



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

La geometría extrínseca de superficies vía la representación
de Enneper-Weierstrass

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemática

PRESENTA:

Mariana Costa Villegas

TUTOR

Dr. Federico Sánchez Bringas





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

Índice general	II
Introducción	1
1. Representación de Enneper-Weierstrass para superficies mínimas	4
1.1. Construcción	4
1.2. Propiedades geométricas	17
1.3. Ejemplos	25
1.4. Otra representación	28
2. Representación de Enneper-Weierstrass generalizada	32
2.1. Construcción	33
2.2. Propiedades geométricas	44
2.3. Ejemplos	54
2.4. Representación de Enneper-Weierstrass para gráficas de funciones	62
Conclusión	67
Bibliografía	69

Agradecimientos

Quiero agradecer especialmente a Federico, mi maestro y asesor, por todo su apoyo. Muchas gracias por tus enseñanzas, por tu paciencia y tu confianza.

Quiero agradecer a mis sinodales, Pierre, Max, Vinicio e Ivonne por su atenta lectura, sus comentarios y consejos.

Este trabajo se hizo con el apoyo de CONACYT como parte del proyecto "Geometría Extrínseca de inmersiones de superficies en \mathbb{R}^3 ". Agradezco el apoyo como Ayudante de Investigador. Finalmente, agradezco el apoyo parcial del proyecto PAPIIT IN-118217.

Introducción

La representación de Enneper-Weierstrass es un punto de encuentro interesante entre dos ramas de las matemáticas: la geometría diferencial y el análisis complejo. Esta representación tiene su origen en la teoría de superficies mínimas.

La historia de la teoría de superficies mínimas se remonta a 1760 con J. L. Lagrange, quien planteó la siguiente pregunta: dada una curva cerrada Γ en \mathbb{R}^3 , ¿existe una superficie de área mínima que tenga a Γ como frontera? A esta pregunta se le conoce como el problema de Plateau. Lagrange abordó la pregunta estudiando familias de superficies descritas como gráficas de funciones que tienen el mismo valor a lo largo de una curva cerrada y usando cálculo de variaciones para encontrar los puntos críticos de la función de área.

En 1744 L. Euler descubrió la primera superficie mínima no trivial, el catenoide, y no fue sino hasta 1766 que J. Meusnier descubrió la segunda, el helicoide. Por más de noventa años, el catenoide y el helicoide fueron los únicos ejemplos de superficies mínimas no triviales, hasta que en 1834 H. F. Scherk descubrió nuevos ejemplos.

La teoría de superficies mínimas tuvo un desarrollo muy importante a lo largo del siglo XIX. Durante la primera mitad del siglo, la atención se dirigió casi exclusivamente a encontrar una solución al problema de Plateau. En 1847 J. Plateau abordó la pregunta haciendo experimentos con películas de jabón y conjeturó que dada una curva cerrada en \mathbb{R}^3 existe por lo menos una superficie mínima que tiene a esa curva como frontera. En la segunda mitad del siglo XIX, distintos matemáticos como E. Betti, O. Bonnet, G. Darboux, A. Enneper, É. L. Mathieu, H. Poincaré, B. Riemann y K. Weierstrass abordaron el problema. En 1866 A. Enneper y K. Weierstrass descubrieron paralelamente una fórmula para expresar superficies mínimas conexas

en términos de una función analítica compleja f y una función meromorfa g que cumplen ciertas condiciones. Esta representación enriqueció la teoría de superficies mínimas y permitió que se encontraran nuevos ejemplos de superficies mínimas no triviales.

Con la representación de Enneper-Weierstrass se puede definir localmente una superficie mínima a través de dos funciones complejas. Este acercamiento nos permite estudiar las propiedades geométricas de una superficie mínima en términos de las funciones complejas que la definen y nos permite generar ejemplos de superficies mínimas a partir de funciones complejas.

La representación de Enneper-Weierstrass para superficies mínimas se puede generalizar para representar superficies regulares que no son mínimas en \mathbb{R}^3 . Esta representación ha sido desarrollada en los trabajos clásicos de Osserman y Hoffman [12], [11], entre otros. Análogamente a como se hace con superficies mínimas, se puede definir localmente a una superficie no mínima en términos de tres funciones complejas que cumplen ciertas condiciones. De hecho, si la parametrización es isotérmica o es definida como gráfica de una función diferenciable, entonces podemos representar a las superficies en \mathbb{R}^3 en términos de dos funciones complejas. Este acercamiento nos permite analizar la geometría extrínseca de superficies en \mathbb{R}^3 a través de las funciones complejas que las definen.

El objetivo de este trabajo es presentar de una manera accesible la teoría de la representación de Enneper-Weierstrass para superficies mínimas y la generalización de la representación para superficies en \mathbb{R}^3 utilizando el enfoque desarrollado en [8] el cual permite acceder de manera amable a la construcción de ejemplos usando *Mathematica*.

En el primer capítulo de esta tesis daremos los elementos necesarios para enunciar y demostrar el Teorema de representación de Enneper-Weierstrass. Después calcularemos los invariantes geométricos de segundo orden de las superficies mínimas en términos de sus funciones de Enneper-Weierstrass y estudiaremos algunos ejemplos de superficies mínimas parametrizadas con la representación de Enneper-Weierstrass. Concluiremos el primer capítulo definiendo familias de superficies mínimas.

El segundo capítulo tiene una estructura similar; primero generalizaremos la representación de Enneper-Weierstrass para superficies mínimas y definiremos una representación análoga para

superficies no mínimas en \mathbb{R}^3 . Una vez que veamos que localmente podemos definir a cualquier superficie en \mathbb{R}^3 en términos de tres funciones complejas, calcularemos los invariantes geométricos de segundo orden de superficies en \mathbb{R}^3 en términos de las funciones que las definen. Estudiaremos algunos ejemplos de superficies representadas de esta manera y analizaremos sus propiedades geométricas. Finalmente, estudiaremos la manera de representar superficies definidas como gráficas de funciones a través de la representación de Enneper-Weierstrass generalizada para superficies no mínimas.

Capítulo 1

Representación de Enneper-Weierstrass para superficies mínimas

La representación de Enneper-Weierstrass nos dice que cualquier superficie mínima regular se puede representar localmente por dos funciones de una variable compleja. Por lo tanto, podemos analizar la geometría local de las superficies mínimas en términos de las funciones complejas que las definen y podemos construir ejemplos de superficies mínimas a través de esas funciones.

En este capítulo vamos a dar los elementos necesarios para enunciar y demostrar el teorema de representación de Enneper-Weierstrass. Después vamos a estudiar la geometría extrínseca de las superficies mínimas a través sus funciones de Enneper-Weierstrass y, finalmente, vamos a ver algunos ejemplos de superficies mínimas construidos con esta representación.

1.1. Construcción

La teoría de superficies mínimas surgió como resultado de estudiar el siguiente problema: sea Γ una curva cerrada en \mathbb{R}^3 , ¿cuál es la superficie de menor área que tiene como frontera a Γ ? Esta pregunta se puede responder utilizando métodos de cálculo de variaciones para encontrar los puntos críticos de la funcional de área. Con estos métodos se puede concluir que para que una superficie S minimice área, es necesario que su curvatura media sea idénticamente cero. Por

lo tanto, se estableció la siguiente definición.

Definición 1. Una superficie regular es una superficie mínima si su curvatura media, H , es cero en todos sus puntos.

Las superficies mínimas estuvieron originalmente relacionadas con problemas de minimizar áreas y es por esta relación que obtuvieron su nombre. Sin embargo, es importante aclarar que si bien la imagen de una región acotada en una superficie mínima es un punto crítico de la función de área, este punto crítico no es necesariamente un mínimo. Por lo tanto, aunque cualquier superficie de área mínima satisface $H = 0$, no es cierto que si una superficie tiene curvatura media cero entonces esa superficie tiene la propiedad de minimizar áreas.

Para estudiar superficies mínimas, es conveniente utilizar coordenadas en las que podamos ver las propiedades geométricas de las superficies reflejadas en el plano. Podemos pedir que la parametrización de la superficie sea conforme para que el ángulo entre dos curvas en la superficie sea igual al ángulo entre las curvas en el plano. Recordemos que una aplicación conforme preserva ángulos pero no necesariamente distancias. Esta condición se puede expresar en términos de la primera forma fundamental de la siguiente manera:

Definición 2. Sea $\phi = \phi(x, y)$ una parametrización de una superficie regular S , si los coeficientes de la primera forma fundamental de ϕ satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$E = G \quad \text{y} \quad F = 0,$$

entonces decimos que ϕ es una parametrización conforme y a las coordenadas (x, y) se les llama coordenadas isotérmicas.

Se puede demostrar que cualquier superficie regular se puede representar localmente en términos de coordenadas isotérmicas. La siguiente proposición nos muestra la relación entre las superficies mínimas y las coordenadas isotérmicas.

Proposición 1. [6] *Sea $\phi : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión y (x, y) un sistema de coordenadas isotérmicas en S , entonces ϕ es mínima si y sólo si sus funciones coordenadas son armónicas, es*

decir,

$$\phi_{xx}^i + \phi_{yy}^i = 0 \quad i = 1, 2, 3.$$

Demostración. Sea $\phi = \phi(x, y)$ una inmersión y sea (x, y) un sistema de coordenadas isotérmicas en S . Como ϕ es isotérmica, entonces $E = G$ y $F = 0$, por lo tanto,

$$\langle \phi_x, \phi_x \rangle = \langle \phi_y, \phi_y \rangle \neq 0 \quad \text{y} \quad \langle \phi_x, \phi_y \rangle = 0.$$

Derivando E y G con respecto a x deducimos que $\langle \phi_{xx}, \phi_x \rangle = \langle \phi_{xy}, \phi_y \rangle$. Por otra parte, derivando F con respecto a y se sigue que $\langle \phi_{xy}, \phi_y \rangle = -\langle \phi_x, \phi_{yy} \rangle$. Por lo tanto, concluimos que

$$\langle \phi_{xx}, \phi_x \rangle = \langle \phi_{xy}, \phi_y \rangle = -\langle \phi_x, \phi_{yy} \rangle.$$

Entonces,

$$\langle \phi_{xx} + \phi_{yy}, \phi_x \rangle = 0.$$

Análogamente, tenemos la siguiente igualdad,

$$\langle \phi_{xx} + \phi_{yy}, \phi_y \rangle = 0.$$

Por lo tanto, $\phi_{xx} + \phi_{yy}$ es paralelo a la aplicación de Gauss de S , $N = \frac{\phi_x \times \phi_y}{|\phi_x \times \phi_y|}$.

Por otro lado, si E, F y G son los coeficientes de la primera forma fundamental y ℓ, m y n son los coeficientes de la segunda forma fundamental,

$$H = \frac{\ell G - 2mF + nE}{2(EG - F^2)} = \frac{\ell G + nE}{2EG} = \frac{E(\ell + n)}{2E^2} = \frac{1}{2E}(\ell + n),$$

entonces,

$$2EH = \ell + n = \langle N, \phi_{yy} + \phi_{xx} \rangle.$$

Así, sabemos que se satisface la siguiente ecuación,

$$|\phi_{xx} + \phi_{yy}| = 2E|H|.$$

Ahora, supongamos que f es mínima. Entonces $H = 0$ y así $|\phi_{xx} + \phi_{yy}| = 0$

Por lo tanto,

$$\phi_{xx}^i + \phi_{yy}^i = 0 \quad i = 1, 2, 3.$$

Si suponemos que f satisface la ecuación anterior, podemos concluir de la misma manera que $H = 0$ y por lo tanto f es mínima. \square

Podemos reescribir la proposición anterior de la siguiente manera: si $u' = (u, v) : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^2$ es un sistema de coordenadas isotérmicas en $U \subset S$ y $f : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una inmersión mínima, entonces cada función real valuada $g^i = f^i \circ u'^{-1} : V \rightarrow \mathbb{R}$ satisface la ecuación de Laplace,

$$g_{xx}^i + g_{yy}^i = 0.$$

A partir de este punto empezamos a usar herramientas de análisis complejo, ya que, como veremos más adelante, cualquier función que satisface la ecuación de Laplace se puede ver localmente como la parte real de una función analítica compleja [10].

Primero, recordemos algunos conceptos básicos de análisis complejo. Sea $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ decimos que f es analítica en A si es diferenciable en el sentido complejo en todos los puntos $z_0 \in A$. Podemos escribir a f en términos de su parte real e imaginaria como $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ y con estas funciones establecer las ecuaciones de Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Recordemos que una función analítica satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann y que la

derivada de una función compleja está definida de la siguiente forma:

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = -i \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Es importante tener en mente que podemos definir las derivadas de f con respecto a z y \bar{z} de la siguiente manera,

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right). \quad (1-1)$$

Otra definición que será importante es la de función meromorfa. Una función $g : A \rightarrow \mathbb{C}$ es meromorfa si es analítica en una región A excepto en un conjunto de polos aislados. Más precisamente, para cada $a \in A$ debe existir una vecindad $|z - a| < \delta$ contenida en A tal que $g(z)$ es analítica en toda la vecindad o $g(z)$ es analítica para $0 < |z - a| < \delta$ y la singularidad aislada es un polo. Sabemos que una función tiene un cero de orden n en z_0 si la podemos factorizar como $(z - z_0)^n \psi(z)$ donde ψ es una función analítica y distinta de cero en una vecindad de z_0 . Análogamente, una función meromorfa tiene un polo de orden m en z_0 si la podemos factorizarla como $(z - z_0)^{-m} \psi(z)$ donde ψ es analítica y distinta de cero en una vecindad de z_0 . Una función meromorfa g se puede escribir como el cociente de dos funciones analíticas $g = \frac{g_1}{g_2}$ con g_2 no idénticamente 0 y los polos de g coinciden con los ceros de g_2 .

Ahora demostraremos que una función que satisface la ecuación de Laplace es la parte real de una función analítica compleja sobre un dominio simplemente conexo para encontrar una representación local de las superficies mínimas.

Supongamos que g cumple la ecuación de Laplace,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0,$$

y consideremos la función

$$h = \frac{\partial g}{\partial x} - i \frac{\partial g}{\partial y}.$$

Veamos que las derivadas parciales de h satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Si $h =$

$u + iv$ entonces $u = \frac{\partial g}{\partial x}$ y $v = -\frac{\partial g}{\partial y}$ y sus derivadas son

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} & \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} & \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}. \end{aligned}$$

Como g cumple la ecuación de Laplace, entonces

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 g}{\partial y^2},$$

además por la igualdad de las parciales mixtas,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Como se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en toda la región, h es una función analítica. Por el teorema de la antiderivada sabemos que existe una función analítica f en un dominio simplemente conexo tal que $f' = h$. Sea $\tilde{g} = \text{Re}(f)$ entonces

$$f' = \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x} - i \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y}.$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial \tilde{g}}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y}.$$

Así, podemos concluir que g y \tilde{g} son iguales salvo por una constante. Podemos ajustar f restando esa constante y tenemos que $g = \text{Re}(f)$.

Usando la proposición 1 y el hecho de que una función armónica es la parte real de una función analítica compleja, concluimos que una superficie mínima S se puede representar localmente por

$$(x, y) \mapsto \Phi(x, y) = (\text{Re}\phi_1(x + iy), \text{Re}\phi_2(x + iy), \text{Re}\phi_3(x + iy)) \in \mathbb{R}^3$$

donde ϕ_i son funciones analíticas complejas y Φ es la inversa de un sistema coordenado isotér-

mico.

Como Φ^{-1} es un sistema de coordenadas isotérmicas sabemos que Φ es conforme y por lo tanto satisface las siguientes ecuaciones

$$\langle \Phi_x, \Phi_x \rangle = \langle \Phi_y, \Phi_y \rangle, \quad \langle \Phi_x, \Phi_y \rangle = 0. \quad (1-2)$$

Como la derivada compleja ϕ'_k está dada por :

$$\phi'_k(x + iy) = (Re\phi_k)_x + i(Im\phi_k)_x, \quad (1-3)$$

por las ecuaciones de Cauchy-Riemann,

$$= (Re\phi_k)_x - i(Re\phi_k)_y = \Phi_x^k - i\Phi_y^k. \quad (1-4)$$

Ahora, veamos que

$$\begin{aligned} \sum_k (\phi'_k)^2 &= \sum_k (\Phi_x^k - i\Phi_y^k)^2 \\ &= \sum_k (\Phi_x^k)^2 - 2i \sum_k (\Phi_x^k \Phi_y^k) - \sum_k (\Phi_y^k)^2 \\ &= \langle \Phi_x, \Phi_x \rangle - 2i \langle \Phi_x, \Phi_y \rangle - \langle \Phi_y, \Phi_y \rangle = 0. \end{aligned}$$

Así, vemos que las ecuaciones 1-2 y 1-4 que teníamos para Φ son equivalentes a la ecuación compleja $\sum_k (\phi'_k)^2 = 0$. Si hacemos $\psi_k = \phi'_k$ podemos escribir la ecuación como

$$\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 = 0.$$

Veamos cómo podemos describir explícitamente las soluciones de esta ecuación.

