UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

MÓDULOS CON ANILLOS DE ENDOMORFISMOS ABELIANOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

PERLA CRISTHEL CONDE PÉREZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. JOSÉ RÍOS MONTES

CIUDAD DE MÉXICO, 2019

1. Datos del alumno
Conde
Pérez
Perla Cristhel
993 20 71 285
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
414046191

2. Datos del tutor
Dr
José
Ríos
Montes

3. Datos del sinodal 1
Dr
Jaime
Castro
Pérez

4. Datos del sinodal 2
Dr
Alejandro
Alvarado
García

5. Datos del sinodal 3
Dra
Bertha María
Tomé
Arreola

6. Datos del sinodal 4
M. en C.
César Alejandro
Arellano
Ruiz

7. Datos del trabajo escrito
Módulos con anillos de endomorfismos abelianos
73 p
2019

Agradecimientos

Primeramente me gustaría agradecer a mis padres por su apoyo incondicional y las palabras de aliento que a su lado nunca faltaron.

A mi asesor y profesor, Pepe Ríos, por su amor al álgebra y su gran capacidad para transmitir sus conocimientos. También me gustaría agradecerle por su tiempo, sus enseñanzas y las asesorías dedicadas a la realización de esta tesis.

A mis amigos, por todo su apoyo y por siempre estar ahí presentes. Me aligeraron muchísimo la carga de este trabajo con los buenos ratos que pasamos juntos.

A la UNAM, a la Facultad de Ciencias y al Instituto de Matemáticas, por ser un maravilloso espacio de trabajo y esparcimiento. A todos mis profesores por inculcarme este amor a las matemáticas.

Finalmente, agradezco el apoyo brindado por DGAPA-UNAM a través del Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) en el proyecto con clave IN100517 y con nombre Técnicas reticulares y categóricas con aplicaciones a anilos y sus categorías de módulos.

Índice general

Introducción

En la teoría de grupos abelianos es un problema conocido el describir a los grupos G cuyo anillo de endomorfismos $\mathrm{End}(G)$ es conmutativo, e inversamente describir a los anillos conmutativos que son isomorfos a un anillo de endomorfismos de algún grupo abeliano. Los resultados conocidos son de dos tipos: cuando G tiene torsión entonces tenemos una clasificación completa de ambas partes del problema; mientras que si G es libre de torsión no es posible tal clasificación [4].

El propósito de esta tesis, que es basada en el artículo *Modules with abelian endomorphism rings* [2], es generalizar este problema a teoría de módulos. Para ello, se consideran módulos cuyo anillo de endomorfismos es 'casi conmutativo'. Por ejemplo, se describirán clases de módulos cuyo anillo de endomorfismos tienen idempotentes conmutativos, o en los cuales ideales derechos o izquierdos, según sea el caso, son ideales bilaterales. También se consideran módulos para los cuales los sumandos directos tienen complementos únicos o son totalmente invariantes, dónde estas propiedades serán equivalentes a que el anillo de endomorfismos del módulo tenga idempotentes conmutativos.

En el capítulo 2 se dan resultados importantes relacionados con la teoría de idempotentes, se define la subconmutatividad, se describen anillos en los cuales ideales derechos que son sumandos directos son únicamente complementados y se describen anillos en los cuales ideales unilaterales resultan ideales bilaterales. En el capítulo 3, se prueba que estas propiedades son equivalentes a que el anillo R sea abeliano, es decir, los idempotentes de R conmutan con todo elemento del anillo. Finalmente en los capítulos 4 y 5, los resultados de los capítulos 2 y 3 se aplican a anillos de endomorfismos de módulos. En el capítulo 4, por ejemplo, vemos que si los sumandos del anillo de endomorfismos del módulo M, *End (M)*, son únicamente complementados, entonces los sumandos del módulo M también son únicamente complementados. Finalmente en el capítulo 5, se caracterizan a los submódulos totalmente invariantes y a los sumandos directos de un módulo.

Capítulo 1

Preliminares

A lo largo de este trabajo G denota un grupo abeliano, R denota un anillo asociativo con identidad y Mod-R la categoría de R-módulos derechos unitarios. Cuando sea implícito que trabajamos con un anillo R, entenderemos por módulo un R módulo derecho unitario y por morfismo un Mod-R morfismo. Si $M \in Mod\text{-}R$ y N es un submódulo de M, escribimos $N \leqslant M$ y si N es un sumando directo de M lo denotamos $N \leqslant_{\oplus} M$. En particular, si R es un anillo, $I \leqslant R$ significa que I es un ideal derecho de R. Denotamos al centro del anillo por $Z = Z(R)$ y al conjunto de idempotentes de R por $E = E(R)$. Para M y N Mod-R derechos, $\mathrm{Hom}\,(M, N)$=$\mathrm{Hom}_R\,(M, N)$ indica el grupo aditivo de R-homomorfismos de M en N y $\mathrm{End}\,(M)$=$\mathrm{End}_R\,(M, M)$ el anillo de R-endomorfismos de M.

