UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EL ESPACIO DE LOS ESPACIOS DE BANACH SEPARABLES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

LUIS DAVID REYES SÁENZ

DIRECTORA DE TESIS:
DRA. CARMEN MARTÍNEZ ADAME ISAIS
Ciudad Universitaria, Ciudad de México, 2019

1. **Datos del alumno**
   Reyes
   Sáenz
   Luis David
   55 51 58 37 64
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Matemáticas
   309515755

2. **Datos de la tutora**
   Dra.
   Carmen
   Martínez Adame
   Isais

3. **Datos del sinodal 1**
   Dr.
   Ulises Ariet
   Ramos
   García

4. **Datos del sinodal 2**
   Dr.
   Francisco Javier
   Torres
   Ayala

5. **Datos del sinodal 3**
   Dr.
   David
   Meza
   Alcántara

6. **Datos del sinodal 4**
   Dra.
   Natalia
   Jonard
   Pérez

7. **Datos del trabajo escrito**
   El espacio de los espacios de Banach separables
   162 p.
   2019

Para Abel, por su ejemplo.

Índice general

Agradecimientos.

Cuando uno termina una tesis de licenciatura existe siempre un sentimiento de no pertenencia. La licenciatura cuya formación culmina con el trabajo, los conocimientos plasmados en él y el trabajo mismo no son el producto únicamente de quien imprime su nombre en la portada.

La posibilidad de estudiar en una institución de excelencia académica como la UNAM es consecuencia de la conjunción de muchos esfuerzos. Del esfuerzo familiar para permitir a los interesados ingresar a ella, del esfuerzo nacional para que la institución persista y del esfuerzo profesional de todos los alumnos, docentes, investigadores y trabajadores que le dan vida.

Por su parte, los conocimientos que la tesis contiene son consecuencia de los enormes esfuerzos de los docentes de la carrera, así como de innumerables encuentros entre amigos y maestros para profundizar en estos conocimientos.

Por último, el texto mismo que aquí se presenta ha sido revisado, corregido, ampliado e inspirado también por amigos y maestros.

Sería deshonesto no reconocer a todas las personas que han contribuido a que este trabajo pueda presentarse, pero también sería ingenuo pensar que es posible agradecerles en tan poco espacio. Por esta razón quisiera agradecerles en persona a todos aquellos que me han apoyado y dejar aquí constancia de que lo haré. Sin embargo, quisiera aprovechar para agradecer a los sinodales y a mi tutora su apoyo en las siguientes líneas.

Al Dr. Ariet Ramos quisiera agradecerle su entusiasmo por el tema y por las líneas de investigación que de él emanan, así como por recibirme tan acogedoramente en Morelia.

Al Dr. Francisco Torres también debo agradecerle su interés en el tema así como su amabilidad y su disponibilidad de tiempo para exponerle mis ideas.

A la Dra. Natalia Jonard le agradezco enormemente que haya revisado este trabajo con tanto detenimiento, así como sus atinadas sugerencias.

Al Dr. David Meza tengo mucho que agradecerle. Gracias por compartirme el gusto por la Teoría Descriptiva de Conjuntos a través de tres seminarios y por permitirme exponer parte del material del primer capítulo de este trabajo en uno de ellos. Gracias por revisar detenidamente borradores del segundo y tercer capítulos, así como por los importantes comentarios. Gracias por apoyarme.

A la Dra. Carmen Martínez Adame también le agradezco muchas cosas. Gracias por compartirme el gusto por el análisis funcional a través de tus cursos de Análisis y por la paciencia que le tuviste a tus grupos. Gracias por aceptar ser mi tutora y por concretar este proyecto que al inicio parecía imposible. Gracias por ayudarme y escucharme.

Cabe mencionar que esta investigación pudo ser realizadad gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM IN403816 *La compresión Matemática*. A quienes les agradezco la beca.

Por último, como siempre, gracias a Ramiro por acompañarme en mis largas noches de tecleado.

Introducción.

Las áreas del conocimiento que un estudiante de la licenciatura en matemáticas de la UNAM puede conocer no son escasas. La amplia oferta de materias permite que los estudiantes puedan conocer muchas facetas del campo del conocimiento que hoy conocemos con el nombre genérico de 'matemáticas' y eventualmente escoger el campo que sea de su mayor agrado. Sin embargo, la estructura que las materias tienen dentro del plan de estudios fomenta muy poco que los estudiantes puedan relacionar los conocimientos que adquieren en sus diversos cursos. A su vez, no es común encontrar profesores que enfaticen la relación entre las diversas áreas, lo cual puede llevar a la impresión de que lo único que nos permite englobarlas bajo un mismo campo del conocimiento es su metodología: definiciones abstractas y formales, y a partir de ellas un razonamiento lógico deductivo que culmina en afirmaciones generales.

Sin embargo, los vínculos entre las diversas áreas de las matemáticas están al descubierto. Es difícil no percatarse de que las construcciones abstractas de sumas directas, cocientes, acciones de grupo, teoría de módulos, etc., del álgebra son utilizadas en muchas otras ramas de las matemáticas. Tampoco es complicado percibir que la axiomatización de la teoría de conjuntos junto con el estudio de las operaciones conjuntistas básicas, la teoría de recursión y la teoría de órdenes tienen una inmensa aplicabilidad. Sólo por poner dos ejemplos de los muchos que existen.

El análisis matemático y más en particular el análisis funcional es un bello ejemplo (además de mi favorito) de un área que se presta a establecer conexiones con muchas otras. Es evidente que el análisis funcional, y aún más en específico la teoría de espacios de Banach, utiliza recurrentemente resultados de álgebra, en particular de álgebra lineal. Pero también recurre enormemente a la topología general, y por tanto, a la teoría de conjuntos. En agradecimiento los espacios de Banach nos ofrecen un conocimiento más profundo de los espacios de dimensión infinita estudiados en álgebra, así como de los espacios de funciones continuas de enorme importancia en la topología, junto con muchas otras aplicaciones.

Esto convierte a la teoría de espacios de Banach en un hermoso lugar para estudiar la interacción entre diversas áreas de las matemáticas. No es de sorprenderse que la historia de la teoría de estos espacios contribuya a explicar esta virtud. Podemos fechar el nacimiento de esta teoría aproximadamente en 1920, cuando Stefan Banach presenta su tesis doctoral. Las ideas de Cantor y Zermelo sobre la teoría de conjuntos estaban en el ambiente, así como la investigación en topología de Hausdorff y los trabajos en análisis de Baire, Borel y Lebesgue. Por su parte es a partir de la definición general ofrecida por Banach que el estudio de espacios vectoriales generales pudo cohesionar los resultados del álgebra lineal.

También es de particular interés para nuestro trabajo el desarrollo de una teoría que en el mismo período histórico y en el mismo país, Polonia, era de suma relevancia: la teoría descriptiva de conjuntos. Esta teoría tiene las mismas influencias que ya hemos mencionado para la teoría de espacios de Banach, pero surge de manera más temprana en los trabajos de Baire, Borel y Lebesgue. Su desarrollo fue continuado en Rusia por Lusin y Suslin a partir de una famosa escena en la que Suslin se percata de un error en un artículo de Lebesgue el cual dio lugar al estudio de los conjuntos analíticos. Otros importantes investigadores en esta área son los polacos Sierpiński, Kuratowski y Tarski, en honor a los cuales se nombro a los espacios polacos.

Los paralelismos entre estas dos teorías no se reducen a sus influencias y a su coincidencia histórica y geográfica. El punto de partida de ambas son los espacios completamente metrizables, aunque la primera teoría estudia adicionalmente la estructura de espacio vectorial, mientras que la segunda toma un enfoque más topológico al considerar la propiedad de separabilidad.

A partir de la reflexión planteada en los primeros párrafos de nuestra introducción. Nuestra intención es mostrar como partiendo de las herramientas que ofrece la teoría de espacios de Banach, y de los métodos y resultados de la teoría descriptiva de conjuntos, podemos construir un poderoso marco teórico que le haga justicia a la relación que ya de por sí existe entre ambas teorías.

El objetivo de la tesis es construir lo que llamamos **El espacio de Borel de los espacios de Banach separables**, estudiar sus principales propiedades y mostrar cómo su estudio ofrece profundos resultados.

Para poder realizar este objetivo lo primero que necesitamos es conocer las propiedades básicas de los espacios de Banach, los teoremas fundamentales de la teoría que los estudia y analizar algunas clases de espacios de Banach importantes, como los espacios separables, los espacios reflexivos y los espacios con bases de Schauder. Así como introducir las topologías débiles y los resultados que éstas ofrecen. Este desarrollo da lugar a nuestro primer capítulo.

También es necesario desarrollar la teoría que nos permitirá conocer nuestros objetos de estudio. Para esto se discuten los conceptos básicos con los que trabaja la teoría descriptiva. Por una parte, los espacios polacos junto con sus propiedades básicas así como su estrecha relación con los conjuntos G_δ, estos últimos sirven como introducción al concepto de conjunto de Borel y a la jerarquía de Borel. Por otra parte, estudiaremos el concepto de árbol, el cual resulta ser una herramienta sumamente versátil. Para ejemplificar la importancia de esta herramienta se demuestra un resultado referente a la cardinalidad de los espacios polacos, el cuál utiliza en su demostración esta herramienta. También se desarrollan algunos resultados sobre ciertas clases específicas de árboles que serán necesarios en el resto del trabajo. Esto constituye nuestro segundo capítulo.

Nuestro tercer capítulo profundiza en algunos temas de la teoría descriptiva. Por una parte se analizan los conjuntos analíticos los cuales son necesarios para estudiar el espacio que nos proponemos construir. Además se estudian los espacios de Baire, los cuales ofrecen resultados que permiten comprender el estrecho vínculo que existe entre la teoría de espacios de Banach y la teoría descriptiva. Por último, se introduce la estructura Effros-Borel, estructura indispensable para la construcción que buscamos.

En el último capítulo recopilamos la teoría desarrollada para construir el espacio de Borel de los espacios de Banach separables. Primero se muestra que, en un sentido informal, $\mathscr{C}(\mathcal{C})$ contiene a cualquier espacio de Banach separable como un subespacio. Posteriormente, a través de la estructura Effros-Borel, se le da una estructura de σ-álgebra al conjunto de subespacios cerrados de $\mathscr{C}(\mathcal{C})$. Esta construcción nos permite pensar a cualquier espacio de Banach como un punto de este espacio. De manera que, otra vez informalmente, se reduce toda la categoría de los espacios de Banach separables a un conjunto. Más aún, la σ-álgebra de este conjunto es tan similar a la topología de un espacio polaco, que podemos estudiarlo a través de las herramientas de la teoría descriptiva.

La tesis concluye exponiendo una aplicación de los resultados obtenidos sobre este espacio que permite responder a la pregunta 49 del *Libro Escocés*. El *Libro Escocés* es un famoso libro de problemas propuestos por un grupo de matemáticos polacos el cual frecuentaban varios de nuestros protagonistas: Banach, Mazur, Sierpiński, Kuratowski, entre otros. Sugiriendo que las coincidencias no existen, son las teorías desarrolladas por estos brillantes matemáticos polacos trabajando en coordinación las que nos permite solucionar la pregunta por ellos mismos planteada.

Capítulo 1

Teoría de espacios de Banach.

1.1. Espacios normados y espacios de Banach.

En este capítulo se desarrollará la teoría básica sobre los espacios de Banach necesaria para el resto del texto. Comenzamos así con algunas definiciones, y introducimos la notación pertinente. En este texto se trabajará únicamente con espacios vectoriales sobre el campo de los números reales o de los números complejos y se denotará con $\mathbb{F}$ z cualquiera de estos dos campos. Para denotar a un escalar en algunos de estos dos campos se utilizarán las primeras letras del alfabeto latino: $a, b, c \in \mathbb{F}$, excepto en el caso en el caso de que haya notación específica estándar como en los parámetros: t y s, o en el de radios de vecindades: ϵ y δ. Procedemos entonces con nuestra primera definición.

Definición 1.1. *Sea V un espacio vectorial real o complejo, decimos que V es un espacio normado si está equipado con una función norma*

$$||.||: V \to \mathbb{R}$$

donde denotamos a $||.||(v)$ por $||v||$.

Esta función cumple con las siguientes propiedades:

(a) Para cada $v \in V$, $||v|| \geq 0$.

(b) Para cada $v \in V$, $||v|| = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

(c) Para cada $v \in V$ y para cada $a \in \mathbb{F}$, $||av|| = |a|||v||$.

(d) Para cada $v, w \in V$, $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$.

Una noción relacionada a la de espacio vectorial normado es la de espacio métrico.

Definición 1.2. *Sea X un conjunto, decimos que X es un espacio métrico si está equipado con una función métrica*

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

donde denotamos a $d((x, y))$ por $d(x, y)$.

Esta función cumple con las siguientes propiedades:

(a) Para cada $x, y \in X$, $d(x, y) \geq 0$.

(b) Para cada $x, y \in X$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

(c) Para cada $x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$.

(d) Para cada $x, y, z \in X$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Si además cada sucesión de Cauchy según la métrica d es una sucesión convergente con esta métrica, decimos que d es una métrica completa y (X, d) es un espacio métrico completo.

Es fácil ver que cualquier norma induce una métrica d en el espacio V en el que está definida, de la siguiente manera:

$$d : V \times V \to \mathbb{R}$$

$$d(v, w) = ||v - w||.$$

Así, un espacio normado es un espacio que tiene tanto estructura de espacio vectorial como estructura de espacio métrico, y ambas estructuras se respetan entre sí.

Algunos ejemplos clásicos de espacios normados son:

(a) $\mathbb{F}$, $\mathbb{F}^n$, utilizando las operaciones y la norma usual.

(b) $\mathscr{C}[a, b]$, el conjunto de funciones continuas del intervalo $[a, b]$ en $\mathbb{R}$ con las operaciones usuales y la norma $||f|| = \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$.

(c) ℓ^∞, el conjunto de las sucesiones reales o complejas acotadas, utilizando las operaciones usuales y la norma $||(x_n)_{n\in\mathbb{N}}|| = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$.

(d) ℓ^p, $p \in (0, \infty)$ el conjunto de las sucesiones reales o complejas tales que la serie formada por la p-ésima potencia de sus elementos converge, utilizando las operaciones usuales y la norma $||(x_n)_{n\in\mathbb{N}}|| = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p}$.

Definición 1.3. *Un espacio de Banach es un espacio vectorial normado donde la métrica inducida por su norma es una métrica completa.*

A lo largo de este capítulo denotaremos a los espacios de Banach con las letras X, Y, Z y a sus elementos por las respectivas letras minúsculas: $x, y, z \in X$. Mientras que se reservarán las letras V y W para espacios vectoriales normados, así como sus respectivas minúsculas para elementos de los mismos.

Todos los ejemplos mencionados arriba de espacios normados son también espacios de Banach, aunque en general no todo espacio normado es un espacio de Banach, tal y como el conjunto $\mathbb{Q}$ con la estructura de espacio vectorial sobre sí mismo ilustra.

Una tercera noción relacionada con las dos anteriores es la de espacio topológico.

Definición 1.4. *Sean X un conjunto y $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$, decimos que τ es una topología para X si se cumplen las siguientes propiedades:*
(a) $\varnothing, X \in \tau$.
(b) Si $A_1, A_2 \in \tau$ entonces $A_1 \cap A_2 \in \tau$.
(c) Si $\{A_i : i \in I\} \subseteq \tau$ para algún conjunto de índices I, entonces $\bigcup\limits_{i \in I} A_i \in \tau$.
Si τ es una topología para X decimos que (X, τ) es un espacio topológico.

Todo espacio métrico es un espacio topológico cuya base es el conjunto de bolas abiertas con radio arbitrario y centro en cualquier elemento del espacio:

$$B_r(x) = \{y \in V : d(x, y) < r\}.$$

En los espacios normados la topología generada por estas bolas es llamada la topología de la norma. Denotaremos por B_V a la bola unitaria del espacio V, es decir,

$$B_V = \{v \in V : ||v|| \leq 1\}$$

y por S_V a su frontera.

Proposición 1.5. *Sea V un espacio normado.*
(a) La operación suma $+ : V \times V \to V$ es continua.
(b) La operación producto de vectores por escalares $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$ es continua.

Corolario 1.6. *Sea V un espacio normado. Las operaciones de suma con un vector fijo y producto por un escalar fijo son homeomorfismos, es decir:*
(a) Para cada $v \in V$, $+_v : V \to V$ definida como $+_v(w) = v + w$ es un homeomorfismo.
(b) Para cada $a \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, $\cdot_a : V \to V$ definida como $\cdot_a(w) = aw$ es un homeomorfismo.

La demostración de esta proposición es evidente a partir de las propiedades (c) y (d) de la definición de espacio normado. La demostración del corolario es inmediata observando que las funciones $+_{-v}$ y $\cdot_{a^{-1}}$ son las funciones inversas de $+_v$ y $\cdot_a$ respectivamente, y por la proposición 1.5 son continuas.

Hasta este momento sólo hemos introducido las propiedades básicas que relacionan las estructuras de espacio vectorial, espacio métrico y espacio topológico. Durante el resto del texto seguiremos explorando la relación entre estos tres tipos de estructura y algunas estructuras adicionales que incorporaremos más adelante como las σ-álgebras. Sin embargo, aún no hemos encontrado alguna propiedad, más allá de su definición, que haga particulares a los espacios de Banach.

En lo que sigue vamos a estudiar con detenimiento estos espacios a través de distintos tipos de sucesiones. Es decir, funciones que tienen como dominio al conjunto de los naturales, con respecto a este conjunto establecemos la siguiente notación:

$$\omega = \{\alpha : \alpha \text{ es un ordinal finito}\} = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\} = \omega \setminus \{0\}.$$

Para estudiar las propiedades propias de los espacios de Banach vamos a comenzar estudiando las propiedades de los espacios métricos completos. Una útil caracterización de éstos se puede dar a partir de los siguientes conceptos.

Definición 1.7. *Sea (X, d) un espacio métrico, definimos la función* $\operatorname{diam} : \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$*, el diámetro de cualquier subconjunto, como*

$$\operatorname{diam}(B) = \sup\{d(x, y) : x, y \in B\}$$

si $B \neq \varnothing$. En el caso en que $B = \varnothing$, establecemos que $\operatorname{diam}(B) = 0$.

Además, si $\{B_n \subseteq X : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de conjuntos que satisface que

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(B_n) = 0,$$

decimos que la familia tiene diámetro desvanescente.

Teorema 1.8. *Sea X un espacio métrico. X es completo si y sólo si cualquier familia $\{B_n \subseteq X : n \in \mathbb{N}\}$ de diámetro desvaneciente de conjuntos cerrados no vacíos anidados tiene intersección no vacía.*

Demostración. Sea X un espacio métrico completo y $\{B_n \subseteq X : n \in \mathbb{N}\}$ un sucesión de diámetro desvaneciente que satisface que para cada $n \in \mathbb{N}$, B_n es cerrado no vacío y $B_{n+1} \subseteq B_n$. Como cada B_n es no vacío podemos construir una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in B_n$. Es claro que si $k \in \mathbb{N}$ y $n \geq k$ entonces $x_k \in B_k \subseteq B_n$.

Veamos que esta sucesión es de Cauchy. Consideremos una $\epsilon > 0$, como $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(B_n) = 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, $\operatorname{diam}(B_n) < \epsilon$. Si $n, m \geq N$, como $x_n, x_m \in B_N$ entonces $d(x_n, x_m) < \epsilon$. Esto demuestra que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, y como X es un espacio métrico completo existe $x \in X$ tal que $x_n \longrightarrow x$.

Sea $k \in \mathbb{N}$, entonces la subsucesión $(x_{n+k})_{n\in\mathbb{N}}$ está contenida en B_k y al ser subsucesión también converge a x. Como B_k es cerrado entonces $x \in B_k$. Esto demuestra que $x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_k$, por lo que esta intersección es no vacía.

Sea (X, d) un espacio métrico y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy. Definimos para cada $m \in \mathbb{N}$, $A_m = \{x_n : n \geq m\}$ y $B_m = \operatorname{cl}(A_m)$. Veamos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{diam}(A_n) = \operatorname{diam}(B_n)$. Sea $y \in B_n$ y $\epsilon > 0$, entonces existe $y' \in A_n \cap B_\epsilon(y)$, es decir $d(y, y') < \epsilon$ y $y' \in A_n$. Esto muestra que para cualesquiera $y, z \in B_n$, $d(y, z) \leq d(y, y') + d(y', z') + d(z', z) < \epsilon + \operatorname{diam}(A_n) + \epsilon$. Por lo que $\operatorname{diam}(B_n) \leq \operatorname{diam}(A_n)$. La desigualdad $\operatorname{diam}(A_n) \leq \operatorname{diam}(B_n)$ es clara pues $A_n \subseteq B_n$. Esto demuestra la igualdad.

Veamos además que $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(A_n) = 0$. Sea $\epsilon' > 0$, como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N$ entonces $d(x_n, x_m) < \epsilon'/2$, esto muestra que $\operatorname{diam}(A_n) \leq \epsilon'/2 < \epsilon'$.

Por hipótesis esto implica que $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_k$ es no vacío, sea $x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_k$ y veamos que $x_n \longrightarrow x$. Sea $\epsilon'' > 0$ y $M \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{diam}(B_M) < \epsilon''$, como $x \in B_M$ y $A_M \subseteq B_M$ esto implica que para cualquier $n \geq M$, $d(x_n, x) < \epsilon''$. □

La siguiente parte de esta sección introductoria está dedicada a mostrar un resultado específico de los espacios de Banach y que es la clave para una buena parte de su teoría.

Primero necesitamos establecer la notación que utilizaremos. Sean $A, B \subseteq V$, $C \subseteq \mathbb{F}$ y $c \in \mathbb{F}$, definimos los conjuntos

$$cA = \{cv : v \in A\}$$

$$C \cdot A = \{cv : c \in C, v \in A\}$$

$$A + B = \{v + w : v \in A\, y\, w \in B\}$$

$$-A = \{-x : x \in A\}.$$

Además necesitamos la siguiente definición:

Definición 1.9. *Sea V un espacio vectorial.*

(a) $A \subseteq V$ es convexo si para cada $v, w \in V$ y para cada $t \in [0, 1]$ tenemos que $(tv + (1 - t)w) \in A$.

(b) $A \subseteq V$ es absorbente si para cada $v \in V$ existe $s_v > 0$ tal que para toda $t < s_v$ se satisface que $v \in tA$.

Ejemplos inmediatos de conjuntos convexos son los subespacios vectoriales de cualquier espacio vectorial y las bolas de radio arbitrario centradas en cualquier punto. Por otra parte, es sencillo mostrar que toda vecindad del origen es un conjunto absorbente. Las siguientes son propiedades básicas de las nociones que acabamos de introducir y las enunciamos sin prueba.

Proposición 1.10. *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$.*

(a) $A \subseteq V$ es convexo si y sólo si para cualquier $t, s > 0$ se tiene que $tA + sA = A$.

(b) Si $B \subseteq A$, entonces para cada $a \in \mathbb{F}$ se cumple que $aB \subseteq aA$.

(c) Si $A \subseteq V$ es convexo entonces $-A$ es convexo.

(d) Si $\mathscr{A}$ es una familia de subconjuntos convexos de V entonces $\bigcap \mathscr{A}$ es convexo.

(e) Si A, B, C, D son subconjuntos de V tales que $A \subseteq C$ y $B \subseteq D$ entonces $A + B \subseteq C + D$.

(f) Si $A, B \subseteq V$, A es absorbente y $A \subseteq B$, entonces B es absorbente.

(g) Si V es un espacio normado y $A \subseteq V$ es convexo, entonces $\mathrm{cl}(A)$ es convexo.

Teorema 1.11. *Sea X un espacio de Banach y sea $A \subseteq X$ convexo, absorbente y cerrado, entonces A es vecindad del origen.*

Demostración. Sean X y A como en las hipótesis. Consideremos $B = A \cap -A$. Sabemos entonces que B es convexo y $B = -B$. Como $B \subseteq A$ es suficiente mostrar que B es vecindad de 0.

Dado que A y $-A$ son absorbentes, entonces B es absorbente por lo que B es no vacío. Veamos que $\mathrm{int}(B) \neq \varnothing$, supongamos lo contrario, esto nos permite construir recursivamente una sucesión de la siguiente manera: Como B es cerrado y tiene interior vacío entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, nB es un cerrado de interior vació por lo que $X \setminus nB$ es abierto y denso. Siendo así sea C_1 una bola cerrada de radio menor o igual a 1 contenida en $X \setminus B$. Sea $n \in \mathbb{N}$, supongamos que existen $C_1, \ldots, C_n$ bolas cerradas tales que para $i \in \{1, \ldots, n\}$, C_i es de radio menor o igual a $\frac{1}{i}$, si $i \leq j$ entonces $C_j \subseteq C_i$ y que $C_i \subseteq X \setminus iB$. Como $X \setminus (n+1)B$ es un conjunto abierto y denso entonces $(X \setminus (n+1)B) \cap \mathrm{int}(C_n)$ es un abierto no vacío, por lo que podemos encontrar una bola cerrada C_{n+1} contenida en este conjunto de radio menor o igual a $\frac{1}{n+1}$.

Tenemos entonces una sucesión de bolas cerradas anidadas no vacías de diámetro desvaneciente, como X es de Banach por el teorema 1.8, existe

$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$ luego para cada $n \in N$ $x \notin nB$ lo que es una clara contradicción con el hecho de que B es absorbente. Por tanto $\mathrm{int}(B) \neq \varnothing$. Por último,

$$0 \in \frac{1}{2}\,\mathrm{int}\,(B) + \frac{1}{2}\,(-\,\mathrm{int}\,(B)) \subseteq \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}\,(-B) = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}B = B$$

de donde $\frac{1}{2}\,\mathrm{int}\,(B)+\frac{1}{2}\,(-\,\mathrm{int}\,(B))$ es una vecindad del origen contenida en B. $\square$

La última parte de esta sección presenta la notación y las herramientas necesarias para dar una caracterización de los espacios de Banach en términos de series.

El siguiente resultado resume algunas propiedades básicas de las series:

Proposición 1.12. *Sean V y W espacios normados. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:*

(a) Si $\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es una serie convergente en V entonces $v_n \longrightarrow 0$.

(b) Si $\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ y $\left(\sum_{i=1}^{n} w_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ son series convergentes en V entonces $\left(\sum_{i=1}^{n}(v_i + w_i)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ también es convergente y $\sum_{i=1}^{\infty}(x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i + \sum_{i=1}^{\infty} y_i$.

(c) Si $\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente en V y $a \in \mathbb{F}$, entonces $\left(\sum_{i=1}^{n} av_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y $\sum_{i=1}^{\infty} av_i = a\sum_{i=1}^{\infty} v_i$.

(d) Si $\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente en V y $T : V \to W$ es un operador lineal y continuo, entonces $(\sum_{i=1}^{n} T(v_i))_{n\in\mathbb{N}}$ converge y $(\sum_{i=1}^{\infty} T(v_i)) = T(\sum_{i=1}^{\infty}(v_i))$.

(e) Si $\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es una serie convergente, entonces $||\sum_{i=1}^{\infty} v_i|| \leq \sum_{i=1}^{\infty}||v_i||$.

Es importante observar que el converso de (a) es falso y que en (e) no necesariamente $(\sum_{i=1}^{n}||v_i||)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

Como se adelantó, los espacios de Banach permiten una rica teoría sobre la series centrada principalmente en el siguiente concepto:

Definición 1.13. *Sea V un espacio normado, una serie $\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es absolutamente convergente si $\left(\sum_{i=1}^{n}||v_i||\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*

Teorema 1.14. *Sea V un espacio normado. V es un espacio de Banach si y sólo si toda serie absolutamente convergente converge.*

Demostración. Sea V un espacio normado

Supongamos que V es de Banach. Sea $\epsilon > 0$ y sea $\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ una serie absolutamente convergente, luego la serie de sus normas es de Cauchy por lo que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n, m \geq N$

$$\left|\sum_{i=1}^{m}||v_i|| - \sum_{i=1}^{n}||v_i||\right| < \epsilon$$

pero entonces suponiendo, sin pérdida de generalidad, que $n \leq m$

$$\left|\left|\sum_{i=1}^{m} v_i - \sum_{i=1}^{n} v_i\right|\right| = \left|\left|\sum_{i=n+1}^{m} v_i\right|\right| \leq \sum_{i=n+1}^{m} ||v_i|| = \sum_{i=1}^{m} ||v_i|| - \sum_{i=1}^{n} ||v_i|| < \epsilon$$

de donde la sucesión de sumas parciales es de Cauchy y como V es de Banach, converge.

Supongamos ahora, para demostrar por contrapositiva, que V no es de Banach, sea entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en V que no converge. Por ser de Cauchy podemos encontrar para toda $i \in \mathbb{N}$ un natural n_i tal que para cada $n, m \geq n_i$, $||x_n - x_m|| < 2^{-i}$, refinando de ser necesario podemos suponer que para cada $i \in \mathbb{N}$ $n_i < n_{i+1}$, como la sucesión es de Cauchy y no es convergente, esta subsucesión tampoco puede ser convergente. Consideremos ahora la serie $\left(\sum_{i=1}^{m}\left(x_{n_{i+1}} - x_{n_i}\right)\right)_{m\in\mathbb{N}}$ como para cada $m \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^{m}(x_{n_{i+1}} - x_{n_i}) = x_{n_{m+1}} - x_{n_1}$ la serie no puede converger, sin embargo es absolutamente convergente pues $\sum_{i=1}^{\infty}||x_{n_{i+1}} - x_{n_i}|| < \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} = 1$. □

1.2. Operadores lineales entre espacios normados.

Es una práctica común en matemáticas que una vez definida una estructura, ésta se estudie a través de las funciones que la preservan. Las funciones que preservan la estructura de espacio vectorial son llamadas transformaciones lineales, como en este caso tenemos más estructuras que la de espacio vectorial, quisiéramos que nuestras funciones fueran transformaciones lineales y además tuvieran otra propiedad, por ejemplo, la de ser continuas.

Sin embargo, como ya se habrá experimentado, en muchas ocasiones demostrar la continuidad de una función no es tarea sencilla. En su lugar en el contexto de espacios normados se definen los operadores acotados cuya definición resulta ser equivalente a la de transformación lineal y continua. La clave se encuentra en apreciar que la noción usual de función acotada no resulta apropiada en este contexto pues la única transformación lineal que es una función acotada es la transformación cero: supongamos que T es una transformación lineal entre dos espacios normados, si no fuera la transformación cero entonces existiría $v \in V$, tal que $||T(v)|| \neq 0$ luego para cualquier real positivo r

$$\left|\left|T\left(\frac{r+1}{||T(v)||}v\right)\right|\right| = |r+1|\frac{||T(v)||}{||T(v)||} > r$$

por lo que T no puede ser una función acotada. Por esta razón nuestra definición es distinta.

Definición 1.15. *Sean V y W espacios normados, decimos que un operador lineal T es un operador acotado de V en W si la imagen de conjuntos acotados es acotada, es decir, si para cada $B \subseteq V$ acotado, $T[B]$ es acotado.*

Denotamos al conjunto de todos los operadores acotados de V en W por $\mathscr{B}(V,W)$ y si $V = W$ simplemente por $\mathscr{B}(V)$.

También para simplificar la notación escribimos Tx en lugar de $T(x)$. El siguiente resultado, cuya demostración puede ser consultada en [Meg98] (p. 25), muestra la relevancia de este concepto en este contexto.

Teorema 1.16. *Sean V y W espacios normados y $T : V \to W$ un operador lineal. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

(a) T es un operador acotado.

(b) T es continuo.

(c) T es continuo en 0.

(d) T es continuo en algún punto $v \in V$.

(e) T es uniformemente continuo.

(f) Para alguna vencindad U de 0, $T[U]$ es acotado en W.

(g) Existe un número real no negativo M tal que para toda $v \in V$ se cumple que $||Tv|| \leq M||v||$.

(h) $\sup\{||Tv||: v \in B_V\}$ es finito.

Un ejemplo inmediato de un operador acotado surge al considerar $V = W$ y para cualquier $a \in \mathbb{F}$, el operador $Tv = av$.

Se sabe que el conjunto de todas las transformaciones lineales entre dos espacios puede ser dotado de estructura de espacio vectorial. Con esta estructura es sencillo mostrar que el conjunto de operadores acotados es un subespacio vectorial. Otra propiedad sumamente importante de este conjunto es que puede ser dotado de estructura de espacio normado de la siguiente manera:

Proposición 1.17. *Sean V y W dos espacios normados. La función $||\cdot||: \mathscr{B}(V,W) \to \mathbb{R}$ definida como*

$$||T|| = \sup\{||Tv||: v \in B_V\}$$

es una norma en $\mathscr{B}(V,W)$. Además se satisface que

$$\begin{aligned} \inf\{M \geq 0 : \forall v \in V\ (||Tv|| \leq M||v||)\} &= \sup\{||Tv||: v \in B_V\} \\ &= \sup\{||Tv||: v \in S_V\} = \sup\left\{\frac{||Tv||}{||v||} : v \in V \setminus \{0\}\right\} \end{aligned}$$

Esta función sólo está bien definida para los operadores acotados según afirma el inciso (g) del teorema 1.16.

Teorema 1.18. *Sean V y W espacios normados. Si W es un espacio de Banach, entonces $\mathscr{B}(V, W)$ también lo es.*

El anterior teorema nos da una descripción del comportamiento de la norma de los operadores con respecto a la suma y el producto por un escalar, el siguiente resultado describe el comportamiento de la norma con respecto a la composición de operadores.

Teorema 1.19. *Sean V_1, V_2 y V_3 espacios vectoriales normados, $T_1 : V_1 \to V_2$ y $T_2 : V_2 \to V_3$ operadores normados acotados entonces $T_2 \circ T_1$ es acotado y $||T_2 \circ T_1|| \leq ||T_2||||T_1||$.*

Demostración. Sean V_1, V_2, V_3, T_1 y T_2 como en las hipótesis. Sea $v \in V_1$ entonces

$$||(T_2 \circ T_1)(v)|| = ||T_2\big(T_1(v)\big)|| \leq ||T_2||||T_1(v)|| \leq ||T_2||||T_1||||v||$$

lo que demuestra el resultado. □

Es común en matemáticas que posterior a introducir las funciones que preservan la estructura bajo estudio, se le otorgue un nombre especial a aquellas funciones que tienen alguna propiedad adicional, en particular las funciones que tienen una función inversa que también preserva la estructura son muy estudiadas y regularmente reciben el nombre de isomorfismos, en este texto preferimos utilizar este nombre en general para los operadores acotados inyectivos. La siguiente definición deja en claro cómo se utilizarán los nombres:

Definición 1.20. *Sean V y W espacios normados y $T : V \to W$ un operador acotado.*

(a) T es un isomorfismo o isomorfismo de espacios normados si es inyectivo y su inverso definido de $T[V]$ en V es continuo en su dominio.

(b) T es una isometría lineal o isomorfismo isométrico si para toda $v \in V$, $||Tv|| = ||v||$.

(c) Decimos que V es isomorfo a W si existe un isomorfismo suprayectivo U de V en W. Decimos que V y W son isométricamente isomorfos si U es isomorfismo isométrico suprayectivo.

Finalmente, denotamos el hecho de que V sea isomorfo a W por $V \cong W$.

El siguiente resultado muestra una evidente relación entre los conceptos previamente definidos junto con una manera útil de asegurar que un espacio es de Banach.

Teorema 1.21. *Sean V y W espacios normados y $T : V \to W$ un operador acotado.*

(a) Si T es un isomorfismo isométrico entonces T es un isomorfismo.

(b) Si V es de Banach y T es un isomorfismo, entonces $T[V]$ es de Banach.

1.3. Tres teoremas fundamentales.

Esta sección está dedicada a demostrar tres teoremas básicos en el estudio de los espacios de Banach. Para poder demostrarlos necesitamos un lema el cual requiere a su vez un poco de trabajo previo.

Definición 1.22. *Sea V un espacio vectorial. Una seminorma es una función $p : V \to \mathbb{R}$ que satisface las siguientes condiciones:*

(1) Para cada $v \in V$ y cada $a \in \mathbb{F}$, $p(av) = |a|p(v)$.

(2) Para cualquier $v, w \in V$, $p(v + w) \leq p(v) + p(w)$.

Es sencillo mostrar que una seminorma sólo toma valores no negativos pues tenemos que $p(0) = p(0 \cdot 0) = 0p(0) = 0$ y además $p(0) = p(x - x) \leq p(x) + p(-x) = 2p(x)$. De donde se sigue que la única propiedad que diferencia a las normas de las seminormas es que las segundas sí pueden tomar el valor cero en un vector distinto del origen. En términos de la topología que generan esto significa que las vecindades del origen pueden ser extremadamente grandes pues todos los puntos de norma cero, los cuales definen evidentemente un subespacio, quedan contenidos en cualquiera de ellas.

Necesitamos también la siguiente definición:

Definición 1.23. *Sean V un espacio normado y f una función de V en los reales no negativos. Decimos que f es numerablemente subaditiva si para toda serie $\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente en V tenemos que $f\left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(v_n)$.*

Proposición 1.24. *Sea V un espacio normado y p una seminorma sobre él, si p es continua entonces es numerablemente subaditiva.*

Demostración. Sean V y p como en las hipótesis. Consideremos $\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ una serie convergente y $m \in \mathbb{N}$, por las propiedades de seminorma tenemos

$p\left(\sum_{n=1}^{m} v_n\right) \leq \sum_{n=1}^{m} p\left(v_n\right)$, pero las seminormas sólo toman valores no negativos de donde $p\left(\sum_{n=1}^{m} v_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} p(v_n)$. Como m es un natural arbitrario, todos los elementos de la serie están acotados por lo que $p\left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} p\left(v_n\right)$ utilizando la continuidad de p. □

El resultado converso, que es el lema que necesitamos, tiene una prueba más laboriosa y una hipótesis adicional.

Lema 1.25 (Lema de Zabreiko)**.** *Sean X un espacio de Banach y p una seminorma numerablemente subaditiva sobre él, entonces p es continua.*

Demostración. Sean X y p como en las hipótesis. Nuestro objetivo principal es mostrar que p es continua en 0 y para esto definimos el conjunto $G = \{x \in X : p(x) < 1\}$. El primer paso es mostrar que G es absorbente y convexo. Sea $t > 0$ entonces $tG = \{x \in X : p(x) < t\}$ utilizando las propiedades de la seminorma. Luego para cada $x \in X$, $p(x) < t$ implica que $x \in tG$ por lo que G es absorbente. Consideremos ahora $x, y \in G$ y $t \in [0, 1]$ entonces

$$p(tx + (1-t)y) \leq tp(x) + (1-t)p(y) < t + (1-t) = 1$$

de donde G es convexo. Por tanto $\mathrm{cl}(G)$ es cerrado, absorbente y convexo. Luego por el teorema 1.11 existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(0) \subseteq \mathrm{cl}(G)$.

El siguiente paso es mostrar que existe $s > 0$ tal que para cada $x \in X$, $||x||< \epsilon$ implica que $p(x) < s$. Sea $x \in X$ tal que $||x||< \epsilon$, vamos a definir por recursión una sucesión tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in 2^{-n+1}G$ y $||x - \sum_{j=1}^{n} x_j||< 2^{-n}\epsilon$.

Como $x \in B_\epsilon(0) \subseteq \mathrm{cl}(G)$ entonces existe $x_1 \in G$ tal que $||x - x_1||< 2^{-1}\epsilon$. Supongamos definido el punto x_m con las propiedades mencionadas, como $||x - \sum_{j=1}^{m} x_j||< 2^{-m}\epsilon$ entonces $(x - \sum_{j=1}^{m} x_j) \in 2^{-m}B_\epsilon(0) \subseteq 2^{-m}\,\mathrm{cl}(G) = \mathrm{cl}(2^{-m}G)$, luego existe $x_{m+1} \in 2^{-(m+1)+1}G$ tal que $||x - \sum_{j=1}^{m+1} x_j||< 2^{-(m+1)}\epsilon$.

Tenemos entonces que para cada $n \in \mathbb{N}$, $p(x_n) < 2^{-n+1}$ y $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ por lo que $p(x) = p\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} p\left(x_n\right) < \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n+1} = 2$ de aquí que $s = 2$ funcione.

Esto muestra que p es continua en 0 ya que si $t > 0$ y $||x||< \epsilon\frac{t}{s}$ entonces $||\frac{s}{t}x||< \epsilon$ por lo que $p(x) < t$. Ahora observemos que si $x, y \in X$ entonces $p(x) - p(y) \leq p(x - y)$ y $p(y) - p(x) \leq p(x - y)$. Luego $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$ lo que claramente implica que $|p(x) - p(y)| \leq |p(x - y) - p(0)|$ de donde la continuidad en cualquier punto $x \in X$ es inmediata. □

Con este resultado podemos demostrar el primero de los teoremas fundamentales, sólo nos falta definir el concepto central del resultado.

Definición 1.26. *Sean X y Y espacios topológicos, $f : X \to Y$ es una función abierta si para cualquier $U \subseteq X$ abierto en X, $f[U] \subseteq Y$ es abierto en Y.*

Teorema 1.27 (Teorema del mapeo abierto)**.** *Sean X, Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ un operador lineal acotado y suprayectivo. Entonces T es una función abierta.*

Demostración. Sean X, Y y T como en las hipótesis. Demostremos primero que $T[\text{int}(B_X)]$ es abierto. Comenzamos definiendo $p(y) = \text{ínf}\{||x||: x \in X, Tx = y\}$ para cada $y \in Y$, quisiéramos mostrar que esta función cumple las hipótesis del lema de Zabreiko. Si $y \in Y$ y $a \in \mathbb{F}\backslash\{0\}$, entonces

$$p(ay) = \text{ínf}\{||x||: x \in X, Tx = ay\} = \text{ínf}\{||ax||: x \in X, Tx = y\}$$

$$= |a| \cdot \text{ínf}\{||x||: x \in X, Tx = y\} = |a|p(y).$$

En el caso en que $a = 0$, la ecuación es trivial: $p(0y) = 0 = 0p(y)$. Esto prueba que p cumple la primera propiedad de la seminorma. Supongamos ahora que $\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es una serie convergente. Si $\sum_{n=1}^{\infty} p(y_n)$ diverge a infinito la subaditividad numerable de p sería trivial, supongamos entonces que esta cantidad es finita.

Sea $\epsilon > 0$ podemos encontrar una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $Tx_n = y_n$ y $||x_n||< p(y_n) + 2^{-n}\epsilon$, de donde $\sum_{n=1}^{\infty}||x_n||\leq \sum_{n=1}^{\infty} p(y_n) + \epsilon$ por lo que la serie converge absolutamente.

Como X es de Banach, $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge y $T\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} Tx_n = \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ por lo que $p\left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n\right) \leq ||\sum_{n=1}^{\infty} x_n||\leq \sum_{n=1}^{\infty}||x_n||\leq \sum_{n=1}^{\infty} p(y_n) + \epsilon$. Como ϵ era arbitrario tenemos $p\left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} p\left(y_n\right)$.

Esto muestra la subaditividad de p. Si consideramos $y_1, y_2 \in Y$ podemos construir la sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que satisface para cada $n \geq 3$, $y_n = 0$ entonces por lo demostrado previamente sabemos que $p(y_1 + y_2) \leq p(y_1) + p(y_2)$ lo que demuestra la segunda propiedad de la seminorma. Habiendo verificado las hipótesis, p es continua por el lema de Zabreiko. Al tener la igualdad $T[\text{int}(B_X)] = \{y \in Y : p(y) < 1\}$, sabemos entonces que $T[U]$ es abierto en Y.

Para el caso general sea U un abierto no vacío en X y $x \in U$, luego existe $\delta > 0$ tal que $x + \delta\,\text{int}(B_X) \subseteq U$ de manera que $Tx + \delta T[\text{int}(B_x)] \subseteq T[U]$ por lo que $T[U]$ es abierto. □

Corolario 1.28 (Teorema del mapeo inverso)**.** *Sean X, Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ un operador lineal acotado y biyectivo, entonces T es un isomorfismo suprayectivo.*

Sea $\mathscr{T}$ una familia de operadores entre dos espacios normados V y W. Decimos que $\mathscr{T}$ es acotada puntualmente si para cada $v \in V$, el conjunto $\{Tv : T \in \mathscr{T}\}$ es acotado. Decimos que $\mathscr{T}$ es uniformemente acotada si para todo $B \subseteq V$ acotado $\bigcup\limits_{T \in \mathscr{T}} T[B]$ es acotado. Es claro que una familia puntualmente acotada no necesariamente es uniformemente acotada pues si T es un operador no acotado, entonces el conjunto $\{T\}$ es puntualmente acotado pero no lo es uniformemente. Naturalmente uno puede preguntarse qué hipótesis son suficientes para que esta implicación sea válida. El siguiente resultado, que es una aplicación directa del lema de Zabreiko, afirma que es suficiente suponer que cada operador de la familia es acotado y que todos tienen como dominio el mismo espacio de Banach.

Teorema 1.29 (Principio de acotamiento uniforme)**.** *Sean X un espacio de Banach, V un espacio normado y $\mathscr{T}$ una familia no vacía de operadores acotados de X en V, si para toda $x \in X$* $\sup\{||Tx||: T \in \mathscr{T}\}$ *es finito, entonces* $\sup\{||T||: T \in \mathscr{T}\}$ *es finito.*

Demostración. Sean X, V y $\mathscr{T}$ como en las hipótesis. Supongamos que para toda $x \in X$, $\sup\{||Tx||: T \in \mathscr{T}\}$ es finito, entonces podemos definir $p : X \to \mathbb{R}$ como $p(x) = \sup\{||Tx||: T \in \mathscr{T}\}$. Obsérvese que si $a \in \mathbb{F}$ y $x \in X$, tenemos $p(ax) = \sup\{||T(ax)||: T \in \mathscr{T}\} = \sup\{|a|||Tx||: T \in \mathscr{T}\} = |a| \sup\{||Tx||: T \in \mathscr{T}\} = |a|p(x)$.

Consideremos $T \in \mathscr{T}$ y $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ una serie convergente en X, entonces $||T\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i\right)||= ||\sum_{i=1}^{\infty} (Tx_i)||\leq \sum_{i=1}^{\infty}||(Tx_i)||\leq \sum_{i=1}^{\infty} p\left(x_i\right)$ y esto implica que $p\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} p\left(x_i\right)$. De nuevo, considerando una sucesión tal que para toda $n \geq 3$, $x_n = 0$ tenemos que $p(x_1 + x_2) \leq p(x_1) + p(x_2)$. Esto muestra que p cumple con las hipótesis del lema de Zabreiko por lo que es continua.

Sea $\epsilon = 1$ entonces existe $\delta > 0$ tal que para toda $x \in X$ $||x||< \delta$ implica que $p(x) < 1$ por lo que si $x \in B_X$ entonces $p(x) < 1/\delta$, esto significa que para toda $T \in \mathscr{T}$ y para toda $x \in B_X$, $||Tx||< 1/\delta$ lo que permite concluir que para toda $T \in \mathscr{T}$ se cumple que $||T||< 1/\delta$. $\square$

El último teorema fundamental es el siguiente:

Teorema 1.30 (Teorema de la gráfica cerrada)**.** *Sean X, Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ un operador lineal con la siguiente propiedad:*

Toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X que satisface que:

(1) existe $x \in X$ tal que $x_n \to x$, y

(2) existe $y \in Y$ tal que $Tx_n \to y$

permite concluir que $Tx = y$. Entonces T es acotado.

Demostración. Sean X, Y y T como en las hipótesis. Sea $p : X \to \mathbb{R}$ definida por $p(x) = ||Tx||$, es claro que p es una seminorma. Sea $(\sum_{i=1}^{n} x_i)_{n\in\mathbb{N}}$ una serie convergente en X, si $\sum_{i=1}^{\infty}||Tx_i||$ converge, como Y es de Banach entonces $(\sum_{i=1}^{n} Tx_i)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Es claro que

(1) $\sum_{i=1}^{n} x_i \longrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ y

(2) $\sum_{i=1}^{n} Tx_i \longrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} Tx_i$

por lo que $T\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} Tx_i$, esto implica que $p\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i)$. Obsérvese que en el caso en que $\sum_{i\in\mathbb{N}}^{\infty}||Tx_i||$ no converja, es decir, sea infinita, esta desigualdad es inmediata. Esto prueba que p cumple las hipótesis del lema de Zabreiko por lo que es continua. Sea así U vecindad de $0 \in X$ tal que $p[U]$ es acotado, entonces $T[U]$ es acotado, luego por el teorema 1.16 sabemos que T es acotado. □

En ocasiones los operadores que cumplen con las hipótesis del teorema 1.30 son llamados mapeos cerrados, razón por la cual este teorema recibe su nombre. Se puede mostrar que esta noción de mapeo cerrado es distinta a la definición topológica estándar de función cerrada.

1.4. El espacio dual.

Uno de los conceptos más ricos en la teoría de los espacios de Banach es el de espacio dual. En álgebra lineal se define el espacio dual de un espacio vectorial V como el conjunto de transformaciones lineales con dominio V y con imagen en el campo sobre el que el espacio está definido. Como ha quedado en evidencia en las páginas anteriores, la norma es una de las herramientas centrales para estudiar un espacio de Banach, de manera que los elementos del espacio dual que serán de nuestro interés serán aquellos sobre las cuales se pueda definir una norma.

La siguiente definición está motivada por esta discusión.

Definición 1.31. *Sea V un espacio normado, el espacio dual de V es el conjunto $\mathscr{B}(V,\mathbb{F})$. Denotamos a $\mathscr{B}(V,\mathbb{F})$ por V^*, llamamos a sus elementos funcionales lineales acotadas y los denotamos por $v^*, w^* \in V^*$.*

El espacio dual algebraico de V es el conjunto $\{f : V \to \mathbb{F} \mid f \text{ es una transformación lineal}\}$, lo denotamos por $V^{\#}$, y a sus elementos por $v^{\#}, w^{\#} \in V^{\#}$.

Se puede probar que si V es un espacio normado de dimensión infinita y W no es el espacio trivial entonces existe $T : V \to W$ operador lineal no acotado, de manera que si V es de dimensión infinita $V^* \neq V^\#$ por lo que la distinción es relevante.

Nuestra primera tarea es establecer la estructura del espacio dual.

Teorema 1.32. *Sea V un espacio normado, entonces la norma del operador le otorga a V^* estructura de espacio de Banach.*

Este teorema por su simplicidad nos ofrece un excelente método para construir una gran cantidad de espacios de Banach.

Si bien en el caso de espacios de dimensión finita es sencillo demostrar que el espacio dual es isomorfo al espacio original, aún no tenemos elementos que nos permitan analizar los espacios duales en el caso general. El primer paso para resolver este problema lo proporciona el siguiente teorema.

Teorema 1.33. *Sea V un espacio complejo normado y sea V_r el espacio normado real correspondiente.*

(a) Sea f una funcional lineal compleja acotada sobre V y sea $u = \operatorname{Re} f$ su parte real, entonces u es una funcional lineal real acotada sobre V_r y para toda $v \in V$ se tiene que

$$f(v) = u(v) - iu(iv).$$

(b) Sea u una funcional linea real acotada sobre V_r, entonces existe una única funcional lineal compleja acotada f sobre V tal que $u = \operatorname{Re} f$, f está dada por la fórmula en (a).

(c) Sea f una funcional lineal compleja sobre V y $u = \operatorname{Re} f$. Entonces f es una funcional lineal acotada en V si y sólo si u es una funcional lineal real acotada en V_r. Si alguna es acotada entonces $||f|| = ||u||$.

Demostración. Comencemos con (a). Sean V, f y u como en las hipótesis. Sabemos que para cada $a \in \mathbb{C}$ $a = \operatorname{Re}(a) - i \operatorname{Re}(ia)$, por lo que si $v \in V$ entonces

$$f(v) = \operatorname{Re}(f(v)) - i \operatorname{Re}(if(v)) = \operatorname{Re}(f(v)) - i \operatorname{Re}(f(iv)) = u(v) - iu(iv)$$

y si $v, w \in V$ y $r \in \mathbb{R}$

$$u(rv + w) = \operatorname{Re}\Big(rf(v) + f(w)\Big) =$$

$$\operatorname{Re}\Big(ru(v) - ir(u(iv)) + u(w) - iu(iw)\Big) = ru(v) + u(w).$$

Esto demuestra el primer enunciado.

Prosigamos con (b). Sean V y u como en las hipótesis. Definamos $f : V \to \mathbb{F}$ como $f(v) = u(v) - iu(iv)$. Sean $a \in \mathbb{C}$ y $v, w \in V$ entonces

$$f(av+w) = u(av) - iu(iav) + u(w) - iu(iw) =$$

$$u(\operatorname{Re}(a)v) + u(i\operatorname{Im}(a)v) - iu(i\operatorname{Re}(a)v) - iu(-\operatorname{Im}(a)v) + u(w) - iu(iw) =$$

$$\operatorname{Re}(a)u(v) + \operatorname{Im}(a)u(iv) - i\operatorname{Re}(a)u(iv) + i\operatorname{Im}(a)u(v) + u(w) - iu(iw) =$$

$$au(v) - ai(u(iv)) + u(w) - iu(iw) = af(v) + f(w)$$

por lo que f es una funcional lineal compleja. Si f' es una funcional lineal compleja tal que $\operatorname{Re} f' = u$ entonces por el inciso anterior para cada $v \in V\, f'(v) = u(v) - iu(iv) = f(v)$ por lo que f es única. Esto demuestra el segundo enunciado.

Terminemos con (c). Sean V, f y u como en las hipótesis. Definimos para cada $v \in V$, $a_v \in \mathbb{C}$ tal que $a_v f(v)$ es un real positivo y $|a_v| = 1$, es claro que tal escalar siempre existe. Luego, para cada $v \in V$, $|u(v)| \leq |f(v)| = f(a_v v) = u(a_v v)$ por lo que

$$\sup\{|u(v)| : v \in V\} \leq \sup\{|f(v)| : v \in V\} =$$

$$\sup\{f(a_v v) : v \in V\} = \sup\{u(a_v v) : v \in V\} \leq \sup\{|u(v)| : v \in V\}$$

de donde $\sup\{|u(v)| : v \in V\} = \sup\{|f(v)| : v \in V\}$. A partir de esta igualdad el enunciado del inciso (c) es inmediato. □

Utilizando este teorema podemos presentar una de las piezas claves para estudiar los espacios duales:

Teorema 1.34 (Teorema de Hahn-Banach)**.** *Sean V un espacio normado, W un subespacio de V y $f_0 : W \to \mathbb{F}$ una funcional lineal acotada. Entonces f_0 puede ser extendida a una funcional con dominio V con la misma norma, es decir, existe $f : V \to \mathbb{F}$ tal que $f|_W = f_0$ y $||f|| = ||f_0||$.*

Demostración. Sean V, W y f_0 como en las hipótesis. Con base en el teorema 1.33, podemos en lo que sigue considerar primero la estructura de V como espacio vectorial real y posteriormente pasar al caso complejo, sea entonces $u_0 = \operatorname{Re} f_0$. El primer paso en la demostración es extender a u_0 por medio de funcionales lineales reales utilizando el lema de Zorn. En lo que sigue consideramos la estructura de V como espacio vectorial real.

Sea $U \leq V$ subespacio de V y $g : U \to \mathbb{R}$ funcional lineal real, durante el resto de la prueba diremos que g extiende a u_0 si $W \leq U$, $g|_W = u_0$ y para cada $v \in U$, $g(v) \leq ||u_0||||v||$. Consideremos

$$\mathscr{W} = \{g : U \to \mathbb{R} : g \text{ es funcional lineal real y } g \text{ extiende a } u_0\}.$$

Definimos una relación $\preceq$ en $\mathscr{W}$ como $g_1 \preceq g_2$ si y sólo si $g_2|_{\text{dom}(g_1)} = g_1$, entonces es inmediato que $(\mathscr{W}, \preceq)$ es un orden parcial. Sea $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{W}$ una cadena y $W' = \bigcup_{g\in\mathscr{C}} \text{dom}(g)$, dado que para cada $v \in W'$ existe $g \in \mathscr{C}$ tal que $v \in \text{dom}(g)$, podemos definir $h : W' \to \mathbb{R}$ como $h(v) = g(v)$ con $g \in \mathscr{C}$ y $v \in \text{dom}\, g$, como $\mathscr{C}$ es cadena h queda bien definida. Sean $v, w \in W'$ y $a \in \mathbb{R}$, luego existe $g \in \mathscr{C}$ tal que $av + w$ está en su dominio de manera que $h(av+w) = g(av+w) = ag(v)+g(w) = ah(v)+h(w)$ por lo que h es funcional lineal real. Es claro que si $v \in W'$, $h(v) = g(v) \leq ||u_0||||v||$, que $W \leq W'$ y que $h|_W = u_0$ por tanto $h \in \mathscr{W}$ y por construcción para cada $g \in \mathscr{C}$, $g \preceq h$. Esto muestra que toda cadena en $\mathscr{W}$ está superiormente acotada. Por lema de Zorn existe $u \in \mathscr{W}$ elemento maximal.

Lo siguiente es mostrar que $\text{dom}(u) = V$, supongamos que $\text{dom}\, u$ es un subespacio propio de V. Sea $v \in V \setminus \text{dom}(u)$ y $W_1 = \text{dom}(u) + \langle\{v\}\rangle$. Sean $w, w' \in \text{dom}(u)$ tenemos que $u(w)+u(w') = u(w+w') \leq ||u||||w-v+w'+v|| \leq ||u||||w-v||+||u||||w'+v||$ por lo que $u(w)-||u||||w-v|| \leq ||u||||w'+v||-u(w')$ a partir de esto podemos concluir que

$$\sup\{u(w) - ||u||||w-v|| \colon w \in \text{dom}\, u\} \leq \text{ínf}\{||u||||w+v|| - u(w) : w \in \text{dom}\, u\}$$

por lo que podemos considerar $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sup\{u(w)-||u||||w-v|| \colon w \in \text{dom}\, u\} \leq t \leq \text{ínf}\{||u||||w+v||-u(w) : w \in \text{dom}\, u\}.$$

Así definida t tiene propiedad de que para toda $w \in \text{dom}(u)$,

$$u(w) + t \leq ||u||||w+v||$$

y

$$u(w) - t \leq ||u||||w-v||.$$

Si $w, w' \in \text{dom}(u)$ y $a, a' \in \mathbb{R}$ son tales que $w + av = w' + a'v$ entonces $(a-a')v = w' - w \in \text{dom}(u)$ por lo que $a = a'$ y $w = w'$. Esto muestra que la función $u' : W_1 \to \mathbb{R}$ definida por $u'(w+av) = u(w) + at$ está bien definida.

Si $w+av, w'+a'v \in W_1$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces

$$\begin{gathered} u'(c(w+av)+w'+a'v) = u'\Big((cw+w')+(ca+a')v\Big) = \\ cu(w)+u(w')+cat+a't = cu'(w+av)+u'(w'+a'v). \end{gathered}$$

Además si $c > 0$, $u'(w+cv) = c\left(\frac{1}{c}u(w)+t\right) \leq c||u||||\frac{1}{c}w+v|| = ||u||||w+cv||$ y $u'(w-cv) = c\left(\frac{1}{c}u(w)-t\right) \leq c||u||||\frac{1}{c}w-v|| = ||u||||w-cv||$. Esto muestra que para toda $w \in W_1$ $u'(w) \leq ||u||||w|| = ||u_0||||w||$, por otra parte $W \leq \text{dom}(u) \leq W_1$ y $u'|_W = u|_W = f_0$. Por tanto $u' \in \mathscr{W}$ y $u \prec u'$, lo cual contradice que u sea elemento maximal en $\mathscr{W}$. Esto nos permite concluir que $\text{dom}\, u = V$.

Obsérvese que si $v \in V$, $-u(v) = u(-v) \leq ||f_0|| ||-v|| = ||f_0|| ||v||$ por lo que para cada $v \in V$, $|u(v)| \leq ||f_0|| ||v||$ esto implica que u es acotada y que $||u|| = ||f_0||$. Hasta este momento hemos considerado sólo la estructura de espacio vectorial real de V, pero por el teorema 11 inciso (b), podemos considerar una funcional lineal compleja acotada f con la misma norma que u y que tenga a ésta como su parte real. Esta f es la funcional buscada pues $\operatorname{Re}(f|_W) = (\operatorname{Re} f)|_W = u|_W = u_0$ invocando una vez más el mismo resultado sabemos que existe una única funcional sobre W con esta propiedad de manera que $f|_W = f_0$ además $||f|| = ||u|| = ||u_0|| = ||f_0||$. □

La demostración de este teorema hace evidente la importancia del teorema 1.33. Lo que sigue son una serie de resultados cuya demostración es inmediata a partir del teorema de Hanh-Banach y que muestran por qué este resultado es la pieza clave para el estudio de los espacios duales.