Lema 1. *Sea $V \subset \mathbb{C}$ abierto. Sean g una función meromorfa en V y f una función analítica en V tales que f tiene un cero de orden por lo menos $2m$ en cada punto donde g tiene un polo*

de orden m . Entonces las funciones

$$\psi_1 = \frac{1}{2}f(1 - g^2), \quad \psi_2 = \frac{i}{2}f(1 + g^2), \quad \psi_3 = fg$$

son analíticas en V y satisfacen $\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 = 0$. Inversamente, cualesquiera tres funciones analíticas ψ_1, ψ_2, ψ_3 que satisfagan $\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 = 0$ se pueden representar de esta manera [6].

Demostración. Si f es una función analítica en V tal que tiene un cero de orden por lo menos $2m$ en cada punto donde g tiene un polo de orden m , se puede ver con un cálculo inmediato que

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{1}{2}f(1 - g^2) = \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}fg^2, \\ \psi_2 &= \frac{i}{2}f(1 + g^2) = \frac{i}{2}f + fg^2, \\ \psi_3 &= fg \end{aligned}$$

son funciones analíticas en V y que $\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 = 0$.

Para la inversa, supongamos que tenemos tres funciones analíticas ψ_i tales que satisfacen la ecuación $\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 = 0$. Esta ecuación la podemos escribir de la siguiente manera:

$$(\psi_1 - i\psi_2)(\psi_1 + i\psi_2) = -\psi_3^2.$$

Si ψ_3 es la función 0, elegimos $g = 0$ y $f = 2\psi_1$. Así, tenemos que

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{1}{2}f(1 - 0), \\ \psi_2 &= \frac{i}{2}(2\psi_1) = i\psi_1 = \frac{i}{2}f = \frac{i}{2}f(1 + 0) \quad \text{y} \\ \psi_3 &= 0. \end{aligned}$$

Ahora si ψ_3 no es la función 0 entonces $\psi_1 - i\psi_2$ tampoco es la función 0, por lo tanto, podemos

definir f y g de la siguiente manera

$$f = \psi_1 - i\psi_2 \quad \text{y} \quad g = \frac{\psi_3}{\psi_1 - i\psi_2}.$$

Así,

$$\psi_1 + i\psi_2 = \frac{-\psi_3^2}{\psi_1 - i\psi_2} = -fg^2,$$

sumando las dos ecuaciones anteriores, tenemos que

$$\psi_1 = \frac{1}{2}f(1 - g^2),$$

y restando las dos ecuaciones anteriores, nos queda

$$\psi_2 = \frac{i}{2}f(1 + g^2).$$

Por último,

$$fg = \frac{(\psi_1 - i\psi_2)\psi_3}{(\psi_1 - i\psi_2)} = \psi_3.$$

□

Las funciones que definimos en el lema anterior son las que nos ayudarán a dar la representación de Enneper-Weierstrass. Vamos a definir una aplicación $\Phi : V \rightarrow S$ como la parte real de la integral de las funciones ψ_1, ψ_2 y ψ_3 en cada entrada y demostrar que las funciones coordenadas de esta aplicación son armónicas para concluir que Φ es la inmersión de una superficie mínima, S .

Teorema 1. (Representación de Enneper-Weierstrass) *Todos los puntos de una superficie mínima $S \subset \mathbb{R}^3$ son la imagen de una aplicación conforme $\Phi : V \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ con V un conjunto abierto y simplemente conexo. Esta aplicación conforme Φ es de la forma $\Phi = \Phi_{(f,g)}$, donde*

$$\Phi_{(f,g)}^1(x, y) = \operatorname{Re} \int \frac{1}{2} f(z)(1 - g(z)^2) dz + c_1 \quad (1-5)$$

$$\Phi_{(f,g)}^2(x, y) = \operatorname{Re} \int \frac{i}{2} f(z)(1 + g(z)^2) dz + c_2 \quad (1-6)$$

$$\Phi_{(f,g)}^3(x, y) = \operatorname{Re} \int \frac{1}{2} f(z)g(z) dz + c_3 \quad (1-7)$$

donde c_i son números reales, g es meromorfa en V y f es una función analítica en V con ceros precisamente en los polos de g y el orden de cada cero es exactamente dos veces el orden del polo. Cualquier función $\Phi_{(f,g)}$ es una aplicación conforme en una superficie mínima [6].

Demostración. Como ya vimos, existe una aplicación conforme $\Phi : V \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ definida por

$$\Phi^k(x, y) = \operatorname{Re} \phi_k(x + iy),$$

para ϕ_k funciones analíticas complejas que satisfacen

$$\sum_k (\phi_k')^2 = 0.$$

Por el lema 1 tenemos que

$$\phi_1' = \frac{1}{2} f(1 - g^2), \quad \phi_2' = \frac{i}{2} f(1 + g^2), \quad \phi_3' = fg,$$

con f y g funciones complejas tales que f tiene un cero de orden $2m$ en cada punto donde g tiene un polo de orden m .

Inversamente, consideramos $\Phi = \Phi_{(f,g)}$ como se enuncia en el teorema. Entonces tenemos que

$$\Phi^k(x, y) = \operatorname{Re} \phi_k(x + iy),$$

donde ϕ'_k está dada por

$$\phi'_1 = \frac{1}{2}f(1 - g^2), \quad \phi'_2 = \frac{i}{2}f(1 + g^2), \quad \phi'_3 = fg,$$

y por el lema 1 sabemos que ϕ'_k satisfacen,

$$\sum_k (\phi'_k)^2 = 0.$$

Por lo tanto, también satisfacen las ecuaciones 1-2

$$\langle \Phi_x, \Phi_x \rangle = \langle \Phi_y, \Phi_y \rangle \quad \langle \Phi_x, \Phi_y \rangle = 0.$$

Así podemos concluir que Φ es conforme.

Ahora, por las hipótesis sobre f y g sabemos que ϕ'_1 y ϕ'_2 no son cero en ningún lugar y por lo tanto Φ_x y Φ_y tampoco. Además, como son ortogonales, son linealmente independientes. Así, concluimos que Φ es una inmersión y, por lo tanto, una inmersión conforme sobre su imagen. Como Φ^k es la parte real de una función analítica compleja, entonces satisface la ecuación de Laplace y por la proposición 1 Φ es una inmersión mínima. \square

Este teorema nos dice que, con la representación que definimos, podemos representar localmente a cualquier superficie mínima con dos funciones complejas. Inversamente, dos funciones complejas tales que cumplan las condiciones del teorema definen localmente a una superficie mínima. Históricamente, este teorema fue de gran ayuda para construir ejemplos de superficies mínimas. A continuación veremos cómo, a partir de dos funciones analíticas complejas, con la representación de Enneper-Weierstrass podemos construir una superficie mínima.

Ejemplo 1. Superficie de Enneper

Consideremos las siguientes funciones $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$f(z) = 1 \quad \text{y} \quad g(z) = z.$$

Sustituyendo en la representación de Enneper-Weierstrass, tenemos que

$$\begin{aligned}\phi'_1 &= \frac{1}{2}(1 - z^2), \\ \phi'_2 &= \frac{i}{2}(1 + z^2) \quad y \\ \phi'_3 &= z.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int \phi'_1 &= \frac{1}{2}\left(z - \frac{z^3}{3}\right), \\ \int \phi'_2 &= \frac{i}{2}\left(z + \frac{z^3}{3}\right) \quad y \\ \int \phi'_3 &= \frac{z^2}{2}.\end{aligned}$$

Expresando z como $x + iy$,

$$\begin{aligned}\int \phi'_1 &= \frac{1}{2}\left(x + iy + \frac{1}{3}(-x^3 - i3x^2y + 3xy^2 + iy^3)\right), \\ \int \phi'_2 &= \frac{i}{2}\left(x + iy + \frac{1}{3}(x^3 + i3x^2y - 3xy^2 - iy^3)\right) \quad y \\ \int \phi'_3 &= \frac{1}{2}(x^2 + i2xy - y^2).\end{aligned}$$

Por último, si consideramos la parte real,

$$\begin{aligned}Re \int \phi'_1 &= \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3} + xy^2\right), \\ Re \int \phi'_2 &= \frac{1}{2}\left(-y + \frac{y^3}{3} - x^2y\right) \quad y \\ Re \int \phi'_3 &= \frac{1}{2}(x^2 - y^2).\end{aligned}$$

Así, obtenemos la siguiente parametrización,

$$\Phi_{(1,z)}(x, y) = \left(x - \frac{x^3}{3} + xy^2, -y + \frac{y^3}{3} - x^2y, x^2 - y^2\right).$$

Con esta parametrización obtenemos la superficie de Enneper que se muestra en la figura 1-1. La superficie de Enneper es una superficie mínima con autointersecciones y es un ejemplo conocido por la simplicidad de sus funciones de Enneper-Weierstrass.

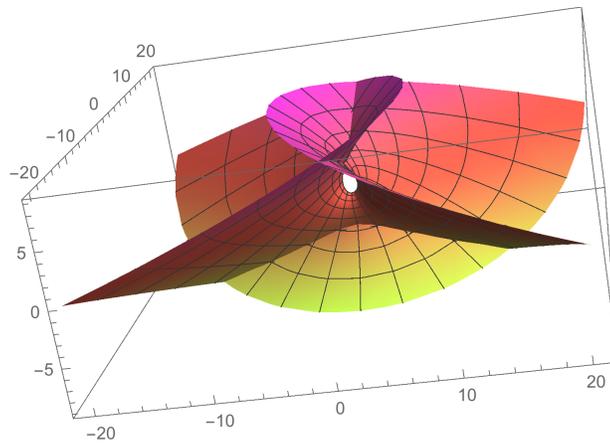


Figura 1-1: Superficie de Enneper

Ahora que sabemos que podemos representar localmente a cualquier superficie mínima con dos funciones complejas, podemos estudiar la geometría de las superficies mínimas en términos de estas dos funciones. En la siguiente sección encontraremos los invariantes geométricos de

segundo orden de las superficies mínimas parametrizadas con la representación de Enneper-Weierstrass en términos de las funciones complejas que la definen.

1.2. Propiedades geométricas

Corolario 1.1. *Los coeficientes de la primera forma fundamental de una superficie mínima parametrizada con la representación de Enneper-Weierstrass*

$\Phi(x, y) = (Re\phi_1(x, y), Re\phi_2(x, y), Re\phi_3(x, y))$ están dados por:

$$E = G = \frac{1}{4} |f|^2 (1 + |g|^2)^2 \quad y \quad F = 0.$$

Demostración. Como Φ es conforme, entonces $E = G$ y $F = 0$. Además, sabemos que

$$\phi'_k = \Phi'_x - i\Phi'_y.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \sum_k |\phi'_k|^2 &= \sum_k |\phi_x^k|^2 + \sum_k |\phi_y^k|^2 \\ &= \langle \Phi_x, \Phi_x \rangle + \langle \Phi_y, \Phi_y \rangle \\ &= E + G = 2E, \end{aligned}$$

y así,

$$E = \langle \Phi_x, \Phi_x \rangle = \frac{1}{2} \sum_k |\phi'_k|^2.$$

Ahora, como $Re\phi_k = \Phi^k$, entonces ϕ'_k , $k = 1, 2, 3$ están definidas por

$$\phi'_1 = \frac{1}{2}f(1 - g^2) \quad \phi'_2 = \frac{i}{2}f(1 + g^2) \quad y \quad \phi'_3 = fg.$$

Si sustituimos ϕ_k en la ecuación anterior, concluimos que

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} |f|^2 |1 - g^2|^2 + \frac{1}{4} |f|^2 |1 + g^2|^2 + |f|^2 |g|^2 \right) \\
&= \frac{1}{8} |f|^2 (1 + |g|^4 + 1 + |g|^4 + 4|g|^2) \\
&= \frac{1}{4} |f|^2 (1 + |g|^2)^2
\end{aligned}$$

□

Con estas ecuaciones para E, F y G podemos entender mejor las condiciones que pedimos para f y g en el teorema 1. Si los ceros de f están en los polos de g y el orden de cada cero de f es exactamente dos veces el orden del polo de g , los coeficientes de la primera forma fundamental no pueden ser cero nunca. Por otro lado, si permitimos que las funciones f y g no cumplan la condición establecida en el teorema 1 entonces la primera forma fundamental podría anularse y Φ no sería una inmersión regular.

Corolario 1.2. [3] *La aplicación de Gauss de una superficie mínima parametrizada con la representación de Enneper-Weierstrass $\Phi_{(f,g)} = (Re(\phi_1), Re(\phi_2), Re(\phi_3))$ está definida por:*

$$N(z) = \frac{1}{1 + |g|^2} (2Re(g), 2Im(g), |g|^2 - 1).$$

Demostración. Como $\phi'_k = \Phi_x - i\Phi_y$ entonces $Re(\phi'_k) = \Phi_x^k$ y $-Im(\phi'_k) = \Phi_y^k$.

Para calcular el vector normal a la superficie hacemos el siguiente producto cruz:

$$\begin{aligned}
\Phi_x \times \Phi_y &= (Re(\phi'_1), Re(\phi'_2), Re(\phi'_3)) \times -(Im(\phi'_1), Im(\phi'_2), Im(\phi'_3)) \\
&= (-Re(\phi'_2)Im(\phi'_3) + Re(\phi'_3)Im(\phi'_2), \\
&\quad -Re(\phi'_3)Im(\phi'_1) + Re(\phi'_3)Im(\phi'_1), \\
&\quad -Re(\phi'_1)Im(\phi'_2) + Re(\phi'_2)Im(\phi'_1)).
\end{aligned}$$

Podemos simplificar la expresión anterior observando que

$$-Re(\phi'_2)Im(\phi'_3) + Re(\phi'_3)Im(\phi'_2) = \Phi_x^2\Phi_y^3 - \Phi_x^3\Phi_y^2 = Im(\phi'_2\overline{\phi'_3}).$$

Haciendo un procedimiento análogo en las demás entradas, tenemos

$$\Phi_x \times \Phi_y = (Im(\phi'_2\overline{\phi'_3}), Im(\phi'_3\overline{\phi'_1}), Im(\phi'_1\overline{\phi'_2})).$$

Ahora, veamos que

$$\begin{aligned} Im(\phi'_2\overline{\phi'_3}) &= Im\left(\frac{i}{2}f(1+g^2)\overline{fg}\right) \\ &= \frac{\frac{i}{2}f(1+g^2)\overline{fg} - \frac{i}{2}f(1+g^2)fg}{2i} \\ &= \frac{1}{4}|f|^2(\overline{g} + |g|^2g + g + |g|^2\overline{g}) \\ &= \frac{1}{4}|f|^2(g(1+|g|^2) + \overline{g}(1+|g|^2)) \\ &= \frac{1}{2}|f|^2(1+|g|^2)Re(g). \end{aligned}$$

Análogamente, en la segunda entrada,

$$\begin{aligned} Im(\phi'_3\overline{\phi'_1}) &= Im\left(fg\left(\overline{\frac{1}{2}f(1-g^2)}\right)\right) \\ &= \frac{\frac{1}{2}fg(\overline{f(1-g^2)}) - \frac{1}{2}\overline{fg}(f(1-g^2))}{2i} \\ &= \frac{1}{4i}|f|^2(g(1+|g|^2) - \overline{g}(1+|g|^2)) \\ &= \frac{1}{2}|f|^2(1+|g|^2)Im(g). \end{aligned}$$

Finalmente, en la última entrada,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}(\phi_1' \overline{\phi_2'}) &= \frac{\frac{1}{2}f(1-g^2)\overline{\frac{i}{2}f(1+g^2)} - \frac{1}{2}f(1-g^2)\frac{i}{2}f(1+g^2)}{2i} \\
&= -\frac{1}{8} |f|^2 (2 - 2|g|^4) \\
&= -\frac{1}{4} |f|^2 (1 - |g|^2)(1 + |g|^2).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos expresar al vector normal como

$$\Phi_x \times \Phi_y = \frac{|f|^2 (1 + |g|^2)}{4} (2\operatorname{Re}(g), 2\operatorname{Im}(g), |g|^2 - 1).$$

Para obtener la aplicación de Gauss hay que normalizar el vector,

$$|\Phi_x \times \Phi_y| = \frac{|f|^2 (1 + |g|^2)}{4} \sqrt{(4\operatorname{Re}(g)^2 + 4\operatorname{Im}(g)^2 + (|g|^2 - 1)^2)}.$$

Además,

$$\begin{aligned}
&\sqrt{4\operatorname{Re}(g)^2 + 4\operatorname{Im}(g)^2 + (|g|^2 - 1)^2} \\
&= \sqrt{4|g|^2 + (|g|^2 - 1)^2} \\
&= \sqrt{|g|^4 + 2|g|^2 + 1} \\
&= |g|^2 + 1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$N(z) = \frac{\Phi_x \times \Phi_y}{|\Phi_x \times \Phi_y|} = \frac{1}{1 + |g|^2} (2\operatorname{Re}(g), 2\operatorname{Im}(g), |g|^2 - 1).$$

□

Observación 1. Recordemos que la inversa de la proyección estereográfica está definida como:

$$\pi^{-1}(z) = \frac{1}{|z|^2 + 1} (2\operatorname{Re}(z), 2\operatorname{Im}(z), |z|^2 - 1).$$

Así, tenemos que $N = \pi^{-1} \circ g$ y por lo tanto, $g = \pi \circ N$.

