



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Arcoíris y Susurros: Métodos Geométricos y
Asintóticos para la Ecuación de Onda

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

Esteban Alonso Franco Fuentes

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Gustavo Cruz Pacheco
Ciudad Universitaria, CD. MX.,
2019





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedicatoria

*Dedico esta tesis, en minima retribución de lo
mucho que he recibido:*

A mi abuelo †

A mis padres

Al Dr. Antonmaria Minroni Alessio †

*Los consejos y enseñanzas recibidos por los
antes mencionados, marcaron mi vision de
vida y moral a seguir.*

Agradecimientos

**Al Doctor Antonmaria Minzoni Alessio[†], un
modelo a seguir.**

**Al Doctor Gustavo Cruz Pacheco, por su
atinada dirección de mi proyecto
de tesis.**

**A la Universidad Nacional Autónoma de
México, columna vertebral del país
y que cuenta con los mejores docentes de
América Latina.**

**A los que dudaron y me forzaron a
demostrarles.**

Motivación

Durante mis primeros semestres estudiando la carrera de Matemáticas, particularmente en los cursos de cálculo, el Dr. Minzoni gustaba de hacer hincapié en que parte importante de la ciencia es la capacidad de repetir los experimentos y las hipótesis cuantas veces sean necesarias y seguir obteniendo los mismos resultados. Al mismo tiempo nos mostraba ejemplos o nos contaba anécdotas de grandes científicos que en su momento hicieron demostraciones matemáticamente consistentes pero que no cuadraban con la realidad de las cosas, viene a mi mente el caso que demostraba que un avión no podía volar, y sin embargo los hermanos Wright lo habían logrado.

Recuerdo cómo, con una sonrisa, nos repetía que a él no le importaba darle nombre a los teoremas, corolarios y demás conceptos que nos enseñaban, siempre nos decía que cuando fuésemos mayores sabríamos cuales eran. Insistía que lo que le interesaba era que supiéramos cómo aplicar las técnicas y solo hasta el momento en el que fuera necesario nos daba los nombres y un poco de historia sobre los mismos. No le interesaba hacer lo que el llamaba demostración por intimidación.

Cómo olvidar cuándo, al llegar al salón de una clase de variable compleja, me recibió diciendo "¡Sr. Franco! A usted lo estábamos esperando. Usted, que es matemático, ayúdenos con esto.". O cuando finalmente me armé de valor para solicitarle fuera mi asesor de tesis, me preguntó si yo estaba seguro, pues él estaba muy ocupado y, lejos de querer poner una excusa para negarse, deseaba evitar dejarme solo haciendo este trabajo, aunque confiaba en mi habilidad para ser autodidacta.

Durante una clase de Cálculo Asintótico, un curso que el Dr. Minzoni había olvidado dar de alta y mis compañeros y yo decidimos tomar por simple amor al arte, una estudiante de maestría, si mal no recuerdo, presentó un trabajo que estaba haciendo sobre el arcoíris, el Dr. manifestó que el artículo tenía un error: los autores no habían utilizado bien los métodos asintóticos y de ahí los resultados que obtenían, entonces volteó a verme y dijo "¡Sr. Franco! Usted me había comentado que quería publicar algo, ¿Por qué no le da una mirada a esto?".

Si bien el trabajo aquí presentado se desarrolló por otras líneas diferentes a las del artículo que se mencionó en aquella clase, esa fue la semilla que me llevó a escoger los temas aquí trabajados.

Finalmente, me gustaría terminar este intento de motivación con dos frases que el doctor me compartió cuando le confesé que no me sentía seguro de poder desarrollar el tema, debido a su complejidad; "Por su puesto que es difícil, Sr. Franco, si no fuera así, ¿Para qué hacerlo?", y "Está muy bien que dude de usted mismo, porque solo los estúpidos no dudan de sí mismos."

Índice general

Introducción	1
1. Susurros y Donas	3
1.1. Entre Susurros y Donas	5
1.2. Las Cáusticas	6
1.3. La Ecuación de Onda	10
1.4. Funciones de Bessel	12
2. El Arcoíris	15
2.1. La Geometría del Arcoíris	17
2.1.1. Un Rebote	17
2.1.2. Dos (y Más) Rebotes	20
2.2. El Arcoíris Como Cáustica	23
3. Métodos Asintóticos	31
3.1. La Notación de Landau	33
3.2. El Método de Laplace	33
3.3. Fase Estacionaria	41
3.4. Descenso Rápido	48
3.5. Banda de Alexander	57
4. Galería de Susurros en 3 Dimensiones	61
4.1. La función de Bessel en la Esfera	63
4.2. La función de Bessel como Integral	65
4.3. Jugando con Asintótica	67
4.4. Ecuación de Onda en la Esfera	70
5. Regularización en Ondas de Choque	77
5.1. La Ecuación de Burgers	79
5.1.1. La ecuación de Burgers como Onda de Choque	81
5.2. Regularización por viscosidad	84
5.2.1. Limite conforme $\nu \rightarrow 0$	85
5.3. Regularización por Dispersión	87
5.3.1. Dispersión	87
5.3.2. La ecuación de Burgers Compleja	89
5.3.3. Cuando $i\lambda \rightarrow 0$	90
5.3.4. Variación Lenta	91
6. Conclusiones	93

Introducción

Arcoíris y Susurros: Métodos Geométricos y Asintóticos para la Ecuación de Onda.
¿Qué tienen que ver estos 5 temas? El arcoíris y la galería de susurros pueden ser estudiados a base de geometría, aunque esto solo funciona como una primera aproximación y se tienen que usar otros métodos para un entendimiento más completo. El sonido rebota en el perímetro de la galería y forma una banda quedando encerrado y provocando que, si dos personas están situadas en lados opuestos de la galería, puedan comunicarse como si estuvieran juntas sin que un tercero, situado entre las dos anteriores, se entere de lo que están platicando.

En el caso del arcoíris, la luz entra, rebota y sale de la gota de agua, sufriendo de difracción y dando lugar a una cáustica y esto a su vez, bajo las condiciones indicadas, a un arcoíris. En ambos casos, el ángulo de rebote se rige por la ley de Snell aunque tiene más relevancia en el caso del arcoíris.

Al intentar un estudio más profundo de la galería de susurros hay que trabajar con la teoría de ondas, lo cual nos lleva a la ecuación de onda y al estudiarla nos llevara a la ecuación y las funciones de Bessel.

El arcoíris nos llevara por el camino de la ecuación de Airy, para la cual será necesario utilizar métodos asintóticos para su estudio, así que habrá que dar una breve explicación sobre 3 de estos, el método de Laplace, el método de Descenso Rápido y el método de Fase Estacionaria.

Con estos métodos, el estudio del arcoíris se vuelve más comprensivo y podemos dar la razón de la existencia de la Banda de Alexander y los arcoíris supernumerarios, así como ver que el análisis asintótico nos puede ayudar a llenar huecos o explicar aparentes contradicciones que pueden aparecer utilizando la geometría para estudiar el arcoíris.

Emplearemos el método de separación de variables para la ecuación de onda, la cual, cuando el dominio es circular nos arrojará las funciones de Bessel. Esto nos llevara a ver qué la galería de susurros esta correctamente nombrada ya que el sonido presenta un decaimiento exponencial en una zona y en otra zona presenta oscilaciones, una situación muy similar a la ecuación de Airy.

Finalmente, estudiaremos el ejemplo más sencillo de la ecuación de onda, la ecuación de Burgers, donde veremos que existen varios métodos de regularización en las ondas y que son obtenibles gracias a el uso de el análisis asintótico.

Tomando lo anterior en cuenta, el presente trabajo esta estructurado de la siguiente manera:

En el capítulo 1 se dará una breve introducción al fenómeno del arcoíris y la galería de susurros, así como una idea inicial de cómo estudiar estos fenómenos, explicando lo que son cáusticas y la ecuación de onda.

En el capítulo 2 veremos la interpretación geométrica del arcoíris así como su interpretación como cáustica, lo cual nos dará origen a la ecuación de Airy y la necesidad de estudiar cómo resolverla.

En el capítulo 3 veremos los métodos necesarios para el estudio de la ecuación de Airy, los cuales nos también servirán para profundizar el estudio de la ecuación de onda y la galería de los susurros.

En el capítulo 4 regresaremos a la ecuación de onda para concluir su estudio apoyándonos en los métodos asintóticos.

Finalmente en el capítulo 5 utilizaremos los métodos asintóticos para estudiar la ecuación de Burgers, la ecuación mas sencilla donde podemos encontrar regularización por viscosidad o por dispersión.

Capítulo 1

Susurros y Donas

En este primer capítulo, veremos qué similitud guardan dos fenómenos aparentemente distintos como lo son el arcoíris y la cúpula de los susurros. También se dará una breve explicación a las cáusticas, la ecuación de onda y las Funciones de Bessel y cuál es la relación que guardan con los fenómenos antes mencionados.

1.1. Entre Susurros y Donas

Existen estructuras que presentan propiedades interesantes como la catedral de San Paul en Londres, donde Lord Rayleigh descubrió lo que posteriormente llamaría ondas de galería de susurros (whispering gallery waves). Este fenómeno se describe, a grandes rasgos, de la siguiente manera. Imaginemos una cúpula circular de radio OA y supongamos a 3 personas, P, O, P' , esta última estará situada de manera opuesta y simétrica a P con respecto a O (fig. 1.1). El Sujeto P habla hacia la pared (la circunferencia de la cúpula), y mágicamente P' lo escuchará. Lo curioso de este intercambio es que O se entere, es completamente ignorante del mensaje entre P y P' .

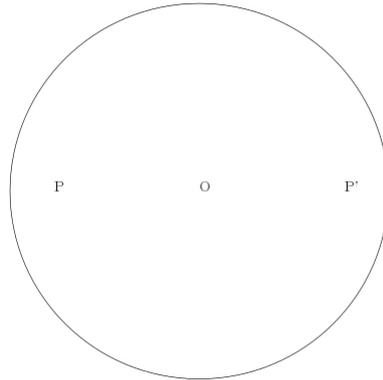


Figura 1.1: La ubicación de P y P' es simétrica con respecto a O .

Imaginemos el mismo acomodo de la fig. 1.1 con P siendo un punto cercano al perímetro y sobre el diámetro AA' y lancemos un rayo desde P hacia la tangente que pasa por A con un ángulo θ , de suerte tal que rebotara al tocar la circunferencia, después de n rebotes regresara al punto inicial sobre la circunferencia y obtendremos una banda de radio $OP \cos \theta$ como se muestra en la imagen 1.2y mas aun, podemos afirmar que cualquier rayo lanzado con un ángulo menor a θ quedara atrapado dentro de la franja de anchura PA (fig.1.2).

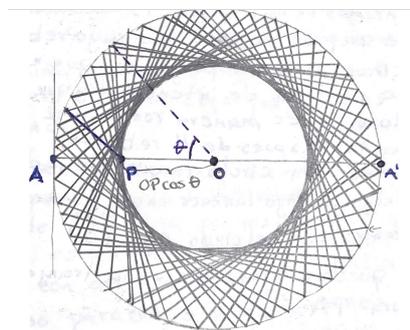


Figura 1.2: La línea azul es nuestro rayo inicial, y los trazos grises son los rebotes que realiza al recorrer. Si las condiciones son ideales, en algún punto regresara al origen sobre la circunferencia.

Esta anchura ira decreciendo conforme el punto P se acerque al punto A y si estos coinciden, se puede expresar como $OA(1 - \cos \theta)$ o, si θ es muy pequeño, como $\frac{1}{2}OA \approx \theta^2$.

Si pensamos en la voz del sujeto P como la línea azul en la fig. 1.2 podemos ver que bajo ciertas condiciones queda atrapada dentro de la franja y es por esto que el sujeto O no se percata del mensaje. Pensemos ahora en que pasaría con la luz y una esfera transparente, ya que esto nos servirá para analizar las razones detrás del arcoíris.

En el caso ideal tenemos una esfera transparente cuyo coeficiente de refracción es mayor que el del entorno y debido a esto cuando la luz entra a la esfera se desvía de su trayectoria inicial. Si la luz entra con una inclinación idónea o si entra a la esfera en el punto ideal se desvía de manera tal que al llegar al otro extremo dentro de la esfera, volverá a rebotar sin salir de la esfera y seguirá haciendo esto, de manera que quedara atrapada dentro de la esfera. Si en algún momento de este recorrido el haz de luz regresa, no solo al punto original, sino con la misma fase, entonces interfiere de manera constructiva y se genera una resonancia, de otra manera se destruye y no veríamos el fenómeno antes descrito.

Imaginemos que vemos la esfera desde arriba, es decir vemos el plano x, y , la imagen que veríamos sería muy parecida a el dibujo que se presento de la cúpula de los susurros. También es conveniente mencionar que la curvatura de la esfera ayuda a orientar la luz de manera polar (vertical) de manera que el camino optimo que recorre es en zigzag en lugar de una recta sobre el ecuador.

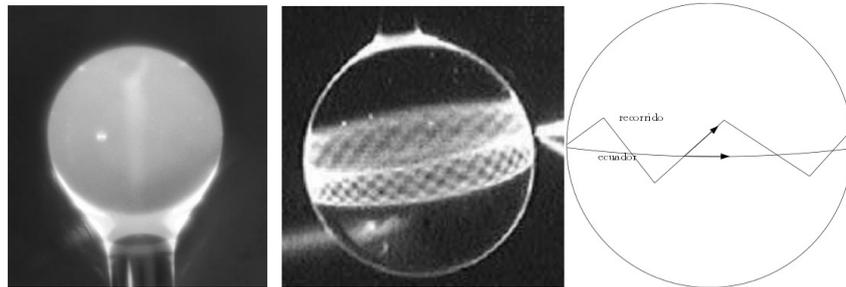


Figura 1.3: Esfera de silica a travez de la cual se transmite un haz de luz proveniente de una fibra óptica, mostrando el efecto descrito. Imagen tomada de [12]

Recordando que la luz se comporta como onda tendremos dos observaciones nuevas que agregar a nuestro problema, primero la luz no esta rebotando sino que es guiada de manera suave por la circunferencia de la esfera y, segundo, la reflexión que sufre la luz dentro de la esfera no es absoluta, i.e. existen filtraciones de la luz hacia adentro y hacia afuera; esta ultima idea tomara mas importancia mas adelante en el trabajo presentado.

1.2. Las Cásticas

El fenómeno de cúpula de los susurros y el fenómeno del arcoíris están relacionados con la aparición de dos fenómenos, la ecuación de Bessel y las cáusticas respectivamente. Siendo que las cáusticas son comparativamente más sencillas de tratar empezaremos con una breve explicación de las mismas para después continuar con la ecuación de Bessel.

El ejemplo más sencillo de una cáustica es él la que envuelve a una parábola de la

1.2. Las Cásticas

forma $y = x^2$. Primero derivamos respecto a x la curva anterior, de manera que obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = 2x.$$

Entonces, la pendiente es $m = 2x$. Ahora, debido a que $y = x^2$, nuestras coordenadas son de la forma (c, c^2) , por tanto, la familia de rectas tangentes a la parábola es

$$y = 2c(x - c) + c^2 = 2cx - c^2,$$

y se ven de la siguiente manera:

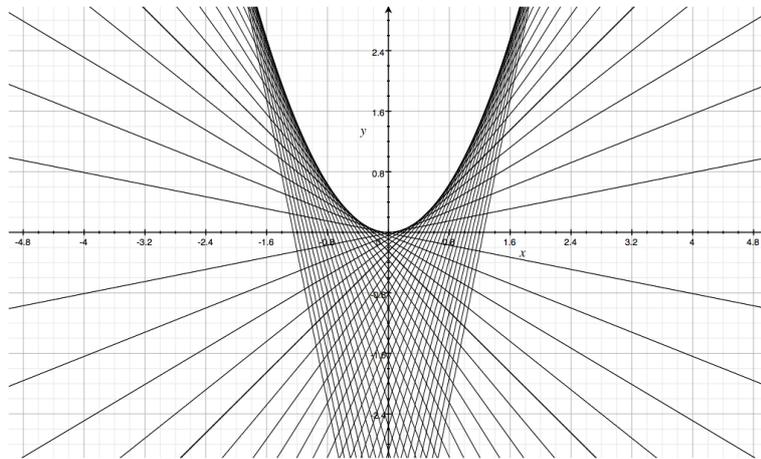


Figura 1.4: Es posible dibujar curvas utilizando rectas, podemos observar cómo, entre más rectas utilizamos más definida se vuelve la parábola.

La ecuación anterior solo nos describe el lado derecho de la parábola, pero por simetría el lado izquierdo está dado por $y = -2cx - c^2$. Para obtener la cáustica necesitamos la familia de rectas normales a estas para esto utilizamos la pendiente que ya tenemos y como son ortogonales, la pendiente de estas será $m = -1/2x$.

Entonces, tenemos

$$y = \frac{-x}{2c} + c^2 + \frac{1}{2}.$$

La cual nos da la familia de rectas del lado izquierdo. Por simetría, el lado derecho está dado por

$$y = \frac{x}{2c} + c^2 + \frac{1}{2}.$$

Y se ven de la siguiente manera:

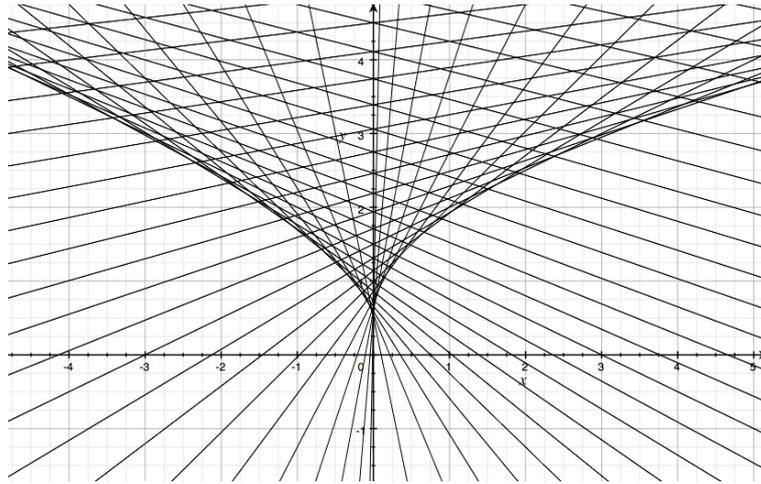


Figura 1.5: Notemos que, al igual que en el caso anterior, las rectas nos están delimitando una curva, dicha curva es la cáustica.

Si bien podemos ver la figura que tendrá la cáustica, todavía no tenemos la ecuación de la misma. La familia de curvas parametrizadas $G(x, y, c)$ tienen como derivada (con respecto a c) $G_c(x, y, c)$. Utilizamos c como parámetro, ya que nuestros puntos en la parábola son de la forma (c, c^2) , y nuestra pendiente original fue $m = 2x = 2c$.

Tenemos

$$G(x, y, c) = \frac{-x}{2c} + c^2 + \frac{1}{2}$$

y

$$G_c(x, y, c) = \frac{x}{2c^2} + 2c.$$

Haciendo $G_c = 0$ y despejando respecto a c para después sustituir en G obtenemos:

$$c = \sqrt[3]{\frac{-x}{4}}$$

y

$$y = -\frac{x}{2\sqrt[3]{\frac{-x}{4}}} + \left(\sqrt[3]{\frac{-x}{4}}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

Finalmente, la ecuación anterior es la ecuación de la curva cáustica pero solo para el lado izquierdo de la curva, siendo

$$y = \frac{x}{2\sqrt[3]{\frac{x}{4}}} + \left(\sqrt[3]{\frac{x}{4}}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

la que describe el lado derecho.

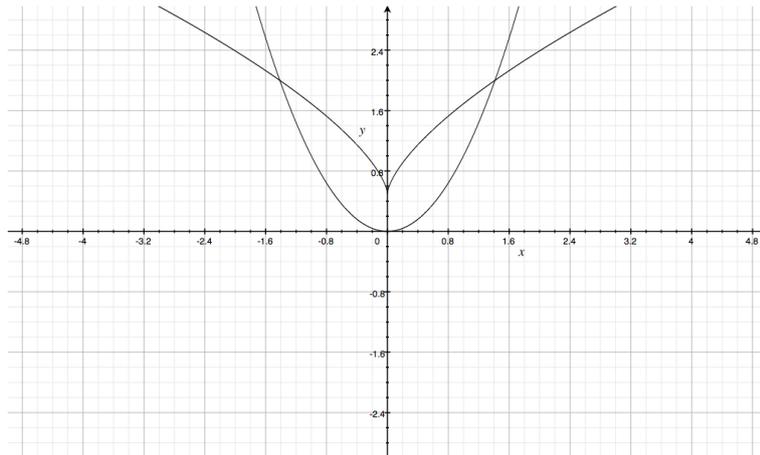


Figura 1.6: Podemos apreciar cómo se ve la cáustica junto con la parábola. Esta curva también es conocida como la parábola semicúbica.

Ejemplos reales y cotidianos del fenómeno de las cáusticas pueden ser encontrados en dos situaciones, la primera cuando la luz atraviesa un vaso con agua o dentro de una taza con agua, la segunda cuando la luz que proviene del sol entra en una gota de agua y sale, es decir el arcoíris es provocado por el fenómeno de las cáusticas.

1.3. La Ecuación de Onda

En el caso del arcoíris podemos tratar la luz como nos convenga, como partícula o como onda, de manera que pudimos hacer el desarrollo inicial del fenómeno utilizando geometría. En el caso de la galería de sonidos no contamos con esta facilidad ya que el sonido solo se puede tratar como onda. Debido a esto necesitamos apoyarnos en la teoría ondulatoria y por tanto debemos tratar la ecuación de onda. Empecemos por hacer el desarrollo de la ecuación para un disco (un círculo) de radio $\leq a$. Recordemos que la ecuación de onda es

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}). \quad (1.1)$$

Y nuestro disco es

$$x^2 + y^2 \leq a^2.$$

Bajo estas condiciones, resulta cómodo pensar en trabajar en coordenadas polares; entonces nuestra ecuación de onda quedará como:

$$u_{tt} = c^2\left(\frac{1}{r}(ru_r)_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}\right). \quad (1.2)$$

Recordando que la otra forma de ver la ecuación de onda es como $u_{tt} = c^2\Delta u$ donde Δ es el operador de Laplace, y por consiguiente, en coordenadas polares,

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

Asumamos condiciones de frontera homogéneas, i.e.

$$u(a, \theta, t) = 0 \quad (1.3)$$

con condiciones iniciales

$$u(r, \theta, 0) = f(r, \theta), \quad u_t(r, \theta, 0) = g(r, \theta) \quad (1.4)$$

además de que u es de periodicidad 2π en θ .

Utilizaremos el método de separación de variable para poder resolver la ecuación. Empezando por t obtenemos

$$u(r, \theta, t) = \phi(r, \theta)T(t), \quad (1.5)$$

lo cual convierte a nuestra ecuación en

$$\phi T'' = c^2\left(\frac{1}{r}(r\phi_r)_r + \frac{1}{r^2}\phi_{\theta\theta}\right)T.$$

Reacomodamos para obtener

$$\frac{T''}{c^2 T} = \frac{\frac{1}{r}(r\phi_r)_r + \frac{1}{r^2}\phi_{\theta\theta}}{\phi} = -\lambda.$$

Si igualamos con 0 podemos separarla como $\frac{T''}{c^2 T} = -\lambda = 0$ y como

$$\frac{\frac{1}{r}(r\phi_r)_r + \frac{1}{r^2}\phi_{\theta\theta}}{\phi} = 0$$

y obtenemos

$$T'' + \lambda c^2 T = 0 \quad (1.6)$$

y al multiplicar por $r^2\phi$

$$r^2\phi_{rr} + r\phi_r + \phi_{\theta\theta} + \lambda r^2\phi = 0. \quad (1.7)$$

Lo cual resulta equivalente a la ecuación $\Delta\phi + \lambda\phi = 0$, para ϕ . Continuamos con la separación de variables restantes, de manera que $\phi(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$,

$$r^2R''\Theta + rR'\Theta + R\Theta'' + \lambda r^2R\Theta = 0.$$

Dividimos entre $R\Theta$ y reordenamos,

$$\begin{aligned} \frac{r^2R''\Theta + rR'\Theta + R\Theta'' + \lambda r^2R\Theta}{\Theta R} &= 0 \\ \frac{r^2R'' + rR' + \lambda r^2R\Theta}{R} &= -\frac{\Theta''}{\Theta} = \mu \\ \Theta'' + \mu\Theta &= 0. \end{aligned}$$

Como Θ es de periodicidad 2π tenemos

$$\mu = 0, 1, 2, 3, \dots, n^2, \dots$$

y, para $\mu = n^2$,

$$\Theta = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta$$

y

$$r^2R'' + rR' + (\lambda r^2 - n^2)R = 0,$$

con condiciones de frontera $R(a) = 0$ y $R(0)$ acotada. Si $\lambda \geq 0$, podemos hacer el siguiente cambio de variable $x = \sqrt{\lambda}r$ para obtener

$$\frac{dR}{dr} = \frac{dR}{dx} \frac{dx}{dr} = \sqrt{\lambda} \frac{dR}{dx},$$

y

$$\frac{d^2R}{dr^2} = \lambda \frac{d^2R}{dx^2}$$

y

$$x^2 \frac{d^2R}{dx^2} + x \frac{dR}{dx} + (x^2 - n^2)R = 0.$$

A esta última ecuación se le conoce cómo la ecuación de Bessel de orden n y es necesario que obtengamos una solución de carácter general para poder dar una respuesta al fenómeno de la galería de los susurros.

1.4. Funciones de Bessel

Varios científicos encontraron que estas funciones aparecían en muchos fenómenos como el flujo de calor o electricidad en un cilindro sólido, en la propagación de ondas electromagnéticas en un cable, en la *difracción de la luz*, fluidos y deformaciones de cuerpos elásticos, entre muchos otros. Lord Rayleigh mostró que también aparecían como soluciones a la ecuación de Laplace cuando esta se resuelve con coordenadas cilíndricas, las cuales son una generalización de las coordenadas polares.

Al intentar resolver la ecuación de onda en un disco obtuvimos la siguiente ecuación,

$$x^2 \frac{d^2 R}{dx^2} + x \frac{dR}{dx} + (x^2 - n^2)R = 0, \quad (1.8)$$

la cual, como se mencionó anteriormente, es conocida como la ecuación de Bessel y debemos resolverla si es que queremos dar solución al problema de la ecuación de onda en un disco de radio $\leq a$, así que usaremos las series de potencias. Debido a los coeficientes x^2 y x , $\frac{d^2 R}{dx^2}$ y $\frac{dR}{dx}$ se igualan a 0 cuando $x = 0$, y no podemos asumir que R tiene una serie de Maclaurin pero si algún múltiplo de esta. Entonces podemos escribir lo siguiente,

$$R(x) = x^s \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+s}.$$

Si escogemos una s tal que $a_0 \neq 0$, obtenemos

$$R'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+s) a_k x^{k+s-1}$$

y

$$R''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+s)(k+s-1) a_k x^{k+s-2}.$$

Al sustituir en (1.8), obtenemos

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+s)(k+s-1) a_k x^{k+s} + (k+s) a_k x^{k+s} + a_k x^{k+s+2} - n^2 a_k x^{k+s} = 0$$

Tras simplificar un poco obtenemos

$$\sum_{k=0}^{\infty} ((k+s)^2 - n^2) a_k x^{k+s} + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^{k+s} = 0$$

y

$$(s^2 - n^2) a_0 x^s + ((s+1)^2 - n^2) a_1 x^{s+1} + \sum_{k=2}^{\infty} (((k+s)^2 - n^2) a_k + a_{k-2}) x^{k+s} = 0.$$

Por una parte, necesitamos que todo coeficiente sea idénticamente 0 y por otra como asumimos que $a_0 \neq 0$, podemos ver qué $\pm s = \pm n$ y entonces tenemos que $a_1 = 0$.

Debido a que queremos que R este acotada cuando $x = 0$, dejemos que $s = +n$ para entonces obtener la siguiente relación recurrente:

$$((k+n)^2 - n^2) a_k = a_{k-2} \quad \text{entonces,} \quad a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(2n+k)}.$$

De la relación anterior podemos ver que si $k = 3, 5, 7, \dots, 2n + 1, a_k = 0$. Mientras que para los coeficientes pares tendremos:

$$a_2 = -\frac{a_0}{2(2n+2)} = -\frac{a_0}{2^2 * 1 * (n+1)}$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{4 * (2n+4)} = -\frac{a_2}{2^2 * 2 * (n+2)} = -\frac{a_0}{2^4 * 2! * (n+1)(n+2)}$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{6(2n+6)} = -\frac{a_4}{2^2 * 3 * (n+3)} = -\frac{a_0}{2^6 * 3! * (n+1)(n+2)(n+3)}$$

y así sucesivamente.

Si ahora tomamos

$$a_0 = \frac{1}{2^n n!}$$

entonces

$$a_{2k} = \frac{-1^k}{2^{n+2k} (k+n)!}$$

y

$$R(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-1^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}.$$

Este último resultado recibe el nombre de función de Bessel del primer tipo (de orden n) y usualmente se denota cómo $J_n(x)$. Además, este resultado es válido para todo $n \geq 0$ sin importar si es entero, siempre y cuando podamos definir $(k+n)!$ cuando esto sucede.

