



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

PROPIEDADES TOPOLÓGICAS Y ALGORITMICAS DE LA  
GRÁFICA PARA LA RED DE INTERCONEXIÓN  
HIPERESTRELLA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

LICENCIADO EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

P R E S E N T A :

CESAR ANTONIO FLORES CASTRO

DRA. MARIA DE LUZ GASCA SOTO

CIUDAD DE MÉXICO, 2019





Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Flores

Castro

Cesar Antonio

56 16 28 77

Universidad Nacional Autónoma de

México

Facultad de Ciencias

Ciencias de la Computación

093154239

2. Datos del tutor

Dra

María de Luz

Gasca

Soto

3. Datos del sinodal 1

Dr

Armando

Castañeda

Rojano

4. Datos del sinodal 2

M en C

Carlos

Zerón

Martínez

5. Datos del sinodal 3

Dr

José de Jesús

Galaviz

Casas

6. Datos del sinodal 4

Dra

María del Rocío

Sánchez

López

7. Datos del trabajo escrito

Propiedades topológicas y algorítmicas

de la gráfica para la red de

Interconexión Hiperestrella

117 p.

2019

# Tabla de Contenidos

<b>Resumen</b>	<b>vii</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Modelos de cómputo en paralelo</b>	<b>4</b>
1.1. Taxonomías de arquitecturas paralelas . . . . .	5
1.2. El modelo PRAM (Parallel Random Access Machine) . . . . .	6
1.2.1. Acceso a la Memoria . . . . .	6
1.3. Análisis de algoritmos paralelos . . . . .	9
1.4. Redes de interconexión . . . . .	11
1.4.1. Arreglo lineal y Anillo . . . . .	14
1.4.2. Malla . . . . .	15
1.4.3. Hipercubo . . . . .	15
1.4.4. n-Estrella . . . . .	18
<b>2. La red de interconexión Hiperestrella</b>	<b>21</b>
2.1. Definición . . . . .	21
2.1.1. Automorfismo . . . . .	22
2.2. Propiedades topológicas . . . . .	24
2.2.1. Escalabilidad . . . . .	25
2.2.2. Conexidad . . . . .	28
2.2.3. Diámetro . . . . .	30
2.2.4. Propiedades de simetría . . . . .	36
2.3. Inmersión de otras gráficas . . . . .	45
<b>3. Propiedades de la gráfica hiperestrella</b>	<b>55</b>
3.1. Relación con otras gráficas . . . . .	55
3.1.1. Gráfica impar . . . . .	55

3.1.2. Gráfica par . . . . .	60
3.2. Área de la superficie (surface area) . . . . .	62
<b>4. Características de comunicación en la hiperestrella</b>	<b>66</b>
4.1. Difusión de la información . . . . .	66
4.1.1. Esquema de difusión de la información uno a todos en $HS(2n, n)$ . . . . .	69
4.2. Vecindad de difusión de la información . . . . .	73
4.2.1. Vecindad de difusión de la información en el modelo de un sólo puerto $HS(2n, n)$ . . . . .	73
<b>5. Hiperestrella doblada</b>	<b>78</b>
5.1. Introducción . . . . .	78
5.2. Algoritmo de enrutamiento . . . . .	79
5.3. Propiedades de la gráfica hiperestrella doblada . . . . .	82
5.4. Relación con otras gráficas . . . . .	85
5.5. Tolerancia a fallos . . . . .	88
<b>Conclusiones</b>	<b>94</b>
<b>A. Álgebra superior</b>	<b>95</b>
<b>B. Teoría de gráficas</b>	<b>102</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>107</b>

# Índice de Figuras

1.1.	Máquina de memoria compartida. . . . .	7
1.2.	Arreglo lineal con 5 procesadores. . . . .	15
1.3.	Malla de $3 \times 3$ . . . . .	15
1.4.	Hipercubos (a) $Q_2$ (b) $Q_3$ (c) $Q_4$ . . . . .	16
1.5.	Gráficas (a) $TQ_2$ , (b) $TQ_3$ y (c) $TQ_4$ . . . . .	17
1.6.	(a) $FQ_2$ , (b) $FQ_3$ y (c) $FQ_4$ . . . . .	18
1.7.	Gráficas $n$ -estrella con $n \in \{2, 3, 4\}$ . . . . .	19
1.8.	Gráficas $n$ -estrella con $n \in \{2, 3, 4\}$ . . . . .	20
2.1.	Gráfica hiperestrella $HS(6,3)$ . . . . .	22
2.2.	Gráfica $S(6, 3)$ . . . . .	23
2.3.	$HS(5,2)$ izquierda y $HS(5,3)$ derecha. . . . .	26
2.4.	$HS(5,2)$ izquierda conectada a $HS(5,3)$ derecha. . . . .	27
2.5.	$HS(6,3)$ generada a partir de $HS(5,2)$ izquierda y $HS(5,3)$ derecha. . . . .	28
2.6.	$HS(6,3)$ etiquetada con los vértices de $HS(5,2)$ y $HS(5,3)$ . . . . .	29
2.7.	$HS(6,3)$ ejemplo del Teorema 2. . . . .	30
2.8.	Hiperestrellas (a) $HS(3,1)$ , (b) $HS(4,1)$ , (c) $HS(5,1)$ . . . . .	36
2.9.	Ejemplo Lema 2. . . . .	39
2.10.	Ejemplo Lema 3. . . . .	40
2.11.	Árbol para $u = 010110$ y $v = 000111$ usando la Regla 1. . . . .	42
2.12.	Árbol para $u = 110001$ y $v = 001011$ usando la Regla 2. . . . .	42
2.13.	Árbol para $u = 011001$ y $v = 000111$ con una ruta $Q: \langle 3, 5, 2, 4 \rangle$ . . . . .	43
2.14.	Gráfica $HS(4, 2)$ con niveles. . . . .	44
2.15.	Hipercubo $Q_4$ en niveles. . . . .	46
2.16.	Particiones $L_1^4$ y $L_2^4$ de $Q_1^4$ . . . . .	46
2.17.	Particiones $M_1^4$ y $M_2^4$ de $Q_1^4$ . . . . .	47
2.18.	Gráfica Hiperestrella $HS(5, 2)$ . . . . .	48
2.19.	Gráfica $Q_3$ etiquetada con vértices y aristas. . . . .	49

2.20.	Gráfica $Q_3$ inmersa en $HS(6, 3)$ .	50
2.21.	Gráfica $T_4$ .	52
2.22.	Gráfica $T_2$ con algunos vértices de $V(HS(6, 3))$ .	53
2.23.	Gráfica $T_2$ inmersa en $HS(6, 3)$ .	54
3.1.	Gráficas impares (a) $O_2$ , (b) $O_3$ .	56
3.2.	Gráfica $O_4$ .	57
3.3.	Gráfica $O_4^{-1}$ .	58
3.4.	(a) Gráfica $O_3$ intermedia y (b) $HS(5, 3)$ .	58
3.5.	Gráfica par $E_4$ con 20 vértices, grado 4 y diámetro 3.	61
3.6.	Gráfica par $E_4$ en capas.	62
3.7.	Vértices a distancia 2 de 0011 en $HS(4, 2)$ .	64
3.8.	Vértices a distancia 3 de 000111 en $HS(6, 3)$ .	65
4.1.	Árbol de expansión para $O_3^{-1}$ .	68
4.2.	Árbol de expansión para $HS(6, 3)$ .	71
4.3.	$HS(6, 3)$ agrupada como una gráfica bipartita balanceada.	74
4.4.	Gráfica $HS(8, 4)$ .	75
5.1.	Gráfica hiperestrella doblada $FHS(6, 3)$ .	79
5.2.	$FHS(6, 3)$ agrupada como una gráfica bipartita balanceada.	86

# Índice de Tablas

3.1. Función $\phi : V(O_3^{-1}) \rightarrow V(HS(5, 3))$ sobre los vértices de $O_3^{-1}$ . . . . .	59
3.2. Bit 1 en común entre $\beta_i$ y $\alpha_i$ . . . . .	59
3.3. Área de la superficie de la hiperestrella $HS(2n, n)$ . . . . .	65
4.1. Pasos del esquema de difusión uno a todos en $HS(6, 3)$ . . . . .	72
5.1. Comparación entre $FHS$ y otras redes, donde $n = 2k$ . . . . .	88

# Agradecimientos

Los años pasados en la UNAM me han dado la oportunidad de vivir muchas experiencias, como son la gran generosidad del cuerpo docente, el vínculo existente entre los miembros de la comunidad que incluso puede transformarse en un cariño especial por alguien, estas experiencias se convirtieron en momentos invaluableles.

Los profesores no sólo transmiten su conocimiento también permiten la expresión de las ideas y brindan su apoyo, lo cual muestra un compromiso con la enseñanza que vas allá de lo establecido, influyendo de manera positiva en las personas y te hacen ser mejor.

Los amigos que pasaron tiempo en las clases, trabajos, tareas o esparcimiento, crearon grandes momentos y encuentros muy valiosos. También hubieron momentos con sentimientos encontrados, donde nos dejamos llevar por las emociones y nos lastimamos mutuamente, por eso mismo, todas y cada una de las experiencias que vivimos en la UNAM nos dan la seguridad de haber crecido.

Después de todo, logré llegar a este día gracias a todos los errores y momentos que pasé. Lo que he aprendido no está solamente en mi corazón se encuentra en mi mente para utilizarlo en mi vida.

Gracias a todas las personas que me apoyaron directa e indirectamente, a este generoso país que permite tener un gran centro educativo como la UNAM donde los afectos se convirtieron en familia a mis “hijas” y “hermanita” quienes fueron en su momento una motivación para poder continuar con mis estudios.

Gracias a mis sinodales Rocio Sánchez, Armando Castañeda, Carlos Zerón, José Galaviz por su tiempo, comentarios, sugerencias y consejos, pero sobre todo por sus vastos conocimientos y calidad humana.

Me faltan palabras para expresar lo agradecido que estoy con Lucy Gasca su ejercicio de paciencia, orientación, sencillez, enseñanzas y su valioso punto de vista hicieron posible terminar este trabajo.

# Resumen

La topología de una red de interconexión es importante en computación paralela; en particular, la red de interconexión hiperestrella, que es un híbrido de las redes hipercubo y estrella, supera en rendimiento al hipercubo y algunas de sus variantes, en lo concerniente al costo de la red, utilizando el producto del grado y el diámetro como medida.

Se revisarán algunas propiedades de la gráfica hiperestrella como la simetría, conexidad e inmersión, además de un algoritmo de enrutamiento y un algoritmo simple de vecindad de difusión de la información.

Se analizará la gráfica hiperestrella desde el punto de vista tanto topológico como algorítmico. Respecto a las propiedades topológicas, se trata de establecer relaciones entre la hiperestrella con las gráficas impares, hipercubo y toro. También se da una ecuación formal para el área de la superficie de la gráfica.

Se presentan dos algoritmos de enrutamiento, uno para la hiperestrella con forma regular y otro para la variante doblada, también se revisa un algoritmo simple de difusión de la información para la hiperestrella. Además, se demuestra que la hiperestrella doblada, tiene tolerancia a fallos óptima.

# Introducción

Un sistema con varios procesadores necesita de medios de comunicación entre ellos, por lo cual será necesaria una vía de comunicación, para unir físicamente la memoria compartida a todos los procesadores o para el intercambio de datos entre ellos, conectados mediante una red de interconexión.

El modelo de una red de interconexión como una gráfica, donde un procesador se puede representar como un vértice, y un canal de comunicación entre ellos, se representa como una arista, desempeña un papel importante en los aspectos de comunicación de la red.

El cómputo paralelo es importante para aplicaciones que demandan alto rendimiento el cual depende en gran medida de las propiedades topológicas de la gráfica elegida para ella.

Las propiedades relativas a la topología son relevantes para la comunicación en la red de interconexión, ya que repercuten en un menor tiempo de transmisión de los mensajes y en el rendimiento de una computadora paralela.

El modelo gráfico que tiene un menor grado y diámetro se considera más conveniente, porque esto implica un menor costo en la implementación del hardware, además de menor tiempo en la transmisión de los mensajes.

En esta tesis se avanza en el entendimiento de la gráfica *Hiperestrella* y su variante la *Hiperestrella doblada* las cuales fueron propuestas por Lee, [13] y Kim, [14] se ilustran sus propiedades para mejorar su comprensión, se hace más perceptible la correspondencia con otras gráficas al trazar sus modelos con relación a la hiperestrella. En general se pretende divulgar el conocimiento de la red de interconexión hiperestrella de tal manera que sea más fácil de

comprender.

Este trabajo está organizado de la siguiente forma:

En el capítulo 1 se exponen las bases teóricas del cómputo paralelo, necesarias para la comprensión del ámbito en el que se desarrollan las redes de interconexión, abarca desde los modelos de cómputo paralelo hasta algunas topologías de redes de interconexión, sin dejar de lado la parte algorítmica.

Durante el capítulo 2 se introduce la gráfica hiperestrella, se ven sus propiedades topológicas como son grado, diámetro, simetría, escalabilidad, conectividad e inmersión de otras gráficas. Estas propiedades dan soporte teórico a los temas principales de una red de interconexión. Además, se ve un algoritmo de enrutamiento para construir una ruta más corta.

El capítulo 3 es de las propiedades de la gráfica hiperestrella, su relación con las gráficas pares e impares, además del área de la superficie para la hiperestrella, tomando en cuenta principalmente su versión regular.

Para el capítulo 4 se consideran las características de comunicación de la hiperestrella, se presenta un esquema de difusión uno a todos en la hiperestrella, además de la vecindad de difusión de la información, en el modelo de un solo puerto.

Se demuestra que la gráfica hiperestrella regular es bipartita balanceada. Para terminar el capítulo, se demuestran propiedades relacionadas con caminos entre vecinos de un vértice fuente fijo.

En el capítulo 5 se presenta una variación de la gráfica hiperestrella llamada gráfica hiperestrella doblada. Entre otras cosas, se verá un algoritmo de enrutamiento, sus propiedades, la relación con otras gráficas y su tolerancia a fallos.

Finalmente, se presentan las conclusiones de este trabajo y dos anexos con conceptos básicos de álgebra superior y teoría de gráficas.

# Capítulo 1

## Modelos de cómputo en paralelo

Un sistema con varios procesadores necesita de medios de comunicación entre dichos procesadores, esta función de comunicación puede realizarse básicamente de dos formas:

1. Intercambio de información mediante accesos a la memoria por parte de los diversos procesadores. En este caso se establece la comunicación mediante lectura y escritura a una *memoria compartida*.
2. A través del envío de copias de información desde cada uno de los procesadores hacia los demás elementos de proceso con los que se quiera comunicar, en una *memoria distribuida*. Los modelos de *paso de mensajes* están basados en primitivas de comunicación entre los procesadores.

En ambos casos será necesaria una vía de comunicación, para unir físicamente la memoria compartida a todos los procesadores o para el intercambio de datos entre los procesadores, conectados mediante una red de interconexión.

## 1.1. Taxonomías de arquitecturas paralelas

Una clasificación básica de las arquitecturas de computadoras se llama taxonomía de Flynn, [3]. Organiza las arquitecturas en cuatro categorías basadas en la presencia de uno o varios flujos de instrucciones y datos.

**Definición 1** Una **secuencia de instrucciones** es un conjunto de instrucciones secuenciales para ser ejecutado por un solo procesador; mientras que la **secuencia de datos** es el flujo secuencial de los datos requeridos por la secuencia de instrucciones.

Las cuatro categorías de Flynn son los siguientes:

- **Instrucción simple, flujo de datos simple, SISD**  
(*Single Instruction, Single Data Stream*)

Una computadora SISD es una máquina secuencial general, en la que solamente una instrucción se ejecuta en cualquier momento. No hay paralelismo ni en la instrucción ni en el flujo de datos en esta clase de equipos, de los cuales pocos se fabrican en la actualidad, ya que las computadoras de hoy en día utilizan pequeños grados de paralelismo, para lograr una mayor eficiencia. En la mayoría de las situaciones, son capaces de ejecutar simultáneamente dos o más instrucciones.

- **Instrucción múltiple, flujo de datos simple, MISD**  
(*Multiple Instruction, Single Data Stream*)

Esto significa que varias instrucciones operan en una sola pieza de datos. Hay dos maneras de interpretar la organización de una máquina MISD. Una es aquella que contiene  $N$  procesadores, cada uno con su propia unidad de control y todos los procesadores comparten una unidad de memoria común. En este tipo de equipos, el paralelismo se consigue mediante el uso de varias unidades funcionales para realizar diferentes operaciones sobre los mismos datos, pero en la práctica, no existe una implementación conocida de esta clase de equipos. Otra manera es considerar una clase de máquinas en las que los datos fluyen a través de una serie de unidades de procesamiento con un gran pipeline, como son los arreglos sistólicos y procesadores vectoriales.

- **Instrucción simple, flujo de datos múltiple, SIMD**  
(*Single Instruction, Multiple Data Stream*)

Una computadora SIMD consiste de  $N$  procesadores idénticos, cada uno con memoria local propia para almacenar datos. Todos los procesadores funcionan bajo el control de un flujo de instrucciones único expedido por una unidad de control central. Los procesadores operan de forma sincronizada: en cada fase, todos los procesadores ejecutan la misma instrucción en un elemento de datos diferente. Las computadoras SIMD son más versátiles que las computadoras de MISD.

- **Instrucción múltiple, flujo de datos múltiple, MIMD**  
(*Multiple Instruction, Multiple Data Stream*)

En una computadora MIMD, múltiples procesadores autónomos ejecutan simultáneamente distintas instrucciones en datos diferentes, donde cada procesador tiene su propia unidad de control y memoria local. Por lo tanto, los procesadores están ejecutando potencialmente distintos programas en diferentes datos mientras se resuelven subproblemas distintos dentro de un mismo problema. Esto hace a las computadoras MIMD más potentes que las otras tres clases de computadoras.

## 1.2. El modelo PRAM (Parallel Random Access Machine)

La máquina paralela de acceso aleatorio, que se muestra en la figura 1.1, se compone de un grupo de procesadores idénticos, una memoria común que es compartida por estos procesadores y una unidad de acceso a la memoria, [1]. Cada procesador es similar a la máquina de acceso aleatorio, excepto que su CPU puede acceder a localidades tanto de su memoria local de acceso aleatorio, como a su memoria común, [18].

### 1.2.1. Acceso a la Memoria

En un paso de ejecución determinado, un procesador puede realizar algún cálculo, leer o escribir en la memoria compartida. Dependiendo de si está permitido o no que dos o más procesadores puedan leer o escribir en la misma

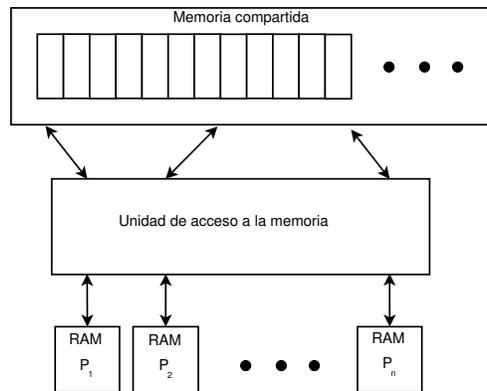


Figura 1.1: Máquina de memoria compartida.

posición de memoria a la vez, los equipos bajo el modelo PRAM pueden ser clasificados en cuatro grupos:

- **Lectura exclusiva, escritura exclusiva, EREW**  
(*Exclusive Read, Exclusive Write*)

Es el modelo más restrictivo, solo un procesador puede leer el contenido de una posición determinada de memoria y solo un procesador puede escribir en una posición determinada de memoria, durante una unidad de tiempo. En este escenario ningún conflicto se producirá cuando los procesadores acceden a sus datos.

- **Lectura exclusiva, escritura simultánea, ERCW**  
(*Exclusive Read, Concurrent Write*)

Varios procesadores puede escribir en una localidad determinada de memoria a la vez, pero solo un procesador puede leer una localidad de memoria. Este modelo PRAM es poco práctico.

- **Lectura concurrente, escritura exclusiva, CREW**  
(*Concurrent Read, Exclusive Write*)

Durante una unidad de tiempo, varios procesadores pueden leer una posición determinada de memoria, pero solo un procesador puede escribir en ella.

- **Lectura concurrente, escritura simultánea, CRCW**  
(*Concurrent Read, Concurrent Write*)

Varios procesadores pueden leer o escribir en la misma localidad de memoria al mismo tiempo. En teoría, este modelo es el más poderoso de los cuatro, pero representa un extremo el cual no refleja la realidad como la conocemos, [18].

Los conflictos son inevitables, cuando se permite una instrucción de escritura concurrente en un modelo PRAM. Con el fin de decidir el contenido resultante de instrucciones sobre una posición de memoria específica, cuando varios procesadores intentan escribir simultáneamente en ese lugar, se deben adoptar algunos métodos al ejecutar una instrucción de escritura concurrente. Estos métodos incluyen:

1. **Escritura concurrente prioritaria**

Se asignan prioridades a los procesadores, sólo se le permite escribir al procesador con la prioridad más alta. El algoritmo determina cuando se adecuan las prioridades.

2. **Escritura concurrente común**

Sólo se les permite escribir a los procesadores, si están tratando de hacerlo con el mismo valor. En este caso, un procesador que se selecciona arbitrariamente tiene éxito. La instrucción se indicará como sigue:

(a) **Falla común:** Si los valores por escribir en una localidad de memoria no son todos iguales, entonces el contenido de la localidad de memoria no se modifica.

(b) **Colisión común:** Esta instrucción requiere una etiqueta de "fracaso", que se almacena en la localidad de memoria, en caso de que la escritura concurrente no tenga éxito, debido a que dos o mas procesadores intentan escribir valores diferentes.

(c) **Falla segura común:** Aquí el fracaso no es tolerado. El algoritmo se debe diseñar de tal manera que, cuando varios procesadores deseen escribir en la misma localidad de memoria, deben tratar de escribir el mismo valor. En cualquier otro caso, la ejecución del algoritmo se termina, [1].

### 3. **Escritura concurrente arbitraria**

De todos los procesadores que intentan escribir simultáneamente, en una localidad de memoria, cualquiera puede tener éxito sin afectar la exactitud del algoritmo. Sin embargo, el algoritmo debe especificar exactamente, cómo se va a seleccionar al procesador que escribió de manera exitosa.

### 4. **Escritura concurrente aleatoria**

Aquí, el procesador que tiene éxito en la escritura es elegido por un proceso aleatorio. Esta instrucción la pueden usar algoritmos que incluyen un elemento aleatorio en su ejecución.

### 5. **Escritura concurrente combinada:** En este modelo de escritura simultánea, todos los valores que esos procesadores pretenden escribir concurrentemente en la misma localidad de memoria se combinan en un valor único, para después registrarse en esa localidad de memoria. Esta instrucción tiene varias formas, dependiendo de la función que el algoritmo tiene que usar, para combinar los valores antes de guardar el resultado. Las variantes disponibles son las siguientes:

(a) **Funciones aritméticas:** Los valores que se escriben son sumados ó multiplicados.

(b) **Funciones lógicas:** Un conjunto de valores lógicos se pueden combinar usando las expresiones `AND`, `OR` y `XOR`. Las negaciones de estas funciones también están disponibles, llamadas `NAND`, `NOR` y `NXOR` respectivamente.

(c) **Función de selección:** Se seleccionan los valores más pequeños o más grandes para ser escritos en una localidad de memoria.

## 1.3. **Análisis de algoritmos paralelos**

Un algoritmo paralelo puede ser significativamente más rápido que la mejor posible solución secuencial. Los criterios más importantes que se usan para analizar un algoritmo paralelo son: **tiempo de ejecución, cuántos procesadores usa** y el **número total de pasos que ejecuta**. Un criterio no tan ampliamente usado es la **probabilidad de éxito para completar la tarea**.

## Tiempo de ejecución

Está definido como el tiempo tomado por el algoritmo, para resolver un problema en una computadora. Específicamente, es el tiempo transcurrido entre el momento en que el primer procesador en una computadora en paralelo empieza a operar en la entrada inicial y el momento en que el último procesador termina produciendo la salida final.

Se tiene que poner atención al peor caso, que es el tiempo requerido para resolver el ejemplar más difícil del problema, usando este algoritmo, [1].

Usualmente se cuentan cuántos pasos elementales son ejecutados por un algoritmo cuando se resuelve un problema en el peor caso, como una medida del tiempo de ejecución. Existen dos tipos diferentes de **pasos elementales**:

1. *Pasos de cómputo*: Es una operación aritmética o lógica ejecutada en uno o dos datos dentro de un procesador, como la suma, comparación e intercambio de dos números.
2. *Pasos de enrutamiento*: Tienen lugar cuando un dato de tamaño constante es transmitido de un procesador a otro procesador vía memoria compartida o una red de interconexión.

Cada paso de cómputo toma un número constante de unidades de tiempo, mientras que, un paso de enrutamiento, depende de la distancia entre los procesadores. El tiempo que tarda un paso de enrutamiento, depende de si los procesadores comparten una memoria común o se comunican mediante una red de interconexión.

El tiempo de ejecución de un algoritmo paralelo está en función del tamaño de la entrada. Para un problema de tamaño  $N$ , se usa  $t(N)$  para denotar el número de unidades de tiempo del peor caso, requeridas por el algoritmo paralelo. Se usa  $p(N)$  para denotar el número de procesadores usados por un algoritmo paralelo para resolver un problema de tamaño  $N$ .

## Costo

El **costo** denotado por  $c(N)$ , de un algoritmo paralelo para un problema de tamaño  $N$ , es una cota superior del número total de pasos elementales ejecutados, está definido como  $c(N) = t(N) \times p(N)$ .

## Número de procesadores

Otro criterio para la medida del rendimiento de un algoritmo paralelo es el número de procesadores que usa. Existen varias razones para incluir este número en el análisis, entre ellas están las siguientes:

1. Se prefiere el algoritmo que usa menos procesadores, el menos costoso. Al tratar de mantener todos los procesadores ocupados, mientras se resuelve un problema, una computadora paralela puede necesitar un tiempo de ejecución mayor, que si hubiera usado menos procesadores.
2. Si dos algoritmos usan la misma cantidad de procesadores, esto sugiere que se necesita encontrar otro criterio para evaluar los algoritmos.
3. En algunos casos, un tiempo óptimo, o cierta velocidad de procesamiento, solo se puede alcanzar con un número dado de procesadores.
4. Puede ser que el desempeño de un algoritmo paralelo baje de manera grave, si el número de procesadores cae por debajo de cierto valor.
5. Si existe una cota inferior en el número total de pasos requeridos para resolver un problema, entonces elegir un cierto número de procesadores pone una cota inferior en el tiempo de ejecución de un algoritmo paralelo.
6. Un número mínimo de procesadores se puede necesitar para garantizar el éxito de los cálculos.
7. La estructura de una computadora paralela para la cual un algoritmo esta destinado, puede no adaptarse al número de procesadores requeridos por el algoritmo.

## 1.4. Redes de interconexión

A diferencia de las máquinas de memoria compartida, los procesadores en una red de interconexión están conectados entre sí, por medio de enlaces directos, con el fin de afectar el intercambio de datos. Cada procesador tiene su propia memoria local, inaccesible a los demás, además de que se tienen  $M$  ubicaciones de memoria distribuidas entre los  $N$  procesadores; los enlaces entre un par de procesadores tienen líneas de comunicación de **dobles vía**,

en otras palabras, dos procesadores conectados por un **enlace** pueden intercambiar datos simultáneamente. También se les llama vecinos.

La comunicación entre los distintos procesadores, debe realizarse mediante paso de mensajes, es importante entonces que la longitud de la ruta más grande que conecta dos procesadores sea lo más pequeña posible, dicha longitud se conoce como **diámetro**; el diámetro representa una cota sobre el número de saltos que realizaría un mensaje para llegar de un procesador a otro. También son importantes los algoritmos de enrutamiento que marcan las rutas que deben seguir los mensajes para evitar las colisiones, ya que todos los procesadores envían información a la vez.

Usualmente los procesadores con memoria distribuida, tienen menor capacidad de memoria que el único elemento de memoria de un procesador con memoria compartida; entonces los datos necesarios para resolver un problema, deben distribuirse de forma adecuada entre los procesadores, intentando minimizar la duplicación de datos y equilibrar la carga entre los distintos procesadores.

Cuando se diseñan redes de interconexión se deben tomar ciertas consideraciones, entre las cuales están:

1. **Topología.** La topología de las redes de interconexión; es decir, la forma en que están conectados los  $N$  procesadores.
2. **Número de vecinos.** Cuando el número de vecinos de un procesador es constante ó una función de  $N$ , se supone que un procesador puede enviar y recibir datos a un número constante de vecinos en una unidad de tiempo.
3. **Tamaño constante de mensajes por transmisión.** Cada mensaje que un procesador pretende transmitir se considera un dato de tamaño fijo. Si  $m$  datos son enviados desde un procesador a otro, entonces se necesitan  $m$  transmisiones.
4. **Tiempo de iniciación constante por comunicación.** Sea  $P$  un procesador con  $x$  vecinos. El valor de  $x$  puede ser determinado por una función que depende de  $N$ , el número de procesadores o puede ser un valor constante, con el fin de seleccionar uno de sus vecinos para la

transmisión, el procesador  $P$  necesita un tiempo determinado que se define en función de  $x$ .

5. **Tiempo constante por vínculo.** Si el vínculo que conecta dos procesadores tiene longitud  $l$ , entonces el tiempo para recorrer el vínculo está en función de  $l$ .
6. **Tiempo constante para recibir un dato.** Si un procesador tiene  $x$  vecinos, donde  $x$  puede ser constante o una función de  $N$ , entonces necesita tiempo que está en función de  $x$ , para seleccionar un vecino del cual recibirá los datos.
7. **Tiempo constante por acceso a la memoria.** Cada procesador tiene una memoria de tamaño  $M/N$ . Si un procesador es la fuente o el destino de un dato, debe leer o escribir el dato en su memoria. Esto toma tiempo que esta en función de  $M/N$ .
8. **Comunicación estática.** A menos que otra cosa sea establecida, se supone que las rutas están predefinidas. En otras palabras, la dirección del procesador destino se usa para encontrar una ruta más corta desde el procesador origen, [1].
9. **Sincronía.** Se supone que todos los procesadores operan de manera síncrona. En un paso que requiere tiempo constante, un procesador puede recibir datos desde un número constante de vecinos, realizar un cálculo, además de enviar datos a un número constante de vecinos.
10. **Procesador.** Cada procesador en la red puede realizar operaciones y acceder a su propia memoria local, además de comunicarse con sus vecinos, mediante puertos que tiene a su disposición.

La red de interconexión se modela usualmente, como una gráfica no dirigida  $G = (V, E)$ . El conjunto de vértices  $V$  de  $G$  representa los procesadores de la red de interconexión, las aristas en  $E$  representan los enlaces entre pares de procesadores vecinos. Existe una arista entre dos vértices en  $G$  si y solo si existe un enlace directo entre dos procesadores correspondientes en la red de interconexión.

A lo largo de esta tesis, se usarán los términos red de interconexión y gráfica de manera indistinta. Por lo tanto, los criterios usados para evaluar una

gráfica no dirigida también son adecuados para el análisis de la red de interconexión correspondiente.

**Definición 2** La **tolerancia a fallos** de una red es la propiedad que permite, que ésta siga funcionando cuando algunos de sus componentes fallan.

Usualmente las redes y, por tanto, las gráficas que las modelan, son conexos. Es deseable que una red se mantenga conexas si algún fallo se produce. Una medida de tolerancia a fallos en gráficas, corresponde a la eliminación de vértices o aristas.

Las redes de interconexión también están clasificadas en dos modelos, basados en la cantidad de vecinos con los cuales un procesador se puede comunicar al mismo tiempo.

**Definición 3** En el modelo de **un solo puerto**, cada procesador, o realmente el router asociado, puede enviar o recibir solo un mensaje en cada ciclo de comunicación, [17].

**Definición 4** En el submodelo de *SIMD* conocido como modelo de comunicación **todo puerto** se permite la transmisión y recepción desde un procesador hacia todos sus vecinos a la vez, [17].

Los problemas de comunicación en las redes de interconexión son a menudo considerados por separado para estos dos modelos diferentes.

#### 1.4.1. Arreglo lineal y Anillo

En la red de interconexión denominada arreglo lineal, cada procesador está conectado a dos vecinos, excepto para los dos procesadores en los extremos, los cuales tienen solo un vecino. Por lo tanto, todos los procesadores de esta red de interconexión forman un arreglo unidimensional. Una red de interconexión arreglo lineal se muestra en la figura 1.2. Se puede ver que el máximo grado del arreglo lineal de tamaño  $N$  es 2 y el diámetro es  $O(N)$ . Si los dos procesadores en los extremos están conectados por un enlace directo, entonces se forma un caso especial del arreglo lineal, denominada red de interconexión **anillo**.

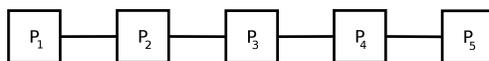


Figura 1.2: Arreglo lineal con 5 procesadores.

### 1.4.2. Malla

La gráfica no dirigida correspondiente a la red de interconexión denominada malla 2-dimensional  $M_n$ , es un arreglo de dos dimensiones. El procesador en la fila  $i$  y la columna  $j$  es denotado por  $P_{i,j}$  sus vecinos serán  $P_{i-1,j}$ ,  $P_{i+1,j}$ ,  $P_{i,j-1}$  y  $P_{i,j+1}$ , si existen. Excepto para los procesadores en las filas y columnas en el contorno, todos los procesadores tienen cuatro vecinos. Los procesadores en las filas y columnas del contorno tienen menos de cuatro vecinos. Así, el máximo grado de la malla es 4. Se puede demostrar que el diámetro de una malla con  $m$  filas y  $n$  columnas es  $O(m + n)$ .

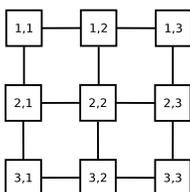


Figura 1.3: Malla de  $3 \times 3$ .

