UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"Funciones métricas que pueden tomar valores positivos y negativos"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemática

PRESENTA:

Venus Emperatriz Méndez Salazar

TUTORA

Hérica Sánchez Larios

Ciudad Universitaria, CDMX
2019

1. Datos del alumno
Méndez
Salazar
Venus Emperatriz
56 53 28 36
Universidad Nacional Autónoma de
México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
310139050

2. Datos del tutor
Dra
Hérica
Sánchez
Larios

3. Datos del sinodal 1
M en C
María Juana
Linares
Altamirano

4. Datos del sinodal 2
Dr
José Lino
Samaniego
Mendoza

5. Datos del sinodal 3
M en C
Fernando
García
Ruiz

6. Datos del sinodal 4
M en I
Adrián
Girard
Islas

7.Datos del trabajo escrito.
Funciones métricas que pueden tomar valores positivos y negativos
54 p
2019

Agradecimientos

Dedicado a
mi familia
.

Este trabajo fue apoyado por DGAPA (PAPIIT No. IA106417), Universidad Nacional Autónoma de México.

Índice general

Introducción

En algunos problemas variacionales en los que está involucrada una integral longitud

$$\int F(x(t), \dot{x}(t))dt,$$

sobre una variedad diferenciable M, la función F es homogénea positiva de orden uno en $\dot{x}(t)$ y toma valores tanto positivos como negativos. En estos casos, la convexidad de la indicatriz de F en un punto no garantiza la convexidad de F en ese punto. Se buscan las condiciones necesarias y suficientes, en términos de la indicatriz, para que una función que toma valores tanto positivos como negativos sea convexa en un punto.

Hipótesis

Las condiciones de una función F utilizada para problemas de cálculo variacional pueden relajarse, en el sentido de que no es necesario que sea definida positiva, para determinar su convexidad.

Objetivos

Partiendo de un problema de localización, se observó que una función, en problemas de cálculo variacional, puede tomar valores tanto positivos como negativos, y en la literatura especializada no se encontró cómo determinar la convexidad de una función con esta característica, en términos de su indicatriz.

Objetivo general

El interés está en establecer condiciones para que una función de cálculo variacional que toma valores tanto positivos como negativos sea convexa; sin embargo, dada la magnitud de ese estudio, el objetivo de este trabajo es determinar las condiciones necesarias y suficientes para que exista la cerradura convexa de dicha función.

Objetivos específicos

1. Determinar de manera algebraica las condiciones para que exista la cerradura convexa de la función que toma valores tanto positivos como negativos.

2. En la literatura especializada se ha observado que trabajar la convexidad de las funciones del cálculo variacional, en términos algebraicos, se vuelve muy complicado y se ha optado por utilizar un enfoque geométrico, por lo que se busca determinar las condiciones necesarias y suficientes, en términos de su indicatriz, para que exista la cerradura convexa de una función que toma valores tanto positivos como negativos.

Preliminares

1. Espacio vectorial

2. Forma lineal

Sea X un espacio vectorial sobre un campo K. Una forma lineal f es una función de X a K que es lineal:
Para cualesquiera $v, w \in X$, $f(v+w) = f(v) + f(w)$.
Para todo $a \in K$ y para todo $v \in X$, $f(av) = af(v)$.

2.1. Espacio dual

Al conjunto de todas las transformaciones lineales de un espacio vectorial X sobre su campo K se le llama espacio dual y se denota con $Hom(X,K)$.

3. Espacios de funciones

Sean X y Y dos espacios métricos. Definimos:

- $C^0(X,Y)$ como el espacio de las funciones continuas con dominio en X y rango en Y.
- $C^p(X,Y)$ como el espacio de las funciones $p-$derivables con dominio en X y rango en Y, $p > 0$.
- $C^\infty(X,Y)$ como el espacio de las funciones infinitamente derivables, con dominio en X y rango en Y.

En particular, si sólo se escribe $C^{\cdot}(X)$, significa que $X = Y$.

4. Cálculo variacional

Es un problema matemático cuyo objetivo es minimizar (o maximizar) una integral definida de la forma

$$J[y] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx.$$

sujeto a las condiciones de frontera

$$y(a) = y_a, \, y(b) = y_b.$$

En estos problemas se hace uso de funcionales y no sólo de funciones. Un funcional es un operador que asigna a funciones, números reales. Por tanto nuestra integral definida devuelve un número real para cada función $y(x)$.
Nos encontraremos con funcionales que actúan sobre todo o parte de varios espacios bien conocidos, algunos de ellos son los siguientes:

- $C[a,b]$, el espacio de funciones de valor real que son continuas en el intervalo cerrado $[a,b]$.
- $C^1[a,b]$, el espacio de funciones de valor real que son continuas y que tienen derivadas continuas en el intervalo cerrado $[a,b]$.
- $C^2[a,b]$, el espacio de las funciones de valores reales que son continuas y que tienen derivadas primera y segunda continuas en el intervalo cerrado $[a,b]$.

La idea de diferenciabilidad para funcionales puede desarrollarse de manera semejante a como se hace para funciones de varias variables en el caso de que el espacio de funciones, en el que el funcional está definido, tenga estructura de espacio de Banach.
Observación
Un espacio de Banach es un espacio vectorial, en general de dimensión infinita, normado y completo.

5. Variedad

Un espacio, X, es *Hausdorff* si para todos $x,y \in X$ existen entornos, U_x de x y U_y de y, tales que $U_x \cap U_y = \varnothing$.
Un espacio que tiene una base numerable, se denomina *segundo numerable*.
Dados dos espacios X y Y, un *homeomorfismo local* de X a Y es una función continua $f: X \to Y$ tal que para cada punto $x \in X$ existe un abierto U, entorno de x, tal que $f(U)$ es abierto de Y y $f|_U : U \to f(U)$ es una función biyectiva y continua, cuya inversa es continua.

Todo espacio topológico M que es Hausdorff, segundo numerable y localmente homeomorfo a R^m se llama *variedad (topológica)* de dimensión m.

5.1. Hipersuperficie

Una hipersuperficie es una variedad $n-$dimensional con $n > 2$, es decir, un objeto geométrico que generaliza la noción de una superficie bidimensional a dimensiones superiores, del mismo modo que el hiperplano generaliza la noción de plano.
Es un espacio topológico localmente homeomorfo al espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, ello significa que para cada punto P de la hipersuperficie hay una vecindad de P homeomorfa a un disco abierto de $\mathbb{R}^n$.

5.2. Variedad Diferenciable

Dado un conjunto M y X un espacio de Banach, un $X-$*atlas* de clase C^k sobre M es una colección A de pares (U_i, ϕ_i), llamados cartas, donde $U_i \subseteq M$ y ϕ_i es una aplicación biyectiva de U_i en un subconjunto abierto de X que cumple las siguientes condiciones:

A1: Para cualesquiera $(U_i,\phi_i),(U_j,\phi_j)\in A$, los conjuntos $\phi_i(U_i\cap U_j)$ y $\phi_j(Ui\cap Uj)$ son subconjuntos abiertos de X, y los mapeos $\phi_i\circ{\phi_j}^{-1}:\phi_j(U_i\cap U_j)\to\phi_i(U_i\cap U_j)$ son diferenciables de clase C^k.

A2: $\cup U_i = M$.

Las funciones $\phi_i\circ{\phi_j}^{-1}$ se llaman funciones de transición del atlas A.

Se presenta una relación de equivalencia entre atlas en M: Dados dos atlas en M, A_1 y A_2, decimos que son equivalentes si su unión $A_1\cup A_2$ es de nuevo un atlas en M (es claro que es de equivalencia).

Un conjunto M junto con una clase de equivalencia de atlas en M se denomina *variedad diferenciable* si es un espacio de Hausdorff [13].

6. Espacio tangente

Si M es una variedad y $x\in M$, denotamos T_xM al *espacio tangente a M en x*, el conjunto de todas las funciones $\delta : C^\infty(M)\to\mathbb{R}$ tales que para todas $f,g\in C^\infty(M)$,

$$\delta(af+bg)=a\delta(f)+b\delta(g)$$
$$\delta(fg)=\delta(f)g(x)+f(x)\delta(g)$$

A los elementos de T_xM se les llama vectores tangentes a M en x, pues T_xM es un subespacio vectorial de $Hom(C^\infty(M),\mathbb{R})$.

6.1. Comparación de elementos en el espacio tangente

Sean $a,b\in T_xM$. $a\geq b$ significa que existe un escalar $\alpha>0$ tal que $|a|=\alpha|b|$, donde $|\cdot|$ representa la magnitud del vector.

7. Haz tangente

Sea M una variedad. El *haz tangente* es la unión de los espacios tangentes a cada punto de M:

$$TM := \cup_{x\in M} T_xM.$$

Denotamos los elementos de TM como (x,y), donde $x\in M$ e $y\in T_xM$.

8. Conjunto convexo

Un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, S, se dice *convexo* si para cualesquiera $u,v\in S$ y $0\leq\lambda\leq 1$, se cumple que

$$\lambda u+(1-\lambda)v\in S.$$

8.1. Cerradura convexa

La intersección de todos los conjuntos convexos que contienen un subconjunto dado S de $\mathbb{R}^n$, se denomina *cerradura convexa de* S y se denota *conv*S.
La cerradura convexa de S es un conjunto convexo, pues la intersección de una colección arbitraria de conjuntos convexos es convexa.

8.2. Cuerpo convexo

Sean X un espacio vectorial y $A \subseteq X$. Si A es cerrado, convexo y tiene puntos interiores, A es un cuerpo convexo.

9. Cono

Un subconjunto C de $\mathbb{R}^n$ se llama *cono* si es cerrado bajo multiplicación escalar positiva, es decir, para cualesquiera $x \in C$ y $\lambda > 0$, se cumple que $\lambda x \in C$.

Ejemplos

- Los subespacios de $\mathbb{R}^n$ son, en particular, conos.
- Los semi-espacios abiertos y cerrados correspondientes a un hiperplano a través del origen son conos.
  Dos de los más importantes, son:
  - $\{x = (x_1, ..., x_n) : x_i \geq 0\}$
  - $\{x = (x_1, ..., x_n) : x_i > 0\}$.

Observación
Un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es un cono convexo si y sólo si contiene todas las combinaciones lineales positivas de sus elementos.

10. Conjunto conexo

Un conjunto X es *disconexo* si existen dos subconjuntos U y V abiertos ajenos y no vacíos de X tales que $X = U \cup V$. Decimos que un conjunto es *conexo* si X *no es disconexo*.

12. Indicatriz

La indicatriz en un punto x de una función métrica tradicional F se define como el conjunto de todos los vectores tangentes u de x que cumplen que $F(x,u) = 1$ (ver por ejemplo, [1], [3], [8], [12]).

$$1_x = \{u \in T_xM - \{0\} : F(x,u) = 1\}$$

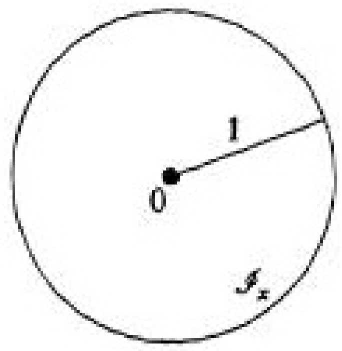


Figura 1: Forma de la indicatriz del valor absoluto.

Ejemplos

1. $F(x,u) = |u|$.
   $1_x = \{u \in T_xM - \{0\} : |u| = 1\}$:

2. $F(x,u) = (|x|^p + |u|^p)^{1/p}$, con:

   a) $p < 1$ $(1/2)$.

   b) $p = 1$.

   c) $p = 2$.

   d) $2 < p$.

   $1_x = \{u \in T_xM - \{0\} : |x|^p - |u|^p = 1\}$:

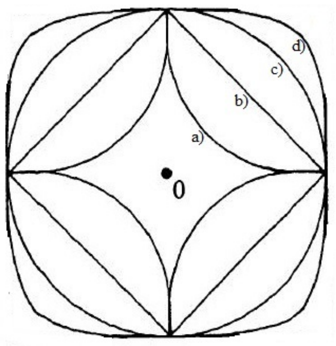


Figura 2: Formas de la indicatriz para las normas L_p variando p.

La indicatriz interseca a cualquier rayo $R_v = \{tv : t > 0\}$, con $v \neq 0$, a lo más en un punto:
Dados $u,w \in R \cap 1_x$, como $u,w \in R$, $\exists t_1,t_2 > 0$ tales que $u = t_1v$ y $w = t_2v$.
Además, $F(x,u) = 1 = F(x,w)$ (pues $u,w \in 1_x$), por lo que $F(x,t_1v) = F(x,t_2v)$ y luego $t_1F(x,v) = t_2F(x,v)$, de donde $t_1 = t_2$ y por tanto $u = w$, i.e. $|R \cap 1_x| = 1$, donde $|\cdot|$ representa la cardinalidad del conjunto.

