UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS UNAM-UMSNH

La categoría homotópica de los A_∞-módulos

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Presenta:
José Rubén Maldonado Herrera

Director de Tesis:
Dr. Raymundo Bautista Ramos
CCM UNAM

Morelia, Michoacán, febrero del 2019

A la memoria de
mi abuela Graciela y
mi abuelo José.

Agradecimientos

Este trabajo representa la culminación de mis estudios de maestría y quisiera aprovechar esta pequeña cláusula para agradecer a las personas que fueron relevantes en esta etapa.

Primero que nada, expreso mi gratitud al profesor Raymundo Bautista, director de esta tesis, quien con su conocimiento y gran disposición guió el desarrollo de este trabajo. Y al profesor Leonardo Salmerón, por las observaciones y recomendaciones aportadas.

También quiero agradecer a mis sinodales por dedicar parte de su tiempo a la revisión de esta tesis. En especial quiero agradecer a Ernesto Vallejo, por el apoyo brindado durante mi etapa como estudiante.

Un agradecimiento especial a mis padres, por su apoyo incondicional en todos los aspectos y por estar siempre al pendiente de mis estudios.

Una vida sin amigos es una vida de soledad. Por ello, agradezco de la manera más sincera a todos mis amigos, con quienes conviví, compartí experiencias y de quienes aprendí bastante. A todos ellos, gracias.

Finalmente, quiero agradecer a CONACyT por el sustento económico. El financiamiento brindado fue fundamental para poder llevar a cabo mis estudios.

Índice general

Introducción II

1. A_∞-álgebras **1**
- 1.1. Álgebras y módulos . . . 1
- 1.2. A_∞-álgebras y A_∞-módulos . . . 6

2. Comódulos diferenciales graduados **11**
- 2.1. Coálgebras y comódulos. . . . 11
- 2.2. Estructura exacta. . . . 22
- 2.3. La categoría de Frobenius. . . . 28
- 2.4. Comódulos inducidos. . . . 44

3. A_∞-módulos y $TA[1]$-comódulos **54**
- 3.1. Coálgebra tensorial . . . 54
- 3.2. Coderivaciones . . . 60
- 3.3. El funtor de A-Mod$_\infty$ a $TA[1]$-CoDf . . . 68

4. Homotopía **91**
- 4.1. Equivalencia entre A-Mod$_\infty$ y $TA[1]$-Ind . . . 91
- 4.2. Homotopía . . . 101
- 4.3. Triangulación de A-$\underline{\text{Mod}}_\infty$ . . . 105

Bibliografía **122**

Glosario de términos **123**

Introducción

La noción de A_∞-álgebras fue introducida por primera vez por J. Stasheff, ésta surge como una herramienta para el estudio de ciertos espacios topológicos llamados "group-like". Con el paso del tiempo el estudio de estas álgebras fue avanzando y, como ocurre en matemáticas, esta noción fue abstraida en una definición más general, surgiendo además, la idea de A_∞-módulos. En el año de 1999, durante una serie de conferencias, Bernhard Keller mostró su investigación en torno a estos objetos. En su trabajo [4], Keller muestra cómo dar una triangulación para la categoría derivada de los A_∞-módulos. Nuestro objetivo principal en esta tesis es mostrar de manera detallada cómo se llega a dicha triangulación.

En el capítulo 1 introducimos la definición de A_∞-módulos y mostramos cómo es que A-Mod_∞ es una categoría. El capítulo 2 está dedicado a estudiar los C-comódulos diferenciales. Mediante una construcción conocida se triangula la categoría de estos comódulos diferenciales módulo los morfismos que se factorizan a través de proyectivos. Todas las definiciones necesarias para entender esta triangulación se dan a lo largo del capítulo. Por último, en este capítulo se muestra que la subcategoría de comódulos inducidos es una subcategoría triangulada. Finalmente, a lo largo de los capítulos 3 y 4 llegamos a uno de los resultados primordiales de esta tesis, mostrar una equivalencia entre los comódulos inducidos sobre la coálgebra tensorial $TA[1]$ y los A_∞-módulos. Esta equivalencia es la clave para probar que en efecto la categoría homotópica de los A_∞-módulos (que en este caso resulta ser la misma que la categoría derivada [4, pag. 16]) es triangulada, llegando así a nuestro objetivo.

Cabe mencionar que esta tesis está basada en [2] y surge como resultado del seminario llevado a cabo por el profesor Raymundo Bautista y el profesor Leonardo Salmerón durante el semestre Enero-Junio del año 2018 en el Centro de Ciencias Matemáticas de la UNAM.

Capítulo 1

A_∞-álgebras

En este capítulo introduciremos la noción de A_∞-álgebra A y la categoría A-Mod$_\infty$, nos enfocaremos en conocerla a grandes rasgos y familiarizarnos con los términos que estaremos manejando.

1.1. Álgebras y módulos

Para fines prácticos, a partir de aquí K denotará un campo.

Definición 1.1. Un espacio vectorial A sobre K, dotado de dos funciones lineales

$$\varrho : A \otimes A \to A \quad \mathbf{y} \quad \Delta : K \to A$$

se llama **álgebra** si cumple:

- La regla de asociatividad $\varrho \circ (\varrho \otimes id_A) = \varrho \circ (id_A \otimes \varrho)$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "id_A \otimes \varrho"] \arrow[d, "\varrho \otimes id_A"'] & A \otimes A \arrow[d, "\varrho"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\varrho"'] & A. \end{tikzcd}$$

- La propiedad de la unidad $\varrho \circ (\Delta \otimes id_A) = \mu_l$ y $\varrho \circ (id_A \otimes \Delta) = \mu_r$. En otras palabras, este diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
K \otimes A \arrow[r, "\Delta\otimes id_A"] \arrow[dr, "\mu_l"'] & A \otimes A \arrow[d, "\varrho"] & A \otimes K \arrow[l, "id_A\otimes\Delta"'] \arrow[dl, "\mu_r"] \\
 & A &
\end{tikzcd}.$$

Aquí, μ_l y μ_r son las funciones multiplicar que se tienen de la estructura de espacio vectorial.

A la función ϱ se le conoce como **multiplicación**, y a Δ como **unidad**.

Un espacio vectorial V se dice **graduado** si $V = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} V_i$, donde los V_i's son subespacios vectoriales. Y si una función lineal $f : V \to W$ es tal que V y W son espacios graduados y $f(V_i) \subseteq W_{i+n}$ para toda $i \in \mathbb{Z}$, entonces diremos que f es **homogénea de grado** n y lo denotaremos como $|f| = n$. Además, un elemento $v \in V$ se llamará **elemento homogéneo** si existe i tal que $v \in V_i$; a dicha i se le conoce como **grado de** v y se le suele denotar como $|v|$.

Observación 1.2. Si $f : U \to V$ y $g : V \to W$ son funciones homogéneas entre espacios graduados, entonces gf es homogénea tal que $|gf| = |g| + |f|$.

Observación 1.3. Resaltemos cuatro ejemplos importantes de espacios graduados que estaremos utilizando a lo largo de esta tesis:

1. K siempre puede graduarse como $K = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} K_i$, con $K_0 = K$ y $K_i = 0$ para el resto de las i's (de hecho cualquier espacio vectorial se puede graduar de esta manera).

2. Sean V y W espacios graduados, entonces
$$V \oplus W = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} V_i \oplus W_i$$
es espacio graduado.

3. Sean V y W espacios graduados, entonces
$$V \otimes W = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \bigoplus_{\substack{l,m\in\mathbb{Z} \\ l+m=i}} V_l \otimes W_m$$
es una graduación para el producto tensorial.

4. Sea $\{W_n\}_{n\geq 0}$ una familia de espacios graduados, entonces el espacio $W = \bigoplus_{n\geq 0} W_n$ puede graduarse de la siguiente manera:

   Para cada $m \in \mathbb{Z}$ definimos

$$(W)_m := \bigoplus_{n\geq 0} (W_n)_m.$$

   Así, $W = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} (W)_m$.

Sean V, V', W, W' espacios graduados. Al hablar del producto tensorial $f \otimes g$ de dos funciones lineales homogéneas $f : V \to V'$ y $g : W \to W'$, para elementos homogéneos $v \in V$ y $w \in W$ se considerará la evaluación de la siguiente manera

$$(f \otimes g)(v \otimes w) := (-1)^{|g||v|} f(v) \otimes g(w).$$

Es decir, es la evaluación del producto tensorial usual, salvo por un signo que depende de los grados de g y v. Esta definición se extiende a cualquier elemento. Así, $f \otimes g$ es homogénea de grado $|f| + |g|$.

Observación 1.4. Si $f : V \to V'$, $F : V' \to V''$, $g : W \to W'$ y $G : W' \to W''$ son funciones lineales homogéneas entre espacios graduados, entonces

$$(F \otimes G)(f \otimes g) = (-1)^{|G||f|} Ff \otimes Gg.$$

Definición 1.5. Sea A un espacio vectorial graduado. Consideremos a K y al producto tensorial $A \otimes A$ graduados como en la *Observación* 1.3. Diremos que A es un **álgebra graduada** si A es un álgebra y las funciones ϱ y Δ son homogéneas de grado 0.

Definición 1.6. Sea A un álgebra graduada. A una función lineal homogénea

$$\delta : A \to A$$

se le llamará **diferencial** si tiene las propiedades:

- $|\delta| = 1$;
- $\delta^2 = 0$; y

- Cumple la regla de Leibniz

$$\delta \circ \varrho = \varrho \circ (\delta \otimes id_A + id_A \otimes \delta).$$

A un álgebra graduada dotada de una diferencial se le conoce como **álgebra diferencial graduada**.

Ahora estamos en condiciones de conocer los módulos sobre un álgebra.

Definición 1.7. Un K-espacio vectorial M es un A**-módulo izquierdo** si existe una función lineal

$$\varrho_M : A \otimes M \to M$$

con las siguientes dos propiedades:

- La regla de asociatividad $\varrho_M \circ (id_A \otimes \varrho_M) = \varrho_M \circ (\varrho \otimes id_M)$. Es decir, se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes M \arrow[r, "id_A \otimes \varrho_M"] \arrow[d, "\varrho \otimes id_M"'] & A \otimes M \arrow[d, "\varrho_M"] \\ A \otimes M \arrow[r, "\varrho_M"'] & M. \end{tikzcd}$$

- La propiedad de la unidad $\varrho_M(\Delta \otimes id_M) = \mu_M$. En otras palabras, el siguiente triángulo conmuta

$$\begin{tikzcd} & M \\ K \otimes M \arrow[ur, "\mu_M"] \arrow[r, "\Delta \otimes id_M"'] & C \otimes M. \arrow[u, "\varrho_M"'] \end{tikzcd}$$

  Donde de nueva cuenta, μ_M es la función multiplicar dada por la estructura de K-espacio vectorial de M. En caso que se sobreentienda de qué M estamos hablando, simplemente denotaremos la función multiplicar como μ.

A la función ϱ_M se le llama **multiplicación de** M.

Cabe remarcar que un módulo M depende de su multiplicación, así, un espacio vectorial M puede tener dos estructuras de módulo distintas si se consideran dos multiplicaciones distintas.

Definición 1.8. Un módulo M es un **módulo graduado** si es un espacio vectorial graduado y su multiplicación asociada es homogénea de grado 0. Resaltemos que el producto tensorial en la multiplicación se está considerando graduado como en la *Observación* 1.3.

Definición 1.9. Sea M un módulo graduado sobre un álgebra diferencial graduada A. A una función lineal homogénea

$$\delta_M : M \to M$$

se le llamará **diferencial asociada a** M si tiene las propiedades:

- $|\delta_M| = 1$;
- $\delta_M^2 = 0$; y
- Cumple la regla de Leibniz

$$\delta_M \circ \varrho_M = \varrho_M \circ (\delta \otimes id_M + id_A \otimes \delta_M).$$

Y nos referiremos a dicho módulo dotado de una diferencial como módulo diferencial graduado o simplemente como **módulo diferencial**.

Un **morfismo entre módulos** $f : M \to N$ es una función lineal que cumple la igualdad $f \circ \varrho_M = \varrho \circ (id_A \otimes f)$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A \otimes M \arrow[r, "id_A \otimes f"] \arrow[d, "\varrho_M"'] & A \otimes N \arrow[d, "\varrho_N"] \\ M \arrow[r, "f"'] & N. \end{tikzcd}$$

Más aún, si los módulos son graduados y f es homogénea de grado 0, entonces diremos que f es un **morfismo de módulos graduados**. Aunado a esto, si M y N son módulos diferenciales y f cumple la relación

$$f\delta_M = \delta_N f,$$

entonces la función recibe el nombre de morfismo de módulos diferenciales graduados o simplemente **morfismo de módulos diferenciales**.

En el siguiente capítulo hablaremos de coálgebras y comódulos, los cuales son la noción dual de las álgebras y los módulos; parte de lo que se muestra en ese capítulo es que se tiene una categoría de comódulos y ésta es abeliana. De una manera similar se puede probar que la categoría de módulos diferenciales sobre un álgebra diferencial es abeliana.

1.2. A_∞-álgebras y A_∞-módulos

Definición 1.10. Diremos que un espacio vectorial A graduado dotado de una familia de aplicaciones lineales

$$m = \{m_n : A^{\otimes n} \to A\}_{n\in\mathbb{N}}$$

es una **A_∞-álgebra** si para cada n la función m_n es homogénea de grado $2-n$ y se cumple que:

$$\sum_{\substack{r+s+t=n \\ s\geq 1;\ r,t\geq 0}} (-1)^{r+st} m_{r+1+t} \circ (id_A^{\otimes r} \otimes m_s \otimes id_A^{\otimes t}) = 0. \tag{1.1}$$

En esta expresión se abusa un poco de la notación, pero en el caso de que $r = 0$ ó $t = 0$ la identidad cuyo exponente es r o t simplemente se omite.

Analicemos que pasa con la ecuación anterior en los casos $n = 1$ y $n = 2$.

Para el caso $n = 1$ tenemos que $|m_1| = 1$ y la ecuación 1.1 queda como $m_1^2 = 0$. Para el caso $n = 2$ se tiene que $|m_2| = 0$ y la relación 1.1 es

$$m_1 m_2 - m_2(m_1 \otimes id_A) - m_2(id_A \otimes m_1) = 0;$$

es decir,

$$m_1 m_2 = m_2(m_1 \otimes id_A + id_A \otimes m_1).$$

Notemos que estas propiedades son muy parecidas a la propiedades que tiene una diferencial.

Observación 1.11. Sea $(A, \varrho, \Delta, \delta)$ un álgebra diferencial graduada. Si definimos la familia de morfismos $m = \{m_n : A^{\otimes n} \to A\}_{n\in\mathbb{N}}$ como $m_1 := \delta$, $m_2 := \varrho$, y $m_n := 0$ para toda $n \geq 3$, entonces A resulta ser una A_∞-álgebra. En efecto, de lo observado anteriormente se tiene la relación 1.1 para $n = 1, 2$. Si $n = 3$ la relación 1.1 ya reducida queda como

$$m_2(m_2 \otimes id_A) - m_2(id_A \otimes m_2)$$

y ésta es cero justo por propiedad de la asociatividad. En el caso de que $n \geq 4$, se tiene que $m_{r+1+t} \neq 0$ si y sólo si $r + t \leq 1$, pero esto ocurre cuando $s = n$ ó $s = n - 1$, por lo tanto cada sumando $m_{r+1+t}(id_A^{\otimes r} \otimes m_s \otimes id_A^{\otimes t}) = 0$ y la relación 1.1 se cumple. Además, por como fue tomada m, se tiene trivialmente que el grado de cada m_n es $2 - n$.

Definición 1.12. Sea A una A_∞-álgebra. Un espacio vectorial graduado M dotado de una familia de aplicaciones lineales homogéneas

$$m^M = \{m_n^M : A^{\otimes(n-1)} \otimes M \to M\}_{n\in\mathbb{N}}$$

es un A_∞**-módulo izquierdo** si para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $|m_n^M| = 2-n$ y la suma de las expresiones:

$$R(M)_n^+ := \sum_{\substack{r+s+t=n\\ t,s\geq 1;\, r\geq 0}} (-1)^{r+st} m_{r+1+t}^M (id_A^{\otimes r} \otimes m_s \otimes id_A^{\otimes(t-1)} \otimes id_M)$$

y

$$R(M)_n^0 := \sum_{\substack{r+s=n\\ s\geq 1;\, r\geq 0}} (-1)^r m_{r+1}^M (id_A^{\otimes r} \otimes m_s^M)$$

es igual a cero, es decir: $R(M)_n := R(M)_n^+ + R(M)_n^0 = 0$.

Al analizar el primer caso para n tenemos que $|m_1^M| = 1$ y que $(m_1^M)^2 = 0$. Ahora, analizando $n = 2$ se tiene la propiedad

$$m_1^M m_2 = m_2^M (m_1 \otimes id_M + id_A \otimes m_1^M)$$

y que el grado de m_2^M es 0.

Observación 1.13. Consideremos un álgebra diferencial graduada dotada de morfismos como en la *Observación* 1.11. Entonces un A-módulo M resulta ser un A_∞-módulo si se le asocia la familia de morfismos $m_1^M := \delta_M$, $m_2^M := \varrho_M$ y $m_n := 0$ para $n \geq 3$. En efecto, por lo observado arriba y por ser m_1^M una diferencial, se tiene $R(M)_1 = 0$ y $R(M)_2 = 0$. Además, cuando $n = 3$ tenemos que

$$R(M)_3 = m_2^M (m_2 \otimes id_M) - m_2^M (id_A \otimes m_2^M)$$

y ésta en efecto es cero por la regla de asociatividad que cumple ϱ_M. Para $n \geq 4$, al hacer un análisis similar al de la *Observación* 1.11 resulta que $m_{r+1+t}^M (id_A^{\otimes r} \otimes m_s \otimes id_A^{\otimes(t-1)} \otimes id_M) = 0$ y $m_{r+1}^M (id_A^{\otimes r} \otimes m_s^M) = 0$, con lo cual $R(M)_n = 0$.

Que el grado de cada m_n^M sea $2-n$ se sigue de como fueron definidas las funciones.

Definición 1.14. Definimos $f : M \to N$ un **morfismo entre dos A_∞-módulos M y N** como una familia de funciones lineales homogéneas

$$f = \{f_n : A^{\otimes(n-1)} \otimes M \to N\}_{n\in\mathbb{N}}$$

tales que para toda n se tiene que $|f_n| = 1 - n$ y

$$R(f)_n^+ + R(f)_n^0 = R(f)_n^- \tag{1.2}$$

donde:

$$R(f)_n^+ := \sum_{\substack{r+s+t=n\\ s,t\geq 1;\ r\geq 0}} (-1)^{r+st} f_{r+1+t}(id_A^{\otimes r} \otimes m_s \otimes id_A^{\otimes(t-1)} \otimes id_M),$$

$$R(f)_n^0 := \sum_{\substack{r+s=n\\ s\geq 1;\ r\geq 0}} (-1)^r f_{r+1}(id_A^{\otimes r} \otimes m_s^M)$$

y

$$R(f)_n^- := \sum_{\substack{s+t=n\\ s\geq 0; t\geq 1}} m_{s+1}^N(id_A^{\otimes s} \otimes f_t).$$

Para el caso en que $n = 1$ notemos que $R(f)_1^+ = 0$ pues es la suma vacía, $R(f)_1^0 = f_1 m_1^M$ y $R(f)_1^- = m_1^N f_1$. Por lo tanto $f_1 m_1^M = m_1^N f_1$.

Observación 1.15. Sean M y N dos A-módulos diferenciales sobre un álgebra diferencial A, y $f : M \to N$ un morfismo de A-módulos diferenciales. Si consideramos a A, M y N como en las observaciones anteriores, entonces la familia de funciones lineales $f_1 := f$ y $f_n := 0$ para cada $n \geq 2$ es un morfismo de A_∞-módulos. La igualdad 1.2 para el caso $n = 1$ se sigue de que f conmuta con las diferenciales. Cuando $n = 2$, 1.2 queda como $f_1 m_2^M = m_2^N(id_A \otimes f)$, la cual es cierta ya que f es morfismo de A-módulos. Finalmente para el caso $n \geq 3$ se tiene que $R(f)_n^+ = 0$ pues $f_{r+1+t} = 0$ para cada sumando de esta relación; $f_{r+1} \neq 0$ si y sólo si $r = 0$ y $s = n$, por lo tanto $f_{r+1}(id_A^{\otimes r} m_s^M) = 0$ para cada sumando de $R(f)_n^0$, así $R(f)_n^0 = 0$. De la misma manera $f_t \neq 0$ si y sólo si $t = 1$ y $s = n - 1$, por tanto cada sumando $m_{s+1}^N(id_A^{\otimes t} \otimes f_t)$ de $R(f)_n^-$ es cero. Gracias a todo esto se cumple 1.2.

Teorema 1.16. Sea (A, m) una A_∞-álgebra. La colección de los A_∞-módulos junto con los morfismos de A_∞-módulos forman una categoría. A dicha categoría la denotamos como A-Mod$_\infty$.

Demostración. Sean $f : M \to N$ y $g : N \to L$ dos morfismos, definimos la composición $g \circ f$ como la familia de funciones lineales

$$(g \circ f)_n := \sum_{\substack{s+t=n \\ s \geq 0;\ t \geq 1}} g_{s+1}(id_A^{\otimes s} \otimes f_t).$$

Lo primero que hay que notar es que $g \circ f$ es un morfismo, es claro que para cada n el morfismo $(g \circ f)_n$ es de grado $1 - n$ puesto que

$$|g_{s+1}(id_A^{\otimes s} \otimes f_t)| = 1 - (s+1) + 1 - t = 1 - (s+t) = 1 - n,$$

dejaremos la prueba de que la composición cumple 1.2 para el Capítulo 3.

Ahora, para cada A_∞-módulo M definimos $1_M := \{id_M, 0, 0, 0, ...\}$. Afirmamos que éste es el morfismo identidad. Primero que nada tenemos que ver que realmente es un morfismo; claramente $|(1_M)_n| = 1 - n$. Además notemos que en $R(1_M)_n^+$ cada sumando es cero puesto que $(1_M)_{r+1+t} = 0$. También, para cada n, $R(1_M)_n^0 = m_n^M$ y $R(1_M)_n^- = m_n^M(id_A^{\otimes(n-1)} \otimes id_M) = m_n^M$, por lo tanto $R(1_M)_n^+ + R(1_M)_n^0 = R(1_M)_n^-$.

Ahora, sea $f : M \to N$ un morfismo, se tiene que

$$(1_N \circ f)_n = id_N \circ f_n = f_n$$

y

$$(f \circ 1_M)_n = f_{n-1+1}(id_A^{\otimes(n-1)} \otimes id_M) = f_n.$$

Veamos la asociatividad. Sea $h : L \to E$ otro morfismo. Por una parte, tenemos que $(h \circ (g \circ f))_n$ es igual a

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{s+t=n \\ s \geq 0;\ t \geq 1}} h_{s+1}(id_A^{\otimes s} \otimes (g \circ f)_t) \\
= & \sum_{\substack{s+t=n \\ s \geq 0;\ t \geq 1}} h_{s+1}\left(id_A^{\otimes s} \otimes \sum_{\substack{l+k=t \\ l \geq 0;\ k \geq 1}} g_{l+1}(id_A^{\otimes l} \otimes f_k)\right) \\
= & \sum_{\substack{s+t=n \\ s \geq 0;\ t \geq 1}} \sum_{\substack{l+k=t \\ l \geq 0;\ k \geq 1}} h_{s+1}(id_A^{\otimes s} \otimes g_{l+1}(id_A^{\otimes l} \otimes f_k)) \\
= & \sum_{\substack{s+l+k=n \\ s,l \geq 0;\ k \geq 1}} h_{s+1}(id_A^{\otimes s} \otimes g_{l+1}(id_A^{\otimes l} \otimes f_k)),
\end{aligned}$$

mientras que, por otro lado, $((h \circ g) \circ f)_n$ es igual a

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{s+t=n \\ s\geq 0;\ t\geq 1}} (h \circ g)_{s+1}(id_A^{\otimes s} \otimes f_t) \\
=\ &\sum_{\substack{s+t=n \\ s\geq 0;\ t\geq 1}} \left(\sum_{\substack{i+j=s+1 \\ i\geq 0;\ j\geq 1}} h_{i+1}(id_A^{\otimes i} \otimes g_j) \right) (id_A^{\otimes s} \otimes f_t) \\
=\ &\sum_{\substack{s+t=n \\ s\geq 0;\ t\geq 1}} \sum_{\substack{i+j=s+1 \\ i\geq 0;\ j\geq 1}} h_{i+1}(id_A^{\otimes i} \otimes g_j(id_A^{\otimes s-i} \otimes f_t)) \\
=\ &\sum_{\substack{i+j+t-1=n \\ t,j\geq 1;\ i\geq 0}} h_{i+1}(id_A^{\otimes i} \otimes g_j(id_A^{\otimes j-1} \otimes f_t)).
\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variables $s' = i$, $l' = j - 1$ y $k' = t$ en esta última sumatoria, se tiene que lo anterior es igual a

$$\sum_{\substack{s'+l'+k'=n \\ s',l'\geq 0;\ k'\geq 1}} h_{s'+1}(id_A^{\otimes s'} \otimes g_{l'+1}(id_A^{\otimes l'} \otimes f_{k'})).$$

Por lo tanto, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. $\square$

Capítulo 2

Comódulos diferenciales graduados

A lo largo de este capítulo se presenta un estudio de la categoría de comódulos sobre una coálgebra diferencial. El objetivo es conocer varias propiedades de la categoría y mostrar que tiene una estructura exacta no trivial que la convierte en una categoría especial de Frobenius. Veremos que la categoría estable de cualquier categoría especial de Frobenius es triangular. Finalmente, se muestra una subcategoría triangulada cuyos objetos son conocidos como comódulos inducidos.

2.1. Coálgebras y comódulos.

Definición 2.1. Un espacio vectorial C sobre K, dotado de dos funciones lineales

$$\rho : C \to C \otimes C \quad \text{y} \quad \epsilon : C \to K$$

se llama **coálgebra** si se cumple:

- La regla de coasociatividad $(\rho \otimes id_C) \circ \rho = (id_C \otimes \rho) \circ \rho$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & C \otimes C \arrow[d, "\rho \otimes id_C"] \\ C \otimes C \arrow[r, "id_C \otimes \rho"'] & C \otimes C \otimes C. \end{tikzcd}$$

- La propiedad de la counidad $(\epsilon \otimes id_C)\rho = \gamma_l$ y $(id_C \otimes \epsilon)\rho = \gamma_r$. En otras palabras, este diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
K \otimes C & C \otimes C \arrow[l, "\epsilon \otimes id_C"'] \arrow[r, "id_C \otimes \epsilon"] & C \otimes K \\
& C \arrow[ul, "\gamma_l"] \arrow[u, "\rho"] \arrow[ur, "\gamma_r"'] &
\end{tikzcd}.$$

  Aquí, γ_l y γ_r son las funciones que a cada $c \in C$ les asigna el valor $\gamma_l(c) = 1 \otimes c$ y $\gamma_r(c) = c \otimes 1$.

A la función ρ se le conoce como **comultiplicación**, y a ϵ como **counidad**.

Definición 2.2. Sea C un espacio vectorial graduado. Consideremos a K y al producto tensorial $C \otimes C$ graduados como en la *Observación* 1.3. Diremos que C es una **coálgebra graduada** si C es una coálgebra y las funciones ρ y ϵ son homogéneas de grado 0.

Definición 2.3. Sea C una coálgebra graduada. A una función lineal homogénea

$$d : C \to C$$

se le llamará **codiferencial** si tiene las propiedades:

- $|d| = 1$;
- $d^2 = 0$; y
- d cumple la regla de Leibniz

$$\rho \circ d = (d \otimes id_C + id_C \otimes d) \circ \rho.$$

A una coálgebra graduada dotada de una codiferencial se le conoce como coálgebra diferencial graduada o simplemente como **coálgebra diferencial**.

Proposición 2.4. Si d es una codiferencial de una coálgebra graduada (C, ρ, ϵ), entonces $\epsilon d = 0$.

Demostración. Basta probarlo para los elementos homogéneos. Consideremos c un elemento de grado l. Podemos escribir a $\rho(c)$ como $\rho(c) = \sum_i c_i \otimes c_i'$ con los c_i's y los c_i''s elementos homogéneos. Notemos que $\mu_l : K \otimes C \to C$, la función multiplicar que tiene C por ser espacio vectorial, es la inversa de γ_l. Entonces $\mu_l(\epsilon \otimes id_C)\rho = \mu_l \gamma_l = id_C$ y, por lo tanto,

$$c = \mu_l(\epsilon \otimes id_C)\rho(c) = \mu_l(\epsilon \otimes id_C)\left(\sum_i c_i \otimes c_i'\right) = \sum_i \epsilon(c_i)c_i'.$$

Análogamente, utilizando el otro lado del diagrama de la counidad, se tiene que

$$c = \sum_i c_i \epsilon(c_i').$$

Ahora, por una parte, tenemos que

$$\mu_l(\epsilon \otimes id_C)\rho d(c) = d(c) = d\left(\sum_i \epsilon(c_i)c_i'\right) = \sum_i \epsilon(c_i)d(c_i').$$

Pero, por otro lado,

$$\begin{aligned}
\mu_l(\epsilon \otimes id_C)\rho d(c) &= \mu_l(\epsilon \otimes id_C)(d \otimes id_C + id_C \otimes d)\rho(c) \\
&= \mu_l(\epsilon \otimes id_C)(d \otimes id_C + id_C \otimes d)\left(\sum_i c_i \otimes c_i'\right) \\
&= \mu_l(\epsilon \otimes id_C)\left(\sum_i d(c_i) \otimes c_i' + \sum_i (-1)^{|c_i|} c_i \otimes d(c_i')\right) \\
&= \sum_i \epsilon(d(c_i))c_i' + \sum_i (-1)^{|c_i|}\epsilon(c_i)d(c_i').
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\sum_i \epsilon(c_i)d(c_i') = \sum_i \epsilon(d(c_i))c_i' + \sum_i (-1)^{|c_i|}\epsilon(c_i)d(c_i').$$

Notemos que para cada c_i de grado distinto de 0 se tiene que $\epsilon(c_i) = 0$, puesto que ϵ es homogéneo de grado 0 y K está centrado en 0. Así, si definimos J como el conjunto de i's tales que c_i es de grado 0, entonces la igualdad anterior se reduce a

$$\sum_{i \in J} \epsilon(c_i)d(c_i') = \sum_i \epsilon(d(c_i))c_i' + \sum_{i \in J} \epsilon(c_i)d(c_i').$$

De donde se concluye que

$$\sum_i \epsilon(d(c_i))c_i' = 0.$$

Para terminar, de lo anterior y la linealidad de ϵ y d se sigue lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\epsilon d(c) &= \epsilon d\left(\sum_i c_i \epsilon(c_i')\right) = \epsilon\left(\sum_i d(c_i)\epsilon(c_i')\right) \\
&= \sum_i \epsilon(d(c_i))\epsilon(c_i') = \epsilon\left(\sum_i \epsilon(d(c_i))c_i'\right) = \epsilon(0) = 0.
\end{aligned}$$

□

Tras estas definiciones estamos en condiciones de conocer los comódulos sobre una coálgebra.

Definición 2.5. Un K-espacio vectorial M es un C**-comódulo izquierdo** si existe una función lineal

$$\rho_M : M \to C \otimes M$$

con las siguientes dos propiedades:

- La regla de coasociatividad $(id_C \otimes \rho_M) \circ \rho_M = (\rho \otimes id_M) \circ \rho_M$. Es decir, se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\rho_M"] \arrow[d, "\rho_M"'] & C \otimes M \arrow[d, "\rho \otimes id_M"] \\
C \otimes M \arrow[r, "id_C \otimes \rho_M"'] & C \otimes C \otimes M.
\end{tikzcd}$$

- La propiedad de la counidad $(\epsilon \otimes id_M) \circ \rho_M = \gamma_M$. En otras palabras, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
K \otimes M & C \otimes M \arrow[l, "\epsilon \otimes id_M"'] \\
& M. \arrow[ul, "\gamma_M"] \arrow[u, "\rho_M"']
\end{tikzcd}$$

Donde de nueva cuenta, γ_M es la función que en cada elemento $m \in M$ se define como $\gamma_M(m) = 1 \otimes m$. Simplemente denotaremos a la función como γ en caso de que se sobreentienda de cual M estamos hablando.

A la función ρ_M se le llama **comultiplicación de** M.

Definición 2.6. Un comódulo M es un **comódulo graduado** si es un espacio vectorial graduado y su comultiplicación asociada es homogénea de grado 0. Nuevamente, el producto tensorial de la comultiplicación se considera graduado como en la *Observación* 1.3.

Definición 2.7. Sea M un comódulo graduado sobre una coálgebra diferencial graduada C. A una función lineal homogénea

$$d_M : M \to M$$

se le llamará **codiferencial asociada a** M si tiene las propiedades:

- $|d_M| = 1$;
- $d_M^2 = 0$; y
- Cumple la regla de Leibniz

$$\rho_M \circ d_M = (d \otimes id_M + id_C \otimes d_M) \circ \rho_M.$$

A un comódulo graduado dotado de una codiferencial se le conoce como comódulo diferencial graduado o simplemente como **comódulo diferencial**.

Un **morfismo entre comódulos** $f : M \to N$ es una función lineal que conmuta con las comultiplicaciones, es decir, se cumple la igualdad

$$\rho_N \circ f = (id_C \otimes f)\rho_M$$

o, equivalentemente, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho_M"'] & N \arrow[d, "\rho_N"] \\ C \otimes M \arrow[r, "id_C \otimes f"'] & C \otimes N. \end{tikzcd}$$

Si los comódulos son graduados y f es homogénea de grado 0, entonces diremos que f es un **morfismo de comódulos graduados**. Aunado a esto, si M y N son comódulos diferenciales y f cumple la relación

$$fd_M = d_N f,$$

entonces la función recibe el nombre de morfismo de comódulos diferenciales graduados o simplemente **morfismo de comódulos diferenciales**.

Proposición 2.8. Sea C una coálgebra diferencial graduada. Entonces la clase de todos los C-comódulos diferenciales graduados junto con los morfismos de comódulos diferenciales, es una categoría. A dicha categoría la denotaremos como C-CoDf

Demostración. Primero, notemos que para cualquier comódulo M, id_M es de grado cero y

$$\rho_M id_M = id_{C\otimes M}\rho_M = (id_C \otimes id_M)\rho_M.$$

Ahora, si $f : M \to N$ y $g : N \to R$ son dos morfismos, entonces

$$\begin{aligned}
\rho_R \circ (g \circ f) &= \rho_R \circ g \circ f \\
&= (id_C \otimes g) \circ \rho_N \circ f \\
&= (id_C \otimes g) \circ (id_C \otimes f) \circ \rho_M \\
&= (-1)^{|g||id_C|}(id_C \otimes gf)\rho_M \\
&= (id_C \otimes gf)\rho_M.
\end{aligned}$$

Finalmente, la asociatividad de la composición se tiene gracias a que la composición de funciones lineales es asociativa. □

Proposición 2.9. En C-CoDf se tienen las siguientes dos propiedades:

1. Sean $f : M \to N$ una función lineal homogénea de grado 0, $g \in \mathrm{Hom}_{C\text{-CoDf}}(M, L)$ y $h \in \mathrm{Hom}_{C\text{-CoDf}}(N, L)$ tales que h es monomorfismo y $hf = g$, entonces $f \in \mathrm{Hom}_{C\text{-CoDf}}(M, N)$.

2. Sean $f : N \to M$ una función lineal homogénea de grado 0, $g \in \mathrm{Hom}_{C\text{-CoDf}}(L, M)$ y $h \in \mathrm{Hom}_{C\text{-CoDf}}(L, N)$ tales que h es epimorfismo y $fh = g$, entonces $f \in \mathrm{Hom}_{C\text{-CoDf}}(N, M)$.

Demostración. Para la primera parte, se cumplen las igualdades

$$hfd_M = gd_M = d_L g = d_L hf = hd_N f,$$

y por ser h monomorfismo se tiene que $fd_M = d_N f$. De igual manera, por ser h mono, tenemos que $id_C \otimes h$ es mono, por lo que de la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned}
(id_C \otimes h)\rho_N f &= \rho_L hf = \rho_L g \\
&= (id_C \otimes g)\rho_M \\
&= (id_C \otimes hf)\rho_M \\
&= (id_C \otimes h)(id_C \otimes f)\rho_M,
\end{aligned}$$

se conluye que $\rho_N f = (id_C \otimes f)\rho_M$.

El argumento para la segunda parte es dual. $\square$

Proposición 2.10. Sean U, V y W espacios vectoriales graduados. Entonces $(U \otimes V) \oplus (U \otimes W)$ es isomorfo a $U \otimes (V \oplus W)$ como espacios graduados.

Demostración. El isomorfismo que funciona es

$$\Theta^U_{V,W} = (\Theta^U_V, \Theta^U_W) : (U \otimes V) \oplus (U \otimes W) \to U \otimes (V \oplus W),$$

donde para toda $u \in U$, $v \in V$ y $w \in W$, las valuaciones en las funciones Θ^U_V y Θ^U_W están determinadas por $\Theta^U_V(u \otimes v) = u \otimes (v, 0)$ y $\Theta^U_W(u \otimes w) = u \otimes (0, w)$. $\square$

Observación 2.11. Gracias al isomorfismo anterior podemos identificar a los espacios $(U \otimes V) \oplus (U \otimes W)$ y $U \otimes (V \oplus W)$ y pensar en ellos de manera indistinta. Así, un elemento $u \otimes v$ de $U \otimes V$ puede pensarse en $(U \otimes V) \oplus (U \otimes W)$ de manera natural ó en $U \otimes (V \oplus W)$ mediante la identificación $\Theta^U_V(u \otimes v)$. De igual manera se procede con los elementos de $U \otimes W$.

Teorema 2.12. C-CoDf es una categoría abeliana.

Demostración. Veamos que $\mathrm{Hom}_{C\text{-CoDf}}(M, N)$ es un grupo abeliano. La operación que consideraremos es la suma de funciones usual. Debido a que esta operación es la misma que para funciones lineales, la composición de morfismos es bilineal con respecto a la suma. Lo primero que hay que notar es que si $f : M \to N$ y $g : M \to N$ son morfismos, entonces

$$\begin{aligned}
\rho_N(f+g) &= \rho_N f + \rho_N g \\
&= (id_C \otimes f)\rho_M + (id_C \otimes g)\rho_M \\
&= ((id_C \otimes f) + (id_C \otimes g))\rho_M \\
&= (id_C \otimes (f+g))\rho_M
\end{aligned}$$

y

$$d_N(f+g) = d_N f + d_N g = f d_M + g d_M = (f+g) d_M.$$

Además, si m es un elemento homogéneo en M_i, entonces

$$(f+g)(m) = f(m) + g(m)$$

está en N_i por ser un subespacio. Por lo tanto $f + g$ es morfismo.

Notemos que el elemento neutro es la función cero; es claro que ésta es un morfismo, ya que es una función homogénea de grado 0, conmuta con las codiferenciales y cumple el diagrama conmutativo de la comultiplicación. También, se tiene que $|-f| = |f| = 0$ ya que los N_i's son subespacios,

$$(-f)d_N = -fd_N = -d_M f = d_M(-f)$$

y

$$\rho_N(-f) = -\rho_N f = -(id_C \otimes f)\rho_M = (id_C \otimes (-f))\rho_N.$$

Ahora veamos que hay productos y coproductos finitos. Sean M y N objetos de la categoría. Consideremos el producto usual de espacios vectoriales $M \oplus N$ y consideremos las funciones lineales

$$\rho_{M\oplus N} : M \oplus N \to (C \otimes M) \oplus (C \otimes N) \quad \text{y} \quad d_{M\oplus N} : M \oplus N \to M \oplus N,$$

definidas como

$$\rho_{M\oplus N} := \begin{pmatrix} \rho_M & 0 \\ 0 & \rho_N \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad d_{M\oplus N} := \begin{pmatrix} d_M & 0 \\ 0 & d_N \end{pmatrix}.$$

Por como están definidas estas aplicaciones tenemos que ambas son homogéneas de grado 0 y 1 respectivamente.

La conmutatividad de los diagramas:

$$\begin{tikzcd}
M \oplus N \arrow[r, "\rho_{M\oplus N}"] \arrow[d, "\rho_{M\oplus N}"'] & (C \otimes M) \oplus (C \otimes N) \arrow[d, "\begin{pmatrix} \rho \otimes id_M & 0 \\ 0 & \rho \otimes id_N \end{pmatrix}"] \\
(C \otimes M) \oplus (C \otimes N) \arrow[r, "\begin{pmatrix} id_C \otimes \rho_M & 0 \\ 0 & id_C \otimes \rho_N \end{pmatrix}"'] & (C \otimes C \otimes M) \oplus (C \otimes C \otimes N)
\end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd}
(K \otimes M) \oplus (K \otimes N) & (C \otimes M) \oplus (C \otimes N) \arrow[l, "\begin{pmatrix} \epsilon \otimes id_M & 0 \\ 0 & \epsilon \otimes id_N \end{pmatrix}"'] \\
& M \oplus N \arrow[u, "\rho_{M\oplus N}"'] \arrow[ul, "\begin{pmatrix} \gamma_M & 0 \\ 0 & \gamma_N \end{pmatrix}"]
\end{tikzcd}$$

es clara, ya que tanto ρ_M como ρ_N son comultiplicaciones.

