(x) < E(z)$. Entonces existe un ordinal α tal que $E_\beta(x) = E_\beta(z)$, para cada $\beta < \alpha$, pero $E_\alpha(x) < E_\alpha(z)$. Esto indica que $E(x)\restriction_{\alpha+1} < E(z)\restriction_{\alpha+1}$, y por el segundo inciso de la proposición 7.4.3, tenemos que $E(x^{\alpha+1}) < E(z^{\alpha+1})$, por lo que, por hipótesis de inducción, $x^{\alpha+1} < z^{\alpha+1}$.

Por el lema 7.4.5, podemos concluir que $\{x < O_{\alpha+1}\} \cap \{O_{\alpha+1} < z\} \neq \emptyset$; por tanto, existe $y \in O_{\alpha+1}$ tal que $x < y < z$. ■

Corolario 7.4.7 *Si $x, z \in \mathbf{No}$, entonces $x < z$ implica que $E(x) < E(z)$.*

Demostración. Suponga que $E(x) \geq E(z)$. Como E es inyectiva, tenemos que $E(x) > E(z)$. Por el teorema anterior se sigue que $x > z$, contradiciendo la hipótesis. Luego, $E(x) < E(z)$. ■

Teorema 7.4.8 *E es suprayectiva.*

Demostración. Sean $b \in \mathbf{B}$ y $\alpha = \ell(b)$. Para cada $\beta < \alpha$, sabemos, por hipótesis de inducción, que existe x_β tal que $E(x_\beta) = b\restriction_\beta$.

Sea entonces $x = L_x \,|\, R_x$, en donde $L_x := \{x_\beta :\ b\restriction_\beta < b\}$ y $R_x := \{x_\beta :\ b < b\restriction_\beta\}$.

Note que x es un número surreal, pues si tomamos $x_\beta \in L_x$ y $x_\gamma \in R_x$, entonces $b\restriction_\beta < b < b\restriction_\gamma$; luego, por el teorema 7.4.6, tenemos que $x_\beta < x_\gamma$, y esto nos dice que (L_x, R_x) es una cortadura.

Demostraremos que $E(x) = b$. Sea $\beta < \alpha$. Si $E_\beta(x) = +$, entonces $sg(x - x^\beta) = +$. Entonces $x > x^\beta$. Como $x_\beta = x^\beta$, se tiene que $x > x_\beta$. Luego, $x_\beta \in L_x$, por lo que $b\restriction_\beta < b$. Como b extiende a $b\restriction_\beta$, tenemos, en virtud del primer inciso de la proposición 7.3.3, que $b_\beta = +$. Análogamente, si $E_\beta(x) = -$, se puede corroborar, gracias a la proposición 7.3.3, inciso (2), que $b_\beta = -$. Así las cosas, $E_\beta(x) = b_\beta$, para todo $\beta < \alpha$. Es decir, $E(x) = b$, y esto termina la prueba. ■

Corolario 7.4.9 $(\mathbf{No}, <) \overset{E}{\simeq} (\mathbf{B}, <)$.

Demostración. Por los teoremas 7.4.4 y 7.4.8, y por el corolario 7.4.7, tenemos que E es un isomorfismo entre órdenes. ■

Ahora sí, gracias al isomorfismo E, es posible dotar a **No** de estructura de árbol binario, copiándola de **B**. Procedemos de la siguiente manera:

Si $x, z \in \mathbf{No}$, definimos $x <_s z$ si y sólo si $E(x) <_s E(z)$.

Resulta evidente que $(\mathbf{No}, <_s)$ es un árbol binario, y que las estructuras $(\mathbf{No}, <, <_s)$ y $(\mathbf{B}, <, <_s)$ son isomorfas. A este tipo de estructuras que combinan un orden total y un orden de árbol, les llamaremos ***árboles ordenados***.

En lo sucesivo, gracias a que $(\mathbf{No}, <, < s) \overset{E}{\simeq} (\mathbf{B}, <, <_s)$, identificaremos a las expansiones binarias con los números surreales.

Capítulo 8

El Campo Universal

En capítulos previos se ha trabajado lo suficiente como para asegurar que la clase **No** de los números surreales es un campo ordenado que incluye a todos los números, tanto los más grandes como los más pequeños. Toca ahora el turno de explorar una propiedad universal de los números surreales respecto de las rectas numéricas. Esta labor la realiza Philip Ehrlich en [2].

Cuando nos hablan de rectas numéricas, inmediatamente pensamos en líneas —es decir, conjuntos de puntos ordenados linealmente—, rectilíneas, generalmente, las cuales presumen de cierta estructura algebraica compatible con el orden lineal. En este sentido, estructuras como los ordinales o los enteros pueden considerarse rectas numéricas, aunque aún están bastante lejos de lo que intuimos por recta continua o, en palabras más tradicionales, continuo lineal. Los racionales se acercan bastante al arquetipo ideal de esta última conceptualización, por el hecho de ser un campo, y por su densidad; sin embargo, es de sobra conocida la falla en la que incurren —está plagada de «hoyos»—, cosa que ya no sucede con los números reales: de hecho, estos últimos han parecido ser, históricamente, la elección más adecuada.

Una abstracción bastante conveniente sobre las rectas numéricas, se da con el concepto de *campo real*, el cual generaliza la idea de que ningún número real es «imaginario», en el sentido de que todo número elevado al cuadrado es positivo. De este modo, el concepto de campo real será suficiente para formalizar la idea intuitiva que tenemos de las rectas numéricas.

Los números reales tienen una característica extra, y esta es, que ya tenemos justo lo necesario en $\mathbb{R}$ para que sea un campo real; es decir, si extendemos algebraicamente[1] el campo, llegamos a incluir partes imaginarias, tal como sucede al extender los reales a los complejos. Cualquier campo real que cumpla esto, es decir, ser maximal respecto a la propiedad de ser real, se denomina *real-closed*.

Las definiciones tradicionales, las que suelen establecerse en cualquier estudio ordinario, se dan a continuación. Un campo ***ordenado*** es un campo con un orden total compatible con sus operaciones; más formalmente, contamos con elementos en el campo, llamados *positivos*, los cuales conforman una subestructura cerrada bajo las operaciones y es tricotómica. Un campo ***real*** es un campo en donde toda suma de cuadrados es siempre distinta de «-1»; esto, coloquialmente, significa que no se aceptan números imaginarios. Un campo ***real-closed*** es un campo real que no admite extensiones reales algebraicas propias; es decir, que si K es un campo real-closed, y F un campo real que extiende algebraicamente a K, entonces $K = F$.

Es por demás evidente que todo campo real-closed es real, pero no se cumple el recíproco. Por otro lado y claramente, todo campo ordenado es real, dada la cerradura de sus elementos positivos. Se tiene, además, un resultado en sentido recíproco, el cual asegura

[1] Las extensiones trascendentes suponen saltos titánicos.

que todo campo real puede ser equipado con un orden total con el que podemos obtener un campo ordenado; sin embargo, la justificación de ello ya no es tan fácil de establecer.

Vamos a mencionar otro resultado, de suma importancia, cuya prueba también supone un trabajo considerable:

Sea K un campo. Las siguientes condiciones son todas equivalentes.

1) K es real-closed.

2) K es elementalmente equivalente a $\mathbb{R}$.

3) K admite un orden lineal, en el cual todo elemento positivo tiene raíz cuadrada en K, y todo polinomio de grado impar con coeficientes en K tiene al menos una raíz en K.

4) K no es algebraicamente cerrado, pero la extensión $K(\sqrt{-1})$ es algebraicamente cerrada.

