



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
PROGRAMA DE DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

CUERPOS CONVEXOS CON MUCHAS SECCIONES ELÍPTICAS

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:  
ISAAC ARELIO RÍOS

DIRECTOR DE TESIS:  
LUIS MONTEJANO PEIMBERT  
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNIDAD JURQUILLA

CIUDAD DE MÉXICO

FEBRERO 2019



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	1
1.2. Descripción del problema . . . . .	4
1.3. Estructura de la tesis . . . . .	7
<b>2. Preliminares</b>	<b>9</b>
2.1. Convexidad . . . . .	9
2.2. Sistemas de líneas . . . . .	12
2.2.1. Líneas en el plano . . . . .	12
2.2.2. Líneas en $\mathbb{R}^n$ . . . . .	14
2.3. Superficies Cuádricas . . . . .	17
2.3.1. Cónicas . . . . .	17
2.3.2. Cuádricas . . . . .	19
2.4. Curvatura . . . . .	21
2.4.1. Direcciones principales y curvaturas principales . . . . .	22
2.4.2. El teorema de Euler . . . . .	23
<b>3. Resultados principales</b>	<b>27</b>
3.1. Dos secciones elípticas por un punto. . . . .	27
3.2. Cuatro secciones elípticas por un punto. . . . .	32



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Antecedentes

Un resultado muy conocido, no tan difícil de demostrar, establece que dado un cuerpo convexo  $K \in \mathbb{R}^n$ , si todas las secciones de la frontera de  $K$  determinadas por hiperplanos son elipsoides entonces  $\text{bd } K$  es un elipsoide [7].

En 1976 G.R. Burton [5] presenta la siguiente caracterización del elipsoide en el espacio euclidiano:

*Sean  $K$  un cuerpo convexo y  $p$  un punto en el espacio euclidiano  $\mathbb{R}^n$  tales que cada sección de  $K$ , distinta del vacío, determinada por un plano a través de  $p$  es una elipse. Entonces  $K$  es un elipsoide.*

En  $\mathbb{R}^3$  las hipótesis de Burton implican que esencialmente hay tantas secciones elípticas como puntos en la esfera.

El cuerpo  $A$  (Figura 1.1) siguiente resulta interesante porque su frontera no contiene ningún abierto que sea una cuádrica [1]. Sin embargo, si consideramos la línea  $L$  que pasa por el punto  $(0, 0, 1)$  en la dirección del vector  $(0, 1, 0)$  entonces  $L$  toca la frontera del convexo en el punto  $(0, 0, 1)$  y cada plano que contiene a  $L$  corta a  $\text{bd } A$  en una elipse.

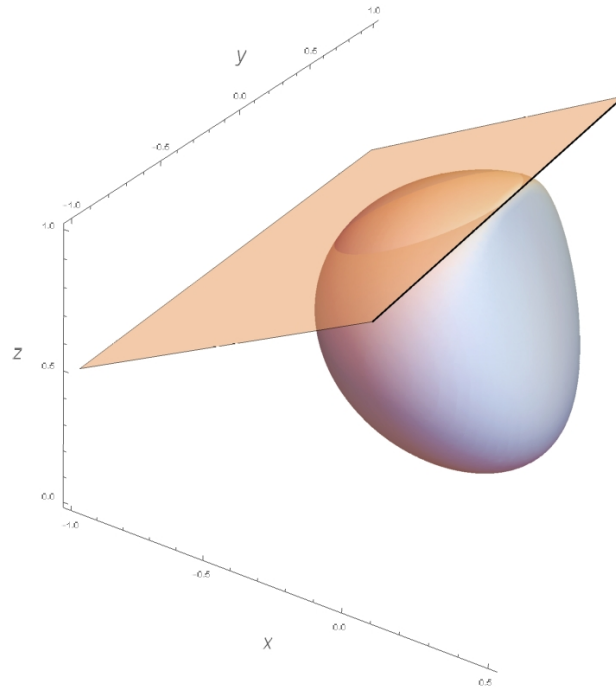


Figura 1.1

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2(x-1) + y^2(x+z-1) + z(x+z-1)^2 \geq 0 \text{ y } 2x+z \leq 1\}$$

El ejemplo anterior muestra que no es suficiente considerar todas las secciones que pasan por una línea para concluir que la frontera del cuerpo convexo es un elipsoide. Sin embargo, en 2006 Alonso y Martín [1] resuelven el problema considerando dos líneas. En el caso de  $\mathbb{R}^3$  el teorema dice lo siguiente:

*Sean  $K \subset \mathbb{R}^3$  un cuerpo convexo y  $L_1$  y  $L_2$  dos líneas tales que  $L_1$  tiene intersección vacía con el interior de  $K$ . Si todos los planos que contienen a  $L_i$ ,  $i = 1, 2$ , intersecan la frontera de  $K$  en una elipse entonces la frontera de  $K$  es un elipsoide.*

En 1987 P. M. Gruber y G. Bianchi [8] demuestran lo siguiente:

*Sea  $K$  un cuerpo convexo en el espacio euclidiano  $\mathbb{R}^3$  y supongamos que existe  $\alpha > 0$  tal que para cada  $L$  línea soporte de  $K$  hay un plano  $H$  tal que  $L \subset H$  y  $H \cap \text{bd} K$  es una elipse de área al menos  $\alpha$ . Entonces  $K$  es un elipsoide.*

En el teorema anterior para cada punto  $p$  en la frontera de  $K$  se tiene que, para cada línea soporte por  $p$ , hay un plano que contiene a la línea y corta la frontera del convexo en una elipse. Lo anterior significa que para cada punto  $p$  en la frontera de  $K$  se necesita una sección elíptica por cada dirección contenida en el plano soporte por  $p$ .

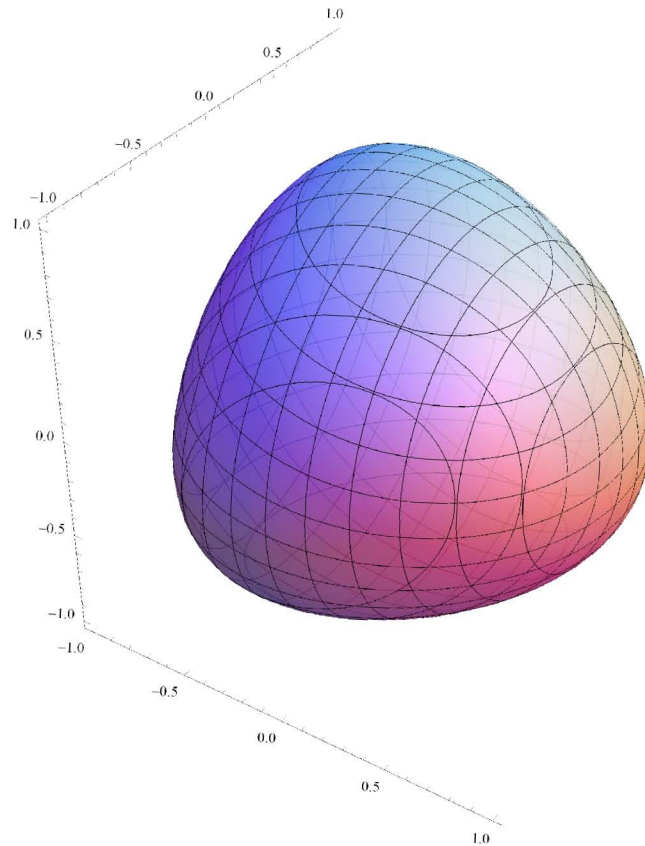


Figura 1.2

$$B = \{x^2 + y^2 + z^2 + xyz \leq 1 \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1\}$$

El cuerpo convexo  $B$  (Figura 1.2) es suave y tiene la propiedad de que todas las secciones planas paralelas a los planos  $x = 0$ ,  $y = 0$  y  $z = 0$  son secciones elípticas [2]. Esto significa que para cada punto en la frontera de  $B$  hay tres secciones elípticas transversales excepto para los puntos  $(\pm 1, 0, 0)$ ,  $(0, \pm 1, 0)$ ,  $(0, 0, \pm 1)$ .

Por otro lado, hay muchas caracterizaciones geométricas de la esfera en  $\mathbb{R}^3$  a través de secciones circulares. Por ejemplo, en [16] Nobuko Takeuchi demuestra el siguiente teorema:

*Sea  $M$  una superficie en  $\mathbb{R}^3$  simplemente conexa, completa y  $C^\infty$ . Supongamos que, a través de cada punto de  $M$ , existen tres círculos de  $\mathbb{R}^3$  contenidos en  $M$ . Entonces  $M$  es una esfera o un plano.*

Más adelante, la misma Takeuchi y Miyaoka demuestran en [17] el siguiente resultado:

*Una superficie en  $\mathbb{R}^3$  simplemente conexa, completa y  $C^2$  que contiene dos círculos transversales por cada punto debe ser un plano o una esfera.*



## 1.2. Descripción del problema

Una de las formas en las que se pueden generalizar los resultados presentados en la sección 1.1 es reducir la cantidad de secciones elípticas en las hipótesis del teorema. Esta tesis está motivada por el problema de determinar cuántas y bajo qué condiciones estas secciones elípticas permiten concluir que la frontera de un cuerpo convexo es un elipsoide.

Vamos a presentar dos ejemplos de cuerpos convexos con muchas secciones elípticas.

**Ejemplo 1.2.1.** *Consideremos el cuerpo convexo*

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 1 \text{ y } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

que es la intersección de dos bolas de radio 1 (Figura 1.3), cualquier línea  $L$  contenida en el plano  $z = \frac{1}{2}$  que no intersecta el interior de  $C$  satisface que todos los planos por  $L$  intersectan a la frontera del cuerpo en un círculo. Sin embargo  $C$  no es una esfera.

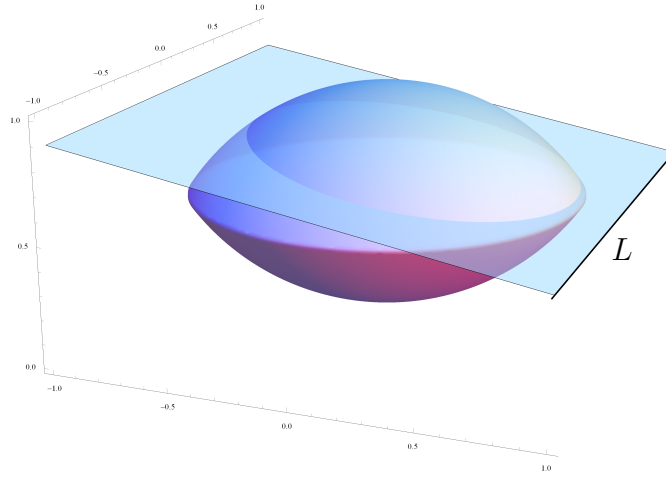


Figura 1.3

**Ejemplo 1.2.2.** *El cuerpo convexo*

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \text{ y } \frac{x^2}{4} + y^2 + 2z^2 \leq 1 \right\}$$

es la intersección de una bola de radio 1 con el cuerpo convexo cuya frontera es el elipsoide  $\frac{x^2}{4} + y^2 + 2z^2 = 1$  (Figura 1.4),  $D$  tiene la propiedad de que cualquier plano que contenga la línea  $L$  dada por  $x = z = 0$  intersecta a la frontera de  $D$  en una elipse o en un círculo pero  $D$  no es un elipsoide.

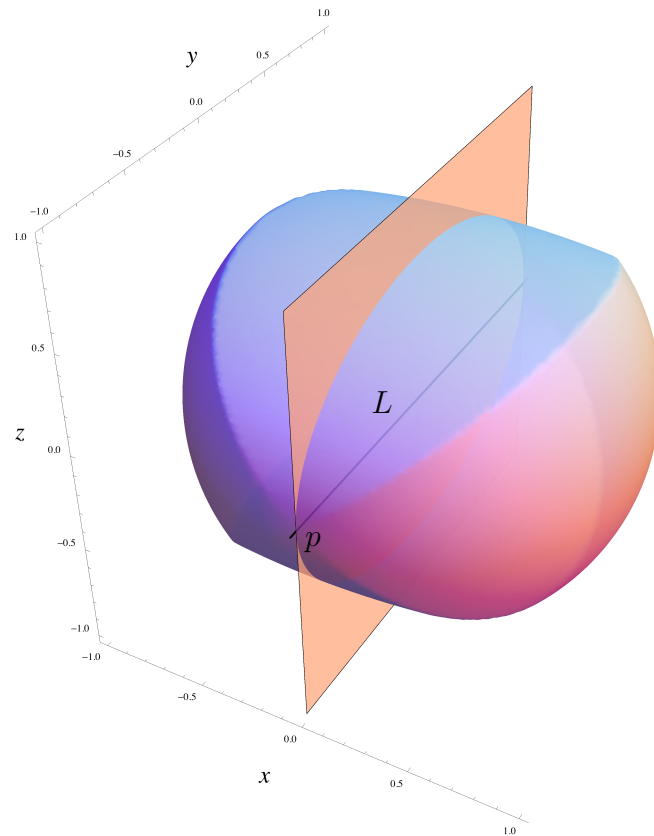


Figura 1.4

*Notemos que la línea  $L$  además de intersectar el interior de  $D$  intersecta su frontera en un punto  $p$  tal que en toda vecindad de  $p$  hay puntos en donde el cuerpo no es suave.*

En los ejemplos anteriores podemos cubrir la frontera de los convexos  $C$  y  $D$  con pedazos de superficies cuádricas. Sin embargo, los convexos no son suaves en los puntos de intersección de las superficies cuádricas.