Continuemos con $d_{M\oplus N}$. Por como fue definida resulta que $d^2_{M\oplus N} = 1$. Además, de los términos

$$\left(\begin{pmatrix} d \otimes id_M & 0 \\ 0 & d \otimes id_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} id_C \otimes d_M & 0 \\ 0 & id_C \otimes d_N \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \rho_M & 0 \\ 0 & \rho_N \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (d \otimes id_M + id_C \otimes d_M)\rho_M & 0 \\ 0 & (d \otimes id_N + id_C \otimes d_N)\rho_N \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} \rho_M & 0 \\ 0 & \rho_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_M & 0 \\ 0 & d_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_M d_M & 0 \\ 0 & \rho_N d_N \end{pmatrix}$$

se tiene que $d_{M\oplus N}$ cumple la regla de Leibniz, por consiguiente es una codiferencial y así $M \oplus N$ está en la categoría. Notemos que las proyecciones e inyecciones canónicas π_M, π_N, σ_M y σ_N son morfismos en C-CoDf. Esto se comprueba de manera rutinaria checando la conmutatividad de los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd} M \oplus N \arrow[r, "\pi_M=(id_M{,}0)"] \arrow[d, "\rho_{M\oplus N}=\begin{pmatrix} \rho_M & 0 \\ 0 & \rho_N \end{pmatrix}"'] & M \arrow[d, "\rho_M"] \\ (C\otimes M)\oplus(C\otimes N) \arrow[r, "(id_C\otimes id_M{,}0)"'] & C\otimes M, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \oplus N \arrow[r, "\pi_M=(id_M{,}0)"] \arrow[d, "d_{M\oplus N}=\begin{pmatrix} d_M & 0 \\ 0 & d_N \end{pmatrix}"'] & M \arrow[d, "d_M"] \\ M\oplus N \arrow[r, "\pi_M"'] & M \end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\sigma_M=\begin{pmatrix} id_M \\ 0 \end{pmatrix}"] \arrow[d, "\rho_M"'] & M \oplus N \arrow[d, "\rho_{M\oplus N}=\begin{pmatrix} \rho_M & 0 \\ 0 & \rho_N \end{pmatrix}"'] \\ C\otimes M \arrow[r, "\begin{pmatrix} id_C\otimes id_M \\ 0 \end{pmatrix}"'] & (C\otimes M)\oplus(C\otimes N), \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "\sigma_M=\begin{pmatrix} id_M \\ 0 \end{pmatrix}"] \arrow[d, "d_M"'] & M \oplus N \arrow[d, "d_{M\oplus N}=\begin{pmatrix} d_M & 0 \\ 0 & d_N \end{pmatrix}"'] \\ M \arrow[r, "\sigma_M"'] & M\oplus N. \end{tikzcd}$$

La conmutatividad de los diagramas para N se tiene de manera análoga. También observemos que las cuatro funciones son de grado 0 debido a la forma en que se gradúa la suma (ver *Observación* 1.3). Ahora, como éstas cumplen que

$$\sigma_M\pi_M + \sigma_N\pi_N = id_{M\oplus N}$$

y que $\pi_M\sigma_M = id_M$, $\pi_N\sigma_N = id_N$ y $\pi_M\sigma_N = 0$, $\pi_N\sigma_M = 0$, tenemos que $M \oplus N$ es tanto el producto como el coproducto de M y N.

Como siguiente paso, probaremos que si $f : M \to N$ es un morfismo, entonces la inclusión lineal $i_f : \mathrm{Ker}(f) \hookrightarrow M$ es el núcleo de f. Primero que nada, se puede graduar el subespacio Ker$f$ de manera natural como sigue:

$$\mathrm{Ker} f = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} (\mathrm{Ker} f \cap M_i).$$

Con esa graduación, i_f resulta homogénea de grado 0. Para continuar, una propiedad que utilizaremos sin demostrar es que

$$id_C \otimes i_f : C \otimes \mathrm{Ker}(f) \to C \otimes M$$

es núcleo (en la categoría de espacios vectoriales) de $id_C \otimes f$.

Notemos que $(id_C \otimes f)\rho_M i_f = \rho_N f i_f = 0$. Por ende, existe una única aplicación lineal $\rho_{\mathrm{Ker}(f)} : \mathrm{Ker}(f) \to C \otimes \mathrm{Ker}(f)$ tal que

$$(id_C \otimes i_f)\rho_{\mathrm{Ker}(f)} = \rho_M i_f. \tag{2.1}$$

Cabe hacer notar que $\rho_{\mathrm{Ker}(f)}$ resulta ser la restricción de ρ_M y así $\rho_{\mathrm{Ker}(f)}$ es homogénea de grado 0. Más aún,

$$\begin{aligned}
(id_C \otimes id_C \otimes i_f)(id_C \otimes \rho_{\mathrm{Ker}(f)})\rho_{\mathrm{Ker}(f)} &= (id_C \otimes (id_C \otimes i_f)\rho_{\mathrm{Ker}(f)})\rho_{\mathrm{Ker}(f)} \\
&= (id_C \otimes \rho_M i_f)\rho_{\mathrm{Ker}(f)} \\
&= (id_C \otimes \rho_M)(id_C \otimes i_f)\rho_{\mathrm{Ker}(f)} \\
&= (id_C \otimes \rho_M)\rho_M i_f \\
&= (\rho \otimes id_M)\rho_M i_f \\
&= (\rho \otimes id_M)(id_C \otimes i_f)\rho_{\mathrm{Ker}(f)} \\
&= (\rho \otimes i_f)\rho_{\mathrm{Ker}(f)} \\
&= (id_C \otimes id_C \otimes i_f)(\rho \otimes id_{\mathrm{Ker}(f)})\rho_{\mathrm{Ker}(f)}
\end{aligned}$$

y, como $id_C \otimes id_C \otimes i_f$, es inyectiva concluimos que

$$(id_C \otimes \rho_{\mathrm{Ker}(f)})\rho_{\mathrm{Ker}(f)} = (\rho \otimes id_{\mathrm{Ker}(f)})\rho_{\mathrm{Ker}(f)}.$$

De una manera similar, se calcula que:

$$\begin{aligned}
(id_K \otimes i_f)(\epsilon \otimes id_{\mathrm{Ker}(f)})\rho_{\mathrm{Ker}(f)} &= (\epsilon \otimes id_M)(id_C \otimes i_f)\rho_{\mathrm{Ker}(f)} \\
&= (\epsilon \otimes id_M)\rho_M i_f \\
&= \gamma_M i_f = (id_K \otimes i_f)\gamma_{\mathrm{Ker}(f)}.
\end{aligned}$$

En conclusión, tenemos $(\epsilon \otimes id_{\mathrm{Ker}(f)})\rho_{\mathrm{Ker}(f)} = \gamma_{\mathrm{Ker}(f)}$. Con esto hemos probado que $\rho_{\mathrm{Ker}(f)}$ es comultiplicación.

Pasemos a definir la codiferencial. De la propiedad del núcleo tenemos una función lineal $d_{\mathrm{Ker}(f)}: \mathrm{Ker}(f) \to \mathrm{Ker}(f)$ que proviene de la identidad

$$fd_M i_f = d_N f i_f = 0.$$

Esta función es tal que

$$d_M i_f = i_f d_{\mathrm{Ker}(f)}. \tag{2.2}$$

Ésta es la restricción de d_M y es una aplicación homogénea de grado 1 con la característica que $d^2_{\mathrm{Ker}(f)} = 0$; esto es porque

$$i_f d^2_{\mathrm{Ker}(f)} = d_M i_f d_{\mathrm{Ker}(f)} = d^2_M i_f = 0.$$

Las siguientes identidades

$$\begin{aligned}
(id_C \otimes i_f)\rho_{\mathrm{Ker}(f)} d_{\mathrm{Ker}(f)} &= \rho_M i_f d_{\mathrm{Ker}(f)} \\
&= \rho_M d_M i_f \\
&= (d \otimes id_M + id_C \otimes d_M)\rho_M i_f \\
&= (d \otimes id_M + id_C \otimes d_M)(id_C \otimes i_f)\rho_{\mathrm{Ker}(f)} \\
&= (d \otimes i_f + id_C \otimes d_M i_f)\rho_{\mathrm{Ker}(f)} \\
&= (id_C \otimes i_f)(d \otimes id_{\mathrm{Ker}(f)} + id_C \otimes d_{\mathrm{Ker}(f)})\rho_{\mathrm{Ker}(f)}
\end{aligned}$$

nos llevan a concluir que $d_{\mathrm{Ker}(F)}$ cumple la regla de Leibniz y así $d_{\mathrm{Ker}(f)}$ es una codiferencial y $\mathrm{Ker}(f)$ es un comódulo diferencial. Más aún, gracias a 2.1 y 2.2, i_f es un morfismo de comódulos diferenciales.

Sea $t: L \to M$ morfismo en C-CoDf tal que $ft = 0$, entonces existe una función lineal $a: L \to \mathrm{Ker}(f)$ tal que $i_f a = t$. Por la *Proposición* 2.9, a es un morfismo de comódulos diferenciales, por lo tanto i_f es núcleo de f.

De manera dual, si consideramos la proyección natural $\eta_f: N \to \mathrm{Coker}(f)$ y graduamos $\mathrm{Coker}(f) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \eta(N_i)$, éste resulta el conúcleo de f en la categoría C-CoDf con comultiplicación la aplicación resultante de la propiedad universal del conúcleo que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho_M"'] & N \arrow[r, "\eta_f"] \arrow[d, "\rho_N"'] & \mathrm{Coker}(f) \arrow[d, dashed, "\rho_{Cok(f)}"] \\
C \otimes M \arrow[r, "id_C \otimes f"'] & C \otimes N \arrow[r, "id_C \otimes \eta_f"'] & C \otimes \mathrm{Coker}(f)
\end{tikzcd}$$

y codiferencial la función lineal que se obtiene del diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d_M"'] & N \arrow[r, "\eta_f"] \arrow[d, "d_N"] & \mathrm{Coker}(f) \arrow[d, dashed, "d_{Cok(f)}"] \\ M \arrow[r, "f"'] & N \arrow[r, "\eta_f"'] & C \otimes \mathrm{Coker}(f). \end{tikzcd}$$

Finalmente, en la categoría de espacios vectoriales, tenemos que

$$\mathrm{Coker}(i_f) \cong \mathrm{Ker}(\eta_f)$$

mediante un isomorfismo que está dado por las propiedades de núcleos y conúcleos, que, por lo todo lo anterior, también resulta ser morfismo en C-CoDf. $\square$

Toda categoría abeliana tiene de manera natural sucesiones exactas cortas que son de la forma

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L$$

donde f es núcleo de g y g es conúcleo de f. Pero, en el caso particular de C-CoDf nos interesará estudiar otro tipo de estructura exacta para la categoría.

Observación 2.13. Si nos olvidamos de pedir la codiferencial tanto a las coálgebras como a los comódulos, tenemos otra categoría llamada la categoría de comódulos graduados. Ésta en efecto es una categoría y más aún, es abeliana, ya que la demostración de la *Proposición* 2.8 y la del *Teorema* 2.12 funcionan si nos olvidamos de las codiferenciales. A esta categoría la denotamos como C-CoGr.

2.2. Estructura exacta.

Definición 2.14. Sea $\mathcal{E}$ una clase de parejas de morfismos en una categoría aditiva. Diremos que $\mathcal{E}$ es una **estructura exacta** si tiene las siguientes propiedades:

E0: Si (f, g) está en $\mathcal{E}$, entonces el dominio de g es igual al codominio de f. Al morfismo f lo llamaremos **$\mathcal{E}$-inflación** y al morfismo g **$\mathcal{E}$-deflación** o simplemente **inflación** y **deflación** si la clase $\mathcal{E}$ se sobreentiende.

E1: Para cualquier pareja (f, g) en $\mathcal{E}$, f es núcleo de g y g es conúcleo de f.

E2: $\mathcal{E}$ es cerrado bajo isomorfismos, es decir si (f, g) está en $\mathcal{E}$ y se tiene otra pareja (ϕ, ψ) con isomorfismos que hacen conmutar el diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\cong"] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\cong"] & L \arrow[d, "\cong"] \\ M' \arrow[r, "\phi"'] & N' \arrow[r, "\psi"'] & L' \end{tikzcd}$$

entonces (ϕ, ψ) también está en $\mathcal{E}$.

E3: Para todo objeto M, id_M es inflación y deflación.

E4: Sean $f : M \to N$ inflación y $g : N \to L$ deflación

(a) Si $h : Z \to L$ es morfismo, entonces existe pullback

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "G"] \arrow[d, "H"'] & Z \arrow[d, "h"] \\ N \arrow[r, "g"'] & L \end{tikzcd}$$

tal que G es una deflación.

(b) Si $h : M \to X$ es morfismo, entonces existe pushout

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & X \arrow[d, "H"] \\ N \arrow[r, "F"'] & V \end{tikzcd}$$

tal que F es una inflación.

E5: Composición de inflaciones (deflaciones) es inflación (deflación).

E6: (a) Si $f'f$ es inflación, entonces f es inflación.

(b) Si gg' es deflación, entonces g es deflación.

Nos referiremos como **categoría exacta** a una categoría dotada de una estructura exacta, y a las parejas (f, g) en $\mathcal{E}$ como **pares exactos**.

Consideremos $\mathcal{E}$ la clase de parejas de morfismos (f, g) en C-CoDf tales que

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L$$

es una sucesión exacta en C-CoDf y se escinde en C-CoGr. Nuestra labor en esta sección será mostrar que $(C\text{-CoDf}, \mathcal{E})$ es una categoría exacta. Para ello haremos uso de los siguientes lemas sin demostrarlos.

Lema 2.15. En cualquier categoría, si la composición de dos morfismos fs es monomorfismo, entonces s es monomorfismo. De igual forma, si rg es epimorfismo, entonces r es epimorfismo.

Lema 2.16. En una categoría abeliana, para cualquier pareja de morfismos $[g : M \to L, f : N \to L]$ existe su pullback y para cualquier pareja de morfismos $[f : E \to M, g : E \to N]$ existe su pushout. (Ver [3, Th 20.1.]).

Lema 2.17. Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana y f y g morfismos.

1. Si

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "G"] \arrow[d, "F"'] & N \arrow[d, "f"] \\ M \arrow[r, "g"'] & L \end{tikzcd}$$

   es un pullback y g es epimorfismo, entonces G es epimorfismo.

2. Si

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & N \arrow[d, "F"] \\ M \arrow[r, "G"'] & L \end{tikzcd}$$

   es un pushout y f es monomorfismo, entonces F es monomorfismo.

(Ver [3, Pr. 20.2.]).

Lema 2.18. Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana y $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L$ una sucesión exacta. Son equivalentes las siguiente propiedades:

- La sucesión se divide.
- La sucesión se divide por la derecha.

- La sucesión se divide por la izquierda.

(Ver [1, L. 1.18.])

Lema 2.19. Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana y $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L$ una sucesión. Se tienen estas dos propiedades:

1. Si f es núcleo de g y g es epimorfismo, entonces la sucesión anterior es exacta.

2. Si g es conúcleo de f y f es monomorfismo, entonces la sucesión anterior es exacta.

(Ver [1, Pr. 1.17.]).

Proposición 2.20. Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana y $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L$ una sucesión exacta. Se tiene que:

1. Si $h : M \to X$ es un morfismo y consideramos el pushout $[H, F]$ de $[h, f]$, entonces, existe $t : Y \to L$ tal que

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "H"'] & L \arrow[d, equal] \\ X \arrow[r, "F"'] & Y \arrow[r, "t"'] & L \end{tikzcd}$$

conmuta y la segunda fila es exacta.

2. Si $h : Z \to L$ es un morfismo y consideramos el pullback $[G, H]$ de $[g, h]$, entonces, existe $t : M \to Y$ tal que

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "t"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "G"] \arrow[d, "H"] & Z \arrow[d, "h"] \\ M \arrow[r, "f"'] & N \arrow[r, "g"'] & L \end{tikzcd}$$

conmuta y la primera fila es exacta.

Demostración. Parte 1. Notemos que $gf = 0 = 0h$. Como $[H, F]$ es pushout, existe $t : Y \to L$ tal que $g = tH$ y $0 = tF$. Veamos que t es conúcleo de F. Sea $\nu : Y \to Z$ un morfismo tal que $\nu F = 0$, tenemos que

$$\nu Hf = \nu Fh = 0h = 0.$$

Por ser g conúcleo de f existe un morfismo $\lambda : L \to Z$ tal que $\nu H = \lambda g$.

Ahora, notemos que $(\lambda g)f = 0 = 0h$. Por lo tanto, como $[H, F]$ es pushout,

$$\nu F = 0, \quad \nu H = \lambda g$$

y

$$(\lambda t)F = 0, \quad (\lambda t)H = \lambda g,$$

se sigue que $\nu = \lambda t$. La unicidad de λ es consecuencia inmediata de la unicidad dada por el conúcleo de f. Por último, por el *Lema* 2.17, F es monomorfismo y por *Lema* 2.19 se concluye que $X \xrightarrow{F} Y \xrightarrow{t} L$ es exacta.

La parte 2 de la proposición es dual. □

Teorema 2.21. $(C\text{-CoDf}, \mathcal{E})$ es una categoría exacta.

Demostración. Por definición se cumplen E0 y E1.

Sea (f, g) una pareja en $\mathcal{E}$ y (ϕ, ψ) una pareja isomorfa a (f, g), es decir

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\cong"] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\cong"] & L \arrow[d, "\cong"] \\ M' \arrow[r, "\phi"'] & N' \arrow[r, "\psi"'] & L' \end{tikzcd}$$

conmuta. Por exactitud de (f, g) tenemos que (ϕ, ψ) también es exacta. Además, como (f, g) se divide en C-CoGr, existen f' y g' en C-CoGr tales que $f'f = id_M$ y $gg' = id_L$. Así, las funciones ϕ' y ψ' dadas por los diagramas

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, dash, "\cong"'] & N \arrow[l, "f'"] \arrow[d, dash, "\cong"] \\ M' & N' \arrow[l, "\phi'"] \end{tikzcd} \qquad \text{y} \qquad \begin{tikzcd} N \arrow[d, dash, "\cong"'] & L \arrow[l, "g'"] \arrow[d, dash, "\cong"] \\ N' & L' \arrow[l, "\psi'"] \end{tikzcd}$$

nos dan la inversa izquierda de ϕ y la inversa derecha de ψ. Por lo tanto, (ϕ, ψ) está en $\mathcal{E}$ y se cumple E2.

E3 también es inmediato ya que

$$M \xrightarrow{id_M} M \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta que se escinde por la izquierda en C-CoGr. De igual manera

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{id_M} M$$

es exacta y se escinde por la derecha en C-CoGr.

Para mostrar E4(b) consideremos f, g, f' y g' como antes. Sea $h : M \to X$ morfismo y $[H, F]$ pushout de $[h, f]$, por la *Proposición* 2.20 tenemos que existe $t : X \to Y$ tal que

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "H"'] & L \arrow[d, equal] \\ X \arrow[r, "F"'] & Y \arrow[r, "t"'] & L \end{tikzcd}$$

conmuta y el segundo renglón es exacto. Notemos que $(tH)g' = gg' = id_L$ y por *Lema* 2.18 el segundo renglón se divide en C-CoGr. Dualmente se tiene el resultado para pullbacks.

Ahora mostremos E5. Sea $X \xrightarrow{s} M \xrightarrow{t} Y$ otro elemento de $\mathcal{E}$. Entonces fs es monomorfismo y por *Lema* 2.19

$$X \xrightarrow{fs} N \xrightarrow{\eta_{fs}} \mathrm{Coker}(fs)$$

es exacta. Más aún, $(s'f')fs = s' id_M s = s's = id_X$, donde s' es la inversa izquierda de s como comódulos graduados. Así, fs resulta inflación. De manera análoga se tiene la parte dual.

Por último, si fs es inflación, entonces gracias al *Lema* 2.15 s es monomorfismo y así

$$X \xrightarrow{s} M \xrightarrow{\eta_s} \mathrm{Coker}(s)$$

es sucesión exacta. Esta sucesión se divide ya que fs tiene inverso izquierdo r en C-CoGr, es decir $r(fs) = 0$; asociando rfs como $(rf)s$ concluimos que s tiene inverso izquierdo y con ello se tiene E6 (a). E6 (b) se argumenta de manera similar. $\square$

Definición 2.22. Diremos que un objeto P en una categoría exacta $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ es un **$\mathcal{E}$-proyectivo** (o simplemente, proyectivo cuando se sobreentienda la $\mathcal{E}$), si, para cualquier sucesión $\mathcal{E}$-exacta $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L$, la sucesión de grupos abelianos

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P, M) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P, N) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P, L)$$

es exacta corta. Un objeto I se llamará **$\mathcal{E}$-inyectivo** (o simplemente, inyectivo si se sobreentiende la $\mathcal{E}$), si

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(L, I) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, I) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, I)$$

es exacta corta.

2.3. La categoría de Frobenius.

El siguiente paso en el estudio de la estructura de $(C\text{-CoDf}, \mathcal{E})$, es, partiendo de una construcción conocida, triangular un cociente de dicha categoría. En esta sección nos ocuparemos de estudiar cómo se llega a tal triangulación.

Definición 2.23. Sea $\mathcal{C}$ una categoría aditiva, junto con un automorfismo $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Diremos que $(\mathcal{C}, T)$ es una **categoría triangulada** con **triangulación $\mathcal{T}$** si $\mathcal{T}$ es una clase de ternas de morfismos (f, g, h) que son sucesiones de la forma

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \xrightarrow{h} T(M)$$

y cumple los siguientes axiomas:

T1 Para todo objeto M en $\mathcal{C}$, $M \xrightarrow{id_M} M \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} T(M)$ está en $\mathcal{T}$.

T2 Para todo morfismo f, existen g y h tal que (f, g, h) está en $\mathcal{T}$.

T3 Si (f, g, h) está en $\mathcal{T}$ y otra terna (f', g', h') es isomorfa a la primera, es decir existen isomorfismos φ_1, φ_2 y φ_3 que hacen conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_1"] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varphi_2"] & L \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\varphi_3"] & T(M) \arrow[d, "T(\varphi_1)"] \\
M' \arrow[r, "f'"'] & N' \arrow[r, "g'"'] & L' \arrow[r, "h'"'] & T(M'),
\end{tikzcd}$$

entonces (f', g', h') está en $\mathcal{T}$. En este caso se dice que $\mathcal{T}$ es cerrada bajo isomorfismos.

T4 (f, g, h) está en $\mathcal{T}$ si y sólo si $(g, h, -T(f))$ está en $\mathcal{T}$

T5 Si (f, g, h) y (f', g', h') están en $\mathcal{T}$ y $\phi_1 : M \to M'$ y $\phi_2 : N \to N'$ son morfismos tales que $\phi_2 f = f'\phi_1$, entonces existe $\phi_3 : L \to L'$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi_1"] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\phi_2"] & L \arrow[r, "h"] \arrow[d, dashed, "\phi_3"] & T(M) \arrow[d, "T(\phi_1)"] \\
M' \arrow[r, "f'"'] & N' \arrow[r, "g'"'] & L' \arrow[r, "h'"'] & T(M').
\end{tikzcd}$$

T6 Sean

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{i} L' \xrightarrow{i'} T(M)\ ,$$

$$N \xrightarrow{g} L \xrightarrow{j} M' \xrightarrow{j'} T(N)\ ,\ \text{y}$$

$$M \xrightarrow{gf} L \xrightarrow{k} N' \xrightarrow{k'} T(M)$$

elementos de $\mathcal{T}$. Entonces existen morfismos $a : L' \to N'$ y $b : N' \to M'$ tales que

$$L' \xrightarrow{a} N' \xrightarrow{b} M' \xrightarrow{T(i)j'} T(L')$$

está en $\mathcal{T}$ y el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
T^{-1}(N') \arrow[r, "T^{-1}(k')"] \arrow[d, "T^{-1}(b)"'] & M \arrow[r, equal] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[d, "gf"] & & \\
T^{-1}(M') \arrow[r, "T^{-1}(j')"'] & N \arrow[r, "g"'] \arrow[d, "i"'] & L \arrow[r, "j"] \arrow[d, "k"] & M' \arrow[r, "j'"] \arrow[d, equal] & T(N) \arrow[d, "T(i)"] \\
& L' \arrow[r, dashed, "a"'] \arrow[d, "i'"'] & N' \arrow[r, dashed, "b"'] \arrow[d, "k'"] & M' \arrow[r, "T(i)j'"'] & T(L') \\
& T(M) \arrow[r, equal] & T(M). & &
\end{tikzcd}$$

A los elementos de $\mathcal{T}$ se les conoce como **triángulos** y a las ternas ϕ_1, ϕ_2 y ϕ_3 que hacen conmutar el diagrama de T5 se les conoce como **morfismos de triángulos**.

Definición 2.24. Sea $\mathcal{C}$ una categoría aditiva. Diremos que **los idempotentes se diven en** $\mathcal{C}$ si para todo objeto $X \in \mathcal{C}$ y todo $e \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ con la propiedad de que $e^2 = e$, existen morfismos $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ tales que $e = gf$ y $id_Y = fg$.

Lema 2.25. Si $\mathcal{C}$ es una categoría abeliana, entonces $\mathcal{C}$ es una categoría aditiva donde los idempotentes se dividen.

Demostración. Sea $e \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ un idempotente, es decir, $e^2 = e$. Consideremos $Y := \mathrm{Im}(e)$ (la cual existe pues $\mathcal{C}$ es abeliana), $f : X \to Y$ como el morfismo e restringiendo el codominio a Y y $g : Y \to X$ como la inclusión de Y a X (de nuevo, estos morfismos existen pues $\mathcal{C}$ es abeliana). Es claro que $gf = e$. Más aún, $fg = id_Y$, pues e es idempotente. □

Definición 2.26. Una categoría aditiva con idempotentes que se dividen y con estructura exacta $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ se llamará **categoría de Frobenius** si tiene las propiedades:

F1 $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ tiene suficientes proyectivos, es decir, para cualquier objeto M en $\mathcal{C}$ existe una $\mathcal{E}$-deflación $g : P \to M$ con P un $\mathcal{E}$-proyectivo.

F2 $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ tiene suficientes inyectivos, es decir, para cualquier objeto M en $\mathcal{C}$ existe una $\mathcal{E}$-inflación $f : M \to I$ con I un $\mathcal{E}$-inyectivo.

F3 La clase de los $\mathcal{E}$-inyectivos es igual a la clase de los $\mathcal{E}$-proyectivos.

Si aparte de eso se tiene un automorfismo $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, un funtor $J : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ y dos trasformaciones naturales $\alpha : id_{\mathcal{C}} \to J$ y $\beta : J \to T$ tales que:

EF1 T preserva $\mathcal{E}$-sucesiones.

EF2 Para todo objeto M, el objeto $J(M)$ es $\mathcal{E}$-proyectivo.

EF3 Para todo objeto M, la siguiente sucesión está en $\mathcal{E}$

$$M \xrightarrow{\alpha_M} J(M) \xrightarrow{\beta_M} T(M) \; ,$$

entonces diremos que $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ es una **categoría especial de Frobenius**.

Para una categoría especial de Frobenius $\mathcal{C}$ existe una construcción conocida en el área, que nos permite pasar a otra categoría llamada categoría estable, la cual es denotada como $\underline{\mathcal{C}}$. Antes de definirla revisemos las siguientes dos proposiciones.

Proposición 2.27. Si P_1 y P_2 son $\mathcal{E}$-proyectivos, entonces $P_1 \oplus P_2$ es $\mathcal{E}$-proyectivo.

Demostración. Sea $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L$ una $\mathcal{E}$-sucesión. Es sabido que en una categoría abeliana

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P_1 \oplus P_2, U) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P_1, U) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P_2, U)$$

con isomorfismo que manda un morfismo u en $(u\sigma_1, u\sigma_2)$, donde las σ's son las respectivas inclusiones de P_1 y P_2 en $P_1 \oplus P_2$. Ahora, observemos que tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P_1 \oplus P_2, M) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P_1 \oplus P_2, N) \arrow[r, "g_*"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P_1 \oplus P_2, L) \arrow[d, "\cong"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P_1, M) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P_2, M) \arrow[r, "\begin{pmatrix} f_* & 0 \\ 0 & f_* \end{pmatrix}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P_1, N) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P_2, N) \arrow[r, "\begin{pmatrix} g_* & 0 \\ 0 & g_* \end{pmatrix}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P_1, L) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P_2, L).
\end{tikzcd}$$

Ya que P_1 y P_2 son proyectivos el segundo renglón es exacto y por ende el primer renglón también lo es. $\square$

Proposición 2.28. Sea $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ una categoría exacta y sean M y N objetos en $\mathcal{C}$. El conjunto $\mathscr{P}(M, N)$ de morfismos que se factorizan a través de un $\mathcal{E}$-proyectivo es un subgrupo de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)$.

Demostración. Sean f y g morfismos en $\mathscr{P}(M, N)$. Tenemos que ambos se factorizan por $\mathcal{E}$-proyectivos P_1 y P_2 respectivamente, es decir, hay morfismos $a : M \to P_1$, $b : P_1 \to N$, $c : M \to P_2$ y $d : P_2 \to N$ tales que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "a"'] & & N \\
& P_1 \arrow[ur, "b"'] &
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "c"'] & & N \\
& P_2 \arrow[ur, "d"'] &
\end{tikzcd}.$$

De la proposición anterior se sigue que $P_1 \oplus P_2$ es $\mathcal{E}$-proyectivo, además el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, "f+g"] \arrow[dr, "\left(\begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix}\right)"'] & & N \\
& P_1 \oplus P_2 \arrow[ur, "(b,d)"'] &
\end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo, por tanto $f+g$ está en $\mathscr{P}(M,N)$. Observemos también que $-f = (-a)b$ y por ende $-f$ está en $\mathscr{P}(M,N)$. $\square$

Definición 2.29. Sea $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ una categoría exacta. Definimos la **categoría estable** $\underline{\mathcal{C}}$ como la categoría cuyos objetos son los mismos que los de $\mathcal{C}$ y los morfismos son

$$\mathrm{Hom}_{\underline{\mathcal{C}}}(M,N) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M,N)/\mathscr{P}(M,N).$$

Notemos que si $f : M \to N$ es un morfismo en $\mathscr{P}(M,N)$ y $g : N \to L$ es cualquier otro morfismo, entonces $gf \in \mathscr{P}(M,L)$. En efecto, f se factoriza a través de un proyectivo, es decir, existen $f_1 : M \to P$ y $f_2 : P \to N$ morfismos tales que P es $\mathcal{E}$-proyectivo y $f = f_2 f_1$. Por lo tanto $gf = (gf_2)f_1$ es una factorización que testifica que gf está en $\mathscr{P}(M,L)$. De igual manera se tiene que si $h : U \to M$ es cualquier morfismo, entonces $fh \in \mathscr{P}(U,N)$.

Lo anterior nos dice que $\mathscr{P}$ es un ideal y por ende la composición en el cociente está bien definida.

Lema 2.30. Para una categoría especial de Frobenius $(\mathcal{C}, \mathcal{E}, T, J, \alpha, \beta)$, consideremos sucesiones de la forma

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \xrightarrow{h} T(M)$$

tal que $(f,g) \in \mathcal{E}$ y existe morfismo $l : N \to J(M)$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, dashed, "l"] & L \arrow[d, "h"] \\
M \arrow[r, "\alpha_M"'] & J(M) \arrow[r, "\beta_M"'] & T(M).
\end{tikzcd}$$

A estas sucesiones consideradas módulo $\mathscr{P}$ se les conoce como **triángulos canónicos de** $\underline{\mathcal{C}}$.

Consideremos $\mathcal{T}$ como la clase de las sucesiones en $\underline{\mathcal{C}}$

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \xrightarrow{h} T(M)$$

que son isomorfas a triángulos canónicos en $\underline{\mathcal{C}}$ (isomorfos como en T3 de la *Definición* 2.23) y consideremos $\underline{T} : \underline{\mathcal{C}} \to \underline{\mathcal{C}}$ el automorfismo inducido por T en el cociente. Entonces, $(\underline{\mathcal{C}}, \underline{T})$ es una categoría triangulada con triangulación $\mathcal{T}$.

Como se menciona al inicio de la sección, éste es un resultado conocido. Una prueba puede encontrarse en [1, Ch. 4].

Observación 2.31. Dado cualquier espacio vectorial graduado M, podemos definir un nuevo espacio graduado $M[1] = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M[1]_i$ con $M[1]_i = M_{i+1}$. También tenemos una aplicación lineal $\sigma_M : M \to M[1]$ de grado -1 tal que $\sigma_M(m) = m$. Con esto, dados una coálgebra diferencial (C, ρ, d) y un comódulo (M, ρ_M, d_M) podemos definir un nuevo comódulo $M[1]$ con comultiplicación

$$\rho_{M[1]} = (id_C \otimes \sigma_M)\rho_M\sigma_M^{-1}$$

y codiferencial

$$d_{M[1]} = -\sigma_M d_M \sigma_M^{-1}.$$

En efecto,

$$|\rho_{M[1]}| = |id_C| + |\sigma_M| + |\rho_M| + |\sigma_M^{-1}| = 0.$$

Además, tenemos las siguientes cadenas de igualdades:

$$\begin{aligned}
(id_C \otimes id_C \otimes \sigma_M^{-1})(\rho \otimes id_{M[1]})\rho_{M[1]} &= (\rho \otimes id_M)(id_C \otimes \sigma_M^{-1})\rho_{M[1]} \\
&= (\rho \otimes id_M)\rho_M\sigma_M^{-1} \\
&= (id_C \otimes \rho_M)\rho_M\sigma_M^{-1} \\
&= (id_C \otimes \rho_M)(id_C \otimes \sigma_M^{-1})\rho_{M[1]} \\
&= (id_C \otimes id_C \otimes \sigma_M^{-1})(id_C \otimes \rho_{M[1]})\rho_{M[1]}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
(id_K \otimes \sigma_M^{-1})(\epsilon \otimes id_{M[1]})\rho_{M[1]} &= (\epsilon \otimes id_M)(id_C \otimes \sigma_M^{-1})\rho_{M[1]} \\
&= (\epsilon \otimes id_M)\rho_M\sigma_M^{-1} \\
&= \gamma_M\sigma_M^{-1} \\
&= (id_K \otimes \sigma_M^{-1})\gamma_{M[1]},
\end{aligned}$$

de donde se sigue que $\rho_{M[1]}$ es comultiplicación.

Ahora, $|d_{M[1]}| = |\sigma_M| + |d_M| + |\sigma_M^{-1}| = 1$.

El cuadrado $d_{M[1]}^2 = (-\sigma_M d_M \sigma_M^{-1})(-\sigma_M d_M \sigma_M^{-1}) = \sigma_M d_M^2 \sigma_M^{-1} = 0$ y finalmente

$$\begin{aligned}
\rho_{M[1]} d_{M[1]} &= ((id_C \otimes \sigma_M)\rho_M \sigma_M^{-1})(-\sigma_M d_M \sigma_M^{-1}) \\
&= -(id_C \otimes \sigma_M)\rho_M d_M \sigma_M^{-1} \\
&= -(id_C \otimes \sigma_M)(id_C \otimes d_M + d \otimes id_M)\rho_M \sigma_M^{-1} \\
&= -(id_C \otimes \sigma_M d_M - d \otimes \sigma_M)\rho_M \sigma_M^{-1} \\
&= (id_C \otimes d_{M[1]}\sigma_M + d \otimes \sigma_M)\rho_M \sigma_M^{-1} \\
&= (id_C \otimes d_{M[1]} + d \otimes id_{M[1]})(id_C \otimes \sigma_M)\rho_M \sigma_M^{-1} \\
&= (id_C \otimes d_{M[1]} + d \otimes id_{M[1]})\rho_{M[1]},
\end{aligned}$$

con lo que $d_{M[1]}$ es una codiferencial.

Dado un morfismo $f : M \to N$, podemos definir otro morfismo $f[1] : M[1] \to N[1]$ como $f[1] := \sigma_N f \sigma_M^{-1}$. Éste efectivamente es homogéneo de grado 0 y conmuta con las comultiplicaciones y las codiferenciales; esto se ve de las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
\rho_{N[1]} f[1] \sigma_M &= \rho_{N[1]} \sigma_N f \\
&= (id_C \otimes \sigma_N)\rho_N f \\
&= (id_C \otimes \sigma_N)(id_C \otimes f)\rho_M \\
&= (id_C \otimes f[1])(id_C \otimes \sigma_M)\rho_M \\
&= (id_C \otimes f[1])\rho_{M[1]}\sigma_M
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
d_{N[1]} f[1] \sigma_M &= d_{N[1]} \sigma_N f \\
&= -\sigma_N d_N f \\
&= -\sigma_N f d_M \\
&= -f[1]\sigma_M d_M \\
&= f[1] d_{M[1]} \sigma_M.
\end{aligned}$$

Enseguida, definamos el **funtor translación** $T : C\text{-CoDf} \to C\text{-CoDf}$ tal que a cada objeto (M, ρ_M, d_M) lo manda en $T(M, \rho_M, d_M) = (M[1], \rho_{M[1]}, d_{M[1]})$. Este es un funtor puesto que

$$T(id_M) = \sigma_M id_M \sigma_M^{-1} = \sigma_M \sigma_M^{-1} = id_{M[1]}$$

y, para cualesquiera dos morfismos $f : M \to N$ y $g : N \to L$, se tiene que

$$T(g)T(f) = \sigma_L g \sigma_N^{-1} \sigma_N f \sigma_M^{-1} = \sigma_L g f \sigma_M^{-1} = T(gf).$$

Este funtor resulta automorfismo con inversa

$$T^{-1}(M, \rho_M, d_M) = (M[-1], (id_C \otimes \sigma_{M[-1]}^{-1})\rho_M \sigma_{M[-1]}, -\sigma_{M[-1]}^{-1} d_M \sigma_{M[-1]}),$$

donde $M[-1] = M$ como espacio vectorial, pero con graduación $M[-1]_i = M_{i-1}$.

Por comodidad, al aplicar el funtor omitiremos las comultiplicaciones y las codiferenciales, es decir, solo escribiremos $T(M)$ en lugar de $T(M, \rho_M, d_M)$.

Observación 2.32. Es momento de construir otro comódulo. Partiendo de un comódulo (M, ρ_M, d_M), definimos:

- El espacio graduado $J(M) = M \oplus M[1]$,
- la función lineal $\rho_{J(M)} := \begin{pmatrix} \rho_M & 0 \\ (d \otimes \sigma_M)\rho_M & \rho_{M[1]} \end{pmatrix}$ y
- la función lineal $d_{J(M)} := \begin{pmatrix} 0 & \sigma_M^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Al igual que en el *Teorema* 2.12, podemos pensar a $\rho_{J(M)}$ como una comultiplicación. En efecto,

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \rho \otimes id_M & 0 \\ 0 & \rho \otimes id_{M[1]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_M & 0 \\ (d \otimes \sigma_M)\rho_M & \rho_{M[1]} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\rho \otimes id_M)\rho_M & 0 \\ (\rho \otimes id_{M[1]})(d \otimes \sigma_M)\rho_M & (\rho \otimes id_{M[1]})\rho_{M[1]} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} id_C \otimes \rho_M & 0 \\ id_C \otimes (d \otimes \sigma_M)\rho_M & id_C \otimes \rho_{M[1]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_M & 0 \\ (d \otimes \sigma_M)\rho_M & \rho_{M[1]} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (id_C \otimes \rho_M)\rho_M & 0 \\ [id_C \otimes (d \otimes \sigma_M)\rho_M]\,\rho_M + (id_C \otimes \rho_{M[1]})(d \otimes \sigma_M)\rho_M & (id_C \otimes \rho_{M[1]})\rho_{M[1]} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Como ρ_M y $\rho_{M[1]}$ son comultiplicaciones, entonces las diagonales coinciden. Para ver que las entradas (2,1) de las matrices coinciden, observemos las siguientes tres igualdades:

$$(\rho \otimes id_{M[1]})(d \otimes \sigma_M)\rho_M = (\rho d \otimes \sigma_M)\rho_M = -(id_C \otimes id_C \otimes \sigma_M)(\rho d \otimes id_M)\rho_M,$$

$$
\begin{aligned}
& [id_C \otimes (d \otimes \sigma_M)\rho_M]\rho_M \\
= \;& -[id_C \otimes (id_C \otimes \sigma_M)(d \otimes id_M)\rho_M]\rho_M \\
= \;& -(id_C \otimes id_C \otimes \sigma_M)(id_C \otimes (d \otimes id_M)\rho_M)\rho_M \\
= \;& -(id_C \otimes id_C \otimes \sigma_M)(id_C \otimes d \otimes id_M)(id_C \otimes \rho_M)\rho_M \\
= \;& -(id_C \otimes id_C \otimes \sigma_M)(id_C \otimes d \otimes id_M)(\rho \otimes id_M)\rho_M \\
= \;& -(id_C \otimes id_C \otimes \sigma_M)((id_C \otimes d)\rho \otimes id_M)\rho_M
\end{aligned}
$$

y, de una manera similar,

$$
\begin{aligned}
& (id_C \otimes \rho_{M[1]})(d \otimes \sigma_M)\rho_M \\
= \;& (d \otimes \rho_{M[1]}\sigma_M)\rho_M \\
= \;& (d \otimes (id_C \otimes \sigma_M)\rho_M)\rho_M \\
= \;& (d \otimes id_C \otimes \sigma_M)(id_C \otimes \rho_M)\rho_M \\
= \;& -(id_C \otimes id_C \otimes \sigma_M)(d \otimes id_C \otimes id_M)(id_C \otimes \rho_M)\rho_M \\
= \;& -(id_C \otimes id_C \otimes \sigma_M)(d \otimes id_C \otimes id_M)(\rho \otimes id_M)\rho_M \\
= \;& -(id_C \otimes id_C \otimes \sigma_M)((d \otimes id_C)\rho \otimes id_M)\rho_M.
\end{aligned}
$$

Sustituyendo cada igualdad en la parte correspondiente de cada matriz, tenemos que ambas entradas de la segunda fila, primera columna, son iguales.