Es de sobra conocido que todo real positivo tiene raíz cuadrada, y que todo polinomio con coeficientes reales admite al menos una raíz real, lo que indica que $\mathbb{R}$ es un campo real-closed, en virtud de la equivalencia de 1 con 3. Por otro lado, en [1], capítulo 4, páginas 40-42, Conway demuestra que **No** es real-closed, vía el punto 3 nuevamente, de donde, gracias a 4, podemos concluir que $\mathbf{No}(\sqrt{-1})$ es algebraicamente cerrado (tal como ocurre en el caso de los números complejos).

La equivalencia ente 1 y 2 fortalece el planteamiento de que el concepto de real-closed es ideal para formalizar y generalizar al continuo lineal, pues, de entrada, rescata todas las propiedades de los números reales (las que pueden decirse en un lenguaje de primer orden). Así las cosas, podemos pensar a los real-closed como la abstracción, por excelencia, del continuo lineal. De este modo, averiguar propiedades respecto al continuo lineal, se traduce a averiguarlas respecto a campos real-closed, los cuales ya pueden ser tratados formalmente.

Pues bien, se ha prometido establecer una propiedad universal acerca de **No** respecto de las rectas numéricas, lo que se traducirá ahora a establecerla respecto de los real-closed. Esto es precisamente lo que Ehrlich demuestra en [2], aunque, para lograr este resultado, opta por un camino un tanto largo, aunque efectivo. En lugar de analizar los campos real-closed, trabaja con otro tipo de estructuras, a las que denomina *campos s-jerárquicos*. Estas estructuras resuelven de manera indirecta el asunto de la universalidad de los surreales respecto a los real-closed. Es decir, Ehrlich establece esta universalidad, pero a través de campos s-jerárquicos, y luego acomoda las piezas para culminar el resultado respectivo a campos real-closed. Lo que hace para lograr esto último, es valerse de la universalidad de **No**, respecto de los s-jerárquicos, para demostrar que todo real-closed se corresponde con algún campo s-jerárquico que se encaja en **No** como *sub-árbol inicial*.[2].

Los campos s-jerárquicos se pueden entender como aquellos campos (ordenados, necesariamente) a los que hemos dotado de una estructura de árbol binario similar a la de **No**. A estas estructuras, Ehrlich les denomina *árboles binarios lexicográficamente ordenados*, y presuntamente albergan en sus entrañas la generalización del concepto de simplicidad que hemos manejado con los números surreales. Como hemos visto en el capítulo anterior, la simplicidad puede ser abordada desde el punto de vista del orden del árbol canónico;

[2]Un subárbol inicial puede considerarse, más o menos, como una copia *local* de la totalidad del árbol a una determinada altura. En pocas páginas estableceremos la definición formal de subarbol inicial.

de forma similar, podemos hablar de *jerarquías de simplicidad* en general, vía árboles lexicográficamente ordenados. En otras palabras, cada campo s-jerárquico carga con una jerarquía «s» específica: aquella ligada a su estructura de árbol lexicográficamente ordenado.

En resumen, los puntos claves para abordar a la universalidad de **No** son:

1) Los campos real-closed y sus importantes propiedades.

2) Los campos s-jerárquicos y la universalidad de **No** respecto a estos campos.

3) La correspondencia uno a uno entre los campos real-closed y los subcampos iniciales de **No**.

Estos temas son considerablemente extensos, y cada uno de ellos es suficiente como para cubrir una tesis por su cuenta. Así que queda fuera de nuestro alcance la ambiciosa tarea de atacar minuiciosamente punto por punto. En este apartado, dada la importancia del tema de la universalidad, nos hemos conformado con hacer un breve estudio del segundo punto, que es el que más se apega a este trabajo de tesis. Para indagar un poco más acerca de los campos reales, así como consultar las pruebas de los resultados mencionados anteriormente, puede consultar [6], capítulo XI, *Real Fields*. El último punto también es tratado por Ehrlich en [2], y, como ya dijimos, es donde nos hemos basado para presentar nuestro respectivo trabajo, vertido en este capítulo.

8.1. Árboles binarios lexicográficamente ordenados

Antes de abordar los campos s-jerárquicos y su relación con **No**, comenzamos a analizar aquella parte que los hace «s- jerárquicos». Nos referimos al concepto de árbol binario lexicográficamente ordenado. Sabemos ya que $(\mathbf{B}, <_s)$, el árbol binario canónico, se puede dotar de un orden lineal, el cual es precisamente un orden lexicográfico, como hemos visto en el anterior capítulo. En este nuevo concepto, próximo a definir, se abstraen las características que se desprenden de obtener el orden lexicográfico.

Definición 8.1 Diremos que $(A, <, <_s)$ es un ***árbol ordenado*** sii $(A, <_s)$ es un árbol y $(A, <)$ es una clase totalmente ordenada. Diremos que $(A, <, <_s)$ es un ***árbol binario lexicográficamente ordenado*** sii es un árbol binario ordenado en donde, para cada $x, z \in A$ tal que $x < z$, las siguientes son equivalentes:
i) x no es $<_s$-comparable con z;
ii) existe $y \in S(x) \cap S(z)$ tal que $x < y < z$.

Convención:
Por comodidad, en la mayoría de las ocasiones nos estaremos refiriendo a los árboles binarios lexicográficamente ordenados sólo como *árboles lexicográficos*.

Dado que el concepto de árbol lexicográfico está inspirado en **No**, nuestro primer deber es demostrar que, en efecto, **No** es un árbol lexicográfico. Evidentemente, esto será resultado de considerar a los números surreales como expansiones binarias.

Proposición 8.1.1 $(\mathbf{No}, <, <_s)$ *es un árbol binario lexicográficamente ordenado.*

Demostración. Sean $x, z \in \mathbf{No}$ tales que $x < z$. Tenemos que demostrar que *i*) y *ii*), de la definición anterior, son equivalentes. Si $x \not<_s z$, entonces existe $\beta \in \mathbf{On}$ tal que $x_\beta < z_\beta$ y $x_\alpha = z_\alpha$, para todo $\alpha < \beta$. Sea entonces $y \in \mathbf{No}$ tal que $\ell(y) = \beta$ y $y_\alpha = x_\alpha$, para todo

$\alpha < \beta$. Claramente, $y \in S(x) \cap S(z)$, y, como $x_\beta = -$, $y_\beta = 0$ y $z_\beta = +$, también es claro que $x < y < z$.

Recíprocamente, sin pérdida de generalidad, asumamos que $y <_s x <_s z$; entonces, y extiende propiamente tanto a x como a z. Sean $\beta := \ell(x)$ y $\alpha := \ell(y)$. Es claro que $\alpha < \beta$ de donde se sigue que $x_\alpha = z_\alpha$. Puesto que $y_\gamma = x_\gamma = z_\gamma$, para todo $\gamma < \alpha$, para que se de la cadena de desigualdades $x < y < z$, es necesario que $x_\alpha = -$ y $z_\alpha = +$, lo cual establece una contradicción. Por tanto, no puede existir $y \in S(x) \cap S(z)$ tal que $x < y < z$. ■

Como se ya se había anticipado, generalizaremos el concepto de simplicidad a los árboles lexicográficos. Una vez vistas las definiciones, debe ser claro que coincidirán en **No** con las establecidas en los primeros capítulos.

Terminología y notación:

1) $x <_s z$ se debe leer: x es ***más simple*** que z.

2) Diremos que x es ***el más simple*** de una clase A si $x <_s z$, para todo $z \in A - \{x\}$.

3) $L_{s(x)} := \{y \in S(x) \mid y < x\}$;
$R_{s(x)} := \{y \in S(x) \mid y > x\}$.

