



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

FACULTAD DE CIENCIAS

Cuasinúcleos en digráficas

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

PRESENTA:

GABRIELA ESTEPHANY AVILA REYES

TUTOR:

MAT. LAURA PASTRANA RAMÍREZ

Ciudad Universitaria, CDMX, 2019





Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Hoja de datos del jurado

1. Datos del alumno.  
Avila  
Reyes  
Gabriela Estephany  
(044)55 4829 9792  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Matemáticas  
30902556-6
2. Datos del tutor.  
Mat.  
Laura  
Pastrana  
Ramírez
3. Datos del sinodal 1.  
Dra.  
Hortensia  
Galeana  
Sánchez
4. Datos del sinodal 2.  
Dra.  
María del Rocío  
Sánchez  
López
5. Datos del sinodal 3.  
M. en C.  
Germán  
Benítez  
Bobadilla
6. Datos del sinodal 4.  
Mat.  
Ada Cintia  
Rosas  
Tavera
7. Datos del Trabajo escrito.  
Cuasinúcleos en digráficas.  
82 p  
2019

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>5</b>
<b>Introducción</b>	<b>7</b>
<b>1. Definiciones básicas</b>	<b>9</b>
1.1. Gráficas . . . . .	9
1.2. Digráficas . . . . .	11
1.2.1. Tipos de digráficas . . . . .	17
1.2.2. Operaciones con digráficas . . . . .	20
1.3. Órdenes . . . . .	28
<b>2. Antecedentes y resultados previos</b>	<b>29</b>
2.1. Primeros resultados . . . . .	29
2.2. Debilidad de un cuasinúcleo . . . . .	33
2.3. Número de cuasinúcleos en una digráfica . . . . .	34
2.4. Cuasinúcleos ajenos . . . . .	39
<b>3. Algoritmo de las dos revisiones</b>	<b>45</b>
3.1. Las dos revisiones del algoritmo. . . . .	45
3.2. Dos cuasinúcleos en una digráfica sin pozos. . . . .	54
3.3. Código para el algoritmo de las dos revisiones . . . . .	57
3.3.1. Explicación del código . . . . .	58
3.3.2. Primer ejemplo . . . . .	61
3.3.3. Segundo ejemplo . . . . .	62
<b>4. Cuasinúcleos y cuasisoluciones en digráficas infinitas</b>	<b>65</b>
4.1. Definiciones y resultados preliminares . . . . .	65
4.2. Torneos. . . . .	75
<b>Conclusiones</b>	<b>79</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>82</b>



# Agradecimientos

No logro expresar la gratitud que siento hacia todas las personas que, a lo largo de este camino, han colaborado con la culminación de esta etapa en mi vida. Gracias a mi familia, a mis hermanas por ser mis amigas y escucharme siempre que lo necesito; pero especialmente a mis padres, que en todo momento supieron cuando era necesario dar aliento y cuando reprender, por brindarme el mejor entorno posible para desarrollarme y nunca dejarme sola. Ellos intervienen en un plano sumamente personal, pero estoy segura de que no pude contar con una mejor dirección académica que la de mi asesora Laura Pastrana, que siempre estuvo comprometida con esta meta, gracias por los años que fue mi maestra, por mostrarme la belleza de la teoría de gráficas, por su tiempo y dedicación. Hace falta mencionar que este trabajo contó con el mejor asesoramiento de parte de los sinodales que brindaron comentarios y críticas, siempre para enriquecerlo de la mejor manera.

Mi etapa de estudiante no solo me deja experiencias académicas por las cuales agradecer, algunas de ellas trascienden a lo personal; la más importante ha sido poder contar con el apoyo de Ivan, mi cómplice en este camino.



# Introducción

La teoría de gráficas es una de las ramas de las matemáticas discretas más estudiadas actualmente y desde su surgimiento en 1736, cuando Leonhard Euler; quien fue un matemático y físico de origen suizo destacado por ser una de las figuras más importantes de su tiempo, publicó en un artículo la primera representación de una gráfica como modelo matemático [16]. Luego, en 1921, Thorleif Schjelderup-Ebbe empleó las digráficas o gráficas dirigidas, para modelar la relación binaria de autoridad entre animales que conviven en una sociedad, en las que todo par de vértices se encuentran conectados mediante una relación de dominación, que se simboliza por medio de una flecha. A dichas digráficas se les llama torneos; en cuanto a estos, en 1951, Landau demuestra que todo torneo contiene un vértice que domina a distancia uno o dos a los vértices restantes del torneo [19].

Posteriormente se generalizó este concepto hacia un subconjunto de vértices de la digráfica que absorbe a distancia uno o dos a su complemento y que cumple que para cualesquiera dos vértices, estos no se encuentran relacionados por una flecha; a este tipo de conjuntos se les denomina cuasinúcleos y es el tema principal del presente trabajo. En el año 1974, Chvátal y Lovász prueban que toda digráfica posee al menos un conjunto de vértices con estas características [6].

Dado lo anterior, se pueden formular diversas preguntas, por ejemplo, cuántos cuasinúcleos posee determinada digráfica, así como, bajo qué operaciones se preserva el número de cuasinúcleos, cuándo una digráfica posee un solo cuasinúcleo y cuándo dos, bajo qué condiciones una digráfica cuenta con un par de cuasinúcleos ajenos; asimismo, podemos preguntarnos si dada una digráfica cualquiera, existe alguna manera de encontrar un cuasinúcleo fácilmente, o qué ocurre cuando se trabaja con digráficas que tienen un conjunto de vértices infinito. A partir de estas preguntas, se ha enriquecido el estudio de los cuasinúcleos y probado muchos resultados respecto a ellos, los cuales se muestran en el presente trabajo.

El objetivo principal de esta tesis, es presentar los resultados que se encontraron al realizar una investigación y recopilación de los aportes en materia de cuasinúcleos en digráficas; de todos los resultados que mostramos, se menciona su referencia y algunos de ellos se demuestran.

Con este fin, en el primer capítulo se da una breve historia sobre el surgimiento de la teoría de gráficas, que es importante conocer para comprender el desarrollo y avance en esta materia; se expone una serie de conceptos básicos en la teoría de digráficas que se emplean a lo largo del trabajo y son fundamentales al momento de abarcar el tema de la existencia y construcción de cuasinúcleos y su descripción. También se muestran algunas de las características y propiedades de los diversos tipos de digráficas, seguido de algunas operaciones que se pueden realizar entre las mismas, acompañadas de ejemplos.

En el segundo capítulo describimos los antecedentes históricos que dan origen al estudio de los cuasinúcleos, comenzando con el análisis que realizó T. Schjelderrup-Ebbe sobre el comportamiento de diversas sociedades de animales y las relaciones binarias de autoridad que ejercen ciertos individuos sobre el resto. También, exponemos una recopilación de los resultados que



encontramos como fruto de una investigación en diversas fuentes, a fin de que el lector tenga una vasta idea acerca de los temas que se han estudiado. Se prueba la existencia de al menos un cuasinúcleo y una cuasisolución en toda digráfica finita, entendiéndose por cuasisolución al conjunto independiente que domina a su complemento a distancia uno o dos, y la existencia de reyes en torneos; también se muestra que si una digráfica no contiene núcleo, entonces contiene al menos tres cuasinúcleos distintos; se abarca la relación que existe entre los cuasinúcleos de una digráfica y los vértices de exgrado cero de la misma. Asimismo se incluirán resultados relacionados con el conjunto de los vértices que se encuentran a distancia dos de un cuasinúcleo de la digráfica. De igual forma, incluimos el tema de cuasinúcleos ajenos obtenidos a partir de las diversas operaciones en digráficas definidas en el capítulo uno.

En el capítulo tres, se desarrolla el algoritmo dado en “A note on quasi-kernels in digraphs” [8] de Cosmina Croitoru, a fin de construir un cuasinúcleo en una digráfica y dar otra demostración a partir de este del teorema abordado en el capítulo dos, en el que se afirma la existencia de tres cuasinúcleos distintos en una digráfica sin núcleo. Dicho algoritmo también prueba una caracterización dada por Gutin y Kho, Tay y Yeo de las digráficas con solo dos cuasinúcleos dando pruebas constructivas. En la parte final del capítulo, y como aportación de este trabajo, se presenta el código en lenguaje R de programación de la implementación que desarrollamos del algoritmo mencionado, acompañado de la explicación detallada de su desarrollo, funcionamiento y ejemplos.

Finalmente, en el último capítulo, desarrollamos una parte del artículo “Quasi-kernels and quasi-sinks in infinite graphs” [10] de Péter L. Erdős y Lajos Soukup con el objetivo de analizar algunos resultados que se aplican en la descripción de cuasinúcleos y cuasisoluciones en particiones del conjunto de vértices de digráficas infinitas, incluyendo torneos infinitos. Además, se muestra que toda digráfica (de orden finito o infinito) con número cromático finito, contiene al menos un cuasinúcleo y una cuasisolución.

# Capítulo 1

## Definiciones básicas

En este capítulo se darán algunas de las definiciones fundamentales sobre teoría de gráficas que se emplearán a lo largo del presente trabajo.

### 1.1. Gráficas

Los orígenes de la teoría de gráficas, una de las áreas más desarrolladas de las matemáticas discretas, se remonta al año 1736, cuando Leonhard Euler publicó un artículo en el que se daba solución, a través de la primera representación de una gráfica como modelo matemático, a un problema que se presentaba en una ciudad en Prusia del Este llamada Königsberg (actualmente Kaliningrado) [16]. La ciudad está dividida en cuatro áreas, ya que el río Pregel fluye a través de ella; dichas áreas estaban conectadas por medio de siete puentes, en ese entonces: el puente del herrero, el puente conector, el puente verde, el puente del mercado, el puente de madera, el puente alto y el puente de la miel (ver figura 1.1). Los habitantes de Königsberg trataban de encontrar una ruta que atravesara todos los puentes sin pasar por alguno más de una vez.

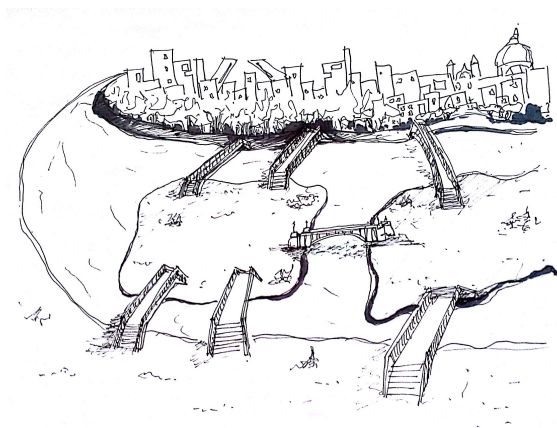


Figura 1.1. Los puentes de Königsberg

Euler se interesó inmediatamente por aquel acertijo. En primer lugar, simplificó el mapa del territorio a unas cuantas líneas y puntos, eliminando lo sobrante. Como se muestra en la figura 1.2, los territorios en los que el río Pregel dividía a la ciudad se convirtieron en puntos y los puentes se transformaron en líneas. A partir de este esquema, Euler encontró la solución. Notó que para poder recorrer un sistema de este tipo, los puntos intermedios; es decir, los puntos que no son el inicial ni el final, deben tener un número par de líneas incidentes en ellos, ya que deben contar con una vía de entrada y una de salida, y solo los puntos de inicio y final pueden tener un número impar de incidencias en ellos debido a que nunca se entra al punto de inicio,

ni se sale del punto final. Gracias a este análisis, Euler logró encontrar un método general para resolver otros problemas del mismo tipo, pues basta con contabilizar el número de líneas que inciden en los puntos intermedios y extremos para saber si el problema tiene solución o no la tiene, concluyendo así, que el acertijo descrito no la tiene.

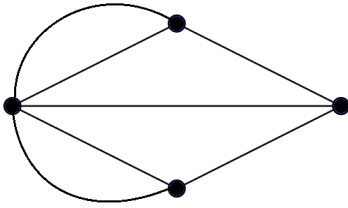


Figura 1.2. Mapa simplificado de Euler

Cabe destacar un detalle más sobre el número de líneas que inciden en los vértices de salida y llegada en un recorrido que sí se pueda completar. Teniendo en cuenta que los puntos intermedios tienen un número par de aristas, los puntos de inicio y final pueden tener un número par o impar de incidencias dependiendo de las siguientes situaciones:

- Si el punto de llegada y salida es el mismo, este debe tener un número par de líneas incidentes: una para salir y otra para regresar.
- Si el punto de salida y el de llegada son distintos, estos deben tener un número impar de líneas incidentes.

Estos análisis y estudios por parte de Euler fueron el inicio de la teoría de gráficas.

Una **gráfica**  $G$  se define como un par ordenado  $(V(G), A(G))$ , donde  $V(G)$  es un conjunto de objetos finito, no vacío, cuyos elementos son denominados vértices, los cuales se representan geoméricamente por medio de puntos, y  $A(G)$  es un conjunto de pares no ordenados de distintos elementos de  $V(G)$ , que reciben el nombre de aristas y se representan geoméricamente a través de una línea que une a los vértices que la conforman. A la cardinalidad del conjunto  $V(G)$  la llamamos el **orden** de  $G$ , a la cardinalidad del conjunto  $A(G)$  la llamamos el **tamaño** de  $G$  y denotamos ambas cantidades por  $o(G)$  y  $t(G)$ , respectivamente.

Sea la gráfica  $G$  definida por el conjunto de vértices  $V(G) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$  y el conjunto de aristas  $A(G) = \{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_4\}, \{x_1, x_6\}, \{x_1, x_7\}, \{x_2, x_3\}, \{x_2, x_6\}, \{x_2, x_7\}, \{x_3, x_4\}, \{x_4, x_6\}, \{x_4, x_7\}, \{x_5, x_6\}, \{x_5, x_7\}\}$ , su representación geométrica es la siguiente:

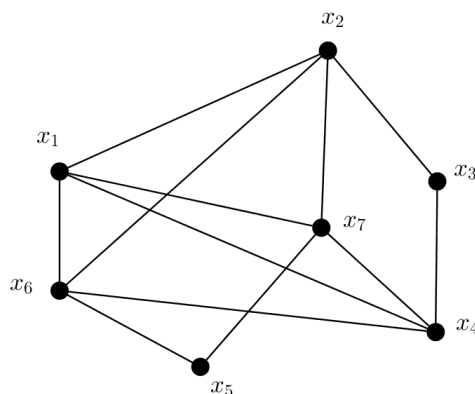


Figura 1.3. Representación geométrica de la gráfica  $G$

Sean  $G$  una gráfica y  $\{u, v\} \subseteq V(G)$ , un  **$uv$ -camino**  $C = (u = u_0, u_1, u_2, \dots, u_n = v)$  en  $G$  es una sucesión de vértices que cumple que  $\{u_i, u_{i+1}\}$  está en las aristas de  $G$ , para toda  $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ . Definimos la **longitud** de  $C$  como  $l(C) = n$ . Los extremos  $u_0$  y  $u_n$  son los vértices inicial y final del camino, respectivamente.

Si existe un  $uv$ -camino para cada par de vértices  $u$  y  $v$  de  $G$ , entonces decimos que la gráfica  $G$  es **conexa**, de lo contrario decimos que la gráfica es **no conexa** (ver figura 1.4).

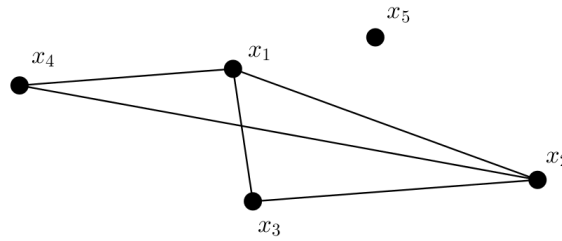
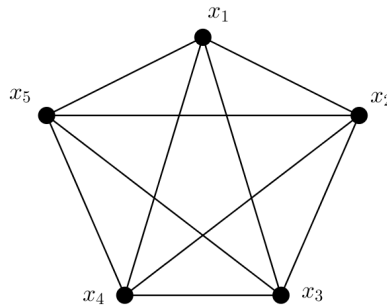


Figura 1.4. Ejemplo de una gráfica no conexa

Se dice que una gráfica  $G$  es **completa** si para todo par de vértices distintos  $u, v$  de  $G$  se cumple que  $\{u, v\}$  está en las aristas de  $G$ . Cada gráfica completa recibe el nombre de  $K_n$ , donde  $n$  es el número de vértices que tiene la gráfica  $G$  (ver figura 1.5).

Figura 1.5. Ejemplo de una gráfica completa,  $K_5$ 

Sean  $G$  una gráfica y  $u \in V(G)$ , definimos al conjunto:

$$N_G(u) = N(u) = \{v \in V(G) : \{u, v\} \in A(G)\}$$

como la **vecindad abierta de  $u$** , y al conjunto:

$$N_G[u] = N[u] = N(u) \cup \{u\}$$

como la **vecindad cerrada de  $u$** ; cada vértice  $v \in N(u)$  es llamado un **vecino de  $u$**  y también decimos que los vértices  $u$  y  $v$  son **adyacentes**. Por otra parte, llamamos **grado de  $u$**  a la cardinalidad del conjunto  $N(u)$  y lo denotamos por  $\delta(u)$ .

Si disponemos de una gráfica  $G$  y de un conjunto  $S = \{a, b, \dots, n\}$ , a cuyos elementos nos referimos como los colores, decimos que una **coloración** de  $G$  con los colores de  $S$  consiste en asignar a cada vértice de  $G$  un elemento de  $S$ ; es decir, un color. Decimos que se trata de una **coloración propia** si los extremos de cada arista reciben colores distintos, formalmente decimos que  $\gamma : V(G) \rightarrow S$  es una coloración propia de  $G$  si cumple que  $\gamma(v) \neq \gamma(w)$  siempre que  $\{v, w\} \in A(G)$ . Decimos que  $G$  está **propriadamente coloreada** si aplicamos la función previamente descrita a  $V(G)$ . El valor de  $\gamma(v)$  es el color que recibe el vértice  $v$  en la coloración. El **número cromático** de una gráfica  $G$ , que denotaremos por  $\chi(G)$ , es el mínimo número de colores necesarios para colorear propiadamente a  $G$ .

## 1.2. Digráficas

Una **digráfica**  $D$ , consiste en una pareja ordenada  $(V(D), F(D))$ , donde  $V(D)$  es un conjunto de objetos finito, no vacío, llamados vértices de  $D$ , los cuales se representan geoméricamente

como puntos, y un conjunto  $F(D)$ , posiblemente vacío, de parejas ordenadas de elementos distintos de  $V(D)$ , a las que llamamos flechas y se representan geoméricamente por medio de una flecha que une a los vértices que la conforman, con origen en el vértice que se encuentra en su primera entrada y destino en el que se encuentra en su segunda entrada.

Sea la digráfica  $D$  definida por el conjunto de vértices  $V(D) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$  y el conjunto de flechas  $F(D) = \{(x_1, x_4), (x_2, x_5), (x_3, x_7), (x_4, x_2), (x_4, x_5), (x_4, x_6), (x_6, x_2), (x_6, x_3), (x_6, x_5), (x_7, x_1)\}$ , su representación geométrica es la siguiente:

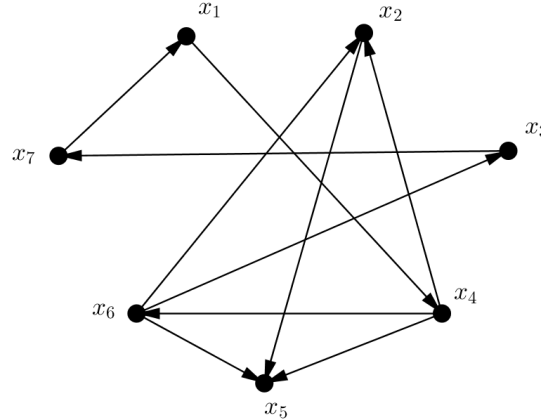


Figura 1.6. Representación geométrica de la digráfica  $D$  descrita en el párrafo anterior

Si  $a = (u, v) \in F(D)$ , entonces se dice que  $u$  **domina** a  $v$ , y que  $u$  es **vértice inicial de  $a$** , del mismo modo decimos que  $v$  **absorbe** a  $u$ , y  $v$  es **vértice final de  $a$** .

Una flecha puede ser de dos tipos:

- Si  $(u, v) \in F(D)$  y  $(v, u) \notin F(D)$ , entonces decimos que  $(u, v)$  es una **flecha asimétrica** en  $D$ .
- Si  $(u, v) \in F(D)$  y  $(v, u) \in F(D)$ , entonces decimos que  $(u, v)$  es una **flecha simétrica** en  $D$  (ver figura 1.7).

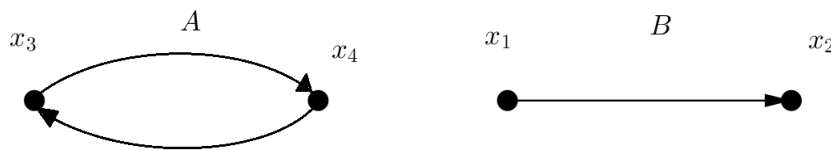


Figura 1.7. Ejemplo de una flecha simétrica (A) y una flecha asimétrica (B)

Sean  $D$  una digráfica y  $u \in V(D)$ , definimos a los conjuntos:

- $N_D^+(u) = N^+(u) = \{v \in V(D) : (u, v) \in F(D)\}$  como la **exvecindad abierta de  $u$** , y cada vértice  $v$  en dicho conjunto es llamado un **exvecino de  $u$** .
- $N_D^+[u] = N^+[u] = N^+(u) \cup \{u\}$ , como la **exvecindad cerrada de  $u$** .

Análogamente, definimos los conjuntos  $N_D^-(u) = N^-(u) = \{v \in V(D) : (v, u) \in F(D)\}$  y  $N_D^-[u] = N^-[u] = N^-(u) \cup \{u\}$ , como la **invecindad abierta de  $u$**  y la **invecindad cerrada de  $u$**  respectivamente.

Sean  $D$  una digráfica y  $v \in V(D)$ , denotamos por  $\delta^+(v)$  al **exgrado de  $v$** , que es el número de flechas de la forma  $(v, u)$  con  $u$  algún elemento de  $V(D)$ ; es decir,  $\delta^+(v) = |N^+(v)|$ , y denotamos por  $\delta^-(v)$  al **ingrado de  $v$** , que es el número de flechas de la forma  $(u, v)$  con  $u$  algún elemento de  $V(D)$ ; esto es,  $\delta^-(v) = |N^-(v)|$ . La suma del ingrado y el exgrado de  $v$  se llama el **grado de  $v$** , y se denota por  $\delta(v)$ .

Sea  $A \subseteq V(D)$ , la **exvecindad abierta de  $A$** , consta de todos los vértices de la digráfica que son exvecinos de algún elemento de  $A$  y; sin embargo, no pertenecen a  $A$ ; en otras palabras,  $N_D^+(A) = N^+(A) = (\cup N^+(x)) \setminus A$ , tal que  $x \in A$  y la **exvecindad cerrada de  $A$** , está definida por  $N_D^+[A] = N^+[A] = N^+(A) \cup A$ . De manera análoga, definimos a la **invecindad abierta de  $A$**  y a la **invecindad cerrada de  $A$**  como  $N_D^-(A) = N^-(A) = (\cup N^-(x)) \setminus A$ , tal que  $x \in A$  y  $N_D^-[A] = N^-[A] = N^-(A) \cup A$ , respectivamente.

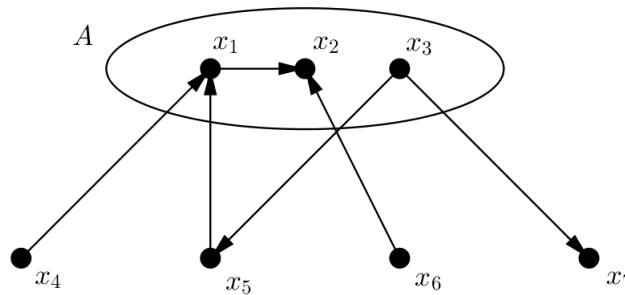


Figura 1.8. Ejemplo de vecindades del conjunto  $A$

Por ejemplo, en la digráfica de la figura 1.8,  $N^+(A) = \{x_5, x_7\}$ ,  $N^+[A] = \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_7\}$ ,  $N^-(A) = \{x_4, x_5, x_6\}$  y  $N^-[A] = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ .

Nombramos **fuentes** a cualquier vértice  $v$  de  $D$  tal que  $\delta^-(v) = 0$ , inversamente, llamamos **pozos** a cualquier vértice  $v$  de  $D$  tal que  $\delta^+(v) = 0$ .

La relación de adyacencia entre dos subconjuntos  $A$  y  $B$  de  $V(D)$  puede definirse a partir del siguiente conjunto:

$$F(A, B)_D = F(A, B) = \{(a, b) \in F(D) : a \in A \text{ y } b \in B\}.$$

El cual está conformado por las flechas que tienen como vértice inicial un elemento del conjunto  $A$  y como vértice final un elemento del conjunto  $B$ .

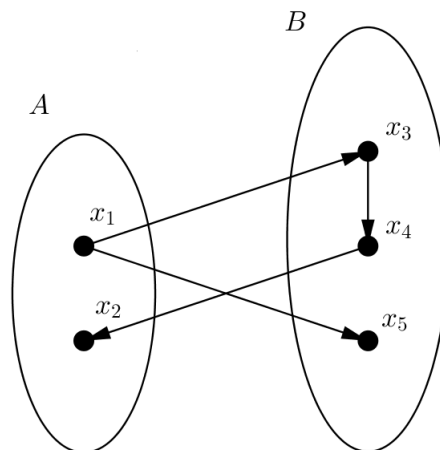


Figura 1.9. Ejemplo de adyacencias entre conjuntos

Para ilustrar la relación de adyacencia, previamente descrita, entre dos conjuntos  $A$  y  $B$ , observemos el ejemplo de la Figura 1.9, en el que  $F(A, B) = \{(x_1, x_3), (x_1, x_5)\}$  y  $F(B, A) = \{(x_4, x_2)\}$ .

Dado un vértice  $u$  de la digráfica  $D$ , un subconjunto  $S \subseteq V(D)$  y  $v \in S$ , decimos que si existe una  $(u, v) \in F(D)$ , entonces existe una ***uS-flecha***. De manera análoga, decimos que si existe una  $(v, u) \in F(D)$ , entonces existe una ***Su-flecha***.

El **orden** de  $D$ , denotado por  $o(D)$ , se define como el número de vértices de  $D$ ; es decir,  $o(D) = |V(D)|$ . Asimismo, el **tamaño de  $D$** , denotado por  $t(D)$ , se define como el número de flechas de  $D$ ; esto es,  $t(D) = |F(D)|$ .

Dos digráficas  $D_1$  y  $D_2$  son ***digráficas isomorfas*** si existe una función biyectiva:

$$f : V(D_1) \rightarrow V(D_2)$$

tal que para todo subconjunto  $\{u, v\} \subseteq V(D_1)$ , se tiene que  $(u, v) \in F(D_1)$  si y solo si  $(f(u), f(v)) \in F(D_2)$ .

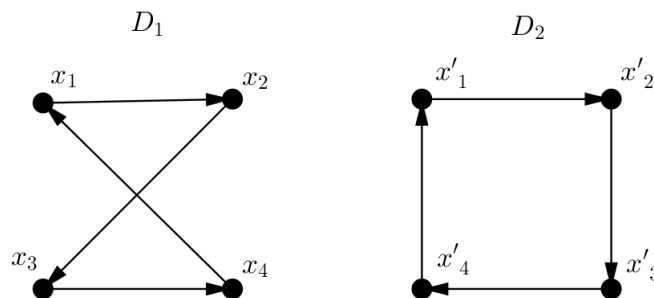


Figura 1.10. Ejemplo de dos digráficas isomorfas

Las digráficas dadas en el ejemplo de la figura 1.10, son isomorfas debido a que, para todo  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  existe  $f : V(D_1) \rightarrow V(D_2)$  definida por  $f(x_i) = x'_i$ , tal que  $(x_i, x_j) \in F(D_1)$  si y solo si  $(f(x_i), f(x_j)) \in F(D_2)$ , con  $\{i, j\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$ .

Sea  $D$  una digráfica,  $D'$  es una ***subdigráfica*** de  $D$ , si  $V(D') \subseteq V(D)$  y  $F(D') \subseteq F(D)$ ; asimismo, decimos que  $D'$  es una ***subdigráfica generadora*** de  $D$  si  $D'$  es una subdigráfica de  $D$  tal que  $V(D') = V(D)$  (ver figura 1.11). Si  $U \subseteq V(D)$ , definimos a la ***subdigráfica inducida por  $U$***  de  $D$ , denotada por  $D[U]$ , como la subdigráfica de  $D$  tal que tiene a  $U$  como conjunto de vértices; es decir,  $U = V(D[U])$  y como conjunto de flechas tiene a todas las flechas entre vértices de  $U$  que pertenecen también a  $F(D)$ ; decimos que  $D'$  es una ***subdigráfica inducida por  $U$  propia*** de  $D$  si  $D'$  es una subdigráfica inducida por  $U$  de  $D$  tal que  $U \neq V(D)$ . Asimismo, definimos a la digráfica  $D \setminus U$  como la subdigráfica de  $D$ , inducida por el conjunto de vértices  $V(D) \setminus U$ .

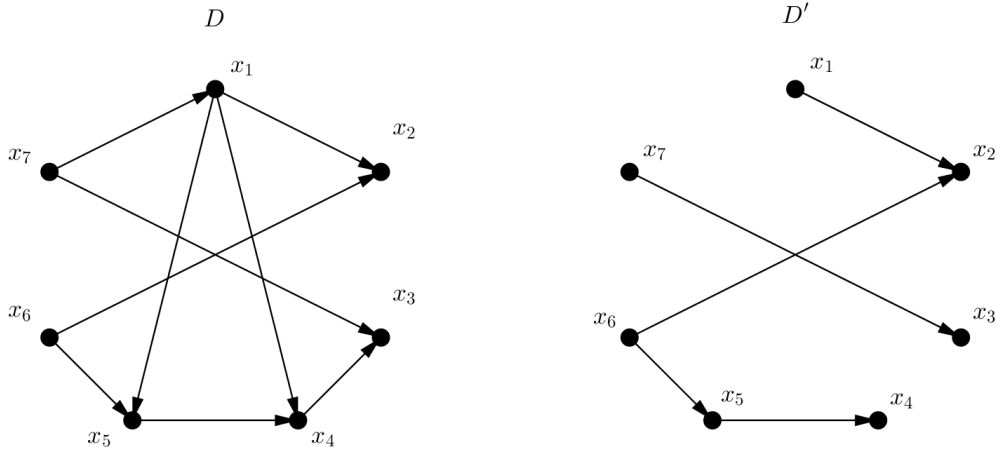


Figura 1.11. Ejemplo de una subdigráfica generadora  $D'$  de la digráfica  $D$

Sean  $D$  una digráfica y  $\{u, v\} \subseteq V(D)$ , un ***uv-camino dirigido***, dado por:

$$C = (u = u_0, u_1, u_2, \dots, u_n = v)$$

en  $D$  es una sucesión de vértices que cumple que  $(u_i, u_{i+1})$  está en las flechas de  $D$ , para toda  $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ . Denotamos la ***longitud*** de  $C$  como  $l(C)$  y se define como  $n$ . En lo sucesivo, omitiremos el uso de la palabra “dirigido” para referirnos a un camino dirigido.

Una ***uv-trayectoria***  $T$  en una digráfica  $D$  es un  $uv$ -camino en  $D$ , tal que no repite vértices. Decimos que  $\tau$  es una ***trayectoria mínima*** si  $l(\tau) = \min \{l(T) : T \text{ es una } uv\text{-trayectoria}\}$ . Un ***camino cerrado*** es un camino que comienza y termina en el mismo vértice, derivado de esta definición tenemos que un ***ciclo***  $C$  en  $D$  es un camino cerrado que no repite vértices, salvo el primero y el último, con  $l(C) \geq 2$ . Decimos que la digráfica  $D$  contiene un ***triángulo*** si ésta contiene un ciclo de longitud tres. Por último, un ***uv-paseo***  $P$  en  $D$  es un  $uv$ -camino dirigido en  $D$  que no repite flechas. Asimismo, sea  $S$  un subconjunto de  $V(D)$  y  $u$  un vértice cualquiera de  $D$ , decimos que existe un  $uS$ -camino ( $Su$ -camino) en  $D$ , si existe un  $uv$ -camino ( $vu$ -camino) para algún  $v \in S$ ; análogamente para una  $Su$ -trayectoria ( $uS$ -trayectoria) y  $Su$ -paseo ( $uS$ -paseo).

Se define la ***distancia entre dos vértices***  $u$  y  $v$  en  $D$ , denotada por  $d(u, v)$ , como la longitud de una  $uv$ -trayectoria mínima. Si no hubiera trayectoria alguna entre dos vértices  $u, v$  de  $D$ , entonces se dice que la distancia entre ellos es igual a infinito.

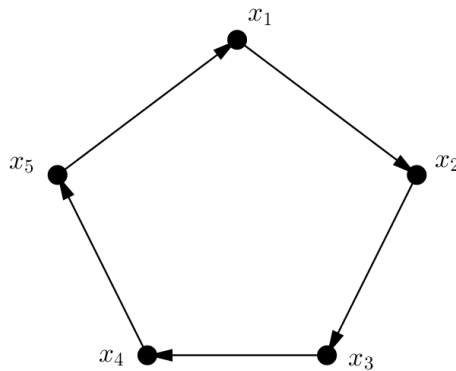


Figura 1.12. Ejemplo de distancia



Nótese que esta distancia no es una métrica debido a que no siempre es simétrica, ya que la longitud de una  $uv$ -trayectoria mínima puede no coincidir con la longitud de una  $vu$ -trayectoria mínima. Por ejemplo, en la figura 1.12, podemos observar que la  $d(x_1, x_2) = 1$  y la  $d(x_2, x_1) = 4$ .

Sea  $u$  un vértice de la digráfica  $D$  y  $n$  un número natural, definimos los siguientes conjuntos:

- La  **$n$ -exvecindad abierta de  $u$** , denotada por  $N_n^+(u)_D$ , es el conjunto dado por:

$$N_n^+(u)_D = N_n^+(u) = \{v \in V(D) : 1 \leq d(u, v) \leq n\}.$$

- La  **$n$ -exvecindad cerrada de  $u$** , denotada por  $N_n^+[u]_D$ , es el conjunto dado por:

$$N_n^+[u]_D = N_n^+[u] = N_n^+(u) \cup \{u\}.$$

Análogamente, definimos a los conjuntos  $N_n^-(u)_D = N_n^-(u) = \{v \in V(D) : 1 \leq d(v, u) \leq n\}$  y  $N_n^-[u]_D = N_n^-[u] = N_n^-(u)_D \cup \{u\}$  como la  **$n$ -invecindad abierta** y la  **$n$ -invecindad cerrada de  $u$** , respectivamente.