La propiedad relacionada con la counidad se obtiene de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \epsilon \otimes id_M & 0 \\ 0 & \epsilon \otimes id_{M[1]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_M & 0 \\ (d \otimes \sigma_M)\rho_M & \rho_{M[1]} \end{pmatrix} \\
= \;& \begin{pmatrix} (\epsilon \otimes id_M)\rho_M & 0 \\ (\epsilon \otimes id_{M[1]})(d \otimes \sigma_M)\rho_M & (\epsilon \otimes id_{M[1]})\rho_{M[1]} \end{pmatrix} \\
= \;& \begin{pmatrix} \gamma_M & 0 \\ (\epsilon d \otimes \sigma_M)\rho_M & \gamma_{M[1]} \end{pmatrix} \\
= \;& \begin{pmatrix} \gamma_M & 0 \\ 0 & \gamma_{M[1]} \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

donde la última igualdad se debe a la *Proposición* 2.4.

Por último, por como está definida $d_{J(M)}$, se tiene que $|d_{J(M)}| = 1$ y

$d^2_{J(M)} = 0$. Para ver la regla de Leibniz basta notar que

$$\begin{aligned}
\rho_{J(M)} d_{J(M)} &= \begin{pmatrix} 0 & \rho_M \sigma_M^{-1} \\ 0 & (d \otimes \sigma_M)\rho_M \sigma_M^{-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \rho_M \sigma_M^{-1} \\ 0 & (d \otimes id_{M[1]})(id_C \otimes \sigma_M)\rho_M \sigma_M^{-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \rho_M \sigma_M^{-1} \\ 0 & (d \otimes id_{M[1]})\rho_{M[1]} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

y que

$$\begin{aligned}
&(id_C \otimes d_{J(M)} + d \otimes id_{J(M)})\rho_{J(M)} \\
= &\begin{pmatrix} d \otimes id_M & id_C \otimes \sigma_M^{-1} \\ 0 & d \otimes id_{M[1]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_M & 0 \\ (d \otimes \sigma_M)\rho_M & \rho_{M[1]} \end{pmatrix} \\
= &\begin{pmatrix} (d \otimes id_M)\rho_M + (id_C \otimes \sigma_M^{-1})(d \otimes \sigma_M)\rho_M & (id_C \otimes \sigma_M^{-1})\rho_{M[1]} \\ (d^2 \otimes \sigma_M)\rho_M & (d \otimes id_{M[1]})\rho_{M[1]} \end{pmatrix} \\
= &\begin{pmatrix} (d \otimes id_M)\rho_M - (d \otimes id_M)\rho_M & \rho_M \sigma_M^{-1} \\ 0 & (d \otimes id_{M[1]})\rho_{M[1]} \end{pmatrix} \\
= &\begin{pmatrix} 0 & \rho_M \sigma_M^{-1} \\ 0 & (d \otimes id_{M[1]})\rho_{M[1]} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Con esto tenemos que $(J(M), \rho_{J(M)}, d_{J(M)})$ es un comódulo diferencial.

Resulta que $J : C\text{-CoDf} \to C\text{-CoDf}$ también es un funtor si para cada morfismo $f : M \to N$ definimos

$$J(f) := \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f[1] \end{pmatrix}.$$

La conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \oplus M[1] \arrow[r, "\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f{[1]} \end{pmatrix}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 & \sigma_M^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}"'] & N \oplus N[1] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 & \sigma_N^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}"] \\
M \oplus M[1] \arrow[r, "\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f{[1]} \end{pmatrix}"'] & N \oplus N[1]
\end{tikzcd}$$

es clara. Hay que verificar que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \oplus M[1] \arrow[rr, "\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f[1] \end{pmatrix}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} \rho_M & 0 \\ (d\otimes\sigma_M)\rho_M & \rho_{M[1]} \end{pmatrix}"'] & & N \oplus N[1] \arrow[d, "\begin{pmatrix} \rho_N & 0 \\ (d\otimes\sigma_N)\rho_N & \rho_{N[1]} \end{pmatrix}"] \\
(C\otimes M)\oplus(C\otimes M[1]) \arrow[rr, "\begin{pmatrix} id_C\otimes f & 0 \\ 0 & id_C\otimes f[1] \end{pmatrix}"'] & & (C\otimes N)\oplus(C\otimes N[1])
\end{tikzcd}$$

conmuta. La única dificultad es checar que al multiplicar ambos caminos las entradas de la segunda fila, primera columna, coinciden. Eso se obtiene ya que

$$\begin{aligned}
(d\otimes\sigma_N)\rho_N f &= (d\otimes\sigma_N)(id_C\otimes f)\rho_M \\
&= (d\otimes\sigma_N f)\rho_M \\
&= (d\otimes f[1]\sigma_M)\rho_M \\
&= (id_C\otimes f[1])(d\otimes\sigma_M)\rho_M.
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$J(id_M) = \begin{pmatrix} id_M & 0 \\ 0 & id_M[1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} id_M & 0 \\ 0 & id_{M[1]} \end{pmatrix}$$

y, para cualesquiera dos morfismos $f : M \to N$ y $g : N \to L$, se tiene

$$\begin{aligned}
J(g)J(f) &= \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g[1] \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f[1] \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} gf & 0 \\ 0 & g[1]f[1] \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} gf & 0 \\ 0 & (gf)[1] \end{pmatrix} = J(gf).
\end{aligned}$$

Proposición 2.33. Sean X y M dos comódulos diferenciales. Existen dos isomorfismos naturales en ambas variables:

$$\alpha_{X,M} : \mathrm{Hom}_{C\text{-CoDf}}(X, J(M)) \to \mathrm{Hom}_{C\text{-CoGr}}(X, M)$$

tal que $\alpha_{X,M}(f) = \pi_M f$, con π_M la proyección de $J(M)$ a M, y

$$\beta_{X,M} : \mathrm{Hom}_{C\text{-CoDf}}(J(M), X) \to \mathrm{Hom}_{C\text{-CoGr}}(M[1], X)$$

tal que $\beta_{X,M}(f) = f\lambda_{M[1]}$, con $\lambda_{M[1]}$ la inclusión de $M[1]$ a $J(M)$.

Demostración. Sea $f \in \mathrm{Hom}_{C\text{-CoDf}}(X, J(M))$, escribamos a f de la forma

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

con $f_1 : X \to M$ y $f_2 : X \to M[1]$ morfismos. Como f conmuta con las codiferenciales, tenemos que

$$\begin{pmatrix} f_1 d_X \\ f_2 d_X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} d_X = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_M^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_M^{-1} f_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

por lo tanto $f_1 d_X = \sigma_M^{-1} f_2$. La segunda igualdad $f_2 d_X = 0$ es redundante puesto que ya se tiene como consecuencia de la primera igualdad. Esto prueba la inyectividad de $\alpha_{X,M}$ puesto que si dos funciones f y f' son tales que $f_1 = f_1'$, entonces $f_2 = f_2'$. Para ver la suprayectividad basta verificar que si f_1 es un morfismo en $\mathrm{Hom}_{C\text{-CoGr}}(X, M)$, entonces

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \sigma_M f_1 d_X \end{pmatrix}$$

está en $\mathrm{Hom}_{C\text{-CoDf}}(X, J(M))$. Claramente f es homogénea de grado 0 puesto que tanto f_1 como $\sigma_M f_1 d_X$ lo son. Además, f conmuta con las codiferenciales pues

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f_1 \\ \sigma_M f_1 d_X \end{pmatrix} d_X &= \begin{pmatrix} f_1 d_X \\ \sigma_M f_1 d_X^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_1 d_X \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_M^{-1}(\sigma_M f_1 d_X) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_M^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ \sigma_M f_1 d_X \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{pmatrix} \rho_M & 0 \\ (d \otimes \sigma_M)\rho_M & \rho_{M[1]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ \sigma_M f_1 d_X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_M f_1 \\ (d \otimes \sigma_M)\rho_M f_1 + \rho_{M[1]}\sigma_M f_1 d_X \end{pmatrix}.$$

Al manipular la segunda entrada de la segunda parte de la igualdad tenemos

$$\begin{aligned}
& (d\otimes\sigma_M)\rho_M f_1 + \rho_{M[1]}\sigma_M f_1 d_X \\
= \;& (d\otimes\sigma_M)(id_C\otimes f_1)\rho_X + (id_C\otimes\sigma_M)\rho_M f_1 d_X \\
= \;& (d\otimes\sigma_M)(id_C\otimes f_1)\rho_X + (id_C\otimes\sigma_M)(id_C\otimes f_1)\rho_X d_X \\
= \;& (d\otimes\sigma_M)(id_C\otimes f_1)\rho_X + (id_C\otimes\sigma_M)(id_C\otimes f_1)(d\otimes id_X + id_C\otimes d_X)\rho_X \\
= \;& (id_C\otimes\sigma_M f_1)(id_C\otimes d_X)\rho_X \\
= \;& (id_C\otimes(\sigma_M f_1 d_X))\rho_X,
\end{aligned}$$

así

$$\begin{pmatrix} \rho_M & 0 \\ (d\otimes\sigma_M)\rho_M & \rho_{M[1]} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1 \\ \sigma_M f_1 d_X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (id_C\otimes f_1)\rho_X \\ (id_C\otimes(\sigma_M f_1 d_X))\rho_X \end{pmatrix}$$

y se tiene la conmutatividad con las comultiplicaciones.

La naturalidad en M es inmediata ya que si $g : M \to N$ es un morfismo, entonces

$$\alpha_{X,N}J(g)_*(f) = gf_1 = g_*\alpha_{X,M}(f).$$

Chequemos la naturalidad en X. Sea $h : Y \to X$ morfismo, entonces tenemos que

$$\alpha_{Y,M}h^*(f) = \alpha_{Y,M}(fh) = f_1 h = h^*\alpha_{X,M}(f).$$

En el caso de $\beta_{X,M}$, si $f = (f_1, f_2) \in \mathrm{Hom}_{C\text{-CoDf}}(J(M), X)$, la igualdad clave para checar el isomorfismo es $d_X f_2 = f_1\sigma_M^{-1}$, la cual se obtiene por la conmutatividad con las codiferenciales. De aquí, se procede de manera análoga y se obtiene lo deseado. □

Observación 2.34. Esta proposición nos permite tener las siguientes dos transformaciones naturales: $\alpha : id_{C\text{-CoDf}} \to J$ definida como

$$\alpha_M = \alpha^{-1}_{M,M}(id_M) = \begin{pmatrix} id_M \\ \sigma_M d_M \end{pmatrix}$$

y $\beta : J \to T$ definida como

$$\beta_M = \beta^{-1}_{M,M}(id_{M[1]}) = (d_{M[1]}\sigma_M, id_{M[1]}) = (-\sigma_M d_M, id_{M[1]}).$$

Teorema 2.35. La categoría $(C\text{-CoDf}, \mathcal{E}, T, J, \alpha, \beta)$ es una categoría especial de Frobenius.

Demostración. Primero veamos que

$$M \xrightarrow{\alpha_M} J(M) \xrightarrow{\beta_M} T(M)$$

es una $\mathcal{E}$-sucesión. Consideremos las aplicaciones homogéneas de grado 0

$$(id_M, 0) : J(M) \to M \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ id_{M[1]} \end{pmatrix} : T(M) \to J(M).$$

Ambas aplicaciones son morfismos de comódulos graduados ya que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd}
J(M) \arrow[r, "{(id_M,0)}"] \arrow[d, "{\begin{pmatrix} \rho_M & 0 \\ (d\otimes\sigma_M)\rho_M & \rho_{M[1]} \end{pmatrix}}"'] & M \arrow[d, "\rho_M"] \\
(C\otimes M)\oplus(C\otimes M[1]) \arrow[r, "{(id_C\otimes id_M,0)}"'] & C\otimes M
\end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd}
T(M) \arrow[r, "{\begin{pmatrix} 0 \\ id_{M[1]} \end{pmatrix}}"] \arrow[d, "\rho_{M[1]}"'] & J(M) \arrow[d, "{\begin{pmatrix} \rho_M & 0 \\ (d\otimes\sigma_M)\rho_M & \rho_{M[1]} \end{pmatrix}}"] \\
C\otimes T(M) \arrow[r, "{\begin{pmatrix} 0 \\ id_C\otimes id_{M[1]} \end{pmatrix}}"'] & (C\otimes M)\oplus(C\otimes M[1]).
\end{tikzcd}$$

Además se tienen las propiedades

$$(id_M, 0)\begin{pmatrix} id_M \\ \sigma_M d_M \end{pmatrix} = id_M \quad \text{y} \quad (-\sigma_M d_M, id_{M[1]})\begin{pmatrix} 0 \\ id_{M[1]} \end{pmatrix} = id_{M[1]},$$

por lo tanto α_M es monomorfismo y β_M es epimorfismo, ambos en C-CoGr, lo cual implica que también lo son en C-CoDf. Ésto también muestra que la sucesión se divide en C-CoGr.

Veamos ahora que α_M es núcleo de β_M. Sea $h : X \to J(M)$ tal que $\beta_M h = 0$. Por la *Proposición* 2.33 tenemos que h es de la forma

$$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \sigma_M h_1 d_X \end{pmatrix},$$

con $h_1 : X \to M$ en C-CoGr, pero

$$0 = \beta_M h = -\sigma_M d_M h_1 + \sigma_M h_1 d_X;$$

como σ_M es biyectiva, tenemos entonces que $d_M h_1 = h_1 d_X$, es decir, h_1 es de comódulos diferenciales. Por último,

$$\alpha_M h_1 = \left(\begin{array}{c} h_1 \\ \sigma_M d_M h_1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} h_1 \\ \sigma_M h_1 d_X \end{array} \right) = h.$$

Después tenemos que ver que β_M es conúcleo de α_M. Para ello consideremos un morfismo $h : J(M) \to Y$ tal que $h\alpha_M = 0$. De nueva cuenta, por la *Proposicion* 2.33 h debe ser de la forma

$$h = (d_Y h_2 \sigma_M, h_2),$$

pero

$$0 = h\alpha_M = d_Y h_2 \sigma_M + h_2 \sigma_M d_M,$$

de donde se sigue que $-d_Y h_2 \sigma_M = h_2 \sigma_M d_M = -h_2 d_{M[1]} \sigma_M$ y por tanto $d_Y h_2 = h_2 d_{M[1]}$. Finalmente, observemos que se da la identidad

$$h_2 \beta_M = (-h_2 \sigma_M d_M, h_2) = (h_2 d_{M[1]} \sigma_M, h_2) = (d_Y h_2 \sigma_M, h_2) = h.$$

Como siguiente paso, probemos que T preserva $\mathcal{E}$-sucesiones. Sea

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L$$

una $\mathcal{E}$-sucesión, por demostrar

$$M[1] \xrightarrow{f[1]} N[1] \xrightarrow{g[1]} L[1]$$

es una $\mathcal{E}$-sucesión. Por como están definidas $f[1]$ y $g[1]$ tenemos que la primera es monomorfismo y la segunda es epimorfismo. Ahora, consideremos $h : X \to N[1]$ tal que $g[1]h = 0$, entonces $\sigma_L g \sigma_N^{-1} h = 0$ y por lo tanto $g(\sigma_N^{-1} h) = 0$. Como f es núcleo de g, existe $\gamma : X \to M$ tal que $f\gamma = \sigma_N^{-1} h$, así

$$\sigma_N^{-1} f[1] \sigma_M \gamma = \sigma_N^{-1} h$$

con lo cual, debido a que σ_N es biyectiva, se sigue que

$$f[1](\sigma_M \gamma) = h.$$

Análogamente, consideremos $t : N[1] \to Y$ tal que $tf[1] = 0$, entonces $t\sigma_N f \sigma_M^{-1} = 0$ y por lo tanto $(t\sigma_N)f = 0$. Como g es conúcleo de f, existe $\lambda : L \to Y$ tal que $\lambda g = t\sigma_N$, así

$$\lambda \sigma_L^{-1} g[1] \sigma_N = t\sigma_N$$

lo cual implica que

$$(\lambda\sigma_L^{-1})g[1] = t.$$

La sucesión se escinde gracias al *Lema* 2.18, ya que si consideramos f' el morfismo tal que $f'f = id_M$, entonces tenemos que

$$f'[1]f[1] = \sigma_M f'\sigma_N^{-1}\sigma_N f\sigma_M^{-1} = \sigma_M f' f\sigma_M^{-1} = \sigma_M\sigma_M^{-1} = id_{M[1]}.$$

Para continuar, mostraremos que si X es un objeto en C-CoDf, entonces $J(X)$ es proyectivo. Por la *Proposición* 2.33 tenemos que los diagramas

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{C\text{-CoDf}}(J(X),M) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\beta_{X,M}"'] & \mathrm{Hom}_{C\text{-CoDf}}(J(X),N) \arrow[r, "g_*"] \arrow[d, "\beta_{X,N}"'] & \mathrm{Hom}_{C\text{-CoDf}}(J(X),L) \arrow[d, "\beta_{X,L}"'] \\
\mathrm{Hom}_{C\text{-CoGr}}(X[1],M) \arrow[r, "f_*"'] & \mathrm{Hom}_{C\text{-CoGr}}(X[1],N) \arrow[r, "g_*"'] & \mathrm{Hom}_{C\text{-CoGr}}(X[1],L)
\end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{C\text{-CoDf}}(L,J(X)) \arrow[r, "g^*"] \arrow[d, "\alpha_{X,L}"'] & \mathrm{Hom}_{C\text{-CoDf}}(N,J(X)) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\alpha_{X,N}"'] & \mathrm{Hom}_{C\text{-CoDf}}(M,J(X)) \arrow[d, "\alpha_{X,M}"'] \\
\mathrm{Hom}_{C\text{-CoGr}}(L,X) \arrow[r, "g^*"'] & \mathrm{Hom}_{C\text{-CoGr}}(N,X) \arrow[r, "f^*"'] & \mathrm{Hom}_{C\text{-CoGr}}(M,X)
\end{tikzcd}$$

son conmutativos.

En ambos diagramas el segundo renglón es exacto ya que

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L$$

se divide en C-CoGr. Por lo tanto los renglones de la primera fila en cada diagrama son exactos, con lo que se sigue que $J(X)$ es tanto $\mathcal{E}$-proyectivo como $\mathcal{E}$-inyectivo. Estos $J(X)$ también nos brindan suficientes $\mathcal{E}$-proyectivos y suficientes $\mathcal{E}$-inyectivos, cuyas deflaciones e inflaciones son

$$J(X[-1]) \xrightarrow{\beta_{X[-1]}} X[-1][1] = X \qquad \text{y} \qquad X \xrightarrow{\alpha_X} J(X)$$

respectivamente.

Sea I un comódulo $\mathcal{E}$-inyectivo, como $I \xrightarrow{\alpha_I} J(I) \xrightarrow{\beta_I} T(I)$ es una $\mathcal{E}$-sucesión, tenemos que la sucesión

$$\mathrm{Hom}_{C\text{-CoDf}}(T(I),I) \xrightarrow{\beta_I^*} \mathrm{Hom}_{C\text{-CoDf}}(J(I),I) \xrightarrow{\alpha_I^*} \mathrm{Hom}_{C\text{-CoDf}}(I,I)$$

es exacta, por lo tanto α_I^* es suprayectiva y existe un morfismo $\varphi : J(I) \to I$ tal que $\varphi\alpha_I = id_I$. Esto implica que la sucesión

$$I \xrightarrow{\alpha_I} J(I) \xrightarrow{\beta_I} T(I)$$

se divide en C-CoDf. Con esto I es sumando directo de $J(I)$ que es $\mathcal{E}$-proyectivo, por lo tanto I también es $\mathcal{E}$-proyectivo.

Para finalizar la prueba consideremos P un $\mathcal{E}$-proyectivo. Como

$$P[-1] \xrightarrow{\alpha_{P[-1]}} J(P[-1]) \xrightarrow{\beta_{P[-1]}} P$$

es $\mathcal{E}$-sucesión, entonces la sucesión

$$\mathrm{Hom}_{C\text{-CoDf}}(P, P[-1]) \xrightarrow{(\alpha_{P[-1]})_*} \mathrm{Hom}_{C\text{-CoDf}}(P, J(P[-1])) \xrightarrow{(\beta_{P[-1]})_*} \mathrm{Hom}_{C\text{-CoDf}}(P, P)$$

es exacta, por lo tanto $(\beta_{P[-1]})_*$ es suprayectiva y existe una $\psi : P \to J(P[-1])$ tal que $\beta_{P[-1]}\psi = id_P$. Con lo cual, la sucesión

$$P[-1] \xrightarrow{\alpha_{P[-1]}} J(P[-1]) \xrightarrow{\beta_{P[-1]}} P$$

se divide y por ende P es sumando directo de $J(P[-1])$ que es $\mathcal{E}$-inyectivo, por lo tanto P también es $\mathcal{E}$-inyectivo.

Todo esto nos da las condiciones que debe tener una categoría especial de Frobenius. □

Debido al *Lema*, 2.30 la categoría estable C-$\underline{\mathrm{CoDf}}$ es triangulada.

2.4. Comódulos inducidos.

Definición 2.36. Sea $\mathcal{A}$ una subcategoría plena de una categoría triangulada $\mathcal{C}$. Diremos que $\mathcal{A}$ es **subcategoría triangulada** de $\mathcal{C}$ si:

1. $\mathcal{A}$ tiene al objeto cero.

2. Para todo objeto A en $\mathcal{A}$, $T(A)$ y $T^{-1}(A)$ están en $\mathcal{A}$.

3. Si A y B están en $\mathcal{A}$, entonces $A \oplus B$ también está en $\mathcal{A}$.

4. Para todo morfismo $f : A \to B$ en $\mathcal{A}$, existe triángulo

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} T(A)$$

tal que C está en $\mathcal{A}$.

Observación 2.37. Si $\mathcal{A}$ es una subcategoría triangulada de $(\mathcal{C}, \mathcal{T}, T)$, entonces $\mathcal{A}$ es triangulada con triángulos los triángulos de $\mathcal{C}$ que yacen en $\mathcal{A}$. En efecto, el axioma T1 se tiene por las condiciones (1) y (2); T2 es justo la condición (4); T3 y T5 se heredan de $\mathcal{C}$; T4 se sigue de la condición (2); y el axioma T6 se sigue de que la subcategoría es plena (ver [1, Ch. 4.]).

Denotemos como K-Gr la categoría de espacios vectoriales graduados sobre K cuyos morfismos son las funciones lineales homogéneas de grado cero. Dada una coálgebra (C, ρ, ϵ), tenemos el siguiente funtor

$$\mathrm{Ind}_C : K\text{-Gr} \to C\text{-CoGr}$$

tal que a cada espacio M lo manda a $\mathrm{Ind}_C(M) = (C \otimes M, \rho \otimes id_M)$. Como al tensorear a la derecha por la identidad de M se preservan los diagramas de la definición de coálgebras, tenemos que $\rho \otimes id_M$ es una comultiplicación. Ahora, si f es un morfismo, definimos $\mathrm{Ind}_C(f) = id_C \otimes f$. Es claro que éste es un morfismo en C-CoGr, además, $id_C \otimes id_M = id_{C \otimes M}$ y $(id_C \otimes g)(id_C \otimes f) = id_C \otimes gf$. Algunas veces sólo escribiremos Ind en caso de que se sobreentienda a que coálgebra C nos estamos refiriendo.

Proposición 2.38. Sea (C, ρ, ϵ) una coálgebra graduada. Consideremos $T : C\text{-CoDf} \to C\text{-CoDf}$ el funtor translación. Notemos que también se puede pensar en el **funtor translación** $T : K\text{-Gr} \to K\text{-Gr}$ en K-Gr y $T : C\text{-CoGr} \to C\text{-CoGr}$ en C-CoGr. Nuestra afirmación es que se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} K\text{-Gr} \arrow[r, "\mathrm{Ind}"] \arrow[d, "T"'] & C\text{-CoGr} \arrow[d, "T"] \\ K\text{-Gr} \arrow[r, "\mathrm{Ind}"'] & C\text{-CoGr}. \end{tikzcd}$$

Demostración. Sea M un espacio vectorial graduado. Nuestra primera afirmación es que $(C \otimes M)[1] = C \otimes M[1]$. En efecto, para cada $z \in \mathbb{Z}$ se tiene

$$\begin{aligned}((C \otimes M)[1])_z &= \bigoplus_{i+j'=z+1} C_i \otimes M_{j'} \\ &= \bigoplus_{i+j=z} C_i \otimes M_{j+1} \\ &= \bigoplus_{i+j=z} C_i \otimes M[1]_j = (C \otimes M[1])_z.\end{aligned}$$

Notemos que de lo anterior se sigue que $\sigma_{C\otimes M} = id_C \otimes \sigma_M$ y $\sigma^{-1}_{C\otimes M} = id_C \otimes \sigma^{-1}_M$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}(id_C \otimes \sigma_{C\otimes M})(\rho \otimes id_M)\sigma^{-1}_{C\otimes M} &= (id_C \otimes id_C \otimes \sigma_M)(\rho \otimes id_M)(id_C \otimes \sigma^{-1}_M) \\ &= (id_C \otimes id_C \otimes \sigma_M)(\rho \otimes \sigma^{-1}_M) \\ &= \rho \otimes \sigma_M \sigma^{-1}_M = \rho \otimes id_{M[1]}.\end{aligned}$$

De esto se concluye que

$$\begin{aligned}T(\mathrm{Ind}(M)) &= T(C \otimes M, \rho \otimes id_M) \\ &= ((C \otimes M)[1], (id_C \otimes \sigma_{C\otimes M})(\rho \otimes id_M)\sigma^{-1}_{C\otimes M}) \\ &= (C \otimes M[1], \rho \otimes id_{M[1]}) = \mathrm{Ind}(T(M)).\end{aligned}$$

Por último, sea $f \in \mathrm{Hom}_{K\text{-Gr}}(M, N)$, entonces

$$\begin{aligned}T(\mathrm{Ind}(f)) &= \sigma_{C\otimes N}(id_C \otimes f)\sigma^{-1}_{C\otimes M} \\ &= (id_C \otimes \sigma_N)(id_C \otimes f)(id_C \otimes \sigma^{-1}_M) \\ &= (id_C \otimes \sigma_N f \sigma^{-1}_M) = id_C \otimes T(f) = \mathrm{Ind}(T(f)).\end{aligned}$$

□

Observación 2.39. Tenemos el funtor olvidadizo $U : C\text{-CoDf} \to C\text{-CoGr}$ que simplemente a cada objeto (M, ρ_M, d_M) lo manda en $U(M, \rho_M, d_M) = (M, \rho_M)$ y a cada morfismo f lo deja fijo, es decir, $U(f) = f$.

Definición 2.40. A un comódulo (M, ρ_M, d_M) de la categoría C-CoDf tal que $U(M, \rho_M, d_M)$ es isomorfo a uno de la forma $\mathrm{Ind}(N)$ lo llamaremos **comódulo inducido**. A la subcategoría plena de C-CoDf cuyos objetos son los comódulos inducidos se le denotará como C-Ind. Y denotaremos como C-$\underline{\mathrm{Ind}}$ a la subcategoría plena de C-$\underline{\mathrm{CoDf}}$ cuyos objetos son inducidos.

Observación 2.41. La categoría C-$\underline{\text{Ind}}$ es el cociente de la categoría C-Ind módulo el ideal formado por los morfismos que se factorizan a tráves de un $\mathcal{E}$-proyectivo de C-CoDf.

Proposición 2.42. Sea (C, ρ) una coálgebra graduada y sean M y N objetos en K-Gr, entonces

$$\mathrm{Ind}_C(M \oplus N) = \mathrm{Ind}_C(M) \oplus \mathrm{Ind}_C(N).$$

Demostración. Sabemos que $\mathrm{Ind}_C(M \oplus N) = (C \otimes (M \oplus N), \rho \otimes id_{M \oplus N})$; mediante la identificación que se hizo en 2.11, tenemos que

$$\begin{aligned}
& (C \otimes (M \oplus N), \rho \otimes id_{M \oplus N}) \\
= \; & ((C \otimes M) \oplus (C \otimes N), \begin{pmatrix} \rho \otimes id_M & 0 \\ 0 & \rho \otimes id_N \end{pmatrix}) \\
= \; & (C \otimes M, \rho \otimes id_M) \oplus (C \otimes N, \rho \otimes id_N) \\
= \; & \mathrm{Ind}_C(M) \oplus \mathrm{Ind}_C(N).
\end{aligned}$$

□

Proposición 2.43. Sea (C, ρ, d) una coálgebra diferencial, sean (M, ρ_M, d_M) un objeto en C-CoDf y (N, ρ_N) un objeto en C-CoGr. Si $\phi : U(M, \rho_M, d_M) \to (N, \rho_N)$ es un isomorfismo en C-CoGr, entonces $(N, \rho_N, \phi d_M \phi^{-1})$ está en C-CoDf y ϕ resulta ser un isomorfismo en

$$\mathrm{Hom}_{C\text{-CoDf}}((M, \rho_M, d_M), (N, \rho_N, \phi d_M \phi^{-1})).$$

Demostración. Primero veamos que $\phi d_M \phi^{-1}$ es una diferencial. Ya se tiene que es homogénea, pues tanto ϕ como d_M lo son. Además, $|\phi d_M \phi^{-1}| = |\phi| + |d_M| + |\phi^{-1}| = 1$.

Ahora, tenemos que el cuadrado es igual a cero siguiendo las siguientes igualdades

$$(\phi d_M \phi^{-1})^2 = \phi d_M \phi^{-1} \phi d_M \phi^{-1} = \phi d_M d_M \phi^{-1} = \phi d_M^2 \phi^{-1} = 0.$$

Finalmente, veamos que cumple la regla de Leibniz

$$\begin{aligned}
\rho_N \phi d_M \phi^{-1} &= (id_C \otimes \phi)\rho_M d_M \phi^{-1} \\
&= (id_C \otimes \phi)(d \otimes id_M + id_C \otimes d_M)\rho_M \phi^{-1} \\
&= (d \otimes \phi + id_C \otimes \phi d_M)\rho_M \phi^{-1} \\
&= (d \otimes \phi + id_C \otimes \phi d_M)(id_C \otimes \phi^{-1})\rho_N \\
&= (d \otimes id_N + id_C \otimes \phi d_M \phi^{-1})\rho_N.
\end{aligned}$$

Por último, ya se tiene que ϕ es isomorfismo de comódulos graduados. Hay que verificar que conmuta con las diferenciales, pero esto es claro puesto que

$$(\phi d_M \phi^{-1})\phi = \phi d_M \phi^{-1}\phi = \phi d_M.$$

De igual manera

$$\phi^{-1}(\phi d_M \phi^{-1}) = \phi^{-1}\phi d_M \phi^{-1} = d_M \phi^{-1},$$

es decir, ϕ^{-1} conmuta con las diferenciales. Por lo tanto, tanto ϕ como ϕ^{-1} están en C-CoDf y así ϕ es un isomorfismo en

$$\mathrm{Hom}_{C\text{-CoDf}}((M, \rho_M, d_M), (N, \rho_N, \phi d_M \phi^{-1})).$$

$\square$

El objetivo de esta sección es demostrar que C-$\underline{\mathrm{Ind}}$ es una categoría triangulada. Para ello nos haremos valer del siguiente lema:

Lema 2.44. Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana y sean $f : M \to N$ y $g : M \to L$ morfismos. La siguientes afirmaciones son equivalentes:

- El diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[d, "G"] \\ L \arrow[r, "F"'] & X \end{tikzcd}$$

  es un pushout.

- $L \oplus N \xrightarrow{(F,-G)} X$ es conúcleo de $M \xrightarrow{\begin{pmatrix} g \\ f \end{pmatrix}} L \oplus N$.

Teorema 2.45. *C-$\underline{\text{Ind}}$ es una subcategoría triangulada de C-$\underline{\text{CoDf}}$.*

Demostración. Lo primero a observar es que $(C\otimes 0, \rho\otimes id_0) = (0,0)$, por ende $(0,0)$ está en C-Ind, lo que nos da 1 de 2.36.

Probemos la condición 2 de 2.36. Sea (M, ρ_M, d_M) en C-Ind. Sabemos que existe N tal que

$$U(M, \rho_M, d_M) \cong_\phi (C\otimes N, \rho\otimes id_N) = \text{Ind}(N),$$

de donde se sigue que $(M, \rho_M, d_M) \cong (\text{Ind}(N), \phi_M d_M \phi^{-1})$. Entonces,

$$UT(M, \rho_M, d_M) \cong UT(\text{Ind}(N), \phi d_M \phi^{-1}) = T(\text{Ind}(N)).$$

Ahora, de la *Proposición* 2.38 tenemos que $T(\text{Ind}(N)) = \text{Ind}(T(N))$, por lo tanto $T(M, \rho_M, d_M)$ es inducido. De manera análoga, $T^{-1}(M, \rho_M, d_M)$ es inducido.

A continuación veamos 3 de 2.36. Sea $(M_1, \rho_{M_1}, d_{M_1})$ otro objeto en C-Ind. Veamos que la suma directa $(M\oplus M_1, \rho_M \oplus \rho_{M_1}, d_M \oplus d_{M_1})$ es un inducido. Sabemos que existe N_1 tal que

$$U(M_1, \rho_{M_1}, d_{M_1}) \cong (C\otimes N_1, \rho\otimes id_{N_1}) = \text{Ind}(N_1).$$

Por lo tanto

$$U(M\oplus M_1, \rho_M \oplus \rho_{M_1}, d_M \oplus d_{M_1}) \cong \text{Ind}(N) \oplus \text{Ind}(N_1),$$

así, de la *Proposición* 2.42 se concluye que la suma de inducidos es un inducido.

Por último probaremos 4 de 2.36. Sean M y M_1 como antes y sea $f : M \to M_1$ un morfismo en C-Ind, consideremos la sucesión

$$M \xrightarrow{\alpha_M} J(M) \xrightarrow{\beta_M} T(M) \tag{2.3}$$

que está en C-CoDf. De 2.20 sabemos que existe el pushout $[\lambda, F]$ de $[\alpha_M, f]$ que nos da el diagrama conmutativo en C-CoDf:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\alpha_M"] \arrow[d, "f"'] & J(M) \arrow[r, "\beta_M"] \arrow[d, "F"'] & T(M) \arrow[d, equal] \\
M_1 \arrow[r, "\lambda"'] & X \arrow[r, "\gamma"'] & T(M).
\end{tikzcd}$$

Ahora, del cuadrado derecho del diagrama se tiene que $\gamma F = \beta_M$. Por lo tanto, tenemos que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\begin{pmatrix} f \\ \alpha_M \end{pmatrix}"] \arrow[d, equal] & M_1 \oplus J(M) \arrow[r, "(\lambda, -F)"] \arrow[d, "(0, id_{J(M)})"'] & X \arrow[d, "-\gamma"'] \\
M \arrow[r, "\alpha_M"'] & J(M) \arrow[r, "\beta_M"'] & T(M).
\end{tikzcd}$$

De la conmutatividad del cuadrado izquierdo y por 2.15 se tiene que $\begin{pmatrix} f \\ \alpha_M \end{pmatrix}$ es monomorfismo. Ahora, por 2.44 y 2.19, la primera fila es exacta en C-CoDf. Ésta se divide en C-CoGr porque es pullback del segundo renglón que se divide en C-CoGr. Por lo tanto

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\begin{pmatrix} f \\ \alpha_M \end{pmatrix}"] & M_1 \oplus J(M) \arrow[r, "(\lambda, -F)"] & X
\end{tikzcd}$$

es $\mathcal{E}$-exacta y así

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\begin{pmatrix} f \\ \alpha_M \end{pmatrix}"] & M_1 \oplus J(M) \arrow[r, "(\lambda, -F)"] & X \arrow[r, "-\gamma"] & T(M)
\end{tikzcd}$$

es un triángulo canónico módulo $\mathscr{P}$.

Observemos que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & M_1 \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} id_{M_1} \\ 0 \end{pmatrix}"'] & X \arrow[r, "-\gamma"] \arrow[d, equal] & T(M) \arrow[d, equal] \\
M \arrow[r, "\begin{pmatrix} f \\ \alpha_M \end{pmatrix}"'] & M_1 \oplus J(M) \arrow[r, "(\lambda, -F)"'] & X \arrow[r, "-\gamma"'] & T(M)
\end{tikzcd}$$

conmuta módulo $\mathcal{P}$. Más aún,

$$\begin{pmatrix} id_{M_1} & 0 \\ 0 & id_{J(M)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} id_{M_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & id_{J(M)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ id_{J(M)} \end{pmatrix} (0, id_{J(M)})$$

es decir,

$$\begin{pmatrix} id_{M_1} & 0 \\ 0 & id_{J(M)} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} id_{M_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

son equivalentes módulo $\mathcal{P}$. Ahora, la clase $\begin{pmatrix} id_{M_1} \\ 0 \end{pmatrix}$ es un isomorfismo en C-$\underline{\text{CoDf}}$, puesto que

$$(id_{M_1}, 0)\begin{pmatrix} id_{M_1} \\ 0 \end{pmatrix} = id_{M_1}$$

y

$$\begin{pmatrix} id_{M_1} \\ 0 \end{pmatrix}(id_{M_1}, 0) \sim \begin{pmatrix} id_{M_1} & 0 \\ 0 & id_{J(M)} \end{pmatrix} = id_{M_1 \oplus J(M)}.$$

Lo que todo esto nos dice es que, módulo $\mathscr{P}$, se tiene un triángulo

$$M \xrightarrow{f} M_1 \xrightarrow{\lambda} X \xrightarrow{-\gamma} T(M)$$

en C-$\underline{\text{CoDf}}$.

El siguiente paso es notar que X es inducido, para ello, primero veamos que $J(M)$ lo es. En efecto, sabemos que la sucesión 2.3 se escinde en C-CoGr, por lo tanto $UJ(M) \cong_{C\text{-CoGr}} U(M) \oplus U(T(M)) = U(M \oplus T(M))$, pero tanto M como $T(M)$ son inducidos y suma directa de inducidos es inducido. De la demostración de 2.35, se sigue que explícitamente el isomorfismo es

$$\nu := \begin{pmatrix} id_M & 0 \\ -\sigma_M d_M & id_{M[1]} \end{pmatrix} : UJ(M) \to U(M) \oplus UT(M).$$

Usando este isomorfismo, tenemos el diagrama conmutativo en C-CoGr

$$\begin{tikzcd}
U(M) \arrow[r, "\begin{pmatrix} f \\ \alpha_M \end{pmatrix}"] \arrow[d, equal] & U(M_1) \oplus U(J(M)) \arrow[r, "(\lambda, -F)"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} id_{M_1} & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}"'] & U(X) \arrow[d, equal] \\
U(M) \arrow[r, "\begin{pmatrix} f \\ \nu\alpha_M \end{pmatrix}"'] & U(M_1) \oplus U(M \oplus T(M)) \arrow[r, "(\lambda, -F\nu^{-1})"'] & U(X),
\end{tikzcd}$$

con el morfismo vertical un isomorfismo. Como 2.3 (la primera fila) es $\mathcal{E}$-exacta, entonces ésta es exacta y se escinde en C-CoGr, por lo tanto la segunda fila también es exacta y se escinde en C-CoGr. Pero esta última se puede escribir como

$$U(M) \xrightarrow{\begin{pmatrix} f \\ id_M \\ 0 \end{pmatrix}} U(M_1) \oplus U(M) \oplus UT(M) \xrightarrow{(\lambda, -F\nu^{-1})} U(X)\ .$$

Ahora, notemos que bajo una permutación, se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
U(M) \arrow[r, "\begin{pmatrix} f \\ id_M \\ 0 \end{pmatrix}"] \arrow[d, equal] & U(M_1) \oplus U(M) \oplus UT(M) \arrow[r, "(\lambda, -F\nu^{-1})"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 & id_M & 0 \\ id_{M_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & id_{M[1]} \end{pmatrix}"'] & U(X) \arrow[d, equal] \\
U(M) \arrow[r, "\begin{pmatrix} id_M \\ f \\ 0 \end{pmatrix}"'] & U(M) \oplus U(M_1) \oplus UT(M) \arrow[r, "\omega"'] & U(X)
\end{tikzcd},$$

donde ω es la composición de $(\lambda, -F\nu^{-1})$ con la inversa de la permutación. De nueva cuenta, la sucesión del segundo renglón es exacta y se escinde en C-CoGr.