Otra forma de definir y generalizar la malla es como el producto cartesiano de  $n$  rutas  $P_{m_1} \times P_{m_2} \times \dots \times P_{m_n}$ , donde  $P_{m_i}$  es la ruta con  $m_i$  vértices; de la misma forma, una red de interconexión 2-dimensional denominada **Toro** y denotada por  $T_n$ , está definida como el producto cartesiano de  $n$  ciclos  $C_{m_1} \times C_{m_2} \times \dots \times C_{m_n}$ , donde  $C_{m_i}$  es un ciclo con  $m_i$  vértices. Las mallas y los toros son ampliamente usados en arquitecturas de computadoras, [8]. La figura 1.3 muestra una malla de  $3 \times 3$ , los índices de fila y de columna se muestran en la gráfica.

### 1.4.3. Hipercubo

Un hipercubo  $n$ -dimensional  $Q_n$  consiste de  $N = 2^n$  procesadores conectados como sigue: Cada procesador está etiquetado por un número

binario de  $n$ -bits. Dos procesadores están conectados uno al otro si y solo si sus etiquetas binarias difieren exactamente en una posición de bit, [8].  $Q_n$  se puede definir recursivamente usando el producto cartesiano como sigue:

$$Q_n = \begin{cases} K_2 & n = 1 \\ Q_{n-1} \times K_2 & n \geq 2 \end{cases}$$

El máximo grado y diámetro de un hipercubo  $n$ -dimensional son ambos  $n$ . Podría decirse que la gráfica hipercubo es la más usada como red de interconexión, aunque existen muchas variantes del hipercubo; en este apartado solo se dará una breve introducción a tres de estas variantes. La figura 1.4 muestra los hipercubos  $Q_2$ ,  $Q_3$  y  $Q_4$ .

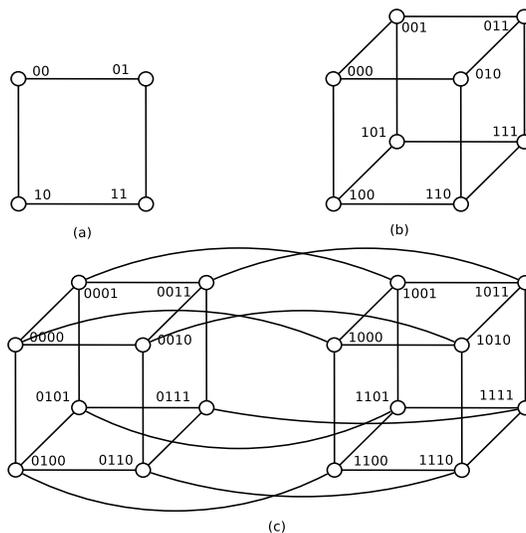


Figura 1.4: Hipercubos (a)  $Q_2$  (b)  $Q_3$  (c)  $Q_4$ .

### 1.4.3.1. Cubo torcido (Twisted cube)

Sea  $C$  cualquier 4-ciclo en  $Q_n$ . Además, sean  $(u, x)$  y  $(v, y)$  dos aristas independientes (no comparten un vértice extremo) cualesquiera en  $C$ . La gráfica  $n$ -cubo torcido  $TQ_n$ , se construye como sigue: Se eliminan las aristas  $(u, x)$  y  $(v, y)$  de  $Q_n$  y se conectan mediante aristas, el vértice  $u$  con el vértice  $y$ , además de  $v$  con  $x$ . Es decir,  $TQ_n = Q_n - \{(u, x), (v, y)\} + \{(u, y), (v, x)\}$ . El cubo torcido  $TQ_n$  tiene un diámetro de  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ , es  $n$ -regular, [8] y se observa

que tiene el mismo número de vértices y aristas que  $Q_n$ . Además,  $TQ_n$  tiene dos hipercubos  $Q_{n-1}$  como subgráficas ajenas, [20].

Los cubos torcidos  $TQ_2$ ,  $TQ_3$  y  $TQ_4$  se muestran en la figura 1.6. El cubo

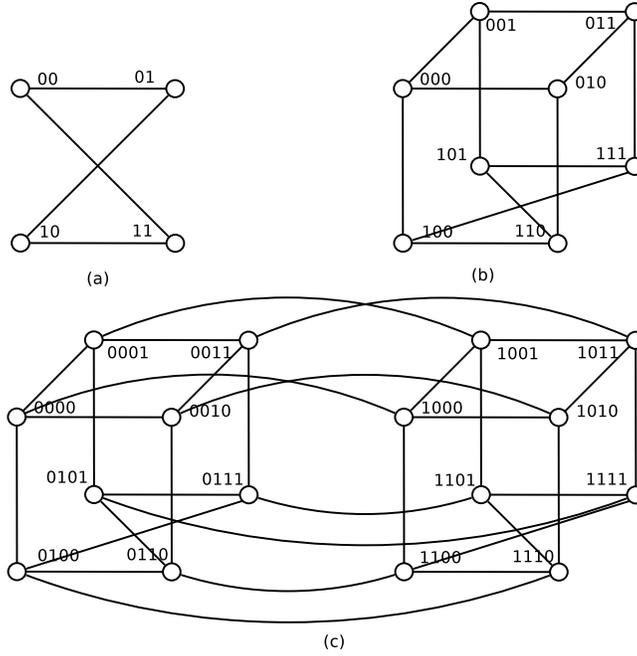


Figura 1.5: Gráficas (a)  $TQ_2$ , (b)  $TQ_3$  y (c)  $TQ_4$ .

puede ser torcido alrededor de cualquier 4-ciclo, el  $Q_n$  torcido canónicamente es aquel cuyos vértices  $u$ ,  $v$ ,  $x$ , y  $y$  tienen las etiquetas:

$$b(u) = 000 \dots 0, b(v) = 010 \dots 0, b(x) = 100 \dots 0, b(y) = 110 \dots 0.$$

#### 1.4.3.2. Hipercubo doblado (Folded hypercube)

El hipercubo doblado fue propuesto para reducir aún más la congestión de tráfico y diámetro, con una pequeña sobrecarga de hardware. Un hipercubo doblado de dimensión  $n$ , denotado como  $FQ_n$ , se puede construir de un hipercubo  $Q_n$ , agregando aristas que conecten cualquier vértice  $u = u_1u_2 \dots u_{n-1}u_n$  a  $\bar{u} = \bar{u}_1\bar{u}_2 \dots \bar{u}_{n-1}\bar{u}_n$ , donde  $\bar{u}_i = 1 - u_i$  es el complemento de  $u_i$ , con lo cual se agregan  $2^{n-1}$  aristas complementarias, [8].

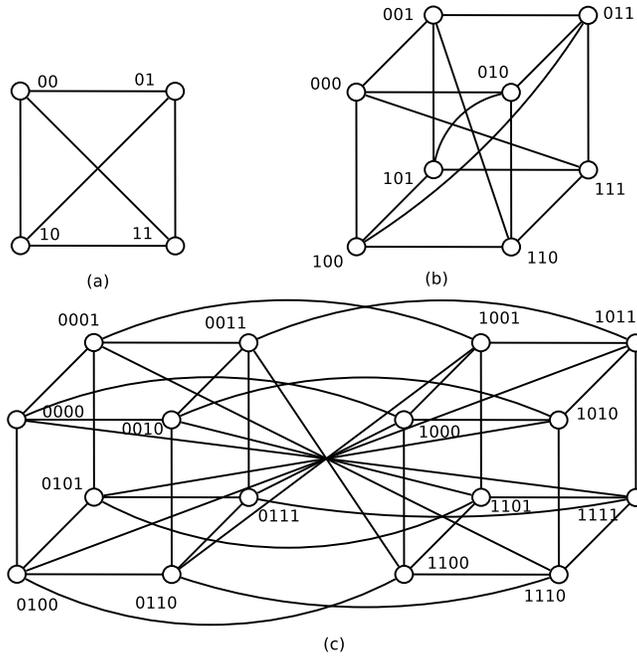


Figura 1.6: (a)  $FQ_2$ , (b)  $FQ_3$  y (c)  $FQ_4$ .

El hipercubo doblado  $FQ_n$  tiene el mismo conjunto de vértices que el hipercubo con la misma dimensión, su conjunto de aristas contiene las aristas de  $Q_n$ . El hipercubo es una subgráfica de expansión del hipercubo doblado correspondiente. Se define el **peso de Hamming** como el número de símbolos diferentes de 0, una arista  $(u, v)$  está en  $FQ_n$  si y solo si el peso de Hamming  $H(u \text{ XOR } v) = 1$  o  $H(u \text{ XOR } v) = n$ . En otras palabras, dos vértices están conectados si y solo si su representación binaria difiere en 1 bit o son complemento una de la otra. Se muestran en la figura 1.7 los hipercubos doblados de dimensión  $n$ , donde  $n \in \{2, 3, 4\}$ .

#### 1.4.4. n-Estrella

Para un entero  $n$ ,  $n \geq 2$ , una red de interconexión  $n$ -estrella  $S_n$  tiene  $n!$  vértices, la etiqueta  $v = u_1 u_2 \dots u_n$  de cada procesador  $P_v$  es una permutación de los símbolos en el conjunto  $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, n\}$ , donde  $u_i \in \mathcal{N}$ . El procesador  $P_v$  está conectado por una arista a cada uno de los  $n - 1$  procesa-

dores  $P_u$ , donde  $u$  se obtiene al intercambiar los símbolos primero e  $i$ -ésimo de  $v$ .

La  $n$ -estrella  $S_n$  es una gráfica con el conjunto de vértices

$$V(S_n) = \{u_1u_2 \dots u_n \mid u_i \in \mathcal{N} \text{ y } u_i \neq u_j \text{ para } i \neq j\}.$$

Las aristas se definen de la siguiente manera:  $u_1u_2 \dots u_i \dots u_n$  es adyacente a  $v_1v_2 \dots v_i \dots v_n$  por una arista en dimensión  $i$ , con  $2 \leq i \leq n$ , si  $v_j = u_j$  para  $j \notin \{1, i\}$ ,  $v_1 = u_i$  y  $v_i = u_1$ , [8]. La figura 1.7 muestra las gráficas  $S_2$ ,  $S_3$ ,  $S_4$ , se puede ver en la figura 1.8 otra representación de las mismas gráficas. La red de interconexión  $n$ -estrella es regular con grado  $n - 1$ , diámetro  $n$ ,

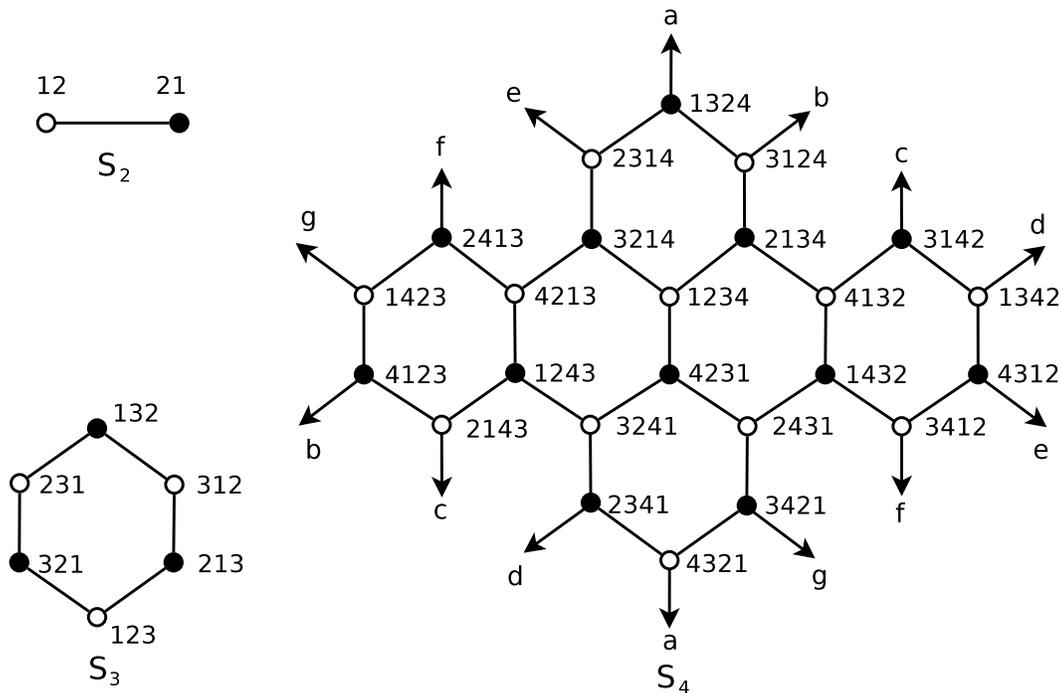


Figura 1.7: Gráficas  $n$ -estrella con  $n \in \{2, 3, 4\}$ .

bipartita, transitiva por vértices y transitiva por aristas.

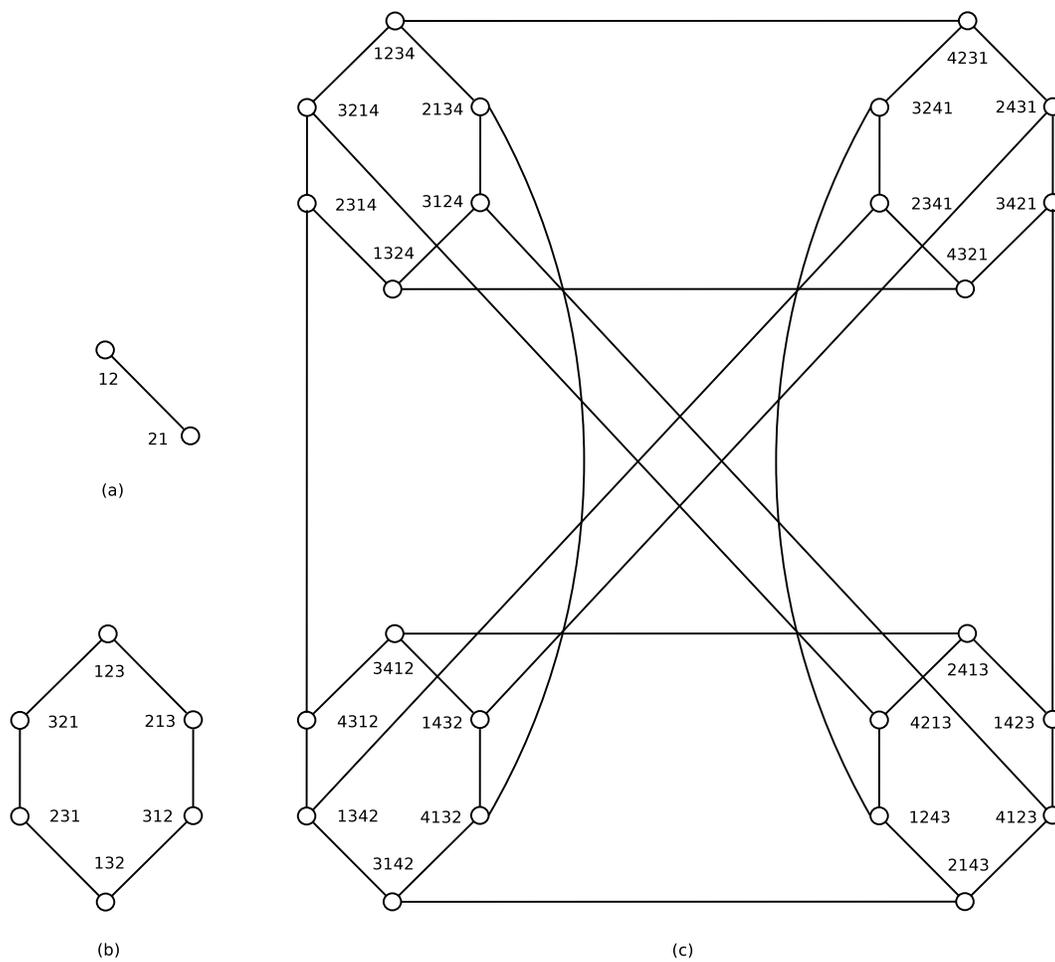


Figura 1.8: Gráficas  $n$ -estrella con  $n \in \{2, 3, 4\}$ .

# Capítulo 2

## La red de interconexión Hiperestrella

En este capítulo se revisarán las propiedades topológicas de la gráfica hiperestrella, tales como escalabilidad, conexidad, diámetro y simetría, las cuales son relevantes para la comunicación en la red de interconexión, ya que repercuten en un menor tiempo de transmisión de los mensajes y en el rendimiento de una computadora paralela. Se revisará la inmersión de las gráficas hipercubo y toro en la hiperestrella, lo cual es muy útil para expandir las propiedades de otras gráficas en la hiperestrella.

### 2.1. Definición

En las redes de interconexión, se prefiere un grado máximo y diámetro pequeño, ya que existe un elemento de compensación entre el grado máximo, relacionado con el costo del hardware y el diámetro, vinculado con el tiempo de transmisión de los mensajes. Por lo tanto, si se define como medida del costo de una red interconexión el *grado*  $\times$  *diámetro*, entonces la gráfica **hiperestrella** tiene menor costo de red que el hipercubo, porque posee grado y diámetro menor, [14].

La gráfica hiperestrella se define formalmente como sigue:

**Definición 5** En la gráfica **hiperestrella**, denotada por  $HS(n, k)$ , un vértice se representa con la cadena de  $n$  bits  $s_1 s_2 \dots s_i \dots s_n$ ,  $s_i \in \{0, 1\}$ , donde  $k$  de los  $n$  bits son iguales a 1, con  $k < n$ .

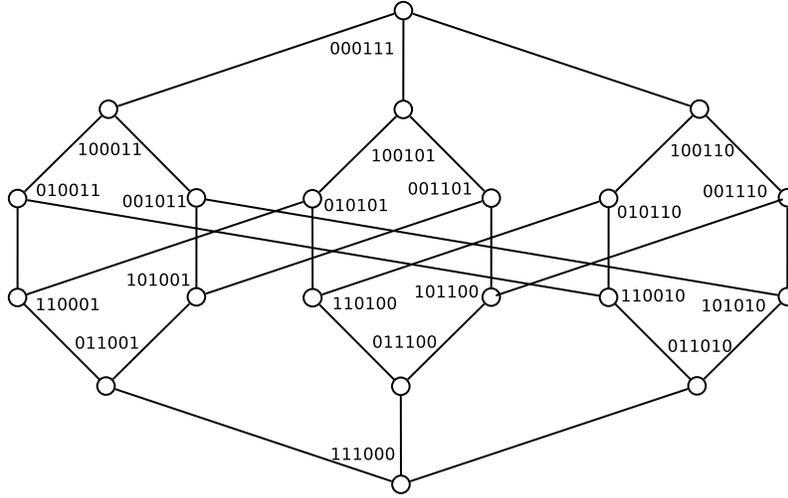


Figura 2.1: Gráfica hiperestrella  $HS(6,3)$ .

Dos vértices  $u = s_1s_2 \dots s_{i-1}s_i s_{i+1} \dots s_n$  y  $v = s_i s_2 \dots s_{i-1}s_1 s_{i+1} \dots s_n$  están conectados por una arista  $(u, v) \in E(HS(n, k))$ , si y sólo si  $s_i$  es el complemento de  $s_1$ , la cadena de bits de  $v$  se obtiene al intercambiar  $s_1$  y  $s_i$ ,  $2 \leq i \leq n$ , en la cadena de bits de  $u$ , [14]. Es decir,  $HS(n, k)$  se define como:

$$V(HS(n, k)) = \{s_1s_2 \dots s_i \dots s_n : \text{con } s_i \in \{0, 1\} \text{ y } \sum_{j=1}^n s_j = k\},$$

$$E(HS(n, k)) = \{(u, v) : u = s_1s_2 \dots s_i \dots s_n, v = s_i s_2 \dots s_1 \dots s_n \text{ y } s_1 = \bar{s}_i\}.$$

Ya que los vértices de  $HS(n, k)$  se pueden representar como  $k$ -combinaciones en el conjunto de las cadenas de  $n$  bits, tales que el número de unos es  $k$  y el de ceros es  $n - k$ , el total de vértices en  $HS(n, k)$  es  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ . La figura 2.1 muestra una hiperestrella con  $n = 6$  y  $k = 3$ .

### 2.1.1. Automorfismo

Sean  $X = \{1, 2, \dots, n\}$  y  $X_k$  la familia de subconjuntos de  $X$  con  $k$  elementos.  $S(n, k)$  es la gráfica con conjunto de vértices  $X_k$ , donde dos vértices  $v = \{x_1, \dots, x_k\}$  y  $w = \{y_1, \dots, y_k\}$  son adyacentes si y sólo si  $|v \cap w| = k - 1$ ,

1 pertenece a uno y solamente uno de los conjuntos  $v$  o  $w$ . En otras palabras  $w$  se obtiene a partir de  $v$  mediante la sustitución de un elemento  $y \in X - v$ , 1 se sustituye con  $w$  si  $1 \in v$ , además sustituyendo  $x \in v$  con 1 si  $1 \notin v$ , [19].

Sea  $A$  un subconjunto de  $X$ , la función característica de  $A$  es la función  $\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}$  tal que  $\chi_A(x) = 1$  si y sólo si  $x \in A$ . Por lo tanto  $A \rightarrow \chi_A$  es una función biyectiva entre la familia de subconjuntos de  $X$  y el conjunto de secuencias de  $\{0, 1\}$  de longitud  $n$ . Las gráficas  $\Gamma_1 = (V_1, E_1)$  y  $\Gamma_2 = (V_2, E_2)$  son llamadas isomorfas, si existe una función biyectiva  $\alpha : V_1 \rightarrow V_2$  tal que,  $\{a, b\} \in E_1$  si y sólo si  $\{\alpha(a), \alpha(b)\} \in E_2$  para todo  $a, b \in V_1$ . En tal caso la función biyectiva  $\alpha$  se denomina **isomorfismo**.

Se tiene que las gráficas  $HS(n, k)$  y  $S(n, k)$  son isomorfas, de hecho la correspondencia  $A \rightarrow \chi_A$  es un isomorfismo entre  $S(n, k)$  y  $HS(n, k)$ , [19]. La figura 2.2 muestra la gráfica  $S(6, 3)$ , donde el conjunto  $\{x, y, z\}$  es denotado por  $xyz$ .

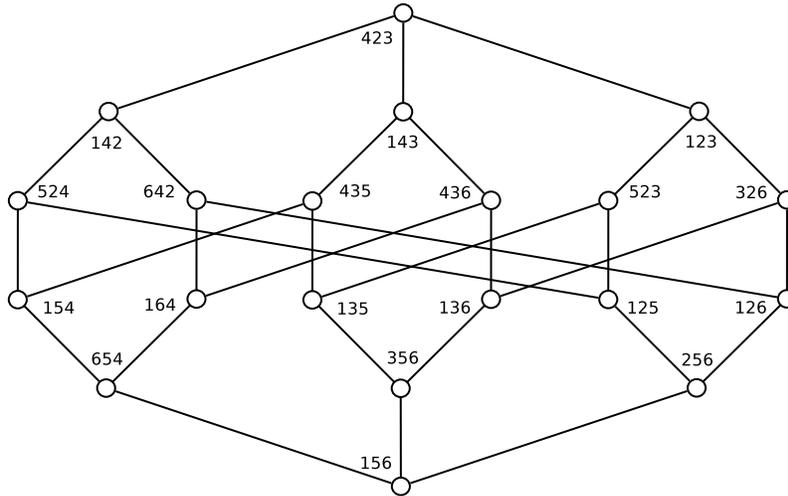


Figura 2.2: Gráfica  $S(6, 3)$ .

Un automorfismo de una gráfica  $\Gamma$  es un isomorfismo de  $\Gamma$  con sí misma. El conjunto de todos los automorfismos de  $\Gamma$ , con la operación de composición de funciones, es un grupo, denominado grupo de automorfismos para

$\Gamma$  y se denota  $Aut(\Gamma)$ . Una **permutación de un conjunto** es una función biyectiva con sí mismo. El grupo de todas las permutaciones de un conjunto  $V$  se denota como  $Sym(V)$ , o sólo  $Sym(n)$ , donde  $|V| = n$ , [19].

Un grupo de permutaciones  $G$  en  $V$  es un subgrupo de  $Sym(V)$ . En este caso se dice que  $G$  actúa en  $V$ . Si  $\Gamma$  es una gráfica con el conjunto de vértices  $V$ , entonces se puede ver cada automorfismo como una permutación de  $V$ , así  $Aut(\Gamma)$  es un grupo de permutaciones. Sea  $G$  que actúa en  $V$ , se dice que  $G$  es transitiva, o  $G$  actúa de manera transitiva en  $V$ , si existe sólo una órbita<sup>1</sup>. Esto significa que dados cualesquiera dos elementos  $u$  y  $v$  de  $V$ , existe un elemento  $\beta$  de  $G$  tal que  $\beta(u) = v$ .

A la gráfica  $\Gamma$  se le llama **transitiva por vértices** si  $Aut(\Gamma)$  actúa de manera transitiva sobre  $V(\Gamma)$ . La acción de  $Aut(\Gamma)$  en  $V(\Gamma)$  induce una acción en  $E(\Gamma)$  por la regla  $\beta\{x, y\} = \{\beta(x), \beta(y)\}$ ,  $\beta \in Aut(\Gamma)$ , y  $\Gamma$  es llamada **transitiva por aristas** si esta acción es transitiva. La gráfica  $\Gamma$  se llama **simétrica**, si para todos los vértices  $u, v, x, y$  de  $\Gamma$  tales que  $u$  y  $v$  son adyacentes y  $x$  e  $y$  son adyacentes existe un automorfismo  $\alpha$  tal que  $\alpha(u) = x, \alpha(v) = y$ . Se puede observar que una gráfica simétrica es transitiva por vértices y transitiva por aristas. Mirafzal, demostró entre otras cosas que la gráfica  $S(n, k)$  es simétrica, [19].

## 2.2. Propiedades topológicas

En general, el rendimiento de una computadora paralela depende en gran medida de las propiedades topológicas de la gráfica elegida para ella. Las propiedades como son el grado máximo y diámetro, no sólo tienen importancia en teoría de gráficas y combinatoria, también tienen relevancia para las aplicaciones en las redes comerciales, ya que significa un menor gasto en cuanto a hardware y menor tiempo de transmisión en la comunicación.

El conjunto de vértices de la gráfica hiperestrella  $HS(n, k)$ , con  $n \geq 3$  y  $1 \leq k \leq n - 1$ , es el conjunto de cadenas binarias  $\{0, 1\}$  de longitud  $n$  con exactamente  $k$  unos, dos vértices son adyacentes si y sólo si uno se puede obtener del otro intercambiando el bit más significativo con un bit diferente;

---

<sup>1</sup>La órbita de un vértice  $v$  en una gráfica  $G$  es el conjunto de todos los vértices  $\alpha(v)$  tal que  $\alpha$  es un automorfismo de  $G$ .

es decir, 1 con 0 ó 0 y 1, en otra posición.

La hiperestrella es una gráfica bipartita, con conjuntos de bipartición  $V_0(n, k)$  y  $V_1(n, k)$ , los cuales son el conjunto de vértices de  $HS(n, k)$  con 0, 1, en la posición más significativa respectivamente. Se puede utilizar  $V_0$  y  $V_1$  en lugar de  $V_0(n, k)$  y  $V_1(n, k)$ . De esta manera,  $HS(n, k)$  tiene  $\binom{n}{k}$  vértices, cada vértice en  $V_0$  tiene grado  $k$ , además todo vértice en  $V_1$  tiene grado igual a  $n - k$ . Por lo tanto, la gráfica hiperestrella es irregular, en general, y sólo regular cuando  $n = 2k$ , [10].

En la sección 4.2.1 se ampliará el tema de la hiperestrella como una gráfica bipartita.

### 2.2.1. Escalabilidad

De manera informal se puede decir que la escalabilidad es la expansión de la gráfica sin que ésta pierda sus propiedades; por lo cual no se puede agregar un número arbitrario de vértices y aristas. Agrupando los vértices de  $HS(n, k)$  dependiendo de si el valor del bit menos significativo es 1 o 0 en su etiqueta, se puede descomponer  $HS(n, k)$  en dos subgráficas  $HS(n - 1, k)$  y  $HS(n - 1, k - 1)$ .

**Ejemplo 1** Para la cadena de bits 10010 el bit más significativo es 1 y el menos significativo es 0

**Teorema 1** [14] La gráfica hiperestrella  $HS(n, k)$  es isomorfa a la gráfica hiperestrella  $HS(n, n - k)$ .

Ya que  $HS(n, k)$  es isomorfa a  $HS(n, n - k)$ , se supone  $k \leq \frac{n}{2}$ .

Una gráfica regular hiperestrella  $HS(n, k)$  se puede construir a partir de dos gráficas irregulares,  $HS(n - 1, k - 1)$  y  $HS(n - 1, k)$ ,  $n > 2, n = 2k$ , agregándole aristas a  $HS(n - 1, k - 1)$  y  $HS(n - 1, k)$ . La construcción se hace de la siguiente manera:

Sea  $\langle s_1 s_2 \dots s_{n-1} \rangle$  una cadena de bits para un vértice en la gráfica hiperestrella  $HS(n - 1, k - 1)$ . El número de vértices, para los cuales  $s_1 = 1$  y cuyo grado es  $n - k$  resulta ser  $\binom{n-2}{k-2}$ . En el caso  $s_1 = 0$ , el número de tales vértices es  $\binom{n-2}{k-1}$  y tienen grado  $k - 1$ .

Sea  $\langle s'_1 s'_2 \dots s'_{n-1} \rangle$  una cadena de bits para un vértice en  $HS(n-1, k)$ , entonces el número de vértices cuyo símbolo  $s'_1 = 1$  y con grado  $n-k-1$  es  $\binom{n-2}{k-1}$ . Cuando  $s'_1 = 0$ , el número de tales vértices es  $\binom{n-2}{k}$  y tienen grado  $k$ .

Para cualesquiera dos vértices  $u$  en  $HS(n-1, k-1)$  y  $v$  en  $HS(n-1, k)$  con  $u = s_1 \dots s_{n-1}$  y  $v = s'_1 \dots s'_{n-1}$ , se tiene que  $u$  y  $v$  están conectados si  $s_1 = \bar{s}'_1$  y  $s_i = s'_i$ ,  $2 \leq i \leq n-1$ , se agregan nuevos bits  $s_n$  y  $s'_n$  a  $u$  y  $v$ , respectivamente. Además, para la cadena de  $n$  bits en  $HS(n, k)$ ,  $s_n = 1$  y  $s'_n = 0$ , ya que el número de símbolos 1 es  $k$ , se agrega un bit nuevo a  $HS(n-1, k-1)$  que debe ser 1 y se agrega un bit nuevo a  $HS(n-1, k)$  el cual debe ser 0. El número de vértices cuyo símbolo  $s_1$  es 0 en  $HS(n-1, k-1)$  y el número de vértices cuyo símbolo  $s'_1 = 1$  en  $HS(n-1, k)$  resulta ser  $\binom{n-2}{k-1}$ .

De esta manera, el grado de los vértices conectados entre  $HS(n-1, k-1)$  y  $HS(n-1, k)$  es  $k$ . Por lo tanto, la gráfica generada al conectar  $HS(n-1, k-1)$  y  $HS(n-1, k)$  es una gráfica regular de grado  $k$  y el número de vértices  $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$ , que da como resultado  $HS(n, k)$ .

**Ejemplo 2** Se mostrará cómo generar la gráfica  $HS(6,3)$  a partir de las gráficas  $HS(5,2)$  y  $HS(5,3)$ . El procedimiento es el siguiente.

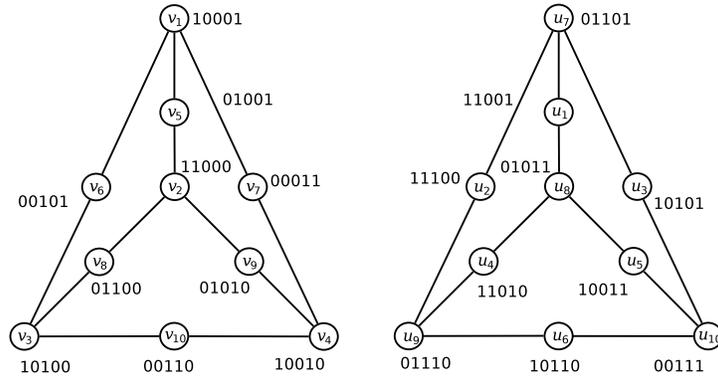


Figura 2.3:  $HS(5,2)$  izquierda y  $HS(5,3)$  derecha.

La gráfica  $HS(5,2)$  tiene  $\binom{4}{1} = \frac{4!}{1!(4-1)!} = \frac{4!}{3!} = 4$  vértices, cuyo bit  $s_1$  es 1 y tienen grado 3, estos vértices son  $v_1 = 10001$ ,  $v_2 = 11000$ ,  $v_3 = 10100$ ,  $v_4$

$= 10010$ . Además,  $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{4} = 3! = 6$  vértices, cuyo bit  $s_1$  es 0 y tienen grado 2, estos vértices son  $v_5 = 01001$ ,  $v_6 = 00101$ ,  $v_7 = 00011$ ,  $v_8 = 01100$ ,  $v_9 = 01010$ ,  $v_{10} = 00110$ .

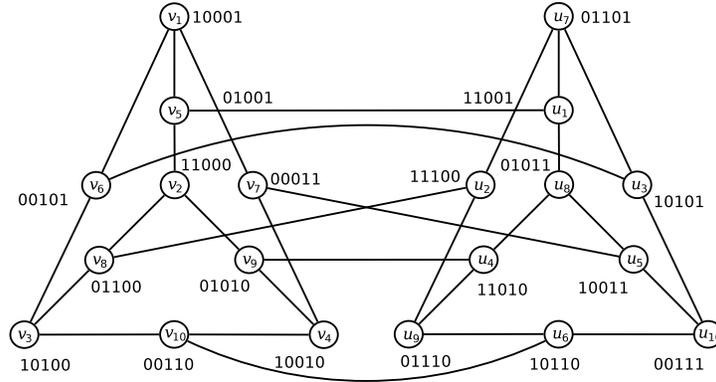


Figura 2.4:  $HS(5,2)$  izquierda conectada a  $HS(5,3)$  derecha.