Cuando nos acercamos a un polo de g , $g \rightarrow \infty$ y $N \rightarrow (0, 0, 1)$ que es el único punto donde la proyección estereográfica no está definida. También, como N está definida como la composición de una función meromorfa con la inversa de la proyección estereográfica y la proyección estereográfica es una función conforme entonces $N : S \rightarrow \mathbb{C}$ es una función conforme. Por lo tanto, la aplicación de Gauss de una superficie mínima es conforme. Además como $g = \pi \circ N$ entonces g es una función meromorfa.

Sabemos que la curvatura media de una superficie mínima siempre es cero. Para calcular la curvatura gaussiana solamente necesitamos los coeficientes de la primera forma fundamental que obtuvimos en el corolario 1.1 y la aplicación de Gauss que obtuvimos en el corolario 1.2.

Corolario 1.3. [3] *La curvatura gaussiana de una superficie mínima parametrizada con la representación de Enneper-Weierstrass está dada por*

$$K = -\frac{16|g'|^2}{|f|^2(1+|g|^2)^4}.$$

Demostración. Recordemos de [2] que para coordenadas ortogonales la curvatura gaussiana está representada por

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{E_y}{\sqrt{EG}} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{G_x}{\sqrt{EG}} \right) \right).$$

También, como $E = G$,

$$K = -\frac{1}{2E} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{E_y}{E} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{E_x}{E} \right) \right) = -\frac{1}{2E} \Delta \log E.$$

Además, por el corolario 1.1 tenemos que $E = \frac{1}{4} |f|^2 (1 + |g|^2)^2$, por lo tanto

$$\begin{aligned}\Delta \log E &= \Delta \log \left(\frac{1}{4} |f|^2 (1 + |g|^2)^2 \right) \\ &= \Delta \log |f|^2 + \Delta \log (1 + |g|^2)^2 \\ &= 2\Delta \log |f| + 2\Delta \log (1 + |g|^2).\end{aligned}$$

Ahora, por un lado tenemos que

$$\Delta \log |f| = 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} (\log |f|^2) = 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} (\log f + \log \bar{f}) = 0$$

y por otro lado,

$$\Delta \log (1 + |g|^2) = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} (1 + g\bar{g}) = 4 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{g'\bar{g}}{1 + |g|^2} \right) = 4 \frac{g'\bar{g}'}{(1 + |g|^2)^2}.$$

Por lo tanto,

$$\Delta \log E = \frac{8|g'|^2}{(1 + |g|^2)^2}.$$

Así, concluimos que

$$K = -\frac{16|g'|^2}{|f|^2(1 + |g|^2)^4}.$$

□

Vemos que la curvatura gaussiana es siempre menor o igual a cero y es cero sólo cuando la derivada de g es cero. Como g es una función meromorfa, entonces g' sólo es cero en un conjunto de puntos aislados o es la constante 0.

Corolario 1.4. *Los coeficientes de la segunda forma fundamental de una superficie mínima parametrizada con la representación de Enneper-Weierstrass*

$\Phi(x, y) = (Re\phi_1(x, y), Re\phi_2(x, y), Re\phi_3(x, y))$ están dados por

$$\ell = -Re(fg') \quad m = Im(fg') \quad y \quad n = Re(fg').$$

Demostración. Recordemos que $\ell = \langle \Phi_{xx}, N \rangle$. Por el corolario 1.2 tenemos que

$$N = \frac{1}{1 + |g|^2} (2Re g, 2Im g, |g|^2 - 1),$$

y por definición tenemos que

$$\Phi_x = Re(\phi'_1, \phi'_2, \phi'_3) = Re\left(\frac{1}{2}f(1 - g^2), \frac{i}{2}f(1 + g^2), fg'\right).$$

Por lo tanto,

$$\Phi_{xx} = Re\left(\left(\frac{1}{2}f'(1 - g^2), \frac{i}{2}f'(1 + g^2), f'g\right) + (-fgg', fgg', fg')\right).$$

Así,

$$\begin{aligned} \ell &= \langle \Phi_{xx}, N \rangle \\ &= \frac{1}{1 + |g|^2} (Re(f'(1 - g^2)) Re(g) - Im(f'(1 + g^2)) Im(g) \\ &\quad + Re(f'g)(|g|^2 - 1) - 2Re(fgg')Re(g) - 2Im(fgg')Im(g) \\ &\quad + Re(fg')(|g|^2 - 1)) \\ &= \frac{1}{1 + |g|^2} (Re(f')Re(g) - Re(f'g^2)Re(g) - Im(f')Im(g) - Im(f'g^2)Im(g) \\ &\quad + Re(f'g)(|g|^2 - 1) + Re(fg')(|g|^2 - 1) - 2Re(fgg'\bar{g})) \\ &= \frac{1}{1 + |g|^2} (Re(f'g) - Re(f'g^2\bar{g}) + Re(f'g)(|g|^2 - 1) + Re(fg')(|g|^2 - 1) \\ &\quad - 2|g|^2 Re(fg')) \\ &= \frac{1}{1 + |g|^2} (-Re(fg')(1 + |g|^2)) = -Re(fg'). \end{aligned}$$

Análogamente vemos que $m = \text{Im}(fg')$ y $n = \text{Re}(fg')$. □

Ahora, con los coeficientes de la segunda forma fundamental que obtuvimos en el corolario anterior y los coeficientes de la primera forma fundamental obtenidos en el corolario 1.1, podemos encontrar las ecuaciones diferenciales de las líneas de curvatura y de las líneas asintóticas de una superficie mínima parametrizada con la representación de Enneper-Weierstrass.

Corolario 1.5. *La ecuación de las líneas asintóticas de una superficie mínima parametrizada por la representación de Enneper -Weierstrass está dada por*

$$-\text{Re}(fg')dx^2 + 2\text{Im}(fg')dxdy + \text{Re}(fg')dy^2 = 0.$$

Demostración. Recordemos de [2] que la ecuación diferencial de las líneas asintóticas está dada por

$$\ell dx^2 + 2mdxdy + ndy^2 = 0.$$

Usando ℓ, m y n del corolario 1.4 tenemos que la ecuación de las líneas asintóticas de una superficie mínima parametrizada con la representación de Enneper-Weierstrass está dada por

$$-\text{Re}(fg')dx^2 + 2\text{Im}(fg')dxdy + \text{Re}(fg')dy^2 = 0.$$

□

Corolario 1.6. *La ecuación de líneas de curvatura de una superficie mínima parametrizada por la representación de Enneper-Weierstrass está dada por*

$$\text{Im}(fg')dx^2 + 2\text{Re}(fg')dxdy - \text{Im}(fg')dy^2 = 0.$$

Demostración. Recordemos de [2] que la ecuación diferencial de las líneas de curvatura está dada por:

$$(mE - \ell F)dx^2 + (nE - \ell G)dxdy + (nF - mG)dy^2 = 0.$$

Usando E, F y G del corolario 1.1 y ℓ, m y n del corolario 1.4 tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}Im(fg')|f|^2(1+|g|^2)^2dx^2 + \frac{1}{2}Re(fg')|f|^2(1+|g|^2)^2dxdy \\ - \frac{1}{4}Im(fg')|f|^2(1+|g|^2)^2dy^2 = 0 \end{aligned}$$

es decir,

$$\frac{1}{4}|f|^2(1+|g|^2)^2(Im(fg')dx^2 + 2Re(fg')dxdy - Im(fg')dy^2) = 0.$$

Por lo tanto, la ecuación diferencial de las líneas de curvatura de una superficie mínima parametrizada por la representación de Enneper-Weierstrass está dada por

$$Im(fg')dx^2 + 2Re(fg')dxdy - Im(fg')dy^2 = 0.$$

□

1.3. Ejemplos

En esta sección veremos algunos ejemplos de superficies mínimas construidos con la representación de Enneper-Weierstrass y estudiaremos su geometría a partir de los resultados obtenidos para los invariantes geométricos en la sección anterior.

Ejemplo 2. Superficie de Enneper

Recordemos que la superficie de Enneper está representada por

$$f(z) = 1 \quad \text{y} \quad g(z) = z.$$

Por lo tanto, tenemos que los coeficientes de la primera forma están dados por

$$E = G = \frac{1}{4}(1 + |z|^2)^2 \quad \text{y} \quad F = 0.$$

La aplicación de Gauss de la superficie de Enneper es

$$N = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}(2x, 2y, x^2 + y^2 - 1)$$

y la curvatura gaussiana es

$$K = -\frac{16}{(1 + x^2 + y^2)^4}.$$

Así vemos que en la superficie de Enneper la curvatura gaussiana es siempre negativa. Además

$K = -16$ en $(0, 0)$ y tiende a cero cuando $|z| \rightarrow \infty$.

Ejemplo 3. Superficie de Enneper de segundo grado

Consideramos la superficie generada con la representación de Enneper-Weierstrass a partir de las funciones $f(z) = 1$ y $g(z) = z^2$. Así, tenemos la parametrización

$$\Phi_{(1, z^2)}(x, y) = \left(x - \frac{x^5}{5} + 2x^3y^2 - xy^4, -y - x^4y + 2x^2y^3 - \frac{y^5}{5}, \frac{x^3}{3} - xy^2 \right).$$

Obtenemos los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental.

$$E = G = \frac{1}{4}(1 + |z|^4)^2 \quad \text{y} \quad F = 0,$$

$$\ell = -2\operatorname{Re}(z) = -2x,$$

$$m = 2\operatorname{Im}(z) = 2y \quad \text{y}$$

$$n = 2\operatorname{Re}(z) = 2x.$$

Ahora encontramos las líneas asintóticas y de curvatura:

$$\begin{aligned} -xdx^2 + 2ydx dy + xdy^2 &= 0 \quad \text{y} \\ ydx^2 + 2x dx dy - ydy^2 &= 0. \end{aligned}$$

En $(0, 0)$ se satisfacen las dos ecuaciones, por lo tanto, la superficie de Enneper de segundo grado tiene un punto umbílico en el origen.

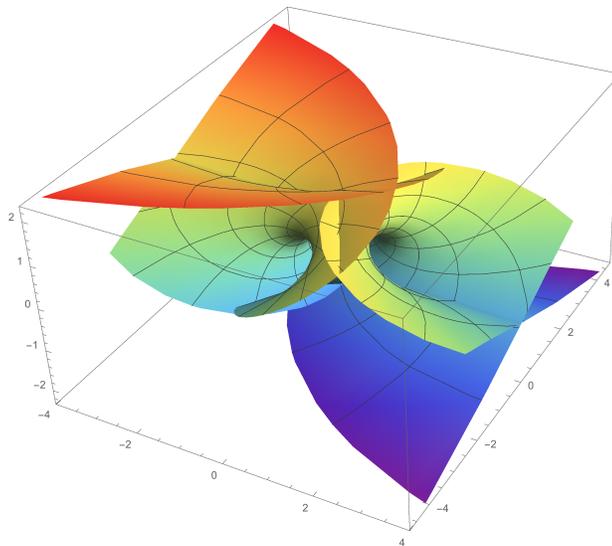


Figura 1-2: Superficie de Enneper de segundo grado

Ejemplo 4. Superficie de Richmond

Para parametrizar la superficie de Richmond tomamos

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \quad \text{y} \quad g(z) = z^3.$$

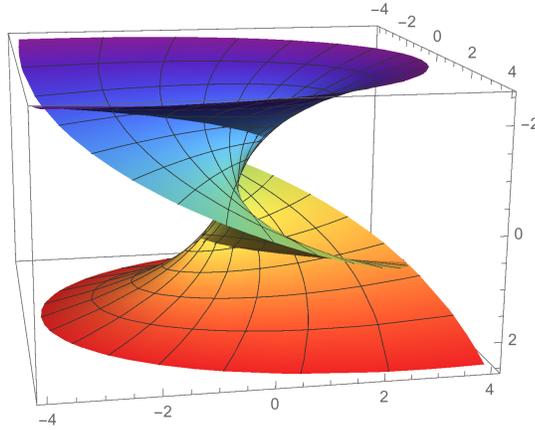


Figura 1-3: Superficie de Richmond

La curvatura gaussiana de la superficie de Richmond está dada por

$$K = -144 \frac{|z|^8}{(1 + |z|^6)^4}.$$

Por lo tanto, la curvatura tiende a cero cuando $|z| \rightarrow \infty$. A las superficies como esta se les llama superficies con una extensión plana, ya que conforme nos alejamos del centro, la curvatura gaussiana tiende a cero y en esta región se parece a un plano.

1.4. Otra representación

Podemos usar otras representaciones de $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ para formar diferentes representaciones de Weierstrass. Una representación importante es la que usa la aplicación de Gauss conjugada con la proyección estereográfica, g , y la diferencial de la función altura, dh , que es localmente la diferencial de la tercera coordenada.

Teorema 2. (Representación de Enneper-Weierstrass (g, dh)). *Cualquier superficie mínima regular tiene una representación isotérmica local de la forma $\Phi = \Phi_{(g,dh)}$, donde*

$$\begin{aligned}\Phi_{(g,dh)}^1(z) &= Re \int \frac{1}{2} \left(\frac{1}{g(z)} - g(z) \right) dh(z)dz + c_1, \\ \Phi_{(g,dh)}^2(z) &= Re \int \frac{i}{2} \left(\frac{1}{g(z)} + g(z) \right) dh(z)dz + c_2 \quad y \\ \Phi_{(g,dh)}^3(z) &= Re \int dh(z)dz + c_3,\end{aligned}$$

g es la proyección estereográfica de la aplicación de Gauss, dh es la diferencial de la función altura y $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ son constantes.

Observación 2. La g que usamos en el teorema 1 es la misma función g que usamos en el teorema 2, i.e, $g = \pi \circ N$ en ambas representaciones. Comparando la representación del teorema 1 con la del teorema 2, vemos que $dh = fg$ por lo tanto dh es una función analítica.

Como dh es analítica entonces $e^{it}dh$ es analítica y las funciones (g, e^{it}) definen una superficie mínima con la representación de Enneper-Weierstrass. Así, tenemos la siguiente definición.

Definición 3. Las superficies asociadas a una superficie mínima S definida por (g, dh) son las superficies mínimas S_θ definidas por $(g, e^{i\theta}dh)$ con $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

La familia de superficies mínimas S_θ es la familia asociada de S .

La superficie conjugada S^* es igual a $-S_{\frac{\pi}{2}}$ donde $S_{\frac{\pi}{2}}$ es la superficie asociada definida por (g, idh) .