Finalmente, notemos que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
U(M) \arrow[r, "\begin{pmatrix} id_M \\ f \\ 0 \end{pmatrix}"] \arrow[d, equal] & U(M) \oplus U(M_1) \oplus UT(M) \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} id_M & 0 & 0 \\ -f & id_{M_1} & 0 \\ 0 & 0 & id_{M[1]} \end{pmatrix}"'] & U(X) \arrow[d, equal] \\
U(M) \arrow[r, "\begin{pmatrix} id_M \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}"'] & U(M) \oplus U(M_1) \oplus UT(M) \arrow[r, "\omega'"'] & U(X)
\end{tikzcd}$$

conmuta, el morfismo intermedio es un isomorfismo pues es una matriz triangular con identidades en la diagonal. El morfismo ω' es la composición de ω con la inversa del isomorfismo intermedio. Así, el último renglón es exacto y se escinde en C-CoGr.

Con esto concluimos que

$$U(X) \cong_{C\text{-CoGr}} U(M_1) \oplus U(T(M)),$$

es decir, X es inducido. □

Corolario 2.46. C-$\underline{\text{Ind}}$ es una categoría triangulada.

Demostración. Es un caso particular de la *Observación* 2.37. □

Proposición 2.47. Sea (C, ρ, ϵ, d) una coálgebra diferencial, y sea M un espacio vectorial graduado. Entonces, $d \otimes id_M$ es una codiferencial de $\mathrm{Ind}(M)$.

Demostración. Tenemos que $|d \otimes id_M| = |d| + |id_M| = 1$. También,

$$(d \otimes id_M)^2 = (d \otimes id_M)(d \otimes id_M) = (d^2 \otimes id_M) = 0.$$

Por último,

$$\begin{aligned}
(\rho \otimes id_M)(d \otimes id_M) &= \rho d \otimes id_M \\
&= ((d \otimes id_C + id_C \otimes d)\rho) \otimes id_M \\
&= ((d \otimes id_C)\rho + (id_C \otimes d)\rho) \otimes id_M \\
&= (d \otimes id_C)\rho \otimes id_M + (id_C \otimes d)\rho \otimes id_M \\
&= (d \otimes id_C \otimes id_M)(\rho \otimes id_M) + (id_C \otimes d \otimes id_M)(\rho \otimes id_M) \\
&= ((d \otimes id_C \otimes id_M) + (id_C \otimes d \otimes id_M))(\rho \otimes id_M).
\end{aligned}$$

□

Capítulo 3

A_∞-módulos y $TA[1]$-comódulos

En este capítulo introduciremos la coálgebra tensorial de un espacio vectorial graduado y hablaremos de coderivaciones y f-coderivaciones. Presentaremos un funtor fiel y pleno entre la categoría de A_∞-módulos sobre una A_∞-álgebra A y los comódulos diferenciales sobre la coálgebra tensorial $TA[1]$.

3.1. Coálgebra tensorial

Definición 3.1. Sea $V = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} V_i$ un espacio vectorial graduado. Definamos el espacio vectorial

$$\overline{T}V := \bigoplus_{n\geq 1} V^{\otimes i},$$

que graduamos considerando, para cada $n \in \mathbb{Z}$, el subespacio vectorial

$$(\overline{T}V)_n := \langle v_1 \otimes \ldots \otimes v_m \,|\, \forall i \in [1,m]\ v_i \text{ es homogénea y } \sum_{i=1}^{m} |v_i| = n\rangle.$$

Notemos que éste es un caso particular de 1.3 4. Estamos interesados en definir una función que involucra a $\overline{T}V \otimes \overline{T}V$. Para hacer más clara la notación, si estamos hablando de un elemento generador de $V^{\otimes n}$ lo denotaremos como $v_1|\ldots|v_n$ y si nos estamos refiriendo a un elemento de $\overline{T}V \otimes \overline{T}V$ usaremos la notación usual $v \otimes w$.

Ahora definamos la aplicación lineal $\overline{\tau} : \overline{T}V \to \overline{T}V \otimes \overline{T}V$ como sigue: $\overline{\tau}(v) = 0$ si $v \in V$ y para un elemento $v_1|\ldots|v_n \in V^{\otimes n}$ la evaluación será

$$\overline{\tau}(v_1|\ldots|v_n) = \sum_{1\leqslant r<n} (v_1|\ldots|v_r) \otimes (v_{r+1}|\ldots|v_n).$$

Observación 3.2. Notemos que $\overline{\tau}$ es homogénea debido a como fue definida. Además, si $v \in \overline{T}V$ es un elemento homogéneo de la forma $v = v_1|\dots|v_m$, entonces para cada $1 \leqslant r < m$ se tiene que

$$\begin{aligned} |(v_1|\dots|v_r) \otimes (v_{r+1}|\dots|v_m)| &= |(v_1|\dots|v_r)| + |(v_{r+1}|\dots|v_m)| \\ = \sum_{i=1}^{r} |v_i| + \sum_{i=r+1}^{m} |v_i| &= \sum_{i=1}^{m} |v_i| = |v|. \end{aligned}$$

Por lo tanto $|\overline{\tau}(v)| = |v|$, es decir, $\overline{\tau}$ es de grado 0.

En seguida consideremos $TV := K \oplus \overline{T}V$. A este espacio lo pensamos graduado utilizando la *Observación* 1.3. Ahora, definamos la función lineal $\tau : TV \to TV \otimes TV$ tal que

$$\tau(x) = \begin{cases} 1 \otimes x + x \otimes 1 + \overline{\tau}(x) & \text{si } x \in \overline{T}V; \\ 1 \otimes x = x \otimes 1 & \text{si } x \in K. \end{cases}$$

En la siguiente proposición se probará que TV, junto con τ y la proyección canónica $\pi_K : TV \to K$, es una coálgebra graduada. A esta coálgebra se le conoce como la **coálgebra tensorial de** V.

Proposición 3.3. Sea V un espacio vectorial graduado. Entonces (TV, τ, π_K) es una coálgebra graduada.

Demostración. Sea x un elemento homogéneo, entonces x es de la forma $x = k + t$ con $k \in K$ y $t \in \overline{T}V$ homogéneos del mismo grado. Si $k \neq 0$, entonces $|x|$ y $|t|$ son de grado 0 y $\tau(x) = 1 \otimes k + 1 \otimes t + t \otimes 1 + \overline{\tau}(t)$. Nótese que $1 \otimes k$, $1 \otimes t$, $t \otimes 1$ son de grado 0 y ya sabemos que $|\overline{\tau}(t)| = 0$, por lo tanto $|\tau(x)| = 0$. Si $k = 0$, entonces $x = t$, así $\tau(x) = 1 \otimes t + 1 \otimes t + \overline{\tau}(t)$. Además, $|1 \otimes t| = |t \otimes 1| = |t|$ y $|\overline{\tau}(t)| = |t|$, por lo tanto $|\tau(x)| = |t| = |x|$. Así, τ es homogénea de grado 0. Finalmente, que π_K sea homogénea de grado 0 se sigue de que $\pi_K(x) = k$, ya que si $k \neq 0$ entonces $|x| = 0$ y si $k = 0$ entonces $\pi_K(x) = 0 \in K$.

Veamos ahora que $(\tau \otimes id_{TV})\tau = (id_{TV} \otimes \tau)\tau$. Es suficiente probarlo para elementos de K y para elementos homogéneos de $\overline{T}V$ de la forma $t =$

$t_1|\dots|t_m$. Para t se tiene que

$$\begin{aligned}
& (\tau \otimes id_{TV})\tau(t) \\
= \; & (\tau \otimes id_{TV})(1 \otimes t + t \otimes 1 + \overline{\tau}(t)) \\
= \; & \tau(1) \otimes t + \tau(t) \otimes 1 + (\tau \otimes id_{TV})\overline{\tau}(t) \\
= \; & 1 \otimes 1 \otimes t + 1 \otimes t \otimes 1 + t \otimes 1 \otimes 1 + \\
& \overline{\tau}(t) \otimes 1 + \sum_{1 \leqslant r < m} \tau(t_1|...|t_r) \otimes (t_{r+1}|...|t_m),
\end{aligned}$$

pero $\overline{\tau}(t) \otimes 1 + \sum_{1 \leqslant r < m} \tau(t_1|\dots|t_r) \otimes (t_{r+1}|\dots|t_m)$ es igual a

$$\sum_{1 \leqslant r < m} (t_1|...|t_r) \otimes (t_{r+1}|...|t_m) \otimes 1 + \sum_{1 \leqslant r < m} 1 \otimes (t_1|...|t_r) \otimes (t_{r+1}|...|t_m) +$$
$$\sum_{1 \leqslant r < m} (t_1|...|t_r) \otimes 1 \otimes (t_{r+1}|...|t_m) + \sum_{1 \leqslant s < r < m} (t_1|...|t_s) \otimes (t_{s+1}|...|t_r) \otimes (t_{r+1}|...|t_m).$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
& (id_{TV} \otimes \tau)\tau(t) \\
= \; & (id_{TV} \otimes \tau)(1 \otimes t + t \otimes 1 + \overline{\tau}(t)) \\
= \; & 1 \otimes \tau(t) + t \otimes \tau(1) + (id_{TV} \otimes \tau)\overline{\tau}(t) \\
= \; & 1 \otimes 1 \otimes t + 1 \otimes t \otimes 1 + 1 \otimes \overline{\tau}(t) + t \otimes 1 \otimes 1 + \\
& \sum_{1 \leqslant r < m} (t_1|...|t_r) \otimes \tau(t_{r+1}|...|t_m).
\end{aligned}$$

Notemos que $1 \otimes \overline{\tau}(t) + \sum_{1 \leqslant r < m} (t_1|\dots|t_r) \otimes \tau(t_{r+1}|\dots|t_m)$ es igual a

$$\sum_{1 \leqslant r < m} 1 \otimes (t_1|...|t_r) \otimes (t_{r+1}|...|t_m) + \sum_{1 \leqslant r < m} (t_1|...|t_r) \otimes 1 \otimes (t_{r+1}|...|t_m) +$$
$$\sum_{1 \leqslant r < m} (t_1|...|t_r) \otimes (t_{r+1}|...|t_m) \otimes 1 + \sum_{1 \leqslant r < s < m} (t_1|...|t_r) \otimes (t_{r+1}|...|t_s) \otimes (r_{s+1}|...|t_m).$$

De lo anterior se tiene que $(\tau \otimes id_{TV})\tau(t) = (id_{TV} \otimes \tau)\tau(t)$. Ahora, sea $k \in K$, se tiene que

$$(\tau \otimes id_{TV})\tau(k) = (\tau \otimes id_{TV})(1 \otimes k) = \tau(1) \otimes k = 1 \otimes 1 \otimes k$$

y

$$(id_{TV} \otimes \tau)\tau(k) = (id_{TV} \otimes \tau)(1 \otimes k) = 1 \otimes \tau(k) = 1 \otimes 1 \otimes k.$$

Finalmente, tomando t y k como antes, observemos que la relación de la counidad se sigue de las siguientes igualdades:

Para t, se tiene

$$\begin{aligned}(\pi_K \otimes id_{TV})\tau(t) &= (\pi_K \otimes id_{TV})(1 \otimes t + t \otimes 1 + \overline{\tau}(t)) \\ &= \pi_K(1) \otimes t + \pi_K(t) \otimes 1 + (\pi_K \otimes id_{TV})\overline{\tau}(t) \\ &= 1 \otimes t + 0 \otimes 1 + 0 \\ &= 1 \otimes t = \gamma(t)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}(id_{TV} \otimes \pi_K)\tau(t) &= (id_{TV} \otimes \pi_K)(1 \otimes t + t \otimes 1 + \overline{\tau}(t)) \\ &= 1 \otimes \pi_K(t) + t \otimes \pi_K(1) + (id_{TV} \otimes \pi_K)\overline{\tau}(t) \\ &= 1 \otimes 0 + t \otimes 1 + 0 \\ &= t \otimes 1 = \gamma(t).\end{aligned}$$

Para k, se tiene

$$(\pi_K \otimes id_{TV})\tau(k) = (\pi_K \otimes id_{TV})(1 \otimes k) = \pi_K(1) \otimes k = 1 \otimes k = \gamma(k)$$

y

$$(id_{TV} \otimes \pi_K)\tau(k) = (id_{TV} \otimes \pi_K)(1 \otimes k) = 1 \otimes \pi_K(k) = 1 \otimes k = k \otimes 1 = \gamma(k).$$

□

Definición 3.4. Sea C un espacio vectorial graduado. Una **coálgebra graduada no unitaria** es una pareja (C, ρ) donde $\rho : C \to C \otimes C$ es una función lineal homogénea de grado 0 que cumple la regla de coasociatividad (ver 2.1).

Proposición 3.5. Sea V un espacio graduado, entonces $(\overline{T}V, \overline{\tau})$ es una coálgebra graduada no unitaria.

Demostración. Sólo hace falta probar la regla de coasociatividad. Basta probarla para elementos homogéneos de la forma $v = v_1|\dots|v_m$. Por un lado, tenemos

$$\begin{aligned}
(id_{\overline{T}(V)} \otimes \overline{\tau})\overline{\tau}(v) &= (id_{\overline{T}(V)} \otimes \overline{\tau})(\sum_{1\leq r<m} (v_1|...|v_r) \otimes (v_{r+1}|...|v_m)) \\
&= \sum_{1\leq r<m} (v_1|...|v_r) \otimes \overline{\tau}(v_{r+1}|...|v_m) \\
&= \sum_{1\leq r<m} (v_1|...|v_r) \otimes (\sum_{r+1\leq s<m} (v_{r+1}|...|v_s) \otimes (v_{s+1}|...|v_m)) \\
&= \sum_{1\leq r<s<m} (v_1|...|v_r) \otimes (v_{r+1}|...|v_s) \otimes (v_{s+1}|...|v_m).
\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
(\overline{\tau} \otimes id_{\overline{T}V})\overline{\tau}(v) &= (\overline{\tau} \otimes id_{\overline{T}V})(\sum_{1\leq s<m} (v_1|...|v_s) \otimes (v_{s+1}|...|v_m)) \\
&= \sum_{1\leq s<m} \overline{\tau}(v_1|...|v_s) \otimes (v_{s+1}|...|v_m) \\
&= \sum_{1\leq s<m} \sum_{1\leq r<s} (v_1|...|v_r) \otimes (v_{r+1}|...|v_s) \otimes (v_{s+1}|...|v_m) \\
&= \sum_{1\leq r<s<m} (v_1|...|v_r) \otimes (v_{r+1}|...|v_s) \otimes (v_{s+1}|...|v_m).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(id_{\overline{T}V} \otimes \overline{\tau})\overline{\tau} = (\overline{\tau} \otimes id_{\overline{T}V})\overline{\tau}$ □

Definición 3.6. Sea (C, ρ) una coálgebra graduada no unitaria, definimos las **comultiplicaciones iteradas** de la siguiente manera:

$$\rho^0 := id_C \text{ para } n = 0 \text{ y}$$

$$\rho^n := (id_C \otimes \rho^{n-1})\rho : C \to C^{\otimes(n+1)} \text{ para } n \geq 1.$$

Observemos que $\rho^1 = \rho$ y que, para toda $n \in \mathbb{N}$, el grado de ρ^n es cero.

Definición 3.7. Sea (C, ρ) una coálgebra graduada no unitaria y V un espacio vectorial graduado. A una función lineal homogénea $p : C \to V$ de grado 0 se le llama **cogenerador de V asociado a C** si para toda $c \neq 0$ en C existe $n \geq 0$ tal que

$$p^{\otimes(n+1)}\rho^n(c) \neq 0 \text{ está en } V^{\otimes(n+1)}.$$

Proposición 3.8. Sea V un espacio vectorial graduado y sea $(\overline{T}V, \overline{\tau})$ como antes, consideremos la proyección canónica $\overline{p} : \overline{T}V \to V$, entonces:

1. Para toda $s \geq 2$ y todo elemento de la forma $v_1|\ldots|v_n$, se tiene la identidad
$$\overline{\tau}^{s-1}(v_1|...|v_n) = \sum_{1\leq i_1<...<i_{s-1}<i_s=n} (v_1|...|v_{i_1}) \otimes ... \otimes (v_{i_{s-1}+1}|...|v_n).$$

2. $\overline{p}$ es cogenerador.

Demostración. Para el inciso 1 hagamos inducción sobre s. Para $s = 2$ tenemos que $\overline{\tau}^1 = \overline{\tau}$, por lo que la identidad se cumple. Supongamos que la igualdad se cumple para cierto s, queremos probar que se cumple para $s+1$. Esto se muestra con las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
&\overline{\tau}^{(s+1)-1}(v_1|...|v_n) = (id_C \otimes \overline{\tau}^{s-1})\overline{\tau}(v_1|...|v_n)\\
=&(id_C \otimes \overline{\tau}^{s-1}) \left(\sum_{1\leq i_1<n} (v_1|...|v_{i_1}) \otimes (v_{i_1+1}|...|v_n) \right)\\
=& \sum_{1\leq i_1<n} (v_1|...|v_{i_1}) \otimes \overline{\tau}^{s-1}(v_{i_1+1}|...|v_n)\\
=& \sum_{1\leq i_1<n} (v_1|...|v_{i_1}) \otimes \left(\sum_{i_1+1\leq i_2<...<i_s<i_{s+1}=n} (v_{i_1+1}|...|v_{i_2}) \otimes ... \otimes (v_{i_s+1}|...|v_n) \right)\\
=& \sum_{1\leq i_1<n} \sum_{i_1+1\leq i_2<...<i_s<i_{s+1}=n} (v_1|...|v_{i_1}) \otimes ... \otimes (v_{i_s+1}|...|v_n)\\
=& \sum_{1\leq i_1<i_2<...<i_s<i_{s+1}=n} (v_1|...|v_{i_1}) \otimes ... \otimes (v_{i_s+1}|...|v_n).
\end{aligned}$$

Prosigamos con el inciso 2. Primero notemos que si $v_1|\ldots|v_n \neq 0$ es un elemento en $V^{\otimes n}$, entonces
$$\overline{p}^{\otimes n}\overline{\tau}^{n-1}(v_1|...|v_n) = \overline{p}^{\otimes n}(v_1 \otimes ... \otimes v_n) = v_1 \otimes ... \otimes v_n.$$

Ahora, sea $t \neq 0 \in \overline{T}V$, consideremos una expresión reducida $t = \sum_{i=1}^{l} v_1^i|...|v_{n_i}^i$, es decir, una expresión sin sumandos nulos. Enseguida consideremos $n = \min\{n_i\}_{i\in[l]}$. Observemos que si $n_i > n$ entonces $\overline{p}^{\otimes n}\overline{\tau}^{n-1}(v_1^i|...|v_{n_i}^i) = 0$, en efecto, esto se debe a que cada sumando de $\overline{\tau}^{n-1}(v_1^i|...|v_{n_i}^i)$ es de la forma $w_1 \otimes w_2 \otimes \ldots \otimes w_n$ y como $n_i > n$ entonces existe w_r tal que $\overline{p}(w_r) = 0$.

Por lo tanto,

$$\overline{p}^{\otimes n}\overline{\tau}^{n-1}(t) = \sum_{\{i|n_i=n\}} v_1^i \otimes ... \otimes v_{n_i}^i \neq 0 \in V^{\otimes n}.$$

□

3.2. Coderivaciones

Definición 3.9. Sea (C, ρ) una coálgebra graduada no unitaria, diremos que una aplicación lineal $d : C \to C$ es una **coderivación de grado** n si d es homogénea de grado n y cumple la regla de Leibniz:

$$\rho d = (d \otimes id_C + id_C \otimes d)\rho.$$

Proposición 3.10. Si $d : C \to C$ es una coderivación de grado 1 entonces d^2 es una coderivación de grado 2.

Demostración. Probemos la regla de Leibniz:

$$\begin{aligned} \rho d^2 &= (d \otimes id_C + id_C \otimes d)\rho d \\ &= (d \otimes id_C + id_C \otimes d)(d \otimes id_C + id_C \otimes d)\rho \\ &= (d^2 \otimes id_C + d \otimes d - d \otimes d + id_C \otimes d^2)\rho \\ &= (d^2 \otimes id_C + id_C \otimes d^2)\rho. \end{aligned}$$

□

Proposición 3.11. Si $d, d' : C \to C$ son coderivaciones del mismo grado, entonces $d - d'$ es coderivación.

Demostración. Tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \rho(d - d') &= \rho d - \rho d' \\ &= (d \otimes id_C + id_C \otimes d)\rho - (d' \otimes id_C + id_C \otimes d')\rho \\ &= (d \otimes id_C - d' \otimes id_C + id_C \otimes d - id_C \otimes d')\rho \\ &= ((d - d') \otimes id_C + id_C \otimes (d - d'))\rho. \end{aligned}$$

□

Proposición 3.12. Si $d : C \to C$ es coderivación, entonces para toda $n \geq 0$ se tiene que

$$\rho^n d = \left(\sum_{i=0}^{n} id_C^{\otimes i} \otimes d \otimes id_C^{\otimes (n-i)} \right) \rho^n.$$

Demostración. Haremos inducción sobre n. Para $n = 0$ la igualdad es inmediata

$$\rho^0 d = id_C d = d = d id_C = d\rho^0.$$

Para $n = 1$ la igualdad se tiene ya que $\rho^1 = \rho$ y d es coderivación. Supongamos que la igualdad es cierta para n, y veamos que también lo es para $n + 1$. Utilizando la hipótesis de inducción tenemos que

$$\begin{aligned}
&\rho^{n+1} d = (id_C \otimes \rho^n)\rho d = (id_C \otimes \rho^n)(d \otimes id_C + id_C \otimes d)\rho \\
=&(d \otimes \rho^n + id_C \otimes \rho^n d)\rho = [d \otimes \rho^n + id_C \otimes (\sum_{i=0}^{n} id_C^{\otimes i} \otimes d \otimes id_C^{\otimes (n-i)})\rho^n]\rho \\
=&[(d \otimes id_{C^{\otimes (n+1)}})(id_C \otimes \rho^n) + \sum_{i=0}^{n} id_C \otimes (id_C^{\otimes i} \otimes d \otimes id_C^{\otimes (n-i)})\rho^n]\rho \\
=&[(d \otimes id_{C^{\otimes (n+1)}})(id_C \otimes \rho^n) + \sum_{i=0}^{n}(id_C \otimes id_C^{\otimes i} \otimes d \otimes id_C^{\otimes (n-i)})(id_C \otimes \rho^n)]\rho \\
=&[(d \otimes id_{C^{\otimes (n+1)}})(id_C \otimes \rho^n) + (\sum_{i=0}^{n} id_C^{\otimes (i+1)} \otimes d \otimes id_C^{\otimes (n-i)})(id_C \otimes \rho^n)]\rho \\
=&(\sum_{i=0}^{n+1} id_C^{\otimes i} \otimes d \otimes id_C^{\otimes (n+1-i)})(id_C \otimes \rho^n)\rho \\
=&(\sum_{i=0}^{n+1} id_C^{\otimes i} \otimes d \otimes id_C^{\otimes (n+1-i)})\rho^{n+1}.
\end{aligned}$$

□

Proposición 3.13. Sean $d_1, d_2 : C \to C$ dos coderivaciones y $p : C \to V$ un cogenerador. Si $pd_1 = pd_2$, entonces $d_1 = d_2$.

Demostración. La igualdad $pd_1 = pd_2$ es equivalente a que $p(d_1 - d_2) = 0$. Probaremos que si d es una coderivación tal que $pd = 0$ entonces $d = 0$, y así, como $d_1 - d_2$ es coderivación se tendrá que $d_1 - d_2 = 0$, es decir, $d_1 = d_2$.

Procedamos por contradicción. Supongamos que $d \neq 0$, entonces existe $c \in C$ tal que $d(c) \neq 0$. Como p es cogenerador, existe $n \geq 0$ tal que $p^{\otimes(n+1)}\rho^n d(c) \neq 0$. Ahora, de la proposición anterior se sigue que

$$\begin{aligned}
p^{\otimes(n+1)}\rho^n d(c) &= p^{\otimes(n+1)}(\sum_{i=0}^{n} id_C^{\otimes i} \otimes d \otimes id_C^{\otimes(n-i)})\rho^n(c) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{n} p^{\otimes i} \otimes pd \otimes p^{\otimes(n-i)}\right)\rho^n(c) = 0
\end{aligned}$$

puesto que $pd = 0$; lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $d = 0$. □

Notación: Sean $W = \bigoplus_{n\geq 0} W_n$ y X espacios vectoriales y $g : W \to X$ una función lineal. Para cada $n \geq 0$, denotaremos como $g_n : W_n \to X$ a la composición gi_n, donde $i_n : W_n \to W$ es la inclusión canónica. En particular, si se tiene una función $f : \overline{T}V \to W$, denotaremos como f_n a la composición $f\alpha_n$ donde $\alpha_n : V^{\otimes n} \to \overline{T}V$ es la inclusión canónica.

Proposición 3.14. Sea V un espacio vectorial graduado. Consideremos la coálgebra graduada no unitaria $(\overline{T}V, \overline{\tau})$. Sea $f : \overline{T}V \to V$ una función lineal homogénea. Entonces existe coderivación $b_f : \overline{T}V \to \overline{T}V$ de grado $|f|$ tal que $\overline{p}b_f = f$, donde $\overline{p} : \overline{T}V \to V$ es la proyección.

Demostración. Definamos, para cada $n \geq 1$, la función $b_f^n : V^{\otimes n} \to \overline{T}V$ como

$$b_f^n := \sum_{\substack{r+s+t=n \\ s\geq 1;\, r,t\geq 0}} id_V^{\otimes r} \otimes f_s \otimes id_V^{\otimes t}.$$

Recordemos que $id_V^{\otimes 0}$ es simplemente un abuso de notación y que estamos pensando que cuando esto ocurre, este tensor se omite. Es claro que cada b_f^n es homogénea de grado $|f|$. Ahora, gracias a la propiedad universal de la suma directa, tenemos la existencia de $b_f : \overline{T}V \to \overline{T}V$ tal que $b_f\alpha_n = b_f^n$ para toda n. Ya que cada b_f^n es de grado $|f|$, tenemos que b_f también lo es.

Ahora, queremos ver que $\overline{\tau}b_f = (id_{\overline{T}V} \otimes b_f + b_f \otimes id_{\overline{T}V})\overline{\tau}$. Es suficiente probarlo para elementos homogéneos $v_1|\dots|v_n \in V^{\otimes n}$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
&\overline{\tau} b_f(v_1|...|v_n) = \overline{\tau} b_f^n(v_1|...|v_n)\\
&= \overline{\tau}(\sum_{1\leq s<n} f(v_1|...|v_s)|v_{s+1}|...|v_n + \sum_{1\leq r<n} (-1)^{|f|(|v_1|+...+|v_r|)} v_1|...|v_r|f(v_{r+1}|...|v_n) +\\
&\quad \sum_{1\leq r<s<n} (-1)^{|f|(|v_1|+...+|v_r|)} v_1|...|v_r|f(v_{r+1}|...|v_s)|v_{s+1}|...|v_n + f(v_1|...|v_n))\\
&= \sum_{1\leq s<t<n} (f(v_1|...|v_s)|v_{s+1}|...|v_t) \otimes (v_{t+1}|...|v_n) + \sum_{1\leq s<n} f(v_1|...|v_s) \otimes (v_{s+1}|...|v_n) +\\
&\quad \sum_{1\leq t<r<n} (-1)^{|f|(|v_1|+...+|v_r|)} (v_1|...|v_t) \otimes (v_{t+1}|...|v_r|f(v_{r+1}|...|v_n)) +\\
&\quad \sum_{1\leq r<n} (-1)^{|f|(|v_1|+...+|v_r|)} (v_1|...|v_r) \otimes f(v_{r+1}|...|v_n) +\\
&\quad \sum_{1\leq t<r<s<n} (-1)^{|f|(|v_1|+...|v_r|)} (v_1|...|v_t) \otimes (v_{t+1}|...|v_r|f(v_{r+1}|...|v_s)|v_{s+1}|...|v_n) +\\
&\quad \sum_{1\leq r<s<n} (-1)^{|f|(|v_1|+...+|v_r|)} (v_1|...|v_r) \otimes (f(v_{r+1}|...|v_s)|v_{s+1}|...|v_n) +\\
&\quad \sum_{1\leq r<s<n} (-1)^{|f|(|v_1|+...+|v_r|)} (v_1|...|v_r|f(v_{r+1}|...|v_s)) \otimes (v_{s+1}|...|v_n) +\\
&\quad \sum_{1\leq r<s<l<n} (-1)^{|f|(|v_1|+...+|v_r|)} (v_1|...|v_r|f(v_{r+1}|...|v_s)|v_{s+1}|...|v_l) \otimes (v_{l+1}|...|v_n).
\end{aligned}$$

Comparando esto con las igualdades

$$\begin{aligned}
&(id_{\overline{T}V} \otimes b_f)\overline{\tau}(v_1|...|v_n) = (id_{\overline{T}V} \otimes b_f)(\sum_{1\leq r<n} (v_1|...|v_r) \otimes (v_{r+1}|...|v_n))\\
&= \sum_{1\leq r<n} (-1)^{|v_1|+...+|v_r|} (v_1|...|v_r) \otimes b_f(v_{r+1}|...|v_n)\\
&= \sum_{1\leq r<s<n} (-1)^{|f|(|v_1|+...+|v_r|)} (v_1|...|v_r) \otimes (f(v_{r+1}|...|v_s)|v_{s+1}|...|v_n) +\\
&\quad \sum_{1\leq r<r'<n} (-1)^{|f|(|v_1|+...+|v_{r'}|)} (v_1|...|v_r) \otimes (v_{r+1}|...|v_{r'}|f(v_{r'+1}|...|v_n)) +\\
&\quad \sum_{1\leq r<r'<s'<n} (-1)^{|f|(|v_1|+...+|v_{r'}|)} (v_1|...|v_r) \otimes (v_{r+1}|...|v_{r'}|f(v_{r'+1}|...|v_{s'})|v_{s'+1}|...|v_n) +\\
&\quad \sum_{1\leq r<n} (-1)^{|f|(|v_1|+...+|v_r|)} (v_1|...|v_r) \otimes f(v_{r+1}|...|v_n)
\end{aligned}$$

y

$$(b_f \otimes id_{\overline{T}V})\overline{\tau}(v_1|...|v_n) = (b_f \otimes id_{\overline{T}V}) \left(\sum_{1 \leq r < n} (v_1|...|v_r) \otimes (v_{r+1}|...|v_n) \right)$$

$$= \sum_{1 \leq r < n} b_f(v_1|...|v_r) \otimes (v_{r+1}|...|v_n)$$

$$= \sum_{1 \leq s' < r < n} (f(v_1|...|v_{s'})|v_{s'+1}|...|v_r) \otimes (v_{r+1}|...|v_n) +$$

$$\sum_{1 \leq r' < r < n} (-1)^{|f|(|v_1|+...+|v_{r'}|)}(v_1|...|v_{r'}|f(v_{r'+1}|...|v_r)) \otimes (v_{r+1}|...|v_n) +$$

$$\sum_{1 \leq r' < s' < r < n} (-1)^{|f|(|v_1|+...+|v_{r'}|)}(v_1|...|v_{r'}|f(v_{r'+1}|...|v_{s'})|v_{s'+1}|...|v_r) \otimes (v_{r+1}|...|v_n) +$$

$$\sum_{1 \leq r < n} f(v_1|...|v_r) \otimes (v_{r+1}|...|v_n),$$

se tiene lo deseado.

Finalmente,

$$\overline{p}b_f(v_1|...|v_n) = \overline{p}(\sum_{\substack{r+s+t=n \\ s \geq 1;\ r,t \geq 0}} id_V^{\otimes r} \otimes f_s \otimes id_V^{\otimes t})(v_1|...|v_n) = f_n(v_1|...|v_n) = f(v_1|...|v_n).$$

□

Proposición 3.15. Sean $f : \overline{T}V \to V$ y $b_f : \overline{T}V \to \overline{T}V$ la coderivación de la proposición anterior, entonces $b_f^2 = 0$ si y sólo si para toda $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{\substack{r+s+t=n \\ s \geq 1;\ r,t \geq 0}} f_{r+1+t}(id_V^{\otimes r} \otimes f_s \otimes id_V^{\otimes t}) = 0.$$

Demostración. Supongamos $b_f^2 = 0$, entonces $fb_f = \overline{p}b_f^2 = 0$. Evaluemos en un elemento homogéneo $v_1| \ldots |v_n$ la composición anterior

$$\begin{aligned} 0 = fb_f(v_1|...|v_n) &= fb_f^n(v_1|...|v_n) \\ &= f(\textstyle\sum_{\substack{r+s+t=n \\ s \geq 1;\ r,t \geq 0}} id_V^{\otimes r} \otimes f_s \otimes id_V^{\otimes t})(v_1|...|v_n) \\ &= \textstyle\sum_{\substack{r+s+t=n \\ s \geq 1;\ r,t \geq 0}} f(id_V^{\otimes r} \otimes f_s \otimes id_V^{\otimes t})(v_1|...|v_n) \\ &= \textstyle\sum_{\substack{r+s+t=n \\ s \geq 1;\ r,t \geq 0}} f_{r+1+t}(id_V^{\otimes r} \otimes f_s \otimes id_V^{\otimes t})(v_1|...|v_n). \end{aligned}$$

Inversamente, si

$$\sum_{\substack{r+s+t=n\\ s\geq 1;\, r,t\geq 0}} f_{r+1+t}(id_V^{\otimes r}\otimes f_s\otimes id_V^{\otimes t})=0,$$

entonces $0=fb_f=\overline{p}b_f^2$. Dee la *Proposición* 3.8 sabemos que $\overline{p}$ es un cogenerador y, por la *Proposición* 3.13, concluimos que $b_f^2=0$. $\square$

Proposición 3.16. Sea $\overline{d}:\overline{T}V\to\overline{T}V$ una coderivación de $(\overline{T}V,\overline{\tau})$. Entonces existe una única coderivación $d:TV\to TV$ tal que $d\alpha_0=0$ y $\pi d\alpha=\overline{d}$, donde $\pi:TV\to\overline{T}V$ es la proyección canónica y $\alpha:\overline{T}V\to TV$ y $\alpha_0:K\to TV$ son las inclusiones canónicas. Más aún, si $\overline{d}^2=0$, entonces $d^2=0$.

Demostración. Consideremos la función $c_0:K\to TV$ que manda a todo elemento de K en el elemento 0 de TV y consideremos la función $\alpha\overline{d}:\overline{T}V\to TV$. Por la propiedad universal del coproducto tenemos que existe una única $d:TV\to TV$ tal que $d\alpha_0=c_0(K)=0$ y $d\alpha=\alpha\overline{d}$, equivalentemente $\pi d\alpha=\pi\alpha\overline{d}=\overline{d}$.

Supongamos que $\overline{d}^2=0$. De lo anterior tenemos que $d=\alpha\overline{d}\pi$, entonces

$$d^2=(\alpha\overline{d}\pi)^2=\alpha\overline{d}\pi\alpha\overline{d}\pi=\alpha\overline{d}^2\pi=0.$$

Por último, notemos lo siguiente, sean $k\in K$ y $t\in\overline{T}V$ entonces

$$\begin{aligned}
\tau d(k+t) &= \tau\alpha\overline{d}\pi(k+t)=\tau\alpha\overline{d}(t)\\
&= 1\otimes\alpha\overline{d}(t)+\alpha\overline{d}(t)\otimes 1+\overline{\tau}\overline{d}(t)\\
&= 1\otimes d(t)+d(t)\otimes 1+(id_{\overline{T}V}\otimes\overline{d}+\overline{d}\otimes id_{\overline{T}V})\overline{\tau}(t)\\
&= 1\otimes d(t)+d(t)\otimes 1+(id_{TV}\otimes d+d\otimes id_{TV})\overline{\tau}(t)\\
&= (id_{TV}\otimes d+d\otimes id_{TV})(1\otimes t+t\otimes 1+\overline{\tau}(t));
\end{aligned}$$

como $d(k)=0$, se concluye que

$$\begin{aligned}
\tau d(k+t) &= (id_{TV}\otimes d+d\otimes id_{TV})(1\otimes k+1\otimes t+t\otimes 1+\overline{\tau}(t))\\
&= (id_{TV}\otimes d+d\otimes id_{TV})\tau(k+t).
\end{aligned}$$

$\square$

Observación 3.17. Sea $m = \{m_n : A^{\otimes n} \to A\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de funciones homogéneas tales que $|m_n| = 2 - n$, para cada n. Consideremos las funciones definidas por los diagramas:

$$\begin{tikzcd} A^{\otimes n} \arrow[r, "m_n"] \arrow[d, "\sigma^{\otimes n}"'] & A \arrow[d, "\sigma"] \\ A[1]^{\otimes n} \arrow[r, "m'_n"'] & A[1], \end{tikzcd}$$

es decir, para cada n tenemos $m'_n := \sigma m_n(\sigma^{\otimes n})^{-1}$, donde σ es la función homogénea de grado -1 tal que, para $a \in A$, $\sigma(a) = a$. Notemos que cada $m'{}_n$ es de grado 1 y además por la propiedad universal del coproducto tenemos la existencia de una aplicación $m' : \overline{T}A[1] \to A[1]$ homogénea de grado 1 tal que $m'\alpha_n = m'_n$. Gracias a la *Proposición* 3.14, existe una coderivación $b_{m'} : \overline{T}A[1] \to \overline{T}A[1]$ de grado 1 que está determinada por las funciones

$$b^n_{m'} = \sum_{\substack{r+s+t=n \\ s\geq 1;\ r,t\geq 0}} id^{\otimes r}_{A[1]} \otimes m'_s \otimes id^{\otimes t}_{A[1]}.$$

Corolario 3.18. Sea $b_{m'}$ la función anterior, entonces $b_{m'}$ es una codiferencial si y sólo si (A, m) es una A_∞-álgebra.

Demostración. Sabemos que $(b_{m'})^2 = 0$ si y sólo si para toda n

$$\sum_{\substack{r+s+t=n \\ s\geq 1;\ r,t\geq 0}} m'_{r+1+t}(id^{\otimes r}_{A[1]} \otimes m'_s \otimes id^{\otimes t}_{A[1]}) = 0.$$

Pero esto ocurre si y sólo si

$$\begin{aligned}
0 &= \sigma^{-1}\left(\sum_{\substack{r+s+t=n\\ s\geq 1;\ r,t\geq 0}} m'_{r+1+t}(id_{A[1]}^{\otimes r}\otimes m'_s\otimes id_{A[1]}^{\otimes t})\right)\sigma^{\otimes n}\\
&= \sum_{\substack{r+s+t=n\\ s\geq 1;\ r,t\geq 0}} \sigma^{-1}m'_{r+1+t}(id_{A[1]}^{\otimes r}\otimes m'_s\otimes id_{A[1]}^{\otimes t})\sigma^{\otimes n}\\
&= \sum_{\substack{r+s+t=n\\ s\geq 1;\ r,t\geq 0}} (-1)^{-r}m_{r+1+t}(\sigma^{\otimes(r+1+t)})^{-1}(\sigma^{\otimes r}\otimes m'_s\sigma^{\otimes s}\otimes\sigma^{\otimes t})\\
&= \sum_{\substack{r+s+t=n\\ s\geq 1;\ r,t\geq 0}} (-1)^{r}m_{r+1+t}(\sigma^{\otimes(r+1+t)})^{-1}(\sigma^{\otimes r}\otimes \sigma m_s\otimes\sigma^{\otimes t})\\
&= \sum_{\substack{r+s+t=n\\ s\geq 1;\ r,t\geq 0}} (-1)^{r+(-t)(2-s)}m_{r+1+t}(\sigma^{\otimes(r+1+t)})^{-1}(\sigma^{\otimes r}\otimes \sigma\otimes\sigma^{\otimes t})(id_A^{\otimes r}\otimes m_s\otimes id_A^{\otimes t})\\
&= \sum_{\substack{r+s+t=n\\ s\geq 1;\ r,t\geq 0}} (-1)^{r+st}m_{r+1+t}(id_A^{\otimes r}\otimes m_s\otimes id_A^{\otimes t}).
\end{aligned}$$

□

Observación 3.19. De la *Proposición* 3.16 se tiene una codiferencial

$$d_m : TA[1]\to TA[1]$$

dada por la fórmula $d_m = \alpha b_{m'}\pi$.

Definición 3.20. Sea (C,ρ,ϵ,d) una coálgebra diferencial, sean (M,ρ_M) y (N,ρ_N) comódulos graduados y sea $f: M\to N$ un morfismo de comódulos graduados. Diremos que una función homogénea $d_1 : M\to N$ es una f-**coderivación** si $\rho_N d_1 = (id_C\otimes d_1 + d\otimes f)\rho_M$.

Las id_M-coderivaciones son las coderivaciones. Si d_M es una codiferencial de M, entonces d_M es una coderivación.

Observación 3.21. Sean M y N comódulos diferenciales graduados sobre (C,ρ,ϵ,d) y sea $f: M\to N$ morfismo de comódulos graduados. Notemos que

$$\begin{aligned}
\rho_N d_N f &= (id_C\otimes d_N + d\otimes id_N)\rho_N f\\
&= (id_C\otimes d_N + d\otimes id_N)(id_C\otimes f)\rho_M\\
&= (id_C\otimes d_N f + d\otimes f)\rho_M
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\rho_N f d_M &= (id_C \otimes f)\rho_M d_M \\
&= (id_C \otimes f)(id_C \otimes d_M + d \otimes id_M)\rho_M \\
&= (id_C \otimes f d_M + d \otimes f)\rho_M,
\end{aligned}$$

es decir, $d_N f$ y $f d_M$ son f-coderivaciones de grado 1.