1.1. Introducción a la teoría de idempotentes

En esta primera sección se darán definiciones y resultados introductorios a la teoría de idempotentes.

Definición 1.1.1. *Un idempotente en un anillo R, es un elemento de R, digamos e, tal que:*

$$e = e^2$$

Observación 1.1.2. *Al conjunto de idempotentes de un anillo R lo denotamos por:*

$$E = E(R) = \{e \in R \mid e = e^2\}$$

Las siguientes son definiciones que caracterizan ciertos tipos de idempotentes, los cuales serán importantes en los siguientes capítulos del trabajo.

Definición 1.1.3. *Sea $e \in E$, e es propio si $e \neq 0$ o $e \neq 1$.*

Definición 1.1.4. *Sean $e, f \in E$, decimos que e y f son ortogonales si $ef = fe = 0$.*

Definición 1.1.5. *Un anillo R es* ***abeliano*** *si $E(R) \subseteq Z(R)$, es decir, los idempotentes del anillo son centrales.*

Ahora se darán teoremas importantes referentes a esta teoría.

Proposición 1.1.6. *El orden en E $\leqslant$, definido por: $e \leqslant f$ si y sólo si $ef = fe = e$, es un COPO (conjunto parcialmente ordenado).*

Demostración.
Sean $e, f, g \in E$.
P.D.1 $\leqslant$ es reflexiva.
Como e es un idempotente, entonces $e = e^2 = (e)(e)$. Así, $e \leqslant e$.
P.D.2 $\leqslant$ es antisimétrica.
Supongamos $e \leqslant f$ y $f \leqslant e$. Como $e \leqslant f$, $ef = fe = e$ y como $f \leqslant e$, $fe = ef = f$. Por lo tanto, $e = ef = fe = f$.
P.D.3 $\leqslant$ es transitiva.
Supongamos $e \leqslant f$ y $f \leqslant g$. Así, $ef = fe = e$ y $fg = gf = f$. De donde:

$$eg = (ef)g = e(fg) = ef = e$$
$$ge = g(fe) = (gf)e = fe = e$$

Por lo tanto, $eg = ge = e$, lo que implica que $e \leqslant g$.
$\therefore (E, \leqslant)$ es un COPO.

$\square$

Definición 1.1.7. *Sea $e \in E$, $e \neq 0$. A e elemento mínimo respecto a $\leqslant$, le llamamos idempotente primitivo.*

Definición 1.1.8. *A un subconjunto $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ de R, le llamamos un conjunto ortogonal máximo de idempotentes primitivos en R, si para toda $i \in \{1, ..., n\}$, e_i es un idempotente primitivo y para toda $i, j \in \{1, ..., n\}$, $i \neq j$, e_i y e_j son ortogonales. Y el subconjunto es máximo con estas propiedades.*

Proposición 1.1.9. *Si $e \in E$, definimos $\bar{e} = 1 - e$. Entonces:*
(i) $\bar{e} \in E$.
(ii) e y $\bar{e}$ son ortogonales.
(iii) Si e es central, entonces $\bar{e}$ es central.
(iv) $\bar{\bar{e}} = e$

Demostración.
Sea $e \in E$.
P.D.1 $\bar{e} \in E$.

$$(\bar{e})(\bar{e}) = (1 - e)(1 - e) = 1 - e - e + e^2 = 1 - 2e + e^2.$$

Como $e \in E$, $e = e^2$. Así,

$$1 - 2e + e^2 = 1 - 2e + e = 1 - e.$$
$$\bar{e}^2 = (\bar{e})(\bar{e}) = 1 - e = \bar{e}.$$

$\therefore \bar{e} \in E$.
P.D.2 e y $\bar{e}$ son ortogonales.

$$(e)(\bar{e}) = (e)(1-e) = e - e^2 = e - e = 0$$

$\therefore$ e y $\bar{e}$ son ortogonales.

P.D.3 Si $e \in Z(R)$, entonces $\bar{e} \in Z(R)$.
Sea $r \in R$.
Como $e \in Z(R)$, entonces $er = re$. Así,

$$(1-e)(r) = r - er = r - re = (r)(1-e).$$

$\therefore \bar{e} \in Z(R)$.