Si Φ parametriza una superficie mínima como en el teorema 2, entonces Φ_θ parametriza a una superficie mínima asociada

$$\Phi_\theta = Re \int e^{i\theta} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{g} - g \right), \frac{i}{2} \left(\frac{1}{g} + g \right), 1 \right) dh.$$

Por el corolario 1.1 sabemos que los coeficientes de la primera forma fundamental para la parametrización (f, g) están definidos por

$$E = G = \frac{1}{4}|f|^2(1 + |g|^2)^2 \quad y \quad F = 0.$$

Por lo tanto, para la parametrización (g, dh)

$$E = G = \frac{1}{4}(|g| + |g|^{-1})^2 |dh|^2 \quad \text{y} \quad F = 0,$$

y para la superficie asociada,

$$E = G = \frac{1}{4}(|g| + |g|^{-1})^2 |e^{i\theta} dh|^2 \quad \text{y} \quad F = 0.$$

Como $|e^{i\theta} dh| = |dh|$ entonces los coeficientes de la primera forma fundamental de S son iguales que los de S_θ y por lo tanto cualesquiera dos superficies asociadas son localmente isométricas. Además como la aplicación de Gauss sólo depende de g ,

$$N = \sigma^{-1} \circ g = \frac{1}{1 + |g|^2} (2\operatorname{Re}(g), 2\operatorname{Im}(g), |g|^2 - 1),$$

entonces la aplicación de Gauss de todas las superficies de la familia de superficies mínimas S_θ asociada a S es la misma.

Ejemplo 5. Helicoide y catenoide

El ejemplo más sencillo de superficies mínimas conjugadas son el helicoide y le catenoide. El catenoide está definido por $(g, dh) = (z, \frac{1}{z})$.

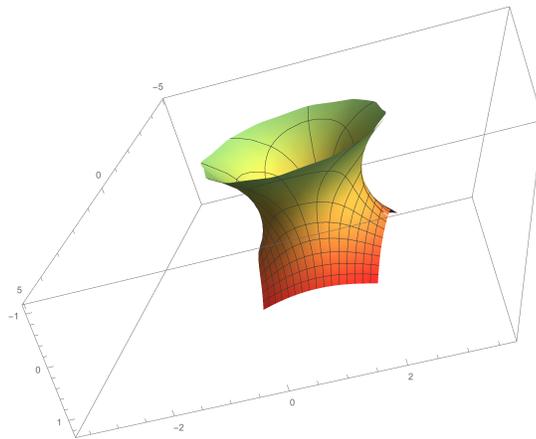


Figura 1-4: Catenoide

Por lo tanto, la superficie mínima conjugada del catenoide está definida por $(g, dh) = (z, i\frac{1}{z})$ y es el helicoide.

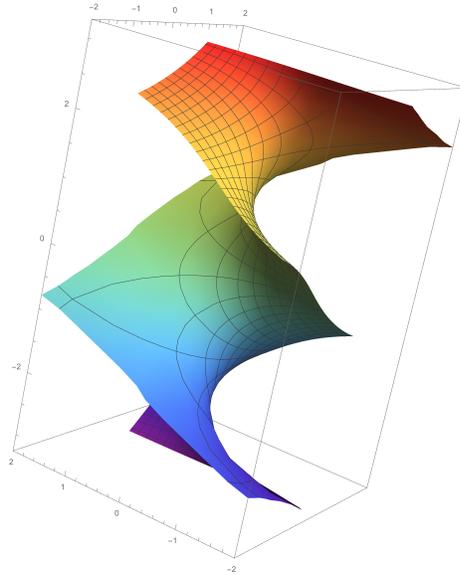


Figura 1-5: Helicoide

Así, sabemos que el helicoide y el catenoide son localmente isométricos y que el catenoide se puede deformar continuamente en una parte del helicoide a través de la familia de superficies mínimas asociadas S_θ definida por $(g, dh) = (z, e^{i\theta}\frac{1}{z})$.

Capítulo 2

Representación de Enneper-Weierstrass generalizada

En el capítulo anterior estudiamos la representación de Enneper-Weierstrass para superficies mínimas y obtuvimos sus propiedades geométricas en términos de las funciones de Enneper-Weierstrass. También, con base en esta representación, construimos ejemplos de superficies mínimas a partir de dos funciones complejas: una meromorfa, g , y otra holomorfa, f .

Ahora nos preguntamos si podemos generalizar esta representación para superficies en \mathbb{R}^3 . Es decir, nos planteamos el problema de encontrar una representación análoga a la del capítulo anterior para superficies no mínimas. En la primera parte de este capítulo veremos que podemos representar a una superficie no mínima en \mathbb{R}^3 con tres funciones complejas. Más adelante observaremos que si la superficie está parametrizada por una inmersión isotérmica o como gráfica de una función $m : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ entonces podemos representarla con dos funciones complejas. En la segunda sección obtendremos los invariantes geométricos de segundo orden de superficies en \mathbb{R}^3 en términos de esas funciones. Finalmente, veremos cómo encontrar las funciones complejas que, con la representación de Enneper-Weierstrass generalizada, definan a una superficie en \mathbb{R}^3 y estudiaremos algunos ejemplos.

2.1. Construcción

En este capítulo, trabajaremos con vectores en \mathbb{C}^3 , por lo tanto, es necesario definir un producto interior en \mathbb{C}^3 . A continuación, definiremos el producto hermitiano en \mathbb{C}^3 y estableceremos algunas de sus propiedades.

Definición 4. El producto hermitiano en \mathbb{C}^3 está definido como

$$\langle u, v \rangle_{\mathbb{C}} = \sum_{j=1}^3 u_j \bar{v}_j \quad \text{para } u, v \in \mathbb{C}^3.$$

Proposición 2. El producto hermitiano cumple las siguientes propiedades para todo $u, v, s \in \mathbb{C}^3$ y $c \in \mathbb{C}$:

1. $\langle u + v, s \rangle_{\mathbb{C}} = \langle u, s \rangle_{\mathbb{C}} + \langle v, s \rangle_{\mathbb{C}}$
2. $\langle cu, v \rangle_{\mathbb{C}} = c \langle u, v \rangle_{\mathbb{C}}$ y $\langle u, cv \rangle_{\mathbb{C}} = \bar{c} \langle u, v \rangle_{\mathbb{C}}$
3. $\langle u, v \rangle_{\mathbb{C}} = \overline{\langle v, u \rangle_{\mathbb{C}}}$
4. $\langle v, v \rangle_{\mathbb{C}} = |v|^2 \geq 0$ y $\langle v, v \rangle_{\mathbb{C}} = 0$ si y sólo si $v = 0$.

Por lo tanto el producto hermitiano es un producto interior en \mathbb{C}^3 . Podemos ver que si $u, v \in \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{C}^3$ entonces el producto hermitiano $\langle u, v \rangle_{\mathbb{C}} = \langle u, v \rangle$ donde \langle, \rangle denota al producto interior usual en \mathbb{R}^3 . El producto interior hermitiano define una norma para vectores en \mathbb{C}^3 como $\langle v, v \rangle_{\mathbb{C}} = |v|^2$ y establece la condición de ortogonalidad para vectores en \mathbb{C}^3 . Dos vectores $u, v \in \mathbb{C}^3$ son ortogonales si $\langle u, v \rangle_{\mathbb{C}} = 0$.

Ahora, para encontrar la generalización de la representación de Enneper-Weierstrass para superficies no mínimas en \mathbb{R}^3 buscamos una forma de caracterizar a la inmersión de una superficie a través de sus derivadas complejas. Para esto, vamos a encontrar una relación entre el plano tangente de la esfera $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ y el plano tangente a la superficie S .

Primero, observemos que podemos parametrizar a la esfera unitaria $\mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$ desde

el plano complejo \mathbb{C} usando la inversa de la proyección estereográfica, $N : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por,

$$N(g) = \frac{1}{1 + |g|^2} (2\operatorname{Re}(g), 2\operatorname{Im}(g), |g|^2 - 1),$$

donde $g = u + iv \in \mathbb{C}$. Para cada punto $g \in \mathbb{C}$, $\{N_u(g), N_v(g)\}$ forma una base del plano tangente a la esfera en $N(g)$. Derivando con respecto a g y \bar{g} encontramos que

$$N_g(g) = \frac{1}{(1 + |g|^2)^2} (1 - \bar{g}^2, -i(1 + \bar{g}^2), 2\bar{g}) \text{ y}$$

$$N_{\bar{g}}(g) = \frac{1}{(1 + |g|^2)^2} (1 - g^2, i(1 + g^2), 2g),$$

además

$$|N_g| = |N_{\bar{g}}| = \frac{\sqrt{2}}{1 + |g|^2}.$$

Así, definimos a los vectores unitarios

$$w = \frac{1}{\sqrt{2}(1 + |g|^2)} (1 - g^2, i(1 + g^2), 2g) \text{ y} \quad (2-1)$$

$$\bar{w} = \frac{1}{\sqrt{2}(1 + |g|^2)} (1 - \bar{g}^2, -i(1 + \bar{g}^2), 2\bar{g}). \quad (2-2)$$

Como $N_{\bar{g}} = \frac{1}{2}(N_u + iN_v)$ y $w = \frac{N_{\bar{g}}}{|N_{\bar{g}}|}$, concluimos que $\{\operatorname{Re}(w), \operatorname{Im}(w)\}$ forma una base del plano tangente a la esfera en $N(g)$.

Notemos que w, \bar{w} y N satisfacen lo siguiente:

$$\begin{array}{lll} \langle w, \bar{w} \rangle_{\mathbb{C}} = 0 & \langle w, N \rangle_{\mathbb{C}} = 0 & \langle w, w \rangle_{\mathbb{C}} = 1 \\ \langle \bar{w}, w \rangle_{\mathbb{C}} = 0 & \langle \bar{w}, N \rangle_{\mathbb{C}} = 0 & \langle \bar{w}, \bar{w} \rangle_{\mathbb{C}} = 1. \end{array}$$

Por lo tanto, podemos decir que w, \bar{w} tienen norma unitaria y que $\{w, \bar{w}, N\}$ forman un marco

ortonormal.

Ahora consideremos una inmersión $\Phi(x, y) : V \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ y su aplicación de Gauss orientada

$$G : S \rightarrow \mathbb{S}^2, \quad G = \frac{\Phi_x \times \Phi_y}{\|\Phi_x \times \Phi_y\|}$$

donde S es la imagen $\Phi(V)$.

Sabemos que $\{\Phi_x, \Phi_y\}$ forma una base del plano tangente a S en $\Phi(z)$ y utilizando que $\Phi_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\Phi_x + i\Phi_y)$ concluimos que $\{Re(\Phi_{\bar{z}}), Im(\Phi_{\bar{z}})\}$ forma una base del plano tangente a S en $\Phi(z)$.

Así, podemos establecer una relación entre el plano tangente a S en $\Phi(z)$ y el plano tangente a la esfera \mathbb{S}^2 en $N(g)$ de la siguiente manera:

$$Re(\Phi_{\bar{z}}) = \lambda_1 Re(w) + \lambda_2 Im(w),$$

$$Im(\Phi_{\bar{z}}) = \lambda_3 Re(w) + \lambda_4 Im(w) \quad y$$

$$Re(\Phi_z) = \lambda_1 Re(w) + \lambda_2 Im(w),$$

$$Im(\Phi_z) = -\lambda_3 Re(w) - \lambda_4 Im(w),$$

con $\lambda_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables, $n = \{1, 2, 3, 4\}$.

Podemos escribir $\Phi_{\bar{z}} = Re(\Phi_{\bar{z}}) + iIm(\Phi_{\bar{z}})$ y, usando la relación anterior, tenemos

$$\begin{aligned}\Phi_{\bar{z}} &= \lambda_1 Re(w) + \lambda_2 Im(w) + i(\lambda_3 Re(w) + \lambda_4 Im(w)) \\ &= \lambda_1 \left(\frac{w + \bar{w}}{2} \right) + \lambda_2 \left(\frac{w - \bar{w}}{2i} \right) + i \left(\lambda_3 \left(\frac{w + \bar{w}}{2} \right) + \lambda_4 \left(\frac{w - \bar{w}}{2i} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_4 - i(\lambda_2 - \lambda_3))w + (\lambda_1 - \lambda_4 + i(\lambda_2 + \lambda_3))\bar{w}.\end{aligned}$$

Análogamente,

$$\Phi_z = \frac{1}{2}((\lambda_1 - \lambda_4 - i(\lambda_2 + \lambda_3))w + (\lambda_1 + \lambda_4 + i(\lambda_2 - \lambda_3))\bar{w}).$$

Por lo tanto, si definimos $f, h : V \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ como $f = \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_4 - i(\lambda_2 + \lambda_3))$ y $h = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_4 + i(\lambda_2 - \lambda_3))$ podemos establecer el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\Phi_z = fw + \bar{h}\bar{w} \tag{2-3}$$

$$\Phi_{\bar{z}} = \bar{f}\bar{w} + hw, \tag{2-4}$$

donde $f, h : V \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ son funciones diferenciables.

Así vemos que si $\Phi : V \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ es inmersión de una superficie S entonces sus derivadas complejas $\Phi_z, \Phi_{\bar{z}}$ satisfacen las ecuaciones 2-3 y 2-4 respectivamente con f y h funciones analíticas complejas y w, \bar{w} definidos como en 2-1 y 2-2 respectivamente. Inversamente, si las derivadas complejas de una función $\Phi : V \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ satisfacen las ecuaciones 2-3 y 2-4 entonces Φ es la inmersión de una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$.

Observación 3. Si Φ es una inmersión isotérmica entonces Φ_z y $\Phi_{\bar{z}}$ son ortogonales. Como la inversa de la proyección estereográfica, N , es conforme, entonces $Re(w)$ y $Im(w)$ también son

ortogonales y por lo tanto, la aplicación de Gauss orientada determina dos posibles relaciones:

$$\begin{aligned}\Phi_z &= fw & \Phi_z &= \overline{h\bar{w}} \\ \Phi_{\bar{z}} &= \overline{f\bar{w}} & \Phi_{\bar{z}} &= hw.\end{aligned}$$

Es decir, podemos definir el sistema de ecuaciones 2-3, 2-4 de manera que una de las funciones f o h sea cero. En este caso, la inmersión Φ está definida por dos funciones, (f, g) o (h, g) , dependiendo de la orientación.

Como $\Phi_z = \frac{1}{2}(\Phi_x - i\Phi_y)$ entonces podemos reescribir el primer sistema como:

$$\begin{aligned}\Phi_x &= 2fRe(w) \\ \Phi_y &= -2fIm(w).\end{aligned}$$

Por lo tanto, el primer sistema de ecuaciones se cumple cuando la orientación de la imagen de S bajo la aplicación de Gauss es la opuesta a la definida por el marco $\{Re(w), Im(w)\}$ en \mathbb{S}^2 . Por lo tanto, decimos que (f, g) preserva la orientación negativa. Análogamente, la inmersión (h, g) preserva la orientación positiva [8].

Por ejemplo, el cilindro se puede parametrizar por $\Phi_1 = (\cos(x), \sen(x), y)$ o por $\Phi_2 = (\cos(x), \sen(x), -y)$. Ambas son inmersiones isotérmicas pero las aplicaciones de Gauss de Φ_1 y Φ_2 definen orientaciones distintas para el cilindro. Como veremos en el ejemplo 8, las funciones que definen al cilindro parametrizado por Φ_1 y Φ_2 respectivamente son,

$$\begin{aligned}g_1 &= \cos(x) + i\sen(x), & g_2 &= -\cos(x) - i\sen(x), \\ f_1 &= \frac{-i\cos(x) - \sen(x)}{\sqrt{2}}, & f_2 &= 0, \\ h_1 &= 0, & h_2 &= \frac{-i\cos(x) - \sen(x)}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Ahora calcularemos las derivadas parciales de N, w y \bar{w} con respecto a z para establecer

relaciones que nos serán útiles más adelante.

$$\begin{aligned}
w_z &= \frac{-(g_z\bar{g} + g\bar{g}_z)}{\sqrt{2}(1 + |g|^2)^2} (1 - g^2, i(1 + g^2), 2g) - \frac{\sqrt{2}g_z}{(1 + |g|^2)} (g, -ig, -1) \\
&= \frac{-(g_z\bar{g} + g\bar{g}_z)}{\sqrt{2}(1 + |g|^2)^2} (1 - g^2, i(1 + g^2), 2g) - \frac{\sqrt{2}g_z}{(1 + |g|^2)^2} (g + g^2\bar{g}, -ig - ig^2\bar{g}, -1 - g\bar{g}) \\
&= \frac{\bar{g}g_z - g\bar{g}_z}{\sqrt{2}(1 + |g|^2)^2} (1 - g^2, i(1 + g^2), 2g) - \frac{\sqrt{2}g_z}{(1 + |g|^2)^2} (g + \bar{g}, -i(g - \bar{g}), g\bar{g} - 1) \\
&= \frac{\bar{g}g_z - g\bar{g}_z}{1 + |g|^2} w - \frac{\sqrt{2}g_z}{1 + |g|^2} N,
\end{aligned}$$

donde la tercera igualdad se obtiene sumando $\frac{2\bar{g}g_z}{1+|g|^2}w - \frac{2g\bar{g}_z}{1+|g|^2}w$.

