UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DETERMINACIÓN DE PORTAFOLIOS DE COBERTURA DE OPCIONES MEDIANTE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

ACTUARIO

P R E S E N T A:

JOSÉ ALBERTO HERNÁNDEZ CRUZ

DIRECTOR DE TESIS:
M. EN I.O. MA. DEL CARMEN HERNÁNDEZ AYUSO

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2019

Hoja de Datos del Jurado

1.Datos del alumno
Hernández
Cruz
José Alberto
5513760566
Universidad Nacional Autónoma de
México
Facultad de Ciencias
Actuaría
306027370

2.Datos del tutor
M en IO
Ma. Del Carmen
Hernández
Ayuso

3.Datos del sinodal 1
Dra
Claudia Orquídea
López
Soto

4.Datos del sinodal 2
M en C
Jorge Humberto
Del Castillo
Spíndola

5.Datos del sinodal 3
Mat
Ana Lilia
Anaya
Muñoz

6.Datos del sinodal 4
Act
Eduardo
Torres
Luna

7.Datos del trabajo escrito.
Determinación de portafolios de
cobertura de opciones mediante
la resolución de problemas de
optimización
95 p
2019

Índice

INTRODUCCIÓN

No se puede negar la importancia que tienen los productos financieros derivados ni el rápido incremento que su desarrollo está presentando en el mundo financiero actual.

El conocimiento de estos productos se ha vuelto imprescindible a medida que su popularidad se ha incrementado en los últimos años. Hoy en día, una gran cantidad de productos financieros son operados en muchos mercados a lo largo y ancho del planeta.

La naturaleza de estos instrumentos obliga a los participantes de dichos mercados a analizar con profundidad las posibles eventualidades que puedan llegar a presentarse en el mercado para aprovechar de manera óptima el potencial de estos instrumentos. Los especuladores necesitan poseer toda la información posible para anticiparse a los movimientos financieros y obtener los resultados esperados; las operaciones de arbitraje exigen un profundo conocimiento de los diferentes mercados en los que se puedan realizar las transacciones que produzcan las ganancias deseadas y la construcción de portafolios de cobertura debe comenzar por el total y exacto control de los riesgos a los que se está expuesto en el intercambio de estos instrumentos.

El objetivo de este trabajo será, justamente, el análisis de la construcción de portafolios cuyo propósito sea cubrir los riesgos generados al realizar operaciones con instrumentos financieros derivados, así como la caracterización de dichos portafolios como soluciones de problemas de optimización, lo cual garantizaría que estos portafolios no son sólo una manera de cubrir los riesgos, sino que también son la mejor.

Operar instrumentos derivados genera distintos riesgos. La razón es la incertidumbre que se tiene sobre los movimientos del mercado. Es por esto que una posición en un derivado puede traducirse en una ganancia abundante pero, de igual manera, puede generar enormes pérdidas. La importancia de la construcción de portafolios de cobertura radica, precisamente, en la pérdida potencial inherente al intercambio de productos derivados y la necesidad de minimizar los impactos que movimientos adversos generan en nuestra posición.

La cobertura de productos derivados puede ser engañosa. Se pueden presentar casos en los que el movimiento del mercado favorezca la posición que se mantiene en un derivado, pero su cobertura respectiva limite o incluso anule la ganancia que se hubiera obtenido. Es importante entender que las coberturas se construyen con el fin de reducir las pérdidas, no para generar ganancias.

Tomemos como ejemplo el caso de un taller mecánico. El dueño sabe que dentro de tres meses tendrá que comprar insumos que sólo son vendidos en dólares. Si el tipo de cambio sube, los insumos serán más caros, pero si baja, los mismos insumos serán más baratos. En el primer caso, se podría decir que el dueño del taller incurrió en una pérdida por los movimientos del mercado, mientras que en el segundo, se podría considerar que se obtuvo una ganancia. La cobertura podría limitar las pérdidas que se pudieran presentar al momento de subir el tipo de cambio, pero también podría reducir la ganancia si éste llegara a bajar. La forma correcta de analizar una cobertura es que ésta le permitiría al dueño despreocuparse por el nivel del tipo de cambio dentro de tres meses y dedicarse enteramente a su negocio.

¿Cuál es la manera de construir una cobertura? Esto se explicará más adelante, siendo el objetivo principal del trabajo la construcción de un portafolios que cubra las posiciones riesgosas de la mejor manera posible y la forma de comprobarlo será caracterizando dicho portafolios como la solución de un problema de optimización, es decir, como un óptimo.

Un problema de optimización se relaciona con la necesidad de minimizar o maximizar alguna función (llamada función objetivo) satisfaciendo un número determinado de restricciones.

Estos problemas ayudan en la resolución de un gran número de casos prácticos, desde optimización de espacios y tiempos hasta problemas de producción e inventarios; en este trabajo plantearemos un problema de optimización que nos permita construir un portafolios de cobertura.

La hipótesis que se desea comprobar es que los portafolios de cobertura de una posición en opciones son óptimos al cubrir los riesgos que esta posición genera minimizando el precio de dicha cobertura. Éste debería, en teoría, igualar al de la posición tomada, por lo que minimizarlo significaría obtener un valor cercano al precio de la posición en opciones.

Para el desarrollo del tema se plantean diversas suposiciones:

- Los participantes del mercado aprovechan instantáneamente cualquier oportunidad de arbitraje. Esta hipótesis será equivalente al hecho de que no exista posibilidad alguna de arbitraje.
- No existen costos de operación.
- Es posible el préstamo de dinero a la tasa libre de riesgo.
- Se analizará la cobertura de portafolios de opciones sobre acciones.
- El precio de las acciones está determinado por un proceso de Wiener y el precio de las opciones queda determinado por el modelo de Black & Scholes.
- Inicialmente se considerará la posibilidad de operar fracciones de acciones, así como opciones que amparen un número no entero de acciones, redondeando al final estas cifras al entero más cercano. Ajustaremos más tarde el problema para que considere únicamente variables enteras para determinar las coberturas de manera correcta. Compararemos los resultados.
- La cobertura de las opciones se realizará con un portafolios que contendrá posiciones con el mismo activo subyacente que el de la posición a cubrir. Esto simplificará los cálculos y será fácil entender, por extensión, cómo se construiría una cobertura con derivados cuyo subyacente sea distinto.

El trabajo se desarrollará en 3 partes principales. La primera se refiere a la explicación de los riesgos a los que se está expuesto al tomar una posición en un producto financiero derivado, su cálculo y su interpretación y a los portafolios de cobertura que se construyen para neutralizar dichos riesgos, su utilidad, la manera de construirlos y sus principales características.

La segunda se refiere al problema de optimización. Comenzará con una breve explicación de un problema de optimización para continuar con el desarrollo y planteamiento del problema que nos ayudará a construir un portafolios de cobertura. Se espera encontrar el que optimice la función objetivo que se determine para el problema y se comparará el resultado con otras maneras de construirlo.

La tercera parte comprenderá el uso de un software, LINGO, que permite automatizar la resolución del problema de optimización para poder actualizarlo de manera que la construcción del portafolios de cobertura se vuelva dinámica, es decir, que se pueda adaptar a los cambios del mercado para considerar los nuevos componentes de dicho portafolios.

Para finalizar el trabajo propondremos algunos casos especiales para los que, tanto nuestro razonamiento como el problema, deban sufrir adaptaciones con el objetivo de cubrir los riesgos asumidos de la mejor forma posible.

Esta manera de construir el portafolios de cobertura permitiría entender de manera más simple su función y, definitivamente, proporcionarían un punto de vista diferente sobre la magnitud de su precio al ser éste el que determinará la cobertura y no de manera contraria.

En general, este trabajo planteará una alternativa para el tratamiento y la interpretación de los derivados, sus coberturas y sus respectivos precios.

La velocidad a la que evoluciona la importancia de los productos financieros derivados en las finanzas actuales obliga a entenderlos de forma precisa y clara, no sólo para evitar las grandes pérdidas que éstos pueden generar, sino para aprovechar el potencial que su misma naturaleza estocástica nos ofrece.

Únicamente de esta forma los productos financieros podrán llegar a ser considerados como lo que realmente son: excelentes e inigualables productos de inversión.

CAPÍTULO I. GRIEGAS

La decisión de asumir riesgos con el fin de obtener alguna ganancia ha sido y siempre será complicada. ¿Qué riesgos estamos dispuestos a aceptar? Una vez aceptándolos, ¿qué ganancia se espera obtener? ¿Vale la pena alimentar una expectativa a costa de incrementar un riesgo? Evidentemente no existe una respuesta correcta a estas interrogantes.

Es difícil tomar decisiones que podrían perjudicarnos y, en el mundo financiero, estas decisiones abundan. Cada segundo miles de decisiones son tomadas y una enorme cantidad de operaciones financieras son pactadas.

No cabe duda de que el riesgo es un acompañante natural en gran parte de las inversiones que se realizan y, en cuanto a riesgos se refiere, los mejores exponentes del tema son los productos financieros derivados. Estos instrumentos son, por su propia naturaleza, activos verdaderamente riesgosos.

Su nombre es el resultado de la manera de calcular su valor, ya que éste *deriva* del valor de algún otro activo llamado *activo subyacente*. Un derivado puede estar referenciado a casi cualquier activo subyacente, desde el precio de una acción o el nivel de una tasa de interés hasta el clima que se presente en alguna zona determinada del planeta.

Es justamente el activo subyacente lo que hace que los productos financieros derivados sean instrumentos sumamente riesgosos. La incertidumbre que existe sobre el valor que tendrá en el futuro un activo subyacente genera diversos riesgos que se deben asumir si se pretende tomar alguna posición en ellos.

En este trabajo nos enfocaremos en analizar el impacto de los riesgos que se presentan específicamente en un tipo de producto derivado, las *opciones*.

Una opción es un contrato pactado entre dos partes en el cual el comprador obtiene el derecho de comprar o vender el activo subyacente a un precio previamente determinado por ambas partes (precio *strike*) al vencimiento del contrato (fecha de *maduración*). La contraparte está obligada a vender o comprar el activo subyacente en caso de que el comprador de la opción ejerza su derecho. Por este derecho, el comprador pagará al vendedor una cantidad llamada *prima*.

Una opción de compra se denomina *call*, mientras que una opción de venta recibe el nombre de *put*.

Para el análisis del trabajo supondremos que el activo subyacente de la opción no paga dividendos. Extender las fórmulas a opciones cuyo subyacente paga dividendos no presenta inconvenientes.

Se dice que la parte que compra la opción entra en una posición *larga*, mientras que el vendedor asume una posición *corta*. De esta manera, estar corto en una put significa que se vendió un contrato de opción de venta; en caso de que el comprador ejerza su derecho de vender, la parte corta deberá comprar el activo subyacente al precio strike en la fecha de maduración.

Una opción *americana* permite ejercer el derecho de compra o venta en cualquier momento durante la vida del contrato. Una opción *europea* únicamente permite tomar la decisión en la fecha de maduración.

Evidentemente, la prima que recibirá el vendedor de la opción será el valor de dicha opción al momento del contrato. ¿Cómo es calculado dicho valor? De manera natural, el valor de la opción será determinado por el valor del activo subyacente, entre otros factores.

En este trabajo supondremos el modelo de *Black & Scholes*, propuesto por Fischer Black, Myron Scholes y Robert Merton para la valuación de instrumentos financieros derivados. Este resultado se basa en la modelación del precio del activo subyacente mediante un proceso estocástico llamado *proceso de Wiener*, conocido también como *movimiento browniano*.

A continuación se presenta una breve explicación de la obtención matemática del modelo de Black & Scholes.

Fórmula de Black & Scholes

Durante los años 70's Fischer Black (11 de enero de 1938 – 30 de agosto de 1995), Myron Scholes (1 de julio de 1942) y Robert Merton (31 de julio de 1944), desarrollaron la fórmula que describe el valor de las opciones como resultado de la aplicación del cálculo estocástico en la modelación del movimiento del precio de las acciones.

Partiendo de que el precio de las acciones obedece a un tipo de *movimiento browniano geométrico*[1] llamado *proceso de Wiener* se puede calcular el valor de una acción en determinado momento. En términos generales, el rendimiento del precio de una acción es igual a un rendimiento promedio más una dispersión variable y estocástica que puede ser positiva o negativa.

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

donde

$\boldsymbol{S}$ *es el valor de la acción.*
$\boldsymbol{\mu}$ *es el rendimiento esperado del precio de la acción.*
$\boldsymbol{t}$ *es el tiempo.*
$\boldsymbol{\sigma}$ *es la volatilidad del precio de la acción.*
$\boldsymbol{dz}$ *es el movimiento browniano.*

[1] El movimiento browniano geométrico es útil para la modelación cuando se piensa que los cambios en el porcentaje (y no en el valor absoluto) son independientes e idénticamente distribuidos, por ejemplo, el rendimiento de una acción. *Stochastic Processes. Sheldon M. Ross. 1996.*

Esta dispersión es la que genera la incertidumbre al momento de comprar o vender acciones o cualquier derivado cuyo valor dependa de una acción.

Considerando algunos resultados de cálculo estocástico se concluye que, si existe algún valor estocástico determinado por un proceso de Wiener, el nivel de cualquier función de dicho valor y el tiempo quedará determinado por el mismo proceso de Wiener. Dado este resultado (*Lema de Itô*[2]), el valor de cualquier derivado queda determinado por el mismo proceso estocástico que el que determina el precio de la acción subyacente.

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S dz,$$

donde

$$\boldsymbol{f}\ es\ función\ de\ \boldsymbol{S}\ y\ \boldsymbol{t}.$$

Discretizando las ecuaciones anteriores[3], se tiene que:

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta z$$

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S \Delta z.$$

De esta manera es posible construir un portafolios que consista en alguna posición en el derivado y otra posición en acciones de manera que el efecto producido por el proceso estocástico se elimine. A saber:

$$\begin{aligned} &-1\ derivado \\ &+\frac{\partial f}{\partial S}\ acciones \end{aligned}$$

El valor del portafolios será, entonces

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S}S$$

El cambio en el valor del portafolios se calcula como sigue:

$$\begin{aligned} \Delta\Pi &= -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S}\Delta S \\ &= \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t \end{aligned}$$

---

[2] Si x es una variable modelada por un proceso de Itô con un proceso de Wiener dz y existe una función G(x,t) de dicha variable y el tiempo, entonces G sigue también un proceso de Itô con el mismo proceso de Wiener que x. *Options, futures and other derivatives. John C. Hull. 2009.*

[3] No es necesario discretizar, se realiza la discretización para intentar ser menos abstracto en el desarrollo, sin embargo, directamente del lema de Itô, se puede obtener el resultado esperado.

Este cambio será igual al rendimiento libre de riesgo del mercado (justamente porque se eliminó el efecto estocástico) durante un intervalo de tiempo determinado.

$$\Delta\Pi = r\Pi\Delta t$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t = r\left(f - \frac{\partial f}{\partial S}\right)\Delta t$$

La ecuación que se obtiene finalmente corresponde a una ecuación diferencial cuyas soluciones representan a todos los derivados cuyo activo subyacente es aquél determinado por el proceso de Wiener original (ecuación de Black & Scholes).

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\,\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf$$

Resolviendo la ecuación diferencial con las condiciones iniciales y de frontera correctas, se obtiene la fórmula de Black & Scholes[4].

En el caso de una opción de tipo call europea, la condición inicial es

$$f = \max(S - K, 0) \quad cuando\ t = T$$

Para determinar el precio de una put europea, la condición es

$$f = \max(K - S, 0) \quad cuando\ t = T$$

De esta manera, el precio c de una opción call y el precio p de una put europeas se calcula con la siguiente fórmula:

$$c = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2)$$

$$p = Ke^{-rT}N(-d_2) - S_0 N(-d_1)$$

donde

$$\boldsymbol{d_1} = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$\boldsymbol{d_2} = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

---

[4] *Options, futures and other derivatives. John C. Hull. 2009; Solución de la ecuación de Black and Scholes para calcular el precio de una opción con pago general, mediante técnicas elementales : sustituciones y transformadas de Fourier. Carlos Palomino Jiménez, Francisco Tajonar Sanabria, Hugo Cruz Suárez, Carlos Zamora Lima. BUAP.*

$\boldsymbol{S_0}$ *es el valor actual del subyacente.*
$\boldsymbol{K}$ *es el precio strike.*
$\boldsymbol{r}$ *es la tasa libre de riesgo.*
$\boldsymbol{\sigma}$ *es la volatilidad anual del valor del activo subyacente.*
$\boldsymbol{T}$ *es la duración del contrato en años.*
$\boldsymbol{N(x)}$ *es la función de acumulación de probabilidad de una distribución normal estándar.*

De esta manera se obtiene la fórmula de Black & Scholes para la valuación de opciones europeas.

Se puede observar que el valor de una opción depende no sólo del valor del activo subyacente, también depende de su volatilidad, de la tasa libre de riesgo, del tiempo a vencimiento del contrato y del precio strike pactado.

El cambio en cada una de las variables que afectan el precio de la opción generará, naturalmente, un cambio en el valor de la opción.

Este cambio podría beneficiar nuestra posición, de manera que su valor aumente y esperemos obtener una eventual ganancia. Sin embargo, estos movimientos podrían afectar el valor de nuestra posición en cuyo caso incurriríamos en pérdidas que no estaban contempladas en un principio.

El impacto de los movimientos de estas variables está determinado por las *Griegas*. Las Griegas representan el cambio en el valor del derivado por cada variable que afecta su precio, cada Griega está relacionada con una variable.

A continuación explicaremos, analizaremos y determinaremos el valor de las Griegas.

Delta (Δ)

El valor de delta queda determinado por el cambio que sufre el precio de una opción al presentarse movimientos en el valor del activo subyacente. De esta manera, la delta de una opción se calcula derivando la fórmula del precio de la opción con respecto del precio del subyacente, es decir:

$$\Delta\, call = \frac{\partial c}{\partial S}$$

$$\Delta\, put = \frac{\partial p}{\partial S}$$

A continuación se demostrará que la Delta de una opción call es igual a la función de acumulación de la distribución normal estándar valuada en d_1, mientras que la Delta de una opción put es igual a la delta de la call disminuida en 1, es decir:

$$\Delta\, call = N(d_1) \qquad (Ec. 1)$$

$$\Delta\, put = N(d_1) - 1 \qquad (Ec. 2)$$

Para demostrar lo anterior, es necesario obtener un par de resultados previos:

Si

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

entonces

$$\frac{\partial d_2}{\partial S} = \frac{\partial\left(d_1 - \sigma\sqrt{T}\right)}{\partial S} = \frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{\partial\left(\frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)}{\partial S}$$

$$= \frac{\partial\left(\frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right)}{\partial S}$$

$$= \frac{\frac{\partial\left(\ln\left(\frac{S}{K}\right)\right)}{\partial S}}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$= \frac{\left(\frac{K}{S}\right) * \left(\frac{1}{K}\right)}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$= \frac{1}{S\sigma\sqrt{T}}$$

por lo tanto

$$\frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{\partial d_2}{\partial S} = \frac{1}{S\sigma\sqrt{T}} \qquad (Ec.3)$$

A continuación, obtendremos otro resultado importante para el cálculo de las Griegas.

Si

$$N'(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

entonces

$$Ke^{-rT}N'(d_2) = Ke^{-rT}N'\left(d_1 - \sigma\sqrt{T}\right)$$

$$= \frac{Ke^{-rT}e^{-\frac{\left(d_1-\sigma\sqrt{T}\right)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

$$= \frac{Ke^{-rT}e^{-\frac{d_1^2-2d_1\sigma\sqrt{T}+\sigma^2T}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

$$= \frac{Ke^{-rT}e^{\frac{2d_1\sigma\sqrt{T}}{2}-\frac{\sigma^2T}{2}}e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

$$= \frac{Ke^{-rT}e^{d_1\sigma\sqrt{T}-\frac{\sigma^2T}{2}}e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

$$= \frac{Ke^{-rT+\ln\left(\frac{S}{K}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)T-\frac{\sigma^2T}{2}}e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

$$= \frac{Ke^{-rT+\ln\left(\frac{S}{K}\right)+rT+\frac{\sigma^2T}{2}-\frac{\sigma^2T}{2}}e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

$$= \frac{Ke^{\ln\left(\frac{S}{K}\right)}e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

$$= \frac{K\left(\frac{S}{K}\right)e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

$$= S\left(\frac{e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\right)$$

$$= SN'(d_1)$$

por lo tanto

$$SN'(d_1) = Ke^{-rT}N'(d_2) \qquad (Ec. 4)$$

Enseguida, demostraremos la fórmula para calcular la delta de opciones call europeas.

$$\Delta\, call = \frac{\partial c}{\partial S}$$

$$= \frac{\partial\left(SN(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2)\right)}{\partial S}$$

$$= N(d_1) + N'(d_1)\left(\frac{\partial d_1}{\partial S}\right)S - N'(d_2)\left(\frac{\partial d_2}{\partial S}\right)Ke^{-rT}$$

$$= N(d_1) + N'(d_1)\left(\frac{1}{S\sigma\sqrt{T}}\right)S - N'(d_2)\left(\frac{1}{S\sigma\sqrt{T}}\right)Ke^{-rT} \qquad (por\ Ec.3)$$

$$= N(d_1) + \left(\frac{1}{S\sigma\sqrt{T}}\right)\left(SN'(d_1) - Ke^{-rT}N'(d_2)\right)$$

$$= N(d_1) \quad (por\ Ec.4)$$

por lo tanto

$$\Delta\, call = N(d_1)$$

Para las opciones put europeas, se tiene el siguiente resultado:

$$\Delta\, put = \frac{\partial p}{\partial S}$$

$$= \frac{\partial\left(Ke^{-rT}N(-d_2) - SN(-d_1)\right)}{\partial S}$$

$$= N'(-d_2)\left(\frac{\partial(-d_2)}{\partial S}\right)Ke^{-rT} - N(-d_1) - N'(-d_1)\left(\frac{\partial(-d_1)}{\partial S}\right)S$$

$$= -N'(d_2)\left(\frac{1}{S\sigma\sqrt{T}}\right)Ke^{-rT} - N(-d_1) + N'(d_1)\left(\frac{1}{S\sigma\sqrt{T}}\right)S \qquad (por\ Ec.3)$$

$$= -N(-d_1) + \left(\frac{1}{S\sigma\sqrt{T}}\right)\left(SN'(d_1) - Ke^{-rT}N'(d_2)\right) \qquad (por\ Ec.4)$$

$$= -N(-d_1)$$

$$= -\left(1 - N(d_1)\right)$$

$$= N(d_1) - 1$$

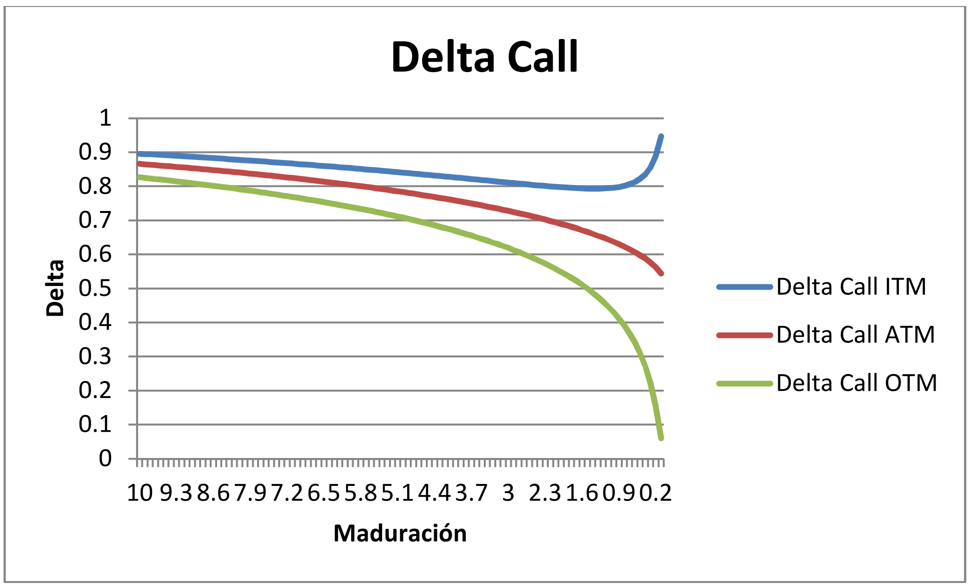
por lo tanto

$$\Delta\, put = N(d_1) - 1$$

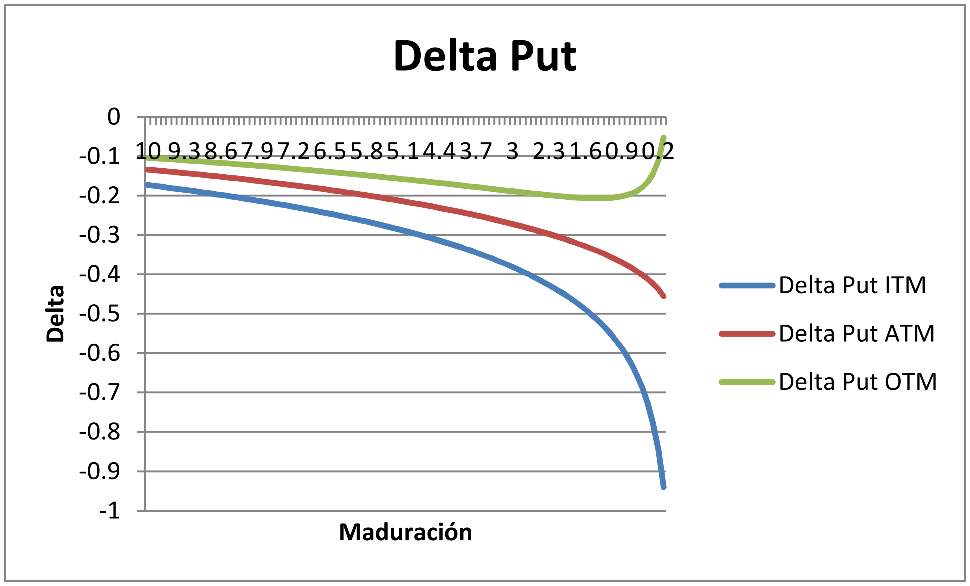
De esta manera quedan demostradas las fórmulas para el cálculo de la delta de opciones europeas sobre un subyacente que no paga dividendos.

En la gráfica 1 podemos observar el comportamiento de la Delta de una opción call conforme se aproxima su fecha de vencimiento y dependiendo del nivel al que se encuentre el valor del activo subyacente. Nótese que al inicio del contrato la diferencia no es significativa, sin embargo, conforme pasa el tiempo, la Delta de una call que podría ser ejercida (dentro del dinero) se aproxima a 1 mientras que la de una call que no será ejercida (fuera del dinero) se aproxima a 0. Esto es lógico debido al perfil de pago de la opción.

En la gráfica 2 se observa la tendencia de la Delta de una opción put comprada.



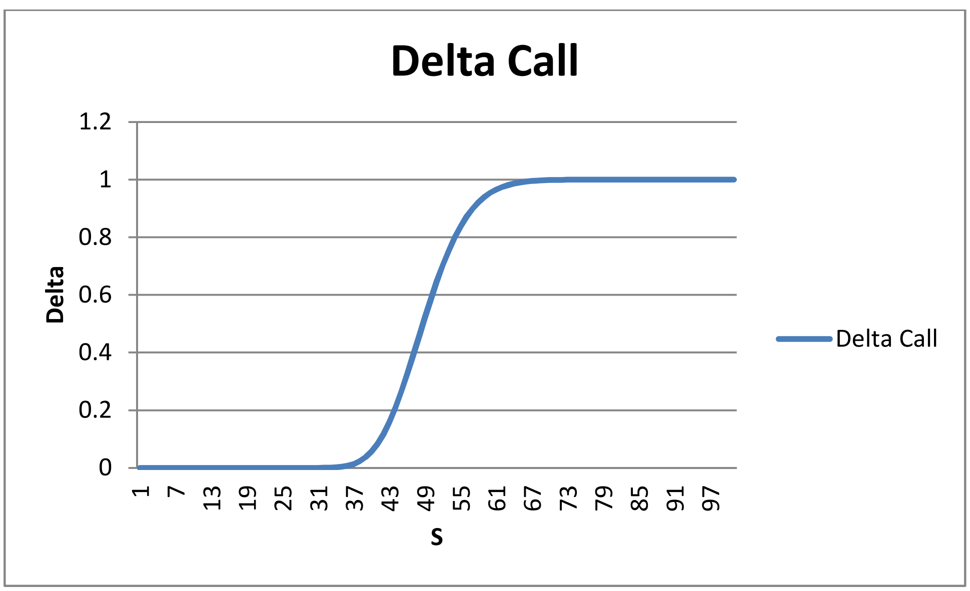
Gráfica 1. Comportamiento de la Delta de una opción call larga con el paso del tiempo dependiendo del nivel del subyacente (In the Money, At the Money, Out of the Money)



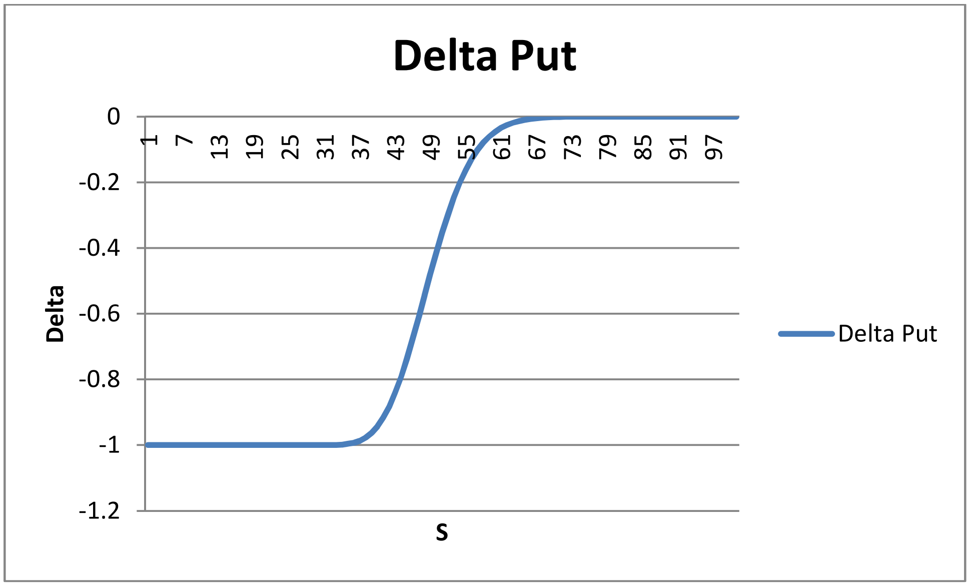
Gráfica 2. Comportamiento de la Delta de una opción put larga con el paso del tiempo dependiendo del nivel del subyacente (In the Money, At the Money, Out of the Money)

La delta de una posición larga en una call europea es positiva, mientras que la delta de una posición corta será negativa en la misma magnitud. Para las opciones put aplica lo contrario, pues la delta de la posición larga es negativa, mientras que la delta de la posición corta será positiva.

Esto se puede observar en la gráfica 3 para el caso de una opción call y en la gráfica 4 para el caso de una opción put.