Dado que un elipsoide es la imagen de una esfera bajo una transformación afín, es natural preguntarse si pueden darse caracterizaciones del elipsoide equivalentes a las de la esfera. Los resultados de Takeuchi utilizan una caracterización de la esfera basada en la noción de curvatura, esto es, las únicas superficies regulares totalmente umbílicas son los planos y las esferas. Sin embargo, no hay una caracterización equivalente para los elipsoides.

El teorema de Euler es un resultado sobre la curvatura de las superficies que establece, para cada punto en la superficie, la existencia de curvaturas principales asociadas a dos direcciones principales. La curvatura en cualquier dirección depende de las curvaturas

principales.

Por nuestra parte establecimos y demostramos un resultado que permite determinar la curvatura de una superficie diferenciable a partir de la curvatura en cualesquiera tres direcciones. Este resultado es importante para demostrar que si para cada punto  $p \in \text{bd } K$  existen cuatro secciones elípticas entonces  $K$  es un elipsoide.

**Teorema.** *Sea  $K \subset \mathbb{R}^3$  un cuerpo convexo con frontera  $C^2$ -diferenciable y sea  $\alpha > 0$ . Supongamos que para cada  $p \in \text{bd } K$  existen 4 planos  $H_{p_1}, H_{p_2}, H_{p_3}, H_{p_4}$  que satisfacen las siguientes condiciones:*

- $H_{p_j} \cap \text{bd } K$  es una elipse  $E_{p_j}$  con área mayor que  $\alpha$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ ,
- Para  $1 \leq i < j \leq 4$ , las elipses  $E_{p_i}$  y  $E_{p_j}$  no son tangentes.

*Entonces  $\text{bd } K$  es un elipsoide.*

Otro de nuestros principales resultados permite generalizar el teorema de Alonso y Martin en dimensión 3, esto es, las secciones por una línea  $L$  son suficientes cuando la superficie determinada por la frontera del convexo satisface ciertas condiciones de diferenciabilidad en una vecindad de  $L \cap \text{bd } K$ .

**Teorema.** *Sean  $K \subset \mathbb{R}^3$  un cuerpo convexo y  $L$  una línea que pasa por el interior de  $K$  tal que hay una vecindad de  $p \in L \cap \text{bd } K$  que es  $C^2$ -diferenciable. Si todas las secciones que contienen a  $L$  son elípticas entonces  $\text{bd } K$  es un elipsoide.*

También abordaremos el problema considerando las secciones que contienen cuerdas del cuerpo convexo. Por ejemplo las líneas diametrales han sido usadas para caracterizar cuerpos convexos centralmente simétricos [14] y también cuerpos de ancho constante [13].

Definiremos ciertas colecciones de líneas que pasan por el interior del convexo para demostrar lo siguiente:

**Teorema.** *Sea  $K \subset \mathbb{R}^3$  un cuerpo convexo y  $\alpha$  un número real positivo. Si existe  $\mathcal{L}$  un sistema de líneas continuo tal que el centro de  $\mathcal{L}$  está contenido en el interior de  $K$  y para cada  $L$  en  $\mathcal{L}$  existen planos  $H_1, H_2$  que determinan un ángulo de medida al menos  $\alpha$ ,  $H_1 \cap H_2 = L$  y  $K \cap H_i$  es una sección elíptica, para  $i = 1, 2$ . Entonces  $K$  es un elipsoide.*

El hecho de que para cada línea en  $\mathcal{L}$  hay dos secciones elípticas significa que hay dos secciones elípticas por cada punto en la frontera del cuerpo convexo.

Este resultado contrasta con el de Gruber y Bianchi [8] pues para cada punto en la frontera se necesitan sólo dos secciones elípticas para asegurar que el convexo es un elipsoide.

### 1.3. Estructura de la tesis

En el capítulo 2 presentaremos las definiciones y resultados importantes para esta tesis. Comenzaremos con la teoría de los cuerpos convexos en el espacio Euclidiano, nos concentraremos en los planos y las líneas asociados a los cuerpos convexos, más adelante introduciremos los sistemas de líneas en  $\mathbb{R}^2$  y definiremos los sistemas de líneas en  $\mathbb{R}^3$ . Además, revisaremos las propiedades de las superficies cuádricas que utilizaremos en la demostración de nuestros resultados principales. La última sección esta dedicada a la curvatura de las superficies y el teorema de Euler.

Finalmente, en el capítulo 3 expondremos las demostraciones de los resultados auxiliares y los resultados principales.



# Capítulo 2

## Preliminares

Trabajaremos en el espacio Euclidiano  $\mathbb{R}^n$ , esto es, el espacio real afín de dimensión finita cuyo espacio lineal asociado es el espacio vectorial real de dimensión  $n$ ; al producto interno usual lo denotaremos por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  y a la norma euclidiana la denotaremos por  $\| \cdot \|$ . También consideraremos a  $\mathbb{R}^n$  como espacio topológico con la topología usual, denotaremos al *interior*, la *cerradura* y la *frontera* de un conjunto en  $\mathbb{R}^n$  como *int*, *cl* y *bd*, respectivamente.

### 2.1. Convexidad

Aquí presentamos las nociones básicas de convexidad utilizadas en esta tesis, para la demostración de algunos resultados y la notación utilizada sigue los textos de P. M. Gruber[8] y S. R. Lay[10].

Llamaremos *cuerpo convexo* a un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  convexo, compacto y con interior distinto del vacío. Si la frontera del cuerpo convexo no contiene segmentos de línea diremos que es *estrictamente convexo*.

Si  $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^n$  es un subespacio lineal de dimensión  $m$ ,  $1 \leq m \leq n - 1$ , entonces para  $u \in \mathbb{R}^n$  el conjunto  $\mathcal{H} + u$  es llamado subespacio *afín de dimensión  $m$* . Consideraremos a las líneas en  $\mathbb{R}^n$  como subespacios afines de dimensión 1 mientras que a los de dimensión 2 les llamaremos *planos* y a los de dimensión  $n - 1$  *hiperplanos*; en otro caso, les llamaremos subespacios afines de dimensión  $k$ ,  $3 \leq k \leq n - 2$ .

Dado un conjunto  $S \subset \mathbb{R}^n$ , el *casco afín* de  $S$  es el subespacio afín de dimensión mínima que contiene a  $S$  y la dimensión de  $S$  es la *dimensión* de su casco afín.

Un hiperplano  $H = \mathcal{H} + p$  está determinado por una ecuación lineal y un vector  $u$

distinto del origen y ortogonal a  $\mathcal{H}$ :

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle p, u \rangle = \langle x, u \rangle\}.$$

En este caso diremos que  $H$  pasa por  $p$  y es ortogonal a  $u$ .

Al hiperplano  $H$  le asociamos dos subconjuntos cerrados de  $\mathbb{R}^n$  cuya frontera es  $H$ :

$$H_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle u, x \rangle \geq \langle u, p \rangle\} \text{ y } H_- = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle u, x \rangle \leq \langle u, p \rangle\}$$

a estos conjuntos les llamamos *semiespacios cerrados* determinados por  $H$ , de esta forma, diremos que  $u$  es un *vector normal exterior* de  $H$ .

**Definición 2.1.1.** *Dado un conjunto convexo  $C \subset \mathbb{R}^n$  y  $p \in \text{bd } C$ , un hiperplano  $H$  es un hiperplano soporte de  $C$  en  $p$  si  $p \in H$  y  $C$  está contenido en alguno de los semiespacios cerrados determinados por  $H$ .*

Cuando  $C$  es un conjunto estrictamente convexo y  $H$  es un plano soporte por  $p \in \text{bd } C$  se tiene que  $H \cap C = \{p\}$ .

El siguiente resultado sobre los cuerpos convexos fue probado por Carathéodory en 1907 y por Minkowski en 1910. Este resultado aparece como el Teorema 5.2 en [10].

**Teorema 2.1.1.** *Sea  $C \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo. Entonces por cada punto en la frontera de  $C$  pasa al menos un hiperplano soporte.*

Si un cuerpo convexo  $C \subset \mathbb{R}^n$  satisface que para cada  $p \in \text{bd } C$  el hiperplano soporte por  $p$  es único, diremos que  $C$  es un *cuerpo convexo suave*.

Un hiperplano soporte no es necesariamente único para cada  $p$  en la frontera de un cuerpo convexo. Sin embargo, un vector  $u \in \mathbb{S}^2$  determina de manera única un plano soporte ortogonal a  $u$ . Esta propiedad de los cuerpos convexos se verifica en la demostración del Teorema 4.1 en [8].

**Teorema 2.1.2.** *Sea  $C \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo y compacto. Entonces para cada dirección  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$  existe un único hiperplano soporte de  $C$  con vector normal exterior  $u$ .*

**Definición 2.1.2.** *Dado un conjunto convexo  $C \subset \mathbb{R}^n$  y  $p \in \text{bd } C$  a cualquier línea  $\ell$  por  $p$  tal que  $\ell \cap C \subset \text{bd } C$  la llamaremos línea soporte por  $p$ .*

**Definición 2.1.3.** *Sea un conjunto convexo  $C \subset \mathbb{R}^n$ ,  $p \in \text{bd } C$  y  $H$  un hiperplano soporte por  $p$ . Si  $u$  es el vector normal exterior de  $H$ , a la línea  $\ell$  que pasa por  $p$  en la dirección  $u$  le llamaremos línea normal a  $C$  por  $p$  en la dirección  $u$ .*

Por el Teorema 2.1.1 tenemos que para cada punto  $p$  en la frontera de un cuerpo convexo  $K \subset \mathbb{R}^n$ , existe al menos una línea normal a  $K$  por  $p$ . Si  $K$  es suave entonces la línea normal a  $K$  por  $p$  es única.

**Definición 2.1.4.** *Dado un conjunto convexo  $C \subset \mathbb{R}^n$ , sea  $H$  un subespacio afín de dimensión  $m$ ,  $1 \leq m \leq n - 1$ , tal que  $H \cap \text{int}C \neq \emptyset$ . En este caso diremos que  $H \cap C$  es una sección de  $C$  de dimensión  $m$ . Cuando  $m = 2$  diremos que  $H \cap C$  es una sección plana de  $C$  y cuando  $m = 1$  diremos que el segmento  $H \cap C$  es una cuerda de  $C$ .*

Está claro que todas las secciones de un conjunto convexo son conjuntos convexos. Además, si  $K \subset \mathbb{R}^n$  es un cuerpo convexo entonces cualquier sección de  $K$  de dimensión  $m$ , con  $1 < m < n$ , es un cuerpo convexo de dimensión  $m$ .

**Definición 2.1.5.** *Una cuerda de un conjunto convexo  $C \subset \mathbb{R}^n$  se llama cuerda diametral o diámetro afín de  $C$  si es una cuerda de longitud máxima paralela a una dirección dada.*

El resultado 2.1 de [14] demuestra que si  $p$  y  $q$  son los extremos de una cuerda diametral de  $C$  entonces los hiperplanos soporte por  $p$  y  $q$  son paralelos. Cuando dichos hiperplanos son perpendiculares a la cuerda diametral diremos que la cuerda es una *binormal*.

**Definición 2.1.6.** *Dado un conjunto convexo  $C \subset \mathbb{R}^n$ , si  $p$  y  $q$  son los extremos de una cuerda diametral de  $C$  entonces diremos que la línea que pasa por  $p$  y  $q$  es una línea diametral de  $C$ .*

Dos propiedades importantes de las cuerdas diametrales de un cuerpo convexo se establecen en el resultado 3.2 y en el resultado 3.3 de [14].

**Teorema 2.1.3.** *Sean  $K \subset \mathbb{R}^n$  un cuerpo convexo. Entonces se satisface lo siguiente:*

- a) *Si  $u$  es cualquier dirección en  $\mathbb{R}^n$  entonces hay una cuerda diametral de  $K$  paralela a  $u$*
- b) *Si  $p$  es cualquier punto de  $\text{bd} K$  entonces hay una cuerda diametral que contiene a  $p$*

Finalmente, definiremos una sección elíptica y presentaremos una propiedad de las secciones de los cuerpos convexos que será importante para nuestros resultados.

**Definición 2.1.7.** *Sea  $K \subset \mathbb{R}^n$  un cuerpo convexo y  $E$  una sección plana de  $K$ . Si  $\text{bd} E$  es una elipse diremos que  $E$  es una sección elíptica de  $K$ .*



**Definición 2.1.8.** Sean  $C \subset \mathbb{R}^n$  un cuerpo convexo y  $C_1$  y  $C_2$  secciones de  $C$  tales que  $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ . Diremos que  $C_1$  es transversal a  $C_2$  si  $\text{int}C_1 \cap \text{int}C_2 \neq \emptyset$ . Cuando  $C_1 \cap C_2 \subset \text{bd}C$  diremos que  $C_1$  es tangente a  $C_2$ .