P.D.4 $\bar{\bar{e}} = e$

$$\bar{\bar{e}} = 1 - (1-e) = 1 - 1 + e = e$$

$\square$

Proposición 1.1.10. *Sea R un anillo y sea $e \in E$. e es primitivo si y sólo si $e = f_1 + f_2$, donde $f_1, f_2 \in E$, $f_1, f_2 \neq 0$, f_1 y f_2 son ortogonales, entonces $e = f_1$ o $e = f_2$.*

Demostración.
$\Longrightarrow$ Supongamos que e es primitivo.
Luego si $e = f_1 + f_2$, donde f_1, f_2 son idempotentes ortogonales no cero. Así, de $e = f_1 + f_2$, se sigue que $e - f_2 = f_1$, así $f_1(e - f_2) = f_1 f_1$. De donde, $f_1 e - f_1 f_2 = f_1$. Como f_1 y f_2 son ortogonales, $f_1 f_2 = 0$. Así, $f_1 e = f_1$. Por otro lado, $(e - f_2) f_1 = f_1 f_1$, de donde se sigue que $e f_1 = f_1$. Por lo tanto, $f_1 e = e f_1 = f_1$. Así, $f_1 \leqslant e$, pero como e es primitivo, entonces $e = f_1$.

$\Longleftarrow$ Supongamos que si $e = f_1 + f_2$, donde f_1 y f_2 son idempotentes no cero ortogonales de R, entonces $e = f_1$ o $e = f_2$.
Sea $0 \neq f \in E$, tal que $f \leqslant e$, i. e., $ef = fe = f$. Notemos que, $fe + \bar{f}e = fe + (1-f)e = fe + e - fe = e$. Así, $e = fe + \bar{f}e$. Afirmamos que fe y $\bar{f}e$ son idempotentes ortogonales no cero. Es claro que fe y $\bar{f}e$ no son cero. Para ver que son idempotentes,

$$(fe)(fe) = (fe)(ef) = fe^2 f = f(ef) = f(fe) = f^2 e = fe$$
$$(\bar{f}e)(\bar{f}e) = (e - fe)(e - fe) = e^2 - e(fe) - fe^2 + fefe = e - ef - fe + fe = e - ef = e - fe = \bar{f}e$$

Por otro lado para verificar que son ortogonales,

$$(fe)(\bar{f}e) = fe(e - fe) = fe - fe(fe) = fe - fe = 0$$

Así, por hipótesis como $e = fe + \bar{f}e$, donde fe y $\bar{f}e$ son idempotentes no cero ortogonales, entonces $e = fe$ o $e = \bar{f}e$. Si $e = fe$, entonces $e = f$. Por lo que e es primitivo. Y si $e = \bar{f}e$, entonces $e = e - fe$, así $e = e - f$, de donde $f = 0$, lo cual es una contradicción. Por lo que $e = fe$, y así, e es primitivo.

□

Proposición 1.1.11. *Si $e \in E$ es propio, entonces $R = eR \bigoplus \bar{e}R$ es una descomposición directa propia de R, considerado como un R-módulo derecho.*

Demostración.
P.D.1 Todo $r \in R$ se puede escribir como $r = r_1 + r_2$, donde $r_1 \in eR$ y $r_2 \in \bar{e}R$.
Sea $r \in R$. Así, $er \in eR$ y $(1-e)r \in \bar{e}R$. Notemos que, $er + (1-e)r = er + r - er = r$.
$\therefore$ Todo $r \in R$ se ve como $r = er + \bar{e}r$, donde $er \in eR$ y $\bar{e}r \in \bar{e}R$.
P.D.2 $eR \cap \bar{e}R = \{0\}$.
Sea $x \in eR \cap \bar{e}R$, luego $\exists\, r_1, r_2 \in R$ tal que $x = er_1$ y $x = \bar{e}r_2$. De donde,

$$er_1 = (1-e)(r_2) = r_2 - er_2.$$

Multiplicando ambos lados de la igualdad por e,

$$\begin{aligned} e(er_1) &= e(r_2 - er_2) \\ e^2 r_1 &= er_2 - e^2 r_2 \\ er_1 &= er_2 - er_2 \\ er_1 &= 0 \end{aligned}$$

Por lo que, $x = 0$. Y así, $eR \cap \bar{e}R = \{0\}$.
$\therefore R = eR \bigoplus \bar{e}R$.
Notemos que la descomposición es propia, ya que $e \in E$ es propio, i.e., $e \neq 0$ o $e \neq 1$. Si $e \neq 0$, $eR \neq \{0\}$ y si $e \neq 1$, entonces $\bar{e}R \neq \{0\}$.