Análogamente,

$$\bar{w}_z = -\frac{\bar{g}g_z - g\bar{g}_z}{1 + |g|^2} \bar{w} - \frac{\sqrt{2}\bar{g}_z}{1 + |g|^2} N.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
N_z &= -\frac{g_z\bar{g} + g\bar{g}_z}{(1 + |g|^2)^2} (g + \bar{g}, -i(g - \bar{g}), g\bar{g} - 1) + \frac{1}{1 + |g|^2} (g_z + \bar{g}_z, -i(g_z - \bar{g}_z), g_z\bar{g} + g\bar{g}_z) \\
&= -\frac{g_z\bar{g} + g\bar{g}_z}{(1 + |g|^2)^2} (g + \bar{g}, -i(g - \bar{g}), g\bar{g} - 1) + \\
&\quad \frac{1}{(1 + |g|^2)^2} (g_z + g_zg\bar{g} + \bar{g}_z + \bar{g}_zg\bar{g}, -i(g_z + g_zg\bar{g} - \bar{g}_z - \bar{g}_zg\bar{g}), g_z\bar{g} + g_z\bar{g}^2g + g\bar{g}_z + \bar{g}_zg^2\bar{g}) \\
&= \frac{1}{(1 + |g|^2)^2} (g_z(1 - \bar{g}^2), -i(1 - \bar{g}^2), 2\bar{g}) + \bar{g}_z(1 - g^2, i(1 + |g|^2), 2g) \\
&= \frac{\sqrt{2}g_z}{1 + |g|^2} \bar{w} + \frac{\sqrt{2}\bar{g}_z}{1 + |g|^2} w.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que

$$w_z = -\widehat{F}N + Mw, \quad (2-5)$$

$$\overline{w}_z = -FN - M\overline{w} \quad \text{y} \quad (2-6)$$

$$N_z = Fw + \widehat{F}\overline{w} \quad , \quad (2-7)$$

donde

$$\begin{aligned} \widehat{F} &= N_z \cdot w = \frac{\sqrt{2}g_z}{1 + |g|^2}, \\ F &= N_z \cdot \overline{w} = \frac{\sqrt{2}\overline{g}_z}{1 + |g|^2} \quad \text{y} \\ M &= w_z \cdot \overline{w} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\overline{g}\widehat{F} - gF) = \frac{\overline{g}g_z - g\overline{g}_z}{1 + |g|^2}. \end{aligned}$$

Por último, recordemos que las derivadas parciales de una función g con respecto a z y \overline{z} están definidas como

$$g_z = \frac{1}{2}(g_x - ig_y) \quad \text{y} \quad g_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(g_x + ig_y).$$

Por lo tanto si expresamos a g como $g = u + iv$,

$$\begin{aligned} g_z &= \frac{1}{2}(u_x + iv_x - i(u_y + iv_y)) \\ &= \frac{1}{2}(u_x + iv_x - iu_y + v_y) \end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned} \overline{g}_z &= \frac{1}{2}(u_x - iv_x + iu_y + v_y) \\ &= \frac{1}{2}(u_x - iv_x + i(u_y - iv_y)) = \overline{g}_{\overline{z}}. \end{aligned}$$

Análogamente, $\overline{g}_{\overline{z}} = \overline{g}_z$.

Ahora, para establecer la generalización de la representación de Enneper-Weierstrass nece-

sitamos ver que todos los puntos de una superficie en \mathbb{R}^3 se pueden representar a través de funciones complejas. Vamos a ver que cualquier punto en una superficie se puede ver como la imagen de una aplicación Φ que está definida en términos de $f, g, h : V \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tres funciones complejas que cumplen algunas condiciones.

Teorema 3. (Representación de Enneper-Weierstrass generalizada) *Todos los puntos de una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ son la imagen de una aplicación $\Phi : V \rightarrow S$ con $V \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y simplemente conexo. Esta aplicación es de la forma $\Phi = \Phi_{(f,g,h)}$, donde*

$$\begin{aligned}\Phi_{(f,g,h)}^1(z) &= \operatorname{Re} \int \frac{1}{\sqrt{2}(1+|g|^2)} (f(1-g^2) + \bar{h}(1-\bar{g}^2)) dz \\ \Phi_{(f,g,h)}^2(z) &= \operatorname{Re} \int \frac{i}{\sqrt{2}(1+|g|^2)} (f(1+g^2) - \bar{h}(1+\bar{g}^2)) dz \\ \Phi_{(f,g,h)}^3(z) &= \operatorname{Re} \int \frac{2}{\sqrt{2}(1+|g|^2)} (fg + \bar{h}\bar{g}) dz\end{aligned}$$

con $f, g, h : V \rightarrow \mathbb{C}$ funciones diferenciables tales que cumplen las siguientes condiciones

1. $|f| \neq |h|$
2. $fg_z + \bar{h}\bar{g}_z$ es una función real
3. $f_{\bar{z}} - \bar{M}f = h_z + Mh$ con $M = \frac{\bar{g}g_z - g\bar{g}_z}{1+|g|^2}$.

Inversamente, si f, g y h satisfacen las condiciones anteriores, Φ es la parametrización de una superficie en \mathbb{R}^3 .

Demostración. Sea $\Phi : V \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ la inmersión de una superficie S , entonces, las derivadas complejas de Φ satisfacen 2-3 y 2-4. Ahora veremos que para que el sistema tenga solución es necesario que f, g, h cumplan las condiciones 1, 2 y 3.

Para eso, vemos que el sistema

$$\Phi_z = fw + \bar{h}\bar{w}$$

$$\Phi_{\bar{z}} = \bar{f}\bar{w} + hw$$

tiene solución si cumple la ecuación de compatibilidad,

$$(\Phi_z)_{\bar{z}} - (\Phi_{\bar{z}})_z = 0.$$

Por lo tanto, el sistema tiene solución si

$$\begin{aligned} (fw + \bar{h}\bar{w})_{\bar{z}} - (\bar{f}\bar{w} + hw)_z &= 0 \\ f_{\bar{z}}w + fw_{\bar{z}} + \bar{h}_{\bar{z}}\bar{w} + \bar{h}\bar{w}_{\bar{z}} - \bar{f}_z\bar{w} - \bar{f}\bar{w}_z - h_zw - hw_z &= 0 \end{aligned}$$

usando 2-5 y 2-6, es equivalente a

$$\begin{aligned} f_{\bar{z}}w + f(-\overline{FN} - \overline{M}w) + \bar{h}_{\bar{z}}\bar{w} + \bar{h}(-\widehat{FN} + \overline{M}\bar{w}) - \bar{f}_z\bar{w} \\ - \bar{f}(-FN - M\bar{w}) - h_zw - h(-\widehat{FN} + Mw) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f_{\bar{z}} - f\overline{M} - h_z - hM)w + (\bar{h}_{\bar{z}} + \overline{hM} - \bar{f}_z + \bar{f}M)\bar{w} \\ + (-f\overline{FN} - \bar{h}\widehat{FN} + \bar{f}FN + h\widehat{FN}) &= 0 \end{aligned}$$

Como $N = \overline{N}$ podemos reescribir la ecuación anterior como

$$(f_{\bar{z}} - f\overline{M} - h_z - hM)w + (\bar{h}_{\bar{z}} + \overline{hM} - \bar{f}_z + \bar{f}M)\bar{w} + (-f\overline{F} - \bar{h}\widehat{F} + \bar{f}F - h\widehat{F})N = 0.$$

Además, como $\{w, \bar{w}, N\}$ son linealmente independientes, entonces

$$f_{\bar{z}} - f\overline{M} - h_z - hM = 0 \quad \text{y} \quad -f\overline{F} - \bar{h}\widehat{F} + \bar{f}F - h\widehat{F} = 0.$$

De la primera ecuación tenemos que

$$f_{\bar{z}} - f\overline{M} = h_z + hM = 0,$$

que es la tercera condición.

De la segunda ecuación tenemos que

$$\begin{aligned} -f\bar{F} - \bar{h}\widehat{F} + \bar{f}F + h\widehat{F} &= 0, \\ -(f\bar{F} + \bar{h}\widehat{F}) + \overline{(f\bar{F} + \bar{h}\widehat{F})} &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(f\bar{F} + \bar{h}\widehat{F}) &= 0, \\ \operatorname{Im}\left(\frac{\sqrt{2}}{1 + |g|^2}(fg_{\bar{z}} + \bar{h}\bar{g}_{\bar{z}})\right) &= 0. \end{aligned}$$

En conclusión, $fg_{\bar{z}} + \bar{h}\bar{g}_{\bar{z}}$ es una función real, y así tenemos la segunda condición. La primera condición es necesaria para que la Φ sea una inmersión ya que, como se verá en la observación 4, si $|f| = |h|$ el determinante de la primera forma fundamental se anula. Por lo tanto, si Φ es la inmersión de una superficie entonces sus derivadas complejas satisfacen el sistema de ecuaciones 2-3, 2-4 y f, g y h cumplen las condiciones 1, 2 y 3.

Inversamente si $V \subset \mathbb{C}$ es un conjunto abierto simplemente conexo y $f, g, h : V \rightarrow \mathbb{C}$ son funciones diferenciables tales que satisfacen 1, 2 y 3, Φ cumple la ecuación de compatibilidad y el sistema tiene solución. Por lo tanto, Φ es la inmersión de una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$.

Además, como $\Phi_z = fw + \bar{h}\bar{w}$ con

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{\sqrt{2}(1 + |g|^2)}(1 - g^2, i(1 + g^2), 2g) \quad \text{y} \\ \bar{w} &= \frac{1}{\sqrt{2}(1 + |g|^2)}(1 - \bar{g}^2, -i(1 + \bar{g}^2), 2\bar{g}), \end{aligned}$$

cuando integramos y obtenemos la parte real, nos queda

$$\Phi = \operatorname{Re} \int \frac{1}{\sqrt{2}(1+|g|^2)} f(1-g^2, i(1+g^2), 2g) + \bar{h}(1-\bar{g}^2, -i(1+\bar{g}^2), 2\bar{g}) dz.$$

□

Con este teorema generalizamos la representación de Enneper-Weierstrass para superficies mínimas y, con él, podemos parametrizar superficies en general en \mathbb{R}^3 . Además, en este caso la función g también está definida por la composición de la aplicación de Gauss con la inversa de la proyección estereográfica. Observemos que podríamos reescribir el sistema de ecuaciones 2-3, 2-4 utilizando solamente una función. Sin embargo, al representarlo con dos funciones, (f, h) , las condiciones 1, 2 y 3 se simplifican.

Veamos que el teorema de representación de Enneper-Weierstrass para superficies mínimas que estudiamos en el capítulo 1 se puede obtener del teorema 3. Supongamos que $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ son funciones tales que f es analítica y g es meromorfa, de forma que los ceros de f coinciden con los polos de g y el orden de los ceros es exactamente dos veces el orden de cada polo. Definimos la función $\tilde{f} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ como $\tilde{f} = \sqrt{2}(1+|g|^2)f$ y $h = 0$. Veamos que \tilde{f}, g y h satisfacen las condiciones 1, 2 y 3 del teorema 3. Como f es analítica entonces $f_{\bar{z}} = 0$ y como g es meromorfa entonces $g_{\bar{z}} = 0$. Por lo tanto $\tilde{f}g_{\bar{z}} + \bar{h}\bar{g}_{\bar{z}} = 0$ es real y

$$\tilde{f}_{\bar{z}} - \bar{M}\tilde{f} = \sqrt{2}(1+|g|^2)f_{\bar{z}} + \sqrt{2}(\bar{g}g_{\bar{z}} + g\bar{g}_{\bar{z}})f - \frac{g\bar{g}_{\bar{z}} - \bar{g}g_{\bar{z}}}{1+|g|^2}\sqrt{2}(1+|g|^2)f = 0.$$

Por lo tanto, podemos establecer el siguiente sistema de ecuaciones

$$\Phi_z = \sqrt{2}(1+|g|^2)fw$$

$$\Phi_{\bar{z}} = \sqrt{2}(1+|g|^2)\bar{f}\bar{w}$$

y vemos que al integrar y calcular la parte real nos queda la parametrización de Enneper-

Weierstrass para superficies mínimas que vimos en el capítulo anterior:

$$\begin{aligned}\Phi_{(f,g)}^1(z) &= \operatorname{Re} \int \frac{1}{2} f(z)(1 - g(z)^2) dz + c_1 \\ \Phi_{(f,g)}^2(z) &= \operatorname{Re} \int \frac{i}{2} f(z)(1 + g(z)^2) dz + c_2 \\ \Phi_{(f,g)}^3(z) &= \operatorname{Re} \int \frac{1}{2} f(z)g(z) dz + c_3.\end{aligned}$$

Poder representar a las superficies en \mathbb{R}^3 con tres funciones complejas f, g y h nos da la posibilidad de expresar los invariantes geométricos de las superficies en términos de estas funciones. En la siguiente sección estudiaremos la geometría extrínseca de superficies en \mathbb{R}^3 parametrizadas con la representación de Enneper-Weierstrass generalizada que dimos en el teorema 3.

2.2. Propiedades geométricas

A lo largo de esta sección expresaremos los coeficientes de la primera forma fundamental y los coeficientes de la segunda forma fundamental de una superficie S parametrizada con la representación de Enneper-Weierstrass generalizada en términos de sus funciones de Enneper-Weierstrass f, g y h . Después, con estos coeficientes podremos encontrar una expresión para la curvatura gaussiana y la curvatura media de S . Finalmente, escribiremos las ecuaciones de las líneas asintóticas de S en términos de f, g, h .

Corolario 3.1. *Los coeficientes de la primera forma fundamental de una superficie parametrizada por la representación de Enneper-Weierstrass generalizada están dados por*

$$E = 2(|f|^2 + |h|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{f}h))$$

$$F = 4\operatorname{Im}(\bar{f}h)$$

$$G = 2(|f|^2 + |h|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{f}h)).$$

Demostración. Sabemos que $E = \langle \Phi_x, \Phi_x \rangle$, $F = \langle \Phi_x, \Phi_y \rangle$ y $G = \langle \Phi_y, \Phi_y \rangle$. Como $\Phi_x, \Phi_y \in \mathbb{R}^3$,

$$E = \langle \Phi_x, \Phi_x \rangle = \langle \Phi_x, \Phi_x \rangle_{\mathbb{C}},$$

$$F = \langle \Phi_x, \Phi_y \rangle = \langle \Phi_x, \Phi_y \rangle_{\mathbb{C}} \quad y$$

$$G = \langle \Phi_y, \Phi_y \rangle = \langle \Phi_y, \Phi_y \rangle_{\mathbb{C}}.$$

Además sabemos que

$$\Phi_x = \Phi_z + \Phi_{\bar{z}} \quad y \quad \Phi_y = i(\Phi_z - \Phi_{\bar{z}}).$$

Por lo tanto, podemos escribir E, F y G como

$$E = \langle \Phi_z + \Phi_{\bar{z}}, \Phi_z + \Phi_{\bar{z}} \rangle_{\mathbb{C}} = \langle \Phi_z, \Phi_z \rangle_{\mathbb{C}} + \langle \Phi_z, \Phi_{\bar{z}} \rangle_{\mathbb{C}} + \langle \Phi_{\bar{z}}, \Phi_z \rangle_{\mathbb{C}} + \langle \Phi_{\bar{z}}, \Phi_{\bar{z}} \rangle_{\mathbb{C}}$$

$$F = \langle \Phi_z + \Phi_{\bar{z}}, i(\Phi_z - \Phi_{\bar{z}}) \rangle_{\mathbb{C}} = -i(\langle \Phi_z, \Phi_z \rangle_{\mathbb{C}} - \langle \Phi_z, \Phi_{\bar{z}} \rangle_{\mathbb{C}} + \langle \Phi_{\bar{z}}, \Phi_z \rangle_{\mathbb{C}} - \langle \Phi_{\bar{z}}, \Phi_{\bar{z}} \rangle_{\mathbb{C}})$$

$$G = \langle i(\Phi_z - \Phi_{\bar{z}}), i(\Phi_z - \Phi_{\bar{z}}) \rangle_{\mathbb{C}} = \langle \Phi_z, \Phi_z \rangle_{\mathbb{C}} - \langle \Phi_z, \Phi_{\bar{z}} \rangle_{\mathbb{C}} - \langle \Phi_{\bar{z}}, \Phi_z \rangle_{\mathbb{C}} + \langle \Phi_{\bar{z}}, \Phi_{\bar{z}} \rangle_{\mathbb{C}}.$$