Corolario 1.35. *Sea V un espacio normado, sea $W \leq V$ un subespacio cerrado propio de V, y $v \in V \setminus W$, entonces existe $v^* \in V^*$ tal que $||v^*|| = 1$, $v^*v = d(v, W)$ y $W \leq \operatorname{Ker} v^*$.*

Demostración. Sean V, W y v como en las hipótesis. Definimos $W_1 = W + \langle\{v\}\rangle$ y $f_0 : W_1 \to \mathbb{F}$ por $f_0(w + cv) = cd(v, W)$, entonces f_0 es una funcional lineal con dominio W_1 que cumple $f_0(v) = d(v, W)$ y para cada $w \in W$ $f_0(w) = 0$.

Si $w \in W$ y $c \neq 0$

$$|f_0(w + cv)| = |c|d(v, W) \leq |c| ||v - \left(\frac{1}{c}w\right)|| = ||w + cv||.$$

Por lo que f_0 es acotada y $||f_0|| \leq 1$. Además $d(v, W) = |f_0(w + v)| \leq ||f_0|| ||(w + v)||$ lo que implica que

$$d(v, w) \leq ||f_0|| \text{ínf}\{||v - w|| : w \in W\} = ||f_0|| d(v, W).$$

Por tanto $||f|| = 1$, y podemos extender f_0 a $v^* \in V^*$ con las propiedades requeridas. □

Corolario 1.36. *Sean V un espacio normado y $v \in V \setminus \{0\}$, entonces existe $v^* \in V^*$ tal que $||v^*|| = 1$ y $||v|| = v^*v$.*

Corolario 1.37. *Sean V un espacio normado y $v \in V$ entonces*

$$||v|| = \sup\{|v^*v| : v^* \in B_{V^*}\}.$$

Demostración. Sean V y v como en las hipótesis. Si $v = 0$ la propiedad es trivial, supongamos $v \neq 0$ entonces tenemos que para cada $v^* \in B_{V^*}$, $|v^*v| \leq ||v^*||||v||= ||v||$, por lo que $||v||\geq \sup\{|v^*v| : v \in B_{V^*}\}$. Por el corolario 32 sea $v^* \in S_{V^*}$ tal que y $v^*v = ||v||$. Por tanto $||v||= \sup\{|v^*v| : v \in B_{V^*}\}$. $\square$

Corolario 1.38. *Sean V un espacio normado y $v, w \in V \setminus \{0\}$ tales que $v \neq w$, entonces existe $v^* \in V^*$ tal que $v^*v \neq v^*w$.*

Como ya se mostró, el espacio dual de cualquier espacio normado es un espacio de Banach, esto representa en sí una herramienta de estudio muy provechosa, sin embargo, este proceso puede replicarse volviendo a esta herramienta aún más útil.

Definición 1.39. *Sea V un espacio vectorial normado, el espacio doble dual de V es el espacio de Banach $(V^*)^*$, es decir, el espacio dual de V^*, denotado por V^{**}. En general podemos definir el espacio n-ésimo dual $V^{(n)}$ recursivamente como $V^{(n+1)} = (V^{(n)})^*$.*

Análogamente se pueden definir los espacios n-ésimo duales algebráicos $V^{\#\#}$ y $V^{[n+1]} = (V^{[n]})^{\#}$.

La primer línea de investigación que nos ofrece este nuevo concepto parte de la existencia de la siguiente función:

Definición 1.40. *Sean V un espacio normado y $(V^*)^{\#}$ el espacio dual algebraico de su espacio dual, definimos $Q : V \to (V^*)^{\#}$ como $\big(Q(v)\big)(v^*) = v^*v$ y lo llamamos el encaje canónico.*

Veamos que esta función tiene como imagen el espacio doble dual y que además cumple otras propiedades importantes.

Teorema 1.41. *Sean V un espacio normado y Q el encaje canónico. Entonces para cada $v \in V$, $Q(v) \in V^{**}$, Q es un isomorfismo isométrico y $Q[V]$ es cerrado si y sólo si V es de Banach.*

Demostración. Sean V y Q como en las hipótesis. Consideremos $v \in V$, $v_1^*, v_2^* \in V^*$ y $c \in \mathbb{F}$, entonces $\big(Q(v)\big)(cv_1^*+v_1^*) = (cv_1^*+v_1^*)(v) = cv_1^*(v)+v_2^*(v) = c\big(Q(v)\big)(v_1^*) + \big(Q(v)\big)(v_2^*)$, por lo que Q es lineal. Además $||Q(v)||= \sup\{|Q(v)(v*)| : v^* \in B_{V^*}\} = \sup\{|v^*v| : v^* \in B_{V^*}\} = ||v||$ por el corolario 1.37. Si $v \in \operatorname{Ker} Q$ entonces para toda $v^* \in V^*$, $0 = Q(v)(v^*) = v^*v$, apelando al corolario 1.36 esto significa que $v = 0$, por lo que Q es un isomorfismo isométrico.

Por último, si $Q[V]$ es cerrado entonces es de Banach por ser un subespacio de V^{**} de manera que por el teorema 1.21, V es de Banach. Si V es de Banach entonces $Q[V]$ es de Banach, luego es cerrado como subespacio de V^{**} por el mismo teorema. $\square$

Habiendo construido este enorme universo conceptual, quisiéramos empezar a descubrir algunas relaciones dentro de él, la primera conjetura que podemos hacer es que si dos espacios normados son isomorfos sus duales lo serán. Lo que sigue es un desarrollo que nos permite presentar este resultado elegantemente, además de introducir conceptos que serán útiles más adelante.

Definición 1.42. *Sean V, W espacios vectoriales normados y $T : V \to W$ un operador lineal entre ellos, definimos el operador adjunto algebráico $T^{\#} : W^{\#} \to V^{\#}$ como $\big(T^{\#}(w^{\#})\big)(v) = w^{\#}\big(T(v)\big)$ para $w^{\#} \in W^{\#}$ y $v \in V$.*

Por lo confunso de la notación generalmente se denota $v^{\#}v = \langle v, v^{\#}\rangle$. Con esta notación el adjunto algebráico queda definido por $\langle v, T^{\#}w^{\#}\rangle = \langle Tv, w^{\#}\rangle$, lo cual es visualmente más sugerente. Además el encaje canónico queda ilustrativamente definido por $\langle v^*, Q(v)\rangle = \langle v, v^*\rangle$.

Teorema 1.43. *Sean V, W espacios vectoriales normados y $T : V \to W$ un operador lineal, entonces T es acotado si y sólo si $T^{\#}[W^*] \subseteq V^*$. Si T es acotado entonces $T^* = T^{\#}|_{W^*} \in \mathscr{B}(W^*, V^*)$ y $||T||= ||T^*||$.*

Demostración. Supongamos que T es un operador lineal acotado. Por el teorema 1.19 para toda $w^* \in W^*$ tenemos que $T^{\#}w* : V \to \mathbb{F}$ es un operador lineal acotado, por lo que $T^{\#}w^* \in V^*$.

Supongamos que $T^{\#}[W^*] \subseteq V^*$, sea $A = T[B_V]$ y $B = Q[A]$, si $w^* \in W^*$ entonces $\sup\{w^{**}w^* : w^{**} \in B\} = \sup\{w^*w : w \in A\} = \sup\{w^*(Tv) : v \in B_V\} = \sup\{T^{\#}(w^*)v : v \in B_V\} = ||T^{\#}(w^*)||$ esto implica por el principio de acotamiento uniforme que $\sup\{||w^{**}||: w^{**} \in B\}$ es finito. Como Q es un isomorfismo esto implica que A es acotado, lo que implica por el teorema 12 que T es acotado.

Supongamos una vez más que T es acotado, por lo anterior $T^{\#}[W^*] \subseteq V^*$ de manera que $T^{\#}|_{W^*} = T^*$ es un operador lineal con imagen contenida en V^*, utilizando el corolario 1.37:

$$||T||= \sup\{||Tv||: v \in B_V\} =$$

$$\sup\{\sup\{|\langle Tv, w^*\rangle| : w^* \in B_{W*}\} : v \in B_V\} =$$

$$\sup\{|\langle Tv, w^*\rangle| : w^* \in B_{W*} \text{ y } v \in B_V\} =$$

$$\sup\{|\langle v, T^*w^*\rangle| : v \in B_V \text{ y } w^* \in B_{W*}\} =$$

$$\sup\{\sup\{\langle v, T^*w^*\rangle\} : v \in B_V\} : w^* \in B_{W*}\} =$$

$$\sup\{||T^*w^*||: w^* \in B_{W^*}\} = ||T^*||.$$

□

Definición 1.44. *Sean V, W espacios vectoriales normados y $T : V \to W$ un operador lineal acotado entre ellos. Definimos el operador adjunto $T^* \in \mathscr{B}(W^*, V^*)$ como $\langle v, T^*w^*\rangle = \langle Tv, w^*\rangle$ para $w^* \in W^*$ y $v \in V$.*

Teorema 1.45. *Sean V y W espacios normados y $T \in \mathscr{B}(V, W)$ un isomorfismo suprayectivo entre ellos, entonces $T^* \in \mathscr{B}(W^*, V^*)$ es un isomorfismo suprayectivo. Si T es un isomorfismo isométrico entonces T^* también lo es.*

Demostración. Sea $w^* \in \operatorname{Ker} T^*$ y $v \in V$ entonces $w^*v = \langle T\big(T^{-1}v\big), w^*\rangle = \langle T^{-1}v, T^*w^*\rangle = 0$ lo que implica que $w^* = 0$, es decir, T^* es inyectivo. Sea $v^* \in V^*$, sabemos que $v^*v = \langle v, v^*T^{-1}T\rangle = \langle Tv, v^*T^{-1}\rangle = \langle v, T^*v^*T^{-1}\rangle$ de manera que $T^*(v^*T^{-1}) = v^*$ por lo que T^* es suprayectivo. Supongamos ahora que para cada $v \in V$, $||v||= ||Tv||$; entonces si $w^* \in W^*$,

$$||T^*w^*||= \sup\{\langle v, T^*w^*\rangle : v \in B_V\} = \sup\{\langle Tv, w^*\rangle : v \in B_V\}$$

$$= \sup\{\langle w, w^*\rangle : w \in B_W\} = ||w^*||.$$

□

Hasta este punto hemos establecido los resultados básicos sobre el espacio dual y hemos empezado a estudiar algunas de las relaciones entre este concepto y otros previamente definidos. Lo primero que observamos es que el espacio dual en el caso finito no presenta gran interés pues es fácilmente demostrable que es isomorfo al espacio original, esta propiedad implica que para cualquier natural n, el n-ésimo dual también es isomorfo al espacio original, de acuerdo al teorema 1.45. Resulta interesante considerar variaciones de esta propiedad ¿Qué ocurre si un espacio es isomorfo a su doble dual? En este caso todos los n-ésimos duales con n par son isomorfos y por otro lado todos los n-ésimos duales con n impar también lo son, apelando de nuevo al teorema 1.45. Un caso particular de esta propiedad resulta cuando el isomorfismo está dado por el operador Q, el resto de la sección está dedicada a estudiar los espacios con esta propiedad.

Definición 1.46. *Sea V un espacio vectorial normado, sea V^{**} su doble dual y $Q : V \to V^{**}$ el encaje canónico, decimos que V es reflexivo si Q es suprayectivo.*

A pesar de que la propiedad de ser reflexivo es un caso particular de ser isomorfo al espacio doble dual, una vez más el caso de los espacios de dimensión finita es poco interesante pues si V es un espacio vectorial normado de dimensión finita, sabemos ya que V^{**} tiene su misma dimensión, como Q es inyectivo entonces también es suprayectivo. Este argumento prueba el siguiente teorema.

Teorema 1.47. *Sea V espacio vectorial normado de dimensión finita, entonces V es reflexivo.*

El siguiente teorema es inmediato a partir del teorema 1.21.

Teorema 1.48. *Sea V un espacio vectorial normado. Si V es reflexivo entonces es un espacio de Banach.*

Este teorema además de ofrecernos una manera de comprobar si un espacio normado es de Banach, comienza a sugerirnos la importancia de esta nueva propiedad.

El siguiente paso es estudiar cómo se comporta la reflexividad bajo isomorfismos.

Teorema 1.49. *Sean V y W espacios vectoriales normados. Si V es reflexivo y $V \cong W$ entonces W es reflexivo.*

Demostración. Sean V, W como en las hipótesis y $T : V \to W$ un isomorfismo suprayectivo, consideremos $T^* : W^* \to V^*$ y $T^{**} = (T^*)^* : V^{**} \to W^{**}$, que por teorema 1.45 son isomorfismos suprayectivos, por último denotemos Q_V y Q_W los respectivos encajes canónicos de V y W

Sea $w^{**} \in W^{**}$ como T^{**} es suprayectivo existe $v^{**} \in V^{**}$ tal que $T^{**}v^{**} = w^{**}$ como V es reflexivo existe $v \in V$ tal que $Q_V(v) = v^{**}$. Si $w^* \in W^*$ entonces

$$\langle w^*, w^{**} \rangle = \langle w^*, T^{**}Q_V(v) \rangle = \langle T^*w^*, Q_V(v) \rangle = \langle v, T^*w^* \rangle = \langle Tv, w^* \rangle$$

por lo que $Q_W(Tv) = w^{**}$ lo que termina la prueba.

□

Por último, veamos uno de los teoremas más importantes sobre los espacios reflexivos.

Teorema 1.50. *Sea X espacio de Banach, entonces X es reflexivo si y sólo si X^* es reflexivo.*

Demostración. Sea X un espacio de Banach. Consideremos $Q_X : X \to X^{**}$ y $Q_{X^*} : X^* \to X^{***}$ los respectivos encajes canónicos.

Supongamos primero que X es reflexivo. Sea $x^{***} \in X^{***}$, como $(x^{***} \circ Q_X) : X \to \mathbb{F}$ es una composición de operadores acotados entonces es un operador acotado, dado que su contradominio es $\mathbb{F}$ entonces podemos afirmar que existe $x^* \in X^*$ tal que $x^* = x^{***}Q_X$. Veamos que $Q_{X^*}x^* = x^{***}$, sea $y^{**} \in X^{**}$ arbitrario entonces existe $y \in X$ tal que $Q_X(y) = y^{**}$, pues Q_X es suprayectivo, luego:

$$\langle y**, Q_{X^*}(x^*)\rangle = \langle y**, Q_{X^*}(x^{***}Q_X)\rangle = \langle x^{***}Q_X, y^{**}\rangle =$$

$$\langle x^{***}Q_X, Q_X y\rangle = \langle y, x^{***}Q_X\rangle = \langle Q_X y, x^{***}\rangle = \langle y^{**}, x^{***}\rangle.$$

De manera que Q_{X^*} es suprayectivo. Supongamos ahora que X^* es reflexivo y X no lo es. Luego $Q[X]$ es un subespacio propio de X^{**}, como X es de Banach, $Q[X]$ es cerrado de manera que por el corolario 1.35 existe $x^{***} \in X^{***}$ tal que $||x^{***}||= 1$ y $Q[X] \subseteq \operatorname{Ker} x^{***}$.

Como X^* es reflexivo sea $x^* \in X^*$ tal que $Q_{X^*}(x^*) = x^{***}$ sabemos entonces que $||x^*||= 1$ pero si $y \in X$

$$\langle y, x^*\rangle = \langle x^*, Q_X y\rangle = \langle Q_X y, Q_{X^*}x^*\rangle = \langle Q_X y, x^{***}\rangle = 0$$

por lo que $x^* = 0$ y $||x^*||= 1$ esto es evidentemente una contradicción.

Por tanto X es reflexivo.

□

1.5. Espacios de Banach separables.

La propiedad de un espacio de Banach de ser separable es una de las propiedades centrales en este trabajo pues, a pesar de ser una propiedad adicional a su estructura básica, resulta que puede ser estudiada tanto con las herramientas de este capítulo, como con las herramientas del capítulo siguiente, pues resulta además ser un espacio polaco. En esta sección sólo estudiaremos las propiedades básicas de estos espacios y cuando hayamos desarrollado más nuestra teoría regresaremos para analizarlos con mayor profundidad.

Definición 1.51. *Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$ decimos que A es un conjunto denso en X si para todo abierto no vacío $U \subseteq X$ tenemos que $A \cap U \neq \varnothing$.*

Decimos que X es separable si existe $A \subseteq X$ tal que A es un conjunto denso en X y A es numerable.

El siguiente resultado enuncia tres propiedades básicas sobre estos espacios.

Proposición 1.52. *Sea X un espacio topológico separable:*

a) Si Y es otro espacio topológico y $f : X \to Y$ es una función continua, entonces la imagen de f es separable.

b) Si la topología de X está generada por una métrica y consideramos $A \subseteq X$ dotado de la topología inducida por X, entonces A es separable.

c) Si la topología de X está generada por una métrica y $A \subseteq X$ es denso en X, entonces para cada $x \in X$ existe una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de A tal que $a_n \longrightarrow x$.

En el caso de los espacios normados, la estructura adicional nos proporciona el siguiente resultado. El argumento que se utiliza en la prueba nos será de suma utilidad a lo largo del último capítulo.

Proposición 1.53. *Sean V un espacio normado y $A \subseteq V$ numerable, entonces* $\mathrm{cl}(\langle A\rangle)$ *es separable.*

Demostración. Sean V y A como en las hipótesis. Veamos primero que $\langle A\rangle$ es separable. Sea $\mathbb{Q}'$ el campo de los racionales si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o el subconjunto de números complejos con parte real e imaginaria racional si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, de manera que $\mathbb{Q}'$ es denso en $\mathbb{F}$.

Consideremos a A' el conjunto de todas las combinaciones lineales de elementos de A con coeficientes en $\mathbb{Q}'$. Es sencillo mostrar que A' es numerable.

Sea $v \in \langle A\rangle$ entonces existen $v_1, \dots, v_n \in A$ y $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{F}$ tales que $v = \sum_{i=1}^n b_i v_i$. Para cada $i \in \{1, \dots n\}$ existe una sucesión $(b_{i,j})_{j\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{Q}'$ tal que $b_{i,j} \longrightarrow b_i$. Esto significa, por la continuidad del producto por un escalar que para cada $i \in 1, \dots, n$ $b_{i,j}v_i \longrightarrow b_i v_i$ y por continuidad de la suma de V, que $\sum_{i=1}^n b_{i,j}v_i \longrightarrow \sum_{i=1}^n b_i v_i$. Esto muestra que A' es denso en $\langle A\rangle$ por lo que es separable.

Sea U abierto en V tal que $U \cap \mathrm{cl}(\langle A\rangle) \neq \varnothing$, sabemos entonces que $U \cap \langle A\rangle \neq \varnothing$, luego existe $a \in U \cap A'$ lo que muestra que A' es denso en $\mathrm{cl}(\langle A\rangle)$ por lo que es separable.

□

El siguiente resultado explora la relación entre los conceptos de separabilidad y de espacio dual.

Teorema 1.54. *Sea V un espacio normado. Si V^* es separable entonces V es separable.*

Demostración. Sea V un espacio normado, supongamos que V^* es separable. Sea $\{v_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ un conjunto numerable y denso en V^*. Escojamos para cada

$n \in \mathbb{N}$ a $v_n \in B_V$ tal que $|v_n^* v_n| \geq \frac{1}{2}||v_n^*||$. Si $A = \{v_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $W = \operatorname{cl}(\langle A \rangle)$, entonces queda por demostrar que $W = V$.

Sea $v^* \in V^*$, $v^* \neq 0$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $||v^* - v_n^*|| < \frac{1}{4}||v^*||$. Esta desigualdad implica que $||v_n^*|| \geq -||v_n^* - v^*|| + ||v^*|| > -\frac{1}{4}||v^*|| + ||v^*|| = \frac{3}{4}||v^*||$ Por lo que

$$\begin{aligned} |v^* v_n| &= |v_n^* v_n| - |v_n^* v_n| + |v^* v_n| \geq |v_n^* v_n| - |(v^* - v_n^*)(v_n)| \\ &\geq |v_n^* v_n| - ||v^* - v_n^*|| > \tfrac{1}{2}||v_n^*|| - \tfrac{1}{4}||v^*|| \\ &> \tfrac{1}{2}||v_n^*|| - \tfrac{1}{3}||v_n^*|| > 0. \end{aligned}$$

Si $W \neq V$, sea $v \in V \setminus W$, por el corolario 1.35 existe $v^* \in V^*$ tal que $||v^*|| = 1$, $W \subseteq \operatorname{Ker} v^*$ y $v^* v = d(v, W)$, como $||v^*|| = 1$ entonces $v \neq 0$. Luego, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $v^* v_n \neq 0$ pero $v_n \in A \subseteq W$. Por tanto $v^* v_n = 0$ pues $W \subseteq \operatorname{Ker} v^*$ lo cual es una contradicción.

Por tanto $W = V$ y por la proposición 1.53 concluimos que V es separable. □

El siguiente resultado relaciona las propiedades de reflexividad y separabilidad.

Corolario 1.55. *Sea V un espacio normado reflexivo, V es separable si y sólo si V^* es separable.*

Demostración. Supongamos primero que V un espacio normado, por el teorema anterior, si V^* es separable entonces V es separable.

Supongamos ahora que V un espacio normado separable y reflexivo, por la proposición 1.52 (a), $Q[V] = V^{**}$ es separable y por el teorema anterior V^* es separable. □

Más adelante en el trabajo la propiedad de que un espacio de Banach no tenga un subespacio isomorfo a ℓ_1 será relevante, esta propiedad toma importancia en virtud del siguiente teorema.

Teorema 1.56. *Sea X un espacio de Banach separable, entonces existe un operador lineal acotado suprayectivo $T : \ell_1 \to X$.*

Demostración. Sea X como en las hipótesis. Consideremos

$$A = \{x_n \in B_X : n \in \mathbb{N}\}$$

denso en B_X. Si $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1$ entonces $\left(\sum_{i=1}^n c_i x_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es absolutamente convergente y por tanto converge. Esto significa que la función $T : \ell_1 \to X$ definida por $T(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sum_{i=1}^\infty c_i x_i$ está bien definida. Es evidente que la función es lineal y si $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1$ entonces $||T(c_n)_{n\in\mathbb{N}}|| = ||\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i|| \leq \sum_{i=1}^{\infty}||c_i x_i|| \leq \sum_{i=1}^{\infty}|c_i| = ||(c_n)_n||_1$ por lo que T es acotada.

Sea $x \in B_X$, definimos por recursión la sucesión $(n_m)_{m\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{N}$ que cumpla la propiedad de que para cada $n \in \mathbb{N}$, $||(x - \sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{2})^i x_{n_i})|| < (\frac{1}{2})^n$. Sea n_1 tal que $||x - x_{n_1}|| < 1/2$. Si ya está definido n_j para cada $j \leq k$, como A es denso podemos encontrar n_{k+1} tal que $||(x - \sum_{i=1}^{k+1}(\frac{1}{2})^i x_{n_i})|| < (\frac{1}{2})^{k+1}$.

La construcción de esta sucesión implica que $x = \sum_{i=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^i x_{n_i}$. Definimos la sucesión $(c_n)_n \in \ell_1$ como $c_n = (\frac{1}{2})^n$ si existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $n = n_j$ y $c_n = 0$ de lo constrario, de manera que $T(c_n)_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n = \sum_{i=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^i x_{n_i} = x$. Como T es lineal si $x \in X \setminus B_X$ entonces $\frac{1}{||x||}x \in X$ por lo que existe $y \in \ell_p$ tal que $T(||x||y) = ||x||Ty = ||x||\frac{1}{||x||}x = x$, lo que muestra que T es suprayectiva.

$\square$

1.6. Topologías débiles.

Todos los resultados obtenidos hasta ahora referentes a alguna propiedad topológica de un espacio normado V han supuesto que la topología en cuestión es la generada por la norma del espacio. La topología de la norma es una buena topología para estudiar los espacios normados, la base de la topología puede ser fácilmente descrita y como hemos revisado satisface propiedades muy importantes. Sin embargo, existen varias razones por las que nos vemos en la necesidad de buscar nuevas topologías para los espacios normados, una de las más importantes está relacionada con la propiedad de compacidad.

Definición 1.57. *Sean X un conjunto y $Y \subseteq X$.*

a) Decimos que una familia $\mathscr{A}$ de subconjuntos de X es una cubierta de Y si $Y \subseteq \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A$.

b) Si $\mathscr{A}$ es una cubierta de Y, decimos que $\mathscr{B}$ es una subcubierta de $\mathscr{A}$ si $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ es cubierta de Y.

Definición 1.58. *Sean X un espacio topológico y $Y \subseteq X$.*

a) Decimos que una familia $\mathscr{A}$ de subconjuntos de X es una cubierta abierta de Y si $\mathscr{A}$ es cubierta de Y y para todo $A \in \mathscr{A}$, A es abierto en X.

b) Decimos que $K \subseteq X$ es compacto si para toda cubierta abierta $\mathscr{A}$ de K existe $\mathscr{B}$ una subcubierta finita de $\mathscr{A}$.

Las siguientes proposiciones son propiedades básicas sobre los conjuntos compactos.

Proposición 1.59. *Sea X un espacio métrico, $K \subseteq X$ es compacto si y sólo si toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en K tiene una subsucesión $(x_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ convergente en K.*

Proposición 1.60. *Sean X y Y dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función continua, si $K \subseteq X$ es compacto entonces $f[K] \subseteq Y$ es compacto.*

Una de las caraterísticas más importantes de los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$ es que son facilmente caracterizables según afirma el siguiente famoso teorema.

Teorema 1.61 (Heine-Borel)**.** *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ entonces K es compacto si y sólo si K es cerrado y acotado.*

Es sencillo demostrar que en espacios normados la propiedad de que un conjunto sea compacto si y sólo si es cerrado y acotado es equivalente a que la bola cerrada unitaria sea compacta. El resultado que nos invita a buscar nuevas topologías para los espacios normados es el siguiente.

Teorema 1.62. *Sea V un espacio normado, B_V es compacta sí y sólo si V es de dimensión finita.*

Demostración. Sea V un espacio normado de dimensión finita. Si $\{v_1, \ldots v_n\}$ es base de V y $\{e_1, \ldots e_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$ entonces es fácil ver que el operador $T : V \to \mathbb{R}^n$ definido por $Tv_i = e_i$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$ es un isomorfismo suprayectivo. Por ser T acotado sabemos que $T[B_V]$ es acotado por que T^{-1} continua, entonces $T[B_V] = (T^{-1})^{-1}[B_V]$ es cerrado y por el teorema de Heine-Borel $T[B_V]$ es compacto. Apelando de nuevo a la continuidad de T^{-1} sabemos entonces que $T^{-1}[T[B_V]] = B_V$ es compacto.

Por contraposición supongamos ahora que V es un espacio normado de dimensión infinita. Vamos a construir por recursión una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contenida en B_V tal que si $i, j \in \mathbb{N}$ entonces $||v_i - v_j|| \geq 1$. Podemos comenzar escogiendo cualquier $v_1 \in B_V$, sea $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que ya hemos escogido $v_1, \ldots v_n \in B_V$ tales que si $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ e $i \neq j$ entonces $||v_i - v_j|| \geq 1$. Sea $W = \langle\{v_1, \ldots v_n\}\rangle$, como V es de dimensión finita podemos escoger $w \in V \setminus W$ si $t = d(w, W)$ entonces $t > 0$ pues por ser W de dimensión finita es espacio de Banach y por tanto es un subconjunto cerrado de V. Considerando a $\frac{1}{t}w$ podemos encontrar una sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en W tal que $||\frac{1}{t}w - u_n|| \longrightarrow d(\frac{1}{t}w, W)$, como $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en W acotada, podemos encontrar un subsucesión $(u_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ convergente en W, sea $u \in W$ su punto de convergencia. Entonces si $v_{n+1} = u - \frac{1}{t}w$ e $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$||v_{n+1} - v_i|| \geq d(v_{n+1}, W) = d(u - \frac{1}{t}w, W)$$
$$= d(\frac{1}{t}w, W) = \frac{1}{t}d(w, W) = \frac{1}{t}t = 1.$$

Por lo que existe $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión en B_V que no es de Cauchy, luego no puede ser convergente, apelando a la proposición 1.59 podemos concluir que B_V no es compacto. □

Para poder definir nuevas topologías para los espacios normados necesitamos primero revisar algunos conceptos de topología general.

Definición 1.63. *Sea X un espacio topológico y τ su topología.*

a) Decimos que $\mathscr{B}$ es una base para la topología de X si $\mathscr{B} \subseteq \tau$ y para todo $U \in \tau$ existe $\mathscr{B}' \subseteq \mathscr{B}$ tal que $U = \bigcup_{B\in\mathscr{B}'} B$.

b) Decimos que $\mathscr{C}$ es una subbase para la topología de X si la familia de todas las intersecciones finitas de elementos de $\mathscr{C}$ es una base para la topología de X.

c) Sea $x \in X$, decimos que $V \subseteq X$ es una vecindad de x si existe $U \in \tau$ tal que $x \in U$ y $U \subseteq V$. Llamamos al conjunto de todas las vecindades de x su sistema de vecindades y lo denotamos por $\mathscr{U}(x)$.

d) Sea $x \in X$, decimos que una familia de subconjuntos de X $\mathscr{B}(x)$ es una base local si $\mathscr{B}(x) \subseteq \mathscr{U}(x)$ y para toda $V \in \mathscr{U}(x)$ existe $U \in \mathscr{B}(x)$ tal que $U \subseteq V$.

Proposición 1.64. *Sean X un conjunto, $\mathscr{W}$ una familia de funciones y $\{(Y_f, \tau_f) : f \in \mathscr{W}\}$ una familia de espacios topológicos tales que para toda $f \in \mathscr{W}$, el contradominio de f es Y_f. Entonces existe una única topología $\tau_{\mathscr{W}}$ para X tal que:*

a) Para toda $f \in \mathscr{W}$, f es continua.

b) Si τ' es una topología que hace a toda $f \in \mathscr{W}$ continua, entonces $\tau_{\mathscr{W}} \subseteq \tau'$.

Demostración. Sean X, $\mathscr{W}$ y $\{(Y_f, \tau_f) : f \in \mathscr{W}\}$ como en las hipótesis. Sea $\mathscr{C} = \{f^{-1}[U] : f \in \mathscr{W}$ y $U \in \tau_f\}$ y $\tau_{\mathscr{F}}$ la única topología que tiene a $\mathscr{C}$ como subbase.

Para demostrar (a) sea $f \in \mathscr{W}$ y $U \in \tau_f$ entonces $f^{-1}[U] \in \mathscr{C} \subseteq \tau_{\mathscr{W}}$ luego f es continua.

Para demostrar (b) sea τ' tal que toda $f \in \mathscr{W}$ es continua en esa topología entonces para toda $f \in \mathscr{W}$ y para todo $U \in \tau_f$ $f^{-1}[U] \in \tau'$ por lo que $\mathscr{C} \subseteq \tau'$ por ser τ' topología esto implica que $\tau_{\mathscr{W}} \subseteq \tau'$.

Por la propiedad (b) esta topología es única. □

Definición 1.65. *Con la misma notación de la proposición 1.64, decimos que $\mathscr{W}$ es una familia topologizante para X, llamamos a la topología $\tau_{\mathscr{W}}$ la topología débil de X inducida por $\mathscr{W}$ y decimos que $\{f^{-1}[U] : f \in \mathscr{W} \text{ y } U \in \tau_f\}$ es su subbase estándar.*

La topología débil guarda muchas similitudes con la topología del producto. El siguiente resultado es básico para estudiar esta segunda topología.

Teorema 1.66. *Sean $\{X_i : i \in I\}$ una familia de espacios topológicos, $X = \prod_{i\in I} X_i$ dotado con la topología del producto. Sean para cada $j \in I$, $p_j : X \to X_j$ la proyección canónica $p_j((x_i)_{i\in I}) = x_j$, y sean Y otro espacio topológico y $g : Y \to X$. Entonces g es continua si y sólo si para cada $j \in I$, $p_j \circ g$ es continua.*

Este resultado tiene su análogo para la topología débil.

Teorema 1.67. *Sean X un conjunto, $\mathscr{W}$ una familia topologizante para X, Y un espacio topológico y $g : Y \to X$. Entonces g es continua si y sólo si para cada $f \in \mathscr{W}$, $f \circ g$ es continua.*

Demostración. Sean $\mathscr{W}$, Y y g como en las hipótesis.

Sea $f \in \mathscr{W}$, como g es continua y f es continua entonces $f \circ g$ es continua.

Sabemos que basta verificar que la imagen inversa de abiertos subbásicos es abierta para mostrar que una función es continua, para esto sea U un abierto de la subbase estándar de la topología de X. Entonces existe $f \in \mathscr{W}$ y $V \in \tau_f$ tal que $U = f^{-1}[V]$, como por hipótesis $f \circ g$ es continua entonces $(f \circ g)^{-1}[V]$ es abierto en Y pero $(f \circ g)^{-1}[V] = g^{-1}[f^{-1}[V]] = g^{-1}[U]$ por lo que g es continua. □

Definición 1.68. *Sea $\mathscr{W}$ una familia topologizante para X, decimos que $\mathscr{W}$ separa puntos si para cada $x, y \in X$ con $x \neq y$ existe $f \in \mathscr{W}$ tal que $f(x) \neq f(y)$*

Corolario 1.69. *Sean X un conjunto, $\mathscr{W}$ una familia topologizante para X y para cada $f \in \mathscr{W}$ sea Y_f el contradominio de f. Si $\mathscr{W}$ separa puntos entonces existe un homeomorfismo $\varphi : X \to \prod_{f\in\mathscr{W}} Y_f$ definido como $\varphi(x) = (f(x))_{f\in\mathscr{W}}$.*

Demostración. Sean $\mathscr{W}$ y $\{Y_f : f \in \mathscr{W}\}$ como en las hipótesis, definamos φ como se enuncia. Por el teorema 1.67 para probar la continuidad de φ basta probar la continuidad de $p_f \circ \varphi$ para cualquier $f \in \mathscr{W}$. Sea $f_0 \in \mathscr{W}$, $U \in \tau_{f_0}$ entonces

$$(p_{f_0} \circ \varphi)^{-1}[U] = \{x \in X : p_{f_0}(\varphi(x)) \in U\}$$

$$= \{x \in X : p_{f_0}((f(x))_{f\in\mathscr{F}}) \in U\} = \{x \in X : f_0(x) \in U\}$$

$$= f_0^{-1}[U]$$

pero $f_0^{-1}[U]$ es abierto por la definición de la topología débil, luego φ es continua. Sean $x, y \in X$ si $x \neq y$ entonces, como $\mathscr{W}$ separa puntos, existe $f \in \mathscr{W}$ tal que $f(x) \neq f(y)$ luego $\varphi(x) = (f(x))_{f\in\mathscr{F}} \neq (f(y))_{f\in\mathscr{F}} = \varphi(y)$ por lo que φ es inyectiva y podemos definir $\varphi^{-1} : \operatorname{Im}\varphi \to X$.

Por el teorema 1.66, para probar la continuidad de φ^{-1} basta probar la continuidad de $f \circ \varphi^{-1}$ para cualquier $f \in \mathscr{W}$. Sea $f_0 \in \mathscr{W}$, $V \in \tau_f$ entonces

$$(f_0 \circ \varphi^{-1})^{-1}[V] = \{(f(x))_{f\in\mathscr{F}} \in \prod_{f\in\mathscr{W}} Y_f : f_0(\varphi^{-1}((f(x))_{f\in\mathscr{W}})) \in V\}$$

$$= \{(f(x))_{f\in\mathscr{W}} \in \prod_{f\in\mathscr{W}} Y_f : f_0(x) \in V\} = p_{f_0}^{-1}[V] \bigcap \operatorname{Im}\varphi$$

pero $p_{f_0}^{-1}[U]$ es abierto por la definición de la topología del producto por lo que $p_{f_0}^{-1}[U] \cap \operatorname{Im}\varphi$ es abierto en la imagen de φ. Esto prueba que tanto φ como φ^{-1} son continuas lo que termina la prueba. □

En las secciones anteriores hemos estudiado las propiedades topológicas de los espacios normados a través de la series y sucesiones. Sin embargo, las sucesiones sólo sirven para describir una clase particular de espacios topológicos, para poder estudiar espacios topológicos arbitrarios necesitamos desarrollar una herramienta más general.

Definición 1.70. *Sea X un conjunto.*

a) Decimos que una familia $\mathscr{F}$ de subconjuntos de X es un filtro en X si

1) $X \in \mathscr{F}$ y $\varnothing \notin \mathscr{F}$.

2) Si $A, B \in \mathscr{F}$ entonces $A \cap B$.

3) Si $Y \subseteq X$, $A \in \mathscr{F}$ y $A \subseteq Y$ entonces $Y \in \mathscr{F}$.

b) Sea $\mathscr{F}$ un filtro, decimos que $\mathscr{F}'$ es una base de filtro para $\mathscr{F}$ si $\mathscr{F}' \subseteq \mathscr{F}$ y para todo $A \in \mathscr{F}$ existe $A' \in \mathscr{F}'$ tal que $A' \subseteq A$.

c) Sea Y otro conjunto, $\mathscr{F}$ un filtro y $f : X \to Y$, denotamos por $f(\mathscr{F})$ al filtro generado por la base de filtro $\{f[A] : A \in \mathscr{F}\}$.

d) Sea $A \subseteq X$ y $\mathscr{F}$ un filtro tal que para todo $F \in \mathscr{F}$, $F \cap A \neq \varnothing$ entonces es evidente que la familia $\{A \cap F : F \in \mathscr{F}\}$ es un filtro en A que denotamos por $\mathscr{F}\,|_A$.

La noción de filtro a pesar de poder ser definida en términos puramente conjuntistas es muy útil para estudiar propiedades topológicas, una de las razones centrales de esto es que el sistema de vecindades de cualquier punto de un espacio topológico es un filtro, lo cual a su vez nos permite definir la noción de convergencia de filtros.

Definición 1.71. *Sean X un espacio topológico y $x \in X$, decimos que un filtro $\mathscr{F}$ converge a x si $\mathscr{U}(x) \subseteq \mathscr{F}$ y lo denotamos por $\mathscr{F} \longrightarrow x$.*

Proposición 1.72. *Sean X un espacio topológico, $\mathscr{B}$ una subbase de la topología de X, $x \in X$ y $\mathscr{F}$ un filtro en X. Entonces $\mathscr{F} \longrightarrow x$ si y sólo si para cada $U \in \mathscr{B}$ tal que $x \in U$ tenemos que $U \in \mathscr{F}$.*

Demostración. Sean X, $\mathscr{C}$, x y $\mathscr{F}$ como en las hipótesis.

Supongamos que $\mathscr{F} \longrightarrow x$. Si $U \in \mathscr{C}$ tal que $x \in U$ entones $U \in \mathscr{U}(x)$ por lo que $U \in \mathscr{F}$.

Supongamos que cada miembro de la subbase al que pertenece x es elemento del filtro. Sea $V \in \mathscr{U}(x)$, luego existe $U \subseteq X$ abierto tal que $U \subseteq V$ y $x \in U$. Como $\mathscr{B}$ es subbase existen $U_1, \ldots, U_n \in \mathscr{C}$ tales que $x \in \bigcap_{i \leq n} U_i$ y $\bigcap_{i \leq n} U_i \subseteq U$. Por hipótesis $U_1, \ldots, U_n \in \mathscr{F}$ y como los filtros son cerrados bajo intersecciones finitas, entonces $\bigcap_{i \leq n} U_i \in \mathscr{F}$. Como los filtros también son cerrados bajo supraconjuntos entonces $U, V \in \mathscr{F}$. Por lo que $\mathscr{U}(x) \subseteq \mathscr{F}$. $\square$

Una propiedad útil de la convergencia de filtros es que nos permite caracterizar a los conjuntos cerrados de un espacio topológico

Proposición 1.73. *Sea X un espacio topológico.*

a) Sea $E \subseteq X$, entonces $x \in \mathrm{cl}(E)$ si y sólo existe un filtro $\mathscr{F}$ en X que converge a x y que cumple que $E \in \mathscr{F}$.

b) $F \subseteq X$ es cerrado si y sólo si para cada filtro $\mathscr{F}$ en X que converge a un punto $x \in X$ y que $\mathscr{F}|_F$ es un filtro en F tenemos que $x \in F$.

Demostración. Sean X un espacio topológico y $E, F \subseteq X$. Comencemos con el inciso (a), si $E = \varnothing$ el enunciado es trivial, supongamos entonces $E \neq \varnothing$. Sea $x \in \mathrm{cl}(X)$. Consideremos el filtro $\mathscr{F}$ en X generado por la base $\{U \cap A : U \in \mathscr{U}(x)\}$. Si $U \in \mathscr{U}(x)$ entonces $U \cap A \in \mathscr{F}$ por lo que $U \in \mathscr{F}$ de manera que $\mathscr{F} \longrightarrow x$, como $X \in \mathscr{U}(x)$ entonces $A \in \mathscr{F}$. Luego $\mathscr{F}$ es el filtro buscado.

Si existe $\mathscr{F}$ tal que $A \in \mathscr{F}$ y $\mathscr{U}(x) \subseteq \mathscr{F}$, entonces para cada $U \in \mathscr{U}(x)$ $A \cap U \neq \varnothing$ por lo que $x \in \mathrm{cl}(X)$.

Ahora probemos (b), de nuevo si $F = \varnothing$ el enunciado es trivial, supongamos entonces $F \neq \varnothing$.

Supongamos que $F \subseteq X$ es cerrado. Sea $\mathscr{F}$ un filtro en X que converge a un punto $x \in X$ y tal que $\mathscr{F} \mid_F$ es un filtro en F. Por ser $\mathscr{F} \mid_F$ un filtro en F tenemos que $F \in \mathscr{F}$ y por el inciso anterior $x \in \mathrm{cl}(F)$ como F es cerrado $F = \mathrm{cl}(F)$ por lo que $x \in F$.

Supongamos que todo filtro $\mathscr{F}$ tal que $\mathscr{F} \mid_F$ es un filtro en F y que converge a un punto $x \in X$ cumple que $x \in F$. Si $x \in \mathrm{cl}(F)$, por el inciso anterior, podemos encontrar un filtro $\mathscr{F}$ que tal que $F \in \mathscr{F}$ y que converge a X, como $F \in \mathscr{F}$ entonces para cada $E \in \mathscr{F}$ $F \cap E \neq \varnothing$ por lo que $\mathscr{F} \mid_F$ es un filtro en F luego $x \in F$,es decir $F = \mathrm{cl}(F)$ lo que implica que F es cerrado. $\square$

Una propiedad igualmente útil de la convergencia de filtros es que nos permite caracterizar la continuidad de funciones entre espacios topológicos arbitrarios.

Teorema 1.74. *Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función entre ellos. Entonces:*

a) f es continua en $x \in X$ si y sólo si para cualquier filtro $\mathscr{F}$ que converga a x tenemos que $f(\mathscr{F})$ converge a $f(x)$.

b)f es continua si y sólo si para cualquier $x \in X$ y cualquier filtro $\mathscr{F}$ que converga a $x \in X$ tenemos que $f(\mathscr{F})$ converge a $f(x) \in Y$.

Demostración. Sean X, Y y f como en las hipótesis. Comencemos por el inciso (a):

Sea $x \in X$, supongamos que f es continua en x y que $\mathscr{F}$ es un filtro que converge a x. Sea $U \in \mathscr{U}(f(x))$, por la continuidad de f, $f^{-1}[U] \in \mathscr{U}(x)$, como $\mathscr{F}$ converge a x entonces $f^{-1}[U] \in \mathscr{F}$ lo que implica que $U \in f(\mathscr{F})$, es decir $f(\mathscr{F}) \longrightarrow f(x)$.

Sea $x \in X$, supongamos que si un filtro converge a x entonces su imagen converge a $f(x)$. Consideremos el fitro $\mathscr{U}(x)$, como evidentemente converge a x entonces sabemos que su imagen converge a $f(x)$, es decir que $\mathscr{U}(f(x)) \subseteq f(\mathscr{U}(x))$. Por lo que si $V \in \mathscr{U}(f(x))$ entonces existe $U \in \mathscr{U}(x)$ tal que $f(U) \subseteq V$ es decir, f es continua en x.

El inciso (b) es inmediato a partir de (a). $\square$

Una tercera propiedad de la convergencia de filtros nos habla de su relación con las familias topologizantes.

Teorema 1.75. *Sean X un conjunto, $\mathscr{W}$ una familia topologizante para X, $x \in X$ y $\mathscr{F}$ un filtro en X, si consideramos a X con la topología débil inducida por $\mathscr{W}$ entonces $\mathscr{F} \longrightarrow x$ si y sólo si para cada $f \in \mathscr{W}$, $f(\mathscr{F}) \longrightarrow f(x)$.*

Demostración. Sean $\mathscr{W}$, X con la topología débil inducida por $\mathscr{W}$, x y $\mathscr{F}$ como en las hipótesis.

Supongamos $\mathscr{F} \longrightarrow x$, si $f \in \mathscr{W}$ sabemos que f es continua, luego por el teorema 1.74 $f(\mathscr{F}) \longrightarrow f(x)$.

Supongamos para cada $f \in \mathscr{W}$, $f(\mathscr{F}) \longrightarrow f(x)$. Sea $U \subseteq X$ un abierto de la subbase estándar tal que $x \in U$, entonces existen $f_1 \in \mathscr{W}$ y $V_1 \in Y_{f_1}$ abierto tal que $f_1^{-1}[V_1] = U$ luego como $f_1(\mathscr{F}) \longrightarrow f_1(x)$ sabemos que $V_1 \in f_1(\mathscr{F})$ lo que implica que $U \in \mathscr{F}$. Por la proposición 1.72 tenemos que $\mathscr{F}$ converge a x. $\square$

Hasta este momento hemos desarrollado la teoría necesaria para estudiar espacios topológicos en general y en particular algunos resultados sobre las familias topologizantes, ahora aplicaremos esta teoría al estudio de espacios de Banach.

Como mencionamos previamente, en este capítulo estamos en busca de nuevas topologías para los espacios de Banach de dimensión infinita. El estudio de las topología inducidas por una familia realizado en esta sección y el de los espacios duales dos secciones atrás sugieren que los conjuntos de funcionales lineales acotadas son un buen candidato a utilizar como familia topologizante. En este capítulo vamos a definir dos topologías a partir del espacio dual.

Definición 1.76. *Sea V un espacio normado, la topología inducida por la familia de funcionales lineales acotadas V^* es llamada la topología débil de V y la denotamos por $\sigma(V, V^*)$. Si una propiedad se satisface para esta topología decimos que se satisface débilmente, por ejemplo, si V, con la topología $\sigma(V, V^*)$, es un espacio compacto, entonces decimos que V es débilmente compacto.*

Si Q es el encaje canónico de V en V^{**} la topología inducida por $Q[V]$ en V^* es llamada la topología débil (débil estrella) y la denotamos por $\sigma(V^*, V)$. Si una propiedad se satisface para esta topología decimos que se satisface débilmente* (débilmente estrella), por ejemplo, si V con la topología $\sigma(V^*, V)$ es un espacio separable, entonces decimos que V^* es débilmente* separable.*

A partir de esta definición cualquier espacio dual V^* de un espacio normado tiene dos topologías, la débil y la débil* cada una con propiedades distintas en el caso de que el espacio normado sea de dimensión infinita. Sin embargo, al ser topologías inducidas por subespacios del espacio V^{**} tienen muchas propiedades en común, por esto vale la pena estudiar las propiedades de las topologías inducidas por subespacios del espacio dual algebráico para conocer las generalidades de estos espacios y luego pasar a sus aspectos particulares.

En las primeras páginas de este capítulo se hizo enfásis en que los espacios normados tienen tres estructuras distintas que se relacionan muy bien. Cuando definimos una topología sobre un espacio vectorial nos gustaría que respetara la estructura algebráica que este espacio ya tiene, esta característica es lo que rescata la siguiente definición.

Definición 1.77. *Sea V un espacio vectorial con una topología τ, decimos que (V,τ) es un espacio vectorial topológico (EVT) si la suma $+ : V \times V \to V$ y el productor por un escalar $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$ del espacio vectorial son funciones continuas con respecto a esta topología.*

La proposición 1.5 demuestra que todos los espacios normados son espacios vectoriales topológicos. Lo menos que podríamos esperar de la topología débil y la débil* de un espacio normado es que también definieran espacios vectoriales topológicos.

La herramienta central con la que contamos para estudiar la continuidad de funciones son los filtros, es por esto que vale la pena definir varios filtros útiles. Si V es un espacio vectorial llamamos a las proyecciones $p_I : V \times V \to V$, $p_D : V \times V \to V$ definidas por $p_L(v,w) = v$ y $p_R(v,w) = w$ las proyecciones izquierda y derecha de la suma. Y análogamente a $p'_I : \mathbb{F} \times V \to \mathbb{F}$, $p'_D : \mathbb{F} \times V \to V$ definidas por $p'_L(c,v) = c$ y $p'_R(c,v) = v$, las proyecciones izquierda y derecha del producto. Si $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2$ son filtros en V. Denotamos por

$$(\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2)$$

al filtro generado por la base de filtro

$$\{F \subseteq V \times V : p_I[F] \in \mathscr{F}_1, p_D[F] \in \mathscr{F}_2)\}$$

y por

$$\mathscr{F}_1 + \mathscr{F}_2$$

al filtro generado por la base de filtro

$$\{F_1 + F_2 \subseteq V : F_1 \in \mathscr{F}_1, F_2 \in \mathscr{F}_2\}$$

de manera que

$$+(\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2) = \mathscr{F}_1 + \mathscr{F}_2.$$

Análogamente, si $\mathscr{G}_1$ es un filtro en $\mathbb{F}$ y $\mathscr{G}_2$ es un filtro en V, denotamos por

$$(\mathscr{G}_1, \mathscr{G}_2)$$

al filtro generado por la base de filtro

$$\{G \subseteq \mathbb{F} \times V : p'_I[G] \in \mathscr{G}_1, p'_D[C] \in \mathscr{G}_2\}$$

y por

$$\mathscr{G}_1 \cdot \mathscr{G}_2$$

al filtro generado por la base de filtro

$$\{G_1 \cdot G_2 \subseteq V : G_1 \in \mathscr{G}_1, G_2 \in \mathscr{G}_2\}$$

de manera que

$$\cdot(\mathscr{G}_1, \mathscr{G}_2) = \mathscr{G}_1 \cdot \mathscr{G}_2.$$

Proposición 1.78. *Sean V un espacio normado y W un subespacio de $V^{\#}$, sea τ la topología débil en V generada por la familia topologizante W, entonces (V, τ) es un EVT.*

Demostración. Sean V, W y τ como en las hipótesis y sea $\mathscr{F}$ un filtro en $V \times V$ que converge a (v_0, w_0). Sean $p_I : V \times V \to V$ y $p_D : V \times V \to V$ las proyecciones izquierda y derecha de la suma respectivamente.

Como ambas proyecciones son continuas bajo la topología del producto entonces $p_I[\mathscr{F}]$ converge a v_0 y $p_D[\mathscr{F}]$ converge a w_0. Además para todo $A \subseteq V \times V$ tenemos que $+[A] = p_I[A] + p_D[A]$. Si $f \in W$ entonces

$$f[+[A]] = f[p_I[A] + p_D[A]] = f[\{v + w : v \in p_I[A], w \in p_D[A]\}] =$$

$$\{f(v + w) : v \in p_I[A], w \in p_D[A]\}] = \{f(v) + f(w) : v \in p_I[A], w \in p_D[A]\}] =$$

$$f[p_I[A]] + f[p_D[A]].$$

De manera que

$$+(f(p_I(\mathscr{F})), f(p_D(\mathscr{F})) = f(p_I(\mathscr{F})) + f(p_I(\mathscr{F})) = f[+[\mathscr{F}]].$$

Dado que f es continua en la topología generada por la familia W por el teorema 1.74, $f(p_I(\mathscr{F}))$ converge a $f(v_0)$ y $f(p_D(\mathscr{F}))$ converge a $f(w_0)$, por lo que $(f(p_I(\mathscr{F})), f(p_D(\mathscr{F}))$ converge a $(f(v_0), f(w_0))$. Como la suma en $\mathbb{F}$ es continua $+(f(p_I(\mathscr{F})), f(p_D(\mathscr{F}))$ converge a $f(v_0) + f(w_0)$ debido de nuevo al teorema 1.74. Esto prueba, gracias a nuestra igualdad que $f[+[\mathscr{F}]]$ converge a $f(+(v_0.w_0))$. Esto demuestra que $(f \circ +)$ es continua una vez más por el teorema 1.74. Como f fue arbitraria esto prueba, por el teorema 1.67, que la suma del espacio vectorial es continua.

La prueba de la continuidad de $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$ es análoga. $\square$

Habiendo probado que la topología débil y la topología débil* definen espacios vectoriales topológicos, nuestro siguiente paso sería estudiar si existe una norma o al menos una métrica que genere estas topologías. Se puede probar que si el espacio normado V es de dimensión infinita entonces no existe una métrica que genere estas topologías. Más aún, utilizando la estructura de EVT se pueden definir sucesiones y filtros de Cauchy sin apelar a norma alguna y se puede probar que con esta definición los espacios de dimensión infinita resultan no ser completos.

Si estos espacios han perdido muchas de las características tan familiares e importantes de los espacios de Banach ¿por qué insistir tanto en su importancia? Lo que sigue son dos resultados clásicos de topología general necesarios para probar el teorema que justifica la importancia de estos espacios.

Teorema 1.79 (Tychonoff)**.** *Sea $\{X_i : i \in I\}$ una familia de espacios topológicos, entonces $\prod_{i \in I} X_i$ con la topología del producto es compacto si y sólo si para toda $i \in I$, X_i es compacto.*

Proposición 1.80. *Sean K un espacio topológico compacto y $F \subseteq K$ un conjunto cerrado, entonces F es compacto.*

Teorema 1.81 (Banach-Alaoglu)**.** *Sea V un espacio normado, entonces B_{V^*} es débil* compacto.*

Demostración. Sea V un espacio normado, para cada $v \in V$ sean $I_v = \{c \in \mathbb{F} : |c| \leq ||v||\}$ y $I^V = \prod_{v \in V} I_v$ dotado con la topología del producto. Sabemos que $Q[V]$ es una familia que separa puntos pues si $v^*, w^* \in V^*$ son tales que para toda $v \in V$ $v^*(v) = w^*(v)$ entonces $v^* = w^*$, luego por el corolario 1.69 existe una homeomorfismo $\varphi : B_{V^*} \to I^V$ en un subespacio de I^V si dotamos a B_{V^*} de la topología débil*. Por el teorema de Heine-Borel cada I^v es un espacio topológico compacto y por el teorema de Tychonoff sabemos que I^V también es compacto. Por lo que por la proposición 1.80 sólo resta probar que $\varphi[B_{V^*}]$ es cerrado en I^V.

Sea $\mathscr{F}$ un filtro en I^V, tal que $\varphi[B_{V^*}] \in \mathbb{F}$ y que converge a un punto $(x_v)_{v\in V} \in I^B$. Sean $v, w \in V$ y $c \in \mathbb{F}$ sabemos que para cualquier $\varphi(v^*) \in \varphi[B_{V^*}]$,

$$(Q(cv + w)v^*)_{cv+w} = ((cQ(v) + Q(w))(v^*))_{cv+w} = c(Q(v)(v^*))_v + (Q(w)(v^*))_w$$

por lo que

$$p_{cv+w}\left(\mathscr{F}\mid_{\varphi[B_{V^*}]}\right) = cp_v\left(\mathscr{F}\mid_{\varphi[B_{V^*}]}\right) + p_w\left(\mathscr{F}\mid_{\varphi[B_{V^*}]}\right)$$

pues sabemos que $\mathscr{F} \restriction_{\varphi[\mathscr{B}_{\mathscr{V}^*}]}$ es un filtro en $\varphi[B_{V^*}]$. Al ser V^* un EVT, la suma y el producto son continuos al restringuirlos a B_{V^*}, la suma y el producto también son continuos en $\varphi[B_{V^*}]$ por ser homeomorfo a B_{V^*}, de lo que se sigue que

$$p_{cv+w}\left(\mathscr{F} \restriction_{\varphi[B_{V^*}]}\right) \longrightarrow x_{cv+w}$$

y

$$cp_v\left(\mathscr{F} \restriction_{\varphi[B_{V^*}]}\right) + p(w)\left(\mathscr{F} \restriction_{\varphi[B_{V^*}]}\right) \longrightarrow cx_v + x_w.$$

Como $\mathbb{F}$ es un espacio de Hausdorff, entonces $x_{cv+w} = cx_v + x_w$. Esto significa que si definimos a $f : V \to \mathbb{F}$ por $f(v) = x_v$ entonces f es lineal, además $f(v) = x_v \in I_v$ por lo que $|f(v)| \leq ||v||$ por lo que no sólo f es acotada sino que $f \in B_{V^*}$, por último $\varphi(f) = (Q(v)(f))_v = (f(v))_v = (x_v)_v$, es decir $x \in \varphi[B_{V^*}]$. Por la proposición 1.73 $\varphi[B_{V^*}]$ es cerrado y por lo tanto compacto. □

1.7. Bases de Schauder.

En el estudio de espacio vectoriales con las herramientas del álgebra lineal los argumentos que apelan a la base de un espacio son muy comunes. Hay una importante razón por la que en los espacios de dimensión infinita las bases del espacio juegan un papel mucho más secundario, esta razón es consecuencia de los siguiente dos teoremas.

Teorema 1.82. *Sean V un espacio normado de dimensión finita mayor a cero, y $\gamma = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V, entonces cada proyección $p_i : V \to \langle v_i \rangle$ definida por $p_i(v_i) = v_i$ es un operador lineal acotado.*

Demostración. Sean V, γ y $p_1, \ldots, p_n$ como en las hipótesis. γ nos permite definir una norma $/\cdot/$ de la siguiente manera si $v \in V$ y $c_1, \ldots c_n \in \mathbb{F}$ son tales que $v = \sum_{i \leq n} c_i v_i$ entonces $/v/ = \sum_{i \leq n} |c_i|$. Es claro que $/\cdot/$ es una norma y por ser V de dimensión finita, la norma $/\cdot/$ define un espacio de Banach.

Sea $i \in \{1, \ldots, n\}$, es claro que p_i es un operador lineal, además

$$|p_i(v)| = \left| p_i\left(\sum_{j \leq n} c_j v_j\right)\right| = |c_i v_i| = |c_i|||v_i|| \leq \left(\sum_{j \leq n} |c_j|\right) ||v_i|| = /v/||v_i||$$

por lo que p_i es acotada bajo la norma $/\cdot/$.

Sea $I : (V, ||\cdot||) \to (V, /\cdot/)$ el operador identidad, veamos que I es acotado. Sea $S = \{v \in V : /v/ = 1\}$, si $v \in S$ y $c_1, \ldots, c_n$ son tales que $v = \sum_{j \leq n} c_j v_j$ entonces existe $j_0 \in \{1, \ldots n\}$ tal que $|c_{j_0}| > 0$ luego $c_{j_0} \neq 0$ y por ser γ base entonces $v \neq 0$ lo que implica que $||v|| > 0$. Es decir, para toda $v \in S$, se tiene que $||v|| > 0$, además es claro que S es cerrado bajo la topología generada por $/\cdot/$ y que $B = \{v \in V : /v/ \leq 1\}$ es compacto por el teorema 1.62, al ser S un subconjunto cerrado de un conjunto compacto también es compacto.