Si la función fundamental F es positiva definida, entonces 1_x es una superficie cerrada en forma de estrella respecto del origen, que está contenido en el "interior" de 1_x.

La indicatriz nos ayuda a visualizar ciertas propiedades de la función F, y su importancia es evidente por el hecho de que, dado que F es homogénea positiva, la indicatriz en x determina de manera única la forma de F en este punto x.

Antecedentes

Sea M una variedad diferenciable $k-$dimensional conexa en R^n, $k \leq n$.
Si T_xM denota el espacio tangente en $x \in M$, $TM := \cup_{x \in M} T_xM$ es el haz tangente de M, $x : [a,b] \to M$ denota una representación paramétrica C^1 por pedazos de una curva $C(a,b)$, $\dot{x}(t) \in T_xM - \{0\}$ para todo $t \in [a,b]$ y $F : TM \to \mathbb{R}$ es una función, la longitud $L_F[C(a,b)]$ de $C(a,b)$ en M de **a**$= x(a)$ a **b**$= x(b)$ está dada por:

$$L_F[C(a,b)] := \int_a^b F[x(t), \dot{x}(t)]dt, \tag{1}$$

La *distancia asociada con F* de **a**$\in M$ a **b**$\in M$, $d_F(\mathbf{a},\mathbf{b})$, está definida como el ínfimo de las longitudes de todos los arcos de **a** a **b** de clase C^1 por pedazos:

$$d_F(\mathbf{a},\mathbf{b}) := \inf_{x \in \Omega_{[a,b]}} \int_a^b F[x(t), \dot{x}(t)]dt, \tag{2}$$

donde $\Omega_{[a,b]}$ denota el conjunto de todos los arcos en M de a a b clase C^1 por pedazos.

Bajo ciertas condiciones [2], se puede mostrar que la distancia asociada con F de **a**$\in M$ a **b**$\in M$, $d_F(\mathbf{a},\mathbf{b})$ se puede expresar como:

$$d_F(a,b) := \min_{x \in \Omega_{[a,b]}} \int_a^b F[x(t), \dot{x}(t)]dt. \tag{3}$$

En la mayoría de los contextos en los que surge la integral de longitud (1), se supone que la función $F : TM \to \mathbb{R}$ cumple las siguientes condiciones [2]:
(i) $F(x,u)$ es continua como una función de las $2n$ variables (x,u), $x \in M$ y $u \in T_xM - \{0\}$
(ii) $F(x,u)$ es homogénea positiva de grado uno en u, es decir, $F(x,ku) = kF(x,u)$ para $k > 0$.
(iii) $F(x,u)$ es positiva definida, es decir $F(x,u) > 0$ para todo $u \neq 0$, $u \in T_xM$ y para toda $x \in M$.

La condición (i) es necesaria para determinar $L[C(a,b)]$ mediante (1), y (ii) es una condición necesaria y suficiente para que $L[C(a,b)]$ sea independiente de la representación paramétrica de $C(a,b)$. Estas condiciones permiten expresar a F, en un punto fijo $x \in M$, en términos de la hipersuperficie $|F_x(u) = 1|$ para todos los vectores no nulos $u \in T_xM$, donde $|\cdot|$ es el valor absoluto usual y $F_x : T_xM \to \mathbb{R}$ denota la restricción de F al espacio tangente T_xM en $x \in M$, $(F_x := F|_{T_xM})$. El punto x será el origen del espacio tangente T_xM en x.
La condición (iii) implica la positividad de la integral (1) para $a \neq b$, y se impone porque L

tradicionalmente representa atributos positivos de las curvas, como la longitud (Ver por ejemplo, [1] p.37). Sin embargo, esta condición da lugar a la exclusión de algunas aplicaciones interesantes de (1) en las que, por su propia naturaleza, se requiere una función F que representa un atributo acumulativo que toma valores tanto positivos como negativos, como energía gastada o ganada, a lo largo las curvas.

Llamamos a una función $F_x : T_xM \to \mathbb{R}$ que satisface las propiedades (i) y (ii), pero no necesariamente la condición (iii), una *premétrica* (en x). Decimos que una premétrica no positiva definida, F_x, es:
(a) *positiva-negativa* si F_x toma valores tanto positivos como negativos;
(b) *no negativa* si F_x no toma valores negativos ($F_x(u) \geq 0$ para todo $u \in T_xM$ y $F_x(u) = 0$ para algún $u \neq 0$, $u \in T_xM$);
(c) *negativa definida* si $F_x(u) < 0$ para todo $u \neq 0$, $u \in T_xM$.

Para una *función métrica tradicional* (una función que satisface $(i) - (iii)$), F, la cerradura convexa F^* en un punto x usualmente se define como la función métrica correpondiente a la cubierta convexa de la indicatriz de F en x [7]. En este caso, la convexidad de la indicatriz de F en x es equivalente a la convexidad de F en x (y la cerradura convexa F^* de F siempre existe). Sin embargo, para una premétrica positiva-negativa F, esta definición geométrica de la cerradura convexa falla y la convexidad de la indicatriz no implica la convexidad de la premétrica (y la cerradura convexa F^* de F no necesariamente existe). Para estas premétricas, el problema de encontrar condiciones necesarias y suficientes en términos de la indicatriz para que la premétrica F sea convexa no es inmediatamente obvio. Lo que motivó a resolver este problema se describe a continuación.

En el contexto de una función métrica positiva definida F, Busemann y Mayer ([2], p.174 y p.184) demostraron dos afirmaciones intuitivamente evidentes, sobre la relación entre la distancia asociada a una función F y la asociada a su cerradura convexa F^*, que también son válidas para una premétrica, a condición de que exista la cerradura convexa correspondiente (ver . Por lo tanto, para aplicar estos enunciados a una premétrica positiva-negativa F, es necesario determinar si la premétrica F es convexa, y en caso contrario, determinar si la cerradura convexa F^* de F existe. Esta es una de las razones por las cuales el propósito principal de este escrito es dar las condiciones necesarias y suficientes para que una premétrica positiva-negativa sea convexa.

Queremos enfatizar que las propiedades (i) y (ii) serán suficientes para nuestros propósitos, y que no se supone la diferenciabilidad de F, porque no estamos interesados en los métodos de solución del problema variacional mín $\int_a^b F[x(t), \dot{x}(t)]dt$. Específicamente, en este trabajo nos interesa qué es una premétrica convexa y cómo decidir si una premétrica dada es convexa.

Organización de este trabajo de tesis

- En el capítulo 1 presentamos una progresión de las métricas hasta llegar a la métrica de Finsler que es de la que partimos, y la que generalizamos, en el sentido de que esta admite valores positivos y negativos.

- En el capítulo 2 definimos el concepto de convexidad en una función métrica y damos algunos ejemplos.

- En el capítulo 3 proporcionamos la definición de lo que es la indicatriz de una función métrica, y mostramos ejemplos de ello, además, describimos algunos otros tipos de indicatrices.

- En el capítulo 4 mostramos la noción de cerradura convexa de una función métrica, lo relacionamos con la indicatriz y damos un ejemplo del uso de sus propiedades en este contexto.

- En el capítulo 5 proporcionamos condiciones necesarias y suficientes, en términos algebraicos, para que una premétrica sea convexa en x (Teorema 1) y proponemos una definición general de la cerradura convexa en un punto de una premétrica.

- En el capítulo 6 mostramos que una premétrica F induce en cada punto x de la variedad M una partición del espacio tangente correspondiente. Esta partición consiste en los siguientes conos: (a) Un cono conexo cerrado, denotado por $cero(F_x)$, que consiste en el origen del espacio tangente y todas la direcciones en las que el valor de la premétrica F es igual a cero; (b) uno o más conos abiertos “positivos” o “negativos” que consisten en las direcciones en las que la premétrica toma valores positivos o negativos, respectivamente. A partir de nuestra definición de la indicatriz en x de una premétrica mostramos que, a diferencia de las funciones métricas tradicionales, en las que la indicatriz en x es una hipersuperficie topológicamente equivalente a una esfera [2], la indicatriz en x de una premétrica que toma tanto valores positivos como negativos consiste en hipersuperficies que se extienden hasta el infinito [16]. Además damos nuevas propiedades de la indicatriz de un premétrica (Teorema 2).

- En el capítulo 7, demostramos que si una premétrica F que toma valores tanto positivos como negativos es convexa en x, entonces la partición inducida por F en x contiene solamente un cono positivo abierto, solamente un cono negativo convexo abierto y solamente un cono cero (Teorema 3). Las nuevas propiedades de la indicatriz derivadas del Teorema 2 nos permiten obtener condiciones necesarias y suficientes, en términos de la indicatriz, para que una premétrica sea convexa en x (teorema 4 y su corolario).

- En el capítulo 8, a partir de un problema del mundo real [10],[18], damos un ejemplo de una premétrica que toma valores tanto positivos como negativos en el plano Euclidiano R^2.

- Por último se muestran las conclusiones a las que se llegó en el proceso.

Capítulo 1

Métricas

A continuación desarrollamos el concepto de función métrica, y mostramos una progresión del concepto desde la métrica Euclidiana hasta la métrica de Finsler.

1.1. Métrica Euclidiana

En esta sección se describe la noción de espacio métrico. Se extiende el concepto de distancia entre dos puntos reales a conjuntos arbitrarios para obtener un espacio métrico.
Los espacios métricos fueron definidos par Maurice Fréchet en su tesis doctoral "Sur quelques points du calcul functionel" en 1906. A continuación se presenta la definición de una métrica.

Definición

Sea S un conjunto no vacío. Una función $d : S \times S \to \mathbb{R}$ es llamada una *métrica* sobre S si satisface los siguientes axiomas:

M1. $d(x,y) \geq 0$ para cualesquiera $x,y \in S$.

M2. $d(x,y) = 0$ sí y sólo si $x = y$.

M3. $d(x,y) = d(y,x)$ para todos $x,y \in S$.

M4. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ para todos $x,y,z \in S$.

El cuarto axioma es llamado *Desigualdad del triángulo*.

Un *Espacio métrico* (S,d) consiste en un conjunto no vacío S y una métrica d definida sobre S.[11]

Ejemplos

1. Un ejemplo común de una métrica, es la distancia euclidiana sobre el conjunto $\mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$.

   Demostración.
   Sean $x,y,z \in \mathbb{R}$.

M1. Claramente $|x-y| \geq 0$, por lo que se cumple M1.

M2. $|x-y| = 0 \Leftrightarrow x-y = 0 \Leftrightarrow x = y$.
Por tanto, se tiene M2.

M3. Sabemos que $|x-y| = |y-x|$, es decir $d(x,y) = d(y,x)$.

M4. Dado que para cualesquiera $a,b \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$\begin{aligned} |a+b|^2 &= (a+b)^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \\ &= |a|^2 + 2ab + |b|^2 \\ &\leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 \\ &= (|a| + |b|)^2, \end{aligned}$$

se tiene que $|a+b| \leq |a| + |b|$; así, tomando $a = x-z$ y $b = z-y$, obtenemos la desigualdad $|x-y| \leq |x-z| + |z-y|$, es decir $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

2. Sea $f : S \to \mathbb{R}$ una función inyectiva sobre S, entonces $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$ es una métrica sobre S.

Demostración.
Sean $x,y,z \in S$.

M1. Claramente $|f(x) - f(y)| \geq 0$, por lo que se cumple M1.

M2. $|f(x) - f(y)| = 0 \Leftrightarrow f(x) - f(y) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(y)$
y como f es función inyectiva, $x = y$. Por tanto, se tiene M2.

M3. Sabemos que $|f(x) - f(y)| = |f(y) - f(x)|$, es decir $d(x,y) = d(y,x)$.

M4. Dado que para cualesquiera $a,b \in \mathbb{R}$ se cumple que $|a+b| \leq |a| + |b|$, tomando $a = f(x) - f(z)$ y $b = f(z) - f(y)$, obtenemos la desigualdad
$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(z)| + |f(z) - f(y)|$, es decir $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

3. Sea $S = C[a,b]$ el conjunto de todas las funciones continuas reales definidas en $[a,b]$, entonces $d(f,g) = \displaystyle\int_a^b |f(t) - g(t)|dt$ es una métrica sobre S.

Demostración.
Sean $f,g,h \in S$

M1. Dado que $f,g \in C[a,b]$, f y g son integrables, por lo que $f-g$ es integrable. Luego $|\displaystyle\int_a^b (f(t) - g(t))dt| \leq \int_a^b |f(t) - g(t)|dt$, y como el valor absoluto es no negativo, se tiene que $d(f,g) \geq 0$.

