Universidad Nacional Autónoma
de México

Facultad de Ciencias

# Lógica Modal. Una Sintaxis y una Semántica.

T E S I S

que para obtener el grado de:
Matemática

presenta:
Daniela Loustalot Knapp

director de tesis:
M. en C. Rafael Rojas Barbachano
Dr. Iván Martínez Ruiz

Ciudad de México Febrero, 2019

# **Lógica Modal. Una Sintaxis y una Semántica.**

por

Daniela Loustalot Knapp

Tesis presentada para obtener el grado de

Matemática

en la

Facultad de Ciencias

Universidad Nacional Autónoma
de México

Ciudad de México. Febrero, 2019

# Hoja de datos del Jurado

1. Datos de la alumna
   Loustalot
   Knapp
   Daniela
   55 2915 3584
   Universidad Nacional Autónoma de
   México
   Facultad de Ciencias
   311174359

2. Datos del Tutor
   M. en C.
   Rafael
   Rojas
   Barbachano

3. Datos del Co-tutor
   Dr.
   Iván
   Martínez
   Ruiz

4. Datos del Sinodal 1
   Dr.
   Roberto
   Pichardo
   Mendoza

5. Datos de la Sinodal 2
   Dra.
   Lourdes del Carmen
   González
   Huesca

6. Datos del Sinodal 3
   Dr.
   Osvaldo Alfonso
   Téllez
   Nieto

7. Datos del trabajo escrito
   Lógica Modal.
   Una Sintaxis y una Semántica
   137 p
   2019

# Agradecimientos

Agradezco primero a la Universidad Nacional Autónoma de México, *la máxima casa de estudios*, por acogerme desde la niñez en sus instalaciones y programas y proporcionar el entorno que ha favorecido mi desarrollo tanto académico como deportivo y personal. También agradezco a Fundación UNAM y al gobierno de la Ciudad de México, quienes a través de sus becas impactaron positivamente mi desempeño durante las etapas de educación media y de educación superior, sin ellas hubiera sido mucho más difícil terminar satisfactoriamente mis estudios de licenciatura.

Por otro lado, agradezco a todas las amistades que hacen parte de mi mundo, que de distintas maneras y en distinta medida han influido en mi crecimiento y que han sido partícipes de la consolidación de los logros que he tenido. A las amigas y amigos que fueron parte de mi día a día en la carrera, me enseñaron, aprendieron conmigo, me acompañaron y compartieron conmigo la vida escolar. A las amigas del voli con las que compartí prácticamente todos los días de la prepa, fueron parte de la formación de mi carácter y determinación a través del deporte y todavía siguen en mi vida y en mi corazón. A las amigas y amigos del ultimate que me han inspirado, compartido la pasión, viajes, campeonatos y con los que he aprendido que un mundo mucho mejor es posible. A los amigos y amigas que han estado desde la prepa o antes y a pesar de que hemos tomado caminos distintos, siguen compartiendo conmigo. A las amistades que han decidido abrirme su corazón, me han escuchado, han confiado en mi, me han inspirado y me han empoderado. Y a las personas que se encuentran en la intersección de uno o más de los conjuntos que acabo de mencionar, quiero tenerlas juntito a mí toda la vida.

También por supuesto me siento muy agradecida con mi familia, que siempre ha creído en mi y me ha apoyado de mil maneras para alcanzar mis sueños; este no fue la excepción. Con mi tía Lucero y mi tío Ale me siento particularmente agradecida porque estuvieron a mi lado en cada paso que di para lograr completar este trabajo. Mis padrinos, Fito y Nelda, que han estado al pendiente de mí toda la vida, les quiero mucho, gracias. Muchas gracias tía Mayte, Alain, Valeria, abuelo Alfredo, y todas las personas que son parte de mi familia. Especialmente gracias a mi mamá, que siempre ha estado para mi, me ha querido, apoyado y me ha impulsado a ser lo que soy el día de hoy, que ha sido testigo de mi evolución en la vida y fue parte esencial de este proyecto. También quiero agradecer a mi perrita Niebla por ser mi compañera de vida, desvelarse conmigo y dejarme darle todos los abrazos del mundo.

Y por último, especiales gracias a las personas que directamente me apoyaron durante este proceso. A El Profesor por confiar siempre en mi, por dar unos de los cursos que más disfruté en toda la carrera, por despertarme la curiosidad y ser parte del principio de lo que espero, me dure toda la vida. A Iván por abrirme las puertas, guiarme y estar siempre dispuesto a compartir sus conocimientos y colaborar en mi desarrollo. A las personas que hicieron mi estancia en Puebla una excelente experiencia: a la gente de la bóveda, del laboratorio, al señor de las frutas y verduras, a los vigilantes de CU. A Ricardo por ser testigo del proceso y siempre alentarme a seguir creciendo y superarme. Al jurado y todas las personas que me leyeron e hicieron comentarios, todos fueron muy provechosos. A Diego por guiarme en el proceso y a Lluis y Roger por compartirlo conmigo.

Gracias todas y todos por cruzar caminos conmigo, compartir, impactar positivamente mi vida y hacer parte de este proyecto.

# Índice general

# Introducción

La noción de modalidad se refiere a la manera de ser verdad de las cosas en cuanto a cómo pueden, cómo deben o cómo no pueden ser las cosas, en lugar de a cómo en realidad son.

La lógica modal se puede pensar, en términos generales, como la lógica de diferentes tipos de modalidades o de maneras de ser verdad, por ejemplo la lógica alética (la de las modalidades de necesidad o "necesariamente" y de posibilidad o "posiblemente"), la epistémica ("es sabido que"), la deóntica ("es obligatorio que"), la temporal ("ha sido el caso que"), entre otras. Como estos operadores tienen características lógicas en común, la etiqueta de *lógica modal* se utiliza indistintamente, aunque en sentido estricto, el término "lógica modal" está reservado para la lógica de las modalidades aléticas (necesidad y posibilidad) y a las demás se les llama por su propio nombre, como por ejemplo, lógica deóntica o lógica temporal.

El razonamiento humano tiende a considerar o hacer juicios sobre lo que es posible y necesario; a considerar e imaginar que las cosas pudieron haber sido diferentes a como son y a que algunas cosas pudieron no haber sucedido. Este tipo de juicios, que nosotros llamamos modales, son esenciales en el razonamiento humano y en la argumentación filosófica. De ahí nace el interés por formalizar los argumentos modales. En el contexto lógico, lo que la modalidad significa "(...) es que la evaluación e interpretación de los enunciados modales ha de realizarse no sólo en función de su acción descriptiva de la realidad, en tanto que se adecuen a ella, sino también en función de una especie de autorreferencia que se da por el hecho de que los operadores modales indican -de un modo que habrá de ser determinado- la relación que el enunciado modalizado, esto es, el enunciado que cae bajo el alcance de un operador modal, mantiene con otros enunciados de la teoría "[1].

Muchos estudios sobre el significado y el uso lógico de la modalidad comienzan desde Aristóteles, aunque hay razones para pensar que el concepto de necesidad existía desde antes. La lógica modal es una herramienta muy útil que contribuye al análisis lógico de los lenguajes naturales y al igual que el significado de la modalidad, fue evolucionando a lo largo de la historia.

Comencemos en la antigüedad clásica. El silogismo modal estuvo presente en la obra lógica de Aristóteles. Él puso las nociones de posibilidad y necesidad tanto en su teoría metafísica como en su estudio del razonamiento humano. Esto se ilustra con su definición de silogismo (o deducción válida): "Una deducción es un discurso en el que ciertas cosas han sido supuestas, algo distinto a lo que ha sido supuesto resulta de la necesidad porque estas cosas son" [2]. Aristóteles trabajaba la noción de posibilidad de dos maneras, la primera era la manera en la que nosotros

[1] [Lamillar, 2004]
[2] Traducción libre de [Cresswell *et al.*, 2016, pág. 2]

lo pensamos en la lógica modal actual, esta manera incluye la necesidad; y la segunda manera es a lo que ahora se le llama contingencia, es decir que una proposición $p$ es contingente si no es necesariamente verdadera ni necesariamente falsa. Entonces, en la obra de Aristóteles, aparecen ya las ideas naturales de las modalidades, pero siempre aparecen unas definidas en términos de otras. Los estoicos y megáricos también tuvieron sus contribuciones en esta época pero éstos no dieron muchos frutos en el periodo medieval por la falta de conocimiento de sus trabajos.

Después, en la Edad Media, se encuentran discusiones más explícitas sobre las nociones de posibilidad y necesidad. La más famosa discusión medieval que involucra cuestiones de lógica modal, es probablemente protagonizada por Anselmo de Canterbury y su argumento en favor de la existencia de Dios. Éste razona diciendo que si Dios es posible, es decir, si la idea de un ser totalmente perfecto y necesario es posible, entonces Dios existe y negarlo sería incurrir en una contradicción; esto hace depender toda su argumentación en las nociones de necesidad y posibilidad. De hecho, este argumento se podría formalizar en el lenguaje objeto de modo que resultaría en lo que posteriormente será un teorema del sistema S5 de Lewis ($\Diamond\Box\phi \to \phi$). La distinción entre modalidades de re (acerca del objeto) y las modalidades de dicto (acerca de la proposición), son quizás la contribución más importante de esta época a la lógica modal, sin embargo, en los siglos posteriores no se le dio un seguimiento lógico a estas ideas. En los trabajos sobre lógica más importantes desde el Renacimiento hasta el siglo XIX, no se trata el silogismo modal. En este periodo tampoco hubo muchas contribuciones por los lógicos de la época a esta ciencia, a excepción de Leibniz.

Fue hasta el siglo XIX, que varios personajes, hicieron contribuciones contundentes a la lógica como ciencia. Por ejemplo, Peano y Frege, quienes no trataron la modalidad en sus obras pues su interés principal era el lenguaje de la aritmética y de las matemáticas en general. Sin embargo, hubo un lógico, Hugh MacColl, quien en 1877 publicó en las actas de la sociedad matemática londinense y ahí indirectamente introdujo la noción de posibilidad en su sistema. Más tarde, esto dio lugar a consideraciones más amplias sobre una lógica modal, las cuales C.I. Lewis aprovechó para convertirse en 1912 en el fundador de la lógica moderna de las modalidades.

El principal interés de Lewis al iniciar sus investigaciones sobre las modalidades era evitar las paradojas de la implicación material. Lewis propuso el desarrollo de una lógica axiomática en la que la implicación tuviera otro sentido. En su trabajo *A Survey of Symbolic Logic*, Lewis desarrolló una teoría de la implicación estricta que se convirtió en la formalización del sistema de las modalidades clásicas. Después, junto con C.H.Langford, escribió un segundo libro: *Symbolic Logic* en el que utiliza un lenguaje con variables proposicionales y tres símbolos primitivos ($\sim$ negación, $\cdot$ conjunción y $\Diamond$ posibilidad) y definiendo a partir de ellos el símbolo $\hookrightarrow$ tal que, con $p$ y $q$ letras proposicionales,

$$(p \hookrightarrow q) :=\sim \Diamond(p \cdot \sim q).$$

En esta obra se desarrollan dos sistemas más débiles (**S1 y S2**) a partir del sistema desarrollado en *A Survey of Symbolic Logic* (**S3**), y en un apéndice aparecen otros dos sistemas (**S4 y S5**) a partir de las observaciones de O. Becker en cuanto a la reducción de las modalidades de *A Survey of Symbolic Logic*. El procedimiento es solo sintáctico, generando los teoremas de sus sistemas mediante axiomas y reglas de inferencia. La semántica todavía es un poco intuitiva y como no hay lectura única de los operadores modales, se originan varias lógicas o sistemas lógicos modales.

La semántica para esta lógica no tuvo un desarrollo muy profundo hasta que las bases de la teoría de modelos estuvieron suficientemente fortalecidas. Fue Rudolf Carnap quien con su obra *Meaning and Necessity* en 1947, marcó un punto de referencia para lo que ahora se denomina semántica de mundos posibles. S. Kripke fue quien se encargó de desarrollar la semántica de los mundos posibles en sus aspectos de teoría de modelos. Kripke tomó como base las ideas de Carnap pero cambió la noción maximal de validez por una más universal, entendió a los mundos posible como índices o puntos e introdujo una relación de accesibilidad entre mundos. Hubo también otros lógicos en los cincuentas y principios de los sesentas que propusieron innovaciones a la semántica de mundos posibles de Carnap. Kanger (1957), Montague (1960), Hintinkka (1961) y Prior (1957). Todos pensaron en una relación de accesibilidad entre mundos y Hintikka (1961) también acogió una nueva noción de validez que requería verdad en todo conjunto arbitrario de mundos. Pero la versión de la semántica de mundos posibles de Kripke fue la más popular porque tuvo más innovaciones. La semántica de los mundos posibles fundamentada en las estructuras kripkeanas ha conformado las bases de la investigación semántica de la multitud de lógicas no clásicas. Aunque en esta época además surgieron otras ideas y aportaciones. Por ejemplo, la de poder considerar a los cuantificadores como operadores modales (Montague, 1960). También Arthur Prior fue de los primeros lógicos en enfatizar en que el sistema S5 puede ser traducido en un fragmento de la lógica de primer orden (1977). Cabe mencionar también, sobre esta época, que la lógica modal se convirtió en el principal vehículo técnico de la lógica filosófica y que fueron los lógicos de esta época, como ya se mecionó anteriormente, los que desarrollaron sistemas y nociones asociadas que fueron muy útiles para la filosofía, y fue ahí cuando se acuñaron los términos como "lógica epistémica", "lógica modal", "lógica deóntica", "lógica temporal", etcétera.

Después, en los setentas, la fase filosófica pudo ser formalizada y se consolidó una teoría matemática. En esta transformación participaron autores como Blok, Fine, Goldblatt, Gabbay, Segerberg y Thomason. También la lógica modal se expandió a áreas como la lingüística, economía y ciencias de la computación. Y la expansión continuó, en los noventas, los lenguajes modales comenzaron a utilizarse en estudios de gramática, lenguajes de bases de datos, y más recientemente, en diseño web y la estructura de espacios vectoriales usada en procesamiento matemático de imágenes.

Este trabajo está dedicado a hacer un recorrido sobre las cuestiones básicas y generales de las lógicas modales. Su objetivo principal es que cualquier estudiante de licenciatura con conocimientos de lógica clásica pueda tener una buena aproximación a la lógica modal. En el trabajo se hace un estudio sintáctico del lenguaje modal más sencillo y se sigue el estudio semántico de [Blackburn *et al.*, 2002] de los lenguajes modales en general, utilizando la semántica de mundos posibles (o de Kripke). También se presentan al final, un par de semánticas alternativas para los lenguajes modales.

Se espera que el lector este familiarizado con la lógica clásica, tanto lógica proposicional como lógica de primer orden y sus resultados principales. Sin embargo, en el apéndice se encuentra un pequeño recordatorio de lógica de primer orden y sus resultados que se utilizarán en esta tesis. También es bueno que el lector tenga un conocimiento de algunas nociones básicas de teoría de modelos como son: submodelos, equivalencia elemental y extensiones elementales.

El trabajo se divide fundamentalmente en dos partes: un estudio semántico y un estudio sintáctico y se desarrolla en cinco capítulos. Para comenzar, el primer capítulo está dedicado a dar las nociones básicas, es decir, a construir el lenguaje modal, dar ejemplos de las interpretaciones más usuales que se le dan, definir los conceptos de los que se hará uso más adelante y convenir la notación básica que se utilizará durante todo el texto. El estudio semántico se encuentra desarrollado en los capítulos dos, tres y cinco y el capítulo cuarto es exclusivamente un estudio sintáctico. En específico, en el segundo capítulo se hace uso de la semántica de mundos posibles para estudiar a los modelos de las lógicas modales, se estudian las operaciones que se pueden hacer entre ellos y la expresividad de la lógica modal, este estudio es el basado en el recorrido que se hace en [Blackburn *et al.*, 2002]. El tercer capítulo está dedicado a estudiar qué propiedades relacionales se le necesita pedir a los frames para que validen ciertas fórmulas del lenguaje. Después, el cuarto capítulo es un estudio sintáctico del lenguaje modal y sus axiomatizaciones; está restringido al lenguaje básico modal y se estudian los sistemas normales de lógica modal, que son las estructuras sintácticas que corresponden a la semántica de mundos posibles. Y por último, se dan un par de ejemplos de otras semánticas posibles para las lógicas modales: una topológica, una algebraica y se da un vistazo a un concepto semántico de las lógicas modales: las bisimulaciones, desde la teoría de juegos.

# Capítulo 1

# Nociones Básicas

En este capítulo nos dedicaremos a presentar las nociones básicas con las que trabajaremos a lo largo del texto, definiciones de cuestiones semánticas y sintácticas y algunos ejemplos que ayudarán al lector a familiarizarse con dichas definiciones. También convendremos algunas notaciones que se utilizarán más adelante.

## 1.1. Sobre el lenguaje modal

Primero veamos cómo se construye el lenguaje que estaremos estudiando a lo largo del texto: el lenguaje modal. Trabajaremos con un lenguaje con varios operadores modales de aridades distintas. El lenguaje modal se construye a partir de un *tipo de semejanza* y un *conjunto de letras proposicionales*.

**Definición 1.1.1** (Tipo de semejanza modal)**.** Un *tipo de semejanza modal* $\tau$ es un par $(O, \rho)$ donde O es un conjunto no vacío (de operadores modales) y $\rho$ es una función $\rho : O \longrightarrow \mathbb{N}$ que a cada operador $\triangle \in O$ le asigna una aridad, la cual indica la cantidad de argumentos a los que $\triangle$ puede ser aplicado.

*Notación.* Generalmente denotaremos a los elementos de O por $\triangle_0, \triangle_1, \ldots$, etc. Y cuando el contexto deja clara la aridad de los operadores no se distingue entre $\tau$ y O.

*Notación.* Sea $\triangle \in O$, si $\rho(\triangle) = 1$, denotaremos a $\triangle$ por $\Diamond$. Es decir, a los operadores modales de aridad uno, los denotamos por $\Diamond$ y los llamamos 'diamantes'.

*Notación.* Cuando el tipo de semejanza tiene muchos diamantes, a veces en lugar de usar subíndices ( $\Diamond_1, \Diamond_2, \ldots$) usamos la notación $\langle a_1 \rangle, \langle a_2 \rangle, \ldots$ para alguna colección de letras.

**Definición 1.1.2** (Lenguaje Modal)**.** Un *lenguaje modal* $LM(\tau, \Phi)$ se construye a partir de un tipo de semejanza $\tau$, un conjunto de átomos o letras proposicionales $\Phi$, la constante de falsedad $(\bot)$ y un conjunto de operadores lógicos. El conjunto de símbolos del lenguaje queda definido entonces, como sigue:

$$LM(\tau, \Phi) = \tau \cup \Phi \cup \{\bot\} \cup \{\neg, \vee\}.$$

**Definición 1.1.3** (Fórmulas del lenguaje modal)**.** Una expresión $\phi$ del lenguaje $LM(\tau, \Phi)$ pertenece al conjunto de fórmulas del lenguaje $(FORM(\tau, \Phi))$, si cumple alguna de las siguientes condiciones:

$(i)$ $\phi = p$ para alguna $p \in \Phi$.

$(ii)$ $\phi = \bot$.

$(iii)$ $\phi = \neg\psi$, con $\psi \in FORM(\tau, \Phi)$.

$(iv)$ $\phi = \psi_1 \vee \psi_2$, con $\psi_1, \psi_2 \in FORM(\tau, \Phi)$.

$(v)$ $\phi = \triangle(\psi_1, \ldots, \psi_{\rho(\triangle)})$, con $\psi_i \in FORM(\tau, \Phi)$ y $\triangle \in \tau$.

*Notación.* Usaremos las letras $p_0, p_1, p_2, \ldots$, o $p$, $q$, $r$, $s$ para referirnos a los átomos.

**Definición 1.1.4** (Operador dual)**.** Para cada operador modal $\triangle \in O$ no nulo, (i.e. $\rho(\triangle) > 0$), su *operador dual* se define como $\nabla(\phi_1, \ldots, \phi_n) := \neg\triangle(\neg\phi_1, \ldots, \neg\phi_n)$. Al dual de un operador de aridad al menos dos se le llama nabla. Y el dual del diamante $(\Diamond)$ es la caja $(\Box)$.

**Definición 1.1.5** (Subfórmulas)**.** Dada una fórmula modal $\phi$, se define recursivamente su conjunto de subfórmulas de $\phi$, $Sf(\phi)$ como:

$Sf(p) = \{p\}$ para toda $p \in \Phi$.

$Sf(\bot) = \bot$.

$Sf(\neg\phi) = \{\neg\phi\} \cup Sf(\phi)$.

$Sf(\phi \vee \psi) = \{\phi \vee \psi\} \cup Sf(\phi) \cup Sf(\psi)$.

$Sf(\triangle(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)) = \{\triangle(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)\} \cup Sf(\phi_1) \cup Sf(\phi_2) \cup \cdots \cup Sf(\phi_n)$.

**Definición 1.1.6** (Grado de una fórmula)**.** Con $\tau$ un tipo de semejanza, definimos el grado de una $\tau$-fórmula como sigue:

$gr(p) = 0$, para toda $p \in \Phi$

$gr(\perp) = 0$

$gr(\neg\phi) = gr(\phi)$

$gr(\phi \vee \psi) = max\{gr(\phi), gr(\psi)\}$

$gr(\triangle(\phi_1, \ldots, \phi_n)) = 1 + max\{gr(\phi_1), \ldots, gr(\phi_n)\}$

## 1.2. Ejemplos de lenguajes modales y sus interpretaciones

**Ejemplo 1.2.1** (**Lenguaje Básico Modal**)**.** El *lenguaje básico modal* se construye usando un tipo de semejanza $\tau_0 = \{\Diamond\}$ , donde $\Diamond$ es un operador modal de aridad uno ("diamante") ; y un conjunto a lo más numerable, $\Phi$ de átomos.

El operador dual del diamante es $\Box$ ("caja") que según la definición 1.1.4 de operador dual, está definido como $\Box\phi := \neg\Diamond\neg\phi$.
Las fórmulas del lenguaje básico modal quedan determinadas por la definición 1.1.3 como sigue:

$$\phi := p \mid \perp \mid \neg\phi \mid \phi \vee \psi \mid \Diamond\phi.$$

Para el lenguaje básico modal existen tres interpretaciones comunes de los operadores diamante ($\Diamond$) y caja ($\Box$). La primera y más usada es que el diamante es interpretado como "posiblemente", así, $\Diamond\phi$ es leído como "posiblemente $\phi$" o "es posible que $\phi$". De este modo, la interpretación de $\Box\phi$ sería "no es posible que no $\phi$", o sea "necesariamente $\phi$" o "es necesario que $\phi$". Ejemplos de fórmulas que parecen ser verdaderas en este lenguaje y bajo esta interpretación son, cualquier instancia de $\Box\phi \to \phi$ ("cualquier cosa que necesariamente es, lo es") y $\Box\phi \to \Diamond\phi$ ("si algo necesariamente es, entonces posiblemente es"). Más adelante profundizaremos más en la veracidad de estas fórmulas.

En lógica epistémica, que es la que razona sobre el conocimiento, en lugar de escribirse $\Box\phi$ se escribe $K\phi$ ya que esto se intepreta como "el agente sabe que $\phi$" (por *knowledge*, la palabra en inglés para *conocimiento*). En este caso, la fórmula $K\phi \to \phi$ también parece ser verdadera, ya que si el agente sabe que $\phi$, entonces $\phi$ debe ser cierto; esto porque se habla de conocimiento, no de rumores o creencias. Instancias de otras fórmulas son más difíciles de encontrar verdaderas bajo esta interpretación, por ejemplo $K\phi \to KK\phi$ ("si el agente sabe algo, entonces sabe que lo sabe"). Después quedará más claro con un estudio semántico.

Por último, en lógica de la demostración, $\Box\phi$ se interpreta como "es demostrable que $\phi$ (en alguna teoría aritmética)". En este caso, la fórmula $\Box\phi \to \phi$ ("si $\phi$ es demostrable, entonces es verdadero") también suena plausible.

Más adelante se hará un estudio con mayor detalle de este lenguaje.

**Ejemplo 1.2.2 (Lenguaje Básico Temporal).** El *lenguaje básico temporal* se construye a partir de un tipo de semejanza que consta de dos operadores modales de aridad uno (diamantes) $O = \{\langle F\rangle, \langle P\rangle\}$. Los operadores modales de este lenguaje se denotan así por la interpretación que se le da. $\langle F\rangle\phi$ se interpreta como "$\phi$ será verdad en algún momento en el **F**uturo"; y $\langle P\rangle\phi$ se interpreta como "$\phi$ fue verdadero en algún momento en el **P**asado". $\langle F\rangle$ se suele escribir como $F$ y $\langle P\rangle$ como $P$ y sus duales como $G$ y $H$ respectivamente; ya que $G\phi$ es por definición "no $\phi$ no será verdadero en algún momento en el futuro", es decir "$\phi$ será verdadero en todo momento en el futuro" y $H\phi$ es "no $\phi$ no fue verdadero en algún momento en el pasado", i.e. "$\phi$ ha sido verdadero en todo momento". La $G$ y la $H$ son por las frases en inglés: '**G**oing to be' (será) y '**H**as been' (ha sido).

Hay algunas fórmulas interesantes en este lenguaje, por ejemplo: $P\phi \to GP\phi$ , "si algo sucedió en el pasado, siempre habrá sucedido"; que parece un buen candidato para ser verdadera.

## 1.3. Frames, modelos y nociones de verdad

**Definición 1.3.1.** Una *estructura relacional* es una tupla $\mathfrak{F}$ tal que su primer componente es un conjunto no vacío $W$, llamado dominio de $\mathfrak{F}$, y las demás componentes son relaciones en $W$.

Asumimos que una estructura relacional tiene al menos una relación. A los elementos de $W$ los llamaremos puntos, nodos, mundos o estados. Algunos ejemplos de estructuras relacionales son:

**Ejemplo 1.3.2** (Órdenes)**.** Órdenes parciales estrictos, es decir, parejas $(W, R)$ en las que $R$ es irreflexiva ($\forall x \neg Rxx$) y transitiva ($\forall x \forall y \forall z((Rxy \wedge Ryz) \to Rxz)$). Si además cumple tricotomía

$(\forall x \forall y(Rxy \vee Ryx \vee x = y))$, es un orden lineal, que también es una estructura relacional. Por ejemplo, si hacemos $W = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$ y definimos $R$ tal que $Rxy$ si y solo si $x$ y $y$ son diferentes y $x|y$; obtenemos un orden parcial estricto que podemos representar así:

$$(W, R):$$

$$\begin{tikzcd} 3 \arrow[r] & 6 \arrow[r] & 12 \arrow[r] & 24 \\ 1 \arrow[u] \arrow[r] & 2 \arrow[u] \arrow[r] & 4 \arrow[u] \arrow[r] & 8 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Con el mismo conjunto de mundos $W$, pero con $R'$ definida así: $Rxy$ si y sólo si $x < y$, obtenemos un orden lineal:

$$(W, R'):$$

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[r] & 4 \arrow[r] & 6 \arrow[r] & 8 \arrow[r] & 12 \arrow[r] & 24 \end{tikzcd}$$

Otros ejemplos de órdenes lineales son: $(\mathbb{N}, <)$, $(\mathbb{Z}, <)$, $(\mathbb{Q}, <)$, $(\mathbb{R}, <)$.

**Ejemplo 1.3.3** (Árboles Finitos)**.** Para definir un árbol nos conviene primero tener un par de conceptos a la mano.

**Definición 1.3.4.** Sea $W \neq \emptyset$ y $R$ una relación binaria en $W$. Entonces la *cerradura transitiva* de $R$, $R^+$, es la relación transitiva más pequeña (en $W$) que contiene a $R$. Es decir,

$$R^+ = \bigcap \{R' \mid R' \text{ es una relación binaria transitiva en } W \text{ y } R \subseteq R'\}$$

Más aún, $R^*$, la *cerradura reflexiva transitiva* de $R$ es la relación reflexiva y transitiva (en $W$) más chica que contiene a $R$, esta es:

$$R^* = \bigcap \{R' \mid R' \text{ es una relación binaria reflexiva y transitiva en } W \text{ y } R \subseteq R'\}$$

Notemos que $R^+uv$ si y sólo si hay una sucesión de elementos de $W$, $u = w_0, w_1, \ldots, w_n = v$ tales que para cada $i < n$ tenemos que $Rw_iw_{i+1}$, es decir, que $R^+uv$ si $v$ es alcanzable desde $u$ en una cantidad finita de $R$-transiciones. Ahora sí, definamos lo que es un árbol.

**Definición 1.3.5.** Un árbol $\mathfrak{T}$ es una estructura relacional $(T, S)$ donde:

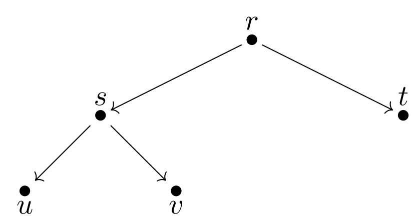
(*i*) $T$, que es el conjunto de mundos, contiene un único mundo $r$ tal que para todo $t \in T$ diferente de r, $S^*rt$. Dicho elemento $r$ es llamado raíz de árbol.

(*ii*) Todo elemento de $T$ diferente de $r$ tiene un único $S$- predecesor. Es decir, para cada $t \neq r$ existe un único $t' \in T$ tal que $St't$.

(*iii*) $S$ es acíclica. Es decir, que para todo $t$ no sucede que $S^+tt$. (De esto se sigue que $S$ es irreflexiva.)

El siguiente diagrama ilustra un árbol $\mathfrak{T} = (T, S)$ en donde $T = \{r, s, t, u, v\}$ y $S = \{(r, s), (r, t), (s, u), (s, v)\}$:

$\mathfrak{T}$ :




Ahora pasemos a definir las estructuras sobre las que estaremos trabajando.

**Definición 1.3.6** (Frame)**.** Sea $\tau$ un tipo de semejanza modal. Un $\tau$-*frame* es una tupla $\mathfrak{F}$ que tiene como elementos los siguientes:

(i) Un conjunto no vacío $W$. (El dominio de $\mathfrak{F}$).

(ii) Para cada $n \geq 0$ y cada operador modal n-ario $\triangle \in \tau$ , una relación (n+1)-aria $R_\triangle$ en $W$.

Así, un frame es nada más que una estructura relacional.

*Notación.* Si el tipo de semejanza $\tau$ tiene una cantidad finita de operadores modales $\triangle_1, \triangle_2, \ldots, \triangle_n$, simplemente denotamos al frame como $\mathfrak{F} = (W, R_{\triangle_1}, R_{\triangle_2}, \ldots, R_{\triangle_n})$. De lo contrario lo denotamos como $\mathfrak{F} = (W, R_\triangle)_{\triangle \in \tau}$ o como $\mathfrak{F} = (W, \{R_\triangle | \triangle \in \tau\})$.

**Definición 1.3.7** (Modelo)**.** Para un tipo de semejanza $\tau$ y un $\tau$-frame, definimos un *$\tau$-modelo (basado en el frame $\mathfrak{F}$)* como una pareja $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$ donde $\mathfrak{F}$ es el frame y $V : \Phi \longrightarrow \mathcal{P}(W)$ es una valuación que asigna a cada átomo $p$, $V(p)$ el conjunto de mundos de $W$ donde $p$ es asignado verdadero.

*Notación.* También escribiremos a los modelos como $\mathfrak{M} = (W, R_\triangle, V)_{\triangle\in\tau}$ y entenderemos por que un estado está en un modelo ($w \in \mathfrak{M}$), que dicho estado sea elemento del universo del modelo ($w \in W$).

**Definición 1.3.8** (Satisfacción)**.** Sea $w$ un estado en el modelo $\mathfrak{M} = (W, R_\triangle, V)_{\triangle\in\tau}$. Definimos recursivamente que *una fórmula $\phi$ sea satisfecha en el modelo $\mathfrak{M}$ por el estado $w$* ($\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$) si:

$\mathfrak{M}, w \Vdash p$ si y sólo si $, w \,\epsilon\, V(p)$, con $p \in \Phi$.

$\mathfrak{M}, w \Vdash \bot$ nunca.

$\mathfrak{M}, w \Vdash \neg\phi$ si y sólo si no sucede $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$.

$\mathfrak{M}, w \Vdash \phi \vee \psi$ si y sólo si $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$ o $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$

$\mathfrak{M}, w \Vdash \triangle(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)$ si y sólo si existen $w_1, w_2, \ldots, w_n \in W$ tales que
$R_\triangle(w, w_1, w_2, \ldots, w_n)$ y $\mathfrak{M}, w_i \Vdash \phi_i$ para toda $i \in \{1, ..., n\}$.

También se dice que $w$ hace verdadera a $\phi$ en el modelo $\mathfrak{M}$.

A lo largo del texto usaremos las abreviaturas clásicas de la conjunción, implicación, el bicondicional y la constante de verdad ("top"). Es decir: $\phi \wedge \psi := \neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$, $\phi \rightarrow \psi := (\neg\phi \vee \psi)$, $\phi \leftrightarrow \psi := (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)$ y $\top := \neg\bot$.

Si $\mathfrak{M}$ no satisface a $\phi$ en $w$, escribimos $\mathfrak{M}, w \nVdash \phi$ y decimos que la fórmula $\phi$ es falsa o refutada en el estado $w$ de $\mathfrak{M}$.

*Observación.* De la definición anterior (satisfacción), obtenemos la cláusula de satisfacción para el operador dual de $\triangle$:

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \nabla(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n) \text{ si y sólo si para cualesquiera } w_1, w_2, \ldots, w_n \in W, si$$

$$R_\triangle(w, w_1, w_2, \ldots, w_n), entonces\ \mathfrak{M}, w_i \Vdash \phi_i \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

En un modelo $\mathfrak{M}$, la valuación $V$ se puede extender naturalmente a una valuación para todas las fórmulas. A esta nueva valuación la denotaremos también por $V$ por simplicidad. Así, el conjunto $V(\phi)$ es el conjunto de mundos en los cuales la fórmula $\phi$ es verdadera:

$$V(\phi) = \{w \mid \mathfrak{M}, w \Vdash \phi\}$$

**Definición 1.3.9** (Verdad global)**.** Una fórmula $\phi$ *es (globalmente) verdadera en un modelo* $\mathfrak{M}$, (Notación: $\mathfrak{M} \Vdash \phi$) si es satisfecha en todos los mundos del modelo. i.e. $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$ para todo $w \in W$.

Decimos que la fórmula $\phi$ es *satisfacible* en un modelo $\mathfrak{M}$ si es satisfecha por algún mundo $w \in \mathfrak{M}$. De este modo, una fórmula es *falsificable* o *refutable* en un modelo, si su negación es satisfacible.

*Notación.* Si $\Sigma$ es un conjunto de fórmulas y $w$ es un estado de $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}, w \Vdash \Sigma$ significa que $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$ para toda $\phi \in \Sigma$.

Un conjunto de fórmulas $\Sigma$ es *(globalmente) verdadero*, (satisfacible, respectivamente) en un modelo $\mathfrak{M}$ si $\mathfrak{M}, w \Vdash \Sigma$ , para todo estado $w \in \mathfrak{M}$ (algún estado $w \in \mathfrak{M}$, respectivamente).

**Definición 1.3.10** (Verdad universal)**.** Una fórmula $\phi$ es *verdadera en una clase* $\mathsf{C}$ *de modelos*[1], (Not: $\Vdash_{\mathsf{C}} \phi$), si para todo $\mathfrak{M} \in \mathsf{C}$, $\mathfrak{M} \Vdash \phi$. Y $\phi$ *es verdadera o universalmente verdadera* (Notación: $\Vdash \phi$) si es verdadera en la clase de todos los modelos. i.e. $\Vdash \phi$ si y sólo si $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$ para todo $w \in \mathfrak{M}$ y para todo $\mathfrak{M}$.

**Definición 1.3.11** (Validez de fórmulas)**.** Decimos que una fórmula $\phi$ es *válida en un estado $w$ de un frame* $\mathfrak{F}$ (Not: $\mathfrak{F}, w \Vdash \phi$) si es satisfecha en $w$ en todo modelo $\mathfrak{M}$ basado en $\mathfrak{F}$. $\phi$ es *válida en un frame* $\mathfrak{F}$ (Not: $\mathfrak{F} \Vdash \phi$ ) si es válida en todos los mundos de $\mathfrak{F}$. Una fórmula es *válida en una clase* $\mathsf{F}$ *de frames* (Not: $\mathsf{F} \Vdash \phi$) si es válida en $\mathfrak{F}$ para todo $\mathfrak{F} \in \mathsf{F}$; y es válida (Not: $\Vdash \phi$) si es válida en la clase de todos los frames. Por último, el conjunto de fórmulas válidas en una clase $\mathsf{F}$ de frames es la *lógica de* $\mathsf{F}$, denotada por $\Lambda_{\mathsf{F}}$.

[1] Una clase de modelos es simplemente una colección de modelos

**Ejemplo 1.3.12** (Satisfacción)**.** Consideremos el frame $\mathfrak{F} = (W, R)$ donde $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ y $Rw_iw_j$ si y sólo si $j = i + 1$

$\mathfrak{F}$ :

$$\overset{w_1}{\bullet} \longrightarrow \overset{w_2}{\bullet} \longrightarrow \overset{w_3}{\bullet} \longrightarrow \overset{w_4}{\bullet} \longrightarrow \overset{w_5}{\bullet}$$

Sea $\Phi = \{p, q, r\}$. Escogemos una valuación $V : \Phi \longrightarrow \mathcal{P}(W)$ tal que $V(p) = \{w_2, w_3, w_4, w_5\}$, $V(q) = \{w_3, w_4\}$ y $V(r) = \emptyset$. Si tomamos a $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$, es fácil verificar que $\mathfrak{M}, w_1 \Vdash \Box(r \vee p)$ y que $\mathfrak{M}, w_2 \Vdash (p \to \Diamond q)$. Para ver que $\mathfrak{M} \Vdash \Box p$, por definición hay que ver que en todo $w$ de $\mathfrak{M}$ se satisface $\Box p$; es claro que $w_1, w_2, w_3$ y $w_4$ lo satisfacen porque en $w_2, w_3, w_4$ y $w_5$ se satisface $p$, y $w_5$ también satisface $\Box p$ por vacuidad (ya que $w_5$ no tiene sucesores).

*Nota* 1.3.13. Todo punto final en un modelo (i.e. todo punto que no tenga sucesores) satisface cualquier fórmula de la forma $\Box\psi$. Y más en general, para un operador modal de aridad $n$, si para un punto $w$ en un modelo $\mathfrak{M}$ no existen $w_1, \ldots, w_n$ tales que $R_\triangle(w, w_1, \ldots, w_n)$ entonces $w$ satisface cualquier fórmula de la forma $\triangledown(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ (por vacuidad).

**Ejemplo 1.3.14** (Validez)**.** Primero consideremos la fórmula $\Diamond(p \vee q) \to (\Diamond p \vee \Diamond q)$, del lenguaje básico modal $LM(\tau_0, \Phi)$, donde $p, q \in \Phi$. Dicha fórmula es válida en todos los frames. Para mostrar esto, sea $\mathfrak{F}$ un frame y $w \in \mathfrak{F}$ un estado de él; además sea $V$ una valuación cualquiera sobre $\mathfrak{F}$. Por la definición 1.3.8 de satisfacción, hay que mostrar que si $(\mathfrak{F}, V), w \Vdash \Diamond(p \vee q)$ entonces $(\mathfrak{F}, V), w \Vdash (\Diamond p \vee \Diamond q)$. Así, supongamos que $(\mathfrak{F}, V), w \Vdash \Diamond(p \vee q)$, entonces por la definición 1.3.8, existe un estado $v$ de $\mathfrak{F}$ tal que $Rwv$ y $(\mathfrak{F}, V), v \Vdash p \vee q$, lo que implica que $(\mathfrak{F}, V), v \Vdash p$ o $(\mathfrak{F}, V), v \Vdash q$, y como $v$ es sucesor de $w$, $(\mathfrak{F}, V), w \Vdash (\Diamond p \vee \Diamond q)$. Por lo tanto dicha fórmula es válida.

Ahora consideremos la fórmula, $\Box p \to p$, del mismo lenguaje que la anterior, con $p \in \Phi$. Esta fórmula no es válida en todos los frames. Para probarlo, consideremos un frame $\mathfrak{F} = (W, R)$ que tenga por dominio un conjunto con un solo punto: $W = \{b\}$ y la relación vacía $R = \emptyset$. Debemos considerar una valuación $V$ para este frame, tal que en el modelo $(\mathfrak{F}, V)$ no se verifique la fórmula. Sea $V(p) = \emptyset$ para toda $p \in \Phi$. Tenemos que $(\mathfrak{F}, V), b \Vdash \Box p$ por vacuidad pero $(\mathfrak{F}, V), b \nVdash p$ ya que $V(p) = \emptyset$. Por lo tanto la fórmula no es válida en todos los frames.

Sin embargo, hay una clase de frames en la cual la fórmula $\Box p \to p$ sí es válida: la clase de *frames reflexivos*, es decir, los frames cuya relación sea reflexiva. Para probar esto, sea $\mathfrak{F} = (W, R)$ un frame reflexivo, hay que mostrar que para cualquier estado $w$ de $\mathfrak{F}$ y cualquier valuación $V$ de $\mathfrak{F}$, si $(\mathfrak{F}, V), w \Vdash \Box p$, entonces $(\mathfrak{F}, V), w \Vdash p$. Así, supongamos entonces que $(\mathfrak{F}, V), w \Vdash \Box p$, así, para todo $w'$ tal que $Rww'$, $(\mathfrak{F}, V), w' \Vdash p$; y como $R$ es reflexiva, entonces, $Rww$, por lo tanto $(\mathfrak{F}, V), w \Vdash p$. Y entonces $(\mathfrak{F}, V), w \Vdash \Box p \to p$. Ideas de este tipo las trataremos más profundamente en el Capítulo 3.

**Ejemplo 1.3.15** (Frames y modelos bidireccionales)**.** Recordando el lenguaje básico temporal que fue presentado en el ejemplo 1.2.2; éste tiene dos operadores modales unarios: $F$ y $P$. Entonces, tomando en cuenta la definición 1.3.7, un modelo $\mathfrak{M}$ para el lenguaje básico temporal debe constar de dos relaciones $R_F$ y $R_P$, para interpretar los operadores modales $F$ y $P$, respectivamente. Pero la mayoría de los modelos que cumplen con tener dos relaciones, no satisfacen nuestra interpretación, así que debemos trabajar en frames tales que $R_P$ sea la relación conversa de $R_F$. Es decir, que $\forall x, y(R_F xy \longleftrightarrow R_P yx)$. Normalmente escribiremos como $R^\vee$ a la relación conversa de $R$. Y a un frame de la forma $(W, R, R^\vee)$ lo llamaremos un *frame bidireccional*. Claramente por un *modelo bidireccional*, nos referimos a un modelo basado en un frame bidireccional.

Dicho esto, siempre interpretaremos con modelos bidireccionales al lenguaje básico temporal. Así, si $\mathfrak{M} = (W, R, R^\vee, V)$ es un modelo bidireccional, entonces:

$$\mathfrak{M}, w \Vdash F\phi \text{ si y sólo si existe } v \in \mathfrak{M} \text{ tal que } Rwv \text{ y } \mathfrak{M}, v \Vdash \phi$$

$$\mathfrak{M}, w \Vdash P\phi \text{ si y sólo si existe } v \in \mathfrak{M} \text{ tal que } R^\vee wv \text{ y } \mathfrak{M}, v \Vdash \phi$$

Dado que ha sido posible establecer la segunda relación en términos de la primera, no necesitamos usar más a $R^\vee$. Las cláusulas anteriores pueden quedar de la siguiente manera, interpretando el lenguaje básico temporal en un frame $(W, R)$:

$$\mathfrak{M}, w \Vdash F\phi \text{ si y sólo si existe } v \in \mathfrak{M} \text{ tal que } Rwv \text{ y } \mathfrak{M}, v \Vdash \phi$$

$$\mathfrak{M}, w \Vdash P\phi \text{ si y sólo si existe } v \in \mathfrak{M} \text{ tal que } Rvw \text{ y } \mathfrak{M}, v \Vdash \phi$$

Dichas cláusulas capturan bien la información de la interpretación que queremos darle al lenguaje temporal: $F$ mira hacia adelante a lo largo de $R$ y $P$ mira hacia atrás a lo largo de $R$. Pero además, para que la interpretación fuera meramente temporal, tendríamos que ponerle algunas restricciones a la relación, por ejemplo, que sea transitiva para capturar el flujo del tiempo, pero por ahora hemos puesto en claro la interacción entre los dos operadores modales.

Hasta ahora se han revisado los niveles de verdad de las fórmulas modales pero no nos hemos aproximado a lo que significa en lógica modal la *consecuencia lógica*, es decir, que un conjunto de fórmulas implique lógicamente una fórmula.

**Definición 1.3.16** (Consecuencia semántica local)**.** Sean $\tau$ un tipo de semejanza modal, $\mathsf{S}$ una clase de estructuras de tipo $\tau$ (una clase de modelos o frames), $\Sigma$ un conjunto de $\tau$-fórmulas y $\phi$ una $\tau$-fórmula. Decimos que $\phi$ es una *consecuencia semántica local de* $\Sigma$ *sobre la clase* $\mathsf{S}$ (Notación: $\Sigma \Vdash_{\mathsf{S}} \phi$) si para todo modelo $\mathfrak{M}$ de $\mathsf{S}$ y todo punto $w$ de $\mathfrak{M}$, si $\mathfrak{M}, w \Vdash \Sigma$, entonces $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$.

Cabe aclarar que al hablar de una clase de estructuras $\mathsf{S}$ y un modelo $\mathfrak{M}$ de $\mathsf{S}$, si la clase es de modelos solamente significa que $\mathfrak{M}$ es un modelo de la clase, y si la clase es de frames, significa que $\mathfrak{M}$ es un modelo basado en un frame $\mathfrak{F}$ de $\mathsf{S}$.

Esta definición nos dice que cada que $\Sigma$ (el conjunto de premisas) es verdadero en un punto de un modelo de $\mathsf{S}$, entonces $\phi$ (la conclusión) es verdadera en el mismo modelo en el mismo punto. Es decir, que se garantiza la verdad *localmente*. También hay que notar que depende de la clase de estructuras donde se este trabajando, esto queda más claro con el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 1.3.17.** En el lenguaje básico modal, si $\mathsf{Ref}$ es la clase de los frames reflexivos, entonces tenemos que

$$\{\Box\phi\} \Vdash_{\mathsf{Ref}} \phi$$

Y sin embargo, $\phi$ no es una consecuencia semántica local de $\{\Box\phi\}$ en la clase de todos los frames. Esto ya lo probamos en el ejemplo 1.3.14.

También existe una variante de esta definición ya que la consecuencia lógica local no es la única manera de capturar la idea de la implicación lógica.

**Definición 1.3.18** (Consecuencia Semántica Global)**.** Sean $\tau, \mathsf{S}, \Sigma$ y $\phi$ como en la definición anterior. Decimos que $\phi$ es una *consecuencia semántica global de* $\Sigma$ *sobre la clase* $\mathsf{S}$ (Not: $\Sigma \Vdash^{g}_{\mathsf{S}} \phi$) si y sólo si para toda estructura $\mathfrak{G}$ de $\mathsf{S}$, si $\mathfrak{G} \Vdash \Sigma$, entonces $\mathfrak{G} \Vdash \phi$, donde $\Vdash$ se refiere al nivel de verdad correspondiente (validez en frames y verdad global en modelos).

**Ejemplo 1.3.19.** Este es un buen ejemplo para identificar la diferencia entre la consecuencia local y global. En el lenguaje básico modal, consideremos las fórmulas $p$ y $\Box p$. Es fácil ver que $p$ no implica localmente a $\Box p$. Pero globalmente sí, ya que si $p$ es verdadero en todos los mundos de un modelo, particularmente lo es en los sucesores de cada mundo.

## 1.4. Preliminares sintácticos

Para los fines de esta sección nos restringiremos al tipo de semejanza básico modal, es decir $\tau_0 = \{\Diamond\}$, y con ello daremos las nociones básicas sintácticas que utilizaremos más adelante. Esto implica que el estudio sintáctico que se hará en este trabajo es restringido al lenguaje que sólo consta de un operador modal unario ($\Diamond$).

**Definición 1.4.1.** Definimos recursivamente la n-ésima iteración de $\Diamond$ como sigue:

(i) $\Diamond^0 \phi = \phi$

(ii) $\forall n \in \omega,\ \ \Diamond^{n+1}\phi = \Diamond(\Diamond^n \phi)$

**Definición 1.4.2** (Reemplazo)**.** Sean $\phi, \psi$ y $\chi$ $\tau_0$-fórmulas. Definimos a $\phi[\psi/\chi]$ como la fórmula que resulta de reemplazar todas las ocurrencias de $\psi$ por $\chi$ en la fórmula $\phi$.

Por ejemplo si $\phi$ es la fórmula $(p \wedge q) \to (\neg p \vee r)$, con $p, q, r \in \Phi$, $\psi$ es la fórmula $p$ y $\chi$ es la fórmula $\neg q \wedge r$, entonces $\phi[\psi/\chi]$ es la siguiente fórmula:

$$((\neg q \wedge r) \wedge q) \to (\neg(\neg q \wedge r) \vee r).$$

**Definición 1.4.3** (Esquema)**.** Por un *esquema* entenderemos un conjunto de fórmulas que tengan una estructura en particular. Por ejemplo, nos referiremos al esquema **T:** $\Box\phi \to \phi$, que sería el conjunto

$$\{\mathbf{T}[\phi/\psi] \mid \psi \text{ es una } \tau_0 - \text{fórmula } \}.$$

**Definición 1.4.4** (Decidibilidad)**.** Sea $\Gamma$ un conjunto de $\tau_0$-fórmulas. Decimos que $\Gamma$ es *decidible* si existe un método efectivo para determinar si cualquier fórmula del lenguaje pertenece o no pertenece al conjunto $\Gamma$.

**Definición 1.4.5** (Efectividad Numerable)**.** Decimos que un conjunto de fórmulas $\Gamma$ es *efectivamente numerable* si existe un procedimiento efectivo que pueda afirmar, de cualquier fórmula en $\Gamma$, que está en $\Gamma$. Si un conjunto tiene esta propiedad, se dice que tiene una *prueba positiva* de pertenencia. Y similarmente, una *prueba negativa*, es una prueba positiva para el complemento de $\Gamma$.

