Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

La gráfica de Auslander-Reiten para conjuntos parcialmente ordenados.

Tesis, que para obtener el
grado de Maestro en Ciencias
presenta
Ma. del Carmen H. Gómez Laveaga.

México, D.F. 1980

Indice

Introducción

Hace poco tiempo, dentro de la Teoría de Representaciones cobró interés el estudio de representaciones de conjuntos parcialmente ordenados ([7],[8]). Entre otras cosas, se determinaron los conjuntos parcialmente ordenados de tipo de representación finita y se clasificaron las representaciones inescindibles.

A pesar de la belleza de estos resultados, es necesario presentar los conceptos en lenguaje de módulos y categorías puesto que aquí se dispone de técnicas muy poderosas como son las sucesiones que casi se dividen, morfismos irreducibles y gráficas de Auslander-Reiten.

En [6] se presenta en lenguaje de categorías y módulos, un problema de representación que abarca al anterior. Ahí, además de otras cosas, se trabaja con clases especiales de módulos y se prueba la existencia de sucesiones que casi se dividen para estas clases.

El caso que generaliza el estudio de representaciones de conjuntos parcialmente ordenados es cuando se estudian los módulos sin torsión finitamente generados sobre un álgebra de artin 1-Gorenstein con una condición adicional que llamamos condición (*).

En este trabajo se muestra como aparece el problema de representaciones de un conjunto parcialmente ordenado como un caso particular de representaciones de un álgebra de artin que se construye, se prueban los resultados principales de [6] y se construyen las gráficas de Auslander-Reiten (todo esto se hace para el caso de tipo de representación finita).

Capítulo I

Representaciones de conjuntos parcialmente ordenados.

H. H. Kleiner [7] estudió cierto tipo de representaciones sobre conjuntos finitos parcialmente ordenados, las llamadas representaciones exactas. Dió una descripción completa de los conjuntos de tipo finito que tienen al menos una representación exacta y más aún, describió tales representaciones inescindibles para estos conjuntos. En este capítulo enunciaremos este teorema, cuya demostración se puede encontrar en [7].
En la sección 2 se verá como las representaciones de un conjunto finito parcialmente ordenado se pueden ver como representaciones sobre un quiver con relaciones de conmutatividad.

Sección 1

Sea K un campo. Por $M(K)$ denotaremos el conjunto de todas las matrices (de todos los tamaños) con coeficientes en K.
En $M(K)$ se tiene la suma directa usual de matrices:

$$A \oplus B = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right) \quad \text{para} \quad A, B \in M(K)$$

Consideraremos además las llamadas matrices ideales, que son las siguientes:

$I_{0,n}$ = "matriz vacía" con 0 renglones y n columnas, $n>0$

$I_{n,0}$ = "matriz vacía" con n renglones y 0 columnas, $n>0$

Sea $\tilde{M}(K) = M(K) \cup \{$matrices ideales$\}$.

La suma directa en $\tilde{M}(K)$ se extiende como sigue.

si $\Lambda \in M(K)$

$$\Lambda \oplus I_{n,0} = \left(\frac{\Lambda}{0}\right)\}\text{ n renglones} \quad , \quad \Lambda \oplus I_{0,n} = (\Lambda \mid \overbrace{0}^{\text{n col.}})$$

$$I_{n,0} \oplus \Lambda = \left(\frac{0}{\Lambda}\right)\}\text{ n renglones} \quad , \quad I_{0,n} \oplus \Lambda = (\overbrace{0}^{\text{n col.}} \mid \Lambda)$$

$$I_{m,0} \oplus I_{n,0} = I_{m+n,0} \quad , \quad I_{0,m} \oplus I_{0,n} = I_{0,m+n}$$

$$I_{m,0} \oplus I_{0,n} = I_{0,n} \oplus I_{0,m} = (0)_{m\times n} = \text{matriz cero de orden } m \times n.$$

Denotaremos $\alpha(\Lambda) = \#$ renglones de Λ y $\beta(\Lambda) = \#$columnas de Λ para $\Lambda \in \tilde{M}(K)$.

Sea S un conjunto finito parcialmente ordenado, $S = \{a_1, \dots, a_n\}$.

Una representación φ de S es una función $\varphi : S \longrightarrow \tilde{M}(K)$ tal que $\alpha(\varphi(a_1)) = \cdots = \alpha(\varphi(a_n))$.

<u>Nota:</u> El orden parcial de S no interviene en esta definición, sin embargo se tomará en cuenta cuando se defina la equivalencia de representaciones, es decir, se estudiará la clasificación de representaciones con respecto a ciertas operaciones en donde sí interviene el orden parcial de S.

Dos representaciones $\{M_{a_i}\}_{i=1}^{n}$ y $\{N_{a_i}\}_{i=1}^{n}$ de S son equivalentes si las correspondientes parejas de matrices pueden ser obtenidas una de la otra por medio de operaciones elementales del tipo:

(I) Operaciones elementales arbitrarias sobre renglones de todas las matrices simultáneamente.

(II) Operaciones elementales arbitrarias sobre columnas de cada matriz.

(III) Si $a_i < a_j$ en S, a una columna de M_{a_j} se le puede sumar una columna de M_{a_i}.

Como realizar operaciones elementales sobre renglones en una matriz A es lo mismo que multiplicar A por una matriz invertible por la izquierda y realizar operaciones elementales sobre columnas en una matriz A es lo mismo que multiplicar A por una matriz invertible por la derecha se tiene que las operaciones I y II antes enunciadas se traducen, en términos de matrices, de la siguiente manera:

Sea $\{M_{a_i}\}_{i=1}^{n}$ una representación de S.

(1) Se consideran equivalentes las representaciones $\{M_{a_i}\}_{i=1}^{n}$ y $\{T M_{a_i}\}_{i=1}^{n}$ donde T es una matriz invertible del tamaño adecuado.

(2) Se consideran equivalentes las representaciones $\{M_{a_i}\}_{i=1}^{n}$ y $\{M_{a_i} T_i\}_{i=1}^{n}$ donde las T_i son matrices invertibles de tamaño adecuado.

Ahora, si a una columna de una matriz A se le quiere sumar una columna de la matriz B (con el mismo número de renglones que A) se debe considerar la matriz $A + BE_{ij}$, donde E_{ij} es la matriz elemental con 1 en el lugar ij y cero en todos los demás; aquí, i y j dependen por supuesto de las columnas escogidas en A y B.

Con lo anterior y teniendo en cuenta (2), la última operación permisible se expresa como sigue:

(3) Se consideran equivalentes las representaciones $\{M_{a_i}\}_{i=1}^{n}$ y $\{M_{a_i} + \sum_{a_j \le a_i} M_{a_j} T_{rs_{ij}}\}$ donde $T_{rs_{ij}}$ son matrices arbitrarias de tamaño adecuado.

En resumen, se tiene que dadas las representaciones $\{M_{a_i}\}_{i=1}^{n}$ y $\{N_{a_i}\}_{i=1}^{n}$

$\{M_{a_i}\}_{i=1}^{n} \sim \{N_{a_i}\}_{i=1}^{n}$ si y solo si existen matrices invertibles T, T_i y matrices arbitrarias T_{ji} para $a_j \le a_i$ (siempre con los tamaños adecuados) tal que

$$M_{a_i} = T N_{a_i} T_i + T \sum_{a_j \le a_i} N_{a_j} T_{ji} \quad \text{para } i = 1, \dots, n.$$

si y solo si existen matrices invertibles T, T_i y matrices arbitrarias T_{ji} para $a_j \leq a_i$ tal que

$$(*) \qquad T\, M_{a_i} = N_{a_i} T_i + \sum_{a_j \leq a_i} N_{a_j} T_{ji} \qquad i = 1, \dots, n.$$

<u>Observación:</u> Esta última presentación tiene la ventaja de que nos permitiría definir morfismo de representaciones como una familia de matrices $\{T, T_i, T_{ji}\}$ (no necesariamente invertibles) que verifican la igualdad $(*)$. Y la transitividad de la relación se traduciría en composición de morfismos.

La suma directa de dos representaciones $\{M_{a_i}\}_{i=1}^{n}$ y $\{N_{a_i}\}_{i=1}^{n}$ se define tomando la suma directa de las matrices correspondientes, es decir, $\{M_{a_i}\}_{i=1}^{n} \oplus \{N_{a_i}\}_{i=1}^{n} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} M_{a_i} & 0 \\ \hline 0 & N_{a_i} \end{array} \right) \right\}_{i=1}^{n}$

Si S es un conjunto finito parcialmente ordenado, denotaremos $S = (r_1, r_2, \dots, r_t)$ si $S = \bigcup_{i=1}^{t} S_i$, donde cada S_i es un conjunto linealmente ordenado de cardinalidad r_i y además elementos de conjuntos distintos no son comparables.
A este tipo de conjuntos se les llama <u>primitivos</u>.
Una representación φ de S es <u>exacta</u> si $p(\varphi(a_i)) > 0 \ \forall a_i \in S$ y un conjunto se llama <u>exacto</u> si tiene al menos una representación inescindible exacta.

<u>Teorema (H. H. Kleiner)</u>: Un conjunto parcialmente ordenado S de tipo finito es exacto si y solo si tiene una de las siguientes formas:

(1), (1,1), (1,1,1), (1,1,2), (1,2,2), (1,2,3), (1,2,4), $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, donde

$\mathcal{A} = \{a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2\}$, $a_1 > a_2$, $b_1 > b_2$, $a_1 > b_2$, $c_1 > c_2$

$\mathcal{B} = \{a_1, a_2, a_3, b, c_1, c_2, c_3\}$, $a_1 > a_2 > a_3$; $c_1 > c_2 > c_3$, $a_1 > c_3$

$\mathcal{C} = \{a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, c_3\}$, $a_1 > a_2$, $b_1 > b_2$, $a_1 > b_2$, $c_1 > c_2 > c_3$

$\mathcal{D} = \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2, c_3\}$, $a_1 > a_2 > a_3$, $b_1 > b_2$, $a_1 > b_2$,

$b_1 > a_3$, $c_1 > c_2 > c_3$.

$\mathcal{E} = \{a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, c_3, c_4\}$, $a_1 > a_2$, $b_1 > b_2$, $a_1 > b_2$,

$c_1 > c_2 > c_3 > c_4$, $c_1 > b_2$

$\mathcal{F} = \{a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, c_3, c_4\}$, $a_1 > a_2$, $b_1 > b_2$, $a_1 > b_2$,

$c_1 > c_2 > c_3 > c_4$, $a_1 > c_4$.

y ninguna otra pareja en estos conjuntos son comparables.

Además, todas las representaciones exactas distintas de los conjuntos arriba mencionados son de la forma:

$A_i = \varphi(a_i)$, $B_i = \varphi(b_i)$, $C_i = \varphi(c_i)$

si $S = (1) = \{a\}$, entonces $A = (1)$ ——————————— (I)

si $S = (1,1) = \{a, b\}$, entonces $A = B = (1)$ ——————————— (II)

si $S = (1,1,1) = \{a, b, c\}$, entonces $A = B = C = (1)$ ——————————— (III_1)

$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ——————————— (III_2)

si $S = (1,1,2) = \{a, b, c_1, c_2\}$, donde $c_1 > c_2$, entonces

$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ——————————— (IV)

si $S = (1,2,2) = \{a_1, a_2, b, c_1, c_2\}$, donde $a_1 > a_2$ y $c_1 > c_2$

entonces

$A_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ——————————— (V_1)

$A_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ——————————— (V_2)

$A_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ——————————— (V_3)

si $S = (1,2,3) = \{a_1, a_2, b, c_1, c_2, c_3\}$, donde $a_1 > a_2$, $c_1 > c_2 > c_3$

entonces

$$A_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\\0&1\\1&0\end{pmatrix},\ C_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ C_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ C_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\ \text{------}\ (\overline{\text{VI}}_4)$$

$$A_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\\0&1\\1&0\end{pmatrix},\ C_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ C_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ C_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\ \text{------}\ (\overline{\text{VI}}_5)$$

$$A_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\\0&1\\1&0\end{pmatrix},\ C_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ C_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ C_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\ \text{------}\ (\overline{\text{VI}}_6)$$

$$A_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ C_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ C_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ C_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\ \text{------}\ (\overline{\text{VI}}_7)$$

$$A_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\\1&0\end{pmatrix},\ C_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ C_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ C_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\ \text{------}\ (\overline{\text{VI}}_8)$$

si $S=(1,2,4)=\{a_1,a_2,b,c_1,c_2,c_3,c_4\}$, donde $a_1>a_2$, $c_1>c_2>c_3>c_4$,

entonces

$$A_1=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&1\\0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\0&0\\0&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},\ C_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ C_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ C_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ C_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\\1&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix}\ -(\underline{\text{VII}_1})$$

$$A_1=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&1\\0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\0&0\\0&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\\0&0&1\\1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ C_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ C_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ C_3=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\0&1\\0&0\\0&0\end{pmatrix},\ C_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\ -(\underline{\text{VII}_2})$$

$$A_1=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&1\\0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\0&0\\0&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&1&0\\1&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\ C_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ C_2=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&1\\0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix},\ C_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ C_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\ -(\underline{\text{VII}_3})$$

$$A_1=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&1\\0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\0&0\\0&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\\0&0&1\\1&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},\ C_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix},\ C_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ C_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ C_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\text{———}(\underline{\mathrm{VII}}_4)$$

$$A_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\\0&1&0\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},\ C_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ C_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ C_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ C_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\text{———}(\underline{\mathrm{VII}}_5)$$

$$A_1=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&1\\0&0\\0&0\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\0&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\\0&0&1\\1&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\ C_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ C_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ C_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ C_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\text{———}(\underline{\mathrm{VII}}_6)$$

$$A_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\0&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&1&1\\1&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\ C_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ C_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ C_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ C_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\text{———}(\underline{\mathrm{VII}}_7)$$

$$A_1=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&1\\0&0\\0&0\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&1&0\\0&1&1\\1&0&0\end{pmatrix},\ C_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ C_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ C_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ C_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\text{———}(\underline{\mathrm{VII}}_8)$$

$$A_1=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&1\\0&0\\0&0\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\0&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\\1&0\\0&1\\1&0\end{pmatrix},\ C_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ C_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ C_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ C_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\text{———}(\underline{\mathrm{VII}}_9)$$

$$A_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\0&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\\0&1\\1&0\\1&0\end{pmatrix};\ C_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ C_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ C_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ C_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \text{————} (\overline{\text{VII}}_{10})$$

$$A_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\1&1\\0&1\\1&0\end{pmatrix},\ C_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ C_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ C_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ C_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \text{————} (\overline{\text{VII}}_{11})$$

$$A_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\1&1\\1&0\end{pmatrix},\ C_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ C_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ C_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ C_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \text{————} (\overline{\text{VII}}_{12})$$

$$A_1=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\\1&0\\1&0\end{pmatrix},\ C_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ C_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ C_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ C_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \text{————} (\overline{\text{VII}}_{13})$$

$$A_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\1&1\\1&0\end{pmatrix},\ C_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ C_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ C_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ C_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \text{————} (\overline{\text{VII}}_{14})$$

si $S=\mathcal{A}$, entonces

$$A_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ B_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ B_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ C_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ C_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \text{————} (\overline{\text{VIII}})$$

si $S=\mathcal{C}$, entonces

$$A_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ A_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\\0&1\\1&0\end{pmatrix},\ C_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ C_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ C_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \text{————} (\overline{\text{IX}})$$

si $S = \mathcal{L}$, entonces

$$A_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\0&0\\0&0\\1&0\end{pmatrix},\ B_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\\0&1\\1&0\\0&0\end{pmatrix},\ B_2=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\ C_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ C_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ C_3=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix} \text{------} (\overline{X}_1)$$

$$A_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\0&0\\0&0\\1&0\end{pmatrix},\ B_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&1\\0&1\\0&0\end{pmatrix},\ B_2=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\ C_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ C_2=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&1\\0&0\\0&0\end{pmatrix},\ C_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \text{------} (\overline{X}_2)$$

$$A_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\0&0\\0&0\\1&0\end{pmatrix},\ B_1=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\\0&1\\1&0\\0&0\end{pmatrix},\ B_2=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\ C_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix},\ C_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ C_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \text{------} (\overline{X}_3)$$

$$A_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\0&0\\0&1\\1&0\end{pmatrix},\ B_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\\0&1\\1&0\\0&0\end{pmatrix},\ B_2=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\ C_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ C_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ C_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \text{------} (\overline{X}_4)$$

$$A_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\0&0\\1&0\end{pmatrix},\ B_1=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\\1&0\\0&0\end{pmatrix},\ B_2=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\ C_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ C_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ C_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \text{------} (\overline{X}_5)$$

$$A_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\0&0\\1&0\end{pmatrix},\ B_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ B_2=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\ C_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ C_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ C_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \text{------} (\overline{X}_6)$$

$$A_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\ B_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\\1&0\\0&0\end{pmatrix},\ B_2=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\ C_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ C_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ C_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \text{------} (\overline{X}_7)$$

$$A_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\ B_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\ B_2=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\ C_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ C_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ C_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \text{ — — — — } (\overline{\mathrm{X}}_8)$$

$$A_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ B_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ B_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ C_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ C_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ C_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \text{ — — — } (\overline{\mathrm{X}}_9)$$

si $S=\vartheta$, entonces

$$A_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ A_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\ B_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ B_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix},\ C_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ C_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ C_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \text{ — — } (\underline{\overline{\mathrm{XI}}})$$

si $S=\theta$, entonces

$$A_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\\1&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix},\ B_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\0&0\\1&0\\0&0\end{pmatrix},\ B_2=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\ C_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ C_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ C_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ C_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \text{ — — } (\underline{\mathrm{XII}})$$

si $S=\mathcal{G}$, entonces

$$A_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\0&0\\0&0\\1&0\end{pmatrix},\ B_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&1\\0&1\\0&0\end{pmatrix},\ B_2=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\ C_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ C_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ C_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ C_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \text{ — — } (\underline{\mathrm{XIII}})$$

Sección 2

En esta sección veremos que el problema de estudiar representaciones de un conjunto finito parcialmente ordenado S corresponde a estudiar cierto tipo de representaciones sobre quivers con relaciones de conmutatividad, siendo este quiver construido a partir de S. La idea es interpretar cada una de las operaciones elementales permitidas y con esta información pasar al quiver.

Sean $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$ un conjunto parcialmente ordenado y $U = \{M_{a_i}\}_{i=1}^{n}$ una representación de S con $\alpha(M_{a_i}) = t$ y $\beta(M_{a_i}) = t_i$, $i = 1, \ldots, n$. M_{a_i} es una matriz de orden $t \times t_i$ y se puede ver como una transformación lineal
$M_{a_i} : K^{t_i} \longrightarrow K^{t}$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Así que, dada la representación U se puede montar el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
 & & K^{t} & \\
K^{t_1} \arrow[urr, "M_{a_1}"] & K^{t_2} \arrow[ur, "M_{a_2}"'] & \cdots & K^{t_n} \arrow[ul, "M_{a_n}"']
\end{tikzcd}
$$

En este diagrama se tiene lo siguiente:

1°/ Realizar un cambio de base en K^{t} significa hacer operaciones elementales sobre los renglones de todas las matrices M_{a_i}, es decir, sobre los renglones de la matriz grande

$(M_{a_1}\ M_{a_2} \cdots M_{a_n})$.

2°/ Realizar un cambio de base en K^{t_i} es hacer operaciones elementales sobre las columnas de la matriz M_{a_i}.

El diagrama anterior nos permite realizar las dos operaciones anteriores, pero no la tercera. Entonces el problema es ahora, cambiar el diagrama de tal manera que se pueda interpretar también la tercera operación. Veamos un ejemplo:

$S = \{a < b\}$, φ una representación, $\varphi(a) = A$ y $\varphi(b) = B$ con $\alpha(A) = \alpha(B) = t$, $\beta(A) = r$, $\beta(B) = s$.

¿ Qué modificación debemos hacer al diagrama

$$\begin{tikzcd} & K^t & \\ K^r \arrow[ur, "A"] & & K^s \arrow[ul, "B"'] \end{tikzcd}$$

para interpretar la última operación?

Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} K^t \\ K^r \oplus K^s \arrow[u, "(A|B)"] \\ K^r \arrow[u, "\binom{I}{0}"] \end{tikzcd}$$

¿ Qué significa que dos representaciones $\{\Lambda, B\}$ y $\{\Lambda', B'\}$ son isomorfas?, veamos.

$$\begin{tikzcd}
K^t \arrow[r, "G"] & K^t \\
K^r \oplus K^s \arrow[u, "(\Lambda\ B)"] \arrow[r, "\begin{pmatrix} C & D \\ E & F \end{pmatrix}"] & K^r \oplus K^s \arrow[u, "(\Lambda'\ B')"'] \\
K^r \arrow[u, "\begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}"] \arrow[r, "H"] & K^r \arrow[u, "\begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}"']
\end{tikzcd}$$

Aquí, $G(\Lambda\ B) = (\Lambda'\ B')\begin{pmatrix} C & D \\ E & F \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} C & D \\ E & F \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} H$

entonces $E = 0$, $C = H$ y $G\Lambda = \Lambda' H$, $GB = \Lambda' D + B'F$

Que $E = 0$ elimina justamente que se puedan sumar columnas de B a las de Λ.

Veamos ahora que el problema de estudiar representaciones sobre el ~~[illegible]~~ conjunto $S = \{a < b\}$ es equivalente a estudiar representaciones sobre el quiver

$$\bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet$$

con la condición de que las transformaciones lineales sean monomorfismos.

(I) La representación $\mathcal{U}$ de S se puede ver como una representación del quiver $\overset{2}{\bullet} \to \overset{1}{\bullet} \to \overset{0}{\bullet}$ siendo la transformación lineal de 2 a 1 un monomorfismo.

Inversamente, dar una representación sobre este quiver con la condición de que la transformación lineal de 2 a 1 sea un monomorfismo induce una representación sobre S.

Veamos qué quiere decir que dos representaciones son isomorfas.

$$\begin{tikzcd}
V_0 \arrow[r, "f", "\cong"'] & W_0 \\
V_1 \arrow[u, "T"] \arrow[r, "g", "\cong"'] & W_1 \arrow[u, "T'"'] \\
V_2 \arrow[u, "i"] \arrow[r, "h", "\cong"'] & W_2 \arrow[u, "i'"']
\end{tikzcd}$$

Como i, i' son monomorfismos se tiene

$$V_1 = V_2 \oplus V_1' \quad , \quad W_1 = W_2 \oplus W_1'$$

entonces $g = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{pmatrix}$ y se tiene que los cuadrados conmutan

$$\begin{tikzcd}
V_0 \arrow[r, "f"] & W_0 \\
V_2 \oplus V_1' \arrow[u, "T=(T_1\ T_2)"] \arrow[r, "g=\begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{pmatrix}"] & W_2 \oplus W_1' \arrow[u, "T'=(T_1'\ T_2')"'] \\
V_2 \arrow[u, "i=\begin{pmatrix} 1_{V_2} \\ 0 \end{pmatrix}"] \arrow[r, "h"'] & W_2 \arrow[u, "i'=\begin{pmatrix} 1_{W_2} \\ 0 \end{pmatrix}"']
\end{tikzcd}$$

Aquí $g_3 = 0$ y $g_1 = h$

(II) Se puede tomar T de tal manera que también sea monomorfismo, por la siguiente razón.

Supongamos que se tiene

$$\begin{tikzcd} V_0 \\ V_1 \arrow[u, "T"'] \\ V_2 \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd} \qquad y \ K = \ker T$$

de aquí obtenemos

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & V_0 \\ K \arrow[u] \arrow[r] & V_1 \arrow[u, "T"'] \\ K \cap V_2 \arrow[u, "i"] \arrow[r] & V_2 \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

entonces $V_2 = (K \cap V_2) \oplus V_2'$, con $K \cap V_2' = \{0\}$

$V_1 = K \oplus V_2' \oplus V_1''$

así que si $V_1' = V_2' \oplus V_1''$, $T|_{V_1'}$ es monomorfismo y

$$\begin{tikzcd} V_0 \\ V_1 \arrow[u, "T"'] \\ V_2 \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd} \cong \begin{tikzcd} V_0 \\ K \oplus V_1' \arrow[u] \\ (K \cap V_2) \oplus V_2' \arrow[u] \end{tikzcd} \cong \begin{tikzcd} 0 \\ K \arrow[u] \\ K \cap V_2 \arrow[u] \end{tikzcd} \oplus \begin{tikzcd} V_0 \\ V_1' \arrow[u] \\ V_2' \arrow[u] \end{tikzcd} ,$$

En general, consideremos $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ un conjunto parcialmente ordenado. A S le asociamos el siguiente quiver $Q(S)$:

(1) los vértices serán $S \cup \{p\}$

(2) las flechas son: una flecha de a_i a a_j si $a_i < a_j$ y si no existe a_k tal que $a_i < a_k < a_j$; y para cada maximal a_ℓ de S una flecha de a_ℓ a p.

Si $\mathcal{U} = \{M_{a_i}\}_{i=1}^{n}$ es una representación de S, donde el orden de la matriz M_{a_i} es $m \times s_i$, a $\mathcal{U}$ le asociamos la representación $\tilde{\mathcal{U}}$ del quiver $Q(S)$ de la manera siguiente:

(1) $Q(S)(a_i) = \bigoplus\limits_{a_j \le a_i} K^{s_j}$, $Q(S)(p) = K^m$

(2) Si hay una flecha $a_i \to a_j$ el morfismo será la inclusión (aquí $Q(S)(a_j) = Q(S)(a_i) \oplus K^{s_j}$) y si hay una flecha $a_k \to p$ el morfismo será el inducido por las M_{a_i} para $a_i \le a_k$, es decir, si $v_j \in K^{s_j}$ con $a_j \le a_k$ y $v = (v_j)_{a_j \le a_k}$ entonces $M(v) = \sum\limits_{a_j \le a_k} M_{a_j}(v_j)$

Veamos que los morfismos entre dos representaciones del quiver corresponden a los morfismos entre representaciones del parcialmente ordenado. Para ello consideremos dos cuadrados típicos:

$$\begin{tikzcd}
K^{m} \arrow[r, "T"] & K^{m'} \\
\bigoplus\limits_{a_j < a_i} K^{s_j} \oplus K^{s_i} \arrow[u, "(M_{a_j})"] \arrow[r, "(X_{kl})"] & \bigoplus\limits_{a_j < a_i} K^{s'_j} \oplus K^{s'_i} \arrow[u, "(N_{a_h})"'] \\
\bigoplus\limits_{a_j < a_i} K^{s_j} \arrow[u, "\binom{I}{0}"] \arrow[r, "(Y_{rt})"] & \bigoplus\limits_{a_j < a_i} K^{s'_j} \arrow[u, "\binom{I}{0}"']
\end{tikzcd}$$

donde $X_{kl} : K^{s_l} \longrightarrow K^{s_k}$, $Y_{rt} : K^{s_t} \longrightarrow K^{s_r}$

la conmutatividad del primer cuadrado se expresa según la fórmula:

$$T M_{a_j} = \sum_{a_h \leq a_j} N_{a_h} X_{hj}$$

y de la conmutatividad del segundo cuadrado se obtiene que $X_{kl} = Y_{kl}$ cuando esto tiene sentido y que $k \neq j \Rightarrow X_{kj} = 0$ y esto último nos dice que no se pueden sumar columnas de M_{a_k} a las de M_{a_j}.

Inversamente, dado un quiver Q tal que existe un vértice m con la propiedad de que para todo vértice j de Q, existe un camino de j a m. A Q se le asocia el siguiente conjunto parcialmente ordenado:

$S_a = \{\text{vértices de } a\} - \{m\}$

La relación de orden en S_a está dada por:

$j \leq k$ si existe un camino de j a k.

Y si R es una representación de este quiver (con las transformaciones lineales mono), la representación que le corresponde a S_a es la siguiente:

Si $i \in S_a$ y V_i' es tal que $V_i = \sum_{j<i} V_j \oplus V_i'$

entonces $\varphi_i : V_i' \longrightarrow V_m$

donde φ_i es la composición correspondiente (restringida a V_i'), en V_m.

$\varphi_R = \{M_i\}_{i \in S_a}$ es la representación de S_a asociada a R

donde M_i es la matriz asociada a φ_i

Como en el ejemplo, se puede ver que φ_R es en realidad una representación de S_a (con las operaciones permitidas).

Por último, de manera análoga a como se hizo en el ejemplo, se pueden tomar las transformaciones lineales que se aplican en V_m de tal manera que sean monomorfismos, esto es como sigue:

Sean $a_1, \ldots, a_t$ los máximos de S, donde $a_{s+1}, \ldots, a_t$ son los máximos que son mínimos. Para cada a_i, $i = 1, \ldots, s$ sea b_i mínimo de S tal que $b_i < a_i$; por supuesto puede pasar que $b_i = b_j$ aunque $i \neq j$

Sea φ una representación de S

$$
\begin{tikzcd}
 & & V & & & \\
V_{a_1} \arrow[urr, "\varphi_1"] & V_{a_2} \arrow[ur, "\varphi_2"] & \cdots & V_{a_s} \arrow[ul, "\varphi_s"'] & \cdots & V_{a_t} \arrow[ullll, "\varphi_t"'] \\
V_{b_1} \arrow[u, hook, dashed] & V_{b_2} \arrow[u, hook, dashed] & & V_{b_s} \arrow[u, hook, dashed] & &
\end{tikzcd}
$$

Sea $W_{a_i} = \ker \varphi_i$, $i = 1, \ldots, t$; y para $i = 1, \ldots, s$

sea $W_{b_i} = W_{a_i} \cap V_{b_i}$

Tenemos que ver que si $b_i = b_j$ entonces $W_{b_i} = W_{b_j}$,

pero esto es porque el diagrama conmuta

$$
\begin{tikzcd}
 & V & \\
V_{a_i} \arrow[ur, "\varphi_i"] & & V_{a_j} \arrow[ul, "\varphi_j"'] \\
 & V_{b_i} \arrow[ul, hook, dashed] \arrow[ur, hook, dashed] \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft"] &
\end{tikzcd}
$$

es decir

$$W_{b_i} = W_{a_i} \cap V_{b_i} = W_{a_i} \cap W_{b_j} \quad , \quad W_{b_j} = W_{a_j} \cap W_{b_j}$$

$$x \in W_{a_j} \cap V_{b_j} \iff \varphi_j(x) = 0 \iff \varphi_i(x) = 0 \iff x \in W_{a_i} \cap V_{b_j}$$

Ahora, sea $V_{b_i} = W_{b_i} \oplus V'_{b_i}$, y para cualquier V_b de la representación, éste se descompone como sigue:

$$V_b = W_b \oplus \sum_{k<b} V'_k \oplus V'_b$$

Además los morfismos actúan de la siguiente forma

$$\begin{tikzcd}
V_{b'} = & W_{b'} \oplus & \Big(\sum_{k<b'} V'_k \oplus V'_{b'}\Big) \\
V_b = \arrow[u] & W_b \oplus \arrow[u] & \Big(\sum_{k<b} V'_k \oplus V'_b\Big) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Entonces la representación φ se descompone:

$$\varphi = \{W_b\}_{b\in S} \oplus \Big\{\sum_{k<b} V'_k \oplus V'_b\Big\}_{b\in S}$$

donde $\varphi_i | W_{a_i} = 0$ y $\varphi_i \,|\, V'_{a_i} \oplus \sum_{k<a_i} V'_k$ es monop.

Capítulo II

Preliminares

Sea Λ un álgebra de artin, es decir, una R-álgebra que como R-módulo es finitamente generado, donde R es un anillo conmutativo artiniano. Por mod (Λ) entenderemos los Λ-módulos izquierdos finitamente generados. En el presente trabajo supondremos que Λ es un álgebra de artin.

Una sucesión exacta $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ en mod (Λ) es casi escindible si:

(1) la sucesión no se divide

(2) A y C son inescindibles

(3) se cumplen las siguientes propiedades equivalentes:

(a) Si $h: X \longrightarrow C$ no es un epimorfismo escindible, entonces existe $t: X \to B$ tal que $gt = h$.

(b) Si $h: A \longrightarrow X$ no es un monomorfismo escindible, entonces existe $s: B \longrightarrow X$ tal que $sf = h$.

En [3], Auslander obtuvo muchos resultados sobre sucesiones que casi se dividen, varios de ellos para categorías un poco más generales que mod (Λ). Daremos aquí los resultados y definiciones que se necesitan, las demostraciones son omitidas y se pueden encontrar en el artículo mencionado.

D: mod $(\Lambda) \longrightarrow$ mod (Λ^{op}) denotará la dualidad usual definida por $D(X) = \mathrm{Hom}_R(X, I)$ donde I es la cápsula inyectiva sobre R de $R/\mathrm{rad}\,R$.

$\mathrm{Tr} : \underline{\mathrm{mod}}(\Lambda) \longrightarrow \underline{\mathrm{mod}}(\Lambda^{op})$ denotará la dualidad (definida en [2]) entre $\underline{\mathrm{mod}}(\Lambda) = \mathrm{mod}(\Lambda)/\text{proyectivos}$ y $\underline{\mathrm{mod}}(\Lambda^{op}) = \mathrm{mod}(\Lambda^{op})/\text{proy.}$

Proposición 1: Sean $0 \to A \to B \to C \to 0$ y $0 \to A' \to B' \to C' \to 0$ dos sucesiones que casi se dividen en mod (Λ). Son equivalentes

(i) las sucesiones son isomorfas

(ii) $A \cong A'$

(iii) $C \cong C'$

Proposición 2: Para cada inescindible no proyectivo C en mod(Λ) existe una única sucesión (excepto isomorfismos) que casi se divide $0 \to A \to B \to C \to 0$.

Proposición 3: Para cada inescindible no inyectivo A en mod(Λ) existe una única sucesión (excepto isomorfismos) que casi se divide $0 \to A \to B \to C \to 0$.

Proposición 4: Si $0 \to A \to B \to C \to 0$ es una sucesión que casi se divide en mod (Λ), entonces $C \cong \mathrm{Tr}\,D\,A$ y $A \cong D\,\mathrm{Tr}\,C$

Entonces, a cada inescindible no proyectivo C se le asocia un invariante, que es la sucesión que casi se divide $0 \to A \to B \to C \to 0$ y que denotaremos $0 \to D\mathrm{Tr}C \to B \to C \to 0$ (prop. 4).

Analogamente, cada inescindible Λ no inyectivo tiene asociado un invariante, la sucesión que casi se divide $0 \to \Lambda \to B \to C \to 0$ y que escribiremos $0 \to \Lambda \to B \to TrD\Lambda \to 0$.

Proposición 5: Sea $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ una sucesión casi escindible en $\mathrm{mod}(\Lambda)$.

(a) Si C' es un submódulo propio de C, la sucesión exacta inducida $0 \to \Lambda \to g^{-1}(C') \to C' \to 0$ se divide

(b) Si $\Lambda' \neq (0)$ es un submódulo de Λ, la sucesión exacta inducida $0 \to \Lambda/\Lambda' \to B/f(\Lambda') \to C \to 0$ se divide.

