



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**Problema de ruteo de
vehículos aplicado a una
empresa de mensajería y
paquetería**

TESIS

Que para obtener el título de
Ingeniero Industrial

P R E S E N T A

Luis Enrique Zamorano Bear

DIRECTOR DE TESIS

M.I Ricardo Torres Mendoza



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2019



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	4
Antecedentes	4
Planteamiento del Problema.....	4
OBJETIVO.....	5
METODOLOGÍA.....	5
CONTENIDO	6
CAPITULO 1 REVISIÓN DE LITERATURA PARA EL PROBLEMA DE RUTEO DE VEHÍCULOS.....	7
Problema de ruteo de vehículos y sus componentes.....	7
Variantes del Problema de ruteo de vehículos	9
Problema clásico de ruteo de vehículos (Classical VRP)	10
Problema de ruteo de vehículos con restricción de ventanas de tiempo (<i>Vehicle Routing Problem with Time Windows, VRPTW</i>).....	11
Problema de ruteo de vehículos con clientes de entrega y recolecciones con relación de precedencia (<i>VRPB, Vehicle Routing Problem with Backhauls</i>).....	12
Problema de ruteo de vehículos con demanda estocástica (<i>VRPSD, Vehicle Routing Problem with Stochastic Demand</i>).....	13
Problema de ruteo de vehículos con tamaño de flota definido, flota heterogénea y con regresos backhauls. (<i>FSMVRPB, Fleet Size and Mix Vehicle Routing Problem with Bakchauls</i>).....	13
Métodos de solución del Problema de ruteo de vehículos.....	14
Métodos exactos	15
Metaheurísticas	18
CAPÍTULO 2 DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA Y SUS COMPONENTES.....	20
Indicadores de gestión	20
Descripción del sistema	21
Estudio de caso: Problema de ruteo de vehículos aplicado a una empresa de mensajería y paquetería	26
Formulación del algoritmo para FSMVRPB	26
CAPÍTULO 3 FORMULACIÓN EN LINGO	35
CAPÍTULO 4 ANÁLISIS DE RESULTADOS	41

CONCLUSIONES E INVESTIGACIONES FUTURAS	46
LISTA DE TABLAS Y FIGURAS.....	47
REFERENCIAS	48

INTRODUCCIÓN

Antecedentes

La nueva tendencia del comercio electrónico (e commerce) durante los últimos años ha obligado al sector logística a innovar en los métodos de entrega, cumpliendo con la demanda y requisitos de los clientes. Mediante estudios realizados por el Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI, 2017) se observó un crecimiento de usuarios que han realizado, al menos una transacción electrónica durante el año 2015 al 2016, pasando del 12.8% al 14.7% respectivamente.

La logística trabaja continuamente en la innovación y generación de soluciones para poder hacer frente al rápido y exponencial crecimiento del comercio electrónico que día a día se va presentando, apuntando a tener un mejor aprovechamiento de recursos e innovación para al servicio al cliente.

La Procuraduría Federal del Consumidor (PROFECO, 2013), define el servicio completo de mensajería y paquetería como "...la recolección, traslado, rastreo, reparto, seguimiento y entrega en tiempos predeterminados de paquetes de manera expedita, y se caracteriza por brindar velocidad, seguridad y especialización de los servicios, entre otras cosas..."

A partir de esta definición, se plantean los siguientes tipos de servicio que ofrecen las empresas en México, basándose en su tiempo de entrega; siendo 4 los principales:

1. Día siguiente con horario garantizado (7:30 am, 8:30 am, 11:00 am, etc.).
2. Al día siguiente en cualquier momento del día.
3. Día determinado (2 días, 4 días, etc.).
4. Reexpediciones (una vez por semana o cada quince días, según el destino).

Debido a la exigencia de los consumidores de los servicios garantizados (horario y al día siguiente), las empresas están obligadas a utilizar medios de transporte aéreos debido la velocidad y tiempos de tránsito que se pueden aprovechar mediante este medio.

Planteamiento del Problema

Los costos de distribución mediante el uso de transporte aéreo son los más elevados con respecto a otros modos de transporte, tales como ferrocarril, terrestre, marítimo, etc.

En la empresa de mensajería y paquetería donde se realizó el proyecto, establece su red de manera empírica, es decir, la forma en la que resuelven incrementos de demanda es aumentando la capacidad de la aeronave, o bien, cambiando las rutas previamente establecidas para generar nuevas rutas con mayor capacidad.

OBJETIVO

Modelar la red aérea de una empresa de mensajería y paquetería y minimizar el indicador costo por kilo, considerando ciertas restricciones operativas, tales como: flota heterogénea y limitada y cumplimiento de la demanda conocida tanto de entregas como de recolecciones para los clientes.

METODOLOGÍA

Debido a la necesidad por parte de la empresa de tener un modelo que permita obtener una estructura aérea óptima, se comenzó estudiando y caracterizando la red aérea de transporte aéreo de la empresa, conociendo la operación en el centro de distribución donde se lleva a cabo el procesamiento de paquetes.

Posteriormente se realizó la revisión de literatura, donde el primer tema encontrado fue el problema del agente viajero (*Travelling Salesman Problem*) el cual describe un sistema donde se define un conjunto de ciudades y distancias entre cada una de ellas, siendo el objetivo encontrar el mejor camino posible de un vendedor para visitar a cada una de las ciudades. Siguiendo con la revisión, se encontró una variación de este problema, problema de ruteo de vehículos (*Vehicle Routing Problem*), el cual es el tipo de problema que describe de mejor forma el problema planteado.

Dentro de la literatura para el problema de ruteo de vehículos, se encontraron diferentes variantes del mismo con el fin de describir diferentes comportamientos de sistemas. Considerando las características del sistema estudiado, se encontraron dos variantes que podrían ser aplicables al sistema, *Vehicle Routing Problem with Pick up and Deliveries* y *Vehicle Routing Problem with Backhauls*, ambos consideran entregas y recolecciones, donde la principal diferencia radica en que para *Vehicle Routing Problem with Backhauls* las entregas se realizan forzosamente antes que las recolecciones, siendo ésta la variante que describe de mejor forma al sistema.

Una vez definido la variante del *Vehicle Routing Problem*, se realizó la programación en el software Lingo, proporcionado por la empresa. Dentro del software, se modeló el problema planteado por (Salhi et al, 2013).

Posteriormente, después de obtener los resultados del modelo, se hace un análisis sobre la solución empírica y la solución del *Vehicle Routing Problem* identificando las mejoras y/o desventajas de ambas soluciones. Al finalizar el análisis de resultados, se realizan algunas conclusiones y recomendaciones, indicando la investigación futura para el sistema estudiado.

CONTENIDO

El presente trabajo consta de cuatro capítulos. En el primero se abordará la revisión de literatura para el problema de ruteo de vehículos (VRP por sus siglas en inglés), algunas variantes del problema así como los métodos de solución, (Branch and Bound), heurísticos (Clark & Wright savings) y metaheurísticos (Búsqueda Tabú).

En el segundo capítulo se abordará la descripción del problema a estudiar, cuáles son sus componentes y el proceso que utiliza actualmente la empresa para poder reestructurar la red aérea doméstica. También se abordará la importancia de los indicadores de gestión dentro de las compañías, enfocándose principalmente en los indicadores relacionados a la distribución y transporte.

En el siguiente capítulo se realiza un análisis de resultados obtenidos del modelo y de la solución empírica con los que actualmente la empresa opera; se realiza una comparación de los resultados y se encuentra el beneficio al utilizar el modelo.

Por último, en el cuarto capítulo se realizan las conclusiones relacionadas al modelo aplicado y, por ser una aplicación real a la industria, se mencionan los futuros estudios.

CAPITULO 1 REVISIÓN DE LITERATURA PARA EL PROBLEMA DE RUTEO DE VEHÍCULOS

Problema de ruteo de vehículos y sus componentes

El origen del problema de ruteo de vehículos es derivado del problema del problema del agente viajero (*Travelling Salesman Problem*) donde el objetivo es encontrar la ruta óptima por la cual un solo vendedor deberá hacer su recorrido de ventas, visitando a cada uno de los clientes y regresar al mismo punto de partida (Toth y Vigo, 1999).

Más adelante se comenzó a estudiar una variante de este problema, la cual consiste en que múltiples agentes viajeros visitan a todos los clientes, de manera que se reparten al conjunto de clientes. Es aquí donde se comenzó a estudiar y desarrollar por primera vez el problema de ruteo de vehículos.

El problema de ruteo de vehículos fue estudiado por primera vez por Dantzig y Ramser durante la década de los 50's, teniendo un primer acercamiento a un problema de distribución de gasolina desde una central hacia diferentes estaciones, utilizando programación y algoritmos matemáticos para resolverlo. (Caric, et al., 2008).

G. Laporte (2007) define el problema de ruteo de vehículos como el diseño de conjunto de rutas, de entrega o recolección, las cuales inician y finalizan en un centro de distribución, recorriendo otros puntos a la redonda definidos como nodos clientes.

El problema de ruteo de vehículos consiste en determinar un conjunto óptimo de rutas definidas por una flota de vehículos, basado en uno o más centros de distribución, cumpliendo con la demanda de los clientes sin superar la capacidad de los vehículos. Existen otros requerimientos y restricciones operativas al momento de realizar el ruteo del problema, tales como: el servicio pueda incluir entregas y recolecciones, la demanda de los clientes es restringida por la capacidad de los vehículos, la distancia recorrida por los vehículos puede estar limitada, el servicio a los clientes puede estar sujeto a ventanas de tiempo definidas, la flota de vehículos puede ser heterogénea (vehículos con diferentes características), la relación de precedencia entre clientes, entre otros. (Toth y Vigo, 1999).

Los costos de transportación para una empresa que requiera manejar alguna operación de distribución se pueden mejorar reduciendo la distancia total recorrida y reduciendo la flota requerida para cubrir lo que la operación requiera, siendo este el principal objetivo del problema de ruteo de vehículos.

Dentro del problema, se definen tres conceptos vitales para el desarrollo y descripción del sistema. Los pilares son los siguientes:

- Centro de Distribución

Instalación donde se aceptan los bienes (paquetes), se sortean y se distribuyen a diferentes nodos clientes.

- Nodos clientes

Los nodos clientes son aquellos que se encuentran a una distancia y/o tiempo definido desde o hacia el Centro de Distribución. También está definida la distancia y/o tiempo entre nodos clientes.

- Vehículos

Son aquellos medios de transporte en los que partirán del Centro de Distribución (o nodos clientes) para completar la demanda de los clientes.

En la **Error! Reference source not found.** se muestra una idealización de un sistema aplicable a VRP:

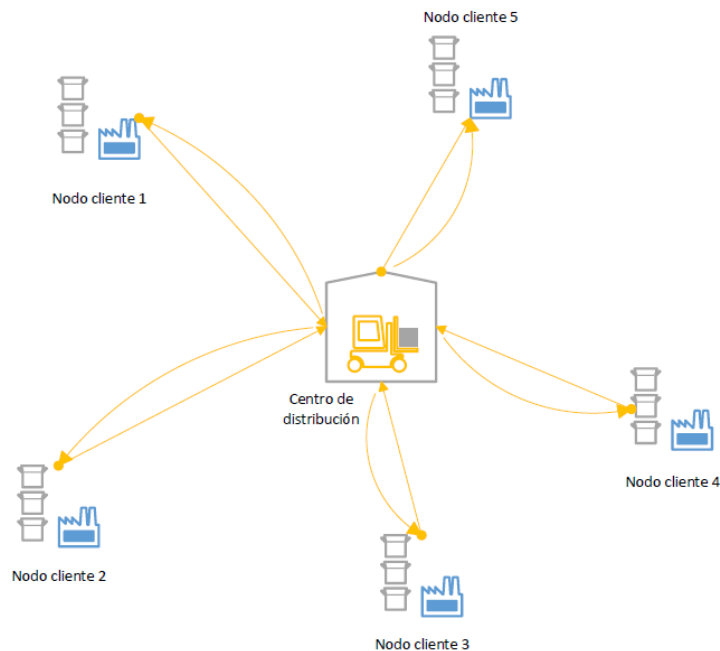


Ilustración 1 Diagrama Vehicle Routing Problem (Fuente: Propia elaboración)

Variantes del Problema de ruteo de vehículos

El problema puede estar sujeto a diferentes restricciones operativas tales como: capacidad del vehículo, longitud de la ruta, ventanas de tiempo, relación de precedencia entre clientes, entre otras (Toth y Vigo, 1999).

A continuación, en la **Error! Reference source not found.** se enlista algunas de las variantes del problema de ruteo de vehículos.

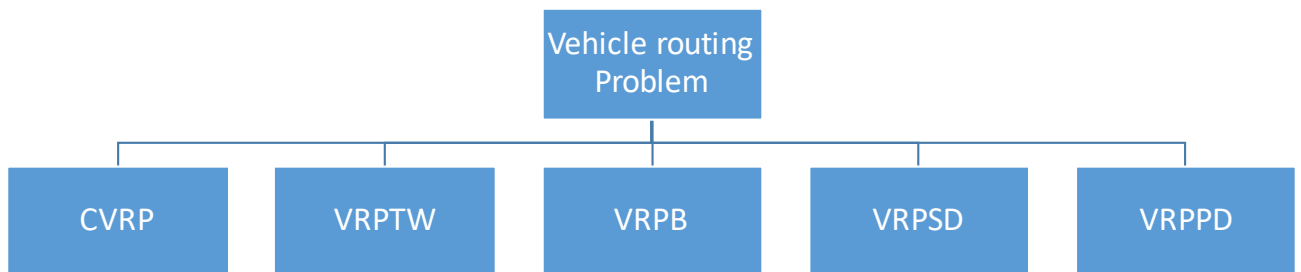


Ilustración 2 Variantes de Vehicle Routing Problem (Fuente: Elaboración propia)

- A. **CVRP, Capacitated VRP (Problema clásico de ruteo de vehículos):** La carga en los vehículos no debe exceder la capacidad de estos
- B. **VRPTW, VRP with Time Windows:** Restricciones de ventanas de tiempo
- C. **VRPB, VRB with Backhauls:** Restricciones de entregas entre los clientes y recolecciones con precedencia.
- D. **VRPSD, VRP with Stochastic Demand:** Demanda incierta de los clientes
- E. **VRPPD, VRP with Pickup and Delivery:** Restricciones de entrega y recolecciones realizadas por un solo vehículo

Problema clásico de ruteo de vehículos (Classical VRP)

G. Laporte (2007) dice que, debido al gran campo de variantes del VRP, no existe una definición universalmente aceptada para el problema de ruteo de vehículos, hablando de los problemas de optimización combinatoria. Los esfuerzos de estudios para el problema de ruteo de vehículos se enfocan a una versión estandarizada del problema, denominada "Clásico VRP" (también llamado *Capacitated Vehicle Routing Problem* en inglés), el cual ha servido como base para desarrollar diferentes algoritmos, aplicados a los modelos más complicados del VRP.