4) Consideremos una cortadura (L, R) de elementos de A. Si $x \in A$ es el miembro más simple tal que $L < x < R$, entonces denotaremos $x := L \mid R$. Al par $L \mid R$ le llamamos una ***representación*** de x en A.

Observaciones:

1) $L_{s(x)} \cup R_{s(x)} = S(x)$.

2) Cada $x \in A$, como en el caso de **No**, puede tener varias representaciones. Una de ellas es, evidentemente, $L_{s(x)} \mid R_{s(x)}$. A ésta le llamaremos la ***representación canónica*** de x (así, la representación canónica de x incluye a toda la x-rama $S(x)$).

Comenzamos con los resultados capitales. Con este primer teorema a cotinuación, tenemos ya ante nuestros ojos la irrefutable naturaleza universal de los números surreales. Sólo que, de forma parcial, el análisis es un primer acercamiento al resultado final, considerando únicamente la relación de **No** y los demás árboles lexicográficos, prescindiendo de la estructura de campo ordenado.

Pero antes de dar inicio, introduciremos dos conceptos que son esenciales en el teorema que nos incumbe en estos momentos. El primero de ellos lo es incluso para todo el trabajo subsecuente.

Definición 8.2 Un ***subárbol inicial*** de A es una subclase A' con el orden inducido, tal que $S_{A'}(x) = S_A(x)$, para cada $x \in A'$.

Observaciones:

1) Hay que notar que, para verificar que A' es un subárbol inicial de A, sólo basta con demostrar que $S_A(x) \subseteq S_{A'}(x)$ si $x \in A'$, pues la contención recíproca siempre se cumple.

2) Es evidente que ser subárbol inicial implica ser subárbol.

Definición 8.3 Dada una clase (parcialmente) ordenada $(A, <)$ diremos que una subclase $B \subseteq A$ es ***convexa*** sii dados $x, z \in B$ y $y \in A$ se tiene $y \in B$ siempre que $x < y < z$.

Teorema 8.1.2 *Sea $(A, <, <_s)$ un árbol ordenado. Las siguientes tres condiciones son equivalentes:*

1) $(A, <, <_s)$ *es un árbol binario lexicográficamente ordenado.*

2) $(A, <, <_s)$ *es isomorfo a un subárbol inicial de* $(\mathbf{No}, <, <_s)$.

3) *Cada subclase convexa de A no vacía tiene su elemento más simple, y para cualesquiera $x, z \in A$, si x es más simple que z, entonces* $L_{s(x)} < z < R_{s(x)}$.

Demostración.
$1) \Rightarrow 2)$

Vamos a proceder de igual forma como hicimos en el capítulo anterior, cuando demostramos que $(\mathbf{No}, <) \simeq (\mathbf{B}, <)$.

Definimos, para cada $x \in A$ y cada $\alpha \in \mathbf{On}$:

$$g_\alpha(x) := \begin{cases} +, & \text{si } x^\alpha < x \\ -, & \text{si } x^\alpha > x \end{cases}$$

donde x^α es el predecesor de x de rango α.

Sea ahora $g : A \to \mathbf{No}$ definida por

$$g(x) := (g_\alpha(x))_{\alpha < \rho(x)},$$

para todo $x \in A$.

Mediante g, es posible demostrar que $(A, <, <_s)$ se encaja en $(\mathbf{No}, <, <_s)$. Es decir, se afirma que g es un encaje entre árboles lexicográficos. Ver que se respeta el orden de árbol es muy sencillo: si $x <_s z$, entonces $S(x) \subseteq S(z)$, lo que implica que $g_\alpha(x) = g_\alpha(z)$, para todo $\alpha < \rho(x)$, con lo que $g(z)$ extiende a $g(x)$, es decir, $g(x) <_s g(z)$. La inyectividad y el hecho de que se preserva la estructura de orden total, siguen los lineamientos de los resultados 7.4.4 y 7.4.7, incluyendo ahora la ventaja de que tenemos por hipótesis que $(A, <_s)$ es un árbol binario (la prueba debe proceder por inducción sobre los rangos en el dominio). Así las cosas, $g : (A, <, <_s) \to (\mathbf{No}, <, <_s)$ es un encaje de árboles lexicográficos.

Para terminar esta parte, sólo nos falta verificar que $g(A)$ es un subárbol inicial de $\mathbf{No}$. Sean entonces $z \in g(A)$ y $y \in S_{\mathbf{No}}(z)$. Como $z \in g(A)$, debe existir $x \in A$ tal que $z = g(x) = (g_\alpha(x))_{\alpha < \rho(x)}$. Como $y <_s z$, se debe tener que $y = (g_\alpha(x))_{\alpha < \beta}$, para algún $\beta < \rho(x)$. Luego, $y = g(x^\beta)$, y por tanto, $y \in g(A)$. De este modo, $y \in S_{g(A)}(z)$, lo que prueba que $S_{\mathbf{No}}(z) \subseteq S_{g(A)}(z)$, para todo $z \in g(A)$. Atendiendo a la primera observación que sigue a la definición de subárbol inicial, tenemos que $g(A)$ es un subárbol inicial de $\mathbf{No}$.

$2) \Rightarrow 3)$

Vamos a suponer que $(A, <, <_s)$ es un subárbol inicial de $\mathbf{No}$. Se demostrará que $(A, <, <_s)$ cumple las propiedades de convexidad pedidas. Claramente, gracias al isomorfismo establecido en la hipótesis, esto es suficiente para verificar que todo árbol lexicográfico las satisface.

Sea $B \subseteq A$ una subclase convexa no vacía. Sea I el nivel de rango mínimo en B; es decir,

$$I := \{b \in B \mid \rho(b) \leq \rho(x), \text{ para todo } x \in B\}.$$

Nuestra meta es demostrar que I tiene un único elemento. Supongamos, por el contrario, que existen $x, z \in I$ tales que $x \neq z$. Claramente, x y z son $<_s$-incomparables; así que debe existir un predecesor común, y, tal que $x < y < z$, debido a que $(A, <, <_s)$ es un árbol lexicográfico. Así las cosas, como B es una clase convexa, se debe tener $y \in B$, contradiciendo la minimalidad establecida en la definición de I. Luego, I tiene sólo un elemento. Luego, toda subclase convexa no vacía de A tiene su elemento más simple.

Por otro lado, sean $x, z \in A$, tales que $x <_s z$. Sea $y \in L_{s(x)}$. Entonces $y <_s x$ y $y < x$. Se tiene que $y <_s z$ y $y < z$. La primera es evidente. Si la segunda no se cumple, entonces $y > z$, ya que «$<$» es total. Entonces, $z < y < x$, lo cual implica, dado que $(A, <, <_s)$ es un árbol lexicográfico, que x y z son $<_s$-incomparables, lo cual contradice la elección de x y z. Luego, $y < z$, y como $y <_s z$, se debe tener $y \in L_{s(z)}$. Por tanto, $L_{s(x)} \subseteq L_{s(z)}$, y de forma análoga se verifica que $R_{s(x)} \subseteq R_{s(z)}$. Así las cosas, $L_{s(x)} < z < R_{s(x)}$.

3) $\Rightarrow$ 1)

Sean $x, z \in A$ tales que $x < z$. Vamos a demostrar la equivalencia entre *i*) y *ii*) de la definición de árbol lexicográfico.