Por otro lado, sabemos que $\Phi_z = fw + \bar{h}\bar{w}$ y $\Phi_{\bar{z}} = \bar{f}\bar{w} + hw$ por lo tanto, podemos expresar el producto hermitiano de las derivadas complejas de Φ como

$$\langle \Phi_z, \Phi_z \rangle_{\mathbb{C}} = \langle fw + \bar{h}\bar{w}, fw + \bar{h}\bar{w} \rangle_{\mathbb{C}} = \langle fw, fw \rangle_{\mathbb{C}} + \langle fw, \bar{h}\bar{w} \rangle_{\mathbb{C}} + \langle \bar{h}\bar{w}, fw \rangle_{\mathbb{C}} + \langle \bar{h}\bar{w}, \bar{h}\bar{w} \rangle_{\mathbb{C}}$$

$$\langle \Phi_z, \Phi_{\bar{z}} \rangle_{\mathbb{C}} = \langle fw + \bar{h}\bar{w}, \bar{f}\bar{w} + hw \rangle_{\mathbb{C}} = \langle fw, \bar{f}\bar{w} \rangle_{\mathbb{C}} + \langle fw, hw \rangle_{\mathbb{C}} + \langle \bar{h}\bar{w}, \bar{f}\bar{w} \rangle_{\mathbb{C}} + \langle \bar{h}\bar{w}, hw \rangle_{\mathbb{C}}$$

$$\langle \Phi_{\bar{z}}, \Phi_z \rangle_{\mathbb{C}} = \langle \bar{f}\bar{w} + hw, fw + \bar{h}\bar{w} \rangle_{\mathbb{C}} = \langle \bar{f}\bar{w}, fw \rangle_{\mathbb{C}} + \langle \bar{f}\bar{w}, \bar{h}\bar{w} \rangle_{\mathbb{C}} + \langle hw, fw \rangle_{\mathbb{C}} + \langle hw, \bar{h}\bar{w} \rangle_{\mathbb{C}}$$

$$\langle \Phi_{\bar{z}}, \Phi_{\bar{z}} \rangle_{\mathbb{C}} = \langle \bar{f}\bar{w} + hw, \bar{f}\bar{w} + hw \rangle_{\mathbb{C}} = \langle \bar{f}\bar{w}, \bar{f}\bar{w} \rangle_{\mathbb{C}} + \langle \bar{f}\bar{w}, hw \rangle_{\mathbb{C}} + \langle hw, \bar{f}\bar{w} \rangle_{\mathbb{C}} + \langle hw, hw \rangle_{\mathbb{C}}.$$

Como $\langle w, w \rangle_{\mathbb{C}} = 1$, $\langle \bar{w}, \bar{w} \rangle_{\mathbb{C}} = 1$ y $\langle w, \bar{w} \rangle_{\mathbb{C}} = 0$ entonces,

$$\begin{aligned}\langle \Phi_z, \Phi_z \rangle_{\mathbb{C}} &= |f|^2 + |h|^2 \\ \langle \Phi_z, \Phi_{\bar{z}} \rangle_{\mathbb{C}} &= 2f\bar{h} \\ \langle \Phi_{\bar{z}}, \Phi_z \rangle_{\mathbb{C}} &= 2\bar{f}h \\ \langle \Phi_{\bar{z}}, \Phi_{\bar{z}} \rangle_{\mathbb{C}} &= |f|^2 + |h|^2.\end{aligned}$$

Así, tenemos que los coeficientes de la primera forma fundamental de una superficie parametrizada por la representación de Enneper-Weierstrass generalizada están dados por

$$\begin{aligned}E &= 2|f|^2 + 2|h|^2 + 2\bar{f}h + 2f\bar{h} = 2(|f|^2 + |h|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{f}h)), \\ F &= -i(2\bar{f}h - 2f\bar{h}) = 4\operatorname{Im}(\bar{f}h) \quad y \\ G &= 2|f|^2 + 2|h|^2 - 2\bar{f}h - 2f\bar{h} = 2(|f|^2 + |h|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{f}h)).\end{aligned}$$

□

Observación 4. Con las ecuaciones para los coeficientes de la primera forma fundamental podemos ver que si permitiéramos $|f| = |h|$ entonces $EG - F^2 = 16|f|^4 - 16\operatorname{Re}(\bar{f}h)^2 - 16\operatorname{Im}(\bar{f}h)^2 = 16|f|^2(|f|^2 - |h|^2) = 0$ por lo que Φ no sería una inmersión.

Corolario 3.2. *Los coeficientes de la segunda forma fundamental de una superficie parametrizada por la representación de Enneper-Weierstrass generalizada están dados por*

$$\begin{aligned}\ell &= -\frac{2\sqrt{2}}{1+|g|^2}\operatorname{Re}((f+h)(g_z+g_{\bar{z}})), \\ m &= \frac{2\sqrt{2}}{1+|g|^2}\operatorname{Im}((f+h)(g_z-g_{\bar{z}})) \quad y \\ n &= -\frac{2\sqrt{2}}{1+|g|^2}\operatorname{Re}((f-h)(g_{\bar{z}}-g_z)).\end{aligned}$$

Demostración. Primero veamos que

$$\begin{aligned}\langle \Phi_{zz}, N \rangle_{\mathbb{C}} &= \langle f_z w + f w_z + \bar{h}_z \bar{w} + \bar{h} \bar{w}_z, N \rangle_{\mathbb{C}} \\ &= f_z \langle w, N \rangle_{\mathbb{C}} + f \langle w_z, N \rangle_{\mathbb{C}} + \bar{h}_z \langle \bar{w}, N \rangle_{\mathbb{C}} + \bar{h} \langle \bar{w}_z, N \rangle_{\mathbb{C}}\end{aligned}$$

usando 2-5 y 2-6,

$$\begin{aligned}&= f_z \langle w, N \rangle_{\mathbb{C}} - f \widehat{F} \langle N, N \rangle_{\mathbb{C}} + f M \langle w, N \rangle_{\mathbb{C}} + \bar{h}_z \langle \bar{w}, N \rangle_{\mathbb{C}} \\ &\quad - \bar{h} F \langle N, N \rangle_{\mathbb{C}} - \bar{h} M \langle \bar{w}, N \rangle_{\mathbb{C}}.\end{aligned}$$

Como $\langle N, N \rangle_{\mathbb{C}} = 1$ y $\langle w, N \rangle_{\mathbb{C}} = \langle \bar{w}, N \rangle_{\mathbb{C}} = 0$ entonces

$$\begin{aligned}\langle \Phi_{zz}, N \rangle_{\mathbb{C}} &= -f \widehat{F} - \bar{h} F = -f \left(\frac{\sqrt{2} g_z}{1 + |g|^2} \right) - \bar{h} \left(\frac{\sqrt{2} \bar{g}_z}{1 + |g|^2} \right) \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{1 + |g|^2} (f g_z + \bar{h} \bar{g}_z).\end{aligned}$$

Análogamente tenemos

$$\begin{aligned}\langle \Phi_{z\bar{z}}, N \rangle_{\mathbb{C}} &= -\frac{\sqrt{2}}{1 + |g|^2} (f g_{\bar{z}} + \bar{h} \bar{g}_z), \\ \langle \Phi_{\bar{z}z}, N \rangle_{\mathbb{C}} &= -\frac{\sqrt{2}}{1 + |g|^2} (\bar{f} \bar{g}_z + h g_z), \\ \langle \Phi_{\bar{z}\bar{z}}, N \rangle_{\mathbb{C}} &= -\frac{\sqrt{2}}{1 + |g|^2} (\bar{f} \bar{g}_{\bar{z}} + h g_{\bar{z}}).\end{aligned}$$

Ahora recordemos que $e = \langle \Phi_{xx}, N \rangle$, $f = \langle \Phi_{xy}, N \rangle$ y $g = \langle \Phi_{yy}, N \rangle$. Como $\Phi_{xx}, \Phi_{xy}, N \in \mathbb{R}^3$ entonces

$$\begin{aligned}\ell &= \langle \Phi_{xx}, N \rangle = \langle \Phi_{xx}, N \rangle_{\mathbb{C}}, \\ m &= \langle \Phi_{xy}, N \rangle = \langle \Phi_{xy}, N \rangle_{\mathbb{C}} \quad y \\ n &= \langle \Phi_{yy}, N \rangle = \langle \Phi_{yy}, N \rangle_{\mathbb{C}}.\end{aligned}$$

Por otro lado, recordemos que

$$\Phi_x = \Phi_z + \Phi_{\bar{z}} \quad \text{y} \quad \Phi_y = i(\Phi_z - \Phi_{\bar{z}}).$$

Derivando otra vez, podemos expresar las segundas derivadas de Φ en términos de z y \bar{z} de la siguiente manera:

$$\Phi_{xx} = (\Phi_z + \Phi_{\bar{z}})_x = \Phi_{zz} + \Phi_{z\bar{z}} + \Phi_{\bar{z}z} + \Phi_{\bar{z}\bar{z}}.$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} \Phi_{xy} &= i(\Phi_{zz} - \Phi_{z\bar{z}} + \Phi_{\bar{z}z} - \Phi_{\bar{z}\bar{z}}), \\ \Phi_{yy} &= -\Phi_{zz} + \Phi_{z\bar{z}} + \Phi_{\bar{z}z} - \Phi_{\bar{z}\bar{z}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \ell &= \langle \Phi_{xx}, N \rangle_{\mathbb{C}} = \langle \Phi_{zz} + \Phi_{z\bar{z}} + \Phi_{\bar{z}z} + \Phi_{\bar{z}\bar{z}}, N \rangle_{\mathbb{C}} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{1+|g|^2} (fg_z + \bar{h}\bar{g}_z + fg_{\bar{z}} + \bar{h}\bar{g}_{\bar{z}} + \bar{f}\bar{g}_z + hg_z + \bar{f}\bar{g}_{\bar{z}} + hg_{\bar{z}}) \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{1+|g|^2} ((f+h)g_z + (f+h)g_{\bar{z}} + (\bar{f}+\bar{h})\bar{g}_z + (\bar{f}+\bar{h})\bar{g}_{\bar{z}}) \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{1+|g|^2} ((f+h)(g_z + g_{\bar{z}}) + (\bar{f}+\bar{h})(\bar{g}_z + \bar{g}_{\bar{z}})) \\ &= -(f+h)(\widehat{F}\overline{F}) - (\bar{f}+\bar{h})(F + \overline{\widehat{F}}) \\ &= -((f+h)(\widehat{F} + \overline{F}) + \overline{(f+h)(\widehat{F} + \overline{F})}) \\ &= -2\text{Re}((f+h)(\widehat{F} + \overline{F})). \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}
m &= \langle \Phi_{xy}, N \rangle_{\mathbb{C}} = \langle i(\Phi_{zz} - \Phi_{z\bar{z}} + \Phi_{\bar{z}z} - \Phi_{\bar{z}\bar{z}}), N \rangle_{\mathbb{C}} \\
&= -\frac{\sqrt{2}i}{1+|g|^2}(fg_z + \bar{h}\bar{g}_z - fg_{\bar{z}} - \bar{h}\bar{g}_{\bar{z}} + \bar{f}\bar{g}_z + hg_z - \bar{f}\bar{g}_{\bar{z}} - hg_{\bar{z}}) \\
&= -\frac{\sqrt{2}i}{1+|g|^2}((f+h)(g_z - g_{\bar{z}}) + (\bar{f} + \bar{h})(\bar{g}_z - \bar{g}_{\bar{z}})) \\
&= -i((f+h)(\hat{F} - \bar{F}) - (\bar{f} + \bar{h})(\bar{\hat{F}} - F)) \\
&= 2Im((f+h)(\hat{F} - \bar{F}))
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
n &= \langle \Phi_{yy}, N \rangle_{\mathbb{C}} = \langle -\Phi_{zz} + \Phi_{z\bar{z}} + \Phi_{\bar{z}z} - \Phi_{\bar{z}\bar{z}}, N \rangle_{\mathbb{C}} \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{1+|g|^2}(-fg_z - \bar{h}\bar{g}_z + fg_{\bar{z}} + \bar{h}\bar{g}_{\bar{z}} + \bar{f}\bar{g}_z + hg_z - \bar{f}\bar{g}_{\bar{z}} - hg_{\bar{z}}) \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{1+|g|^2}((f-h)(g_{\bar{z}} - g_z) + (\bar{f} - \bar{h})(\bar{g}_z - \bar{g}_{\bar{z}})) \\
&= -((f-h)(\bar{F} - \hat{F}) + (F - \bar{\hat{F}})(\bar{f} - \bar{h})) \\
&= -2Re((f-h)(\bar{F} - \hat{F})).
\end{aligned}$$

□

Corolario 3.3. *La curvatura gaussiana de una superficie parametrizada por la representación de Enneper-Weierstrass generalizada está dada por*

$$K = 2 \frac{|fg_{\bar{z}} + \bar{h}\bar{g}_z|^2 - |fg_z + \bar{h}\bar{g}_{\bar{z}}|^2}{(1+|g|^2)^2(|f|^2 - |h|^2)^2}.$$

Demostración. Recordemos que

$$K = \frac{\ell n - m^2}{EG - F^2}.$$

Usando ℓ, m, n del corolario 3.2 y E, F, G del corolario 3.1 tenemos

$$\begin{aligned}\ell n - m^2 &= 4\operatorname{Re}((f+h)(\widehat{F} + \overline{F}))\operatorname{Re}((f-h)(\overline{F} - \widehat{F})) - 4(\operatorname{Im}((f+h)(\widehat{F} - \overline{F})))^2 \\ &= 4((\operatorname{Re}(f\overline{F} + h\widehat{F}) + \operatorname{Re}(f\widehat{F} + h\overline{F}))(\operatorname{Re}(f\overline{F} + h\widehat{F}) - \operatorname{Re}(f\widehat{F} + h\overline{F})) \\ &\quad - (\operatorname{Im}(-f\overline{F} + h\widehat{F}) + \operatorname{Im}(f\widehat{F} - h\overline{F}))^2).\end{aligned}$$

Por la condición 2 del Teorema 3, $\operatorname{Im}(-f\overline{F} + h\widehat{F}) = 0$, entonces,

$$\begin{aligned}\ell n - m^2 &= 4((\operatorname{Re}(f\overline{F} + h\widehat{F}))^2 - (\operatorname{Re}(f\widehat{F} + h\overline{F}))^2 - (\operatorname{Im}(f\widehat{F} - h\overline{F}))^2) \\ &= 4((\operatorname{Re}(f\overline{F} + \overline{h\widehat{F}}))^2 - (\operatorname{Re}(f\widehat{F} + \overline{hF}))^2 - (\operatorname{Im}(f\widehat{F} + \overline{hF}))^2).\end{aligned}$$

Además, como $f\overline{F} + \overline{h\widehat{F}}$ es real,

$$\ell n - m^2 = 4(|f\overline{F} + \overline{h\widehat{F}}|^2 - |f\widehat{F} + \overline{hF}|^2).$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}EG - F^2 &= 4[(|f|^2 + |h|^2 + 2\operatorname{Re}(\overline{f}h))(|f|^2 + |h|^2 - 2\operatorname{Re}(\overline{f}h)) - 4\operatorname{Im}(\overline{f}h)^2) \\ &= 4(|f|^4 + |f|^2|h|^2 - 2|f|^2\operatorname{Re}(\overline{f}h) + |f|^2|h|^2 + |h|^4 - 2|h|^2\operatorname{Re}(\overline{f}h) \\ &\quad + 2|f|^2\operatorname{Re}(\overline{f}h) + 2|h|^2\operatorname{Re}(\overline{f}h) - 4\operatorname{Re}(\overline{f}h)^2 - 4\operatorname{Im}(\overline{f}h)^2) \\ &= 4(|f|^4 - 2|f|^2|h|^2 + |h|^4) = 4(|f|^2 - |h|^2)^2.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$K = \frac{|f\overline{F} + \overline{h\widehat{F}}|^2 - |f\widehat{F} + \overline{hF}|^2}{(|f|^2 - |h|^2)^2}.$$

□

Corolario 3.4. *La curvatura media de una superficie parametrizada por la representación de Enneper-Weierstrass generalizada está dada por*

$$H = -\frac{\sqrt{2}\operatorname{Re}((\bar{f} - \bar{h})(f + h)(fg_{\bar{z}} - hg_z))}{(1 + |g|^2)(|f|^2 - |h|^2)^2}.$$