(G. Laporte, 2007) Bajo este entendido, el clásico VRP se define como un grafo $G = (V, A)$ donde los conjuntos V, A se definen como:

- $V = \{0, 1, \dots, n\}$ conjunto de puntos (clientes)
- Conjunto de arcos entre los puntos $A = \{(i, j) : i, j \in V, i \neq j\}$

El punto 0 del conjunto V , representa al centro de distribución, donde están centralizados un número m de rutas con vehículos con capacidades idénticas Q . Cada cliente i, j del conjunto V cuenta con demanda conocida no negativa q_k , donde $q_k \leq Q$. Para el conjunto A se define una matriz simétrica de costo c_{ij} , donde: $c_{ij} = c_{ji}$

El problema clásico de VRP consiste en determinar un conjunto m de rutas bajo las siguientes condiciones:

1. Las rutas deberán comenzar y terminar en el centro de distribución
2. Cada cliente deberá ser visitado exactamente una vez
3. La demanda total de cada ruta no debe exceder a la capacidad Q
4. El costo total de las rutas deberá ser minimizado

En la **Error! Reference source not found.** se muestra un ejemplo de resolución de un VRP clásico, donde se muestran 14 nodos clientes (círculos negros), con su respectiva demanda. Las rutas óptimas son los diferentes tipos de línea que muestran la conexión entre los clientes y el centro de distribución, utilizando 4 rutas con capacidad de 10 unidades por cada vehículo.

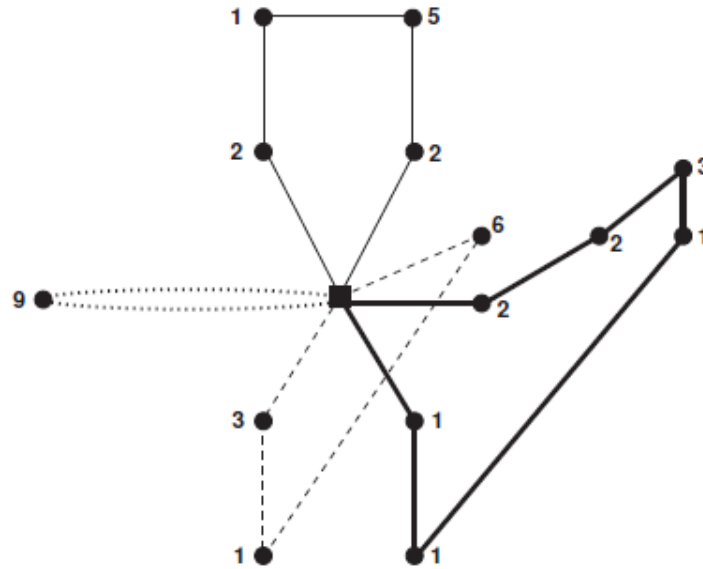


Ilustración 3 Ejemplo de Vehicle Routing Problem

Fuente: "What you should know about VRP, Gilbert Laporte 2007"

Problema de ruteo de vehículos con restricción de ventanas de tiempo (*Vehicle Routing Problem with Time Windows, VRPTW*)

El problema de ruteo de vehículos con restricción de ventanas de tiempo es una variante del problema de ruteo de vehículos donde el servicio hacia los clientes está dentro de un intervalo de tiempo, llamado también como ventanas de tiempo.

Existen ventanas de tiempo suaves y duras. Las ventanas de tiempo suaves son aquellas en las que no existe penalización alguna si no se cumple, simplemente el vehículo podría esperar a que llegara el cliente. Por otro lado, las ventanas de tiempo duras son aquellas en las que forzosamente el vehículo tiene que llegar hasta que el cliente lo pueda atender, existiendo una penalización en caso de llegar antes.

El modelo para VRPTW considera lo siguiente: un grafo G relacionando variables de dos conjuntos, el primer conjunto es una flota de vehículos homogéneos (cuentan con características idénticas) y el segundo conjunto es el de clientes, el cual cuenta con 2 nodos extras aparte de los nodos del cliente, un nodo 0 y un nodo $C+1$. El nodo 0 representa las salidas del *Depot*, mientras que el nodo $C+2$ representa las llegadas al *Depot*.

Las características descritas de esta variante son idénticas a las del CVRP, con la única diferencia que cada cliente cuenta con una ventana de tiempo $[a_i, b_i]$. Las

ventanas de tiempo para los dos nodos de centro de distribución son las mismas, representadas como $[a_0, b_0]$, donde los vehículos no podrán salir antes de a_0 ni llegar después de b_0 .

Cuenta con dos variables de decisión, la primera, que es general para todas las variantes

$$X_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si se utiliza el vehículo } k \text{ para el arco } i-j \\ 0 & \text{si no se ocupa el arco } i-j \text{ con el vehículo } k \end{cases}$$

Y la segunda s_{ik} , que representa el momento en el que el vehículo k comienza a servir al cliente i . Cabe aclarar que la constante a_0 deberá ser igual a cero para que $s_{0k} = 0$, es decir, comenzar desde el tiempo cero partiendo desde el centro de distribución.

El principal objetivo de esta variante es, como las demás, diseñar un conjunto de rutas donde se minimice el costo total cumpliendo con las siguientes restricciones:

- Cada cliente deberá ser visitado exactamente una vez.
- Cada ruta deberá ser originada desde el nodo 0 y finalizar en el nodo C+2.
- Cumplir con las restricciones sobre las ventanas de tiempo y de capacidad.

Problema de ruteo de vehículos con clientes de entrega y recolecciones con relación de precedencia (VRPB, *Vehicle Routing Problem with Backhauls*)

Partiendo del análisis sobre el modelo anterior, para el VRPB se dividen a los clientes en dos conjuntos, entregas y recolecciones. Cada cliente perteneciente al conjunto de entregas (o *linehauls*) cuenta con una demanda conocida a entregar, mientras que los clientes del conjunto de recolecciones (también conocidos como *Backhauls*), cuentan con una demanda conocida a recolectar.

Los problemas en el día a día para las empresas de este giro son más complicados que los problemas modelados por el CVRP. Una de estas complicaciones es que los bienes, o paquetes, no necesariamente deben de ser entregados por el centro de distribución, también existen recolecciones de material en los nodos clientes para llevarlos al centro de distribución. (S. Ropke, et al.)

Puntos a considerar para el planteamiento de VRPB:

- Cada vehículo realiza exactamente una ruta.

- Toda ruta debe contener entregas y recolecciones, evitando rutas únicamente de entregas.
- La capacidad del vehículo deberá ser mayor o igual a la demanda de los clientes servidos.
- Los clientes de recolecciones deberán ser atendidos una vez realizadas las entregas.
- Se busca encontrar el menor costo total del transporte.

El sistema de los supermercados es un caso ilustrativo de esta variante, donde los supermercados actúan como clientes de entrega mientras que los suministros y proveedores serán los clientes de recolección. Cabe mencionar que, en la mayoría de los casos prácticos, los clientes de entrega tienen mayor prioridad de servicio que los de recolección (Tavakkoli y Saremi, 2006).

Problema de ruteo de vehículos con demanda estocástica (*VRPSD, Vehicle Routing Problem with Stochastic Demand*)

En esta variante, se diseña un conjunto de rutas donde la demanda de los clientes es modelada como una distribución conocida, por lo general distribución normal y con diferentes parámetros. Existe una gran probabilidad de que el vehículo se quede sin posibilidad de seguir sirviendo a los clientes. Cuando esto ocurre, existe una penalización en el costo de todos los clientes que no sirvió y el vehículo regresa al *Depot* sin haber concluido con la demanda. El costo a los clientes en los que si fue efectivo el servicio se cobra normal.

El objetivo de esta variante es diseñar un conjunto de rutas en el que se espera que el costo sea menor, dadas las restricciones y modelos de la demanda correspondientes.

Problema de ruteo de vehículos con tamaño de flota definido, flota heterogénea y con regresos backhauls. (*FSMVRPB, Fleet Size and Mix Vehicle Routing Problem with Backhauls*)

Para la resolución del problema a estudiar se utilizó una combinación de las variantes CVRP, VRP *with Backhauls* y *heterogenous fleet*, en inglés, para generar una variante nueva al modelo que se denomina problema de ruteo de vehículos con flota heterogénea, mixta, con regresos con relación de precedencia y con restricción de capacidad (FSMVRP, Fleet Size and Mix Vehicle Routing Problem with Backhauls, en inglés).

Como ya se vio previamente, el VRP clásico consiste en realizar entregas de una demanda conocida a diferentes clientes, saliendo siempre de un centro de distribución definido y regresando a éste una vez terminadas las entregas. FSMVRPB está compuesto por dos variantes del VRP: la primera es *Fleet Size and Mix Vehicle Routing Problem* donde se considera una flota heterogénea, es decir, los vehículos de cada flota cuentan con diferentes características, tales como capacidad y costo; y la segunda es *Vehicle Routing Problem with Backhauls*, que como se describió, consiste en dos conjuntos de clientes, clientes de entrega y clientes de recolecciones, para los cuales se tendrá que satisfacer su demanda (conocida) sirviendo primero a los clientes de entrega para después satisfacer a los clientes de recolecciones.

Los principales aspectos de FSMVRPB son los siguientes:

- Los clientes están divididos en dos conjuntos, clientes de entrega (linehails) y clientes de recolecciones (backhails).
- La flota es heterogénea.
- Todas las entregas deberán ser servidas a los linehails antes de las recolecciones.
- Ninguna ruta cuenta solamente con recolecciones.
- Se considera capacidad de los vehículos.

Métodos de solución del Problema de ruteo de vehículos

Para Nazari., et al. (2018), el problema de ruteo de vehículos es conocido por ser un problema computacional complejo en donde existen diferentes algoritmos exactos y heurísticos que se han propuesto desde el comienzo de su estudio. El objetivo es optimizar un conjunto de rutas, todas comenzando y finalizando en un nodo dado, centro de distribución, obteniendo una recompensa ya sea de mejora de servicio o una reducción de distancia realizada por los vehículos.

Los algoritmos utilizados para la resolución del problema de ruteo de vehículos son variados en términos de procedimientos, tiempos de resolución y enfoque de optimización, ya sea global y local, así como el tipo de algoritmo que se utiliza. (Cordeau et al, 2005) Los algoritmos presentados en las últimas décadas son basados en el algoritmo de ramificación y acotamiento, esquemas de generación de columna y otros algoritmos basados en ramificación y corte. Sin embargo, los métodos exactos disponibles actualmente están lejos de resolver problemas con gran número de restricciones y nodos, pudiendo resolver para el CVRP problemas de hasta 50 nodos como máximo en un periodo de tiempo razonable. En efecto, se han desarrollado algoritmos heurísticos, los cuales se han clasificado en tres grupos: construcción de rutas, métodos de dos fases y métodos para mejoras de rutas.

Métodos exactos

Los métodos exactos para la resolución del VRP son aquellos métodos que parten de alguna formulación de programación lineal entera, llegando a una solución factible entera.

Oesterle et al. (2015) mencionan que, debido a que el problema de ruteo de vehículos es un NP-Hard, no existe algún tipo de algoritmo determinístico que garantice encontrar la óptima solución dentro de un tiempo de procesamiento computacional razonable, exceptuando únicamente problemas pequeños donde si es posible hacer corridas en un tiempo razonable.

El estudio del presente trabajo se centra en un problema pequeño, el cual es posible encontrar la solución óptima dentro de un tiempo considerable de procesamiento.

Algoritmo Ramificación y Acotamiento (Branch and Bound)

Uno de los algoritmos exactos más estudiados y utilizados en el campo de los problemas de optimización combinatoria, es el algoritmo de Ramificación y Acotamiento (Branch and Bound en inglés). Este algoritmo busca una solución óptima en todo el espacio de soluciones posibles utilizando ciertos límites o acotamientos para acotar este espacio y ahí buscar la solución óptima.

(Clauseen, 1999) El algoritmo Ramificación y Acotamiento busca una solución óptima en un espacio de soluciones, utilizando ciertos límites o restricciones del problema con el fin de acotar este espacio y encontrar la solución óptima.

Existe un primer conjunto: el universo de posibles soluciones. En este universo el número de soluciones es infinito, debido al tamaño exponencial de dicho conjunto. Al aplicar restricciones al universo (primer conjunto), éste se subdivide en subconjuntos que se representan como nodos. Al explorar los nodos se van acotando los subconjuntos que poseen la solución óptima, dadas las restricciones. Se ramifican los conjuntos que posiblemente cuenten con solución óptima hasta que en las ramificaciones no se encuentre una solución mejor.

En la **Error! Reference source not found.** se ejemplifica gráficamente el algoritmo Branch and Bound.

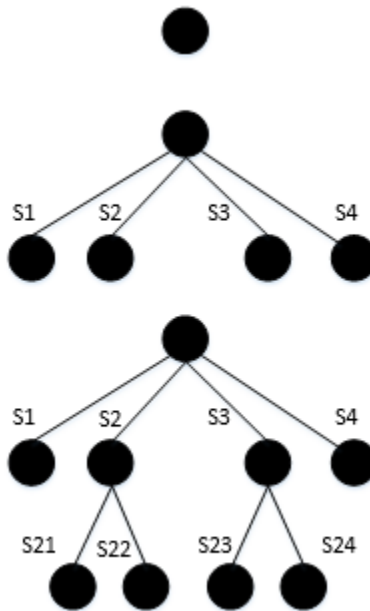


Ilustración 4 Diagrama de Ramificación y Acotamiento (Fuente: Elaboración propia)

Branch and cut

El método Branch and Cut surge como un método híbrido de los métodos Branch & Bound y planos de corte. El método se basa en el cálculo simultáneo de dos cotas, superior e inferior. Las cotas superiores se obtienen mediante relajaciones lineales que eventualmente se van ajustando mediante planos de corte, mientras que las cotas inferiores se van calculando mediante métodos heurísticos. “En un problema de optimización, si la cota inferior sobre un nodo A del árbol de enumeración es mayor que la cota superior de algún otro nodo B, entonces A puede ser descartado. Este paso se le denomina como “poda”; cuando todos los árboles de enumeración son podados o resueltos, el procedimiento termina...” (Ramusio, 2010, cuando es cita textual, tienes que poner el número de página (y de pasito revisas la comas... jaja)

Métodos heurísticos

Como se mencionó anteriormente, debido a la complejidad de procesamiento en este tipo de problemas, por ser NP-Hard, en algunos casos no se puede depender de algún método exacto para poder tener una solución óptima. Es aquí donde los métodos heurísticos juegan un papel importante para la solución de diversos problemas de optimización.