No es difícil ver que $\Gamma$ es decidible si y solo si él y su complemento son efectivamente numerables.

Ahora hablaremos de las reglas de inferencia. En general, una regla de inferencia tiene la siguiente forma, con $\phi_1, \ldots, \phi_n, \phi$, todas $\tau_0$-fórmulas:

$$\frac{\phi_1, \ldots, \phi_n}{\phi}$$

En este caso, $\phi_1, \ldots, \phi_n$ se llaman las hipótesis de la regla y $\phi$ es la conclusión. Decimos que un conjunto de fórmulas es cerrado bajo una regla de inferencia o simplemente que tiene la regla de inferencia si que el conjunto contenga las hipótesis implica que contiene la conclusión, o si $n = 0$, que contenga la conclusión. Presentamos algunos ejemplos de reglas de inferencia para el lenguaje modal con sus nombres usuales:

**MP. (Modus Ponens)** $\dfrac{\phi \to \psi\,,\ \phi}{\psi}$

**RN. (Regla de Necesidad)** $\dfrac{\phi}{\Box\phi}$

**RPL.** $\dfrac{\phi_1, \ldots, \phi_n}{\phi}$ $(n \geq 0)$, donde $\phi$ es consecuencia tautológica de $\phi_1, \ldots, \phi_n$

*Nota* 1.4.6. Una *tautología* en el contexto modal es una instancia de una tautología proposicional. Recordemos que una tautología (proposicional) es una fórmula que es verdadera en cualquier asignación de valores de verdad de sus átomos. También este concepto aplica para fórmulas modales, una tautología es una fórmula que es verdadera en cualquier modelo (independientemente de la valuación).

Que la fórmula $\phi$ sea consecuencia tautológica (proposicionalmente) de $\psi$ es que para cualquier asignación, si $\psi$ es verdadera, entonces $\phi$ lo es también. Y en el contexto modal, ser consecuencia tautológica se puede pensar como que el modo de inferencia es proposicionalmente correcto. De igual manera, que $\phi$ sea consecuencia tautológica (modalmente) de $\psi$, es que $\phi$ es verdadera en cualquier modelo en que $\psi$ lo sea.

**Definición 1.4.7** (Sistema Lógico Modal)**.** Decimos que un conjunto de fórmulas es un *sistema lógico modal* o es una *lógica modal* si es cerrado bajo las reglas de inferencia **RPL**.

En otras palabras una lógica modal es un conjunto de fórmulas cerrado bajo cualquier modo de inferencia proposicionalmente correcto. Notemos que ser cerrado bajo **RPL** implica contener a todas las tautologías (cuando $n = 0$).

*Notación.* Denotaremos al conjunto de tautologías por **PL**.

**Definición 1.4.8** (Teorema)**.** Sean $\Sigma$ una lógica modal y $\phi$ una fórmula. Decimos que $\phi$ es un teorema de $\Sigma$ (Not: $\vdash_\Sigma \phi$) si y solo si $\phi \in \Sigma$.

Como los sistemas lógicos son conjuntos de fórmulas, entonces la fuerza relativa se mide por medio de la inclusión, es decir, un sistema lógico es al menos tan fuerte como un sistema $\Sigma$ (es un $\Sigma$- sistema o una $\Sigma$-lógica) si contiene todo teorema de $\Sigma$. Nótese que $\Sigma$ es siempre un $\Sigma$-sistema.

**Ejemplo 1.4.9.** *(i)* La colección de todas las fórmulas es una lógica modal. Se llama la *lógica inconsistente*.

*(ii)* Sea $\{\Sigma_i \,|\, i \in I\}$ una colección de sistemas lógicos. Entonces $\bigcap_{i\in I} \Sigma_i$ es un sistema lógico.

*(iii)* Si $\mathsf{F}$ es una clase de estructuras (frames o modelos). Definimos el conjunto $\Sigma_\mathsf{F}$ como $\Sigma_\mathsf{F} = \{\phi \,|\, \mathfrak{F} \Vdash \phi \text{ para todo } \mathfrak{F} \in \mathsf{F}\}$. Si $\mathsf{F}$ es una clase de frames, $\Sigma_\mathsf{F}$ es una lógica. Y si $\mathsf{F} = \{\mathfrak{F}\}$, la denotamos por $\Sigma_\mathfrak{F}$ en lugar de $\Sigma_{\{\mathfrak{F}\}}$.

**Proposición 1.4.10.** *(i)* ***PL*** *es una lógica modal.*

*(ii)* *Todo sistema lógico modal es un* ***PL****-sistema.*

*(iii)* ***PL*** *es el menor sistema lógico modal.*

*Prueba.* (*i*) Sean $\phi_1, \ldots, \phi_n$ fórmulas en **PL**, es decir, tautologías, y sea $\phi$ una consecuencia tautológica de ellas, entonces $\phi$ es también una tautología ($\phi \in$ **PL**). Por lo tanto **PL** es una lógica. Para (*ii*) notemos que la regla **RPL**, cuando $n = 0$, dice que $\phi$ (la conclusión) es una tautología, así que todo sistema lógico (por ser cerrado bajo **RPL**) contiene a todas las tautologías, es decir a **PL**. Y (*iii*) es consecuencia directa de (*i*) y (*ii*). •

Como ya tenemos la noción de teorema en un sistema lógico, definiremos las nociones de *deducibilidad* y *consistencia.*

**Definición 1.4.11** (Deducibilidad)**.** Sean, $\phi$ una $\tau_0$-fórmula y $\Gamma$ un conjunto de $\tau_0$-fórmulas de un sistema lógico modal $\Sigma$. Decimos que $\phi$ es *deducible a partir de* $\Gamma$ *en el sistema* $\Sigma$ o es $\Sigma$-*deducible a partir de* $\Gamma$, (Not: $\Gamma \vdash_\Sigma \phi$) si y solo si $\Sigma$ contiene un teorema de la forma $(\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \cdots \wedge \phi_n) \to \phi$, con $\phi_i \in \Gamma$ para toda $i = 1, \ldots, n$, es decir, si existen $\phi_1, \ldots, \phi_n \in \Gamma$ $(n \geq 0)$ tales que $\vdash_\Sigma (\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n) \to \phi$.

**Definición 1.4.12.** Sean, $\Sigma$ un sistema lógico modal y $\Gamma$ un conjunto de fórmulas de $\Sigma$. Decimos que $\Gamma$ es deductivamente cerrado, o $\Sigma$-cerrado, si $\Gamma$ contiene a todas las fórmulas que son $\Sigma$-deducibles a partir de él, i.e. $\Gamma$ es $\Sigma$-cerrado si y sólo si $\phi \in \Gamma$ para toda $\phi$ tal que $\Gamma \vdash_\Sigma \phi$.

**Definición 1.4.13** (Consistencia)**.** Sean, $\Sigma$ un sistema lógico modal y $\Gamma \subseteq \Sigma$. Decimos que $\Gamma$ es *consistente en* $\Sigma$ (Not: $\mathrm{Con}_\Sigma\Gamma$) si la fórmula $\perp$ no es $\Sigma$-deducible a partir de $\Gamma$, i.e. si no $\Gamma \vdash_\Sigma \perp$. Y es *inconsistente en* $\Sigma$ (Not: $\mathrm{C\o n}_\Sigma\Gamma$) si $\Gamma \vdash_\Sigma \perp$.

Una definición equivalente es que $\mathrm{Con}_\Sigma\Gamma$ si y sólo si no existe una fórmula $\phi$ tal que $\Gamma \vdash_\Sigma \phi$ y $\Gamma \vdash_\Sigma \neg\phi$.

Enunciaremos algunos resultados sencillos de consistencia, pero no los probaremos porque son clásicos y las pruebas se salen de nuestro objetivo.

**Proposición 1.4.14.** *Sea* $\Gamma$ *un conjunto de fórmulas tal que* $Con_\Sigma\Gamma$*, entonces:*

(*i*) *Si* $\phi \in \Gamma$*, entonces* $\Gamma \vdash_\Sigma \phi$*.*

(*ii*) $\Gamma \vdash_\Sigma \phi$ *si y sólo si* $C\o n_\Sigma\Gamma \cup \{\neg\phi\}$*.*

(*iii*) $Con_\Sigma\Gamma \cup \{\phi\}$ *si y sólo si no* $\Gamma \vdash_\Sigma \neg\phi$*.*

Pasaremos a definir las nociones de axiomatización y demostración, en los sistemas lógicos.

De una regla de inferencia, decimos que es *razonable* si existe un método efectivo de decir cuando fórmulas del sistema están relacionadas por la regla de inferencia como hipótesis y conclusión. Por ejemplo, la regla **MP** es razonable porque hay un método efectivo de decidir si tres fórmulas son de la forma $\phi \to \psi$, $\phi$ y $\psi$. Luego, todo sistema lógico $\Sigma$ puede ser considerado como el conjunto de fórmulas generadas por algún subconjunto $\Gamma$ de teoremas por un conjunto de reglas de inferencia. Esto lo podemos afirmar porque trivialmente $\Sigma$ es generado por el conjunto $\Sigma$ por la regla: $\dfrac{\phi}{\phi}$.

**Definición 1.4.15** (Axiomatización)**.** Sean, $\Sigma$ un sistema lógico modal y $\Gamma \subseteq \Sigma$ un subconjunto de teoremas de $\Sigma$. Si $\Gamma$ genera a $\Sigma$ por medio de un conjunto de reglas de inferencia y además, $\Gamma$ es decidible y las reglas de inferencia son razonables y una cantidad finita, decimos que $\Sigma$ es *axiomatizable*. Y $\Gamma$ se llama el conjunto de *axiomas* de $\Sigma$.

Los axiomas junto con las reglas de inferencia constituyen una *axiomatización* de un sistema.

No todos los sistemas son axiomatizables, por ejemplo el conjunto de fórmulas verdaderas en un mundo de un modelo es un sistema pero no será axiomatizable. Los sistemas que vamos a trabajar serán casi todos axiomatizables. Los sistemas axiomatizables son importantes porque admiten la noción de *demostración*.

**Definición 1.4.16** (Demostración)**.** En un sistema axiomatizable, una *demostración* es una secuencia finita de fórmulas en la cual cada fórmula o es un axioma, o es consecuencia de las anteriores por medio de alguna regla de inferencia.

Una demostración, demuestra su última fórmula.

Y en los sistemas axiomatizables, los teoremas son exactamente las fórmulas para las cuales existe una demostración.

Regresando un poco al concepto de decidibilidad, podemos observar que es una cuestión decidible si una sucesión de fórmulas es una demostración relativa a una axiomatización de un sistema. Ya que una fórmula aparece en una demostración si y sólo si está en el conjunto (decidible) de axiomas o se obtiene de fórmulas anteriores por medio de una regla de inferencia razonable. Esto implica que hay una prueba positiva de pertenencia al conjunto de teoremas de un sistema axiomatizable. Veamos: las demostraciones del sistema pueden ser efectivamente enumeradas como $p_1, p_2, p_3, \ldots$, de tal manera que si una fórmula es un teorema, aparecerá al final de una demostración $p_n$, es decir después de inspeccionar las $n$ primeras demostraciones. Este puede no ser un método muy efectivo pero nos asegura que si algo es un teorema, aparecerá después de una cantidad finita de pasos. Sin embargo, si algo no es un teorema, nunca aparecerá al final de una demostración y nada nos puede asegurar que lo sabremos después de una cantidad finita de pasos. De esta manera, tenemos una prueba positiva (y no una negativa) para saber si algo es un teorema. En general, una axiomatización solo implica la existencia de una prueba positiva para ver que algo es un teorema del sistema.

**Definición 1.4.17.** (Conjuntos $\Sigma$-maximales) Sea $\Sigma$ un sistema lógico. Un conjunto $\Gamma$ de fórmulas es *maximal* en $\Sigma$ (Not: $\mathrm{Max}_\Sigma\,\Gamma$) si y sólo si es $\Sigma$-consistente y sólo tiene extensiones propias $\Sigma$-inconsistentes. Formalmente, $\mathrm{Max}_\Sigma\,\Gamma$ si y sólo si

(1) $\mathrm{Con}_\Sigma \Gamma$.

(2) Para toda $\phi$ fórmula si $\mathrm{Con}_\Sigma \Gamma \cup \{\phi\}$, entonces $\phi \in \Gamma$.

**Definición 1.4.18** (Correctud)**.** Sea $\Sigma$ un sistema de lógica modal. Decimos que $\Sigma$ es *correcto* con respecto a una clase $\mathsf{F}$ de frames si y sólo si cada teorema de $\Sigma$ es válido en $\mathsf{F}$. Es decir, si para toda fórmula $\phi$, $\vdash_\Sigma \phi$ implica $\mathsf{F} \Vdash \phi$.

**Definición 1.4.19** (Completud)**.** Un sistema de lógica modal $\Sigma$ es *fuertemente completo* con respecto a una clase $\mathsf{F}$ de frames (o modelos) si y sólo si para todo conjunto de fórmulas $\Gamma \cup \{\phi\}$, si $\Gamma \Vdash_{\mathsf{F}} \phi$, entonces $\Gamma \vdash_\Sigma \phi$, i.e. si $\phi$ es consecuencia semántica de $\Gamma$ sobre $\mathsf{F}$, entonces es $\Sigma$-deducible a partir de $\Gamma$.

Y $\Sigma$ es *(débilmente) completo* con respecto a $\mathsf{F}$ si para toda fórmula $\phi$, si $\mathsf{F} \Vdash \phi$ implica que $\vdash_\Sigma \phi$.

**Proposición 1.4.20.** *Un sistema lógico $\Sigma$ es fuertemente completo con respecto a una clase de estructuras $\mathsf{F}$ si y solo si todo conjunto de fórmulas $\Gamma$ tal que $Con_\Sigma \Gamma$ es satisfacible en alguna estructura $\mathfrak{F} \in \mathsf{F}$.*

*Prueba.* ($\Leftarrow$) Por contrapositiva. Supongamos que $\Sigma$ no es fuertemente completo con respecto a una clase de estructuras $\mathsf{F}$. Entonces existe un conjunto de fórmulas $\Gamma \cup \{\phi\}$ tal que $\Gamma \Vdash_{\mathsf{F}} \phi$

pero $\Gamma \nvdash_\Sigma \phi$. Entonces $\mathrm{Con}_\Sigma \Gamma \cup \{\neg\phi\}$ (proposición 1.4.14)$(ii)$ pero $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ no es satisfacible en alguna estructura $\mathfrak{F}$ de $\mathsf{F}$.

•

### El Sistema S5

Haremos un pequeño estudio de un sistema lógico de los más sencillos: **S5**. Lo examinaremos desde un punto de vista axiomático para ilustrar un poco más las nociones que acabamos de definir. Veremos una axiomatización, reglas de inferencia del sistema y varios teoremas. Una axiomatización para **S5** es la siguiente:

- Los axiomas son los esquemas:

  **T.** $\Box\phi \to \phi$.

  **5.** $\Diamond\phi \to \Box\Diamond\phi$.

  **K.** $\Box(\phi \to \psi) \to (\Box\phi \to \Box\psi)$.

  **Df$\Diamond$.** $\Diamond\phi \to \neg\Box\neg\phi$.

  **PL.** $\phi$. Donde $\phi$ es una tautología (de la lógica proposicional).

- Y las reglas de inferencia son:

  **RN.** $\dfrac{\phi}{\Box\phi}$

  **MP.** $\dfrac{\phi \to \psi\,,\,\phi}{\psi}$

Entonces cualquier fórmula instancia de un axioma es un teorema de **S5**, y las reglas de inferencia nos dicen que cuando las hipótesis son un teorema, entonces la conclusión lo es.

**Proposición 1.4.21.** ***S5*** *es un sistema lógico modal.*

*Prueba.* Para ver que es un sistema lógico hay que ver que es cerrado bajo la regla de inferencia **RPL**:

**RPL.** $\dfrac{\phi_1, \ldots, \phi_n}{\phi}$, donde $\phi$ es una consecuencia tautológica de $\phi_1, \ldots, \phi_n$.

Supongamos que $\phi_1, \ldots, \phi_n$ son teoremas de **S5** y que $\phi$ es consecuencia tautológica de ellos. Esto implica que $\phi$ es verdadero en cualquier mundo de cualquier modelo en que $\phi_1, \ldots, \phi_n$ lo sean, lo que implica que la fórmula $\phi_1 \to (\ldots(\phi_n \to \phi)\ldots)$ es una tautología ($\in$ **PL**), por lo que es un teorema de **S5**. Y como $\phi_1, \ldots, \phi_n$ son teoremas, aplicando $n$ veces **MP**, $\phi$ es un teorema, por lo que **S5** es cerrado bajo **RPL** .

$\bullet$

Nótese que **MP** es un caso particular de **RPL** ($n = 2$), pero **RPL** incluye los axiomas **PL**, cuando $n = 0$. Así que es indiferente si en nuestra axiomatización escogemos tener **MP** y **PL** o solamente **RPL**. La primera es más tradicional y la segunda más simple.

Como **S5** es un sistema lógico, tienen sentido las demás nociones que vimos anteriormente. Recordando la definición 1.4.16 de una demostración, veremos como ejemplo la demostración de que el esquema **T**$\Diamond$: $\phi \to \Diamond\phi$ es un teorema de **S5**. Enunciaremos la secuencia finita de fórmulas y a la derecha anotaremos de qué axiomas o reglas de inferencia son instancias:

| | |
|---|---|
| **1.** $\Box\neg\phi \to \neg\phi$ | **T** |
| **2.** $\phi \to \neg\Box\neg\phi$ | **1, PL (contrapositiva)** |
| **3.** $\Diamond\phi \longleftrightarrow \neg\Box\neg\phi$ | **Df**$\Diamond$ |
| **4.** $\phi \to \Diamond\phi$ | **2,3, PL (silogismo hipotético)** |

Otros ejemplos de demostraciones son las de los esquemas **D**: $\Box\phi \to \Diamond\phi$ y **B**: $\phi \to \Box\Diamond\phi$. Para ambas ya podemos usar **T**$\Diamond$ porque ya probamos que es un teorema.

Para **D**: $\Box\phi \to \Diamond\phi$:

| | |
|---|---|
| **1.** $\Box\phi \to \phi$ | **T** |
| **2.** $\phi \to \Diamond\phi$ | **T**$\Diamond$ |
| **3.** $\Box\phi \to \Diamond\phi$ | **1, 2, PL (silogismo hipotético)** |

Y para **B:** $\phi \to \Box\Diamond\phi$:

| | |
|---|---|
| **1.** $\Diamond\phi \to \Box\Diamond\phi$ | **5** |
| **2.** $\phi \to \Diamond\phi$ | **T**$\Diamond$ |
| **3.** $\phi \to \Box\Diamond\phi$ | **1, 2, PL (transitividad de** $\to$ **)** |

Ahora, usando este método de demostración, podemos enunciar más reglas de inferencia y probar que **S5** tiene esas reglas.

$$\textbf{RM.}\frac{\phi \to \psi}{\Box\phi \to \Box\psi}$$

$$\textbf{RE.}\frac{\phi \longleftrightarrow \psi}{\Box\phi \longleftrightarrow \Box\psi}$$

Para ver que **S5** es cerrado bajo las reglas **RM** y **RE**, hay que probar que la conclusión de la regla es un teorema siempre que las hipótesis lo son.

**Proposición 1.4.22.** ***S5*** *es cerrado bajo las reglas de inferencia* ***RM*** *y* ***RE***

*Prueba.* Primero veamos que tiene a **RM**:

| | |
|---|---|
| **1.** $\phi \to \psi$ | **hipótesis** |
| **2.** $\Box(\phi \to \psi)$ | **1, RN** |
| **3.** $\Box(\phi \to \psi) \to (\Box\phi \to \Box\psi)$ | **K** |
| **4.** $\Box\phi \to \Box\psi$ | **2, 3, MP** |

La prueba de que contiene regla **RE** se sigue directamente de la de **RM**. •

Otras reglas de inferencia importantes que tiene el sistema **S5** pero que ya no nos detendremos a probar, son las reglas **RK** y **RR:**

$$\textbf{RK.}\frac{(\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n) \to \phi}{(\Box\phi_1 \wedge \cdots \wedge \Box\phi_n) \to \Box\phi}\ (n \geq 0)$$

$$\textbf{RR.}\frac{(\phi \wedge \psi) \to \chi}{(\Box\phi \wedge \Box\psi) \to \Box\chi}$$

Otros teoremas son:

**4.** $\Box\phi \to \Box\Box\phi$

**N.** $\Box\top$

**M.** $\Box(\phi \wedge \psi) \to (\Box\phi \wedge \Box\psi)$

**C.** $(\Box\phi \wedge \Box\psi) \to \Box(\phi \wedge \psi)$

Y otra axiomatización para el sistema, resulta de tener como axiomas a los esquemas **T, B, 4, K, DF**$\Diamond$**,** y **PL** y como reglas de inferencia a **RN** y **MP**. Si llamamos por un momento ***S5'*** al conjunto de fórmulas generadas por esta nueva axiomatización, es claro que todo teorema de **S5** es teorema de ***S5'*** ya que probamos los axiomas y reglas de inferencia de ***S5'*** a partir de **S5**. Y el recíproco es muy sencillo de probar porque se reduce a ver que el esquema **5** es teorema de ***S5'***, cosa que no es difćil pero no haremos aquí. Con esto vemos que los dos sistemas son el mismo y por lo tanto, no es más que otra axiomatización de **S5**.

Más adelante en este trabajo estudiaremos otras lógicas modales generadas por distintas axiomatizaciones, agregando o quitando axiomas.

# Capítulo 2

# Modelos

En este capítulo estudiaremos una de las estructuras semánticas que ya presentamos en el capítulo anterior: los modelos. El estudio de este capítulo sigue el estudio hecho en [Blackburn *et al.*, 2002], capítulos I y II. Veremos dos relaciones muy importantes en el contexto de los modelos: equivalencia modal y bisimilitud. También definiremos otras maneras de relacionar modelos y estableceremos las relaciones entre todas ellas en el sentido de la implicación, pero enfatizaremos mucho en la relación entre equivalencia modal y bisimilitud. Estudiaremos la expresividad modal de los modelos, es decir, veremos maneras de construir modelos que preserven la satisfacción de fórmulas modales.

También exploraremos la relación que tiene la lógica modal con la lógica de primer orden, a través de la traducción estándar y el Teorema de Caracterización de Van Benthem. Y veremos dos resultados de que equivalencia modal implica bisimilitud pero no en el mismo modelo, si no *en otros lugares*: en la extensión a un ultrafiltro (por medio de la definición y construcción de modelos modalmente saturados) y en la ultrapotencia (por medio de la definición y construcción de modelos $\omega$-saturados).

Y cerraremos el capítulo viendo qué propiedades tienen que cumplir los modelos para que puedan ser definibles por un conjunto de fórmulas modales.

## 2.1. Operaciones que preservan satisfacción de fórmulas

Se dice que una propiedad es preservada en dos estructuras si la segunda estructura tiene la propiedad siempre que la primera la tiene. Y se dice que *una propiedad es invariante bajo una operación* cuando la propiedad se preserva en ambas direcciones entre la estructura original y la estructura resultante de haber aplicado la operación. Entonces, nos interesa ver cuándo dos estructuras o dos puntos en distintas estructuras son "indistinguibles" para el lenguaje modal, en el sentido de que satisfacen las mismas fórmulas.

**Definición 2.1.1** (Teoría semántica)**.** Sea $\tau$ un tipo de semejanza modal, $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{M}'$ $\tau$-modelos y $w$ y $w'$ estados en $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{M}'$ respectivamente. Se define la *$\tau$-teoría (semántica) de $w$* como el conjunto de todas las fórmulas que son satisfechas por $w$ en $\mathfrak{M}$, i.e. $\{\phi \,|\, \mathfrak{M}, w \Vdash \phi\}$. Decimos que *$w$ y $w'$ son modalmente equivalentes* (Not: $w \leftrightsquigarrow w'$) si sus teorías son iguales, es decir, si $\{\phi \,|\, \mathfrak{M}, w \Vdash \phi\} = \{\phi \,|\, \mathfrak{M}, w' \Vdash \phi\}$.

La *$\tau$-teoría de un modelo* $\mathfrak{M}$ es el conjunto de $\tau$-fórmulas satisfechas por todos sus estados, esto es, $\{\phi \,|\, \mathfrak{M} \Vdash \phi\}$. Y finalmente, dos modelos *$\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{M}'$ son modalmente equivalentes* ($\mathfrak{M} \leftrightsquigarrow \mathfrak{M}'$) si tienen las mismas $\tau$-teorías.

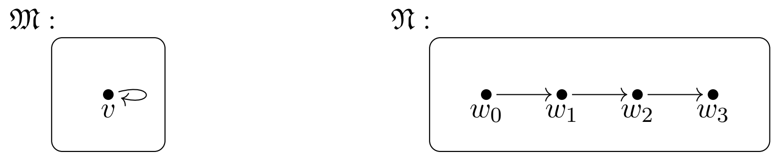
En este momento la propiedad que nos interesa que sea preservada por las estructuras es la *satisfacción* de fórmulas, es decir, nos interesa que la estructura original y la estructura resultante de aplicarle alguna operación sean *modalmente equivalentes*. Veremos tres maneras de operar modelos para obtener nuevos.

### Uniones Ajenas

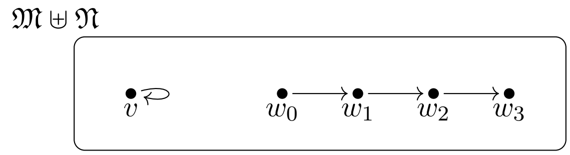
**Definición 2.1.2** (Dominios Ajenos)**.** Sean, $\tau$ un tipo de semejanza y $\mathfrak{M} = (W, R_\triangle, V)_{\triangle\in\tau}$ y $\mathfrak{M}' = (W', R'_\triangle, V')_{\triangle\in\tau}$ dos $\tau$-modelos. Decimos que $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{M}'$ tienen dominios ajenos si $W \cap W' = \emptyset$.

**Definición 2.1.3** (Unión Ajena)**.** Sea $\mathfrak{M}_i = (W_i, R_{\triangle_i}, V_i)_{\triangle_i\in\tau}$ $(i \in I)$ una colección de $\tau$-modelos con dominios ajenos. Definimos un modelo que llamaremos *la unión ajena* como $\biguplus_i \mathfrak{M}_i = (W, R_\triangle, V)_{\triangle\in\tau}$ donde $W = \bigcup_{i\in I} W_i$, por cada $\triangle \in \tau$, $R_\triangle = \bigcup_{i\in I} R_{\triangle_i}$ y para cada átomo $p$, $V(P) = \bigcup_{i\in I} V_i(p)$.

**Ejemplo 2.1.4.** Tenemos estos dos modelos, $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{N}$ del lenguaje básico modal, donde las flechas denotan las $R$ o $R'$-transiciones, respectivamente:



Como sus dominios son ajenos, podemos construir su unión ajena, $\mathfrak{M} \uplus \mathfrak{N}$:



Y como no se altera la manera en que los estados de cada modelo están relacionados, ni la manera en que está distribuida la información atómica (los átomos o letras proposicionales que son verdaderos en cada mundo), entonces el modelo $\mathfrak{M} \uplus \mathfrak{N}$ junta la información de ambos modelos sin cambiarla. Como acabamos de construir un modelo nuevo a partir de un par ya existente, siguiendo la línea del estudio de la satisfacción de fórmulas, es natural preguntarse si las fórmulas que se satisfacen en algún mundo de algún modelo original son las mismas que se satisfacen en el mismo mundo del nuevo modelo; y viceversa. La respuesta es sí y lo probamos a continuación.

**Proposición 2.1.5.** *Sean $\tau$ un tipo de semejanza modal y para cada $i \in I$, $\mathfrak{M}_i$ un $\tau$-modelo. Entonces, para toda fórmula $\phi$, para cada $i \in I$ y cada $w$ de $\mathfrak{M}_i$, tenemos que $\mathfrak{M}_i, w \Vdash \phi$ si y sólo si $\biguplus_i \mathfrak{M}_i, w \Vdash \phi$.*

*Prueba.* Sean $i \in I$, $w \in \mathfrak{M}_i$ y $\phi$ una $\tau$-fórmula. La prueba se hará por inducción sobre la complejidad de $\phi$. Si $\phi$ es una letra proposicional $p \in \Phi$, entonces $\mathfrak{M}_i, w \Vdash p$, si y solo si $w \in V_i(p)$, si y solo si $w \in \bigcup_{i \in I} V_i(p)$, si y solo si $\biguplus_i \mathfrak{M}_i, w \Vdash p$. Si $\phi$ es $\bot$, $\phi$ es falsa en todo mundo de ambos modelos, así que ya tenemos la equivalencia. Ahora, supongamos que la equivalencia se da para fórmulas que tienen a lo más n conectivos ($n \in \omega$). Así, hay que probarlo para fórmulas con $n+1$ conectivos. Caso 1: supongamos que $\phi$ es de la forma $\neg\psi$; entonces $\mathfrak{M}_i, w \Vdash \neg\psi$ si y solo si no sucede que $\mathfrak{M}_i, w \Vdash \psi$, pero como $\psi$ es una fórmula de a lo más $n$ conectivos, entonces $\mathfrak{M}_i, w \nVdash \psi$ si y solo si no sucede que $\biguplus_i \mathfrak{M}_i, w \Vdash \psi$ si y solo si $\biguplus_i \mathfrak{M}_i, w \Vdash \neg\psi$. Caso 2: si $\phi$ es de la forma $\psi \vee \chi$, entonces $\mathfrak{M}_i, w \Vdash \psi \vee \chi$ si y solo si $\mathfrak{M}_i, w \Vdash \psi$ o $\mathfrak{M}_i, w \Vdash \chi$ y por hipótesis de inducción, esto sucede si y solo si $\biguplus_i \mathfrak{M}_i, w \Vdash \psi$ o $\biguplus_i \mathfrak{M}_i, w \Vdash \chi$ si y solo si $\biguplus_i \mathfrak{M}_i, w \Vdash \psi \vee \chi$. Finalmente para el último caso: si $\phi$ es de la forma $\triangle(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)$; supongamos primero que $\mathfrak{M}_i, w \Vdash \phi$, entonces existen $w_1, w_2, \ldots, w_n$ en $W_i$ tales que $R_{\triangle_i}(w, w_1, w_2, \ldots, w_n)$ y $\mathfrak{M}_i, w_j \Vdash \phi_j$ para toda $j$ en $\{1, \ldots, n\}$, esto implica que hay $w_1, w_2, \ldots, w_n \in \bigcup_{i \in I} W_i = W$ tales que $R_{\triangle}(w, w_1, w_2, \ldots, w_n)$ y por hipótesis de inducción, $\biguplus_i \mathfrak{M}_i, w \Vdash \triangle(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)$. Para la otra implicación, supongamos que $\biguplus_i \mathfrak{M}_i, w \Vdash \triangle(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)$, entonces existen $w_1, w_2, \ldots, w_n \in \bigcup_{i \in I}$ tales que $R_{\triangle_k}(w, w_1, w_2, \ldots, w_n)$ y $\biguplus_i \mathfrak{M}_i, w_j \Vdash \phi_j$ para toda $j \in \{1, \ldots, n\}$ y para alguna $k \in I$; como los universos son ajenos, y $w \in W_i$, entonces $R_{\triangle_i}(w, w_1, w_2, \ldots, w_n)$ y $w_1, w_2, \ldots, w_n \in W_i$, además, por hipótesis de inducción, $\mathfrak{M}_i, w_j \Vdash \phi_j$ para toda $j \in \{1, \ldots, n\}$, por lo tanto $\mathfrak{M}_i, w \Vdash \triangle(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)$. Y con esto concluímos que la equivalencia sucede para todo $i \in I$, para toda fómula $\phi$, y todo estado $w \in \mathfrak{M}_i$. •

Este tipo de pruebas se harán muy a menudo y de ahora en adelante no tan detalladas. Usualmente los casos base, (para $p \in \Phi$ y la constante $\perp$) y los casos para operadores booleanos, son triviales y no tiene sentido escribirlos a detalle; el que más nos interesará será el caso para operadores modales y normalmente ese sí se abordará con suficiente detalle.

La proposición anterior nos dice que la satisfacción de fórmulas modales es *invariante* bajo uniones ajenas o en otras palabras, que cualquier uniendo es modalmente equivalente a la unión ajena.

### Submodelos Generados

Con las uniones ajenas somos capaces de construir modelos más grandes que los que ya tenemos, es decir, modelos con más puntos. Ahora haremos lo inverso, construir modelos más pequeños, de manera que se preserve la satisfacibilidad. Dicho de otra manera, veremos una manera segura de deshacernos de mundos sin afectar la satisfacibilidad de fórmulas.

**Definición 2.1.6** (Submodelo). Sean, $\tau$ un tipo de semejanza y $\mathfrak{F} = (W', R'_{\triangle})_{\triangle \in \tau}$ y $\mathfrak{F}' = (W', R'_{\triangle})_{\triangle \in \tau}$ $\tau$-frames. Decimos que $\mathfrak{F}'$ *es subframe de* $\mathfrak{F}$ si y solo si $W' \subset W$, para cada $\triangle \in \tau$, $R'_{\triangle}$ es la restricción de $R_{\triangle}$, es decir, $R'_{\triangle} = R_{\triangle} \cap (W' \times W')$.

Y para cualesquiera dos modelos $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$ y $\mathfrak{M}' = (\mathfrak{F}', V')$, $\mathfrak{M}'$ es submodelo de $\mathfrak{M}$ si $\mathfrak{F}'$ es subframe de $\mathfrak{F}$ y $V'$ es la restricción de $V$ a $W'$, es decir, para toda p $\in \Phi$, $V'(p) = V(p) \cap W'$.

**Definición 2.1.7** (Submodelo Generado)**.** Sea, $\tau$ un tipo de semejanza modal. Decimos que un modelo $\mathfrak{M}' = (W', R'_{\triangle}, V')_{\triangle \in \tau}$ es un *submodelo generado* de un modelo $\mathfrak{M} = (W, R_{\triangle}, V)_{\triangle \in \tau}$ (Not: $\mathfrak{M}' \rightarrowtail \mathfrak{M}$) si y solo si $\mathfrak{M}'$ es submodelo de $\mathfrak{M}$ y para todo $\triangle \in \tau$ se cumple que:

$$si \;\; u \in \mathfrak{M}' \;\; y \;\; R_{\triangle}(u, u_1, \ldots, u_n), \; entonces \;\; u_1, u_2, \ldots, u_n \in \mathfrak{M}'.$$

En el lenguaje básico modal, esta última condición de la definición quedaría determinada como:

$$Si \;\; w \in \mathfrak{M}' \;\; y \; Rwv, \;\; entonces \;\; v \in \mathfrak{M}'.$$

Si $\mathfrak{M}$ es un modelo y $X$ un subconjunto del dominio de $\mathfrak{M}$, el *submodelo generado por* $X$ es el menor submodelo generado de $\mathfrak{M}$ cuyo dominio contenga a $X$. Por último, un *modelo con raíz* es un modelo que es generado por un conjunto unitario, cuyo único elemento es llamado la *raíz* del modelo. Análogamente surgen las nociones de *frame generado por un conjunto* $X$ y *frame con raíz* (es la misma noción pero dejando de lado a la valuación).

Otra manera de ver a un frame con raíz (cuando el tipo de semejanza $\tau$ solo contiene diamantes) es a partir del conjunto de puntos alcanzables desde un estado. Un *camino* en un frame $\mathfrak{F} = (W, R_{\langle a_i \rangle})_{\langle a_i \rangle \in \tau}$ es una secuencia finita $\vec{w} = w_0 R_{a_1} w_1 \ldots R_{a_k} w_k$ donde $w_i R_{a_i} w_{i+1}$ para algunos operadores modales $\langle a_1 \rangle, \ldots, \langle a_k \rangle \in \tau$; un camino de este tipo tiene longitud $k$ y *raíz* $w_0$. Un camino de longitud cero, es nada más su raíz $\vec{w} = (w_0)$. Para un mundo $w \in W$ denotamos por $\vec{W}[w]$ al conjunto de todos los caminos con raíz $w$. Para todo camino $\vec{w}$ (de longitud $k$) definimos la función 'estado terminal' $f$ como $f(\vec{w}) = w_k$, que manda cada camino a su estado terminal. De este modo, $W[w] = \{f(\vec{w}) | \vec{w} \in \vec{W}[w]\}$ es el conjunto de todos los puntos que son alcanzables desde $w$. Y a $\mathfrak{M}'$ el submodelo generado de $\mathfrak{M}$, un $\tau$-modelo basado en el frame $\mathfrak{F}$, tal que tiene como universo a $W[w]$ y las relaciones y valuación están definidas como usualmente (las restricciones de las originales al nuevo universo), lo llamaremos el *submodelo generado por* $w$.

**Proposición 2.1.8.** *Sean, $\tau$ un tipo de semejanza modal y $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{M}'$ $\tau$-modelos tales que $\mathfrak{M}'$ es un submodelo generado de $\mathfrak{M}$. Entonces, para cada fórmula modal $\phi$ y cada elemento $w$ de $\mathfrak{M}'$, tenemos que $\mathfrak{M}', w \Vdash \phi \Leftrightarrow \mathfrak{M}, w \Vdash \phi$.*

*Prueba.* Haremos la prueba por inducción sobre la complejidad de la fórmula $\phi$. Entonces, sean $\mathfrak{M}' = (W', R'_\triangle, V')_{\triangle\in\tau}$ y $\mathfrak{M} = (W, R_\triangle, V)_{\triangle\in\tau}$ tales que $\mathfrak{M}' \rightarrowtail \mathfrak{M}$; y sea $w \in \mathfrak{M}'$. Si $\phi$ es un átomo $p \in \Phi$, entonces $\mathfrak{M}', w \Vdash p$, si y solo si $w \in V'(p)$, si y solo si $w \in V(p) \cap W'$, si y solo si $w \in V(p)$, si y solo si $\mathfrak{M}, w \Vdash p$. Si $\phi$ es $\bot$, es claro. Ahora suponemos que la equivalencia se da para fórmulas con $n$ conectivos. Si $\phi$ es de la forma $\neg\psi$: $\mathfrak{M}', w \Vdash \neg\psi$ si y solo si no sucede que $\mathfrak{M}', w \Vdash \psi$, por hipótesis de inducción, esto equivale a que no $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$ y por definición, es equivalente a que $\mathfrak{M}, w \Vdash \neg\psi$. Si $\phi$ es de la forma $\psi \vee \chi$: $\mathfrak{M}', w \Vdash \psi \vee \chi$ si y solo si $\mathfrak{M}', w \Vdash \psi$ o $\mathfrak{M}', w \Vdash \chi$ lo cual, por hipótesis de inducción, sucede si y solo si $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$ o $\mathfrak{M}, w \Vdash \chi$ y por definición es equivalente a que $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi \vee \chi$. Finalmente, si $\phi$ es de la forma $\triangle(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)$: $\mathfrak{M}', w \Vdash \phi$ si y solo si existen $w_1, w_2, \ldots, w_n \in W'$ tales que $R'_\triangle(w, w_1, \ldots, w_n)$ y $\mathfrak{M}', w_i \Vdash \phi_i$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$, si y solo si existen $w_1, w_2, \ldots, w_n \in W$ tales que $R_\triangle(w, w_1, \ldots, w_n)$ (ya que $W' \subset W$ y $R'_\triangle = R_\triangle \cap (W' \times W')$) y $\mathfrak{M}, w_i \Vdash \phi_i$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$ lo que por hipótesis de inducción, equivale a que $\Leftrightarrow \mathfrak{M}, w \Vdash \phi$. Con esto queda probada la equivalencia.

•

Al igual que en el caso de las uniones ajenas, este resultado nos dice que la satisfacción modal es invariante bajo submodelos generados. Hay que notar además que las uniones ajenas son un caso particular de esto, ya que en un modelo que sea unión ajena de otros, cualquier uniendo será un submodelo generado de la unión ajena.

### Morfismos

La idea de morfismo o función que preserva estructura siempre es muy importante en matemáticas. Ahora veremos qué tipo de morfismos son adecuados para los operadores modales, es decir cuáles preservan satisfacción. Iremos aproximando esa idea empezando por la idea general de *homomorfismo*, luego *homomorfismo fuerte*, *encaje* e *isomorfismo*, para llegar a *morfismo acotado*, que será el de mayor interés.

**Definición 2.1.9** (Homomorfismo)**.** Sean, $\tau$ un tipo de semejanza modal y $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{M}'$ dos $\tau$-modelos. Un *homomorfismo* $f$ *de* $\mathfrak{M}$ *en* $\mathfrak{M}'$ (Not: $f : \mathfrak{M} \to_h \mathfrak{M}'$) es una función de $W$ en $W'$, que cumple las siguientes condiciones:

(i) Para cada letra proposicional $p$ y cada elemento $w$ de $\mathfrak{M}$, si $w \in V(p)$, entonces $f(w) \in V'(p)$.

(ii) Para cada $n > 0$, cada $\triangle \in \tau$ $n$- ario, y cada $(n+1)$-ada $\bar{w}$ de $\mathfrak{M}$, si $\bar{w} \in R_\triangle$, entonces $f(\bar{w}) \in R'_\triangle$. (La *condición de homomorfismo*).

En este caso llamamos a $\mathfrak{M}$ la fuente y a $\mathfrak{M}'$ el objetivo. Para el lenguaje básico, la condición de homomorfismo es la siguiente:

$$\textit{Si } Rwv, \textit{ entonces } R'f(w)f(v).$$

Esta condición asegura que se preserven en el objetivo los vínculos relacionales de la fuente.

Siguiendo el razonamiento que hemos hecho de cada operación presentada, toca preguntarnos si la satisfacción de fórmulas modales será invariante bajo homomorfismos. La respuesta es que no, ya que la estructura de la fuente se refleja en el objetivo pero no al revés. El siguiente ejemplo lo esclarece.

**Ejemplo 2.1.10.** Consideremos los siguientes modelos:


Y consideremos el lenguaje $LM(\tau_0, \Phi)$ donde $\Phi = \{p\}$ y valuaciones $V$ y $V'$ tales que $V(p) = \{v\}$ y $V'(p) = \{v'_2\}$, además tomemos la función $f : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$ tal que $f(w) = w'$ y $f(v) = v'_2$. Es fácil ver que $f$ es un homomorfismo y además que $\mathfrak{M}, w \Vdash \Box p$ pero $\mathfrak{M}', f(w) \nVdash \Box p$, por lo que $w$ y $f(w)$ no son modalmente equivalentes.

Ahora haremos más fuerte la definición. La manera natural de hacer esto es convertir las implicaciones en equivalencias:

**Definición 2.1.11** (Homomorfismo fuerte, encaje e isomorfismo)**.** Sean, $\tau$ un tipo de semejanza modal y $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{M}'$ $\tau$-modelos. Un *homomorfismo fuerte de* $\mathfrak{M}$ *en* $\mathfrak{M}'$ (Not: $f : \mathfrak{M} \to_{hf} \mathfrak{M}'$) es un homomorfismo $f : \mathfrak{M} \to_h \mathfrak{M}'$ que cumple las siguientes versiones más fuertes de $(i)$ y $(ii)$:

$(i)$ Para cada letra proposicional $p$ y cada elemento $w$ de $\mathfrak{M}$, $w \in V(p)$, si y sólo si $f(w) \in V'(p)$.

$(ii)$ Para cada $n > 0$, cada $\triangle \in \tau$ $n$- ario, y cada $(n+1)$-ada $\bar{w}$ de $\mathfrak{M}$, $\bar{w} \in R_\triangle$, si y solo si $f(\bar{w}) \in R'_\triangle$. (La *condición de homomorfismo fuerte*).

Decimos que un homomorfismo fuerte $f : \mathfrak{M} \to_{hf} \mathfrak{M}'$ es un *encaje* de $\mathfrak{M}$ en $\mathfrak{M}'$ si es inyectivo. Y un *isomorfismo* es un homomorfismo fuerte biyectivo. En tal caso, decimos que $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{M}'$ son isomorfos (Not: $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{M}'$).

Esta vez la condición $(ii)$ en el lenguaje básico modal dice:

$$Rwv \text{ si y solo si } Rf(w)f(v).$$

Esta definición nos asegura que se preserven los vínculos relacionales de la fuente al objetivo y viceversa. Así que, esta vez sí tenemos algunos resultados de preservación de satisfacción.

**Proposición 2.1.12.** *Si $\tau$ es un tipo de semejanza modal y $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{M}'$ son $\tau$-modelos, entonces:*

*(I) Para todo $w$ en $\mathfrak{M}$ y $w'$ en $\mathfrak{M}'$, si hay un homomorfismo fuerte suprayectivo $f : \mathfrak{M} \to_{hf} \mathfrak{M}'$ tal que $f(w) = w'$, entonces $w$ y $w'$ son modalmente equivalentes.*

*(II) Si $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{M}'$, entonces $\mathfrak{M} \leftrightsquigarrow \mathfrak{M}'$*

*Prueba.* Para $(I)$: supongamos que existe $f : \mathfrak{M} \to_{hf} \mathfrak{M}'$ homomorfismo fuerte suprayectivo. Hay que probar que $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$ si y solo si $\mathfrak{M}', w' \Vdash \phi$ para toda $\tau$-fórmula $\phi$. Procederemos por inducción sobre $\phi$. Si $\phi$ es una letra proposicional o la constante $\bot$, es trivial y para operadores booleanos es rutinario. El caso de interés es cuando $\phi$ es de la forma $\triangle(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)$: supongamos que $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$, entonces existen $w_1, \ldots, w_n \in W$ tales que $R_\triangle(w, w_1, \ldots, w_n)$ y $\mathfrak{M}, w_i \Vdash \phi_i$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$, por la cláusula $(ii)$ de la definición 2.1.11, tenemos que $R'_\triangle(f(w), f(w_1), \ldots, f(w_n))$ y por hipótesis de inducción, $\mathfrak{M}', f(w_i) \Vdash \phi_i$, lo que implica que

$\mathfrak{M}', f(w) \Vdash \phi$. Ahora para la conversa, si $\mathfrak{M}', f(w) \Vdash \phi$, existen $w_1', w_2', \ldots, w_n' \in W'$ tales que $R'_\triangle(f(w), w_1', \ldots, w_n')$ y para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\mathfrak{M}', w_i' \Vdash \phi_i$. Como $f$ es suprayectiva, hay $w_1, \ldots, w_n$ tales que $f(w_i) = w_i'$ para toda $i$. Así, $R_\triangle(w_1, \ldots, w_n)$ por la cláusula $(ii)$ de la definición 2.1.11, y por hipótesis de inducción, $\mathfrak{M}, w_i \Vdash \phi_i$ para toda $i$. Por lo tanto $\mathfrak{M}, w \Vdash \triangle(\phi_1, \ldots, \phi_n)$, con lo que queda demostrado $(I)$.
La demostración de $(II)$ se sigue directamente de $(I)$. •

Pero este resultado no satisface completamente nuestras necesidades, en el sentido de que sí preserva la satisfacibilidad modal pero aún hay muchos morfismos que preservan satisfacibilidad de fórmulas y que no cumplen con ser homomorfismos fuertes, es decir, la noción de homomorfismo fuerte es demasiado fuerte. El concepto que definiremos a continuación es un poco más sutil.

**Definición 2.1.13** (Morfismo Acotado)**.** Sean, $\tau$ un tipo de semejanza modal y $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{M}'$ $\tau$-modelos. Un morfismo acotado (Not: $f : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{M}'$) es una función $f$ de $\mathfrak{M}$ en $\mathfrak{M}'$ que cumple:

(i) $w$ y $f(w)$ satisfacen los mismos átomos.

(ii) Para todo $\triangle \in \tau$, $R_\triangle(w, w_1, \ldots, w_n)$ implica $R'_\triangle(f(w), f(w_1), \ldots, f(w_n))$.

(iii) Si $R'_\triangle(f(w), w_1', \ldots, w_n')$ entonces existen $w_1, \ldots, w_n$ tales que $R_\triangle(w, w_1, \ldots, w_n)$ y $f(w_i) = w_i'$ para toda $i \in \{i, \ldots, n\}$. (La condición *hacia atrás*)

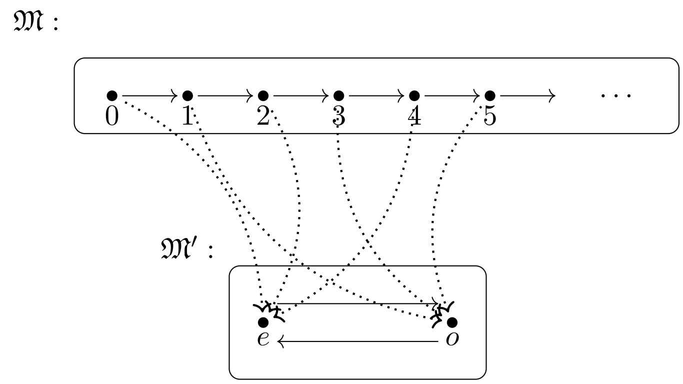
Si existe un morfismo acotado suprayectivo $f : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{M}'$, decimos que $\mathfrak{M}'$ es una *imagen mórfica acotada* de $\mathfrak{M}$ y lo escribimos como $\mathfrak{M} \twoheadrightarrow \mathfrak{M}'$.

La idea de la *condición hacia atrás* es muy importante para la lógica modal y es la idea básica de las bisimulaciones, que presentaremos un poco más adelante.