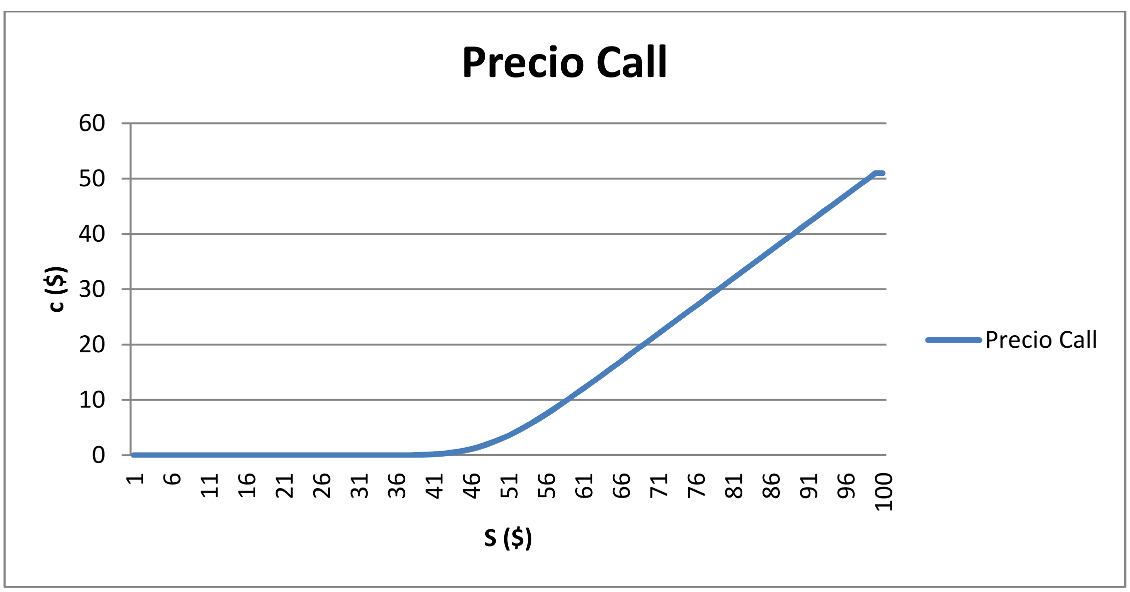


Gráfica 3. Delta de posición larga en call con precio strike $50, tasa libre de riesgo 5%, volatilidad 20% y vencimiento 20 semanas.

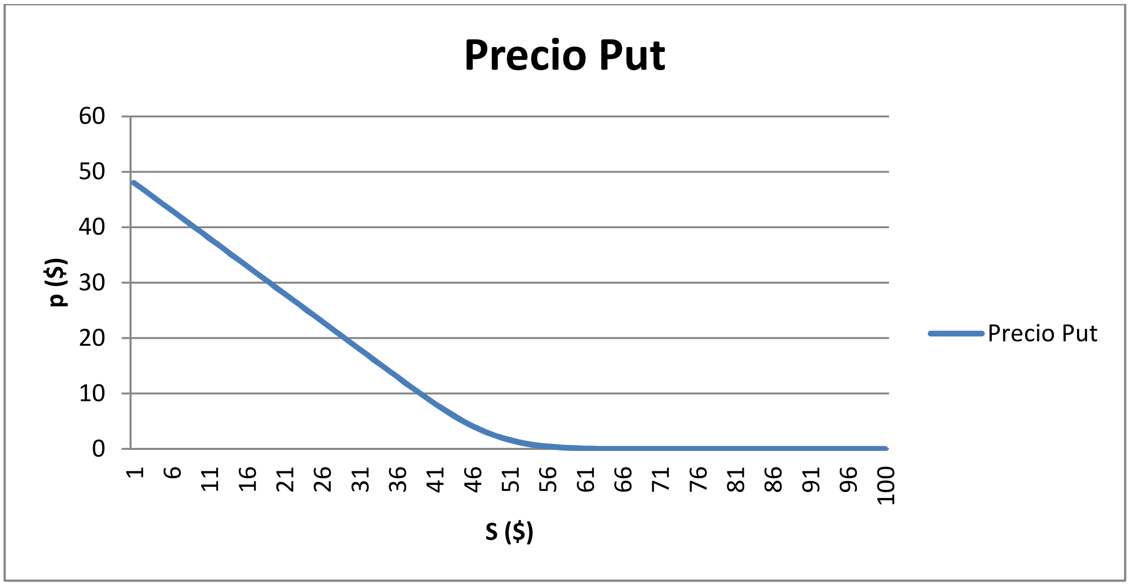


Gráfica 4. Delta de posición larga en put con precio strike $50, tasa libre de riesgo 5%, volatilidad 20% y vencimiento 20 semanas.

Intuitivamente es fácil entender que el precio de una call sea una función creciente del valor del subyacente(como podemos observar en la gráfica 5), mientras que el de una put sea decreciente (tal como la gráfica 6 muestra). Supongamos que se desea entrar largo en una opción call sobre una acción con un precio strike de $50. Pensemos en dos casos; en el primero, el precio actual de la acción es de $40 y en el segundo, el precio actual es de $60 ¿En qué caso será más cara la opción? En el primer caso tendríamos que esperar que el precio de la acción aumentara en algún momento futuro a más de $50 para obtener alguna ganancia, mientras que en el segundo estaríamos comprando una posición que, al menos al momento de compra, ya es ganadora (si la ejerciéramos al momento de compra recibiríamos nuestra ganancia). El vendedor exigirá una “compensación” más grande por esta situación. Es por esto que, mientras el precio de la acción sea mayor, más alta será la prima que debemos pagar.



Gráfica 5. Valor de opción call como función del valor del subyacente. Strike $50, tasa libre de riesgo 5%, volatilidad 20%, vencimiento 20 semanas.



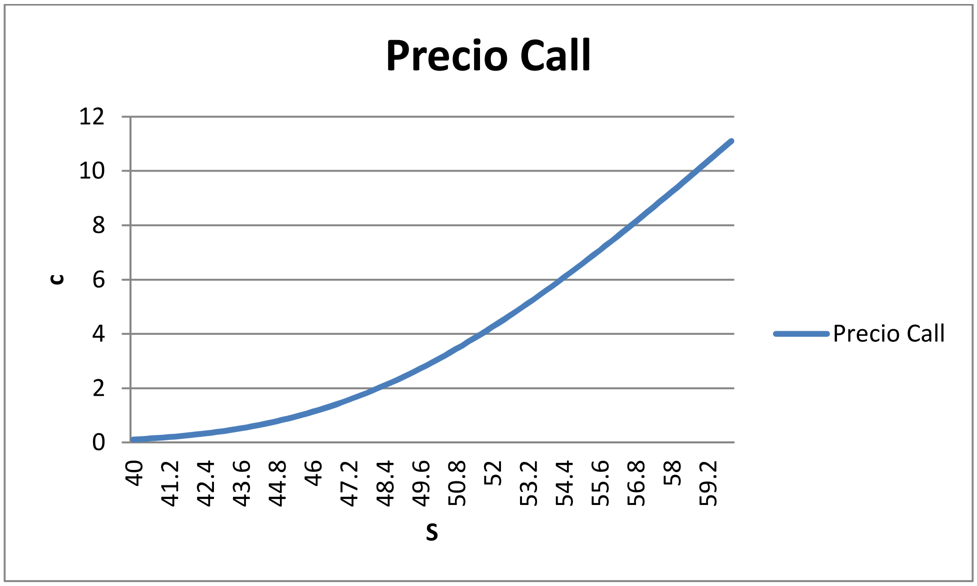
Gráfica 6. Valor de opción put como función del valor del subyacente. Strike $50, tasa libre de riesgo 5%, volatilidad 20%, vencimiento 20 semanas.

Gamma (Γ)

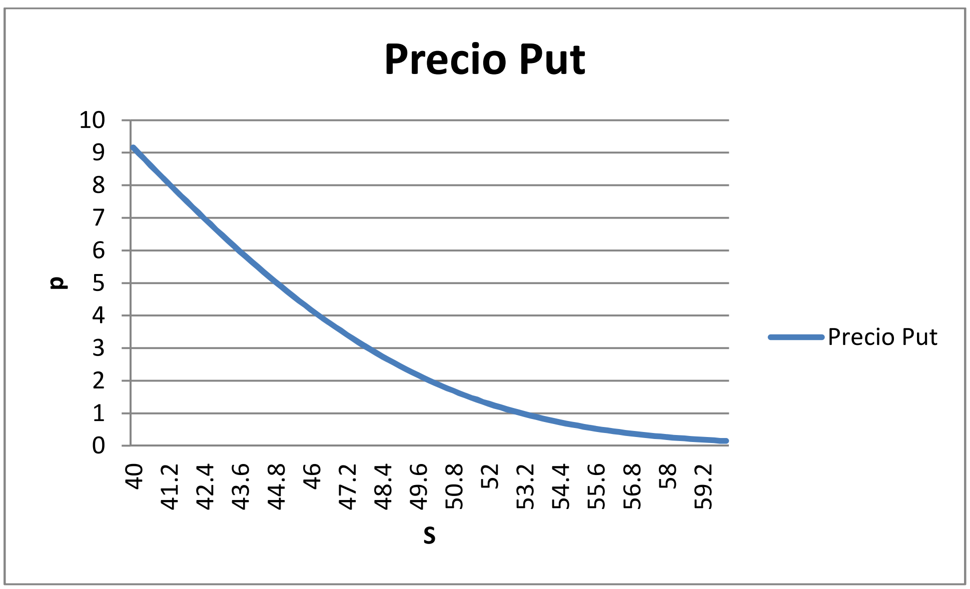
La Gamma de una opción se calcula como la segunda derivada del precio de la opción con respecto del valor del activo subyacente. Se puede interpretar como la velocidad a la que el precio de la opción cambia si se presentan movimientos en el valor del activo subyacente.

Una opción con una Gamma grande presentará cambios significativos en su valor como consecuencia de movimientos pequeños en el precio del subyacente. Por el contrario, movimientos de poca magnitud en el valor del subyacente generarán cambios poco significativos en el valor de opciones con Gamma pequeña.

En las gráficas 7 y 8 se observa la curva que representa el valor de opciones call y put respectivamente. Cubrir Delta implicaría un error que puede ser muy significativo en opciones de Gamma mayor.



Gráfica 7



Gráfica 8. En estas gráficas se observa el valor de la opción con respecto al valor del subyacente. Al no ser una función lineal, cubrir únicamente la Delta de una opción implicaría un error que podría ser fuerte dependiendo de la curvatura de esta función y de la magnitud del movimiento en el valor del subyacente.

De esta manera, la Gamma de las opciones europeas queda definida de la siguiente manera:

$$\Gamma\, call = \frac{\partial^2 c}{\partial S^2}$$

$$\Gamma\, put = \frac{\partial^2 p}{\partial S^2}$$

A continuación determinaremos el valor de la Gamma de opciones call y put europeas.

$$\Gamma\, call = \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial c}{\partial S}\right)}{\partial S}$$

$$= \frac{\partial(\Delta\, call)}{\partial S}$$

$$= \frac{\partial\big(N(d_1)\big)}{\partial S}$$

$$= N'(d_1)\left(\frac{\partial d_1}{\partial S}\right)$$

$$= \frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T}} \qquad (por\ Ec. 3)$$

por otro lado

$$\Gamma\, put = \frac{\partial^2 p}{\partial S^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)}{\partial S}$$

$$= \frac{\partial(\Delta\, put)}{\partial S}$$

$$= \frac{\partial(N(d_1) - 1)}{\partial S}$$

$$= \frac{\partial\big(N(d_1)\big)}{\partial S}$$

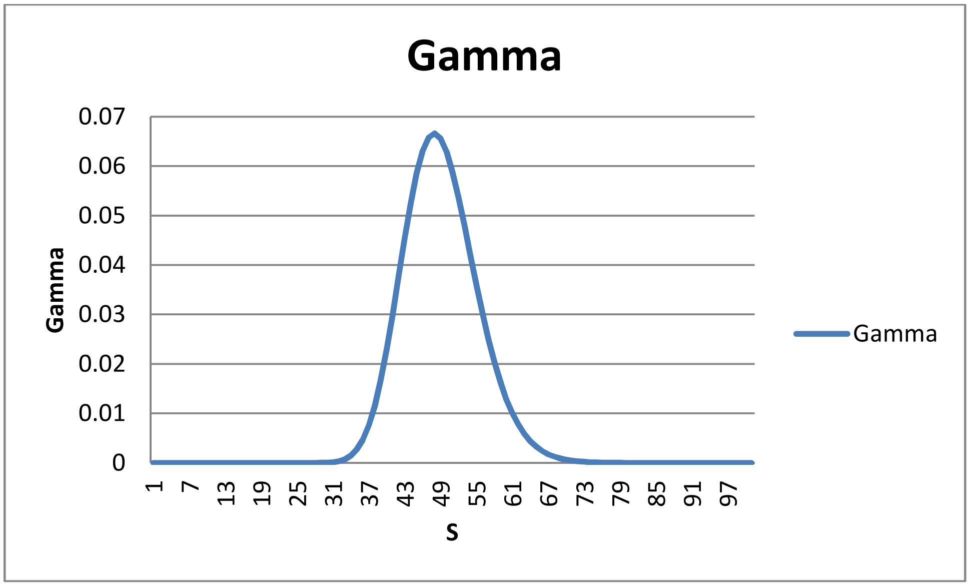
$$= \Gamma\, call$$

por lo tanto

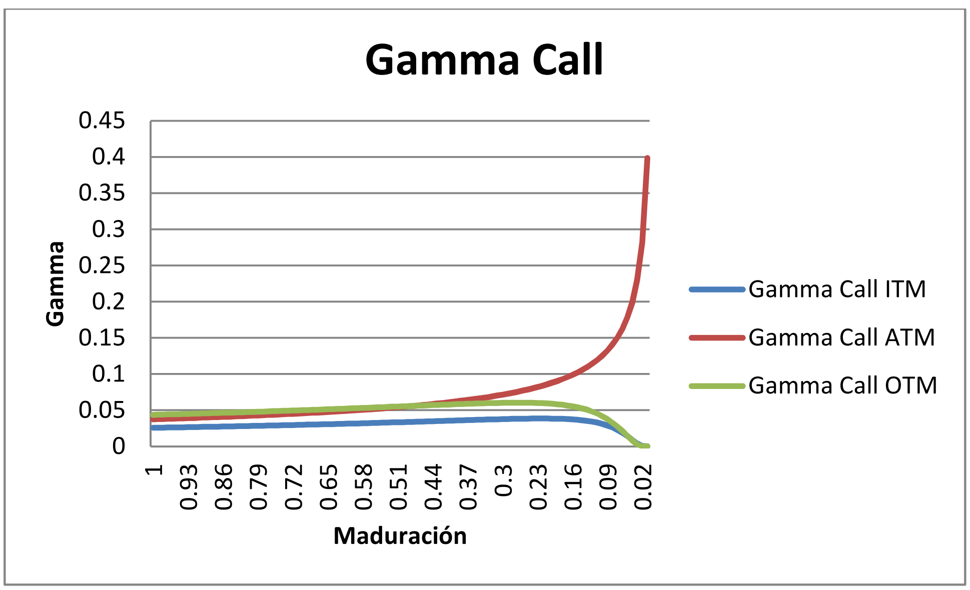
$$\Gamma\, call = \Gamma\, put = \frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T}} \qquad (Ec. 5)$$

Una posición larga en cualquier opción genera Gamma positiva, mientras que una posición corta producirá Gamma negativa.

En la gráfica 9 se observa que la Gamma es mayor cuando el precio del activo subyacente está próximo al valor strike de la opción. Es justamente ese nivel del subyacente en donde se generaría mayor diferencia si sólo se cubre la Delta de la posición; esta situación queda evidenciada con la gráfica 10, en donde las opciones donde el precio del subyacente es igual al precio strike (en el dinero) cerca del vencimiento generan mucha Gamma, mientras que las que quedan en el dinero o fuera del dinero no generan Gamma.

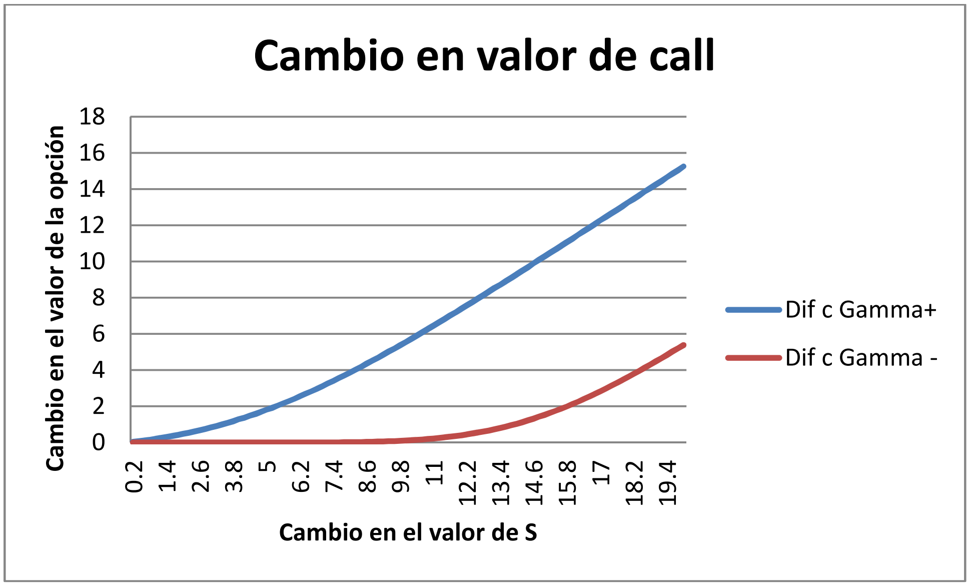


Gráfica 9. Valor de Gamma para na posición larga en una call/put con precio strike $50, tasa libre de riesgo 5%, volatilidad 20% y vencimiento 20 semanas.



Gráfica 10. Comportamiento de Gamma con el paso del tiempo para una call dependiendo del nivel del subyacente (In the Money, At the Money, Out of the Money). Nótese que los valores para una put serían los mismos, entre la put In the Money y la call Out of the Money y viceversa.

La Gamma representa la "curvatura" del precio de la opción. Una Gamma grande indica que cubrir la Delta no sería suficiente si esperamos mantenernos libres de riesgo ante movimientos significativos en el precio del activo subyacente mientras que una Gamma pequeña refleja que los movimientos en el valor de la opción como resultado de cambios en el valor del subyacente serán muy lineales (situación que la cobertura de la Delta asume). Esto se observa con claridad en la gráfica 11.



Gráfica 11. Cambio en el valor de una call con respecto al cambio en el valor del subyacente dependiendo de la magnitud de Gamma. Con una Gamma mayor (línea azul) el cambio en el valor de la opción será mayor considerando la misma diferencia en el valor del subyacente.

Vega (V)

La Vega es relacionada con la variación en el valor de una opción determinada por cambios en el nivel de volatilidad del valor del activo subyacente.

Definida de esta manera, la Vega puede ser calculada de la siguiente manera:

$$\mathcal{V}\ call = \frac{\partial c}{\partial \sigma}$$

$$\mathcal{V}\ put = \frac{\partial p}{\partial \sigma}$$

Antes de determinar el valor de Vega para opciones europeas, debemos obtener un resultado previo:

$$\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} = \frac{\partial \left(\frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \right)}{\partial \sigma}$$

$$= \frac{\partial \left(\left(\ln\left(\frac{S}{K}\right) + rT + \frac{\sigma^2 T}{2} \right) \left(\sigma\sqrt{T}\right)^{-1} \right)}{\partial \sigma}$$

$$= T\sigma\left(\sigma\sqrt{T}\right)^{-1} - \left(\sigma\sqrt{T}\right)^{-2}\sqrt{T}\left(\ln\left(\frac{S}{K}\right) + rT + \frac{\sigma^2 T}{2}\right)$$

$$= \frac{T\sigma}{\sigma\sqrt{T}} - \frac{\left(\ln\left(\frac{S}{K}\right) + rT + \frac{\sigma^2 T}{2}\right)\sqrt{T}}{\sigma^2 T}$$

$$= \sqrt{T} - \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + rT + \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma^2\sqrt{T}}$$

$$= \frac{\sigma^2 T - \ln\left(\frac{S}{K}\right) - rT - \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma^2\sqrt{T}}$$

$$= \frac{-\ln\left(\frac{S}{K}\right) - rT + \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma^2\sqrt{T}}$$

por otro lado

$$\frac{\partial d_2}{\partial \sigma} = \frac{\partial\left(\frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)}{\partial \sigma}$$

$$= \frac{\partial\left(\left(\ln\left(\frac{S}{K}\right) + rT - \frac{\sigma^2 T}{2}\right)\left(\sigma\sqrt{T}\right)^{-1}\right)}{\partial \sigma}$$

$$= -\sigma T\left(\sigma\sqrt{T}\right)^{-1} - \left(\sigma\sqrt{T}\right)^{-2}\sqrt{T}\left(\ln\left(\frac{S}{K}\right) + rT - \frac{\sigma^2 T}{2}\right)$$

$$= -\frac{\sigma T}{\sigma\sqrt{T}} - \frac{\left(\ln\left(\frac{S}{K}\right) + rT - \frac{\sigma^2 T}{2}\right)\sqrt{T}}{\sigma^2 T}$$

$$= -\sqrt{T} - \frac{\left(\ln\left(\frac{S}{K}\right) + rT - \frac{\sigma^2 T}{2}\right)}{\sigma^2\sqrt{T}}$$

$$= \frac{\left(-\sigma^2 T - \ln\left(\frac{S}{K}\right) - rT + \frac{\sigma^2 T}{2}\right)}{\sigma^2\sqrt{T}}$$

$$= \frac{\left(-\ln\left(\frac{S}{K}\right) - rT - \frac{\sigma^2 T}{2}\right)}{\sigma^2\sqrt{T}}$$

$$= \frac{\left(-\ln\left(\frac{S}{K}\right) - rT - \frac{\sigma^2 T}{2} + \sigma^2 T - \sigma^2 T\right)}{\sigma^2\sqrt{T}}$$

$$= \frac{\left(-\ln\left(\frac{S}{K}\right) - rT + \frac{\sigma^2 T}{2} - \sigma^2 T\right)}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$= \frac{\left(-\ln\left(\frac{S}{K}\right) - rT + \frac{\sigma^2 T}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}} - \frac{\sigma^2 T}{\sigma^2\sqrt{T}}$$

$$= \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - \sqrt{T}$$

por lo tanto

$$\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} = \frac{\partial d_2}{\partial \sigma} + \sqrt{T} \qquad (Ec. 6)$$

A continuación calcularemos el valor de Vega para opciones europeas.

$$\mathrm{V}\ call = \frac{\partial c}{\partial \sigma} = \frac{\partial\left(SN(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2)\right)}{\partial \sigma}$$

$$= N'(d_1)\left(\frac{\partial d_1}{\partial \sigma}\right)S - N'(d_2)\left(\frac{\partial d_2}{\partial \sigma}\right)Ke^{-rT}$$

$$= N'(d_1)\left(\frac{\partial d_2}{\partial \sigma} + \sqrt{T}\right)S - N'(d_2)\left(\frac{\partial d_2}{\partial \sigma}\right)Ke^{-rT} \qquad (por\ Ec. 6)$$

$$= S\sqrt{T}N'(d_1) + N'(d_1)\left(\frac{\partial d_2}{\partial \sigma}\right)S - N'(d_2)\left(\frac{\partial d_2}{\partial \sigma}\right)Ke^{-rT}$$

$$= S\sqrt{T}N'(d_1) + \left(\frac{\partial d_2}{\partial \sigma}\right)\left(SN'(d_1) - Ke^{-rT}N'(d_2)\right)$$

$$= S\sqrt{T}N'(d_1) \qquad (por\ Ec. 4)$$

por otro lado

$$\mathrm{V}\ put = \frac{\partial p}{\partial \sigma} = \frac{\partial\left(Ke^{-rT}N(-d_2) - SN(-d_1)\right)}{\partial \sigma}$$

$$= N'(-d_2)\left(\frac{\partial(-d_2)}{\partial \sigma}\right)Ke^{-rT} - N'(-d_1)\left(\frac{\partial(-d_1)}{\partial \sigma}\right)S$$

$$= -N'(d_2)\left(\frac{\partial d_2}{\partial \sigma}\right)Ke^{-rT} + N'(d_1)\left(\frac{\partial d_1}{\partial \sigma}\right)S$$

$$= -N'(d_2)\left(\frac{\partial d_2}{\partial \sigma}\right)Ke^{-rT} + N'(d_1)\left(\frac{\partial d_2}{\partial \sigma} + \sqrt{T}\right)S \qquad (por\ Ec. 6)$$

$$= S\sqrt{T}N'(d_1) + N'(d_1)\left(\frac{\partial d_2}{\partial \sigma}\right)S - N'(d_2)\left(\frac{\partial d_2}{\partial \sigma}\right)Ke^{-rT}$$

$$= S\sqrt{T}N'(d_1) + \left(\frac{\partial d_2}{\partial \sigma}\right)\left(SN'(d_1) - Ke^{-rT}N'(d_2)\right)$$

$$= S\sqrt{T}N'(d_1) \qquad\qquad (por\ Ec.4)$$

$$= \mathrm{V}\ call$$

por lo tanto

$$\mathrm{V}\ call = \mathrm{V}\ put = S\sqrt{T}N'(d_1) \qquad (Ec.7)$$

Al igual que la Gamma, una posición larga en cualquier opción producirá una Vega positiva, mientras que una posición corta generará una Vega negativa.

Para entender esto podemos imaginar el caso de un comprador de una call sobre una acción con precio strike de \$50 cuando el precio de la acción es de \$40. Si el valor de la acción presenta un incremento en la volatilidad, la probabilidad de que en algún momento futuro éste supere al precio strike y, por lo tanto, la opción sea ejercida, es mayor. Esto incrementará el valor de la prima que el vendedor requerirá por la opción. Si la volatilidad disminuye, también lo hace la probabilidad de superar el precio strike y el valor de la opción disminuirá.

Una Vega grande indica que el valor de la posición es muy sensible a los cambios que se presenten en la volatilidad del precio del activo subyacente. Una Vega pequeña indica que el cambio en la volatilidad del valor del subyacente no impactará con fuerza en el valor de la posición.

Theta (Θ)

La Theta de una posición se refiere al cambio de su valor con el paso del tiempo, es decir, el impacto que produce la disminución del tiempo restante para la fecha de maduración en el valor de la opción.

Se puede probar que, para opciones europeas:

$$\Theta\ call = -\frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} - rKe^{-rT}N(d_2)$$

$$\Theta\ put = -\frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} + rKe^{-rT}N(-d_2)$$

por lo tanto

$$\Theta\ call = \Theta\ put - rKe^{-rT}$$

El valor de Theta es negativo. Esto indica que, si todas las demás variables permanecen constantes, el valor de las opciones europeas disminuye conforme el tiempo pasa.

Las coberturas generalmente no consideran cubrir el valor de Theta, puesto que no hay duda de que el tiempo continuará avanzando.

Rho (P)

La Rho de un portafolios se define como el cambio en su valor determinado por el cambio en el valor de la tasa de interés libre de riesgo.

Se puede mostrar que, para opciones europeas:

$$\mathrm{P}\ call = KTe^{-rT}N(d_2)$$

$$\mathrm{P}\ put = -KTe^{-rT}N(-d_2)$$

De esta manera se entiende que un incremento en la tasa libre de riesgo producirá un aumento en el valor de una call y una disminución en el valor de una put, mientras que un decremento en la tasa de interés generará el efecto inverso[5].

En este capítulo se han resumido, calculado y explicado brevemente las principales Griegas. Como ya se mencionó, cada Griega representa el impacto que el cambio en algún factor de riesgo produciría en una posición en opciones europeas.

Con base en los cálculos presentados en este capítulo, naturalmente surge una pregunta: ¿existe alguna manera de controlar y gestionar los riesgos que una posición en opciones genera?

En el siguiente capítulo analizaremos las posibilidades que se presentan para gestionar los riesgos que analizamos en la presente sección, explicaremos cómo se controlan en la operativa actual e introduciremos el planteamiento que motivó la realización de este trabajo.

[5] El riesgo de tasa de interés se suele cubrir con derivados de tasa y se gestiona como bloque, es decir, no necesariamente se cubre sólo el riesgo que generan las opciones, sino todas las posiciones de una determinada mesa. No es muy útil cubrir el riesgo de tasa de interés con opciones.

CAPÍTULO II. MÉTODOS DE COBERTURA

Al tomar una posición en una opción se asumen, como ya hemos observado, diversos riesgos que, en caso de materializarse, pueden llegar a generar enormes pérdidas no contempladas. Ante esta problemática surge la gestión de los riesgos que procura disminuir el impacto negativo que los movimientos del mercado adversos a nuestras posiciones podrían generar.

A continuación se presentan algunas de las posibilidades que se tienen para mitigar estos riesgos y analizaremos su desempeño en diversos casos.

Posiciones descubiertas

En principio, imaginemos qué sucedería si no se hiciera nada después de comprar o vender una opción. Para analizar este caso, tomemos como ejemplo a un vendedor de una call europea sobre el precio de una acción con un precio strike superior al valor actual del subyacente. Supongamos que el vendedor decide no hacer nada para cubrir los riesgos a los que está expuesto por la venta realizada.

Esta estrategia funcionará bien si el precio de la acción en la fecha de maduración resulta menor que el precio strike pactado. En ese caso, el comprador de la opción no ejercerá su derecho de compra (esto es lógico, puesto que el valor de la acción en el mercado es menor que el precio que él pagaría en caso de ejercer la opción) y la ganancia del vendedor será igual a la prima recibida al vender el contrato.

Si, por el contrario, el valor de la acción resulta ser mayor que el precio strike pactado, entonces el panorama del vendedor cambia radicalmente. El comprador ejercerá su derecho de compra y pagará al vendedor el precio strike por una acción; para cumplir con el contrato, el vendedor tendrá que comprar una acción en el mercado a un precio mayor que el que recibirá al venderla, por lo que incurre en una pérdida. De esta manera, la pérdida que sufrirá el vendedor queda determinada por la siguiente expresión:

$$S_T - K$$

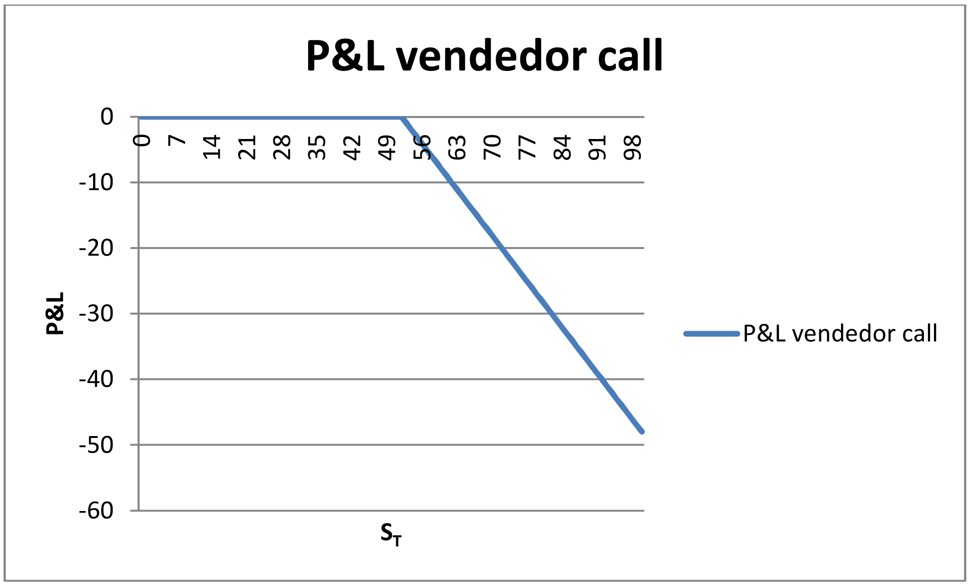
donde

$$\boldsymbol{S_T} = Precio\ de\ la\ acción\ en\ la\ fecha\ de\ maduración$$
$$\boldsymbol{K} = Precio\ strike\ pactado$$

Es decir, la pérdida del vendedor es igual a la cantidad por la que el precio de la acción a la fecha de maduración excede al precio strike.