Demostración. Recordemos que

$$H = \frac{\ell G - 2mF + nE}{2(EG - F^2)}.$$

Usando ℓ, m, n del corolario 3.2 y E, F, G del corolario 3.1 tenemos que

$$\begin{aligned} \ell G - 2mF + nE = & -4(f^2\bar{F}(\bar{f} - \bar{h}) + f(F\bar{f}(\bar{f} + \bar{h}) + \bar{f}(\bar{F}h - \widehat{F}h - \widetilde{F}\bar{h}) - \bar{h}(\bar{F}h - \widehat{F}h + \widetilde{F}\bar{h})) \\ & + h(-F\bar{f}(\bar{f} + \bar{h}) - \bar{f}\widehat{F}h + \bar{f}\widetilde{F}\bar{h} + \widehat{F}h\bar{h} + \widetilde{F}\bar{h}^2)). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \ell G - 2mF + nE = & -4((\bar{f} - \bar{h})(f + h)(f\bar{F} - h\widehat{F}) + (f - h)(\bar{f} + \bar{h})(\bar{f}F - \bar{h}\widetilde{F})) \\ = & -8\operatorname{Re}((\bar{f} - \bar{h})(f + h)(f\bar{F} - h\widehat{F})). \end{aligned}$$

Además, por la demostración del corolario 3.3 sabemos que

$$EG - F^2 = 4(|f|^2 - |h|^2)^2.$$

Así, podemos concluir que

$$H = -\frac{\operatorname{Re}((\bar{f} - \bar{h})(f + h)(f\bar{F} - h\widehat{F}))}{(|f|^2 - |h|^2)^2}.$$

□

Corolario 3.5. *La ecuación diferencial de las líneas asintóticas de una superficie parametrizada con la representación de Enneper-Weierstrass generalizada está dada por:*

$$(\overline{f}g_{\overline{z}} + hg_{\overline{z}})dz^2 + (fg_{\overline{z}} + hg_z)dzd\overline{z} + (fg_z + \overline{h}g_{\overline{z}})d\overline{z}^2 = 0.$$

Demostración. Recordemos que la ecuación diferencial de las líneas asintóticas está dada por

$$\ell dx^2 + 2m dx dy + n dy^2 = 0$$

y que $dx = \frac{1}{2}(dz + d\overline{z})$ y $dy = \frac{i}{2}(dz - d\overline{z})$. Por lo tanto, la ecuación de las líneas asintóticas se puede reescribir como

$$(\ell + 2im - n)dz^2 + 2(\ell + n)dzd\overline{z} + (\ell - 2im - n)d\overline{z}^2 = 0.$$

Por un lado,

$$\begin{aligned} \ell + 2im - n &= -2\operatorname{Re}((f+h)(\widehat{F} + \overline{F})) + 2\operatorname{Re}((f-h)(\overline{F} - \widehat{F})) + 4i\operatorname{Im}((f+h)(\widehat{F} - \overline{F})) \\ &= -2\operatorname{Re}((f+h)(\widehat{F} + \overline{F}) - (f-h)(\overline{F} - \widehat{F})) + 4i\operatorname{Im}((f+h)(\widehat{F} - \overline{F})) \\ &= -4\operatorname{Re}(f\widehat{F} + h\overline{F}) + 4i\operatorname{Im}(f\widehat{F} - h\overline{F}) + 4i\operatorname{Im}(-f\overline{F} + h\widehat{F}), \end{aligned}$$

y como $-f\overline{F} + h\widehat{F}$ es real,

$$\begin{aligned} &= -4(\operatorname{Re}(f\widehat{F}) + \operatorname{Re}(h\overline{F}) - i\operatorname{Im}(f\widehat{F}) + i\operatorname{Im}(h\overline{F})) \\ &= -4(\overline{f\widehat{F}} + h\overline{F}). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \ell + n &= -2\operatorname{Re}((f+h)(\widehat{F} + \overline{F})) - 2\operatorname{Re}((f-h)(\overline{F} - \widehat{F})) \\ &= -2\operatorname{Re}((f+h)(\widehat{F} + \overline{F}) - (f-h)(\overline{F} - \widehat{F})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -4\operatorname{Re}(f\bar{F} + h\widehat{F}) = -4\operatorname{Re}(f\bar{F} + \overline{h\widehat{F}}) \\
&= -4(f\bar{F} + \overline{h\widehat{F}}).
\end{aligned}$$

Finalmente, como ℓ, m y n son reales, $\ell + 2im - n$ y $\ell - 2im - n$ son conjugados, entonces

$$\ell - 2im - n = -4(f\widehat{F} + \overline{hF}).$$

Por lo tanto, la ecuación de las líneas asintóticas es

$$(\overline{f\widehat{F}} + h\bar{F})dz^2 + (f\bar{F} + h\widehat{F})dzd\bar{z} + (f\widehat{F} + \overline{hF})d\bar{z}^2 = 0.$$

□

Notemos que el primer y el último coeficiente de la ecuación de la ecuación diferencial de las líneas asintóticas son conjugados.

Observación 5. Si la parametrización es isotérmica, entonces $h = 0$ o $f = 0$. Supongamos que $h = 0$ entonces tenemos que la representación de Enneper-Weierstrass depende sólo de dos funciones, f y g ,

$$\Phi_{(f,g)}(z, \bar{z}) = \operatorname{Re} \int \frac{1}{\sqrt{2}(1 + |g|^2)} f(1 - g^2, i(1 + g^2), 2g) dz$$

Los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental de una superficie representada con una parametrización isotérmica son, como en [8],

$$\begin{aligned}
E &= 2|f|^2 & \ell &= -\frac{2\sqrt{2}}{1 + |g|^2} \operatorname{Re} f(g_z + g_{\bar{z}}) \\
F &= 0 & m &= \frac{2\sqrt{2}}{1 + |g|^2} \operatorname{Im} f(g_z - g_{\bar{z}}) \\
G &= 2|f|^2 & n &= -\frac{2\sqrt{2}}{1 + |g|^2} \operatorname{Re} f(g_{\bar{z}} - g_z)
\end{aligned}$$

y la curvatura gaussiana y media son

$$K = 2 \frac{|g_{\bar{z}}|^2 - |g_z|^2}{(1 + |g|^2)^2 |f|^2} \quad H = -\frac{\sqrt{2}}{1 + |g|^2} \operatorname{Re} \left(\frac{g_{\bar{z}}}{f} \right).$$

La ecuación de las líneas asintóticas es

$$\bar{f} g_{\bar{z}} dz^2 + f g_z dz d\bar{z} + f g_z d\bar{z}^2 = 0.$$

2.3. Ejemplos

El teorema 3 nos asegura la existencia de tres funciones complejas f, g y h que, con la representación de Enneper-Weierstrass, parametrizan a una superficie en \mathbb{R}^3 pero no nos da una definición explícita de estas funciones. El problema que trabajaremos en esta sección es el de encontrar explícitamente estas tres funciones.

Podríamos buscar tres funciones $f, g, h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ que cumplan las condiciones del teorema 3. Recordemos que las condiciones surgen como condiciones para que el sistema 2-3, 2-4 tenga solución y que el sistema de ecuaciones se planteó como una relación entre el plano tangente de la esfera parametrizada con la inversa de la proyección estereográfica y el plano tangente de una superficie. Una solución trivial del sistema de ecuaciones sería $f = 0$, $h = \frac{\sqrt{2}}{1+|z|^2}$, $g = z$ siguiendo a [8]. En este caso tendríamos que

$$\Phi_z = \frac{\sqrt{2}}{1 + |z|^2} \bar{w},$$

$$\Phi_{\bar{z}} = \frac{\sqrt{2}}{1 + |z|^2} w.$$

Por lo tanto,

$$\Phi_z = \frac{1}{(1 + |z|^2)^2} (1 - \bar{z}^2, -i(1 + \bar{z}^2)2\bar{z})$$

y

$$\Phi = \frac{1}{1 + |z|^2} (2\operatorname{Re}(z), 2\operatorname{Im}(z), |z|^2 - 1)$$

que es la parametrización de la esfera con la inversa de la proyección estereográfica.

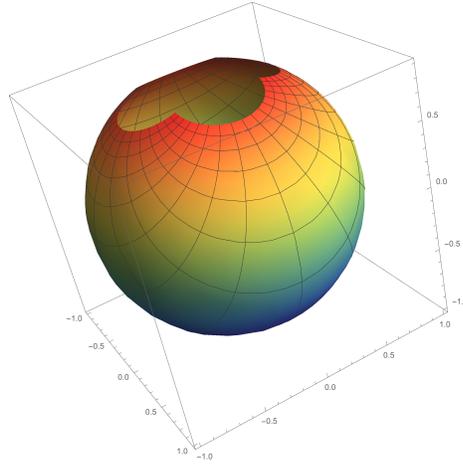


Figura 2-1: Esfera

Más allá de este ejemplo, que es trivial por la construcción que hicimos para la representación, seguir este camino no nos permite encontrar otros ejemplos fácilmente.

Otra manera de enfrentar el problema es buscar las funciones de Enneper-Weierstrass de una superficie S dada una parametrización Φ de S . Supongamos que $\Phi : \mathbb{C} \rightarrow S$ es la parametrización de una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$. Entonces podemos encontrar su aplicación de Gauss en términos de sus derivadas complejas:

$$G = \frac{\Phi_x \times \Phi_y}{|\Phi_x \times \Phi_y|} = \frac{(\Phi_z + \Phi_{\bar{z}}) \times i(\Phi_z - \Phi_{\bar{z}})}{|(\Phi_z + \Phi_{\bar{z}}) \times i(\Phi_z - \Phi_{\bar{z}})|} = -i \frac{\Phi_z \times \Phi_{\bar{z}}}{|\Phi_z \times \Phi_{\bar{z}}|}.$$

Después podemos encontrar $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ componiendo $\pi \circ G$. Como w y \bar{w} están definidas

solamente en función de g , ya podemos plantear el sistema de ecuaciones:

$$\Phi_z = fw + \bar{h}\bar{w}$$

$$\Phi_{\bar{z}} = \bar{f}\bar{w} + hw.$$

En este sistema de ecuaciones conocemos $\Phi_z, \Phi_{\bar{z}}$ y w, \bar{w} . Para encontrar f y h tendríamos que resolver este sistema de ecuaciones. Como $\Phi_z, \Phi_{\bar{z}}, w, \bar{w} \in \mathbb{C}^3$ y $f, h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ el sistema anterior es un sistema de seis ecuaciones complejas con cuatro incógnitas reales.

Para resolver este sistema de ecuaciones podemos usar sistemas de álgebra computacional como *Mathematica*. En los siguientes ejemplos se usó este método para encontrar f, g y h dada la parametrización usual de superficies conocidas.

Ejemplo 6. Paraboloide

Para encontrar las funciones de Enneper-Weierstrass del paraboloide seguiremos el procedimiento que describimos anteriormente. Consideremos la parametrización del paraboloide $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ definida como

$$\Phi(x, y) = (x, y, x^2 + y^2).$$

Como $z = x + iy$ podemos reescribir la parametrización anterior como,

$$\Phi(z) = \left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}, z\bar{z} \right).$$

Podemos calcular las derivadas parciales complejas de Φ ,

$$\Phi_z = \left(\frac{1}{2}, \frac{-i}{2}, \bar{z} \right) \quad \text{y} \quad \Phi_{\bar{z}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{i}{2}, z \right),$$

y con ellas calcular la aplicación de Gauss del paraboloide,

$$G = -i \frac{\Phi_z \times \Phi_{\bar{z}}}{|\Phi_z \times \Phi_{\bar{z}}|} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4z\bar{z}}} (-(z + \bar{z}), i(z - \bar{z}), 1).$$

Para encontrar g , componemos la aplicación de Gauss con la proyección estereográfica π ,

$$g = \pi \circ G = \frac{2z}{1 + \sqrt{1 + 4z\bar{z}}}.$$

Una vez que tenemos g podemos calcular w y \bar{w} ,

$$w = \left(\frac{-2z^2 + 2z\bar{z} + \sqrt{4z\bar{z} + 1} + 1}{\sqrt{2}(4z\bar{z} + \sqrt{4z\bar{z} + 1} + 1)}, \frac{i(2z^2 + 2z\bar{z} + \sqrt{4z\bar{z} + 1} + 1)}{\sqrt{2}(4z\bar{z} + \sqrt{4z\bar{z} + 1} + 1)}, \frac{\sqrt{2}z(\sqrt{4z\bar{z} + 1} + 1)}{4z\bar{z} + \sqrt{4z\bar{z} + 1} + 1} \right),$$

$$\bar{w} = \left(\frac{2z\bar{z} + \sqrt{4z\bar{z} + 1} - 2\bar{z}^2 + 1}{\sqrt{2}(4z\bar{z} + \sqrt{4z\bar{z} + 1} + 1)}, -\frac{i(2z\bar{z} + \sqrt{4z\bar{z} + 1} + 2\bar{z}^2 + 1)}{\sqrt{2}(4z\bar{z} + \sqrt{4z\bar{z} + 1} + 1)}, \frac{\sqrt{2}\bar{z}(\sqrt{4z\bar{z} + 1} + 1)}{4z\bar{z} + \sqrt{4z\bar{z} + 1} + 1} \right).$$

Ahora, para encontrar f y h planteamos el sistema de ecuaciones,

$$\Phi_z = fw + \bar{h}\bar{w}$$

$$\Phi_{\bar{z}} = \bar{f}\bar{w} + hw.$$

Utilizando *Mathematica*, encontramos que

$$f = \frac{\sqrt{2}\bar{z}^2}{\sqrt{4z\bar{z} + 1} + 1} \quad \text{y} \quad h = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{4z\bar{z} + 1} + 1.$$

Por lo tanto, las funciones definidas anteriormente son las funciones de Enneper-Weierstrass del paraboloides.

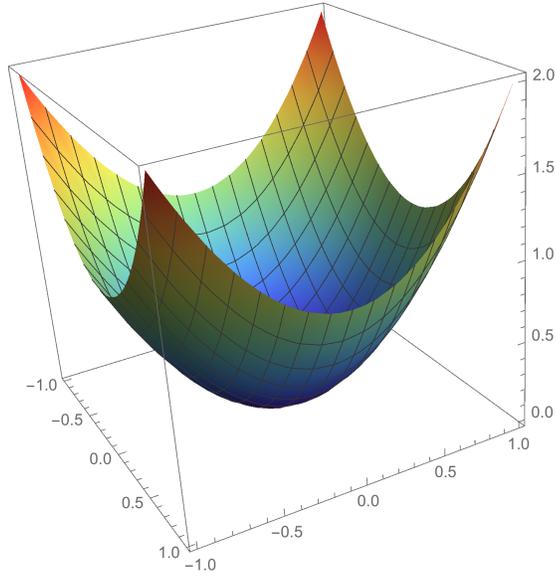


Figura 2-2: Paraboloides

Ejemplo 7. Paraboloides hiperbólicos

Siguiendo el mismo procedimiento podemos encontrar que las funciones $f, g, h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definidas por

$$\begin{aligned}
 f(z, \bar{z}) &= \frac{\sqrt{2}z^2}{\sqrt{4z\bar{z} + 1} + 1} \\
 g(z, \bar{z}) &= \frac{2\bar{z}}{\sqrt{4z\bar{z} + 1} + 1} \\
 h(z, \bar{z}) &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{4z\bar{z} + 1} + 1
 \end{aligned}$$

son las funciones de Enneper-Weierstrass del paraboloides hiperbólico

$$\Phi(z, \bar{z}) = \left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}, \frac{z^2 + \bar{z}^2}{2} \right).$$

Usando la relación $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $z = x + iy$ tenemos

$$\Phi(x, y) = (x, y, x^2 - y^2)$$

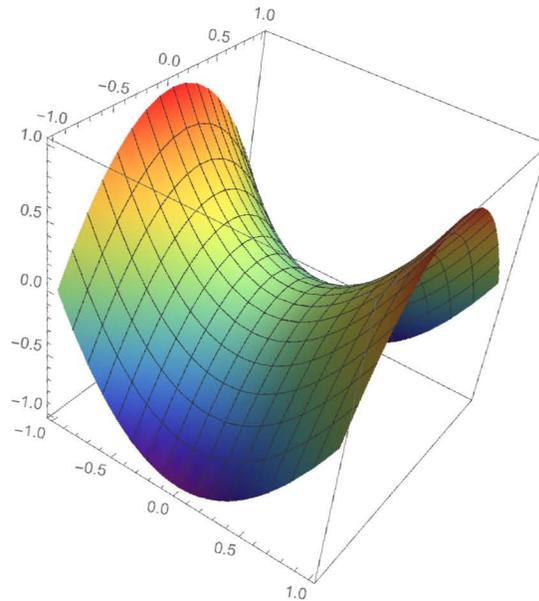


Figura 2-3: Paraboloide hiperbólico

Observemos que las funciones de Enneper-Weierstrass para el paraboloide y el paraboloide hiperbólico tienen una relación entre ellas. En concreto, las funciones f, g y h del paraboloide son conjugadas de las funciones f, g y h del paraboloide hiperbólico.