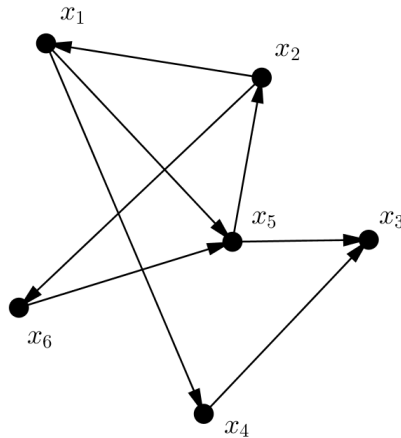


Figura 1.13. Ejemplo de 2-exvecindad y 2-invecindad de  $x_1$

En la figura 1.13, podemos observar que  $N_2^+(x_1) = \{x_2, x_3, x_4, x_5\}$ , debido a que solamente para estos vértices existe una trayectoria que parte de  $x_1$  hacia cada uno de ellos de longitud dos o menos, así mismo,  $N_2^-(x_1) = \{x_2, x_5\}$ , ya que solamente para cada uno de estos vértices existe una trayectoria hacia  $x_1$  de longitud dos o menos.

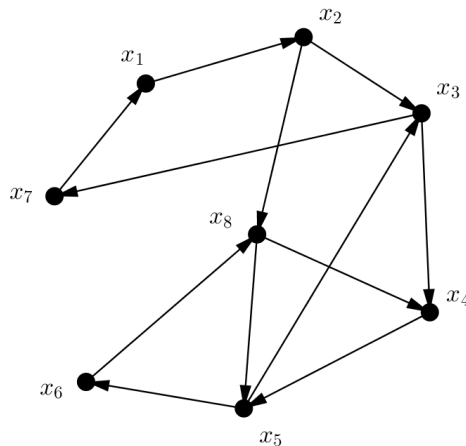


Figura 1.14. Ejemplo de 3-exvecindad y 3-invecindad de  $x_1$

Sea la digráfica dada en la figura 1.14. Notemos que  $x_6$  es el único vértice de la digráfica para el cual no existe una  $x_1x_6$ -trayectoria de longitud menor o igual a tres, además para los vértices  $x_4$ ,  $x_6$  y  $x_8$  tampoco existe una trayectoria desde ninguno de ellos hacia  $x_1$  de longitud menor o igual a tres, por lo tanto,  $N_3^+(x_1) = \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_7, x_8\}$  y  $N_3^-(x_1) = \{x_2, x_3, x_5, x_7\}$ .

Una de las definiciones que se utiliza mucho a lo largo del presente trabajo es la que se enuncia a continuación:

**Definición 1.2.1** Sean  $D$  una digráfica y  $S \subseteq V(D)$ , llamamos a  $S$  un **conjunto independiente** si para cualesquiera dos vértices  $u$  y  $v$  de  $S$  se cumple que  $(u, v) \notin F(D)$  y  $(v, u) \notin F(D)$ .

Observemos que el subconjunto  $S = \{x_2, x_5, x_6\}$  de vértices de la digráfica que se presenta en la figura 1.15, es un conjunto independiente.

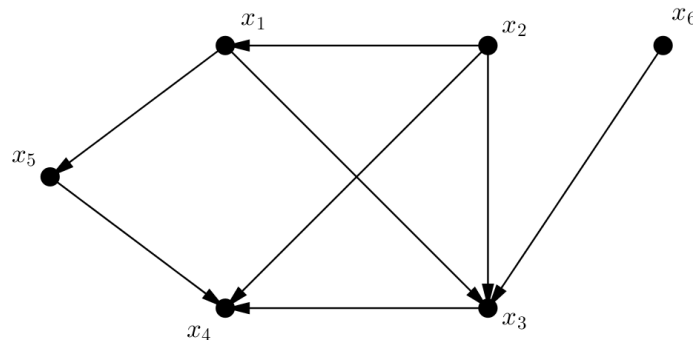


Figura 1.15. Ejemplo de subconjunto independiente

Ahora, si disponemos de una digráfica  $D$  y de un conjunto  $S = \{a, b, \dots, n\}$  a cuyos elementos nos referimos como los colores, una **coloración** de  $D$  con los colores de  $S$  consiste en asignar a cada vértice de  $D$  un elemento de  $S$ ; es decir, un color. Decimos que se trata de una **coloración propia** si los extremos de cada una de las flechas reciben colores distintos, formalmente podemos decir que una función  $\gamma : V(D) \rightarrow S$  es una coloración propia de  $D$  si cumple que  $\gamma(v) \neq \gamma(w)$  siempre que  $(v, w) \in F(D)$  o  $(w, v) \in F(D)$ . Declaramos que  $D$  está **propriadamente coloreada** si aplicamos la función previamente descrita a  $V(D)$ . El **número cromático** de una digráfica  $D$ , que denotamos por  $\chi(D)$ , es el mínimo número de colores necesario para colorear propiadamente a  $D$ . Observemos que cada clase de color de una coloración propia es un conjunto independiente.

### 1.2.1. Tipos de digráficas

Sea  $D$  una digráfica, definimos como la **digráfica dual** de  $D$ , denotada por  $D^-$ , a la digráfica que cumple que  $V(D) = V(D^-)$  y para todo subconjunto  $\{u, v\} \subseteq V(D)$  si  $(u, v) \in F(D)$  entonces  $(v, u) \in F(D^-)$  (ver figura 1.16). Así mismo, se define a la **gráfica subyacente**, denotada por  $suby(D)$ , como la gráfica que se obtiene reemplazando cada flecha, ya sea simétrica o asimétrica, de  $D$  por una arista.

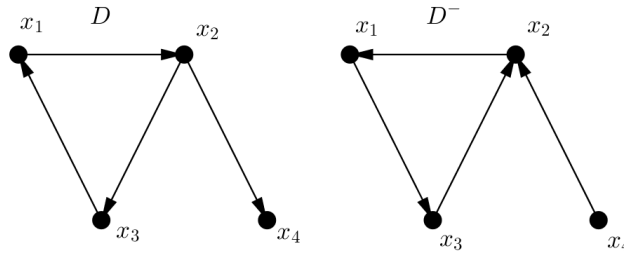


Figura 1.16. La digráfica dual  $D^-$  de  $D$

Una digráfica  $D$  es  **$r$ -regular** si para todo  $v \in V(D)$  se cumple que  $\delta^+(v) = r$  y  $\delta^-(v) = r$ .

Decimos que  $D$  es **conexa** o **débilmente conexa** si la gráfica subyacente de  $D$  es conexa; se dice que  $D$  es **fuertemente conexa** o **fuerte** si para todo par de vértices distintos  $u$  y  $v$  en  $D$ , existe una  $uv$ -trayectoria y una  $vu$ -trayectoria.

Una digráfica  $D$  es llamada **simétrica** si cada una de sus flechas es simétrica, y una digráfica  $D$  es **asimétrica** si se cumple que toda flecha de  $D$  es asimétrica.

Se dice que una digráfica  $D$  es **completa**, lo cual denotamos como  $D = K_n$ , donde  $n$  es el orden de la digráfica  $D$ , si para todo par de vértices distintos  $u, v$  de  $D$  se cumple que tanto  $(u, v)$  como  $(v, u)$  están en las flechas de  $D$ , y llamamos a  $D$  una digráfica **semicompleta** si al menos una de las dos flechas mencionadas están presentes en  $F(D)$ . Una de las digráficas que está muy relacionada con las dos previas es la **digráfica complemento dirigido** de  $D$ , denotado por  $\overline{D}$ , tal que  $V(D) = V(\overline{D})$  y  $F(\overline{D}) = \{(u, v) : (u, v) \notin F(D), \text{ con } u \neq v\}$ .

Sean  $D$  una digráfica y tres vértices distintos  $u, v$  y  $w$  de  $D$ , decimos que  $D$  es **transitiva** siempre que  $(u, v) \in F(D)$  y  $(v, w) \in F(D)$  implica que  $(u, w) \in F(D)$ . Por otro lado,  $D$  es **cuasitransitiva** siempre que  $(u, v) \in F(D)$  y  $(v, w) \in F(D)$  implica que  $(u, w) \in F(D)$  o  $(w, u) \in F(D)$ . Notemos que toda digráfica transitiva es cuasitransitiva, pero el inverso no necesariamente se cumple como se muestra en la digráfica de la figura 1.17.

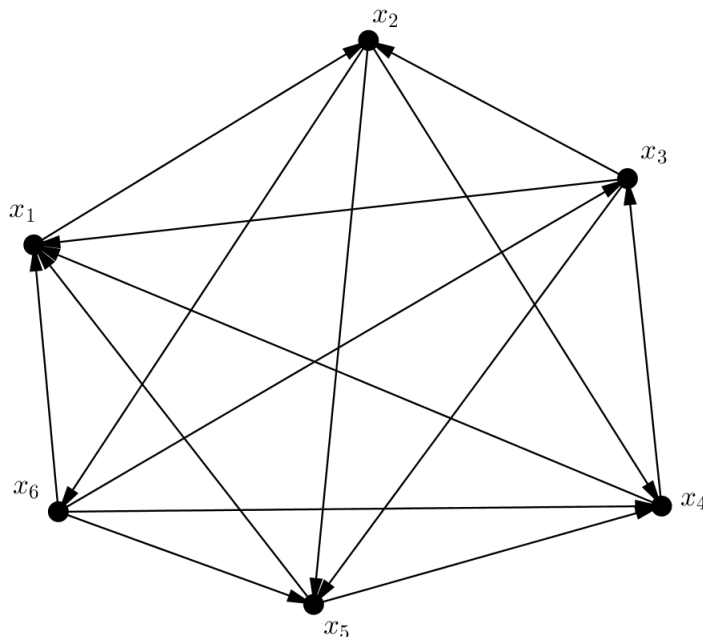


Figura 1.17. Ejemplo de una digráfica cuasitransitiva que no es transitiva

En este caso tenemos que la digráfica es semicompleta dado que para todo  $\{u, v\} \subset V(D)$  se cumple que  $(u, v) \in F(D)$  o  $(v, u) \in F(D)$ , lo que implica que para toda trayectoria de longitud dos de la forma  $T = (x_i, x_j, x_k)$  existe  $(x_i, x_k)$  o  $(x_k, x_i)$  en las flechas de  $D$ , con  $\{i, j, k\} \subset \{1, 2, \dots, 6\}$ . Dicha propiedad garantiza que  $D$  es cuasitransitiva; sin embargo, para que la digráfica sea transitiva se requiere que la flecha  $(x_i, x_k)$  este en  $F(D)$ , lo cual no ocurre, ya que para  $T = (x_1, x_2, x_4)$ ,  $(x_1, x_4) \notin F(D)$ , lo que comprueba que la digráfica no es transitiva.

**Definición 1.2.2** Sea  $T = (V(T), F(T))$  una digráfica, se dice que  $T$  es un **torneo** si  $T$  es asimétrico y para todo  $\{x, y\} \subseteq V(T)$  se tiene que  $(x, y) \in F(T)$  ó  $(y, x) \in F(T)$ ; es decir, es una digráfica semicompleta asimétrica.

**Definición 1.2.3** Sea  $T$  un torneo, se dice que  $x \in V(T)$  es un **rey** de  $T$  si para todo  $y \in V(T)$  sucede que  $x = y$  ó  $(x, y) \in F(T)$  ó existe  $w \in V(T)$  tal que  $\{(x, w), (w, y)\} \subseteq F(T)$ .

Para ilustrar las definiciones anteriores, observemos la figura 1.18, en donde la digráfica que se muestra es un torneo y el vértice  $x_1$  es un rey de este.

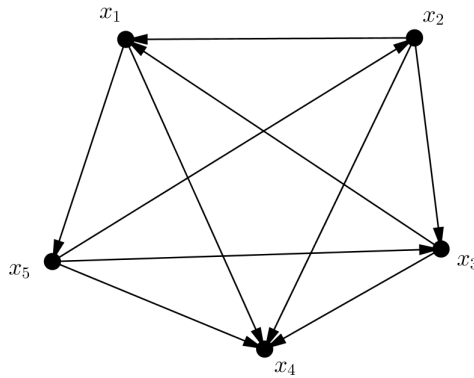


Figura 1.18. Ejemplo de un torneo  $T$  y  $x_1$  un rey de  $T$

Una digráfica  $D$  es  **$k$ -partita** si existe una partición de los vértices de  $D$  en  $k$  conjuntos tal que cada uno de estos es un conjunto independiente. En la figura 1.19 se muestra un ejemplo para  $k = 3$ .

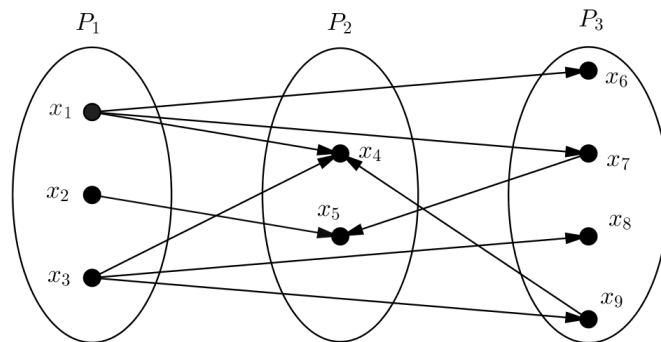


Figura 1.19. Ejemplo de una digráfica 3-partita

### 1.2.2. Operaciones con digráficas

Dada una digráfica  $D$ , definimos a su digráfica de *líneas*, denotada por  $L(D)$ , como la digráfica tal que  $V(L(D)) = F(D)$  y  $(x, y) \in F(L(D))$  si y solo si  $x$  y  $y$  en  $D$  son de la forma  $x = (a, b)$  y  $y = (b, c)$ , con  $\{a, b, c\} \subseteq V(D)$  y  $\{x, y\} \subseteq F(D)$  (ver figura 1.20).

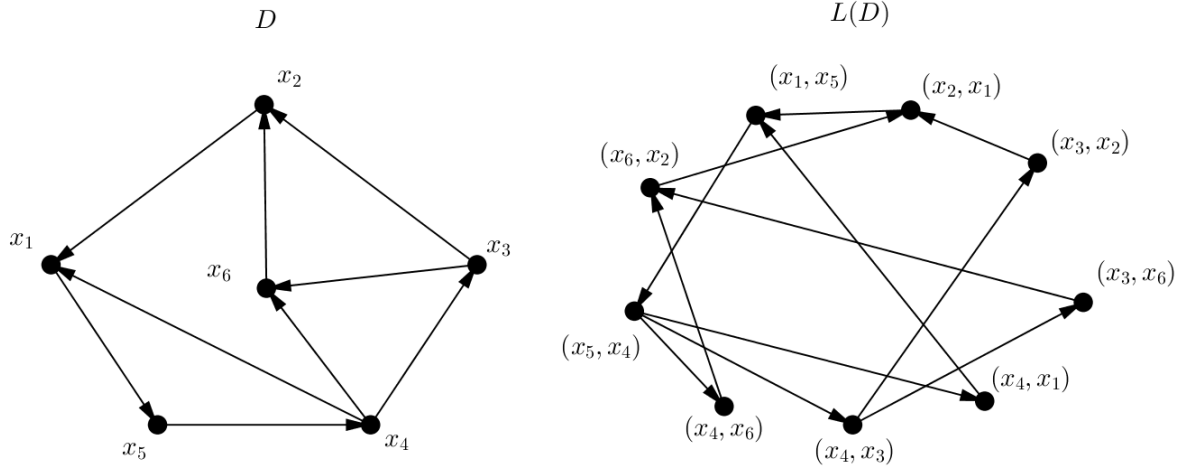


Figura 1.20.  $D$  y su digráfica de líneas  $L(D)$

Sea  $D$  una digráfica tal que para todo  $x \in V(D)$ ,  $\delta^-(x) \geq 1$ . Consideramos un subconjunto  $A'$  de  $F(D)$ , para cada vértice  $j$  en  $V(D)$  definimos el conjunto  $\varphi(j) = \{(i, j) \in F(D)\}$  y tomamos una función  $\phi : F(D) \rightarrow A'$  tal que:

- El conjunto de vértices finales del subconjunto  $A'$ , denominado  $H(A')$ , es igual a  $V(D)$  y
- $\phi|_{A'} = Id_{A'}$  (la identidad en  $A'$ ) y para todo vértice  $j \in V(D)$ ,  $\phi(\varphi(j)) \subset \varphi(j) \cap A'$ .

La existencia del conjunto  $A'$  está garantizada debido a que  $\delta^-(x) \geq 1$  para todo  $x \in V(D)$ , entonces la digráfica de *líneas parcial*, a la que denotamos por  $L_{(A', \phi)}(D)$  es la digráfica tal que:

- $V(L_{(A', \phi)}(D)) = A'$  y
- $F(L_{(A', \phi)}(D)) = \{((i, j), \phi(j, k)) : (j, k) \in F(D)\}$ .

Además observemos que si  $A' = F(D)$ , entonces  $\phi = Id_{F(D)}$  y la digráfica de líneas parcial es isomorfa a la digráfica de líneas  $L(D)$ .

Sea  $D$  la digráfica mostrada en la figura 1.20, y  $A' = \{(x_1, x_5), (x_2, x_1), (x_3, x_2), (x_4, x_3), (x_4, x_6), (x_5, x_4)\}$ ; observemos que  $H(A') = V(D)$ , además  $\phi(x_3, x_6) = (x_4, x_6)$ ,  $\phi(x_4, x_1) = (x_2, x_1)$  y  $\phi(x_6, x_2) = (x_3, x_2)$ . En la figura 1.21 se muestra su respectiva digráfica de líneas parcial.

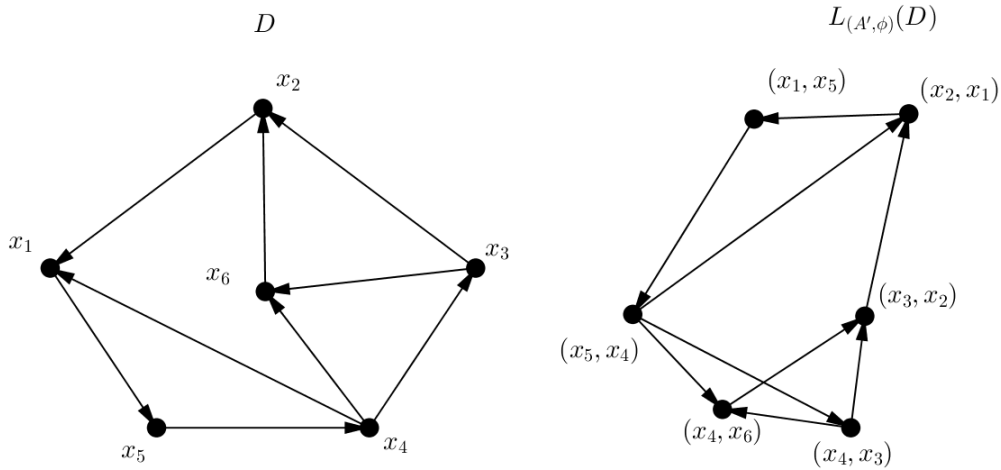


Figura 1.21.  $D$  y su digráfica de líneas parcial  $L_{(A', \phi)}(D)$

Sean  $D$  la digráfica con conjunto de vértices  $\{1, 2, \dots, n\}$ , donde  $n \geq 2$ , y  $\alpha = \{D_i\}_{i \in V(D)}$  una sucesión de digráficas ajenas por vértices dos a dos, la **suma de Zykov** de la digráfica  $D$  y la sucesión  $\alpha$  de digráficas, denotada por  $\sigma(D, \alpha)$ , es la digráfica tal que:

- $V(\sigma(D, \alpha)) = \bigcup_{i=1}^n V(D_i)$  y
- $F(\sigma(D, \alpha)) = \bigcup_{i=1}^n F(D_i) \cup \{(v_i, v_j) : v_i \in V(D_i), v_j \in V(D_j), (i, j) \in F(D)\}$ .

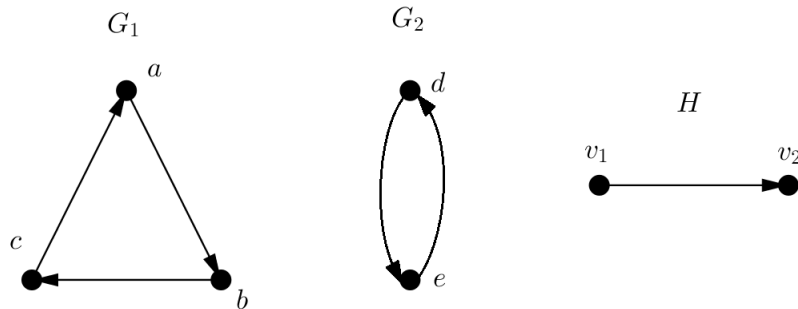


Figura 1.22. Ejemplo de digráficas  $H$ ,  $G_1$  y  $G_2$

Dadas las digráficas  $H, G_1$  y  $G_2$  de la figura 1.22. La digráfica que se obtiene de realizar la operación  $\sigma(H, \alpha)$ , donde  $\alpha = \{G_1, G_2\}$ , es la digráfica que se muestra en la figura 1.23.

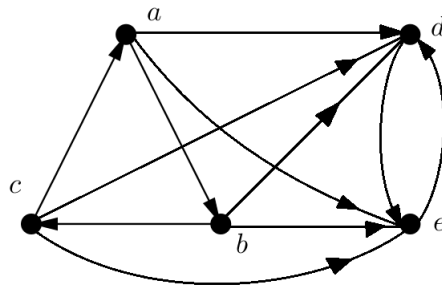


Figura 1.23. Ejemplo de la suma de Zykov entre la digráfica  $H$  y la sucesión  $\alpha$

A partir de ahora trabajaremos con dos digráficas  $D_1$  y  $D_2$ , ajenas por vértices. Definimos la digráfica **producto directo** de  $D_1$  y  $D_2$ , a la que denotamos como  $D_1 \times D_2$  por:

- $V(D_1 \times D_2) = V(D_1) \times V(D_2)$  y
- $((x, y), (u, v)) \in F(D_1 \times D_2)$  si y solo si  $(x, u) \in F(D_1)$  y  $(y, v) \in F(D_2)$ .

Sean las digráficas  $E_1$  y  $E_2$  mostradas en la figura 1.24. En la figura 1.25 se muestra la digráfica resultante de realizar el producto directo entre las digráficas  $E_1$  y  $E_2$ .

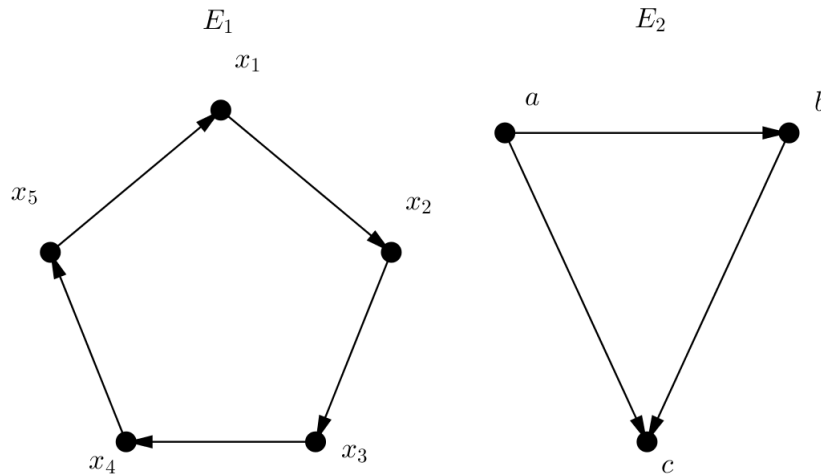


Figura 1.24. Digráficas  $E_1$  y  $E_2$

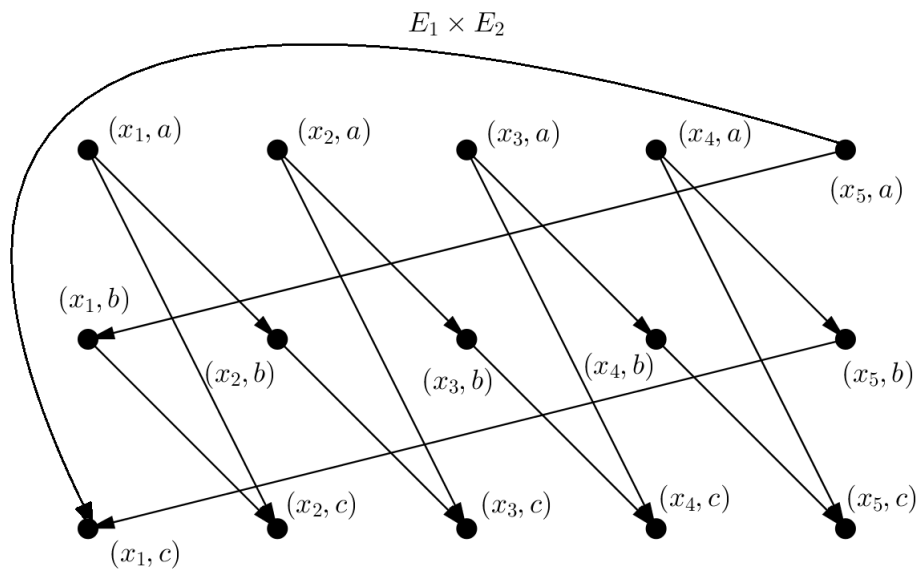


Figura 1.25. Digráfica  $E_1 \times E_2$

Definimos a la digráfica **producto cartesiano** de las digráficas  $D_1$  y  $D_2$ , denotada por  $D_1 + D_2$ , como sigue:

- $V(D_1 + D_2) = V(D_1) \times V(D_2)$  y
- $((x, y), (u, v)) \in F(D_1 + D_2)$  si y solo si  $(x, u) \in F(D_1)$  y  $y = v$  o  $(y, v) \in F(D_2)$  y  $x = u$ .

En la figura 1.26 se muestra el resultado de realizar el producto cartesiano entre las digráficas  $E_1$  y  $E_2$  que se encuentran en la figura 1.24.

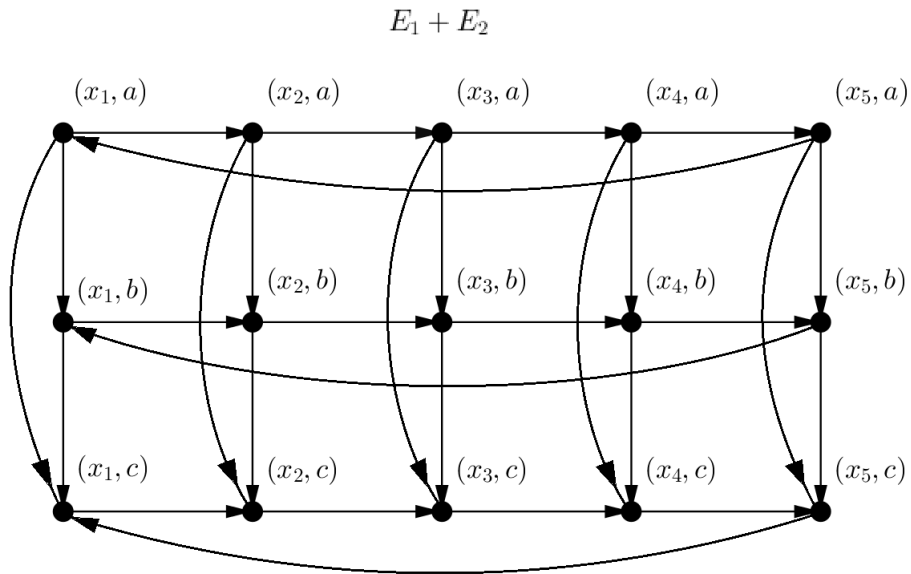


Figura 1.26. Digráfica  $E_1 + E_2$

La digráfica denominada como **producto fuerte** de  $D_1$  y  $D_2$ , a la cual denotamos por  $D_1 \cdot D_2$ , es definida por los conjuntos:

- $V(D_1 \cdot D_2) = V(D_1) \times V(D_2)$  y
- $((x, y), (u, v)) \in F(D_1 \cdot D_2)$  si y solo si  $(x, u) \in F(D_1)$  y  $y = v$  o  $(y, v) \in F(D_2)$  y  $x = u$  o  $(x, u) \in F(D_1)$  y  $(y, v) \in F(D_2)$ .

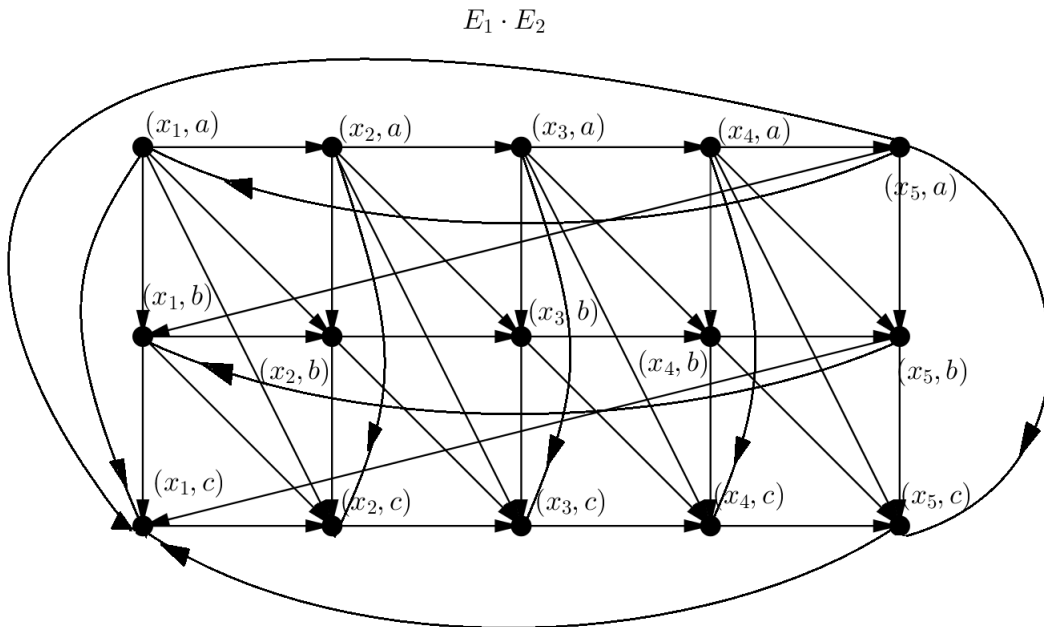


Figura 1.27. Digráfica  $E_1 \cdot E_2$

En la figura 1.27 se muestra el resultado de realizar el producto fuerte entre las digráficas  $E_1$  y  $E_2$  que se encuentran en la figura 1.24.

Definimos a la digráfica **disyunción excluyente** de  $D_1$  y  $D_2$ , a la que denotamos por  $D_1 \otimes D_2$ , como sigue:



- $V(D_1 \otimes D_2) = V_1 \times V_2$  y
- $((x, y), (u, v)) \in F(D_1 \otimes D_2)$  si y solo si  $(x, u) \in F(D_1)$  y  $(y, v) \notin F(D_2)$  o  $(x, u) \notin F(D_1)$  y  $(y, v) \in F(D_2)$ .

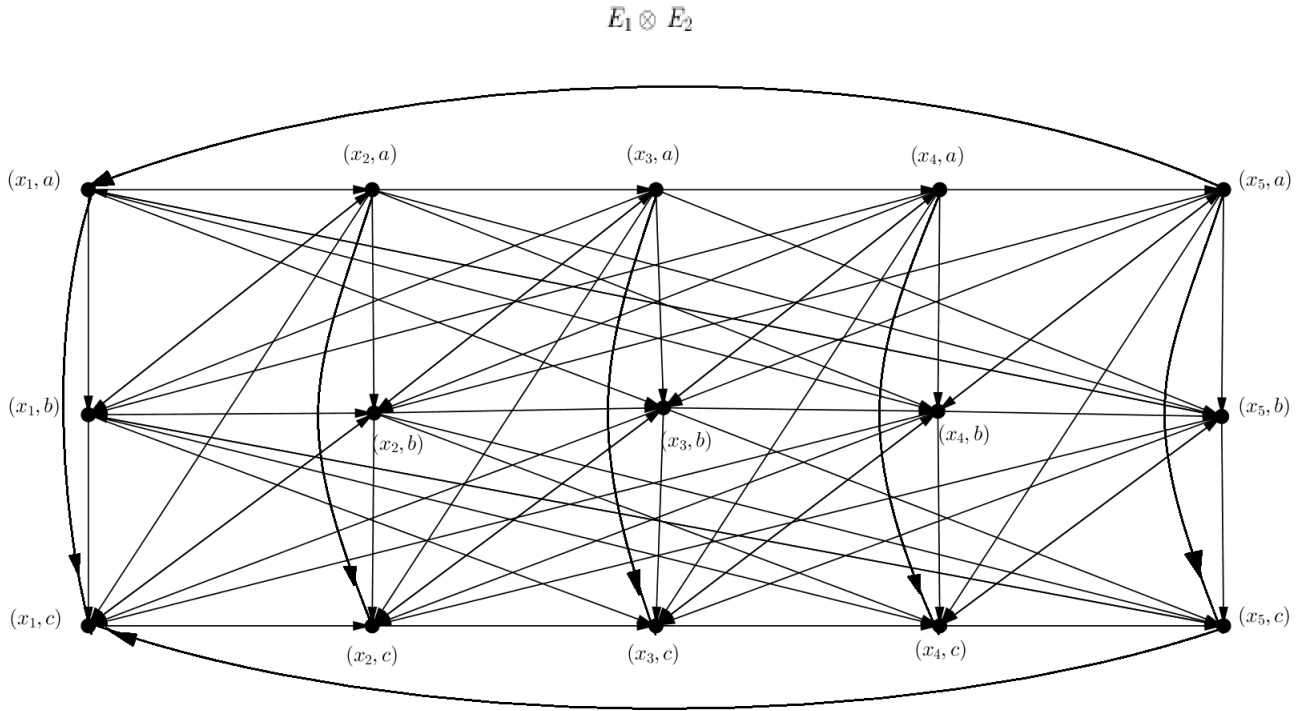


Figura 1.28. Digráfica  $E_1 \otimes E_2$

Sean las digráficas  $E_1$  y  $E_2$  mostradas en la figura 1.24. En la figura 1.28 se muestra la digráfica resultante de realizar la disyunción excluyente entre las digráficas  $E_1$  y  $E_2$ .