En estos momentos no nos sirve de mucho una gráfica de las funciones de Bessel, la siguiente imagen sí nos sirve para terminar de explicar el fenómeno de la galería de los susurros. Tomamos un valor de $n = 35$ simplemente para mostrar lo que pasa cuando tomamos valores alejados del 0.

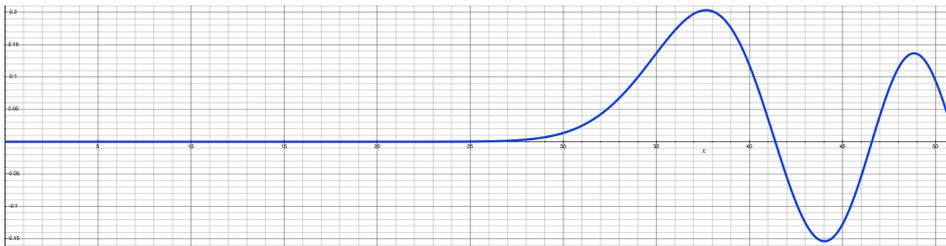


Figura 1.7: Gráfica para la función de Bessel de orden 35, i.e. $J_{35}(x)$. Imaginemos que el punto $(0, 0)$ es el centro de nuestra galería, entonces el punto de acumulación de las ondas será dónde vemos el máximo local, y en este caso global, de nuestra función de Bessel.

Basándonos en la imagen anterior, la explicación de la galería de susurros es la siguiente:

Entre el punto $(0, 0)$ y el máximo local, el sonido decae de manera exponencial y podríamos decir que es 0 (en realidad es exponencialmente pequeño y los humanos no lo detectamos), pasando el máximo local el sonido se acumula y empieza a decaer de una manera no tan acelerada. Eso sucede en el perímetro de la galería.

Es decir, en el centro de la galería no se escucha nada porque el sonido decae exponencialmente, mientras que en las orillas se acumula, y por consiguiente podemos escuchar con claridad.

Capítulo 2

El Arcoíris

En este capítulo veremos como se explicó el fenómeno del arcoíris utilizando la geometría, así como la explicación de los arcoíris secundarios para terminar con la interpretación de este fenómeno con la ayuda de las cáusticas.

2.1. La Geometría del Arcoíris

2.1.1. Un Rebote

Antes de adentrarnos en los métodos asintóticos, visitemos otro fenómeno de tipo óptico que ha sido estudiado desde la época de Aristóteles (384 – 322 AC). En ese entonces, no se podía explicar a ciencia cierta las razones de la formación del arcoíris pero si algunas de sus características, como el hecho de que el sol tenga que estar forzosamente a espaldas del observador (lo cual mostraremos a detalle mas adelante), pero no sería sino hasta aproximadamente 65 DC que el filósofo romano Séneca el Joven tomara dos posibles explicaciones para el fenómeno, la primera diciendo que el arcoíris es formado por el sol siendo reflejado en cada gota de agua y la segunda diciendo que es formado cuando el sol se refleja en una nube con forma cóncava.

Muchos científicos y filósofos intentaron explicar el fenómeno, la mayoría con cierta idea sobre las reflexiones de la luz del sol y su posición a espaldas del observador pero nunca tomando en cuenta las gotas de agua. A pesar de que el primero en mostrar que la luz blanca se descompone en todos los colores con su famoso experimento con el prisma, no fue Sir Isaac Newton (1642 – 1726) quien dio esta explicación para el arcoíris sino el astrónomo persa Qutb al-Din al-Shirazi (1236 – 1311), quien aproximadamente 300 años antes dio la primera explicación matemática sugiriendo que la luz se refractaba dos veces en la gota de agua y ocurrían una o más reflexiones entre las refracciones.

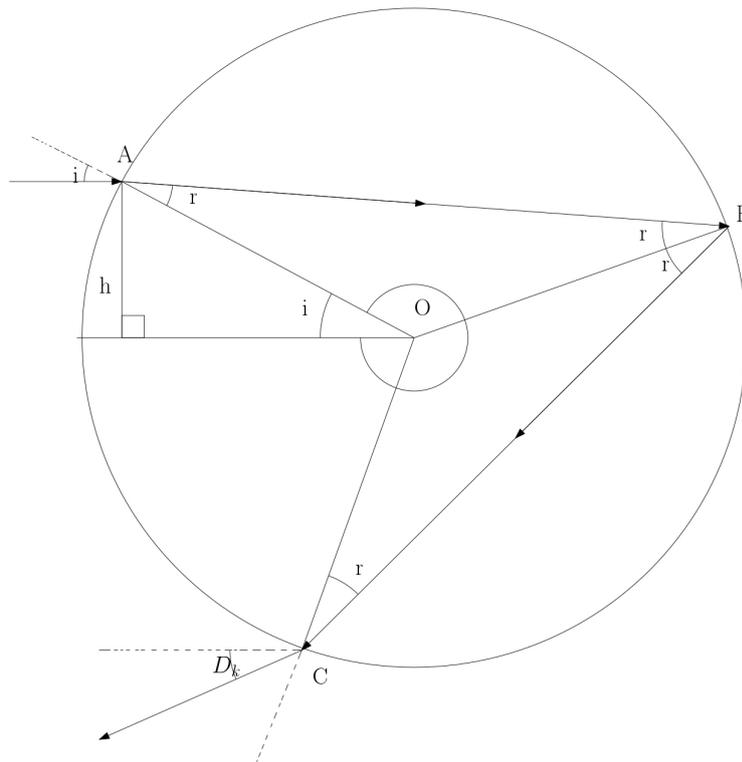


Figura 2.1: Esquema de una gota de agua esférica. Podemos observar que la luz entra en el punto A sufriendo una refracción, la cual provoca que rebote en el punto B (ligeramente mas abajo que el punto A) y esto a su vez provoca que salga por el punto C sufriendo la segunda refracción al salir de la gota. (Imagen basada en [10]).

Newton fue capaz de explicar muchas de las características principales del arcoíris, pero no pudo explicar los arcoíris supernumerarios, sería hasta que Thomas Young propusiera considerar la luz como ondas bajo ciertas circunstancias que se lograría explicar los arcoíris supernumerarios y los secundarios.

De manera muy simplificada el arcoíris principal corresponde a la zona de mayor concentración de rayos después de una sola reflexión en el interior de una gota de agua. Decimos principal porque existen otros arcoíris que corresponden a k reflexiones, para $k=1,2,3,4\dots$. Debido a que solo se han observado los arcoíris de una y dos reflexiones, estaremos trabajando sobre estos.

Para el arcoíris de un solo rebote, podemos obtener la desviación que sufre un rayo de luz tras entrar a la gota, rebotar dentro de la misma y salir, tomando en cuenta que siempre existen dos refracciones y una reflexión, la cual ocasiona una desviación de $\pi - 2r$ y las reflexiones serán $2(i - r)$. Entonces, nuestra ecuación será $D = (\pi - 2r) + 2(i - r)$, donde $r = r(i)$. En este caso, r es el ángulo de refracción y depende del ángulo de incidencia.

Podemos obtener las refracciones con la ley de Snell, $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$, en este caso $n_1 = 1$ ya que es el índice de refracción del aire,

$$\begin{aligned}\sin(i) &= n_2 \sin(r) \\ r &= \arcsin\left(\frac{\sin(i)}{n_2}\right).\end{aligned}$$

Substituimos en D , obteniendo

$$D = (\pi - 2\arcsin(\frac{\sin(i)}{n_2})) + 2(i - \arcsin(\frac{\sin(i)}{n_2})),$$

y derivamos respecto a i

$$D_i = -\frac{2\cos(i)}{\sqrt{1 - (\frac{\sin(i)}{n_2})^2}n_2} + 2 - \frac{2\cos(i)}{\sqrt{1 - (\frac{\sin(i)}{n_2})^2}n_2}.$$

Hacemos $D_i = 0$ para encontrar el punto crítico

$$-\frac{2\cos(i)}{\sqrt{1 - (\frac{\sin(i)}{n_2})^2}n_2} = -2 + \frac{\cos(i)}{\sqrt{1 - (\frac{\sin(i)}{n_2})^2}} = \frac{n_2}{2}.$$

Ahora, recordando que $\frac{\sin(i)}{n_2} = \sin(r)$ y $1 = \sin^2(x) + \cos^2(x)$ obtenemos

$$\frac{\cos(i)}{\cos(r)} = \frac{n_2}{2},$$

lo cual puede ser acomodado a manera que:

$$\begin{aligned}\cos(i) &= \frac{n_2}{2} \sqrt{1 - (\frac{\sin(i)}{n_2})^2} \\ \cos^2(i) &= \frac{n_2^2 - \sin^2(i)}{(2)^2} \\ (4 - 1)\cos^2(i) &= n_2^2 - 1 \\ \cos(i) &= \sqrt{\frac{n_2^2 - 1}{3}}.\end{aligned}$$

Queremos encontrar la desviación mínima para que el arcoíris suceda, entonces aplicamos el criterio de la segunda derivada para verificar que este punto crítico sea un mínimo y bajo qué condiciones sucede.

La primera derivada es:

$$D_i = -\frac{2 \cos(i)(2)}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sin(i)}{n_2}\right)^2 n_2}} + 2$$

y entonces la segunda derivada es

$$D_{ii} = -\frac{4 \sin(i) n_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\sin(i)}{n_2}\right)^2} - (4 \cos(i) \frac{\sin(i) \cos(i)}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sin(i)}{n_2}\right)^2 n_2}})}{1 - \left(\frac{\sin(i)}{n_2}\right)^2 n_2 - 2}$$

Y al despejar nos quedamos con:

$$D_{ii} = \frac{4(n_2^2 - 1) \tan(r)}{n_2^3 \cos^2(r)}$$

Cómo $0 < r < \frac{\pi}{2}$, esto es siempre positivo y por lo tanto es un mínimo.

Newton logró mostrar que la luz natural (blanca) estaba formada por diferentes colores los cuales tienen diferentes velocidades e índices de refracción y esto da lugar a la dispersión y es responsable del orden y la aparición de los colores en el arcoíris.

Gracias a esto podemos tomar la luz roja y violeta, las cuales son la primera y última en el arcoíris respectivamente, y de esta manera obtener una excelente aproximación al ancho y ángulo del arcoíris.

En el agua, el índice de refracción para la luz roja es $n_2 = 1,3318$ y para la luz violeta es $n_2 = 1,3435$, recordemos que el índice para la luz blanca es de $n_2 = 1,3333$.

Entonces tomamos

$$D = \pi + 2i - 4 \arcsin\left(\frac{\sin(i)}{n_2}\right),$$

y para la luz roja

$$D = \pi + 2i - 4 \arcsin\left(\frac{\sin(i)}{1,3318}\right).$$

El lector audaz se dará cuenta que nos hace falta i , afortunadamente podemos obtener i utilizando el hecho de que

$$\cos(i) = \sqrt{\frac{n_2^2 - 1}{3}}$$

despejamos para i , obteniendo

$$i = \arccos \sqrt{\frac{n_2^2 - 1}{3}}$$

$$i = \arccos \sqrt{\frac{(1,3333)^2 - 1}{3}} \approx 1,0366$$

De esta manera, podemos continuar sustituyendo en la ecuación obtenemos que,

$$D = \pi + 2(1,0366) - 4 \arcsin\left(\frac{\sin(1,0366)}{1,3318}\right) \approx 2,4046.$$

Lo anterior en grados es $137,8^\circ$ y tenemos que tomar su complemento para saber cual es la desviación, y esta es $42,2^\circ$.

Ahora, repitamos los cálculos para la luz violeta sustituyendo el valor de n_2 en D , de manera que,

$$D = \pi + 2(1,0366) - 4 \arcsin \left(\frac{\sin(1,0366)}{1,3435} \right) \approx 2,4339.$$

Lo anterior en grados es $139,5^\circ$ y también tenemos que tomar su complemento, lo cual es $40,5^\circ$, de aquí podemos observar que $42,2^\circ - 40,5^\circ \approx 1,7^\circ$. Cómo tomamos la luz inicial y final del arcoíris que observamos, podemos ver que $1,7^\circ$ es el ancho aproximado de este.

Entonces el ángulo mínimo en el que tiene que entrar el rayo de luz, y por tanto en el que tiene que estar situado el sol con respecto a la horizontal que una persona percibe debe ser de $\approx 42^\circ$. Conviene hacer notar que si bien hablamos de la horizontal, un arcoíris puede ser observado desde un avión mirando de manera vertical hacia abajo, pero la condición es la misma, el rayo debe entrar en el mismo ángulo.

2.1.2. Dos (y Más) Rebotes

Una vez resuelto el problema de un rebote en el arcoíris, pasemos a el arcoíris secundario (y terciario y demás), aunque no hay que confundirlos con el arcoíris supernumerario el cual veremos un poco más adelante. Ya sabemos lo que sucede cuando la luz rebota dentro de la gota de agua una sola vez, pero imaginemos que pasaría si la luz rebota dos o más veces. En primer lugar, dependiendo de la manera y la cantidad de rebotes, los rayos de salida se invertirían tal como lo muestra la siguiente figura.

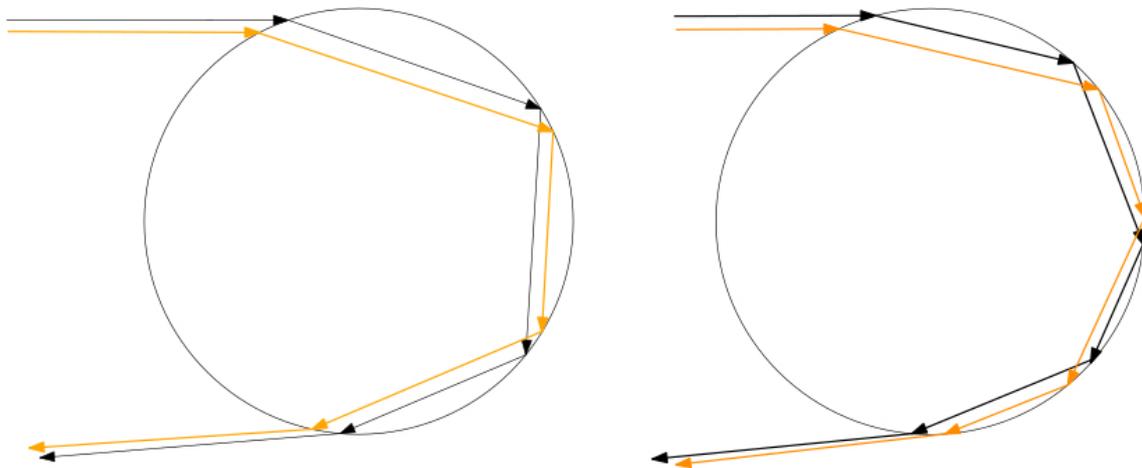


Figura 2.2: El círculo de la izquierda corresponde a dos rebotes, mientras que el de la derecha corresponde a tres. Notemos como en el caso de dos rebotes, los rayos se invierten y en el caso de tres rebotes vuelven a la normalidad.

Esta inversión da lugar a un fenómeno muy curioso, el arcoíris secundario tiene los colores invertidos, mientras que el terciario se observaría (ya que es muy difícil encontrarlo en la naturaleza, como se mostrará más adelante) con los colores en el orden conocido. Resulta que en general los arcoíris con número de rebotes impar tendrás los colores acomodados de la manera usual, mientras que los de número par estarán invertidos. Se puede generalizar nuestra fórmula para un rebote y utilizarla para obtener, el ancho del arcoíris y el ángulo necesario para que sea observado.

2.1.2. Dos (y Más) Rebotes

Podemos obtener la desviación total, D_k tomamos en cuenta dos refracciones y k reflexiones de manera que ahora tenemos la ecuación:

$$D_k = k(\pi - 2r) + 2(i - r). \quad (2.1)$$

Volvemos a utilizar la ley de Snell, $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$, y al sustituir dentro de la ecuación (2.1) obtenemos,

$$D_k = k(\pi - 2 \arcsin(\frac{\sin(i)}{n_2})) + 2(i - \arcsin(\frac{\sin(i)}{n_2}))$$

y reacomodando obtenemos,

$$D_{k_i} = -\frac{2k \cos(i)}{\sqrt{1 - (\frac{\sin(i)}{n_2})^2 n_2}} + 2 - \frac{2k \cos(i)}{\sqrt{1 - (\frac{\sin(i)}{n_2})^2 n_2}}.$$

Volvemos a hacer $D_{k_i} = 0$

$$-\frac{2 \cos(i)}{\sqrt{1 - (\frac{\sin(i)}{n_2})^2 n_2}} (k + 1) = -2.$$

Despejamos para quedarnos con

$$\frac{\cos(i)}{\sqrt{1 - (\frac{\sin(i)}{n_2})^2}} = \frac{n_2}{k + 1}.$$

Ahora, recordando que $\frac{\sin(i)}{n_2} = \sin(r)$ y $1 = \sin^2(x) + \cos^2(x)$ obtenemos

$$\frac{\cos(i)}{\cos(r)} = \frac{n_2}{k + 1},$$

y haciendo los siguientes despejes,

$$\cos(i) = \frac{n_2}{k + 1} \sqrt{1 - (\frac{\sin(i)}{n_2})^2}$$

$$\cos^2(i) = \frac{n_2^2 - \sin^2(i)}{(k + 1)^2}$$

$$(k + 1)^2 (\cos^2(i)) = n_2^2 - 1 + \cos^2(i)$$

y llegamos a:

$$\cos(i) = \sqrt{\frac{n_2^2 - 1}{k(k + 2)}}.$$

Derivamos por segunda vez para encontrar el mínimo.

$$D_{k_i} = -\frac{2 \cos(i)(k + 1)}{\sqrt{1 - (\frac{\sin(i)}{n_2})^2 n_2}} + 2$$

$$D_{k_{ii}} = -\frac{2(k + 1) \sin(i) n_2 \sqrt{1 - (\frac{\sin(i)}{n_2})^2} - (2(k + 1) \cos(i) \frac{\sin(i) \cos(i)}{\sqrt{1 - (\frac{\sin(i)}{n_2})^2 n_2}})}{1 - (\frac{\sin(i)}{n_2})^2 n_2 - 2}$$

$$D_{k_{ii}} = \frac{2(k + 1)(n_2^2 - 1) \tan(r)}{n_2^3 \cos^2(r)}.$$

Como $k > 0$ y $0 < r < \frac{\pi}{2}$, esto es siempre positivo y por tanto un mínimo.

En estos momentos podemos proceder de la misma manera que cuando teníamos un solo rebote, entonces tomaremos los valores para $k = 2$ y para $k = 3$ Tenemos

$$\cos(i) = \sqrt{\frac{n_2^2 - 1}{k(k+2)}}$$

despejamos para i

$$i = \arccos \sqrt{\frac{n_2^2 - 1}{k(k+2)}}$$

$$i = \arccos \sqrt{\frac{(1,3333)^2 - 1}{8}} \approx 1,2538.$$

Y entonces podemos obtener el valor para D ,

$$D = 2\pi + 2(1,2538) - 6 \arcsin\left(\frac{\sin(1,2538)}{1,3318}\right) \approx 4,0261.$$

Esto es en grados $230,68^\circ$, con un complemento de $50,7^\circ$.

Para la luz violeta tenemos,

$$D = 2\pi + 2(1,2538) - 6 \arcsin\left(\frac{\sin(1,2538)}{1,3435}\right) \approx 4,0789.$$

Que en grados es $233,7^\circ$ con un complemento de $53,7^\circ$ y la diferencia es de 3° , por tanto el arcoíris tendrá aproximadamente este ancho y efectivamente vemos que los colores sufren una inversión i.e. El color rojo ahora queda abajo del violeta ya que $50,7^\circ < 53,7^\circ$.

Finalmente, y de manera meramente informativa, hacemos los cálculos para $k = 3$. Empezamos por la luz roja.

$$\cos(i) = \sqrt{\frac{n_2^2 - 1}{k(k+2)}}$$

$$i = \arccos \sqrt{\frac{n_2^2 - 1}{k(k+2)}}$$

$$i = \arccos \sqrt{\frac{(1,3333)^2 - 1}{15}} \approx 1,3412$$

$$D = 3\pi + 2(1,3412) - 8 \arcsin\left(\frac{\sin(1,3412)}{1,3318}\right) \approx 5,5479.$$

En grados esto se convierte en $317,9^\circ$ con un ángulo complementario de $-137,9^\circ$. Ahora lo mismo para la luz violeta;

$$D = 3\pi + 2(1,3412) - 8 \arcsin\left(\frac{\sin(1,3412)}{1,3435}\right) \approx 5,6121.$$

Lo que es equivalente en grados a $322,2^\circ$ con un ángulo complementario de $-142,2^\circ$ y nuestro nuevo ancho es $4,3^\circ$. Lo curioso, y la principal razón de hacer este cálculo es hacer notar las siguientes 2 particularidades.

Primero, este arcoíris aparece detrás del observador, y segundo, los colores se vuelven a invertidos pero al estar detrás del observador se ven en el orden del primario, y el ancho volvió a aumentar. Este ensanchamiento se debe, en parte, a la dispersión y al aumento en interferencia destructiva con el aumento de rebotes.

2.2. El Arcoíris Como Cáustica

Ademas de la explicación anterior al fenómeno del arcoíris, es posible interpretarlo como la interferencia que produce los diferentes índices de refracción de cada color.

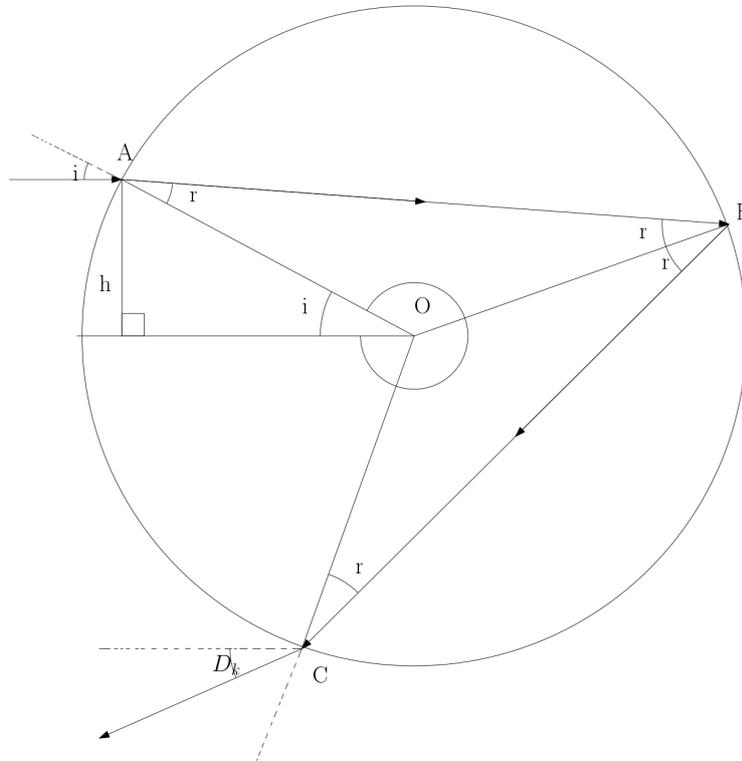


Figura 2.3: El recorrido de la luz del punto de entrada A al punto de salida B , tendrá pequeñas variaciones dependiendo del color de luz que trabajemos, y al final estos causaran una interferencia.

Observemos la figura anterior. A medida que el punto de entrada A se mueve en el sentido de las manecillas del reloj, el punto de rebote B se ira moviendo en esa misma dirección y esto a su vez provocará que el punto de salida C se mueva pero el sentido opuesto a las manecillas hasta alcanzar un punto critico en el cual el sentido que recorre C se invierte, pasa de ir con las manecillas del reloj a ir contra las mismas. Este punto extremo es crucial para la formación de interferencia que dará lugar al arcoíris y por esta razón nos interesa saber cuándo sucede que el ángulo $\angle BOA = 4r - i$ es un máximo. Ahora la pregunta natural es de dónde se obtiene este valor.

Siguiendo la misma figura, podemos hacer las siguientes 2 afirmaciones:

- $2r$ no puede medir 90° ,
- y $2r$ no puede ser igual a 60° .

La primera afirmación es cierta debido a que, si $2r$ fuera igual a 90° entonces dentro de la gota tendríamos un cuadrado y por consiguiente habría dos rebotes dentro de la gota, pero nosotros (en este caso) estamos tomando un solo rebote, de manera que obtener un cuadrado resulta imposible. La segunda afirmación también es cierta ya que sí $2r$ fuera igual a 60° , entonces dentro de la gota tendríamos un triángulo equilátero y por tanto no habría punto de salida, es decir el rayo regresaría con el mismo ángulo con el cual

entró. Usando esto podemos asegurar que $90^\circ < 4r < 180^\circ$. También podemos asegurar que $180^\circ = 6r - i$, ya que $i > r$ y que $\angle BOA = 180^\circ - 2r$ (porque la suma de los ángulos internos de un triángulo debe ser 180°).

Utilizando los resultados anteriores y substituyendo obtenemos $180^\circ = 6r - i - 2r = \angle BOA$ y de aquí $\angle BOA = 4r - i$. Si por un momento pensamos en $\angle BOA$ como $f(i)$, podemos derivar y obtener el máximo recordando que $r = \arcsin\left(\frac{\sin(i)}{n_2}\right)$ solo que ahora tomaremos $n_2 = N$ para obtener:

$$f(i) = \angle BOA = 4 \arcsin\left(\frac{\sin i}{N}\right) - i$$

$$f'(i) = \frac{4}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sin i}{N}\right)^2}} \frac{\cos i}{N} - 1.$$

Igualamos a 0 para buscar el punto crítico,

$$\frac{4 \cos i}{\sqrt{N^2 - \sin^2 i}} - 1 = 0$$

$$\sqrt{N^2 - \sin^2 i} = 4 \cos i$$

$$\cos^2 i = \frac{N^2 - \sin^2 i}{16}.$$

Lo cual podemos acomodar como,

$$\cos^2 i = \frac{N^2 + \cos^2 i - 1}{16}.$$

Despejamos para i para obtener:

$$(16 - 1) \cos^2 i = N^2 - 1$$

$$i = \arccos\left(\sqrt{\frac{N^2 - 1}{15}}\right).$$

Y sabemos que es un máximo ya que la segunda derivada es:

$$f''(i) = \frac{4 \sin i (-N^2 + \sin^2 i + \cos^2 i)}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{N^2}} (N^3 - N \sin^2 i)}.$$

Mientras que el denominador es siempre positivo, el numerador será negativo ya que $\sin^2 i + \cos^2 i \leq 1$ y entonces es menor que N^2 y tenemos un máximo.

Entonces, sí $N = \frac{4}{3}$, entonces $i \approx 76,8^\circ$ lo cual es mucho mayor que el ángulo de incidencia para el arcoíris ($i \approx 59,4^\circ$ para el mismo valor de N).

La siguiente figura muestra dos cosas, el comportamiento particular el cual provoca que después de cierto ángulo los rayos se regresen sobre sí mismos, de tal manera que generan un "doblez" (si imaginamos que los rayos son una especie de sabana), y que este doblez es la cáustica. La cáustica es el borde del arcoíris.

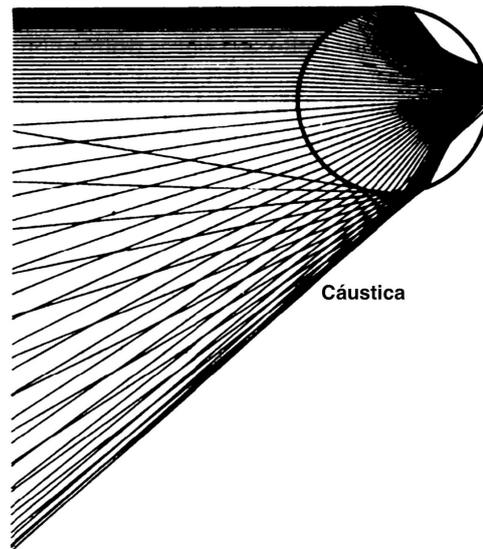


Figura 2.4: Observemos como se ve de una manera clara un punto de acumulación de los rayos de salida. Esta zona corresponde a la cáustica, y esta a su vez corresponde a el borde del arcoíris.(Tomada del capítulo 14.6 del libro de Haberman [4])

Lamentablemente hemos llegado al final del camino utilizando la geometría, y es aquí donde nos encontramos que la teoría nos indica que, justo en el dobléz, debería de presentarse una iluminación infinita, sin embargo sabemos que esto no es del todo cierto.

Si recordamos que la luz también puede ser interpretada como onda, podemos hacer el salto a la aplicación de la teoría de ondas teniendo en cuenta que podemos interpretar a las normales a nuestros rayos como los frentes de onda y los rayos como su trayectoria.