□

Proposición 1.1.12. *Sea R un anillo y sea $e \in E$. e es primitivo si y sólo si eR es un sumando ideal derecho mínimo.*

Demostración.
$\Longrightarrow$ Supongamos e es primitivo.
Así, $e \neq 0$. De donde, por la proposición 1.1.11, $R = eR \bigoplus \bar{e}R$. Así, eR es un sumando ideal derecho. Si $eR = I \bigoplus J$, con I, J ideales derechos de R, luego $e = i + j$, donde $i \in I$, $j \in J$. Como e es idempotente, luego $e^2 = (i+j)^2 = i^2 + ij + ji + j^2 = i + j = e$. Como I es ideal derecho, luego $i^2, ij \in I$, así $i^2 + ij \in I$, de igual forma como J es ideal derecho, $j^2 + ji \in J$. Así, si $(i^2 + ij) + (ji + j^2) = i + j$, entonces, $i^2 + ij = i$ y $ji + j^2 = j$. De donde, $i(i+j) = i$ y $j(i+j) = j$. Por lo que, $ie = i$ y $je = j$. También de $ji + j^2 = j$, se sigue que $ji = j - j^2$. Ahora, notemos que como $i - j = ie - je$, luego $0 = ie - je - i + j = (i-j)e - i + j = (i-j)(i+j) - i + j = i^2 - j^2 - i + j = i^2 - i + j - j^2 = i^2 - i + ji = i^2 + ji - i = (i + j - 1)i = (e-1)i$. Por lo que $0 = ei - i$, así $ei = i$. Por lo tanto, $ie = ei = i$. Así, $i \leqslant e$. Como e es primitivo, luego $e = i$.
Probaremos que $I = iR$. Como $i \in I$ e I es un ideal bilateral, luego $iR \subseteq I$.
Ahora, sea $a \in I$. Notemos que $I \subseteq I \bigoplus J = eR$. Así, existe $r \in R$ tal que $a = er$. Así, $a = (i+j)r = ir + jr$. Luego $jr = a - ir \in I$. Pero, $jr \in J$. Por lo que, $jr \in I \cap J = 0$, así $jr = 0$. Por lo tanto, $a = ir \in iR$. De donde, $I \subseteq iR$.
$\therefore I = iR$.

Como $e = i$, luego $iR = I = eR$. Por lo tanto, eR es un sumando ideal derecho mínimo.

$\Longleftarrow$ Supongamos eR sumando ideal derecho mínimo de R.
Supongamos que $e = f_1 + f_2$, donde f_1 y f_2 son idempotentes no cero ortogonales de R. Afirmamos que $eR = f_1R \bigoplus f_2R$.
Como $e = f_1 + f_2$, luego $er = (f_1 + f_2)r = f_1r + f_2r$, donde $f_1r \in f_1R$ y $f_2r \in f_2R$. Y si tomamos $x \in f_1R \cap f_2R$, luego existen r, r' tales que $x = f_1r = f_2r'$. Así, $f_1x = f_1r = f_1f_2r' = 0$. Por lo que, $x = f_1r = 0$. Por lo tanto, $f_1R \cap f_2R = 0$. $\therefore eR = f_1R \bigoplus f_2R$.
Por hipótesis eR es mínimo, así $eR = f_1R$ o $eR = f_2R$. Si $eR = f_1R$, luego existe r tal que $e = f_1r$. Pero $e = f_1 + f_2$, por lo que $f_1r = f_1 + f_2$. Así, $f_1(f_1r) = f_1(f_1 + f_2)$, de donde se sique que $f_1r = f_1$. Por lo tanto, $e = f_1$. De manera análoga si $eR = f_2R$, $e = f_2$. Por lo que $e = f_1$ o $e = f_2$. Por la proposición 1.1.10, e es primitivo.

$\square$

Observación 1.1.13. *Se pueden probar resultados totalmente análogos para los módulos izquierdos Re y $R\bar{e}$.*

Ahora, veremos resultados importantes relacionados con las propiedades de idempotentes en el anillo de endomorfismos del módulo M.