Supongamos que el precio de la acción en la fecha de maduración es de \$55 y el strike pactado es de \$52. En ese caso, la pérdida del vendedor será de \$3. Ahora supongamos que el precio de la acción en la fecha de maduración es de \$62, entonces su pérdida será de \$10. Si además suponemos que el contrato otorgaba el derecho de compra de 100,000 acciones, la pérdida asciende a $1,000,000.

Es fácil darse cuenta de que la pérdida del vendedor no está acotada. Esta pérdida fácilmente puede ser mayor que la prima recibida al vender la opción de compra, y el balance del vendedor resultaría negativo.



Gráfica del Profit and Loss (P&L) a la fecha de vencimiento para una posición corta en una call con precio strike 52. El P&L no considera la prima recibida, puesto que se entiende que ésta ya se pagó en la fecha de pactación de la opción, por lo que no se puede comparar tal cual con el P&L a la fecha de vencimiento.

Posiciones cubiertas

Se puede pensar que comprar la acción inmediatamente después de haber vendido la opción es una buena manera de cubrirse. Efectivamente, en caso de que el comprador ejerza su derecho en la fecha de maduración, el vendedor no tendrá que conseguir la acción a precio de mercado; sin embargo, si el precio de la acción baja y el comprador no ejerce su derecho entonces el vendedor habrá incurrido en una pérdida en su acción, pues valdría menos de lo que pagó por ella, probablemente mucho menos. De igual manera, esta pérdida puede ser mayor que la prima obtenida al vender la opción y resultar en un balance negativo.

Estas estrategias se denominan posiciones “desnudas” y “cubiertas” respectivamente, y no son la mejor manera de gestionar los riesgos que se asumen al tomar una posición en una opción.

Sabiendo que existen estas estrategias, analicemos la siguiente posibilidad.

El vendedor de la opción comprará una acción tan pronto el precio strike sea rebasado y venderá la acción en el momento en que el valor de la acción sea menor que el strike pactado. La idea es mantener una posición desnuda mientras la opción no vaya a ser ejercida y una posición cubierta en los momentos en que el comprador pudiera ejercer su derecho de compra.

Notemos que el valor de la cobertura al inicio del contrato es la siguiente:

$$S_0 \; si \; S_0 > K$$

$$0 \; si \; S_0 \leq K$$

Como las compras y ventas subsecuentes del subyacente se realizarán al precio strike, entonces el precio total de esta cobertura sería

$$\max(S_0 - K, 0)$$

Este valor es menor que el precio de la opción determinado por Black & Scholes, lo que significa que, de ser posible construir una cobertura de esta manera, la gente podría hacer arbitrajes simplemente comprando opciones y cubriéndolas. Como supusimos que no existen posibilidades de arbitraje, entonces algo no es consistente con esta construcción de la cobertura.

Efectivamente, esta cobertura no es tan eficiente. El problema está en que no se pueden realizar las compras ni las ventas exactamente en el precio strike, ya que no sabemos si, una vez alcanzando este precio, el valor de la opción continuará hacia arriba o hacia abajo de dicho precio, por lo que las compras y ventas, en realidad, se producirán cuando el precio del subyacente tome el valor

$$K + \varepsilon$$

$$o$$

$$K - \varepsilon$$

De esta manera, cada compra y venta de subyacente contiene un costo inherente de ε.

Se puede pensar que la manera de solucionar este problema sería mantener una vigilancia más fina sobre el valor del subyacente, de manera que el valor de ε se reduzca. Esto, efectivamente, conduciría a la reducción del costo, pero generaría un aumento en el número de compras y ventas necesarias, por ser el valor de las acciones un movimiento browniano[6], de manera que la reducción del costo se “compensaría” con un incremento en el número de transacciones y el costo de la cobertura no se reduciría. Ésta tampoco resulta ser la mejor manera de construir un portafolios de cobertura.

Es en este momento cuando comenzamos a hablar de la cobertura de las Griegas.

[6] El valor esperado del número de veces que un movimiento browniano es igual a cualquier valor en cualquier intervalo de tiempo es infinito. *Options, futures and other derivatives. John C. Hull. 2009.*

Gestión de riesgo

Para cubrir una posición en opciones europeas se busca construir un portafolios que neutralice el valor de las Griegas que genera dicha posición; si se logra, por ejemplo, que el valor de la Delta de la cobertura sea igual en magnitud pero opuesta a la Delta de nuestra posición, entonces el cambio en el valor de nuestra posición como resultado de un movimiento en el valor del subyacente sería compensado con un cambio igual en el valor del portafolios de cobertura. Siguiendo la misma lógica, neutralizar la Gamma y la Vega también nos cubriría ante movimientos mayores en el valor del subyacente y ante movimientos en el nivel de volatilidad de su valor.

Es importante mencionar que, a pesar de que suponemos que el mercado ofrece cualquier posición que busquemos, no nos interesa la posición inversa a la que debemos cubrir, puesto que ésta neutralizaría perfectamente los riesgos pero anularía el sentido de este trabajo automáticamente; bastaría con tomar dicha posición y nuestra posición se cerraría.

Para neutralizar la Delta de una opción es necesario algún instrumento sensible a los cambios en el valor del subyacente. El subyacente mismo es utilizado para neutralizar la Delta de una posición.

Una unidad de subyacente tiene, lógicamente, una Delta igual a 1.

De esta forma, el número de unidades de subyacente que se deben comprar o vender queda determinado por la Delta de la posición en opciones.

Sea Δ la Delta de una posición en opciones europeas y Δs la Delta de una unidad de subyacente. Entonces, se busca la cantidad Z de subyacente tal que:

$$Z\Delta_s = -\Delta$$

Como Δs =1 entonces:

$$Z = -\Delta$$

Para cubrir la Gamma de una posición en opciones europeas, necesitaremos ampliar la cobertura.

Una posición en el activo subyacente no nos ayudaría puesto que el valor de dicho subyacente es, naturalmente, una función lineal del precio del subyacente, específicamente la función identidad. La Gamma de una posición en el subyacente es, por lo tanto, nula.

Es necesario, entonces, algún instrumento cuyo valor no sea una función lineal del precio del activo subyacente para neutralizar la Gamma de nuestras posiciones en opciones. Como ya se habrá podido anticipar, utilizaremos otra posición en opciones para neutralizar la Gamma generada.

Supongamos que nuestra posición original genera cierta Gamma. Podemos encontrar en el mercado otra opción sobre el mismo activo subyacente que genere una Gamma diferente. En ese caso, se deberá tomar una posición de esas nuevas opciones a fin de neutralizar la Gamma de nuestra posición original. Un simple despeje nos indica la cantidad de opciones nuevas que se deben obtener.

Sean Γ la Gamma de nuestra posición original y Γ_{op} la Gamma de una de las opciones que se desea utilizar para cubrir dicha Gamma. Entonces, se busca la cantidad X de opciones nuevas tales que:

$$X\Gamma_{op} = -\Gamma$$

por lo tanto

$$X = -\frac{\Gamma}{\Gamma_{op}}$$

Con un razonamiento análogo, podemos concluir que para cubrir la Vega de nuestra posición en opciones es necesario incluir más opciones en el portafolios de cobertura. La cantidad de opciones a incluir queda determinada de la siguiente forma:

Sean V la Vega de nuestra posición original y Vc la Vega de una de las opciones que se desea utilizar para cubrir dicha Gamma. Entonces, se busca la cantidad X de opciones nuevas tales que:

$$Y\mathrm{V}_{\mathrm{op}} = -\mathrm{V}$$

por lo tanto

$$Y = -\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{V}_{\mathrm{op}}}$$

De esta forma, queda determinado el portafolios de cobertura que neutralizará los riesgos en los que incurramos al tomar una posición en opciones europeas.

A pesar de haber determinado la cantidad de opciones que se deben obtener para neutralizar nuestras posiciones debemos considerar que las opciones que fueron utilizadas para cubrir la Gamma de nuestra posición también tienen Vega y aquéllas que fueron empleadas para cubrir la Vega, también tienen Gamma, por lo que cubrir nuestra Gamma o nuestra Vega sin duda modificará el nivel de la otra.

Para que el portafolios quede neutralizado de ambas se tiene que considerar lo siguiente:

Sean Γ y V la Gamma y la Vega respectivamente de nuestra posición original, Γ_X y V_X la Gamma y la Vega respectivamente de otra opción y Γ_Y y V_Y la Gamma y la Vega respectivamente de una opción distinta. Entonces buscamos la cantidad X y Y de dichas opciones tales que se cumpla lo siguiente:

$$X\Gamma_X + Y\Gamma_Y = -\Gamma$$
$$\mathrm{X}\mathrm{V}_X + Y\mathrm{V}_Y = -\mathrm{V}$$

resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos que:

$$X = -\frac{\Gamma \mathcal{V}_Y - \Gamma_Y \mathcal{V}}{\Gamma_X \mathcal{V}_Y - \mathcal{V}_X \Gamma_Y}$$

$$Y = -\frac{\mathcal{V}\Gamma_X - \mathcal{V}_X \Gamma}{\Gamma_X \mathcal{V}_Y - \mathcal{V}_X \Gamma_Y}$$

Al tomar estas nuevas posiciones de otras opciones, la Delta del portafolios también se verá afectada. De esta manera, debemos determinar la cantidad de subyacente que se debe conseguir para mantener nuestra Delta neutralizada.

Sean Δ la Delta de nuestra posición original y Δx y Δy las Deltas generadas por las opciones que conforman el portafolios de cobertura. Entonces la cantidad Z de unidades de subyacente necesarias para neutralizar la Delta está determinada por:

$$Z = -(\Delta + X\Delta_X + \mathrm{Y}\Delta_{\mathrm{Y}})$$

Ejemplo 1

Supongamos que se compra una opción call europea sobre 100,000 acciones con las siguientes características:

$S_0 = \$49$
$K = \$50$
$r = 5\%$
$\sigma = 20\%$
$T = 20\ semanas = 0.3846\ años$

Para determinar el precio de la opción, calcularemos primero los valores de d1 y d2

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{49}{50}\right) + \left(0.05 + \frac{0.2^2}{2}\right)0.3846}{0.2\sqrt{0.3846}}$$

$$= 0.054173753$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$$= 0.054173753 - 0.2\sqrt{0.3846}$$

$$= -0.069858501$$

Con estos resultados, el valor de la opción en cuestión está determinado por:

$$c = 100{,}000\left(S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2)\right)$$

$$= 100{,}000(49\left(N(0.054173753) - 50e^{-0.05(0.3846)} N(-0.069858501)\right)$$

$$= 240{,}046.11$$

Por lo tanto, el valor de una opción con las características antes descritas será de

$$\$240{,}046.11$$

La Delta de la opción se calcula de la siguiente manera:

$$\Delta = 100{,}000N(d_1)$$

$$= 100{,}000N(0.54173753)$$

$$= 52{,}160.16$$

La Gamma está determinada por:

$$\Gamma = \frac{N'(d_1)}{S_0 \sigma \sqrt{T}}$$

$$= \frac{N'(0.054173753)}{49(0.2)\sqrt{0.3846}}$$

$$= 6{,}554.54$$

Ahora calcularemos la Vega de la posición

$$\mathcal{V} = S_0 T N'(d_1)$$

$$= 49(0.3846)N'(0.54173753)$$

$$= 1{,}210{,}524.28$$

En resumen, el valor c de nuestra posición, así como sus respectivas Delta, Gamma y Vega toman los siguientes valores:

$c = \$240{,}046.11$
$\Delta = 52{,}160.16$
$\Gamma = 6{,}554.54$
$\mathcal{V} = 1{,}210{,}524.28$

Supongamos que existen las siguientes opciones en el mercado sobre el mismo subyacente:

$$Opción\ 1$$
$$Opción\ Call$$
$$S_0 = 49$$

$$K = 52$$
$$r = 5\%$$
$$\sigma = 20\%$$
$$T = 10\ semanas = 0.1923\ años$$

$$Opción\ 2$$
$$Opción\ Put$$
$$S_0 = 49$$
$$K = 45$$
$$r = 5\%$$
$$\sigma = 20\%$$
$$T = 30\ semanas = 0.5769\ años$$

La Delta, la Gamma y la Vega de ambas opciones respectivamente son las siguientes:

$$\Delta_X = 0.300117464$$
$$\Gamma_X = 0.080920146$$
$$\mathcal{V}_X = 7.472365328$$

$$\Delta_Y = -0.204280871$$
$$\Gamma_Y = 0.038091322$$
$$\mathcal{V}_Y = 10.55233913$$

Considerando los resultados obtenidos en este capítulo, la cantidad X de opciones de tipo 1 y la cantidad Y de opciones de tipo 2 necesarias para neutralizar la Gamma y la Vega de nuestra posición original se determinan de la siguiente manera:

$$X = -\frac{\Gamma\mathcal{V}_Y - \Gamma_Y\mathcal{V}}{\Gamma_X\mathcal{V}_Y - \mathcal{V}_X\Gamma_Y}$$

$$= -\frac{6{,}554.54(10.55233913) - 0.038091322(1{,}210{,}524.28)}{0.080920146(10.55233913) - 7.472365328(0.038091322)}$$

$$= -40{,}500.036544$$

$$Y = -\frac{\mathcal{V}\Gamma_X - \mathcal{V}_X\Gamma}{\Gamma_X\mathcal{V}_Y - \mathcal{V}_X\Gamma_Y}$$

$$= -\frac{1{,}210{,}524.28(0.080920146) - 7.472365328(6{,}554.54)}{0.080920146(10.55233913) - 7.472365328(0.038091322)}$$

$$= -86{,}037.152044$$

En resumen, se deberá vender una opción del tipo 1 sobre el precio de 40,500 unidades de subyacente y una del tipo 2 sobre 86,037 unidades de subyacente.

Observemos que la venta de estas posiciones modificará nuestra Delta. Originalmente se tenía una Delta Δ de 52,160.16; entonces, la nueva Delta de nuestra posición se calculará de la siguiente manera:

$$\Delta_F = \Delta + X\Delta_X + Y\Delta_Y$$

$$= 52{,}160.16 + (-40{,}500)(0.300117464) + (-86{,}037)(-0.204280871)$$

$$= 57{,}581.139499$$

Por lo tanto, será necesario vender 57,581 unidades de subyacente para neutralizar la Delta de nuestra posición.

Después de este último movimiento, el portafolios de cobertura estará completo. La posición final de éste es la siguiente:

- Venta de una opción sobre el precio de 40,500 acciones con las características de la opción 1.
- Venta de una opción sobre el precio de 86,037 acciones con las características de la opción 2.
- Venta de 57,581 unidades de subyacente.

Para comprobar que este portafolios cubre los riesgos asumidos en nuestra posición original, obtengamos el valor de sus Griegas.

La Delta del portafolios está determinada de la siguiente manera:

$$\Delta_P = -40{,}500.036544\Delta_c^1 - 86{,}037.152044\Delta_c^2 - 57{,}581.139499$$

$$= -40{,}500.036544(0.300117464) - 86{,}037.152044(-0.204280871) - 57{,}581.139499$$

$$= -52{,}160.16$$

La Gamma del portafolios de cobertura se calcula como sigue:

$$\Gamma_P = -40{,}500.036544\Gamma_c^1 - 86{,}037.152044\Gamma_c^2$$

$$= -40{,}500.036544(0.080920146) - 86{,}037.152044(0.038091322)$$

$$= -6{,}554.54$$

La Vega de la cobertura quedará determinada por:

$$\mathrm{V}_P = -40{,}500.036544\mathrm{V}_c^1 - 86{,}037.152044\mathrm{V}_c^2$$

$$= -40{,}500.036544(7.472365328) - 86{,}037.152044(10.55233913)$$

$$= -1{,}210{,}524.28$$

Observemos que los valores de las Griegas del portafolios son de igual magnitud, pero en sentido contrario de las Griegas de nuestra posición original. Esto indica que los cambios en el valor de nuestra posición original como consecuencia de movimientos de los factores de riesgo que afectan su valor, serán compensados con cambios inversos en el valor del portafolios de cobertura.

Después del ejercicio realizado, es importante puntualizar dos situaciones. La primera es el costo de esta cobertura. A continuación calcularemos el costo del portafolios de cobertura obtenido en el ejercicio anterior.

Sean Cob el precio del portafolios de cobertura en el ejercicio anterior, op1 el precio de la opción del tipo 1 y op2 el precio de la opción del tipo 2. Entonces

$$Cob = 40{,}500(-op_1) + 86{,}037(-op_2) + 57{,}581(-S_0)$$

Por Black & Scholes, los valores de c1 y c2 son los siguientes:

$$op_1 = \$0.78$$
$$op_2 = \$0.92$$

por lo tanto

$$Cob = 40{,}500(-\$0.78) + 86{,}037(-\$0.92) + 57{,}841(-\$49)$$

$$= -\$2{,}932{,}308.49$$

Notemos que el precio de la cobertura, inicialmente, es negativo. Esto significa que se recibirá tal cantidad. Efectivamente, la venta de las opciones del portafolios de cobertura y la venta de acciones nos generarán un ingreso.

Con el paso del tiempo, el mercado presentará movimientos que forzarán el reajuste de la cobertura. Retomando el ejercicio anterior, podemos desarrollar el siguiente ejemplo:

Supongamos que el operador que está cubriendo su posición decide ajustar su cobertura semanalmente. Una semana después de la compra de su posición y de la construcción del portafolios de cobertura, el precio del subyacente es de $48.12.

Es necesario recalcular las Griegas de su posición original y de su cobertura para realizar los ajustes adecuados. En ese momento, los datos de mercado que afectan su posición y su cobertura son los siguientes.

$$Opción\ original$$
$$Opción\ Call$$
$$S = 48.12$$
$$K = 50$$
$$r = 5\%$$
$$\sigma = 20\%$$
$$T = 19\ semanas = 0.3654$$

$$\begin{gathered} Opción\ 1 \\ Opción\ Call \\ S = 48.12 \\ K = 52 \\ r = 5\% \\ \sigma = 20\% \\ T = 9\ semanas = 0.1731 \end{gathered}$$

$$\begin{aligned} & Opción\ 2 \\ & Opción\ Put \\ & S = 48.12 \\ & K = 45 \\ & r = 5\% \\ & \sigma = 20\% \\ & T = 29\ semanas = 0.5577 \end{aligned}$$

Recordemos que la posición está conformada por la compra de una opción original sobre el valor de 100,000 acciones, mientras que la cobertura se compone de la venta de una opción del tipo 1 sobre el valor de 40,500 acciones, una opción del tipo 2 sobre el valor de 86,037 acciones y la venta de 57,841 acciones.

Con la información de mercado, el valor de las Griegas de nuestra posición es el siguiente:

$$\begin{gathered} \Delta = 45{,}801.41 \\ \Gamma = 6{,}819.56 \\ \mathrm{V} = 1{,}154{,}000.21 \end{gathered}$$

El valor de las Griegas de la cobertura es el siguiente:

$$\begin{gathered} \Delta_{cob} = -45{,}778.02 \\ \Gamma_{cob} = -6{,}673.34 \\ \mathrm{V}_{\mathrm{cob}} = -1{,}195{,}965.92 \end{gathered}$$

Podemos observar que el portafolios no cubre completamente los riesgos que nuestra posición genera, por lo que es necesario ajustarlo. Siguiendo el método que se realizó para construir la cobertura original, podemos determinar que el portafolios que cubriría completamente dichos riesgos está compuesto de la siguiente manera:

- Venta de una opción sobre el precio de 46,620 acciones con las características de la opción 1.
- Venta de una opción sobre el precio de 79,049 acciones con las características de la opción 2.
- Venta de 54,615 unidades de subyacente.

Como el portafolios de cobertura ya considera algunas posiciones, analizaremos cuáles son los movimientos que efectivamente se tendrán que realizar para ajustarlo:

- La cobertura ya considera la venta de una opción con las características de la opción 1 sobre el valor de 40,500 acciones, por lo que únicamente será necesaria la venta de una opción con las mismas características sobre el valor de 6,120 acciones.
- La cobertura también considera la venta de una opción con las características de la opción 2 sobre el valor de 86,037 acciones, por lo que únicamente se necesita realizar una compra de una opción con las mismas características sobre el valor de 6,988 acciones.
- Para la cobertura se considera la venta de 57,581 acciones, por lo que se necesitará comprar 2,966 acciones adicionales.

Para calcular el costo del ajuste, debemos considerar que los movimientos del mercado generaron un cambio en el precio de las opciones que se utilizan en el portafolios de cobertura. Por Black & Scholes, los nuevos precios son los siguientes:

$$op_1 = \$0.47$$
$$op_2 = \$1.09$$

Por lo tanto, el precio del ajuste A sede termina de la siguiente manera:

$$A = 6{,}120(-op_1) + 6{,}988(op_2) + 2{,}966(S)$$

$$= 6{,}120(-\$0.47) + 6{,}988(\$1.09) + 2{,}966(\$48.12)$$

$$= \$147{,}450.07$$

En esta ocasión, el precio del ajuste resultó positivo, lo que indica que un gasto será necesario para ajustar el portafolios de cobertura.

Después de realizar este ajuste, la cobertura será efectiva únicamente durante un breve período de tiempo. Un nuevo reajuste será necesario con la información del mercado en el plazo establecido, una semana en este caso.

La segunda consideración, que será fundamental para el desarrollo de este trabajo, es que, para la construcción de el portafolios de cobertura, se tuvieron que redondear las cantidades necesarias de cada activo financiero que formaría parte de la cobertura. Esto es lógico, puesto que no podemos contratar una opción que ampare una cantidad fraccionaria de acciones, y las acciones las compramos completas, no podemos comprar pedazos de acciones.

El redondeo se realizó inmediatamente al obtener el resultado y, a primera vista, no afecta la construcción del portafolios de cobertura, sin embargo no podemos olvidar algo que es de mayor importancia: el objetivo del portafolios era neutralizar los riesgos perfectamente.

Volvamos a realizar el cálculo de las Griegas de la cobertura, esta vez considerando los redondeos realizados.

La Delta del portafolios está determinada de la siguiente manera:

$$\Delta_{cob} = -40{,}500\Delta_X - 86{,}037\Delta_Y - 57{,}581$$

$$= -40{,}500(0.300117464) - 86{,}037(-0.204280871) - 57{,}581$$

$$= -52{,}160.04$$

La Gamma del portafolios de cobertura se calcula como sigue:

$$\Gamma_{cob} = -40{,}500\Gamma_X - 86{,}037\Gamma_Y$$

$$= -40{,}500(0.080920146) - 86{,}037(0.038091322)$$

$$= -6{,}554.53$$

La Vega de la cobertura quedará determinada por:

$$\mathcal{V}_{cob} = -40{,}500\mathcal{V}_X - 86{,}037\mathcal{V}_Y$$

$$= -40{,}500(7.472365328) - 86{,}037(10.55233913)$$

$$= -1{,}210{,}524.40$$

Observemos que los riesgos no se neutralizan (no son cubiertos al 100%). En este caso, la Delta es cubierta en un 99.999771%, la Gamma es cubierta en un 99.999867% y la Vega queda cubierta en un 99.999845%.

Una alternativa sería redondear hacia arriba las cantidades de LA cobertura, pero esto generaría una “sobrecobertura”.

Consideremos que la cobertura inicial fuera la siguiente:

- Venta de una opción del tipo 1 sobre el valor de 40,501 acciones.
- Venta de una opción del tipo 2 sobre el valor de 86,038 acciones.
- Venta de 57,582 acciones.

En este caso, la Delta de la cobertura está determinada de la siguiente manera:

$$\Delta_{cob} = -40{,}501\Delta_X - 86{,}038\Delta_Y - 57{,}582$$

$$= -40{,}501(0.300117464) - 86{,}038(-0.204280871) - 57{,}582$$

$$= -52{,}161.14$$

La Gamma del portafolios de cobertura se calcula como sigue:

$$\Gamma_{cob} = -40{,}501\Gamma_X - 86{,}038\Gamma_Y$$

$$= -40{,}501(0.080920146) - 86{,}038(0.038091322)$$

$$= -6{,}554.65$$

La Vega de la cobertura quedará determinada por:

$$\mathrm{V}_{cob} = -40{,}501\mathrm{V}_X - 86{,}038\mathrm{V}_Y$$

$$= -40{,}501(7.472365328) - 86{,}038(10.55233913)$$

$$= -1{,}210{,}540.42$$

Notamos ahora que, a diferencia del caso anterior, se produce una "sobrecobertura". La Delta original se cubre en un 100.001872%, la Gamma queda cubierta en un 100.001682% y nuestra Vega se cubre en un 100.001334%.

Puede parecer insignificante, pero cambiará radicalmente el planteamiento que realizaremos del problema en los siguientes capítulos.

Podemos observar que la cobertura se construyó independientemente del precio que tuviera; el precio fue determinado posteriormente, ya conociendo las cantidades de instrumentos necesarios para mantener la cobertura y sus precios.

¿Se podría determinar el mismo portafolios de cobertura de forma inversa? ¿Podríamos conocer las cantidades de instrumentos que se necesitarían para ajustar una cobertura a partir del precio de ésta? En el próximo capítulo discutiremos una posibilidad de hacerlo. Explicaremos cómo calcular el precio que determinará el portafolios de cobertura y emplearemos métodos de programación lineal que permitirán encontrar la solución al problema que plantearemos.

Observación del capítulo

Es necesario hacer una importante aclaración antes de continuar.

En este ejemplo, como se indicó en la introducción, para construir la cobertura se utilizan opciones sobre la misma acción subyacente que la opción que forma parte de nuestra posición a cubrir pero con diferentes características (precio de ejercicio y plazo). Esto simplifica el ejemplo y no es difícil entender lo que sucedería en un caso real.

Construir la cobertura significa conformar un portafolios cuyas Griegas sean iguales en magnitud pero inversas a las Griegas de la posición a cubrir.

Suponer que es fácil encontrar participantes del mercado que busquen las posiciones inversas a las nuestras nos permite, al recalcular la cobertura después de algún movimiento en los niveles del mercado, simplemente ajustar la posición de las opciones y la cantidad de subyacente que conforman la cobertura inicial para mantener las Griegas neutrales.

Si esto no fuera posible (como en realidad sucede) tendríamos que cubrir las Griegas con posiciones que generen riesgos iguales. En el mercado, muchas veces es difícil encontrar participantes que busquen exactamente aquellas posiciones que los operadores encargados de construir una cobertura podrían ofrecer, por lo que constantemente las Griegas se quedan sin una cobertura total. En el caso del ejemplo, a pesar de existir cantidad suficiente, dejamos descubiertos algunos riesgos (ya sea por haber cubierto los riesgos en su totalidad, o por haber sobre cubierto los riegos originales).

Es por esto que las instituciones que realizan operaciones de derivados suelen establecer límites máximos permitidos de riesgo, es decir, una cantidad máxima permitida para el cambio en el valor de las posiciones para cada Griega. De esta manera, los operadores pueden mantener ciertos riesgos vivos al final del día.

En capítulos posteriores trataremos de construir una cobertura eficiente considerando que existe esta posibilidad de mantener riesgos vivos.

CAPÍTULO III. PLANTEAMIENTO DE LA CONSTRUCCIÓN DE LA COBERTURA COMO PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN

La formulación de problemas de optimización permite encontrar las “mejores” soluciones para situaciones determinadas en las que los recursos son limitados.

Cuando se busca la “mejor” solución entendemos que existe un conjunto de soluciones posibles para un problema. Estas soluciones son los valores que toman las variables que debemos determinar, llamadas *variables de decisión*. La manera de escoger la mejor de estas soluciones dependerá de un criterio que puede ser expresado como una función de las variables de decisión, a la que llamaremos *función objetivo*. Al cambiar la valuación de las variables de decisión, cambiará también el valor de la función objetivo, lo que permitirá comparar las soluciones.

Las variables de decisión deberán, al mismo tiempo, satisfacer diversas *restricciones* derivadas de las condiciones que deben cumplir las alternativas del problema las cuales son representadas por ecuaciones o desigualdades. Estas restricciones determinarán cuáles son las posibles soluciones del problema. El conjunto de soluciones que cumplen con las restricciones es llamado *región factible*.

Evidentemente, la mejor solución de un problema pertenecerá a la región factible. Dicha solución será llamada *solución óptima* o, simplemente *óptimo*.

La solución óptima será la mejor en el sentido que minimizará o maximizará (dependiendo del problema que se plantee) la función objetivo; en otras palabras, el óptimo es el punto en el que, cumpliendo con las restricciones, la función objetivo alcanza su mayor (o menor) valor.

De esta manera se dice que la función objetivo quedará *sujeta a* las restricciones (la frase "*sujeto a*" se abreviará, en un problema de optimización, como "*s.a*").

El problema de optimización, se puede expresar de la siguiente forma (forma canónica):

$$
\begin{aligned}
&Max\ z = cx \\
&s.a \\
&Ax \leq b \\
&x \geq 0
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}\ es\ el\ vector\ (renglón) de\ costos^{7} \\
&\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}\ es\ el\ vector\ (columna) de\ variables\ de\ decisión \\
&\boldsymbol{A}\ \in \boldsymbol{\mathcal{M}}_{\boldsymbol{mxn}}\ es\ la\ matriz\ de\ restricciones
\end{aligned}
$$

[7] El vector de costos no representa necesariamente un gasto, como su nombre podría aparentar. Cada componente de este vector pondera cuanto aporta su correspondiente variable de decisión al valor de la función objetivo, En otras palabras, el vector determina cuanto “cuesta” incrementar cada variable, de ahí su nombre.

$$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}} \; es\ el\ vector\ (columna) de\ recursos\ o\ términos\ independientes$$

Otra forma de expresar el problema de optimización corresponde a su forma estándar:

$$\begin{aligned}
&Max\ (o\ Min) z = cx \\
&s.a \\
&Ax = b \\
&x \geq 0 \\
&b \geq 0
\end{aligned}$$

En este capítulo se planteará la construcción de los portafolios de cobertura analizados en los capítulos anteriores como un problema de optimización.

Comenzaremos por determinar cuáles son las variables de decisión, a continuación determinaremos la función objetivo y definiremos si ésta debe maximizarse o minimizarse. Además estableceremos las restricciones del problema y las explicaremos para entender qué significan y por qué son necesarias.

Variables de decisión

Lo primero que debemos establecer son las variables de decisión. Para ello, pensemos en la necesidad que tenemos: construir un portafolios de cobertura. Sabemos que la cobertura estará conformada por dos opciones con características distintas y la compra o la venta de subyacente, pero debemos determinar en qué cantidades se comprarán o se venderán estos instrumentos.

Justamente esto representarán las variables de decisión; si supiéramos de antemano qué cantidades debemos comprar o vender para cubrir nuestras posiciones, entonces el problema estaría resuelto. Son precisamente estas variables las que desconocemos y las que deseamos determinar.

Necesitamos tres variables, una para cada opción y otra para la cantidad de subyacente. De esta manera definiremos las variables de decisión como sigue:

$$\begin{aligned}
&X\ es\ la\ cantidad\ de\ acciones\ que\ una\ de\ las\ opciones\ debe\ amparar. \\
&Y\ es\ la\ cantidad\ de\ acciones\ que\ la\ otra\ opción\ debe\ amparar. \\
&Z\ es\ la\ cantidad\ de\ acciones\ (subyacente)\ que\ se\ deben\ operar.
\end{aligned}$$

Función objetivo

Como se comentó al final del capítulo anterior, nos gustaría proponer una manera de construir los portafolios de cobertura a partir del precio de éstos. Es por esto que la función objetivo que proponemos para el problema de optimización es aquella que determina el precio de la cobertura.