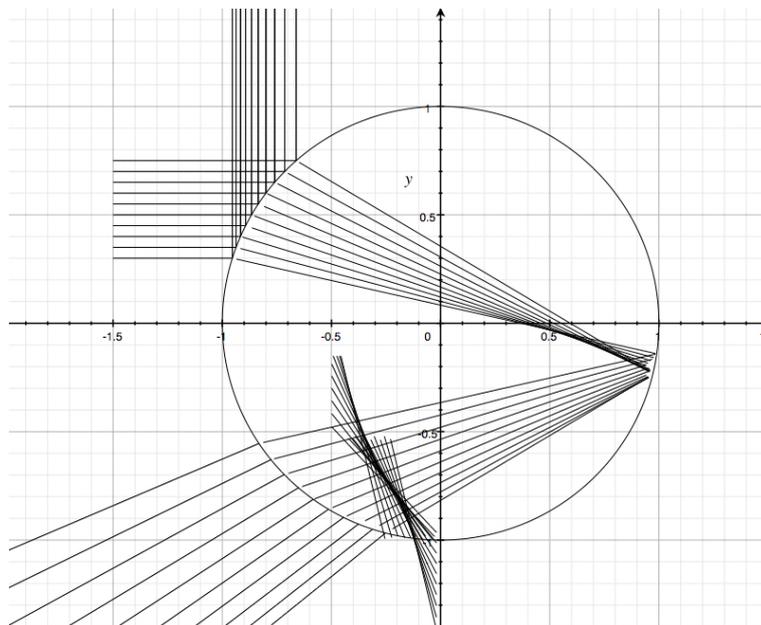


Figura 2.5: Imaginemos que las líneas que se aprecian en la imagen anterior son el recorrido de una normal cualquiera en un tiempo determinado. Podemos observar cómo genera una función aparentemente cubica, la cual es la cáustica del arcoíris. Más adelante se verá cómo esta también sufre los efectos de la refracción al salir de la gota de agua.

Y es más, podemos mostrar que, si en los rayos existe una cáustica, de igual manera existe una en las normales.

Ahora, la fig 2.6 aísla una familia de rayos y nos permite estudiar de cerca la función descrita en la fig 2.5. Si YY' es el rayo con desviación mínima, entonces los rayos a sus lados son desviados con ángulos crecientes y como mencionamos antes, llegan a un punto donde la inclinación vuelve a regresar, es decir en el trayecto $W'E$ el ángulo de inclinación va disminuyendo pero en el trayecto EW el ángulo vuelve a aumentar.

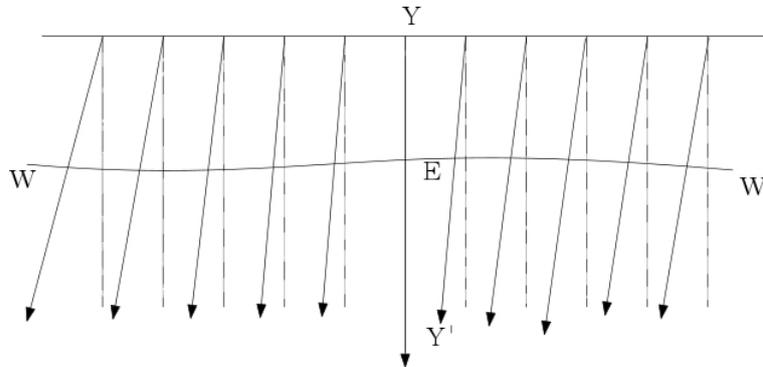


Figura 2.6: El rayo de con desviación mínima YY' y los rayos en su vecindad que emergen de las normales a los rayos WW' . Además, aquí notamos que en efecto fue un punto de inflexión. (Imagen tomada de [10].)

Ahora, si hacemos un zoom y usamos los rayos YOY' y XOX' como ejes coordenados, donde O corresponde a E en la figura 2.6., podemos ver que esta envolvente a las normales de los rayos se puede aproximar de manera muy buena por medio de una cúbica. Esto se hace más claro en la figura 2.7.

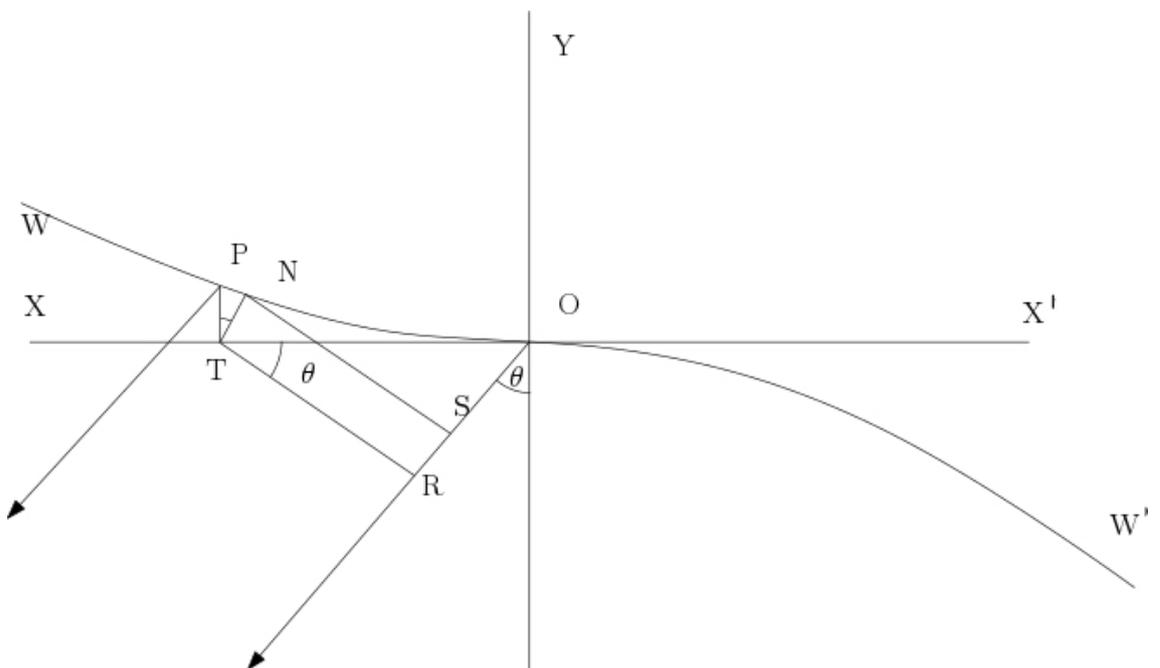


Figura 2.7: La geometría de la función aparentemente cúbica creada por las normales a los rayos, WW' que nos llevara a la conocida ecuación de Airy. (Imagen tomada de [10].)

Apoyándonos en este dibujo, podemos ver que nuestra función creada por las normales puede ser aproximada de una excelente manera por una ecuación cubica como la siguiente:

$$y = c'x^3.$$

Como $y'(0) = 0$, donde c' es una constante con dimensión $(longitud)^{-2}$. Resulta razonable esperar que esta constante este relacionada con el tamaño de la gota de donde proviene, entonces si tomamos dicho radio como a , tenemos que

$$y = \frac{c}{a^2}x^3,$$

con c siendo ahora adimensional.

Ahora, considerando la diferencia de trayectorias recorridas entre los puntos P y O obtenemos

$$\eta(x) = OS = OR - RS = OR - TN = x \sin \theta - y \cos \theta$$

ó

$$\eta(x) = x \sin \theta - \frac{cx^3}{a^2} \cos \theta.$$

Recordemos que los rayos de luz pueden ser interpretados como oscilaciones sinusoidales y lo que nos interesa en este momento es ver qué le sucede a las ondas cuando tenemos cáusticas.

Podemos buscar la diferencia de un pequeño elemento δx de nuestra función en O y representarla como $\sin(\omega t)$, lo cual es la representación canónica de una onda, con un elemento en P con una pequeña diferencia, i.e. $\sin(\omega t + \delta)$, donde

$$\delta = \frac{2\pi\eta(x)}{\lambda} = k\eta(x),$$

con λ siendo la longitud de onda, y k siendo el numero de onda (o frecuencia). Entonces el total de la perturbación sobre las amplitudes es la integral

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega t + k\eta(x)) dx.$$

Lo cual no converge. Si ahora utilizamos identidades trigonométricas, nuestra integral se convierte en:

$$\sin(\omega t + k\eta(x)) = \sin(\omega t) \cos(k\eta(x)) + \cos(\omega t) \sin(k\eta(x))$$

$$\therefore A = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega t) \cos(k\eta(x)) + \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega t) \sin(k\eta(x)).$$

Pero $\sin(k\eta(x))$ es una función impar, por lo tanto su integral es igual a 0 y por consiguiente solamente tendremos,

$$A = \sin(\omega t) \int_{-\infty}^{\infty} \cos k\eta(x) dx.$$

Recordemos que $\eta(x)$ depende de x y aplicamos el siguiente cambio de variable

$$\xi^3 = k\eta(x) = \frac{2kcx^3 \cos \theta}{\pi a^2}$$

y

$$m\xi = \frac{2kx \sin \theta}{\pi}$$

utilizando estos cambios de variable, podemos escribir la integral como

$$A = \left(\frac{\pi a^2}{2kc \cos \theta} \right)^{\frac{1}{3}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2} (m\xi - \xi^3) d\xi \quad (2.2)$$

Esta última integral es conocida como la integral de Airy (en su forma canónica), en honor a George Biddell Airy quien aplicó la teoría de ondas de Fresnel a la problemática del arcoíris y la publicó en su artículo "*On the Intensity of Light in the neighbourhood of a Caustic*" ("Sobre la intensidad de la luz en la vecindad de una Cáustica").

Ademas de aparecer en el arcoíris, la integral de Airy es también solución a la ecuación diferencial lineal de segundo orden mas sencilla donde sucede que las soluciones cambian de ser exponenciales a ser oscilatorias (o viceversa).

Tomemos la siguiente ecuación

$$u'' - ux = 0.$$

A pesar de que la manera más rápida de mostrar que es solución sería simplemente sustituir y ver que efectivamente la resuelve, tomaremos el camino largo y empezaremos usando la Transformada de Fourier. También conviene notar que, al ver $u'' = ux$ se puede esperar que efectivamente al menos una de las soluciones será de carácter oscilatorio.

Utilizando la transformada de Fourier obtenemos

$$-k^2 \hat{u}(k) - i\hat{u}'(k) = 0.$$

El observador estudiado se dará cuenta de que esto sigue siendo una ecuación diferencial pero ahora es de primer orden, ahora utilizando la separación de variable obtenemos

$$-i \frac{d\hat{u}(k)}{dk} - k^2 \hat{u}(k) = 0,$$

y por lo tanto

$$\frac{d\hat{u}(k)}{\hat{u}} = k^2 i dk.$$

Integramos ambos lados

$$\int \frac{d\hat{u}(k)}{\hat{u}} = i \int k^2 dk$$

lo que es igual a,

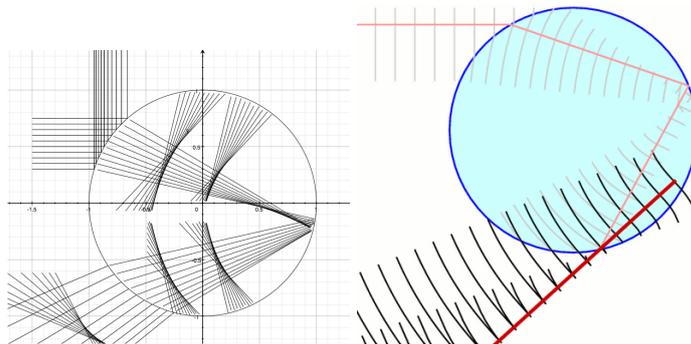
$$\begin{aligned} \log(\hat{u}(k)) &= \frac{ik^3}{3} \\ &\vdots \\ \hat{u}(k) &= e^{\frac{ik^3}{3}}. \end{aligned}$$

Ahora aplicamos la Transformada Inversa de Fourier para obtener

$$\check{u}(k) = \frac{1}{2\pi} \int e^{\frac{ik^3}{3}} e^{ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int e^{i(\frac{k^3}{3} + kx)} dx.$$

Y esta última integral es otra de las tantas interpretaciones que tiene la integral de Airy, y será con la que estaremos trabajando a lo largo de esta tesis. Para esto necesitaremos el análisis asintótico.

A pesar de que todo esta sustentado matemáticamente hacer el salto conceptual de cambiar el rayo por un frente de onda (al que hasta ahora hemos estado llamando función que generan las normales), no es una idea natural así que para ayudar a este salto se incluyen las siguientes imágenes donde podemos observar la trayectoria del haz de luz y la equivalente para el frente de onda.



(a) Rebote interno de las normales. (b) Nuevo frente de onda al salir de la gota.

Figura 2.8: Al igual que la figura 2.1, la onda (lineas verticales) entra en el mismo punto que la familia de haces y sufre las mismas refracciones y el mismo rebote, pero resulta un tanto mas evidente la interferencia que sufre tras la segunda refraccion.

Capítulo 3

Métodos Asintóticos

Cómo se vio al final del capítulo anterior, la geometría no da una explicación completa al fenómeno del arcoíris y nos llevó a la fórmula integral de Airy. En este capítulo veremos los métodos asintóticos que pueden ser utilizados para solucionar la ecuación de Airy, así como la solución de la misma y una breve explicación a la banda de Alexander.

3.1. La Notación de Landau

Para resolver la ecuación de Airy es necesario apoyarnos de los métodos asintóticos así que es conveniente explicarlos. Además, debemos repasar la notación de Landau ya que estos métodos se apoyan en ella.

Si $f(z)$ y $g(z)$ son dos funciones de variable compleja,

- Diremos que $f(z) = O(g(z))$ conforme $x \rightarrow \infty$ si existen algunas constantes M, c tales que $|f(z)| \leq c|g(z)|$ para toda $x > M$.
- Diremos que $f(z) = o(g(z))$ conforme $x \rightarrow \infty$ para cualquier positivo c si existe M tal que $|f(z)| \leq c|g(z)|$ para toda $x > M$.

La diferencia entre la definición para O y la de o es que para la primera basta con que sea cierto para algún M , mientras que para la segunda debe ser cierto para TODA c sin importar que tan pequeña sea y de hecho como $g(x) \neq 0$ a partir de cierto punto, la relación es equivalente a

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left| \frac{f(z)}{g(z)} \right| = 0.$$

Es decir que cuando decimos que $f(z) = O(g(z))$ estamos diciendo que $f(z)$ esta acotada por arriba en algún punto por $g(z)$, mientras que cuando $f(z) = o(g(z))$ estamos diciendo que $f(z)$ es dominada asintoticamente por $g(z)$, es una condición mucho mas fuerte que O , i.e. $o \Rightarrow O$ pero $O \not\Rightarrow o$.

3.2. El Método de Laplace

Dentro de estos métodos, conviene mencionar tres, el método de Laplace, el método de fase estacionaria, y el método de descenso rápido (este ultimo es una mezcla de los primeros dos como veremos mas adelante).

Nombrado en honor a Pierre-Simon Laplace, este método es utilizado para resolver integrales de la forma

$$\int_a^b g(x)e^{\lambda f(x)} dx$$

, donde λ es extremadamente grande, $f(x)$ debe ser al menos dos veces diferenciable y los limites de integración pueden ser infinitos.

La idea es que si la función $f(x)$ tiene un máximo global único, digamos en x_0 , entonces el valor de $f(x_0)$ será mayor que en cualquier otro punto, si este es multiplicado por un numero grande como λ , entonces la razón entre $\lambda f(x_0)$ y $\lambda f(x)$ se mantendrá igual pero esta crecerá de manera exponencial en la función $e^{\lambda f(x)}$ y por tanto las contribuciones importantes vendrán solo de puntos cercanos a x_0 .

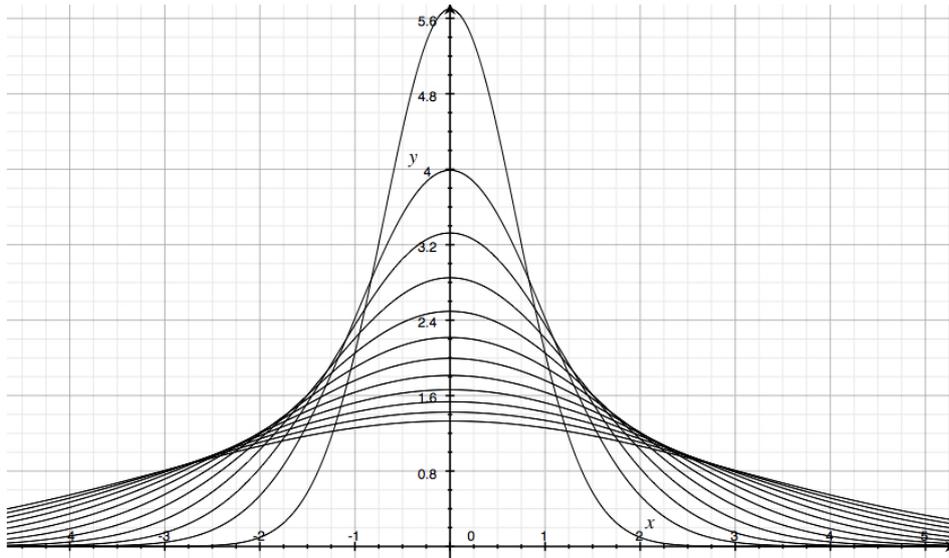


Figura 3.1: Los valores mas importantes de la función se empiezan a concentrar en el máximo, mientras que los demás valores se empiezan a "aplastar" hacia 0, las contribuciones importantes están en los cercanos a este punto.

Sin perdida de generalidad, consideremos las integrales de la forma

$$f(x) = \int_0^T g(t)e^{xh(t)} dt, \quad (3.1)$$

donde $h(0)$ es el máximo $h(t)$ dentro del rango $0 \leq t \leq T$, y T es un numero positivo. Ahora, mientras que la Fig. 3.2 nos muestra una típica función de este tipo, la Fig. 3.3 nos muestra una función con varios máximos relativos. En este caso simplemente se procede a cortar la función de manera que solo tengamos un máximo en cada intervalo, en esencia regresándonos a Fig. 3.2.

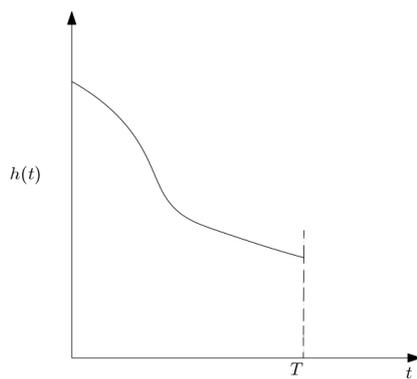


Figura 3.2

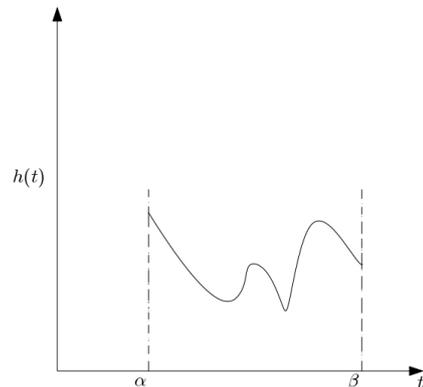


Figura 3.3

Tomando como referencia a figura 3.2, el origen de la función puede ser un máximo genuino con $h'(0) = 0, h''(0) < 0$ o puede no serlo, en cuyo caso tendríamos que $h'(0) < 0$. Consideraremos de manera separada ambos casos.

1. Consideremos la ecuación (3.1) con $h(0) > h(t)$ para toda $0 < t \leq T$ y con $h'(0) = 0$ y sean $g(t)$ y $h''(t)$ funciones reales y continuas en el intervalo $0 \leq t \leq T$. Deseamos encontrar una aproximación asintótica para $f(x)$ conforme $x \rightarrow \infty$. Recordemos

que mientras $x \rightarrow \infty$ la parte dominante de la integral -y por tanto su aproximación asintótica- viene de la vecindad inmediata de $t = 0$ en un intervalo suficientemente cercano a $t = 0$, digamos cuando $0 \leq t \leq \delta < T$, $h''(0) < 0$ ya que h'' es continua y $h(0)$ es un máximo genuino. Utilizando el teorema del valor medio en el intervalo $0 \leq t \leq \delta$, $h(t) - h(0) = \frac{1}{2}t^2 h''(\xi)$, donde $h''(\xi) < 0$ y $0 < \xi < \delta$. Esto nos permite definir una nueva variable en nuestra búsqueda por la aproximación asintótica, digamos s , que estará definida por:

$$h(t) - h(0) = -s^2. \quad (3.2)$$

Con esto, el exponente en (3.1) se convierte en

$$e^{xh(t)} = e^{xh(0)} e^{-xs^2}. \quad (3.3)$$

(Esto se debe a que vemos a $h(t)$ como $h(t) = -s^2 + h(0)$).

El siguiente paso es hacer que $g(t)$ quede como función de s . Debido a que la parte dominante de la integral conforme $x \rightarrow \infty$ viene de la vecindad de $t = 0$, la primera aproximación de $g(t)$ como función de s es $g(0)$. Ahora consideremos que $g(t)$ se al menos C^2 continua, de manera que podremos desarrollar la serie de Taylor en la vecindad de $t = 0$. Escribimos entonces,

$$g(t) = g(0) + tg'(0) + \frac{1}{2}t^2 g''(0) + \dots \quad (3.4)$$

que es válida para algún radio de convergencia finito. Ahora desarrollamos en Taylor $h(t)$ en (3.2) obteniendo

$$\frac{1}{2}t^2 h''(0) + \dots = -s^2 \quad (3.5)$$

despejando para t

$$t = \left\{ \frac{-2}{h''(0)} \right\}^{\frac{1}{2}} s + O(s^2) \quad (3.6)$$

y por tanto,

$$g(t) = g(0) + g'(0) \left\{ \frac{-2}{h''(0)} \right\}^{\frac{1}{2}} s + O(s^2). \quad (3.7)$$

Ahora sustituimos usando todo lo que hemos hecho para que en (3.1) quede s en lugar de t . Como la aproximación asintótica conforme $x \rightarrow \infty$ se da por la integración en la vecindad de $t = 0 = s$ si utilizamos (3.2), (3.6) y (3.7) obtenemos

$$f(x) \approx e^{xh(0)} \left\{ \frac{-2}{h''(0)} \right\}^{\frac{1}{2}} \int_0^A e^{-xs^2} \{g(0) + O(s)\} ds. \quad (3.8)$$

Donde A puede ser cualquier número, o inclusive infinito, por tanto podemos escribir la integral como

$$f(x) \approx e^{xh(0)} \left\{ \frac{-2}{h''(0)} \right\}^{\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} e^{-xs^2} ds + e^{xh(0)} O\left(\int_0^{\infty} s e^{-xs^2} ds\right) + \dots, \quad (3.9)$$

y, finalmente, como

$$\int_0^A e^{-xs^2} ds \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{x} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{conforme } x \rightarrow \infty. \quad (3.10)$$

Sumándole algunos términos exponencialmente pequeños,

$$\int_0^T g(t) e^{xh(t)} dt = g(0) \left\{ \frac{-pi}{2xh''(0)} \right\}^{\frac{1}{2}} e^{xh(0)} + e^{xh(0)} O\left(\frac{1}{x}\right). \quad (3.11)$$

Ahora, si quisiéramos saber el valor del segundo termino de la derecha en la ecuación (3.8), bastaría con obtener la equivalencia de la expresión $O(s^2)$, lo cual es fácilmente obtenible de (3.6) debido a que podemos hacer lo siguiente:

$$dt = \left\{ \left(\frac{-2}{h''(0)} \right)^{\frac{1}{2}} + O(s) \right\} ds,$$

y de esta manera, obtenemos el valor exacto para $O(s)$ y podemos usarlo para integrar y obtener la segunda aproximación en caso de ser necesaria.

Si ahora consideramos las ecuaciones de la forma

$$f(x) = \int_{-U}^T g(t) e^{xh(t)} dt \quad \text{conforme } x \rightarrow \infty$$

en lugar de (3.1), donde los limites de integración son numeros positivos y $h(0)$ es el máximo de $h(t)$ con $h'(0) = 0$, $h''(0) < 0$, entonces obtendremos las mismas intégrales de (3.9) pero el intervalo de integración será $-\infty$ a ∞ y el primer termino en (3.11) estará multiplicado por 2.

Cabe mencionar que debido a que

$$\int_{-\infty}^{\infty} s e^{-xs^2} ds = 0,$$

el segundo termino en la solución *no* sera $e^{xh(0)} O\left(\frac{1}{x}\right)$ como en el caso anterior y para obtener la segunda contribución diferente de 0 será necesario obtener los valores de $O(s^2)$ y $O(s^3)$ en (3.6) y de $O(s^2)$ en (3.7) el cual resulta ser

$$\int_{-\infty}^{\infty} s^2 e^{-xs^2} ds = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{x^3} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

La manera mas sencilla de obtener esta integral es derivar

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-xs^2} ds = \left(\frac{\pi}{x} \right)^{\frac{1}{2}}$$

con respecto de x , i.e.

$$\int_{-\infty}^{\infty} s^2 e^{-xs^2} ds = -\frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-xs^2} ds = -\frac{d}{dx} \sqrt{\frac{\pi}{x}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{x^3} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Entonces, la aproximación asintótica para nuestra integral en el intervalo U a T sera:

$$\int_{-U}^T g(t)e^{xh(t)} dt = g(0) \left\{ \frac{-2}{xh''(0)} \right\}^{\frac{1}{2}} e^{xh(0)} + e^{xh(0)} O(x^{\frac{3}{2}}).$$

Y finalmente, para regresar a nuestra ecuación (3.1), donde $t = a$ es el máximo en $h(t)$, con $\alpha < a, \beta$, simplemente reemplazamos el *cero* con a en la integral anterior para obtener,

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(t)e^{xh(t)} dt = g(a) \left\{ \frac{-2}{xh''(a)} \right\}^{\frac{1}{2}} e^{xh(a)} + e^{xh(a)} O(x^{\frac{3}{2}})$$

conforme $x \rightarrow \infty$.

2. Ahora consideremos el segundo caso, i.e. la ecuación (3.1) donde $h(0)$ es el máximo de $h(t)$ en el intervalo $0 \leq t \leq T$, con $h'(0) < 0$. Conforme $x \rightarrow \infty$ la contribución dominante en la integral sigue siendo una pequeña δ -vecindad de $t = 0$. Aplicando nuevamente el teorema del valor medio, $h(t) - h(0) = f'(\eta)t$, donde $h'(\eta) < 0$ y $0 < \eta < \delta < T$. Como $h'(0) < 0$ y $h'(t) < 0$ en una pequeña vecindad suficientemente cercana a $t = 0$, tenemos el siguiente cambio de variable:

$$h(t) - h(0) = -s \tag{3.12}$$

lo cual, para un t pequeña nos da,

$$t = \left\{ \frac{-1}{h'(0)} \right\} s + O(s^2), \tag{3.13}$$

en lugar de (3.6) en el primer caso. Haciendo el mismo procedimiento que para el caso 1, obtenemos que la aproximación asintótica será ahora

$$\begin{aligned} f(x) &\approx \int_0^A \{g(0) + O(s)\} e^{xh(0)} e^{-xs} \left\{ \frac{-1}{h'(0)} \right\} ds \\ &\approx \left\{ \frac{-g(0)}{h'(0)} \right\} e^{xh(0)} \int_0^{\infty} e^{-xs} ds + e^{xh(0)} O\left(\int_0^{\infty} s e^{-xs} ds \right), \end{aligned}$$

y entonces, cuando sucede que $h'(0) \neq 0$ nuestra aproximación conforme $x \rightarrow \infty$ se vuelve

$$\int_0^T g(t)e^{xh(t)} dt = \left\{ -\frac{g(0)}{xh'(0)} \right\} e^{xh(0)} + e^{xh(0)} O(x^{-2}). \tag{3.14}$$

Aquí, el segundo termino necesita el valor de $O(s^2)$ en (3.13) así como el termino $O(s)$ de (3.7), los cuales se obtienen de la misma manera que en el caso 1.

Si ahora volvemos a nuestro problema inicial, la ecuación (3.1), donde $t = \alpha$ nos da el máximo $h(t)$ en el intervalo $\alpha \leq t \leq \beta$, pero con $h(\alpha) < 0$, obtendremos

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(t)e^{xh(t)} dt = \left\{ \frac{-g(\alpha)}{xh'(\alpha)} \right\} e^{xh(\alpha)} + e^{xh(\alpha)} O(x^{-2}) \quad \text{conforme } x \rightarrow \infty, \tag{3.15}$$

en lugar de la ecuación (3.14).

Si en cambio $h(\beta)$ es el máximo, resulta que $h(t) < h(\beta)$ para toda $\alpha \leq t < \beta$, $h'(\beta) > 0$, en lugar de (3.15) tendremos

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(t)e^{xh(t)} dt = \left\{ \frac{-g(\beta)}{xh'(\beta)} \right\} e^{xh(\beta)} + e^{xh(\beta)} O(x^{-2}) \quad \text{conforme } x \rightarrow \infty. \quad (3.16)$$

Todo lo anterior, y buena parte de lo que seguiremos haciendo en este capítulo, es para poder resolver la integral de Airy, i.e.

$$Ai(-\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\frac{\xi^3}{3} - \lambda\xi)} d\xi.$$

Recordemos que esta es una de las varias formas de representar dicha integral, conviene, además, dependiendo de los valores de λ esta ecuación nos arrojará resultados que muestren un decaimiento exponencial (cuando no hay contribuciones de la parte imaginaria) u oscilatorio (cuando no hay contribuciones de la parte real), y esto se logra haciendo el método de Laplace y el método de fase estacionaria respectivamente, por consiguiente usaremos este espacio para mostrar la solución con decaimiento exponencial de la ecuación de Airy¹.