El siguiente lema nos da un criterio para saber cuando  $C_1 \cap \text{bd}C$  y  $C_2 \cap \text{bd}C$  se intersectan en exactamente dos puntos; esto es, cuando  $C_1$  y  $C_2$  son transversales.

**Lema 2.1.4.** Sean  $C_1$  y  $C_2$  secciones planas de un cuerpo convexo  $C \subset \mathbb{R}^n$ , determinadas por los planos  $H_1$  y  $H_2$  respectivamente. Si  $C_1$  y  $C_2$  son secciones transversales entonces  $H_1 \cap H_2 \cap C$  es una cuerda de  $C$ ; si  $C_1$  y  $C_2$  son secciones tangentes entonces  $H_1 \cap H_2$  es una línea soporte de  $C$ .

*Demostración.* Sean  $C_1$  y  $C_2$  secciones transversales de  $C$ , por definición  $\text{int}C_1 \cap \text{int}C_2 \subset \text{int}C$  y como  $\text{int}C_1 \cap \text{int}C_2 \subset H_1 \cap H_2$  tenemos que  $L = H_1 \cap H_2$  pasa por el interior de  $C$ , entonces como la línea  $L$  pasa por un punto interior de  $C$  tenemos  $L \cap \text{bd}C = \{p, q\}$ , por lo tanto el segmento  $[p, q] = H_1 \cap H_2 \cap C$  es una cuerda de  $C$ .

Ahora, sean  $C_1$  y  $C_2$  secciones tangentes de  $C$  y  $L = H_1 \cap H_2$ , tenemos que  $L \cap C = C_1 \cap C_2$  y por definición  $C_1 \cap C_2$  está contenido en  $\text{bd}C$  entonces  $L$  es una línea soporte de  $C$ .

□

## 2.2. Sistemas de líneas

Siguiendo las ideas en [13] vamos a introducir el concepto de *sistema de líneas* que son un tipo especial de colecciones de líneas en el plano. Estos sistemas de líneas se usan en geometría convexa, por ejemplo, para el estudio de cuerpos de ancho constante y para ciertas caracterizaciones de cuerpos centralmente simétricos. Además extenderemos la noción de sistemas de líneas para líneas en  $\mathbb{R}^n$ .

### 2.2.1. Líneas en el plano

Recordemos que una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es Lipschitz si existe una constante  $c$  tal que para todo  $x$  y  $y$  se satisface  $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$ .

**Definición 2.2.1.** Sea  $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función Lipschitz tal que  $\rho(x + \pi) = -\rho(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Para  $u(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $0 \leq t < 2\pi$ , consideremos la línea

$$L_t = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle x, u(t) \rangle = \rho(t)\}.$$

Diremos que la colección  $\mathcal{L}$  de líneas  $L_t$  es un sistema de líneas exteriormente simple y a la función  $\rho$  le llamaremos la función pedal de  $\mathcal{L}$ .

**Ejemplo 2.2.1.** Sea  $K \subset \mathbb{R}^2$  un cuerpo convexo. El conjunto de líneas que dividen el área de  $K$  a la mitad son un sistema de líneas exteriormente simple, si  $K$  es estrictamente convexo entonces las líneas que contienen las cuerdas diametrales de  $K$  son otro ejemplo de éstas colecciones de líneas.

**Lema 2.2.1.** Dado un sistema de líneas exteriormente simple  $\mathcal{L}$  y  $p \in \mathbb{R}^2$  entonces existe una línea de  $\mathcal{L}$  que pasa por  $p$ .

*Demostración.* Supongamos que ninguna línea de  $\mathcal{L}$  pasa por  $p$ ; podemos asumir que, sin pérdida de generalidad, se satisface

$$\langle x, u(t) \rangle > \rho(t)$$

y esto implica que

$$\langle x, u(t + \pi) \rangle < \rho(t + \pi).$$

Entonces, por la continuidad de  $\rho$ , existe  $t_0 \in (t, t + \pi)$  tal que

$$\langle x, u(t_0) \rangle = \rho(t_0),$$

por lo tanto  $p \in L_{t_0}$ . □

El Teorema 4.3.1 en [13] nos da una caracterización de los sistemas de líneas exteriormente simples.

**Teorema 2.2.2.** Una colección  $\mathcal{L}$  de líneas en  $\mathbb{R}^2$  es exteriormente simple si y sólo si se satisfacen las siguientes condiciones:

- a) Existe exactamente una línea de  $\mathcal{L}$  ortogonal a cada dirección  $u \in \mathbb{S}^1$
- b) El conjunto de los puntos de intersección de cualesquiera dos líneas distintas de  $\mathcal{L}$  es un conjunto acotado

El nombre exteriormente simple se debe a que, para un círculo de radio suficientemente grande, por cada punto en el exterior del círculo pasa una y sólo una línea de  $\mathcal{L}$ .

El conjunto de puntos que son la intersección de dos líneas distintas de  $\mathcal{L}$  no necesariamente es un conjunto cerrado, puede no contener a todos sus puntos límite. Vamos a denotar  $I(\mathcal{L})$  a la cerradura de los puntos que son la intersección de dos líneas distintas de  $\mathcal{L}$ , entonces el conjunto  $I(\mathcal{L})$  es compacto. Al conjunto de puntos extremos de  $I(\mathcal{L})$  lo vamos a denotar  $Ext(\mathcal{L})$ .

**Observación 2.2.1.** Sea  $\mathcal{L}$  un sistema de líneas exteriormente simple. La condición sobre la función pedal de  $\mathcal{L}$  implica que para cada  $0 \leq t < \pi$  se tiene  $L_t = L_{t+\pi}$ , es decir, no hay dos líneas paralelas en  $\mathcal{L}$ . Entonces tres líneas en  $\mathcal{L}$  son concurrentes o se intersectan en tres puntos distintos, esto significa que  $I(\mathcal{L})$  consiste de un punto o no está contenido en una línea.

### 2.2.2. Líneas en $\mathbb{R}^n$

Ahora, para definir sistemas de líneas en  $\mathbb{R}^n$  vamos a considerar una función

$$\rho : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

tal que, a cada dirección  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$  le asigna  $\rho(u) \in \mathbb{R}^n$  de manera continua.

Así, para cada  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$  definimos la línea

$$L_u = \{\rho(u) + tu \mid t \in \mathbb{R}\}$$

y el hiperplano

$$u^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, u \rangle = 0\}.$$

Observemos que  $L_u$  es perpendicular a  $u^\perp$  y  $L_u \cap u^\perp$  es la proyección ortogonal de  $\rho(u)$  sobre  $u^\perp$ .

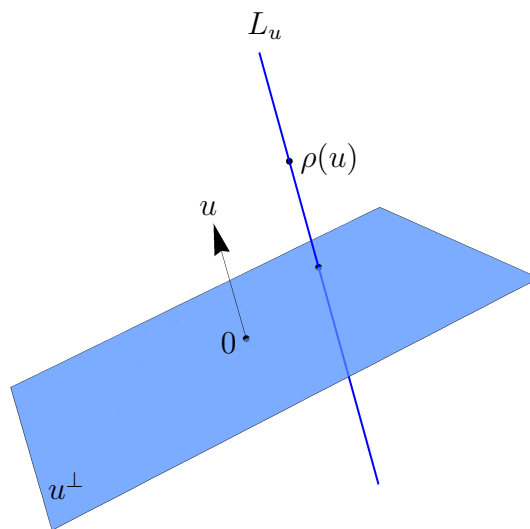


Figura 2.1

**Definición 2.2.2.** Dada una función continua  $\rho : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  si  $\rho(u) = \rho(-u)$  para todo  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$  entonces diremos que la colección  $\mathcal{L} = \{L_u \mid u \in \mathbb{S}^{n-1}\}$  es un sistema de líneas en  $\mathbb{R}^n$ .

De la definición anterior tenemos que dado un sistema de líneas  $\mathcal{L}$  para cada  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$  existe una única línea en  $\mathcal{L}$  paralela a  $u$ .

**Observación 2.2.2.** Dado un cuerpo estrictamente convexo  $K \subset \mathbb{R}^3$  si  $\mathcal{L}$  es la colección de las líneas que contienen las cuerdas diametrales de  $K$  entonces hay exactamente una línea en  $\mathcal{L}$  paralela a  $u \in \mathbb{S}^2$ . Por otro lado, para cada  $u \in \mathbb{S}^2$  tenemos que la línea en  $\mathcal{L}$  paralela a  $u$  coincide con la línea en  $\mathcal{L}$  paralela a  $-u$ .

**Definición 2.2.3.** Si  $\mathcal{L}$  es un sistema de líneas en  $\mathbb{R}^n$  al conjunto de los puntos que son la intersección de dos líneas distintas de la colección le llamaremos el centro de  $\mathcal{L}$ .

**Definición 2.2.4.** Dado un sistema de líneas  $\mathcal{L}$  definimos la función  $\delta : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que a cada vector  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$  le asignamos el punto  $\delta(u) \in L_u$  en donde se realiza la distancia del origen a la línea  $L_u$ . Si la función  $\delta$  es continua diremos que el sistema de líneas es continuo.

**Observación 2.2.3.** Sea  $\mathcal{L}$  la colección de las líneas normales de  $\mathbb{S}^2$ . son un sistema de líneas continuo. Para cada dirección hay únicamente una línea normal, además las líneas normales concurren en el centro de la esfera.

Los sistemas de líneas continuos tienen una propiedad que será importante para nuestros resultados, esto es, dada una línea  $L_u$  en  $\mathcal{L}$  existe una línea  $L_v \in \mathcal{L}$ , con  $u \neq v$ , tal que  $L_u$  y  $L_v$  tienen un punto en común.

**Lema 2.2.3.** Sea  $\mathcal{L}$  un sistema de líneas continuo en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces para cada  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$  existe  $v \in \mathbb{S}^{n-1}$  ortogonal a  $u$  tal que las líneas  $L_u$  y  $L_v$  tienen intersección no vacía.

*Demostración.* Consideremos el hiperplano  $u^\perp$  y supongamos sin pérdida de generalidad que

$$u^\perp = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$$

y que  $L_u$  pasa por el origen. Definimos  $\mathcal{L}_u$  como el conjunto de líneas que son la proyección ortogonal sobre  $u^\perp$  de todas las líneas en  $\mathcal{L}$  paralelas a  $u^\perp$ , de esta manera  $\mathcal{L}_u$  es un sistema de líneas en  $u^\perp$ .

Definimos la función  $g : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  de la siguiente manera: a cada dirección  $w \in \mathbb{S}^{n-1}$  le asignamos el número real  $\langle \tilde{w}, x_w \rangle$ , donde  $\tilde{w}$  es el vector perpendicular a  $w$  contenido en

$u^\perp$  y  $x_w$  es la proyección ortogonal sobre  $u^\perp$  del punto  $\delta(w)$ . Notemos que  $\tilde{w}$  y el vector posición del punto  $x_w$  son vectores paralelos.

Tenemos que  $g$  es una función antipodal y dada la continuidad de  $\delta$  tenemos que  $g$  es continua. Entonces por el Teorema de Borsuk-Ulam existe  $v \in \mathbb{S}^{n-1}$  tal que  $g(v) = 0$ , esto significa que  $\langle \tilde{v}, x_v \rangle = 0$  y esto implica que  $x_v$  es el vector cero.

De lo anterior podemos concluir que la proyección ortogonal de  $L_v \in \mathcal{L}$  sobre  $u^\perp$  pasa por el origen, por lo tanto  $L_v$  es una línea en  $\mathcal{L}$  que tiene intersección no vacía con  $L_u$

□

**Definición 2.2.5.** Dada una sucesión de puntos  $\{q_n\}$  en  $\mathbb{R}^n$  y una sucesión de vectores  $\{u_n\}$  en  $\mathbb{S}^{n-1}$ , sea  $\ell_n$  la línea que pasa por  $q_n$  en la dirección  $u_n$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = p$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$  diremos que la sucesión  $\{\ell_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a la línea  $\ell$  que pasa por  $p$  en la dirección  $u$ , y lo denotaremos por  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n = \ell$ .

Usando algunos argumentos de la demostración del Teorema 4.1 en [8] se puede deducir que una sucesión convergente de líneas normales converge a una línea normal y que una sucesión convergente de líneas diametrales converge a una línea diametral.

**Lema 2.2.4.** Sea  $K \in \mathbb{R}^n$  un cuerpo convexo suave y para cada  $n \in \mathbb{N}$  sea  $\ell_n$  la línea normal por  $p_n \in \text{bd } K$  con dirección  $u_n$ . Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u \neq 0$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p \in \text{bd } K$  entonces  $\{\ell_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a una línea normal de  $K$ .

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad supongamos que el origen está en  $\text{int } K$ . Sea  $n \in \mathbb{N}$ , por definición de línea normal tenemos que  $\ell_n$  pasa por el punto  $p_n \in \text{bd } K$  en la dirección  $u_n$  de tal manera que  $u_n$  es el vector normal exterior del plano soporte de  $K$  en  $p_n$ .

Sea  $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n$  entonces la línea  $\ell$  pasa por  $p$  en la dirección  $u$ . Para demostrar que  $\ell$  es la línea normal por  $p$  basta demostrar que  $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle u, x \rangle = \langle u, p \rangle\}$  es plano soporte de  $K$ .