Supongamos que I es no acotada, entonces existe $(w_n)_n$ sucesión en B_v tal que para toda $j \in \mathbb{N}$, $/w_j/ \geq j$ por lo que si definimos la sucesión $(u_n)_n$ por $u_j = \frac{1}{||w_j||} w_j$, es claro que para toda $j \in \mathbb{N}$, $u_j \in S$ por lo que $(u_n)_n$ es una sucesión en un conjunto compacto. Si $u \in S$ es un punto a donde converge una subsucesión $(u_{n_j})_j$, entonces tenemos que $||u|| = \lim_{j\in\mathbb{N}} ||u_{n_j}|| = \lim_{j\in\mathbb{N}} \frac{1}{/w_{n_j}/} ||w_{n_j}|| \leq \lim_{j\in\mathbb{N}} \frac{1}{n_j} = 0$ lo que es una contradicción, por lo tanto I es acotada.

Entonces es claro que $p_i \circ I$ es un operador acotado bajo la norma $||\cdot||$.

□

Teorema 1.83. *Sean X un espacio de Banach, γ una base de X y $\gamma^{\#} = \{p_z : X \to \langle z \rangle \mid z \in \gamma\}$ el conjunto de las proyecciones cada una definida por $p_z(z) = z$. Sea $\gamma_c^{\#}$ el subconjunto de $\gamma^{\#}$ de las proyecciones que son continuas. Entonces $\gamma_c^{\#}$ es finito.*

Demostración. Sean X, γ, $\gamma^{\#}$ y $\gamma_c^{\#}$ como en las hipótesis. Supongamos que $\gamma_c^{\#}$ es de cardinalidad infinita, entonces podemos encontrar un conjunto $\{z_n \in \gamma : n \in \mathbb{N}\}$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$, $p_{z_n} \in \gamma_c^{\#}$. Este conjunto nos permite construir la serie $\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i ||z_i||} z_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ y sabemos que ésta es una serie absolutamente convergente. Como X es un espacio de Banach, entonces la serie converge a un punto $x \in X$.

A pesar de que x puede expresarse como una combinación infinita de miembros de $\{z_n \in \gamma : n \in \mathbb{N}\}$ al ser γ una base, existe una combinación lineal finita de sus miembros con la cual expresar a x. Esto significa que para una cantidad infinita de elementos de $\{z_n \in \gamma : n \in \mathbb{N}\}$ tenemos que $p_{z_n}(x) = 0$.

Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $p_{z_{n_0}}(x) = 0$, sabemos que para toda $m \geq n_0$ $p_{z_{n_0}}\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2^i ||z_i||} z_i\right) = \frac{1}{2^{n_0} ||z_{n_0}||} z_{n_0}$. Así, la imagen de esta serie es la sucesión con entradas 0 hasta $n-1$ y constante $\frac{1}{2^{n_0} ||z_{n_0}||} z_{n_0}$ en adelante, esta sucesión evidentemente no converge a cero, pero $p_{z_{n_0}}$ es continua y $\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i ||z_i||} z_i\right)_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow x$ lo cual nos lleva a que $p_{z_{n_0}}\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2^i ||z_i||} z_i\right)_{m\in\mathbb{N}} \longrightarrow p_{z_{n_0}}(x) = 0$, una contradicción. □

Los dos teoremas anteriores muestran que las proyecciones de las bases de los espacios de Banach de dimensión infinita no preservan la estructura topológica, estructura que ha sido central en nuestro estudio. Por esto, aprovechando la estructura de espacio métrico completo, resulta conveniente definir otro tipo de base de los espacios de Banach.

Definición 1.84. *Sea X un espacio de Banach, decimos que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X es una base de Schauder de X si para cada $x \in X$ existe una única sucesión $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{F}$ tal que $x = \sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i$.*

Para cada $n \in \mathbb{N}$, llamamos la n-ésima proyección natural al operador $P_n : X \to X$ definido como $P_n\big(\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i\big) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$.

Definimos $||\cdot||_{(x_n)}\colon X \to \mathbb{R}$ como

$$\left|\left|\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i\right|\right|_{(x_n)} = \sup\left\{\left|\left|\sum_{i=1}^{m} c_i x_i\right|\right| : m \in \mathbb{N}\right\}.$$

Comencemos revisando las propiedades de los espacios de Banach que tienen una base de Schauder.

Proposición 1.85. *Sea X un espacio de Banach y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base de Schauder de X, entonces:*

a) X es separable.

b) $\{x_n \in X : n \in \mathbb{N}\}$ es linealmente independiente, por lo que X es de dimensión infinita.

Demostración. Sean X y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como en las hipótesis. Dado que $X = \mathrm{cl}(\langle\{x_n \in X : n \in \mathbb{N}\}\rangle)$, la proposición 1.53 asegura que X es separable.

Por la definición de base de Schauder no existe ninguna $x \in X$ que pueda ser expresada como dos combinaciones lineales finitas de $\{x_n \in X : n \in \mathbb{N}\}$, lo que implica que este conjunto es linealmente independiente. □

Nos gustaría mostrar que en un espacio de Banach las proyecciones naturales de una base de Schauder son continuas. Siguiendo la idea de la demostración del teorema 1.82, vamos a definir una norma sobre los espacios que tienen bases de Schauder.

Proposición 1.86. *Sean X un espacio de Banach y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base de Schauder. Entonces $||\cdot||_{(x_n)}\colon X \to \mathbb{R}$ definida como*

$$\left|\left|\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i\right|\right|_{(x_n)} = \sup\left\{\left|\left|\sum_{i=1}^{m} c_i x_i\right|\right| : m \in \mathbb{N}\right\}.$$

es una norma. Además $(X, ||\cdot||_{(x_n)})$ es un espacio de Banach.

Demostración. Sean X y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como en las hipótesis. Defiendo $||\cdot||_{(x_n)}$ como en el enunciado es claro que $||\cdot||_{(x_n)}$ es una norma. Veamos que define un espacio de Banach.

Consideremos una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} c_{i,n}x_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ en X que es de Cauchy respecto a la norma $||\cdot||_{(x_n)}$. Si $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ por una parte

$$|c_{1,n_1} - c_{1,n_2}|||x_1||\leq \left|\left|\sum_{i=1}^{\infty}(c_{i,n_1} - c_{i,n_2})x_i\right|\right|_{(x_n)}$$

y por otra parte, si $i > 1$ entonces

$$\begin{aligned}|c_{n,n_1} - c_{n,n_2}|||x_n||&= \left|\left|\sum_{i=1}^{n}(c_{i,n_1} - c_{i,n_2})x_i - \sum_{i=1}^{n-1}(c_{i,n_1} - c_{i,n_2})x_i\right|\right| \\ &\leq 2\left|\left|\sum_{i=1}^{\infty}(c_{n_1,i} - c_{n_2,i})x_i\right|\right|_{(x_n)}.\end{aligned}$$

Esto prueba que para cualquier $i \in \mathbb{N}$, $(c_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{F}$, como $\mathbb{F}$ es completo podemos considerar $(c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la sucesión tal que para cada $i \in \mathbb{N}$ $(c_{i,n})_n \longrightarrow c_i$.

Sea $\epsilon > 0$, como $\left(\sum_{i=1}^{\infty} c_{i,n}x_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que si $n, n' \geq n_\epsilon$ y $j \in \mathbb{N}$ entonces

$$\left|\left|\sum_{i=1}^{j} c_{i,n}x_i - \sum_{i=1}^{j} c_{i,n'}x_i\right|\right| \leq \left|\left|\sum_{i=1}^{\infty} c_{i,n}x_i - \sum_{i=1}^{\infty} c_{i,n'}x_i\right|\right|_{(x_n)} < \epsilon/3.$$

Si n' tiende a infinito tenemos que

$$\left|\left|\sum_{i=1}^{j} c_{i,n}x_i - \sum_{i=1}^{j} c_ix_i\right|\right| \leq \epsilon/3$$

y en particular si $n = n_\epsilon$ y $j_2 \geq j_1 > 1$ tenemos que

$$\begin{aligned}&\left|\left|\sum_{i=j_1}^{j_2} c_{i,n_\epsilon}x_i - \sum_{i=j_1}^{j_2} c_ix_i\right|\right| \\ \leq &\left|\left|\sum_{i=1}^{j_2} c_{i,n_\epsilon}x_i - \sum_{i=1}^{j_2} c_ix_i\right|\right| + \left|\left|\sum_{i=1}^{j_1-1} c_{i,n_\epsilon}x_i - \sum_{i=1}^{j_1-1} c_ix_i\right|\right| < 2\epsilon/3.\end{aligned}$$

Como $(\sum_{i=1}^{j} c_{i,n_\epsilon}x_i)_{j\in\mathbb{N}}$ es convergente, existe j_ϵ tal que si $j_2 \geq j_1 \geq j_\epsilon$ entonces $||\sum_{i=j_1}^{j_2} c_{i,n_\epsilon}x_i||< \epsilon/3$. Esto implica que

$$\left|\left|\sum_{j_1=1}^{j_2} c_ix_i\right|\right| \leq \left|\left|\sum_{j_1=1}^{j_2} c_i, x_i - \sum_{j_1=1}^{j_2} c_{i,n_\epsilon}x_i\right|\right| + \left|\left|\sum_{j_1=1}^{j_2} c_{i,n_\epsilon}x_i\right|\right| < \epsilon.$$

Así $(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy respecto a la norma $||\cdot||$ y por ser X espacio de Banach entonces $\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i \in X$.

Ya mostramos que para cada $j \in \mathbb{N}$, $\left|\left|\sum_{i=1}^{j} c_{i,n}x_i - \sum_{i=1}^{j} c_i x_i\right|\right| \leq \epsilon/3$ por lo que tomando el supremo sobre las j tenemos que

$$||\sum_{i=1}^{\infty} c_{i,n}x_i - \sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i||_{(x_n)} < \epsilon.$$

Esto prueba que $(X, ||\cdot||_{(x_n)})$ es un espacio de Banach. □

Corolario 1.87. *Sea X un espacio de Banach y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base de Schauder. Entonces $I : (X, ||\cdot||) \to (X, ||\cdot||_{(x_n)})$ y su inverso son acotados.*

Demostración. Sean X, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e I como en las hipótesis. Veamos que I^{-1} es acotada. Si $x = \sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i$, entonces:

$$\left|\left|\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i\right|\right| = \lim_{m\in\mathbb{N}} \left|\left|\sum_{i=1}^{m} c_i x_i\right|\right| \leq \sup_{m\in\mathbb{N}} \left|\left|\sum_{i=1}^{m} c_i x_i\right|\right| = \left|\left|\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i\right|\right|_{(x_n)}$$

lo que prueba que $||I^{-1}(x)|| \leq ||x||_{(x_n)}$. Por el corolario 1.28 I también es acotada. □

Teorema 1.88. *Sean X un espacio de Banach y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base de Schauder, entonces cada proyección natural P_n es acotada.*

Demostración. Sean X y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como en las hipótesis. Recurriendo a la norma $||\cdot||_{(x_n)}$, si $m \in \mathbb{N}$, entonces $||P_m \sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i||_{(x_n)} = ||\sum_{i=1}^{m} c_i x_i||_{(x_n)} \leq ||\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i||_{(x_n)}$ por lo que P_m es acotada respecto a la norma $||\cdot||_{(x_n)}$ y $I^{-1} \circ P_m \circ I$ es acotada respecto a la norma $||\cdot||$. □

A partir de este teorema es sencillo demostrar que para cualquier base de Schauder $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de un espacio de Banach X, las proyecciones análogas a las proyecciones coordenadas p_n, estudiadas en los dos primeros teoremas de esta sección, son continuas.

Los siguientes resultados de esta sección estudian con más detenimiento las proyecciones naturales.

Teorema 1.89. *Sean X un espacio de Banach y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base de Schauder, entonces $\sup\{||P_n||: n \in \mathbb{N}\}$ es finito.*

Demostración. Sean X y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como en las hipótesis. Sabemos que si $x \in X$ entonces $\sup_{n\in\mathbb{N}} ||P_n(x)|| = ||x||_{(x_n)}$ es finito. Por el teorema anterior para cada

$n \in \mathbb{N}$, P_n es acotada, de manera que debido al principio de acotamiento uniforme $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\{||P_n||\}$ es finito. $\square$

Este teorema nos permite definir la siguiente constante:

Definición 1.90. *Sea X un espacio de Banach y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base de Schauder para X, llamamos constante básica de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $\sup\{||P_n||: n \in \mathbb{N}\}$.*

Si la constante básica de una base es igual a 1 decimos que la base es monótona.

Esta constante básica es fácilmente caracterizable a partir de la norma de las proyecciones naturales.

Proposición 1.91. *Sean X un espacio de Banach y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base de Schauder para X con constante básica K, entonces K es el ínfimo de los números reales M tales que para cualquier $j \in \mathbb{N}$ y $\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i \in X$*

$$\left|\left|\sum_{i=1}^{j} c_i x_i\right|\right| \leq M \left|\left|\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i\right|\right|.$$

Demostración. Sean X y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como en las hipótesis, a partir de la definición de constante básica es claro que

$$K = \sup\left\{ \text{ínf}\left\{M > 0 : ||\sum_{i=1}^{j} c_i x_i|| \leq M||\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i||\right\} : j \in \mathbb{N}\right\}$$

$$= \text{ínf}\left\{M > 0 : ||\sum_{i=1}^{j} c_i x_i|| \leq M||\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i||, j \in \mathbb{N}\right\}$$

$\square$

A su vez esta proposición nos permite caracterizar a las bases monótonas.

Proposición 1.92. *Sean X un espacio de Banach y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base de Schauder para X. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

a) (x_n) es monótona.

b) Para cada $j \in \mathbb{N}$ y cada $\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i \in X$, $||\sum_{i=1}^{j} c_i x_i|| \leq ||\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i||$.

c) Para cada $j \in \mathbb{N}$ y cada $c_1, \ldots, c_{j+1} \in \mathbb{F}$, $||\sum_{i=1}^{j} c_i x_i|| \leq ||\sum_{i=1}^{j+1} c_i x_i||$.

d) Para cada $x \in X$, $||x||_{(x_n)} = ||x||$.

Demostración. Sean X y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como en las hipótesis. Supongamos (a) entonces la constante básica es 1 lo que significa por la proposición anterior que $||\sum_{i=1}^{j} c_i x_i|| \leq ||\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i||$.

Supongamos (b) y sea $j \in \mathbb{N}$ y $c_1, \dots, c_{j+1} \in \mathbb{F}$, definamos para cada $i > j+1$ $c_i = 0$ luego como $\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i \in X$ entonces $||\sum_{i=1}^{j} c_i x_i|| \leq ||\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i|| = ||\sum_{i=1}^{j+1} c_i x_i||$.

Si suponemos (c), sea $j \in \mathbb{N}$ y $\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i \in X$ entonces para cualquier $k \geq j$ $||\sum_{i=1}^{j} c_i x_i|| \leq ||\sum_{i=1}^{k} c_i x_i||$ por lo que $||\sum_{i=1}^{j} c_i x_i|| \leq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} ||\sum_{i=1}^{n} c_i x_i||$ de donde $||\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i|| \leq ||\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i||_{(x_n)}$ la desigualdad $||\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i|| \geq ||\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i||_{(x_n)}$ la conocemos de la prueba del corolario 1.87, ambas desigualdades implican (d).

Finalmente, supogamos (d). Sabemos que si $\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i \in X$ y $j \in \mathbb{N}$ entonces $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} ||\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i|| \geq ||\sum_{i=1}^{j} c_i x_i||$ por lo que

$$\sup\{||P_j(x)||_{(x_n)} \colon ||x||_{(x_n)} = 1, j \in \mathbb{N}\} = 1$$

siendo ambas normas equivalentes esto implica que la constante básica de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es 1.

$\square$

De manera análoga a las bases definidas en álgebra lineal, nos gustaría poder encontrar bases normalizadas, es decir, bases de Schauder que satisfagan la siguiente definición:

Definición 1.93. *Sean X un espacio de Banach y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base de Schauder, decimos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está normalizada si para cada $n \in \mathbb{N}$, $||x_n|| = 1$.*

El siguiente resultado general nos garantiza la existencia de estas bases.

Proposición 1.94. *Sea X un espacio de Banach, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base de Schauder para X y $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sucesión en $\mathbb{F}$ de escalares no cero. Entonces $(\lambda_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder para X.*

Demostración. Sean X, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como en las hipótesis. Sea $x \in X$, entonces existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión única en $\mathbb{F}$ tal que

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{a_i}{\lambda_i}\right)(\lambda_i x_i),$$

esto prueba que $\left(\frac{a_n}{\lambda_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es la única sucesión por medio de la cual expresamos a x en términos de $(\lambda_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. $\square$

Corolario 1.95. *Sean X un espacio de Banach con base de Schauder, entonces existe una base de Schauder normalizada para X.*

Demostración. Sea X un espacio de Banach y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base de Schauder para X, por la proposición 1.85 $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de vectores no cero, por lo que $(||y_n||)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de escalares no cero. Por la proposición anterior entonces $\left(\frac{y_n}{||y_n||}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es base de Schauder para X, evidentemente es normalizada. $\square$

El concepto de base de Schauder se encuentra estrechamente relacionado con la siguiente noción:

Definición 1.96. *Sea V un espacio normado, decimos que una sucesión $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es total en V si* $\mathrm{cl}(\langle\{v_n \in V : n \in \mathbb{N}\}\rangle) = V$.

Es claro que toda base de Schauder de un espacios de Banach X es total en X. Terminamos el capítulo estudiando un concepto que será de suma utilidad durante el último capítulo.

Definición 1.97. *Sean X y Y espacios de Banach, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en X y Y respectivamente.*

a) Decimos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es equivalente a $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si para cada $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión en $\mathbb{F}$ tenemos que $(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si y sólo si $(\sum_{i=1}^{n} c_i y_i)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Sea $C \geq 1$, decimos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es C-equivalente a $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si para cada $k \in \mathbb{N}$ y $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{F}$ tenemos que

$$\frac{1}{C}\left|\left|\sum_{i=1}^{k} a_i y_i\right|\right| \leq \left|\left|\sum_{i=1}^{k} a_i x_i\right|\right| \leq C\left|\left|\sum_{i=1}^{k} a_i y_i\right|\right|.$$

Es claro que tanto ser sucesiones equivalentes como ser C-equivalentes son relaciones de equivalencia.

Teorema 1.98. *Sean X y Y espacios de Banach, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bases de Schauder para X y Y respectivamente. Entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es equivalente a $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si y sólo si existe un isomorfismo suprayectivo $T : X \to Y$, tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $Tx_n = y_n$.*

Demostración. Sean X, Y, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como en las hipótesis.

Supongamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es equivalente a $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sea $x \in X$, entonces existe una única sucesión en $\mathbb{F}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x = \sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i$. Definimos $T : X \to Y$ como $T(\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i y_i$. Como cada $x \in X$ tiene una expresión única en términos de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, T es una función con dominio X. Como cada $y \in Y$ tiene una expresión única en términos de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, T es inyectiva y suprayectiva, es evidente que T es lineal. Sea $(\sum_{i=1}^{\infty} c_{n,i} x_i)_{n\in\mathbb{N}}$ un sucesión convergente en X que converge a $\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i$ y tal que $(T(\sum_{i=1}^{\infty} c_{n,i} x_i))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en Y

a $\sum_{i=1}^{\infty} b_i y_i$. Sabemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $T\left(\sum_{i=1}^{\infty} c_{n,i} x_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} c_{n,i} y_i$. Sea $k \in \mathbb{N}$ y consideremos las k-ésimas proyecciones naturales $P_k : X \to X$ y $P'_k : Y \to Y$, por el teorema 1.88, sabemos que ambas son acotadas, de manera que $\sum_{i=1}^{k} c_{n,i} x_i = P_k(\sum_{i=1}^{\infty} c_{n,i} x_i) \longrightarrow P_k(\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i) = \sum_{i=1}^{k} c_i x_i$ y $\sum_{i=1}^{k} c_{n,i} y_i = P'_k(\sum_{i=1}^{\infty} c_{n,i} y_i) \longrightarrow P'_k(\sum_{i=1}^{\infty} b_i y_i) = \sum_{i=1}^{k} b_i y_i$. Esto implica que

$$c_{n,k} x_k = (P_{k+1} - P_k) \left(\sum_{i=1}^{\infty} c_{n,i} x_i \right) \longrightarrow (P_{k+1} - P_k) \left(\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i \right) = c_k x_k$$

y que

$$c_{n,k} y_k = (P'_{k+1} - P'_k) \left(\sum_{i=1}^{\infty} c_{n,i} y_i \right) \longrightarrow (P'_{k+1} - P'_k) \left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i y_i \right) = b_k y_k$$

lo que implica a su vez que $c_{n,k} \longrightarrow c_k$ y que $c_{n,k} \longrightarrow b_k$. Esto muestra que para cada $k \in \mathbb{N}$, $c_k = b_k$ por lo que $T(\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i y_i = \sum_{i=1}^{\infty} b_i y_i$. Esto implica por el teorema de la gráfica cerrada que T es acotado y por el teorema del mapeo inverso que además es isomorfismo. Es claro que para cada $n \in \mathbb{N}$, $Tx_n = y_n$

Supongamos ahora que existe un isomorfismo suprayectivo $T : X \to Y$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $Tx_n = y_n$. Sea $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión en $\mathbb{F}$ tal que $(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i$, entonces sabemos que $(T(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $T(\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i)$ por ser T acotado. Pero para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$T(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i T x_i = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i.$$

Lo que muestra que $(\sum_{i=1}^{n} c_i y_i)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $T(\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i)$. Analogamente si $(c'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión en $\mathbb{F}$ tal que $(\sum_{i=1}^{n} c'_i y_i)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\sum_{i=1}^{\infty} c'_i y_i$, debido a que T^{-1} es acotada es claro que $(\sum_{i=1}^{n} c'_i x_i)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $T^{-1}(\sum_{i=1}^{\infty} c'_i y_i)$. Por lo que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es equivalente a $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. $\square$

Este resultado muestra que la noción de bases de Schauder equivalentes se encuentra estrechamente relacionada con la noción de isomorfismo, además sugiere una sencilla manera de construir bases equivalentes.

Teorema 1.99. *Sean X y Y espacios de Banach, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones totales en X y Y respectivamente y $C \geq 1$. Entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es C-equivalente a $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si y sólo si existe un isomorfismo suprayectivo $T : X \to Y$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $Tx_n = y_n$ y $||T^{-1}||, ||T|| \leq C$.*

Demostración. Sean X, Y, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y C como en las hipótesis.

Supongamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es C-equivalente a $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sea $x \in X$ entonces existe una sucesión $(\sum_{i=1}^{k_n} c_{n,i}x_i)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\langle\{x_n \in X : n \in \mathbb{N}\}\rangle = X$ que converge a x. Sabemos que esta sucesión es de Cauchy, veamos que entonces la sucesión $(\sum_{i=1}^{k_n} c_{n,i}y_i)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\langle\{y_n \in Y : n \in \mathbb{N}\}\rangle = Y$ es de Cauchy. Consideremos $\epsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m, m' \geq N$ y $k_m \geq k_{m'}$, entonces $||\sum_{i=1}^{k_m} c_{m,i}x_i - \sum_{i=1}^{k_{m'}} c_{m',i}x_i|| = ||\sum_{i=1}^{k_m}(c_{m,i} - c_{m',i})y_i|| < \epsilon/C$. Sean $m', m \geq N$, supongamos sin pérdida de generalidad que $k_m \geq k_{m'}$, entonces

$$\left\|\sum_{i=1}^{k_m} c_{m,i}y_i - \sum_{i=1}^{k_{m'}} c_{m',i}y_i\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{k_m}(c_{m,i} - c_{m',i})y_i\right\|$$

$$\leq C\left\|\sum_{i=1}^{k_m}(c_{m,i} - c_{m',i})x_i\right\| < \epsilon.$$

Debido a que Y es espacio de Banach entonces la sucesión $(\sum_{i=1}^{k_n} c_{n,i}y_i)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, denotemos su punto de convergencia por $T(x)$. Veamos que esta expresión define una función de X en Y, es decir que $T(x)$ es independiente de la elección de la sucesión que converge a x. Supongamos que existen dos sucesiones $(\sum_{i=1}^{k_n} a_{n,i}x_i)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\sum_{i=1}^{l_n} b_{n,i}x_i)_{n\in\mathbb{N}}$ que convergen a x, podemos suponer que para cada $n \in \mathbb{N}$, $k_n = l_n$ agregando tantos ceros como sean necesarios. Es claro que la sucesión $\left(\sum_{i=1}^{k_n}(a_{n,i} - b_{n,i})x_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cero, además tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{C}\left\|\sum_{i=1}^{k_n}(a_{n,i} - b_{n,i})y_i\right\| \leq \left\|\sum_{i=1}^{k_n}(a_{n,i} - b_{n,i})x_i\right\|$$

por lo que la sucesión $(\sum_{i=1}^{k_n}(a_{n,i} - b_{n,i})y_i)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cero. Esto implica que $\left(\sum_{i=1}^{k_n} a_{n,i}y_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ y $\left(\sum_{i=1}^{k_n} b_{n,i}y_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergen al mismo punto. Por lo que la función $T : X \to Y$ está bien definida. Como $\mathrm{cl}(\langle\{y_n \in X : n \in \mathbb{N}\}\rangle) = Y$ entonces T es suprayectiva. El mismo argumento que asegura que T está bien definida muestra que T es inyectiva cuando se usa la segunda desigualdad que nos arroja la definición de sucesiones C-equivalentes. Es evidente que T es una transformación lineal, además T cumple por construcción las hipótesis del teorema de la gráfica cerrada por lo que es un operador acotado, al ser biyectiva es un isomorfismo por el teorema del mapeo inverso. Por definición de T para cada $n \in \mathbb{N}$, $Tx_n = y_n$.

Sea $x \in X$ entonces existe una sucesión $(\sum_{i=1}^{k_n} d_{n,i}x_i)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a x, sabemos que para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\left|T\left(\sum_{i=1}^{k_n} d_{n,i}x_i\right)\right|\right| = \left|\left|\sum_{i=1}^{k_n} d_{n,i}y_i\right|\right| \leq C\left|\left|\sum_{i=1}^{k_n} d_{n,i}x_i\right|\right|$$

lo que implica que $||Tx|| \leq C||x||$. Debido a que $||T||$ es el ínfimo del conjunto de los reales positivos que satisfacen esta propiedad tenemos que $||T|| \leq C$. Análogamente, sea $y \in Y$ entonces existe $(\sum_{i=1}^{k_n} e_{n,i}y_i)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a y, sabemos que para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\left|T^{-1}\left(\sum_{i=1}^{k_n} e_{n,i}y_i\right)\right|\right| = \left|\left|\sum_{i=1}^{k_n} e_{n,i}x_i\right|\right| \leq C\left|\left|\sum_{i=1}^{k_n} e_{n,i}y_i\right|\right|$$

lo que implica que $||T^{-1}y|| \leq C||y||$. Una vez más, $||T^{-1}||$ es el ínfimo del conjunto de los reales positivos que satisfacen esta propiedad por lo que $||T^{-1}|| \leq C$.

Supongamos ahora que existe un isomorfismo suprayectivo $T : X \to Y$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $Tx_n = y_n$ y $||T^{-1}||, ||T|| \leq C$. Sea $k \in \mathbb{N}$ y $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{F}$ entonces $||\sum_{i=1}^{k} a_iy_i|| = ||T(\sum_{i=1}^{k} a_ix_i)|| \leq ||T||||\sum_{i=1}^{k} a_ix_i|| \leq C||\sum_{i=1}^{k} a_ix_i||$ por lo que $\frac{1}{C}||\sum_{i=1}^{k} a_iy_i|| \leq ||\sum_{i=1}^{k} a_ix_i||$, además $||\sum_{i=1}^{k} a_ix_i|| = ||T^{-1}(\sum_{i=1}^{k} a_iy_i)|| \leq ||T^{-1}||||\sum_{i=1}^{k} a_iy_i|| \leq C||\sum_{i=1}^{k} a_iy_i||$.

□

Estos resultados nos muestran varias propiedades importances sobre las bases de Schauder C-equivalentes que resumimos en el siguiente corolario.

Corolario 1.100. *Sean X y Y espacios de Banach, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bases de Schauder para X y Y respectivamente.*

a) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son equivalentes entonces existe $C \geq 1$ tal que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son C-equivalentes.

b) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son C-equivalentes y $C \leq C'$ entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son C'-equivalentes.

Capítulo 2

Teoría descriptiva de conjuntos.

2.1. Espacios polacos y conjuntos de Borel.

En este capítulo se desarrollará la teoría descriptiva de conjuntos necesaria para el resto de la tesis. La teoría descriptiva de conjuntos parte de las propiedades de los espacios polacos para desarrollar sus resultados. Los espacios polacos, así como los espacios de Banach, son espacios que tienen propiedades en común con $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial sobre sí mismo, con estructura de espacio normado inducida a través de la función valor absoluto. Además, $\mathbb{R}$ es un espacio métrico completo con la métrica generada por esta norma. Esto muestra que la definición de espacio de Banach rescata propiedades tanto algebráicas como topológicas de $\mathbb{R}$. Sin embargo, $\mathbb{R}$ tiene otra propiedad topológica muy importante que no se incopora en la definición general de espacio de Banach y que estudiamos en el capítulo anterior: la propiedad de ser un espacio topológico separable. Esto sugiere que se pueden abstraer las propiedades topológicas de $\mathbb{R}$ en otra dirección.

Definición 2.1. *Sea (X, τ) un espacio topológico, decimos que X es metrizable si existe una métrica $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tal que la topología τ de X es compatible con d, es decir, la topología τ y la topología generada por las bolas abiertas de d son la misma.*

Decimos que (X, τ) es completamente metrizable si es metrizable con una métrica d tal que (X, d) es un espacio métrico completo.

Decimos que (X, τ) es un espacio polaco si X es separable y completamente *metrizable, en este caso decimos que τ es una topología polaca para X.*

Es claro que $\mathbb{R}$ es un espacio polaco y que además cualquier espacio de Banach separable es un espacio polaco.

Una diferencia importante entre el concepto de espacio de Banach y el de espacio polaco es que el segundo nos ofrece nuevas maneras de construir espacios. Podemos, por el momento, encontrar fácilmente dos maneras para construir nuevos espacios polacos.

La siguiente proposición junto con la proposición 1.52 nos garantiza que cualquier subconjunto cerrado de un espacio de Banach separable es un espacio polaco.

Proposición 2.2. *Sean (X, d) un espacio métrico completo y $F \subseteq X$ un subconjunto cerrado de X. Si denotamos por d_F a la métrica restringida a F, entonces (F, d_F) es un espacio métrico completo.*

Observando que existen conjuntos cerrados de un espacio de Banach que no son a su vez un espacio de Banach, podemos concluir que este resultado comienza a mostrarnos diferencias entre las propiedades de los espacios de Banach y los polacos, sin embargo, este resultado aún no deja en claro por qué es relevante definir la propiedad de ser metrizable, ya que hasta ahora sólo hemos estudiado espacios que ya tienen una métrica natural. El siguiente resultado muestra por qué la propiedad de metrizabilidad es importante.

Teorema 2.3. *Sean X y Y dos espacios topológicos tales que X es completamente metrizable y existe un homeomorfismo suprayectivo $f : X \to Y$, entonces Y es completamente metrizable.*

Demostración. Sean X, Y y f como en las hipótesis. Consideremos una métrica d_X compatible con la topología de X. Como f es suprayectiva definimos para cualesquiera $y_1, y_2 \in X$

$$d_Y(y_1, y_2) = d_X(f(y_1), f(y_2)).$$

Veamos que esta expresión define una métrica. Como

$$d_X : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

entonces

$$d_Y : Y \times Y \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}.$$

Sean $y_1, y_2 \in Y$ tales que $d_Y(y_1, y_2) = 0$, entonces $f(y_1) = f(y_2)$ por ser d_X métrica, por lo que $y_1 = y_2$ ya que f inyectiva. Por otra parte si $y \in Y$ entonces

$d_Y(y,y) = d_X(f(y), f(y)) = 0$. Además es claro que para toda $y_1, y_2 \in Y$,

$$d_Y(y_1, y_2) = d_X(f(y_1), f(y_2)) = d_X(f(y_2), f(y_1)) = d_Y(y_2, y_1).$$

Por último, si $y_1, y_2, y_3 \in Y$

$$d_Y(y_1, y_3) = d_X(f(y_1), f(y_3))$$

$$\leq d_X(f(y_1), f(y_2)) + d_X(f(y_2), f(y_3)) = d_Y(y_1, y_2) + d_Y(y_2, y_3).$$

Esto demuestra que d_Y es una métrica. Veamos que es compatible con la topología de X. Sea $U \subseteq Y$ abierto no vacío y $y \in U$, por ser f continua $f^{-1}[U]$ es abierto y $f^{-1}(y) \in f^{-1}[U]$ por lo que existe $r > 0$ tal que $B_r(f^{-1}(y)) \subseteq f^{-1}[U]$ esto implica que $B_r(y) \subseteq U$. Esto muestra que la topología de la métrica d_X es más fina que la topología de X. Sea $y' \in Y$ y $\rho > 0$ entonces $f^{-1}[B_\rho(y')] = B_\rho(f^{-1}(y')) \subseteq X$ que es un abierto en X, por ser f abierta $B_\rho(y') = f[f^{-1}[B_\rho(y')]] \subseteq Y$ es abierto en X. Esto muestra que ambas topologías coinciden.

Veamos que además d_X es una métrica completa. Sea $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en Y y consideremos $(f(y))_{n\in\mathbb{N}}$, la cual es una sucesión en X, es claro que esta sucesión también es de Cauchy. Al ser d_X una métrica completa existe $x \in X$ tal que $f(y_n) \longrightarrow x$, y al ser f^{-1} continua, tenemos que $y_n \longrightarrow f^{-1}(x)$ por lo que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

□

Este teorema junto con la proposición 1.52 nos ofrece un resultado sumamente importante.

Corolario 2.4. *Sean X y Y espacios topológicos y $g : X \to Y$ un homeomorfismo suprayectivo. Si X es un espacio polaco, entonces Y es un espacio polaco.*

Mostraremos ahora una tercera manera de construir espacios polacos la cual sí tiene su análogo en la teoría de espacios de Banach. Esta vez necesitamos trabajar un poco más para demostrar nuestro resultado. Para esto utilizaremos la siguiente proposición, la cual es un resultado básico de la teoría de espacios métricos.

Proposición 2.5. *Sea (X,d) un espacio métrico y τ la topología generada por d. Entonces existe una métrica acotada por 1 a la que denotamos d' que es compatible con τ. Si d es una métrica completa, entonces d' es una métrica completa. La métrica d' está dada por $d'(x,y) = \text{mín}\{1, d(x,y)\}$*

Teorema 2.6. *Sea para cada $n \in \mathbb{N}$, X_n un espacio topológico metrizable con d_n una métrica acotada por 1 compatible con su topología. Entonces $X = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ con la topología del producto es un espacio metrizable con la métrica*

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} d_n(x_n, y_n).$$

Si las métricas d_n son completas, entonces d es una métrica completa.

Demostración. Sean $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $\{d_n : n \in \mathbb{N}\}$ como en las hipótesis. Definamos X y d como en el enunciado. Veamos primero que d es una métrica: como para cada $n \in \mathbb{N}$, d_n está acotada por 1, entonces para todo $x, y \in X$, $0 \leq d(x,y) \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$ lo que asegura que $d : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Si $x, y \in X$ y $d(x,y) = 0$ entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $d_n(x_n, y_n) = 0$, es decir que para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n = y_n$, por lo que $x = y$. Es claro que si $x \in X$, $d(x,x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} d_n(x_n, x_n) = 0$. Por otra parte, si $x, y \in X$, entonces

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} d_n(x_n, y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} d_n(y_n, x_n) = d(y,x).$$

Por último, si $x, y, z \in X$ entonces

$$d(x,z) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} d_n(x_n, z_n)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} (d_n(x_n, y_n) + d_n(y_n, z_n))$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} d_n(x_n, y_n) + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} d_n(y_n, z_n) = d(x,y) + d(y,z).$$

Con esto hemos mostrado que d es métrica.

Como X puede ser dotado de la topología producto, quisiéramos ver que esta métrica es compatible con dicha topología. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $p_n : X \to X_n$ definida por $p_n(x) = x_n$, es decir, la n-ésima proyección coordenada. Es claro que si consideramos $n_o \in \mathbb{N}$, $\epsilon > 0$, $x, y \in X$ y $d(x,y) < 2^{-n_0}\epsilon$ entonces $2^{-n_0} d_{n_0}(p_{n_0}(x), p_{n_0}(y)) = 2^{-n_0} d_{n_0}(x_{n_0}, y_{n_0}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} d_n(x_n, y_n) < 2^{-n_0}\epsilon$ por lo que $d_n(p_n(x), p_n(y)) < \epsilon$. Hemos mostrado entonces que para cada $x, y \in X$, si $d(x,y) < 2^{-n_0}\epsilon$ entonces $d_{n_0}(p_{n_0}(x), p_{n_0}(y)) < \epsilon$, esto prueba que para cada $n \in \mathbb{N}$, p_n es continua, por lo que la topología generada por d es más fina que la topología del producto.

Sean ahora $\epsilon > 0$, $x \in X$ y $M \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=M+1}^{\infty} 2^{-n} < \epsilon/2$. Sea también para cada $m \leq M$, $U_m = B_{\epsilon/2}(x_m) \subseteq X_m$. Si $U = \bigcap_{m \leq M} p_m^{-1}[U_m]$ entonces U es un abierto del producto, y si $y \in U$ tenemos que

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} d_n(x_n, y_n) = \sum_{n=1}^{M} 2^{-n} d_n(x_n, y_n) \ + \sum_{n=M+1}^{\infty} 2^{-n} d_n(x_n, y_n)$$

$$< \sum_{n=1}^{M} 2^{-n} \epsilon/2 \ + \sum_{n=M+1}^{\infty} 2^{-n} < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Es decir, $x \in U \subseteq B_\epsilon(x) \subseteq X$. Esto prueba que la topología del producto es más fina que la topología generada por la métrica d, por lo que ambas topologías son la misma, es decir, X con la topología del producto es un espacio metrizable.

Sólo resta mostrar que d es una métrica completa si cada d_n lo es. Sea $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X. Si consideramos $m \in \mathbb{N}$ y $\epsilon > 0$, sea $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n_1, n_2 \geq N$ entonces $d(x^{n_1}, x^{n_2}) < 2^{-m}\epsilon$ esto implica que si $n_1, n_2 \geq N$ entonces $d_m(p_m(x^{n_1}), p_m(x^{n_2})) < \epsilon$. Por lo que para cada $m \in \mathbb{N}$, $p_m(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy. Como las métricas d_m son completas, para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $x_m \in X_m$ tal que $p_m(x^n) \longrightarrow x_m$. Si definimos $x = (x_m)_{m \in \mathbb{N}} \in X$ entonces la sucesión $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x en cada coordenada, por lo que la sucesión converge a x pues estamos trabajando con la topología del producto.

Esto muestra que X con la topología del producto es completamente metrizable. □

Llamamos a la métrica definida en el teorema anterior la métrica del producto.

Teorema 2.7. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea X_n un espacio topológico separable, entonces $X = \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ es separable con la topología del producto.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea X_n un espacio topológico separable. Consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \{s_{n,m} : m \in \mathbb{N}\}$ un conjunto denso numerable en X_n. Definimos

$$T_n = \{x \in X : \forall m \in \{1, \ldots, n\}\, x_m \in S_m, \forall m \in \mathbb{N} \setminus \{1, \ldots, n\}\, x_m = s_{m,1}\}.$$

Es claro que para toda $n \in \mathbb{N}$, T_n tiene la misma cardinalidad que $\prod_{m=1}^{n} S_m$, el cual sabemos es numerable. Definimos entonces $T = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$, sabemos que T es un conjunto numerable.

Afirmamos que T es un conjunto denso en X. Sea $V \subseteq X$ un abierto básico en X entonces para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ existe $V_i \subseteq X_i$ abierto con la propiedad de que $V = \bigcap_{i=1}^{n} p_i^{-1}[V_i]$. Podemos además considerar para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $z_i \in S_i \cap V_i$. Si definimos $x \in X$ como $x_i = z_i$ si $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $x_i = s_{i,1}$ si $i \in \mathbb{N} \setminus \{1, \ldots, n\}$, entonces $x \in T_n \subseteq T$ y $x \in V$ pues para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ $x_i = z_i \in V_i$. Esto muestra que T es denso en X, por lo que X es separable. $\square$

Corolario 2.8. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea X_n es un espacio polaco, entonces $X = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ es un espacio polaco.*

A partir de estos resultados podemos enlistar nuevos ejemplos de espacios polacos:

(a) $\mathbb{F}^{\omega}$ con la topología del producto.

(b) $(a, b) \subset \mathbb{R}$ con la topología inducida como subespacio.

(c) $B_r(z) \subseteq \mathbb{C}$ con $r > 0$ y $z \in \mathbb{C}$ con la topología inducida por algún con $\mathbb{C}$.

(d) (F, d_F), con $F \subseteq X$ un subconjunto cerrado con la topología inducida por X y X cualquiera de los espacios de los incisos anteriores.

Lo que sigue en este capítulo es un desarrollo de otros elementos de la teoría descriptiva de conjuntos teniendo como eje la búsqueda de nuevos espacios polacos.

En la teoría de espacios métricos generales se puede observar que varias de las propiedades de la bolas abiertas se preservan bajo intersecciones finitas no vacías. Esta fue una de las motivaciones para el axioma de espacio topológico que requiere que la intersección finita de elementos de una topología sea a su vez un elemento de la topología. En teoría descriptiva de conjuntos, las intersecciones numerables de conjuntos abiertos poseen propiedades muy interesantes por lo que vale la pena detenerse a estudiarlas.

Definición 2.9. *Sea X un espacio topológico y $G \subseteq X$ un subconjunto, decimos que G es un conjunto G_δ si existe una sucesión de conjuntos $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que para toda $n \in \mathbb{N}$, $U_n \subseteq X$ es abierto y $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = G$.*

Nuestro primer resultado nos permite enlistar un buen número de ejemplos de conjuntos G_δ. Para esto, sólo necesitamos describir apropiadamente a los cerrados en espacios metrizables.

Proposición 2.10. *Sea X un espacio topológico metrizable y $F \subseteq X$ un subconjunto cerrado, entonces $F = \{x \in X : d(x, F) = 0\}$.*

Demostración. Sean X y F como en las hipótesis. Fijemos una métrica d compatible con la topología de X. Si $x \in F$, como $d(x, x) = 0$ entonces $d(x, F) = 0$.

Sea $x \in X$ tal que $d(x, F) = 0$, si consideramos $n \in \mathbb{N}$ y observamos que $d(x, F) < \frac{1}{n}$ entonces podemos afirmar que existe $x_n \in F$ tal que $d(x, x_n) < \frac{1}{n}$.

Si definimos de esta manera una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contenida en F es claro que $x_n \longrightarrow x$, como F es cerrado, entonces $x \in F$. $\square$

Proposición 2.11. *Sea X un espacio métrico, d una métrica compatible con su topología, $F \subseteq X$, subconjunto cerrado de X y para cada $n \in \mathbb{N}$,*

$$U_n = \left\{x \in X : d(x, F) < \frac{1}{n}\right\}.$$

Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, U_n es un conjunto abierto en X, $U_{n+1} \subseteq U_n$ y

$$F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n.$$

En particular, si $F \subseteq X$ es un subconjunto cerrado de X, entonces F es un conjunto G_δ.

Demostración. Sean X y F como en las hipótesis. Consideremos una métrica d en X compatible con su topología. Definamos para cada $n \in \mathbb{N}$

$$U_n = \left\{x \in X : d(x, F) < \frac{1}{n}\right\}.$$

Comencemos mostrando que cada uno de estos conjuntos es abierto, este hecho es consecuencia de la siguiente igualdad:

$$U_n = \bigcup_{x\in F} B_{\frac{1}{n}}(x).$$

Esta igualdad es clara pues si $y \in U_n$, entonces existe $x \in F$ tal que $d(x, y) < 1/n$, por lo que $y \in B_{\frac{1}{n}}(x)$ de manera que $y \in \bigcup_{x\in F} B_{\frac{1}{n}}(x)$. Y si $z \in \bigcup_{x\in F} B_{\frac{1}{n}}(x)$, sea $x' \in F$ tal que $z \in B_{\frac{1}{n}}(x')$, como $x' \in F$ y $d(z, x') < \frac{1}{n}$ esto implica que $z \in U_n$. Al ser U_n la unión de bolas abiertas entonces es un abierto.

Por otra parte, si $x \in F$ entonces $d(x, F) = 0$ por lo que para cada $n \in \mathbb{N}$, $d(x, F) < \frac{1}{n}$ lo que implica que $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$.

Además, si $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $d(x, F) < \frac{1}{n}$ por lo que $d(x, F) = 0$, al ser F cerrado esto implica que $x \in F$.

Por tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, U_n es abierto en X y $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$, esto muestra que F es un conjunto G_δ. $\square$

Una propiedad importante de los conjuntos G_δ es que nos permiten estudiar las funciones que no son continuas en todo su dominio. Para mostrar esto necesitamos las siguientes definiciones.

Definición 2.12. *Sean X un espacio topológico, (Y,d) un espacio métrico, $A \subseteq X$ y $f : A \to Y$. Definimos la oscilación de un punto $x \in X$ respecto a f como*

$$\operatorname{osc}(x,f) = \inf\{\operatorname{diam}(f[U \cap A]) : U \subseteq X \text{ es una vecindad abierta de } x\}.$$

Proposición 2.13. *Sean X un espacio topológico, Y un espacio métrico, $A \subseteq X$ y $f : A \to Y$, entonces si $x \in A$:*

a) f es continua en x si y sólo si $\operatorname{osc}(x,f) = 0$.

b) El conjunto $\{x \in X : \operatorname{osc}(x,f) = 0\}$ es un conjunto G_δ.

c) Si $A = X$, entonces el conjunto $\{x \in X : f \text{ es continua en } x\}$ es un G_δ.

Demostración. Sean X, Y, A y f como en las hipótesis. Comencemos con (a):

Sea $x \in A$, tal que f es continua en x. Sea $\epsilon > 0$ arbitrario, por ser f continua en x existe $U \subseteq X$ vecindad abierta de x tal que $f[U \cap A] \subseteq B_\epsilon(f(x))$ por lo que $\operatorname{diam}(f[U \cap A]) < \epsilon$. Como ϵ es arbitrario esto muestra que $\operatorname{osc}(x,f) = 0$.

Sea $x \in A$, tal que $\operatorname{osc}(x,f) = 0$. Sea $\epsilon > 0$ arbitrario, como $\operatorname{osc}(x,f) = 0$ existe $U \subseteq X$ vecindad abierta de x tal que $\operatorname{diam}(f[U \cap A]) < \epsilon$, por lo que si $x' \in U \cap A$ entonces $d(f(x), f(x')) \leq \operatorname{diam}(f[U \cap A]) < \epsilon$, es decir $f(x') \in B_\epsilon(f(x))$. Esto muestra que $f[U \cap A] \subseteq B_\epsilon(f(x))$ y como ϵ es arbitrario esto permite concluir que f es continua en x.

Continuemos con (b), sean para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$U_n = \left\{x \in X : \operatorname{osc}(x,f) < \frac{1}{n}\right\}.$$

Consideremos $n \in \mathbb{N}$, si $U_n = \varnothing$ entonces es trivial que U_n es abierto. Si $U_n \neq \varnothing$ sea $x \in U_n$, luego existe $U \subseteq X$ vecindad abierta de x tal que $\operatorname{diam}(f[U \cap A]) < \frac{1}{n}$, si $x' \in U$ como U es abierto, U es vecindad abierta de x por lo que U es testigo de que $\operatorname{osc}(x',f) < \frac{1}{n}$. Es decir, $x \in U \subseteq U_n$, por lo que U_n es abierto.

Si $x \in X$ es tal que $\operatorname{osc}(x,f) = 0$ entonces para toda $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{osc}(x,f) < \frac{1}{n}$ por lo que $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Si $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$, entonces para toda $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{osc}(x,f) < \frac{1}{n}$ por lo que $\operatorname{osc}(x,f) = 0$.

Por lo tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, U_n es abierto en X y

$$\{x \in X : \operatorname{osc}(x,f)\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n.$$

Lo que prueba que este conjunto es un G_δ.

Para concluir (c) basta observar que si $A = X$ entonces por el inciso (a) $\{x \in X : f \text{ es continua en } x\} = \{x \in X : \operatorname{osc}(x,f) = 0\}$ y por el inciso (b) el segundo conjunto es un G_δ, de manera que el primero también lo es. $\square$

Esta proposición abre la puerta para dos propiedades muy importantes de los conjuntos G_δ. La primera se encuentra relacionada con un problema muy común en topología: extender funciones continuas.

Teorema 2.14 (Kuratowski)**.** *Sean X un espacio topológico metrizable, Y un espacio topológico completamente metrizable, $A \subseteq X$ y $f : A \to Y$ continua. Entonces existe $G \subseteq X$ subconjunto G_δ tal que $A \subseteq G \subseteq \mathrm{cl}(A)$ y tal que existe $g : G \to Y$ continua de manera que g es extensión de f, es decir $g|_A = f$.*

Demostración. Sean X, Y, A y f como en las hipótesis. Fijemos una métrica d_X compatible con la topología de X y una métrica completa d_Y compatible con la topología de Y. Definimos

$$G = \mathrm{cl}(A) \cap \{x \in X : \mathrm{osc}(x, f) = 0\}.$$

Por la proposición 2.11 el primer intersectando es un G_δ, por la proposición 2.13 el segundo también lo es, es trivial observar que la intersección numerable de conjuntos G_δ vuelve a serlo, por lo que G es un G_δ y claramente $A \subseteq G \subseteq \mathrm{cl}(A)$ pues $A \subseteq \{x \in X : \mathrm{osc}(x, f) = 0\}$ de nuevo por la proposición 2.13. De manera que sólo resta construir g.

Consideremos $x \in G$ y $\epsilon > 0$, como $\mathrm{osc}(x, f) = 0$ existe $U \subseteq X$ vecindad abierta de x tal que $\mathrm{diam}(f[U \cap A]) < \epsilon$. Como también $x \in \mathrm{cl}(A)$ entonces existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in A$ y $x_n \longrightarrow x$, dado que U es vecindad de x existe $N \in \mathbb{N}$ es tal que para cada $n \geq N$, $x_n \in U$. Por lo que $\mathrm{diam}(\{f(x_n) : n \geq N\}) < \epsilon$, es decir $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Como (Y, d_Y) es completo existe $y \in Y$ tal que $f(x_n) \longrightarrow y$.

Quisiéramos asegurar que la elección de y es independiente de la sucesión considerada, para esto supongamos que existe otra sucesión $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $x'_n \in A$ y $x'_n \longrightarrow x$. Por el argumento del párrafo anterior podemos escoger $y' \in Y$, tal que $f(x'_n) \longrightarrow y'$. Sea $\epsilon > 0$, escojamos $\delta > 0$ tal que si $d_X(z, x) < \delta$ entonces $d_Y(f(z), f(x)) < \epsilon$, escojamos $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N_1$ $d_Y(f(x_n), y) < \epsilon/4$, también escojamos $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N_2$ $d_Y(f(x'_n), y') < \epsilon/4$, además escojamos $N_3 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N_3$ $d_X(x_n, x) < \delta/4$ y por último escojamos $N_4 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N_4$ $d_X(x'_n, x) < \delta/4$. Si $N = \mathrm{máx}\{N_1.N_2, N_3, N_4\}$ y $n \geq N$ entonces utilizando varias veces la desigualdad del triángulo tenemos que:

$$d_Y(y, y') \leq d_Y(y, f(x_n)) + d_Y(f(x_n), f(x)) + d_Y(f(x), f(x'_n)) + d_Y(f(x'_n), y'))$$
$$< \epsilon/4 + \epsilon/4 + \epsilon/4 + \epsilon/4 = \epsilon$$

Por lo que $y = y'$, lo que asegura que el punto de convergencia es independiente de la elección de la sucesión. Esto permite definir $g : G \to Y$ como

$g(x) = y$. Si $x \in A$ podemos considerar la sucesión constante x, la cual es testigo de que $g(x) = f(x)$, es decir, $g|_A = f$.

Resta mostrar que g es continua, sean $x \in G$ y $V \subseteq X$ vecindad abierta de x. Sean $w, v \in V \cap G$, como $G \subseteq \mathrm{cl}(A)$ existen sucesiones $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que para toda $n \in \mathbb{N}$, $w_n, v_n \in A \cap V$ y tenemos que $w_n \longrightarrow w$, $v_n \longrightarrow v$. Sea, de nuevo, $\epsilon > 0$, como $\mathrm{osc}(w, f) = \mathrm{osc}(v, f) = 0$ existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tal que si $d_X(u, w) < \delta_1$ entonces $d_Y(f(u), f(w)) < \epsilon$ y si $d_X(u, v) < \delta_2$ entonces $d_Y(f(u), f(v)) < \epsilon$, así como $M_1, M_2 \in \mathbb{N}$ tales que si $n \geq M_1$ $d(w_n, w) < \delta/2$ y si $n \geq M_2$ $d(v_n, v) < \delta/2$. Luego si $n \geq \max\{M_1, M_2\}$, una vez más por la desigualdad del triángulo:

$$
\begin{aligned}
d_Y(g(w), g(v)) &\leq d(g(w), f(w_n)) + d(f(w_n), f(v_n)) + d(f(v_n), g(v)) \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \mathrm{diam}(f[A \cap V]) + \frac{\epsilon}{2} = \mathrm{diam}(f[A \cap V]) + \epsilon.
\end{aligned}
$$

Como $w, v \in V \cap G$, esto muestra que $\mathrm{diam}(g[V \cap G]) \leq \mathrm{diam}(f[V \cap A])$, como $\mathrm{osc}(x, f) = 0$ entonces $\mathrm{osc}(x, g) = 0$ lo que implica de nuevo por la proposición 2.13 que g es continua. $\square$

A su vez, este resultado nos permite demostrar otra muy importante propiedad de los conjuntos G_δ: estos conjuntos caraterizan a los subespacios polacos de un espacio polaco.

Teorema 2.15. *Sea X un espacio topológico metrizable.*

a) Si $A \subseteq X$ es completamente metrizable, entonces A es un subconjunto G_δ de X.

b) Si X es completamente metrizable y $B \subseteq X$ es un subconjunto G_δ de X, entonces B es completamente metrizable. Más aún, B es homeomorfo a un subconjunto cerrado de $X \times \mathbb{R}^\omega$.

c) Si X es un espacio polaco, entonces $Y \subseteq X$ es un espacio polaco si y sólo si Y es un subconjunto G_δ de X.

Demostración. Sea X un espacio topológico metrizable. Comencemos con (a), sea $A \subseteq X$ completamente metrizable. Consideremos $f : A \to A$ definida como $f(x) = x$. Al ser f la función identidad es continua por lo que por el teorema 2.14 existe $G \subseteq X$ subconjunto G_δ de X, tal que $A \subseteq G \subseteq \mathrm{cl}(A)$ y existe $g : G \to A$ continua tal que $g|_A = f$.

Sea $x \in G$, como $G \subseteq \mathrm{cl}(A)$ podemos considerar una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n \longrightarrow x$ y para toda $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in A$. Por la continuidad de g sabemos entonces que $g(x_n) \longrightarrow g(x)$, pero al estar esta sucesión contenida en A sabemos que para toda $n \in \mathbb{N}$, $g(x_n) = f(x_n) = x_n$ por lo que $x_n \longrightarrow g(x)$, al ser el punto de convergencia único esto implica que $g(x) = x$ pero $g(x) \in A$, luego $x \in A$. Esto prueba que $G \subseteq A$ por lo que $G = A$, lo que claramente implica que A es un G_δ.

Continuemos con (b). Supongamos que X es completamente metrizable. Escojamos una métrica d completa compatible con la topología de X. Consideremos $B \subseteq X$ y $(U_n)_{n\in\omega}$ una sucesión de abiertos de X tales que $\bigcap_{n\in\omega} U_n = B$. Para cada $n \in \omega$, sea $F_n = X \setminus U_n$, es claro que cada F_n es un cerrado en X. Utilizando estos cerrados vamos a construir una función de B en $X \times \mathbb{R}^\omega$.

Ya hemos mostrado que para cada $n \in \omega$, $m \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$\{x \in X : d(x, F_n) < \frac{1}{m}\}$$

es abierto en X pues F_n es cerrado. Esto muestra que las funciones $g_n : B \to \mathbb{R}$ definidas por $g_n(x) = d(x, F_n)$ son continuas. Como para cada $n \in \omega$, F_n es cerrado, si $x \in B \subseteq (X \setminus F_n)$ sabemos que $0 < d(F_n, x)$, esto nos permite definir las funciones $f_n : B \to \mathbb{R}$ por $f_n(x) = \frac{1}{d(F_n,x)}$, las cuales son continuas por ser cada una composición de funciones continuas.

A su vez podemos definir $f : B \to \mathbb{R}^\omega$ como $f(x) = (f_n(x))_{n\in\omega}$, si consideramos a $\mathbb{R}^\omega$ con la métrica del producto entonces f es continua pues es continua al componerse con cada una de las proyecciones.

Sabemos por el teorema 2.6 que $Y = X \times \mathbb{R}^\omega$ es completamente metrizable. Definimos $G(f) = \{(x, f(x)) \in Y : x \in X\}$, veamos que G es cerrado en Y. Sea d_Y una métrica compatible con la topología de Y y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que para toda $n \in \mathbb{N}$, $y_n \in G$ y que converge a $y \in Y$. Consideremos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $y_n = (x_n, f(x_n))$ y $(x, z) = y$. Utilizando la continuidad de las proyecciones $p(y_1, y_2) = y_1$ y $q(y_1, y_2) = y_2$ sabemos que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a z y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x, esto implica, por ser f continua, que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$. Al ser el punto de convergencia único tenemos que $z = f(x)$, por lo que $y \in G(f)$. Esto muestra que $G(f)$ es cerrado y por la proposición 2.2 $G(f)$ es completamente metrizable.

Es evidente que $p' = p|_{G(f)}$ es continua, inyectiva y que $p'[G(f)] = B$, por lo que por el teorema 2.3, B es completamente metrizable. Además es claro que p'^{-1} es continua por lo que B es homeomorfo a $G(f) \subseteq X \times \mathbb{R}^\omega$.

Por último, para probar (c) supongamos que X es polaco, y $Y \subseteq X$. Si Y es polaco, en particular es completamente metrizable, por lo que por (a) Y es un subconjunto G_δ. Si Y es un subconjunto G_δ, entonces es separable y por (b) es completamente metrizable, luego es polaco. $\square$

Lo anterior nos permite, por una parte dar muchos más ejemplos de espacios polacos, por otra parte sugiere que el estudio de los conjuntos G_δ es tan importante como el estudio de los espacios polacos. Veamos nuevos ejemplos de espacios polacos.

Sabemos que podemos expresar al conjunto de los racionales de la siguiente manera: $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$. Por lo que podemos definir para cada $n \in \mathbb{N}$, $U_n = (-\infty, q_n) \cup (q_n, \infty)$ abierto en $\mathbb{R}$. Es claro que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$, por lo que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es un G_δ contenido en $\mathbb{R}$ un espacio polaco. Por el teorema anterior esto muestra que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es un espacio polaco.

Consideremos

$$A = \{(x_n)_{n\in\omega} \in \mathbb{R}^\omega : \{x_n : n \in \omega\} \text{ tiene como punto de adherencia a } 0\}.$$

Sabemos que $\{x_n : n \in \omega\}$ tiene como punto de adherencia a cero si y sólo si para toda $\epsilon > 0$ existe $m \in \omega$ tal que $(x_m \in B_\epsilon(0))$. Pero esta condición es equivalente a que para toda $n \in \mathbb{N}$ exista $m \in \omega$ tal que $(x_m \in B_{1/n}(0))$. Más áun, si $n_0 \in \mathbb{N}$ y $m_0 \in \omega$ entonces

$$V_{(m_0,n_0)} = \{(x_n)_{n\in\omega} \in \mathbb{R}^\omega : x_{m_0} \in B_{\frac{1}{n_0}}(0)\} = p_{m_0}^{-1}[B_{\frac{1}{n_0}}(0)]$$

es un abierto en la topología del producto, por lo que

$$U_{n_0} = \bigcup_{m\in\omega} V_{(m,n_0)} = \{(x_n)_{n\in\omega} \in \mathbb{R}^\omega : \exists m \in \omega(x_m \in B_{\frac{1}{n_0}}(0))\}$$

también es un abierto para cada $n_0 \in \mathbb{N}$. Como

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \{(x_n)_{n\in\omega} \in \mathbb{R}^\omega : \forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \omega(x_m \in B_{\frac{1}{n}}(0))\} = A$$

entonces A es un G_δ en $\mathbb{R}^\omega$ que es un espacio polaco, por lo que A también es un espacio polaco.