Asumamos que x es $<_s$-incomparable con z. Sea ahora $B := \{a \in A \mid L_{s(x)} < a < R_{s(z)}\}$. Como $L_{s(x)} < x < z < R_{s(z)}$, se tiene $x, z \in B$. Es decir, B es una clase no vacía. Claramente, B es convexa, así que debe tener elemento más simple, al cual llamaremos y. Como x y z son $<_s$-incomparables, ninguno de ellos es y, el miembro más simple, así que debe tenerse $y <_s \{x, z\}$. Luego, como $x \notin L_{s(x)} \cup R_{s(z)}$, por definición de B, se debe tener $y \in R_{s(x)} \cap L_{s(z)}$. Así las cosas, $y \in S(x) \cap S(z)$ y $x < y < z$.

Recíprocamente, asuma sin pérdida de generalidad que $x <_s z$. Entonces, por hipótesis, $L_{s(x)} < z < R_{s(x)}$, y por tanto $L_{s(z)} < z < R_{s(x)}$. Luego, $R_{s(x)} \cap L_{s(z)} = \emptyset$. Es decir, no existe $y \in S(x) \cap S(z)$ tal que $x < y < z$. ■

La equivalencia entre 1) y 2) del teorema 8.1.2 establece un principio de inducción para cualquier árbol lexicográfico, el cual será de gran ayuda. Este principio es el mismo que conocemos para números surreales, sólo que generalizado. Para distinguir la inducción en **No** de la generalizada, le llamaremos a ésta *inducción lexicográfica*.

Corolario 8.1.3 (Principio de inducción lexicográfica) *Sea $(A, <, <_s)$ un árbol lexicográfico, y sea P una propiedad. Dado $x \in A$, con $x = L \mid R$, suponga que se cumple $P(z)$, para todo $z \in L \cup R$. Entonces $P(x)$, para todo $x \in A$.*

Los resultados que restan de esta sección también serán útiles posteriormente. El teorema 8.1.5 es particularmente importante.

Lema 8.1.4 *Sea $(A, <, <_s)$ un árbol lexicográfico. Sean $x, z \in A$ tales que $x \neq z$. Entonces $x <_s z$ si y sólo si $L_{s(x)} < z < R_{s(x)}$.*

Demostración. La condición suficiente es la segunda parte del tercer inciso del teorema 8.1.2, así que sólo resta probar la condición necesaria. El caso $z <_s x$ no puede darse, debido a que x es el más simple entre $L_{s(x)}$ y $R_{s(x)}$. Si x y z no son $<_s$-comparables, entonces (dado que A es un árbol lexicográficamente ordenado), debe existir $y \in A$ más simple que x tal que $x < y < z$, o bien, $z < y < x$. Esto nos lleva a que $y < z$ y $y \in R_{s(x)}$, o bien, $z < y$ y $y \in L_{s(x)}$, pero ambos casos son imposibles, puesto que $L_{s(x)} < z < R_{s(x)}$. En consecuencia, se debe tener $x <_s z$. ■

Teorema 8.1.5 *Sean $(A, <, <_s)$ un árbol lexicográfico y $x \in A$. Sea (L, R) una cortadura de elementos de A. Supongamos que $L < x < R$. Entonces $x = L \mid R$ si y sólo si*

$$\{z \in A \mid L < z < R\} \subseteq \{z \in A \mid L_{s(x)} < z < R_{s(x)}\}.$$

Demostración.

$\Rightarrow$) Sea $z \in A$ tal que $L < z < R$. Como x es el más simple entre L y R, se tiene que $x <_s z$, de donde se sigue, por el lema anterior, que $L_{s(x)} < z < R_{s(x)}$.

$\Leftarrow$) Sea $z \in A$ tal que $L < z < R$; entonces $L_{s(x)} < z < R_{s(x)}$, por lo que $x \leq_s z$. Luego, x es el más simple tal que $L < x < R$, es decir, $x = L \mid R$. ■

Corolario 8.1.6 *Sean $\{x\}$, L y R subconjuntos de algún árbol binario lexicográficamente ordenado $(A, <, <_s)$, tales que $L < x < R$. Entonces $x = (L_{s(x)} \cup L) \mid (R_{s(x)} \cup R)$.*

Demostración. Claramente, $\{w \in A | \, L_{s(x)} \cup L < w < R_{s(x)} \cup R\} \subseteq \{w \in A | \, L_{s(x)} < w < R_{s(x)}\}$, y así, en virtud del teorema 8.1.5, se sigue el resultado. ■

Lema 8.1.7 *Sea $(A, <_s)$ un árbol binario. Sean $x, z \in A$, y sea $(x_\alpha)_{\alpha<\beta}$ una cadena de nodos de A, con $\beta \in \mathbf{Lim}$. Entonces:*

1) *z es sucesor inmediato de x si y sólo si $S(z) = S(x) \cup \{x\}$;*

2) *z es sucesor inmediato de $(x_\alpha)_{\alpha<\beta}$ si y sólo si $S(z) = \bigcup_{\alpha<\beta} S(x_\alpha)$.*

Demostración.

1) Dado que z es un sucesor inmediato de x, se tiene $x <_s z$, por lo que $S(x) \cup \{x\} \subseteq S(z)$. Para verificar la igualdad, suponga que la otra contención no se satisface. Sea entonces $y \in S(z)$ tal que $y \not\leq_s x$. Como $s(z)$ está bien ordenado por «$<_s$», se debe tener $x <_s y$. Como $y <_s z$, se sigue que $\rho(x) < \rho(y) < \rho(z)$; pero $\rho(z) = \rho(x) + 1$, teniendo por tanto que $\rho(x) < \rho(y) < \rho(x) + 1$, lo cual es imposible. Luego, $S(z) = S(x) \cup \{x\}$.

Recíprocamente, si $S(z) = S(x) \cup \{x\}$, entonces $x \in S(z)$, y por tanto, $x <_s z$. Por otro lado, es claro que el tipo de orden de $S(x) \cup \{x\}$ es $\rho(x) + 1$; así que $\tau(S(z)) = \tau(S(x) \cup \{x\}) = \rho(x) + 1$. Por lo tanto, z es sucesor inmediato de x.

2) Supongamos que z es sucesor inmediato de $(x_\alpha)_{\alpha<\beta}$. Entonces $x_\alpha <_s z$, para todo $\alpha < \beta$, lo que implica que $S(x_\alpha) \subseteq S(z)$. Luego, $\bigcup_{\alpha<\beta} S(x_\alpha) \subseteq S(z)$.

Por otro lado, sea $y \in S(z)$ tal que $y \notin S(x_\alpha)$, para cada $\alpha < \beta$. Como todos los conjuntos $S(x_\alpha)$ están bien ordenados, se debe tener $y \not<_s x_\alpha$, para todo $\alpha < \beta$ (no se puede dar la igualdad para ningún $\alpha < \beta$, debido a que $\beta \in \mathbf{Lim}$). Se sigue por tanto que $x_\alpha <_s y <_s z$, para todo $\alpha < \beta$, y entonces $\rho(x_\alpha) <_s \rho(y) <_s \rho(z)$, para cada $\alpha < \beta$, pero esto contradice la minimalidad de $\rho(z)$. Así las cosas, $S(z) = \bigcup_{\alpha<\beta} S(x_\alpha)$.