Proposición 3.22. Sean M y N comódulos graduados sobre (C, ρ, ϵ, d) y sea $f : M \to N$ morfismo de comódulos graduados. Si d_1 y d_2 son f-coderivaciones del mismo grado, entonces $d_1 - d_2$ es una función homogénea de grado $|d_1|$ que cumple la regla de coasociatividad.

Demostración. Sólo hace falta checar la coasociatividad:

$$\begin{aligned}
\rho_N(d_1 - d_2) &= \rho_N d_1 - \rho_N d_2 \\
&= (id_C \otimes d_1 + d \otimes f)\rho_M - (id_C \otimes d_2 + d \otimes f)\rho_M \\
&= (id_C \otimes d_1 - id_C \otimes d_2)\rho_M \\
&= (id_C \otimes (d_1 - d_2))\rho_M.
\end{aligned}$$

□

3.3. El funtor de A-Mod$_\infty$ a $TA[1]$-CoDf

Proposición 3.23. Sean V espacio vectorial graduado y $\{W_n\}_{n\geq 0}$ una familia de espacios vectoriales graduados. Entonces, se tiene que

$$(\bigoplus_{n\geq 0} W_n) \otimes V \cong \bigoplus_{n\geqslant 0} W_n \otimes V$$

como espacios vectoriales graduados, donde las graduaciones de los productos tensoriales y las sumas se consideran como en 1.3.

Demostración. Para dar el isomorfismo usaremos la propiedad universal del producto tensorial. Consideremos la función

$$f : (\bigoplus_{n\geq 0} W_n) \times V \to \bigoplus_{n\geq 0} W_n \otimes V$$

tal que $f(\sum w_n, v) = \sum w_n \otimes v$. Es claro que ésta es una función K-balanceada por lo tanto existe una función lineal

$$\hat{f} : (\bigoplus_{n\geq 0} W_n) \otimes V \to \bigoplus_{n\geq 0} W_n \otimes V$$

que proviene de f, es decir $\hat{f}((\sum w_n)\otimes v) = \sum w_n \otimes v$. Por como está definida $\hat{f}$, se sigue que ésta es homogénea de grado 0.

Ahora, para cada $m \geq 0$ tenemos la función

$$g_m : W_m \times V \to (\bigoplus_{n\geq 0} W_n) \otimes V$$

definida como $g_m(w_m, v) = w_m \otimes v$. De nueva cuenta, g_m es una función K-balanceada y, por lo tanto, existe una función lineal

$$\hat{g}_m : W_m \otimes V \to (\bigoplus_{n\geq 0} W_n) \otimes V.$$

Estas $\hat{g}_m$'s inducen una función lineal

$$\hat{g} : \bigoplus_{n\geq 0} W_n \otimes V \to (\bigoplus_{n\geq 0} W_n) \otimes V$$

tal que $\hat{g}(\sum w_n \otimes v) = (\sum w_n) \otimes v$. Cada $\hat{g}_m$ es homogénea de grado 0, esto implica que $\hat{g}$ también lo es.

Lo siguiente es darse cuenta que $\hat{f}$ y $\hat{g}$ son inversas una de la otra. En efecto

$$\hat{f}\hat{g}(\sum w_n \otimes v) = \hat{f}((\sum w_n) \otimes v) = \sum w_n \otimes v$$

y

$$\hat{g}\hat{f}((\sum w_n) \otimes v) = \hat{g}(\sum w_n \otimes v) = (\sum w_n) \otimes v.$$

$\square$

Lo anterior nos dice que $(\bigoplus_{n\geq 0} W_n) \otimes V$ es la suma directa de la familia $\{W_n \otimes V\}_{n\geq 0}$.

Corolario 3.24. Sean M y A espacios vectoriales graduados, entonces

$$TA[1] \otimes M[1] \cong \bigoplus_{n\geq 0} A[1]^{\otimes n} \otimes M[1]$$

como espacios vectoriales graduados (con las graduaciones usuales).

Demostración. Es un caso particular del teorema anterior. □

Definición 3.25. Sean M y N espacios vectoriales graduados y sea $n \in \mathbb{Z}$. Denotaremos como $\mathrm{Hom}^n_{K\text{-Gr}}(M,N)$ al conjunto de funciones lineales homogéneas de grado n. Más aún, si M y N son comódulos graduados sobre una coálgebra C, denotaremos como $\mathrm{Hom}^n_{C\text{-CoGr}}(M,N)$ al conjunto de funciones lineales homogéneas de grado n de M a N que cumplen la regla de coasociatividad.

Proposición 3.26. Sean (C,ρ,ϵ) una coálgebra graduada, M y N espacios graduados y $n \in \mathbb{Z}$, entonces se tiene un isomorfismo

$$\Phi : \mathrm{Hom}^n_{C\text{-CoGr}}(\mathrm{Ind}(M), \mathrm{Ind}(N)) \to \mathrm{Hom}^n_{K\text{-Gr}}(C \otimes M, N)$$

definido como $\Phi(u) = \mu_N(\epsilon \otimes id_N)u$, donde $\mu_N : K \otimes N \to N$ es el morfismo multiplicación que tiene N por ser espacio vectorial.

Demostración. Notemos que en efecto $\Phi(u)$ es de espacios graduados pues μ_N, $(\epsilon \otimes id_N)$ y u lo son. Además $|\Phi(u)| = |\mu_N| + |\epsilon| + |id_N| + |u| = n$. Ahora, sea $f \in \mathrm{Hom}^n_{K\text{-Gr}}(C \otimes M, N)$, definamos la inversa como

$$\Psi(f) := (id_C \otimes f)(\rho \otimes id_M).$$

Lo primero que hay que probar es que en efecto $\Psi(f)$ está en

$$\mathrm{Hom}^n_{C\text{-CoGr}}(\mathrm{Ind}(M), \mathrm{Ind}(N)).$$

Esto se tiene ya que $|\Psi(f)| = |id_C| + |f| + |\rho| + |id_M| = n$. La regla de coasociatividad se tiene de la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned}
(\rho \otimes id_N)\Psi(f) &= (\rho \otimes id_N)(id_C \otimes f)(\rho \otimes id_M) \\
&= (\rho \otimes f)(\rho \otimes id_M) \\
&= (id_C \otimes id_C \otimes f)(\rho \otimes id_C \otimes id_M)(\rho \otimes id_M) \\
&= (id_C \otimes id_C \otimes f)((\rho \otimes id_C)\rho \otimes id_M) \\
&= (id_C \otimes id_C \otimes f)((id_C \otimes \rho)\rho \otimes id_M) \\
&= (id_C \otimes id_C \otimes f)(id_C \otimes \rho \otimes id_M)(\rho \otimes id_M) \\
&= (id_C \otimes (id_C \otimes f)(\rho \otimes id_M))(\rho \otimes id_M) \\
&= (id_C \otimes \Psi(f))(\rho \otimes id_M).
\end{aligned}$$

Ahora veamos que Φ y Ψ son inversas una de la otra. Primero, tenemos que

$$\begin{aligned}
\Psi\Phi(u) &= \Psi(\mu_N(\epsilon \otimes id_N)u) \\
&= (id_C \otimes [\mu_N(\epsilon \otimes id_N)u])(\rho \otimes id_M) \\
&= (id_C \otimes [\mu_N(\epsilon \otimes id_N)])(id_C \otimes u)(\rho \otimes id_M) \\
&= (id_C \otimes [\mu_N(\epsilon \otimes id_N)])(\rho \otimes id_N)u \\
&= (id_C \otimes \mu_N)(id_C \otimes \epsilon \otimes id_N)(\rho \otimes id_N)u.
\end{aligned}$$

Observemos que, para todo elemento de la forma $c \otimes k \otimes n$, se tiene que

$$(id_C \otimes \mu_N)(c \otimes k \otimes n) = c \otimes kn = ck \otimes n = (\mu_r \otimes id_N)(c \otimes k \otimes n).$$

Por lo tanto, $(id_C \otimes \mu_N) = (\mu_r \otimes id_N)$; y recordemos que $\mu_r(id_C \otimes \epsilon)\rho = id_C$. Así, de nuestro cálculo previo de $\Psi\Phi(u)$, obtenemos

$$\Psi\Phi(u) = (\mu_r \otimes id_N)(id_C \otimes \epsilon \otimes id_N)(\rho \otimes id_N)u = (id_C \otimes id_N)u = u.$$

Se tiene que

$$\begin{aligned}
\Phi\Psi(f) &= \Phi((id_C \otimes f)(\rho \otimes id_M)) \\
&= \mu_N(\epsilon \otimes id_N)(id_C \otimes f)(\rho \otimes id_M) \\
&= \mu_N(\epsilon \otimes f)(\rho \otimes id_M) \\
&= \mu_N(id_K \otimes f)(\epsilon \otimes id_C \otimes id_M)(\rho \otimes id_M).
\end{aligned}$$

Además, para todo elemento de la forma $k \otimes c \otimes m$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\mu_N(id_K \otimes f)(k \otimes c \otimes m) = \mu_N(k \otimes f(c \otimes m)) = \\
kf(c \otimes m) = f(kc \otimes m) = f\mu_{C\otimes M}(k \otimes c \otimes m).
\end{aligned}$$

Por ende, $\mu_N(id_K \otimes f) = f\mu_{C\otimes M}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\Phi\Psi(f) &= f\mu_{C\otimes M}(\epsilon \otimes id_C \otimes id_M)(\rho \otimes id_M) \\
&= f\mu_{C\otimes M}(\gamma_l \otimes id_M) \\
&= f\mu_{C\otimes M}\gamma_{C\otimes M} = f.
\end{aligned}$$

□

***Notación*:** Con el propósito de simplificar la notación, más adelante denotaremos como q_N a la función $\mu_N(\epsilon \otimes id_N)$ y, en caso de que se sobreentienda de cual N se está hablando, simplemente la denotaremos como q.

Corolario 3.27. Sea (C, ρ, ϵ, d) una coálgebra diferencial y sea M un espacio vectorial graduado. Consideremos $\text{Coder}^1_C(\text{Ind}(M))$ el conjunto de coderivaciones de $\text{Ind}(M)$ de grado 1. Se tiene una biyección

$$\xi : \text{Hom}^1_{C\text{-CoGr}}(\text{Ind}(M), \text{Ind}(M)) \to \text{Coder}^1_C(\text{Ind}(M))$$

dado por $\xi(u) = d \otimes id_M + u$.

Demostración. Veamos que si u es morfismo de grado 1, entonces $\xi(u)$ es coderivación de grado 1. Es claro que $|\xi(u)| = 1$, solamente resta probar la regla de Leibniz

$$\begin{aligned}
& (\rho \otimes id_M)(d \otimes id_M + u) \\
= \quad & (\rho d \otimes id_M) + (\rho \otimes id_M)u \\
= \quad & (d \otimes id_C + id_C \otimes d)\rho \otimes id_M + (id_C \otimes u)(\rho \otimes id_M) \\
= \quad & (d \otimes id_C \otimes id_M + id_C \otimes d \otimes id_M)(\rho \otimes id_M) + (id_C \otimes u)(\rho \otimes id_M) \\
= \quad & (d \otimes id_C \otimes id_M + id_C \otimes d \otimes id_M + id_C \otimes u)(\rho \otimes id_M) \\
= \quad & (d \otimes id_C \otimes id_M + id_C \otimes (d \otimes id_M + u))(\rho \otimes id_M).
\end{aligned}$$

Ahora, sea $d_{\text{Ind}(M)}$ una coderivación de grado 1, definimos

$$\xi^{-1}(d_{\text{Ind}(M)}) = d_{\text{Ind(M)}} - d \otimes id_M.$$

La *Proposición* 2.47 muestra que $d \otimes id_M$ es una codiferencial y de la *Proposición* 3.22 se tiene que $d_{\text{Ind}(M)} - d \otimes id_M$ es coasociativa y homogénea de grado 1. Es claro que ξ y ξ^{-1} son inversas una de la otra. □

Corolario 3.28. Sea (C, ρ, ϵ, d) una coálgebra diferencial y sea M un espacio vectorial graduado. La función

$$\chi : \text{Hom}^1_{K\text{-Gr}}(C \otimes M, M) \to \text{Coder}^1_C(\text{Ind}(M))$$

dada por $\chi(f) = d \otimes id_M + \Psi(f)$ es una biyección.

Demostración. Se sigue del corolario anterior y de la Proposición 3.26. □

Proposición 3.29. Sean (C, ρ, ϵ, d) una coálgebra diferencial, (M, ρ_M) un comódulo graduado sobre C y d_M una coderivación de grado 1. Entonces $d_M^2 \in \mathrm{Hom}^2_{C\text{-CoGr}}(M, M)$.

Demostración. Es debido a las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} \rho_M d_M^2 &= (d \otimes id_M + id_C \otimes d_M)\rho_M d_M \\ &= (d \otimes id_M + id_C \otimes d_M)(d \otimes id_M + id_C \otimes d_M)\rho_M \\ &= (d^2 \otimes id_M + d \otimes d_M - d \otimes d_M + id_C \otimes d_M^2)\rho_M \\ &= (id_C \otimes d_M^2)\rho_M. \end{aligned}$$

□

Observación 3.30. Sean V y M espacios graduados, (TV, τ, π_K) la coálgebra tensorial asociada a V, y $f : \overline{T}V \to V$ y $g : TV \otimes M \to M$ dos funciones homogéneas de grado 1. Consideremos b_f como en 3.14 y $d_f : TV \to TV$ la coderivación asociada a b_f que se obtiene gracias a la *Proposición* 3.16. El *Corolario* 3.28 nos da una coderivación $\chi(g)$ de grado 1; notemos que, por 3.26 y 2.4, se tiene

$$\mu_M(\pi_K \otimes id_M)\chi(g) = \mu_M(\pi_K \otimes id_M)(d_f \otimes id_M + \Psi(g)) = \mu_M(\pi_K d_f \otimes id_M) + g = g.$$

Calculemos de manera explícita quién es $\chi(g)$. Tenemos que ésta está determinada por las funciones $\chi(g)_n := \chi(g)(\alpha_n \otimes id_M)$, donde las funciones $\alpha_n \otimes id_M : V^{\otimes n} \otimes M \to TV \otimes M$ y $\alpha_0 \otimes id_M : K \otimes M \to TV \otimes M$ son las inclusiones.

Explícitamente, si $n \geq 1$,

$$(d_f \otimes id_M)(\alpha_n \otimes id_M) = \sum_{\substack{r+s+t=n \\ s\geq 1;\ r,t\geq 0}} id_V^{\otimes r} \otimes f_s \otimes id_V^{\otimes t} \otimes id_M$$

y, para $v = v_1|\dots|v_n$ y m homogéneos, se tiene que

$$\begin{aligned}
&\Psi(g)_n(v\otimes m) = (id_{TV}\otimes g)(\tau\otimes id_M)(v\otimes m)\\
&= (id_{TV}\otimes g)(1\otimes v\otimes m + v\otimes 1\otimes m + \overline{\tau}(v)\otimes m)\\
&= 1\otimes g(v\otimes m) + v\otimes g(1\otimes m) + (id_{TV}\otimes g)(\sum_{1\le r<n}(v_1|...|v_r)\otimes(v_{r+1}|...|v_n)\otimes m)\\
&= 1\otimes g(v\otimes m) + v\otimes g(1\otimes m) + \sum_{1\le r<n}(-1)^{|v_1|+\dots+|v_r|}(v_1|...|v_r)\otimes g(v_{r+1}|...|v_n\otimes m)\\
&= \gamma g(v\otimes m) + v\otimes g\gamma(m) + \sum_{1\le r<n}(id_V^{\otimes r}\otimes g(id_V^{\otimes n-r}\otimes id_M))(v\otimes m)\\
&= \left[\gamma g_n + id_V^{\otimes n}\otimes g_0\gamma + \sum_{1\le r<n} id_V^{\otimes r}\otimes g_{n-r}\right](v\otimes m).
\end{aligned}$$

Así, para $n\ge 1$,

$$\chi(g)_n = \sum_{\substack{r+s+t=n\\ s\ge 1;\ r,t\ge 0}} id_V^{\otimes r}\otimes f_s\otimes id_V^{\otimes t}\otimes id_M + \sum_{1\le r<n} id_V^{\otimes r}\otimes g_{n-r} + id_V^{\otimes n}\otimes g_0\gamma + \gamma g_n.$$

Si $n = 0$, entonces

$$\chi(g)_0 = (b_f^0\otimes id_M) + \Psi(g)_0 = \Psi(g)_0.$$

Por lo tanto, la evaluación para $k\otimes m$, con $k\in K$ y $m\in M$, es:

$$\begin{aligned}
\Psi(g)_0(k\otimes m) &= (id_{TV}\otimes g)(\tau\otimes id_M)(k\otimes m)\\
= (id_{TV}\otimes g)(1\otimes k\otimes m) &= 1\otimes g(k\otimes m) = \gamma g_0(k\otimes m),
\end{aligned}$$

con lo que

$$\chi(g)_0 = \gamma g_0.$$

Proposición 3.31. Sean V un espacio graduado, (TV,τ,π_K) su coálgebra tensorial asociada, y $f : \overline{T}V \to V$ y $g : TV\otimes M \to M$ dos funciones homogéneas de grado 1. Entonces $\chi(g)^2 = 0$ si y sólo si $g_0\gamma g_0 = 0$ y para toda $n\ge 1$ se tiene que

$$H(g)_1^n + H(g)_2^n + g_n(id_V^{\otimes n}\otimes g_0\gamma) + g_0\gamma g_n = 0,$$

donde
$$H(g)_1^n := \sum_{\substack{r+s+t=n\\ s\geq 1;\, r,t\geq 0}} g_{r+1+t}(id_V^{\otimes r}\otimes f_s\otimes id_V^{\otimes t}\otimes id_M)$$
y
$$H(g)_2^n := \sum_{1\leq r<n} g_r(id_V^{\otimes r}\otimes g_{n-r}).$$

Demostración. De 3.29 sabemos que $\chi(g)^2$ es una función lineal homogénea de grado 2. Así, del isomorfismo en 3.26, tenemos que, $\chi(g)^2=0$ si y sólo si $\Phi(\chi(g)^2)=0$. Notemos que

$$\begin{aligned}
\Phi(\chi(g)^2) &= \mu_M(\pi_K\otimes id_M)\chi(g)^2\\
&= \mu_M(\pi_K\otimes id_M)(d_f\otimes id_M+\Psi(g))\chi(g)\\
&= [\mu_M(\pi_K\otimes id_M)(d_f\otimes id_M)+\mu_M(\pi_K\otimes id_M)\Psi(g)]\,\chi(g)\\
&= [\mu_M(\pi_K d_f\otimes id_M)+g]\,\chi(g)=g\chi(g).
\end{aligned}$$

Pero, $g\chi(g)=0$ si y sólo si $g_0\gamma g_0=0$ y, para $n\geq 1$,
$$H(g)_1^n+H(g)_2^n+g_n(id_V^{\otimes n}\otimes g_0\gamma)+g_0\gamma g_n=0.$$

□

Observación 3.32. Sea (A,m) una A_∞-álgebra y sea M un espacio vectorial graduado junto con una familia de funciones lineales homogéneas $m^M=\{m_n^M : A^{\otimes(n-1)}\otimes M\to M\}_{n\in\mathbb{N}}$ donde cada m_n^M es de grado $2-n$. Definimos, para cada $n\geq 2$, las funciones homogéneas $m_n'^M$ usando los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
A^{\otimes(n-1)}\otimes M \arrow[r, "m_n^M"] \arrow[d, "\sigma^{\otimes(n-1)}\otimes\sigma_M"'] & M \arrow[d, "\sigma_M"] \\
A[1]^{\otimes(n-1)}\otimes M[1] \arrow[r, "m'^M_{n-1}"'] & M[1],
\end{tikzcd}$$

es decir, $m'^M_{n-1}:=\sigma_M m_n^M(\sigma^{\otimes(n-1)}\otimes\sigma_M)^{-1}$. Para $n=1$, la función $m_0'^M$ está dada por el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "m_1^M"] \arrow[d, "\gamma\sigma_M"'] & M \arrow[d, "\sigma_M"] \\
K\otimes M[1] \arrow[r, "m_0'^M"'] & M[1],
\end{tikzcd}$$

es decir, $m_0'^M := \sigma_M m_1^M \sigma_M^{-1}\mu$.

Notemos que cada $m_n'^M$ es de grado 1 y, de la propiedad universal del coproducto, tenemos una función $m'^M : TA[1] \otimes M[1] \to M[1]$ de grado 1, tal que para toda $n \geq 0$ se tiene que $m'^M \alpha_n = m_n'^M$. De 3.28 tenemos que $\chi(m'^M) = (d_m \otimes id_{M[1]}) + \Psi(m'^M)$ es una coderivación.

Proposición 3.33. Sea (A, m) una A_∞-álgebra y sea M un espacio vectorial graduado junto con una familia de funciones lineales homogéneas $m^M = \{m_n^M : A^{\otimes(n-1)} \otimes M \to M\}_{n\in\mathbb{N}}$ donde cada m_n^M es de grado $2-n$. Consideremos m'^M como en la observación anterior, entonces (M, m^M) es un A_∞-módulo si y sólo si $(\mathrm{Ind}_{TA[1]}(M[1]), \chi(m'^M))$ es un $TA[1]$-comódulo diferencial.

Demostración. De la *Proposición* 3.31 tenemos que $\chi(m'^M)^2 = 0$ si y sólo si $m_0'^M \gamma m_0'^M = 0$ y, para toda $n \geq 1$,

$$H(m'^M)_1^n + H(m'^M)_2^n + m_n'^M(id_{A[1]}^{\otimes n} \otimes m_0'^M \gamma) + m_0'^M \gamma m_n'^M = 0.$$

La condición $m_0'^M \gamma m_0'^M = 0$ ocurre si y sólo si $\sigma_M^{-1} m_0'^M \gamma m_0'^M \gamma \sigma_M = 0$, pero

$$\sigma_M^{-1} m_0'^M \gamma m_0'^M \gamma \sigma_M = m_1^M \sigma_M^{-1} \mu \gamma \sigma_M m_1^M = m_1^M \sigma_M^{-1} \sigma_M m_1^M = m_1^M m_1^M = (m_1^M)^2$$

es decir $m_0'^M \gamma m_0'^M = 0$ si y sólo si $(m_1^M)^2 = 0$.

Ahora, observemos que para cada $n \geq 1$,

$$H(m'^M)_1^n + H(m'^M)_2^n + m_n'^M(id_{A[1]}^{\otimes n} \otimes m_0'^M \gamma) + m_0'^M \gamma m_n'^M = 0$$

si y sólo si

$$\sigma_M^{-1}(H(m'^M)_1^n + H(m'^M)_2^n + m_n'^M(id_{A[1]}^{\otimes n} \otimes m_0'^M \gamma) + m_0'^M \gamma m_n'^M)(\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_M) = 0$$

si y sólo si

$$\begin{aligned} &\sigma_M^{-1} H(m'^M)_1^n(\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_M) \;+\; \sigma_M^{-1} H(m'^M)_2^n(\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_M) \\ +\;& \sigma_M^{-1} m_n'^M(id_{A[1]}^{\otimes n} \otimes m_0'^M \gamma)(\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_M) \;+\; \sigma_M^{-1} m_0'^M \gamma m_n'^M(\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_M) = 0. \end{aligned}$$

Analicemos cada sumando de esta última igualdad. Primero notemos que

$$
\begin{aligned}
&\sigma_M^{-1} H(m'^M)_1^n(\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_M) \\
=& \sum_{\substack{r+s+t=n \\ s\geq 1;\, r,t\geq 0}} \sigma_M^{-1} m'^M_{r+1+t}(id_{A[1]}^{\otimes r} \otimes m'_s \otimes id_{A[1]}^{\otimes t} \otimes id_M)(\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_M) \\
=& \sum_{\substack{r+s+t=n \\ s\geq 1;\, r,t\geq 0}} (-1)^{-r} m^M_{r+1+t+1}(\sigma^{\otimes (r+1+t)} \otimes \sigma_M)^{-1}(\sigma^{\otimes r} \otimes m'_s\sigma^{\otimes s} \otimes \sigma^{\otimes t} \otimes \sigma_M) \\
=& \sum_{\substack{r+s+t=n \\ s\geq 1;\, r,t\geq 0}} (-1)^{r} m^M_{r+1+t+1}(\sigma^{\otimes (r+1+t)} \otimes \sigma_M)^{-1}(\sigma^{\otimes r} \otimes \sigma m_s \otimes \sigma^{\otimes t} \otimes \sigma_M) \\
=& \sum_{\substack{r+s+t=n \\ s\geq 1;\, r,t\geq 0}} (-1)^{l} m^M_{r+1+t+1}(\sigma^{\otimes (r+1+t)} \otimes \sigma_M)^{-1}(\sigma^{\otimes (r+1+t)} \otimes \sigma_M)(id_A^{\otimes r} \otimes m_s \otimes id_A^{\otimes t} \otimes id_M) \\
=& \sum_{\substack{r+s+t=n \\ s\geq 1;\, r,t\geq 0}} (-1)^{r+(t+1)s} m^M_{r+1+t+1}(id_A^{\otimes r} \otimes m_s \otimes id_A^{\otimes t} \otimes id_M) \\
=& \sum_{\substack{r+s+t'=n+1 \\ s,t'\geq 1;\, r\geq 0}} (-1)^{r+t's} m^M_{r+1+t'}(id_A^{\otimes r} \otimes m_s \otimes id_A^{\otimes (t'-1)} \otimes id_M)
\end{aligned}
$$

donde $l = r + (-t-1)(2-s)$.

Ahora,

$$
\begin{aligned}
&\sigma_M^{-1} H(m'^M)_2^n(\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_M) \\
=& \sum_{1\leq r<n} \sigma_M^{-1} m'^M_r(id_{A[1]}^{\otimes r} \otimes m'^M_{n-r})(\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_M) \\
=& \sum_{1\leq r<n} (-1)^{-r} m^M_{r+1}(\sigma^{\otimes r} \otimes \sigma_M)^{-1}(\sigma^{\otimes r} \otimes m'^M_{n-r}(\sigma^{\otimes (n-r)} \otimes \sigma_M)) \\
=& \sum_{1\leq r<n} (-1)^{r} m^M_{r+1}(\sigma^{\otimes r} \otimes \sigma_M)^{-1}(\sigma^{\otimes r} \otimes \sigma_M m^M_{n-r+1}) \\
=& \sum_{1\leq r<n} (-1)^{r} m^M_{r+1}(\sigma^{\otimes r} \otimes \sigma_M)^{-1}(\sigma^{\otimes r} \otimes \sigma_M)(id_A^{\otimes r} \otimes m^M_{n-r+1}) \\
=& \sum_{1\leq r<n} (-1)^{r} m^M_{r+1}(id_A^{\otimes r} \otimes m^M_{n-r+1}) \\
=& \sum_{\substack{r+s=n+1 \\ s\geq 2;\, r\geq 1}} (-1)^{r} m^M_{r+1}(id_A^{\otimes r} \otimes m^M_s).
\end{aligned}
$$

También notemos que

$$\begin{aligned}
& \sigma_M^{-1} m_n'^M (id_{A[1]}^{\otimes n} \otimes m_0'^M \gamma)(\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_M) \\
= \ & (-1)^{-n} m_{n+1}^M (\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_M)^{-1} (\sigma^{\otimes n} \otimes m_0'^M \gamma \sigma_M) \\
= \ & (-1)^{n} m_{n+1}^M (\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_M)^{-1} (\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_M m_1^M) \\
= \ & (-1)^{n} m_{n+1}^M (\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_M)^{-1} (\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_M)(id_A^{\otimes n} \otimes m_1^M) \\
= \ & (-1)^{n} m_{n+1}^M (id_A^{\otimes n} \otimes m_1^M).
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\sigma_M^{-1} m_0'^M \gamma m_n'^M (\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_M) &= m_1^M \sigma_M^{-1} \mu \gamma m_n'^M (\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_M) \\
= m_1^M \sigma_M^{-1} \mu \gamma \sigma_M m_{n+1}^M &= m_1^M \sigma_M^{-1} \sigma_M m_{n+1}^M = m_1^M m_{n+1}^M.
\end{aligned}$$

Con esto se concluye que, para toda $n \geq 1$,

$$H(m'^M)_1^n + H(m'^M)_2^n + m_n'^M (id_{A[1]}^{\otimes n} \otimes m_0'^M \gamma) + m_0'^M \gamma m_n'^M = 0$$

si y sólo si, para toda $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{r+s+t'=n+1 \\ s,t' \geq 1;\, r \geq 0}} (-1)^{r+t's} m_{r+1+t'}^M (id_A^{\otimes r} \otimes m_s \otimes id_A^{\otimes (t'-1)} \otimes id_M) \ + \\
& \sum_{\substack{r+s=n+1 \\ s \geq 2;\, r \geq 1}} (-1)^{r} m_{r+1}^M (id_A^{\otimes r} \otimes m_s^M) + (-1)^n m_{n+1}^M (id_A^{\otimes n} \otimes m_1^M) + m_1^M m_{n+1}^M \\
= & \sum_{\substack{r+s+t'=n+1 \\ s,t' \geq 1;\, r \geq 0}} (-1)^{r+t's} m_{r+1+t'}^M (id_A^{\otimes r} \otimes m_s \otimes id_A^{\otimes (t'-1)} \otimes id_M) \ + \\
& \sum_{\substack{r+s=n \\ s \geq 1;\, r \geq 0}} (-1)^{r} m_{r+1}^M (id_A^{\otimes r} \otimes m_s^M) = 0
\end{aligned}$$

es decir, si y sólo si, para cada $n' = n+1 \geq 2$, $R(M)_{n'}^{+} + R(M)_{n'}^{0} = 0$. □

Observación 3.34. Sean A, M y N espacios vectoriales graduados y sea $f = \{f_n : A^{\otimes(n-1)} \otimes M \to N\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de funciones lineales homogéneas tales que $|f_n| = 1 - n$ para cada n. Podemos construir una nueva familia mediante los siguientes diagramas:

Para cada $n \geq 1$,

$$\begin{tikzcd}
A^{\otimes n} \otimes M \arrow[r, "f_{n+1}"] \arrow[d, "\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_M"'] & N \arrow[d, "\sigma_N"] \\
A[1]^{\otimes n} \otimes M[1] \arrow[r, "\hat{f}_n"'] & N[1],
\end{tikzcd}$$

es decir, definimos $\hat{f}_n := \sigma_N f_{n+1}(\sigma_A^{\otimes n} \otimes \sigma_M)^{-1}$.

Para $n = 0$,

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\gamma\sigma_M"'] & N \arrow[d, "\sigma_N"] \\
K \otimes M[1] \arrow[r, "\hat{f}_0"'] & N[1],
\end{tikzcd}$$

es decir, $\hat{f}_0 := \sigma_N f_1 \sigma_M^{-1} \mu_l^{M[1]}$.

Notemos que cada $\hat{f}_n$ es de grado 0 y de la propiedad universal del coproducto y la *Proposición* 3.23 tenemos que la familia de las $\hat{f}_n$'s inducen un morfismo

$$\hat{f} : TA[1] \otimes M[1] \to N[1]$$

en K-Gr. Finalmente, aplicando el isomorfismo Ψ de 3.26 tenemos un morfismo

$$\Psi(\hat{f}) : TA[1] \otimes M[1] \to TA[1] \otimes N[1]$$

en $TA[1]$-CoGr, tal que $q\Psi(\hat{f}) = \hat{f}$.

Recordemos que en la *Observación* 3.30 calculamos una expresión de χ al ser evaluada en una función homogénea $g : \overline{T}V \otimes M \to M$ de grado 1, donde V y M son espacios vectoriales graduados. En particular, se calculó el valor explícito de $\Psi(g)$. Notemos que, el cálculo para $\Psi(g)$ se puede hacer para funciones homogéneas de cualquier grado. Con ello se tiene que, para cada $n \geq 1$,

$$\Psi(\hat{f})_n = \sum_{\substack{s+t=n \\ s,t \geq 1}} id_{A[1]}^{\otimes s} \otimes \hat{f}_t + id_{A[1]}^{\otimes n} \otimes \hat{f}_0 \gamma + \gamma \hat{f}_n,$$

y $\Psi(\hat{f})_0 = \gamma \hat{f}_0$ para $n = 0$.

Corolario 3.35. Sean A, M y N espacios graduados y sea $\mathcal{F}(M,N)$ el conjunto de familias

$$f = \{f_n : A^{\otimes(n-1)} \otimes M \to N\}_{n\in\mathbb{N}}$$

tales que para cada n se tiene que f_n es lineal homogénea de grado $1-n$. Entonces la función que manda a f en $\hat{f}$ es un isomorfismo que va de $\mathcal{F}(M,N)$ a $\mathrm{Hom}_{K\text{-Gr}}(TA[1]\otimes M[1], N[1])$.

Demostración. Hay que dar la inversa. Sea $F : TA[1]\otimes M[1] \to N[1]$ homogénea de grado 0, definimos para cada $n \geq 2$ la función

$$g_n := \sigma_N^{-1} F_{n-1}(\sigma^{\otimes(n-1)} \otimes \sigma_M) : A^{\otimes(n-1)} \otimes M \to N,$$

y $g_1 := \sigma_N^{-1} F_0 \gamma \sigma_M$, para $n = 1$. Es claro que la función que manda a F en $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es la inversa deseada. $\square$

Proposición 3.36. Sean A una A_∞-álgebra, M y N A_∞-módulos y sea $f = \{f_n : A^{\otimes(n-1)} \otimes M \to N\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de funciones lineales homogéneas tales que $|f_n| = 1-n$ para cada n. Considere el morfismo $\hat{f}$ como antes. Entonces, la función $\Psi(\hat{f})$ conmuta con las diferenciales si y sólo si para toda $n \geq 0$

$$\sum_{i=4}^{7} D_n^{(i)} - \sum_{i=1}^{3} D_n^{(i)} = 0$$

donde

$$\begin{aligned}
D_n^{(1)} &:= \sum_{\substack{s+t=n\\ s,t\geq 1}} m_s'^N(id_{A[1]}^{\otimes s} \otimes \hat{f}_t),\\
D_n^{(2)} &:= m_0'^N \gamma \hat{f}_n,\\
D_0^{(3)} &:= 0 \;\text{ y }\; D_n^{(3)} := m_n'^N(id_{A[1]}^{\otimes n} \otimes \hat{f}_0\gamma) \;\text{ para }\; n \geq 1,\\
D_n^{(4)} &:= \sum_{\substack{r+s+t=n\\ s\geq 1;\, r,t\geq 0}} \hat{f}_{r+1+t}(id_{A[1]}^{\otimes r} \otimes m_s' \otimes id_{A[1]}^{\otimes t} \otimes id_{M[1]}),\\
D_n^{(5)} &:= \sum_{\substack{r+s=n\\ s,r\geq 1}} \hat{f}_r(id_{A[1]}^{\otimes r} \otimes m_s'^M),\\
D_0^{(6)} &:= 0 \;\text{ y }\; D_n^{(6)} := \hat{f}_n(id_{A[1]}^{\otimes n} \otimes m_0'^M\gamma) \;\text{ para }\; n \geq 1, \;\text{ y}\\
D_n^{(7)} &:= \hat{f}_0\gamma m_n'^M.
\end{aligned}$$

Demostración. Sabemos que $m'^M = q_{M[1]}\chi(m'^M)$ y $\hat{f} = q_{N[1]}\Psi(\hat{f})$. Por la *Observación* 3.21, $\chi(m'^N)\Psi(\hat{f})$ y $\Psi(\hat{f})\chi(m'^M)$ son $\Psi(\hat{f})$-coderivaciones, por lo tanto, de la *Proposición* 3.22 se sigue que $\Psi(\hat{f})\chi(m'^M) - \chi(m'^N)\Psi(\hat{f})$ es un morfismo de $TA[1]$-comódulos graduados. Así, por 3.26,

$$\begin{aligned}
& \Psi(\hat{f})\chi(m'^M) - \chi(m'^N)\Psi(\hat{f}) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & q_{N[1]}\Psi(\hat{f})\chi(m'^M) - q_{N[1]}\chi(m'^N)\Psi(\hat{f}) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \hat{f}\chi(m'^M) - m'^N\Psi(\hat{f}) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \hat{f}\chi(m'^M)_n - m'^N\Psi(\hat{f})_n = 0, \ \text{ para cada } \ n \geq 0.
\end{aligned}$$

Si $n = 0$ se tiene que $D_0^{(1)} = D_0^{(3)} = D_0^{(4)} = D_0^{(5)} = D_0^{(6)} = 0$, además

$$\hat{f}\chi(m'^M)_0 - m'^N\Psi(\hat{f})_0 = \hat{f}\gamma m_0'^M - m'^N\gamma\hat{f}_0 = \hat{f}_0\gamma m_0'^M - m_0'^N\gamma\hat{f}_0 = D_0^{(7)} - D_0^{(2)}.$$

Consideremos ahora el caso $n \geq 1$.
Analizando primero a $m'^N\Psi(\hat{f})_n$ tenemos que :

$$\begin{aligned}
m'^N\Psi(\hat{f})_n &= m'^N\Big(\sum_{\substack{s+t=n \\ s,t\geq 1}} id_{A[1]}^{\otimes s} \otimes \hat{f}_t + id_{A[1]}^{\otimes n} \otimes \hat{f}_0\gamma + \gamma\hat{f}_n\Big) \\
&= \sum_{\substack{s+t=n \\ s,t\geq 1}} m'^N(id_{A[1]}^{\otimes s} \otimes \hat{f}_t) + m'^N(id_{A[1]}^{\otimes n} \otimes \hat{f}_0\gamma) + m'^N\gamma\hat{f}_n \\
&= D_n^{(1)} + D_n^{(2)} + D_n^{(3)}.
\end{aligned}$$

Enseguida, por 3.30, se tiene que $\hat{f}\chi(m'^M)_n$ es igual a:

$$\hat{f}\Big(\textstyle\sum_{\substack{r+s+t=n \\ s\geq 1;\, r,t\geq 0}} id_{A[1]}^{\otimes r} \otimes m'_s \otimes id_{A[1]}^{\otimes t} \otimes id_{M[1]} + \sum_{\substack{r+s=n \\ r,s\geq 1}} id_{A[1]}^{\otimes r} \otimes m_s'^M + id_{A[1]}^{\otimes n} \otimes m_0'^M\gamma + \gamma m_n'^M\Big)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{r+s+t=n \\ s\geq 1;\, r,t\geq 0}} \hat{f}(id_{A[1]}^{\otimes r} \otimes m'_s \otimes id_{A[1]}^{\otimes t} \otimes id_{M[1]}) \\
&\quad + \sum_{\substack{r+s=n \\ r,s\geq 1}} \hat{f}(id_{A[1]}^{\otimes r} \otimes m_s'^M) + \hat{f}(id_{A[1]}^{\otimes n} \otimes m_0'^M\gamma) + \hat{f}\gamma m_n'^M \\
&= D_n^{(4)} + D_n^{(5)} + D_n^{(6)} + D_n^{(7)}.
\end{aligned}$$

De las igualdades anteriores se concluye el resultado. $\square$

Observación 3.37. Sea A una A_∞-álgebra y sea $f : M \to N$ un morfismo de A_∞-módulos. Entonces, usando la notación de la *Definición* 1.14, para cada cada $n \geq 1$ se tienen las igualdades $R(f)_n^+ = Z_n^{(4)}$, $R(f)_n^0 = Z_n^{(5)} + Z_n^{(6)} + Z_n^{(7)}$ y $R(f)_n^- = Z_n^{(1)} + Z_n^{(2)} + Z_n^{(3)}$, donde

$$
\begin{aligned}
Z_n^{(1)} &:= \sum_{\substack{s+t=n \\ s\geq 1,\ t\geq 2}} m_{s+1}^N (id_A^{\otimes s} \otimes f_t), \\
Z_n^{(2)} &:= m_1^N f_n, \\
Z_1^{(3)} &:= 0 \ \text{ y } \ Z_n^{(3)} := m_n^N (id_A^{\otimes (n-1)} \otimes f_1) \ \text{ para } \ n \geq 2, \\
Z_n^{(4)} &:= \sum_{\substack{r+s+t=n \\ s,t\geq 1;\ r\geq 0}} (-1)^{r+st} f_{r+1+t} (id_A^{\otimes r} \otimes m_s \otimes id_A^{\otimes (t-1)} \otimes id_M), \\
Z_n^{(5)} &:= \sum_{\substack{r+s=n \\ s\geq 2;\ r\geq 1}} (-1)^r f_{r+1} (id_A^{\otimes r} \otimes m_s^M), \\
Z_1^{(6)} &:= 0 \ \text{ y } \ Z_n^{(6)} := (-1)^{n-1} f_n (id_A^{\otimes (n-1)} \otimes m_1^M) \ \text{ para } \ n \geq 2, \ \text{ y} \\
Z_n^{(7)} &:= f_1 m_n^M.
\end{aligned}
$$

Teorema 3.38. Sea (A, m) una A_∞-álgebra, sean (M, m^M) y (N, m^N) A_∞-módulos y sea $f = \{f_n : A^{\otimes(n-1)} \otimes M \to N\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de funciones lineales graduadas de grado $1-n$ cada una. Consideremos $\hat{f}$ como en 3.34, entonces

$$\Psi(\hat{f}) : (\mathrm{Ind}_{TA[1]}(M[1]), \chi(m'^M)) \to (\mathrm{Ind}_{TA[1]}(N[1]), \chi(m'^N))$$

está en $TA[1]$-CoDf si y sólo si $f : (M, m^M) \to (N, m^N)$ está en A-Mod_∞.