Sean  $D$  una digráfica, un número natural  $n \geq 2$  tales que  $V(D) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  y  $\Theta = \{D_i\}_{i \in \{1, 2, \dots, n\}}$  una sucesión de digráficas ajenas en vértices dos a dos. La **corona** de la digráfica  $D$  y la sucesión  $\Theta$  es la digráfica denotada por  $D \circ \Theta$  definida por:

- $V(D \circ \Theta) = V(D) \cup (\bigcup_{i=1}^n V(D_i))$  y
- $F(D \circ \Theta) = (F(D) \cup (\bigcup_{i=1}^n F(D_i))) \cup \{(v_i, x_i) : v_i \in V(D_i)\}$ .

En la figura 1.29 se ilustra una digráfica  $D$  y una sucesión de digráficas  $\Theta = \{D_i\}_{i \in \{1, 2, 3, 4\}}$ , así como la digráfica que resulta de  $D \circ \Theta$ ; es decir, la corona de la digráfica  $D$  y  $\Theta$ .

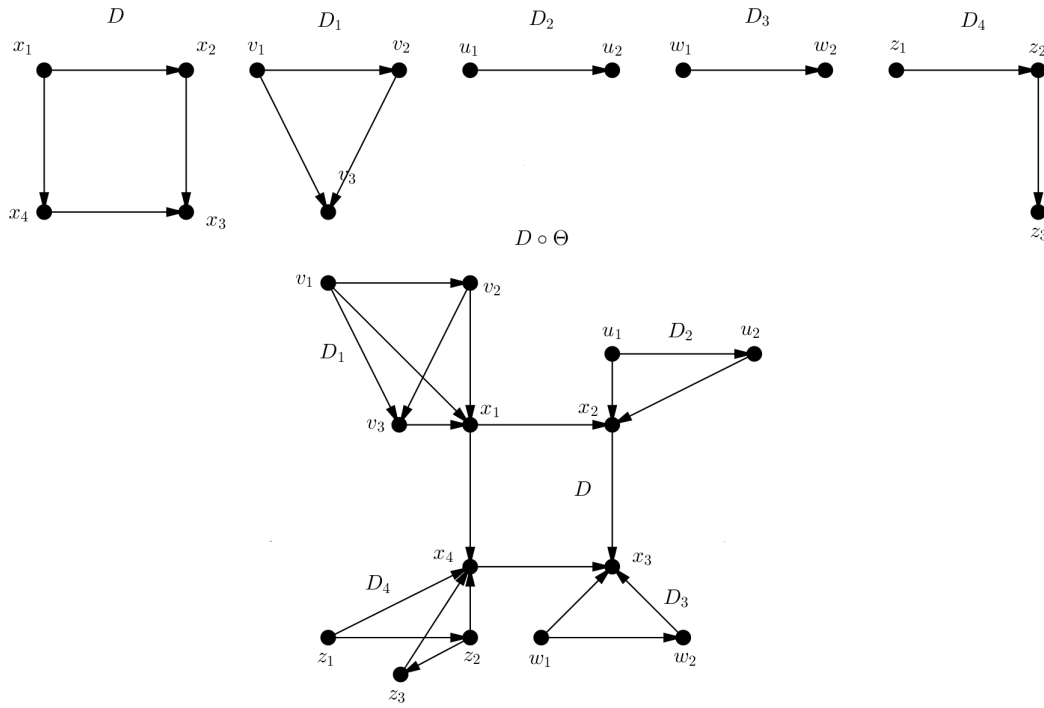


Figura 1.29. Ejemplo de la digráfica  $D \Delta \Theta$

Tomando a la digráfica  $D$ , y  $\Theta = \{D_i\}_{i \in \{1,2,\dots,n\}}$  una sucesión de digráficas ajenas en vértices dos a dos, con  $n$  un número natural tal que  $n \geq 2$ ; definimos la **corona generalizada** de la digráfica  $D$  y la sucesión  $\Theta$  como la digráfica  $D \Delta \Theta$  tal que:

- $V(D \Delta \Theta) = V(D) \cup (\bigcup_{i=1}^n V(D_i))$  y
- $F(D \Delta \Theta) = (F(D) \cup (\bigcup_{i=1}^n F(D_i))) \cup \{(v_i, x_j) : v_i \in V(D_i) \text{ y } 1 \leq j \leq n\}$ .

Es decir, la corona generalizada  $D \Delta \Theta$  es la digráfica que tiene como conjunto de vértices a la unión del conjunto de vértices de  $D$  y el conjunto de vértices de la sucesión  $\Theta$ , y como conjunto de flechas a la unión del conjunto de flechas de  $D$ , el conjunto de flechas de la sucesión  $\Theta$  y de hacer a todos los vértices de  $D_i$  adyacentes a, por lo menos, un vértice de  $D$ .

Dadas una digráfica  $D$  cualquiera y la digráfica semicompleta  $K$ , definida por los conjuntos  $V(K) = \{a, b\}$  y  $F(K) = \{(a, b)\}$ , tal que  $V(K) \cap V(D) = \emptyset$ , definimos a la digráfica de **vigas de índice  $k$**  de la digráfica  $D$ , denotada por  $T_k(D)$ , como la digráfica obtenida a partir de agregar a  $D$ ,  $k$  copias de la digráfica  $K$  por cada flecha  $(x, y)$  de la digráfica  $D$ , a las que denotamos por  $(u_{xy}^i, v_{xy}^i)$  con  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  y añadimos las flechas  $(x, u_{xy}^i)$  y  $(v_{xy}^i, y)$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ .

En la figura 1.30 se observa a la digráfica  $D$  y su digráfica de vigas de índice  $k = 2$ ,  $T_2(D)$ .

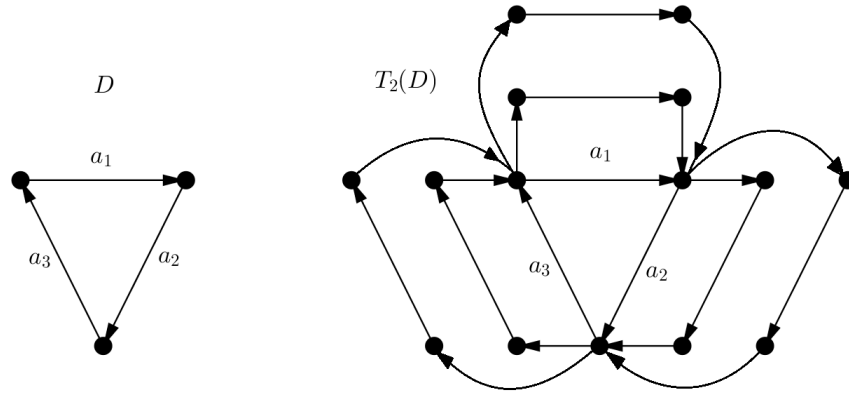


Figura 1.30. Ejemplo de la digráfica  $T_2(D)$

Sea  $D = (V(D), F(D))$  una digráfica, definimos a la digráfica denotada por  $S(D)$ , a la que llamamos la digráfica **subdivisión** de una digráfica  $D$ , como la digráfica que cumple que  $V(S(D)) = V(D) \cup F(D)$  y  $(a, b) \in F(S(D))$  si y solo si  $a \in V(D)$ ,  $b \in F(D)$  y  $b = (a, x)$  con  $x \in V(D)$  o  $a \in F(D)$ ,  $b \in V(D)$  y  $a = (x, b)$  con  $x \in V(D)$ ; es decir, se preservan los vértices originales de  $D$ , y cada flecha que hay en  $D$  se sustituye por una trayectoria de longitud dos, en la misma dirección a la flecha. El vértice intermedio de dicha trayectoria representa a la flecha original.

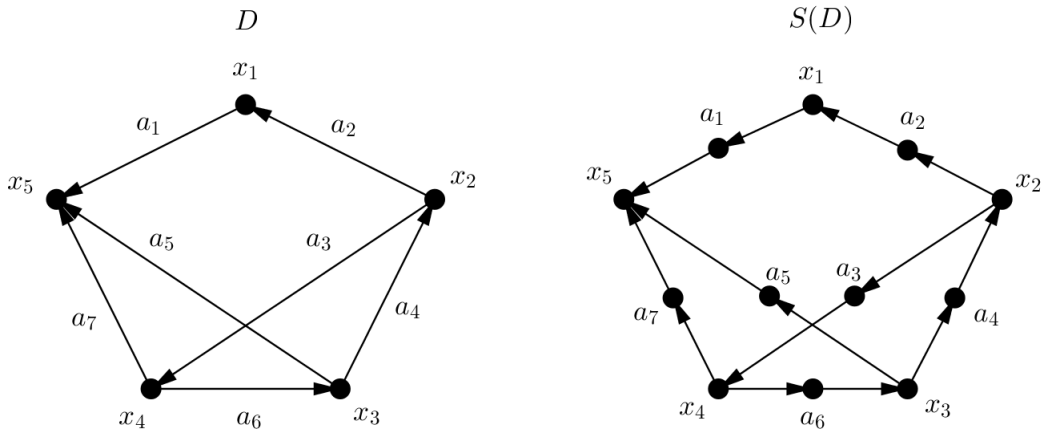


Figura 1.31. Ejemplo de la digráfica subdivisión de  $D$ ,  $S(D)$

La digráfica **raíz** de una digráfica  $D$  dada, a la que denotamos como  $R(D)$ , es la digráfica tal que:

- $V(R(D)) = V(D) \cup F(D)$  y
- $F(R(D)) = \{(x, z) : x \in V(D) \text{ y } [z \in N_D^+(x) \text{ o } z = (x, v) \in F(D)]\} \cup \{(x, z) : x = (u, v) \in F(D) \text{ y } z = v\}$ .

Notemos que la digráfica  $R(D)$  se puede convertir en  $S(D)$  al eliminar el conjunto de las flechas de  $D$ .

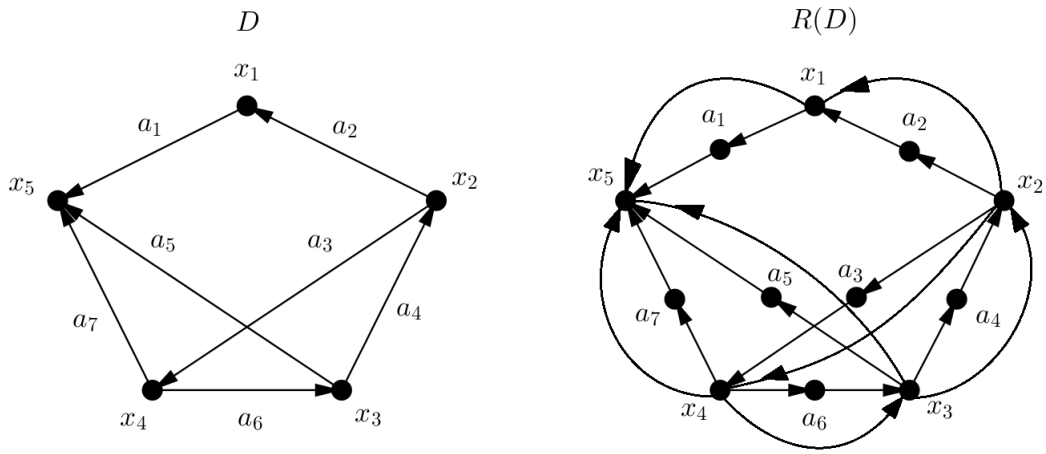


Figura 1.32. Ejemplo de la digráfica raíz de  $D$ ,  $R(D)$

Sea  $D$  una digráfica, su digráfica **media**, denotada por  $Q(D)$  es la digráfica que cumple:

- $V(Q(D)) = V(D) \cup F(D)$  y
- $F(Q(D)) = \{(x, z) : x \in V(D) \text{ y } z = (x, v) \in F(D)\} \cup \{(x, z) : x = (u, v) \in F(D) \text{ y } [z = v \text{ o } z = (v, w) \in F(D)]\}$ .

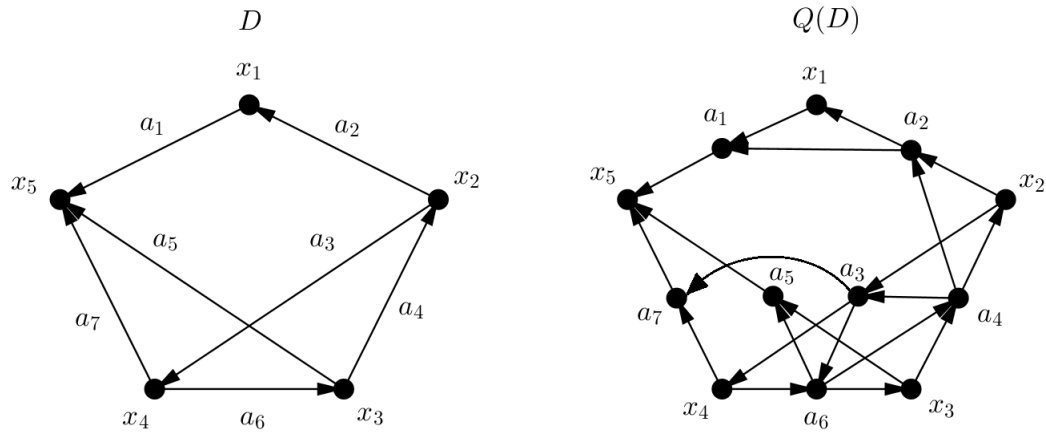


Figura 1.33. Ejemplo de la digráfica media de  $D$ ,  $Q(D)$

Notemos que la digráfica  $Q(D)$  se puede obtener a partir de  $S(D)$ , al agregarle a esta las flechas de  $L(D)$ .

Dada una digráfica  $D$ , su digráfica **total**, a la que denotamos por  $T(D)$ , esta definida por los siguientes conjuntos:

- $V(T(D)) = V(D) \cup F(D)$  y
- $F(T(D)) = F(Q(D)) \cup F(R(D))$ .

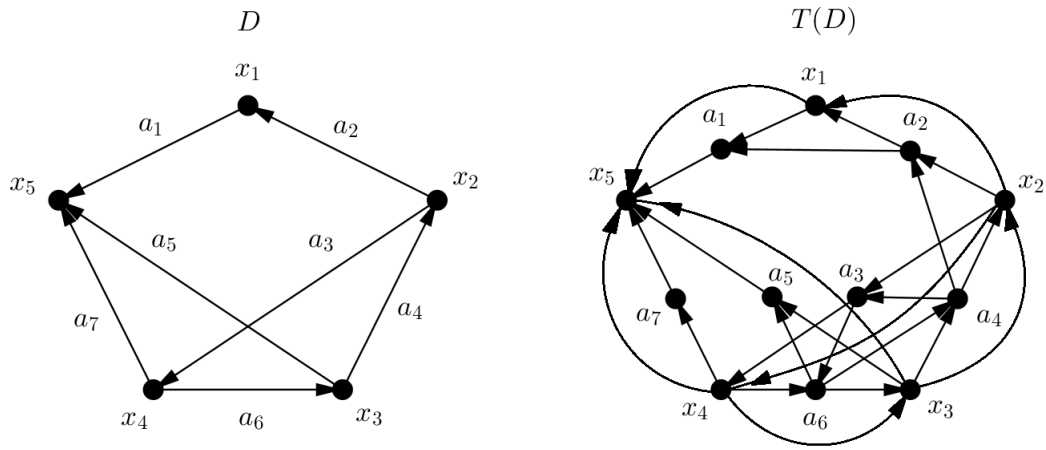


Figura 1.34. Ejemplo de la digráfica total de  $D$ ,  $T(D)$

### 1.3. Órdenes

Sea  $A$  un conjunto, una **relación de orden**  $R$  en  $A$  es una relación que cumple con ser reflexiva, antisimétrica y transitiva. Se le llama conjunto **parcialmente ordenado** a la pareja  $(A, R)$ . Decimos que el conjunto  $(A, \leq)$  está **totalmente ordenado** por la relación " $\leq$ " si para todo  $\{a, b\} \subseteq A$  se cumple que  $a \leq b$  o  $b \leq a$ . Sean  $B \neq \emptyset$  un subconjunto de  $(A, \leq)$  y  $c$  un elemento de  $B$ , decimos que  $c$  es el **mínimo** de  $B$  si  $c \leq b$  para todo  $b \in B$ ; luego, si todo subconjunto no vacío de  $(A, \leq)$  tiene mínimo, se dice que  $A$  es un conjunto **bien ordenado**.

Observemos que todo conjunto bien ordenado es totalmente ordenado, ya que si  $a$  y  $b$  son elementos de  $(A, \leq)$ , entonces  $\{a, b\} \subseteq A$  es un conjunto claramente distinto del vacío con un elemento mínimo; es decir,  $a \leq b$  o  $b \leq a$ . Sin embargo, el recíproco no es necesariamente cierto, por ejemplo el intervalo  $(3, 10)$  es un conjunto totalmente ordenado que no es un conjunto bien ordenado ya que no tiene un elemento mínimo.

# Capítulo 2

## Antecedentes y resultados previos

En este capítulo comenzaremos a sumergirnos en el tema principal del trabajo; los cuasinúcleos. Abordaremos cómo fue que surgió el estudio de estos interesantes conjuntos. Asimismo, presentaremos una recopilación de los resultados que encontramos, con la finalidad de que el lector tenga una idea amplia sobre los temas que se han investigado. Algunos de los resultados se demuestran y en los casos restantes se menciona la referencia.

### 2.1. Primeros resultados

En 1921 un zoólogo noruego y psicólogo comparativo llamado Thorleif Schjelderup-Ebbe, describió el orden jerárquico de los pollos en su tesis doctoral. En su trabajo puntualiza que algunos pollos establecen cierta autoridad sobre otros, lo que les permite a estos llegar antes a la comida, mientras que otros esperan su turno. Dicha relación de poder se establece de igual modo en diversas sociedades de animales [27]. A partir de este razonamiento surge la idea de conjuntos de individuos que ejercen la autoridad sobre todos los demás; es decir, que dominan al grupo, y conjuntos de individuos que están por debajo de la autoridad de los demás. Llevando la situación anterior a lenguaje de teoría de digráficas, en donde cada individuo es reemplazado por un vértice y la relación de autoridad es representada con una flecha de la forma  $(a, b)$ , en la cual el vértice  $a$  domina al vértice  $b$ , podemos describir los conjuntos antes mencionados de la siguiente forma:

**Definición 2.1.1** Decimos que  $S \subseteq V(D)$  es un **conjunto absorbente** si para cada vértice  $u$  que no pertenece a  $S$  existe una  $uS$ -flecha; es decir, existe  $(u, v) \in F(D)$  con  $v$  algún vértice en  $S$ . De manera análoga, decimos que  $S$  es un **conjunto dominante** si para cada vértice  $u$  que no pertenece a  $S$  existe una  $Su$ -flecha; es decir, existe  $(v, u) \in F(D)$  con  $v$  algún vértice en  $S$ .

En la digráfica de la figura 2.1, el conjunto  $S_a = \{x_4, x_5, x_6\}$  es un conjunto absorbente y  $S_d = \{x_1, x_2, x_3\}$  es un conjunto dominante de la digráfica.

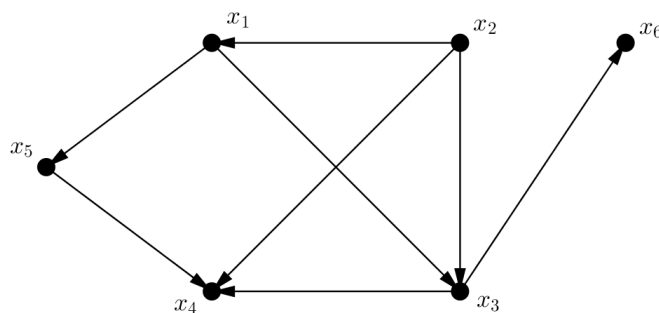


Figura 2.1.  $\{x_1, x_2, x_3\}$  es un conjunto dominante y  $\{x_4, x_5, x_6\}$  es un conjunto absorbente

Decimos que  $S$  es  *$n$ -absorbente* ( *$n$ -dominante*) si para cada vértice  $u \notin S$  existe una  $uS$ -trayectoria ( $Su$ -trayectoria) de longitud a lo más  $n$ .

**Nota:** Por convención, a un conjunto 1-absorbente se le llama *absorbente*, un conjunto 2-absorbente recibe el nombre de *cuasiabsorbente*, y decimos que un vértice  $u$  de  $D$  es *cuasiabsorbido* por otro vértice  $v$  de  $D$ , si existe una  $uv$ -trayectoria de longitud a lo más dos. Lo mismo aplica para conjuntos  $n$ -dominantes, a un conjunto 1-dominante se le llama *dominante*, un conjunto 2-dominante es llamado *cuasidominante*, y decimos que un vértice  $u$  de  $D$  es *cuasidominado* por otro vértice  $v$  de  $D$ , si existe una  $vu$ -trayectoria de longitud a lo más dos.

En 1951 H. G. Landau desarrolló herramientas matemáticas para el análisis de las relaciones de dominación en sociedades de animales como un conjunto de  $n$  enteros en el que sus miembros están relacionados de forma binaria y asimétrica; es decir, que un individuo  $a$  domina a otro  $b$ ; pero, el individuo  $b$  no puede dominar al individuo  $a$  [19]. Así Landau trabajó con torneos y reyes. Del trabajo de Landau se sigue que todo torneo posee un rey.

**Teorema 2.1.2** *Todo torneo  $T$  tiene al menos un rey.*

**Demostración.** Sean  $T$  un torneo y  $x$  el vértice de exgrado máximo en la digráfica  $T$ . Si  $N_2^+[x] = V(T)$ , entonces el teorema se cumple. Si este no es el caso, entonces existe  $y \in V(T)$  tal que no hay una trayectoria de longitud menor o igual a dos desde  $x$  hasta  $y$ , por lo que  $(y, x) \in F(T)$ , además para todo  $w \in V(T)$  tal que  $(x, w) \in F(T)$  tenemos que  $(y, w) \in F(T)$ , de lo contrario habría una trayectoria de longitud dos de  $x$  a  $y$ . Dado lo anterior, podemos deducir que  $N^+(x) \subset N^+(y)$  y por lo tanto,  $\delta^+(x) < \delta^+(y)$ , lo cual es una contradicción, ya que supusimos a  $x$  como el vértice de mayor exgrado de la digráfica, por lo cual este caso no es posible.

Por lo tanto, todo torneo tiene al menos un rey. ■

El concepto de rey solamente es aplicable a digráficas que cumplen que todo par de vértices se encuentra relacionado por medio de una flecha asimétrica; es decir, en torneos. No obstante, en digráficas en las que esta condición no necesariamente se cumple, podemos encontrar un vértice, o conjunto de vértices, que cumplen características similares a los reyes en los torneos; es decir, que sea un subconjunto que domina a distancia uno o dos a los vértices en su complemento y que sea un conjunto independiente. El siguiente concepto define a los conjuntos descritos.

**Definición 2.1.3** *Sean  $D$  una digráfica y  $Q \subseteq V(D)$ , decimos que  $Q$  es una *cuasisolución* de  $D$  si es un conjunto independiente y cuasidominante.*

El concepto dual al previo, el cual es el tema principal de este trabajo, es el siguiente:

**Definición 2.1.4** *Sean  $D$  una digráfica y  $Q \subseteq V(D)$ , decimos que  $Q$  es un *cuasinúcleo* de  $D$  si es un conjunto independiente y cuasiabsorbente.*

En el año 1974, V. Chvátal y L. Lovász prueban que se puede garantizar que toda digráfica posee un cuasinúcleo [7]. Este resultado se presenta a continuación.

**Teorema 2.1.5 (Chvátal y Lovász)** [7] *Toda digráfica finita tiene al menos un cuasinúcleo.*

**Demostración.** Por inducción sobre el orden de la digráfica  $D$ ,  $|V(D)| = n$ .

*Base inductiva:* Si  $V(D) = \{x\}$ ; es decir,  $n = 1$ , entonces  $\{x\}$  es un cuasinúcleo de  $D$ , ya que  $\{x\}$  es claramente independiente y absorbente, por lo que para  $n = 1$  se satisface el teorema.

*Hipótesis de inducción:* Supongamos que el teorema es válido para  $p \leq n$ ; es decir, si  $D'$  es una digráfica tal que  $|V(D')| \leq n$ , entonces  $D'$  contiene un cuasinúcleo.

*Paso inductivo:* Por demostrar que el teorema es válido para  $n + 1$ .

*Demostración:* Sean  $D$  una digráfica tal que  $|V(D)| = n + 1$  y  $v \in V(D)$ . Consideremos  $D_1 = D[V(D) \setminus N^-[v]]$  (ver figura 2.2).

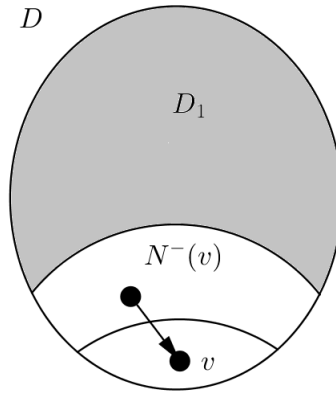


Figura 2.2. La digráfica  $D$  y los subconjuntos de  $V(D)$  que la conforman

Si  $D_1 = \emptyset$ , entonces  $\{v\}$  es un cuasinúcleo de  $D$ . En otro caso, si  $D_1 \neq \emptyset$ , entonces  $|V(D_1)| < n + 1$ , por lo que  $|V(D_1)| \leq n$ .

Por hipótesis de inducción tenemos que existe  $Q_1 \subseteq V(D_1)$  un cuasinúcleo de  $D_1$ . Por construcción tenemos que no existe una  $Q_1v$ -flecha en  $D$ .

Analizaremos los siguientes casos:

*Caso 1:* No existe una  $vQ_1$ -flecha en  $D$  (ver figura 2.3).

*Afirmación:*  $Q_1 \cup \{v\}$  es un cuasinúcleo de  $D$ .

*Prueba:* Primero observemos que el conjunto  $Q_1 \cup \{v\}$  es independiente, ya que  $Q_1$  es un cuasinúcleo de  $D_1$ ,  $\{v\}$  es independiente por ser de cardinalidad uno y no existen una  $vQ_1$ -flecha y una  $Q_1v$ -flecha en  $D$ .

Por lo tanto,  $Q_1 \cup \{v\}$  es independiente en  $D$ .

Por otro lado, si  $x \in D_1$ , entonces  $x$  es cuasiabsorbido por  $Q_1$ , y si  $x \in V(D) \setminus V(D_1)$ , entonces  $x \in N^-[v]$ , por la construcción de  $D \setminus D_1$ , por lo que  $x$  es absorbido por  $v$ .

Por lo tanto,  $Q_1 \cup \{v\}$  es cuasiabsorbente en  $D$ , lo que implica que  $Q_1 \cup \{v\}$  es un cuasinúcleo de  $D$ .



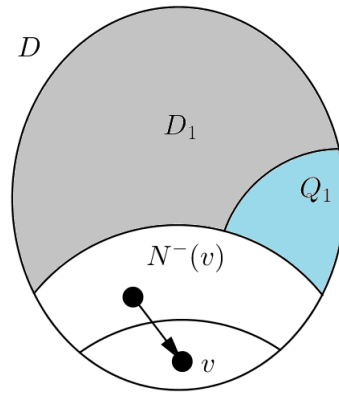


Figura 2.3. La digráfica  $D$  y los subconjuntos de  $V(D)$  que la conforman

*Caso 2:* Existe una  $vQ_1$ -flecha en  $D$ .

*Afirmación:*  $Q_1$  es un cuasinúcleo de  $D$ .

*Prueba:* Notemos que  $Q_1$  es independiente dado que es un cuasinúcleo de  $D_1$ , por otra parte, sabemos que  $D \setminus D_1 = D[N^-(v)]$  y todo elemento de la invecindad cerrada de  $v$  es cuasiabsorbido por  $Q_1$  debido a que existe una  $vQ_1$ -flecha en  $D$ .

Por lo tanto,  $Q_1$  es un cuasinúcleo de  $D$ .

En cualquiera de los dos casos,  $D$  tiene un cuasinúcleo y por lo tanto, toda digráfica tiene un cuasinúcleo. ■

**Teorema 2.1.6** *Toda digráfica tiene al menos una cuasisolución.*

**Demostración.** Sea  $D$  una digráfica y  $D^-$  la digráfica dual de  $D$ , por el teorema anterior sabemos que  $D^-$  tiene un cuasinúcleo  $Q$ . Por lo tanto,  $Q$  es una cuasisolución en  $D$ . ■

Observemos que para todo torneo, cualquier conjunto independiente es de cardinalidad uno; además, a partir del teorema anterior, sabemos que todo torneo contiene una cuasisolución; por lo tanto, todo torneo contiene un rey. Dicho resultado es equivalente al demostrado por Landau en 1951 [19], el cual fue expuesto anteriormente en el presente trabajo (ver teorema 2.1.2).

Dado lo previo, podríamos preguntarnos si es posible que el conjunto de vértices que se encuentran a distancia dos del cuasinúcleo en algunas digráficas sea vacío; es decir, que además de ser un conjunto independiente, también absorba a su complemento a distancia uno. La respuesta es afirmativa, incluso se han estudiado ampliamente a los cuasinúcleos que cumplen esta condición.

**Definición 2.1.7** *Sean  $D$  una digráfica y  $N \subseteq V(D)$ , decimos que  $N$  es un **núcleo** de  $D$  si es un conjunto independiente y absorbente en  $D$ .*

El concepto de núcleo en una digráfica fue introducido por Claude Berge en su libro “*Graphs and Hypergraphs*” [5]; sin embargo, Chvátal demostró que el problema de reconocer si una digráfica tiene o no un núcleo es imposible de resolver con las herramientas actuales [6], por lo que encontrar condiciones suficientes para que una digráfica contenga un conjunto con estas características o encontrar grandes familias de digráficas con núcleo ha sido una línea de investigación muy explorada por muchos autores, entre los más destacados se encuentran Claude

Berge, Hortensia Galeana, D. König, Víctor Neumann, von Neumann, M. Richardson, entre muchos otros. El concepto dual al concepto de núcleo es el de solución, el cual se explica a continuación:

**Definición 2.1.8** Sean  $D$  una digráfica y  $S \subseteq V(D)$ , decimos que  $S$  es una **solución** de  $D$  si es un conjunto independiente y dominante en  $D$ .

En la digráfica de la figura 2.4, el conjunto  $Q_n = \{x_2, x_3\}$  es un cuasinúcleo de la digráfica; sin embargo, no es un núcleo ya que los vértices  $x_5$  y  $x_7$  no son absorbidos a distancia uno por ninguno de los dos vértices en  $Q_n$ , y  $Q_s = \{x_5, x_7\}$  es una cuasisolución de la digráfica  $D$ , pero no es una solución ya que los vértices  $x_2$  y  $x_3$  no son dominados por ninguno de los dos vértices en  $Q_s$ .

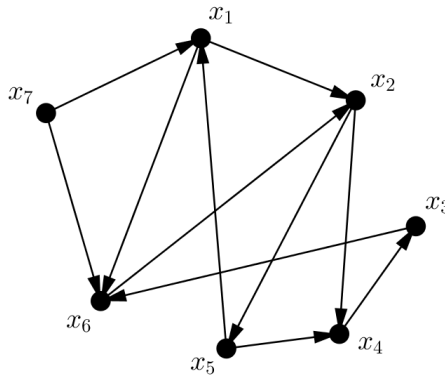


Figura 2.4. Ejemplo de núcleo y solución

Asimismo, el conjunto  $N = \{x_4, x_6\}$  es un núcleo de la digráfica, y el conjunto  $S = \{x_2, x_3, x_7\}$  una solución de la misma.

Por lo anterior, sabemos que no toda digráfica posee un núcleo, pero sí tiene al menos un cuasinúcleo. En la siguiente sección analizaremos la relación que existe entre estos dos tipos de conjuntos.

## 2.2. Debilidad de un cuasinúcleo

Sea  $D$  la digráfica mostrada en la figura 2.5, notemos que todos sus vértices son de ingrado uno, por lo cual pueden absorber solamente a un vértice; dado que la digráfica es de orden cinco, necesitamos al menos tres vértices para absorber a todo elemento de  $V(D)$ . Observemos que no hay subconjuntos de vértices de cardinalidad mayor o igual a tres, que también sean subconjuntos independientes, por lo que podemos asegurar que  $D$  no tiene núcleo. Sin embargo, el conjunto  $\{x_1, x_3\}$  claramente es un conjunto independiente y cuasiabsorbente, ya que  $x_1$  absorbe a  $x_4$  y a  $x_5$  a distancia dos y uno respectivamente, y  $x_3$  absorbe a  $x_2$  a distancia uno. Por lo tanto,  $\{x_1, x_3\}$  es un cuasinúcleo de  $D$ .

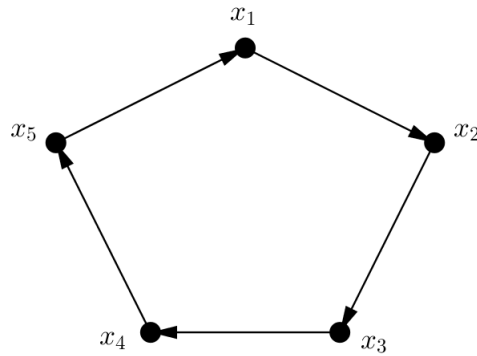


Figura 2.5. Ejemplo de digráfica sin núcleo

Por el teorema 2.1.5 y el ejemplo anterior, sabemos que cualquier digráfica tiene al menos un cuasinúcleo, incluso las digráficas que no tienen núcleo; además, es claro que aunque todo núcleo es un cuasinúcleo, no todo cuasinúcleo es un núcleo. Esto se debe a que no todo cuasinúcleo es un conjunto absorbente; es decir, cabe la posibilidad de que exista un vértice en el complemento del cuasinúcleo  $Q$  de la digráfica  $D$  que se encuentre a distancia dos de  $Q$ . A la cardinalidad del conjunto de estos vértices, se le llama la **debilidad de  $Q$** , y denotamos a este número como  $f_D(Q)$ ; asimismo, decimos que  $Q$  es un **cuasinúcleo de debilidad mínima** si de todos los cuasinúcleos de  $D$ , el conjunto de los vértices que se encuentran a distancia dos de  $Q$  es el de cardinalidad mínima. Observemos que para cualquier digráfica  $D$  con núcleo  $N$ , la debilidad de  $N$  es cero, ya que por definición  $N$  absorbe a distancia uno a todo su complemento. En 1976, en “*Quasi-kernels in a Digraphs*” [23] Philippe Vincke dio una cota superior para la debilidad de los cuasinúcleos de debilidad mínima, y más tarde demostró que si existen dos cuasinúcleos de una digráfica, tal que uno está propiamente contenido en el otro, entonces el primero tiene una debilidad menor que el cuasinúcleo que lo contiene. Los siguientes resultados fueron producto de la investigación de Vincke y se pueden consultar en la tesis de licenciatura de Cintia Rosas [26].