**Ejemplo 2.1.14.** Veamos un ejemplo de un morfismo acotado en el lenguaje básico modal donde $\Phi = \{p\}$. Consideremos a los modelos $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ y $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ tales que:

- $W = \mathbb{N}$, $Rmn$ si y sólo si $n = m + 1$ y $V(p) = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ es par }\}$

- $W' = \{e, o\}$, $R' = \{(e, o), (o, e)\}$ y $V'(p) = \{e\}$




Y sea $f : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$ definida de la siguiente manera:

$$f(n) = \begin{cases} e & \text{si} \quad n \text{ es par} \\ o & \text{si} \quad n \text{ es impar} \end{cases}$$

Es fácil ver que $f$ no es un homomorfismo fuerte. Sin embargo, sí es un morfismo acotado, para ello tiene que cumplir las condiciones $(i)$, $(ii)$ y $(iii)$ de la definición 2.1.13. La condición $(i)$ se cumple trivialmente. Para la segunda condición, si $Rmn$, suponiendo que $m$ es par, $f(m) = e$ y $n = m + 1$, por lo que $n$ es impar y $f(n) = o$ y efectivamente $R'(f(m), f(n))$; si $m$ es impar, es análogo. Para $(iii)$, sea $n$ un elemento arbitrario de $W$ tal que $R'(f(n), w)$. Supongamos que $n$ es par, entonces $f(n) = e$ y $w$ tiene que ser $o$, y como $n$ es par, $n+1$ es impar y $f(n+1) = o$, entonces $n+1$ es el elemento que buscamos. El caso en que $n$ es impar es completamente análogo.

En la siguiente proposición vemos que las fórmulas modales son invariantes bajo morfismos acotados.

**Proposición 2.1.15.** *Sean, $\tau$ un tipo de semejanza modal y $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{M}'$ $\tau$-modelos tales que $f : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{M}'$ es un morfismo acotado. Entonces, para cada $\tau$-fórmula $\phi$ y cada elemento $w$ de $\mathfrak{M}$, tenemos que $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$ si y sólo si $\mathfrak{M}', f(w) \Vdash \phi$.*

*Prueba.* Supongamos que $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{M}'$ son $\tau$-modelos y $w \in \mathfrak{M}$. Procedemos por inducción sobre $\phi$. El caso base y los casos para operadores booleanos son inmediatos. Nos concentraremos en verificar la equivalencia para cuando $\phi$ es un operador modal de aridad $n$, es decir $\phi$ es de la forma $\triangle(\phi_1, \ldots, \phi_n)$.

($\Rightarrow$) Supongamos que $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$, entonces existen $w_1, w_2, \ldots, w_n \in W$ tales que $R_\triangle(w, w_1, \ldots, w_n)$ y para toda $i$, $\mathfrak{M}, w_i \Vdash \phi_i$. Por la cláusula $(ii)$ de la definición 2.1.13

$R'_\triangle(f(w), f(w_1), \ldots, f(w_n))$ y por hipótesis de inducción, $\mathfrak{M}', f(w_i) \Vdash \phi_i$. Entonces $\mathfrak{M}', f(w) \Vdash \phi$.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que $\mathfrak{M}', f(w) \Vdash \phi$, entonces existen $w'_1, \ldots, w'_n$ tales que $R'_\triangle(f(w), w'_1, \ \ldots, w'_n)$ y $\mathfrak{M}', w'_i \Vdash \phi_i$ para toda $i$. Por (*iii*) de la definición 2.1.13, existen $w_1, \ldots, w_n \in W$ tales que $R_\triangle(w, w_1, \ldots, w_n)$ y $f(w_i) = w'_i$ para toda $i \in \{i, \ldots, n\}$; y por hipótesis de inducción, $\mathfrak{M}', f(w_i) \Vdash \phi_i$ para toda $i$. Así, $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$. Y queda entonces demostrada la equivalencia. •

Ahora veremos unas aplicaciones de los resultados de invarianza de fórmulas modales que acabamos de obtener.

Como primer aplicación de los submodelos generados y morfismos acotados, mostraremos que toda fórmula satisfacible, es satisfecha en un modelo *tipo árbol*. Es decir, que las lógicas modales tienen la propiedad del modelo tipo árbol.

Si $\tau$ es un tipo de semejanza que solo contiene diamantes, es decir que si $\mathfrak{M} = (W, R_1, R_2, \ldots, V)$ es un $\tau$-modelo, entonces $R_i$ es una relación binaria en $W$ para toda $i$. Entonces, decimos que $\mathfrak{M}$ es un modelo tipo árbol si la estructura $(W, \bigcup_i R_i, V)$ es un árbol.

**Proposición 2.1.16.** *Sea $\tau$ un tipo de semejanza que contenga solo diamantes. Entonces para cualquier modelo con raíz $\mathfrak{M}$, existe un modelo tipo árbol tal que $\mathfrak{M}' \twoheadrightarrow \mathfrak{M}$. Así, cualquier fórmula satisfacible es satisfacible en un modelo tipo árbol.*

*Prueba.* Sea $w$ la raíz del modelo. Construiremos el modelo $\mathfrak{M}'$ como sigue: los mundos de $\mathfrak{M}'$ serán las sucesiones finitas $(w, u_1, \ldots, u_n)$ tales que $n \geq 0$ y para algunos operadores modales $\langle a_1 \rangle, \langle a_2 \rangle, \ldots, \langle a_n \rangle \in \tau$ hay un camino $wR_{a_1}u_1 \ldots R_{a_n}u_n$ en $\mathfrak{M}$. Para cada $\langle a \rangle \in \tau$, $(w, u_1, \ldots, u_n)R'_a(w, v_1, \ldots, v_m)$ si y sólo si $m = n+1$ y $u_i = v_i$ para toda $i = 1, \ldots, n$ y $R_a u_n v_m$. Es decir, $R'_a$ relaciona dos sucesiones si la segunda extiende a la primera con un estado de $\mathfrak{M}$ que es sucesor (en $\mathfrak{M}$) del último estado de la primera secuencia. Y para definir $V'$, tenemos que $(w, u_1, \ldots, u_n) \in V'(p)$ si y solo si $u_n \in V(p)$ para toda $p \in \Phi$.

Es fácil ver que el morfismo 'estado terminal' $f : \mathfrak{M}' \longrightarrow \mathfrak{M}$ definido como anteriormente $((w, u_1, \ldots, u_n) \longmapsto u_n)$ es un morfismo acotado suprayectivo. Las primeras dos condiciones de la definición 2.1.13 (de morfismo acotado) son triviales por cómo construimos a $\mathfrak{M}'$. Probaremos únicamente la tercera. Sea $\langle a \rangle \in \tau$, supongamos que $u = f((w, u_1, \ldots, u_n))$ ($u = u_n$, por la definición de $f$) y $uR_a v$ para algún $v \in \mathfrak{M}$, entonces $(w, u_1, \ldots, u, v)$ es un mundo de $\mathfrak{M}'$ y además $(w, u_1, \ldots, u_{n-1}, u)R'_a(w, u_1, \ldots, u, v)$ y $f((w, u_1, \ldots, u, v)) = v$, por lo tanto, $f$ es un morfismo acotado. También es fácil ver que es sobre. Así, por la proposición 2.1.15, $\mathfrak{M}'$ y $\mathfrak{M}$ son modalmente equivalentes.

Para ver que toda $\tau$-fórmula satisfacible es satisfacible en un modelo tipo árbol, supongamos que $\phi$ es una fórmula satisfecha en algún $\tau$-modelo $\mathfrak{M}$ en un punto $w$ de $\mathfrak{M}$. Consideremos $\mathfrak{M}_1$ el submodelo generado por $w$. Por la proposición 2.1.8, $\mathfrak{M}_1, w \Vdash \phi$, y $\mathfrak{M}_1$ es un modelo con raíz y podemos construir un modelo tipo árbol $\mathfrak{M}'_1$ que siga haciendo verdad a $\phi$ como lo acabamos de describir. •

Esta manera de construir un modelo tipo árbol es muy usada y se le llama *desdoblamiento o desenmarañamiento de árbol.*

### Operadores modales no definibles

Otra aplicación de la preservación de satisfaccción bajo las operaciones que vimos, es que se pueden usar para probar que hay operadores modales que no pueden ser definidos a partir de otros.

**Ejemplo 2.1.17.** Los operadores modales definidos son abreviaturas de otros que nos serán útiles, por ejemplo, sabemos que $\Box\phi$ es la abreviatura para $\neg\Diamond\neg\phi$; o también definimos recursivamente a partir de $\Diamond\phi$ el operador modal $\Diamond^n\phi$ para $n \in \omega$ (véase la definición 1.4.1). Y mientras que para mostrar que un operador modal es definible a partir de otro(s) basta con dar la definición, no es tan fácil mostrar que un operador modal no es definible. Para esto usaremos los resultados de invarianza que acabamos de presentar. Para este ejemplo, consideremos el operador modal *global*. El diamante global (denotado por $E$) tiene como relación de accesibilidad, la reación universal $W \times W$ (i.e. $R_E = W \times W$). Así:

$$\mathfrak{M}, w \Vdash E\phi \text{ si y sólo si } \mathfrak{M}, v \Vdash \phi \text{ para algún estado } v \text{ de } \mathfrak{M}.$$

Su dual, la caja global (denotado por $A$), se interpreta como sigue:

$$\mathfrak{M}, w \Vdash A\phi \text{ si y sólo si } \mathfrak{M}, v \Vdash \phi \text{ para todo estado } v \text{ de } \mathfrak{M}.$$

Este operador modal no es definible en el lenguaje básico modal. Lo interesante es cómo probarlo: haremos uso de la proposición 2.1.5. Supongamos que podemos definir $A$. Bajo esta suposición, tendríamos una expresión $\alpha(p)$ que solo consistiera de símbolos del lenguaje básico tal que para cualquier modelo $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}, w \Vdash \alpha(p)$ si y sólo si $\mathfrak{M} \Vdash p$. Esto nos llevará a una contradicción. Sea $\mathfrak{M}_1$ un modelo tal que $p$ sea verdad en todas partes y $\mathfrak{M}_2$ uno en el que $p$ sea verdad en ninguna parte. Si $w$ es un punto de $\mathfrak{M}_1$, tenemos que $\mathfrak{M}_1, w \Vdash \alpha(p)$, como $\alpha(p)$ contiene puros símbolos del lenguaje básico modal, por la proposición 2.1.5, tenemos que $\mathfrak{M}_1 \uplus \mathfrak{M}_2, w \Vdash \alpha(p)$. Lo anterior implica que $\mathfrak{M}_1 \uplus \mathfrak{M}_2, v \Vdash p$ para todo $v \in \mathfrak{M}_2$, lo que por la proposición 2.1.5, nos dice que $\mathfrak{M}_2 \Vdash p$, que es la contradicción que buscábamos. Y como $A$ no es definible y su dual es $E$, entonces $E$ tampoco es definible. Así, la caja y el diamante global no son definibles en el lenguaje básico modal. Si se quisiera tener el operador modal global, se tendría que introducir como primitiva o restringir el estudio a clases de modelos donde sí sea definible, pero esto no es lo que queremos ilustrar en este momento.

**Ejemplo 2.1.18.** Recordando el lenguaje básico temporal, igual que en el ejemplo anterior, probaremos que el operador modal que mira para atrás ($P$) no puede ser definido en términos del operador $\Diamond$ que mira hacia enfrente. Primero recordemos la cláusula de satisfacción del operador modal $P$:

$$\mathfrak{M}, w \Vdash P\phi \text{ si y sólo si existe } v \text{ tal que } Rvw \text{ y } \mathfrak{M}, v \Vdash \phi,$$

donde $R$ sería la relación asociada al operador modal $\Diamond$. Suponiendo que sí se puede definir $P$ en términos de $\Diamond$, tendríamos una expresión $\beta(p)$ que sólo consistiera de símbolos del lenguaje básico (átomos, la constante $\perp$, operadores booleanos y el operador modal $\Diamond$) tal que $\mathfrak{M}, w \Vdash \beta(p)$ si y solo si existe $v$ tal que $Rvw \wedge \mathfrak{M}, v \Vdash p$. Sea $\mathfrak{M}_1 = (W, R, V)$ un modelo con raíz $w_0$, tal que $R$ es transitiva y tal que $p$ es cierto solamente en $w_0$. Sea $w \neq w_0$. Tenemos que $\mathfrak{M}_1, w \Vdash \beta(p)$ porque la relación es transitiva. Y ahora consideremos $\mathfrak{M}_2$ el submodelo generado por $w$. Entonces $\mathfrak{M}_2, w \nVdash \beta(p)$ porque no hay $v \in \mathfrak{M}_2$ tal que $Rvw$. Pero como $v \in \mathfrak{M}_2$ y $\mathfrak{M}_2 \rightarrowtail \mathfrak{M}_1$, por prop. 2.1.8, $\beta(p)$ debería ser satisfecha en $\mathfrak{M}_2$ por $w$. Lo que es una contradicción y muestra usando invarianza bajo submodelos generados que $P$ no puede ser definida a partir de $\Diamond$.

## 2.2. Bisimulaciones

Los resultados de invarianza que acabamos de ver tienen en común que tratan con ciertas relaciones entre modelos en las que en los estados 'relacionados' se satisfacen los mismos átomos y siempre que se puede hacer una transición en un modelo, se puede hacer una transición correspondiente en el otro modelo. Esta es la idea básica de una bisimulación: que los estados relacionados tengan la misma información atómica y que se puedan hacer transiciones correspondientes entre los estados de ambos modelos.

**Definición 2.2.1** (Bisimulación)**.** Sean, $\tau$ un tipo de semejanza modal y $\mathfrak{M} = (W, R_\triangle, V)_{\triangle\in\tau}$ y $\mathfrak{M}' = (W', R'_\triangle, V')_{\triangle\in\tau}$ $\tau$-modelos. Una relación binaria no vacía $Z \subseteq W \times W'$ es una bisimulación entre $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{M}'$ (Not: $Z : \mathfrak{M} \rightleftarrows \mathfrak{M}'$) si ocurre:

(i) Si $wZw'$, entonces $w$ y $w'$ satisfacen las mismas letras proposicionales.

(ii) Si $wZw'$ y $R_\triangle(w, w_1, w_2, \ldots, w_n)$ entonces existen $w'_1, w'_2, \ldots w'_n \in W'$ tales que $R'_\triangle(w', w'_1, \ldots, w'_n)$ y $w_iZw'_i$ para toda $i = 1, \ldots, n$. (la condición *hacia adelante*).

(iii) Si $wZw'$ y $R'_\triangle(w', w'_1, w'_2, \ldots, w'_n)$ entonces existen $w_1, w_2, \ldots, w_n \in W$ tales que $R_\triangle(w, w_1, w_2, \ldots, w_n)$ y $w_iZw'_i$ para toda $i = 1, \ldots, n$. (la condición *hacia atrás*).

Cuando una bisimulación $Z$ relaciona dos estados $w \in \mathfrak{M}$ y $w' \in \mathfrak{M}'$, se dice que $w$ y $w'$ son bisimilares y se escribe $Z : \mathfrak{M}, w \rightleftarrows \mathfrak{M}', w'$ o simplemente $w \rightleftarrows w'$ si el contexto es claro. Si existe una bisimulación $Z$ tal que $Z : \mathfrak{M}, w \rightleftarrows \mathfrak{M}', w'$, lo abreviamos como $\mathfrak{M}, w \rightleftarrows \mathfrak{M}', w'$. Y de igual manera, si existe una bisimulación entre $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{M}'$ simplemente escribimos $\mathfrak{M} \rightleftarrows \mathfrak{M}'$.

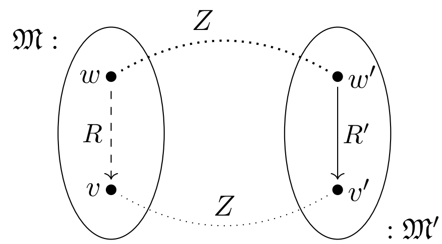
Para concretar un poco este concepto pensemos en el lenguaje básico modal, las tres cláusulas de bisimulación quedarían determinadas como sigue:

(i') Si $wZw'$, entonces $w$ y $w'$ cumplen los mismos átomos.

(ii') Si $wZw'$ y $Rwv$ entonces existe $v' \in W'$ tal que $R'w'v'$ y $vZv'$ (la condición *hacia adelante*).

(iii') Si $wZw'$ y $R'w'v'$ entonces existe $v \in W$ tal que $Rwv$ y $vZv'$ (la condición *hacia atrás*).

El siguiente esquema ayuda a ver gráficamente la condición hacia atrás:




La idea es que el diagrama siempre debe estar completo, es decir, si tenemos una trayectoria en $\mathfrak{M}'$ por $R'$ y de $\mathfrak{M}$ a $\mathfrak{M}'$ por $Z$, esta debe completarse reflejándose por el 'eje horizontal' y el 'eje vertical'.

**Ejemplo 2.2.2.** Los modelos $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{M}'$ de la Figura 2-1 son bisimilares,. Para probarlo basta con dar la relación $Z$ que relacione a los estados de $\mathfrak{M}$ y los de $\mathfrak{M}'$ y que cumpla con las tres condiciones de la definición 2.2.1 (en este caso las condiciones $(i')$, $(ii')$ y $(iii')$ dadas anteriormente, porque los modelos son del lenguaje básico modal). La relación es
$Z = \{(1, a), (2, b), (2, c), (3, d), (4, e), (5, e)\}$ y es fácil ver que cumple las tres condiciones.

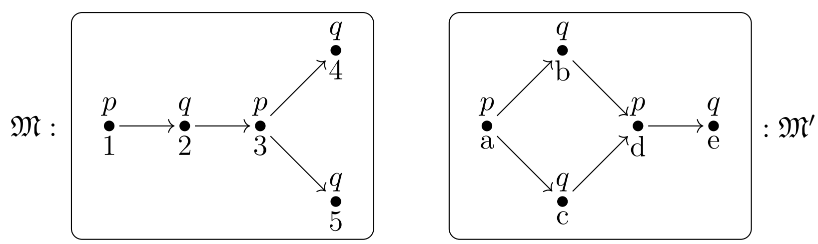



Figura 2-1: Modelos Bisimilares

Ya que hemos entendido qué es una bisimulación, podemos darnos cuenta de que las construcciones presentadas en los resultados de invarianza (uniones ajenas, submodelos generados, y morfismos acotados) son todas bisimulaciones. Esto lo probaremos en la siguiente proposición.

**Proposición 2.2.3.** *Sea $\tau$ un tipo de semejanza modal y sean $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$, y $\mathfrak{M}_i$ con $i \in I$, $\tau$-modelos, entonces:*

*(i) Si $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{M}'$, entonces $\mathfrak{M} \rightleftarrows \mathfrak{M}'$.*

*(ii) Para todo $i \in I$ y todo $w \in \mathfrak{M}_i$, $\mathfrak{M}_i, w \rightleftarrows \biguplus_i \mathfrak{M}_i, w$.*

*(iii) Si* $\mathfrak{M}' \rightarrowtail \mathfrak{M}$*, entonces* $\mathfrak{M}', w \rightleftarrows \mathfrak{M}, w$*, para todo* $w \in \mathfrak{M}'$*.*

*(iv) Si* $\mathfrak{M} \twoheadrightarrow \mathfrak{M}'$*, entonces* $\mathfrak{M}, w \rightleftarrows \mathfrak{M}', f(w)$ *para todo* $w \in \mathfrak{M}$*.*

*Prueba.* Para $(i)$. Como $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{M}'$, entonces existe $f : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{M}'$ homomorfismo fuerte biyectivo. Es fácil ver que la misma $f$ nos da la bisimulación buscada. La primera condición de la definición 2.2.1 está dada trivialmente por la primera condición de ser homomorfismo fuerte. Para la segunda, se usa la *condición de homomorfismo fuerte* y para la tercera, la *condición de homomorfismo fuerte* junto con que $f$ es biyectiva.

Para $(ii)$. Sea $i \in I$ y $w \in \mathfrak{M}_i$, definimos la relación $Z = \{(w, w) | w \in \mathfrak{M}_i\}$. Para ver que es bisimulación: la primera condición se da trivialmente, luego para la condición hacia adelante, si $R_{\triangle_i}(w, w_1, \ldots, w_n)$ entonces $R_{\triangle}(w, w_1, \ldots, w_n)$ por la definición de $R_{\triangle}$ y para la condición hacia atrás, si $R_{\triangle}(w, w_1, \ldots, w_n)$ como los dominios son ajenos y $w \in \mathfrak{M}'$, entonces $R_{\triangle_i}(w, w_1, \ldots, w_n)$. Y así, $\mathfrak{M}_i, w \rightleftarrows \biguplus_i \mathfrak{M}_i, w$.

Para $(iii)$. Tomamos $Z = \{(w, w) | w \in \mathfrak{M}'\}$. Las primeras dos condiciones de la definición 2.2.1 son triviales y muy similares al caso anterior. La tercera también es fácil usando la condición de ser submodelo generado.

Y por último, para $(iv)$, como $\mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{M}'$, existe $f$ un morfismo acotado suprayectivo. Esa misma $f$ es la bisimulación. La prueba es trivial con las tres condiciones de morfismo acotado. •

**Teorema 2.2.4.** *Sean,* $\tau$ *un tipo de semejanza modal y* $\mathfrak{M}$ *y* $\mathfrak{M}'$ $\tau$*-modelos tales que* $\mathfrak{M} \rightleftarrows \mathfrak{M}'$*. Para toda* $\tau$*-fórmula* $\phi$ *y para cualesquiera* $w \in W$ *y* $w' \in W'$ *se cumple que* $w \rightleftarrows w'$ *implica* $w \leftrightsquigarrow w'$*.*

*Prueba.* Por inducción sobre $\phi$. Si $\phi$ es una letra proposicional, es inmediato por la condición $(i)$ de la definición 2.2.1. Para $\perp$ es trivial. Y si $\phi$ tiene sólo operadores booleanos es fácil por la hipótesis de inducción.

Nos concentraremos en el caso en que $\phi$ es de la forma $\triangle(\phi_1, \ldots, \phi_n)$.

($\Rightarrow$) Supongamos que $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$, entonces existen $w_1, \ldots, w_n$ tales que $R_{\triangle}(w, \ldots, w_n)$ y $\mathfrak{M}, w_i \Vdash \phi_i$ para $i = 1, \ldots, n$, luego por la condición *hacia adelante*, tenemos que existen $w'_1, \ldots, w'_n \in W'$ tales que $R'_{\triangle}(w', w'_1, \ldots, w'_n)$ y $w_i \rightleftarrows w'_i$ para toda $i$, entonces por hipótesis de inducción, $\mathfrak{M}', w'_i \Vdash \phi_i$ para toda $i$, y así, $\mathfrak{M}', w' \Vdash \triangle(\phi_1, \ldots, \phi_n)$.

($\Leftarrow$) Para la conversa, supongamos que $\mathfrak{M}', w' \Vdash \phi$, entonces existen $w'_1, \ldots, w'_n \in W'$ tales que $R'_\triangle(w', w'_1, \ldots, w'_n)$ y $\mathfrak{M}', w'_i \Vdash \phi_i$ para toda $i = 1, \ldots, n$, y por la condición *hacia atrás*, existen $w_1, \ldots, w_n \in W$ tales que $R_\triangle(w, w_1, \ldots, w_n)$ y $w_i \rightleftarrows w'_i$ para $i = 1, \ldots, n$, entonces por hipótesis de inducción, $\mathfrak{M}, w_i \Vdash \phi_i$ para toda $i = 1, \ldots, n$ y por lo tanto, $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$. •

Este teorema nos dice que la satisfacción es invariante bajo bisimulaciones, lo que nos da, junto con la proposición 2.2.3, una prueba alternativa para las pruebas de la invarianza bajo uniones ajenas, submodelos generados y morfismos acotados (proposiciones 2.1.5, 2.1.8 y 2.1.15).

Ahora es prudente preguntarnos si el recíproco del teorema 2.2.4 es verdadero, es decir, si tenemos dos modelos que son modalmente equivalentes, ¿entonces son bisimilares? la respuesta es que no y quedará más claro en el siguiente ejemplo.

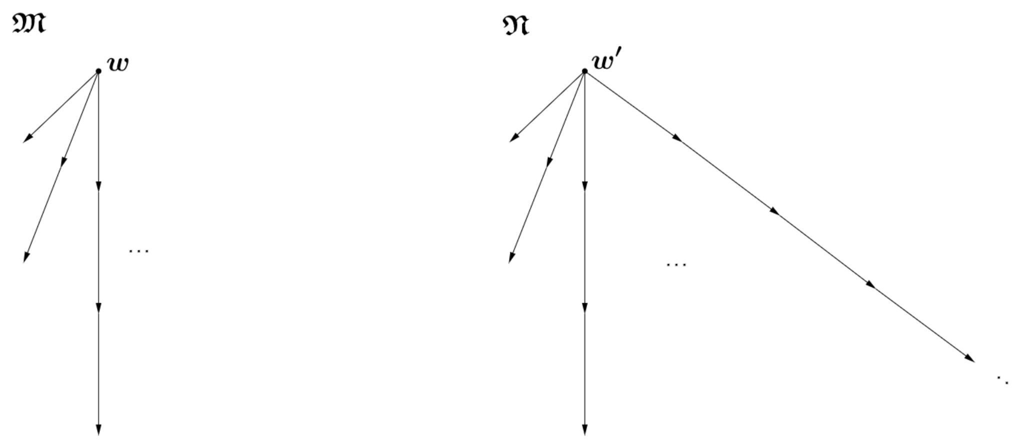



Figura 2-2: Modelos modalmente equivalentes y no bisimilares

**Ejemplo 2.2.5.** Consideremos el lenguaje básico modaly trabajemos con un conjunto de átomos vacío. Definamos los modelos $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{N}$ como en la figura 2-2, donde las flechas denotan $R$-transiciones. Ambos modelos tienen, para cada $n > 0$ una rama finita de longitud $n$, pero la diferencia es que $\mathfrak{N}$ tiene una rama de longitud infinita. No es difícil mostrar que $w$ y $w'$ son modalmente equivalentes. Pero a pesar de que son modalmente equivalentes, no hay una bisimulación entre $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{N}$ que los relacione. Supongamos que hay una bisimulación $Z$ que relaciona a $w$ y $w'$. Como $wRw'$,por la condición hacia atrás,hay $v_0$ tal que $wRv_0$ y $v_0 Z v'_0$, donde $v'_0$ es el primer sucesor de $w'$ en el camino infinito de $\mathfrak{N}$. Supongamos que $n$ es la longitud del camino (maximal) que va por $w$ y $v_0$ y sean $w, v_0, \ldots, v_{n-1}$ los puntos del camino. Como $v_0 R v_1$, hay $v'_1$ tal que $v'_0 R' v'_1$ y $v_1 Z v'_1$. De esta manera, aplicando las condiciones de bisimulación $n-1$ veces, obtenemos puntos $v'_1, \ldots, v'_{n-1}$ tales que forman un camino de $w'$, por $v'_0$ en la rama infinita de $\mathfrak{N}$ tales que $w' R v'_0 R v'_1 R \ldots R v'_{n-1}$ y $v_i Z v'_i$ para toda $i$. Ahora, sea $x$ el sucesor de $v'_{n-1}$ entonces existe $v_n \in \mathfrak{M}$ tal que $v_{n-1} R v_n$ y $v_n Z x$ lo cual es una contradicción porque el camino ya era maximal.

Sin embargo, se puede dar una "versión restringida" del converso del teorema. Ya que, al menos en el ejemplo, el problema parece ser la rama infinita; para $\tau$ un tipo de semejanza y $\mathfrak{M}$ un $\tau$-modelo, decimos que $\mathfrak{M}$ es *imagen finito* si para cada estado $w$ en $\mathfrak{M}$ y cada operador $\triangle \in \tau$, el conjunto $\{(v_1, \ldots, v_n) | R_\triangle(w, v_1, \ldots, v_n)\}$ es finito. Nótese que la restricción no está en la cantidad de relaciones que tenga el modelo, si no en que todas sean imagen finitas.

**Teorema 2.2.6** (De Hennessy-Milner)**.** *Sea $\tau$ un tipo de semejanza modal y sean $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{M}'$ dos modelos imagen finitos. Entonces para todos $w \in \mathfrak{M}$ y $w' \in \mathfrak{M}'$, $w \rightleftarrows w'$ si y solo si $w \leftrightsquigarrow w'$.*

*Prueba.* ($\Rightarrow$) Esta implicación está dada por el teorema 2.2.4.

($\Leftarrow$) Veamos que la misma relación $\leftrightsquigarrow$ es una bisimulación, i.e. que cumple las tres condiciones de la definición 2.2.1. Supongamos que $w \leftrightsquigarrow w'$; la primer condición es trivial ya que si $w$ y $w'$ satisfacen las mismas fórmulas, en particular satisfacen los mismos átomos. Para la segunda, supongamos que $R_\triangle(w, w_1, \ldots, w_n)$; para probarla por contradicción, supongamos que no existe n-ada $(w'_1, \ldots, w'_n)$ en $\mathfrak{M}'$ tal que $R'_\triangle(w', w'_1, \ldots, w'_n)$ y $w_i \leftrightsquigarrow w'_i$ para $i = 1, \ldots, n$. Ahora, consideremos el conjunto $S' = \{(v_1, \ldots, v_n) | R'_\triangle(w', v_1, \ldots, v_n)\}$ que debe ser no vacío, porque de lo contrario, $\mathfrak{M}', w' \Vdash \triangledown(\bot, \ldots, \bot)$, que sería una contradicción ya que $w \leftrightsquigarrow w'$ y como $w$ sí tiene sucesores, $\mathfrak{M}, w \Vdash \triangle(\top, \ldots, \top)$. Además, como $\mathfrak{M}'$ es imagen finito, $S'$ es finito, entonces sea $S' = \{(v_1^1, \ldots, v_n^1), \ldots, (v_1^m, \ldots, v_n^m)\}$. Entonces por lo que supusimos, para cada n-ada de $S'$, existe una fórmula $\psi_i$ tal que $\mathfrak{M}, w_i \Vdash \psi_i$ y $\mathfrak{M}', w'_j \nVdash \psi_i$ para alguna $j \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces, $\mathfrak{M}, w \Vdash \triangle(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n, \ldots, \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n)$ y $\mathfrak{M}', w' \nVdash \triangle(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n, \ldots, \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n)$, lo que contradice que $w \leftrightsquigarrow w'$. La prueba para la tercera condición es completamente análoga. •

## 2.3. Relación entre las maneras de relacionar modelos

Hasta ahora hemos visto varias maneras de relacionar modelos, éstas son: que exista un homomorfismo fuerte, ser isomorfos, ser modalmente equivalentes, que haya un morfismo acotado, ser imagen mórfica (que hay un morfismo acotado suprayectivo), y ser bisimilares ($\mathfrak{M} \to_{hf} \mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M} \leftrightsquigarrow \mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M} \twoheadrightarrow \mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M} \rightleftarrows \mathfrak{M}'$ respectivamente). Antes de continuar con el estudio de las bisimulaciones, estableceremos cómo podemos relacionar dichas maneras de realcionar modelos, en el sentido de saber cómo se implican, para ver cuáles son más fuertes y cuáles más débiles. Solamente ordenaremos algunos resultados que ya probamos y otros que son triviales.

*Notación.* Para facilitar la notación y el vocabulario, en esta sección, nos referiremos a que una relación implica otra si siempre que un par de modelos cumplen con la primera relación, cumplen con la segunda. Por ejemplo al decir que *isomorfismo implica equivalencia modal* nos referiremos a que siempre que dos modelos son isomorfos, son modalmente equivalentes. Esto lo escribiremos como: $\cong \;\Rightarrow\; \leftrightsquigarrow$.

Así, recordemos primero algunos resultados que ya hemos probado,

- La proposición 2.1.12 nos dice que $\cong \;\Rightarrow\; \leftrightsquigarrow$. (*isomorfismo* implica *equivalencia modal*)
- La proposición 2.1.15 nos da la implicación: $\longrightarrow \;\Rightarrow\; \leftrightsquigarrow$. (que haya un *morfismo acotado* entre los modelos implica que son *modalmente equivalentes*)
- Por la proposición 2.2.3 tenemos:
  - (i) $\cong \;\Rightarrow\; \rightleftarrows$ (*isomorfismo* implica *bisimilitud*)
  - (ii) $\twoheadrightarrow \;\Rightarrow\; \rightleftarrows$ (que el segundo modelo sea *imagen mórfica* del primero implica que son *bisimilares*)
- Por el teorema 2.2.4 sabemos que: $\rightleftarrows \;\Rightarrow\; \leftrightsquigarrow$. (*bisimilitud* implica *equivalencia modal*)

También hay algunos que son triviales:

- $\cong \;\Rightarrow\; \to_{hf}$, ya que el isomorfismo es un homomorfismo fuerte y además biyectivo.
- $\twoheadrightarrow \;\Rightarrow\; \longrightarrow$, porque $\twoheadrightarrow$ es un morfismo acotado pero también suprayectivo.

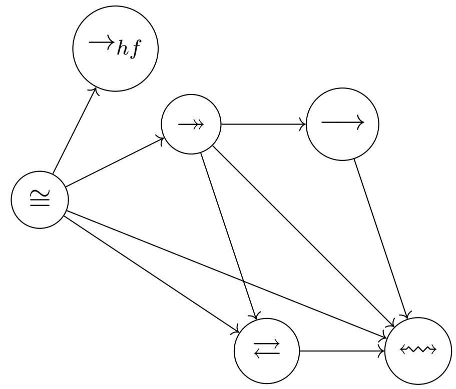



Figura 2-3: Implicaciones entre las maneras de relacionar modelos.

- $\cong \; \Rightarrow \; \twoheadrightarrow$, ya que el regreso de la *condición de homomorfismo fuerte* junto con que es biyectivo, implican la condición *hacia atrás* del morfismo acotado.

Ahora, veamos algunas implicaciones que no se dan y las condiciones que les hacen falta:

- $\twoheadrightarrow \; \nRightarrow \; \longrightarrow$. No se cumple el regreso de la *condición de homomorfismo fuerte*, se cumpliría si le pedimos inyectividad.
- $\longrightarrow \; \nRightarrow \; \leftrightsquigarrow$. Necesita ser biyectiva.
- $\longrightarrow \; \nRightarrow \; \rightleftarrows$. Necesita suprayectividad para cumplir la *condición hacia atrás*.

Con este pequeño análisis podemos observar que la relación más fuerte de todas es el *isomorfismo*, ya que implica a todas las demás. Y la más débil es la *equivalencia modal*, que es implicada por casi todas, y luego le sigue la *bisimilitud*. Esto se observa mejor en el diagrama 2-3. En dicho diagrama las flechas ($\Rightarrow$)que usamos en las afirmaciones anteriores están representadas por flechas sencillas.

## 2.4. Modelos finitos

Ahora veremos qué tan expresivos pueden ser los modelos finitos en cuanto a fórmulas modales, es decir, queremos saber si con modelos "pequeños" podemos satisfacer las mismas fórmulas que con modelos grandes; probaremos que los lenguajes modales tienen la *propiedad* *del modelo finito*, es decir, que si una fórmula es satisfacible en un modelo cualquiera, entonces es satisfacible en un modelo finito.

**Definición 2.4.1** (Propiedad del modelo finito)**.** Sean, $\tau$ un tipo de semejanza modal y $\mathsf{M}$ una clase de $\tau$-modelos. Decimos que $\tau$ tiene la *propiedad del modelo finito con respecto a* $\mathsf{M}$ si se cumple la siguiente condición: para toda $\tau$-fórmula $\phi$, si $\phi$ es satisfacible en un modelo en $\mathsf{M}$, entonces $\phi$ es satisfacible en un modelo finito.

Como únicamente nos concentraremos en el caso en que la clase $\mathsf{M}$ es la de todos los $\tau$-modelos, solo diremos 'propiedad del modelo finito'. Discutiremos dos maneras de construir modelos finitos. La primera es elegir cuidadosamente un submodelo finito del modelo que satisface las fórmulas; y la segunda es definiendo una estructura cociente adecuada.

### Seleccionar un submodelo finito

Recordando la definición 1.1.6 del grado de una fórmula, podemos interpretar al grado como la cantidad de operadores modales anidados que tiene la fórmula.

Primero probaremos algunos resultados y daremos algunas definiciones que después iremos ensamblando para construir un modelo finito que preserve satisfacibilidad.

**Proposición 2.4.2.** *Sea $\tau$ un tipo de semejanza modal finito y supongamos que $\Phi$ el conjunto de átomos también es finito, entonces:*

*(i) Para toda $n$, hay una cantidad finita de $\tau$-fórmulas de grado a lo más $n$, salvo equivalencia modal.*

*(ii) Para toda $n$, todo $\tau$-modelo $\mathfrak{M}$ y todo estado $w$ de $\mathfrak{M}$, el conjunto de fórmulas de grado a lo más $n$ que son satisfechas por $w$, es equivalente a una sola fórmula.*

*Prueba.* Probaremos $(i)$ por inducción sobre $n$. Para $n = 0$ es trivial ya que $\Phi$ es finito. Supongamos que se cumple para $n$ y veamos el caso de $n+1$; primero notemos que cualquier fórmula $\phi$ tal que $gr(\phi) \leq n+1$ es de la forma $\triangle(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ con $gr(\phi_i) \leq n$ para toda $i = 1, \ldots, n$. Por hipótesis de inducción, sabemos que solo hay una cantidad finita de combinaciones booleanas de átomos y fórmulas $\triangle(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ donde cada $\phi_i$ tiene grado a lo más $n$. Así, hay una cantidad finita de fórmulas de grado a lo más $n+1$. Luego, $(ii)$ se sigue de $(i)$ ya que si hay una cantidad finita de fórmulas de grado a lo más $n$, podemos tomar la conjunción de todas las que son satisfechas por un estado $w$ en un modelo $\mathfrak{M}$. $\bullet$

Ahora, definiremos una manera de aproximar una bisimulación de manera finita.

**Definición 2.4.3** (n-Bisimulación)**.** Sea $\tau$ un tipo de semejanza modal y sean $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{M}'$ $\tau$-modelos y $w$ y $w'$ estados en $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{M}'$ respectivamente. Decimos que $w$ y $w'$ son $n$-bisimilares (Not: $w \rightleftarrows_n w'$) si existe una sucesión $Z_n \subseteq \cdots \subseteq Z_0$ de relaciones en $W \times W'$ tales que se cumple:

(i) $wZ_nw'$.

(ii) Si $vZ_0v'$, entonces $v$ y $v'$ cumplen los mismos átomos.

(iii) Si $vZ_{i+1}v'$ y $R_\triangle(v, v_1, \ldots, v_n)$, entonces existen $v'_1, \ldots, v'_n \in W'$ tales que $R'_\triangle(v', v'_1, \ldots, v'_n)$ y $v_jZ_iv'_j$ para toda $j$.

(iv) Si $vZ_{i+1}v'$ y $R'_\triangle(v', v'_1, \ldots, v'_n)$, entonces existen $v_1, \ldots, v_n \in W$ tales que $R_\triangle(v, v_1, \ldots, v_n)$ y $v_jZ_iv'_j$ para toda $j$.

Es claro que si $w \rightleftarrows w'$, entonces $w \rightleftarrows_n w'$ para toda $n$, pero el recíproco no es cierto. Veamos una definición que concierne a modelos con raíz y que nos ayudará tanto ahora, para probarlo, como después para seguir desarrollando los conceptos para la prueba de la propiedad del modelo finito.

**Definición 2.4.4** (Altura)**.** Sea $\tau$ un tipo de semejanza modal que sólo contenga diamantes y $\mathfrak{M} = (W, R_1, \ldots, R_n, \ldots, V)$ un modelo con raíz $w$. Definimos inductivamente la *altura* de un estado como sigue:

- $alt(w) = 0$ si y solo si $w$ es la raíz de $\mathfrak{M}$.
- $alt(w) = n+1$ si y solo si existe $v$ tal que $vR_iw$ para alguna $R_i$ y $alt(v) = n$ y a $w$ no se le ha asignado una altura menor a $n+1$.

La *altura del modelo* $\mathfrak{M}$ es el máximo $n$ tal que hay un estado con altura $n$ en $\mathfrak{M}$, si el máximo no existe, la altura de $\mathfrak{M}$ es infinita.

Para un número natural $k$, la restricción de $\mathfrak{M}$ a $k$ (Not: $\mathfrak{M} \upharpoonright k$) es el submodelo (no necesariamente da un submodelo generado) de $\mathfrak{M}$ que contiene solamente a los estados con altura a lo más $k$. Estictamente, $\mathfrak{M} \upharpoonright k = (W_k, R_{1k}, \dots, R_{nk}, \dots, V_k)$, donde $W_k = \{w \,|\, alt(w) \leq k\}$, $R_{ik} = R_i \cap (W_k \times W_k)$ y para cada $p \in \Phi$, $V_k(p) = V(p) \cap W_k$.

Esencialmente, la restricción de $\mathfrak{M}$ a $k$ nos da un submodelo en el que todos los puntos son alcanzables desde la raíz en a lo más $k$ pasos.

**Ejemplo 2.4.5.** Ahora sí, veamos que no necesariamente $w \rightleftarrows_n w'$ para toda $n$ implica $w \rightleftarrows w'$. Recordemos el ejemplo 2.2.5. Ya se probó que los estados $w$ y $w'$ de esos modelos no son bisimilares, pero ahora probemos que son $n$-bisimilares para toda $n$. Sea $n$ un natural, definimos

$$Z_i = \{(v, v') \,|\, alt(v) = alt(v') \leq n - i \text{ y } v \text{ y } v' \text{ están en una rama de longitud al menos } n\}$$

para cada $i \in \{0, \dots, n\}$. Nótese que efectivamente $Z_n \subseteq \cdots \subseteq Z_0$. Veamos que esta sucesión de relaciones en $W \times W'$ es una $n$-bisimulación que relaciona a $w$ con $w'$. Primero, es fácil ver que $wZ_nw'$ ya que $w$ y $w'$ tienen ambos altura cero y se encuentran en cualquier rama, por lo tanto se cumple la condición $(i)$ de la definición. La condición $(ii)$ se cumple trivialmente porque estamos trabajando con un conjunto vacío de proposiciones. Ahora, para la condición $(iii)$, si $vZ_{i+1}v'$ y $Rvu$, entonces $alt(u) \leq n - i$ y como $u$ está en la misma rama que $v$, entonces $u$ también está en una rama de longitud al menos $n$; además como $v'$ está en una rama de longitud al menos $n$ y $alt(v') \leq n - (i+1)$, entonces $v'$ tiene un $R'$-sucesor, digamos $u'$ que cumple que $alt(u') \leq n - i$ y $u'$ está en una rama de longitud al menos $n$ (la misma que $v'$), por lo tanto $uZ_iu'$ y $R'v'u'$. La prueba de la condición $(iv)$ es análoga. Esto muestra que $n$-bisimilitud para toda $n$ no implica bisimilitud.

Veamos ahora que para los lenguajes que tienen una cantidad finita de átomos, hay una correspondencia entre equivalencia modal y $n$-bisimilitud para toda $n$, pero primero una observación.

*Observación.* Sean, $\tau$ un tipo de semejanza modal, $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{M}'$ dos $\tau$-modelos y $w \in \mathfrak{M}$ y $w' \in \mathfrak{M}'$ estados. Si $w$ y $w'$ cumplen los mismos átomos y $\phi$ es una $\tau$-fórmula tal que $gr(\phi) = 0$, es decir, que $\phi$ no tiene operadore modales, entonces $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$ si y sólo si $\mathfrak{M}', w' \Vdash \phi$.

*Prueba.* Por inducción sobre $\phi$. Si $\phi$ es de la forma $p$ ($\phi \rightleftharpoons p$) para alguna $p \in \Phi$, trivialmente se da la equivalencia, igual que si $\phi \rightleftharpoons \bot$. Ahora veamos para los operadores booleanos: si $\phi \rightleftharpoons \neg\psi$, entonces $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$, si y solo si no $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$, por hipótesis de inducción, esto equivale a que no $\mathfrak{M}', w' \Vdash \psi$, y esto sucede si y solo si $\mathfrak{M}', w' \Vdash \phi$. Ahora, si $\phi \rightleftharpoons \psi \vee \chi$: $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$ si y solo si $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$ o $\mathfrak{M}, w \Vdash \chi$, por hipótesis de inducción, esto sucede si y solo si $\mathfrak{M}', w' \Vdash \psi$ o $\mathfrak{M}', w' \Vdash \chi$ y esto es equivalente a que $\mathfrak{M}', w' \Vdash \phi$. •

**Proposición 2.4.6.** *Sean, $\tau$ un tipo de semejanza modal finito, $\Phi$ el conjunto de átomos también finito. Y sean $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{M}'$ modelos para $LM(\tau, \Phi)$. Entonces para cualesquiera $w \in \mathfrak{M}$ y $w' \in \mathfrak{M}'$, los siguientes son equivalentes:*

*(i)* $w \rightleftarrows_n w'$,

*(ii)* *$w$ y $w'$ coinciden en todas las fórmulas modales de grado a lo más $n$.*

*Y así, '$n$-bisimilitud para toda $n$' y equivalencia modal coinciden como relaciones entre estados.*

*Prueba.* Procederemos por inducción sobre $n$ para demostrar $(i) \Rightarrow (ii)$. Para el caso en que $n = 0$, $w$ y $w'$ coinciden en las letras proposicionales y entonces por la observación anterior, $w$ y $w'$ coinciden en las fórmulas de grado 0. Suponemos que la implicación se cumple para $n$. Ahora supongamos que $w \rightleftarrows_{n+1} w'$ y $gr(\phi) \leq n+1$. Notemos que $w \rightleftarrows_{n+1}$ implica $w \rightleftarrows_m w'$ para toda $m \leq n+1$. Entonces si $gr(\phi) < n+1$ ya se da la equivalencia modal por hipótesis de inducción. Así, supongamos que $gr(\phi) = n+1$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\phi$ es de la forma $\triangle(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ con $gr(\phi_i) < n+1$.

($\Rightarrow$) Si $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$, entonces existen $w_1, \ldots, w_n$ tales que $R_\triangle(w, w_1, \ldots, w_n)$ y para toda $i$, $\mathfrak{M}, w_i \Vdash \phi_i$. Como $w \rightleftarrows_{n+1} w'$, entonces $wZ_{n+1}w'$ y como $R_\triangle(w, w_1, \ldots, w_n)$, entonces existen $v_1, \ldots, v_n \in W'$ tales que $R'_\triangle(w', v_1, \ldots, v_n)$ y $w_iZ_nv_i$ para toda $i$ (por las condiciones $(i)$ y $(iii)$ de $n$-bisimulación). Es fácil ver que $w_i \rightleftarrows_n v_i$ para toda $i$; y como $\mathfrak{M}, w_i \Vdash \phi_i$ para toda $i$, por hipótesis de inducción, $\mathfrak{M}', v_i \Vdash \phi_i$ para toda $i$ y por lo tanto, $\mathfrak{M}', w' \Vdash \triangle(\phi_1, \ldots, \phi_n)$.

($\Leftarrow$) La implicación recíproca es completamente análoga.

Ahora, para $(ii)$ implica $(i)$, adoptemos como notación que $w \leftrightsquigarrow_i w'$ quiere decir que $w$ y $w'$ coinciden en las fórmulas de grado a lo más $i$. Veremos que la relación $\leftrightsquigarrow_n$ es una $n$-bisimulación.

Definimos la relación $Z_i$ para toda $i \in \{0, \ldots, n\}$ como sigue:

$$Z_i = \{(v, v') \mid v \leftrightsquigarrow_i v'\}.$$

Es claro que $Z_n \subseteq \cdots \subseteq Z_0$. La condición $(i)$ de la definición 2.4.3 de $n$-bisimulación, se cumple por hipótesis ya que $w \leftrightsquigarrow_n w'$, y $(ii)$ se cumple trivialmente ya que $vZ_0v'$ quiere decir que $v$ y $v'$ coinciden en las fórmulas de grado cero, y éstas contienen a los átomos. Ahora, para $(iii)$, supongamos que $vZ_{i+1}v'$ y $R_\triangle(v, v_1, \ldots, v_n)$, y supongamos además, para proceder por contradicción, que no existe $n$-ada $(v'_1, \ldots, v'_n)$ de elementos de $\mathfrak{M}'$ tal que $R'(v', v'_1, \ldots, v'_n)$ y $v_j \leftrightsquigarrow_i v'_j$ para toda $j$. Consideremos entonces el conjunto $S' = \{(v'_1, \ldots, v'_n) \mid R'(v', v'_1, \ldots, v'_n)\}$ afirmamos que es no vacío, ya que si fuera vacío, entonces $\mathfrak{M}', v' \Vdash \triangledown(\bot, \ldots, \bot)$, y esto implicaría, por hipótesis que $\mathfrak{M}, v \Vdash \triangledown(\bot, \ldots, \bot)$, lo que sería una contradicción porque estamos suponiendo que $v$ sí tiene sucesores. Como sí existe $n$-ada tal que $R'_\triangle(v', v'_1, \ldots, v'_n)$, entonces no sucede que para toda $j$, $v_j \leftrightsquigarrow_i v'_j$. Sea $j$ tal que $(v_j, v'_j) \notin Z_i$, entonces existe $\phi_j$ fórmula modal tal que $gr(\phi_j) \leq i$ y $\mathfrak{M}, v_j \Vdash \phi_j$ y $\mathfrak{M}', v'_j \nVdash \phi_j$. Entonces tenemos que $gr(\triangle(\top, \ldots, \phi_j, \ldots, \top)) \leq i+1$ y es claro que $\mathfrak{M}, v \Vdash \triangle(\top, \ldots, \phi_j, \ldots, \top)$ pero $\mathfrak{M}', v' \nVdash (\top, \ldots, \phi_j, \ldots, \top)$ lo que contradice que $v \leftrightsquigarrow_{i+1} v'$. El caso de la condición $(iv)$ es análogo. Por lo tanto, $w \leftrightsquigarrow_n w'$.

•

Ahora, para seguir con la construcción y unificar lo que hemos estado trabajando, veremos un lema que da pie a la construcción.