(Luër et al., 2009) Estos algoritmos no aseguran la optimización de la solución, debido a que son algoritmos que toman menor tiempo de ejecución que un método exacto.

(Martí et al. 2011) Los métodos heurísticos solamente apuntan a una buena solución, no necesariamente óptima. Sin embargo, el tiempo de procesamiento para estos algoritmos es mucho menor que un método exacto. Por esta razón, la mayoría de los problemas de aplicación se centran en soluciones heurísticas más que exactas.

Existe una variedad de métodos heurísticos de diferente naturaleza, por lo tanto, es complicado tener una clasificación completa de estos métodos. Martí et al., (2011) ofrecen una clasificación amplia de los métodos más utilizados.

- **Métodos de descomposición**

El problema original se divide en sub problemas menos complejos y fáciles de resolver, donde estos mismos pertenecen a la misma clase del problema original.

- **Métodos inductivos**

La idea de estos métodos es generalizar versiones más pequeñas o simples de todo el caso. Se aplican técnicas y propiedades en común que son más fáciles de analizar y se pueden aplicar a todo el problema.

- **Métodos de reducción**

El objetivo de estos métodos es restringir el espacio de soluciones simplificando el problema, con el riesgo latente de dejar fuera la solución óptima del problema original.

- **Métodos constructivos**

Estos métodos construyen una solución paso a paso, utilizando métodos determinísticos, que son los más utilizados para problemas clásicos de optimización combinatoria. El método más conocido y utilizado para el VRP es el de ahorros, el cual consiste en crear un número n de rutas y se va probando uniendo un arco para los puntos $[i, j]$, calculando y escogiendo el mejor ahorro posible de las rutas disponibles.

- **Métodos de búsqueda local**

En estos métodos se comienza con soluciones factibles e intentan mejorarlas progresivamente. En cada paso se va almacenando e intercambiando una mejor solución que la actual. El método termina cuando no se encuentra accesible otra mejor solución.

Metaheurísticas

Son estrategias generales heurísticas para los problemas que no cuentan con un algoritmo confiable que pueda dar una solución eficaz, ya sea por la complejidad del problema o falta de estudios en la resolución del problema (Lüer et al, 2009).

A continuación se enlistan algunas características de las heurísticas (Lüer et al, 2009):

- Algoritmos de optimización global, utilizando procedimientos o técnicas que permitan escapar de los óptimos locales, perturbando la solución actual, generando una nueva solución basadas en la relación de otras soluciones evaluando siempre, la posibilidad de mejora de la función objetivo.
- Libertad para poder trabajar con los algoritmos, permitiendo trabajar con diferentes parámetros, adición de diferentes heurísticas, etc.
- Rendimiento constante y estable en los problemas.

Algoritmos genéticos

Este algoritmo corresponde a la clasificación de algoritmos evolutivos. Las soluciones del problema están codificadas en un espacio llamado cromosoma, donde cada elemento del cromosoma es llamado gen. Los cromosomas son un subconjunto del conjunto población, que para cada iteración las poblaciones corresponden a una generación. Mediante la aplicación de diversos operadores, se generan nuevos individuos que son generados a la población, mediante un proceso iterativo que busca escapar de los mínimos locales.

Búsqueda Tabú

(Glover, 1995) Es una metaheurística que guía el proceso explorar un espacio de solución más allá del óptimo local. La búsqueda Tabú adopta las premisas de memoria adaptiva y exploración receptiva. Su base es derivar y explotar estrategias para la resolución de los problemas.

(Glover y Batista, 1995) plantean que la memoria adaptiva permiten la implementación procedimientos conocidos capaces de realizar la búsqueda en el espacio de solución, mientras que la exploración receptiva integra los principios básicos de una búsqueda inteligente, es decir, explota las características de las soluciones buenas así como la exploración de nuevas regiones o espacios que puedan contener alguna mejor solución.

CAPÍTULO 2 DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA Y SUS COMPONENTES

Indicadores de gestión

(Morán, 2008) menciona que "...los indicadores de gestión se vuelven en los signos vitales de la organización, y su continuo monitoreo permite establecer las condiciones e identificar los diversos síntomas que se derivan del desarrollo normal de las actividades..." dando a entender que los indicadores de gestión forman un importante eslabón importante dentro de las empresas, debido a que mediante ellos, se puede cuantificar, controlar y monitorear el desarrollo de las actividades del día a día.

Dentro de las empresas con rol logístico, los indicadores de desempeño se traducen en la evaluación del desempeño en cada proceso de recepción, almacenamiento, distribución, entregas, entre otros, siempre enfocados en la calidad y satisfacción del cliente.

En este caso, el indicador el cual se hace mención es del tipo de transporte y distribución, donde se controlan los costos y la productividad asociados al transporte, siendo la cadena que necesita más recursos y esfuerzos.

Tiene como objetivo controlar el costo del transporte respecto a las ventas de la empresa, en este caso, las ventas serán exclusivamente del producto garantizado para el día siguiente.

Dentro de la empresa donde se realizó el estudio, el indicador costo por kilo es el que se mide constantemente en la empresa, monitoreando y dando visibilidad de la relación del producto vendido (producto del día siguiente) y la inversión que se realiza mes con mes para la red aérea. El costo por kilo aéreo se calcula de la siguiente manera:

$$CPK = \frac{\text{Kilos volados en la red aérea (entregas y recolecciones)}}{\text{Horas voladas * cuota fija de aeronave}}$$

El costo por kilo es un indicador que también busca asegurar la correcta utilización de peso físico en la aeronave. La optimización del costo por kilo dará lugar no solamente a reducir el costo que representa el transporte aéreo, también tendrá impacto al medio ambiente debido a la reducción de emisiones de CO_2 , disminuyendo las horas de vuelo.

Descripción del sistema

Como ya se mencionó en los capítulos anteriores, el problema de ruteo de vehículos tiene como objetivo realizar el plan de distribución de bienes desde y hacia un centro de distribución cumpliendo con la demanda de diferentes clientes o ubicaciones. En la mayoría de los casos, siendo éste ninguna excepción, la demanda de cada cliente es conocida y el objetivo principal es minimizar el costo de transportar los bienes desde los clientes origen los clientes destinos.

El ejemplo donde se aplicó el problema de ruteo de vehículos, consta de un centro de distribución el cual será tomado en cuenta como el nodo 1. Este centro de distribución tiene conexiones aéreas y conexiones terrestres, el presente trabajo se centrará solamente en las conexiones aéreas que tiene dentro de las ciudades de la República Mexicana.

El sistema cuenta con 12 nodos para entrega 10 nodos para recolecciones, a los cuales, el centro de distribución se encarga de realizar un proceso de recibir, sortear y cargar las aeronaves. La dispersión de material para cada destino se enlista en la siguiente tabla (**Error! Reference source not found.**), mostrando la demanda de entregas y la demanda de recolecciones para cada una de las ciudades:

Tabla 1 Demanda de Ciudades

Ciudad	Demanda de entregas	Demanda de recolecciones
Ciudad 2 y Ciudad 14	3,195 kg.	3,100 kg.
Ciudad 3 y Ciudad 15	5,244 kg.	4,200 kg.
Ciudad 4 y Ciudad 16	6,664 kg.	1,200 kg.
Ciudad 5 y Ciudad 17	4,541 kg.	1,800 kg.
Ciudad 6 y Ciudad 18	7,288 kg.	3,700 kg.
Ciudad 7 y Ciudad 19	4,664 kg.	2,900 kg.
Ciudad 8 y Ciudad 20	8,965 kg.	1,400 kg.
Ciudad 9 y Ciudad 21	11,331 kg.	8,000 kg.
Ciudad 10	2,223 kg.	n/a
Ciudad 11 y Ciudad 22	5,378 kg.	2,200 kg.
Ciudad 12	1,740 kg.	n/a
Ciudad 13 y Ciudad 23	9,456 kg.	6,200 kg.

Con el fin de explicar el problema y la formulación, las ciudades se definieron con dos números, indicando que los números dentro del rango 2,...,13 serán los clientes de entrega (*linehauls*) mientras que los clientes dentro del rango 14,...23, serán los clientes de recolecciones (*Backhauls*).

La demanda de recolecciones será el material que se recoja una vez finalizadas las entregas. Cuando cada ruta de entrega llega a su nodo final, los aviones quedan pasando la tarde en el aeropuerto, esperando el material que tendrá que ir en el ciclo de rutas de recolección. Una vez satisfecha la demanda de recolección, las rutas regresan al centro de distribución sortear y redirigir en las diferentes rutas aéreas definidas.

La mayor parte del costo que involucra la operación es directamente proporcional a una cuota fija propia por cada tipo de aeronave, multiplicada por las horas de vuelo entre cada cliente. Este costo lo nombraremos como $C_{i,j,k}$ (costo involucrado en ir del nodo i al nodo j con el vehículo k).

La cuota fija, por sus siglas en ingles ACMI, representa el costo del “Personal, Mantenimiento y Seguro del Aeronave” (Aircraft Crew Maintenance & Insurance, ACMI); además, las aeronaves tienen una capacidad definida en kilos y se tiene una disponibilidad de flota limitada. La siguiente tabla muestra las características de cada aeronave.

Tabla 2 Características de aeronaves

Flota	Cuota ACMI	Capacidad	Disponibilidad
Aeronave A	2,100 U.	9,000 kg.	5
Aeronave B	2,800 U.	17,000	5

Las horas de vuelo (BH, block hours) entre cada ciudad se definen en la siguiente matriz simétrica:

Tabla 3 Matriz simétrica de horas de vuelo

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	0	2.50	1.55	2.55	2.15	2.55	2.20	2.25	1.25	1.35	1.55	1.30	4.10
2	2.50	0	1.45	4.30	1.00	1.20	2.00	4.05	2.00	2.05	4.00	1.40	1.35
3	1.55	1.45	0	4.15	1.10	1.25	0.55	3.45	1.45	0.45	3.25	1.10	2.40
4	2.55	4.30	4.15	0	6.10	5.00	4.45	0.55	3.00	4.00	1.40	3.35	6.10
5	2.15	1.00	1.10	6.10	0	1.15	1.35	3.45	1.35	1.30	3.35	1.10	2.25
6	2.55	1.20	1.25	5.00	1.15	0	1.25	4.35	2.25	1.50	4.20	1.55	1.35
7	2.20	2.00	0.55	4.45	1.35	1.25	0	4.15	2.15	1.10	3.50	1.40	2.25
8	2.25	4.05	3.45	0.55	3.45	4.35	4.15	0	2.30	3.30	1.15	3.05	5.45
9	1.25	2.00	1.45	3.00	1.35	2.25	2.15	2.30	0	1.35	2.25	1.00	3.35
10	1.35	2.05	0.45	4.00	1.30	1.50	1.10	3.30	1.35	0	3.05	1.05	3.00
11	1.55	4.00	3.25	1.40	3.35	4.20	3.50	1.15	2.25	3.05	0	2.50	5.35
12	1.30	1.40	1.10	3.35	1.10	1.55	1.40	3.05	1.00	1.05	2.50	0	3.05
13	4.10	1.35	2.40	6.10	2.25	1.35	2.25	5.45	3.35	3.00	5.35	3.05	0

Las horas de vuelo se consideran simétricas debido al acuerdo que se tiene con el proveedor de las aeronaves, el cual se encuentran alineadas en conjunto con la empresa y el proveedor e independientemente de algunos factores como el clima y características de cada tipo de aeronave, siempre se tomarán en cuenta estas horas de vuelo para el costo.

El proceso por el cual pasa actualmente el desarrollo y creación de las rutas es similar al método de ahorros de Clarke & Wright donde se tiene como principal restricción la capacidad de las aeronaves, buscando mantener una estructura similar a la actual.

Utilizando el problema de ruteo de vehículos con relación de precedencia de regresos, VRPwB (bajo un esquema de programación entera mixta) el área de planeación y optimización de la empresa, desea encontrar el conjunto de rutas óptimas para poder cumplir la demanda de entregas y recolecciones de cada cliente (o ciudad).

A continuación se describen los pasos que el área sigue actualmente para las nuevas configuraciones de rutas:

1. Si la demanda sobrepasa la capacidad de un aeronave, se pregunta si es un tipo de aeronave A o B

Si es un tipo de aeronave A, el equipo evalúa realizar un cambio de aeronave al tipo B siempre y cuando se pronostique una ocupación de la aeronave menor al 80%, ya que se considera un desperdicio. En el caso de que se

cumpla con dicha regla y si la aeronave con sobrecapacidad es del tipo B, se plantea reestructurar todas las rutas, siguiendo el siguiente paso:

- a. Al momento de reestructurar las rutas, se evalúa primero si el tipo aeronave A o el Aeronave B son suficientes para cubrir la demanda de la Ciudad (6), buscando siempre tener capacidad en la aeronave para una segunda parada cerca de esta ciudad. Se realiza este mismo paso para la ciudad Ciudad (10), y con las demás ciudades en orden descendiente de su demanda
- b. Una vez satisfecha la demanda de la ciudad (6) y alguna otra cercana, se evalúan las ciudades con mayor demanda y se utiliza el mismo principio de ruteo, volando a la ciudad con mayor demanda y a alguna otra ciudad cercana a ésta

Una vez realizadas las rutas se revisan con los encargados de las áreas operativas tales como, centro de distribución, redes terrestres y redes aéreas, con el objetivo de contar con su aprobación, y si es necesario, realizar algún cambio por alguna restricción operativa.

Al aplicar el problema de ruteo de vehículos, el proceso de reestructuración de rutas se mantuvo similar, con excepción de que solamente se utilizaría el software para determinar el conjunto de rutas óptimo, en lugar de asignar manualmente los aviones a las ciudades con mayor demanda. Una vez que se obtenga la solución directamente del software (conjunto óptimo de rutas), se alinea con las diferentes áreas operativas para obtener su visto bueno y realizar cambios de ser necesarios.