Sean op1 y op2 el precio de un par de productos financieros disponibles en el mercado que puedan formar parte del portafolios de cobertura (específicamente opciones) y sea S el precio actual del activo subyacente. Entonces, el precio P del portafolios de cobertura se calculará de la siguiente manera:

$$P = Xop_1 + Yop_2 + ZS$$

donde

$$\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}\ y\ \boldsymbol{Z}\ son\ nuestras\ variables\ de\ decisión.$$

Observemos que X, Y y Z pueden ser positivas, negativas o nulas. Si fueran positivas, significaría que la opción o el subyacente debería comprarse. Si fueran negativas significaría que debería venderse. De esta manera, si la función objetivo tomara un valor negativo, representaría que la construcción de la cobertura generaría un ingreso en lugar de un costo.

Éste es el precio que se tendría que pagar por el portafolios de cobertura; ésta será la función objetivo. Como se comentó, las variables de decisión quedan definidas por las cantidades necesarias de instrumentos para cubrir nuestra posición (es decir, X, Y y Z) y el vector de costos será conformado justamente por los precios de cada uno de estos instrumentos.

Lo ideal para el comprador de la cobertura es que este precio sea lo más bajo posible, por lo que el problema propuesto deberá devolver los valores de X, Y y Z en donde la función objetivo alcance su menor valor.

Restricciones

Si no se define ninguna restricción, el precio puede ser tan bajo como se desee, pues se podrían vender tantas cantidades de productos o de subyacente como se quisiera, obteniendo cualquier ingreso. Evidentemente esto no cubriría los riegos, por el contrario, generaría riesgos no cubiertos, por lo que es necesario definir restricciones.

Estas restricciones estarán relacionadas, precisamente, con los riesgos que debemos cubrir con el portafolios. Lo que se requiere es que las griegas generadas por la cobertura sean iguales al inverso aditivo de las griegas de nuestra posición a cubrir. Esto garantiza que los riesgos son cubiertos.

Las restricciones para la Delta, la Gamma y la Vega se determinarán, entonces, de la siguiente manera[8]:

$$-\Delta_{\mathrm{cob}} = \Delta$$
$$-\Gamma_{\mathrm{cob}} = \Gamma$$
$$-\mathrm{V}_{cob} = \mathrm{V}$$

[8] Definir a todas las restricciones para el problema de optimización como ecuaciones generará un sistema que podría ser resuelto de manera sencilla. Evidentemente este primer planteamiento se utilizará como una introducción a la problemática posterior así como para entender de dónde surge precisamente la necesidad de realizar el cambio de las restricciones, como veremos más adelante.

donde

$$\boldsymbol{\Delta}, \boldsymbol{\Gamma}\ y\ \mathcal{V}\ son\ la\ Delta, la\ Gamma\ y\ la\ Vega\ de\ nuestra\ posición\ original.$$
$$\boldsymbol{\Delta cob}, \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{cob}\ \mathrm{y}\ \mathcal{V}\boldsymbol{cob}\ son\ la\ Delta, la\ Gamma\ y\ la\ Vega\ de\ nuestra\ cobertura.$$

Es fácil entender estas restricciones. El portafolios de cobertura genera riesgos, es decir, genera sus propias Griegas. Estas Griegas deben ser inversas a las generadas por la posición original con el fin de neutralizarlas; en otras palabras, se busca eliminar los riesgos de la posición original igualándolos a aquellos que genere el portafolios de cobertura. Al cambiar su signo se puede comparar su magnitud con la de los generados por la posición original.

Una vez teniendo definidas las restricciones, podemos observar que el valor de las Griegas de nuestra posición original es conocido; además, el valor de las Griegas de la cobertura está a su vez determinado por el de las Griegas de los instrumentos que forman parte de ella, el cual también conocemos, por lo que, manteniendo la nomenclatura utilizada en los capítulos anteriores, podemos expresar las restricciones de la siguiente manera:

$$-\Delta_{\mathrm{cob}} = \Delta$$
$$\Leftrightarrow -X\Delta_{\mathrm{X}} - Y\Delta_{\mathrm{Y}} - Z = \Delta$$

$$-\Gamma_{\mathrm{cob}} = \Gamma$$
$$\Leftrightarrow -X\Gamma_{\mathrm{X}} - Y\Gamma_{\mathrm{Y}} = \Gamma$$

$$-\mathcal{V}_{cob} = \mathcal{V}$$
$$\Leftrightarrow -X\mathcal{V}_{X} - Y\mathcal{V}_{Y} = \mathcal{V}$$

$$X, Y, Z \in \mathbb{R}$$

De esta forma, es claro que la matriz de restricciones estará conformada por los valores de las Griegas (Delta, Gamma y Vega) que generan los instrumentos que serán utilizados para construir la cobertura y que el vector de recursos estará compuesto por las griegas generadas por nuestra posición a cubrir.

Entonces, el problema propuesto es el siguiente:

$$\begin{aligned}
&Min\ P = Xop_1 + Yop_2 + ZS \\
&s.a \\
&-X\Delta_{\mathrm{X}} - Y\Delta_{\mathrm{Y}} - Z = \Delta \\
&-X\Gamma_{\mathrm{X}} - Y\Gamma_{\mathrm{Y}} = \Gamma \\
&-X\mathcal{V}_{X} - Y\mathcal{V}_{Y} = \mathcal{V} \\
&X, Y, Z \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Retomemos el caso que se presentó en el capítulo anterior para ejemplificar esta parte del trabajo.

Sustituyendo los precios y las Griegas por sus valores obtenidos en el ejemplo, se tiene que el problema a resolver es el siguiente:

$$
\begin{aligned}
&Min\ P = 0.78X + 0.92Y + 49Z \\
&s.a \\
&-0.080920146X - 0.038091322Y = 6{,}554.54 \\
&-7.472365328X - 10.55233913Y = 1{,}210{,}524.28 \\
&-0.300117464X + 0.204280871Y - Z = 52{,}160.16 \\
&X, Y, Z \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Representación gráfica del problema de optimización

La representación gráfica de un problema de optimización ayuda a visualizar su elementos; permite entender la función de las restricciones y cómo éstas determinan la región factible así como analizar el comportamiento de la función objetivo. A partir de la representación gráfica de los problemas es posible, incluso, determinar la solución sin necesidad de mayor análisis. Para problemas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ es de enorme ayuda.

Para comenzar, analizaremos cómo se comporta la función objetivo.

Recordemos que esta función está definida por el precio del portafolios de cobertura de la siguiente manera:

$$P = Xop_1 + Yop_2 + ZS$$

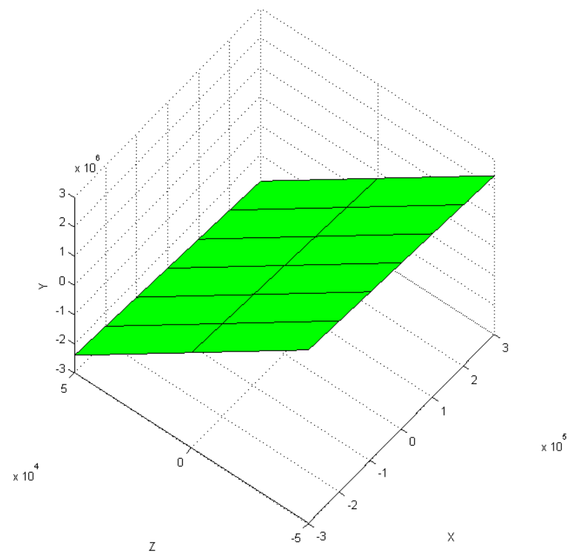
Notemos que el precio puede tomar diferentes valores. Para iniciar el análisis, observemos que, al igualar el precio a cero, se genera un plano en el espacio, determinado por todos los puntos $(X,Y,Z)^t$ que hacen que la cobertura valga cero. El plano es el siguiente:

$$0 = Xop_1 + Yop_2 + ZS$$

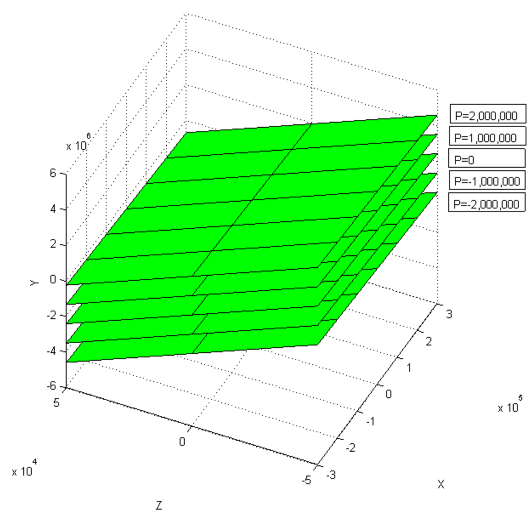
En el caso del ejemplo, al conocer los valores de las opciones y el precio del activo subyacente, el plano antes descrito es el que a continuación se expresa:

$$0 = 0.78X + 0.92Y + 49Z$$

Y queda representado de la siguiente manera:



Notemos que, para diferentes valores de P (el precio de la cobertura) se generan planos paralelos.



De esta manera podemos determinar que la función objetivo aumenta hacia "arriba" utilizando esta configuración de ejes.

Otra manera de determinar la dirección del aumento de la función objetivo es calculando su gradiente,

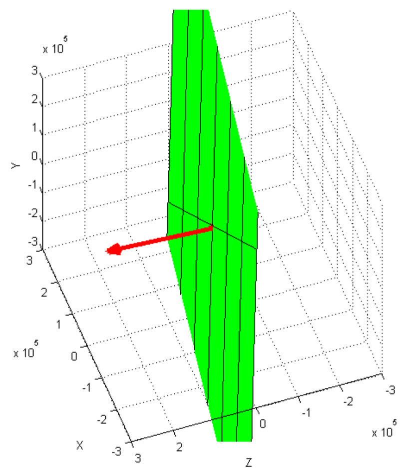
$$Sea\ f(X,Y,Z) = Xop_1 + Yop_2 + ZS$$

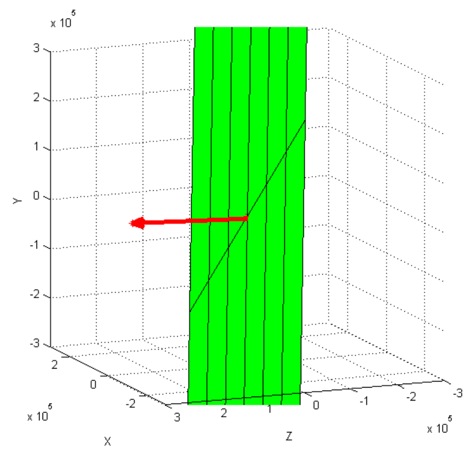
$$entonces\ \Delta f = (op_1, op_2, S)$$

En el ejercicio práctico que hemos trabajado

$$\Delta f = (0.78,0.92,49)$$

Esta triada representa la dirección de crecimiento de la función objetivo. Basta con representarla gráficamente para notarlo. A continuación graficaremos al vector que representa al gradiente para observar claramente esta dirección.





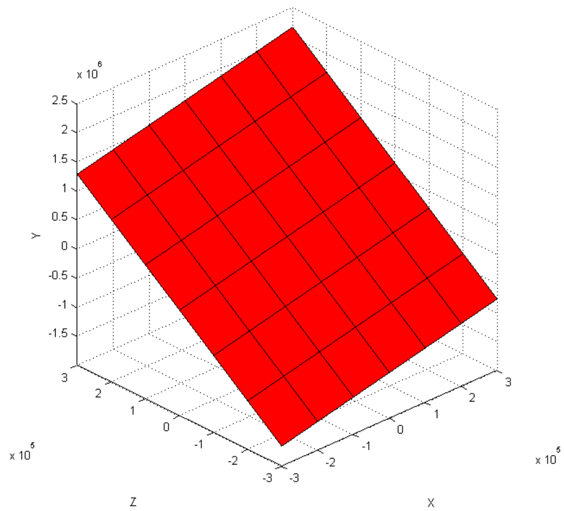
Continuando con el análisis gráfico, notemos que cada una de las restricciones genera un subespacio.

Analicemos de esta manera cada una de las restricciones del problema.

Para la primera restricción (aquella asociada con la Delta) tenemos, entonces, la siguiente ecuación:

$$52{,}160.16 = -0.300117464X + 0.204280871Y - Z$$

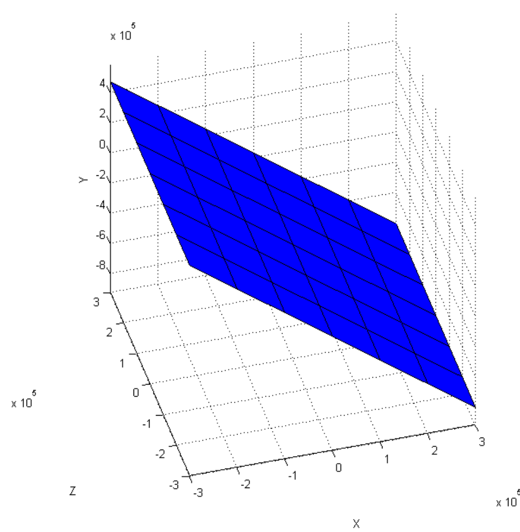
Los puntos que cumplen con la ecuación generan un plano en $\mathbb{R}^3$. Es posible graficar dicho plano, obteniendo el siguiente resultado:



De igual manera, de la segunda restricción (aquella asociada con la Gamma) se deriva la siguiente ecuación:

$$6{,}554.54 = -0.080920146X - 0.038091322Y$$

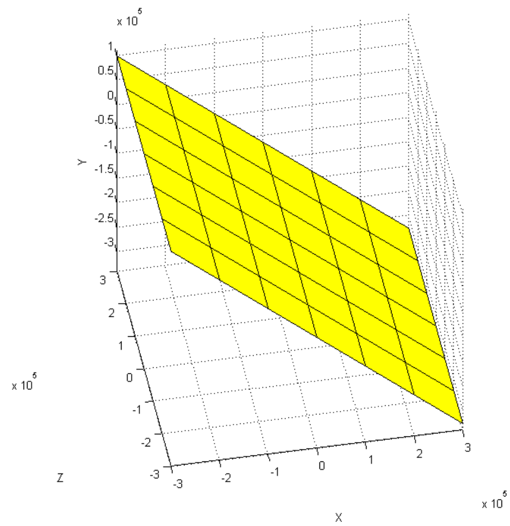
El plano generado por los puntos que cumplen con la ecuación es el siguiente:



La tercera y última restricción (aquella asociada a la Vega) genera, análogamente, el plano determinado por la ecuación

$$1{,}210{,}524.28 = -7.47365328X - 10.55233913Y$$

Dicho plano se presenta a continuación



Considerando la intersección de los tres subespacios anteriores, obtendremos la región factible del problema de optimización.

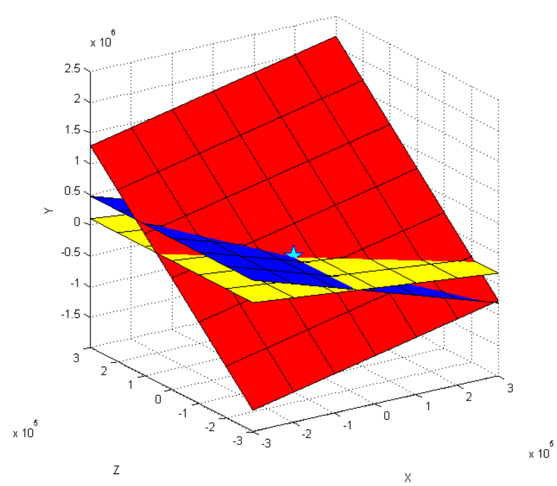
Podemos concluir que sólo existe un punto que cumple con las tres restricciones simultáneamente

$$52{,}160.16 = -0.300117464X + 0.204280871Y - Z$$

$$6{,}554.54 = -0.080920146X - 0.038091322Y$$

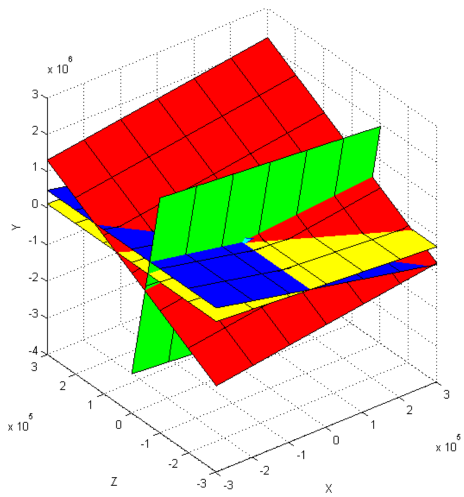
$$1{,}210{,}524.28 = -7.47365328X - 10.55233913Y$$

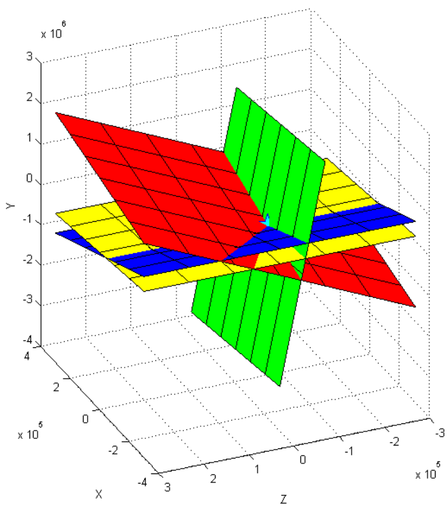
En la siguiente gráfica, dicho punto está representado por una estrella color azul turquesa al centro del gráfico.



En este caso, la región factible está determinada por un único punto. De esta manera podemos afirmar que éste punto es el óptimo.

A continuación añadiremos a la gráfica el plano correspondiente al valor óptimo de la función objetivo dentro de la región factible





Después de reunir todos los conceptos explicados en este capítulo y analizando la representación gráfica del problema de optimización, la solución es natural.

Ésta es exactamente la misma que se obtuvo analíticamente en el capítulo anterior.

El valor que toma la función objetivo al evaluarla en el óptimo será entonces el precio que debemos pagar por la cobertura.

En conclusión, para el ejemplo, el problema de optimización que planteamos para determinar el portafolios que cubra los riesgos generados por nuestra posición es el siguiente:

$$\begin{aligned}
&Min\ P = 0.78X + 0.92Y + 49Z \\
&s.a. \\
&52{,}160.16 = -0.300117464X + 0.204280871Y - Z \\
&6{,}554.54 = -0.080920146X - 0.038091322Y \\
&1{,}210{,}524.28 = -7.47365328X - 10.55233913Y \\
&X, Y, Z \ \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Y la solución óptima es la siguiente:

$$\begin{aligned}
X &= -40{,}500.036544 \\
Y &= -86{,}037.152044 \\
Z &= 57{,}581.139499
\end{aligned}$$

Es necesario hacer una aclaración de suma importancia antes de continuar.

Notemos que la solución del problema es un vector de componentes reales. Realmente no podemos comprar 57,581.139499 acciones, ni pactar una opción de venta de 40,500.036544 acciones. Podemos proceder a redondear las cifras (como hicimos en el capítulo anterior) pero esto generará un problema fuerte con nuestro planteamiento.

Al momento de redondear, es fácil observar que la solución se vuelve no factible, puesto que ésta no cumple con ninguna de las restricciones. Como pudimos observar en la representación gráfica, la solución es única y no es entera, por lo que, si consideramos únicamente valores enteros, entonces el problema no tiene solución. De igual manera, redondear para arriba o para abajo alguna cantidad genera una diferencia en el precio, que es precisamente lo que queremos optimizar, por lo que esto no se debería realizar arbitrariamente.

Además, el hecho de que el problema determine una región factible determinada por un único punto hace que el planteamiento sea innecesario.

A continuación, entonces, complementaremos el problema y añadiremos algunas consideraciones para ampliar el trabajo.

Complemento del problema de optimización

Al final del capítulo anterior, observamos que los riesgos no se cubren por completo o que podrían quedar "sobrecubiertos".

La propuesta será establecer un valor máximo permitido de exposición, es decir, plantear la posibilidad de permitir que algunos riesgos queden descubiertos. De esta manera formularemos un nuevo modelo de programación entera que se adapta mejor a una situación real[9]. Esta exposición quedara determinada, para fines de este trabajo, como una proporción del riesgo original, es decir, permitiremos que la cobertura exceda las necesidades o no las alcance por una cantidad igual a un pequeño porcentaje de lo necesario.

Replanteemos las restricciones del problema. Recordemos que las originales eran las siguientes:

$$-\Delta_{\mathrm{cob}} = \Delta$$
$$-\Gamma_{\mathrm{cob}} = \Gamma$$
$$-\mathrm{V}_{cob} = \mathrm{V}$$

Ahora, propondremos las siguientes restricciones:

[9] En una situación real, a un operador de derivados se le permite mantener posiciones abiertas, es decir, riesgos sin cubrir. Esto se debe, en primer lugar, a la necesidad del operador de mantener dichos riesgos con la finalidad de generar una ganancia como resultado del impacto de los movimientos del mercado en el valor de las posiciones que el mismo operador mantiene dada su lectura del panorama financiero. En segundo lugar, a la imposibilidad de mantener un portafolios totalmente neutral ante la falta de liquidez en el mercado, en otras palabras, debido a la falta de oferta de las posiciones que neutralizarían a la perfección los riesgos de un portafolios.

$$-\Delta_{\text{cob}} \leq (1+\alpha)\Delta$$
$$-\Delta_{\text{cob}} \geq (1-\alpha)\Delta$$
$$-\Gamma_{\text{cob}} \leq (1+\alpha)\Gamma$$
$$-\Gamma_{\text{cob}} \geq (1-\alpha)\Gamma$$
$$-\mathcal{V}_{cob} \leq (1+\alpha)\mathcal{V}$$
$$-\mathcal{V}_{cob} \geq (1-\alpha)\mathcal{V}$$

$$\boldsymbol{\alpha}\ es\ la\ proporción\ del\ riesgo\ original\ que\ se\ permite\ mantener\ descubierto.$$

Lo primero que debemos notar es que el número de restricciones se duplica. Esto se debe a que para cada una de las Griegas, consideramos el caso en el que las Griegas generadas por el portafolios de cobertura excedan a las Griegas de nuestra posición original, así como el caso en el que la cobertura no alcance a cubrir por completo los riesgos originalmente generados. Notemos que tanto el exceso de cobertura como la falta de la misma tendrán como resultado el mantener riesgos vivos. Estos no podrán ser mayores que una proporción α de los riesgos generados por la posición original.

Surge, entonces, la necesidad de explicar la utilidad de mantener una posición descubierta o cubierta en exceso.

La primera ventaja, considerando el objetivo del trabajo, es la posible reducción del costo de la cobertura. Al permitir mantener abiertas cantidades determinadas de riesgo, el rango de posibilidades de cobertura aumentará, haciendo posible la comparación entre cada una de ellas y escogiendo la que implique un costo menor. En términos del problema de optimización, se genera una región factible distinta a un único punto, lo que le da mayor sentido al planteamiento y permite, efectivamente, encontrar la solución óptima del problema.

Es importante mencionar que el hecho de encontrar la cobertura de menor costo no necesariamente implica un ahorro; como ya hemos mencionado, reducir el costo implicará que mantengamos descubiertas algunas posiciones. En ese caso, el mercado podría afectar los valores de nuestras posiciones y generar pérdidas mayores que el relativo ahorro de encontrar una cobertura menos costosa. Esto nos dirige a un segundo punto sobre la utilidad de no buscar una cobertura perfecta.

El análisis de la construcción de una cobertura implementando este modelo, debe estar siempre acompañado de la lectura de mercado que cada operador mantenga, así como de los riesgos previos a los que su portafolios de operación esté expuesto. Combinando estos factores con la posibilidad de mantener riesgos vivos al construir una cobertura, será posible, además de mejorar el precio de ésta, dar soporte al panorama financiero del operador, sesgando el riesgo total de su posición a su favor.

Consideremos el mismo ejemplo con el que se ha trabajado. En este caso, el problema a resolver sería el siguiente:

$$Min\ P = 0.78X + 0.92Y + 49Z$$

$$
\begin{aligned}
&s.a.\\
&-0.300117464X + 0.204280871Y - Z \leq (1 + 0.05)52{,}160.16\\
&-0.300117464X + 0.204280871Y - Z \geq (1 - 0.05)52{,}160.16\\
&-0.080920146X - 0.038091322Y \leq (1 + 0.05)6{,}554.54\\
&-0.080920146X - 0.038091322Y \geq (1 - 0.05)6{,}554.54\\
&-7.47365328X - 10.55233913Y \leq (1 + 0.05)1{,}210{,}524.28\\
&-7.47365328X - 10.55233913Y \geq (1 - 0.05)1{,}210{,}524.28\\
&X, Y, Z \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

En este nuevo planteamiento restringimos a las variables de decisión a tomar valores enteros únicamente.

Desarrollando las operaciones del nuevo problema, éste queda definitivamente expresado de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
&Min\ P = 0.78X + 0.92Y + 49Z\\
&s.a.\\
&-0.300117464X + 0.204280871Y - Z \leq 54{,}768.17\\
&-0.300117464X + 0.204280871Y - Z \geq 49{,}552.16\\
&-0.080920146X - 0.038091322Y \leq 6{,}882.26\\
&-0.080920146X - 0.038091322Y \geq 6{,}226.81\\
&-7.47365328X - 10.55233913Y \leq 1{,}271{,}050.49\\
&-7.47365328X - 10.55233913Y \geq 1{,}149{,}998.06\\
&X, Y, Z \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

Es importante notar que, como pudimos observar en el ejemplo anterior, un simple redondeo hacia arriba o hacia abajo a partir de la solución real que se obtiene cuando las restricciones son ecuaciones, genera una mínima desviación de los riesgos. Esta diferencia era menor que el 0.002%. Podemos pensar que asignar a α un valor de 5% sea exagerado, sin embargo, la incorporación de α permite ajustar este valor tanto como queramos y analizar los resultados, realizando así un análisis de sensibilidad.

Consideremos α=0.002%, entonces el problema a resolver será

$$
\begin{aligned}
&Min\ P = 0.78X + 0.92Y + 49Z\\
&s.a.\\
&-0.300117464X + 0.204280871Y - Z \leq 52{,}161.21\\
&-0.300117464X + 0.204280871Y - Z \geq 52{,}159.12\\
&-0.080920146X - 0.038091322Y \leq 6{,}554.67\\
&-0.080920146X - 0.038091322Y \geq 6{,}554.41\\
&-7.47365328X - 10.55233913Y \leq 1{,}210{,}548.49\\
&-7.47365328X - 10.55233913Y \geq 1{,}210{,}500.06\\
&X, Y, Z \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

Notemos que el rango de valores permitido para las Griegas que generará la cobertura, se reduce drásticamente. Esto provocará que la solución sea más parecida a la solución obtenida con el primer planteamiento.

En el siguiente capítulo se utilizará LINGO, software para la solución de problemas de optimización, para encontrar las soluciones del nuevo planteamiento y analizaremos sus resultados.

LINGO únicamente puede otorgar a las variables de decisión valores enteros positivos, por lo que para utilizar LINGO, será necesario plantear el problema de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
&Min\ P = 0.78(X' - X'') + 0.92(Y' - Y'') + 49(Z' - Z'') \\
&s.a. \\
&-0.300117464(X' - X'') + 0.204280871(Y' - Y'') - (Z' - Z'') \leq 52{,}161.21 \\
&-0.300117464(X' - X'') + 0.204280871(Y' - Y'') - (Z' - Z'') \geq 52{,}159.12 \\
&-0.080920146(X' - X'') - 0.038091322(Y' - Y'') \leq 6{,}554.67 \\
&-0.080920146(X' - X'') - 0.038091322(Y' - Y'') \geq 6{,}554.41 \\
&-7.47365328(X' - X'') - 10.55233913(Y' - Y'') \leq 1{,}210{,}548.49 \\
&-7.47365328(X' - X'') - 10.55233913(Y' - Y'') \geq 1{,}210{,}500.06 \\
&X', X'', Y', Y'', Z', Z'' \in \mathbb{Z}^+
\end{aligned}
$$

Nótese que entonces

$$
\begin{aligned}
X &= X' - X'' \\
Y &= Y' - Y'' \\
Z &= Z' - Z''
\end{aligned}
$$

Con esto se duplica la cantidad de variables de decisión pero se garantiza que cada una será positiva. De esta manera el software será capaz de encontrar la solución buscada.

CAPÍTULO IV. PROGRAMACIÓN Y SOLUCIÓN DEL PROBLEMA

Como mencionamos en el capítulo anterior, utilizaremos LINGO para obtener la solución del problema.

Lenguaje LINGO

La programación de modelos en LINGO es muy sencilla. Se comienza por declarar la función objetivo con el comando *MIN* o *MAX*, dependiendo de la necesidad de minimizar o maximizarla.

No hay necesidad de declarar las variables de decisión con anterioridad, al momento de declarar las restricciones el programa identifica como variable cualquier cadena de caracteres distinta a los operadores matemáticos.

De esta manera, las restricciones se declaran escribiéndolas tal cual las hemos escrito en este trabajo, con la diferencia de que al final de cada renglón debemos escribir un punto y coma para que LINGO entienda en dónde termina cada declaración.

Para finalizar se debe determinar el dominio de las variables de decisión. LINGO cuenta con algunas funciones especiales para hacerlo.

Después de programar[10] el problema se procede a resolverlo oprimiendo el botón que contiene la figura de una diana. El proyecto se puede guardar y examinar.

Lo primero que haremos será encontrar la solución para el problema original. Recordemos que en el planteamiento original se busca construir un portafolios de cobertura que neutralice por completo las Griegas[11].

Esta solución se encontrará cuando las restricciones sean ecuaciones. El problema de optimización es el siguiente:

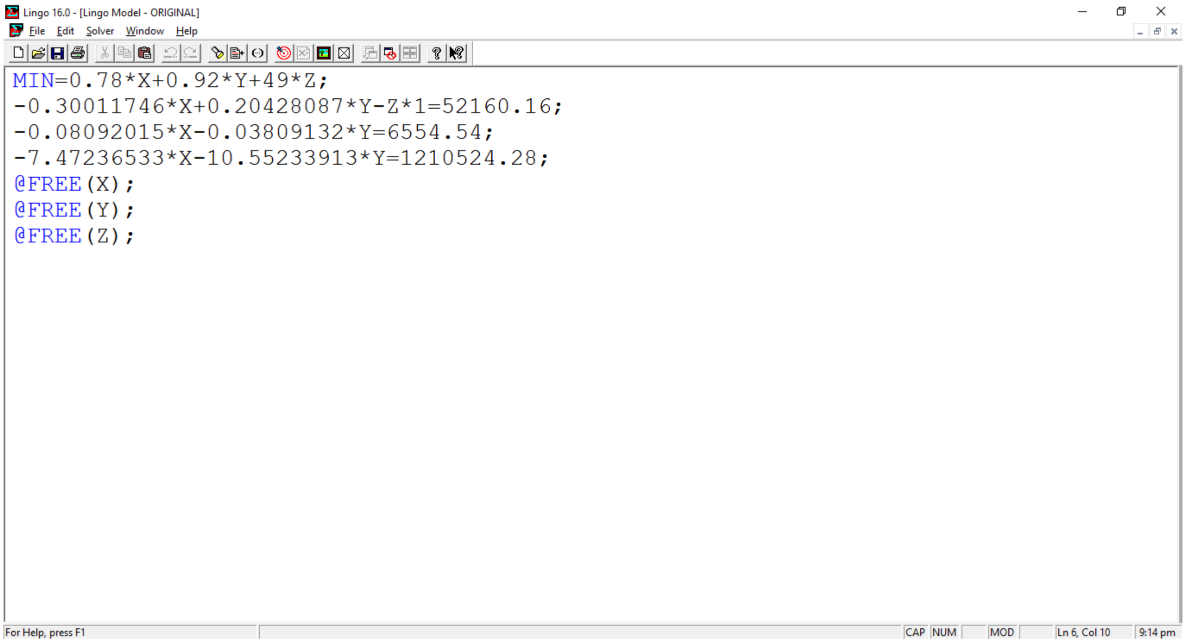
$$\begin{aligned}
&Min\ P = 0.78X + 0.92Y + 49Z \\
&s.a. \\
&-0.300117464X + 0.204280871Y - Z = 52{,}160.16 \\
&-0.080920146X - 0.038091322Y = 6{,}554.54 \\
&-7.472365328X - 10.55233913Y = 1{,}210{,}524.28 \\
&X, Y, Z \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Para resolverlo, debemos programarlo en LINGO.