Sea $F \in (\mathrm{mod}(\Lambda^{op}), Ab)$ donde Ab es la categoría de grupos abelianos. Un elemento $x \in F(C)$ se llama minimal si $x \neq 0$ y $F(f)(x) = 0$ para todo $f: X \to C$ que es monomorfismo propio. Se sabe que si $x \in F(C)$ es minimal entonces C es inescindible.

Proposición 6: Sea Λ un modulo inescindible en $\mathrm{mod}_I(\Lambda)$. Entonces $x: 0 \to \Lambda \to E \to TrD(\Lambda) \to 0$ es una sucesión casi escindible si y solo si x es un elemento minimal de $Ext^1_\Lambda(-,\Lambda)(TrD\Lambda)$.

Morfismos irreducibles

Si $0 \to \Lambda \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ es una sucesión que casi se divide entonces f y g tienen la siguiente propiedad

(a) si el diagrama
$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & C \\ B \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$
conmuta, entonces h es un isomorfismo.

(b) si el diagrama
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & B \\ B \arrow[ur, "k"'] & \end{tikzcd}$$
conmuta, entonces k es un isomorfismo.

<u>Definiciones</u>

(1) Un morfismo $g: X \to Y$ se llama <u>minimal derecho</u> si todo morfismo $h: X \to X$ tal que $gh = g$ es isomorfismo.

(1') Un morfismo $g: X \to Y$ se llama <u>minimal izquierdo</u> si todo morfismo $k: Y \to Y$ tal que $kg = g$ es isomorfismo.

(2) Un morfismo $g: X \to Y$ se llama <u>casi escindible derecho</u> si g no es epimorfismo escindible y para cad $h: Z \to Y$ que no es epimorfismo escindible, existe $t: Z \to X$ tal que $gt = h$.

(2') Un morfismo $g: X \to Y$ se llama <u>casi escindible izquierdo</u> si g no es monomorfismo escindible y para cada $k: X \to Z$ que no es monomorfismo escindible, existe $l: Y \to Z$ tal que $lg = k$.

(3) Un morfismo $g: X \to Y$ se llama <u>casi escindible minimal derecho</u> si es minimal derecho y casi escindible derecho.

(3') Un morfismo $g: X \to Y$ se llama casi escindible minimal izquierdo si es minimal izquierdo y casi escindible izquierdo.

(4) Un morfismo $g: X \to Y$ se llama <u>irreducible</u> si g no es epimorfismo escindible o no es monomorfismo escindible y si dado un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dr, "k"] & \\ X \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, "g"'] & & Y \end{tikzcd}$$

entonces h es un monomorfismo escindible o k es un epimorfismo escindible.

<u>Proposición 7</u>: (a) Un morfismo $g: X \to Y$ en mod(Λ) es minimal derecho, casi escindible derecho, casi escindible minimal derecho si y solo si el morfismo correspondiente $g^{op}: Y \to X$ en mod(Λ^{op}) es minimal izquierdo, casi escindible izquierdo, casi escindible minimal izquierdo respectivamente.

(b) Si $g: X \to Y$ y $g': X' \to Y$ son morfismos casi escindibles minimales derechos, entonces existe un isomorfismo $h: X \to X'$ tal que $g = g'h$.

(c) Si $f: X \to Y$ y $f': X \to Y'$ son morfismos casi escindibles minimales izquierdos, entonces existe un isomorfismo $h: Y \to Y'$ tal que $f' = hf$.

Proposición 8: (a) Si un morfismo en mod (Λ) es irreducible, entonces es monomorfismo propio o epimorfismo propio.

(b) Sea $x: 0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ una sucesión exacta en mod (Λ).

(i) Si f es irreducible, entonces x es un elemento minimal de $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\_,A)(C)$ y entonces C es inescindible.

(ii) si g es irreducible, entonces x es un elemento minimal de $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(C,\_)(A)$ y entonces A es inescindible.

Proposición 9: Sea $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ una sucesión exacta no escindible en mod (Λ)

(a) $f: A \to B$ es irreducible si y solo si el morfismo $g: B \to C$ tiene la propiedad de que dado cualquier morfismo $h: X \to C$ existe un morfismo $t: X \to B$ tal que $gt = h$ o un morfismo $s: B \to X$ tal que $hs = g$.

(b) $g: B \to C$ es irreducible si y solo si el morfismo $f: A \to B$ tiene la propiedad de que dado cualquier morfismo $h: A \to Y$ existe un morfismo $t: B \to Y$ tal que $tf = h$ o existe un morfismo $s: Y \to B$ tal que $sh = f$.

Proposición 10: Sea $x: 0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ una sucesión exacta no escindible en mod (Λ)

(a) $f: A \to B$ es irreducible si y solo si

(i) $\mathrm{Im}(f)$ es un sumando de cada submódulo propio B' de B que contiene a $\mathrm{Im}(f)$

(ii) Si X está en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ y $y \in \mathrm{Ext}^1_\Lambda(C,X)$, existe un morfismo $j: X \to A$ tal que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(C,j)(y)=x$ o existe un morfismo $i: A \to X$ tal que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(C,i)(x)=y$.

(b) $g: B \to C$ es irreducible si y solo si

(i) $g: B/A' \to C$ es un epimorfismo escindible para cada $A' \neq (0)$ que es submódulo de $A = \ker g$

(ii) Si X está en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ y $y \in \mathrm{Ext}^1_\Lambda(X,A)$, existe un morfismo $j: C \to X$ tal que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(j,A)(y)=x$ o existe un morfismo $i: X \to C$ tal que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(i,A)(x)=y$.

<u>Proposición 11</u>: Sea $0 \to A \to B \to C \to 0$ una sucesión exacta no escindible en $\mathrm{mod}(\Lambda)$. Son equivalentes:

(a) $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ es una sucesión casi escindible.

(b) $\mathrm{End}_\Lambda(A)$ es un anillo local y g es casi escindible derecho.

(c) $\mathrm{End}_\Lambda(C)$ es un anillo local y f es casi escindible izquierdo.

<u>Proposición 12</u>: Una sucesión exacta $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ es casi escindible si y solo si $f: A \to B$ y $g: B \to C$ son irreducible, $\mathrm{End}_\Lambda(A)$ es local y C es inescindible.

Proposición 13: Sea C un Λ-módulo inescindible

(a) Si C es proyectivo, entonces $g: B \to C$ es casi escindible minimal derecho si y solo si g es monomorfismo con $g(B) = r \cdot C$ donde r es el radical de Λ.

(b) Si C no es proyectivo, entonces $g: B \to C$ es casi escindible minimal derecho si y solo si $0 \to \ker g \to B \to C \to 0$ es una sucesión casi escindible.

(c) Si C es inyectivo, entonces $f: C \to D$ es casi escindible minimal izquierdo si y solo si f es un epimorfismo y $\ker(f) = \operatorname{soc} C$ = socle de C.

(d) Si C no es inyectivo, entonces $f: C \to D$ es casi escindible minimal izquierdo si y solo si $0 \to C \to D \to \operatorname{coker} f \to 0$ es una sucesión casi escindible.

Proposición 14: Sea C inescindible en mod (Λ).

(a) Existe un morfismo $f: B \to C$ casi escindible minimal derecho y $B = (0)$ si y solo si C es un módulo proyectivo simple.

(b) Existe un morfismo $g: C \to D$ casi escindible minimal izquierdo y $D = (0)$ si y solo si C es un módulo inyectivo simple.

Proposición 15: Sean C inescindible en $\mathrm{mod}(\Lambda)$, $f: B \to C$ casi escindible minimal derecho y $g: C \to D$ casi escindible minimal izquierdo.

(a) Sea X en $\mathrm{mod}(\Lambda)$. Existe un morfismo irreducible $h: X \to C$ si y solo si X es isomorfo a un sumando distinto de cero de B.

(b) Existen solo un número finito $X_1, \dots, X_n$ de X's no isomorfos en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ tal que existen morfismos irreducibles $h_i: X_i \to C$.

(c) Supongamos que $h: X \to C$ es irreducible.

(i) h es un monomorfismo propio o un epimorfismo propio.

(ii) h es un epimorfismo propio (monomorfismo propio) si y solo si $\ell(X) > \ell(C)$ $(\ell(X) < \ell(C))$.

(iii) $h|_{X'}: X' \to C$ es irreducible para todos los sumandos distintos de cero X' de X.

(a') Sea Y en $\mathrm{mod}(\Lambda)$. Existe un morfismo irreducible $j: C \to Y$ si y solo si Y es isomorfo a un sumando distinto de cero de D.

(b') Existen solo un número finito $Y_1, \dots, Y_n$ de módulos no isomorfos Y_i en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ tal que existen morfismos irreducibles $j_i: C \to Y_i$.

(c') Supongamos que $h: C \longrightarrow Y$ es irreducible

(i) h es un monomorfismo propio o un epimorfismo propio.

(ii) h es un epimorfismo (monomorfismo) propio si y solo si $\ell(C) > \ell(Y)$ $(\ell(C) < \ell(Y))$.

(iii) Si $p: Y \longrightarrow Y'$ es un epimorfismo escindible y $Y' \neq (0)$ entonces $ph: C \longrightarrow Y'$ es irreducible.

<u>Proposición 16</u>: Sea C inescindible no proyectivo en $\mathrm{mod}(\Lambda)$. Un módulo X tiene la propiedad de que existe un morfismo irreducible $f: X \rightarrow C$ si y solo si existe un morfismo irreducible $g: D\mathrm{Tr}\,C \longrightarrow X$.

Capítulo III

En este capítulo trabajamos con cierta clase de módulos en mod(Λ) que son los módulos libres de torsión para cierta teoría de torsión, demostraremos que en esta clase existe la sucesión que casi se divide y se verán resultados análogos a los que aparecen en las preliminares, (Cap. II) para este tipo de módulos.

Sección I

Definición: Una teoría de torsión para mod(Λ) es un par $(\underline{T}, \underline{F})$ de clases de Λ-módulos en mod(Λ) tal que

(i) $\mathrm{Hom}_\Lambda(T, F) = 0$ para toda T en $\underline{T}$ y F en $\underline{F}$

(ii) $\underline{T}$ y $\underline{F}$ son clases maximales con la propiedad (i).

A los módulos en $\underline{T}$ se les llama módulos de torsión y a los módulos en $\underline{F}$ se les llama módulos libres de torsión.

A la clase de módulos de torsión (libres de torsión) para alguna teoría de torsión se le llama clase de torsión (libre de torsión).

Estas clases están caracterizadas en las siguientes proposiciones:

<u>Proposición 1.1</u> Una clase de módulos es una clase de torsión si y solo si es cerrada bajo cocientes, sumas directas y extensiones.

<u>Proposición 1.2</u> Una clase de módulos es una clase libre de torsión si y solo si es cerrada bajo submódulos, productos directos y extensiones.

La demostración de estas proposiciones y más sobre el tema se pueden encontrar en [9]

Una teoría de torsión $(\underline{T}, \underline{F})$ determina dos funtores

$T: \mathrm{mod}(\Lambda) \longrightarrow \underline{T}$ y $L: \mathrm{mod}(\Lambda) \longrightarrow \underline{F}$

tal que existen un monomorfismo y un epimorfismo de funtores respectivamente:

$\Psi: T \longrightarrow 1_{\mathrm{mod}(\Lambda)}$ y $\Phi: 1_{\mathrm{mod}(\Lambda)} \longrightarrow L$

Proposición 1.4 Si M' es un submódulo de M y M' es de torsión, entonces $M' \subset T(M)$.

Demostración

$M'/_{M' \cap T(M)}$ es de torsión y se tiene el siguiente morfismo

$$0 \rightarrow M'/_{M' \cap T(M)} \longrightarrow M/_{T(M)}$$

pero $M/_{T(M)}$ es libre de torsión

$$\therefore M'/_{M' \cap T(M)} = 0$$

$$\therefore M' \subset T(M)$$

Sea $\underline{\underline{C}}$ una subcategoría plena de mod (Λ) cerrada bajo extensiones. En $\underline{\underline{C}}$ existen sucesiones que casi se dividen por la derecha (izquierda) si para todo inescindible M en $\underline{\underline{C}}$, no proyectivo (inyectivo) se tiene la sucesión que casi se divide en $\underline{\underline{C}}$ $0 \rightarrow M'' \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow 0$, $(0 \rightarrow M \rightarrow M' \rightarrow M'' \rightarrow 0)$ (aquí M' está en $\underline{\underline{C}}$). Daremos algunos resultados análogos a los que aparecen en [ ] relativos a una clase libre de torsión.

Proposición 1.5 Sea $\underline{\underline{C}}$ una clase libre de torsión en mod (Λ), $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ una sucesión exacta en $\underline{\underline{C}}$.

Entonces

(a) f es irreducible en $\underline{\underline{C}}$ si y solo si dado cualquier morfismo $h: X \to C$ en $\underline{\underline{C}}$, existe un morfismo en $\underline{\underline{C}}$ $t: X \to B$ tal que $gt = h$. o existe un morfismo $s: B \to X$ en $\underline{\underline{C}}$ tal que $hs = g$.

(b) g es irreducible en $\underline{\underline{C}}$ si y solo si dado cualquier morfismo $h: A \to Y$ en $\underline{\underline{C}}$, existe un morfismo en $\underline{\underline{C}}$ $t: B \to Y$ tal que $tf = h$ o existe un morfismo $s: Y \to B$ en $\underline{\underline{C}}$ tal que $sh = f$.

<u>Demostración</u>

(a) Sea $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ exacta en $\underline{\underline{C}}$ y supongamos que f es irreducible en $\underline{\underline{C}}$.

Sea $h: X \to C$ cualquier morfismo en $\underline{\underline{C}}$, entonces se tiene el siguiente diagrama conmutativo, donde el segundo cuadrado es un pullback.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "j"] \arrow[d, equal] & B \times X \arrow[r, "k"] \arrow[d, "l"] & X \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"'] & B \arrow[r, "g"'] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$B \times X$ está en $\underline{\underline{C}}$ ya que es cerrada bajo extensiones.

Como f es irreducible en $\underline{\underline{C}}$, entonces j es mono que se divide o l es epi que se divide.

(i) Si j es mono que se divide, entonces existe $k': X \to B \times X$ tal que $kk' = 1_X$ y entonces $t = lk': X \to B$ es tal que $gt = glk' = hkk' = h$.

(ii) Si l es epi que se divide, entonces existe $l': B \to B \times X$ tal que $ll' = 1_B$ y entonces $s = kl'$ es tal que $hs = hkl' = gll' = g$.

Ahora, supongamos que g tiene la propiedad dada en (a) y consideremos el siguiente diagrama conmutativo en $\underline{\underline{C}}$

$$\begin{tikzcd} & D \arrow[dr, "v"] & \\ A \arrow[ur, "u"] \arrow[rr, "f"'] & & B \end{tikzcd}$$

Como f es mono, entonces u es mono y el siguiente diagrama conmuta, donde $E = \operatorname{coker} u$ y $K = \ker v$.

$$\begin{tikzcd} & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ & & K \arrow[d] & K \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & D \arrow[r, "r"] \arrow[d, "v"] & E \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"'] & B \arrow[r, "g"'] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$\underline{\underline{C}}$ es una clase libre de torsión y D está en $\underline{\underline{C}}$, entonces K está en $\underline{\underline{C}}$ y que K y C están en $\underline{\underline{C}}$ implica que E está en $\underline{\underline{C}}$. El segundo cuadrado es un pullback, por lo tanto es isomorfo a

$$\begin{tikzcd} B \times E \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "h"] \\ B \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

Por hipótesis, dado $h: E \longrightarrow C$, existe $t: E \longrightarrow B$ tal que $gt = h$ ó existe $s: B \longrightarrow E$ tal que $hs = g$.

(i) si existe $t: E \longrightarrow B$ tal que $gt = h$, entonces r es un epimorfismo escindible y de aquí u es mono que se divide

(ii) si existe $s: B \longrightarrow E$ tal que $hs = g$ entonces v es epi que se divide.

$\therefore$ f es irreducible

Analogamente se demuestra (b).

<u>Proposición 1.6</u> Sea $x: 0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ exacta en $\underline{C}$; x es casi escindible en $\underline{C}$ si y solo si f y g son irreducibles en $\underline{C}$.

<u>Demostración</u>

$\Rightarrow$) Si x es casi escindible entonces f y g son irreducibles.

$\Leftarrow$) Supongamos que f y g son irreducibles.

Sea $h: X \longrightarrow C$ un morfismo que no es epi escindible en $\underline{C}$.

Como f es irreducible, existe $t: X \to B$ tal que $gt = h$ o existe $s: B \to X$ tal que $hs = g$.

Bastará considerar a X inescindible.

Supongamos que existe $s: B \to X$ tal que $hs = g$

Como g es irreducible, entonces s es mono que se divide o h es epi que se divide, pero h no es epi que se divide, por lo tanto s es mono que se divide y como X es inescindible entonces s será isomorfismo.

Entonces $s^{-1}: X \to B$ es tal que $gs^{-1} = h$.

<u>Lema 1.7</u> Sea $0 \to M' \to B \to M \to 0$ una sucesión casi escindible en $\underline{C}$, una clase libre de torsión, y x el elemento correspondiente en $Ext(M, M')$. Entonces si $0 \neq y \in Ext(N, M')$ existe $\phi: M \to N$ tal que $Ext(\phi, M')(y) = x$.

<u>Demostración</u>

Sea $0 \to M' \xrightarrow{f'} B' \xrightarrow{g'} M \to 0$ la sucesión exacta correspondiente a y en $\underline{C}$. Como f' no es monomorfismo que se divide y x es casi escindible, entonces el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
x: 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, dashed, "\phi'"] & M \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\phi"] & 0 \\
y: 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

y por lo tanto $\mathrm{Ext}(\phi, M')(y) = x$.

Analogamente, es cierta la propiedad dual.

Lema 1.8: Sea $x \in \mathrm{Soc}\, \mathrm{Ext}(-, M)(N)$ con M y N inescindibles en $\underline{C}$, entonces la correspondiente extensión $0 \to M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N \to 0$ es casi escindible.

Demostración

(i) f es irreducible

Sea N' inescindible y $\phi: N' \to N$ no isomorfismo, entonces $\phi^*(x) = \mathrm{Ext}(\phi, N)(x) \in \mathrm{Ext}(N', M)$

$$\begin{tikzcd}
\phi^*(x): 0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & E' \arrow[r] \arrow[d, "\phi'"] & N' \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & 0 \\
x: 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & E \arrow[r] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Como $\phi \in \mathrm{rad}(N', N)$ y $x \in \mathrm{Soc}\, \mathrm{Ext}(-, M)(N)$ entonces

$$\phi^*(x) = 0$$

$\therefore$ existe $\phi': N' \to E$ tal que $g\phi' = \phi$

$\therefore$ f es irreducible

Observación: Como $\mathrm{End}_\Lambda(N)$ es local, $gu = g$ implica que u es isomorfismo.

(ii) g es irreducible

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo, con X en $\underline{C}$

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dr, "u"] & \\ E \arrow[ur, "v"] \arrow[rr, "g"'] & & N \end{tikzcd}$$

Si u no es epi escindible, entonces existe $p : X \longrightarrow E$ tal que $gp = u$, y de aquí $g = uv = gpv$ entonces pv es isomorfismo y por lo tanto v es mono que se divide.

$\therefore$ g es irreducible.

$\therefore$ $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ es casi escindible.

<u>Observación</u>: El lema 1.8 implica que si $\operatorname{Soc} \operatorname{Ext}_{\underline{C}}(-,M)(N) \neq 0$ entonces es simple. También si $x \in \operatorname{Soc} \operatorname{Ext}_{\underline{C}}(N', M)$ es casi escindible, entonces $\operatorname{Ext}(N', M)$ tiene socle simple como $\operatorname{End}_{\Lambda}(M)$ - módulo.

Veamos ahora la existencia de sucesiones que casi se dividen en $\underline{C}$.

Proposición 1.9 Sea $\underline{C}$ una clase libre de torsión. En $\underline{C}$ existen sucesiones que casi se dividen por la izquierda. Además si L es el funtor asociado a $\underline{C}$ entonces, si M no es inyectivo en $\underline{C}$ y $0 \to M \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} M' \to 0$ es la sucesión que casi se divide en mod (Λ), entonces

$$0 \to M \xrightarrow{L(f)} L(B) \xrightarrow{L(g)} L(M') \to 0$$

es exacta, donde $L(B) = B_1 \oplus P$, $L(M') = M_1 \oplus P$ con P proyectivo en $\underline{C}$ y tal que

$$0 \to M \xrightarrow{f_1} B_1 \xrightarrow{g_1} M_1 \to 0$$

es casi escindible en $\underline{C}$, donde $L(f) = \begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $L(g) = \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & 1_P \end{pmatrix}$.

Demostración

Para toda M en mod (Λ) se tiene la siguiente sucesión exacta

$$0 \to t(M) \to M \to L(M) \to 0$$

y si X está en $\underline{C}$

$$0 \to (L(M), X) \to (M, X) \to \overset{0}{(t(M), X)} \to Ext(L(M), X) \to Ext(M, X)$$

Como X es libre de torsión, entonces $(t(M), X) = 0$

Sea M inescindible no inyectivo en $\underline{C}$,

entonces $Ext(-, M)|_{\underline{C}} \neq 0$

Sea Y en $\underline{C}$ tal que $Ext_{\underline{C}}(Y, M) \neq 0$

Como Y es libre de torsión, entonces $L(Y)=Y$

$$\therefore \ \operatorname{Ext}(L(-),M)\neq 0$$

Entonces se tiene un monomorfismo $\operatorname{Ext}(L(-),M)\xrightarrow{\psi}\operatorname{Ext}(-,M)$

sean $0\neq z\in \operatorname{Ext}(L(Y),M)$ y $x\in \operatorname{Ext}(M',M)$ la sucesión casi escindible de M en $\operatorname{mod}(\Lambda)$.

Por el lema 1.7 existe $\phi: M'\longrightarrow Y$ tal que $\phi^*(\psi(z))=x$

Del diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ext}(L(Y),M) \arrow[rrr] \arrow[ddd] & & & \operatorname{Ext}(Y,M) \arrow[ddd] \\
& z \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \psi(z) \arrow[d, mapsto] & \\
& y \arrow[r, mapsto] & \phi^*(\psi(z))=x & \\
\operatorname{Ext}(L(M'),M) \arrow[rrr] & & & \operatorname{Ext}(M',M)
\end{tikzcd}$$

se tiene que $y\neq 0$ y por lo tanto $\operatorname{Ext}(L(M'),M)\neq 0$

Sea $L(M')=\oplus C_i$ con los C_i inescindibles en $\mathcal{G}$.

$$\operatorname{Ext}(L(M'),M)=\operatorname{Ext}(\oplus C_i,M)=\oplus \operatorname{Ext}(C_i,M)\hookrightarrow \operatorname{Ext}(M',M)$$

Sea $\operatorname{Ext}(M',M)$ es simple como $\operatorname{End}(M)$-módulo (por la observación hecha después del lema 1.8), entonces se puede suponer $\operatorname{Ext}(C_1,M)\neq 0$ y $\operatorname{Ext}(\bigoplus_{i\geq 2} C_i,M)=0$

Probaremos ahora que $\operatorname{Ext}(\bigoplus_{i\geq 2} C_i, X)=0$ para toda X en $\mathcal{G}$, es decir, que $\bigoplus_{i\geq 2} C_i$ es proyectivo en $\mathcal{G}$.

Para esto, supongamos que existe Z en $\underset{=}{C}$ tal que $\mathrm{Ext}(\bigoplus_{i\geq 2} C_i, Z) \neq 0$ y sea $0 \neq w \in \mathrm{Ext}(\bigoplus_{i\geq 2} C_i, Z)$, existe $\phi: Z \to M$ tal que $\phi^*(w) = x$

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}(L(M'), Z) \arrow[r] & \mathrm{Ext}(M', Z) \arrow[r] & \mathrm{Ext}(M', M) \\
\mathrm{Ext}(\bigoplus_{i\geq 2} C_i, Z) \arrow[u] \arrow[r] & \mathrm{Ext}(\bigoplus_i C_i, M) \arrow[r] & \mathrm{Ext}(L(M'), M) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

y veamos que pasa con w

$$\begin{tikzcd}
w' \arrow[r, mapsto] & w'' \arrow[r, mapsto] & x \neq 0 \\
w \arrow[u, mapsto] \arrow[r, mapsto] & 0 \arrow[r, mapsto] & 0 \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd} \qquad \text{¡absurdo!}$$

$\therefore\ \mathrm{Ext}(\bigoplus_{i\geq 2} C_i, Z) = 0$ para toda Z en $\underset{=}{C}$

$\therefore\ \bigoplus_{i\geq 2} C_i = P$ es proyectivo en $\underset{=}{C}$

$\therefore\ L(M') = C_1 \oplus P$

Se tiene que $\mathrm{Ext}(C_1, M) \cong \mathrm{Ext}(C_1 \oplus P, M) = \mathrm{Ext}(L(M'), M) \hookrightarrow \mathrm{Ext}(M', M)$

con z tal que $\quad \underset{z}{\psi} \longmapsto \underset{y}{\psi} \longmapsto \underset{x}{\psi}$

Sea $z: 0 \to M \to E \to C_1 \to 0$

$z \in \mathrm{Soc}\,\mathrm{Ext}(C_1,-)(M)$ por lo siguiente

Si $u: M \to X$ no es un isomorfismo, con X inescindible en X, es decir, $u \in \mathrm{rad}(M,X)$ entonces

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}(C_1,M) \cong \mathrm{Ext}(L(M'),M) \arrow[r, hook] \arrow[d, "u^*"'] & \mathrm{Ext}(M',M) \arrow[d, "u^*"] \\
\mathrm{Ext}(C_1,X) = \mathrm{Ext}(L(M'),X) \arrow[r, hook] & \mathrm{Ext}(M',X)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
z \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & y \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & x \arrow[d, mapsto] \\
u^*(z) \arrow[r, mapsto] & u^*(y) \arrow[r, mapsto] & 0
\end{tikzcd}$$

$\therefore\ u^*(z) = 0 \quad \therefore\ z \in \mathrm{Soc}\,\mathrm{Ext}(C_1,-)(M)$

$\therefore$ por el dual del lema 1.8, $z: 0 \to M \to E \to C_1 \to 0$ es casi escindible.

Ahora, trataremos de identificar a z

(i) $0 \to M \xrightarrow{L(f)} L(B) \xrightarrow{L(g)} L(M') \to 0$ es exacta

1°/ $\ker L(g) = \mathrm{Im}\, L(f)$

$$L(g) \circ L(f) = L(g \circ f) = L(0) = 0$$

$$\therefore\ \mathrm{Im}\, L(f) \subset \ker L(g)$$

Sea $\bar{x} \in L(B)$ tal que $L(g)(\bar{x}) = 0$ y consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & t(B) \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "i"'] & t(H') \arrow[d, "j"] \arrow[dl, dashed, "k"'] & \\
0 \arrow[r] & H \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\phi_B"] & H' \arrow[r] \arrow[d, "\phi_{H'}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & H \arrow[r, "L(f)"'] & B/t(B) \arrow[r, "L(g)"'] & H'/t(H') \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Como $0 \to H \to B \to H' \to 0$ es casi escindible, existe $k: t(H') \to B$ tal que $g \circ k = j$. Además se tiene que $\operatorname{Im}(k) \subset t(B)$.

Sea $y \in B$ tal que $\phi_B(y) = \bar{x}$, entonces $j^{-1} g(y) \in t(H')$ si $y' = k j^{-1} g(y) \in t(B)$, entonces $y - y' \in \ker g$ porque

$g(y - y') = g(y) - g(y') = g(y) - g k j^{-1} g(y) = g(y) - j j^{-1} g(y) = 0$

$\therefore$ $y - y' \in \operatorname{Im}(f)$ y sea $f(z) = y - y'$ con $z \in H$

$L(f)(z) = (\phi_B \circ f)(z) = \phi_B(f(z)) = \phi_B(y - y') = \phi_B(y) - \phi_B(y')$

$= \phi_B(y) = \bar{x}$

$\therefore$ $\bar{x} \in \operatorname{Im} L(f)$

$\therefore$ $\operatorname{Im} L(f) = \ker L(g)$.

2°/ $L(g)$ es epimorfismo ya que $L(g) \circ \phi_B$ lo es.

3°/ $L(f)$ es monomorfismo.

En el diagrama anterior $g': t(B) \to t(H')$ es isomorfismo, esto es por lo siguiente

$f(H) \cap t(H') = \{0\}$ ya que $0 \to H \to g'^{-1} t(H') \to t(H') \to 0$ se divide y $0 \to H \to B/kt(H') \to H'/t(H') \to 0$ es exacta

Como H y $H'/t(H')$ son libres de torsión entonces $B/kt(H')$ es libre de torsión, por lo tanto $t(B)/kt(H') = 0$

$$\therefore t(B) = kt(H')$$

Además $g'k = 1_{t(H')}$, $\therefore$ g' es isomorfismo.

De aquí, es fácil ver que $L(f)$ es monomorfismo porque

si $L(f)(x) = 0$ entonces $(\phi_B \cdot f)(x) = 0$

$$\therefore f(x) \in t(B)$$

y $(j \cdot g')(f(x)) = g(f(x)) = 0$

$$\therefore g'(f(x)) = 0$$
$$\therefore f(x) = 0$$
$$\therefore x = 0$$
$$\therefore L(f) \text{ es monomorfismo.}$$

y: $0 \to H \to L(B) \to L(H') \to 0$ es tal que $\psi(y) = x$

donde $L(H') = C_1 \oplus P$ con P proyectivo en $\underline{C}'$

Veremos ahora que $L(B) = B_1 \oplus P$ y que

$z: 0 \to H \to E \to C_1 \to 0$ es tal que $E \cong B_1$

Se tiene $L(g): L(B) \to L(M') = C_1 \oplus P$

entonces $L(B) \xrightarrow{L(g)} L(M') \xrightarrow{\pi} P \to 0$ se divide

$\therefore$ existe $\sigma: P \to L(B)$ tal que $\pi L(g) \sigma = 1_P$

$\therefore L(B) = B_1 \oplus P$

$$
\begin{tikzcd}
B_1 \oplus P \arrow[r, "g'"] & C_1 \oplus P \arrow[d] \\
& P \arrow[ul, dashed, "\begin{pmatrix} 0 \\ 1_P \end{pmatrix}"]
\end{tikzcd}
\qquad \text{con } g' = \begin{pmatrix} g'' & h \\ 0 & \varphi_P \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\psi: & 0 \arrow[r] & H \arrow[r] \arrow[d, equal] & B_1 \oplus P \arrow[r, "\begin{pmatrix} g'' & h \\ 0 & \varphi_P \end{pmatrix}"] \arrow[d, equal] & C_1 \oplus P \arrow[r] \arrow[d, "\rho"] & 0 \\
\psi': & 0 \arrow[r] & H \arrow[r] & B_1 \oplus P \arrow[r, "\begin{pmatrix} g'' & 0 \\ 0 & \varphi_P \end{pmatrix}"'] & C_1 \oplus P \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

donde $\rho = \begin{pmatrix} g'' & -h\varphi_P^{-1} \\ 0 & \varphi_P^{-1} \end{pmatrix}$

$\therefore \rho^*(\psi') = \psi$

Entonces se tiene

$$
\begin{tikzcd}
Ext(C_1, H) \arrow[r, "F^*"] \arrow[d, "id.\ \varphi"'] & Ext(C_1 \oplus P, H) \arrow[d, "\rho^*"] \\
Ext(C_1, H) \arrow[r, "\pi^*"'] & Ext(C_1 \oplus P, H)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\psi \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \psi' \arrow[d, mapsto] \\
z \arrow[r, mapsto] & \psi
\end{tikzcd}
\qquad \pi^*(z) = \psi'
$$

Por otra parte

$$\begin{tikzcd}
y': 0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & B_1 \oplus P \arrow[r, "\begin{pmatrix} g'' & 0 \\ 0 & 1_P \end{pmatrix}"] \arrow[d, "\pi'"] & C_1 \oplus P \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & 0 \\
z_0: 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & B_1 \arrow[r] & C_1 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$\therefore \quad \pi^*(z_0) = y'$$

$$\therefore \quad z_0 = z$$

$\therefore \; 0 \to M \to B_1 \to C_1 \to 0$ es la sucesión que casi se divide para M en $\underline{\underline{C}}$, donde $L(B) = B_1 \oplus P$, $L(M') = C_1 \oplus P$, con P proyectivo y $L(g) = \begin{pmatrix} g'' & 0 \\ 0 & 1_P \end{pmatrix}$ y $L(f) = \begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

<u>Proposición 1.10</u> Con las notaciones del teorema 1.9, $L(M')$ es inescindible y así la sucesión que casi se divide para M en $\underline{\underline{C}}$ es:

$$0 \to M \xrightarrow{L(f)} L(B) \xrightarrow{L(g)} L(M') \to 0$$

donde $0 \to M \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} M' \to 0$ es la sucesión que casi se divide para M en $\mathrm{mod}(\Lambda)$.

<u>Demostración</u>

Basta demostrar que $L(f)$ es irreducible ya que esto implica que $L(M')$ es inescindible.

Sea X en $\underline{C}$ y $h: X \longrightarrow L(H')$ no epi que se divide.

Consideremos el diagrama conmutativo exacto:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & t(H') & \longrightarrow & W & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow{\scriptstyle h'} & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \\ 0 & \longrightarrow & t(H') & \longrightarrow & H' & \longrightarrow & L(H') & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Por ser X libre de torsión, $L(W) = X$ y si se tuviera $t(H') \subsetneq t(W)$ entonces $t(W) \hookrightarrow W \rightarrow X$ sería distinto de cero, lo que no puede ser.

Entonces $h = L(h')$ y como h no es epi que se divide entonces h' no es epi que se divide.

$\therefore$ existe $t: W \longrightarrow B$ tal que conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} & & W & & \\ & \swarrow{\scriptstyle t} & \downarrow{\scriptstyle h'} & & \\ B & \xrightarrow[q]{} & H' & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad , \quad qt = h'$$

entonces $L(q)L(t) = L(h')$, donde $L(t): X \longrightarrow L(B)$

$\therefore$ $L(f)$ es irreducible

$\therefore$ $L(H')$ es inescindible

y entonces $0 \rightarrow M \xrightarrow{L(f)} L(B) \xrightarrow{L(g)} L(H') \rightarrow 0$ es la que casi se divide para M en $\underline{C}$.

Sección 2

En esta sección aplicaremos algunos de los resultados de la sección anterior para cierta teoría de torsión, la definida por los módulos sin torsión, cuya definición es la siguiente:

Definición: Un módulo es sin torsión si es submódulo de un modulo proyectivo.

Proposición 2.1 Sea Λ un anillo. Entonces un Λ-módulo M es sin torsión si y solo si el morfismo canónico $\phi_M : M \to M^{**}$ es mono, donde M^{**} es el doble dual de M.