Demostración. De 3.36 sabemos que $\Psi(\hat{f})\chi(m'^M) = \chi(m'^N)\Psi(\hat{f})$ si y sólo si para cada $n \geq 0$ se cumple $\sum_{i=4}^7 D_n^{(i)} - \sum_{i=1}^3 D_n^{(i)} = 0$. Veamos que esto sucede si y sólo si para cada $n \geq 1$ se tiene la igualdad

$$R(f)_n^+ + R(f)_n^0 - R(f)_n^- = \sum_{i=4}^7 Z_n^{(i)} - \sum_{i=1}^3 Z_n^{(i)} = 0.$$

Cuando $n = 0$, que $\sum_{i=4}^7 D_0^{(i)} - \sum_{i=1}^3 D_0^{(i)}$ sea igual a cero es equivalente a que $\sum_{i=4}^7 \sigma_N^{-1} D_0^{(i)} \gamma\sigma_M - \sum_{i=1}^3 \sigma_N^{-1} D_0^{(i)} \gamma\sigma_M$ sea cero. Notemos que $D_0^{(1)} =$

$D_0^{(4)} = D_0^{(5)} = 0$ puesto que son la suma vacía, y por definición $D_0^{(3)} = D_0^{(6)} = 0$. De igual manera, $Z_1^{(1)} = Z_1^{(3)} = Z_1^{(4)} = Z_1^{(5)} = Z_1^{(6)} = 0$. Nuestra primera afirmación es que $\sigma_N^{-1} D_0^{(i)} \gamma \sigma_M = Z_1^{(i)}$; sólo hace falta verificarlo para $i = 2, 7$. En efecto:

$$\begin{aligned} \sigma_N^{-1} D_0^{(2)} \gamma \sigma_M &= \sigma_N^{-1} m_0'^N \gamma \hat{f}_0 \gamma \sigma_M = m_1^N \sigma_N^{-1} \mu \gamma \hat{f}_0 \gamma \sigma_M \\ = m_1^N \sigma_N^{-1} \hat{f}_0 \gamma \sigma_M &= m_1^N \sigma_N^{-1} \sigma_N f_1 = m_1^N f_1 = Z_1^{(2)} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \sigma_N^{-1} D_0^{(7)} \gamma \sigma_M &= \sigma_N^{-1} \hat{f}_0 \gamma m_0'^M \gamma \sigma_M = f_1 \sigma_M^{-1} \mu \gamma m_0'^M \gamma \sigma_M \\ = f_1 \sigma_M^{-1} m_0'^M \gamma \sigma_M &= f_1 \sigma_M^{-1} \sigma_M m_1^M = f_1 m_1^M = Z_1^{(7)}. \end{aligned}$$

La segunda afirmación es que para toda $n \geq 1$ y para cada i se tiene la igualdad $\sigma_N^{-1} D_n^{(i)} (\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_M) = Z_{n+1}^{(i)}$. Esto se obtiene como sigue:

Si $i = 1$,

$$\begin{aligned} & \sigma_N^{-1} D_n^{(1)} (\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_M) \\ = & \sum_{\substack{s+t=n \\ s,t \geq 1}} \sigma_N^{-1} m_s'^N (id_{A[1]}^{\otimes s} \otimes \hat{f}_t)(\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_M) \\ = & \sum_{\substack{s+t=n \\ s,t \geq 1}} m_{s+1}^N (\sigma^{\otimes s} \otimes \sigma_N)^{-1} (\sigma^{\otimes s} \otimes \hat{f}_t (\sigma^{\otimes t} \otimes \sigma_M)) \\ = & \sum_{\substack{s+t=n \\ s,t \geq 1}} m_{s+1}^N (\sigma^{\otimes s} \otimes \sigma_N)^{-1} (\sigma^{\otimes s} \otimes \sigma_N f_{t+1}) \\ = & \sum_{\substack{s+t=n \\ s,t \geq 1}} m_{s+1}^N (\sigma^{\otimes s} \otimes \sigma_N)^{-1} (\sigma^{\otimes s} \otimes \sigma_N)(id_A^{\otimes s} \otimes f_{t+1}) \\ = & \sum_{\substack{s+t'=n+1 \\ s \geq 1;\, t' \geq 2}} m_{s+1}^N (id_A^{\otimes s} \otimes f_{t'}) = Z_{n+1}^{(1)}. \end{aligned}$$

Si $i = 2$,

$$\begin{aligned} & \sigma_N^{-1} D_n^{(2)} (\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_M) \\ = & \sigma_N^{-1} m_0'^N \gamma \hat{f}_n (\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_M) \\ = & m_1^N \sigma_N^{-1} \mu \gamma \hat{f}_n (\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_M) \\ = & m_1^N \sigma_N^{-1} \hat{f}_n (\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_M) \\ = & m_1^N f_{n+1} = Z_{n+1}^{(2)}. \end{aligned}$$

Si $i = 3$,

$$
\begin{aligned}
& \sigma_N^{-1} D_n^{(3)}(\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_M) \\
= \; & \sigma_N^{-1} m_n'^N (id_{A[1]}^{\otimes n} \otimes \hat{f}_0\gamma)(\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_M) \\
= \; & m_{n+1}^N (\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_N)^{-1}(\sigma^{\otimes n} \otimes \hat{f}_0 \gamma \sigma_M) \\
= \; & m_{n+1}^N (\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_N)^{-1}(\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_N f_1) \\
= \; & m_{n+1}^N (\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_N)^{-1}(\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_N)(id_A^{\otimes n} \otimes f_1) \\
= \; & m_{n+1}^N (id_A^{\otimes n} \otimes f_1) = Z_{n+1}^{(3)}.
\end{aligned}
$$

Si $i = 4$,

$$
\begin{aligned}
& \sigma_N^{-1} D_n^{(4)}(\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_M) \\
= & \sum_{\substack{r+s+t=n \\ s\geq 1,\, r,t\geq 0}} \sigma_N^{-1} \hat{f}_{r+1+t}(id_{A[1]}^{\otimes r} \otimes m_s' \otimes id_{A[1]}^{\otimes t} \otimes id_{M[1]})(\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_M) \\
= & \sum_{\substack{r+s+t=n \\ s\geq 1,\, r,t\geq 0}} (-1)^{-r} f_{r+1+t+1}(\sigma^{\otimes(r+1+t)} \otimes \sigma_M)^{-1}(\sigma^{\otimes r} \otimes m_s' \sigma^{\otimes s} \otimes \sigma^{\otimes t} \otimes \sigma_M) \\
= & \sum_{\substack{r+s+t=n \\ s\geq 1,\, r,t\geq 0}} (-1)^{r} f_{r+1+t+1}(\sigma^{\otimes(r+1+t)} \otimes \sigma_M)^{-1}(\sigma^{\otimes r} \otimes \sigma m_s \otimes \sigma^{\otimes t} \otimes \sigma_M) \\
= & \sum_{\substack{r+s+t=n \\ s\geq 1,\, r,t\geq 0}} (-1)^{l} f_{r+1+t+1}(\sigma^{\otimes(r+1+t)} \otimes \sigma_M)^{-1}(\sigma^{\otimes(r+1+t)} \otimes \sigma_M)(id_A^{\otimes r} \otimes m_s \otimes id_A^{\otimes t} \otimes id_M) \\
= & \sum_{\substack{r+s+t=n \\ s\geq 1,\, r,t\geq 0}} (-1)^{r+s(t+1)} f_{r+1+t+1}(id_A^{\otimes r} \otimes m_s \otimes id_A^{\otimes t} \otimes id_M) \\
= & \sum_{\substack{r+s+t'=n+1 \\ s,t'\geq 1,\, r\geq 0}} (-1)^{r+st'} f_{r+1+t'}(id_A^{\otimes r} \otimes m_s \otimes id_A^{\otimes (t'-1)} \otimes id_M) = Z_{n+1}^{(4)},
\end{aligned}
$$

donde $l = r + (-t-1)(2-s)$.

Si $i = 5$,

$$\begin{aligned}
& \sigma_N^{-1} D_n^{(5)}(\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_M) \\
= & \sum_{\substack{r+s=n \\ r,s\geq 1}} \sigma_N^{-1} \hat{f}_r(id_{A[1]}^{\otimes r} \otimes m_s'^M)(\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_M) \\
= & \sum_{\substack{r+s=n \\ r,s\geq 1}} (-1)^{-r} f_{r+1}(\sigma^{\otimes r} \otimes \sigma_M)^{-1}(\sigma^{\otimes r} \otimes m_s'^M(\sigma^{\otimes s} \otimes \sigma_M)) \\
= & \sum_{\substack{r+s=n \\ r,s\geq 1}} (-1)^{r} f_{r+1}(\sigma^{\otimes r} \otimes \sigma_M)^{-1}(\sigma^{\otimes r} \otimes \sigma_M m_{s+1}^M) \\
= & \sum_{\substack{r+s=n \\ r,s\geq 1}} (-1)^{r} f_{r+1}(\sigma^{\otimes r} \otimes \sigma_M)^{-1}(\sigma^{\otimes r} \otimes \sigma_M)(id_A^{\otimes r} \otimes m_{s+1}^M) \\
= & \sum_{\substack{r+s'=n+1 \\ s'\geq 2;\, r\geq 1}} (-1)^{r} f_{r+1}(id_A^{\otimes r} \otimes m_{s'}^M) = Z_{n+1}^{(5)}.
\end{aligned}$$

Si $i = 6$,

$$\begin{aligned}
& \sigma_N^{-1} D_n^{(6)}(\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_M) \\
= & \sigma_N^{-1} \hat{f}_n(id_{A[1]}^{\otimes n} \otimes m_0'^M \gamma)(\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_M) \\
= & (-1)^{-n} f_{n+1}(\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_M)^{-1}(\sigma^{\otimes n} \otimes m_0'^M \gamma \sigma_M) \\
= & (-1)^{n} f_{n+1}(\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_M)^{-1}(\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_M m_1^M) \\
= & (-1)^{n} f_{n+1}(\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_M)^{-1}(\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_M)(id_A^{\otimes n} \otimes m_1^M) \\
= & (-1)^{n} f_{n+1}(id_A^{\otimes n} \otimes m_1^M) = Z_{n+1}^{(6)}.
\end{aligned}$$

Si $i = 7$,

$$\begin{aligned}
& \sigma_N^{-1} D_n^{(7)}(\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_M) \\
= & \sigma_N^{-1} \hat{f}_0 \gamma m_n'^M(\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_M) \\
= & f_1 \sigma_M^{-1} \mu \gamma m_n'^M(\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_M) \\
= & f_1 \sigma_M^{-1} m_n'^M(\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_M) \\
= & f_1 m_{n+1}^M = Z_{n+1}^{(7)}.
\end{aligned}$$

De esto se concluye lo deseado. □

Proposición 3.39. Sea (A, m) una A_∞-álgebra. Sean (M, m^M), (N, m^N) y (L, m^L) A_∞-módulos y $f = \{f_n : A^{\otimes(n-1)} \otimes M \to N\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $g = \{g_n : A^{\otimes(n-1)} \otimes N \to L\}_{n\in\mathbb{N}}$ morfismos de A_∞-módulos. Entonces $g \circ f$, la composición definida en la demostración del *Teorema* 1.16, es un morfismo de A_∞-módulos.

Demostración. Del *Teorema* 3.38 sabemos que tanto $\Psi(\hat{g})$ como $\Psi(\hat{f})$ son morfismos de $TA[1]$-comódulos diferenciales, por lo tanto $\Psi(\hat{g})\Psi(\hat{f})$ también lo es. La demostración consiste en probar que $\Psi(\widehat{g \circ f}) = \Psi(\hat{g})\Psi(\hat{f})$ y así, de nueva cuenta por 3.38, se concluye que $g \circ f$ es morfismo de A_∞-módulos.

Notemos que es suficiente mostrar que, para cada $n \geq 0$, se tiene que $\Psi(\widehat{g \circ f})_n = \Psi(\hat{g})\Psi(\hat{f})_n$

Primero veamos explícitamente quién es $\Psi(\hat{g})\Psi(\hat{f})_n$.

Para $n = 0$,

$$\Psi(\hat{g})\Psi(\hat{f})_0 = \Psi(\hat{g})\gamma\hat{f}_0 = \gamma\hat{g}_0\gamma\hat{f}_0.$$

Para $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
&\Psi(\hat{g})\Psi(\hat{f})_n \\
=&\Psi(\hat{g})\Big(\sum_{\substack{u+v=n \\ u,v\geq 1}} id_{A[1]}^{\otimes u} \otimes \hat{f}_v + id_{A[1]}^{\otimes n} \otimes \hat{f}_0\gamma + \gamma\hat{f}_n\Big) \\
=&\sum_{\substack{u+v=n \\ u,v\geq 1}} \Psi(\hat{g})(id_{A[1]}^{\otimes u} \otimes \hat{f}_v) + \Psi(\hat{g})(id_{A[1]}^{\otimes n} \otimes \hat{f}_0\gamma) + \Psi(\hat{g})\gamma\hat{f}_n.
\end{aligned}$$

Desarrollando cada sumando se tiene:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{u+v=n \\ u,v\geq 1}} \Psi(\hat{g})(id_{A[1]}^{\otimes u} \otimes \hat{f}_v) \\
=&\sum_{\substack{u+v=n \\ u,v\geq 1}} \Big(\sum_{\substack{r+s=u \\ r,s\geq 1}} id_{A[1]}^{\otimes r} \otimes \hat{g}_s + id_{A[1]}^{\otimes u} \otimes \hat{g}_0\gamma + \gamma\hat{g}_u\Big)(id_{A[1]}^{\otimes u} \otimes \hat{f}_v) \\
=&\sum_{\substack{r+s+v=n \\ r,s,v\geq 1}} id_{A[1]}^{\otimes r} \otimes \hat{g}_s(id_{A[1]}^{\otimes s} \otimes \hat{f}_v) + \sum_{\substack{u+v=n \\ u,v\geq 1}} id_{A[1]}^{\otimes u} \otimes \hat{g}_0\gamma\hat{f}_v + \sum_{\substack{u+v=n \\ u,v\geq 1}} \gamma\hat{g}_u(id_{A[1]}^{\otimes u} \otimes \hat{f}_v),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\Psi(\hat{g})(id_{A[1]}^{\otimes n}\otimes \hat{f}_0\gamma)\\
=&(\sum_{\substack{r+s=n\\ r,s\geq 1}} id_{A[1]}^{\otimes r}\otimes \hat{g}_s + id_{A[1]}^{\otimes n}\otimes \hat{g}_0\gamma + \gamma\hat{g}_n)(id_{A[1]}^{\otimes n}\otimes \hat{f}_0\gamma)\\
=&\sum_{\substack{r+s=n\\ r,s\geq 1}} (id_{A[1]}^{\otimes r}\otimes \hat{g}_s)(id_{A[1]}^{\otimes n}\otimes \hat{f}_0\gamma) + (id_{A[1]}^{\otimes n}\otimes \hat{g}_0\gamma\hat{f}_0\gamma) + \gamma\hat{g}_n(id_{A[1]}^{\otimes n}\otimes \hat{f}_0\gamma),
\end{aligned}
$$

y

$$\Psi(\hat{g})(\gamma\hat{f}_n) = \gamma\hat{g}_0\gamma\hat{f}_n.$$

Como siguiente paso, calculemos $q\Psi(\hat{g})\Psi(\hat{f})_n$.
Cuando $n=0$, se tiene que

$$q\Psi(\hat{g})\Psi(\hat{f})_0 = \hat{g}\Psi(\hat{f})_0 = \hat{g}\gamma\hat{f}_0 = \hat{g}_0\gamma\hat{f}_0.$$

Cuando $n\geq 1$, la igualdad es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
&q\Psi(\hat{g})\Psi(\hat{f})_n = \hat{g}\Psi(\hat{f})_n\\
=&\hat{g}(\sum_{\substack{u+v=n\\ u,v\geq 1}} id_{A[1]}^{\otimes u}\otimes \hat{f}_v + id_{A[1]}^{\otimes n}\otimes \hat{f}_0\gamma + \gamma\hat{f}_n)\\
=&\sum_{\substack{u+v=n\\ u,v\geq 1}} \hat{g}_u(id_{A[1]}^{\otimes u}\otimes \hat{f}_v) + \hat{g}_n(id_{A[1]}^{\otimes n}\otimes \hat{f}_0\gamma) + \hat{g}_0\gamma\hat{f}_n.
\end{aligned}
$$

Consideremos las siguientes definiciones:

$$
\begin{aligned}
&X_n^{(1)} := \sum_{\substack{u+v=n\\ u,v\geq 1}} \hat{g}_u(id_{A[1]}^{\otimes u}\otimes \hat{f}_v) \ \text{ para } \ n\geq 0;\\
&X_0^{(2)} := 0 \ \text{ y } \ X_n^{(2)} := \hat{g}_n(id_{A[1]}^{\otimes n}\otimes \hat{f}_0\gamma) \ \text{ para } \ n\geq 1; y\\
&X_n^{(3)} := \hat{g}_0\gamma\hat{f}_n \ \text{ para } \ n\geq 0.
\end{aligned}
$$

Con ésto, $q\Psi(\hat{g})\Psi(\hat{f})_n = X_n^{(1)} + X_n^{(2)} + X_n^{(3)}$, para $n\geq 0$.

El tercer paso es ver quién es $(g\circ f)_n$. Si $n=1$ entonces $(g\circ f)_1 = g_1 f_1$. Si $n\geq 2$ entonces

$$\begin{aligned}(g\circ f)_n &= \sum_{\substack{s+t=n\\ s\geq 0;\ t\geq 1}} g_{s+1}(id_A^{\otimes s}\otimes f_t)\\ &= \sum_{\substack{s+t=n\\ s\geq 1;\ t\geq 2}} g_{s+1}(id_A^{\otimes s}\otimes f_t) + g_n(id_A^{\otimes(n-1)}\otimes f_1) + g_1 f_n.\end{aligned}$$

Definamos:

$$\begin{aligned}&Y_n^{(1)} := \sum_{\substack{s+t=n\\ s\geq 1;\ t\geq 2}} g_{s+1}(id_A^{\otimes s}\otimes f_t)\ \text{ para cada }\ n\geq 1;\\ &Y_1^{(2)} := 0\ \text{ y }\ Y_n^{(2)} := g_n(id_A^{\otimes(n-1)}\otimes f_1)\ \text{ para cada }\ n\geq 2;\ \text{ y}\\ &Y_n^{(3)} := g_1 f_n\ \text{ para cada }\ n\geq 1.\end{aligned}$$

Así, $(g\circ f)_n = Y_n^{(1)} + Y_n^{(2)} + Y_n^{(3)}$, para $n\geq 1$.

El último paso es probar que $\sigma_L^{-1}X_0^{(i)}\gamma\sigma_M = Y_1^{(i)}$ y que, para toda $n\geq 1$, $\sigma_L^{-1}X_n^{(i)}(\sigma^{\otimes n}\otimes\sigma_M) = Y_{n+1}^{(i)}$.

En efecto cuando $i=1,2$ se tiene $\sigma_L^{-1}X_0^{(i)}\gamma\sigma_M = \sigma_L^{-1}0\gamma\sigma_M = 0 = Y_1^{(i)}$. Si $i=3$,

$$\begin{aligned}\sigma_L^{-1}X_0^{(3)}\gamma\sigma_M =& \sigma_L^{-1}\hat{g}_0\gamma\hat{f}_0\gamma\sigma_M = g_1\sigma_N^{-1}\mu\gamma\hat{f}_0\gamma\sigma_M\\ = g_1\sigma_N^{-1}\hat{f}_0\gamma\sigma_M =& g_1\sigma_N^{-1}\sigma_N f_1 = g_1 f_1 = Y_1^{(3)}.\end{aligned}$$

Si $n \geq 1$ e $i = 1$,

$$\begin{aligned}
\sigma_L^{-1} X_n^{(1)}(\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_M) &= \sum_{\substack{u+v=n \\ u,v \geq 1}} \sigma_L^{-1} \hat{g}_u (id_{A[1]}^{\otimes u} \otimes \hat{f}_v)(\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_M) \\
&= \sum_{\substack{u+v=n \\ u,v \geq 1}} g_{u+1}(\sigma^{\otimes u} \otimes \sigma_N)^{-1}(\sigma^{\otimes u} \otimes \hat{f}_v(\sigma^{\otimes v} \otimes \sigma_M)) \\
&= \sum_{\substack{u+v=n \\ u,v \geq 1}} g_{u+1}(\sigma^{\otimes u} \otimes \sigma_N)^{-1}(\sigma^{\otimes u} \otimes \sigma_N f_{v+1}) \\
&= \sum_{\substack{u+v=n \\ u,v \geq 1}} g_{u+1}(\sigma^{\otimes u} \otimes \sigma_N)^{-1}(\sigma^{\otimes u} \otimes \sigma_N)(id_A^{\otimes u} \otimes f_{v+1}) \\
&= \sum_{\substack{u+v'=n+1 \\ u \geq 1;\, v' \geq 2}} g_{u+1}(id_A^{\otimes u} \otimes f_{v'}) = Y_{n+1}^{(1)}.
\end{aligned}$$

Si $n \geq 1$ e $i = 2$,

$$\begin{aligned}
\sigma_L^{-1} X_n^{(2)}(\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_M) =& \sigma_L^{-1} \hat{g}_n (id_{A[1]}^{\otimes n} \otimes \hat{f}_0 \gamma)(\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_M) \\
=& g_{n+1}(\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_N)^{-1}(\sigma^{\otimes n} \otimes \hat{f}_0 \gamma \sigma_M) \\
=& g_{n+1}(\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_N)^{-1}(\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_N f_1) \\
=& g_{n+1}(\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_N)^{-1}(\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_N)(id_A^{\otimes n} \otimes f_1) \\
=& g_{n+1}(id_A^{\otimes n} \otimes f_1) = Y_{n+1}^{(2)}.
\end{aligned}$$

Si $n \geq 1$ e $i = 3$,

$$\begin{aligned}
\sigma_L^{-1} X_n^{(3)}(\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_M) =& \sigma_L^{-1} \hat{g}_0 \gamma \hat{f}_n (\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_M) \\
=& g_1 \sigma_N^{-1} \mu \gamma \hat{f}_n (\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_M) \\
=& g_1 \sigma_N^{-1} \hat{f}_n (\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_M) \\
=& g_1 f_{n+1} = Y_{n+1}^{(3)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\sigma_L^{-1} q \Psi(\hat{g}) \Psi(\hat{f})_n (\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_M) = (g \circ f)_{n+1}$ para toda $n \geq 1$. Del *Corolario* 3.35 se sigue que $q\Psi(\hat{g})\Psi(\hat{f}) = \widehat{g \circ f}$, es decir, $\Psi(\hat{g})\Psi(\hat{f}) = \Psi(\widehat{g \circ f})$, como se quería. □

Teorema 3.40. Sea A una A_∞-álgebra, entonces se tiene un funtor aditivo, fiel y pleno

$$F : A\text{-Mod}_\infty \to TA[1]\text{-CoDf}$$

definido como $F(M, m^M) = (\mathrm{Ind}_{TA[1]}(M[1]), \chi(m'^M))$ en objetos y como $F(f) = \Psi(\hat{f})$ en morfismos.

Demostración. En 3.33 vimos que F está bien definido en objetos y en 3.38 vimos que está bien definido en morfismos. Además, de la proposición anterior se tiene que F preserva la composición. Veamos que F manda identidades en identidades.

Sea 1_M la identidad de (M, m^M) (ver *Teorema* 1.16), por construcción tenemos que $(\widehat{1_M})_0 = \sigma_M \sigma_M^{-1} \mu_{M[1]} = \mu_{M[1]}$ y $(\widehat{1_M})_n = 0$ cuando $n \geq 1$. Por lo tanto, de la *Observación* 3.34

$$\Psi(\widehat{1_M})_0 = \gamma_{M[1]}(\widehat{1_M})_0 = \gamma_{M[1]}\mu_{M[1]} = id_K \otimes id_{M[1]}$$

y

$$\Psi(\widehat{1_M})_n = id_{A[1]}^{\otimes n} \otimes (\widehat{1_M})_0 \gamma_{M[1]} = id_{A[1]}^{\otimes n} \otimes \mu_{M[1]} \gamma_{M[1]} = id_{A[1]}^{\otimes n} \otimes id_{M[1]} \text{ para } n \geq 1.$$

Concluyendo así que $F(1_M) = \Psi(\widehat{1_M}) = id_{TA[1]} \otimes id_{M[1]} = 1_{F(M)}$.

El *Corolario* 3.35, la *Proposición* 3.26 y el *Teorema* 3.38 nos dan que el funtor F es fiel y pleno.

Por último, si f_1 y f_2 son morfismos en $\mathrm{Hom}_{A\text{-Mod}_\infty}(M, N)$, se tiene que

$$F(f_1 + f_2) = \Psi(\widehat{f_1 + f_2}) = \Psi(\hat{f}_1 + \hat{f}_2) = \Psi(\hat{f}_1) + \Psi(\hat{f}_2) = F(f_1) + F(f_2).$$

Por lo tanto F es aditivo. $\square$

Capítulo 4

Homotopía

En este último capítulo hablaremos de la noción de homotopía en la categoría C-CoDf y como ésta está relacionada con la categoría estable. También introduciremos la noción de homotopía en la categoría A-Mod$_\infty$. Éstas dos nociones son preservadas por el funtor F lo cual nos lleva al resultado final de esta tesis, triangular la categoría de los A_∞-módulos módulo homotopía.

4.1. Equivalencia entre A-Mod$_\infty$ y $TA[1]$-Ind

Corolario 4.1. Sea A una A_∞-álgebra. Se tiene un funtor fiel, pleno y denso

$$F' : A\text{-Mod}_\infty \to TA[1]\text{-Ind}$$

que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} A\text{-Mod}_\infty \arrow[r, "F'"] \arrow[dr, "F"'] & TA[1]\text{-Ind} \arrow[d, "I"] \\ & TA[1]\text{-CoDf} \end{tikzcd}$$

donde $I : TA[1]\text{-Ind} \to TA[1]\text{-CoDf}$ es el funtor inclusión.

Demostración. Notemos que para cada objeto (M, m^M) esn A-Mod$_\infty$, el objeto

$$F(M, m^M) = (TA[1] \otimes M[1], \tau \otimes id_{M[1]}, \chi(m'^M))$$

es un $TA[1]$-comódulo inducido. Así, si se define F' exactamente como F se tiene el diagrama anterior. Sólo hace falta verificar que el funtor es denso.

Consideremos $(TA[1] \otimes M, \tau \otimes id_M, d_M)$ un comódulo inducido, entonces, por 3.28 existe $m'^{M[-1]} \in \mathrm{Hom}_{K\text{-}\mathrm{Gr}}(TA[1] \otimes M, M)$ tal que $\chi(m'^{M[-1]}) = d_M$. Ahora, definamos

$$m^{M[-1]} := \{\sigma_{M[-1]}^{-1} m_0'^{M[-1]} \gamma \sigma_{M[-1]}\} \cup \{\sigma_{M[-1]}^{-1} m_n'^{M[-1]} (\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_{M[-1]})\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

Ya que $d_M^2 = 0$, de 3.33 se sigue que $(M[-1], m^{M[-1]}) \in A\text{-Mod}_\infty$. Más aún,

$$F(M[-1], m^{M[-1]}) = (TA[1] \otimes M, \tau \otimes id_M, d_M).$$

□

Por comodidad, hablaremos de manera indistinta de los funtores F' y F, es decir, a ambos los denotaremos como F.

Definición 4.2. Sean (A, m) una A_∞-álgebra, (M, m^M) y (N, m^N) dos A_∞-módulos y $f : M \to N$ un morfismo de A_∞-módulos. Definimos las familias $m^{M[1]} := \{m_n^{M[1]}\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $f[1] := \{f[1]_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ donde para cada n, $m_n^{M[1]}$ y $f_n^{M[1]}$ están dados por los diagramas:

$$\begin{tikzcd}
A^{\otimes(n-1)} \otimes M \arrow[r, "(-1)^n m_n^M"] \arrow[d, "id_A^{\otimes(n-1)} \otimes \sigma_M"'] & M \arrow[d, "\sigma_M"] \\
A^{\otimes(n-1)} \otimes M[1] \arrow[r, "m_n^{M[1]}"'] & M[1]
\end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd}
A^{\otimes(n-1)} \otimes M \arrow[r, "(-1)^{n-1} f_n"] \arrow[d, "id_A^{\otimes(n-1)} \otimes \sigma_M"'] & N \arrow[d, "\sigma_N"] \\
A^{\otimes(n-1)} \otimes M[1] \arrow[r, "f[1]_n"'] & N[1].
\end{tikzcd}$$

Proposición 4.3. Sea (A, m) una A_∞-álgebra. Se tiene un autofuntor $T : A\text{-Mod}_\infty \to A\text{-Mod}_\infty$ definido como $T(M, m^M) = (M[1], m^{M[1]})$ en objetos y $T(f) = f[1]$ en morfismos. A este funtor se le conoce como el **funtor traslación**.

Demostración. Primero veamos que está bien definido. Si (M, m^M) es un A_∞-módulo, por definición tenemos que $|m_n^{M[1]}| = |\sigma_M| + |m_n^M| + |(id_A^{\otimes(n-1)} \otimes$

$\sigma_M)^{-1}| = |m_n^M| = 2-n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Además, notemos que

$$\begin{aligned}
& R(M[1])_n^+ \\
= & \sum_{\substack{r+s+t=n \\ s,t\geq 1;\ r\geq 0}} (-1)^{r+st} m_{r+1+t}^{M[1]}(id_A^{\otimes r} \otimes m_s \otimes id_A^{\otimes(t-1)} \otimes id_{M[1]}) \\
= & \sum_{\substack{r+s+t=n \\ s,t\geq 1;\ r\geq 0}} (-1)^{r+st+r+1+t} \sigma_M m_{r+1+t}^M (id_A^{\otimes(r+t)} \otimes \sigma_M^{-1})(id_A^{\otimes r} \otimes m_s \otimes id_A^{\otimes(t-1)} \otimes id_{M[1]}) \\
= & \sum_{\substack{r+s+t=n \\ s,t\geq 1;\ r\geq 0}} (-1)^{r+st+r+1+t+s-2} \sigma_M m_{r+1+t}^M (id_A^{\otimes r} \otimes m_s \otimes id_A^{\otimes(t-1)} \otimes \sigma_M^{-1}) \\
= & \sum_{\substack{r+s+t=n \\ s,t\geq 1;\ r\geq 0}} (-1)^{r+st+n+1} \sigma_M m_{r+1+t}^M (id_A^{\otimes r} \otimes m_s \otimes id_A^{\otimes(t-1)} \otimes id_M)(id_A^{\otimes(n-1)} \otimes \sigma_M^{-1}) \\
= & (-1)^{n+1}\sigma_M \left(\sum_{\substack{r+s+t=n \\ s,t\geq 1;\ r\geq 0}} (-1)^{r+st} m_{r+1+t}^M (id_A^{\otimes r} \otimes m_s \otimes id_A^{\otimes(t-1)} \otimes id_M) \right) (id_A^{\otimes(n-1)} \otimes \sigma_M^{-1}) \\
= & (-1)^{n+1}\sigma_M R(M)_n^+ (id_A^{\otimes(n-1)} \otimes \sigma_M^{-1})
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
R(M[1])_n^0 &= \sum_{\substack{r+s=n \\ s\geq 1;\ r\geq 0}} (-1)^r m_{r+1}^{M[1]}(id_A^{\otimes r} \otimes m_s^{M[1]}) \\
&= \sum_{\substack{r+s=n \\ s\geq 1;\ r\geq 0}} (-1)^{r+r+1} \sigma_M m_{r+1}^M (id_A^{\otimes r} \otimes \sigma_M^{-1})(id_A^{\otimes r} \otimes m_s^{M[1]}) \\
&= \sum_{\substack{r+s=n \\ s\geq 1;\ r\geq 0}} (-1)^{r+r+1} \sigma_M m_{r+1}^M (id_A^{\otimes r} \otimes \sigma_M^{-1} m_s^{M[1]}) \\
&= \sum_{\substack{r+s=n \\ s\geq 1;\ r\geq 0}} (-1)^{r+r+1+s} \sigma_M m_{r+1}^M (id_A^{\otimes r} \otimes m_s^M (id_A^{\otimes(s-1)} \otimes \sigma_M^{-1})) \\
&= \sum_{\substack{r+s=n \\ s\geq 1;\ r\geq 0}} (-1)^{r+n+1} \sigma_M m_{r+1}^M (id_A^{\otimes r} \otimes m_s^M)(id_A^{\otimes(n-1)} \otimes \sigma_M{}^{-1}) \\
&= (-1)^{n+1}\sigma_M \left(\sum_{\substack{r+s=n \\ s\geq 1;\ r\geq 0}} (-1)^r m_{r+1}^M (id_A^{\otimes r} \otimes m_s^M) \right) (id_A^{\otimes(n-1)} \otimes \sigma_M^{-1}) \\
&= (-1)^{n+1}\sigma_M R(M)_n^0 (id_A^{\otimes(n-1)} \otimes \sigma_M^{-1}).
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
& R(M[1])_n^+ + R(M[1])_n^0 \\
= \;& (-1)^{n+1}\sigma_M R(M)_n^+ (id_A^{\otimes(n-1)} \otimes \sigma_M^{-1}) + (-1)^{n+1}\sigma_M R(M)_n^0 (id_A^{\otimes(n-1)} \otimes \sigma_M^{-1}) \\
= \;& (-1)^{n+1}\sigma_M (R(M)_n^+ + R(M)_n^0)(id_A^{\otimes(n-1)} \otimes \sigma_M^{-1}) = 0.
\end{aligned}$$

Así, T está bien definido en objetos.

Consideremos ahora un morfismo $f : M \to N$. Por definición, para toda $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $|f[1]_n| = |\sigma_N| + |f_n| + |(id_A^{\otimes(n-1)} \otimes \sigma_M)^{-1}| = |f_n| = 1 - n$. Más aún,

$$\begin{aligned}
& R(f[1])_n^+ \\
= \;& \sum_{\substack{r+s+t=n \\ s,t\geq 1;\, r\geq 0}} (-1)^{r+st} f[1]_{r+1+t}(id_A^{\otimes r} \otimes m_s \otimes id_A^{\otimes(t-1)} \otimes id_{M[1]}) \\
= \;& \sum_{\substack{r+s+t=n \\ s,t\geq 1;\, r\geq 0}} (-1)^{r+st+r+t} \sigma_N f_{r+1+t}(id_A^{\otimes(r+t)} \otimes \sigma_M^{-1})(id_A^{\otimes r} \otimes m_s \otimes id_A^{\otimes(t-1)} \otimes id_{M[1]}) \\
= \;& \sum_{\substack{r+s+t=n \\ s,t\geq 1;\, r\geq 0}} (-1)^{r+st+r+t+s-2} \sigma_N f_{r+1+t}(id_A^{\otimes r} \otimes m_s \otimes id_A^{\otimes(t-1)} \otimes \sigma_M^{-1}) \\
= \;& \sum_{\substack{r+s+t=n \\ s,t\geq 1;\, r\geq 0}} (-1)^{r+st+n} \sigma_N f_{r+1+t}(id_A^{\otimes r} \otimes m_s \otimes id_A^{\otimes(t-1)} \otimes id_M)(id_A^{\otimes(n-1)} \otimes \sigma_M^{-1}) \\
= \;& (-1)^n \sigma_N R(f)_n^+ (id_A^{\otimes(n-1)} \otimes \sigma_M^{-1}),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
R(f[1])^0_n &= \sum_{\substack{r+s=n \\ s\geq 1;\, r\geq 0}} (-1)^r f[1]_{r+1}(id_A^{\otimes r}\otimes m_s^{M[1]}) \\
&= \sum_{\substack{r+s=n \\ s\geq 1;\, r\geq 0}} (-1)^{r+r}\sigma_N f_{r+1}(id_A^{\otimes r}\otimes \sigma_M^{-1})(id_A^{\otimes r}\otimes m_s^{M[1]}) \\
&= \sum_{\substack{r+s=n \\ s\geq 1;\, r\geq 0}} (-1)^{r+r}\sigma_N f_{r+1}(id_A^{\otimes r}\otimes \sigma_M^{-1} m_s^{M[1]}) \\
&= \sum_{\substack{r+s=n \\ s\geq 1;\, r\geq 0}} (-1)^{r+r+s}\sigma_N f_{r+1}(id_A^{\otimes r}\otimes m_s^{M}(id_A^{\otimes (s-1)}\otimes \sigma_M^{-1})) \\
&= \sum_{\substack{r+s=n \\ s\geq 1;\, r\geq 0}} (-1)^{r+n}\sigma_N f_{r+1}(id_A^{\otimes r}\otimes m_s^{M})(id_A^{\otimes (n-1)}\otimes \sigma_M^{-1}) \\
&= (-1)^n \sigma_N R(f)^0_n(id_A^{\otimes (n-1)}\otimes \sigma_M^{-1})
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
R(f[1])^-_n &= \sum_{\substack{s+t=n \\ s\geq 0;\, t\geq 1}} m_{s+1}^{N[1]}(id_A^{\otimes s}\otimes f[1]_t) \\
&= \sum_{\substack{s+t=n \\ s\geq 0;\, t\geq 1}} (-1)^{s+1}\sigma_N m_{s+1}^{N}(id_A^{\otimes s}\otimes \sigma_N^{-1})(id_A^{\otimes s}\otimes f[1]_t) \\
&= \sum_{\substack{s+t=n \\ s\geq 0;\, t\geq 1}} (-1)^{s+1}\sigma_N m_{s+1}^{N}(id_A^{\otimes s}\otimes \sigma_N^{-1} f[1]_t) \\
&= \sum_{\substack{s+t=n \\ s\geq 0;\, t\geq 1}} (-1)^{s+1+t-1}\sigma_N m_{s+1}^{N}(id_A^{\otimes s}\otimes f_t(id_A^{\otimes (t-1)}\otimes \sigma_M^{-1})) \\
&= \sum_{\substack{s+t=n \\ s\geq 0;\, t\geq 1}} (-1)^{n}\sigma_N m_{s+1}^{N}(id_A^{\otimes s}\otimes f_t)(id_A^{\otimes (n-1)}\otimes \sigma_M^{-1}) \\
&= (-1)^n \sigma_N R(f)^-_n(id_A^{\otimes (n-1)}\otimes \sigma_M^{-1}).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
& R(f[1])^+_n + R(f[1])^0_n + R(f[1])^-_n \\
= \;& (-1)^n \sigma_N (R(f)^+_n + R(f)^0_n + R(f)^-_n)(id_A^{\otimes (n-1)}\otimes \sigma_M^{-1}) = 0.
\end{aligned}
$$

Finalmente, sean $f : M \to N$ y $g : N \to L$ dos morfismos en A-Mod$_\infty$. Para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
(g[1] \circ f[1])_n &= \sum_{\substack{s+t=n \\ s\geq 0;\, t\geq 1}} g[1]_{s+1}(id_A^{\otimes s} \otimes f[1]_t) \\
&= \sum_{\substack{s+t=n \\ s\geq 0;\, t\geq 1}} (-1)^s \sigma_L g_{s+1}(id_A^{\otimes s} \otimes \sigma_N^{-1})(id_A^{\otimes s} \otimes f[1]_t) \\
&= \sum_{\substack{s+t=n \\ s\geq 0;\, t\geq 1}} (-1)^s \sigma_L g_{s+1}(id_A^{\otimes s} \otimes \sigma_N^{-1} f[1]_t) \\
&= \sum_{\substack{s+t=n \\ s\geq 0;\, t\geq 1}} (-1)^{s+t-1} \sigma_L g_{s+1}(id_A^{\otimes s} \otimes f_t(id_A^{\otimes(t-1)} \otimes \sigma_M^{-1})) \\
&= \sum_{\substack{s+t=n \\ s\geq 0;\, t\geq 1}} (-1)^{n-1} \sigma_L g_{s+1}(id_A^{\otimes s} \otimes f_t)(id_A^{\otimes(n-1)} \otimes \sigma_M^{-1}) \\
&= (-1)^{n-1}\sigma_L (g \circ f)_n (id_A^{\otimes(n-1)} \otimes \sigma_M^{-1}) \\
&= (g \circ f)[1]_n.
\end{aligned}$$

Por lo tanto T preserva composiciones.