Vamos demostrar que  $K$  está contenido en alguno de los subespacios determinados por  $H$ . Sea  $y \in K$ , sin pérdida de generalidad supongamos que  $\langle u_n, y \rangle \leq \langle u_n, p_n \rangle$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , de esta forma tomando el límite en ambos lados de la desigualdad obtenemos  $\langle u, y \rangle \leq \langle u, p \rangle$  por lo tanto  $y \in H_-$  o  $y \in H$ .

□

**Lema 2.2.5.** Sea  $K \in \mathbb{R}^3$  un cuerpo estrictamente convexo y suave,  $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{bd } K$  y para cada  $n \in \mathbb{N}$  sea  $\ell_n$  la línea diametral de  $K$  por  $p_n$ . Si la sucesión  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a

$p \in \text{bd } K$  entonces la sucesión de líneas diametrales  $\{\ell_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a la línea diametral por  $p$ .

*Demostración.* Por el Lema 2.1.3 sabemos que para cada  $n \in \mathbb{N}$  hay una línea diametral de  $K$  que pasa por  $p_n$ . Sea  $u_n$  el vector normal exterior unitario del plano soporte de  $K$  por  $p_n$ . Considerando una subsucesión y reenumerando, si es necesario, podemos suponer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$  para algún  $u \in \mathbb{S}^2$ . Por el Teorema 4.1 de [8] y como  $K$  es suave tenemos que el plano por  $p$  con normal exterior  $u$  es el plano soporte de  $K$  por  $p$ .

Ahora, para cada  $n \in \mathbb{N}$  sea  $q_n \in \text{bd } K$  tal que el segmento  $[p_n, q_n]$  es la cuerda diametral de  $K$  por  $p_n$ . De esta forma, para cada  $n \in \mathbb{N}$   $-u_n$  es el vector normal exterior del plano soporte de  $K$  por  $q_n$ , además tenemos  $\lim_{n \rightarrow \infty} -u_n = -u$

Tomando una subsucesión y reenumerando, en caso de ser necesario, podemos suponer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = q$  para algún  $q \in \text{bd } K$ . Por el Teorema 4.1 de [8] tenemos que el plano por  $q$  con vector normal exterior  $-u$  es el plano soporte de  $K$  por  $q$ . Entonces el segmento  $[p, q]$  es la cuerda diametral de  $K$  por  $p$ .

Finalmente, sea  $w_n = p_n - q_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = p - q$ . Como  $w_n$  es la dirección de la línea  $\ell_n$  por el Teorema 2.2.4 concluimos que las líneas diametrales por  $p_n$  convergen a la línea diametral por  $p$ .  $\square$

## 2.3. Superficies Cuádricas

En esta sección definiremos las superficies cuádricas y daremos algunas de las propiedades que serán importantes para los resultados que presentaremos más adelante. En [4] y los capítulos VI-IX de [11] se pueden consultar más propiedades geométricas de las cónicas y las superficies cuádricas.

### 2.3.1. Cónicas

Una *curva cuádrlica o cónica* es el conjunto de los puntos  $(x_1, x_2)$  en  $\mathbb{R}^2$  que satisfacen la ecuación

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{12}x_1x_2 + b_1x_1 + b_2x_2 + c = 0 \quad (2.1)$$

donde al menos uno de los coeficientes  $a_{11}$ ,  $a_{22}$ ,  $a_{12}$  es distinto de cero, entonces podemos asumir que en la ecuación 2.1 alguno de los coeficientes de los términos cuadráticos es igual a 1. La condición de que la cónica contenga un punto  $p$  determina una ecuación

lineal con cinco variables, de esta forma cinco puntos en el plano determinan de manera única una cónica. De la misma forma, la ecuación de la línea tangente a la cónica en un punto  $p$  determina una ecuación lineal con cinco variables.

Derivando la implícitamente la ecuación 2.1 respecto a la variable  $x_1$  obtenemos

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{2a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1}{a_{12}x_1 + 2a_{22}x_2 + b_2},$$

entonces la ecuación de la línea tangente a la cónica en el punto  $p = (p_1, p_2)$  está dada por

$$x_2 - p_2 = -\frac{2a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + b_1}{a_{12}p_1 + 2a_{22}p_2 + b_2}(x_1 - p_1)$$

y reescribiendo la ecuación anterior tenemos

$$2a_{11}x_1p_1 + 2a_{22}x_2p_2 + a_{12}(x_1p_2 + x_2p_1) + b_1x_1 + b_2x_2 = 2a_{11}p_1^2 + 2a_{22}p_2^2 + 2a_{12}p_1p_2 + b_1p_1 + b_2p_2.$$

Sumando  $b_1p_1 + b_2p_2 + 2c$  en ambos lados de la ecuación obtenemos

$$\begin{aligned} 2a_{11}x_1p_1 + 2a_{22}x_2p_2 + a_{12}(x_1p_2 + x_2p_1) + b_1(x_1 + p_1) + b_2(x_2 + p_2) + 2c = \\ = 2(a_{11}p_1^2 + a_{22}p_2^2 + a_{12}p_1p_2 + b_1p_1 + b_2p_2 + c), \end{aligned}$$

el punto  $(p_1, p_2)$  pertenece a la cónica entonces satisface la ecuación 2.1 y esto implica que la ecuación de la línea tangente a la cónica en el punto  $(p_1, p_2)$  se puede escribir como

$$a_{11}x_1p_1 + a_{22}x_2p_2 + a_{12}\left(\frac{x_1p_2 + x_2p_1}{2}\right) + b_1\left(\frac{x_1 + p_1}{2}\right) + b_2\left(\frac{x_2 + p_2}{2}\right) + c = 0. \quad (2.2)$$

Ahora vamos a establecer algunas condiciones que nos permiten determinar una cónica de manera única y que usaremos en los resultados principales.

**Lema 2.3.1.** Sean  $q_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , puntos en el plano de tal manera que no hay tres en una línea.

- a) Si consideramos la línea  $\ell$  determinada por los puntos  $q_1$  y  $q_5$  entonces existe una única cónica  $Q$  tal que  $q_i \in Q$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , y  $\ell$  es la línea tangente a  $Q$  en  $q_1$ .
- b) Si  $\ell_1$  es la línea que pasa por  $q_1$  y  $q_5$  y  $\ell_2$  es la línea que pasa por  $q_2$  y  $q_4$  entonces existe una única cónica  $Q$  tal que  $q_i \in Q$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $\ell_1$  es la tangente a  $Q$  en  $q_1$  y  $\ell_2$  es la tangente a  $Q$  en  $q_2$ .

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad podemos suponer que en la ecuación 2.1  $a_{22} = 1$ .

- a) Sustituimos en la ecuación 2.1 las variables  $x_1$  y  $x_2$  por las coordenadas de los puntos  $q_1, q_2, q_3$  y  $q_4$ , así obtenemos cuatro ecuaciones lineales en las cinco variables  $a_{11}, a_{12}, b_1, b_2$  y  $c$ . Ahora, sustituyendo las variables  $x_1$  y  $x_2$  en la ecuación 2.2 por las coordenadas del punto  $q_5$  obtenemos una ecuación lineal en las variables  $a_{11}, a_{12}, b_1, b_2$  y  $c$ . Entonces tenemos un sistema no homogéneo de cinco ecuaciones lineales con cinco incógnitas, como no hay tres puntos colineales tenemos que los coeficientes  $a_{11}, a_{12}, b_1, b_2$  y  $c$  están determinados de manera única, por lo tanto existe una única cónica  $Q$  tal que  $q_i \in Q, i = 1, 2, 3, 4$ .
- b) De la ecuación 2.1 y las coordenadas de los puntos  $q_1, q_2$  y  $q_3$  obtenemos tres ecuaciones lineales no homogéneas con las cinco variables  $a_{11}, a_{12}, b_1, b_2$  y  $c$  mientras que, de la ecuación 2.2 y las coordenadas de  $q_4$  y  $q_5$  obtenemos dos ecuaciones lineales no homogéneas con variables  $a_{11}, a_{12}, b_1, b_2$  y  $c$ . Como en la parte a) obtenemos un sistema no homogéneo que nos permite concluir que los coeficientes  $a_{11}, a_{12}, b_1, b_2$  y  $c$  están determinados de manera única y por lo tanto existe una cuádrlica  $Q$  tal que  $q_i \in Q, i = 1, 2, 3$ .

□

### 2.3.2. Cuádrlicas

En general las superficies cuádrlicas son los elipsoides, hiperboloides, paraboloides cilindros y conos; además de los casos degenerados como un par de planos paralelos. Vamos a presentar algunas propiedades de las superficies cuádrlicas sin embargo, centraremos nuestra atención en los elipsoides porque son la frontera de un cuerpo convexo.

Una *superficie cuadrática o cuádrlica* es el conjunto de los puntos  $(x_1, x_2, x_3)$  en  $\mathbb{R}^3$  que satisfacen la ecuación

$$\sum_{i,j=1}^3 a_{ij}x_i x_j + 2 \sum_{k=1}^3 b_k x_k + c = 0 \quad (2.3)$$

donde  $a_{ij} \neq 0$  para algún  $1 \leq i, j \leq 3$ .

La ecuación 2.3 contiene 10 términos, entonces la condición de que la cuádrlica pase a través del punto  $p \in \mathbb{R}^3$  determina una ecuación lineal en 10 variables. Ahora, la



condición de que la cuádrica pase a través de  $r$  puntos determina un sistema homogéneo de  $r$  ecuaciones lineales en 10 variables.

Por otro lado, al menos uno de los coeficientes de los términos cuadráticos de 2.3 debe ser distinto de cero, entonces podemos reducir el número de variables y obtener un sistema no homogéneo de  $r$  ecuaciones lineales en 9 variables.

Sabemos que si  $r \leq 9$  el sistema tiene una solución no trivial, entonces por cualesquiera 9 puntos en  $\mathbb{R}^3$  pasa al menos una cuádrica. Para  $r = 9$  si tomamos a los nueve puntos de tal manera que no haya tres colineales y no haya cuatro coplanares entonces el sistema de ecuaciones tiene solución única, por lo tanto una cuádrica está determinada de manera única por 9 puntos.

Así como en el caso de las cónicas podemos encontrar la ecuación del plano tangente a la cuádrica en el punto  $(p_1, p_2, p_3)$ . Derivando implícitamente encontramos las derivadas parciales de  $x_3$  respecto a  $x_1$  y a  $x_2$ , de esta forma obtenemos

$$x_3 - p_3 = -\frac{2a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{13}p_3 + 2b_1}{a_{13}p_1 + a_{23}p_2 + 2a_{33}p_3 + 2b_3}(x_1 - p_1) - \frac{a_{12}p_1 + 2a_{22}p_2 + a_{23}p_3 + 2b_2}{a_{13}p_1 + a_{23}p_2 + 2a_{33}p_3 + 2b_3}(x_2 - p_2),$$

despejando y sumando  $2b_1p_1 + 2b_2p_2 + 2b_3p_3 + 2c$  en ambos lados de la ecuación podemos escribir

$$\begin{aligned} &2a_{11}p_1 + 2a_{22}x_2p_2 + 2a_{33}x_3p_3 + a_{12}(x_1p_2 + x_2p_1) + a_{13}(x_1p_3 + x_3p_1) + \\ &+ a_{23}(x_2p_3 + x_3p_2) + 2b_1(x_1 + p_1) + 2b_2(x_2 + p_2) + 2b_3(x_3 + p_3) = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Ahora, vamos a establecer dos condiciones para determinar de manera única una cuádrica.

**Lema 2.3.2.** *Sean  $q_i, i = 1, \dots, 9$ , puntos en el espacio tales que no hay cuatro coplanares y no hay tres colineales.*

- a) *Sea  $H$  el plano determinado por  $q_7, q_8$  y  $q_9$  entonces existe una única cuádrica  $Q$  que tiene a  $H$  como plano tangente en  $q_9$  y  $q_i \in Q$  para  $i = 1, \dots, 6$*
- b) *Si  $H_1$  es el plano determinado por  $q_4, q_6$  y  $q_8$  y  $H_2$  es el plano que contiene a  $q_5, q_7, q_9$  entonces existe una única cuádrica  $Q$  tal que  $H_1$  es el plano tangente a  $Q$  en  $q_8$ ,  $H_2$  es el plano tangente a  $Q$  en  $q_9$  y  $q_i \in Q$  para  $i = 1, \dots, 3$ .*

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad podemos suponer que en la ecuación 2.3  $a_{22} = 1$ .

- a) En la ecuación 2.4 sustituimos las variables  $x_1, x_2$  y  $x_3$  por las coordenadas de los puntos  $q_7, q_8$  y  $q_9$  para obtener tres ecuaciones lineales cuyas variables son los nueve coeficientes de la ecuación 2.4. En la ecuación 2.3 sustituimos las variables por las coordenadas de los puntos  $q_i \in Q, i = 1, \dots, 6$ , así obtenemos seis ecuaciones lineales con las mismas nueve variables.

Entonces tenemos un sistema no homogéneo de nueve ecuaciones lineales con nueve variables. Como no hay tres puntos en una línea y no hay cuatro puntos en un plano, podemos concluir que los nueve coeficientes de la ecuación 2.3 están únicamente determinados.