En la gráfica  $HS(5,3)$  hay  $\binom{4}{2} = 6$  vértices, cuyo bit  $s'_1$  es 1 y tienen grado 2, estos vértices son  $u_1 = 11001$ ,  $u_2 = 11100$ ,  $u_3 = 10101$ ,  $u_4 = 11010$ ,  $u_5 = 10011$ ,  $u_6 = 10110$ . Además,  $\binom{4}{1} = 4$  vértices, cuyo bit  $s'_1$  es 0 y tienen grado 3, estos vértices son  $u_7 = 01101$ ,  $u_8 = 01011$ ,  $u_9 = 01110$ ,  $u_{10} = 00111$ . La figura 2.3 muestra a  $HS(5,2)$  y  $HS(5,3)$  con los vértices descritos anteriormente.

Se deben crear las aristas  $(v_5, u_1)$ ,  $(v_6, u_3)$ ,  $(v_7, u_5)$ ,  $(v_8, u_2)$ ,  $(v_9, u_4)$ ,  $(v_{10}, u_6)$ , ya que  $s_1 = \bar{s}'_1$  y  $s_2s_3s_4s_5 = s'_2s'_3s'_4s'_5$ , entonces cambia su grado a 3, quedando la gráfica como en la figura 2.4.

Se agrega en la parte menos significativa un bit  $s_6 = 1$  a los vértices que conforman  $HS(5,2)$ , además se añade en la parte menos significativa un bit  $s'_6 = 0$  a los vértices que conforman  $HS(5,3)$ ; de esta manera, se tienen  $\binom{5}{2} + \binom{5}{2} = \binom{6}{3} = 20$  vértices con grado 3, los cuales tienen 3 bits iguales a 0 y 3 bits con etiqueta 1. La figura 2.5 muestra el resultado final, también se puede acomodar de tal forma que quede como en la figura 2.6.  $\diamond$

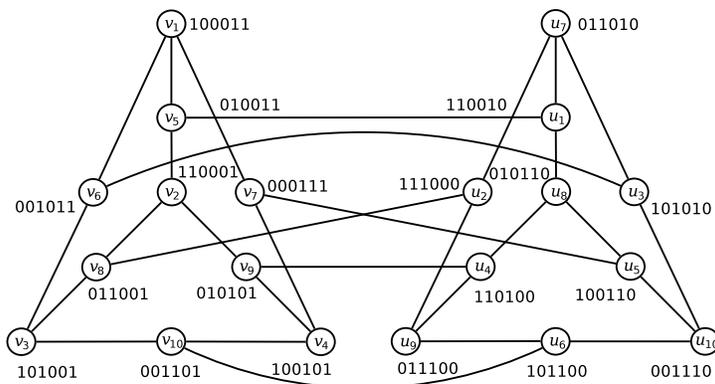


Figura 2.5:  $HS(6,3)$  generada a partir de  $HS(5,2)$  izquierda y  $HS(5,3)$  derecha.

### 2.2.2. Conexidad

Una buena red de comunicaciones es difícil de interrumpir. Se pretende entonces conservar el servicio de la red, asegurando que los restos de posibles transmisiones permanezcan conectados en la gráfica, incluso cuando fallen algunos vértices o aristas. Cuando los enlaces de comunicación son caros, se quieren alcanzar estos objetivos con pocas aristas, [8]. En las redes de interconexión, la conexidad por vértices o la conexidad por aristas es una medida importante para evaluar que la red es todavía funcional.

Para una gráfica  $G$ , su conexidad por vértices se denota por  $\kappa(G)$ , su conexidad por aristas se denota por  $\lambda(G)$  y su grado mínimo se denota por  $\delta(G)$  estos tres parámetros se relacionan de la siguiente manera:

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G) \tag{2.1}$$

Como se definió anteriormente, la tolerancia a fallos de una red está estrechamente relacionada con la conexidad de la gráfica.

**Teorema 2** [14] Para una gráfica hiperestrella  $HS(2n, n)$ , se tiene que:  $\kappa(HS(2n, n)) = \lambda(HS(2n, n)) = n$ .

*Demostración:* La idea principal de la demostración consiste en verificar que al quitar cualquier subconjunto de  $n - 1$  vértices, la gráfica sigue siendo conexa.

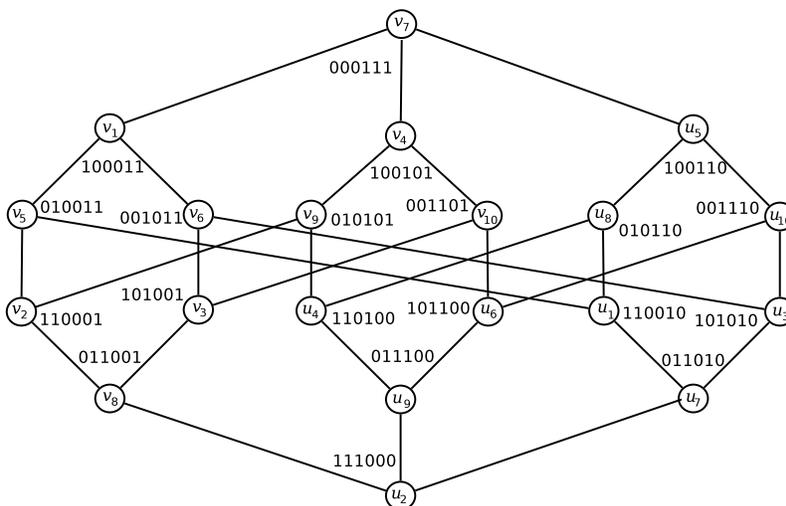


Figura 2.6:  $HS(6,3)$  etiquetada con los vértices de  $HS(5,2)$  y  $HS(5,3)$ .

Sea  $P$  un conjunto de  $n - 1$  vértices el cual será eliminado de  $HS(2n, n)$ . Sea  $s_1$  el bit más significativo (primer bit) en la cadena que representa los vértices en  $P$ .

**Caso 1.**  $s_1 = 0$ , para todos los vértices en  $P$ .

Si existe un vértice  $u$  en  $HS(2n, n)$  que tiene todos los  $n - 1$  vecinos en  $P$ , entonces existe al menos un vecino de  $u$  con  $s_1 = 0$ . Si algunos vecinos de  $u$  no están en  $P$ , se puede ver que  $HS(2n, n)$  sigue conexa.

$s_1 = 1$ , para todos los vértices en  $P$ .

Si existe un vértice  $v$  en  $HS(2n, n)$  que tiene todos los  $n - 1$  vecinos en  $P$ , entonces existe al menos un vecino de  $v$  con  $s_1 = 1$ . Si algunos vecinos de  $v$  no están en  $P$ , se puede ver que  $HS(2n, n)$  sigue conexa.

**Caso 2.** El primer bit  $s_1$ , es 1 para algunos vértices en  $P$ .

Todos los vértices en  $HS(2n, n)$  tienen grado  $n$ ; además, los  $n$  vértices incidentes a un vértice  $u$  están conectados a  $u$  tienen su bit más significativo igual al complemento del bit correspondiente de  $u$ . Por lo tanto, si  $n - 1$  vértices en  $P$  son tales que su bit más significativo es igual a 1 y vértices con su bit más significativo igual a 0, entonces  $HS(2n, n)$  es siempre conexa.

De los casos anteriores, se concluye que  $HS(2n, n)$  es conexa, si se eliminan a lo más  $n - 1$  vértices de ella.

Se muestra que  $\kappa(HS(2n, n)) \geq n$ . Además, ya que  $HS(2n, n)$  es una gráfica regular de grado  $n$ , se tiene que  $\delta(HS(2n, n)) = n$ , lo que implica que  $\kappa(HS(2n, n)) \leq n$ . Por la ecuación 2.1 se concluye que,  $\lambda(HS(2n, n)) = n$ . De manera similar, se puede demostrar que  $\lambda(HS(2n, n)) = n$ .  $\square$

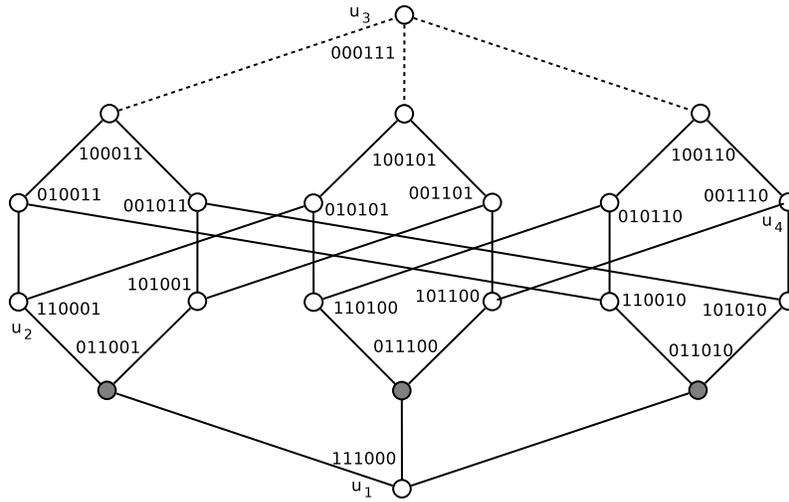


Figura 2.7:  $HS(6,3)$  ejemplo del Teorema 2.

**Ejemplo 3** En la figura 2.7 se muestra  $HS(6, 3)$ , se puede ver que al eliminar las aristas  $\{(100011, 000111), (100101, 000111), (100110, 000111)\}$ , marcadas con líneas punteadas en la figura la gráfica se vuelve disconexa.  $\diamond$

**Ejemplo 4** En la figura 2.7 se puede ver que al eliminar los vértices sombreados  $\{011001, 011100, 011010\}$  la gráfica se vuelve disconexa.  $\diamond$

### 2.2.3. Diámetro

El diámetro es un parámetro importante para las redes de interconexión, puede utilizarse para comparar las características de rendimiento relativo en las diferentes redes, mide el máximo retraso en la transmisión del mensaje de un procesador a otro.

### Algoritmo de enrutamiento

Sean  $S$  y  $D$  los vértices fuente y destino, los cuales pueden ser cualquier vértice diferente uno del otro en la gráfica hiperestrella  $HS(2n, n)$ , entonces la ruta más corta entre  $S$  y  $D$  se puede considerar como el proceso de cambiar la cadena de bits de  $S$  a  $D$ . A continuación se describe un esquema de enrutamiento para construir la ruta más corta.

Para dos vértices  $S = s_1s_2 \dots s_n$  y  $D = d_1d_2 \dots d_n$ , sea  $R = r_1r_2 \dots r_n$  la cadena de bits que se obtiene al aplicar la operación **xor** entre  $S$  y  $D$ . Se usa  $\oplus$  para representar al operador de bits **xor**. Se usará el término  $i$ -arista el cual se detallará en las propiedades de simetría. Cada  $i$ -arista que conduce a dos  $i$ -ésimos bits idénticos donde  $r_i = 1$ , pertenecen a una ruta más corta. Una ruta se extiende de forma continua, siempre que exista un bit 1 en  $R$ .

Sea  $P_S$  el conjunto de vértices de una ruta más corta de  $S$  a  $D$ , en  $HS(2n, n)$  que denota la gráfica hiperestrella regular. Inicialmente,  $P_S = \{S\}$ . En cada paso de la recursión se satisface la condición  $r_i = 1$ , un bit desde el vértice fuente  $S$  se corrige, para ser idéntico a su bit correspondiente en el vértice de destino  $D$ , el número de bits diferentes entre  $S$  y  $D$  se reduce en 1 exactamente. Así, se puede ver que el algoritmo es óptimo en términos de la longitud de una ruta.

El Algoritmo 1, presenta un pseudocódigo para construir una ruta más corta, entre cualesquiera dos vértices en la gráfica hiperestrella regular  $HS(2n, n)$ .

---

**Algoritmo 1** Ruta más corta 1.

---

**Entrada:** Gráfica hiperestrella  $HS(2n, n)$ ; vértice fuente  $S$ ; vértice destino  $D$ ; conjunto de vértices de una ruta más corta de  $S$  a  $D$ ,  $P_S$

**Salida:**  $P_S$

```
1: Ruta más corta 1( $HS, S, D, P_S$ )
2: if ( $S = D$ ) then
3:   return  $P_S$ 
4: end if
5: obtener  $R \leftarrow r_1 r_2 \dots r_i \dots r_n$ , donde  $r_i \leftarrow s_i \oplus d_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ 
6:  $p \leftarrow \{i \mid r_i = 1, 2 \leq i \leq n\}$ 
7: Sea  $S'$  un vértice tal que  $(S, S')$  es una  $j$ -arista
8:  $q \leftarrow \{j \mid (S, S') \in E(HS(n, k)), 2 \leq j \leq n\}$ , donde los  $j$ -ésimos bits
   están en  $S$  y  $S'$  complemento
9: if ( $|p| > 0$ ) then
10:  Encontrar un vértice  $S'$  tal que  $(S, S')$  es una  $i$ -arista donde
      $i \leftarrow \text{mín } \{p \cap q\}$ 
11:   $P_S \leftarrow P_S \cup \{S'\}$ 
12:   $S \leftarrow S'$ 
13: end if
14: return Ruta más corta 1( $HS, S, D, P_S$ )
```

---

**Ejemplo 5** Se mostrará cómo funciona el algoritmo para el vértice fuente  $S = 000111$  y destino  $D = 111000$  en  $HS = HS(6,3)$ .

Llamada 1:

**Ruta más corta 1**( $HS = HS(6, 3)$ ,  $S=000111$ ,  $D=111000$ ,  $P_S=\{000111\}$ )

Como ( $(S = 000111) \neq (D = 111000)$ ) se obtiene

$R = r_1r_2r_3r_4r_5r_6 = 111111$ , donde  $r_i = s_i \oplus d_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ;

Se tiene  $p = \{i \mid r_i = 1, 2 \leq i \leq n\} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$  y

$q = \{j \mid (S, S') \in E(HS(n, k)), 2 \leq j \leq n\} =$

$\{\{4 \mid (000111, 100011) \in E(HS)\}, \{5 \mid (000111, 100101) \in E(HS)\},$

$\{6 \mid (000111, 100110) \in E(HS)\}\} = \{4, 5, 6\}$

donde los  $j$ -ésimos bits están en  $S$  y  $S'$  complemento;

Como ( $(|p|=5) > 0$ ) entonces

encontrar un vértice  $S'$  tal que  $(S, S')$  es una  $i$ -arista, donde

$i = \min\{p \cap q\} = \min\{\{2, 3, 4, 5, 6\} \cap \{4, 5, 6\}\} =$

$\min\{4, 5, 6\} = 4;$

$P_S = \{000111\} \cup \{100011\} = \{000111, 100011\};$

$S = 100011;$

llamar **Ruta más corta 1**( $HS=HS(6, 3)$ ,  $S=100011$ ,  $D=111000$ ,

$P_S = \{000111, 100011\});$

Llamada 2:

**Ruta más corta 1**( $HS=HS(6, 3)$ ,  $S=100011$ ,  $D=111000$ ,

$P_S= \{000111, 100011\}$ )

Como ( $(S = 100011) \neq (D = 111000)$ ) entonces

$R = r_1r_2r_3r_4r_5r_6 = 011011$ , donde  $r_i = s_i \oplus d_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ;

Por lo cual  $p = \{i \mid r_i = 1, 2 \leq i \leq n\} = \{2, 3, 5, 6\}$  y

$q = \{j \mid (S, S') \in E(HS(n, k)), 2 \leq j \leq n\} =$

$\{\{4 \mid (100011, 000111) \in E(HS)\}, \{2 \mid (100011, 010011) \in E(HS)\},$

$\{3 \mid (100011, 001011) \in E(HS)\}\} = \{4, 2, 3\}$

donde los  $j$ -ésimos bits están en  $S$  y  $S'$  complemento;

Como ( $(|p|=4) > 0$ ) entonces

encontrar un vértice  $S'$  tal que  $(S, S')$  es una  $i$ -arista, donde

$i = \min\{p \cap q\} = \min\{\{2, 3, 5, 6\} \cap \{4, 2, 3\}\} =$

$\min\{2, 3\} = 2;$

$P_S = \{000111, 100011\} \cup \{010011\} = \{000111, 100011, 010011\};$

$S = 010011;$

llamar **Ruta más corta 1**( $HS=HS(6, 3)$ ,  $S=010011$ ,  $D=111000$ ,

$$P_S = \{000111, 100011, 010011\};$$

Llamada 3:

**Ruta más corta 1**( $HS=HS$ ,  $S=010011$ ,  $D=111000$ ,

$$P_S = \{000111, 100011, 010011\})$$

(( $S = 010011$ )  $\neq$  ( $D = 111000$ )) se obtiene

$$R = 101011, r_i = s_i \oplus d_i, 1 \leq i \leq n;$$

Entonces  $p = \{i \mid r_i = 1, 2 \leq i \leq n\} = \{3, 5, 6\}$  y

$$q = \{j \mid (S, S') \in E(HS(n, k)), 2 \leq j \leq n\} = \{2, 5, 6\}$$

Como (( $|p|=3$ ) $> 0$ ) entonces

$$i = \min\{p \cap q\} = \min\{\{3, 5, 6\} \cap \{2, 5, 6\}\} = 5;$$

$$\text{Ahora } P_S = \{000111, 100011, 010011\} \cup \{110001\} = \{000111, 100011, 010011, 110001\};$$

Además  $S = 110001$ ;

llamar **Ruta más corta 1**( $HS=HS(6, 3)$ ,  $S=110001$ ,  $D=111000$ ,

$$P_S = \{000111, 100011, 010011, 110001\});$$

Llamada 4:

**Ruta más corta 1**(( $HS=HS(6, 3)$ ,  $S=110001$ ,  $D=111000$ ,

$$P_S = \{000111, 100011, 010011, 110001\}))$$

(( $S = 110001$ )  $\neq$  ( $D = 111000$ )) se obtiene

$$R = 001001.$$

$p = \{i \mid r_i = 1, 2 \leq i \leq n\} = \{3, 6\}$  y

$$q = \{j \mid (S, S') \in E(HS(n, k)), 2 \leq j \leq n\} = \{5, 4, 3\}$$

Como (( $|p|=2$ ) $> 0$ ) entonces

$$i = \min\{p \cap q\} = \min\{\{3, 6\} \cap \{5, 4, 3\}\} = 3;$$

$$P_S = \{000111, 100011, 010011, 110001\} \cup \{011001\} = \{000111, 100011, 010011, 110001, 011001\};$$

$S = 011001$ ;

llamar **Ruta más corta 1**( $HS=HS(6, 3)$ ,  $S=011001$ ,  $D=111000$ ,

$$P_S = \{000111, 100011, 010011, 110001, 011001\});$$

Llamada 5:

**Ruta más corta 1**( $HS=HS(6, 3)$ ,  $S=011001$ ,  $D=111000$ ,

$$P_S = \{000111, 100011, 010011, 110001, 011001\})$$

Como  $((S = 011001) \neq (D = 111000))$  entonces

$R = 100001$ .

$p = \{i \mid r_i = 1, 2 \leq i \leq n\} = \{6\}$  y

$q = \{j \mid (S, S') \in E(HS(n, k)), 2 \leq j \leq n\} = \{3, 2, 6\}$

Como  $((|p|=1) > 0)$

$i = \min\{p \cap q\} = \min\{6\} \cap \{3, 2, 6\} = 6;$

$P_S = \{000111, 100011, 010011, 110001\} \cup \{011001\} =$

$\{000111, 100011, 010011, 110001, 011001, 111000\};$

$S = 111000;$

llamar **Ruta más corta 1**( $HS=HS(6, 3), S=111000, D=111000,$

$P_S = \{000111, 100011, 010011, 110001, 011001, 111000\}$ );

Llamada 6:

**Ruta más corta 1**( $HS=HS(6, 3), S=111000, D=111000,$

$P_S = \{000111, 100011, 010011, 110001, 011001, 111000\}$ )

Ya que  $((S = 111000) = (D = 111000))$  entonces

Regresar  $P_S=\{000111, 100011, 010011, 110001, 011001, 111000\}$ ;

◇

**Teorema 3** [14] El diámetro de una gráfica hiperestrella  $HS(n, k)$  es  $D(HS(n, k)) = n - 1$ .

*Demostración:* Para determinar el diámetro en  $HS(n, k)$  se aplica el algoritmo **Ruta más corta 1** a la gráfica  $HS(n, k)$ , además de la trayectoria  $P_S$  obtenida se calcula el máximo número de índices  $i, 2 \leq i \leq n$ , tal que  $r_i$  es 1 en el algoritmo **Ruta más corta 1**.

Dependiendo de  $k$ , se puede tener diferentes valores para el diámetro de  $HS(n, k)$ :

$$D(HS(n, k)) = \begin{cases} 2 & \text{si } k = 1 \\ n - 1 & \text{si } k = n/2 \\ 2k & \text{si } k < n/2 \end{cases}$$

Las gráficas hiperestrella  $HS(n, k)$  cuya  $k$  es 1 tienen estructura de estrella. Es decir,  $n - 1$  vértices son incidentes a un mismo vértice; por lo tanto, el diámetro de  $HS(n, k)$  es 2. Ejemplo de esto son  $HS(3, 1), HS(4, 1)$  y  $HS(5, 1)$  las cuales se muestran en la figura 2.8.

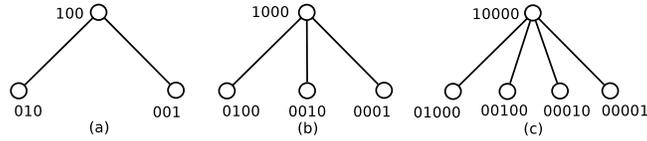


Figura 2.8: Hiperestrellas (a)  $HS(3,1)$ , (b)  $HS(4,1)$ , (c)  $HS(5,1)$ .

Sean  $u$  y  $v$  dos vértices en una gráfica hiperestrella regular tal que  $n = 2k$ , se aplica la operación **xor** a sus cadenas de bits. Entonces el máximo número de bits tales que  $r_i$  es 1 en el algoritmo es  $n$ . Sin embargo, después de pasar desde  $u$  hacia los otros  $n - 1$  vértices, las cadenas de bits de  $u$  y  $v$  se vuelven idénticas; por lo cual le toma  $n - 1$  pasos al algoritmo corregir todos los bits diferentes. Así, el diámetro de  $HS(n, n/2)$  es  $n - 1$ , esto lo podemos observar en las figuras 2.1  $HS(6, 3)$  y 2.15  $HS(4, 2)$ .

Para una gráfica hiperestrella irregular tal que  $k < n/2$ , el máximo número de índices  $i$  tales que  $r_i = 1$  es  $2k$ . Suponiendo que  $k < n/2$ , entonces éste es un diámetro menor que  $n - 1$ . El obtenido en el caso anterior se puede observar en la figura 2.3 a  $HS(5, 2)$ , que cumple con estas características. Por lo tanto, se concluye que el diámetro de una gráfica hiperestrella  $HS(n, k)$  es  $n - 1$ .  $\square$

**Ejemplo 6** Para  $n = 6$  y  $k = 3$  la distancia entre los vértices 111000 y 000111 de  $HS(6, 3)$  es  $D(111000, 000111) = d(111000, 000111) = |(111000, 011010), (011010, 101010), (101010, 001110), (001110, 100110), (100110, 000111)| = 5$ . Esta distancia coincide con  $p$ , que es la longitud máxima de  $r_i$  como se ve en la llamada 1 del Ejemplo 5; así mismo coincide con la longitud de la ruta  $P_S$  generada en ese mismo ejemplo.  $\diamond$

### 2.2.4. Propiedades de simetría

La simetría es una característica importante para la mayoría de los modelos gráficos en las redes de interconexión. Para una red de interconexión simétrica, la carga puede ser distribuida uniformemente a través de todos los vértices, reduciendo problemas de congestión. Por otra parte, la simetría hace el diseño de algoritmos de enrutamiento más fáciles, ya que permite definir una ruta entre cualesquiera dos nodos a asignarse al enrutamiento entre un

vértice arbitrario y un vértice específico, [13].

Se escribirá el vértice  $\overbrace{0\dots 0}^n \overbrace{1\dots 1}^n$  en  $HS(2n, n)$  como  $0^n 1^n$ . Sea  $d(u, v)$  la distancia de  $u = u_1 u_2 \dots u_{2n}$  a  $v = v_1 v_2 \dots v_{2n}$ . Se puede decir que  $d(u, v) = \sum_{i=1}^{2n} r_i$ , ya que la cadena de bits  $R = r_1 r_2 \dots r_{2n}$  es resultado de usar la operación  $\text{xOR}$ , donde  $r_i = u_i \oplus v_i$ . Sea  $R^-$  el conjunto de las posiciones de bits  $i$  tal que  $r_i = 1$ .

**Definición 6** Una arista que conecta dos vértices  $u$  y  $v$  es llamada  $i$ -arista si es el resultado de intercambiar el primer bit de  $u$  con su  $i$ -ésimo bit. Para la gráfica hiperestrella, el  $i$ -ésimo bit es complemento del primero.

**Ejemplo 7** En  $HS(6, 3)$ , el vértice 011001 es adyacente al vértice 110001, por una 3-arista.  $\diamond$

**Definición 7** Para un vértice  $u$ , se denota  $\mathcal{P} = \langle k_1, k_2, \dots, k_t \rangle$  como la ruta que se obtiene al empezar desde  $u$ , que lleva a su vecino usando una  $k_1$ -arista, el cual llega a su vecino al utilizar una  $k_2$ -arista, así sucesivamente hasta el último vecino que usa una  $k_t$ -arista, suponiendo que cada arista está presente en la gráfica.

**Ejemplo 8** Para el vértice  $u = 000111$ , la secuencia  $\langle 4, 2, 6 \rangle$  representa la ruta  $000111 - 100011 - 010011 - 110010$  en  $HS(6, 3)$ , pero la secuencia  $\langle 4, 5, 6 \rangle$  no representa una ruta, porque el segundo movimiento no está permitido, ya que cambia dos bits 1.  $\diamond$

Cada ruta se puede representar de esta forma, pero cada secuencia no representa una ruta para un vértice inicial dado. Se observa que si  $k_1, k_2, \dots, k_t$  representa una ruta de  $u$  a  $v$ , entonces se pueden permutar los elementos de la secuencia  $k_i$  con  $i$  par y permutar los elementos con subíndice impar, ante lo cual todavía se tiene una ruta de  $u$  a  $v$  con la misma longitud. Otras permutaciones no corresponden a una ruta.

**Ejemplo 9** Para el vértice  $u = 000111$ , se intercambian los subíndices pares e impares de la secuencia  $\langle 4, 2, 6, 3 \rangle$ , que representa la ruta  $000111 - 100011 - 010011 - 110010 - 011010$  para obtener  $\langle 6, 3, 4, 2 \rangle$ , la cual representa la ruta  $000111 - 100110 - 001110 - 101010 - 011010$  con la misma longitud que para la secuencia  $\langle 4, 2, 6, 3 \rangle$  en  $HS(6, 3)$ .  $\diamond$

Lo mismo se aplica para una ruta más corta. Dos rutas son **internamente disjuntas por vértices** si solamente tienen en común el vértice final y el inicial.

**Lema 1** [15] La longitud del ciclo más corto en  $HS(2n, n)$  es 6.

*Demostración* Ya que  $HS(2n, n)$  es una gráfica bipartita, no puede contener ciclos impares. Si existe un ciclo de longitud 4 en  $HS(2n, n)$ , entonces según la definición 7, debe ser de la forma  $\mathcal{C} = \langle k_1, k_2, k_1, k_2 \rangle$  ya que el recorrido es a través de una  $i$ -arista.

Si se supone el primer bit del vértice fuente como 0, entonces el  $k_1$ -ésimo bit debe ser 1, el  $k_2$ -ésimo bit debe ser 0. Después de la aplicación de la  $k_1$ -arista,  $k_2$ -arista al vértice fuente, se termina con un vértice con su primer bit 0,  $k_1$ -ésimo bit 0,  $k_2$ -ésimo bit 1. Así que para el siguiente vértice, no se puede usar la  $k_1$ -arista ya que cambiaría dos ceros, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto no existe un ciclo de longitud 4 en  $HS(2n, n)$ . La siguiente opción es un ciclo de longitud 6, y este tipo de ciclos existe. Por ejemplo, se tiene:

$$\begin{aligned} 0000\dots1111 &\leftrightarrow 1000\dots0111 \leftrightarrow 0100\dots0111 \leftrightarrow 1100\dots0110 \\ &\leftrightarrow 0100\dots1110 \leftrightarrow 1000\dots1110 \leftrightarrow 0000\dots1111 \end{aligned}$$

Así se completa la demostración.  $\square$

**Lema 2** [15] Sean  $u, v$  dos vértices en  $HS(2n, n)$ , además sean  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$  rutas de  $u$  a  $v$  con longitud  $\rho \geq 3$ , donde  $\mathcal{P} : \langle k_1, k_2, \dots, k_\rho \rangle$  y  $\mathcal{Q} : \langle m_1, m_2, \dots, m_\rho \rangle$ , donde  $k_1, k_2, \dots, k_\rho$  son todos diferentes. No existen vértices internos comunes en  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$  si y sólo si, para todo  $i$ ,  $1 \leq i < \rho$ , se tiene que  $\{k_1, k_2, \dots, k_i\} \neq \{m_1, m_2, \dots, m_i\}$ .

*Demostración.* Como  $k_1, k_2, \dots, k_\rho$  son todos diferentes, ya que se siguió la ruta  $\mathcal{P}$  de  $u$  a  $v$ , estos bits se moverán exactamente una vez, así, en el orden de  $\mathcal{Q}$  para terminar en el mismo vértice, se tiene que  $\{k_1, k_2, \dots, k_\rho\} = \{m_1, m_2, \dots, m_\rho\}$ . Primero, se supone que no existen vértices internos comunes entre  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$ . Entonces, para  $i$ ,  $1 \leq i < \rho$ , las subrutas representadas por  $\langle k_1, k_2, \dots, k_i \rangle$  y  $\langle m_1, m_2, \dots, m_i \rangle$  terminan en vértices diferentes, entonces se tiene que  $\{k_1, k_2, \dots, k_i\} \neq \{m_1, m_2, \dots, m_i\}$ .



*Demostración.* En primer lugar, se supone que no hay vértices internos en común entre  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$ . Entonces, para  $i$ ,  $1 \leq i \leq \min \{\rho, \sigma\}$ , las subrutas representadas por  $\langle k_1, k_2, \dots, k_i \rangle$  y  $\langle m_1, m_2, \dots, m_i \rangle$  terminan en vértices diferentes, donde  $i = \rho = \sigma$  porque  $v \neq w$ . Ya que en el trayecto de cada subruta cada bit correspondiente a un elemento de estas secuencias se coloca exactamente una vez, entonces se tiene que  $\{k_1, k_2, \dots, k_i\} \neq \{m_1, m_2, \dots, m_i\}$ .

Para el otro sentido, se supone que  $\{k_1, k_2, \dots, k_i\} \neq \{m_1, m_2, \dots, m_i\}$  para cada  $i$ , con  $1 \leq i \leq \min \{\rho, \sigma\}$ . Por contradicción, se supone que existe un vértice en común  $z \neq u$  en las dos rutas y que las subrutas a  $z$  están respectivamente representadas por  $\langle k_1, k_2, \dots, k_j \rangle$  y  $\langle m_1, m_2, \dots, m_p \rangle$ , donde  $j \leq \rho$  y  $p \leq \sigma$ . Ya que en el trayecto de la ruta representada por  $\langle k_1, k_2, \dots, k_j \rangle$  cada bit correspondiente se coloca exactamente una vez,  $m_1, m_2, \dots, m_p$  son todos diferentes también, se tiene que  $j = p \leq \min \{\rho, \sigma\}$  y  $\{k_1, k_2, \dots, k_j\} = \{m_1, m_2, \dots, m_j\}$ , lo cual es una contradicción.  $\square$

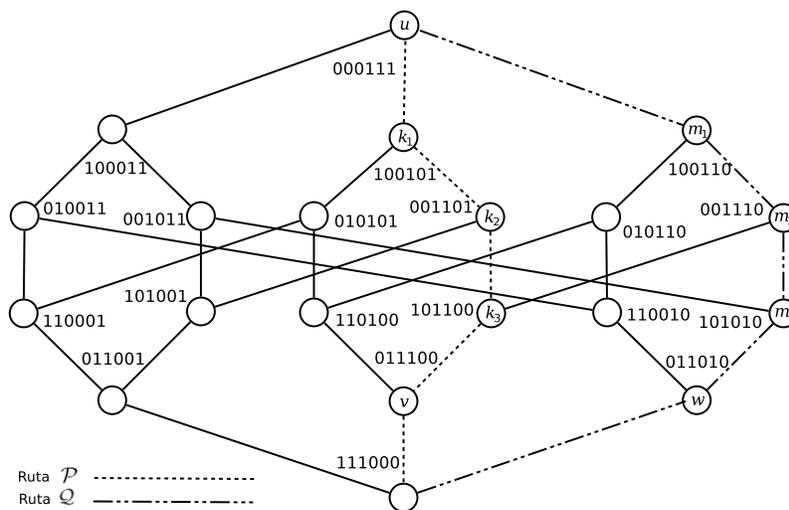


Figura 2.10: Ejemplo Lema 3.

**Ejemplo 11** En la figura 2.10 se muestran las rutas  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$  con vértice inicial  $u = 000111$  común y finales  $v = 011100, w = 011010$  diferentes, se ve que las rutas  $\mathcal{P}: \langle u, k_1, k_2, k_3, v \rangle$  y  $\mathcal{Q}: \langle u, m_1, m_2, m_3, w \rangle$  son diferentes.  $\diamond$

**Propiedad 1** Para un vértice  $w$  en una ruta  $\mathcal{P}$  de  $u$  a  $v$ , se toma en cuenta una  $i$ -arista que conecta  $w$  con su vecino  $w'$ . Si  $i \in R^-$  y una arista  $(w, w')$

está en  $\mathcal{P}$ , entonces la arista  $(w, w')$  lleva a una ruta más corta de  $u$  a  $v$ , [13].