Podemos así agregar a nuestra lista los siguientes espacios polacos:

(d) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ con la topología como subespacio de $\mathbb{R}$.

(e) $\{(x_n)_{n\in\omega} \in \mathbb{R}^\omega : \{x_n : n \in \omega\}$ tiene como punto de adherencia a $0\}$ con la topología como subespacio de $\mathbb{R}^\omega$.

(f) Cualquier subconjunto G_δ de uno de los espacios polacos previamente enlistados con la topología inducida como subespacio.

Los conjuntos G_δ son sólo algunos de los primeros de una larga lista de conjuntos que estudia la teoría descriptiva. Estos conjuntos surgen al combinar el concepto de topología con un concepto básico de la teoría de la medida.

Definición 2.16. *Sea X un conjunto y $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(X)$.*

(a) Decimos que Σ es una σ-álgebra de subconjuntos de X si se cumplen las siguientes propiedades:

(1) $\varnothing, X \in \Sigma$.

(2) Si $A \in \Sigma$ entonces $(X \setminus A) \in \Sigma$.

(3) Si $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \Sigma$ es una colección numerable de conjuntos que pertenecen a Σ, entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Sigma$.

(b) Si Σ es una σ-álgebra en X, entonces decimos que (X, Σ) es un espacio medible.

(c) Dado un conjunto $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ decimos que $\mathcal{A}$ genera a una σ-álgebra Σ, si Σ es la $\subseteq$-menor σ-álgebra de X que contiene a $\mathcal{A}$.

(d) Si además X es un espacio topológico con una topología τ denotamos por $\mathbb{B}(\tau)$ a la σ-álgebra generada por τ, la llamamos la σ-álgebra de Borel de τ y a sus elementos los conjuntos de Borel, o borelianos.

La σ-álgebra de Borel no sólo es interesante porque mezcla dos de las estructuras más estudiadas en matemáticas, sino porque sus elementos pueden ser separados en conjuntos que manera jerarquizada. La jerarquía que describimos a continuación se conoce como la jerarquía de Borel.

Consideremos un espacio topológico (X, τ). La jerarquía de Borel ordena a los conjuntos de Borel a partir de la complejidad de la fórmula que los describe. Los primeros conjuntos de la jerarquía de Borel son los abiertos de la topología, a estos se les denota, utilizando la notación lógica moderna, como $\Sigma^0_1(X)$. Los abiertos son los borelianos más sencillos junto con los conjuntos cerrados, a estos últimos se los denota por $\Pi^0_1(X)$, los cuales se pueden describir como

$$\Pi^0_1 = \{F \in \mathcal{P}(X) : (X \setminus F) \in \Sigma^1_0(X)\}.$$

Los borelianos que en complejidad son los inmediatamente siguientes son tanto las intersecciones numerables de abiertos, así como las uniones numerables de cerrados. A los primeros los hemos denominado G_δ, los cuales se denotan por $\Pi^0_2(X)$ y se pueden escribir como

$$\Pi^0_2 = \left\{ \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n : \forall n \in \mathbb{N},\ U_n \in \Sigma^0_1(X) \right\}.$$

o equivalentemente

$$\Pi^0_2(X) = \left\{ X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n : \forall n \in \mathbb{N},\ F_n \in \Pi^0_1(X) \right\}$$

A las uniones numerables de cerrados las denominamos conjuntos F_σ y las denotamos $\Sigma_2^0(X)$, estos conjuntos pueden ser descritos por

$$\Sigma_2^0(X) = \left\{ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n : \forall n \in \mathbb{N},\ F_n \in \Pi_1^0(X) \right\}.$$

Esta descripción muestra que los conjuntos G_δ son los complementos de los conjuntos F_σ de la misma manera que los conjuntos cerrados son los complementos de los conjuntos abiertos. Esto ilustra los pasos por medio de los cuales se construye la jerarquía. Se inicia con una familia de conjuntos, se construye la familia de sus complementos y a partir de ésta se construye la familia de todas sus uniones numerables, luego se repite el proceso. Este proceso se describe a través de una recursión sobre el primer ordinal no numerable ω_1.

Definimos por recursión sobre ω_1 los siguientes subconjutos de la σ-álgebra de Borel:

$$\Sigma_1^0(X) = \{A \in \mathcal{P}(X) : A \in \tau\}$$

$$\Pi_1^0(X) = \{A \in \mathcal{P}(X) : (X \setminus A) \in \Sigma_1^0(X)\}.$$

$$\text{Para } \alpha > 1, \quad \Sigma_\alpha^0(X) = \left\{ \bigcup_{n\in\omega} A_n : \forall n \in \mathbb{N}\ \left(\alpha_n < \alpha,\ A_n \in \Pi_{\alpha_n}^0(X)\right) \right\}$$

$$\Pi_\alpha^0(X) = \{A \in \mathcal{P}(X) : (X \setminus A) \in \Sigma_\alpha^0(X)\}.$$

A partir de estos conjuntos podemos definir para toda $\alpha < \omega_1$:

$$\Delta_\alpha^0(X) = \Sigma_\alpha^0(X) \bigcap \Pi_\alpha^0(X).$$

La relevancia de estas clases, conocidas como clases ambigüas, puede apreciarse considerando el caso $\alpha = 1$. Los conjuntos $\Delta_1^0(X) = \Sigma_1^0(X) \bigcap \Pi_1^0(X)$, son precisamente aquellos conjuntos que son cerrados y abiertos, su estudio es sumamente importante para las propiedades relacionadas con la conexidad de un espacio topológico.

En caso de que (X, τ) sea metrizable, la proposición 2.11 nos asegura que

$$\Pi_1^0(X) \subseteq \Pi_2^0(X)$$

lo cual claramente implica que

$$\Sigma_1^0(X) \subseteq \Sigma_2^0(X).$$

Dado que es trivial que

$$\Pi_1^0(x) \subseteq \Sigma_2^0(X)$$

y que

$$\Sigma_1^0(X) \subseteq \Pi_2^0(X),$$

entonces tenemos que

$$\Pi_1^0(X) \cup \Sigma_1^0(X) \subseteq \Delta_2^0(X).$$

Este es el caso base de un argumento por inducción que demuestra que en el siguiente diagrama todas las flechas denotan contención entre conjuntos.

$$\begin{tikzcd}
 & \Sigma_1^0(X) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \Sigma_2^0(X) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \Sigma_\alpha^0(X) \arrow[r] & \cdots \\
\Delta_1^0(X) \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dr] & & \Delta_2^0(X) \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \cdots \arrow[r] & \Delta_\alpha^0(X) \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \cdots & \\
 & \Pi_1^0(X) \arrow[rr] \arrow[ur] & & \Pi_2^0(X) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \Pi_\alpha^0(X) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Tambien se puede probar que este diagrama representa a toda la σ-álgebra de Borel, es decir que cualquier conjunto de Borel aparece eventualmente en la jerarquía que describe este diagrama.

Un argumento mucho más complejo muestra que en el caso que (X, τ) es un espacio polaco no numerable las flechas del diagrama anterior denotan contención propia. Además, bajo estas mismas hipótesis, puede mostrarse que existen subconjuntos de X que no son conjuntos de Borel, como muestra nuestro teorema 3.15.

Los resultados mencionados en estos últimos tres párrafos quedan fuera del objetivo de este trabajo. No obstante, vale la pena mencionarlos para dejar en claro que la utilidad de la teoría descriptiva va mucho más allá de lo que aquí trabajaremos.

Sin embargo, como utilizaremos regularmente algunos de los estratos de la jerarquía de Borel, establecemos la siguiente notación que nos ayudará posteriormente. Sea X un conjunto y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$, definimos:

$$\mathcal{A}_\delta = \Big\{ \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n : \forall n \in \mathbb{N},\, A_n \in \mathcal{A} \Big\}, \text{ y}$$

$$\mathcal{A}_\sigma = \Big\{ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n : \forall n \in \mathbb{N},\, A_n \in \mathcal{A} \Big\}.$$

Además denotamos por $G(X) = \{A \in \mathcal{P}(X) : A \in \tau\}$ al conjunto de abiertos y por $F(X) = \{(X \setminus A) \in \mathcal{P}(X) : A \in \tau\}$ al conjunto de cerrados. Esto nos ofrece la siguiente notación:

$$\Sigma_1^0(X) = G(X)$$

$$\Pi_1^0(X) = F(X)$$

$$\Sigma_2^0(X) = (F(X))_\sigma = F_\sigma(X)$$

$$\Pi_2^0(X) = (G(X))_\delta = G_\delta(X)$$

$$\Sigma_3^0(X) = (G_\delta(X))_\sigma = G_{\delta\sigma}(X)$$

$$\Pi_3^0(X) = (F_\sigma(X))_\delta = F_{\sigma\delta}(X)$$

etc.

Los conjuntos de Borel tienen una estructura sumamente rica y cumplen varias propiedades que los relacionan intimamente con los espacios polacos, lo que resta de esta sección se dedica a probar una de estas propiedades.

Teorema 2.17. *Sea X un espacio topológico metrizable y separable, entonces X tiene una base numerable para su topología, es decir es II-numerable.*

Demostración. Sea X como en las hipótesis. Consideremos una métrica d compatible con la topología de X y sea $C = \{x_n \in X : n \in \mathbb{N}\}$ un conjunto denso y numerable. Si $n, m \in \mathbb{N}$ definimos $U_{n,m} = B_{\frac{1}{m}}(x_n)$ y $\mathscr{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{U_{n,m} : m \in \mathbb{N}\}$. Sabemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\{U_{n,m} : m \in \mathbb{N}\}$ es numerable, por lo que $\mathscr{B}$ es numerable.

Sean $U \subseteq X$ abierto no vacío en X y $x \in U$, por ser U abierto podemos considerar $M \in \mathbb{N}$ tal que $B_{\frac{1}{M}}(x) \subseteq U$, al ser C denso existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_N \in B_{\frac{1}{2M}}(x)$, utilizando la simetría de la métrica sabemos que $x \in B_{\frac{1}{2M}}(x_N) \subseteq B_{\frac{1}{M}}(x) \subseteq U$. Por esta razón $x \in U_{N,2M} \subseteq U$.

Esto muestra que $\mathscr{B}$ es una base numerable para la topología de X y por lo tanto que X es II-numerable. $\square$

Utilizando este resultado, si (X, τ) es un espacio polaco podemos considerar una base numerable de su topología $\mathscr{B}$. Como τ se obtiene al cerrar a $\mathscr{B}$ bajo uniones numerables, entonces cualquier σ-álgebra que contenga a $\mathscr{B}$ también contiene a τ y como $\mathscr{B} \subseteq \tau$, es evidente que cualquier σ-álgebra que contenga a τ contiene a $\mathscr{B}$. Hemos mostrado así que la σ-álgebra generada por $\mathscr{B}$ es $\mathbb{B}(\tau)$.

Lo que siguen son dos lemas que nos muestran la versatilidad de los espacios polacos.

Lema 2.18. *Sean (X, τ) un espacio polaco y $F \subseteq X$ un conjunto cerrado, si denotamos por τ_F a la topología generada por la subbase $\tau \cup \{F\}$. Entonces (X, τ_F) es polaco, F es abierto y cerrado en τ_F y $\mathbb{B}(\tau) = \mathbb{B}(\tau_F)$*

Demostración. Sean X, F y τ_F como en las hipótesis. Sea $U = X \setminus F$, entonces U es abierto y por el teorema 2.15 tanto F como U son polacos. Sean d_F y d_U métricas completas acotadas por 1 compatibles con la topología relativa de F y U respectivamente. Definimos entonces $d' : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ como

$$d'(x,y) = \begin{cases} d_F(x,y) \text{ si } x,y \in F \\ d_U(x,y) \text{ si } x,y \in U \\ 2 \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

d' está bien definida pues U y F son ajenos. Veamos que d' define una métrica. Si $x,y \in X$, es evidente que $d(x,y) \geq 0$. Si $d(x,y) = 0$ entonces o bien $x,y \in U$ lo que implica que $d_U(x,y) = 0$ por lo que $x = y$ o bien $x,y \in F$ lo que implica que $d_F(x,y) = 0$ por lo que $x = y$. Además es claro que si $x \in X$ o bien $x \in F$ por lo que $d'(x,x) = d_F(x,x) = 0$ o bien $x \in U$ por lo que $d'(x,x) = d_U(x,x) = 0$.

De nuevo si $x,y \in X$, tenemos 3 casos, si ambos están en F, $d'(x,y) = d_F(x,y) = d_F(y,x) = d'(y,x)$, si ambos están en U, $d'(x,y) = d_U(x,y) = d_U(y,x) = d'(y,x)$, en otro caso $d'(x,y) = 2 = d'(y,x)$.

Por último si $x,y,z \in X$ y los tres están en el mismo conjunto entonces $d'(x,z) = d_U(x,z) \leq d_U(x,y) + d_U(y,z) = d'(x,y) + d'(y,z)$ o bien $d'(x,z) = d_F(x,z) \leq d_F(x,y) + d_F(y,z) = d'(x,y) + d'(y,z)$. Si x,z están en el mismo conjunto pero y no, entonces tendremos $d'(x,z) \leq 2+2 = d(x,y) + d(y,z)$. Por último, si x,z están en distintos conjuntos, entonces y no estará en el mismo conjunto que alguno de ellos, utilizando que las métricas d_F y d_U son definidas positivas, entonces $d'(x,z) = 2 \leq 2 + d'(y,z)$ o bien $d'(x,z) = 2 \leq 2 + d'(x,y)$. En cualquier caso esto muestra que d' es métrica.

Para mostrar que d' es métrica completa basta observar que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, entonces debe existir $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \leq N$ o bien $x_n \in F$ o bien $x_n \in U$. Pero tanto d_F como d_U son métricas completas por lo que en cualquier caso $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

Resta mostrar que esta métrica completa es compatible con la topología τ_F. Consideremos un abierto $V \subseteq X$ en τ_F y $x \in X$. Si $x \in F$ sabemos que $V \cap F \neq \varnothing$ es un abierto relativo en F, luego existe $1 > r > 0$ tal que $V_r(x) = \{y \in X : d_F(x,y) < r\} \subseteq V \cap F$. Como $1 > r$ entonces $V_r(x)$ está propiamente contenido en F por lo que $V_r(x) = \{y \in X : d'(x,y) < r\} = B_r(x)$. Análogamente si $x \in U$ podemos encontrar $B_\rho(x) \in \tau_F$ con $1 > \rho > 0$ utilizando la métrica d_U. Esto muestra que la topología generada por d' es más fina que τ_F.

Por otra parte, si $x \in X$ y $1 > r > 0$ entonces $B_r(x)$ es un abierto de la topología generada por d' que está contenido ya sea en U o en F por lo que es un abierto relativo de F o de U. Si es un abierto relativo de U como $U \in \tau$

entonces $B_r(x) \in \tau$ y por lo tanto $B_r(x) \in \tau_F$. Si es un abierto relativo de F, como $F \in \tau_F$ entonces $B_r(x) \in \tau_F$. Lo que muestra que la topología τ_F es más fina que la generada por d' y por lo tanto ambas son iguales.

Como $F \subseteq X$ entonces es separable como subespacio, sea $D_F \subseteq F$ un conjunto denso numerable para la topología relativa de F y $D \subseteq X$ un conjunto denso numerable para X. Si $E = D \cup D_F$, entonces E es numerable y si $\varnothing \neq V \in \tau_F$ entonces o bien existe $V_F \subseteq V$ un abierto relativo en F no vacío por lo que $\varnothing \neq V_F \cap D_F \subseteq V_F \cap E \subseteq V \cap E$ o bien existe $V_U \subseteq V$ un abierto en X no vacío por lo que $\varnothing \neq V_U \cap D \subseteq V_U \cap E \subseteq V \cap E$. Esto termina de probar que (X, τ_F) es un espacio polaco.

Como $F, X \setminus F \in \tau_F$, entonces F es abierto y cerrado en τ_F. Dado que $\tau \subseteq \tau_F$ entonces $\mathbb{B}(\tau) \subseteq \mathbb{B}(\tau_F)$, como $F \in \mathbb{B}(\tau)$ y $\tau \cup \{F\}$ es base para τ_F, entonces $\tau_F \subseteq \mathbb{B}(\tau)$ por lo que $\mathbb{B}(\tau_F) \subseteq \mathbb{B}(\tau)$, lo que garantiza la igualdad. □

Lema 2.19. *Sean (X, τ) un conjunto polaco y $(\tau_n)_{n\in\omega}$ una sucesión de topologías tales que para cada $n \in \mathbb{N}$, (X, τ_n) es polaco y $\tau \subseteq \tau_n$. Entonces si denotamos por τ_ω la topología generada por la subbase $\bigcup_{n\in\omega} \tau_n$ tenemos que (X, τ_ω) es polaco. Si además para cada $n \in \omega$, $\tau_n \subseteq \mathbb{B}(\tau)$, entonces $\mathbb{B}(\tau) = \mathbb{B}(\tau_\omega)$.*

Demostración. Sean (X, τ) y $(\tau_n)_{n\in\omega}$ como en las hipótesis. Consideremos $Y = \prod_{n\in\omega} X_n$ donde para cada $n \in \omega$, $X_n = X$ y definamos $f : X \to Y$ dada por $f(x) = (x_n)_{n\in\omega}$ donde para cada $n \in \omega$, $x_n = x$.

Veamos primero que $f[X]$ es cerrado en Y con la topología del producto. Sea $(y^m)_{m\in\omega}$ una sucesión tal que para cada $n \in \omega$, $y^m \in f[X]$ y que converge a un punto $y \in Y$. Luego, si para cada $n \in \omega$, $p_n : Y \to X$ es la proyección canónica entonces para cada $n \in \omega$, $p_n(y^m) \longrightarrow p_n(y)$, como la sucesión está en $f[X]$ para cada $n_1, n_2, m \in \omega$ se tiene que $p_{n_1}(y^m) = p_{n_2}(y^m)$. Por lo que para cada $n_1, n_2, m \in \omega$ tenemos que $(p_{n_1}(y^m))_{m\in\omega} = (p_{n_2}(y^m))_{m\in\omega}$, por lo que sus puntos de convergencia son iguales, es decir, para cada $n_1, n_2, \in \omega$ $p_{n_1}(y) = p_{n_2}(y)$, esto muestra que $y \in f[X]$ y por lo tanto que $f[X]$ es cerrado.

Sabemos entonces que $f[X]$ es polaco, pues es un cerrado en Y que es un espacio polaco. Además f evidentemente es inyectiva, por lo que restringiendo su codominio a $f[X]$ es biyectiva. Sea f^{-1} su inversa. Si equipamos a X con la topología τ_ω, entonces por una parte f es continua, pues si $U \subseteq Y$ es un abierto subbásico del producto existen $k \in \omega$ y $V \subseteq X_k$ abierto tales que $U = p_k^{-1}[V]$. Entonces $f^{-1}[U] = f^{-1}[p_k^{-1}[V]] = V$ que es un abierto en la topología $\tau_k \subseteq \tau_\omega$. Además f^{-1} es continua pues si $U' \subseteq X$ es un abierto subbásico en X entonces existe $l \in \omega$ con $U' \in \tau_l$ y $(f^{-1})^{-1}[U'] = f[U'] = p_n^{-1}[U'] \cap f[X]$ que es un abierto de la topología inducida en $f[X]$. Por lo que X es homeomorfo a $f[X]$

un espacio polaco, por lo tanto es polaco.

Ahora supongamos que para cada $n \in \omega$, $\tau_n \subseteq \mathbb{B}(\tau)$. Sea $\{U_m^n : m \in \omega\}$ una base numerable para τ_n, entonces $\{U_m^n : m, n \in \omega\}$ es una subbase numerable para τ_ω, por lo que $\tau_\omega \subseteq \mathbb{B}(\tau)$ de donde se concluye que $\mathbb{B}(\tau_\omega) \subseteq \mathbb{B}(\tau)$. Como para cada $n \in \mathbb{N}$, $\tau \subseteq \tau_n$ entonces $\tau \subseteq \tau_\omega$ por lo que $\mathbb{B}(\tau) \subseteq \mathbb{B}(\tau_\omega)$. Lo que muestra que ambas σ-álgebras son iguales. □

Teorema 2.20. *Sea X un espacio polaco y $A \subseteq X$ un conjunto de Borel, entonces existe una topología τ_A tal que $\tau \subseteq \tau_A$, (X, τ_A) es polaco, $\mathbb{B}(\tau) = \mathbb{B}(\tau_A)$ y A es abierto y cerrado en (X, τ_A).*

Demostración. Sea (X, τ) como en las hipótesis. Consideremos

$$S = \{B \subseteq X : \exists \tau \subseteq \tau_B[(\tau_B \text{ es polaca }), (B, (X \setminus B) \in \tau_B) \text{ y } (\mathbb{B}(\tau) = \mathbb{B}(\tau_B))]\}$$

Basta mostrar que $\tau \subseteq S$ y que S es una σ-álgebra. $\tau \subseteq S$ por el lema 2.18. Para mostrar que S es una σ-álgebra observemos que la misma propiedad que define a S asegura que es cerrado bajo complementos, consideremos entonces $(B_n)_{n\in\omega}$ una sucesión de elementos de S, sean para cada $n \in \omega$ $\tau_n = \tau_{B_n}$ y τ_ω definido como en el lema 2.19, entonces $B = \cup_{n\in\omega} B_n$ es abierto en (X, τ_ω) y este es un espacio polaco que satisface $\mathbb{B}(\tau) = \mathbb{B}(\tau_\omega)$ y $\tau \subseteq \tau_\omega$, de nuevo por el lema 2.18, $B \in S$. Esto muestra que $\mathbb{B}(\tau) \subseteq S$. □

2.2. Árboles.

De manera análoga a como utilizamos los filtros para estudiar la topología débil de los espacios de Banach, los árboles son una herramienta combinatoria básica utilizada en la teoría descriptiva para estudiar algunas propiedades de los espacios polacos. Es importante notar que el concepto de árbol que vamos a estudiar en este trabajo difiere del utilizado en la teoría de conjuntos general o en teoría de gráficas.

Definición 2.21. *Sea X un conjunto no vacío.*

a) Sea $n \in \omega$, denotamos por X^n al conjunto de sucesiones con dominio n e imagen en X, es decir, cualquier $s \in X^n$ es de la forma $s = (s(0), \ldots, s(n-1)) = (s_0, \ldots, s_{n-1})$, donde para cada $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ se tiene que $s_i \in X$.

b) Si $s \in X^n$, a n le llamamos la longitud de s y escribimos $\operatorname{long}(s) = n$.

c) Si $s \in X^n$ y $m \in \omega$ es tal que $m \leq n$ entonces denotamos $s|_m = (s_0, \ldots, s_{m-1})$ de manera que $s|_m \in X^m$.

d) Denotamos al conjunto de las sucesiones finitas con imagen en X por

$$X^{<\omega} = \bigcup_{n\in\omega} X^n.$$

e) Definimos una relación de orden en $X^{<\omega}$ de la siguiente manera: si $s, t \in X^{<\omega}$ decimos que t extiende a s o que s es un segmento inicial de t y escribimos $s \subseteq t$ si existe $m \in \omega$ tal que $t \mid_m = s$. Si $s, t \in X^{<\omega}$ no son comparables en este orden escribimos $s \perp t$.

f) Definimos la operación de concatenación en $X^{<\omega}$ de la siguiente manera: si $s, t \in X^{<\omega}$ son tales que $\operatorname{long}(s) = m$ *y* $\operatorname{long}(t) = n$ *entonces*

$$s^\frown t = (s_0, \ldots, s_{m-1}, t_0, \ldots, t_{n-1}) \in X^{n+m}.$$

Para $x \in X$ arbitrario escribimos $s^\frown x$ en lugar de $s^\frown(x)$.

g) Denotamos por X^ω al conjunto de sucesiones con dominios ω e imagen X.

h) Si $s \in X^\omega$ y $n \in \omega$, denotamos $s \mid_n = (s_0, \ldots, s_{n-1})$, de manera que $s \mid_n \in X^n$. Si $t = s \mid_n$ para alguna $n \in \omega$ decimos que t es un segmento inicial de s y escribimos $t \subseteq s$.

Es importante notar que en las definiciones anteriores se considera el caso donde $n = 0$ para el cual $X^0 = \{\varnothing\}$ por lo que se considera al vacío como una sucesión finita. Este contexto es el apropiado para definir los árboles y otros conceptos relacionado con ellos, agrupamos todos ellos en la siguiente definición.

Definición 2.22. *Sea X un conjunto no vacío.*

a) Decimos que $T \subseteq X^{<\omega}$ es un árbol en X si para cualesquiera $t \in T$ y $s \subseteq t$ tenemos que $s \in T$, es decir, T es cerrado bajo segmentos iniciales. Denotamos por $\operatorname{Ar}(X)$ *al conjunto de todos los árboles de X, a los elementos de un árbol los llamamos nodos.*

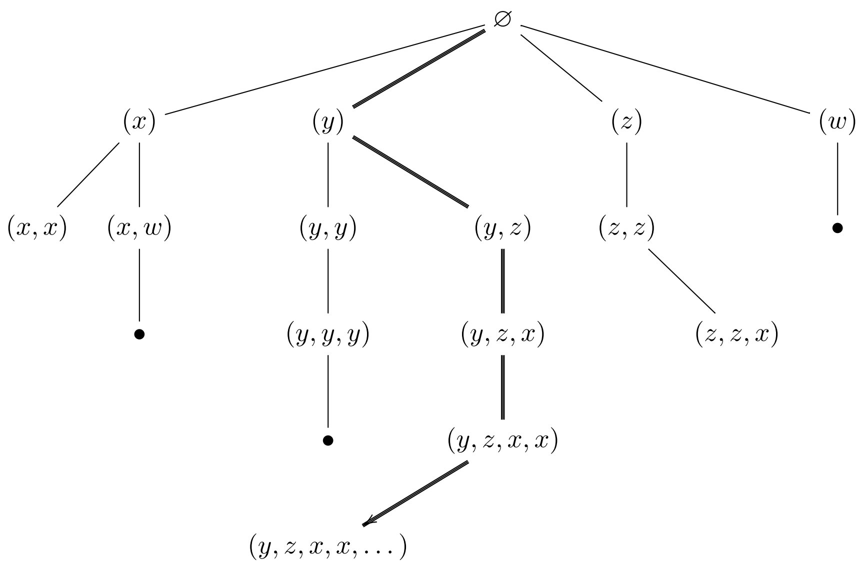
b) Decimos que $s \in X^\omega$ es una rama (infinita) de un árbol $T \subseteq X^{<\omega}$ si para cualquier $n \in \omega$ tenemos que $s \mid_n \in T$.

c) Para cualquier árbol $T \subseteq X^{<\omega}$ definimos el cuerpo del árbol $[T] \subseteq X^\omega$ como

$$[T] = \{s \in X^\omega : \forall n \in \omega,\ s \mid_n \in T\}.$$

d) Decimos que $T \in \operatorname{Ar}(X)$ es un árbol bien podado si para cualquier $s \in T$ existe $t \in T$ tal que $s \subsetneq t$, es decir, t es una extensión propia de s.

Un árbol se pueden representar de la siguiente manera:



En este ejemplo T no es un árbol bien podado pues (x,x) y (z,z,x) no tienen extensiones propias; se representa con una línea más gruesa a la rama infinita $(y,z,x,x,\dots) \in [T]$.

La primera propiedad importante de los árboles es que nos permiten representar una base de la topología del producto numerable de espacios discretos.

Proposición 2.23. *Sea X un espacio topológico no vacío con la topología discreta y $X^\omega = \prod_{n\in\omega} X$ con la topología del producto. Si para cada $s \in X^{<\omega}$, consideramos $C_s = \{y \in X^\omega : s \subseteq y\}$, entonces $\{C_s : s \in X^{<\omega}\}$ es una base para la topología de X^ω.*

Demostración. Sea X un espacio topológico discreto. Si $s \in X^{<\omega}$ y $k = \mathrm{long}(s)$, entonces
$$C_s = \bigcap_{i<k} p_i^{-1}[\{s_i\}].$$
Para cada $i < k$, $\{s_i\}$ es un abierto por tener X la topología discreta, esto implica que C_s es un abierto en la topología del producto.

Sea $U \subseteq X^\omega$ un abierto básico en la topología del producto, entonces existen $U_1, \dots, U_m \subseteq X$ y $n_1, \dots, n_m \in \omega$ tales que $U = \bigcap_{i\leq m} p_{n_i}^{-1}[U_i]$. Sean $n = \text{máx}\{n_1, \dots, n_m\}$ y
$$A = \{s \in X^{n+1} : \forall i \leq m,\ s_{n_i} \in U_i\}.$$

Veamos que

$$\bigcap_{i\leq m} p_{n_i}^{-1}[U_i] = \bigcup_{s\in A} C_s.$$

Si $t \in \bigcap_{i\leq m} p_{n_i}^{-1}[U_i]$, entonces para cada $i \leq m$, $t_{n_i} \in U_i$, por lo que $t\mid_{n+1}\in A$ y claramente $t \in C_{t|_{n+1}}$, entonces $t \in \bigcup_{s\in A} C_s$. Si $t \in \bigcup_{s\in A} C_s$, entonces $t\mid_{n+1}\in A$, por lo que para cada $i \leq m$ se tiene que $t_{n_i} \in U_i$, lo que implica que $t \in \bigcap_{i\leq m} p_{n_i}^{-1}[U_i]$. Esto muestra que $\{C_s : s \in x^{<\omega}\}$ es base de la topología. □

Este resultado motiva la siguiente definición:

Definición 2.24. *Sea X un conjunto no vacío y $s \in X^{<\omega}$, al conjunto*

$$C_s = \{x \in X : s \subseteq x\}$$

lo llamamos el cono de s.

Al conjunto $\{C_s : s \in X^{<\omega}\}$ lo llamamos la base estándar de X^ω.

Obsérvese que si $s, t \in X^{<\omega}$, entonces $s \subseteq t$ si y sólo si $C_t \subseteq C_s$.

Proposición 2.25. *Sean X un conjunto no vacío, $A \subseteq X^\omega$ y*

$$T_A = \{t\mid_n\in X^{<\omega} : t \in A, n \in \omega\}.$$

Entonces T_A es un árbol bien podado.

Demostración. Sean X un conjunto no vacío y $A \subseteq X^\omega$. Si $A = \varnothing$ entonces $T_A = \varnothing$ y la proposición es trivial. Si $A \neq \varnothing$, sea $s \in T_A$, entonces existen $t \in A$ y $n \in \omega$ tales que $t\mid_n= s$. Si $n = 0$, entonces $s = \varnothing$ y cualquier $q \subseteq \varnothing$ pertenece a T. Si $n > 0$ y $m \leq n$ entonces $s\mid_m= t\mid_m\in T_A$. Esto prueba que $T_A \in \mathrm{Ar}(X)$.

Sea $s \in T_A$ entonces existen $t \in A$ y $n \in \omega$ tales que $t\mid_n= s$, luego $s = t\mid_n\subseteq t\mid_{n+1}\in T_A$, por lo que s tiene extensiones propias en T_A. Esto prueba que T_A es bien podado. □

Debido a este resultado llamamos a T_A el árbol de A. La siguiente proposición muestra que podemos caracterizar con árboles a los conjuntos cerrados del producto numerable de espacios discretos.

Proposición 2.26. *Sea X un conjunto no vacío con la topología discreta.*

a) Si $T \in \mathrm{Ar}(X)$, entonces $[T]$ es un conjunto cerrado en la topología del producto de X^ω.

b) Si $A \subseteq X^\omega$, entonces $\mathrm{cl}(A) = [T_A]$.

Demostración. Sea X un conjunto no vacío con la topología discreta. Comencemos con (a), si $T \in \mathrm{Ar}(X)$ veamos que

$$X^\omega \setminus [T] = \bigcup_{s \in (X^{<\omega} \setminus T)} C_s.$$

Si $T = X^{<\omega}$ ambos conjuntos son vacíos. Si $T \neq X^{<\omega}$ entonces es claro que $X^\omega \setminus [T]$ es no vacío. En este caso sea $t \in X^\omega \setminus [T]$, entonces existe $n \in \omega$ tal que $t\mid_n \in X^{<\omega} \setminus T$, como $t \in C_{t|_n}$ entonces $t \in \bigcup_{s \in (X^{<\omega} \setminus T)} C_s$. Esto prueba que $X^\omega \setminus [T] \subseteq \bigcup_{s \in (X^{<\omega} \setminus T)} C_s$.

Como $T \neq X^{<\omega}$ entonces

$$\bigcup_{s \in (X^{<\omega} \setminus T)} C_s$$

es no vacío y podemos considerar a

$$t \in \bigcup_{s \in (X^{<\omega} \setminus T)} C_s.$$

Existe $q \in X^{<\omega} \setminus T$ tal que $t \in C_q$, es decir $t\mid_{\mathrm{long}(q)} = q$. Supongamos que $t \in [T]$, entonces para cualquier $n \in \omega$ se tiene que $t\mid_n \in T$, lo que implica que $q = t\mid_{\mathrm{long}(q)} \in T$, lo cual es una contradicción. Por tanto $t \in X^\omega \setminus [T]$. Esto prueba la igualdad de conjuntos. Por la proposición 2.23, $X^\omega \setminus [T]$ es abierto, lo que implica que $[T]$ es cerrado.

Para demostrar (b) consideremos $A \subseteq X^\omega$, $A \neq \varnothing$, obsérvese que $A \subseteq [T_A]$, pues si $t \in A$, entonces para cada $n \in \omega$ tenemos que $t\mid_n \in T_A$ por lo que $t \in [T_A]$. Por el inciso anterior esto implica que $\mathrm{cl}(A) \subseteq [T_A]$.

Sean entonces $t \in [T_A]$ y $U \subseteq X^\omega$ un abierto de la topología del producto tal que $t \in U$, por la proposición 2.23 existe $n \in \omega$, $n > 0$, tal que $C_{t|_n} \subseteq U$, pero como $t \in [T_A]$, entonces $t\mid_n \in T_A$, es decir, existe $s \in A$ tal que $s\mid_n = t\mid_n$. De esta manera $s \in C_{t|_n} \subseteq U$ y $U \cap A \neq \varnothing$ lo que permite concluir que $t \in \mathrm{cl}(A)$. Una vez más el caso $A = \varnothing$ es trivial por lo que concluimos que $\mathrm{cl}(A) = [T_A]$. $\square$

Esta proposición no sólo nos muestra que algunas operaciones topológicas en X^ω pueden ser descritas a través del conjunto de árboles de X, sino que además nos permite mostrar que los conceptos de árbol bien podado y conjunto cerrado en X^ω tienen una estrecha relación.

Corolario 2.27. *Sea X un espacio topológico no vacío con la topología discreta. Sea $\varphi : F(X^\omega) \longrightarrow \{T \in \mathrm{Ar}(X) : T \text{ es bien podado}\}$ definida como $\varphi(F) = T_F$, entonces φ es biyectiva, y tiene como inversa a ψ definida como $\psi(T) = [T]$.*

Demostración. Sea X un espacio topológico no vacío con la topología discreta y φ, ψ como en el enunciado. Sea $F \in F(X^\omega)$, es claro que $(\psi \circ \varphi)(F) = F$ pues $(\psi \circ \varphi)(F) = [T_F] = \mathrm{cl}(F) = F$.

Sea $T \in \mathrm{Ar}(X)$ bien podado. Veamos que $(\varphi \circ \psi)(T) = T$. Si $T = \varnothing$, entonces es trivial. Si $T \neq \varnothing$, sea $t \in T$, como T es bien podado podemos considerar $s \in [T]$ tal que $t \subseteq s$, luego $t = s \mid_{\mathrm{long}(t)}$ por lo que $t \in T_{[T]}$. Por otra parte, si $t \in T_{[T]}$ podemos considerar $s \in [T]$ tal que $s \mid_{long(t)} = t$, pero $s \in [T]$ significa que para cualquier $n \in \omega$, $s \mid_n \in T$, en particular $t \in T$.

Esto muestra que ψ es inversa de φ y por tanto que ambas son biyectivas. $\square$

Una de las razones por las que los árboles son una herramienta utilizada en teoría descriptiva es porque nos permiten estudiar algunos espacios polacos muy importantes. Consideremos el conjunto $2 = \{0, 1\}$ con la métrica discreta. Entonces claramente 2 es complatamente metrizable y es separable pues es finito. Siendo así, podemos afirmar utilizando el corolario 2.8, que 2^ω con la topología del producto es un espacio polaco. A este espacio, denotado por $\mathcal{C}$, se le conoce como el **espacio de Cantor**, en breve veremos por qué es tan importante en la teoría descriptiva de conjuntos. Al árbol $2^{<\omega}$ lo llamamos el **árbol de Cantor**.

Consideremos ω con la métrica discreta. Claramente ω es completamente metrizable y separable por ser numerable, entonces de nuevo podemos afirmar que ω^ω es un espacio polaco. A este espacio, denotado por $\mathcal{N}$, se le conoce como el **espacio de Baire**, en las siguientes secciones podrá apreciarse su importancia para la teoría descriptiva de conjuntos. Al árbol $\omega^{<\omega}$ lo llamamos el **árbol de Baire**.

En lo que sigue vamos a utilizar la herramienta que proporcionan los árboles para demostrar algunos resultados importantes de la teoría descriptiva de conjuntos.

Definición 2.28. *Sea X un espacio topológico.*

a) Decimos que $x \in X$ es un punto de condensación si para cualquier $U \in \mathscr{U}(x)$, U tiene cardinalidad no numerable.

b) Decimos que $x \in X$ es un punto límite si para cualquier $U \in \mathscr{U}(x)$ existe $y \in X$, $x \neq y$, tal que $y \in U$.

c) Decimos que $x \in X$ es un punto aislado si $\{x\} \in \mathscr{U}(x)$.

d) Decimos que X es un espacio perfecto si ninguno de sus puntos es aislado.

e) Decimos que $A \subseteq X$ es perfecto en X si A es cerrado y perfecto en la topología relativa.

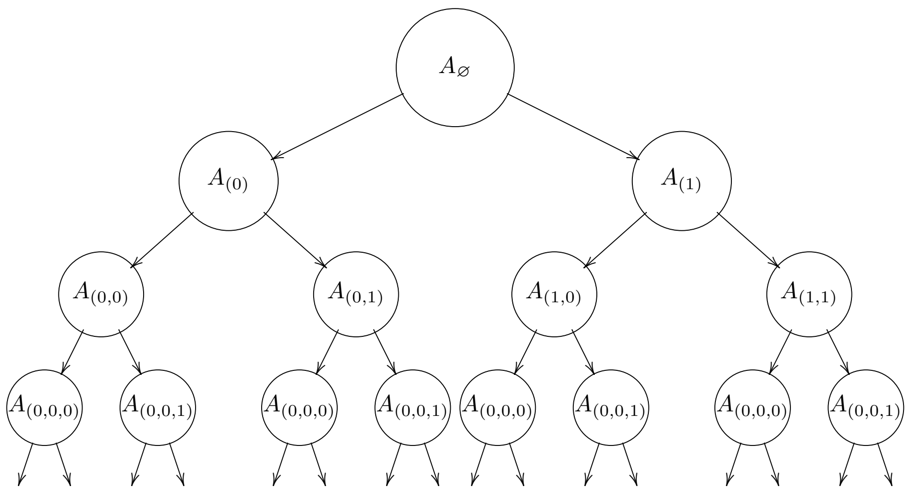
Los espacios perfectos son muy importantes, principalmente por su relación con el conjunto de Cantor. Para mostrar esto necesitamos otra definición.

Definición 2.29. *Sea X un conjunto, un esquema de Cantor en X es una familia de conjuntos $\mathscr{A} = \{A_s \subseteq X : s \in 2^{<\omega}\}$ que satisface:*

1) Para cada $s \in 2^{<\omega}$ se tiene que $A_{s^\frown 0} \bigcap A_{s^\frown 1} = \varnothing$,

2) Para cada $s \in 2^{<\omega}$ e $i \in \{0,1\}$, se tiene que $A_{s^\frown i} \subseteq A_s$.

El siguiente diagrama representa un esquema de Cantor donde cada conjunto está contenido en cuaquiera que tenga un flecha que lo señale, mientras que todo conjunto es ajeno a cualquiera a su izquiera o derecha.



Con esta definición podemos demostrar un importante teorema clásico.

Teorema 2.30. *Sea X un espacio polaco perfecto no vacío, entonces existe un conjunto perfecto $P \subseteq X$ y un homeomorfismo suprayectivo $f : \mathcal{C} \longrightarrow P$.*

Demostración. Sea X como en las hipótesis. Fijemos una métrica completa d compatible con la topología de X. Vamos a construir un esquema de Cantor $\mathscr{A} = \{A_s : s \in 2^{<\omega}\}$ en X tal que:

i) Para cada $s \in 2^{<\omega}$, se tiene que A_s es abierto y no vacío.

ii) Para cada $s \in 2^{<\omega}$, se tiene que $\operatorname{diam}(A_s) \leq 2^{-\operatorname{long}(s)}$.

iii) Para cada $s \in 2^{<\omega}$ e $i \in \{0,1\}$, se tiene que $\operatorname{cl}(A_{s^\frown i}) \subseteq A_s$.

La construcción de $\mathscr{A}$ procede por recursión sobre $\operatorname{long}(s)$. Para $k = 0$, consideremos $x \in X$ y $A_\varnothing = B_1(x)$. Entonces $A_\varnothing$ satisface (i) y (ii). Para $k = n+1$ supongamos que para cada $s \in 2^n$ ya hemos definido A_s. Sea $t \in 2^{n+1}$, denotemos $s = t\,|_n$. Como X es perfecto y A_s satisface (i), podemos considerar $x_0, x_1 \in A_s$ tales que $x_0 \neq x_1$, sean $r_{x_0}, r_{x_1} \in \mathbb{R}^+$ tales que $B_{r_{x_0}}(x_0), B_{r_{x_1}}(x_1) \subseteq A_s$. Sean también

$$r = \min\left\{\frac{r_{x_0}}{2}, \frac{r_{x_1}}{2}, \frac{d(x_0,x_1)}{2}\right\}.$$

Entonces definimos $A_{s^\frown 0} = B_r(x_0)$ y $A_{s^\frown 1} = B_r(x_1)$. Esto claramente define a A_t, es claro que tanto $A_{s^\frown 0}$ como $A_{s^\frown 1}$ satisfacen (i) y (ii) pues por hipótesis $\operatorname{diam}(A_s) \leq 2^{-\operatorname{long}(s)}$ entonces tenemos para $i \in \{0,1\}$ que $r_{x_i} \leq 2^{-\operatorname{long}(s)}$ por lo que $r_{x_i}/2 \leq 2^{-\operatorname{long}(s)-1}$. Esto hace evidente que $\operatorname{diam}(A_{s^\frown i}) = r \leq 2^{-\operatorname{long}(s)-1}$.

Sabemos que $r \leq \frac{d(x_0,x_1)}{2}$ por lo que $A_{s^\frown 1} \cap A_{s^\frown 0} = \varnothing$, lo que muestra (1). Además si $i \in \{0,1\}$ $A_{s^\frown i} \subseteq \operatorname{cl}(A_{s^\frown i}) = \operatorname{cl}(B_r(x_i)) \subseteq B_{2r}(x_i) \subseteq A_s$. Por lo que se satisface (2) y (iii). Esto muestra que $\mathscr{A}$ cumple lo requerido.

Vamos a utilizar a $\mathscr{A}$ para definir f. Consideremos $s \in \mathcal{C}$, para cada $n \in \omega$ $\operatorname{diam}(\operatorname{cl}(A_{(s|_n)^\frown s(n)})) \leq \operatorname{diam}(A_{s|_n}) \leq 2^{-\operatorname{long}(s|_n)} \leq 2^{-n}$, por (ii) y (iii) y es claro que $\operatorname{cl}(A_{(s|_n)^\frown s(n)}) \subseteq \operatorname{cl}(A_{s|_n})$ por (iii). Esto muestra que la colección $\{\operatorname{cl}(A_{s|_n}) : n \in \omega\}$ es una familia anidada de conjuntos cerrados no vacíos con diámetro evanescente, al ser d una métrica completa, por el teorema1.8 sabemos existe $x \in X$ tal que $\bigcap_{n\in\omega} A_{s|_n} = \bigcap_{n\in\omega} \operatorname{cl}(A_{s|_n}) = \{x\}$. Como esta x es única podemos definir sin ambigüedad $f(s) = x$.

Si denotamos $P = f[\mathcal{C}]$, entonces sólo resta probar que $f : \mathcal{C} \longrightarrow P$ es un homeomorfismo. Sean $s, t \in \mathcal{C}$ tales que $s \neq t$ y sea

$$B = \{n \in \omega : s(n) \neq t(n)\},$$

como este es un subconjunto de ω no vacío, podemos considerar $N = \min B$, por lo que $s|_N = t|_N$ y $s(N) \neq t(N)$. Por la definición de un esquema de Cantor tenemos que $A_{s|_{N+1}} \bigcap A_{t|_{N+1}} = \varnothing$ y dado que $f(s) \in A_{s|_{N+1}}$ y $f(t) \in A_{t|_{N+1}}$, concluimos que $f(s) \neq f(t)$. Por tanto f es inyectiva.

Para demostrar la continuidad vamos a utilizar la siguiente igualdad. Para cualquier $s \in 2^{<\omega}$,

$$f[C_s] = A_s \cap P$$

Sea $s \in 2^{<\omega}$. Si $x \in f[C_s]$, sabemos que existe $t \in C_s$ tal que $x = f(t)$, entonces $t|_{\operatorname{long}(s)} = s$, como $\{f(t)\} = \bigcap_{n\in\omega} A_{t|_n}$, entonces $f(t) \in A_s \cap P$. Si $x \in A_s \cap P$, entonces existe $t \in \mathcal{C}$ tal que $x = f(t)$. Obsérvese que por definición, para cada $n \leq \operatorname{long}(s)$ se tiene que $A_s \subseteq A_{s|_n}$, por lo que $f(t) \in A_{s|_n}$. Supongamos ahora que $s \not\subseteq t$, consideremos $B' = \{n < \operatorname{long}(s) : s(n) \neq t(n)\}$, al ser este un conjunto no vacío de naturales, podemos encontrar $m < \operatorname{long}(s)$ tal que $s|_m = t|_m$ y $s(m+1) \neq t(m+1)$ luego $A_{s|_{n+1}} \bigcap A_{t|_{n+1}} = \varnothing$, pero $f(t) \in A_{s|_{n+1}} \bigcap A_{t|_{n+1}}$, lo cual es una contradicción. Por tanto $s \subseteq t$, lo que implica que $t \in C_s$ y permite concluir que $x = f(t) \in f[C_s]$.

Veamos entonces que f es continua. Sean $s \in \mathcal{C}$ y $U \in \mathscr{U}(f(s))$, sea $n \in \omega$ tal que $B_{2^{-n}}(f(s)) \subseteq U$. Sea $x \in X$ tal que $A_{s|_{n+1}} = B_r(x)$, entonces $r \leq 2^{-n-1}$

y $f(s) \in B_r(x)$, por lo que $B_r(x) \subseteq B_{2^{-n}}(f(s))$. Sabemos que $C_{s|_{n+1}} \subseteq \mathcal{C}$ es una vecindad de s y que $f[C_{s|_{n+1}}] = A_{s|_{n+1}} \bigcap P$, por lo que

$$f(s) \in f[C_{s|_{n+1}}] \subseteq A_{s|_{n+1}} = B_r(x) \subseteq B_{2^{-n}}(f(s)) \subseteq U,$$

lo que muestra que f es continua.

Veamos que f es una función abierta. Sean $s \in \mathcal{C}$ y $V \in \mathscr{U}(s)$, sea $n \in \omega$ tal que $C_{s|_n} \subseteq V$, como $f[C_{s|_{n+1}}] = A_{s|_n} \bigcap P$, entonces $A_{s|_n} \bigcap P \subseteq f[V]$, dado que $f(s) \in A_n$ y A_n es abierto, entonces $f[V]$ es vecindad de $f(s)$ en la topología relativa a P. Por lo tanto f es abierta. Así, f es inyectiva, suprayectiva sobre su imagen, continua y abierta, por lo tanto es un homeomorfismo suprayectivo.

Como $\mathcal{C}$ es un compacto, entonces P es cerrado en X. Como $\mathcal{C}$ es perfecto, entonces P también lo es. $\square$

Teorema 2.31 (Cantor-Bendixson). *Sea X un espacio polaco. Entonces X puede escribirse de manera única como $X = P \cup N$, donde P y N son ajenos, P es un conjunto perfecto en X y N es abierto y numerable.*

Demostración. Sea X un espacio polaco, definimos

$$X^* = \{x \in X : x \text{ es un punto de condensación}\}.$$

Sean $P = X^*$ y $N = X \setminus X^*$. Si $N = \varnothing$ el resultado es trivial. En otro caso, por el teorema 2.17 podemos considerar $\mathscr{B} = \{U_n \subseteq X : n \in \mathbb{N}\}$ una base numerable de la topología. Consideremos $\mathscr{B}' = \{U_n \in \mathscr{B} : U \text{ es numerable}\}$, veamos que $N = \bigcup \mathscr{B}'$. Sea $x \in N$, como $\mathscr{B}$ es base, entonces existe $U \in \mathscr{B}$ tal que $x \in U \subseteq N$, por lo que $U \in \mathscr{B}'$, lo que implica que $x \in \bigcup \mathscr{B}'$. Sea $x \in \bigcup \mathscr{B}'$, entonces existe $U \in \mathscr{B}'$ tal que $x \in U$, pero claramente $U \in \mathscr{U}(x)$ y U es numerable, por lo que $x \in N$. Como N es una unión de abiertos es un abierto y, por tanto, P es cerrado. Además $\mathscr{B}'$ es numerable pues $\mathscr{B}$ lo es, de manera que N es una unión numerable de conjuntos numerables por lo que es numerable.

Es evidente que P es perfecto, P es cerrado pues cualquier vecindad de un punto en la cerradura de P es una vecindad de un punto en P por lo que no puede ser numerable. Por otra parte, de la definición de P es inmediato que no tiene puntos aislados.

Demostremos ahora la unicidad. Consideremos $X = P' \cup N'$, $X' \cap N' = \varnothing$ con P' perfecto en X y N' abierto numerable. Veamos que $P' \subseteq P$. Si $P' = \varnothing$ esto es trivial, de lo contrario sea $x \in P'$ y $U \subseteq X$ vecindad abierta de x, veamos que $U \cap P'$ es perfecto con la topología relativa. Sea $y \in U \cap P'$ y $V \subset X$ vecindad abierta de y, como U es abierto entonces $V \cap U$ es abierto en

X. Como P' es perfecto en X, entonces existe $z \in P' \cap (U \cap V)$ tal que $y \neq z$, por lo que y no es un punto aislado y por lo tanto $U \cap P'$ es perfecto. Por el teorema 2.30 existe $Q \subseteq U \cap P'$ homeomorfo al conjunto de Cantor. Pero el conjunto de Cantor es no numerable, por tanto Q, $U \cap P'$ y U también lo son, esto implica que $x \in P$. Esto prueba la contención deseada y, por tanto, que $N = (X \setminus P) \subseteq (X \setminus P') = N'$.

Veamos ahora que $N' \subseteq N$, de nuevo si $N' = \varnothing$ es trivial. De lo contrario sea $x \in N'$. Como N' es abierto entonces $N' \in \mathscr{U}(x)$ y como N' es numerable, entonces $x \in N$. Luego $P = (X \setminus N) \subseteq (X \setminus N') = P'$, por lo que $N = N'$ y $P = P'$. Lo que termina la demostración. $\square$

El teorema anterior justifica la siguiente definición

Definición 2.32. *Sea X un espacio polaco, $X = P \cup N$ con P y N ajenos, P perfecto en X y N abierto y numerable, entonces llamamos a P el núcleo perfecto de X.*

En teoría de conjuntos, la pregunta sobre la existencia de un conjunto con una cardinalidad mayor a la de $\mathbb{N}$, pero menor a la de $\mathbb{R}$ fue históricamente muy importante. Hoy sabemos que esta pregunta no puede responderse con la axiomatización de la teoría de conjuntos estándar, es decir, no podemos justificar la existencia de un conjunto con una cardinalidad intermedia, pero tampoco podemos probar que tal conjunto no exista. Sin embargo, para los conjuntos que hemos estudiado sí podemos ofrecer varios resultados, estos resultados se basan en que $|\mathcal{C}| = |\mathbb{R}|$; a esta cardinalidad la denotaremos por $\mathfrak{c}$.

Corolario 2.33. *Sea X un espacio polaco, entonces o bien $|X| \leq \aleph_0$ ó $\mathfrak{c} \leq |X|$.*

Demostración. Sea X espacio polaco, escribamos $X = P \cup N$, con P el núcleo perfecto de X. Si $P = \varnothing$, entonces $X = N$ con N numerable, por lo que $|X| \leq \aleph_0$. Si $P \neq \varnothing$, por el teorema 2.30 entonces existe $P' \subseteq P$ homeomorfo al conjunto de Cantor por lo que $\mathfrak{c} = |\mathcal{C}| = |P'| \leq |P| \leq |X|$. $\square$

Corolario 2.34 (Alexandrov, Hausdorff)**.** *Sea (X, τ) un espacio polaco y $A \in \mathbb{B}(\tau)$, entonces o bien $|A| \leq \aleph_0$ ó $\mathfrak{c} \leq |A|$.*

Demostración. Sea X un espacio polaco y $A \in \mathbb{B}(\tau)$, por el teorema 2.20, existe una topología τ_A tal que (X, τ_A) es polaco, A es abierto y cerrado en τ_A y $\mathbb{B}(\tau) = \mathbb{B}(\tau_A)$. Luego A es polaco con la topología relativa a τ_A. Por el corolario anterior, entonces o bien $|A| \leq \aleph_0$ ó $\mathfrak{c} \leq |A|$. $\square$

Este último corolario muestra que los conjuntos de Borel de cualquier espacio polaco satisfacen la Hipótesis del Continuo, la afirmación de que no existen conjuntos de cardinalidad intermedia entre $\aleph_0$ y $\mathfrak{c}$. Este resultado por sí mismo es sorprendente, si bien, no podemos probar que exista un conjunto de cardinalidad intermedia, ya hemos mostrado que de existir no puede ser un conjunto de Borel de un espacio polaco.

El hecho de que tanto el conjunto de Cantor, como el concepto de árbol hayan jugado un papel central en la demostración de estos resultados nos habla de que su estudio es sumamente relevante.

Durante las siguientes dos secciones el conjunto $\mathcal{N}$ va a ser de suma importancia. En lo que resta de la sección vamos a estudiar un poco más sus propiedades.

El hecho de que ω sea un buen orden nos permite definir la siguiente relación:

Definición 2.35. *Sean $x, y \in \mathcal{N}$ distintos y $n = \min\{m \in \omega : x(m) \neq y(m)\}$, decimos que x es menor que y y escribimos $x < y$, si $x(n) < y(n)$.*

Proposición 2.36. $(\mathcal{N}, <)$ *es un orden total estricto.*

Demostración. Primero veamos que $<$ es transitiva. Sean $x, y, z \in \mathcal{N}$ tales que $x < y$ y $y < z$.

Sea $n = \min\{m \in \omega : x(m) \neq y(m)\}$ y $n' = \min\{m \in \omega : y(m) \neq z(m)\}$. Es claro que $y \restriction_{n'} = z \restriction_{n'}$ y que $x \restriction_n = y \restriction_n$. Si $n < n'$ entonces $y \restriction_{n+1} = z \restriction_{n+1}$, por lo que $n = \min\{m \in \omega : x(m) \neq z(m)\}$ y $x(n) < y(n) = z(n)$ de manera que $x < z$. Si $n' < n$, entonces $x \restriction_{n'+1} = y \restriction_{n'+1}$, por lo que $n' = \min\{m \in \omega : x(m) \neq z(m)\}$ y $x(n') = y(n') < z(n')$, de manera que $x < y$. Por último si $n = n'$, entonces $x \restriction_{n+1} = y \restriction_{n+1} = z \restriction_{n+1}$ por lo que $n = \min\{m \in \omega : x(m) \neq z(m)\}$ y $x(n) < y(n) < z(n)$, de manera que $x < y$.

Por otra parte, si $x < y$ y $k = \min\{m \in \omega : x(m) \neq y(m)\}$ entonces $x(k) < y(k)$ por lo que claramente es falso que $y(k) < x(k)$, esto muestra que no es posible que $y < x$.

Esto demuestra que $<$ es un orden parcial estricto en $\mathcal{N}$, el hecho de que es un orden total es inmediato de la definición. $\square$

Proposición 2.37. *Sea $T \in \mathrm{Ar}(\omega)$ bien podado, entonces existe $a_T = \min[T]$, a a_T lo llamamos la rama más a la izquierda de T.*

Demostración. Sea $T \in \mathrm{Ar}(\omega)$ bien podado. La construcción de a_T recurre a una sucesión especial: vamos a construir por recursión una sucesión $(s_n)_{n\in\omega}$ en T tal que si $n \in \omega$, entonces $s_n \subseteq s_{n+1}$, $\mathrm{long}(s_n) = n$ y además para cualquier $y \in [T]$ tal que $s_n \subseteq y$ tenemos que $s_{n+1}(n) \leq y(n)$.

Definimos $s_0 = \varnothing$, si ya está definido s_n tal que $s_n \in T$ y $\mathrm{long}(s_n) = n$. Sea $A = \{m \in \omega : s_n\frown m \in T\}$, por ser T bien podado A es no vacío por lo que podemos considerar $m_0 = \min A$. Sea $s_{n+1} = s_n\frown m_0$, entonces $s_n \subseteq s_{n+1}$, $\mathrm{long}(s_{n+1}) = \mathrm{long}(s_n) + 1 = n+1$ y si $y \in [T]$ y $s_n \subseteq y$, como $y \in [T]$ entonces $y\mid_{n+1} \in T$, como $s_n \subseteq y$, entonces $y(n) \in A$, por lo que $s_{n+1}(n) \leq y(n)$.

Sea $x = \bigcup_{n\in\omega} s_n$, entonces sabemos que $x \in \mathcal{N}$, y como para cada $n \in \omega$, $x\mid_n = s_n \in T$, entonces $x \in [T]$. Veamos que $x = \min[T]$, sea $y \in [T]$ y $k = \min\{m \in \omega : x(m) \neq y(m)\}$, entonces $s_k = x\mid_k = y\mid_k$, por lo que $s_k \subseteq y$, lo que implica que $x(k) = s_{k+1}(k) \leq y(k)$, de manera que $x \leq y$. $\square$

Proposición 2.38. *Sea $x \in \mathcal{N}$, definimos*

$$\overleftarrow{x} = \{y \in \mathcal{N} : y < x\},$$

entonces $\overleftarrow{x}$ es un abierto en $\mathcal{N}$.

Demostración. Sea $x \in \mathcal{N}$. Sea $s \in \omega^{<\omega}$, consideremos

$$E_s = \{m \in \mathrm{dom}(s) : x(m) \neq s(m)\},$$

si $E_s \neq \varnothing$ denotamos por e_s a su mínimo. Sea

$$E = \{s \in \omega^{<\omega} : E_s \neq \varnothing \wedge s(e_s) < x(e_s)\}.$$

Veamos que

$$\bigcup_{s\in E} C_s = \overleftarrow{x}.$$

Como siempre, basta considererar los casos donde ambos conjuntos son no vacíos. Sea $y \in \bigcup_{s\in E} C_s$, sea $s \in E$, tal que $y \in C_s$, por lo primero sabemos que $s(e_s) < x(e_s)$ y por lo segundo $s \subseteq y$, entonces $y\mid_{e_s} = s\mid_{e_s} = x\mid_{e_s}$ y $y(e_s) = s(e_s) < x(e_s)$ por lo que $y < x$, es decir $y \in \overleftarrow{x}$.

Sea $z \in \overleftarrow{x}$, entonces $z < x$, sea $n = \min\{m \in \omega : x(m) \neq y(m)\}$, lo que implica que $z \in C_{z|_n}$, $n = e_{z|_n}$ y $z\mid_n(n) < x(n)$ por lo que $z\mid_n \in E$, de manera que $z \in \bigcup_{s\in E} C_s$. $\square$

Este resultado termina el material propio de esta sección, sin embargo, es pertienente realizar unas cuantas observaciones más.