Por lo tanto, existe una única cuádrica  $Q$  tal que  $q_i \in Q$  para  $i = 1, \dots, 6$  y el plano  $H$  es tangente a  $Q$  en  $q_9$ .

- b) En la ecuación 2.1 sustituimos las variables  $x_1, x_2$  y  $x_3$  por las coordenadas de los puntos  $q_1, q_2$  y  $q_3$  para obtener tres ecuaciones lineales no homogéneas de tal manera que las variables son los coeficientes de la ecuación 2.3, con la ecuación 2.4 y las coordenadas de  $q_4, q_6$  y  $q_8$  obtenemos tres ecuaciones lineales no homogéneas con las mismas variables, finalmente de la ecuación 2.4 y las coordenadas de los puntos  $q_5, q_7$  y  $q_9$  obtenemos tres ecuaciones lineales más.

Así como en la parte a) obtenemos un sistema no homogéneo que nos permite concluir que los coeficientes de la ecuación 2.1 están determinados de manera única y por lo tanto existe una cuádrica  $Q$  tal que  $q_i \in Q, i = 1, 2, 3$ .

□

Otra propiedad importante de las superficies cuádricas es que dada una cuádrica  $Q \subset \mathbb{R}^3$  y un plano  $H$  que pasa por el interior de  $Q$  entonces  $Q \cap H$  es una cónica.

## 2.4. Curvatura

En esta sección abordaremos la noción de curvatura de curvas y superficies a partir de la frontera de un cuerpo convexo. Seguiremos la notación de [12]

Sea  $C \subset \mathbb{R}^n$  un cuerpo estrictamente convexo cuya frontera es dos veces diferenciable y con curvatura positiva. Dada una orientación de la frontera de  $C$  definimos la función diferenciable  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \text{bd } C$  que a cada dirección  $u \in \mathbb{S}^1$  le asigna el punto  $p \in \text{bd } C$  de tal manera que  $u$  es el vector tangente unitario de  $\text{bd } C$  en  $p$ . Aunque la derivada  $df|_u$  es una

transformación lineal entre dos espacios vectoriales de dimensión uno, por conveniencia vamos a usar el símbolo  $df|_u$  para referirnos al valor absoluto de su determinante.

De esta forma, la curvatura  $\kappa_C(p)$  de  $\text{bd } C$  en  $p$  se puede calcular de manera sencilla tomando el inverso de  $df|_u$ . Esto es,

$$\kappa_C(p) = \frac{1}{df|_u}.$$

Si en lugar del vector tangente unitario consideramos el vector normal unitario, podemos llegar a la misma conclusión sobre la curvatura. Definimos  $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow \text{bd } C$  la *función de Gauss inversa* de tal manera que a cada dirección  $u \in \mathbb{S}^1$  le asigna el punto  $p = \gamma(u)$  en  $\text{bd } C$  tal que  $u$  es el vector normal exterior a  $\text{bd } C$  en el punto  $p$ . Entonces

$$\kappa_C(p) = \frac{1}{d\gamma|_u}.$$

Intuitivamente sabemos que la curvatura en un punto  $p \in \text{bd } C$  nos dice como está cambiando la longitud de la curva respecto a la longitud de  $\mathbb{S}^1$  en una vecindad del punto  $p$ .

Ahora, para el caso tridimensional, consideramos un cuerpo convexo  $C \in \mathbb{R}^3$  tal que su frontera es dos veces diferenciable. Intuitivamente podemos pensar en una definición similar al caso de dimensión dos, es decir, buscamos una función que describa como cambia el área de la superficie alrededor de  $p$  respecto al área de superficie de  $\mathbb{S}^2$ .

Sea  $u^\perp$  el subespacio ortogonal a  $u$ , la derivada de la función de Gauss inversa

$$\gamma : u^\perp \rightarrow u^\perp$$

es un endomorfismo lineal al que llamaremos la *función de Weingarten inversa*. Entonces definimos

$$\kappa_C(p) = \frac{1}{\text{Det}(d\gamma|_u)},$$

donde  $\text{Det}$  denota al determinante de la función de Weingarten inversa.

### 2.4.1. Direcciones principales y curvaturas principales

Para calcular  $\text{Det}(d\gamma|_u)$  es importante calcular e interpretar geoméricamente los eigenvalores y eigenvectores de este endomorfismo lineal.

Consideremos un punto  $p \in \text{bd } C$  con vector normal unitario  $u \in \mathbb{S}^2$ , es decir tal que  $p = \gamma(u)$ . Sea  $H$  un plano normal a  $C$  por  $p$  en la dirección de  $u$ , entonces existe una

dirección  $w \in \mathbb{S}^2$  que corresponde a un vector tangente a  $\text{bd } C$  en  $p$  contenido en  $H$ , esto es, el plano  $H$  es generado por las direcciones  $u$  y  $w$ . Sea  $\Pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow H$  la proyección ortogonal en la dirección perpendicular a  $w$ . De ésta forma, la frontera de  $\Pi(C)$  es una curva plana contenida en  $H$  que pasa por  $p$ . Cada dirección ortogonal a  $u$  determina una curva plana que pasa por  $p$ , denotemos  $\rho_w$  al radio de curvatura de  $\Pi(C)$  en  $p$ .

Como  $\Pi_\gamma : \mathbb{S}^2 \cap H \rightarrow H$  es una parametrización de la curva  $\text{bd } \Pi(C)$  y para cada  $v \in \mathbb{S}^2 \cap H$  el vector normal unitario de  $\Pi_\gamma(v)$  es precisamente  $v$ , tenemos que el radio de curvatura de  $\text{bd } \Pi(C)$  en  $u$  es la derivada de  $\Pi_\gamma : \mathbb{S}^2 \cap H \rightarrow H$ , que por definición es  $\langle d\gamma|_u(w), w \rangle$ . Por lo tanto

$$\rho_w = \langle d\gamma|_u(w), w \rangle.$$

A los valores máximo y mínimo de  $\rho_w$ , para las direcciones  $w$  ortogonales a  $u$ , los denotamos  $\rho_1$  y  $\rho_2$  y los llamamos los radios de curvatura principales en  $p$ . A las direcciones en donde alcanzan estos valores extremos les llamaremos direcciones principales.

De hecho tenemos la siguiente igualdad

$$\rho_w = \rho_1 \cos^2 \theta + \rho_2 \sin^2 \theta,$$

donde  $\theta$  es el ángulo formado por  $w$  y la dirección principal máxima.

Si  $v_1$  y  $v_2$  son los eigenvectores de  $d\gamma|_u$  y  $\lambda_1, \lambda_2$  sus respectivos eigenvalores entonces

$$d\gamma|_u(v_i) = \lambda_i v_i, \quad i = 1, 2,$$

esto implica que  $\rho_{v_i} = \langle d\lambda|_u(v_i), v_i \rangle = \lambda_i$  y por lo tanto  $\rho_i = \lambda_i$ , para  $i = 1, 2$ . Además,  $\theta$  es el ángulo entre  $w$  y la dirección principal máxima, entonces  $w = v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta$  y  $\rho_w = \langle v_1 \rho_1 \cos \theta + v_2 \rho_2 \sin \theta, v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta \rangle = \rho_1 \cos^2 \theta + \rho_2 \sin^2 \theta$ .

Por lo anterior tenemos que los radios de curvatura principales son los eigenvalores de la función de Weingarten inversa; más aún, tenemos que

$$\text{Det}(\gamma|_u) = \rho_1 \rho_2$$

y entonces

$$\kappa_C(p) = \frac{1}{\rho_1 \rho_2}.$$

### 2.4.2. El teorema de Euler

Estamos interesados en la curvatura de las secciones normales de  $\text{bd } C$ , para esto consideramos la función de Gauss  $\Gamma : \text{bd } C \rightarrow \mathbb{S}^2$ , que asigna continuamente a cada

punto  $p \in \text{bd } C$  el vector normal correspondiente; su derivada  $d\Gamma|_p$  es un endomorfismo lineal conocido como la función de Weingarten.

El siguiente resultado es consecuencia del hecho de que  $\Gamma = \gamma^{-1}$ .

**Teorema 2.4.1.** *Los eigenvalores y eigenvectores de la función de Weingarten son las curvaturas principales  $1/\rho_1$  y  $1/\rho_2$  y las direcciones principales de  $\text{bd } C$  en  $p$ . Además, el determinante de  $d\Gamma|_p$  es igual a la curvatura Gaussiana de  $\text{bd } C$  en  $p$ .*

Sabemos que un plano normal por  $p \in \text{bd } C$  contiene al vector normal  $\Gamma(p)$  y está determinado por un vector tangente a  $C$  en  $p$ . Cada plano normal interseca a  $\text{bd } C$  en una curva a la que llamamos sección normal. Cada una de estas curvas que contienen a  $p$  dependen del plano normal y en general su curvatura en  $p$  será distinta para cada plano normal.

Queremos demostrar ahora que, si  $\kappa_1$  denota la curvatura normal máxima y  $\kappa_2$  denota la curvatura normal mínima, entonces estos valores extremos se alcanzan en las direcciones principales y que  $\kappa_1 = 1/\rho_1$  y  $\kappa_2 = 1/\rho_2$ . De ésta manera, la curvatura de cada sección normal está determinada por las direcciones y las curvaturas principales, es decir,  $\kappa_1 = 1/\rho_1$  y  $\kappa_2 = 1/\rho_2$ .

De lo anterior se concluye que la curvatura en  $p$  de cada sección normal está completamente determinada las curvaturas las direcciones principales. Para cada vector  $w$  tangente unitario a  $\text{bd } C$  en  $p$ , vamos a denotar  $\kappa_w$  a la curvatura de  $H \cap \text{bd } C$  en  $p$ , donde  $H$  es el vector normal determinado por  $\Gamma(p)$  y  $w$ .

**Teorema 2.4.2** (Teorema de Euler de la curvatura). *Sea  $C \subset \mathbb{R}^3$  un cuerpo convexo cuya frontera es dos veces diferenciable y sea  $p \in \text{bd } C$ . Entonces*

$$\kappa_w = \kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta,$$

donde  $\theta$  es el ángulo formado por  $w$  y la dirección principal máxima.

*Demostración.* Para cualquier plano normal  $H$  en la dirección  $w$ , consideremos la función

$$g : \text{bd } C \cap H \rightarrow \mathbb{S}^2 \cap H$$

de tal manera que para cada punto  $q \in \text{bd } C \cap H$  se define  $g(q) = \frac{\Pi\Gamma(q)}{|\Pi\Gamma(q)|}$ , donde  $\Pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow H$  es la proyección ortogonal sobre  $H$ . Observemos que el vector normal unitario de la curva  $\text{bd } C \cap H$  en  $q$  es precisamente  $g(q) \in H$  y entonces

$$dg|_p = \langle d\Gamma|_p(w), w \rangle = \kappa_w.$$

Si  $v_1$  y  $v_2$  son las direcciones principales entonces  $w = v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta$  y por el Teorema 2.4.1 tenemos  $d\Gamma|_p(w) = v_1 \kappa_1 \cos \theta + v_2 \kappa_2 \sin \theta$ . Por lo tanto  $\kappa_w = \kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta$ .

□

**Corolario 2.4.3.** *Sea  $C \subset \mathbb{R}^3$  un cuerpo convexo con frontera dos veces diferenciable,  $p \in \text{bd } C$ ,  $\kappa_C(p)$  la curvatura Gaussiana de  $\text{bd } C$  en  $p$  y  $w$  un vector unitario tangente a  $C$  en  $p$ . Entonces*

$$\frac{\kappa_w}{\rho_{\tilde{w}}} = \kappa_C(p),$$

donde  $\tilde{w}$  es el vector en el espacio tangente de  $C$  en  $p$  ortogonal a  $w$ .

*Demostración.* Sea  $w$  un vector tangente a  $C$  en  $p$ . Entonces

$$\frac{\kappa_w}{\kappa_C(p)} = \frac{\kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta}{\kappa_1 \kappa_2},$$

donde  $\theta$  es el ángulo entre  $w$  y la dirección principal máxima. Entonces

$$\frac{\kappa_w}{\kappa_C(p)} = \rho_2 \cos^2 \theta + \rho_1 \sin^2 \theta = \rho_1 \cos^2 \left( \theta + \frac{\pi}{2} \right) + \rho_2 \sin^2 \left( \theta + \frac{\pi}{2} \right) = \tilde{w}$$

□

Las curvas que resultan importantes en este trabajo son las cónicas y en particular las elipses. Salvo una traslación y una rotación del plano podemos parametrizar a una elipse  $E$  en el plano de la siguiente forma

$$\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t), 0 \leq t \leq 2\pi,$$

en donde  $a$  y  $b$  son las longitudes de los ejes principales de  $E$ . De esta forma, la curvatura de la elipse  $E$  en el punto  $\gamma(t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , esta dada por

$$\kappa(t) = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}} \tag{2.5}$$

**Observación 2.4.1.** *De la ecuación 2.5 podemos deducir que la curvatura en los extremos de los ejes es*

$$\kappa(0) = \kappa(\pi) = \frac{a}{b^2} \text{ y } \kappa(\pi/2) = \kappa(3\pi/2) = \frac{b}{a^2}$$

*De lo anterior concluimos que si dos elipses  $E_1$  y  $E_2$  tienen uno de sus ejes principales de longitud  $a$  y la curvatura en alguno de los extremos del eje es la misma para ambas elipses entonces  $E_1 = E_2$ .*



# Capítulo 3

## Resultados principales

Sea  $K$  un cuerpo convexo en el espacio euclidiano  $\mathbb{R}^3$  y supongamos que dado un número real  $\alpha > 0$  se satisface que para cada línea soporte  $L$  de  $K$  hay un plano  $H$  tal que  $L \subset H$  y  $H \cap \text{bd } K$  es una elipse de área al menos  $\alpha$ . Bianchi y Gruber demuestran en [8] que  $K$  debe ser un elipsoide. Esta caracterización requiere que para cada punto  $p$  en la frontera de  $K$  exista una cantidad infinita de secciones por el punto  $p$ .