**Definición 2.2.1** Sea  $D$  una digráfica, decimos que  $\{x, y, z\}$  es una **tercia intransitiva** de  $D$  si se cumple que  $(x, y)$  y  $(y, z)$  están en las flechas de  $D$ , pero  $(x, z)$  no lo está. Al vértice  $z$  se le llama **vértice final** de la terciada intransitiva.

**Teorema 2.2.2** [23] El número  $\lfloor p/3 \rfloor$ , donde  $p$  es el número de terciadas intransitivas de  $D$ , es una cota superior para la debilidad de los cuasinúcleos de debilidad mínima de una digráfica.

**Teorema 2.2.3** [23] Si  $Q_1$  y  $Q_2$  son dos cuasinúcleos distintos de una digráfica  $D$  tal que  $Q_1 \subset Q_2$ , entonces  $f_D(Q_2) < f_D(Q_1)$ .

**Teorema 2.2.4** [23] Todo cuasinúcleo  $Q$  de debilidad mínima en una digráfica  $D$  es un subconjunto independiente máximo de  $V(D)$ .

**Teorema 2.2.5** [23] Si  $D$  es una digráfica completa, entonces todo vértice de ingrado máximo es cuasinúcleo de debilidad mínima en  $D$ .

## 2.3. Número de cuasinúcleos en una digráfica

Por otro lado, la siguiente pregunta natural sería ¿existe alguna cota para el número de cuasinúcleos en una digráfica?

En 1996 Jacob y Meyniel obtuvieron una cota inferior para el número de cuasinúcleos de las digráficas sin núcleo [17].

**Teorema 2.3.1 (Jacob-Meyniel)** [17] *Si una digráfica  $D$  no tiene núcleo, entonces  $D$  contiene al menos tres cuasinúcleos distintos.*

**Demostración.** Por el teorema 2.1.5,  $D$  tiene al menos un cuasinúcleo. Sea  $Q_1$  un cuasinúcleo de  $D$ .

Debido a que  $D$  no tiene núcleo, la subdigráfica  $D_1 = D[V(D) \setminus N^-[Q_1]]$  es distinta del vacío. Sea  $Q_2$  un cuasinúcleo de dicha digráfica (ver figura 2.6).

*Afirmación:* El conjunto  $Q'_2 = Q_2 \cup (Q_1 \setminus N^-(Q_2))$  es un cuasinúcleo de  $D$ .

*Prueba:* Probaremos que  $Q'_2$  es cuasiabsorbente.

Por definición de  $Q'_2$ , cada vértice de  $N^-[Q_1]$  es un vértice inicial de una trayectoria de longitud a lo más dos que termina en  $Q'_2$ , además  $Q'_2$  claramente es cuasiabsorbente en la subdigráfica inducida por  $V(D) \setminus N^-[Q_1]$  ya que  $Q_2 \subset Q'_2$ .

Por lo tanto,  $Q'_2$  es cuasiabsorbente en  $D$ .

Es fácil observar que  $Q'_2$  es un conjunto independiente, ya que  $F(Q_2, Q_1)_D = \emptyset$  por construcción de  $D_1$ , y  $F(Q_1 \setminus N^-(Q_2), Q_2) = \emptyset$ . Además  $Q_1$  y  $Q_2$  son en sí conjuntos independientes.

Por lo tanto,  $Q'_2$  es un conjunto independiente, lo que implica que  $Q'_2$  es cuasinúcleo de  $D$ .

Observemos que  $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$  por construcción; así  $Q'_2 = Q_2 \cup (Q_1 \setminus N^-(Q_2)) \neq Q_1$ .

Como  $Q'_2$  no es un núcleo de  $D$ , se tiene que  $V(D) \neq N^-[Q'_2]$ , lo que implica que la subdigráfica inducida por  $V(D) \setminus N^-[Q'_2]$  es distinta del vacío.

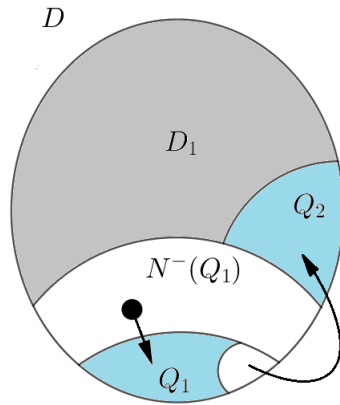


Figura 2.6. La digráfica  $D$  y los subconjuntos de  $V(D)$  que la conforman

Sea  $Q_3$  un cuasinúcleo de la subdigráfica inducida por  $V(D) \setminus N^-[Q'_2]$  y  $Q'_3 = Q_3 \cup (Q'_2 \setminus N^-(Q_3))$ . De forma análoga a como se demostró que  $Q'_2$  es un cuasinúcleo de  $D$ , que además es distinto de  $Q_1$ , podemos demostrar que  $Q'_3$  es un cuasinúcleo de  $D$  distinto de  $Q'_2$ ; así, sólo resta probar que  $Q'_3 \neq Q_1$ .

Por construcción, sabemos que  $Q_3$  es distinto del vacío y  $Q_3 \subseteq V(D) \setminus N^-[Q'_2]$ , por lo que  $Q_3 \cap N^-[Q'_2] = \emptyset$ ; también sabemos que  $Q_1$  está contenido en  $N^-[Q'_2]$ , por lo tanto  $Q_3 \cap Q_1 = \emptyset$ , entonces podemos concluir que  $Q'_3 \neq Q_1$ , y claramente  $Q'_3 \neq Q'_2$ .

Por lo tanto, si  $D$  no tiene un núcleo, entonces tiene al menos tres cuasinúcleos distintos. ■

En el resultado anterior, pudimos observar uno de los casos en los que la digráfica cuenta con tres cuasinúcleos distintos; sin embargo, es natural preguntarse qué digráficas poseen solamente un cuasinúcleo. A fin de dar respuesta a esta pregunta, en su artículo “*On the number of quasi-kernels in digraphs*” [13], Gutin, Koh, Tay y Yeo comenzaron a estudiar la relación que se tiene entre un vértice determinado y un cuasinúcleo de una digráfica; asimismo, a partir de las propiedades de los pozos observaron que el papel que estos juegan en una digráfica es muy importante al momento de estudiar la existencia de cuasinúcleos y cuasinúcleos ajenos en la misma. De hecho, la respuesta a la pregunta planteada, como veremos más adelante, es que la digráfica contiene un solo cuasinúcleo cuando este es también un núcleo que consta de los pozos de la digráfica.

**Proposición 2.3.2** [2] *Si  $D$  es una digráfica y  $v \in V(D)$ , entonces existe un cuasinúcleo  $Q$  de  $D$  tal que  $v \in N^-[Q]$ .*

**Demostración.** Definimos  $S \subseteq V(D)$  tal que para todo  $x$  en  $S$  y para todo cuasinúcleo  $M$  de  $D$  tenemos que  $x$  no pertenece a  $N^-[M]$ ; es decir,  $S$  es el conjunto de vértices tales que no cumplen el enunciado del teorema. Sea  $Q$  un cuasinúcleo de  $D[S]$ . Consideremos  $R$  un cuasinúcleo de la digráfica inducida por  $V(D) \setminus N^-[Q]$ . Sea  $X = Q \setminus N^-(R)$  (ver figura 2.7).

*Afirmación:* Afirmamos que  $R \cup X$  es un cuasinúcleo de  $D$ .

*Prueba:* Probaremos primero que  $R \cup X$  es cuasiabsorbente. Para ello, seleccionamos  $v \in V(D) \setminus (R \cup X)$  arbitrario. Si  $v \notin N^-[Q]$ , entonces por la definición de  $R$ ,  $d(v, R) \leq 2$  por lo que  $d(v, R \cup X) \leq 2$ . Si  $v \in N^-[Q]$ , entonces  $v \in N^-[X]$  o  $v \in N^-[Q \setminus X]$ . Por definición de  $X$ ,  $(Q \setminus X) \subset N^-(R)$  así que  $d(v, R \cup X) \leq 2$  en ambos casos. Por lo tanto  $R \cup X$  es un conjunto cuasiabsorbente en  $D$ .

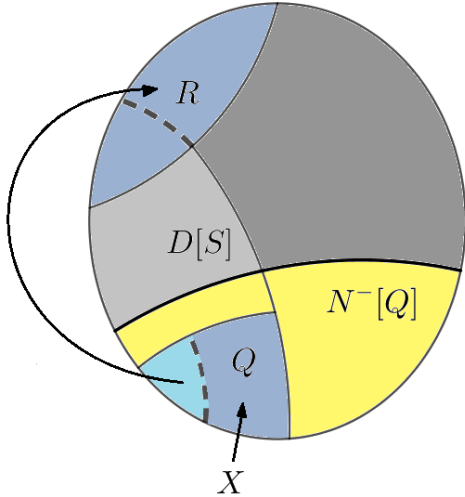


Figura 2.7. La digráfica  $D$  y los subconjuntos de  $V(D)$  que la conforman

Para probar que  $R \cup X$  es un conjunto independiente, observemos que  $R \subseteq V(D) \setminus N^-[Q]$  y  $X = Q \setminus (Q \cap N^-(R))$ , entonces  $F(R, X) = \emptyset$  y  $F(X, R) = \emptyset$  por definición de  $R$  y  $X$ , además  $R$  es independiente por ser un cuasinúcleo y  $X$  es independiente por ser un subconjunto de  $Q$  que es un cuasinúcleo de  $D[S]$ , por lo tanto  $R \cup X$  es independiente en  $D$ .

Para cada  $v \in Q$  tenemos que  $v \in X$  o  $v \in Q \setminus X$ . Si  $v \in X$ , entonces  $v \in R \cup X$ . Si  $v \in (Q \setminus X) = (Q \cap N^-(R))$ , entonces  $v \in N^-(R \cup X)$ , pero como  $Q \subseteq S$  y  $R \cup X$  es un cuasinúcleo de  $D$  tenemos una contradicción a la definición del conjunto  $S$ , por lo tanto  $S = \emptyset$ .

■

**Lema 2.3.3** [13] *Sea  $x$  un vértice de una digráfica  $D$ . Si  $x$  no es un pozo, entonces  $D$  tiene un cuasinúcleo que no incluye a  $x$ .*

**Demostración.** Sea  $x \in V(D)$  tal que  $x$  no es pozo, entonces  $N^+(x) \neq \emptyset$ . Sea  $y \in N^+(x)$ , tenemos los siguientes casos:

*Caso 1:*  $N^-[y] = V(D)$ .

Entonces  $\{y\}$  es cuasinúcleo de  $D$  que no contiene a  $x$ . En particular,  $\{y\}$  es un núcleo de  $D$ .

*Caso 2:*  $N^-[y] \neq V(D)$  (ver figura 2.8).

Tomemos  $Q'$  un cuasinúcleo de  $D \setminus N^-[y]$ , si  $y$  domina a un vértice en  $Q'$ , entonces  $Q'$  es un cuasinúcleo en  $D$ , que no incluye a  $x$ , y si  $y$  no domina a un vértice en  $Q'$ , entonces  $Q' \cup \{y\}$  es cuasinúcleo en  $D$  que no contiene a  $x$ .

En ambos casos  $D$  tiene un cuasinúcleo que no contiene a  $x$ .

■

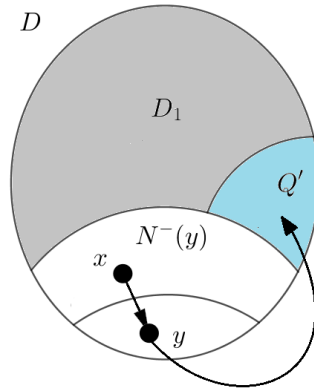


Figura 2.8. La digráfica  $D$  y los subconjuntos de  $V(D)$  que la conforman

**Teorema 2.3.4** [13] *Una digráfica  $D$  tiene solo un cuasinúcleo  $Q$  si y solo si  $Q$  es un núcleo y consiste de todos los pozos de  $D$ .*

**Demostración.** Sea  $D$  una digráfica con un solo cuasinúcleo  $Q$ . Veamos que  $Q$  es el conjunto de los pozos de  $D$ .

( $\Rightarrow$ ) Observemos que  $Q$  debe contener todos los pozos de  $D$  ya que no hay forma de que estos sean cuasiabsorbidos por otro vértice, además  $Q$  no contiene un vértice de exgrado distinto de cero ya que de otro modo, si  $u \in Q$  es un vértice de exgrado distinto de cero, por el lema 2.3.3, entonces  $D$  contiene un cuasinúcleo distinto de  $Q$  que no contiene a  $u$ , lo cual por hipótesis no ocurre.

Para probar que  $Q$  es núcleo, supongamos que  $x \in V(D) \setminus Q$  no es pozo y no existen  $xQ$ - flechas, entonces  $Q' = Q \cup \{x\}$  es un conjunto independiente debido a que, como todos los vértices de  $Q$  son de exgrado cero, no existen  $Qx$ -flechas y claramente  $Q' = Q \cup \{x\}$  es un conjunto cuasiabsorbente; por lo tanto,  $Q' = Q \cup \{x\}$  es un cuasinúcleo de  $D$  distinto de  $Q$ , lo cual es una contradicción.

( $\Leftarrow$ ) Por otro lado, asumamos que  $Q$  es un núcleo de  $D$  formado por los pozos de  $D$ , si existe  $Q_1$  un cuasinúcleo de  $D$  tal que  $Q \neq Q_1$ , entonces claramente  $Q \subseteq Q_1$ . Sea  $y \in Q_1$  tal que  $y \notin Q$ , por ser  $Q$  un núcleo de  $D$  sabemos que existe  $x \in Q$  tal que  $(y, x) \in F(D)$ ; pero esto no puede ocurrir ya que ambos vértices pertenecen a  $Q_1$  el cual es un conjunto independiente por hipótesis. Por lo tanto, es claro que  $Q$  es único.

■

Dado el resultado previo, podemos asumir que una digráfica que contiene pozos no es posible que contenga dos o más cuasinúcleos ajenos debido a que los pozos deben pertenecer a cualquiera de los cuasinúcleos. Lo siguiente es pensar si las digráficas sin pozos siempre contienen cuasinúcleos ajenos, lo cual generalmente no se cumple, como veremos en la siguiente sección.

Continuando con el tema del número de cuasinúcleos distintos, ya vimos lo que ocurre cuando una digráfica  $D$  tiene tres o más cuasinúcleos, y también cuando posee solo uno. La siguiente pregunta natural sería ¿qué ocurre cuando  $D$  tiene dos cuasinúcleos? Para abordar este tema, definimos una **biorientación** en una digráfica  $D$  como la digráfica que resulta de sustituir arbitrariamente las flechas simétricas de la digráfica  $D$  por flechas asimétricas. A partir de esta definición, en el artículo “*On the number of quasi-kernels in digraphs*” [13] Gutin, Koh, Tay y Yeo muestran en el 2001 que si  $D$  tiene exactamente dos cuasinúcleos, digamos  $R$  y  $Q$ , entonces satisface que:

- Si  $x \in R$ ,  $z \in Q$  con  $(x, z)$  en la flechas de  $D$  y  $N^-(z) \neq V(D) \setminus \{z\}$ , entonces  $Q \setminus \{z\}$  es el único cuasinúcleo de  $D \setminus N^-(z)$ .
- $\{Q, R\}$  es el conjunto de cuasinúcleos de cada biorientación de  $D$ , donde  $Q$  y  $R$  tienen al menos un vértice que no es pozo.

Dichos resultados pueden consultarse en la tesis de licenciatura de Ada Cintia Rosas Tavera.

También, utilizando este resultado, se demostró que si el exgrado de cada vértice de una digráfica  $D$  es mayor que cero, entonces  $D$  tiene exactamente dos cuasinúcleos si y solo si  $D$  contiene un ciclo de longitud dos o un ciclo de longitud cuatro inducido, al que nombramos  $\beta$ , tal que  $N^+(\beta) \cap V(\beta) = \emptyset$ , y todo vértice contenido en  $V(D \setminus \beta)$  domina al menos a dos vértices consecutivos de  $\beta$ . Asimismo, se demuestra que una digráfica fuertemente conexa de orden al menos tres; pero que no es isomorfa a un ciclo de longitud cuatro, tiene al menos tres cuasinúcleos distintos.

Se conocen algunas características de las digráficas con exactamente dos cuasinúcleos distintos debido a que este tema ha sido ampliamente estudiado. Se ha probado que dada una digráfica  $D$  cualquiera,  $S$  el conjunto de todos sus pozos y  $H$  la subdigráfica inducida de  $D$  que cumple que  $V(H) = V(D) \setminus S \setminus N^-(S)$ ;  $D$  tiene dos cuasinúcleos distintos si y solo si se cumple alguno de los siguientes casos:

- $H$  contiene un ciclo de longitud dos, al que llamamos  $\beta$ , tal que  $|N^+(\beta) \cap N^-(S)| \leq 1$ , ningún vértice de  $\beta$  domina a algún vértice de  $V(H) \setminus V(\beta)$  y cada vértice fuera de  $V(\beta)$  domina ambos vértices de  $\beta$ .
- $H$  contiene un ciclo de longitud cuatro inducido, al que llamamos  $\gamma$ , en el cual ningún vértice de  $\gamma$  domina un vértice de  $V(D) \setminus V(\gamma)$  y cada vértice de  $V(H) \setminus V(\gamma)$  domina al menos dos vértices adyacentes de  $\gamma$ .
- $|V(H)| \geq 2$ , tal que existe  $x$  en los vértices de  $D$ , un pozo de  $H$  que absorbe a cada vértice de  $H \setminus \{x\}$  y existe  $Q$  un núcleo de  $H \setminus \{x\}$  que contiene solamente pozos de  $H \setminus \{x\}$ ; además, no hay flechas de  $Q$  a  $N^-(S)$ .
- $|V(H)| = 1$ .

### Número de cuasinúcleos en la digráfica de líneas

En 1991, Hortensia Galeana, Laura Pastrana y Hugo Rincón, en el artículo “*Semikernels, Quasi kernels, and Grundy functions in the line digraph*” [12] demuestran el siguiente teorema.

**Teorema 2.3.5** *Sea  $D$  una digráfica tal que cada vértice tiene ingrado mayor o igual a uno, entonces el número de cuasinúcleos de  $D$  es menor o igual al número de cuasinúcleos de su digráfica de líneas.*

La demostración de dicho resultado también se puede consultar en la tesis de licenciatura de Laura Pastrana Ramírez, la cual lleva por título “*Gráficas y digráficas de líneas*” [21].

## 2.4. Cuasinúcleos ajenos

Sea  $D$  la digráfica dada en la figura 2.9, es fácil comprobar que solo tiene tres cuasinúcleos,  $Q_1 = \{b, d\}$ ,  $Q_2 = \{b, e\}$  y  $Q_3 = \{b, f\}$ . Observemos que el vértice  $b$  pertenece a todos los cuasinúcleos de la digráfica; es decir, no existen dos cuasinúcleos ajenos en  $D$ .

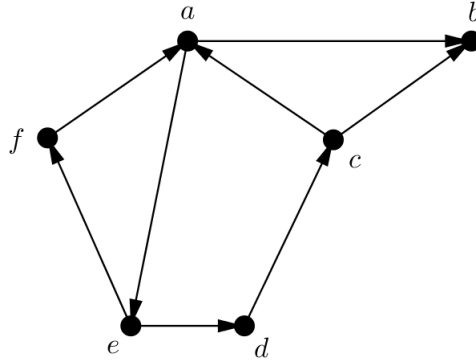


Figura 2.9. Digráfica sin cuasinúcleos ajenos

Sin embargo, observemos que el vértice  $b$  de la digráfica anterior es un pozo; entonces, ¿podríamos asegurar que una digráfica que no tiene pozos, contiene un par de cuasinúcleos ajenos? Para dar respuesta a esta pregunta, analicemos el torneo  $T$  de la figura 2.10, el cual tiene la propiedad de que para todo par de vértices  $x_i$  y  $x_j$  existe un  $x_k$  tal que las flechas  $(x_i, x_k)$  y  $(x_j, x_k)$  están en  $T$ , para todo  $\{i, j\} \subseteq \{1, 2, \dots, 7\}$  y algún  $k \in \{1, 2, \dots, 7\}$  con  $k \notin \{i, j\}$ . La existencia de este tipo de torneos fue demostrada por P. Erdős, en “*On a problem in graph theory*” [9] en 1963, para torneos de orden  $n \leq 7$  con  $n$  impar.

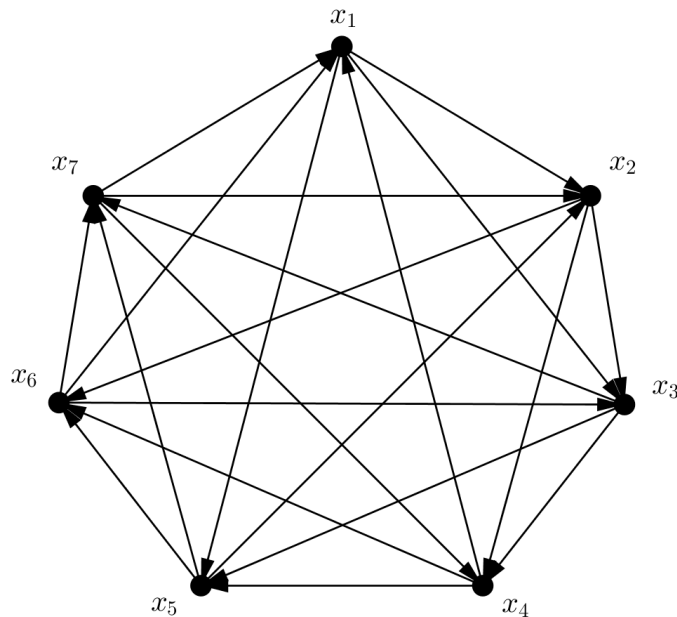
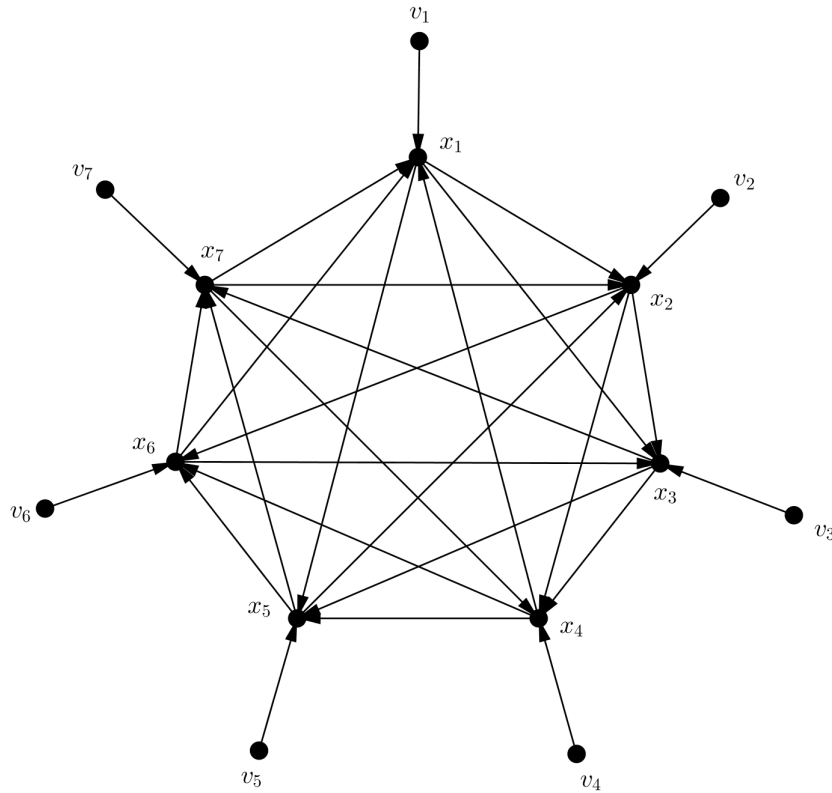


Figura 2.10. Torneo  $T$

Ahora, sea  $\Theta = \{D_i\}_{i \in \{1, 2, \dots, 7\}}$  una sucesión de digráficas ajenas en vértices dos a dos, donde  $V(D_i) = \{v_i\}$ ; al realizar la corona del torneo  $T$  y la sucesión  $\Theta$  obtenemos la siguiente digráfica:



Figura 2.11. Digráfica  $T \circ \Theta$ 

Es fácil verificar que la digráfica obtenida en la figura 2.11 no contiene pozos; además, por la construcción de  $T \circ \Theta$  y por ser  $T$  un torneo, cualquier cuasinúcleo debe contener solamente un vértice de  $T$ . Supongamos que existen  $Q_i$  y  $Q_j$  dos cuasinúcleos ajenos de  $T \circ \Theta$ . Sean  $x_i, x_j$  elementos de  $Q_i$  y  $Q_j$  respectivamente; entonces existe  $x_k \in V(T)$  tal que  $(x_i, x_k)$  y  $(x_j, x_k)$  están en las flechas de  $T \circ \Theta$ , lo que implica que  $d(x_k, Q_i) = 2$  y  $d(x_k, Q_j) = 2$  por ser todas las flechas del torneo asimétricas; además,  $x_k$  es el único vértice de  $T \circ \Theta$  que absorbe a  $v_k$ , por lo que  $v_k \in Q_i$  y  $v_k \in Q_j$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto  $T \circ \Theta$  no contiene cuasinúcleos ajenos.

Por lo anterior, podemos afirmar que no toda digráfica sin pozos posee un par de cuasinúcleos ajenos. Sin embargo, a continuación se presentan algunos resultados que se han demostrado en cuanto a este tema.

En el año 2001 G. Gutin, K. M. Koh, E. G. Tay y A. Yeo demostraron que dada una digráfica, si existe un subconjunto  $Y$  de sus vértices, tal que la subdigráfica inducida por este cumple que a su vez todas sus subdigráficas inducidas tienen núcleo, entonces existe un cuasinúcleo que está contenido en el complemento de la vecindad abierta de  $Y$ . Utilizando este resultado, lograron demostrar que toda digráfica que cumple tener núcleo y todas sus subdigráficas inducidas cumplen la misma condición, tal que ninguno de sus vértices es pozo, tiene al menos un par de cuasinúcleos ajenos. Los siguientes resultados pueden ser consultados en la tesis de licenciatura de Eduardo Pereyra [22].

**Teorema 2.4.1** [13] Si  $D$  es una digráfica y existe  $Y \subseteq V(D)$  tal que  $D[Y]$  cumple que todas sus subdigráficas inducidas, incluyendo a la misma digráfica, tienen núcleo, entonces existe un cuasinúcleo  $Q$  en  $D$  tal que  $Q \subseteq V(D) \setminus (N^-[Y] \setminus Y)$ .

**Definición 2.4.2** Una digráfica  $D$  es **núcleo perfecta** si toda subdigráfica inducida  $H$  de  $D$  tiene núcleo.

**Proposición 2.4.3** [13] *Toda digráfica núcleo perfecta que no contiene pozos tiene un par de cuasinúcleos ajenos.*

En el año 1947 J. von Neumann y O. Morgensten demostraron en “*Theory of Games and Economic Behavior*” que toda digráfica que no contiene ciclos es núcleo perfecta [28]. Asimismo, en 1953, M. Richardson en “*Solution of irreflexive relations*” [25], demostró que si una digráfica  $D$  no contiene ciclos de longitud impar, entonces  $D$  es núcleo perfecta; por lo tanto, por la proposición 2.4.3 que demostraron G. Gutin, K. M. Koh, E. G. Tay y A. Yeo, tenemos los siguientes corolarios.

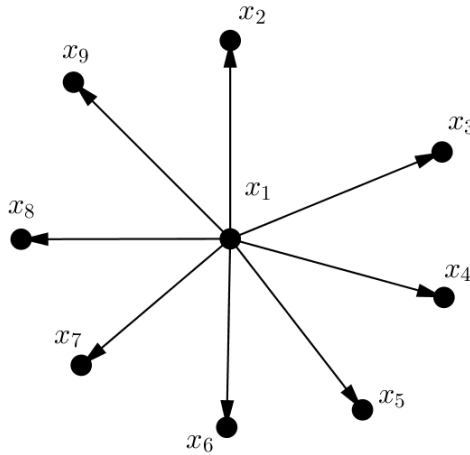


Figura 2.12. Ejemplo de una digráfica núcleo perfecta

**Corolario 2.4.4** [28] *Toda digráfica que no contiene ciclos tiene un par de cuasinúcleos ajenos.*

**Corolario 2.4.5** [25] *Toda digráfica que no contiene ciclos de longitud impar tiene al menos un par de cuasinúcleos ajenos.*

Utilizando los resultados mencionados con anterioridad para digráficas núcleo perfectas, en el 2016 Javier Eduardo Pereyra Zamudio en su tesis de licenciatura “*Cuasinúcleos ajenos en digráficas*” [22] dio el siguiente resultado.

**Teorema 2.4.6** *Toda digráfica núcleo imperfecta crítica sin pozos tiene un par de cuasinúcleos ajenos.*

Donde se entiende como digráfica **núcleo imperfecta crítica** a la digráfica  $D$  que cumple con no tener núcleo; pero, todas sus subdigráficas inducidas propias si poseen uno.

Por otro lado, en el 2005 S. Zhiren y Miao Xiaoyan publicaron algunos teoremas en “*Disjoint Quasi-Kernels in Digraphs*” [15], en los cuales se dan condiciones para la existencia de cuasinúcleos ajenos en  $D$  a partir de la cardinalidad de estos conjuntos; dichos resultados se pueden consultar en la tesis de licenciatura de Javier Eduardo Pereyra Zamudio [22].

**Teorema 2.4.7** [15] *Dada una digráfica  $D$  sin pozos, si  $D$  tiene un cuasinúcleo de cardinalidad a lo más dos, entonces  $D$  tiene un par de cuasinúcleos ajenos.*

**Teorema 2.4.8** [15] *Si una digráfica sin pozos y sin ciclos de longitud dos tiene un cuasinúcleo de cardinalidad tres  $Q_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$ , con  $N^-(x_i) = \emptyset$  y con  $i \in \{1, 2\}$  y no hay ningún triángulo  $(w_1, w_2, w_3, w_1)$  con  $w_i \in N^+(x_i)$  donde  $i \in \{1, 2, 3\}$ , entonces la digráfica tiene un par de cuasinúcleos ajenos.*

Además de las digráficas núcleo imperfectas y de las núcleo perfectas críticas, los cuasinúcleos han sido estudiados en diversos tipos de digráficas. En el 2005 S. Heard y J. Huang demuestran, en el artículo “*Quasikernels in Digraphs*” [14], el siguiente resultado.

**Teorema 2.4.9** [14] *Las digráficas semicompletas  $m$ -partitas sin pozos y las digráficas cuasitransitivas, sin vértices de exgrado cero, tienen al menos dos cuasinúcleos ajenos.*

En el libro “*Classes of directed graphs*” [3], se puede consultar la demostración, para digráficas cuasitransitivas, del resultado anterior (capítulo octavo, Hortensia Galeana Sánchez y César Hernández Cruz).

Cabe destacar que existen algunas condiciones con las cuales la propiedad de tener cuasinúcleos ajenos se preserva en diversas operaciones con digráficas. En 2016, Eduardo Pereyra Zamudio y Laura Pastrana presentan los siguientes resultados en “*Cuasinúcleos ajenos en digráficas*” [22] referentes a la suma de Zykov.

**Teorema 2.4.10** [22] *Una digráfica  $D$  con  $V(D) = \{1, \dots, n\}$ , tal que  $n \geq 2$  y  $\alpha = \{D_i\}_{i \in V(D)}$  cualquier sucesión de digráficas ajenas por vértices dos a dos, con  $V(D_i) = \{i_1, \dots, i_{p_i}\}$ , tal que  $p_i \geq 1$  para cada  $i \in V(D)$ , si  $D$  tiene al menos dos cuasinúcleos ajenos  $Q_1$  y  $Q_2$ , entonces la suma de Zykov, la cual recordemos que se denota por  $\sigma(D, \alpha)$ , tiene al menos dos cuasinúcleos ajenos.*

**Teorema 2.4.11** [22] *Dada una digráfica  $D$  con  $V(D) = \{1, \dots, n\}$ ,  $Q$  un cuasinúcleo de  $D$  y  $\alpha = \{D_i\}_{i \in V(D)}$  cualquier sucesión de digráficas ajenas por vértices dos a dos, con  $V(D_i) = \{i_1, \dots, i_{p_i}\}$ , tal que  $p_i \geq 1$  para todo  $i \in V(D)$ . Si para cada  $j \in Q$  tenemos que  $D_j$  tiene al menos un par de cuasinúcleos ajenos  $Q_{D_j}^1$  y  $Q_{D_j}^2$ , entonces  $\sigma(D, \alpha)$  tiene al menos dos cuasinúcleos ajenos.*

Usando los resultados anteriores, en la tesis de licenciatura de Eduardo Pereyra Zamudio [22] se presenta otro ejemplo de una digráfica que no tiene cuasinúcleos ajenos.

**Teorema 2.4.12** [22] *La digráfica  $\sigma(T_k \circ \theta_k, \alpha)$  con  $\alpha = \{D_{u_j}\}_{u_j \in V(T_k \circ \theta_k)}$  y  $D_{u_j} = T_k \circ \theta_k$  para toda  $u_j \in V(T_k \circ \theta_k)$ , es una digráfica sin cuasinúcleos ajenos.*

Donde,  $\sigma$  se refiere a la suma de Zykov, y  $T_k$  es uno de los torneos de Erdős que cumplen que para todo par de vértices  $x_i$  y  $x_j$  en  $V(T_k)$ , existe un  $x_m$  tal que las flechas  $(x_i, x_m)$  y  $(x_j, x_m)$  están  $F(T_k)$ , para todo  $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$  y algún  $m \in \{1, 2, \dots, k\}$  con  $m \notin \{i, j\}$  y  $T_k$  de orden  $k$ .

En 1991, Hortensia Galeana, Laura Pastrana y Hugo Rincón, mostraron que el número de cuasinúcleos de una digráfica es menor o igual al número de cuasinúcleos de su digráfica de líneas (ver teorema 2.3.5). Con ello, se muestra que es suficiente pedir que una digráfica  $D$  tenga al menos dos cuasinúcleos ajenos para que su digráfica de líneas  $L(D)$  tenga cuasinúcleos ajenos. En cuanto a la digráfica de líneas, en la tesis de licenciatura de Javier Eduardo Pereyra Zamudio [22] también se tiene el siguiente resultado.