Claramente T manda identidades en identidades. □

Lema 4.4. Sean A y M espacios vectoriales graduados. Entonces, para cada $n \geq 0$, se tiene la igualdad

$$(\sigma_A^{\otimes n} \otimes \sigma_M)^{-1} = (-1)^{\frac{(n+1)n}{2}} (\sigma_A^{-1})^{\otimes n} \otimes \sigma_M^{-1}.$$

Demostración. Haremos inducción sobre n. El caso $n = 0$ es claro. Cuando $n = 1$ tenemos que

$$(-1)(\sigma_A \otimes \sigma_M)(\sigma_A^{-1} \otimes \sigma_M^{-1}) = (-1)(-1)(id_{A[1]} \otimes id_{M[1]}) = id_{A[1]\otimes M[1]}$$

y

$$(-1)(\sigma_A^{-1} \otimes \sigma_M^{-1})(\sigma_A \otimes \sigma_M) = (-1)(-1)(id_A \otimes id_M) = id_{A\otimes M}.$$

Ahora, supongamos que la identidad es válida para cierta n, queremos probar que también es cierta para $n + 1$. Hay que verificar que

$$(-1)^{\frac{(n+2)(n+1)}{2}} (\sigma_A^{-1})^{\otimes(n+1)} \otimes \sigma_M^{-1}$$

es el inverso de $\sigma_A^{\otimes(n+1)} \otimes \sigma_M$. En efecto, componiendo por el lado derecho tenemos que

$$\begin{aligned}
& (-1)^{\frac{(n+2)(n+1)}{2}}(\sigma_A^{\otimes(n+1)} \otimes \sigma_M)((\sigma_A^{-1})^{\otimes(n+1)} \otimes \sigma_M^{-1}) \\
= \; & (-1)^{\frac{(n+1)n}{2}}(-1)^{\frac{2(n+1)}{2}}(\sigma_A \otimes \sigma_A^{\otimes n} \otimes \sigma_M)(\sigma_A^{-1} \otimes (\sigma_A^{-1})^{\otimes n} \otimes \sigma_M^{-1}) \\
= \; & (-1)^{\frac{(n+1)n}{2}}(-1)^{\frac{2(n+1)}{2}}(-1)^{-n-1}(id_{A[1]} \otimes \left[\sigma_A^{\otimes n} \otimes \sigma_M\right]\left[(\sigma_A^{-1})^{\otimes n} \otimes \sigma_M^{-1}\right]) \\
= \; & (-1)^{\frac{(n+1)n}{2}}(id_{A[1]} \otimes \left[\sigma_A^{\otimes n} \otimes \sigma_M\right]\left[(\sigma_A^{-1})^{\otimes n} \otimes \sigma_M^{-1}\right]) \\
= \; & id_{A[1]} \otimes id_{A[1]}^{\otimes n} \otimes id_{M[1]}.
\end{aligned}$$

Y componiendo por el lado izquierdo

$$\begin{aligned}
& (-1)^{\frac{(n+2)(n+1)}{2}}((\sigma_A^{-1})^{\otimes(n+1)} \otimes \sigma_M^{-1})(\sigma_A^{\otimes(n+1)} \otimes \sigma_M) \\
= \; & (-1)^{\frac{(n+1)n}{2}}(-1)^{\frac{2(n+1)}{2}}(\sigma_A^{-1} \otimes (\sigma_A^{-1})^{\otimes n} \otimes \sigma_M^{-1})(\sigma_A \otimes \sigma_A^{\otimes n} \otimes \sigma_M) \\
= \; & (-1)^{\frac{(n+1)n}{2}}(id_A \otimes \left[(\sigma_A^{-1})^{\otimes n} \otimes \sigma_M^{-1}\right]\left[\sigma_A^{\otimes n} \otimes \sigma_M\right]) \\
= \; & id_A \otimes id_A^{\otimes n} \otimes id_M.
\end{aligned}$$

□

Lema 4.5. Sean (A, m) una A_∞-álgebra y (M, m^M) un A_∞-módulo. Recordemos la definición de las funciones homogéneas $m'^{M[1]} : TA[1] \otimes M[2] \to M[2]$ y $m'^M : TA[1] \otimes M[1] \to M[1]$ vista en 3.32. Entonces, se tiene la igualdad de funciones

$$m'^{M[1]} = -m'^M[1].$$

Demostración. Hay que probar que para toda $n \geq 0$ se cumple que $m_n'^{M[1]} = -m'^M[1]_n$. Primero, es inmediato que $m'^M[1]_n = m_n'^M[1]$. Ahora, para $n = 0$, tenemos los diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\sigma_M"] \arrow[d, "-m_1^M"] & M[1] \arrow[r, "\gamma\sigma_{M[1]}"] \arrow[d, "m_1^{M[1]}"] & K \otimes M[2] \arrow[d, "m_0'^{M[1]}"'] \\
M \arrow[r, "\sigma_M"'] & M[1] \arrow[r, "\sigma_{M[1]}"'] & M[2]
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\gamma\sigma_M"] \arrow[d, "m_1^M"] & K \otimes M[1] \arrow[r, "id_K \otimes \sigma_{M[1]}"] \arrow[d, "m_0'^M"] & K \otimes M[2] \arrow[d, "m_0'^M{[1]}"'] \\
M \arrow[r, "\sigma_M"'] & M[1] \arrow[r, "\sigma_{M[1]}"'] & M[2].
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
m_0'^{M[1]} &= -\sigma_{M[1]}\sigma_M m_1^M \sigma_M^{-1}\sigma_{M[1]}^{-1}\mu \\
&= -\sigma_{M[1]}\sigma_M m_1^M \sigma_M^{-1}\mu(id_K \otimes \sigma_{M[1]}^{-1}) \\
&= -\sigma_{M[1]} m_0'^M(id_K \otimes \sigma_{M[1]}^{-1}) = -m_0'^M[1].
\end{aligned}$$

Para $n \geq 1$ se tiene la conmutatividad de los diagramas

$$\begin{tikzcd}
A^{\otimes n} \otimes M \arrow[r, "id_A^{\otimes n} \otimes \sigma_M"] \arrow[d, "(-1)^{n+1} m_{n+1}^M"'] & A^{\otimes n} \otimes M[1] \arrow[r, "\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_{M[1]}"] \arrow[d, "m_{n+1}^{M[1]}"] & A[1]^{\otimes n} \otimes M[2] \arrow[d, "m_n'^{M[1]}"] \\
M \arrow[r, "\sigma_M"'] & M[1] \arrow[r, "\sigma_{M[1]}"'] & M[2]
\end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd}
A^{\otimes n} \otimes M \arrow[r, "\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_M"] \arrow[d, "m_{n+1}^M"'] & A[1]^{\otimes n} \otimes M[1] \arrow[r, "id_{A[1]}^{\otimes n} \otimes \sigma_{M[1]}"] \arrow[d, "m_n'^M"] & A[1]^{\otimes n} \otimes M[2] \arrow[d, "m_n'^M[1]"] \\
M \arrow[r, "\sigma_M"'] & M[1] \arrow[r, "\sigma_{M[1]}"'] & M[2].
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto ,

$$\begin{aligned}
m_n'^{M[1]} &= (-1)^{n+1}\sigma_{M[1]}\sigma_M m_{n+1}^M (id_A^{\otimes n} \otimes \sigma_M)^{-1}(\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_{M[1]})^{-1} \\
&= (-1)^{n+1}(-1)^{\frac{(n+1)n}{2}}\sigma_{M[1]}\sigma_M m_{n+1}^M (id_A^{\otimes n} \otimes \sigma_M^{-1})((\sigma^{-1})^{\otimes n} \otimes \sigma_{M[1]}^{-1}) \\
&= (-1)^{n+1}(-1)^{\frac{(n+1)n}{2}}(-1)^{-n}\sigma_{M[1]}\sigma_M m_{n+1}^M ((\sigma^{-1})^{\otimes n} \otimes \sigma_M^{-1}\sigma_{M[1]}^{-1}) \\
&= (-1)(-1)^{\frac{(n+1)n}{2}}\sigma_{M[1]}\sigma_M m_{n+1}^M ((\sigma^{-1})^{\otimes n} \otimes \sigma_M^{-1})(id_{A[1]}^{\otimes n} \otimes \sigma_{M[1]}^{-1}) \\
&= -\sigma_{M[1]}\sigma_M m_{n+1}^M (\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_M)^{-1}(id_{A[1]}^{\otimes n} \otimes \sigma_{M[1]})^{-1} = -m_n'^M[1].
\end{aligned}$$

□

Lema 4.6. Sean (A, m) una A_∞-álgebra, (M, m^M) y (N, m^N) A_∞-módulos y sea $f : M \to N$ un morfismo en A-Mod_∞. Entonces, se tiene la igualdad de funciones

$$\widehat{f[1]} = \hat{f}[1].$$

Demostración. Es suficiente demostrar que para $n \geq 0$ se cumple que $\widehat{f[1]}_n = \hat{f}[1]_n$. Notemos que $\hat{f}[1]_n = \hat{f}_n[1]$. Enseguida veamos que la igualdad deseada se cumple para $n = 0$. De la conmutatividad de los diagramas

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\sigma_M"] \arrow[d, "f_1"] & M[1] \arrow[r, "\gamma\sigma_{M[1]}"] \arrow[d, "f[1]_1"'] & K \otimes M[2] \arrow[d, "\widehat{f[1]}_0"'] \\
N \arrow[r, "\sigma_N"'] & N[1] \arrow[r, "\sigma_{N[1]}"'] & N[2]
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\gamma\sigma_M"] \arrow[d, "f_1"] & K \otimes M[1] \arrow[r, "id_K \otimes \sigma_{M[1]}"] \arrow[d, "\hat{f}_0"'] & K \otimes M[2] \arrow[d, "\hat{f}[1]_0"'] \\
N \arrow[r, "\sigma_N"'] & N[1] \arrow[r, "\sigma_{N[1]}"'] & N[2]
\end{tikzcd}$$

se sigue que

$$\begin{aligned}
\widehat{f[1]}_0 &= \sigma_{N[1]}\sigma_N f_1 \sigma_M^{-1}\sigma_{M[1]}^{-1}\mu \\
&= \sigma_{N[1]}\sigma_N f_1 \sigma_M^{-1}\mu(id_K \otimes \sigma_{M[1]}^{-1}) \\
&= \sigma_{N[1]}\hat{f}_0(id_K \otimes \sigma_{M[1]}^{-1}) = \hat{f}_0[1].
\end{aligned}$$

Ahora, para $n \geq 1$, tenemos la conmutatividad de los diagramas

$$\begin{tikzcd}
A^{\otimes n} \otimes M \arrow[r, "id_A^{\otimes n}\otimes\sigma_M"] \arrow[d, "(-1)^n f_{n+1}"'] & A^{\otimes n} \otimes M[1] \arrow[r, "\sigma^{\otimes n}\otimes\sigma_{M[1]}"] \arrow[d, "f[1]_{n+1}"'] & A[1]^{\otimes n} \otimes M[2] \arrow[d, "\widehat{f[1]}_n"] \\
N \arrow[r, "\sigma_N"'] & N[1] \arrow[r, "\sigma_{N[1]}"'] & N[2]
\end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd}
A^{\otimes n} \otimes M \arrow[r, "\sigma^{\otimes n}\otimes\sigma_M"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & A[1]^{\otimes n} \otimes M[1] \arrow[r, "id_{A[1]}^{\otimes n}\otimes\sigma_{M[1]}"] \arrow[d, "\hat{f}_n"'] & A[1]^{\otimes n} \otimes M[2] \arrow[d, "\hat{f}[1]_n"] \\
N \arrow[r, "\sigma_N"'] & N[1] \arrow[r, "\sigma_{N[1]}"'] & N[2].
\end{tikzcd}$$

De donde se concluye que

$$\begin{aligned}
\widehat{f[1]}_n &= (-1)^n\sigma_{N[1]}\sigma_N f_{n+1}(id_A^{\otimes n}\otimes\sigma_M)^{-1}(\sigma^{\otimes n}\otimes\sigma_{M[1]})^{-1} \\
&= (-1)^n(-1)^{\frac{(n+1)n}{2}}\sigma_{N[1]}\sigma_N f_{n+1}(id_A^{\otimes n}\otimes\sigma_M^{-1})((\sigma^{-1})^{\otimes n}\otimes\sigma_{M[1]}^{-1}) \\
&= (-1)^n(-1)^{\frac{(n+1)n}{2}}(-1)^n\sigma_{N[1]}\sigma_N f_{n+1}((\sigma^{-1})^{\otimes n}\otimes\sigma_M^{-1}\sigma_{M[1]}^{-1}) \\
&= (-1)^{\frac{(n+1)n}{2}}\sigma_{N[1]}\sigma_N f_{n+1}((\sigma^{-1})^{\otimes n}\otimes\sigma_M^{-1})(id_{A[1]}^{\otimes n}\otimes\sigma_{M[1]}^{-1}) \\
&= \sigma_{N[1]}\sigma_N f_{n+1}(\sigma^{\otimes n}\otimes\sigma_M)^{-1}(id_{A[1]}^{\otimes n}\otimes\sigma_{M[1]})^{-1} = \hat{f}[1]_n.
\end{aligned}$$

$\square$

Proposición 4.7. Sea (A, m) una A_∞-álgebra y sean $T : A\text{-Mod}_\infty \to A\text{-Mod}_\infty$ y $T : TA[1]\text{-Ind} \to TA[1]\text{-Ind}$ los funtores traslación. Entonces el siguiente diagrama es un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
A\text{-Mod}_\infty \arrow[r, "F"] \arrow[d, "T"'] & TA[1]\text{-Ind} \arrow[d, "T"] \\
A\text{-Mod}_\infty \arrow[r, "F"'] & TA[1]\text{-Ind}.
\end{tikzcd}$$

Antes de iniciar la prueba, fijemos $C = TA[1]$ para hacer más sencilla la notación.

Demostración. Consideremos $(M, m^M) \in A$-Mod$_\infty$ y notemos que

$$\begin{aligned}
& -\sigma_{C\otimes M[1]}\chi(m'^M)\sigma^{-1}_{C\otimes M[1]} \\
= \;& -(id_C \otimes \sigma_{M[1]})\chi(m'^M)(id_C \otimes \sigma^{-1}_{M[1]}) \\
= \;& -(id_C \otimes \sigma_{M[1]})\left[(d_m \otimes id_{M[1]}) + \Psi(m'^M)\right](id_C \otimes \sigma^{-1}_{M[1]}) \\
= \;& (d_m \otimes id_{M[2]}) - (id_C \otimes \sigma_{M[1]})\Psi(m'^M)(id_C \otimes \sigma^{-1}_{M[1]}) \\
= \;& (d_m \otimes id_{M[2]}) - (id_C \otimes \sigma_{M[1]})(id_C \otimes m'^M)(\tau \otimes id_{M[1]})(id_C \otimes \sigma^{-1}_{M[1]}) \\
= \;& (d_m \otimes id_{M[2]}) - (id_C \otimes \sigma_{M[1]}m'^M)(\tau \otimes \sigma^{-1}_{M[1]}) \\
= \;& (d_m \otimes id_{M[2]}) - (id_C \otimes \sigma_{M[1]}m'^M)(id_C \otimes id_C \otimes \sigma^{-1}_{M[1]})(\tau \otimes id_{M[2]}) \\
= \;& (d_m \otimes id_{M[2]}) - (id_C \otimes \sigma_{M[1]}m'^M(id_C \otimes \sigma^{-1}_{M[1]}))(\tau \otimes id_{M[2]}) \\
= \;& (d_m \otimes id_{M[2]}) + (id_C \otimes -m'^M[1])(\tau \otimes id_{M[2]}) \\
= \;& (d_m \otimes id_{M[2]}) + (id_C \otimes m'^{M[1]})(\tau \otimes id_{M[2]}) = \chi(m'^{M[1]}).
\end{aligned}$$

De esto se sigue que

$$\begin{aligned}
TF(M, m^M) &= T(\mathrm{Ind}(M[1]), \chi(m'^M)) \\
&= (T(\mathrm{Ind}(M[1])), -\sigma_{C\otimes M[1]}\chi(m'^M)\sigma^{-1}_{C\otimes M[1]}) \\
&= (\mathrm{Ind}(T(M[1])), \chi(m'^{M[1]})) \\
&= (\mathrm{Ind}(M[2]), \chi(m'^{M[1]})) \\
&= F(M[1], m^{M[1]}) = FT(M, m^M).
\end{aligned}$$

Ahora consideremos $f : M \to N$ en A-Mod$_\infty$. Las siguientes igualdades concluyen la demostración:

$$\begin{aligned}
TF(f) &= T(\Psi(\hat{f})) = \Psi(\hat{f})[1] = \sigma_{C\otimes N[1]}(id_C \otimes \hat{f})(\tau \otimes id_{M[1]})\sigma^{-1}_{C\otimes M[1]} \\
&= (id_C \otimes \sigma_{N[1]})(id_C \otimes \hat{f})(\tau \otimes id_{M[1]})(id_C \otimes \sigma^{-1}_{M[1]}) \\
&= (id_C \otimes \sigma_{N[1]}\hat{f})(\tau \otimes \sigma^{-1}_{M[1]}) \\
&= (id_C \otimes \sigma_{N[1]}\hat{f})(id_C \otimes id_C \otimes \sigma^{-1}_{M[1]})(\tau \otimes id_{M[2]}) \\
&= (id_C \otimes \sigma_{N[1]}\hat{f}(id_C \otimes \sigma^{-1}_{M[1]}))(\tau \otimes id_{M[2]}) \\
&= (id_C \otimes \hat{f}[1])(\tau \otimes id_{M[2]}) \\
&= (id_C \otimes \widehat{f[1]})(\tau \otimes id_{M[2]}) = \Psi(\widehat{f[1]}) = F(f[1]) = FT(f).
\end{aligned}$$

$\square$

4.2. Homotopía

Definición 4.8. Sean (M, ρ_M, d_M) y (N, ρ_N, d_N) comódulos diferenciales sobre una coálgebra (C, ρ, ϵ, d) y sea $\lambda \in \mathrm{Hom}^{-1}_{C\text{-CoGr}}(M, N)$. Definimos la función $\lambda^\bullet := d_N\lambda + \lambda d_M$.

Proposición 4.9. Sean (M, ρ_M, d_M) y (N, ρ_N, d_N) comódulos diferenciales sobre una coálgebra (C, ρ, ϵ, d) y sea $\lambda \in \mathrm{Hom}^{-1}_{C\text{-CoGr}}(M, N)$. Entonces,

$$\lambda^\bullet \in \mathrm{Hom}_{C\text{-CoDf}}(M, N).$$

Demostración. Claramente $|\lambda^\bullet| = 0$. Veamos que $\lambda^\bullet$ conmuta con las comultiplicaciones:

$$\begin{aligned}
&\rho_N\lambda^\bullet = \rho_N(d_N\lambda + \lambda d_M) = \rho_N d_N\lambda + \rho_N\lambda d_M \\
&= (d \otimes id_N + id_C \otimes d_N)\rho_N\lambda + (id_C \otimes \lambda)\rho_M d_M \\
&= (d \otimes id_N + id_C \otimes d_N)(id_C \otimes \lambda)\rho_M + (id_C \otimes \lambda)(d \otimes id_M + id_C \otimes d_M)\rho_M \\
&= (d \otimes \lambda + id_C \otimes d_N\lambda)\rho_M + (-(d \otimes \lambda) + id_C \otimes \lambda d_M)\rho_M \\
&= (id_C \otimes (d_N\lambda + \lambda d_M))\rho_M = (id_C \otimes \lambda^\bullet)\rho_M.
\end{aligned}$$

Ahora veamos que $\lambda^\bullet$ conmuta con las codiferenciales:

$$d_N\lambda^\bullet = d_N(d_N\lambda + \lambda d_M) = d_N\lambda d_M = (d_N\lambda + \lambda d_M)d_M = \lambda^\bullet d_M.$$

$\square$

Definición 4.10. Sean (M, ρ_M, d_M) y (N, ρ_N, d_N) comódulos diferenciales sobre una coálgebra (C, ρ, ϵ, d) y sea $f \in \mathrm{Hom}_{C\text{-CoDf}}(M, N)$. Diremos que f es **homotópicamente nulo** si existe $\lambda \in \mathrm{Hom}^{-1}_{C\text{-CoDf}}(M, N)$ tal que $f = \lambda^\bullet$.

Diremos que dos morfismos de comódulos diferenciales $g : M \to N$ y $h : M \to N$ son **homotópicamente equivalentes** si $g - h$ es homotópicamente nulo. Notemos que la relación de homotopía es una relación de equivalencia. A la clase de f la denotaremos como $[f]$.

Proposición 4.11. Sean (M, ρ_M, d_M) y (N, ρ_N, d_N) comódulos diferenciales sobre una coálgebra (C, ρ, ϵ, d) y sea $f \in \mathrm{Hom}_{C\text{-CoDf}}(M, N)$. Consideremos la estructura exacta $\mathcal{E}$ de C-CoDf dada en la *Sección* 2.2. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) f es homotópicamente nulo.

(b) f se factoriza en C-CoDf a través de $\alpha_M : M \to J(M)$.

(c) f se factoriza en C-CoDf a través de un $\mathcal{E}$-proyectivo.

Demostración. (a)$\Rightarrow$(b). Sabemos que existe λ de grado -1 tal que $f = d_N\lambda + \lambda d_M$ de donde se sigue que el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\alpha_M = \begin{pmatrix} id_M \\ \sigma_M d_M \end{pmatrix}"] \arrow[d, "f"'] & J(M) = M \oplus M[1] \arrow[dl, "(d_N\lambda, \lambda\sigma_M^{-1})"] \\ N & \end{tikzcd}$$

es conmutativo con $(d_N\lambda, \lambda\sigma_M^{-1})$ morfismo en C-CoDf.

(b)$\Rightarrow$(a). Por hipótesis existe $h : J(M) \to N$ tal que $f = h\alpha_M$, recordemos que $h = (d_N h_2 \sigma_M, h_2)$ (ver *Proposición* 2.33), por lo tanto

$$f = (d_N h_2 \sigma_M, h_2) \begin{pmatrix} id_M \\ \sigma_M d_M \end{pmatrix} = d_N h_2 \sigma_M + h_2 \sigma_M d_M.$$

(b)$\Rightarrow$(c). Es inmediato pues $J(M)$ es $\mathcal{E}$-proyectivo.

(c)$\Rightarrow$(b). Tenemos que $f = hg$ donde $g : M \to P$ y $h : P \to N$ son morfismos y P es $\mathcal{E}$-proyectivo, por lo tanto P también es $\mathcal{E}$-inyectivo. Como α_M es $\mathcal{E}$-inflación entonces existe $t : J(M) \to P$ tal que $g = t\alpha_M$, así, $f = ht\alpha_M$. $\square$

Gracias a este resultado la categoría C-$\underline{\text{CoDf}}$ también se puede pensar como la categoría C-CoDf módulo homotopía.

Definición 4.12. Sea (A, m) una A_∞-álgebra y sean (M, m^M) y (N, m^N) dos A_∞-módulos. Diremos que una familia de funciones homogéneas $f = \{f_n : A^{\otimes(n-1)} \otimes M \to N\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un **premorfismo de grado** t si para cada n se tiene que $|f_n| = 1 - n + t$. Al conjunto de todos los premorfismos de M a

N de grado t lo denotaremos como $\mathrm{PHom}_A^t(M,N)$; notemos que éste es un espacio vectorial con las operaciones entrada a entrada. Definamos

$$\mathrm{PHom}_A^*(M,N) := \bigoplus_{t\in\mathbb{Z}} \mathrm{PHom}_A^t(M,N).$$

Observación 4.13. Consideremos un premorfismo f como antes. Podemos proceder con una construcción análoga a la de la Observación 3.34, con lo cual tenemos una función lineal homogénea $\hat{f} : \mathrm{Ind}(M[1]) \to N[1]$ de grado t. Esta función nos da una función homogénea $\Psi(\hat{f}) : \mathrm{Ind}(M[1]) \to \mathrm{Ind}(N[1])$ de grado t. Procediendo como en 1.16 y en 3.39 se prueba que la clase de los A_∞-módulos junto con los premorfismos es una categoría (con una composición de morfismos parecida a la de A-Mod_∞ salvo por un signo) a la cual denotaremos como A-PMod_∞^*. Más aún, el funtor del *Teorema* 3.40 se puede extender a un funtor fiel y pleno

$$F : A\text{-}\mathrm{PMod}_\infty^* \to \ TA[1]\text{-}\mathrm{CoGr}^*$$

donde $TA[1]$-CoGr^* es la categoría cuyos objetos son los $TA[1]$-comódulos graduados y para cada par de objetos (M,ρ_M) y (N,ρ_N) los morfismos están dados por

$$\mathrm{Hom}^*_{TA[1]\text{-CoGr}}(M,N) := \bigoplus_{t\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}^t_{TA[1]\text{-CoGr}}(M,N).$$

Notemos que, si M y N son A_∞-módulos, entonces $F(\mathrm{PHom}_A^0(M,N)) = \mathrm{Hom}_{TA[1]\text{-CoGr}}(F(M),F(N))$.

Definición 4.14. Sean (A,m) una A_∞-álgebra, (M,m^M) y (N,m^N) dos A_∞-módulos y $h \in \mathrm{PHom}_A^{-1}(M,N)$. Definimos el premorfismo de grado 0

$$h^\bullet := \{H(h)_n^{(1)} + H(h)_n^{(2)} + H(h)_n^{(3)}\}_{n\in\mathbb{N}} : M \to N$$

donde

$$\begin{aligned}
H(h)_n^{(1)} &:= \sum_{\substack{s+t=n\\ s\geq 0;\ t\geq 1}} (-1)^s m^N_{1+s}(id_A^{\otimes s}\otimes h_t),\\
H(h)_n^{(2)} &:= \sum_{\substack{r+s=n\\ r\geq 0; s\geq 1}} (-1)^r h_{r+1}(id_A^{\otimes r}\otimes m^M_s) \ \text{ y}\\
H(h)_n^{(3)} &:= \sum_{\substack{r+s+t=n\\ s,t\geq 1;\ r\geq 0}} (-1)^{r+st} h_{r+1+t}(id_A^{\otimes r}\otimes m_s\otimes id_A^{\otimes(t-1)}\otimes id_M).
\end{aligned}$$

para cada $n\in\mathbb{N}$.

Definición 4.15. Sean (A, m) una A_∞-álgebra, (M, m^M) y (N, m^N) dos A_∞-módulos y $f \in \mathrm{Hom}_{A\text{-Mod}_\infty}(M, N)$. Diremos que f es **homotópicamente nulo** si existe una familia $h \in \mathrm{PHom}_A^{-1}(M, N)$ tal que $f = h^\bullet$. A h se le conoce como una 0-**homotopía** para f.

Diremos que dos morfismos f y g son **homotópicamente equivalentes** si $f - g$ es homotópicamente nulo. Y si h es una 0-homotopía para $f - g$, entonces diremos que h es una homotopía de f a g.

Definición 4.16. Sean A una A_∞-álgebra y $h : M \to N$ un premorfismo de A_∞-módulos de grado -1. Para este premorfismo y para cada $n \geq 1$, definimos $Z_n^{(2)}$, $Z_n^{(4)}$, $Z_n^{(5)}$, $Z_n^{(6)}$ y $Z_n^{(7)}$ de manera análoga a como se definen en 3.37 y definimos

$$Z_n^{(1)} := \sum_{\substack{s+t=n \\ s\geq 1;\, t\geq 2}} (-1)^s m_{s+1}^N (id_A^{\otimes s} \otimes h_t) \text{ para cada } n \geq 1 \text{ , y}$$

$$Z_1^{(3)} := 0 \text{ y } Z_n^{(3)} := (-1)^{n-1} m_n^N (id_A^{\otimes (n-1)} \otimes h_1) \text{ para } n \geq 2.$$

Observación 4.17. Sean (A, m) una A_∞-álgebra, (M, m^M) y (N, m^N) dos A_∞-módulos y $f \in \mathrm{Hom}_{A\text{-Mod}_\infty}(M, N)$ un morfismo homotópicamente nulo con 0-homotopía h. Usando las definiciones anteriores tenemos que $H(h)_n^{(1)} = Z_n^{(1)} + Z_n^{(2)} + Z_n^{(3)}$, $H(h)_n^{(2)} = Z_n^{(5)} + Z_n^{(6)} + Z_n^{(7)}$ y $H(h)_n^{(3)} = Z_n^{(4)}$, para $n \geq 1$.

Proposición 4.18. Sean (A, m) una A_∞-álgebra, (M, m^M) y (N, m^N) dos A_∞-módulo y $h \in \mathrm{PHom}_A^{-1}(M, N)$ un premorfismo, entonces

$$h^\bullet \in \mathrm{Hom}_{A\text{-Mod}_\infty}(M, N).$$

Demostración. De 4.9 sabemos que $F(h)^\bullet$ es morfismo de comódulos diferenciales. La prueba consiste en demostrar que $F(h^\bullet) = F(h)^\bullet$, así, ya que $F(h^\bullet) = \Psi(\widehat{h^\bullet})$, del *Teorema* 3.38 se concluye que $h^\bullet$ está en $\mathrm{Hom}_{A\text{-Mod}_\infty}(M, N)$.

Recordemos la *Proposición* 3.36. Ésta se puede generalizar a premorfismos de grado -1. Con ello, tomando el caso particular del premorfismo h, de la demostración de esa misma proposición se sigue que $m'^N \Psi(\hat{h})_n = D_n^{(1)} + D_n^{(2)} + D_n^{(3)}$ y que $\hat{h}\chi(m'^N)_n = D_n^{(4)} + D_n^{(5)} + D_n^{(6)} + D_n^{(7)}$. De igual manera, las igualdades $\sigma_N^{-1} D_0^{(i)} \gamma \sigma_M = Z_1^{(i)}$ y $\sigma_N^{-1} D_n^{(i)} (\sigma^{\otimes n} \otimes \sigma_M) = Z_{n+1}^{(i)}$ probadas en 3.38 son válidas para el caso del premorfismo h si usamos las $Z_n^{(i)}$'s de la *Definición* 4.16.

De todo esto, para cada $n \geq 0$, se deducen las igualdades

$$\begin{aligned} q(F(h)^\bullet)_n &= q(\Psi(\hat{h})^\bullet)_n = q(\chi(m'^N)\Psi(\hat{h}) + \Psi(\hat{h})\chi(m'^M))_n \\ &= q\chi(m'^N)\Psi(\hat{h})_n + q\Psi(\hat{h})\chi(m'^M)_n \\ &= m'^N\Psi(\hat{h})_n + \hat{h}\chi(m'^M)_n = \sum_{i=1}^{7} D_n^{(i)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para toda $n \geq 1$,

$$\sigma_N^{-1}q(\Psi(\hat{h})^\bullet)_n(\sigma^{\otimes n}\otimes\sigma_M) = \sum_{i=1}^{7} Z_{n+1}^{(i)} = H(h)_{n+1}^{(1)}+H(h)_{n+1}^{(2)}+H(h)_{n+1}^{(3)} = (h^\bullet)_{n+1}$$

y para $n = 0$

$$\sigma_N^{-1}q(\Psi(\hat{h})^\bullet)_0\gamma\sigma_M = H(h)_1^{(1)} + H(h)_1^{(2)} + H(h)_1^{(3)} = (h^\bullet)_1.$$

Del Corolario 3.35 se sigue que $q\Psi(\hat{h})^\bullet = \widehat{h^\bullet}$, es decir, $\Psi(\hat{h})^\bullet = \Psi(\widehat{h^\bullet})$. □

4.3. Triangulación de A-$\underline{\mathbf{Mod}}_\infty$

Proposición 4.19. Sea (A, m) una A_∞-álgebra y sea F el funtor de 3.40. Se tienen las siguientes dos afirmaciones:

(a) Sea $f : M \to N$ un morfismo en A-Mod_∞, entonces f es homotópicamente nulo si y sólo si $F(f)$ es homotópicamente nulo.

(b) El funtor F preserva y refleja equivalencia homotópica.

Demostración. Inciso (a). Consideremos $f : M \to N$ un morfismo en A-Mod_∞ homotópicamente nulo con 0-homotopía h, es decir, $f = h^\bullet$. En la demostración de 4.18 se probó que $F(h^\bullet) = F(h)^\bullet$, por lo tanto $F(f) = F(h)^\bullet$, es decir, $F(f)$ es homotópicamente nulo. Ahora, supongamos que $F(f) : \mathrm{Ind}(M[1]) \to \mathrm{Ind}(N[1])$ es homotópicamente nulo, por lo tanto existe $\lambda \in \mathrm{Hom}^{-1}_{TA[1]\text{-CoGr}}(\mathrm{Ind}(M[1]), \mathrm{Ind}(N[1]))$ tal que $F(f) = \lambda^\bullet$. Como F (pensado como en 4.13) es pleno, existe $g \in \mathrm{PHom}_A^{-1}(M, N)$ tal que $F(g) = \lambda$.

Con ello se sigue que $F(g)^\bullet = F(f)$. De nueva cuenta, de 4.18 sabemos que $F(g)^\bullet = F(g^\bullet)$, como F es fiel concluimos que $f = g^\bullet$.

Inciso (b). Consideremos $f_1 : M \to N$ y $f_2 : M \to N$ dos morfismos en A-Mod$_\infty$. Tenemos que f_1 y f_2 son homotópicamente equivalentes si y sólo si $f_1 - f_2$ es homotópicamente nulo si y sólo si $F(f_1 - f_2)$ es homotópicamente nulo. Como F es aditivo, tenemos que, $F(f_1 - f_2) = F(f_1) - F(f_2)$. Por lo tanto f_1 y f_2 son homotópicamente equivalentes si y sólo si $F(f_1) - F(f_2)$ es homotópicamente nulo, lo cual pasa si y solamente si $F(f_1)$ y $F(f_2)$ son homotópicamente equivalentes. $\square$

Observación 4.20. Notemos que, gracias al inciso (b) de la proposición, anterior tenemos que la relación de homotopía nos da un ideal en la categoría A-Mod$_\infty$. En efecto, esto se sigue del hecho de que la relación de homotopía en $TA[1]$-CoDf es un ideal y que $F : A\text{-Mod}_\infty \to TA[1]\text{-CoDf}$ es un funtor fiel y pleno.

Definición 4.21. Denotaremos como A-$\underline{\text{Mod}}_\infty$ al cociente de la categoría A-Mod$_\infty$ módulo homotopía. Y si f es un morfismo en A-Mod$_\infty$ denotaremos como $[f]$ a la clase de homotopía de dicho morfismo.

Teorema 4.22. Para (A, m) una A_∞-álgebra se tienen las siguientes afirmaciones:

(a) El autofuntor $T : A\text{-Mod}_\infty \to A\text{-Mod}_\infty$ preserva homotopías. Por lo tanto se tiene un autofuntor $\underline{T} : A\text{-}\underline{\text{Mod}}_\infty \to A\text{-}\underline{\text{Mod}}_\infty$ inducido por T que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A\text{-Mod}_\infty \arrow[r, "T"] \arrow[d, "P"'] & A\text{-Mod}_\infty \arrow[d, "P"'] \\ A\text{-}\underline{\text{Mod}}_\infty \arrow[r, "\underline{T}"'] & A\text{-}\underline{\text{Mod}}_\infty, \end{tikzcd}$$

donde P es el funtor de paso al cociente.

(b) Existe un funtor fiel, pleno y denso $\underline{F} : A\text{-}\underline{\text{Mod}}_\infty \to TA[1]\text{-}\underline{\text{Ind}}$ que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A\text{-Mod}_\infty \arrow[r, "F"] \arrow[d, "P"'] & TA[1]\text{-Ind} \arrow[d, "P"] \\ A\text{-}\underline{\text{Mod}}_\infty \arrow[r, "\underline{F}"'] & TA[1]\text{-}\underline{\text{Ind}}, \end{tikzcd}$$

donde los P's son los funtores de paso al cociente.

Demostración. Inciso (a). Consideremos un morfismo $f : M \to N \in A\text{-Mod}_\infty$ homotópicamente nulo, queremos ver que $T(f)$ también lo es. De la *Proposición* 4.7 sabemos que $FT(f) = TF(f)$, pero F preserva homotopías al igual que $T : TA[1]\text{-Ind} \to TA[1]\text{-Ind}$, por lo tanto $FT(f)$ es homotópicamente nulo. Del inciso (a) de La *Proposición* 4.19 se sigue que $T(f)$ es homotópicamente nulo.

Esto nos da de manera natural un autofuntor $\underline{T} : A\text{-}\underline{\text{Mod}}_\infty \to A\text{-}\underline{\text{Mod}}_\infty$ definido como $\underline{T}(M, m^M) = T(M, m^M)$ en objetos y, para cada clase $[f] \in A\text{-}\underline{\text{Mod}}_\infty$, como $\underline{T}([f]) = [T(f)]$. Dado que T preserva homotopías, el funtor $\underline{T}$ está bien definido. Más aún, si $[g]$ es otra clase que se puede componer con $[f]$ se sigue que

$$\underline{T}([g][f]) = \underline{T}([gf]) = [T(gf)] = [T(g)(f)] = [T(g)][T(f)] = \underline{T}([g])\underline{T}([f]).$$

Por último para el morfismo identidad 1_M se tiene que

$$\underline{T}([1_M]) = [T(1_M)] = [1_{T(M)}] = 1_{\underline{T}(M)}.$$

Insiso (b). De manera análoga, dado que F preserva homotopías, el funtor $\underline{F} : A\text{-}\underline{\text{Mod}}_\infty \to TA[1]\text{-}\underline{\text{Ind}}$ definido como $\underline{F}(M, m) = F(M, m)$ en objetos y $\underline{F}([f]) = [F(f)]$ en morfismos está bien definido, abre composiciones y manda identidades en identidades. $\underline{F}$ es denso ya que se define como F en objetos y F es denso.

Para verificar que $\underline{F}$ es fiel consideremos dos clases de morfismos $[f]$ y $[g]$ tales que $\underline{F}([f]) = \underline{F}([g])$, es decir, $[F(f)] = [F(g)]$. Por lo tanto $F(f) - F(g) = F(f - g)$ es homotópicamente nulo, así por 4.19, $f - g$ es homotópicamente nulo, con lo que $[f] = [g]$.

Por último, sea $[a] \in \text{Hom}_{TA[1]\text{-}\underline{\text{Ind}}}(\text{Ind}(M), \text{Ind}(N))$, sabemos que existe $f \in \text{Hom}_{A\text{-Mod}_\infty}(M[-1], N[-1])$ tal que $F(f) = a$. Por lo tanto $\underline{F}([f]) = [F(f)] = [a]$. Con esto se tiene que $\underline{F}$ es pleno. $\square$

Proposición 4.23. Sean $\mathcal{D}$ una categoría triangulada con autofuntor $T : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor fiel, pleno y denso y $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ un autofuntor de $\mathcal{C}$ que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "T"'] & \mathcal{D} \arrow[d, "T"] \\ \mathcal{C} \arrow[r, "F"'] & \mathcal{D}. \end{tikzcd}$$

Entonces, la categoría $\mathcal{C}$ es triangulada, donde una sucesión en $\mathcal{C}$

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \xrightarrow{h} T(M)$$

es un triángulo si y sólo si

$$F(M) \xrightarrow{F(f)} F(N) \xrightarrow{F(g)} F(L) \xrightarrow{F(h)} TF(M)$$

es un triángulo en $\mathcal{D}$.

Demostración. Primero, como $\mathcal{D}$ es aditiva, entonces, por la equivalencia dada por F se tiene que $\mathcal{C}$ también es aditiva.

Veamos que la clase de los triángulos en $\mathcal{C}$ cumple los 6 axiomas:

T1. Sea id_M el morfismo identidad de un objeto M en $\mathcal{C}$. Sabemos que

$$F(M) \xrightarrow{id_{F(M)}} F(M) \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} TF(M)$$

es un triángulo en $\mathcal{D}$, por lo tanto

$$M \xrightarrow{id_M} M \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} T(M)$$

es triángulo en $\mathcal{C}$.

T2. Sea $f : M \to N$ morfismo de $\mathcal{C}$. Tenemos que para $F(f)$ existen g' y h' tales que

$$F(M) \xrightarrow{F(f)} F(N) \xrightarrow{g'} L \xrightarrow{h'} TF(M)$$

es triángulo en $\mathcal{D}$. Por la densidad de F tenemos que existe $L' \in \mathcal{C}$ y un isomorfismo $r : L \to F(L')$ en $\mathcal{D}$. Así, por el axioma T3 tenemos que el segundo renglón del diagrama

$$\begin{tikzcd}
F(M) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, equal] & F(N) \arrow[r, "g'"] \arrow[d, equal] & L \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "r"'] & TF(M) \arrow[d, equal] \\
F(M) \arrow[r, "F(f)"'] & F(N) \arrow[r, "rg'"'] & F(L') \arrow[r, "h'r^{-1}"'] & TF(M)
\end{tikzcd}$$

es un triángulo en $\mathcal{D}$. Como el funtor F es fiel, existen g y h tales que $F(g) = rg'$ y $F(h) = h'r^{-1}$. Concluyendo que,

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L' \xrightarrow{h} T(M)$$

es un triángulo en $\mathcal{C}$.

T3. Consideremos un diagrama conmutativo en $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"'] & L \arrow[r, "h"] \arrow[d, "c"'] & T(M) \arrow[d, "T(a)"] \\ M' \arrow[r, "f'"] & N' \arrow[r, "g'"] & L' \arrow[r, "h'"] & T(M') \end{tikzcd}$$

tal que a, b y c son isomorfismos y el primer renglón es un triángulo. Queremos ver que el segundo renglón también es un triángulo. Primero notemos que como F es funtor y $FT = TF$, entonces al aplicar F al diagrama anterior tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} F(M) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "F(a)"'] & F(N) \arrow[r, "F(g)"] \arrow[d, "F(b)"'] & F(L) \arrow[r, "F(h)"] \arrow[d, "F(c)"'] & TF(M) \arrow[d, "TF(a)"'] \\ F(M') \arrow[r, "F(f')"] & F(N') \arrow[r, "F(g')"] & F(L') \arrow[r, "F(h')"] & TF(M') \end{tikzcd}$$

en $\mathcal{D}$. Como F manda isomorfismos en isomorfismos, entonces $F(a)$, $F(b)$ y $F(c)$ son isos y, por el axioma T3, el segundo renglón es un triángulo en $\mathcal{D}$. Por lo tanto

$$M' \xrightarrow{f'} N' \xrightarrow{g'} L' \xrightarrow{h'} T(M')$$

es un triángulo en $\mathcal{C}$.