Se abre un nuevo proyecto y se escribe el siguiente código:

[10] Cuando se utiliza la palabra “programar” nos referimos a la escritura del problema en el lenguaje en el que LINGO sea capaz de resolverlo. En ningún momento se desarrolla un código que resuelva el problema, simplemente se traduce para poder utilizar el software.

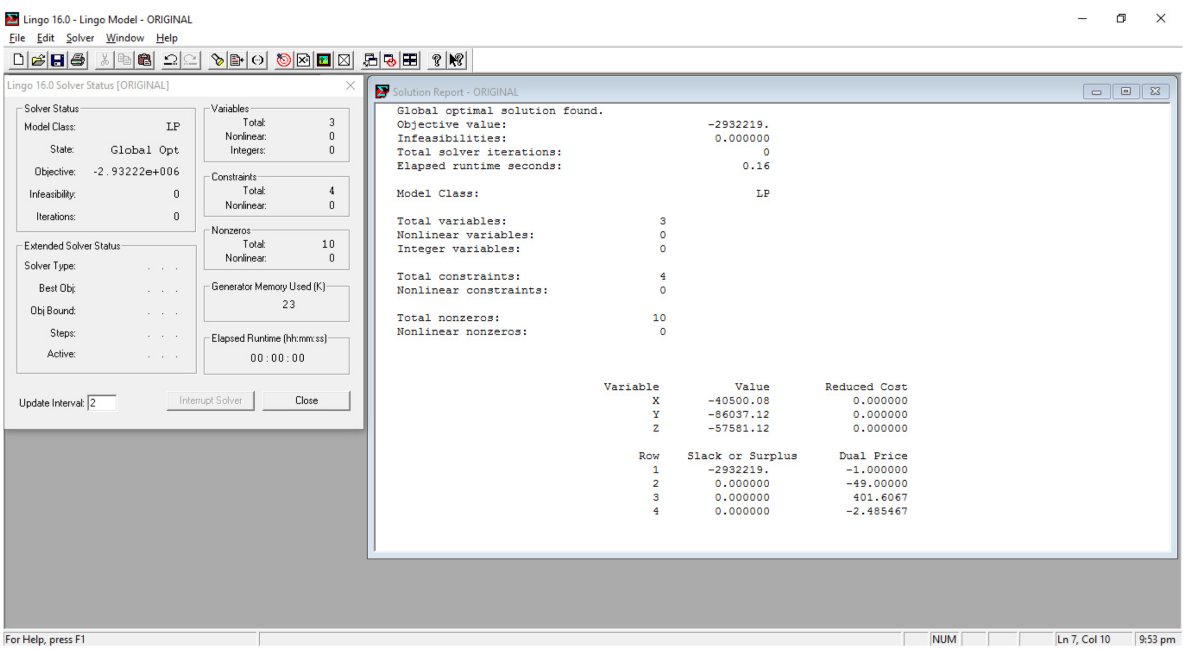
[11] Resultó evidente en los capítulos previos lo innecesario de resolver este problema de esta manera, no obstante, el planteamiento inicial fue de suma utilidad para entender el problema. En esta ocasión se utiliza para ilustrar la implementación de LINGO para encontrar la solución de los problemas de optimización.



Esta es la manera en la que LINGO reconoce el problema de optimización. La función *@FREE*, que indica que las variables de decisión podrán tomar cualquier valor real.

Interpretación de resultados

Una vez programado, procedemos a correr el programa para obtener la siguiente solución:



Analicemos la solución obtenida.

La ventana gris pequeña de lado izquierdo presenta un resumen del status del programa. Indica el tipo de problema que se resolvió (o que se está resolviendo), la clasificación de la solución actual, el valor actual de la función objetivo, la cantidad y tipo de las variables de decisión y de las restricciones así como el tiempo transcurrido para encontrar la solución.

La ventana del reporte de solución (la de lado derecho) es la que nos interesa. En ella, además de un resumen parecido, se presenta el valor de las variables de decisión.

Podemos observar en la parte inferior las columnas *Variable* y *Value*. En resumen, los valores que se obtuvieron como solución para este problema fueron:

$$X = -40{,}500.08$$
$$Y = -86{,}037.12$$
$$Z = -57{,}581.12$$

Además, el valor del portafolios de cobertura es el siguiente:

$$P = -2{,}932{,}219$$

Esta solución es congruente con la solución que obtuvimos de forma analítica en los capítulos pasados. La diferencia en los decimales de las cantidades a comprar, así como la diferencia en el precio, se debe a que para programar en LINGO tuvimos que truncar el valor de las griegas, sin embargo, al haber truncado utilizando 8 decimales, las soluciones son sumamente parecidas. En resumen, la solución, si redondeamos las cifras, es exactamente la misma que se obtuvo de forma analítica y gráfica.

Ahora, incluiremos la posibilidad de mantener riesgos vivos al construir la cobertura. En este caso, debemos determinar límites para los riesgos que permitiremos. Para el siguiente ejemplo permitiremos que el 5% del riesgo generado por nuestra posición original permanezca vivo.

Definiremos nuevas restricciones para el problema de la siguiente manera:

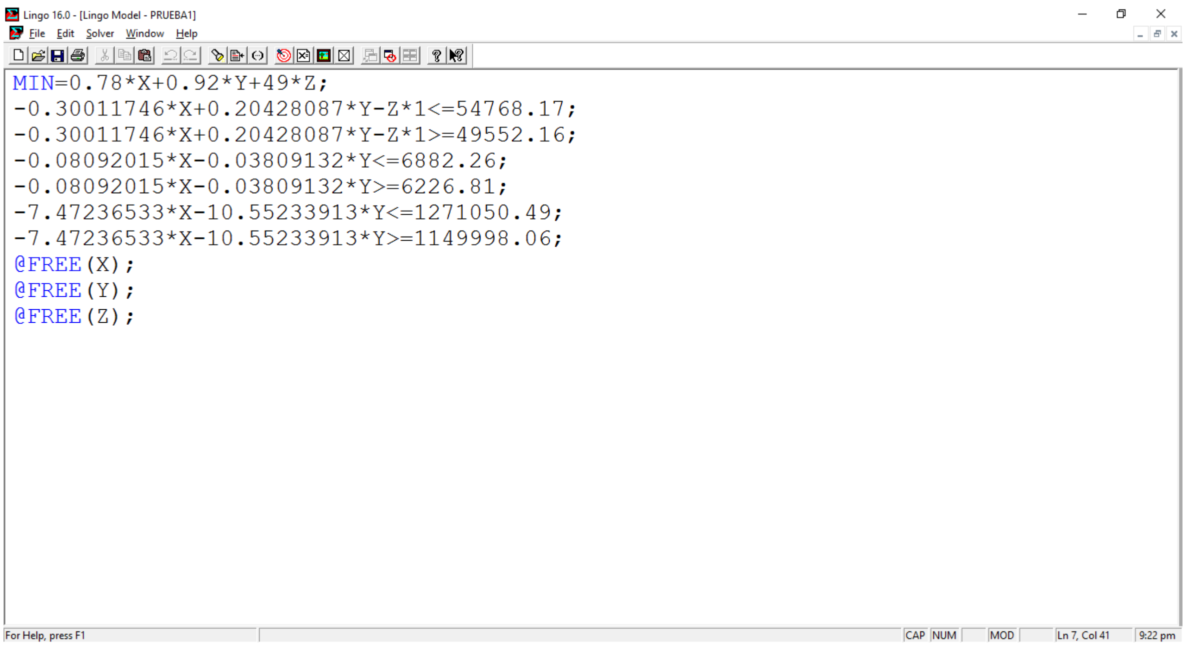
$$\begin{aligned}
&Min\ P = 0.78X + 0.92Y + 49Z \\
&s.a. \\
&-0.300117464X + 0.204280871Y - Z \leq (1 + 0.05)52{,}160.16 \\
&-0.300117464X + 0.204280871Y - Z \geq (1 - 0.05)52{,}160.16 \\
&-0.080920146X - 0.038091322Y \leq (1 + 0.05)6{,}554.54 \\
&-0.080920146X - 0.038091322Y \geq (1 - 0.05)6{,}554.54 \\
&-7.47365328X - 10.55233913Y \leq (1 + 0.05)1{,}210{,}524.28 \\
&-7.47365328X - 10.55233913Y \geq (1 - 0.05)1{,}210{,}524.28 \\
&X, Y, Z \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Desarrollando las operaciones, obtenemos el problema a programar:

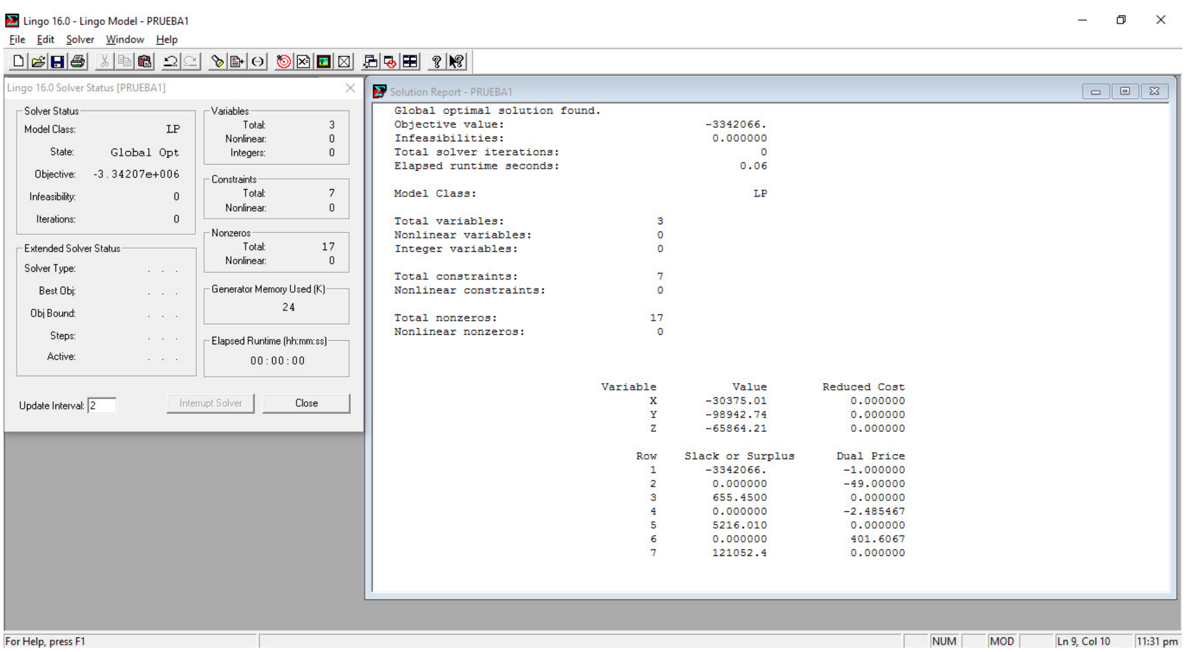
$$\begin{aligned}
&Min\ P = 0.78X + 0.92Y + 49Z \\
&s.a. \\
&-0.300117464X + 0.204280871Y - Z \leq 54{,}768.17 \\
&-0.300117464X + 0.204280871Y - Z \geq 49{,}552.16
\end{aligned}$$

$$-0.080920146X - 0.038091322Y \leq 6{,}882.26$$
$$-0.080920146X - 0.038091322Y \geq 6{,}226.81$$
$$-7.47365328X - 10.55233913Y \leq 1{,}271{,}050.49$$
$$-7.47365328X - 10.55233913Y \geq 1{,}149{,}998.06$$
$$X, Y, Z \ \in \mathbb{R}$$

Para resolver este problema, el código en LINGO es el siguiente:



La solución que obtenemos es la siguiente:



Podemos observar del reporte que la solución obtenida es:

$$X = -30{,}375.01$$
$$Y = -98{,}942.74$$
$$Z = -65{,}864.21$$

En este caso, la estrategia de cobertura sería la siguiente:

- Venta de una opción sobre el precio de 30,375.01 acciones con las características de la opción 1.
- Venta de una opción sobre el precio de 98,942.74, acciones con las características de la opción 2.
- Venta de 65,864.21 unidades de subyacente.

Valuaremos a continuación las Griegas de la cobertura si decidiéramos construirla de esta manera. Para ello recordemos que debemos calcular las Griegas de cada una de las posiciones que conformaran la cobertura y sumarlas.

La Delta del portafolios está determinada de la siguiente manera:

$$\Delta_{cob} = -30{,}375.01\Delta_X - 98{,}942.74\Delta_Y - 65{,}864.21$$

$$= -30{,}375.01(0.300117464) - 98{,}942.74(-0.204280871) - 65{,}864.21$$

$$= -54{,}768.17$$

La Gamma del portafolios de cobertura se calcula como sigue:

$$\Gamma_{cob} = -30{,}375.01\Gamma_X - 98{,}942.74\Gamma_Y$$

$$= -30{,}375.01(0.080920146) - 98{,}942.74(0.038091322)$$

$$= -6{,}226.81$$

La Vega de la cobertura quedará determinada por:

$$\mathrm{V}_{cob} = -30{,}375.01\mathrm{V}_X - 98{,}942.74\mathrm{V}_Y$$

$$= -30{,}375.01(7.472365328) - 98{,}942.74(10.55233913)$$

$$= -1{,}271{,}050.52$$

En resumen:

$$\Delta_{cob} = -54{,}768.17$$

$$\Gamma_{cob} = -6{,}226.81$$

$$\mathrm{V}_{cob} = -1{,}271{,}050.52$$

A continuación observaremos qué proporción de los riesgos quedan descubiertos o cubiertos en exceso. Para esto, debemos recordar las Griegas de la posición original y compararlas con las de la cobertura recién construida. Éstas son las siguientes:

$$\Delta = 52{,}160.16$$
$$\Gamma = 6{,}554.54$$
$$\mathcal{V} = 1{,}210{,}524.28$$

Ahora obtengamos las proporciones mencionadas. Para ello obtenemos la diferencia entre las Griegas originales y las que genera la cobertura para obtener el riesgo que queda descubierto o cubierto en exceso y dividimos dicho resultado entre las originales para obtener la proporción deseada.

$$\%\Delta_R = \frac{\Delta - \Delta_{cob}}{\Delta} = \frac{52{,}160.16 - 54{,}768.17}{52{,}160.16} = -5\%$$

$$\%\Gamma_R = \frac{\Gamma - \Gamma_{cob}}{\Gamma} = \frac{6{,}554.54 - 6{,}226.81}{6554.54} = 5\%$$

$$\%\mathcal{V}_R = \frac{\mathcal{V} - \mathcal{V}_{cob}}{\mathcal{V}} = \frac{1{,}210{,}524.28 - 1{,}271{,}050.52}{1{,}210{,}524.28} = -5\%$$

donde

$$\%\boldsymbol{\Delta_R}\ es\ la\ proporción\ de\ Delta\ restante. Positiva\ si\ quedó\ descubierta\ y\ negativa\ si\ se\ cubrió\ en\ exceso.\ \ Las\ definiciones\ de\ \%\boldsymbol{\Gamma_R}\ \ y\ \%\mathcal{V}_{\boldsymbol{R}}\ son\ análogas.$$

Observamos que estas proporciones muestran que los valores de las variables de decisión cumplen con las restricciones y, como resultado, únicamente estamos dejando viva una proporción pequeña del riesgo original. Ahora es necesario valuar el precio de esta cobertura.

$$P = -30{,}375.01op_1 - 98{,}942.74op_2 - 65{,}864.21S_0$$

$$= -30{,}375.01(\$0.78) - 98{,}942.74(\$0.92) - 65{,}864.21(\$49)$$

$$= -\$3{,}342{,}066$$

Este precio resulta mejor que si quisiéramos cubrir los riesgos completamente. Esto es lógico; el hecho de permitir quedarnos con algunos permite “jugar” con la cobertura de tal manera que el precio mejore. Como el problema de optimización busca justamente mejorar este costo, entonces se encuentra una solución que, aprovechando la flexibilidad de las restricciones, lo optimice.

Es necesario destacar que esta cobertura sería la ideal para un operador que busque reducir su exposición en delta y en vega y, al mismo tiempo aumentar su gamma.

Para cada necesidad de gestión por parte de un operador, se pueden realizar ejercicios para analizar cómo cambia el precio de la cobertura manipulando las restricciones, por ejemplo únicamente permitiendo que los riesgos de la posición original queden descubiertos hasta cierto límite pero que la cobertura nunca genere riesgos adicionales; por el contrario, también podemos imaginar el ejercicio en el que se pide que la cobertura siempre cubra al menos el total de los riesgos, dejando la posibilidad de excederse en una pequeña proporción; estos casos se analizarán más adelante.

Problemas generados por redondeo de cifras

Antes continuaremos con un punto importante del análisis: el redondeo.

Considerando el último ejemplo, redondeemos las cifras al entero más próximo. De esta manera obtendríamos los siguientes valores para las variables de decisión:

$$X = -30{,}375$$
$$Y = -98{,}943$$
$$Z = -65{,}864$$

Estos valores son muy parecidos a los que se encontraron resolviendo el problema de optimización, pero no hay que olvidar que es posible que no cumplan con las restricciones, aunque sea por muy poco, lo cual indica que esta solución puede ser no factible. Un operador podría estar incurriendo en un exceso en límites.

De cualquier manera realicemos el cálculo del precio de la cobertura con estas cifras; debe ser muy parecido al precio obtenido anteriormente.

$$P = -30{,}375op_1 - 98{,}943op_2 - 65{,}864S_0$$

$$= -30{,}375(\$0.78) - 98{,}943(\$0.92) - 65{,}864(\$49)$$

$$= -\$3{,}342{,}120.82$$

El precio es distinto únicamente por unos cuantos pesos.

Si resolviéramos el problema restringiendo el dominio de las variables de decisión a los números enteros, ¿obtendríamos el mismo resultado? Para comprobarlo, programaremos el mismo problema en LINGO con la restricción mencionada para las variables de decisión. El problema de optimización a resolver será el siguiente:

$$\begin{aligned}
&Min\ P = 0.78X + 0.92Y + 49Z \\
&s.a. \\
&-0.300117464X + 0.204280871Y - Z \leq 54{,}768.17 \\
&-0.300117464X + 0.204280871Y - Z \geq 49{,}552.16 \\
&-0.080920146X - 0.038091322Y \leq 6{,}882.26 \\
&-0.080920146X - 0.038091322Y \geq 6{,}226.81 \\
&-7.47365328X - 10.55233913Y \leq 1{,}271{,}050.49 \\
&-7.47365328X - 10.55233913Y \geq 1{,}149{,}998.06 \\
&X, Y, Z \ \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Realizaremos una modificación, ya que LINGO solamente puede asignar valores enteros positivos.

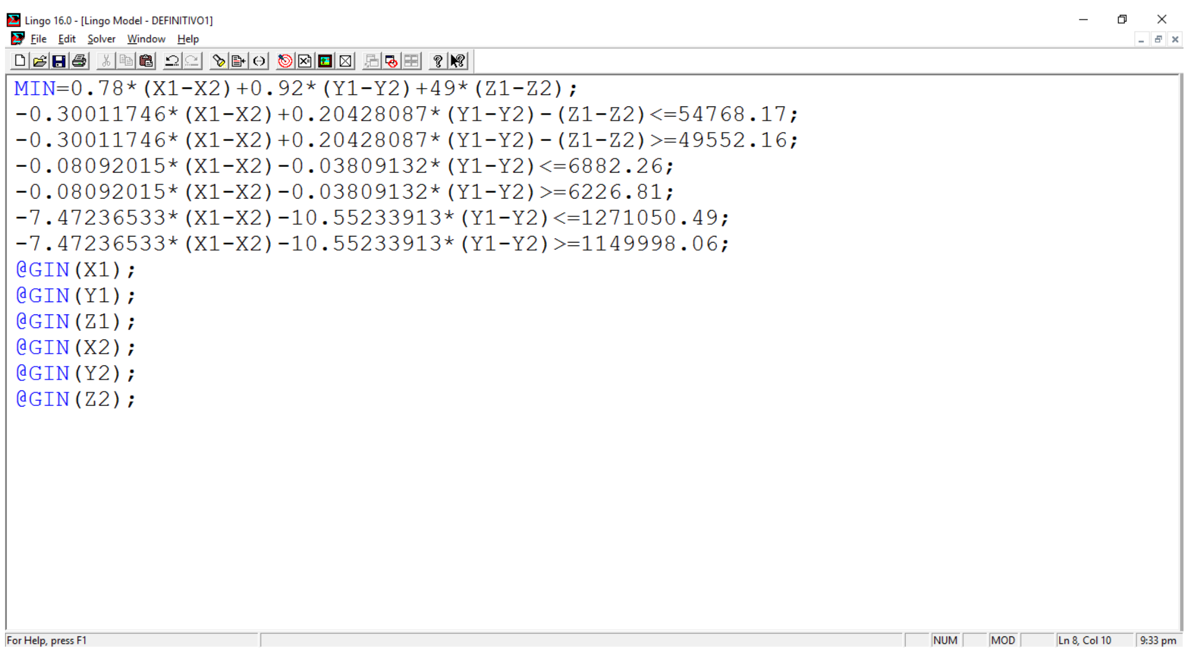
Sean:

$$X = X' - X''$$
$$Y = Y' - Y''$$
$$Z = Z' - Z''$$

Entonces el problema de optimización a resolver será:

$$\begin{aligned}
&Min\ P = 0.78(X' - X'') + 0.92(Y' - Y'') + 49(Z' - Z'') \\
&s.a. \\
&-0.300117464(X' - X'') + 0.204280871(Y' - Y'') - (Z' - Z'') \leq 54{,}768.17 \\
&-0.300117464(X' - X'') + 0.204280871(Y' - Y'') - (Z' - Z'') \geq 49{,}552.16 \\
&-0.080920146(X' - X'') - 0.038091322(Y' - Y'') \leq 6{,}882.26 \\
&-0.080920146(X' - X'') - 0.038091322(Y' - Y'') \geq 6{,}226.81 \\
&-7.47365328(X' - X'') - 10.55233913(Y' - Y'') \leq 1{,}271{,}050.49 \\
&-7.47365328(X' - X'') - 10.55233913(Y' - Y'') \geq 1{,}149{,}998.06 \\
&X', X'', Y', Y'', Z', Z'' \in \mathbb{Z}^{+}
\end{aligned}$$

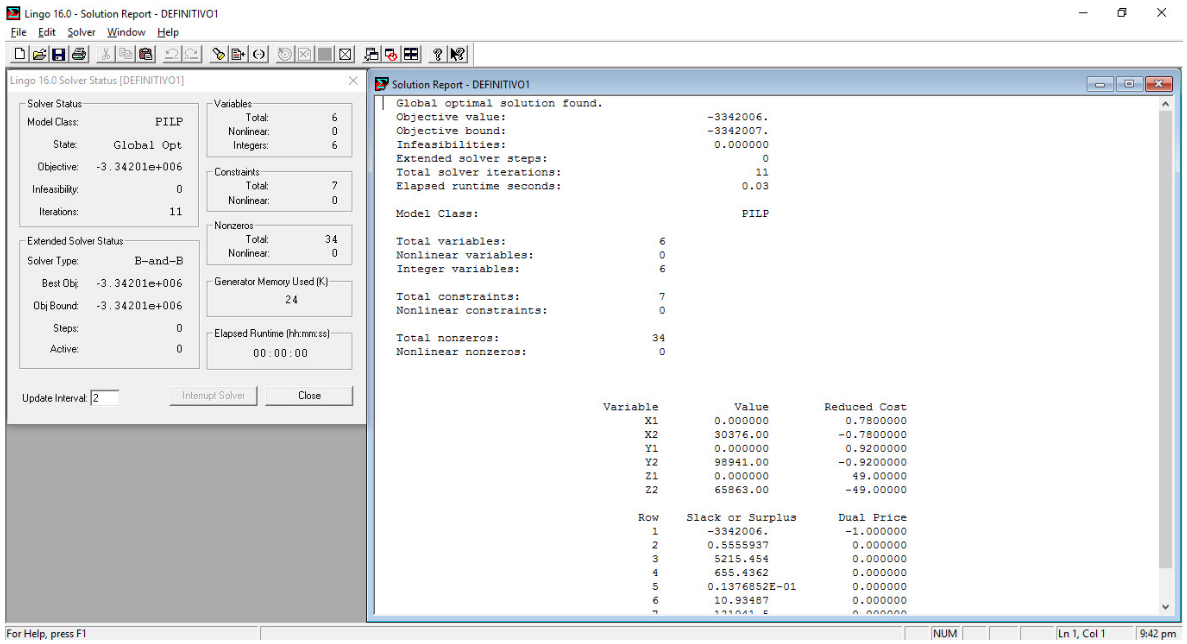
Para resolverlo, escribimos en LINGO el siguiente código:




```
MIN=0.78*(X1-X2)+0.92*(Y1-Y2)+49*(Z1-Z2);
-0.30011746*(X1-X2)+0.20428087*(Y1-Y2)-(Z1-Z2)<=54768.17;
-0.30011746*(X1-X2)+0.20428087*(Y1-Y2)-(Z1-Z2)>=49552.16;
-0.08092015*(X1-X2)-0.03809132*(Y1-Y2)<=6882.26;
-0.08092015*(X1-X2)-0.03809132*(Y1-Y2)>=6226.81;
-7.47236533*(X1-X2)-10.55233913*(Y1-Y2)<=1271050.49;
-7.47236533*(X1-X2)-10.55233913*(Y1-Y2)>=1149998.06;
@GIN(X1);
@GIN(Y1);
@GIN(Z1);
@GIN(X2);
@GIN(Y2);
@GIN(Z2);
```

La función *@GIN* restringe el dominio de la variable a los enteros positivos.

Al correr el código, obtenemos la siguiente solución para el problema:



Las soluciones obtenidas, entonces, son las siguientes:

$$X' = 0$$
$$X'' = 30{,}376$$
$$Y' = 0$$
$$Y'' = 98{,}941$$
$$Z' = 0$$
$$Z'' = 65{,}863$$

Considerando que

$$X = X' - X''$$
$$Y = Y' - Y''$$
$$Z = Z' - Z''$$

entonces

$$X = -30{,}376$$
$$Y = -98{,}941$$
$$Z = -65{,}863$$

Esta nueva solución es, por la manera en que se construyó, la mejor forma de realizar la cobertura. Estos valores no sólo cumplen con las restricciones, sino que no es necesario un redondeo arbitrario. Podemos observar que este resultado es distinto al de variables reales que redondeamos.

El valor del portafolios de la cobertura que se propone será, entonces, el que se obtenga al valuar la función objetivo en este punto, a saber:

$$P = -30{,}377op_1 - 98{,}940op_2 - 65{,}863S_0$$

$$= -30{,}377(\$0.78) - 98{,}940(\$0.92) - 65{,}863(\$49)$$

$$= -\$3{,}342{,}006$$

Es necesario remarcar la diferencia entre la solución entera que se obtuvo con el redondeo y la que se determinó resolviendo el modelo. A pesar de ser muy parecidas, es claro, por la manera de construirla, que la correcta es la segunda. La solución de un problema entero es, en general, complicada; la utilización de software especial para la solución de estos problemas no implica, como pudimos observar, mayor esfuerzo y se obtienen los resultados adecuados para nuestro objetivo.

Esta cobertura asegura que no mantenemos más del 5% de los riesgos originales vivos, pero, ¿se puede encontrar una solución entera que cubra mejor los riesgos?

Para encontrar una cobertura más fina de los riesgos, lo que debemos hacer es minimizar el valor de α, ¿qué tanto?

Como pudimos observar la primera vez que consideramos un redondeo, los riesgos quedaban descubiertos o cubiertos en exceso en una proporción mínima (menos de un 0.002%). Propongamos el siguiente ejercicio:

$$\begin{aligned}
&Min\ P = 0.78X + 0.92Y + 49Z\\
&s.a.\\
&-0.300117464X + 0.204280871Y - Z \le (1 + 0.00002)52{,}160.16\\
&-0.300117464X + 0.204280871Y - Z \ge (1 - 0.00002)52{,}160.16\\
&-0.080920146X - 0.038091322Y \le (1 + 0.00002)6{,}554.54\\
&-0.080920146X - 0.038091322Y \ge (1 - 0.00002)6{,}554.54\\
&-7.47365328X - 10.55233913Y \le (1 + 0.00002)1{,}210{,}524.28\\
&-7.47365328X - 10.55233913Y \ge (1 - 0.00002)1{,}210{,}524.28\\
&X, Y, Z\ \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Desarrollando el problema y adaptándolo para poder programarlo en LINGO, éste queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
&Min\ P = 0.78(X' - X'') + 0.92(Y' - Y'') + 49(Z' - Z'')\\
&s.a.\\
&-0.300117464(X' - X'') + 0.204280871(Y' - Y'') - (Z' - Z'') \le 52{,}161.21\\
&-0.300117464(X' - X'') + 0.204280871(Y' - Y'') - (Z' - Z'') \ge 52{,}159.12\\
&-0.080920146(X' - X'') - 0.038091322(Y' - Y'') \le 6{,}554.67\\
&-0.080920146(X' - X'') - 0.038091322(Y' - Y'') \ge 6{,}554.41\\
&-7.47365328(X' - X'') - 10.55233913(Y' - Y1'') \le 1{,}210{,}548.49\\
&-7.47365328(X' - X'') - 10.55233913(Y' - Y'') \ge 1{,}210{,}500.06\\
&X', X'', Y', Y'', Z', Z'' \in \mathbb{Z}^+
\end{aligned}$$

Para solucionarlo, escribimos en LINGO el siguiente código:

```
MIN=0.78*(X1-X2)+0.92*(Y1-Y2)+49*(Z1-Z2);
-0.30011746*(X1-X2)+0.20428087*(Y1-Y2)-(Z1-Z2)<=52161.21;
-0.30011746*(X1-X2)+0.20428087*(Y1-Y2)-(Z1-Z2)>=52159.12;
-0.08092015*(X1-X2)-0.03809132*(Y1-Y2)<=6554.67;
-0.08092015*(X1-X2)-0.03809132*(Y1-Y2)>=6554.41;
-7.47236533*(X1-X2)-10.55233913*(Y1-Y2)<=1210548.49;
-7.47236533*(X1-X2)-10.55233913*(Y1-Y2)>=1210500.06;
@GIN(X1);
@GIN(Y1);
@GIN(Z1);
@GIN(X2);
@GIN(Y2);
@GIN(Z2);
```

Al correrlo, obtendremos el siguiente resultado:

```
Global optimal solution found.
Objective value:                              -2932313.
Objective bound:                              -2932313.
Infeasibilities:                              0.000000
Extended solver steps:                               0
Total solver iterations:                            13
Elapsed runtime seconds:                          0.04

Model Class:                                      PILP

Total variables:                      6
Nonlinear variables:                  0
Integer variables:                    6

Total constraints:                    7
Nonlinear constraints:                0

Total nonzeros:                      34
Nonlinear nonzeros:                   0


                              Variable           Value        Reduced Cost
                                    X1        0.000000           0.7800000
                                    X2        40499.00          -0.7800000
                                    Y1        0.000000           0.9200000
                                    Y2        86040.00          -0.9200000
                                    Z1        0.000000            49.00000
                                    Z2        57583.00           -49.00000

                                   Row    Slack or Surplus      Dual Price
                                     1       -2932313.           -1.000000
                                     2       0.7904226E-01        0.000000
                                     3       0.1076724            0.000000
                                     4        1.907755            0.000000
                                     5        2.010958            0.000000
                                     6       0.1523276            0.000000
                                     7        46.52224            0.000000
```

En este caso, lo resultados son los siguientes:

$$X' = 0$$
$$X'' = 40{,}499$$
$$Y' = 0$$
$$Y'' = 86{,}040$$
$$Z' = 0$$

$$Z'' = 57{,}583$$

Considerando que

$$X = X' - X''$$
$$Y = Y' - Y''$$
$$Z = Z' - Z''$$

entonces

$$X = -40{,}499$$
$$Y = -86{,}040$$
$$Z = -57{,}583$$

El precio de esta cobertura se determina de la siguiente manera:

$$P = -40{,}499op_1 - 86{,}040op_2 - 57{,}583S_0$$

$$= -40{,}499(\$0.78) - 86{,}040(\$0.92) - 57{,}583(\$49)$$

$$= -\$2{,}932{,}401.47$$

Podemos observar que este resultado es sumamente parecido al obtenido desde el capítulo II, cuando únicamente encontramos la solución del problema de manera analítica y los riesgos fueron cubiertos en su totalidad. Esta solución permite evitar el redondeo arbitrario y asegura que no dejaremos vivos más del 0.002% de los riesgos originales; en otras palabras, ésta es una cobertura bastante exacta.