M2. Si $f(x) = g(x)$, $d(f,g) = \int_a^b |f(t) - g(t)|dt = 0$.
Ahora, supongamos que $d(f,g) = 0$ y veamos que $f = g$.
Si existe $t_0 \in [a,b]$ tal que $f(t_0) \neq g(t_0)$, entonces $|f(t_0) - g(t_0)| > 0$.
Como $f, g \in C[a,b]$, $|f(t) - g(t)|$ es continua, por lo que, para $\varepsilon = \frac{1}{2}|f(t_0) - g(t_0)|$, existe $\delta > 0$ tal que para toda $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$,

$$||f(t) - g(t)| - |f(t_0) - g(t_0)|| < \varepsilon$$

y

$$\begin{aligned} |f(t) - g(t)| &= |f(t_0) - g(t_0)| + (|f(t) - g(t)| - |f(t_0) - g(t_0)|) \\ &\geq |f(t_0) - g(t_0)| - (|f(t) - g(t)| - |f(t_0) - g(t_0)|) \\ &> |f(t_0) - g(t_0)| - \varepsilon \\ &= \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Sea $J = [a,b] \cap (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, entonces
$\int_a^b |f(t) - g(t)|dt \geq \int_J |f(t) - g(t)|dt \geq |J|\varepsilon > 0$,
por lo que $d(f,g) > 0$, lo que contradice nuestra hipóteis, y por tanto, se tiene M2.

M3. Es claro que $\int_a^b |f(t) - g(t)|dt = \int_a^b |g(t) - f(t)|dt$, es decir $d(f,g) = d(g,f)$.

M4. Como $|a+b| \leq |a| + |b|$, haciendo $a = f(x) - h(x)$ y $b = h(x) - g(x)$, tenemos que $|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|$, entonces

$$\int_a^b |f(t) - g(t)|dt \leq \int_a^b |f(t) - h(t)|dt + \int_a^b |h(t) - g(t)|dt,$$

es decir, $d(f,g) \leq d(f,h) + d(h,g)$.

4. Sea S un conjunto no vacio arbitrario. Dados $x, y \in S$,

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

es una métrica.

Demostración.
Sean $x, y, z \in S$.

M1. Por definición $d(x,y) \geq 0$.

M2. De la misma forma, $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

M3. Si $x = y$, $d(x,y) = 0 = d(y,x)$, y si $x \neq y$, $d(x,y) = 1 = d(y,x)$. Por tanto, se cumple M3.

M4. Dados $x,y,z \in S$, si $x = y = z$, $0 = d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) = 0$,
si todos son distintos, $1 = d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) = 2$,
si $x = y \neq z$, $0 = d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) = 2$
y si z es igual a alguno de los otros dos, $1 = d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) = 1$; cumpliéndose M4.

Esta métrica es la llamada *Métrica Discreta.*

5. Considerando (S,d), un espacio métrico, entonces $\sigma(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ es una métrica.

Demostración.
Sean $x,y,z \in S$.

M1. Como $d(x,y)$ es métrica, $d(x,y) \geq 0$, por lo que $\sigma(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \geq 0$.

M2. $\sigma(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = 0 \Leftrightarrow d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

M3. Como $d(x,y)$ es métrica, $\dfrac{d(x,y)}{1+(x,y)} = \dfrac{d(y,x)}{1+d(y,x)}$. Por tanto $\sigma(x,y) = \sigma(y,x)$.

M4.

$$\begin{aligned}
\sigma(x,y) \leq \sigma(x,z) + \sigma(z,y) &\Leftrightarrow \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \leq \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} + \frac{d(z,y)}{1+d(z,y)} \\
&\Leftrightarrow \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \leq \frac{d(x,z)+d(x,z)d(z,y)+d(z,y)+d(x,z)d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)+d(x,z)d(z,y)} \\
&\Leftrightarrow d(x,y) + d(x,y)d(x,z)d(z,y) + d(x,y)d(x,z) \\
&\quad + d(z,y)d(x,y) \\
&\quad \leq d(x,z) + d(x,z)d(z,y) + d(z,y) + d(x,z)d(z,y) \\
&\quad + d(x,y)d(x,z) + d(x,y)d(x,z)d(z,y) + d(z,y)d(x,y) \\
&\quad + d(x,y)d(x,z)d(z,y) \\
&\Leftrightarrow d(x,y) \leq d(x,z) + 2d(x,z)d(z,y) + d(z,y) \\
&\quad + d(x,y)d(x,z)d(z,y)
\end{aligned}$$

esto último es cierto, pues $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ por el axioma M4 para la distancia d. Por lo que se cumple M4.

1.1.1. Métricas Lp

Se detalla a continuación una generalización del espacio Euclidiano $\mathbb{R}^n$ y se describen los distintos espacios L^p, con $p \in \mathbb{R}$, por medio de la métrica inducida por una norma [11].

Normas

Definición. Sea X un espacio vectorial. Una *norma* $||\cdot||$ sobre X es una función que satisface los siguientes axiomas:

N1. $||x|| \geq 0$ para todo $x \in X$.

N2. $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

N3. $||\alpha x|| = |\alpha|||x||$ para todo $x \in X$ y todo escalar α.

N4. $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$ para cualesquiera $x, y \in X$.

Un *Espacio normado* $(X, ||\cdot||)$ consiste en un espacio vectorial X y una norma $||\cdot||$.

Ejemplos

1. Consideremos el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$. Sea $x = (x_1, ...x_n) \in \mathbb{R}^n$. La función definida por $||x|| \mapsto \sum_{k=1}^{n} |x_k|$ es una norma sobre $\mathbb{R}^n$.

   Demostración.
   Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$.

   N1. Como para toda $k \in \{1, ..., n\}$ se cumple que $|x_k| \geq 0$, es claro que $\sum_{k=1}^{n} |x_k| \geq 0$, por lo que se cumple N1.

   N2. $\sum_{k=1}^{n} |x_k| = 0 \Leftrightarrow \forall k \in \{1, ..., n\}\ |x_k| = 0 \Leftrightarrow \forall k \in \{1, ..., n\}\ x_k = 0 \Leftrightarrow x = 0$
   Por tanto, se tiene N2.

   N3. $||\alpha x|| = \sum_{k=1}^{n} |\alpha x_k| = \sum_{k=1}^{n} |\alpha||x_k| = |\alpha| \sum_{k=1}^{n} |x_k| = |\alpha|||x||$.
   Se satisface N3.

   N4. Dado que para todo $k \in \{1, ..., n\}$, $|x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k|$,
   $||x+y|| = \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k| \leq \sum_{k=1}^{n} (|x_k| + |y_k|) = \sum_{k=1}^{n} |x_k| + \sum_{k=1}^{n} |y_k| = ||x|| + ||y||$.

2. Consideremos el espacio vectorial $C^1[a,b]$, la siguiente función es una norma:

$$||f|| = sup_{x \in [a,b]}|f(x)| + sup_{x \in [a,b]}|f'(x)|.$$

   Demostración.
   Sean $f, g \in C^1[a,b]$.

   N1. Como para toda $x \in [a,b]$ se cumple que $|f(x)| \geq 0$, tenemos que

$$sup_{x \in [a,b]}|f(x)| \geq 0,$$

   análogamente $sup_{x \in [a,b]}|f'(x)| \geq 0$,
   y así $||f|| \geq 0$.

   N2. Suponemos que $sup_{x \in [a,b]}|f(x)| + sup_{x \in [a,b]}|f'(x)| = 0$.
   Entonces $sup_{x \in [a,b]}|f(x)| = 0$ y $sup_{x \in [a,b]}|f'(x)| = 0$.
   Como $sup_{x \in [a,b]}|f(x)| = 0$, entonces, para todo $x \in [a,b]$, $|f(x)| = 0$, luego, para todo $x \in [a,b]$ $f(x) = 0$.
   Por tanto $f = 0$.

N3. Dado un escalar α,

$$\begin{aligned}||\alpha f|| &= sup_{x\in[a,b]}|\alpha f(x)| + sup_{x\in[a,b]}|(\alpha f)'(x)|\\ &= |\alpha| sup_{x\in[a,b]}|f(x)| + |\alpha| sup_{x\in[a,b]}|f'(x)|\\ &= |\alpha|(sup_{x\in[a,b]}|f(x)| + sup_{x\in[a,b]}|f'(x)|)\\ &= |\alpha|||f||.\end{aligned}$$

Por tanto, se satisface N3.

N4.

$$\begin{aligned}||f+g|| &= sup_{x\in[a,b]}|(f+g)(x)| + sup_{x\in[a,b]}|(f+g)'(x)|\\ &= sup_{x\in[a,b]}|f(x)+g(x)| + sup_{x\in[a,b]}|f'(x)+g'(x)|\\ &\leq (sup_{x\in[a,b]}|f(x)| + sup_{x\in[a,b]}|g(x)|) + (sup_{x\in[a,b]}|f'(x)| + sup_{x\in[a,b]}|g'(x)|)\\ &= (sup_{x\in[a,b]}|f(x)| + sup_{x\in[a,b]}|f'(x)|) + (sup_{x\in[a,b]}|g(x)| + sup_{x\in[a,b]}|g'(x)|)\\ &= ||f|| + ||g||\end{aligned}$$

Así, se cumple que la función $||f||$ es una norma sobre el espacio $C^1[a,b]$.

Métrica inducida

Sean X un espacio vectorial no vacio y d una función sobre X tal que para todo $x,y \in X$, $d(x,y) = ||x-y||$, donde $||\cdot||$ es una norma. Entonces (X,d) es un espacio métrico.

Pueba

Sea X un espacio vectorial y sean $x,y,z \in X$.

M1. Para todo $x \in X$, $||x|| \geq 0$, en particular, como $x-y \in X$, $||x-y|| \geq 0$, es decir $d(x,y) \geq 0$.

M2. Si $x = y$, $d(x,y) = ||x-x|| = ||0|| = 0$. Supongamos ahora que $d(x,y) = 0$ y probemos que $x = y$.
$0 = d(x,y) = ||x-y||$, entonces, por N2, $x-y = 0$, es decir, $x = y$.

M3. $d(x,y) = ||x-y|| = 1 * ||x-y|| = |-1|||x-y|| = ||(-1)(x-y)|| = ||y-x|| = d(y,x)$.

M4.

$$\begin{aligned}d(x,y) &= ||x-y|| = ||x-z+z-y|| = ||(x-z)+(z-y)|| \leq ||x-z|| + ||z-y||\\ &= d(x,z) + d(z,y).\end{aligned}$$

La métrica d es llamada *métrica inducida* por la norma $||\cdot||$.

Métricas Lp

L_1 Esta función está definida por la métrica inducida por la norma

$$||x|| = \sum_{k=1}^{n} |x_k|.$$

Por tanto, la métrica L_1 es

$$L_1(x,y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|.$$

L_p Con $0 < p < \infty$
El caso más general está dado por la métrica inducida por la norma

$$||x|| = (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{1/p}.$$

Así, la métrica L_p es

$$L_p(x,y) = (\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p)^{1/p}.$$

1.2. Métrica de Riemann

Sea M una variedad diferenciable de dimensión finita.

Un *campo de formas bilineales* f en $A \subset M$ es una correspondencia que asigna a cada punto $x \in A$ una forma bilineal $f_x : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$.

Una función F sobre T_xM es una *métrica Riemanniana* si F es un campo de formas (de clase C^∞) bilineales simétricas definidas positivas en todos los puntos de M.
Al par (M,F) se le llama una *variedad Riemanniana*.

Observación

Una forma bilineal simétrica y definida positiva en un espacio vectorial también es llamada producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$:

(p1) $\langle ax+by,z\rangle$=$a\langle x,z\rangle + b\langle y,z\rangle$ y $\langle x,ay+bz\rangle$=$\overline{a}\langle x,y\rangle + \overline{b}\langle x,z\rangle$.

(p2) $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$.

(p3) $\langle x,x\rangle \geq 0$ y $\langle x,x\rangle = 0$ si y sólo si $x = 0$.

por lo que una métrica Riemanniana no es más que un producto escalar en cada T_xM que cumple con ser de clase C^∞ en x.

Ejemplo

El plano hiperbólico: $M = \{(x,y) : y > 0\}$ con la función

$$ds^2 = \frac{1}{y^2}dx^2 + \frac{1}{y^2}dy^2$$

[9].
Este es el llamado *Semi-plano de Poncairé*.

1.3. Métricas de Finsler

En esta sección se presenta el concepto de métrica de Finsler.
La definición de métrica de Finsler sobre una variedad se apoya en la noción de una norma de Minkowski, por lo que iniciamos con dar tal definición.

Norma de Minkowski

Definición. Sea X un espacio vectorial de dimensión finita. Una función $F : X \to [0,\infty)$ es llamada *Norma de Minkowski* si cumple las siguientes propiedades:

NM1. $F \in C^\infty$ sobre $X - \{0\}$.

NM2. Para toda $x \in X$ y para todo $\lambda > 0$, $F(\lambda x) = \lambda F(x)$.

NM3. Para todo $x \in X - \{0\}$ se cumple que la función simétrica bilineal g_x sobre X es positiva definida:

$$g_x(u,v) := \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}[F^2(x+su+tv)]|_{s=t=0}.$$

El par (X,F) es llamado *Espacio de Minkowski*.