De la misma manera que mostramos que el concepto de árbol bien podado se encuentra estrechamente relacionado con los conjuntos cerrados de un espacio, existen otros conceptos que nos permiten estudiar otras propiedades de los subconjuntos de un espacio, por ejemplo la propiedad de ser perfectos. Existe una teoría que estudia estas propiedades de los árboles, sin embargo, su estudio queda fuera de los objetivos de este trabajo. Para terminar la sección presentamos las siguientes definiciones y estudiamos un poco más la herramienta que el concepto de árbol nos permite desarrollar.

Definición 2.39. *Sea X un conjunto no vacío y $T \in \mathrm{Ar}(X)$.*

a) Decimos que T es perfecto si para cualquier $s \in T$ existen $t_1, t_2 \in T$ tales que $s \subseteq t_1$, $s \subseteq t_2$ y $t_1 \perp t_2$.

b) Decimos que T es bien fundado si para cualquier $s \in X^\omega$ existe $n \in \omega$ tal que $s\,|_n \notin T$, es decir $[T] = \varnothing$. Si T no es bien fundado decimos que es mal fundado. Denotamos el conjunto de todos los árboles bien fundados de X por $\mathrm{BF}(X)$.

El concepto de árbol bien fundado se encuentra estrechamente relacionado con la teoría de órdenes.

Definición 2.40. *Sea X un conjunto y $\prec \subseteq X \times X$ una relación sobre X. Decimos que $\prec$ es una relación bien fundada si cualquier $A \subseteq X$ no vacío tiene un elemento minimal, es decir, existe $a \in A$ tal que para cualquier $b \in A$ es falso que $b \prec a$.*

Dada $\prec$ una relación sobre X definimos $T_\prec \subseteq X^{<\omega}$ de la siguiente manera:

$$(x_n, \ldots, x_1, x_0) \in T_\prec \Leftrightarrow x_0 \prec x_1 \prec \cdots \prec x_n$$

y para cualquier $x \in X$, $(x) \in T_\prec$.

Las siguiente dos proposiciones estudian la relación entre las relaciones bien fundadas y los árboles bien fundados.

Proposición 2.41. *Sea X un conjunto y $\prec \subseteq X \times X$ una relación sobre X. Entonces $T_\prec \in \mathrm{Ar}(X)$ y $T_\prec$ es un árbol bien fundado si y sólo si $\prec$ es bien fundada.*

Demostración. Sea X un conjunto y $\prec$ una relación sobre X. Consideremos $t \in T_\prec$ no vacío, $t = (t_0, \ldots t_n)$ entonces $t_n \prec \cdots \prec t_0$. Por lo que para $\varnothing \neq s \subseteq t$ tenemos que si $1 < \mathrm{long}(s) = k$, entonces $s = (t_0, \ldots, t_{k-1})$ es claro que $t_{k-1} \prec \cdots \prec t_0$ por lo que $s \in T_\prec$, si por otra parte $\mathrm{long}(s) = 1$, entonces es evidente que $s \in T_\prec$. Los casos donde donde t ó s son vacíos son triviales. Esto prueba que $T_\prec \in \mathrm{Ar}(X)$.

Para demostrar la primera implicación por contrapuesta supongamos que $\prec$ no es bien fundada. Entonces existe $A \subseteq X$ no vacío que no tiene elementos minimales. Vamos a construir por recursión una sucesión $t = (x_n)_{n\in\omega}$ en A tal que para cualquier $n \in \omega$, $x_{n+1} \prec x_n$. Sea $x_0 \in A$ arbitrario, supongamos que

$x_n \in A$ ya se encuentra definido, sabemos que x_n no es minimal por lo que existe $x_{n+1} \prec x_n$. Esto implica que para cualquier $n \in \omega$, $t\ |_n \in T_\prec$, por lo que $T_\prec$ no es bien fundado.

De nuevo para demostrar por contrapuesta supongamos que $T_\prec$ no es bien fundado. Sea $t \in X^\omega$ tal que para cualquier $n \in \omega$, $t\ |_n \in T_\prec$ y sea $A = \{t_n \in X : n \in \omega\}$. Es claro que A es no vació y no tiene elementos minimales pues para cualquier $n \in \omega$, $x_{n+1} \in A$ y $x_{n+1} \prec x_n$. Por lo que $\prec$ no es bien fundada. $\square$

Proposición 2.42. *Sea X un conjunto no vacío y $T \in \mathrm{BF}(X)$ definimos $\prec \subseteq T \times T$ como $s \prec y \Leftrightarrow y \subsetneq s$. Entonces T es un árbol bien fundado si y sólo si $\prec$ es bien fundada.*

Demostración. Sea X un conjunto no vacío y $T \in \mathrm{BF}(X)$. Sea $\prec$ como en el enunciado.

Para demostrar por contraposición la primera implicación supongamos que $\prec$ no es bien fundada. Sea $A \subseteq T$ no vacío que no tiene elementos minimales. De nuevo podemos construir por recursión una sucesión $(x_n)_{n\in\omega}$ en A tal que para cualquier $n \in \omega$, $x_{n+1} \prec x_n$ o equivalentemente $x_n \subsetneq x_{n+1}$. Esto implica que $\bigcup_{n\in\omega} x_n \in [T]$, lo que implica que T no es bien fundado.

Una vez más para demostrar por contraposición supongamos que T no es bien fundado. Entonces existe $t \in [T]$. Sea $A = \{t\ |_n \in T : n \in \omega\}$. Es claro que A es no vacío y no tiene elementos minimales, por lo que $\prec$ no es bien fundada. $\square$

Es bien sabido que cualquier relación bien fundada admite un principio de recursión. Utilizando este principio podemos realizar la siguiente definición.

Definición 2.43. *Sea X un conjunto y $\prec$ una relación sobre X. Definimos la función rango $\rho : X \to \mathrm{ORD}$ de la siguiente manera:*

$$\rho(x) = \sup\{\rho(y) + 1 : y \prec x\}$$

y el rango de la relación $\rho(\prec) = \sup\{\rho(x) : x \in X\}$.

Esto a su vez nos permite definir la función orden de un árbol bien fundado T, $o : T \to \mathrm{ORD}$

$$o(x) = \sup\{o(y) + 1 : x \subsetneq y\}.$$

y el orden del árbol, $o[T] = \sup\{o(x) : x \in T\}$

El siguiente resultado evidente será utilizado más adelante:

Proposición 2.44. *Sea X un conjunto no vacío y $\prec$ una relación bien fundada sobre X, entonces $\rho(\prec) < \operatorname{card}(X)^+$. En particular si $T \in \operatorname{Ar}(\omega)$ entonces $o[T] < \omega_1$.*

El último resultado de esta sección es sumamente útil.

Definición 2.45. *Sean X, Y conjuntos no vacíos y $\prec$, $\prec^*$ relaciones bien fundadadas respectivamente sobre X y Y. Sea $\varphi : X \to Y$, decimos que φ es monótona si $x_1 \prec x_2$ implica que $\varphi(x_1) \prec^* \varphi(x_2)$.*

Proposición 2.46. *Sean X, Y conjuntos no vacíos y $\prec$, $\prec^*$ relaciones bien fundadadas respectivamente sobre X y Y. Sea $\varphi : X \to Y$ monótona, entonces para cualquier $x \in X$, $\rho(x) \leq \rho(\varphi(x))$ y $\rho(\prec) \leq \rho(\prec^*)$.*

Demostración. Sean $X, Y, \prec, \prec^*$ y φ como en las hipótesis. La prueba procede por inducción sobre $\rho(x)$. Sea $x \in X$ y supongamos que para cualquier $z \in X$ tal que $\rho(z) \leq \rho(x)$ tenemos que $\rho(z) \leq \rho(\varphi(z))$, es claro que si $z \prec x$ entonces tenemos que $\rho(z) \leq \rho(x)$, esto tiene como consecuencia que para cualquier $z \prec x$ se satisface que $\rho(z) \leq \rho(\varphi(z))$. Esto implica que

$$\rho(x) = \sup\{\rho(z) + 1 : z \prec x\} \leq \sup\{\rho(\varphi(z)) + 1 : z \prec x\}.$$

Por ser φ monótona tenemos que $\{\varphi(z) : z \prec x\} \subseteq \{y : y \prec^* \varphi(x)\}$ lo que implica que

$$\sup\{\rho(\varphi(z)) + 1 : z \prec x\} \leq \sup\{\rho(y) + 1 : y \prec^* \varphi(x)\} = \rho(\varphi(x)).$$

Estas dos desigualdades implican que $\rho(x) \leq \rho(\varphi(x))$. Lo que termina la inducción. Esto tiene como consecuencia que

$$\begin{aligned}\rho(\prec) = \sup\{\rho(x) : x \in X\} &\leq \sup\{\rho(\varphi(x)) : x \in X\} \\ &\leq \{\rho(y) : y \in Y\} = \rho(\prec^*).\end{aligned}$$

$\square$

Capítulo 3

Conjuntos analíticos y espacios de Borel estándares.

3.1. Conjuntos analíticos y espacios de Baire.

Durante el capítulo anterior introdujimos los conjuntos de Borel como una familia que contiene a la topología del espacio y que, hablando informalmente, se parecen mucho a los conjuntos abiertos. Existe a su vez una familia que contiene a los conjuntos de Borel y que también se parece mucho a estos. Los elementos de esta familia se llaman conjuntos analíticos, la historia sobre su desarrollo es sumamente apasionante.

Definición 3.1. *Sea X un espacio polaco. Un conjunto $A \subseteq X$ es llamado analítico si existe un espacio polaco Y y una función continua $f : Y \to X$ tal que $f[Y] = A$. Denotamos al conjunto de todos los conjuntos analíticos de X por $\Sigma_1^1(X)$.*

Para que la analogía con la construcción de los conjuntos de Borel a partir de los conjuntos abiertos se mantuviera, lo primero que tendríamos que mostrar es que los conjuntos de Borel son conjuntos analíticos. Gracias a los resultados que ya conocemos esto es muy sencillo.

Proposición 3.2. *Sea (X, τ) un espacio polaco, entonces $\mathbb{B}(\tau) \subseteq \Sigma_1^1(X)$.*

Demostración. Sea (X, τ) un espacio polaco y $A \in \mathbb{B}(X)$, sabemos por el teorema 2.20 que existe una topología τ_A tal que $\tau \subseteq \tau_A$, (X, τ_A) es polaco, $A \in \tau_A$ y $\mathbb{B}(\tau) = \mathbb{B}(\tau_A)$. Definimos $Id : (X, \tau_A) \to (X, \tau)$ como $Id(x) = x$. Es claro que

Id es continua pues si $U \in \tau$ entonces $Id^{-1}[U] = U$ y $U \in \tau_A$ pues $\tau \subseteq \tau_A$. Además $Id[A] = A$, pero $A \in \tau_A$ y (X, τ_A) es polaco, por lo que A es un espacio polaco con la topología relativa, de manera que $Id\,|_A \colon A \to X$ es continua con A polaco y cumple que $Id\,|_A\,[A] = A$. $\square$

Lo siguiente que quisiéramos estudiar son las similitudes entre los conjuntos analíticos y los conjuntos de Borel. Para esto es necesario estudiar primero con mayor detenimiento a los conjuntos analíticos. Este estudio requiere a su vez profundizar sobre los conocimientos adquiridos en la sección anterior, esta vez vamos a centrar nuestra atención en el espacio de Baire $\mathcal{N}$.

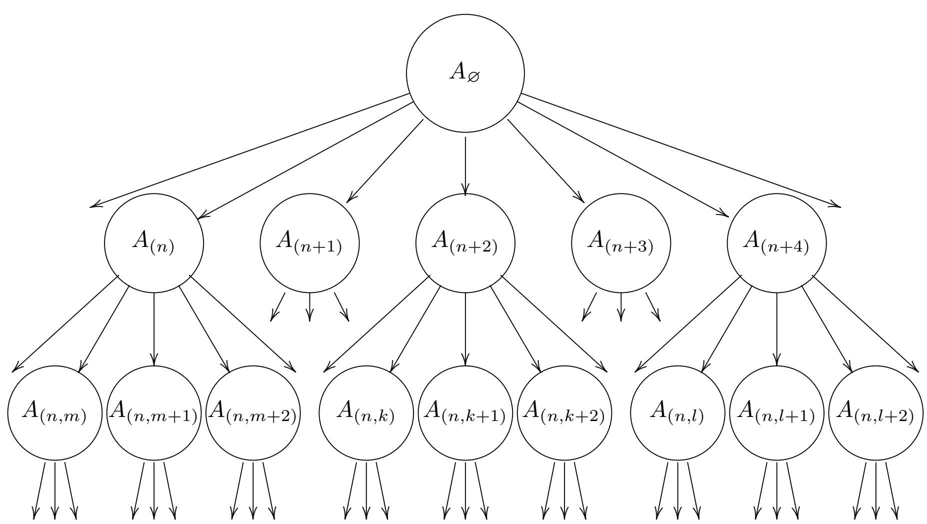
Definición 3.3. *Sea X un conjunto, un esquema de Suslin en X es una familia de conjuntos $\mathscr{S} = \{A_s \subseteq X : s \in \omega^{<\omega}\}$. Decimos que $\mathscr{S}$ es un esquema de Lusin si la familia satisface:*

1) Para cada $s \in \omega^{<\omega}$ y para cada $n, m \in \omega$, si $n \neq m$ entonces $A_{s^\frown n} \bigcap A_{s^\frown m} = \varnothing$.

2) Para cada $s \in \omega^{<\omega}$ y $n \in \omega$, $A_{s^\frown n} \subseteq A_s$.

Si X es un espacio métrico y un esquema de Suslin $\mathscr{S}$ en X satisface que para cada $s \in \omega^{<\omega}$, $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(A_n) = 0$, entonces decimos que el esquema tiene un diámetro desvaneciente.

El siguiente diagrama representa un esquema de Lusin donde, al igual que en nuestro diagrama de un esquema de Cantor, cada conjunto está contenido en cuaquiera que tenga un flecha que lo señale, mientras que todo conjunto es ajeno a cualquiera a su izquiera o derecha.



La prueba del teorema 2.30 utilizó un esquema de Cantor para construir una función continua con dominio $\mathcal{C}$. De manera análoga los esquemas de Suslin o de Lusin se utilizan para construir funciones continuas, los siguientes dos resultados ilustran cómo procede esta construcción.

Lema 3.4. *Sea (X,d) un espacio métrico y $\mathscr{S}$ un esquema de Suslin en X con diámetro desvaneciente, si*

$$D = \{s \in \mathcal{N} : \bigcap_{n\in\omega} A_{s|_n} \neq \varnothing\}$$

entonces existe una función $f : D \to X$.

Demostración. Sean (X,d), $\mathscr{S}$ y D como enuncia el lema. Si $D = \varnothing$ el resultado es trivial. De lo contrario sea $s \in D$, y $x, y \in \bigcap_{n\in\omega} A_{s|_n}$ como para cada $n \in \omega$ $x, y \in A_{s|_n}$ y $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(A_n) = 0$, entonces sabemos que $d(x,y) = 0$ por lo que $x = y$. Esto muestra que existe $x \in X$, tal que $\bigcap_{n\in\omega} A_{s|_n} = \{x\}$, si denotamos $x = f(s)$, esta expresión define una función $f : D \to X$. □

A la función f cuya existencia asegura el lema anterior la llamamos la función asociada al esquema de Suslin o de Lusin $\mathscr{S}$, según sea el caso. El siguiente lema estudia las propiedades de esta función.

Teorema 3.5. *Sea (X,d) un espacio métrico, $\mathscr{S}$ un esquema de Suslin en X con diámetro desvaneciente y $f : D \to X$ la función asociada a $\mathscr{S}$, entonces:*

1) f es continua.

2) Si $\mathscr{S}$ es de Lusin, entonces f es inyectiva.

3) Si para cada $s \in \omega^{<\omega}$, $A_s \subseteq \bigcup_{n\in\omega} A_{s^\frown n}$ entonces $A_\varnothing = f[D]$. En particular si $A_\varnothing = X$, entonces X es suprayectiva.

4) Si (X,d) es completo y para cada $s \in \omega^{<\omega}$ y cada $n \in \omega$, $\operatorname{cl}(A_{s^\frown n}) \subseteq A_s$, entonces D es cerrado en $\mathcal{N}$. Más aún, si para cada $s \in \omega^{<\omega}$ $A_s \neq \varnothing$, entonces $D = \mathcal{N}$.

5) Si para cada $s \in \omega^{<\omega}$, A_s es abierto y $A_s \subseteq \bigcup_{n\in\omega} A_{s^\frown n}$, entonces f es abierta. Y para cada $s \in \omega^{<\omega}$

$$f[C_s \cap D] = \bigcap_{k\leq long(s)} \left(A_{s|_k} \cap f[D]\right).$$

Demostración. Sean (X,d), $\mathscr{S}$ y f como en las hipótesis. A lo largo de la prueba la siguiente contención va a ser de suma utilidad: para cada $s \in \omega^{<\omega}$

$$f[C_s \cap D] \subseteq A_s \cap f[D].$$

En realidad, vamos a demostrar algo más general:

$$f[C_s \cap D] \subseteq \bigcap_{k \leq \operatorname{long}(s)} \left(A_{s|_k} \cap f[D]\right).$$

Sea $s \in \omega^{<\omega}$, si $C_s \cap D = \varnothing$ entonces la contención es trivial, de lo contrario sea $x \in f[C_s \cap D]$, entonces existe $t \in C_s \cap D$ tal que $f(t) = x$, dado que $t \in D$ esto muestra que $x \in f[D]$. Por definición de f, $x \in \bigcap_{n\in\omega} A_{t|_n}$ como $t \in C_s$ entonces para cualquier $k \leq \operatorname{long}(s)$ tenemos que $t\ |_k = s\ |_k$ por lo que para cualquier $k \leq \operatorname{long}(s)$, $x \in A\ |_{s_k}$. Así $x \in \bigcap_{k\leq \operatorname{long}(s)} \left(A_{s|_k} \cap f[D]\right)$. Esto prueba la segunda contención, la cual evidentemente implica la primera.

Comencemos con (1), sea $x \in f[D]$ y $\epsilon > 0$, entonces existe $s \in D$ tal que $f(s) = x$, dado que $\mathscr{S}$ es de radio desvaneciente existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{diam}(A_{s|_n}) < \epsilon$, de manera que $f[C_{s|_n} \cap D] \subseteq A_{s|_n} \cap f[D] \subseteq B_\epsilon(x) \cap f[D]$ por lo que f es continua.

Continuemos con (2), supongamos que $\mathscr{S}$ es un esquema de Lusin. Si $D = \varnothing$ el resultado es claro, de lo contrario sean $s, t \in D$ tales que $s \neq t$, entonces $B = \{n \in \omega : s(n) \neq t(n)\}$ es no vacío, sea $k = \min B$. Luego $s\ |_k = t\ |_k$, como $\mathscr{A}$ es un esquema de Lusin, entonces $A_{s|_k^\frown s(k)} \cap A_{t|_k^\frown t(k)} = \varnothing$, como $f(s) \in \bigcap_{n\in\omega} A_{s|_n}$ y $f(t) \in \bigcap_{n\in\omega} A_{t|_n}$, esto muestra que $f(s) \neq f(t)$. Por lo que f es inyectiva.

Pasemos a (3), supongamos que para cada $s \in \omega^{<\omega}$, $A_s \subseteq \bigcup_{n\in\omega} A_{s^\frown n}$. Demostremos que $A_\varnothing \subseteq f[D]$, si $A_\varnothing = \varnothing$ esto es claro. De lo contrario Sea $y \in A_\varnothing$, vamos a construir $x \in C_s \cap D$ tal que $f(x) = y$, para esto necesitamos una sucesión $(s_n)_{n\in\omega}$ contenida en $\omega^{<\omega}$ tal que para cada $n \in \omega$, $s_n \subseteq s_{n+1}$, $\operatorname{long}(s_n) = n$ y $y \in A_{s_n}$. Definimos $s_0 = \varnothing$, entonces $y \in A_\varnothing$. Si para $n \in \omega$ tenemos definido s_n tal que $y \in A_{s_n}$ y $\operatorname{long}(s_n) = n$, dado que $A_s \subseteq \bigcup_{n\in\omega} A_{s^\frown n}$, entonces existe $m \in \omega$ tal que $y \in A_{s_n^\frown m}$, por lo que si definimos $s_{n+1} = s_n^\frown m$ entonces $y \in A_{s_{n+1}}$, $s_n \subseteq s_{n+1}$ y $\operatorname{long}(s_{n+1}) = \operatorname{long}(s_n) + 1 = n + 1$. Esto muestra que tal sucesión existe.

Podemos definir $x = \bigcup_{n\in\omega} s_n$, entonces $x \in \mathcal{N}$ y para cada $n \in \omega$, $y \in A_{s_n} = A_{x|_n}$, por lo que $y \in \bigcap_{n\in\omega} A_{x|_n}$, es decir $f(x) = y$. Esto demuestra que $y \in f[D]$. Para mostrar que $f[D] \subseteq A_\varnothing$ de nuevo si $f[D] = \varnothing$ esto es claro, de lo contrario basta observar que si $y \in f[D]$ entonces existe $x \in D$ tal que $y \in \bigcap_{n\in\omega} A_{x|_n}$, como $x|_0 = \varnothing$ entonces $y \in A_\varnothing$. Esto demuestra la igualdad.

Prosigamos con (4), supongamos que (X, d) es completo y que para cada $s \in \omega^{<\omega}$, y cada $n \in \omega$, $\operatorname{cl}(A_{s^\frown n}) \subseteq A_s$. Una vez más basta considerar el caso $D \neq \varnothing$. Sea $t \in \operatorname{cl}(D)$, como $\mathcal{N}$ es métrico podemos considerar $(t_n)_{n\in\omega}$ tal que para cada $n \in \omega$, $t_n \in D$ y $t_n \longrightarrow t$. Veamos que $(f(t_n))_{n\in\omega}$ es de Cauchy en X. Sea $\epsilon > 0$, como es de diámetro desvaneciente existe $N \in \omega$ tal que si

$n \geq N$ entonces $\operatorname{diam}(A_{t|_n}) < \epsilon$. Además como $t_n \longrightarrow t$ y $C_{t|_N}$ es vecindad de t existe $M \in \omega$ tal que si $n \geq M$, entonces $t_n \in C_{t|_N}$. Sean $n, m \geq M$ entonces $t_n, t_m \in C_{t|_N} \cap D$, por lo que $f(t_n), f(t_m) \in A_{t|_N} \cap f[D]$, entonces tenemos que $d(f(t_n), f(t_m)) \leq \operatorname{diam}(A_{t|_N}) < \epsilon$. Esto muestra que $(f(t_n))_{n\in\omega}$ es de Cauchy, al ser (X, d) completo existe $y \in X$ tal que $f(t_n) \longrightarrow y$.

Ahora veamos que $y \in \bigcap_{n\in\omega} A_{t|_n}$. Sea $m \in \omega$, como $t_n \longrightarrow t$ y $C_{t|_{m+1}}$ es vecindad de t, existe $k \in \omega$ tal que si $n \geq k$, entonces $t_n \in C_{t|_{m+1}} \cap D$. Debido a la contención que ya mostramos esto implica que la sucesión $(f(t_{k+n}))_{n\in\omega}$ cumple que para cada $n \in \omega$, $f(t_{k+n}) \in A_{t|_{m+1}} \cap f[D] \subseteq A_{t|_{m+1}}$ y por ser subsucesión de $(f(t_n))_{n\in\omega}$ cumple que $f(t_{k+n}) \longrightarrow y$, por lo que $y \in \operatorname{cl}(A_{t|_{m+1}})$. Por hipótesis sabemos que $\operatorname{cl}(A_{t|_{m+1}}) \subseteq A_{t|m}$ lo que implica que $y \in A_{t|_m}$. Esto muestra que $y \in \bigcap_{n\in\omega} A_{t|_n}$, por lo que $t \in D$ y $f(t) = y$.

Por mostrar la segunda parte de (4) supongamos que además para cada $s \in \omega^{<\omega}$ $A_s \neq \varnothing$. Es claro que $D \subseteq \mathcal{N}$, para mostrar la otra contención consideremos $x \in \mathcal{N}$. Sea $m \in \omega$, entonces $\operatorname{cl}(A_{x|_{m+1}}) \subseteq A_{x|_m}$ por lo que

$$\bigcap_{n\in\omega} \operatorname{cl}(A_{x|_n}) \subseteq A_{x|_m}$$

lo que implica que

$$\bigcap_{n\in\omega} \operatorname{cl}(A_{x|_n}) \subseteq \bigcap_{n\in\omega} A_{x|_n}.$$

Por otra parte, sea $m \in \omega$, entonces $A_{x|_m} \subseteq \operatorname{cl}(A_{x|_m})$ por lo que

$$\bigcap_{n\in\omega} \operatorname{cl}(A_{x|_n}) \subseteq A_{x|_m}$$

lo que implica que

$$\bigcap_{n\in\omega} \operatorname{cl}(A_{x|_n}) \subseteq \bigcap_{n\in\omega} A_{x|_n}$$

Esto prueba que

$$\bigcap_{n\in\omega} \operatorname{cl}(A_{x|_n}) = \bigcap_{n\in\omega} A_{x|_n}$$

pero $\{\operatorname{cl}(A_{x|_n}) : n \in \omega\}$ es un conjunto de cerrados anidados no vacíos de diámetro desvanescente, al ser (X, d) completo, por el teorema 1.8, su intersección es no vacía, esto implica que $\bigcap_{n\in\omega} A_{x|_n} \neq \varnothing$ por lo que $x \in D$.

Terminemos con (5), supongamos que para cada $s \in \omega^{<\omega}$ y cada $n \in \omega$, A_s es abierto y $A_s \subseteq \bigcup_{n\in\omega} A_{s^\frown n}$. Sea $s \in \omega^{<\omega}$, primero vamos a mostrar que

$$f[C_s \cap D] = \bigcap_{k \leq \operatorname{long}(s)} \left(A_{s|_k} \cap f[D]\right).$$

Ya tenemos la mitad del camino recorrido. Para demostrar la contención faltante consideremos el caso no vacío, sea $y \in \bigcap_{k \leq \text{long}(s)} \left(A_{s|_k} \cap f[D]\right)$, vamos a construir $x \in C_s \cap D$ tal que $f(x) = y$, para esto necesitamos una sucesión $(s_n)_{n\in\omega}$ contenida en $\omega^{<\omega}$ tal que para cada $n \in \omega$, $s \subseteq s_n \subseteq s_{n+1}$, $\text{long}(s_n) = \text{long}(s) + n$ y $y \in A_{s_n}$. Definimos $s_0 = s$, supongamos que para $n \in \omega$ ya tenemos definida s_n que satisface $s \subseteq s_n$ y $y \in A_{s_n}$. Como $A_s \subseteq \bigcup_{n\in\omega} A_{s^\frown n}$ entonces existe $m \in \omega$ tal que $y \in A_{s_n^\frown m}$, por lo que si definimos $s_{n+1} = s_n^\frown m$ entonces $y \in A_{s_{n+1}}$, $s \subseteq s_n \subseteq s_{n+1}$ y $\text{long}(s_{n+1}) = \text{long}(s_n) + 1 = (\text{long}(s) + n) + 1$. Podemos definir $x = \bigcup_{n\in\omega} s_n$, entonces $x \in \mathcal{N}$. Sea $k \in \omega$, si $k \leq \text{long}(s)$ por hipótesis tenemos que $y \in A_{s|_k} = A_{x|_k}$, si $k > \text{long}(s)$ entonces $y \in A_{s_{(k-\text{long}(s))}} = A_{x|_k}$, por lo que $y \in \bigcap_{n\in\omega} A_{x|_n}$, es decir $f(x) = y$. Además $x\,|_{\text{long}(s_0)} = s_0 = s$, por lo que $x \in C_s \cap D$, es decir $y \in f[C_s \cap D]$.

Recordemos que $\{C_s : s \in \omega^{<\omega}\}$ es base de la topología de $\mathcal{N}$, por lo que para demostrar que f es abierta basta mostrar que para cada $s \in \omega^{<\omega}$, $f[C_s \cap D]$ es abierto en D . Sea $s \in \omega^{<\omega}$, entonces $\bigcap_{k\leq\text{long}(s)} A_{s|_k}$ es abierto por ser intersección finita de abiertos, lo que implica que $\bigcap_{k\leq\text{long}(s)} \left(A_{s|_k} \cap f[D]\right)$ es abierto en D, esto muestra por la igualdad ya probada que $f[C_s \cap D]$ es abierto. □

Este teorema nos muestra que el problema de encontrar funciones con propiedades convenientes y con dominio un subconjunto del espacio de Baire se reduce a encontrar un esquema de Suslin donde los conjuntos que lo componen satisfacen ciertas condiciones. A su vez la construcción de estos esquemas generalmente es por recursión, lo que simplifica aún más el problema. Los siguientes dos resultados ilustran el proceso que esta metodología sugiere para construir funciones.

Lema 3.6. *Sea (X, d) un espacio métrico*

1) Si $F, E \subseteq X$ son conjuntos cerrados, entonces $F \setminus E$ es un conjunto F_σ.

2) Si X es separable, $F \subseteq X$ es un conjunto F_σ y $\epsilon > 0$, entonces existe $\{F_n \subseteq X : n \in \omega\}$ tales que para cada $n \in \omega$, F_n es un conjunto F_σ, $\text{cl}(F_n) \subseteq F$, $\text{diam}(F_n) < \epsilon$, $\bigcup_{n\in\omega} F_n = F$ y si $n \neq m$ entonces $F_n \cap F_m = \varnothing$.

Demostración. Sea (X, d) un espacio métrico. Comencemos con (1), sean $E, F \subseteq X$ cerrados, como $X \setminus E$ es abierto existen $\{F_n \in F(X) : n \in \omega\}$ cerrados tales que $\bigcup_{n\in\omega} F_n = X \setminus E$, por lo que

$$F \setminus E = F \cap (X \setminus E) = F \cap \left(\bigcup_{n\in\omega} F_n\right) = \bigcup_{n\in\omega} (F \cap F_n).$$

Es claro que para cada $n \in \omega$, $F \cap F_n$ es un cerrado, por lo que esto prueba que $F \setminus E$ es un conjunto F_σ.

Continuemos con (2). Supongamos que X es separable, sean $F \subseteq X$ un conjunto F_σ y $\epsilon > 0$. Como F es un conjunto F_σ, sean $\{B_n \subseteq X : n \in \omega\}$ cerrados tales que $F = \bigcup_{n\in\omega} B_n$. Entonces podemos definir para cada $n \in \omega$ $C_n = \bigcup_{m\leq n} B_m$ de manera que $F = \bigcup_{n\in\omega} C_n$ y para cada $n \in \omega$, C_n es cerrado y $C_n \subseteq C_{n+1}$.

A su vez definimos para cada $n \in \omega$, $D_n = C_{n+1} \setminus C_n$. Fijemos $k \in \omega$, sabemos por (1) que D_k es conjunto F_σ por lo que podemos considerar $\{E^k_n \subseteq X : n \in \omega\}$ cerrados tales que $D_k = \bigcup_{n\in\omega} E^k_n$. Consideremos un conjunto denso numerable $\{x_m \in X : m \in \omega\}$, y sea para cada $n, m \in \omega$, $F^k_{(n,m)} = E^k_n \cap \mathrm{cl}(B_\epsilon(x_m))$. De manera que para cada $n, m \in \omega$, $F^k_{(n,m)}$ es cerrado, $\mathrm{diam}(F^k_{(n,m)}) < \epsilon$ y utilizando que $\{x_m \in X : m \in \omega\}$ es denso tenemos que

$$\bigcup_{(n,m)\in\omega\times\omega} F^k_{(n,m)} = \bigcup_{n\in\omega}\bigcup_{m\in\omega} \big(E^k_n \cap \mathrm{cl}(B_\epsilon(x_m))\big) = \bigcup_{n\in\omega} E^k_n = D_k.$$

Por último, consideremos el orden canónico $\geq$ en $\omega \times \omega$, para $n, m, k \in \omega$ y definamos

$$K^k_{(n,m)} = F^k_{(n,m)} \setminus \bigcup_{(i,j)<(n,m)} F^k_{(i,j)}.$$

Para $k, n, m \in \omega$ arbitrarios, sabemos que $\bigcup_{(i,j)<(n,m)} F^k_{(i,j)}$ y $F^k_{(n,m)}$ son conjuntos cerrados, de manera que por (1) $K^k_{(n,m)}$ es un conjunto F_σ. Dado que $K^k_{(n,m)} \subseteq F^k_{(n,m)}$ tenemos que $\mathrm{diam}(K^k_{n,m}) < \epsilon$, como además $F^k_{(n,m)} \subseteq E^k_n \subseteq D_k \subseteq C_{k+1} \subseteq F$ y $F^k_{(n,m)}$ es cerrado, entonces $\mathrm{cl}(K^k_{(n,m)}) \subseteq F$.

Entonces tenemos que:

$$\bigcup_{k\in\omega}\bigcup_{n\in\omega}\bigcup_{m\in\omega} K^k_{(n,m)} = \bigcup_{k\in\omega}\bigcup_{n\in\omega}\bigcup_{m\in\omega}\left(F^k_{(n,m)} \setminus \bigcup_{(i,j)<(n,m)} F^k_{(i,j)}\right)$$

$$= \bigcup_{k\in\omega}\bigcup_{n\in\omega}\bigcup_{m\in\omega} F^k_{(n,m)} = \bigcup_{k\in\omega} D_k = \bigcup_{k\in\omega} C_{k+1} \setminus C_k = \bigcup_{k\in\omega} C_k = F.$$

Sean $m, m', n, n', k, k' \in \omega$. Si $k \neq k'$ entonces $D_k \cap D_{k'} = \varnothing$ por construcción, como $K^k_{(n,m)} \subseteq D_k$ y $K^{k'}_{n',m'} \subseteq D'_k$, entonces $K^k_{(n,m)} \cap K^{k'}_{(n',m')} = \varnothing$. Si $k = k'$ pero $(n, m) \neq (n', m')$, entonces $K^k_{(n,m)} \cap K^{k'}_{(n',m')} = \varnothing$, también por construcción. Por último es claro que

$$\{K^k_{(n,m)} : k, n, m \in \omega\}$$

es numerable, por lo que cumplen todas las propiedades buscadas. $\square$

Teorema 3.7. *Sea X un espacio polaco no vacío. Entonces existe un conjunto cerrado $D \subseteq \mathcal{N}$ y una biyección continua $f : D \to X$.*

Demostración. Sea X un espacio polaco y d una métrica completa acotada por 1 compatible con su topología. Vamos a construir un esquema de Lusin $\mathscr{L}$ en X tal que:

i) Para cada $s \in \omega^{<\omega}$, $\operatorname{diam}(A_s) \leq 2^{-\operatorname{long}(s)}$.

ii) $A_\varnothing = X$.

iii) Para cada $s \in \omega^{<\omega}$, $A_s = \bigcup_{n\in\omega} A_{s^\frown n}$.

iv) Para cada $s \in \omega^{<\omega}$ y para cada $n \in \omega$, A_s es un conjunto F_σ y $\operatorname{cl}(A_{s^\frown n}) \subseteq A_s$.

Vamos a realizar esta construcción recursivamente. Definimos $A_\varnothing = X$, como d está acotada por 1, $\operatorname{diam}(X) \leq 1 = 2^0 = 2^{-\operatorname{long}(\varnothing)}$ y claramente X es un conjunto F_σ. Supongamos que para $t \in \omega^{<\omega}$, A_t es un conjunto F_σ tal que $\operatorname{diam}(A_t) \leq 2^{-\operatorname{long}(t)}$. Como A_t es un conjunto F_σ, por el inciso (2) del lema 3.6 sean $\{F_n \subseteq X : n \in \omega\}$ conjuntos F_σ tales que para cada $n \in \omega$, F_n es un conjunto F_σ, $\operatorname{cl}(F_n) \subseteq A_t$, $\operatorname{diam}(F_n) < 2^{-\operatorname{long}(t)-1}$, $\bigcup_{n\in\omega} F_n = A_t$ y si $n \neq m$ entonces $F_n \cap F_m = \varnothing$. Definimos para cada $n \in \omega$, $A_{s^\frown n} = F_n$.

Debido a que $A_t = \bigcup_{n\in\omega} A_{t^\frown n}$, este esquema satisface la segunda condición de un esquema de Lusin, la primera se satisface debido a que si $n \neq m$ entonces $F_n \cap F_m = \varnothing$.

Debido a que el esquema satisface (i), por el lema 3.4 existe una función $f : D \to X$ con $D \subseteq \mathcal{N}$. Por (ii) y (iii), debido (3) del teorema 3.5 f es suprayectiva, por (1) es continua, y al ser un esquema de Lusin por (2) f es inyectiva, es decir f es una biyección continua. Gracias a (iv) y a (4) del mencionado teorema D es cerrado en $\mathcal{N}$. $\square$

Este resultado puede ser mejorado por medio del siguiente resultado:

Proposición 3.8. *Sea X espacio topológico discreto no vacío, $F, E \subseteq X^\omega$ cerrados no vacíos tales que $F \subseteq E$. Entonces existe $\varphi : E \to F$ continua y suprayectiva tal que para cada $x \in F$, $\phi(x) = x$.*

Demostración. Sean X, E y F como en las hipótesis. Como E, F son cerrados por el corolario 2.27 podemos considerar $S, T \in \operatorname{Ar}(X)$ bien podados tales que $[S] = E$ y $[T] = F$. Definimos $\psi : S \to A^{<\omega}$ por recursión sobre $\operatorname{long}(s)$ de la siguiente manera: $\psi(\varnothing) = \varnothing$. Si $\psi(s)$ ya está definida, consideremos $x \in X$ tal que $s^\frown x \in S$, si $s^\frown x \in T$ entonces $\psi(s^\frown x) = s^\frown x$, si $s^\frown x \notin T$ como T es bien podado existe $y \in X$ tal que $s^\frown y \in T$ de manera que definimos $\psi(s^\frown x) = s^\frown y$. Por construcción es claro que para cada $s \in S$, $\operatorname{long}(s) = \operatorname{long}(\psi(s))$ y $\psi(s) \in T$.

Como para cada $e \in E$ y $n \in \omega$, $e\mid_n \in S$, y $\mathrm{long}(e\mid_n) = \mathrm{long}(\psi(e\mid_n))$, entonces $\bigcup_{n\in\omega}\psi(e\mid_n) \in [T]$. Por lo que definimos $\varphi : E \to F$ como $\varphi(e) = \bigcup_{n\in\omega}\psi(e\mid_n)$. Sea $f \in F$ como para cada $n \in \omega$ $\psi(f\mid_n) = f\mid_n$ entonces $\varphi(f) = \bigcup_{n\in\omega}\psi(f\mid_n) = \bigcup_{n\in\omega} f\mid_n = f$, esto muestra que φ es suprayectiva y que para cada $f \in F$, $\varphi(f) = f$. La continuidad de φ es clara pues si $f \in F$ y $n \in \omega$ y definimos $B = \{s \in S : \psi(s) = f\mid_n\}$

$$\varphi^{-1}[C_{f|_n}] = \{e \in E : \varphi(e)\mid_n = f\mid_n\} = \{e \in E : \psi(e\mid_n)\mid_n = f\mid_n\} = \bigcup_{s\in B} C_s \cap E$$

por la proposición 2.23 esto es suficiente para demostrar la continuidad. □

Gracias a este resultado tenemos dos maneras de construir funciones con dominio $\mathcal{N}$, la primera es construir un esquema de Suslin de diámetro desvanescente que satisfaga la propiedad (4) del teorema 3.5 y asegurar que cada uno de los elementos del esquema es no vacío. La segunda es construir un función que tenga como dominio un conjunto $F \subseteq \mathcal{N}$ cerrado no vacío en $\mathcal{N}$ y componerla con la función que esta proposición nos asegura existe.

El siguiente resultado utiliza este segundo método, como consecuencia de él podemos representar a los conjuntos analíticos de una manera muy conveniente.

Corolario 3.9. *Sea X un espacio polaco no vacío, entonces existe una función continua y suprayectiva $f : \mathcal{N} \to X$.*

Demostración. Sea X un espacio polaco no vacío. Por el teorema 3.7 existe $D \subseteq \mathcal{N}$ y $f : D \to X$ biyección continua, como X es no vacío, D es no vacío. Como $\mathcal{N} = \omega^\omega$, por la proposición 3.8 existe $\varphi : \mathcal{N} \to D$ continua y suprayectiva, de manera que $\varphi \circ f : \mathcal{N} \to X$ es continua y suprayectiva. □

Corolario 3.10. *Sea X un espacio polaco y $A \subseteq X$ distinto del vacío. Entonces A es analítico si y sólo existe $f : \mathcal{N} \to X$ continua tal que $f[\mathcal{N}] = A$.*

Demostración. Sean X y A como en las hipótesis.

$\Rightarrow$) Supongamos primero que A es analítico, sea Y un espacio polaco y $g : Y \to X$ continua tal que $g[Y] = A$, como A es no vacío entonces Y es no vacío. Por el corolario 3.9 existe $f : \mathcal{N} \to Y$ continua y suprayectiva por lo que $g \circ f : \mathcal{N} \to X$ es continua y $(g \circ f)[\mathcal{N}] = g[f[\mathcal{N}]] = g[Y] = A$.

$\Leftarrow$) Supongamos ahora que existe $f : \mathcal{N} \to X$ continua tal que $f[\mathcal{N}] = A$, como $\mathcal{N}$ es polaco esto muestra que A es analítico.

□

Con esta representación podemos empezar a estudiar las similitudes entre los conjuntos de Borel y los analíticos.

Definición 3.11. *Sea (X, τ) un espacio polaco y $A, B \subseteq X$, decimos que A, B son Borel-separables si existe $C \in \mathbb{B}(\tau)$ tal que $A \subseteq C$ y $B \subseteq X \setminus C$.*

Es claro que cualesquiera dos conjuntos de Borel ajenos son Borel-separables.

Lema 3.12. *Sea (X, τ) un espacio polaco, $P, Q \subseteq X$ y $\{P_n \subseteq X : n \in \omega\}$, $\{Q_m \subseteq X : m \in \omega\}$ familias de conjuntos tales que:*

1) $P = \bigcup_{n\in\omega} P_n$ y $Q = \bigcup_{m\in\omega} Q_m$.

2) Para cada $n, m \in \omega$ P_n y Q_m son Borel-separables.

Entonces P y Q son Borel-separables.

Demostración. Sean $(X, \tau), P, Q$, $\{P_n \subseteq X : n \in \omega\}$ y $\{Q_m \subseteq X : m \in \omega\}$ como en las hipótesis. Si $n, m \in \omega$, consideremos $R_{n,m} \in \mathbb{B}(\tau)$ tal que $P_n \subseteq R_{n,m}$ y $Q_m \subseteq X \setminus R_{n,m}$. Sea

$$R = \bigcap_{m\in\omega} \bigcup_{n\in\omega} R_{n,m},$$

es claro que $R \in \mathbb{B}(\tau)$, veamos que $P \subseteq R$ y $Q \subseteq X \setminus R$:

Sea $n \in \omega$, entonces para cualquier $m \in \omega$ tenemos que $P_n \subseteq R_{n,m}$. Por lo tanto para cualquier $m \in \omega$, $P = \bigcup_{n\in\omega} P_n \subseteq \bigcup_{n\in\omega} R_{n,m}$. Esto muestra que $P \subseteq \bigcap_{m\in\omega} \bigcup_{n\in\omega} R_{n,m} = R$.

Sea $m_0 \in \omega$, entonces para cualquier $n \in \omega$, $Q_{m_0} \subseteq X \setminus R_{n,m_0}$, es decir para cualquier $n \in \omega$, $Q_{m_0} \cap R_{n,m_0} = \varnothing$ por lo que $\left(\bigcup_{n\in\omega} R_{n,m_0}\right) \cap Q_{m_0} = \varnothing$. De esto es inmediato que $\left(\bigcap_{m\in\omega} \bigcup_{n\in\omega} R_{n,m}\right) \cap Q_{m_0} = \varnothing$. Por lo tanto $\left(\bigcap_{m\in\omega} \bigcup_{n\in\omega} R_{n,m}\right) \cap \left(\bigcup_{m\in\omega} Q_m\right) = \varnothing$, es decir $R \cap Q = \varnothing$ lo que significa que $Q \subseteq X \setminus R$. □

Teorema 3.13 (Teorema de separación de Lusin)**.** *Sea (X, τ) un espacio polaco y $A, B \in \Sigma^1_1(X)$ ajenos. Entonces A y B son Borel-separables.*

Demostración. Sean (X, τ), A y B como en las hipótesis. Supongamos sin pérdida de generalidad que A y B son no vacíos, luego existen $f : \mathcal{N} \to A$ y $g : \mathcal{N} \to B$ continuas y suprayectivas. Definimos para cada $s \in \omega^{<\omega}$ $f[C_s] = A_s$ y $g[C_s] = B_s$. De manera que para cada $s \in \omega^{<\omega}$

$$\bigcup_{n\in\omega} A_{s^\frown n} = \bigcup_{n\in\omega} f[C_{s^\frown n}] = f[\bigcup_{n\in\omega} C_{s^\frown n}] = f[C_s] = A_s$$

y analogamente $\bigcup_{n\in\omega} B_{s^\frown n} = B_s$.

Supongamos que A, B no son Borel-separables. Vamos a construir por recursión dos sucesiones en $\omega^{<\omega}$ $(s_n)_{n\in\omega}$ y $(t_n)_{n\in\omega}$ tales que para cada $k \in \omega$,

$\mathrm{long}(s_k) = k = \mathrm{long}(t_k)$, $s_k \subseteq s_{k+1}$, $t_k \subseteq t_{k+1}$ y A_{s_k}, B_{t_k} no son Borel-separables. Es claro que si $s_0 = \varnothing$ y $t_0 = \varnothing$, entonces $\mathrm{long}(s_0) = 0 = \mathrm{long}(t_0)$, como A, B no son Borel-separables, $A_\varnothing = g[C_\varnothing] = g[\mathcal{N}] = A$ y análogamente $B_\varnothing = B$, por lo que s_0 y t_0 cumplen lo buscado. Supongamos que $s_k, t_k \in \omega^{<\omega}$ ya están definidos tales que $\mathrm{long}(s_k) = k = \mathrm{long}(t_k)$ y A_{s_k} y B_{t_k} no son Borel-separables. Sabemos que $\bigcup_{n\in\omega} A_{s_k^\frown n} = A_{s_k}$ y análogamente $\bigcup_{n\in\omega} B_{t_k^\frown n} = B_{t_k}$, como A_{s_k}, B_{t_k} no son Borel-separables por el lema existen $n, m \in \omega$ tales que $A_{s_k^\frown n}$ y $B_{t_k^\frown m}$ no son Borel-separables, es claro que $A_{s_k^\frown n} \subseteq A_{s_k}$ y $B_{t_k^\frown m} \subseteq B_{t_k}$ y que $\mathrm{long}(s_k^\frown n) = k + 1 = \mathrm{long}(t_k^\frown m)$ por lo que definimos $s_{k+1} = s_k^\frown n$ y $t_{k+1} = t_k^\frown m$. Debido a las propiedades de estas dos sucesiones si $x = \bigcup_{n\in\omega} s_n$ y $y = \bigcup_{n\in\omega} t_n$, entonces $x, y \in \mathcal{N}$.

Como $f(x) \in A$ y $f(y) \in B$ entonces $f(x) \neq f(y)$, sean $U, V \subseteq X$ abiertos tales que $U \cap V \neq \varnothing$, $f(x) \in U$ y $f(y) \in V$. Como f es continua existe $n \in \omega$ tal que $f[C_{x|_n}] \subseteq U$, como g es continua existe $m \in \omega$ tal que $g[C_{y|_m}] \subseteq V$. Luego si $k = \min\{n, m\}$ entonces $A_{x|_k} = f[C_{x|_k}] \subseteq U$ y $B_{y|_k} = f[C_{y|_k}] \subseteq V$ por lo que $A_{x|_k} = A_{s_k}$ y $B_{y|_k} = B_{t_k}$ son Borel-separables. Esto es evidentemente un contradicción por lo que A, B son Borel-separables. $\square$

Corolario 3.14 (Teorema de Suslin)**.** *Sea (X, τ) un espacio polaco y $A \subseteq X$. Entonces $(X \setminus A), A \in \Sigma^1_1(X)$ si y sólo si $A \in \mathbb{B}(\tau)$.*

Demostración. Sea (X, τ) un espacio polaco y $A \subseteq X$.

Supongamos primero que $(X \setminus A), A \in \Sigma^1_1(X)$. Como A y $(X \setminus A)$ son ajenos, por el teorema de separación de Lusin existe $B \in \mathbb{B}(\tau)$ tal que $A \subseteq B$ y $(X \setminus A) \subseteq X \setminus B$. Esto claramente implica que $A = B$ por lo que $A \in \mathbb{B}(\tau)$.

Supongamos ahora que como $A \in \mathbb{B}(\tau)$, entonces también $X \setminus A \in \mathbb{B}(\tau)$, luego por la proposición 3.2, $A, (X \setminus A) \in \Sigma^1_1(X)$. $\square$

Esto muestra una importante relación entre los conjuntos de Borel y los conjuntos analíticos. De manera análoga a la jerarquía de Borel, existe una jerarquía proyectiva. Consideremos (X, τ) un espacio polaco, los conjuntos analíticos son, de nuevo, los conjuntos más sencillos . Siguiendo la idea de la jerarquía de Borel se define el conjunto de los conjuntos co-analíticos:

$$\Pi^1_1(X) = \{C \in \mathcal{P}(X) : (X \setminus C) \in \Sigma^1_1(X)\}$$

Con la misma intención con la cual se definieron los conjuntos analíticos, podemos definir

$$\Sigma^1_2(X) = \{A \in \mathcal{P}(X) : A \text{ es la imagen continua de algún } C \in \Pi^1_1(X)\}.$$

De la misma manera que en la jerarquía de Borel podemos repetir este proceso. Definimos por recursión sobre $\mathbb{N}$,

$$\Sigma^1_1(X) = \{A \in \mathcal{P}(X) : A \text{ es analítico } \}.$$

Para $n \in \mathbb{N}$,

$$\Pi^1_n(X) = \{C \in \mathcal{P}(X) : (X \setminus C) \in \Sigma^n_1\}$$

$$\Sigma^1_{n+1}(X) = \{A \in \mathcal{P}(X) : A \text{ es la imagen continua de algún } C \in \Pi^1_n(X)\}.$$

En este contexto podemos definir para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\Delta^1_n(X) = \Sigma^1_n(X) \cap \Pi^1_n(X),$$

por el teorema de Suslin tenemos que $\Delta^1_1(X) = \mathbb{B}(\tau)$. Se puede mostrar que también existe un diagrama análogo al de la jerarquía de Borel donde cada flecha denota contención entre conjuntos:

$$\begin{tikzcd}
 & \Sigma^1_1(X) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \Sigma^1_2(X) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \Sigma^1_n(X) \arrow[r] & \cdots \\
\mathbb{B}(\tau) \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dr] & & \Delta^1_2(X) \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \Delta^1_n(X) \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[r] & \cdots & \\
 & \Pi^1_1(X) \arrow[rr] \arrow[ur] & & \Pi^1_2(X) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \Pi^1_n(X) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Durante la prueba del teorema de Suslin mostramos que $\mathbb{B}(\tau) \subseteq \Sigma^1_1(X)$ y que $\mathbb{B}(\tau) \subseteq \Pi^1_1(X)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, es evidente que $\Sigma^1_n(X) \subseteq \Sigma^1_{n+1}(X)$ y que $\Pi^1_n(X) \subseteq \Pi^1_{n+1}(X)$. No exponemos la pruebas del resto de las contenciones que muestra el diagrama pues nos desviaría del objetivo de esta sección. Otra analogía importante es que de nuevo el caso donde estas flechas denotan contención propia es el caso en el que X no es numerable. El siguiente teorema, que tampoco vamos a demostrar, tiene además una gran importancia histórica.

Teorema 3.15 (Suslin)**.** *Sea (X, τ) espacio polaco no numerable, entonces $\mathbb{B}(\tau) \subsetneq \Sigma^1_1(X)$.*

A lo largo de la presente sección hemos observando la relevancia del espacio de Baire $\mathcal{N}$, en particular por las propiedades topológicas de las que goza. Resulta curioso que este no sea el único objeto matemático que recibe el nombre de espacio de Baire, la historia de esto es sumamente interesante.

René Baire demostró en su tesis doctoral lo que ahora se conoce como el teorema de la Categoría de Baire, nuestro teorema 3.17, un teorema que afirma que los espacios completamente metrizables tienen propiedades topológicas muy importantes. A partir de este trabajo, Bourbaki [Bou48] definió como espacios de Baire a aquellos espacios topológicos que tienen estas mismas propiedades.

En otro desarrollo de sus estudios, Baire definió en 1899 el espacio $\mathcal{N}$, pero su interés no consistía en estudiar a este espacio por sus propiedades topológicas, sino en el marco de un estudio más general sobre las funciones continuas. En 1902, en una carta a Borel [Bai90], y siete años despúes en su publicación [Bai09], Baire afirma que este espacio es 0-dimensional, recuperando la teoría que estaba desarrollando Lebesgue. Es hasta 1928 que Sierpiński, [Sie34], menciona en su libro de texto sobre topología que Baire había trabajado el espacio $\mathcal{N}$, y probablemente fue en esta mención que nombró a este espacio como lo conocemos hoy.

En esta tesis, también nos interesa estudiar los espacios de Baire según la definición de Bourbaki. Valga esto como explicación de por qué damos el mismo nombre a conceptos distintos.

La siguiente definición no parece muy natural a primera vista, sin embargo, a lo largo de este trabajo hemos estado trabajando con objetos que satisfacen esta definición sin llamarlos con este nombre.

Definición 3.16. *Sea (X, τ) un espacio topológico, decimos que X es un espacio de Baire si para cualquier familia $\{D_n \subseteq X : n \in \omega\}$ tal que para cada $n \in \omega$, D_n es abierto y denso, tenemos que $\bigcap_{n\in\omega} D_n$ es denso.*

El siguiente teorema nos muestra que estos objetos nos son muy familiares, curiosamente un análisis cuidadoso del segundo teorema que demostramos en esta tesis, el teorema 1.11, revela que en realidad aquel es un resultado particular de este teorema general.

Teorema 3.17 (Teorema de la Categoría de Baire)**.** *Sea (X, τ) un espacio completamente metrizable, entonces X es un espacio de Baire.*

Demostración. Sea (X, τ) espacio completamente metrizable y d una métrica compatible con su topología. Sea $\{D_n \subseteq X : n \in \omega\}$ tal que para cada $n \in \omega$, D_n es abierto y denso. Sea $U \subseteq X$ abierto no vacío. Vamos a construir por recursión una familia $\{F_n \subseteq X : n \in \omega\}$ de diámetro desvanescente de conjuntos cerrados no vacíos anidados tal que para cada $n \in \omega$, $\mathrm{int}(F_n) \neq \varnothing$ y $F_n \subseteq \bigcap_{m \leq n} D_m \cap U$. Como D_0 es denso existe $x_0 \in D_0 \cap U$, como D_0 y U son abiertos existe $0 < r < 1$ tal que $B_r(x_0) \subseteq D_0 \cap U$, luego $\mathrm{cl}(B_{r/2}(x_0)) \subseteq D_0 \cap U$, su interior es no vacío y $\mathrm{diam}(\mathrm{cl}(B_{r/2}(x_0))) \leq 1$, por lo que definimos $F_0 = \mathrm{cl}(B_{r/2}(x_0))$.

Supongamos ahora ya definido F_n tal que F_n es cerrado, $\mathrm{int}(F_n) \neq \varnothing$, $F_n \subseteq \bigcap_{m \leq n} D_m \cap U$. Como $\mathrm{int}(F_n)$ es un abierto no vacío y D_{n+1} es denso, sea $x_{n+1} \in \mathrm{int}(F_n) \cap D_{n+1}$, como además D_{n+1} es abierto, entonces existe $0 < \rho < 2^{-n-1}$ tal que $B_\rho(x_{n+1}) \subseteq D_{n+1} \cap \mathrm{int}(F_n)$, por lo que $\mathrm{cl}(B_{\rho/2}(x_{n+1})) \subseteq D_{n+1} \cap \mathrm{int}(F_n)$ y su interior es no vacío. Definimos $F_{n+1} = \mathrm{cl}(B_{\rho/2}(x_{n+1}))$, como $F_n \subseteq \bigcap_{m \leq n} D_m \cap U$ y $F_{n+1} \subseteq D_{n+1} \cap \mathrm{int}(F_n)$, entonces $F_{n+1} \subseteq \bigcap_{m \leq n+1} D_m \cap U$. Además es claro que $\mathrm{diam}(F_{n+1}) \leq 2^{-n-1}$.

Debido a que $\{F_n \subseteq X : n \in \omega\}$ es una familia de cerrados anidados no vacíos de diámetro desvanesciente, por el teorema 1.8 entonces $\bigcap_{n \in \omega} F_n \neq \varnothing$, debido a que para cada $n \in \omega$, $F_n \subseteq \bigcap_{m \leq n} D_m \cap U$, entonces $\bigcap_{n \in \omega} F_n \subseteq \bigcap_{n \in \omega} D_n \cap U$, por lo que $\bigcap_{n \in \omega} D_n \cap U \neq \varnothing$. Esto muestra que $\bigcap_{n \in \omega} D_n$ es denso. □

La teoría de espacios de Baire es sumamente amplia, en lo que resta de la sección sólo mostramos los resultados más elementales. El anterior resultado implica que el espacio de Baire $\mathcal{N}$ es un espacio de Baire.

Definición 3.18. *Sea X un espacio topológico, decimos que $N \subseteq X$ es denso en ninguna parte si* $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(N)) = \varnothing$.

Es evidente que si N es denso en ninguna parte entonces $\mathrm{cl}(N)$ también lo es.

Proposición 3.19. *Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$, entonces A es denso en ninguna parte si y sólo si $X \setminus \mathrm{cl}(A)$ es denso abierto.*

Demostración. Sea X espacio topológico y $A \subseteq X$.

Supongamos que A es denso en ninguna parte, sea $U \subseteq X$ abierto no vacío, como $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(A)) = \varnothing$, entonces $U \not\subseteq \mathrm{cl}(A)$, por lo que $U \cap (X \setminus \mathrm{cl}(A)) \neq \varnothing$, esto muestra que $(X \setminus \mathrm{cl}(A))$ es denso, dado que $\mathrm{cl}(A)$ es cerrado, entonces $(X \setminus \mathrm{cl}(A))$ es abierto.

Supongamos ahora que $X \setminus \mathrm{cl}(A)$ es denso abierto. Sea $U \subseteq X$ abierto no vacío, entonces $U \cap X \setminus \mathrm{cl}(A) \neq \varnothing$, por lo que $U \not\subseteq \mathrm{cl}(A)$. Dado que $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(A))$ es un abierto y $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(A)) \subseteq \mathrm{cl}(A))$ entonces $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(A)) = \varnothing$ □

Definición 3.20. *Sea X un espacio topológico, decimos que $A \subseteq X$ es magro, o de la primera categoría (de Baire) si existe $\{N_n : n \in \omega\}$ tal que para cada*

$n \in \omega$, N_n es denso en ninguna parte y $X = \bigcup_{n\in\omega} N_n$. Si $A \subseteq X$ no es de la primera categoría, decimos que es de la segunda categoría.

Proposición 3.21. *Sea X un espacio de Baire, entonces X es de la segunda categoría.*

Demostración. Sea X un espacio de Baire. Sea $\{N_n : n \in \omega\}$ tal que para cada $n \in \omega$, N_s es denso en ninguna parte. Entonces por la proposición anterior $\{X \setminus \mathrm{cl}(N_n) : n \in \omega\}$ es una familia de densos abiertos en X, al ser X un espacio de Baire, entonces $\bigcap_{n\in\omega} X \setminus \mathrm{cl}(N_n)$ es denso, en particular es no vacío. Sea $x \in \bigcap_{n\in\omega} X \setminus \mathrm{cl}(N_n)$, entonces

$$x \notin X \setminus \left(\bigcap_{n\in\omega} X \setminus \mathrm{cl}(N_n)\right) = \bigcup_{n\in\omega} \mathrm{cl}(N_n)$$

por lo que $\bigcup_{n\in\omega} N_n \neq X$. Esto muestra que X es de la segunda categoría. □

Esta proposición nos permite demostrar un resultado últil para la teoría descriptiva.