**Proposición 2.4.13** [22] *Sean  $D$  una digráfica sin pozos y sin cuasinúcleos ajenos y  $K(D)$  el conjunto de cuasinúcleos de  $D$  tal que  $|K(D)| = |K(L(D))|$  y para todo  $\{Q_1, Q_2\} \subseteq K(D)$  tenemos que  $N^-(Q_1 \cap Q_2) \neq \emptyset$ , entonces  $L(D)$  no tiene cuasinúcleos ajenos.*

El siguiente resultado fue publicado en el año 2010, por C. Balbuena y M. Guevara en el artículo “*Kernels and partial line digraphs*”.

**Teorema 2.4.14** [1] *Dados  $k$  y  $l$  dos enteros positivos tal que  $1 \leq l \leq k$  y  $D$  una digráfica con ingrado al menos uno, si  $D$  tiene un  $(k, l)$ -núcleo, entonces la digráfica de líneas parcial  $L_{(A', \phi)}(D)$  tiene un  $(k, l)$ -núcleo.*

En el trabajo de Eduardo Zamudio también se menciona que, a partir de este resultado, se desprende que si  $D$  tiene al menos dos cuasinúcleos ajenos e ingrado al menos uno, entonces  $L_{(A', \phi)}(D)$  tiene dos cuasinúcleos ajenos, para  $A'$  y  $\phi$  que satisfacen la definición de la digráfica de líneas parcial.

En cuanto a la operación de corona, la primera definición fue dada por Roberto Frucht y Frank Harary en “*On the corona of two graphs*” en 1970 [11]; sin embargo, se han trabajado varias versiones de esta definición. Partiendo de las diferentes transcripciones, en 2014 J. E. Moo Vergara y Laura Pastrana definen a la corona generalizada en “*Núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas en la corona generalizada*” [20], y dicha definición es la que se muestra en el capítulo uno del presente trabajo. Bajo esta, Laura Pastrana Ramírez y Javier Eduardo Pereyra Zamudio demuestran lo siguiente.

**Proposición 2.4.15** [22] *Si existe  $\Theta = (H_i)_{i \in I = \{1, \dots, q\}}$  tal que  $D \Delta \Theta$  tiene al menos dos cuasinúcleos ajenos, entonces  $D$  tiene dos cuasinúcleos ajenos.*

Al igual que los estudios realizados para resolver la existencia de cuasinúcleos ajenos en las operaciones en digráficas que se mencionaron anteriormente, se ha realizado un análisis amplio en cuanto a la digráfica de vigas. Uno de los resultados obtenidos en cuanto a esta operación es que para toda digráfica sin pozos, las digráficas de vigas de esta siempre tienen cuasinúcleos ajenos.

**Teorema 2.4.16** [22] *Sea  $D$  una digráfica sin pozos, entonces:*

- $\cup_{(x,y) \in F(D)} \{u_{xy}^i\}$
- $\cup_{(x,y) \in F(D)} \{v_{xy}^i\}$

con  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  son cuasinúcleos ajenos en  $T_k(D)$ .

Los productos directo, cartesiano, fuerte y la disyunción excluyente, los cuales definimos en el capítulo uno, fueron fuertemente trabajados en 2004 por M. Kawaśnik y Monika Perl en “*Nearly perfect sets in products of graphs*” [18]. Con base en este trabajo, en el 2016 Javier Eduardo Pereyra Zamudio, junto con Laura Pastrana Ramírez, demostraron los siguientes resultados [22].

**Teorema 2.4.17** *Dadas  $D_1$  y  $D_2$  dos digráficas, si  $D_1$  tiene al menos dos cuasinúcleos ajenos y  $D_2$  no tiene pozos, entonces  $D_1 \times D_2$  tiene al menos dos cuasinúcleos ajenos.*

**Teorema 2.4.18** *Si  $D_1$  y  $D_2$  tienen al menos dos núcleos ajenos respectivamente, entonces  $D_1 + D_2$  tiene al menos dos cuasinúcleos ajenos, al igual que  $D_1 \cdot D_2$ . Además si  $D_1$  tiene al menos dos cuasinúcleos ajenos y  $N$  es un cuasinúcleo de  $D_2$ , entonces  $D_1 \otimes D_2$  tiene al menos dos cuasinúcleos ajenos.*

Otras de las digráficas que se obtienen a partir de una digráfica  $D$  dada son  $S(D)$ ,  $R(D)$ ,  $Q(D)$  y  $T(D)$ , cuyas definiciones encontramos en el capítulo anterior. Para dichas operaciones también hay resultados que se refieren a la existencia de cuasinúcleos ajenos en ellas; J. Topp en “*Kernels of digraphs formed by some unary operations from other digraphs*” [27] demuestra que para toda digráfica  $D$  sin pozos,  $S(D)$  tiene al menos dos núcleos ajenos y por lo tanto dos cuasinúcleos ajenos.

**Teorema 2.4.19** [27] *Si  $D$  es una digráfica sin pozos, entonces  $V(D)$  y  $F(D)$  son dos cuasinúcleos ajenos de  $S(D)$ .*

Después Germán Benítez y Laura Pastrana en la tesis “Número semidominante coloreable en digráficas” [4] aseguran la existencia de cuasinúcleos ajenos en  $R(D)$  y  $Q(D)$  donde  $D$  es una digráfica sin pozos. En el mismo trabajo se demuestra que si  $D$  es una digráfica sin pozos y  $N$  es núcleo de  $D$ , entonces  $T(D)$  tiene al menos dos cuasinúcleos ajenos.

**Teorema 2.4.20** [4] *Si  $D$  es una digráfica sin pozos, entonces  $R(D)$  y  $Q(D)$  tiene al menos dos cuasinúcleos ajenos.*

**Teorema 2.4.21** [4] *Si  $D$  es una digráfica sin pozos y  $N$  es núcleo de  $D$ , entonces  $T(D)$  tiene al menos dos cuasinúcleos ajenos.*

Durante este capítulo se han presentado los resultados referentes a cuasinúcleos en digráficas que logramos recolectar a través de la investigación que realizamos. No obstante, en los siguientes capítulos seguiremos profundizando en el tema principal de este trabajo.

En el próximo capítulo se estudia el algoritmo planteado en “A note on quasi-kernels in digraphs” [8] de Cosmina Croitoru, para construir un cuasinúcleo en una digráfica. También se presenta el código en lenguaje R de programación que logramos implementar, así como su funcionamiento, explicación y ejemplos.

En el último capítulo, analizamos el artículo “Quasi-kernels and quasi-sinks in infinite graphs” [10] de Péter L. Erdős y Lajos Soukup con el objetivo de ahondar en algunos resultados que se aplican en la descripción de cuasinúcleos y cuasisoluciones en particiones de digráficas infinitas, incluyendo torneos infinitos.

# Capítulo 3

## Algoritmo de las dos revisiones

A lo largo de este capítulo ilustraremos un algoritmo para construir un cuasinúcleo en una digráfica, y a su vez encontrar tres cuasinúcleos en una digráfica sin núcleo. Dicho algoritmo, dado en el artículo “*A note on quasi-kernels in digraphs*” [8] de Cosmina Croitoru, también prueba una caracterización, dada por Gutin y Kho, Tay y Yeo, de las digráficas con solo dos cuasinúcleos; dando pruebas constructivas de resultados conocidos de Chvátal y Lovász, así como de Jacob y Meyniel. Cabe mencionar que todas las digráficas estudiadas a lo largo de este capítulo son finitas y sin lazos.

Con base a lo expuesto, nosotros implementamos el programa del algoritmo en lenguaje R, el código respectivo se presenta en la última sección del capítulo; así como la descripción de su funcionamiento y algunos ejemplos.

### 3.1. Las dos revisiones del algoritmo.

Chvátal y Lovász probaron que toda digráfica tiene al menos un cuasinúcleo (ver teorema 2.1.5). Ahora daremos una prueba algorítmica de este resultado.

Sea  $D = (V, F)$  una digráfica de  $n$  vértices y un orden arbitrario  $\pi$  de  $V(D)$ ; es decir, una función inyectiva  $\pi : [1, \dots, n] \rightarrow V(D)$ . Para cada  $i \in [1, \dots, n]$  definimos los siguientes conjuntos:

a) Para toda  $j \in [1, \dots, n]$  tal que  $j < i$ , definimos:

$$L_i(\pi) = \{\pi(j) : (\pi(i), \pi(j)) \in F(D)\};$$

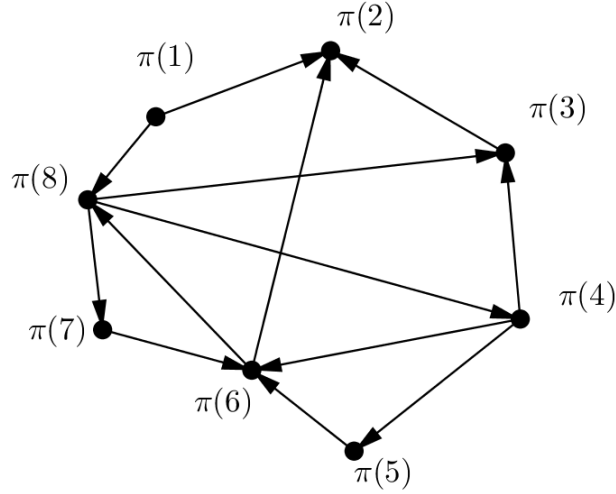
es decir,  $L_i(\pi)$  es el subconjunto de  $V(D)$  que consta de los  $\pi(j) \in V(D)$  que son exvecinos del vértice  $\pi(i)$  tales que  $\pi^{-1}(\pi(j)) = j < i$ .

b) Para toda  $j \in [1, \dots, n]$  tal que  $j > i$ , definimos:

$$H_i(\pi) = \{\pi(j) : (\pi(i), \pi(j)) \in F(D)\};$$

es decir,  $H_i(\pi)$  es el subconjunto de  $V(D)$  que consta de los  $\pi(j) \in V(D)$  que son exvecinos del vértice  $\pi(i)$  tales que  $\pi^{-1}(\pi(j)) = j > i$ .

A los anteriores conjuntos los llamamos el *conjunto numerado de exvecinos inferiores* y el *conjunto numerado de exvecinos superiores* del  $i$ -ésimo vértice bajo  $\pi$ , respectivamente.

Figura 3.1. Ejemplo de la función  $\pi$ 

Sea  $D$  la digráfica de orden ocho dada en el ejemplo 3.1. Definimos el orden

$$\pi : [1, \dots, 8] \rightarrow V(D)$$

como se muestra en dicho ejemplo.

Para  $i = 4$  obtenemos los siguientes conjuntos:

- a) Para toda  $j \in [1, \dots, 8]$  tal que  $j < 4$

$$L_4(\pi) = \{\pi(j) : (\pi(4), \pi(j)) \in F(D)\} = \{\pi(3)\} \text{ y}$$

- b) para toda  $j \in [1, \dots, 8]$  tal que  $j > 4$

$$H_4(\pi) = \{\pi(j) : (\pi(4), \pi(j)) \in F(D)\} = \{\pi(5), \pi(6)\}.$$

A continuación, se describe un algoritmo que construye un cuasinúcleo en  $D$  a partir de los conjuntos definidos previamente.

Sea una función  $QK(D, \pi)$  con  $Q := \emptyset$  en un inicio, definimos las siguientes dos revisiones:

1. Revisión hacia adelante: Partimos de  $i = 1$  hasta  $i = n$ .

$$\text{Si } Q \cap L_i(\pi) = \emptyset, \text{ entonces } Q := Q \cup \{\pi(i)\}.$$

2. Revisión hacia atrás: Partimos de  $i = n$  hasta  $i = 1$ .

$$\text{Si } Q \cap H_i(\pi) \neq \emptyset, \text{ entonces } Q := Q \setminus \{\pi(i)\}.$$

Notemos que en la revisión hacia adelante  $\pi(1)$  está en  $Q$ , ya que si  $i = 1$ , entonces  $Q := \emptyset$  por principio, por lo que  $Q \cap L_1(\pi) = \emptyset$ , lo que implica que  $Q := \emptyset \cup \{\pi(1)\} = \{\pi(1)\}$ . Además, los vértices que no pertenecen a  $Q$  al momento de terminar la revisión hacia adelante, tienen un exvecino en  $Q$  más pequeño con respecto a  $\pi$ ; esto debido a que si  $\pi(i) \notin Q$ , entonces  $Q \cap L_i(\pi) \neq \emptyset$ ; es decir, existe  $\pi(j)$  un vértice de  $D$  tal que  $\pi(j) \in Q$  y  $\pi(j) \in L_i = \{\pi(j) : (\pi(i), \pi(j)) \in F(D) \text{ con } j < i\}$ .

Por otra parte, observemos que en la revisión hacia atrás, el último vértice con respecto a  $\pi$  que pertenece a  $Q$  al momento de terminar la revisión hacia adelante, supongamos que nos referimos a  $\pi(i)$ , permanece en  $Q$  al terminar la revisión hacia atrás, ya que por ser el último vértice no tiene ningún exvecino mayor con respecto a  $\pi$  que pertenezca a  $Q$ , por lo cual  $Q \cap H_i(\pi) = \emptyset$ , así que este vértice permanece en  $Q$ , y los vértices de  $Q$  que tienen un exvecino mayor con respecto a  $\pi$  en  $Q$  son suprimidos en esta revisión; esto debido a que si  $\pi(i) \in Q$  y  $Q \cap H_i(\pi) = Q \cap \{\pi(j) : (\pi(i), \pi(j)) \in F(D) \text{ con } j > i\} \neq \emptyset$ , entonces  $Q := Q \setminus \{\pi(i)\}$ . Es claro, después del argumento presentado previamente, que  $Q \neq \emptyset$ , al terminar ambas revisiones.

Sean la digráfica  $D$  y el orden  $\pi : [1, \dots, 8]$  dados en el ejemplo 3.1. Realizaremos la revisión hacia adelante correspondiente al orden dado. Sea  $Q := \emptyset$  el conjunto inicial, entonces:

- $L_1(\pi) = \emptyset$ , tenemos  $Q \cap L_1(\pi) = \emptyset$  entonces  $Q := \{\pi(1)\}$ ,
- $L_2(\pi) = \emptyset$ , tenemos  $Q \cap L_2(\pi) = \emptyset$  entonces  $Q := \{\pi(1), \pi(2)\}$ ,
- $L_3(\pi) = \{\pi(2)\}$ , tenemos  $Q \cap L_3(\pi) = \{\pi(2)\}$  entonces  $Q := \{\pi(1), \pi(2)\}$ ,
- $L_4(\pi) = \{\pi(3)\}$ , tenemos  $Q \cap L_4(\pi) = \emptyset$  entonces  $Q := \{\pi(1), \pi(2), \pi(4)\}$ ,
- $L_5(\pi) = \emptyset$ , tenemos  $Q \cap L_5(\pi) = \emptyset$  entonces  $Q := \{\pi(1), \pi(2), \pi(4), \pi(5)\}$ ,
- $L_6(\pi) = \{\pi(2)\}$ , tenemos  $Q \cap L_6(\pi) = \{\pi(2)\}$  entonces  $Q := \{\pi(1), \pi(2), \pi(4), \pi(5)\}$ ,
- $L_7(\pi) = \{\pi(6)\}$ , tenemos  $Q \cap L_7(\pi) = \emptyset$  entonces  $Q := \{\pi(1), \pi(2), \pi(4), \pi(5), \pi(7)\}$  y
- $L_8(\pi) = \{\pi(3), \pi(4), \pi(7)\}$ , tenemos  $Q \cap L_8(\pi) = \{\pi(4), \pi(7)\}$  entonces  $Q := \{\pi(1), \pi(2), \pi(4), \pi(5), \pi(7)\}$ .

A continuación realizaremos la revisión hacia atrás correspondiente al orden dado, con  $Q := \{\pi(1), \pi(2), \pi(4), \pi(5), \pi(7)\}$  el conjunto inicial. Notemos que para esta revisión no tiene caso trabajar sobre los vértices de  $D$  que no pertenecen al conjunto  $Q$  que resulta de la revisión hacia adelante ya que, en este punto, solo nos interesa eliminar elementos de este conjunto, por lo cual iniciaremos con el vértice  $\pi(7)$ :

- $H_7(\pi) = \emptyset$ , tenemos  $Q \cap H_7(\pi) = \emptyset$  entonces  $Q := \{\pi(1), \pi(2), \pi(4), \pi(5), \pi(7)\}$ ,
- $H_5(\pi) = \{\pi(6)\}$ , tenemos  $Q \cap H_5(\pi) = \emptyset$  entonces  $Q := \{\pi(1), \pi(2), \pi(4), \pi(5), \pi(7)\}$ ,
- $H_4(\pi) = \{\pi(5), \pi(6)\}$ , tenemos  $Q \cap H_4(\pi) = \{\pi(5)\} \neq \emptyset$  entonces  $Q := \{\pi(1), \pi(2), \pi(5), \pi(7)\}$ ,
- $H_2(\pi) = \emptyset$ , tenemos  $Q \cap H_2(\pi) = \emptyset$  entonces  $Q := \{\pi(1), \pi(2), \pi(5), \pi(7)\}$  y
- $H_1(\pi) = \{\pi(2), \pi(8)\}$ , tenemos  $Q \cap H_1(\pi) = \{\pi(2)\} \neq \emptyset$  entonces  $Q := \{\pi(2), \pi(5), \pi(7)\}$ .

Asimismo, observemos que para todo vértice  $v$  de la digráfica  $D$  tal que  $v = \pi(i)$ , si  $v$  es un pozo de  $D$ , entonces  $L_i(\pi) = H_i(\pi) = \emptyset$ ; por lo cual, siempre es admitido en  $Q$  durante la revisión hacia adelante y nunca es expulsado del mismo durante la revisión hacia atrás.

En seguida demostramos que el conjunto  $Q$  resultante al terminar ambas revisiones en una digráfica  $D$  es un cuasinúcleo de la digráfica.

**Teorema 3.1.1** *Sean  $D$  una digráfica y  $\pi$  un orden arbitrario de  $V(D)$ ; el conjunto dado por  $Q = QK(D, \pi)$  que resulta de realizar la revisión hacia adelante y hacia atrás antes descritas es un cuasinúcleo de  $D$ .*



Primero probaremos que  $Q$  es un conjunto independiente. Observemos que para todo  $\pi(i)$  y  $\pi(j)$ , sin pérdida de generalidad con  $j < i$ , en el conjunto  $Q$  no puede pasar que  $(\pi(i), \pi(j)) \in F(D)$ , en ese caso tendríamos que  $\pi(j) \in L_i$  y  $\pi(j) \in Q$ , entonces  $L_i(\pi) \cap Q \neq \emptyset$ , por lo que  $\pi(i)$  quedaría fuera de  $Q$  al hacer la revisión hacia adelante. Además tampoco puede ocurrir que  $(\pi(j), \pi(i)) \in F(D)$ , de ser así, tendríamos que  $\pi(i) \in H_j(\pi)$  y  $\pi \in Q$ , entonces  $H_j \cap Q \neq \emptyset$ , por lo cual  $\pi(j)$  quedaría fuera de  $Q$  al hacer la revisión hacia atrás. Por lo tanto  $Q$  es un conjunto independiente.

Para demostrar que  $Q$  es un conjunto cuasiabsorbente primero observemos que todo  $\pi(i)$  en  $V(D) \setminus Q$  tiene dos opciones:

1.  $\pi(i)$  no fue agregado a  $Q$  en la revisión hacia adelante.
2.  $\pi(i)$  fue agregado a  $Q$  en la revisión hacia adelante; pero, fue eliminado de este en la revisión hacia atrás.

Si  $\pi(i)$  no fue agregado a  $Q$  en la revisión hacia adelante, entonces existe  $\pi(j) \in L_i(\pi)$  y  $\pi(j) \in Q$ . En cuyo caso, al momento de terminar la revisión hacia atrás,  $\pi(j)$  tiene dos opciones:

- a)  $\pi(j)$  permanece en  $Q$ , lo que implicaría que se cumple que  $Q \cap H_j(\pi) = \emptyset$ ; es decir, no existen exvecinos de  $\pi(j)$  que sean mayores que él respecto al orden  $\pi$  que también pertenezcan a  $Q$ .
- b)  $\pi(j)$  es eliminado de  $Q$ , lo que implicaría que se cumple que  $Q \cap H_j(\pi) \neq \emptyset$ , en cuyo caso, existe  $\pi(k)$ , con  $j < k$  tal que  $(\pi(j), \pi(k)) \in F(D)$  y  $\pi(k) \in Q$ .

Observemos que en el caso a)  $\pi(i)$  tiene un exvecino en  $Q$ , y para el caso b)  $\pi(i)$  es absorbido a distancia dos por un vértice  $\pi(k)$  en  $Q$ .

Ahora bien, si  $\pi(i)$  fue agregado a  $Q$  en la revisión hacia adelante; pero, fue eliminado de este en la revisión hacia atrás, entonces se cumple que  $Q \cap L_i(\pi) = \emptyset$ ; pero, existe  $\pi(k)$  con  $i < k$  tal que  $(\pi(i), \pi(k)) \in F(D)$  y  $\pi(k) \in Q$ , por lo que  $\pi(i)$  tiene al menos un exvecino mayor en el orden  $\pi$  que está en  $Q$ .

Notemos que  $V(D) \setminus Q$  es una unión disjunta de dos conjuntos  $R_1(\pi)$  y  $R_2(\pi)$  ( $R_1 \uplus R_2$ ), donde  $R_1(\pi)$  es el conjunto de los vértices eliminados de  $Q$  en la revisión hacia atrás o no agregados en la revisión hacia adelante que tienen un exvecino en  $Q$  al finalizar ambas revisiones. Un vértice  $\pi(i)$  está en  $R_2(\pi)$  si no fue agregado a  $Q$  en la revisión hacia adelante; es decir, cuando este tiene al menos un exvecino  $\pi(j) \in L_i(\pi)$  en el conjunto  $Q$  dado hasta ese momento, pero todos sus exvecinos se encuentran fuera de  $Q$  al momento de terminar la revisión hacia atrás. Por lo anterior  $Q$  es cuasiabsorbente.

Por lo tanto,  $Q$  es un cuasinúcleo de  $D$ . ■

Nótese que si  $R_2 = \emptyset$ , entonces  $Q$  es un núcleo.

Veamos otro ejemplo, sean  $D$  y  $\pi : [1, \dots, 7] \rightarrow V(D)$  dadas como sigue:

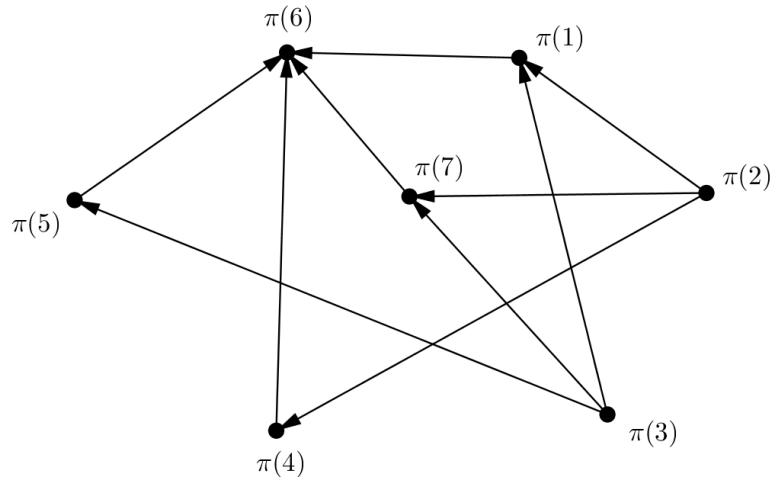


Figura 3.2. La digráfica  $D$  y el orden  $\pi : [1, \dots, 7] \rightarrow V(D)$  aplicado a  $V(D)$

Realizaremos la revisión hacia adelante correspondiente al orden dado. Sea  $Q := \emptyset$  el conjunto inicial, entonces:

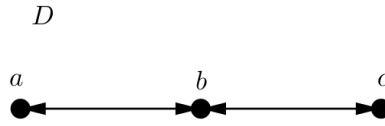
- $L_1(\pi) = \emptyset$ , tenemos  $Q \cap L_1(\pi) = \emptyset$  entonces  $Q := \{\pi(1)\}$ ,
- $L_2(\pi) = \{\pi(1)\}$ , tenemos  $Q \cap L_2(\pi) = \{\pi(1)\}$  entonces  $Q := \{\pi(1)\}$ ,
- $L_3(\pi) = \{\pi(1)\}$ , tenemos  $Q \cap L_3(\pi) = \{\pi(1)\}$  entonces  $Q := \{\pi(1)\}$ ,
- $L_4(\pi) = \emptyset$ , tenemos  $Q \cap L_4(\pi) = \emptyset$  entonces  $Q := \{\pi(1), \pi(4)\}$ ,
- $L_5(\pi) = \emptyset$ , tenemos  $Q \cap L_5(\pi) = \emptyset$  entonces  $Q := \{\pi(1), \pi(4), \pi(5)\}$ ,
- $L_6(\pi) = \emptyset$ , tenemos  $Q \cap L_6(\pi) = \emptyset$  entonces  $Q := \{\pi(1), \pi(4), \pi(5), \pi(6)\}$  y
- $L_7(\pi) = \{\pi(6)\}$ , tenemos  $Q \cap L_7(\pi) = \{\pi(6)\}$  entonces  $Q := \{\pi(1), \pi(4), \pi(5), \pi(6)\}$ .

Ahora, realizaremos la revisión hacia atrás correspondiente al orden dado, con  $Q := \{\pi(1), \pi(4), \pi(5), \pi(6)\}$  el conjunto inicial y partiremos del vértice  $\pi(6)$ :

- $H_6(\pi) = \emptyset$ , tenemos  $Q \cap H_6(\pi) = \emptyset$  entonces  $Q := \{\pi(1), \pi(4), \pi(5), \pi(6)\}$ ,
- $H_5(\pi) = \{\pi(6)\}$ , tenemos  $Q \cap H_5(\pi) = \{\pi(6)\} \neq \emptyset$  entonces  $Q := \{\pi(1), \pi(4), \pi(6)\}$ ,
- $H_4(\pi) = \{\pi(6)\}$ , tenemos  $Q \cap H_4(\pi) = \{\pi(6)\} \neq \emptyset$  entonces  $Q := \{\pi(1), \pi(6)\}$  y
- $H_1(\pi) = \{\pi(6)\}$ , tenemos  $Q \cap H_1(\pi) = \{\pi(6)\} \neq \emptyset$  entonces  $Q := \{\pi(6)\}$ .

En este ejemplo  $R_1(\pi) = \{\pi(1), \pi(4), \pi(5), \pi(7)\}$ , son los vértices tales que tienen un exvecino en el conjunto  $Q$  al terminar la revisión hacia atrás. Observemos que los vértices  $\pi(2)$  y  $\pi(3)$  no fueron agregados a  $Q$  en la revisión hacia adelante, además  $Q \cap N^+(\pi(2)) = \emptyset$  y  $Q \cap N^+(\pi(3)) = \emptyset$ , entonces  $R_2(\pi) = \{\pi(2), \pi(3)\}$ . Por lo tanto,  $V(D) \setminus Q = R_1 \uplus R_2$ .

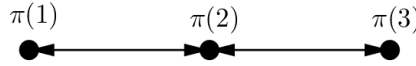
Una pregunta natural sería ¿todo cuasinúcleo  $Q$  en una digráfica  $D$  puede ser construido usando el algoritmo descrito? Para dar respuesta a ello, consideremos la siguiente digráfica:

Figura 3.3. Digráfica  $D$  utilizada

Con un rápido análisis, podemos concluir que los conjuntos  $\{b\}$  y  $\{a, c\}$  son núcleos de  $D$ , y por lo tanto cuasinúcleos de la digráfica. Además, podemos observar que los conjuntos  $\{a\}$  y  $\{c\}$  también son cuasinúcleos de  $D$ .

Por otro lado, sea  $\pi : [1, 2, 3] \rightarrow V(D)$  un orden de los vértices de  $D$ . Existen seis casos que corresponden a cada una de las formas en que se puede ordenar a dicho conjunto ( $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ ). A continuación analizaremos cada uno:

*Caso 1:*

Figura 3.4. Primer orden de  $V(D)$  propuesto

Realizaremos la revisión hacia adelante correspondiente al orden dado en la figura 3.4. Sea  $Q := \emptyset$  el conjunto inicial, entonces:

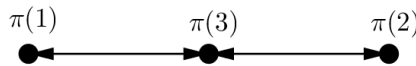
- $L_1(\pi) = \emptyset$ , tenemos  $Q \cap L_1(\pi) = \emptyset$ , entonces  $Q := \{\pi(1)\}$ .
- $L_2(\pi) = \{\pi(1)\}$ , tenemos  $Q \cap L_2(\pi) = \{\pi(1)\}$ , entonces  $Q := \{\pi(1)\}$ .
- $L_3(\pi) = \{\pi(2)\}$ , tenemos  $Q \cap L_3(\pi) = \emptyset$ , entonces  $Q := \{\pi(1), \pi(3)\}$ .

Ahora realizaremos la revisión hacia atrás correspondiente al orden dado, con  $Q := \{\pi(1), \pi(3)\}$  el conjunto inicial:

- $H_3(\pi) = \emptyset$ , tenemos  $Q \cap H_3(\pi) = \emptyset$ , entonces  $Q := \{\pi(1), \pi(3)\}$ .
- $H_1(\pi) = \emptyset$ , tenemos  $Q \cap H_1(\pi) = \emptyset$ , entonces  $Q := \{\pi(1), \pi(3)\}$ .

Notemos que  $Q := \{\pi(1), \pi(3)\} = \{a, c\}$ .

*Caso 2:*

Figura 3.5. Segundo orden de  $V(D)$  propuesto

Realizaremos la revisión hacia adelante correspondiente al orden dado en la figura 3.5. Sea  $Q := \emptyset$  el conjunto inicial, entonces:

- $L_1(\pi) = \emptyset$ , tenemos  $Q \cap L_1(\pi) = \emptyset$ , entonces  $Q := \{\pi(1)\}$ .
- $L_2(\pi) = \emptyset$ , tenemos  $Q \cap L_2(\pi) = \emptyset$ , entonces  $Q := \{\pi(1), \pi(2)\}$ .
- $L_3(\pi) = \{\pi(1), \pi(2)\}$ , tenemos  $Q \cap L_3(\pi) = \{\pi(2)\}$ , entonces  $Q := \{\pi(1), \pi(2)\}$ .

Ahora realizaremos la revisión hacia atrás correspondiente al orden dado, con  $Q := \{\pi(1), \pi(2)\}$  el conjunto inicial:

- $H_2(\pi) = \{\pi(3)\}$ , tenemos  $Q \cap H_2(\pi) = \emptyset$ , entonces  $Q := \{\pi(1), \pi(2)\}$ .
- $H_1(\pi) = \{\pi(3)\}$ , tenemos  $Q \cap H_1(\pi) = \emptyset$ , entonces  $Q := \{\pi(1), \pi(3)\}$ .

Notemos que  $Q := \{\pi(1), \pi(2)\} = \{a, c\}$ .

*Caso 3:*

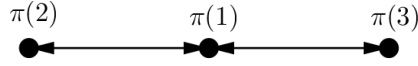


Figura 3.6. Tercer orden de  $V(D)$  propuesto

Realizaremos la revisión hacia adelante correspondiente al orden dado en la figura 3.6. Sea  $Q := \emptyset$  el conjunto inicial, entonces:

- $L_1(\pi) = \emptyset$ , tenemos  $Q \cap L_1(\pi) = \emptyset$ , entonces  $Q := \{\pi(1)\}$ .
- $L_2(\pi) = \{\pi(1)\}$ , tenemos  $Q \cap L_2(\pi) = \{\pi(1)\}$ , entonces  $Q := \{\pi(1)\}$ .
- $L_3(\pi) = \{\pi(1)\}$ , tenemos  $Q \cap L_3(\pi) = \{\pi(1)\}$ , entonces  $Q := \{\pi(1)\}$ .

Al ser  $Q$  de cardinalidad uno, no es necesario realizar la revisión hacia atrás correspondiente al orden dado, directamente obtenemos que  $Q := \{\pi(1)\}$ . Notemos que  $Q := \{\pi(1)\} = \{b\}$ .

*Caso 4:*

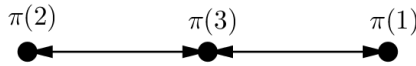


Figura 3.7. Cuarto orden de  $V(D)$  propuesto

El desarrollo es el mismo que para el caso 2.

*Caso 5:*

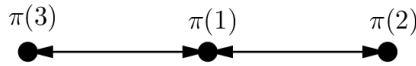


Figura 3.8. Quinto orden de  $V(D)$  propuesto

El desarrollo es el mismo que para el caso 3.

*Caso 6:*

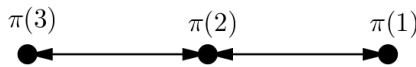


Figura 3.9. Sexto orden de  $V(D)$  propuesto

El desarrollo es el mismo que para el caso 1.

En ninguno de los casos se obtienen los cuasinúcleos  $\{a\}$  o  $\{c\}$ , es decir,  $QK(D, \pi) \neq \{a\}$  (o  $\{c\}$ ) para todo orden  $\pi$  de  $V(D)$ . Por lo tanto, no todo cuasinúcleo puede ser construido usando el algoritmo descrito.

En el capítulo dos demostramos que si  $D$  es una digráfica sin núcleo, entonces contiene al menos tres cuasinúcleos distintos; a continuación probaremos el mismo resultado a partir de los conjuntos que definimos utilizando el algoritmo estudiado.

Sea  $D$  una digráfica de orden mayor o igual a tres, sin núcleo,  $\pi_1$  un orden de  $V(D)$  y  $Q_1 := QK(D, \pi_1)$ . Dado que  $D$  no tiene núcleo podemos afirmar que  $R_2(\pi_1) \neq \emptyset$ .