Ejemplos

Sean α una norma euclidiana y β una forma lineal sobre un espacio vectorial X de dimensión n. Definimos

$$F(x) := \alpha(x) + \beta(x).$$

Demostración. [17]

Métricas de Finsler

Sea M una variedad. Una función $F : TM \to [0,\infty)$ es llamada *Métrica de Finsler* si cumple las siguientes propiedades:

a) $F(x,y)$ es C^∞ sobre $TM - \{0\}$.

b) $F_x(y) = F(x,y)$ es una norma de Minkowski sobre T_xM para cualquier $x \in M$.

El par (M,F) es llamado *Variedad de Finsler*.

Notar que a diferencia de la norma de Minkowski, en que la función F va de un espacio vectorial a los reales no negativos, una métrica de Finsler va del espacio tangente en x a los reales no negativos. Pero localemente en un punto de la variedad x, la métrica de Finsler es una norma de Misnkowski sobre el espacio tangente en dicho punto x.

Ejemplos

1. Sea $|\cdot|$ la norma Euclidiana estándar en $\mathbb{R}^n$ dada por

$$||y|| = (\sum_{k=1}^{n} |y_k|^2)^{1/2}$$

   Definimos $F(x,y) = F_x(y)$ por

$$F := ||y||$$

   con $y \in T_x\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$.
   F es una métrica de Finsler en $\mathbb{R}^n$.

2. Sean $B^n \subset (\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ la bola unitaria estándar y

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{|y^2| - (|x|^2|y|^2 - \langle x,y\rangle^2)}}{1-|x^2|}$$

   con $y \in T_xB^n \cong R^n$
   Se tiene que α_1 es una métrica de Finsler sobre B^n, la cual se denomina *Métrica de Klein*. El par (B^n, α_1) es llamado *Modelo de Klein* [4].

La métrica de Finsler es una generalización de la métrica de Riemann, en el sentido que la longitud de un vector x del espacio tangente en x no está necesariamente dada en la forma de una raíz cuadrada de una forma bilineal simétrica, como ocurre en el caso de la métrica riemaniana.

Un espacio de Finsler es un espacio real $n-$dimensional diferenciable M^n equipado con la métrica de Finsler. La diferencia entre un espacio de Riemann y un espacio de Finsler es que el primero se comporta localmente como un espacio euclidiano, y el último se comporta localmente como un espacio minkowskiano. Geometricamente se tiene que a un espacio de Riemann le corresponde un elipsoide y a un espacio de Finsler le corresponde una superficie arbitraria convexa la cual tiene como origen el centro de esa superficie convexa.

Capítulo 2

Convexidad de funciones métricas

En general, una función $F : R^n \to R$ se dice convexa si y solo si para todo $x, y \in R^n$ y $\lambda \in (0,1)$

$$F((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)F(x) + \lambda F(y)$$

o equivalentemente, si y solo si, F satisface la desigualdad de Jensen

$$F(\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_m x_m) \leq \lambda_1 F(x_1) + ... + \lambda_m F(x_m)$$

siempre que $\lambda_1 + ... + \lambda_m = 1$ y $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, ..., m$ [15].

Proposición

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo no vacío, y sea $f : S \to \mathbb{R}$ una función convexa. Entonces el conjunto

$$S_\alpha = \{x \in S : f(x) \leq \alpha\}$$

es un conjunto convexo.

Demostración.
Dados $x, y \in S_\alpha$ debemos mostrar que para todo $0 \leq \lambda \leq 1$, $\lambda x + (1-\lambda)y \in S_\alpha$:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \leq \lambda\alpha + (1-\lambda)\alpha = \alpha.$$

Por tanto $\lambda x + (1-\lambda)y \in S_\alpha$.

Ejemplos

1. Consideremos $F(x) = x^2$, veamos si es convexa:
   Sean $x, y \in \mathbb{R}$

$F((1-\lambda)x+\lambda y) \leq (1-\lambda)F(x)+\lambda F(y) \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}
0 &\leq (1-\lambda)F(x)+\lambda F(y)-F((1-\lambda)x+\lambda y) \\
&= (1-\lambda)x^2+\lambda y^2-((1-\lambda)x+\lambda y)^2 \\
&= x^2+\lambda x^2+\lambda y^2-(1-\lambda)^2x^2-\lambda^2y^2-2\lambda(1-\lambda)xy \\
&= x^2(1-(1-\lambda)^2-\lambda)+y^2(\lambda-\lambda^2)-2\lambda(1-\lambda)xy \\
&= x^2\lambda(1-\lambda)+y^2\lambda(1-\lambda)-2\lambda(1-\lambda)xy \\
&= \lambda(1-\lambda)(x^2+y^2-2xy) \\
&= \lambda(1-\lambda)(x+y)^2
\end{aligned}$$

y claramente $\lambda(1-\lambda)(x+y)^2 \geq 0$, por tanto la función es convexa.

2. Una norma $||\cdot||$ es convexa.

3. Si S es convexo, la distancia a S, $f(x)=d(x,S)=\text{ínf}_{s\in S}||x-s||$ es una función convexa

Cuerpo convexo

Considere una función $F \in C^0(\mathbb{R}^n)$ con las siguientes tres propiedades:

i $F(0)=0$ y $F(x)>0$ si $x \neq 0$.

ii $F(\lambda x)=\lambda F(x)$ si $\lambda > 0$.

iii F es convexa.

Entonces, el conjunto

$$\{x \in \mathbb{R}^n : F(x) \leq 1\}$$

es un cuerpo convexo [8].

Capítulo 3

Convexidad en términos algebraicos de una premétrica

En general, una función $F : R^n \to R$ se dice convexa si y solo si satisface:

$$F(\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_m x_m) \leq \lambda_1 F(x_1) + ... + \lambda_m F(x_m)$$

siempre que $\lambda_1 + ... + \lambda_m = 1$ y $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, ..., m$ [15].

En particular, la condición (ii) dada en la introducción:

$$F(x; ku) = kF(x; u) \text{ para } k > 0,$$

implica el siguiente teorema:

Teorema 1 *(Convexidad en términos algebraicos de una premétrica.)*
Una premétrica $F : TM \to R$ es convexa en $x \in M$ si y solo si cumple con alguna de las siguientes condiciones equivalentes:
(a) $F(x, u+w) \leq F(x, u)$+F(x, w) para todo $u, w \in T_xM - \{0\}$;
(b) $F(x, u_1 + ... + u_m) \leq F(x, u_1) + ... + F(x, u_m)$ para todo $u_1, ..., u_m \in T_xM - \{0\}$;
(c) $F(x, v) = F^*(x, v)$ para todo $v \in T_xM$, donde la función $F^* : TM \to \mathbb{R}$ está dada por:

$$F^*(x, v) := min\left\{ \sum_{u \in H} F(x, u) : v = \sum_{u \in H} u,\ H \subseteq T_xM - \{0\},\ H \text{ es finito} \right\}. \tag{3.1}$$

Demostración.
Primero probaremos que si F es convexa sí y sólo si se cumple (a):

$\Rightarrow)$ Sean $u, w \in T_xM$.
$\exists y, z$ tales que $u = \lambda y$ y $w = (1-\lambda)z$, entonces

$$\begin{aligned} F(x, u+w) &= F(x, \lambda y + (1-\lambda)z) \\ &\leq \lambda F(x, y) + (1-\lambda)F(x, z) \\ &= F(x, \lambda y) + F(x, (1-\lambda)z) \\ &= F(x, u) + F(x, w). \end{aligned}$$

$\Leftarrow$) Sean y, z.

$$\begin{aligned} F(x, \lambda y + (1-\lambda)z) &\leq F(x, \lambda y) + F((1-\lambda)z) \\ &= \lambda F(x,y) + (1-\lambda)F(x,z). \end{aligned}$$

Ahora veremos que son equivalentes:

$(a) \Rightarrow (b)$) Se prueba por inducción sobre m.

$(b) \Rightarrow (a)$) Es el caso particular cuando $m = 1$.

$(b) \Rightarrow (c)$) Sea $v \in T_xM$ y llamemos $D = \left\{ \sum_{u \in H} F(x,u) : v = \sum_{u \in H} u, H \subseteq T_xM - \{0\}, H \text{ es finito} \right\}$.
Como $v \in T_xM$, $F(x,v) \in D$.
Sea $\sum_{u \in H} F(x,u)$, con $|H| = m$, tal que $\sum_{u \in H} u = v$. Entonces

$$\begin{aligned} F(x,v) &= F(x, u_1 + ... + u_m) \\ &\leq F(x,u_1) + ... + F(x,u_m) \\ &= \sum_{u \in H} F(x,u) \end{aligned}$$

$\therefore F(x,v) = F^*(x,v)$.

$(c) \Rightarrow (b)$) Sean $u_1, ..., u_m \in T_xM$.
Entonces $u_1 + ... + u_m \in T_xM$, y por hipótesis

$$\begin{aligned} F(x, u_1 + ... + u_m) &= F^*(x, u_1 + ... + u_m) \\ &= min\left\{ \sum_{w \in H} F(x,w) : u_1 + ... + u_m = \sum_{w \in H} w, H \subseteq T_xM - \{0\}, H \text{ es finito} \right\}. \end{aligned}$$

En particular, $F(x, u_1 + ... + u_m) \leq F(x,u_1) + ... F(x,u_m)$.

$\square$

La definición de conjunto $F-$minimizante dada por [14] se puede extender para el caso en que F es una premétrica:
Un conjunto $H \subseteq T_xM - \{0\}$ de vectores tangentes en x es un conjunto $F-$*minimizante* (de vectores tangentes de $T_xM - \{0\}$) si H resuelve (4.1), es decir,

$$\sum_{u \in H} u = \sum_{u' \in H'} u' \Rightarrow \sum_{u \in H} F(x,u) \leq \sum_{u' \in H'} F(x,u').$$

para todo $H' \subseteq T_xM - \{0\}$ finito.

Se puede mostrar directamente que los conjuntos $F-$minimizantes de vectores tangentes de $T_xM - \{0\}$ satisfacen la propiedad hereditaria, es decir, cualquier subconjunto de un conjunto

$F-$minimizante de vectores tangentes en x, H, es también un conjunto $F-$minimizante de vectores tangentes en x. En particular si $\{v\} \subseteq T_xM$, con $v \neq 0$, es un conjunto $F-$minimizante, es decir,

$$v = \sum_{u \in H} u \Rightarrow F(x,v) \leq \sum_{u' \in H'} F(x,u')$$

con $H' \subseteq T_xM - \{0\}$ finito, o equivalentemente $F^*(x,v) = F(x,v)$, entonces decimos que la dirección de v en x es $F-$*convexa*.
Por tanto, una premétrica es convexa en x si y sólo si la dirección de cada $v \in T_xM - \{0\}$ es $F-$convexa.

Corolario
Sea $F : TM \to R$ una premétrica.
(a) Si existe $u \in T_xM - \{0\}$ tal que $F(x,u) < 0$ y $F(x,-u) < 0$, entonces ninguna de las direcciones en $T_xM - \{0\}$ es $F-$convexa.
(b) Si la premétrica F es negativa definida en x, entonces no es convexa en x.
(c) Si la premétrica $F : TM \to R$ es convexa en $x \in M$, entonces para todo $u \in T_xM$, $F(x,u) + F(x,-u) \geq 0$.

Demostración.

(a) Si $F(x,u) < 0$ y $F(x,-u) < 0$, entonces $F(x,v) > F(x,v) + F(x,u) + F(x,-u)$ para todo $v \in T_xM - \{0\}$.
Por lo tanto, (b) del Teorema 1 no se satisface.

(b) Se sigue inmediatamente de la parte (a).

(c) Por (a) del Teorema 1, para todo $u \in T_xM - \{0\}$, $0 = F(x,u-u) \leq F(x,u) + F(x,-u)$.

□

Capítulo 4

Cerradura convexa

Para una función métrica tradicional, F, la cerradura convexa F^* en un punto x usualmente se define como la función métrica correpondiente a la cubierta convexa de la indicatriz de F en x [7].

4.1. La cerradura convexa y la indicatriz de una función métrica

Sean M una variedad y F una función métrica, la indicatriz de la cerradura convexa de F está dada por la cerradura convexa de la indicatriz de F, ${1_x}^*$.

Propiedades

1. ${1_x}^*$ es convexa en todas direcciones.
2. Para cualquier dirección dada, ${1_x}^*$ tiene la misma dimensión que 1_x.
3. La indicatriz coincide con su cerradura convexa, $1_x = {1_x}^*$, si y solo si 1_x es convexa en todas las direcciones.
   En particular, ${1_x}^* = {1_x}^{**}$.
4. ${1_x}^*$ está contenida dentro de cualquier cuerpo convexo que contenga 1_x [7].