Proposición 3.22. *Sea X un espacio polaco perfecto no vacío y $D \subseteq X$ denso numerable, entonces D no es un conjunto G_δ.*

Demostración. Vamos a proceder por contraposición. Sea X un espacio topológico perfecto no vacío y D un conjunto denso numerable, supongamos que D es un conjunto G_δ. Sean para cada $n \in \omega$, D_n abierto de manera que $\bigcap_{n\in\omega} D_n = D$. Sea $n \in \omega$, como $D \subseteq D_n$ y D es denso, entonces D_n es denso y abierto. Por lo que para cada $n \in \omega$ si $N_n = X \setminus D_n$ entonces N_n es denso en ninguna parte.

Si $D = \{x_n : n \in \omega\}$ es claro que para cada $n \in \omega$, $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\{x_n\})) = \mathrm{int}(\{x_n\}) = \varnothing$, pues X es perfecto.

Esto muestra que $\{N_n : n \in \omega\} \cup \{\{x_n\} : n \in \omega\}$ es una familia numerable de conjuntos densos en ninguna parte. Además $\bigcup_{n\in\omega} N_n = X \setminus \left(\bigcap_{n\in\omega} D_n\right) = X \setminus D$ por lo que $\left(\bigcup_{n\in\omega} N_n\right) \bigcup \left(\bigcup_{n\in\omega} \{x_n\}\right) = X$. Esto muestra que X es la unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte, por la proposición anterior X no es un espacio de Baire, por lo que no puede ser completamente metrizable debido al teorema de la categoría de Baire. □

En teoría descriptiva se estudia la complejidad de un conjunto de Borel en términos de la jerarquía de Borel, es decir, si $A \in \mathbb{B}(X)$ se trata de encontrar cuál es el mínimo $\alpha \in \omega$, tal que $A \in \Sigma^0_\alpha(X)$ ó $A \in \Pi^0_\alpha(X)$. En general esto no es tarea sencilla, sin embargo este resultado es en muchos casos útil. Si podemos garantizar que el espacio X es perfecto no vacío y A es denso numerable en

X entonces $A \notin \Pi_2^0(X)$, por lo que si podemos describir a A de manera que $A \in \Sigma_2^0(X)$, entonces hemos encontrado la complejidad de A, pues entonces A no pertenece a ningún estrato igual o menor a $\Delta_2^0(X)$.

3.2. Espacios de Borel estándares y la estructura Effros-Borel.

En la primera sección de este capítulo introdujimos el concepto de σ-álgebra y la σ-álgebra de Borel como una manera natural de construir nuevos espacios polacos. En esta sección estudiaremos con mayor detenimiento la estructura de esta σ-álgebra.

Cuando en el primer capítulo estudiamos la estructura de los espacios de Banach muy pronto fue necesario estudiar funciones que respetaran esta estructura por lo que definimos los operadores acotados. De manera ánaloga en la primera sección de esta capítulo, al analizar los espacios polacos, las funciones continuas fueron sumamente importantes como funciones que respetan su estructura. De la misma manera, existen funciones que respetan la estructura de los espacios medibles.

Definición 3.23. *Sean (X, Σ) y (Y, Σ') espacios medibles*

a) Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función que cumple que para cualquier $A \in \Sigma'$, $f^{-1}[A] \in \Sigma$, entonces decimos que f es función medible.

b) Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función medible y f^{-1} también es función medible, decimos que f es un isomorfismo entre espacios medibles y que X es isomorfo a Y como espacio medible.

c) Si $A \subseteq X$ definimos la σ-álgebra relativa a A como $\Sigma_A = \{A \cap B : B \in \Sigma\}$.

d) Si (X, τ_X) y (Y, τ_Y) son espacios topológicos, $\Sigma = \mathbb{B}(\tau_X)$ y $\Sigma' = \mathbb{B}(\tau_Y)$ y $f : X \longrightarrow Y$ es función medible, entonces decimos que f es Borel medible. Si además f es un isomorfismo entre espacios medibles decimos que es un isomorfismo de Borel.

e) Decimos que (X, Σ) es un espacio de Borel estándar si existe un espacio polaco (Z, τ_Z) tal que (X, Σ) es isomorfo como espacio medible a $(Z, \mathbb{B}(\tau_Z))$. En este caso a los elementos de Σ también se les llama conjuntos de Borel y a la funciones medibles entre estos espacios funciones de Borel.

f) Sea (X, Σ) un espacio de Borel estándar. Decimos que $A \subseteq X$ es un conjunto analítico si existe un espacio polaco Y y un isomorfismo de Borel $f : X \to Y$ tal que $f[A]$ es analítico en Y.

El trabajo realizado en el segundo capítulo nos dice mucho sobre estos nuevos conceptos. Una primera observación es que dados dos espacios topológicos (X,τ) y (Y,τ') y $f : X \to Y$ continua, sabemos que f es medible respecto a las σ-álgebras $\mathbb{B}(\tau)$ y $\mathbb{B}(\tau')$. Como en lo que sigue vamos a trabajar con funciones medibles vale la pena enunciar y demostrar rápidamente algunas de sus propiedades:

Proposición 3.24. *Sean $(X,\Sigma),(Y,\Sigma')$ y (Z,Σ'') espacios medibles:*

a) Si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son medibles, entonces $g \circ f$ es medible.

b) Si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ genera a Σ' y para cada $A \in \mathcal{A}$, $f^{-1}[A] \in \Sigma$, entonces f es medible.

c) Si $f : X \to Y$ es una función y existe $A \in \Sigma$ tal que $f\mid_A$ y $f\mid_{X\setminus A}$ son medibles, entonces f es medible.

Demostración. Sean $(X,\Sigma),(Y,\Sigma')$ y (Z,Σ'') como en las hipótesis. Para (a) supongamos que $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son medibles, sea $A \in \Sigma''$, entonces $g^{-1}[A] \in \Sigma'$ por lo que $(g \circ f)^{-1}[A] = f^{-1}[g^{-1}[A]] \in \Sigma$.

El inciso (b) es consecuencia de que las imágenes inversas respetan las operaciones de unión numerable y diferencia conjuntista.

Para (c) sea $A \in \Sigma$ tal que $f\mid_A$ y $f\mid_{X\setminus A}$ son medibles, sea $B \in \Sigma'$, entonces $f_A^{-1}[B], f_{X\setminus A}^{-1}[B] \in \Sigma$, pero $f_A^{-1}[B] = f^{-1}[B] \cap A$ y $f_{X\setminus A}^{-1}[B] = f^{-1}[B] \cap X \setminus A$, dado que $f^{-1}[B] = \big(f^{-1}[B] \cap X \setminus A\big) \bigcup \big(f^{-1}[B] \cap A\big)$ entonces $f^{-1}[B] \in \Sigma$. Por lo que f es medible. $\square$

La idea intuitiva detrás del concepto de los espacios Borel estándar es que un espacio es de Borel estándar si podemos dotarlos de una topología polaca tal que los borelianos de esta topología coincidan con su σ-álgebra. Con esta interpretación todos los resultados que ya conocemos sobre los conjuntos de Borel y analíticos se pueden aplicar a estos nuevos conjuntos.

Una segunda observación sobre los espacios de Borel estándares se puede resumir en la siguiente proposición.

Proposición 3.25. *Sea (X,τ) un espacio polaco y $A \in \mathbb{B}(\tau)$, entonces $(A, \mathbb{B}(\tau)_A)$ es un espacio Borel estándar.*

Demostración. Sean (X,τ) y A como en las hipótesis. Es claro que $(A, \mathbb{B}(\tau)_A)$ es un espacio medible. El teorema 2.20 nos asegura que podemos darle a X una topología τ_A tal que $\tau \subseteq \tau_A$, (X,τ_A) es polaco, A es cerrado y abierto en τ_A y $\mathbb{B}(\tau) = \mathbb{B}(\tau_A)$. De manera que A es polaco con la topología relativa a τ_A por ser cerrado en el polaco (X,τ_A). También sabemos que las σ-álgebras de Borel de las topologías τ y τ_A restringidas a A son las mismas, es decir la identidad es un isomorfismo de Borel. Esto prueba que $(A, \mathbb{B}(\tau)_A)$ es de Borel estándar. □

Este teorema será de utilidad más adelante, por ahora nos ilustra que ya conocemos muchos ejemplos de espacios de Borel estándares. El siguiente resultado es inmediato a partir del inciso (a) de la proposición 3.24.

Proposición 3.26. *Sea X un espacio medible y Y un espacio de Borel estándar isomorfo como espacio medible a X, entonces X es Borel estándar.*

Corolario 3.27. *Sea (X, Σ) un espacio de Borel estándar y $S \in \Sigma$, entonces (S, Σ_S) es un espacio Borel estándar.*

Demostración. Sea (X, Σ) un espacio de Borel estándar y $S \in \Sigma$. Como X es Borel estándar existe (Y, τ) espacio polaco tal que $(Y, \mathbb{B}(\tau))$ es isomorfo a (X, Σ). Sea $f : X \to Y$ el isomorfismo entre ellos, si $B = f[S]$, entonces $B \in \mathbb{B}(\tau)$, por lo que $(B, \mathbb{B}(\tau)_B)$ es Borel estándar y $f\mid_S$ es isomorfismo entre este espacio y (S, Σ_S). Por lo que (S, Σ_S) es Borel estándar. □

Una de las estructuras centrales de este trabajo es la que posee el espacio Effros-Borel cuyas propiedades se pueden estudiar a partir de los conceptos que acabamos de definir.

Definición 3.28. *Sea (X, τ) un espacio polaco y consideremos $F(X)$ el conjunto de todos sus conjuntos cerrados. Sea $U \in \tau$, definimos*

$$B_U = \{F \in F(X) : F \cap U \neq \varnothing\}$$

y

$$\mathscr{B} = \{B_U \subseteq F(X) : U \in \tau\}.$$

Sea $\Sigma_{\mathscr{B}}$ la σ-álgebra generada por $\mathscr{B}$.

Llamamos al espacio medible $(F(X), \Sigma_{\mathscr{B}})$ el espacio Effros-Borel de X. En lo que sigue $\Sigma_{\mathscr{B}}$ denotará siempre a esta σ-algebra.

La propiedad más importante de este espacio, la cual vamos a utilizar de manera central en este trabajo, es que es de Borel estándar. Esta demostración es nuestro siguiente objetivo.

La idea de nuestro desarrollo parte de observar que trabajar con todos los conjuntos cerrados de un espacio es muy complicado, mientras que trabajar con conjuntos compactos es más sencillo. Posteriormente trataremos de encontrar una manera de 'traducir' conjuntos cerrados en conjuntos compactos.

Definición 3.29. *Sea (X,τ) un espacio topológico, consideremos*

$$K(X) = \{K \subseteq X : K \text{ es compacto en } X\}.$$

Sea $U \in \tau$, definimos

$$A_U = \{K \in K(X) : K \cap U \neq \varnothing\}$$

y

$$A^U = \{K \in K(X) : K \subseteq U\}$$

con esto definimos

$$\mathscr{A} = \{A_U \subseteq F(X) : U \in \tau\} \bigcup \{A^U \subseteq F(X) : U \in \tau\}.$$

Sea $\tau_{\mathscr{A}}$ la topología generada por $\mathscr{A}$. Llamamos a $\tau_{\mathscr{A}}$ la topología de Vietoris de X, en lo que sigue $\tau_{\mathscr{A}}$ denotará siempre a esta topología.

Proposición 3.30. *Sea (X,τ) un espacio topológico, para $V, U_0, \ldots U_n \in \tau$ definimos*

$$\underset{U_0,\ldots,U_n}{B^V} = \{K \in K(X) : (K \subseteq V), (K \cap U_0 \neq \varnothing), \ldots, (K \cap U_n \neq \varnothing)\}.$$

Entonces la familia de todos estos conjuntos es una base para $\tau_{\mathscr{A}}$.

Demostración. Sean $V_0, \ldots, V_n, U_0, \ldots U_m \in \tau$, si $V = \bigcap_{i \leq n} V_i$ entonces V es abierto y es claro que

$$\bigcap_{i \leq n} A^{V_i} = \{K \in K(X) : K \subseteq V\}$$

por lo que

$$\left(\bigcap_{i \leq n} A^{V_i}\right) \bigcap \left(\bigcap_{j \leq m} A_{U_j}\right) = \underset{U_0,\ldots,U_m}{B^V}.$$

Entonces la familia propuesta coincide con la familia de intersecciones finitas de elementos de la subbase, por lo tanto es una base de la topología.

□

Nuestro primero objetivo es mostrar que si X es polaco entonces $(K(X), \tau_{\mathscr{A}})$ también lo es. Para esto necesitamos definir una métrica compatible con τ. Por esta razón recurrimos a la siguiente definión.

Definición 3.31. *Sea (X, d) un espacio métrico con d una métrica acotada por 1, definimos*

$$d_H : K(X) \times K(X) \longrightarrow \mathbb{R}$$

como

$$d_H(K, K') = \begin{cases} 0 \text{ si } K = \varnothing = K' \\ 1 \text{ si } K = \varnothing, K' \neq \varnothing \\ 1 \text{ si } K \neq \varnothing, K' = \varnothing \\ \text{máx}\left\{ \sup\limits_{x \in K} d(x, K'), \sup\limits_{x' \in K'} d(x', K) \right\} \text{ si } K \neq \varnothing \neq K'. \end{cases}$$

Llamamos a d_H la métrica de Hausdorff.

Veamos que en efecto d_H es una métrica.

Lema 3.32. *Sea (X, d) un espacio métrico con d una métrica acotada por 1, entonces $(K(X), d_H)$ es un espacio métrico.*

Demostración. Sea (X, d) como en las hipótesis y d_H la métrica de Hausdorff. Sean $K, K' \in K(X)$, es claro que $d_H(K, K') \geq 0$. Si $d_H(K, K') = 0$, entonces consideremos el caso en el que alguno de estos conjuntos es vacío: si $K = \varnothing$ entonces $K' = \varnothing$; si $K' = \varnothing$ entonces $K = \varnothing$. Por lo que en cualquiera de estos dos casos tenemos que $K = \varnothing = K'$. Si ninguno de estos conjuntos es vacío, supongamos que son distintos, podemos suponer sin pérdida de generalidad que existe $x_0 \in K \setminus K'$, como K' es cerrado y $x_0 \notin K'$ entonces existe $r > 0$ tal que $B_r(x_0) \cap K' = \varnothing$, por lo que $d(x_0, K') \geq r$, por tanto $\sup\limits_{x \in K} d(x, K') \geq r$ y por lo tanto $d_H(K, K') \geq r$ lo cual es una contradicción. Por tanto $K = K'$. Es claro también que si $K = K'$ tanto el caso que uno sea vacío, como en el caso en que ninguno lo sea tenemos que $d(K, K) = 0$.

A su vez, para cualquier de los casos, ya sea que ambos conjuntos sean vacíos, que sólo uno lo sea o que ninguno lo sea, es claro a partir de la definición que $d_H(K, K') = d_H(K', K)$.

Sean $K, K', K'' \in K(X)$, ya sea que sólo uno de ellos sea vacío o que varios lo sean, es claro que $d_H(K, K'') \leq d_H(K, K') + d_H(K', K'')$ pues d está acotada por 1. Supongamos entonces que ninguno es vacío, sea $\epsilon > 0$ supongamos sin pérdida de generalidad que $d_H(K, K'') = \sup\limits_{x \in K} d(x, K'')$, sea $x \in K$ tal que

$$d_H(K, K'') - \epsilon < d(x, K'') \leq d_H(K, K'')$$

si $x'' \in K''$, entonces

$$d_H(K, K'') - \epsilon < d(x, K'') \leq d(x, x'').$$

Sea $x' \in K'$, utilizando la desigualdad del triángulo tenemos que

$$d_H(K, K'') - \epsilon < d(x, x') + d(x', x'')$$

por lo que

$$d_H(K, K'') - \epsilon \leq d(x, K') + d(x', K'').$$

Esto muestra que

$$d_H(K, K'') - \epsilon \leq \sup_{x \in K} d(x, K') + \sup_{x' \in K'} d(x', K'')$$

y por lo tanto

$$d_H(K, K'') - \epsilon \leq d_H(K, K') + d_H(K', K'').$$

Como ϵ fue arbitrario entonces

$$d_H(K, K'') \leq d_H(K, K') + d_H(K', K'').$$

Esto termina de mostrar que d_H es una métrica.

□

Veamos que esta métrica es testigo de que $(K(X), \tau_{\mathscr{A}})$ es polaco. Primero necesitamos mostrar que la métrica de Hausdorff es compatible con la topología de Vietoris.

Lema 3.33. *Sea (X, τ) un espacio metrizable, entonces la métrica de Hausdorff d_H es compatible con la topología $\tau_{\mathscr{A}}$, por lo que $(K(X), \tau_{\mathscr{A}})$ es metrizable.*

Demostración. Sea (X, τ) un espacio metrizable. Sea d una métrica acotada por 1 compatible con τ. Consideremos entonces $(K(X), \tau_{\mathscr{A}})$.

Sabemos ya que d_H es una métrica. Veamos primero que la topología generada por d_H es más fina que $\tau_{\mathscr{A}}$. Sea $K \in K(X)$ y $U \subseteq K(X)$ un abierto básico de $\tau_{\mathscr{A}}$ tal que $K \in U$. Supongamos primero que $K = \varnothing$, es claro que $B_{1/2}(\varnothing) = \{\varnothing\}$, por lo que $B_{1/2}(\varnothing) \subseteq U$. Supongamos ahora que $K \neq \varnothing$, entonces existen $V, U_0, \ldots, U_n \subseteq X$ abiertos en τ tales que

$$U = B^V_{U_0, \ldots, U_n}.$$

Como $K \subseteq V$ y V es abierto, entonces para cada $x \in K$ existe $r_x > 0$ tal que $B_{r_x}(x) \subseteq V$, luego si $r'_x = r_x/2$ también tenemos que $B_{r'_x}(x) \subseteq V$. De manera que

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} B_{r'_x}(x) \subseteq V.$$

Esto muestra que $\{B_{r'_x}(x)\}_{x\in K}$ es una cubierta abierta de K, por lo que existen $x_1, \ldots, x_m \in K$ tales que $K \subseteq \bigcup_{i \leq m} B_{r'_{x_i}}(x_i)$. Por otra parte, como $K \in \underset{U_0,\ldots,U_n}{B^V}$ si consideramos $j \in \{1, \ldots, n\}$, entonces podemos encontrar $y_j \in K \cap U_j$, como U_j es abierto existe $r_j > 0$ tal que $B_{r_j}(x_j) \subseteq U_j$. Sea $r = \frac{1}{2} \operatorname{mín}\{r'_{x_1}, \ldots, r'_{x_m}, r_1, \ldots r_n\}$, veamos que $B_r(K) \subseteq K(X)$ cumple que $B_r(K) \subseteq \underset{U_0,\ldots,U_n}{B^V}$.

Sea $K' \in B_r(K)$, como $r \leq 1/2$ sabemos que $K' \neq \varnothing$, sea $z \in K'$, como $d_H(K, K') < r$, entonces $d(z, K) < r$, sea $x \in K$ tal que $d(z, x) < r$, como $x \in K$ existe $i \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $x \in B_{r'_{x_i}}(x_i)$, por lo que $d(z, x_i) \leq d(z, x) + d(x, x_i) < r'_{x_i} + r'_{x_i} = r_{x_i}$, como $B_{r_{x_i}}(x_i) \subseteq V$, entonces $z \in V$. Esto muestra que $K' \subseteq V$.

Consideremos ahora $j \in \{1, \ldots n\}$, como $d_H(K, K') < r$ entonces $d(y_j, K') < r$, sea $z' \in K'$ tal que $d(y_j, z') < r$, como $r < r_j$ entonces $z' \in B_{r_j}(y_j) \subseteq U_j$, por lo que $K' \cap U_j \neq \varnothing$. Esto muestra que $K' \in \underset{U_0,\ldots,U_n}{B^V}$ por lo que $B_r(K) \subseteq \underset{U_0,\ldots,U_n}{B^V}$. Lo que a su vez permite concluir que la topología generado por d_H es más fina que $\tau_{\mathscr{A}}$.

Veamos ahora que $\tau_{\mathscr{A}}$ es más fina que la topología generada por d_H. Consideremos $L \in K(X)$ y $\rho > 0$, si $L = \varnothing$ y $\rho < 1$ entonces $B_\rho(\varnothing) = \{\varnothing\} = A^{\varnothing}$, si $\rho \geq 1$ entonces $B_\rho(\varnothing) = K(X) = A^X$. Supongamos ahora que $L \neq \varnothing$, de nuevo si $\rho \geq 1$ entonces $B_\rho(L) = K(X) = A^X$, supongamos entonces que $\rho < 1$ consideremos

$$U' = \bigcup_{l \in L} B_{\rho/4}(l).$$

Es claro que U' es abierto en τ. Además $\{B_{\rho/4}(l)\}_{l\in L}$ es cubierta abierta por lo que existen $l_1, \ldots, l_{n'} \in K$ tales que

$$L \subseteq \bigcup_{i \leq n'} B_{\rho/4}(l_j).$$

Sean para cada $j \in \{1, \ldots n'\}$

$$V_j = B_{\rho/4}(l_j).$$

y veamos que

$$\underset{V_0,\ldots,V_{n'}}{B^{U'}} \setminus \{\varnothing\} \subseteq B_\rho(L).$$

Es claro que $\underset{V_0,\dots,V_n'}{B^{U'}} \setminus \{\varnothing\}$ es un abierto en $\tau_{\mathscr{A}}$ que contiene a L. Sea $L' \in \underset{V_0,\dots,V_n'}{B^{U'}} \setminus \{\varnothing\}$, entonces $L' \subseteq U'$ y $L' \neq \varnothing$, sea $l' \in L'$, como $L' \subseteq U'$, entonces existe $l \in L$ tal que $l' \in B_{\rho/4}(l)$, por lo que $d(l', l) < \rho/4$ esto implica que $d(l', L) < \rho/4$. Esta desigualdad permite concluir que

$$\sup_{l' \in K'} d(l', L) \leq \rho/4 < \rho.$$

Por otra parte si $q \in L$ entonces existe $j \in \{1, \dots n'\}$ tal que $q \in B_{\rho/4}(l_j)$, pero como $L' \in \underset{V_0,\dots,V_n'}{B^{U'}} \setminus \{\varnothing\}$ entonces $L' \cap V_j \neq \varnothing$, sea $q' \in L' \cap V_j$ luego $d(q', l_j) < \rho/4$ por lo que $d(q, q') \leq d(q, l_j) + d(l_j, q') < \rho/4 + \rho/4 = \rho/2$, esto implica que $d(q, L') < \rho/2$. Esta última desigualdad permite concluir que $\sup_{q \in K} d(q, L') \leq \rho/2 < \rho$. Por lo que $d_H(L, L') < \rho$, es decir que $L' \in B_\rho(L)$. Esto muestra que $\underset{V_0,\dots,V_n'}{B^{U'}}\{L\} \setminus \{\varnothing\} \subseteq B_\rho(L)$, por lo que $\tau_{\mathscr{A}}$ es más fina que la topología generada por d_H. Por lo tanto ambas topologías son la misma, lo que termina la prueba. □

Para exponer los resultados que nos aseguran que $(K(X), \tau_{\mathscr{A}})$ es polaco si (X, τ) lo es, necesitamos el siguiente resultado estándar sobre los espacios métricos.

Definición 3.34. *Sea (X, d) un espacio métrico, decimos que $A \subseteq X$ es totalmente acotado si para cada $\epsilon > 0$ existe $F \subseteq X$ finito tal que $A \subseteq \bigcup_{x \in F} B_\epsilon(x)$.*

Teorema 3.35. *Sea (X, d) un espacio métrico, entonces $K \subseteq X$ es compacto si y sólo si es cerrado y totalmente acotado.*

El siguiente profundo resultado ilustra cómo se comporta la convergencia en $(K(X), \tau_{\mathscr{A}})$.

Teorema 3.36. *Sea (X, τ) un espacio topológico completamente metrizable, entonces $(K(X), \tau_{\mathscr{A}})$ también es completamente metrizable.*

Demostración. Consideremos (X, τ) un espacio topológico completamente metrizable. Sea d métrica completa acotada por 1 compatible con τ, por los lemas anteriores sabemos que $(K(X), \tau_{\mathscr{A}})$ es metrizable y que la métrica de Hausdorff d_H es compatible con su topología. Resta demostrar que d_H es una métrica completa.

Sea $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy con la métrica d_H, obsérvese que si para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $m \geq n$ tal que $K_m = \varnothing$ entonces por ser ésta una sucesión de Cauchy, a partir de cierto índice toda la sucesión es constante en $\varnothing$

la cual es claramente convergente. Si esto no ocurre entonces podemos considerar $n \in \mathbb{N}$ tal que para toda $m \geq n$, $K_m \neq \varnothing$ por lo que podemos trabajar con la subsucesión que comienza en K_n.

Por el argumento anterior podemos suponer que $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene al vacío como elemento de la sucesión. Sean para cada $n \in \mathbb{N}$

$$L_n = \bigcup_{m\geq n} K_m$$

y

$$K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{cl}(L_n).$$

Es claro que K es cerrado pues es intersección de conjuntos cerrados. Afirmamos que K es no vacío, compacto y punto de convergencia de $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Comencemos mostrado que es no vacío, para ello vamos a construir por recursión una sucesión de Cauchy en X, esta misma construcción será usada más adelante en la prueba por lo que vamos a incorporar un parámetro $0 < \delta < 1$. Para $n = 1$ sea $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $i, j \geq N_1$ entonces $d_H(K_i, K_j) < \delta/4$, sea $x_1 \in K_{N_1}$. Para $n = m + 1$ supongamos que para m ya tenemos definidos x_m y N_m tales que $x_m \in K_{N_m}$ y si $i, j \geq N_m$ entonces $d_X(K_i, K_j) < \frac{2^{-m-1}\delta}{m}$. Por ser la sucesión de compactos sucesión de Cauchy existe $N_{m+1} \in \mathbb{N}$ tal que $N_{m+1} > N_m$ y si $i, j \geq N_{m+1}$ entonces $d_H(K_i, K_j) < \frac{2^{(-m-1)-1}\delta}{m+1}$, por la propiedad de K_{N_m} sabemos que $d_H(K_{N_m}, K_{N_{m+1}}) < \frac{2^{-m-1}\delta}{m}$, por lo que $d(x_m, K_{N_{m+1}}) < \frac{2^{-m-1}\delta}{m}$, esto nos garantiza que podemos escoger $y \in K_{N_{m+1}}$ tal que $d(x_m, y) < \frac{2^{-m-1}\delta}{m}$, definimos entonces $x_{m+1} = y$.

Revisemos que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, sea $\epsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < \epsilon$, si $i, j \geq n$ supongamos sin pérdida de generalidad que $i \leq j$, entonces utilizando varias veces la desigualdad del triángulo

$$\begin{aligned} d(x_i, x_j) \leq d(x_i, x_n) + d(x_n, x_j) &\leq \sum_{k=n}^{i-1} d(x_k, x_{k+1}) + \sum_{k=n}^{j-1} d(x_k, x_{k+1}) \\ < \sum_{k=n}^{i-1} \frac{2^{-k-1}\delta}{k} + \sum_{k=n}^{j-1} \frac{2^{-k-1}\delta}{k} &\leq \delta 2 \sum_{k=n}^{j-1} \frac{2^{-k-1}}{k} \leq \delta \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{j-1} 2^{-k-1} \\ < \delta \frac{2}{n}\frac{1}{2} &= \delta \frac{1}{n} < \delta\epsilon < \epsilon. \end{aligned}$$

Como d es una métrica completa existe $x \in X$ que es punto de convergencia de la sucesión. Obsérvese que gracias a que la sucesión $(N_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es creciente si consideramos $n \in \mathbb{N}$ entonces existe N_m tal que $n < N_m$ por lo que la sucesión

$(x_{N_m})_{m\in\mathbb{N}}$ a partir de N_m se queda contenida en $\cup_{m\geq n}K_m = L_n$, al tener L_n contenida una sucesión que converge a x tenemos que $x \in \mathrm{cl}(L_n)$, como n fue arbitrario esto muestra que $x \in K$ por lo que K es no vacío.

Obsérvese que además

$$d(x_1, x) \leq \sum_{k=1}^{\infty} d(x_k, x_{k+1}) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{-k-1}\delta}{k} < \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k-1}\delta = \delta/2$$

Es importante notar que la elección del primer elemento de la sucesión fue arbitraria, es decir, x_1 puede ser cualquier elemento de K_n, si K_n cumple la propiedad requerida.

Probemos que $K \in K(X)$, para esto vamos a mostrar que K es totalmente acotado. Sea $\epsilon > 0$ y $m \in \mathbb{N}$ tal que $\epsilon > 2^{-m}$. Si consideramos $j \in \mathbb{N}$ sabemos que $\{B_{2^{-m-2}}(x)\}_{x\in K_j}$ es una cubierta abierta de K_j, por lo que existen $x_{1,j}, \ldots, x_{n_j,j} \in K_j$ tales que $\{B_{2^{-m-2}}(x_{i,j})\}_{i\leq n_j}$ es cubierta abierta de K_j, definimos $F_m^j = \{x_{1,j}, \ldots, x_{n_j,j}\}$. Como $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, sea $n_m > m$ tal que si $n', n'' \geq n_m$ entonces $d_H(K_{n'}, K_{n''}) < 2^{-m-2}$. Definimos entonces $F_m = \bigcup_{m\leq j\leq n_m} F_m^j$. Veamos que

$$K \subseteq \bigcup_{x\in F_m} B_\epsilon(x).$$

Sea $m \in \mathbb{N}$ y $w \in L_m$, entonces $w \in K_l$ para alguna $l \geq m$, si $m \leq l \leq n_m$ entonces

$$w \in \bigcup_{x\in F_m^l} B_{2^{-m-2}}(x) \subseteq \bigcup_{x\in F_m} B_{2^{-m-2}}(x).$$

Si $n_m < l$ entonces $d_H(K_{n_m}, K_l) < 2^{-m-2}$ por lo que $d(w, K_{n_m}) < 2^{-m-2}$, entonces podemos encontrar $y \in K_{n_m}$ tal que $d(w, y) < 2^{-m-2}$ y $z \in F_m^{n_m}$ tal que $y \in B_{2^{-m-2}}(z)$ entonces

$$d(w, z) \leq d(w, y) + d(y, z) < 2^{-m-2} + 2^{-m-2} = 2^{-m-1} < \epsilon,$$

como $z \in F_m^{n_m} \subseteq F_m$ entonces $w \in \bigcup_{x\in F_m} B_{2^{-m-1}}(x)$. Esto muestra que $L_m \subseteq \bigcup_{x\in F_m} B_{2^{-m-1}}(x)$, por lo que

$$\mathrm{cl}(L_m) \subseteq \mathrm{cl}(\bigcup_{x\in F_m} B_{2^{-m-1}}(x)) \subseteq \bigcup_{x\in F_m} B_{2^{-m}}(x) \subseteq \bigcup_{x\in F_m} B_\epsilon(x).$$

Como la cerradura de cada uno de los L_m está contenida en $\bigcup_{x\in F_m} B_\epsilon(x)$, entonces su intersección también lo está. Esto muestra que K es totalmente acotado, como también es cerrado entonces $K \in K(X)$.

Veamos por último que es punto de acumulación de $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sea, una vez más, $\epsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que si $i, j \geq N$ entonces $d_H(K_i, K_j) < \epsilon/4$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $1 \geq \epsilon$. Consideremos $n \geq N$, si $x \in K$ es un elemento arbitrario, como $x \in \mathrm{cl}(L_n)$ entonces existe una sucesión $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tal que para cada $m \in \mathbb{N}$ $x_m \in K_{n_m}$ con $n_m > n$ y $x_m \longrightarrow x$. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_m, x) < \epsilon/4$, como $N \leq n, n_m$ entonces $d_H(K_n, K_{n_m}) < \epsilon/4$ por lo que $d(x_m, K_n) < \epsilon/4$, sea $y \in K_n$ tal que $d(x_m, y) < \epsilon/4$ entonces $d(x, y) \leq d(x, x_m) + d(x_m, y) < \epsilon/2$ por lo que $d(x, K_n) < \epsilon/2$ lo que implica que $\sup\limits_{x\in K} d(x, K_n) < \epsilon$.

Consideremos ahora $y \in K_n$ obsérvese que como $1 \geq \epsilon$ K_n cumple la propiedad del primer miembro que utilizamos para construir una sucesión de Cauchy 5 párrafos atrás, por lo que podemos definir al primer miembro de la sucesión como y y a $\epsilon = \delta$. Sea $x \in X$ el punto de acumulación de la sucesión construida, por lo antes mostrado sabemos que $d(y, x) < \epsilon/2$ lo que implica que $d(y, K) < \epsilon/2$ esto asegura que $\sup\limits_{y\in K_n} d(y, K) < \epsilon$. Estas dos desigualdades prueban que $d_H(K, K_n) < \epsilon$, lo que permite concluir que $K \in K(X)$ es punto de acumulación de $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Esto termina la prueba de que d_H es una métrica completa. $\square$

Teorema 3.37. *Sea (X, τ) un espacio topológico separable, entonces $(K(X), \tau_{\mathscr{A}})$ también es separable.*

Demostración. Sea (X, τ) separable. Consideremos $D \subseteq X$ denso y numerable y definimos

$$D_{fin} = \{K \subseteq D : K \text{ es finito}\}.$$

Es claro que para todo $K \in D_{fin}$, $K \in K(X)$. Además como D es numerable, D_{fin} también lo es. Sea $\underset{U_0,\ldots,U_n}{B^V}$ un abierto básico no vacío, al ser no vacío para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ $U_i \cap V \neq \varnothing$, al ser estos conjuntos abiertos y D denso podemos escoger $x_1, \ldots, x_n \in D$ tales que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ $x_i \in D \cap (V \cap U_i)$, si llamamos $Q = \{x_1, \ldots x_n\}$, entonces es claro que $Q \in D_{fin}$, $Q \subseteq V$ y claramente para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ $Q \cap U_i \neq \varnothing$. Por lo que $Q \in D_{fin} \cap \underset{U_0,\ldots,U_n}{B^V}$. Esto prueba que D_{fin} es denso en $(K(X), \tau_{\mathscr{A}})$. $\square$

Corolario 3.38. *Sea (X, τ) espacio polaco, entonces $(K(X), \tau_{\mathscr{A}})$ es polaco.*

Hemos logrado nuestro primer objetivo, nuestro trabajo con compactos nos ha ofrecido un espacio similar al de Effros-Borel el cual ya sabemos es polaco. Nuestro siguiente objetivo en la agenda es encontrar una buena manera de pasar nuestros resultado sobre el espacio de conjuntos compactos al espacio de conjuntos cerrados. Quisiéramos poder asignarle a cada cerrado un compacto que no sea muy distinto a él. El concepto de compactación es el puente que estamos buscando.

Definición 3.39. *Sea (X,τ) un espacio métrico separable, una compactación de X es un espacio Y compacto y metrizable tal que existe otro conjunto $Z \subseteq Y$ denso en Y y homeomorfo a X*

El problema de encontrar compactaciones para un espacio topológico arbitrario no es tarea sencilla, en el caso de espacios métricos separables es muy sencillo gracias al siguiente resultado. Para poder enunciarlo necesitamos observar lo siguiente: sabemos ya que el intervalo $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ es un espacio polaco compacto. Entonces sabemos, gracias al corolario 2.8, que $\prod_{n\in\omega}[0,1] = [0,1]^\omega$ es un espacio polaco y gracias al teorema de Tychonoff que también es compacto. Por todas estas propiedades este espacio es muy importante, se le conoce como el cubo de Hilbert y lo denotamos por $\mathbb{H}$.

Teorema 3.40. *Sea (X,τ) un espacio metrizable y separable, entonces existe un conjunto $Y \subseteq \mathbb{H}$ y una función $f : X \to Y$ tal que f es homeomorfismo. Si X es polaco entonces Y es un G_δ.*

Demostración. Sea (X,τ) metrizable y separable. Consideremos d una métrica acotada por 1 compatible con τ y $D = \{x_n \in X : n \in \mathbb{N}\}$ denso y numerable. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $d_n : X \longrightarrow [0,1]$ como $d_n(x) = d(x,x_n)$. Entonces, veamos que d_n es continua, sean $n \in \mathbb{N}$ $(r,s) \subseteq \mathbb{R}$ un invervalo real,

$$d_n^{-1}\big[(r,s)\big] = d_n^{-1}\Big[[0,s)\setminus[[0,r]\Big] = d_n^{-1}\big[[0,s)\big]\setminus d_n^{-1}\big[[0,r]\big] = B_s(x_n)\setminus \mathrm{cl}\left(B_r(x_n)\right)$$

es abierto, por lo que d_n es continua. Definimos ahora $f : X \longrightarrow \mathbb{H}$ por $f(x) = (d_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, para asegurar que f es continua basta ver que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ $p_n \circ f$ es continua, pero $p_n \circ f = d_n$ lo que asegura que f es continua.

f es inyectiva pues si consideramos $x, y \in X$ distintos entonces sea $0 < r = d(x,y)/4$, obsérvese que $r < 1$, sabemos existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B_r(x)$ por lo que es claro que $x \in B_r(x_n)$ y $y \notin B_r(x_n)$ esto implica que $d_n(x) < r$ y $d_n(y) \geq r$, por lo que $f(x) \neq f(y)$.

Resta probar que $f^{-1} : f[X] \longrightarrow X$ es continua. Sea F cerrado en X, veamos que $f[F]$ es cerrado en $f[X]$, sea $h \in \mathrm{cl}_{f[X]}(f[F])$, entonces existe $y \in X$ tal que $f(y) = h$ y una sucesión $(y_n)_{n\in N}$ en F tal que $f(y_n) \longrightarrow f(y)$. Luego para cada $m \in \mathbb{N}$ $p_m(f(y_n)) \longrightarrow p_m(f(y))$ es decir $d(x_m, y_n) \longrightarrow d(x_m, y)$. Sea $\epsilon > 0$ y $m \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_m, y) < \epsilon/2$, por lo anterior podemos considerar $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ $d(x_m, y_n) < \epsilon/2$ entonces $d(y_n, y) \leq d(y_n, x_m) + d(x_m, y) < \epsilon$ por lo que $y_n \longrightarrow y$ lo que implica que $y \in F$ por ser F cerrado y que $h = f(y) \in f[F]$. Podemos concluir que $\mathrm{cl}_{f[X]}(f[F]) \subseteq f[F]$ y por lo tanto que $\mathrm{cl}_{f[X]}(f[F]) = f[F]$ es decir que $f[F]$ es cerrado en $f[X]$.

Esto muestra que $f : X \to f[X]$ es un homeomorfismo. Si X es polaco entonces $f[X]$ también lo es, como $\mathbb{H}$ es polaco por el teorema 2.15 $f[X]$ es un G_δ. □

Corolario 3.41. *Sea (X,τ) un espacio metrizable y separable, entonces X tiene una compactación.*

Demostración. Consideremos (X,τ) un espacio metrizable y separable. Por el teorema anterior podemos encontrar $Y \subseteq \mathbb{H}$ homeomorfo a X es claro que $\mathrm{cl}(Y)$ es compacto por ser un cerrado en $\mathbb{H}$. También es claro que Y es denso en $\mathrm{cl}(Y)$ por lo que $\mathrm{cl}(Y)$ es una compactación de X. □

Hemos completado nuestros dos objetivos principales, lo único que necesitamos son dos lemas técnicos para poder demostrar el teorema central de esta sección.

Lema 3.42. *Sean (X,τ) un espacio topológico, $Y \subseteq X$ y $F \subseteq Y$ cerrrado en Y, entonces*

a) $\mathrm{cl}_X(F) \cap Y = F$, es decir $\mathrm{cl}_X(F) \cap Y$ es denso en $\mathrm{cl}_X(F)$.

b) Para cualquier U abierto en X, se tiene que $F \cap U \neq \varnothing$ si y sólo si $\mathrm{cl}_X(F) \cap U \neq \varnothing$.

Demostración. Sean X, Y, F como en las hipótesis. Comencemos con (a), sabemos que $F \subseteq cl_X(F)$ y $F \subseteq Y$ por lo que $F \subseteq \mathrm{cl}_X(F) \cap Y$. Si $cl_X(F) \cap Y$ es vacío la contención restante es trivial, de lo contrario sea $x \in \mathrm{cl}_X(F) \cap Y$ y $V \subseteq Y$ abierto relativo tal que $x \in V$, luego existe $U \subseteq X$ abierto tal que $V = U \cap Y$, por ser U abierto y $x \in \mathrm{cl}_X(F)$ existe $y \in F$ tal que $y \in U$, esto significa que $V \cap F = (U \cap Y) \cap F \neq \varnothing$ por lo que $x \in F$. Esto permite concluir que $\mathrm{cl}_X(F) \cap Y = F$. Es evidente que F es denso en $\mathrm{cl}_X(F)$, por lo que $cl_X(F) \cap Y$ también lo es.

Continuemos con (b). Sea U un abierto en X, si $F \cap U \neq \varnothing$ como $F \subseteq \mathrm{cl}_X(F)$ entonces $\mathrm{cl}_X(F) \cap U \neq \varnothing$. Si $\mathrm{cl}_X(F) \cap U \neq \varnothing$, sea $x \in \mathrm{cl}_X(F) \cap U$, entonces podemos encontrar $y \in F$ tal que $y \in U$, luego $F \cap U \neq \varnothing$. □

Lema 3.43. *Sea (X,τ) un espacio polaco consideremos y $(K(X), \tau_{\mathscr{A}})$, entonces*

$$\mathscr{C} = \{A_U : U \in \tau\}$$

es una base para la σ-álgebra de Borel $\mathbb{B}(\tau_{\mathscr{A}})$.

Demostración. Sean (X, τ) y $(K(X), \tau_{\mathscr{A}})$ como en las hipótesis. Denotemos por $\Sigma_{\mathscr{C}}$ la σ-álgebra generada por $\mathscr{C}$. Sabemos que la topología de Vietoris está generada por

$$\mathscr{A} = \{A_U \subseteq F(X) : U \in \tau\} \cup \{A^U \subseteq F(X) : U \in \tau\}$$

por lo que $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{A}$, además claramente $\mathscr{A} \subseteq \mathbb{B}(\tau_{\mathscr{A}})$ de donde $\mathscr{C} \subseteq \mathbb{B}(\tau_{\mathscr{A}})$. Esto implica claramente que $\Sigma_{\mathscr{C}} \subseteq \mathbb{B}(\tau_{\mathscr{A}})$. Para demostrar la contención faltante probemos que $\mathscr{A} \subseteq \Sigma_{\mathscr{C}}$, basta asegurar que $\{A^U \subseteq F(X) : U \in \tau\} \subseteq \Sigma_{\mathscr{C}}$. Sea $U \in \tau$, sabemos que $X \setminus U$ es un cerrado, por la proposición 2.11 existe una sucesión de abiertos $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $X \setminus U = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Es claro que $K(X) \setminus \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_{U_n} \in \Sigma_{\mathscr{C}}$, veamos entonces que $K(X) \setminus \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_{U_n} = A^U$.

$K \in A^U$ si y sólo si $K \subseteq U$ lo que es equivalente a que $K \cap (X \setminus U) = \varnothing$. Esto a su vez equivale a que exista $n \in \mathbb{N}$ tal que $K \cap U_n = \varnothing$ pues $X \setminus U = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Este hecho equivale a que exista $n \in \mathbb{N}$ tal que $K \notin A_U$ que a su vez es equivalente a que $K \notin \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_{U_n}$ lo que ocurre si y sólo si $K \in K(X) \setminus \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_{U_n}$.

Por lo que $A^U \in \Sigma_{\mathscr{C}}$ de manera que $\mathscr{A} \subseteq \Sigma_{\mathscr{C}}$. Recordemos que $(K(X), \tau_{\mathscr{A}})$ es un espacio polaco por lo que debido al teorema 2.17 es II-numerable, esto significa que cualquier abierto es una unión de a lo más una cantidad numerable de intersecciones finitas de elementos de $\mathscr{A}$, dado que $\Sigma_{\mathscr{C}}$ está cerrada bajo esas operaciones entonces podemos concluir que $\tau_{\mathscr{A}} \subseteq \Sigma_{\mathscr{C}}$, lo que hace evidente que $\mathbb{B}(\tau_{\mathscr{A}}) \subseteq \Sigma_{\mathscr{C}}$. $\square$

Teorema 3.44. *Sea X un espacio polaco, entonces el espacio Effros-Borel $(F(X), \Sigma_{\mathscr{B}})$ es de Borel estándar.*

Demostración. Sea X un espacio polaco. Consideremos Y espacio polaco compactación de X, $Z \subseteq Y$ denso y $f : X \longrightarrow Z$ homeomorfismo. Es claro que f es un isomorfismo entre los espacios medibles $(F(X), \Sigma_{\mathscr{B}})$ y $(F(Z), \Sigma'_{\mathscr{B}})$, por lo que si $(F(Z), \Sigma'_{\mathscr{B}})$ es de Borel estándar entonces $(F(X), \Sigma_{\mathscr{B}})$ también lo será.

Definimos $\varphi : F(Z) \longrightarrow K(Y)$ por $\varphi(F) = \mathrm{cl}_Y(F)$ y $\psi : \varphi\big[F(Z)\big] \longrightarrow F(Z)$ por $\psi(K) = K \cap Z$. Por el lema 3.42 (a) si $F \in F(Z)$ entonces $\mathrm{cl}_Y(F) \cap Z = F$ es decir $(\psi \circ \varphi)(F) = F$ y claramente $(\varphi \circ \psi)(\varphi(F)) = \varphi\big((\psi \circ \varphi)(F)\big) = \varphi(F)$ por lo que ψ es la inversa de φ, por lo que evidentemente φ es biyectiva.

Consideremos $(K(Y), \tau_{\mathscr{A}})$ con $\tau_{\mathscr{A}}$ la topología de Vietoris. Quisiéramos mostrar que $\varphi\big[F(Z)\big]$ es polaco con la topología relativa a la topología de Vietoris de $K(Y)$. Por otra parte $\varphi\big[F(Z)\big]$ tiene una σ-álgebra de Borel generada por la topología de $\varphi\big[F(Z)\big]$ como subespacio de $K(Y)$, denotemos a esta σ-álgebra por $\mathbb{B}(\varphi[F(Z)])$, mientras que $F(Z)$ tiene su σ-álgebra de Effros-Borel, $\Sigma'_{\mathscr{B}}$. Quisiéramos también probar que φ define un isomorfismo de espacios medibles entre $(\varphi\big[F(Z)\big], \mathbb{B}(\varphi[F(Z)]))$ y $(F(Z), \Sigma'_{\mathscr{B}})$

Veamos lo primero, consideremos $(K(Y), \tau_{\mathscr{A}})$ con $\tau_{\mathscr{A}}$ la topología de Vietoris. Vamos a mostrar que $\varphi\big[F(Z)\big]$ es un G_δ con esta topología. Si $F \subseteq Y$ es un cerrado tal que $F \neq \mathrm{cl}_Y(F \cap Z)$ entonces $F \notin \varphi\big[F(Z)\big]$ por lo que

$$\varphi\big[F(Z)\big] = \{F \in F(Y) : F = \mathrm{cl}_Y(F \cap Z)\}$$

$$= \{F \in F(Y) : (F \cap Z) \text{ es denso en } F\}$$

utilizando el lema 3.42 (a).

Sabemos Z es homeomorfo al espacio polaco X por lo que también es polaco, como además Y es polaco entonces por el teorema 2.15 Z es un G_δ, debido a esto podemos considerar $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ una familia de abiertos en Y tales que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n = Z$, también por el teorema 2.17 podemos considerar $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ base de la topología de Y. Sea $F \in F(Y)$, $(F \cap Z)$ es denso en F si y sólo si para cualquier abierto $V \subseteq Y$ tenemos que

$$V \cap F \neq \varnothing \Longrightarrow V \cap (F \cap Z) \neq \varnothing$$

pero $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n = Z$ por lo que esto es equivalente a que para cualquier abierto $V \subseteq Y$

$$V \cap F \neq \varnothing \Longrightarrow V \cap \left(F \cap \left(\bigcap_{m\in\mathbb{N}} U_m\right)\right) \neq \varnothing.$$

Si $F \cap \left(\bigcap_{m\in\mathbb{N}} U_m\right)$ es denso en F entonces es claro que para cada $m \in \mathbb{N}$, $(F \cap U_m)$ es denso en F, pues $F \cap \left(\bigcap_{m\in\mathbb{N}} U_m\right) \subseteq (F \cap U_m)$. Inversamente, si para cada $m \in \mathbb{N}$, $(F \cap U_m)$ es denso en F, entonces cada $(F \cap U_m)$ es un denso abierto en F como Y es completamente metrizable y $F \subseteq Y$ es un cerrado, entonces F es completamente metrizable, por lo que por teorema de Baire $\bigcap_{m\in\mathbb{N}}(F \cap U_m) = F \cap \left(\bigcap_{m\in\mathbb{N}} U_m\right)$ es denso en F. Esto muestra que podemos escribir equivalentemente que para cualquier abierto $V \subseteq Y$

$$\forall m \in \mathbb{N}\, (V \cap F \neq \varnothing \Longrightarrow V \cap (F \cap U_m) \neq \varnothing).$$

Dado que $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base para la topología esto es equivalente a que

$$\forall m \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}\, \big(V_n \cap F \neq \varnothing \Longrightarrow V_n \cap (F \cap U_m) \neq \varnothing\big)$$

y a que

$$\forall m \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}\, (V_n \cap F = \varnothing) \vee \big(V_n \cap (F \cap U_m) \neq \varnothing\big).$$

Definamos entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $A^{V_n} = \{F \in F(Y) : V_n \cap F \neq \varnothing\}$, y para cada $n, m \in \mathbb{N}$, $A^{V_n \cap U_m} = \{F \in F(Y) : (V_n \cap U_m) \cap F \neq \varnothing\}$.

Hemos mostrado entonces que

$$\varphi\big[F(Z)\big] = \{F \in F(Y) : \forall n \in \mathbb{N}\, \forall m \in \mathbb{N}\, \big(F \notin A^{V_n} \vee F \in A^{V_n \cap U_m}\big)\}$$

$$= \{F \in F(Y) : \forall n \in \mathbb{N}\, \big(F \notin A^{V_n}\big)\} \bigcup \{F \in F(Y) : \forall n \in \mathbb{N}\, \forall m \in \mathbb{N}\, \big(F \in A^{V_n \cap U_m}\big)\}$$

$$= \Big(F(Y) \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^{V_n}\Big) \bigcup \Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \{F \in A^{V_n} : F \cap (V_n \cap U_m) \neq \varnothing\}\Big)$$

Es claro que $\cup_{n\in\mathbb{N}} A^{V_n}$ es un abierto, por lo que $F(Y) \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^{V_n}$ es un cerrado. También es claro que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \{F \in A^{V_n} : F \cap (V_n \cap U_m) \neq \varnothing\}$ es un conjunto G_δ pues la intersección de G_δ es G_δ. Utilizando que unión finita de G_δ es G_δ y que todo cerrado es un G_δ concluimos que $\varphi\big[F(Z)\big]$ es un G_δ en $K(Y)$ un polaco, por el teorema 2.15 entonces $\varphi\big[F(Z)\big]$ es un espacio polaco.

Veamos ahora que φ es isomorfismo de espacios medibles. Consideremos un elemento del generador de la σ-álgebra de Effros-Borel $\Sigma_{\mathscr{B}}$, sean $U \subseteq Y$ abierto y

$$B_U = \{F \in F(Z) : F \cap U \neq \varnothing\},$$

y

$$\varphi[B_U] = \{\varphi(F) \in F(Y) : F \cap U \neq \varnothing\}.$$

Por el lema 3.42 (b)

$$\varphi[B_U] = \{\varphi(F) \in F(Y) : \varphi(F) \cap U \neq \varnothing\} = \{K \in K(Y) : K \cap U \neq \varnothing\} \cap \varphi[X].$$

Pero es claro que $\{K \in K(Y) : K \cap U \neq \varnothing\} \in \mathbb{B}(\tau_{\mathscr{A}})$, por lo que $\varphi[B^U] \in \mathbb{B}(\varphi[F(Z)])$. Esto prueba que φ^{-1} es una función medible.

Por otra parte por el lema 3.43, si $V \subseteq Y$ es un abierto arbitrario entonces

$$A_V = \{K \in K(Y) : K \cap V \neq \varnothing\}$$

es un elemento arbitrario de un conjunto genedor de la σ-álgebra de Borel $\mathbb{B}(\tau_{\mathscr{A}})$. De nuevo por el lema 3.42 (b)

$$\psi[A_V \cap f[X]] = \{F \in F(Z) : \mathrm{cl}(F) \cap V \neq \varnothing\} = \{F \in F(Z) : F \cap V \neq \varnothing\}$$

pero claramente $\{F \in F(Z) : F \cap V \neq \varnothing\} \in \Sigma'_{\mathscr{B}}$ por lo que φ es medible. Por lo tanto φ es isomorfismo entre espacios medibles, esto prueba que $(F(Z), \Sigma'_{\mathscr{B}})$ es Borel estándar y por lo tanto que $(F(X), \Sigma_{\mathscr{B}})$ también lo es. $\square$

Si bien hemos logrado mostrar que para cualquier espacio polaco la estructura Effros-Borel define un espacios de Borel estándar, el estudio de estos espacios presenta un enorme reto, es por esto que terminamos la sección desarrollado una de las herramientas más importantes para su estudio. Antes necesitamos los siguientes dos lemas:

Lema 3.45. *Sean (X, d) un espacio métrico separable, $V \subseteq X$ un conjunto abierto no vacío y $\epsilon > 0$. Entonces existe $\{V_n \subseteq U : n \in \omega\}$, tal que para cada $n \in \omega$, V_n es abierto no vacío en X, $\mathrm{cl}(V_n) \subseteq V$, $\mathrm{diam}(V_n) < \epsilon$ y $\bigcup_{n\in\omega} V_n = V$.*

Demostración. Sean $(X, d), U \subseteq X$ y ϵ como en las hipótesis, entonces $F = X \backslash U$ es cerrado en X, por lo que si definimos para cada $n \in \mathbb{N}$

$$U_n = \left\{x \in X : d(x, F) < \frac{1}{n}\right\},$$

entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, U_n es un conjunto abierto en X, $U_{n+1} \subseteq U_n$ y

$$F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n.$$

Si para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $F'_n = X \setminus U_n =$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$

$$F'_n = \left\{x \in X : d(x, F) \geq \frac{1}{n}\right\}.$$

F'_n es un conjunto cerrado en X, $F'_n \subseteq F'_{n+1}$ y

$$U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n.$$

Como U es no vació, dada la última igualdad entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $F'_{n_0} \neq \varnothing$, a su vez debido a la contención entre estos conjuntos esto implica que para cualquier $m \geq n_0$, $F'_m \neq \varnothing$. Por lo que si definimos para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $F_n = F'_{n+n_0}$, entonces podemos asegurar que para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $F_n \neq \varnothing$.

Ahora vamos a mostrar que para cada $n \in \mathbb{N}$, $F_n \subseteq \mathrm{int}(F_{n+1})$. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $x \in F_n$, entonces $d(x, F) \geq \frac{1}{n+n_0}$, por lo que $d(x, F) > \frac{1}{n+n_0+1}$ consideremos $0 < r = \frac{1}{n+n_0} - \frac{1}{n+n_0+1}$. Sea $y \in B_r(x)$ y $z \in F$, entonces $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ por lo que

$$d(y, z) \geq d(x, z) - d(x, y)$$

$$\geq \frac{1}{n} - r = \frac{1}{n+n_0} - \left(\frac{1}{n+n_0} - \frac{1}{n+n_0+1}\right) = \frac{1}{n+n_0+1}.$$

Esto implica que $d(y,F) \geq \frac{1}{n+n_0+1}$, lo que muestra que $B_r(x) \subseteq F_{n+1}$, por lo que $x \in \mathrm{int}(F_{n+1})$.

Consideremos $n \in \mathbb{N}$, como X es métrico separable sabemos por el inciso (b) de la proposición 1.52 que $\mathrm{int}(F_n)$ es separable. Sea $D_n = \{x_{n,m} \in \mathrm{int}(F_n) : m \in \mathbb{N}\}$ denso en $\mathrm{int}(F_n)$. Definimos para cada $m \in \mathbb{N}$, $V_{n,m} = B_\epsilon(x_{n,m}) \cap \mathrm{int}(F_n)$, si $m \in \mathbb{N}$ es claro que $\operatorname{diam} V_{n,m} < \epsilon$, que $V_{n,m}$ es no vacío pues $x_{n,m} \in V_{n,m}$ y que es abierto pues es intersección de abiertos. Además como $V_{n,m} \subseteq \mathrm{int}(F_n)$, entonces $\mathrm{cl}(V_{n,m}) \subseteq \mathrm{cl}(\mathrm{int}(F_n)) \subseteq F_{n+1} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = U$, utilizando la contención demostrada en el párrafo anterior. Por último utilizando que D_n es separable es claro que

$$\bigcup_{m\in\mathbb{N}} V_{n,m} = \mathrm{int}(F_n).$$

Por lo que

$$U \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{int}(F_{n+1}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\in\mathbb{N}} V_{n,m}.$$

Dado que para cada $n,m \in \mathbb{N}$, $V_{n,m} \subseteq \mathrm{cl}(V_{n,m}) \subseteq U$, entonces

$$U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\in\mathbb{N}} V_{n,m}.$$

Esto muestra que $\{V_{n,m} \subseteq U : n,m \in \mathbb{N}\}$ cumple todas las propiedades que enuncia el lema, como además este conjunto es numerable, entonces termina la prueba.

□

Lema 3.46. *Sean (X,d) un espacio métrico separable y $U \subseteq X$ un conjunto abierto no vacío. Entonces existe un esquema de Suslin*

$$\mathscr{S} = \{A_s \subseteq X : s \in \omega^{<\omega}\}$$

tal que:

i) Para cada $s \in \omega^{<\omega}$, si $s \neq \varnothing$ entonces $\mathrm{diam}(A_s) \leq 2^{-\operatorname{long}(s)}$

ii) $A_\varnothing = U$

iii) Para cada $s \in \omega^{<\omega}$, $A_s = \bigcup_{n\in\omega} A_{s^\frown n}$

iv) Para cada $s \in \omega^{<\omega}$ y $n \in \omega$, A_s es abierto no vacío y $\mathrm{cl}(A_{s^\frown n}) \subseteq A_s$.

Además si $f : D \to U$ es la función asociada a $\mathscr{A}$, entonces $D = \mathcal{N}$ y f es abierta, continua, suprayectiva y para cualquier $s \in \omega^{<\omega}$, $f[C_s] = A_s$.

Demostración. Sean (X,d) y U como en las hipótesis. Vamos a construir el esquema $\mathscr{S}$ por recursión. Definimos $A_\varnothing = U$, supongamos que para $s \in \omega^{<\omega}$ A_s ya está definido y que A_s es abierto no vacío. Por el lema anterior existe $\{V_n \subseteq U : n \in \omega\}$, tal que para cada $n \in \omega$, V_n es abierto no vacío en X, $\mathrm{cl}(V_n) \subseteq A_s$, $\mathrm{diam}(V_n) < 2^{-\operatorname{long}(s)-1}$ y $\bigcup_{n\in\omega} V_n = A_s$. Si definimos para cada $n \in \omega$, $A_{s^\frown n} = V_n$, entonces es claro que para cada $n \in \omega$, $A_{s^\frown n}$ es abierto no vacío, $\mathrm{diam}(A_{s^\frown n}) \leq 2^{-\operatorname{long}(s)-1} = 2^{-\operatorname{long}(s^\frown n)}$, $\mathrm{cl}(A_{s^\frown n}) \subseteq A_s$, y $\bigcup_{n\in\omega} A_{s^\frown n} = A_s$.