Definición: Un anillo Λ es 1-Gorenstein si la cápsula inyectiva $E_\Lambda(\Lambda)$ de ${}_\Lambda\Lambda$ es proyectiva.

Proposición 2.2: Sea Λ un álgebra de artin 1-Gorenstein. Entonces si M está en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ y $\tau(M) = \ker \phi_M$, donde $\phi_M : M \longrightarrow M^{**}$ es el morfismo canónico, se tiene

(a) $M/\tau(M)$ es sin torsión

(b) Si N es sin torsión, entonces $\mathrm{Hom}_\Lambda(\tau(M), N) = 0$

Demostración.

(b) Sea N sin torsión, entonces existe un monomorfismo $i : N \to \Lambda^n$ para alguna n.

Supongamos que $\mathrm{Hom}_\Lambda(\tau(M), N) \neq 0$ y sea $\psi : \tau(M) \to N, \psi \neq 0$ entonces el morfismo $\tau(M) \longrightarrow N \to I(\Lambda)$ es distinto de cero donde $I(\Lambda)$ es la cápsula inyectiva de Λ.

$$\begin{tikzcd} \tau(M) \arrow[r, hook] \arrow[d] & M \arrow[dl, dashed, "\phi"] \\ I(\Lambda) & \end{tikzcd} \quad \text{y aquí } \phi(\tau(M)) \neq 0$$

Como $I(\Lambda)$ es proyectivo, existe un morfismo $\tilde{\phi} : M \to \Lambda$ con $\tilde{\phi} \neq 0$ y $\tilde{\phi}(\tau(M)) \neq 0$, pero $\tau(M) = \ker \phi_M$, así que $\tilde{\phi}(\tau(M)) = 0$

$$\therefore \mathrm{Hom}_\Lambda(\tau(M), N) = 0$$

(a) Consideremos el siguiente diagrama exacto conmutativo:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \tau(M) \arrow[r] \arrow[d, "\phi_{\tau(M)}"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "\phi_M"] & M/\tau(M) \arrow[r] \arrow[d, "\phi_{M/\tau(M)}"] & 0 \\ & \tau(M)^{**} \arrow[r] & M^{**} \arrow[r] & (M/\tau(M))^{**} & \end{tikzcd}$$

Λ es sin torsión, entonces $\tau(M)^{**} = 0$ por (b) y de aquí es fácil ver que $\phi_{M/\tau(M)}$ es mono.

<u>Corolario 2.3</u>: Sea $L.s.(\Lambda)$ la subcategoría plena de módulos sin torsión. Entonces si Λ es un álgebra de artin 1-Gorenstein, $s.t.(\Lambda)$ es una clase libre de torsión.

Demostración

Es inmediato de la proposición anterior que el funtor $L(M) = M/\tau(M)$ donde $\tau(M) = \ker(M \to M^{**})$ define una teoría de torsión donde s.t.(Λ) son los módulos libres de torsión.

Proposición 2.4: Si Λ es un algebra de artin 1-Gorenstein, entonces se tiene la existencia de sucesiones que casi se dividen por la izquierda en s.t.(Λ). Además si $\tau(M) = \ker(M \to M^{**})$ para cada M en mod(Λ) se tiene lo siguiente:

(a) M no es inyectivo en s.t.(Λ) si y solo si $\tau(\mathrm{tr}\,D(M)) \subsetneq \mathrm{tr}\,DM$.

(b) Si M es inescindible no inyectivo en s.t.(Λ) y $0 \to M \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} \mathrm{tr}\,DM \to 0$ es la sucesión que casi se divide para M en mod(Λ), entonces

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\bar{f}} B/\tau(B) \xrightarrow{\bar{g}} \mathrm{tr}\,D(M)/\tau(\mathrm{tr}\,D(M)) \longrightarrow 0$$

es la sucesión que casi se divide para M en s.t.(Λ)

Demostración:

Inmediato de la proposición 1.10 y corolario 2.3.

Sección 3.

En la sección 2 se vió que si Λ es un álgebra de artin 1-Gorenstein, s.t.(Λ) es una clase libre de torsión y para cada C inescindible no inyectivo en s.t.(Λ) existe la sucesión que casi se divide en s.t.(Λ) que es

$$0 \to C \to B/\tau(B) \to \operatorname{tr} DC / \tau(\operatorname{tr} D(C)) \to 0$$

donde $0 \to C \to B \to \operatorname{tr} DC \to 0$ es la sucesión que casi se divide para C en mod (Λ).

Auslander demostró en [3] que si $0 \to A \to B \to C \to 0$ es una sucesión casi escindible en mod (Λ) entonces $C \cong \operatorname{tr} DA$. En esta sección se definirá un funtor que aplicado a C es justamente el módulo de la derecha en la sucesión que casi se divide para C en s.t.(Λ), es decir, se dará otra descripción de $\operatorname{tr} DC / \tau(\operatorname{tr} D(C))$.

Sea M en mod (Λ) no proyectivo, y consideremos la cubierta proyectiva de M, $P_0 \xrightarrow{\phi} M$. Definimos $\Omega(M) = \ker \phi$.

Proposición 3.1 Ω : mod $(\Lambda) \longrightarrow$ s.t.(Λ) es un funtor.

Demostración

Es inmediato de la definición de Ω que $\Omega(M)$ está en s.t. (Λ).

para cada M en $\mathrm{mod}(\Lambda)$

Sea $f: M \to N$ un morfismo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega(M) \arrow[r] \arrow[d, "\Omega(f)"'] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\bar{f}"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega(N) \arrow[r] & Q_0 \arrow[r] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$\Omega(f)$ está bien definida por lo siguiente:

supongamos que $f: M \to N$ se factoriza a través de un proyectivo, es decir

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "u"'] & & N \\
& P \arrow[ur, "v"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $f = vu$ y P es proyectivo

En el siguiente diagrama mostramos que $\Omega(f)$ se factoriza a través de un proyectivo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega(M) \arrow[r, "i"] \arrow[dd, "\Omega(f)"'] & P_0 \arrow[r, "\phi"] \arrow[dd, "\bar{f}"] \arrow[ddl, dashed, "x"'] & M \arrow[r] \arrow[dd, "f"] \arrow[dr, "u"] & 0 \\
& & & & P \arrow[dl, "v"] \arrow[dll, dashed, "\bar{v}"'] \\
0 \arrow[r] & \Omega(N) \arrow[r, "j"'] & Q_0 \arrow[r, "\psi"'] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dada $v: P \to N$, existe $\bar{v}: P \to Q_0$ tal que $\psi \bar{v} = v$

Sea $x: P_0 \to \Omega(N)$ dada por $x = \bar{f} - \bar{v} u \phi$

$\mathrm{Im}(x) \subset \Omega(N)$ porque

$$\psi \circ x = \psi(\bar{f} - \bar{v} u \phi) = \psi \bar{f} - \psi \bar{v} u \phi = \psi \bar{f} - v u \phi = \psi \bar{f} - f \phi = 0$$

Además $xi = (\bar{f} - \bar{\nu} u \phi) i = \bar{f} i - \bar{\nu} u \phi i = \bar{f} i = j\,\Omega(f) = \Omega(f)$

$\therefore\ \Omega(f)$ se factoriza a través de un proyectivo.

Por último, es fácil ver que Ω es un funtor.

Dualmente, si M en $\operatorname{mod}(\Lambda)$ no es inyectivo y $M \xrightarrow{\varphi} I_0$ es la cápsula inyectiva de M, entonces definimos $\Omega^{-1}(M) = \operatorname{coker}\varphi$ y así Ω^{-1} es $\overline{\operatorname{mod}}(\Lambda) \longrightarrow \overline{\text{c.s.t.}}(\Lambda)$ con $\overline{\operatorname{mod}}(\Lambda) = \operatorname{mod}(\Lambda)/I$, $\overline{\text{c.s.t.}}(\Lambda) = \text{c.s.t.}(\Lambda)/I$ donde I es el ideal generado por los inyectivos y c.s.t.(Λ) son los módulos de torsión cuya teoría de torsión es la definida por la de los módulos sin torsión.

<u>Proposición 3.2</u> Sea Λ un álgebra de artin 1-Gorenstein. Si M no es proyectivo en s.t.(Λ), $\Omega\, tr\, \Omega\, tr\, M \cong M/\tau(M)$. y este isomorfismo es funtorial módulo $\underline{P}$ donde $\underline{P}$ son los proyectivos.

<u>Demostración</u>

Sea $P_1 \xrightarrow{\phi} P_0 \xrightarrow{\psi} M$ una presentación proyectiva mínima de M. Entonces se tiene la sucesión exacta

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M^* \arrow[r] & P_0^* \arrow[r] \arrow[dr] & P_1^* \arrow[r] & \mathrm{tr}\, M \arrow[r] & 0 \\
& & & \Omega\,\mathrm{tr}\, M \arrow[u] \arrow[dr] & & \\
& & 0 \arrow[ur] & & 0 &
\end{tikzcd}$$

Consideremos, ahora, la cubierta proyectiva

$Q_0 \xrightarrow{\tau} M^* \longrightarrow 0$ de M^*.

$$\begin{tikzcd}
P_0 \cong P_0^{**} \arrow[rr, "\psi^{**}"] \arrow[dr, "\psi"'] & & M^{**} \arrow[r, "\tau^*"] & Q_0^* \arrow[r] & \mathrm{tr}\,\Omega\,\mathrm{tr}\, M \\
& M \arrow[ur, "\phi_M"'] & & \Omega\,\mathrm{tr}\,\Omega\,\mathrm{tr}\, M \arrow[u] & \\
& & & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

$$M/\tau(M) \cong \mathrm{Im}\,\phi_M = \mathrm{Im}\,\psi^{**} \cong \mathrm{Im}(\tau^*\psi^{**}) \cong \Omega\,\mathrm{tr}\,\Omega\,\mathrm{tr}\, M.$$

Aquí τ^* es monomorfismo.

Por último, es fácil ver que los isomorfismos son funtoriales módulo $\underline{P}$

<u>Corolario 3.3:</u> $\Omega\,\mathrm{tr} : \underline{s.t.}(\Lambda) \longrightarrow \underline{s.t.}(\Lambda^{op})$ es una dualidad

<u>Demostración</u>

En este caso $\Omega\,\mathrm{tr}\,\Omega\,\mathrm{tr}\, M \cong M$ ya que $\tau(M) = 0$ por ser M libre de torsión.

Proposición 3.4: Sea Λ un álgebra de artin 1-Gorenstein y C inescindible en s.t. (Λ) no inyectivo. Entonces se tiene una sucesión casi escindible en s.t. (Λ):

$$0 \to C \to B \to \bar{F}(C) \to 0$$

donde $\bar{F}(C) = \Omega tr\, \Omega D C$.

Demostración

$$\bar{F}(C) = {}^{tr\,DC}/_{G(tr\,DC)} \cong \Omega tr\, \Omega tr\,(tr\,DC) \cong \Omega tr\, \Omega\, DC$$

Proposición 3.5: Sea Λ un álgebra de artin 1-Gorenstein. Entonces para M no inyectivo-proyectivo en s.t. (Λ) se tiene $\Omega\Omega^{-1}(M) \cong M$. También para M no inyectivo-proyectivo en c.s.t. (Λ) se tiene $\Omega^{-1}\Omega(M) \cong M$.

Demostración

Sea M en s.t. (Λ) no inyectivo-proyectivo, entonces

$0 \to M \to P$ para algún proyectivo P.

Sean $S_1, \dots, S_r$ los sumandos simples no isomorfos de Soc (Λ) = zócalo de Λ, $I(S_1), \dots, I(S_r)$ sus cápsulas inyectivas, las cuales son proyectivas puesto que Λ es 1-Gorenstein

$\mathrm{Soc}(M) = n_1 S_1 \oplus \dots \oplus n_r S_r$ con $n_i \geq 0$

$I(M) = n_1 I(S_1) \oplus \cdots \oplus n_r I(S_r)$ es la cápsula inyectiva de M. Consideremos la sucesión exacta

$$0 \to M \xrightarrow{\phi} n_1 I(S_1) \oplus \cdots \oplus n_r I(S_r) \xrightarrow{\psi} \Omega^{-1}(M) \to 0$$

Como M no es inyectivo-proyectivo,

$$\operatorname{Im} \phi \subset \operatorname{rad}(n_1 I(S_1) \oplus \cdots \oplus n_r I(S_r))$$

$$\therefore\ n_1 I(S_1) \oplus \cdots \oplus n_r I(S_r) \xrightarrow{\psi} \Omega^{-1}(M) \to 0$$

es la cubierta proyectiva de $\Omega^{-1}(M)$.

$$\therefore\ \Omega\Omega^{-1}(M) \cong M$$

Analogamente, si M está en c.s.l.(Λ), $\Omega^{-1}\Omega(M) \cong M$

<u>Proposición 3.6</u>: Sea Λ un álgebra de artin 1-Gorenstein, I_Ω el ideal en s.l.(Λ) generado por los módulos de la forma $\Omega(I)$ con I inyectivo. Entonces $\bar{F}$: s.l.$(\Lambda)/I_\Omega \to$ <u>s.l.</u>(Λ), $\bar{F} = \Omega\, tr\, \Omega D$ es una equivalencia. Además si M está en s.l.(Λ) y no es inyectivo en mod(Λ), M es inyectivo en s.l.(Λ) si y solo si $M = \Omega(I)$ para algún inyectivo I de mod(Λ).
Análogamente, F: <u>s.l.</u>$(\Lambda) \to$ s.l.$(\Lambda)/I_\Omega$, $F = \Omega D \Omega tr$ es una equivalencia.

Demostración.

$$\bar{F}:\ s.l.(\Lambda) \xrightarrow{D} \overline{c.s.l.}(\Lambda^{op}) \xrightarrow{\Omega} \underline{s.l.}(\Lambda^{op}) \xrightarrow{tr} \operatorname{mod}(\Lambda) \xrightarrow{\Omega} \underline{s.l.}(\Lambda)$$

$\bar{F} : {}^{s.t.(\Lambda)}/_{\Omega(I)} \longrightarrow \underline{s.t.}(\Lambda)$ es una dualidad.

Ahora, si M no es inyectivo entonces como en la proposición 3.5 se tiene $0 \to M \to I(M) \to \Omega^{-1}(M) \to 0$ donde $I(M)$ es proyectivo, de aquí

$$0 \to D\Omega^{-1}(M) \to D(I(M)) \longrightarrow D(M) \to 0$$

$D(I(M)) \longrightarrow D(M) \to 0$ es la cubierta proyectiva de $D(M)$.

$$\therefore D\Omega^{-1}(M) = \Omega D(M)$$

M es inyectivo en $s.t.(\Lambda) \iff \Omega tr \Omega D = \Omega tr D\Omega^{-1}$ no está definido en $M \iff D\Omega^{-1}(M)$ es proyectivo $\iff \Omega^{-1}(M)$ es inyectivo $\iff M = \Omega(I)$

<u>Proposición 3.7</u>: Sea Λ un álgebra de artin 1-Gorenstein, entonces si M es inescindible no proyectivo en $s.t.(\Lambda)$, se tiene la sucesión casi escindible $0 \to F(M) \to B \to M \to 0$

<u>Demostración</u>

Si M no es proyectivo, entonces $M \cong \bar{F}(F(M))$.

<u>Proposición 3.8</u>: $rad_{s.t.(\Lambda)}(M, -)$ es un funtor finitamente presentado.

<u>Demostración</u>

Se obtiene de la proposición 3.4.

En general, $rad^{i}_{s.t.(\Lambda)}(M,-)$ es finitamente presentado y si $rad^{i}_{s.t.(\Lambda)}(M,-)\neq 0$ entonces $rad^{i+1}_{s.t.(\Lambda)}(M,-)\subsetneq rad^{i}_{s.t.(\Lambda)}(M,-)$.

Analogamente para $rad_{s.t.(\Lambda)}(-,M)$.

<u>Definición</u>: Si $F: s.t.(\Lambda)\longrightarrow Ab$ es un funtor, $Sop(F)=\{|X| \mid X$ es inescindible y $F(X)\neq 0\}$, donde $|X|$ denota la clase de isomorfismo de X.

<u>Proposición 3.9</u>: Sea Λ un álgebra de artin 1-Gorenstein y $Soc(\Lambda)=n_1S_1\oplus\cdots\oplus n_rS_r$. Son equivalentes:

(a) $s.t.(\Lambda)$ es de tipo de representación finita

(b) $rad^{\infty}_{s.t.(\Lambda)}(S_i,-)=0 \quad \forall i=1,\dots,r$

(c) $Sop\ (S_i,-)/rad^{\infty}_{s.t.(\Lambda)}(S_i,-)$ es finito para $i=1,\dots,r$.

<u>Demostración</u>

(b) $\Rightarrow$ (c)

Supongamos que $rad^{\infty}_{s.t.(\Lambda)}(S_i,-)=0$ para $i=1,\dots,r$, entonces para cada inescindible proyectivo P_j, existe n_j tal que

$$rad^{n_j}_{s.t.(\Lambda)}(S_i,P_j)=0$$

Sea $n=max\{n_j\}$, probaremos que $rad^{n}_{s.t.(\Lambda)}(S_i,-)=0$

Sea $f\in rad^{n}_{s.t.(\Lambda)}(S_i,X)$, entonces

$$
\begin{tikzcd}
S_i \arrow[rrrr, "f"] \arrow[dr] & & & & X_n \\
& X_1 \arrow[r] & X_2 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & X_{n-1} \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

como X es libre de torsión, X es submódulo de un projectivo P.

$X \overset{i}{\hookrightarrow} P$, $\therefore$ $if \in rad^{n}_{s.t.(\Lambda)}(S_i, P) = 0$

$\therefore f = 0$

$\therefore rad^{\infty}_{s.t.(\Lambda)}(S_i,-) = 0$

$rad^{j}_{s.t.(\Lambda)}(S_i,-)$ es finitamente presentado

$$\therefore rad^{j}_{s.t.(\Lambda)}(S_i,-) \big/ rad^{j+1}_{s.t.(\Lambda)}(S_i,-) \text{ es finito}$$

$$\operatorname{Sop}(S_i,-) = \operatorname{Sop} (S_i,-)\big/ rad^{\infty}_{s.t.(\Lambda)}(S_i,-) = \bigcup_{j=1}^{m-1} \operatorname{Sop} rad^{j}_{s.t.(\Lambda)}(S_i,-)\big/ rad^{j+1}_{s.t.(\Lambda)}(S_i,-)$$

y como cada uno de ellos es finito, se tiene entonces que

$$\operatorname{Sop} (S_i,-)\big/ rad^{\infty}_{s.t.(\Lambda)}(S_i,-) \text{ es finito.}$$

(c) $\Rightarrow$ (b)

Supongamos que $\operatorname{Sop} (S_i,-)\big/ rad^{\infty}_{s.t.(\Lambda)}(S_i,-) = \{X_1, \dots, X_m\}$

para cada X_k, existe n_k tal que $rad^{n_k}_{s.t.(\Lambda)}(S_i, X_k) = rad^{\infty}_{s.t.(\Lambda)}(S_i, X_k)$

Sea $n = \max\{n_1, \dots, n_m\}$, entonces $rad^{n}_{s.t.(\Lambda)}(S_i, X_k) = rad^{\infty}_{s.t.(\Lambda)}(S_i, X_k)$

$\forall\, k = 1, \dots, m.$

$$\Rightarrow rad^{n}_{s.t.(\Lambda)}(S_i,-) = rad^{\infty}_{s.t.(\Lambda)}(S_i,-)$$

pero $\mathrm{rad}^{n}_{s.t.(\Lambda)}(S_i,-)\neq 0 \Rightarrow \mathrm{rad}^{n+1}_{s.t.(\Lambda)}(S_i,-)\subsetneq \mathrm{rad}^{n}_{s.t.(\Lambda)}(S_i,-)$

$$\therefore\ \mathrm{rad}^{\infty}_{s.t.(\Lambda)}(S_i,-)=0$$

(c) $\Rightarrow$ (a)

Supongamos que $\mathrm{Sop}\ {}^{(S_i,-)}/_{\mathrm{rad}^{\infty}_{s.t.(\Lambda)}(S_i,-)}$ es finito para $i=1,\dots,r$

$\Rightarrow \mathrm{rad}^{\infty}_{s.t.(\Lambda)}(S_i,-)=0$ para $i=1,\dots,r$

$$\therefore\ \mathrm{Sop}\,(S_i,-) \text{ es finito}$$

pero si $S\in \mathrm{Soc}\,(X)$ entonces $S\cong S_j$ para alguna $j=1,\dots,r$ y para cada $i=1,\dots,r$ existe solo un número finito de módulos inescindibles X en s.t.(Λ) tal que $(S_i,X)\neq 0$

$\therefore$ s.t.(Λ) tiene solo un número finito de inescindibles.

(a) $\Rightarrow$ (c) es inmediato.

Capítulo IV

Algebras con condición (*)

Sección 1

Λ satisface la condición (*) si para cualesquiera proyectivos inescindibles P y Q, $\phi \in \mathrm{Hom}_\Lambda(P,Q)$ implica que $\phi = 0$ o ϕ es monomorfismo.

En esta sección veremos que si Λ es un álgebra de artin inescindible con la condición (*) entonces Λ es 1-Gorenstein si y solo si P_Λ = subcategoría plena de proyectivos inescindibles tiene un máximo y un mínimo, y en este caso s.t.(Λ) coincide con los módulos M que tienen la propiedad de que existe un morfismo distinto de cero de un proyectivo inescindible en M si y solo si este morfismo es mono.

Lema 1.1 Sea Λ un álgebra de artin. Entonces si P es proyectivo inescindible, $\mathrm{Soc}\, D(P) \cong P^*/\mathrm{rad}\, P^*$ donde $P^* = \mathrm{Hom}_\Lambda(P,\Lambda)$

Demostración

Basta demostrar que existe un morfismo $h: P^* \to D(P)$, $h \neq 0$ tal que $h(rP^*) = 0$ ya que en este caso h induce un morfismo $\bar{h}: P^*/rP^* \to D(P)$, y como P^*/rP^* es simple y $D(P)$ es inyectivo inescindible entonces

$$\mathrm{Soc}\, D(P) \cong P^*/rP^* \quad \text{ya que } D(P) \text{ tiene soclo simple.}$$

Veremos entonces la existencia de $h : P^* \longrightarrow D(P)$ tal que $h \neq 0$ y $h(rP^*) = 0$

Podemos suponer que P es sumando directo de Λ (ya que cada proyectivo inescindible es isomorfo a un sumando directo de Λ).

$$P \xhookrightarrow{i} \Lambda \xrightarrow{p} \Lambda/\mathrm{rad}\,\Lambda$$

$p \circ i \neq 0$ ya que $P \not\subset \mathrm{rad}\,\Lambda$ (aquí $\mathrm{rad}\,\Lambda$ es nilpotente), pero $\Lambda/\mathrm{rad}\,\Lambda$ es R-semisimple, entonces existe $g : \Lambda/\mathrm{rad}\,\Lambda \longrightarrow I(R/\mathrm{rad}\,R)$ tal que $g \circ p \circ i \neq 0$. Entonces:

$$P^* = \mathrm{Hom}_\Lambda(P, \Lambda) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(P, \Lambda/\mathrm{rad}\,\Lambda) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P, R/\mathrm{rad}\,R) \to \underset{= D(P)}{\mathrm{Hom}_R(P, I)}$$

$$i \longmapsto p \circ i \longmapsto p \circ i \longmapsto g \circ p \circ i \neq 0$$

Así que $h = g \circ p \circ i : P^* \longrightarrow D(P)$ es distinta de cero.

Ahora, $h(rP^*) = 0$, para ver esto consideremos $\coprod_{i=1}^{s} Q_i^* \longrightarrow rP^*$ la cubierta proyectiva de rP^*

$$Q_i^* \xhookrightarrow{\eta_i} \coprod_{i=1}^{s} Q_i^* \xrightarrow{t} rP^* \xrightarrow{i} P^* \xrightarrow{h} D(P)$$

Es suficiente probar que esta composición es cero $\forall i = 1, \dots, s$.

Sea $t_i^* = t\eta_i : Q_i^* \longrightarrow rP^*$, entonces $t_i^* : Q_i^* \longrightarrow P^*$ no es isomorfismo ya que $\mathrm{Im}\, t_i^* \subset rP^*$

$\therefore\ t_i : P \longrightarrow Q$ no es isomorfismo.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "t_i"] \arrow[d] \arrow[dr, dashed, "w\circ t_i"] & Q \arrow[d, "w"] \\ \operatorname{rad}\Lambda \arrow[r, hook] & \Lambda \end{tikzcd}$$

como t_i no es isomorfismo entonces $t_i(P) \subset rQ$

$\therefore\ h\, t_i^* = 0$

$\therefore\ \operatorname{Soc} D(P) \cong P^*/rP^*$

<u>Proposición 1.2</u> Sea Λ un álgebra de artin inescindible con la condición $(*)$. Λ es 1-Gorenstein si y solo si P_Λ tiene un máximo P_m y un mínimo P_s y $\operatorname{Hom}_\Lambda(P_s, P_m)$ es de dimensión 1-1 sobre $\operatorname{End}_\Lambda(P_s)$ y $\operatorname{End}_\Lambda(P_m)$.

<u>Demostración</u>

$(\Rightarrow)$ Sean $S_1, \dots, S_r$ los simples en $\operatorname{mod}(\Lambda)$ tal que $I(S_1), \dots, I(S_r)$ son todos los proyectivos inyectivos.

$\operatorname{Soc}(\Lambda) = n_1 S_1 \oplus \dots \oplus n_r S_r$, porque si $S \in \operatorname{Soc}(\Lambda)$

$0 \to I(S) \to I(\Lambda) \Rightarrow I(S)$ es sumando directo de $I(\Lambda)$ entonces $I(S)$ es inyectivo proyectivo.

$\therefore\ S = S_i$ para alguna i.

Además, si P es proyectivo, $\operatorname{Soc}(P) = m_1 S_1 \oplus \dots \oplus m_r S_r$ con $m_i \geq 0$, $i = 1, \dots, r$.

Ahora, como Λ satisface la condición $(*)$ entonces

$\mathrm{Hom}_\Lambda(I(S_i), I(S_j)) = 0$ para $i \neq j$ porque si $\phi : I(S_i) \to I(S_j)$ entonces $\phi = 0$ o ϕ es mono, pero si $\phi \neq 0$ entonces $I(S_i) \cong I(S_j)$ lo cual no es cierto.

Si P y Q son proyectivos inescindibles y $f : P \to I(S_i)$, $g : Q \to I(S_j)$ con $f \neq 0 \neq g$, $i \neq j$, entonces $\mathrm{Hom}_\Lambda(P, Q) = 0$ porque si $\phi : P \to Q$

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"'] & I(S_i) \arrow[d, dashed, "\phi'"] \\ Q \arrow[r, "g"'] & I(S_j) \end{tikzcd}$$

como $I(S_j)$ es inyectivo y f es mono, existe $\phi' : I(S_i) \to I(S_j)$ tal que $\phi' f = g\phi$, pero $\phi' = 0$ ya que $i \neq j$ $\therefore$ $g\phi = 0$ y como g es mono, entonces $\phi = 0$

Entonces $\Lambda = \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda, \Lambda) = \mathrm{Hom}_\Lambda(\coprod_{i=1}^{r} P_i, \coprod_{j=1}^{r} P_j) = \coprod_{i=1}^{r} \mathrm{End}_\Lambda(P_i)$

y como Λ es inescindible, entonces $r = 1$.

$I(S_1)$ es el proyectivo máximo:

si $\phi : I(S_1) \to P$ con P proyectivo inescindible y $\phi \neq 0$ entonces ϕ es isomorfismo.

S_1 es el proyectivo mínimo:

si $\phi : P \to S_1$, $\phi \neq 0$ con P proyectivo inescindible entonces $P \xrightarrow{\phi} S_1 \xrightarrow{i} I(S_1)$ y de aquí $i\phi$ es mono

$\therefore$ ϕ es isomorfismo.

$\mathrm{Hom}_\Lambda(S_1, S_1) \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(I(S_1), I(S_1))$

$\mathrm{Hom}_\Lambda(S_1,S_1)\cong \mathrm{Hom}_\Lambda(I(S_1),I(S_1))$

$\mathrm{Hom}_\Lambda(S_1,I(S_1))$ es de dimensión 1-1 sobre $\mathrm{End}_\Lambda(S_1)$ y $\mathrm{End}_\Lambda(I(S_1))$ respectivamente porque:

sea $\phi: S_1 \longrightarrow I(S_1)$, $\phi\neq 0$ (entonces ϕ es mono).

y sea $\psi: S_1\longrightarrow I(S_1)$ cualquier morfismo

$$\begin{tikzcd} S_1 \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "id"'] & I(S_1) \arrow[d, dashed, "\alpha"] \\ S_1 \arrow[r, "\psi"'] & I(S_1) \end{tikzcd}$$

como $I(S_1)$ es inyectivo, existe $\alpha: I(S_1)\to I(S_1)$ que hace conmutativo el diagrama

$$\therefore\ \psi=\alpha\phi.$$

Analogamente para $\mathrm{End}_\Lambda(S_1)$

$$\begin{tikzcd} & S_1 \arrow[r, "\psi"] \arrow[dl, dashed, "\alpha"'] \arrow[d, "\psi"] & I(S_1) \\ S_1 \arrow[r] & \phi(S_1) \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

$$\psi=\phi\circ\alpha$$

($\Leftarrow$) Supongamos que $\mathcal{P}_\Lambda$ tiene un objeto máximo P_m y un objeto mínimo P_s y que $\mathrm{Hom}_\Lambda(P_s,P_m)$ es de dimensión 1-1 sobre $\mathrm{End}_\Lambda(P_s)-\mathrm{End}_\Lambda(P_m)$.

Consideremos I_Λ la subcategoría plena de $\mathrm{mod}(\Lambda)$ cuyos objetos son todos los inyectivos inescindibles.

$F:\mathcal{P}_\Lambda\longrightarrow I_\Lambda$ dado por $F(P)=D(P^*)$, donde $P^*=\mathrm{Hom}_\Lambda(P,\Lambda)$ y D la dualidad usual, es una equivalencia.

Entonces $\phi: I_1\longrightarrow I_2 \Rightarrow \phi=0$ ó ϕ es epi.

I_Λ es un conjunto ordenado:

$I_1 < I_2$ si existe $\phi : I_1 \to I_2$ con $\phi \neq 0$

Sean $I_m = D(P_m^*)$, $I_s = D(P_s^*)$

I_m es el máximo con el orden anterior y además es simple, porque si no lo fuera, sea T un submódulo máximo de I_m

$$0 \to T \to I_m \to T' \to 0$$

T' es simple y entonces

$$\underbrace{I_m \longrightarrow T'}_{\neq 0} \longrightarrow I(T') = \text{cápsula inyectiva de } T$$

$$\therefore \; I_m < I(T') \; !$$

P_Λ^* satisface lo mismo que P_Λ, así que $\mathrm{Hom}_\Lambda(P_m^*, P_s^*)$ es de dimensión 1-1.

$$\therefore \; \mathrm{Soc}(P_s^*) = P_m^*$$

$$\therefore \; D(\mathrm{Soc}(P_s^*)) = D(P_m^*) = I_m$$

pero $D(\mathrm{Soc}(P_s^*)) = I_s/\mathrm{rad}\, I_s$

$$\therefore \; I_s/\mathrm{rad}\, I_s \cong I_m$$

por otro lado, $I_m = \mathrm{Soc}(I_m) \cong P_m/\mathrm{rad}\, P_m$

$$\begin{tikzcd} & P_m \arrow[dl, dashed] \arrow[d] \\ I_s \arrow[r] & I_s/\mathrm{rad}\, I_s \cong I_m \cong P_m/\mathrm{rad}\, P_m \end{tikzcd}$$

pero $P_m \to I_s$ es epi

$$\therefore\ \ell(I_s) \leq \ell(P_m)$$

$$\mathrm{Soc}(I_s) \cong P_s/\mathrm{rad}\,P_s = P_s \cong \mathrm{Soc}(P_m)$$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Soc}(P_m) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, hook] & P_s \arrow[d, hook] \\ P_m \arrow[r] & I_s \end{tikzcd}$$

$P_m \to I_s$ es mono

$$\therefore\ P_m \cong I_s$$

$\therefore\ \Lambda$ es 1-Gorenstein /

Proposición 1.3 Sea Λ un álgebra de artin 1-Gorenstein con condición $(*)$. Son equivalentes:

(a) $M \in$ s.l.(Λ)

(b) Para todo inescindible proyectivo P, $\phi : P \to M \Rightarrow \phi = 0$ o ϕ mono.

(c) Si P y Q son proyectivos inescindibles y $\phi : P \to Q$, $\phi \neq 0$ entonces $M(\phi) : M(Q) \to M(P)$ es mono

Demostración

(a) $\Rightarrow$ (b)

Si M satisface (b) entonces cualquier submódulo también

Si M_1 y M_2 satisfacen (b), también $M_1 \oplus M_2$

Es suficiente, entonces probar (b) para proyectivos inescindibles, pero esto es cierto ya que Λ tiene la condición $(*)$.

(b) $\Rightarrow$ (a)

Supongamos que M satisface (b) y sea S un sumando de $Soc(M)$ y P_S su cubierta proyectiva.

$$\begin{tikzcd} P_S \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, dashed, "i\cdot\phi"'] & S \arrow[r] \arrow[d, "i"] & 0 \\ & M & \end{tikzcd}$$

$i\phi \neq 0 \Rightarrow i\phi$ es mono $\Rightarrow \phi$ es

$$\therefore\ P_S \cong S$$

$$\therefore\ Soc(M) = \bigoplus_{S \in Soc(M)} P_S$$

pero $M \hookrightarrow I(Soc(M))$, y aquí $I(Soc(M))$ es proyectivo puesto que Λ es 1-Gorenstein

$$\therefore\ M \in S.t.(\Lambda)$$

(b) $\Rightarrow$ (c)

Supongamos que se cumple (b) y sea $\phi : P \to Q$, $\phi \neq 0$ y $P, Q \in \mathcal{P}_\Lambda$, entonces ϕ es mono (condición (*)).

$$M(\phi) : Hom_\Lambda(Q, M) \longrightarrow Hom_\Lambda(P, M)$$

Sea $f \in Hom_\Lambda(Q, M)$, $f \neq 0$;

entonces $M(\phi)(f) = f \circ \phi : P \to M$ es mono ya que f y ϕ lo son.

$$\therefore\ M(\phi)(f) \neq 0$$

$$\therefore\ M(\phi) \text{ es inyect.}$$

(c) $\Rightarrow$ (b)

Sea $\phi : P \longrightarrow M$, $\phi \neq 0$ y supongamos que ϕ no es mono

sea $K = \ker(\phi) \neq 0$

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} P \xrightarrow{\phi} M$$

sea $\bar{Q}$ la cubierta proyectiva de K y Q un sumando inescindible de $\bar{Q}$

$$Q \xrightarrow{i'} \bar{Q} \xrightarrow{p} K \xrightarrow{i} P \xrightarrow{\phi} M$$

$g = i \circ p \circ i' : Q \longrightarrow P$, $g \neq 0$ entonces $\phi \circ g$ es mono por (c), pero $\phi(g(Q)) = 0$ ¡!