Recíprocamente, sea $\alpha < \beta$. Entonces $x_\alpha \in S(x_{\alpha+1})$. Como $\beta \in \mathbf{Lim}$, entonces $\alpha + 1 < \beta$, por lo que $S(x_{\alpha+1}) \subseteq S(z)$. Así que $x_\alpha \in S(z)$, y entonces $x_\alpha <_s z$. Por otro lado, es fácil ver que $\tau\left(\bigcup_{\alpha<\beta} S(x_\alpha)\right) = \sup_{\alpha<\beta} \rho(x_\alpha)$. Luego, el tipo de orden de $S(z)$ es $\sup_{\alpha<\beta} \rho(x_\alpha)$, el cual es, claramente, el mínimo ordinal por arriba de todos los rangos $\rho(x_\alpha)$. Así las cosas, z es sucesor inmediato de $(x_\alpha)_{\alpha<\beta}$. ■

Teorema 8.1.8 *Sea $(A, <, <_s)$ un árbol lexicográfico. Sean $x, z \in A$ y sea $(x_\alpha)_{\alpha<\beta} \subseteq A$ una cadena de longitud $\beta \in \mathbf{Lim}$. Entonces:*

1) *z es un sucesor inmediato de x si y sólo si $z = L_{s(x)} \cup \{x\} \mid R_{s(x)}$, o bien, $z = L_{s(x)} \mid \{x\} \cup R_{s(x)}$;*

2) *z es un sucesor inmediato de $(x_\alpha)_{\alpha<\beta}$ sii $z = \bigcup_{\alpha<\beta} L_{s(x_\alpha)} \mid \bigcup_{\alpha<\beta} R_{s(x_\alpha)}$.*

Demostración. Se sigue inmediatamente del lema, y del hecho que $S(a) = L_{s(a)} \cup R_{s(a)}$, para todo $a \in A$. ■

Terminología:

Si $z = L_{s(x)} \cup \{x\} \mid R_{s(x)}$, diremos que z es ***sucesor derecho*** de x; y si $z = L_{s(x)} \mid \{x\} \cup R_{s(x)}$, diremos que es ***sucesor izquierdo***.

8.2. Campos ordenados s-jerárquicos

Definición 8.4 Diremos que $(A, +, \cdot, <, <_s, 0, 1)$ es un ***campo ordenado s-jerárquico*** sii:

i) $(A, +, \cdot, <, 0, 1)$ es un campo ordenado;
ii) $(A, <, <_s)$ es un árbol binario lexicográficamente ordenado;
iii) para cualesquiera $x, z \in A$ se tiene:

$$x + z := \{x^L + z,\ x + z^L \mid x^R + z,\ x + z^R\}$$

iv) para cualesquiera $x, z \in A$:

$$xz := \left\{ \begin{matrix} x^L z + x z^L - x^L z^L, \\ x^R z + x z^R - x^R z^R \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} x^L z + x z^R - x^L z^R, \\ x^R z + x z^L - x^R z^L \end{matrix} \right\}$$

En lo sucesivo, nos referiremos a los campos ordenados s-jerárquicos simplemente como *campos s-jerárquicos.*

Observación 8.2.1

1) 0 *es el elemento más simple (así como la única raíz) de A, es decir,* $0 = \{\ \mid\ \}$.

2) *Para cada $x \in A$,* $-x = \{-x^R \mid -x^L\}$.

3) 1 *es el elemento positivo más simple de A, es decir,* $1 = \{0 \mid\ \}$.

4) $(\mathbf{No}, +, \cdot, <, <_s, 0, 1)$ *es un campo s-jerárquico.*

El siguiente concepto es crucial en la tarea de ver la universalidad de **No**.

Definición 8.5 Un subcampo B de un campo s-jerárquico A es llamado ***inicial*** sii B es un subárbol inicial de A.

Proposición 8.2.2 *Todo subcampo inicial de un campo s-jerárquico es, a su vez, s-jerárquico.*

Demostración. Sea $(A, <, <_s)$ un campo s-jerárquico, y sea B un subcampo inicial de A. Puesto que el inciso *i)* de la definición de campo s-jerárquico está dada por hipótesis, y *ii)* y *iii)* se cumple trivialmente, sólo resta ver que B es un árbol lexicográfico. Sabemos, de la hipótesis, que A lo es. Sea $g : A \to \mathbf{No}$ el encaje del que nos habla el inciso 2) del teorema 8.1.2. Debido a este mismo teorema, es suficiente ver que $g(B)$ es un subárbol inicial de **No**. Sean $z \in g(B)$ y $x \in \mathbf{No}$ tales que $x <_s z$. Claramente, $z \in g(A)$, ya que $g(B) \subseteq g(A)$. Debido a que $g(A)$ es subárbol inicial de **No**, se debe tener $x \in g(A)$. Luego, $x \in g(B)$, y, por lo tanto, $g(B)$ es un subárbol inicial de **No**. ■

La naturaleza de árbol binario nos brinda un principio de inducción distinta a la establecida en el corolario 8.1.3. La clave está en que cada elemento de todo árbol lexicográfico tiene sólo tres opciones: ser raíz, ser sucesor inmediato de otro elemento, o ser sucesor inmediato de una rama infinita. A esta inducción la llamaremos *inducción s-jerárquica.*

Lema 8.2.3 *Sea $(A, <_s)$ un árbol. Entonces, para cada nodo $a \in A$ tenemos una y sólo una de las siguientes:*

1) *a es la raíz del árbol.*

2) *a es sucesor inmediato de algún otro nodo x.*

3) *a es sucesor inmediato de alguna cadena $(x_\alpha)_{\alpha<\beta}$, con $\beta \in \mathbf{Lim}$.*

Demostración. Como $\rho(a) \in \mathbf{On}$, entonces tenemos una y sólo una de las siguientes opciones: $\rho(a) = 0$; $\rho(a) = \alpha + 1$, para algún $\alpha \in \mathbf{On}$; o bien, $\rho(a) \in \mathbf{Lim}$. Como ningún nivel de rango menor que $\rho(a)$ puede ser vacío, se puede ver claramente que, si a no es la raíz, entonces es, o bien sucesor de algún $x \in A$, o bien, sucesor de alguna cadena de nodos cuyos rangos son menores a $\rho(a)$. ■

Proposición 8.2.4 (Principio de inducción s-jerárquica) *Sea P una propiedad relativa a campos s-jerárquicos. Suponga que se cumplen las siguientes tres condiciones:*

i) $P(0)$;

ii) Si z es sucesor inmediato de x y $P(x)$, entonces $P(z)$;

iii) Si z es sucesor inmediato de $(x_\alpha)_{\alpha<\beta}$, con $\beta \in \mathbf{Lim}$, donde $P(x_\alpha)$, para todo $\alpha < \beta$, entonces $P(z)$.

Entonces $P(x)$, para todo $x \in A$.

Demostración. Si suponemos que no se cumple lo deseado, entonces el conjunto

$$X := \{\rho(x) |\, \text{no } P(x)\}$$

es no vacío. Tomemos entonces $z \in A$ tal que $\rho(z) = \min X$. Por la proposición 8.2.3, tenemos que: *a*) $z = 0$, *b*) z es sucesor inmediato de algún $x \in A$, o bien, *c*) z es sucesor inmediato de alguna cadena $(x_\alpha)_{\alpha<\beta}$, para algún $\beta \in \mathbf{Lim}$.

Se descarta *a*), pues z no satisface P. Si *b*), entonces $\rho(x) \notin X$, así que $P(x)$, de donde, por *ii*), se tiene $P(z)$, con lo que $z \notin X$, contradiciendo la elección de z; luego, *b*) tampoco puede ocurrir. De forma análoga se descarta *c*), y entonces X debe ser vacío. ■

8.3. La universalidad de los números surreales

Definición 8.6 Sea $f : A \to A'$ un mapeo entre árboles lexicográficos. Diremos que f es ***s-jerárquico*** sii para cada $x \in A$, $f(x) = f(L) \,|\, f(R)$, donde $x = L \,|\, R$. Es decir, los mapeos s-jerárquicos son aquellos que respetan las jerarquías de simplicidad. Si además A y A' son campos s-jerárquicos, diremos que f es un ***encaje s-jerárquico*** sii es un mapeo s-jerárquico y además es un encaje de campos ordenados s-jerárquicos.