En esta tesis estudiamos cuerpos convexos cuya frontera contiene una gran cantidad de elipses y a través de este estudio dimos algunas caracterizaciones del elipsoide en donde para cada punto  $p$  en la frontera de  $K$  existe una cantidad finita de secciones elípticas por  $p$ .

### 3.1. Dos secciones elípticas por un punto.

Para el cuerpo convexo

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 1 \text{ y } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\},$$

mostrado en la Ejemplo 1.2.1 es posible encontrar dos secciones elípticas por cada punto en su frontera. Si  $p \in \text{bd } C$  y  $p$  no pertenece al plano  $z = 1/2$  entonces consideramos dos líneas  $L_1$  y  $L_2$  contenidas en el plano  $z = 1/2$  entonces el plano  $H_1$  determinado por  $p$  y  $L_1$  y el plano determinado por  $p$  y  $L_2$  intersectan a  $\text{bd } C$  en círculos. Los puntos  $q \in \text{bd } C$  contenidos en el plano  $z = 1/2$  pertenecen al círculo de radio  $\sqrt{3}/2$  con centro en  $(0, 0, 1/2)$  contenido en  $z = 1/2$ , otra sección elíptica por  $q$  se obtiene considerando la línea  $L$  tangente en  $q$  al círculo, si  $q' \in \text{bd } C$  no pertenece al plano  $z = 1/2$  entonces  $p'$  y  $L$  determinan un plano que intersecta a  $\text{bd } C$  en un círculo.



Entonces es necesario imponer más condiciones para asegurar que dos secciones elípticas, por cada punto en la frontera del convexo, son suficientes para demostrar que la frontera del convexo es un elipsoide. Aquí es en donde utilizamos los sistemas de líneas en  $\mathbb{R}^3$ .

**Teorema 3.1.1.** *Sea  $K \subset \mathbb{R}^3$  un cuerpo convexo y  $\alpha$  un número real positivo. Si existe  $\mathcal{L}$  un sistema de líneas continuo tal que el centro de  $\mathcal{L}$  está contenido en el interior de  $K$  y para cada  $L$  en  $\mathcal{L}$  existen planos  $H_1, H_2$  que determinan un ángulo al menos  $\alpha$ ,  $H_1 \cap H_2 = L$  y  $K \cap H_i$  es una sección elíptica, para  $i = 1, 2$ . Entonces  $K$  es un elipsoide.*

*Demostración.* Sea  $p \in \text{bd } K$ , por hipótesis existe  $L \in \mathcal{L}$  y dos planos  $H_1$  y  $H_2$  tales que  $p \in L$ ,  $L = H_1 \cap H_2$  y  $E_i = K \cap H_i$  es una sección elíptica, para  $i = 1, 2$ .

Por el Lema 2.2.3 existe  $L_v \in \mathcal{L}$  tal que  $L \cap L_v$  es un punto en  $\text{int}K$  y al menos una de las secciones por  $v$  es distinta de  $E_1$  y  $E_2$ , llamemos a esta sección  $E_3$ . Además, como  $L$  y  $L_v$  se intersecan en el interior de  $K$  tenemos que la sección  $E_3$  es transversal a  $E_1$  y  $E_2$ , el Lema 2.1.4 implica que  $\text{bd } E_3$  tiene dos puntos en común con  $\text{bd } E_i$ , para  $i = 1, 2$ .

Vamos a verificar que existe una cuádrica que contiene a  $\text{bd } E_i$  para  $i = 1, 2, 3$ . Tomemos  $\text{bd } E_1 \cap \text{bd } E_2 = \{p, p'\}$  y para cada  $i = 1, 2$   $\text{bd } E_i \cap \text{bd } E_3 = \{p_{i3}, p'_{i3}\}$ . Además elegimos  $p_i \in \text{bd } E_i$  distinto de  $p, p', p_{i3}$  y  $p'_{i3}$  para  $i = 1, 2$  (Figura 3.1).

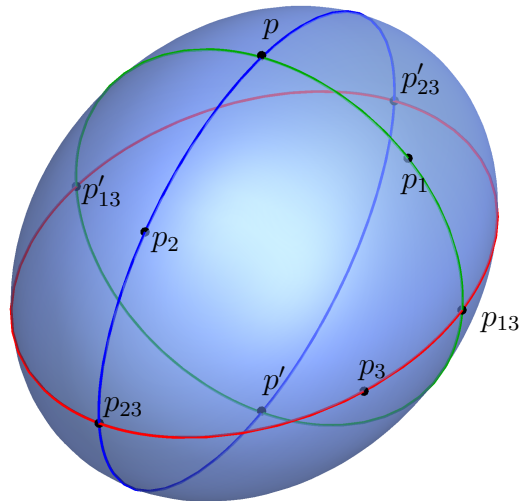


Figura 3.1

Sea  $H_p$  el plano soporte de  $K$  por  $p$  y  $H_{p'}$  el plano soporte de  $K$  por  $p'$ , consideremos  $p_4, p_5 \in H_p$  no colineales con  $p$  y  $p'_4, p'_5 \in H_{p'}$  no colineales con  $p'$ . Entonces por el Lema 2.3.2 los puntos  $p, p', p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p'_4$  y  $p'_5$  determinan una única cuádrica  $Q$ .

Sea  $\ell_i = H_p \cap H_i$  y  $\ell'_i = H_{p'} \cap H_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Entonces  $\ell_i$  es la línea tangente a  $\text{bd } E_i$  en  $p$  y  $\ell'_i$  es la línea tangente a  $\text{bd } E_i$  en  $p'$ . Esto implica que  $\text{bd } E_i$  y la cónica  $Q \cap H_i$  comparten línea tangente en  $p$  y  $p'$ , además tienen un punto en común  $p_i$ ; por el Lema 2.3.1 tenemos que  $\text{bd } E_i = Q \cap H_i$  y por lo tanto  $\text{bd } E_i \subset Q$ , para  $i = 1, 2, 3$ .

Ahora vamos a demostrar que existe  $\mathcal{N}$  vecindad de  $p$  tal que  $\text{bd } K \cap \mathcal{N}$  está contenida en  $Q$ . Supongamos que no existe tal vecindad, entonces existe una sucesión  $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  contenida en  $\text{bd } K \setminus Q$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = p$ .

Por definición, para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe una única línea en  $\mathcal{L}$  que pasa por  $q_n$ . Denotemos  $L_n$  a la línea de  $\mathcal{L}$  que pasa por  $q_n$ ,  $u_n$  el vector paralelo a  $L_n$  y  $u$  el vector paralelo a  $L$ ; por la continuidad de  $\delta$  las direcciones  $u_n$  convergen a  $u$  y dada la convergencia de la sucesión  $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  podemos concluir que las líneas  $L_n$  convergen a  $L$ .

Sea  $n \in \mathbb{N}$ , consideremos los planos  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  determinados por la línea  $L_n$  y  $p_{i3}$  y  $p_{i3}'$ , respectivamente (Figura 3.2). De esta manera, al ángulo que forman  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  le llamaremos  $\alpha_n$ .

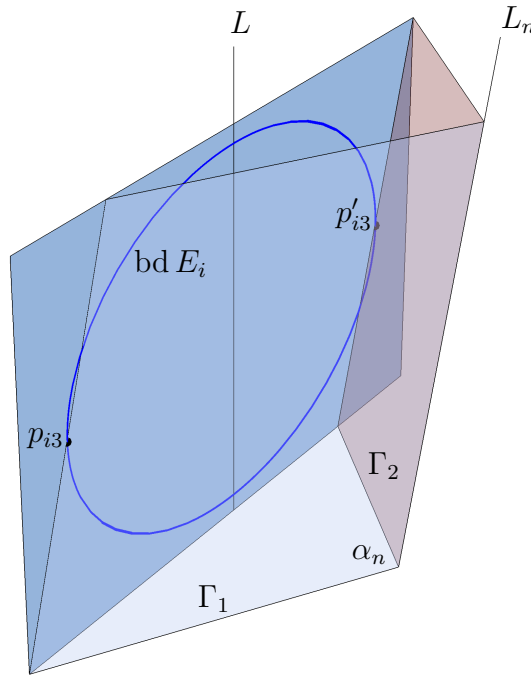


Figura 3.2

La convergencia de las líneas  $L_n$  implica  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ . Entonces existe  $k_i \in \mathbb{N}$  tal que para  $n \geq k_i$  se cumple  $\alpha_n < \alpha$ . Esto significa que al menos una de las secciones elípticas por  $q_n$  satisface que su frontera tiene dos puntos en común con  $bd E_i$ , distintos de  $p$  y  $p'$ , y también tiene dos puntos en común con  $bd E_3$ . De esta forma existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que para  $m > k$  hay un plano  $H_m$  que determina una sección elíptica  $F_m$  por  $q_m$  tal que  $bd F_m$  tiene cinco puntos en común con  $Q$ , entonces la elipse  $bd F_m$  y la cónica  $H_m \cap Q$  coinciden. Esto implica que  $q_m \in Q$  lo cual es una contradicción.

Por lo tanto existe una vecindad  $\mathcal{N}$  de  $p$  tal que  $\mathcal{N} \cap bd K \subset Q$ .

Como  $p$  es arbitrario podemos concluir que existe una cubierta abierta de  $bd K$ , donde cada elemento de la cubierta es un abierto de una cuádrica; la compacidad de  $K$  nos permite cubrir  $bd K$  con un número finito de estas vecindades. La conexidad de  $bd K$  implica que los elementos de la subcubierta finita tienen intersección no vacía. Por otro lado dos cuádricas que coinciden en un abierto relativo de  $bd K$  deben ser la misma cuádrica, entonces  $bd K$  es una cuádrica. Por lo tanto  $K$  es un elipsoide.

□

Si en la hipótesis del Teorema 3.1.1 consideramos la colección de líneas diametrales

de  $K$  entonces también podemos demostrar que  $\text{bd } K$  es un elipsoide. Para esto vamos a demostrar que una sucesión convergente de líneas diametrales converge a una línea diametral.

**Teorema 3.1.2.** *Sea  $K \subset \mathbb{R}^3$  un cuerpo estrictamente convexo y suave y  $\alpha$  un número real positivo. Supongamos que para cada línea diametral de  $K$  existen dos secciones elípticas las cuales determinan un ángulo al menos  $\alpha$ , entonces  $\text{bd } K$  es un elipsoide.*

*Demostración.* Sea  $p \in \text{bd } K$ , por el Lema 2.1.3 existe una línea diametral  $L$  por  $p$ . Por hipótesis existen dos planos  $H_1$  y  $H_2$  tales que  $L = H_1 \cap H_2$  y  $E_i = K \cap H_i$  es una sección elíptica,  $i = 1, 2$ .

Vamos a demostrar que existe una única cuádrlica  $Q$  tal que  $p \in Q$ .

Sea  $u$  la dirección perpendicular al plano  $H_1$ , por el Lema 2.1.3 existe una línea diametral  $L_u$  paralela a  $u$ . Si  $L_u$  pasa por el interior de  $E_1$  entonces las secciones elípticas  $F_1$  y  $F_2$  determinadas por  $L_u$  son transversales a  $E_1$  y los puntos en común de  $\text{bd } F_1$  con  $\text{bd } E_1$  son distintos de los puntos en común de  $\text{bd } F_2$  con  $\text{bd } E_1$ . Si la línea diametral interseca a la frontera de  $E_1$  entonces consideremos un punto  $p'$  en el interior de  $E_1$ ; por el Lema 2.1.3 existe una línea diametral  $L'$  que pasa por  $p'$ , entonces las secciones elípticas  $F'_1$  y  $F'_2$ , determinadas por  $L'$ , son transversales a  $E_1$  y si la línea  $L'$  no está contenida en  $H$  también se cumple que  $\text{bd } F'_1 \cap \text{bd } E_1 \neq \text{bd } F'_2 \cap \text{bd } E_1$ .