$\therefore \phi$ es mono.

<u>Nota:</u> A partir de un conjunto parcialmente ordenado S se construye una categoría $\mathcal{P}$ de la siguiente manera:

Sea $S' = \{m\} \cup S \cup \{t\}$, donde $m \notin S$, $t \notin S$, $m > k$ $\forall k \in S$ y $t < k$ $\forall k \in S$

Para cada $i \in S'$ consideremos un objeto P_i y así $\mathrm{obj}\,\mathcal{P} = \{P_i\}_{i \in S'}$.

Definamos ahora los morfismos en $\mathcal{P}$.

$$(1) \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(P_i, P_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \not\leq i \\ K & \text{si } j \leq i \end{cases} \qquad \forall i, j \in S,$$

(2) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(P_m, P_i) = K \quad \forall i \in S'$

(3) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(P_t, P_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq t \\ K & \text{si } i = t \end{cases}$

(4) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(P_i, P_t) = K \quad \forall i \in S'$

la composición está dada por:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(P_i, P_j) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(P_j, P_h) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(P_i, P_h)$$
$$(a, b) \longmapsto a \cdot b$$

$\mathcal{P}$ es una categoría aditiva en donde todos los morfismos son cero o mono. Entonces $\mathrm{End}(\bigoplus_{i \in S'} P_i)$ es un álgebra básica $\Lambda(S)$ con condición $(*)$. Además

$$\mathrm{mod}(\mathcal{P}) \cong \mathrm{mod}(\Lambda(S))$$

Como $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{\Lambda(S)}$ tiene un objeto máximo P_m y un objeto mínimo P_t y $\mathrm{Hom}(P_i, P_m)$ es de dimensión 1-1 sobre $\mathrm{End}_{\Lambda(S)}(P_i)$ y $\mathrm{End}_{\Lambda(S)}(P_m)$ respectivamente, entonces por la proposición 1.2 $\Lambda(S)$ es 1-Gorenstein.

Por la proposición 1.3, $M \in$ s.t.(Λ) si y solo si para cada $a \in \mathrm{Hom}(P_i, P_j)$, $a \neq 0$, $M(a): M(P_j) \longrightarrow M(P_i)$ es mono. De aquí, no es difícil ver que los módulos sin torsión corresponden a K-representaciones del conjunto parcialmente ordenado S.

(2) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(P_m, P_i) = K \quad \forall i \in S'$

(3) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(P_t, P_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq t \\ K & \text{si } i = t \end{cases}$

(4) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(P_i, P_t) = K \quad \forall i \in S'$

la composición está dada por:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(P_i, P_j) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(P_j, P_k) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(P_i, P_k) \\ (a\ ,\ b) &\longmapsto a \cdot b \end{aligned}$$

$\mathcal{P}$ es una categoría aditiva qu donde todos los morfismos son cero o mono. Entonces $\mathrm{End}\,(\bigoplus_{i \in S'} P_i)$ es un álgebra básica $\Lambda(S)$ con condición $(*)$. Además

$$\mathrm{mod}\,(\mathcal{P}) \cong \mathrm{mod}\,(\Lambda(S))$$

Como $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{\Lambda(S)}$ tiene un objeto máximo P_m y un objeto mínimo P_t y $\mathrm{Hom}\,(P_t, P_m)$ es de dimensión 1-1 sobre $\mathrm{End}_{\Lambda(S)}(P_t)$ y $\mathrm{End}_{\Lambda(S)}(P_m)$ respectivamente, entonces por la proposición 1.2 $\Lambda(S)$ es 1-Gorenstein.

Por la proposición 1.3, $M \in$ s.t. (Λ) si y solo si para cada $a \in \mathrm{Hom}\,(P_i, P_j)$, $a \neq 0$, $M(a): M(P_j) \to M(P_i)$ es mono. De aquí, no es difícil ver que los módulos sin torsión corresponden a K-representaciones del conjunto parcialmente ordenado S.

Sección 2

Definición: $\mathcal{L}$ será la familia de módulos M en s.t.(Λ) tal que existe una cadena de morfismos irreducibles

$$C_0 \xrightarrow{f_0} C_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \longrightarrow C_r \xrightarrow{f_r} M$$

con los C_i inescindibles no proyectivos para $i=1,\dots,r$ y C_0 inescindible proyectivo hereditario.

Denotaremos por $\underline{\underline{h(M)}}$ a la mínima r con esta propiedad.

Lema 2.1 Sea Λ un álgebra de artin con condición $(*)$ y 1-Gorenstein, $f: S \longrightarrow P$ un morfismo irreducible con S simple y P proyectivo. Entonces P es hereditario.

Demostración

Si $f: S \to P$ es irreducible entonces S es isomorfo a un sumando directo de rad P, pero rad P es inescindible, entonces $S \cong \text{rad}\, P$ y S es proyectivo

$\therefore$ P es hereditario

Proposición 2.2: Si existe una cadena de morfismos irreducibles, con M no proyectivo, $P_0 \xrightarrow{f_0'} C_1' \to \cdots \to C_s' \xrightarrow{f_s'} M$ y P_0 proyectivo hereditario, entonces $M \in \mathcal{L}$ y $h(M) \leq s$.

Demostración

Si en la cadena dada, para $i \geq 1$ C_i' no es proyectivo, entonces

$M \in \mathcal{K}$ por definición.

Así que supongamos que en la cadena aparece al menos una C_i', $i \geq 1$ que es proyectivo, también podemos suponer que estos proyectivos no son hereditarios.

Sea C_k' proyectivo tal que C_j' no es proyectivo para $j > k$

Consideremos $C_{k-1}' \xrightarrow{f_{k-1}} C_k' \xrightarrow{f_k} C_{k+1}'$, donde C_{k+1}' no es proyectivo. $C_{k-1}' = \operatorname{rad} C_k'$ y C_{k-1}' no es simple ya que si lo fuera entonces por el lema 1.1, C_k' sería hereditario, lo que por hipótesis no puede ser.

Sea $0 \to D\operatorname{Tr} C_{k+1}' \to B \longrightarrow C_{k+1}' \to 0$ la sucesión que casi se divide para C_{k+1}'. Entonces existe un morfismo irreducible $D\operatorname{Tr} C_{k+1}' \to C_k'$

$$\therefore \; D\operatorname{Tr} C_{k+1}' = \operatorname{rad} C_k' = C_{k-1}'$$

Como C_{k-1}' no es simple, entonces B no es proyectivo, esto por la proposición 5.5 de [2].

$\therefore$ existe un sumando inescindible L de B que no es proyectivo, y se tienen morfismos irreducibles

$$C_{k-1}' \xrightarrow{f_{k-1}} L \xrightarrow{f_k} C_{k+1}'$$

Por lo tanto, la cadena

$$P_0 \to C_1' \xrightarrow{f_1'} \cdots \to C_{k-1}' \xrightarrow{f_{k-1}} L \xrightarrow{f_k} C_{k+1}' \to \cdots \to C_s' \xrightarrow{f_s'} M$$

tiene un proyectivo menos que la original.

Por último, si hacemos esto para cada proyectivo que aparece en la cadena obtendremos una cadena

$$P_0 \xrightarrow{f_0} C_1 \to \cdots \to C_s \xrightarrow{f_s} M$$

donde ninguno de los C_i, $i=1,\ldots,s$ es proyectivo

$$\therefore\ M \in \mathcal{H}.$$

Ahora, es claro que $h(M) \leq s$.

<u>Proposición 2.3:</u> Si $M \in \mathcal{H}$, entonces $F(M) \in \mathcal{H}$ y $h(F(M)) < h(M)$

<u>Demostración</u>

Existe una cadena de morfismos irreducibles

$$C_0 \xrightarrow{f_0} C_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \to C_r \xrightarrow{f_r} M \quad y \quad h(M) = r$$

con C_0 proyectivo hereditario inescindible y los C_i inescindibles no proyectivos

Aplicando el funtor F a los C_i, $i>0$, tenemos una cadena de morfismos irreducibles

$$F(C_1) \to F(C_2) \to \cdots \to F(C_r) \to F(M)$$

y aquí $F(C_1)$ es hereditario ya que se tiene un morfismo irreducible $F(C_1) \to C_0$ el cual debe ser mono.

$$\therefore\ F(M) \in \mathcal{H} \quad y \quad h(F(M)) \leq r-1 < h(M).$$

Proposición 2.4: Sea Λ un álgebra de artin con condición (*) y 1-Gorenstein. Entonces s.t.(Λ) es de tipo de representación finita si y solo si para cualquier inescindible $M \in$ s.t.(Λ), existe m tal que $F^m(M)$ es proyectivo.

Demostración

Se tiene que $(P_s, M) \neq 0$, donde P_s es el proyectivo mínimo (simple), y de aquí P_s es proyectivo hereditario.

($\Rightarrow$) Supongamos que s.t.(Λ) es de tipo de representación finita, entonces $\mathrm{rad}^{\infty}_{s.t.(\Lambda)}(-, M) = 0$. Por lo tanto existe una cadena de morfismos irreducibles

$$P_s \to \cdots \to M$$

$$\therefore M \in \mathcal{H}.$$

Probaremos la afirmación por inducción sobre $h(M)$

(1) Si $h(M) = 0$, entonces se tiene un morfismo irreducible $C_0 \to M$ con C_0 proyectivo hereditario inescindible.

$\therefore F(M) \to C_0$ es irreducible y mono

$\therefore F(M)$ es proyectivo.

(2) Sea $h(M) > 0$

si M y $F(M)$ no son proyectivos entonces $h'(F(M)) < h(M)$ y por hipótesis de inducción $F^r(F(M))$ es proyectivo para alguna r. $\therefore F^{r+1}(M)$ es proyectivo.

(<=) Supongamos que para cualquier inescindible H, existe un entero r tal que $F^r(H)$ es proyectivo.

De aquí, para cada inescindible inyectivo I existe un entero n_I tal que $F^{n_I}(\Omega(I)) = P_I$ proyectivo.

Además la correspondencia $I \longmapsto P_I$ es biyectiva entre $\mathcal{I}_\Lambda - \{P_m\}$ y $\mathcal{P}_\Lambda - \{P_m\}$, entonces

$$\bar{F}^{n_P}(P) = \Omega(I_P)$$

Entonces cada módulo es de la forma $\bar{F}^{\ell}(P)$ con $\ell \leq n_P$

$\therefore$ s.t.(Λ) es de tipo de representación finita.

Capítulo V

Sección 1.

Sea Λ un álgebra de artin con condición (*) 1-Gorenstein y $\underline{\underline{S}}$ una familia de Λ-módulos inescindibles en s.t.(Λ)

Definición: $\underline{\underline{S}}$ se llama una sección si

(1) $M \in \underline{\underline{S}}$ y $f: M \to X$ irreducible $\Rightarrow X \in \underline{\underline{S}}$ ó $F(X) \in \underline{\underline{S}}$

(2) $M \in \underline{\underline{S}} \Rightarrow F(M) \notin \underline{\underline{S}}$

Observación: Si P es proyectivo, se define $F(P)=0$

Ejemplo.

Sea $\underline{\underline{S}}$ la subcategoría de proyectivos hereditarios inescindibles

$\underline{\underline{S}}$ es una sección.

(1) Sea $P \in \underline{\underline{S}}$ y $f: P \to X$ un morfismo irreducible

(i) Si X no es proyectivo, entonces existe un morfismo irreducible $F(X) \to P$ el cual debe ser mono

$\therefore$ $F(X)$ es proyectivo hereditario.

$\therefore F(X) \in \underline{\underline{S}}$

(ii) Si X es proyectivo, entonces rad X es inescindible

$\therefore P = \text{rad } X$

$\therefore X \in \underline{\underline{S}}$

(2) Inmediato

$\therefore \underset{=}{S}$ es una sección

Construiremos una sección a partir de otra dada.

Definición: Sea $\underset{=}{S}$ una sección

(1) $\underset{=}{S}^{(1)} = \{ \bar{F}(M) \mid M$ no es inyectivo y $M \in \underset{=}{S} \}$

(2) $\underset{=}{S}_{P}^{(1)} = \underset{=}{S}^{(1)} \cup \{ P$ proyectivo | existe una cadena de morfismos irreducibles $M \to P_1 \to \cdots \to P$ con $M \in \underset{=}{S}$ y P_i proyectivo $(i=1,\ldots,r) \}$

<u>Proposición 1.1</u>: $\underset{=}{S}_{P}^{(1)}$ es una sección.

<u>Demostración</u>

(1) Sea $M \in \underset{=}{S}_{(P)}^{(1)}$ y $f: M \to X$ un morfismo irreducible

(a) $M \in \underset{=}{S}^{(1)}$ o (b) $M \in \underset{=}{S}_{P}^{(1)} - \underset{=}{S}^{(1)}$

(a) $M \in \underset{=}{S}^{(1)}$

$\Rightarrow F(M) \in \underset{=}{S}$ ya que $\bar{F}F(M) = M \in \underset{=}{S}^{(1)}$

(i) Si X es proyectivo, entonces $X \in \underset{=}{S}_{P}^{(1)}$

(ii) Si X no es proyectivo, entonces existe un morfismo irreducible $F(M) \to F(X)$ y como $F(M) \in \underset{=}{S}$ entonces $F(X) \in \underset{=}{S}$ o $F^2(X) \in \underset{=}{S}$

si $F(X) \in \underset{=}{S}$ entonces $X \in \underset{=}{S}_{P}^{(1)}$

si $F^2(X) \in \underset{=}{S}$ entonces $\bar{F}F^2(X) = F(X) \in \underset{=}{S}_{P}^{(1)}$

(b) $M \in \underset{\approx}{S}_{P}^{(1)} - \underset{\approx}{S}^{(1)}$

M es proyectivo y existen $N \in \underset{\approx}{S}^{(1)}$ y $P_1, \dots, P_r$ proyectivos tal que

$N \to P_1 \to \dots \to P_r \to M$ son morfismos irreducibles

entonces se tiene una cadena de morfismos irreducibles

$N \to P_1 \to \dots \to P_r \to M \to X$

(i) Si X es proyectivo, entonces $X \in \underset{\approx}{S}_{P}^{(1)}$

(ii) Si X no es proyectivo, $F(X) \to M$ es irreducible

$\Rightarrow F(X) = \operatorname{rad} M = P_r$

$\therefore F(X) \in \underset{\approx}{S}_{P}^{(1)}$

(2) Sea $M \in \underset{\approx}{S}_{P}^{(1)}$

(i) Si M es proyectivo, entonces $F(M) = 0 \notin \underset{\approx}{S}_{P}^{(1)}$

(ii) Si M no es proyectivo, entonces $F(M) \in \underset{\approx}{S}$

$\Rightarrow F(M) \notin \underset{\approx}{S}^{(1)}$ ya que si $F(M) \in \underset{\approx}{S}^{(1)}$

entonces $F^2(M) \in \underset{\approx}{S}$ y tendríamos

$F(M)$ y $F^2(M) \in \underset{\approx}{S}$ ↯

$\therefore F(M) \notin \underset{\approx}{S}_{P}^{(1)}$

Sea $\underset{\approx}{S}$ la sección de proyectivos hereditarios

$\underset{\approx}{S}_{P}^{(2)} = \left(\underset{\approx}{S}_{P}^{(1)}\right)_{P}^{(1)}$, $\underset{\approx}{S}_{P}^{(n)} = \left(\underset{\approx}{S}_{P}^{(n-1)}\right)_{P}^{(1)}$

Proposición 1.2: Si s.t.(Λ) es de tipo de representación finita, entonces $\text{Ind}(\text{s.t.}(\Lambda)) = \bigcup_{i=1}^{m} S_{\underline{P}}^{(i)}$

Demostración

Sea M inescindible, como en la proposición 2.4 (cap. IV) si s.t.(Λ) es de tipo de representación finita, existe una cadena de morfismos irreducibles

$$P_s \to M_1 \to \cdots \to M_s \to M \quad , \text{ con } P_s \in \underline{S}$$

Basta demostrar que si $M_k \to M_{k+1}$ es irreducible y $M_k \in \bigcup_{i=1}^{m} S_{\underline{P}}^{(i)}$ entonces $M_{k+1} \in \bigcup_{i=1}^{m} \underline{S}_{\underline{P}}^{(i)}$

Supongamos que $M_k \in \underline{S}_{\underline{P}}^{(i)}$ para alguna i, entonces

$$M_{k+1} \in \underline{S}_{\underline{P}}^{(i)} \quad \text{o} \quad F(M_{k+1}) \in \underline{S}_{\underline{P}}^{(i)}$$

pero si $F(M_{k+1}) \in \underline{S}_{\underline{P}}^{(i)}$, como no es inyectivo entonces

$$\tilde{F}\, F(M_{k+1}) \in \underline{S}_{\underline{P}}^{(i+1)}$$

$$\therefore \quad M_{k+1} \in \bigcup_{i} \underline{S}_{\underline{P}}^{(i)}$$

Proposición 1.3: $\underline{S}_{\underline{P}}^{(i)}$ es árbol para toda i.

Demostración

Por inducción sobre i

para $i = 0$, $\underline{S}_{\underline{P}}^{(0)} = \underline{S}$ = proyectivos hereditarios

Supongamos que existe

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & P_1 \arrow[r] & P_2 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_r \arrow[dr] & \\ P_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & & P \\ & P'_1 \arrow[r] & P'_2 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P'_s \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow P_r = P'_s \; ; \; P_{r-1} = P'_{s-1}, \ldots$$

si $s \neq t$ y $s < t$, entonces se tendría una cadena de morfismos irreducibles

$$P_0 \to P_1 \to \cdots \to P_i \to P_0$$

pero estos morfismos son monos no escindibles

$$\Rightarrow \ell(P_0) < \ell(P_0) \;\; \gamma$$

$$\therefore \; \underset{=}{S}^{0} \text{ es árbol}$$

Ahora, supongámoslo cierto para i.

$$\underset{=}{S}_P^{(i+1)} = \{ \bar{F}(M) \mid M \in \underset{=}{S}_P^{(i)} \text{ y } M \text{ no inyectivo} \} \cup \{ P \text{ proyectivo} \mid \text{existe } N \in (\underset{=}{S}_P^{(i)})^{(1)} \text{ y morfismos irreducibles tal que } N \to P_1 \to \cdots \to P_r \to P \text{ con los } P_i \text{ proyectivos} \}$$

Como $\underset{=}{S}_P^{(i)}$ es árbol por hipótesis de inducción, entonces en los $\bar{F}(M)$ anda bien.

Entonces es suficiente analizar los casos:

(a)
$$\begin{tikzcd}[row sep=small] \bar{F}(M_1) \arrow[r] \arrow[dr] & \cdots \arrow[r] & \bar{F}(M_i) \\ & P_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_s \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

(b) $$\begin{tikzcd}[column sep=small] \bar{F}(M_1) \arrow[r] \arrow[dr] & \cdots \arrow[r] & \bar{F}(M_t) \arrow[r] & P_1' \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_\ell' \\ & P_1 \arrow[r] & P_2 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_s \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

(a) $$\begin{tikzcd}[column sep=small] \bar{F}(M_1) \arrow[r] \arrow[dr] & \cdots \arrow[r] & \bar{F}(M_t) \\ & P_1 \arrow[r] & P_2 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_s \arrow[ull] \end{tikzcd}$$

$\bar{F}(M_i)$ no es proyectivo, entonces existe un morfismo irreducible $M_t \to P_s$

$\Rightarrow M_t \simeq P_{s-1}$

$\Rightarrow M_t \in \underline{S}_P^{(i+1)}$

$\therefore M_t$ y $\bar{F}(M_t) \in \underline{S}_P^{(i+1)}$

$\therefore \bar{F}(M_t)$ y $F(\bar{F}(M_t)) \in S_P^{(i+1)}$ ¡!

$\therefore$ no puede suceder (a).

(b) $$\begin{tikzcd}[column sep=small] \bar{F}(M_1) \arrow[r] \arrow[dr] & \bar{F}(M_2) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \bar{F}(M_t) \arrow[r] & P_1' \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_\ell' \\ & P_1 \arrow[r] & P_2 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_g \arrow[urr] & & \end{tikzcd}$$

en este caso, $P_g = P_\ell'$, etc.

(1) si $\ell < g$, entonces se reduce al caso (a)

(2) si $\ell > s$, entonces se tendría

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \bar{F}(M_1) \arrow[r] \arrow[dr] & \cdots \arrow[r] & \bar{F}(M_t) \arrow[d] \\ & P_1 & P_2 \arrow[l] & \cdots \arrow[l] & P_r \arrow[l] \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow \; \tilde{F}(M_1) = \text{rad}\, P_1 = P_2$ lo cual es imposible

$\therefore \; S_P^{(i+1)}$ es árbol

Sección 2

Sea Γ un árbol finito (con una sola flecha entre cada dos vértices), k un campo.

$\Lambda_{\Gamma,k}$ = álgebra hereditaria determinada por Γ.

$\Lambda = \Lambda_{\Gamma,k} = \coprod_{\gamma} k\gamma$, donde γ recorre todos los caminos de Γ incluyendo los triviales.

$G_r\Lambda$ = grupo de Grothendieck generado por los simples.

$$G_r\Lambda = \left\{ \frac{<[M]>}{M \text{ inesc.}} \Big/ [M]-[M']-[M''] \quad \text{donde } 0\to M'\to M\to M''\to 0 \text{ es exacta} \right\}$$

$$\mathbb{R}\otimes G_r\Lambda \cong \mathbb{R}^l = \mathbb{R}[S_1]\oplus\cdots\oplus\mathbb{R}[S_l]$$

donde $S_1,\dots,S_l$ son los simples no isomorfos

$\{[I_j]\}$ es una base, con los I_j los inyectivos inescindibles.

ya que $0\to S_j\to I_1^{(j)}\to I_2^{(j)}\to 0$ una resolución inyectiva

$$\therefore \; [S_j] = [I_1^{(j)}] - [I_2^{(j)}]$$

Se tiene $C^-: \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^l$ dada por $C^-[I_j] = -[P_j]$

Ahora, sea M una representación de la gráfica, entonces M es un Λ-módulo y

$$[M] = n_1[S_1] + \cdots + n_e[S_e] = (n_1, \dots, n_e)$$

y aquí $\quad n_i = \dim_{\mathbb{R}} M(i)$

Definición: $\dim M = (n_1, \dots, n_e)$

$$c^- [S_j] = [b_i D S_j]$$

Se tiene:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \otimes Gr\,\Lambda \arrow[r, "c^-"] \arrow[d, "\cong"'] & \mathbb{R} \otimes Gr\,\Lambda \arrow[d, "\cong"] \\
\mathbb{R}^l \arrow[r, "\varphi"'] & \mathbb{R}^l
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{[S_j]} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & {[b_i D S_j]} \arrow[d, mapsto] \\
e_j \arrow[r, mapsto] & e_j'
\end{tikzcd}$$

donde φ es el isomorfismo correspondiente.

Trataremos ahora, de identificar este isomorfismo φ.

<u>Lema 2.1</u>: Dado un árbol finito, se puede dar una numeración a los vértices tal que si $j \longrightarrow i$ entonces $j < i$

<u>Demostración</u>

Por inducción sobre el número n de vértices.

(1) $\quad n = 2 \qquad \cdot \longrightarrow \cdot$

Damos la numeración $\quad \overset{1}{\cdot} \longrightarrow \overset{2}{\cdot}$

(2) supongámoslo cierto para n y sea Γ un árbol con $n+1$ vértices, y consideremos un vértice que sea fuente. A este vértice le asignamos el 1. Ahora consideremos la subgráfica Γ' de Γ que consiste de todos los vértices de Γ menos el vértice 1 anterior.

Por hipótesis de inducción, Γ' tiene n vértices, entonces se le puede dar una numeración $2, 3, \ldots, n+1$ con la propiedad de que si $i \to j$ entonces $i < j$.

Dándole a Γ la numeración de Γ' correspondiente, obtenemos la numeración deseada.

<u>Lema 2.2</u>: Dados $x_1, \ldots, x_\ell \in \mathbb{R}$, existen $x_1', \ldots, x_\ell'$ únicos tal que

$$x_i + x_i' = \sum_{j \to i} x_j' + \sum_{i \to j} x_j \qquad \text{para } i = 1, \ldots, \ell$$

Demostración

Queremos encontrar $x_1', \ldots, x_\ell'$ únicos tal que

$$x_i' - \sum_{j \to i} x_j' = \sum_{i \to j} x_j - x_i \qquad \text{para } i = 1, \ldots, \ell$$

donde $x_1, \ldots, x_\ell$ están dados.

Demos a la gráfica una numeración tal que $j \to i \Rightarrow j < i$

Entonces se tiene un sistema de ecuaciones (ℓ) en las ℓ indeterminadas x_i', pero la matriz asociada a este sistema es triangular con 1 en la diagonal.

$\therefore$ el determinante de la matriz es distinto de cero

y por lo tanto hay una única solución $(x'_1, \dots, x'_\ell)$.

Sea Γ un árbol finito con $\{1, \dots, n\}$ sus vértices.

(a) $[I_j]_k$ = no. de caminos de en

(b) $[P_j]_k$ = no. de caminos de en

<u>Proposición 2.3</u> La correspondencia $(x_1, \dots, x_\ell) \mapsto (x'_1, \dots, x'_\ell)$

donde $x_i + x'_i = \sum_{j \to i} x'_j + \sum_{i \to k} x_k$, tiene las siguientes propiedades:

(1) φ es una función, $\varphi : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^\ell$

(2) φ es lineal

(3) $\varphi = c^-$

<u>Demostración</u>

(1) el lema 2.2

(2) φ es lineal

si $x_i + x'_i = \sum_{j \to i} x'_j + \sum_{i \to k} x_k$ y $y_i + y'_i = \sum_{j \to i} y'_j + \sum_{i \to k} y_k$, sumando se tiene

$$(x_i+y_i)+(x_i'+y_i')=\sum_{j\to i}(x_j'+y_j')+\sum_{i\to j}(x_j+y_j)$$

Si $a\in\mathbb{R}$ y $x_i-\sum_{i\to j}x_j=\sum_{j\to i}x_j'-x_i'$

$$ax_i-\sum_{i\to j}ax_j=a\left(x_i-\sum_{i\to j}x_j\right)=a\left(\sum_{j\to i}x_j'-x_i'\right)$$

(3) $\varphi=C^-$

Sabemos que $\{[I_j]\}$ es una base y que $C^-[I_j]=-[P_j]$,

así que veremos que $\varphi[I_j]=-[P_j]$

Entonces, si $[I_j]=(x_1^j,\ldots,x_\ell^j)$ y $[P_j]=(x_1'^j,\ldots,x_\ell'^j)$

demostraremos que para toda $i=1,\ldots,\ell$

$$x_i^j-x_i'^j=\sum_{i\to k}x_k^j-\sum_{k\to i}x_k'^j$$

<u>1er caso</u>: Hay al menos un camino de i en j, $i\neq j$

entonces $x_i'^j=0$, $x_k'^j=0\ \forall\ k\to i$

$$x_i^j=\text{no. de caminos de } i \text{ en } j=\sum_{i\to k}x_k^j$$

2º caso: Hay al menos un camino de j en i, $i \neq j$

entonces $x_i^j = 0$, $x_k^j = 0 \quad \forall i \to k$

$$-x_i'^j = -\text{no. de caminos de } j \text{ en } i = -\sum_{k \to i} x_k'^j$$

3er caso: $i = j$

$$x_j^j = 1 \quad , \quad x_j'^j = 1 \quad , \quad \sum_{j \to k} x_k^j = 0 \quad , \quad \sum_{k \to j} x_k'^j = 0$$

$$\therefore \; 1 - 1 = 0$$

4º caso: No hay caminos de i en j ni de j en i.

$$x_i^j = x_i'^j = 0 \quad , \quad x_k^j = 0 \quad \forall k,\ i \to k \quad , \quad x_k'^j = 0 \quad \forall k,\ k \to i$$

Definición: $\ell : \text{mod}(\Lambda) \to \mathbb{Z}$ se llama aditiva si $\ell(M) = \ell(M_1) + \ell(M_2)$ para toda sucesión exacta en $\text{mod}(\Lambda)$

$$0 \to M_1 \to M \to M_2 \to 0$$

Proposición 2.4: Si S es una sección sin inyectivos en $\text{Ind}(\Lambda)$ entonces $\ell(S^{(1)}) = C^- \ell(S)$ para cualquier función aditiva $\ell : \text{mod}(\Lambda) \to \mathbb{Z}$.

Demostración

Sea $X_i \in S$ y $0 \to X_i \to B \to tr\, DX_i \to 0$ la sucesión casi escindible para X_i (S no contiene inyectivos).

Para cada sumando directo X_i de B existe un morfismo irreducible $X \to X_k$ y como S es una sección entonces $X_k \in S$ ó $Dtr\, X_k \in S$

Sean $X_1, \dots, X_r$ los sumandos directos de B que están en S y $Y_1, \dots, Y_t$ los sumandos directos de B tal que $Dtr\, Y_j \in S$, $j = 1, \dots, t$

Existe un morfismo irreducible $Y_j \to tr\, DX_i$, entonces $Dtr\, Y_j \to X_i$ es irreducible

Sea $X'_j = Dtr\, Y_j$, $j = 1, \dots, t$

entonces $B = \bigoplus_{i \to k} X_k \oplus \bigoplus_{j \to i} tr_j DX'_j$

De aquí se tiene

$$\ell(X_i) + \ell(tr\, DX_i) = \sum_{i \to k} \ell(X_k) + \sum_{j \to i} \ell(tr\, DX'_j)$$

y por (3) de la proposición 2.3 se obtiene el resultado.

Proposición 2.5: Sea Λ un álgebra de artin inescindible con condición (*) y 1-Gorenstein. Sean $P_1, \dots, P_t$ los proyectivos inescindibles (no inyectivos). Si

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \ell_1(P_1) & \ell_2(P_1) & \cdots & \ell_t(P_1) \\ \ell_1(P_2) & \ell_2(P_2) & \cdots & \ell_t(P_2) \\ - & - & - & - \\ \ell_1(P_t) & \ell_2(P_t) & \cdots & \ell_t(P_t) \end{pmatrix} \quad y$$

$$\Lambda^{(1)} = \begin{pmatrix} \ell_1(\mathrm{tr}\, DP_1) & \ell_2(\mathrm{tr}\, DP_1) & \cdots & \ell_t(\mathrm{tr}\, DP_1) \\ \ell_1(\mathrm{tr}\, DP_2) & \ell_2(\mathrm{tr}\, DP_2) & \cdots & \ell_t(\mathrm{tr}\, DP_2) \\ - & - & - & - \\ \ell_1(\mathrm{tr}\, DP_t) & \ell_2(\mathrm{tr}\, DP_t) & \cdots & \ell_t(\mathrm{tr}\, DP_t) \end{pmatrix}$$

entonces

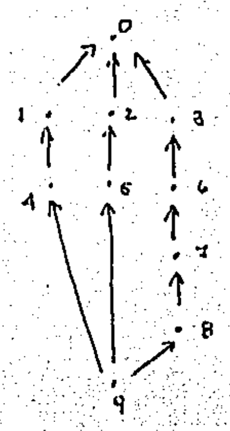
$$\Lambda^{(1)} = C^- \Lambda$$

Proposición 2.6: Sea Λ un álgebra de artin con condición (*) 1-Gorenstein de tipo de representación finita. Entonces los módulos inescindibles están completamente determinados por sus factores de composición.

Las demostraciones de las proposiciones 2.5 y 2.6 son análogas a las correspondientes que aparecen en [5].

Ejemplo:

Sea $\underline{\underline{\mathcal{B}}}$:



Aquí los inyectivos inescindibles son:

$\Omega(I_1) = (1,0,1,1,0,0,1,1,1,0)$, $\Omega(I_2) = (1,1,0,1,1,0,1,1,1,0)$,

$\Omega(I_3) = (1,1,1,0,1,0,0,0,0,0)$, $\Omega(I_4) = (1,1,1,1,0,1,1,1,1,0)$

$\Omega(I_5) = (1,1,1,1,1,0,1,1,1,0)$, $\Omega(I_6) = (1,1,1,1,1,1,0,0,0,0)$;

$\Omega(I_7) = (1,1,1,1,1,1,1,0,0,0)$, $\Omega(I_8) = (1,1,1,1,1,1,1,1,0,0)$;

$\Omega(I_9) = (1,1,1,1,1,1,1,1,1,0)$

Los proyectivos son:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & P_0 \arrow[d] & \\
P_1 \arrow[d] & P_2 & P_3 \arrow[d] \\
P_4 & & P_6 \arrow[d] \\
 & & P_7 \arrow[d] \\
 & & P_8
\end{tikzcd}$$

y P_5 donde rad $P_5 = (1,1,1,1,0,0,0,0,0,0)$.