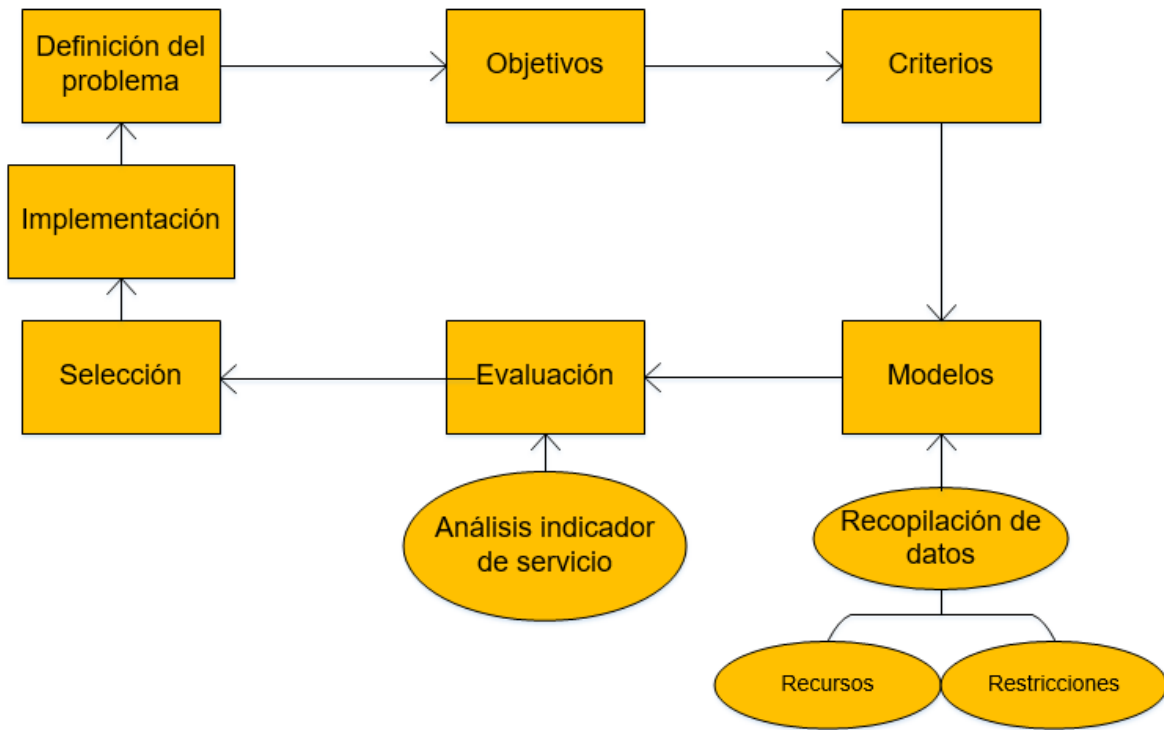


Ilustración 5 Diagrama de desarrollo e implementación para la creación de rutas aéreas (Muñuzuri et al, 2002)

Estudio de caso: Problema de ruteo de vehículos aplicado a una empresa de mensajería y paquetería

Formulación del algoritmo para FSMVRPB

La siguiente formulación fue tomada del artículo escrito por (Salhi, et al., 2013) el cual, como ya se ha mencionado previamente, es el que mejor describe el sistema.

Definición de constantes y variables:

C_{ijk} Costo de ir al nodo i al nodo j utilizando el vehículo k .

L Número de nodos dentro del conjunto linehaul (enumerados de 2,..., L+1).

B Número de nodos para el conjunto backhaul (L+2,..., B).

n Número total de clientes (L+B).

K Número de vehículos.

Q_k Capacidad del vehículo k , ($Q_1 < Q_2 < Q_3 \dots < Q_k$).

d_i Demanda del cliente i .

U_{ij} Carga del vehículo en el arco del nodo i al nodo j .

$$X_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si se utiliza el vehículo } k \text{ para el arco } i-j \\ 0 & \text{si no se ocupa el arco } i-j \text{ con el vehículo } k \end{cases}$$

Función Objetivo:

$$\min Z = \sum_{i=0} \sum_{j=0} \sum_{k=1} C_{ijk} * X_{ijk}$$

Como ya se mencionó, el costo $C_{i,j,k}$ es directamente proporcional a las horas de vuelo entre i y j y por la cuota por utilizar la aeronave k , quedando las expresiones de la siguiente manera:

$$C_{i,j,k} = BH_{i,j} * c_k$$

$$C_{1,2,1} = 2.92 * 2,100$$

$$C_{1,2,2} = 2.92 * 2,800$$

$$C_{1,3,1} = 1.75 * 2,100$$

$$C_{1,3,2} = 1.75 * 2,800$$

⋮

$$C_{12,11,1} = 3.05 * 2,100$$

$$C_{12,11,2} = 3.05 * 2,800$$

Definido lo anterior, la función objetivo (para FSMVRPB) queda de la siguiente manera, sustituyendo el valor correspondiente a cada valor de la variable $C_{i,j,k}$:

$$Z = C_{1,2,1} * X_{1,2,1} + C_{1,3,1} * X_{1,3,1} + C_{1,4,1} * X_{1,4,1} + C_{1,5,1} * X_{1,5,1} + C_{1,6,1} * X_{1,6,1} \\ + C_{1,7,1} * X_{1,7,1} + C_{1,8,1} * X_{1,8,1} + C_{1,9,1} * X_{1,9,1} + \dots + C_{12,11,2} * X_{12,11,2}$$

Donde la variable $X_{i,j,k}$ es la variable de decisión binaria que determinará el conjunto óptimo de rutas; será igual a 1 si el tramo $i j$ se realiza con el vehículo k , será igual a cero si no se realiza dicho tramo.

Los problemas de ruteo de vehículos necesitan restricciones según sea el tipo y el sistema el cual se esté estudiando; independiente a la cantidad de bienes que se tiene que servir para cada ciudad, las ciudades deberán ser visitadas al menos una vez.

Dentro de la formulación de FSMVRPB, se desarrolla la expresión (2) donde se asegura que cada cliente, exclusivamente de entrega o de recolección, será visitado al menos una vez por el centro de distribución o cualquier otro cliente. A continuación se muestra el desarrollo:

(2)

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^K x_{ijk} = 1, \quad \text{donde } j = 2, \dots, n; i \neq j$$

$$x_{1,2,1} + x_{1,2,2} + x_{3,2,1} + x_{3,2,2} + \dots + x_{21,2,1} + x_{21,2,2} = 1$$

$$x_{1,3,1} + x_{1,3,2} + x_{2,3,1} + x_{2,3,2} + \dots + x_{21,3,1} + x_{21,3,2} = 1$$

$$\begin{aligned}
x_{1,4,1} + x_{1,4,2} + x_{2,4,1} + x_{2,4,2} + \dots + x_{21,4,1} + x_{21,4,2} &= 1 \\
x_{1,5,1} + x_{1,5,2} + x_{2,5,1} + x_{2,5,2} + \dots + x_{21,5,1} + x_{21,5,2} &= \\
&\vdots \\
&\vdots \\
x_{1,21,1} + x_{1,21,2} + x_{2,21,1} + \dots + x_{20,21,1} + x_{20,21,2} &= 1
\end{aligned}$$

En la restricción (2) se formula que partiendo de cada ciudad o Centro de Distribución i (siendo i mayor o igual a 1) con un Vehículo K , se visitará el nodo j exactamente una vez, siendo j cualquier nodo excepto del Centro de Distribución.

(3)

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^K x_{ijk} = 1,, \quad \text{donde } i = 2, \dots, n; i \neq j$$

$$\begin{aligned}
x_{1,2,1} + x_{1,2,2} + x_{3,2,1} + x_{3,2,2} + \dots + x_{21,2,1} + x_{21,2,2} &= 1 \\
x_{1,3,1} + x_{1,3,2} + x_{2,3,1} + x_{2,3,2} + \dots + x_{21,3,1} + x_{21,3,2} &= 1 \\
x_{1,4,1} + x_{1,4,2} + x_{2,4,1} + x_{2,4,2} + \dots + x_{21,4,1} + x_{21,4,2} &= 1 \\
x_{1,5,1} + x_{1,5,2} + x_{2,5,1} + x_{2,5,2} + \dots + x_{21,5,1} + x_{21,5,2} &= 1 \\
&\vdots \\
&\vdots \\
x_{1,21,1} + x_{1,21,2} + x_{2,21,1} + \dots + x_{20,21,1} + x_{20,21,2} &= 1
\end{aligned}$$

Similar a la restricción (2), la restricción (3) enuncia que partiendo de cada ciudad i , excluyendo al centro de distribución (mayor a 1), con un Vehículo K se visitará exactamente una vez el nodo j , siendo j cualquier nodo, cliente o Centro de Distribución. Con el fin de completar el ciclo de visita para cada ciudad (entrar y salir), se desarrolla la restricción (3) donde se asegura la salida de cada ciudad debe ser exactamente una vez.

Las restricciones (2) y (3) aseguran que cada nodo es visitado exactamente una vez por un vehículo.

(4)

$$\sum_{i=1}^n x_{ipk} = \sum_{j=1}^n x_{pjk}, \quad \text{donde } k = 1, \dots, K; \quad p = 1, \dots, n$$

$$x_{2,1,1} + x_{3,1,1} + x_{4,1,1} + \dots + x_{22,1,1} = x_{1,2,1} + x_{1,3,1} + x_{1,4,1} + \dots + x_{1,22,1}$$

$$x_{2,1,2} + x_{3,1,2} + x_{4,1,2} + \dots + x_{22,1,2} = x_{1,2,2} + x_{1,3,2} + x_{1,4,2} + \dots + x_{1,22,2}$$

$$x_{1,2,1} + x_{3,2,1} + x_{4,2,1} + \dots + x_{22,2,1} = x_{2,1,1} + x_{2,3,1} + x_{2,4,1} + \dots + x_{2,22,1}$$

$$x_{1,2,2} + x_{3,2,2} + x_{4,2,2} + \dots + x_{22,2,2} = x_{2,1,2} + x_{2,3,2} + x_{2,4,2} + \dots + x_{2,22,2}$$

⋮

$$x_{1,21,1} + x_{2,21,1} + x_{3,21,1} + \dots + x_{20,22,1} = x_{21,1,1} + x_{21,2,1} + x_{21,3,1} + \dots + x_{22,20,1}$$

$$x_{1,21,2} + x_{2,21,2} + x_{3,21,2} + \dots + x_{20,22,2} = x_{21,1,2} + x_{21,2,2} + x_{21,3,2} + \dots + x_{22,20,2}$$

La restricción (4) asegura la continuidad de cada ruta, definiendo una relación de precedencia mediante los nodos p . Siendo i e j todos los nodos incluyendo el Centro de Distribución $(1, \dots, n)$.

En conjunto con las restricciones 2 y 3, la restricción 4 asegura la relación de entrada y salida desde y hacia los nodos clientes.

(5)

$$\sum_{i=1}^{L+1} U_{ij} = \sum_{l=1}^n U_{jl} + d_j \quad \text{donde } j = 2, \dots, L + 1$$

$$u_{1,2} + u_{3,2} + u_{4,2} + \dots + u_{12,2} = u_{2,1} + u_{2,3} + u_{2,4} + \dots + u_{2,22} + d_2$$

$$u_{1,3} + u_{2,3} + u_{4,3} + \dots + u_{12,3} = u_{3,1} + u_{3,2} + u_{3,4} + \dots + u_{3,22} + d_3$$

$$\begin{aligned}
u_{1,4} + u_{2,4} + u_{3,4} + \cdots + u_{12,4} &= u_{4,1} + u_{4,2} + u_{4,3} + \cdots + u_{4,22} + d_4 \\
&\vdots \\
&\vdots \\
u_{1,12} + u_{2,12} + u_{3,12} + \cdots + u_{11,12} &= u_{12,1} + u_{12,2} + u_{12,3} + \cdots + u_{12,22} + d_{12}
\end{aligned}$$

La restricción 5 enuncia la precedencia de satisfacer las entregas antes que las recolecciones, donde i representa a los nodos de entrega y l el conjunto de entregas y recolecciones. La carga u que entra al nodo j , deberá ser igual a demanda del mismo nodo j más la carga que saldrá del nodo j .

(6)

$$\sum_{l=L+2}^n U_{jl} + U_{j1} = d_j + \sum_{i=2}^n U_{ij}, \quad \text{donde } j = L + 2, \dots, n$$

$$\begin{aligned}
u_{13,14} + u_{13,15} + u_{13,16} + \cdots + u_{13,22} + u_{13,1} &= d_{13} + u_{2,13} + u_{3,13} + u_{4,13} + \cdots + u_{22,13} \\
u_{14,13} + u_{14,15} + u_{14,16} + \cdots + u_{14,22} + u_{14,1} &= d_{14} + u_{2,14} + u_{3,14} + u_{4,14} + \cdots + u_{22,14} \\
u_{15,13} + u_{15,14} + u_{15,16} + \cdots + u_{15,22} + u_{15,1} &= d_{15} + u_{2,15} + u_{3,15} + u_{4,15} + \cdots + u_{22,15} \\
&\vdots \\
&\vdots \\
u_{22,13} + u_{22,14} + u_{22,15} + \cdots + u_{22,21} + u_{22,1} &= d_{22} + u_{2,22} + u_{3,22} + u_{4,22} + \cdots + u_{21,22}
\end{aligned}$$

Similar a la restricción (5), la restricción (6) enuncia la relación precedencia para satisfacer la demanda de recolecciones. La sumatoria de l está limitada a los nodos de recolecciones, mientras que la sumatoria de i está contempla todos los nodos excepto el Centro de Distribución (mayor a 1). La demanda de recolecciones será satisfecha mediante esta restricción, ya que está centrada en la carga para las ciudades de recolección.

(7)

$$U_{ij} = 0, \quad \text{donde } i = 1, \dots, L + 1; j = 1 \& j = L + 2, \dots, n$$

$$u_{1,13} = 0$$

$$u_{1,14} = 0$$

$$u_{1,15} = 0$$

⋮

⋮

$$u_{12,1} = 0$$

$$u_{12,22} = 0$$

Para asegurar que ninguna recolección se haga antes de que todas las entregas estén completas, la restricción (7) enuncia que la variable de carga para un nodo de entrega, al centro de distribución y a cualquier nodo de recolección, debe ser igual a cero. En resumen, esta restricción afirma que los Vehículos deberán tener una carga $U=0$ desde un nodo de entrega hacia el centro de distribución o cualquier nodo de recolección.