Consideremos la función $d(a,b)$ definida como

$$d(a,b) := \min_{x \in \Omega_{[a,b]}} \int_a^b F[x(t), \dot{x}(t)]dt.$$

esta no cambia si y solo si la cerradura convexa de la indicatriz de una nueva función F_1 en cada punto coincide con la cerradura convexa de la indicatriz de F. Esto se debe a que todas las direcciones $\dot{x}(t)$ en un arco $F-$geodésico $x(t)$ son convexas [2]. Por lo tanto, cada arco $F-$geodésico desde a hasta b es un arco F^*-geodésico que va de a hasta b. De lo anterior, podemos obtener ciertas propiedades:

- $d(a,b)$, la cerradura convexa de la indicatriz ${1_x}^*$, y la mínima función métrica $F^*(x,u)$ asociada con 1_x se determinan mutuamente de manera única.

- Diferentes indicatrices inducen una y la misma función distancia $d(a,b)$ si y solo si tienen la misma cerradura convexa.[7]

Ejemplo

Consideremos la variedad $M = \mathbb{R}^2$, con las siguientes premétricas

- La premétrica dada por $F_{1/2}(x,u) = (|u_1|^{1/2} + |u_2|^{1/2})^2 = L_{1/2}(0,u)$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$, y $u = (u_1,u_2) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$. Se usa esa igualdad porque $F_{1/2}$ no depende de la posición x, y, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $x = 0$. La indicatriz de esta premétrica no es convexa (ver. Fig. 5.1), pues como bien sabemos la función L_p, para $0 < p < 1$, no satisface la desigualdad del triángulo.

- La premétrica F_1, dada por $F_1(x,u) = (|u_1| + |u_2|) = L_1(0,(u_1,u_2))$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$, y $u = (u_1,u_2) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$. La función L_1, como bien sabemos, cumple la desigualdad del triángulo y es convexa. La indicatriz de esta función es convexa (como se muestra en la Figura 5.1).

La indicatriz de la premétrica F_1 (la bola unitaria determinada por el conjunto de puntos (x,y) en el plano que satisfacen $|x| + |y| = 1$, la cual corresponde al rombo de la Figura 5.1) es la cerradura convexa de la indicatriz de la premétrica $F_{1/2}$ (la indicatriz de la premétrica $F_{1/2}$ es la bola unitaria determinada por el conjunto de pares de puntos en el plano que cumplen $[|x|^{1/2} + |y|^{1/2}]^2 = 1$). En la Figura 5.1 ilustramos las indicatrices correspondientes a las premétricas $F_{1/2}$ y F_1. Para más detalle ver [14]. En esta figura $C_{1/2}$ es el arco de mínima longitud que va de 0 al punto (a,b), inducido por la premétrica $L_{1/2}$. Similarmente, se ilustra también el arco de mínima longitud que va de 0 a (a,b) inducido por la premétrica L_1. En este último caso, el arco de mínima longitud es el segmento de recta que va de 0 a (a,b). Nótese que el arco de mínima longitud que va de 0 a (a,b) inducido por $F_{1/2}$ no es el segmento de recta que va de 0 a (a,b), sino el conformado por la concatenación de dos segmentos de recta: el que va de 0 a $(a,0)$ concatenado con el segmento de recta que va de $(a,0)$ a (a,b). Recordar que la función L_p para $p < 1$ no cumple la desigualdad del triángulo, de ahí que el arco de mínima longitud de un punto hasta otro punto, no necesariamente es el segmento de recta que va de un punto hasta el otro punto.

4.2. Cerradura convexa de una premétrica

Llamamos a una función $F^* : TM \to \mathbb{R}$ satisfaciendo (4.1) para toda $x \in M$ la *cerradura convexa* de la premétrica F:

$$F^*(x,v) := min\left\{ \sum_{u\in H} F(x,u) : v = \sum_{u\in H} u,\, H \subseteq T_xM - \{0\},\, H \text{ es finito},\, v \in T_xM - \{0\} \right\}$$

Evidentemente, F^* satisface las relaciones:

- $F^*(x,v) \leq F(x,v)$ donde la igualdad se cumple si, y sólo si, la dirección v es $F-$convexa en x

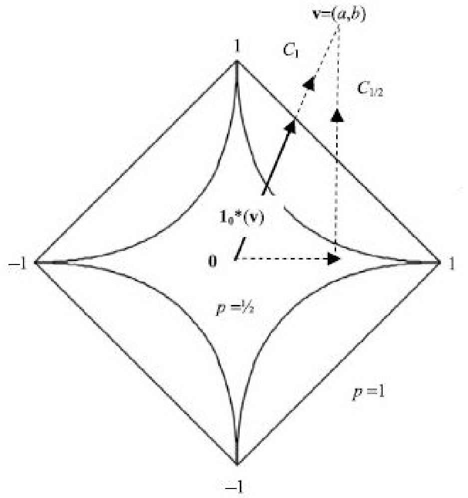


Figura 4.1: Forma de la premétrica $L_{1/2}$ y su cerradura convexa.

- $F^{**}(x,v) = F^{*}(x,v)$ para toda $x \in M$ y toda $v \in T_xM$.
- $F^{*}(x,v)$ es convexa para todo $x \in M$ y para todo $v \in T_xM$.
- Para todo $a,b \in M$, se cumple la siguiente igualdad

$$d(a,b) := \min_{x\in\Omega_{[a,b]}} \int_a^b F[x(t),\dot{x}(t)]dt = \min_{x\in\Omega_{[a,b]}} \int_a^b F^{*}[x(t),\dot{x}(t)]dt.$$

[2]

Capítulo 5

Indicatriz en un punto de premétricas que toman valores positivos y negativos

Recordemos que la indicatriz en un punto x de una función métrica tradicional F es el conjunto
$$\{u \in T_xM - \{0\} : F(x,u) = 1\}$$
así, definimos la *indicatriz γ en x* de una premétrica F como el conjunto de puntos del espacio tangente T_xM que satisfacen la ecuación $|F_x(u)| = 1$ (donde $|\cdot|$ es el valor absoluto usual).
La indicatriz nos ayuda a visualizar ciertas propiedades de la función F, y su importancia ya es evidente por el hecho de que, dado que si F es homogénea positiva, la indicatriz en x determina de manera única la forma de F en este punto x.

Por (i) y (ii), dadas en la introducción:
(i) $F(x,u)$ es continua como una función de las $2n$ variables (x,u), $x \in M$ y $u \in T_xM - \{0\}$;
(ii) $F(x,ku) = kF(x,u)$ para $k > 0$
se sigue la siguiente proposición:

Proposición
Si una premétrica positiva-negativa F cumple (i) y (ii), F induce una partición no trivial del espacio tangente T_xM; además F se anula para cada vector nulo, es decir $F(x,0) = 0$ para todo $x \in M$.
La partición consiste de un cono cero
$$cero(F_x) := \{v \in T_xM : F(x,v) = 0\},$$
al menos un cono positivo conexo abierto
$$C^+ := \{v \in T_xM : F(x,v) > 0\},$$
($F(x,v) > 0$ para todo $v \in C^+$), y al menos un cono negativo conexo abierto
$$C^- := \{v \in T_xM : F(x,v) < 0\},$$
($F(x,v) < 0$ para todo $v \in C^-$).

Demostración.

- Claramente son ajenos.
- Como F es positiva-negativa, $C^+ \neq \varnothing \neq C^-$.
  Y como F es continua, $cero(F_x) \neq \varnothing$.
- Dado $v \in T_xM$, $F(x,v) \in \mathbb{R}$, por lo que $F(x,v) \in C^+$, $F(x,v) \in C^-$ o $F(x,v) \in cero(F_x)$.
- $\forall \varepsilon > 0$, $F(x,\varepsilon) = \varepsilon F(x,1)\forall$. Entonces si $\varepsilon \to 0$, $F(x,\varepsilon) \to 0$.

$\square$

Llamamos a esta partición, τ_x, la *partición inducida por F*.

El cono $cero(F_x)$ en x incluye el origen del espacio tangente T_xM y, por lo tanto, es un conjunto conexo y cerrado. Evidentemente, el cono $cero(F_x)$ es la frontera de todos los conos abiertos de τ_x, y por lo tanto separa los conos abiertos positivos de τ_x de los negativos.

Por simplicidad, denotamos la función $F(x,u)$ en un punto fijo $x \in M$ por $F_x(u)$, donde el punto x será origen 0_x del espacio tangente T_xM.

La indicatriz γ en x de una premétrica F geométricamente representa un lugar
$(m-1)-$dimensional en T_xM (donde m es la dimensión de T_xM), es decir, γ es la unión disjunta de hipersuperficies, una dentro de cada cono abierto $C \in \tau_x$, $\gamma_C := \gamma \cap C$. Llamamos a la hipersuperficie dentro de cada cono abierto el componente γ_C (de la indicatriz γ en x). Note que γ_C es la frontera del conjunto $\Gamma_C := \{u : F_x(u) \leq 1, u \in C\}$ si el cono C es positivo, y es la frontera del conjunto $\Gamma_C := \{u : F_x(u) \leq -1, u \in C\}$ si el cono C es negativo.
Observe que, dado que $0 < 1$ y $0 > -1$, por la definición de Γ_C, el origen del espacio tangente T_xM está contenido en Γ_C si y solo si, C es un cono positivo. Decimos que la componente γ_C *es convexa* si el conjunto Γ_C es convexo, y que γ es *convexa* si todas sus componentes γ_C son convexas.

En lo siguiente, adoptamos la notación introducida por Dzhafarov y Colonius [7].
Sea $C_x := \{u \in T_xM : F_x(u) \neq 0\}$ la unión de todos los conos abiertos de τ_x. Definimos la *función indicatriz de F_x en x* de la premétrica F como la función $1_x : C_x \to \gamma$ dada por

$$1_x(u) = u/F_x(u)$$

para $F_x(u) > 0$ y

$$1_x(u) = -u/F_x(u)$$

si $F_x(u) < 0$.
La imagen de $C \in \tau_x$ bajo 1_x

$$\{1_x(u) : u \in C\} = \{u/|F_x(u)| : u \in C\} = \{u : |F_x(u)| = 1, u \in C\}$$

es la componente γ_C de la indicatriz de F en x.

Claramente, si F es de signo constante en x para todo $v \in T_xM$, entonces τ_x es la partición trivial (es decir, $\tau_x = \{T_xM\}$) y la indicatriz γ es una hipersuperficie topológicamente equivalente a una esfera centrada en x. Sin embargo, si F es una premétrica positiva-negativa en x, la indicatriz γ consiste en hipersuperficies que se extienden al infinito:
Sea $C \in \tau_x$ un cono positivo abierto. Entonces $F_x(u) > 0$ para todo $u \in C$, y $F_x(u) = 0$ para u en la frontera de C. Entonces, por la continuidad de F, hay una sucesión u_v, $v = 1, 2, ...$, en T_xM tal que $F_x(u_v) \to 0$. Por lo tanto $||u||/|F_x(u)| = ||1x(u)|| \to \infty$ cuando $F_x(u) \to 0$. (Similarmente para los conos negativos abiertos $C \in \tau_x$).

Teorema 2 *(Propiedades de la indicatriz de una premétrica.)*
Sea $F : TM \to R$ una premétrica. Entonces, para cualquier punto fijo x y para todos $u, v, w \in T_xM - \{0\}$:
(a) $v = |F_x(v)| 1_x(v)$ si $F_x(v) \neq 0$;
(b) Si $F_x(u) \neq 0$, $F_x(w) \neq 0$ y $F_x(u+w) \neq 0$, entonces

$$|F_x(u+w)| 1_x(u+w) = |F_x(u)| 1_x(u) + |F_x(w)| 1_x(w); \tag{5.1}$$

(c) $1_x(kv) = 1_x(v)$ para todo $k > 0$.

Demostración.

(a) Por la definición de 1_x, $v = F_x(v) 1_x(v)$ si $F_x(v) > 0$, y $v = -F_x(v) 1_x(v)$ si $F_x(v) < 0$. Por lo tanto $v = |F_x(v)| 1_x(v)$ para $F_x(v) \neq 0$.

(b) Por (a), $v = u + w \Leftrightarrow |F_x(v)| 1_x(v) = |F_x(u)| 1_x(u) + |F_x(w)| 1_x(w)$.

(c) Por la definición de 1_x, para todo $k > 0$,
si $F(x, v) > 0$ entonces $1_x(kv) = kv/F_x(kv) = 1_x(v)$
y si $F_x(v) < 0$, $1_x(kv) = -kv/F_x(kv) = 1_x(v)$.

□

Capítulo 6

Convexidad de una premétrica en términos de su indicatriz

Ya vimos que para que una función métrica tradicional F sea convexa, basta con que su indicatriz lo sea. Sin embargo, para el caso de premétrica que toma valores tanto positivos como negativos, el que su indicatriz sea convexa, no implica que la premétrica sea convexa. A continuación damos condiciones necesarias y suficientes para que una premétrica positiva-negativa F sea convexa, en términos de su indicatriz.