**Definición 8** Para dos vértices  $u$  y  $v$  en  $HS(2n, n)$ , un vértice  $w$  en una ruta de  $u$  a  $v$  se dice que está en el **nivel**  $L_m$  si  $d(u, v)$  es  $m$ , [13].

**Propiedad 2** Para un vértice  $u$  en  $HS(2n, n)$ , cualesquiera dos rutas  $\mathcal{P}: \langle k_1, k_2, \dots, k_t \rangle$  y  $\mathcal{Q}: \langle h_1, h_2, \dots, h_t \rangle$  de  $u$  llevan al mismo vértice, si el conjunto de números con índices pares en  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$  son el mismo, además el conjunto de números con índices impares en  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$  son también el mismo, [13].

**Definición 9** Para un vértice  $u = u_1 \dots u_{2n}$  en  $HS(2n, n)$ , un **árbol relacionado**  $T_u$  enraizado en  $u$  consiste en  $n$  hojas de  $u, c_1, \dots, c_n$  y  $n - 1$  hojas de  $c_1, g_1, \dots, g_{n-1}$ , [13].

Sea  $I_u = \langle i_1, \dots, i_{2n-1} \rangle$  una secuencia de  $i$ -aristas en un árbol relacionado  $T_u$  tal que  $u, c_j$  están conectados por una  $i_j$ -arista, además  $c_1, g_k$  están conectados por una  $i_{n+k}$ -arista. De manera similar, se considera una secuencia  $I_v = \langle i'_1, \dots, i'_{2n-1} \rangle$  para un vértice  $v$ . Un vértice  $u$  relacionado a un vértice  $v$  se puede construir usando las siguientes **Reglas de asignación**:

- Regla 1. Si  $u_1 = v_1$ , entonces  $u_1$  se relaciona con  $v_1$ ,  $u_{i_j}$  se relaciona con  $v_{i'_j}$  para  $i_j \in I_u$  e  $i'_j \in I_v$ .
- Regla 2. Si  $\bar{u}_1 = v_1$ , entonces  $\bar{u}_1$  se relaciona con  $v_1$ ,  $\bar{u}_{i_j}$  se relaciona con  $v_{i'_j}$  para  $i_j \in I_u$  e  $i'_j \in I_v$ .

**Ejemplo 12** Sean  $u = 010110$  y  $v = 000111$  dos vértices en  $HS(6, 3)$ , entonces se tienen árboles de relación,  $T_u$  y  $T_v$  como se muestra en la figura 2.11. A partir de  $T_u$ , se tiene una secuencia  $I_u = \langle 2, 4, 5, 3, 6 \rangle$ , y a partir de  $T_v$  hay una secuencia  $I_v = \langle 4, 5, 6, 2, 3 \rangle$ . Ya que  $u_1 = v_1 = 0$ ,  $u$  se puede relacionar con  $v$  por la **Regla 1**.  $\diamond$

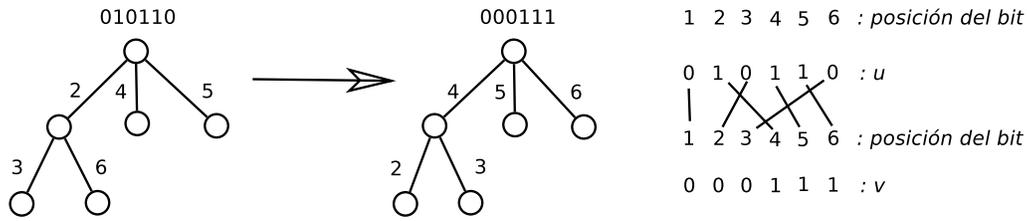


Figura 2.11: Árbol para  $u = 010110$  y  $v = 000111$  usando la Regla 1.

**Ejemplo 13** Sean  $u = 110001$  y  $v = 001011$  dos vértices en  $HS(6, 3)$ , entonces se tienen árboles de relación,  $T_u$  y  $T_v$  que se muestran en la figura 2.12. De forma similar, se tienen dos secuencias  $I_u = \langle 3, 4, 5, 2, 6 \rangle$  e  $I_v = \langle 3, 5, 6, 2, 4 \rangle$ . Puesto que  $\bar{u}_1 = v_1 = 0$ ,  $u$  se puede relacionar con  $v$  por la Regla 2.  $\diamond$

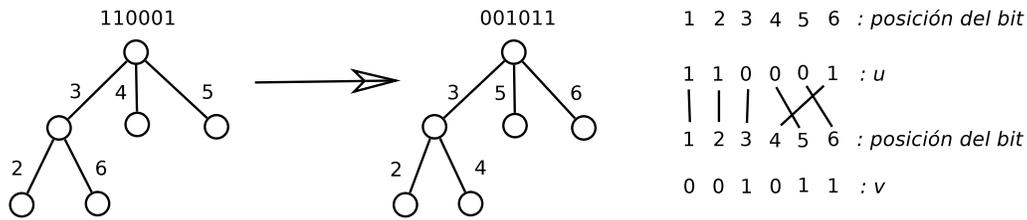


Figura 2.12: Árbol para  $u = 110001$  y  $v = 001011$  usando la Regla 2.

Existe un automorfismo de la gráfica que relaciona  $u$  con  $v$  mediante las Reglas de asignación antes dadas, [13].

**Teorema 4** [13] Una gráfica hiperestrella  $HS(2n, n)$  es simétrica por vértices.

Se puede reducir el enrutamiento entre dos vértices  $u'$  y  $v'$  al enrutamiento de un vértice arbitrario  $u$  a un vértice especial  $v$ ; es decir,  $0^n 1^n$ . Si se encuentra una ruta  $\mathcal{P}: \langle p_1, p_2, \dots, p_i \rangle$  de  $u'$  a  $v'$ , entonces se puede reducir la ruta  $\mathcal{P}$  a la ruta  $\mathcal{Q}: \langle q_1, q_2, \dots, q_i \rangle$  de  $u$  a  $v$  tal que  $p_i$  se relaciona con  $q_i$  por medio de las Reglas de asignación para dos vértices  $v'$  y  $v$ .

**Ejemplo 14** Considere una ruta  $\mathcal{P}: \langle 6, 4, 3, 2 \rangle$  entre  $001011$  y  $010110$  en  $HS(6, 3)$  cuyos árboles relacionados para  $010110$  y  $000111$  se muestran en

la figura 2.11. Entonces la trayectoria  $\mathcal{P}$  se reduce a una ruta  $\mathcal{Q}: \langle 3, 5, 2, 4 \rangle$  entre 011001 y 000111, el cual se puede ver en la figura 2.13.  $\diamond$

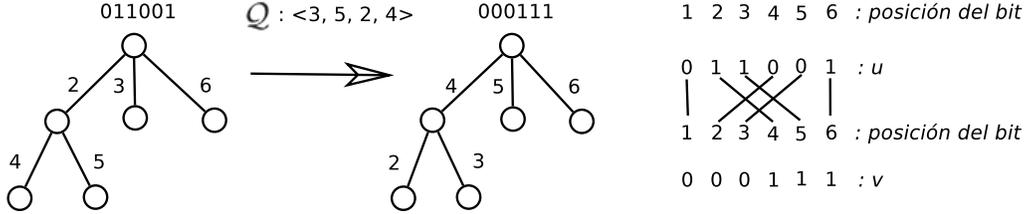


Figura 2.13: Árbol para  $u = 011001$  y  $v = 000111$  con una ruta  $\mathcal{Q}: \langle 3, 5, 2, 4 \rangle$ .

**Lema 4** [13] Para un vértice  $u = 0^n 1^n$  en  $HS(2n, n)$ , una subgráfica que consta de vértices en  $L_i$ ,  $0 \leq i \leq n - 1$ , y una subgráfica formada de vértices en  $L_j$ ,  $n \leq j \leq 2n - 1$ , son simétricas.

*Demostración.* El número de vértices en  $HS(2n, n)$  es  $\binom{2n}{n}$ . Para construir una ruta más corta, se hace por medio de  $i$ -aristas donde  $n + 1 \leq i \leq 2n$  y a través de  $j$ -aristas,  $2 \leq j \leq n$ , alternando  $i, j$ . Por lo tanto, no existe arista entre los vértices en el mismo nivel o entre los vértices en los niveles  $L_i$  y  $L_j$  tal que  $|L_i - L_j| \geq 2$ . Un vértice  $v = 1^n 0^n$  está en  $L_{2n-1}$  y  $u$  se puede conectar a él por una ruta  $\mathcal{P} = \langle n + 1, 2, n + 2, 3, \dots, 2n, n \rangle$ .

Ya que una ruta más corta desde  $u$  se puede construir por medio de  $i, j$ -aristas únicas,  $n + 1 \leq i \leq 2n$  y  $2 \leq j \leq n$ , alternando  $i, j$ , entonces cualquier ruta más corta  $\langle k_1, \dots, k_t \rangle$  desde  $u$  a un vértice tiene los mismos conjuntos de números con índices pares e impares como  $\mathcal{P}$ . Por lo tanto, por la Propiedad 2, el vértice  $v$  es único en  $L_{2n-1}$ .

Los vértices en  $L_1$  están conectados a  $u$  por medio de  $i$ -aristas,  $n + 1 \leq i \leq 2n$ , los vértices en  $L_{2n-2}$  están conectados a  $v$  por las mismas  $i$ -aristas. Para un vértice  $u'$  en  $L_1$ , algunos vértices  $u'', \dots, u'''$  en  $L_2$  están conectados a  $u'$  por medio de  $j$ -aristas,  $2 \leq j \leq n$ , algunos vértices  $v'' (= \overline{u''}), \dots, v''' (= \overline{u'''})$  en  $L_{2n-3}$  están conectados a un vértice  $v' (= \overline{u'})$  por las mismas  $j$ -aristas, así sucesivamente.

En otras palabras, los vértices en  $L_i$  y vértices en  $L_{2n-i-1}$ ,  $0 \leq i \leq n-1$ , son complementos, el número de vértices y aristas correspondientes a estos niveles son también las mismas.  $\square$

**Ejemplo 15** El número de vértices en  $HS(4, 2)$  es  $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{4} = 3! = 6$ . Para construir una ruta más corta, se hace por medio de  $i, j$ -aristas alternadas, con  $3 \leq i \leq 4$  y  $j = 2$ , para el vértice  $v = 1100$  en  $L_3$  y  $u = 0011$ , se puede observar que  $u, v$  están conectados por una ruta  $\mathcal{P}: \langle 3, 2, 4 \rangle$  en  $HS(4, 2)$ , según la definición 7 y tomando los valores  $i, j$  de los intervalos dados.

El vértice  $u_1 = 1001$  en  $L_1$  está conectado a  $u$  por medio de una 3-arista,  $u_1$  y  $u_2 = 0101$  en  $L_2$  están conectados a través de una 2-arista,  $u_2$  está conectado a  $v$  por medio de una 4-arista aplicando la definición 6 en cada caso.

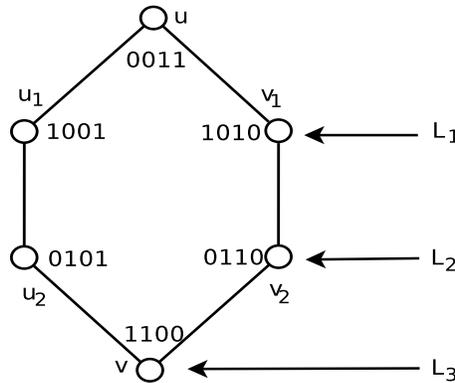


Figura 2.14: Gráfica  $HS(4, 2)$  con niveles.

Se puede notar que  $\bar{u}_1 = 0110 = v_2$  que está en  $L_2$ ,  $\bar{u}_2 = 1010 = v_1$  en  $L_1$ , además  $\bar{u} = 1100 = v$ , entonces se pueden usar las mismas  $i, j$ -aristas alternadas para construir una ruta que vaya de  $v$  a  $u$ , como se muestra en la figura 2.14, el número de vértices y aristas correspondientes a estos niveles son las mismas por lo tanto las subgráficas que constan de vértices en  $L_1$  y  $L_2$  son simétricas.  $\diamond$

## 2.3. Inmersión de otras gráficas

La inmersión eficiente es otra propiedad favorable para una red de interconexión. Parte de su importancia se basa en el hecho de que ésta es una generalización, para decidir si una gráfica es subgráfica de otra. Esto es de particular interés ya que se puede ser capaz de adaptar las propiedades y algoritmos obtenidos para una gráfica en otra.

**Definición 10** Sean  $G = (V, E)$  y  $G' = (V', E')$  gráficas y  $P(G')$  denota el conjunto de rutas en  $G'$ . Se dice que  $(\phi, \rho)$  es una **inmersión** de  $G$  en  $G'$  si  $\phi : V \rightarrow V'$  y  $\rho : E \rightarrow P(G')$  son funciones inyectivas tales que  $(u, v) \in E$  si y sólo si  $\rho(u, v)$  es una ruta entre  $\phi(u)$  y  $\phi(v)$ , esas rutas son internamente disjuntas por vértices, además el conjunto de vértices internos de las rutas en  $\rho(E)$  y  $\phi(V)$  son ajenos. En términos de teoría de gráficas,  $G$  es homeomórfica a una subgráfica de  $G'$ , [10].

Una de las medidas más comunes del costo de la inmersión es la dilatación de la inmersión, que mide el retardo de la comunicación.

**Definición 11** La **dilatación** de una arista  $e = (u, v)$  en la gráfica  $G$  es la longitud de la trayectoria de  $\rho(e)$  y la **dilatación de la inmersión** es el valor máximo entre todas las dilataciones de las aristas.

Si la inmersión es débil, entonces usamos la terminología de dilatación débil. Finalmente, un caso especial de inmersión es el isomorfismo de gráficas. La inmersión  $(\phi, \rho)$  de  $G$  en  $G'$  es un isomorfismo si  $\phi$  es una función biyectiva,  $\rho(u, v) = (\phi(u), \phi(v))$  para cada  $(u, v) \in E$  y  $\rho$  es una función biyectiva de  $E$  en  $E'$ . Ya que  $\rho$  se induce mediante  $\phi$ , es suficiente e incluso habitual, referirse a  $\phi$  como un isomorfismo.

Un hipercubo  $Q_n$  se puede representar como una gráfica con  $n + 1$  niveles. La figura 2.15 es una representación en niveles de  $Q_4$ .

**Definición 12** El **nivel en un hipercubo** es el conjunto de vértices, formados por cadenas binarias de longitud  $n$ , que contienen  $i$  símbolos 1 donde  $0 \leq i \leq n - 1$  y está representado por  $L_i^n$ . Por lo cual se tiene que cada arista en  $Q_n$ , une un vértice en  $L_i^n$  con un vértice en  $L_{i+1}^n$ , para alguna  $i$ ,  $0 \leq i \leq n - 1$ .

**Ejemplo 16** Se describirán los niveles de  $Q_4$ , donde cada vértice está representado por las cadenas binarias de longitud 4, con las siguientes características:

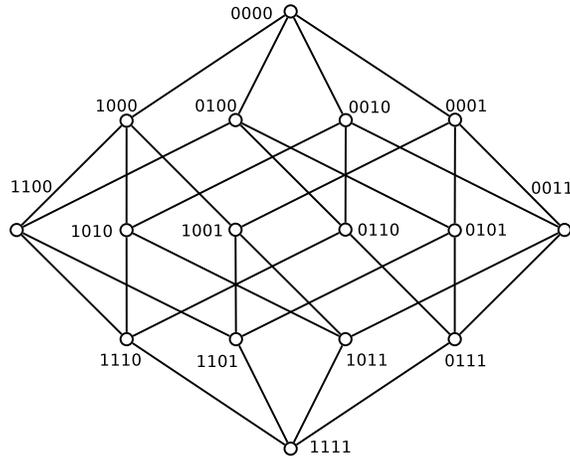


Figura 2.15: Hipercubo  $Q_4$  en niveles.

Se comienza con  $L_0^4 = \{0000\}$  el cual no cuenta con símbolos 1, el conjunto  $L_1^4 = \{1000, 0100, 0010, 0001\}$  con un símbolo 1 en cada vértice,  $L_2^4 = \{1100, 1010, 1001, 0110, 0101, 0011\}$  con dos símbolos 1,  $L_3^4 = \{1110, 1101, 1011, 0111\}$  con tres símbolos 1.  $\diamond$

**Definición 13** Se denota como  $Q_i^n$  a la gráfica inducida por los vértices entre  $L_i^n$  y  $L_{i+1}^n$ , para  $0 \leq i \leq n - 1$ , algunos autores la denominan **gráfica de nivel medio** o **cubo medio**, [15]. Se puede observar que  $Q_i^n$  es una gráfica bipartita. En la figura 2.16 se tiene la gráfica  $Q_1^4$  inducida por los vértices entre  $L_1^4$  y  $L_2^4$ .

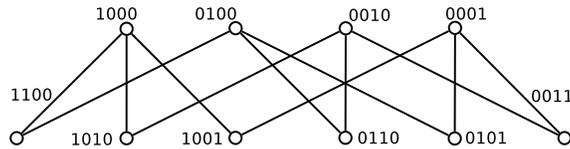


Figura 2.16: Particiones  $L_1^4$  y  $L_2^4$  de  $Q_1^4$ .

Sean  $s_1$  y  $s_2$  dos cadenas binarias. La distancia de Hamming entre  $s_1$  y  $s_2$  es el número de bits en que difieren. Por lo tanto, dos vértices en  $Q_n$  son adyacentes si y sólo si su distancia de Hamming es 1. La distancia de Hamming también se puede usar para describir la adyacencia de hiperestrellas.

**Definición 14** Sea  $s$  una cadena binaria no vacía. Se define  $\mathbf{trunc}(s)$  como la función para indicar la cadena obtenida a partir de  $s$  quitando el bit más significativo. Entonces, para  $HS(n, k)$ ,  $u \in V_0(n, k)$  y  $v \in V_1(n, k)$  son **adyacentes** si y sólo si  $\mathbf{trunc}(u)$  y  $\mathbf{trunc}(v)$  tienen distancia de Hamming 1, así el único bit en el cual ambos difieren es 1 en  $\mathbf{trunc}(u)$  y 0 en  $\mathbf{trunc}(v)$  ya que  $u$  y  $v$  tienen exactamente  $k$  símbolos 1.

**Teorema 5** [10] Sea  $n \geq 2$ . Entonces  $Q_i^n$  es isomorfo a  $HS(n + 1, i + 1)$ .

*Demostración* Los conjuntos de bipartición para  $Q_i^n$  son  $L_i^n$  y  $L_{i+1}^n$ . Se vuelven a etiquetar los vértices de  $L_i^n$  agregando un 1 como bit más significativo, para los vértices de  $L_{i+1}^n$  se agrega un 0 como bit más significativo. Lo anterior se hace para cada cadena binaria con la cual se etiquetan los vértices y se nombra los conjuntos resultantes  $M_i^n$ ,  $M_{i+1}^n$  respectivamente.

Por lo cual todos los vértices son ahora cadenas binarias de longitud  $n + 1$  con exactamente  $i + 1$  símbolos 1. Por otra parte,  $u \in M_i^n$  y  $v \in M_{i+1}^n$  son adyacentes si y sólo si  $\mathbf{trunc}(u)$  y  $\mathbf{trunc}(v)$  tienen distancia de Hamming 1.  $\square$

**Ejemplo 17** Se muestra como obtener la Hiperestrella isomorfa a  $Q_1^4$ .

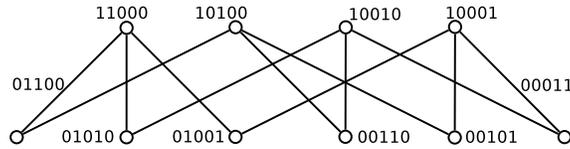


Figura 2.17: Particiones  $M_1^4$  y  $M_2^4$  de  $Q_1^4$ .

Sean  $L_1^4$  y  $L_2^4$  los conjuntos de bipartición para  $Q_1^4$ , figura 2.16. Se agrega un 1 como bit más significativo a cada vértice en  $L_1^4$  y un 0 como bit más significativo a cada vértice en  $L_2^4$  para de esta manera obtener  $M_1^4$  y  $M_2^4$ , lo cual se observa en la figura 2.17. Finalmente se pueden acomodar los vértices y aristas para dar forma a  $HS(5, 2)$ , la cual se muestra en la figura 2.18.  $\diamond$

Como resultado inmediato del teorema anterior se tiene lo siguiente.

**Corolario 1** [10] Sea  $n \geq 2$ . Entonces  $Q_n$  se puede dividir en  $n$  hiperestrellas ajenas por aristas, tales hiperestrellas son isomorfas a  $HS(n + 1, i + 1)$  para  $i = 0, 1, \dots, n - 1$ .

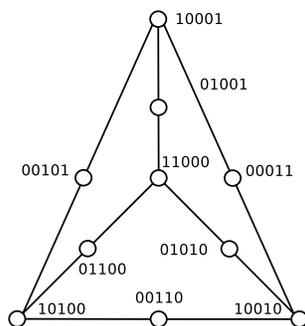


Figura 2.18: Gráfica Hiperestrella  $HS(5, 2)$ .

**Teorema 6** [10] Sea  $n \geq 2$ . Entonces el hipercubo  $Q_n$  puede ser encajado en la hiperestrella  $HS(2n, n)$  con dilatación 2.

*Demostración:* Durante esta prueba, se utiliza  $s_1s_2$  para denotar la concatenación de las dos cadenas binarias  $s_1$  y  $s_2$ , además  $\bar{s}_1$  y  $\bar{s}_2$  como el complemento de  $s_1$  y  $s_2$  respectivamente, donde se reemplaza cada 0 por 1 y viceversa. Para todo vértice  $v \in V(Q_n)$  se define  $\phi(v) = v\bar{v}$ . Entonces  $\phi(v)$  es una cadena binaria de longitud  $2n$  con exactamente  $n$  símbolos 1. Por lo tanto  $\phi : V(Q_n) \rightarrow V(HS(2n, n))$  es una función inyectiva.

Ahora se consideran las aristas de  $Q_n$ . Sea  $e \in E(Q_n)$ . Hay dos casos:

**Caso 1.** Los dos vértices adyacentes difieren en el bit más significativo. Entonces se puede suponer que tienen la forma  $0s$  y  $1s$ , donde  $s$  es una cadena binaria de longitud  $n - 1$ . Se define  $\rho(e)$  como la ruta de longitud 1 ( $0s1\bar{s}$ ,  $1s0\bar{s}$ ) en  $HS(2n, n)$ .

**Caso 2.** Los dos vértices adyacentes no difieren en el bit más significativo. Entonces se puede suponer que tienen la forma  $as_10s_2$  y  $as_11s_2$  donde  $s_1, s_2$  son cadenas binarias, posiblemente vacías.

Si  $a = 0$ , se define  $\rho(e)$  como la ruta de longitud 2:

$(0s_10s_21\bar{s}_11\bar{s}_2, 1s_10s_21\bar{s}_10\bar{s}_2, 0s_11s_21\bar{s}_10\bar{s}_2)$ .

Si  $a = 1$ , se define  $\rho(e)$  como la ruta de longitud 2:

$(1s_10s_20\bar{s}_11\bar{s}_2, 0s_11s_20\bar{s}_11\bar{s}_2, 1s_11s_20\bar{s}_10\bar{s}_2)$ .

Se puede observar que el vértice interno no pertenece a  $\phi(V(Q_n))$ .

Entonces  $\rho$  es la función inyectiva requerida. Por construcción, cada vértice en  $Q_n$  está relacionado con un vértice en  $HS(2n, n)$  con la propiedad de que la primera mitad de la cadena es el complemento de la segunda mitad.

Además, el vértice en el centro de la ruta de longitud 2 en la imagen de  $\rho$  tiene la siguiente propiedad: la primera y la segunda mitad de la cadena coinciden exactamente en dos posiciones, incluyendo la primera posición. Por lo tanto, identifica únicamente a la preimagen de la ruta. Así, la imagen de  $\rho$  consiste en rutas internamente disjuntas por vértices.  $\square$

**Ejemplo 18** Se describirá el proceso, mediante el cual el hipercubo  $Q_3$  será inmerso en la hiperestrella  $HS(6, 3)$ .

Se define el conjunto de vértices en  $Q_3$  como  $V(Q_3) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ ; donde  $v_1 = 000, v_2 = 100, v_3 = 010, v_4 = 001, v_5 = 110, v_6 = 101, v_7 = 011, v_8 = 111$ ; las aristas de  $Q_3$  como  $E(Q_3) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}$ ; donde  $e_1 = (v_1, v_2), e_2 = (v_1, v_3), e_3 = (v_1, v_4), e_4 = (v_2, v_5), e_5 = (v_2, v_6), e_6 = (v_3, v_5), e_7 = (v_3, v_7), e_8 = (v_4, v_6), e_9 = (v_4, v_7), e_{10} = (v_5, v_8), e_{11} = (v_6, v_8), e_{12} = (v_7, v_8)$ . La gráfica resultante se muestra en la figura 2.19.

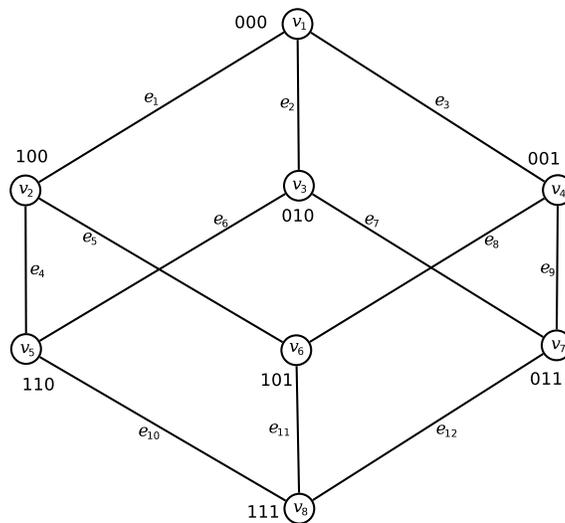


Figura 2.19: Gráfica  $Q_3$  etiquetada con vértices y aristas.

Ahora  $\phi(V(Q_3)) = \{v_1\bar{v}_1, v_2\bar{v}_2, v_3\bar{v}_3, v_4\bar{v}_4, v_5\bar{v}_5, v_6\bar{v}_6, v_7\bar{v}_7, v_8\bar{v}_8\} = \{(000111), (100011), (010101), (001110), (110001), (101010), (011100), (111000)\} = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8\}$ , estos vértices que se acaban de crear están en  $HS(6, 3)$ , además a cada vértice de  $Q_3$  le corresponde un vértice en  $HS(6, 3)$ .

La función  $\rho(E(Q_3))$  se aplica sobre las aristas de la siguiente manera: Las aristas  $e_1, e_6, e_8$  y  $e_{12}$  tienen vértices adyacentes que difieren en el bit más significativo,  $\rho$  es la ruta de longitud 1 ( $0s_1\bar{s}, 1s_0\bar{s}$ ); es decir, la primera mitad del vértice es complemento de la segunda mitad, por lo cual  $\{\rho(e_1), \rho(e_6), \rho(e_8), \rho(e_{12})\} = \{(000111, 100011), (010101, 110001), (001110, 101010), (011100, 111000)\} = \{(u_1, u_2), (u_3, u_5), (u_4, u_6), (u_7, u_8)\}$ .

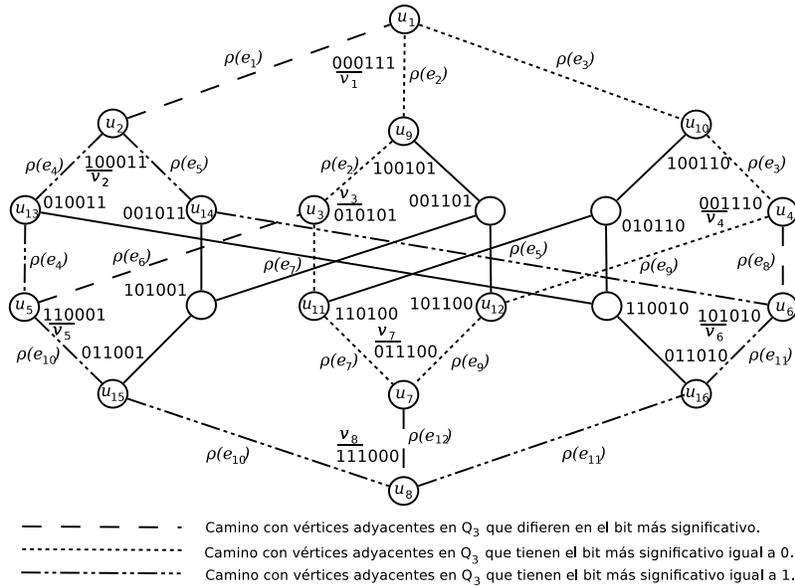


Figura 2.20: Gráfica  $Q_3$  inmersa en  $HS(6, 3)$ .

Las aristas  $e_2, e_3, e_7$  y  $e_9$  tienen vértices adyacentes con el bit más significativo igual a 0,  $\rho$  es la ruta de longitud 2 ( $0s_10s_21\bar{s}_11\bar{s}_2, 1s_10s_21\bar{s}_10\bar{s}_2, 0s_11s_21\bar{s}_10\bar{s}_2$ ), por lo cual  $\{\rho(e_2), \rho(e_3), \rho(e_7), \rho(e_9)\} = \{(000111, 100101, 010101), (000111, 100110, 001110), (010101, 110100, 011100), (001110, 101100, 011100)\} = \{(u_1, u_9, u_3), (u_1, u_{10}, u_4), (u_3, u_{11}, u_7), (u_4, u_{12}, u_7)\}$  se observa que para  $\rho(e_2), \rho(e_9)$   $s_1 = \emptyset$  además  $s_2 = \emptyset$  en  $\rho(e_3), \rho(e_7)$ .

Las aristas  $e_4, e_5, e_{10}$  y  $e_{11}$  tienen vértices adyacentes con el bit más significativo igual a 1,  $\rho$  es la ruta de longitud 2,  $(1s_10s_20\overline{s_1}1\overline{s_2}, 0s_11s_20\overline{s_1}1\overline{s_2}, 1s_11s_20\overline{s_1}0\overline{s_2})$ , por lo cual  $\{\rho(e_4), \rho(e_5), \rho(e_{10}), \rho(e_{11})\} = \{(100011, 010011, 110001), (100011, 001011, 101010), (110001, 011001, 111000), (101010, 011010, 111000)\} = \{(u_2, u_{13}, u_5), (u_2, u_{14}, u_6), (u_5, u_{15}, u_8), (u_6, u_{16}, u_8)\}$ ; observe que para  $\rho(e_5), \rho(e_{10})$   $s_2 = \emptyset$  además  $s_1 = \emptyset$  en  $\rho(e_4), \rho(e_{12})$ .

Los vértices  $u_9 \dots u_{16}$  no pertenecen a  $\phi(V(Q_3))$ , además de tener la propiedad de que la primera y la segunda mitad de la cadena coinciden exactamente en dos posiciones, incluyendo la primera posición. En la figura 2.20 se muestra el resultado de la inmersión y las rutas generadas.  $\diamond$

## Inmersión de un toro en una hiperestrella

Las gráficas llamadas toro  $T_n$  de  $n \times n$  son mallas que en sus filas y columnas tienen conexiones en anillo, esto contribuye a disminuir su diámetro a la mitad y los convierte en estructuras simétricas. El toro  $T_n$  con  $n \geq 2$  tiene el conjunto de vértices  $\{(i, j): 1 \leq i, j \leq n\}^2$ . Dos vértices  $(i_1, j_1)$  e  $(i_2, j_2)$  son adyacentes si y sólo si, se cumple una de las siguientes condiciones:

1.  $i_1 = i_2$  y  $|j_1 - j_2| \equiv 1 \pmod{n}$ .
2.  $j_1 = j_2$  e  $|i_1 - i_2| \equiv 1 \pmod{n}$ .

En términos de teoría de gráficas,  $T_n$  es  $C_n \times C_n$ . La figura 2.21 muestra  $T_4$ .

**Teorema 7** [10] Sea  $n \geq 2$ . Entonces  $T_n$  puede ser encajado en  $HS(2(n+1), n+1)$  con dilatación débil 2.

*Demostración* Sea  $S$  un subconjunto de  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Se define  $\alpha_n(S)$  como la cadena binaria de longitud  $n$ , donde la  $k$ -ésima posición es 1 si y sólo si  $k \in S$ . Si  $S = \{t\}$  es un conjunto unitario, se simplifica la notación y se escribe  $\alpha_n(t)$  en lugar de  $\alpha_n(\{t\})$ . Ahora, para cada vértice  $(i, j) \in V(T_n)$ , se define  $\phi(i, j) = 0\alpha_n(i)1\alpha_n(j)$ .

Entonces  $\phi(i, j)$  es una cadena binaria de longitud  $2(n+1)$  con exactamente

---

<sup>2</sup>Aunque la definición tradicional de toro es sobre el conjunto  $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ , esta definición equivalente es más útil para la función biyectiva dada en el teorema 2.

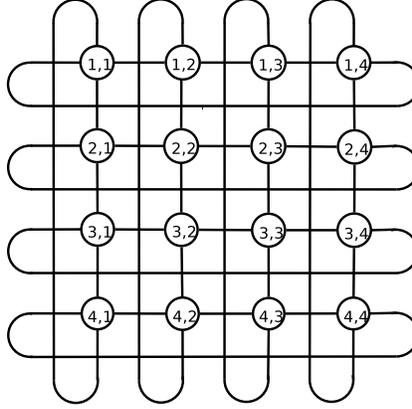


Figura 2.21: Gráfica  $T_4$ .

$(n+1)$  1's. Se observa que  $\phi : V(T_n) \rightarrow V(HS(2(n+1), n+1))$  es una función inyectiva. Se considera una arista  $e \in T_n$ . Entonces se tienen los siguientes casos.

**Caso 1.** Suponga que  $e$  es la arista entre  $(i, j_1)$  e  $(i, j_2)$ . Entonces se define  $\rho(e)$  como la ruta  $(0\alpha_n(i)1\alpha_n(j_1), 1\alpha_n(i)1\alpha_n(\{j_1, j_2\}), 0\alpha_n(i)1\alpha_n(j_2))$ .