Se tiene entonces:

$$x_0' = x_1 + x_2 + x_3 - x_0$$
$$x_1' = x_0' + x_4 - x_1$$
$$x_2' = x_0' - x_2$$
$$x_3' = x_0' + x_6 - x_3$$
$$x_4' = x_1' - x_4$$
$$x_6' = x_3' + x_7 - x_6$$
$$x_7' = x_6' + x_8 - x_7$$
$$x_8' = x_7' - x_8$$

Entonces, si $A = (a_{ij})$, donde $a_{ij} = \ell_j(P_i)$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C^{-}A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C^{-2}\Lambda = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C^{3}\Lambda = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C^{-4}\Lambda = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 & 4 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C^{-5}\Lambda = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 3 & 4 & 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C^{-6}\Lambda = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 3 & 5 & 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 3 & 4 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

El último renglón de $C^{-6}A$ es el rad P_5, así que agregamos un renglón a esta matriz, que es P_5

$$A_1 = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 3 & 5 & 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 3 & 4 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y aquí las fórmulas están dadas por:

$$x_0' = x_1 + x_2 + x_3 - x_0$$
$$x_1' = x_0' + x_4 - x_1$$
$$x_2' = x_0' - x_2$$
$$x_3' = x_0' + x_6 - x_3$$
$$x_4' = x_1' - x_4$$
$$x_6' = x_3' + x_7 - x_6$$
$$x_7' = x_6' + x_8 - x_7$$
$$x_8' = x_7' + x_5 - x_8$$
$$x_5' = x_8' - x_5$$

$$C^{-}\Lambda_1 = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 3 & 5 & 2 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 4 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 2 & 4 & 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C^{-2}\Lambda_1 = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 3 & 5 & 2 & 0 & 4 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 3 & 4 & 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C^{-3}\Lambda_1 = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 3 & 5 & 2 & 0 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 2 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 4 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 4 & 1 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C^{-4}\Lambda_1 = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 4 & 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 4 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Eliminamos el último renglón ya que es $\Omega(I_3)$, (ver pág. 93) y utilizando las fórmulas de la página 94 tenemos:

$$C^{-5}\Lambda_1 = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 5 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 4 & 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C^{-6}\Lambda_1 = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 6 & 2 & 1 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 4 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 4 & 1 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$
C^{-7}\Lambda_1 = \begin{bmatrix}
5 & 4 & 3 & 5 & 2 & 1 & 4 & 3 & 1 & 0 \\
3 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\
3 & 2 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\
4 & 4 & 2 & 4 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
3 & 3 & 2 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

$$
C^{-8}\Lambda_1 = \begin{bmatrix}
5 & 4 & 3 & 5 & 2 & 1 & 4 & 3 & 2 & 0 \\
3 & 3 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\
2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\
4 & 3 & 3 & 4 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\
2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
3 & 2 & 2 & 3 & 1 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\
2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{bmatrix}
$$

El último renglón es $\Omega(I_1)$, eliminándolo, las fórmulas quedan como sigue:

$$x'_0 = x_1 + x_2 + x_3 - x_0$$
$$x'_1 = x'_0 + x_4 - x_1$$
$$x'_2 = x'_0 - x_2$$
$$x'_3 = x'_0 + x_6 - x_3$$
$$x'_4 = x'_1 - x_4$$
$$x'_6 = x'_3 + x_7 - x_6$$
$$x'_7 = x'_6 - x_7$$

$$\Lambda_2 = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 5 & 2 & 1 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 4 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 1 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C^{-} \Lambda_2 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 & 4 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 3 & 1 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$
C^{-2}\Lambda_2 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 & 4 & 2 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 3 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

El último renglón es $\Omega(I_6)$, eliminándolo, las fórmulas quedan como sigue:

$$
\begin{aligned}
X_0' &= X_1 + X_2 + X_3 - X_0 \\
X_1' &= X_0' + X_4 - X_1 \\
X_2' &= X_0' - X_2 \\
X_3' &= X_0' + X_6 - X_3 \\
X_4' &= X_1' - X_4 \\
X_6' &= X_3' - X_6
\end{aligned}
$$

$$
\Lambda_3 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 & 4 & 2 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 3 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$C^{-}\Lambda_3 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 & 3 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El penúltimo y último renglones son $\Omega(I_2)$ y $\Omega(I_7)$ respectivamente, eliminándolos, las fórmulas quedan como sigue:

$$x_0' = x_1 + x_2 + x_3 - x_0$$
$$x_1' = x_0' - x_1$$
$$x_2' = x_0' - x_2$$
$$x_3' = x_0' - x_3$$

$$\Lambda_4 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 & 3 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C^{-}\Lambda_4 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El segundo, tercer y cuarto renglones son $\Omega(I_5)$, $\Omega(I_4)$, y $\Omega(I_8)$ respectivamente, eliminándolos, las fórmulas quedan como sigue:

$$x_0' = x_1 + x_2 + x_3 - x_c$$

$$\Lambda_5 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C^{-}\Lambda_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

y este último es $\Omega(I_4)$.

Sección 3

Procederemos ahora, a calcular todas las representaciones inescindibles de los conjuntos parcialmente ordenados de tipo finito. Como ya dijimos en el capítulo I, Reiner calculó las representaciones inescindibles exactas de estos conjuntos. Nosotros calcularemos todas las representaciones inescindibles de cada conjunto y diremos cuales son las exactas.

Dibujaremos además, de cada conjunto, el diagrama de los inescindibles con los morfismos irreducibles.

Incluiremos los cálculos de solamente uno de estos conjuntos, los demás se realizaron de manera análoga. Estos cálculos fueron verificados con la transformación lineal φ que aparece en la proposición 2.3 de este capítulo.

Por último, aclaramos que a cada gráfica le hemos agregado un punto mínimo con el objeto de que el álgebra sea 1-Gorenstein y el único cambio en los inescindibles es que en éste, solo aparece un inescindible más.

$\mathfrak{A} = \{a_1, a_2;\ b_1, b_2;\ c_1, c_2\}$, $a_2 < a_1$, $b_2 < b_1$, $b_2 < a_1$, $c_1 < c_2$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & \\
1 \arrow[ur] & 2 \arrow[u] & 3 \arrow[ul] \\
4 \arrow[u] & 5 \arrow[ul] \arrow[u] & 6 \arrow[u] \\
 & 7 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$\underline{\underline{I_1}}$:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & \\
k \arrow[ur] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \\
k \arrow[u] & k \arrow[ul] \arrow[u] & 0 \arrow[u] \\
 & k \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$$0 \to \Omega(I_1) \longrightarrow P_1 \longrightarrow I_1 \longrightarrow 0$$

$\Omega(I_1) =$

$$\begin{tikzcd}
 & k & \\
0 \arrow[ur] & k \arrow[u] & k \arrow[ul] \\
0 \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \arrow[u] & k \arrow[u] \\
 & 0 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$$0 \longrightarrow \ker \longrightarrow P_2 \amalg P_6 \longrightarrow \Omega(I_1) \longrightarrow 0$$

en donde $\ker = P_0$

$$0 \to D\mathrm{tr}\,\Omega(I_1) \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_2 \amalg I_6 \longrightarrow D\Omega(I_1)^* \longrightarrow 0$$

$$D\mathrm{tr}\,\Omega(I) = F\Omega(I_1) = \begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & k & \\ k \arrow[ur] & 0 \arrow[u] & k \arrow[ul] \\ k \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \arrow[u] & 0 \arrow[u] \\ & 0 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$0 \to \ker \longrightarrow P_3 \amalg P_4 \longrightarrow D\mathrm{tr}\,\Omega(I) \longrightarrow 0$$

$$\ker = P_0$$

$$0 \to (D\mathrm{tr})^2\Omega(I_1) \to I_0 \to I_3 \amalg I_4 \to D\,D\mathrm{tr}\,\Omega(I_1)^* \to 0$$

$$(D\mathrm{tr})^2\Omega(I_1) = F^2\Omega(I_1) = \begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & k & \\ k \arrow[ur] & k \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \\ 0 \arrow[u] & k \arrow[ul] \arrow[u] & 0 \arrow[u] \\ & 0 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$\underline{(D\mathrm{tr})^2\,\Omega(I_1) = P_5}$$

$\underline{\underline{I_2}}$:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & 0 & \\ 0 \arrow[ur] & k \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \\ 0 \arrow[u] & k \arrow[ul] \arrow[u] & 0 \arrow[u] \\ & k \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$0 \longrightarrow \Omega(I_2) \longrightarrow P_7 \longrightarrow I_2 \longrightarrow 0$$

$\Omega(I_2) =$

$$\begin{tikzcd}
 & k & \\
k \arrow[ur] & 0 \arrow[u] & k \arrow[ul] \\
k \arrow[u] & 0 \arrow[u] \arrow[ul] & k \arrow[u] \\
 & 0 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$$0 \longrightarrow \ker \longrightarrow P_4 \amalg P_6 \longrightarrow \Omega(I_2) \longrightarrow 0$$

$\ker = P_0$

$$0 \longrightarrow D\mathrm{tr}\,\Omega(I_2) \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_4 \amalg I_6 \longrightarrow D\,\Omega(I_2)^* \longrightarrow 0$$

$D\mathrm{tr}\,\Omega(I_2) = F\,\Omega(I_2)$

$$\begin{tikzcd}
 & k & \\
k \arrow[ur] & k \arrow[u] & k \arrow[ul] \\
0 \arrow[u] & k \arrow[u] \arrow[ul] & 0 \arrow[u] \\
 & 0 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$$0 \longrightarrow \ker \longrightarrow P_3 \amalg P_5 \longrightarrow D\mathrm{tr}\,\Omega(I_2) \longrightarrow 0$$

$\ker = P_0$

$$0 \longrightarrow (D\mathrm{tr})^2\,\Omega(I_2) \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_3 \amalg I_5 \longrightarrow D(D\mathrm{tr}\,\Omega(I_2))^* \longrightarrow 0.$$

$$(D\,Tr)^2\Omega(I_2) = F^2\Omega(I_2) = \begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] & k & \\ k \arrow[ur] & k \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \\ k \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \arrow[u] & 0 \arrow[u] \\ & 0 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$0 \to \ker \to P_2 \amalg P_4 \longrightarrow (DTr)^2\Omega(I_2) \longrightarrow 0$$

$$\ker = P_0$$

$$0 \to (DTr)^3\Omega(I_2) \to I_0 \to I_2 \amalg I_4 \to D(DTr)^2\Omega(I_2)^* \to 0$$

$$(DTr)^3\Omega(I_2)^* = F^3\Omega(I_2) = \begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] & k & \\ k \arrow[ur] & 0 \arrow[u] & k \arrow[ul] \\ 0 \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \arrow[u] & k \arrow[u] \\ & 0 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$0 \to \ker \longrightarrow P_1 \amalg P_6 \longrightarrow (D\,Tr)^3\Omega(I_2) \to 0$$

$$\ker = P_0$$

$$0 \to (DTr)^4\Omega(I_2) \to I_0 \to I_1 \amalg I_6 \to D(DTr)^3\Omega(I_2) \to 0$$

$$(D\,Tr)^4\Omega(I_2) = F^4\Omega(I_2) = \begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] & k & \\ 0 \arrow[ur] & k \arrow[u] & k \arrow[ul] \\ 0 \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \arrow[u] & 0 \arrow[u] \\ & 0 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$0 \to \ker \to P_2 \amalg P_3 \to (DTr)^4\Omega(I_2) \to 0$$

$$\ker = P_0$$

$$0 \to (D\mathrm{Tr})^5\,\Omega(I_2) \to I_0 \to I_2 \amalg I_3 \to D(D\mathrm{Tr})^4\,\Omega(I_2)^* \to 0$$

$$(D\mathrm{Tr})^5\,\Omega(I_2) = F^5\Omega(I_2) = \begin{tikzcd} & k & \\ k \arrow[ur] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \\ k \arrow[u] & 0 \arrow[u] \arrow[ul] & 0 \arrow[u] \\ & 0 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$(D\mathrm{Tr})^5\,\Omega(I_2) = P_4$$

$\underline{\underline{I_3}}$:

$$\begin{tikzcd} & 0 & \\ 0 \arrow[ur] & 0 \arrow[u] & k \arrow[ul] \\ 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] \arrow[ul] & k \arrow[u] \\ & k \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$0 \to \Omega(I_3) \to P_7 \to I_0 \to 0$$

$$\Omega(I_3) = \begin{tikzcd} & k & \\ k \arrow[ur] & k \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \\ k \arrow[u] & k \arrow[u] \arrow[ul] & 0 \arrow[u] \\ & 0 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$0 \to \ker \to P_1 \amalg P_5 \to \Omega(I_3) \to 0 \quad , \quad \ker = P_1$$

$$0 \to \Omega(I_3)^* \to P_1^* \amalg P_5^* \to \Omega\mathrm{Tr}\,\Omega(I_3) \to 0$$

$$\Omega(I_3)^* = \quad \begin{tikzcd} & 0 \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ 0 \arrow[d] \arrow[dr] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ 0 \arrow[dr] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[dl] \\ & k & \end{tikzcd}$$

$$\Omega\,\mathrm{tr}\,\Omega(I_3) = \quad \begin{tikzcd} & 0 \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ 0 \arrow[d] \arrow[dr] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ k \arrow[dr] & k \arrow[d] & 0 \arrow[dl] \\ & k & \end{tikzcd}$$

$$0 \to \Omega\,\mathrm{tr}\,\Omega(I_3) \to I_0 \to \Omega^{-1}\Omega\,\mathrm{tr}\,\Omega(I_3) \to 0$$

$$\Omega^{-1}\Omega\,\mathrm{tr}\,\Omega(I_3) = \quad \begin{tikzcd} & k \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ k \arrow[d] \arrow[dr] & k \arrow[d] & k \arrow[d] \\ 0 \arrow[dr] & 0 \arrow[d] & k \arrow[dl] \\ & 0 & \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{l} 0 \to D\Omega^{-1}\Omega\,\mathrm{tr}\,\Omega(I_3) \to D(I_0) \to D\Omega\,\mathrm{tr}\,\Omega(I_3) \to 0 \\ \qquad\qquad \parallel \\ \quad \Omega D \Omega\,\mathrm{tr}\,\Omega(I_3) = F(\Omega(I_3)) \end{array}$$

$$F(\Omega(I_3)) = \quad \begin{tikzcd} & k & \\ k \arrow[ur] & k \arrow[u] & k \arrow[ul] \\ 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] \arrow[ul] & k \arrow[u] \\ & 0 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$0 \to \ker \to P_1 \amalg P_2 \amalg P_6 \to F\Omega(I_3) \to 0$$

$$\ker = 2P_0$$

$$0 \to D\mathrm{tr}\, F\Omega(I_3) \to 2I_0 \to I_1 \amalg I_2 \amalg I_6 \to DF\Omega(I_3)^* \to 0$$

$$DF\Omega(I_3)^* = \begin{tikzcd} & 0 & \\ 0 \arrow[ur] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \\ 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] \arrow[ul] & 0 \arrow[u] \\ & k \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{Im}(2I_0) = \begin{tikzcd} & 0 & \\ k \arrow[ur] & k \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \\ k \arrow[u] & 2k \arrow[u] \arrow[ul] & k \arrow[u] \\ & 2k \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$D\mathrm{tr}\, F\Omega(I_3) = F^2\Omega(I_3) = \begin{tikzcd} & 2k & \\ k \arrow[ur] & k \arrow[u] & 2k \arrow[ul] \\ k \arrow[u] & 0 \arrow[u] \arrow[ul] & k \arrow[u] \\ & 0 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$0 \to \ker \to P_2 \amalg P_3 \amalg P_4 \amalg P_6 \to D\mathrm{tr}\, F\Omega(I_3) \to 0$$

$$\ker = 2P_0$$

$$0 \to (D\mathrm{tr})^2 F\Omega(I_3) \to 2I_0 \to I_2 \amalg I_3 \amalg I_4 \amalg I_6 \to D(D\mathrm{tr}\, F\Omega(I_3))^* \to 0$$

$$D(\operatorname{Dtr} F\Omega(I_3))^* = \begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] & 0 & \\ 0 \arrow[ur] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \\ 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] \arrow[ul] & 0 \arrow[u] \\ & 2k \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$\operatorname{Im}(2I_0) = \begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] & 0 & \\ 0 \arrow[ur] & k \arrow[u] & k \arrow[ul] \\ k \arrow[u] & k \arrow[u] \arrow[ul] & 2k \arrow[u] \\ & 2k \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$(\operatorname{Dtr})^2 F\Omega(I_3) = F^3\Omega(I_3) = \begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] & 2k & \\ 2k \arrow[ur] & k \arrow[u] & k \arrow[ul] \\ k \arrow[u] & k \arrow[u] \arrow[ul] & 0 \arrow[u] \\ & 0 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$0 \to \ker \to P_3 \amalg P_4 \amalg P_5 \to (\operatorname{Dtr})^2 F\Omega(I_3) \to 0$$

$$\ker = P_0$$

$$0 \to (\operatorname{Dtr})^3 F\Omega(I_3) \to I_0 \to I_3 \amalg I_4 \amalg I_5 \to D(\operatorname{Dtr})^2 F\Omega(I_3)^* \to 0$$

$$D(\operatorname{Dtr})^2 F\Omega(I_3)^* = \begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] & 0 & \\ 0 \arrow[ur] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \\ 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] \arrow[ul] & 0 \arrow[u] \\ & 2k \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$\mathrm{Im}\,(I_0) =$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
 & 0 & \\
0 \arrow[ur] & 0 \arrow[u] & k \arrow[ul] \\
k \arrow[u] & k \arrow[u] \arrow[ul] & 0 \arrow[u] \\
 & k \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$(D\mathrm{tr})^3 F\Omega(I_3) = F^4\Omega(I_3) =$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
 & k & \\
k \arrow[ur] & k \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \\
0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] \arrow[ul] & 0 \arrow[u] \\
 & 0 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$$0 \to \ker \to P_1 \amalg P_2 \to (D\mathrm{tr})^3 F\Omega(I_3) \to 0$$

$$\ker = P_0$$

$$0 \to (D\mathrm{tr})^4 F\Omega(I_3) \to I_0 \to I_1 \amalg I_2 \to D\big((D\mathrm{tr})^3 F\Omega(I_3)\big)^* \to 0$$

$D\Big((D\mathrm{tr})^3 F\Omega(I_2)\Big)^* =$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
 & 0 & \\
0 \arrow[ur] & 0 \arrow[u] & p \arrow[ul] \\
0 \arrow[u] & k \arrow[u] \arrow[ul] & 0 \arrow[u] \\
 & k \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{Im}\,(I_0) =$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
 & 0 & \\
k \arrow[ur] & k \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \\
k \arrow[u] & k \arrow[u] \arrow[ul] & 0 \arrow[u] \\
 & k \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$$(Db_1)^4 F\Omega(I_3) = F^5\Omega(I_3) = \begin{tikzcd} & k & \\ 0 \arrow[ur] & 0 \arrow[u] & k \arrow[ul] \\ 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] \arrow[ul] & k \arrow[u] \\ & 0 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$(Db_1)^4 F\Omega(I_3) = P_6$$

$\underline{\underline{I_4}}$:

$$\begin{tikzcd} & 0 & \\ 0 \arrow[ur] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \\ k \arrow[u] & 0 \arrow[u] \arrow[ul] & 0 \arrow[u] \\ & k \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$0 \to \Omega(I_4) \to P_7 \to I_4 \to 0$$

$$\Omega(I_4) = \begin{tikzcd} & k & \\ k \arrow[ur] & k \arrow[u] & k \arrow[ul] \\ 0 \arrow[u] & k \arrow[u] \arrow[ul] & k \arrow[u] \\ & 0 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$0 \to \ker \to P_5 \amalg P_6 \to \Omega(I_4) \to 0$$

$$\ker = P_0$$

$$0 \to Db_1\Omega(I_4) \to I_0 \to I_5 \amalg I_6 \to D\Omega(I_4)^* \to 0$$

$D\Omega(I_1)^* =$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
 & 0 & \\
0 \arrow[ur] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \\
0 \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \arrow[u] & 0 \arrow[u] \\
 & k \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$Iw(I_0) =$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
 & 0 & \\
0 \arrow[ur] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \\
0 \arrow[u] & k \arrow[ul] \arrow[u] & k \arrow[u] \\
 & k \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$D\,Tr\,\Omega(I_1) = F\,\Omega(I_1) =$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
 & k & \\
k \arrow[ur] & k \arrow[u] & k \arrow[ul] \\
k \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \arrow[u] & 0 \arrow[u] \\
 & 0 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$$0 \to \ker \to P_2 \amalg P_3 \amalg P_4 \to D\,Tr\,\Omega(I_1) \to 0$$

$$\ker = 2P_0$$

$$0 \to (D\,Tr)^2\Omega(I_1) \to 2I_0 \to I_2 \amalg I_3 \amalg I_4 \to D(D\,Tr\,\Omega(I_1))^* \to 0.$$

$D(D\,Tr\,\Omega(I_1)^* =$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
 & 0 & \\
0 \arrow[ur] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \\
0 \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \arrow[u] & 0 \arrow[u] \\
 & k \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{Im}\,(2I_0) =$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
 & 0 & \\
0 \arrow[ur] & k \arrow[u] & k \arrow[ul] \\
k \arrow[u] & k \arrow[u] \arrow[ul] & k \arrow[u] \\
 & 2k \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$(D\mathrm{Tr})^2\,\Omega(I_4) = F^2\Omega(I_1) =$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
 & 2k & \\
2k \arrow[ur] & k \arrow[u] & k \arrow[ul] \\
k \arrow[u] & k \arrow[u] \arrow[ul] & k \arrow[u] \\
 & 0 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$$0 \to \ker \to P_4 \amalg P_5 \amalg P_6 \to (D\mathrm{Tr})^2\Omega(I_4) \to 0$$

$$\ker = P_0$$

$$0 \to (D\mathrm{Tr})^3\Omega(I_4) \to I_0 \to I_4 \amalg I_5 \amalg I_6 \to D((D\mathrm{Tr})^2\Omega(I_4))^* \to 0$$

$D((D\mathrm{Tr})^2\Omega(I_1))^* =$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
 & 0 & \\
0 \arrow[ur] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \\
0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] \arrow[ul] & 0 \arrow[u] \\
 & 2k \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{Im}\,(I_0) =$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
 & 0 & \\
0 \arrow[ur] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \\
k \arrow[u] & k \arrow[u] \arrow[ul] & k \arrow[u] \\
 & k \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$$(D\mathrm{tr})^3\Omega(I_4) = F^3\Omega(I_4) = \begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] & k & \\ k \arrow[ur] & k \arrow[u] & k \arrow[ul] \\ 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] \arrow[ul] & 0 \arrow[u] \\ & 0 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$0 \to \ker \to P_1 \amalg P_2 \amalg P_3 \to (D\mathrm{tr})^3\Omega(I_4) \to 0$$

$$\ker = 2P_0$$

$$0 \to (D\mathrm{tr})^4\Omega(I_4) \to 2I_0 \to I_1 \amalg I_2 \amalg I_3 \to D((D\mathrm{tr})^3\Omega(I_1))^* \to 0$$

$$D((D\mathrm{tr})^3\Omega(I_1))^* = \begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] & 0 & \\ 0 \arrow[ur] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \\ 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] \arrow[ul] & 0 \arrow[u] \\ & k \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{Im}\,(2I_0) = \begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] & 0 & \\ k \arrow[ur] & k \arrow[u] & k \arrow[ul] \\ k \arrow[u] & 2k \arrow[u] \arrow[ul] & k \arrow[u] \\ & 2k \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$(D\mathrm{tr})^4\Omega(I_4) = F^4\Omega(I_4) = \begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] & 2k & \\ k \arrow[ur] & k \arrow[u] & k \arrow[ul] \\ k \arrow[u] & 0 \arrow[u] \arrow[ul] & k \arrow[u] \\ & 0 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$0 \to \ker \to P_2 \amalg P_4 \amalg P_6 \to (D\,Tr)^4\Omega(I_4) \to 0$$

$$\ker = P_0$$

$$0 \to (D\,Tr)^5\Omega(I_1) \to I_0 \to I_2 \amalg I_4 \amalg I_6 \to D\big((D\,Tr)^4\Omega(I_1)\big)^* \to 0$$

$$D\big((D\,Tr)^4\Omega(I_1)\big)^* = \begin{tikzcd} & 0 & \\ 0 \arrow[ur] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \\ 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] \arrow[ul] & 0 \arrow[u] \\ & 2k \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{Inj}\,(I_0) = \begin{tikzcd} & 0 & \\ 0 \arrow[ur] & k \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \\ k \arrow[u] & k \arrow[u] \arrow[ul] & k \arrow[u] \\ & k \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

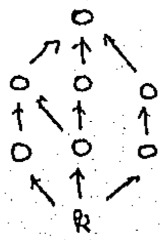
$$(D\,Tr)^5\Omega(I_4) = F^5\Omega(I_1) = \begin{tikzcd} & k & \\ k \arrow[ur] & 0 \arrow[u] & k \arrow[ul] \\ 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] \arrow[ul] & 0 \arrow[u] \\ & 0 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$0 \to \ker \to P_1 \amalg P_3 \to (D\,Tr)^5\Omega(I_1) \to 0$$

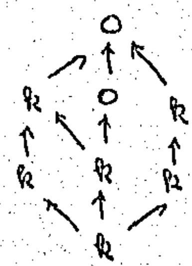
$$\ker = P_0$$

$$0 \to (D\,Tr)^6\Omega(I_1) \to I_0 \to I_1 \amalg I_3 \to D\big((D\,Tr)^5\Omega(I_1)\big)^* \to 0$$

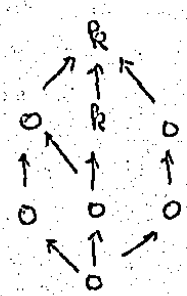
$D((Dtr)^5\Omega(I_4))^* =$



$\mathrm{Im}(I_0) =$

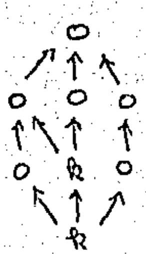


$(Dtr)^6\Omega(I_4) = F^6\Omega(I_4) =$



$$(Dtr)^6\Omega(I_4) = P_2$$

$\underline{\underline{I_5}}$:



$$0 \to \Omega(I_5) \to P_7 \to I_5 \to 0$$

$\Omega(I_5) =$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
 & k & \\
k \arrow[ur] & k \arrow[u] & k \arrow[ul] \\
k \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \arrow[u] & k \arrow[u] \\
 & 0 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$$0 \to \ker \to P_2 \amalg P_4 \amalg P_6 \to \Omega(I_5) \to 0$$

$$\ker = 2P_0$$

$$0 \to D\mathrm{Tr}\,\Omega(I_5) \to 2I_0 \to I_2 \amalg I_4 \amalg I_6 \to D(\Omega(I_5))^* \to 0$$

$D(\Omega(I_5))^* =$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
 & 0 & \\
0 \arrow[ur] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \\
0 \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \arrow[u] & 0 \arrow[u] \\
 & k \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{Im}\,(2I_0) =$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
 & 0 & \\
0 \arrow[ur] & k \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \\
k \arrow[u] & k \arrow[ul] \arrow[u] & k \arrow[u] \\
 & 2k \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$D\mathrm{tr}\,\Omega(I_5) = F\,\Omega(I_5) =$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & 2k & \\
2k \arrow[ur] & k \arrow[u] & 2k \arrow[ul] \\
k \arrow[u] & k \arrow[u] \arrow[ul] & k \arrow[u] \\
 & 0 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$$0 \to \ker \to P_3 \amalg P_4 \amalg P_5 \amalg P_6 \to D\mathrm{tr}\,\Omega(I_5) \to 0$$

⊙ $\ker = 2P_0$

$$0 \to (D\mathrm{tr})^2\Omega(I_5) \to 2I_0 \to I_3 \amalg I_4 \amalg I_5 \amalg I_6 \to D(D\mathrm{tr}\,\Omega(I_5))^* \to 0$$

$D(D\mathrm{tr}\,\Omega(I_5))^* =$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & 0 & \\
0 \arrow[ur] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \\
0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] \arrow[ul] & 0 \arrow[u] \\
 & 2k \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{Im}(2I_0) =$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & 0 & \\
0 \arrow[ur] & 0 \arrow[u] & k \arrow[ul] \\
k \arrow[u] & k \arrow[u] \arrow[ul] & 2k \arrow[u] \\
 & 2k \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$(D\mathrm{tr})^2\Omega(I_5) = F^2\Omega(I_7) =$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & 2k & \\
2k \arrow[ur] & 2k \arrow[u] & k \arrow[ul] \\
k \arrow[u] & k \arrow[u] \arrow[ul] & 0 \arrow[u] \\
 & 0 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$$0 \to \ker \to P_2 \amalg P_3 \amalg P_4 \amalg P_5 \to (D\mathrm{Tr})^2\Omega(I_5) \to 0$$

$$\ker = 2P_0$$

$$0 \to (D\mathrm{Tr})^3\Omega(I_5) \to 2I_0 \to I_2 \amalg I_3 \amalg I_4 \amalg I_5 \to D((D\mathrm{Tr})^2\Omega(I_5))^* \to 0$$

$$D((D\mathrm{Tr})^2\Omega(I_5))^* = \begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
 & 0 & \\
0 \arrow[ur] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \\
0 \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \arrow[u] & 0 \arrow[u] \\
 & 2k \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$$\mathrm{Im}\,(2I_0) = \begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
 & 0 & \\
0 \arrow[ur] & k \arrow[u] & k \arrow[ul] \\
k \arrow[u] & 2k \arrow[ul] \arrow[u] & k \arrow[u] \\
 & 2k \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$$(D\mathrm{Tr})^3\Omega(I_5) = F^3\Omega(I_5) = \begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
 & 2k & \\
2k \arrow[ur] & k \arrow[u] & k \arrow[ul] \\
k \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \arrow[u] & k \arrow[u] \\
 & 0 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$$0 \to \ker \to P_1 \amalg P_2 \amalg P_4 \amalg P_6 \to (D\mathrm{Tr})^3\Omega(I_5) \to 0$$

$$\ker = 2P_0$$

$$0 \to (D\mathrm{Tr})^4\Omega(I_5) \to 2I_0 \to I_1 \amalg I_2 \amalg I_4 \amalg I_6 \to D((D\mathrm{Tr})^3\Omega(I_5))^* \to 0$$

$D((Dtr)^3\Omega(I_5))^* =$

$$\begin{tikzcd}
& 0 & \\
0 \arrow[ur] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \\
0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] \arrow[ul] & 0 \arrow[u] \\
& 2k \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{Im}(2I_0) =$

$$\begin{tikzcd}
& 0 & \\
k \arrow[ur] & k \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \\
2k \arrow[u] & 2k \arrow[u] \arrow[ul] & k \arrow[u] \\
& 2k \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$(Dtr)^4\Omega(I_5) = F^4\Omega(I_5) =$

$$\begin{tikzcd}
& 2k & \\
k \arrow[ur] & k \arrow[u] & 2k \arrow[ul] \\
0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] \arrow[ul] & k \arrow[u] \\
& 0 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$$0 \to \ker \to P_1 \amalg P_2 \amalg P_3 \amalg P_4 \to (Dtr)^4\Omega(I_5) \to 0$$

$$\ker = 2P_0$$

$$0 \to (Dtr)^5\Omega(I_5) \to 2I_0 \to I_1 \amalg I_2 \amalg I_3 \amalg I_4 \to D((Dtr)^4\Omega(I_5))^* \to 0$$

$D((Dtr)^4\Omega(I_5))^* =$

$$\begin{tikzcd}
& 0 & \\
0 \arrow[ur] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \\
0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] \arrow[ul] & 0 \arrow[u] \\
& 2k \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$\operatorname{Im}(2I_0) =$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & \\
k \arrow[ur] & k \arrow[u] & k \arrow[ul] \\
k \arrow[u] & 2k \arrow[u] \arrow[ul] & 2k \arrow[u] \\
 & 2k \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$(Dtr)^5\Omega(I_5) = F^5\Omega(I_5) =$

$$\begin{tikzcd}
 & 2k & \\
k \arrow[ur] & k \arrow[u] & k \arrow[ul] \\
k \arrow[u] & 0 \arrow[u] \arrow[ul] & 0 \arrow[u] \\
 & 0 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$$0 \to \ker \to P_2 \amalg P_3 \amalg P_4 \to (Dtr)^5\Omega(I_5) \to 0$$

$$\ker = P_0$$

$$0 \to (Dtr)^6\Omega(I_5) \to I_0 \to I_2 \amalg I_3 \amalg I_4 \to D((Dtr)^5\Omega(I_5))^* \to 0$$

$D((Dtr)^5\Omega(I_5))^* =$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & \\
0 \arrow[ur] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \\
0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] \arrow[ul] & 0 \arrow[u] \\
 & 2k \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$\operatorname{Im}(I_0) =$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & \\
0 \arrow[ur] & k \arrow[u] & k \arrow[ul] \\
k \arrow[u] & k \arrow[u] \arrow[ul] & k \arrow[u] \\
 & k \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$$(Dtr)^6\Omega(I_5) = F^6\Omega(I_5) = \begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] & k & \\ k \arrow[ur] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \\ 0 \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \arrow[u] & 0 \arrow[u] \\ & 0 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$(Dtr)^6\Omega(I_5) = P_1$$

$\underline{\underline{I_6}}$:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] & 0 & \\ 0 \arrow[ur] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \\ 0 \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \arrow[u] & k \arrow[u] \\ & k \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$0 \to \Omega(I_6) \to P_7 \to I_6 \to 0$$

$$\Omega(I_6) = \begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] & k & \\ k \arrow[ur] & k \arrow[u] & k \arrow[ul] \\ k \arrow[u] & k \arrow[ul] \arrow[u] & 0 \arrow[u] \\ & 0 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$0 \to \ker \to P_3 \amalg P_4 \amalg P_5 \to \Omega(I_6) \to 0$$

$$\ker = P_1 \amalg P_0$$

$$0 \to \Omega(I_6)^* \to P_3^* \amalg P_4^* \amalg P_5^* \to \Omega tr\,\Omega(I_6) \to 0$$

$\Omega(I_0)^* =$

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ 0 \arrow[d] \arrow[dr] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ 0 \arrow[dr] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[dl] \\ & k & \end{tikzcd}$$

$\Omega\,\mathrm{tr}\,\Omega(I_0) =$

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ 0 \arrow[d] \arrow[dr] & 0 \arrow[d] & k \arrow[d] \\ k \arrow[dr] & k \arrow[d] & k \arrow[dl] \\ & 2k & \end{tikzcd}$$

$$0 \to \Omega\,\mathrm{tr}\,\Omega(I_0) \to 2I_0 \to \Omega^{-1}\Omega\,\mathrm{tr}\,\Omega(I_0) \to 0$$

$\Omega^{-1}\Omega\,\mathrm{tr}\,\Omega(I_0) =$

$$\begin{tikzcd} & 2k \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ 2k \arrow[d] \arrow[dr] & 2k \arrow[d] & k \arrow[d] \\ k \arrow[dr] & k \arrow[d] & k \arrow[dl] \\ & 0 & \end{tikzcd}$$

$$0 \to D\Omega^{-1}\Omega\,\mathrm{tr}\,\Omega(I_0) \to D(2I_0) \to D\Omega\,\mathrm{tr}\,\Omega(I_0) \to 0$$

$$\begin{array}{c} \| \\ \Omega D\Omega\,\mathrm{tr}\,\Omega(I_0) = F\Omega(I_0) \end{array}$$

$F\Omega(I_6) =$

$$\begin{tikzcd}
 & 2k & \\
2k \arrow[ur] & 2k \arrow[u] & k \arrow[ul] \\
k \arrow[u] & k \arrow[ul] \arrow[u] & k \arrow[u] \\
 & 0 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$$0 \to \mathrm{Ker} \to P_2 \amalg P_4 \amalg P_5 \amalg P_6 \to F\Omega(I_6) \to 0$$

$$\mathrm{Ker} = 2P_0$$

$$0 \to D\mathrm{Tr}\,F\Omega(I_6) \to 2I_0 \to I_2 \amalg I_4 \amalg I_5 \amalg I_6 \to D(F\Omega(I_6))^* \to 0$$

$D(F\Omega(I_6))^* =$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & \\
0 \arrow[ur] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \\
0 \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \arrow[u] & 0 \arrow[u] \\
 & 2k \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{Im}\,(2I_0) =$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & \\
0 \arrow[ur] & k \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \\
k \arrow[u] & 2k \arrow[ul] \arrow[u] & k \arrow[u] \\
 & 2k \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$D\mathrm{Tr}\,F\Omega(I_6) = F^2\Omega(I_6) =$

$$\begin{tikzcd}
 & 2k & \\
2k \arrow[ur] & k \arrow[u] & 2k \arrow[ul] \\
k \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \arrow[u] & k \arrow[u] \\
 & 0 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$$0 \to \ker \to P_1 \amalg P_2 \amalg P_3 \amalg P_4 \amalg P_6 \to D\mathrm{tr}\, F\Omega(I_6) \to 0$$

$$\ker = 3P_0$$

$$0 \to (D\mathrm{tr})^2 F\Omega(I_6) \to 3I_0 \to I_1 \amalg I_2 \amalg I_3 \amalg I_4 \amalg I_6 \to D((D\mathrm{tr}\, F\Omega(I_6))^*) \to 0$$