**Lema 2.4.7.** *Sea $\tau$ un tipo de semejanza modal que solo contiene diamantes. Sea $\mathfrak{M}$ un $\tau$-modelo con raíz y $k$ un número natural. Entonces, para cada estado $w$ de $\mathfrak{M} \restriction k$, tenemos que $(\mathfrak{M} \restriction k), w \rightleftarrows_l \mathfrak{M}, w$ con $l = k - alt(w)$.*

*Prueba.* Sea $w$ en $\mathfrak{M} \restriction k$. Definimos una relación $Z_i = \{(v, v) \mid alt(v) \leq k - i\}$ por cada $i$ en $\{0, \ldots, l\}$. Es claro que $Z_l \subseteq \cdots \subseteq Z_0$, así que probaremos las otras cuatro condiciones de la definición 2.4.3 para ver que es una $l$- bisimulación. Para $(i)$, tenemos que $alt(w) = k - l$ entonces $wZ_lw$. Para $(ii)$, si $vZ_0v$, es claro que $v$ y $v$ cumplen los mismos átomos. Para $(iii)$, supongamos que $vZ_{i+1}v$ y $R'vu$ para alguna $R'$ de $\mathfrak{M} \restriction k$, sabemos que $alt(v) \leq k - (i+1)$ entonces $alt(u) \leq k - (i+1) + 1 = k - i$, entonces existe $u'$ a saber $u' = u$ tal que $Rvu$ y $uZ_iu$. Por último para $(iv)$, supongamos que $vZ_{i+1}v$ y que $Rvu$ para alguna $R$ de $\mathfrak{M}$, entonces como

$alt(v) \leq k-(i+1)$, tenemos que $alt(u) \leq k-i$ y además como $i+1>0$, $u \in (\mathfrak{M} \upharpoonright k)$, y así existe $u'$ a saber $u' = u$ tal que $R'vu$ y $uZ_iu$. Por lo tanto, $(\mathfrak{M} \upharpoonright k), w \rightleftarrows_l \mathfrak{M}, w$. •

**Teorema 2.4.8** (Propiedad del Modelo Finito - Por selección). *Sea $\tau$ un tipo de semejanza modal que solo contenga diamantes, y sea $\phi$ una $\tau$-fórmula. Si $\phi$ es satisfacible, es satisfacible en un modelo finito.*

*Prueba.* Sea $\phi$ una $\tau$-fórmula y sea $gr(\phi) = k$. Primero restringimos $\tau$ y $\Phi$ a los operadores modales y átomos que ocurren en $\phi$, así ya trabajamos con un lenguaje con tipo de semejanza y un conjunto de átomos finitos.

Sean $\mathfrak{M}$ y $w$ tales que $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$, esto porque $\phi$ es satisfacible. Entonces existe, por la proposición 2.1.16, $\mathfrak{M}_1$ con raíz $w_1$ tal que $\mathfrak{M}_1, w_1 \Vdash \phi$. Así, sea $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_1 \upharpoonright k$, entonces por el lema 2.4.7 tenemos que $\mathfrak{M}_2, w_1 \leftrightarrows_k \mathfrak{M}_1, w_1$ ya que $alt(w_1) = 0$. Como $\phi$ es de grado k, por la proposición 2.4.6 tenemos que $\mathfrak{M}_2, w_1 \Vdash \phi$.

Definimos de manera inductiva para $n \leq k$ conjuntos finitos de estados $S_0, \ldots, S_k$:

·) $S_0 = \{w_1\}$

·) Para $S_{n+1}$: Sea $v \in S_n$ Por la proposición 2.4.2. hay una cantidad finita de fórmulas de grado a lo más $k$, sean estas $\psi_1, \ldots, \psi_m$. Para cada fórmula de estas que sea de la forma $\langle a \rangle \chi$ (para algún operador modal $\langle a \rangle$ de $\tau$ restringido) y tal que $\mathfrak{M}_2, v \Vdash \langle a \rangle \chi$, escójase un estado $u \in \mathfrak{M}_2$ tal que $vR_au$ y $\mathfrak{M}_2, u \Vdash \chi$. Agréguense todos los estados $u$ de este tipo,a $S_{n+1}$, y esto para todo $v \in S_n$. Entonces $S_{n+1}$ resulta de todos los puntos seleccionados de esta manera. $S_{n+1}$ es finito por construcción.

Finalmente, $\mathfrak{M}_3$ se define como sigue: $dom(\mathfrak{M}_3) = S_0 \cup S_1 \cup \cdots \cup S_k$ y las relaciones y valuación de $\mathfrak{M}_3$ son las de $\mathfrak{M}_2$ restringidas al dominio de $\mathfrak{M}_3$. Es claro que $\mathfrak{M}_3$ es finito por la manera en que se construyó.

Sólo falta ver que $\mathfrak{M}_3, w_1 \leftrightarrows_k \mathfrak{M}_2, w_1$ pero es claro si definimos una relación $Z$ entre $\mathfrak{M}_2$ y $\mathfrak{M}_3$ como: $Z = \{(v,v) \mid alt(v) \leq k-i\}$ para $i \in \{0, \ldots, k\}$. Y así, $\mathfrak{M}_3, w_1 \Vdash \phi$, como queríamos probar. •

Sin embargo, este método tiene una desventaja que se presenta cuando el modelo que tenemos cumple propiedades relacionales importantes, porque el modelo resultante siempre es de tipo árbol, entonces las propiedades de las relaciones casi siempre se pierden. Viéndolo de esta manera, en la práctica es más difícil utilizar este método que el de filtraciones, que veremos a continuación.

### Filtraciones

Esta es la manera clásica de construir modelos finitos, y la diferencia con la que vimos anteriormente es que en la selección, se desechan los estados que no tienen información útil, y al hacer una filtración, identificaremos como uno, la mayor cantidad de estados posible.

**Definición 2.4.9.** Sea $\tau$ un tipo de semejanza modal. Decimos que un conjunto $\Sigma$ es *cerrrado bajo subfórmulas* si para toda $\tau$-fórmula $\phi \in \Sigma$, $Sf(\phi) \subseteq \Sigma$, donde $Sf(\phi)$ es el conjunto del subfórmulas de $\phi$ definido en 1.1.5.

**Definición 2.4.10.** Sean, $\tau$ un tipo de semejanza modal, $\mathfrak{M} = (W, R_\triangle, V)_{\triangle\in\tau}$ un $\tau$-modelo y $\Sigma$ un conjunto de $\tau$-fórmulas cerrado bajo subfórmulas.
Sea $\leftrightsquigarrow_\Sigma$ la relación en $W$ definida como:

$w \leftrightsquigarrow_\Sigma v$ si y solo si para toda $\phi$ en $\Sigma$, $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi \Leftrightarrow \mathfrak{M}, v \Vdash \phi$.

Como $\leftrightsquigarrow_\Sigma$ es una relación de equivalencia, denotaremos a la clase de equivalencia del estado $w$ módulo $\leftrightsquigarrow_\Sigma$ como $|w|_\Sigma$ o más a menudo $|w|$, si no se presta a confusión. A la función que manda $w \longmapsto |w|$ se lle lama la función natural. Y sea $W_\Sigma = \{|w|_\Sigma \mid w \in W\}$.

Si hay un modelo $\mathfrak{M}^f_\Sigma = (W^f, R^f_\triangle, V^f)$ tal que:

*(i)* $W^f = W_\Sigma$.

*(ii)* Si $R_\triangle(w, v_1, \ldots, v_n)$ entonces $R^f_\triangle(|w|, |v_1|, \ldots, |v_n)$.

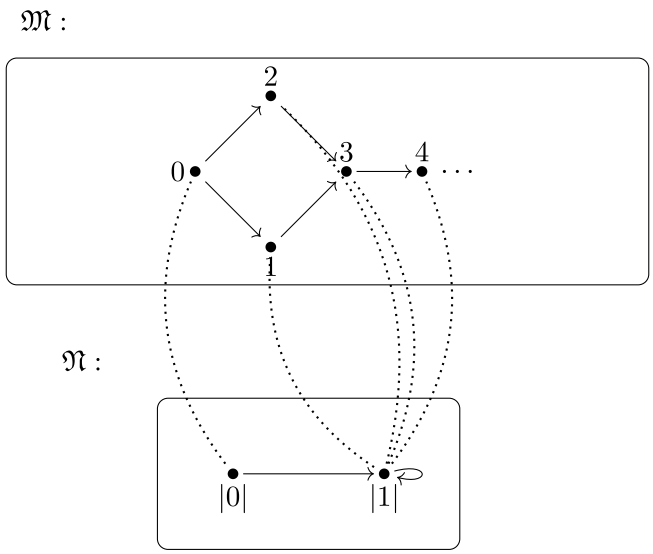
*(iii)* Si $R^f_\triangle(|w|, |v_1|, \ldots, |v_n|)$ entonces para todas $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \in \Sigma$, si $\triangle(\phi_1, \ldots, \phi_n) \in \Sigma$ y $\mathfrak{M}, v_i \Vdash \phi_i$, entonces $\mathfrak{M}, w \Vdash \triangle(\phi_1, \ldots, \phi_n)$.

*(iv)* $V^f(p) = \{|w| \mid \mathfrak{M}, w \Vdash p\}$ para toda letra proposicional $p \in \Phi$.

Entonces el modelo $\mathfrak{M}^f_\Sigma$ se llama la *$\tau$-filtración de $\mathfrak{M}$ por $\Sigma$*.

La condición $(ii)$ de la definición nos garantiza que la función natural es un homomorfismo, y por la condición $(iii)$ pareciera ser un morfismo acotado, pero no lo es ya que solamente se preservan las fórmulas del conjunto $\Sigma$ cerrado bajo subfórmulas.

**Ejemplo 2.4.11.** Consideremos en el lenguaje $LM(\tau_0, \Phi)$ con el conjunto $\Phi = \{p, q\}$, al modelo $\mathfrak{M} = (\mathbb{N}, R, V)$ donde $R = \{(0,1), (0,2), (1,3)\} \cup \{(n, n+1) \mid n > 1\}$ y $V$ es tal que $V(p) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $V(q) = \{2\}$. Sea $\Sigma = \{\Diamond p, p\}$, un conjunto claramente cerrado bajo subfórmulas. Entonces el modelo $\mathfrak{N} = (W, R', V')$, donde $W = \{|0|, |1|\}$, $R' = \{(|0|, |1|), (|1|, |1|)\}$ y $V'(p) = \{|1|\}$, es una filtración de $\mathfrak{M}$ por $\Sigma$. Como se ilustra en el siguiente dibujo:




En este ejemplo se muestra claramente por qué la filtración $\mathfrak{N}$ no es una imagen mórfica de $\mathfrak{M}$, ya que cualquier morfismo acotado tendría que preservar a la fórmula $q$ y la función natural no la preserva, pero no hay problema para ser una filtración porque $q$ no está en el conjunto $\Sigma$.

Ahora veremos que la filtración de un modelo es finita si el conjunto de fórmulas por el cual se filtra es finito.

**Proposición 2.4.12.** *Sea $\tau$ un tipo de semejanza modal y sea $\Sigma$ un conjunto finito de $\tau$-fórmulas cerrado bajo subfórmulas. Si $\mathfrak{M}$ es un $\tau$-modelo y $\mathfrak{M}^f$ es una filtración de $\mathfrak{M}$ por $\Sigma$, entonces $\mathfrak{M}^f$ contiene a lo más $2^{|\Sigma|}$ mundos (donde $|\Sigma|$ es el tamaño de $\Sigma$).*

*Prueba.* Definimos una función $g : W_\Sigma \longrightarrow \mathcal{P}(\Sigma)$ como

$g(|w|) = \{\phi \in \Sigma \mid \mathfrak{M}, w \Vdash \phi\}$. Esta función está bien definida porque si $v \in |w|$, entonces $g(|v|) = \{\phi \in \Sigma \mid \mathfrak{M}, v \Vdash \phi\}$ pero como $w, v \in |w|$ entonces $\mathfrak{M}, v \Vdash \phi$ si y sólo si $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$. Y es inyectiva porque si suponemos que $g(|w|) = g(|v|)$, entonces $\{\phi \in \Sigma \mid \mathfrak{M}, w \Vdash \phi\} = \{\phi \in \Sigma \mid \mathfrak{M}, v \Vdash \phi\}$ lo que implica que $\mathfrak{M}, v \Vdash \phi$ si y sólo si $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$ y por lo tanto, $|w| = |v|$.

Así, $|W_\Sigma| \leq |\mathcal{P}(\Sigma)| = 2^{|\Sigma|}$, de lo que concluimos que $|W_\Sigma|$ es finito si $\Sigma$ lo es. •

**Teorema 2.4.13** (Teorema de Filtración). *Sea $\tau$ un tipo de semejanza modal y sea el modelo $\mathfrak{M}^f = (W_\Sigma, R^f_\triangle, V^f)_{\triangle\in\tau}$ una filtración de un $\tau$-modelo $\mathfrak{M}$ por un conjunto $\Sigma$ cerrado bajo subfórmulas. Entonces para toda $\phi \in \Sigma$ y todo estado $w$ de $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$ si y solo si $\mathfrak{M}^f, |w| \Vdash \phi$.*

*Prueba.* Por inducción sobre $\phi$. Si $\phi$ es un átomo $p \in \Sigma$: $\mathfrak{M}, w, \Vdash p$ si y solo si $|w| \in V^f(p)$ por definición de $V^f$. Si $\phi$ es $\perp$, es inmediato.

Para el caso de las fórmulas booleanas es fácil de probar tomando en cuenta que el hecho de que $\Sigma$ sea cerrado bajo subfórmulas garantiza que podamos usar la hipótesis de inducción.

Si $\phi$ es de la forma $\triangle(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ y $\phi \in \Sigma$: si $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$, entonces existen $v_1, \ldots, v_n \in \mathfrak{M}$ tales que $R_\triangle(w, v_1, \ldots, v_n)$ y $\mathfrak{M}, v_i \Vdash \phi_i$ para toda $i$. Entonces por la condición $(ii)$ de la definición 2.4.10, tenemos que $R^f_\triangle(|w|, |v_1|, \ldots, |v_n|)$ y como toda $\phi_i$ es una subfórmula de $\phi$, entonces, $\phi_i \in \Sigma$, así que por hipótesis de inducción, $\mathfrak{M}^f, |v_i| \Vdash \phi_i$; por lo tanto $\mathfrak{M}^f, |w| \Vdash \phi$. Por último, suponiendo que $\mathfrak{M}^f, |w| \Vdash \phi$, implica que hay $|v_1|, \ldots, |v_n|$ tales que $R^f_\triangle(|w|, |v_1|, \ldots, |v_n|)$ y $\mathfrak{M}^f, |v_i| \Vdash \phi_i$. Como $\phi \in \Sigma$, entonces $\phi_1, \ldots, \phi_n \in \Sigma$, y por hipótesis de inducción, $\mathfrak{M}, v_i \Vdash \phi_i$. Y de esto, por la condición $(iii)$ de la definición 2.4.10, se deduce que $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$.

•

**Teorema 2.4.14** (Propiedad del Modelo Finito - Por Filtraciones). *Sean, $\tau$ un tipo de semejanza y $\phi$ una $\tau$-fórmula. Si $\phi$ es satisfacible, entonces $\phi$ es satisfacible en un modelo finito. Más aún, es satisfacible en un modelo que tiene a lo más $2^m$ estados, donde $m$ es el tamaño del conjunto de subfórmulas de $\phi$.*

*Prueba.* Sea $\phi$ una fórmula satisfacible y sean $\mathfrak{M}$ y $w$ un $\tau$-modelo y un mundo de éste tales que $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$. Sea $\Sigma = \{\psi \mid \psi \in Sf(\phi)\}$. Claramente $\Sigma$ es cerrado bajo subfórmulas y es finito, así que tomemos $\mathfrak{M}^f$ una filtración de $\mathfrak{M}$ por $\Sigma$. Sabemos por la proposición 2.4.12 que $\mathfrak{M}^f$ es finito y tiene a lo más $2^{|\Sigma|}$ estados. Y además por el teorema 2.4.13 sabemos que $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$ si y sólo si $\mathfrak{M}^f, |w| \Vdash \phi$, así que $\phi$ es satisfacible en un modelo con a lo más $2^{|\Sigma|}$ estados. •

*Nota* 2.4.15. Para lo que sigue de filtraciones nos restringiremos al lenguaje básico modal.

Es importante notar que a pesar de que ya hemos estado trabajando con filtraciones, no se ha probado que existan, porque la definición de filtración (def 2.4.10) solamente le pide cosas a las relaciones del modelo que será la filtración. Así que a continuación presentamos dos relaciones que dan lugar a filtraciones denominadas la más fina y la más gruesa, respectivamente:

(*i*) $R^s|w||v|$ si y solo si existe $w' \in |w|$ y existe $v' \in |v|$ tales que $Rw'v'$ (es la que da lugar a la *filtración más fina*).

(*ii*) $R^g|w||v|$ si y solo si para toda fórmula $\Diamond\phi \in \Sigma$: $\mathfrak{M}, v \Vdash \phi$ implica $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\phi$ (esta da lugar a la *filtración más gruesa*).

Probaremos ahora que en efecto estas relaciones generan filtraciones.

**Proposición 2.4.16.** *Sean, $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ un modelo del lenguaje básico modal y $\Sigma$ un conjunto de fórmulas modales cerrado bajo subfórmulas. $W_\Sigma$ el conjunto de clases de equivalencia inducido por $\leftrightsquigarrow_\Sigma$ y $V_f$ la valuación estándar en $W_\Sigma$.*

*Entonces, los modelos $\mathfrak{M}^s = (W_\Sigma, R^s, V^f)$ y $\mathfrak{M}^g = (W_\Sigma, R^g, V^f)$ son filtraciones de $\mathfrak{M}$ sobre $\Sigma$ y además si $\mathfrak{M}^f = (W_\Sigma, R^f, V^f)$ es cualquier filtración sobre $\Sigma$, entonces $R^s \subseteq R^f \subseteq R^g$.*

*Prueba.* Primero veamos que $\mathfrak{M}^s$ es una filtración: las condiciones (*i*) y (*iv*) de la definición 2.4.10 son triviales, para la condición (*ii*) supongamos que $Rvw$, como $w \in |w|$ y $v \in |v|$, entonces $R^s|w||v|$, y para (*iii*), supongamos que $R^s|w||v|$, $\phi \in \Sigma$, $\Diamond\phi \in \Sigma$ y $\mathfrak{M}, v \Vdash \phi$, como $R^s|w||v|$, entonces existen, $w' \in |w|$ y $v' \in |v|$ tales que $w'Rv'$. Como $v' \in |v|$, entonces $v' \leftrightsquigarrow_\Sigma v$ lo que implica que $\mathfrak{M}, v' \Vdash \phi$ y por lo tanto $\mathfrak{M}, w' \Vdash \Diamond\phi$ pero como $w' \in |w|$, entonces $w' \leftrightsquigarrow_\Sigma w$ y por lo tanto $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\phi$. Así, $\mathfrak{M}^s$ es una filtración de $\mathfrak{M}$ por $\Sigma$.

Para ver que $\mathfrak{M}^g$ es filtración, de igual manera (*i*) y (*iv*) son inmediatas. Para (*ii*), supongamos que $Rwv$ y sea $\Diamond\phi$ una fórmula tal que $\mathfrak{M}, v \Vdash \phi$, como $Rwv$, entonces $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\phi$ y por lo tanto, $R^g|w||v|$. La condición (*iii*) también es inmediata por la definición de $R^g$. Por lo tanto, $\mathfrak{M}^g$ es una filtración de $\mathfrak{M}$ por $\Sigma$.

Ahora, sea $\mathfrak{M}^f$ una filtración de $\mathfrak{M}$ por $\Sigma$. Supongamos que $(|w|, |v|) \in R^s$, es decir, $R^s wv$, entonces existe $w' \in |w|$ y $v' \in |v|$ tales que $Rw'v'$, como $\mathfrak{M}^f$ es filtración, entonces $R^f|w'||v'|$ pero como $|w'| = |w|$ y $|v'| = |v|$, entonces $R^f|w||v|$. Así, $R^s \subseteq R^f$. Ahora, si $R^f|w||v|$, entonces, para toda fórmula $\phi \in \Sigma$, si $\Diamond\phi \in \Sigma$ y $\mathfrak{M}, v \Vdash \phi$, entonces $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\phi$, esto claramente implica que $R^g|w||v|$. Por lo tanto $R^s \subseteq R^f \subseteq R^g$. •

Como se indicó anteriormente, las filtraciones son mucho mejores que el método de selección para respetar las propiedades de las relaciones. Es muy sencillo probar que para un modelo, las condiciones de reflexividad ($\forall x Rxx$) y serialidad ($\forall w \exists w'(Rww')$) se preservan bajo filtraciones. Pero no todas las propiedades se preservan bajo cualquier filtración, más bien tendremos que pensar en filtraciones especiales que preserven las propiedades que nos interesan. Por ejemplo la filtración más fina preserva la simetría. Veremos un ejemplo más.

**Ejemplo 2.4.17.** Sea $\mathfrak{M}$ un modelo del lenguaje básico modal y $\Sigma$ un conjunto de fórmulas modales cerrado bajo subfórmulas. Sea $W_\Sigma$ el conjunto de clases de equivalencia definidas por la relación $\leftrightsquigarrow_\Sigma$; definimos la relación $R^t \subseteq W_\Sigma \times W_\Sigma$ como:

$$R^t|w||v| \text{ si y sólo si para toda } \Diamond\phi, \text{ si } \phi \in \Sigma \text{ y } \mathfrak{M}, v \Vdash \phi \vee \Diamond\phi, \text{ entonces } \mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\phi$$

Veamos que $\mathfrak{M}^t = (W_\Sigma, R^t, V^f)$ es una filtración de $\mathfrak{M}$ y que además si $\mathfrak{M}$ es transitivo, entonces $\mathfrak{M}^t$ lo es.

Primero veamos que efectivamente $\mathfrak{M}^t$ es una filtración de $\mathfrak{M}$, como en los casos similares que ya probamos, las condiciones $(i)$ y $(iv)$ son triviales, para la $(ii)$, supongamos que $Rwv$, $\Diamond\phi \in \Sigma$ y que $\mathfrak{M}, v \Vdash \phi \vee \Diamond\phi$, si $\mathfrak{M}, v \Vdash \phi$ entonces es trivial que $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\phi$, en cambio si $\mathfrak{M}, v \Vdash \Diamond\phi$, entonces existe un $u \in W$ tal que $Rvu$ y $\mathfrak{M}, u \Vdash \phi$, pero como $\mathfrak{M}$ es transitivo, entonces $Rwu$ y $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\phi$, por lo tanto $R^t|w||v|$. Ahora, para $(iii)$, supongamos que $R^t|w||v|$ y sea $\phi \in \Sigma$ tal que $\Diamond\phi \in \Sigma$ y $\mathfrak{M}, v \Vdash \phi$, entonces $\mathfrak{M}, v \Vdash \phi \vee \Diamond\phi$, lo que implica que $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\phi$. Por lo tanto $\mathfrak{M}^t$ es una filtración de $\mathfrak{M}$.

Ahora supongamos que $\mathfrak{M}$ es transitivo, veamos que $\mathfrak{M}^t$ es transitivo. Sean $w, v, u \in W$ tales que $R^t|w||v|$ y $R^t|v||u|$. Sea $\phi$ tal que $\Diamond\phi \in \Sigma$ y $\mathfrak{M}, u \Vdash \phi \vee \Diamond\phi$, como $R^t|v||u|$, entonces tenemos que $\mathfrak{M}, v \Vdash \Diamond\phi$ y esto implica que $\mathfrak{M}, v \Vdash \phi \vee \Diamond\phi$ y como $R^t|w||v|$ entonces $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\phi$, con lo cual tenemos que $R^t|w||u|$.

En resumen, vimos dos maneras de construir modelos finitos que preservan la expresividad modal, es decir, que a partir de un modelo "grande", tenemos dos métodos para construir un modelo “pequeño” y que además satisface las mismas fórmulas.

## 2.5. Saturación modal y un primer resultado de bisimilitud en otro lugar

En esta sección presentamos una nueva herramienta para construir modelos a partir de los ya dados: la extensión a ultrafiltros. Primero veremos las clases de modelos con la propiedad de Hennessy-Milner y el concepto de modelos modalmente saturados; la extensión a ultrafiltros será la manera de construir modelos modalmente saturados. Esto después nos llevará al resultado central de la sección que es: *equivalencia modal implica bisimilitud en otro lugar (la extensión a un ultrafiltro).*

Ya sabemos que bisimilitud implica equivalencia modal (por el teorema 2.2.4) y que el recíproco no es necesariamente cierto, pero por el teorema 2.2.6 (de Hennessy-Milner), sabemos que es cierto en el caso de los modelos imagen-finitos. Ahora generalizaremos esa noción.

**Definición 2.5.1** (Clases de Hennessy-Milner)**.** Sean $\tau$ un tipo de semejanza modal y $\mathsf{K}$ una clase de $\tau$-modelos. Decimos que $\mathsf{K}$ es una *clase de Hennessy-Milner* o $\mathsf{K}$ *tiene la propiedad de Hennessy-Milner* si para cada par de modelos $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{M}'$ en $\mathsf{K}$, y cada par de mundos $w \in \mathfrak{M}$ y $w' \in \mathfrak{M}'$, si $w \leftrightsquigarrow w'$, entonces $w \rightleftarrows w'$.

De acuerdo con esta definición, la clase de los modelos imagen-finitos, es una clase de Hennessy-Milner. El concepto de saturación modal (o *m-saturación*, para hacerlo más corto), es una generalización del concepto de ser imagen-finito.

En el lenguaje básico modal, sea $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ un modelo y sea $w$ un estado del modelo. Supongamos que $\Sigma = \{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots\}$ es un conjunto infinito de fórmulas tales que si $\{w_0, w_1, \dots\}$ son los sucesores de $w$, en $w_i$ se satiface $\bigwedge_{i=0}^{n} \phi_i$. Y si no hay un sucesor $v$ de $w$ tal que en $v$ se satisfagan todas las fórmulas al mismo tiempo, entonces el modelo está de cierta manera incompleto. Esto es lo que se trata de evitar con la definición de m-saturación.

*Nota* 2.5.2. En el lenguaje básico modal, si $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ es un modelo, $X \subseteq W$ y $\Sigma$ un conjunto de fórmulas. Decimos que $\Sigma$ es satisfacible en el conjunto $X$ si existe $u \in X$ tal que $\mathfrak{M}, u \Vdash \Sigma$.

Y decimos que $\Sigma$ es finitamente satisfacible en el conjunto $X$ si todo subconjunto finito de $\Sigma$ es satisfacible en $X$.

**Definición 2.5.3** (M-saturación)**.** Sea $\tau$ un tipo de semejanza modal y sea $\mathfrak{M} = (W, R_\triangle, V)_{\triangle\in\tau}$ un $\tau$-modelo, decimos que $\mathfrak{M}$ es m-saturado si para todo estado $w$ de $\mathfrak{M}$ y para todo $\triangle \in \tau$ y toda secuencia $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ de conjuntos de fórmulas modales se cumple que:

Si para toda secuencia de subconjuntos finitos $\Delta_1 \subseteq \Sigma_1, \Delta_2 \subseteq \Sigma_2, \ldots, \Delta_n \subseteq \Sigma_n$, hay mundos $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tales que $R_\triangle(w, v_1, \ldots, v_n)$ y $\mathfrak{M}, v_1 \Vdash \Delta_1, \ldots, \mathfrak{M}, v_n \Vdash \Delta_n$ entonces existen estados $v_1, v_2, \ldots, v_n$ de $\mathfrak{M}$ tales que $R_\triangle(w, v_1, \ldots, v_n)$ y $\mathfrak{M}, v_1 \Vdash \Sigma_1, \ \ldots, \ \mathfrak{M}, v_n \Vdash \Sigma_n$.

En el lenguaje básico modal la definición anterior queda un poco más sencilla de asimilar.

**Definición 2.5.4** (M-saturación en el lenguaje básico modal)**.** Sea $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ un modelo del lenguaje básico, y sea $\Sigma$ un conjunto de fórmulas. El modelo $\mathfrak{M}$ es m-saturado si para todo estado $w \in W$ se satisface:

Si $\Sigma$ es finitamente satisfacible en el conjunto de sucesores de $w$, entonces $\Sigma$ es satisfacible en el conjunto de sucesores de $w$.

La clase de modelos saturados es de Hennessy-Milner. Lo vemos en la siguiente proposición.

**Proposición 2.5.5.** *Sea $\tau$ un tipo de semejanza modal. La clase de los $\tau$-modelos m-saturados tiene la propiedad de Hennesy-Milner.*

*Prueba.* Sean $\mathfrak{M} = (W, R_\triangle, V)_{\triangle\in\tau}$ y $\mathfrak{M}' = (W', R'_\triangle, V')_{\triangle\in\tau}$ $\tau$-modelos m-saturados tales que $\mathfrak{M} \leftrightsquigarrow \mathfrak{M}'$. Hay que probar que existe una bisimulación entre $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{M}'$, en este caso será la misma relación $\leftrightsquigarrow$.

La condición $(i)$ de la definición 2.2.1 (de bisimulación) es trivial, ya que cualesquiera dos estados que sean modalmente equivalentes, en particular satisfacen los mismos átomos. Probaremos ahora la *condición hacia adelante*: sean $w \in \mathfrak{M}$ y $w' \in \mathfrak{M}'$ tales que $w \leftrightsquigarrow w'$ y sean $u_1, \ldots, u_n \in \mathfrak{M}$ tales que $R_\triangle(w, u_1, \ldots, u_n)$. Definimos, para cada $i$, el conjunto
$\Sigma_i = \{\phi \,|\, \mathfrak{M}, u_i \Vdash \phi\}$. Es claro que para toda sucesión $\Delta_1 \subseteq \Sigma_1, \ldots, \Delta_n \subseteq \Sigma_n$ de subconjuntos finitos, $\mathfrak{M}, u_i \Vdash \Delta_i$ (para toda $1 \leq n$) y por tanto, $\mathfrak{M}, u_i \Vdash \bigwedge \Delta_i$(para toda $1 \leq n$). Entonces, por la definición 1.3.8 de satisfacción, tenemos que $\mathfrak{M}, w \Vdash \triangle(\bigwedge \Delta_1, \ldots, \bigwedge \Delta_n)$, y como por hipótesis, $w \leftrightsquigarrow w'$, entonces, $\mathfrak{M}', w' \Vdash \triangle(\bigwedge \Delta_1, \ldots, \bigwedge \Delta_n)$. Por tanto, para cada secuencia de subconjuntos finitos $\Delta$, existen $v'_{1_\Delta}, \ldots, v'_{n_\Delta} \in \mathfrak{M}'$, tales que $\mathfrak{M}', v'_{i_\Delta} \Vdash \bigwedge \Delta_i$ y $R_\triangle(w', v'_{1_\Delta}, \ldots, v'_{n_\Delta})$. Y

por la m-saturación de $\mathfrak{M}'$, hay $v'_1, \ldots, v'_n \in \mathfrak{M}'$ tales que $R_\triangle(w', v'_1, \ldots, v'_n)$ y $\mathfrak{M}', v'_i \Vdash \Sigma_i$, es decir que $v_i \leftrightsquigarrow v'_i$, lo que prueba la condición hacia adelante.

La *condición hacia atrás* es completamente análoga. •

## Extensión a Ultrafiltros

La *extensión a ultrafiltros* es una nueva manera de construir modelos. Será, de hecho, la manera de construir modelos m-saturados, o equivalentemente, que tengan la propiedad de Hennessy-Milner, por la prop 2.5.5. Esencialmente, la extensión a ultrafiltros lo que hace es añadir estados al modelo para hacerlo m-saturado.

**Definición 2.5.6.** Sea $\tau$ un tipo de semejanza modal y sea $\mathfrak{F} = (W.R_\triangle)_{\triangle \in \tau}$ un $\tau$-frame. Para cada relación $R_\triangle$ del frame, definimos las operaciones $m_\triangle$ y $m^\delta_\triangle$ en la potencia de $W$, $\mathcal{P}(W)$, como:

$$m_\triangle(X_1, \ldots, X_n) = \{w \in W | \text{ existen } w_1, \ldots, w_n \text{ tales que } R_\triangle(w, w_1, \ldots, w_n) \text{ y } w_i \in X_i \text{ para toda } i\}$$

$$m^\delta_\triangle(X_1, \ldots, X_n) = \{w \in W | \text{ para todos } w_1, \ldots, w_n, \text{ si } R_\triangle(w, w_1, \ldots, w_n) \text{ entonces hay un } i \text{ tal que } w_i \in X_i\}$$

En el lenguaje básico, las operaciones quedan definidas como sigue:

$m_\Diamond(X) = \{w \in W | \text{ existe } v \text{ tal que } Rwv \text{ y } v \in X\}$, que se puede interpretar como el conjunto de mundos que pueden ver a los estados de $X$.

$m^\delta_\Diamond(X) = \{w \in W | \text{ para todo } v, \text{ si } Rwv, \text{ entonces } v \in X\}$, que se interpreta como el conjunto de mundos que solo ven estados de $X$.

Y con respecto a esto, y a la valuación de un $\tau$-modelo $\mathfrak{M} = (W, R_\triangle, V)_{\triangle \in \tau}$, vale la pena hacer la siguiente proposición:

**Proposición 2.5.7.** *Sean, $\tau$ un tipo de semejanza modal y $\mathfrak{M} = (W, R_\triangle, V)_{\triangle \in \tau}$ un $\tau$-modelo. Entonces:*

$(i)$ $V(\neg\phi) = W \setminus V(\phi)$

$(ii)$ $V(\phi \wedge \psi) = V(\phi) \cap V(\psi)$

$(iii)$ $V(\phi \vee \psi) = V(\phi) \cup V(\psi)$

$(iv)$ $V(\triangle(\phi_1, \ldots, \phi_n)) = m_\triangle(V(\phi_1), \ldots, V(\phi_n))$

$(v)$ $V(\nabla(\phi_1, \ldots, \phi_n)) = m^\delta_\triangle(V(\phi_1), \ldots, V(\phi_n))$

*Prueba.* La prueba para todos los incisos es similar y son casi inmediatas, así que solo probaremos $(i)$ y $(iv)$: para $(i)$, tenemos que $V(\neg\phi) = \{w \in W | \mathfrak{M}, w \Vdash \neg\phi\} = \{w \in W | \mathfrak{M}, w \nVdash \phi\} = W \setminus V(\phi)$. Y para $(iv)$, $V(\triangle(\phi_1, \ldots, \phi_n)) = \{w \in W | \mathfrak{M}, w \Vdash \triangle(\phi_1, \ldots, \phi_n)\} = \{w \in W |$ existen $v_1, \ldots, v_n$ tales que $R_\triangle(w, v_1, \ldots, v_n)$ y para toda $i, \mathfrak{M}, v_i \Vdash \phi_i\} = \{w \in W |$ existen $v_1, \ldots, v_n$ tales que $R_\triangle(w, v_1, \ldots, v_n)$ y para toda $i$, $v_i \in V(\phi_i)\} = m_\triangle(V(\phi_1), \ldots, V(\phi_n))$. •

Además tenemos que $m_\triangle$ y $m^\delta_\triangle$ son duales en el sentido que establece la siguiente proposición.

**Proposición 2.5.8.** *Sean, $\tau$ un tipo de semejanza y $\mathfrak{F} = (W, R_\triangle)_{\triangle\in\tau}$ un $\tau$-frame. Para cada operador modal $\triangle \in \tau$ y cada $n$-ada de subconjuntos de $W$, $X_1, \ldots, X_n$, tenemos que:*

$$m^\delta_\triangle(X_1, \ldots, X_n) = W \setminus m_\triangle(W \setminus X_1, \ldots, W \setminus X_n).$$

*Prueba.* $W \setminus m_\triangle(W \setminus X_1, \ldots, W \setminus X_n) = \{w \in W |$ no existen $v_1, \ldots, v_n$ tales que $R_\triangle(w, v_1, \ldots, v_n)$ y para toda $i$, $w_i \in W \setminus X_i\} = \{w \in W |$ para todos $v_1, \ldots, v_n$ si $R_\triangle(w, v_1, \ldots, v_n)$, entonces $w_i \notin W \setminus X_i$ para toda $i\} = \{w \in W |$ para todos $v_1, \ldots, v_n$ si $R_\triangle(w, v_1, \ldots, v_n)$, entonces $w_i \in X_i$ para alguna $i\} = m^\delta_\triangle(X_1, \ldots, X_n)$. •

Ahora sí, definimos la extensión a ultrafiltros. Los mundos de la extensión serán los ultrafiltros sobre el dominio del modelo original.

**Definición 2.5.9** (Extensión a Ultrafiltros)**.** Sean, $\tau$ un tipo de semejanza modal y $\mathfrak{F} = (W, R_\triangle)_{\triangle\in\tau}$ un $\tau$- frame. La *extensión a ultrafiltros* $\mathfrak{ue}\mathfrak{F}$ de $\mathfrak{F}$ se define como el frame $\mathfrak{ue}\mathfrak{F} = (Uf(W), R^{ue}_\triangle)_{\triangle\in\tau}$, donde $Uf(W)$ es el conjunto de todos los ultrafiltros sobre $W$ y $R^{ue}_\triangle(w_0, w_1, \ldots, w_n)$ si y solo si $m_\triangle(X_1, \ldots, X_n) \in w_0$ siempre que $X_i \in w_i$ para toda $i$.

Y la extensión a ultrafiltros de un modelo $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$ es el modelo $\mathfrak{ue}\mathfrak{M} = (\mathfrak{ue}\mathfrak{F}, V^{ue})$ donde para toda $p \in \Phi$, $V^{ue}(p)$ es el conjunto de ultrafiltros tales que $V(p)$ es un elemento.

Recordemos a los *ultrafiltros principales* sobre un conjunto $W$. Sea $w$ un elemento de $W$, el *ultrafiltro principal* $\pi_w$ *generado por* $w$ es el filtro generado por el conjunto unitario $\{w\}$, que es $\pi_w = \{X \subseteq W \mid w \in X\}$. Es fácil ver que $\pi_w$ es ultrafiltro: que es filtro es claro porque $w \in W$ implica que $w \in \pi_w$; ahora, si $X, Y \in \pi_w$, entonces $w \in X$ y $w \in Y$, y entonces $w \in X \cap Y$, lo que implica que $X \cap Y \in \pi_w$; luego, si $X \in \pi_w$ y $X \subseteq Z \subseteq W$, entonces como $w \in X$, $w \in Z$, entonces $Z \in \pi_w$. Por lo tanto $\pi_w$ es filtro, luego es propio porque no contiene al vacío, y finalmente, $X \in \pi_w$ si y solo si $w \in X$, si y solo si $w \notin (W \setminus X)$ y esto equivale a que $(W \setminus X) \notin \pi_w$.

Si consideramos la función $f : \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{ue}\mathfrak{F}$ tal que $f(w) = \pi_w$, podemos ver fácilmente que es un homomorfismo fuerte, ya que:

$R_\triangle(w_0, w_1, \ldots, w_n)$ es equivalente a que existan $v_1, \ldots, v_n$ tales que $R_\triangle(w_0, v_1, \ldots, v_n)$ y $v_i \in X_i$ para toda $i$ y para todos $X_1, \ldots, X_n \subseteq W$ tales que $w_i \in X_i$ (a saber los mismos $w_1, \ldots, w_n$) $w_0 \in m_\triangle(X_1, \ldots, X_n)$ para todos $X_1, \ldots, X_n \subseteq W$ tales que $w_i \in X_i$, y esto sucede si y solo si $m_\triangle(X_1, \ldots, X_n) \in \pi_{w_0}$ para todos $X_1, \ldots, X_n \subseteq W$ tales que $X_i \in \pi_{w_i}$, y por definición de $R^{ue}$, esto es que $R^{ue}(\pi_{w_0}, \pi_{w_1}, \ldots, \pi_{w_n})$.

Y es inyectivo, por lo tanto, $\mathfrak{F}$ es isomorfo a un submodelo (no necesariamente un submodelo generado) de $\mathfrak{ue}\mathfrak{F}$.

*Nota* 2.5.10. A partir de este momento, en esta sección nos restringiremos al lenguaje básico modal.

**Lema 2.5.11.** *Sean, $\tau_0$ el tipo de semejanza del lenguaje básico modal, $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ un $\tau_0$-modelo y $u$ y $v$ ultrafiltros sobre $W$. Entonces $R^{ue}(u, v)$ si y solo si $\{Y \mid m_\Diamond^\delta(Y) \in u\} \subseteq v$.*

*Prueba.* Sabemos que $R^{ue}(u, v)$ equivale a que, si $X \in v$ entonces $m_\Diamond(X) \in u$. Supongamos ahora que $\{Y \mid m_\Diamond^\delta(X) \in u\} \subseteq v$. Entonces sea $X \in v$, y supongamos que $m_\Diamond(X) \notin u$, pero tenemos que $m_\Diamond(X) = W \setminus m_\Diamond^\delta(W \setminus X)$ (por la proposición 2.5.8), entonces $m_\Diamond^\delta(W \setminus X) \in u$, lo que implica que $(W \setminus X) \in v$, y esto implica que $X \notin v$, lo cual es una contradicción. Por lo que $m_\Diamond(X) \in u$ implica que $R^{ue}uv$.

Ahora, suponiendo que $R^{ue}uv$, sea $X \in \{Y \mid m^{\delta}_{\Diamond}(Y) \in u\}$ entonces $m^{\delta}_{\Diamond}(X) \in u$, lo que implica que $W \setminus (m_{\Diamond}(W \setminus X)) \in u$, entonces $m_{\Diamond}(W \setminus X) \notin u$ y como $R^{ue}uv$, entonces $W \setminus X \notin v$ lo que implica que $X \in v$. Por lo tanto $\{Y \mid m^{\delta}_{\Diamond}(Y) \in u\} \subseteq v$. •

**Proposición 2.5.12.** *Sea $\tau$ un tipo de semejanza modal y sea $\mathfrak{M}$ un $\tau$-modelo. Para toda fórmula $\phi$ y todo ultrafiltro $u$ sobre $W$, el dominio de $\mathfrak{M}$, $V(\phi) \in u$ si y solo si $\mathfrak{ue}\mathfrak{M}, u \Vdash \phi$. Por consiguiente, para todo estado $w$ de $\mathfrak{M}$, tenemos que $w \leftrightsquigarrow \pi_w$.*

*Prueba.* Que $V(\phi) \in u$ si y solo si $\mathfrak{ue}\mathfrak{M}, u \Vdash \phi$, lo probaremos por inducción sobre $\phi$. Primero, si $\phi$ es un átomo $p \in \Phi$, es claro por la definición de $V^{ue}$ ($V(p) \in u$ si y solo si $u \in V^{ue}(p)$). Si $\phi$ es una fórmula booleana, es sencillo, así que sólo probaremos el caso de la negación para ilustrarlo: si $\phi$ es de la forma $\neg\psi$, $V(\neg\psi) \in u$ por la proposición 2.5.7, esto equivale a que $(W \setminus V(\psi)) \in u$, y esto si y solo si $V(\psi) \notin u$, lo que por hipótesis de inducción es equivalente a que $\mathfrak{ue}\mathfrak{M}, u \nVdash \psi$, y esto sucede si y solo si $\mathfrak{ue}\mathfrak{M}, u \Vdash \neg\psi$.

Ahora, el caso en el que $\phi$ es de la forma $\Diamond\psi$ requiere un poco más de trabajo. Primero supongamos que $\mathfrak{ue}\mathfrak{M}, u \Vdash \Diamond\psi$, entonces existe $u'$ ultrafiltro sobre $W$ tal que $\mathfrak{ue}\mathfrak{M}, u' \Vdash \psi$ y $R^{ue}uu'$, entonces, por hipótesis de inducción, $V(\psi) \in u'$ y como $R^{ue}uu'$ entonces $m_{\Diamond}(V(\psi)) \in u$ pero $m_{\Diamond}(V(\psi)) = V(\Diamond\psi)$, entonces $V(\Diamond\psi) \in u$.

Ahora, supongamos que $V(\Diamond\psi) \in u$. Consideremos el conjunto $u'_0 := \{Y \mid m^{\delta}_{\Diamond}(Y) \in u\}$, veamos que es cerrado bajo intersección: sean $Y, Z \in u'_0$, tenemos que $m^{\delta}_{\Diamond}(Y) \in u$ y $m^{\delta}_{\Diamond}(Z) \in u$ entonces, como $u$ es filtro, $m^{\delta}_{\Diamond}(Y) \cap m^{\delta}_{\Diamond}(Z) \in u$, es fácil ver que $m^{\delta}_{\Diamond}(Y) \cap m^{\delta}_{\Diamond}(Z) = m^{\delta}_{\Diamond}(X \cap Y)$, así que $m^{\delta}_{\Diamond}(X \cap Y) \in u$ y por lo tanto $Y \cap Z \in u'_0$.

Veremos ahora que para cualquier $Y \in u'_0$, $Y \cap V(\psi) \neq \emptyset$: sea $Y \in u'_0$, entonces $m^{\delta}_{\Diamond}(Y) \in u$. Como $u$ es cerrado bajo intersecciones y no contiene al vacío, existe $x \in m^{\delta}_{\Diamond}(Y) \cap V(\Diamond\psi)$, entonces $x$ debe tener un sucesor en $V(\psi)$, digamos $y$. Pero como $x \in m^{\delta}_{\Diamond}(Y)$, entonces $y \in Y$, por lo tanto existe $y \in Y \cap V(\psi)$.

Como ya vimos que $u'_0$ es cerrado bajo intersecciones y para cualquier $Y \in u'_0$, $Y \cap V(\psi) \neq \emptyset$ entonces el conjunto $u'_0 \cup \{V(\psi)\}$ tiene la propiedad de la intersección finita (PIF, véase A.3.3). Y por lo tanto existe $u'$ ultrafiltro tal que $u'_0 \cup \{V(\psi)\} \subseteq u'$, entonces por el lema 2.5.11 $u'$ es sucesor de $u$, i.e $R^{ue}uu'$, y como $V(\psi) \in u'$, por hipótesis de inducción, $\mathfrak{ue}\mathfrak{M}, u' \Vdash \psi$. Por lo tanto, $\mathfrak{ue}\mathfrak{M}, u \Vdash \Diamond\psi$.

Por último, probemos que $w \leftrightsquigarrow \pi_w$: $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$ si y solo si $w \in V(\phi)$ si y solo si $V(\phi) \in \pi_w$, por lo anterior esto equivale a que $\mathfrak{ue}\mathfrak{M}, \pi_w \Vdash \phi$. $\bullet$

**Proposición 2.5.13.** *Sean, $\tau$ un tipo de semejanza modal y $\mathfrak{M}$ un $\tau$-modelo. Entonces $\mathfrak{ue}\mathfrak{M}$ es m-saturado.*

*Prueba.* La prueba se realizará solo para el lenguaje básico modal. Consideremos al modelo $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ del leguaje básico. Consideremos $u \in Uf(W)$ (un estado de $\mathfrak{ue}\mathfrak{M}$ y $\Sigma$ un conjunto de fórmulas modales que es finitamente satisfacible en el conjunto de sucesores de $u$. Definimos el conjunto:

$$\Delta = \{V(\phi) \,|\, \phi \in \Sigma'\} \cup \{Y \,|\, m_{\Diamond}^{\delta}(Y) \in u\}$$

donde $\Sigma'$ es el conjunto de conjunciones finitas de fórmulas en $\Sigma$.

*Afirmación* 1. $\Delta$ tiene la PIF.

Es claro que $\{V(\phi) \,|\, \phi \in \Sigma'\}$ y $\{Y \,|\, m_{\Diamond}^{\delta}(Y) \in u\}$ son cerrados bajo intersección. Falta ver que para cualesquiera $\phi \in \Sigma'$ y $Y \subseteq W$ tal que $m_{\Diamond}^{\delta}(Y) \in u$, se cumple que $V(\phi) \cap Y \neq \emptyset$: si $\phi \in \Sigma'$, por la forma en que está definido $\Sigma$, existe $u''$ sucesor de $u$ tal que $\mathfrak{ue}\mathfrak{M}, u'' \Vdash \phi$ y esto pasa si y solo si $V(\phi) \in u''$ (por la proposición 2.5.12). Luego $m_{\Diamond}^{\delta}(Y) \in u$ y por el lema 2.5.11, se concluye que $Y \in u''$. Así, tenemos que $V(\phi) \cap Y \in u''$ y como $u''$ no contiene al vacío, $V(\phi) \cap Y \neq \emptyset$ y esto prueba la afirmación.

Por el teorema del ultrafiltro, $\Delta$ se puede extender a un ultrafiltro $u'$, y por el lema 2.5.11, es sucesor de $u$ y es claro que satisface a $\Sigma$.

$\bullet$

Ahora ya tenemos todo lo necesario para probar el resultado fuerte de esta sección. Ya tenemos la proposición 2.5.12 que es un resultado de invarianza de fórmulas modales bajo extensiones a ultrafiltros, y la proposición 2.5.13 que establece que la extensión a ultrafiltros es modalmente saturada. Si combinamos estos resultados obtenemos:

**Teorema 2.5.14.** *Sean, $\tau$ un tipo de semejanza modal, $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{M}'$ $\tau$-modelos y $w$ y $w'$ mundos de $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{M}'$ respectivamente. Entonces*

$$\mathfrak{M}, w \leftrightsquigarrow \mathfrak{M}', w' \quad \textit{si y sólo si} \quad \mathfrak{ue}\mathfrak{M}, \pi_w \rightleftarrows \mathfrak{ue}\mathfrak{M}', \pi_{w'}$$

.

*Prueba.* Si $\mathfrak{M}, w \leftrightsquigarrow \mathfrak{M}', w'$, por la proposición 2.5.12, tenemos que $\mathfrak{M}, w \leftrightsquigarrow \mathfrak{ue}\mathfrak{M}, \pi_w$ y $\mathfrak{M}', w' \leftrightsquigarrow \mathfrak{ue}\mathfrak{M}', \pi_{w'}$, entonces $\mathfrak{ue}\mathfrak{M}, \pi_w \leftrightsquigarrow \mathfrak{ue}\mathfrak{M}', \pi_{w'}$ y por las proposiciones 2.5.13 y 2.5.5, se cumple que $\mathfrak{ue}\mathfrak{M}, \pi_w \rightleftarrows \mathfrak{ue}\mathfrak{M}', \pi_{w'}$. Y recíprocamente, si $\mathfrak{ue}\mathfrak{M}, \pi_w \rightleftarrows \mathfrak{ue}\mathfrak{M}', \pi_{w'}$, sabemos que $\mathfrak{ue}\mathfrak{M}, \pi_w \leftrightsquigarrow \mathfrak{ue}\mathfrak{M}', \pi_{w'}$ y como $\mathfrak{M}, w \leftrightsquigarrow \mathfrak{ue}\mathfrak{M}, \pi_w$ y $\mathfrak{M}', w' \leftrightsquigarrow \mathfrak{ue}\mathfrak{M}', \pi_{w'}$, por lo tanto $\mathfrak{M}, w \leftrightsquigarrow \mathfrak{M}', w'$. •

Con esto ya tenemos el primer resultado de bisimilitud en otro lugar, es decir, que equivalencia modal implica bisimilitud pero en otros modelos construidos a partir de los primeros, en este caso es en la extensión a un ultrafiltro. Más adelante tendremos un segundo resultado de bisimilitud en otro lugar.