En este último caso consideramos un valor especialmente pequeño para α. Es evidente que α no puede ser tan pequeña como nosotros queramos, puesto que restringir las variables de decisión a los números enteros no permite esta selección. Por ejemplo, consideremos ahora el siguiente problema de optimización:

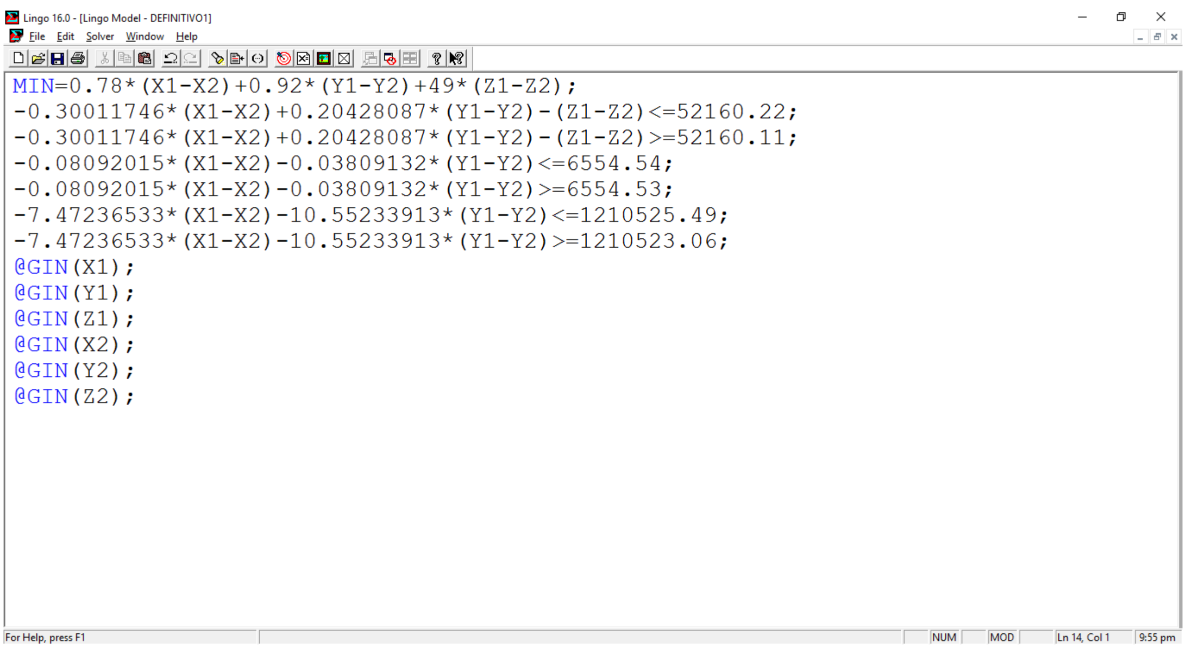
$$\begin{aligned}
&Min\ P = 0.78X + 0.92Y + 49Z\\
&s.a.\\
&-0.300117464X + 0.204280871Y - Z \leq (1 + 0.000001)52{,}160.16\\
&-0.300117464X + 0.204280871Y - Z \geq (1 - 0.000001)52{,}160.16\\
&-0.080920146X - 0.038091322Y \leq (1 + 0.000001)6{,}554.54\\
&-0.080920146X - 0.038091322Y \geq (1 - 0.000001)6{,}554.54\\
&-7.47365328X - 10.55233913Y \leq (1 + 0.000001)1{,}210{,}524.28\\
&-7.47365328X - 10.55233913Y \geq (1 - 0.000001)1{,}210{,}524.28\\
&X, Y, Z \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

De nueva cuenta, desarrollando el problema y adaptándolo para poder programarlo en LINGO, obtenemos:

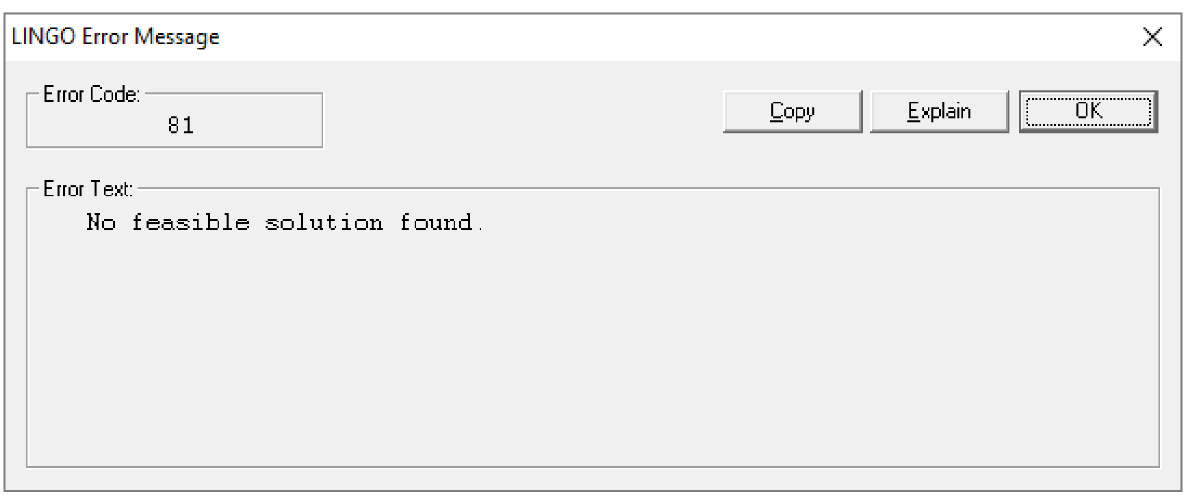
$$Min\ P = 0.78(X' - X'') + 0.92(Y' - Y'') + 49(Z' - Z'')$$

$$s.a.$$
$$-0.300117464(X' - X'') + 0.204280871(Y' - Y'') - (Z' - Z'') \leq 52{,}160.22$$
$$-0.300117464(X' - X'') + 0.204280871(Y' - Y'') - (Z' - Z'') \geq 52{,}160.11$$
$$-0.080920146(X' - X'') - 0.038091322(Y' - Y'') \leq 6{,}554.54$$
$$-0.080920146(X' - X'') - 0.038091322(Y' - Y'') \geq 6{,}554.53$$
$$-7.47365328(X' - X'') - 10.55233913(Y' - Y'') \leq 1{,}210{,}525.49$$
$$-7.47365328(X' - X'') - 10.55233913(Y' - Y'') \geq 1{,}210{,}523.06$$
$$X', X'', Y', Y'', Z', Z'' \in \mathbb{Z}^{+}$$

Escribamos en LINGO el siguiente código:



Al momento de correr este problema, inmediatamente obtenemos la leyenda “No se encontraron soluciones factibles”.



En conclusión, asumir una cantidad de riesgos pequeña permite que la construcción del portafolios de cobertura optimizando el precio de ésta tenga sentido, además de ampliar las posibilidades de realizarlo. Plantear este procedimiento con un modelo de programación lineal permite combinar distintas necesidades y multiplicar los supuestos, manteniendo siempre como objetivo mejorar el precio de la cobertura.

En el siguiente capítulo añadiremos algunas de estas posibilidades y analizaremos el comportamiento de nuestro modelo. En cada caso explicaremos la utilidad para un operador.

CAPÍTULO V. CASOS COMPLEMENTARIOS

En el capítulo anterior se expuso la posibilidad de utilizar como base el planteamiento realizado para resolver casos distintos y reflejar la versatilidad de construir una cobertura como lo hemos hecho, añadiendo restricciones, modificándolas, aumentando la cantidad de instrumentos financieros disponibles y adecuando el problema a cualquier otra situación que pudiera presentarse en un caso real.

Anteriormente, por ejemplo, restringimos el límite de exposición al riesgo hasta un punto en el que fue imposible encontrar una solución entera. De igual manera, introdujimos la idea de permitir únicamente un exceso o una deficiencia en la cobertura, más no ambas. Las modificaciones al modelo son mínimas para solucionar este caso, por lo que será el primero que resolveremos.

Exceso de cobertura y cobertura insuficiente

Supongamos que mantener un riesgo vivo es permitido únicamente si la cobertura genera Griegas que, al menos, cubran los riesgos que se asumieron con la posición original, es decir, se permite únicamente que exista una “sobrecobertura”, además, ésta no debe exceder cierta proporción α del riesgo original.

¿En qué momento sería útil un planteamiento semejante? Cuando el operador busque, además de una neutralización de los riesgos generados por la posición nueva, un cambio en las exposiciones que mantiene en su portafolios de operación y decida, para este fin, aprovechar las griegas generadas por la cobertura, minimizando simultáneamente el costo de la operativa.

Considerando los cálculos del ejemplo anterior, este problema puede formularse de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
&Min\ P = 0.78X + 0.92Y + 49Z \\
&s.a. \\
&-0.300117464X + 0.204280871Y - Z \leq (1 + 0.05)52{,}160.16 \\
&-0.300117464X + 0.204280871Y - Z \geq 52{,}160.16 \\
&-0.080920146X - 0.038091322Y \leq (1 + 0.05)6{,}554.54 \\
&-0.080920146X - 0.038091322Y \geq 6{,}554.54 \\
&-7.47365328X - 10.55233913Y \leq (1 + 0.05)1{,}210{,}524.28 \\
&-7.47365328X - 10.55233913Y \geq 1{,}210{,}524.28 \\
&X, Y, Z \ \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

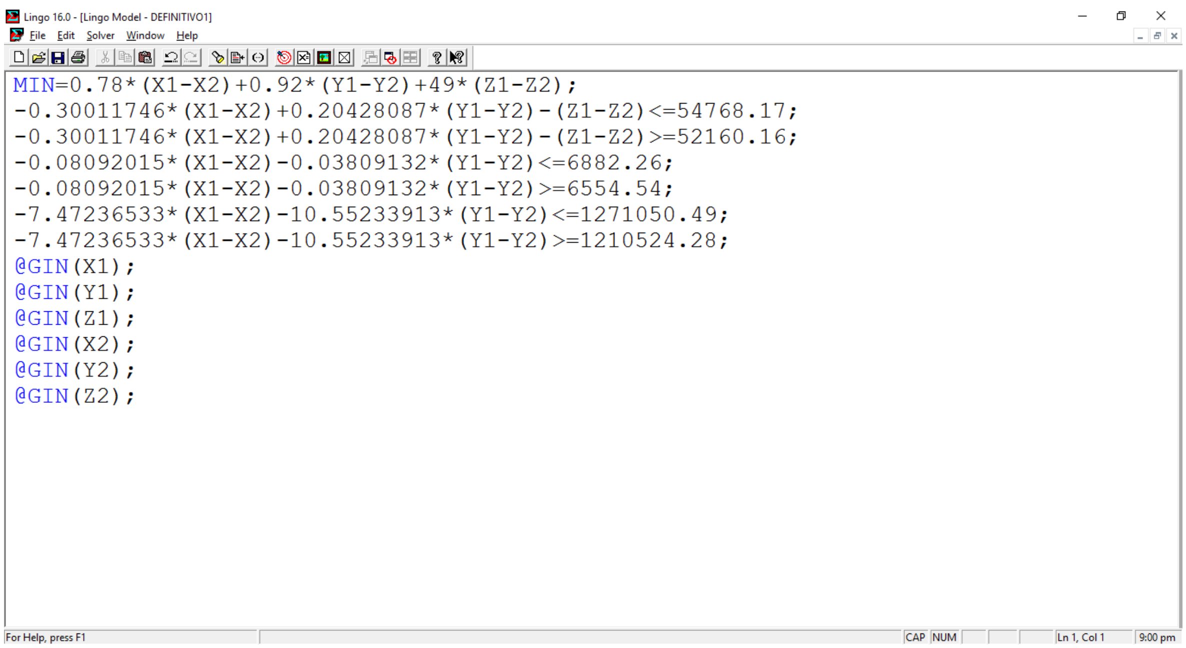
Desarrollando las operaciones, se obtiene entonces el siguiente problema:

$$
\begin{aligned}
&Min\ P = 0.78X + 0.92Y + 49Z \\
&s.a. \\
&-0.300117464X + 0.204280871Y - Z \leq 54{,}768.17 \\
&-0.300117464X + 0.204280871Y - Z \geq 52{,}160.16
\end{aligned}
$$

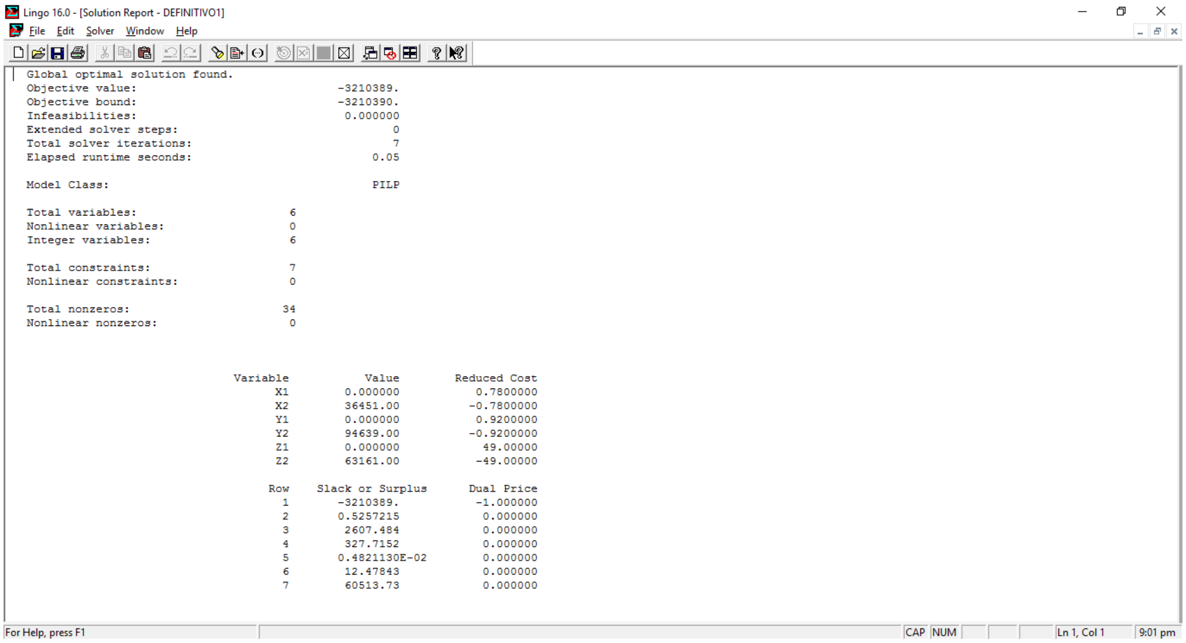
$$-0.080920146X - 0.038091322Y \leq 6{,}882.26$$
$$-0.080920146X - 0.038091322Y \geq 6{,}554.54$$
$$-7.47365328X - 10.55233913Y \leq 1{,}271{,}050.49$$
$$-7.47365328X - 10.55233913Y \geq 1{,}210{,}524.28$$
$$X, Y, Z \in \mathbb{Z}$$

Recordemos que LINGO únicamente puede considerar variables enteras no negativas por lo que se necesitan realizar los cambios de variables correspondientes. Para evitar perder dinamismo en el capítulo, el código se introducirá directamente en un proyecto de LINGO, presentaremos la pantalla de éste y analizaremos el resultado en el entendido de que el cambio de variables fue realizado solamente para la programación correcta.

En este supuesto, el código a programar será el siguiente:



Los resultados que se obtienen al correr el programa son:



La solución para este caso, entonces, es:

$$X = -36{,}451$$
$$Y = -94{,}639$$
$$Z = -63{,}161$$

Con estos valores, podemos calcular qué porcentaje de cada una de las Griegas cubrimos obteniendo los siguientes resultados:

- La Delta se cubre en un 105% (existe un exceso de cobertura).
- La Gamma se cubre al 100% (se neutraliza).
- La Vega se cubre en un 105% (existe un exceso de cobertura).

Además, podemos también calcular el precio de la cobertura que resultó.

$$P = -3{,}210{,}467.48$$

Observamos que los riesgos vivos ahora únicamente se deben a que la cobertura fue holgada, ¿con qué objetivo? Para poder disminuir el precio un poco más. Quien construya la cobertura de esta manera no debe tener problema con dejar viva una proporción de riesgo ya que esto, además de dar impulso a su traducción del mercado, se traducirá en un mejor precio.

Podemos pensar en el caso inverso (cuya solución sería análoga) en el que alguien está dispuesto a no cubrir por completo los riesgos, mas no pasarse, con tal de reducir el precio de la cobertura.

Esta situación resulta útil en el momento en el que el operador desee aprovechar alguna proporción de los riesgos que la nueva posición genere. Así deja abierta una parte de la posición original de la manera menos costosa posible.

Incluso podríamos imaginar el caso en el que la proporción permitida para mantener una sobrecobertura sea distinta que aquella que se puedan dejar de cubrir las Griegas. Para este caso deberíamos establecer dos valores α y β de tal manera que las restricciones serían como sigue:

$$
\begin{gathered}
-\Delta_{\text{cob}} \leq (1+\alpha)\Delta \\
-\Delta_{\text{cob}} \geq (1-\beta)\Delta \\
-\Gamma_{\text{cob}} \leq (1+\alpha)\Gamma \\
-\Gamma_{\text{cob}} \geq (1-\beta)\Gamma \\
-\mathcal{V}_{cob} \leq (1+\alpha)\mathcal{V} \\
-\mathcal{V}_{cob} \geq (1-\beta)\mathcal{V}
\end{gathered}
$$

donde

> $\boldsymbol{\alpha}$ *es la proporción del riesgo original que se permite mantener descubierto.*
> $\boldsymbol{\beta}$ *es la proporción del riesgo original que se permite cubrir en exceso.*

Más aún, se puede plantear el caso en el que estas proporciones de "subcobertura" y "sobrecobertura" sean distintos para cada Griega, en cuyo caso las restricciones del problema serían las siguientes:

$$
\begin{gathered}
-\Delta_{\text{cob}} \leq (1+\alpha_{\Delta})\Delta \\
-\Delta_{\text{cob}} \geq (1-\beta_{\Delta})\Delta \\
-\Gamma_{\text{cob}} \leq (1+\alpha_{\Gamma})\Gamma \\
-\Gamma_{\text{cob}} \geq (1-\beta_{\Gamma})\Gamma \\
-\mathcal{V}_{cob} \leq (1+\alpha_{\mathcal{V}})\mathcal{V} \\
-\mathcal{V}_{cob} \geq (1-\beta_{\mathcal{V}})\mathcal{V}
\end{gathered}
$$

donde

> $\boldsymbol{\alpha_i}$ *es la proporción del riesgo original que se permite mantener descubierto de la Griega i.*
> $\boldsymbol{\beta_i}$ *es la proporción del riesgo original que se permite cubrir en exceso de la Griega i.*

El planteamiento y la resolución de este problema serían análogos al caso expuesto. De esta manera, un operador podría encontrar la cobertura ideal de acuerdo a sus necesidades de gestión y su panorama del mercado; una cobertura que, además, sea la menos costosa.

Límites de oferta en el mercado

Consideremos ahora el siguiente caso como ejemplo:

Se desea construir la cobertura de la posición original, sin embargo, únicamente podemos encontrar en el mercado a una contraparte que nos compre una opción del tipo 1 que ampare un máximo de 30,000 acciones, mientras que existe otra contraparte dispuesta a comprar opciones del tipo 2 sin restricción en el monto subyacente.

Es lógico que en este caso no se podrán neutralizar por completo los riesgos, aún permitiendo que las variables tomen valores reales; ¿por qué? Recordemos que al plantear el problema original la solución era única y la cantidad de acciones que amparaba la opción del tipo 1 a vender era superior a 30,000. Por lo tanto no podremos encontrar una solución que neutralice perfectamente las Griegas y que implique la operación de una opción que ampare una cantidad distinta de acciones.

Dicho lo anterior, permitiremos un exceso o una deficiencia en la cobertura del 5%.

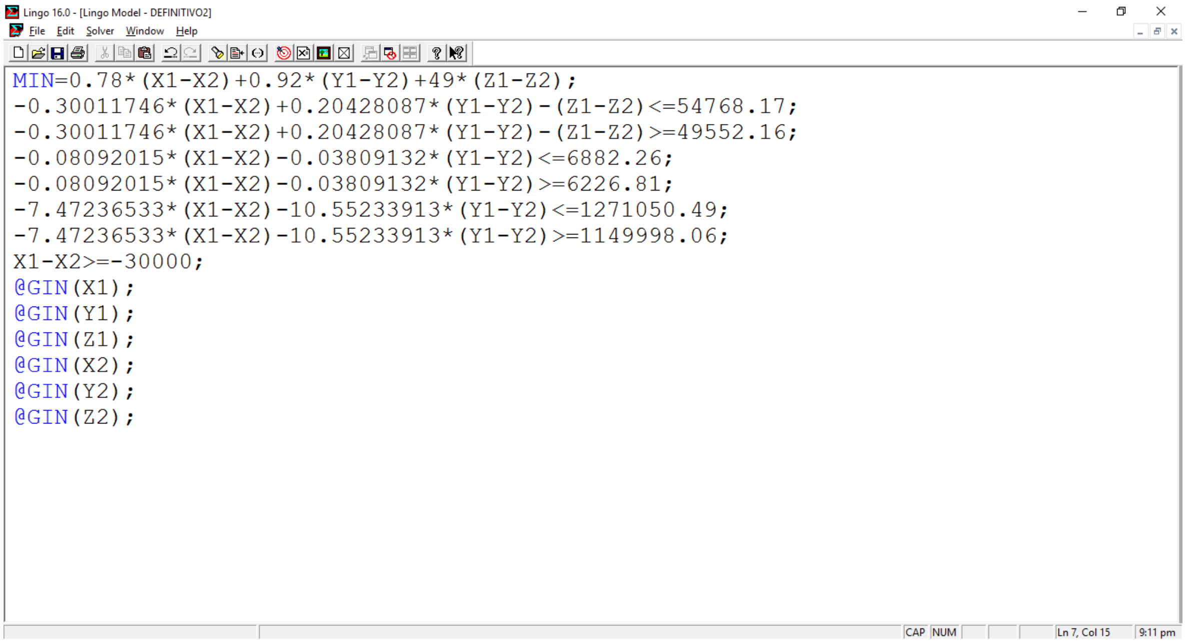
Analicemos la situación para plantear el problema correctamente.

Este problema es parecido al planteamiento en donde introdujimos el concepto de α, con la diferencia de que la opción del tipo 1 que vendamos no puede amparar cualquier cantidad de subyacente.

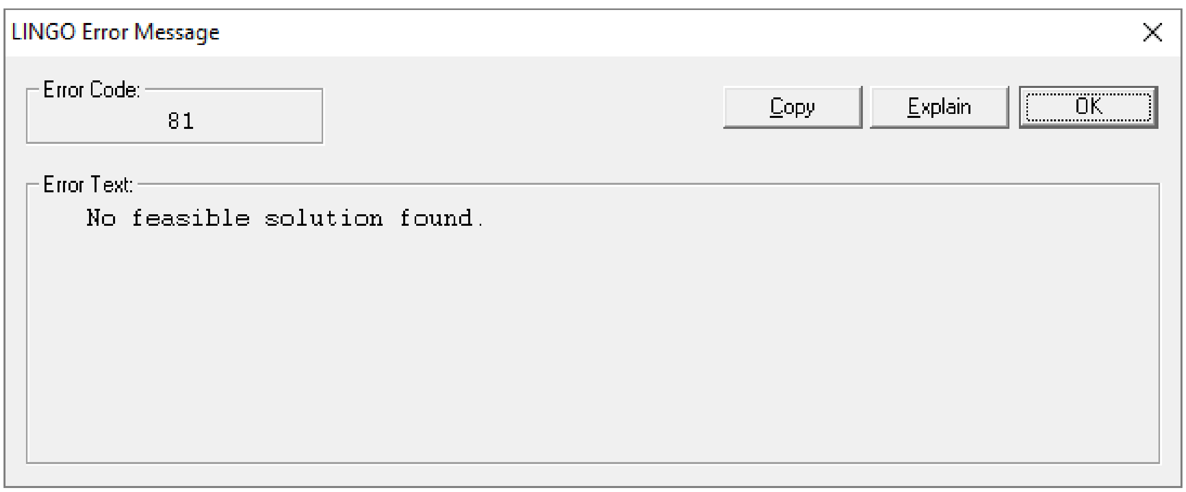
Debemos agregar esta condición en las restricciones, de tal manera que éstas terminan siendo muy parecidas al caso original, con una adición. El problema de optimización a resolver será el siguiente:

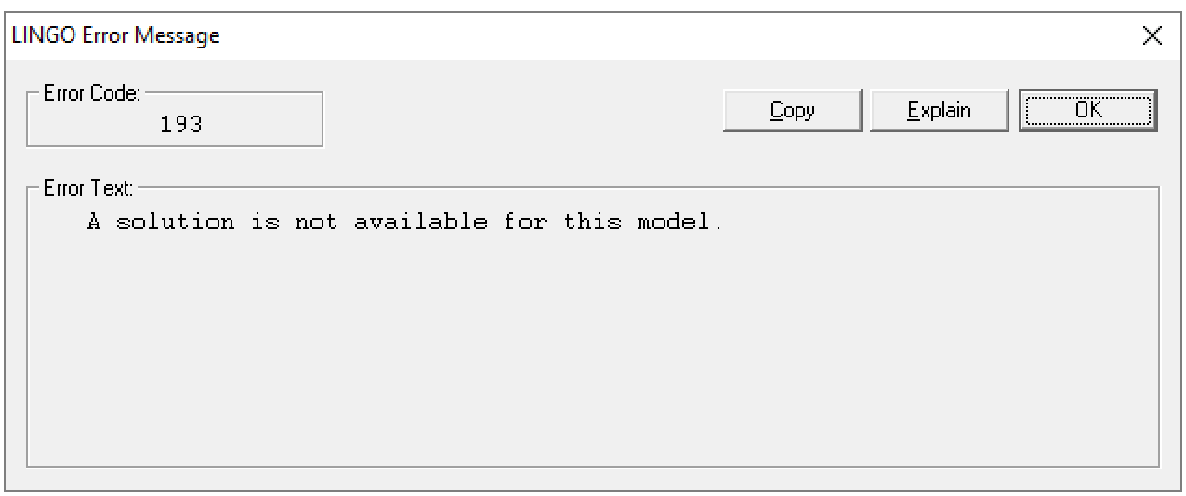
$$
\begin{aligned}
&Min\ P = 0.78X + 0.92Y + 49Z \\
&s.a. \\
&-0.300117464X + 0.204280871Y - Z \leq (1 + 0.05)52{,}160.16 \\
&-0.300117464X + 0.204280871Y - Z \geq (1 - 0.05)52{,}160.16 \\
&-0.080920146X - 0.038091322Y \leq (1 + 0.05)6{,}554.54 \\
&-0.080920146X - 0.038091322Y \geq (1 - 0.05)6{,}554.54 \\
&-7.47365328X - 10.55233913Y \leq (1 + 0.05)1{,}210{,}524.28 \\
&-7.47365328X - 10.55233913Y \geq (1 - 0.05)1{,}210{,}524.28 \\
&X \geq -30{,}000 \\
&X, Y, Z \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

El código a programar en LINGO se muestra a continuación:



Al correr el programa obtenemos el siguiente mensaje:





¿Qué podemos interpretar del hecho de que no se haya encontrado ninguna solución factible?

Recordemos que estamos buscando un portafolios que, dada la cantidad restringida de una de las opciones, únicamente deje viva una proporción máxima del 5% del riesgo. El no poder encontrar dicha cobertura significa que no existe ninguna manera de cubrir los riesgos con tanta eficiencia dada la posición de opciones que podemos encontrar en el mercado.

Para resolver este caso, podríamos permitir que la cobertura fuera menos exacta, pero ¿qué tanto?

Se puede probar con valores de α diferentes hasta el momento en el que se encuentre una solución, pero esto no resolvería del todo el problema. Para empezar, sería incierta la cantidad de pruebas que deberían realizarse antes de encontrar un valor de α para el cual sí se encuentre una solución. Por otro lado, una vez habiendo encontrado un valor de α con para el cual el problema tenga solución, nada nos asegura que no exista uno mejor para el que también pudiéramos encontrar un portafolios de cobertura (suponiendo que, mientras menor sea α, es mejor, ya que se mantendría un menor nivel de riesgo vivo).

Es justamente esta situación la que motiva la siguiente propuesta.

Ajuste de posiciones abiertas. Minimización de riesgo vivo.

En el caso en el que la cantidad de algún producto financiero se encuentre limitado en el mercado, entonces el problema no será minimizar el precio de la cobertura, sino determinar el mínimo valor de α para el que podamos encontrar una solución. De esta manera, aseguramos que los riesgos vivos después de construir la cobertura sean mínimos. El precio quedará determinado por la cantidad de productos financieros que la solución del problema arroje.

Para un operador, este planteamiento puede ser de gran utilidad.

Supongamos que está próximo a exceder un límite global de riesgo y desconoce la posibilidad de tomar una posición de riesgo adicional pues sabe que no existen instrumentos financieros suficientes en el mercado para su total cobertura. Este modelo le ayudaría a tomar la decisión, al obtener como resultado la cantidad de riesgo que permanecería viva después de aprovechar de la mejor manera posible lo que el mercado pueda ofrecer[12].

Para plantear este ejercicio, entonces, modificaremos la estructura del problema de optimización.

Lo primero que haremos será modificar la función objetivo; lo que ahora buscamos es el mínimo valor de α para el cual podemos encontrar una solución factible, por lo que ésta será:

$$Min\ A = \alpha$$

[12] En este caso, definimos la "mejor" manera posible como aquella que reduzca la proporción de riesgos vivos que el operador mantendría después de una cobertura construida con las posiciones disponibles en el mercado.