**Caso 2.** Suponga que  $e$  es la arista entre  $(i_1, j)$  e  $(i_2, j)$ . Entonces se define  $\rho(e)$  como la ruta  $(0\alpha_n(i_1)1\alpha_n(j), 1\alpha_n(\emptyset)1\alpha_n(j), 0\alpha_n(i_2)1\alpha_n(j))$ .  $\square$

**Ejemplo 19** Se ilustra la demostración del teorema 7 haciendo la inmersión de  $T_2$  en  $HS(6, 3)$ .

Sea  $n = 2$  y  $S = \{1, 2\}$ , se define  $\alpha_2(S)$  como la cadena binaria de longitud 2, donde la  $k$ -ésima posición es 1 si y sólo si  $k \in S$ , para cada vértice  $(i, j) \in V(T_2)$ , se usará  $\phi(i, j) = 0\alpha_2(i)1\alpha_2(j)$ .

Entonces  $HS(2(n+1), n+1) = HS(6, 3)$ , para  $\{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\} \in V(T_2)$ , por lo cual,  $\phi(1, 1) = 0\alpha_2(1)1\alpha_2(1) = 0101\alpha_2(1) = 0101\bar{1}0 = 010101$ ,  $\phi(1, 2) = 0\alpha_2(1)1\alpha_2(2) = 0\alpha_2(1)1\bar{0}1 = 010110$ ,  $\phi(2, 1) = 0\alpha_2(2)1\alpha_2(1) = 001101$ ,  $\phi(2, 2) = 0\alpha_2(2)1\alpha_2(2) = 001110$ , estos se muestran en la figura 2.22, además de las aristas de  $T_2$ .

Entonces tenemos que cada  $\phi(i, j)$  es una cadena binaria de longitud 6 con

exactamente tres símbolos 1.  $\phi : V(T_2) \rightarrow V(HS(6, 3))$  es una función inyectiva. Para las aristas  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  en  $T_2$ . Se tienen los siguientes casos:

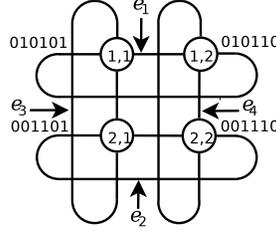


Figura 2.22: Gráfica  $T_2$  con algunos vértices de  $V(HS(6, 3))$ .

1.  $e_1$  es la arista entre  $(i, j_1) = (1, 1)$  e  $(i, j_2) = (1, 2)$ .  
Se define  $\rho(e_1)$  como la ruta  $(0\alpha_2(i)1\alpha_2(j_1), 1\alpha_2(i)1\alpha_2(\{j_1, j_2\}), 0\alpha_2(i)1\alpha_2(j_2)) = (0\alpha_2(1)1\alpha_2(1), 1\alpha_2(1)1\alpha_2(\{1, 2\}), 0\alpha_2(1)1\alpha_2(2)) = (010101, 110100, 010110)$ .
2.  $e_2$  es la arista entre  $(i, j_1) = (2, 1)$  e  $(i, j_2) = (2, 2)$ .  
Se tiene que  $\rho(e_2)$  es la ruta  $(0\alpha_2(i)1\alpha_2(j_1), 1\alpha_2(i)1\alpha_2(\{j_1, j_2\}), 0\alpha_2(i)1\alpha_2(j_2)) = (001101, 101100, 001110)$ .
3.  $e_3$  es la arista entre  $(i_1, j) = (1, 1)$  e  $(i_2, j) = (2, 1)$ .  
Entonces se define  $\rho(e_3)$  como la ruta  $(0\alpha_2(i_1)1\alpha_2(j), 1\alpha_2(\emptyset)1\alpha_2(j), 0\alpha_2(i_2)1\alpha_2(j)) = (0\alpha_2(1)1\alpha_2(1), 1\alpha_2(\emptyset)1\alpha_2(1), 0\alpha_2(2)1\alpha_2(1)) = (010101, 100101, 001101)$ .
4.  $e_4$  es la arista entre  $(i_1, j) = (1, 2)$  e  $(i_2, j) = (2, 2)$ .  
Se tiene que  $\rho(e_4)$  es la ruta  $(0\alpha_2(i_1)1\alpha_2(j), 1\alpha_2(\emptyset)1\alpha_2(j), 0\alpha_2(i_2)1\alpha_2(j)) = (010110, 100110, 001110)$ .

El resultado de la inmersión de  $T_2$  en  $HS(6, 3)$  se presenta en la figura 2.23.

◇

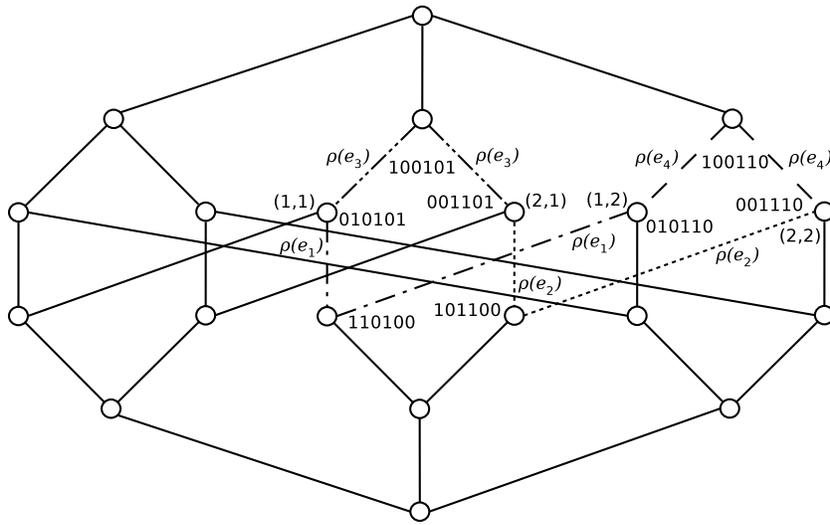


Figura 2.23: Gráfica  $T_2$  inmersa en  $HS(6,3)$ .

# Capítulo 3

## Propiedades de la gráfica hiperestrella

En este capítulo se revisarán las gráficas pares e impares y su relación con la gráfica hiperestrella; además se verá el área de la superficie para la hiperestrella, un tema que tiene importancia para el diseño de algoritmos y rendimiento de la red de interconexión.

### 3.1. Relación con otras gráficas

Se analizarán, en esta sección, dos clases de gráficas, vistas como redes de interconexión, que están estrechamente relacionadas con la gráfica hiperestrella, éstas son las gráficas pares e impares, además se hará un acercamiento a algunas de las relaciones con la gráfica hiperestrella.

#### 3.1.1. Gráfica impar

Las gráficas impares en el contexto de la teoría de gráficas, pertenecen a la familia de las gráficas simétricas, además son una subclase de las gráficas de Kneser, después fueron estudiadas como una potencial red de interconexión. Las gráficas impares como redes de interconexión se pueden definir de la siguiente manera:

**Definición 15** Sea  $n$  un entero impar con  $n = 2\delta - 1$ ,  $\delta \geq 2$ . El conjunto de vértices de la gráfica impar  $O_\delta$  es el conjunto de cadenas binarias de longitud  $n$  con exactamente  $\delta$  símbolos 1. Dos vértices están conectados si y sólo si

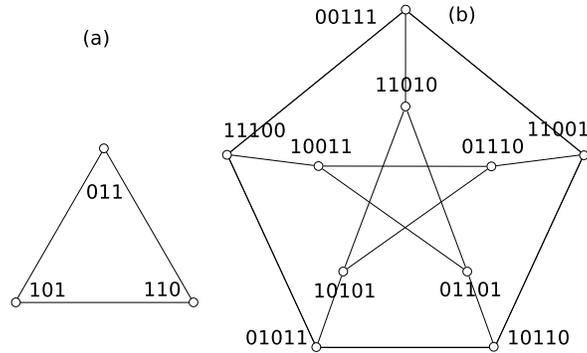


Figura 3.1: Gráficas impares (a)  $O_2$ , (b)  $O_3$ .

difieren en todos menos en un bit, [10]. Es decir, si y sólo si coinciden en exactamente un bit. Esto significa que, dos vértices son adyacentes si y sólo si su distancia de Hamming es  $2\delta - 2$ .

Se tiene entonces que la gráfica impar  $O_2$  es la gráfica completa  $K_3$ ; es decir, un triángulo,  $O_3$  es la Gráfica de Petersen, mientras que  $O_4$  es una gráfica 4-regular de orden 35. En las figuras 3.1 y 3.2 se muestran  $O_2$ ,  $O_3$  y  $O_4$ , respectivamente.

**Definición 16** Sea  $V_\delta^1$  el conjunto de vértices en la gráfica  $HS(2n, n)$ , cuyo bit más significativo es 1; sea  $V_\delta^0$  el conjunto de vértices, cuyo bit más significativo es 0, con exactamente  $\delta$  símbolos 1, [10].

**Proposición 1** Si  $\delta \geq 2$ , entonces dos vértices en  $V_\delta^0$  no son adyacentes, [10].

*Demostración.* Si se supone que dos vértices de la forma  $0\alpha$  y  $0\beta$  en  $V_\delta^0$  son adyacentes, entonces  $\alpha = \bar{\beta}$ , pero cada  $\alpha$  y  $\beta$  tienen exactamente  $\delta - 2$  ceros y  $\delta$  unos, lo cual es una contradicción.  $\square$

Sea  $O_\delta^{-1}$  la gráfica que se obtiene borrándole a  $O_\delta$  las aristas entre los vértices en  $V_\delta^1$ . En la figura 3.3 se puede ver  $O_4^{-1}$ . Entonces la proposición anterior implica que  $O_\delta^{-1}$  es bipartita con biparticiones  $V_\delta^0$  y  $V_\delta^1$ , posteriormente se verá que es de hecho una hiperestrella.

**Proposición 2** Una gráfica  $O_\delta$  es regular con  $N = \binom{2\delta-1}{\delta}$  vértices, tiene grado  $\delta$  y diámetro  $\delta - 1$ .

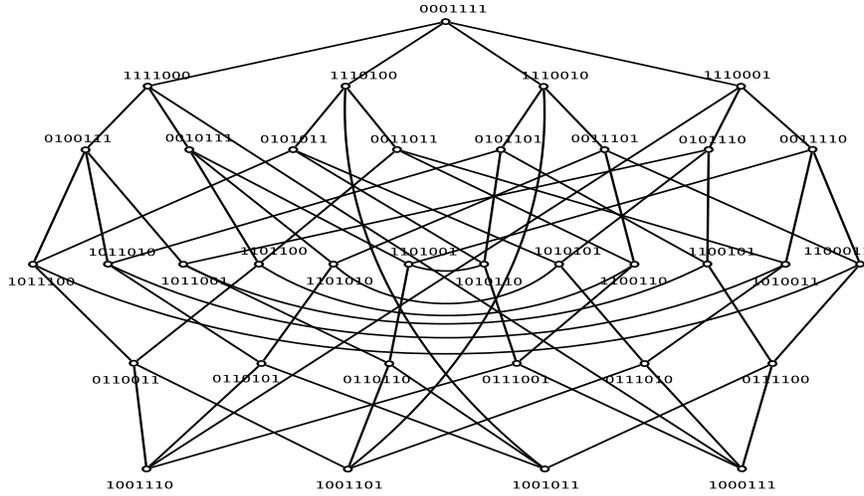


Figura 3.2: Gráfica  $O_4$ .

**Proposición 3** El grado y el diámetro de  $O_\delta$  son asintóticos de  $O(\log_2 \sqrt{N})$ , donde  $N$  es el número de vértices en la red.

### Relación con la hiperestrella

La gráfica impar  $O_\delta$  tiene el mismo número de vértices que la gráfica hiperestrella  $HS(2\delta - 1, \delta)$ , las cadenas que representan sus vértices están formadas por la misma cantidad de ceros y unos, pero la cardinalidad de las aristas es diferente. Como se mencionó anteriormente, la relación con  $O_\delta^{-1}$  es mejor ya que coinciden también en el número de aristas, estas características se detallarán más adelante.

**Teorema 8** [10] Si  $\delta \geq 2$ , entonces  $O_\delta^{-1}$  es isomorfa a  $HS(2\delta - 1, \delta)$ .

*Demostración.* Se define  $\phi : V(O_\delta^{-1}) \rightarrow V(HS(2\delta - 1, \delta))$  como sigue. Si  $1\alpha$  es un vértice de  $O_\delta^{-1}$ , entonces se define  $\phi(1\alpha) = 1\bar{\alpha}$ ; si  $0\alpha$  es un vértice de  $O_\delta^{-1}$ , entonces se define  $\phi(0\alpha) = 0\alpha$ . Ahora, se considera  $1\alpha$ , un vértice de  $O_\delta^{-1}$ . Se tiene que  $\alpha$  posee exactamente  $\delta - 1$  ceros y  $\delta - 1$  unos, entonces un vecino de  $1\alpha$  debe ser de la forma  $0\beta$ , donde  $\beta$  tiene exactamente  $\delta$  unos y  $\delta - 2$  ceros, la distancia de Hamming entre  $1\alpha$  y  $0\beta$  es igual a  $2\delta - 2$ .

Por lo tanto,  $\alpha$  y  $\beta$  tienen exactamente un bit en común y tal bit es el

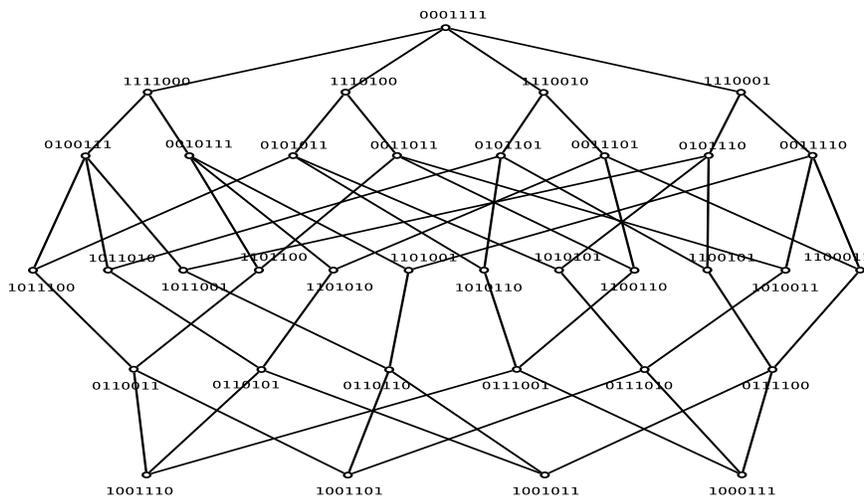


Figura 3.3: Gráfica  $O_4^{-1}$ .

símbolo 1. Así, cada  $1\bar{\alpha}$  y  $0\beta$  tienen longitud  $2\delta - 1$  con exactamente  $\delta$  unos, la distancia de Hamming entre  $\bar{\alpha}$  y  $\beta$  es igual a 1. Por lo tanto,  $1\bar{\alpha}$  y  $0\beta$  son adyacentes en  $HS(2\delta - 1, \delta)$ . De esta forma queda terminada la demostración.  $\square$

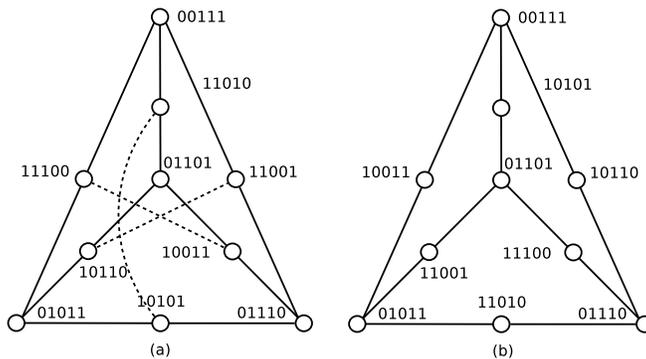


Figura 3.4: (a) Gráfica  $O_3$  intermedia y (b)  $HS(5, 3)$ .

**Ejemplo 20** Se mostrará que la gráfica  $O_3^{-1}$  es isomorfa a  $HS(5, 3)$ .

La gráfica impar  $O_3$ , ilustrada en la figura 3.4 (a), tiene el mismo número de

vértices que la gráfica  $HS(5, 3)$ , ilustrada en la figura 3.4 (b), los vértices cuyo primer bit es 1 tienen la forma  $1\alpha$  con  $\alpha = b_2b_3b_4b_5$ , además dichos vértices tienen dos vecinos con primer bit 0; cuya forma es  $0\beta$  con  $\beta = b'_2b'_3b'_4b'_5$ .

Se aplica la función  $\phi : V(O_3^{-1}) \rightarrow V(HS(5, 3))$  a cada vértice  $v \in V(O_3^{-1})$ , la figura 3.4 (a) sin las aristas con líneas punteadas, muestra  $O_3^{-1}$ , obteniendo los resultados que se muestran en la tabla 3.1.

$i$	$v$	$\beta_i$	$\phi(0\beta_i) = 0\beta_i$	$v$	$\alpha_i$	$\phi(1\alpha_i) = \mathbf{1}\overline{\alpha_i}$
1	00111	0111	00111	11010	1010	10101
2	01101	1101	01101	11100	1100	10011
3	01011	1011	01011	11001	1001	10110
4	01110	1110	01110	10110	0110	11001
5				10011	0011	11100
6				10101	0101	11010

Tabla 3.1: Función  $\phi : V(O_3^{-1}) \rightarrow V(HS(5, 3))$  sobre los vértices de  $O_3^{-1}$ .

Se observa en los vértices de  $O_3^{-1}$  que  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$  tienen dos ceros y dos unos, los vecinos de cada  $1\alpha_i$  son de la forma  $0\beta_i$  cada  $\beta_i$  tiene tres unos y un cero, la distancia de Hamming entre  $1\alpha_i$  y  $0\beta_i$  es 4, se puede notar que  $\beta_i$  y  $\alpha_i$  tienen en común el bit 1 en la posición mostrada en la tabla 3.2.

	$\beta_1$ y $\alpha_1$	$\beta_1$ y $\alpha_2$	$\beta_1$ y $\alpha_3$	$\beta_2$ y $\alpha_1$	$\beta_2$ y $\alpha_4$	$\beta_2$ y $\alpha_5$
<b>Posición</b>	4	3	5	2	3	5
	$\beta_3$ y $\alpha_2$	$\beta_3$ y $\alpha_4$	$\beta_3$ y $\alpha_6$	$\beta_4$ y $\alpha_6$	$\beta_4$ y $\alpha_5$	$\beta_4$ y $\alpha_3$
<b>Posición</b>	2	4	5	3	4	2

Tabla 3.2: Bit 1 en común entre  $\beta_i$  y  $\alpha_i$ .

Cada  $1\overline{\alpha_i}$  y  $0\beta_i$  tiene longitud 5 con tres unos y dos ceros, la distancia de Hamming entre  $\overline{\alpha_i}$  y  $\beta_i$  es uno, de esta manera  $1\overline{\alpha_i}$  y  $0\beta_i$  son adyacentes en  $HS(5, 3)$  como se ve en la figura 3.4 (b).  $\diamond$

En el Teorema 1 se destacó que  $HS(n, k)$  es isomorfa a  $HS(n, n-k)$ . Además

suponiendo que  $n \geq 4$  y  $2 \leq k \leq n - 2$ . Sea  $G^0$  la subgráfica de  $HS(n, k)$  con el valor 0 en la  $n$ -ésima posición, sea  $G^1$  la subgráfica de  $HS(n, k)$  con valor de 1 en la  $n$ -ésima posición. Entonces  $G^0$  es isomorfa a  $HS(n - 1, k)$ ,  $G^1$  es isomorfa a  $HS(n - 1, k - 1)$ .

Se puede ver en la figura 2.5 que  $HS(6, 3)$  está formada por un gráfica isomorfa a  $HS(5, 2)$ , la subgráfica de la izquierda con un 1 en la sexta posición, además una gráfica isomorfa a  $HS(5, 3)$ , la subgráfica de la derecha con un 0 en la sexta posición. Con esta observación y el Teorema 8 se tienen las bases para el siguiente resultado.

**Corolario 2** [10] Para  $\delta \geq 2$ , se tiene que  $HS(2\delta, \delta)$  y  $HS(2\delta, \delta + 1)$  son subgráficas ajenas por vértices inducidas por  $O_{\delta+1}^{-1}$ . En particular, cada  $HS(2\delta, \delta)$  y  $HS(2\delta, \delta + 1)$  puede ser inmersa en  $O_{\delta+1}^{-1}$  con dilatación 1.

En el siguiente resultado se verá, que existe una gráfica impar que contiene cada copia de la hiperestrella, para cadenas binarias de longitud fija.

**Corolario 3** [10] Sea  $n \geq 3$ , entonces para  $1 \leq k \leq n - 1$ ,  $HS(n, k)$  puede ser inmersa o encajada en  $O_{n+1}^{-1}$  con dilatación 1.

*Demostración.* Usando la estructura recursiva de la hiperestrella repetidamente, se puede ver que  $HS(n, k)$ , para cada  $k$ ,  $1 \leq k \leq n - 1$ , es una subgráfica de  $HS(2n - 2, n - 1)$ . Por lo tanto, cada una de ellas puede ser inmersa en  $O_{n+1}^{-1}$  por el Corolario 2.  $\square$

### 3.1.2. Gráfica par

La gráfica par fue usada por primera vez como una clase de redes de interconexión eficientes en 1989, [4]. Posee algunas características atractivas, tales como: Capacidad de máxima tolerancia a fallos, mayor densidad, facilidad de auto-diagnóstico; además, admite algoritmos sencillos de enrutamiento distribuido para la red defectuosa y la red sin fallos.

El algoritmo de autodiagnóstico es semidistribuido, está basado en una estructura combinatoria conocida como la matriz de Hadamard. El esquema de diagnóstico tiene alto grado de tolerancia a fallos, que se aproxima asintóticamente a un nivel del 100 %.

**Definición 17** Sea  $n$  un entero impar de la forma  $n = 2\delta - 3$  para  $\delta > 1$ . Sean  $W_1, W_2$  dos conjuntos de cadenas binarias con longitud  $n$ , tal que el peso de Hamming de cada cadena en  $W_1$  es  $\delta - 1$  y en  $W_2$  es  $\delta - 2$ . Entonces, el conjunto de vértices  $V$  de la gráfica par  $E_\delta$  es  $V = W_1 \cup W_2$ , el conjunto de aristas  $E = \{(x, y) \mid x \in W_1, y \in W_2, H(x, y) = 1 \text{ ó } n\}$ , [20].

Es decir, los vértices de una gráfica par son cadenas binarias de longitud  $2\delta - 3$ , todas estas cadenas tienen  $\delta - 1$  ó  $\delta - 2$  símbolos 1. Dos vértices están conectados si difieren en un bit o son complementarios entre sí.

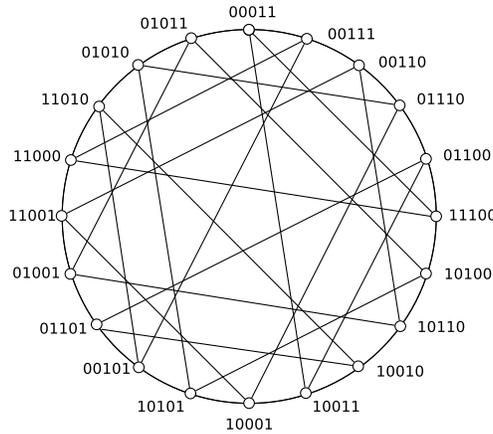


Figura 3.5: Gráfica par  $E_4$  con 20 vértices, grado 4 y diámetro 3.

**Ejemplo 21** La figura 3.5 muestra una gráfica par con 20 vértices, dado que  $\delta = 4$ , se tienen cadenas binarias de longitud 5 con dos o tres ceros. En particular, el vértice  $x = 00011 \in W_2$  tiene dos bits con valor 1; tiene como vértices adyacentes a  $y_1 = 11100$ ,  $y_2 = 01011$ ,  $y_3 = 00111$ ,  $y_4 = 10011$ . Se tiene que  $H(x, y_1) = H(00011, 11100) = 5$ , así que  $y_1$  es el complementario de  $x$ . Para los otros vecinos se tiene que  $H(x, y_i) = 1$ ,  $i = 2, 3, 4$ ; es decir, difieren en un sólo bit. Algo similar ocurre con los otros vértices de  $E_4$ .  $\diamond$

**Proposición 4** Una gráfica  $E_\delta$  es regular, con grado  $\delta$  y tiene  $\binom{2\delta-2}{\delta-1}$  vértices. Su diámetro es  $\delta - 1$ , [20].

En la figura 3.5 se observa que los 20 vértices de  $E_4$  tienen 4 vértices adyacentes, se puede determinar que el diámetro de  $E_4$  es 3.

**Proposición 5** El grado y el diámetro de  $E_\delta$  es proporcional a  $\log_2 \sqrt{N}$ , donde  $N$  es el número de vértices en la red, [20].

Como ya se vio antes, una gráfica en capas consiste en vértices que se encuentran en  $t + 1$  capas, numeradas de  $L_0$  a  $L_t$ , tal que cada vértice está en una capa y cada arista conecta vértices en capas consecutivas. Se tiene que  $E_\delta$  es una gráfica en capas que van desde  $L_0$  a  $L_{\delta-1}$ . En la figura 3.6 se muestra  $E_4$  en capas.

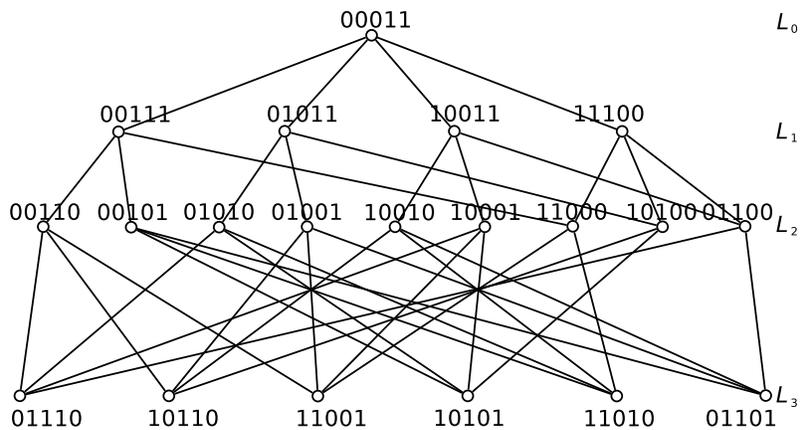


Figura 3.6: Gráfica par  $E_4$  en capas.

Al estudiar las propiedades de la hiperestrella doblada, se verá que la gráfica hiperestrella puede construirse al eliminar todas las aristas de la hiperestrella doblada correspondiente que conectan dos vértices cuyas cadenas binarias son complementarias entre sí, por lo cual se puede obtener el resultado siguiente:

**Teorema 9** [20] La gráfica hiperestrella  $HS(2\delta - 2, \delta - 1)$  es una gráfica de expansión de la gráfica par  $E_\delta$ , donde  $\delta \geq 2$ .

### 3.2. Área de la superficie (surface area)

Calcular el número de vértices a una distancia dada de un determinado vértice en la red, o área de la superficie, es otro tema importante, en el sentido de que puede llevar a un mejor entendimiento de la red. Tales expresiones

son muy útiles cuando se estudian temas diferentes de la red, como diseño de VLSI, colocación de recursos, diseñar algoritmos colectivos de comunicación y análisis del rendimiento de la red, [7].

**Definición 18** El área de la superficie  $A_i$  de una gráfica  $G$  es el número de vértices de  $G$  cuya distancia desde un vértice determinado es exactamente  $i$ . En otras palabras,  $A_i$  es el área o superficie de una esfera virtual con radio  $i$  desde un vértice determinado como el vértice central, [9].

Esta cantidad, llamada área de la superficie, está especialmente bien definida para las gráficas simétricas por vértices, como el área de la superficie para cualquier vértice en una gráfica simétrica por vértices  $G$  igual que para cualquier otro vértice en  $G$ .

Ya que  $HS(2n, n)$  es simétrica por vértices, hay que enfocarse en el área de la superficie de un vértice específico, en este caso, el vértice de identidad,  $I = 0^n 1^n$ .

Una gráfica hiperestrella regular  $HS(2n, n)$  es una gráfica no dirigida que consiste en  $\binom{2n}{n}$  vértices, donde un vértice está representado por la cadena de  $2n$  bits de la forma  $s_1 s_2 \dots s_{2n}$  tal que la cardinalidad del conjunto  $\{i \mid 1 \leq i \leq 2n, s_i = 1\}$  es  $n$ .

**Lema 5** [20] Cualquier ruta más corta  $\mathcal{P} = \langle k_1, k_2, \dots, k_t \rangle^1$  desde el vértice identidad  $I$  a un vértice específico en la gráfica hiperestrella regular  $HS(2n, n)$  tiene el mismo conjunto de números  $(k_1, k_3, \dots, k_i, \dots)$ , con  $i$  impar y  $(k_2, k_4, \dots, k_j, \dots)$ , con  $j$  par.

Se hace referencia al conjunto  $(k_1, k_3, \dots, k_i, \dots)$ , con  $i$  impar como  $S_{non}$ , el conjunto  $(k_2, k_4, \dots, k_j, \dots)$ , con  $j$  par como  $S_{par}$ . Nótese aquí que cada número en el conjunto  $S_{non}$  está entre  $n + 1$  y  $2n$ , además cada número en el conjunto  $S_{par}$  está entre  $2$  y  $n$ .

Así, se puede ver que el número de vértices a cierta distancia de  $I$  está determinado por el número de combinaciones diferentes de  $S_{non}$  y  $S_{par}$ , esto se nota en el ejemplo 9 del capítulo 2.

**Teorema 10** [20] El área de la superficie para la hiperestrella regular  $HS(2n, n)$  con radio  $i$  es:

---

<sup>1</sup>Según la definición 7 del capítulo 2.

$$A(n, i) = \frac{n(n-1)^2(n-2)^2 \dots (n - \lfloor \frac{i}{2} \rfloor)^2}{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor! \lceil \frac{i}{2} \rceil!}$$

donde  $\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$  y  $\lceil y \rceil = \min\{k \in \mathbb{Z} \mid y \leq k\}$ .

**Ejemplo 22** En la figura 3.7 se muestran los vértices 0101, 0110 que están a distancia 2 del vértice 0011 en  $HS(4, 2)$ . Entonces se tiene que

$$A(2, 2) = \frac{(2 - \lfloor \frac{1}{2} \rfloor)(2 - \lfloor \frac{2}{2} \rfloor)}{\lfloor \frac{2}{2} \rfloor! \lceil \frac{2}{2} \rceil!} = \frac{(2-0)(2-1)}{1!1!} = \frac{(2)(1)}{1} = 2$$

◇

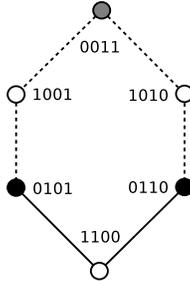


Figura 3.7: Vértices a distancia 2 de 0011 en  $HS(4, 2)$ .

**Ejemplo 23** Considere la gráfica de la figura 3.8, se observa que los vértices 110001, 101001, 110100, 101100, 110010, 101010 están a distancia 3 del vértice 000111 en  $HS(6, 3)$ . Entonces se tiene que

$$A(3, 3) = \frac{(3 - \lfloor \frac{1}{2} \rfloor)(3 - \lfloor \frac{2}{2} \rfloor)(3 - \lfloor \frac{3}{2} \rfloor)}{\lfloor \frac{3}{2} \rfloor! \lceil \frac{3}{2} \rceil!} = \frac{(3-0)(3-1)(3-1)}{1!2!} = \frac{(3)(2)^2}{2} = 6$$

◇

**Ejemplo 24** La tabla 3.1 muestra el área de la superficie de la hiperestrella  $HS(2n, n)$  con valores de  $n$  desde 2 hasta 6, con radio  $i = 1, \dots, 11$ . En otras palabras, se tiene  $A(n, i)$  con  $1 \leq i \leq 11$  y  $2 \leq n \leq 6$ . ◇

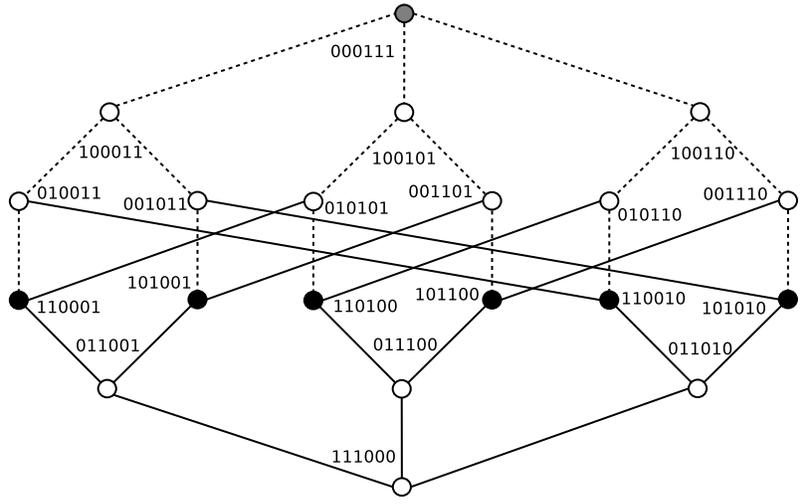


Figura 3.8: Vértices a distancia 3 de 000111 en  $HS(6, 3)$ .

Radio	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
<b>HS(4,2)</b>	2	2	1								
<b>HS(6,3)</b>	3	6	6	3	1						
<b>HS(8,4)</b>	4	12	18	18	12	4	1				
<b>HS(10,5)</b>	5	20	40	60	60	40	20	5	1		
<b>HS(12,6)</b>	6	30	75	150	200	200	150	75	30	6	1

Tabla 3.3: Área de la superficie de la hiperestrella  $HS(2n, n)$ .

# Capítulo 4

## Características de comunicación en la hiperestrella

El modelo de una red de interconexión como una gráfica, donde un procesador se puede representar como un vértice, y un canal de comunicación entre procesadores, se representa como una arista entre vértices, desempeña un papel importante en los aspectos de comunicación de la red.