Primero tomaremos el caso donde usaremos el método de Laplace. Por tanto λ será negativa y nuestra ecuación será

$$Ai(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\frac{\xi^3}{3} + \lambda\xi)} d\xi, \quad (3.17)$$

donde $h(t) = h(\xi) = \frac{\xi^3}{3} + \lambda\xi$ en la ecuación (3.1).

Primero buscamos los puntos críticos del argumento de la exponencial,

$$h(\xi) = \frac{\xi^3}{3} + \xi\lambda, \quad (3.18)$$

la primera derivada es:

$$h'(\xi) = \xi^2 + \lambda, \quad (3.19)$$

y la segunda derivada es:

$$h''(\xi) = 2\xi.$$

De (3.18) vemos que los puntos críticos serán $\xi_0 = \pm\sqrt{-\lambda}$ y si $0 < \lambda$ esto podemos escribirlo como $\xi_0 = i\sqrt{\lambda}$

¹También es posible resolver esta ecuación con el método de descenso rápido, pero esto resulta menos práctico, aun así se realizara este ejemplo mas adelante

Aplicando el teorema del valor medio, obtenemos

$$h(\xi) - h(\xi_0) = -\tau^2.$$

Tomamos el segundo termino de la expansión de Taylor

$$-\tau^2 = \frac{h''(\xi_0)}{2!}(\xi - \xi_0)^2,$$

y como $\xi_0 = i\sqrt{\lambda}$, la expansión para $h(\xi)$ es

$$h(\xi) \approx \frac{2}{3}i(\lambda)^{\frac{3}{2}} + i\sqrt{\lambda}(\xi - \sqrt{\lambda})^2 + O(\xi^2).$$

Como τ^2 toma el segundo termino

$$-\tau^2 = i\sqrt{\lambda}(\xi - \sqrt{\lambda})^2$$

$$\frac{-\tau^2}{i\sqrt{\lambda}} = (\xi - \sqrt{\lambda})^2$$

$$\frac{i}{\sqrt{i}} \frac{2}{\sqrt{\lambda}} = \xi - \sqrt{\lambda}.$$

Derivamos con respecto de ξ

$$\frac{d\xi}{d\xi} = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}} d\tau}{\lambda^{\frac{1}{4}} d\xi},$$

y al sustituir en la ecuación esta se transforma en

$$Ai(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(-\tau^2 + \frac{2}{3}i(\lambda)^{\frac{3}{2}})} \frac{e^{i\pi/4}}{(\lambda)^{\frac{1}{4}}} d\tau.$$

Finalmente,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau^2} = e^{-\frac{\pi}{4}} \sqrt{\pi}$$

$$\therefore Ai(\lambda) \approx \frac{e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{2}{3}(\lambda)^{\frac{3}{2}}}}{e^{i\frac{\pi}{4}} 2\sqrt{\pi}(\lambda)^{\frac{1}{4}}} = \frac{e^{-\frac{2}{3}(\lambda)^{\frac{3}{2}}}}{2\sqrt{\pi}(\lambda)^{\frac{1}{4}}}.$$

Claro que hay que recordar que al resultado habra que sumarle ciertos términos que son del orden $O(\lambda^{-\frac{1}{4}}\lambda^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{2}{3}\lambda^{\frac{3}{2}}})$, pero dado que λ es extremadamente grande y decae exponencialmente, los podemos despreciar en una primera aproximación.

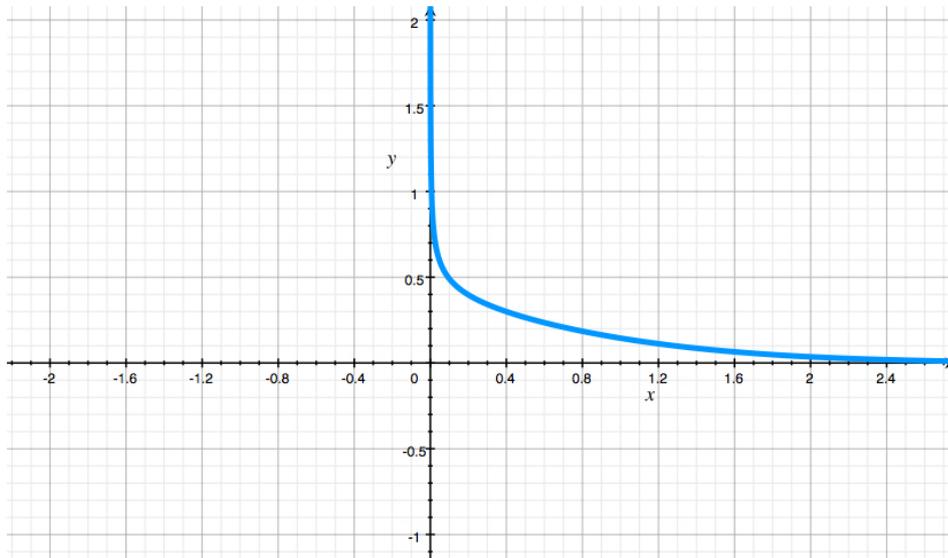


Figura 3.4: Podemos observar la gráfica generada por nuestra solución. En efecto nuestra solución fue del tipo exponencial. En el estricto sentido, vemos un descenso exponencial de los valores.

3.3. El Método de Fase Estacionaria

De lo anterior resulta posible ver que cuando λ es muy grande y negativa, la integral de Airy presentara un decaimiento exponencial, para ver el otro caso del comportamiento oscilatorio necesitaremos la hipótesis de que λ será en extremo grande y positiva, y utilizar el método de fase estacionaria, el cual es en esencia idéntico al método de Laplace pero para argumentos imaginarios en lugar de reales.

Este método fue desarrollado por Sir George Gabriel Stokes y Lord Kelvin para estudiar las integrales de la forma

$$f(\lambda) = \int_a^b g(t)e^{i\lambda h(t)} dt. \quad (3.20)$$

Como se observa, tienen una forma general muy similar a las de la forma (3.1) con la diferencia de que no existe un decaimiento exponencial del que podamos aprovecharnos para resolver la integral. Lo que si existe es una oscilación y no solo eso, sino que gracias a que pediremos que λ sea muy grande, estas oscilaciones serán muy densas, es decir, estarán amontonadas en un intervalo relativamente pequeño donde aprovecharemos la posibilidad de que se cancelen las oscilaciones.

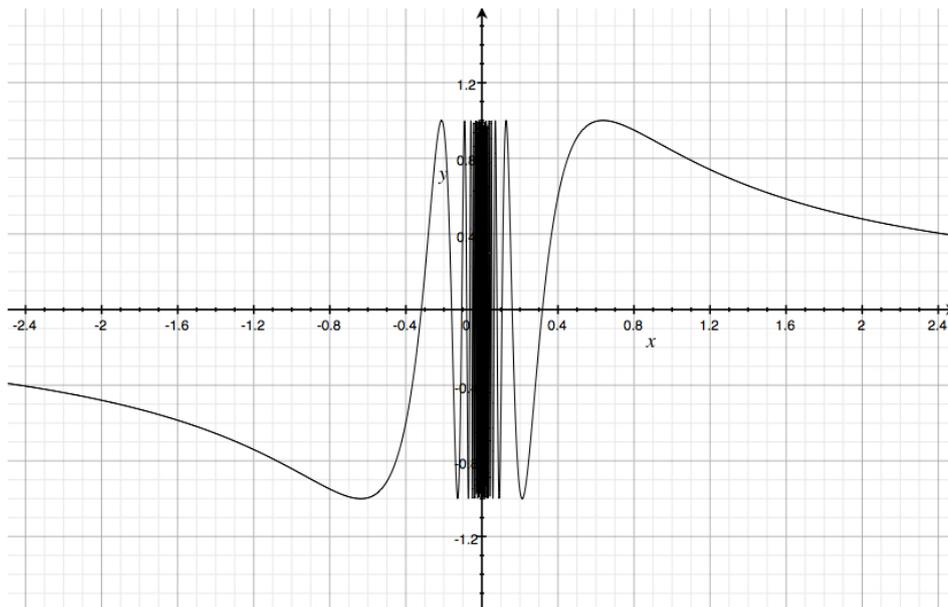


Figura 3.5: Como ejemplo tomemos la función $\sin(\frac{1}{x})$ en la cual podemos ver algo parecido a este comportamiento. Pasando el valor ± 4 se observa cómo las oscilaciones se aglutinan en una franja, es justo aquí donde el método de fase estacionaria nos ayuda a estudiar la integral.

Fuera de estas clarificaciones, el método de fase estacionaria sigue un camino en extremo similar al camino seguido por el método de Laplace, tanto así que la mejor manera de explicarlo resulta con un sencillo ejemplo,

$$F(\lambda) = \int_a^b \cos \lambda h(t) dt, \quad (3.21)$$

en donde a, b, λ y $h(t)$ son reales. Supongamos que $h(t)$ tiene un máximo o mínimo relativo en $t = t_0$ donde $a < t_0 < b$ y donde

$$h'(t_0) = 0, \quad h''(t_0) \neq 0. \quad (3.22)$$

Si recordamos lo visto en el método de Laplace, podemos ver que son prácticamente las mismas condiciones que pedíamos para el segundo caso; si $h(t)$ tiene mas de un mínimo o máximo en un intervalo determinado, entonces dividimos el mismo en sub-intervalos de tal manera en que solo exista un mínimo o un máximo.

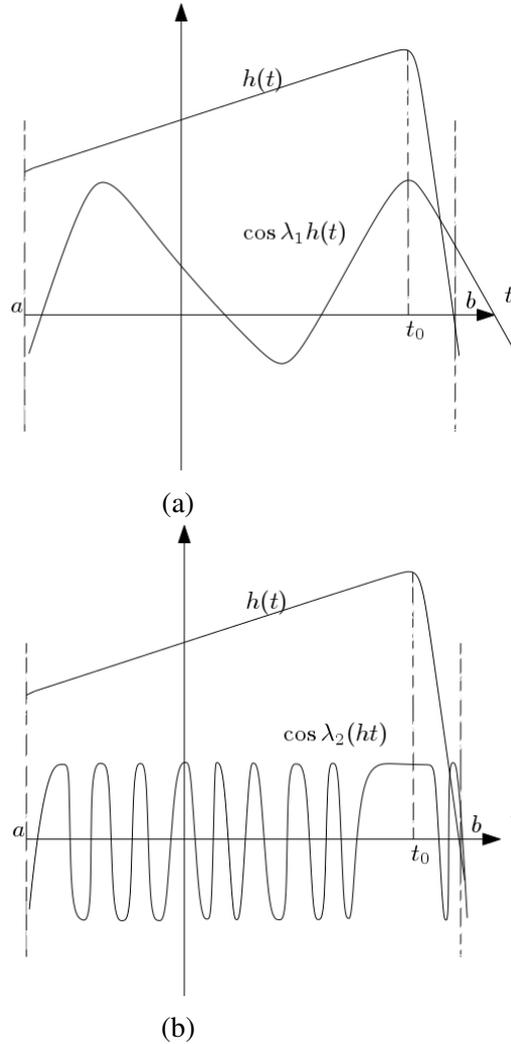


Figura 3.6: Una $h(t)$ cualquiera, donde hemos elegido por motivos ilustrativos a $h(t_0)$ como el máximo de esta función. En 3.6a y 3.6b podemos ver la comparativa dependiendo de λ , entre mayor sea λ , las oscilaciones estarán mas amontonadas excepto en una vecindad cercana a t_0 , y por tanto podemos esperar que las oscilaciones se eliminen entre ellas, dejando así a $h(t_0)$ como la principal aportación a la integral.

Conforme $\lambda \rightarrow \infty$ las oscilaciones son de manera tal que, en la integración de $\cos \lambda h(t)$, las partes positivas y negativas se cancelan excepto en la vecindad de $t = t_0$ donde $h'(t_0) = 0$ y posiblemente en los extremos ($t = a, t = b$). Cerca de $t = t_0$ la fase $\lambda h(t)$ es prácticamente constante o *estacionaria*: para $t - t_0$ pequeño $h(t) - h(t_0) = O((t_0 - t)^2)$, mientras que para la vecindad de cualquier otro punto arbitrario, digamos τ , $h(t) - h(\tau) = O(t - \tau)$. Esto nos implica que en la cercanía de t_0 las oscilaciones no se cancelaran y entonces, conforme $\lambda \rightarrow \infty$, $F(\lambda)$ es *asintóticamente* equivalente a la integral de $\cos(\lambda h(t))$ en la cercanía de una pequeña δ -vecindad de t_0 , y esta dada por la integral

$$F(\lambda) = RL \int_a^b e^{ih(t)} dt \approx RL \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} e^{ih(t)} dt. \quad (3.23)$$

Cerca de $t = t_0$ tenemos,

$$h(t) = h(t_0) + \frac{1}{2}h''(t_0)(t - t_0)^2 + \dots$$

lo cual nos permite agregar una nueva variable, tal como en 3.2,

$$h(t) - h(t_0) = \pm s^2,$$

donde utilizaremos $+s^2$ cuando $h''(t_0) > 0$ y $-s^2$ cuando $h''(t_0) < 0$. Ahora invertimos para obtener t en términos de s y obtenemos algo similar a lo obtenido en la ecuación (3.6)

$$t - t_0 = \left\{ \frac{2}{|h''(t_0)|} \right\}^{\frac{1}{2}} s + O(s^2), \quad (3.24)$$

lo cual nos cubre ambos casos gracias a el valor absoluto. Con lo anterior, la ecuación (3.23) se convierte en

$$F(\lambda) \approx RL \left\{ \frac{2}{|h''(t_0)|} \right\}^{\frac{1}{2}} e^{i\lambda h(t_0)} \int_{-s_1}^{s_1} e^{\pm i\lambda s^2} 1 + O(s) ds, \quad (3.25)$$

donde hemos hecho

$$s_1 = \delta \left\{ \frac{2}{|h''(t_0)|} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Si ahora hacemos el cambio de variable $\eta = s\sqrt{\lambda}$, la ultima integral se convierte en

$$F(\lambda) \approx RL \left\{ \frac{2}{\lambda |h''(t_0)|} \right\}^{\frac{1}{2}} e^{i\lambda h(t_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i\eta^2} \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} O(\eta) \right\} d\eta. \quad (3.26)$$

El siguiente problema que encontramos es resolver la integral antes expuesta, para lograr esto consideremos la siguiente integral,

$$\int_C e^{-z^2} dz,$$

donde C es el contorno cerrado que se muestra en la fig 3.7. Como e^{-z^2} es analítica en el dominio que encierra C , utilizando el teorema de Cauchy tenemos,

$$\int_C e^{-z^2} dz = 0 = \int_0^R e^{-r^2} dr + iR \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 e^{2i\theta}} e^{i\theta} d\theta - e^{\frac{\pi}{4}} \int_0^R e^{-ir^2} dr.$$

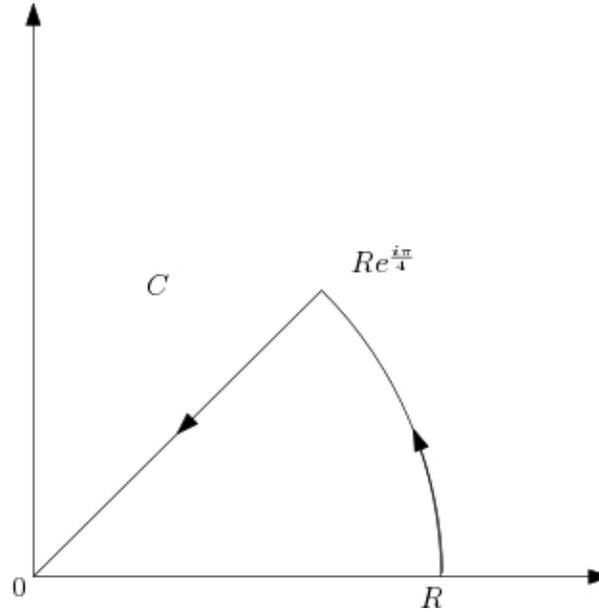


Figura 3.7: El contorno se recorre de 0 a R , de R a $Re^{i\pi/4}$ y de $Re^{i\pi/4}$ a 0.

Conforme $R \rightarrow \infty$ la segunda integral del lado derecho tiende a cero, y ahora solo nos quedamos con

$$\int_0^{\infty} e^{-ir^2} dr = e^{-\frac{\pi}{4}} \int_0^{\infty} e^{-r^2} dr = e^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Con este resultado obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i\eta^2} d\eta = 2 \int_0^{\infty} e^{\pm i\eta^2} d\eta = e^{\pm \frac{i\pi}{4}} \sqrt{\pi}.$$

Con esto, (3.26) se transforma en

$$RL \left\{ \frac{\pi}{\lambda |h''(t_0)|} \right\}^{\frac{1}{2}} e^{i\lambda h(t_0)} e^{\pm \frac{i\pi}{4}} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \right\}.$$

Y finalmente de esta ultima ecuación, la forma asintótica de (3.21) conforme $\lambda \rightarrow \infty$ sera

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \int_a^b \cos(\lambda h(t)) dt \\ &\approx \left\{ \frac{2\pi}{\lambda |h''(t_0)|} \right\}^{\frac{1}{2}} \cos\left(\lambda h(t_0) \pm \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \end{aligned} \quad (3.27)$$

donde $+\frac{\pi}{4}$ y $-\frac{\pi}{4}$ corresponden a $h''(t_0) > 0$ ($h(t_0)$ un mínimo) y $h''(t_0) < 0$ ($h(t_0)$ un máximo) respectivamente.

Es momento de regresar a nuestro problema original, la ecuación (3.20), procederemos en la misma manera que en el ejemplo anterior y ahora tomaremos en cuenta a $g(t)$ haciendo

$$g(t) = g(t_0) + (t - t_0)g'(t_0) + \dots$$

en la vecindad de t_0 para obtener una ecuación analoga a la encontrada en (3.25)

$$f(\lambda) \approx \left\{ \frac{2}{|h''(t_0)|} \right\}^{\frac{1}{2}} e^{i\lambda h(t_0)} \int_{s_1}^{s_1} e^{\pm i\lambda s^2} g(t_0) \{1 + O(s)\} ds \quad \text{conforme } \lambda \rightarrow \infty$$

y de esta manera, al intentar obtener (3.26) llegamos a

$$f(\lambda) = \int_a^b g(t) e^{i\lambda h(t)} dt \approx g(t_0) \left\{ \frac{2\pi}{\lambda |h''(t_0)|} \right\}^{\frac{1}{2}} e^{i(\lambda h(t_0) \pm \frac{\pi}{4})} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad \text{conforme } \lambda \rightarrow \infty, \quad (3.28)$$

donde nuevamente los signos \pm en la exponencial se toman dependiendo de los casos $h''(t_0) > 0$ y $h''(t_0) < 0$ respectivamente. Cabe mencionar que $|f(\lambda)| = O\left(\frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}}\right)$ conforme $\lambda \rightarrow \infty$ siempre y cuando suceda que $g(t_0) \neq 0$.

Tomemos ahora el caso con los puntos $t = a$ y $t = b$ y al mismo tiempo tomaremos el caso donde la función no tiene un máximo (o mínimo) en el intervalo $a \leq t \leq b$. En este segundo caso, las únicas contribuciones a (3.20) conforme $\lambda \rightarrow \infty$ son las dadas por $t = a$ y por $t = b$. La expansion asintótica se obtiene de manera inmediata mediante la integración por partes de (3.20) obteniendo

$$\begin{aligned} \int_a^b g(t) e^{i\lambda h(t)} dt &= \int_a^b \frac{g(t)}{ih'(t)\lambda} \frac{d}{dt} \{e^{i\lambda h(t)}\} dt \\ &= \frac{1}{\lambda} \left\{ \frac{g(b)}{ih'(b)} e^{i\lambda h(b)} - \frac{g(a)}{ih'(a)} e^{i\lambda h(a)} \right\} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \quad \text{conforme } \lambda \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.29)$$

En este caso $f(\lambda) = O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ conforme $\lambda \rightarrow \infty$. Entonces, sí $h(t)$ tiene un punto critico en el intervalo $a \leq t \leq b$, las contribuciones a la expansión asintotica son $O\left(\frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}}\right)$ para el punto critico, como en el caso de (3.28), y solamente $O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ de los limites, como en (3.29).

De (3.29) podemos darnos cuenta de que, a diferencia del método de Laplace, la magnitud *relativa* de $h(a)$ y $h(b)$ *no* es de importancia en el método de fase estacionaria. Si resulta que alguno de estos puntos es un máximo o mínimo, entonces dicho punto es el que ahora la contribución dominante y esta dada por $\frac{1}{2}$ del lado derecho de (3.28) ya que la integración será de 0 a ∞ en lugar de $-\infty$ a ∞ . Por ejemplo, supongamos que este es el caso con $t = a$, entonces $h'(a) = 0$ y

$$\int_a^b g(t) e^{i\lambda h(t)} dt \approx g(a) \left\{ \frac{\pi}{2\lambda |h''(a)|} \right\}^{\frac{1}{2}} e^{i(\lambda h(a) \pm \frac{\pi}{4})} \quad \text{conforme } \lambda \rightarrow \infty, \quad (3.30)$$

donde $+\frac{\pi}{4}$ corresponde a $h''(a) > 0$ y $-\frac{\pi}{4}$ a $h''(a) < 0$.

Como comentario final sobre la cancelación de las oscilaciones, conviene mencionar que es un criterio de decaimiento mucho mas débil que utilizar un decaimiento exponencial, donde las contribuciones de otras regiones en el dominio de integración eran *exponencialmente* mas pequeñas que le termino dominante, mientras que en este caso solo serán *algebraicamente* mas pequeñas.

Tras esta pequeña desviación por el camino de la fase estacionaria, estamos listos para resolver la ecuación de Airy para valores de λ positivos y al termino de esto veremos que la solución es, en efecto, oscilatoria.

Recordemos primero la ecuación en cuestión

$$Ai(-\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\frac{\xi^3}{3} - \xi\lambda)} d\xi. \quad (3.31)$$

Al igual que en el caso del método de Laplace, derivamos a $h(\xi)$ para obtener los puntos críticos y saber si son máximos o mínimos,

$$h(\xi) = \frac{\xi^3}{3} - \lambda\xi$$

$$h'(\xi) = \xi^2 - \lambda \quad (3.32)$$

$$h''(\xi) = 2\xi, \quad (3.33)$$

de dónde podemos ver que $\xi_0 = \pm\sqrt{\lambda}$. Entonces, aplicando la formula de Taylor cerca de ξ_0 tenemos que

$$\begin{aligned} h(\xi) &\approx \pm \frac{\lambda^{\frac{3}{2}}}{3} \mp (\lambda^{\frac{3}{2}}) + \sqrt{\lambda}(\xi \mp \sqrt{\lambda})^2 + O(\xi^2) \\ &\approx \mp \frac{2}{3}(\lambda)^{\frac{3}{2}} + \sqrt{\lambda}(\xi - \sqrt{\lambda})^2 + O(\xi^2). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Por teorema del valor medio tendremos que $h(\xi) - h(\xi_0) = \pm\tau^2$ y junto con (3.34)

$$\mp \frac{2}{3}(\lambda)^{\frac{3}{2}} + \sqrt{\lambda}(\xi - \sqrt{\lambda})^2 \pm \frac{2}{3}(\lambda)^{\frac{3}{2}} = \pm\tau^2,$$

despejando

$$\tau^2 = \sqrt{\lambda}(\xi - \sqrt{\lambda})^2.$$

Nuevamente despejamos,

$$\frac{\tau^2}{\sqrt{\lambda}} = (\xi - \sqrt{\lambda})^2$$

$$\frac{\tau}{(\lambda)^{\frac{1}{4}}} = (\xi - \sqrt{\lambda}).$$

Y ahora derivamos

$$\frac{d}{d\xi} \frac{\tau}{\lambda^{\frac{1}{4}}} = \frac{d\xi}{d\xi}$$

$$d\xi \left(\frac{d\tau}{d\xi} \right) = \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{4}}} d\xi.$$

Finalmente sustituimos en $Ai(-\lambda)$

$$\frac{1}{2\pi(\lambda)^{\frac{1}{4}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\pm\tau \mp \frac{2}{3}(\lambda)^{\frac{3}{2}})} d\tau = \frac{1}{2\pi(\lambda)^{\frac{1}{4}}} e^{\mp i \frac{2}{3}(\lambda)^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i\tau^2} d\tau.$$

Recordando que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i\tau^2} d\tau = e^{\pm i \frac{\pi}{4} \sqrt{\pi}},$$

tenemos entonces

$$Ai(-\lambda) \approx \frac{e^{i(\mp \frac{2}{3}(\lambda)^{\frac{3}{2}} \pm \frac{\pi}{4})}}{2(\lambda)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\pi}} \approx \frac{\cos(\frac{2}{3}(\lambda)^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4})}{(\lambda)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\pi}}.$$

Finalmente, gracias esto hemos obtenido la solución para el caso oscilatorio de la ecuación de Airy. Hay que recordar que por la misma naturaleza de el análisis asintótico, nuestro resultado es un aproximado.

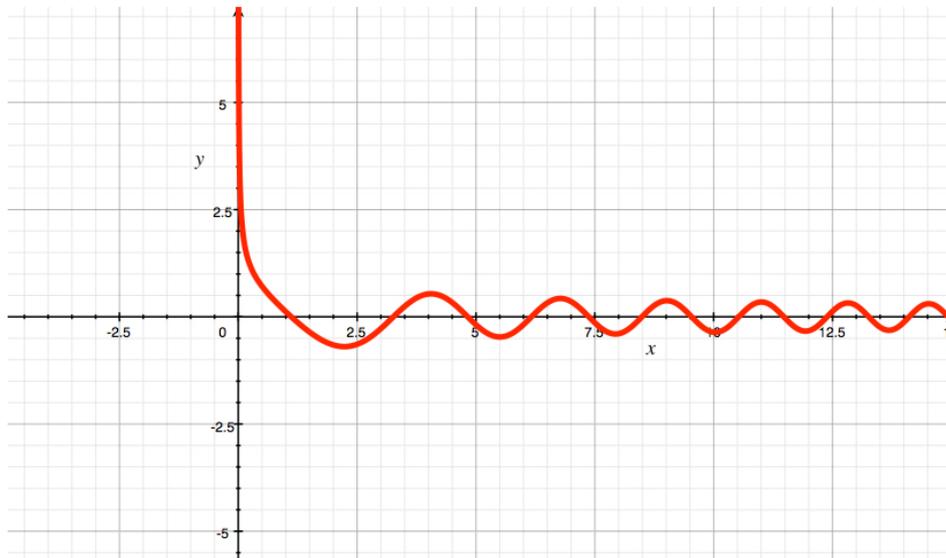


Figura 3.8: Podemos observar la gráfica generada por nuestra solución. Claramente podemos ver que, a diferencia del método de Laplace, este método nos genero la parte oscilatoria de la solución. Esto de ninguna manera implica que la solución anterior no sea valida, ya que para esta solución tomamos ciertas suposiciones y valores que no son validos para el método de Laplace.

3.4. El Método de Descenso Rápido

El último de los métodos asintóticos que veremos en esta tesis es el método de descenso rápido, el cual a muy grandes rasgos es extensión del método de Laplace al plano complejo, y por consiguiente también podemos considerarlo una mezcla de los dos métodos anteriores, ya que en muchas ocasiones sucederá que, a base de cambios de variable apropiados, nos reducirá a uno de los dos casos anteriores, claro está que estos cambios de variable rara vez resultan sencillos y triviales.

A pesar de que este método en su forma actual fue desarrollado por Peter Debye (1884-1966, premio Nobel en química en 1936), se origina con Bernhard Riemann (1826-1866). Este método es de uso práctico inmediato a una familia específica de integrales, las cuales se ven de la forma,

$$f(\lambda) = \int_C g(z) e^{\lambda h(z)} dz, \quad (3.35)$$

las cuales podemos observar son en extremo similares a las vistas anteriormente, con las siguientes condiciones; C es un contorno en el plano complejo, $g(z)$ y $h(z)$, que son independientes de λ , son analíticas en z en algún dominio dentro del plano que contiene a C , y λ es un número real positivo. Nuevamente lo que se busca es encontrar una aproximación asintótica para $f(\lambda)$ cuando λ es muy grande. Conviene notar que debido a que estamos trabajando en el plano complejo, puede llegar a suceder, y a menudo así es, que nuestra función tenga singularidades aisladas, incluyendo puntos rama, los cuales habrá que hacer notar muy claramente al usar este método. Además, escoger a λ de manera que sea real y positiva no nos presenta pérdida de generalidad alguna ya que si llegásemos a encontrar una integral parecida a (3.35) donde λ sea negativa y $\lambda \rightarrow \infty$ sobre un rayo $\lambda = |\lambda| e^{i\alpha}$, incorporaremos $e^{i\alpha}$ dentro de la función $h(z)$ y volvemos a una integral como (3.35), el caso cuando λ es real y negativa se cubre haciendo $\alpha = \pi$ en el caso donde λ es compleja.