$D((D\mathrm{tr}\, F\Omega(I_6))^* =$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & \\
0 \arrow[ur] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \\
0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] \arrow[ul] & 0 \arrow[u] \\
 & 2k \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{Im}\ (3I_0) =$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & \\
k \arrow[ur] & k \arrow[u] & k \arrow[ul] \\
2k \arrow[u] & 2k \arrow[u] \arrow[ul] & 2k \arrow[u] \\
 & 3k \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$(D\mathrm{tr})^2 F\Omega(I_6) = F^3\Omega(I_6) =$

$$\begin{tikzcd}
 & 3k & \\
2k \arrow[ur] & 2k \arrow[u] & 2k \arrow[ul] \\
k \arrow[u] & k \arrow[u] \arrow[ul] & k \arrow[u] \\
 & 0 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$$0 \to \ker \to P_2 \amalg P_3 \amalg P_4 \amalg P_5 \amalg P_6 \to (D\mathrm{tr})^2 F\Omega(I_6) \to 0$$

$$\ker = 2P_0$$

$$0 \to (D\mathrm{Tr})^3 F\Omega(I_6) \to 2I_0 \to I_2 \amalg I_3 \amalg I_4 \amalg I_5 \amalg I_6 \to D((D\mathrm{Tr})^2F\Omega(I_6))^* \to 0$$

$D\left((D\mathrm{Tr})^2 F\Omega(I_6)\right)^* =$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & \\
0 \arrow[ur] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \\
0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] \arrow[ul] & 0 \arrow[u] \\
 & 3k \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{Im}(2I_0) =$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & \\
0 \arrow[ur] & k \arrow[u] & k \arrow[ul] \\
k \arrow[u] & 2k \arrow[u] \arrow[ul] & 2k \arrow[u] \\
 & 2k \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$(D\mathrm{Tr})^3 F\Omega(I_6) = F^4\Omega(I_6) =$

$$\begin{tikzcd}
 & 2k & \\
2k \arrow[ur] & k \arrow[u] & k \arrow[ul] \\
k \arrow[u] & 0 \arrow[u] \arrow[ul] & 0 \arrow[u] \\
 & 0 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$$0 \to \mathrm{Ker} \to P_1 \amalg P_2 \amalg P_3 \amalg P_4 \to (D\mathrm{Tr})^3 F\Omega(I_6) \to 0$$

$\mathrm{Ker} = 2P_0$

$$0 \to (D\mathrm{Tr})^4 F\Omega(I_6) \to 2I_0 \to I_1 \amalg I_2 \amalg I_3 \amalg I_4 \to D((D\mathrm{Tr})^3F\Omega(I_6))^* \to 0$$

$D((D\mathrm{tr})^3 F\Omega(I_0))^* =$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
 & 0 & \\
0 \arrow[ur] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \\
0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] \arrow[ul] & 0 \arrow[u] \\
 & 2k \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{Im}(2I_0) =$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
 & 0 & \\
k \arrow[ur] & k \arrow[u] & k \arrow[ul] \\
2k \arrow[u] & 2k \arrow[u] \arrow[ul] & k \arrow[u] \\
 & 2k \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$(D\mathrm{tr})^4 F\Omega(I_0) = F^5\Omega(I_0) =$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
 & 2k & \\
k \arrow[ur] & k \arrow[u] & k \arrow[ul] \\
0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] \arrow[ul] & k \arrow[u] \\
 & 0 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$$0 \to \ker \to P_1 \amalg P_2 \amalg P_6 \to (D\mathrm{tr})^4 F\Omega(I_0) \to 0$$

$$\ker = P_0$$

$$0 \to (D\mathrm{tr})^5 F\Omega(I_0) \to I_0 \to I_1 \amalg I_2 \amalg I_6 \to D((D\mathrm{tr})^4 F\Omega(I_0))^* \to 0$$

$D((D\mathrm{tr})^4 F\Omega(I_0))^* =$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
 & 0 & \\
0 \arrow[ur] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \\
0 \arrow[u] & k \arrow[u] \arrow[ul] & 0 \arrow[u] \\
 & 2k \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{Im}\,(I_6) =$

$$\begin{tikzcd} & 0 & \\ k \arrow[ur] & k \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \\ k \arrow[u] & k \arrow[u] \arrow[ul] & k \arrow[u] \\ & k \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$(D\mathrm{Tr})^5 F\Omega(I_6) = F^6\Omega(I_6) =$

$$\begin{tikzcd} & k & \\ 0 \arrow[ur] & 0 \arrow[u] & k \arrow[ul] \\ 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] \arrow[ul] & 0 \arrow[u] \\ & 0 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$(D\mathrm{Tr})^5 F\Omega(I_6) = P_3$$

<u>I_7</u>:

$$\begin{tikzcd} & 0 & \\ 0 \arrow[ur] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \\ 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] \arrow[ul] & 0 \arrow[u] \\ & k \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$0 \to \Omega(I_7) \to P_7 \to I_7 \to 0$$

$\Omega(I_7) =$

$$\begin{tikzcd} & k & \\ k \arrow[ur] & k \arrow[u] & k \arrow[ul] \\ k \arrow[u] & k \arrow[u] \arrow[ul] & k \arrow[u] \\ & 0 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$0 \to \ker \to P_4 \amalg P_5 \amalg P_6 \to \Omega(I_7) \to 0$$

$$\ker = P_1 \amalg P_0$$

$$0 \to \Omega(I_7)^* \to P_4^* \amalg P_5^* \amalg P_6^* \to \Omega \mathrm{tr}\, \Omega(I_7) \to 0$$

$\Omega(I_7)^* =$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
0 \arrow[d] \arrow[dr] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[dr] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[dl] \\
 & k &
\end{tikzcd}$$

$\Omega \mathrm{tr}\, \Omega(I_7) =$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
0 \arrow[d] \arrow[dr] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
k \arrow[dr] & k \arrow[d] & k \arrow[dl] \\
 & 2k &
\end{tikzcd}$$

$$0 \to \Omega \mathrm{tr}\, \Omega(I_1) \to 2 I_0 \to \Omega^{-1} \Omega \mathrm{tr}\, \Omega(I_7) \to 0$$

$\Omega^{-1} \Omega \mathrm{tr}\, \Omega(I_7) =$

$$\begin{tikzcd}
 & 2k \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
2k \arrow[d] \arrow[dr] & 2k \arrow[d] & 2k \arrow[d] \\
k \arrow[dr] & k \arrow[d] & k \arrow[dl] \\
 & 0 &
\end{tikzcd}$$

$$0 \to D\Omega^{-1} \Omega \mathrm{tr}\, \Omega(I_1) \to D(2I_0) \to D\Omega \mathrm{tr}\, \Omega(I_1) \to 0$$

$$\| $$

$$\Omega D \Omega \mathrm{tr}\, \Omega(I_7) = F\Omega(I_1)$$

$F\Omega(I_7) =$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
 & 2k & \\
2k \arrow[ur] & 2k \arrow[u] & 2k \arrow[ul] \\
k \arrow[u] & k \arrow[u] \arrow[ul] & k \arrow[u] \\
 & 0 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$$0 \to \ker \to P_2 \amalg P_3 \amalg P_4 \amalg P_5 \amalg P_6 \to F\Omega(I_7) \to 0$$

$$\ker = 3P_0$$

$$0 \to (D\mathrm{Tr})F\Omega(I_7) \to 3I_0 \to I_2 \amalg I_3 \amalg I_4 \amalg I_5 \amalg I_6 \to D(F\Omega(I_6))^* \to 0$$

$D(F\Omega(I_6))^* =$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
 & 0 & \\
0 \arrow[ur] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \\
0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] \arrow[ul] & 0 \arrow[u] \\
 & 2k \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{Im}\,(3I_0) =$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
 & 0 & \\
0 \arrow[ur] & k \arrow[u] & k \arrow[ul] \\
k \arrow[u] & 2k \arrow[u] \arrow[ul] & 2k \arrow[u] \\
 & 3k \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$D\mathrm{Tr}\,F\Omega(I_7) = F^2\Omega(I_7) =$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
 & 3k & \\
3k \arrow[ur] & 2k \arrow[u] & 2k \arrow[ul] \\
2k \arrow[u] & k \arrow[u] \arrow[ul] & k \arrow[u] \\
 & 0 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$$0 \to \ker \to P_2 \amalg P_3 \amalg 2P_4 \amalg P_5 \amalg P_6 \to D\operatorname{tr} F\Omega(I_7) \to 0$$

$$\ker = 3P_0$$

$$0 \to (D\operatorname{tr})^2 F\Omega(I_7) \to 3I_0 \to I_2 \amalg I_3 \amalg 2I_4 \amalg I_5 \amalg I_6 \to D\big((D\operatorname{tr} F\Omega(I_7))^*\big) \to 0$$

$$D\big((D\operatorname{tr} F\Omega(I_7))^*\big) = \quad \begin{tikzcd} & 0 & \\ 0 \arrow[ur] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \\ 0 \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \arrow[u] & 0 \arrow[u] \\ & 3k \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$\operatorname{Im}(3I_0) = \quad \begin{tikzcd} & 0 & \\ 0 \arrow[ur] & k \arrow[u] & k \arrow[ul] \\ 2k \arrow[u] & 2k \arrow[ul] \arrow[u] & 2k \arrow[u] \\ & 3k \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$(D\operatorname{tr})^2 F\Omega(I_7) = F^3\Omega(I_7) \quad \begin{tikzcd} & 3k & \\ 3k \arrow[ur] & 2k \arrow[u] & 2k \arrow[ul] \\ k \arrow[u] & k \arrow[ul] \arrow[u] & k \arrow[u] \\ & 0 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$0 \to \ker \to P_1 \amalg P_2 \amalg P_3 \amalg P_4 \amalg P_5 \amalg P_6 \to (D\operatorname{tr})^2 F\Omega(I_7) \to 0$$

$$\ker = 3P_0.$$

$$0 \to (D\operatorname{tr})^3 F\Omega(I_7) \to 3I_0 \to I_1 \amalg I_2 \amalg I_3 \amalg I_4 \amalg I_5 \amalg I_6 \to D\big(((D\operatorname{tr})^2 F\Omega(I_7))^*\big) \to 0$$

$D((D\mathrm{Tr})^2 F\Omega(I_1))^* =$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
 & 0 & \\
0 \arrow[ur] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \\
0 \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \arrow[u] & 0 \arrow[u] \\
 & 3k \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{Im}\,(3I_0) =$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
 & 0 & \\
k \arrow[ur] & k \arrow[u] & k \arrow[ul] \\
2k \arrow[u] & 3k \arrow[ul] \arrow[u] & 2k \arrow[u] \\
 & 3k \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$(D\mathrm{Tr})^3 F\Omega(I_1) = F^4\Omega(I_2) =$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
 & 3k & \\
2k \arrow[ur] & 2k \arrow[u] & 2k \arrow[ul] \\
k \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \arrow[u] & k \arrow[u] \\
 & 0 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$$0 \to \ker \to P_1 \amalg 2P_2 \amalg P_3 \amalg P_4 \amalg P_6 \to (D\mathrm{Tr})^3 F\Omega(I_7) \to 0$$

$$\ker = 3P_0$$

$$0 \to (D\mathrm{Tr})^4 F\Omega(I_7) \to 3I_0 \to I_1 \amalg 2I_2 \amalg I_3 \amalg I_4 \amalg I_6 \to D((D\mathrm{Tr})^3 F\Omega(I_7))^* \to 0$$

$D((D\mathrm{Tr})^3 F\Omega(I_7))^* =$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
 & 0 & \\
0 \arrow[ur] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \\
0 \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \arrow[u] & 0 \arrow[u] \\
 & 3k \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{Im}\,(3I_0) =$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & \\
k \arrow[ur] & 2k \arrow[u] & k \arrow[ul] \\
2k \arrow[u] & 3k \arrow[u] \arrow[ul] & 2k \arrow[u] \\
 & 3k \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$(D\mathrm{tr})^4 F\Omega(I_7) = F^5\Omega(I_7)$

$$\begin{tikzcd}
 & 3k & \\
2k \arrow[ur] & k \arrow[u] & 2k \arrow[ul] \\
k \arrow[u] & 0 \arrow[u] \arrow[ul] & k \arrow[u] \\
 & 0 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$0 \to \ker \to P_1 \amalg P_2 \amalg P_3 \amalg P_4 \amalg P_6 \to (D\mathrm{tr})^4 F\Omega(I_7) \to 0$

$\ker = 2P_0$

$0 \to (D\mathrm{tr})^5 F\Omega(I_7) \to 2I_0 \to I_1 \amalg I_2 \amalg I_3 \amalg I_4 \amalg I_6 \to D((D\mathrm{tr})^4 F\Omega(I_7))^* \to 0$

$D((D\mathrm{tr})^4 F\Omega(I_7))^* =$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & \\
0 \arrow[ur] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \\
0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] \arrow[ul] & 0 \arrow[u] \\
 & 3k \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{Im}(2I_0) =$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
 & 0 & \\
k \arrow[ur] & k \arrow[u] & k \arrow[ul] \\
2k \arrow[u] & 2k \arrow[u] \arrow[ul] & 2k \arrow[u] \\
 & 2k \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$(D\mathrm{tr})^5 F\Omega(I_7) = F^6\Omega(I_7) =$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
 & 2k & \\
k \arrow[ur] & k \arrow[u] & k \arrow[ul] \\
0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] \arrow[ul] & 0 \arrow[u] \\
 & 0 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$$0 \to \ker \to P_1 \amalg P_2 \amalg P_3 \to (D\mathrm{tr})^5 F\Omega(I_7) \to 0$$

$$\ker = P_0$$

$$0 \to (D\mathrm{tr})^6 F\Omega(I_7) \to I_0 \to I_1 \amalg I_2 \amalg I_3 \to D((D\mathrm{tr})^5 F\Omega(I_7))^* \to 0$$

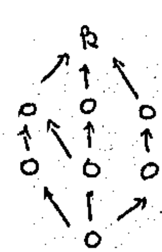
$D((D\mathrm{tr})^5 F\Omega(I_7))^* =$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
 & 0 & \\
0 \arrow[ur] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[ul] \\
0 \arrow[u] & k \arrow[u] \arrow[ul] & 0 \arrow[u] \\
 & 2k \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{Im}(I_0) =$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
 & 0 & \\
k \arrow[ur] & k \arrow[u] & k \arrow[ul] \\
k \arrow[u] & k \arrow[u] \arrow[ul] & k \arrow[u] \\
 & k \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$(Dtr)^6 F\Omega(I_7) = F^7\Omega(I_7) =$



$(Dtr)^6 F\Omega(I_7) = P_0$

01:

Las representaciones inescindibles son:

$\Omega(I_1) = (1,0,1,1,0,0,1,0)$; $F\Omega(I_1) = (1,1,0,1,1,0,0,0)$;

$F^2\Omega(I_1) = (1,1,1,0,0,1,0,0) = P_5$

$\Omega(I_2) = (1,1,0,1,1,0,1,0)$; $F\Omega(I_2) = (1,1,1,1,0,1,0,0)$;

$F^2\Omega(I_2) = (1,1,1,0,1,0,0,0)$; $F^3\Omega(I_2) = (1,1,0,1,0,0,1,0)$;

$F^4\Omega(I_2) = (1,0,1,1,0,0,0,0)$; $F^5\Omega(I_2) = (1,1,0,0,1,0,0,0) = P_1$

$\Omega(I_3) = (1,1,1,0,1,1,0,0)$; $F\Omega(I_3) = (1,1,1,1,0,0,1,0)$;

$F^2\Omega(I_3) = (2,1,1,2,1,0,1,0)$; $F^3\Omega(I_3) = (2,2,1,1,1,1,0,0)$;

$F^4\Omega(I_3) = (1,1,1,0,0,0,0,0)$; $F^5\Omega(I_3) = (1,0,0,1,0,0,1,0) = P_6$

$\Omega(I_4) = (1,1,1,1,0,1,1,0)$; $F\Omega(I_4) = (1,1,1,1,1,0,0,0)$;

$F^2\Omega(I_4) = (2,2,1,1,1,1,1,0)$; $F^3\Omega(I_4) = (1,1,1,1,0,0,0,0)$;

$F^4\Omega(I_4) = (2,1,1,1,1,0,1,0)$; $F^5\Omega(I_4) = (1,1,0,1,0,0,0,0)$;

$F^6\Omega(I_4) = (1,0,1,0,0,0,0,0) = P_2$

$\Omega(I_5) = (1,1,1,1,1,0,1,0)$; $\quad F\Omega(I_5) = (2,2,1,2,1,1,1,0)$;

$F^2\Omega(I_5) = (2,2,2,1,1,1,0,0)$; $\quad F^3\Omega(I_5) = (2,2,1,1,1,0,1,0)$;

$F^4\Omega(I_5) = (2,1,1,2,0,0,1,0)$; $\quad F^5\Omega(I_5) = (2,1,1,1,1,0,0,0)$;

$F^6\Omega(I_5) = (1,1,0,0,0,0,0,0) = P_1$

$\Omega(I_6) = (1,1,1,1,1,1,0,0)$; $\quad F\Omega(I_6) = (2,2,2,1,1,1,1,0)$;

$F^2\Omega(I_6) = (2,2,1,2,1,0,1,0)$; $\quad F^3\Omega(I_6) = (3,2,2,2,1,1,1,0)$;

$F^4\Omega(I_6) = (2,2,1,1,1,0,0,0)$; $\quad F^5\Omega(I_6) = (2,1,1,1,0,0,1,0)$;

$F^6\Omega(I_6) = (1,0,0,1,0,0,0,0) = P_3$

$\Omega(I_7) = (1,1,1,1,1,1,1,0)$; $\quad F\Omega(I_7) = (2,2,2,2,1,1,1,0)$;

$F^2\Omega(I_7) = (3,3,2,2,2,1,1,0)$; $\quad F^3\Omega(I_7) = (3,3,2,2,1,1,1,0)$;

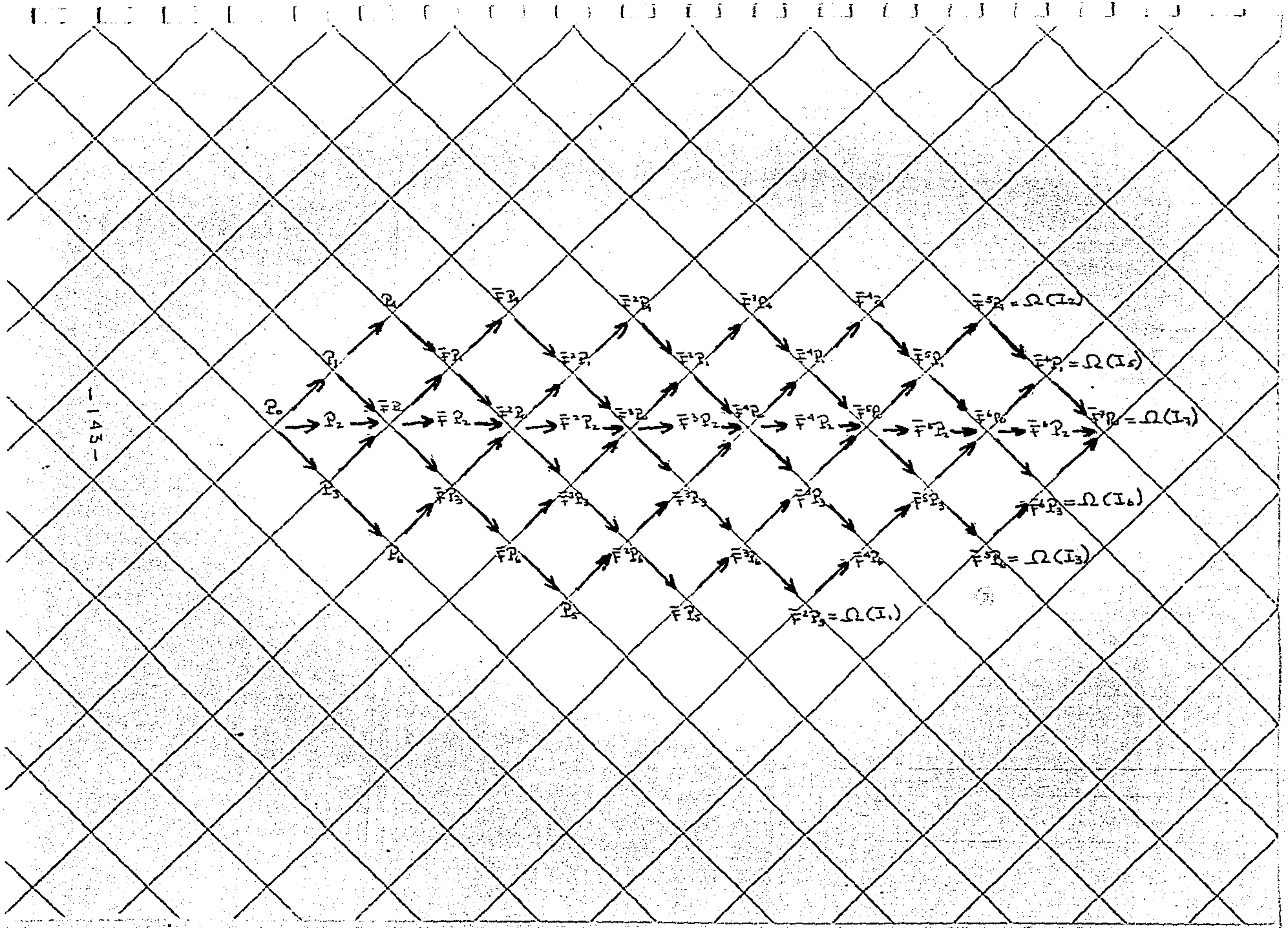
$F^4\Omega(I_7) = (3,2,2,2,1,0,1,0)$; $\quad \underline{F^5\Omega(I_7) = (3,2,1,2,1,0,1,0)}$;

$F^6\Omega(I_7) = (2,1,1,1,0,0,0,0)$; $\quad F^7\Omega(I_7) = (1,0,0,0,0,0,0,0) = P_0$

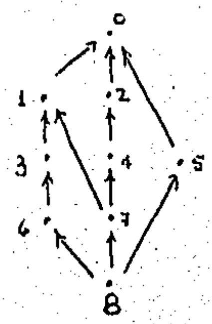
$F^2\Omega(I_1) = P_5$, $\quad F^5\Omega(I_2) = P_4$; $\quad F^5\Omega(I_3) = P_6$

$F^6\Omega(I_4) = P_2$, $\quad F^6\Omega(I_5) = P_1$, $\quad F^6\Omega(I_6) = P_3$

$F^7\Omega(I_7) = P_0$


P_0
P_1
P_2
P_3
P_4
P_5
P_6
$F^5P_4 = \Omega(I_2)$
$F^6P_1 = \Omega(I_5)$
$F^7P_0 = \Omega(I_7)$
$F^6P_3 = \Omega(I_6)$
$F^5P_6 = \Omega(I_3)$
$F^2P_5 = \Omega(I_1)$

<u>6</u>



Las representaciones inescindibles son:

$\Omega(I_1) = (1,0,1,0,1,1,0,0,0)$; $F\Omega(I_1) = (1,1,1,1,0,0,1,0,0)$;

$F^2\Omega(I_1) = (1,1,0,1,0,1,0,0,0)$; $F^3\Omega(I_1) = (1,1,1,0,1,0,0,1,0) = P_7$

$\Omega(I_2) = (1,1,0,1,0,1,1,0,0)$; $F\Omega(I_2) = (1,1,1,1,1,0,0,1,0)$;

$F^2\Omega(I_2) = (1,1,1,0,1,1,0,0,0)$; $F^3\Omega(I_2) = (2,1,2,1,1,1,1,0,0)$;

$F^4\Omega(I_2) = (2,2,1,2,0,1,1,0,0)$; $F^5\Omega(I_2) = (2,2,1,1,1,1,0,1,0)$;

$F^6\Omega(I_2) = (1,1,1,0,1,0,0,0,0)$; $F^7\Omega(I_2) = (1,0,1,0,0,1,0,0,0)$;

$F^8\Omega(I_2) = (1,1,0,1,0,0,1,0,0) = P_6$

$\Omega(I_3) = (1,1,1,0,1,1,0,1,0)$; $F\Omega(I_3) = (1,1,1,1,1,0,1,0,0)$;

$F^2\Omega(I_3) = (1,1,1,1,0,1,0,0,0)$; $\underline{F^3\Omega(I_3) = (2,2,1,1,1,1,1,1,0)}$;

$F^4\Omega(I_3) = (1,1,1,1,1,0,0,0,0)$, $F^5\Omega(I_3) = (1,1,1,0,0,1,0,0,0)$;

$F^6\Omega(I_3) = (2,1,1,1,1,1,1,0,0)$; $F^7\Omega(I_3) = (1,1,1,1,0,0,0,0,0)$;

$F^8\Omega(I_3) = (1,1,0,0,0,1,0,0,0)$; $F^9\Omega(I_3) = (1,0,1,0,1,0,0,0,0) = P_4$

$\Omega(I_4)=(1,1,1,1,0,1,1,0,0)$; $\underline{F\Omega(I_4)=(2,2,1,2,1,1,1,1,0)}$;

$F^2\Omega(I_4)=(2,2,2,1,2,1,0,1,0)$; $F^3\Omega(I_4)=(2,2,2,1,1,1,1,0,0)$;

$F^4\Omega(I_4)=(3,2,2,2,1,2,1,0,0)$; $\underline{F^5\Omega(I_4)=(3,3,2,2,1,1,1,1,0)}$;

$F^6\Omega(I_4)=(2,2,1,1,1,1,0,0,0)$; $F^7\Omega(I_4)=(2,1,2,0,1,1,0,0,0)$;

$F^8\Omega(I_4)=(2,1,1,1,0,1,1,0,0)$; $F^9\Omega(I_4)=(1,1,0,1,0,0,0,0,0)=P_3$

$\Omega(I_5)=(1,1,1,1,1,0,1,1,0)$; $F\Omega(I_5)=(1,1,1,1,1,1,0,0,0)$;

$\underline{F^2\Omega(I_5)=(2,2,2,1,1,1,1,1,0)}$; $F^3\Omega(I_5)=(2,2,1,2,1,1,1,0,0)$;

$F^4\Omega(I_5)=(2,2,2,1,1,1,0,1,0)$; $F^5\Omega(I_5)=(2,2,1,1,1,1,1,0,0)$;

$F^6\Omega(I_5)=(2,1,2,1,1,1,0,0,0)$; $F^7\Omega(I_5)=(2,2,1,1,0,1,1,0,0)$;

$F^8\Omega(I_5)=(2,1,1,1,1,1,0,0,0)$; $F^9\Omega(I_5)=(1,1,1,0,0,0,0,0,0)$;

$F^{10}\Omega(I_5)=(1,0,0,0,0,1,0,0,0)=P_5$

$\Omega(I_6)=(1,1,1,1,1,1,0,1,0)$; $\underline{F\Omega(I_6)=(2,2,2,1,2,1,1,1,0)}$;

$F^2\Omega(I_6)=(2,2,2,2,1,1,1,0,0)$; $\underline{F^3\Omega(I_6)=(3,3,2,2,1,2,1,1,0)}$;

$\underline{F^4\Omega(I_6)=(3,3,2,2,2,1,1,1,0)}$; $F^5\Omega(I_6)=(2,2,2,1,1,1,0,0,0)$;

$F^6\Omega(I_6)=(3,2,2,1,1,2,1,0,0)$; $F^7\Omega(I_6)=(3,2,2,2,1,1,1,0,0)$;

$F^8\Omega(I_6)=(2,2,1,1,0,1,0,0,0)$; $F^9\Omega(I_6)=(2,1,1,0,1,1,0,0,0)$;

$F^{10}\Omega(I_6)=(1,0,1,0,0,0,0,0,0)=P_2$

$\Omega(I_7) = (1,1,1,1,1,1,1,0,0)$; $\underline{F\Omega(I_7) = (2,2,2,2,1,1,1,1,0)}$;

$\underline{F^2\Omega(I_7) = (3,3,2,2,2,2,1,1,0)}$; $\underline{F^3\Omega(I_7) = (3,3,3,2,2,1,1,1,0)}$;

$F^4\Omega(I_7) = (3,3,2,2,1,2,1,0,0)$; $\underline{F^5\Omega(I_7) = (4,3,3,2,2,2,1,1,0)}$;

$F^6\Omega(I_7) = (3,3,2,2,1,1,1,0,0)$; $F^7\Omega(I_7) = (3,2,2,1,1,2,0,0,0)$;

$F^8\Omega(I_7) = (3,2,2,1,1,1,1,0,0)$; $F^9\Omega(I_7) = (2,1,1,1,0,1,0,0,0)$;

$F^{10}\Omega(I_7) = (1,1,0,0,0,0,0,0,0) = P_1$

$\underline{\Omega(I_8) = (1,1,1,1,1,1,1,1,0)}$; $\underline{F\Omega(I_8) = (2,2,2,2,2,1,1,1,0)}$;

$\underline{F^2\Omega(I_8) = (3,3,3,2,2,2,1,1,0)}$; $\underline{F^3\Omega(I_8) = (4,4,3,3,2,2,2,1,0)}$;

$\underline{F^4\Omega(I_8) = (4,4,3,3,2,2,1,1,0)}$; $\underline{F^5\Omega(I_8) = (4,4,3,2,2,2,1,1,0)}$;*

$F^6\Omega(I_8) = (4,3,3,2,2,2,1,0,0)$; $F^7\Omega(I_8) = (4,3,3,2,1,2,1,0,0)$;

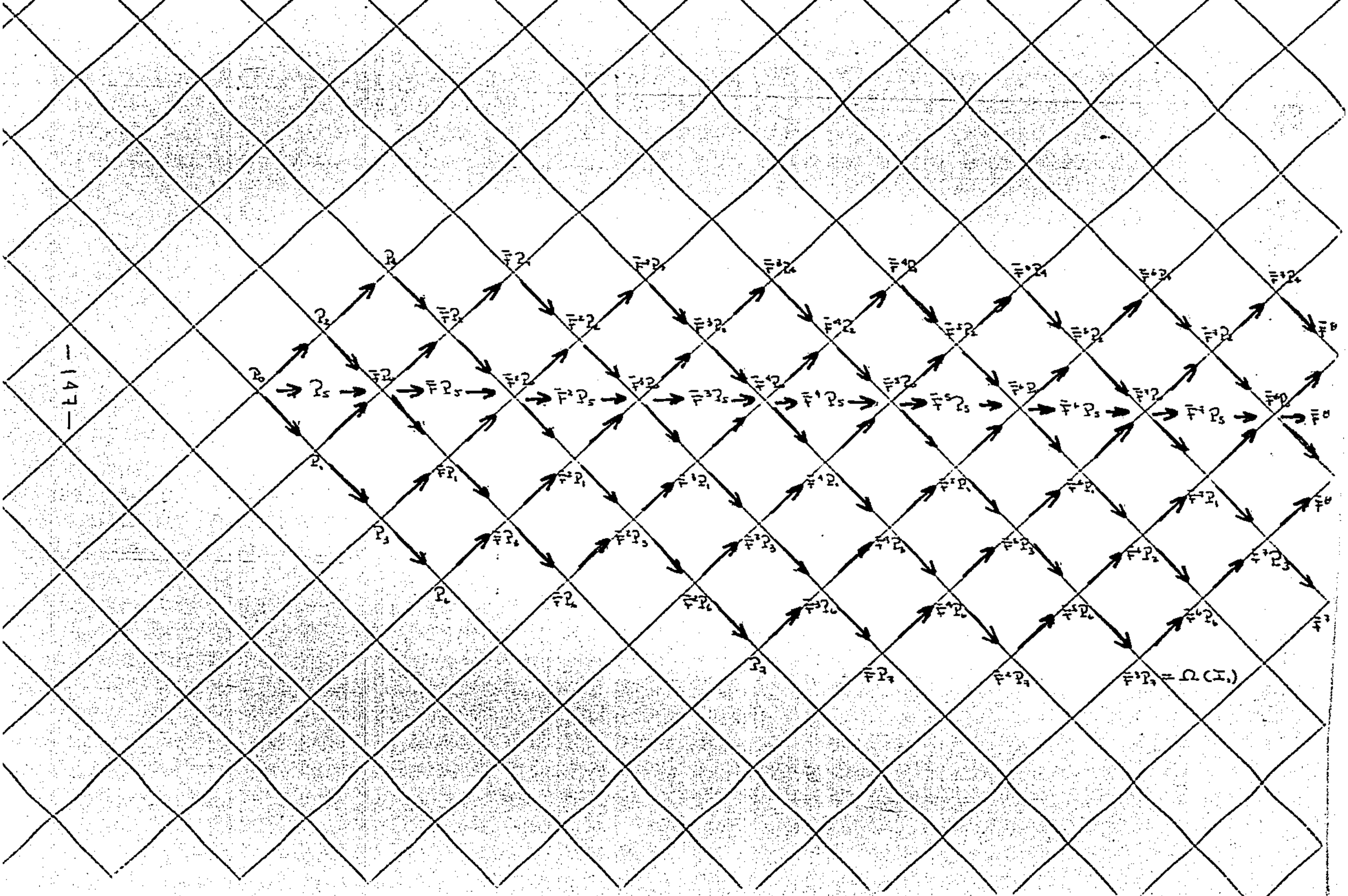
$F^8\Omega(I_8) = (4,3,2,2,1,2,1,0,0)$; $F^9\Omega(I_8) = (3,2,2,1,1,1,0,0,0)$;

$F^{10}\Omega(I_8) = (2,1,1,0,0,1,0,0,0)$; $F^{11}\Omega(I_8) = (1,0,0,0,0,0,0,0,0) = P_0$

$F^3\Omega(I_1) = P_7$; $F^8\Omega(I_2) = P_6$; $F^9\Omega(I_3) = P_4$;

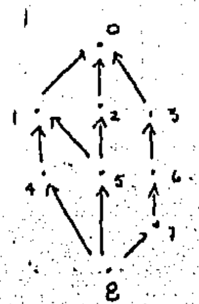
$F^9\Omega(I_4) = P_3$; $F^{10}\Omega(I_5) = P_5$; $F^{10}\Omega(I_6) = P_2$

$F^{10}\Omega(I_7) = P_1$; $F^{11}\Omega(I_8) = P_0$



P_0
P_1
P_2
P_3
P_4
P_5
P_6
P_7
$\bar{F}P_5$
$\bar{F}^2P_5$
$\bar{F}^3P_5$
$\bar{F}^4P_5$
$\bar{F}^5P_5$
$\bar{F}^6P_5$
$\bar{F}^7P_5$
$\bar{F}P_7$
$\bar{F}^2P_7$
$\bar{F}^3P_7 = \Omega(I_1)$