(8)

$$U_{ii} = 0, \quad \text{donde } i = 0, \dots, n$$

$$u_{1,1} = 0$$

$$u_{2,2} = 0$$

$$u_{3,3} = 0$$

⋮

⋮

$$u_{22,22} = 0$$

La restricción 8 afirma que no existe carga para un mismo nodo.

(9)

$$\sum_{i=L+2}^n U_{i0} = \sum_{i=L+2}^n d_i$$

$$u_{13,1} + u_{14,1} + u_{15,1} + \dots + u_{22,1} = d_{13} + d_{14} + d_{15} + \dots + d_{22}$$

Restricción (9) asegura que la demanda de las recolecciones es satisfecha con la suma de la carga que llega al centro de distribución. En ambas sumatorias se considera el nodo i para el conjunto de recolecciones.

(10)

$$\sum_{j=2}^{L+1} U_{1j} = \sum_{j=2}^{L+1} d_j$$

$$u_{1,2} + u_{1,3} + u_{1,4} + \dots + u_{1,12} = d_2 + d_3 + d_4 + \dots + d_{12}$$

La suma de la demanda de entregas deberá ser igual a la carga total que llevan los vehículos partiendo del centro de distribución. Esta restricción se traduce a que desde el centro de distribución deberá salir la totalidad de la demanda de entregas

(11)

$$X_{1,j,k} = 0 \quad j = L + 2, \dots, n; \quad k = 1, \dots, K$$

$$x_{1,13,1} = 0$$

$$x_{1,14,1} = 0$$

$$x_{1,15,1} = 0$$

$$\vdots$$

$$x_{1,22,2} = 0$$

La restricción (11) asegura que ninguna ruta comenzará visitando un nodo de recolección desde el centro de distribución.

(12)

$$X_{ijk} = 0 \quad i = L + 2, \dots, n; \quad j = 2, \dots, L; \quad k = 1, \dots, K$$

$$x_{13,2,1} = 0$$

$$x_{14,2,1} = 0$$

$$x_{14,2,1} = 0$$

⋮

⋮

$$x_{22,12,2} = 0$$

Similar a la restricción (11), la restricción (12) asegura que no exista una recolección antes de una entrega.

(13)

$$U_{ij} < \sum_{k=1}^K x_{ijk} * Q_k \quad i \neq j = 0, 1, \dots, n$$

La restricción (13) enuncia que para toda carga i-j no deberá exceder la capacidad del Vehículo K.

Esta última restricción se modificó debido a un problema operativo inherente al sistema; se observó que la capacidad de los Vehículos variaba dependiendo del destino próximo de la ruta, esto debido a la relación que existe entre el gasto de combustible y horas de vuelo. Realizando un análisis más a detalle se llegó al siguiente modelo para calcular la capacidad del vehículo:

(13')

$$Q'_k = 1 + Q_k - BH_{ijk}$$

Resultando una nueva restricción (13)'':

(13'')

$$U_{ij} < \sum_{k=1}^K (x_{ijk} * [1 + Q_k - BH_{ijk}]) \quad i \neq j; i = 1, \dots, n; j = 2, \dots, L + 1$$

$$u_{1,2} < x_{1,2,1} * (1 + Q_1 - BH_{1,2,1}) + x_{1,2,2} * (1 + Q_2 - BH_{1,2,2})$$

$$u_{1,3} < x_{1,3,1} * (1 + Q_1 - BH_{1,3,1}) + x_{1,3,2} * (1 + Q_3 - BH_{1,3,2})$$

$$u_{1,4} < x_{1,4,1} * (1 + Q_1 - BH_{1,4,1}) + x_{1,4,2} * (1 + Q_2 - BH_{1,4,2})$$

⋮

$$u_{22,12} < x_{22,12,1} * (1 + Q_1 - BH_{22,12,1}) + x_{22,12,2} * (1 + Q_2 - BH_{22,12,2})$$

Cabe señalar que la demanda de entregas, partiendo del Centro de Distribución es mayor que en cualquier otra parada, por lo que en la restricción (13'') solo se considera la restricción de capacidades partiendo del centro de distribución hacia un nodo de entrega.

(14)

$$U_{ij} \geq 0$$

La carga i,j deberá ser una variable no negativa.

CAPÍTULO 3 FORMULACIÓN EN LINGO

A continuación se describe a formulación descrita en la sección anterior utilizando el software Lingo de Lindo Systems Inc.

Lindo Systems Inc. es una empresa desarrolladora de herramientas para realizar modelos de optimización. La versión que se utilizó para desarrollar este estudio es la versión Extended, la cual tiene variables enteras, no enteras y número de restricciones ilimitadas, siendo el ideal para el sistema previamente descrito.

Los métodos de solución disponibles para esta versión son los siguientes:

- Método simplex
- Simplex dual
- Branch and bound (Método descrito en el capítulo 1)

El método Branch and Bound es el método que utiliza el programa para poder resolver este problema.

Se comenzará explicando los conjuntos que definen las principales variables y constantes en el programa.

Como primer paso se crea un nuevo archivo en el software Lingo. El ícono se encuentra en el lado superior izquierdo de la ventana.



Ilustración 6 Creación de nuevo documento en Lingo

Una vez abierto un nuevo archivo de Lingo, se comenzará definiendo los conjuntos, sus atributos y las variables asociadas a cada uno de los atributos de este conjunto. Los conjuntos definidos para este problema son: Aeronave, Ciudad, Carga y Pierna.

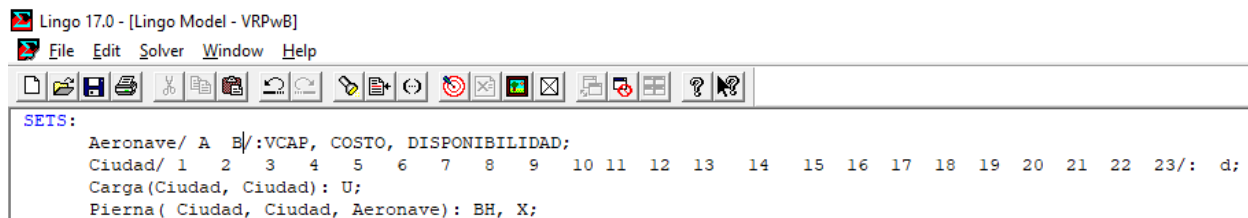


Ilustración 7 Declaración de conjuntos y variables en Lingo

Los atributos del conjunto aeronave son el tipo de aeronave disponible, en este caso aeronave A y Aeronave B, teniendo las variables capacidad (**VCAP**), cuota fija (**COSTO**) y la disponibilidad (**DISPONIBILIDAD**).

El conjunto "Ciudad" tiene a las ciudades de entrega y de recolección, asociadas a una variable de demanda "d".

Dentro de la programación en Lingo, los conjuntos definidos podrán ser subconjuntos de nuevos conjuntos para definir nuevas variables, tales como:

- Carga refiriéndose a la carga que tendrá el avión entre la ciudad i y la ciudad j utilizando la variable U, misma que será útil posteriormente para la restricción de capacidad en las aeronaves.
- El conjunto Pierna une a los conjuntos Ciudad y aeronave para poder definir las horas de vuelo (BH) y la variable de decisión $X_{i,j,k}$.