Para mostrar la idea general detrás de este método y su relación con el método de Laplace, conviene empezar tomando en cuenta las siguientes funciones,

$$h(z) = \phi + i\psi, \quad \phi = \text{Re } h(z), \quad \psi = \text{Im } h(z). \quad (3.36)$$

Si nuestro contorno C , que puede ser finito o infinito, une los puntos $z = a$ y $z = b$, entonces de (3.35) y (3.36) obtenemos:

$$\begin{aligned} |f(\lambda)| &\leq \int_{s_a}^{s_b} |g(z)^{\lambda h(z)}| ds \\ &\leq \int_{s_a}^{s_b} |g| e^{\lambda \phi} ds, \end{aligned} \quad (3.37)$$

donde $ds = |dz|$ y s_b y s_a corresponden a los puntos $z = b$, $z = a$ del contorno. Supongamos ahora, para los fines de esta discusión preliminar, que

$$\int_C g(z) dz$$

3.4. Descenso Rápido

es absolutamente convergente (esto es, $\int_{s_b}^{s_a} |g| ds$ es convergente), entonces para λ grande la integral (3.37) es $O(e^{\lambda\phi})$, exceptuando los términos del tipo $\lambda^{\frac{1}{2}}, \lambda^{-1}$. Si sucede que el contorno es finito de longitud L , en lugar de (3.37) tendremos

$$|f(\lambda)| < L \max_L(|g(z)|e^{\lambda\phi}) \quad (3.38)$$

donde \max_L nos indica el máximo de $|g|e^{\lambda\phi}$ en el camino C de longitud L . Tanto en (3.38) como en (3.37) las contribuciones importantes al desarrollo asintótico para $|f(\lambda)|$ conforme $\lambda \rightarrow \infty$ deben venir, como es el caso del método de Laplace, de la vecindad del punto máximo ϕ . También podremos hacer uso del teorema de Cauchy para poder deformar el contorno C en otros, al menos dentro del dominio en el cual las funciones $h(z)$ y $g(z)$ son analíticas. Sí, por ejemplo, g tuviese un polo de singularidad podremos deformar el contorno en otro que también atravesase dicha singularidad mediante el uso apropiado de la teoría de residuos.

El paso siguiente es deformar el contorno C de manera tal que no solo pase por el punto $z = z_0$, donde $\phi = \text{Re } h(z)$ tenga su valor máximo, sino que además ϕ decaiga de la manera más rápida posible por ambos lados de este máximo. De esta manera el valor más grande posible de $e^{\lambda\phi}$ conforme $\lambda \rightarrow \infty$ estará concentrado en un pequeño intervalo del contorno. Al tomar este camino pasando por este máximo específico de $e^{\lambda\phi}$ se hace un poco más evidente el nombre de este método, ya que este camino será el camino de *descenso(más) rápido*. En el caso de (3.37) el tamaño de camino escogido también varía cuando deformamos el contorno. Cuando un camino está cercano al óptimo en el sentido del descenso rápido, cualquier variación en el camino y por consiguiente en el tamaño de este, por muy pequeña que sea, puede cambiar drásticamente la variación en $e^{\lambda\phi}$. Por consiguiente, si nos interesara solamente $|f(\lambda)|$ conforme $\lambda \rightarrow \infty$ debemos escoger un camino que haga que ϕ y por extensión $e^{\lambda\phi}$ se comporte de la manera anteriormente descrita y después usar el método de Laplace, pero debido a que en este caso nos interesa $f(\lambda)$ en su totalidad y no solo su módulo conforme $\lambda \rightarrow \infty$ debemos ser mucho más específicos al escoger dichos caminos.

Si tomamos cualquier camino que pase por z_0 , el punto donde ϕ es máximo, la parte imaginaria ψ de $h(z)$ nos da una contribución oscilatoria del tipo $e^{\lambda\psi}$ en el integrando. Estas oscilaciones son cada vez más densas (rápidas) conforme λ va aumentando y a su vez pone en jaque a todo nuestro procedimiento a menos de que logremos escoger un contorno que reduzca estas oscilaciones de manera considerable en la vecindad de z_0 , de manera que nos permita usar el método. La manera más sencilla y la que usaremos es simplemente escoger un camino donde $\psi = \text{Im } h(z) = \text{constante}$, en la vecindad de z_0 , de manera tal que no existan las oscilaciones en $e^{\lambda\psi}$ en la cercanía del punto máximo de $e^{\lambda\phi}$.

Tomemos la ecuación (3.20) con las condiciones necesarias para g, h, λ , el contorno C , y coordenadas cartesianas, de manera que

$$z = x + iy, \quad h(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y). \quad (3.39)$$

Encontraremos un máximo relativo de ϕ cuando $z_0 = x_0 + iy_0$, lo cual es una solución de $\nabla = 0$, donde ∇ es el gradiente que en este caso es $\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y}$, donde \mathbf{i} y \mathbf{j} son vectores unitarios en la dirección x , y respectivamente. Debido a que ϕ y ψ son las partes real e imaginaria de $h(z)$, la cual a su vez es una función analítica de z , estas satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann;

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (3.40)$$

Por tanto z_0 también es solución para $\nabla\psi = 0$ y entonces

$$h'(z) = \phi_x + i\psi_x = \phi_x - \phi_y = 0 \quad \text{cuando} \quad z = z_0 = x_0 + iy_0. \quad (3.41)$$

Pero por (3.40), o en general porque $\phi + i\psi = h(z)$ la cual es analítica, ϕ y ψ son funciones que satisfacen la ecuación de Laplace

$$\Delta\phi = 0, \quad \Delta\psi = 0, \quad (3.42)$$

donde Δ es el operador de Laplace, que en este caso es simplemente $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Sin embargo, por el principio del módulo máximo ϕ y ψ no pueden ser un máximo (o un mínimo) en el dominio en el que la función $h(z)$ es analítica esto nos lleva a concluir que el punto z_0 es entonces un punto silla (o punto de inflexión) de ϕ y de ψ y entonces también es un punto silla de la función $h(z)$ (debido a (3.41)). Debido a que el procedimiento para puntos silla de orden mayor es a grandes rasgos una extensión de el caso de primer orden (un punto silla de orden n tiene las primeras n derivadas iguales a 0 en el punto en cuestión), en esta tesis mostraremos el caso de los puntos silla de primer orden, es decir

$$h'(z_0) = 0, \quad h''(z_0) \neq 0. \quad (3.43)$$

Consideraremos un camino de manera tal que $Im h(z) = \psi = constante$ y de las ecuaciones de Cauchy-Riemann tenemos $\nabla\phi \cdot \nabla\psi = 0$, entonces $\phi = constante$ y $\psi = constante$, por tanto el camino por el cual ϕ cambia de la manera mas rápida, es decir $\nabla\phi$, serán las rectas donde sucede $\psi = constante$. Debido a lo anterior, el proceso se reduce momentáneamente a localizar los puntos donde sucede que $\phi(x, y) < \phi(x_0, y_0)$ excepto en z_0 ya que en esta vecindad la función decae a ambos lados del punto z_0 y por consiguiente será de descenso.

Teniendo en consideración que los pasos a seguir en el método de descenso rápido son muy similares a los de el método de Laplace, ahora procedemos a analizar el problema de obtener la aproximación asintótica de $f(\lambda)$ de (3.35) conforme $\lambda \rightarrow \infty$. Cerca del punto silla z_0 , donde pedimos que sucediera que $h(z_0) = 0$, escribimos a $h(z)$ en su expansión de Taylor obteniendo así

$$h(z) = h(z_0) + \frac{1}{2}(z - z_0)^2 h''(z_0) + O((z - z_0)^3).. \quad (3.44)$$

Conviene en este momento recordar las funciones (3.36), además de recordar que las oscilaciones se cancelaran en el momento que hagamos $\psi = \psi_0$ ya que esta es una de las condiciones que solicitamos en un principio; Entonces cerca de z_0 al hacer $\phi = \phi_0$,

$$\phi - \phi_0 = h(z) - h(z_0) = \frac{1}{2}(z - z_0)^2 h''(z_0) < 0, \quad (3.45)$$

lo cual es *real*. En este momento es donde recordamos todo lo aprendido en el capítulo 3.2, en específico la ecuación (3.2), de manera que introducimos una nueva variable *real*,

$$h(z) - h(z_0) = -\tau^2, \quad \tau \text{ real}, \quad (3.46)$$

la cual nos define a z como función de τ , $z(\tau)$. Nuestra integral ahora se convierte en

$$f(\lambda) = e^{\lambda h(z_0)} \int_{\tau_a}^{\tau_b} e^{\lambda \tau^2} g(z(\tau)) \frac{dz}{d\tau} d\tau, \quad (3.47)$$

3.4. Descenso Rápido

donde $0 < \tau_a, 0 < \tau_b$ corresponden a los puntos finales del contorno usado bajo la transformación (3.46). Como τ es real sobre este camino, podemos utilizar el método de Laplace y obtener

$$f(\lambda) \approx e^{\lambda h(z_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda \tau^2} g(z(\tau)) \frac{dz}{d\tau} d\tau \quad \text{conforme } \lambda \rightarrow \infty. \quad (3.48)$$

Finalmente, al igual que en el método de Laplace y de Fase Estacionaria, procedemos a invertir $z(\tau)$. Primero, expandimos el lado izquierdo con Taylor cerca del punto z_0 recordando que $h'(z_0) = 0$,

$$\frac{1}{2}(z - z_0)^2 h''(z_0) + O((z - z_0)^3) = -\tau^2, \quad (3.49)$$

y por tanto,

$$z - z_0 = \left\{ \frac{-2}{h''(z_0)} \right\}^{\frac{1}{2}} \tau + O(\tau^2), \quad (3.50)$$

con $h''(z_0)$ complejo. Debemos escoger la rama apropiada de $\left\{ \frac{-1}{h''(z_0)} \right\}^{\frac{1}{2}}$ y esto es determinado, en el sentido de dirección, en la forma en que recorremos el contorno y pasamos por el punto rama. Supongamos, como ejemplo, que cuando C es deformado por el camino $\psi = \psi_0$ en la imagen 3.9 el camino de integración es de A a B , es decir para z cercana a z_0 desde la región de $\arg(z - z_0) = (\frac{3\pi}{2} - \frac{1}{2})\alpha$ hasta la región de $\arg(z - z_0) = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha$. Entonces la rama correcta a elegir en (3.50) debe ser de manera tal que $\arg\left\{ \frac{-1}{h''(z_0)} \right\}^{\frac{1}{2}}$ de $\tau > 0$ cuando z esta en la región superior de B , i.e. cuando z es cercana a z_0 , $\arg(z - z_0) = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha$ y por tanto, en (3.50)

$$\tau > 0 \quad \text{cuando} \quad \arg(z - z_0) = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha \quad \text{si} \quad \arg\left\{ \frac{-1}{h''(z_0)} \right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha. \quad (3.51)$$

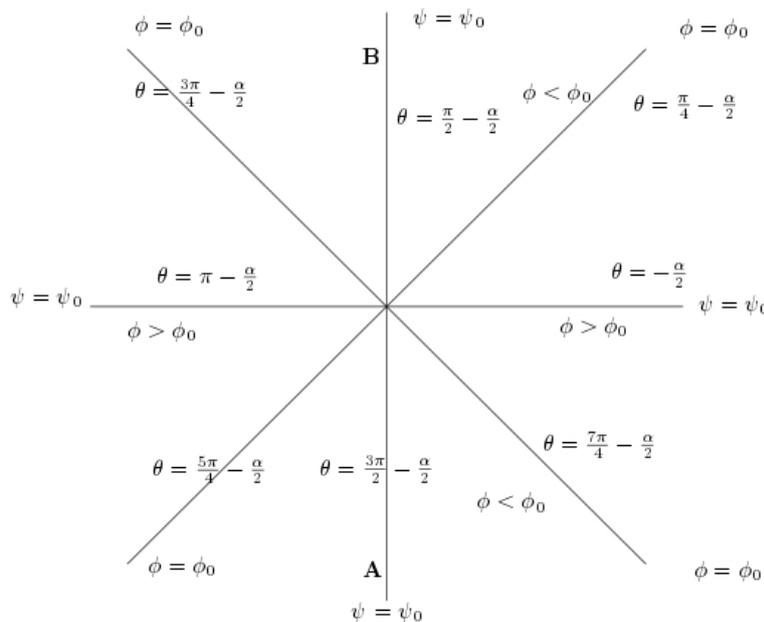


Figura 3.9

Para completar el problema, necesitamos a $g(z(\tau))$ como una serie de potencias,

$$\begin{aligned} g(z(\tau)) &= g(z_0) + (z - z_0)g'(z_0) + \dots \\ &= g(z_0) + g'(z_0) \left\{ \frac{-2}{h''(z_0)} \right\}^{\frac{1}{2}} \tau + O(\tau^2). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Finalmente, utilizando (3.50) y (3.52), (3.48) se vuelve

$$f(\lambda) \approx e^{\lambda h(z_0)} g(z_0) \left\{ \frac{-2}{h''(z_0)} \right\}^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda \tau^2} d\tau + \dots$$

y entonces,

$$f(\lambda) = g(z_0) \left\{ \frac{-2}{h''(z_0)} \right\}^{\frac{1}{2}} e^{\lambda h(z_0)} + O\left(\frac{e^{\lambda h(z_0)}}{\lambda}\right) \quad (3.53)$$

dónde, siguiendo la discusión anterior sobre las ramas, debemos escoger la correcta para ser consistente con la dirección en la que se recorre el punto silla. Si por ejemplo, en la fig 3.9 el recorrido es de A hacia B , entonces (3.53) se convierte en,

$$f(\lambda) \approx \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} |h''(z_0)|^{\frac{1}{2}} g(z_0) e^{\lambda h(z_0) + (\frac{i}{2})(\pi - \alpha)}, \quad (3.54)$$

donde $\{h''(z_0)\}^{\frac{1}{2}} = |h''(z_0)|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}i\alpha}$.

Una vez terminada esta parte teórica, podemos pasar a usar el método de descenso rápido en un par de ejemplos, en concreto para resolver la ecuación de Airy. Conviene reescribir la ecuación de Airy para así evitarle al lector regresar a la referencia que hemos dejado atrás hace ya tantas paginas, así pues definimos la ecuación de Airy como

$$Ai(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_C e^{\lambda z - \frac{1}{3}\lambda^3} dz,$$

y empezaremos haciendo el siguiente cambio de variable

$$z = vz, \quad z = v^2, \quad v > 0. \quad (3.55)$$

Entonces ahora la integral de Airy se vera como

$$\begin{aligned} Ai(v^2) &= \frac{1}{2i\pi} \int v e^{v^2 v(z) - \frac{1}{3}(vz)^3} \\ &= \frac{v}{2i\pi} \int e^{v^3(z - \frac{1}{3}z^3)} dz. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Debido a este pequeño cambio de variable, nuestra ecuación ahora tiene la forma de (3.35) donde $h(z) = z - \frac{1}{3}z^3$ y los punto de inflexión (silla) estarán dados por

$$\begin{aligned} h'(z) &= 1 - z^2 \\ z^2 - 1 &= 0 \\ z &= \pm\sqrt{1}, \quad z_1 = 1, \quad z_2 = -1. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Ahora procedemos de manera similar al método de Laplace, utilizando el teorema del valor medio:

$$h(z) - h(-1) = -\tau^2,$$

3.4. Descenso Rápido

como $h(z) = z - \frac{1}{3}z^3$ entonces, $z - \frac{1}{3}z^3 = \frac{-2}{3} - \tau^2$. Ahora escribimos la expansión en Taylor y recordamos que para $h'(-1) = 0$

$$\begin{aligned} z - \frac{1}{3} &= -1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}(\tau)(z+1)^2 + \dots \\ &= -\frac{2}{3} - \tau^2 \\ (z+1)^2 &= -\tau^2 + 1 + \dots \implies z+1 = \pm i\tau + O(\tau^2). \end{aligned}$$

Finalmente sustituimos en (3.56)

$$\begin{aligned} Ai(v^2) &= \frac{v}{2i\pi} \int e^{v^3(h(z))} dz \\ &= \frac{v}{2i\pi} \int e^{v^3(-\tau^2 - \frac{\tau}{3})} i d\tau \\ &\approx \frac{ve^{-v^3 \frac{2}{3}}}{2i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^3 \tau^2} i d\tau + \dots + O\left(\int \tau^2\right). \end{aligned}$$

Recordemos el resultado de la integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{v^3 \tau^2} d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{v^3}}$,

$$Ai(v^2) \approx \frac{1}{2}(\pi v)^{\frac{-3}{2}} e^{\frac{-2}{3}v^3} + \dots$$

y como paso final deshacemos el cambio de variable $v^2 = \lambda$ para obtener:

$$Ai(\lambda) \approx \frac{1}{2}\pi^{\frac{-1}{2}} \lambda^{\frac{-1}{4}} e^{\frac{-2}{3}\lambda^{\frac{3}{2}}} + \dots$$

Si bien hemos obtenido el mismo resultado que en el método de Laplace, la elección del punto silla $h'(z_0) = -1$ puede parecer arbitrario, pero no es el caso y de hecho muy pocas veces resulta trivial hacer esta elección.

Recordemos que la intención en todo momento es tomar el camino que resulte con las menores oscilaciones posibles y esto se logra tomando $Im(h(z_0)) = cte$, de aquí que;

$$Im(h(z_0)) = Im\left(z - \frac{1}{3}z^3\right) = Im\left(\pm \frac{2}{3}\right) = 0.$$

Si $z = x + iy$

$$Im(h(z)) = Im\left((x + iy) - \frac{1}{3}(x + iy)^3\right) = 0,$$

$$Im\left(\frac{1}{3}(3(x + iy) - (x^2 + 2xyi - y^2)(x + iy))\right) = y(y^2 - 3x^2 + 3) = 0$$

entonces $y = 0$ y obtenemos la parábola $y = \pm\sqrt{3}x - 3$, $x = \pm 1$ con asíntotas $y = \pm\sqrt{3}x$ $z = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $z = e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

Para poder elegir entre $z = 1$ o $z = -1$ debemos comparar $Re(h(z_0))$ de manera que $Re(h(z)) < Re(h(z_0))$ para todo $z \neq z_0$. $Re(h(z)) = \frac{1}{3}x(3y^2 - x^2 + 3)$ y sabemos además que $y = 0$, entonces $Re(h(z)) = \frac{x}{3}(-x^2 + 3)$. Si $x = -1$ entonces $\frac{-1}{3}(-1 + 3) = \frac{-2}{3}$ y $\frac{x}{3}(-x^2 + 3) > -\frac{2}{3}$ para todo x cercano a -1 , y al tomar $z = 1$ es de *ascenso* rápido debido a que la desigualdad siempre se cumplirá, en cambio al tomar $z = -1$ la desigualdad se invierte en la cercanía de $\frac{-2}{3}$ y es precisamente lo que buscábamos.

Ahora tomemos la ecuación de Airy pero con argumento negativo, i.e $-\lambda$. El cambio de variable que ahora necesitamos es de la forma $\xi = \lambda^{\frac{1}{2}}z$, de manera que la integral de Airy ahora será

$$Ai(-\lambda) = \frac{\lambda^{\frac{1}{2}}}{2i\pi} \int e^{-\lambda^{\frac{3}{2}}(z+\frac{z^3}{3})} dz,$$

y entonces $h(z) = (z + \frac{z^3}{3})$, y los puntos críticos ahora serán $z = \pm i$ y nos presentamos con el mismo problema que antes, elegir que punto crítico usar, con la diferencia de que en este caso ambos son imaginarios y por consiguiente tendremos que tomar en cuenta la contribución de ambos puntos. Empecemos por el punto $+i$; $Im(i + \frac{i^3}{3}) = Im(\frac{2i}{3}) = \frac{2}{3}$. Por otro lado busquemos que sucede cuando

$$z = x + iy; \quad Im(x + iy + \frac{(x + iy)^3}{3}) = y(x^2 - \frac{y^2}{3} + 1),$$

y eso es igual a $\frac{2}{3}$ cuando $y = 1$, $x = 0$ o $x = 0$, $y = -2$.

Ahora nos fijamos en el comportamiento de la parte real de la función en los puntos en cuestión. Primero

$$Re(h(z)) = Re\left\{\left(\frac{1}{3}\right)(x^3 + 3x^2yi - y^2x + 3x - iy^3 + 3iy)\right\} = \frac{x^3}{3} - xy^2 + x,$$

resulta fácil verificar que esto es igual a 0 cuando $x = 0$, entonces nos fijamos en $y = 1, -2$. Para $y = 1$, $\frac{x^2}{3} = 0$ entonces $\frac{x^2}{3} > 0$ para x cercana a 0 y por otro lado, para $y = -2$ resulta que $\frac{x^2}{3} - 4 + 1 = 0$ y por consiguiente, para todo punto cercano a 0 sucede que $\frac{x^2}{3} - 3 < 0$. Cabe destacar que el comportamiento anterior se invierte en $z = -i$ y por tanto tenemos que tomar ambas contribuciones para poder armar nuestra aproximación.

Introducimos ahora la nueva variable $-\tau^2 = h(z) - h(i)$, para así obtener:

$$z + \frac{z^3}{3} - i + \frac{i}{3} = -\tau^2.$$

Acomodamos para obtener

$$-\tau^2 + \frac{2}{3}i = z + \frac{z^3}{3}$$

y hacemos Taylor en la vecindad de i recordando que la primera derivada es 0,

$$\begin{aligned} z + \frac{z^3}{3} &= i + \frac{i^3}{3} + i(z-i)^2 + \dots = -\tau^2 + \frac{2i}{3} \\ (z-i)^2 &= \tau^2 + \frac{2}{3} - 1 - \frac{i}{3} \\ (z-i)^2 &= \tau^2 i \dots \end{aligned}$$

entonces

$$z - i = \sqrt{\tau^2 i} + O(\tau^2) = \tau\sqrt{i}$$

que es lo mismo que

$$z - i = \tau(e^{\frac{i\pi}{4}}) + O(\tau^2).$$

Sustituimos en la ecuación original y obtenemos

$$\begin{aligned} Ai &= \frac{\lambda^{\frac{1}{2}}}{2i\pi} \int e^{-\lambda^{\frac{3}{2}}(-\tau^2 + \frac{2i}{3})} \sqrt{i} d\tau \\ &= \frac{\sqrt{i} \lambda^{\frac{1}{2}} e^{+\frac{2}{3}\lambda^{\frac{3}{2}}}}{2i\pi} \int e^{\lambda^{\frac{3}{2}}\tau^2} d\tau \\ &= \frac{\sqrt{i} \lambda^{\frac{1}{2}} e^{\frac{2}{3}i\lambda^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\pi}}{2i\pi \sqrt{-\lambda^{\frac{3}{2}}}}. \end{aligned}$$

Dejemos que $\frac{\sqrt{i}}{i} = \frac{1}{\sqrt{i}}$, $\sqrt{-\lambda^{\frac{3}{2}}} = i\sqrt{\lambda^{\frac{3}{2}}}$, para obtener

$$= \frac{1}{2i\pi} \lambda^{-\frac{1}{4}} e^{-i(\frac{2}{3}\lambda^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4})}.$$

Ahora, las contribuciones dadas por $z = -i$ resultan ser, para nuestra conveniencia, $(z + i) = -\tau\sqrt{i}$ es decir, solo cambio el signo. Sustituyendo;

$$= -\frac{1}{2i\pi} \lambda^{-\frac{1}{4}} e^{i(\frac{2}{3}\lambda^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4})},$$

y al sumar ambas contribuciones

$$= \frac{1}{2i\pi} \lambda^{-\frac{1}{4}} e^{-i(\frac{2}{3}\lambda^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4})} - \frac{1}{2i\pi} \lambda^{-\frac{1}{4}} e^{i(\frac{2}{3}\lambda^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4})},$$

finalmente simplificamos y llegamos

$$Ai(-\lambda) \approx \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{4}} \sqrt{\pi}} \sin\left(\frac{2}{3}\lambda^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Podría argumentar el lector que lo anterior es diferente a lo obtenido con el método de fase estacionaria, pero recordemos que en la mayoría de las veces podemos tratar a $\sin(x)$ y $\cos(x)$ como equivalentes, recordando desplazar el argumento $\frac{\pi}{2}$.

Si bien es cierto que en este caso en particular resolver Airy con método de descenso rápido resulta mas tedioso y laborioso que hacer el caso por separado con Laplace o fase estacionaria, también es cierto que Airy nos permito mostrar que en efecto este método no es mas que una simple extensión de Laplace (y, por extension, de fase estacionaria).

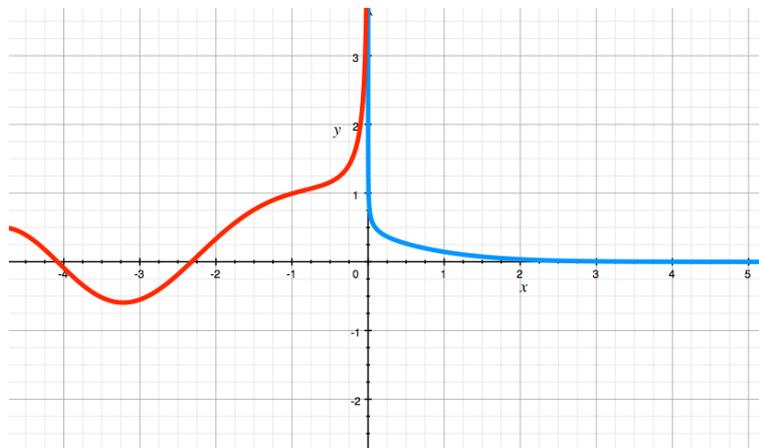


Figura 3.10: Esta gráfica nos muestra que pasa al intentar unir ambas soluciones (figs. 3.4, 3.8), la exponencial y la oscilatoria.

Todavía podemos analizar un par de cosas sobre nuestra última gráfica (3.10) y llegar a unas cuantas conclusiones interesantes y que, increíblemente, guardan una relación a los cálculos que hicimos con la geometría.

Primero, cómo se mencionó con anterioridad, la geometría predice una zona de intensidad luminosa infinita. Esta zona es donde ambas gráficas se unen, pero más a un, podemos observar que, por un lado la luminosidad viene variando y de hecho la última cumbre que se convierte en crecimiento exponencial corresponde al arcoíris primario. Después de esta cumbre, viene una zona donde se predice luminosidad infinita, seguida inmediatamente por un descenso de la misma de manera casi instantánea.

Segundo, las cumbres corresponden casi de manera exacta (por lo menos a primer orden) con los arcoíris supernumerarios (no confundir con el arcoíris secundario), mientras que los valles corresponden a la zona oscura entre dichos supernumerarios.

Ahora, lo deseable sería que no existiera ese pico que sube y diverge hacia el infinito, y en efecto, cualquier computadora relativamente moderna con programas de graficación básicos cuenta con la solución total de la ecuación de Airy, utilizando los términos que nosotros despreciamos por ser demasiado complicados para hacer a mano.

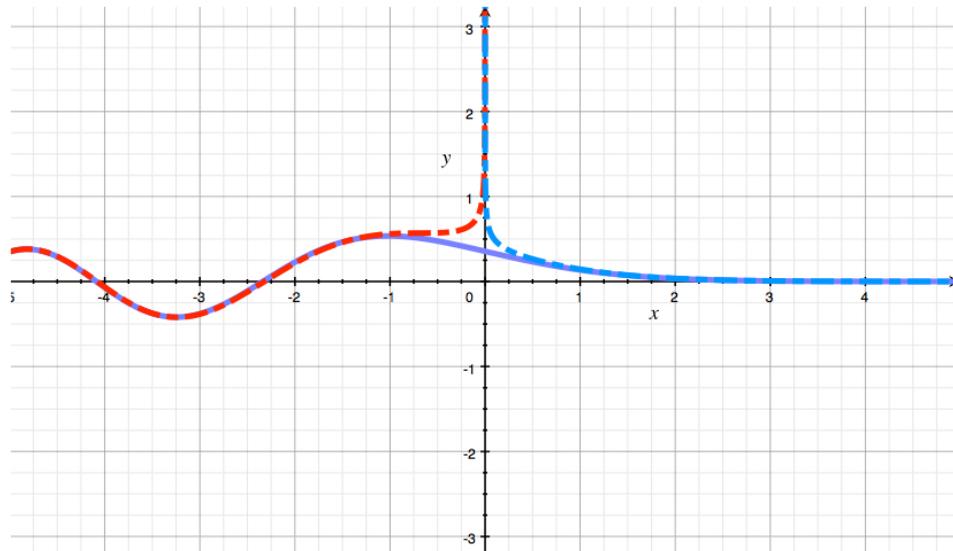


Figura 3.11: Podemos observar como coinciden casi a la perfección las 3 gráficas, salvo en la zona de supuesta intensidad infinita, en rojo tenemos 3.8, es decir la solución oscilatoria, en azul 3.4 o la solución exponencial y finalmente en morado vemos la solución arrojada por la computadora al solicitar la ecuación de Airy, $Ai(x)$.

3.5. Banda de Alexander

Hicimos referencia a una "supuesta intensidad infinita" porque en la realidad lo que sucede, y como se aprecia en el hecho de que la función de Airy sea continua (como lo muestra la gráfica que genero la computadora en fig.3.11) es que empieza a haber una disminución de la intensidad pero esta es continua, no espontánea, lo cual es observable en la naturaleza. Esta es la razón por la cual los extremos del arcoíris se ven "borrosos".