Si  $L' \subset H$  entonces tenemos que  $\text{bd } F'_1 \cap \text{bd } E_1 = \text{bd } F'_2 \cap \text{bd } E_1$ , en este caso observemos que  $L'$  también es cuerda diametral de la elipse  $E_1$ ; además, en el resultado 4.2 de [14] se afirma que si un cuerpo estrictamente convexo  $K \subset \mathbb{R}^n$  tiene un centro entonces existe un punto  $x \in \text{int}K$  tal que todas las cuerdas diametrales de  $K$  contienen a  $x$ . Como  $E_1$  tiene centro podemos afirmar que  $L'$  y  $L$  se cortan en el interior de  $K$ , esto significa que las secciones elípticas determinadas por  $L'$  son transversales a  $E_2$  y  $\text{bd } F'_1 \cap \text{bd } E_2 \neq \text{bd } F'_2 \cap \text{bd } E_2$ .

En cualquier caso tenemos tres secciones elípticas transversales tales que las intersecciones de sus fronteras determinan seis puntos distintos (Figura 3.1), de la misma forma que en la demostración del Teorema 3.1.1 podemos concluir que existe una única cuádrlica  $Q$  que contiene a las tres secciones elípticas, como  $Q$  contiene a  $E_1$  o contiene a  $E_2$  se tiene que  $p \in Q$ .

Para demostrar que hay una vecindad  $\mathcal{N}$  de  $p$  relativa a  $\text{bd } K$  contenida en  $Q$  supongamos que no existe  $\mathcal{N}$ , entonces existe una sucesión  $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  contenida en  $\text{bd } K \setminus Q$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = p$ . Por el Lema 2.1.3 para cada  $n \in \mathbb{N}$  hay una línea diametral  $L_n$  que pasa por  $q_n$  y por el Lema 2.2.5 podemos concluir que las líneas  $L_n$  convergen a la

línea diametral por  $p$ . De la misma manera que en la demostración del Teorema 3.1.1, la convergencia de las líneas diametrales implica que existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que para  $m > k$  los puntos  $q_m$  pertenecen a  $Q$  y esta contradicción demuestra la existencia de la vecindad  $\mathcal{N}$ .

Así como en el Teorema 3.1.1 podemos concluir que  $\text{bd } K$  es un elipsoide. □

Motivado por el hecho de que para cada diámetro de un elipsoide existen dos secciones de la misma área, tenemos el siguiente resultado.

**Corolario 3.1.3.** *Sea  $K \subset \mathbb{R}^3$  un cuerpo estrictamente convexo y suave y  $\alpha$  un número real positivo. Supongamos que por cada línea diametral existen tres secciones elípticas de la misma área y que determinan un ángulo al menos  $\alpha$ . Entonces  $\text{bd } K$  es una esfera.*

*Demostración.* Por el Teorema 3.1.2 tenemos que  $\text{bd } K$  es un elipsoide. Sean  $a$ ,  $b$  y  $c$  las longitudes de los ejes principales de  $\text{bd } K$  de tal manera que  $a \leq b \leq c$  y llamemos  $L$  al eje de longitud  $b$ . Por hipótesis hay tres secciones elípticas  $E_1$ ,  $E_2$  y  $E_3$  con áreas iguales y cada elipse tiene a  $L$  como uno de sus semiejes. Para cada  $i = 1, 2, 3$  sea  $a_i$  la longitud del eje de  $E_i$  distinto de  $L$ , cada uno de estos ejes está contenido en el plano perpendicular a  $L$  que pasa por el punto medio de  $L$ . Además, para cada  $i = 1, 2, 3$  el área de  $E_i$  es igual a  $\pi a_i b$ , esto implica que  $a_1 = a_2 = a_3$ , entonces la sección que contiene al centro de  $K$  y es ortogonal a la dirección de  $L$  es un círculo. Esto implica que los ejes principales del elipsoide  $\text{bd } K$  tienen la misma longitud. □

## 3.2. Cuatro secciones elípticas por un punto.

En el Ejemplo 1.2 presentamos el cuerpo convexo

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \text{ y } \frac{x^2}{4} + y^2 + 2z^2 \leq 1 \right\},$$

si  $q \in \text{bd } D$  entonces  $q$  pertenece a la esfera unitaria o al elipsoide  $\frac{x^2}{4} + y^2 + 2z^2 = 1$ .

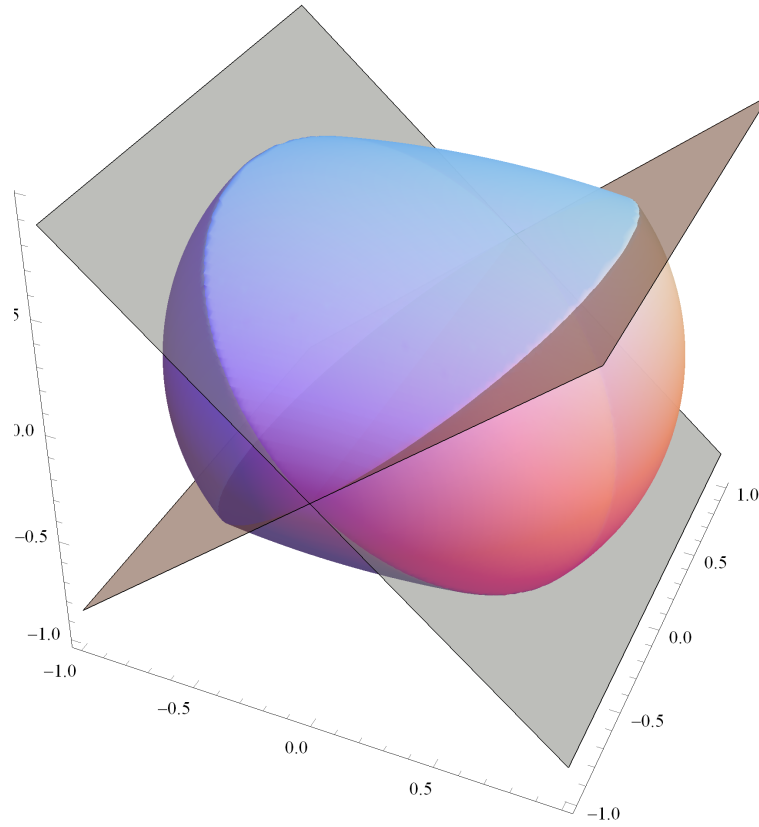


Figura 3.3

La línea  $L$  dada por  $x = z = 0$  y cada punto  $q \in \text{bd } D$  determinan un plano que intersecta a  $\text{bd } D$  en un círculo o en una elipse. Sin embargo, en los puntos de  $\text{bd } D$  contenidos en los planos  $z = \frac{\sqrt{3}}{2}x$  y  $z = -\frac{\sqrt{3}}{2}x$  el cuerpo convexo no es suave (Figura 3.3). Sea  $L \cap \text{bd } D = \{p_1, p_2\}$  entonces para toda vecindad  $\mathcal{N}_i$  de  $p_i$ ,  $i = 1, 2$ , existen puntos de  $\text{bd } K \cap \mathcal{N}_i$  en donde  $K$  no es suave.

**Ejemplo 3.2.1.** Sea  $S_1$  la esfera unitaria en  $\mathbb{R}^3$  con centro en el origen y  $S_2$  la superficie determinada por  $x^2 + y^2 + z^2 + 5/4 xyz = 1$ . Tenemos que  $p = (0, 0, 1)$  pertenece a ambas superficies y los planos  $x = 0$  y  $y = 0$  intersectan a ambas superficies círculos de radio uno. Esto significa que la curvaturas normales de  $S_1$  y  $S_2$  en  $p$  coinciden en las direcciones  $u = (1, 0, 0)$  y  $v = (0, 1, 0)$ .

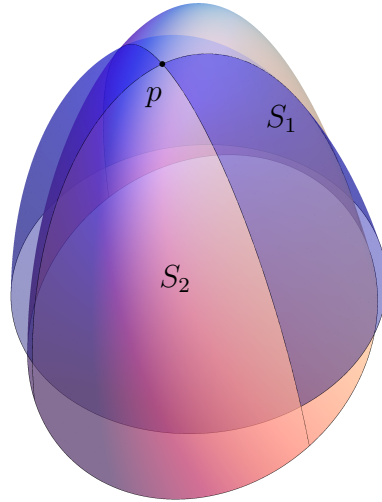


Figura 3.4

Dadas dos superficies en  $\mathbb{R}^3$  con un punto en común  $p$ , si las curvaturas normales en  $p$  coinciden para tres direcciones entonces las curvaturas normales en  $p$  coinciden para toda dirección.

**Teorema 3.2.1.** Sean  $M_1$  y  $M_2$  dos superficies tales que  $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$ . Supongamos que el espacio tangente de  $M_1$  y el de  $M_2$  coinciden para al algún  $p \in M_1 \cap M_2$ . Si existen tres direcciones distintas para las cuales la curvatura normal seccional en  $p$  de  $M_1$  y  $M_2$  coinciden, entonces las curvaturas normales seccionales de  $M_1$  y  $M_2$  en  $p$  coinciden en todas las direcciones.

*Demostración.* Supongamos que la formula de Euler para  $M_1$  esta dada por

$$\kappa_1 \cos^2(\theta) + \kappa_2 \sin^2(\theta) \quad (3.1)$$

y para  $M_2$  esta dada por

$$\kappa'_1 \cos^2(\theta - \theta_0) + \kappa'_2 \sin^2(\theta - \theta_0). \quad (3.2)$$

Asumamos que la función determinada por la diferencia de 1.5 y 1.6 es igual a cero para tres diferente valores. Simplificando esta función, sustituyendo  $\cos^2(x)$  y  $\sin^2(x)$  por sus expresiones correspondientes de la forma  $\cos(2x)$  y  $\sin(2x)$ , obtenemos una expresión de la forma

$$A + B \cos(2\theta) + C \sin(2\theta) \quad (3.3)$$

donde  $A, B$  y  $C$  solo dependen de las curvaturas principales y el ángulo  $\theta_0$ .

Como  $\theta$  esta en el círculo unitario, el número de ceros de 1.7 está acotado por la cantidad de puntos críticos y podemos asumir que la expresión

$$C \cos(2\theta) - B \sin(2\theta)$$

tiene al menos tres ceros.

Esto implica que  $A + B \cos(2\theta) + C \sin(2\theta) = 0$ , entonces las curvaturas seccionales de  $M_1$  y  $M_2$  coinciden en cada dirección.

□

**Teorema 3.2.2.** *Sea  $K \subset \mathbb{R}^3$  un cuerpo convexo con frontera  $C^2$ -diferenciable y sea  $\alpha > 0$ . Supongamos que para cada  $p \in \text{bd } K$  existen 4 planos  $H_{p_1}, H_{p_2}, H_{p_3}, H_{p_4}$  que satisfacen las siguientes condiciones:*

- $H_{p_j} \cap \text{bd } K$  es una elipse  $E_{p_j}$  con área mayor que  $\alpha > 0$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ ,
- Para  $1 \leq i < j \leq 4$ , las elipses  $E_{p_i}$  y  $E_{p_j}$  no son tangentes.

Entonces  $\text{bd } K$  es un elipsoide.

*Demostración.* Probaremos que localmente,  $\text{bd } K$  es una cuádrica.

Sea  $p \in \text{bd } K$ , entonces la línea  $L_{ij} = H_{p_i} \cap H_{p_j}$  interseca el interior de  $K$ , porque las secciones que detrmnan las elipses  $E_{p_i}$  y  $E_{p_j}$  son transversales. Para  $1 \leq i < j \leq 4$ , sea

$$\{p, p_{ij}\} = E_{p_i} \cap E_{p_j} = L_{ij} \cap \text{bd } K.$$

Vamos a demostrar que existe una cuádrica  $Q$  que contiene las elipses  $E_{p_1}, E_{p_2}, E_{p_3}$  y  $E_{p_4}$  y a partir de esto mostraremos que  $Q$  coincide con  $\text{bd } K$  en una vecindad de  $p$ .

Para probar que  $E_{p_1}, E_{p_2}, E_{p_3}, E_{p_4}$  están contenidas en  $Q$ , seguiremos algunas ideas de Gruber y Bianchi en [8].

Dado  $p \in \text{bd } K$ , sea  $H_p$  el plano soporte de  $K$  en  $p$  y  $L_{p_i} = H_{p_i} \cap H_p$ ,  $i = 1, \dots, 4$ .



Caso a) Todas las secciones que determinan las elipses  $E_{p_1}$ ,  $E_{p_2}$ ,  $E_{p_3}$ ,  $E_{p_4}$  son transversales (Figura 3.5).

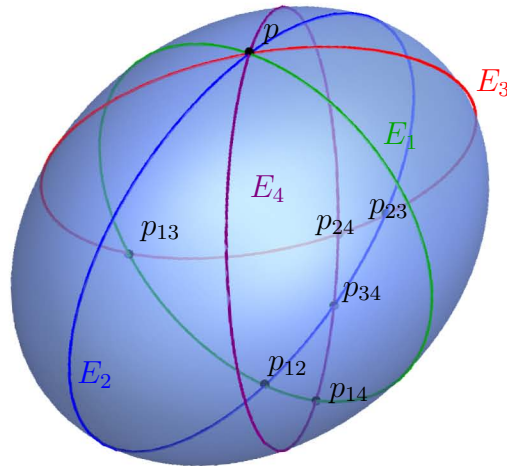


Figura 3.5

Entonces hay seis puntos distintos  $p_{ij} \in \text{bd } K$ ,  $1 \leq i < j \leq 4$ . Por el Lema 2.3.2 existe una única cuádrica  $Q$  con tangente  $H_p$  en  $p$  y que contiene a estos puntos.