Una vez definidos los conjuntos, se abre un nuevo concepto llamado "DATA", el cual consiste en darle valor a las constantes que se tienen en el problema. En este caso, la demanda es conocida, la capacidad de las aeronaves está definida, se conoce el costo por utilizar cada tipo de aeronave y la disponibilidad de cada tipo de aeronave se conoce. Además, se define la matriz de tiempo de vuelo entre cada ciudad. En esta matriz se ponen doble los valores, debido a que cada hora de vuelo corresponde a cada tipo de avión, es por eso que se tienen duplicados los nodos.

```

File Edit Solver Window Help
[Icons]
SETS:
Aeronave/ A B/:VCAP, COSTO, DISPONIBILIDAD;
Ciudad/ 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23/: d;
Carga(Ciudad, Ciudad): U;
Pierna( Ciudad, Ciudad, Aeronave): BH, X;
ENDSETS

DATA:
d = 0 3.195 5.244 6.644 4.541 7.288 4.664 8.965 11.331 2.223 5.378 1.740 9.456 3.100 4.200 1.200 1.800 3.700 2.900 1.400 8.000 2.200 6.200;
VCAP = 9 17;
COSTO = 2000 3000;
DISPONIBILIDAD = 4 9;

BH =
!1 1 1 2 2 3 3 4 4 5 5 6 6 7 7 8 8 9 9 10 10 11 11 12 12 13 13 14 14 15 15 16
0 0 2.50 2.50 1.55 1.55 2.55 2.55 2.15 2.15 2.55 2.55 2.20 2.20 2.25 2.25 1.25 1.25 1.35 1.35 1.55 1.55 1.30 1.30 4.10 4.10 2.50 2.50 1.55 1.55 2.
2.50 2.50 0 0 1.45 1.45 4.30 4.30 1.00 1.00 1.20 1.20 2.00 2.00 4.05 4.05 2.00 2.00 2.05 2.05 4.00 4.00 1.40 1.40 2.10 2.10 0 0 1.45 1.45 4.
1.55 1.55 1.45 1.45 0 0 4.15 4.15 1.10 1.10 1.25 1.25 0.55 0.55 3.45 3.45 1.45 1.45 0.45 0.45 3.25 3.25 1.10 1.10 2.40 2.40 1.45 1.45 0 0 4.
2.55 2.55 4.30 4.30 4.15 4.15 0 0 4.10 4.10 5.00 5.00 4.45 4.45 0.55 0.55 3.00 3.00 4.00 4.00 1.40 1.40 3.35 3.35 6.10 6.10 4.30 4.30 4.15 4.15 0
2.15 2.15 1.00 1.00 1.10 1.10 4.10 4.10 0 0 1.15 1.15 1.35 1.35 3.45 3.45 1.35 1.35 1.30 1.30 3.35 3.35 1.10 1.10 2.25 2.25 1.00 1.00 1.10 1.10 4.
2.55 2.55 1.20 1.20 1.25 1.25 5.00 5.00 1.15 1.15 0 0 1.25 1.25 4.35 4.35 2.25 2.25 1.50 1.50 4.20 4.20 1.55 1.55 1.35 1.35 1.20 1.20 1.25 1.25 5.
2.20 2.20 2.00 2.00 0.55 0.55 4.45 4.45 1.35 1.35 1.25 1.25 0 0 4.15 4.15 2.15 2.15 1.10 1.10 3.50 3.50 1.40 1.40 2.25 2.25 2.00 2.00 0.55 0.55 4.
2.25 2.25 4.05 4.05 3.45 3.45 0.55 0.55 3.45 3.45 4.35 4.35 4.15 4.15 0 0 2.30 2.30 3.30 3.30 1.15 1.15 3.05 3.05 5.45 5.45 4.05 4.05 3.45 3.45 0.
1.25 1.25 2.00 2.00 1.45 1.45 3.00 3.00 1.35 1.35 2.25 2.25 2.15 2.15 2.30 2.30 0 0 1.35 1.35 2.25 2.25 1.00 1.00 3.35 3.35 2.00 2.00 1.45 1.45 3.
1.35 1.35 2.05 2.05 0.45 0.45 4.00 4.00 1.30 1.30 1.50 1.50 1.10 1.10 3.30 3.30 1.35 1.35 0 0 3.05 3.05 1.05 1.05 3.00 3.00 2.05 2.05 0.45 0.45 4.
1.55 1.55 4.00 4.00 3.25 3.25 1.40 1.40 3.35 3.35 4.20 4.20 3.50 3.50 1.15 1.15 2.25 2.25 3.05 3.05 0 0 2.50 2.50 5.35 5.35 4.00 4.00 3.25 3.25 1.
1.30 1.30 1.40 1.40 1.10 1.10 3.35 3.35 1.10 1.10 1.55 1.55 1.40 1.40 3.05 3.05 1.00 1.00 1.05 1.05 2.50 2.50 0 0 3.05 3.05 1.40 1.40 1.10 1.10 3.
4.10 4.10 2.10 2.10 2.40 2.40 6.10 6.10 2.25 2.25 1.35 1.35 2.25 2.25 5.45 5.45 3.35 3.35 3.00 3.00 5.35 5.35 3.05 3.05 0 0 2.10 2.10 2.40 2.40 6.
2.50 2.50 0 0 1.45 1.45 4.30 4.30 1.00 1.00 1.20 1.20 2.00 2.00 4.05 4.05 2.00 2.00 2.05 2.05 4.00 4.00 1.40 1.40 2.10 2.10 0 0 1.45 1.45 4.
1.55 1.55 1.45 1.45 0 0 4.15 4.15 1.10 1.10 1.25 1.25 0.55 0.55 3.45 3.45 1.45 1.45 0.45 0.45 3.25 3.25 1.10 1.10 2.40 2.40 1.45 1.45 0 0 4.
2.55 2.55 4.30 4.30 4.15 4.15 0 0 4.10 4.10 5.00 5.00 4.45 4.45 0.55 0.55 3.00 3.00 4.00 4.00 1.40 1.40 3.35 3.35 6.10 6.10 4.30 4.30 4.15 4.15 0
2.15 2.15 1.00 1.00 1.10 1.10 4.10 4.10 0 0 1.15 1.15 1.35 1.35 3.45 3.45 1.35 1.35 1.30 1.30 3.35 3.35 1.10 1.10 2.25 2.25 1.00 1.00 1.10 1.10 4.
2.55 2.55 1.20 1.20 1.25 1.25 5.00 5.00 1.15 1.15 0 0 1.25 1.25 4.35 4.35 2.25 2.25 1.50 1.50 4.20 4.20 1.55 1.55 1.35 1.35 1.20 1.20 1.25 1.25 5.
2.20 2.20 2.00 2.00 0.55 0.55 4.45 4.45 1.35 1.35 1.25 1.25 0 0 4.15 4.15 2.15 2.15 1.10 1.10 3.50 3.50 1.40 1.40 2.25 2.25 2.00 2.00 0.55 0.55 4.
2.25 2.25 4.05 4.05 3.45 3.45 0.55 0.55 3.45 3.45 4.35 4.35 4.15 4.15 0 0 2.30 2.30 3.30 3.30 1.15 1.15 3.05 3.05 5.45 5.45 4.05 4.05 3.45 3.45 0.
1.25 1.25 2.00 2.00 1.45 1.45 3.00 3.00 1.35 1.35 2.25 2.25 2.15 2.15 2.30 2.30 0 0 1.35 1.35 2.25 2.25 1.00 1.00 3.35 3.35 2.00 2.00 1.45 1.45 3.
1.55 1.55 4.00 4.00 3.25 3.25 1.40 1.40 3.35 3.35 4.20 4.20 3.50 3.50 1.15 1.15 2.25 2.25 3.05 3.05 0 0 2.50 2.50 5.35 5.35 4.00 4.00 3.25 3.25 1.
4.10 4.10 2.10 2.10 2.40 2.40 6.10 6.10 2.25 2.25 1.35 1.35 2.25 2.25 5.45 5.45 3.35 3.35 3.00 3.00 5.35 5.35 3.05 3.05 0 0 2.10 2.10 2.40 2.40 6.
2.50 2.50 0 0 1.45 1.45 4.30 4.30 1.00 1.00 1.20 1.20 2.00 2.00 4.05 4.05 2.00 2.00 2.05 2.05 4.00 4.00 1.40 1.40 2.10 2.10 0 0 1.45 1.45 4.
1.55 1.55 1.45 1.45 0 0 4.15 4.15 1.10 1.10 1.25 1.25 0.55 0.55 3.45 3.45 1.45 1.45 0.45 0.45 3.25 3.25 1.10 1.10 2.40 2.40 1.45 1.45 0 0 4.
2.55 2.55 4.30 4.30 4.15 4.15 0 0 4.10 4.10 5.00 5.00 4.45 4.45 0.55 0.55 3.00 3.00 4.00 4.00 1.40 1.40 3.35 3.35 6.10 6.10 4.30 4.30 4.15 4.15 0
2.15 2.15 1.00 1.00 1.10 1.10 4.10 4.10 0 0 1.15 1.15 1.35 1.35 3.45 3.45 1.35 1.35 1.30 1.30 3.35 3.35 1.10 1.10 2.25 2.25 1.00 1.00 1.10 1.10 4.
2.55 2.55 1.20 1.20 1.25 1.25 5.00 5.00 1.15 1.15 0 0 1.25 1.25 4.35 4.35 2.25 2.25 1.50 1.50 4.20 4.20 1.55 1.55 1.35 1.35 1.20 1.20 1.25 1.25 5.
2.20 2.20 2.00 2.00 0.55 0.55 4.45 4.45 1.35 1.35 1.25 1.25 0 0 4.15 4.15 2.15 2.15 1.10 1.10 3.50 3.50 1.40 1.40 2.25 2.25 2.00 2.00 0.55 0.55 4.
2.25 2.25 4.05 4.05 3.45 3.45 0.55 0.55 3.45 3.45 4.35 4.35 4.15 4.15 0 0 2.30 2.30 3.30 3.30 1.15 1.15 3.05 3.05 5.45 5.45 4.05 4.05 3.45 3.45 0.
1.25 1.25 2.00 2.00 1.45 1.45 3.00 3.00 1.35 1.35 2.25 2.25 2.15 2.15 2.30 2.30 0 0 1.35 1.35 2.25 2.25 1.00 1.00 3.35 3.35 2.00 2.00 1.45 1.45 3.
1.55 1.55 4.00 4.00 3.25 3.25 1.40 1.40 3.35 3.35 4.20 4.20 3.50 3.50 1.15 1.15 2.25 2.25 3.05 3.05 0 0 2.50 2.50 5.35 5.35 4.00 4.00 3.25 3.25 1.
4.10 4.10 2.10 2.10 2.40 2.40 6.10 6.10 2.25 2.25 1.35 1.35 2.25 2.25 5.45 5.45 3.35 3.35 3.00 3.00 5.35 5.35 3.05 3.05 0 0 2.10 2.10 2.40 2.40 6.
2.50 2.50 0 0 1.45 1.45 4.30 4.30 1.00 1.00 1.20 1.20 2.00 2.00 4.05 4.05 2.00 2.00 2.05 2.05 4.00 4.00 1.40 1.40 2.10 2.10 0 0 1.45 1.45 4.
1.55 1.55 1.45 1.45 0 0 4.15 4.15 1.10 1.10 1.25 1.25 0.55 0.55 3.45 3.45 1.45 1.45 0.45 0.45 3.25 3.25 1.10 1.10 2.40 2.40 1.45 1.45 0 0 4.
2.55 2.55 4.30 4.30 4.15 4.15 0 0 4.10 4.10 5.00 5.00 4.45 4.45 0.55 0.55 3.00 3.00 4.00 4.00 1.40 1.40 3.35 3.35 6.10 6.10 4.30 4.30 4.15 4.15 0
2.15 2.15 1.00 1.00 1.10 1.10 4.10 4.10 0 0 1.15 1.15 1.35 1.35 3.45 3.45 1.35 1.35 1.30 1.30 3.35 3.35 1.10 1.10 2.25 2.25 1.00 1.00 1.10 1.10 4.
2.55 2.55 1.20 1.20 1.25 1.25 5.00 5.00 1.15 1.15 0 0 1.25 1.25 4.35 4.35 2.25 2.25 1.50 1.50 4.20 4.20 1.55 1.55 1.35 1.35 1.20 1.20 1.25 1.25 5.
2.20 2.20 2.00 2.00 0.55 0.55 4.45 4.45 1.35 1.35 1.25 1.25 0 0 4.15 4.15 2.15 2.15 1.10 1.10 3.50 3.50 1.40 1.40 2.25 2.25 2.00 2.00 0.55 0.55 4.
2.25 2.25 4.05 4.05 3.45 3.45 0.55 0.55 3.45 3.45 4.35 4.35 4.15 4.15 0 0 2.30 2.30 3.30 3.30 1.15 1.15 3.05 3.05 5.45 5.45 4.05 4.05 3.45 3.45 0.
1.25 1.25 2.00 2.00 1.45 1.45 3.00 3.00 1.35 1.35 2.25 2.25 2.15 2.15 2.30 2.30 0 0 1.35 1.35 2.25 2.25 1.00 1.00 3.35 3.35 2.00 2.00 1.45 1.45 3.
1.55 1.55 4.00 4.00 3.25 3.25 1.40 1.40 3.35 3.35 4.20 4.20 3.50 3.50 1.15 1.15 2.25 2.25 3.05 3.05 0 0 2.50 2.50 5.35 5.35 4.00 4.00 3.25 3.25 1.
4.10 4.10 2.10 2.10 2.40 2.40 6.10 6.10 2.25 2.25 1.35 1.35 2.25 2.25 5.45 5.45 3.35 3.35 3.00 3.00 5.35 5.35 3.05 3.05 0 0 2.10 2.10 2.40 2.40 6.
2.50 2.50 0 0 1.45 1.45 4.30 4.30 1.00 1.00 1.20 1.20 2.00 2.00 4.05 4.05 2.00 2.00 2.05 2.05 4.00 4.00 1.40 1.40 2.10 2.10 0 0 1.45 1.45 4.
1.55 1.55 1.45 1.45 0 0 4.15 4.15 1.10 1.10 1.25 1.25 0.55 0.55 3.45 3.45 1.45 1.45 0.45 0.45 3.25 3.25 1.10 1.10 2.40 2.40 1.45 1.45 0 0 4.
2.55 2.55 4.30 4.30 4.15 4.15 0 0 4.10 4.10 5.00 5.00 4.45 4.45 0.55 0.55 3.00 3.00 4.00 4.00 1.40 1.40 3.35 3.35 6.10 6.10 4.30 4.30 4.15 4.15 0
2.15 2.15 1.00 1.00 1.10 1.10 4.10 4.10 0 0 1.15 1.15 1.35 1.35 3.45 3.45 1.35 1.35 1.30 1.30 3.35 3.35 1.10 1.10 2.25 2.25 1.00 1.00 1.10 1.10 4.
2.55 2.55 1.20 1.20 1.25 1.25 5.00 5.00 1.15 1.15 0 0 1.25 1.25 4.35 4.35 2.25 2.25 1.50 1.50 4.20 4.20 1.55 1.55 1.35 1.35 1.20 1.20 1.25 1.25 5.
2.20 2.20 2.00 2.00 0.55 0.55 4.45 4.45 1.35 1.35 1.25 1.25 0 0 4.15 4.15 2.15 2.15 1.10 1.10 3.50 3.50 1.40 1.40 2.25 2.25 2.00 2.00 0.55 0.55 4.
2.25 2.25 4.05 4.05 3.45 3.45 0.55 0.55 3.45 3.45 4.35 4.35 4.15 4.15 0 0 2.30 2.30 3.30 3.30 1.15 1.15 3.05 3.05 5.45 5.45 4.05 4.05 3.45 3.45 0.
1.25 1.25 2.00 2.00 1.45 1.45 3.00 3.00 1.35 1.35 2.25 2.25 2.15 2.15 2.30 2.30 0 0 1.35 1.35 2.25 2.25 1.00 1.00 3.35 3.35 2.00 2.00 1.45 1.45 3.
1.55 1.55 4.00 4.00 3.25 3.25 1.40 1.40 3.35 3.35 4.20 4.20 3.50 3.50 1.15 1.15 2.25 2.25 3.05 3.05 0 0 2.50 2.50 5.35 5.35 4.00 4.00 3.25 3.25 1.
4.10 4.10 2.10 2.10 2.40 2.40 6.10 6.10 2.25 2.25 1.35 1.35 2.25 2.25 5.45 5.45 3.35 3.35 3.00 3.00 5.35 5.35 3.05 3.05 0 0 2.10 2.10 2.40 2.40 6.
2.50 2.50 0 0 1.45 1.45 4.30 4.30 1.00 1.00 1.20 1.20 2.00 2.00 4.05 4.05 2.00 2.00 2.05 2.05 4.00 4.00 1.40 1.40 2.10 2.10 0 0 1.45 1.45 4.
1.55 1.55 1.45 1.45 0 0 4.15 4.15 1.10 1.10 1.25 1.25 0.55 0.55 3.45 3.45 1.45 1.45 0.45 0.45 3.25 3.25 1.10 1.10 2.40 2.40 1.45 1.45 0 0 4.
2.55 2.55 4.30 4.30 4.15 4.15 0 0 4.10 4.10 5.00 5.00 4.45 4.45 0.55 0.55 3.00 3.00 4.00 4.00 1.40 1.40 3.35 3.35 6.10 6.10 4.30 4.30 4.15 4.15 0
2.15 2.15 1.00 1.00 1.10 1.10 4.10 4.10 0 0 1.15 1.15 1.35 1.35 3.45 3.45 1.35 1.35 1.30 1.30 3.35 3.35 1.10 1.10 2.25 2.25 1.00 1.00 1.10 1.10 4.
2.55 2.55 1.20 1.20 1.25 1.25 5.00 5.00 1.15 1.15 0 0 1.25 1.25 4.35 4.35 2.25 2.25 1.50 1.50 4.20 4.20 1.55 1.55 1.35 1.35 1.20 1.20 1.25 1.25 5.
2.20 2.20 2.00 2.00 0.55 0.55 4.45 4.45 1.35 1.35 1.25 1.25 0 0 4.15 4.15 2.15 2.15 1.10 1.10 3.50 3.50 1.40 1.40 2.25 2.25 2.00 2.00 0.55 0.55 4.
2.25 2.25 4.05 4.05 3.45 3.45 0.55 0.55 3.45 3.45 4.35 4.35 4.15 4.15 0 0 2.30 2.30 3.30 3.30 1.15 1.15 3.05 3.05 5.45 5.45 4.05 4.05 3.45 3.45 0.
1.25 1.25 2.00 2.00 1.45 1.45 3.00 3.00 1.35 1.35 2.25 2.25 2.15 2.15 2.30 2.30 0 0 1.35 1.35 2.25 2.25 1.00 1.00 3.35 3.35 2.00 2.00 1.45 1.45 3.
1.55 1.55 4.00 4.00 3.25 3.25 1.40 1.40 3.35 3.35 4.20 4.20 3.50 3.50 1.15 1.15 2.25 2.25 3.05 3.05 0 0 2.50 2.50 5.35 5.35 4.00 4.00 3.25 3.25 1.
4.10 4.10 2.10 2.10 2.40 2.40 6.10 6.10 2.25 2.25 1.35 1.35 2.25 2.25 5.45 5.45 3.35 3.35 3.00 3.00 5.35 5.35 3.05 3.05 0 0 2.10 2.10 2.40 2.40 6.
2.50 2.50 0 0 1.45 1.45 4.30 4.30 1.00 1.00 1.20 1.20 2.00 2.00 4.05 4.05 2.00 2.00 2.05 2.05 4.00 4.00 1.40 1.40 2.10 2.10 0 0 1.45 1.45 4.
1.55 1.55 1.45 1.45 0 0 4.15 4.15 1.10 1.10 1.25 1.25 0.55 0.55 3.45 3.45 1.45 1.45 0.45 0.45 3.25 3.25 1.10 1.10 2.40 2.40 1.45 1.45 0 0 4.
2.55 2.55 4.30 4.30 4.15 4.15 0 0 4.10 4.10 5.00 5.00 4.45 4.45 0.55 0.55 3.00 3.00 4.00 4.00 1.40 1.40 3.35 3.35 6.10 6.10 4.30 4.30 4.15 4.15 0
2.15 2.15 1.00 1.00 1.10 1.10 4.10 4.10 0 0 1.15 1.15 1.35 1.35 3.45 3.45 1.35 1.35 1.30 1.30 3.35 3.35 1.10 1.10 2.25 2.25 1.00 1.00 1.10 1.10 4.
2.55 2.55 1.20 1.20 1.25 1.25 5.00 5.00 1.15 1.15 0 0 1.25 1.25 4.35 4.35 2.25 2.25 1.50 1.50 4.20 4.20 1.55 1.55 1.35 1.35 1.20 1.20 1.25 1.25 5.
2.20 2.20 2.00 2.00 0.55 0.55 4.45 4.45 1.35 1.35 1.25 1.25 0 0 4.15 4.15 2.15 2.15 1.10 1.10 3.50 3.50 1.40 1.40 2.25 2.25 2.00 2.00 0.55 0.55 4.
2.25 2.25 4.05 4.05 3.45 3.45 0.55 0.55 3.45 3.45 4.35 4.35 4.15 4.15 0 0 2.30 2.30 3.30 3.30 1.15 1.15 3.05 3.05 5.45 5.45 4.05 4.05 3.45 3.45 0.
1.25 1.25 2.00 2.00 1.45 1.45 3.00 3.00 1.35 1.35 2.25 2.25 2.15 2.15 2.30 2.30 0 0 1.35 1.35 2.25 2.25 1.00 1.00 3.35 3.35 2.00 2.00 1.45 1.45 3.
1.55 1.55 4.00 4.00 3.25 3.25 1.40 1.40 3.35 3.35 4.20 4.20 3.50 3.50 1.15 1.15 2.25 2.25 3.05 3.05 0 0 2.50 2.50 5.35 5.35 4.00 4.00 3.25 3.25 1.
4.10 4.10 2.10 2.10 2.40 2.40 6.10 6.10 2.25 2.25 1.35 1.35 2.25 2.25 5.45 5.45 3.35 3.35 3.00 3.00 5.35 5.35 3.05 3.05 0 0 2.10 2.10 2.40 2.40 6.
2.50 2.50 0 0 1.45 1.45 4.30 4.30 1.00 1.00 1.20 1.20 2.00 2.00 4.05 4.05 2.00 2.00 2.05 2.05 4.00 4.00 1.40 1.40 2.10 2.10 0 0 1.45 1.45 4.
1.55 1.55 1.45 1.45 0 0 4.15 4.15 1.10 1.10 1.25 1.25 0.55 0.55 3.45 3.45 1.45 1.45 0.45 0.45 3.25 3.25 1.10 1.10 2.40 2.40 1.45 1.45 0 0 4.
2.55 2.55 4.30 4.30 4.15 4.15 0 0 4.10 4.10 5.00 5.00 4.45 4.45 0.55 0.55 3.00 3.00 4.00 4.00 1.40 1.40 3.35 3.35 6.10 6.10 4.30 4.30 4.15 4.15 0
2.15 2.15 1.00 1.00 1.10 1.10 4.10 4.10 0 0 1.15 1.15 1.35 1.35 3.45 3.45 1.35 1.35 1.30 1.30 3.35 3.35 1.10 1.10 2.25 2.25 1.00 1.00 1.10 1.10 4.
2.55 2.55 1.20 1.20 1.25 1.25 5.00 5.00 1.15 1.15 0 0 1.25 1.25 4.35 4.35 2.25 2.25 1.50 1.50 4.20 4.20 1.55 1.55 1.35 1.35 1.20 1.20 1.25 1.25 5.
2.20 2.20 2.00 2.00 0.55 0.55 4.45 4.45 1.35 1.35 1.25 
```