## 2.6. Traducción estándar

Hasta ahora hemos estado estudiando lógica modal como un sistema formal aislado, pero ahora lo vincularemos con la lógica de primer orden. La manera de relacionarlas es la *traducción estándar*, que nos permitirá, como su nombre lo indica, *traducir* las fórmulas modales a fórmulas de primer orden. Primero definiremos el lenguaje al que traduciremos las fórmulas modales.

**Definición 2.6.1** (Lenguaje de Correspondencia)**.** Sea $\tau$ un tipo de semejanza modal y sea $\Phi$ un conjunto de átomos. Entonces $\mathcal{L}^1_\tau(\Phi)$ es el lenguaje de primer orden cuyo tipo de semejanza consta de letras predicativas unarias $P_0, P_1, P_2, \ldots$ cuya interpretación corresponde al conjunto de mundos donde $p_0, p_1, p_2, \ldots \in \Phi$ son verdaderas respectivamente, y un símbolo relacional $(n+1)$-ario $R_\triangle$ por cada operador modal $n$-ario $\triangle \in \tau$. Escribiremos $\alpha(x)$ para referirnos a una fórmula de primer orden con una variable libre $x$.

**Definición 2.6.2** (Traducción estándar)**.** Sea $x$ una variable de primer orden. Definimos recursivamente la *traducción estándar* $ST_x$ que toma fórmulas modales y las lleva a fórmulas de primer orden en $\mathcal{L}^1_\tau(\Phi)$ como sigue:

$$ST_x(p) = P(x)$$

$$ST_x(\perp) = x \neq x$$

$$ST_x(\neg\phi) = \neg ST_x(\phi)$$

$$ST_x(\phi \vee \psi) = ST_x(\phi) \vee ST_x(\psi)$$

$$ST_x(\triangle(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)) = \exists y_1 \ldots \exists y_n \, (R_\triangle(x, y_1, \ldots, y_n) \wedge ST_{y_1}(\phi_1) \wedge \cdots \wedge ST_{y_n}(\phi_n)),$$

donde $y_1, \ldots, y_n$ son variables libres que no han sido usadas en la traducción.

Esta definición se extiende naturalmente a los demás operadores. Por ejemplo, usando que $\triangledown$ es el operador dual de $\triangle$, tenemos que:

$$ST_x(\triangledown(\phi_1, \ldots, \phi_n)) = \forall y_1 \ldots \forall y_n (R_\triangle(x, y_1, \ldots, y_n) \to (ST_{y_1}(\phi_1) \wedge \cdots \wedge ST_{y_n}(\phi_n))).$$

La traducción estándar parece ser la reescritura de la cláusula de satisfacción modal pero en primer orden. Por como está definida, una traducción estándar siempre tiene exactamente una variable libre, que se encarga de representar al estado en el que nos encontramos, es decir, que su trabajo es replicar la noción local del lenguaje modal a partir de una noción global.

**Ejemplo 2.6.3.** Tomemos la fórmula $(p \to \Box\Diamond p)$ con $p$ una letra proposicional. Nos servirá primero ver cómo son las traducciones estándar de fórmulas del tipo $\Diamond\phi$ y $\Box\phi$:

* $ST_x(\Diamond\phi) = \exists y(Rxy \wedge ST_y(\phi))$
* $ST_x(\Box\phi) = \forall y(Rxy \to ST_y(\phi))$

Ahora sí, veamos cómo es la traducción estándar de $p \to \Box\Diamond p$:

$$\begin{aligned} ST_x(p \to \Box\Diamond p) = ST_x(p) \to (ST_x(\Box\Diamond p)) &= P(x) \to (\forall y_1 Rxy_1 \to ST_{y_1}(\Diamond p)) \\ &= P(x) \to (\forall y_1 Rxy_1 \to (\exists y_2(Ry_1y_2 \wedge P(y_2)))). \end{aligned}$$

Esta manera de definir la traducción estándar permite el uso de cualquier variable libre que no haya sido usada antes, así que la traducción estándar de una fórmula no es única. Esto lo arreglaremos después.

Los modelos de $LM(\tau, \Phi)$ pueden ser vistos como modelos del lenguaje $\mathcal{L}^1_\tau(\Phi)$. Ya que para cada operador modal $\triangle \in \tau$, $\mathcal{L}^1_\tau(\Phi)$ contiene un símbolo relacional $R_\triangle$ de aridad $\rho(\triangle) + 1$ y por cada letra proposicional que contenga $\Phi$, $\mathcal{L}^1_\tau(\Phi)$ contiene una letra predicativa. Entonces un modelo $\mathfrak{M}$ de dicho $LM(\tau, \Phi)$, es de la siguiente manera: $\mathfrak{M} = (W, R_\triangle, V)_{\triangle\in\tau}$, y este tiene todo lo necesario para interpretar a los elementos de $\mathcal{L}^1_\tau(\Phi)$, porque cada relación $(n+1)$-aria $R_\triangle$ puede ser usada para interpretar cada símbolo relacional $R_\triangle$ (hasta los llamamos igual), y para cada $p \in \Phi$, el conjunto $V(p_i)$ puede interpretar a la letra predicativa $P_i$ que le corresponde a $p_i$. De esta manera, no es necesario distinguir los modelos del lenguaje modal de los de primer orden. Usaremos modelos modales para trabajar con las fórmulas de primer orden que sean traducción estándar de fórmulas modales.

*Nota* 2.6.4. Se recomienda al lector, si es que en este punto no lo ha hecho, hacer una pausa y revisar la sección A.1 del Apéndice sobre el lenguaje de primer orden para familiarizarse con los conceptos y notación que se manejan en esta sección.

**Teorema 2.6.5** (Correspondencia Local y Global en Modelos)**.** *Sean, $\tau$ un tipo de semejanza modal y $\phi$ una $\tau$-fórmula. Entonces:*

*(i) Para todo modelo $\mathfrak{M}$ y estado $w$ en $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$ si y solo si $\mathfrak{M} \models ST_x(\phi)[w]$.*

*(ii) Para todo modelo $\mathfrak{M}$: $\mathfrak{M} \Vdash \phi$ si y solo si $\mathfrak{M} \models \forall x ST_x(\phi)$.*

*Prueba.* Para $(i)$ procederemos por inducción sobre $\phi$.

Si $\phi$ es un átomo digamos $p \in \Phi$, por la definición 2.6.2, tenemos que $\mathfrak{M} \models ST_x(p)[w]$ si y sólo si $\mathfrak{M} \models P(x)[w]$, por satisfacción de Tarski, esto equivale a que $w \in P^{\mathfrak{M}}$, donde $P^{\mathfrak{M}}$ es la interpretación en $\mathfrak{M}$ de $P$, que como lo definimos es el conjunto de mundos donde es verdadero su correspondiente átomo $p$ de $\Phi$, así que $w \in V(p)$ si y sólo si $\mathfrak{M}, w \Vdash p$.

Si $\phi$ es $\perp$, es trivial. Y probarlo para las fórmulas booleanas $\neg\phi$ y $\phi \vee \psi$ es inmediato por la hipótesis de inducción.

El caso de interés es cuando $\phi$ es de la forma $\triangle(\phi_1, \ldots, \phi_n)$. En este caso tenemos por la definición 2.6.2 que $\mathfrak{M} \models ST_x(\triangle(\phi_1, \ldots, \phi_n))[w]$, si y solo si $\mathfrak{M} \models \exists y_1 \ldots \exists y_n (R_\triangle(x, y_1, \ldots, y_n) \wedge ST_{y_1}(\phi_1) \wedge \ldots \wedge ST_{y_n}(\phi_n))[w]$, lo cual por satisfacción de Tarski es equivalente a que existan $v_1, \ldots, v_n$ en $\mathfrak{M}$ tales que $\mathfrak{M} \models R_\triangle(x, y_1, \ldots, y_n) \wedge ST_{y_1}(\phi_1) \wedge \ldots \wedge ST_{y_n}(\phi_n)[w, v_1, \ldots, v_n]$, de nuevo por satisfacción de Tarski, es equivalente a que hayan $v_1, \ldots, v_n$ en $\mathfrak{M}$ tales que
$\mathfrak{M} \models R_\triangle(x, y_1, \ldots, y_n)[w, v_1, \ldots, v_n]$ y $\mathfrak{M} \models ST_{y_1}(\phi_1)[w, v_1, \ldots, v_n]$ y ... y
$\mathfrak{M} \models ST_{y_n}(\phi_n)[w, v_1, \ldots, v_n]$ si y sólo si (por hipótesis de inducción y por la interpretación

de $R_\triangle$) hay $v_1, \ldots, v_n$ tales que $R_\triangle(w, v_1, \ldots, v_n)$ y para toda $i$, $\mathfrak{M}, v_i \Vdash \phi_i$, por lo tanto $\mathfrak{M}, w \Vdash \triangle(\phi_1, \ldots, \phi_n)$.

Y $(ii)$ se sigue de $(i)$: supongamos que $\mathfrak{M} \Vdash \phi$, esto es equivalente a que para todo $w \in \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$, lo que por $(i)$, equivale a que para todo $w \in \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \models ST_x(\phi)[w]$, lo que por Tarski sucede si y solo si $\mathfrak{M} \models \forall x ST_x(\phi)$. •

Este teorema establece una conexión entre los lenguajes modales y los lenguajes de primer orden que entre otras cosas, nos puede ayudar a identificar propiedades que la lógica modal hereda de la lógica de primer orden. Por ejemplo, sabemos que la lógica de primer orden tiene la propiedad de compacidad: si tenemos un conjunto de fórmulas de primer orden tal que todo subconjunto finito es satisfacible, entonces el conjunto es satisfacible. Por el teorema anterior, la lógica modal debe cumplirlo también: sea $\Sigma$ un conjunto de fórmulas modales tal que todo subconjunto finito de $\Sigma$ es satisfacible, consideremos el conjunto $\Gamma = \{ST_x(\phi) \mid \phi \in \Sigma\}$ por el teorema 2.6.5, inciso $(i)$, todo subconjunto finito de $\Gamma$ es satisfacible y así, $\Gamma$ lo es, y de nuevo por el inciso $(i)$ del teorema 2.6.5, $\Sigma$ es satisfacible.

Lo siguiente que podemos preguntarnos a partir del teorema 2.6.5 es si todas las fórmulas de primer orden (del lenguaje de correspondencia adecuado) son la traducción estándar de fórmulas modales, (porque al revés es claro que es cierto: toda fórmula modal tiene una correspondiente fórmula de primer orden, a saber su traducción estándar) que en principio y por un argumento puramente sintáctico no será cierto, porque la traducción estándar sólo contiene cuantificadores acotados. Pero entonces ¿toda fórmula de primer orden será equivalente a la traducción estándar de una fórmula modal? La respuesta a esta pregunta también es no.

*Observación.* Si recordamos el ejemplo 2.2.2, donde se presentan dos modelos bisimilares, podremos observar que una de las diferencias entre la lógica modal y la de primer orden es la de preservar satisfacción bajo bisimulaciones. En dicho ejemplo, en el modelo $\mathfrak{M}'$ tenemos que se satisface la fórmula de primer orden:

$$\exists y_1 \exists y_2 \exists y_3 (y_1 \neq y_2 \wedge y_2 \neq y_3 \wedge y_3 \neq y_1 \wedge Rxy_1 \wedge Rxy_3 \wedge Ry_1y_2 \wedge Ry_3y_2)$$

que establece que hay una estructura de tipo diamante en el modelo. Pero es claro que esta misma fórmula no es satisfecha por el modelo $\mathfrak{M}$ del mismo ejemplo, a pesar de que se probó que los modelos son bisimilares.

Esta observación ilustra mucho mejor la respuesta a la pregunta anterior, ya que una fórmula que no se preserva bajo bisimulaciones no puede ser equivalente a la traducción estándar de una fórmula modal.

De esto concluimos que las fórmulas de primer orden que son equivalentes a la traducción estándar de fórmulas modales, son un subconjunto propio del lenguaje de correspondencia (el de primer orden).

Ahora procedemos a hacer una observación que nos ayudará a arreglar el problema de la unicidad de la traducción estándar de una fórmula. Supongamos que las variables del lenguaje $\mathcal{L}^1_\tau(\Phi)$ fueron ordenadas de alguna manera, entonces el fragmento de $n$ variables de $\mathcal{L}^1_\tau(\Phi)$ es aquel que contiene las fórmulas que contienen solamente las primeras $n$ variables del lenguaje. Entonces un lenguaje modal que tenga operadores modales de aridad a lo más $n$ podrá ser traducido al fragmento de $n+1$ variables de $\mathcal{L}^1_\tau(\Phi)$. Veremos cómo en la siguiente proposición:

**Proposición 2.6.6.** $(i)$ *Si $\tau$ es un tipo de semejanza que solo contiene diamantes, entonces toda $\tau$-fórmula $\phi$ es equivalente a una fórmula de primer orden que contiene a lo más dos variables.*

$(ii)$ *En general, si $\tau$ no contiene operadores $\triangle$ que sean de aridad mayor que $n$, entonces todas las $\tau$-fórmulas serán equivalentes a fórmulas de primer orden con a lo más $n+1$ variables.*

*Prueba.* Para $(i)$, supongamos que $\tau$ contiene únicamente los operadores $\langle a\rangle, \langle b\rangle, \ldots$ (todos de aridad uno). Sean $x$ e $y$ dos variables distintas. Definimos dos variantes de la traducción estándar como sigue:

$$ST_x(p) = P(x)$$

$$ST_x(\bot) = x \neq x$$

$$ST_x(\neg\phi) = \neg ST_x(\phi)$$

$$ST_x(\phi \vee \psi) = ST_x(\phi) \vee ST_x(\psi)$$

$$ST_x(\langle a\rangle \phi) = \exists y(R_a xy \wedge ST_y(\phi))$$

y,

$$ST_y(p) = P(y)$$

$$ST_y(\bot) = y \neq y$$

$$ST_y(\neg\phi) = \neg ST_y(\phi)$$

$$ST_y(\phi \vee \psi) = ST_y(\phi) \vee ST_y(\psi)$$

$$ST_y(\langle a \rangle \phi) = \exists x(R_a yx \wedge ST_x(\phi))$$

Y de esta manera, para toda $\phi$, $ST_x(\phi)$ contiene a lo más dos variables ($x$ e $y$) y $ST_x$ es equivalente a la definición original de la traducción estándar.

Para el caso general ($(ii)$), hay que fijar $n+1$ variables, y análogamente definir $n+1$ variantes de la traducción estándar. La prueba es directa. •

**Ejemplo 2.6.7.** Ahora aplicaremos esta manera de definir la traducción estándar al ejemplo 2.6.3, con la fórmula $(p \to \Box\Diamond p)$:

$$\begin{aligned} ST_x(p \to \Box\Diamond p) = ST_x(p) \to (ST_x(\Box\Diamond p)) &= P(x) \to (\forall y Rxy \to ST_y(\Diamond p)) \\ &= P(x) \to (\forall y Rxy \to (\exists x(Ryx \wedge P(x)))). \end{aligned}$$

Y el resultado de la traducción estándar es una fórmula de primer orden con dos variables nada más; porque saltamos de una variable a otra. Entonces, en vez de tener una traducción con tres variables como en el ejemplo 2.6.3, ya tenemos una sólo con dos.

Volviendo a nuestra discusión respecto a qué subconjunto de las fórmulas de primer orden será el que corresponda a las que son equivalentes a la traducción estándar de una fórmula modal, podemos preguntarnos, por ejemplo, si toda fórmula de primer orden que contenga a lo más dos variables será equivalente a la traducción de una fórmula del lenguaje básico modal. La respuesta es no y se ve con un sencillo ejemplo de una fórmula de primer orden con una sola variable que no es equivalente a la traducción estándar de una fórmula modal.

*Observación.* La fórmula de primer orden $Rxx$ no es equivalente a la traducción estándar de una fórmula modal.

*Prueba.* Consideremos $Rxx$, y supongamos que $\phi$ es una fórmula modal tal que $ST_x(\phi)$ es equivalente a $Rxx$. Sea $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ donde $W = \{w\}$ y $R = \{(w, w)\}$, y la valuación puede ser cualquiera, nos es indiferente.

Es claro que $\mathfrak{M} \models Rxx[w]$. Consideremos ahora $\mathfrak{N} = (\mathbb{Z}, <, V^*)$. Se cumple que $\mathfrak{N} \models \neg Rxx[v]$ para todo $v \in \mathbb{Z}$.

Sea $Z$ la relación que vincula a cada entero de $\mathfrak{N}$ con $w$, el único estado de $\mathfrak{M}$. Y supongamos que $V$ y $V^*$ son tales que $Z$ es una bisimulación (por ejemplo, que todos los puntos hacen verdad a todas las letras proposicionales en ambos modelos).

Como $\mathfrak{M} \models Rxx[w]$, entonces por el teorema 2.6.5, $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$, ya que $Rxx$ es equivalente a $ST_x(\phi)$. Pero para todo $z \in \mathbb{Z}$, $z \rightleftarrows w$, entonces $\mathfrak{N}, z \Vdash \phi \Rightarrow$ (teo 2.6.5) $\mathfrak{N} \models ST_x(\phi)[z]$, entonces $\mathfrak{N} \models Rxx[z]$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto $Rxx$ no es equivalente a la traducción estándar de una fórmula modal. •

En la siguiente sección seguiremos trabajando sobre esto, y podremos definir bien, por medio del *Teorema de Caracterización de Van Benthem*, las fórmulas de primer orden que son equivalentes a la traducción estándar de una fórmula modal (las que son invariantes bajo bisimulaciones).

*Nota* 2.6.8. Para adaptar estas ideas al lenguaje básico temporal es necesario agregar una cláusula a la definición de traducción estándar para traducir el operador que mira hacia atrás:

$$ST_x(P\phi) = \exists y(Ryx \wedge ST_y(\phi)).$$

## 2.7. El segundo resultado de bisimulitud en otro lugar y el teorema de caracterización de Van Benthem

En esta sección veremos un resultado (el *Lema de Detour*) que nos servirá para dos propósitos: el primero es obtener un segundo resultado de bisimilitud en otro lugar, a saber en la ultrapotencia; y el segundo es averiguar cuál es el fragmento de la lógica de primer orden que corresponde a la lógica modal, siguiendo la discusión de la sección anterior (2.6). Para ambos propósitos necesitamos definir algunos conceptos de primer orden para llegar al concepto de *modelos $\omega$-saturados.*

**Definición 2.7.1** (n- tipo)**.** Un *n-tipo* es un conjunto $\Gamma = \Gamma(\vec{x})$ de fórmulas de primer orden, todas con las variables libres $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$.

Trabajaremos solamente con 1-tipos, es decir con conjuntos $\Gamma(x)$ de fórmulas de primer orden con una sola variable libre. Usualmente a los 1-tipos los llamamos solamente tipos.

**Definición 2.7.2** (Realización de tipos)**.** Sea $\mathfrak{M}$ un modelo de primer orden. Decimos que $\mathfrak{M}$ realiza a $\Gamma(x)$ si existe $w$, un elemento del modelo $\mathfrak{M}$ tal que para toda fórmula $\gamma \in \Gamma$, $\mathfrak{M} \models \gamma[w]$.

Entonces podemos pensar a un tipo $\Gamma(x)$ de un lenguaje de primer orden dado como un conjunto de *características*. Y si el tipo es realizado en un modelo $\mathfrak{M}$, podríamos pensar que hay un mundo $w$ del modelo, que cumple al mismo tiempo con todas las características dadas por el conjunto $\Gamma$.

**Definición 2.7.3** (Extensión del lenguaje y expansión del modelo)**.** Sea $\mathfrak{M}$ un modelo de un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$ dado y sea $W$ el dominio de $\mathfrak{M}$. Para $A$ tal que $A \subseteq W$, $\mathcal{L}_A$ es el lenguaje obtenido a partir de $\mathcal{L}$ agregando una constante nueva $\underline{a}$ por cada elemento $a \in A$.

Y el modelo $\mathfrak{M}_A$ es la expansión de $\mathfrak{M}$ a una estructura para $\mathcal{L}_A$ en la que cada $\underline{a}$ es interpretada como $a$.

*Notación.* Si A consta de un solo elemento, por ejemplo $A = \{a\}$, denotamos a $\mathcal{L}_A$ como $\mathcal{L}_a$ y a $\mathfrak{M}_A$ como $\mathfrak{M}_a$

Ahora definiremos $\alpha$-saturación, pero en realidad sólo nos interesarán los modelos $\alpha$-saturados para $\alpha = \omega$. Daremos primero una definición informal de $\alpha$-saturación que nos servirá como definición en la práctica, que es equivalente a la definición formal y que además sugiere una similitud con la definición de m-saturación.

Un modelo $\mathfrak{M}$ es *$\alpha$-saturado* si y solo si, para todo $n < \alpha$ y todo conjunto $\Gamma$ de fórmulas de la forma $\gamma(x_1, \ldots, x_n, x)$, sucede que: si $(a_1, \ldots, a_n)$ es una $n$-ada tal que para todo conjunto finito $\Delta \subseteq \Gamma$, existe un $b_\Delta$ tal que $\mathfrak{M} \models \gamma(x_1, \ldots, x_n, x)[a_1, \ldots, a_n, b_\Delta]$ para toda $\gamma \in \Gamma$, entonces existe un $b$ tal que $\mathfrak{M} \models \gamma(x_1, \ldots, x_n, x)[a_1, \ldots, a_n, b]$ para toda $\gamma \in \Gamma$.

Con esta definición, tenemos que los modelos m-saturados y los $\omega$-saturados son ricos en el sentido de que realizan muchos tipos $\Gamma(x)$, sin embargo, los $\omega$-saturados realizan la cantidad máxima de tipos. Definamos formalmente $\omega$-saturación.

**Definición 2.7.4.** Sea $\alpha \leq \omega$. Un modelo $\mathfrak{M}$ es *$\alpha$-saturado* si para todo subconjunto $A \subseteq W$ de tamaño menor que $\alpha$, la expansión $\mathfrak{M}_A$ realiza todo tipo $\Gamma(x)$ de fórmulas del lenguaje extendido $\mathcal{L}_A$, que sea consistente con la teoría de primer orden de $\mathfrak{M}_A$.

**Ejemplo 2.7.5.** Ejemplos de modelos $\omega$-saturados son el orden de los racionales, $(\mathbb{Q}, <)$ y cualquier modelo finito. En cambio, el orden de los naturales $(\mathbb{N}, <)$ no es un modelo $\omega$-saturado.

**Teorema 2.7.6.** *Sea $\tau$ un tipo de semejanza modal y sea $\mathfrak{M}$ un $\tau$-modelo. Si $\mathfrak{M}$ es $\omega$-saturado, entonces $\mathfrak{M}$ es m-saturado. Y así, la clase de modelos contablemente saturados tiene la propiedad de Hennessy-Milner.*

*Prueba.* Se hará únicamente para el lenguaje básico modal. Sea $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ y supongamos que, visto como modelo de primer orden, es $\omega$-saturado. Sea $w$ un estado de $\mathfrak{M}$ y consideremos un conjunto de fórmulas modales $\Sigma$ que sea finitamente satisfacible en el conjunto de sucesores de $w$.

Definimos el conjunto $\Sigma'$ como $\Sigma' = \{R\underline{w}x\} \cup ST_x(\Sigma)$, donde entendemos a $ST_x(\Sigma)$ como el conjunto $\{ST_x(\phi) \,|\, \phi \in \Sigma\}$. Consideremos $\{w\} \subseteq W$ y la extensión del lenguaje $\mathcal{L}_w$ y la expansión del modelo $\mathfrak{M}_w$. Notemos que $\Sigma'$ es un tipo y que además es consistente con la teoría de $\mathfrak{M}_w$, ya que $\mathfrak{M}_w$ realiza a cada subconjunto finito de $\Sigma'$ a saber en algún sucesor de $w$. Por la $\omega$- saturación de $\mathfrak{M}$, hay un estado $v$ en el cual $\Sigma'$ es realizado. Como $\mathfrak{M}_w \models R\underline{w}x[v]$, es claro que $v$ es un sucesor de $w$. Entonces por el teorema 2.6.5 y el hecho de que $\mathfrak{M}_w \models ST_x(\phi)[v]$ para toda $\phi \in \Sigma$, se sigue que $\mathfrak{M}, v \Vdash \Sigma$. Y de esta manera $\Sigma$ es satisfacible en el conjunto de sucesores de $w$. Por lo tanto $\mathfrak{M}$ es m-saturado. •

Para esta prueba sólo se necesitó 2-saturación, porque nos restringimos al lenguaje básico modal.

Veremos ahora, el resultado más fuerte de esta sección: (*el lema de Detour*) y para ello es probable que sea prudente recordar la definición de encaje elemental (A.2.4).

**Teorema 2.7.7** (Lema de Detour)**.** *Sea $\tau$ un tipo de semejanza modal, sean $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{N}$ $\tau$-modelos y $w \in \mathfrak{M}$ y $v \in \mathfrak{N}$ estados de los modelos. Las siguientes son equivalentes:*

(*i*) *Para toda fórmula modal $\phi$: $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$ si y solo si $\mathfrak{N}, v \Vdash \phi$.*

(*ii*) *Existe una bisimulación $Z : \mathfrak{ue}\mathfrak{M}, \pi_w \rightleftarrows \mathfrak{ue}\mathfrak{N}, \pi_v$.*

*(iii) Existen modelos contablemente saturados $\mathfrak{M}^*$ y $\mathfrak{N}^*$, estados $w* \in \mathfrak{M}^*$ y $v^* \in \mathfrak{N}^*$ y encajes elementales $f : \mathfrak{M} \preceq \mathfrak{M}^*$ y $g : \mathfrak{N} \preceq \mathfrak{N}^*$ tales que:*

(1) $f(w) = w^*$ *y* $g(v) = v^*$.

(2) $\mathfrak{M}^*, w^* \rightleftarrows \mathfrak{N}^*, v^*$.

Un poco más adelante haremos la prueba pero mientras analicemos qué dice el lema de Detour: la equivalencia entre $(i)$ y $(ii)$ es el resultado que ya teníamos probado por el teorema 2.5.14 de bisimilitud en algún otro lugar, así que lo interesante en este caso es la equivalencia $(i) \Leftrightarrow (iii)$, que esencialmente establece que $\mathfrak{M}, w$ y $\mathfrak{N}, v$ son modalmente equivalentes si y sólo si hay extensiones elementales de ellos, $\mathfrak{M}^*, w^*$ y $\mathfrak{N}^*, v^*$ que son modelos contablemente saturados, y como $\mathfrak{M}, w$ y $\mathfrak{N}, v$ son modalmente equivalentes, entonces lo son $\mathfrak{M}^*, w^*$ y $\mathfrak{N}^*, v^*$ y por el teorema 2.7.6, son bisimilares. En resumen, esto es el segundo resultado de bisimilitud en algún otro lugar, siendo ese otro lugar una *ultrapotencia* adecuada.

Antes de probarlo, veamos cómo se obtienen dichos modelos contablemente saturados.

### Construcción de Modelos Contablemente Saturados

Ahora veremos cómo se contruyen modelos que resultan ser contablemente saturados y a partir de ellos probaremos también el lema de Detour. Dicha construcción es la de ultraproducto, se recomienda revisarla en la definición A.3.11 del Apéndice.

La siguiente proposición afirma que un modelo es modalmente equivalente a su ultrapotencia.

**Proposición 2.7.8.** *Sea $\prod_U \mathfrak{M}$ una ultrapotencia de $\mathfrak{M}$. Entonces, para toda fórmula modal $\phi$, $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$ si y solo si $\prod_U \mathfrak{M}, [f_w]_U \Vdash \phi$, donde $f_w$ es la función constante tal que $f_w(i) = w$ para todo $i \in I$.*

*Prueba.* Por inducción sobre $\phi$. Si $\phi$ es un átomo $p \in \Phi$: tenemos que $\mathfrak{M}, w \Vdash p$ si y sólo si $w \in V(p)$ si y sólo si $f_w(i) \in V(p)$ para toda $i \in I$, si y sólo si $\{i \in I \mid f_w(i) \in V(p)\} = I \in U$, si y sólo si $[f_w]_U \in V_U(p)$ si y sólo si $\prod_U \mathfrak{M}, [f_w]_U \Vdash p$. Los casos de fórmulas booleanas son inmediatos. Ahora, si $\phi$ es de la forma $\triangle(\phi_1, \ldots, \phi_n)$: $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$ si y sólo si existen $v_1, \ldots, v_n \in W$ tales que $R_\triangle(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ y $\mathfrak{M}, v_j \Vdash \phi_j$ para toda $j$, si y sólo si existen $v_1, \ldots, v_n \in W$ tales que $R_\triangle(f_w(i), f_{v_1}(i), \ldots, f_{v_n}(i))$ para toda $i \in I$ y $\mathfrak{M}, f_{v_j}(i) \Vdash \phi_j$ para toda $j = 1, \ldots, n$ y para toda $i \in I$ si y sólo si existen $v_1, \ldots, v_n$ tales que $\{i \in I \mid R_\triangle(f_w(i), f_{v_1}(i), \ldots, f_{v_n}(i))\}$ $= I \in U$ y por hipótesis de inducción $\prod_U \mathfrak{M}, [f_{v_j}]_U \Vdash \phi_j$ para toda $j$ y esto si y sólo si existen $f_{v_1}, \ldots, f_{v_n} \in W_U$ tales que $R_{\triangle U}([f_w]_U, [f_{v_1}]_U, \ldots, [f_{v_n}]_U)$ y $\prod_U \mathfrak{M}, [f_{v_j}]_U \Vdash \phi_j$ para toda $j$, y esto equivale a lo que queríamos probar: $\prod_U \mathfrak{M}, [f_w]_U \Vdash \phi$. •

Para construir modelos contablemente saturados, se usan ultraproductos, pero no cualesquiera, son ultraproductos basados en ultrafiltros *contablemente incompletos*. Decimos que un ultrafiltro es *contablemente incompleto* si no es cerrado bajo intersecciones numerables (pero sí tiene que ser cerrado bajo intersecciones finitas). Un ejemplo de ultrafiltros de este tipo es el siguiente: consideremos el conjunto de los naturales $\mathbb{N}$ y un ultrafiltro $U$ sobre $\mathbb{N}$ que no contenga ningún conjunto singular $\{n\}$; así, para toda $n \in \mathbb{N}$, $(\mathbb{N} \setminus \{n\}) \in U$ pero

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{N} \setminus \{n\}) = \emptyset \notin U$$

Así que $U$ es contablemente incompleto.

La prueba del siguiente resultado se puede consultar en [Chang y Keisler, 1990]

**Lema 2.7.9.** *Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje numerable de primer orden, $U$ un ultrafiltro contablemente incompleto sobre un conjunto no vacío $I$, y $\mathfrak{M}$ un $\mathcal{L}$-modelo. La ultrapotencia $\prod_U \mathfrak{M}$ es contablemente saturada.*

**Teorema 2.7.10.** *Sea $\tau$ un tipo de semejanza modal y sean $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{N}$ $\tau$-modelos y $w \in \mathfrak{M}$ y $v \in \mathfrak{N}$ estados en ellos. Los siguientes son equivalentes:*

(*i*) *Para toda fórmula modal $\phi$: $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$ si y sólo si $\mathfrak{N}, v \Vdash \phi$.*

(*ii*) *Existen ultrapotencias $\prod_U \mathfrak{M}$ y $\prod_U \mathfrak{N}$ y una bisimulación $Z : \prod_U \mathfrak{M}, [f_w]_U \rightleftarrows \prod_U \mathfrak{N}, [f_v]_U$ que relaciona a $[f_w]_U$ con $[f_v]_U$ donde $f_w$ y $f_v$ son las funciones constantes que manda a cada índice a $w$ y $v$ respectivamente.*

*Prueba.* Para $(ii) \Rightarrow (i)$, por la proposición 2.7.8, tenemos que $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$ si y sólo si $\prod_U \mathfrak{M}, [f_w]_U$ $\Vdash \phi$, por hipótesis, como son bisimilares, esto es equivalente a que $\prod_U \mathfrak{N}, [f_v]_U \Vdash \phi$ y de nuevo por proposición 2.7.8, equivale a que $\mathfrak{N}, v \Vdash \phi$.

Para $(i) \Rightarrow (ii)$, supongamos que $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$ si y sólo si $\mathfrak{N}, v \Vdash \phi$. Hay que construir ultrapotencias de $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{N}$ sobre algún ultrafiltro, que sean bisimilares. Consideremos al conjunto de números naturales $\mathbb{N}$ como conjunto de índices y sea $U$ un ultrafiltro contablemente incompleto sobre $\mathbb{N}$, como el del ejemplo anterior. Por el lema 2.7.9, $\prod_U \mathfrak{M}$ y $\prod_U \mathfrak{N}$ son contablemente saturadas.

Ahora veamos que $[f_w]_U$ y $[f_v]_U$ son modalmente equivalentes: para cualquier fórmula modal $\phi$, $\prod_u \mathfrak{M}, [f_w]_U \Vdash \phi$ si y sólo si (por proposición 2.7.8) $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$ si y sólo si (por hipótesis) $\mathfrak{N}, v \Vdash \phi$ si y sólo si (de nuevo por proposición 2.7.8) $\prod_u \mathfrak{N}, [f_v]_U \Vdash \phi$. Como son modalmente equivalentes y $\prod_U \mathfrak{M}$ y $\prod_U \mathfrak{N}$ son contablemente saturadas, por el teorema 2.7.6, son m-saturadas, entonces equivalencia modal implica bisimilitud. Por lo tanto existe $Z : \prod_U \mathfrak{M}, [f_w]_U \rightleftarrows \prod_U \mathfrak{N}, [f_v]_U$. •

Una vez probado este teorema (2.7.10), el Lema de Detour(lema 2.7.7) también queda demostrado ya que es consecuencia inmediata de él junto con el teorema 2.5.14. Con este resultado queda claro que "bisimilitud en otro lugar" puede significar 'en la extensión a ultrafiltros' o 'en ciertas ultrapotencias'.

### El teorema de Caracterización de Van Benthem

Para cumplir el segundo propósito de esta sección, veremos un teorema que caracteriza bien la relación entre lógica de primer orden y lógica modal: el *teorema de caracterización de Van Benthem*.

**Definición 2.7.11.** Una fórmula de primer orden $\alpha(x)$ en $\mathcal{L}^1_\tau(\Phi)$ es *invariante bajo bisimulaciones* si para todo par de modelos $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{N}$, cualesquiera mundos $w \in \mathfrak{M}$ y $v \in \mathfrak{N}$, si $wZv$, con $Z : \mathfrak{M} \rightleftarrows \mathfrak{N}$ una bisimulación, se tiene que $\mathfrak{M} \models \alpha(x)[w]$ si y sólo si $\mathfrak{N} \models \alpha(x)[v]$.

**Teorema 2.7.12** (Teorema de Caracterización de Van Benthem)**.** *Sea $\alpha(x)$ una fórmula de primer orden en $\mathcal{L}^1_\tau(\Phi)$. Entonces $\alpha(x)$ es invariante bajo bisimulaciones si y solo si es (equivalente a) la traducción estándar de una $\tau$- fórmula modal.*

*Prueba.* Sean $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{N}$ $\tau$-modelos y $w \in \mathfrak{M}$ y $v \in \mathfrak{N}$ estados. ($\Leftarrow$) Es consecuencia directa del teorema 2.2.6: Si $\alpha(x)$ es (equivalente a) la traducción estándar de $\phi$ una fórmula modal, y $Z$ es una bisimulación entre $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{N}$ tal que $wZv$, entonces $\mathfrak{M} \models \alpha(x)[w]$, por el teorema 2.6.5 es equivalente a que $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$ si y solo si (teo 2.2.6) $\mathfrak{N}, v \Vdash \phi$, y de nuevo por el teorema 2.6.5, sucede si y sólo si $\mathfrak{N} \models \alpha(x)[v]$. Así $\alpha(x)$ es invariante bajo bisimulaciones.

($\Rightarrow$) Supongamos que $\alpha(x)$ es una fórmula invariante bajo bisimulaciones. Definamos el conjunto $COM(\alpha)$ como el conjunto de consecuencias modales de $\alpha$:

$$COM(\alpha) = \{ST_x(\phi) \,|\, \phi \text{ es una fórmula modal y } \alpha(x) \models ST_x(\phi)\,\}.$$

Primero probemos que $COM(\alpha) \models \alpha(x)$. i.e. si $\mathfrak{M} \models COM(\alpha)[w]$, entonces $\mathfrak{M} \models \alpha(x)[w]$. (Véase sección A.1 del Apéndice para la definición de consecuencia semántica.)

Supongamos que $\mathfrak{M} \models COM(\alpha)[w]$ y consideremos el conjunto:

$$T(x) = \{ST_x(\phi) \,|\, \mathfrak{M} \models ST_x(\phi)[w]\,\}.$$

Probemos que $T(x) \cup \{\alpha(x)\}$ es consistente. Supongamos que es inconsistente. Por compacidad (teorema A.1.3), hay un subconjunto finito $T_0(x) \subseteq T(x)$ tal que $\models \alpha(x) \rightarrow \neg \bigwedge T_0(x)$, lo que implica que $\neg \bigwedge T_0(x) \in COM(\alpha)$, entonces como $\mathfrak{M} \models COM(\alpha)[w]$, $\mathfrak{M} \models \neg \bigwedge T_0(x)$, lo cual es una contradicción ya que $T_0(x) \subseteq T(x)$ y por la definición de $T(x)$, $\mathfrak{M} \models \bigwedge T_0(x)$. Por lo tanto $T(x) \cup \{\alpha(x)\}$ es consistente.

Así, sean $\mathfrak{N}$, $v$ un modelo y un estado en él tales que $\mathfrak{N} \models T(x) \cup \{\alpha(x)\}[v]$. Veamos que $w$ y $v$ son modalmente equivalentes: si $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$, entonces $ST_x(\phi) \in T(x)$, y esto implica que $\mathfrak{N} \models ST_x(\phi)[v]$ de lo que se sigue que $\mathfrak{N}, v \Vdash \phi$. Recíprocamente, si $\mathfrak{M}, w \nVdash \phi$, entonces $\mathfrak{M}, w \Vdash \neg\phi$, entonces $ST_x(\neg\phi) \in T(x)$, y se sigue que $\mathfrak{N} \models ST_x(\neg\phi)[v]$, entonces $\mathfrak{N}, v \Vdash \neg\phi$ y por lo tanto, $\mathfrak{N}, v \nVdash \phi$.

Como equivalencia modal no siempre implica bisimilitud, necesitamos el lema de Detour para completar la prueba. Por el lema de Detour, existen dos modelos $\omega$-saturados $\mathfrak{M}^*, w^*$ y $\mathfrak{N}^*, v^*$ tales que $\mathfrak{M}^*, w^* \rightleftarrows \mathfrak{N}^*, v^*$. Entonces la situación que tenemos es como en el diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{M}, w & & \mathfrak{N}, v \\
\preceq \Big| & & \Big| \preceq \\
\mathfrak{M}^*, w^* & \rightleftarrows & \mathfrak{N}^*, v^*
\end{array}$$

Sabemos que la verdad de fórmulas de primer orden se preserva bajo encajes elementales, entonces, tenemos que $\mathfrak{N} \models \alpha(x)[v]$ implica que $\mathfrak{N}^* \models \alpha(x)[v]$. Como $\alpha(x)$ es invariante bajo bisimulaciones, entonces $\mathfrak{M}^* \models \alpha(x)[w]$ y de nuevo, por invarianza bajo encajes elementales, $\mathfrak{M} \models \alpha(x)[w]$. Por lo tanto, $COM(\alpha) \models \alpha(x)$.

Ya tenemos que $COM(\alpha) \models \alpha(x)$. Por el teorema de compacidad, hay un subconjunto finito $X \subseteq COM(\alpha)$ tal que $X \models \alpha(x)$. Entonces, $\models \bigwedge X \to \alpha(x)$. Además, trivialmente, por la definición de $COM(\alpha)$, tenemos que $\models \alpha(x) \to \bigwedge X$. Por lo tanto $\models \bigwedge X \longleftrightarrow \alpha(x)$. Y como toda fórmula en $X$ es la traducción estándar de una fórmula modal, entonces también lo es $\bigwedge X$ y por lo tanto, $\alpha(x)$.

•

*Nota* 2.7.13. Un segundo resultado de bisimilitud en otro lugar sí es necesario porque la verdad de fórmulas de primer orden no necesariamente se preserva bajo extensiones a ultrafiltros.

## 2.8. Definibilidad de modelos

En esta sección presentaremos el concepto de definibilidad y veremos cuáles propiedades de modelos son definibles por medio de fórmulas modales. Este resultado parte del teorema 2.7.10 y lo trabajaremos en términos de modelos puntuales.

Primero definiremos varios conceptos.

**Definición 2.8.1.** Sea $\tau$ un tipo de semejanza modal. Un *modelo puntual* es una pareja $(\mathfrak{M}, w)$ donde $\mathfrak{M}$ es un $\tau$-modelo y $w$ un estado de $\mathfrak{M}$.

**Definición 2.8.2.** Una clase de modelos puntuales $\mathsf{K}$ es *cerrada bajo bisimulaciones* si $(\mathfrak{M}, w)$ está en $\mathsf{K}$ y $\mathfrak{M}, w \rightleftarrows \mathfrak{N}, v$ implica que $(\mathfrak{N}, v)$ está en $\mathsf{K}$.

**Definición 2.8.3.** Una clase de modelos puntuales $\mathsf{K}$ es *cerrada bajo ultraproductos* si cualquier ultraproducto $\prod_U(\mathfrak{M}_{\mathrm{i}}, w_i)$ de una familia de modelos puntuales $(\mathfrak{M}_{\mathrm{i}}, w_i)$ de $\mathsf{K}$ también está en $\mathsf{K}$.

*Notación.* Si $\mathsf{K}$ es una clase de modelos puntuales, entonces $\bar{\mathsf{K}}$ denota al complemento de $\mathsf{K}$ con respecto a la clase de todos los modelos puntuales.

**Definición 2.8.4** (Definibilidad)**.** Una clase de modelos puntuales $\mathsf{K}$ es *definible por un conjunto de fórmulas modales* si existe un conjunto $\Gamma$ de fórmulas modales tal que para cada modelo puntual de $(\mathfrak{M}, w)$ tenemos que $(\mathfrak{M}, w)$ está en $\mathsf{K}$ si y sólo si para toda $\gamma \in \Gamma$, $\mathfrak{M}, w \Vdash \gamma$.

Y decimos que $\mathsf{K}$ es definible por una sola fórmula modal si es definible por un conjunto singular.

En los siguientes teoremas veremos las condiciones necesarias y suficientes para que una clase de modelos puntuales sea definible. Pero antes de probar los teoremas, veamos un lema que nos servirá para las pruebas.

**Lema 2.8.5.** *Si $\Sigma$ es un conjunto de fórmulas y $\mathsf{K}$ una clase de modelos puntuales cerrada bajo ultraproductos en la que $\Sigma$ es finitamente satisfacible, entonces $\Sigma$ es satisfacible en un ultraproducto en $\mathsf{K}$.*

*Prueba.* Definiremos el ultraproducto adecuado. Primero definamos al conjunto de índices $I$, como la colección de subconjuntos finitos de $\Sigma$:

$$I = \{\Sigma_0 \subseteq \Sigma \,|\, \Sigma_0 \text{ es finito } \}.$$

Como $\Sigma$ es finitamente satisfacible en $\mathsf{K}$, entonces para cada $i \in I$ existe un modelo puntual $(\mathfrak{N}_i, v_i)$ en $\mathsf{K}$ tal que $\mathfrak{N}_i, v_i \Vdash i$. Construiremos ahora un ultrafiltro sobre $I$: para cada $\sigma \in \Sigma$, sea $\hat{\sigma}$ el conjunto de todos los $\Sigma_0 \in I$ tales que $\sigma \in \Sigma_0$. Observemos que $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\} \in \hat{\sigma}_1 \cap \cdots \cap \hat{\sigma}_n$, entonces el conjunto $E = \{\hat{\sigma} \,|\, \sigma \in \Sigma\}$ tiene la PIF, por lo que podemos extenderlo a un ultrafiltro $U$ sobre $I$ (por el corolario A.3.8 del apéndice). Con esto queda bien definido el ultraproducto $\prod_U \mathfrak{N}_i$.

Ahora definiremos $f_U$, un estado que cumpla que $\prod_U \mathfrak{N}_i, f_U \Vdash \Sigma$. Denotamos por $W_i$ al dominio del modelo $\mathfrak{N}_i$ y sea $f \in \prod_{i\in I} W_i$ la función tal que $f(i) = v_i$ para toda $i$ ($f_{v_i}$ como la habíamos denotado anteriormente).

Resta probar que efectivamente $\prod_U \mathfrak{N}_i, [f_{v_i}]_U \Vdash \Sigma$. Para cada $\Sigma_0 \in \hat{\sigma}$, tenemos que $\sigma \in \Sigma_0$, y entonces $\mathfrak{N}_i, v_i \Vdash \sigma$. Entonces para cada $\sigma \in \Sigma$, $\hat{\sigma} \subseteq \{\Sigma_0 \in I \,|\, \mathfrak{N}_i, v_i \Vdash \sigma\}$ y como $\hat{\sigma} \in U$, entonces $\{\Sigma_0 \in I \,|\, \mathfrak{N}_i, v_i \Vdash \sigma\} \in U$, entonces por el teorema de Łoś (A.3.12) combinado con el teorema 2.6.5, $\prod_U \mathfrak{N}_i, [f_{v_i}]_U \Vdash \sigma$. Y por lo tanto, $\Sigma$ es satisfacible en un ultraproducto en $\mathsf{K}$. •

**Teorema 2.8.6.** *Sea $\tau$ un tipo de semejanza modal y sea $\mathsf{K}$ una clase de modelos puntuales. Son equivalentes:*

(*i*) $\mathsf{K}$ *es definible por un conjunto de fórmulas*

(*ii*) $\mathsf{K}$ *es cerrado bajo bisimulaciones y ultraproductos. Y* $\bar{\mathsf{K}}$ *es cerrado bajo ultrapotencias.*

*Prueba.* $(i) \Rightarrow (ii)$: Supongamos que $\mathsf{K}$ es definible por un conjunto $\Gamma$ de fórmulas modales. Para ver que es cerrado bajo bisimulaciones, sea $(\mathfrak{M}, w)$ un modelo puntual en $\mathsf{K}$ y sea $(\mathfrak{N}, v)$ un modelo puntual tal que $(\mathfrak{M}, w) \rightleftarrows (\mathfrak{N}, v)$. Como $\mathfrak{M}, w \Vdash \Gamma$ y bisimilitud implica equivalencia modal (teorema 2.2.4), entonces $\mathfrak{N}, v \Vdash \Gamma$ y por lo tanto $(\mathfrak{N}, v)$ está en $\mathsf{K}$ y por lo tanto es cerrado bajo bisimulaciones.

Ahora, sea $\{(\mathfrak{M}_i, w_i) \,|\, i \in I\}$ una familia de modelos puntuales en $\mathsf{K}$. Por $(i)$ tenemos que $\mathfrak{M}_i, w_i \Vdash \gamma$ para cualesquiera $i \in I$ y $\gamma \in \Gamma$. Consideremos la función $f_{w_i} \in \prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i$ tal que $f_{w_i}(i) = w_i$ para toda $i$. Entonces, dado un ultrafiltro $U$ sobre $I$, $[f_{w_i}]_U \in \prod_U \mathfrak{M}_i$. Como $\mathfrak{M}_i, w_i \Vdash \gamma$ para toda $\gamma \in \Gamma$, entonces por el Teorema de Correspondencia Local y Global en modelos (2.6.5), $\mathfrak{M}_i \models ST_x(\gamma)[w_i]$ que por la definición de $f_{w_i}$, es equivalente a que $\mathfrak{M}_i \models ST_x(\gamma)[f_{w_i}(i)]$ para toda $i$, lo que implica que el conjunto $\{i \in I \,|\, \mathfrak{M}_i \models ST_x(\gamma)[f_{w_i}(i)]\} \in U$, y por la condición $(ii)$ del teorema de Łoś (A.3.12), $\prod_U \mathfrak{M}_i \models ST_x(\gamma)[[f_{w_i}]_U]$ y de nuevo por el teorema 2.6.5, $\prod_U \mathfrak{M}_i, [f_{w_i}]_U \Vdash \gamma$ para toda $\gamma \in \Gamma$. Por lo tanto, $(\prod_U \mathfrak{M}_i, [f_{w_i}]_U)$ es un modelo puntual que está en $\mathsf{K}$. Se conluye que $\mathsf{K}$ es cerrado bajo ultraproductos.

Por último, sea $(\mathfrak{M}, w)$ un modelo puntual en $\bar{\mathsf{K}}$ y sea $U$ un ultrafiltro sobre un conjunto de índices $I$. Como $(\mathfrak{M}, w)$ está en $\bar{\mathsf{K}}$, existe una fórmula $\gamma \in \Gamma$ tal que $\mathfrak{M}, w \nVdash \gamma$, entonces $\mathfrak{M}, w \Vdash \neg\gamma$, por el segundo inciso del teorema de Loś's, $\prod_U \mathfrak{M}, [f_w]_U \Vdash \neg\gamma$, entonces $\prod_U \mathfrak{M}, [f_w]_U \nVdash \gamma$, por lo que $(\prod_U \mathfrak{M}, [f_w]_U)$ no está en $\mathsf{K}$, y por tanto pertenece a $\bar{\mathsf{K}}$.

Para $(ii) \Rightarrow (i)$, supongamos que $\mathsf{K}$ y $\bar{\mathsf{K}}$ cumplen las condiciones de clausura establecidas en $(ii)$.

Definimos el conjunto $T$ como el conjunto de fórmulas modales que son verdaderas en $\mathsf{K}$:

$$T = \{\phi \mid \text{ para todo } (\mathfrak{M}, w) \text{ en } \mathsf{K} : \mathfrak{M}, w \Vdash \phi\}.$$

Es claro que todo modelo de $\mathsf{K}$ satisface $T$, por como lo definimos. Ahora veamos que todo modelo que satisface $T$, está en $\mathsf{K}$.