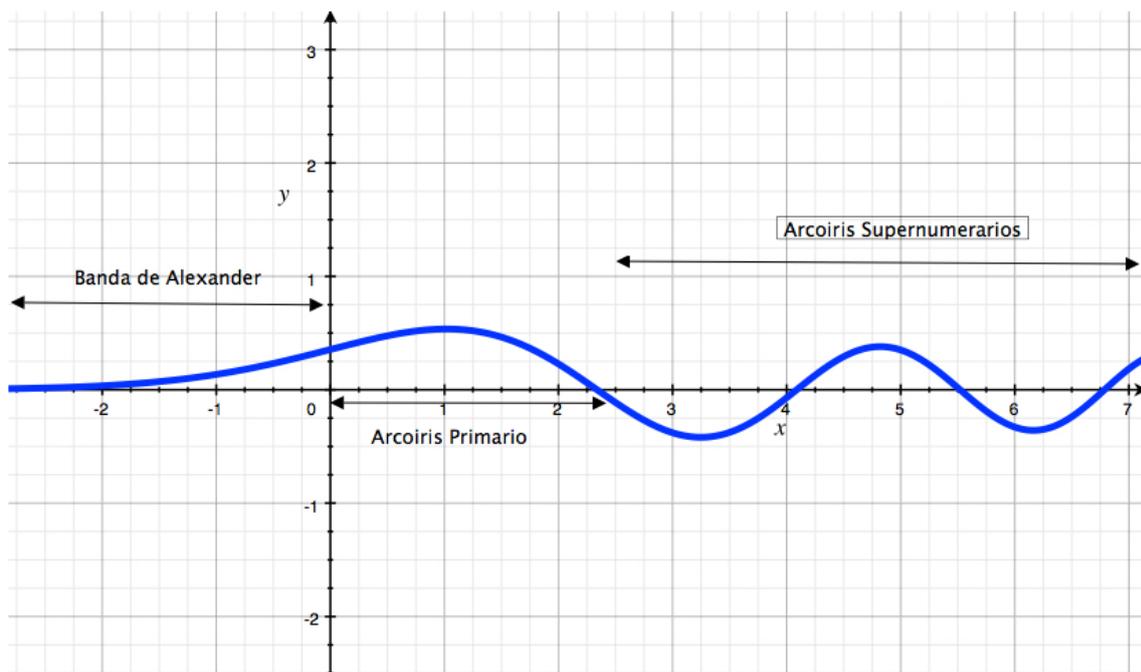


Figura 3.12

Por otra parte, en el caso que llegamos a tener mas de un arcoíris, a esta zona se le llama la Banda de Alexander en honor a Alexander de Afrodisias, quien describió este fenómeno en el año 200 A.D. la cual nos marca un fenómeno curioso, y esto es que entre los dos arcoíris aparezca una zona mas oscura que el resto.

Esta observación en particular, no solo aparece en la solución a Airy, sino que al graficar los resultados obtenidos en la primera sección podemos observar como esta banda aparece entre el máximo de la función con un solo rebote (el color violeta) y el mínimo de la función con 2 rebotes (el color rojo).



(a) De manera ilustrativa podemos ver que el arcoíris supernumerario *no* es lo mismo que el secundario.



(b) La foto de dos arcoíris, primario y secundario. En medio de ambos podemos observar la banda de Alexander y es visible que es mas "oscura" que el la parte externa e interna (arriba del arcoíris superior y abajo del inferior)

El arcoíris supernumerario es un fenómeno curioso, resulta común pero a la vez poco común. ¿A qué me refiero con esto? El arcoíris supernumerario no es mas que la manifestación física de el fenómeno de la transición de la luz a la sombra, un fenómeno que por lo general nosotros percibimos como bien definido, pensemos en la sombra que genera una puerta cuando es iluminada por una luz, pero resulta que en estos caso donde la percibimos como bien definida, simplemente no alcanzamos a diferenciar esta transición que no es abrupta sino suave.

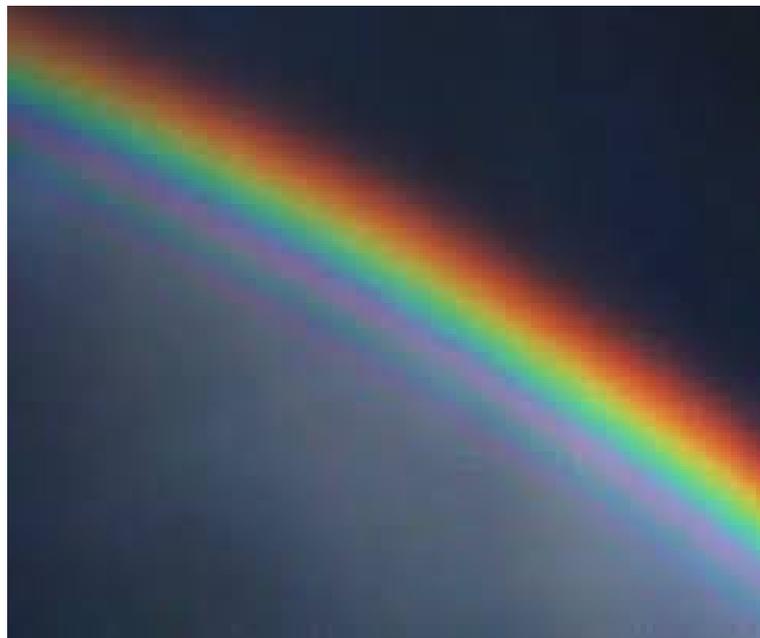


Figura 3.14: Otra imagen de un arcoíris supernumerario. En esta, el arcoíris no resulta ser tan llamativo como en la primera que se mostró.

3.5. Banda de Alexander

Lo anterior se menciona ya que hay que hacer hincapié en la diferencia que existe entre el arcoíris supernumerario con el fenómeno de ver más de un arcoíris. El arcoíris supernumerario es culpa de la ecuación de Airy, mientras que los arcoíris múltiples son generados por los rebotes dentro de la gota.

Tomando las ecuaciones obtenidas en el capítulo 1, $D_k = k\pi + 2i - 2(k+1)r$ donde $r = \sin^{-1}\left(\frac{\sin(i)}{n_2}\right)$, para el ángulo de desviación (mínima) total que sufre la luz roja, violeta y blanca al entrar y rebotar k veces en una gota de agua, es posible graficar el comportamiento, tomando en cuenta que el eje de las y corresponde al ángulo de refracción total al salir de la gota y el eje de las x corresponde al ángulo de entrada a la gota.

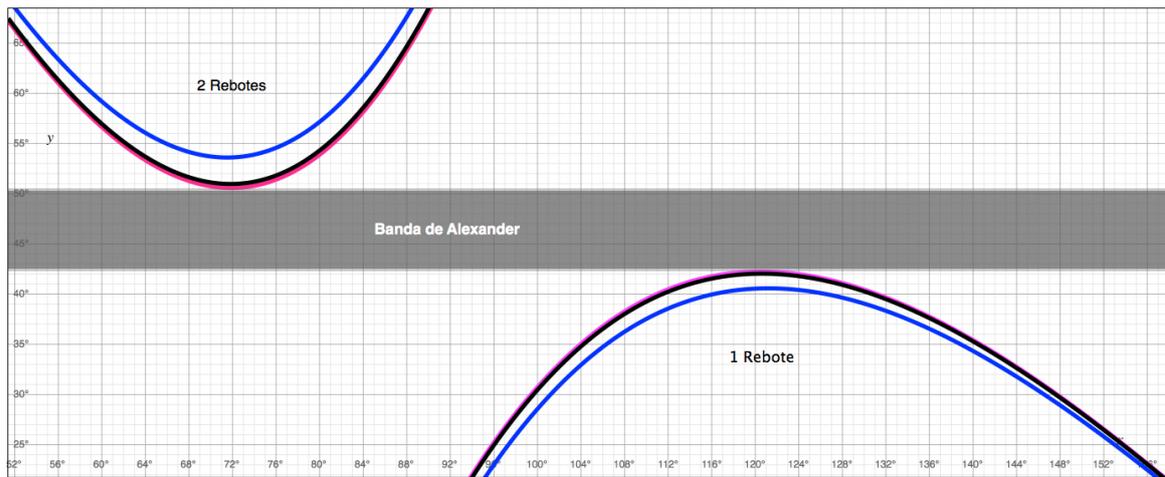


Figura 3.15: La línea negra corresponde a los máximos y mínimos correspondientes para la luz blanca (índice de refracción de 1.333, contra 1.3318 de la luz roja y 1.3435 de la luz violeta).

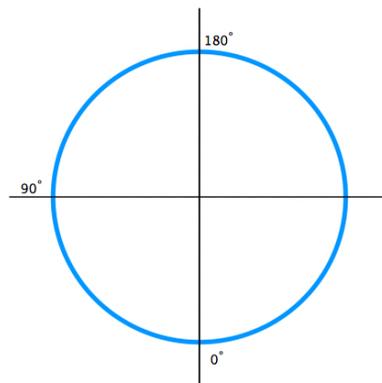


Figura 3.16: De manera poco ortodoxa, tomamos los ángulos empezando desde el límite inferior, contrario a la tradición de tomarlos desde el límite izquierdo.

Recordemos que estamos trabajando con una gota de agua ideal, es decir completamente redonda (una esfera de la cual tomamos la sección transversal para "ver cómo se comporta la luz"). Tomando esto en cuenta y para poder entender la figura anterior tomamos los ángulos, no desde la horizontal si no desde la vertical (fig. 3.16) y tomando

estas dos consideraciones, podemos ver que efectivamente la gráfica nos muestra lo que ya habíamos supuesto;

- Cuando el haz de luz entra sobre la horizontal real (90°) no existe desviación.
- En el caso de un rebote, la desviación va creciendo de manera logarítmica hasta llegar a un máximo ($\approx 42,29^\circ$) pero en este punto el crecimiento se detiene lo cual nos da lugar a un agrupamiento de los haces de luz. De igual manera, en el caso de dos rebotes la desviación va bajando hasta llegar a un mínimo ($\approx 50,52^\circ$) después del cual vuelve a crecer de manera exponencial.

Y es gracias a estas dos observaciones que podemos explicar de manera visual porque decimos que la luz no puede pasar a la zona que hemos llamado banda de Alexander, además de que se puede calcular el ancho exacto de la misma, el cual es de $\approx 8,22^\circ$. El lector puede medir con una regla el arcoíris interno de la fig.3.13b, y ver cuantas veces cabe el mismo en la banda existente entre los dos arcoíris (≈ 4 veces) lo cual, recordando que efectivamente el ancho del arcoíris es $\approx 2^\circ$ nos da un ancho aproximado para la banda de 8° .

Capítulo 4

Galería de Susurros en 3 Dimensiones

Terminado el estudio del arcoíris, regresamos al estudio de la galería de susurros, pasando de un plano bidimensional a el plano tridimensional para así concluir la explicación de este fenómeno apoyándonos en las técnicas asintóticas que aprendimos con anterioridad.

4.1. La función de Bessel en la Esfera

Ya que hemos dado la solución a la ecuación de Airy y por tanto una explicación al fenómeno del arcoíris, podemos regresar a la galería de susurros e intentar dar una respuesta mas detallada considerando no solo el plano xy e incluir el eje z , es decir, tratar con una esfera, pero primero veamos que sucede con Bessel en este caso. Recordemos entonces la ecuación de onda;

$$\nabla^2 u + c^2 u = 0, \quad \text{donde } u \text{ depende de } r, \theta, \phi \text{ y } t,$$

y ahora escribámosla en coordenadas esféricas, lo cual se puede encontrar en cualquier libro de electromagnética, obteniendo así:

$$\frac{1}{r^2} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \left(\sin(\theta) \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + c^2 u = 0. \quad (4.1)$$

Empecemos de manera sencilla, asumiendo una fuente puntal al origen de nuestra esfera, de esta manera tendremos una solución con simetría radial, i.e. no dependerá de θ o ϕ sino solamente de r . De manera que tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial \phi} = 0, \quad (4.2)$$

lo que nos reduce la ecuación a

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + c^2 u = 0. \quad (4.3)$$

Multiplicando ambos lados por r^2

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + c^2 r^2 u = 0. \quad (4.4)$$

Aplicamos regla del producto

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} + (ur)^2 R = 0, \quad (4.5)$$

lo cual es muy similar a

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} + [r^2 - n(n+1)]R = 0, \quad (4.6)$$

la cual es conocida como la *ecuación esférica de Bessel* y cuyas soluciones se conocen como las *funciones esféricas de Bessel* y tienen la forma

$$b_n^m(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2r}} J_{n+\frac{1}{2}}^m(r). \quad (4.7)$$

Al igualar nuestra ecuación a la ecuación esférica de Bessel, obtenemos que $n = 0$, lo cual nos indica que nuestras soluciones deben ser combinaciones de funciones J_0^m . Un ejemplo de dichas soluciones es:

$$R(r) = J_0(cr) - J_0^1(cr) = -\frac{e^{-jcr}}{jcr} \quad (4.8)$$

Resulta natural preguntarse qué pasara si relajamos nuestra condición de simetría radial. La respuesta es, tendremos que resolver la ecuación en su totalidad y para facilitarnos las cosas, nuevamente usaremos separación de variables para obtener

$$u = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi). \quad (4.9)$$

Substituimos esto en (4.1) y tendremos

$$\frac{\Phi\Theta}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{R\Phi}{r^2 \sin(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\sin(\theta) \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{R\Theta}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + c^2 R\Theta\Phi = 0. \quad (4.10)$$

Dividimos entre $R\Theta\Phi$ y multiplicamos por $r^2 \sin^2(\theta)$, de manera que

$$\frac{\sin^2(\theta)}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\sin(\theta)}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin(\theta) \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + c^2 r^2 \sin^2(\theta) = 0. \quad (4.11)$$

Si separamos la dependencia de ϕ

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = -m^2 \quad (4.12)$$

Substituimos en (4.1) y dividimos entre $\sin^2(\theta)$, de manera que

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta \sin(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\sin(\theta) \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2(\theta)} + c^2 r^2 = 0. \quad (4.13)$$

Teniendo entonces esta separación de variables, ahora nuestra constante de separación será n , y tendremos:

$$\frac{1}{\Theta \sin(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\sin(\theta) \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2(\theta)} = -n(n+1) \quad (4.14)$$

y si igualamos a 0,

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - n(n+1) + c^2 r^2 = 0. \quad (4.15)$$

Con esto hemos terminado la separación de variables y obtuvimos el siguiente sistema:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + [(cr)^2 - n(n+1)]R = 0, \quad (4.16)$$

$$\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\sin(\theta) \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left[n(n+1) + \frac{m^2}{\sin^2(\theta)} \right] \Theta = 0 \quad (4.17)$$

y

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + m^2\Phi = 0. \quad (4.18)$$

Ahora, la solución a (4.16) la obtuvimos con anterioridad, son las funciones esféricas de Bessel. La última ecuación tiene soluciones de la forma $\Phi(\phi) = e^{\pm jm\phi}$. La solución a la ecuación (4.17) es conocida como la *función de Legendre*, dada por $L_n^m(\cos(\theta))$. Por tanto, y de acuerdo a (4.9), la solución a la ecuación de onda esférica está dada por un producto de estas tres soluciones, i.e.:

$$u = -\frac{e^{-jcr}}{jcr} L_n^m(\cos(\theta)) e^{\pm jm\phi}. \quad (4.19)$$

4.2. La función de Bessel como Integral

Hasta ahora hemos conseguido una interpretación de la ecuación de Bessel como serie,

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-1^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k},$$

pero esta interpretación de poco nos sirve para el estudio del comportamiento de la función, así que necesitamos una interpretación diferente. Entonces buscamos la interpretación integral de la función de Bessel.

Para obtener la representación integral, primero necesitamos obtener la función generadora de la función de Bessel. Tomemos la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} e^{\frac{x}{2}(z-z^{-1})} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^m}{m!} z^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^k}{k!} z^{-k}, \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{\substack{m-k=n \\ m,k \geq 0}} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{m+k}}{m!k!} \right) z^n, \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(n+k)!k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \left(\frac{x}{2}\right)^n \right) z^n, \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) z^n. \end{aligned}$$

Es decir, la formula anterior es la función generadora de la función de Bessel

Ahora, tomemos la formula integral de Cauchy

$$y_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{\frac{x}{2}(t-t^{-1})}}{t^{n+1}} dt.$$

Para cualquier contorno cerrado simple, γ , al rededor de 0.

Ahora, tomamos la representación en serie de e^x y usamos la sustitución $t = \frac{2u}{x}$,

$$\begin{aligned} y_n(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{\frac{4u^2-x^2}{4u}}}{\left(\frac{2}{x}\right)^{n+1} u^{n+1}} \frac{2}{x} du, \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{x}{2}\right)^n \int_{\gamma} e^u e^{-\frac{x^2}{4u}} u^{-n-1} du, \\ &= \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{m!k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} u^{m-k-n-1} du, \\ &= \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(n+k)!k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Antes de continuar, notemos que ec. (4.20) es igual a la función de Bessel.

Tomemos el contorno $t = e^{i\theta}$, y tendremos:

$$\begin{aligned} y_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{\frac{x}{2}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})}}{e^{ni\theta}} d\theta, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{(xi \sin \theta - \eta i \theta)} d\theta. \end{aligned} \tag{4.21}$$

De esta manera, hemos obtenido una representación integral para la función de Bessel con la que podemos trabajar y utilizar las técnicas de análisis asintótico que hemos discutido en capítulos anteriores.

4.3. Jugando con Asintótica

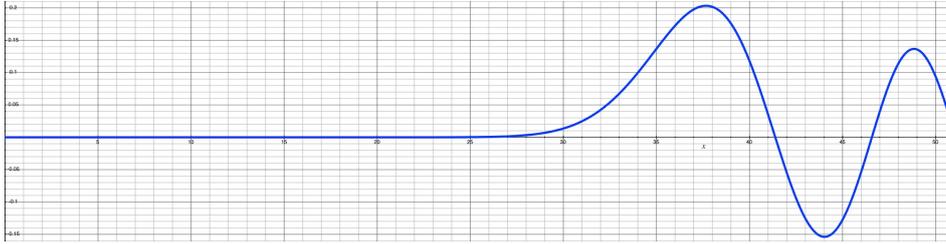


Figura 4.1: Gráfica para la función de Bessel de orden 35, i.e. $J_n(35)$.

Observemos en la imagen anterior que la función es idénticamente¹ 0 hasta que en un punto dado ($x \approx 14$) comienza a subir de forma exponencial para después decaer y presentar oscilaciones. Este comportamiento nos da pie a una forma alternativa de solucionar la ecuación de Bessel, lo cual es conocido como la aproximación asintótica de la función de Bessel.

Antes que nada, tomemos la ec. (4.21) y hagamos los siguientes cambios de variable $\phi(\theta) = \eta \sin \theta - \theta$ y $\eta = \frac{kr}{m}$, para obtener lo siguiente:

$$J_m(kr) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{im\phi(\theta)} d\theta. \quad (4.22)$$

De manera que ahora tenemos algo parecido a:

$$f(\lambda) = \int_a^b g(t) e^{i\lambda h(t)} dt, \quad (4.23)$$

y entonces podemos resolverla mediante el método de fase estacionaria.

Tomemos el límite de la función de Bessel cuando su argumento es muy grande y en los reales de manera que los puntos de fase estacionaria estarán dados por

$$\cos \theta = \frac{1}{\eta}.$$

Por la naturaleza del cos, cuando $\eta > 1$ o $\eta < -1$, tenemos 2 soluciones posibles (2 reales y dos complejas respectivamente), mientras que para $\eta = 1$ solo tendremos una. Desarrollamos la serie de Taylor de $\phi(\theta)$ cerca de dichas soluciones θ_i , $i = 1, 2$ y obtenemos:

$$\phi(\theta) \approx \eta \sin(\theta_i) - \theta_i - \frac{1}{2} \eta \sin(\theta_i) (\theta - \theta_i)^2,$$

¹Se verá más adelante que realmente es exponencialmente pequeña, pero para fines prácticos es idénticamente 0.

y al sustituir en (4.22) podemos separar la integral en dos integrales que solo tomaran en cuenta la contribución de los puntos de fase estacionaria, así como extender el intervalo de integración debido a que las partes mas lejanas tienen una contribución despreciable, por otro lado hay que notar que por la naturaleza del cos, $\theta_2 = 2\pi - \theta_1$

$$\begin{aligned} J_m(kr) &\approx \frac{1}{2\pi} e^{im\phi(\theta_1)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{m\eta}{2} \sin(\theta_1)(\theta-\theta_1)^2} d\theta + \frac{1}{2\pi} e^{im\phi(\theta_2)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{m\eta}{2} \sin(\theta_2)(\theta-\theta_2)^2} d\theta \\ &\approx \frac{1}{2\pi} e^{im\phi(\theta_1)} \sqrt{\frac{\pi}{i\frac{m\eta}{2} \sin(\theta_1)}} + \frac{1}{2\pi} e^{im\phi(2\pi-\theta_1)} \sqrt{\frac{\pi}{i\frac{m\eta}{2} \sin(2\pi-\theta_1)}} \\ &\approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{m\eta \sin(\theta_1)}} \left[\sqrt{\frac{1}{i}} e^{im\phi(\theta_1)} + \sqrt{-\frac{1}{i}} e^{im(-\phi(\theta_1)-2\pi)} \right] \\ &\approx \sqrt{\frac{2}{m\pi\eta \sin(\theta_1)}} \left[\frac{e^{i[m\phi(\theta_1)-\frac{\pi}{4}]} + e^{-i[m\phi(\theta_1)-\frac{\pi}{4}]} }{2} \right]. \end{aligned}$$

Entonces, la forma asintótica para $\eta = \frac{kr}{m}$ y $m \gg 1$ es, de manera general,

$$J_m(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{m\pi\eta \sin(\theta_1)}} \cos\left(kr \sin(\theta_1) - m\theta_1 - \frac{\pi}{4}\right).$$

Ahora, conviene ver qué pasa cuando nos fijamos en el caso que $\eta < 1$ pero además pedimos que η sea ligeramente menor que uno, es decir nos estamos fijando en las cercanías de 1, por tanto $\eta = 1 - \varepsilon$, donde $0 < \varepsilon \ll 1$. Como mencionamos anteriormente, en este caso los puntos críticos de $\phi(\theta)$ serán complejos y tendremos que usar el método de descenso rápido.

Fijémonos en la siguiente representación integral, la cual es exactamente la misma que (4.22) con la salvedad que el signo de la fase y el intervalo de integración son diferentes,

$$J_m(kr) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{im(\theta-\eta \sin(\theta))} d\theta. \quad (4.24)$$

Como ahora estamos tratando con partes complejas, θ tendrá componentes reales y complejas, i.e. $\theta = x + iy$. Por consiguiente, tendremos que buscar las soluciones para la ecuación $\theta_0 = x_0 + iy_0$ las cuales serán

$$x_0 = 0 \quad y \quad \cosh(y_0) = \frac{1}{\eta}.$$

Como η es muy cercano a 1, podemos decir que y_0 es muy cercano a 0, de manera tal que podemos desarrollar en serie de Taylor,

$$y_0 = \pm \sqrt{\frac{2(1-\eta)}{\eta}},$$

entonces,

$$\theta_0 = \pm i \sqrt{\frac{2(1-\eta)}{\eta}}.$$

El siguiente paso es descomponer $-im\phi(\theta)$ en su parte real e imaginaria y obtener las soluciones que hacen que la parte imaginaria sea igual a 0, i.e

$$Im\{-im\phi(\theta)\} \approx xm\left[1 - \eta + (x^2 - 3y^2)\frac{x\eta}{6}\right] = 0.$$

Y esto nos deja tres opciones

$$x = 0 \quad \text{ó} \quad y = \pm \sqrt{\frac{x^2}{3} + \frac{2(1-\eta)}{\eta}} = \pm \sqrt{\frac{x^2}{3} + y_0^2} \quad (4.25)$$

Al escoger como punto silla la parte positiva de (??) así como la parte positiva de (4.25) observamos que la parte real de $-im\phi(\theta)$ toma la siguiente forma:

$$Re\{-im\phi(\theta)\} \approx -m\left(\frac{1-\eta}{6\theta_0} + \frac{5\theta_0\eta}{12}\right)x^2 + m\left(\eta - 1 + \frac{\theta_0^2\eta}{6}\right)\theta_0,$$

y como podemos ver, el coeficiente de x^2 es negativo, por tanto decae de la manera mas rápida. Finalmente, transformamos nuestra integral inicial en una integral en un contorno cerrado en el intervalo $[-\pi, \pi]$ en la recta real, pasando por una parte de la trayectoria de máximo descenso y dos verticales uniendo dichas trayectorias. Como no tiene puntos indeterminados, el resultado de esta integral debe ser 0, por un lado las rectas verticales se anularan entre si de manera que nuestra integral estará aproximada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\theta - \eta \sin(\theta)} d\theta &\approx \int_{-\varepsilon + i\theta_0}^{\varepsilon + i\theta_0} e^{-im[\phi(\theta_0) + \phi''(\theta_0)(\theta - \theta_0)^2]} d\theta \\ &\approx e^{-im\phi(\theta_0)} \int_{-\varepsilon + i\theta_0}^{\varepsilon + i\theta_0} e^{im[\phi''(\theta_0)(\theta - \theta_0)^2]} d\theta \\ &\approx e^{-m(y_0 - \eta \sinh(y_0))} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m\eta}{2} \sinh(y_0)x^2} dx \\ \therefore J_m(kr) &\approx \frac{e^{kr \sinh(y_0) - my_0}}{\sqrt{2\pi kr \sinh(y_0)}}. \end{aligned}$$

Con esto vemos que la función de Bessel presenta el siguiente fenómeno, su parte imaginaria presenta un decaimiento exponencial mientras que su parte real presenta un comportamiento oscilatorio. Este comportamiento es muy similar al que presenta la luz al entrar a la gota de agua, sin embargo, en el caso de la función de Bessel nos sirve para entender él porque solo podemos escuchar cerca de la frontera en la cúpula de los susurros. De hecho, la frontera es equivalente al caso $\eta = 1$.

Las técnicas de asintóticas son más complejas que el proceso mostrado en el capítulo antes mencionado, por tanto, son acreedoras a su propio estudio dentro del presente trabajo.

4.4. Ecuación de Onda en la Esfera

En la primera parte de esta tesis resolvimos el caso de las funciones Bessel en dos dimensiones, es decir como se ve en el plano y llegamos a la conclusión de que la función es delimitada por una cáustica que forma un círculo interior de manera que las ondas quedan atoradas entre la circunferencia y el círculo interior, como se muestra en la figura siguiente.

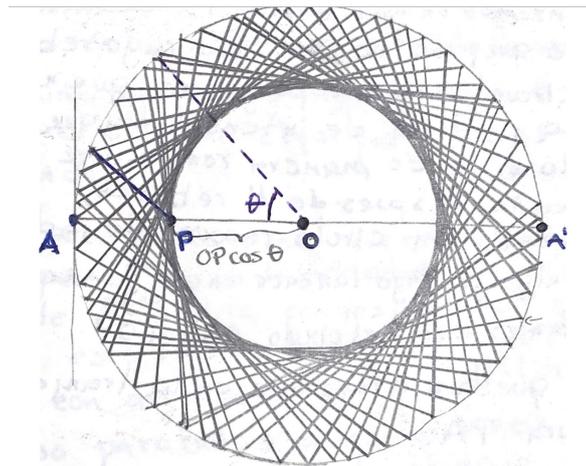


Figura 4.2: La manera en que la onda queda acotada, de manera de que nos quedamos con una dona plana.

La pregunta natural sería, ¿Sucede lo mismo en dimensiones más altas? Resulta que esta pregunta es precisamente la que intentaremos resolver, así como en el plano queda delimitado a lo ancho, como es que se delimita a lo alto, como se puede apreciar en la imagen.

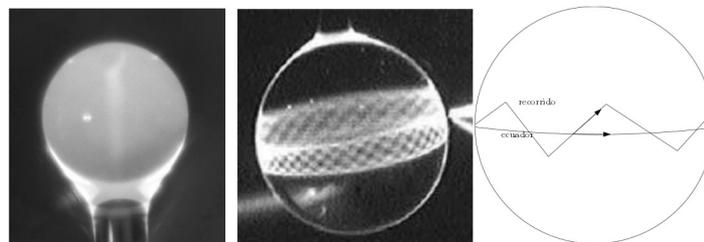


Figura 4.3: Se puede apreciar el anillo que se forma dentro de la esfera, ¿Será posible encontrar el mecanismo matemático que lo sustenta?