Teorema 3 *(Partición inducida por una premétrica positiva-negativa convexa.)*
Sea τ_x la partición de T_xM inducida por una premétrica positiva-negativa $F : TM \to R$. Si F es convexa en x, entonces τ_x consiste de
(a) sólo un cono negativo que es convexo y está contenido en un semi-espacio abierto de T_xM,
(b) sólo uno cono cero cuyo interior es vacío, y
(c) sólo un cono positivo que contiene un semi-espacio abierto de T_xM.

Demostración.
Sean $C^- := \{v \in T_xM - \{0\} : F_x(v) < 0\}$, $C^+ := \{v \in T_xM - \{0\} : F_x(v) > 0\}$ y $cero(F_x) := \{v \in T_xM - \{0\} : F_x(v) = 0\}$.

(a) Sean $u, w \in C^-$. Entonces $F_x(u) + F_x(w) < 0$ y, como F es convexa en x, se sigue que $F_x(u+w) \leq F_x(u) + F_x(w) < 0$. Luego, $u + w \in C^-$. Por lo tanto, C^- es convexo, y el único de la partición.
Por el corolario del Teorema 1 y por ([15], p. 115, Corolario 11.5.2), existe un semi-espacio cerrado que contiene a C^-. Entonces τ_x contiene solo un cono negativo.

(b) Si el interior del cono cerrado $cero(F_x)$ es no vacío, por la continuidad de F, y dado que C^- es abierto, existen $u \in intcero(F_x)$, $v \in cero(F_x)$ y $w \in C^-$ tales que $v = u + w$. Entonces, por la convexidad en x de F, se sigue que

$$0 = F_x(v) \leq F_x(u) + F_x(w) = F_x(w) < 0,$$

lo cual es absurdo.

(c) Como F es positiva-negativa, τ_x contiene al menos un cono positivo C^+. En realidad, τ_x tiene únicamente un cono positivo abierto:

Si un cono positivo abierto C^+ de τ_x y su frontera están completamente contenidos en un semi-espacio abierto de $T_xM - \{0\}$, entonces existen $u, w \in cero(F_x)$ tal que $u + w \in C^+$. Como $F_x(u) = F_x(w) = 0$, y $F_x(u+w) > 0$, $F_x(u+w) > F_x(u) + F_x(w)$, lo que contradice la convexidad de F en x. Por lo tanto, el cono C^+ debe contener un semi-espacio abierto. Si la partición τ_x contuviera dos conos positivos abiertos C_1^+ y C_2^+, cada uno de ellos sería uno de los dos semi-espacios abiertos correspondientes al hiperplano $H = cero(F_x)$. Pero, esto implicaría que el cono negativo C^- es vacío, lo cual es imposible porque la premétrica F es positiva-negativa.

$\square$

La parte (b) del Teorema 2 nos permite obtener las condiciones necesarias y suficientes, en términos de la indicatriz, para que una premétrica positiva-negativa sea convexa en x, como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 4 *(Condiciones necesarias y suficientes, en términos de la indicatriz, para que una premétrica positiva-negativa sea convexa en x.)*
Una función métrica positiva-negativa $F : TM \to R$ es convexa en x si y sólo si se satisfacen las condiciones siguientes:
(a) La partición τ_x de T_xM inducida por F consiste en un cono negativo C^-, el cual es convexo, un cono cero cuyo interior es vacio y un cono positivo C^+ el cual contiene un semi-espacio abierto;
(b) Si la componente positiva γ_{C^+} de la indicatriz en x es convexa, es decir si $u, w \in C^+$ son tal que $u + w \in C^+$, entonces

$$1_x(u+w) \geq \frac{F_x(u)1_x(u) + F_x(w)1_x(w)}{F_x(u) + F_x(w)}; \tag{6.1}$$

(c) Si la componente negativa γ_{C^-} de la indicatriz en x es convexa, es decir, si $u, w \in C^-$ entonces $u + w \in C^-$ y

$$1_x(u+w) \leq \frac{-F_x(u)1_x(u) - F_x(w)1_x(w)}{-F_x(u) - F_x(w)}; \tag{6.2}$$

(d) Las direcciones en el cono $ceroF_x$ en x son $F-convexas$, es decir, si $u \in C^+$ y $w \in C^-$ son tal que $u + w \in cero(F_x) - \{0\}$, entonces $F_x(u) \geq -F_x(w)$;
(e) La componente positiva γ_{C^+} de la indicatriz en x es $F-convexa$ con respecto a la componente negativa γ_{C^-} de la indicatriz en x, es decir, si $u \in C^+$ y $w \in C^-$ son tal que $u + w \in C^+$, entonces $F_x(u) > -F_x(w)$ y

$$1_x(u+w) \geq \frac{F_x(u)1_x(u) - F_x(w)1_x(w)}{F_x(u) + F_x(w)}; \tag{6.3}$$

(f) La componente negativa γ_{C^-} de la indicatriz en x es $F-convexa$ con respecto a la componente positiva γ_{C^+} de la indicatriz en x, es decir, si $u \in C^+$ y $w \in C^-$ son tal que $u + w \in C^-$ y $F_x(u) < -F_x(w)$, entonces

$$1_x(u+w) \leq -\frac{F_x(u)1_x(u) - F_x(w)1_x(w)}{F_x(u) + F_x(w)}. \tag{6.4}$$

Demostración.
Primero probamos que si (a) se cumple, entonces cada una de los enunciados $(b)-(f)$ son equivalentes a la condición de convexidad

$$F_x(u+w) \leq F_x(u)+F_x(w). \tag{6.5}$$

$(b) \Leftrightarrow$(7.5) Sean $u,w \in C^+$ tal que $u+w \in C^+$. Entonces, por (6.1),

$$\frac{F_x(u+w)}{F_x(u)+F_x(w)} 1_x(u+w) = \frac{F_x(u)1_x(u)+F_x(w)1_x(w)}{F_x(u)+F_x(w)}.$$

La desigualdad (7.5), así como la desigualdad (7.1), significan que el coeficiente de $1_x(u+w)$ en la utima ecuación es menor o igual que 1, es decir

$$\frac{F_x(u+w)}{F_x(u)+F_x(w)} \leq 1.$$

Por tanto, (7.5) y (7.1) son equivalentes.

$(c) \Leftrightarrow$(7.5) Sean $u,w \in C^-$. Por (a), C^- es un cono convexo y entonces $u+w \in C^-$. Por (6.1),

$$\frac{-F_x(u+w)}{F_x(u)-F_x(w)} 1_x(u+w) = \frac{-F_x(u)1_x(u)-F_x(w)1_x(w)}{-F_x(u)-F_x(w)}.$$

La desigualdad (7.5), así como la desigualdad (7.2), significan que el coeficiente de $1_x(u+w)$ en la última ecuación es mayor o igual que 1, es decir

$$\frac{F_x(u+w)}{-F_x(u)-F_x(w)} \geq 1.$$

Por tanto,(7.5) y (7.2) son equivalentes.

$(d) \Leftrightarrow$(7.5) Sean $u \in C^+$ y $w \in C^-$ tal que $u+w \in cero(F_x)-\{0\}$. Como $F_x(u+w)=0$, la condición de convexidad (7.5) es equivalente a $F_x(u) \geq -F_x(w)$.

$(e) \Leftrightarrow$(7.5) Sean $u \in C^+$ y $w \in C^-$ tal que $u+w \in C^+$. Si $F_x(u) \leq -F_x(w)$, entonces $F_x(u)+F_x(w) \leq 0$. Luego (7.5) no se satisface, pues $F_x(u+w) > 0$, y por tanto $F_x(u) > -F_x(w)$. Por (6.1), tenemos la identidad

$$\frac{F(x,u+w)}{F(x,u)+F(x,w)} 1_x(u+w) = \frac{F(x,u)1_x(u)-F(x,w)1_x(w)}{F(x,u)+F(x,w)}.$$

Como $F_x(u)+F_x(w) > 0$, la desigualdad (7.5) es equivalente a

$$\frac{F_x(u+w)}{F_x(u)+F_x(w)} \leq 1.$$

Luego, el coeficiente de $1_x(u+w)$ en la última ecuación es menor o igual que 1 y por lo tanto, (7.5) y (7.3) son equivalentes.

$(f) \Leftrightarrow$(7.5) Sean $u \in C^+$ y $w \in C^-$ tal que $u+w \in C^-$ y $F_x(u) < -F_x(w)$. Por (6.1), tenemos la identidad

$$\frac{F_x(u+w)}{F_x(u)+F_x(w)} 1_x(u+w) = -\frac{F_x(u)1_x(u) - F_x(w)1_x(w)}{F_x(u)+F_x(w)}.$$

Como $F_x(u)+F_x(w) < 0$ y $F_x(u+w) < 0$, la desigualdad (7.5) es equivalente a

$$\frac{F_x(u+w)}{F_x(u)+F_x(w)} \geq 1.$$

Luego, el coeficiente de $1_x(u+w)$ en la última ecuación es mayor o igual que 1 y por lo tanto, (7.5) y (7.4) son equivalentes.

Demostramos ahora que las condiciones $(a)-(f)$ son necesarias y suficientes para que F sea convexa:

$\Rightarrow$) Si F es convexa en x, entonces por el *Teorema 3*, (a) se cumple y, por las equivalencias que hemos probado, $(b)-(f)$ se cumplen.

$\Leftarrow$) Tenemos que probar que los enunciados $(a)-(f)$ implican que F es convexa en x (es decir, que para cualesquiera $u, w \in T_xM - \{0\}$ las afirmaciones $(a)-(f)$ implican $F_x(u+w) \leq F_x(u)+F_x(w)$). Ya hemos probado que si (a) se satisface, para cualesquiera $u, w \in T_xM - \{0\}$ consideradas en $(b)-(f)$, la condición de convexidad (7.5) se cumple. Falta demostrar que bajo la condición (a), las afirmaciones $(b)-(f)$ garantizan que la condición de convexidad (7.5) también se cumple para cualesquiera $u, w \in T_xM - \{0\}$ no consideradas en tales afirmaciones:

(i) Si $u, w \in cero(F_x)$, hay tres casos a considerar: $u+w \in cero(F_x)$, $u+w \in C^-$ y $u+w \in C^+$. Los dos primeros casos claramente implican (7.5). En el tercer caso, el cono positivo C^+ no contiene un semi-espacio abierto, contradiciendo (a).

(ii) Si sólo uno de los dos vectores u o w está en el cono cero, digamos $u \in cero(F_x)$, entonces hay seis casos a considerar: (1) $w \in C^+$ con $u+w \in C^+$, (2) $w \in C^-$ con $u+w \in C^-$, (3) $w \in C^+$ con $u+w \in cero(F_x)$, (4) $w \in C^+$ con $u+w \in C^-$, (5) $w \in C^-$ con $u+w \in cero(F_x)$, y (6) $w \in C^-$ con $u+w \in C^+$. Por la continuidad de F, los casos (1) y (2) están incluidos en las afirmaciones (b) y (c), respectivamente. Los casos (3) y (4) claramente implican (7.5). En los casos (5) y (6), el cono negativo C^- no es convexo, contradiciendo (a).

(iii) Cuando u y w están en el mismo cono abierto de τ_x hay dos casos no considerados en $(b)-(c)$: $u, w \in C^+$ con $u+w \in C^- \cup cero(F_x) - \{0\}$, y $u, w \in C^-$ con $u+w \in C^- \cup cero(F_x) - \{0\}$. El primer caso claramente implica (7.5), y el segundo implica que el cono negativo C^- no es convexo, contradiciendo (a).

(iv) Si $u \in C^+$, $w \in C^-$, $u+w \in C^-$ y $F(x,u)+F(x,w) \geq 0$, entonces
$F_x(u)+F_x(w) \geq F_x(u+w)$.
Por lo tanto, (7.5) se cumple.

$\square$

Debe notarse que si F es una función métrica tradicional (es decir, F es una premétrica positiva definida), la parte (b) del Teorema 4 es una condición suficiente y necesaria para que la función métrica F y su indicatriz γ sean convexas en x. Sin embargo, si F es una premétrica positiva-negativa, las condiciones (b) y (c) del Teorema 4 garantizan sólo la convexidad de la indicatriz γ. En este caso, para la convexidad de F, además de (b) y (c), las condiciones $(d)-(f)$ deben ser satisfechas.

Las desigualdades (7.1) y (7.2), requeridas para la convexidad de los componentes de la indicatriz γ en x de una premétrica, pueden ser ilustradas como en la Figura 7.1.