Es importante señalar que al final de las secciones de conjuntos (**SETS**) y data (**DATA**) se tendrá que poner una leyenda de **ENDSETS** y **ENDDATA**, respectivamente.

Una vez declaradas todos los conjuntos y variables del problema, se enlistan las restricciones y función objetivo del problema. Se tomará en cuenta las restricciones descritas en el capítulo 2 pero ahora serán representadas como programación de Lingo.

Para la programación en Lingo se utilizaron dos funciones, **FOR** y **SUM**. La función SUM, como su nombre lo dice, hace la sumatoria de las variables y/o conjuntos que declares en la formulación, mientras que para el ciclo FOR, declara el número de iteraciones que se requiere para la formulación. Por ejemplo, en la formulación 2 descrita más abajo, se declara un ciclo For para cada Ciudad J, donde J nunca será igual a 1. Dentro del ciclo For, se declaran dos sumatorias, las cuales se irán sumando las variables $X_{I,J,K}$ donde el conjunto Ciudad (I) se irán sumando junto con el conjunto Aeronave (K) en una misma iteración.

```
MIN = @SUM( Pierna: BH*COSTO*X);

@For(Ciudad(I) :
@For(Aeronave(K) :
    X(I,I,K)=0;
);
);

@For(Ciudad(I) | I#EQ#1:
@For(Aeronave(K) :
@For(Ciudad(J) | J#GT#13:
    X(I,J,K)=0;
);
);
);
```

Ilustración 9 Declaración de función objetivo de VRP en Lingo

Para la restricción 2 del capítulo 2, se establece que cada nodo deberá ser visitado al exactamente una vez, exceptuando el nodo 1 (centro de distribución).

```
@For(Ciudad(J) | J#NE#1:
@Sum(Aeronave(K) :
@Sum(Ciudad(I) | I#NE#J:
    X(I,J,K))=1;
);
```

Ilustración 10 Cada nodo es visitado

En la Ilustración 11 Restricción para asegurar la salida para cada nodo se establece que cada nodo, así como es visitado exactamente una vez, tiene exactamente una salida.

```
@for(Ciudad(I) | I#NE#1:
@sum(Aeronave(K) :
@Sum(Ciudad(J) | J#NE#I:
X(I, J, K))=1;
);
```

Ilustración 11 Restricción para asegurar la salida para cada nodo

La restricción mostrada en la Ilustración 12 Relación de entrada y salida para cada nodo se asegura la entrada y salida para cada nodo. Para cada ciudad p y para cada aeronave k , se hace una sumatoria de $X_{I,p,K}$ de la ciudad I donde nunca será igual a p . Dicha sumatoria será igual a la sumatoria de la ciudad J , donde J nunca será igual a p , para la variable $X_{p,J,K}$.

```
@For (Ciudad(p) :
@For (Aeronave(K) :
@Sum (Ciudad(I) | I#NE#p: X(I,p,K))= @Sum(Ciudad(J) | J#NE#p: X(p,J,K)) ;
);
);
```

Ilustración 12 Relación de entrada y salida para cada nodo

En la siguiente restricción se asegura la entrega de la demanda para los clientes de entrega.

```
@FOR(city(J) | J#NE#1 #AND# J#LT#13:
@SUM(Ciudad(I) | I#NE#J #AND# I#LT#13:
U(I, J)) = @SUM(Ciudad(L) | L#NE#J: U(J, L)) + d(J);
);
```

Ilustración 13 Relación de precedencia asegurando el cumplimiento de la demanda de los clientes de entrega

En la restricción 6 del capítulo 2, se muestra la restricción de precedencia asegurando la demanda de recolecciones. En la Ilustración 14 Relación de precedencia para la demanda de recolecciones muestra la formulación en Lingo.

```
@For(Ciudad(J) | J#GT#12:
@sum( Ciudad(L) | L#NE#J #AND# L#GT#12: u(J, L)) + u(J, 1) =
d(J) | @Sum( Ciudad(I) | I#NE#1 #AND# I#NE#J: u(I, J));
);
```

Ilustración 14 Relación de precedencia para la demanda de recolecciones

La restricción 7 se muestra en la Ilustración 15 Restricción de carga para clientes de entrega y recolecciones donde se asegura que en los arcos de clientes de entrega a clientes de recolecciones la carga es igual a cero, asegurándose así que la demanda de entregas deberá ser satisfecha antes de comenzar la demanda de recolecciones.

```
@For( Ciudad(I) | I#LT#13 #AND# I#NE#1:
@Sum( Ciudad(J) | J#NE#I #AND# J#EQ#1 #AND# J#GT#12:
      U(I,J)=0;
);
```

Ilustración 15 Restricción de carga para clientes de entrega y recolecciones

La siguiente ilustración muestra la formulación en Lingo para la restricción 8 del capítulo 2.

```
@Sum( Ciudad(I) | I#NE#1: U(I,I))=0;
```

Ilustración 16 Restricción de carga en un mismo nodo

En la restricción 9 (Ilustración 17 Restricción de carga para los clientes de recolección) del capítulo 2, donde se menciona que la carga en cada arco de clientes de recolección es igual a la suma de la demanda para cada cliente de recolección.

```
@Sum( Ciudad (I) | I#GT#12: U(I,1) ) = @Sum(Ciudad(I) | I#GT#12: d(I));
```

Ilustración 17 Restricción de carga para los clientes de recolección

Para asegurar que en la salida de los aviones desde el centro de distribución se contemple toda la demanda de entregas, en la Ilustración 18 Restricción para el cumplimiento de demanda de entregas saliendo del centro de distribución se formula en Lingo la restricción 10 del capítulo 2

```
@Sum(Ciudad(I) | I#NE#1 #AND# I#LT#13: U(1,I))
= @Sum(Ciudad(J) | J#NE#1 #AND# J#LT#13: d(J));
```

Ilustración 18 Restricción para el cumplimiento de demanda de entregas saliendo del centro de distribución

Como dice la restricción 11 en el capítulo 2, con el fin de prevenir cualquier ruta que vaya a algún cliente de recolección desde el centro de distribución, en la Ilustración 19 Restricción de arco Centro de distribución a cliente de recolección se presenta el equivalente de la formulación en Lingo.


```

@For(Ciudad(J) | j#GT#12:
@sum( Aeronave(K):
      X(1,J,K)=0;
);

```

Ilustración 19 Restricción de arco Centro de distribución a cliente de recolección

En la Ilustración 20 Restricción de carga para la capacidad de vehículos se muestra la formulación en lingo para restringir la capacidad de los vehículos con la carga entre cada arco.

```

! (13)Restrict the vehicle load from customer i to j
|exceeding the capacity of the vehicle using the arc (i,j);
@For(Ciudad(I):
@For(Ciudad(J) | J#LT#13:
      U(I,J) <= @Sum(Aeronave(K): X(I,J,K) * (VCAP(K) -BH(I,J,K)+1));
);
);

```

Ilustración 20 Restricción de carga para la capacidad de vehículos

CAPÍTULO 4 ANÁLISIS DE RESULTADOS

Se tiene como objetivo del problema a estudiar encontrar una nueva configuración de rutas óptimas, contemplando las restricciones ya descritas en el capítulo 1 y 2 y las modificaciones realizadas para poder adecuar el problema teórico a una aplicación real.

Cabe mencionar que por contrato, el periodo donde únicamente se considera el cambio de configuración para la red aérea es desde mayo a octubre del 2018, por lo que de aquí en adelante se considerará el análisis únicamente para dicho periodo. Para los meses noviembre y diciembre ya se tenía un acuerdo previo para soportar la mayor demanda del año (*Peak Season*).

En un inicio, la empresa tenía una configuración de aviones donde tenían un costo diario de 87,967 unidades monetarias bajo el siguiente esquema de rutas y tipos de aeronaves:

Tabla 4 Resultado Empírico

Estructura de rutas	Aeronave	Horas por ruta	Costo diario
19 – 15 – 1 – 10 – 7	A	4.83	10,150
14 – 21 – 1 – 9 – 2	B	5.63	15,773
23 – 6 – 1 – 3 – 13	B	7.32	20,487
17 – 1 – 12 – 6 – 5	B	5.92	16,567
20 – 1 – 11 – 8	B	4.85	13,580
16 – 22 – 1 – 4	A	5.43	11,410

Bajo este esquema, se tienen un total de 33.98 horas de vuelo diarias, donde en promedio las rutas tienen un promedio de duración de 5.66 horas. El número de aeronaves utilizadas fueron seis, cuatro del tipo B y dos del tipo A.

La siguiente tabla muestra los resultados obtenidos aplicando el problema de ruteo de vehículos mediante el software lingo. La duración total del conjunto de rutas de 30.93 horas voladas con un costo de 80,757 unidades monetarias.

Tabla 5 Resultado utilizado método VRP

Estructura de rutas	Aeronave	Horas por ruta	Costo diario
14 – 17 – 1 – 3 – 6 – 2	B	6.56	18,377
16 – 20 – 1 – 8 – 4	B	4.93	13,813
21 – 1 – 9	B	2.33	6,533
19 – 15 – 1 – 10 – 7	A	4.83	10,150
22 – 1 – 11	A	3.53	7,420
23 – 18 – 1 – 12 – 5 – 13	B	8.74	24,463

Realizando la misma comparación para la solución empírica, se tiene un promedio de 5.16 horas de vuelo. El número de aeronaves utilizadas es el mismo que en la solución empírica.

El objetivo planteado donde se propuso disminuir el costo del sistema se cumplió, ya que comparando los resultados hay una reducción para las horas de vuelo de 3.05 horas diarias, teniendo un impacto positivo para el costo de 7,210 unidades monetarias al día.

La siguiente tabla describe las horas voladas por cada tipo de aeronave en cada una de las soluciones (empírica y del modelo VRP), así como el costo diario para cada tipo de aeronave.

Tabla 6 Comparación de horas de vuelo para cada tipo de aeronave

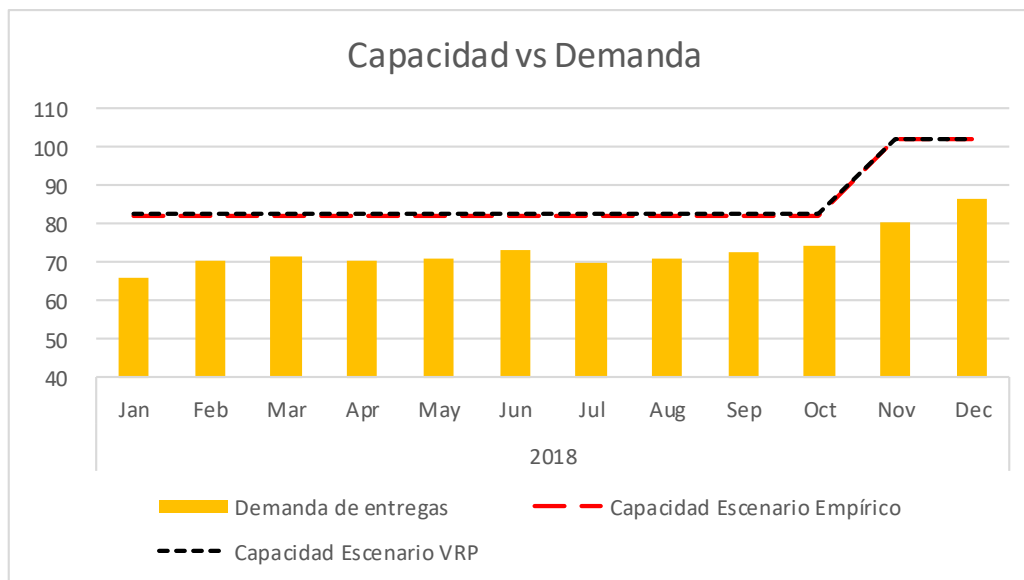
	Horas de vuelo		Costo Diario	
	Empírica	VRP	Empírica	VRP
Aeronave A	10.27 (30%)	8.37 (27%)	21,560 (25%)	17,570 (22%)
Aeronave B	23.72 (70%)	22.57 (73%)	66,407 (75%)	63,187 (78%)

Podemos observar que en la solución empírica las horas voladas con la aeronave tipo B representan el 69.8% de las horas totales, mientras que para la solución del VRP representan el 73%. Similar a la relación de horas voladas, en la solución empírica el costo por las aeronaves B utilizadas representa el 75%, mientras que en la solución del VRP representan el 78%. En ambos casos, el costo por utilizar la aeronave tipo B es mayor que el costo de la aeronave tipo A pero la aplicación del problema de ruteo de vehículos se tiene una mejor relación entre la capacidad, demanda, costo y horas de vuelo. El costo por kilo tuvo un efecto similar a las horas de vuelo, con una reducción del 8% respecto al CPK de la solución empírica.