El modelo gráfico que tiene un menor grado y diámetro se considera más conveniente, porque esto implica un menor costo en la implementación del hardware, además de menor tiempo en la transmisión de los mensajes, [13].

### 4.1. Difusión de la información

**Definición 19 Difusión de la información** es la propagación de un mensaje, tan pronto como sea posible, desde el procesador fuente, a todos los procesadores usando los enlaces de la red<sup>1</sup>, de modo que al final, cada procesador tiene acceso o "conoce", el mensaje. A esto a veces se le conoce como comunicación de uno a todos, [17].

Por lo tanto, una difusión de la información ineficiente puede ser un cuello de botella en el rendimiento de las redes multiprocesador. En la difusión de la información se colocan una serie de llamadas a lo largo de las líneas

---

<sup>1</sup>Recuerde que se usa red para abreviar red de interconexión y gráfica para nombrar al modelo de la misma.

de comunicación en la red. En cualquier momento, los procesadores con los cuales se entable la comunicación, contribuyen al proceso de transferencia de la información, comunicándose con uno de su vecinos desinformados.

**Definición 20** Un árbol dirigido es una gráfica dirigida orientada cuya gráfica subyacente es un árbol. Un árbol dirigido  $T$  se llama un **árbol enraizado** si existe un vértice  $r$  de  $T$ , llamado raíz, tal que para cada vértice  $v$  de  $T$ , hay una ruta desde  $r$  hasta  $v$  en  $T$ .

Sea  $T$  un árbol enraizado. Es común dibujar a  $T$  con la raíz  $r$  en la parte superior, en el nivel 1. Los vértices adyacentes a  $r$  se sitúan un nivel por debajo, en el nivel 2. Cualquier vértice adyacente desde un vértice en el nivel 2 está en el nivel 3 y así sucesivamente. En general, cada vértice en el nivel  $i > 1$  es adyacente desde exactamente un vértice a nivel  $(i - 1)$ .

Un vértice  $x$  en un árbol enraizado con raíz  $r$  está en el nivel  $i$  si y sólo si la ruta de  $r$  a  $x$  en  $T$  tiene longitud  $(i - 1)$ . Cada arista está dirigida desde un vértice en algún nivel  $j$  a un vértice en el nivel  $(j + 1)$ . El mayor entero  $h$  para el cual existe un vértice en el nivel  $h$  en un árbol enraizado se llama **altura**, [8].

El método más común para encontrar un algoritmo de difusión de la información es utilizar un árbol de expansión. Al implementar un algoritmo de difusión de la información, está inmerso un árbol de difusión, el cual es un árbol de expansión con el procesador fuente como la raíz, [12].

En el capítulo I se definió el modelo de un sólo puerto, el cual es más razonable y usado en la práctica, donde un procesador puede transmitir y recibir simultáneamente la información a través de un canal incidente.

**Teorema 11** Cualquier algoritmo de difusión de la información de una red en el modelo de un sólo puerto con  $N$  procesadores debe requerir tiempo  $\Omega(\log N)$ , [20].

*Demostración.* En cada unidad de tiempo, un procesador con el mensaje, sólo puede enviarlo a uno de sus vecinos, así que después de cada paso, el número de procesadores que han recibido el mensaje, pueden a lo más ser el doble. Existen  $N$  procesadores en la red, por lo tanto, el menor tiempo necesario para realizar la difusión de la información es  $\Omega(\log N)$ .  $\square$

Esto significa que para el modelo de un sólo puerto, el límite inferior para la difusión de la información esta dado por  $\Omega(\log N)$ .

**Ejemplo 25** En la figura 4.1 se muestra la difusión de la información en el modelo de un sólo puerto, para la gráfica  $O_3^{-1}$ , mediante un árbol de expansión el cual tiene como vértice fuente a 00111.

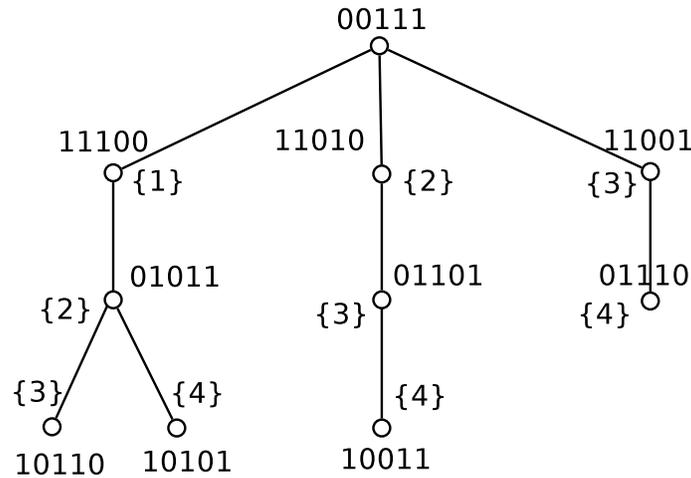


Figura 4.1: Árbol de expansión para  $O_3^{-1}$ .

También en el capítulo 1 se hizo la definición del modelo todo puerto, donde todos los canales incidentes a un procesador se pueden utilizar simultáneamente para la transmisión y recepción de la información.

Cuando se considera la difusión de la información en una red en el modelo todo puerto, el menor tiempo requerido está acotado por el diámetro de la gráfica, porque éste es el mínimo tiempo necesario para que el mensaje se envíe desde un vértice al vértice más alejado de él, [20].

**Definición 21** Se define el **tráfico** en una red de interconexión como el número total de mensajes intercambiados.

En el modelo todo puerto, además de tiempo, o número de pasos de comunicación requerido, otro de los criterios del algoritmo es el tráfico. Esto

significa que es deseable minimizar tanto el tiempo como el tráfico, este último se disminuye al minimizar la redundancia, lo que significa reducir el número de veces que un vértice recibe el mismo mensaje, [20].

#### 4.1.1. Esquema de difusión de la información uno a todos en $HS(2n, n)$

**Definición 22** Difusión de la información uno a todos es un mecanismo para esparcir la información desde un vértice designado en una gráfica a todos los otros vértices en la gráfica.

Para la difusión de la información desde un vértice origen, se define un árbol de expansión enraizado en el vértice fuente de  $HS(2n, n)$ . Se supone como el vértice raíz  $u$  a  $0^n 1^n$ , pero la construcción se puede generalizar para los árboles enraizados en vértices arbitrarios, [13].

Sea  $Padre(v)$  la función que representa al vértice en el nivel superior a  $v$  padre, del cual se desprenden niveles inferiores hijos representados con la función  $Hijos(v)$ , entonces para el nivel superior a padre es decir  $a = Padre(Padre(v))$ , hay que remarcar que  $Padre(v)$  está relacionada con  $Hijos(v)$  por medio de aristas.

Sea  $\mathcal{I} = \{i | r_i = a_i \oplus v_i = 1\}$ , se define  $i^0 \in \mathcal{I}$  e  $i^1 \in \mathcal{I}$ , con  $1 \leq i^0 \leq n$  e  $n+1 \leq i^1 \leq 2n$  cuando  $v$  está en un nivel par e  $1 \leq i^1 \leq n$  e  $n+1 \leq i^0 \leq 2n$  cuando  $v$  está en un nivel impar. También, sea  $r_h = 0$  para todo  $h \in \Psi$  donde  $\Psi = \{i^1 + 1, i^1 + 2, \dots, 2n\}$  o  $\Psi = \{i^1 + 1, i^1 + 2, \dots, n\}$ , en el primer y segundo ejemplar, respectivamente. Es decir,  $\Psi$  es el conjunto de corrimiento de ceros en  $R$  desde la  $i^1$ -ésima posición, [13].

**Definición 23** Sea  $u$  el vértice fuente  $0^n 1^n$ . Entonces un árbol de expansión  $ST(u)$  enraizado en  $u$  se define por las funciones  $Padre(v)$  e  $Hijos(v)$  de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} Hijos(v) &= h\text{-arista}^2 \text{ de } v \text{ para toda } h \text{ en } \Psi. \\ Padre(v) &= i^0\text{-arista de } v. \end{aligned}$$

Para el vértice fuente  $u = v$ , sea  $i^1 = n$  y  $Padre(v) = \emptyset$  y para los hijos de  $u$ , sea  $i^1 = 1$  y  $\mathcal{I} = \{i | r_i = u_i \oplus v_i = 1\}$ . Se puede ver que los hijos de  $v$  son

---

<sup>2</sup>De acuerdo con la definición 6.

los vértices conectados por  $h$ -aristas para todos los  $h$  en  $\Psi$  y el padre de  $v$  es el vértice conectado por una  $i^0$ -arista.

**Ejemplo 26** Se explicarán las funciones de la definición 23 para el vértice  $v = 010011$  en  $HS(6, 3)$ . Para llegar desde el vértice fuente  $u = 000111$  en  $ST(u)$  hasta  $v$  que esta en  $L_2$  se hace a través de una 4-arista y otra 2-arista.

En el caso de los vértices  $a = Padre( Padre(v)) = 000111$  y  $v$  se tiene que  $\mathcal{I} = \{i | r_i = a_i \oplus v_i = 1\} = \{2, 4\}$ ,  $i^0 = 2$ ,  $i^1 = 4$  ya que  $v$  se encuentra en un nivel par, además  $\Psi = \{i^1 + 1, i^1 + 2\} = \{5, 6\}$ .

Para  $Hijos(v)$  se tiene que  $v$  está conectado a 110001 por medio de una 5-arista, además  $v$  está relacionado con 110010 a través de una 6-arista. En el caso de  $Padre(v)$  se llega desde  $v$  a 100011 por medio de una 2-arista; un proceso similar se sigue para todos los vértices en  $ST(u)$ .  $\diamond$

**Ejemplo 27** Se revisa el caso cuando  $u = v$  en el árbol  $ST(u)$  de  $HS(6, 3)$ , por definición  $i^1 = 3$  entonces  $\Psi = \{i^1 + 1, i^1 + 2, i^1 + 3\} = \{4, 5, 6\}$  y  $Padre(v) = \emptyset$ . Analizando a los hijos de  $u$ , se tiene que  $i^1 = 1$  entonces  $\Psi = \{i^1 + 1, i^1 + 2\} = \{2, 3\}$ , cuando  $v = 100011$ ;  $\mathcal{I} = \{i | r_i = u_i \oplus v_i = 1\} = \{1, 4\}$ , en el caso  $v = 100101$ ;  $\mathcal{I} = \{i | r_i = u_i \oplus v_i = 1\} = \{1, 5\}$ , para  $v = 100110$   $\mathcal{I} = \{i | r_i = u_i \oplus v_i = 1\} = \{1, 6\}$ .

Se puede ver que los hijos de 100011, 100101, 100110 son los vértices conectados por  $h$ -aristas para todos los  $h$  en  $\Psi$ , y el padre de 100011, 100101, 100110 es el vértice conectado por una  $i^0$ -arista.  $\diamond$

**Teorema 12** [13] Para el vértice fuente  $u = 0^n 1^n$ , el árbol de expansión  $ST(u)$  tiene una altura óptima igual a  $2n - 1$ .

*Demostración.* Para cualquier vértice  $w$  en  $ST(u)$ , considere una cadena de bits  $R = r_1 r_2 \dots r_{2n}$  que se obtiene al aplicar la operación **xor** bit a bit sobre  $w$  y  $u$ , y sea  $R^-$  el conjunto de bits en la posición  $i$ , tal que  $r_i = v_i \oplus u_i$ .

Entonces la función de  $Padre(w)$  encuentra una  $i^0$  arista de  $w$  tal que  $i^0 \in R^-$ . Así, por la **Propiedad 1**, la arista  $(w, Padre(w))$  conduce a una ruta más corta hacia  $u$ . Puesto que la gráfica hiperestrella es simétrica por vértices, la altura de  $ST(u)$  es igual al diámetro de la gráfica hiperestrella.

Específicamente, si  $w = 1^n 0^n$ , entonces las aristas que conectan a  $w$  y  $u$  en  $ST(u)$  construyen una ruta más corta entre  $w$  y  $u$  de longitud  $2n - 1$ , [13].□

En este esquema de difusión, se restringe la comunicación a un sólo puerto a la vez. Se mencionará brevemente el esquema:

Primero, el vértice fuente  $u$  envía un mensaje  $M$  al hijo  $u_1$  más a la izquierda, se tiene como resultado que  $u$  y  $u_1$  guardan el mensaje  $M$ . Entonces  $u$  envía  $M$  a el siguiente hijo más a la izquierda  $u_2$ , y  $u_1$  envía  $M$  a su hijo más a la izquierda. Se continua esta operación hasta que todos los vértices en  $ST(u)$  reciben el mensaje  $M$ . Este esquema toma un tiempo de  $2n - 1$ , lo cual es óptimo.

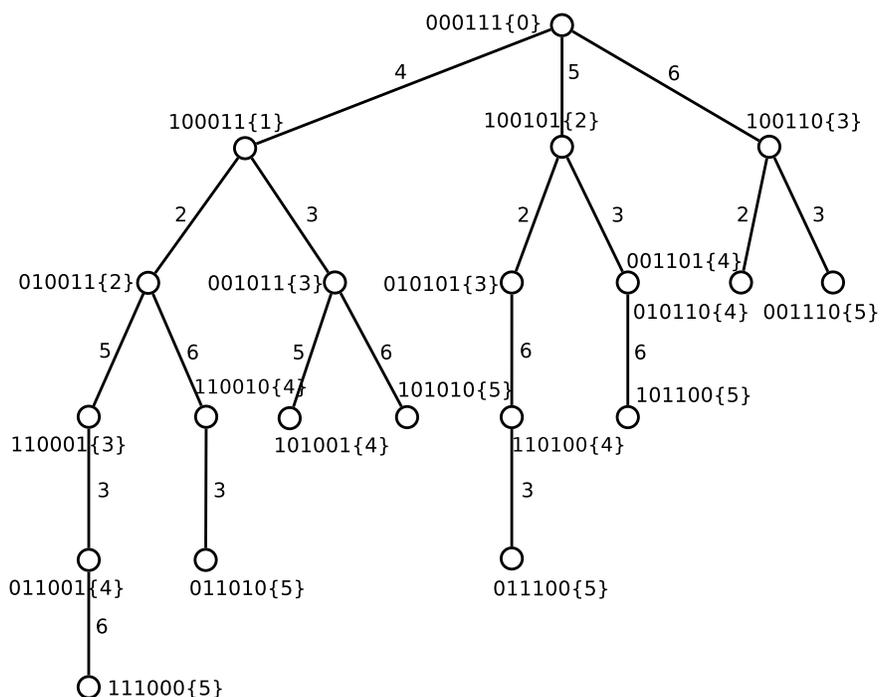


Figura 4.2: Árbol de expansión para  $HS(6,3)$ .

**Ejemplo 28** Se explicará el esquema de difusión para  $HS(6,3)$ . En el paso 1, el vértice fuente  $000111$  envía un mensaje  $M$  a través de una 4-arista a su hijo más a la izquierda en este caso  $100011$  por lo cual  $000111$  y  $100011$  guardan el mensaje  $M$ .

En el segundo paso el vértice fuente 000111 envía  $M$  a el siguiente hijo más a la izquierda 100101 a través de una 5-arista y 100011 envía  $M$  a través de una 2-arista a su hijo 010011, así sucesivamente para todos los vértices en el árbol  $ST(000111)$  de  $HS(6, 3)$  que se puede ver en la figura 4.2. Los cinco pasos del esquema, que dan un tiempo de  $2n - 1$ , se pueden ver en la tabla 4.1.  $\diamond$

<b>Paso</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
<b>vértice</b>	000111	000111	000111	100101	100110
<b><i>i</i>-arista</b>	4	5	6	3	3
<b>vértice</b>	100011	100101	100110	001101	001110
<b>vértice</b>		100011	100011	100110	001011
<b><i>i</i>-arista</b>		2	3	2	6
<b>vértice</b>		010011	001011	010110	101010
<b>vértice</b>			100101	010011	001101
<b><i>i</i>-arista</b>			2	6	6
<b>vértice</b>			010101	110010	101100
<b>vértice</b>			010011	001011	110010
<b><i>i</i>-arista</b>			5	5	3
<b>vértice</b>			110001	101001	011010
<b>vértice</b>				010101	110100
<b><i>i</i>-arista</b>				6	3
<b>vértice</b>				110100	011100
<b>vértice</b>				110001	011001
<b><i>i</i>-arista</b>				3	6
<b>vértice</b>				011001	111000

Tabla 4.1: Pasos del esquema de difusión uno a todos en  $HS(6, 3)$ .

## 4.2. Vecindad de difusión de la información

Inicialmente, la vecindad de difusión de la información se usó como una herramienta para simular un sólo paso del modelo todo puerto, usando el modelo de un solo puerto en una red dada.

**Definición 24** La **vecindad de difusión de la información** está relacionado a la difusión de un mensaje desde el vértice fuente a todos sus vértices adyacentes.

De aquí en adelante se considerará el problema de vecindad de difusión de la información para el modelo de un sólo puerto.

### 4.2.1. Vecindad de difusión de la información en el modelo de un sólo puerto $HS(2n, n)$

**Teorema 13** [20] Cualquier algoritmo de vecindad de difusión de la información en una red con grado máximo  $d$  debe requerir tiempo  $\Omega(\log d)$ .

*Demostración.* En cada unidad de tiempo, un procesador con el mensaje puede únicamente enviarlo a uno de sus vecinos, así que después de cada paso, el número de vecinos que han recibido el mensaje puede ser a lo más el doble. El número máximo de vecinos de un procesador en la red es  $d$ , por lo tanto el menor tiempo necesario para resolver el problema de vecindad de difusión de la información es  $\Omega(\log d)$ .  $\square$

Ya que  $HS(2n, n)$  es una gráfica regular, entonces tiene grado  $n$ . Así, la cota inferior para la vecindad de difusión de la información en  $HS(2n, n)$  es  $\Omega(\log n)$ .

Como se demostró en el capítulo 2, las gráficas hiperestrella regulares son simétricas por vértices. Sin pérdida de generalidad, se supone que el vértice fuente para la vecindad de difusión de la información es el vértice identidad  $I = 0^n 1^n$ .

**Teorema 14** [20] La gráfica hiperestrella regular  $HS(2n, n)$  es una gráfica bipartita balanceada.

*Demostración* Se hace una partición de los vértices de  $HS(2n, n)$  en dos conjuntos  $U$  y  $V$ . El conjunto  $U$  contiene todos los vértices cuyo primer bit

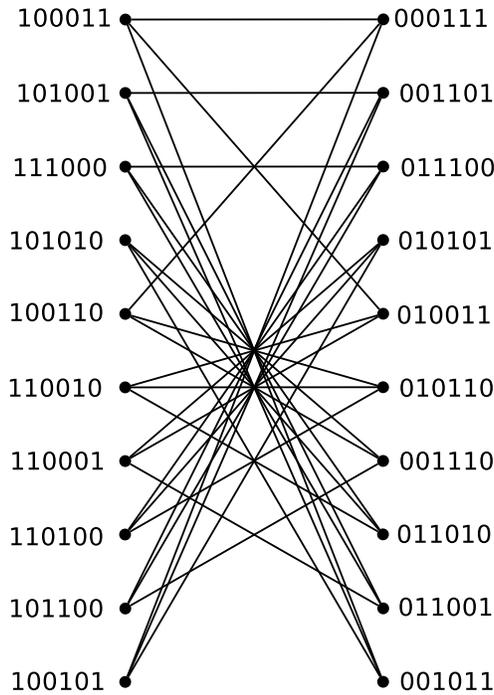


Figura 4.3:  $HS(6,3)$  agrupada como una gráfica bipartita balanceada.

es 1 y  $V$  contiene todos los vértices cuyo primer bit es 0. Cada arista de  $HS(2n, n)$  conecta un vértice en  $U$  a uno en  $V$  y  $|U| = |V| = \binom{2n-1}{n}$ , de este modo  $HS(2n, n)$  es una gráfica bipartita balanceada.  $\square$

**Teorema 15** [20] Cualquier par de vecinos del vértice fuente  $0^n 1^n$  están conectados por una ruta de longitud 4, estas rutas entre diferentes pares de vecinos son ajenos por vértices.

*Demostración* Cualquier vecino del vértice fuente  $0^n 1^n$  se obtiene al intercambiar el primer 0 del vértice fuente con un 1 del vértice vecino. Por lo tanto cualesquiera dos vecinos de él son diferentes en exactamente 2 bits en la posición  $p$  y  $q$ , donde  $n+1 \leq p \leq 2n$  y  $n+1 \leq q \leq 2n$ .

Entonces estos dos vecinos están conectados por la ruta  $[i, q, p, i]$  donde  $2 \leq i \leq n$ . Éstos dos vecinos y el vértice fuente están en el mismo ciclo  $[p, i, q, p, i, q]$ , porque dos pares de vecinos diferentes tienen  $p$  y  $q$  diferentes,

estos ciclos están obligados a ser ajenos por vértices, excepto los que comparten el vértice fuente  $0^n 1^n$ . Por lo tanto, las rutas de longitud 4 que conectan pares de vecinos son ajenos por vértices.  $\square$

El teorema anterior permite ver el vértice fuente junto con sus  $n$  vecinos como una gráfica completa, en el sentido de que cualesquiera dos vértices están conectados por una ruta de longitud constante.

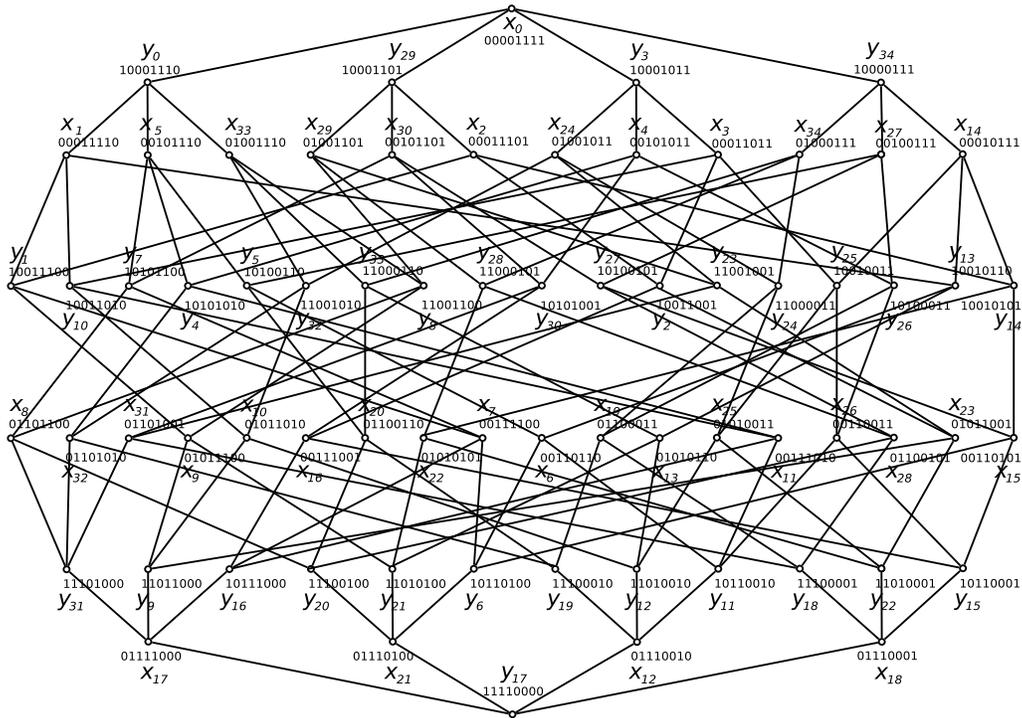


Figura 4.4: Gráfica  $HS(8, 4)$ .

**Ejemplo 29** En la figura 4.4 se pueden ver los vecinos 10000111, 10001011 del vértice fuente 00001111, estos vecinos están conectados por la ruta  $P_1=[i, q, p, i] = [4, 6, 5, 4]$ . Además están en el mismo ciclo  $C_1=[p, i, q, p, i, q] = [5, 4, 6, 5, 4, 6]$  con el vértice fuente.

Los vecinos 10001110, 10001101 están conectados por la ruta  $P_2=[i, q, p, i]$

$= [4, 7, 8, 4]$  y están en el ciclo  $C_2 = [p, i, q, p, i, q] = [8, 4, 7, 8, 4, 7]$  con el vértice fuente, entonces para los dos pares de vecinos dados, los ciclos  $C_1, C_2$  son diferentes y las rutas  $P_1$  y  $P_2$  de longitud 4 son ajenos por vértices.  $\diamond$

Se puede diseñar un algoritmo simple de vecindad de difusión de la información, para  $HS(2n, n)$ , basado en la técnica de **duplicación recursiva** donde a cada paso, se duplica el número de vecinos con el mensaje, mediante el uso de un conjunto ajeno por vértices de rutas de longitud constante entre vecinos.

Se denota al vecino que se obtiene al cambiar el primer bit del vértice fuente con el  $n+i$ -ésimo bit,  $1 \leq i \leq n$ , como el  $i$ -ésimo vecino del vértice de fuente.

- Inicialmente, sólo el vértice fuente  $0^n 1^n$  en  $HS(2n, n)$  tiene el mensaje que será enviado a todos sus vecinos.
- Para el primer paso, el vértice fuente envía el mensaje a sus primeros vecinos a través del enlace directo.
- En el paso  $i$ ,  $i \geq 2$ , el vértice fuente envía el mensaje a su vecino  $2^{i-1}$ -ésimo. Si el vecino  $j$  tiene el mensaje, entonces en este paso, se envía el mensaje al vecino  $j + 2^{i-1}$  a través de la ruta de longitud 4  $[2, j + 2^{i-1}, j, 2]$ .
- El proceso continúa hasta que todos los vecinos del vértice fuente tienen el mensaje.

**Ejemplo 30** En  $HS(14, 7)$ , la vecindad de difusión de la información se forma de acuerdo al siguiente patrón.

- **Paso 0:** Sólo 00000001111111, tiene el mensaje
- **Paso 1:** Se envía el mensaje al 1er. vecino del vértice fuente  
( $S \rightarrow 1$ ) 00000001111111  $\rightarrow$  10000000111111
- **Paso 2:** El vértice fuente envía el mensaje al 2o. vecino  
( $S \rightarrow 2$ ) 00000001111111  $\rightarrow$  10000001011111

El 1er. vecino envía el mensaje al 3er. vecino a través de la ruta  
 $[2, j + 2^{i-1}, j, 2] = [2, 8 + 2^{2-1}, 8, 2] = [2, 10, 8, 2]$   
 $(1 \rightarrow 3) 10000000111111 \rightarrow 01000000111111 \rightarrow 11000000101111$   
 $\rightarrow 01000001101111 \rightarrow 10000001101111$

- **Paso 3:** El vértice fuente envía el mensaje al 4to. vecino  
 $(S \rightarrow 4) 00000001111111 \rightarrow 10000001110111$

El 1er. vecino envía el mensaje al 5to. vecino a través de la ruta  
 $[2, j + 2^{i-1}, j, 2] = [2, 8 + 2^{3-1}, 8, 2] = [2, 12, 8, 2]$   
 $(1 \rightarrow 5) 10000000111111 \rightarrow 01000000111111 \rightarrow 11000000111011$   
 $\rightarrow 01000001111011 \rightarrow 10000001111011$

El 2o. vecino envía el mensaje al 6to. vecino a través de la ruta  
 $[2, j + 2^{i-1}, j, 2] = [2, 9 + 2^{3-1}, 9, 2] = [2, 13, 9, 2]$   
 $(2 \rightarrow 6) 10000001011111 \rightarrow 01000001011111 \rightarrow 11000001011101$   
 $\rightarrow 01000001111101 \rightarrow 10000001111101$

El 3er. vecino envía el mensaje al 7o. vecino a través de la ruta  
 $[2, j + 2^{i-1}, j, 2] = [2, 10 + 2^{3-1}, 10, 2] = [2, 14, 10, 2]$   
 $(3 \rightarrow 7) 10000001101111 \rightarrow 01000001101111 \rightarrow 11000001101110$   
 $\rightarrow 01000001111110 \rightarrow 1000000111110 \diamond$

# Capítulo 5

## Hiperestrella doblada

En este capítulo se revisarán las gráficas hiperestrella dobladas  $FHS(2n, n)$ , estas fueron introducidas como un modelo competitivo para los hipercubos y para las gráficas estrella. Estas variaciones de la hiperestrella son gráficas bipartitas, simétricas por vértices, aunque no simétricas por aristas, y además, tienen un diámetro con valor de  $n$ . También se muestra un algoritmo de enrutamiento, el automorfismo para  $FHS(2n, n)$  y su relación con otras gráficas.

### 5.1. Introducción

Una gráfica hiperestrella doblada,  $FHS(2n, n)$ , es una gráfica en la cual se agregan aristas al conectar cualesquiera dos vértices cuyas cadenas de bits son complementarias en la gráfica hiperestrella  $HS(2n, n)$ .

**Definición 25** Una gráfica hiperestrella doblada  $FHS(2n, n)$  se define como:

$$\begin{aligned} V(FHS(2n, n)) &= V(HS(2n, n)) \\ e(FHS(2n, n)) &= e(HS(2n, n)) \cup e, \end{aligned}$$

donde

$$e = \{(u, v) \mid u = s_1s_2 \dots s_{2n}, v = \overline{s_1s_2 \dots s_{2n}}\}$$

Una arista en el conjunto de aristas  $e$  se llamará **arista complementaria**. Dados dos vértices  $u$  y  $v$ , se denota una *arista complementaria* conectándolos como  $(u, v)_e$ . La figura 5.1 muestra una gráfica hiperestrella doblada  $FHS(6, 3)$ , [14].

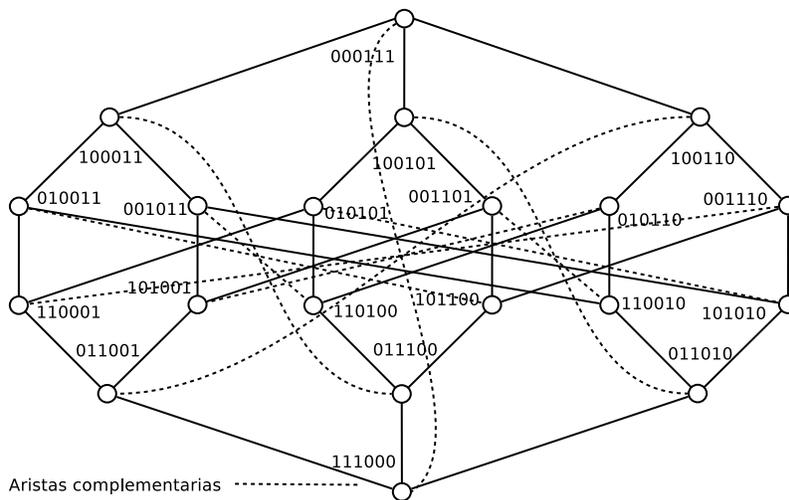


Figura 5.1: Gráfica hiperestrella doblada  $FHS(6, 3)$ .

## 5.2. Algoritmo de enrutamiento

Sea  $R = r_1 r_2 \dots r_{2n}$  una cadena de bits que se obtiene al realizar operaciones **xor** entre el vértice fuente  $S$  y el vértice destino  $D$ . Además, sea  $M$  el conjunto de vértices cuya cantidad de 1's es mayor que  $n$ . Cuando un vértice pertenece a el conjunto  $M$ , el esquema de enrutamiento para una gráfica hiperestrella doblada  $FHS(2n, n)$  elige primero un vértice tal que utilice aristas complementarias eficientemente. El Algoritmo 2 presenta un pseudocódigo del algoritmo de enrutamiento, denominado **Ruta más corta 2**.

El algoritmo **Ruta más corta 2** construye el conjunto de vértices  $P_S$  en una ruta más corta desde  $S$  a  $D$ . Inicialmente,  $P_S = \{S\}$ , [14].

**Ejemplo 31** Se muestra el algoritmo **Ruta más corta 2** con vértice origen  $S = 000111$  y destino  $D = 111000$  en la gráfica  $FHS = FHS(6, 3)$ .

Llamada 1:

**Ruta más corta 2**( $FHS = FHS(6, 3)$ ,  $S = 000111$ ,  $D = 111000$ ,  $P_S = \{000111\}$ )  
 $k=0$ ;

---

**Algoritmo 2** Ruta más corta 2.

**Entrada:** Gráfica hiperestrella doblada regular  $FHS$ ; vértice fuente  $S$ ; vértice destino  $D$ ; conjunto de vértices de una ruta más corta de  $S$  a  $D$ ,  $P_S$ .