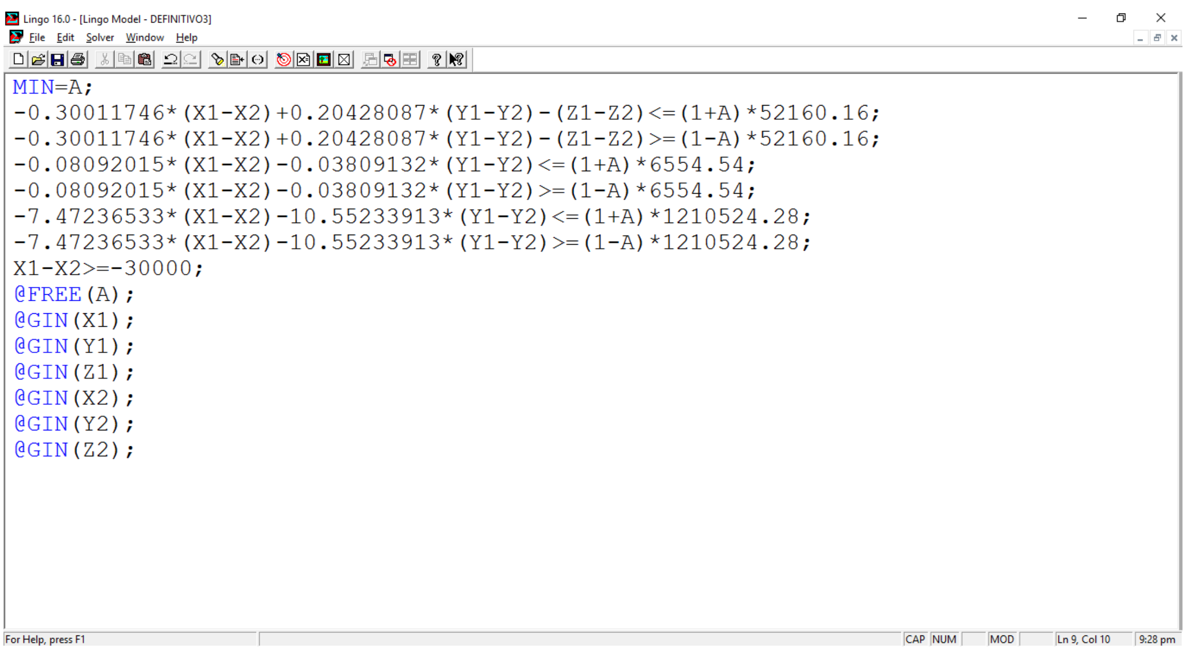
Las restricciones serán parecidas, pues debemos cubrir uno a uno los riesgos generados por nuestra posición original (Delta, Gamma y Vega), con la diferencia de que, ahora, el valor de α no está predeterminado. En este caso, α se convertirá en una de las variables de decisión.

De igual manera, debemos incluir una nueva restricción que represente la limitante de operar alguno de los productos financieros, en este caso, una de las opciones.

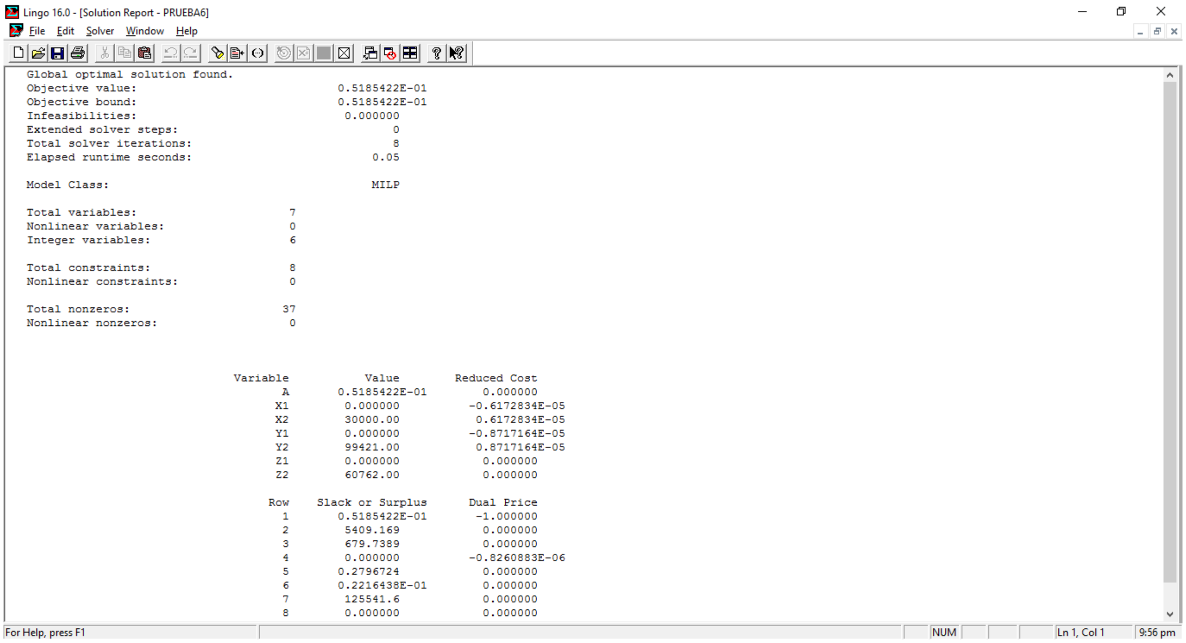
De esta forma, el problema de optimización queda determinado de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
&Min\ A = \alpha \\
&s.a. \\
&-0.300117464X + 0.204280871Y - Z \leq (1+\alpha)52{,}160.16 \\
&-0.300117464X + 0.204280871Y - Z \geq (1-\alpha)52{,}160.16 \\
&-0.080920146X - 0.038091322Y \leq (1+\alpha)6{,}554.54 \\
&-0.080920146X - 0.038091322Y \geq (1-\alpha)6{,}554.54 \\
&-7.47365328X - 10.55233913Y \leq (1+\alpha)1{,}210{,}524.28 \\
&-7.47365328X - 10.55233913Y \geq (1-\alpha)1{,}210{,}524.28 \\
&X \geq -30{,}000 \\
&X, Y, Z\ \in \mathbb{Z}\,;\ \alpha \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

El código que debemos programar en LINGO es el siguiente:



Después de correr el problema, obtenemos la siguiente pantalla:



Es decir, la solución es la siguiente:

$$X = -30{,}000$$
$$Y = -99{,}421$$
$$Z = -60{,}762$$
$$\alpha = 0.05185422$$

En otras palabras, el portafolios de cobertura será construido de la siguiente manera:

- Venta de una opción del tipo 1 que ampare 30,000 acciones (lo máximo que podemos encontrar en el mercado).
- Venta de una opción del tipo 2 que ampare 99,421 acciones.
- Venta de 60,762 unidades de subyacente.

Construir de esta manera la cobertura asegura que los riesgos vivos serán iguales a 5.185422% de los riesgos originales. Además, cualquier otra cobertura posible aumentaría esta proporción.

Podemos comprobar fácilmente que esta cobertura dejará riesgos vivos únicamente por esta proporción o menos calculando las nuevas Griegas, obteniendo los siguientes resultados:

- La Delta se cubre en un 94.8151%.
- La Gamma queda cubierta en un 94.8150%.
- La Vega es cubierta en un 105.1854%.

Este resultado es congruente con el nivel de α que obtuvimos resolviendo el problema nuevo.

Además, el precio de la cobertura construida de esta manera es el siguiente:

$$P = -3{,}092{,}269.20$$

De esta manera se propone lo siguiente: en el caso en el que exista una cantidad limitada de alguno de los instrumentos necesarios para la cobertura, el objetivo no será minimizar el precio, sino minimizar la cantidad de riesgo vivo dadas las condiciones del mercado.

Para el operador que no tiene la certeza de poder realizar la operación la decisión se facilita. Si el límite global aún es suficiente para permitir la proporción de riesgo determinada por la solución óptima, entonces deberá considerar algún otro factor para su decisión. En caso contrario, no sería posible mantener su exposición dentro de los límites a los que está sujeto, por lo que debe rechazar la operación desde un inicio.

¿Minimizar precio o riesgo?

Hagamos un ejercicio de comparación.

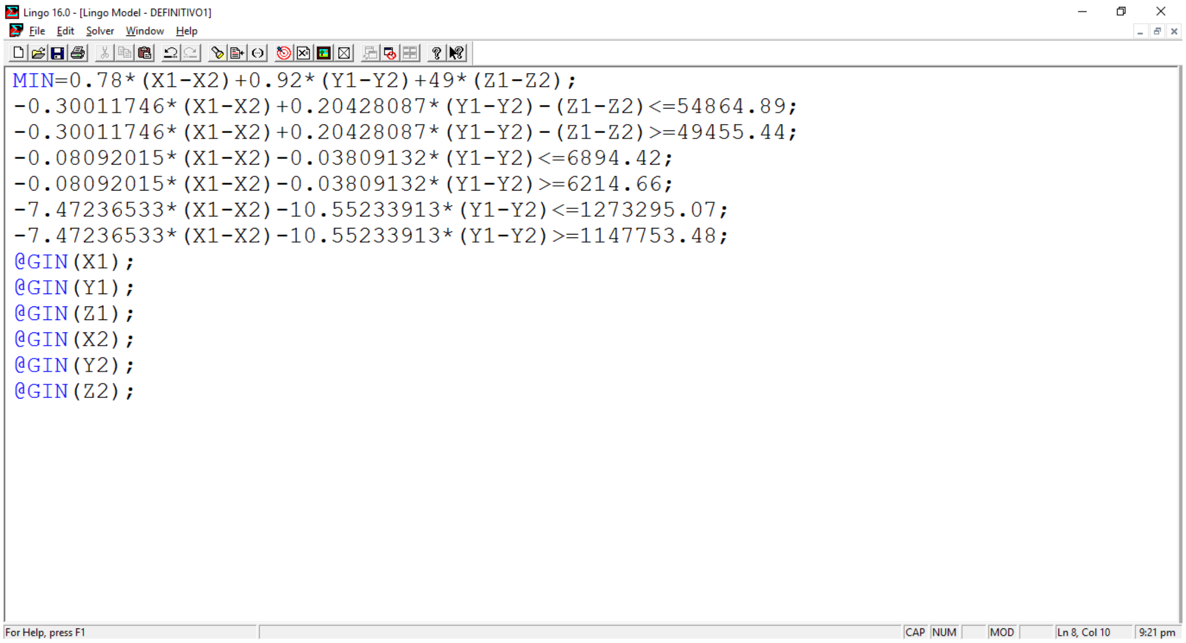
Supongamos que podemos encontrar cualquier producto financiero en el mercado, es decir, no tenemos ninguna restricción en cuanto a la cantidad de instrumentos que puedan conformar la cobertura; supongamos también que se permite mantener un riesgo vivo por una proporción máxima de 5.185422% de los riesgos originales (α=5.185422%).

Antes de resolver el ejercicio, tratemos de entender mejor la diferencia. En el ejemplo que se resolvió (en el que existía una restricción en alguno de los instrumentos disponibles en el mercado), se obtuvo un valor similar para α, sin embargo, éste se tuvo que encontrar dada la restricción. En otras palabras, las condiciones del problema nos “obligan” a utilizar dicho nivel de α; de cualquier otra manera (con un valor menor para α) no habría una solución.

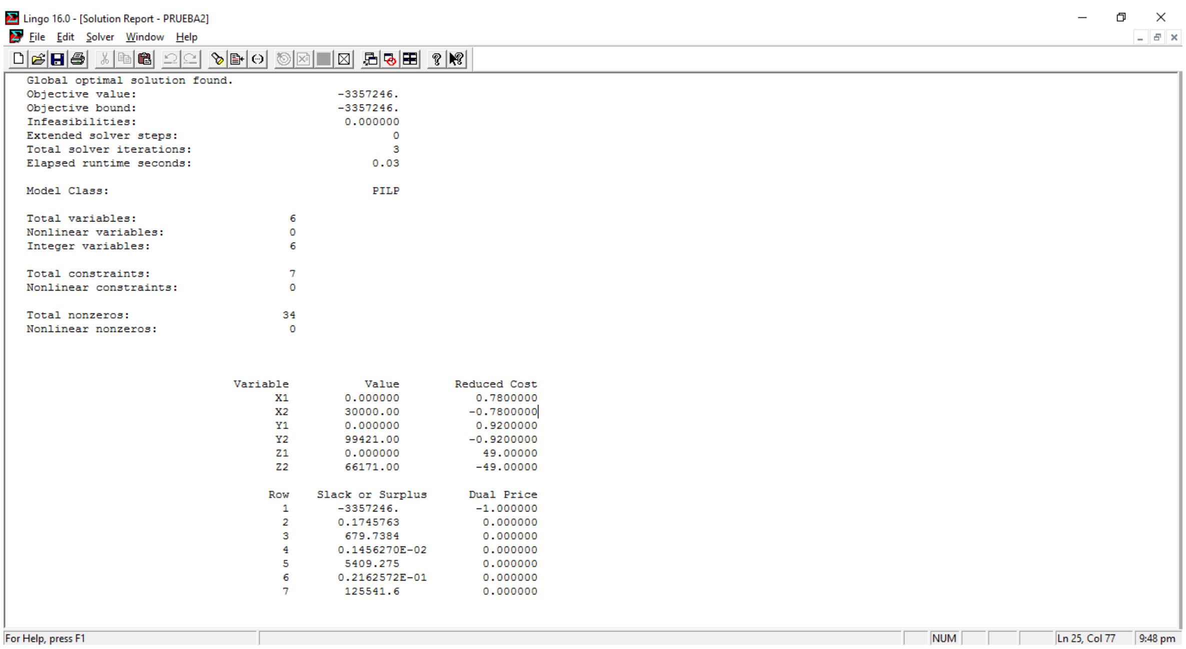
En este caso nosotros estamos proponiendo la proporción representada por α y no tenemos ninguna restricción impuesta por el mercado, por lo que se puede comprar cualquier opción que se desee.

Realicemos el ejercicio a continuación.

En LINGO, programamos el siguiente código:



Al correrlo, obtenemos los siguientes resultados:



es decir

$$X = -30{,}000$$
$$Y = -99{,}421$$
$$Z = -66{,}171$$

El precio de esta cobertura es el siguiente:

$$P = -3{,}357{,}310.20$$

y la proporción de cobertura de las griegas es la siguiente:

- La Delta se cubre en un 105.1851%.
- La Gamma queda cubierta en un 94.8150%.
- La Vega es cubierta en un 105.1854%.

¿Qué podemos observar al comparar los resultados?

Lo primero que observamos es que la cantidad de acciones que deben amparar las opciones de los tipos 1 y 2 es la misma, lo único distinto es la cantidad necesaria de subyacente. ¿Por qué sucede esto?

Como sabemos, comprar o vender subyacente únicamente afecta la Delta. En el primer problema se restringe la cantidad de acciones que una de las opciones puede amparar. Como la Delta puede ser ajustada “a placer” con la compra o venta de subyacente, entonces la restricción representa un límite para la Gamma y la Vega que podamos cubrir. Como el objetivo de este primer problema es optimizar la cobertura de los riesgos, en el momento en el que se encuentra un límite α respetando la restricción del mercado, si la Delta se ajusta a las restricciones del problema, entonces el programa LINGO devuelve dicho valor de α.

Por el contrario, para el segundo problema se desea optimizar el precio con un valor de α determinado con anterioridad. Esto permite que el programa busque otras soluciones factibles que optimicen el precio.

De hecho, en el caso de la solución del primer problema, la Delta queda descubierta por una proporción aproximada de 5%, mientras que, en el segundo caso, queda cubierta en exceso por una proporción cercana al 5%. La venta del subyacente que genera esta diferencia da como resultado un precio menor, sin dejar de cumplir con las restricciones.

Podemos concluir que ambos planteamientos son útiles. En una primera fase, encontramos un valor óptimo de α y, en una segunda etapa, encontramos el portafolios de cobertura que, dada dicha α, minimiza el precio a pagar.

En otro ejemplo, podríamos utilizar este mismo planteamiento para conocer la cantidad de riesgo que se dejaría vivo en caso de no existir restricción alguna sobre la cantidad de instrumentos disponibles en el mercado; esto nos dará una idea de lo exacta que podría llegar a ser la cobertura, sin embargo, al no considerar en ningún momento minimizar el precio de ésta, con seguridad obtendremos un costo mayor al construir la cobertura.

Para realizar el ejercicio, debemos programar el siguiente código:

```
MIN=A;
-0.30011746*(X1-X2)+0.20428087*(Y1-Y2)-(Z1-Z2)<=(1+A)*52160.16;
-0.30011746*(X1-X2)+0.20428087*(Y1-Y2)-(Z1-Z2)>=(1-A)*52160.16;
-0.08092015*(X1-X2)-0.03809132*(Y1-Y2)<=(1+A)*6554.54;
-0.08092015*(X1-X2)-0.03809132*(Y1-Y2)>=(1-A)*6554.54;
-7.47236533*(X1-X2)-10.55233913*(Y1-Y2)<=(1+A)*1210524.28;
-7.47236533*(X1-X2)-10.55233913*(Y1-Y2)>=(1-A)*1210524.28;
@FREE(A);
@GIN(X1);
@GIN(Y1);
@GIN(Z1);
@GIN(X2);
@GIN(Y2);
@GIN(Z2);
```

Al correrlo, obtenemos los siguientes resultados:

```
Global optimal solution found.
Objective value:                              0.2225495E-05
Objective bound:                              0.2225495E-05
Infeasibilities:                               0.000000
Extended solver steps:                                2
Total solver iterations:                             15
Elapsed runtime seconds:                           0.25

Model Class:                                       MILP

Total variables:                     7
Nonlinear variables:                 0
Integer variables:                   6

Total constraints:                   7
Nonlinear constraints:               0

Total nonzeros:                     35
Nonlinear nonzeros:                  0


                              Variable           Value        Reduced Cost
                                     A    0.2225495E-05        0.000000
                                    X1         0.000000    0.5753768E-05
                                    X2         40500.00   -0.5753768E-05
                                    Y1         0.000000   -0.3916416E-05
                                    Y2         86037.00    0.3916416E-05
                                    Z1         0.000000    0.1917172E-04
                                    Z2         57581.00   -0.1917172E-04

                                   Row    Slack or Surplus      Dual Price
                                     1    0.2225495E-05       -1.000000
                                     2        0.2321644        0.000000
                                     3    0.2561326E-01        0.000000
                                     4         4.576423        0.000000
                                     5         0.000000    0.1917172E-04
                                     6    0.3560938E-02        0.000000
                                     7        0.8116089        0.000000
```

Entonces, la solución para este problema es la siguiente:

$$X = -40{,}500$$
$$Y = -86{,}037$$
$$Z = -57{,}581$$
$$\alpha = 0.000002225495$$

El precio de la cobertura será:

$$P = -2{,}932{,}301.49$$

Recordemos que en el capítulo anterior obtuvimos una cobertura muy parecida utilizando un valor de α de 0.002%. Comparándola con la nueva cobertura podemos observar que encontramos una cobertura para un valor de α menor, a saber, 0.000223% (redondeando a 6 cifras decimales).

Podemos concluir lo siguiente:

- El nuevo portafolios es mejor en cuanto a la cobertura del riesgo se refiere, de hecho, por la forma de construirlo, no existe otro que cubra con mayor exactitud los riesgos originales.
- Estamos "sacrificando" el precio de la cobertura por obtener mayor exactitud.
- La construcción del portafolios de cobertura y, en consecuencia, el planteamiento necesario para ella, dependen del enfoque que se aplique. Se puede mejorar la exactitud de la cobertura a pesar de obtener un precio mayor o permitir cierta libertad del riesgo con el objetivo de mejorar el precio.

El análisis de las soluciones es de gran utilidad para el operador que busca, como se mencionó antes, además de reducir el costo de la cobertura, dar impulso a un panorama financiero propio.

Oferta de múltiples productos

Como último ejercicio, añadiremos más posibilidades para conformar el portafolios de cobertura.

Es lógico que en el mercado se puedan encontrar muchas opciones disponibles. Consideremos, además de las opciones del tipo 1 y 2 que hemos manejado anteriormente, los siguientes derivados disponibles en el mercado:

$$Opción\ 3$$
$$Opción\ Call$$
$$S_0 = 49$$
$$K = 53$$
$$r = 5\%$$
$$\sigma = 20\%$$
$$T = 15\ semanas = 0.2885\ años$$

$$Opción\ 4$$
$$Opción\ Put$$
$$S_0 = 49$$
$$K = 48$$
$$r = 5\%$$
$$\sigma = 20\%$$
$$T = 10\ semanas = 0.1923\ años$$

$$Opción\ 5$$
$$Opción\ Call$$

$$S_0 = 49$$
$$K = 51$$
$$r = 5\%$$
$$\sigma = 20\%$$
$$T = 45\ semanas = 0.8654\ años$$

Las Griegas de estas tres opciones, respetando la nomenclatura utilizada en capítulos anteriores, son las siguientes:

$$\Delta_\mathrm{T} = 0.293740635$$
$$\Gamma_\mathrm{T} = 0.065419277$$
$$\mathcal{V}_\mathrm{T} = 9.063036201$$

$$\Delta_\mathrm{U} = -0.348792385$$
$$\Gamma_\mathrm{U} = 0.086080712$$
$$\mathcal{V}_\mathrm{U} = 7.948904682$$

$$\Delta_\mathrm{W} = 0.544022826$$
$$\Gamma_\mathrm{W} = 0.043493122$$
$$\mathcal{V}_\mathrm{W} = 18.074222644$$

El precio de las tres opciones anteriores es el siguiente:

$$op_3 = \$0.92$$
$$op_4 = \$1.06$$
$$op_5 = \$3.71$$

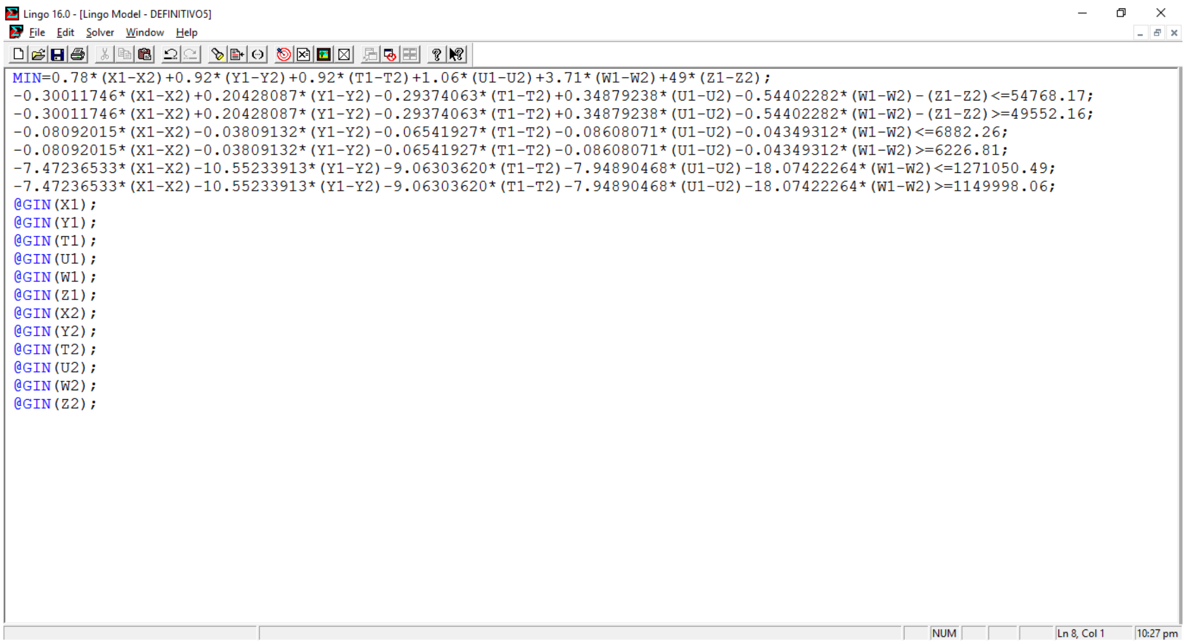
A continuación, debemos plantear un problema análogo al anterior que incluya la posibilidad de operar estos nuevos instrumentos financieros disponibles como parte de el portafolios de cobertura. Para hacerlo, aumentaremos el número de variables de decisión (una más por cada instrumento nuevo), las incluiremos en las restricciones y consideraremos a estos instrumentos para el cálculo del precio de la cobertura. Consideremos un valor de α de 5%.

El nuevo problema de optimización, entonces, resulta ser el siguiente:

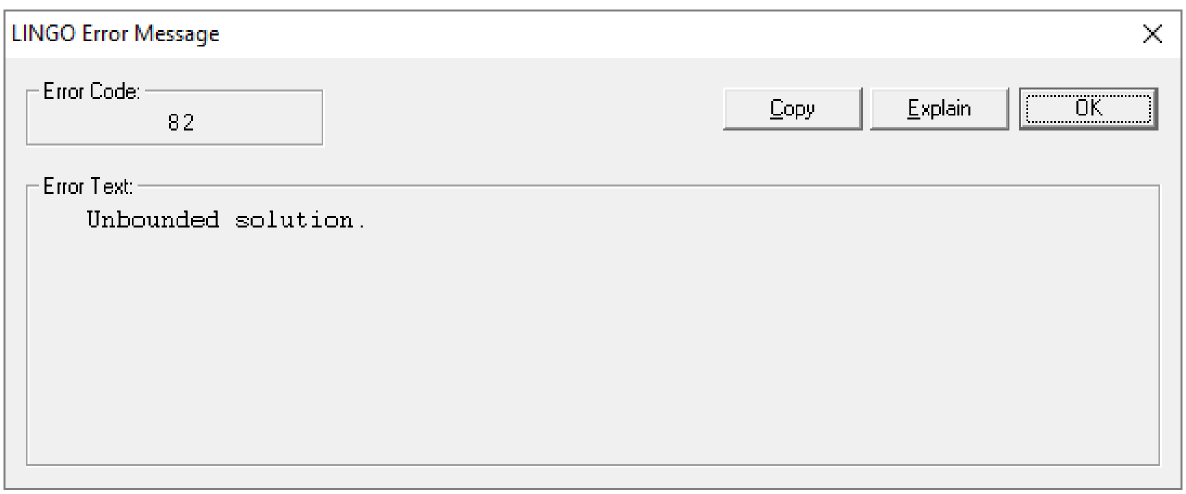
$$\begin{aligned}
&Min\ P = Xop_1 + Yop_2 + Top_3 + Uop_4 + Wop_5 + ZS \\
&s.a \\
&-X\Delta_\mathrm{X} - Y\Delta_\mathrm{Y} - T\Delta_\mathrm{T} - U\Delta_\mathrm{U} - W\Delta_\mathrm{W} - Z \leq (1 + 0.05)\Delta \\
&-X\Delta_\mathrm{X} - Y\Delta_\mathrm{Y} - T\Delta_\mathrm{T} - U\Delta_\mathrm{U} - W\Delta_\mathrm{W} - Z \geq (1 - 0.05)\Delta \\
&-X\Gamma_\mathrm{X} - Y\Gamma_\mathrm{Y} - T\Gamma_\mathrm{T} - U\Gamma_\mathrm{U} - W\Gamma_\mathrm{W} \leq (1 + 0.05)\Gamma \\
&-X\Gamma_\mathrm{X} - Y\Gamma_\mathrm{Y} - T\Gamma_\mathrm{T} - U\Gamma_\mathrm{U} - W\Gamma_\mathrm{W} \geq (1 - 0.05)\Gamma \\
&-X\mathcal{V}_\mathrm{X} - Y\mathcal{V}_\mathrm{Y} - T\mathcal{V}_\mathrm{T} - U\mathcal{V}_\mathrm{U} - W\mathcal{V}_\mathrm{W} \leq (1 + 0.05)\mathcal{V} \\
&-X\mathcal{V}_\mathrm{X} - Y\mathcal{V}_\mathrm{Y} - T\mathcal{V}_\mathrm{T} - U\mathcal{V}_\mathrm{U} - W\mathcal{V}_\mathrm{W} \geq (1 - 0.05)\mathcal{V} \\
&X, Y, Z, T, U, W \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

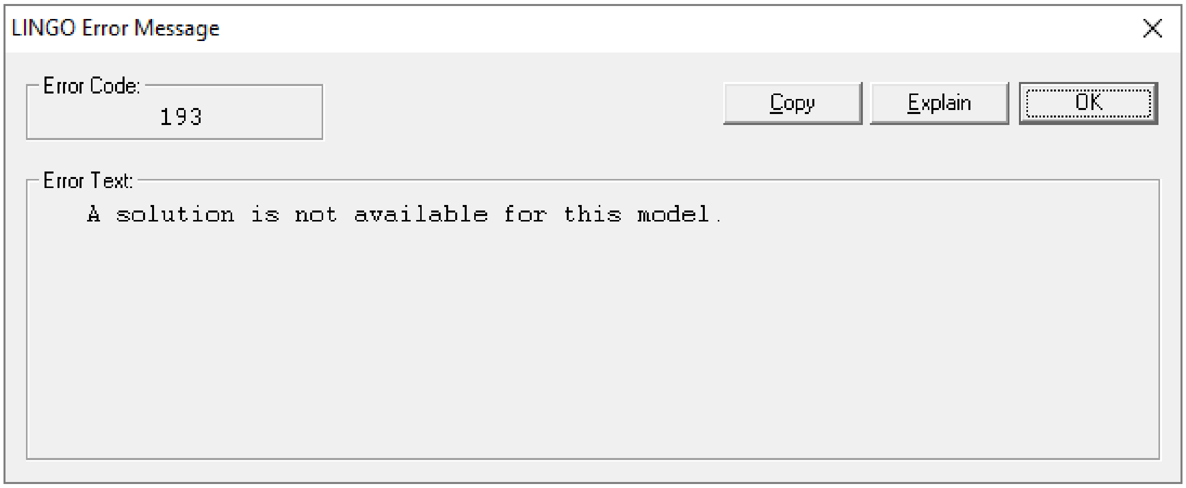
Para solucionar este problema, utilizaremos directamente LINGO.

Sustituyendo los valores correspondientes y realizando los cambios de variable pertinentes, debemos programar el siguiente código:



Al correr el programa, obtenemos el siguiente resultado:





Esto quiere decir que el problema es no acotado. La función objetivo puede hacerse tan pequeña como se quiera. ¿Por qué sucede esto?

Recordemos el planteamiento del problema original. Los riesgos generados por la compra de una opción eran cubiertos por la venta de dos opciones distintas y algo de subyacente. El precio de la cobertura no sólo era negativo (un ingreso para el que cubre el riesgo) sino que, sumado al precio de la opción que se desea cubrir, de igual manera resulta en un ingreso.

Como pudimos observar, se necesitan dos opciones para cubrir el riesgo generado por otra. En este ejercicio, además de la compra de la posición original, podemos también comprar alguna otra opción nueva y no tenemos ninguna restricción para dicha compra. Además, podríamos cubrir tanta posición como se desee, por el mismo argumento de no tener restricción alguna sobre la cantidad de acciones que cualquiera de las opciones puede amparar. Es por esto que podríamos decir que éste se convierte en un ejercicio de cubrir una cantidad infinita de opciones con una cantidad infinita de opciones distintas, generando un flujo infinitamente favorable para el que desea cubrir el riesgo.

Intentemos entonces restringir las variables de decisión de manera que no se pueda comprar una nueva opción (para garantizar que solamente se está cubriendo el riesgo original).