Lema 8.3.1 *Sean $(A, <, <_s)$ y $(A', <'_s, <_{A'})$ árboles lexicográficos. Entonces, $f : A \to A'$ es un mapeo s-jerárquico sii:*

i) $f(x) <' f(z)$ siempre que $x < z$;

ii) $f(x) <'_s f(z)$ siempre que $x <_s z$; y

iii) $\rho(f(x)) = \rho(x)$.

Demostración. Asumamos que f es s-jerárquico. Vamos a demostrar que se cumplen los puntos $i)$, $ii)$ y $iii)$.

$i)$ Sean $x, z \in A$ tales que $x < z$. Por el corolario 8.1.6, $x = L_{s(x)} \mid R_{s(x)} \cup \{z\}$. Entonces $f(x) = f(L_{s(x)}) \mid f(R_{s(x)}) \cup \{f(z)\}$, puesto que f es s-jerárquico. De aquí ya es evidente que $f(x) <' f(z)$.

$ii)$ Sean $x, z \in A$ tales que $x <_s z$. Sin pérdida de generalidad, suponga que $x < z$. Tenemos entonces que $x \in L_{s(z)}$. Como f es un mapeo s-jerárquico, se tiene que $f(z) = f(L_{s(z)}) \mid f(R_{s(z)})$; como $f(x) \in f(L_{s(z)})$, entonces ya es claro que $f(x) <'_s f(z)$.

$iii)$ Sea $x \in A$. Dado que f es s-jerárquico, se tiene $f(x) = f(L_{s(x)}) \mid f(R_{s(x)})$, y además

$$f(L_{s(x)} \mid R_{s(x)} \cup \{x\}) = f(L_{s(x)}) \mid f(R_{s(x)}) \cup \{f(x)\},$$

es decir, f manda sucesores izquierdos en sucesores izquierdos. Análogamente se puede ver que f también manda sucesores derechos en sucesores derechos, y sucesores de cadenas en sucesores de cadenas. Esto es suficiente para probar, vía inducción s-jerárquica, que f respeta rangos.

Recíprocamente, asumiendo los puntos $i)$, $ii)$ y $iii)$, probaremos que el mapeo f es s-jerárquico. Por $i)$, tenemos que $f(L_{s(x)}) <' f(x) <' f(R_{s(x)})$. Por $ii)$, $S(f(x)) \subseteq f(L_{s(x)}) \cup f(R_{s(x)})$, y por $iii)$ tenemos la contención inversa; y, así, todo elemento de A' más simple que $f(x)$ está en $f(L_{s(x)})$ o bien en $f(R_{s(x)})$, y viceversa. De este modo, $f(x) = f(L_{s(x)}) \mid f(R_{s(x)})$. Así las cosas, f es un mapeo s-jerárquico. ■

Lema 8.3.2 *Cada mapeo s-jerárquico entre campos s-jerárquicos es un encaje s-jerárquico.*

Demostración. Sea $f : A \to B$ un mapeo s-jerárquico. El hecho de que f respeta el orden, se sigue del lema 8.3.1; así que sólo resta probar que f es un encaje de campos, lo cual se logrará aplicando inducción lexicográfica.

Sean $x, z \in A$. Demostraremos que $f(x + z) = f(x) + f(z)$. La hipótesis inductiva nos dice que $f(x' + z) = f(x') + f(z)$ y $f(x + z') = f(x) + f(z')$, para $x' \in S(x)$ y $z' \in S(z)$. Por otro lado, $i)$ y $ii)$ del lema 8.3.1 implican que $f(x^L) = (f(x))^L$ y $f(x^R) = (f(x))^R$.

De estos hechos, de la hipótesis de inducción, y puesto que f es un mapeo s-jerárquico, tenemos que:

$$\begin{aligned}
f(x+z) &= f(\{x^L \mid x^R\} + \{z^L \mid z^R\}) \\
&= f(\{x^L + z,\, x + z^L \mid x^R + z,\, x + z^R\}) \\
&= f(\{x^L + z,\, x + z^L\}) \mid f(\{x^R + z,\, x + z^R\}) \\
&= \{f(x^L + z),\, f(x + z^L) \mid f(x^R + z),\, f(x + z^R)\} \\
&= \{f(x^L) + f(z),\, f(x) + f(z^L) \mid f(x^R) + f(z),\, f(x) + f(z^R)\} \\
&= \{f(x)^L + f(z),\, f(x) + f(z)^L \mid f(x)^R + f(z),\, f(x) + f(z)^R\} \\
&= f(x) + f(z)
\end{aligned}$$

De la misma forma y por las mismas razones se ve que $f(xz) = f(x)f(z)$, con lo que se concluye que f es un morfismo de campos, el cual claramente es inyectivo, puesto que respeta el orden total entre los campos s-jerárquicos. Por lo tanto, f es un encaje de campos. ■

Lema 8.3.3 *Si $f, g : A \to A'$ son mapeos s-jerárquicos, entonces $f = g$.*

Demostración. Sea $x = L \,|\, R \in A$. Como f y g son mapeos s-jerárquicos, tenemos que $f(x) = f(L) \,|\, f(R)$ y $g = f(L) \,|\, f(R)$. Por hipótesis de inducción lexicográfica, sabemos que $f(y) = g(y)$, para todo $y \in L \cup R$. De aquí es fácil ve que $f(L) = g(L)$ y $f(R) = g(R)$. Por ejemplo, si $z \in f(L)$, existe $w \in L$ tal que $f(w) = z$; luego, $z = g(w)$ (pues $w \in L$), y entonces $w \in g(L)$. Así, $f(L) \subseteq g(L)$, y las demás contenciones se obtienen de la misma manera.

Por lo tanto, $f(x) = g(x)$, para cada $x \in A$. ■

Lema 8.3.4 *Sea $f : A \to A'$ un mapeo s-jerárquico. Entonces, $f(A)$ es un subárbol inicial de A'.*

Demostración. Sea $z \in f(A)$. El objetivo es verificar que $S_{A'}(z) \subseteq S_{f(A)}(z)$. Sea entonces $y \in A'$ tal que $y <'_s z$, y sea $\alpha = \rho(y)$. Como $z \in f(A)$, debe existir $x \in A$ tal que $f(x) = z$. Tenemos, por lema 8.3.1, que $\rho(z) = \rho(x)$; luego, $\alpha < \rho(x)$. Ahora, notemos que cada rama intersecta a cada nivel del árbol en un único nodo (evidentemente, hasta donde lo permita la longitud de la rama), por lo que se puede tomar el nodo w de rango α que intersecta con la rama $S_A(x)$.

Por el lema 8.3.1, sabemos que $\rho(f(w)) = \rho(w) = \alpha$. Puesto que $S_{A'}(z)$ puede tener solamente un nodo de rango α, podemos inferir que $f(w) = y$. Por lo tanto, $y \in A$ y en consecuencia, como $y <'_s z$, se sigue que $y \in S_{f(A)}(z)$. Así las cosas, $S_{A'}(z) \subseteq S_{f(A)}(z)$, para cada $z \in f(A)$, lo que indica que $f(A)$ es un subárbol inicial de A'. ■

Definición 8.7 Un árbol lexicográfico es ***completo*** sii para cada corte (L, R) de elementos de A existe $x \in A$ tal que $x = L \,|\, R$.

Observación: $(\mathbf{No}, <, <_s, +, -, \cdot)$ es un campo s-jerárquico completo.

Definición 8.8 Un campo s-jerárquico A se dirá que es ***universal*** sii para cualquier campo s-jerárquico B, existe un único encaje s-jerárquico $f : B \to A$.