Empecemos con la siguiente ecuación

$$\nabla^2 u(x, y) + k^2 u(x, y) = 0, \quad (4.26)$$

y enviémosla a coordenadas esféricas, de manera que obtenemos

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial F}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + k^2 F = 0. \quad (4.27)$$

Donde nuestra función esta en términos de ρ, ϕ, θ los cuales representan el radio, ángulo angular (jeje) y, ángulo azimutal, respectivamente. El siguiente paso es resolver esta ecuación por medio de separación de variables, de manera que nuestra función pasa de ser $F(\rho, \phi, \theta)$ a ser $R(\rho)\Phi(\phi)\Theta(\Theta)$ con una constante de separación $\frac{\rho}{R\Theta\Phi}$. Multiplicamos ambos lados de nuestra ecuación por nuestra constante de separación y obtenemos así

$$\frac{1}{R} \frac{d}{d\rho} \left(\rho^2 \frac{dR}{d\rho} \right) + k^2 \rho^2 + \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Phi \sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = 0.$$

Ahora, multiplicamos esta nueva ecuación por $\sin^2 \theta$ e igualamos a nuestra constante de separación $-\lambda$,

$$\frac{\sin^2 \theta}{R} \frac{d}{d\rho} \left(\rho^2 \frac{dR}{d\rho} \right) + k^2 \rho^2 \sin^2 \theta + \frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = 0,$$

acomodando términos

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = \frac{\sin^2 \theta}{R} \left(\rho^2 \frac{dR}{d\rho} \right) + k^2 \rho^2 \sin^2 \theta + \frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = -\lambda$$

entonces,

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -\lambda^2$$

$$\frac{\sin^2 \theta}{R} \left(\rho^2 \frac{dR}{d\rho} \right) + k^2 \rho^2 \sin^2 \theta + \frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = 0.$$

Lo anterior nos ha servido para separar nuestra ecuación inicial en 3 diferentes que en teoría deberían ser mas fáciles de solucionar.

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + \lambda^2 \Phi = 0, \quad (4.28)$$

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} \left(\rho^2 \frac{dR}{d\rho} \right) + k^2 R - \frac{l(l+1)}{\rho^2} R = 0, \quad (4.29)$$

y

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left[l(l+1) - \frac{-\lambda^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta = 0. \quad (4.30)$$

Veamos entonces qué sucede al intentar resolver estas ecuaciones.

Empecemos por (4.29), con la modificación que $k = 1$. Resulta que las soluciones de la ecuación anterior son las funciones esféricas de Bessel.

$$x_l^1(\rho) = -\frac{(\frac{\rho}{2})^l}{l!} \int_1^{i\infty} e^{i\rho t} (1-t^2)^l dt \quad (4.31)$$

y

$$x_l^2(\rho) = -\frac{(\frac{\rho}{2})^l}{l!} \int_1^{-i\infty} e^{i\rho t} (1-t^2)^l dt. \quad (4.32)$$

Podemos ver que en efecto son las soluciones simplemente sustituyendo en la ecuación original y viendo que resultado arrojan.

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{\rho} \frac{d^2}{d\rho^2} \rho - \frac{l(l+1)}{\rho^2} + 1 \right] x_l^1(\rho) &= \\ &= -\frac{(\frac{\rho}{2})^l}{l!} \int_1^{i\infty} (1-t^2)^l \left[\frac{l(l+1)}{\rho^2} + \frac{2(l+1)it}{\rho} - t^2 - \frac{l(l+1)}{\rho^2} + 1 \right] dt \\ &= \frac{-(\frac{\rho}{2})^l}{l!} \frac{1}{i\rho} \int_{\pm 1}^{i\infty} \frac{d}{dt} \left[e^{i\rho t} (1-t^2)^{l+1} \right] dt, \end{aligned}$$

de manera que solo contribuyen los valores del contorno y estos desaparecen en ± 1 y en $t = -\infty$ para $\rho = kr > 0$ por lo tanto el resultado es 0. Lo mismo ocurre para la eq. 4.32. También es conveniente mencionar que si para 4.31 tomamos el conjugado complejo y dejamos que $t = -t$ obtenemos que $x_l^{1*}(\rho) = x_l^2(\rho^*)$. La siguiente combinación lineal, $j_l(\rho) = \frac{(x_l^1 + x_l^2)}{2}$, corresponde a la diferencia entre ambas soluciones. Como x_l^2 va de $t = -1$ a $t = i\infty$ y x_l^1 va de $t = 1$ a $t = i\infty$, la diferencia corresponde a una integral que va de $t = -1$ a $t = 1$, y al no tener un polo, podemos tomar una integral recta de $t = -1$ a $t = 1$.

$$j_l(\rho) = \frac{1}{2} \frac{(\frac{\rho}{2})^l}{l!} \int_{-1}^1 e^{i\rho t} (1-t^2)^l dt.$$

La otra combinación lineal se ve de la siguiente forma: $\frac{x_l^1 - x_l^2}{2\rho} = n_l$.

Nota,

$$x_l^1(\rho) = j_l(\rho) + in_l(\rho)$$

es analogo a

$$e^{i\rho} = \cos(\rho) + i \sin(\rho)$$

Tomemos $j_l(\rho)$ para observar que sucede cuando l es grande hagamos el cambio de va-

riable $t = l\tau$ y utilizamos el método de descenso rápido.

$$\begin{aligned}
 j_l(\rho) &= \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^l}{l!} \int_{-1}^1 e^{i\rho t} (1-t^2)^l dt \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^l}{l!} \int_{-\frac{1}{l}}^{\frac{1}{l}} e^{l(\log(1-t^2\tau^2)+i\rho\tau)} l dt \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^l}{l!} \int_{-\frac{1}{l}}^{\frac{1}{l}} \exp\left[-l + \sqrt{l^2 - \rho^2} + l \log\left(\frac{2l(l - \sqrt{l^2 - \rho^2})}{\rho^2}\right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{l\rho^2 \sqrt{l^2 - \rho^2}}{2(l - \sqrt{l^2 - \rho^2})} \left(\tau - i \frac{l - \sqrt{l^2 - \rho^2}}{l\rho}\right)^2 + O(\Delta\tau)\right] l dt \\
 &\approx \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^2}{\sqrt{2\pi} l!} e^{-l} e^{\sqrt{l^2 - \rho^2}} \left(\frac{2l(l - \sqrt{l^2 - \rho^2})}{\rho}\right)^l \left(\frac{2\pi(l - \sqrt{l^2 - \rho^2})}{l\rho^2 \sqrt{l^2 - \rho^2}}\right)^{\frac{1}{2}} l \\
 &= \frac{1}{2\rho} e^{\sqrt{l^2 - \rho^2}} \left(\frac{l - \sqrt{l^2 - \rho^2}}{\rho}\right)^l \left(\frac{l - \sqrt{l^2 - \rho^2}}{\sqrt{l^2 - \rho^2}}\right)^{\frac{1}{2}},
 \end{aligned}$$

lo cual funciona para $l \gg 1$ y $\rho \leq 1$. Ahora, veamos el comportamiento cuando l es muy grande para

$$\begin{aligned}
 x_l^1(\rho) &= -\frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^l}{l!} \int_1^{i\infty} e^{i\rho t} (1-t^2)^l dt \\
 &= -il \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^l}{l!} \int_{-\frac{1}{l}}^{\infty} \exp\left[-l - \sqrt{l^2 - \rho^2} + l \log\left(\frac{2l(l + \sqrt{l^2 + \rho^2})}{\rho^2}\right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{l\rho^2 \sqrt{-l - \rho^2}}{2(l + \sqrt{l^2 - \rho^2})} \left(\tau - \frac{l + \sqrt{l^2 + \rho^2}}{l\rho}\right)^2 + O(\Delta\tau)^3\right] \\
 &\approx -ie^{\sqrt{l^2 - \rho^2}} \left(\frac{l + \sqrt{l^2 - \rho^2}}{\rho}\right)^l \left(\frac{l + \sqrt{l^2 + \rho^2}}{\rho^2 \sqrt{l^2 - \rho^2}}\right)^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

Notemos que existen 2 puntos silla

$$\tau = \frac{l \pm \sqrt{l^2 - \rho^2}}{l\rho},$$

en el calculo anterior, se utilizo el punto con signo negativo, mientras que para $j_l(0)$ se utilizo el positivo,

$$\therefore n_l(\rho) \approx -\frac{1}{\rho} e^{-\sqrt{l^2 - \rho^2}} \left(\frac{l + \sqrt{l^2 - \rho^2}}{\rho}\right)^l \left(\frac{l + \sqrt{l^2 - \rho^2}}{\sqrt{l^2 - \rho^2}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Lo cual funciona bastante bien si $l \gg 1$ y $p \leq 1$. Por otro lado, si $p \geq l \gg 1$, el punto silla se vuelve complejo. La contribución de 4.31 esta dada por $\tau = \frac{l - i\sqrt{\rho^2 - l^2}}{l\rho}$, entonces

tendremos,

$$x_l^1(\rho) = \frac{1}{\rho} e^{i\sqrt{\rho^2 - l^2}} \left(\frac{l - i\sqrt{\rho^2 - l^2}}{\rho} \right)^l \left(\frac{l - i\sqrt{\rho^2 - l^2}}{i\sqrt{\rho^2 - l^2}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Lo cual funciona para $l \gg 1$ y $p \geq 1$. $j_l(n_l)$ estará dada por la parte imaginaria de $h_l^1(\rho)$. Pero, ¿Que nos dice todo lo anterior? Pues a grandes rasgos, que en la esfera sucede algo similar a lo que sucede en el círculo. Nuestra onda de sonido queda atrapada en una zona de la esfera, en este caso cerca del perímetro, y en todo lo demás es prácticamente cero.

Por otro lado, al tomar la ecuación (4.28) vemos que el resultado es inmediato

$$\Phi(\phi) = C_1 e^{i\lambda\theta} + C_2 e^{-i\lambda\theta}.$$

Mientras que la parte radial $R\rho$ nos muestra que su aportación es una modificación de las funciones de Bessel, la parte angular $\Phi(\phi)$ no aporta gran cosa más que un giro al rededor de la esfera. La parte que resulta interesante es la azimutal $\Theta(\theta)$ ya que nos ayuda a contestar la siguiente pregunta.

Si las funciones esféricas de Bessel nos muestran que nuestro sonido esta delimitado en el radio, es decir hay una zona donde no se escucha nada y hay una zona donde todo se acumula, tal como sucede con la función de Bessel en 2D, ¿Sucede lo mismo en el sentido azimutal?

La respuesta a esto es mucho mas sencilla de lo que podría aparentar, tomemos la ecuación (4.30)

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left[l(l+1) - \frac{\lambda^2}{\sin^2\theta} \right] \Theta = 0$$

entonces,

$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \Theta + \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \left[l(l+1) - \frac{\lambda^2}{\sin^2\theta} \right] \Theta = 0.$$

Esta ultima interpretación es conocida como la ecuación diferencial asociada de Legendre y sus soluciones son conocidas como funciones asociadas de Legendre (o armónicos esféricos) del primer y segundo orden; P_n^m y Q_n^m . De manera particular, nos fijamos en las funciones de primer orden P_n^m . Esta función esta definida de la siguiente manera:

$$P_n^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} (P_l(x)).$$

Gracias a la fórmula de Rodrigues podemos escribir $P_n(x)$ de la siguiente manera,

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} [(x^2 - 1)^l].$$

Y por consiguiente, podemos escribir P_n^m de la forma

$$P_n^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2 - 1)^l.$$

Sucede que, cuando hacemos el cambio de variable $x = \cos\theta$ y $m = n$, la formula de Rodrigues nos dice que la función $P_n^m = \sin^m\theta$ y al darle valores grandes, obtenemos lo siguiente.

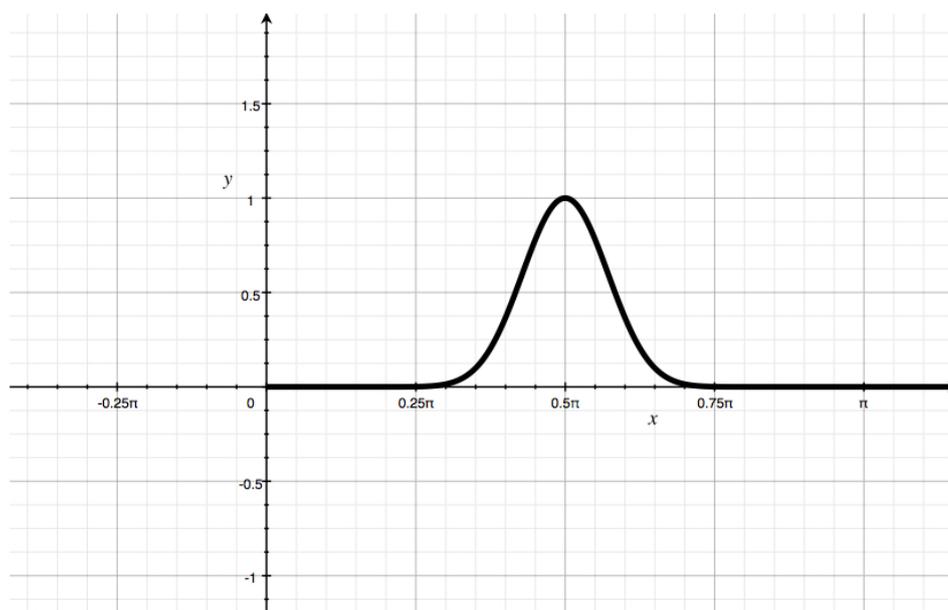


Figura 4.4: Observemos que el comportamiento es muy parecido al que tienen las funciones esféricas de Bessel.

¡El comportamiento de esta parte de las ecuaciones es muy similar a las funciones esféricas de Bessel! Por lo tanto, podemos asumir que efectivamente la parte azimutal juega un papel importante en el fenómeno de la galería de susurros, de alguna manera contribuye a que se forme una especie de toro dentro de la esfera. Imaginemos que la parte azimutal nos da la "altura" de esta figura mientras que la parte radial nos da el radio, es decir, donde Bessel nos dice que donde queda atrapado el sonido es el ancho de una figura, mientras que lo que nos dice Legendre es que donde queda atrapado el sonido es la altura de la figura y finalmente la parte angular da el giro que convierte a esta figura en un toro.

Capítulo 5

Regularización en Ondas de Choque

Finalmente, tomamos la ecuación de onda, que es el caso mas simple donde podemos encontrar decaimiento exponencial y oscilatorio y utilizamos los métodos asintóticos para estudiar como se regulariza la ecuación cuando se presenta viscosidad y cuando hay dispersión.

5.1. La Ecuación de Burgers

Nombrada en honor al físico holandés Johannes Martinus Burgers (1895-1981), la ecuación de Burgers resulta tan fundamental en el campo de las ecuaciones diferenciales parciales, que aparece en campos como mecánica de fluidos, acústica no lineal, dinámica de gases, flujo de tráfico, y por esta misma razón nos presenta una oportunidad de aplicar los métodos asintóticos que hemos estado trabajando hasta el momento, además de ser la más sencilla que mezcla efectos de propagación y difusión. La ecuación de Burgers tiene una estructura relativamente sencilla,

$$u_t + uu_x = \lambda_{xx}. \quad (5.1)$$

A esta ecuación en particular se le conoce como la ecuación viscosa de Burgers. Antes de empezar a trabajar con esta, miremos el caso de la ecuación no viscosa, es decir cuándo $\lambda_{xx} = 0$, además supongamos que tenemos la siguiente condición inicial, $u(x, 0) = f(x)$. Entonces las ecuaciones características de este caso serán

$$x_t = u$$

y

$$u_t = 0.$$

Si integramos la primera ecuación (con respecto de t) vemos que $x = ut + x_0$, i.e. es una familia de líneas rectas, y por otro lado al integrar la segunda ecuación vemos que $u = c$, es decir que es constante sobre la característica. Como nuestra condición inicial es $u(x, 0) = f(x)$ y sabemos que u es constante para toda t , sucede que $u = c = f(x_0)$ y entonces podemos reescribir la solución de $x_t = u$ como $x = f(x_0)t + x_0$ ya que x_0 es el punto o parámetro en el eje de las x ($t = 0$) en el plano $x - t$ donde se dibuja la característica. Este último resultado nos permite asegurar que la solución por características tiene la forma

$$u(x, t) = f(x_0) = f(x - ut), \quad x_0 = x - f(x_0)t. \quad (5.2)$$

Este resultado, supone que no existe variación sobre la pendiente de la característica asociada a la velocidad de la onda y al no haber dicha variación, jamás se cruzan.

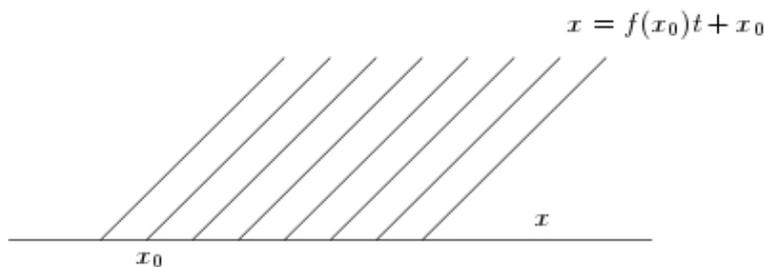


Figura 5.1: Como la pendiente de la característica asociada a la velocidad de la onda no cambia, jamás se cruzan.

Ahora supongamos que nuestra condición inicial será $u(x, 0) = \frac{1}{1+x^2}$, de manera que lo único que cambia en nuestro procedimiento anterior es la $f(x_0)$ y nuestra solución se convierte en:

$$u(x, t) = \frac{x_0^3 + x_0 + t}{1 + x_0^2}. \quad (5.3)$$

Resulta que en esta ecuación se evidencia lo siguiente, no siempre se evita que las características se crucen entre ellas, y al suceder esto tenemos en nuestras manos ondas de choque y creación de cústicas.

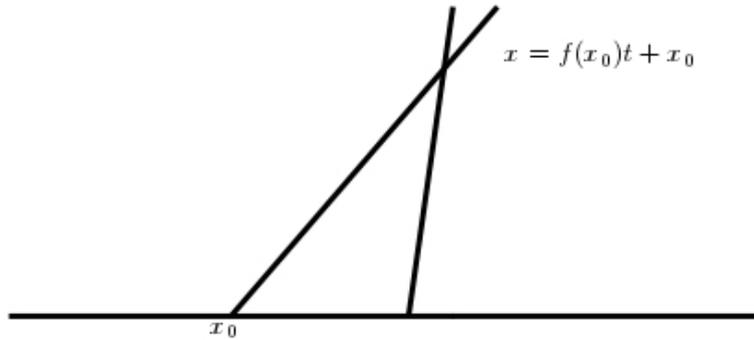


Figura 5.2: Intersección de dos características.

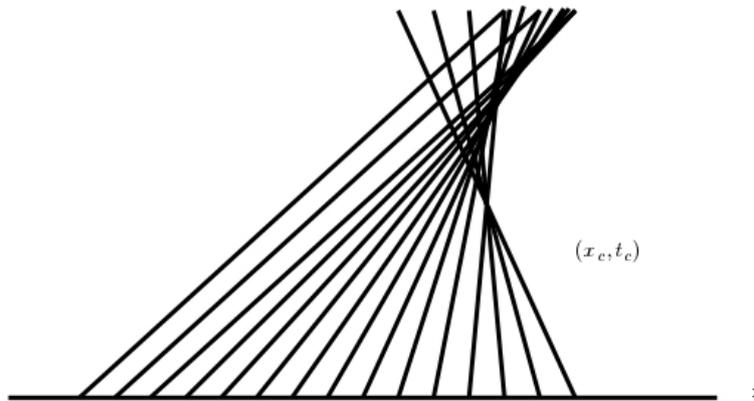


Figura 5.3: Se empieza a delinear la cústica formada por el choque de varias características.

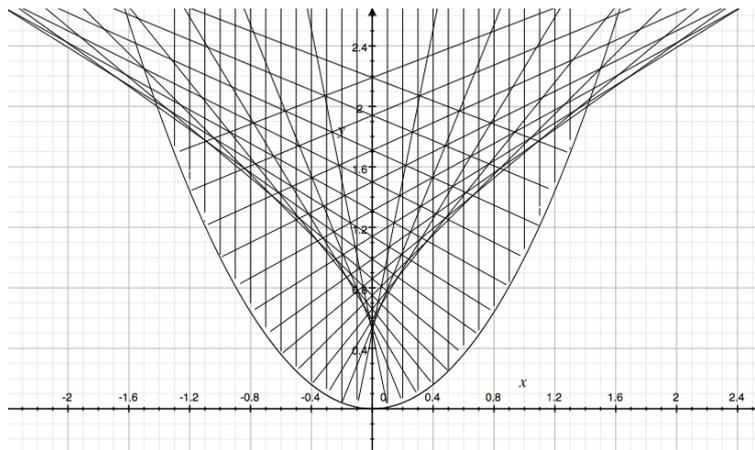


Figura 5.4: Cústica formada por rayos en un reflector no parabólico.

La primera cústica se forma en

$$t = \frac{-1}{F'(x_0)} \quad \text{y} \quad x = F(x_0)t_0 + x_0, \tag{5.4}$$

donde x_0 es la posición en la cual $F'(x_0)$ tiene un mínimo negativo (fig.5.5), tal que

$$F''(x_0) = 0, \tag{5.5}$$

con

$$F'''(x_0) > 0. \tag{5.6}$$

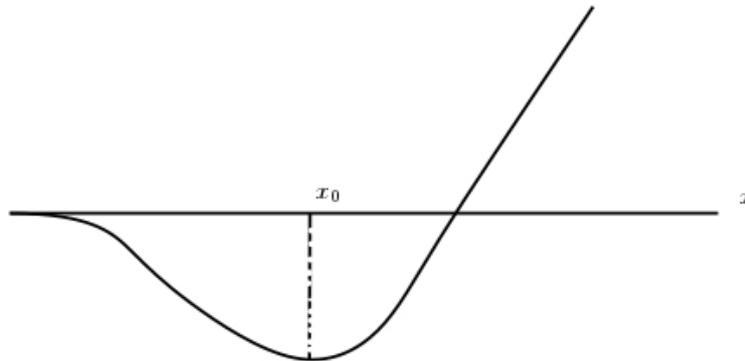


Figura 5.5: Primera interseccion (mínimo).

Al tener un caso donde sucede que tenemos ondas de choques, resulta conveniente ver qué sucede con la ecuación de Burgers en este caso.

5.1.1. La ecuación de Burgers como Onda de Choque¹

Retomemos la ecuación de Burgers (ec. (5.1)) pero con un ligero cambio para poder tratarla como una onda de choque;

$$-cu_X + uu_X = \lambda u_{XX}, \quad X = x - ct,$$

debido a las propiedades de la integral, esta ecuación es fácil de integrar, que no es lo mismo que decir que es fácil de resolver, de manera que integrando con respecto de X obtenemos,

$$\frac{1}{2}u^2 - cu + k = \lambda u_X,$$

donde $k = cte$, ahora esta solución a la integración la acomodamos como,

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{u_X}{k - cu + \frac{1}{2}u^2}.$$

Observemos la gráfica general de una ecuación de este tipo.

¹Tomado del capítulo 4 del libro "Linear and Non-Linear Waves", G.B. Whitham F.R.S.

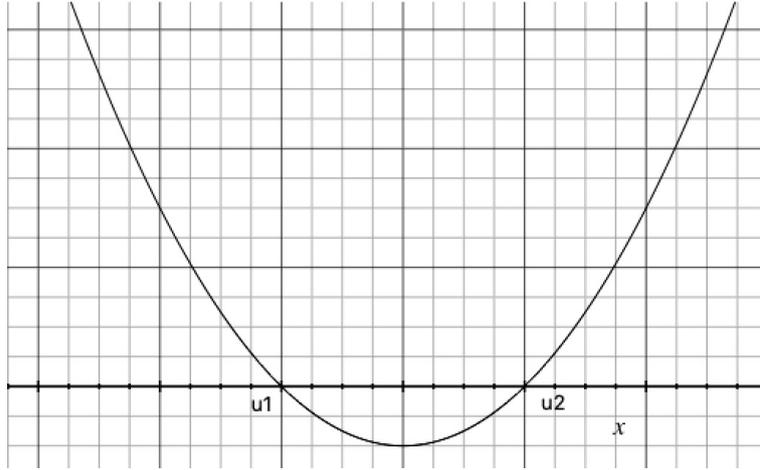


Figura 5.6: Los puntos u_1 y u_2 son nuestras raíces y al mismo tiempo podemos pensar que son puntos de estabilidad.

La imagen anterior solo nos da una pequeña pista de lo que podría pasar, de manera que para entender qué sucede, necesitamos continuar el análisis de la función y su gráfica, y para eso tenemos que continuar con la solución. Escribimos la ecuación de la siguiente manera tomando en cuenta que la parte de abajo se puede separar como un polinomio de segundo grado de manera que tenemos,

$$\frac{u_X}{(u - u_1)(u - u_2)} = \frac{1}{\lambda},$$

y al integrar de alguna t_0 inicial a t la ecuación,

$$\int_{t_0}^t \frac{u_X dt}{(u - u_1)(u - u_2)} = \int_{t_0}^t \frac{1}{\lambda} dt,$$

obtenemos la siguiente solución:

$$\frac{t - t_0}{\lambda} = \frac{1}{u_2 - u_1} \log \frac{u_2 - u}{u - u_1}.$$

Finalmente, al resolver para la función u

$$u = u_1 + \frac{u_1 u_2}{1 + \exp \frac{u_2 - u_1}{\lambda} (t - t_0)}, \quad u = \frac{u_1 + u_2}{2}.$$

Cuando nuestra función X viene desde $-\infty$, podemos observar que se acerca al punto u_1 , también sucede que para los valores de u en el intervalo (u_1, u_2) la función se carga hacia el punto u_1 y después del punto u_2 la función se aleja del mismo, esto nos muestra que el punto u_1 es un punto de estabilidad mientras que el punto u_2 es un punto de repulsión.

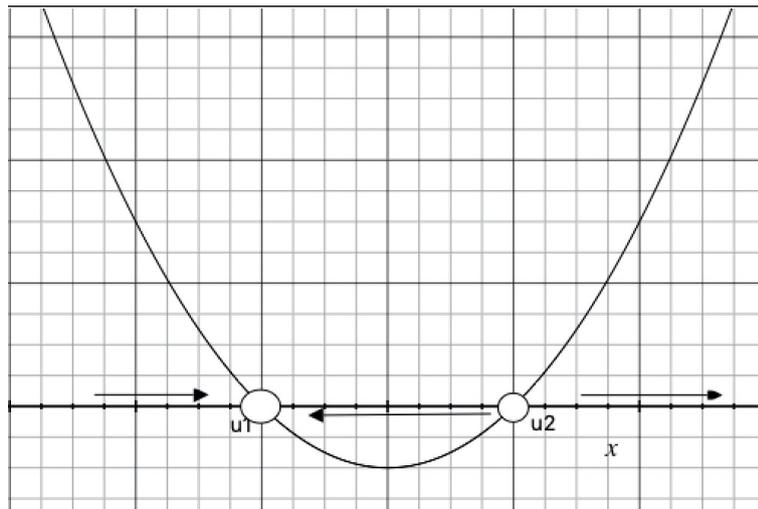


Figura 5.7: El punto u_1 es de atracción o estabilidad, mientras que u_2 es de repulsión.

Si hacemos un cambio de variable de manera que nuestras us se encuentren en el equivalente al eje de las ordenadas en lugar de las abscisas, podremos observar el siguiente comportamiento.

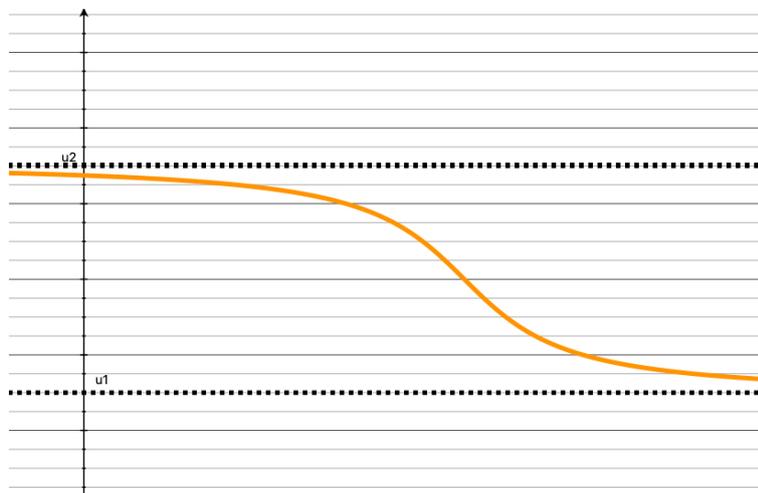


Figura 5.8: Se observa la transición del punto u_2 al punto u_1 .

Podemos ver que la función se asemeja a una función escalonada pero con una transición suave, lo que es aun mas interesante es que este perfil de onda viajera es el perfil que le gusta a la solución de la ecuación de Burgers, es decir, sea cual sea nuestra condición inicial, conforme pasa el tiempo, esta ira modificando hasta ser como la gráfica anterior, y una vez que llegue a este punto, ya no sentirá mas cambios y se comportara como una onda viajera.

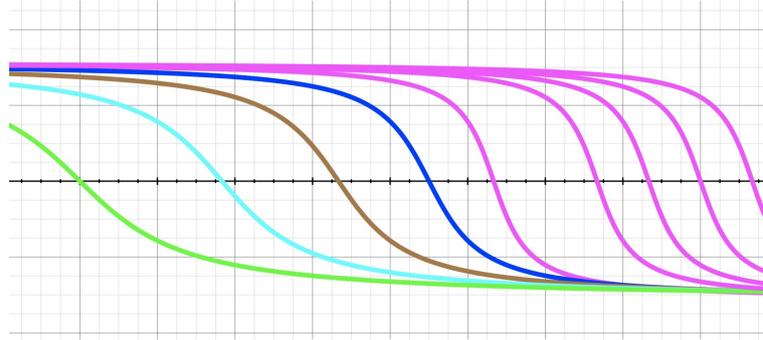


Figura 5.9: Notemos que la onda se va "levantando" hasta alcanzar el perfil que le gusta, una vez alcanzado este perfil ya no percibe cambios y se comporta como una simple onda viajera.