Proposición 1.1.14. *Sea $\varepsilon \in End(M)$, ε un idempotente propio. Entonces, ε determina una descomposición directa no trivial $M = Im(\varepsilon) \bigoplus Nuc(\varepsilon)$.*

Demostración.
Sea $\varepsilon \in End(M)$, ε un idempotente propio.
Afirmamos que $M = \varepsilon(M) \bigoplus \bar{\varepsilon}(M)$.
Sea $m \in M$, $\varepsilon(m) \in \varepsilon(M)$ y $\bar{\varepsilon}(m) \in \bar{\varepsilon}(M)$. Así, $m = \varepsilon(m) - \varepsilon(m) + m$; $m = \varepsilon(m) + m - \varepsilon(m)$; $m = \varepsilon(m) + \bar{\varepsilon}(m)$.
P.D. $\varepsilon(M) \cap \bar{\varepsilon}(M) = \{0\}$.
Sea $x \in \varepsilon(M) \cap \bar{\varepsilon}(M)$. Así, $\exists\, m_1, m_2 \in M$ tal que $\bar{\varepsilon}(m_2) = x = \varepsilon(m_1)$. Por lo que:

$$\varepsilon(m_1) = m_2 - \varepsilon(m_2).$$

Aplicando ε en ambos lados de esta ecuación, tenemos:

$$\varepsilon(\varepsilon(m_1)) = \varepsilon(m_2 - \varepsilon(m_2)).$$

Recordemos que $\varepsilon \in End(M)$ y es un idempotente de $End(M)$, así ε abre sumas y $\varepsilon^2 = \varepsilon$. Por lo que nuestra ecuación queda de la siguiente forma:

$$\varepsilon(m_1) = \varepsilon(m_2) - \varepsilon(m_2)$$
$$\varepsilon(m_1) = 0$$
$$x = 0$$

$\therefore \varepsilon(M) \cap \bar{\varepsilon}(M) = \{0\}$.
$\therefore M = \varepsilon(M) \bigoplus \bar{\varepsilon}(M)$.
Notemos que $\varepsilon(M) = Im(\varepsilon)$ y $Nuc(\varepsilon) = \bar{\varepsilon}(M)$.
$\subseteq |$ Sea $m \in Nuc(\varepsilon)$. Luego, $\varepsilon(m) = 0$. Así,

$$m = m - 0 = m - \varepsilon(m) = \bar{\varepsilon}(m).$$

$\therefore m \in \bar{\varepsilon}(M)$.
$\supseteq |$ Sea $\bar{\varepsilon}(m) \in \bar{\varepsilon}(M)$. Así,

$$\varepsilon(\bar{\varepsilon}(m)) = \varepsilon(m - \varepsilon(m)) = \varepsilon(m) - \varepsilon^2(m) = \varepsilon(m) - \varepsilon(m) = 0.$$

$\therefore \bar{\varepsilon}(m) \in Nuc(\varepsilon)$.
$\therefore \bar{\varepsilon}(M) = Nuc(\varepsilon)$ y $\varepsilon(M) = Im(\varepsilon)$.
$\therefore M = Im(\varepsilon) \bigoplus Nuc(\varepsilon)$.
Observemos que la descomposición directa es no trivial ya que ε es un idempotente propio.

$\square$

Proposición 1.1.15. *Sea $M \in Mod{-}R$. Si $M = N \bigoplus K$ es una descomposición de M, donde $N, K \neq 0$, entonces $\exists!$ idempotente $\varepsilon \in End(M)$, tal que $\varepsilon|_N = id$ y $\varepsilon|_K = 0$.*

Demostración.
Definimos ε de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \varepsilon : N \bigoplus K &\longrightarrow N \bigoplus K \\ n + k &\longmapsto \quad n \end{aligned}$$

P.D.1 $\varepsilon \in End(M)$.
Sean $x_1, x_2 \in M$ y sea $r \in R$. Como $M = N \bigoplus K$, $\exists n_1, n_2 \in N$ y $\exists k_1, k_2 \in K$ tal que $x_1 = n_1 + k_1$ y $x_2 = n_2 + k_2$.
Así,

$$\begin{aligned} \varepsilon(x_1 + x_2) &= \varepsilon((n_1 + k_1) + (n_2 + k_2)) \\ \varepsilon(x_1 + x_2) &= \varepsilon((n_1 + n_2) + (k_1 + k_2)) \\ \varepsilon(x_1 + x_2) &= n_1 + n_2 \\ \varepsilon(x_1 + x_2) &= \varepsilon(n_1 + k_1) + \varepsilon(n_2 + k_2) \\ \varepsilon(x_1 + x_2) &= \varepsilon(x_1) + \varepsilon(x_2) \end{aligned}$$

$\therefore \varepsilon$ abre sumas.

$$\begin{aligned} \varepsilon(x_1 r) &= \varepsilon((n_1 + k_1)r) \\ \varepsilon(x_1 r) &= \varepsilon(n_1 r + k_1 r) \\ \varepsilon(x_1 r) &= n_1 r \\ \varepsilon(x_1 r) &= \varepsilon(n_1 + k_1)r \\ \varepsilon(x_1 r) &= \varepsilon(x_1)r \end{aligned}$$

$\therefore \varepsilon$ saca escalares.
$\therefore \varepsilon \in End(M)$.