Proposición 8.3.5 *Un campo s-jerárquico A es universal sii para cualquier campo s-jerárquico B, existe un mapeo s-jerárquico $f : B \to A$.*

Demostración. En virtud del lema 8.3.2, todo mapeo s-jerárquico de B en A es un encaje s-jerárquico, y, por 8.3.3, es único. ■

Definición 8.9 Un campo s-jerárquico A se llamará ***maximal*** sii no hay ningún otro campo s-jerárquico que lo contenga propiamente como subcampo inicial.

Proposición 8.3.6 *Sea $f : A \to B$ un encaje s-jerárquico. Entonces $f(A)$ es maximal siempre que A lo sea.*

Demostración. Se sigue inmediatamente del lema 8.3.4. ■

Ahora sí, estamos ante el resultado-objetivo:

Teorema 8.3.7 *Sea A un campo s-jerárquico. Las siguientes son equivalentes:*

1) *A es completo;*

2) *A es universal;*

3) *A es maximal;*

4) *A es isomorfo a* **No***, como campos s-jerárquicos.*

Demostración.
1) $\Rightarrow$ 2)

Sea B un campo s-jerárquico. Vamos a definir recursivamente un mapeo $f : B \to A$ de la siguiente manera:

Para $b \in B$ definimos:

i) $f(b) = 0$, si $b = 0$.

ii) $f(b) = f(L_{s(x)}) \cup \{f(x)\}, | \, f(R_{s(x)})$, si b es sucesor inmediato derecho de x.

iii) $f(b) = f(L_{s(x)}) \, | \, f(R_{s(x)}) \cup \{f(x)\}$, si b es sucesor inmediato izquierdo de x.

iv) $f(b) = \bigcup\limits_{\alpha<\beta} f(L_{s(x_\alpha)}) \, | \, \bigcup\limits_{\alpha<\beta} f(R_{s(x_\alpha)})$, si b es sucesor inmediato de la cadena $(x_\alpha)_{\alpha<\beta}$.

Puesto que A es completo, el mapeo f está bien definido, el cual, claramente, es s-jerárquico; así que, en virtud de la proposición 8.3.5, dado que B es un campo s-jerárquico arbitrario, tenemos que A es universal.

2) $\Rightarrow$ 3)

Sea B un campo s-jerárquico tal que $A \subseteq B$. Dado que A es universal, debe existir un encaje s-jerárquico $f : B \to A$. Obviamente, $f\restriction_A : A \to A$ también es s-jerárquico, así que, por lema 8.3.3, $f\restriction_A = id_A$, ya que la identidad evidentemente es s-jerárquica. Así, si existe $b \in B - A$, debemos tener que $f(f(b)) = f(b)$, ya que $f(b) \in A$. De este modo tenemos que $f(b)$ y b son elementos de B distintos que tienen la misma imagen bajo f; luego, f no es inyectiva, lo cual es una contradicción, ya que f respeta el orden total. Con esto se tiene $A = B$ y, por lo tanto, A es maximal.

3) $\Rightarrow$ 4)

Puesto que **No** es completo, también es universal (por 1) $\Rightarrow$ 2)); luego, existe un encaje s-jerárquico $f : A \to$ **No**. Esto claramente implica que $f(A)$ es un subcampo de **No**. El lema 8.3.4 nos garantiza que $f(A)$ es un subcampo inicial de **No**, así que, por la proposición 8.2.2, es también un campo s-jerárquico. Como A es maximal, gracias a la proposición 8.3.6 (proposición anterior), sabemos que $f(A)$ también lo es, lo que implica que $f(A) =$ **No**. De este modo, f es un isomorfismo s-jerárquico, y así, A y **No** son campos s-jerárquicos isomorfos.

4) $\Rightarrow$ 1)

Tenemos un isomorfismo s-jerárquico $f :$ **No** $\to A$, el cual, aunado al hecho de que **No** es completo, nos servirá para demostrar que A también lo es. Sea entonces (L, R) una cortadura de elementos de A. Como **No** es completo, es claro que existe $x \in$ **No** tal que $x = f^{-1}(L) \, | \, f^{-1}(R)$; y puesto que f es s-jerárquico, se tiene que

$$f(x) = f(f^{-1}(L)) \, | \, f(f^{-1}(R)) = L \, | \, R.$$

Como $f(x) \in A$ y (L, R) es arbitraria, se sigue que A es completo. ■

Por fin, se ha demostrado que **No** es el único campo universal, salvo isomorfismos. Esto es ya evidente, por la equivalencia entre 2) y 4).

Epílogo

Nuestro recorrido por el mágico mundo de los números surreales ha llegado a su fin, como todo lo que alguna vez comienza. Queda ahora hacer un breve recuento de los hechos y verificar si se han cumplido los objetivos primigenios, aquellos tres planteados en el prólogo; así mismo, vamos a incorporar algunas anotaciones finales.

La construcción de los números surreales y los problemas subyacentes a su formalización

El primer punto a tratar ha sido, inevitablemente, el asunto de la construcción. En un primer acercamiento a los números surreales, su presentación puede parecer un poco artificiosa, sobre todo el hecho de que la igualdad entre surreales se introduce como una definición. Es lógico que el autor de la respectiva obra que se esté estudiando dedique unos cuantos párrafos a explicar dichos artificios. Así lo hicieron tanto Conway [1] como Knuth [5] en su debido momento.

No obstante, una vez que se va avanzando en el estudio de los surreales, los comportamientos básicos se van perfilando, como debe ocurrir en cualquier estudio, y llega entonces la ocasión en que nos damos cuenta de que los surreales son una especie de cortaduras, conformadas de conjuntos que conglomeran, a su vez, números surreales. Este hecho revela que estamos ante un proceso recursivo. Y, en efecto, los números surreales se pueden adquirir incorporando dos procesos de construcción bastantes conocidos: tomando cortaduras de Dedekind (con sus debidas modificaciones) y enmarcándolo todo dentro de un proceso recursivo de naturaleza ordinal. A este combo le hemos llamado *método Conway*, y es la vía que optamos para presentar a los números surreales.

Esta vía de construcción, más o menos informal, trae consigo claras ventajas. La principal es que los números quedan delimitados concisamente, y no tenemos la necesidad de enfrentar anomalías como la mencionada en torno a la introducción de la igualdad entre números. Otra, no menos importante, es la naturalidad con que se presenta el proceso constructivo: muy conveniente es darse cuenta de que esta nueva construcción es una mera simbiosis entre dos construcciones bastantes muy conocidas —las más típicas, de hecho—, lo que nos permite arribar al mundillo de los surreales con más confianza de la que podría suponer el estudio de un nuevo tema.

En su contraparte, tenemos una molesta desventaja, la cual también ha sido mencionada en los primeros capítulos de esta tesis. El hecho es que las cortaduras que definen números se van haciendo extremadamente complejas a medida que avanzamos en el proceso recursivo, de modo que sería imposible trabajar con ellas una vez que alcancemos niveles de construcción suficientemente altos.

La solución a este dilema ha sido simplificar las cortaduras tanto como sea conveniente, de tal modo que su manipulación deje de causarnos problemas. Como suele ocurrir (a veces paradójicamente), esta solución nos representa un nuevo problema: sucede que, si ponemos en juego a todos los cortes posibles —y no sólo a los originales que son auténticos números—, habrá muchas afirmaciones acerca de cortes que no podamos atribuir exclusivamente a números surreales. Estas afirmaciones son, como ya se mencionó, las de cuantificación existencial.