Esto demuestra que el esquema $\mathscr{S}$ cumple la propiedades requeridas. Sea $f : D \to U$ la función asociada a $\mathscr{S}$, por (1) del teorema 3.5 f es continua, por (4) del mencionado teorema y (iv) $D = \mathcal{N}$, también por (iv) debido a (5) del mismo teorema sabemos que f es abierta, por último gracias a (iii) y (ii) usando (3) tenemos que f es suprayectiva.

Por último, si $s \in \omega^{<\omega}$. Sabemos ya que

$$f[C_s \cap D] = \bigcap_{k\leq \operatorname{long}(s)} \left(A_{s|_k} \cap f[D]\right)$$

debido una vez más al teorema 3.5. Pero para $k \leq \operatorname{long}(s)$ $A_s \subseteq \mathrm{cl}(A_s) \subseteq A_{s|k}$, por lo que $\bigcap_{k\leq\operatorname{long}(s)} A_{s|_k} = A_s$. Debido a que $D = \mathcal{N}$ y que $f[D] = U = A_\varnothing$, entonces tenemos que $f[C_s] = A_s$ ☐

Teorema 3.47 (Kuratowski-Ryll-Nardzewski)**.** *Sea X un espacio polaco no vacío. Entonces existe una sucesión de funciones $(d_n)_{n\in\omega}$ tal que para cada $n \in \omega$, $d_n : F(X) \to X$ es función de Borel y para cada $F \in F(X)$, $\{d_n(F) : n \in \omega\}$ es denso en F y si $F \neq \varnothing$, $\{d_n(F) : n \in \omega\} \subseteq F$.*

Demostración. Sea X un espacio polaco. Por el teorema 2.17, podemos considerar $\{U_n \subseteq X : n \in \mathbb{N}\}$ una base numerable de la topología de X que podemos suponer sin pérdida de generalidad sólo tiene elementos no vacíos, denotemos $X = U_0$. Sea $m \in \omega$, por el lema anterior podemos considerar un esquema de Suslin $\mathscr{S}_m = \{A_s \subseteq U_m : s \in \omega^{<\omega}\}$ tal que $A_\varnothing = U_m$, para cada $s \in \omega^{<\omega}$, A_s es abierto no vacío, $A_s = \bigcup_{n\in\omega} A_{s^\frown n}$, si $s \neq \varnothing$ entonces $\mathrm{diam}(A_s) \leq 2^{-\operatorname{long}(s)}$ y para cada $n \in \omega$, $\mathrm{cl}(A_{s^\frown n}) \subseteq A_s$.

Consideremos $f_m : \mathcal{N} \to U_m$ la función asociada al esquema de Suslin $\mathscr{A}_m$, por el lema anterior f_m es continua, abierta, suprayectiva y para cualquier $s \in \omega^{<\omega}$, $f_m[C_s] = A_s$. Consideremos también la función $i_m : F(X) \to F(U_m)$ definida como $i_m(F) = F \cap U_m$. Es claro que i_m es Borel medible, pues si $U \subseteq X$ es un abierto arbitrario, entonces

$$\{F \in F(U_m) : F \cap (U \cap U_m) \neq \varnothing\}$$

es un elemento del generador de la σ-álgebra de $F(U_m)$ y

$$i_m^{-1}[\{F \in F(U_m) : F \cap (U \cap U_m) \neq \varnothing\}] = \{F \in F(X) : i_m(F) \cap (U \cap U_m \neq \varnothing)\}$$

$$= \{F \in F(X) : (F \cap U_m) \cap (U \cap U_m) \neq \varnothing\} = \{F \in F(X) : F \cap (U \cap U_m) \neq \varnothing\}$$

el cual es un elemento de la σ-álgebra de $F(X)$. Por el inciso (b) de 3.24, i_m es Borel medible.

Es claro que si $F \in F(U_m) \setminus \{\varnothing\}$, entonces $a_{T_F} \in [T_F]$ por lo que para cada $n \in \omega$, $a_{T_F} \restriction_n \in T_F$, lo que equivale a que, $A_{a_{T_F}|_n} \cap F \neq \varnothing$, por lo que $f_m(a_{T_F}) \in F$, recurriendo a la definición de f_m.

Consideremos ahora, $F \in F(U_m) \setminus \{\varnothing\}$, definimos $T_F = \{s \in \omega^{<\omega} : A_s \cap F \neq \varnothing\}$. Veamos que T_F es un árbol bien podado no vacío en $\omega^{<\omega}$. Como $A_\varnothing = U_m$, y $F \subseteq U_m$, entonces $\varnothing \in T_F$. Vamos a demostrar por inducción que si $s \in T_F$ y $t \in \omega^{<\omega}$ tal que $t \subseteq s$, entonces $t \in T_F$. Si $\mathrm{long}(s) - \mathrm{long}(t) = 0$ entonces $s = t$ por lo que $t \in T_F$, supongamos que si $\mathrm{long}(s) - \mathrm{long}(t) = n$ y $t \subseteq s$ entonces $t \in T_F$. Sean $s \in T_F$ $t \in \omega^{<\omega}$ tal que $t \subseteq s$ y $\mathrm{long}(s) - \mathrm{long}(t) = n+1$. Entonces $\mathrm{long}(s) - \mathrm{long}(s \restriction_{\mathrm{long}(t)+1}) = n$ por lo que $\mathrm{long}(s \restriction_{\mathrm{long}(t)+1}) \in T_F$ es decir $F \cap A_{s|_{\mathrm{long}(t)+1}} \neq \varnothing$. Como $t \subseteq s \restriction_{\mathrm{long}(t)+1}$ y $\mathrm{long}(s \restriction_{\mathrm{long}(t)+1}) - \mathrm{long}(t) = 1$, sea $n \in \omega$, tal que $s \restriction_{\mathrm{long}(t)+1} = t^\frown n$, por lo que $A_{s|_{\mathrm{long}(t)+1}} = A_{t^\frown n} \subseteq \mathrm{cl}(A_{t^\frown n}) \subseteq A_t$, lo que implica que $A_t \cap F \neq \varnothing$ de manera que $t \in T_F$. Esto prueba que T_F es un árbol.

Por otra parte si $s \in T_F$, entonces $A_s \cap F \neq \varnothing$, como $A_s = \bigcup_{n\in\omega} A_{s^\frown n}$, entonces existe $n \in \omega$ tal que $A_{s^\frown n} \cap F \neq \varnothing$, por lo que $s^\frown n \in T_F$. Esto muestra que T_F es bien podado.

Sea a_{T_F} la rama más a la izquierda de T_F. Definimos $g' : F(U_m) \setminus \{\varnothing\} \to \mathcal{N}$ como $g'(F) = a_{T_F}$. Vamos a mostrar que g es Borel medible. Es claro que para cualquier $s \in \omega^{<\omega}$,

$$g'^{-1}[Cs] = \{F \in F(U_m) \setminus \{\varnothing\} : a_{T_F} \in Cs\}.$$

Vamos a mostrar que para $s \in \omega^{<\omega}$ arbitrario, debido a la proposición T_{C_s} es un árbol bien podado, por lo que podemos considerar $a_{T_{C_s}}$, vamos a mostrar que

$$\{F \in F(U_m) \setminus \{\varnothing\} : a_{T_F} \in C_s\} =$$
$$\{F \in F(U_m) \setminus \{\varnothing\} : F \cap A_s \neq \varnothing \text{ y } \forall t < a_{T_{C_s}} (f_m(t) \notin F)\}.$$

Supongamos que $F \in F(U_m) \setminus \{\varnothing\}$, tal que $a_{T_F} \in C_s$. Ya mostramos más arriba que entonces $f_m(a_{T_F}) \in F$, como además se satisface que $f_m[C_s] = A_s$, y sabemos que $a_{T_F} \in C_s$, entonces $f_m(a_{T_F}) \in A_s$, por lo que $f_m(a_{T_F}) \in A_s \cap F$, es decir que este conjunto es no vacío. Por otra parte, sea $t < a_{C_s}$, por la proposición 2.37 $a_{T_{C_s}}$ es el elemento mínimo de C_s, dado que $a_{T_F} \in C_s$, entonces $t < a_{T_{C_s}} \leq a_{T_F}$, debido a que a_{T_F}, es el mínimo elemento de $[T_F]$ entonces $t \notin [T_F]$. Esto implica que existe $k \in \omega$ tal que $t \mid_k \notin T_F$, luego $A_{t|_k} \cap F = \varnothing$, como $f_m(t) \in A_{t|_k}$, entonces $f_m(t) \notin F$. Esto prueba la primera contención.

Supongamos que $F \in F(U_m) \setminus \{\varnothing\}$, tal que $F \cap A_s \neq \varnothing$ y $\forall t < a_{T_{C_s}}$ $(f_m(t) \notin F)$. Sea $t \in [T_F]$, ya mostramos entonces que $f_m(t) \in F$, por lo que $a_{T_{C_s}} \leq t$. Debido a que a_{T_F} es el mínimo de $[T_F]$, esto muestra que $a_{T_{C_s}} \leq a_{T_F}$. Como además $F \cap A_s \neq \varnothing$ sabemos que $s \in T_F$, debido a que T_F es bien podado podemos considerar $x \in [T_F]$ tal que $s \subseteq x$, por lo primero $a_{T_F} \leq x$, por lo segundo $x \in C_s$. Si $a_{T_F} = x$ ó $a_{T_{C_s}} = a_{T_F}$ entonces $a_{T_F} \in C_s$, si $a_{T_{C_s}} < a_{T_F} < x$ sea $k_1 = \text{mín}\{m \in \omega : a_{T_{C_s}}(m) \neq a_{T_F}(m)\}$ y $k_2 = \text{mín}\{m \in \omega : a_{T_F}(m) \neq x(m)\}$, si $n < \text{long}(s)$ como $a_{T_{C_s}}, x \in C_s$ entonces $a_{T_{C_s}}(n) = s(n) = x(n)$. Si $k_1 < \text{long}(s)$ tendríamos que $x(k_1) = a_{T_{C_s}}(k_1) < a_{T_F}(k_1)$, esto implica que $k_2 < k_1 < \text{long}(s)$ pero entonces $a_{T_F}(k_2) < x(k_2) = a_{T_{C_s}}(k_2) = a_{T_F}(k_2)$. Lo cual es una evidente contradicción. Esto implica que $\text{long}(s) \leq k_1$, por lo que $a_{T_F} \mid_{\text{long}(s)} = a_{T_{C_s}} \mid_{\text{long}(s)} = s$ lo que implica que $a_{T_F} \in C_s$. Esto prueba la segunda contención y por lo tanto la igualdad anunciada. Tenemos además que

$$\{F \in F(U_m) \setminus \{\varnothing\} : F \cap A_s \neq \varnothing \text{ y } \forall t < a_{T_{C_s}}(f_m(t) \notin F)\} =$$

$$\{F \in F(U_m) \setminus \{\varnothing\} : F \cap A_s \neq \varnothing\} \bigcap \{F \in F(U_m) \setminus \{\varnothing\} : \forall t \in \overleftarrow{a_{T_{C_s}}}(f_m(t) \notin F)\} =$$

$$\{F \in F(U_m) \setminus \{\varnothing\} : F \cap A_s \neq \varnothing\} \bigcap \{F \in F(U_m) \setminus \{\varnothing\} : f_m \left[\overleftarrow{a_{T_{C_s}}}\right] \cap F = \varnothing)\} =$$

$$B_{A_s} \bigcap \{F \in F(U_m) \setminus \{\varnothing\} : f_m \left[\overleftarrow{a_{T_{C_s}}}\right] \cap F = \varnothing)\} =$$

$$B_{A_s} \bigcap \left(\Big(F(U_m) \setminus \{\varnothing\} \Big) \setminus B_{f_m[\overleftarrow{a_{T_{C_s}}}]} \right).$$

Sabemos ya que A_s es un abierto, por lo que el conjunto de la izquierda es un básico de la estructura Effros-Borel de $F(U_m) \setminus \{\varnothing\}$, sabemos por la proposición 2.38 que $\overleftarrow{a_{T_{C_s}}}$ es un abierto, pero además f_m es abierta por lo que $f_m[\overleftarrow{a_{T_{C_s}}}]$ es un abierto en U_m, de manera que el conjunto de la izquierda es el complemento de un conjunto básico de la estructura Effros-Borel de $F(U_m) \setminus \{\varnothing\}$, por lo que pertenence a la σ-álgebra. Recordando que C_s es un abierto básico esto muestra gracias al inciso (b) de la proposición 3.24 que g es Borel medible.

Sea $x_0 \in X$ arbitrario, definimos $g : F(U_m) \to \mathcal{N}$ como

$$g(F) = \begin{cases} g'(F) & \text{si } F \neq \varnothing \\ x_0 & \text{si } F = \varnothing \end{cases}$$

Es claro que g es Borel medible, pues

$$\{F \in F(U_m) : F \neq \varnothing\} = \{F \in F(U_m) : F \cap X \neq \varnothing\} = B_X$$

el cual es un conjunto básico de la estructura Effros-Borel, y por lo anterior $g\mid_{B_\varnothing} = g'$ es Borel medible. Debido a que $\{F \in F(U_m) : F \neq \varnothing\} = B_X$ pertenence a la estructura Effros-Borel, entonces $\{\varnothing\} = F(U_m) \setminus B_X$ también pertenence a ella y trivialmente $g\mid_{\{\varnothing\}}$ es Borel medible. Utilizando el inciso (c) de la proposición 3.24 podemos concluir que g es Borel medible.

Esto implica que si $d'_m = i_m \circ f_m \circ g$, entonces para cada $F \in F(X)$ tal que $F \cap U_m \neq \varnothing$ tenemos que $d'_m(F) = f_m(a_{T_{F\cap U_m}}) \in F \cap U_m$. Al ser f_m continua, entonces f_m es Borel medible, dado que también i_m y g son Borel medibles entonces d'_m es Borel medible, utilizando el inciso (a) de 3.24.

Por último definimos $d_m : F(X) \to X$ como

$$d_m(F) = \begin{cases} d'_m(F) & \text{si } F \cap U_m \neq \varnothing \\ d'_0(F) & \text{si } F \cap U_m = \varnothing \end{cases} .$$

Obsérvese que $A = \{F \in F(X) : F \cap U_m \neq \varnothing\}$ es un elemento de la σ-álgebra de $F(X)$ y que $F(X) \setminus A = \{F \in F(X) : F \cap U_m = \varnothing\}$ por lo que $F(X) \setminus A$ también es un elemento de la σ-álgebra de $F(X)$. Ahora d_m es Borel medible al ser restringida a A pues $d_m\mid_A = d'_m\mid_A$ y d'_m es Borel medible, analogamente es claro que d_m es Borel medible al ser restringida a $X \setminus A$. Al ser d_m Borel medible en sus restricciones a dos conjuntos ajenos de la σ-álgebra de $F(X)$ tales que su unión es el total, entonces d_m es Borel medible, utilizando el inciso (c) de 3.24. Es claro que para cada $n \in \omega$ y cada $F \in F(X) \setminus \{\varnothing\}$, $d_n(F) \in F$

Por último, sea $F \in F(X)$, veamos que $\{d_n(F) : n \in \omega\}$ es denso en F. Sea $U \subseteq X$ un abierto tal que $U \cap F \neq \varnothing$, entonces dado que $\{U_n \subseteq X : n \in \mathbb{N}\}$ es base de la topología de X existe $k \in \mathbb{N}$, tal que $F \cap U_k \neq \varnothing$, por lo que $d_k(F) \in F \cap U_k$. Esto demuestra que $\{d_n(F) : n \in \omega\} \subseteq F$ es denso en F.

$\square$

Capítulo 4

Espacios universales de Banach.

4.1. Un espacio universal para los espacios de Banach separables.

En los dos capítulos anteriores desarrollamos la teoría necesaria para estudiar, con un nuevo enfoque, los espacios de Banach separables. A lo largo de la última sección del capítulo 3 mostramos que el conjunto de todos los conjuntos cerrados de un espacio polaco tiene una estructura muy rica. Sabemos ya que cualquier subespacio vectorial cerrado de un espacio de Banach es a su vez un espacio de Banach, esto significa que podemos conocer los espacios de Banach separables estudiando la estructura Effros-Borel. Esto, a su vez, motiva la búsqueda de espacios de Banach tales que sus subespacios reflejen de buena manera a todos los distintos espacios de Banach separables en el sentido de que cada espacio de Banach tenga un 'representante' entre sus subespacios. El concepto de espacio universal de Banach es el que recupera esta idea.

Definición 4.1. *Sea $\mathscr{F}$ una clase de espacios de Banach separables, decimos que un espacio de Banach separable X es universal para $\mathscr{F}$ si para cada espacio $Y \in \mathscr{F}$ existe un isomorfismo de espacios de Banach $T : Y \to X$. Cuando $\mathscr{F}$ es la clase de todos los espacios de Banach separables simplemente decimos que X es universal.*

Es importante notar que la definición expuesta aquí difiere de la definición usual de espacio de Banach universal. Usualmente se pide que adicionalmente el espacio X pertenezca a la clase $\mathscr{F}$. A lo largo de este capítulo se hará evidente por qué se utiliza esta definición alterna.

Nuestro primer objetivo es construir el análogo al espacio $\mathbb{H}$ en la teoría de espacios polacos, para la teoría de espacios de Banach. Para esto tendremos que considerar por separado el caso de los espacios de Banach reales del de los espacios complejos. Para el caso real el espacio será $\mathscr{C}(\mathcal{C})$, el conjunto de las funciones continuas con dominio el conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ e imagen $\mathbb{R}$ con las operaciones usuales y con norma del supremo. Para el caso complejo será

$$\mathscr{C}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}) = \{f : \mathcal{C} \to \mathbb{C} \mid f \text{ es continua}\}.$$

Para demostrar esto vamos a necesitar varios resultados.

Definición 4.2. *Sea X un espacio topológico. Decimos que X es Hausdorff si para cada $x, y \in X$ distintos existen $U, V \subseteq X$ conjuntos abiertos tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \varnothing$.*

Lema 4.3. *Sea (K, τ) un espacio topológico compacto y τ' un topología para K tal que (K, τ') es Hausdorff y $\tau' \subseteq \tau$. Entonces $\tau = \tau'$.*

Demostración. Sean (K, τ) y τ' como en las hipótesis, sólo resta mostrar que $\tau \subseteq \tau'$. Consideremos $Id_K : (K, \tau) \to (K, \tau')$ definida como $Id(x) = x$, es claro que Id_K es continua pues si $U \in \tau'$, $Id_K^{-1}[U] = U \in \tau' \subseteq \tau$.

Si $V \in \tau$, entonces $K \setminus V$ es cerrado en esta topología, al ser (K, τ) compacto $K \setminus V$ lo es por lo que $Id_k[K \setminus V]$ es compacto en (K, τ') debido a la continuidad de Id_K. Al ser (K, τ') Hausdorff entonces $K \setminus V$ es cerrado en esta topología, por lo que $V \in \tau'$. Esto muestra que $\tau \subseteq \tau'$ y por lo tanto que $\tau = \tau'$. □

Un resultado que muestra la estrecha relación entre la teoría descriptiva de conjuntos y la teoría de espacios de Banach es el siguiente, no sólo por su enunciado, sino por el método de prueba.

Teorema 4.4. *Sea V un espacio normado separable, entonces B_{V^*} con la topología débil* es polaco y compacto.*

Demostración. Sea V como en las hipótesis. Sean $D = \{v_n : n \in \omega\}$ un conjunto denso y numerable y $Q : V \to V^{**}$ el encaje canónico. Consideremos a B_{V^*} con la topología inducida por $Q[D]$.

Veamos que $Q[D]$ separa puntos, sean $v^*, w^* \in B_{V^*}$, si para cada $n \in \omega$, $Q(v_n)v^* = Q(v_n)w^*$, entonces para cada $n \in \omega$, $v^*v_n = w^*v_n$, por ser D denso entonces $v^* = w^*$. Por lo que $Q[D]$ separa puntos.

Veamos también que B_{V^*} con esta topología es Hausdorff. Sean $v^*, w^* \in B_{V^*}$, tales que $v^* \neq w^*$. Por lo anterior existe $n \in \omega$ tal que $Q(v_n)v^* \neq Q(v_n)w^*$. Sea $r = |Q(v_n)v^* - Q(v_n)w^*|/2$. Entonces claramente si

$$U = Q(v_n)^{-1}[B_r(Q(v_n)v^*)] \text{ y } W = Q(v_n)^{-1}[B_r(Q(v_n)w^*)]$$

entonces U, W son abiertos, $v^* \in U$, $w^* \in W$ y $U \cap W = \varnothing$.

Es evidente que esta topología es más gruesa que la topología inducida por $Q[V]$. Por lo que debido al lema ambas topologías coinciden. Esto implica que B_{V^*} con la topología inducida por $Q[D]$ es compacto, pues por el teorema de Banach-Alaoglu B_{V^*} es compacto con la topología inducida por $Q[V]$.

Debido a que $Q[D]$ separa puntos, por el corolario 1.69 entonces existe un homeomorfismo

$$\varphi : B_{V^*} \to \prod_{n\in\omega} Q(v_n)[B_{V^*}].$$

Como B_{V^*} es compacto, entonces para cada $n \in \omega$, $Q(v_n)[B_{V^*}] \subseteq \mathbb{F}$ es compacto y en particular cerrado. Dado que $\mathbb{F}$ es polaco entonces para cada $n \in \omega$, $Q(v_n)[B_{V^*}]$ es polaco. Esto implica por el corolario 2.8 que $\prod\limits_{n\in\omega} Q(v_n)[B_{V^*}]$ es polaco. Una vez más como B_{V^*} es compacto, sabemos que $\varphi[B_{V^*}]$ es compacto, por lo que también es cerrado y polaco en la topología relativa. Por el corolario 2.4, entonces B_{V^*} es polaco.

$\square$

Esto nos va a permitir estudiar a B_{V^*} a través de los resultados que ya conocemos. Ahora vamos a empezar a construir el isomorfismo entre cualquier espacio de Banach X y $\mathscr{C}(\mathcal{C})$ ó $\mathscr{C}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C})$. Para esto vamos a recurrir a que $\mathbb{H}$ es universal para los espacios polacos, por lo que primero debemos estudiar la relación entre $\mathcal{C}$ y $\mathbb{H}$.

El siguiente es un resultado básico del análisis matemático:

Proposición 4.5. *Existe una función continua y suprayectiva $f : \mathcal{C} \to [0,1]$ dada por $f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s(n)}{2^{n+1}}$.*

Teorema 4.6. *$\mathcal{C}$ es homeomorfo a $\mathcal{C}^\omega$ con la topología del producto.*

Demostración. Sabemos existe una biyección $\varphi : \omega \to \omega \times \omega$, denotamos $\varphi(n) = (\varphi_1(n), \varphi_2(n))$. Definimos $f : \mathcal{C}^\omega \to \mathcal{C}$ de la siguiente manera, para $n \in \omega$ y $s \in \mathcal{C}^\omega$, $\big(f(s)\big)(n) = \big(s(\varphi_1(n))\big)(\varphi_2(n))$. f es inyectiva pues si $s, t \in \mathcal{C}^\omega$ son tales que $f(s) = f(t)$, sean $m, k \in \omega$ arbitrarios, consideremos $n \in \omega$ tal que $\varphi(n) = (m, k)$, como $\big(f(s)\big)(n) = \big(f(t)\big)(n)$ entonces $\big(s(m)\big)(k) = \big(t(m)\big)(k)$, esto muestra que $s = t$. f es suprayectiva pues si consideramos $s \in \mathcal{C}$, sea $t \in \mathcal{C}^\omega$

tal que si $n, m \in \omega$ y $k = \varphi^{-1}(n,m)$, $\big(t(n)\big)(m) = s(k)$. Entonces si $k' \in \omega$, $\big(f(t)\big)(k') = \big(t(\varphi_1(k'))\big)(\varphi_2(k')) = s(k')$ por lo que $f(t) = s$.

Veamos ahora que f es continua y abierta. Consideremos para cada $n \in \omega$, $q_n : \mathcal{C} \to \{0,1\}$ definida como $q_n(s) = s(n)$ y $p_n : \mathcal{C}^\omega \to \mathcal{C}$ definida como $p_n(t) = t(n)$.

Sea U un abierto básico en $\mathcal{C}$ entonces existe $A \subseteq \{0,1\}$ y $n \in \omega$ tal que $U = q_n^{-1}[A] = \{s \in \mathcal{C} : s(n) \in A\}$, entonces

$$f^{-1}[U] = \big\{t \in \mathcal{C}^\omega : \big(t(\varphi_1(n))\big)(\varphi_2(n)) \in A\big\}$$

$$= \big\{t \in \mathcal{C}^\omega : q_{\varphi_2(n)}(p_{\varphi_1(n)}(t)) \in A\big\} = p^{-1}_{\varphi_1(n)}\left[q^{-1}_{\varphi_2(n)}[A]\right].$$

Sabemos que $q^{-1}_{\varphi_2(n)}[A]$ es un abierto básico de $\mathcal{C}$, por lo que $p^{-1}_{\varphi_1(n)}\left[q^{-1}_{\varphi_2(n)}[A]\right]$ es un abierto básico de $\mathcal{C}^\omega$. Este argumento muestra que f es continua, y como f es biyectiva es mismo argumento también muestra que es abierta. Por lo que f es homeomorfismo suprayectivo. □

Corolario 4.7. *Existe una función continua y suprayectiva $f : \mathcal{C} \to \mathbb{H}$.*

Demostración. Por la proposición 4.5 existe una función continua y suprayectiva $f : \mathcal{C} \to [0,1]$, consideremos entonces $g : \mathcal{C}^\omega \to \mathbb{H}$ definida de la siguiente manera, para cada $n \in \omega$ y $s \in \mathcal{C}^\omega$, $\big(g(s)\big)(n) = f(s(n))$. Veamos que g es suprayectiva, sea $x \in \mathbb{H}$ y $n \in \omega$, como f es suprayectiva entonces existe $t_n \in \mathcal{C}$ tal que $f(t_n) = x(n)$, sea $t \in \mathcal{C}^\omega$ tal que $t(n) = t_n$. Entonces para cualquier $m \in \omega$, $\big(g(t)\big)(m) = f(t(m)) = f(t_m) = x(m)$, por lo que $g(t) = x$.

Veamos que g es continua, sea $U \subseteq [0,1]$ abierto y $n \in \omega$, consideremos p_n la n-ésima proyección canónica $p_n : \mathbb{H} \to [0,1]$ y q_n la n-ésima proyección canónica $q_n : \mathcal{C}^\omega \to \mathcal{C}$.

$$g^{-1}\left[p_n^{-1}[U]\right] = \{t \in \mathcal{C}^\omega : \big(g(t)\big)(n) \in U\}$$

$$= \{t \in \mathcal{C}^\omega : f(t(n)) \in U\} = q_n^{-1}[f^{-1}[U]]$$

como f y q_n son continuas, entonces $g^{-1}\left[p_n^{-1}[U]\right]$ es abierto, por lo que g es continua.

Por el teorema anterior existe un homeomorfismo suprayectivo $h : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^\omega$, por lo que $(f \circ h) : \mathcal{C} \to \mathbb{H}$ es continua y suprayectiva. □

El siguiente corolario junto con el corolario 2.33 implican que la cardinalidad de cualquier espacio polaco es finita, numerable, o la del continuo, lo cual no deja de ser impresionante: la estructura topológica de los espacios polacos limita su cardinalidad.

Corolario 4.8. *Sea X un espacio polaco compacto, entonces existe una función continua y suprayectiva $f : \mathcal{C} \to X$.*

Demostración. Sea X un espacio polaco compacto, por el teorema 3.40 existe un conjunto $Y \subseteq \mathbb{H}$ y un homeomorfismo suprayectivo $f : Y \to X$. Como X es compacto entonces $f^{-1}[X] = Y$ es compacto y por lo tanto cerrado en $\mathbb{H}$.

Sea $g : \mathcal{C} \to \mathbb{H}$ continua y suprayectiva, entonces $g^{-1}[Y]$ es cerrado. Por la proposición 3.8 existe una función continua y suprayectiva $h : \mathcal{C} \to g^{-1}[Y]$. Por lo tanto $(f \circ g \circ h) : \mathcal{C} \to X$ es continua y suprayectiva. □

Con esto tenemos todas las piezas necesarias para mostrar el resultado anunciado.

Teorema 4.9 (Banach-Mazur)**.** *Sea V espacio normado separable real, entonces existe un isomorfismo isométrico $T : V \to \mathscr{C}(\mathcal{C})$. En el caso complejo el operador tiene como imagen $\mathscr{C}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C})$.*

Demostración. Sea V un espacio normado separable real. Por el teorema 4.4 B_{V*} con la topología débil* es polaco y compacto por lo que por el corolario anterior existe una función continua y suprayectiva $\varphi : \mathcal{C} \to B_{V*}$.

Consideremos $Q : V \to V^{**}$ el encaje canónico, para $v \in V$ arbitrario, consideremos $\varphi^*(v) : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ definida como $\big(\varphi^*(v)\big)(s) = \big(Q(v) \circ \varphi\big)(s)$. Como tanto $Q(v)$ como φ son continuas, entonces $\varphi^*(v)$ es continua.

Podemos entonces considerar $\varphi^* : V \to \mathscr{C}(\mathcal{C})$. Veamos que φ^* es lineal, sean $v, w \in V$ y $c \in \mathbb{R}$, si $s \in \mathcal{C}$ entonces

$$\begin{aligned}\big(\varphi^*(cv + w)\big)(s) &= \langle \varphi(s), Q(cv + w)\rangle = \langle \varphi(s), cQ(v) + Q(w)\rangle \\ &= c\langle \varphi(s), Q(v)\rangle + \langle \varphi(s), Q(w)\rangle = c\big(\varphi^*(v)\big)(s) + \big(\varphi^*(w)\big)(s).\end{aligned}$$

Esto implica que $\big(\varphi^*(cv + w)\big) = c\big(\varphi^*(v)\big)(s) + \big(\varphi^*(w)\big)$ por lo que φ^* es lineal.

Veamos que φ^* es una isometría. Sea $v \in V$, por el corolario 1.37

$$||v||= \sup\{|v^*v| : v^* \in B_{V^*}\},$$

como φ es suprayectiva entonces

$$\begin{aligned}||v||= \sup\{|\big(\varphi(t)v|\big) : t \in \mathcal{C}\} &= \sup\{|\langle \varphi(t), Q(v)\rangle| : t \in \mathcal{C}\} \\ &= \sup\{|\big(\varphi^*(v)\big)(t)| : t \in \mathcal{C}\} = ||\varphi^*(v)||.\end{aligned}$$

Como φ^* es isometría entonces claramente es un operador acotado y por lo tanto un isomorfismo isométrico. La prueba para el caso imaginario es completamente análoga. □

Con esto hemos mostrado que $\mathscr{C}(\mathcal{C})$ es un espacio universal para los espacios de Banach separables reales. Es decir, podemos pensar a cualquier espacio de Banach separable real como un subespacio de $\mathscr{C}(\mathcal{C})$. Esto nos invita a utilizar la estructura Effros-Borel de $\mathscr{C}(\mathcal{C})$ para estudiar la categoría de los espacios de Banach separables reales.

En lo que resta del capítulo sólo vamos a utilizar que $\mathscr{C}(\mathcal{C})$ es un espacio de Banach separable universal para los espacio de Banach separables. Es sencillo mostrar que para cualquier espacio polaco compacto no numerable K, $\mathscr{C}(K)$ es un espacio de Banach separable universal para los espacios de Banach universales. Utilizando el teorema de Cantor-Bendixson y el teorema 2.30 podemos mostrar que existe un isomorfismo isométrico de $\mathscr{C}(\mathcal{C})$ en $\mathscr{C}(K)$. Habiendo mostrado que $\mathscr{C}(\mathcal{C})$ es universal, esto muestra que $\mathscr{C}(K)$ es universal. Sabiendo ya que $\mathscr{C}(\mathcal{C})$ es separable, para mostrar que $\mathscr{C}(K)$ es separable basta exhibir un isomorfismo de $\mathscr{C}(K)$ en $\mathscr{C}(\mathcal{C})$, el cuál ya fue construido en la prueba del teorema.

4.2. Las propiedades de EBS.

Antes de utilizar la estructura de Effros-Borel para estudiar a los espacios de Banach separables reales, necesitamos primero entender cabalmente esta estructura. Para esto el siguiente concepto resulta muy útil.

Definición 4.10. *Sea para cada $n \in \omega$, (X_n, Σ_n) un espacio medible, definimos la σ-álgebra del producto sobre el conjunto $X = \prod_{n\in\omega} X_n$ a través de las proyecciones canónicas $p_n : X \to X_n$, como la σ-álgebra que tiene como conjunto generador a*

$$\mathcal{A} = \{S \subseteq X : \exists n \in \omega,\ \exists R \in \Sigma_n (S = p_n^{-1}[R])\}.$$

En lo que sigue siempre vamos a considerar a un espacio polaco (X, τ) con la σ-álgebra $\mathbb{B}(\tau)$ y a $F(X)$ con la σ-álgebra $\Sigma_{\mathscr{B}}$. El siguiente es un resultado básico sobre la σ-álgebra del producto.

Lema 4.11. *Sean para cada $n \in \omega$, (X_n, Σ_n) y (Y_n, Σ'_n) espacios medibles y $f_n : X_n \to Y_n$ funciones medibles. Entonces la función*

$$(f_n)_{n\in\omega} : \prod_{n\in\omega} X_n \to \prod_{n\in\omega} Y_n$$

definida como $(f_n)_{n\in\omega}\big((x_n)_{n\in\omega}\big) = (f_n(x))_{n\in\omega}$ es medible respecto a las σ-álgebras del producto.

Demostración. Sean para cada $n \in \omega$, (X_n, Σ_n), (Y_n, Σ'_n) y f_n como en las hipótesis. Sea $m \in \omega$, $S \in \Sigma_m$, $p_m : \prod_{n\in\omega} Y_n \to Y_m$ y $q_m : \prod_{n\in\omega} X_n \to X_m$ las respectivas proyecciones canónicas. Entonces

$$\begin{aligned}
(f_n)^{-1}_{n\in\omega}[p_m^{-1}[S]] &= (f_n)^{-1}_{n\in\omega}\left[\left\{(y_n)_{n\in\omega} \in \prod_{n\in\omega} Y_n : y_m \in S\right\}\right] \\
&= \left\{(x_n)_{n\in\omega} \in \prod_{n\in\omega} X_n : f_m(x_m) \in S\right\} \\
&= \left\{(x_n)_{n\in\omega} \in \prod_{n\in\omega} X_n : x_m \in f_m^{-1}[S]\right\} \\
&= q_m^{-1}[f_m^{-1}[S]].
\end{aligned}$$

Como f_m es medible $f_m^{-1}[S] \in \Sigma_m$, al estar considerando la σ-álgebra del producto q_m es medible por lo que $q_m^{-1}[f_m^{-1}[S]]$ pertenece a esta σ-álgebra. Gracias al inciso (b) de la proposición 3.24 $(f_n)_{n\in\omega}$ es medible. □

La importancia de esta σ-álgebra se ilustra con el siguiente resultado.

Proposición 4.12. *Sean para cada $n \in \omega$, (X_n, Σ_n) espacios de Borel estándar si Σ es la σ-álgebra del producto entonces $\left(\prod_{n\in\omega} X_n, \Sigma\right)$ es espacio de Borel estándar.*

Demostración. Sean para cada $n \in \omega$, (X_n, Σ_n) espacio de Borel estándar, por lo que podemos considerar para cada $n \in \omega$, (Y_n, τ_n) espacio polaco y $f_n : X_n \to Y_n$ isomorfismo de σ-álgebras. Consideremos a $Y = \prod_{n\in\omega} Y_n$ con la topología del producto τ, sabemos ya que Y es un espacio polaco, si denotamos a la σ-álgebra del producto como Σ_Y, entonces es claro que $\mathbb{B}(\tau) = \Sigma_Y$, por lo que por el lema $(f_n)_{n\in\omega} : \prod_{n\in\omega} X_n \to Y$ es medible, es claro que $(f_n)^{-1}_{n\in\omega} = (f_n^{-1})_{n\in\omega}$ por lo que $(f_n)_{n\in\omega}$ es isomorfismo de σ-álgebras lo que prueba que $\prod_{n\in\omega} X_n$ es espacio de Borel estándar. □

Los siguientes tres resultados comienza a mostrar cómo se relaciona este nuevo concepto con los ya estudiados.

Proposición 4.13. *Sea X un espacio polaco, entonces*

$$\{(Z, Y) \in F(X) \times F(X) : Z \subseteq Y\}$$

es un conjunto de Borel.

Demostración. Sea X como en las hipótesis. Sea $\{U_n \in \tau : n \in \omega\}$ una base numerable para la topología de X. Consideremos a $p_1 : F(X) \times F(X) \to F(X)$ y $p_2 : F(X) \times F(X) \to F(X)$ las proyecciones canónicas. Veamos que

$$\{(Z, Y) \in F(X) \times F(X) : Z \subseteq Y\}$$

$$= \{(Z, Y) \in F(X) \times F(X) : \forall n \in \omega\ [(Y \cap U_n = \varnothing) \Rightarrow (Z \cap U_n = \varnothing)]\}.$$

Sea (Z, Y) en el primero conjunto y $n \in \omega$, como $Z \subseteq Y$ y $Y \cap U_n = \varnothing$ entonces $Z \cap U_n = \varnothing$. Esto prueba la primera contención. Sea (Z, Y) en el segundo conjunto. Consideremos

$$B = \{n \in \omega : Y \cap U_n = \varnothing\},$$

es claro que $\bigcup_{n \in B} U_n \subseteq X \setminus Y$. Por ser $X \setminus Y$ abierto y $\{U_n \in \tau : n \in \omega\}$ base de la topología existe $C \subseteq \omega$ tal que $\bigcup_{n \in C} U_n = X \setminus Y$, resulta evidente que $C \subseteq B$, por lo que $\bigcup_{n \in B} U_n = X \setminus Y$. Como (Z, Y) pertenece al segundo conjunto tenemos que para cada $n \in B$, $Z \cap U_n = \varnothing$, esto implica que $X \setminus Z \subseteq \bigcup_{n \in B} U_n = X \setminus Y$, es decir, $Z \subseteq Y$. Esto prueba la segunda contención y por lo tanto la igualdad.

$$\{(Z, Y) \in X \times F(X) : Z \subseteq Y\}$$

$$= \bigcap_{n \in \omega} \{(Z, Y) \in F(X) \times F(X) : (Y \cap U_n = \varnothing) \Rightarrow (Z \cap U_n = \varnothing)\}$$

$$= \bigcap_{n \in \omega} \{(Z, Y) \in F(X) \times F(X) : (Y \cap U_n \neq \varnothing) \vee (Z \cap U_n = \varnothing)\}$$

$$= \bigcap_{n \in \omega} \left(\{(Z, Y) \in F(X) \times F(X) : Y \cap U_n \neq \varnothing\} \cup \{(Z, Y) \in F(X) \times F(X) : Z \cap U_n = \varnothing\} \right)$$

$$= \bigcap_{n \in \omega} \left(p_2^{-1}[B_{U_n}] \cup (p_1^{-1}[F(X) \setminus B_{U_n}]) \right).$$

Debido a que estamos considerando la σ-álgebra del producto tanto p_1 como p_2 son medibles, debido a que las σ-álgebras son cerradas bajo intersecciones y uniones numerables esta expresión hace evidente que este conjunto pertenece a la σ-álgebra del producto, por la proposición 4.12 esta σ-álgebra define un espacio de Borel estándar, lo que hace demuestra el resultado.

$\square$

Proposición 4.14. *Sea X un espacio polaco, entonces*

$$\{(y, Y) \in X \times F(X) : y \in Y\}$$

es un conjunto de Borel.

Demostración. Sea X como en las hipótesis. Sea $\{U_n \in \tau : n \in \omega\}$ una base numerable para la topología de X. Consideremos a $p_1 : X \times F(X) \to X$ y $p_2 : X \times F(X) \to F(X)$ las proyecciones canónicas. Veamos que

$$\{(y, Y) \in X \times F(X) : y \in Y\}$$

$$= \{(y, Y) \in X \times F(X) : \forall n \in \omega\ (Y \cap U_n = \varnothing) \Rightarrow (y \notin U_n)\}.$$

Sea (y, Y) en el primero conjunto y $n \in \omega$, como $y \in Y$ y $Y \cap U_n = \varnothing$ entonces $y \notin Y$. Esto prueba la primera contención. Sea (y, Y) en el segundo conjunto. Consideremos de nuevo

$$B = \{n \in \omega : Y \cap U_n = \varnothing\},$$

una vez más podemos concluir que $\bigcup_{n \in B} U_n = X \setminus Y$. Como (y, Y) pertenece al segundo conjunto tenemos que para cada $n \in B$, $y \notin U_n$, esto implica que $y \notin \bigcup_{n \in B} U_n = X \setminus Y$, es decir, $y \in Y$. Esto prueba la segunda contención y por lo tanto la igualdad. De nuevo

$$\{(y, Y) \in X \times F(X) : y \in Y\}$$

$$= \bigcap_{n \in \omega} \Big(\{(y, Y) \in X \times F(X) : (Y \cap U_n \neq \varnothing\} \cup \{(y, Y) \in X \times F(X) : y \notin U_n)\} \Big)$$

$$= \bigcap_{n \in \omega} \left(p_2^{-1}[B_{U_n}] \cup p_1^{-1}[X \setminus U_n] \right).$$

El mismo argumento de la proposición anterior termina la prueba de este resultado. □

Teorema 4.15. *Sea (X, τ) un espacio polaco y $d : (F(X), \Sigma_{\mathscr{B}}) \to (X, \mathbb{B}(\tau))$ una función de Borel. Entonces*

$$\{Y \in F(X) : d(Y) \in Y\} \in \Sigma_{\mathscr{B}}$$

es decir, es un conjunto de Borel.

Demostración. Sean X y d como en las hipótesis. Si consideramos a $F(X)$ con la σ-álgebra de la estructura Effros-Borel, podemos considerar a $X \times F(X)$ con la σ-álgebra del producto y a $F(X) \times F(X)$ también con la σ-álgebra del producto. Consideremos $f = \left(d, Id_{F(X)}\right)$, como d e $Id_{F(X)}$ son funciones medibles entonces por el lema 4.2 f es una función medible.

Sea a su vez $g : F(X) \to F(X) \times F(X)$ definida como $g(Y) = (Y, Y)$, veamos que g es medible. Sean $B_1, B_2 \in \Sigma_{\mathscr{B}}$

$$g^{-1}[B_1 \times B_2] = \{Y \in F(X) : g(Y) \in B_1 \times B_2\}$$

$$= \{Y \in F(X) : (g(Y) \in B_1) \wedge (g(Y) \in B_2)\} = B_1 \cap B_2.$$

Es evidente que $B_1 \cap B_2 \in \Sigma_{\mathscr{B}}$ por ser $\Sigma_{\mathscr{B}}$ σ-álgebra. De nuevo por el inciso (b) de la proposición 3.24 sabemos que g es función medible. Por último consideremos

$$\mathcal{D} = \{(y, Y) \in X \times F(X) : y \in Y\},$$

entonces

$$(f \circ g)^{-1}[\mathcal{D}] = \{Y \in F(X) : g \circ f(F) \in \mathcal{D}\}$$

$$= \{Y \in F(X) : f((F, F)) \in \mathcal{D}\} = \{Y \in F(X) : (d(F), F)) \in \mathcal{D}\}$$

$$= \{Y \in F(X) : d(F) \in F\}.$$

Por la proposición anterior $\mathcal{D}$ pertenence a la σ-álgebra del producto, como f, g son funciones medibles entonces por el inciso (a) de la proposición 3.24 sabemos que $f \circ g : F(X) \to X \times F(X)$ es medible, esto implica el resultado. $\square$

Con esto tenemos todos los resultados necesarios para estudiar la estructura de los subespacios cerrados de cualquier espacio de Banach separable.

Definición 4.16. *Sea X un espacio de Banach separable. Denotamos por* $\mathrm{Subs}(X)$ *al conjunto que tiene como elementos a todos los subespacios vectoriales cerrados de X equipado con la σ-álgebra relativa a la estructura Effros-Borel de X. En el caso $X = \mathscr{C}(\mathcal{C})$ denotamos* $\mathrm{Subs}(X) = \mathrm{EBS}$.

Teorema 4.17. *Sea X un espacio de Banach separable, entonces* $\mathrm{Subs}(X)$ *es un espacio de Borel estándar. En particular* EBS *lo es.*

Demostración. Sea X espacio de Banach separable, por el teorema de Kuratowski-Ryll-Nardewski podemos considerar una sucesión de funciones $(d_n)_{n\in\omega}$ tal que para cada $n \in \omega$, $d_n : F(X) \to X$ es función de Borel y para cada $F \in F(X)$, $\{d_n(F) : n \in \omega\}$ es denso en F y si $F \neq \varnothing$, $\{d_n(F) : n \in \omega\} \subseteq F$. Sea $\mathbb{Q}'$ el campo de los racionales si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o el subconjunto de números complejos con parte real e imaginaria racional si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Veamos que $Y \in F(X)$ es subespacio de X si y sólo si

$$\{pd_n(Y) + qd_m(Y) : (n, m \in \omega) \wedge (p, q \in \mathbb{Q}')\} \subseteq Y.$$

Si $Y \in F(X)$ es subespacio consideremos $n, m \in \omega$ y $p, q \in \mathbb{Q}'$, sabemos que al ser subespacio $Y \neq \varnothing$, lo que implica que $d_n(Y)$, $d_m(Y) \in Y$, de nuevo por ser subespacio $pd_n(Y) + qd_m(Y) \in Y$.

Si $Y \in F(X)$ satisface que $A = \{pd_n(Y)+qd_m(Y) : n, m \in \omega\, p, q \in \mathbb{Q}'\} \subseteq Y$. Como $\{d_n(Y) : n \in \omega\}$ es denso en Y ya mostramos en la proposición 1.53 que A, el conjunto de las combinaciones lineales de elementos de $\{d_n(Y) : n \in \omega\}$ con coeficientes en $\mathbb{Q}'$, es denso en $\mathrm{cl}(\langle Y\rangle)$. Por hipótesis esto implica que $\mathrm{cl}(\langle Y\rangle) = \mathrm{cl}(A) \subseteq \mathrm{cl}(Y) = Y$, como evidentemente $Y \subseteq \langle Y\rangle$ entonces $Y = \mathrm{cl}(Y) \subseteq \mathrm{cl}(\langle Y\rangle)$, esto muestra que $Y = \mathrm{cl}(\langle Y\rangle)$, como $\mathrm{cl}(\langle Y\rangle)$ es subespacio de X, entonces Y también lo es.

Escribamos $\mathbb{Q}' = \{q_n \in \mathbb{Q}' : n \in \omega\}$. Entonces

$$\mathrm{Subs}(X) = \bigcap_{n\in\omega}\bigcap_{m\in\omega}\bigcap_{k\in\omega}\bigcap_{l\in\omega}\{Y \in F(X) : q_k d_n(Y) + q_l d_m(Y) \in Y\}.$$

Sean $n, m, k, l \in \omega$, por el corolario 1.6 $\cdot_{q_k} : X \to X$ y $\cdot_{q_l} : X \to X$ son homeomorfimos por lo que en particular son funciones medibles respecto a la σ-álgebra de Borel de manera que por el inciso (b) de la proposición 3.24 $\cdot_{q_k} \circ d_n$ y $\cdot_{q_l} \circ d_m$ son medibles. Sabemos ya que la función $g : F(X) \to F(X) \times F(X)$ definida por $g(Y) = (Y, Y)$ es de Borel. Por el lema 4.2 $(\cdot_{q_k} \circ d_n, \cdot_{q_l} \circ d_m) \circ g$ es medible, por la proposición 1.5 $+ : X \times X \to X$ es continua, en particular es medible, esto implica de nuevo que $+ \circ ((\cdot_{q_k} \circ d_n, \cdot_{q_l} \circ d_m)) \circ g : F(X) \to X$ es medible. Por último, debido a la expresión ya demostrada de $\mathrm{Subs}(X)$ y al teorema anterior, esto implica que $\mathrm{Subs}(X) \in \Sigma_{\mathscr{B}}$. Debido a que la estructura Effros-Borel de cualquier espacio polaco es de Borel estándar y al corolario 3.27, esto implica que $\mathrm{Subs}(X)$ es de Borel estándar. $\square$

La noción de espacio universal de Banach nos permite 'codificar' una clase (propia o impropia) de espacios de Banach como un subconjunto de $\mathrm{Subs}(X)$, este método nos permite obtener resultados sobre la propia clase.

Intuitivamente hablando, EBS recupera toda la estructura de la categoría de espacios de Banach separables, pues propiedades de espacios de Banach como ser reflexivo, tener base de Schauder, tener dual separable, etc., se convierten en subconjuntos de EBS. Al ser este un espacio de Borel estándar podemos estudiar estas propiedades a través de la teoría descriptiva, ese es el propósito de lo que resta de esta sección. La última sección del capítulo utiliza estas herramientas para demostrar de manera elegante algunos resultados importantes de la teoría de espacios de Banach.

Teorema 4.18. *Sea $X \in$ EBS, entonces el conjunto*

$$\{((y_k)_{k\in\omega}, Y) \in X^\omega \times \mathrm{Subs}(X) : (y_k)_{k\in\omega} \text{ es total en } Y\}$$

es de Borel.

Demostración. Sea $X \in \mathrm{EBS}$ y $Y \in \mathrm{Subs}(X)$. Sean $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ las funciones cuya existencia asegura el teorema Kuratowski-Ryll-Nardzewski que existen para Y.

Para $(y_k)_{k\in\omega} \in X^\omega$ y $Y \in \mathrm{Subs}(X)$, denotamos por

$$p(k, n, m, l, a_o, \dots, a_l)$$

las siguientes propiedades:

1) Para $k \in \omega$, $y_k \in Y$

2) Para $n, m, l, \in \mathbb{N}$, y $a_0, \dots a_l \in \mathbb{Q}$ se cumple que

$$\left|\left|d_n(Y) - \sum_{i=0}^{l} a_i y_i\right|\right| < \frac{1}{m}.$$

Veamos que para una sucesión arbitraria $(y_k)_{k\in\omega}$ en X tenemos que $\mathrm{cl}(\langle\{y_k \in Y : k \in \omega\}\rangle) = Y$ si y sólo si para cualquier $k \in \omega$ y $n, m, l, \in \mathbb{N}$ y $a_0, \dots a_l \in \mathbb{Q}$, $p(k, n, m, l, a_o, \dots, a_l)$.

Supongamos lo primero, entonces claramente $\{y_k \in Y : k \in \omega\} \subseteq Y$. Sean $n, m, \in \mathbb{N}$ como $d_n(Y) \in Y$ consideremos A el conjunto de combinaciones lineales de elementos de $\{y_n \in Y : n \in \omega\}$ con coeficientes en $\mathbb{Q}$, por el argumento utilizado en la proposición 1.53 sabemos que A es denso en Y, por lo que $B_{\frac{1}{m}}(d_n(Y)) \cap A \neq \varnothing$. Consideremos z en este conjunto entonces existen $l \in \mathbb{N}$ y $a_0, \dots a_l \in \mathbb{Q}$ tales que $\sum_{i=0}^{l} a_i y_i = z$, además $||d_n(Y) - \sum_{i=0}^{l} a_i y_i|| = ||d_n(Y) - z|| < \frac{1}{m}$ pues $z \in B_{\frac{1}{m}}(d_n(Y))$.

Supongamos lo segundo. Sea $x \in Y$ y $\epsilon > 0$, sabemos existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $\frac{1}{m} < \epsilon$ y $||d_n(Y) - x|| < \frac{1}{2m}$. Sean $l \in \mathbb{N}$ y $a_0, \dots, a_l \in \mathbb{Q}$ tales que $||d_n(Y) - \sum_{i=0}^{l} a_i y_i|| < \frac{1}{2m}$ esto implica gracias a la desigualdad del triángulo que $||x - \sum_{i=0}^{l} a_i y_i|| < \frac{1}{m}$. Esto prueba que $Y \subseteq \mathrm{cl}(\langle\{y_k \in Y : k \in \omega\}\rangle)$, como por hipótesis $\{y_k \in Y : k \in \omega\} \subseteq Y$, al ser Y subespacio de X, $\langle\{y_k \in Y : k \in \omega\}\rangle \subseteq Y$, y al ser cerrado $\mathrm{cl}(\langle\{y_k \in Y : k \in \omega\}\rangle) \subseteq Y$, por lo que ambos conjuntos son iguales.

Sabemos que para cada $l \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Q}^l$ es numerable por lo que podemos escribir

$$\mathbb{Q}^l = \{(a_{0,j}, \dots a_{l,j}) \in \mathbb{Q}^l : j \in \mathbb{N}\}$$

esto nos permite expresar:

$$\begin{aligned} &\left\{\left((y_k)_{k\in\omega}, Y\right) \in X^\omega \times \mathrm{Subs}(X) : (y_k)_{k\in\omega} \text{ es total en } Y\right\} \\ = &\bigcap_{k\in\omega} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{l\in\mathbb{N}} \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \left\{\left((y_k)_{k\in\omega}, Y\right) \in X^\omega \times \mathrm{Subs}(X) : p(k, n, m, l, a_{0,j}, \dots, a_{l,j})\right\} \end{aligned}$$

Además si consideramos $k \in \omega$ y $n, m, l, j \in \mathbb{N}$ tales que $y_k \in Y$ y $||d_n(Y) - \sum_{i=0}^{l} a_{i,j} y_i|| < \frac{1}{m}$ entonces

$$\left\{ \big((y_k)_{k\in\omega}, Y \big) \in X^\omega \times \mathrm{Subs}(X) : y_k \in Y \wedge \left\| d_n(Y) - \sum_{i=0}^{l} a_{i,j} y_i \right\| < \frac{1}{m} \right\}$$

$$= p_k^{-1}[Y] \cap d_n^{-1} \left[B_{\frac{1}{m}} \left(\sum_{i=0}^{l} a_{i,j} y_i \right) \right]$$

el cual claramente pertenence a la σ-álgebra del producto pues tanto p_k como d_n son funciones medibles. Esto demuestra el resultado. □

El siguiente resultado muestra que la 'codificación' que realiza EBS de la estructura de los espacios de Banach separables reales rescata una de sus propiedades importantes. Para poder demostrarlo necesitamos un lema el cual es imporante por sí mismo.

Lema 4.19. *Sea $X \in$ EBS y $C \geq 1$, entonces el conjunto*

$$\{((y_n)_{n\in\omega}, (z_n)_{n\in\omega}) \in X^\omega \times X^\omega : (y_n)_{n\in\omega} \text{ es } C\text{-equivalente a } (z_n)_{n\in\omega}\}$$

es de Borel.

Demostración. Sea $X \in$ EBS y $C \geq 1$. Dadas dos sucesiones $(y_n)_{n\in\omega}$ y $(z_n)_{n\in\omega}$ en X, denotamos por $\mathrm{eq}_C(\sum_{i=0}^k a_i y_i, \sum_{i=0}^k a_i z_i)$ la propiedad de que para $k \in \mathbb{N}$ y $a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{Q}$ tengamos que

$$\frac{1}{C} \left\| \sum_{i=0}^{k} a_i y_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=0}^{k} a_i z_i \right\| \leq C \left\| \sum_{i=0}^{k} a_i y_i \right\|.$$

Primero veamos el hecho que $(y_n)_{n\in\omega}$ sea C-equivalente a $(z_n)_{n\in\omega}$ es equivalente a que para cada $k \in \mathbb{N}$ y $a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{Q}$, se satisfaga

$$\mathrm{eq}_C(\sum_{i=0}^{k} a_i y_i, \sum_{i=0}^{k} a_i z_i).$$

Es claro que si $(y_n)_{n\in\omega}$ es C-equivalente a $(z_n)_{n\in\omega}$ entonces esta propiedad se satisface. Supongamos ahora que $(y_n)_{n\in\omega}$ y $(z_n)_{n\in\omega}$ satisfacen esta propiedad. Sea $k \in \mathbb{N}$ y $a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$. Podemos considerar para cada $i \in \{0, \ldots, k\}$, $(a_{n,i})_{n\in\omega} \in \mathbb{Q}^\omega$ tal que $a_{n,i} \longrightarrow a_i$. Entonces tenemos que para cada $n \in \omega$

$$\frac{1}{C} \left\| \sum_{i=0}^{k} a_{i,n} y_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=0}^{k} a_{i,n} z_i \right\| \leq C \left\| \sum_{i=0}^{k} a_{i,n} y_i \right\|.$$

La convergencia de cada una de las sucesiones $(a_{n,i})_{n\in\omega}$ implica que $\sum_{i=0}^{k} a_{i,n}y_i \longrightarrow \sum_{i=0}^{k} a_i y_i$ y que $\sum_{i=0}^{k} a_{i,n}x_i \longrightarrow \sum_{i=0}^{k} a_i x_i$ lo que aunado a las desigualdades anteriores hace evidente que

$$\frac{1}{C}\left\|\sum_{i=0}^{k} a_i y_i\right\| \leq \left\|\sum_{i=0}^{k} a_i z_i\right\| \leq C\left\|\sum_{i=0}^{k} a_i y_i\right\|$$

es decir, $(y_n)_{n\in\omega}$ es C-equivalente a $(z_n)_{n\in\omega}$.

Una vez más escribamos para cada $l \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{Q}^l = \{(a_{0,j}, \dots a_{l,j}) \in \mathbb{Q}^l : j \in \mathbb{N}\}.$$

Lo previamente mostrado nos permite escribir

$$\begin{aligned}&\{((y_n)_{n\in\omega}, (z_n)_{n\in\omega}) \in X^\omega \times X^\omega : (y_n)_{n\in\omega} \text{ es } C\text{-equivalente a } (z_n)_{n\in\omega}\}\\ &= \bigcap_{l\in\mathbb{N}}\bigcap_{o\in\mathbb{N}}\left\{((y_n)_{n\in\omega}, (z_n)_{n\in\omega}) \in X^\omega \times X^\omega : \mathrm{eq}_C\left(\sum_{i=0}^{k} a_{i,o}y_i, \sum_{i=0}^{k} a_{i,o}z_i\right)\right\}.\end{aligned}$$

Por otra parte es claro que

$$\mathbb{R}^2_{\leq C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq Cy\}$$

y

$$\mathbb{R}^2_{\geq C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq Cy\}$$

son cerrados.

Sean $n \in \omega$ y $a_0, \dots a_n \in \mathbb{Q}$ si consideramos $(p_n)_{n\in\omega}$ las proyecciones canónicas con dominio X^ω podemos denotar $(a_1p_1, \dots, a_np_n) : X^\omega \to X^{n+1}$ como la función tal que $(a_0p_1, \dots, a_np_0)((y_n)_{n\in\omega}) = (a_0y_0, \dots, a_ny_n)$,

$$((a_0p_1, \dots, a_np_0), (a_0p_0, \dots, a_np_n)) : X^\omega \times X^\omega \to X^{n+1} \times X^{n+1},$$

por último sea $+_{X^n} : X^{n+1} \to X$ definida como $+_{X^n}(x_0, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^{n} x_i$. Esto nos permite considerar a la función

$$(+_{X^n}, +_{X^n}) : X^{n+1} \times X^{n+1} \to X \times X$$

$$\begin{aligned}&\left\{((y_n)_{n\in\omega}, (z_n)_{n\in\omega}) \in X^\omega \times X^\omega : \mathrm{eq}_C\left(\sum_{i=0}^{k} a_i y_i, \sum_{i=0}^{k} a_i z_i\right)\right\}\\ &= \left\{((y_n), (z_n)) \in X^\omega \times X^\omega : \left(\left\|\sum_{i=0}^{n} a_n p_n\big((y_n)\big)\right\|, \left\|\sum_{i=0}^{n} a_n p_n\big((z_n)\big)\right\|\right) \in \mathbb{R}^2_{\leq C}\right\}\end{aligned}$$

$$\bigcap\left\{((y_n),(z_n))\in X^\omega\times X^\omega:\left(\left\|\sum_{i=0}^{n}a_np_n\big((y_n)\big)\right\|,\left\|\sum_{i=0}^{n}a_np_n\big((z_n)\big)\right\|\right)\in\mathbb{R}^2_{\geq C}\right\}$$

$$=((a_0p_1,\ldots,a_np_0),(a_0p_0,\ldots,a_np_n))^{-1}\left[(+_{X^n},+_{X^n})^{-1}[(||\cdot||,||\cdot||)^{-1}[\mathbb{R}^2_{\leq C}]]\right]$$

$$\bigcap((a_0p_1,\ldots,a_np_0),(a_0p_0,\ldots,a_np_n))^{-1}\left[(+_{X^n},+_{X^n})^{-1}[(||\cdot||,||\cdot||)^{-1}[\mathbb{R}^2_{\geq C}]]\right].$$

Para $i\in\{0,\ldots,n\}$, $a_ip_i=\cdot_{a_i}\circ p_i$ es función de Borel pues es composición de funciones de Borel. Esto implica que $((a_0p_1,\ldots,a_np_0),(a_0p_0,\ldots,a_np_n))$ es función de Borel. Es claro a partir de la proposición 1.5 que $+_{X^n}$ y $+_{X^n}$ son continuas por lo que son funciones de Borel, de manera que $(+_{X^n},+_{X^n})$ también es de Borel, por último, $||\cdot||$ es continua, por lo que $(||\cdot||,||\cdot||)$ es de Borel, esto hace evidente que el conjunto anterior es de Borel. Lo que implica que el resultado. □

Vale la pena notar que este lema puede ser mejorado, aunque para los fines de esta trabajo sólo utilizaremos el resultado que enuncia. No es difícil mostrar que todas las funciones de Borel utilizadas en la prueba anterior son continuas. Esto aunado a que $\mathbb{R}^2_{\leq C}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x\leq Cy\}$ y $\mathbb{R}^2_{\geq C}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x\geq Cy\}$ son cerrados y que las únicas operaciones conjuntistas utilizadas durante la prueba son intersecciones nos permite afirmar que el anterior es un conjunto cerrado.