$\underline{\underline{\mathcal{L}}}$:



Las representaciones inescindibles son:

$\Omega(I_1) = (1,0,1,1,0,0,1,1,0)$; $F\Omega(I_1) = (1,1,0,1,1,0,1,0,0)$;

$F^2\Omega(I_1) = (1,1,1,1,0,1,0,0,0)$; $F^3\Omega(I_1) = (1,1,1,0,1,0,0,0,0)$;

$F^4\Omega(I_1) = (1,1,0,1,0,0,1,1,0)$; $F^5\Omega(I_1) = (1,0,1,1,0,0,1,0,0)$;

$F^6\Omega(I_1) = (1,1,0,1,1,0,0,0,0)$; $F^7\Omega(I_1) = (1,1,1,0,0,1,0,0,0) = P_5$

$\Omega(I_2) = (1,1,0,1,1,0,1,1,0)$; $F\Omega(I_2) = (1,1,1,1,0,1,1,0,0)$;

$F^2\Omega(I_2) = (1,1,1,1,1,0,0,0,0)$; $F^3\Omega(I_2) = (2,2,1,1,1,1,1,1,0)$;

$F^4\Omega(I_2) = (1,1,1,1,0,0,1,0,0)$; $F^5\Omega(I_2) = (2,1,1,2,1,0,1,1,0)$;

$F^6\Omega(I_2) = (2,2,1,1,1,1,1,0,0)$; $F^7\Omega(I_2) = (1,1,1,1,0,0,0,0,0)$;

$F^8\Omega(I_2) = (2,1,1,1,1,0,1,1,0)$; $F^9\Omega(I_2) = (1,1,0,1,0,0,1,0,0)$;

$F^{10}\Omega(I_2) = (1,0,1,1,0,0,0,0,0)$; $F^{11}\Omega(I_2) = (1,1,0,0,1,0,0,0,0) = P_1$

$\Omega(I_3) = (1,1,1,0,1,1,0,0,0)$; $F\Omega(I_3) = (1,1,1,1,0,0,1,1,0)$;

$F^2\Omega(I_3) = (2,1,1,2,1,0,2,1,0)$; $F^3\Omega(I_3) = (2,2,1,2,1,1,1,0,0)$;

$F^4\Omega(I_3) = (2,2,2,1,1,1,0,0,0)$; $F^5\Omega(I_3) = (2,2,1,1,1,0,1,1,0)$;

$F^6\Omega(I_3) = (2,1,1,2,0,0,2,1,0)$; $F^7\Omega(I_3) = (2,1,1,2,1,0,1,0,0)$;

$F^8\Omega(I_3) = (2,2,1,1,1,1,0,0,0)$; $F^9\Omega(I_3) = (1,1,1,0,0,0,0,0,0)$;

$F^{10}\Omega(I_3) = (1,0,0,1,0,0,1,1,0) = P_7$

$\Omega(I_4) = (1,1,1,1,0,1,1,1,0)$; $F\Omega(I_4) = (1,1,1,1,1,0,1,0,0)$;

$F^2\Omega(I_4) = (2,2,1,2,1,1,1,1,0)$; $F^3\Omega(I_4) = (2,2,2,1,1,1,1,0,0)$;

$F^4\Omega(I_4) = (2,2,1,2,1,0,1,1,0)$; $F^5\Omega(I_4) = (3,2,2,2,1,1,2,1,0)$;

$F^6\Omega(I_4) = (2,2,1,2,1,0,1,0,0)$; $F^7\Omega(I_4) = (3,2,2,2,1,1,1,1,0)$;

$F^8\Omega(I_4) = (2,2,1,1,1,0,1,0,0)$; $F^9\Omega(I_4) = (2,1,1,2,0,0,1,1,0)$;

$F^{10}\Omega(I_4) = (2,1,1,1,1,0,1,0,0)$; $F^{11}\Omega(I_4) = (1,1,0,1,0,0,0,0,0)$;

$F^{12}\Omega(I_4) = (1,0,1,0,0,0,0,0,0) = P_2$

$\Omega(I_5) = (1,1,1,1,1,0,1,1,0)$; $F\Omega(I_5) = (2,2,1,2,1,1,2,1,0)$;

$F^2\Omega(I_5) = (2,2,2,2,1,1,1,0,0)$; $F^3\Omega(I_5) = (3,3,2,2,2,1,1,1,0)$;

$F^4\Omega(I_5) = (3,3,2,2,1,1,2,1,0)$; $F^5\Omega(I_5) = (3,3,2,2,2,1,1,1,0)$;

$F^6\Omega(I_5) = (4,3,2,3,2,1,2,1,0)$; $F^7\Omega(I_5) = (3,3,2,2,1,1,1,0,0)$;

$F^8\Omega(I_5) = (3,2,2,2,1,0,1,1,0)$; $F^9\Omega(I_5) = (3,2,1,2,1,0,2,1,0)$,

$F^{10}\Omega(I_5) = (2,1,1,2,0,0,1,0,0)$; $F^{11}\Omega(I_5) = (2,1,1,1,1,0,0,0,0)$;

$F^{12}\,\Omega(I_5) = (1,1,0,0,0,0,0,0,0) = P_1$

$\Omega(I_6) = (1,1,1,1,1,1,0,0,0)$; $F\Omega(I_6) = (2,2,2,1,1,1,1,1,0)$;

$F^2\Omega(I_6) = (2,2,1,2,1,0,2,1,0)$; $F^3\Omega(I_6) = (3,2,2,3,1,1,2,1,0)$;

$F^4\Omega(I_6) = (3,3,2,2,2,1,1,0,0)$; $F^5\Omega(I_6) = (3,3,2,2,1,1,1,1,0)$;

$F^6\Omega(I_6) = (3,2,2,2,1,0,2,1,0)$; $F^7\Omega(I_6) = (3,2,1,3,1,0,2,1,0)$;

$F^8\Omega(I_6) = (3,2,2,2,1,1,1,0,0)$; $F^9\Omega(I_6) = (2,2,1,1,1,0,0,0,0)$;

$F^{10}\Omega(I_6) = (2,1,1,1,0,0,1,1,0)$; $F^{11}\Omega(I_6) = (1,0,0,1,0,0,1,0,0) = P_6$

$\Omega(I_7) = (1,1,1,1,1,1,1,0,0)$; $F\Omega(I_7) = (2,2,2,2,1,1,1,1,0)$;

$F^2\Omega(I_7) = (3,3,2,2,2,1,2,1,0)$; $\underline{F^3\Omega(I_7) = (3,3,2,3,1,1,2,1,0)}$;

$F^4\Omega(I_7) = (4,3,3,3,2,1,2,1,0)$; $\underline{F^5\Omega(I_7) = (4,4,2,3,2,1,2,1,0)}$;

$\underline{F^6\Omega(I_7) = (4,3,3,3,1,1,2,1,0)}$; $F^7\Omega(I_7) = (4,3,2,3,2,0,2,1,0)$;

$\underline{F^8\Omega(I_7) = (4,3,2,3,1,1,2,1,0)}$; $F^9\Omega(I_7) = (3,2,2,2,1,0,1,0,0)$;

$F^{10}\Omega(I_7) = (3,2,1,2,1,0,1,1,0)$; $F^{11}\Omega(I_7) = (2,1,1,1,0,0,1,0,0)$;

$F^{12}\Omega(I_7) = (1,0,0,1,0,0,0,0,0) = P_3$

$\Omega(I_8) = (1,1,1,1,1,1,1,1,0)$; $F\Omega(I_8) = (2,2,2,2,1,1,2,1,0)$;

$F^2\Omega(I_8) = (3,3,2,3,2,1,2,1,0)$; $F^3\Omega(I_8) = (4,4,3,3,2,2,2,1,0)$;

$\underline{F^4 \Omega(I_8) = (4,4,3,3,2,1,2,1,0)}$; $\underline{F^5 \Omega(I_8) = (5,4,3,4,2,1,3,2,0)}$;

$\underline{F^6 \Omega(I_8) = (5,4,3,4,2,1,3,1,0)}$; $\underline{F^7 \Omega(I_8) = (5,4,3,4,2,1,2,1,0)}$;

$\underline{F^8 \Omega(I_8) = (5,4,3,3,2,1,2,1,0)}$; $F^9 \Omega(I_8) = (4,3,2,3,1,0,2,1,0)$;

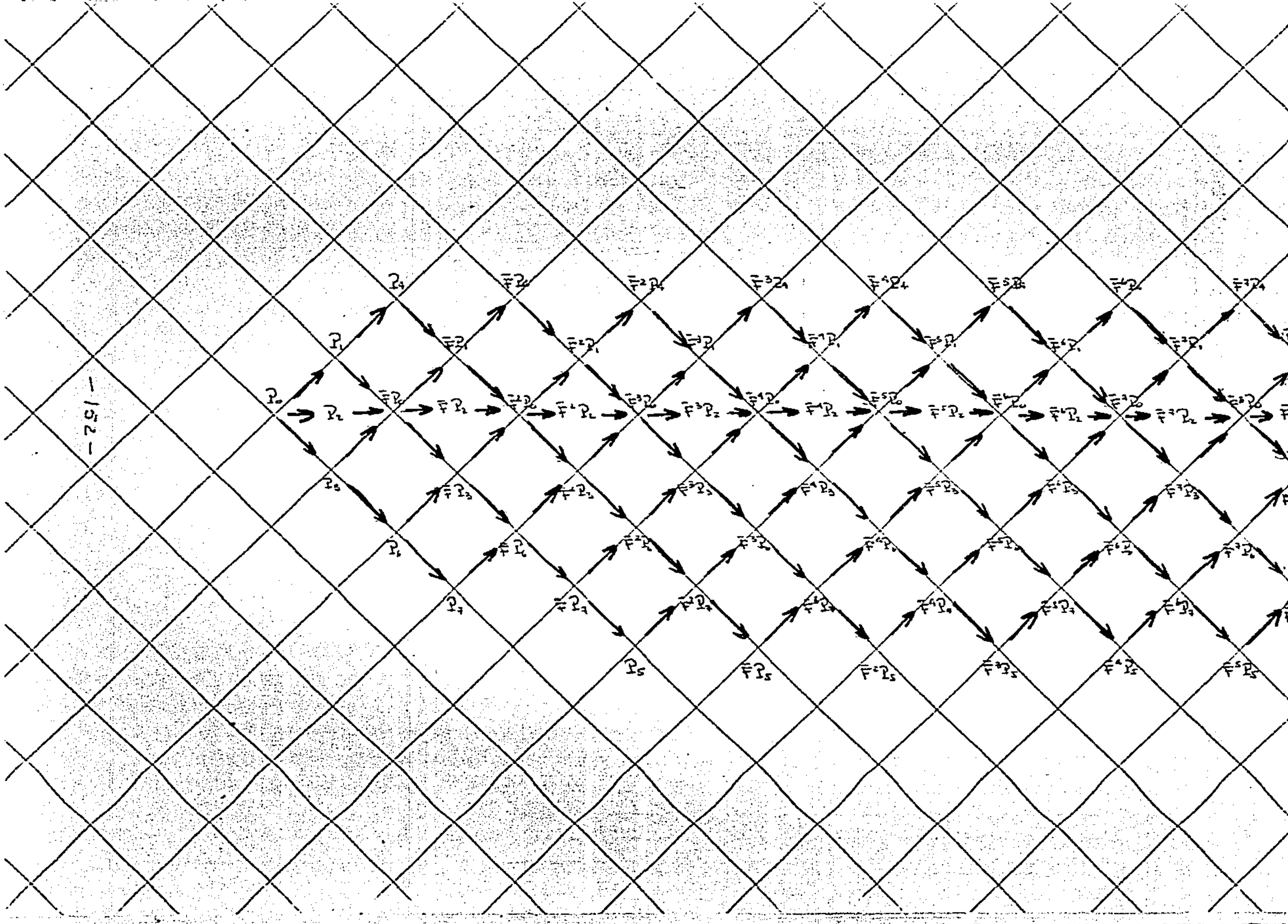
$F^{10} \Omega(I_8) = (4,2,2,3,1,0,2,1,0)$; $F^{11} \Omega(I_8) = (3,2,1,2,1,0,1,0,0)$;

$F^{12} \Omega(I_8) = (2,1,1,1,0,0,0,0,0)$; $F^{13} \Omega(I_8) = (1,0,0,0,0,0,0,0,0) = P_0$

$F^7 \Omega(I_1) = P_5$; $F^1 \Omega(I_2) = P_4$; $F^{10} \Omega(I_3) = P_7$

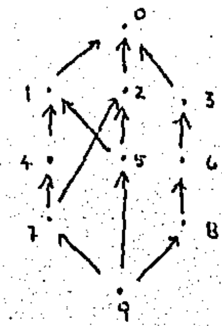
$F^{12} \Omega(I_4) = P_2$; $F^{12} \Omega(I_5) = P_1$; $F^{11} \Omega(I_6) = P_6$

$F^{12} \Omega(I_7) = P_3$; $F^{13} \Omega(I_8) = P_0$



P_0
P_1
P_2
P_3
P_4
P_5
P_6
P_7

2ª



Los representaciones irreducibles son:

$\Omega(I_1) = (1,0,1,1,0,0,1,0,1,0)$; $F\,\Omega(I_1) = (1,1,0,1,1,0,1,0,0,0)$;

$F^2\Omega(I_1) = (1,1,1,1,0,1,0,0,0,0)$; $F^3\Omega(I_1) = (1,1,1,0,1,0,0,1,0,0) = P_7$

$\Omega(I_2) = (1,1,0,1,1,0,1,0,1,0)$; $F\,\Omega(I_2) = (1,1,1,1,0,1,1,0,0,0)$;

$F^2\Omega(I_2) = (1,1,1,1,1,0,0,1,0,0)$; $F^3\Omega(I_2) = (1,1,1,0,1,1,0,0,0,0)$;

$F^4\Omega(I_2) = (1,1,1,1,0,0,1,0,1,0)$; $F^5\Omega(I_2) = (2,1,1,2,1,0,2,0,1,0)$;

$F^6\Omega(I_2) = (2,2,1,2,1,1,1,0,0,0)$; $F^7\Omega(I_2) = (2,2,2,1,1,1,0,1,0,0)$;

$F^8\Omega(I_2) = (1,1,1,0,1,0,0,0,0,0)$; $F^9\Omega(I_2) = (1,1,0,1,0,0,1,0,1,0)$;

$F^{10}\Omega(I_2) = (1,0,1,1,0,0,1,0,0,0)$; $F^{11}\Omega(I_2) = (1,1,0,1,1,0,0,0,0,0)$;

$F^{12}\Omega(I_2) = (1,1,1,0,0,1,0,0,0,0) = P_5$

$\Omega(I_3) = (1,1,1,0,1,1,0,1,0,0)$; $F\,\Omega(I_3) = (1,1,1,1,1,0,1,0,1,0)$;

$F^2\Omega(I_3) = (2,2,1,2,1,1,2,0,1,0)$; $F^3\Omega(I_3) = (2,2,2,2,1,1,1,1,0,0)$;

$F^4\Omega(I_3) = (2,2,2,1,2,1,0,1,0,0)$; $F^5\Omega(I_3) = (2,2,2,1,1,1,1,0,1,0)$;

$F^6\Omega(I_3) = (2,2,1,2,1,0,2,0,1,0)$ $F^7\Omega(I_3) = (3,2,2,3,1,1,2,0,1,0)$;

$F^8\Omega(I_3) = (3,3,2,2,2,1,1,1,0,0)$; $F^9\Omega(I_3) = (2,2,2,1,1,1,0,0,0,0)$;

$F^{10}\Omega(I_3) = (2,2,1,1,1,0,1,0,1,0)$; $F^{11}\Omega(I_3) = (2,1,1,2,0,0,2,0,1,0)$;

$F^{12}\Omega(I_3) = (2,1,1,2,1,0,1,0,0,0)$; $F^{13}\Omega(I_3) = (2,2,1,1,1,1,0,0,0,0)$;

$F^{14}\Omega(I_3) = (1,1,1,0,0,0,0,0,0,0)$; $F^{15}\Omega(I_3) = (1,0,0,1,0,0,1,0,1,0) = P_8$

$\Omega(I_4) = (1,1,1,1,0,1,1,0,1,0)$; $F\Omega(I_4) = (1,1,1,1,1,0,1,1,0,0)$;

$F^2\Omega(I_4) = (1,1,1,1,1,1,0,0,0,0)$; $F^3\Omega(I_4) = (2,2,2,1,1,1,1,1,1,0)$;

$F^4\Omega(I_4) = (1,1,1,1,1,0,1,0,0,0)$; $F^5\Omega(I_4) = (2,2,1,2,1,1,1,0,1,0)$;

$F^6\Omega(I_4) = (2,2,2,1,1,1,1,1,0,0)$; $F^7\Omega(I_4) = (1,1,1,1,1,0,0,0,0,0)$;

$F^8\Omega(I_4) = (2,2,1,1,1,1,1,0,1,0)$; $F^9\Omega(I_4) = (1,1,1,1,0,0,1,0,0,0)$;

$F^{10}\Omega(I_4) = (2,1,1,2,1,0,1,0,1,0)$; $F^{11}\Omega(I_4) = (2,2,1,1,1,1,1,0,0,0)$;

$F^{12}\Omega(I_4) = (1,1,1,1,0,0,0,0,0,0)$; $F^{13}\Omega(I_4) = (2,1,1,1,1,0,1,0,1,0)$;

$F^{14}\Omega(I_4) = (1,1,0,1,0,0,1,0,0,0)$; $F^{15}\Omega(I_4) = (1,0,1,1,0,0,0,0,0,0)$;

$F^{16}\Omega(I_4) = (1,1,0,0,1,0,0,0,0,0) = P_9$.

$\Omega(I_6) = (1,1,1,1,1,0,1,1,1,0)$; $F\Omega(I_6) = (1,1,1,1,1,1,1,0,0,0)$;

$F^2\Omega(I_5) = (2,2,2,2,1,1,1,1,1,0)$; $F^3\Omega(I_6) = (2,2,2,1,2,1,1,1,0,0)$;

$F^4\Omega(I_5)=(2,2,2,2,1,1,1,0,1,0)$; $F^5\Omega(I_5)=(3,3,2,2,2,1,2,1,1,0)$;

$F^6\Omega(I_5)=(2,2,2,2,1,1,1,0,0,0)$; $F^7\Omega(I_5)=(3,3,2,2,2,1,1,1,1,0)$;

$F^8\Omega(I_5)=(2,2,2,1,1,1,1,0,0,0)$; $F^9\Omega(I_5)=(2,2,1,2,1,0,1,0,1,0)$;

$F^{10}\Omega(I_5)=(3,2,2,2,1,1,2,0,1,0)$; $F^{11}\Omega(I_5)=(2,2,1,2,1,0,1,0,0,0)$;

$F^{12}\Omega(I_5)=(3,2,2,2,1,1,1,0,1,0)$; $F^{13}\Omega(I_5)=(2,2,1,1,1,0,1,0,0,0)$;

$F^{14}\Omega(I_5)=(2,1,1,2,0,0,1,0,1,0)$; $F^{15}\Omega(I_5)=(2,1,1,1,1,0,1,0,0,0)$;

$F^{16}\Omega(I_5)=(1,1,0,1,0,0,0,0,0,0)$; $F^{17}\Omega(I_5)=(1,0,1,0,0,0,0,0,0,0)=P_2$

$\Omega(I_6)=(1,1,1,1,1,1,0,1,0,0)$; $F\Omega(I_6)=(2,2,2,1,2,1,1,1,1,0)$;

$F^2\Omega(I_6)=(2,2,2,2,1,1,2,0,1,0)$; $F^3\Omega(I_6)=(3,3,2,3,2,1,2,1,1,0)$;

$F^4\Omega(I_6)=(3,3,3,2,2,2,1,1,0,0)$; $F^5\Omega(I_6)=(3,3,3,2,2,1,1,1,1,0)$;

$F^6\Omega(I_6)=(3,3,2,2,2,1,2,0,1,0)$; $F^7\Omega(I_6)=(3,3,2,3,1,1,2,0,1,0)$;

$F^8\Omega(I_6)=(4,3,3,3,2,1,2,1,1,0)$; $F^9\Omega(I_6)=(3,3,2,2,2,1,1,0,0,0)$;

$F^{10}\Omega(I_6)=(3,3,2,2,1,1,1,0,1,0)$; $F^{11}\Omega(I_6)=(3,2,2,2,1,0,2,0,1,0)$;

$F^{12}\Omega(I_6)=(3,2,1,3,1,0,2,0,1,0)$; $F^{13}\Omega(I_6)=(3,2,2,2,1,1,1,0,0,0)$;

$F^{14}\Omega(I_6)=(2,2,1,1,1,0,0,0,0,0)$; $F^{15}\Omega(I_6)=(2,1,1,1,0,0,1,0,1,0)$;

$F^{16}\Omega(I_6)=(1,0,0,1,0,0,1,0,0,0)=P_6$

$\Omega(I_7)=(1,1,1,1,1,1,1,0,1,0)$; $F\Omega(I_7)=(2,2,2,2,1,1,2,1,1,0)$;

$F^2\Omega(I_7)=(2,2,2,2,2,1,1,1,0,0)$; $F^3\Omega(I_7)=(3,3,3,2,2,2,1,1,1,0)$;

$F^4\Omega(I_7)=(3,3,3,2,2,1,2,1,1,0)$; $F^5\Omega(I_7)=(3,3,2,3,2,1,2,0,1,0)$;

$F^6\Omega(I_7)=(4,4,3,3,2,2,2,1,1,0)$; $F^7\Omega(I_7)=(3,3,3,2,2,1,1,1,0,0)$;

$F^8\Omega(I_7)=(3,3,2,2,2,1,1,0,1,0)$; $F^9\Omega(I_7)=(3,3,2,2,1,1,2,0,1,0)$;

$F^{10}\Omega(I_7)=(3,2,2,3,1,0,2,0,1,0)$; $F^{11}\Omega(I_7)=(4,3,2,3,2,1,2,0,1,0)$;

$F^{12}\Omega(I_7)=(3,3,2,2,1,1,1,0,0,0)$; $F^{13}\Omega(I_7)=(3,2,2,2,1,0,1,0,1,0)$;

$F^{14}\Omega(I_7)=(3,2,1,2,1,0,2,0,1,0)$; $F^{15}\Omega(I_7)=(2,1,1,2,0,0,1,0,0,0)$;

$F^{16}\Omega(I_7)=(2,1,1,1,1,0,0,0,0,0)$; $F^{17}\Omega(I_7)=(1,1,0,0,0,0,0,0,0,0)=P_1$

$\Omega(I_8)=(1,1,1,1,1,1,1,1,0,0)$; $F\Omega(I_8)=(2,2,2,2,2,1,1,1,1,0)$;

$F^2\Omega(I_8)=(3,3,3,2,2,2,2,1,1,0)$; $F^3\Omega(I_8)=(3,3,3,3,2,1,2,1,1,0)$;

$F^4\Omega(I_8)=(4,4,3,3,3,2,2,1,1,0)$; $F^5\Omega(I_8)=(4,4,4,3,2,2,2,1,1,0)$;

$F^6\Omega(I_8)=(4,4,3,3,3,1,2,1,1,0)$; $F^7\Omega(I_8)=(4,4,3,3,2,2,2,0,1,0)$;

$F^8\Omega(I_8)=(4,4,3,3,2,1,2,1,1,0)$; $F^9\Omega(I_8)=(4,3,3,3,2,1,2,0,1,0)$;

$F^{10}\Omega(I_8)=(4,4,2,3,2,1,2,0,1,0)$; $F^{11}\Omega(I_8)=(4,3,3,3,1,1,2,0,1,0)$;

$F^{12}\Omega(I_8)=(4,3,2,3,2,0,2,0,1,0)$; $F^{13}\Omega(I_8)=(4,3,2,3,1,1,2,0,1,0)$;

$F^{14}\Omega(I_8)=(3,2,2,2,1,0,1,0,0,0)$; $F^{15}\Omega(I_8)=(3,2,1,2,1,0,1,0,1,0)$;

$F^{16}\Omega(I_8)=(2,1,1,1,0,0,1,0,0,0)$; $F^{17}\Omega(I_8)=(1,0,0,1,0,0,0,0,0,0)=P_3$

$\Omega(I_9)=(1,1,1,1,1,1,1,1,1,0)$; $F\Omega(I_9)=(2,2,2,2,2,1,2,1,1,0)$;

$F^2\Omega(I_9)=(3,3,3,3,2,2,2,1,1,0)$; $F^3\Omega(I_9)=(4,4,4,3,3,2,2,2,1,0)$;

$F^4\Omega(I_9)=(4,4,4,3,3,2,2,1,1,0)$; $F^5\Omega(I_9)=(5,5,4,4,3,2,3,1,2,0)$;

$F^6\Omega(I_9)=(5,5,4,4,3,2,3,1,1,0)$; $F^7\Omega(I_9)=(5,5,4,4,3,2,2,1,1,0)$;

$F^8\Omega(I_9)=(5,5,4,3,3,2,2,1,1,0)$; $F^9\Omega(I_9)=(4,4,3,3,2,1,2,0,1,0)$;

$F^{10}\Omega(I_9)=(5,4,3,4,2,1,3,0,2,0)$; $F^{11}\Omega(I_9)=(5,4,3,4,2,1,3,0,1,0)$;

$F^{12}\Omega(I_9)=(5,4,3,4,2,1,2,0,1,0)$; $F^{13}\Omega(I_9)=(5,4,3,3,2,1,2,0,1,0)$;

$F^{14}\Omega(I_9)=(4,3,2,3,1,0,2,0,1,0)$; $F^{15}\Omega(I_9)=(4,2,2,3,1,0,2,0,1,0)$;

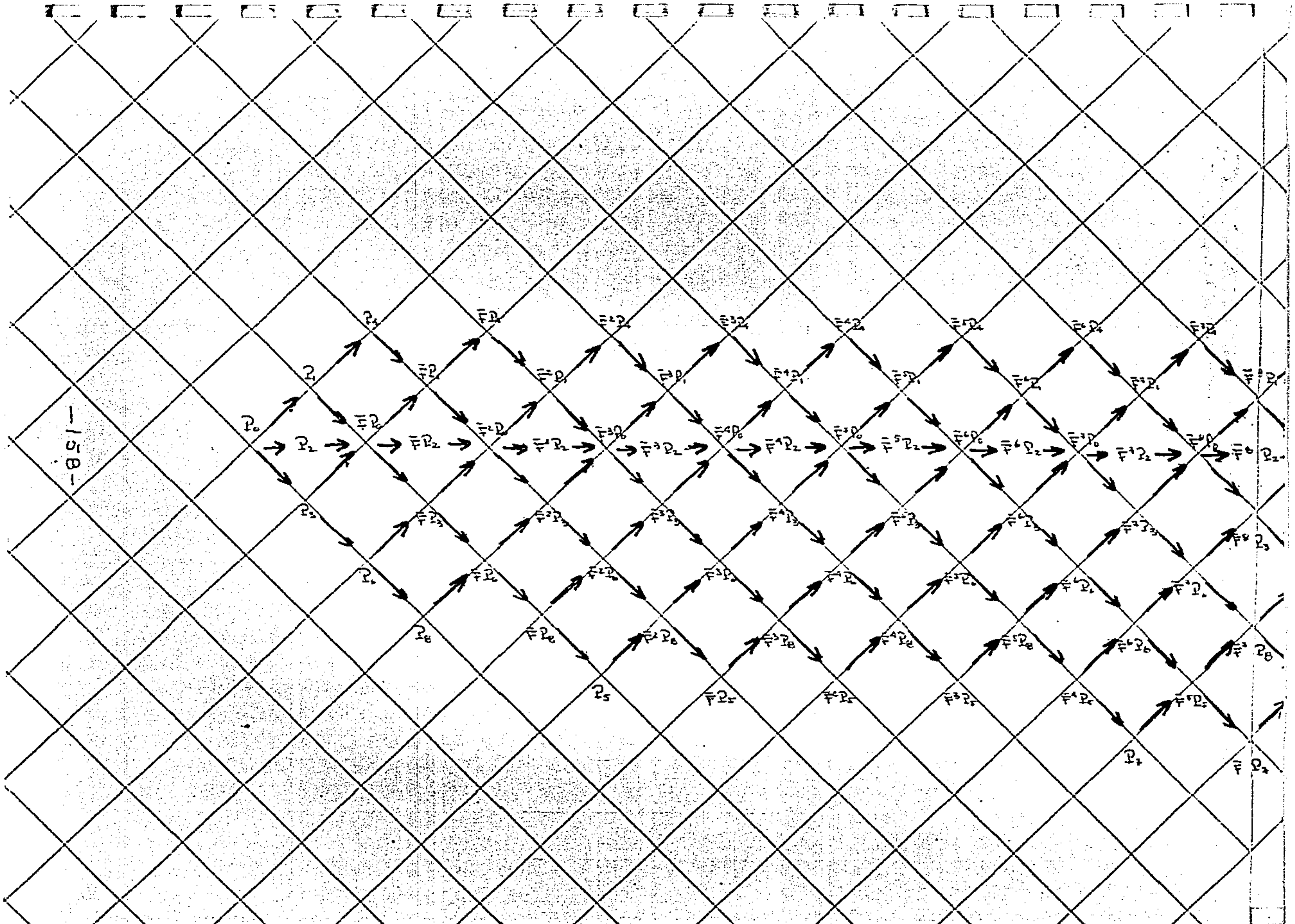
$F^{16}\Omega(I_9)=(3,2,1,2,1,0,1,0,0,0)$; $F^{17}\Omega(I_9)=(2,1,1,1,0,0,0,0,0,0)$;

$F^{18}\Omega(I_9)=(1,0,0,0,0,0,0,0,0,0)=P_0$

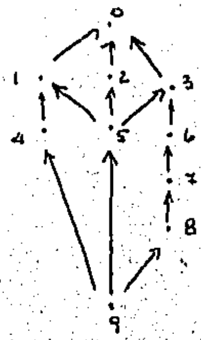
$F^3\Omega(I_1)=P_7$ $\quad F^{12}\Omega(I_2)=P_5$ $\quad F^{15}\Omega(I_3)=P_8$

$F^{16}\Omega(I_4)=P_4$ $\quad F^{17}\Omega(I_5)=P_2$ $\quad F^{16}\Omega(I_6)=P_6$

$F^{17}\Omega(I_7)=P_1$ $\quad F^{14}\Omega(I_8)=P_3$ $\quad F^{18}\Omega(I_9)=P_0$


P_0
P_1
P_2
P_3
P_4
P_5
P_7
P_8
FP_2
F^2P_2
F^3P_2
F^4P_2
F^5P_2
F^6P_2
F^7P_2
F^8P_2

$\underline{\underline{\theta}}$:



Las representaciones inescindibles son:

$\Omega(I_1) = (1,0,1,1,0,0,1,1,1,0)$; $F\Omega(I_1) = (1,1,0,1,1,0,1,1,0,0)$;

$F^2\Omega(I_1) = (1,1,1,1,0,1,1,0,0,0)$; $F^3\Omega(I_1) = (1,1,1,1,1,0,0,0,0,0)$;

$F^4\Omega(I_1) = (2,2,1,1,1,0,1,1,1,0)$; $F^5\Omega(I_1) = (2,1,1,2,0,0,2,2,1,0)$;

$F^6\Omega(I_1) = (2,1,1,2,1,0,2,1,0,0)$; $F^7\Omega(I_1) = (2,2,1,2,1,1,1,0,0,0)$;

$F^8\Omega(I_1) = (1,1,1,1,0,0,0,0,0,0)$; $F^9\Omega(I_1) = (2,1,1,1,1,0,1,1,1,0)$;

$F^{10}\Omega(I_1) = (1,1,0,1,0,0,1,1,0,0)$; $F^{11}\Omega(I_1) = (1,0,1,1,0,0,1,0,0,0)$;

$F^{12}\Omega(I_1) = (1,1,0,1,1,0,0,0,0,0)$; $F^{13}\Omega(I_1) = (1,1,1,0,0,0,0,0,0,0)$;

$F^{14}\Omega(I_1) = (1,0,0,1,0,0,1,1,1,0) = P_8$

$\Omega(I_2) = (1,1,0,1,1,0,1,1,1,0)$; $F\Omega(I_2) = (1,1,1,1,0,1,1,1,0,0)$;

$F^2\Omega(I_2) = (1,1,1,1,1,0,1,0,0,0)$; $F^3\Omega(I_2) = (2,2,1,2,1,1,1,1,1,0)$;

$F^4\Omega(I_2)=(1,1,1,1,0,0,1,1,0,0)$; $F^5\Omega(I_2)=(2,1,1,2,1,0,2,1,1,0)$;

$F^6\Omega(I_2)=(2,2,1,2,1,1,1,1,0,0)$; $F^7\Omega(I_2)=(1,1,1,1,0,0,1,0,0,0)$;

$F^8\Omega(I_2)=(2,1,1,2,1,0,1,1,1,0)$; $F^9\Omega(I_2)=(2,2,1,1,1,0,1,1,0,0)$;

$F^{10}\Omega(I_2)=(2,1,1,2,0,0,2,1,1,0)$; $F^{11}\Omega(I_2)=(2,1,1,2,1,0,1,1,0,0)$;

$F^{12}\Omega(I_2)=(2,2,1,1,1,0,1,0,0,0)$; $F^{13}\Omega(I_2)=(2,1,1,2,0,0,1,1,1,0)$;

$F^{14}\Omega(I_2)=(2,1,1,1,1,0,1,1,0,0)$; $F^{15}\Omega(I_2)=(1,1,0,1,0,0,1,0,0,0)$;

$F^{16}\Omega(I_2)=(1,0,1,1,0,0,0,0,0,0)$; $F^{17}\Omega(I_2)=(1,1,0,0,1,0,0,0,0,0)=P_4$

$\Omega(I_3)=(1,1,1,0,1,0,0,0,0,0)$; $F\Omega(I_3)=(1,1,0,1,0,0,1,1,1,0)$;

$F^2\Omega(I_3)=(1,0,1,1,0,0,1,1,0,0)$; $F^3\Omega(I_3)=(1,1,0,1,1,0,1,0,0,0)$;

$F^4\Omega(I_3)=(1,1,1,1,0,1,0,0,0,0)=P_5$

$\Omega(I_4)=(1,1,1,1,0,1,1,1,1,0)$; $F\Omega(I_4)=(1,1,1,1,1,0,1,1,0,0)$;

$F^2\Omega(I_4)=(2,2,1,2,1,1,2,1,1,0)$; $F^3\Omega(I_4)=(2,2,2,2,1,1,1,1,0,0)$;

$F^4\Omega(I_4)=(2,2,1,2,1,0,2,1,1,0)$; $F^5\Omega(I_4)=(3,2,2,3,1,1,2,2,1,0)$;

$F^6\Omega(I_4)=(2,2,1,2,1,0,2,1,0,0)$; $F^7\Omega(I_4)=(3,2,2,3,1,1,2,1,1,0)$;