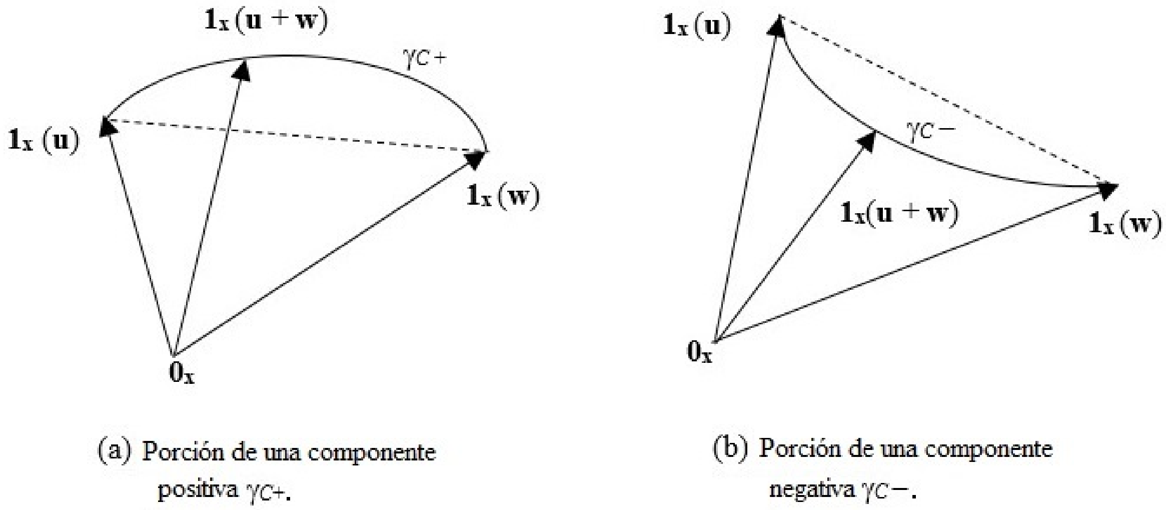


Figura 6.1: Porción de una componente positiva (negativa) de la indicatriz en x de una premétrica convexa (ver condiciones (b) y (c) del Teorema 4).

Las partes $(b)-(f)$ del Teorema 4 se refieren a cualquier par de puntos de la indicatriz, $1_x(u)$ y $1_x(w)$, donde $u, w \in T_xM - \{0\}$.

Suponga que $F_x(u) \neq 0$, $F_x(w) \neq 0$ y $F_x(u+w) \neq 0$.
Dividiendo (6.1) por $|F_x(u)| + |F_x(w)|$, obtenemos

$$\frac{|F_x(u+w)|1_x(u+w)}{|F_x(u)|+|F_x(w)|} = \frac{|F_x(u)|1_x(u)+|F_x(w)|1_x(w)}{|F_x(u)|+|F_x(w)|}.$$

El lado derecho de esta última ecuación es una combinación convexa de $1_x(u)$ y $1_x(w)$, dada por $v(\lambda) := \lambda 1_x(u) + (1-\lambda)1_x(w)$, i.e.

$$v(\lambda) = \frac{|F_x(u+w)|1_x(u+w)}{|F_x(u)|+|F_x(w)|}.$$

Por tanto $v(\lambda)$ es el punto donde el rayo que contiene a v interseca el segmento de línea recta que une a $1_x(u)$ y $1_x(w)$, donde

$$\lambda := \frac{|F_x(u)|}{|F_x(u)| + |F_x(w)|}.$$

Observe que $v(0) = 1_x(w)$ y $v(1) = 1_x(u)$, y note que:

- $|F_x(u)| < |F_x(w)| \Leftrightarrow \lambda \in [0, 1/2)$ (es decir, el punto $v(\lambda)$ está más cerca de $1_x(w)$ que de $1_x(u)$).
- $|F_x(u)| = |F_x(w)| \Leftrightarrow \lambda = 1/2$ (es decir, el punto $v(\lambda)$ es equidistante de $1_x(w)$ y de $1_x(u)$).
- $|F_x(u)| > |F_x(w)| \Leftrightarrow \lambda \in (1/2, 1]$ (es decir, el punto $v(\lambda)$ está más cerca de $1_x(u)$ que de $1_x(w)$).

De acuerdo con lo anterior, el Teorema 4 en términos de λ se convierte en:

Corolario *(Forma de la indicatriz de una premétrica positiva-negativa convexa)*
Una premétrica positiva-negativa $F : TM \to R$ es convexa en x si y sólo si, las condiciones siguientes se satisfacen:
(a) La condición (a) del Teorema 4 se cumple;
(b) Si $u, w \in C^+$ son tal que $u + w \in C^+$, entonces $1_x(u+w) \geq \lambda 1_x(u) + (1-\lambda) 1_x(w)$ para todo $\lambda \in (0, 1)$;
(c) Si $u, w \in C^-$ y $u + w \in C^-$, entonces $1_x(u+w) \leq \lambda 1_x(u) + (1-\lambda) 1_x(w)$ para todo $\lambda \in (0, 1)$;
(d) Si $u \in C^+$, $w \in C^-$ y $u + w \in cero(F_x) - \{0\}$, entonces

$$\lambda_0 := \frac{F_x(u)}{F_x(u) - F_x(w)} \geq \frac{1}{2};$$

(e) Si $u \in C^+$, $w \in C^-$ y $u + w \in C^+$, entonces $F_x(u) > -F_x(w)$ y

$$1_x(u+w) \geq \frac{\lambda 1_x(u) + (1-\lambda) 1_x(w)}{2\lambda - 1}$$

para todo $\lambda \in (\lambda_0, 1)$ donde $F(x, v(\lambda_0)) = 0$;
(f) Si $u \in C^+$, $w \in C^-$ son tales que $u + w \in C^-$ y $F_x(u) < -F_x(w)$, entonces

$$1_x(u+w) \leq \frac{\lambda 1_x(u) + (1-\lambda) 1_x(w)}{1 - 2\lambda}$$

para todo $\lambda \in (0, 1/2)$.

***Demostración*.**
Sólo tenemos que mostrar que cada una de las afirmaciones $(b) - (f)$ de este corolario es equivalente a su correspondiente afirmación $(b) - (f)$ del Teorema 4.

(b) $1_x(u+w) \geq \dfrac{F_x(u)1_x(u)+F_x(w)1_x(w)}{F_x(u)+F_x(w)} = \lambda 1_x(u)+(1-\lambda)1_x(w).$

(c) $1_x(u+w) \leq \dfrac{-F_x(u)1_x(u)-F_x(w)1_x(w)}{-F_x(u)-F_x(w)} = \lambda 1_x(u)+(1-\lambda)1_x(w).$

(d) Dado que

$$\lambda_0 := \frac{F_x(u)}{F_x(u)-F_x(w)}$$

es inmediato que $F_x(u) \geq -F_x(w)$ es equivalente a $\lambda_0 \geq 1/2$.

(e) Por (7.3) tenemos que

$$\begin{aligned}
1_x(u+w) &\geq \frac{F_x(u)1_x(u)-F_x(w)1_x(w)}{F_x(u)+F_x(w)} \\
&= \frac{\dfrac{F_x(u)1_x(u)-F_x(w)1_x(w)}{F_x(u)-F_x(w)}}{\dfrac{F_x(u)+F_x(w)}{F_x(u)-F_x(w)}} \\
&= [\lambda 1_x(u)+(1-\lambda)1_x(w)]\frac{-1}{\lambda-(1-\lambda)}
\end{aligned}$$

(f) Por (7.4) tenemos que

$$\begin{aligned}
1_x(u+w) &\leq -\frac{F_x(u)1_x(u)-F_x(w)1_x(w)}{F_x(u)+F_x(w)} \\
&= -\frac{\dfrac{F_x(u)1_x(u)-F_x(w)1_x(w)}{F_x(u)-F_x(w)}}{\dfrac{F_x(u)+F_x(w)}{F_x(u)-F_x(w)}} \\
&= [\lambda 1_x(u)+(1-\lambda)1_x(w)]\frac{-1}{\lambda-(1-\lambda)}
\end{aligned}$$

$\square$

En la Figura 7.2 ilustramos las partes (b) - (f) del corolario del Teorema 4.
Las condiciones (b), (c), (e) y (f) determinan las regiones del cono generado por $\{1_x(u), 1_x(w)\}$ en el cual la indicatriz de una premétrica convexa debe estar contenida. Estas regiones corresponden a las porciones no sombreadas de la Figura 7.2. En otras palabras, el interior de las porciones sombreadas en el cono generado por $\{1_x(u), 1_x(w)\}$ contiene los puntos donde

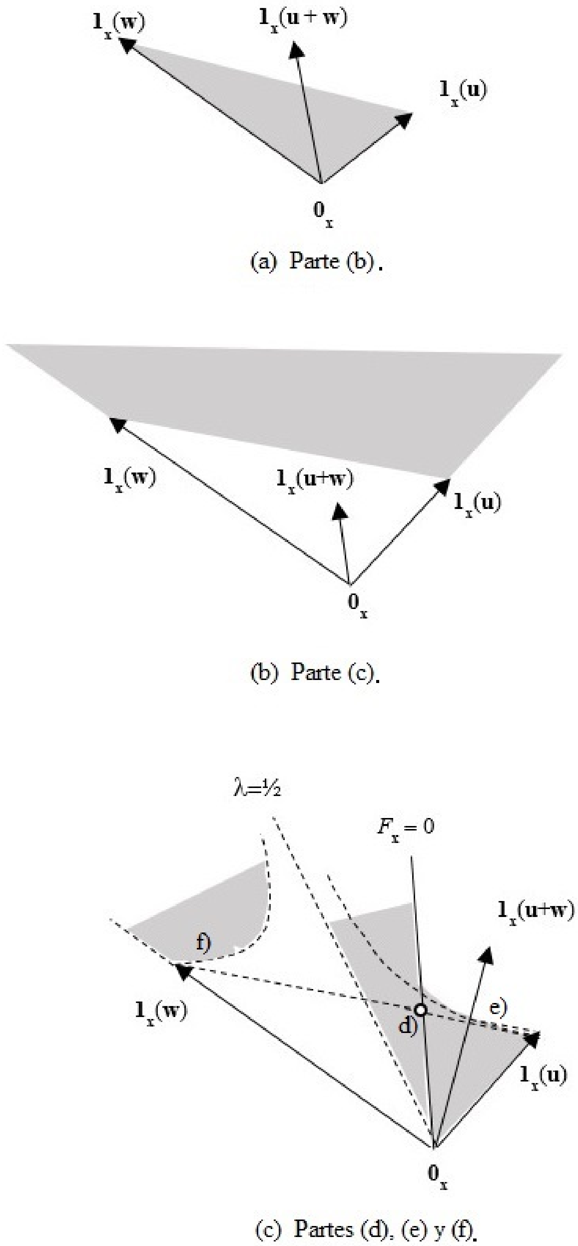
$$F_x(u+w) \leq F_x(u)+F_x(w)$$

no se satisface.
La parte (d) especifica la condición para que una dirección del cono cero sea convexa: el valor de $\lambda_0 \in (0,1)$ donde tal dirección interseca el segmento de línea recta que une $1_x(u)$ y $1_x(w)$

debe estar en el intervalo $(1/2, 1)$, es decir, la distancia euclidiana de $v(\lambda_0)$ a $1_x(u)$ es menor o igual que la distancia euclidiana de $v(\lambda_0)$ a $1_x(w)$:

$$||1_x(u) - v(\lambda_0)|| \leq ||1x(w) - v(\lambda_0)||$$

El punto $v(\lambda_0)$ está representado por un círculo pequeño en la Figura 7.2 (c).



(a) Parte (b).

(b) Parte (c).

(c) Partes (d), (e) y (f).

Figura 6.2: Ilustración de las partes $(b) - (f)$ del Teorema 4 y su corolario.

Capítulo 7

Un ejemplo de una premétrica positiva-negativa derivada de un problema del mundo real

En esta sección, a partir de un problema del mundo real, damos un ejemplo simple de una premétrica que toma valores tanto positivos como no positivos [10],[18].

Un objeto de masa m se desliza en contra de la gravedad y la fricción a lo largo de una curva sobre una superficie suave dada $g : R^2 \to R$ inmersa en R^3 con una velocidad lo suficientemente pequeña como para que las fuerzas inerciales sean despreciables comparadas con las fuerzas de gravedad y las fuerzas de fricción. Por simplicidad, se supone que la superficie suave es un plano inclinado con un ángulo de inclinación θ $(0 \leq \theta \leq \pi/2)$. La proyección de la curva en el plano horizontal R^2 es la curva $x : [a,b] \to R^2$.