Sea $(\mathfrak{M}, w)$ tal que $\mathfrak{M}, w \Vdash T$. Sea $\Sigma$ la teoría de $w$, i.e. $\Sigma = \{\phi \mid \mathfrak{M}, w \Vdash \phi\}$. Tenemos que $\Sigma$ es finitamente satisfacible en $\mathsf{K}$, pues de lo contrario existiría $\Sigma' = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\} \subseteq \Sigma$ tal que $\Sigma'$ no es satisfacible en $\mathsf{K}$, entonces para todo modelo puntual $(\mathfrak{N}, v)$ de $\mathsf{K}$, $\mathfrak{N}, v \nVdash \sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_n$, entonces $\mathfrak{N}, v \Vdash \neg(\sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_n)$ para todo $(\mathfrak{N}, v)$ de $\mathsf{K}$, en particular $\mathfrak{M}, w \Vdash \neg(\sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_n)$, lo cual es una contradicción.

Del lema 2.8.5 y del hecho de que $\mathsf{K}$ es cerrado bajo ultraproductos, tenemos que $\Sigma$ es satisfacible en un modelo puntual $(\mathfrak{N}, v)$ de $\mathsf{K}$. Pero $\mathfrak{N}, v \Vdash \Sigma$ implica que $v$ y $w$ del modelo puntual original $(\mathfrak{M}, w)$ son modalmente equivalentes, porque $\Sigma$ es la teoría de $w$. Entonces, por el teorema 2.7.10, existe un ultrafiltro $U'$ tal que

$$\prod_{U'}(\mathfrak{N}, v), [f_v]_{U'} \rightleftarrows \prod_{U'}(\mathfrak{M}, w), [f_w]_{U'}.$$

Por la cerradura bajo ultraproductos de $\mathsf{K}$, el modelo puntual $\prod_{U'}(\mathfrak{N}, v), [f_v]_{U'}$ pertenece a $\mathsf{K}$; por cerradura bajo bisimulaciones de $\mathsf{K}$, $\prod_{U'}(\mathfrak{M}, w), [f_w]_{U'}$ está en $\mathsf{K}$; y por la cerradura bajo ultrapotencias de $\bar{\mathsf{K}}$, $(\mathfrak{M}, w)$ pertenece a $\mathsf{K}$, ya que si $(\mathfrak{M}, w)$ no perteneciera a $\mathsf{K}$, entonces $(\mathfrak{M}, w), [f_w]_{U'}$ estaría en $\bar{\mathsf{K}}$. Y por lo tanto $T$ es el conjunto que define a $\mathsf{K}$. •

**Teorema 2.8.7.** *Sea $\tau$ un tipo de semejanza modal y sea $\mathsf{K}$ una clase de $\tau$-modelos puntuales. Los siguientes son equivalentes:*

$(i)$ $\mathsf{K}$ *es definible por una fórmula modal.*

$(ii)$ *Tanto $\mathsf{K}$ como $\bar{\mathsf{K}}$ son cerrados bajo bisimulaciones y ultraproductos.*

*Prueba.* Para $(i) \Rightarrow (ii)$, la prueba es análoga a la de $(i) \Rightarrow (ii)$ del teorema anterior (2.8.6).

Para $(ii) \Rightarrow (i)$, supongamos que $\mathsf{K}$ y $\bar{\mathsf{K}}$ cumplen las condiciones de cerradura que pide $(ii)$. Como ambos son cerrados bajo ultraproductos, existen $T_1$ y $T_2$ conjuntos de fórmulas modales que definen a $\mathsf{K}$ y a $\bar{\mathsf{K}}$ respectivamente, por el teorema 2.8.6. Su unión es inconsistente, es decir que no existe modelo puntual $(\mathfrak{M}, w)$ tal que $\mathfrak{M}, w \Vdash T_1 \cup T_2$. Entonces, por compacidad, existen $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\} \subseteq T_1$ y $\{\phi_1, \ldots, \phi_m\} \subseteq T_2$ tales que para todo modelo puntual $(\mathfrak{M}, w)$:

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_n \ \rightarrow \neg\phi_1 \vee \cdots \vee \neg\phi_m$$

Veamos que $\sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_n$ es en efecto la fórmula que define a $\mathsf{K}$. Sabemos que para todo modelo puntual $(\mathfrak{M}, w)$ de $\mathsf{K}$, $\mathfrak{M}, w \Vdash \sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_n$, por definición. Recíprocamente, si $\mathfrak{M}, w \Vdash \sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_n$, entonces $\mathfrak{M}, w \Vdash \neg\phi_1 \vee \cdots \vee \neg\phi_m$, es decir, $\mathfrak{M}, w \Vdash \neg(\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_m)$ y por tanto $\mathfrak{M}, w \nVdash T_2$ por lo que $(\mathfrak{M}, w)$ no pertenece a $\bar{\mathsf{K}}$, entonces $(\mathfrak{M}, w)$ está en $\mathsf{K}$. $\bullet$

# Capítulo 3

# Definibilidad de Frames

En este capítulo definiremos algunas clases de frames (determinadas por ciertas propiedades de sus relaciones) con fórmulas modales. Este capítulo descansa en la noción de *validez en frames*. Cuya definición ya vimos (1.3.11) pero la recordaremos y extenderemos un poco. Además, en este capítulo nos restringimos al lenguaje básico modal ($LM(\tau_0, \Phi)$) y por consecuente, trabajaremos con frames que tengan una sola relación binaria.

## 3.1. Definibilidad

Recordemos primero las definiciones.

**Definición 3.1.1** (Validez)**.** Sea $\tau$ un tipo de semejanza modal y sea $\phi$ una $\tau$-fórmula. Decimos que $\phi$ *es válida en un estado* $w$ *de un* $\tau$*-frame* $\mathfrak{F}$ (Not: $\mathfrak{F}, w \Vdash \phi$) si $\phi$ es verdadera en el estado $w$ de todo modelo $(\mathfrak{F}, V)$ basado en $\mathfrak{F}$.

$\phi$ es *válida en un frame* $\mathfrak{F}$ (Not: $\mathfrak{F} \Vdash \phi$) si es válida en todos los estados de $\mathfrak{F}$.

Una fórmula $\phi$ es *válida en una clase* $\mathsf{K}$ *de frames* (Not:$\mathsf{K} \Vdash \phi$) si es válida en todo frame $\mathfrak{F}$ de $\mathsf{K}$

*Notación.* A la clase de frames donde una fórmula $\phi$ es válida, la denotamos por $\mathsf{Fr}_\phi$.

La definición de validez de una fórmula se puede extender a conjuntos de fórmulas de manera natural: un conjunto $\Gamma$ de $\tau$-fórmulas es válido en un $\tau$-frame (Not: $\mathfrak{F} \Vdash \Gamma$ ) si toda $\gamma \in \Gamma$ es válida en $\mathfrak{F}$; y un conjunto $\Gamma$ de fórmulas es válido en una clase $\mathsf{K}$ de frames (Not: $\mathsf{K} \Vdash \Gamma$), si $\Gamma$ es válido en todo frame $\mathfrak{F}$ de $\mathsf{K}$.

*Notación.* A la clase de $\tau$-frames en la que un conjunto $\Gamma$ de $\tau$-fórmulas es válido, la denotamos por $\mathsf{Fr}_\Gamma$.

Vamos a decir que una fórmula modal define a una clase de frames si la fórmula determina exactamente a los frames que están en la clase a través del concepto de validez. Formalmente:

**Definición 3.1.2.** Sean, $\tau$ un tipo de semejanza modal , $\phi$ una $\tau$-fórmula y $\mathsf{K}$ una clase de $\tau$-frames. Decimos que $\phi$ *define* (o *caracteriza*) a $\mathsf{K}$ si para todo frame $\mathfrak{F}$:

$$\mathfrak{F} \text{ pertenece a } \mathsf{K} \text{ si y solo si } \mathfrak{F} \Vdash \phi$$

Igualmente, si $\Gamma$ es un conjunto de $\tau$-fórmulas, $\Gamma$ define a $\mathsf{K}$ si para todo frame $\mathfrak{F}$ :

$$\mathfrak{F} \text{ está en } \mathsf{K} \text{ si y solo si } \mathfrak{F} \Vdash \Gamma$$

Y decimos que una clase de frames es definible si existe un conjunto de fórmulas (o una fórmula) que lo define.

A veces diremos que una conjunto de fórmulas define una propiedad (por ejemplo, reflexividad); con esto nos referimos a que el conjunto de fórmulas define a la clase de frames que poseen dicha propiedad. Por ejemplo, la fórmula $\Box\phi \to \phi$ define la reflexividad, esto se ve en el ejemplo 1.3.17. También le llamaremos con el nombre de la propiedad de la relación a la clase de frames cuya relación posea dicha propiedad, por ejemplo, a la clase de frames cuya relación es reflexiva le llamaremos la clase de frames reflexivos.

## 3.2. Sobre las Relaciones

Ya que el estudio de definibilidad de los frames va muy ligado a las propiedades que poseen sus relaciones, vale la pena recordar algunas propiedades y convenciones en cuanto a ellas.

**Definición 3.2.1.** Sean, $\tau_0$ el tipo de semejanza básico modal y $\mathfrak{F} = (W, R)$ un $\tau_0$-frame. Entonces decimos que la relación $R$:

$(a)$ Es *seriada* si $\forall w \in W(\exists v \in W(Rwv))$.

$(b)$ Es *reflexiva* si $\forall w \in W(Rww)$.

$(c)$ Es *simétrica* si $\forall w, v \in W(Rwv \to Rvw)$.

$(d)$ Es *transitiva* si $\forall w, v, u \in W((Rwv \wedge Rvu) \to Rwu)$.

$(e)$ Es *euclidiana* si $\forall w, v, u \in W((Rwv \wedge Rwu) \to Rvu)$.

$(f)$ Es *incestual* si $\forall w, v, u \in W(Rwv \wedge Rwu \to \exists x \in W(Rvx \wedge Rux))$.

Como ya sabemos y hemos estado usando, $Rwv$ denota que '$w$ está relacionado con $v$' o que '$v$ es alcanzable desde $w$' o que '$v$ se encuentra a un $R$-transición de $w$', pero también nos interesa poder expresar cuando un estado $w$ puede alcanzar a un estado $v$ por medio de $n$ $R$-transiciones. Para esto la siguiente definición.

**Definición 3.2.2.** Sean, $\tau_0$ el tipo de semejanza básico modal, $\mathfrak{F} = (W, R)$ un $\tau_0$-frame y $w$ y $v$ estados de $\mathfrak{F}$. Para $n \geq 0$, definimos recursivamente la relación $R^n$ –el $n$-ésimo producto relativo de $R$ consigo misma– como sigue:

1. $R^0wv$ si y solo si $w = v$.

2. Para $n > 0$, $R^nwv$ si y solo si existe $u \in W$ tal que $Rwu$ y $R^{n-1}uv$.

Si recordamos la definición 1.4.1 de la $n$-ésima iteración de un operador modal, podemos relacionarla con $R^n$ mediante la siguiente proposición.

**Proposición 3.2.3.** *Sean, $\tau_0$ un tipo de semejanza, $\phi$ una $\tau_0$-fórmula, $\mathfrak{F} = (W, R)$ un $\tau_0$-frame y $V$ una valuación tal que $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$ es un $\tau_0$-modelo basado en $\mathfrak{F}$. Entonces:*

$(i)$ *$\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond^n\phi$ si y solo si existe $v \in W$ tal que $R^nwv$ y $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$.*

$(ii)$ *$\mathfrak{M}, w \Vdash \Box^n\phi$ si y solo si para todo $v \in W$ tal que $R^nwv$, $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$.*

*Prueba.* Hagamos la prueba de $(i)$ por inducción sobre $n$. Para $n = 0$ es trivial ya que $\Diamond^0\phi = \phi$ y $R^0wv$ si y sólo si $w = v$. Ahora supongamos que se cumple para un $n$ natural. Y supongamos primero que $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond^{n+1}\phi$, entonces $\mathfrak{M}w \Vdash \Diamond\Diamond^n\phi$. Por definición tenemos que existe $u \in W$

tal que $Rwu$ y $\mathfrak{M}, u \Vdash \Diamond^n \phi$, pero por hipótesis de inducción, esto es que existe $u \in W$ tal que $Rwu$ y existe $v \in W$ tal que $R^n uv$ y $\mathfrak{M}, v \Vdash \phi$. Pero por definición de $R^{n+1}$, eso se traduce en que hay un $v \in W$ tal que $R^{n+1} wv$ y $\mathfrak{M}, v \Vdash \phi$. El recíproco es completamente análogo y por lo tanto se cumple $(i)$. La prueba de $(ii)$ es muy similar. •

Con esto podemos definir una última propiedad de una relación $R$.

**Definición 3.2.4.** Sean $\tau_0$ y $\mathfrak{F}$ como en la definición anterior (3.2.1). Decimos que $R$ es $(k, l, m, n)$- *incestual* si:

$$\forall w, v, u \in W(R^k wv \wedge R^m wu \rightarrow (\exists x \in W(R^l vx \wedge R^n ux))).$$

## 3.3. Algunos Esquemas Importantes

En esta sección veremos ciertos esquemas que tomarán mayor importancia más adelante pero ahora haremos un estudio de ellos desde la perspectiva de la definibilidad, es decir, veremos qué clases de frames define cada uno. Primero enunciaremos los esquemas, con sus nombres más usuales:

**Acotación 3.3.1.** *Sean, $\tau_0$ el tipo de semejanza básico modal y $\phi$ y $\psi$ $\tau_0$-fórmulas. Consideremos los siguientes esquemas:*

***K.*** $\Box(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\phi \rightarrow \Box\psi)$.

***D.*** $\Box\phi \rightarrow \Diamond\phi$.

***T.*** $\Box\phi \rightarrow \phi$.

***B.*** $\phi \rightarrow \Box\Diamond\phi$.

***4.*** $\Box\phi \rightarrow \Box\Box\phi$.

***5.*** $\Diamond\phi \rightarrow \Box\Diamond\phi$.

***G.*** $\Diamond\Box\phi \rightarrow \Box\Diamond\phi$.

No todos los esquemas anteriores son válidos en la clase de todos los frames. Es fácil mostrar que (a excepción de **K**) todos son refutables en algún modelo y para alguna valuación.

**Proposición 3.3.2.** *El esquema **K** es válido en la clase de todos los $\tau_0$-frames.*

*Prueba.* Sean, $\mathfrak{F} = (W, R)$ un $\tau_0$-frame, $V$ una valuación y $w$ un estado en el modelo $(\mathfrak{F}, V)$. Supongamos que $(\mathfrak{F}, V), w \Vdash \Box(\phi \to \psi)$, es decir, que para todo estado $v \in W$, $Rwv$ implica que $(\mathfrak{F}, V), v \Vdash \phi \to \psi$, lo que por definición de satisfacción es que para todo $v \in W$ tal que $Rwv$, $(\mathfrak{F}, V), v \Vdash \phi$ implica $(\mathfrak{F}, V), v \Vdash \psi$, entonces, para todo $v \in W$ tal que $Rwv$, $(\mathfrak{F}, V), v \Vdash \phi$ implica que para todo $v \in W$ tal que $Rwv$, $(\mathfrak{F}, V), v \Vdash \psi$. Y así, tenemos que $(\mathfrak{F}, V), w \Vdash \Box\phi \to \Box\psi$. Por lo tanto **K** es válido en la clase de todos los $\tau_0$-frames. •

Pero entonces nos interesa saber en qué clase de modelos son válidos cada uno de los esquemas anteriores.

**Proposición 3.3.3.** *Los esquemas siguientes son válidos en la clase de frames indicada en cada caso:*

(1) ***D:*** *seriados*

(2) ***T:*** *reflexivos*

(3) ***B:*** *simétricos*

(4) ***4:*** *transitivos*

(5) ***5:*** *euclidianos*

(6) ***G:*** *incestuales*

*Prueba.* Haremos las pruebas para (1), (3) y (5). Para todos, sean, $\mathfrak{F}$ un $\tau_0$-frame y $V$ una valuación tal que $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$ es un $\tau_0$-modelo basado en $\mathfrak{F}$ y además sean, $\phi$ una $\tau_0$-fórmula y $w \in W$.

(1) **Recordemos que D: $\Box\phi \to \Diamond\phi$.** Supongamos que $\mathfrak{F}$ es seriado y que $\mathfrak{M}, w \Vdash \Box\phi$, entonces para todo $v \in W$ tal que $Rwv$, $\mathfrak{M}, v \Vdash \phi$. Como $R$ es seriado, en efecto existe un estado $v$ tal que $Rwv$, entonces $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\phi$. Y por lo tanto si $\mathfrak{F}$ es un frame seriado, $\mathfrak{F} \Vdash$ **D**.

(3) **Recordemos: B: $\phi \to \Box\Diamond\phi$.** Supongamos que $\mathfrak{F}$ es simétrico y que $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$. Sea $v \in \mathfrak{M}$ tal que $Rwv$, como $R$ es simétrica, entonces $Rvw$ y como $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$, entonces $\mathfrak{M}, v \Vdash \Diamond\phi$,

y como $v$ fue arbitrario, para todo $v \in W$ tal que $Rwv$, $\mathfrak{M}, v \Vdash \Diamond\phi$ y por lo tanto $\mathfrak{M}, w \Vdash \Box\Diamond\phi$. Podemos concluir que para todo $\tau_0$-frame simétrico $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F} \Vdash \mathbf{B}$.

(5) **Recordemos: 5: $\Diamond\phi \to \Box\Diamond\phi$.** Supongamos que $\mathfrak{F}$ es euclidiano y que $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\phi$, entonces existe $v \in W$ tal que $Rwv$ y $\mathfrak{M}, v \Vdash \phi$. Sea $u$ tal que $Rwu$, como $R$ es euclidiana, $Ruv$ y como $\mathfrak{M}, v \Vdash \phi$, entonces $\mathfrak{M}, u \Vdash \Diamond\phi$ y como $u$ fue arbitrario, entonces $\mathfrak{M}, w \Vdash \Box\Diamond\phi$. Por lo tanto si $\mathfrak{F}$ es un $\tau_0$-frame euclidiano, entonces $\mathfrak{F} \Vdash \mathbf{5}$.

Las pruebas de (2), (4) y (6) son muy similares. •

En la proposición anterior solo probamos que si un frame tiene una propiedad entonces valida una fórmula, pero para ver que cada fórmula define a su respectiva clase de frames, hace falta ver el recíproco.

**Proposición 3.3.4.** *Para los siguientes esquemas y propiedades, si un frame valida el esquema, entonces pertenece a la clase de frames indicada.*

(1) *Seriados:* ***D***.

(2) *Reflexivos:* ***T***.

(3) *Simétricos:* ***B***.

(4) *Transitivos:* ***4***.

(5) *Euclidianos:* ***5***.

(6) *Incestuales:* ***G***.

*Prueba.* Esta vez solo haremos las pruebas para (2), (4) y (6). Todas las pruebas serán por contrapositiva, y para todas sean, $\tau_0$ el tipo de semejanza básico modal y $\mathfrak{F}$ un $\tau_0$-frame.

(2) Supongamos que $\mathfrak{F}$ no es reflexivo, así que existe $w \in W$ tal que $\neg Rww$. Sea $p \in \Phi$ y sea $V$ una valuación tal que $V(p) = W \setminus \{w\}$, entonces si $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$, $\mathfrak{M}, w \Vdash \Box p$ pero $\mathfrak{M}, w \nVdash p$. Así que si $\mathfrak{F}$ no es reflexivo, no valida $\mathbf{D}$.

(4) Supongamos que $\mathfrak{F}$ no es transitivo. Entonces existen $w, v, u \in W$ tales que $Rwv$ y $Rvu$ pero no $Rwu$. Sea $p \in \Phi$ y $V$ una valuación tal que $V(p) = \{v \in W \mid Rwv\}$. Si $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$, es claro, por como está definida $V$ que $\mathfrak{M}, w \Vdash \Box p$ y como $\neg Rwu$, $u \notin V(p)$ entonces, $\mathfrak{M}, w \nVdash p$, entonces $\mathfrak{M}, w \nVdash \Box p$, entonces $\mathfrak{M}, w \nVdash \Box\Box p$. Por lo tanto $\mathfrak{F} \nVdash \Box\phi \to \Box\Box\phi$.

(6) Supongamos que $\mathfrak{F}$ no es incestual. Entonces sean $w, v, u \in W$ tales que $Rwv$ y $Rwu$ y sea $x \in W$ tal que $Rux$ pero $\neg Rvx$. Sea $p \in \Phi$ y $V$ una valuación tal que $V(p) = \{x \in W \mid Rux\}$. Entonces si $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$, entonces $\mathfrak{M}, x \Vdash p$ y entonces $\mathfrak{M}, u \nVdash \Box p$ y entonces $\mathfrak{M}, w \nVdash \Diamond\Box p$, pero $\mathfrak{M}, v \nVdash \Diamond p$ y entonces $\mathfrak{M}, w \nVdash \Box p$. Por lo tanto $\mathfrak{F} \nVdash \Diamond\Box\phi \to \Box\Diamond\phi$.

Las pruebas de (1), (3) y (5) son muy similares. •

Podemos concluir de las últimas dos proposiciones que cada esquema define a su clase de frames correspondiente.

### El Esquema $G^{k,l,m,n}$

**Acotación 3.3.5.** *Sea $\tau_0$ el tipo de semejanza básico modal y $\phi$ una $\tau_0$-fórmula. Entonces por esquema $G^{k,l,m,n}$ entendemos:*

$G^{k,l,m,n}$: $\Diamond^k\Box^l\phi \to \Box^m\Diamond^n\phi$.

**Proposición 3.3.6.** *El esquema $G^{k,l,m,n}$ define a la clase de los frames $(k, l, m, n)$-incestuales.*

*Prueba.* Primero probaremos que si $\mathfrak{F}$ es un $\tau_0$-frame $(k, l, m, n)$-incestual, entonces $\mathfrak{F}$ valida el esquema $G^{k,l,m,n}$. Sean $V$ una valuación, $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$ y $w \in W$ tales que $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond^k\Box^l\phi$, entonces existe $v \in W$ tal que $R^kwv$ y para todo $x \in W$ tal que $R^lvx$, $\mathfrak{M}, x \Vdash \phi$. Y queremos probar que $\mathfrak{M}, w \Vdash \Box^m\Diamond^n\phi$; así que sea $u \in W$ tal que $R^mwu$. Tenemos entonces que $v$ y $u$ son tales que $R^kwv$ y $R^mwu$, entonces por $(k, l, m, n)$-incestualidad, existe $x \in W$ tal que $R^lvx$ y $R^nux$, entonces como $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond^k\Box^l\phi$, dicho $x$ cumple también que $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$. Y por lo tanto $\mathfrak{M}, w \Vdash \Box^m\Diamond^n\phi$.

Ahora, para probar que si $\mathfrak{F} \Vdash \Diamond^k\Box^l\phi \to \Box^m\Diamond^n\phi$, entonces $\mathfrak{F}$ es $(k, l, m, n)$-incestual, procederemos por contrapositiva. Supongamos que $\mathfrak{F}$ no es $(k, l, m, n)$-incestual. Entonces hay $w, v, u \in W$ tales que $R^kwv$, $R^mwu$ y sea $x \in W$ tal que $R^lvx$ y $\neg R^nux$. Sea $p \in \Phi$ y $V$

una valuación tal que $V(p) = \{x \in W \mid R^l vx\}$, entonces si $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$, $\mathfrak{M}, x \Vdash p$, y como $R^l vx$, $\mathfrak{M}, v \Vdash \Box^l \phi$ y por lo tanto $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond^k \Box^l p$. Pero como $\neg R^n ux$, entonces $\mathfrak{M}, u \nVdash \Diamond^p$, por lo que $\mathfrak{M}, w \nVdash \Box^m \Diamond^n p$.

Así concluimos que $G^{k,l,m,n}$ define a la clase de los frames $(k, l, m, n)$-incestuales. •

Y podemos ver entonces, que las proposiciones 3.3.3 y 3.3.4 son corolarios de esta proposición si notamos que los esquemas **D, T, B, 4, 5** y **G** son instancias del esquema $G^{k,l,m,n}$ y que las propiedades de serialidad, reflexividad, simetría, transitividad, euclidianidad e incestualidad son, respectivamente $0, 1, 0, 1$-, $0, 1, 0, 0$-, $0, 0, 1, 1$-, $0, 1, 2, 0$-, $1, 0, 1, 1$- y $1, 1, 1, 1$- incestualidad.

Con esto terminamos un pequeño estudio de cómo ciertas fórmulas modales pueden definir a una clase de frames.

# Capítulo 4

# Sistemas Normales de Lógica Modal

En este capítulo haremos un breve estudio sintáctico de las lógicas modales. Al igual que el capítulo anterior, estará restringido al lenguaje básico modal $LM(\tau_0, \Phi)$. También nos restringiremos a los sistemas normales de lógica modal y más aún, a aquellos que tienen como axiomas, todas las combinaciones de los esquemas que vimos en el capítulo anterior, presentaremos a todos estos sistemas y estudiaremos su relación en cuanto a la inclusión. Los sistemas normales de lógica modal son aquellos que responden a la semántica de mundos posibles (o de Kripke), es por eso que son los de interés para este trabajo. Veremos caracterizaciones de cada sistema, algunos teoremas y reglas de inferencia. Y finalmente veremos con respecto a qué clases de frames son correctos y completos cada uno de los sistemas normales.

## 4.1. Sistemas Normales de Lógica Modal

Recordemos la definición 1.4.7 de un sistema lógico modal o lógica modal. Ahora nos concentraremos en cierto tipo de estos sistemas: los sistemas normales.

**Definición 4.1.1.** Un sistema normal de lógica modal es un sistema lógico que contiene el esquema **Df$\Diamond$:** $\Diamond\phi \longleftrightarrow \neg\Box\neg\phi$ y es cerrado bajo la regla de inferencia **RK**.

$$\textbf{RK:}\frac{(\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n) \to \phi}{(\Box\phi_1 \wedge \cdots \wedge \Box\phi_n) \to \Box\phi}(n \geq 0)$$

Existen algunos teoremas y reglas de inferencia que son válidos en todos los sistemas normales, como lo muestra la siguiente proposición.

**Proposición 4.1.2.** *Todo sistema normal de lógica modal tiene las siguientes reglas de inferencia y teoremas:*

***RN.*** $\dfrac{\phi}{\Box\phi}$ ***RM.*** $\dfrac{\phi \to \psi}{\Box\phi \to \Box\psi}$

***RR.*** $\dfrac{(\phi \wedge \psi) \to \chi}{(\Box\phi \wedge \Box\psi) \to \Box\chi}$ ***RE.*** $\dfrac{\phi \longleftrightarrow \psi}{\Box\phi \longleftrightarrow \Box\psi}$

***N.*** $\Box\top$ ***M.*** $\Box(\phi \wedge \psi) \to (\Box\phi \wedge \Box\psi)$

***C.*** $(\Box\phi \wedge \Box\psi) \to \Box(\phi \wedge \psi)$ ***R.*** $\Box(\phi \wedge \psi) \longleftrightarrow (\Box\phi \wedge \Box\psi)$

***K.*** $\Box(\phi \to \psi) \to (\Box\phi \to \Box\psi)$

*Prueba.* Sea $\Sigma$ un sistema normal, por la proposición 1.4.10, **PL** está contenido en $\Sigma$. Este hecho lo usaremos bastante. Es claro que **RN, RM** y **RR** son instancias de **RK** para $n = 0$, $n = 1$ y $n = 2$, respectivamente, por lo tanto son válidas en cualquier sistema normal.

Ahora, para **RE.** Supongamos que $\vdash_\Sigma \phi \longleftrightarrow \psi$, entonces por **PL**, $\vdash_\Sigma \phi \to \psi$ y $\vdash \psi \to \phi$, por **RM**, $\vdash_\Sigma \Box\phi \to \Box\psi$ y $\vdash_\Sigma \Box\psi \to \Box\phi$ y de nuevo por **PL**, concluimos que $\vdash_\Sigma \Box\phi \longleftrightarrow \Box\psi$.

Para **N**. Por **PL**, tenemos que $\vdash_\Sigma \top$ y por **RN**, $\vdash_\Sigma \Box\top$.

Y para **K**. Por **PL**, sabemos que $\vdash_\Sigma ((\phi \to \psi) \wedge \phi) \to \psi$, entonces por **RR**, $\vdash_\Sigma (\Box(\phi \to \psi) \wedge \Box\phi) \to \Box\psi)$, entonces por **PL**, $\vdash_\Sigma \Box(\phi \to \psi) \to (\Box\phi \to \Box\psi)$.

Por último, para **C**. Como $(\phi \wedge \psi) \to (\phi \to \psi)$ es una tautología, entonces por **PL** $\vdash_\Sigma (\phi \wedge \psi) \to (\phi \wedge \psi)$ y por **RR**, $\vdash_\Sigma (\Box\phi \wedge \Box\psi) \to \Box(\phi \wedge \psi)$.

No se harán las pruebas de **M** y **R** pero son sencillas y muy similares a las que ya se hicieron. •

El esquema **Df**$\Diamond$, junto con la regla de inferencia **RK**, nos brinda una caracterización para los sistemas normales. Pero como ya vimos que hay otros esquemas y reglas de inferencia que cumplen todos los sistemas normales, entonces veremos otras caracterizaciones de los sistemas normales.

**Proposición 4.1.3.** *Sea $\Sigma$ un sistema lógico modal que contiene al esquema **Df**$\Diamond$. Entonces $\Sigma$ es normal si y solo si cumple alguna de las siguientes condiciones:*

(*i*) *Contiene el esquema **K** y es cerrado bajo **RN**.*

(*ii*) *Contiene el esquema **N** y es cerrado bajo **RR**.*

(*iii*) *Contiene a los esquemas **N** y **C** y es cerrado bajo **RM**.*

(*iv*) *Contiene a los esquemas **N**, **C** y **M** y es cerrado bajo **RE**.*

*Prueba.* Sea $\Sigma$ un sistema lógico modal que contiene al esquema **Df**$\Diamond$. La proposición anterior (4.1.2) prueba la implicación de izquierda a derecha de cada inciso, entonces sólo probaremos la otra.

Para $(i)$ procederemos por inducción sobre $n$, ya que hay que probar que $\Sigma$ contiene a **RK**. Para el caso en que $n = 0$, es simplemente **RN**. Así que supongamos que se cumple para un natural $k < n$, es decir que si $\vdash_\Sigma (\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_k) \to \phi)$, entonces $\vdash_\Sigma (\Box\phi_1 \wedge \cdots \wedge \Box\phi_k) \to \Box\phi$.

Supongamos ahora que $\vdash_\Sigma (\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n) \to \phi$. Por **PL**, tenemos que $\vdash_\Sigma (\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_{n-1}) \to (\phi_n \to \phi)$. Por hipótesis de inducción, $\vdash_\Sigma (\Box\phi_1 \wedge \cdots \wedge \Box\phi_{n-1}) \to \Box(\phi_n \to \phi)$ y por **K** y **PL**, esto implica que $\vdash_\Sigma (\Box\phi_1 \wedge \cdots \wedge \Box\phi_{n-1}) \to (\Box\phi_n \to \Box\phi)$ y finalmente, de nuevo por **PL**, $\vdash_\Sigma (\Box\phi_1 \wedge \cdots \wedge \Box\phi_n) \to \Box\phi$.

Ahora para $(ii)$, supongamos que $\Sigma$ contiene al esquema **N** y es cerrado bajo **RR**. Vamos a utilizar la caracterización que acabamos de probar en $(i)$, así que hay que probar que contiene al esquema **K** y es cerrado bajo **RN**. Para ver que contiene a **K**, véase la prueba de la proposición anterior (4.1.2), ahí probamos **K** a partir de **RR**; ahora veamos que es cerrado bajo **RN**: supongamos que $\vdash_\Sigma \phi$, pero por **PL**, tenemos que $\vdash_\Sigma (\top \wedge \top) \to \phi$, ahora por **RR**, $\vdash_\Sigma (\Box\top \wedge \Box\top) \to \Box\phi$, por **N**, tenemos que $\vdash_\Sigma \Box\top$, lo que implica que $\vdash_\Sigma \Box\phi$.

Para la prueba de $(iii)$ se puede usar $(ii)$ y para la de $(iv)$, $(iii)$. •

Daremos dos proposiciones análogas a 4.1.2 y 4.1.3 pero que tratan de esquemas y reglas de inferencia que tienen predominantemente al operador modal $\Diamond$ en lugar de $\Box$, aunque no nos detendremos en las pruebas ya que son similares a las anteriores.

**Proposición 4.1.4.** *Un sistema normal de lógica modal tiene los siguientes teoremas y reglas de inferencia:*

**RK◇.** $\dfrac{\phi \to (\phi_1 \vee \cdots \vee \phi_n)}{\Diamond\phi \to (\Diamond\phi_1 \vee \cdots \vee \Diamond\phi_n)} (n \geq 0)$

**RN◇.** $\dfrac{\neg\phi}{\neg\Diamond\phi}$

**RM◇.** $\dfrac{\phi \to \psi}{\Diamond\phi \to \Diamond\psi}$

**RR◇.** $\dfrac{\phi \to (\psi \vee \chi)}{\Diamond\phi \to (\Diamond\psi) \vee \Diamond\chi)}$

**RE◇.** $\dfrac{\phi \longleftrightarrow \psi}{\Diamond\phi \longleftrightarrow \Diamond\psi}$

**N◇.** $\neg\Diamond\bot$

**M◇.** $(\Diamond\phi \vee \Diamond\psi) \to \Diamond(\phi \vee \psi)$

**C◇.** $\Diamond(\phi \vee \psi) \to (\Diamond\phi \vee \Diamond\psi)$

**R◇.** $\Diamond(\phi \vee \psi) \longleftrightarrow (\Diamond\phi \vee \Diamond\psi)$

**K◇.** $(\neg\Diamond\phi \wedge \Diamond\psi) \to \Diamond(\neg\phi \wedge \psi)$

**Df□.** $\Box\phi \longleftrightarrow \neg\Diamond\neg\phi$

**Proposición 4.1.5.** *Sea $\Sigma$ un sistema lógico modal que contiene al esquema **Df□**. Entonces $\Sigma$ es normal si y solo si cumple alguna de las siguientes condiciones:*

(*i*) *Es cerrado bajo **RK◇**.*

(*ii*) *Contiene el esquema **K◇** y es cerrado bajo **RN◇**.*

(*iii*) *Contiene al esquema **N◇** y es cerrado bajo **RR◇**.*

(*iv*) *Contiene a los esquemas **N◇** y **C◇** y es cerrado bajo **RM◇**.*

(*v*) *Contiene a **N◇**, **C◇** y **M◇** y es cerrado bajo **RE◇**.*

## 4.2. La regla de reemplazo y la dualidad en los sistemas normales

En esta sección hablaremos de dos conceptos: la regla de reemplazo y un par de operadores de dualidad. Estos nos darán más teoremas y reglas de inferencia para los sistemas normales de lógica modal.

Comenzaremos con la regla de reemplazo:

$$\textbf{REP.}\dfrac{\phi \longleftrightarrow \phi'}{\psi \longleftrightarrow \psi[\phi/\phi']},$$

que recordando la definición 1.4.2, $\psi[\phi/\phi']$ es cualquier fórmula que resulte de reemplazar cero o más ocurrencias de $\phi$ en $\psi$ por $\phi'$.

**Proposición 4.2.1.** *Sea $\Sigma$ un sistema normal de lógica modal. Entonces $\Sigma$ tiene como regla de inferencia a **REP**.*

*Prueba.* Sea $\Sigma$ un sistema normal y supongamos que $\vdash_\Sigma \phi \longleftrightarrow \phi'$. Si $\phi$ y $\psi$ son la misma fórmula entonces es trivial porque $\psi[\phi/\phi']$ es o bien $\psi$ o $\phi'$, y tendríamos, en el primer caso, que $\vdash_\Sigma \psi \longleftrightarrow \psi$, que es siempre cierto, o en el segundo caso, que $\vdash_\Sigma \phi \longleftrightarrow \phi'$ que es cierto por hipótesis. Así que supongamos que son diferentes. Haremos la prueba por inducción sobre la complejidad de $\psi$.

Si $\psi$ es una letra proposicional, digamos $p$ para alguna $p \in \Phi$. Como tenemos que $p$ y $\phi$ son diferentes, entonces no hay ocurrencias de $\phi$ en $p$ y $\psi[\phi/\phi'] = p$, entonces trivialmente $\vdash_\Sigma p \longleftrightarrow \psi[\phi/\phi']$. Si $\psi$ es la constante $\perp$, es totalmente análogo.

Si $\psi$ es de la forma $\neg\chi$.Tenemos por hipótesis de inducción que $\vdash_\Sigma \chi \longleftrightarrow \chi[\phi/\phi']$, entonces por **PL**, $\vdash_\Sigma \neg\chi \longleftrightarrow \neg\chi[\phi/\phi']$. El caso en que $\psi$ es de la forma $\chi \vee \alpha$, es análogo.

Ahora, si $\psi$ es de la forma $\Diamond\chi$. Por hipótesis de inducción, $\vdash_\Sigma \chi \longleftrightarrow \chi[\phi/\phi']$, y por la regla **RE**$\Diamond$ (que probamos en 4.1.4), tenemos que $\vdash_\Sigma \Diamond\chi \longleftrightarrow \Diamond(\chi[\phi/\phi'])$, pero es fácil ver que $\Diamond(\chi[\phi/\phi']) = \Diamond\chi[\phi/\phi']$, entonces $\vdash_\Sigma \Diamond\chi \longleftrightarrow \Diamond\chi[\phi/\phi']$, que es lo que se quería probar. •

Ahora, definiremos el operador de dualidad para **fórmulas**.

**Definición 4.2.2** (Dualidad de fórmulas)**.** La *fórmula dual* $\phi^*$ de una fórmula $\phi$ se define recursivamente de la siguiente manera:

(*i*) $p^* = \neg p$ para toda $p \in \Phi$.

(*ii*) $\perp^* = \top$.

(*iii*) $(\neg\phi)^* = \neg(\phi)^*$.

(*iv*) $(\phi \vee \psi)^* = \phi^* \wedge \psi^*$.

(*v*) $(\Diamond\phi)^* = \Box(\phi)^*$.

A partir de esta definición podemos deducir fácilmente las de las demás fórmulas:

*Afirmación* 2. La defnción de dualidad para los demás operadores queda definida como:

- $\top^* = \bot$.
- $(\phi \wedge \psi)^* = \phi^* \vee \psi^*$.
- $(\phi \rightarrow \psi)^* = \neg(\phi)^* \wedge (\psi)^*$.
- $(\phi \longleftrightarrow \psi)^* = \phi^* \longleftrightarrow \neg(\psi)^*$.
- $(\Box\phi)^* = \Diamond(\phi)^*$.

**Proposición 4.2.3.** *Sea $\Sigma$ un sistema normal de lógica modal. Entonces $\Sigma$ tiene los siguientes teoremas y reglas de inferencia referentes a la fórmula dual:*

(*i*) $\phi \longleftrightarrow \neg\phi^*$

(*ii*) $\dfrac{\phi}{\neg\phi^*}\ \frac{\neg\phi}{\phi^*}$

(*iii*) $\dfrac{\phi \rightarrow \psi}{\psi^* \rightarrow \phi^*}$.

(*iv*) $\dfrac{\phi \longleftrightarrow \psi}{\phi^* \longleftrightarrow \psi^*}$.

*Prueba.* Sea $\Sigma$ un sistema normal de lógica modal y sea $\phi \in \Sigma$. únicamente haremos la prueba de (*i*) ya que los demás son corolarios de los anteriores y sencillos de probar. Procederemos por inducción. Si $\phi$ es una letra proposicional, tenemos por **PL** que $\vdash_\Sigma p \longleftrightarrow \neg\neg p$ y como $\neg p = p^*$, entonces $\vdash_\Sigma \phi \longleftrightarrow \neg\phi^*$. Si $\phi$ es la constante $\bot$, entonces por **PL** $\vdash_\Sigma \bot \longleftrightarrow \neg\top$ y entonces, por la definición del operador dual $\vdash_\Sigma \bot \longleftrightarrow \neg\bot^*$. Si $\phi$ es de la forma $\neg\psi$, por hipótesis de inducción, tenemos que $\vdash_\Sigma \psi \longleftrightarrow \neg\psi^*$, entonces por **PL**, $\vdash_\Sigma \neg\psi \longleftrightarrow \neg(\neg\psi^*)$. Si $\phi$ es de la forma $\psi \vee \chi$, entonces, tenemos por hipótesis de inducción que $\vdash_\Sigma \psi \longleftrightarrow \neg\psi^*$y que $\vdash_\Sigma \chi \longleftrightarrow \neg\chi^*$, entonces por la regla de reemplazo y **PL**, $\vdash_\Sigma \psi \vee \chi \longleftrightarrow \neg\psi^* \vee \neg\chi^*$ y es fácil ver que $\vdash_\Sigma \neg\psi^* \vee \neg\chi^* \longleftrightarrow \neg(\psi \vee \chi)^*$ y por lo tanto $\vdash_\Sigma \psi \vee \chi \longleftrightarrow \neg(\psi \vee \chi)^*$. Y finalmente, si $\phi$ es de la forma $\Diamond\psi$, por hipótesis de inducción y la regla de reemplazo, tenemos que $\vdash_\Sigma \Diamond\psi \longleftrightarrow \Diamond(\neg\psi^*)$ y por **Df**$\Box$, $\vdash_\Sigma \Diamond(\neg\psi^*) \longleftrightarrow \neg\Box\psi^*$ y tenemos que $(\Diamond\psi)^* = \Box\psi^*$, lo cual concluye la prueba. •

Como ejemplos de esta última proposición, tenemos que en un sistema normal $\Sigma$ es siempre un teorema la fórmula $\Diamond\top \longleftrightarrow \neg\Box\bot$. Y que siempre que $(\Diamond\phi \vee \Diamond\neg\phi)$ sea un teorema, entonces lo será $\neg(\Box\phi \wedge \Box\neg\phi)$. Ambos son fáciles de verificar usando las condiciones $(i)$ y $(ii)$ de la proposición anterior.

*Observación.* Sea **S** un esquema en un sistema normal $\Sigma$. Supongamos que en **S** predomina el operador modal $\Box$ ($\Diamond$). Hemos hablado del esquema dual **S**$\Diamond$ (**S**$\Box$). Este esquema dual **S**$\Diamond$ (**S**$\Box$) resulta ser exactamente una instancia de $\neg S^*$.

Por último para esta sección, definiremos otro operador de dualidad y enunciaremos algunas proposiciones que se referirán a este operador y nos darán información de cuándo podemos intercambiar los operadores $\Box$ y $\Diamond$.

**Definición 4.2.4** (Modalidad y modalidad dual)**.** Definimos a una *modalidad* $\alpha$ como una sucesión finita y posiblemente vacía de operadores modales ($\Box$ y $\Diamond$) y el operador de negación $(\neg)$.

Para cada modalidad $\alpha$, definimos su *modalidad dual* $\alpha^*$ que es la modalidad que resulta de intercambiar $\Box$ por $\Diamond$ y viceversa en $\alpha$.

Por ejemplo, si $\alpha = \neg\Diamond\neg\Box\Diamond$, entonces $\alpha^* = \neg\Box\neg\Diamond\Box$.

Decimos que una *modalidad* es *afirmativa* si contiene una cantidad par de ocurrencias del operador $\neg$.

*Notación.* Denotaremos a las modalidades con las primeras letras del alfabeto griego $\alpha$, $\beta, \gamma, \ldots$

Es importante notar que los dos operadores duales son distintos a pesar de que los denotamos igual.

**Proposición 4.2.5.** *Sean, $\Sigma$ un sistema normal de lógica modal, $\alpha$ y $\beta$ modalidades y $\phi$ cualquier $\tau_0$-fórmula.Entonces:*

*(i)* $\vdash_\Sigma \alpha\phi \longleftrightarrow \neg\alpha^*\neg\phi$.

*(ii)* $\vdash_\Sigma \alpha\phi$ *si y solo si* $\vdash_\Sigma \neg\alpha^*\neg\phi$.

*(iii)* $\vdash_\Sigma \alpha\phi \to \beta\phi$ *para toda* $\phi$ *si y solo si* $\vdash_\Sigma \beta^*\phi \to \alpha^*\phi$ *para toda* $\phi$.

*(iv)* $\alpha\phi \longleftrightarrow \beta\phi$ *para toda* $\phi$ *si y solo si* $\vdash_\Sigma \alpha^*\phi \longleftrightarrow \beta^*\phi$ *para toda* $\phi$.

Como aplicación de esto vemos que un sistema normal contiene al equema **4**: $\Box\phi \to \Box\Box\phi$ si y solo si contiene al esquema dual **4**$\Diamond$: $\Diamond\Diamond\phi \to \Diamond\phi$.

**Proposición 4.2.6.** *Sean, $\Sigma$ un sistema normal de lógica modal y $\alpha$ y $\beta$ modalidades afirmativas. Entonces $\Sigma$ contiene al esquema **S**: $\alpha\phi \to \beta\phi$ como teorema si y solo si contiene a alguno de los siguientes teoremas y reglas de inferencia:*

***S$\Diamond$.*** $\beta^*\phi \to \alpha^*\phi$.

***RS.*** $\dfrac{\phi \to \psi}{\alpha\phi \to \beta\psi}$.

***RS$\Diamond$.*** $\dfrac{\phi \to \psi}{\beta^*\phi \to \alpha^*\psi}$.

Estas proposiciones nos brindan herramientas para conocer más teoremas de los sistemas normales.

## 4.3. Extensiones del sistema K

Para poder hablar de extensiones, es recomendable que el lector se remita a la definición 1.4.8 de teorema, donde también se habla de $\Sigma$-sistemas, con $\Sigma$ un sistema lógico modal.

El sistema normal más pequeño, **K**, tiene como teoremas lo generado por **Df**$\Diamond$, **RK** y la lógica proposicional. Entonces, todos los sistemas normales son **K**-sistemas. Para hablar de los sistemas normales vamos a escribir $KS_1S_2$ **...** cuando nos refiramos a la lógica modal normal que tenga como teoremas a los esquemas $S_1, S_2, \ldots$. Más formalmente:

$$KS_1S_2\ldots S_n = \quad \text{el sistema normal más pequeño que contiene a } S_1, S_2, \ldots, S_n$$

*Nota* 4.3.1. El orden en que pongamos a los teoremas es irrelevante. Por ejemplo, el sistema **KT4B** es exactamente el mismo sistema que **KBT4**.

Por otro lado, cuando no se agrega algún esquema de estos como teorema, tenemos por definición a **K**, que es el sistema más pequeño.

Entonces en lo que sigue nos vamos a interesar en las extensiones de **K** que resultan de agregar como teoremas a los esquemas **D, T, B, 4** y **5** (para recordar los esquemas, revísese la acotación 3.3.1).

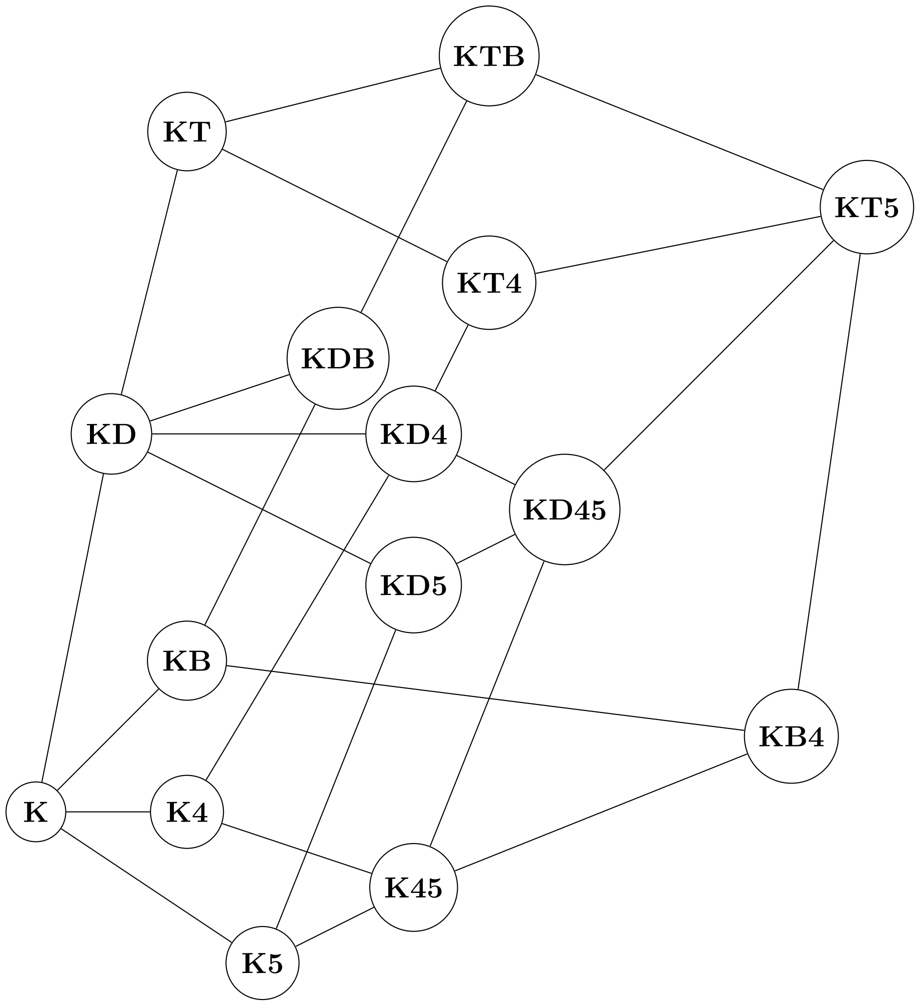



Figura 4-1: Extensiones Normales del Sistema **K**

Existen quince sistemas normales distintos obtenidos de agregar al sistema más pequeño (**K**), dichos esquemas como teoremas en todas sus combinaciones posibles. Estos quince sistemas están ilustrados en la figura 4-1. En esta figura la inclusión de los sistemas está representada por líneas; es decir, las extensiones de un sistema son las que se encuentran conectadas con este por una línea y están a la derecha de él.