$F^8\Omega(I_4)=(2,2,1,2,1,0,1,1,0,0)$; $F^9\Omega(I_4)=(3,2,2,2,1,0,2,1,1,0)$;

$F^{10}\Omega(I_4)=(3,2,1,3,1,0,2,2,1,0)$; $F^{11}\Omega(I_4)=(3,2,2,2,1,0,2,1,0,0)$;

$F^{12}\Omega(I_4)=(3,2,1,3,1,0,2,1,1,0)$; $F^{13}\Omega(I_4)=(3,2,2,2,1,0,1,1,0,0)$;

$F^{14}\Omega(I_4)=(3,2,1,2,1,0,2,1,1,0)$; $F^{15}\Omega(I_4)=(2,1,1,2,0,0,1,1,0,0)$;

$F^{16}\Omega(I_4)=(2,1,1,1,1,0,1,0,0,0)$; $F^{17}\Omega(I_4)=(1,1,0,1,0,0,0,0,0,0)$;

$F^{18}\Omega(I_4)=(1,0,1,0,0,0,0,0,0,0)=P_2$

$\Omega(I_5)=(1,1,1,1,1,0,1,1,1,0)$; $F\Omega(I_5)=(2,2,1,2,1,1,2,2,1,0)$;

$F^2\Omega(I_5)=(2,2,2,2,1,1,2,1,0,0)$; $F^3\Omega(I_5)=(3,3,2,3,2,1,2,1,1,0)$;

$F^4\Omega(I_5)=(3,3,2,3,1,1,2,2,1,0)$; $F^5\Omega(I_5)=(3,2,2,3,1,0,3,2,1,0)$;

$F^6\Omega(I_5)=(4,3,2,4,2,1,3,2,1,0)$; $F^7\Omega(I_5)=(3,3,2,3,1,1,2,1,0,0)$;

$F^8\Omega(I_5)=(3,2,2,3,1,0,2,1,1,0)$; $F^9\Omega(I_5)=(4,3,2,3,2,0,2,2,1,0)$;

$F^{10}\Omega(I_5)=(4,3,2,3,1,0,3,2,1,0)$; $F^{11}\Omega(I_5)=(4,2,2,4,1,0,3,2,1,0)$;

$F^{12}\Omega(I_5)=(4,3,2,3,2,0,2,1,0,0)$; $F^{13}\Omega(I_5)=(4,3,2,3,1,0,2,1,1,0)$;

$F^{14}\Omega(I_5)=(4,2,2,3,1,0,2,2,1,0)$; $F^{15}\Omega(I_5)=(3,2,1,2,1,0,2,1,0,0)$;

$F^{16}\Omega(I_5)=(2,1,1,2,0,0,1,0,0,0)$; $F^{17}\Omega(I_5)=(2,1,1,1,1,0,0,0,0,0)$;

$F^{18}\Omega(I_5)=(1,1,0,0,0,0,0,0,0,0)=P_1$

$\Omega(I_6)=(1,1,1,1,1,1,0,0,0,0)$; $F\Omega(I_6)=(1,1,1,1,0,0,1,1,1,0)$;

$F^2\Omega(I_6) = (2,1,1,2,1,0,2,2,1,0)$; $F^3\Omega(I_6) = (2,2,1,2,1,1,2,1,0,0)$;

$F^4\Omega(I_6) = (2,2,2,2,1,1,1,0,0,0)$; $F^5\Omega(I_6) = (2,2,1,2,1,0,1,1,1,0)$;

$F^6\Omega(I_6) = (3,2,2,2,1,0,2,2,1,0)$; $F^7\Omega(I_6) = (3,2,1,3,1,0,3,2,1,0)$;

$F^8\Omega(I_6) = (3,2,2,3,1,1,2,1,0,0)$; $F^9\Omega(I_6) = (2,2,1,2,1,0,1,0,0,0)$;

$F^{10}\Omega(I_6) = (3,2,2,2,1,0,1,1,1,0)$; $F^{11}\Omega(I_6) = (3,2,1,2,1,0,2,2,1,0)$;

$F^{12}\Omega(I_6) = (2,1,1,2,0,0,2,1,0,0)$; $F^{13}\Omega(I_6) = (2,1,1,2,1,0,1,0,0,0)$;

$F^{14}\Omega(I_6) = (2,2,1,1,1,0,0,0,0,0)$; $F^{15}\Omega(I_6) = (2,1,1,1,0,0,1,1,1,0)$;

$F^{16}\Omega(I_6) = (1,0,0,1,0,0,1,1,0,0) = P_7$

$\Omega(I_7) = (1,1,1,1,1,1,1,0,0,0)$; $F\Omega(I_7) = (2,2,2,2,1,1,1,1,1,0)$;

$F^2\Omega(I_7) = (2,2,1,2,1,0,2,2,1,0)$; $F^3\Omega(I_7) = (3,2,2,3,1,1,3,2,1,0)$;

$F^4\Omega(I_7) = (3,3,2,3,2,1,2,1,0,0)$; $F^5\Omega(I_7) = (3,3,2,3,1,1,2,1,1,0)$;

$F^6\Omega(I_7) = (3,2,2,3,1,0,2,2,1,0)$; $F^7\Omega(I_7) = (4,3,2,3,2,0,3,2,1,0)$;

$F^8\Omega(I_7) = (4,3,2,4,1,1,3,2,1,0)$; $F^9\Omega(I_7) = (3,2,2,3,1,0,2,1,0,0)$;

$F^{10}\Omega(I_7) = (4,3,2,3,2,0,2,1,1,0)$; $F^{11}\Omega(I_7) = (4,3,2,3,1,0,2,2,1,0)$;

$F^{12}\Omega(I_7) = (4,2,2,3,1,0,3,2,1,0)$; $F^{13}\Omega(I_7) = (3,2,1,3,1,0,2,1,0,0)$;

$F^{14}\Omega(I_7) = (3,2,2,2,1,0,1,0,0,0)$; $F^{15}\Omega(I_7) = (3,2,1,2,1,0,1,1,1,0)$;

$F^{16}\Omega(I_7) = (2,1,1,1,0,0,1,1,0,0)$; $F^{17}\Omega(I_7) = (1,0,0,1,0,0,1,0,0,0) = P_6$

$\Omega(I_8)=(1,1,1,1,1,1,1,1,0,0)$; $\quad F\,\Omega(I_8)=(2,2,2,2,1,1,2,1,1,0)$;

$F^2\Omega(I_8)=(3,3,2,3,2,1,2,2,1,0)$; $\quad F^3\Omega(I_8)=(3,3,2,3,1,1,3,2,1,0)$;

$F^4\Omega(I_8)=(4,3,3,4,2,1,3,2,1,0)$; $\quad F^5\Omega(I_8)=(4,4,2,4,2,1,3,2,1,0)$;

$F^6\Omega(I_8)=(4,3,3,4,1,1,3,2,1,0)$; $\quad F^7\Omega(I_8)=(4,3,2,4,2,0,3,2,1,0)$;

$F^8\Omega(I_8)=(5,4,3,4,2,1,3,2,1,0)$; $\quad F^9\Omega(I_8)=(4,3,2,4,1,0,3,2,1,0)$;

$F^{10}\Omega(I_8)=(5,3,3,4,2,0,3,2,1,0)$; $\quad F^{11}\Omega(I_8)=(5,4,2,4,2,0,3,2,1,0)$;

$F^{12}\Omega(I_8)=(5,3,3,4,1,0,3,2,1,0)$; $\quad F^{13}\Omega(I_8)=(5,3,2,4,2,0,3,2,1,0)$;

$F^{14}\Omega(I_8)=(4,3,2,3,1,0,2,1,0,0)$; $\quad F^{15}\Omega(I_8)=(4,2,2,3,1,0,2,1,1,0)$;

$F^{16}\Omega(I_8)=(3,2,1,2,1,0,1,1,0,0)$; $\quad F^{17}\Omega(I_8)=(2,1,1,1,0,0,1,0,0,0)$;

$F^{18}\Omega(I_8)=(1,0,0,1,0,0,0,0,0,0)=P_3$

$\Omega(I_9)=(1,1,1,1,1,1,1,1,1,0)$; $\quad F\,\Omega(I_9)=(2,2,2,2,1,1,2,2,1,0)$;

$F^2\Omega(I_9)=(3,3,2,3,2,1,3,2,1,0)$; $\quad F^3\Omega(I_9)=(4,4,3,4,2,2,3,2,1,0)$;

$F^4\Omega(I_9)=(4,4,3,4,2,1,3,2,1,0)$; $\quad F^5\Omega(I_9)=(5,4,3,5,2,1,4,3,2,0)$;

$F^6\Omega(I_9)=(5,4,3,5,2,1,4,3,1,0)$; $\quad F^7\Omega(I_9)=(5,4,3,5,2,1,4,2,1,0)$;

$F^8\Omega(I_9)=(5,4,3,5,2,1,3,2,1,0)$; $\quad F^9\Omega(I_9)=(5,4,3,4,2,0,3,2,1,0)$;

$F^{10}\Omega(I_9)=(6,4,3,5,2,0,4,3,2,0)$; $\quad F^{11}\Omega(I_9)=(6,4,3,5,2,0,4,3,1,0)$;

$F^{12}\Omega(I_9)=(6,4,3,5,2,0,4,2,1,0)$; $\quad F^{13}\Omega(I_9)=(6,4,3,5,2,0,3,2,1,0)$;

$F^{14}\Omega(I_9) = (6,4,3,4,2,0,3,2,1,0)$; $F^{15}\Omega(I_9) = (5,3,2,4,1,0,3,2,1,0)$;

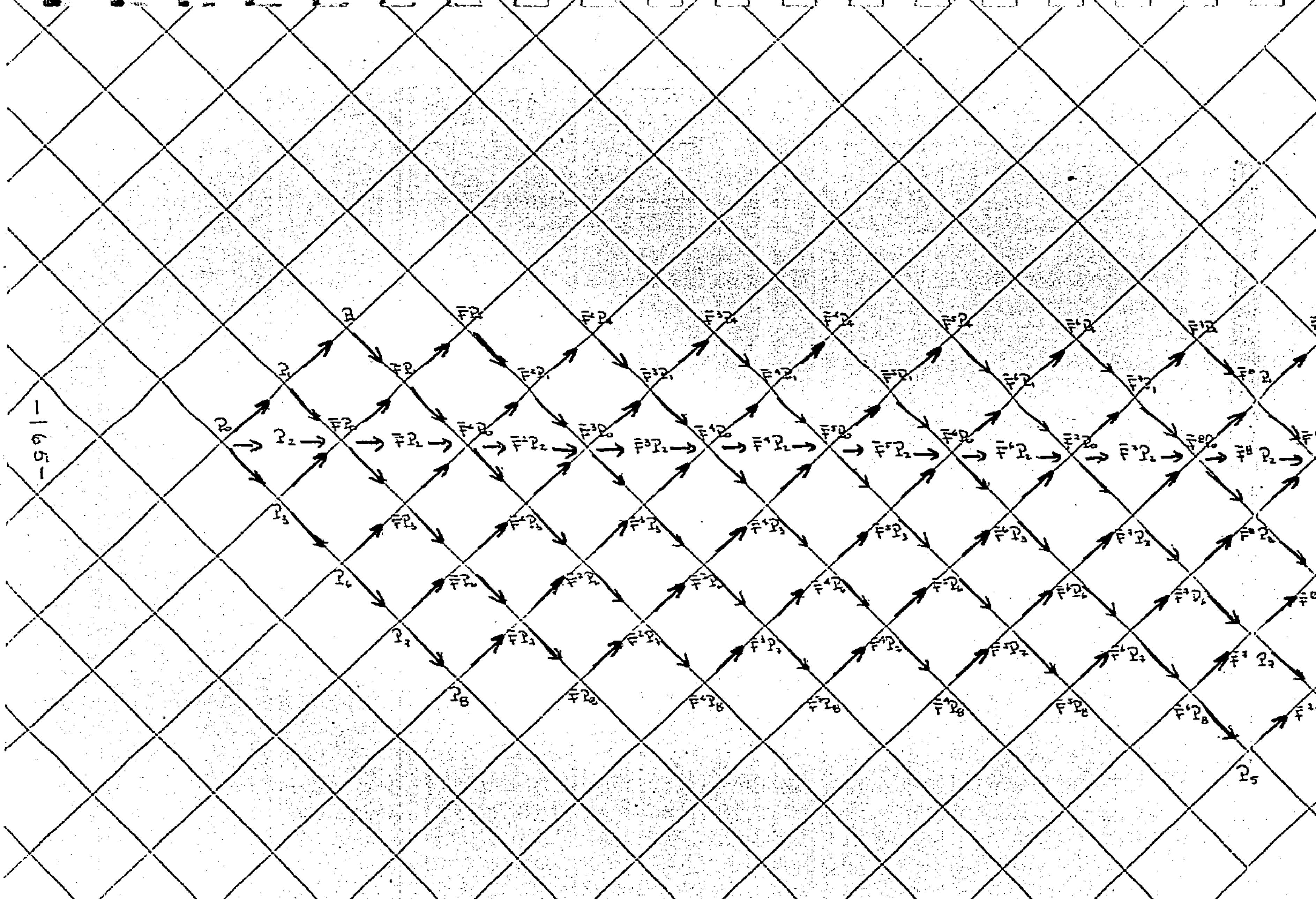
$F^{16}\Omega(I_9) = (4,2,2,3,1,0,2,1,0,0)$; $F^{17}\Omega(I_9) = (3,2,1,2,1,0,1,0,0,0)$;

$F^{18}\Omega(I_9) = (2,1,1,1,0,0,0,0,0,0)$; $F^{19}\Omega(I_9) = (1,0,0,0,0,0,0,0,0,0) = P_0$.

$F^{11}\Omega(I_1) = P_8$, $F^{17}\Omega(I_2) = P_4$, $F^{4}\Omega(I_3) = P_5$

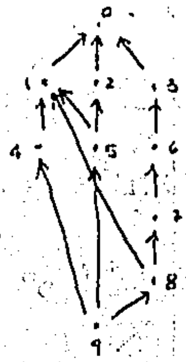
$F^{18}\Omega(I_4) = P_2$, $F^{18}\Omega(I_5) = P_1$, $F^{16}\Omega(I_6) = P_7$

$F^{17}\Omega(I_7) = P_6$, $F^{18}\Omega(I_8) = P_3$, $F^{19}\Omega(I_9) = P_0$



P_0
P_1
P_2
P_3
P_4
P_5
P_6
P_7
P_8
FP_2
F^2P_2
F^3P_2
F^4P_2
F^5P_2
F^6P_2
F^7P_2
F^8P_2

g:



Las representaciones inescindibles son:

$\Omega(I_1) = (1,0,1,1,0,0,1,1,0,0)$; $F\Omega(I_1) = (1,1,0,1,1,0,1,0,0,0)$;

$F^2\Omega(I_1) = (1,1,1,1,0,1,0,0,0,0)$; $F^3\Omega(I_1) = (1,1,1,0,1,0,0,0,0,0)$;

$F^4\Omega(I_1) = (1,1,0,0,0,0,1,1,1,0) = P_8$

$\Omega(I_2) = (1,1,0,1,1,0,1,1,1,0)$; $F\Omega(I_2) = (1,1,1,1,0,1,1,1,0,0)$;

$F^2\Omega(I_2) = (1,1,1,1,1,0,1,0,0,0)$; $F^3\Omega(I_2) = (2,2,1,2,1,1,1,1,1,0)$;

$F^4\Omega(I_2) = (2,2,2,1,1,1,1,1,0,0)$; $F^5\Omega(I_2) = (2,2,1,2,1,0,2,1,1,0)$;

$F^6\Omega(I_2) = (2,2,1,2,1,1,1,1,0,0)$; $F^7\Omega(I_2) = (2,2,2,1,1,1,1,0,0,0)$;

$F^8\Omega(I_2) = (2,2,1,2,1,0,1,1,1,0)$; $F^9\Omega(I_2) = (2,2,1,1,1,1,1,1,0,0)$;

$F^{10}\Omega(I_2) = (1,1,1,1,0,0,1,0,0,0)$; $F^{11}\Omega(I_2) = (2,1,1,2,1,0,1,1,0,0)$;

$F^{12}\Omega(I_2) = (2,2,1,1,1,1,1,0,0,0)$; $F^{13}\Omega(I_2) = (1,1,1,1,0,0,0,0,0,0)$;

$F^{14}\Omega(I_2) = (2,1,1,1,1,0,1,1,0,0)$; $F^{15}\Omega(I_2) = (1,1,0,1,0,0,1,0,0,0)$;

$F^{16}\Omega(I_2) = (1,0,1,1,0,0,0,0,0,0)$; $F^{17}\Omega(I_2) = (1,1,0,0,1,0,0,0,0,0) = P_4$

$\Omega(I_3) = (1,1,1,0,1,1,0,0,0,0)$; $\quad F\Omega(I_3) = (1,1,1,1,0,0,1,1,1,0)$;

$F^2\Omega(I_3) = (1,1,0,1,1,0,1,1,0,0)$; $\quad F^3\Omega(I_3) = (1,1,1,1,0,1,1,0,0,0)$;

$F^4\Omega(I_3) = (1,1,1,1,1,0,0,0,0,0)$; $\quad F^5\Omega(I_3) = (2,2,1,1,1,1,1,1,1,0)$;

$F^6\Omega(I_3) = (1,1,1,1,0,0,1,1,0,0)$; $\quad F^7\Omega(I_3) = (2,1,1,2,1,0,2,1,0,0)$;

$F^8\Omega(I_3) = (2,2,1,2,1,1,1,0,0,0)$; $\quad F^9\Omega(I_3) = (2,2,2,1,1,1,0,0,0,0)$;

$F^{10}\Omega(I_3) = (2,2,1,1,1,0,1,1,1,0)$; $\quad F^{11}\Omega(I_3) = (1,1,0,1,0,0,1,1,0,0)$;

$F^{12}\Omega(I_3) = (1,0,1,1,0,0,1,0,0,0)$; $\quad F^{13}\Omega(I_3) = (1,1,0,1,1,0,0,0,0,0)$;

$F^{14}\Omega(I_3) = (1,1,1,0,0,1,0,0,0,0) = P_5$

$\Omega(I_4) = (1,1,1,1,0,1,1,1,1,0)$; $\quad F\Omega(I_4) = (1,1,1,1,1,0,1,1,0,0)$;

$F^2\Omega(I_4) = (2,2,1,2,1,1,2,1,1,0)$; $\quad F^3\Omega(I_4) = (2,2,2,2,1,1,1,1,0,0)$;

$F^4\Omega(I_4) = (3,3,2,2,2,1,2,1,1,0)$; $\quad F^5\Omega(I_4) = (3,3,2,3,1,1,2,2,1,0)$;

$F^6\Omega(I_4) = (3,3,2,2,2,1,2,1,0,0)$; $\quad F^7\Omega(I_4) = (3,3,2,3,1,1,2,1,1,0)$;

$F^8\Omega(I_4) = (3,3,2,2,2,1,1,1,0,0)$; $\quad F^9\Omega(I_4) = (3,3,2,2,1,1,2,1,1,0)$;

$F^{10}\Omega(I_4) = (2,2,1,2,1,0,1,1,0,0)$; $\quad F^{11}\Omega(I_4) = (3,2,2,2,1,1,2,1,0,0)$;

$F^{12}\Omega(I_4) = (2,2,1,2,1,0,1,0,0,0)$; $\quad F^{13}\Omega(I_4) = (3,2,2,2,1,1,1,1,0,0)$;

$F^{14}\Omega(I_4) = (2,2,1,1,1,0,1,0,0,0)$; $\quad F^{15}\Omega(I_4) = (2,1,1,2,0,0,1,1,0,0)$;

$F^{16}\Omega(I_4) = (2,1,1,1,1,0,1,0,0,0)$; $\quad F^{17}\Omega(I_4) = (1,1,0,1,0,0,0,0,0,0)$;

$F^{18}\Omega(I_4) = (1,0,1,0,0,0,0,0,0,0) = P_2$

$\Omega(I_5)=(1,1,1,1,1,0,1,1,1,0)$; $F\Omega(I_5)=(2,2,1,2,1,1,2,2,1,0)$;

$F^2\Omega(I_5)=(2,2,2,2,1,1,2,1,0,0)$; $F^3\Omega(I_5)=(3,3,2,3,2,1,2,1,1,0)$;

$F^4\Omega(I_5)=(4,4,3,3,2,2,2,2,1,0)$; $F^5\Omega(I_5)=(4,4,3,3,2,1,3,2,1,0)$;

$F^6\Omega(I_5)=(4,4,2,4,2,1,3,2,1,0)$; $F^7\Omega(I_5)=(4,4,3,3,2,2,2,1,0,0)$;

$F^8\Omega(I_5)=(4,4,3,3,2,1,2,1,1,0)$; $F^9\Omega(I_5)=(4,4,2,3,2,1,2,2,1,0)$;

$F^{10}\Omega(I_5)=(3,3,2,2,1,1,2,1,0,0)$; $F^{11}\Omega(I_5)=(3,2,2,3,1,0,2,1,0,0)$;

$F^{12}\Omega(I_5)=(4,3,2,3,2,1,2,1,0,0)$; $F^{13}\Omega(I_5)=(3,3,2,2,1,1,1,0,0,0)$;

$F^{14}\Omega(I_5)=(3,2,2,2,1,0,1,1,0,0)$; $F^{15}\Omega(I_5)=(3,2,1,2,1,0,2,1,0,0)$;

$F^{16}\Omega(I_5)=(2,1,1,2,0,0,1,0,0,0)$; $F^{17}\Omega(I_5)=(2,1,1,1,1,0,0,0,0,0)$;

$F^{18}\Omega(I_5)=(1,1,0,0,0,0,0,0,0,0)=P_1$

$\Omega(I_6)=(1,1,1,1,1,1,0,0,0,0)$; $F\Omega(I_6)=(2,2,2,1,1,1,1,1,1,0)$;

$F^2\Omega(I_6)=(2,2,1,2,1,0,2,2,1,0)$; $F^3\Omega(I_6)=(2,2,1,2,1,1,2,1,0,0)$;

$F^4\Omega(I_6)=(2,2,2,2,1,1,1,0,0,0)$; $F^5\Omega(I_6)=(3,3,2,2,2,1,1,1,1,0)$;

$F^6\Omega(I_6)=(3,3,2,2,1,1,2,2,1,0)$; $F^7\Omega(I_6)=(2,2,1,2,1,0,2,1,0,0)$;

$F^8\Omega(I_6)=(3,2,2,3,1,1,2,1,0,0)$; $F^9\Omega(I_6)=(3,3,2,2,2,1,1,0,0,0)$;

$F^{10}\Omega(I_6)=(3,3,2,2,1,1,1,1,1,0)$; $F^{11}\Omega(I_6)=(2,2,1,1,1,0,1,1,0,0)$;

$F^{12}\Omega(I_6)=(2,1,1,2,0,0,2,1,0,0)$; $F^{13}\Omega(I_6)=(2,1,1,2,1,0,1,0,0,0)$;

$F^{14}\Omega(I_6)=(2,2,1,1,1,1,0,0,0,0)$; $F^{15}\Omega(I_6)=(1,1,1,0,0,0,0,0,0,0)$,

$F^{16}\Omega(I_6) = (1,0,0,1,0,0,1,1,0,0) = P_7$

$\Omega(I_7) = (1,1,1,1,1,1,1,0,0,0)$; $F\Omega(I_7) = (2,2,2,2,1,1,1,1,1,0)$;

$F^2\Omega(I_7) = (3,3,2,2,2,1,2,2,1,0)$; $F^3\Omega(I_7) = (3,3,2,3,1,1,3,2,1,0)$;

$F^4\Omega(I_7) = (3,3,2,3,2,1,2,1,0,0)$; $F^5\Omega(I_7) = (4,4,3,3,2,2,2,1,1,0)$;

$F^6\Omega(I_7) = (4,4,3,3,2,1,2,2,1,0)$; $F^7\Omega(I_7) = (4,4,2,3,2,1,3,2,1,0)$;

$F^8\Omega(I_7) = (3,3,2,3,1,1,2,1,0,0)$; $F^9\Omega(I_7) = (4,3,3,3,2,1,2,1,0,0)$;

$F^{10}\Omega(I_7) = (4,4,2,3,2,1,2,1,1,0)$; $F^{11}\Omega(I_7) = (3,3,2,2,1,1,1,1,0,0)$;

$F^{12}\Omega(I_7) = (3,2,2,2,1,0,2,1,0,0)$; $F^{13}\Omega(I_7) = (3,2,1,3,1,0,2,1,0,0)$;

$F^{14}\Omega(I_7) = (3,2,2,2,1,1,1,0,0,0)$; $F^{15}\Omega(I_7) = (2,2,1,1,1,0,0,0,0,0)$;

$F^{16}\Omega(I_7) = (2,1,1,1,0,0,1,1,0,0)$; $F^{17}\Omega(I_7) = (1,0,0,1,0,0,1,0,0,0) = P_6$

$\Omega(I_8) = (1,1,1,1,1,1,1,1,0,0)$; $F\Omega(I_8) = (2,2,2,2,1,1,2,1,1,0)$;

$F^2\Omega(I_8) = (3,3,2,3,2,1,2,2,1,0)$; $F^3\Omega(I_8) = (4,4,3,3,2,2,3,2,1,0)$;

$F^4\Omega(I_8) = (4,4,3,4,2,1,3,2,1,0)$; $F^5\Omega(I_8) = (5,5,3,4,3,2,3,2,1,0)$;

$F^6\Omega(I_8) = (5,5,4,4,2,2,3,2,1,0)$; $F^7\Omega(I_8) = (5,5,3,4,3,1,3,2,1,0)$;

$F^8\Omega(I_8) = (5,5,3,4,2,2,3,2,1,0)$; $F^9\Omega(I_8) = (4,4,3,3,2,1,2,1,0,0)$;

$F^{10}\Omega(I_8) = (5,4,3,4,2,1,3,2,1,0)$; $F^{11}\Omega(I_8) = (4,4,2,3,2,1,2,1,0,0)$;

$F^{12}\Omega(I_8) = (4,3,3,3,1,1,2,1,0,0)$; $F^{13}\Omega(I_8) = (4,3,2,3,2,0,2,1,0,0)$;

$F^{14}\Omega(I_8) = (4,3,2,3,1,1,2,1,0,0)$; $F^{15}\Omega(I_8) = (3,2,2,2,1,0,1,0,0,0)$;

$F^{16}\Omega(I_8) = (3,2,1,2,1,0,1,1,0,0)$; $F^{17}\Omega(I_8) = (2,1,1,1,0,0,1,0,0,0)$;

$F^{18}\Omega(I_8) = (1,0,0,1,0,0,0,0,0,0) = P_3$

$\Omega(I_9) = (1,1,1,1,1,1,1,1,1,0)$; $F\Omega(I_9) = (2,2,2,2,1,1,2,2,1,0)$;

$F^2\Omega(I_9) = (3,3,2,3,2,1,3,2,1,0)$; $F^3\Omega(I_9) = (4,4,3,4,2,2,3,2,1,0)$;

$F^4\Omega(I_9) = (5,5,4,4,3,2,3,2,1,0)$; $F^5\Omega(I_9) = (6,6,4,5,3,2,4,3,2,0)$;

$F^6\Omega(I_9) = (6,6,4,5,3,2,4,3,1,0)$; $F^7\Omega(I_9) = (6,6,4,5,3,2,4,2,1,0)$;

$F^8\Omega(I_9) = (6,6,4,5,3,2,3,2,1,0)$; $F^9\Omega(I_9) = (6,6,4,4,3,2,3,2,1,0)$;

$F^{10}\Omega(I_9) = (5,5,3,4,2,1,3,2,1,0)$; $F^{11}\Omega(I_9) = (5,4,3,4,2,1,3,2,0,0)$;

$F^{12}\Omega(I_9) = (5,4,3,4,2,1,3,1,0,0)$; $F^{13}\Omega(I_9) = (5,4,3,4,2,1,2,1,0,0)$;

$F^{14}\Omega(I_9) = (5,4,3,3,2,1,2,1,0,0)$; $F^{15}\Omega(I_9) = (4,3,2,3,1,0,2,1,0,0)$;

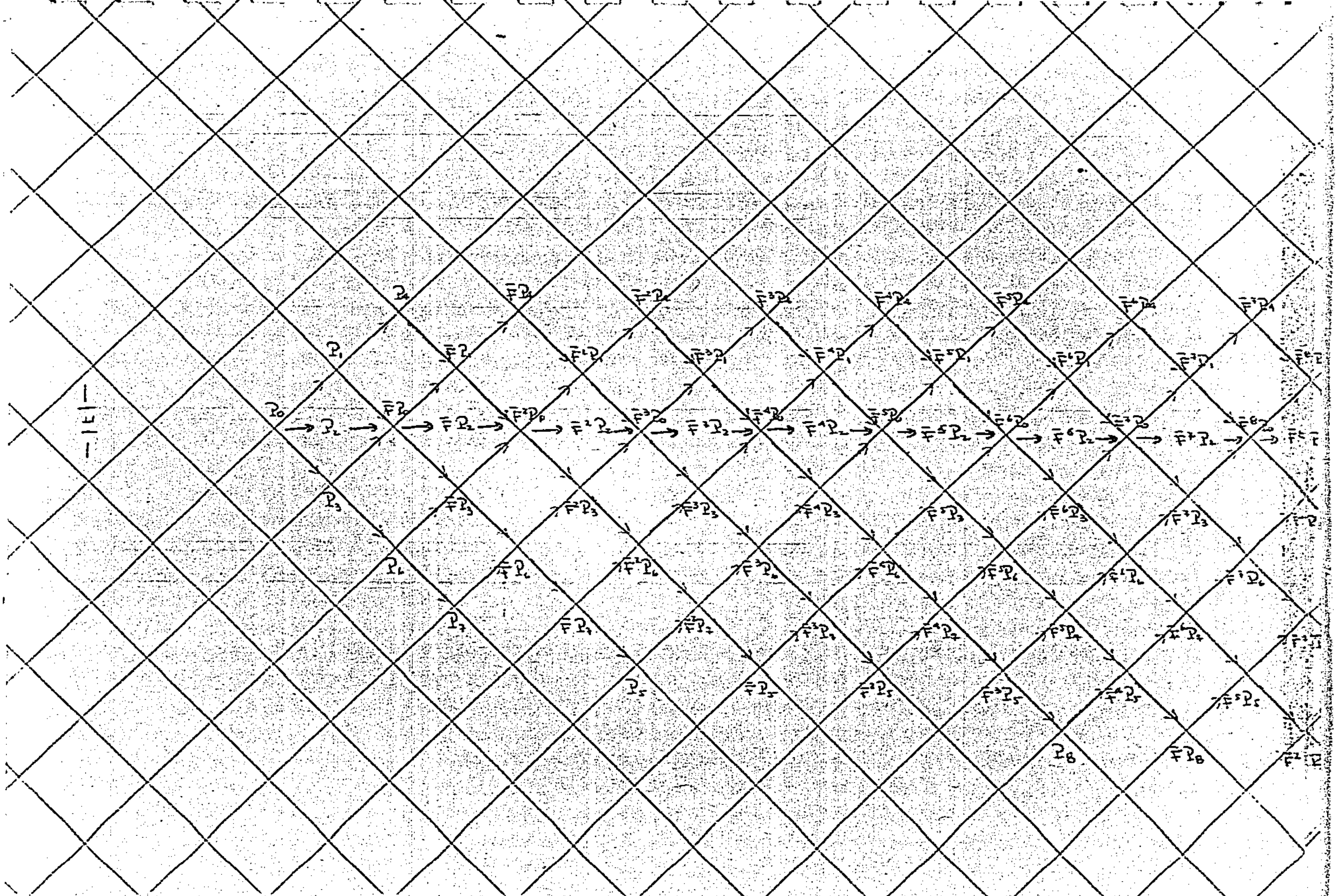
$F^{16}\Omega(I_9) = (4,2,2,3,1,0,2,1,0,0)$; $F^{17}\Omega(I_9) = (3,2,1,2,1,0,1,0,0,0)$;

$F^{18}\Omega(I_9) = (2,1,1,1,0,0,0,0,0,0)$; $F^{19}\Omega(I_9) = (1,0,0,0,0,0,0,0,0,0) = P_0$

$F^4\Omega(I_1) = P_8$, $F^{13}\Omega(I_2) = P_4$, $F^{14}\Omega(I_3) = P_5$, $F^{18}\Omega(I_4) = P_2$

$F^{18}\Omega(I_5) = P_1$, $F^{16}\Omega(I_6) = P_7$, $F^{17}\Omega(I_7) = P_6$, $F^{18}\Omega(I_8) = P_3$

$F^{19}\Omega(I_9) = P_0$



P_4 FP_4 F^2P_4 F^3P_4 F^4P_4 F^5P_4 F^6P_4 F^7P_4
P_1 FP_1 F^2P_1 F^3P_1 F^4P_1 F^5P_1 F^6P_1 F^7P_1
$P_0 \to P_2 \to FP_0 \to FP_2 \to F^2P_0 \to F^2P_2 \to F^3P_0 \to F^3P_2 \to F^4P_0 \to F^4P_2 \to F^5P_0 \to F^5P_2 \to F^6P_0 \to F^6P_2 \to F^7P_0 \to F^7P_2 \to F^8P_0$
P_3 FP_3 F^2P_3 F^3P_3 F^4P_3 F^5P_3 F^6P_3 F^7P_3
P_6 FP_6 F^2P_6 F^3P_6 F^4P_6 F^5P_6 F^6P_6 F^7P_6
P_7 FP_7 F^2P_7 F^3P_7 F^4P_7 F^5P_7 F^6P_7
P_5 FP_5 F^2P_5 F^3P_5 F^4P_5 F^5P_5
P_8 FP_8

Referencias

[1] H. Auslander — Representation theory of Artin algebras I, Comm. Algebra 1, 1974, 177-268

[2] H. Auslander and I. Reiten — Représentation theory of Artin álgebras III, Comm. Algebra 3, 1975, 239-294

[3] H. Auslander and I. Reiten — Representation theory of Artin algebras IV, Comm. Algebra 5, 1977, 443-518

[4] R. Bautista — On algebras close to hereditary Artin algebras. Comunicaciones internas No. 35, 1978 Depto. de Matemáticas, Facultad de Ciencias. U.N.A.M.

[5] R. Bautista — Sections in Auslander-Reiten components II, Publicaciones preliminares del Instituto de Matemáticas. U.N.A.M.

[6] R. Bautista y R. Martínez. Representation of partially ordered sets and 1-Gorenstein Artin algebras. Ring Theory Proceedings of the 1978 Antwerp Conference.

[7] M. M. Kleiner Partially ordered sets of finite type. Zap. Nauch. Semi. Leningrad. Otd. Mat. Inst. Steklova 28, 1972, 32-41

[8] L. A. Nazarova and A. V. Roiter Representations of partially ordered sets, Zapiski Naucn. Steklova, 28, 1972, 5-31

[9] B. Stenström Rings and modules of quotients, Lecture notes in Math., 237, Springer Berlin - Heidelberg - New York, 1971.