Como hemos hecho notar (en el capítulo 4), esta desventaja es crucial, pues con ella ya no es posible establecer varias caraterísticas de **No**, por ejemplo, que goza de estructura de campo ordenado. Y eso sería sólo el comienzo.

Clases de equivalencia

Este asunto de «simplificar» es una maniobra que considera, en el fondo, que los cortes obtenidos siguen siendo el mismo objeto. De este modo, un número surreal y todas sus simplificaciones serán esencialmente iguales, de acuerdo a los criterios que nos haya aportado tal mecanismo de simplificación. Trabajar con esto en mente es bastante cómodo y agradable, pero inevitablemente peligroso: necesitamos formalizar lo que entendemos por la parte «esencialmente iguales», lo que nos deja en una posición análoga a la de Conway y Knuth, cuando debían explicar las aparentes anomalías de sus definiciones.

Este problema lo hemos confrontado en el cuarto capítulo, concretamente, en las secciones 4.3 y 4.4. Lo primero que ahí se ha planteado, es aglutinar en clases de equivalencia a todos los cortes mediante el criterio de «ser *esencialmente iguales*», criterio que es fácil de establecer a partir de la relación de orden entre cortes, de la cual también se ha hablado en el mismo capítulo (segunda sección).

Conjuntos bien fundados

Luego, se ha visto que las clases de equivalencia realmente no resultan ser de mucha utilidad, puesto que son clases propias. Sin embargo, esto no significa que ahí hayan muerto todas nuestras expectativas, ya que podemos dar un giro a la historia, y la idea es *desinflar* esas clases absurdamente hinchadas, hasta que se conviertan en modestos y genuinos conjuntos. La manera de hacerlo es poner un «tope» mediante el rango de los conjuntos bien fundados. Como se ha explicado (cuarta sección del cuarto capítulo), lo que se logra es delimitar a cada clase de equivalencia como un subconjunto de algún conjunto bien fundado P_α.

Y luego de todos estos ajustes, un número surreal queda definido como una clase de equivalencia, módulo la relación "ser esencialemente iguales". De este modo, conseguimos que cada surreal y todas sus simplificaciones sean, en esencia, el mismo objeto.

Las Reglas de Conway

Podríamos también adoptar la postura de Conway, considerando como auténticos números a todas aquellas cortaduras que resultan de las simplificaciones. Con esto, llegaremos a la misma situación de tener que definir la igualdad entre números: nos quedaría ahora la tarea de explicar en qué consiste tal «definición». Este camino se describe en la última sección del capítulo 4, donde se introducen las reglas de Conway al modo de D. Knuth, aunque agregando una extra, que no es otra cosa que esta definición de igualdad entre números surreales.

Lo que subyace aquí, es que no estamos tratando con una definición como tal (por eso el entrecomillado), sino de un axioma, del mismo modo que ocurre a la hora de introducir la definición de igualdad entre conjuntos, típico en cualquier curso elemental de Álgebra o Cálculo. Como hemos apuntado, lo que ocurre al adoptar esta postura, es que se está modificando la teoría, ampliándola, al ser más permisibles con el axioma de extensionalidad. Esto podría resultar ventajoso o contraproducente, dependiendo de los resultados que de ello emanen.

Expansiones binarias

Otra manera de evitar estas inconsistencias (que cortaduras que no son números se comporten como tal), y de evitar las dos alternativas ya mencionadas, es proceder como se hizo en el capítulo 7, donde se ha introducido el árbol canónico, denotado por **B**. Definiendo a los números surreales como los elementos de esta clase, **B**, bastaría desarrollar los resultados del capítulo 7 para dotarlo de estructura de orden lineal, y de aquí conducir la teoría hacia la obtención de las propiedades de campo ordenado, siguiendo los mismos pasos que en el capítulo 5. Lo único que se necesitaría es recuperar el concepto de simplicidad, lo cual es una tarea sencilla si nos basamos en los primeros capítulos de este trabajo.

Este tratamiento también lo da Harry Gonshor en [3], por supuesto mucho más logrado que el que damos aquí. El lector interesado bien puede hacerle una consulta o estudiarlo a fondo.

Dos facetas importantes de los números surreales

Dos de los objetivos planteados al inicio, en el prólogo, consistían en justificar el título de la tesis: había que ver que, efectivamente, los números surreales unifican a todos los números —entendiendo con ello, a todo sistema numérico de interés—, y generalizan al continuo lineal, que concebimos tal como se ha venido haciendo desde la época del rigor de las matemáticas. El reto era garantizar que cualquier modelo razonable del continuo lineal queda inmerso, de forma única, en la clase de los números surreales.

Todos los números: los grandes y los pequeños

Hemos visto que la clase de los surreales es capaz de acaparar a los tres sistemas numéricos principales de la matemática moderna, que son: los reales, los ordinales y los infinitesimales. Con esto podemos estar satisfechos de que hemos incluido a todos los números, desde los más pequeños (infinitesimales e infinitamente cercanos a números reales) hasta los más grandes (ordinales infinitos), pasando por los «normales», es decir, los reales. La clase de los surreales es, pues, fiel recolectora y representante de las tres escalas de importancia en el terreno de las matemáticas: las cantidades finitas, las infinitamente grandes y las infinitamente pequeñas.

El continuo lineal absoluto

Y aún podemos decir más acerca del potencial de los números surreales: cualquier recta numérica que pueda ser razonablemente tomada como modelo del continuo lineal, queda inmersa en **No** de una forma especial.

En el último capítulo hemos delimitado qué tipo de estructuras son las que deben considerarse candidatos apropiados para modelar al continuo. A este tipo de estructuras les hemos llamado «campos s-jerárquicos», y hemos visto la manera en que cualquiera de ellos se incrusta en **No** de manera única como una subestructura s-jeráquica.

En conclusión, si cualquier modelo razonable del continuo lineal puede ser identificado como un campo s-jerárquico, y todo campo jerárquico se encaja isomórficamente en la clase de los surreales, entonces ya podemos decir que nuestro sistema numérico **No** es realmente la generalización definitiva del continuo lineal.

Impacto del estudio de los números surreales

Los números surreales constituyen un universo matemático de grandes posibilidades, pero aún no ha sido investigado con profundidad. Los principales avances que se han logrado están enmarcados dentro de las pautas de estudio propuestas por J. H. Conway en su libro *On Numbers and Games* [1], en donde establece las bases para enarbolar todo un bagaje de estudio en disciplinas tan importantes como el análisis, álgebra y teoría de números, pero ahora con el sistema de los surreales como principal objeto de estudio.

El devenir de los números surreales, aunque prometedor, aún es incierto. Posiblemente estemos ante una nueva hegemonía matemática, o simplemente hayamos topado con una curiosidad más, sin ninguna repercusión importante. Sólo nos queda esperar que el futuro le haga justicia, o, todo lo contrario, le condene para siempre en el olvido.

Bibliografía

[1] Conway, John H.; *On Numbers and Games*, Academic Press, Londres, 1976.

[2] Ehrlich, Philip; *Number Systems With Simplicity Hierarchies: A Generalization Of Conway's Theory Of Surreal Numbers*, The Journal Of Symbolic Logic, Volume 66, Number 3, Sept. 2001.

[3] Gonshor, Harry; *An Introduction to the Theory of Surreal Numbers*, London Mathematical Society Lecture Note Series, Cambrige University Press, Nueva York, 1986.

[4] Hernández Hernández, Fernando; *Teoría de Conjuntos, Una Introducción*, Aportaciones Matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana, D.F., 2003.

[5] Knuth, Donald E.; *Surreal Numbers*, Addison Wesley, Estados Unidos, 1974.

[6] Lang, Serge; *Algebra*, Third edition, Springer, New York, 2002.