Teorema 4.20. *Sea $X\in$ EBS, entonces el conjunto*

$$\{(Y,Z)\in\mathrm{Subs}(X)\times\mathrm{Subs}(X):Y\cong Z\}$$

es analítico. El conjunto

$$\{(Y,Z)\in\mathrm{Subs}(X)\times\mathrm{Subs}(X):Y\ \textit{es isométricamente isomorfo a}\ Z\}$$

también lo es.

Demostración. Sea $X\in$ EBS y $Y,Z\in\mathrm{Subs}(X)$, gracias al teorema 1.99 y al corolario 1.100 sabemos que $Y\cong Z$ si y sólo si existen $(y_n)_{n\in\omega}\in Y^\omega$, $(z_n)_{n\in\omega}\in Z^\omega$ y $m\in\mathbb{N}$ tales que $\mathrm{cl}(\langle\{y_n\in Y:n\in\omega\}\rangle)=Y$, $\mathrm{cl}(\langle\{z_n\in Z:n\in\omega\}\rangle)=Z$ y $(y_n)_{n\in\omega}$ es m-equivalente a $(z_n)_{n\in\omega}$.

Por el lema para cada $m\in\mathbb{N}$

$$B_m=\{((y_n),(z_n),Y,Z)\in(X^\omega)^2\times\mathrm{Subs}(X)^2:(y_n)\text{ es }m\text{-equivalente a }(z_n)\}$$

es de Borel. Además sabemos por el teorema 4.18 que

$$\{\big((y_n)_{n\in\omega},Y\big)\in X^\omega\times\mathrm{Subs}(X):(y_n)_{n\in\omega}\text{ es total en }Y\}$$

es de Borel. Por lo que

$$D_1 = \{((y_n)_{n\in\omega}, (z_n)_{n\in\omega}, Y, Z) \in (X^\omega)^2 \times \mathrm{Subs}(X)^2 : (y_n)_{n\in\omega} \text{ es total en } Y\}$$

y

$$D_2 = \{((y_n)_{n\in\omega}, (z_n)_{n\in\omega}, Y, Z) \in (X^\omega)^2 \times \mathrm{Subs}(X)^2 : (z_n)_{n\in\omega} \text{ es total en } Z\}$$

son de Borel.

Sea $f : (X^\omega)^2 \times \mathrm{Subs}(X)^2 \to \mathrm{Subs}(X)^2$ definida por $f((y_n),(z_n),Y,Z) = (Y,Z)$. Tenemos que

$$f\left[\left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} B_m\right) \cap D_1 \cap D_2\right] = \{(Y,Z) \in \mathrm{Subs}(X) \times \mathrm{Subs}(X) : Y \cong Z\}$$

por lo que este conjunto es analítico. Observese que Y es isométricamente isomorfo a Z si y sólo si existen sucesiones $(y_n)_{n\in\omega} \in Y^\omega$, $(z_n)_{n\in\omega} \in Z^\omega$ tales que $\mathrm{cl}(\langle\{y_n \in Y : n \in \omega\}\rangle) = Y$, $\mathrm{cl}(\langle\{z_n \in Z : n \in \omega\}\rangle) = Z$ y $(y_n)_{n\in\omega}$ es 1-equivalente a $(z_n)_{n\in\omega}$. Por lo que

$$f[B_1 \cap D_1 \cap D_2]$$
$$= \{(Y,Z) \in \mathrm{Subs}(X) \times \mathrm{Subs}(X) : Y \text{ es isométricamente isomorfo a } Z\}$$

de manera que este conjunto también es analítico.

$\square$

Este resultado muestra que EBS rescata la relación de isomorfismo. Estudiemos más de cerca la relación entre estos dos conceptos.

En lo que sigue vamos utilizar tanto la herramienta de árboles como la estructura Effros-Borel para obtener resultados sobre EBS, por lo que vale la pena detenerse a revisar unos cuantos resultados que relacionan estas dos herramientas. Sea A un conjunto con la topología discreta, podemos considerar para cada $n \in \omega$, A^n con la topología del producto, la cual coincide con la topología discreta. Sabemos además que $A^{<\omega}$ es la unión disjunta de estos conjuntos, por lo que podemos podemos considerar a este conjunto con esta topología, la cual lo convierte en un espacio discreto. Esto significa que $F(A^{<\omega}) = \wp(A^{<\omega})$, por lo que podemos considerar a $\mathrm{Ar}(A)$ con la σ-álgebra relativa a la estructura Effros-Borel de A.

Proposición 4.21. *Sea A un conjunto numerable con la topología discreta, entonces $\mathrm{Ar}(A) \subseteq F(A^{<\omega})$ es un conjunto de Borel.*

Demostración. Sea A un conjunto con la topología discreta.

$$\mathrm{Ar}(A) = \{T \subseteq A^{<\omega} : \forall t \in T\ \forall s \subseteq t\ (s \in T)\}$$

Como A es numerable y $A^{<\omega} = \bigcup_{n\in\omega} A^n$, entonces $A^{<\omega}$ es numerable, por lo que podemos expresar $A^{<\omega} = \{t_n \in A^{<\omega} : n \in \omega\}$. Sea para cada $S \subseteq A^{<\omega}$, $\omega_S = \{n \in \omega : t_n \in S\}$, y para cada $k \in \omega$, $\omega_k = \{n \in \omega : s_n \subseteq t_k\}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ar}(A) &= \{T \subseteq A^{<\omega} : \forall n \in \omega_T\ \forall m \in \omega_n (s_n \in T)\} \\
&= \bigcap_{n\in\omega} \bigcap_{m\in\omega} \{T \subseteq A^{<\omega} : (n \in \omega_T \wedge m \in \omega_n) \Rightarrow s_n \in T\} \\
&= \bigcap_{n\in\omega} \bigcap_{m\in\omega} \{T \subseteq A^{<\omega} : (n \in \omega_T \wedge m \in \omega_n) \Rightarrow \{s_n\} \cap T \neq \varnothing\}.
\end{aligned}$$

Debido a que $A^{<\omega}$ es un espacio discreto, esta expresión deja en claro que $\mathrm{Ar}(A)$ es un conjunto de Borel. □

Esta proposición implica que $\mathrm{Ar}(A)$ como subespacio medible del espacio Effros-Borel de $A^{<\omega}$ es un espacio Borel estándar.

Proposición 4.22. *Sea A un conjunto numerable con la topología discreta, si denotamos* $\mathrm{BF}(A) = \{T \in \mathrm{Ar}(A) : T$ *es un árbol bien fundado*$\}$*, entonces* $\mathrm{BF}(A) \in \Pi^1_1(\mathrm{Ar}(A))$.

Demostración. Sea A un conjunto numerable con la topología discreta, basta probar que $\mathrm{Ar}(A) \setminus \mathrm{BF}(A) = \{T \in \mathrm{Ar}(A) : T \text{ es un árbol mal fundado}\}$ es un conjunto analítico.

$$\mathrm{Ar}(A) \setminus \mathrm{BF}(A) = \{T \in \mathrm{Ar}(A) : \exists t \in A^\omega\ \forall n \in \omega (t\,|_n \in T)\}$$

Sabemos por la proposición 4.14 que

$$\{(t,T) \in A^{<\omega} \times \mathrm{Ar}(A) : t \in T\}$$

es un conjunto de Borel.

Definimos para cada $n \in \omega$, $f_n : A^\omega \to A^n$ como $f_n(t) = t\,|_n$. Es evidente que para cada $n \in \omega$, f_n es continua, por lo que $(f_n, Id) : A^\omega \times \mathrm{Ar}(A) \to A^n \times \mathrm{Ar}(A)$ es de Borel. Siendo así, tenemos que para cada $n \in \omega$,

$$\{(t,T) \in A^\omega \times \mathrm{Ar}(A) : t\,|_n \in T\} = (f_n, Id)^{-1}[\{(t,T) \in A^{<\omega} \times \mathrm{Ar}(A) : t \in T\}]$$

por lo que es un conjunto de Borel. Esto implica a su vez que

$$\{(t,T) \in A^\omega \times \mathrm{Ar}(A) : \forall n \in \omega\ (t\,|_n \in T)\} = \bigcap_{n\in\omega} \{(t,T) \in A^\omega \times \mathrm{Ar}(A) : t\,|_n \in T\}$$

es un conjunto de Borel. Por último, sea $p : A^n \times \mathrm{Ar}(A) \to \mathrm{Ar}(A)$ definida como $p(t,T) = T$, entonces

$$\{T \in \mathrm{Ar}(A) :\ \exists t \in A^\omega,\ \forall n \in \omega\ (t\,|_n \in T)\}$$
$$= p[\{(t,T) \in A^{<\omega} \times \mathrm{Ar}(A) : \forall n \in \omega\ (t\,|_n \in T)\}]$$

al ser p una proyección esto prueba que este es un conjunto analítico. Es decir, $\mathrm{Ar}(A) \setminus \mathrm{BF}(A) \in \Sigma^1_1(\mathrm{Ar}(X))$.

□

Esto es todo lo que necesitamos para estudiar la relación de isomorfismo en EBS.

Definición 4.23. *Sea X un espacio de Banach real con base de Schauder denotamos*

$$\mathrm{NC}_X = \{Y \in \mathrm{EBS} : X \textit{ no es isomorfo a un subespacio de } Y\}$$

Es un resultado básico de la teoría de bases de Schauder que ℓ_1, $\mathscr{C}([0,1])$ y $\mathscr{C}(\mathcal{C})$ tienen bases de Schauder. Por lo que NC_X nos permite estudiar tanto los espacios que no contienen una copia de ℓ_1, como los espacios que no son universales, $\mathrm{NC}_{\mathscr{C}(\mathcal{C})}$. Ambas clases muy estudiadas en la teoría de espacios de Banach.

Quisiéramos conocer algunas propiedades de los conjuntos NC_X, particularmente si son de Borel o Analíticos. Vamos a realizar este estudio utilizando la herramienta de árboles.

Definición 4.24. *Sean X un espacio de Banach real con base de Schauder, $(e_n)_{n\in\omega}$ una base de Schauder normalizada de X, $Y \in \mathrm{EBS}$ y $C \geq 1$. Definimos*

$$T^*_{NC}(Y, X, (e_n)_{n\in\omega}, C) \subseteq Y^{<\omega}$$

de la siguiente manera, para cualquier $l \in \omega$, $(y_0, \ldots, y_l) \in T^*_{NC}(Y, X, (e_n)_{n\in\omega}, C)$ si y sólo si $(y_0, \ldots, y_l, 0, \ldots)$ es C-equivalente a $(e_0, \ldots, e_l, 0, \ldots)$.

La siguiente proposición es inmediata a partir de la definición de sucesiones C-equivalentes.

Proposición 4.25. *Sea X un espacio de Banach real con base de Schauder, $(e_n)_{n\in\omega}$ una base de Schauder normalizada de X, $Y \in \mathrm{EBS}$ y $C \geq 1$. Entonces*

$$T^*_{NC}(Y, X, (e_n)_{n\in\omega}, C) \in \mathrm{Ar}(Y).$$

De manera intuitiva $T^*_{NC}(Y, X, (e_n)_{n\in\omega}, C)$ recupera todos nuestros intententos de construir una sucesión C equivalente a $(e_n)_{n\in\omega}$ en Y. Podemos construir otro árbol a partir de este.

Definición 4.26. *Sean X un espacio de Banach real con base de Schauder, $(e_n)_{n\in\omega}$ una base de Schauder normalizada de X, $Y \in \mathrm{EBS}$ y $k \in \mathbb{N}$. Consideremos el conjunto de funciones cuya existencia asegura el teorema de Kuratowski-Ryll-Nardzewski $\{d_n : \mathrm{EBS} \to \mathscr{C}(\mathcal{C}) \mid n \in \omega\}$. Definimos*

$$T_{NC}(Y, X, (e_n)_{n\in\omega}, k) \in \mathrm{Ar}(\omega)$$

de la siguiente manera, para cualquier $l \in \omega$, $(n_0, \ldots, n_l) \in T_{NC}(Y, X, (e_n)_{n\in\omega}, k)$ si y sólo si $(d_{n_0}(Y), \ldots, d_{n_l}(Y)) \in T^*_{NC}(Y, X, (e_n)_{n\in\omega}, k)$.

Definimos también

$$T_{NC}(Y, X, (e_n)_{n\in\omega}) \in \mathrm{Ar}(\omega)$$

de la siguiente manera, para cualquier $l \in \omega$, $m \in \mathbb{N}$, y $t \in Y^l$, $m^\frown t \in T_{NC}(Y, X, (e_n)_{n\in\omega})$ si y sólo si $t \in T_{NC}(Y, X, (e_n)_{n\in\omega}, m)$.

El hecho de que $T_{NC}(Y, X, (e_n)_{n\in\omega}, k)$ sea un árbol es una consecuencia inmediata de que $T^*_{NC}(Y, X, (e_n)_{n\in\omega}, k)$ lo es. Por su parte el hecho de que $T_{NC}(Y, X, (e_n)_{n\in\omega})$ lo sea es consecuencia de que $T_{NC}(Y, X, (e_n)_{n\in\omega}, k)$ lo es.

Debido a que $T^*_{NC}(Y, X, (e_n)_{n\in\omega}, k)$ recoge nuestros intentos de construir sucesiones k-equivalentes, $T_{NC}(Y, X, (e_n)_{n\in\omega}, k)$ también lo hace. Por su parte $T_{NC}(Y, X, (e_n)_{n\in\omega})$ nos permite recoger todos los árboles $T_{NC}(Y, X, (e_n)_{n\in\omega}, k)$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$ y organizarlos como un árbol, es decir, este árbol recoge todos nuestros intentos de construir un isomorfismo entre X y Y. Estas ideas intuitivas se ven reflejadas en los siguientes resultados.

Lema 4.27. *Sean X un espacio de Banach real con base de Schauder y $(e_n)_{n\in\omega}$ una base de Schauder normalizada de X. Entonces $Y \in \mathrm{NC}_X$ si y sólo si para cada $C \geq 1$, $T^*_{NC}(Y, X, (e_n)_{n\in\omega}, C)$ es un árbol bien fundado.*

Demostración. Sean X, $(e_n)_{n\in\omega}$ como en las hipótesis y $Y \in \mathrm{EBS}$.

Para probar por contrapositiva, supongamos primero que existe $C \geq 1$ tal que $T^*_{NC}(Y, X, (e_n)_{n\in\omega}, C)$ es mal fundado, es decir, que existe $(yn)_{n\in\omega} \in Y^\omega$ tal que para cualquier $l \in \omega$, $(y_0, \dots, y_l, 0, \dots)$ es C-equivalente a $(e_0, \dots, e_l, 0, \dots)$, entonces $(y_n)_{n\in\omega}$ y $(e_n)_{n\in\omega}$ son C-equivalentes, lo que implica por el teorema 1.99 que X es isomorfo a $\mathrm{cl}(\langle\{y_n \in Y : n \in \omega\}\rangle) \subseteq Y$.

De nuevo, para demostrar por contrapositiva supongamos existe un isomorfismo $U : X \to Y$, sea $C \geq ||U||, ||U^{-1}||$, entonces $(e_n)_{n\in\omega}$ y $(U(e_n))_{n\in\omega}$ son C-equivalente por el teorema 1.99, lo que implica que para cualquier $l \in \omega$, $(U(e_n))_{n\in\omega} |_l \in T^*_{NC}(Y, X, (e_n)_{n\in\omega}, C)$, es decir, que $T^*_{NC}(Y, X, (e_n)_{n\in\omega}, C)$ es mal fundado. □

El lema anterior asegura que $T^*_{NC}(Y, X, (e_n)_{n\in\omega}, C)$ refleja apropiadamente al conjunto NC_X. El siguiente lema asegura que cualquier perturbación de una base de Schauder normalizada suficientemente pequeña es una base de Schauder equivalente a la original.

Lema 4.28. *Sean X un espacio de Banach con base de Schauder y $(e_n)_{n\in\omega}$ una base de Schauder normalizada de X con constante básica $K \geq 1$. Si $(y_n)_{n\in\omega}$ es una sucesión en X, tal que para cualquier $n \in \omega$,*

$$||x_n - y_n|| < \frac{1}{2K} 2^{-n-2},$$

entonces $(e_n)_{n\in\omega}$ es una base de Schauder 2-equivalente a $(y_n)_{n\in\omega}$.

Demostración. Sean X, $(e_n)_{n\in\omega}$ y $(y_n)_{n\in\omega}$ como en las hipótesis. Sea $x \in X$ y $(a_n)_{n\in\omega}$ la única sucesión tal que $x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i e_i$. Para cualquier $x \in X$ y $n \in \omega$,

$$\begin{aligned} |a_n| = \frac{1}{||x_n||} \left|\left| \sum_{i=0}^{n+1} a_i e_i - \sum_{i=0}^{n} a_i e_i \right|\right| &\leq \left|\left| \sum_{i=0}^{n+1} a_i e_i \right|\right| + \left|\left| \sum_{i=0}^{n} a_i e_i \right|\right| \\ &\leq 2K \left|\left| \sum_{i=0}^{\infty} a_i e_i \right|\right| = 2K||x|| \end{aligned}$$

es decir, $\sup\{|a_n| : n \in \omega\} \leq 2K||x||$.

Definimos $U : X \to X$ como $U(\sum_{i=0}^{\infty} a_i e_i) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(e_i - y_i)$, veamos que esta serie converge, si $x \in X$ entonces

$$\begin{aligned} \left|\left| \sum_{i=0}^{\infty} a_i(e_i - y_i) \right|\right| &\leq \sup\{|a_n| : n \in \omega\} \left|\left| \sum_{i=0}^{\infty} (e_i - y_i) \right|\right| \\ &\leq 2K||x|| \sum_{i=0}^{\infty} ||e_i - y_i|| \leq 2K||x|| \frac{1}{2K} \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i-2} \\ &= ||x|| \frac{1}{2} < ||x||. \end{aligned}$$

Además es claro que U es lineal y por el teorema de la gráfica cerrada es un operador acotado, esta desigualdad además prueba que $||U|| \leq \frac{1}{2} < 1$. Además tenemos que

$$\sum_{i=0}^{\infty} ||U^i|| = ||Id_X|| + \sum_{i=1}^{\infty} ||U^i|| \leq ||Id_X|| + \sum_{i=1}^{\infty} ||U||^i \leq 1 + \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} = 2$$

por el teorema 1.19. Esto implica que $\sum_{i=0}^{\infty} U^i$ es una series absolutamente convergente. Debido al teorema 1.18 sabemos que $\mathscr{B}(X)$ es un espacio de Banach, por lo que el teorema 1.14 nos asegura que $\sum_{i=0}^{\infty} U^i \in \mathscr{B}(X)$. Este operador satisface que

$$\left[\sum_{i=0}^{\infty} U^i(X)\right] \circ (Id_X - U) = \sum_{i=0}^{\infty} U^i(X) - \sum_{i=1}^{\infty} U^i = \sum_{i=0}^{\infty} (U^i - U^{i+1})(X) = U^0 = Id_X$$

y

$$(Id_X - U) \circ \left[\sum_{i=0}^{\infty} U^i(X)\right] = \sum_{i=0}^{\infty} U^i(X) - \sum_{i=1}^{\infty} U^i = \sum_{i=0}^{\infty} (U^i - U^{i+1})(X) = U^0 = Id_X$$

por lo que $\sum_{i=0}^{\infty} U^i$ es el operador inverso de $Id_X - U$. Pero $(Id_X - U)(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i e_i - \sum_{i=0}^{\infty} a_i(e_i - y_i) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i y_i$. Por lo que $T = Id_X - U$ es un isomorfismo que satisface que para cada $n \in \omega$, $Te_n = y_n$. Además $||T|| \leq ||Id_X|| + ||U|| \leq 2$ y $||\sum_{i=0}^{\infty} U^i|| \leq \sum_{i=0}^{\infty} ||U^i|| \leq 2$. Esto nos asegura que $(y_n)_{n\in\omega}$ es una base de Schauder, y por el teorema 1.99 es 2-equivalente a $(e_n)_{n\in\omega}$. □

Teorema 4.29. *Sean X un espacio de Banach real con base de Schauder y $(e_n)_{n\in\omega}$ una base de Schauder normalizada de X. Entonces $Y \in \mathrm{NC}_X$ si y sólo si $T_{NC}(Y, X, (e_n)_{n\in\omega})$ es un árbol bien fundado.*

Demostración. Sean X, $(e_n)_{n\in\omega}$ como en las hipótesis y $Y \in$ EBS .

Supongamos primero que $T_{NC}(Y, X, (e_n)_{n\in\omega})$ es mal fundado. Sea $t \in \omega^\omega$, si para cada $l \in \omega$, $t\,|_l \in T_{NC}(Y, X, (e_n)_{n\in\omega})$, entonces $(d_{t(n+1)}(Y))_{n\in\omega}$ es $t(0)$-equivalente a $(e_n)_{n\in\omega}$, lo que implica que $T^*_{NC}(Y, X, (e_n)_{n\in\omega}, t(0))$ es mal fundado, por lo X es isomorfo a un subespacio cerrado de Y, gracias al lema 4.27. Esto demuestra esta implicación por contrapositiva.

Supongamos ahora que existe un isomorfismo $U : X \to Y$. Consideremos el conjunto de funciones cuya existencia asegura el teorema de Kuratowski-Ryll-Nardzewski $\{d_n : \mathrm{EBS} \to \mathscr{C}(\mathcal{C}) \mid n \in \omega\}$. Como $(e_n)_{n\in\omega}$ es base de Schauder es claro que $(U(e_n))_{n\in\omega}$ también es base de Schauder de $U[X]$, sea K su constante básica. Como $\{d_n(Y) :: n \in \omega\}$ es denso en Y, podemos considerar $t \in \omega^\omega$ tal que para cada $n \in \omega$, $||d_{t(n)}(Y) - U(e_n)|| < \frac{1}{2K}2^{-n-2}$. Por el lema 4.28 $(d_{t(n)}(Y))_{n\in\omega}$ es equivalente a $(U(e_n))_{n\in\omega}$, a su vez, $(U(e_n))_{n\in\omega}$ es equivalente a $(e_n)_{n\in\omega}$ por el teorema 1.98 esto muestra que $(d_{t(n)}(Y))_{n\in\omega}$ y $(e_n)_{n\in\omega}$ son equivalentes, por lo que por el corolario 1.100, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que ambas son k-equivalentes. Esto implica que para cualquier $l \in \omega$, $k^\frown t \mid_l \in T_{NC}(Y, X, (e_n)_{n\in\omega})$. Lo que demuestra por contrapositiva esta implicación.

□

Lema 4.30. *Sean X un espacio de Banach real con base de Schauder y $(e_n)_{n\in\omega}$ una base de Schauder normalizada de X. Entonces la función $\varphi : \mathrm{EBS} \to \mathrm{Ar}(w)$ definida como $\varphi(Y) = T_{NC}(Y, X, (e_n)_{n\in\omega})$ es función de Borel.*

Demostración. Sean X un espacio de Banach real con base de Schauder y $(e_n)_{n\in\omega}$ una base de Schauder normalizada de X. Sea $(n_0, \ldots, n_l) = t \in \omega^{<\omega}$ con $n_0 \geq 1$, es claro que para cualquier $F \in F(\omega^{<\omega})$, $F \cap \{t\} \neq \varnothing$ si y sólo si $t \in F$. Por lo que

$$\varphi^{-1}[B_{\{t\}}] = \{Y \in \mathrm{EBS} : t \in T_{NC}(Y, X, (e_n)_{n\in\omega})\} = X_t$$

Pero $Y \in X_t$ si y sólo si $(n_1, \ldots, n_l) \in T_{NC}(Y, X, (e_n)_{n\in\omega}, n_0)$, lo cual ocurre si y sólo si $(d_{n_1}(Y), \ldots, d_{n_l}(Y)) \in T^*_{NC}(Y, X, (e_n)_{n\in\omega}, n_0)$, es decir, si y sólo si $(d_{n_1}(Y), \ldots, d_{n_l}(Y), 0, \ldots)$ es n_0-equivalente a $(e_0, \ldots, e_{l-1}, 0, \ldots)$. Sean

$$E_l = \{(z_n)_{n\in\omega} \in \mathscr{C}(\mathcal{C})^\omega : (z_n)_{n\in\omega} \text{ es } n_0\text{-equivalente a } (e_0, \ldots, e_{l-1}, 0, \ldots)\}$$

y $f_l : \mathscr{C}(\mathcal{C})^\omega \to \mathscr{C}(\mathcal{C})^\omega \times X^\omega(\mathcal{C})$ definida como

$$f_l((y_n)_{n\in\omega}) = ((y_n)_{n\in\omega}, (e_0, \ldots, e_{l-1}, 0, \ldots)).$$

Es claro que para cualquier $B \subseteq \mathscr{C}(\mathcal{C}^\omega)$ y $C \subseteq X^\omega$ conjuntos de Borel, $f_l^{-1}[B \times C] = B$, si $(e_0, \ldots, e_{l-1}, 0, \ldots) \in C$ y $f_l^{-1}[B \times C] = \varnothing$ en caso contrario, por lo que f es función de Borel. Sabemos por el lema 4.19 que

$$E = \{((y_n)_{n\in\omega}, (z_n)_{n\in\omega}) \in \mathscr{C}(\mathcal{C})^\omega \times X^\omega : (y_n)_{n\in\omega} \text{ es } n_0\text{-equivalente a } (z_n)_{n\in\omega}\}$$

es de Borel. Además es claro que

$$E_l = f_l^{-1}[E]$$

Por lo que E_l es de Borel. Consideremos $(d_{n_1}, \dots, d_{n_l}) : \mathrm{EBS}^l \to \mathscr{C}(\mathcal{C})^l$, $g_l : \mathrm{EBS} \to \mathrm{EBS}^l$ definida por $f(Y) = (Y, \dots, Y)$ y $h_l : \mathscr{C}(\mathcal{C})^l \to \mathscr{C}(\mathcal{C})^\omega$ definida por $h_l(m_0, \dots, z_{l-1}) = (z_0, \dots, z_{l-1}, 0, \dots)$. Sabemos que estas funciones son de Borel. Tenemos que

$$\varphi^{-1}[B_{\{t\}}] = g_l^{-1}\Big[(d_{n_1}, \dots, d_{n_l})^{-1}\big[h_l^{-1}[E_l]\big]\Big]$$

por lo que $\varphi^{-1}[B_{\{t\}}]$ es de Borel. Esto prueba que φ es función de Borel. □

Teorema 4.31. *Sean X un espacio de Banach real con base de Schauder y $(e_n)_{n\in\omega}$ una base de Schauder normalizada de X. Entonces NC_X es un conjunto co-analítico.*

Demostración. Sean X y $(e_n)_{n\in\omega}$ como en las hipótesis. Por el lema 4.30 sabemos que $\varphi : \mathrm{EBS} \to \mathrm{Ar}(w)$ definida como $\varphi(Y) = T_{NC}(Y, X, (e_n)_{n\in\omega})$ es función de Borel. Por el teorema 4.29 sabemos que $f^{-1}[\mathrm{BF}(\omega)] = NC_X$, y por la proposición 4.22 $\mathrm{BF}(\omega)$ es co-analítico. Por lo que NC_X es co-analítico. □

4.3. Aplicaciones.

Esta sección esta dedicada a utilizar las propiedades de EBS, junto con algunos otros resultados que ya conocemos, para obtener resultado sobre la existencia de ciertos espacios de Banach universales.

El *Libro escocés* es un compedio de famosos problemas escrito en conjunto por un grupo de matemáticos polacos. A mediados de la década de 1920 los matemáticos polacos comenzaban a formular los resultados por los que serían ampliamente conocidos. Banach había ya publicado su tesis doctoral sobre los espacios que llevan su nombre, y junto con Steinhaus, Mazur y Ulam, entre otros hacían profundos avances en la teoría de estos espacios así como en áreas relacionadas. Por su parte, Kuratowski y Sierpiński desarrollaban la teoría de espacios polacos, así como la teoría descriptiva de conjuntos a partir de esta.

Estos matemáticos se reunían los sábados de cada semana en la ciudad de Leópolis como parte de las actividades de la Sociedad Polaca de Matemáticas para realizar pláticas sobre sus temas de investigación y posteriormente acudían ya sea al Café Roma o al Café Escocés, a partir del cuál el libro toma su nombre, para discutir. Las discuciones llevaban a problemas tan variados que en 1935 Banach decidió comprar un cuaderno para anotar los problemas que surgían.

Debido tanto a la notoriedad de sus colaboradores, así como a la profundidad de algunos de los problemas plasmados en él, el *Libro escocés*, y los problemas que recoge, han sido una fuente imporatnte de estímulo a la investigación matemática, particularmente a partir de su publicación en 1957.

El problema 49 propuesto por Banach y Mazur dice textualmente:

¿Existe un espacio E de tipo (B) con la propiedad (W) que sea universal para todos los espacios de tipo (B) con la propiedad (W)? Debería investigarse esta pregunta para las siguiente propiedades (W):

(1) El espacio es separable y débilmente compacto (esto es, se puede extraer de toda sucesión acotada una subsucesión débilmente convergente).

(2) El espacio contiene una base (numerable).

(3) El espacio adjunto es separable.

A partir de las definiciones estudiadas en este trabajo podemos replantear estas preguntas de la siguiente manera:

(1) Sea $\mathscr{F}_1$ la clase de los espacios de Banach separables X tales que la bola B_X es débilmente compacta. ¿Existe un espacio universal para $\mathscr{F}_1$ que pertenezca a $\mathscr{F}_1$?

(2) Sea $\mathscr{F}_2$ la clase de los espacios de Banach con base de Schauder. ¿Existe un espacio universal para $\mathscr{F}_2$ que pertenezca a $\mathscr{F}_2$?

(3) Sea $\mathscr{F}_3$ la clase de los espacios de Banach con dual separable. ¿Existe un espacio universal para $\mathscr{F}_3$ que pertenezca a $\mathscr{F}_3$?

A lo largo de esta sección vamos a dar respuesta a cada una de estas preguntas. La pregunta (2) ya ha sido respondida, debido a que $\mathscr{C}(\mathcal{C})$ tiene una base de Schauder, el teorema de Banach-Mazur responde a esta pregunta afirmativamente. Las preguntas (1) y (3) se responden en los corolarios 4.41 y 4.42 respectivamente, al final del capítulo.

Es una bonita coincidencia que la teoría que utilizamos para dar respuesta a un problema planteado por este grupo de matemáticos polacos parta de dos teorías de las cuales los miembros de este grupo son fundadores y contribuyentes centrales: la teoría de espacios de Banach y la teoría descriptiva de conjuntos.

Como pudimos apreciar en la sección anterior, una herramienta importante para estudiar a EBS son los árboles. Debido a cualquier árbol bien fundado T tiene un orden $o(T)$, y a que la imagen de NC_Y bajo la función φ que le asocia a X el árbol $T_{NC}(Y, X, (e_n)_{n\in\omega})$ es el conjunto de los árboles bien fundados, podemos añadir a las herramientas para estudiar EBS la teoría de ordinales a través del órden de estos árboles.

El siguiente es un lema que comienza a llevarnos por este camino.

Teorema 4.32 (Teorema de acotamiento para relaciones bien fundadas sobre $\mathcal{N}$)**.** *Sea $\prec$ una relación bien fundada sobre $\mathcal{N}$ y analítica en $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ con la topología del producto. Entonces $\rho(\prec) < \omega_1$.*

Demostración. (Kunen) Sea $\prec$ como en las hipótesis. Para aligerar la notación a lo largo de esta prueba vamos a denotar para cualquier sucesión s a $s_n = s(n)$. Siendo $\prec\, \subseteq \mathcal{N}\times\mathcal{N}$ analítico, debido al corolario 3.10 existe una función continua $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ tal que $f[\mathcal{N}] =\prec$. Consideremos la gráfica de f, es decir:

$$F = \{(x, y, z) \in \mathcal{N}^3 : f(z) = (x, y)\}$$

Es sencillo mostrar que este conjunto es cerrado en $\mathcal{N}^3$ con la topología del producto. Sea $((x_n, y_n, z_n))_{n\in\omega}$ una sucesión convergente en F y (x, y, z) su punto de convergencia. Entonces debido a que las proyecciones son continuas tenemos que $z_n \longrightarrow z$ y $(x_n, y_n) \longrightarrow (x, y)$. Debido a lo primero y a la continuidad de f tenemos que $(x_n, y_n) = f(z_n) \longrightarrow f(z)$, por lo que $f(z) = (x, y)$, es decir $(x, y, z) \in F$, por lo que F es cerrado.

Definimos

$$S \subseteq \bigcup_{n\in\omega} (\omega^{<\omega})^n \times (\omega^{<\omega})^n \times (\omega^{<\omega})^n$$

de la siguiente manera, $(s, s', s'') \in S$ si y sólo si

1) para cada $i < \mathrm{long}(s) = \mathrm{long}(s') = \mathrm{long}(s'')$ existen $t, t', t'' \in \mathcal{N}$ tales que $s(i) \subseteq t$, $s'(i) \subseteq t'$, $s''(i) \subseteq t''$ y $f(t'') = (t, t')$.

2) para cada $i < \mathrm{long}(s)$, $s(i) = s'(i + 1)$.

Definimos $\prec^* \subseteq S \times S$ como $(s, s', s'') \prec^* (t, t', t'')$ si

i) $\mathrm{long}(t) < \mathrm{long}(s)$, $\mathrm{long}(t') < \mathrm{long}(s')$ y $\mathrm{long}(t'') < \mathrm{long}(s'')$.

ii) Para cada $i < \mathrm{long}(t)$, $t(i) \subsetneq s(i)$, $t'(i) \subsetneq s'(i)$ y $t''(i) \subsetneq s''(i)$.

Veamos que $\prec^*$ es bien fundada. Supongamos lo contrario, entonces sabemos podemos encontrar una sucesión en S, $((s_n, s'_n, s''_n))_{n\in\omega}$ tal que para cada $n \in \omega$, $(s_{n+1}, s'_{n+1}, s''_{n+1}) \prec^* (s_n, s'_n, s'_n)$

Es claro que para cada $n \in \omega$, $\mathrm{long}(s_n) = \mathrm{long}(s'_n) = \mathrm{long}(s''_n) \geq n$. Consideremos $i \in \omega$ y $(s_{n+i}(i))_{n\in\omega}$, $(s'_{n+i}(i))_{n\in\omega}$ y $(s' i_{n+i}(i))_{n\in\omega}$ sucesiones en $\omega^{<\omega}$. Debido a para cada $n \in \omega$, $(s_{n+1}, s'_{n+1}, s''_{n+1}) \prec^* (s_n, s'_n s''_n)$ tenemos que para cada $n \in \omega$, $s_{n+1}(i) \subsetneq s_n(i)$, $s'_{n+1}(i) \subsetneq s'_n(i)$ y $s''_{n+1}(i) \subsetneq s''_n(i)$. Esto implica que $x_i = \bigcup_{n\in\omega} s_{n+i}(i) \in \mathcal{N}$, $x'_i = \bigcup_{n\in\omega} s'_{n+i}(i) \in \mathcal{N}$ y $x''_i = \bigcup_{n\in\omega} s''_{n+i}(i) \in \mathcal{N}$.

Por la primera propiedad de S podemos considerar para cada $n \in \omega$, $t_n, t'_n, t''_n \in \mathcal{N}$ tales que $s_n(i) \subseteq t_n$, $s'_n(i) \subseteq t'_n$, $s''_n(i) \subseteq t''_n$ y $f(t''_n) = (t_n, t'_n)$. Veamos que $(t_n, t'_n, t''_n) \longrightarrow (x_i, x'_i, x''_i)$. Sea $U \subseteq \mathcal{N}^3$ un abierto tal que $(x_i, x'_i, x''_i) \in U$, por ser la topología del producto existen $U_1, U_2, U_3 \subseteq \mathcal{N}$ abiertos tales que $x_i \in U_1$, $x'_i \in U_2$, $x''_i \in U_3$ y $U_1 \times U_2 \times U_3 \subseteq U$. Debido a la proposición 2.23, existen $m_1, m_2, m_3 \in \omega$ tales que $C_{x_i|m_1} \subseteq U_1$, $C_{x'_i|m_2} \subseteq U_2$ y $C_{x'_i|m_3} \subseteq U_3$, luego sean $k_1, k_2, k_3 \in \omega$ tales que $\mathrm{long}(s_{k_1+i}(i)) \geq m_1$, $\mathrm{long}(s_{k_2+i}(i)) \geq m_2$

y $\operatorname{long}(s_{k_3+i}(i)) \geq m_3$, esto implica que para cualquier $n \in \omega$ tal que $n \geq$ $\max\{k_1, k_2, k_3\}$ tenemos que

$$C_{s_{n+i}(i)} \subseteq C_{s_{k_1+i}(i)} \subseteq C_{x_i|_{m_1}} \subseteq U_1$$

analogamente es claro que $C_{s'_{n+i}(i)} \subseteq U_2$ y $C_{s''_{n+i}(i)} \subseteq U_3$.

Como además $t_{n+i} \in C_{s_{n+i}(i)}$, $t'_n \in C_{s'_{n+i}(i)}$ y $t''_n \in C_{s''_{n+i}(i)}$, entonces tenemos que $(t_n, t'_n, t''_n) \in U$, esto prueba que la sucesión converge a (x_i, x'_i, x''_i). Debido a que F es cerrado esto implica que $x_i \prec x'_i$. Pero además si $i > 1$,

$$x'_i = \bigcup_{n\in\omega} s'_{n+i}(i) = \bigcup_{n\in\omega} s_{n+i}(i-1) = x_{i-1},$$

debido a la segunda propiedad de S. Esto implica que para cada $i \in \omega$, $x_{i+1} \prec x_i$, lo cual implica que $\{x_i : i \in \omega\}$ no tiene elementos minimales, por lo que $\prec$ no es bien fundada. Esto es una contradicción, por lo que $\prec^*$ es bien fundada.

Es claro que la cardinalidad de S es numerable, por lo que debido a la proposición 2.44 $\rho(\prec^*) < \omega_1$. Ahora vamos a construir una función monótona $\varphi : T_\prec \setminus \{\varnothing\} \to S$. Sean $(x, y) \in \prec$, podemos considerar $z_{x,y} \in \mathcal{N}$ tal que $f(z_{x,y}) = (x, y)$.

Sea $s \in T_\prec$, si $\operatorname{long}(s) = 1$ definimos $\varphi(s) = \varnothing$, si $n = \operatorname{long}(s) > 1$ definimos

$$\varphi(s) = \Big(\left(s(1)\mid_n, s(0)\mid_n, z_{s(1),s(0)}\mid_n\right), \left(s(2)\mid_n, s(1)\mid_n, z_{s(2),s(1)}\mid_n\right), \ldots,$$

$$\left(s(n-1)\mid_n, s(n-2)\mid_n, z_{s(n-1),s(n-2)}\mid_n\right) \Big).$$

Es claro que $\varphi(s) \in S$ y que si $s^* \subsetneq s$ entonces $\varphi(s) \prec^* \varphi(s^*)$. Esto implica por la proposición 2.46 que $\rho[T_\prec \setminus \{\varnothing\}] \leq \rho(S) < \omega_1$.

Por últimos veamos que $\rho(\prec) \leq \rho[T_\prec \setminus \{\varnothing\}]$. Sea $x \in \mathcal{N}$, vamos a mostrar que $(x) \in T_\prec$ satisface que $\rho_\prec(x) \leq \rho_{T_\prec}((x)))$. Esta prueba procede por inducción, supongamos que para cualquier $y \in \mathcal{N}$ tal que $y \prec x$, tenemos que $\rho_\prec(y) \leq$ $\rho_{T_\prec}((y))$, definimos $s_y = x^\frown y$. Sea $y \prec x$, sabemos que $(x) \subsetneq s_y$ y que $s_y \in T_\prec$, además tenemos que si $(y) \subsetneq t$ entonces $s_y \subsetneq s_y^\frown t \in T_\prec$, es claro que $\rho(t) \leq$ $\rho(s_y^\frown t)$ por lo que

$$\rho((y)) = \sup\{\rho(t) + 1 : (y) \subsetneq t\} \leq \sup\{\rho(s_y^\frown t) + 1 : (y) \subsetneq t\}$$

$$\leq \sup\{\rho(t) + 1 : s_y \subsetneq t\} = \rho(s_y).$$

Esto implica que

$$\rho_{\prec}(x) = \sup\{\rho_{\prec}(y) + 1 : y \prec x\} = \sup\{\rho_{T_{\prec}}((y)) + 1 : y \prec x\}$$

$$\leq \sup\{\rho_{T_{\prec}}(s_y) + 1 : y \prec x\} \leq \sup\{\rho_{T_{\prec}}(t) + 1 : (x) \subsetneq t\} = \rho_{T_{\prec}}((x)).$$

Esto deja en claro que $\rho(\prec) \leq \rho[T_{\prec} \setminus \{\varnothing\}] < \omega_1$, lo que termina la prueba. $\square$

Corolario 4.33 (El teorema de acotamiento para $\mathrm{BF}(\omega)$)**.** *Sea* $A \subseteq \mathrm{BF}(\omega)$ *un conjunto analítico, entonces* $\sup\{o[T] : T \in A\} < \omega_1$.

Demostración. Sea $A \subseteq \mathrm{BF}(\omega)$ un conjunto analítico, consideremos la relación $\prec^* \subseteq \mathrm{Ar}(\omega) \times \omega^{<\omega}$ definida como $(T,t) \prec^* (S,s)$ si y sólo si $T = S \in A$, $s, t \in T$ y $s \subsetneq t$.

Veamos que $\prec$ es analítica. Sea $f_1 : \mathrm{Ar}(\omega) \to \mathrm{Ar}(\omega)^2$ definida como $f_1(T) = (T,T)$, sabemos que si $U \times V$ es un elemento básico de la σ-álgebra de $\mathrm{Ar}(\omega)^2$, entonces $f_1^{-1}[U \times V] = U \cap V$, por lo que f_1 es función de Borel, lo que implica que

$$f[A] = \{(T,S) \in (\mathrm{Ar}(\omega))^2 : T = S \in A\}$$

es un conjunto analítico y por lo tanto que

$$B = \{(T,t,S,s) \in (\mathrm{Ar}(\omega) \times \omega^{<\omega})^2 : T = S \in A\}$$

también lo es. Sabemos ya que

$$\{(T,t) \in \mathrm{Ar}(\omega) \times \omega^{<\omega} : t \in T\}$$

es un elemento de la σ-álgebra de $\mathrm{Ar}(\omega) \times \omega^{<\omega}$. Por lo que

$$C = \{(T,t,S,s) \in (\mathrm{Ar}(\omega) \times \omega^{<\omega})^2 : t \in T \wedge s \in S\}$$

es un elemento de la σ-álgebra de $(\mathrm{Ar}(\omega) \times \omega^{<\omega})^2$ y por lo tanto un conjunto analítico. Por último

$$\{(t,s) \in (\omega^{<\omega})^2 : s \subsetneq t\}$$

es un conjunto abierto en $(\omega^{<\omega})^2$ por tener la topología discreta. Por lo que

$$D = \{(T,t,S,s) \in (\mathrm{Ar}(\omega) \times \omega^{<\omega})^2 : s \subsetneq t\}$$

es un conjunto analítico. Como

$$\prec^* = B \cap C \cap D$$

entonces $\prec^*$ es una relación analítica. Gracias al teorema 3.7 y a que claramente $\omega^{<\omega} \times A$ es un espacio de Borel estándar, podemos considerar $f : \mathcal{N} \to \omega^{<\omega} \times A$ continua y suprayectiva. Entonces $(f, f) : \mathcal{N}^2 \to (\omega^{<\omega} \times \mathcal{N})^2$ es función de Borel por lo que $\prec = (f, f)^{-1}[\prec^*]$ es un conjunto analítico.

Debido a que $A \subseteq \mathrm{BF}(\omega)$ sabemos que $\prec^*$ es bien fundada. Esto a su vez implica que $\prec$ es bien fundada, pues si $\prec$ no fuera bien fundada existiría $(x_n)_{n\in\omega}$ sucesión en $\mathcal{N}$ tal que para cada $n \in \omega$, $(x_{n+1}, x_n) \in \prec$, por lo que para cada $n \in \omega$, $(f(x_{n+1}), f(x_n)) \in \prec^*$, lo cual contradice el hecho de que $\prec^*$ es bien fundada.

Por el teorema anterior $\rho(\prec) < \omega_1$, pero $f^{-1} : \omega^{<\omega} \times A \to \mathcal{N}$ es monótona, por lo que $\rho(\prec^*) \leq \rho(\prec) < \omega_1$. Sea $\eta = \rho(\prec^*) < \omega_1$. Para cada $T \in A$, $f_T : T \to \omega^{<\omega} \times A$ definida como $f_T(t) = (t, T)$ es monótona, por lo que para cada $T \in A$, $o(T) \leq \eta$, esto implica que $\sup\{o(T) : T \in A\} \leq \eta < \omega_1$. Lo que termina la prueba. $\square$

El siguiente es un teorema de Bourgain [Bou80] cuya prueba nos alejaría demasiado del objetivo de esta sección, sin embargo, contamos ya con la teoría suficiente para entender su importancia.

Teorema 4.34 (Bourgain)**.** *Sean X un espacio de Banach real con base de Schauder y $(e_n)_{n\in\omega}$ una base de Schauder normalizada de X con constante básica K. Entonces para cada $\alpha < \omega_1$ existe un espacio de Banach real reflexivo $R_\alpha(X)$ tal que*

$$o[T^*_{NC}(R_\alpha(X), X, (e_n)_{n\in\omega}, 2K)] \geq \alpha$$

Como último prerrequisito necesitamos el siguiente lema.

Lema 4.35. *Sean X un espacio de Banach real con base de Schauder, $(e_n)_{n\in\omega}$ una base de Schauder normalizada de X y $Y \in \mathrm{NC}_X$. Entonces para cualquier $C \geq 1$,*

$$o[T^*_{NC}(Y, X, (e_n)_{n\in\omega}, C)] \leq o[T_{NC}(Y, X, (e_n)_{n\in\omega})]$$

Demostración. Sean X y $(e_n)_{n\in\omega}$ como en las hipótesis. Consideremos $(y_0, \ldots, y_n) \in T^*_{NC}(Y, X, (e_n)_{n\in\omega}, C)$, como $(y_0, \ldots, y_n, 0, \ldots)$ es C-equivalente a $(e_0, \ldots, e_n, 0 \ldots)$. Esto implica que para cada $i \leq n$, $C^{-1} \leq ||y_i|| \leq C$. Debido a que las normas de los elementos de esta base están acotadas, podemos considerar la base de Schauder normalizada $\left\{\frac{y_0}{||y_0||}, \ldots, \frac{y_n}{||y_n||}\right\}$ y asegurar que es C-equivalente a $\{y_0, \ldots, y_n\}$.

Consideremos el conjunto de funciones cuya existencia asegura el teorema de Kuratowski-Ryll-Nardzewski $\{d_n : \mathrm{EBS} \to \mathscr{C}(\mathcal{C}) \mid n \in \omega\}$, y K la constante básica de $(e_n)_{n\in\omega}$, definamos para cada $i \leq n$, $m_i \in \omega$ tal que $||d_{m_i}(Y) -$

$\frac{y_i}{||y_i||}||< \frac{1}{2C^2K}2^{-i-2}$. Sabemos entonces que $(d_{m_0}(Y), \dots, d_{m_n}(Y), 0, \dots)$ es base de Schauder 2-equivalente a $\left\{\frac{y_0}{||y_0||}, \dots, \frac{y_n}{||y_n||}\right\}$. Esto implica que $(d_{m_0}(Y), \dots, d_{m_n}(Y), 0, \dots)$ es 2-equivalente a $\left\{\frac{y_0}{||y_0||}, \dots, \frac{y_n}{||y_n||}\right\}$ y por lo tanto $2C^2$-equivalente a $(e_n)_{n\in\omega}$. Por lo que para cualquier $k \geq 2C^2$, $(m_0, \dots, m_n) \in T_{NC}(Y, X, (e_n)_{n\in\omega}, k)$. Esto define cualquier $k \geq 2C^2$ una función

$$\varphi_k : T^*_{NC}(Y, X, (e_n)_{n\in\omega}, C) \to T_{NC}(Y, X, (e_n)_{n\in\omega}, k)$$

monótona. Esto implica que para cualquier $k \geq 2C^2$,

$$o[T^*_{NC}(Y, X, (e_n)_{n\in\omega}, C)] \leq o[T_{NC}(Y, X, (e_n)_{n\in\omega}, k)].$$

A su vez si $t \in T_{NC}(Y, X, (e_n)_{n\in\omega}, k)$ entonces $k^\frown t \in T_{NC}(Y, X, (e_n)_{n\in\omega})$ lo que también define una función monótona

$$\psi_k : T_{NC}(Y, X, (e_n)_{n\in\omega}, k) \to T_{NC}(Y, X, (e_n)_{n\in\omega})$$

por lo que

$$o[T_{NC}(Y, X, (e_n)_{n\in\omega}, k)] \leq o[T_{NC}(Y, X, (e_n)_{n\in\omega})].$$

Ambas desigualdades implican el resultado. □

El resultado más importante de esta tesis es el siguiente:

Teorema 4.36 (Bossard)**.** *Sean X un espacio de Banach real con base de Schauder y $A \in \Sigma^1_1(\mathrm{EBS})$ tal que para cada $Y \in \mathrm{EBS}$ reflexivo existe $Z \in A$ tal que $Z \cong Y$. Entonces existe $X' \in A \setminus \mathrm{NC}_X$.*

Demostración. Consideremos X y A como en las hipótesis. Sea $(e_n)_{n\in\omega}$ una base de Schauder normalizada de X. Sabemos por el teorema 4.20 que

$$\{(Y, Z) \in \mathrm{Subs}(X) \times \mathrm{Subs}(X) : Y \cong Z\}$$

es un conjunto de Borel, en particular es analítico. Es claro que $\mathrm{EBS} \times A$ es analítico, además sabemos que

$$\begin{aligned} &\{(Y, Z) \in \mathrm{EBS} \times \mathrm{EBS} : (Y \cong Z) \wedge (Z \in A)\} \\ &= \{(Y, Z) \in \mathrm{EBS} \times \mathrm{EBS} : Y \cong Z\} \cap (\mathrm{EBS} \times A) \end{aligned}$$

por lo que es un conjunto analítico. Sea

$$A_{\cong} = \{Y \in \mathrm{EBS} : \exists Z \in A\ (Y \cong Z)\}.$$

Si $p_1 : \mathrm{EBS} \times \mathrm{EBS} \to \mathrm{EBS}$ está definida como $p_1(X_1, X_2) = X_1$, entonces

$$p_1[\{(Y,Z) \in \mathrm{EBS} \times \mathrm{EBS} : (Y \cong Z) \wedge (Z \in A)\}] = A_{\cong}$$

por lo que este conjunto es analítico.

Veamos que $A_{\cong} \nsubseteq \mathrm{NC}_X$. Supongamos lo contrario, consideremos la función $\varphi : \mathrm{EBS} \to \mathrm{Ar}(w)$ definida como $\varphi(Y) = T_{NC}(Y, X, (e_n)_{n\in\omega})$. Al ser φ función de Borel y ser $A_{\cong}$ analítico, entonces $\varphi[A_{\cong}]$ es un conjunto analítico. Debido a que $A_{\cong} \subseteq \mathrm{NC}_X$, tenemos que $\varphi[A_{\cong}] \subseteq \varphi[\mathrm{NC}_X] = \mathrm{BF}(\omega)$. Por lo que por el corolario 4.33 sabemos existe un ordinal $\eta < \omega_1$ tal que

$$\sup\{o[\varphi(Y)] : Y \in A_{\cong}\} \leq \eta.$$

Pero por el teorema 4.34 existe $R_\eta(X) \in A_{\cong}$ y $K \geq 1$ tal que

$$o[T^*_{NC}(R_\eta(X), X, (e_n)_{n\in\omega}, 2K)] > \eta$$

esto implica por el lema que

$$o[T_{NC}(R_\eta(X), X, (e_n)_{n\in\omega})] > \eta$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto $A_{\cong} \nsubseteq \mathrm{NC}_X$, sea $Y \in A_{\cong} \setminus \mathrm{NC}_X$, entonces existe $X' \in A$ tal que $X' \cong Y$, es evidente que $X' \notin \mathrm{NC}_X$. $\square$

Considerando $X = \mathscr{C}(\mathcal{C})$ en el resultado anterior tenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.37. *Sea $A \in \Sigma^1_1(\mathrm{EBS})$ tal que para cada $Y \in \mathrm{EBS}$ reflexivo existe $Z \in A$ tal que $Z \cong Y$. Entonces existe $X \in A$ universal.*

Corolario 4.38 (Bourgain)**.** *Sea X espacio de Banach real universal para la clase de los espacios de Banach separables reflexivos, entonces X es universal.*

Demostración. Sea X como en las hipótesis. Sabemos por la proposición 4.13 que

$$\{(Z,Y) \in F(X) \times F(X) : Z \subseteq Y\}$$

es Borel, en $F(X) \times F(X)$, por lo que

$$\{(Z,Y) \in \mathrm{EBS} \times \mathrm{EBS} : Z \subseteq Y\}$$

es de Borel, como además

$$\{(Z,X) \in \mathrm{EBS} \times \mathrm{EBS} : Z \subseteq X\} = \{(Z,Y) \in \mathrm{EBS} \times \mathrm{EBS} : Z \subseteq Y\} \cap \mathrm{EBS} \times \{X\}$$

entonces considerando la proyección $p_1 : \mathrm{EBS} \times \mathrm{EBS} \to \mathrm{EBS}$ tenemos que

$$p_1[\{(Z, X) \in \mathrm{EBS} \times \mathrm{EBS} : Z \subseteq X\}] = \{Z \in \mathrm{EBS} : Z \subseteq X\}$$

es un conjunto analítico que cumple las hipótesis del corolario anterior. Por lo tanto existe $X' \subseteq X$ universal, lo que implica que X es universal. □

Debido al corolario 1.55, la clase de los espacios de Banach separables y reflexivos está contenida en la clase $\mathscr{F}_3$, esto implica que si un espacio de Banach es universal para la segunda clase es universal para la primera. Esta observación junto con el corolario anterior nos permiten concluir el siguiente resultado.

Corolario 4.39. *Sea X espacio de Banach real separable universal para $\mathscr{F}_3$, entonces X es universal.*

Debido al teorema de Banach-Alaoglu si X es un espacio de Banach y $Q_* : X^* \to X^{***}$ es el encaje canónico entonces $B_{X^{**}}$ es compacta con la topología inducida por $Q_*[X^*]$. Más aún, si X es reflexivo, entonces por el teorema 1.50 X^* también es reflexivo por lo que $Q_*[X^*] = X^{**}$, por lo que $B_{X^{**}}$ es compacta en la topología débil, como además $Q : X \to X^{**}$ es un isomorfismo entre espacios de Banach, entonces B_X es compacta en la topología débil de X.

Esto demuestra que la clase de los espacios de Banach separables y reflexivos está contenida en $\mathscr{F}_1$. Esto junto con el corolario 4.38 nos permiten concluir el siguiente resultado.

Corolario 4.40. *Sea X espacio de Banach real separable para $\mathscr{F}_1$, entonces X es universal.*

Nuestros últimos resultados, corolarios inmediatos de los dos resultados previos, nos ofrecen las respuestas buscadas. Szlenk pudo probar estos resultados utilizando una herramienta innovadora en su momento, el hecho de que hayamos podido demostrar varios resultados considerablemente más generales es testigo de la elegancia y el poderío de la teoría que hemos desarrollado.

Corolario 4.41 (Szlenk)**.** *No existe un espacio de Banach real separable que pertenezca a $\mathscr{F}_1$ y sea universal para $\mathscr{F}_1$.*

Corolario 4.42 (Szlenk)**.** *No existe un espacio de Banach real separable que pertenezca a $\mathscr{F}_3$ y sea universal para $\mathscr{F}_3$.*

Para terminar este capítulo quisiéramos exponer por qué esta línea de investigación no sólo ha ofrecido poderosos resultados, sino que aún ofrece preguntas abiertas.

La codificación de cada espacio de Banach separable como un punto del espacio EBS es estándar hoy en día. Casi todas las clases de espacios de Banach separables han sido analizadas con esta herramienta y su complejidad en la jerarquía de Borel ha sido calculada. A pesar de esto, resulta interesante que si bien se ha mostrado que el conjunto

$$S = \{X \in \text{EBS} : X \text{ tiene una base de Schauder}\}$$

es un conjunto analítico, aún no se sabe si además es un conjunto de Borel.

Bibliografía

[Bai09] Baire, R. “Sur la représentation des fonctions discontinues (deuxième partie)”. En: *Acta Math* 32 (1909), págs. 97-176.

[Bai90] Baire, R. “Lettres de René Baire à Émile Borel”. En: *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques* 11 (1990), págs. 33-120.

[Bou48] Bourbaki, N. *Topologie générale ch. IX*. 1948.

[Bou80] Bourgain, J. “On Separable Banach Spaces, Universal for all Separable Reflexive Spaces”. En: *Proceedings of the American Mathematical Society* 79.2 (1980), págs. 241-246.

[Car04] Carothers, N. L. *A Short Course on Banach Space Theory*. Cambridge University Press, 2004.

[Dod93] Dodos, P. *Banach Spaces and Descriptive Set Theory: Selected Topics*. Lecture Notes on Mathematics. Springer, 1993.

[JT91] J.Lindenstrauss y Tzafriri, L. *Classical Banach Spaces I and II*. Springer, 1991.

[Kec94] Kechris, A. S. *Classical Descriptive Set Theory*. Graduate Text in Mathematics. Springer, 1994.

[KM76] Kuratowski, K. y Mostowski, A. *Set Theory*. Polish Scientific Publishers, 1976.

[Mau81] Mauldin, R. D., ed. *The Scottish Book*. Birkhäuser, 1981.

[Meg98] Megginson, R. E. *An Introduction to Banach Space Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1998.

[Mos80] Moschovakis, Y. N. *Descriptive set theory*. North-Holland publishing Company, 1980.

[Pie07] Pietsch, A. *History of Banach Spaces and Linear Operators*. Birkhäuser, 2007.

[Sie34] Sierpiński, W. *Introduction to General Topology*. The University of Toronto Press, 1934.

[Sie50] Sierpiński, W. "Les ensembles projectifs et analytiques". En: *Mémorials des sciences mathématiques* 30 (1950), págs. 53-61.

[Szl68] Szlenk, W. "The non-existence of separable reflexive Banach sapce universal for all separable reflexive Banach spaces". En: *Studia Mathematica* 122 (1968).

[Tay58] Taylor, A. E. *Introduction to Functional Analysis*. John Willer & Sons, Inc, 1958.