La mayoría de las inclusiones son obvias, sin embargo, probaremos algunas. Podemos observar que en el diagrama no aparecen todas las combinaciones posibles de los esquemas pero se puede mostrar que cualquiera de las que no aparecen es idéntica a alguna de las que que sí está en el diagrama. Aunque algunos de estos casos son obvios, por ejemplo que **KDT** es la misma que **KT**.

De estos quince sistemas, los que han sido más relevantes a lo largo de la historia son **KD, KT, KTB, KT4** y **KT5**. **KD** es considerada como la lógica deontica básica y **KT** como la lógica alética básica, y normalmente se refiere a ellas simplemente como **D** y **T** respectivamente. Luego, el sistema **KTB** es conocido como el sistema *Brouwersche* (a veces solo **B**) y **KT4** y **KT5** son conocidos como los sistemas de *Lewis*, **S4** y **S5**, respectivamente.

El estudio que haremos de los sistemas será breve y no profundizaremos mucho en las pruebas de las proposiciones. Estudiaremos los sistemas **KD, KT, KB, K4, K5** y sus extensiones normales. En la siguiente proposición tenemos una caracterización para cada uno de estos sistemas.

**Proposición 4.3.2.** *Sea $\Sigma$ un sistema normal de lógica modal. Entonces:*

1. *$\Sigma$ es un **KD**-sistema si y solo si tiene a **RD**.*
2. *$\Sigma$ es un **KT**-sistema si y solo si tiene a **T**$\Diamond$, a **RT** o a **RT**$\Diamond$.*
3. *$\Sigma$ es un **KB**-sistema si y solo si tiene a **B**$\Diamond$, a **RB** o a **RB**$\Diamond$.*
4. *$\Sigma$ es un **K4**-sistema siy solo si tiene a **4**$\Diamond$, a **R4** o a **R4**$\Diamond$.*
5. *$\Sigma$ es un **K5**-sistema si y solo si tiene a **5**$\Diamond$, a **R5** o a **R5**$\Diamond$.*

*Nota* 4.3.3. Los teoremas y reglas de inferencia a los que nos referimos en la proposición anterior son aquellos que se construyen a partir de modalidades afirmativas de la manera en que se hace en la proposición 4.2.6.

Y de hecho la prueba de 4.3.2 es una consecuencia inmediata de la proposición 4.2.6, ya que las modalidades en los esquemas **D, T, B, 4** y **5** son afirmativas.

Antes de empezar el estudio de las extensiones de cada uno de los sistemas, nos conviene dar una definición.

**Definición 4.3.4.** Sea **S** un esquema y $k \geq 0$. Entonces $S^k$ es el esquema resultante de reemplazar cada operador modal $\Box$ y $\Diamond$ en **S** por $\Box^k$ y $\Diamond^k$ respectivamente.

Y el esquema $\mathbf{S}(\,)^k$ es el esquema resultante de reemplazar cada modalidad $\alpha$ en **S** por $\alpha^k$ (que es la $k$-ésima iteración de la modalidad $\alpha$).

**KD-sistemas normales.**

**Proposición 4.3.5.** *Sea $\Sigma$ un sistema normal de lógica modal. $\Sigma$ es un **KD**-sistema si y solo si tiene alguno de los siguientes teoremas y reglas de inferencia:*

| | |
|---|---|
| $\boldsymbol{RP}.\ \dfrac{\phi}{\Diamond\phi}$ | $\boldsymbol{P}.\ \Diamond\top$ |
| $\boldsymbol{O}.\ \Diamond\phi \vee \Diamond\neg\phi$ | $\boldsymbol{RP}\Box.\ \dfrac{\neg\phi}{\neg\Box\phi}$ |
| $\boldsymbol{P}\Box.\ \neg\Box\bot$ | $\boldsymbol{O}\Box.\ \neg(\Box\phi \wedge \Box\neg\phi).$ |

*Y más en general, $\Sigma$ es un **KD**-sistema si y solo si tiene alguno de los teoremas o reglas de inferencia: $D^k$, $RD^k$, $RP^k$, $P^k$, $O^k$, $RP\Box^k$, $P\Box^k$ y $O\Box^k$, para cualquier $k > 0$.*

**KT-sistemas normales.** A la lógica **KT** también se le llama **T** o **M**.

**Proposición 4.3.6.** *Todo **KT**-sistema normal es un **KD**-sistema normal.*

*Prueba.* [Prueba.] El esquema **D** ($\Box\phi \to \Diamond\phi$) se sigue por **PL** de **T** ($\Box\phi \to \phi$) y **T**$\Diamond$ ($\phi \to \Diamond\phi$). •

Así que todos los teoremas y reglas de inferencia que tienen los **KD**-sistemas, mencionados anteriormente, también los cumplen los **KT**-sistemas. Pero no son suficientes.

**Proposición 4.3.7.** *Sea $\Sigma$ un **KT**-sistema normal. Entonces $\Sigma$ tiene los siguientes teoremas y reglas de inferencia: $T^k$, $T\Diamond^k$, $RT^k$ y $RT\Diamond^k$, para toda $k > 0$.*

**KB-sistemas normales.**

**Proposición 4.3.8.** *Sea $\Sigma$ un sistema normal de lógica modal. $\Sigma$ es un **KB**-sistema si y solo si tiene alguno de los siguientes teoremas y reglas de inferencia:*

$\boldsymbol{X}$. $\Box(\Diamond\phi \to \psi) \to (\phi \to \Box\psi)$ $\quad$ $\boldsymbol{X}\Diamond$. $\Box(\phi \to \Box\psi) \to (\Diamond\phi \to \psi)$

$\boldsymbol{RX}$. $\dfrac{\Diamond\phi \to \psi}{\phi \to \Box\psi}$ $\quad$ $\boldsymbol{RX}\Diamond$. $\dfrac{\phi \to \Box\psi}{\Diamond\phi \to \psi}$

*Más en general, todo* ***KB****-sistema normal tiene los siguientes teoremas y reglas de inferencia:* $B^k$, $B\Diamond^k$, $RB^k$, $RB\Diamond^k$, $RX^k$, $RX\Diamond^k$, $B(\,)^k$, $B\Diamond(\,)^k$, $RB(\,)^k$ *y* $RB\Diamond(\,)^k$ *para toda* $k > 0$.

Además tenemos en los **KB**-sistemas, que el esquema **4** es un teorema si y solo si el esquema **5** lo es.

**Proposición 4.3.9.** *Un sistema normal de lógica modal* $\Sigma$ *es un* ***KB4****-sistema si y solo si es un* ***KB5****-sistema.*

Así el sistema **KB4** es exactamente el mismo que el **KB5**.

**K4-sistemas normales.**

Consideremos la siguiente generalización del esquema **4**:

$$4'^k.\ \Box\phi \to \Box^k\Box\phi$$

.

**Proposición 4.3.10.** *Cualquier* ***K4****-sistema normal tiene como teoremas y reglas de inferencia a* $4'^k$, $4\Diamond'^k$, $R4'^k$ *y* $R4\Diamond'^k$, *para toda* $k > 0$.

*Observación.* Para $\Sigma$ un **K4**-sistema, $\Sigma \cup \{\Diamond\Diamond\phi\}$ es inconsistente. Ya que de lo contrario, por **4**$\Diamond$, tendríamos que $\Diamond\phi$ es un teorema, y en particular lo sería $\Diamond\bot$, lo cual contradice **N**$\Diamond$.

**K5-sistemas normales.**

Consideremos la generalización del esquema **5**:

$$5'^k.\ \Diamond\phi \to \Box^k\Diamond\phi.$$

**Proposición 4.3.11.** *Todo* ***K5****-sistema normal tiene los teoremas y reglas de inferencia:* $5'^k$, $5\Diamond'^k$*,* $R5'^k$ *y* $R5\Diamond'^k$ *para toda* $k > 0$*.*

El sistema normal más fuerte que podemos obtener con los esquemas **D, T, B, 4** y **5** es **KT5**, que es mejor conocido como **S5**. Como ya vimos antes, existen varias axiomatizaciones para este sistema normal, las cuales enunciamos en la siguiente proposición.

**Proposición 4.3.12.** *Sea* $\Sigma$ *un sistema normal de lógica modal.* $\Sigma$ *es un* ***KT5****-sistema si y solo si tiene como teoremas:*

(1) ***T, B*** *y* ***4****, o*

(2) ***D, B*** *y* ***4****, o*

(3) ***D, B*** *y* ***5***

*De esta manera, entonces tenemos que* ***KT5*** $=$ ***KTB4*** $=$ ***KDB4*** $=$ ***KDB5****.*

La prueba se sigue del estudio previo que hicimos de **S5** y de la proposición 4.3.6. No nos detendremos a probarlo con detalle.

Ahora ya podemos afirmar que el diagrama 4-1 es correcto en cuanto a las inclusiones de los sistemas normales. La mayoría son claras porque se trata de la definición simplemente. Pero para el resto, con las proposiciones anteriores, podemos ver que se dan las inclusiones; por ejemplo, por la proposición 4.3.6, tenemos que **KD** $\subseteq$ **KT**, **KDB** $\subseteq$ **KTB** y **KD4** $\subseteq$ **KT4**. Por la proposición 4.3.9, tenemos que **K45** $\subseteq$ **KB4** y por la proposición 4.3.12, tenemos que **KT5** es una extensión de **KTB, KT4, KD45** y **KB4**.

## 4.4. Modalidades

Recordemos que una modalidad es una sucesión finita de los operadores $\Box$, $\Diamond$ y $\neg$, incluyendo la sucesión vacía, que denotaremos por $\cdot$.

Es natural preguntarnos, dada una fórmula $\phi$ cuántas fórmulas realmente distintas podemos formar a partir de ella agregando modalidades. Esto es semejante, por ejemplo, en topología a preguntarnos cuántos conjuntos verdaderamente diferentes podemos obtener de un conjunto dado, aplicando los operadores complemento, interior y cerradura. El desarrollo de esta sección responderá esta pregunta sin profundizar mucho en las pruebas.

**Definición 4.4.1.** Sean $\alpha$ y $\beta$ dos modalidades de un sistema normal $\Sigma$. Decimos que $\alpha$ *implica a* $\beta$ si para toda fórmula $\phi$, la fórmula $\alpha\phi \to \beta\phi$ es un teorema de $\Sigma$.

Y decimos que $\alpha$ y $\beta$ son *equivalentes* en un sistema lógico si para toda fórmula $\phi$, la fórmula $\alpha\phi \longleftrightarrow \beta\phi$ es un teorema del sistema. En otro caso, decimos que $\alpha$ y $\beta$ son *distintas*.

A las fórmulas del tipo $\alpha\phi \longleftrightarrow \beta\phi$ regularmente las llamamos *leyes de reducción*, en el sentido de que una modalidad puede ser reducida a la otra.

En algunos sistemas de lógica modal sucede que hay una clase finita de modalidades tal que cualquier modalidad es equivalente a una de la clase. Y es por medio de una lista de leyes de reducción que se puede probar esto. Las leyes de reducción solamente nos dan una cota superior para la cantidad de modalidades distintas en un sistema de lógica modal.

Por ejemplo en el sistema **S5** (**KT5**), hay a lo más seis modalidades diferentes, a saber, $\cdot, \Box, \Diamond$ y sus negaciones($\neg$, $\neg\Box$ y $\neg\Diamond$). Esto se verifica con las siguientes leyes de reducción:

1. $\Box\phi \longleftrightarrow \Box\Box\phi$.

2. $\Diamond\phi \longleftrightarrow \Diamond\Diamond\phi$.

3. $\Box\phi \longleftrightarrow \Diamond\Box\phi$.

4. $\Diamond\phi \longleftrightarrow \Box\Diamond\phi$.

Así, cualquier sucesión de los operadores $\Diamond$, $\Box$ y $\neg$ puede ser reducida a solo uno de ellos. Hagamos un ejemplo para ilustrar esto: sea $\phi$ la fórmula $\neg\Box\Box\Diamond\neg\Box\Diamond\psi$. Lo que haremos primero es usar **Df**$\Box$, **Df**$\Diamond$ y **PL** para ir sustituyendo las modalidades de tal manera que se recorra la negación hasta la izquierda. Entonces, $\phi$ es equivalente a $\neg\Box\Box\neg\Box\Box\Diamond\psi$ y repitiendo pasos similares, llegamos a que $\phi$ es equivalente a $\Diamond\Diamond\Box\Box\Diamond\psi$; y luego, por la regla de reducción 1, tenemos que es equivalente a $\Diamond\Box\Box\Diamond\psi$, y así aplicando similarmente las leyes de reducción, llegamos a que $\phi$ es equivalente a $\Diamond\psi$.

Dos sistemas pueden tener las mismas modalidades diferentes pero ser distintos en los patrones de implicación entre ellas. Por ejemplo los sistemas **S5** y **KD45**, ambos tienen las modalidades $\cdot, \Diamond, \Box$ y sus negaciones pero **KD45** no tiene los teoremas de **S5**: $\Box\phi \to \phi$ y $\phi \to \Diamond\phi$. Más

$$\begin{tikzcd}
 & & \Box \arrow[dl] \arrow[ddrr] & & \\
 & \Box\Diamond\Box \arrow[dl] \arrow[dr] & & & \\
\Diamond\Box \arrow[dr] & & \Box\Diamond \arrow[dl] & & \cdot \arrow[ddll] \\
 & \Diamond\Box\Diamond \arrow[dr] & & & \\
 & & \Diamond & &
\end{tikzcd}$$

Figura 4-2: Implicaciones entre las modalidades de un **KT4**-sistema

aún, puede haber sistemas lógicos que tengan las mismas modalidades y las mismas implicaciones entre ellas pero que sean diferentes sistemas.

De todos los sistemas normales que se forman con los esquemas **D, T, B, 4** y **5**, solo siete tienen una cantidad finita de modalidades distintas, a saber, **KT4, K5, KD5, K45, KB4, KD45** y **KT5**.

De estos, **KT4** y **K5** tienen a lo más catorce modalidades distintas, **KD5**, **K45** y **KB4** tienen a lo más diez y **KD45** y **KT5** tienen a lo más seis.

Los otros ocho sistemas tienen una cantidad infinita de modalidades distintas, y esto se prueba viendo que para todas $n > m \geq 0$, el esquema $\Box^m\phi \longleftrightarrow \Box^n\phi$ no es un teorema de cada sistema. Porque de esta manera la modalidad $\Box^n\phi$ no tendría leyes de reducción que la haga equivalente a otras y entonces todas las modalidades de este tipo serían distintas.

**Ejemplo 4.4.2.** Como ejemplo probaremos que todo **KT4**-sistema tiene a lo más catorce modalidades distintas: $\cdot, \Box, \Diamond, \Box\Diamond, \Diamond\Box, \Box\Diamond\Box, \Diamond\Box\Diamond$ y sus negaciones. Y con implicaciones entre las afirmativas como en el diagrama:

Para probarlo basta con ver que las siguientes reglas de reducción son teoremas de cualquier **KT4** sistema:

$$\Box\phi \longleftrightarrow \Box\Box\phi \qquad\qquad \Diamond\phi \longleftrightarrow \Diamond\Diamond\phi$$

$$\Diamond\Box\phi \longleftrightarrow \Diamond\Box\Diamond\Box\phi \qquad\qquad \Box\Diamond\phi \longleftrightarrow \Box\Diamond\Box\Diamond\phi$$

Las reglas de la derecha son duales de las de la izquierda, así que nos basta con probar las de la izquierda; la primera se sigue de **T, 4** y **RM**. Para $\Diamond\Box\phi \longleftrightarrow \Diamond\Box\Diamond\Box\phi$ haremos la demostración. Primero para la implicación de izquierda a derecha:

| | |
|---|---|
| 1. $\Box\phi \rightarrow \Diamond\Box\phi$ | $\mathbf{T}\Diamond$ |
| 2. $\Box\Box\phi \rightarrow \Box\Diamond\Box\phi$ | 1, **RM** |
| 3. $\Box\phi \rightarrow \Box\Box\phi$ | **4** |
| 4. $\Box\phi \rightarrow \Box\Diamond\Box\phi$ | 2, 3, **PL (silogismo hipotético)** |
| 5. $\Diamond\Box\phi \rightarrow \Diamond\Box\Diamond\Box\phi$ | 4, $\mathbf{RM}\Diamond$ |

Y de derecha a izquierda:

| | |
|---|---|
| 1. $\Box\Diamond\Box\phi \rightarrow \Diamond\Box\phi$ | **T** |
| 2. $\Diamond\Box\Diamond\Box\phi \rightarrow \Diamond\Diamond\Box\phi$ | 1$\mathbf{RM}\Diamond$ |
| 3. $\Diamond\Diamond\Box\phi \rightarrow \Diamond\Box\phi$ | $\mathbf{4}\Diamond$ |
| 4. $\Diamond\Box\Diamond\Box\phi \rightarrow \Diamond\Box\phi$ | 2, 3, **PL (silogismo hipotético)** |

Para probar las implicaciones entre las modalidades afirmativas (figura 4-2) basta con probar las cuatro de arriba porque las de abajo son las duales. De esas cuatro, dos son instancias de **T**, y una está probada en la línea 4 de la primera de las dos pruebas anteriores, sólo resta $\Box\Diamond\Box \rightarrow \Box\Diamond\phi$ pero esta es consecuencia directa de **T, RM**, y $\mathbf{RM}\Diamond$.

Las pruebas de los otros sistemas son muy similares, con sus respectivas leyes de reducción. De hecho cada sistema de los que mencionamos tiene exactamente esa cantidad de modalidades diferentes. Para probar que dicha cantidad es la mínima, hay que probar que de entre las modalidades que mencionamos, no hay un par que sean equivalentes. Dados los fines de esta sección ya no profundizaremos en esto.

## 4.5. Correctud

En esta sección veremos el teorema básico de correctud de sistemas normales y con eso probaremos que los sistemas que hemos estado trabajando (los de la figura 4-1) son distintos. Para esto es convieniente para el lector recordar la definición 1.4.18 de correctud que está en la sección 1.4.

**Lema 4.5.1.** *Sean,* $\mathsf{F}$ *una clase de frames y* $\phi, \phi_1, \dots, \phi_n$ *fórmulas. Entonces:*

1. *Si* $\mathsf{F} \Vdash \phi_1, \dots \mathsf{F} \Vdash \phi_n$*, entonces* $\mathsf{F} \Vdash \phi$*, donde* $\phi$ *es consecuencia tautológica de* $\phi_1, \dots, \phi_n$*. (i.e. la regla* ***RPL*** *preserva validez en una clase de frames).*

2. *Para* $n \geq 0$*, si* $\mathsf{F} \Vdash (\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n) \to \phi$*, entonces* $\mathsf{F} \Vdash (\Box\phi_1 \wedge \cdots \wedge \Box\phi_n) \to \Box\phi$*. (i.e la regla* ***RK*** *perserva validez en una clase de frames).*

3. $\mathsf{F} \Vdash \Diamond\phi \longleftrightarrow \neg\Box\neg\phi$ *(i.e. el esquema* ***Df***$\Diamond$ *es válido en cualquier clase de frames).*

*Prueba.* Para 1: Para la prueba de 1 requerimos dos afirmaciones que no probaremos pero son sencillas:

$(i)$ Si $\psi$ es una tautología, entonces $\mathsf{F} \Vdash \psi$.

$(ii)$ Si $\mathsf{F} \Vdash \psi \to \chi$ y $\mathsf{F} \Vdash \psi$, entonces $\mathsf{F} \Vdash \chi$.

Supongamos que $\phi$ es consecuencia tautológica de $\phi_1, \dots, \phi_n$. Entonces la fórmula $\phi_1 \to (\dots(\phi_n \to \phi)\dots)$ es una tautología, y por $(i)$, es válida en la clase $\mathsf{F}$. Luego, aplicando $n$ veces $(ii)$, tenemos que $\mathsf{F} \Vdash \phi$.

Para 2: Igual que en el inciso anterior haremos uso de dos afirmaciones sin detenernos a probarlas:

$(i)$ Si $\mathsf{F} \Vdash \psi$, entonces $\mathsf{F} \Vdash \Box\psi$.

$(ii)$ $\mathsf{F} \Vdash \Box(\psi \to \chi) \to (\Box\psi \to \Box\chi)$.

La prueba es por inducción; el caso $n = 0$ es la afirmación $(i)$. Supongamos que se cumple para todo $k < n$. Entonces, supongamos que $\mathsf{F} \Vdash (\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n) \to \phi$, por **PL** $\mathsf{F} \Vdash (\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_{n-1}) \to (\phi_n \to \phi)$, entonces por hipótesis de inducción, $\mathsf{F} \Vdash (\Box\phi_1 \wedge \cdots \wedge \Box\phi_n) \to \Box(\phi_n \to \phi)$, por $(ii)$, $\mathsf{F} \Vdash (\Box\phi_1 \wedge \cdots \wedge \Box\phi_n) \rightarrow (\Box\phi_n \rightarrow \Box\phi)$ y por **PL**, $\mathsf{F} \Vdash (\Box\phi_1 \wedge \cdots \wedge \Box\phi_n) \rightarrow \Box\phi$, que es lo que queríamos probar.

La prueba de 3, se sigue de las definiciones de validez y satisfacción. •

**Teorema 4.5.2.** *Sean $S_1, S_2, \ldots, S_n$ esquemas válidos en las clases de frames $\mathsf{F_1}, \mathsf{F_2}, \ldots, \mathsf{F_n}$ respectivamente. Entonces el sistema normal $KS_1S_2\ldots S_n$ es correcto con respecto a la clase de frames $\mathsf{F_1} \cap \cdots \cap \mathsf{F_n}$.*

*Prueba.* Como para toda $i = 1, \ldots, n$, tenemos que $\mathsf{F_i} \Vdash S_i$, entonces $\mathsf{F_1} \cap \cdots \cap \mathsf{F_n} \Vdash S_i$. Por tanto sólo faltará ver que la clase $\mathsf{F_1} \cap \cdots \cap \mathsf{F_n}$ valida al esquema **Df**$\Diamond$ y que las reglas **RK** y **RPL** preservan validez. Pero esto es inmediato del lema anterior (4.5.1). •

Como el sistema normal más pequeño (**K**) está axiomatizado por **Df**$\Diamond$, **RK** y **RPL**, obtenemos el siguiente corolario:

**Corolario 4.5.3.** *Sea $\mathsf{F}$ una clase de frames arbitraria. El sistema **K** es correcto con respecto a $\mathsf{F}$.*

El teorema 4.5.2 tiene una importante conexión con las extensiones de **K**, ya que como en la sección 3.3 vimos en cuáles clases de frames son válidos cada uno de los axiomas **D, T, B, 4** y **5**, entonces podemos saber con respecto a qué clases son correctos los sistemas que extienden a **K**. Por ejemplo, como **D, T, B, 4** y **5** son válidos en las clases de frames seriados, reflexivos, simétricos, transitivos y euclidianos respectivamente, entonces por el teorema 4.5.2, **KD, KT, KB, K4** y **K5** son correctos con respecto a dichas clases de frames. En general, por el teorema 4.5.2 y la proposición 3.3.3, podemos elaborar la tabla 4-3 donde se indica con respecto a qué clase es correcto cada sistema de las catorce extensiones de **K** que hemos estado trabajando.

En la sección 4.3 vimos una serie de proposiciones que establecían las contenciones entre los sistemas, pero gracias al teorema de correctud podemos mostrar que son diferentes para así obtener la contención propia.

**Proposición 4.5.4.** *Los quince sistemas de la figura 4-1 son diferentes.*

*Prueba.* Para mostrar que un sistema $\Sigma$ es diferente de un sistema $\Sigma'$, basta con mostrar un modelo de $\Sigma$ en el que no sea verdadero algún teorema de $\Sigma'$, entonces usaremos este argumento para mostrar que las extensiones de **K** son distintas.

| | seriados | reflexivos | simétricos | transitivos | euclidianos |
|---|---|---|---|---|---|
| **KD** | • | | | | |
| **KT** | | • | | | |
| **KB** | | | • | | |
| **K4** | | | | • | |
| **K5** | | | | | • |
| **KDB** | • | | • | | |
| **KD4** | • | | | • | |
| **KD5** | • | | | | • |
| **K45** | | | | • | • |
| **KD45** | • | | | • | • |
| **KB4** | | | • | • | |
| | | | • | | • |
| **KTB** | | • | • | | |
| **KT4 (S4)** | | • | | • | |
| **KT5 (S5)** | | • | | | • |
| | | • | • | • | |
| | • | | • | • | |
| | • | | • | | • |

Figura 4-3: Correctud de los sistemas normales que extienden a **K**

Consideremos los siguientes modelos:

(1) $W = \{a, b, c\}$ (distintos); $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b)\}$ y $V$ tal que $V(p) = \{a, b\}$ y $V(q) = \{a\}$ para toda $q \neq p$.

(2) $W = \{a, b\}$ (distintos); $R = \{(a, a), (b, b), (a, b)\}$ y $V$ tal que $V(p) = \{a\}$ para toda $p \in \Phi$.

(3) $W = \{a, b\}$ (distintos); $R = \{(a, b), (b, b)\}$ y $V$ tal que $V(p) = \{b\}$ para toda $p \in \Phi$.

(4) $W = \{a\}$; $R = \emptyset$ y $V = \emptyset$.

(5) $W = \{a, b, c\}$ (distintos); $R = \{(a, b), (b, b), (b, c), (c, c)\}$ y $V$ tal que $V(p) = \{b\}$ para toda $p \in \Phi$.

(6) $W = \{a, b\}$ (distintos); $R = \{(a, b), (b, a)\}$ y $V$ tal que $V(p) = \{b\}$ para toda $p \in \Phi$.

Primero analicemos el modelo (1). Tenemos que es un modelo reflexivo y simétrico y en el que $(1), a \nVdash \Box p \to \Box\Box p$ y $(1), b \nVdash \Diamond q \to \Box\Diamond q$ que son instancias de **4** y **5** respectivamente. Por el teorema 4.5.2 (1) es modelo del sistema **KTB** y de todos los sistemas de los que éste es extensión. Pero como falsifica instancias de **4** y **5**, no puede ser modelo de cualquiera que contenga esos teoremas. Por lo tanto todos sistemas de los que **KTB** es extensión, son diferentes de todos los demás.

Ahora, en cuanto al modelo (2)tenemos que este es un modelo reflexivo y transitivo en el que $(2), a \nVdash p \to \Box\Diamond p$ y $(2), a \nVdash \Diamond p \to \Box\Diamond p$, que son instancias de **B** y **5**. Es decir (por el teorema 4.5.2) que es modelo de **KT4** y todos los sistemas de los que es extensión pero no es modelo de cualquiera que tenga como teorema a los esquemas **B** y **5**. Por lo tanto dichos sistemas son distintos.

El modelo (3) es un modelo serial, transitivo y euclidiano, que por el teorema 4.5.2, es un modelo del sistema **KD45**. Y tenemos que $(3), a \nVdash \Box p \to p$ y $(3), a \nVdash \neg p \to \Box\Diamond\neg p$, por lo que falsifica instancias de **T** y **B**. Así que los sistemas **KD45** y aquellos de los que es extensión, son diferentes a los demás del diagrama.

El modelo (4) es simétrico y transitivo, por lo que por el teorema 4.5.2, es modelo del sistema **KB4** y todos los que éste contiene. Por otro lado, $(4), a \nVdash \Box p \to \Diamond p$ que es una instancia de **D**. Entonces estos sistemas son diferentes a todos los demás del diagrama porque todos los demás contienen a **D** como teorema.

El modelo (5) es seriado y euclidiano, entonces por el teorema 4.5.2, es modelo del sistema **KD5** y todos los sistemas que extiende. Pero $(5), a \nVdash \Box p \to \Box\Box p$, que es una instancia de **4**. Por lo tanto **KD5** y los sistemas que extiende son distintos a todos los sistemas del diagrama que contienen a **4**.

Por último, el modelo (6) es seriado y simétrico, por lo que gracias al teorema 4.5.2 sabemos que es modelo del sistema **KDB** y todos los sistemas que extiende. Pero como $(6), a \nVdash \Box p \to p$, que es una instancia de **T**, entonces **KDB** y los sistemas que extiende son distintos a todos los sistemas del diagrama que contienen al esquema **T**.

Es fácil corroborar que estos seis argumentos son suficientes para que todos los sistemas del diagrama resulten diferentes entre sí, pero ya no profundizaremos en ello. •

## 4.6. Completud

Ahora pasaremos a ver algunos resultados de completud en los sistemas normales de lógica modal (recordar la definición 1.4.19). Primero trabajaremos con conjuntos $\Sigma$-maximales, para un sistema lógico $\Sigma$ y daremos algunos lemas que nos serán útiles para probar los resultados de completud que nos interesan.

### Conjuntos $\Sigma$-maximales

Recordemos qué es un conjunto $\Sigma$-maximal (definición 1.4.17). Dado un sistema lógico $\Sigma$, $\Gamma$ un conjunto de fórmulas es $\Sigma$-maximal si es $\Sigma$-consistente y todas sus extensiones propias son inconsistentes. Ahora daremos ciertas propiedades de los conjuntos $\Sigma$-maximales que es conveniente tener en mente.

**Proposición 4.6.1.** *Sea $\Gamma$ un conjunto de fórmulas modales tal que $Max_\Sigma \Gamma$, entonces:*

(1) *$\Gamma$ es cerrado bajo **MP**, i.e. si $\phi, \phi \to \psi \in \Gamma$, entonces $\psi \in \Gamma$.*

(2) *$\phi \in \Gamma$ si y solo si $\Gamma \vdash_\Sigma \phi$.*

(3) $\Sigma \subseteq \Gamma$

(4) *Para toda fórmula $\phi$, o bien $\phi \in \Gamma$ o $\neg\phi \in \Gamma$.*

(5) *Para cualesquiera fórmulas $\phi$, $\psi$, $\phi \vee \psi \in \Gamma$ si y solo si $\phi \in \Gamma$ o $\psi \in \Gamma$.*

*Prueba.* Solo haremos la prueba de (2) y de (4).

Para (2). ($\Rightarrow$) Proposición 1.4.14($i$).

($\Leftarrow$) Para el converso, supongamos que $\Gamma \vdash_\Sigma \phi$ y que $\phi \notin \Gamma$. Como $\text{Max}_\Sigma\Gamma$, y $\phi \notin \Gamma$, entonces $\text{C}\not{o}\text{n}_\Sigma\Gamma \cup \{\phi\}$, entonces por la proposición 1.4.14($iii$), $\Gamma \vdash_\Sigma \neg\phi$. Lo cual es una contradicción con la consistencia de $\Gamma$. Por lo tanto $\phi \in \Gamma$.

Ahora, para (4). Supongamos que $\phi \in \Gamma$. Si $\neg\phi \in \Gamma$, entonces $\text{C}\not{o}\text{n}_\Sigma\Gamma$ (definición 1.4.13), por lo que $\neg\phi \notin \Gamma$. Así que no sucede que ambas estén en $\Gamma$; hace falta ver que alguna debe estar. Supongamos que $\phi \notin \Gamma$ y $\neg\phi \notin \Gamma$,por (2), $\Gamma \nvdash_\Sigma \phi$ y $\Gamma \nvdash_\Sigma \neg\phi$, entonces por proposición 1.4.14 ($ii$), $\text{Con}_\Sigma\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ y $\text{Con}_\Sigma\Gamma \cup \{\phi\}$, lo que por definición implica que $\phi \in \Gamma$ y $\neg\phi \in \Gamma$, que es una contradicción. •

La siguiente proposición, conocida como Lema de Lindenbaum, afirma que todo conjunto consistente de un sistema tiene una extensión maximal.

**Proposición 4.6.2** (Lema de Lindenbaum)**.** *Sea* $\Gamma$ *un conjunto de fórmulas. Si* $Con_\Sigma\Gamma$*, entonces existe* $\Delta$ *tal que:*

*(i)* $\Gamma \subseteq \Delta$.

*(ii)* $Max_\Sigma\, \Delta$.

La prueba del lema de Lindenbaum es clásica, así que solo haremos un esbozo.

*Prueba.* Como nuestro lenguaje es numerable, sea $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \ldots$ una enumeración de las fórmulas del lenguaje. Definiremos recursivamente como sigue los conjuntos $\Delta_i$ para toda $i \in \mathbb{N}$:

$$\Delta_0 = \Gamma$$

$$\Delta_{n+1} = \begin{cases} \Delta_n \cup \{\phi_n\}, & \text{si } \Delta_n \cup \{\phi_n\} \text{ es consistente} \\ \Delta_n \cup \{\neg\phi_n\}, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

De esta manera construimos a $\Delta = \bigcup_{n\geq 0} \Delta_n$. Para terminar habría que probar que: (1) $\Delta_n$ es consistente para toda $n$; (2) Para toda $\phi$ fórmula, solo una de $\phi$ o $\neg\phi$ pertenece a $\Delta$; (3) si $\Delta \vdash_\Sigma \phi$, entonces $\phi \in \Delta$; y (4) $\mathrm{Max}_\Sigma$.

•

Enseguida probaremos una última proposición en cuanto a conjuntos $\Sigma$-maximales que nos será útil.

**Proposición 4.6.3.** *Sea* $\Gamma$ *un conjunto de fórmulas. Entonces:*

*(i)* $\Gamma \vdash_\Sigma \phi$ *si y solo si* $\phi \in \Delta$ *para todo* $Max_\Sigma\Delta$ *tal que* $\Gamma \subseteq \Delta$.

*(ii)* $\vdash_\Sigma \phi$ *si y solo si* $\phi \in \Delta$ *para todo* $Max_\Sigma\, \Delta$.

*Prueba.* Como$(ii)$ se sigue sencillamente de $(i)$, solo haremos la prueba de $(i)$.
$(\Rightarrow)$ Supongamos que $\Gamma \vdash_\Sigma \phi$. Sea $\Delta$ tal que $\mathrm{Max}_\Sigma \Delta$ y $\Gamma \subseteq \Delta$. Es fácil ver que como $\Gamma \subseteq \Delta$ y $\Gamma \vdash_\Sigma \phi$, entonces $\Delta \vdash_\Sigma \phi$ y por la proposición 4.6.1(1), $\phi \in \Delta$. $(\Leftarrow)$ Supongamos que $\Gamma \nvdash_\Sigma \phi$, entonces (es fácil probar que) $\mathrm{Con}\Gamma \cup \{\neg\phi\}$. Por el Lema de Lindenbaum, hay un conjunto $\Delta$ que es extensión $\Sigma$-maximal de este, y es claro que también es extensión de $\Gamma$. Como $\neg\phi \in \Delta$, por la proposición 4.6.1(5), $\phi \notin \Delta$, lo que contradice las hipótesis y prueba lo que queríamos. •

Ahora definifremos el *conjunto de prueba* de una fórmula $\phi$, que será el conjunto de conjuntos $\Sigma$-maximales que la contienen.

**Definición 4.6.4.** Sean, $\Sigma$ un sistema lógico modal y $\phi$ una fórmula. Definimos el *conjunto de prueba de $\phi$ con respecto a* $\Sigma$ (Not: $|\phi|_\Sigma$) como: $|\phi|_\Sigma = \{\mathrm{Max}_\Sigma \Gamma : \phi \in \Gamma\}$.

La siguiente herramienta que nos interesa para probar los resultados de correctud es un tipo de modelos llamados modelos canónicos.

### Modelos Canónicos

Dado $\Sigma$ un sistema normal de lógica modal, nos interesan los modelos canónicos de este.

**Definición 4.6.5.** El modelo canónico para el sistema normal $\Sigma$ es el modelo $\mathfrak{M}^\Sigma = (W^\Sigma, R^\Sigma, V^\Sigma)$ tal que:

$(i)$ $W^\Sigma = \{\Gamma \,|\, \mathrm{Max}_\Sigma \Gamma\}$

$(ii)$ $R^\Sigma wv$ si y solo si para toda fórmula $\phi$, $\phi \in v$ implica que $\Diamond\phi \in w$. Esta relación es llamada la *relación canónica.*

$(iii)$ $V^\Sigma(p) = |p|_\Sigma$ para toda $p \in \Phi$. $V^\Sigma$ es la *valuación canónica.*

El frame $\mathfrak{F}^\Sigma = (W^\Sigma, R^\Sigma)$ es el *frame canónico* para $\Sigma$.

La valuación canónica empata la noción de verdad de una letra proposicional en un mundo $w$ con su pertenencia a dicho mundo $w$, la meta que queremos alcanzar con los modelos canónicos es la de extender esta coincidencia de verdad con pertenencia a todas las fórmulas.

Otra manera de caracterizar a los modelos canónicos por su relación es la siguiente:

**Proposición 4.6.6.** *Para el modelo canónico de* $\Sigma$, $\mathfrak{M}^{\Sigma} = (W^{\Sigma}, R^{\Sigma}, V^{\Sigma})$,

$$R^{\Sigma}wv \text{ si y sólo si para toda fórmula } \psi,\ \Box\psi \in w \text{ implica que } \psi \in v.$$

*Prueba.* $(\Rightarrow)$ Supongamos que $R^{\Sigma}wv$. Además supongamos que $\phi \notin v$. Como $\mathrm{Max}_{\Sigma}v$, por la proposición 4.6.1(4), $\neg\phi \in v$. Como $R^{\Sigma}wv$, $\Diamond\neg\phi \in w$, lo que equivale a que $\neg\Box\phi \in w$, entonces $\Box\phi \notin w$. Que es la contrapositiva de lo que queríamos probar.

$(\Leftarrow)$ Análogamente, supongamos que para toda fórmula $\psi$, $\Box\psi \in w$ implica que $\psi \in v$. También supongamos que $\Diamond\psi \notin w$. Esto implica que $\neg\Diamond\psi \in w$, por lo que $\Box\neg\psi \in w$, entonces por hipótesis $\neg\psi \in v$, entonces $\psi \notin v$. •

Probemos ahora que realmente existen conjuntos maximales relacionados de esta manera.

**Proposición 4.6.7.** *Sean,* $\Sigma$ *un sistema normal de lógica modal y* $w \in W^{\Sigma}$. *Si* $\Diamond\phi \in w$ *entonces hay un estado* $v \in W^{\Sigma}$ *tal que* $R^{\Sigma}wv$ *y* $\phi \in v$.

*Prueba.* Sea $w \in W^{\Sigma}$. Supongamos que $\Diamond\phi \in w$. Vamos a construir al estado $v$ que necesitamos. Sea $v^{-} = \{\phi\} \cup \{\psi \,|\, \Box\psi \in w\}$. Primero vamos a probar que $v^{-}$ es consistente. Para ello, supongamos que no lo es, entonces por la proposición 1.4.14($ii$), $\{\psi \,|\, \Box\psi \in w\} \vdash_{\Sigma} \neg\psi$. Así, hay $\psi_1, \ldots, \psi_n$ tales que $\vdash_{\Sigma} (\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n) \to \neg\psi$. Por la regla **RM**, tenemos que $\vdash_{\Sigma} \Box(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n) \to \Box\neg\psi$. Por otro lado, como $(\psi_1 \wedge \psi_n) \to (\psi_1 \wedge \psi_n)$ es una tautología, entonces es un teorema para cualquier sistema normal y por la regla **RK**, $(\Box\psi_1 \wedge \cdots \wedge \Box\psi_n) \to \Box(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n)$ es un teorema de cualquier sistema normal. Entonces por **PL**, $\vdash_{\Sigma} (\Box\psi_1 \wedge \cdots \wedge \Box\psi_n) \to \Box\neg\phi$. Como $\Box\psi_1, \ldots, \Box\psi_n \in w$ y $\mathrm{Max}_{\Sigma}w$, entonces $\Box\psi_1 \wedge \cdots \wedge \Box\psi_n \in w$. También como $\Sigma \subseteq w$ (ya que $\mathrm{Max}_{\Sigma}w$), $\Box\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n \to \Box\neg\phi \in w$ y además como $w$ es cerrado bajo **MP**, entonces $\Box\neg\phi \in w$, lo que por **Df**$\Diamond$ implica que $\neg\Diamond\phi \in w$, que es una contradicción con que $\mathrm{Max}_{\Sigma}w$ y $\Diamond\phi \in w$. Por lo tanto, $v^{-}$ es consistente.

Luego, por el lema de Lindenbaum (4.6.2), existe $v \in W^{\Sigma}$ tal que $v^{-} \subseteq v$. Y además por construcción tenemos que $\phi \in v$ y que para toda fórmula $\psi$, $\Box\psi \in w$ implica que $\psi \in v$. Por lo tanto, $R^{\Sigma}wv$. •

Ahora probaremos el lema que logra extender la coincidencia de las nociones de verdad en un mundo y pertenencia en el mismo para todas las fórmulas en un modelo canónico.

**Lema 4.6.8.** *Sea $\mathfrak{M}$ un modelo canónico para un sistema normal de lógica modal $\Sigma$. Para todo $w \in \mathfrak{M}$,*

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \phi \text{ si y solo si } \phi \in w.$$

*Es decir, $V(\phi) = |\phi|_\Sigma$.*

*Prueba.* La prueba se hará por inducción sobre la complejidad de $\phi$. Si $\phi$ es una letra proposicional $p \in \Phi$, tenemos que $V(p) = |p|_\Sigma$ por definición de modelo canónico. Si $\phi$ es $\perp$, $V(\perp) = \emptyset$ y por la proposición 4.6.1(4), $\perp \notin \Gamma$ para todo $\mathrm{Max}_\Sigma\, \Gamma$, entonces $|\perp|_\Sigma = \emptyset$. Si $\phi$ es de la forma $\neg\psi$, $V(\neg\psi) = W \setminus V(\psi)$ y por hipótesis de inducción, $V(\psi) = |\psi|_\Sigma$, entonces $V(\neg\psi) = W \setminus |\psi|_\Sigma$; por otro lado $|\psi|_\Sigma = \{\mathrm{Max}_\Sigma \Gamma \,|\, \neg\psi \in \Gamma\} = \{\mathrm{Max}_\Sigma \,|\phi \notin \Gamma\} = W \setminus |\psi|_\Sigma$. El caso en el que $\phi$ es de la forma $\phi \vee \chi$ es inmediato si se sigue un razonamiento parecido. Y por último, si $\phi$ es de la forma $\Diamond\psi$ tenemos por definición que $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\psi$ si y solo si para algún $v \in \mathfrak{M}$ tal que $Rwv$, $\mathfrak{M}, v \Vdash \phi$, por hipótesis de inducción esto sucede si y solo si para algún $v \in \mathfrak{M}$ tal que $Rwv$, $\psi \in v$ y por definición, eso sucede si y solo si $\Diamond\phi \in w$. •

Ya tenemos lo suficiente para probar el teorema fundamental de correctud.

**Teorema 4.6.9** (Teorema del Modelo Canónico). *Todo sistema normal de lógica modal es fuertemente completo con respecto a su modelo canónico.*

*Prueba.* Sea $\Sigma$ un sistema normal de lógica modal y sea $\Gamma$ un conjunto $\Sigma$-consistente de fórmulas. Por el lema de Lindenbaum, existe un conjunto $\Delta$ tal que $\Gamma \subseteq \Delta$ y $\mathrm{Max}_\Sigma\, \Delta$. Entonces $\Delta \in W^\Sigma$ y para toda fórmula $\phi \in \Gamma$, $\phi \in \Delta$ y entonces por el lema 4.6.8, $\mathfrak{M}^\Sigma, \Delta \Vdash \phi$. Así $\Gamma$ es satisfacible en el mundo $\Delta$ del modelo canónico de $\Sigma$. •

Ahora ya somos capaces de probar que algunos de los sistemas normales que han sido de nuestro interés son fuertemente completos con respecto a ciertas clases de frames (a estas alturas ya nos debemos imaginar qué clase de frames corresponde a cada uno). Y aunque parezca lejano porque el teorema del modelo canónico nos garantiza que un sistema normal es fuertemente completo para una clase de modelos (la que solo tiene al modelo canónico del sistema normal), en efecto el teorema 4.6.9 implica directamente los siguientes resultados.

**Proposición 4.6.10.** *El sistema **K** es fuertemente completo con respecto a la clase de todos los frames.*

*Prueba.* Por la proposición 1.4.20 solo basta con encontrar para un conjunto $\Gamma$ de fórmulas tal que $\mathrm{Con}_{\Sigma}\Gamma$, un modelo $\mathfrak{M}$ basado en un frame cualquiera y un estado $w$ de $\mathfrak{M}$, tal que $\mathfrak{M}, w \Vdash \Gamma$. Sea $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}^{\mathbf{K}}, V^{\mathbf{K}})$ el modelo canónico de $\mathbf{K}$ y sea $\Delta$ tal que $\Gamma \subseteq \Delta$ y $\mathrm{Max}_{\mathbf{K}}\Delta$. Por el lema 4.6.8, $\mathfrak{M}^{\mathbf{K}}, \Delta \Vdash \Gamma$. •

En los siguientes resultados de completud, la técnica que usaremos para mostrar que un sistema normal $\Sigma$ es completo con respecto a una clase $\mathsf{F}$ de frames consta solo en mostrar que el frame canónico de $\Sigma$ pertenece a $\mathsf{F}$. A esta técnica se le conoce como *completud por canonicidad*.

**Proposición 4.6.11.** *El sistema normal **K4** es fuertemente completo con respecto a la clase de frames transitivos.*

*Prueba.* Sea $\Gamma$ un conjunto de fórmulas tal que $\mathrm{Con}_{\mathbf{K4}}\Gamma$. Tenemos que encontrar un modelo $(\mathfrak{F}, V)$ y un estado $w$ del modelo tal que $(\mathfrak{F}, V), w \Vdash \Gamma$ y $\mathfrak{F}$ sea transitivo. Sea $(W^{\mathbf{K4}}, R^{\mathbf{K4}}, v^{\mathbf{K4}})$ el modelo canónico para **K4**. Por el teorema 4.6.9, lo primero se cumple. Falta probar que el frame canónico para **K4** es transitivo. Sean $w, v, u \in W^{\mathbf{K4}}$ tales que $R^{\mathbf{K4}}wv$ y $R^{\mathbf{K4}}vu$. Supongamos que para una fórmula $\phi$, $\phi \in u$, entonces como $R^{\mathbf{K4}}vu$, $\Diamond\phi \in v$ y como $R^{\mathbf{K4}}wv$, $\Diamond\Diamond\phi \in w$. Pero como $\mathrm{Max}_{\mathbf{K4}}w$ ($\mathbf{K4} \subseteq w$), $\Diamond\Diamond\phi \to \Diamond\phi \in w$ y por **MP**, $\Diamond\phi \in w$. Por lo tanto, $R^{\mathbf{K4}}wu$ y $\mathfrak{F}^{\mathbf{K4}}$ es transitivo. •

Esta prueba demuestra algo más fuerte: que cualquier sistema que contenga el esquema **4** (**K4**-sistema) es fuertemente completo con respecto a la clase de frames transitivos.

Por otro lado, todos estos resultados sugieren que existe una conexión entre definibilidad de frames y completud, ya que en la sección 3.1 vimos, por ejemplo que el esquema **4** define la propiedad de transitividad.

**Proposición 4.6.12.** *Los sistemas **KD, KT, KB** y **K5** son fuertemente completos con respecto a las clases de frames seriados, reflexivos, simétricos y euclidianos respectivamente.*

*Prueba.* Para la primer afirmación basta con probar que el modelo canónico para **KD** es seriado. Sea $w$ un mundo del modelo canónico para **KD**. Como $w$ es tal que $\mathrm{Max}_{\mathbf{KD}}w$, $w$ contiene la fórmula $\Box\phi \to \Diamond\phi$, entonces contiene a una instancia de esta que es $\Box\top \to \Diamond\top$. Como todo sistema normal contiene a $\top$, por **RN** también contiene a $\Box\top$. Entonces por **MP**, $\Diamond\top \in w$. Por el lema 4.6.7, existe un mundo $v$ tal que $R^{\mathbf{KD}}wv$.

Para la segunda afirmación hay que probar que el modelo canónico para **KT** es reflexivo. Sea $w \in W^{\mathbf{KT}}$. Supongamos que $\phi \in w$. Como $\text{Max}_{\mathbf{KT}}w$, entonces $\phi \to \Diamond\phi \in w$ y como $w$ es cerrado bajo **MP**, $\Diamond\phi$. Por lo tanto $R^{\mathbf{KT}}ww$.

Para la tercer afirmación probaremos que el modelo canónico para **KB** es simétrico. Sean $w, v \in W^{\mathbf{KB}}$ tales que $R^{\mathbf{KB}}wv$. Supongamos que $\phi \in w$. Como $\text{Max}_{\mathbf{KB}}w$, $\phi \to \Box\Diamond\phi \in w$, y por **MP**, $\Box\Diamond\phi \in w$. Por la proposición 4.6.6, $\Diamond\phi \in v$. Por lo tanto $R^{\mathbf{KB}}vw$.

Por último, para la cuarta afirmación, probemos que el modelo canónico para **K5** es euclidiano. Sean $w, v, u \in W^{\mathbf{K5}}$ mundos tales que $R^{\mathbf{K5}}wv$ y $R^{\mathbf{K5}}wu$, para ver que es euclidiano, hay que probar que $R^{\mathbf{K5}}vu$. Para esto, sea $\phi \in u$. Como $R^{\mathbf{K5}}wu$, $\Diamond\phi \in w$. Pero como el sistema contiene al esquema **5**, entonces $\Diamond\phi \to \Box\Diamond\phi \in w$ y por cerradura bajo **MP**, $\Box\Diamond\phi\phi \in w$. Luego, como $R^{\mathbf{K5}}wv$, entonces $\Diamond\phi \in v$. Por lo tanto $R^{\mathbf{K5}}wv$ y entonces $R^{\mathbf{K5}}$ es euclidiana. •

De nuevo se ve la aparente relación entre definibilidad y la estructura de frames canónicos. Como ya habíamos visto, los esquemas **D, T, B** y **5** definen las propiedades de serialidad, reflexividad, simetría y euclidiana respectivamente. Además, en este caso, igual que en el anterior, las pruebas nos dicen aún más de lo que pide la proposición: cualquier **KD**( **KT**, **KB** o **K5**)-sistema normal $\Sigma$ es fuertemente completo con respecto a la clase de frames seriados (reflexivos, simétricos o euclidianos). Esto nos lleva a poder "sumar" estos resultados para sistemas que contengan más de un esquema de los que hemos estado trabajando. En la siguiente proposición damos dos ejemplos de esto.