5.2. Regularización por viscosidad²

Entre 1950-1951 y de manera independiente, Cole y Hopf descubrieron que la ec(5.1) se puede reducir a la ecuación lineal del calor con la siguiente transformación no lineal

$$c = -2v \frac{\phi_x}{\phi}. \quad (5.7)$$

Primero, definimos $c = \psi_x$ de manera que se puede integrar para obtener

$$\psi_t + \frac{1}{2} \psi_x^2 = v \psi_{xx}.$$

De igual manera hacemos

$$\psi = -2v \log \phi,$$

y al sustituir obtenemos

$$\phi_t = v \phi_{xx}. \quad (5.8)$$

Resulta que la transformación no lineal elimino el termino no lineal, lo cual resulta en extremo conveniente, ya que la solución general a la ecuación de calor ((5.8)) es bien conocida y obtenible por muchos métodos. Ahora consideremos el problema con los siguientes valores iniciales, $c = F(x)$ en $t = 0$, al aplicarlo en (5.7) obtenemos

$$\phi = \Phi(x) = \exp \left\{ -\frac{1}{2v} \int_0^x F(\eta) d\eta \right\}, \quad t = 0. \quad (5.9)$$

Para la ecuación de calor, cuya solución para ϕ esta dada por

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{4\pi vt}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\eta) \exp \left\{ -\frac{(x-\eta)^2}{4vt} \right\} d\eta. \quad (5.10)$$

²Tomado del capítulo 4 del libro "Linear and Non-Linear Waves", G.B. Whitham F.R.S.

Y por consiguiente, sustituyendo en (5.7), obtenemos el siguiente resultado como solución para c

$$c(x,t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-\eta}{t} e^{-\frac{G}{2\nu}} d\eta}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{G}{2\nu}} d\eta} \quad (5.11)$$

donde

$$G(\eta; x, t) = \int_0^{\eta} F(\eta') d\eta' + \frac{(x-\eta)^2}{2t}. \quad (5.12)$$

5.2.1. Limite conforme $\nu \rightarrow 0^3$

Al considerar $\nu \rightarrow 0$ en la ecuación (5.11) veremos que las contribuciones dominantes a las integrales vienen de la vecindad de los puntos estacionarios de G

$$G_{\eta} = F(\eta) - \frac{x-\eta}{t} = 0. \quad (5.13)$$

Dejemos que $\eta = \xi(x, t)$ como solución a (5.13) de manera que tenemos

$$F(\xi) - \frac{(x-\xi)}{t} = 0. \quad (5.14)$$

La contribución la vecindad de un punto estacionario, $\eta = \xi$, en una integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\eta) e^{\frac{G(\eta)}{2\nu}} d\eta$$

es

$$g(\xi) \sqrt{\frac{4\pi\nu}{|G''(\xi)|}} e^{-\frac{G(\xi)}{2\nu}},$$

y esto es la formula estándar para el método de descenso rápido. Supongamos, por el momento, que solo existe un punto estacionario $\xi(x, t)$ que satisface (5.14). Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-\eta}{t} e^{-\frac{G}{2\nu}} d\eta \approx \frac{x-\xi}{t} \sqrt{\frac{4\pi\nu}{|G''(\xi)|}} e^{-\frac{G(\xi)}{2\nu}} \quad (5.15)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{G}{2\nu}} d\eta \approx \sqrt{\frac{4\pi\nu}{|G''(\xi)|}} e^{-\frac{G(\xi)}{2\nu}}, \quad (5.16)$$

y en (5.11) tenemos

$$c \approx \frac{x-\xi}{t}. \quad (5.17)$$

Donde $\xi(x, t)$ esta definido por (5.14). Y podemos escribir la solución asintótica como

$$c = F(\xi) \quad (5.18)$$

$$x = \xi + F(\xi)t. \quad (5.19)$$

³Tomado del capítulo 4 del libro "Linear and Non-Linear Waves", G.B. Whitham F.R.S.

Lo cual, como ya vimos, es la solución exacta a la ecuación de Burgers cuando $\lambda u_{xx} = 0$. El punto estacionario se ha convertido en una variable en la ecuación característica. La solución a el caso $= 0$ es claramente univaluada y continua para toda t , sin embargo transcurrido suficiente tiempo, 4,17 nos arroja una solución multivaluada y habrá que introducir una discontinuidad, esto sucede debido a que en ese momento existen 2 puntos estacionarios que satisfacen (5.14) y nuestro análisis asintótico requiere modificación. Nombremos ξ_1 y ξ_2 a dichos puntos, con $\xi_1 > \xi_2$ y ambos tendrás contribuciones como se estipulo en (5.15) y (5.16), entonces

$$c \approx \frac{\frac{x-\xi_1}{t} |G''(\xi_1)|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{G(\xi_1)}{2v}} + \frac{x-\xi_2}{t} |G''(\xi_2)|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{G(\xi_2)}{2v}}}{|G''(\xi_1)|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{G(\xi_1)}{2v}} + |G''(\xi_2)|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{G(\xi_2)}{2v}}}. \quad (5.20)$$

Cuando $G(\xi_1) \neq G(\xi_2)$ sucede que conforme $v \rightarrow 0$ uno de los dos términos se hará sumamente grande y por tanto

Si $G(\xi_1) < G(\xi_2)$

$$c \approx \frac{x - \xi_1}{t},$$

si $G(\xi_1) > G(\xi_2)$

$$c \approx \frac{x - \xi_2}{t}.$$

Y entonces, cualquiera de los dos sustituye a ξ en (5.19), utilizando el criterio de $G(\xi_1) \leq G(\xi_2)$ se elige el apropiado para cualquier (x, t) y el intercambio se dará en los (x, t) donde $G(\xi_1) = G(\xi_2)$. Esto sucede cuando

$$\int_0^{\xi_2} F(\eta') d\eta' + \frac{(x - \xi_2)^2}{2t} = \int_0^{\xi_1} F(\eta') d\eta' + \frac{(x - \xi_1)^2}{2t}. \quad (5.21)$$

Y dado que ξ_1 y ξ_2 satisfacen (5.14), la condición se puede escribir como

$$\frac{1}{2} \{F(\xi_1) + F(\xi_2)\} (\xi_1 - \xi_2) = \int_{\xi_2}^{\xi_1} F(\eta') d\eta'. \quad (5.22)$$

A este proceso se le conoce como regularización por viscosidad.

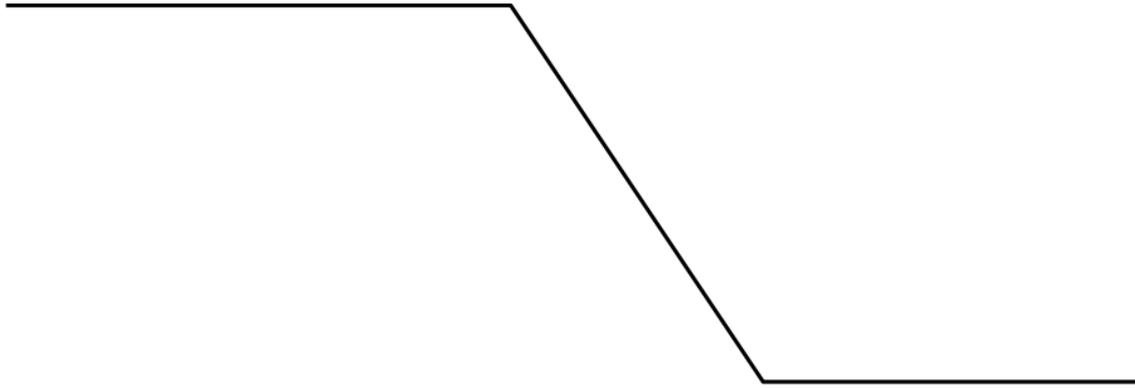


Figura 5.10: A pesar de existir una discontinuidad, el hecho de contar con un elemento que funciona como viscosidad(λ), la transición de un valor al otro sucede de manera relativamente suave.

Como se menciona en el apartado de la ecuación de Burgers como onda de choque, lo que sucede en esta regularización es que la pendiente de la característica asociada a la velocidad de la onda se va volviendo más vertical conforme $\lambda \rightarrow 0$ hasta llegar al punto que se asemeja al perfil que se menciona en el apartado anterior, y se convierte una vez más en una onda viajera.

5.3. Regularización por Dispersión

5.3.1. Dispersión⁴

Antes de entrar por completo al estudio de la ecuación de Burgers en el plano complejo es conveniente que demos una explicación y un repaso a lo que es la dispersión y cómo afecta el comportamiento de las ondas. Tomemos una onda lineal con dispersión $e^{(kx - \omega t)}$, este tipo de ondas están caracterizadas por una frecuencia que depende del número de onda, de manera que la velocidad de fase, $\frac{\omega(k)}{k}$ depende del número de onda, ondas con diferentes longitudes, tienen diferentes velocidades de fase. Sin embargo, resulta que para las ondas dispersivas la velocidad de grupo es más importante ya que la energía se mueve con esta velocidad y no con la velocidad de fase. Mostrar esto no es fácil de hacer, así que empecemos con algo más sencillo, consideremos una solución que consiste de dos ondas solamente con números de onda cercanos, k y $k + \Delta k$, donde Δk es muy pequeña. Por simplicidad escogeremos ondas de la forma $\cos(kx - \omega(k)t)$, y consideremos que comparten la misma amplitud constante A :

$$u(x, t) = A \cos(kx - \omega(k)t) + A \cos[(k + \Delta k)x - \omega(k + \Delta k)t].$$

Usando la fórmula de suma para cosenos, obtenemos

$$u(x, t) = 2A \cos \left[\left(k + \frac{\Delta k}{2} \right) x - \frac{\omega(k) + \omega(k + \Delta k)}{2} t \right] \cos \left[\frac{\Delta k}{2} x - \frac{\omega(k + \Delta k) - \omega(k)}{2} t \right].$$

La suma resulta ser el producto de dos funciones trigonométricas cuyo comportamiento espacial difiere, por un lado una es $k + \frac{\Delta k}{2}$, prácticamente la misma que las originales, mientras que la otra tiene un número de onda muy pequeño $\frac{\Delta k}{2}$ correspondiente a una

⁴Sección tomada del capítulo 14 del libro "Applied Partial Differential Equations", Haberman, Richard

longitud muy grande de onda. Por un lado, la gráfica de una de estas es una onda sinusoidal muy larga con una amplitud de onda relativamente corta, de manera que la solución se encuentra en esta onda periódicamente y es negativa, mientras que para la otra tendremos una onda que oscila de manera rápida cuyas amplitudes cambian de manera lenta en el espacio. Estas dos ondas interfieren unas con otras de manera constructiva o destructiva, y además la onda larga actúa como una envolvente para el grupo de ondas oscilantes de manera que entre los ceros de la onda larga se encuentran grupos de ondas oscilantes con la particularidad de que su número de onda es casi el de una onda dispersiva individual, $k + \frac{\Delta k}{2}$ y una velocidad de fase que es casi la velocidad de fase de una onda dispersiva individual,

$$\frac{\omega(k + \frac{\Delta k}{2})}{k + \frac{\Delta k}{2}} \approx \frac{\omega(k) + \omega(k + \Delta k)}{2(k + \frac{\Delta k}{2})} \approx \frac{\omega(k)}{k}.$$

Sin embargo, la onda envolvente se mueve con una velocidad completamente diferente, $\frac{\omega(k+\Delta k) - \omega(k)}{\Delta k}$, en el límite conforme $\Delta k \rightarrow 0$, se le llama velocidad de grupo

$$\text{velocidad de grupo} \equiv \frac{d\omega}{dk}.$$

Como vemos, mientras que la viscosidad nos daba transiciones suaves, todo parece indicar que el comportamiento con dispersión será mucho más complicado y errático que con y sin la viscosidad.

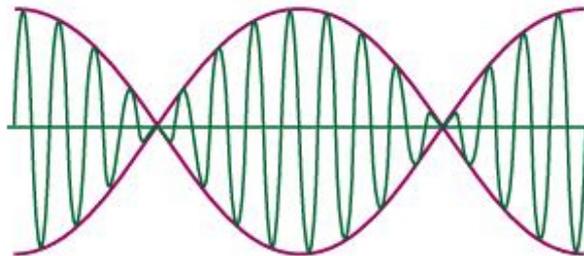


Figura 5.11: La onda morada es la velocidad de grupo y la envolvente del grupo de ondas que corresponden a la velocidad de fase (verde).

Por un lado, la velocidad de fase es la velocidad con la que se mueve cualquier componente de la frecuencia de la onda en el espacio, además el cociente de la división de la velocidad de la luz entre la velocidad de fase nos da el índice de refracción, es decir esta es la razón por la cual cuando la luz entra con un ángulo en un prisma se separa en sus componentes de colores, cada componente tiene una velocidad de fase diferente y por lo tanto tienen índices de refracción diferentes.

Y por otro lado, la velocidad de grupo es la velocidad a la que toda la "forma" de la onda se mueve, por eso parece una envolvente en la figura anterior. La dispersión es la que causa esta diferencia en la velocidad de fase y que da lugar a la velocidad de grupo. Para visualizar esto, imaginemos un charco de agua en el cual dejamos caer una piedra, las ondas circulares que se forman son el grupo de ondas, y tienen una forma que se repite,

pero dentro de este grupo es posible ver que las ondas pequeñas y cortas se mueven mas rápido (velocidad de fase) que las ondas mas grandes y externas.

Finalmente pensemos en la ecuación de difusión:

$$u_t = D(x,t)u_{xx},$$

con solución del tipo $e^{if(x-ut)}$, esto quiere decir que $i\omega = -ik^2$, las i se eliminan entre ellas y nos quedamos con $\frac{\omega}{k} = k$, es decir la velocidad de grupo es inversamente proporcional a el número de onda k , ω es la frecuencia. Es decir, efectivamente diferentes *nodos* viajan a diferentes velocidades.

5.3.2. La ecuación de Burgers Compleja

Si bien el cambio es simplemente agregar la i de números complejos, el resultado es bastante diferente, mientras que en los reales se suscitó una regularización por viscosidad, en este caso tendremos una regularización por dispersión. Veamos pues qué sucede con la ecuación.

$$u_t + uu_{xx} = i\lambda u_{xx}, \quad u(x,0) = u_0(x). \quad (5.23)$$

Al igual que en el caso de la variable real, aplicamos la transformada de Cole-Hopf

$$\begin{aligned} \phi &= -2i\lambda \log \Phi, & \phi_t &= \frac{-2\lambda i\Phi_t}{\Phi_t} \\ \phi_x &= \frac{-2\lambda i\Phi_x}{\Phi}, & \phi_{xx} &= -2\lambda i \left[\frac{\Phi_{xx}}{\Phi} - \left(\frac{\Phi_x}{\Phi} \right)^2 \right], \end{aligned}$$

aplicamos los mismos cambios de variable, i.e.

$$\phi_x = u, \quad -i\lambda u_u + \frac{u^2}{2} = \phi_t, \quad \phi_t = -i\lambda \phi_{xx} + \frac{\phi_x^2}{2},$$

y nuestra condición inicial se vuelve $u = \phi_0 = 2\lambda \frac{\Phi_x}{\Phi}$, de manera que al substituir obtenemos $i\Phi_t = \lambda \Phi_{xx}$, $\Phi_t = -i\lambda \Phi_{xx}$. Ahora, aquí aplicamos la transformada de Fourier, así como su inversa

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial}{\partial t} \Phi(x,t) e^{-2\pi i \xi x} dx &= -i\lambda \int \Phi_{xx} e^{-2ix\pi\xi} dx, \\ \frac{\partial}{\partial t} \widehat{\Phi}(\xi, t) &= -i\lambda \left(2\pi i \xi \int \Phi_x e^{-2\pi i \xi x} dx \right) = 2\pi \lambda \xi \int 2\pi i \xi \Phi(x,t) e^{-2\pi i \xi x} dx, \end{aligned}$$

finalmente

$$\frac{\partial}{\partial t} \widehat{\Phi}(\xi, t) = 4\pi^2 \xi^2 \lambda i \widehat{\Phi}(\xi, t).$$

Resolviendo y tomando la transformada inversa de Fourier

$$\begin{aligned} \mu(t) &= e^{-\int 4\lambda \pi^2 \xi^2 i dt} = e^{-4\lambda \pi^2 \xi^2 it}, \\ \widehat{\Phi}(\xi, t) &= \widehat{\Phi}_0(\xi, t) e^{4\lambda \pi^2 \xi^2 it}, \\ \int \widehat{\Phi}(\xi, t) e^{2\pi i x \xi} d\xi &= \int \widehat{\Phi}_0(\xi) e^{4\lambda \pi^2 \xi^2 it} e^{2\pi i x \xi} d\xi, \\ \Phi(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi \lambda t i}} \int \Phi(z) e^{\frac{(z-x)^2}{4\lambda t i}} dz. \end{aligned}$$

Recordamos que

$$\Phi_0(z) = e^{\frac{i}{2\lambda} \int_0^z \phi(\xi) d\xi} = e^{-\frac{1}{2\lambda i} \int_0^z \phi(\xi) d\xi},$$

$$\Phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda t i}} \int e^{-\frac{i\phi(\xi)}{2\lambda i} + \frac{(z-x)^2}{4\lambda t i}} dz$$

entonces

$$G = \int_0^z \phi(\xi) d\xi - \frac{(z-x)^2}{2t}$$

y finalmente

$$\Phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{-4\pi\lambda t i}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{G}{2i\lambda}} dz.$$

Ahora tomamos la condición inicial y la utilizamos

$$u = \phi_x = -2\lambda i \frac{\Phi_x}{\Phi},$$

para obtener

$$\begin{aligned} u(x,t) &= -2i\lambda i \left[\frac{\frac{1}{\sqrt{4\pi\lambda t}} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-G}{2i\lambda}} dz}{\frac{1}{\sqrt{4\pi\lambda t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-G}{2i\lambda}} dz} \right] \\ &= -2i\lambda \left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} e^{\frac{-G}{2i\lambda}} dz}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-G}{2i\lambda}} dz} \right] \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2i\lambda(z-x)}{2i\lambda t} e^{\frac{-G}{2i\lambda}} dz}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-G}{2i\lambda}} dz} \\ \therefore u(x,t) &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(z-x)}{t} e^{\frac{-G}{2i\lambda}} dz}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-G}{2i\lambda}} dz}. \end{aligned}$$

Que es lo mismo que se obtuvo para el caso real salvo un i .

5.3.3. Cuando $i\lambda \rightarrow 0$

Existen justificaciones de porque tomar este lo mismo que tomar solamente el mínimo de G pero van mas allá de lo que se trata en esta tesis, así que permitamos tomar un salto de fe y usar esto sin más justificación.

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(z-x)}{t} e^{\frac{-G}{2i\lambda}} dz}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-G}{2i\lambda}} dz} = \min G$$

donde

$$G = \int_0^z \phi_0(\xi) d\xi - \frac{(x-z)^2}{2t}.$$

Nuevamente obtenemos el $\min G$

$$\begin{aligned} \min G &= \frac{d}{dz} \int_0^z \phi_0(\xi) d\xi - \frac{d}{dz} \frac{(x-z)^2}{t} \\ &= \frac{d}{dz} \phi_0(z) + \frac{2(x-z)}{2t} = \phi_{0,z} + \frac{x-z}{t} \\ -x+z &= (\phi_{0,z})t \\ x &= -(\phi_{0,z})t + z \end{aligned}$$

entonces

$$x = -u_{0,z}t + z.$$

y recordemos que nuestra condición inicial es, en este caso, $\phi_0(z) = 2i\lambda \frac{\Phi_x}{\Phi} \Big|_z$.

5.3.4. Variación Lenta⁵

Consideremos por un momento la ecuación parcial diferencial de una onda dispersiva lineal con soluciones elementales del tipo $e^{i(kx-\omega t)}$, donde ω satisface que $\omega = \omega(k)$, entonces, cada modo de la solución al problema de valor inicial tiene la siguiente forma

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(kx-\omega(k)t)} dk = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{it(k\frac{x}{t}-\omega(k))} dk, \quad (5.24)$$

donde $A(k)$ esta relacionada con la transformada de Fourier de la condición inicial. Si asumimos que la t es grande y que $(\frac{x}{t})$ es fija, podemos usar el método de fase estacionaria ya que habrá interferencia destructiva y la integral será pequeña. Siguiendo lo que aprendimos de el método de fase estacionaria, la contribución más importante para la integral (5.24) estará dada por cualquier punto k_0 donde la fase es, valga la redundancia, estacionaria, i.e.

$$\frac{x}{t} = \omega'(k_0). \quad (5.25)$$

Resulta que al dar los datos necesarios, x y t , obtenemos el punto estacionario k_0 de manera que la siguiente ecuación

$$u(x,t) \approx A(k_0) \left| \frac{2\pi}{t\omega''(k_0)} \right|^{\frac{1}{2}} e^{i[k_0x-\omega(k_0)t]} e^{-i(\text{sign}\omega''(k_0))\frac{\pi}{4}}, \quad (5.26)$$

es una buena aproximación, cuando x y t son grandes. Esta solución es similar a una onda viajera con número de onda k_0 y frecuencia $\omega(k_0)$, cuya amplitud decae con el tiempo. Pero debemos recordar que el número de onda y la frecuencia dependen de qué x y t satisfagan ec.(5.25), por lo tanto no serán constantes. Sin embargo, la variación es lo

⁵Sección tomada del capítulo 14 del libro "Applied Partial Differential Equations", Haberman, Richard

suficientemente lenta como para ser consideradas casi constantes y por tanto se le conoce como una onda dispersiva lentamente variante.

Con esto en mente, podemos tratarla como una onda viajera y definimos el número de onda y la frecuencia de la siguiente manera, además de agregar una amplitud $A(x, t)$ y una fase $\theta(x, t)$. Sea

$$u(x, t) = A(x, t)e^{i\theta(x, t)}, \quad (5.27)$$

número de onda (de variación lenta), k

$$\equiv \frac{\partial \theta}{\partial x} = \theta_x, \quad (5.28)$$

frecuencia (de variación lenta), ω

$$\equiv -\frac{\partial \theta}{\partial t} = \theta_t. \quad (5.29)$$

De (5.28) y (5.29) podemos obtener la siguiente ley de conservación,

$$k_t + \omega_x = 0, \quad (5.30)$$

y en un medio uniforme, $\omega = \omega(k)$. Si sustituimos esto en (5.30) resulta que el número de onda $k(x, t)$ debe satisfacer

$$k_t + \omega'(k)k_t = 0, \quad (5.31)$$

y el problema de valor inicial se puede resolver por medio de características

$$\frac{d\theta}{dt} = \theta_t + \theta_x \frac{dx}{dt} = -\omega + k \frac{d\omega}{dk},$$

Como ω y $\frac{d\omega}{dk}$ dependen solo de k y k es una constante moviéndose con la velocidad de grupo tenemos

$$\theta(x, t) = \left(-\omega + k \frac{d\omega}{dk}\right)t + \theta(\xi, 0) = k(x - \xi) - \omega t + \theta(\xi, 0),$$

donde $\theta(\xi, 0)$ es la fase inicial.

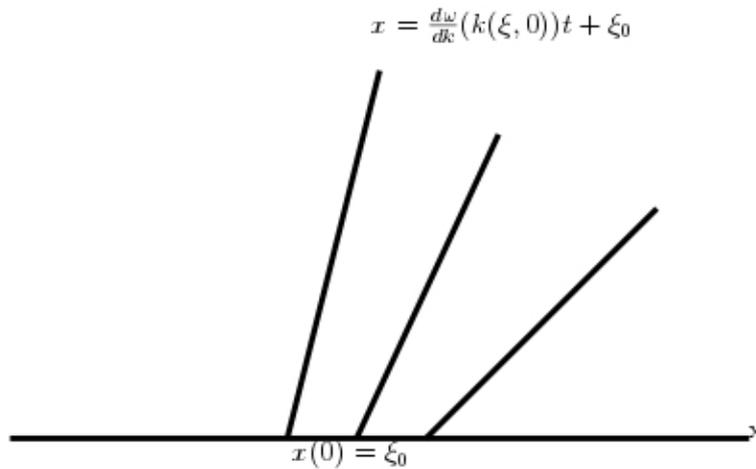


Figura 5.12: Las características para la propagación de una onda con dispersión

La observación final es que la solución está formada por diferentes ondas con diferentes longitudes porque cada una se mueve con diferente velocidad de fase y conforme $t \rightarrow \infty$ la amplitud decae y la onda finalmente desaparece (se dispersa).

Capítulo 6

Conclusiones

Sucede que cuando a alguien se le plantea el problema de el arcoíris, usualmente la respuesta es de carácter "pues es por refracción", seguido por algún gesto de desaprobación ante la aparente trivialidad del tema, la cosa cambia cuando se plantea el problema de la galería de susurros, sin embargo, durante todo este trabajo hemos visto que no solo ambos temas comparten la naturaleza del fenómeno que los ocasiona, sino que ambos distan muchos de ser triviales.

Por un lado, en el capítulo 1 vimos que el fenómeno de la galería de susurros ha sido estudiado, provocado e inclusive admirado desde cientos de años y por diversas culturas, así como el principio geométrico que esta detrás de este fenómeno, los rebotes y las cáusticas. Esto nos sirvió como primera vista de lo poco trivial que resulta este tema, pues nos adentró a la ecuación de onda y por consiguiente a la ecuación y funciones de Bessel.

De igual manera, el capítulo 2 nos sirvió como recordatorio que el arcoíris, además de ser un fenómeno hermoso y digno de admiración, resulta tan poco trivial que ha sido estudiado igualmente por muchas culturas y grandes pensadores desde cientos de años atrás y mientras se logra una explicación muy convincente gracias a la geometría, también nos dimos cuenta que el tema dista mucho de ser trivial y que las herramientas de geometría nos dejan con algunas preguntas sin resolver.

Es por eso que damos paso al capítulo 3, y aprendemos una de las herramientas que, en mi opinión, resulta sumamente útil; el análisis asintótico. Y no solo vemos la importancia del análisis, sino que nos sirve para resolver algunas dudas que nos dejó la geometría y explicar algunas cosas como los arcoíris supernumerarios y los efectos que podemos observar en el arcoíris en general (como la banda de Alexander). Pero a su vez, esto nos da pie a los últimos 2 capítulos de la tesis, podemos terminar y expandir el análisis de la galería de susurros al salirnos del plano y adentrarnos en 3 Dimensiones y dar un mejor entendimiento al fenómeno y finalmente.

Pero la parte más complicada y poco estudiada resulta la aplicación de los métodos asintóticos para el estudio de la regularización de las ondas de choque, y para esto utilizamos a nuestro viejo amigo Bessel, pues resulta que sus funciones son las más sencillas en la materia de la teoría de ondas. Pero no dejemos que esto nos engañe, poder resolver estas ecuaciones requiere de herramientas matemáticas bastante avanzadas como el uso del análisis asintótico, que como su nombre nos dice, hay que recordar es una aproximación y por muy buena que sea sigue siendo una aproximación y por consiguiente hay que tener mucho cuidado en su uso.

A mi parecer, este viaje sirve como recordatorio que las nuevas técnicas y teorías no tienen porque suplantar del todo a las antiguas, por el contrario, el uso adecuado de las

mismas sirve para complementarse mutuamente y, tal como vimos en el caso concreto del arcoíris, la teoría geométrica no estaba equivocada, simplemente alcanzo los límites de sus capacidades. De manera que la próxima vez que alguien pregunte algo que pareciera trivial, hay que recordar que muchas veces, por triviales que parezcan las cosas, siempre hay algo que nos pueden enseñar.

Bibliografía

- [1] J.D. Murray *Asymptotic Analysis* 1984: Springer-Verlag, N.Y.
- [2] Michael L. Gorodetsky, Aleksey E. Fomin *Geometrical Theory of Whispering Gallery Modes* 2005.
- [3] Christof Obertscheider *Burgers' Equation* 2001.
- [4] Richard Haberman *Applied Partial Differential Equations, with Fourier Series and Boundary Value Problems, Fourth Edition* 2005: Pearson Education.
- [5] John William Strutt, Baron Rayleigh *Theory of Sound, Volume 1 & 2* 1894: Macmillan and Co, London.
- [6] G. B. Whitham *Linear and Nonlinear Waves* 1974: John Wiley & Sons, Inc.
- [7] David Bilodeau *MATH 580, Final Project; Cole-Hopf Transformation*.
- [8] Carlos Arturo Vargas Guadarrama *Introducción al Método de Perturbación Singular* IIMAS FENOMECC, UNAM.
- [9] H. Moysés Nussenzveig *The Theory of the Rainbow* 1977: Scientific American, INC.
- [10] John A. Adam *The Mathematical Physics of Rainbows and Glories* 2002: PHYSICS REPORTS, Elsevier Science.
- [11] J. D. Jackson *From Alexander of Aphrodisias to Young and Airy* 1999: University of Berkeley, CA, USA.
- [12] Matjaz Gomilsek *Whispering Gallery Modes, Seminar* 2011: Department of Physics, University of Ljubljana
- [13] José Fernando Bustamante Castañeda *El límite semiclásico y el fenómeno de la galería de los susurros. Teoría analítica y asintótica* 2005: Facultad de Ciencias, UNAM.