**Salida:**  $P_S$ .

```
1: Ruta más corta 2( $FHS, S, D, P_S$ )
2:  $k=0$ 
3: if ( $S = D$ ) then
4:   return  $P_S$ 
5: end if
6: obtener  $R \leftarrow r_1 r_2 \dots r_i \dots r_{2n}$ ,
   donde  $r_i \leftarrow s_i \oplus d_i$ ,  $1 \leq i \leq 2n$ 
7:  $p \leftarrow \{i \mid r_i = 1, 2 \leq i \leq 2n\}$ 
8: Sea  $S'$  un vértice tal que  $(S, S')_c$  es una  $i$ -arista
9:  $q_1 \leftarrow (S, S')_c$ 
10: Sea  $S''$  un vértice tal que  $(S, S'')$  es una  $j$ -arista
11:  $q_2 \leftarrow \{j \mid (S, S'') \in E(FHS(2n, n)) - q_1\}$ ,
   donde los  $j$ -ésimos bits están en  $S$  y  $S''$  complemento
12: for  $i = 2; i \leq 2n$  do
13:   if ( $r_i = 1$ ) then
14:      $k \leftarrow k + 1$ 
15:   end if
16:    $i \leftarrow i + 1$ 
17: end for
18: if ( $k > n$ ) then
19:    $P_S \leftarrow P_S \cup \{S'\}$ 
20:    $S \leftarrow S'$ 
21: else
22:   if ( $|p| > 0$ ) then
23:     Encontrar un vértice  $S''$  tal que  $(S, S'')$  es una  $j$ -arista, donde
        $j \leftarrow \min\{p \cap q_2\}$ 
24:      $P_S \leftarrow P_S \cup \{S''\}$ 
25:      $S \leftarrow S''$ 
26:   end if
27: end if
28: return Ruta más corta 2( $FHS, S, D, P_S$ )
```

---

Como  $((S = 000111) \neq (D = 111000))$  Se obtiene  
 $R = r_1 r_2 r_3 r_4 r_5 r_6 = 111111$ , donde  $r_i = s_i \oplus d_i$ ,  $1 \leq i \leq 2n$ ;  
 Sea  $p = \{i \mid r_i = 1, 2 \leq i \leq n\} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $q_1 = (000111, 111000)_c$  y  
 $q_2 = \{j \mid (S, S'') \in e(FHS(2n, n)) - q_1\} = \{\{4 \mid (000111, 100011) \in e(HS(6, 3))\}, \{5 \mid (000111, 100101) \in e(HS(6, 3))\}, \{6 \mid (000111, 100110) \in e(HS(6, 3))\}\} = \{4, 5, 6\}$   
 donde los  $j$ -ésimos bits están en  $S$  y  $S''$  complemento;  
 Ya que  $r_i = 1$  para  $i = 2, 3, 4, 5, 6$ , entonces  $\sum_{k=1}^5 1 = 5$   
 Como  $k = 5 > n = 3$  Se tiene que  
 $P_S = 000111 \cup \{111000\} = \{000111, 111000\}$ ;  
 $S = \{111000\}$ ;  
**Ruta más corta 2** ( $FHS = FHS(6, 3)$ ,  $S = 111000$ ,  $D = 111000$ ,  $P_S = \{000111, 111000\}$ )

Llamada 2:

**Ruta más corta 2** ( $FHS = FHS(6, 3)$ ,  $S = 111000$ ,  $D = 111000$ ,  $P_S = \{000111, 111000\}$ )  
 $k=0$ ;  
 Como  $((S = 111000) = (D = 111000))$  Entonces  
 regresar  $P_S = \{000111, 111000\}$ ;

◇

## Automorfismo

Un automorfismo de la gráfica hiperestrella doblada  $FHS(2k, k)$  es la gráfica cuyos vértices son idénticos al conjunto de vértices del automorfismo de la gráfica hiperestrella  $HS(2k, k)$  y cuyo conjunto de aristas  $e_2 = e_1 \cup \{\{v, \bar{v}\} \mid v \in V_1\}$ , donde  $e_1$  y  $V_1$  son el conjunto de aristas y vértices de  $HS(2k, k)$ , respectivamente. Se puede ver que esta gráfica es un gráfica bipartita regular de grado  $k + 1$ . Se puede demostrar que el diámetro del automorfismo de  $FHS(2k, k)$  es  $k$ , mientras que el diámetro del automorfismo de  $HS(2k, k)$  es  $2k - 1$ . Se puede demostrar también que esta gráfica es transitiva por vértices, así su conexidad por aristas es máximo; es decir,  $k + 1$ .

Sea  $v$  un vértice de un automorfismo para  $FHS(2k, k)$ . Se puede suponer que  $v = \{1, x_2, \dots, x_k\}$ , entonces  $N(v) = \{\{y_i, x_2, \dots, x_k\}, 1 \leq i \leq k\}$

$\cup \{y_1, \dots, y_k\}$ , donde  $X = \{1, x_2, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k\}$ . entonces para cada  $w \in N(v)$  y  $w \neq \bar{v}$ ,  $\bar{w}$  es el único vértice que está en  $N(\bar{v})$  y adyacente a  $w$ . Por lo tanto, si  $\{v, w\}$  es una arista de esta gráfica y  $v \neq \bar{w}$ , entonces el 4-ciclo  $vw\bar{w}\bar{v}$  es el único 4-ciclo que contiene esta arista, mientras que si  $w = \bar{v}$ , entonces cualquier 4-ciclo  $v\bar{v}u\bar{u}$ , donde  $u$  es adyacente a  $v$ , contiene esta arista. Sea  $uvw\bar{v}$  una 3-ruta de los automorfismos de  $FHS(2k, k)$  y  $u \neq \bar{w}$ , entonces se puede demostrar que el 6-ciclo  $uvw\bar{v}\bar{w}\bar{u}$  es el único 6-ciclo que contiene esta 3-ruta, [19].

### 5.3. Propiedades de la gráfica hiperestrella doblada

Dado que la gráfica hiperestrella puede ser construida por la eliminación de todas las aristas de la hiperestrella doblada correspondiente que conectan dos vértices cuyas cadenas binarias son complementarias entre sí, se tienen las siguientes propiedades:

Cada ruta se puede representar de acuerdo a la definición 7 agregando las aristas complementarias  $c$ , aunque no necesariamente represente una ruta.

Si  $k_1, k_2, \dots, k_t$  son todos números enteros diferentes,  $\langle k_1, k_2, \dots, k_t \rangle$  representa una ruta de  $u$  a  $v$ , entonces se puede permutar el  $k_i$  con índice par e intercambiar los  $k_i$  con índice impar y todavía se tiene una ruta de  $u$  a  $v$  de la misma longitud, otras permutaciones no equivalen a rutas.

**Ejemplo 32** Para  $u = 000111$ ,  $\langle 4, 2, 6 \rangle$  representa la ruta  $000111 - 100011 - 010011 - 110010$ ,  $\langle 5, 3, c \rangle$  representa  $000111 - 100101 - 001101 - 110010$ , mientras  $\langle c, 5, 3 \rangle$  representa  $000111 - 111000 - 011010 - 110010$  en  $FHS(6, 3)$ . Por otra parte,  $\langle 4, 6, 2 \rangle$  no representa una ruta.  $\diamond$

Del mismo modo, si  $c$  está entre los  $k_i$ , entonces primero se quita  $c$ , se intercambian los números restantes en posiciones pares y permutan los números restantes en posiciones impares, entonces se inserta  $c$  donde sea de regreso en la secuencia, para conseguir otra ruta de  $u$  a  $v$  de la misma longitud. Lo mismo se aplica a las rutas más cortas.

**Lema 6** [11] Sean  $u$  y  $v$  dos vértices de  $FHS(2n, n)$  y sean  $P$  y  $Q$  dos caminos con longitud  $\rho \geq 3$  de  $u$  a  $v$  representados por  $\langle a_1, \dots, a_\rho \rangle$  y  $\langle b_1, \dots, b_\rho \rangle$ , respectivamente. Supongamos que  $a_1, \dots, a_\rho$  son todos diferentes,

$b_1, \dots, b_\rho$  es una permutación de  $a_1, \dots, a_\rho$ , ninguna secuencia contiene  $c$ , y los números en las posiciones impares en  $a_1, \dots, a_\rho$  forman algunas versiones permutadas cíclicamente de los números en las posiciones impares en  $b_1, \dots, b_\rho$ . Además, si  $\rho$  es par, se supone que  $a_\rho \neq b_\rho$ . Entonces  $P$  y  $Q$  son rutas, y conectándolas forman un ciclo par de longitud  $2\rho$ .

*Demostración.* Ya que  $c$  no se encuentra entre los números que representan las rutas y  $a_1, \dots, a_\rho$  son todos diferentes, tanto  $P$  y  $Q$  son rutas y al unirse se crea un camino cerrado. Supongamos que existe un vértice común  $w \neq u, v$  en las dos rutas. Entonces si las rutas de  $u$  a  $w$  se representan por las subsecuencias  $\langle a_1, \dots, a_i \rangle$  y  $\langle b_1, \dots, b_j \rangle$  para algunos  $i, j < \rho$ , y  $k$  aparece en una de las subsecuencias pero no en la otra, entonces el  $k$ -ésimo bit del último vértice sería diferente de las dos subrutas, por lo que ambos no pueden terminar en  $w$ . Así,  $a_1, \dots, a_i$  debe ser una permutación de  $b_1, \dots, b_j$ , por lo tanto  $i = j$ .

Ya que los números en las posiciones impares en  $a_1, \dots, a_\rho$  forman una versión cíclica permutada de  $b_1, \dots, b_\rho$ , la secuencia  $a_1, \dots, a_i$  sólo puede ser una permutación de  $b_1, \dots, b_j$  si ambos contienen todos los elementos en las posiciones impares. Cuando  $\rho$  es impar, esto implica que  $i = \rho$ , pero entonces  $w = v$ . Por último, si  $\rho$  es par, se debe tener  $i = \rho - 1$ , pero entonces por la suposición de que  $a_\rho \neq b_\rho$ , entonces  $a_1, \dots, a_{\rho-1}$  no es una permutación de  $b_1, \dots, b_{\rho-1}$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto  $P$  y  $Q$  son internamente disjuntas por vértices, y conectándolas forman un ciclo par de longitud  $2\rho$ .  $\square$

**Lema 7** [11] Sea  $P$  un camino en  $FHS(2n, n)$  el cual contiene exactamente una  $i$ -arista para cada  $i, i = 2, \dots, 2n$  y exactamente una  $c$ -arista. Entonces  $P$  es un ciclo.

*Demostración.* Sea  $u$  un vértice arbitrario de  $FHS(2n, n)$  en  $P$ . Ya que  $P$  contiene exactamente una  $i$ -arista para  $i = 2, \dots, 2n$  y una  $c$ -arista, saliendo de  $u$  cada bit se intercambia dos veces, así  $P$  es cerrado. Se puede ver que ninguna subruta de  $P$  puede ser cerrada, por lo tanto, es un ciclo.  $\square$

Se puede generalizar el lema 6 para rutas que contienen exactamente una  $c$ -arista:

**Lema 8** [11] Sean  $u$  y  $v$  dos vértices en  $FHS(2n, n)$  y sean  $P$  y  $Q$  dos caminos con longitud  $2 \leq \rho \leq 2n - 1$  de  $u$  a  $v$  representados por  $[a_1, \dots, a_\rho]$

y  $[b_1, \dots, b_\rho]$ , respectivamente. Se supone que  $a_1, \dots, a_\rho$  son todos diferentes,  $b_1, \dots, b_\rho$  es una permutación de  $a_1, \dots, a_\rho$ ,  $a_\rho \neq b_\rho$ , ambas secuencias contienen exactamente una  $c$ -arista, pero  $c$  no es el primer elemento de ambas secuencias, y cuando  $c$  se borra de ambas secuencias, los números restantes en posiciones impares en la primera secuencia forman alguna versión permutada cíclica de los números restantes en las posiciones impares en la segunda secuencia. Además, si  $\rho$  es impar, y  $c$  aparece entre los dos últimos elementos en ambas secuencias, suponga que los últimos elementos de las secuencias después de borrar  $c$  son diferentes. Entonces, la conexión de  $P$  y  $Q$  forma un ciclo par de longitud  $2\rho$ .

*Demostración.* Ya que  $a_1, \dots, a_\rho$  son todos diferentes, después de quitar  $c$  existen  $\rho - 1 \leq 2n - 2$  elementos dejados, por tanto al menos un número entero  $m$  tal que  $2 \leq m \leq 2n$  falta en ellos. Así para cada subsecuencia no vacía de  $a_1, \dots, a_\rho$ , si contiene  $c$ , entonces sustituye el  $m$ -ésimo bit exactamente una vez, por otra parte cada bit correspondiente a cualquier elemento de esta subsecuencia es cambiado exactamente una vez, por tanto el camino correspondiente no puede ser cerrado.

Así, tanto  $P$  como  $Q$  son rutas, y la unión de ellas crea un camino cerrado. Suponga que existe un vértice común  $w \neq u, v$  en las dos rutas. Entonces si las rutas de  $u$  a  $w$  están representados por las subsecuencias  $\langle a_1, \dots, a_i \rangle$  y  $\langle b_1, \dots, b_j \rangle$  para algunos,  $i, j < \rho$ , y  $k$  aparece en una de las subsecuencias, pero no en la otra, entonces el  $k$ -ésimo bit del último vértice sería diferente en las dos subrutas, por tanto no pueden terminar ambas en  $w$ . Entonces  $a_1, \dots, a_i$  debe ser una permutación de  $b_1, \dots, b_j$ , por lo que  $i = j$ , y  $c$  debe aparecer en ambos o ninguno.

Ya que  $c$  no es el primer elemento en ninguna de las secuencias, se tiene  $i > 1$ ; por lo tanto cada subsecuencia contiene el primer elemento diferente de  $c$  de la secuencia correspondiente. Ya que los números en posiciones impares en  $a_1, \dots, a_\rho$  después de borrar  $c$  forman una versión permutada cíclica de  $b_1, \dots, b_\rho$  después de borrar  $c$ , la secuencia  $a_1, \dots, a_i$ , puede únicamente ser una permutación de  $b_1, \dots, b_i$  si ambos contienen todos los elementos en posiciones impares en  $a_1, \dots, a_\rho$  después de borrar  $c$ . Así pueden existir a lo más dos elementos no contenidos en la subsecuencia,  $c$  y el último elemento en una posición par cuando  $\rho$  es impar. Cuando  $\rho$  es par, se tiene que  $i = \rho - 1$ , entonces  $c$  es el último elemento de ambas secuencias, contradiciendo la suposición.

Finalmente, si  $\rho$  es impar, se tiene que  $i = \rho - 2$  o  $i = \rho - 1$ . Cuando  $i = \rho - 2$ , esto implica que los dos últimos elementos de las secuencias son el mismo (uno de los cuales es  $c$ ), por lo tanto después de suprimir  $c$ , los últimos elementos son lo mismo, lo cual es una contradicción. Cuando  $i = \rho - 1$ , se consigue que  $a_\rho = b_\rho$ , otra vez una contradicción. Por lo tanto,  $P$  y  $Q$  son internamente disjuntas por vértices, y conectándolas constituyen un ciclo par de longitud  $2\rho$ .  $\square$

## 5.4. Relación con otras gráficas

**Teorema 16** [11]  $FHS(2n, n)$  es una gráfica bipartita que es simétrica por vértices pero no simétrica por aristas.

*Demostración.* Los vértices que empiezan con 0 forman un lado de la bipartición, los vértices que empiezan con 1 forman la otra parte.

Sea  $\phi_{i,j}$  la operación para el intercambio del  $i$ -ésimo y  $j$ -ésimo bit de una cadena para  $2 \leq i < j \leq 2n$ . Se puede comprobar que  $\phi_{i,j}$  y el complemento de la cadena de bits que representan a un vértice, son automorfismos de  $FHS(2n, n)$  para todo  $2 \leq i < j \leq 2n$ , además utilizando composiciones de estos automorfismos, se puede asignar cualquier vértice a cualquier vértice, así  $FHS(2n, n)$  es simétrica por vértices.

$FHS(2n, n)$  no es simétrica por aristas ya que cualquiera de sus aristas complementarias es parte de algún 4-ciclo de la forma  $\langle c, i, c, i \rangle$ , pero cualquier  $i$ -arista está contenida en un sólo 4-ciclo para  $2 \leq i \leq 2n$ . Utilizando el automorfismo antes expuesto, se puede mostrar que hay dos clases equivalentes en las aristas.  $\square$

**Teorema 17** [20] La gráfica par  $E_\delta$ ,  $\delta \geq 2$ , es isomorfa a la gráfica hiperestrella doblada  $FHS(2\delta - 2, \delta - 1)$ .

*Demostración.* Se define una asignación,  $\phi : V(e_\delta) \rightarrow V(FHS(2\delta - 2, \delta - 1))$  como sigue. Si  $\alpha$  es un vértice de  $e_\delta$ , y  $\alpha \in W_1$ , (el peso de Hamming de  $\alpha$  es  $\delta - 1$ ), entonces se define  $\phi(\alpha) = 0\alpha$ . Si  $\beta$  es un vértice de  $e_\delta$ , y  $\beta \in W_2$ , (el peso de Hamming de  $\beta$  es  $\delta - 2$ ), entonces se define  $\phi(\beta) = 1\beta$ . Ahora considere  $\alpha$ , un vértice de  $e_\delta$ ,  $\alpha \in W_1$ . entonces el vecino de  $\alpha$  debe estar en la forma  $\beta$ ,  $\beta \in W_2$ . Si  $\alpha$  y  $\beta$  son adyacentes, entonces se tienen dos casos:

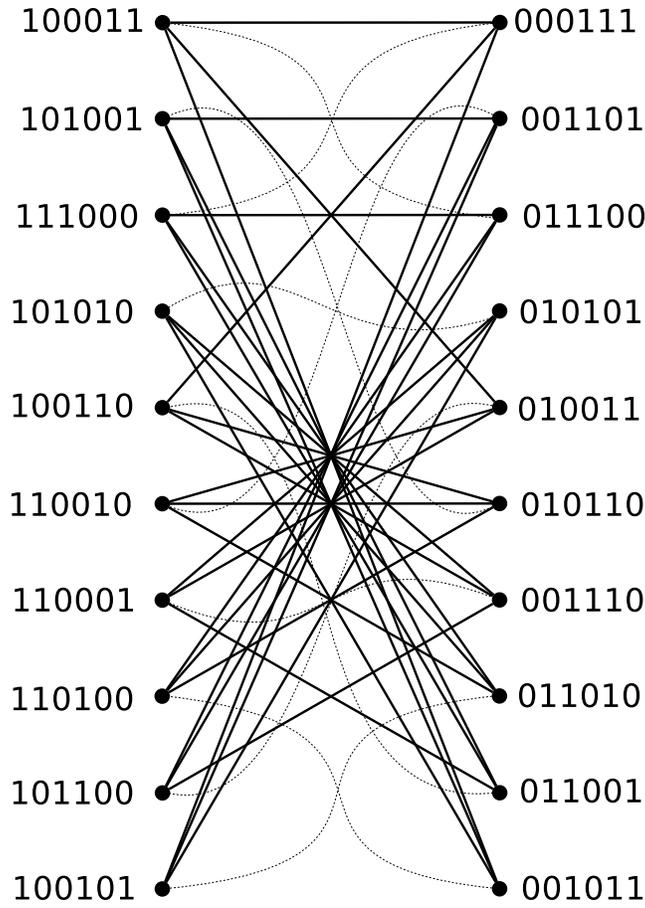


Figura 5.2:  $FHS(6, 3)$  agrupada como una gráfica bipartita balanceada.

1. La distancia de Hamming entre  $\alpha$  y  $\beta$  es 1, ellos difieren en un bit (por ejemplo la posición  $l$ ). Además, ese bit diferente es 1 en  $\alpha$ , y es 0 en  $\beta$ . Por lo tanto,  $0\alpha$  y  $1\beta$  ambos tienen  $\delta-1$  1's y  $\delta-1$  0's, lo cual significa que existe ambos vértices en  $FHS(2\delta-2, \delta-1)$ . Y  $1\beta$  puede ser obtenido de  $0\alpha$  mediante el intercambio del primer 0 con el  $l$ -ésimo bit (1). Así,  $0\alpha$  y  $1\beta$  son adyacentes en  $FHS(2\delta-2, \delta-1)$ .
2. La distancia de Hamming entre  $\alpha$  y  $\beta$  es  $2\delta-3$ , los cuales son complementarios uno al otro. Así,  $0\alpha$  y  $1\beta$  son todavía complementarios el uno al otro. Lo cual significa que son adyacentes en  $FHS(2\delta-2, \delta-1)$ .

Con lo que se termina la demostración.  $\square$

Ya que cada vértice en  $\phi(V(T_n))$  comienza con un 0 y tiene un sólo 1 en la primera mitad de la cadena, los vértices internos de las rutas generadas en los casos 1 y 2 no están en  $\phi(V(T_n))$ . Por lo tanto, utilizando los conceptos expuestos para  $FHS(2(n+1), n+1)$ .

**Teorema 18** [10] Sea  $n \geq 2$ , entonces  $T_n$  puede ser inmerso o encajado en  $HS(2(n+1), n+1)$  con dilatación 4.

Si se define  $\psi(i, j) = 1\alpha_n(i)\overline{0\alpha_n(j)}$ , entonces al intercambiar el papel del 1 y 0, además de definir  $\mu(e)$  como la ruta  $1\alpha_n(i)\overline{0\alpha_n(j_1)}, 0\alpha_n(\{i_1, i_2\})\overline{1\alpha_n(j)}$ ,  $1\alpha_n(i_2)\overline{0\alpha_n(j_2)}$  para el caso 2, donde  $e$  es la arista entre  $(i_1, j)$  e  $(i_2, j)$ , entonces las rutas del caso 2 serán internamente disjuntas por vértices. Esto implica que  $T_n$  puede ser inmerso en  $HS(2(n+1), n+1)$  parcialmente doblada, entonces sea  $PFHS(2(n+1), n+1)$  la gráfica que se obtiene de  $HS(2(n+1), n+1)$  mediante la identificación de pares de vértices de la forma  $0\alpha 1\beta$  y  $1\alpha 0\beta$ , donde  $\alpha$  es una cadena binaria de longitud  $n$  con exactamente un 1 y  $\beta$  es una cadena binaria de longitud  $n$  con exactamente un 0. Entonces, para cada vértice  $(i, j) \in V(T_n)$ , se define  $\zeta(i, j) = 0\alpha_n(i)\overline{1\alpha_n(j)}$ , el cual es el mismo que  $1\alpha_n(i)\overline{0\alpha_n(j)}$  en  $PFHS(2(n+1), n+1)$ . Por otra parte, para  $e \in e(T_n)$ , se define  $\tau(e) = \rho(e)$  en el caso 1 y  $\tau(e) = \mu(e)$  en el caso 2.

**Teorema 19** [10] Sea  $n \geq 2$ . entonces  $T_n$  puede ser encajado en  $PFHS(2(n+1), n+1)$  con dilatación 2.

Se puede ver que el número de vértices en  $FHS(2n, n)$  es el mismo que el de  $HS(2n, n)$ , mientras que el grado de  $FHS(2n, n)$  es  $n+1$ . El diámetro de una gráfica hiperestrella  $HS(2n, n)$  es  $2n-1$  si las cadenas de bits de dos vértices son complemento uno del otro. Por otra parte, tales vértices están conectados por una arista en  $FHS(2n, n)$ , así, el diámetro de  $FHS(2n, n)$  es  $n$ .

Dado que el costo de la red está definido como grado  $\times$  diámetro, el costo de la red de una gráfica hiperestrella doblada  $FHS(2n, n)$  es  $n^2 + n$ . Por lo tanto, la gráfica hiperestrella doblada tiene mejor desempeño al hipercubo y sus variantes con el mismo número de vértices en términos del costo de la red. Las comparaciones entre hiperestrella doblada y otras redes de interconexión se presentan en la tabla 5.1, donde  $HCN$  son las siglas en ingles de Hierarchical Cubic Networks, [14].

Modelo de Red	Tamaño	Grado	Diámetro	Costo de la red
Hipercubo	$2^n$	$n$	$n$	$n^2$
Hipercubo Doblado	$2^n$	$n + 1$	$\lceil \frac{n}{2} \rceil$	$\approx 0.5n^2$
Cubo Múltiple Trenzado	$2^n$	$n$	$\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$	$\approx 0.5n^2$
$HCN(\frac{n}{2}, \frac{n}{2})$	$2^n$	$\frac{n}{2} + 1$	$\frac{n}{2} + \lceil \frac{n+2}{6} \rceil + 1$	$\approx 0.33n^2$
$HS(2k, k)$	$\begin{pmatrix} 2k \\ k \end{pmatrix}$	$k$	$2k - 1$	$2k^2 - k$
$FHS(2k, k)$	$\begin{pmatrix} 2k \\ k \end{pmatrix}$	$k + 1$	$k$	$k^2 + k$

Tabla 5.1: Comparación entre  $FHS$  y otras redes, donde  $n = 2k$ .

## 5.5. Tolerancia a fallos

Las rutas ajenas por vértices en una red de interconexión tienen cierta importancia, porque el tiempo de transmisión del mensaje puede reducirse debido a que el mensaje se divide en paquetes y se transmite al mismo tiempo a través varias rutas, también una ruta alternativa se puede establecer cuando vértices y aristas fallan en la trayectoria de enrutamiento. De aquí en adelante se usará operación  $\sigma_i$  como la aplicación de la definición 7 sobre  $i$ .

**Teorema 20** [11] El número de rutas ajenas por vértices entre cualesquiera dos vértices  $u, v \in FHS(2n, n)$  es el máximo posible y es igual a  $n + 1$ . Las longitudes de estas rutas son:

**Caso 1**  $d(u, v)$  es par.

**Caso 1.1**  $d(u, v) < n$ .

Existen  $d(u, v)/2$  rutas de longitud  $d(u, v)$ . Las rutas restantes son de igual longitud, la cual es  $d(u, v) + 2$ .

**Caso 1.2**  $d(u, v) = n$ .

Existen  $n + 1$  rutas de longitud  $n$

**Caso 2**  $d(u, v)$  es impar.

**Caso 2.1**  $d(u, v) < n$ .

Existen  $(d(u, v) + 1)/2$  rutas de longitud  $d(u, v)$ . Existe una ruta de longitud  $d(u, v) + 2$ . Las rutas restantes son de longitud  $d(u, v) + 4$ .

**Caso 2.2**  $d(u, v) = n$ .

Existen  $n + 1$  rutas de longitud  $n$

*Demostración.* Se probará el teorema mediante la construcción de todas las rutas ajenas por vértices para los dos casos anteriores. A través de esta construcción las longitudes y el número de estas rutas pueden ser verificadas.

**Caso 1:**  $d(u, v)$  es par.

**Caso 1.1:**  $d(u, v) < n$ . Para la primera ruta entre los vértices  $u$  y  $v$  con longitud  $d(u, v)$ , se puede utilizar el algoritmo de enrutamiento **Ruta más corta 2** para encontrarla. Suponga que la ruta más corta encontrada de esta manera es  $\langle k_1, k_2, \dots, k_{d(u,v)} \rangle$ . Entonces las otras  $d(u, v)/2 - 1$  rutas ajenas por vértices con longitud  $d(u, v)$  son las siguientes:

$$\begin{aligned} &\langle k_3, k_4, \dots, k_{d(u,v)-1}, k_{d(u,v)}, k_1, k_2 \rangle \\ &\quad \langle k_5, k_6, \dots, k_1, k_2, k_3, k_4 \rangle \\ &\quad \vdots \\ &\langle k_{d(u,v)-1}, k_{d(u,v)}, k_1, k_2, \dots, k_{d(u,v)-3}, k_{d(u,v)-2} \rangle \end{aligned}$$

En otras palabras, estas rutas se obtienen mediante el desplazamiento cíclico de la ruta  $\langle k_1, k_2, \dots, k_{d(u,v)} \rangle$   $2i$  ( $1 \leq i \leq d(u, v)/2 - 1$ ) operaciones a la izquierda.

Estas rutas llegan al mismo vértice, ya que todos tienen el mismo conjunto de operaciones sobre los niveles pares e impares. Se va a demostrar que todas estas rutas son ajenas por vértices.

Considere dos rutas:

$$\mathcal{P}_1 = \langle k_1, k_2, \dots, k_{d(u,v)} \rangle \text{ y } \mathcal{P}_i = \langle k_{2i-1}, k_{2i}, \dots, k_{d(u,v)-1}, k_{d(u,v)}, k_{2i-3}, k_{2i-2} \rangle$$

donde  $\mathcal{P}_i$  se puede obtener a partir de  $\mathcal{P}_1$  desplazando cíclicamente todas sus operaciones  $2i$  posiciones a la izquierda. Después de aplicar una operación  $\sigma_j$  a un vértice en cualquier ruta, el valor del bit en la posición  $j$  debe seguir siendo el mismo como un movimiento a lo largo de los vértices presentes en una ruta hasta que otra operación  $\sigma_j$  se lleve a cabo.

Por lo tanto, los vértices en  $\mathcal{P}_1$  son diferentes de los vértices en  $\mathcal{P}_i$ , al menos en la posición  $k_1$  para los primeros  $d(u, v) - 2i + 2$  vértices. Además, el segundo vértice a  $d(u, v) - 2i + 3$ -ésima en estas dos rutas son diferentes en al menos la posición  $k_2$ . Un uso repetido de este argumento llevará a la conclusión de que todos los vértices en estas dos rutas son ajenas.

Supongamos que existe otra ruta  $\langle p_1, p_2, \dots, p_{d(u,v)} \rangle$  que es de longitud  $d(u, v)$  y ajena por vértices con las  $d(u, v)/2$  rutas listadas anteriormente. Porque cada ruta más corta entre dos vértices debe aplicar el mismo conjunto de operaciones a niveles pares e impares,  $p_1 \in \{k_1, k_3, \dots, k_{d(u,v)-1}\}$ , lo cual es una contradicción con la hipótesis de que esta ruta es ajena por vértices con las rutas anteriores. Por lo tanto, el número de tales rutas ajenas por vértices más cortas no puede exceder  $d(u, v)/2$ .

El caso cuando una  $c$ -arista está involucrada puede ser fácilmente demostrado usando el argumento anterior. la ruta de distancia más corta entre el vértice  $u$  y  $v$  es  $d(u, v)$  y todos esas rutas ya están elegidos, por lo tanto, las rutas alternas deben ser de longitud mayor que  $d(u, v)$ . las rutas alternas no pueden ser de longitud  $d(u, v) + 1$ , de lo contrario se introduce un ciclo de longitud  $2d(u, v) + 1$ , el cual es impar.

Ya que la hiperestrella doblada no admite ciclos con longitud impar, la siguiente opción para las rutas alternas es una ruta de longitud  $d(u, v) + 2$ .

Para construir las rutas alternas de longitud  $d(u, v) + 2$ , se tienen que utilizar los otros vecinos del vértice fuente que no han sido usados en las rutas más cortas con  $d(u, v)/2$ . Lo cual significa que la primera operación no puede estar en el conjunto  $\{k_1, k_3, \dots, k_{d(u,v)-1}\}$ . A decir la operación  $k_n$  irá desde el vértice fuente a tal vecino, entonces todas las rutas alternas están dadas de la siguiente forma:

$$\langle k_n, k_{d(u,v)}, k_{d(u,v)-1}, \dots, k_2, k_1, k_n \rangle$$

Ya que  $k_n \notin \{k_1, k_2, \dots, k_{d(u,v)}\}$ , el bit  $k_n$  no se cambiará hasta que la última operación, la cual es  $\sigma_{k_n}$  otra vez y esta operación cambia el bit  $k_n$  de regreso al valor que estaba en el vértice fuente. Debido a que los vértices fuente y destino únicamente difieren en los bits  $k_1, k_2, \dots, k_{d(u,v)}$ , esta secuencia de operaciones llevará a el vértice destino  $v$ .

Observe que la secuencia entre los dos  $k_n$  en los extremos es el reverso de una ruta más corta, esto es para asegurar que las operaciones son tomadas en el tipo adecuado de niveles (nivel par o nivel impar), el reverso de cualquier ruta más corta bastará, el argumento es el mismo. Todos estas rutas utilizan el mismo conjunto de operaciones, excepto el primero y el último, por lo que todos estas rutas son ajenas por vértices. El caso cuando  $[k_n]$  es una  $c$ -arista, se puede demostrar usando el mismo argumento.

Para este punto se ha utilizado cada vecino del vértice fuente para encontrar una ruta ajena por vértices, así que el número total de rutas ajenas por

vértices entre dos vértices en este caso es el grado de la gráfica, el cual es  $n + 1$ .

**Ejemplo 33** En  $FHS(8,4)$ ,  $u = 00001111$ ,  $v = 00010111$ ,  $d(u, v) = 2$ . El número entre paréntesis es la posición del bit que está siendo cambiada a cada paso. La ruta 1 de longitud dos es:

$$00001111(5) \rightarrow 10000111(4) \rightarrow 00010111$$

Las cuatro rutas ajenas por vértices de longitud cuatro son:

$$\begin{aligned} &00001111(c) \rightarrow 11110000(5) \rightarrow 01111000(4) \rightarrow 11101000(c) \rightarrow 00010111 \\ &00001111(6) \rightarrow 10001011(4) \rightarrow 00011011(5) \rightarrow 10010011(6) \rightarrow 00010111 \\ &00001111(7) \rightarrow 10001101(4) \rightarrow 00011101(5) \rightarrow 10010101(7) \rightarrow 00010111 \\ &00001111(8) \rightarrow 10001110(4) \rightarrow 00011110(5) \rightarrow 10010110(8) \rightarrow 00010111 \end{aligned}$$

◇

**Caso 1.2:**  $d(u, v) = n$ . Para este caso, primero se obtienen las  $d(u, v)/2 = n/2$  rutas más cortas como se hizo en el caso 1.1. Suponga que los bits (excluyendo el primer bit) en las posiciones  $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$  son los mismos en  $u$  y  $v$ . Si se intercambia el primer bit con cualquiera de estos  $n - 1$  bits, se obtiene un bit "más alejado" del vértice destino. Sin embargo, el uso de una  $c$ -arista irá de un vértice a distancia  $d$  del destino a un vértice a distancia  $2n - 1 - d$  del destino. Por lo tanto, se pueden cambiar los bits en las posiciones  $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$ , para hacer al vértice a una distancia  $n + (n - 1) = 2n - 1$  del vértice  $v$ , y entonces usar la  $c$ -arista, para hacer al vértice resultante  $(2n - 1) - (2n - 1) = 0$  arista de  $v$ , la cual es  $v$ . Como una cuestión de hecho, se pueden cambiar los bits  $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$  y usar la  $c$ -arista en cualquier orden, todavía se llega a  $v$  después de  $n$  aristas.