Sea  $\pi_2$  el orden de  $V(D)$  que comienza en los vértices de  $Q_1$ , seguido por los vértices en  $R_1(\pi_1)$  y finalizando con los vértices en  $R_2(\pi_1)$ , ordenando arbitrariamente a los vértices que se encuentran en el mismo conjunto. Sea  $Q_2 := QK(D, \pi_2)$ , observemos tres cosas importantes:

1. Todos los vértices en  $Q_1$  son admitidos en  $QK(D, \pi_2)$  en la revisión hacia adelante durante la construcción de  $Q_2$ . Es claro, que  $\pi_2(1) \in Q_1$  sería admitido en  $QK(D, \pi_2)$  en la revisión hacia adelante durante la construcción de  $Q_2$ , supongamos que  $Q_1$  es de cardinalidad  $n \geq 2$ , sean  $\pi_2(j)$  y  $\pi_2(i)$  elementos de  $Q_1$ , sin pérdida de generalidad con  $1 \leq j < i \leq n$ , notemos que  $QK(D, \pi_2) \cap L_i(\pi_2) = \emptyset$ , para todo  $i$  desde dos y hasta  $n$ , ya que para todo  $j < i$ ,  $\pi_2(j) \in QK(D, \pi_2)$ ; pero,  $\pi_2(j)$  no pertenece a  $L_i(\pi_2)$  debido a que tanto  $\pi_2(j)$  como  $\pi_2(i)$  están en  $Q_1$ , el cual es un conjunto independiente. Por lo tanto, en la revisión hacia adelante en la construcción de  $Q_2$ , todos los vértices en  $Q_1$  son admitidos en  $QK(D, \pi_2)$ .
2. Ningún vértice en  $R_1(\pi_1)$  es aceptado en  $QK(D, \pi_2)$  en la revisión hacia adelante durante la construcción de  $Q_2$ . Lo anterior se debe a que para todo  $\pi_2(k) \in R_1(\pi_1)$ , existe  $\pi_2(i) \in QK(D, \pi_2)$  tal que  $\pi_2(i) \in N^+(\pi_2(k))$ , entonces  $QK(D, \pi_2) \cap L_k(\pi_2) \neq \emptyset$ .
3. El último vértice admitido en  $QK(D, \pi_2)$  en la revisión hacia adelante durante la construcción de  $Q_2$  pertenece a  $R_2(\pi_1)$ . Si tomamos  $\pi_2(m)$  el primer vértice respecto a  $\pi_2$  que pertenece a  $R_2(\pi_1)$ , sabemos que no existe  $\pi_2(i) \in N^+(\pi_2(m))$  tal que  $\pi_2(i) \in Q_1$  y por lo tanto, que pertenezca a  $QK(D, \pi_2)$ , entonces  $QK(D, \pi_2) \cap L_m(\pi_2) = \emptyset$ .

Ahora bien, puede existir otro vértice mayor a  $\pi_2(m)$  respecto al orden  $\pi_2$  que sea recibido en  $QK(D, \pi_2)$  en la revisión hacia adelante durante la construcción de  $Q_2$ ; pero, por como definimos al orden  $\pi_2$ , este nuevo vértice también pertenecería forzosamente a  $R_2(\pi_1)$ .

Ya que  $D$  no tiene núcleo,  $R_2(\pi_2) \neq \emptyset$ . Sea  $\pi_3$  un orden de  $V(D)$  que comienza por los elementos de  $Q_2$ , seguido de los vértices en  $R_1(\pi_2)$  y finalizando por los elementos de  $R_2(\pi_2)$ . Repitiendo el procedimiento establecido para la construcción de  $Q_2$ , obtenemos al conjunto  $Q_3 := QK(D, \pi_3)$ , además tenemos que  $Q_2 \neq Q_3$ . Notemos que el último vértice en  $Q_3$  pertenece a  $R_2(\pi_2)$ , y dicho conjunto no contiene elementos de  $Q_1$  ya que cualquier elemento de  $Q_1$  está en  $Q_2$  o en  $N^-(Q_2)$  por construcción, lo que implica que  $Q_1 \neq Q_3$ .

Por lo tanto, obtenemos que si  $D$  es una digráfica sin núcleo, entonces tiene al menos tres cuasinúcleos distintos.

El resultado anterior demuestra que si  $D$  es una digráfica que no contiene núcleo, entonces tiene al menos tres cuasinúcleos distintos; sin embargo, ¿es posible mostrar, aplicando sucesivamente el mismo procedimiento, que existe un cuarto cuasinúcleo distinto de los otros tres? Para contestar esta pregunta analicemos el siguiente ejemplo:

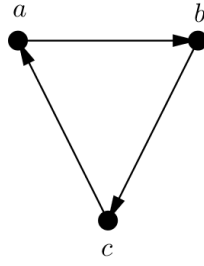


Figura 3.10. Digráfica sin núcleo

Para la digráfica de la figura 3.10, existen los siguientes posibles órdenes, los cuales analizaremos a continuación:

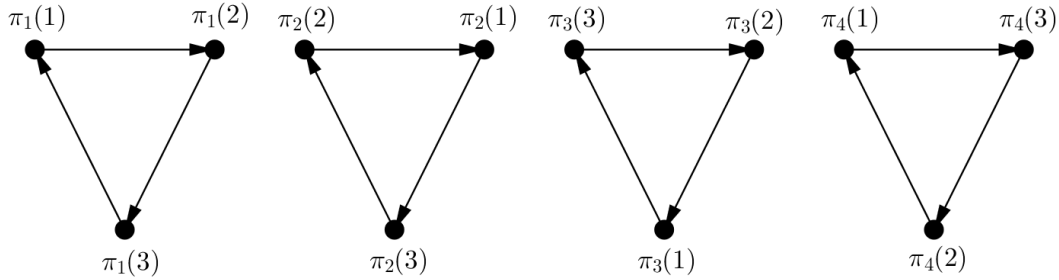


Figura 3.11. Posibles órdenes de la digráfica

Realizaremos la revisión hacia adelante correspondiente al orden dado por  $a = \pi_1(1)$ ,  $b = \pi_1(2)$  y  $c = \pi_1(3)$  en la figura 3.10. Sea  $Q := \emptyset$  el conjunto inicial, entonces:

- $L_1(\pi_1) = \emptyset$ , tenemos  $Q \cap L_1(\pi_1) = \emptyset$ , entonces  $Q := \{\pi_1(1)\}$ .
- $L_2(\pi_1) = \emptyset$ , tenemos  $Q \cap L_2(\pi_1) = \emptyset$ , entonces  $Q := \{\pi_1(1), \pi_1(2)\}$ .
- $L_3(\pi_1) = \{\pi_1(1)\}$ , tenemos  $Q \cap L_3(\pi_1) = \{\pi_1(1)\}$ , entonces  $Q := \{\pi_1(1), \pi_1(2)\}$ .

Ahora realizaremos la revisión hacia atrás correspondiente al orden dado, con  $Q := \{\pi_1(1), \pi_1(2)\}$  el conjunto inicial:

- $H_2(\pi_1) = \{\pi_1(3)\}$ , tenemos  $Q \cap H_2(\pi_1) = \emptyset$ , entonces  $Q := \{\pi_1(1), \pi_1(2)\}$ .
- $H_1(\pi_1) = \{\pi_1(2)\}$ , tenemos  $Q \cap H_1(\pi_1) = \{\pi_1(2)\}$ , entonces  $Q_1 := \{\pi_1(2)\} = \{b\}$ ,  
 $R_1(\pi_1) = \{\pi_1(1)\} = \{a\}$  y  $R_2(\pi_1) = \{\pi_1(3)\} = \{c\}$ .

Realizaremos la revisión hacia adelante correspondiente al orden dado por  $b = \pi_2(1)$ ,  $a = \pi_2(2)$  y  $c = \pi_2(3)$  en la figura 3.10. Sea  $Q := \emptyset$  el conjunto inicial, entonces:

- $L_1(\pi_2) = \emptyset$ , tenemos  $Q \cap L_1(\pi_2) = \emptyset$ , entonces  $Q := \{\pi_2(1)\}$ .
- $L_2(\pi_2) = \{\pi_2(1)\}$ , tenemos  $Q \cap L_2(\pi_2) = \{\pi_2(1)\}$ , entonces  $Q := \{\pi_2(1)\}$ .
- $L_3(\pi_2) = \{\pi_2(2)\}$ , tenemos  $Q \cap L_3(\pi_2) = \emptyset$ , entonces  $Q := \{\pi_2(1), \pi_2(3)\}$ .

Ahora realizaremos la revisión hacia atrás correspondiente al orden dado, con  $Q := \{\pi_2(1), \pi_2(3)\}$  el conjunto inicial:

- $H_3(\pi_2) = \emptyset$ , tenemos  $Q \cap H_2(\pi_2) = \emptyset$ , entonces  $Q := \{\pi_2(1), \pi_2(3)\}$ .

- $H_1(\pi_2) = \{\pi_2(3)\}$ , tenemos  $Q \cap H_1(\pi_2) = \{\pi_2(3)\}$ , entonces  $Q_2 := \{\pi_2(3)\} = \{c\}$ ,  
 $R_1(\pi_2) = \{\pi_2(1)\} = \{b\}$  y  $R_2(\pi_2) = \{\pi_2(2)\} = \{a\}$ .

Realizaremos la revisión hacia adelante correspondiente al orden dado por  $c = \pi_3(1)$ ,  $b = \pi_3(2)$  y  $a = \pi_3(3)$  en la figura 3.10. Sea  $Q := \emptyset$  el conjunto inicial, entonces:

- $L_1(\pi_3) = \emptyset$ , tenemos  $Q \cap L_1(\pi_3) = \emptyset$ , entonces  $Q := \{\pi_3(1)\}$ .
- $L_2(\pi_3) = \{\pi_3(1)\}$ , tenemos  $Q \cap L_2(\pi_3) = \{\pi_3(1)\}$ , entonces  $Q := \{\pi_3(1)\}$ .
- $L_3(\pi_3) = \{\pi_3(2)\}$ , tenemos  $Q \cap L_3(\pi_3) = \emptyset$ , entonces  $Q := \{\pi_3(1), \pi_3(3)\}$ .

Ahora realizaremos la revisión hacia atrás correspondiente al orden dado, con  $Q := \{\pi_3(1), \pi_3(3)\}$  el conjunto inicial:

- $H_3(\pi_3) = \emptyset$ , tenemos  $Q \cap H_3(\pi_3) = \emptyset$ , entonces  $Q := \{\pi_3(1), \pi_3(3)\}$ .
- $H_1(\pi_3) = \{\pi_3(3)\}$ , tenemos  $Q \cap H_1(\pi_3) = \{\pi_3(3)\}$ , entonces  $Q_3 := \{\pi_3(3)\} = \{a\}$ ,  
 $R_1(\pi_3) = \{\pi_3(1)\} = \{c\}$  y  $R_2(\pi_3) = \{\pi_3(2)\} = \{b\}$ .

Realizaremos la revisión hacia adelante correspondiente al orden dado por  $a = \pi_4(1)$ ,  $c = \pi_4(2)$  y  $b = \pi_4(3)$  en la figura 3.10. Sea  $Q := \emptyset$  el conjunto inicial, entonces:

- $L_1(\pi_4) = \emptyset$ , tenemos  $Q \cap L_1(\pi_4) = \emptyset$ , entonces  $Q := \{\pi_4(1)\}$ .
- $L_2(\pi_4) = \{\pi_4(1)\}$ , tenemos  $Q \cap L_2(\pi_4) = \{\pi_4(1)\}$ , entonces  $Q := \{\pi_4(1)\}$ .
- $L_3(\pi_4) = \{\pi_4(2)\}$ , tenemos  $Q \cap L_3(\pi_4) = \emptyset$ , entonces  $Q := \{\pi_4(1), \pi_4(3)\}$ .

Ahora realizaremos la revisión hacia atrás correspondiente al orden dado, con  $Q := \{\pi_4(1), \pi_4(3)\}$  el conjunto inicial:

- $H_3(\pi_4) = \emptyset$ , tenemos  $Q \cap H_3(\pi_4) = \emptyset$ , entonces  $Q := \{\pi_4(1), \pi_4(3)\}$ .
- $H_1(\pi_4) = \{\pi_4(3)\}$ , tenemos  $Q \cap H_1(\pi_4) = \{\pi_4(3)\}$ , entonces  $Q_4 := \{\pi_4(3)\} = \{b\}$ ,  
 $R_1(\pi_4) = \{\pi_4(1)\} = \{a\}$  y  $R_2(\pi_4) = \{\pi_4(2)\} = \{c\}$ .

Como podemos observar, la existencia del cuarto cuasinúcleo no puede ser establecida de este modo ya que no hay manera de garantizar que  $Q_4$  sea distinto de  $Q_1$ .

### 3.2. Dos cuasinúcleos en una digráfica sin pozos.

Si  $D = (V, F)$  es una digráfica con exactamente un cuasinúcleo  $Q_0$ , entonces  $Q_0$  contiene a todos los pozos de  $D$  y cada vértice de  $Q_0$  es un pozo. Más aún,  $Q_0$  es un núcleo de  $D$ , de otra manera, tomando el orden  $\pi$  de  $V(D)$  que comienza con los vértices en  $Q_0$  seguido de los vértices que no tienen exvecinos en  $Q_0$  (a este conjunto lo nombraremos  $V_2$ ) y finalizando con los que tienen al menos un exvecino en  $Q_0$  (a este conjunto lo llamaremos  $V_3$ ), obtenemos que todo vértice en  $Q_0$  es admitido en  $QK(D, \pi)$  al realizar la revisión hacia adelante, ya que por ser todos los vértices de exgrado cero, no pueden existir adyacencias entre ellos y por lo tanto ningún vértice en  $Q_0$  puede pertenecer al conjunto numerado de exvecinos inferiores respecto a  $\pi$  de otro de los vértices en  $Q_0$ .

Observemos también que ningún vértice en  $V_3$  puede ser aceptado en  $QK(D, \pi)$  durante la revisión hacia adelante ya que por definición todos los vértices en  $V_3$  tienen un exvecino menor respecto a  $\pi$  en  $Q_0$  y por lo tanto en  $QK(D, \pi)$ . Además, dado  $v$  el primer vértice respecto

a  $\pi$  en  $V_2$ , tenemos que este no tiene exvecinos inferiores en  $QK(D, \pi)$  al realizar la revisión hacia adelante, por lo que es admitido; si  $v$  es el último vértice que se incorpora a  $QK(D, \pi)$  al terminar la revisión hacia adelante, sabemos que  $v$  permanece en  $QK(D, \pi)$  al finalizar la revisión hacia atrás; si  $v$  no es el último vértice aceptado en  $QK(D, \pi)$  al terminar la revisión hacia adelante, quiere decir que existe al menos otro vértice que entró en  $QK(D, \pi)$  en la misma revisión. Sea  $u$  el último vértice respecto a  $\pi$  admitido en  $QK(D, \pi)$  durante la revisión hacia adelante, es claro, que  $u$  pertenece a  $V_2$  y  $u$  permanece en  $QK(D, \pi)$  al terminar ambas revisiones.

Por lo tanto,  $QK(D, \pi)$  es un cuasinúcleo con al menos un vértice que no está en  $Q_0$  y  $D$  tendría al menos dos cuasinúcleos distintos,  $Q_0$  y  $QK(D, \pi)$ , lo que es una contradicción ya que supusimos que  $D$  tiene solo un cuasinúcleo.

Por otro lado, sea  $D$  una digráfica con exactamente dos cuasinúcleos  $Q_1$  y  $Q_2$ . Sea  $\pi_1$  el orden de  $V(D)$  que comienza con los vértices en  $Q_1 \setminus Q_2$ , seguido de los vértices en  $Q_1 \cap Q_2$ , después por los vértices en  $Q_2 \setminus Q_1$  y finalizando con los vértices en  $V(D) \setminus (Q_1 \cup Q_2)$  (ver figura 3.12). Entonces  $Q := QK(D, \pi_1) \in \{Q_1, Q_2\}$ , lo que significa que cada vértice  $v \in V(D) \setminus (Q_1 \cup Q_2)$  tiene al menos un exvecino en  $Q$ , de otro modo el último vértice en  $Q$  pertenecería a  $V(D) \setminus (Q_1 \cup Q_2)$ . También cada vértice de  $\{Q_1, Q_2\} \setminus \{Q\}$  tal que no pertenece a  $Q_1 \cap Q_2$  tiene un exvecino en  $Q$  ya que cada uno de estos vértices no son admitidos en la revisión hacia delante o son eliminados en la revisión hacia atrás. Por lo tanto, si una digráfica tiene exactamente dos cuasinúcleos, entonces al menos uno de ellos es núcleo.

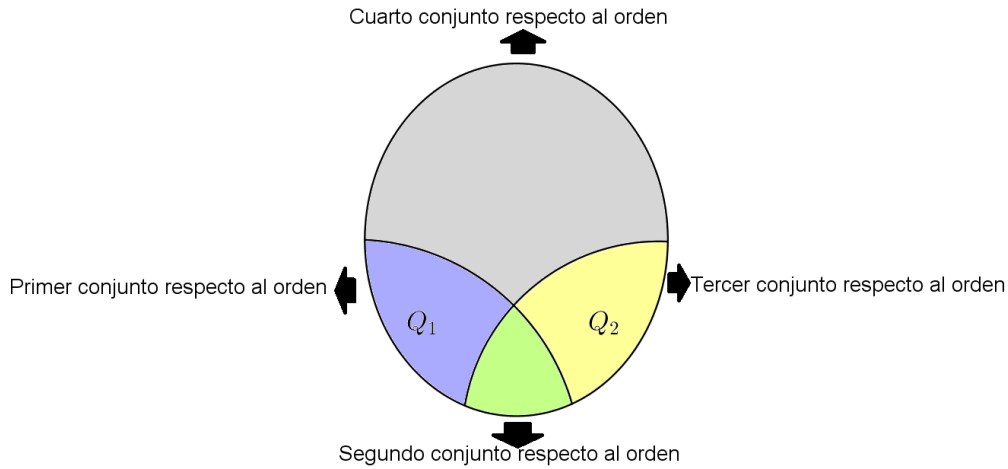


Figura 3.12. Distribución del orden  $\pi_1$

Luego, también tenemos que si  $D = (V, F)$  es una digráfica con exactamente dos cuasinúcleos  $Q_1$  y  $Q_2$  y  $S$  el subconjunto de  $V(D)$  que consiste en los pozos de  $D$ , entonces claramente  $S \subseteq Q_1 \cap Q_2$ . Además, si existe  $v$  en  $(Q_1 \cap Q_2) \setminus S$ , sea  $w$  un exvecino de  $v$  y consideramos cualquier orden  $\pi$  de  $V(D)$  que tenga a  $w$  y  $v$  como primer y segundo vértice, respectivamente, entonces  $Q := QK(D, \pi) \notin \{Q_1, Q_2\}$  ya que  $v \in Q_1 \cap Q_2$  no es admitido en  $Q$  durante la revisión hacia adelante, por lo que  $Q_1 \cap Q_2 \subseteq S$  y por lo tanto,  $Q_1 \cap Q_2 = S$ .

Ahora, si  $D = (V, F)$  es una digráfica con exactamente dos cuasinúcleos  $Q_1$  y  $Q_2$  y no tiene pozos, por las observaciones previas podemos suponer que  $Q_1$  es un núcleo de  $D$  y  $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$ . Sea  $w_2$  un vértice arbitrario de  $Q_2$ , ya que  $Q_1$  es un núcleo de  $D$ , existe un vértice  $v_2$  en  $Q_1$  un exvecino de  $w_2$ . Entonces el conjunto de los exvecinos de cada vértice en  $Q_1 \setminus \{v_2\}$  es  $\{w_2\}$ ; en efecto, supongamos que existe  $w_1$  un vértice en  $Q_1 \setminus \{v_2\}$  con  $(w_1, v_1)$  en las flechas de  $D$



y  $v_1 \neq w_2$ . Si  $(v_2, v_1)$  no está en  $F(D)$  (ver figura 3.13), entonces sea  $\pi$  el orden dado por  $v_1 = \pi(1)$ ,  $v_2 = \pi(2)$ ,  $w_1 = \pi(3)$  y  $w_2 = \pi(4)$ . Claramente  $v_1$  y  $v_2$  son admitidos en  $QK(D, \pi)$  durante la revisión hacia adelante, y ya que ambos son exvecinos menores respecto a  $\pi$  de  $w_1$  y  $w_2$  respectivamente, tenemos que  $w_1$  y  $w_2$  no pueden ser admitidos en  $QK(D, \pi)$  durante esta revisión; de modo que existe un vértice tanto de  $Q_1$  como de  $Q_2$  que no pertenece al cuasinúcleo  $Q := QK(D, \pi)$ , por lo tanto,  $Q := QK(D, \pi) \notin \{Q_1, Q_2\}$ .

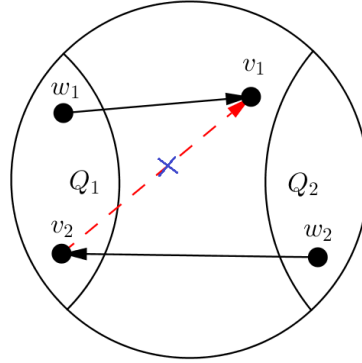


Figura 3.13. Relación entre los vértices  $v_1, v_2, w_1$  y  $w_2$  mencionada en el párrafo anterior

Similarmente, si  $(v_1, v_2)$  no está en  $F(D)$  (ver figura 3.14), entonces tenemos que el orden  $\pi$  de  $V(D)$  dado por  $v_2 = \pi(1)$ ,  $v_1 = \pi(2)$ ,  $w_1 = \pi(3)$  y  $w_2 = \pi(4)$  nos lleva a que  $v_1$  y  $v_2$  son admitidos en  $Q$  durante la revisión hacia adelante y por lo tanto,  $w_1$  y  $w_2$  no pueden serlo; lo cual implica que  $Q := QK(D, \pi)$  es de nuevo otro cuasinúcleo de  $D$  distinto de  $Q_1$  y  $Q_2$ . Por lo tanto, las flechas  $(v_1, v_2)$  y  $(v_2, v_1)$  deben ser parte de  $F(D)$ , lo que nos da que  $D[\{v_1, v_2\}]$  es un 2-ciclo en  $D$ .

Observese que el hecho de que  $v_1$  esté o no contenido en  $Q_2$  no influye en el resultado de las suposiciones anteriores.

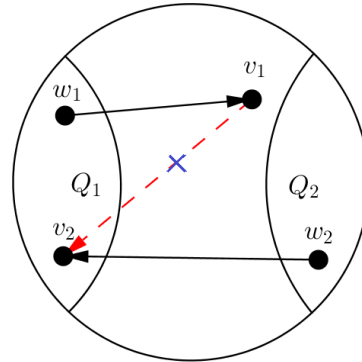


Figura 3.14. Relación entre los vértices  $v_1, v_2, w_1$  y  $w_2$  mencionada en el párrafo anterior

Sea  $D' = (V, F')$  la digráfica obtenida a partir de  $D$  al eliminar la flecha  $(v_1, v_2)$ ; es decir,  $F' = F(D') = F(D) \setminus \{(v_1, v_2)\}$ ,  $Q' = Q := QK(D, \pi)$  es también un cuasinúcleo de  $D$  ya que  $Q'$  absorbe a distancia uno o dos a  $V(D') = V(D)$  y al ser independiente en  $D'$  es también independiente en  $D$ , ya que los vértices que son adyacentes en  $D$  lo siguen siendo en  $D'$ . De esto podemos obtener que aún existiendo las flechas  $(v_1, v_2)$  y  $(v_2, v_1)$  en  $D$ , se puede encontrar un tercer cuasinúcleo distinto a  $Q_1$  y  $Q_2$ , lo que es una contradicción; entonces debe ocurrir que el conjunto de exvecinos de cada vértice en  $Q_1 \setminus \{v_2\}$  es  $\{w_2\}$ .

Ya que el vértice  $w_2 \in Q_2$  mencionado es arbitrario, para que el conjunto de exvecinos de cada vértice en el conjunto  $Q_1 \setminus \{v_2\}$  sea  $\{w_2\}$ , es necesario que  $|Q_2| = 1$  ó  $|Q_1| = |Q_2| = 2$

y la subdigráfica inducida por  $Q_1 \cup Q_2$  induce un ciclo de longitud cuatro en  $D$ . En ambos casos  $Q_2$  es un núcleo. Lo anterior se debe a que, si  $|Q_1| = 2$ , entonces existe un  $v_1$  en  $Q_1$  (en el ciclo de longitud cuatro) que tiene un exvecino en  $Q_2$ . Si  $|Q_1| = 1$ , sea  $Q_1 = \{v_1\}$  y  $(v_1, z) \in F(D)$  ( $z \in V(D)$  existe ya que sabemos que  $v_1$  no es un pozo), entonces cada vértice  $v \in V(D) \setminus \{v_1, z\}$  alcanza a  $z$  mediante dos flechas (a través de  $v_1$ ). Por lo anterior  $\{z\}$  es un cuasinúcleo en  $D$  y por lo tanto  $Q_2 = \{z\}$  y de nuevo existe  $v_1 \in Q_1$  con un exvecino en  $Q_2$ . Si  $Q_2$  no es un núcleo, entonces existe  $v_2 \in V(D) \setminus Q_2$  sin exvecinos en  $Q_2$ . Sea  $\pi$  el orden de  $V(D)$  que comienza con los vértices en  $Q_2$ , seguidos por  $v_1$  y  $v_2$  y finalizando con el resto de los vértices, entonces  $Q := QK(D, \pi)$  no contiene a  $v_1$ , ya que  $z$  es admitido en  $Q$  durante la revisión hacia adelante; también podemos observar que  $Q$  contiene al menos un vértice que no está en  $Q_2$ , ya que  $v_2$  es incorporado a  $Q$  durante la revisión hacia adelante, de lo que se sigue que el último vértice que pertenece a  $Q$  al momento de finalizar las dos revisiones no pertenece a  $Q_2$ .

Por lo tanto,  $Q \notin \{Q_1, Q_2\}$ , lo cual es una contradicción.

Ya que  $Q_2$  es un núcleo, se sigue (por repetición del argumento previo para  $Q_1$ ) que  $Q_1 \cup Q_2$  induce un ciclo de longitud dos o un ciclo de longitud cuatro en  $D$ , sin exvecinos en  $V(D) \setminus (Q_1 \cup Q_2)$ , y cada vértice en  $V(D) \setminus (Q_1 \cup Q_2)$  tiene al menos dos exvecinos en  $Q_1 \cup Q_2$ . Ya que una digráfica fuertemente conexa no contiene pozos, se sigue que:

*“Una digráfica  $D$  fuertemente conexa de orden al menos tres tiene al menos tres cuasinúcleos, a no ser que  $D$  sea un ciclo de longitud cuatro”*

Este resultado fue probado por Gutin, Kho, Tay y Yeo en “*On the number of quasi-kernels in digraphs*” en el año 2004.

### 3.3. Código para el algoritmo de las dos revisiones

Al analizar el algoritmo previo, es natural que, debido a su funcionamiento y metodología, se plantee la manera de programarlo, para hacer más fácil y rápida su aplicación en cualquier digráfica finita dada y un orden arbitrario del conjunto de sus vértices. Es por ello que, en esta sección, se presenta el código del algoritmo en lenguaje R de programación que hicimos.

Se eligió realizar el programa en lenguaje R ya que es muy sencillo trabajar con grandes volúmenes de datos; es decir, este programa es capaz de trabajar con matrices de dimensiones que superan las quinientas filas. Además, R aporta mayor facilidad al programar, ya que contribuye a la automatización en muchas operaciones en comparación con otros lenguajes de programación y permite el tratamiento y manipulación de datos con gran velocidad.

Para ejecutar dicho algoritmo, es necesario que se realice en una hoja de Excel o en un archivo de texto, una matriz de  $m$  columnas y dos filas en la que se enlisten, en la primera columna, los índices dados por el orden  $\pi$  de los vértices que son iniciales de alguna flecha de la digráfica; y en la segunda columna, los índices de su respectivo vértice final. Cabe señalar que en caso de existir algún vértice de exgrado cero en la digráfica, también se debe poner en la matriz como vértice inicial, y su respectivo vértice final será “cero”. Una vez realizada la matriz, se requiere que esta se copie en el portapapeles.

Como se mencionó previamente, R es capaz de soportar matrices de grandes dimensiones; para este caso en particular, podríamos trabajar con digráficas de tamaño mayor a quinientos

y encontrar un cuasinúcleo de la misma, en función de un orden arbitrario de sus vértices, sin ningún problema.

Ahora bien, una vez copiada la matriz en el portapapeles del equipo, se ejecuta cada comando del programa posicionando el cursor en la línea que corresponda a este y presionando Ctrl + Enter.

Primero veremos la explicación del algoritmo y luego dos ejemplos.

### 3.3.1. Explicación del código

A continuación se presenta de manera detallada cada etapa de la ejecución del programa; posteriormente, se muestra las líneas de código capturadas en el entorno de desarrollo utilizado (R Studio).

```
matriz_digrafica<-read.table("clipboard", sep="\t", header=FALSE, na.strings=".")
```

Este comando realiza la lectura de la matriz que fue almacenada en el portapapeles de la computadora por medio de una tabla en formato Excel o mediante un archivo de texto y le otorga el nombre de “matriz\_digrafica”.

Luego, es necesario ejecutar la siguiente función “exvecinos” para el cálculo de los conjuntos  $L_i$  y  $H_i$  de cada vértice de la digráfica.

```
exvecinos<-function(matriz){
  vec_sin_rep<-unique(matriz[,1])
  vec_sin_rep<-sort(vec_sin_rep, decreasing=FALSE)
  sin_rep<-length(vec_sin_rep)
```

Hasta este momento, la función aplicada a la matriz, toma la primera columna y construye un vector “vec\_sin\_rep” que consta de todos los elementos de esta, sin repeticiones, después lo ordena de forma creciente; es decir, ha creado un vector que consta de todos los vértices de la digráfica y los ha ordenado de manera creciente respecto al orden que le fue asignado a este conjunto. Además, calcula el orden de la digráfica, al sacar la longitud del vector mencionado.

Posteriormente, para cada vértice  $i$  con  $i \in \{1, \dots, n\}$ , donde  $n$  es el orden de la digráfica; es decir,  $n$  es la longitud del vector “vec\_sin\_rep”, el programa construye un vector “vec\_pos” en el que se muestra en qué fila de la primera columna de la matriz se encuentra dicho vértice; lo anterior lo realiza respecto al orden del vector “vec\_sin\_rep”; o sea, respecto al orden asignado a los vértices de la digráfica. Luego, genera un segundo vector “vec\_val” para cada vértice en el que, a partir del vector “vec\_pos”, se enlistan los vértices que se encuentran en la segunda columna de la matriz en las filas donde el vértice analizado se encuentra en la primera columna; dicho de otra manera, enlista a todos los vértices que son finales en alguna flecha que tiene como vértice inicial al vértice  $i$ .

```
lista<-list()
for(i in 1:sin_rep){
  vec_pos<-which(matriz[,1]==vec_sin_rep[i])
  vec_val<-matriz[vec_pos,2]
```

A continuación, para cada vértice  $i$  se construyen dos vectores “vec\_pos\_li” y “vec\_pos\_hi”, en los que se encuentra la posición de los valores en el vector “vec\_val” donde estos son menores a  $i$  o mayores a  $i$ , respectivamente.

```
vec_pos_li<-which(vec_val<vec_sin_rep[i])
vec_pos_hi<-which(vec_val>vec_sin_rep[i])
```

Después, para cada vértice  $i$  se construye un vector “vec\_val\_li” a partir de su respectivo vector “vec\_pos\_li” en el que se encuentran todos los vértices contenidos en “vec\_val” que son menores a  $i$  respecto al orden; en otras palabras, construye al conjunto  $L_i$ .

```
vec_val_li<-vec_val[vec_pos_li]
```

Análogamente, para cada vértice  $i$  se construye un vector “vec\_val\_hi” a partir de su respectivo vector “vec\_pos\_hi” en el que se encuentran todos los vértices contenidos en “vec\_val” que son mayores a  $i$  respecto al orden; en otras palabras, construye al conjunto  $H_i$ .

```
vec_val_hi<-vec_val[vec_pos_hi]
```

A cada vértice  $i$  se le asocia una lista que contiene al mismo vértice, a  $L_i$  y a  $H_i$ .

```
lista[[i]]<-list(vertice=vec_sin_rep[i], li=vec_val_li, hi=vec_val_hi)
}
return(lista)
}
```

Consecutivamente, el resultado de la función es una “lista de listas”, en la que se presenta una terna para cada vértice, la cual contiene al vértice mismo y sus respectivos conjuntos  $L_i$  y  $H_i$ .

A continuación, se llama al vector “vec\_sin\_rep” que contiene a todos los vértices de la digráfica, así como al resultado obtenido de aplicar la función previa a la “matriz\_digrafica”, ya que se requieren para realizar las siguientes etapas del algoritmo.

```
resultado<-exvecinos(matriz_digrafica)
vec_sin_rep<-unique(matriz_digrafica[,1])
vec_sin_rep<-sort(vec_sin_rep, decreasing=FALSE)
```

Posteriormente, se realiza la revisión hacia adelante, descrita en las secciones anteriores del presente capítulo, partiendo de un conjunto  $Q$  que solo consta del primer vértice respecto al orden, ya que sabemos que este siempre será admitido durante la revisión hacia adelante, y aceptando vértices siempre que la intersección de  $Q$  y el conjunto numerado de sus exvecinos inferiores,  $L_i$ , sea igual al vacío.

```
Q<-1
for(i in 2:length(resultado)){
  interseccion<-intersect(resultado[[i]]$li,Q)
  if(length(interseccion)==0){
    Q<-c(Q,resultado[[i]]$vertice)
  }
}
```

Por último, se realiza la revisión hacia atrás también descrita en las secciones anteriores, creando un conjunto  $Q$  auxiliar “Q\_aux” que parte del conjunto  $Q$  obtenido al realizar la revisión previa y expulsando a los vértices cuyo conjunto numerado de exvecinos superiores,  $H_i$ , intersectado con  $Q\_aux$  sea distinta del vacío.

```

Q_aux<-Q
for(i in length(Q):1){
  interseccion<-intersect(resultado[[which(vec_sin_rep==Q_aux[i])]]$hi,Q)
  if(length(interseccion)>0){
    Q<-Q[-which(Q==Q_aux[i])]
  }
}
Q

```

El último comando presenta el conjunto que se obtiene al ejecutar ambas revisiones; es decir, es el cuasinúcleo de la digráfica.

El código capturado en el entorno de desarrollo es el siguiente:

```

1
2 matriz_digrafica<-read.table("clipboard", sep="\t", header=FALSE, na.strings=".")
3
4 exvecinos<-function(matriz){
5   vec_sin_rep<-unique(matriz[,1])
6   vec_sin_rep<-sort(vec_sin_rep, decreasing=FALSE)
7   sin_rep<-length(vec_sin_rep)
8
9   lista<-list()
10  for(i in 1:sin_rep){
11    vec_pos<-which(matriz[,1]==vec_sin_rep[i])
12    vec_val<-matriz[vec_pos,2]
13    vec_pos_li<-which(vec_val<vec_sin_rep[i])
14    vec_pos_hi<-which(vec_val>vec_sin_rep[i])
15    vec_val_li<-vec_val[vec_pos_li]
16    vec_val_hi<-vec_val[vec_pos_hi]
17    lista[[i]]<-list(vertice=vec_sin_rep[i], li=vec_val_li, hi=vec_val_hi)
18  }
19  return(lista)
20 }
21
22 resultado<-exvecinos(matriz_digrafica)
23 vec_sin_rep<-unique(matriz_digrafica[,1])
24 vec_sin_rep<-sort(vec_sin_rep, decreasing=FALSE)
25
26 Q<-1
27 for(i in 2:length(resultado)){
28   interseccion<-intersect(resultado[[i]]$li,Q)
29   if(length(interseccion)==0){
30     Q<-c(Q,resultado[[i]]$vertice)
31   }
32 }
33
34 Q_aux<-Q
35 for(i in length(Q):1){
36   interseccion<-intersect(resultado[[which(vec_sin_rep==Q_aux[i])]]$hi,Q)
37   if(length(interseccion)>0){
38     Q<-Q[-which(Q==Q_aux[i])]
39   }
40 }
41
42 Q

```

En seguida mostramos, con dos ejemplos, el funcionamiento del programa.