P.D.2 ε es un idempotente.
Sea $m \in M$. Así, $\exists n \in N$ y $\exists k \in K$ tal que $m = n + k$.

$$\varepsilon^2(m) = \varepsilon^2(n+k) = \varepsilon(\varepsilon(n+k)) = \varepsilon(n) = n = \varepsilon(n+k) = \varepsilon(m)$$

P.D.3 $\varepsilon|_N = id$ y $\varepsilon|_K = 0$.
La función ε que definimos es la proyección de M en N. Así, es claro que de la definición se sigue que $\varepsilon|_N = id$ y $\varepsilon|_K = 0$.

P.D.4 La unicidad.
Sea $g \in End(M)$ un idempotente tal que $g|_N = id$ y $g|_K = 0$.
Así $\forall n \in N$, $\forall k \in K$,

$$g(n+k) = g(n) + g(k) = n + 0 = n = \varepsilon(n+k)$$

$\therefore \varepsilon$ es única con estas propiedades.

$\square$

Observación 1.1.16. *Decimos que $N \bigoplus K$ es la descomposición correspondiente a ε y que ε es el idempotente correspondiente a la descomposición $M = N \bigoplus K$.*

Proposición 1.1.17. *Sea $M \in Mod{-}R$. Si M es un módulo inescindible, entonces los únicos idempotentes en $End(M)$ son el cero y la identidad.*

Demostración Sea $f \in E(End(M))$. Supongamos que $f \neq 0$. Así, por la proposición 1.1.14, $M = f(M) \bigoplus \bar{f}(M)$. Como M es inescindible, entonces $M = f(M)$ o $M = \bar{f}(M)$.
Si $M = f(M)$, luego $\bar{f}(M) = 0$, por lo que $Id - f(M) = 0$, así $\forall m \in M$, $Id(m) - f(m) = 0$, lo que implica que $f = Id$.
Si $M = \bar{f}(M)$, entonces $f(M) = 0$, lo que implica que $f = 0$, lo cual es una contradicción.
$\therefore$ Los únicos idempotentes en $End(M)$ son el cero y la identidad.

$\square$

1.2. Conceptos adicionales

En esta sección daremos conceptos y resultados relacionados con la teoría de anillos, la teoría de módulos y la teoría de retículas que resultan relevantes para este trabajo.

Definición 1.2.1. *Sea R un anillo. Decimos que $u \in R$ es una unidad del anillo si $\exists v \in R$ tal que $uv = vu = 1_R$. Al grupo de unidades de R lo denotamos $U(R) = U$.*

Definición 1.2.2. *Sea R un anillo, sea $S \subseteq R$, $S \neq \emptyset$. S es conmutativo si:*

$$\forall s_1, s_2 \in S \qquad s_1 s_2 = s_2 s_1$$

Definición 1.2.3. *Una retícula es un COPO (conjunto parcialmente ordenado) $(A, \leq)$, que cumple que $\forall a, b \in A$, existe el ínfimo y el supremo de $\{a, b\}$, denotados por $a \wedge b$ y $a \vee b$ respectivamente.*

Definición 1.2.4. *Una retícula completa es un conjunto parcialmente ordenado* $(A, \leq)$, *que cumple que* $\forall B \subseteq A$, *existe el ínfimo y el supremo de* B, *denotados por* $\bigwedge B$ *y* $\bigvee B$ *respectivamente.*

Definición 1.2.5. *Sea* $(A, \leq)$ *una retícula. Decimos que la retícula es acotada si* $\exists\, 0, 1 \in A$ *tal que:*

$$\forall a \in A,\ a \wedge 1 = a \ \text{y}\ a \vee 1 = 1.$$
$$\forall a \in A,\ a \wedge 0 = 0 \ \text{y}\ a \vee 0 = a.$$

Definición 1.2.6. *Sea* $(A, \leq)$ *una retícula acotada. Decimos que* $(A, \leq)$ *es una retícula complementada si* $\forall a \in A$, *a tiene complemento, es decir:*

$$\forall a \in A\ \exists b \in A \ \text{tal que}\ a \vee b = 1 \ \text{y}\ a \wedge b = 0.$$