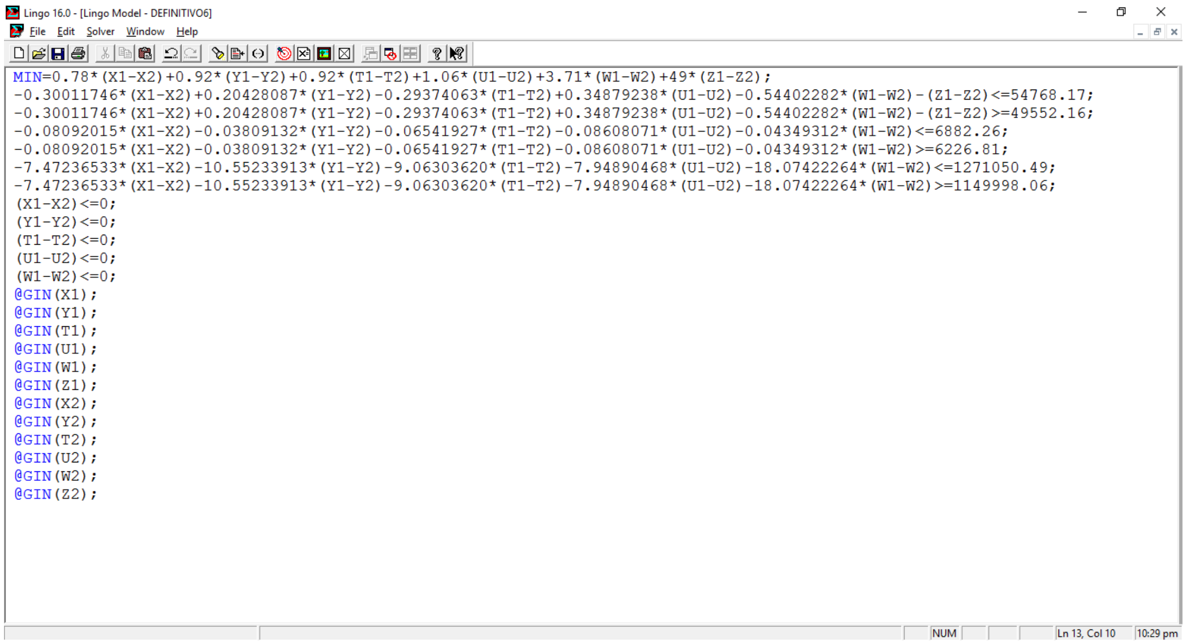
Esto lo lograremos restringiendo las variables de decisión a valores enteros menores que cero.

Dicho esto, el problema quedará planteado como sigue:

$$
\begin{aligned}
&Min\ P = Xop_1 + Yop_2 + Top_3 + Uop_4 + Wop_5 + ZS \\
&s.a \\
&-X\Delta_\mathrm{X} - Y\Delta_\mathrm{Y} - T\Delta_\mathrm{T} - U\Delta_\mathrm{U} - W\Delta_\mathrm{W} - Z \leq (1+0.05)\Delta \\
&-X\Delta_\mathrm{X} - Y\Delta_\mathrm{Y} - T\Delta_\mathrm{T} - U\Delta_\mathrm{U} - W\Delta_\mathrm{W} - Z \geq (1-0.05)\Delta \\
&-X\Gamma_\mathrm{X} - Y\Gamma_\mathrm{Y} - T\Gamma_\mathrm{T} - U\Gamma_\mathrm{U} - W\Gamma_\mathrm{W} \leq (1+0.05)\Gamma \\
&-X\Gamma_\mathrm{X} - Y\Gamma_\mathrm{Y} - T\Gamma_\mathrm{T} - U\Gamma_\mathrm{U} - W\Gamma_\mathrm{W} \geq (1-0.05)\Gamma \\
&-X\mathrm{V}_\mathrm{X} - Y\mathrm{V}_\mathrm{Y} - T\mathrm{V}_\mathrm{T} - U\mathrm{V}_\mathrm{U} - W\mathrm{V}_\mathrm{W} \leq (1+0.05)\mathrm{V} \\
&-X\mathrm{V}_\mathrm{X} - Y\mathrm{V}_\mathrm{Y} - T\mathrm{V}_\mathrm{T} - U\mathrm{V}_\mathrm{U} - W\mathrm{V}_\mathrm{W} \geq (1-0.05)\mathrm{V}
\end{aligned}
$$

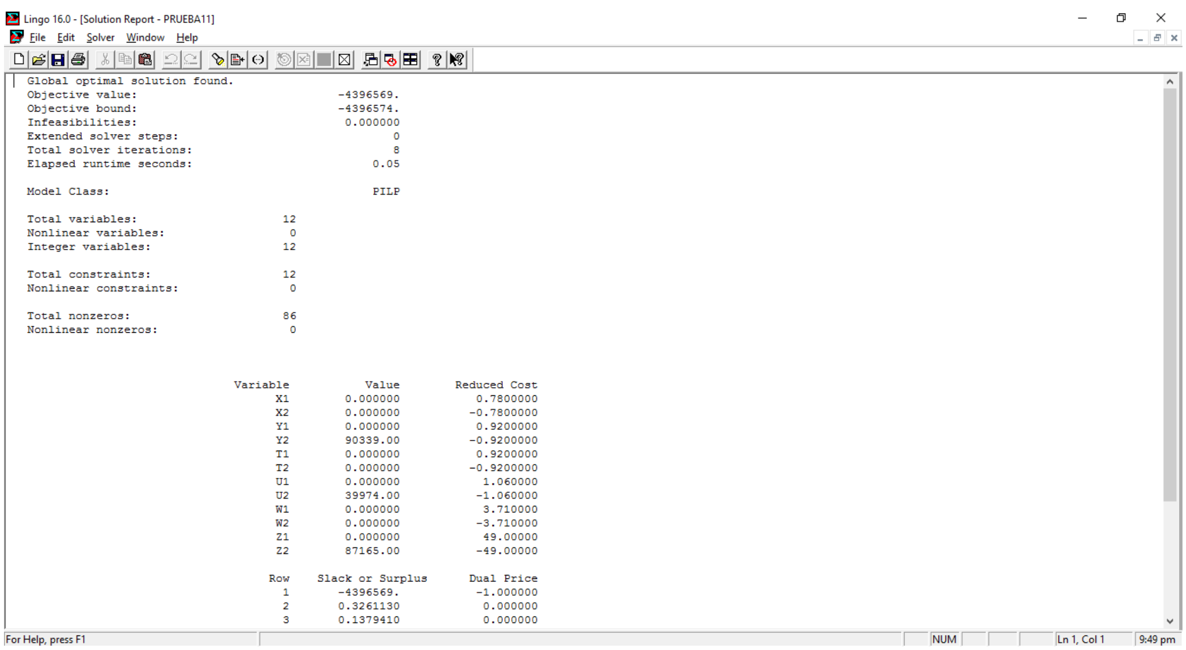
$$X, Y, Z, T, U, W \in \mathbb{R}$$
$$X, Y, T, U, W \leq 0$$

En LINGO, programamos el siguiente código:




```
MIN=0.78*(X1-X2)+0.92*(Y1-Y2)+0.92*(T1-T2)+1.06*(U1-U2)+3.71*(W1-W2)+49*(Z1-Z2);
-0.30011746*(X1-X2)+0.20428087*(Y1-Y2)-0.29374063*(T1-T2)+0.34879238*(U1-U2)-0.54402282*(W1-W2)-(Z1-Z2)<=54768.17;
-0.30011746*(X1-X2)+0.20428087*(Y1-Y2)-0.29374063*(T1-T2)+0.34879238*(U1-U2)-0.54402282*(W1-W2)-(Z1-Z2)>=49552.16;
-0.08092015*(X1-X2)-0.03809132*(Y1-Y2)-0.06541927*(T1-T2)-0.08608071*(U1-U2)-0.04349312*(W1-W2)<=6882.26;
-0.08092015*(X1-X2)-0.03809132*(Y1-Y2)-0.06541927*(T1-T2)-0.08608071*(U1-U2)-0.04349312*(W1-W2)>=6226.81;
-7.47236533*(X1-X2)-10.55233913*(Y1-Y2)-9.06303620*(T1-T2)-7.94890468*(U1-U2)-18.07422264*(W1-W2)<=1271050.49;
-7.47236533*(X1-X2)-10.55233913*(Y1-Y2)-9.06303620*(T1-T2)-7.94890468*(U1-U2)-18.07422264*(W1-W2)>=1149998.06;
(X1-X2)<=0;
(Y1-Y2)<=0;
(T1-T2)<=0;
(U1-U2)<=0;
(W1-W2)<=0;
@GIN(X1);
@GIN(Y1);
@GIN(T1);
@GIN(U1);
@GIN(W1);
@GIN(Z1);
@GIN(X2);
@GIN(Y2);
@GIN(T2);
@GIN(U2);
@GIN(W2);
@GIN(Z2);
```

Al correr el programa, obtenemos el siguiente resultado:




```
Global optimal solution found.
Objective value:                          -4396569.
Objective bound:                          -4396574.
Infeasibilities:                          0.000000
Extended solver steps:                           0
Total solver iterations:                         8
Elapsed runtime seconds:                      0.05

Model Class:                                  PILP

Total variables:                    12
Nonlinear variables:                 0
Integer variables:                  12

Total constraints:                  12
Nonlinear constraints:               0

Total nonzeros:                     86
Nonlinear nonzeros:                  0


                              Variable        Value        Reduced Cost
                                    X1     0.000000           0.7800000
                                    X2     0.000000          -0.7800000
                                    Y1     0.000000           0.9200000
                                    Y2     90339.00          -0.9200000
                                    T1     0.000000           0.9200000
                                    T2     0.000000          -0.9200000
                                    U1     0.000000            1.060000
                                    U2     39974.00           -1.060000
                                    W1     0.000000            3.710000
                                    W2     0.000000           -3.710000
                                    Z1     0.000000            49.00000
                                    Z2     87165.00           -49.00000

                                   Row   Slack or Surplus    Dual Price
                                     1      -4396569.         -1.000000
                                     2      0.3261130          0.000000
                                     3      0.1379410          0.000000
```

Es decir

$$X = 0$$
$$Y = -90{,}339$$

$$T = 0$$
$$U = -39{,}974$$
$$W = 0$$
$$Z = -87{,}165$$

En este caso, la cobertura queda determinada, entonces, por las siguientes posiciones:

- Venta de una opción del tipo 2 que ampare 90,339 acciones (lo máximo que podemos encontrar en el mercado).
- Venta de una opción del tipo 4 que ampare 39,974 acciones.
- Venta de 87,165 unidades de subyacente.

El precio de esta cobertura es el siguiente:

$$P = -4{,}396{,}569$$

Es fácil confirmar, además, que las Griegas se cubren en la siguiente proporción:

- La Delta se cubre en un 104.9994%.
- La Gamma queda cubierta en un 104.9978%.
- La Vega es cubierta en un 104.9989%.

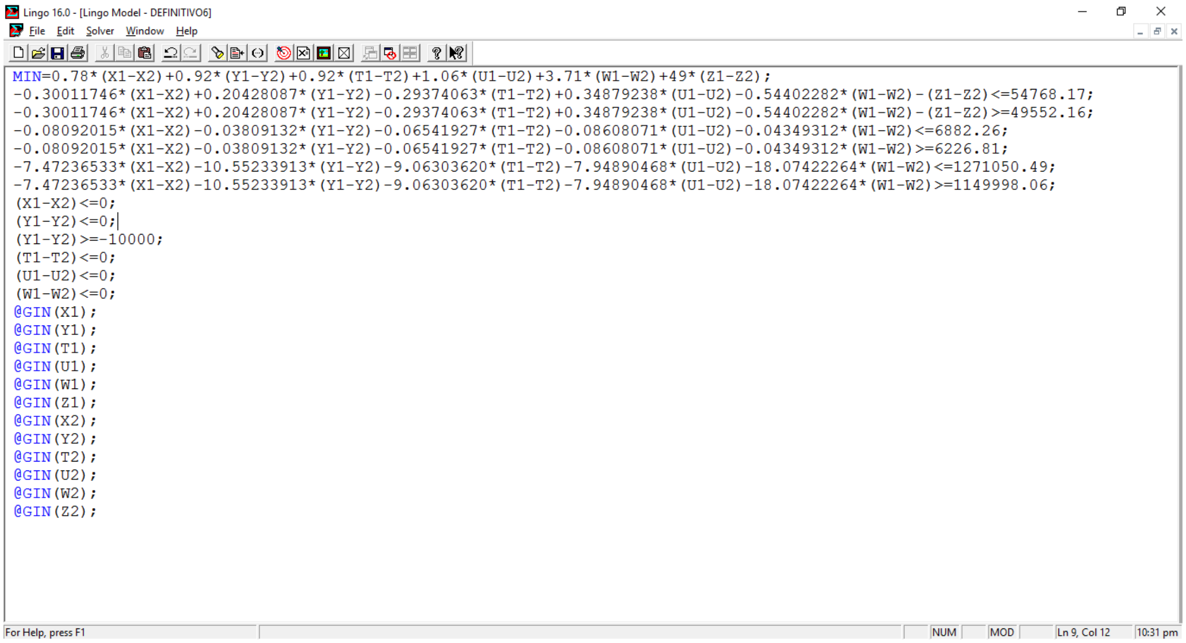
De esta manera, al haber considerado más posibilidades para la construcción de la cobertura, encontramos un portafolios que, cumpliendo las restricciones y dejando viva una proporción menor al 5% de los riesgos, paga mejor.

Por último, ¿qué pasaría si restringiéramos la cantidad de acciones amparadas por el contrato de opción del tipo 2 a 10,000 máximo?

Para esto, nuevamente añadiremos una restricción a el problema, de tal manera que quede planteado de la siguiente manera:

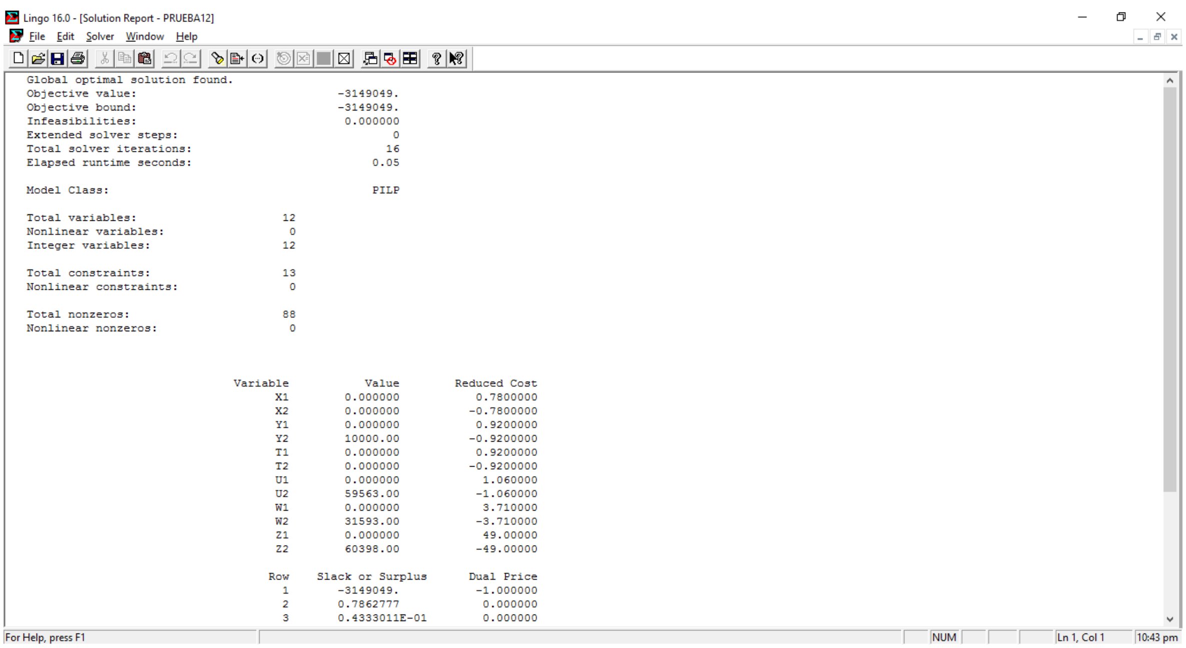
$$
\begin{aligned}
&Min\ P = Xop_1 + Yop_2 + Top_3 + Uop_4 + Wop_5 + ZS \\
&s.a \\
&-X\Delta_\mathrm{X} - Y\Delta_\mathrm{Y} - T\Delta_\mathrm{T} - U\Delta_\mathrm{U} - W\Delta_\mathrm{W} - Z \leq (1 + 0.05)\Delta \\
&-X\Delta_\mathrm{X} - Y\Delta_\mathrm{Y} - T\Delta_\mathrm{T} - U\Delta_\mathrm{U} - W\Delta_\mathrm{W} - Z \geq (1 - 0.05)\Delta \\
&-X\Gamma_\mathrm{X} - Y\Gamma_\mathrm{Y} - T\Gamma_\mathrm{T} - U\Gamma_\mathrm{U} - W\Gamma_\mathrm{W} \leq (1 + 0.05)\Gamma \\
&-X\Gamma_\mathrm{X} - Y\Gamma_\mathrm{Y} - T\Gamma_\mathrm{T} - U\Gamma_\mathrm{U} - W\Gamma_\mathrm{W} \geq (1 - 0.05)\Gamma \\
&-X\mathcal{V}_\mathrm{X} - Y\mathcal{V}_\mathrm{Y} - T\mathcal{V}_\mathrm{T} - U\mathcal{V}_\mathrm{U} - W\mathcal{V}_\mathrm{W} \leq (1 + 0.05)\mathcal{V} \\
&-X\mathcal{V}_\mathrm{X} - Y\mathcal{V}_\mathrm{Y} - T\mathcal{V}_\mathrm{T} - U\mathcal{V}_\mathrm{U} - W\mathcal{V}_\mathrm{W} \geq (1 - 0.05)\mathcal{V} \\
&X, Y, Z, T, U, W \in \mathbb{R} \\
&X, T, U, W \leq 0 \\
&-10{,}000 \leq Y \leq 0
\end{aligned}
$$

Para encontrar la solución, programamos en LINGO el código a continuación:



```
MIN=0.78*(X1-X2)+0.92*(Y1-Y2)+0.92*(T1-T2)+1.06*(U1-U2)+3.71*(W1-W2)+49*(Z1-Z2);
-0.30011746*(X1-X2)+0.20428087*(Y1-Y2)-0.29374063*(T1-T2)+0.34879238*(U1-U2)-0.54402282*(W1-W2)-(Z1-Z2)<=54768.17;
-0.30011746*(X1-X2)+0.20428087*(Y1-Y2)-0.29374063*(T1-T2)+0.34879238*(U1-U2)-0.54402282*(W1-W2)-(Z1-Z2)>=49552.16;
-0.08092015*(X1-X2)-0.03809132*(Y1-Y2)-0.06541927*(T1-T2)-0.08608071*(U1-U2)-0.04349312*(W1-W2)<=6882.26;
-0.08092015*(X1-X2)-0.03809132*(Y1-Y2)-0.06541927*(T1-T2)-0.08608071*(U1-U2)-0.04349312*(W1-W2)>=6226.81;
-7.47236533*(X1-X2)-10.55233913*(Y1-Y2)-9.06303620*(T1-T2)-7.94890468*(U1-U2)-18.07422264*(W1-W2)<=1271050.49;
-7.47236533*(X1-X2)-10.55233913*(Y1-Y2)-9.06303620*(T1-T2)-7.94890468*(U1-U2)-18.07422264*(W1-W2)>=1149998.06;
(X1-X2)<=0;
(Y1-Y2)<=0;
(Y1-Y2)>=-10000;
(T1-T2)<=0;
(U1-U2)<=0;
(W1-W2)<=0;
@GIN(X1);
@GIN(Y1);
@GIN(T1);
@GIN(U1);
@GIN(W1);
@GIN(Z1);
@GIN(X2);
@GIN(Y2);
@GIN(T2);
@GIN(U2);
@GIN(W2);
@GIN(Z2);
```

Al correr el programa, la solución obtenida es



```
Global optimal solution found.
Objective value:                              -3149049.
Objective bound:                              -3149049.
Infeasibilities:                              0.000000
Extended solver steps:                               0
Total solver iterations:                            16
Elapsed runtime seconds:                          0.05

Model Class:                                      PILP

Total variables:                     12
Nonlinear variables:                  0
Integer variables:                   12

Total constraints:                   13
Nonlinear constraints:                0

Total nonzeros:                      88
Nonlinear nonzeros:                   0


                          Variable           Value        Reduced Cost
                                X1        0.000000           0.7800000
                                X2        0.000000          -0.7800000
                                Y1        0.000000           0.9200000
                                Y2        10000.00          -0.9200000
                                T1        0.000000           0.9200000
                                T2        0.000000          -0.9200000
                                U1        0.000000            1.060000
                                U2        59563.00           -1.060000
                                W1        0.000000            3.710000
                                W2        31593.00           -3.710000
                                Z1        0.000000            49.00000
                                Z2        60398.00           -49.00000

                               Row    Slack or Surplus      Dual Price
                                 1       -3149049.           -1.000000
                                 2       0.7862777            0.000000
                                 3       0.4333011E-01        0.000000
```

Es decir

$$X = 0$$
$$Y = -10{,}000$$
$$T = 0$$
$$U = -59{,}563$$
$$W = -31{,}593$$
$$Z = -60{,}398$$

Para este problema, el portafolios de cobertura se conformará de la siguiente manera:

- Venta de una opción del tipo 2 que ampare 10,000 acciones (lo máximo que podemos encontrar en el mercado).
- Venta de una opción del tipo 4 que ampare 59,563 acciones.
- Venta de una opción del tipo 5 que ampare 31,593 acciones.
- Venta de 60,398 unidades de subyacente.

El precio de esta cobertura es

$$P = -3{,}149{,}049$$

Y las Griegas se cubren en la siguiente proporción:

- La Delta se cubre en un 104.9985%.
- La Gamma queda cubierta en un 104.9993%.
- La Vega es cubierta en un 95.0004%.

El programa encontró una solución distinta, aprovechando los instrumentos financieros disponibles con la que se minimiza el precio a pesar de tener una restricción en el mercado. Evidentemente, el precio de esta cobertura es mayor, pues la restricción nos obliga a sacrificar precio, manteniendo el mismo nivel de cobertura del riesgo.

Como pudimos observar en este capítulo, la construcción de una cobertura óptima puede presentar complicaciones; además, la optimalidad de ésta dependerá de las necesidades del operador así como de las condiciones que el mercado imponga para ello.

Elegir entre mejorar el precio o disminuir el riesgo determinará el planteamiento a utilizar. La interpretación de los resultados y el completo entendimiento del problema son básicos para buscar el mayor beneficio, no sólo en el mercado financiero, sino en cualquier situación.

Interpretación correcta de resultados por parte del operador

Antes de finalizar el análisis planteado, se debe hacer hincapié en que los resultados obtenidos en el trabajo no deben ser malinterpretados.

La posibilidad de poder optimizar el precio surge, como queda evidenciado en los primeros capítulos, del sesgo que un operador mantenga sobre las variables financieras que afectan sus posiciones, ya sea por una opinión personal o por la falta de liquidez [13]que se pueda presentar en el mercado en un momento determinado.

[13] La imposibilidad de encontrar los productos financieros necesarios para realizar coberturas correctas puede generar incrementos de costos o el mantenimiento de riesgos no deseados por parte de los

Dado este sesgo, el ahorro que pueda conseguirse de la optimización en el precio de una cobertura no implica que necesariamente se vaya a reflejar una ganancia en el valor de las posiciones del operador. Cualquier posición descubierta (no sólo de opciones, sino de cualquier instrumento riesgoso) podría, eventualmente, generar una pérdida mucho mayor que el ahorro obtenido de la optimización de cualquier cobertura. En otras palabras, la misma situación que permite mejorar el precio de la cobertura puede ocasionar una fuerte devaluación de la posición de un operador.

De cualquier manera, no se podría culpar a la cobertura por ninguna pérdida, ya que éstas serán responsabilidad del operador y de las decisiones que éste tome con base en su opinión del mercado financiero.

Los problemas de optimización brindan un panorama distinto de cualquier situación. La construcción de una cobertura financiera no es la excepción. La flexibilidad del planteamiento utilizado permite complementar el problema de manera sencilla para adaptarlo a las situaciones reales asegurando que no existen mejores resultados que los que se obtienen al resolverlo.

---

operadores. Son ellos los que asumen la responsabilidad de las potenciales pérdidas que esas posiciones descubiertas puedan llegar a generar.

CONCLUSIONES

Cada decisión que se toma en el mercado financiero genera riegos que deben ser gestionados de manera correcta. La incertidumbre a la que está sujeta una posición depende de distintos factores. Cada uno de éstos genera exposiciones diferentes, identificadas como Griegas.

La gestión de los riesgos implica encontrar las coberturas de aquellas posiciones cuya exposición no se desea mantener. Para ello, podemos construir portafolios con los instrumentos financieros que se encuentran disponibles en el mercado y que generen las mismas Griegas que nuestra posición a cubrir, es decir, que estén afectados por los mismos factores de riesgo.

Una posición en opciones debe cubrirse con un portafolios que genere riesgos inversos sobre los mismos factores, de tal manera que éstos se neutralicen. Es natural, entonces, conformar su cobertura con una posición diferente en otras opciones. De igual manera el subyacente formará parte de ella para neutralizar el riesgo a cualquier movimiento adverso en su mismo valor.

La manera de escoger los instrumentos que conformarán la cobertura depende de distintas cuestiones, como pueden ser la aversión al riesgo (cuánto estamos dispuestos a asumir), la disponibilidad de instrumentos en el mercado (encontrar contrapartes que deseen contratar la posición opuesta a la nuestra, así como las condiciones necesarias de los contratos), límites de riesgo (la cantidad máxima permitida por las áreas responsables de su gestión en cada institución) entre otras.

En este trabajo se planteó una manera de escoger los instrumentos financieros necesarios y construir la cobertura de una posición en opciones cuyo objetivo es minimizar su precio. Para ello se propuso un modelo de programación lineal; se definieron variables de decisión, así como una función objetivo determinada por el precio de la cobertura y restricciones relacionadas con la necesidad de neutralizar el impacto de cada una de las Griegas.

Fue de suma importancia plantear la posibilidad de mantener algunos de los riesgos vivos para que el problema tuviera una aplicación práctica. De esta manera, se introdujo la variable α, la cual representa la proporción de riesgo que se puede dejar descubierto en un caso determinado. Pudimos observar que el valor de esta proporción influye fuertemente en el precio de la cobertura, pues, mientras menor sea el valor de α, se necesita encontrar un portafolios más exacto en cuanto a la disminución de los riesgos, sacrificando entonces el precio de éste; de igual manera, un valor amplio de α permitiría ser más flexibles al momento de cubrir los riesgos pero mejoraría el precio al poder aprovechar dicho margen para la construcción de la cobertura.

Este valor puede ser utilizado por un operador para adecuar el modelo a sus necesidades específicas de gestión de riesgo, considerando el panorama del mercado que éste posee, y las exposiciones de riesgo que mantiene vivas por posiciones previas dentro de su portafolios de operación.

Para encontrar las soluciones del problema, se utilizó el software LINGO, mostrando que los programas informáticos para la resolución de problemas de optimización reducen esfuerzos y tiempo de manera radical al momento de buscar las respuestas para estos modelos. Fue evidente en la realización de este trabajo que éstos son imprescindibles para un ahorro significativo de recursos así como para la dinamización y actualización del cálculo de la cobertura.

Se plantearon casos más cercanos a lo que se podría encontrar en la vida real y se adaptó el modelo original a cada uno de estos casos para obtener soluciones confiables.

Los resultados se apegaron totalmente a la lógica de cada situación.

Este método no sólo garantiza que la cobertura generada será la mejor, también proporciona un modelo versátil y flexible para implementar con simpleza cada uno de los casos particulares que se pudieran presentar, además de brindar una interpretación distinta, ya que el objetivo no es, como se pudiera pensar de manera intuitiva, cubrir los riesgos que se generan (lo cual se contempla en las restricciones), sino minimizar el precio.

Otro punto importante fue la necesidad de restringir el problema a variables enteras. Después de haber analizado lo sucedido al cambiar el dominio de éstas se puede concluir lo siguiente:

- Un redondeo a partir de valores reales no afecta demasiado al precio de la cobertura; sin embargo:
  - El redondeo puede fácilmente conducir a una solución no contenida en la región factible determinada por las restricciones, lo que en la vida real podría traducirse como un posible desacato a los límites impuestos para la operación.
  - El redondear a partir de un valor real no considera que probablemente existan mejores soluciones cuyo precio sea menor.

En determinado momento se planteó el problema desde otra perspectiva. Se dejó a un lado el objetivo de minimizar el precio con el fin de encontrar un valor mínimo de riesgos descubiertos. Después de realizado dicho ejercicio se pudo concluir que:

- El modelo que se utilice dependerá de las necesidades de la construcción de la cobertura, así como de las condiciones que se puedan presentar en el mercado en un momento determinado.
- Al buscar un valor mínimo de riesgo descubierto no se encuentra el mejor precio para dicho nivel de cobertura.
- El precio de la cobertura dependerá tanto de la cantidad de riesgo que se permita mantener, así como de las posiciones que se puedan encontrar en el mercado. Mientras más dificultades existan para encontrar posiciones, el precio a pagar por la cobertura será mayor y viceversa.
- La optimización del precio de la cobertura no garantiza, en ningún caso, la posibilidad de reconocer una ganancia inmediata. La posibilidad de encontrar un precio óptimo para la cobertura surge de la imposibilidad de que ésta sea perfecta, en otras palabras, al no ser posible neutralizar totalmente los riesgos generados por una posición en un producto financiero derivado se deben mantener posiciones abiertas (riesgos vivos) lo que

evidentemente brinda flexibilidad a la construcción de una cobertura (y a su precio, por supuesto). Cualquier posición abierta puede traducirse en una ganancia aún mayor, si el mercado se mueve favorablemente (respecto a los riesgos que se mantienen descubiertos), o en una pérdida superior a cualquier ahorro que la optimización del precio de la cobertura haya generado si el movimiento del mercado no es favorable, materializándose los riesgos que se mantienen. Ninguna de estas situaciones, en ningún caso, se podrán atribuir a la construcción cobertura.

Para terminar, este trabajo permite dar un enfoque diferente a las coberturas. Si bien el objetivo de éstas siempre será el reducir el impacto de un posible movimiento adverso en los factores de riesgo de una posición, se debería siempre buscar la mejor manera de construir dicha cobertura. Hacerlo de manera correcta permite no sólo reducir pérdidas, sino también reducir costos.

En un mercado financiero dinámico y en constante cambio, la optimización de costos y ganancias debe ser una prioridad. Los modelos para encontrar las mejores estrategias pueden representar una significativa diferencia. Implementarlos es una necesidad.

BIBLIOGRAFÍA

HERNÁNDEZ AYUSO, Ma. Del Carmen. *Introducción a la programación lineal*. Distrito Federal, Universidad Nacional Autónoma de México, 2010, 2a edición.

WINSTON, Wayne L. *Operations research. Applications and algorithms*. Boston, PWS-KENT, 1991, 2a edición.

HULL, John C. *Options, futures and other derivatives*. New Jersey, Pearson Prentice Hall, 2009, 7a edición.

ROSS, Sheldon M. *Stochastic processes*. New York, John Wiley & Sons Inc., 1996, 2a edición.

BOYCE, William E. y **DIPRIMA**, Richard C. *Introducción a las ecuaciones diferenciales*. New York, John Wiley & Sons Inc., 1970, 1ª edición.

LINGO. *The modeling language and optimizer*. Chicago, LINDO Systems Inc, 2017.

KLUGMAN, Stuart A., **PANJER**, Harry H. y **WILLMOT**, Gordon E. *Loss Models. From data to decisions*. New York, John Wiley & Sons Inc, 2004, 2a edición.