Ejemplo 8. Cilindro

Ahora veremos un ejemplo de una inmersión isotérmica para comparar las funciones que la definen según su orientación.

Primero consideremos la parametrización del cilindro $\Phi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ definida por

$$\Phi_1(x, y) = (\cos(x), \sin(x), y).$$

Como

$$\Phi_{1x} = (-\text{sen}(x), \text{cos}(x), 0) \quad \text{y}$$

$$\Phi_{1y} = (0, 0, 1),$$

entonces

$$E = \langle \Phi_{1x}, \Phi_{1x} \rangle = 1,$$

$$F = \langle \Phi_{1x}, \Phi_{1y} \rangle = 0 \quad \text{y}$$

$$G = \langle \Phi_{1y}, \Phi_{1y} \rangle = 1.$$

Por lo tanto $E = G$ y $F = 0$ y concluimos que Φ es una inmersión isotérmica. Podemos reescribir esta parametrización en términos de z y \bar{z} como

$$\Phi_1(z, \bar{z}) = \left(\cos\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right), \text{sen}\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right), \frac{z - \bar{z}}{2i} \right).$$

La aplicación de Gauss del cilindro parametrizado por Φ_1 es

$$G_1 = \left(\cos\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right), \text{sen}\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right), 0 \right).$$

Así, encontramos g_1 componiendo G_1 con la inversa de la proyección estereográfica,

$$g_1 = \cos\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right) + i \text{sen}\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right).$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones 2-3, 2-4 en *Mathematica* encontramos f_1 y h_1 ,

$$f_1 = \frac{-i \cos\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right) - \text{sen}\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)}{\sqrt{2}},$$

$$h_1 = 0.$$

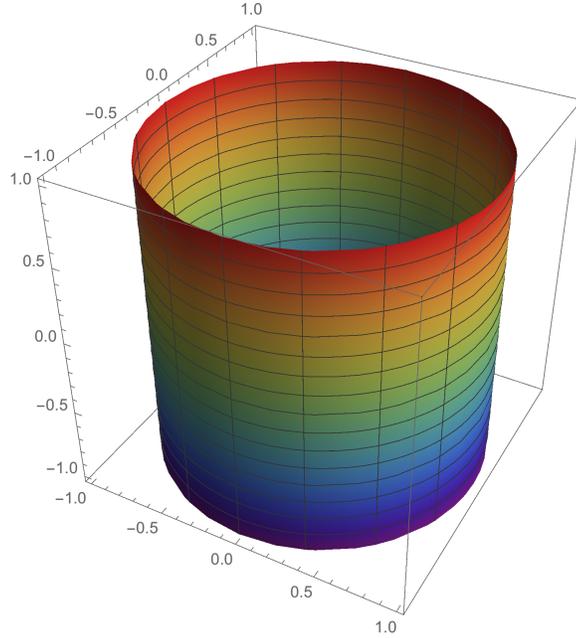


Figura 2-4: Cilindro

Ahora consideremos la parametrización del cilindro $\Phi_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ cuya aplicación de Gauss define la orientación contraria,

$$\Phi_2(x, y) = (\cos(x), \operatorname{sen}(x), -y).$$

Reescribimos Φ_2 en términos de z y \bar{z} ,

$$\Phi_2(z, \bar{z}) = \left(\cos\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right), -\frac{z - \bar{z}}{2i} \right).$$

La aplicación de Gauss es,

$$G_2 = -G_1 = \left(-\cos\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right), -\operatorname{sen}\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right), 0 \right).$$

Siguiendo el mismo procedimiento encontramos las funciones que representan al cilindro para-

metrizado por Φ_2 ,

$$g_2 = -g_1 = -\cos\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right) - i\operatorname{sen}\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right),$$

$$f_2 = h_1 = 0 \quad \text{y}$$

$$h_2 = f_1 = \frac{-i\cos\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)}{\sqrt{2}}.$$

En los ejemplos 6 y 7 encontramos las funciones complejas f, g y h que, con la representación de Enneper-Weierstrass generalizada, parametrizan al paraboloides y al paraboloides hiperbólico como gráficas de funciones. Teniendo en mente estos ejemplos, es natural preguntarnos si podemos encontrar tres funciones complejas f, g y h que, con la representación de Enneper-Weierstrass generalizada, parametricen a cualquier superficie representada como gráfica de una función.

2.4. Representación de Enneper-Weierstrass para gráficas de funciones

Sea $m : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica y sea $\Phi : \mathbb{C} \rightarrow S$ la parametrización de S como gráfica de m . Buscamos $f, g, h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tales que la representación de Enneper-Weierstrass generalizada para f, g y h sea

$$\Phi(x, y) = (x, y, m(x, y)),$$

como $z = x + iy$ podemos expresar Φ y m en términos de z y por lo tanto, podemos escribir Φ como

$$\Phi(z) = \left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}, m(z) \right).$$

Para encontrar f, g y h repetiremos el procedimiento del ejemplo anterior. Primero, para encontrar g calculamos la aplicación de Gauss, $G : S \rightarrow \mathbb{S}^2$, de Φ y la componemos con la proyección estereográfica $\pi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C}$. Para eso, calculamos las derivadas parciales de Φ con respecto a z y

\bar{z} ,

$$\Phi_z = \left(\frac{1}{2}, -\frac{i}{2}, m_z \right) \quad \text{y} \quad \Phi_{\bar{z}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{i}{2}, m_{\bar{z}} \right).$$

Ahora, calculamos la aplicación de Gauss,

$$G = -i \frac{\Phi_z \times \Phi_{\bar{z}}}{|\Phi_z \times \Phi_{\bar{z}}|} = \frac{1}{\sqrt{4m_z m_{\bar{z}} + 1}} (m_{\bar{z}} + m_z, i(m_z - m_{\bar{z}}), 1),$$

y componemos con la proyección estereográfica $\pi(x, y, z) = \frac{x}{z-1} + i \frac{y}{z-1}$ para obtener g :

$$g = \pi \circ G = \frac{2m_{\bar{z}}}{\sqrt{4m_z m_{\bar{z}} + 1} + 1}.$$

Para simplificar, definimos las funciones $a, b : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ de la siguiente manera:

$$a = 2m_{\bar{z}} \quad \text{y} \quad b = \sqrt{4m_z m_{\bar{z}} + 1} + 1.$$

Una vez que tenemos $g = \frac{a}{b}$ podemos calcular w y \bar{w} en términos de a y b ,

$$w = \frac{1}{\sqrt{2}(b^2 - |a|^2)} (b^2 - a^2, i(b^2 + a^2), 2ab),$$

$$\bar{w} = \frac{1}{\sqrt{2}(b^2 - |a|^2)} (b^2 - \bar{a}^2, -i(b^2 + \bar{a}^2), 2\bar{a}b).$$

Al resolver el sistema de ecuaciones

$$\Phi_z = fw + \bar{h}\bar{w}$$

$$\Phi_{\bar{z}} = \bar{f}\bar{w} + hw,$$

nos queda que

$$f = \frac{\bar{a}^2}{2\sqrt{2}b} \quad \text{y} \quad h = \frac{b}{2\sqrt{2}}.$$

Por lo tanto sabemos que si $m : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función analítica y $\Phi : \mathbb{C} \rightarrow S$ es la parametrización de S como gráfica de m , entonces podemos parametrizar a S con la representación de

Enneper-Weierstrass generalizada de las funciones

$$f = \frac{\bar{a}^2}{2\sqrt{2}b}, \quad g = \frac{a}{b} \quad \text{y} \quad h = \frac{b}{2\sqrt{2}},$$

con

$$a = 2m_{\bar{z}} \quad \text{y} \quad b = \sqrt{4m_{\bar{z}}m_z + 1} + 1.$$

Inversamente, si definimos f, g y h como lo hicimos arriba, la representación de Enneper-Weierstrass de estas funciones es la parametrización de una superficie como gráfica de la función m . De esta manera, vemos que podemos parametrizar localmente a cualquier superficie en \mathbb{R}^3 a través de una función compleja y una función real.

Por otro lado, esto nos ayuda a encontrar a las funciones de Enneper-Weierstrass de una superficie cuando está parametrizada como gráfica de una función sin tener que hacer el procedimiento de la sección anterior.

Ejemplo 9. Paraboloide

En la sección anterior encontramos las funciones de Enneper-Weierstrass del paraboloide. El paraboloide se puede parametrizar como la gráfica de la función $m : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $m(z) = z\bar{z}$. Por lo tanto, $\Phi : \mathbb{C} \rightarrow S$ está definida por

$$\Phi(z) = \left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}, z\bar{z} \right).$$

Podemos calcular las derivadas parciales de m con respecto a z y \bar{z} ,

$$m_z = \bar{z} \quad \text{y} \quad m_{\bar{z}} = z.$$

Así, podemos encontrar a y b ,

$$a = 2z \quad \text{y} \quad b = \sqrt{4z\bar{z} + 1} + 1.$$

Y calcular f, g y h ,

$$f = \frac{2\bar{z}^2}{\sqrt{2}(\sqrt{4z\bar{z}+1}+1)}, \quad g = \frac{2z}{\sqrt{4z\bar{z}+1}+1} \quad \text{y} \quad h = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{4z\bar{z}+1}+1$$

que son las mismas que teníamos en el Ejemplo 6.

Ahora veremos que podemos encontrar las funciones de Enneper-Weierstrass para gráficas de polinomios homogéneos de segundo grado en general.

Ejemplo 10. Gráficas de polinomios cuadráticos homogéneos

Sea $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la parametrización de una superficie como gráfica de un polinomio homogéneo de segundo grado, $m : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ con $m(x, y) = ax^2 + by^2$. Usando $z = x + iy$ podemos reescribir m como $m : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $m(z) = a\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right) + b\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)$. Ahora, calculamos las derivadas de m con respecto a z y \bar{z} .

$$m_z = \frac{1}{2}(a(z + \bar{z}) + b(z - \bar{z})) \quad \text{y}$$

$$m_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(a(z + \bar{z}) - b(z - \bar{z})).$$

Por lo tanto,

$$a = (a(z + \bar{z}) + b(z - \bar{z})) \quad \text{y}$$

$$b = \sqrt{a^2(z + \bar{z})^2 - b^2(z - \bar{z})^2 + 1} + 1.$$

Así, tenemos

$$g(z, \bar{z}) = \frac{a(z + \bar{z}) + b(z - \bar{z})}{\sqrt{a^2(z + \bar{z})^2 - b^2(z - \bar{z})^2 + 1} + 1},$$

$$f(z, \bar{z}) = \frac{(a(z + \bar{z}) + b(\bar{z} - z))^2}{2\sqrt{2} \left(\sqrt{a^2(z + \bar{z})^2 - b^2(z - \bar{z})^2 + 1} + 1 \right)} \quad \text{y}$$

$$h(z, \bar{z}) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{a^2(z + \bar{z})^2 - b^2(z - \bar{z})^2 + 1} + 1.$$

También podemos encontrar los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental y las

curvaturas de estas superficies en términos de a, b :

$$\begin{aligned}
 E &= 1 + 4a^2x^2, & \ell &= \frac{2a}{\sqrt{1 + 4a^2x^2 + 4b^2y^2}}, \\
 F &= 4abxy, & m &= 0, \\
 G &= 1 + 4b^2y^2, & n &= \frac{2b}{\sqrt{1 + 4a^2x^2 + 4b^2y^2}}, \\
 K &= \frac{4ab}{(4a^2x^2 + 4b^2y^2 + 1)^2}, & H &= \frac{4a^2bx^2 + 4ab^2y^2 + a + b}{(4a^2x^2 + 4b^2y^2 + 1)^{3/2}}.
 \end{aligned}$$

Finalmente concluimos que cualquier superficie que se pueda representar como gráfica de una función cuadrática homogénea se puede parametrizar con la representación de Enneper-Weierstrass para las funciones complejas f, g y h que definimos anteriormente y se puede estudiar la geometría de las superficies en términos de estas funciones.

En general, vimos que cuando parametrizamos a una superficie como gráfica de una función, la representación de Enneper-Weierstrass generalizada sólo depende de dos funciones (a, b) . Como cualquier superficie regular se puede parametrizar localmente como gráfica de una función entonces esta representación es válida en general. La representación de Enneper-Weierstrass generalizada de una superficie parametrizada como gráfica de función contrasta con la que definimos para superficies parametrizadas con coordenadas isotérmicas, ya que cuando parametrizamos superficies a través de la representación de Enneper-Weierstrass generalizada con coordenadas isotérmicas, la representación depende de dos funciones complejas (f, g) o (h, g) .

Conclusión

En este trabajo estudiamos la representación de Enneper-Weierstrass para superficies en \mathbb{R}^3 . En el primer capítulo estudiamos la representación de Enneper-Weierstrass para superficies mínimas y en el segundo capítulo generalizamos esta representación para superficies no mínimas. En cada caso, representar superficies a través de funciones complejas, nos permitió encontrar los invariantes geométricos de segundo orden de superficies en términos de las funciones complejas que las definen.

En particular, parametrizar superficies que no son mínimas con la representación de Enneper-Weierstrass generalizada puede ser útil para estudiar otras propiedades de superficies en \mathbb{R}^3 . Por ejemplo, la representación de Enneper-Weierstrass generalizada para superficies que no son mínimas en \mathbb{R}^3 nos permite establecer condiciones para que una función $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$ sea aplicación de Gauss de una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$. Con esas condiciones podemos estudiar el problema de determinar las distintas superficies que admiten una aplicación de Gauss dada, así como las propiedades geométricas que solo dependen de esta aplicación. Este problema ha sido considerado en diversos trabajos de los cuales destacamos el de Hoffmann y Osserman [12], [11]. En el caso de superficies mínimas, vimos que todas las superficies de una familia de superficies mínimas tienen la misma aplicación de Gauss. Por lo tanto, hay una infinidad de superficies mínimas con la misma aplicación de Gauss. En el caso de superficies que no son mínimas, se puede ver que dada una función g que cumpla las condiciones necesarias para ser aplicación de Gauss de una superficie, sólo existe una superficie, cuya representación (f, g) preserva la orientación negativa (o bien, (h, g) con orientación positiva), que tiene a g como aplicación de Gauss.

Este método también puede ser útil para estudiar superficies en otros espacios. Por ejemplo, usando la proyección estereográfica $\pi : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ se pueden considerar inmersiones en \mathbb{R}^4 que no resultan mínimas en $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ pero que provienen de superficies mínimas de \mathbb{R}^3 , y así, establecer relaciones interesantes a partir de su respectivas representaciones de Weierstrass. Para esto debemos considerar que las inmersiones en \mathbb{R}^4 , aún en el caso isotérmico, requieren de tres funciones para su representación de Weierstrass.

Bibliografía

- [1] Lars V Ahlfors. *Complex Analysis: An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable*. McGraw-Hill, 1953.
- [2] Manfredo P do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces: Revised and Updated Second Edition*. Courier Dover Publications, 2016.
- [3] Alfred Gray. *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*. Chapman and Hall, 2017.
- [4] David Hoffman. Global theory of minimal surfaces. *Clay Math. Proc*, 2, 2005.
- [5] Robert Osserman. *A Survey of Minimal Surfaces*. Courier Corporation, 2002.
- [6] Michael D Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. Publish or perish, 1970.
- [7] Stefan Hildebrandt y Friedrich Sauvigny Ulrich Dierkes. *Minimal Surfaces*. Springer, 2010.
- [8] Juan Monterde y Federico Sanchez-Bringas. On the geometry of immersions of surfaces and the g-deformations in \mathbb{R}^n , $n=3,4$. *Publicación Preliminar*, 2017.
- [9] Franki JE Dillen y Leopold CA Verstraelen. *Handbook of Differential Geometry*. Elsevier, 1999.
- [10] Jerrold E Marsden y Michael J Hoffman. *Basic Complex Analysis*. Macmillan, 1999.

- [11] David Hoffman y Robert Osserman. The gauss map of surfaces in \mathbb{R}^n . *J. Differential Geometry*, 1983.
- [12] David Hoffman y Robert Osserman. The gauss map of surfaces in \mathbb{R}^3 and \mathbb{R}^4 . *Proc. London Math. Soc*, 1985.