Definición 1.2.7. *Sea* $(A, \leq)$ *una retícula. La retícula es distributiva si* $\forall a, b, c \in A$, *se cumple:*

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

Definición 1.2.8. *Sea* $(A, \leq)$ *una retícula. Decimos que* $(A, \leq, \wedge, \vee)$ *es un álgebra de Boole si es una retícula complementada distributiva.*

Definición 1.2.9. *Sean* A, B *álgebras Booleanas.* $f : A \to B$ *es un homomorfismo si* $\forall a_1, a_2 \in A$:
1. $f(a_1 \vee_A a_2) = f(a_1) \vee_B f(a_2)$
2. $f(a_1 \wedge_A a_2) = f(a_1) \wedge_B f(a_2)$
3. $f(0_A) = 0_B$
4. $f(1_A) = 1_B$

Decimos que f es un isomorfismo de álgebras booleanas si f es un homomorfismo biyectivo.

Definición 1.2.10. *Sea* $M \in Mod{-}R$ *y sea* $N \leqslant M$. *Decimos que* N *es totalmente invariante si* $\forall f \in End(M)$, $f(N) \subseteq N$.

Definición 1.2.11. *Sea* $M \in Mod{-}R$, $M = N \bigoplus K$. *Decimos que* N *es únicamente complementado, si* $\forall J \leqslant M$ *tal que* J *es un complemento para* N *en* M, $J \simeq K$.

Definición 1.2.12. *Sea* $M \in Mod{-}R$ *y sea* $H \subseteq M$, *denotamos por* HM *al submódulo de* M *generado por* H. *Donde*

$$HM = \{x \in M \mid x = \sum_{i=1}^{n} h_i r_i \ \text{donde}\ r_i \in R,\ h_i \in H\}$$

Definición 1.2.13. *Sea* $\{N_\lambda\}_\Lambda$ *una familia de R-módulos derechos y* $M \in Mod{-}R$. M *es un producto subdirecto de* $\{N_\lambda\}_\Lambda$ *si existe un monomorfismo* $\varphi : M \longrightarrow \prod_\Lambda \{N_\lambda\}_\Lambda$ *tal que para toda* $\lambda \in \Lambda$, $\pi_\lambda \varphi$ *es un epimorfismo, donde* π_λ *es la proyección de* $\prod_\Lambda \{N_\lambda\}_\Lambda$ *en* N_λ.

Definición 1.2.14. *Sean* $A, B, C \in Mod{-}R$.
$0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ *es una sucesión exacta corta si:*
1. α *es inyectiva.*
2. β *es sobreyectiva.*
3. $Im\ \alpha = Nuc\ \beta$

Teorema 1.2.15. *Sean* $M, M', N, N' \in Mod{-}R$. *Entonces,*

$$Hom_R(M \bigoplus M', N) \cong Hom_R(M, N) \bigoplus Hom_R(M', N)$$

$$Hom_R(M, N \bigoplus N') \cong Hom_R(M, N) \bigoplus Hom_R(M, N')$$

Demostración.
Definamos:

$$\begin{gathered}\varphi : Hom_R(M \bigoplus M', N) \longrightarrow Hom_R(M, N) \bigoplus Hom_R(M', N) \\ \varphi(f)(m, m') = (f(m, 0), f(0, m'))\end{gathered}$$

P.D.1 φ es un homomorfismo.
Sean $f, g \in Hom_R(M \bigoplus M', N)$, sea $r \in R$.
Primero veamos que, $\varphi(f + g) = \varphi(f) + \varphi(g)$. Así, sea $(m, m') \in M \bigoplus M'$.

$$\begin{aligned}\varphi(f+g)(m, m') &= ((f+g)(m, 0), (f+g)(0, m')) \\ &= (f(m, 0) + g(m, 0), f(0, m') + g(0, m')) \\ &= (f(m, 0), f(0, m')) + (g(m, 0), (g(0, m')) \\ &= \varphi(f)(m, m') + \varphi(g)(m, m') \\ &= \varphi(f) + \varphi(g)(m, m')\end{aligned}$$

$\therefore \varphi$ es un homomorfismo.
P.D.2 φ es inyectiva.
Sea $f \in Hom_R(M \bigoplus M', N)$.

$$\begin{aligned}\varphi(f) = 0 &\Leftrightarrow \forall (m, m') \in M \bigoplus M',\ \varphi(f)(m, m') = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall (m, m') \in M \bigoplus M',\ (f(m, 0), f(0, m')) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall (m, m') \in M \bigoplus M',\ f(m, 0) = 0 \ y \ f(0, m') = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall (m, m') \in M \bigoplus M',\ f(m, m') = 0 \\ &\Leftrightarrow f = 0\end{aligned}$$

$\therefore \varphi$ es inyectiva.
P.D.3 φ es suprayectiva.
Sea $(f, g) \in Hom_R(M, N) \bigoplus Hom_R(M', N)$. Definamos $h : M \bigoplus M' \longrightarrow N, h((m, m')) = f(m) + g(m')$.