T4. Por definición, tenemos que

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \xrightarrow{h} T(M)$$

es un triángulo en $\mathcal{C}$ si y sólo si

$$F(M) \xrightarrow{F(f)} F(N) \xrightarrow{F(g)} F(L) \xrightarrow{F(h)} TF(M)$$

es un triángulo en $\mathcal{D}$, pero esto pasa si y sólo si

$$F(N) \xrightarrow{F(g)} F(L) \xrightarrow{F(h)} TF(M) \xrightarrow{-TF(f)} TF(N)$$

es un triángulo en $\mathcal{D}$. Éste último es igual a

$$F(N) \xrightarrow{F(g)} F(L) \xrightarrow{F(h)} FT(M) \xrightarrow{-FT(f)} TF(N),$$

pero, esta sucesión es un triángulo si y sólo si

$$N \xrightarrow{g} L \xrightarrow{h} T(M) \xrightarrow{-T(f)} T(N)$$

es un triángulo en $\mathcal{C}$.

T5. Consideremos en $\mathcal{C}$ el diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi_1"] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\phi_2"] & L \arrow[r, "h"] & T(M) \arrow[d, "T(\phi_1)"] \\
M' \arrow[r, "f'"'] & N' \arrow[r, "g'"'] & L' \arrow[r, "h'"'] & T(M')
\end{tikzcd}$$

tal que $f'\phi_1 = \phi_2 f$ y ambos renglones son triángulos en $\mathcal{C}$. De nueva cuenta, la funtorialidad de F, el axioma T5 y el hecho de que F conmuta con T, nos dan un morfismo ϕ_3' y el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{D}$

$$\begin{tikzcd}
F(M) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "F(\phi_1)"] & F(N) \arrow[r, "F(g)"] \arrow[d, "F(\phi_2)"] & F(L) \arrow[r, "F(h)"] \arrow[d, dashed, "\phi_3'"] & FT(M) \arrow[d, "FT(\phi_1)"] \\
F(M') \arrow[r, "F(f')"'] & F(N') \arrow[r, "F(g')"'] & F(L') \arrow[r, "F(h')"'] & FT(M').
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, existe ϕ_3 tal que $F(\phi_3) = \phi_3'$ y, como F refleja cuadros conmutativos, se tiene que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi_1"] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\phi_2"] & L \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\phi_3"] & T(M) \arrow[d, "T(\phi_1)"] \\
M' \arrow[r, "f'"'] & N' \arrow[r, "g'"'] & L' \arrow[r, "h'"'] & T(M')
\end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo en $\mathcal{C}$.

T6. Sean

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{i} L' \xrightarrow{i'} T(M)\ ,$$

$$N \xrightarrow{g} L \xrightarrow{j} M' \xrightarrow{j'} T(N)\ ,\ \text{y}$$

$$M \xrightarrow{gf} L \xrightarrow{k} N' \xrightarrow{k'} T(M)$$

triángulos en $\mathcal{C}$. Entonces

$$F(M) \xrightarrow{F(f)} F(N) \xrightarrow{F(i)} F(L') \xrightarrow{F(i')} TF(M)\ ,$$

$$F(N) \xrightarrow{F(g)} F(L) \xrightarrow{F(j)} F(M') \xrightarrow{F(j')} TF(N)\ ,\ \text{y}$$

$$F(M) \xrightarrow{F(gf)} F(L) \xrightarrow{F(k)} F(N') \xrightarrow{F(k')} TF(M)$$

son triángulos en $\mathcal{D}$. Por lo tanto existen morfismos $a : F(L') \to F(N')$ y $b : F(N') \to F(M')$ en $\mathcal{D}$ tales que

$$F(L') \xrightarrow{\quad a \quad} F(N') \xrightarrow{\quad b \quad} F(M') \xrightarrow{TF(i)F(j')} TF(L')$$

es un triángulo en $\mathcal{D}$ y el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
T^{-1}F(N') \arrow[r, "T^{-1}F(k')"] \arrow[d, "T^{-1}(b)"'] & F(M) \arrow[r, equal] \arrow[d, "F(f)"'] & F(M) \arrow[d, "F(gf)"] & & \\
T^{-1}F(M') \arrow[r, "T^{-1}F(j')"'] & F(N) \arrow[r, "F(g)"'] \arrow[d, "F(i)"'] & F(L) \arrow[r, "F(j)"] \arrow[d, "F(k)"] & F(M') \arrow[r, "F(j')"] \arrow[d, equal] & TF(N) \arrow[d, "TF(i)"] \\
& F(L') \arrow[r, dashed, "a"'] \arrow[d, "F(i')"'] & F(N') \arrow[r, dashed, "b"'] \arrow[d, "F(k')"] & F(M') \arrow[r, "TF(i)F(j')"'] & TF(L') \\
& TF(M) \arrow[r, equal] & TF(M). & &
\end{tikzcd}$$

En lo que sigue, para cada $X, Y \in \mathcal{C}$ y $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$, denotaremos por $F^{-1}(h)$ al unico morfismo en $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ tal que $F(F^{-1}(h)) = h$.

Ahora, dado que $TF(i)F(j') = FT(i)F(j')$, se sigue que

$$L' \xrightarrow{F^{-1}(a)} N' \xrightarrow{F^{-1}(b)} M' \xrightarrow{T(i)j'} T(L')$$

es un triángulo en $\mathcal{C}$.

Usando que $TF = FT$ y que F es fiel, tenemos que

$$
\begin{tikzcd}
T^{-1}(N') \arrow[r, "T^{-1}(k')"] \arrow[d, "T^{-1}F^{-1}(b)"'] & M \arrow[r, equal] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[d, "gf"] & & \\
T^{-1}(M') \arrow[r, "T^{-1}(j')"'] & N \arrow[r, "g"'] \arrow[d, "i"'] & L \arrow[r, "j"] \arrow[d, "k"] & M' \arrow[r, "j'"] \arrow[d, equal] & T(N) \arrow[d, "T(i)"] \\
& L' \arrow[r, dashed, "F^{-1}(a)"'] \arrow[d, "i'"'] & N' \arrow[r, dashed, "F^{-1}(b)"'] \arrow[d, "k'"] & M' \arrow[r, "T(i)j'"'] & T(L') \\
& T(M) \arrow[r, equal] & T(M) & &
\end{tikzcd}
$$

es un diagrama conmutativo en $\mathcal{C}$. $\square$

Definición 4.24. Sea A una A_∞-álgebra y sea $f = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} : M \to N$ un mofismo en la categoría A-Mod$_\infty$. Diremos que f es un **morfismo estricto** si para toda $n \geq 2$ se tiene que $f_n = 0$.

Observación 4.25. Sean M y N dos A_∞-módulos sobre una A_∞-álgebra A. Notemos que si $f : M \to N$ es un morfismo estricto en A-Mod$_\infty$, entonces para toda $n \geq 1$ se tiene la igualdad

$$f_1 m_n^M = m_n^N(id_A^{\otimes(n-1)} \otimes f_1).$$

Más aún, todo morfismo $f_1 : M \to N$ en K-Gr que cumpla las igualdades anteriores determina un morfismo estricto $f : M \to N$ en A-Mod$_\infty$.

Definición 4.26. Sean M, N y L A_∞-módulos sobre una A_∞-álgebra A y sean $f : M \to N$ y $g : N \to L$ morfismos estrictos en A-Mod$_\infty$. Diremos que la sucesión

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L$$

es exacta si

$$M \xrightarrow{f_1} N \xrightarrow{g_1} L$$

es exacta y se divide en K-Gr.

En general, si $f : M \to N$ y $g : N \to L$ son dos morfismos cualesquiera en A-Mod$_\infty$, diremos que

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L$$

es una sucesión exacta si existen morfismos estrictos $f' : M' \to N'$ y $g' : M' \to N'$, e isomorfismos $\phi_1 : M \to M'$, $\phi_2 : N \to N'$ y $\phi_3 : L \to L'$ tales que

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi_1"'] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\phi_2"'] & L \arrow[d, "\phi_3"'] \\
M' \arrow[r, "f'"'] & N' \arrow[r, "g'"'] & L'
\end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo y el segundo renglón es exacto. A la clase de sucesiones exactas la denotaremos como $\mathcal{E}_\infty$.

Proposición 4.27. Sean A una A_∞-álgebra, M y N dos A_∞-módulos y $F : A\text{-Mod}_\infty \to TA[1]\text{-CoDf}$ el funtor de 3.40. Consideremos un morfismo $f : M \to N \in A\text{-Mod}_\infty$. Entonces, f es estricto si y sólo si $F(f) = id_{TA[1]} \otimes f_1[1]$.

Demostración. Sea $f : M \to N$ cualquier morfismo en A-Mod$_\infty$. Por definición, $F(f) = \Psi(\hat{f})$. Además,

$$id_{TA[1]} \otimes f_1[1] = \text{Ind}_{TA[1]}(f_1[1]) \in \text{Hom}_{TA[1]\text{-CoGr}}(\text{Ind}(M[1]), \text{Ind}(N[1])).$$

Notemos que $\Psi(\hat{f}) = id_{TA[1]} \otimes f_1[1]$ es equivalente a que $\Phi\Psi(\hat{f}) = \Phi(id_{TA[1]} \otimes f_1[1])$. Pero, $\Phi\Psi(\hat{f}) = \hat{f}$ y

$$\begin{aligned}
\Phi(id_{TA[1]} \otimes f_1[1]) &= q(id_{TA[1]} \otimes f_1[1]) \\
&= \mu(\pi_K \otimes id_{N[1]})(id_{TA[1]} \otimes f_1[1]) \\
&= \mu(\pi_K \otimes f_1[1]).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $F(f) = id_{TA[1]} \otimes f_1[1]$ si y sólo si $\hat{f} = \mu(\pi_K \otimes f_1[1])$. Esta última igualdad es equivalente a que para toda $n \geq 0$ se cumpla que $\hat{f}_n = \mu(\pi_K \otimes f_1[1])_n$.

Calculando los términos de la parte derecha de esa igualdad, para $n \geq 1$, tenemos que

$$\mu(\pi_K \otimes f_1[1])_n = \mu(\pi_K \otimes f_1[1])(\alpha_n \otimes id_{M[1]}) = \mu(\pi_K \alpha_n \otimes f_1[1]) = 0.$$

Con esto se concluye que $F(f) = id_{TA[1]} \otimes f_1[1]$ si y sólo si $\hat{f}_n = 0$ para toda $n \geq 1$. Esto último es equivalente a que el morfismo f sea estricto. □

Proposición 4.28. Sea A una A_∞-álgebra y sean $f : M \to N$ y $g : N \to L$ dos morfismos en A-Mod_∞. Consideremos el funtor $F : A\text{-}\mathrm{Mod}_\infty \to TA[1]\text{-CoDf}$ de 3.40. Entonces, $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L$ está en $\mathcal{E}_\infty$ si y sólo si $F(M) \xrightarrow{F(f)} F(N) \xrightarrow{F(g)} F(L)$ está en $\mathcal{E}$ (ver *Sección 2.2*).

Demostración. Supongamos que $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L$ está en $\mathcal{E}_\infty$, por lo tanto, existen morfismos estrictos $f' : M' \to N'$ y $g' : N' \to L'$ e isomorfismos $\phi_1 : M \to M'$, $\phi_2 : N \to N'$ y $\phi_3 : L \to L'$ tales que

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi_1"'] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\phi_2"'] & L \arrow[d, "\phi_3"'] \\ M' \arrow[r, "f'"'] & N' \arrow[r, "g'"'] & L' \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

es un diagrma conmutativo en A-Mod_∞ y el segundo renglón está en $\mathcal{E}_\infty$. Con esto, por definición, se tiene una sucesión $M' \xrightarrow{f'_1} N' \xrightarrow{g'_1} L'$ que es exacta y se divide en K-Gr. Por consiguiente, se tiene una sucesión

$$M'[1] \xrightarrow{f'_1[1]} N'[1] \xrightarrow{g'_1[1]} L'[1]$$

que es exacta y se divide en K-Gr. Aplicando el funtor $\mathrm{Ind}_{TA[1]}$ tenemos la sucesión

$$\mathrm{Ind}(M'[1]) \xrightarrow{\mathrm{Ind}(f'_1[1])} \mathrm{Ind}(N'[1]) \xrightarrow{\mathrm{Ind}(g'_1[1])} \mathrm{Ind}(L'[1])$$

que es exacta y se escinde en $TA[1]$-CoGr.

Ahora, al aplicar el funtor F al diagrama (4.1) tenemos el diagrama conmutativo en $TA[1]$-CoDf

$$\begin{tikzcd} F(M) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "F(\phi_1)"'] & F(N) \arrow[r, "F(g)"] \arrow[d, "F(\phi_2)"'] & F(L) \arrow[d, "F(\phi_3)"'] \\ F(M') \arrow[r, "F(f')"'] & F(N') \arrow[r, "F(g')"'] & F(L'). \end{tikzcd}$$

De la *Proposición* 4.27 sabemos que $F(f') = \mathrm{Ind}(f'_1[1])$ y $F(g') = \mathrm{Ind}(g'_1[1])$. Por lo tanto, el segundo renglón está en $\mathcal{E}$, concluyendo que

$$F(M) \xrightarrow{F(f)} F(N) \xrightarrow{F(g)} F(L)$$

también está en $\mathcal{E}$.

Para la segunda parte, supongamos que $F(M) \xrightarrow{F(f)} F(N) \xrightarrow{F(g)} F(L)$ está en $\mathcal{E}$. Por definición,

$$UF(M) \xrightarrow{F(f)} UF(N) \xrightarrow{F(g)} UF(L)$$

se divide en $TA[1]$-CoGr. Así, de las propiedades de la suma directa y del funtor Ind, se tiene un isomorfismo $\lambda : UF(N) \to \mathrm{Ind}(M[1] \oplus L[1])$ y el diagrama conmutativo en $TA[1]$-CoDf

$$\begin{tikzcd}
UF(M) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, equal] & UF(N) \arrow[r, "F(g)"] \arrow[d, "\lambda"] & UF(L) \arrow[d, equal] \\
\mathrm{Ind}(M[1]) \arrow[r, "i"'] & \mathrm{Ind}(M[1] \oplus L[1]) \arrow[r, "p"'] & \mathrm{Ind}(L[1])
\end{tikzcd} \tag{4.2}$$

con el segundo renglón la sucesión trivial, es decir, i y p son la inclusión y la proyección canónicas, respectivamente. Notemos que $i = id_{TA[1]} \otimes j[1]$ y $p = id_{TA[1]} \otimes q[1]$, donde, $j : M \to M \oplus L$ y $q : M \oplus L \to L$ son la inclusión y la proyección naturales. Con esto se conluye que, al aplicarle los funtores $T : K\text{-Gr} \to K\text{-Gr}$ y $\mathrm{Ind} : K\text{-Gr} \to TA[1]\text{-CoGr}$ a la sucesión trivial

$$M \xrightarrow{j} M \oplus L \xrightarrow{q} L\ ,$$

obtenemos el último renglón del diagrama (4.2).

Consideremos el objeto $(\mathrm{Ind}(M[1] \oplus L[1]), \lambda\chi(m'^N)\lambda^{-1})$ de $TA[1]$-CoDf. De la demostración del *Corolario* 4.1 sabemos que existe $N' \in A\text{-Mod}_\infty$ tal que

$$F(N') = (\mathrm{Ind}(M[1] \oplus L[1]), \lambda\chi(m'^N)\lambda^{-1}).$$

Por la *Proposición* 2.43 tenemos que $\lambda : F(N) \to F(N')$ es un isomorfismo en $TA[1]$-CoDf, por lo tanto existe $h : N \to N' \in A\text{-Mod}_\infty$ tal que $F(h) = \lambda$. Además, como F es pleno, existen morfismos $\iota : M \to N$ y $\rho : N \to L$ en $A\text{-Mod}_\infty$ tales que $F(\iota) = i$ y $F(\rho) = p$. De la *Proposición* 4.27, se sigue que ι y ρ son estrictos.

De todo esto, a partir del diagrama (4.2) se consigue el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & L \arrow[d, equal] \\
M \arrow[r, "\iota"'] & N' \arrow[r, "\rho"'] & L,
\end{tikzcd}$$

donde h es un isomorfismo y el segundo renglón está en $\mathcal{E}_\infty$. Así, la sucesión $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L$ está en $\mathcal{E}_\infty$. $\square$

Proposición 4.29. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías y sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor fiel, pleno y denso. Consideremos dos autofuntores $T : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ y $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ tales que $FT = TF$. Supongamos que existen un funtor $J : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ y dos transformaciones naturales $\alpha_{\mathcal{D}} : id_{\mathcal{D}} \to J$ y $\beta_{\mathcal{D}} : J \to T$. Entonces:

1. Existe funtor $J : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ tal que el siguiente diagrama conmuta hasta isomorfismo:
$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "J"'] & \mathcal{D} \arrow[d, "J"] \\ \mathcal{C} \arrow[r, "F"'] & \mathcal{D}, \end{tikzcd}$$
es decir, existe un isomorfismo natural $\varphi : FJ \to JF$.

2. Existen transformaciones naturales $\alpha_{\mathcal{C}} : id_{\mathcal{C}} \to J$ y $\beta_{\mathcal{C}} : J \to T$ tales que, para cada objeto C en $\mathcal{C}$, $F(\alpha_C) = \varphi_C^{-1}\alpha_{F(C)}$ y $F(\beta_C) = \beta_{F(C)}\varphi_C$.

Demostración. 1. Sea C un objeto de $\mathcal{C}$. Como F es denso, existe un objeto C' en $\mathcal{C}$ junto con un isomorfismo $\varphi_C : F(C') \to JF(C)$ en $\mathcal{D}$. Para cada objeto C en $\mathcal{C}$, definimos $J(C) = C'$ y, para cada morfismo $f : C \to E$ en $\mathcal{C}$, definimos $J(f) = F^{-1}(\varphi_E^{-1}JF(f)\varphi_C)$.

Afirmamos que $J : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es un funtor. En efecto, si id_C es la identidad del objeto C en $\mathcal{C}$, entonces:

$$\begin{aligned} J(id_C) &= F^{-1}(\varphi_C^{-1}JF(id_C)\varphi_C) \\ &= F^{-1}(\varphi_C^{-1}id_{JF(C)}\varphi_C) \\ &= F^{-1}(\varphi_C^{-1}\varphi_C) \\ &= F^{-1}(id_{F(C')}) = id_{C'} = id_{J(C)}. \end{aligned}$$

Ahora, si $f : C \to E$ y $g : E \to L$ son morfismos en $\mathcal{C}$, entonces:

$$\begin{aligned} J(gf) &= F^{-1}(\varphi_L^{-1}JF(gf)\varphi_C) \\ &= F^{-1}(\varphi_L^{-1}JF(g)JF(f)\varphi_C) \\ &= F^{-1}(\varphi_L^{-1}JF(g)\varphi_E\varphi_E^{-1}JF(f)\varphi_C) \\ &= F^{-1}(\varphi_L^{-1}JF(g)\varphi_E)F^{-1}(\varphi_E^{-1}JF(f)\varphi_C) \\ &= J(g)J(f). \end{aligned}$$

Por como está definido $J : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, se tiene el diagrama conmutativo de la proposición, con $\varphi : FJ \to JF$ el isomorfismo natural.

2. Veamos que $\alpha_{\mathcal{C}} : id_{\mathcal{C}} \to J$ es transformación natural. Consideremos f como antes. Sabemos que $JF(f)\alpha_{F(C)} = \alpha_{F(E)}F(f)$, por lo tanto, $\varphi_E^{-1}JF(f)\alpha_{F(C)} = \varphi_E^{-1}\alpha_{F(E)}F(f)$. Con ello tenemos que

$$\varphi_E^{-1}JF(f)\varphi_C\varphi_C^{-1}\alpha_{F(C)} = \varphi_E^{-1}\alpha_{F(E)}F(f),$$

es decir,

$$FJ(f)F(\alpha_C) = F(\alpha_E)F(f).$$

Así, $J(f)\alpha_C = \alpha_E f$.

Veamos que $\beta_{\mathcal{C}} : J \to T$ es transformación natural. Consideremos f como antes. Sabemos que $TF(f)\beta_{F(C)} = \beta_{F(E)}JF(f)$, pero $FT(f) = TF(f)$, por lo tanto, $FT(f)\beta_{F(C)}\varphi_C = \beta_{F(E)}JF(f)\varphi_C$. Con ello tenemos que

$$FT(f)\beta_{F(C)}\varphi_C = \beta_{F(E)}\varphi_E\varphi_E^{-1}JF(f)\varphi_C,$$

es decir,

$$FT(f)F(\beta_C) = F(\beta_E)FJ(f).$$

Así, $T(f)\beta_C = \beta_E J(f)$. □

Corolario 4.30. Sean A una A_∞-álgebra y $T : A\text{-Mod}_\infty \to A\text{-Mod}_\infty$ el autofuntor traslación. Existe un funtor $J : A\text{-Mod}_\infty \to A\text{-Mod}_\infty$ tal que

$$\begin{tikzcd} A\text{-Mod}_\infty \arrow[r, "F"] \arrow[d, "J"'] & TA[1]\text{-Ind} \arrow[d, "J"] \\ A\text{-Mod}_\infty \arrow[r, "F"'] & TA[1]\text{-Ind} \end{tikzcd}$$

conmuta hasta isomorfismo, donde $J : TA[1]\text{-Ind} \to TA[1]\text{-Ind}$ es la restricción del funtor visto en la *Observación* 2.32 (recordemos que en la prueba del *Teorema* 2.45 vimos que si M es inducido, entonces, $J(M)$ lo es). Existen transformaciones naturales $\alpha : id_{A\text{-Mod}_\infty} \to J$ y $\beta : J \to T$ tales que, para todo objeto $M \in A\text{-Mod}_\infty$, la sucesión $M \xrightarrow{\alpha_M} J(M) \xrightarrow{\beta_M} T(M)$ está en $\mathcal{E}_\infty$.

Demostración. De la *Proposición* 4.29, usando el autofuntor T de 4.7 y las transformaciones naturales $\alpha : id_{TA[1]\text{-CoDf}} \to J$ y $\beta : J \to T$ de la *Observación* 2.34, tenemos la existencia de $J : A\text{-Mod}_\infty \to A\text{-Mod}_\infty$ y de las transformaciones $\alpha : id_{A\text{-Mod}_\infty} \to J$ y $\beta : J \to T$ (para los funtores de $A\text{-Mod}_\infty$), junto con un isomorfismo natural $\varphi : FJ \to JF$, tal que, $F(\alpha_M) = \varphi_M^{-1}\alpha_{F(M)}$ y $F(\beta_M) = \beta_{F(M)}\varphi_M$ para todo objeto $M \in A$-Mod$_\infty$.

Sólo falta ver que para todo objeto $M \in A$-Mod$_\infty$, la sucesión

$$M \xrightarrow{\alpha_M} J(M) \xrightarrow{\beta_M} T(M)$$

está en $\mathcal{E}_\infty$. Notemos que se tiene el diagrama conmutativo en $TA[1]$-CoDf

$$\begin{tikzcd} F(M) \arrow[r, "F(\alpha_M)"] \arrow[d, equal] & FJ(M) \arrow[r, "F(\beta_M)"] \arrow[d, "\varphi_M"'] & FT(M) \arrow[d, equal] \\ F(M) \arrow[r, "\alpha_{F(M)}"'] & JF(M) \arrow[r, "\beta_{F(M)}"'] & TF(M). \end{tikzcd}$$

Del *Teorema* 2.35, sabemos que el segundo renglón está en $\mathcal{E}$, por lo tanto, el primer renglón también está en $\mathcal{E}$. De la *Proposición* 4.28 se obtiene lo deseado. $\square$

Definición 4.31. Sean A una A_∞-álgebra y $T : A\text{-Mod}_\infty \to A\text{-Mod}_\infty$ el funtor traslación. En la categoría A-Mod$_\infty$ consideremos sucesiones de la forma

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \xrightarrow{h} T(M)$$

tales que $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L$ está en $\mathcal{E}_\infty$ y existe morfismo $l : N \to J(M)$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, dashed, "l"] & L \arrow[d, "h"] \\ M \arrow[r, "\alpha_M"'] & J(M) \arrow[r, "\beta_M"'] & T(M). \end{tikzcd}$$

A estas sucesiones módulo homotopía se les conoce como **triángulos canónicos de A-$\underline{\text{Mod}}_\infty$.**

Consideremos $\mathcal{T}_\infty$ como la clase de las sucesiones en A-$\underline{\text{Mod}}_\infty$

$$M \xrightarrow{[f]} N \xrightarrow{[g]} L \xrightarrow{[h]} T(M)$$

que son isomorfas a triángulos canónicos en A-$\underline{\text{Mod}}_\infty$, es decir, existe un triángulo canónico $M' \xrightarrow{f'} N' \xrightarrow{g'} L' \xrightarrow{h'} T(M')$ y existen isomorfismos

$[\phi_1] : M \to M'$, $[\phi_2] : N \to N'$ y $[\phi_3] : L \to L'$ en A-$\underline{\text{Mod}}_\infty$ que hacen conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "{[f]}"] \arrow[d, "{[\phi_1]}"] & N \arrow[r, "{[g]}"] \arrow[d, "{[\phi_2]}"] & L \arrow[r, "{[h]}"] \arrow[d, "{[\phi_3]}"] & T(M) \arrow[d, "{[T(\phi_1)]}"] \\
M' \arrow[r, "{[f']}"'] & N' \arrow[r, "{[g']}"'] & L' \arrow[r, "{[h']}"'] & T(M').
\end{tikzcd}$$

A los elementos de $\mathcal{T}_\infty$ se les conoce como **triángulos de A-$\underline{\text{Mod}}_\infty$**.

Teorema 4.32. Sea A una A_∞-álgebra y sea $\underline{T} : A\text{-}\underline{\text{Mod}}_\infty \to A\text{-}\underline{\text{Mod}}_\infty$ el autofuntor del *Teorema* 4.22. Entonces, $(A\text{-}\underline{\text{Mod}}_\infty, \underline{T})$ es una categoría triangulada con triangulación $\mathcal{T}_\infty$. (Ver [4, pag. 18])

Demostración. En el siguiente diagrama se tiene la conmutatividad del cuadro grande y de los 4 cuadros exteriores:

$$\begin{tikzcd}
A\text{-Mod}_\infty \arrow[rrr, "F"] \arrow[dr, "P"'] \arrow[ddd, "T"'] & & & TA[1]\text{-Ind} \arrow[dl, "P"] \arrow[ddd, "T"] \\
& A\text{-}\underline{\text{Mod}}_\infty \arrow[r, "\underline{F}"] \arrow[d, "\underline{T}"'] & TA[1]\text{-}\underline{\text{Ind}} \arrow[d, "\underline{T}"] & \\
& A\text{-}\underline{\text{Mod}}_\infty \arrow[r, "\underline{F}"'] & TA[1]\text{-}\underline{\text{Ind}} & \\
A\text{-Mod}_\infty \arrow[rrr, "F"'] \arrow[ur, "P"] & & & TA[1]\text{-Ind}. \arrow[ul, "P"']
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto se tiene la conmutatividad del diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A\text{-}\underline{\text{Mod}}_\infty \arrow[r, "\underline{F}"] \arrow[d, "\underline{T}"'] & TA[1]\text{-}\underline{\text{Ind}} \arrow[d, "\underline{T}"] \\
A\text{-}\underline{\text{Mod}}_\infty \arrow[r, "\underline{F}"'] & TA[1]\text{-}\underline{\text{Ind}}.
\end{tikzcd}$$

Utilizando el funtor $\underline{F} : A\text{-}\underline{\text{Mod}}_\infty \to TA[1]\text{-}\underline{\text{Ind}}$, el funtor $\underline{T}$ y el *Corolario* 2.46, de la *Proposición* 4.23, se sigue que A-$\underline{\text{Mod}}_\infty$ es triangulada.

Veamos que los triángulos en $\mathcal{T}_\infty$ son precisamente los que aparecen en 4.23. Consideremos una sucesión en A-$\underline{\mathrm{Mod}}_\infty$

$$M \xrightarrow{[f]} N \xrightarrow{[g]} L \xrightarrow{[h]} T(M)$$

y supongamos que esta sucesión es isomorfa a una de la forma

$$M' \xrightarrow{[f']} N' \xrightarrow{[g']} L' \xrightarrow{[h']} T(M')\ ,$$

con isomorfismos $[\phi_1]$, $[\phi_2]$, $[\phi_3]$, en otras palabras, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "{[f]}"] \arrow[d, "{[\phi_1]}"] & N \arrow[r, "{[g]}"] \arrow[d, "{[\phi_2]}"] & L \arrow[r, "{[h]}"] \arrow[d, "{[\phi_3]}"] & T(M) \arrow[d, "{[T(\phi_1)]=\underline{T}([\phi_1])}"] \\ M' \arrow[r, "{[f']}"'] & N' \arrow[r, "{[g']}"'] & L' \arrow[r, "{[h']}"'] & T(M'). \end{tikzcd} \tag{4.3}$$

Aplicando $\underline{F}$, usando el hecho de que en objetos F es igual $\underline{F}$ y, utilizando que $TF = FT$, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} F(M) \arrow[r, "{\underline{F}([f])}"] \arrow[d, "{\underline{F}([\phi_1])}"] & F(N) \arrow[r, "{\underline{F}([g])}"] \arrow[d, "{\underline{F}([\phi_2])}"] & F(L) \arrow[r, "{\underline{F}([h])}"] \arrow[d, "{\underline{F}([\phi_3])}"] & TF(M) \arrow[d, "{\underline{FT}([\phi_1])=\underline{TF}([\phi_1])}"] \\ F(M') \arrow[r, "{\underline{F}([f'])}"'] & F(N') \arrow[r, "{\underline{F}([g'])}"'] & F(L') \arrow[r, "{\underline{F}([h'])}"'] & TF(M'), \end{tikzcd} \tag{4.4}$$

con $\underline{F}[\phi_1]$, $\underline{F}[\phi_2]$ y $\underline{F}[\phi_3]$ isomorfismos. Como $\underline{F}$ es fiel y pleno, la existencia de los isomorfismos $[\phi_1]$, $[\phi_2]$ y $[\phi_3]$ que hacen conmutar (4.3) es equivalente a la existencia de los isomorfismos $\underline{F}[\phi_1]$, $\underline{F}[\phi_2]$ y $\underline{F}[\phi_3]$ que hacen conmutar (4.4).

Ahora, supongamos que existe un morfismo $l : N' \to J(M')$ en A-Mod_∞ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, equal] & N' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "l"] & L' \arrow[d, "h'"] \\ M' \arrow[r, "\alpha_{M'}"'] & J(M') \arrow[r, "\beta_{M'}"'] & T(M'). \end{tikzcd} \tag{4.5}$$

Aplicando el funtor F y recordando la definición de α y β (en A-Mod$_\infty$) tenemos que

$$\begin{tikzcd}
F(M') \arrow[r, "F(f')"] \arrow[d, equal] & F(N') \arrow[r, "F(g')"] \arrow[d, "F(l)"] & F(L') \arrow[d, "F(h')"] \\
F(M') \arrow[r, "F(\alpha_{M'})"'] \arrow[d, equal] & FJ(M') \arrow[r, "F(\beta_{M'})"'] \arrow[d, "\varphi_{M'}"] & FT(M') \arrow[d, equal] \\
F(M') \arrow[r, "\alpha_{F(M')}"'] & JF(M') \arrow[r, "\beta_{F(M')}"'] & TF(M').
\end{tikzcd}$$

conmuta (en $TA[1]$-CoDf). Luego, se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
F(M') \arrow[r, "F(f')"] \arrow[d, equal] & F(N') \arrow[r, "F(g')"] \arrow[d, "\mathcal{L}:=\varphi_{M'}F(l)"] & F(L') \arrow[d, "F(h')"] \\
F(M') \arrow[r, "\alpha_{F(M')}"'] & JF(M') \arrow[r, "\beta_{F(M')}"'] & TF(M').
\end{tikzcd} \tag{4.6}$$

Observemos que, como F es fiel y pleno, la existencia del morfismo l que hace conmutar (4.5) es equivalente a la existencia del morfismo $\mathcal{L}$ que hace conmutar (4.6).

Por último, de lo anterior y de la *Proposición* 4.28, se sigue que

$$M' \xrightarrow{[f']} N' \xrightarrow{[g']} L' \xrightarrow{[h']} T(M')$$

es un triángulo canónico de A-$\underline{\text{Mod}}_\infty$ si y sólo si

$$F(M') \xrightarrow{\underline{F}([f'])} F(N') \xrightarrow{\underline{F}([g'])} F(L') \xrightarrow{\underline{F}([h'])} TF(M')$$

es un triángulo canónico de $TA[1]$-$\underline{\text{Ind}}$. Así,

$$M \xrightarrow{[f]} N \xrightarrow{[g]} L \xrightarrow{[h]} T(M) \quad \text{está en } \mathcal{T}_\infty$$

si y sólo si

$$F(M) \xrightarrow{\underline{F}([f])} F(N) \xrightarrow{\underline{F}([g])} F(L) \xrightarrow{\underline{F}([h])} T(M) \quad \text{está en } \mathcal{T}.$$

$\square$

Bibliografía

[1] BAUTISTA, R., N.L., SOTELO y M.J., SOUTO, *Categorías Derivadas*, versión preliminar, 2016.

[2] BAUTISTA, R. y SALMERÓN L., *A_∞-algebras (Seminar Notes)*, Julio 12, 2018.

[3] MITCHELL, B., *Theory of Categories*, New York, Academic Press, 1965.

[4] Keller, B., *Introduction to A-Infinity Algebras and Modules*, Homology, Homotopy and Applications, vol.3, No.1, 2001, pp.1-35.

Glosario de términos

A

A_∞-álgebra, 6

A_∞-módulo izquierdo, 6

A-módulo izquierdo, 4

álgebra

- (A, ϱ, Δ), 1
- diferencial graduada (A, δ), 4
- graduada (A, ϱ, Δ), 3

B

biyección ξ,χ, 72

C

C-comódulo izquierdo, 14

campo K, 1

categoría

- A-Mod_∞, 8
- C-CoDf, 16
- C-CoGr, 22
- C-Ind, 46
- C-$\underline{\mathrm{Ind}}$, 46
- K-Gr, 45
- A-PMod^*_∞, 103
- $TA[1]$-CoDf^*, 103
- de Frobenius, 30
- especial de Frobenius, 30
- estable $\underline{\mathcal{C}}$, 32
  - C-$\underline{\mathrm{CoDf}}$, 44
- exacta $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$, 23
  - $(C\text{-CoDf}, \mathcal{E})$, 24,26
- triangulada $(\mathcal{C}, T, \mathcal{T})$, 28

clase de homotopía $[f]$, 101,106

coálgebra

- (C, ρ, ϵ), 11
- diferencial (C, ρ, ϵ, d), 12
- graduada (C, ρ, ϵ), 12
- graduada no unitaria, 57
  - $(\overline{T}V, \overline{\tau})$, 54,57
- tensorial de V (TV, τ, π_K), 55

coderivación de grado n, 60

- $\mathrm{Coder}^1_C(\mathrm{Ind}(M))$, 72
- d_f, 73

codiferencial

- d, 12
- $d_{M\oplus N}$, 18
- $d_{M[1]}$, 33
- $d \otimes id_M$, 53
- d_m, 67
- asociada a M d_M, 15

cogenerador de V asociado a C p, 58

- $\overline{p}$, 59

comódulo

- diferencial, 15
- graduado, 15
- inducido, 46

composición $(g \circ f)_n$, 9

comultiplicación

- ρ 12,
- $\rho_{M\oplus N}$, 18
- $\rho_{\mathrm{Ker}(f)}$, 20

$\rho_{\mathrm{Cok}(f)}$, 21
$\rho_{M[1]}$, 33
τ, 55
de M ρ_M, 15
comultiplicaciones iteradas ρ^n, 58
conúcleo η_f,CoKer(f), 21
counidad ϵ, 12

D
$D_n^{(i)}$, 80
deflación, 22
diferencial
δ, 3
asociada a M δ_M, 5

E
$\mathcal{E}$-deflación, 22
$\mathcal{E}$-inflación, 22
$\mathcal{E}$-inyectivo, 28
$\mathcal{E}$-proyectivo, 28
elemento homogéneo, 2
espacio vectorial graduado, 2
$M[1]$, 33
estructura exacta $\mathcal{E}$, 22

F
f-coderivación, 67
$\mathcal{F}(M,N)$, 80
función
γ_l,γ_r, 12
γ_M,γ, 14
σ_M, 33
$f[1]$, 34
g_n,f_n, 62
b_f,b_f^n, 62
m'_n,m', 66
σ, 66
q_N,q, 72
$\chi(g)_n$, 73
m'^M_n,m'^M, 75,76
$\hat{f}$,$\hat{f}_n$,$\hat{f}_0$, 79
$\Psi(\hat{f})_n$, 79
$m_n^{M[1]}$,$f[1]_n$, 92
$\lambda^\bullet$, 101
homogénea de grado n, $|f|$, 2
multiplicar
μ_l,μ_r, 2
μ_M,μ, 4
funtor
$\mathrm{Ind}_{\mathcal{C}} : K$-Gr $\to C$-CoGr, 45
$J : C$-CoDf $\to C$-CoDf, 35
$F : A$-Mod$_\infty \to TA[1]$-CoDf, 89
$F', F : A$-Mod$_\infty \to TA[1]$-Ind, 91
$F : A$-PMod$^*_\infty \to TA[1]$-CoDf*, 103
$F : A$-$\underline{\mathrm{Mod}}_\infty \to TA[1]$-$\underline{\mathrm{Ind}}$, 107
$J : A$-Mod$_\infty \to A$-Mod$_\infty$, 117
de paso al cociente P, 106,107
olvidadizo U, 46
traslación
$T : C$-CoDf $\to C$-CoDf, 34
$T : K$-Gr $\to K$-Gr, 45
$T : C$-CoGr $\to C$-CoGr, 45
$T : A$-Mod$_\infty \to A$-Mod$_\infty$, 92
$T : TA[1]$-Ind $\to TA[1]$-Ind, 99
$\underline{T} : A$-$\underline{\mathrm{Mod}}_\infty \to A$-$\underline{\mathrm{Mod}}_\infty$, 106

G
grado de v, $|v|$, 2

H
$H(g)_1^n$,$H(g)_2^n$, 75
$H(h)_n^{(1)}$,$H(h)_n^{(2)}$,$H(h)_n^{(3)}$, 103
0-homotopía, 104
homotópicamente
nulo, 101,104
equivalentes, 101,104

I
idempotente, 30
identidad 1_M, 9
inclusión canónica i_n,α_n,α_0,α 62,65
inflación, 22
isomorfismo
  $\Theta^U_{V,W}$,Θ^U_W,Θ^U_V, 17
  $\alpha_{X,M}$, $\beta_{X,M}$, 38
  Φ,Ψ, 70
  de triángulos, T3 28

L
los idempotentes se dividen en C, 30

M
$m = \{m_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 6
$m^M = \{m_n^M\}_{n\in\mathbb{N}}$, 7
$m^{M[1]} = \{m_n^M\}_{n\in\mathbb{N}}$, 92
módulo
  diferencial graduado, 5
  graduado 5
morfismo
  $\mathscr{P}(M,N)$, 31
  $\mathrm{Hom}^n_{K\text{-Gr}}(M,N)$, 70
  $\mathrm{Hom}^n_{C\text{-CoGr}}(M,N)$, 70
  $\mathrm{Hom}^*_{TA[1]\text{-CoGr}}(M,N)$, 103
  $f[1]$, 92
  de
    comódulos
      diferenciales, 15
      graduados, 15
    módulos
      diferenciales, 5
      graduados, 5
    triángulos
  entre
    A_∞-módulos, 8
    comódulos, 15
    módulos, 5
  estricto, 112
multiplicación
  ϱ, 2
  de M ϱ_M, 4

N
núcleo i_f,Ker(f), 19,20

P
premorfismo de grado t, 102
  $\mathrm{PHom}^t_A(M,N)$, 103
  $\mathrm{PHom}^*_A(M,N)$, 103
  $h^\bullet$, 103
producto tensorial $f\otimes g$, 3
propiedad
  de la counidad, 12,14
  de la unidad, 1,4
proyección canónica π_K,π, 55,65

R
$R(M)_n$,$R(M)_n^+$,$R(M)_n^0$, 7
$R(f)_n^+$,$R(f)_n^0$,$R(f)_n^-$, 8
regla de
  asociatividad, 1,4
  coasociatividad, 11,14
  Leibniz, 4,5,12,15

S
subcategoría triangulada, 44
sucesión exacta $\mathcal{E}_\infty$, 112,113
suficientes
  inyectivos, F1 30
  proyectivos, F2 30

T
transformación natural α,β, 40,117
triangulación $\mathcal{T}$,$\mathcal{T}_\infty$ 28,118
triángulo, 30
de A-$\underline{\mathrm{Mod}}_\infty$, 119
canónico, 32
de A-$\underline{\mathrm{Mod}}_\infty$, 118

U
unidad Δ, 2

X
$X_n^{(1)}$,$X_n^{(1)}$,$X_n^{(1)}$, 87

Y
$Y_n^{(1)}$,$Y_n^{(1)}$,$Y_n^{(1)}$, 88

Z
Z_n^i, 82,104