Sea  $F_1 = Q \cap H_{p_1}$ ,  $F_1$  es la cónica contenida en  $Q$  con línea tangente  $L_{p_1}$  en  $p$  y que contiene los tres puntos  $p_{12}$ ,  $p_{13}$ ,  $p_{14}$ . Por el Lema 2.3.1 tenemos que  $F_1 = Q \cap H_{p_1} = E_{p_1}$ . De manera similar se demuestra que las elipses  $E_{p_2}$ ,  $E_{p_3}$ , y  $E_{p_4}$  están contenidas en  $Q$ .

Caso b) Tres de los planos  $H_{p_1}$ ,  $H_{p_2}$ ,  $H_{p_3}$ ,  $H_{p_4}$  tienen una línea en común (Figura 3.6).

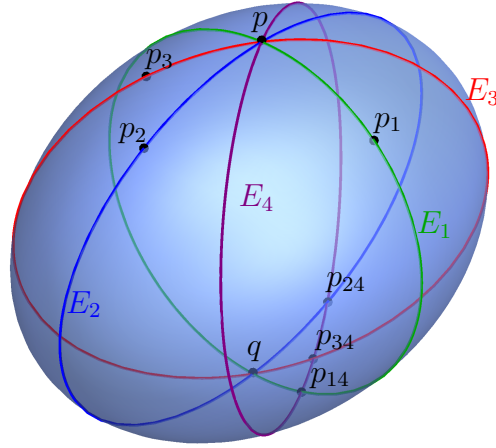


Figura 3.6

Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $L = H_{p_1} \cap H_{p_2} \cap H_{p_3}$  y  $q = p_{12} = p_{13} = p_{23}$ . Sea  $H_p$  el plano soporte de  $K$  en  $p$  y sea  $H_q$  el plano soporte de  $K$  en  $q$ , por el Lema 2.3 existe una única cuádrica  $Q$  con tangente  $H_p$  en  $p$ , tangente  $H_q$  en  $q$  y que contiene los puntos  $p_i \in E_{p_i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , distintos de  $p$  y  $q$ .

Ahora, para  $i = 1, 2, 3$ ,  $F_i = Q \cap H_{p_i}$  es la cónica contenida en  $H_{p_i}$ , tangente a  $L_{p_i}$  en  $p$ , tangente a  $H_q \cap H_{p_i}$  en  $q$  y que contiene al punto  $p_i$ . Por el Lema 2.3.1 tenemos que  $E_{p_i} = F_i$  entonces la elipse  $E_{p_i}$  está contenida en  $Q$ , para  $i = 1, 2, 3$ .

Para el caso de  $E_{p_4}$  consideremos la cónica  $F_4 = Q \cap H_{p_4}$ ,  $F_4 \subset H_{p_4}$  tiene tangente  $L_{p_4}$  en  $p$  y contiene los tres puntos  $p_{14}$ ,  $p_{24}$ , y  $p_{34}$ . Por el Lema 2.3.1 podemos concluir que  $F_4 = E_{p_4}$  y por lo tanto  $E_{p_4} \subset Q$ .

Hasta ahora bastaría considerar un cuerpo convexo suave pues no hemos utilizado que la frontera de  $K$  es dos veces continuamente diferenciable, aunque la cuádrica  $Q$  la construiremos de la misma forma que en el caso anterior, para demostrar que la elipse  $E_{p_4}$  está contenida en  $Q$  usaremos el Teorema 3.2.1.

Caso c) Los planos  $H_{p_1}$ ,  $H_{p_2}$ ,  $H_{p_3}$ ,  $H_{p_4}$  tienen una línea en común (Figura 3.7).

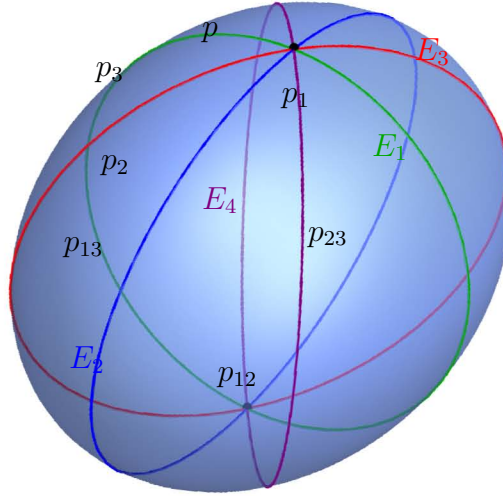


Figura 3.7

Como en el caso b) sea  $L = H_{p_1} \cap H_{p_2} \cap H_{p_3} \cap H_{p_4}$ ,  $L \cap \text{bd } K = \{p, q\}$  y  $H_q$  el plano soporte de  $K$  en  $q$ . Salvo una transformación proyectiva podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que  $H_p$  es paralelo a  $H_q$  y que  $L$  es ortogonal a ambos planos.

De la misma forma que en la parte b) podemos asumir que existe una única cuádrica  $Q$  que contiene a las elipses  $E_{p_1}$ ,  $E_{p_2}$ ,  $E_{p_3}$ .

Por el Teorema 3.2.1, sabemos que la curvatura seccional en tres diferentes direcciones determina la curvatura en todas las direcciones, es decir, la curvatura en  $p$  de las elipses  $E_{p_1}$ ,  $E_{p_2}$  y  $E_{p_3}$  determinan la curvatura en  $p$  de cualquier curva contenida en la frontera de  $K$  y de cualquier curva contenida en  $Q$ .

Sea  $F_4 = Q \cap H_{p_4}$ ,  $L_p = H_p \cap H_{p_4}$  y  $L_q = H_q \cap H_{p_4}$ ; dado que  $F_4$  tiene dos tangentes paralelas  $L_p$  y  $L_q$  y  $Q$  es no degenerada podemos asumir que  $F_4$  es una elipse, además  $F_4$  y  $E_{p_4}$  tienen al segmento  $[p, q]$  como uno de sus ejes principales. Entonces  $F_4$  y  $E_{p_4}$  son dos elipses contenidas en  $H_{p_4}$  que comparten uno de sus ejes principales, más aún, por el Teorema 3.2.1 tenemos que la curvatura de  $F_4$  en  $p$  es igual a la curvatura de  $E_{p_4}$  en

$p$ . La observación 2.4.1 nos permite concluir que  $F_4$  y  $E_4$  tienen sus dos ejes principales iguales y esto implica que  $F_4 = E_{p_4}$ , por lo tanto  $E_{p_4} \subset Q$ .

Finalmente podemos demostrar que existe una vecindad  $U$  de  $p$  en  $\text{bd } K$  tal que  $U \subset Q$ .

Supongamos que no existe dicha vecindad de  $p$ , entonces existe una sucesión de puntos  $\{r_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \text{bd } K \setminus Q$  que converge a  $p$ .

Cada  $r_i$  y  $L$  determinan un plano  $H_{r_i}$ , por hipótesis  $H_{r_i} \cap \text{bd } K$  es una elipse  $E_{r_i}$  con área mayor que  $\alpha$ . Considerando una subsucesión de  $\{r_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ , renumerando si es necesario, podemos asumir que los planos  $H_{r_i}$  convergen a un plano  $H$  que contiene a  $p$ .

El hecho de que para todo  $i \in \mathbb{N}$  la elipse  $E_{r_i}$  tiene área mayor que  $\alpha > 0$  implica que  $H$  no es un plano tangente de  $K$ , de esta manera  $L_p = H \cap H_p$  es una línea soporte de  $K$ . Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que  $L_p \neq L_{p_1}, L_{p_2}, L_{p_3}$ , así el plano  $H$  interseca cada una de las elipses  $E_1, E_2, E_3$  en dos puntos. Como los planos  $H_{q_i}$  convergen a  $H$  podemos elegir  $n_0$  tal que si  $n > n_0$ , entonces  $H_{q_n}$  interseca a la elipse  $E_{p_j}$  en dos puntos distintos, para  $j = 1, 2, 3$ .

Como las cónicas  $E_{q_n}$  y  $Q \cap H_{q_n}$  tienen al menos cinco puntos en común deben coincidir. Esto implica que  $r_n \in Q$  para todo  $n > n_0$ , lo cual contradice que  $r_i \in \text{bd } K \setminus Q$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ . Esta contradicción demuestra que existe una vecindad  $U$  de  $p$  relativa a  $\text{bd } K$  contenida en  $Q$ .

Como  $\text{bd } K$  es compacto, conexo y localmente una cuádrica, podemos concluir que  $\text{bd } K$  es un elipsoide. □

Finalmente, usando el Teorema 3.2.1 y algunas de las ideas del caso c) de la demostración anterior, podemos demostrar el siguiente resultado que mejora el teorema 2.1 de [1] en el caso tridimensional.

**Teorema 3.2.3.** *Sea  $K \subset \mathbb{R}^3$  un cuerpo convexo y sea  $L$  una línea que pasa por el interior de  $K$ . Supongamos que existe un punto  $p \in L \cap \text{bd } K$  tal que  $\text{bd } K$  es  $C^2$ -diferenciable en una vecindad de  $p$ . Si  $H \cap \text{bd } K$  es una elipse para cada plano  $H$  que contiene a  $L$  entonces  $\text{bd } K$  es un elipsoide.*

*Demostración.* Sean  $H_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , planos que contienen a  $L$ ; por hipótesis tenemos que  $E_i = H_i \cap \text{bd } K$  son elipses,  $i = 1, 2, 3$ . Sean  $p$  y  $q$  los puntos de intersección de  $L$  con  $\text{bd } K$  y llamemos  $H_p$  y  $H_q$  los planos soporte de  $K$  por  $p$  y  $q$  respectivamente. Además,

salvo una transformación afín, podemos asumir que  $H_p$  y  $H_q$  son paralelos y que  $L$  es perpendicular a ambos planos.

Como en el teorema anterior, sea  $Q$  la cuádrica que contiene a las elipses  $E_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , y tiene a  $H_p$  y  $H_q$  como planos tangentes. Sea  $p' \in \text{bd } K$  de tal manera que  $p'$  no está contenido en  $E_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , entonces  $L$  y  $p'$  determinan un plano  $H'$  que tiene intersección no vacía con  $Q$ . De esta forma, las cónicas  $H' \cap \text{bd } K$  y  $H' \cap Q$  tienen líneas tangentes en común por  $p$  y  $q$  y por el Teorema 3.2.1 tienen la misma curvatura en  $p$ ; por lo anterior podemos concluir que  $H' \cap \text{bd } K = H' \cap Q$  y por lo tanto  $p' \in Q$ .

Como  $p'$  es arbitrario hemos demostrado que  $\text{bd } K \subseteq Q$  por lo tanto  $\text{bd } K$  es un elipsoide.

□



# Bibliografía

- [1] Alonso, J, Martín, P. *Convex bodies with sheafs of elliptic sections*, Journal of Convex Analysis, Vol. 13 No. 1 (2006) pp. 169-175
- [2] Alonso, J, Martín, P. *Some characterizations of ellipsoids by sections*, Discrete and Computational Geometry, Vol. 31(4), (2004) pp. 643–654
- [3] Arelio, I., Montejano, L. *Convex bodies with many elliptic sections*, Journal of Convex Analysis Vol. 24 No. 2 (2017) pp. 685-693
- [4] Baker, H. F. *Principles of Geometry*, Volume III, Cambridge University Press, 1923
- [5] Burton, G. R. *Sections of convex bodies*, J. London Math. Soc.,12 (1976) pp. 331-336.
- [6] Bianchi, G., Gruber P.M. *Characterizations of ellipsoids*, Arch. Math. Vol. 49 (1987) pp. 344-350. Verlag, 2008.
- [7] Gardner, R. J. *Geometric Tomography*, Cambridge University Press, 1995.
- [8] Gruber P. M. *Convex and Discrete Geometry*, A Series of Comprehensive Studies in Mathematics Vol. 336, Springer Verlag, 2007
- [9] Hammer, P. C. *Diameters of convex bodies*, Proc. Amer. Math. Soc. 5 (1954) pp. 304-306
- [10] Lay, S. R. *Convex Sets and their Applications*, John Wiley and Sons, 1982
- [11] Macaulay, M. A. *Solid Geometry*, Cambridge University Press, 1930
- [12] Martini, H., Montejano, L., Oliveros D. *Bodies of Constant Width*, Por aparecer en Springer Verlag (2018)
- [13] Montejano, L. *Cuerpos de ancho constante*, Fondo de Cultura Económica, 1998

- [14] Soltan, V. *Affine diameters of convex bodies - a survey*, Expo. Math. 23 (2005) pp. 47-63.
- [15] Soltan, V. *Convex quadrics and their characterizations by means of plane sections*, Bridging mathematics, statistics, engineering and technology, pp. 131-145, Springer Proc. Math. Stat., 24, Springer Verlag (2012)
- [16] Takeuchi, N. *A sphere as a surface which contains many circles*, Vol. 24 (1985) pp. 123-130.
- [17] Miyaoka R., Takeuchi N. *A note on Ogiue-Takagi conjecture on a characterization of euclidean 2-spheres*, Ser. A, Vol. 46, No. 1 (1992) pp. 129-135.