Tabla 7 Comparación de costo por kilo para solución empírica vs solución de VRP

	Kilos	Costo diario	Costo por kilo
Solución Empírica	105,389	87,967	0.83
Solución VRP		80,757	0.77

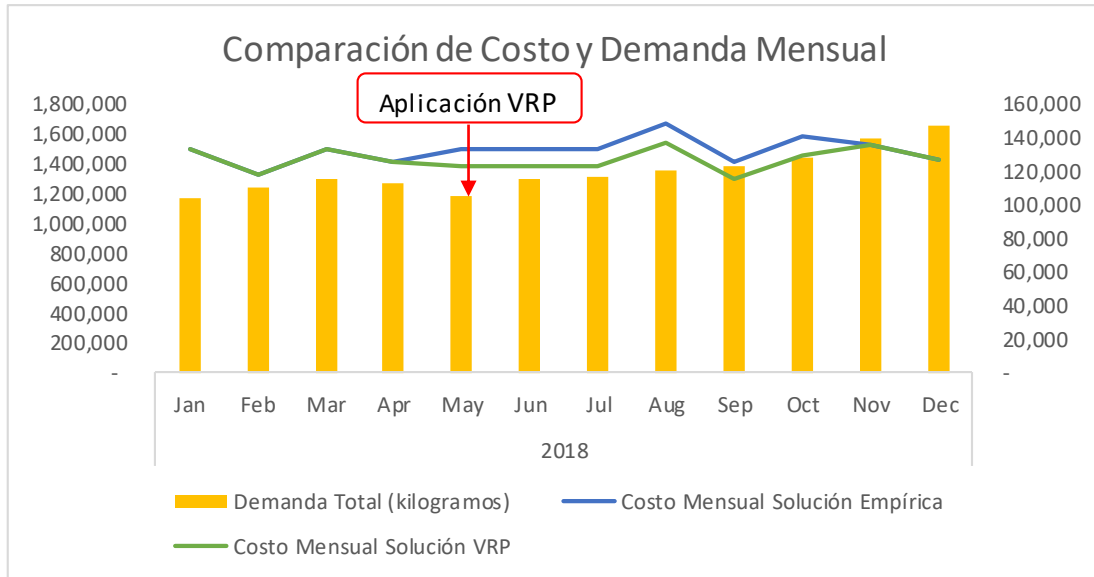
La siguiente gráfica muestra el resumen de la comparación anterior, observando un incremento de capacidad de 0.30%. También muestra que la demanda nunca sobrepasa la capacidad de cada una de las soluciones.



Gráfica 1 Comparación Demanda vs Capacidad en vehículos

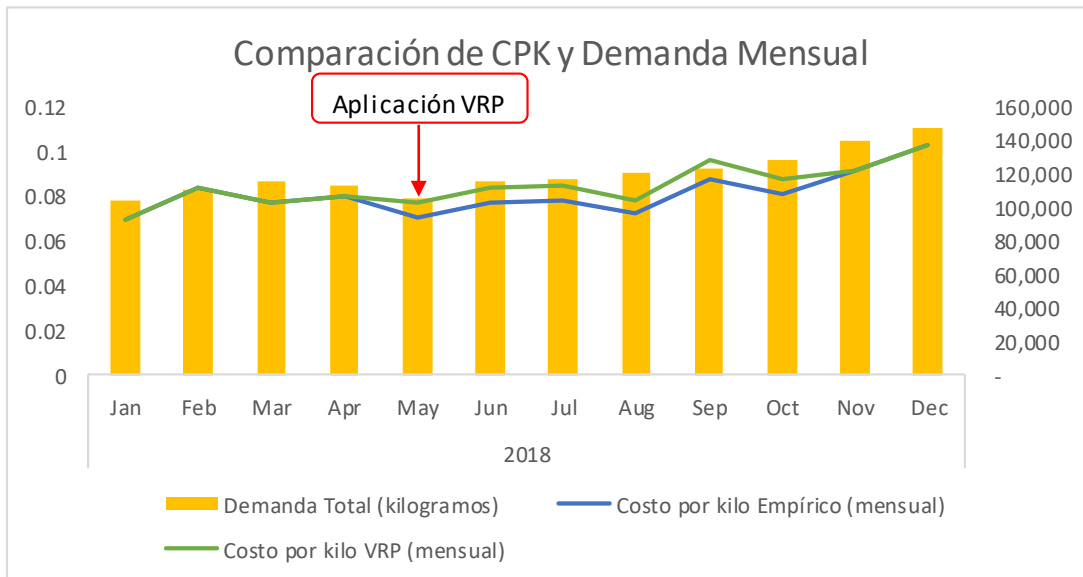
Similar a esta última comparación, también se el costo mensual. Debido al ahorro de 7,210 unidades diarias y considerando los días operativos de cada uno de los meses, el costo anual para la solución empírica es de 17, 818,567 mientras que el costo anual de la solución del modelo es de 17, 068, 727 calculando un ahorro anual

de 749,840 unidades monetarias. En la siguiente gráfica se puede mostrar la diferencia de costo mensual para todo el año 2018.



Gráfica 2 Comparación de Costo y Demanda Mensual

Por último, se realiza de manera gráfica una comparación para el costo por kilo mensual, aumentando el costo por kilo de 0.080 a 0.084 anual, esto es, haciendo la relación de 1, 433, 212 kilogramos anuales y 17, 818, 567 unidades monetarias para la solución empírica y para la solución del modelo 17, 068, 727 unidades monetarias. A continuación se muestra la comparación del costo por kilo mensual durante el año 2018.



Gráfica 3 Comparación de CPK y Demanda Mensual

Observando la Gráfica 2 y Gráfica 3, se puede observar que cuando el modelo propuesto entra en el mes de mayo, el costo anual y por lo tanto, el indicador costo por kilo se ven directamente afectados, esto es debido a la disminución de horas voladas al día descritas anteriormente en este mismo capítulo.

CONCLUSIONES E INVESTIGACIONES FUTURAS

La presente tesis tuvo como objetivo modelar la red aérea de una empresa de mensajería y paquetería, y minimizar el indicador costo por kilo. El primer objetivo significa que a partir de este momento, la empresa cuenta con una herramienta útil desarrollar futuras configuraciones y así agilizar los tiempos de análisis que anteriormente se llevaban a cabo para la planeación.

La disminución del costo por kilo fue una prueba que demuestra el ahorro obtenido durante los meses definidos, éste mismo radica en el número de horas voladas, ya que como se observó en el análisis de resultados, la relación para cada solución de horas voladas con aeronave A y horas voladas por aeronave B es similar, incluso para la solución de VRP aumenta la proporción de horas voladas por aeronave B de un 70% a 73%. Esto quiere decir que en la solución de VRP se voló mayor número de horas con las aeronaves B cubriendo la mayor cantidad de destinos, mientras que para las aeronaves A se redujo el número de destinos servidos por este tipo de aeronave.

Durante el desarrollo del problema descrito en este trabajo de tesis, se encontró una restricción propia de la operación real de la empresa, en la que se modifica la restricción sobre la capacidad de vehículos (descrito en la fórmula (13)", en el capítulo 2). Esta restricción tiene una afectación para cada nodo cliente, debido a que la capacidad cambia con relación a la distancia del destino próximo, mientras más cercano al centro de distribución esté, menor combustible se cargará y por lo tanto, se transportarán mayor cantidad de kilos en paquetes.

El problema de FSMVRPB inicialmente describe a dos conjuntos de clientes totalmente diferentes entre sí, uno de entregas y otro de recolecciones, lo que implicaba para el problema real interpretarlos de esta forma, a pesar de que en realidad se estén visitando los mismos aeropuertos (nodos) en diferente momento (entregas antes que las recolecciones).

Así como se encontraron algunas restricciones que no correspondían con el funcionamiento del sistema, existen algunas otras variables a ser consideradas, como: adición de ventanas de tiempo para cada cliente y para el centro de distribución, y demanda estocástica. También es importante señalar que este documento se enfocó solamente al transporte aéreo, teniendo la oportunidad de manejar sistemas terrestres, marítimo.

Las horas promedio voladas por mes son una restricción inherente al sistema a considerar, ya que para un buen aprovechamiento de los vehículos es recomendable que un vehículo realice al menos, dos paradas por cada ruta de entrega.

LISTA DE TABLAS Y FIGURAS

Ilustración 1 Diagrama Vehicle Routing Problem (Fuente: Propia elaboración)	8
Ilustración 2 Variantes de Vehicle Routing Problem (Fuente: Elaboración propia)	9
Ilustración 3 Ejemplo de Vehicle Routing Problem.....	11
Ilustración 4 Diagrama de Ramificación y Acotamiento (Fuente: Elaboración propia)	16
Ilustración 5 Diagrama de desarrollo e implementación para la creación de rutas aéreas (Muñuzuri et al, 2002)	25
Ilustración 6 Creación de nuevo documento en Lingo	35
Ilustración 7 Declaración de conjuntos y variables en Lingo	35
Ilustración 8 Declaración de dato para los conjuntos en Lingo.....	36
Ilustración 9 Declaración de función objetivo de VRP en Lingo	37
Ilustración 10 Cada nodo es visitado	37
Ilustración 11 Restricción para asegurar la salida para cada nodo	38
Ilustración 12 Relación de entrada y salida para cada nodo	38
Ilustración 13 Relación de precedencia asegurando el cumplimiento de la demanda de los clientes de entrega.....	38
Ilustración 14 Relación de precedencia para la demanda de recolecciones	38
Ilustración 15 Restricción de carga para clientes de entrega y recolecciones.....	39
Ilustración 16 Restricción de carga en un mismo nodo.....	39
Ilustración 17 Restricción de carga para los clientes de recolección	39
Ilustración 18 Restricción para el cumplimiento de demanda de entregas saliendo del centro de distribución.....	39
Ilustración 19 Restricción de arco Centro de distribución a cliente de recolección.....	40
Ilustración 20 Restricción de carga para la capacidad de vehículos	40
Tabla 1 Demanda de Ciudades	21
Tabla 2 Características de aeronaves	22
Tabla 3 Matriz simétrica de horas de vuelo	23
Tabla 4 Resultado Empírico	41
Tabla 5 Resultado utilizado método VRP	42
Tabla 6 Comparación de horas de vuelo para cada tipo de aeronave	42
Tabla 7 Comparación de costo por kilo para solución empírica vs solución de VRP.....	43
Gráfica 1 Comparación Demanda vs Capacidad en vehículos	43
Gráfica 2 Comparación de Costo y Demanda Mensual	44
Gráfica 3 Comparación de CPK y Demanda Mensual	44

REFERENCIAS

1. B. Golden, S. Raghavan and E. Wasil. "The Vehicle Routing Problem: Latest Advances And New Challenges," 2008.
2. P. Toth and D. Vigo., "Models, relaxations and exact approaches for the capacitated vehicle routing problem," 1999, pp. 488-491.
3. R. Tavakkoli-Moghaddam, A.R. Saremi and M.S. Siaee, "A memetic algorithm for vehicle routing problem with backhauls", 2006.
4. J. Clauseen, "Branch and Bound Algorithms – Principles and Examples", 1999.
5. S. Salhi, N. Wassan, M. Hajarat., "The Fleet Size and Mix Vehicle Routing Problem with Backhauls: Formulation and Set Partitioning-Based Heuristics", 2013.
6. Taha, "Investigación de Operaciones", Quinta Edición 1992.
7. H. Lieberman, "Investigación de Operaciones", Séptima Edición, 2002.
8. J. Prawda, "Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones", Vol 1. Modelos determinísticos, 1999.
9. S. Ropke, D. Pisinger ,. "A Unified for a Large Class of Vehicle Routign Problems with Backhauls", 2004
10. C. Banhart, N. Krishnan, D. Kim, K. Ware., "Network Design for Express Shipment Delivery", 2001.
11. L. Cacceta, S. P. Hill., "Branch and Cut Methods for Optimization", Elsevier, 1999.
12. J. McCall., "Genetic algorithms for modelling and optimization", 2004, Elsevier
13. P. Pedregal., "Introduction to Optimization", Springer, 1963.

14. A. Lüer, M. Benavente, J. Bustos, B. Venegas., “El problema de rutas de vehículos: Extensiones y métodos de la resolución, estado del arte”, WORKSHOP INTERNACIONAL EIG2009, 2009.
15. N. Mohammadreza, O. Afshin, M. Takác, L. V. Snyder, “Reinforcement Learning for Solving the Vehicle Routing Problem”, Lehigh University.
16. G. Clarke y J. W. Wright, “Scheduling of Vehicles from a Central Depot to a number of Delivery Points”, 1962.
17. F. Glover., “Tabu Search Fundamentals and Uses”, University of Colorado, 1995.
18. S. R. Mora., “Un algoritmo de Branch and Cut para el problema de asignación de frecuencias en sistemas de radio punto a multipunto”, Universidad de Buenos Aires Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, 2010.
19. G. Desaulniers, J. Desrosiers, M. M Solomon., “Column Generation”, Springer, 2005
20. R. Martí, G. Reinelt, “The linear Ordering Problem, Exact and Heuristic Methods”, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.
21. J. Oesterle, T. Bauernhansl, “Exact Method for the vehicle routing problem with mixed linehaul and backhaul customers, heterogeneous fleet, time window and manufacturing capacity”, Elsevier, 2015.
22. J. Muñuzuri, J. Larrañeta. La logística urbana de mercancías: soluciones, modelado y evaluación, 2002.