### 3.3.2. Primer ejemplo

Sea  $D$  la digráfica presentada en la figura 3.15 y el orden  $\pi$  de  $V(D)$  que se muestra.

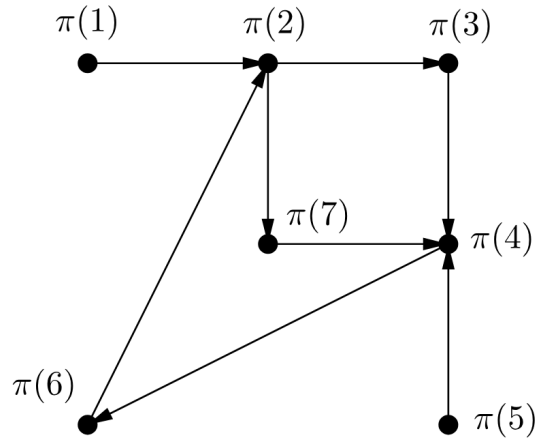


Figura 3.15. Ejemplo de una digráfica  $D$  y el orden  $\pi$  aplicado a  $V(D)$

El conjunto de flechas de la digráfica está dado por  $\{(\pi(1), \pi(2)), (\pi(2), \pi(3)), (\pi(2), \pi(7)), (\pi(3), \pi(4)), (\pi(4), \pi(6)), (\pi(5), \pi(4)), (\pi(6), \pi(2)), (\pi(7), \pi(4))\}$ . En la figura 3.16 se muestra la matriz correspondiente capturada en Excel.

	A	B
1	Vértice inicial	Vértice final
2	1	2
3	2	3
4	2	7
5	3	4
6	4	6
7	5	4
8	6	2
9	7	4
10		

Figura 3.16. Ejemplo de la matriz correspondiente a la digráfica  $D$  de la figura 3.15

A continuación, en la figura 3.17, se presenta el resultado que se obtiene del programa. Donde se muestra que el cuasinúcleo que se produce a partir del orden dado es  $Q = \{\pi(2), \pi(4)\}$ , el cual, claramente es un conjunto independiente y cuasiabsorbente en  $D$ .

```

26 return(lista)
27 }
28
29
30 # Cálculo de L1, H1 -----
31 resultado<-exvecinos(matriz_digrafica)
32 vec_sin_rep<-unique(matriz_digrafica[,1])
33 vec_sin_rep<-sort(vec_sin_rep, decreasing=FALSE)
34
35
36 # RevisiA^n hacia adelante -----
37 Q<-1
38 for(i in 2:length(resultado)){
39   interseccion<-intersect(resultado[[i]]$li,Q)
40   if(length(interseccion)==0){
41     Q<-c(Q,resultado[[i]]$vertice)
42   }
43 }
44
45 # RevisiA^n hacia atrás -----
46
47 Q_aux<-Q
48 for(i in length(Q):1){
49   interseccion<-intersect(resultado[[which(vec_sin_rep==Q_aux[i])]]$hi,Q)
50   if(length(interseccion)>0){
51     Q<-Q[-which(Q==Q_aux[i])]
52   }
53 }
54
55 Q
56
57

```

```

> # Cálculo de L1, H1 -----
> resultado<-exvecinos(matriz_digrafica)
> vec_sin_rep<-unique(matriz_digrafica[,1])
> vec_sin_rep<-sort(vec_sin_rep, decreasing=FALSE)
> # RevisiA^n hacia adelante -----
> Q<-1
> for(i in 2:length(resultado)){
+ interseccion<-intersect(resultado[[i]]$li,Q)
+ if(length(interseccion)==0){
+   Q<-c(Q,resultado[[i]]$vertice)
+ }
+ }
> Q_aux<-Q
> for(i in length(Q):1){
+ interseccion<-intersect(resultado[[which(vec_sin_rep==Q_aux[i])]]$hi,Q)
+ if(length(interseccion)>0){
+   Q<-Q[-which(Q==Q_aux[i])]
+ }
+ }
> Q
+ 1 2 4

```

Figura 3.17. Interfaz y resultado arrojado por el programa para la digráfica  $D$  de la figura 3.15

Notemos que, en el ejemplo anterior, la digráfica presentada no tiene vértices de exgrado cero. A continuación, presentamos un ejemplo que cuenta con pozos y vemos que el programa sigue funcionando.

### 3.3.3. Segundo ejemplo

Sea  $D$  la digráfica presentada en la figura 3.18 y el orden  $\mu$  de  $V(D)$  que se muestra.

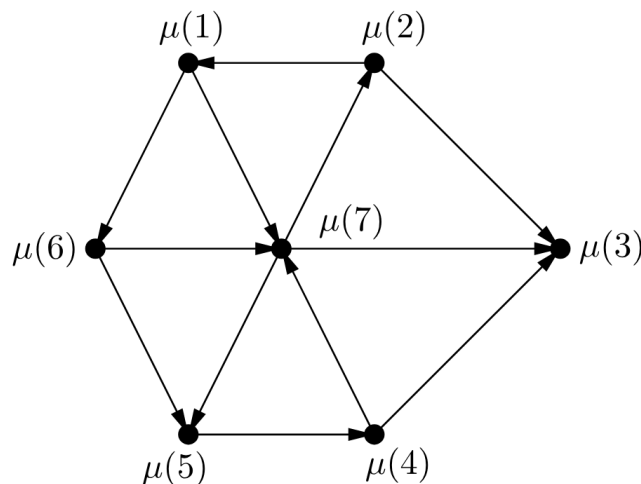


Figura 3.18. Ejemplo de una digráfica  $D$  y el orden  $\pi$  aplicado a  $V(D)$

El conjunto de flechas de la digráfica está dado por  $\{(\mu(1), \mu(6)), (\mu(1), \mu(7)), (\mu(2), \mu(1)), (\mu(2), \mu(3)), (\mu(4), \mu(3)), (\mu(4), \mu(7)), (\mu(5), \mu(4)), (\mu(6), \mu(5)), (\mu(6), \mu(7)), (\mu(7), \mu(2)), (\mu(7), \mu(3)), (\mu(7), \mu(5))\}$ . En la figura 3.19 se muestra la matriz correspondiente capturada en Excel.

	A	B
1	Vértice inicial	Vértice final
2	1	7
3	1	6
4	2	1
5	2	3
6	3	0
7	4	7
8	4	3
9	5	4
10	6	5
11	6	7
12	7	2
13	7	3
14	7	5
15		
16		

Figura 3.19. Ejemplo de la matriz correspondiente a la digráfica  $D$  de la figura 3.18

Notemos que el vértice  $\mu(3)$  es un pozo de la digráfica; sin embargo, debe capturarse en la matriz como vértice inicial de una flecha que termina en el vértice de índice “cero”; esto debido a que de no registrarse como vértice inicial de ninguna flecha, el programa no podría tomarlo en cuenta para generar los vectores que enlistan a todos los vértices de la digráfica, además de que calcularía mal el orden de la misma y ocasionaría que todo el proceso se generara con un error.

A continuación, en la figura 3.20, se presenta el resultado que se obtiene del programa. Donde se muestra que el cuasinúcleo que se produce a partir del orden dado es  $Q = \{\mu(1), \mu(3), \mu(5)\}$ , el cual, claramente es un conjunto independiente y cuasiabsorbente en  $D$ .



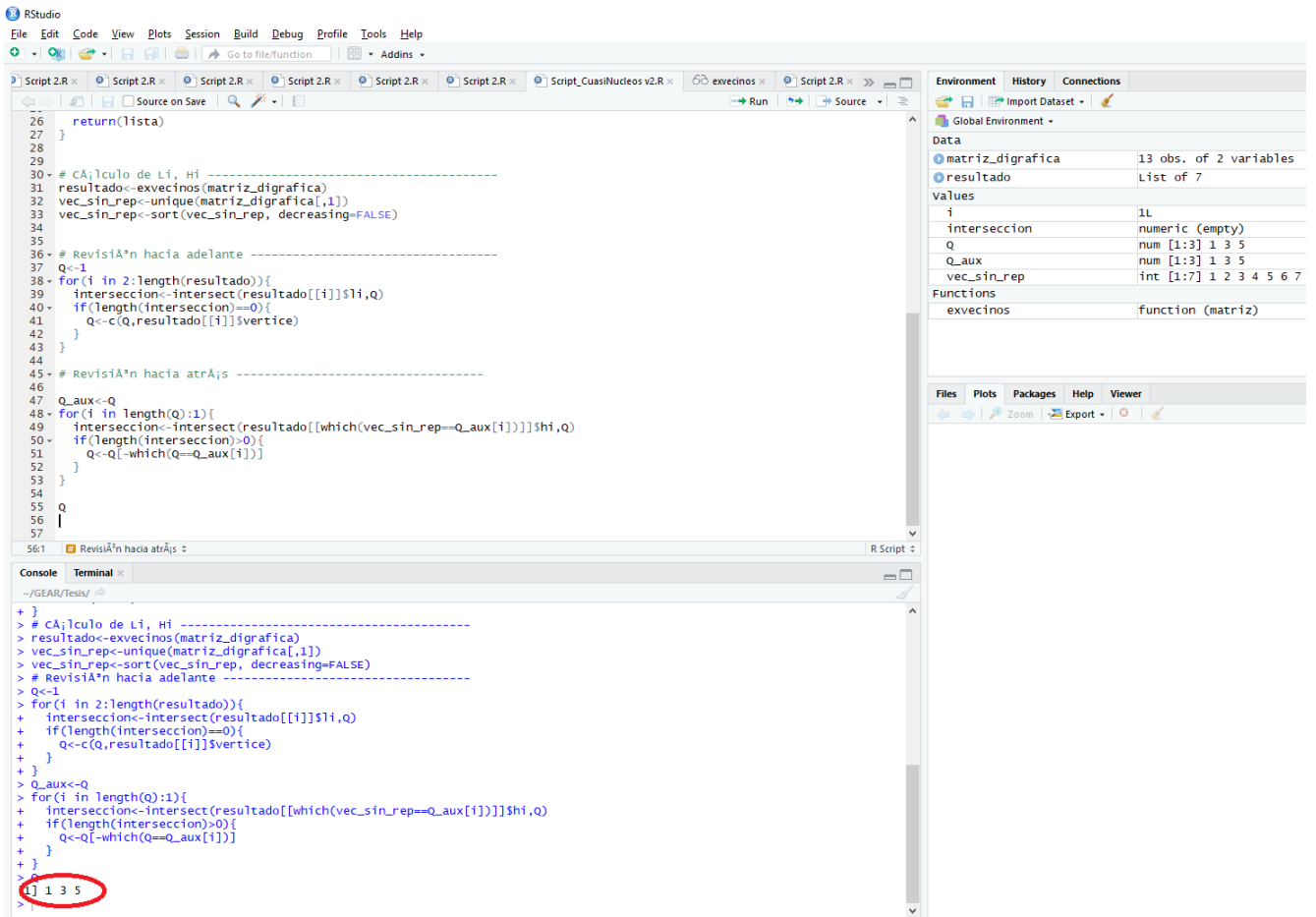


Figura 3.20. Interfaz y resultado arrojado por el programa para la digráfica  $D$  de la figura 3.18

# Capítulo 4

## Cuasinúcleos y cuasisoluciones en digráficas infinitas

Probamos en el teorema 2.1.5 que toda digráfica de orden finito tiene al menos un cuasinúcleo. El objetivo de este capítulo es analizar lo que sucede con las digráficas infinitas, refiriéndonos a estas como las digráficas que tienen un conjunto infinito de vértices; además, de abarcar el caso de los torneos infinitos. Veremos que no para toda digráfica infinita se cumple que esta contiene un cuasinúcleo; sin embargo, estudiaremos las propiedades que poseen las particiones de los conjuntos de vértices de las digráficas infinitas en cuanto a los cuasinúcleos y cuasisoluciones que contienen.

Primero revisaremos algunas definiciones importantes que emplearemos a lo largo del capítulo; seguido de algunos resultados de digráficas con características similares a las digráficas finitas; por ejemplo, digráficas con número monocromático finito que; sin embargo, pueden tener un orden infinito.

Por último, analizaremos la situación de torneos infinitos. Además de estudiar en qué casos podemos asegurar que una digráfica cuenta con una bipartición de sus vértices que cumple que la digráfica inducida por los vértices de una de las clases de la partición tiene un cuasinúcleo y la digráfica inducida por los vértices de la otra clase contiene una cuasisolución.

Los siguientes resultados se presentan en la primera parte del artículo “*Quasi-kernels and quasi-sinks in infinite graphs*” [10] de Péter L. Erdős y Lajos Soukup.

### 4.1. Definiciones y resultados preliminares

Sean dos números naturales  $n$  y  $m$ , definimos a los conjuntos:

- $\mathfrak{A}_n = \{D \text{ una digráfica} : \text{existe } A \subseteq V(D) \text{ independiente y } n - \text{absorbente en } D\}$ .
- $\mathfrak{D}_m = \{D \text{ una digráfica} : \text{existe } B \subseteq V(D) \text{ independiente y } m - \text{dominante en } D\}$ .
- $\mathfrak{A}_n - \mathfrak{D}_m = \{D \text{ una digráfica} : \text{hay una bipartición } (V_1, V_2) \text{ de } V(D) \text{ tal que existe } A \subseteq V_1 \text{ independiente y } n - \text{absorbente en } D[V_1] \text{ y existe } B \subseteq V_2 \text{ independiente y } m - \text{dominante en } D[V_2]\}$ .

Dada  $D$  una digráfica y dos números naturales  $n$  y  $m$ , decimos que:

- $D$  es hereditaria en  $\mathfrak{A}_n$  si  $H \in \mathfrak{A}_n$  para cada subdigráfica inducida  $H$  de  $D$ .
- $D$  es hereditaria en  $\mathfrak{D}_m$  si  $H \in \mathfrak{D}_m$  para cada subdigráfica inducida  $H$  de  $D$ .

- $D$  es hereditaria en  $\mathfrak{A}_n - \mathfrak{D}_m$  si existe una bipartición  $(H_1, H_2)$  de los vértices de  $H$ , tal que:

- a)  $H_1$  contiene un subconjunto  $A \subseteq H_1$ , independiente y  $n$ -absorbente en  $D[H_1]$ ,
- b)  $H_2$  contiene un subconjunto  $B \subseteq H_2$ , independiente y  $m$ -dominante en  $D[H_2]$

para cada subdigráfica inducida  $H$  de  $D$ .

**Teorema 4.1.1** Cada digráfica  $D = (V(D), F(D))$ , contiene dos subconjuntos  $A$  y  $B$  de  $V(D)$  independientes y disjuntos, tales que  $V(D) = N_2^-[A] \cup N_2^+[B]$  (ver figura 4.1).

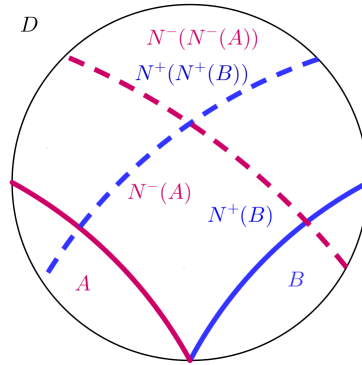


Figura 4.1. Unión de los conjuntos  $N_2^-[A]$  y  $N_2^+[B]$

**Demostración.** Sean  $V_0$  un conjunto independiente máximo por contención de  $V(D)$ , y  $V_1$  un conjunto independiente máximo por contención de la digráfica inducida por  $V(D) \setminus N^-[V_0]$ .

Sean:

- $B \subseteq V(D)$ , dado por  $V_0 \cap N^-(V_1) = B$ .
- $A \subseteq V(D)$ , dado por  $V_1 \cup (V_0 \setminus B) = A$ .

Observemos que como  $V_0$  y  $V_1$  son conjuntos independientes, entonces  $B$  es independiente por estar contenido en  $V_0$  y  $A$  es independiente ya que  $F((V_0 \setminus N^-(V_1)), V_1) = \emptyset$  y  $F(V_1, (V_0 \setminus N^-(V_1))) = \emptyset$ ; debido a que  $V_1 \subseteq (V(D) \setminus N^-[V_0])$ . Además,  $A$  y  $B$  son ajenos por construcción (ver figura 4.2).

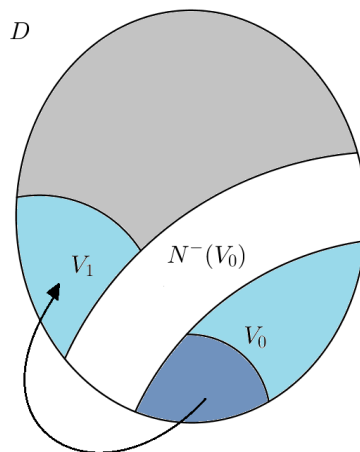


Figura 4.2. La digráfica  $D$  y los subconjuntos de  $V(D)$  que la conforman

Por otro lado, tenemos la siguiente igualdad:

$$N^-[V_0] = (N^-[V_0 \cap N^-[V_1]] \cup N^-[V_0 \setminus N^-[V_1]]).$$

Por construcción, sabemos que:

$$\begin{aligned} N^-[V_0 \cap N^-[V_1]] &\subseteq N_2^-[V_1] \text{ y} \\ N^-[V_0 \setminus N^-[V_1]] &\subseteq N_2^-[A]. \end{aligned}$$

Entonces, de lo anterior, se obtiene que:

$$(N^-[V_0 \cap N^-[V_1]] \cup N^-[V_0 \setminus N^-[V_1]]) \subseteq N_2^-[V_1] \cup N_2^-[A]$$

Además, como  $V_1 \subseteq A$ , entonces

$$(N_2^-[V_1] \cup N_2^-[A]) \subseteq N_2^-[A].$$

Así

$$N^-[V_0] = (N^-[V_0 \cap N^-[V_1]] \cup N^-[V_0 \setminus N^-[V_1]]) \subseteq N_2^-[A] \quad (4.1)$$

(ver figura 4.3).

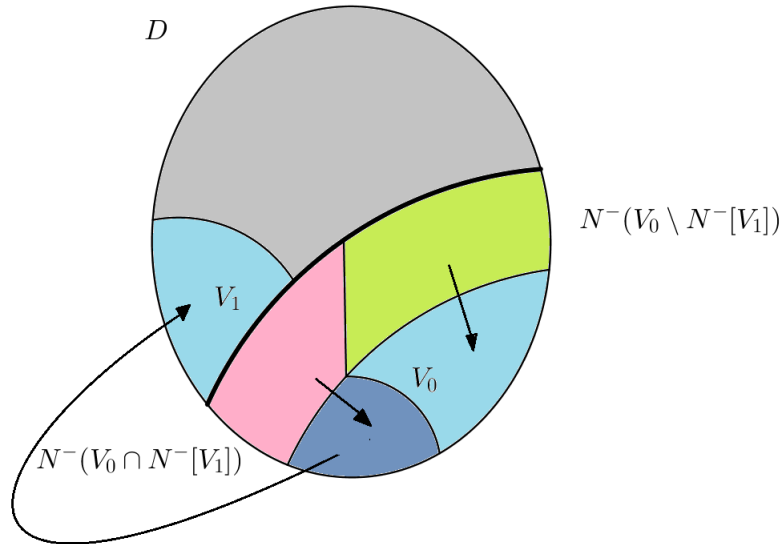


Figura 4.3. La digráfica  $D$  y los subconjuntos de  $V(D)$  que la conforman

Ahora bien, notemos que  $V_1 \subseteq N^+(B)$ , de no ser así, existe un vértice  $x \in V_1$  tal que  $x \notin N^+(B)$ ; es decir, no existe una  $Bx$ -flecha, y ya que  $F(V_1, B) = \emptyset$  por construcción, entonces el conjunto  $V_0 \cup \{x\}$  es independiente, lo cual genera una contradicción; ya que  $V_0$  es independiente máximo. Por lo anterior tenemos que:

$$N^+[V_1] \subseteq N_2^+[B]. \quad (4.2)$$

Como  $V_1$  es independiente máximo por contención en la digráfica inducida por  $V(D) \setminus N^-[V_0]$ , entonces

$$(V(D) \setminus N^-[V_0]) = (N^+[V_1] \cup N^-[V_1]).$$

Por 4.2 y ya que  $V_1 \subseteq A$

$$(N^+[V_1] \cup N^-[V_1]) \subseteq (N_2^+[B] \cup N^-[A]).$$

Entonces

$$(V(D) \setminus N^-[V_0]) = (N^+[V_1] \cup N^-[V_1]) \subseteq (N_2^+[B] \cup N^-[A]) \subseteq (N_2^+[B] \cup N_2^-[A]). \quad (4.3)$$

De (4.1) y (4.3), tenemos que

$$\begin{aligned} N^-[V_0] &\subseteq N_2^-[A]. \\ (V(D) \setminus N^-[V_0]) &\subseteq (N_2^+[B] \cup N_2^-[A]). \\ ((V(D) \setminus N^-[V_0]) \cup N^-[V_0]) &\subseteq (N_2^+[B] \cup N_2^-[A]). \end{aligned}$$

Entonces

$$V(D) \subseteq (N_2^-[A] \cup N_2^+[B]).$$

Por lo tanto,  $V(D) = N_2^-[A] \cup N_2^+[B]$ . ■

**Teorema 4.1.2** Sean  $D = (V(D), F(D))$  una digráfica,  $n$  y  $k$  números naturales, y  $n \geq 1$ . Si existe  $(V_0, V_1, \dots, V_{k-1}, V_k)$  una  $(k+1)$ -partición de  $V(D)$ , tal que:

1.  $D[V_0]$  es hereditaria en  $\mathfrak{D}_{n+1}$ .
2.  $D[V_i]$  es hereditaria en  $\mathfrak{D}_n$ , para  $1 \leq i < k$ .
3. Ya sea que  $k = 0$  ó  $D[V_k] \in \mathfrak{D}_n$ .

Entonces,  $D \in \mathfrak{D}_{n+1}$ .

**Demostración.** (Por inducción sobre  $k$ ).

*Base inductiva:* Para  $k = 0$ , se tiene que  $V(D) = V_0$ . Entonces,  $D = D[V_0]$  y por (1) se cumple que  $D \in \mathfrak{D}_{n+1}$ .

*Hipótesis de inducción:* Suponemos válido el teorema para una partición de orden  $k$ , con  $k \geq 0$ .

*Paso inductivo:* Por demostrar que el teorema es válido para una partición de orden  $(k+1)$ , para  $k \geq 1$ .

*Demostración:* Sea  $(V_0, V_1, \dots, V_{k-1}, V_k)$  una  $(k+1)$ -partición de  $V(D)$  que satisface las hipótesis del teorema, por (3) existe  $A_k \subseteq V_k$  un conjunto independiente, tal que para todo  $v \in V_k \setminus A_k$  hay una  $A_k v$ -trayectoria de longitud a lo más  $n$ .

Para  $0 \leq i < k$ , sean

$$\begin{aligned} V'_i &= V_i \setminus N^+(A_k) \text{ y} \\ V' &= \bigcup_{i=0}^{k-1} V'_i \end{aligned}$$

Notemos que el hecho de que la partición de orden  $(k+1)$  dada por  $(V_1, V_2, \dots, V_{k-1}, V_k)$  cumpla (1) y (2) implica que  $D[V'_0]$  es hereditaria en  $\mathfrak{D}_{n+1}$  y  $D[V'_i]$  es hereditaria en  $\mathfrak{D}_n$  para  $1 \leq i \leq k-1$ , ya que cada  $D[V'_i]$  es una subdigráfica inducida de  $D[V_i]$  para cada  $0 \leq i \leq k-1$ . Entonces la partición de orden  $k$  dada por  $(V'_0, V'_1, \dots, V'_{k-1})$  satisface (1), (2) y (3); es decir, se cumple que:

1.  $D[V'_0]$  es hereditaria en  $\mathfrak{D}_{n+1}$ .

2.  $D[V'_i]$  es hereditaria en  $\mathfrak{D}_n$  para  $1 \leq i \leq k-1$ .
3. Ya sea que  $(k-1) = 0$  ó  $D[V'_{k-1}] \in \mathfrak{D}_n$ .

Consideremos la subdigráfica  $D[V'] = D'$ . Debido a que la partición en los vértices de  $D'$  de orden  $k$ , dada anteriormente, cumple las hipótesis del teorema, podemos aplicar la hipótesis de inducción a  $D'$ . Por lo que obtenemos que  $D' \in \mathfrak{D}_{n+1}$ ; es decir, existe  $A' \subseteq V'$  un conjunto independiente tal que hay una  $A'v$ -trayectoria de longitud a lo más  $n+1$ , para todo  $v \in V' \setminus A'$  (ver figura 4.4).

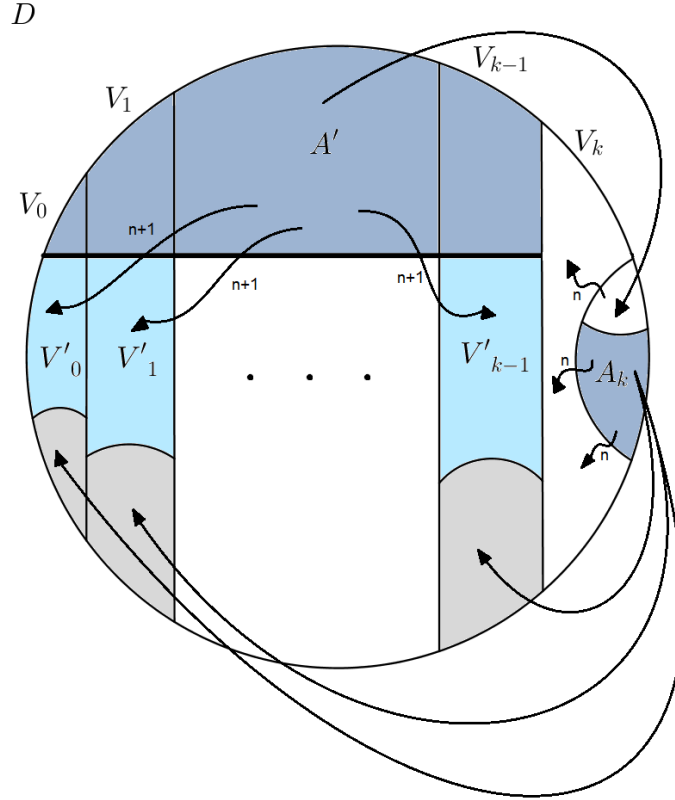


Figura 4.4. La digráfica  $D$  y los subconjuntos de  $V(D)$  que la conforman

Sea  $\bar{A} = A' \cup (A_k \setminus N^+[A'])$ , observemos que  $\bar{A}$  es independiente por lo que sigue:

- $A'$  es independiente,
- $(A_k \setminus N^+[A'])$  también es un conjunto independiente por estar contenido en un conjunto independiente,
- $F(A', (A_k \setminus N^+[A']))_D = \emptyset$  y
- debido a que  $(N^+[A_k] \cap A') \subset (N^+[A_k] \cap V') = \emptyset$  por construcción, entonces  $F(A_k, A')_D = \emptyset$ .

Por otro lado, sea  $v$  un vértice de  $D$ , tal que  $v \in V(D) \setminus \bar{A}$ ; para probar que  $\bar{A}$  es un conjunto  $n+1$ -dominante, debemos analizar los siguientes casos:

*Caso 1:* Si  $v \in V_k \setminus \bar{A}$ , entonces ya sea que existe una  $(A_k \setminus N^+(A'))v$ -trayectoria de longitud  $n$  ó existe una  $(A_k \cap N^+(A'))v$ -trayectoria de longitud  $n$ . En el primer supuesto, existe una

$\bar{A}v$ -trayectoria de longitud  $n$  ya que  $(A_k \setminus N^+(A')) \subseteq \bar{A}$ ; para el segundo existe una  $\bar{A}v$ -trayectoria de longitud  $n + 1$  ya que  $(A_k \cap N^+(A')) \subseteq N^+(\bar{A})$ .

*Caso 2:* Si  $v \in V' \setminus \bar{A}$ , entonces existe una  $A'v$ -trayectoria de longitud  $n + 1$ , ya que  $A' \subseteq \bar{A}$ ; por lo que existe una  $\bar{A}v$ -trayectoria de longitud  $n + 1$ .

*Caso 3:* Si  $v \in V_i \cap N^+(A_k)$ , entonces ya sea que existe una  $(A_k \setminus N^+(A'))v$ -flecha, en cuyo caso existe una  $\bar{A}v$ -trayectoria de longitud uno ya que  $(A_k \setminus N^+(A')) \subseteq \bar{A}$ ; ó existe una  $(A_k \cap N^+(A'))v$ -flecha, por lo cual, existe una  $\bar{A}v$ -trayectoria de longitud dos, ya que  $(A_k \cap N^+(A')) \subseteq N^+(\bar{A})$ . Entonces, ya que  $n + 1 \geq 2$ , se sigue que existe una  $\bar{A}v$ -trayectoria de longitud menor o igual a  $n + 1$ .

En cualquier caso,  $\bar{A}$  es un conjunto independiente tal que hay una  $\bar{A}v$ -trayectoria de longitud menor o igual a  $n + 1$ , para todo  $v \in V \setminus \bar{A}$ .

Por lo tanto,  $D \in \mathfrak{D}_{n+1}$ . ■

**Corolario 4.1.3** *Sea  $D$  cualquier digráfica (de orden finito o infinito), si  $D$  tiene número cromático finito, entonces  $D$  tiene al menos una cuasisolución.*

**Demostración.** Sean  $D$  una digráfica con número cromático  $k$  y  $(V_0, V_1, \dots, V_{k-1})$  las clases de color de  $D$ . Sabemos que  $V_i$  es un conjunto independiente para toda  $i$  en  $\{0, 1, \dots, k - 1\}$ ; por lo que cada subdigráfica  $D[V_i]$  es de tamaño cero, lo cual implica que es hereditaria en  $\mathfrak{D}_1$  para toda  $i$  en  $\{0, 1, \dots, k - 1\}$ , ya que en cualquier subdigráfica inducida  $H_i$  de  $D[V_i]$  siempre se puede hallar un subconjunto de vértices independiente y dominante en  $H_i$ , el cual consta de todos los vértices de  $V(H_i)$ . Entonces podemos aplicar el teorema anterior, lo que implica que  $D \in \mathfrak{D}_{n+1}$  con  $n = 1$ , por lo tanto,  $D \in \mathfrak{D}_2$ .

Por lo tanto,  $D$  tiene una cuasisolución. ■

**Corolario 4.1.4** *Sea  $D$  cualquier digráfica (de orden finito o infinito), si  $D$  tiene número cromático finito, entonces  $D$  tiene al menos un cuasinúcleo.*

**Demostración.** Aplicando el corolario 4.1.3 a la digráfica dual de  $D$ , se obtiene un cuasinúcleo de la digráfica  $D$  original. ■

**Teorema 4.1.5** *Sean  $D = (V(D), F(D))$  una digráfica,  $l \geq 1$  y  $m \geq 1$  números naturales. Si existe  $(V_0, V_1, \dots, V_{k-1}, V_k)$  una  $k + 1$  partición de  $V(D)$ , tal que:*

1.  $D[V_0]$  es hereditaria en  $\mathfrak{A}_{m+1} - \mathfrak{D}_{l+1}$ ,
2.  $D[V_i]$  es hereditaria en  $\mathfrak{A}_m - \mathfrak{D}_l$ , para  $1 \leq i < k$ ,
3. Ya sea que  $k = 0$  ó  $D[V_k] \in \mathfrak{A}_m - \mathfrak{D}_l$ ,

entonces  $D \in \mathfrak{A}_{m+1} - \mathfrak{D}_{l+1}$ .

**Demostración.** Por inducción sobre  $k$ .

*Base inductiva:* Para  $k = 0$ , se tiene que  $V = V_0$ . Entonces  $D = D[V_0]$  y por (1) se cumple que  $D \in \mathfrak{A}_{m+1} - \mathfrak{D}_{l+1}$ .

*Hipótesis de inducción:* Suponemos válido el teorema para una partición de orden  $k$ , con  $k \geq 0$ .

*Paso inductivo:* Por demostrar que el teorema es válido para una partición de orden  $(k + 1)$ , para  $k \geq 1$ .

*Demostración:* Sea  $(V_0, V_1, \dots, V_{k-1}, V_k)$  una  $(k + 1)$  partición de  $V(D)$  que satisface las hipótesis del teorema, por (3)  $D[V_k] \in \mathfrak{A}_m - \mathfrak{D}_l$ ; es decir, existe una  $(V_{k_1}, V_{k_2})$  partición de  $V_k$  tal que:

$$\begin{aligned} V_{k_1} &= N_m^-[A_k]_{D[V_{k_1}]} \text{ y} \\ V_{k_2} &= N_l^+[B_k]_{D[V_{k_2}]} \end{aligned}$$

para algún  $A_k \subseteq V_{k_1}$  y  $B_k \subseteq V_{k_2}$  conjuntos independientes.

Para  $0 \leq i < k$ , sean

$$\begin{aligned} V^* &= (N^-(A_k) \cup N^+[B_k] \setminus V_k), \\ V' &= (V(D) \setminus V_k) \setminus V^* \text{ y} \\ V'_i &= V_i \cap V' \end{aligned}$$

(ver figura 4.5).