En este ejemplo, $F(x,\dot{x})dt$ es la energía que se necesita para deslizar el objeto del punto $(x, g(x))$ al punto $(x+\dot{x}dt, g(x+\dot{x}dt))$ sobre el plano inclinado. Entonces la integral en (1) a lo largo de la curva x de $a \in R^2$ a $b \in R^2$ sobre el plano horizontal es la energía total que se necesita para deslizar el objeto de $(a, g(a))$ a $(b, g(b))$ a lo largo de la correspondiente curva sobre el plano inclinado $z = g(x,y)$. De aquí que, la distancia $d_F(a,b)$ de a a b es la mínima energía requerida para deslizar el objeto de $(a, g(a))$ a $(b, g(b))$ en el plano inclinado.
Por simplicidad, supongamos que $mg = 1$ y tomamos el eje x en la dirección de la pendiente transversal y al eje y en la dirección de la pendiente ascendente. En este problema la función métrica está dada por:

$$F(x,y,\dot{x},\dot{y}) = \dot{y}tan\theta + \mu(\dot{x}^2cos^2\theta + \dot{y}^2)^{1/2}. \tag{7.1}$$

(ver [18]) Esta función F no depende de x y sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $x = 0_x$ para cada $x \in M$.

En la figura 8.1 ilustramos las gráficas de las componentes de la indicatriz γ y el cono *cero*$(F_x) = \{v \in T_xM : F(x,v) = 0\}$ sobre el espacio tangente T_xM.

La relación entre el coeficiente de fricción μ y la pendiente $\tan\theta$ determina si la premétrica (10.1) en x es positiva definida, no negativa o positiva-negativa:

(a) Para $0 < tan\theta < \mu$, F_x es positiva definida, y τ_x es la partición trivial, $\tau_x = T_xM$ (ver Figura 8.1(a));
(b) Para $tan\theta = \mu$, F_x es una premétrica no negativa en x, en este caso τ_x contiene un solo cono abierto positivo, y el cono $cero(F_x)$ tiene solamente una dirección, que es en la que el objeto puede deslizarse hacia abajo por gravedad (ver Figura 8.1(b));
(c) Para $tan\theta > \mu$, F_x es una premétrica positiva-negativa en x, τ_x contiene un solo cono abierto positivo conexo y un cono abierto negativo convexo, y el cono $cero(F_x)$ tiene dos direcciones que corresponden al extremo direcciones en las que el objeto puede deslizarse hacia abajo por gravedad (ver Figura 8.1(c)).

Al usar (a) el Teorema 1, se puede demostrar que en cada uno de estos casos la premétrica F_x es convexa en x. Como se puede verificar, en este ejemplo se satisfacen las condiciones del corolario del Teorema 4 (compare la Figura 8.1(c) con la Fig. 7.2(c)).

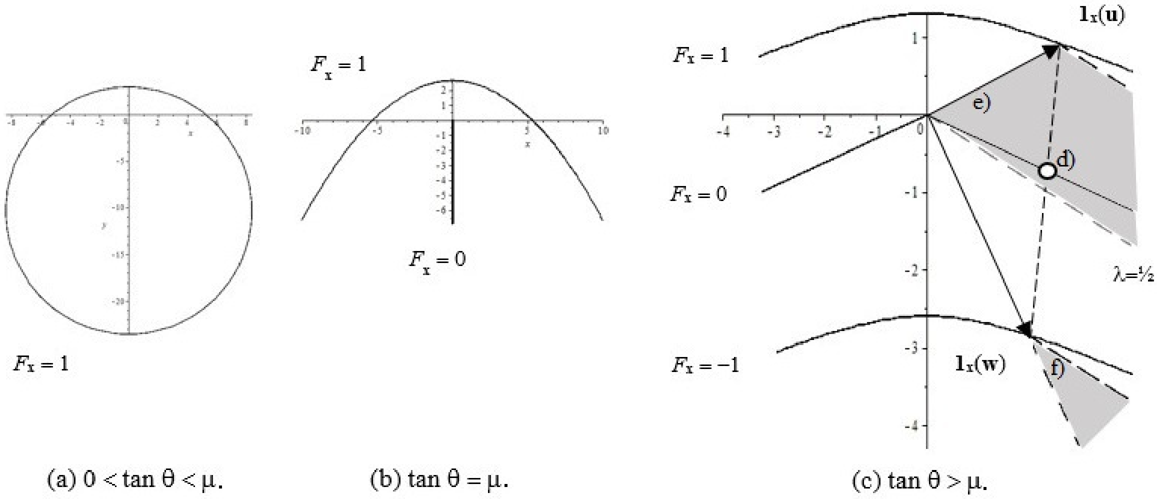


Figura 7.1: Gráficas de la indicatriz de F y el cono $cero(F_x)$ en x.

Conclusiones

El objetivo de este trabajo fue conseguido, es decir, se encontraron las condiciones suficientes y necesarias, en términos de la indicatriz, para que una premétrica positiva-negativa sea convexa.

Con lo anterior, hemos avanzado en el estudio de las funciones que dan lugar a un problema de cálculo variacional. Se comenzó con funciones métricas con muchas propiedades y con el tiempo se han ido relajando, de tal forma que, con este estudio, se ha dado un paso más hacia no requerir la convexidad de la funciones que pueden tomar valores tanto positivos como negativos en la solución del problema y de tal manera, resolver problemas más cercanos a la realidad.

Haber encontrado las condiciones necesarias y suficientes para que una premétrica positiva-negativa sea convexa, resulta útil para resolver el problema de encontrar condiciones bajo las cuales la cerradura convexa de estas premétricas existe. Este último problema es extenso y no inmediatamente obvio, por lo que, como perspectiva de nuestro trabajo, lo sugerimos como un tema para futuras investigaciones.

Apéndice A

Afirmaciones de Buseman y Mayer

Sobre la relación entre la distancia asociada a una función F y la asociada a su cerradura convexa F^*, también válidas para una premétrica F, a condición de que exista la cerradura convexa correspondiente:
(a) La cerradura convexa F^* de una premétrica F determina la función distancia d_F asociada con F y, a la inversa, la cerradura convexa F^* de F está determinada por d_F. Además, $d_F(a,b)$ no cambia si y sólo si la cerradura convexa de la indicatriz de una nueva función $F_1(x(t),\dot{x}(t))$ en cada punto coincide con la cerradura convexa de $F(x(t),\dot{x}(t))$, es decir

$$d_F(a,b) := \min_{x\in\Omega_{[a,b]}} \int_a^b F[x(t),\dot{x}(t)]dt = \min_{x\in\Omega_{[a,b]}} \int_a^b F^*[x(t),\dot{x}(t)]dt = \min_{x\in\Omega_{[a,b]}} \int_a^b F_1^*[x(t),\dot{x}(t)]dt.$$

(b) Todas las direcciones $\dot{x}(t)$ de un arco $F-$geodésico $x(t)$ son $F-$convexas, y por tanto $F(x(t),\dot{x}(t)) = F^*(x(t),\dot{x}(t))$ a lo largo de tal arco $F-$geodésico. Obviamente cada arco $F-$geodésico de a a b es un arco F^*-geodésico de a a b (sin embargo, si F no es convexa, entonces, en general, un arco F^*-geodésico no es un arco $F-$geodésico [14]).
Por lo tanto, para aplicar estos enunciados a una premétrica positiva-negativa F, es necesario determinar si la premétrica F es convexa, y en caso contrario, determinar si la cerradura convexa F^* de F existe. Esta es una de las razones por las cuales el propósito principal de este escrito es dar las condiciones necesarias y suficientes para que una premétrica positiva-negativa sea convexa.

Apéndice B

Observación sobre el Teorema 4

El Teorema 4 (y su Corolario) es exhaustivo en los casos.
Dados F premétrica positiva-negativa, $u, v \in T_xM$, tienen las siguientes posibilidades:

Caso	u	v	$u+v$	**Inciso del Teorema (o demostración)**
1	$u \in C^+$	$v \in C^+$	$u+v \in C^+$	(b)
2	$u \in C^+$	$v \in C^+$	$u+v \in C^-$	(iii)
3	$u \in C^+$	$v \in C^+$	$u+v \in Cero(F_x)$	(iii)
4	$u \in C^+$	$v \in C^-$	$u+v \in C^+$	(e)
5	$u \in C^+$	$v \in C^-$	$u+v \in C^-$	(f) y (iv)
6	$u \in C^+$	$v \in C^-$	$u+v \in Cero(F_x)$	(d)
7	$u \in C^+$	$v \in Cero(F_x)$	$u+v \in C^+$	(ii)
8	$u \in C^+$	$v \in Cero(F_x)$	$u+v \in C^-$	(ii)
9	$u \in C^+$	$v \in Cero(F_x)$	$u+v \in Cero(F_x)$	(ii)
10	$u \in C^-$	$v \in C^+$	$u+v \in C^+$	(e)
11	$u \in C^-$	$v \in C^+$	$u+v \in C^-$	(f)
12	$u \in C^-$	$v \in C^+$	$u+v \in Cero(F_x)$	(d)
13	$u \in C^-$	$v \in C^-$	$u+v \in C^+$	(iii)
14	$u \in C^-$	$v \in C^-$	$u+v \in C^-$	(c)
15	$u \in C^-$	$v \in C^-$	$u+v \in Cero(F_x)$	(iii)
16	$u \in C^-$	$v \in Cero(F_x)$	$u+v \in C^+$	(ii)
17	$u \in C^-$	$v \in Cero(F_x)$	$u+v \in C^-$	(ii)
18	$u \in C^-$	$v \in Cero(F_x)$	$u+v \in Cero(F_x)$	(ii)
19	$u \in Cero(F_x)$	$v \in C^+$	$u+v \in C^+$	(ii)
20	$u \in Cero(F_x)$	$v \in C^+$	$u+v \in C^-$	(ii)
21	$u \in Cero(F_x)$	$v \in C^+$	$u+v \in Cero(F_x)$	(ii)
22	$u \in Cero(F_x)$	$v \in C^-$	$u+v \in C^+$	(ii)
23	$u \in Cero(F_x)$	$v \in C^-$	$u+v \in C^-$	(ii)
24	$u \in Cero(F_x)$	$v \in C^-$	$u+v \in Cero(F_x)$	(ii)
25	$u \in Cero(F_x)$	$v \in Cero(F_x)$	$u+v \in C^+$	(i)
26	$u \in Cero(F_x)$	$v \in Cero(F_x)$	$u+v \in C^-$	(i)
27	$u \in Cero(F_x)$	$v \in Cero(F_x)$	$u+v \in Cero(F_x)$	(i)

Bibliografía

[1] Antonelli, P. L., R. S. Ingarden y M. Matsumoto: *The Theory of Sprays and Finsler Spaces with Applications in Physics and Biology*, volumen 58 de *FTPH*. Kluwer Academic Publishers, 1993.

[2] Busemann, H. y W. Mayer: *On the fundations of caculus of variations*. Trans. AMS, 49, 1941.

[3] Carathéodory, C.: *Caculus of Variations and Partial Differential Equations of the First Order*. American Mathematical Society, 1999.

[4] Chern, S. y Z. Shen: *Riemann-Finsler Geometry*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2005.

[5] Dresden, A.: *An example of the indicatrix in the calculus of variations*. American Mathematical Monthly, 14, páginas 119–126, 1907.

[6] Dresden, A.: *An example of the indicatrix in the calculus of variations (continued)*. American Mathematical Monthly, 14, páginas 143–150, 1907.

[7] Dzhafarov, E. N. y H. Colonius: *Multidimensional Fechnerian scaling: basics*. Journal of Mathematical Psychology, 45, páginas 670–719, 2001.

[8] Giaquinta, M. y S. Hildebrandt: *Calculus of Variations II*. Springer-Verlag, 1996.

[9] Guijarro, Luis: *Campos y Métricas*. Presentación, 2010.

[10] Hodgson, M. J. y R. T. Wong: *The p-centroid problem on an inclined plane*. Operations Research, 35, páginas 221–233, 1987.

[11] Koliha, J. J.: *Metrics, Norms and Integrals. An Introduction to Contemporary Analysis*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2008.

[12] Kot, M: *A First Course in the Calculus of Variations*. American Mathematical Society, 2014.

[13] Loomis, L. y S. Sternberg: *Advanced Calculus*. Jones and Bartlett Publishers, 1990.

[14] López-González, Olivia, Hérica Sánchez-Larios y Servio Guillén-Burguete: *Characterization of geodesics in the small in multidimensional psychological spaces*. Journal of Mathematical Psychology, 70, páginas 12–20, 2016.

[15] Rockafellar, R. T.: *Convex Analysis*. University Press, 1970.

[16] Rund, H.: *The Differential Geometry of Finsler Spaces*. Springer-Verlag, 1959.

[17] Shen, Z.: *Lectures on Finsler Geometry*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2001.

[18] Sánchez-Larios, Hérica y Servio Guillén-Burguete: *Modeling of distance functions on a manifold*. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 11, páginas 3001–3007, 2010.

[19] The European Mathematical Society: *Encyclopedia of Mathematics*, Agosto 2018. URL{https://www.encyclopediaofmath.org/index.php/Main_Page}.

[20] Thurston, Paul: *4-dimensional Busemann G-space are 4-manifolds*. Differential Geometry and its Applications, 6(3):245 – 270, 1996, ISSN 0926-2245. http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0926224596824211.