**Proposición 4.6.13.** *El sistema **S4** es fuertemente completo con respecto a la clase de frames reflexivos y transitivos. Y el sistema **S5** es fuertemente completo con respecto a la clase de frames cuya relación es de equivalencia.*

*Prueba.* Como la prueba de la proposición 4.6.11 garantiza que cualquier sistema que contenga al esquema **4** es fuertemente completo con respecto a la clase de frames transitivos y la prueba de la segunda afirmación de la proposición 4.6.12 garantiza que cualquier sistema que contenga al esquema **T** es fuertemente completo con respecto a la clase de los frames reflexivos y el sistema

**S4** los contiene a los dos, se sigue que es fuertemente completo cpn respecto a la clase de frames que tienen ambas propiedades.

Para **S5**, análogamente se sigue de la segunda y tercera afirmación de la proposición 4.6.12 y de la proposición 4.6.11. •

Podemos concluir que definitivamente los modelos canónicos son muy útiles para probar los resultados de completud. Y además que es muy evidente que existe algún vínculo entre que una fórmula defina a la clase de frames caracterizada por cierta propiedad y que cualquier sistema normal de lógica modal que contenga a dicha fórmula sea completo con respecto a la misma clase. Esta relación es estudiada por medio del concepto de *canonicidad* de una fórmula, de un sistema normal y de una fórmula para una propiedad. No ahondaremos más en este tema en este trabajo pero es importante evidenciar que la relación existe y al lector que este interesado en indagar más sobre canonicidad se le sugiere revisar [Blackburn *et al.*, 2002].

# Otras Semánticas para el Lenguaje Modal

Mostraremos ahora un par de ejemplos de semánticas alternativas para la lógica modal.

## 5.1. Una semántica topológica para el lenguaje básico modal

En esta sección mostraremos brevemente una semántica alternativa para el lenguaje básico modal. Esta semántica estará basada en espacios topológicos, por lo que primero daremos unas definiciones.

**Definición 5.1.1** (Topología). Sea $X$ un conjunto no vacío. Una *topología* $\tau$ *para* $X$ es una colección $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ tal que:

$(i)$ $\emptyset \in \tau$ y $X \in \tau$.

$(ii)$ Si $A, B \in \tau$, entonces $A \cap B \in \tau$.

$(iii)$ Si $A \subseteq \tau$, entonces $\bigcup A \in \tau$.

A los elementos de $\tau$ les llamamos *abiertos*. Y un subconjunto $B \subseteq X$ es *cerrado* si y solo si $X \setminus B$ es abierto.

Entonces, un *espacio topológico* es un par $(X, \tau)$ de un conjunto con su topología, acostumbraremos llamar al espacio $(X, \tau)$ solamente $X$ por practicidad. Y por un *subespacio topológico de* $X$, entenderemos un subconjunto $A \subseteq X$ dotado con una topología relativa $\tau_A = \{B \cap A \mid B \in \tau\}$.

**Definición 5.1.2** (Interior y Cerradura)**.** Sea $A \subseteq X$. El *interior en $X$ de $A$* (Not: $int_X(A)$) es el abierto más grande contenido en $A$. Es decir, $int_X(A) = \bigcup\{B \subseteq X \mid B \subseteq A \text{ y } B \in \tau\}$.

La *cerradura en $X$ de $A$* (Not: $cl_X(A)$) es el cerrado más pequeño que contiene a $A$. Es decir, $cl_X(A) = \bigcap\{C \subseteq X \mid A \subseteq C \text{ y } C \text{ es cerrado}\}$. Nótese que $cl_X(A) = X \setminus (int_X(X \setminus A))$.

En ambos casos se puede omitir el subíndice que indica el espacio si éste es claro por el contexto.

Ahora sí pasemos a definir la semántica topológica. En esta semántica, las fórmulas modales denotarán regiones de un espacio topológico. Las regiones del espacio topológico denotadas por las letras proposicionales están determinadas de antemano por una valuación y los operadores $\vee, \neg, \Diamond$ se interpretan como unión, complemento y cerradura, respectivamente.

En este punto es recomendable recordar la construcción del lenguaje básico modal $LM(\tau_0, \Phi)$ (ejemplo 1.2.1).

**Definición 5.1.3** (Modelo Topológico)**.** Un *modelo topológico* $\mathfrak{M}$ es una pareja $\mathfrak{M} = (X, V)$ donde $X = (X, \tau)$ es un espacio topológico y $V$ es una función valuación $V : \Phi \longrightarrow \mathcal{P}(X)$.

**Definición 5.1.4** (Satisfacción)**.** La satisfacción de una $\tau_0$-fórmula $\phi$ en un punto $w$ de un modelo topológico $\mathfrak{M}$ se define recursivamente como sigue:

$\mathfrak{M}, w \Vdash \bot$ nunca.

$\mathfrak{M}, w \Vdash p$ si y sólo si $w \in V(p)$.

$\mathfrak{M}, w \Vdash \neg\phi$ si y sólo si no sucede que $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$.

$\mathfrak{M}, w \Vdash \phi \vee \psi$ si y sólo si $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$ o $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$.

$\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\phi$ si y sólo si para todo $A \in \tau$ si $w \in A$, existe $v \in A$ tal que $\mathfrak{M}, v \Vdash \phi$.

Bajo esta definición, no es difícil ver que las interpretaciones de los operadores $\wedge$ y $\Box$ como intersección e interior, son consistentes con las definiciones de satisfacción.

Naturalmente extendemos la noción de satisfacción a la de verdad y validez de la siguiente manera. Si $A \subseteq X$ y si $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$ para todo $w \in A$, escribimos $A \Vdash \phi$. Más aún, escribimos $\mathfrak{M} \Vdash \phi$ si $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$ para todo $w \in X$. En este caso decimos que $\phi$ es verdadera en el modelo $\mathfrak{M}$.

Y decimos que $\phi$ es válida en $X$ (Not: $X \Vdash \phi$) si $(X, V) \Vdash \phi$ para toda valuación $V$. Y si K es una clase de espacios topológicos, escribimos $K \Vdash \phi$ si $X \Vdash \phi$ para todo espacio $X \in K$.

De esta manera, cada fórmula $\phi$ define, en un modelo $\mathfrak{M}$ a un conjunto de puntos del espacio topológico: los puntos donde $\phi$ es verdadera. Así, podemos extender la valuación $V$ del modelo, a una función, que abusando de la notación, denotaremos también $V$, donde $V(\phi)$ es el conjunto de puntos donde $\phi$ es verdadera.

*Observación.* Es interesante observar y no es difícil de probar las siguientes igualdades.

$(i)$ $V(\Diamond\phi) = cl(V(\phi))$.

$(ii)$ $V(\Box\phi) = int(V(\phi))$.

También se extienden de manera usual las nociones de verdad y validez a un conjunto $\Gamma$ de $\tau_0$-fórmulas. Es decir, por ejemplo, $X \Vdash \Gamma$ si y solo si $X \Vdash \gamma$ para toda $\gamma \in \Gamma$.

Por último, daremos un ejemplo de una fórmula modal que define una clase de espacios topológicos. Para esto conviene recordar la definición de definibilidad que aunque fue dada para modelos puntuales, es naturalmente adaptable a modelos (definición 2.8.4).

**Ejemplo 5.1.5.** Para este ejemplo nos interesa la clase de los espacios hereditariamente irresolubles. Primero nos conviene definir dichos espacios.

**Definición 5.1.6** (Espacios hereditariamente irresolubles)**.** Un subconjunto $A \subseteq X$ es *denso en* $X$ si $cl_X(A) = X$. Un espacio topológico es *irresoluble* si no puede ser descompuesto en dos subconjuntos densos ajenos. Y es *hereditariamente irresoluble* si todos sus subespacios son irresolubles.

*Afirmación* 5.1.7. La $\tau_0$-fórmula $\Box(\Box(p \to \Box p) \to p) \to \Box p$ define a la clase de los espacios topológicos hereditariamente irresolubles.

La prueba de esto se puede encontrar en [Ten Cate *et al.*, 2009]. E igualmente el artículo se le recomienda al lector que este interesado en indagar más sobre esta semántica topológica para el lenguaje básico modal.

## 5.2. Una semántica algebraica

Es posible establecer una semántica algebraica para diversas lógicas modales de una forma relativamente simple: identificando a las fórmulas modales como términos (o bien polinomios) y evaluarlas en un tipo apropiado de estructura algebraica. Por tanto, resulta natural preguntarnos qué clases de álgebras resultan adecuadas para la lógica modal. Esto es, necesitamos identificar una clase de álgebras con una estructura lo suficientemente robusta para poder representar en ellas las fórmulas, conectivos y operadores presentes en la lógica. Tales estructuras resultan ser las denominadas *álgebras booleanas con operadores*.

**Definición 5.2.1** (Álgebra de Boole)**.** Una álgebra de Boole (o álgebra booleana) es una estructura $\mathfrak{B} = (B, +, \cdot, ^-, 0, 1)$ tal que $B$ es un conjunto no vacío, las operaciones $+$ y $\cdot$ son operaciones binarias conmutativas y asociativas tales que cada una distributiva sobre la otra, $^-$ es una operación unaria y $0, 1$ son elementos distintos de $B$ que satisfacen las siguientes propiedades:

1. $(B, +, \cdot)$ es una retícula distributiva.

2. Para cualquier $x \in B$, $x \cdot 0 = 0$ y $x + 1 = 1$ .

3. Para cualquier $x \in B$, $x \cdot x^- = 0$ y $x + x^- = 1$ .

Una propiedad importante es que las álgebras booleanas están estrechamente relacionadas con la lógica proposicional, donde $\cdot$ corresponde al conectivo $\wedge$, la operación binaria $+$ corresponde al conectivo binario $\vee$, mientras que el operador unario $\neg$ tiene asociada la operación unaria $^-$. Finalmente, el conectivo binario $\leftrightarrow$ corresponde a la igualdad en la estructura algebraica y los elementos mínimo y máximo del álgebra booleana corresponden a $\bot$ y $\top$ respectivamente. Por tanto, únicamente basta considerar álgebras booleanas con un operador adicional adecuado que permita interpretar a la modalidad $\Diamond$

**Definición 5.2.2.** (Álgebras booleanas con operadores) Una álgebra booleana con operadores es una pareja $(\mathfrak{B}, m)$, donde $\mathfrak{B}$ es una álgebra booleana y $m$ es un operador unario en $\mathfrak{B}$ que satisface las ecuaciones $m(0) = 0$ y $m(x + y) = m(x) + m(y)$ para cualesquiera $x, y$.

Notemos que, al identificar al operador $m$ con $\Diamond$, las dos ecuaciones previas tienen asociadas las fórmulas modales $\Diamond(\phi \vee \psi) \leftrightarrow (\Diamond\phi \vee \Diamond\psi)$ y $\Diamond\bot \leftrightarrow \bot$.

La forma de interpretar el lenguaje básico modal en una álgebra booleana con operadores dada, y posteriormente extender tal interpretación a todas las fórmulas modales, se da como ocurre regularmente: empleando valuaciones.

**Definición 5.2.3.** Sea $(\mathfrak{B}, m)$ una álgebra booleana con operadores, donde $\mathfrak{B} = (B, +.\cdot,^{-}, 0, 1)$. Una *valuación* es una función $V : \Phi \to B$ que cumple las siguientes propiedades para cualesquiera fórmulas $\phi, \psi$:

- $V(\phi \vee \psi) = V(\phi) + V(\psi)$ y $V(\phi \wedge \psi) = V(\phi) \cdot V(\psi)$,
- $V(\neg\phi) = (V(\phi))^{-}$,
- $V(\Diamond\phi) = m(V(\phi))$.

Empleando la técnica usual de lógica algebraica basada en la construcción del *álgebra de Lindembaum-Tarski* de una lógica dada, es posible demostrar el siguiente resultado correspondiente a la lógica modal **K**.

**Teorema 5.2.4.** *Una fórmula modal $\phi$ es un teorema en la lógica modal **K** si y sólo si $V(\phi) = 1$ para toda álgebra booleana $(\mathfrak{B}, m)$ y toda valuación $V$ definida en ella.*

De hecho, es posible obtener un resultado más fuerte que el anterior que permite caracterizar a todas las extensiones axiomáticas de **K** (esto es, la colección de lógicas normales) mediante clases de álgebras booleanas con operadores, de la siguiente forma

**Proposición 5.2.5.** *Dado un sistema normal de lógica modal $\Gamma$, es posible encontrar una clase $\mathcal{C}$ de álgebras booleanas con operadores, de tal forma que una fórmula modal $\phi$ es un teorema en $\Gamma$ siempre y cuando para cualquier álgebra modal con operadores perteneciente a $\mathcal{C}$ y cualquier valuación en dicha álgebra se cumple que $V(\phi) = 1$.*

El lector que este interesado en profundizar en este tema, se le recomienda revisar [Goldblatt, 2003]

## 5.3. Las bisimulaciones vistas desde la teoría de juegos

En esta sección veremos cómo se pueden definir las bisimulaciones desde la perspectiva de la teoría de juegos. Este es un tercer ejemplo de otras perspectiavs semánticas para la lógica modal.

No entraremos en mucho detalle de teoría de juegos, solamente daremos la idea intuitiva basada en una sección de [Goranko y Otto, 2007]. También para profundizar más en la semántica de la lógica modal vista de la teoría de juegos se le recomienda al lector consultar [Van Benthem, 2010].

Nos restringiremos al lenguaje básico modal $LM(\tau_0, \Phi)$, que recordando, solo tiene un operador unario ($\Diamond$) en su tipo de semejanza. Consideremos dos $\tau_0$-modelos $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ y $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$. Se define un juego que llamaremos *el juego de bisimulación* sobre $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{M}'$ que consiste de dos jugadoras: **I**, a la que llamaremos la *retadora* y **II**, a la que llamaremos *la defensora* y una canica en un mundo de $\mathfrak{M}$ y otra en un mundo de $\mathfrak{M}'$ que indican el mundo o estado actual de cada modelo. Una *configuración del juego* consiste de una ubicación de las canicas y se describe por una pareja de modelos puntuales $((\mathfrak{M}, w), (\mathfrak{M}', w'))$, donde $w$ y $w'$ son los mundos de $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{M}'$, respectivamente, donde se ubican las canicas.

En una *ronda* del juego, la jugadora **I** escoge una canica, la mueve por una $R$ (o $R'$)-transición y la coloca en un sucesor del mundo donde se encontraba la canica. La jugadora **II** responde, en el otro modelo, moviendo la canica por una $R'$ (o $R$)-transición a un sucesor. Después de que cada jugadora hace su movimiento, la configuración cambia.

En este juego, **II** pierde cuando no puede responder a la jugada de **I**, es decir, si la canica que le toca mover se encuentra en un mundo que ya no tiene sucesores, o cuando los mundos de la nueva configuración no satisfacen a los mismos átomos. En cambio, **I** pierde cuando ya no puede hacer otra jugada porque ambas canicas están en mundos sin sucesores o cuando existe una sucesión infinita de rondas jugadas de acuerdo con las reglas.

Decimos que la jugadora **II** tiene una estrategia ganadora en un juego de bisimulación que empieza en la configuración $((\mathfrak{M}, w), (\mathfrak{M}', w'))$ si es capaz de responder a cualquier jugada de **I** de manera que le garanticen ganar el juego ya sea porque **I** se queda sin poder hacer más jugadas o porque **II** puede responder de 'buena manera' infinitamente.

Entonces, podemos pensar que la jugadora **I** *reta* la condición de bisimilitud de los modelos de los cuales consiste el juego, mientras que la jugadora **II** la defiende.

**Proposición 5.3.1.** *En un juego de bisimulación que tiene como configuración inicial a la pareja* $((\mathfrak{M}, w), (\mathfrak{M}', w'))$*, la jugadora **II** tiene una estrategia ganadora si y solo si* $\mathfrak{M}, w \rightleftarrows \mathfrak{M}', w'$.

Efectivamente, una bisimulación $Z : \mathfrak{M} \rightleftarrows \mathfrak{M}'$ es una estrategia ganadora para la jugadora **II**. Por un lado, garantiza que en cualquier configuración, los mundos en que se encuentran las canicas, satisfacen los mismos átomos y las condiciones *hacia atrás* y *hacia adelante* garantizan que para cualquier canica que elija mover **I**, siempre habrá una buena respuesta de **II**. Y recíprocamente, si **II** gana el juego, las parejas $(w, w')$ de mundos de cada configuración definida por cada ronda del juego, inducen una bisimulación.

# Conclusiones

Este trabajo hace un recorrido general de la lógica modal de tal manera que cualquier persona con conocimientos generales de lógica clásica pueda conseguir un buen panorama de la lógica modal y de una manera accesible. En el trabajo se hace un estudio semántico de los modelos y frames de Kripke, un estudio sintáctico de las lógicas que corresponden a dicha semántica, se relacionan ambos puntos de vista por medio de los resultados de correctud y completud, y al final se presentan otras perspectivas semánticas para las lógicas modales.

En los capítulos segundo y tercero se hace el estudio semántico. En el desarrollo del segundo capítulo se presentaron una variedad de herramientas semánticas útiles para estudiar a las lógicas modales, desde las más sencillas como los morfismos, hasta otras más complejas como la extensión a ultrafiltro o las ultrapotencias.También se relaciona la lógica modal con la lógica de primer orden. El tercer capítulo se ocupa de ver qué fórmulas definen a los frames caracterizados por ciertas propiedades de interés. De este par de capítulos se puede concluir que que la lógica modal es bastante expresiva, ya que su estudio semántico es bastante rico.

En el cuarto capítulo, restringido al lenguaje básico modal se hace un estudio de los sistemas normales y sus axiomatizaciones, se hacen pruebas sintácticas y se estudian los operadores modales y las modalidades. En dicho capítulo se puede observar que la dualidad de los operadores modales se asemeja a la de los cuantificadores en la lógica de primer orden. Y también se hace evidente que como el lenguaje se construye de una manera sencilla, el estudio sintáctico no se vuelve demasiado complicado.

Al principio, podría parecer que la lógica modal es una extensión que enriquece la expresividad de la lógica clásica por medio de los operadores modales. Como ya se mencionó antes, hay una semejanza entre los operadores modales y los cuantificadores de la lógica clásica que es bastante interesante ya que efectivamente los operadores modales fungen de alguna manera como cuantificadores pero localmente, restringidos a los mundos accesibles desde el mundo en el que se encuentre. Esto nos lleva a ver entonces, por otro lado, a la lógica modal como fragmento de la lógica clásica, hecho que se formaliza con el Teorema de Caracterización de Van Benthem, visto en el segundo capítulo.

Finalmente, sería bueno resltar que una de las bondades de la lógica modal es que al partir de un lenguaje proposicional, su estudio sintáctico es bastante sencillo para la riqueza en expresividad que ofrece su semántica. Y una gran ventaja de dicha semántica (tipo Kripke) es el estudio local que nos permite hacer, en el sentido de que en cada mundo del frame o modelo, tenemos un modelo de la lógica proposicional.

# Apéndice A

# Lógica de Primer Orden

Este apéndice está dedicado a profundizar un poco más en algunas nociones sobre lógica de primer orden, teoría de modelos y la construcción del ultraproducto que se usan a lo largo del texto sin ser cuidadosamente definidas.

## A.1. Lenguaje y Modelos de Primer Orden

El lenguaje de primer orden se construye a partir de un *tipo de semejanza* $\rho$, que es un conjunto, posiblemente vacío que tiene la siguiente forma:

$$\rho = (\bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+} \mathcal{R}_n) \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+} \mathcal{F}_n) \cup \mathcal{C},$$

donde para toda $n \in \mathbb{Z}^+$, $\mathcal{R}_n$ es un conjunto de símbolos llamados *letras relacionales*, cuya aridad es $n$, $\mathcal{F}_n$ es un conjunto de símbolos llamados *letras funcionales* cuya aridad es $n$; y $\mathcal{C}$ es un conjunto de símbolos llamados *constantes*. Se pide que un símbolo no sea una sucesión de otros. Dado un tipo de semejanza, construimos el lenguaje para este. Así que en lo que sigue, suponemos que $\rho$ es un tipo de semejanza fijo.

Después, tenemos un conjunto $\mathcal{L}^1_\rho$ al que llamamos alfabeto formal que será el conjunto de símbolos que usará el lenguaje. Este conjunto es de la siguiente forma:

$$\mathcal{L}^1_\rho = \rho \cup \{v_i \,|\, i \in \mathbb{N}\} \cup \{\approx\} \cup \{\neg, \vee\} \cup \{(,),,\} \cup \{\exists\},$$

donde cada uniendo es, el tipo de semejanza, un conjunto numerable de variables, un conjunto que contiene un símbolo de igualdad, un conjunto de conectivos lógicos, un conjunto de símbolos auxiliares y un conjunto de cuantificadores, respectivamente.

*Notación.* En la denotación del lenguaje $\mathcal{L}^1_\rho$, $\rho$ claramente hace referencia al tipo de semejanza y el 1 hace referencia a que el lenguaje es de primer orden. Pero alguno o ambos se pueden omitir si el contexto lo permite.

*Notación.* A los elementos del conjunto de variables los denotaremos a veces por las últimas letras del alfabeto: $\dots, x, y, z$. A los elementos del conjunto de constantes los solemos denotar por la letra $c$ y cuando sea necesario, por $c_i$ con $i$ en algún conjunto $J$ posiblemente los naturales.

Lo siguiente que hay que construir son los *términos*. Un término $t$ se construye recursivamente mediante la fórmula:

$$t := x \,|\, c \,|\, f(t_1, t_2, \dots, t_n),$$

donde $f$ es una letra funcional de aridad $n$.
Luego, una *fórmula atómica* $\beta$ queda definida recursivamente por medio de la fórmula:

$$\beta := t_1 \approx t_2 \,|\, R(t_1, t_2, \dots, t_n),$$

donde $R$ es una letra relacional de aridad $n$ y $t_i$ para $i \in \{1, \dots, n\}$ son términos.
Y por último, una *fórmula* $\alpha$ se construye mediante la fórmula:

$$\alpha := \beta \,|\, \neg\alpha \,|\, \alpha \vee \alpha' \,|\, \exists x \alpha.$$

Los demás conectivos lógicos $(\wedge, \rightarrow, \longleftrightarrow)$ se definen de la manera usual, igual que el otro cuantificador $(\forall)$.

Decimos que una ocurrencia de una variable $x$ en una fórmula $\alpha$ es *acotada* si y solo si $x$ es la variable de un cuantificador o está en el alcance de un cuantificador, en la fórmula. En otro caso la ocurrencia de $x$ es libre en la fórmula $\alpha$. Y entonces un *enunciado* es una fórmula cuyas variables son todas acotadas.
Un modelo para un lenguaje de primer orden, debe contener suficientes elementos para interpretar cada componente del lenguaje, es decir debe contener relaciones para interpretar las letras

relacionales, funciones para interpretar las letras funcionales, y además la aridad de éstas deberán coincidir con la aridad de los símbolos que interpretan; y también un modelo deberá contener suficientes elementos distinguidos para interpretar a las constantes del lenguaje. Entonces, un modelo para un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}^1_\rho$ es una tupla $\mathfrak{A} = (A, \mathcal{R}, \mathcal{O}, \mathcal{E})$, donde $A$ es un conjunto no vacío (el *dominio* o *universo*); $\mathcal{R}$ es un conjunto de relaciones sobre $A$, i.e. si $R \in \mathcal{R}$, entonces $R \subseteq A^n$ para alguna $n$; $\mathcal{O}$ es un conjunto de funciones u operaciones en el dominio, es decir, si $f \in \mathcal{O}$, entonces $f : A^n \to A$ para alguna $n$; y $\mathcal{E}$ es un conjunto de elementos distiguidos de $A$. Un modelo es una estructura relacional, ya que podemos ver a las funciones $n$-arias como relaciones $(n+1)$-arias y a los elementos distinguidos como relaciones 0-arias.

*Notación.* A la interpretación de letra relacional $R$ (o letra funcional $f$ o constante $c$) en el modelo $\mathfrak{A}$, la denotaremos por $R^{\mathfrak{A}}$ (o $f^{\mathfrak{A}}$ o $c^{\mathfrak{A}}$, respectivamente).

Como nuestro lenguaje también consta de variables, necesitamos interpretarlas. Dado un modelo $\mathfrak{A}$, definimos una *asignación* como una función $s$ que a cada variable $x$ del lenguaje le asigna $x^{\mathfrak{A}}$ un elemento de $A$. Entonces, para intepretar un término $t$ en el modelo $\mathfrak{A}$, bajo la asignación $s$ (Not: $t^{\mathfrak{A}}[s]$) necesitamos dar una definición recursiva: $x^{\mathfrak{A}}[s] = s(x)$, $c^{\mathfrak{A}}[s] = c^{\mathfrak{A}}$ y $(f(t_1, \ldots, t_n))^{\mathfrak{A}}[s] = f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[s], \ldots, t_n^{\mathfrak{A}}[s])$.

**Definición A.1.1.** Si tenemos una asignación $s$, entonces $s(v_n/a)$ $(a \in A)$ será la asignación que se obtiene a partir de $s$ al reemplazar el valor de $s(v_n)$ por $a$. Esto se extiende naturalmente para: $s(v_1/a_1, \ldots, v_m/a_m)$.

Ahora definiremos la relación de satisfacción de Tarski ($\models$). Cuando interpretamos una fórmula, en un modelo y bajo una asignación, esta puede ser verdadera o falsa en el modelo así que $\mathfrak{A} \models \alpha[s]$ denotará que la fórmula $\alpha$ es satisfecha (verdadera) en el modelo $\mathfrak{A}$ bajo la asignación $[s]$. Y esto se define recursivamente para las fórmulas como sigue: para el caso de las fórmulas atómicas, tenemos que $\mathfrak{A} \models (t_1 \approx t_2)[s]$ si y solo si $t_1^{\mathfrak{A}}[s] = t_2^{\mathfrak{A}}[s]$ y que $\mathfrak{A} \models P(t_1, \ldots, t_n)[s]$ si y solo si $(t_1^{\mathfrak{A}}[s], \ldots, t_n^{\mathfrak{A}}[s]) \in P^{\mathfrak{A}}$.

Para las fórmulas booleanas se extiende fácilmente, es decir, si $\alpha$ y $\beta$ son fórmulas, entonces $\mathfrak{A} \models \neg\alpha[s]$ si y solo si no sucede que $\mathfrak{A} \models \alpha[s]$ y $\mathfrak{A} \models \alpha \vee \beta[s]$ si y solo si $\mathfrak{A} \models \alpha[s]$ o $\mathfrak{A} \models \beta[s]$.

Por último para el cuantificador existencial, $\mathfrak{A} \models \exists x\alpha[s]$ si y solo si existe un elemento $a \in A$ tal que $\mathfrak{A} \models \alpha[s(x/a)]$.

Luego, decimos que una fórmula $\alpha$ es *verdadera en un modelo* $\mathfrak{A}$ si se satisface en el modelo bajo cualquier asignación $s$. Y es *falsa* si para toda asignación, la fórmula no se satisface en el modelo. Además $\alpha$ es *universalmente verdadera* si es verdadera en cualquier modelo y es *universalmente falsa* si es falsa en cualquier modelo.

Es sencillo probar que para toda fórmula $\alpha$, si las asignaciones $s$ y $s'$ coinciden en todas las variables libres de $\alpha$, entonces $\mathfrak{A} \models \alpha[s]$ si y solo si $\mathfrak{A} \models \alpha[s']$. Por lo que solo nos interesan los valores de la asignación en las variables libres de $\alpha$. Esto nos lleva a dos cosas, la primera:

*Notación.* Si $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ es una fórmula tal que $x_1, \ldots, x_n$ ocurren libres,$\mathfrak{A}$ es un modelo y $a_1, \ldots, a_n$ son elementos de $A$, entonces $\mathfrak{A} \models \alpha[a_1, \ldots, a_n]$ significa que la fórmula se está evaluando en la asignación $s$ tal que $s(x_i) = a_i$ para toda $i = 1, \ldots, n$.

Y la segunda: que si un enunciado $\alpha$ es satisfecho en un modelo $\mathfrak{A}$ bajo una asignación $s$ ($\mathfrak{A} \models \alpha[s]$, entonces es satisfecho bajo cualquier asignación en dicho modelo, es decir es *verdadero* en el modelo ($\mathfrak{A} \models \alpha$)).

Por último hablaremos de la consecuencia semántica: diremos que una fórmula $\gamma$ es consecuencia semántica de un conjunto $\Gamma$ de fórmulas (Not: $\Gamma \models \gamma$) si y solo si para cualquier modelo $\mathfrak{A}$ y cualquier asignación $s$,

$$\mathfrak{A} \models \alpha[s] \text{ para toda } \alpha \in \Gamma \text{ implica que } \mathfrak{A} \models \gamma[s].$$

También es conveniente mencionar algunas propiedades que cumple la lógica de primer orden. Hablemos un poco de nociones sintácticas.

La lógica de primer orden en general es *indecidible*, es decir, que no existe un procedimiento efectivo que dada una fórmula de primer orden nos diga, si la fórmula es válida o no. Sin embargo, es *recursivamente enumerable*, es decir, que existe un proceso efectivo para generar todas las fórmulas válidas.

La manera en que se puede probar que un sistema es recursivamente enumerable es dar un sistema de prueba correcto y completo. Ejemplos de sistemas de prueba son sistemas axiomáticos o sistemas de secuentes. Para los fines de este trabajo, solo nos interesarán los sistemas axiomáticos.

Una demostración (en un sistema axiomático) es una sucesión finita de fórmulas tal que cada fórmula o es un axioma o se sigue de las anteriores por medio de alguna regla de inferencia. Escribiremos $\vdash \alpha$ para referirnos a que la fórmula de primer orden $\alpha$ se puede demostrar o tiene una demostración en un sistema axiomático. Y $\Gamma \vdash \alpha$ para decir que $\alpha$ es *deducible* a partir de las fórmulas de $\Gamma$. Sería deseable entonces que las nociones de ser deducible y de ser verdadero empataran. De hecho empatan.

**Proposición A.1.2** (Teorema de completud correctud extendido). *Sean $\Gamma$ un conjunto de fórmulas de un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}^1_\rho$ y $\alpha$ una fórmula del mismo lenguaje. Entonces $\Gamma \vdash \alpha$ si y solo si $\Gamma \models \alpha$. Si $\Gamma = \emptyset$, entonces tenemos que $\vdash \alpha$ si y solo si $\models \alpha$.*

Correctud es la implicación de izquierda a derecha de la proposición anterior y completud es la de derecha a izquierda. Generalmente la más sencilla de probar es la de correctud. Ambas pruebas y un estudio sintáctico mucho más profundo se puede encontrar en [Enderton, 2001].

También hay otro resultado importante de la lógica de primer orden que es importante tener en mente.

**Proposición A.1.3** (Compacidad). *Sea $\Sigma$ un conjunto de fórmulas de primer orden. Si todo subconjunto finito de $\Sigma$ es satisfacible, entonces $\Sigma$ es satisfacible.*

Estos resultados son de suma importancia en lógica de primer orden y se derivan de un estudio mucho más profundo. Se le sugiere al lector revisar [Chang y Keisler, 1990] y [Enderton, 2001] para conocerlo más a fondo ya que escapa del objetivo de esta tesis pero es de suma importancia.

## A.2. Nociones de Teoría de Modelos

**Definición A.2.1** (Submodelo). Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ modelos. Diremos que $\mathfrak{A}$ es submodelo de $\mathfrak{B}$ (Notación: $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$) si y solo si:

(*i*) $A \subseteq B$.

(*ii*) Para toda letra relacional $R$ de aridad $n$, tenemos que $R^{\mathfrak{A}} = R^{\mathfrak{B}} \cap A^n$.

(*iii*) Para toda letra funcional $f$ de aridad $n$, tenemos que $f^{\mathfrak{A}} = f^{\mathfrak{B}} \restriction_{A^n}$.

(*iv*) Para toda constante $c_i$, tenemos que $c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}}$.

En esta caso, decimos también que $\mathfrak{B}$ es una extensión de $\mathfrak{A}$.

**Definición A.2.2** (Equivalencia elemental)**.** Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ modelos. Diremos que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son *elementalmente equivalentes* (Not: $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$) si y solo si para todo enunciado $\varphi$, se cumple que $\mathfrak{A} \models \varphi$ si y solo si $\mathfrak{B} \models \varphi$.

Que $\mathfrak{A}$ sea extensión de $\mathfrak{B}$ no garantiza que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ hagan verdaderas a las mismas fórmulas, pero para eso la siguiente definición.

**Definición A.2.3** (Extensión elemental)**.** Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ modelos. Diremos que $\mathfrak{B}$ es *extensión elemental de* $\mathfrak{A}$ (Not: $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$) si y solo si:

(*i*) $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$

(*ii*) Para toda fórmula de primer orden $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$, y para $n$-ada $(a_1, \ldots, a_n)$ de elementos en $\mathfrak{A}$, se cumple que $\mathfrak{A} \models \alpha[a_1, \ldots, a_n]$ si y solo si $\mathfrak{B} \models \alpha[a_1, \ldots, a_n]$.

En este caso también diremos que $\mathfrak{A}$ es un *submodelo elemental* de $\mathfrak{A}$.

**Definición A.2.4** (Encaje elemental)**.** Una función $f : A \to B$ es un *encaje elemental* (Notación: $f : \mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$) si y solo si para toda fórmula $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$, y para $n$-ada $(a_1, \ldots, a_n)$ de elementos en $\mathfrak{A}$, sucede que $\mathfrak{A} \models \alpha[a_1, \ldots, a_n]$ si y solo si $\mathfrak{B} \models \alpha[f(a_1), \ldots, f(a_n)]$

**Definición A.2.5** (Isomorfismo)**.** Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ modelos. Diremos que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son isomorfos si y solo si existe $f$, una función biyectiva tal que $h : A \to B$ y:

(*i*) Para cada letra relacional $R$ de aridad $n$ en $\rho$, se cumple que $R^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)$ si y solo si $R^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n))$.

(*ii*) Para cada letra funcional $f$ de aridad $n$ en $\rho$, se cumple que

$$h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n)).$$

(*iii*) Para toda constante $c$, se cumple que $h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$.

En este caso decimos que $h$ es un isomorfismo entre $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ (Not: $h : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$). También podemos decir que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son isomorfos (Not: $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$).

Que dos modelos sean isomorfos quiere decir que matemáticamente son la misma estructura, lo que nos lleva a la siguiente proposición.

**Proposición A.2.6.** *Sean,* $\mathfrak{A}$ *y* $\mathfrak{B}$ *modelos,* $f : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$*,* $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ *una fórmula de primer orden* $a_1, \ldots, a_n \in A$*, entonces*

$$\mathfrak{A} \models \alpha[a_1, \ldots, a_n] \text{ si y solo si } \mathfrak{B} \models \alpha[f(a_1), \ldots, f(a_n)]$$

Hemos estado trabajando con las estructuras, pero también será útil enriquecer el lenguaje a uno en el que todo elemento del modelo sea un elemento distinguido, o coloquialmente, que todo elemento del modelo tenga un nombre.

**Definición A.2.7** (Expansión del lenguaje)**.** Sean, $\mathcal{L}^1_\rho$ un lenguaje de primer orden y $\mathfrak{A}$ un modelo para este. Expandiremos a $\mathcal{L}^1_\rho$ a un nuevo lenguaje $\mathcal{L}_A = \mathcal{L}^1_\rho \cup \{c_a \mid a \in A\}$ añadiedo una nueva constante, $c_a$ por cada elemento $a$ del dominio de $\mathfrak{A}$, $A$. Después se puede expandir $\mathfrak{A}$ al modelo $\mathfrak{A}_A = (\mathfrak{A}, a)_{a \in A}$ del lenguaje $\mathcal{L}_A$, haciendo a cada elemento de $A$, un elemento distinguido. Cada constante nueva $c_a$ de $\mathcal{L}_A$ se interpreta como el correspondiente elemento distinguido $a$.

**Proposición A.2.8.** *El modelo* $\mathfrak{B}$ *es una extensión elemental del modelo* $\mathfrak{A}$ *si y solo si* $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ *y* $(\mathfrak{A}, a)_{a \in A} \equiv (\mathfrak{B}, a)_{a \in A}$.

## A.3. Ultraproductos

Los ultraproductos sirven para construir modelos nuevos a partir de otros. Para poder llegar a la construcción de ultraproducto primero necesitamos algunas nociones como la de filtro y ultrafiltro.

**Definición A.3.1** (Filtro)**.** Sea $W$ un conjunto no vacío. Y sea $F \subset \mathcal{P}(W)$. Decimos que $F$ es un filtro sobre $W$ si y solo si:

$(i)$ $W \in F$.

$(ii)$ Si $X \in F$ y $Y \in F$, entonces $X \cap Y \in F$.

$(iii)$ Si $X, Y \subset W$, $X \subset Y$ y $X \in F$, entonces $Y \in F$.

Si $F$ es distinto de $\mathcal{P}(W)$ entonces decimos que $F$ es *propio.*

**Ejemplo A.3.2.** Algunos ejemplos sencillos de filtros son:

$(a)$ El *filtro trivial* $F = \{W\}$.

$(b)$ Sea $W$ un conjunto infinito, entonces $F = \{X \subset W \mid W \setminus X \text{ es finito }\}$ es un filtro, a éste se le conoce como el *filtro cofinito.*

**Definición A.3.3** (PIF)**.** Sea $G$ una familia de conjuntos. Decimos que $G$ tiene la *propiedad de intersección finita* (PIF) si todo subconjunto finito $\{X_1, \ldots, X_n\} \subset G$ de elementos de $G$ tiene intersección no vacía, i.e $X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_n \neq \emptyset$

*Observación.* No es muy complicado probar que la intersección de funa familia de filtros es a su vez un filtro.

**Definición A.3.4** (Filtro generado)**.** Sea $G \subset W$. Definimos al filtro $F$ *generado por* $G$ como la intersección de todos los filtros sobre $W$ que contienen a $G$, formalmente:

$$F = \bigcap \{D \mid D \text{ es un filtro sobre } W \text{ y } G \subset D\}.$$

Nos interesan unos filtros en específico, unos que cumplen una condición extra.

**Definición A.3.5** (Ultrafiltro)**.** Un filtro $U$ sobre un conjunto $W$ es un *ultrafiltro* si y solo si

$$\text{para todo } X \subset W, \text{ o } X \in U \text{ o } W \setminus X \in U.$$

Un filtro $F$ sobre $W$ es *maximal* si no existe un filtro $F'$ sobre $W$ tal que $F \neq F'$ y $F \subset F'$. Existen además otras caracterizaciones para un ultrafiltro.

**Proposición A.3.6.** *Sea $U$ un filtro sobre un conjunto $W$. Son equivalentes:*

*1. $U$ es un ultrafiltro.*

*2. $U$ es maximal.*

3. *Si* $X, Y \subset W$ *y* $X \cup Y \subset U$, *entonces* $X \in U$ *o* $Y \in U$.

Presentaremos ahora un resultado muy importante del que se hace uso varias veces a lo largo del texto.

**Teorema A.3.7** (Teorema del Ultrafiltro)**.** *Sea* $W$ *un conjunto no vacío. Todo filtro* $F$ *sobre* $W$ *puede ser extendido a un ultrafiltro.*

Como todo conjunto con la propiedad de intersección finita puede extenderse a un filtro (la prueba de esta afirmación puede encontrarse en [Jech, 2002, Teorema 7.5]), obtenemos el siguiente corolario del teorema.

**Corolario A.3.8.** *Sea* $G \subset \mathcal{P}(W)$. *Si* $G$ *tiene la PIF,* $G$ *se puede extender a un ultrafiltro sobre* $W$.

Existen unos ultrafiltros en particular que nos serán muy útiles en la construcción del ultraproducto.

**Definición A.3.9** (Ultrafiltro principal)**.** Sean, $W$ un conjunto no vacío y $w \in W$. El *ultrafiltro principal* $\pi_w$ *generado por* $w$ es el filtro generado por el conjunto unitario $\{w\}$. Es decir $\{X \subseteq W \mid w \in X\}$.

No es difćil checar que realmente es un ultrafiltro.

En general, para el lector que quiera profundizar más en la teoría de filtros, se le sugiere revisar [Jech, 2002].

Ya podemos empezar la construcción de las ultrapotencias, primero lo vamos a hacer para conjuntos y después para modelos, ya que es una manera más sencilla de asimilarlo.

Sea $U$ un ultrafiltro sobre un conjunto no vacío de índices $I$. Supongamos que para cada $i \in I$, $A_i$ es un conjunto no vacío. Sea $C = \prod_{i \in I} A_i$ el producto cartesiano de estos conjuntos. Entonces, $C$ es el conunto de todas las funciones $f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i$ tales que $f(i) \in A_i$ para toda $i \in I$. Definiremos la relación de ser $U$-equivalentes ($\sim_U$), de tal manera que dos funciones $f, g \in C$ serán $U$-equivalentes (Not: $f \sim_U g$) si y solo si $\{i \in I \mid f(i) = g(i)\} \in U$. No es difícil ver que $\sim_U$ es una relación de equivalencia. Entonces es natural pensar en la clase de equivalencia de una función $f$ módulo $\sim_U$, que denotaremos por $f_U$, i.e $f_U = \{g \in C \mid f \sim_U g\}$.

**Definición A.3.10** (Ultraproducto de conjuntos)**.** El *ultraproducto* de $A_i$ módulo $U$, es el conjunto de todas las clases de equivalencia de $\sim_U$. Lo denotaremos por $\prod_U A_i$. Entonces,

$$\prod_U A_i = \{f_U \mid f \in \prod_{i \in I} A_i\}.$$

Cuando todos los conjuntos $A_i$ son el mismo, es decir $A_i = A$ para toda $i \in I$, el ultraproducto se llama *ultrapotencia* de $A$ módulo $U$ y se denota por $\prod_U A$.

Ya podemos aplicar esta idea a modelos.

**Definición A.3.11** (Ultraproducto de modelos)**.** Sean, $\mathcal{L}^1_\rho$ un lenguaje de primer orden, $I$ un conjunto de índices y $\mathfrak{A}_i$ $(i \in I)$ modelos para $\mathcal{L}^1_\rho$. El ultraproducto $\prod_U \mathfrak{A}_i$ de $\mathfrak{A}_i$ módulo $U$ es el modelo tal que:

*(i)* El dominio o universo $A_U$ de $\prod_U \mathfrak{A}_i$ es el conjunto $\prod_U A_i$, donde $A_i$ es el dominio de $\mathfrak{A}_i$ para toda $i \in I$.

*(ii)* Sean, $R$ una letra relacional de aridad $n$ y $R_i = R^{\mathfrak{A}_i}$ $(i \in I)$. La relación $R^{\prod_U \mathfrak{A}_i}$, que escribiremos como $R_U$, para facilitar la notación, está dada por:

$$R_U(f^1_U, \ldots, f^n_U) \text{ si y solo si } \{i \in I \mid R_i(f^1(i), \ldots, f^n(i))\} \in U.$$

*(iii)* Sean, $h$ una letra funcional de aridad $n$ y $h_i = h^{\mathfrak{A}_i}$ $(i \in I)$. La función $h^{\prod_U \mathfrak{A}_i}$, que denotaremos por $h_U$ por cuestiones de notación, está definida por:

$$h_U(f^1_U, \ldots, f^n_U) = \{(i, h_i(f^1(i), \ldots, f^n(i)) \mid i \in I\}_U.$$

*(iv)* Sea $c$ una constante y $c_i = c^{\mathfrak{A}_i}$ su interpretación en el modelo $\mathfrak{A}_i$ $(i \in I)$. La interpretación de $c$ en el modelo $\prod_U \mathfrak{A}_i$, que denotaremos como $c_U$, está definida como sigue:

$$c_U = \{(i, c_i) \mid i \in I\}_U.$$

No es difícil ver que las condiciones anteriores tienen sentido porque solo dependen de las clases de equivalencia $f^1_U, \dots, f^n_U$. Veamos ahora un resultado importante en cuanto al ultraproducto.

**Teorema A.3.12** (Teorema de Łoś)**.** *Sea $U$ un ultrafiltro sobre un conjunto no vacío $I$. Para cada $i \in I$, sea $\mathfrak{A}_i$ un modelo. Entonces:*

*(i) Para cada término $t(x_1, \dots, x_n)$ y cualesquiera $f^1_U, \dots, f^n_U$ elementos de $\mathfrak{A} = \prod_U \mathfrak{A}_i$, se cumple que,*

$$t^{\mathfrak{A}}[x_1/f^1_U, \dots, x_n/f^n_U] = \{(i, t^{\mathfrak{A}_i}[f^1(i), \dots, f^n(i)]) \,|\, i \in I\}_U.$$

*(ii) Para cualquier fórmula de primer orden $\alpha(x_1, \dots, x_n)$ y cualesquiera $f^1_U, \dots, f^n_U$ elementos de $\prod_U \mathfrak{A}_i$, se cumple que,*

$$\prod_U \mathfrak{A}_i \models \alpha[f^1_U, \dots, f^n_U] \text{ si y solo si } \{i \in I \,|\, \mathfrak{A}_i \models \alpha[f^1(i), \dots, f^n(i)]\} \in U.$$

*Prueba.* Solo probaremos la segunda afirmación. Procederemos por inducción sobre la complejidad de $\alpha$. Si $\alpha$ es una fórmula atómica, la equivalencia se da por definición y por la afirmación $(i)$. Luego, si $\alpha$ es de la forma $\neg\beta(x_1, \dots, x_n)$, supongamos que la equivalencia se cumple para $\beta(x_1, \dots, x_n)$. Así,

$$\begin{aligned}
\prod_U \mathfrak{A}_i \models \alpha[f^1_U, \dots, f^n_U] \text{ si y solo si no } &\prod_U \mathfrak{A}_i \models \beta[f^1_U, \dots, f^n_U] \\
&\text{si y solo si } \{i \in I \,|\, \mathfrak{A}_i \models \beta[f^1(i), \dots, f^n(i)]\} \notin U \\
&\text{si y solo si } \{i \in I \,|\, \mathfrak{A}_i \not\models \beta[f^1(i), \dots, f^n(i)]\} \in U \\
&\text{si y solo si } \{i \in I \,|\, \mathfrak{A}_i \models \alpha[f^1(i), \dots, f^n(i)]\} \in U
\end{aligned}$$

La segunda equivalencia se tiene por hipótesis inductiva y la tercera porque $U$ es ultrafiltro, la cuarta es por definición de $\alpha$.

Ahora, el caso en que $\alpha$ es de la forma $\beta \vee \gamma$. Es análogo al anterior usando que los filtros son cerrados bajo supraconjuntos. Por último, si $\alpha(x_1, \dots, x_n)$ es de la forma $\exists x_0 \beta(x_0, x_1, \dots .x_n)$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\prod_U \mathfrak{A}_i \models \alpha[f_U^1, \ldots, f_U^n] \text{ si y solo si} & \quad \text{existe un } f_U^0 \text{ tal que } \prod_U \mathfrak{A}_i \models \beta[f_U^0, f_U^1, \ldots, f_U^n] \\
\text{si y solo si} & \quad \text{existe un } f_U^0 \text{ tal que} \\
& \quad \{i \in I \,|\, \mathfrak{A}_i \models \beta[f^0(i), f^1(i), \ldots, f^n(i)]\} \in U \\
\text{implica que} & \quad \{i \in I \,|\, \mathfrak{A}_i \models \alpha[f^1(i), \ldots, f^n(i)]\} \in U
\end{aligned}
$$

Y para que la cuarta afirmación implique la tercera basta con elegir una función $f^0 \in \prod_{i \in I}$ que sirva como testigo de que $\{i \in I \,|\, \mathfrak{A}_i \models \beta[f^0(i), f^1(i), \ldots, f^n(i)\} \in U$. Entonces la tercera y cuarta afirmaciones son equivalentes y con esto queda probado el resultado. •

**Corolario A.3.13.** *Sea $\prod_U \mathfrak{A}$ una ultrapotencia de un modelo $\mathfrak{A}$. Para todo enunciado de primer orden $\alpha$, $\mathfrak{A} \models \alpha$ si y solo si $\prod_U \mathfrak{A} \models \alpha$.*

Luego, consideremos la la llamada función diagonal $d$, que es un encaje natural de un modelo $\mathfrak{A}$ en cada una de sus ultrapotencias $\prod_U \mathfrak{A}$ que está definida como sigue:

$$a \longmapsto f_a \text{ donde } f_a(i) = a \text{ para toda } i \in I.$$

**Corolario A.3.14.** *Sean, $\mathfrak{A}$ un modelo y $\prod_U \mathfrak{A}$ una ultrapotencia de $\mathfrak{A}$. La función diagonal $d$ es un encaje elemental $d : \mathfrak{A} \preccurlyeq \prod_U \mathfrak{A}$.*

# Bibliografía


BALLARIN, R. Modern Origins of Modal Logic. *The Stanford Encyclopedia Of Philosophy* (2017)

BLACKBURN, P., RIJKE, M.D., Y VENEMA, Y. *Modal Logic*, *Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science*, tomo 53. Cambridge University Press (2002)

CHANG, C.C. Y KEISLER, H.J. *Model Theory*, *Studies in Logic and The Foundations of Mathematics*, tomo 73. 3ª edición. Elsevier (1990)

CHELLAS, B.F. *Modal Logic: an introduction.* Cambridge University Press (1980)

CRESSWELL, M., MARES, E., Y RINI, A. *Logical Modalities from Aristotle to Carnap. The Story of Necessity.* Cambridge University Press (2016)

ENDERTON, H.B. *A Mathematical Introduction to Logic.* Elsevier (2001)

GOLDBLATT, R. Mathematical modal logic: a view of its evolution. *Journal of Applied Logic* **1**(5-6):309–392 (2003)

GORANKO, V. Y OTTO, M. Model theory of modal logic. En *Studies in Logic and Practical Reasoning*, tomo 3, capítulo 5, págs. 249–329. Elsevier (2007)

JECH, T. *Set Theory.* Springer Monographs in Mathematics. Springer (2002)

LAMILLAR, F.J.S. Breve Reseña Histórica acerca de la lógica modal, desde Aristóteles hasta la semántica de mundos posibles. En *Summa logicae en el siglo XXI [Archivo de ordenador]* (2004)

Ten Cate, B., Gabelaia, D., y Sustretov, D. Modal languages for topology: Expressivity and definability. *Annals of Pure and Applied Logic* **159** (2009)

Van Benthem, J. *Modal Logic for Open Minds.* Center for the Study of Language and Information (2010)