**Ejemplo 34** En  $FHS(8,4)$ ,  $u = 00001111$ ,  $v = 00110011$ ,  $d(u, v) = 4$ . Las cinco rutas ajenas por vértices de longitud cuatro son:

$$\begin{aligned} &00001111(5) \rightarrow 10000111(3) \rightarrow 00100111(6) \rightarrow 10100011(4) \rightarrow 00110011 \\ &00001111(6) \rightarrow 10001011(4) \rightarrow 00011011(5) \rightarrow 10010011(3) \rightarrow 00110011 \\ &00001111(c) \rightarrow 11110000(7) \rightarrow 01110010(2) \rightarrow 10110010(8) \rightarrow 00110011 \\ &00001111(7) \rightarrow 10001101(2) \rightarrow 01001101(8) \rightarrow 11001100(c) \rightarrow 00110011 \\ &00001111(8) \rightarrow 10001110(c) \rightarrow 01110001(2) \rightarrow 10110001(7) \rightarrow 00110011 \end{aligned}$$

◇

**Caso 2:**  $d(u, v)$  es impar.

**Caso 2.1:**  $d(u, v) < n$ . Todavía se usa el algoritmo de enrutamiento de la ruta más corta para encontrar la primera ruta más corta, se dice que la ruta es  $[k_1, k_2, \dots, k_{d(u,v)}]$ , entonces las otras rutas ajenas por vértices más cortos entre el vértice  $u$  y  $v$  son listados como sigue:

$$\begin{aligned} &\langle k_3, k_2, k_5, k_4, \dots, k_{d(u,v)}, k_{d(u,v)-1}, k_1 \rangle \\ &\langle k_5, k_2, k_7, k_4, \dots, k_1, k_{d(u,v)-1}, k_3 \rangle \\ &\quad \vdots \\ &\langle k_{d(u,v)}, k_2, k_1, k_4, \dots, k_{d(u,v)-4}, k_{d(u,v)-1}, k_{d(u,v)-2} \rangle \end{aligned}$$

Es decir, únicamente se desplazaron cíclicamente las operaciones aplicadas en los niveles impares a la izquierda, una operación por tiempo. Las operaciones aplicadas sobre los niveles pares son las mismas para todas las rutas.

Es fácil ver que todos son de la misma longitud, que es la distancia entre el vértice  $u$  y  $v$ , y todas son rutas legibles de  $u$  a  $v$ . El número de estas rutas es igual al número de operaciones aplicadas en los niveles impares, el cual es  $(d(u, v) + 1)/2 = (n + 1)/2$ . Estas rutas son ajenas por vértices lo cual se puede demostrar con argumentos similares a los usados en el caso 1.

Entonces, una ruta alterna de longitud  $d(u, v) + 2$  es:

$$\langle c, k_1, k_2, \dots, k_{d(u,v)}, c \rangle$$

La justificación es la misma que en el caso 1.1.

Las otras  $n - (d(u, v) + 1)/2$  rutas ajenas por vértices están en la forma:

$$\langle p, q, k_1, k_2, \dots, k_{d(u,v)}, p, q \rangle$$

La arista  $[p]$  conecta el vértice  $u$  a un vecino que no es utilizado en las rutas más cortas anteriores. Por lo tanto cambia el bit  $p$  que es el mismo en los vértices  $u$  y  $v$ . Pero la segunda aparición de  $p$  en la secuencia cambia este bit de nuevo.

La arista  $[q]$  es un paso redundante para asegurar que las aristas  $[k_1]$ ,  $[k_2]$ ... están en el tipo de nivel correcto (nivel par o impar). Además, si no existe tal arista como  $[q]$ , entonces es imposible hacer estas rutas ajenas por vértices. Y todos los bits en las posiciones  $k_1, k_2, \dots, k_{d(u,v)}$  son cambiados por esta secuencia de operaciones.

**Ejemplo 35** En  $FHS(8,4)$ ,  $u = 00001111$ ,  $v = 10010011$ ,  $d(u, v) = 3$ . Las dos rutas ajenas por vértices de longitud tres son:

$$\begin{aligned} 00001111(5) &\rightarrow 10000111(4) \rightarrow 00010111(6) \rightarrow 10010011 \\ 00001111(6) &\rightarrow 10001011(4) \rightarrow 00011011(5) \rightarrow 10010011 \end{aligned}$$

El única ruta usando la  $c$ -arista es:

$$\begin{aligned} 00001111(c) &\rightarrow 11110000(5) \rightarrow 01111000(4) \rightarrow 11101000(6) \\ &\rightarrow 01101100(c) \rightarrow 10010011 \end{aligned}$$

Las dos rutas ajenas por vértices de longitud siete son:

$$\begin{aligned} 00001111(7) &\rightarrow 10001101(2) \rightarrow 01001101(5) \rightarrow 11000101(4) \rightarrow 01010101(6) \\ &\rightarrow 11010001(7) \rightarrow 01010011(2) \rightarrow 10010011 \\ 00001111(8) &\rightarrow 10001110(2) \rightarrow 01001110(5) \rightarrow 11000110(4) \rightarrow 01010110(6) \\ &\rightarrow 11010010(8) \rightarrow 01010011(2) \rightarrow 10010011 \diamond \end{aligned}$$

**Caso 2.2:**  $d(u, v) = n$ . Las primeras  $(d(u, v) + 1)/2 = (n + 1)/2$  rutas ajenas por vértices más cortas son los mismos que en el caso 2.1. Las otras rutas más cortas, se pueden construir de la misma forma que en el caso 1.2, la cual es combinar cambiando los bits que están en el mismo  $u$  y  $v$  y usando una  $c$ -arista, la justificación es también la misma.

**Ejemplo 36** En  $FHS(6, 3)$ ,  $u = 010101$ ,  $v = 110010$ ,  $d(u, v) = 3$ . Las cuatro rutas ajenas por vértices de longitud tres son:

$$\begin{aligned} 010101(4) &\rightarrow 110001(5) \rightarrow 010011(6) \rightarrow 110010 \\ 010101(6) &\rightarrow 110100(5) \rightarrow 010110(4) \rightarrow 110010 \\ 010101(2) &\rightarrow 100101(3) \rightarrow 001101(c) \rightarrow 110010 \\ 010101(c) &\rightarrow 101010(2) \rightarrow 011010(3) \rightarrow 110010 \diamond \end{aligned}$$

# Conclusiones

En esta tesis, se amplió el conocimiento topológico de la red de interconexión hiperestrella principalmente en su forma regular  $HS(2n, n)$ .

Esta red es un híbrido de las gráficas estrella e hipercubo, por lo cual posee algunas de las propiedades de ambas. Mediante el estudio de las propiedades topológicas de la hiperestrella, isomorfismo con el cubo medio, área de la superficie, vecindad de difusión de la información, así como de las relaciones topológicas de las gráficas impares, pares, hipercubo, toro con la hiperestrella, se estableció la idoneidad de esta gráfica como una red de interconexión.

La gráfica hiperestrella regular  $HS(2n, n)$  se puede descomponer en dos subgráficas idénticas. En cuanto a la vecindad de difusión de la información se dan las bases para un algoritmo simple. Para la variante de la hiperestrella, denominada hiperestrella doblada  $FHS(2n, n)$ , se proporcionaron algunos parámetros básicos, como el tamaño, grado, diámetro y esquema de ruta más corta.

En esta tesis se analizaron algunas buenas propiedades de  $FHS(2n, n)$ . Se expuso la demostración de que la  $FHS(2n, n)$  es simétrica por vértices, además de la construcción del número máximo de rutas ajenas por vértices en  $FHS(2n, n)$  entre cualquier par de vértices. También se sugirió un algoritmo enrutamiento para  $HS(2n, n)$  y  $FHS(2n, n)$ .

# Apéndice A

## Álgebra superior

En este apéndice se presenta una breve introducción sobre Álgebra Superior, principalmente algunos de los conceptos usados en el desarrollo de la tesis, como son: conjuntos, funciones y cálculo combinatorio.

**Definición 26** Un **conjunto** es una colección, clase o agrupación de objetos bien definidos y diferenciables entre si, llamados elementos del conjunto.

Se dirá que dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos.

Se usarán las letras mayúsculas,  $A, B, C$ , etcétera, para los conjuntos y las minúsculas  $a, b, c, \dots, n, m$ , etcetera para los elementos. Para especificar los elementos de un conjunto se usarán llaves, por ejemplo  $A = \{a, b, c\}$ .

Para denotar que un elemento  $x$  pertenece al conjunto  $A$  se escribirá  $x \in A$ .

Cuando un elemento  $x$  no pertenezca al conjunto  $A$  se escribirá  $x \notin A$ .

El símbolo  $\emptyset$  se usará para describir el conjunto que no tiene elementos, a este conjunto se le llama el **conjunto vacío**.

**Definición 27** Una **familia de conjuntos o una colección de conjuntos** es un conjunto  $F$  cuyos elementos son a su vez conjuntos.

**Definición 28** Sean  $A$  y  $B$  conjuntos, se dice que  $B$  es un **subconjunto** de  $A$ , si cada elemento de  $B$  lo es también de  $A$ , se denota  $B \subseteq A$ . Si  $B$  no es subconjunto de  $A$  se emplea la notación  $B \not\subseteq A$ .

Por lo tanto, de la definición de subconjunto se tiene que  $\emptyset \subseteq A$  para todo conjunto  $A$ , ya que de otra manera existe  $x$  en  $\emptyset$  tal que  $x \notin A$ , lo cual contradice que  $\emptyset$  no tiene elementos.

Obsérvese que si  $B \subseteq A$ , se tiene  $x \in B$  implica que  $x \in A$  y, viceversa, si

para todo  $x \in B$  se tiene  $x \in A$ , entonces  $B \subseteq A$ . En general, cuando la proposición  $P$  se cumple si y sólo si se cumple la proposición  $Q$ , escribiremos  $P \Leftrightarrow Q$ .

**Definición 29** La **unión de dos conjuntos**  $A$  y  $B$ , denotado por  $A \cup B$ , se define como el conjunto:

$$\{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

Las propiedades siguientes son consecuencia inmediata de la definición.

- $A \subseteq A \cup B$ ,  $B \subseteq A \cup B$ ,
- $A \cup B = B \cup A$  (**conmutatividad**),
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$  (**asociatividad**).

**Definición 30** La **intersección de dos conjuntos**  $A$  y  $B$ , denotado por  $A \cap B$ , se define como:

$$\{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

De nuevo se sigue de manera inmediata que

- $A \cap B \subseteq A$ ,  $A \cap B \subseteq B$ ,
- $A \cap B = B \cap A$  (**conmutatividad**),
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$  (**asociatividad**).

**Definición 31** Sea  $\mathbb{X}$  un conjunto universal y  $A$  un subconjunto de  $\mathbb{X}$ . Se define el **complemento del conjunto**  $A$ , denotado por  $A^c$  o  $\bar{A}$ , como los elementos de  $\mathbb{X}$  que no pertenecen a  $A$ , específicamente

$$\{x \mid x \in \mathbb{X} \text{ y } x \notin A\}.$$

El complemento de un conjunto varía si el universal donde actúa cambia, por ejemplo, el complemento de  $A = \{1, 2\}$  en  $\mathbb{X} = \{1, 2, 3\}$  es  $\{3\}$  pero en  $\mathbb{X} = \{1, 2, 3, 4\}$  es  $\{3, 4\}$ . Las propiedades básicas de la complementación son:

- $(A^c)^c = A$ ,
- $A \cup A^c = \mathbb{X}$ ,

- $A \cap A^c = \emptyset$ ,
- $A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c$ .

**Definición 32** La diferencia entre dos conjuntos  $A$  y  $B$ , denotado por  $A - B$ , es el conjunto:

$$\{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}.$$

Nótese que  $A - B = A \cap B^c$ .

**Definición 33** Sea  $A$  un conjunto, las **parejas ordenadas** de  $A$  son aquéllas de la forma  $(a, b)$ , tal que  $a \in A$  y  $b \in A$ . También se pueden considerar parejas ordenadas de un par de conjuntos  $A$  y  $B$ , de tal manera que el primer término esté en  $A$  y el segundo en  $B$ .

**Definición 34** Sean  $A$  y  $B$  conjuntos, el **producto cartesiano** de  $A$  y  $B$ , denotado por  $A \times B$ , es el conjunto de parejas ordenadas

$$\{(a, b) \mid a \in A \text{ y } b \in B\}.$$

Obsérvese que  $(a, b) = (c, d)$  si y sólo si  $a = c$  y  $b = d$ .

**Definición 35** Sean  $A$  y  $B$  conjuntos, una **relación entre  $A$  y  $B$**  es un subconjunto de  $A \times B$ .

Por ejemplo, si  $A = \{a\}$  y  $B = \{1, 2\}$ ,  $A \times B$  tiene 2 relaciones de un elemento  $R_1 = \{(a, 1)\}$  y  $R_2 = \{(a, 2)\}$ , también tiene una sola relación de 2 elementos (la total)  $R_3 = \{(a, 1), (a, 2)\}$  y finalmente contiene la relación vacía, es decir,  $\emptyset$ , por lo que  $A \times B$  tiene exactamente 4 relaciones.

**Definición 36** El **dominio de una relación**  $R \subseteq A \times B$ , denotado por  $D_R$ , se define como:

$$\{a \in A \mid \text{existe } b \in B, \text{ tal que } (a, b) \in R\}$$

**Definición 37** La **imagen de una relación**  $R \subseteq A \times B$ , denotado por  $I_R$ , se define como:

$$\{b \in B \mid \text{existe } a \in A, \text{ tal que } (a, b) \in R\}.$$

El **codominio de una relación**  $A \times B$  es el segundo factor  $B$ , obsérvese que la imagen de una relación siempre es un subconjunto del codominio.

**Definición 38** Sea  $R$  una relación entre  $A$  y  $B$ . Se dice que  $R$  es una **función** si  $R$  cumple las siguientes dos condiciones:

- $D_R = A$ , es decir, para todo  $x \in A$  existe  $b \in B$  tal que  $(a, b) \in R$ .
- Cada elemento en  $A$  tiene asociado un único elemento en  $B$ , es decir, si  $(x, y_1) \in R$  y  $(x, y_2) \in R$ , entonces necesariamente  $y_1 = y_2$ .

Si  $R \subseteq A \times B$  es una función, la pareja  $(x, y) \in R$  se escribirá como  $(x, f(x))$  y la función se denotará por:

$$f : A \longrightarrow B \text{ o } A \xrightarrow{f} B$$

y se dirá que  $f(x)$  es la imagen de  $x$  bajo  $f$ . El conjunto  $A$  se le llama el dominio de la función y  $B$  es el codominio.

Obsérvese que dos funciones  $f : A \longrightarrow B$  y  $g : C \longrightarrow D$  son iguales si y sólo si

- $A = C$ ,
- $B = D$ ,
- $f(x) = g(x)$  para todo  $x \in A$ .

Esto nos permite reformular nuestra definición: Una **función**  $f : A \longrightarrow B$  es una regla de correspondencia que a cada elemento del conjunto  $A$  le asocia uno y sólo un elemento de  $B$ .

En resumen, una función consiste de tres cosas: dos conjuntos (dominio y codominio) y una regla de correspondencia.

**Definición 39** La **función identidad**  $f : A \longrightarrow A$ , denotado por  $I_A$ , tiene como regla de correspondencia  $f(a) = a$  para todo  $a \in A$ .

**Definición 40** La **imagen de una función**  $f : A \longrightarrow B$ , denotado por  $Imf$ , se define como

$$\{b \in B \mid \text{existe } a \in A, f(a) = b\}.$$

Obsérvese que  $Imf$  es un subconjunto del codominio de la función.

**Definición 41** Si el codominio de una función coincide con el dominio de otra se puede construir una nueva función.

Sean  $f : A \longrightarrow B$  y  $g : B \longrightarrow C$  funciones, se puede construir entonces una nueva función con dominio  $A$ , codominio  $C$  y con regla de correspondencia

$$x \longrightarrow g(f(x)) \text{ (} f \text{ seguida de } g\text{)}.$$

A esta función se le llama  $f$  **compuesta** con (o seguida de)  $g$  y se denota por  $g \circ f$ . También, se escribe  $g \circ f(x) = g(f(x))$ . Obsérvese que si  $f : A \longrightarrow B$  es una función, entonces

$$I_B \circ f = f \text{ y } f \circ I_A = f.$$

donde  $I_B, I_A$  son las identidades en  $B$  y  $A$  respectivamente.

**Definición 42** Una función  $f : A \longrightarrow B$  se llama **inyectiva** si para todo  $x_1, x_2 \in A$ , tales que  $x_1 \neq x_2$ , se tiene que  $f(x_1) \neq f(x_2)$ .

**Definición 43** Sea  $f : A \longrightarrow B$  una función. Se dice que  $f$  es **suprayectiva** (o sobre) si  $Imf = B$ , es decir, si para todo  $y \in B$  existe  $x \in A$  tal que  $f(x) = y$ .

**Definición 44** Una función que es inyectiva y suprayectiva se le llama **biyectiva**.

**Definición 45** Dados dos conjuntos  $A$  y  $B$  se dice que tienen **la misma cardinalidad** si existe una función  $f : A \longrightarrow B$  biyectiva. Se usará el símbolo  $I_n$  para denotar el conjunto de los primeros  $n$  naturales,

$$I_n = \{1, 2, 3, \dots, n\} = \{a \in \mathbb{N} \mid 1 \leq a \leq n\}.^1$$

**Definición 46** Un conjunto  $A$  es **finito** si existe una biyección (función biyectiva)

$$f : A \longrightarrow I_n,$$

para alguna  $n \in \mathbb{N}$ . En este caso se dice que el **cardinal** de  $A$  o número de elementos del conjunto, denotado por  $|A|$ , es  $n$ .

**Definición 47** Sea  $A$  un conjunto que no es finito, entonces se dice que  $A$  es **infinito**.

**Definición 48** Una relación  $R \subseteq A \times A$  se le llama de equivalencia si satisface:

---

<sup>1</sup> $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  denota el conjunto de los números naturales.

- $(a, a) \in R$  para todo  $a \in A$  (**reflexividad**),
- si  $(a, b) \in R$ , entonces  $(b, a) \in R$  (**simetría**),
- si  $(a, b) \in R$  y  $(b, c) \in R$ , entonces  $(a, c) \in R$  (**transitividad**).

Obsérvese que la simetría se puede expresar como:

$$(a, b) \in R \Leftrightarrow (b, a) \in R.$$

Dada cualquier relación de equivalencia  $R$ , se escribirá

$$a \sim b \text{ si } (a, b) \in R.$$

**Definición 49** Sea  $A$  un conjunto, una partición  $P$  de  $A$  consiste de una familia de subconjuntos de  $A$ ,  $\{A_i\}_{i \in I}$  tal que

- si  $A_i \neq A_j$ , entonces  $A_i \cap A_j = \emptyset$ ,
- $A_i \neq \emptyset$  para todo  $i \in I$ ,
- $\bigcup_{i \in I} A_i = A$ .

**Definición 50** Un **grupo** es un conjunto  $G$  con una operación binaria asociativa, que se le llama usualmente producto, de tal manera que cada elemento de  $G$  tiene un inverso, existe un elemento neutro, y el producto es asociativo.

**Definición 51** Sea  $A$  un conjunto de  $n$  elementos, las ordenaciones con repetición de  $A$  tomadas de  $m$  en  $m$  son las funciones  $f : I_m \rightarrow A$ , donde  $I_m = \{1, 2, \dots, m\}$ .

El símbolo  $OR_n^m = n^m$  denota el número de ordenaciones con repetición de un conjunto  $A$  de  $n$  elementos tomados de  $m$  en  $m$ , es decir, el número de elementos del producto cartesiano  $A^m$ .

**Definición 52** Dado  $A$  un conjunto de  $n$  elementos y  $m \leq n$ , las ordenaciones sin repetición de los elementos de  $A$  tomadas de  $m$  en  $m$  son las funciones inyectivas del conjunto  $I_m$  en  $A$ .

Se observa que la inyectividad es la condición que establece que no haya repeticiones. Se denotará por  $O_n^m$  al número de ordenaciones sin repetición en un conjunto de  $n$  elementos tomados de  $m$  en  $m$ ; además se tiene que  $O_n^m = n(n-1) \dots (n-m+1)$ .

**Definición 53** Dado  $n$  un número natural se define el factorial de  $n$ , denotado por  $n!$ , como

$$n(n-1)(n-2)\dots 3\cdot 2\cdot 1.$$

Por convención  $0! = 1$ .

**Definición 54** Las permutaciones de un conjunto  $A$  son las funciones biyectivas de  $A$  en  $A$ . El número de éstas se denota por  $P_n$ ; además se tiene que  $P_n = O_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$ .

**Definición 55** Sea  $A$  un conjunto de  $n$  elementos y  $0 \leq m \leq n$ , a los subconjuntos de  $A$  que tienen  $m$  elementos se les llama combinaciones de los  $n$  elementos de  $A$  tomados de  $m$  en  $m$ . El número de éstas se denota por  $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ .

**Teorema 21** [2] (**teorema de Pascal**) Sean  $n, m$  enteros no negativos tales que  $n \geq m$ ,

$$C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}.$$

# Apéndice B

## Teoría de gráficas

En este apéndice se presenta una breve introducción a la Teoría de Gráficas, para establecer la notación y conceptos usados durante el desarrollo de la tesis. Estos conceptos son la base teórica para las redes de interconexión.

**Definición 56** Una **gráfica** consiste de un conjunto finito no vacío  $V(G)$  de objetos llamados vértices, junto con un conjunto  $E(G)$  de parejas no ordenadas de elementos de  $V(G)$ , llamadas aristas (las parejas no ordenadas se denotarán por  $(u, v)$ ).

Para mostrar que una gráfica  $G$  tiene un conjunto de vértices  $V(G)$  y un conjunto de aristas  $E(G)$ , algunas veces se escribe  $G = (V, E)$ .

**Definición 57** Una **digráfica** o **gráfica dirigida**  $D$  es una pareja  $D = (V, E)$  donde  $V(D)$  es un conjunto finito no vacío de vértices y  $E(D)$  es un conjunto de parejas ordenadas de elementos de  $V(D)$ , que denotan flechas o arcos. Las aristas se denotan por parejas ordenadas,  $(u, v)$  denota la flecha o arco que tiene como vértice inicial a  $u$  y como vértice final a  $v$ .

**Definición 58** La **gráfica subyacente**  $G$  de  $D$  es la gráfica tal que  $V(G) = V(D)$  y hay exactamente una arista entre  $u$  y  $v$  en  $G$  si y sólo si existe una flecha entre  $u$  y  $v$  en  $D$ .

**Definición 59** El número de vértices de una gráfica  $G$  es el **orden** de  $G$ , denotado por  $|G|$ . El número de aristas es el **tamaño**, escrito como  $\|G\|$ .

**Definición 60** Si una arista  $e = (u, v) \in E$ , entonces los vértices  $u$  y  $v$  se dice que son **adyacentes** o **vecinos** y la arista  $e$  se dice que es **incidente** en estos vértices.

**Definición 61** Sean  $G_1 = (V_1, E_1)$  y  $G_2 = (V_2, E_2)$  dos gráficas. Si  $V_2(G_2) \subseteq V_1(G_1)$  y  $E_2(G_2) \subseteq E_1(G_1)$ , entonces  $G_2$  es una **subgráfica** de  $G_1$  y se denota por  $G_2 \subseteq G_1$ . También se puede decir que  $G_1$  contiene a  $G_2$ .

**Definición 62** Una gráfica es **regular** si todos sus vértices tienen el mismo grado.

Si el grado de una gráfica es  $n$  para todos los vértices en particular, a esta gráfica se le llama  **$n$ -regular**.

**Definición 63** Un **camino** en una gráfica  $G = (V, E)$  es una secuencia alternada de vértices y aristas  $v_1e_1v_2 \dots v_{n-1}e_{n-1}v_n$ , que empieza y termina en vértices, de tal manera que cada arista es incidente a los vértices anterior y posterior en la sucesión.

Se dice que este camino une a  $v_1$  y  $v_n$ , también se puede denotar como  $v_1v_2v_3 \dots v_n$ , las aristas se vuelven evidentes por el contexto; algunas veces es llamado un  $v_1$ - $v_n$  camino. Su **longitud** es el número de aristas que lo conforman, en este caso es igual a  $n - 1$ . Un camino cerrado que no repite vértices, salvo el primero y el último es llamado **ciclo**.

**Definición 64** Un **paseo** es un camino donde todas sus aristas son distintas. Un **camino** o **paseo** es **cerrado** si el primero y último vértice son iguales. Un paseo cerrado se llama **circuito**.

**Definición 65** Una **ruta** es un camino que pasa por una serie de vértices una sola vez. Es decir, es aquel que no pasa dos veces por un mismo vértice, salvo, excepcionalmente, que el vértice que se repite sea el inicial y final.  $P(G)$  denota el conjunto de rutas en  $G$ .

Una ruta es un paseo que no repite vértices. Un ciclo es un paseo cerrado sin vértices repetidos excepto que el primero y último vértice son iguales.

**Definición 66** La **distancia** entre un par de vértices  $u$  y  $v$  en  $G$ , es igual a la longitud de la ruta más corta que une a  $u$  y  $v$ . Se denota como  $d(u, v)$ .

**Definición 67** La excentricidad de un vértice  $u$  en una gráfica  $G$ , escrito  $\epsilon(u)$ , es el máximo de sus distancias a cualquier vértice de  $G$ ; esto es,  $\epsilon(u) = \max\{d(x, u) \mid x \in V(G)\}$ .

**Definición 68** El **diámetro** de  $G$  denotado como,  $D(G)$ , se define como  $\max\{\epsilon(u) \mid u \in V(G)\}$ .

**Definición 69** El **radio** de  $G$  denotado como,  $r(G)$ , se define como  $\min\{\epsilon(u) \mid u \in V(G)\}$ .

**Definición 70** El **grado** de un vértice  $v \in V(G)$  es igual al número de aristas en  $G$  que son incidentes en  $v$ .

El número  $\delta(G) = \min\{d(x) \mid x \in V(G)\}$  es el grado mínimo de  $G$  y  $\Delta(G) = \max\{d(x) \mid x \in V(G)\}$  es el grado máximo de  $G$ .

**Definición 71** Dos **vértices están conectados** si existe un camino entre ellos. Si dos vértices están conectados, entonces dichos vértices pueden estar conectados por varios caminos.

**Definición 72** Una gráfica es **conexa** si para todo par de vértices existe una ruta que los une.

**Definición 73** Sean  $u$  y  $v$  dos vértices diferentes de una gráfica conexa  $G$ . Dos rutas que unen  $u$  y  $v$  son llamadas disjuntas por aristas si no tienen aristas en común.

**Definición 74** Una subgráfica conexa  $H$  de una gráfica  $G$  se llama una **componente** de  $G$  si  $H$  no está contenida en ninguna subgráfica conexa de  $G$  que tenga más vértices o aristas que  $H$ . Si una gráfica tiene un solo componente, la gráfica es conexa.

**Definición 75** La **conexidad por vértices** de una gráfica  $G$ , denotada como  $\kappa(G)$ , es el mínimo número de vértices, que deben ser eliminados de  $G$  para obtener una gráfica desconexa o trivial.

**Definición 76** La **conexidad por aristas** de una gráfica  $G$ , denotada como  $\lambda(G)$ , es el mínimo número de aristas cuya eliminación de  $G$  producen una gráfica desconexa o trivial.

**Definición 77** Un **conjunto de vértices de corte** para una gráfica  $G$  es un conjunto  $V_0(G) \subseteq V(G)$  tal que  $G - V_0(G)$  es desconexa. Una gráfica es  $k$ -conexa si cada conjunto de vértices de corte de cardinalidad mínima tiene al menos  $k$  vértices. La **conexidad por vértices** de  $G$ , es el tamaño mínimo de un **conjunto de vértices de corte**.

**Definición 78** Un **conjunto de aristas de corte** para una gráfica  $G$  es un conjunto  $E_0(G) \subseteq E(G)$  tal que  $G - E_0(G)$  es desconexa. Una gráfica es  $l$ -conexa si cada conjunto de aristas de corte de cardinalidad mínima tiene al menos  $l$  aristas. La **conexidad por aristas** de  $G$ , es el tamaño mínimo de un **conjunto de aristas de corte**. Por lo tanto, una gráfica tiene conexidad 0 si y sólo si está desconectada o es la gráfica que consiste de un vértice.

**Teorema 22** [6] Si  $G$  es una gráfica simple, entonces  $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ .

**Definición 79** Sean  $G = (V, E)$  y  $G' = (V', E')$  dos gráficas. Decimos que  $G$  y  $G'$  son **isomorfas** (escrito  $G \cong G'$ ) si existe una función biyectiva  $\phi : V(G) \rightarrow V'(G')$  tal que  $(x, y) \in E(G)$  si y sólo si  $(\phi(x), \phi(y)) \in E'(G')$  para cualesquiera  $x, y \in V(G)$ . La relación  $\phi$  se llama un **isomorfismo**; si  $G = G'$  entonces  $\phi$  es un **automorfismo**. En general no distinguimos entre gráficas isomorfas, y escribimos  $G = G'$  en vez de  $G \cong G'$ .

**Definición 80** Una gráfica  $G = (V, E)$  se dice que es **simétrica por vértices** si, para cada par de vértices  $u$  y  $v$ , existe un automorfismo de la gráfica que relaciona  $u$  con  $v$ . Una gráfica se dice que es **simétrica por aristas** si para cada par de aristas,  $a$  y  $b$ , existe un automorfismo de la gráfica que relaciona  $a$  con  $b$ .

**Definición 81** Una ruta o ciclo en una gráfica  $G$ , es llamado un **ruta o ciclo Hamiltoniano** si recorre todos los vértices de  $G$  exactamente una vez.  $G$  es llamada **Hamiltoniana** si existe un ciclo Hamiltoniano en  $G$ .

**Definición 82** Una **gráfica bipartita**  $B$  es una gráfica cuyos vértices se pueden dividir en dos conjuntos distintos  $U(B)$  y  $V(B)$  tal que cada arista conecta un vértice en  $U(B)$  a uno en  $V(B)$ ; es decir,  $U(B)$  y  $V(B)$  son conjuntos independientes. Si  $|U(B)| = |V(B)|$ , entonces es llamada una **gráfica bipartita balanceada**.

**Teorema 23** Una gráfica es bipartita si y solo si no contiene ciclos de longitud impar.

**Definición 83** Una gráfica  $T$  es un **árbol** si y sólo si es conexa y no tiene ciclos.

**Definición 84** Sea  $G = (V, E)$  una gráfica conexa con pesos sobre sus aristas, donde  $V(G)$  representa el conjunto de vértices y  $E(G)$  representa el conjunto de aristas. Un árbol de expansión  $ST$  de  $G$  es una subgráfica de  $G$  que tiene todos los vértices de  $G$  y además, es árbol. El peso total de un árbol de expansión es la suma de todos los pesos de las aristas de  $ST$ . Un árbol de expansión mínimo de  $G$  es un árbol de expansión de  $G$  cuyo peso total es el mínimo, entre todos los árboles de expansión de  $G$ .

# Bibliografía

- [1] Selim G. Akl. *Parallel Computation: Models and Methods*. Prentice Hall, first edition, 1996.
- [2] Humberto Cárdenas, Emilio Lluís, Francisco Raggi, and Francisco Tomás. *Álgebra Superior*. Trillas, second edition, 1990.
- [3] Michael J Flynn. Some computer organizations and their effectiveness. *IEEE Transactions on Computers*, C-21(9):948–960, 1972.
- [4] Arif Ghafoor. A class of fault-tolerant multiprocessor networks. *IEEE Transactions on Reliability*, page 5, 1989.
- [5] Petr Gregor and Riste Škrekovski. On generalized middle-level problem. *Information Sciences*, 180(12):2448–2457, June 2010.
- [6] Frank Harary. *Graph Theory*. Addison-Wesley, first edition, 1970.
- [7] Mohammadreza Hoseinyfarahabady, Navid Imani, and H. Sarbazi-Azad. Some topological and combinatorial properties of wk-recursive mesh and wk-pyramid interconnection networks. *Journal of Systems Architecture*, (54):967–976, October 2008.
- [8] Lih-Hsing Hsu and Cheng-Kuan Lin. *Graph theory and interconnection networks*. CRC Press, 2008.
- [9] Navid Imania, Hamid Sarbazi-Azadb, and Selim G. Akl. Some topological properties of star graphs: The surface area and volume. *International Workshop on Design Theory, Graph Theory, and Computational Methods — IPM Combinatorics II*, 309(3):560–569, February 2009.

- [10] Jong-Seok Kim, Eddie Cheng, László Lipták, and Hyeong-Ok Lee. Embedding hypercubes, rings, and odd graphs into hyper-stars. *International Journal of Computer Mathematics*, 86(5):771–778, May 2009.
- [11] Jong-Seok Kim, Sung Won Kim, Eddie Cheng, and László Lipták. Topological properties of folded hyper-star networks. *The Journal of Supercomputing*, 59(3):1336–1347, March 2012.
- [12] Jong-Seok Kim and Hyeong-Ok Lee. One-to-all broadcasting of odd networks for one-port and all-port models. *ETRI*, 30(6):856–858, Dec 2008.
- [13] Jong-Seok Kim, Eunseuk Oh, Hyeong-Ok Lee, and Yeong-Nam Heo. Topological and communication aspects of hyper-star graphs. In Adnan Yazici and Cevat Şener, editors, *Proceedings of the 18th International Symposium on Computer and Information Science*, volume 2869, pages 51–58. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003.
- [14] Hyeong-Ok Lee, Jong-Seok Kim, Eunseuk Oh, and Hyeong-Seok Lim. Hyper-star graph: A new interconnection network improving the network cost of the hypercube. In Hassan Shafazand and A. Min Tjoa, editors, *EurAsia-ICT 2002: Information and Communication Technology*, volume 2510, pages 858–865. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2002.
- [15] László Lipták, Eddie Cheng, Jong-Seok Kim, and Sung Won Kim. One-to-many node-disjoint paths of hyper-star networks. *Discrete Applied Mathematics*, 160(13-14):2006–2014, September 2012.
- [16] S. Madabhushi, S. Lakshminarayanan, and S. Dhall. Analysis of the modified even networks. *Conference: Parallel and Distributed Processing*, pages 128–131, December 1991.
- [17] Behrooz Parhami. Introduction to parallel processing algorithms and architectures. pages 53,199,318,390. Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [18] John E. Savage. *Models of Computation: Exploring the Power of Computing*. Brown University, third edition, 1998.
- [19] Morteza seyed Mirafzal. On the automorphism groups of regular hyper-stars and folded hyper-stars. pages 948–960, 2011.

- [20] Fan Zhang. Properties and algorithms of the hyper-star graph and its related graphs. Master's thesis, Brock University, Agosto 2009.