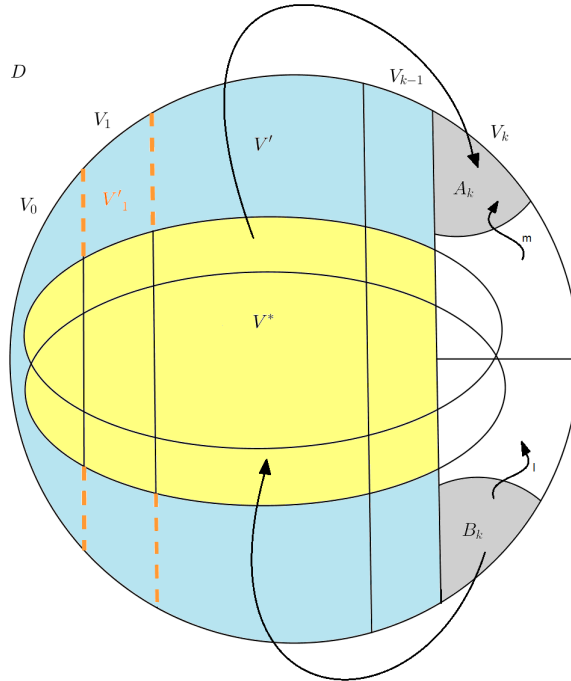


Figura 4.5. La digráfica  $D$  y los subconjuntos de  $V(D)$  que la conforman

Notemos que el hecho de que la partición de orden  $(k + 1)$  dada por  $(V_0, V_1, \dots, V_{k-1}, V_k)$  cumpla (1) y (2) implica que  $V'_0$  es hereditaria en  $\mathfrak{A}_{m+1} - \mathfrak{D}_{l+1}$  y  $V'_i$  es hereditaria en  $\mathfrak{A}_m - \mathfrak{D}_l$  para  $1 \leq i \leq k - 1$ , ya que cada  $D[V'_i]$  es una subdigráfica inducida de  $D[V_i]$  para cada  $0 \leq i \leq k - 1$ . Entonces la partición de orden  $k$  dada por  $(V'_0, V'_1, \dots, V'_{k-1})$  satisface (1), (2) y (3); es decir, se cumple que:



1.  $D[V'_0]$  es hereditaria en  $\mathfrak{A}_{m+1} - \mathfrak{D}_{l+1}$ ,
2.  $D[V'_i]$  es hereditaria en  $\mathfrak{A}_m - \mathfrak{D}_l$  para  $1 \leq i \leq k-1$ ,
3. Ya sea que  $(k-1) = 0$  ó  $D[V'_{k-1}] \in \mathfrak{A}_m - \mathfrak{D}_l$ .

Consideremos la subdigráfica  $D[V'] = D'$ . Debido a que la partición en los vértices de  $D'$  de orden  $k$  dada anteriormente cumple las hipótesis del teorema, podemos aplicar la hipótesis de inducción a  $D'$ . Por lo que obtenemos que  $D' \in \mathfrak{A}_{m+1} - \mathfrak{D}_{l+1}$ ; es decir, hay una  $(X', Y')$  bipartición de  $V'$  tal que existen  $A' \subseteq X'$  y  $B' \subseteq Y'$  tales que:

$$\begin{aligned} X' &= N_{m+1}^- [A']_{D[X']} \text{ y} \\ Y' &= N_{l+1}^+ [B']_{D[Y']} \end{aligned}$$

(ver figura 4.6).

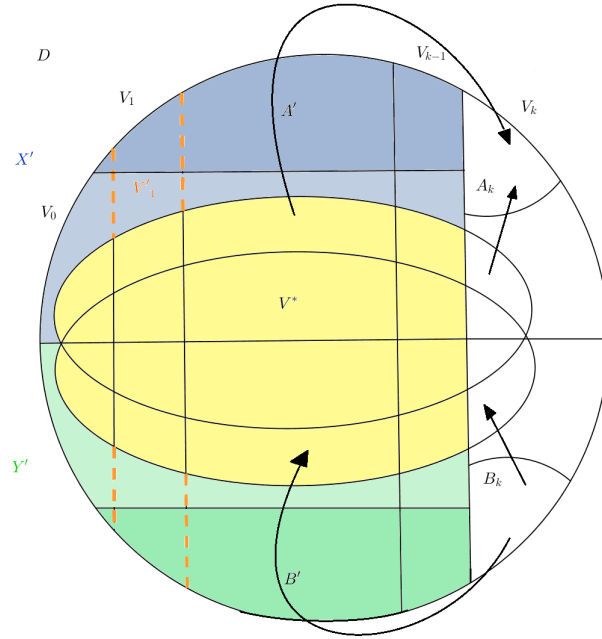


Figura 4.6. La digráfica  $D$  y los subconjuntos de  $V(D)$  que la conforman

Ahora, sea  $(X, Y)$  una bipartición de  $V(D)$  tal que:

$$\begin{aligned} (X' \cup V_{k_1}, Y' \cup V_{k_2}) &= (X \setminus V^*, Y \setminus V^*), \\ X \cap V^* &\subseteq N^- [A_k]_D \text{ y} \\ Y \cap V^* &\subseteq N^+ [B_k]_D \end{aligned}$$

(ver figura 4.7).

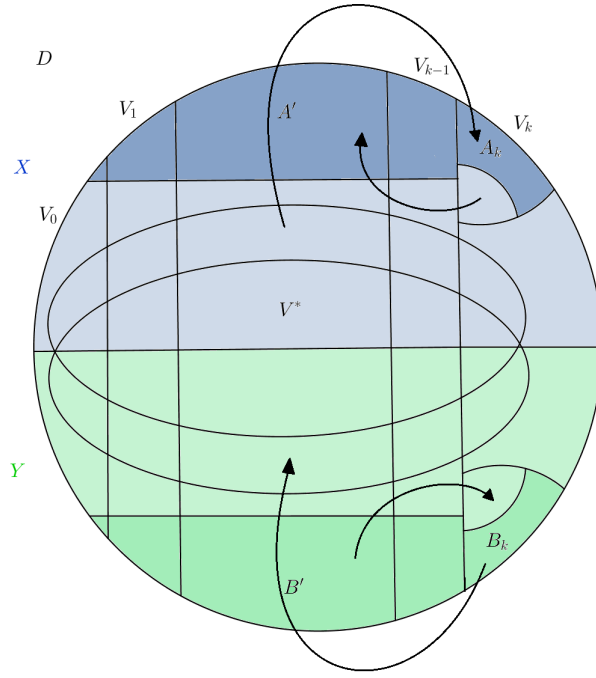


Figura 4.7. La digráfica  $D$  y los subconjuntos de  $V(D)$  que la conforman

A continuación, buscaremos definir a los conjuntos  $A$  y  $B$  que cumplan el teorema, a partir de la construcción anterior.

Entonces, definimos a los conjuntos  $A = A' \cup (A_k \setminus N_D^-[A'])$  y  $B = B' \cup (B_k \setminus N_D^+[B'])$ .

Notemos que  $A$  es independiente ya que:

- $A'$  es independiente,
- $A_k \setminus N_D^-[A']$  es un conjunto independiente por estar contenido en un conjunto independiente,
- $F(A_k \setminus N_D^-[A'], A') = \emptyset$  y
- $F(A', A_k \setminus N_D^-[A']) = \emptyset$  ya que  $A' \subseteq (V(D) \setminus V_k) \setminus V^*$  por construcción.

Asimismo,  $B$  es independiente ya que:

- $B'$  es independiente,
- $B_k \setminus N_D^+[B']$  es un conjunto independiente por estar contenido en un conjunto independiente,
- $F(B', B_k \setminus N_D^+[B']) = \emptyset$  y
- $F(B_k \setminus N_D^+[B'], B') = \emptyset$  ya que  $B' \subseteq (V(D) \setminus V_k) \setminus V_k$  por construcción.

Por lo tanto,  $A$  y  $B$  son conjunto independientes.

También observemos que  $A \subseteq X$  y  $X = N_{m+1}^-[A]_{D[X]}$ , esto último ya que:

- $A_k$  absorbe en  $D[V_{k+1}]$  a distancia menor o igual a  $m$ ,
- $A'$  absorbe en  $D[X']$  a distancia menor o igual a  $m + 1$  y

- $A_k$  absorbe en  $D[X \cap V^*]$  a distancia uno.

Así como  $B \subseteq Y$  y  $Y = N_{l+1}^+[B]_{D[Y]}$ , esto último ya que:

- $B_k$  domina en  $D[V_{k_2}]$  a distancia menor o igual a  $l$ ,
- $B'$  domina en  $D[Y']$  a distancia menor o igual a  $l + 1$  y
- $B_k$  domina en  $D[Y \cap V^*]$  a distancia uno.

Además, por construcción de  $X$  y  $Y$ , tenemos que  $A$  y  $B$  son ajenos.

Por lo tanto,  $D \in \mathfrak{A}_{m+1} - \mathfrak{D}_{l+1}$ .

■

**Corolario 4.1.6** *Sea  $D$  una digráfica, si  $D$  tiene una  $k$ -partición  $(A_1, A_2, \dots, A_k)$  tal que  $D[A_i]$  es hereditaria en  $\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{D}_1$  para cada  $1 \leq i \leq k$ , entonces  $D \in \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{D}_2$ .*

**Demostración.** Si  $D[A_i]$  es hereditaria en  $\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{D}_1$ , entonces podemos aplicar directamente el teorema anterior, haciendo  $m = l = 1$ , ya que existe  $(A_1, A_2, \dots, A_{k-1}, A_k)$  una  $k$  partición de  $V(D)$ , tal que:

1.  $D[A_1]$  es hereditaria en  $\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{D}_2$ ,
2.  $D[A_i]$  es hereditaria en  $\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{D}_1$ , para  $2 \leq i < k$ ,
3. Ya sea que  $k = 0$  ó  $D[A_k] \in \mathfrak{A}_1 - \mathfrak{D}_1$ ,

entonces  $D \in \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{D}_2$ .

■

Algunos ejemplos de digráficas que cumplen las hipótesis del corolario anterior son las digráficas de tamaño cero debido a que cualquier clase de cualquier partición que tomemos de alguna digráfica de tamaño cero va a constar de vértices aislados, así que cualquier clase es en sí un conjunto independiente y simultáneamente dominante y absorbente, por ello se cumple que cualquier subdigráfica inducida por cualquier clase de cualquier partición es hereditaria en  $\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{D}_1$ . También las digráficas que son isomorfas a  $(\mathbb{Z}, <)$ ; es decir, las digráficas que tienen a los números enteros como conjunto de vértices y  $(x, y)$  es una de sus flechas si y solo si  $x < y$  son ejemplos de digráficas que cumplen con la hipótesis del corolario previo, debido a que si tomamos la bipartición  $(\{x \in \mathbb{Z} : x \leq y\}, \{x \in \mathbb{Z} : y < x\})$  podemos observar que  $\{y\}$  es un conjunto independiente y absorbente en la subdigráfica inducida por el conjunto  $\{x \in \mathbb{Z} : x \leq y\}$ ; además,  $\{y + 1\}$  es un subconjunto independiente y dominante de la subdigráfica inducida por  $\{x \in \mathbb{Z} : y < x\}$ , y cualquier subdigráfica inducida que tomemos de los conjuntos de esta partición cumple con la misma lógica; por lo tanto, es hereditaria en  $\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{D}_1$ . De igual manera las digráficas isomorfas a  $(\mathbb{N}, <)$  y  $(\mathbb{N}, >)$ , también cumplen con las hipótesis del corolario antes mencionado.

## 4.2. Torneos.

Recordemos que una digráfica  $T = (V(T), F(T))$  es un **torneo** si para todo  $\{x, y\} \subseteq V(T)$  se tiene que  $(x, y) \in F(T)$  ó  $(y, x) \in F(T)$ .

Notemos que el torneo  $(\mathbb{Z}, <)$ , el cual tiene como conjunto de vértices a los números enteros y  $(x, y) \in F((\mathbb{Z}, <))$  si y solo si  $x < y$ , no pertenece al conjunto  $\mathfrak{D}_2$  (ver figura 4.8), ya que un subconjunto de  $\mathbb{Z}$  máximo independiente consta de solo un vértice y ninguno de estos puede dominar a todos los demás debido a que siempre va a existir un vértice distinto de él mismo que va a dominarlo, lo anterior se debe al orden de los enteros. Sin embargo  $(\mathbb{Z}, <)$  pertenece al conjunto  $\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{D}_1$ . Se puede observar que si tomamos dos vértices consecutivos  $x$  y  $y$ ; es decir,  $y = x + 1$  entonces  $x$  absorbe a todos los vértices  $z$  tales que  $z < x$  y  $y$  domina a todos los vértices  $w$  tales que  $y < w$ . De ese modo encontramos una bipartición  $(V_1 = \{z \in \mathbb{Z} : z < x\} \cup \{x\}, V_2 = \{w \in \mathbb{Z} : y < w\} \cup \{y\})$  de  $V(D)$  tal que existe  $A = \{x\} \subseteq V_1$  independiente y absorbente en  $D[V_1]$  y existe  $B = \{y\} \subseteq V_2$  independiente y dominante en  $D[V_2]$ . El siguiente resultado mostrará que esto se cumple para torneos infinitos arbitrarios.

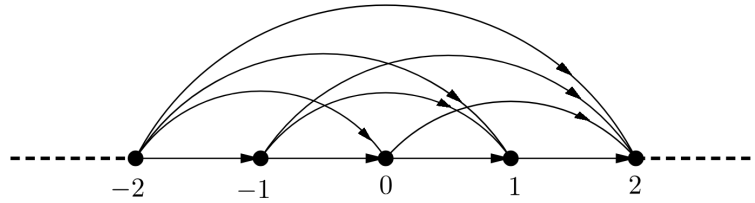


Figura 4.8. Torneo  $(\mathbb{Z}, <)$ .

**Teorema 4.2.1** Si  $T = (V(T), F(T))$  es un torneo infinito; entonces, ya sea que  $T \in \mathfrak{D}_2$  ó  $T \in \mathfrak{A}_1 - \mathfrak{D}_1$ .

**Demostración.** Sea  $T = (V, F)$  un torneo y  $x$  un vértice de  $T$  arbitrario. Si para todo  $y \in V(T)$  se tiene que  $y \in N_2^+[x]$  entonces  $T \in \mathfrak{D}_2$ , con  $\{x\}$  el conjunto independiente que domina a todo vértice de  $T$  a distancia menor o igual a dos, por lo que  $T \in \mathfrak{D}_2$ . En otro caso, existe al menos un vértice  $y$  de  $V(T)$  tal que  $y \notin N_2^+[x]$ , lo cual implica que  $(y, x) \in F(T)$ , además para todo  $w \in N_2^+[x]$  se tiene que  $(y, w) \in F(T)$ , de otro modo existiría una trayectoria de longitud a lo más dos de  $x$  a  $y$ , lo que generaría una contradicción, entonces  $N^+[x] \subset N^+(y)$ .

Sabemos que para todo vértice  $z$  del torneo  $T$  se tiene que  $(x, z) \in F(T)$  ó  $(z, x) \in F(T)$ ; como para todo  $z \neq y$  tal que  $(x, z) \in F(T)$  se cumple que  $(y, z) \in F(T)$ , entonces para todo  $z \in V(T)$  se tiene que  $z \in N^-[x]$  o  $z \in N^+[y]$ , por lo que la bipartición  $(N^-[x], N^+[y] \setminus N^-[x])$  cumple que una de sus clases contiene un subconjunto independiente y absorbente y la otra contiene un subconjunto independiente y dominante en la subdigráfica inducida por su propia clase,  $\{x\}$  y  $\{y\}$ , respectivamente. Por lo tanto  $T \in \mathfrak{A}_1 - \mathfrak{D}_1$ . ■

Sea  $D = (V, F)$  una digráfica sin flechas simétricas, a  $D$  le asociamos una gráfica  $\tilde{D} = (V, \tilde{A})$  llamada el **complemento no dirigido** de  $D$  como sigue:

1.  $V(D) = V(\tilde{D})$
2.  $\{x, y\} \in A(\tilde{D}) = \tilde{A}$  si y solo si  $(x, y) \notin F(D)$  y  $(y, x) \notin F(D)$

La gráfica  $\tilde{D}$  puede ser usada para medir la diferencia entre  $D$  y un torneo, mientras más aristas hay en  $\tilde{D}$ , más grande es la diferencia entre  $D$  y un torneo. Es decir,  $D$  es un torneo si y solo si  $\tilde{D}$  es de tamaño cero.

**Teorema 4.2.2** *Sea  $D = (V, F)$  una digráfica sin flechas simétricas, si  $K_n \not\subseteq \tilde{D}$  para algún número natural  $n \geq 2$ , entonces  $D \in \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{D}_2$ . Más aún, si  $\tilde{D}$  es de tamaño cero, entonces  $D \in \mathfrak{D}_2 \cup \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{D}_2$  y si  $\tilde{D}$  es libre de triángulos, entonces  $D \in \mathfrak{A}_1 - \mathfrak{D}_2$  ó  $D \in \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{D}_1$ .*

**Demostración.** Por inducción sobre  $n$ .

*Base inductiva:* Si  $n = 2$ , entonces  $\tilde{D}$  es de tamaño cero; es decir,  $D$  es un torneo y por el teorema anterior  $D \in \mathfrak{D}_2$  ó  $D \in \mathfrak{A}_1 - \mathfrak{D}_1$ . Observemos que  $\mathfrak{D}_2 \subset \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{D}_2$  y  $\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{D}_1 \subset \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{D}_2$  también; por lo tanto, en cualquiera de los dos casos  $D \in \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{D}_2$ .

*Hipótesis de inducción:* Suponemos válido el teorema para  $n - 1$ , con  $n \geq 2$ .

*Paso inductivo:* Por demostrar que el teorema es válido para  $n$ , con  $n > 2$ .

*Demostración:* Sea  $A \subseteq V(D)$  un subconjunto independiente máximo por contención. Si  $V(D) = N_2^+[A]$ , entonces  $D \in \mathfrak{D}_2$ , por lo que claramente se cumple el teorema.

Si no es el caso, entonces sea  $C \subseteq V(D)$  un subconjunto independiente máximo por contención de  $V(D) \setminus N_2^+[A]$ . Sean los subconjuntos  $L = N^-[A] \setminus C$ ,  $M = N^+[C] \setminus L$  y  $N = V(D) \setminus (L \cup M)$  (ver figura 4.9).

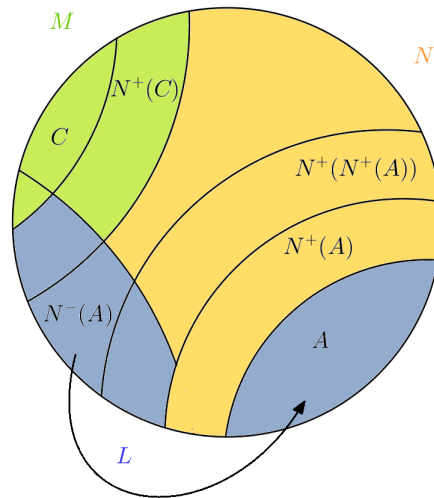


Figura 4.9. La digráfica  $D$  y los subconjuntos de  $V(D)$  que la conforman

Sea  $x \in N$ , primero observemos que  $(a, x) \in F(D)$  para alguna  $a \in A$ , ya que como  $A$  es un subconjunto independiente máximo y  $x \notin A$ , entonces  $(a, x) \in F(D)$  ó  $(x, a) \in F(D)$ ; sin embargo,  $N^-[A] \cap N = \emptyset$ , entonces  $(x, a) \notin F(D)$ . Por lo tanto, para alguna  $a \in A$  se cumple que  $(a, x) \in F(D)$ .

*Afirmación:* No existen flechas entre los subconjuntos  $N$  y  $C$ .

*Prueba:* Como  $N^+[C] \cap N = \emptyset$ , entonces no existe una  $Cx$  - flecha para algún  $x \in N$ . Supongamos que existe  $(x, c) \in F(D)$  con  $c \in C$ , por la observación previa, existe  $a \in A$  tal que  $(a, x) \in F(D)$ ; por lo tanto,  $(a, x, c)$  es una trayectoria de longitud dos del subconjunto  $A$  al subconjunto  $C$ , lo cual, por construcción no puede pasar.

Por lo tanto, no hay flechas entre los subconjuntos  $N$  y  $C$ .

Por otro lado, ya que  $C \neq \emptyset$ , tenemos que  $K_{n-1} \not\subseteq \widetilde{D[N]}$ , de otro modo, por la afirmación,  $\widetilde{D}$  contendría a  $K_n$ , lo cual no ocurre por hipótesis, por lo tanto podemos aplicar la hipótesis de inducción para la subdigráfica  $D[N]$ .

*Caso 1:  $n = 3$ .*

Tenemos que  $K_{3-1} = K_2 \not\subseteq \widetilde{D[N]}$ ; es decir,  $D[N]$  es un torneo, entonces  $D[N] \in \mathfrak{D}_2$  ó  $D[N] \in \mathfrak{A}_1 - \mathfrak{D}_1$ .

Si  $D[N] \in \mathfrak{D}_2$ , entonces existe  $d \in N$  tal que  $N \subset N_2^+[d]$ . Partiendo de este caso, proponemos la bipartición de  $V(D)$  dada por  $(L, V(D) \setminus L)$  y probaremos, a partir de las dos observaciones siguientes, que  $D[L] \in \mathfrak{A}_2$  y  $D[(V(D) \setminus L)] \in \mathfrak{D}_2$ .

*Observaciones:*

- a) Para todo  $u \in L$ ,  $u \in A$  ó existe  $a \in A$  tal que  $(u, a) \in F(D)$  ya que  $L \subseteq A \cup N^-(A) = N^-[A]$ . Por lo tanto,  $D[L] \in \mathfrak{A}_1$ .
- b) Para todo  $v \in V(D) \setminus L$ ,  $v \in M$  ó  $v \in N$ . Si  $v \in M$ , entonces  $v \in C$  ó  $v \in N^+(C)$ , por otro lado, si  $v \in N$ , entonces  $v$  es cuasidominado por  $d$ . Por lo tanto,  $D[(V(D) \setminus L)] \in \mathfrak{D}_2$ .

Por lo tanto,  $D \in \mathfrak{A}_1 - \mathfrak{D}_2 \subseteq \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{D}_2$ .

El otro caso es que  $D[N] \in \mathfrak{A}_1 - \mathfrak{D}_1$ . Si esto ocurre, entonces existe una bipartición  $(P, R)$  de  $N$  tal que  $N^-[y] = R$  y  $N^+[x] = P$ , para algún  $y \in R$  y algún  $x \in P$ .

Por construcción, sabemos que  $L \subseteq N^-[A]$ , por lo cual:

$$L \cup R \subseteq N^-[A] \cup N^-[y] = N^-[A \cup \{y\}] \subseteq N_2^-[\{y\} \cup \{a \in A : a \notin N^-[y]\}],$$

El conjunto  $\{y\} \cup \{a \in A : a \notin N^-[y]\}$  es también un conjunto independiente, ya que no hay flechas de  $y$  hacia ningún elemento de  $A$  por construcción, por consiguiente tampoco pueden existir flechas de  $y$  hacia ningún elemento del conjunto  $\{a \in A : a \notin N^-[y]\} \subseteq A$ , y claramente no hay flechas en el sentido contrario. Además, para todo  $u \in L \cup R$ ,  $u$  es absorbido a distancia uno por algún elemento del conjunto  $\{a \in A : a \notin N^-[y]\}$  ó  $u$  es absorbido por  $y$  a distancia dos.

Por otra parte, por construcción tenemos que  $M \subseteq N^+[C]$ , por lo tanto:

$$M \cup P \subseteq N^+[C] \cup N^+[x] = N^+[C \cup \{x\}].$$

Observemos que el conjunto  $C \cup \{x\}$  es un conjunto independiente, ya que  $x \in N$  y no hay flechas entre los conjuntos  $C$  y  $N$ .

Por lo tanto, tomando la partición de  $V(D)$  dada por  $(M \cup P, L \cup R)$ , obtenemos que  $D \in \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{D}_1 \subset \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{D}_2$

*Caso 2:  $n > 3$ .*

Notemos que  $D = D[N \cup (L \cup M)]$ ; proponemos la bipartición  $(N, L \cup M)$  de  $V(D)$ . Buscaremos probar, a partir de dicha bipartición, que la digráfica  $D \in \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{D}_2$ ; para ello emplearemos el teorema 4.1.5, por lo que es necesario realizar las siguientes observaciones.

*Observaciones:*

- a) Sea  $H$  una subdigráfica inducida de  $D[N]$ , por hipótesis de inducción  $H \in \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{D}_2$ , ya que la propiedad de que  $K_n \not\subseteq D[N]$  es una propiedad hereditaria. Como esto es válido para toda digráfica inducida de  $D[N]$ , podemos concluir que  $D[N]$  es hereditaria en  $\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{D}_2$ .

b) Tomando la bipartición  $(L, M)$  del conjunto  $L \cup M$ , como  $L \subseteq N^-[A]$  y  $M \subseteq N^+[C]$ , donde  $A$  y  $C$  son conjuntos independientes de los vértices de  $D$ , podemos notar que  $D[L \cup M] \in \mathfrak{A}_1 - \mathfrak{D}_1$ .

Ahora, sea  $m = l = 1$  y la bipartición  $(N, L \cup M)$  de  $V(D)$ , podemos aplicar el teorema 4.1.5 a la digráfica  $D$  partiendo de las siguientes hipótesis:

1. Por la observación (a) sabemos que  $D[N]$  es hereditaria en  $\mathfrak{A}_{m+1} - \mathfrak{D}_{l+1} = \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{D}_2$ .
2. Para todas las clases de la partición, excepto quizá para  $N$  y  $L \cup M$  se cumple que la digráfica inducida de dicha clase es hereditaria en  $\mathfrak{A}_m - \mathfrak{D}_l = \mathfrak{A}_1 - \mathfrak{D}_1$ .
3. Por la observación (b) sabemos que  $D[L \cup M] \in \mathfrak{A}_m - \mathfrak{D}_l = \mathfrak{A}_1 - \mathfrak{D}_1$ .

Entonces  $D \in \mathfrak{A}_{m+1} - \mathfrak{D}_{l+1} = \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{D}_2$ .

Por lo tanto, en ambos casos se cumple que  $D \in \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{D}_2$ .

Más aún, si  $\tilde{D}$  es de tamaño cero, entonces  $D$  es un torneo y por lo tanto  $D \in \mathfrak{D}_2 \cup \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{D}_2$  y si  $\tilde{D}$  es libre de triángulos, entonces, por el caso 1 tenemos que  $D \in \mathfrak{A}_1 - \mathfrak{D}_2$  ó  $D \in \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{D}_1$ . ■

**Corolario 4.2.3** *Sea  $D$  una digráfica, si  $\tilde{D}$  tiene número cromático finito  $n$ , entonces  $D \in \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{D}_2$ .*

**Demostración.** Analizaremos los siguientes dos casos:

*Caso 1:  $n = 1$ .*

Observemos que si  $n = 1$ , entonces  $\tilde{D}$  es una gráfica de tamaño cero, ya que podemos asignar el mismo color a todos sus vértices debido a que no hay ninguna adyacencia entre ellos, a partir de esto podemos concluir que  $D$  es un torneo y por el teorema 4.2.2 tenemos que  $D \in \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{D}_2$ .

*Caso 2:  $n \geq 2$ .*

Notemos que dado un número natural  $n$ , el número cromático de una gráfica completa  $K_{n+1}$  es  $n + 1$ ; es decir,  $\chi(K_{n+1}) = n + 1$ , ya que cada uno de los vértices de la gráfica es adyacente a  $n$  vértices distintos, por lo que cada vértice esta forzado a tener un color distinto al de sus  $n$  vecinos. Por lo tanto, si  $\chi(\tilde{D}) = n$ , entonces  $K_{n+1} \not\subseteq \tilde{D}$  y por el teorema 4.2.2  $D \in \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{D}_2$ .

Por lo tanto, en ambos casos se cumple que  $D \in \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{D}_2$ . ■

Para terminar con la recopilación de resultados, en el artículo que se desarrolló a lo largo del presente capítulo, se muestra que si una digráfica cumple que todos sus vértices tienen ingrado finito, entonces la digráfica tiene un cuasinúcleo; sin embargo, en este trabajo solo se presenta una idea intuitiva de la demostración. No obstante, si se desea examinar con atención su demostración, esta se puede consultar en la tesis de licenciatura de Pamela Pérez Aguirre “Núcleos en digráficas infinitas” [24]. Este resultado se sigue del teorema 2.1.5, el cual asegura que toda digráfica finita tiene cuasinúcleo, y del teorema de compacidad de Gödel, que dice que un conjunto infinito posee las características en común de los conjuntos finitos de los que se encuentra formado. Podemos asumir que si  $D$  es una digráfica infinita, entonces está formada por la unión infinita de digráficas finitas. Observemos que el hecho de que todo vértice de la digráfica tenga ingrado finito, nos garantiza la absorción de la invecindad de cada vértice en una subdigráfica finita de la digráfica infinita original. Es por ello que podemos decir que todas las digráficas finitas que forman a la digráfica infinita original tienen un cuasinúcleo que es local en dicha digráfica. Por lo tanto, por el teorema de Gödel, tenemos que la digráfica original contiene un cuasinúcleo.

# Conclusiones

En este trabajo se estudiaron algunas de las características de los conjuntos llamados cuasinúcleos; estos conjuntos se encuentran presentes en toda digráfica de orden finito, tal como lo demostraron Chávatal y Lováz en 1974 [7]. Dicho resultado también se pudo demostrar con base en el algoritmo dado por Cosmina Croitoru, descrito en el capítulo tres, donde se construye un cuasinúcleo de cualquier digráfica realizando dos revisiones de los vértices de la misma dado un orden arbitrario de estos. Sin embargo, este algoritmo no garantiza la construcción de todos los cuasinúcleos existentes de la digráfica, ya que se demostró que para la digráfica conformada por dos flechas simétricas conectadas por un vértice central, no existe un orden para el cual el algoritmo obtenga los cuasinúcleos conformados por alguno de los vértices extremos. A través del mismo algoritmo, se demostró que una digráfica sin núcleo contiene al menos tres cuasinúcleos distintos. Finalmente, nosotros implementamos el algoritmo por medio del lenguaje R de programación, a fin de hallar un cuasinúcleo en cualquier digráfica finita en función de un orden arbitrario de sus vértices.

También abordamos el tema de las digráficas de orden infinito y algunas características relacionadas con las particiones del conjunto de sus vértices concernientes a los cuasinúcleos y cuasisoluciones que se pueden hallar en las subdigráficas inducidas de cada una de las clases de la partición, pasando por los torneos infinitos.

Por último, con base en este trabajo, podríamos formularnos las siguientes preguntas: ¿Qué características debe tener una digráfica para poder asegurar la existencia de exactamente cuatro cuasinúcleos distintos en la misma? ¿En qué otro tipo de digráfica podemos afirmar la presencia de dos o más cuasinúcleos ajenos? ¿Qué condiciones debe cumplir la digráfica para que existan los órdenes necesarios de sus vértices, a fin obtener todos los cuasinúcleos existentes de la misma a partir del algoritmo descrito en el capítulo tres? ¿Qué modificaciones hacer al algoritmo para obtener más de un cuasinúcleo partiendo de un mismo orden? ¿Qué condición podríamos pedir a una digráfica de orden infinito, distinta de tener número cromático finito o de que todos sus vértices tengan ingrado finito, para que esta tenga al menos un cuasinúcleo?





# Bibliografía

- [1] C. Balbuena and M. Guevara. Kernels and partial line digraphs. *Applied Mathematics Letters*, 23:1218–1220, 2010.
- [2] J. Bang-Jensen and G. Gutin. *Digraphs theory, algorithms and applications*. 01 2008.
- [3] Jorgen Bang-Jensen and Gregory Gutin. *Classes of directed graphs*. 2010.
- [4] G. Benítez Bobadilla. Número semidominante coloreable en digráficas. *Tesis de licenciatura U.N.A.M.*, 2014.
- [5] C. Berge. Graphs and hypergraphs. *University of Paris*, 1973.
- [6] V. Chvátal. On the computational complexity of finding a kernel. *Report CRM-300, Centre de Recherches Mathématiques, Université de Montréal*, 592, 1973.
- [7] V. Chvátal and L. Lovász. Every directed graph has a semi-kernel. In *Hypergraph Seminar*, pages 175–175. Springer, 1974.
- [8] C. Croitoru. A note on quasi-kernels in digraphs. *Information Processing Letters*, 115:863–865, 2015.
- [9] Péter L. Erdős. On a problem in graph theory. *The Mathematical Gazette*, 47(361):220–223, 1963.
- [10] Péter L. Erdős and Lajos Soukup. Quasi-kernels and quasi-sinks in infinite graphs. *Discrete Mathematics*, 127, 2008.
- [11] Roberto Frucht and Frank Harary. On the corona of two graphs. *Aequationes Mathematicae*, 4:322–324, 1970.
- [12] Hortensia Galeana Sánchez, Laura Pastrana Ramírez, and Hugo Alberto Rincón Mejía. Semikernels, quasikernels, and grundy functions in the line digraph. *SIAM J. Discret Math*, 4(1):80–83, 1991.
- [13] G. Gutin, K. M. Koh, E. G. Tay, and A. Yeo. On the number of quasi-kernels in digraphs. *Journal of Graph Theory*, 46(1):48–56, 2001.
- [14] Scott Heard and J. Huang. Quasi-kernels in digraphs. *Journal of Graph Theory*, 2005.
- [15] Scott Heard and J. Huang. *Disjoint quasi-kernels in digraphs*. 2008.
- [16] Héctor Hevial. El problema de los siete puentes de Königsberg: Euler y la teoría de grafos. *Educación Matemática*, 8(1):108–115, 1996.
- [17] Henry Jacob and Henry Meyniel. About quasi-kernels in a digraph. *Discrete Mathematics*, 154(1-3):279–280, 1996.

- [18] M. Kawaśnik and Monika Perl. Nearly perfect sets in products of graphs. *Opuscula Mathematica*, 24/2:177–180, 2004.
- [19] H.G. Landau. On dominance relations and the structure of animal societies III: The condition for a score structure. *Bulletin of Mathematical Biophysics*, 15:143–148, 1953.
- [20] J. E. Moo Vergara. Núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas en la corona generalizada. *Tesis de licenciatura U.N.A.M.*, 2014.
- [21] Laura Pastrana Ramírez. Gráficas y digráficas de líneas. *Tesis de licenciatura U.N.A.M.*, 1990.
- [22] Javier Eduardo Pereyra Zamudio. Cuasinúcleos ajenos en digráficas. *Tesis de licenciatura U.N.A.M.*, 2016.
- [23] Vincke Philippe. Quasi-kernels in a digraph. *Discrete Mathematics*, 20:187–192, 1977.
- [24] Pamela Pérez Aguirre. Núcleos en digráficas infinitas. *Tesis de licenciatura U.N.A.M.*, 2019.
- [25] M. Richardson. Solution of irreflexive relations. *Annals of Mathematics*, 58(3):573–590, 1953.
- [26] Ada Cintia Rosas Tavera. Algunos resultados de cuasinúcleos en digráficas. *Tesis de licenciatura U.N.A.M.*, 2007.
- [27] Jerzy Topp. Kernels of digraphs formed by some unary operations from other digraphs. *Rostocker Mathematisches Kolloquium*, 21, 01 1982.
- [28] J. Von Neumann and O. Morgenstern. Theory of games and economic behavior. *Bulletin of Mathematical Biophysics*, 1944.