Notemos que $h \in Hom_R(M \bigoplus M', N)$.
Sean $(m, m'), (m_1, m_1') \in M \bigoplus M'$, y sea $r \in R$. Así:

$$\begin{aligned} h((m, m') + (m_1, m_1')) &= h((m + m_1, m' + m_1')) \\ &= f(m + m_1) + g(m' + m_1') \\ &= f(m) + f(m_1) + g(m') + g(m_1') \\ &= f(m) + g(m') + f(m_1) + g(m_1') \\ &= h((m, m')) + h((m_1, m_1')) \end{aligned}$$

$\therefore h$ abre sumas.

$$\begin{aligned} h((m, m')r) &= h((mr, m'r)) \\ &= f(mr) + g(m'r) \\ &= (f(m) + g(m'))r \\ &= h((m, m'))r \end{aligned}$$

$\therefore h \in Hom_R(M \bigoplus M', N)$.
Notemos que,

$$\begin{aligned} \varphi(h)(m, m') &= (h(m, 0), h(0, m')) \\ &= (f(m) + g(0), f(0) + g(m')) \\ &= (f(m, 0) + g(0, m')) \end{aligned}$$

$\therefore \varphi(h) = (f, g)$.
$\therefore \varphi$ es suprayectiva.
$\therefore \varphi$ es un isomorfismo.
Análogamente, se prueba que $Hom_R(M, N \bigoplus N') \cong Hom_R(M, N) \bigoplus Hom_R(M, N')$.

$\square$

Capítulo 2

Sumandos de anillos con complementos únicos

En esta sección, se examina la conexión entre un idempotente e central y la unicidad de los complementos del sumando directo eR. Empezamos con algunos resultados elementales.

Proposición 2.0.1. *Sea R un anillo. Sea $R_R = I \bigoplus J$ una descomposición directa de R, donde I, J son ideales derechos. Entonces, existe $e \in E$ tal que $I = eR$ y $J = \bar{e}R$.*

Demostración.
Como $1 \in R$, entonces,

$$1 = e + f, \text{ donde } e \in I,\ f \in J.$$

Luego,

$$e = (1)e = (e + f)e = e^2 + fe$$

Pero $e \in I$ tiene una expresión única, $e = e + 0$. Entonces $e^2 + fe = e + 0 \implies e^2 = e$ y $fe = 0$. Puesto que $e^2 \in I$ y $fe \in J$.
$\therefore e \in E$.
Afirmamos que $I = eR$.
Sea $i \in I$, como $1 = e + f$,

$$i = (1)i = (e + f)i = ei + fi$$

Notemos que como I, J son ideales derechos y $e \in I$ y $f \in J$, se tiene que $ei \in I$ y $fi \in J$. Por otro lado, $i \in I$ tiene una expresión única: $i = i + 0$, por lo que:

$$i + 0 = ei + fi$$

Lo que implica que $i = ei$ y $0 = fi$.
$\therefore I \subseteq eR$.
Como $e \in I$ e I es un ideal derecho, entonces $eR \subseteq I$.
$\therefore I = eR$.
Por otro lado, probemos que $J = fR$.
Sea $j \in J$, como $1 = e + f$,

$$j = (1)j = e + f(j) = ej + fj$$

Notemos que como I, J son ideales derechos y $e \in I$ y $f \in J$, se tiene que $ej \in I$ y $fj \in J$. Por otro lado, $j \in J$ tiene una expresión única: $j = 0 + j$, por lo que,

$$0 + j = ej + fj$$

Lo que implica que $0 = ej$ y $j = fj$.
$\therefore J \subseteq fR$.
Como $f \in J$ y J es un ideal derecho, entonces $fR \subseteq J$.
$\therefore J = fR$.
Observación. $1 = e + f \implies 1 - e = e + f - e \implies 1 - e = f$
$\therefore J = \bar{e}R$
$\therefore R_R = eR \bigoplus \bar{e}R$.

□

Proposición 2.0.2. *Sea R un anillo. Sea $e \in E$ y $u \in U$. Entonces $euR = eR$.*

Demostración.
Sea $r \in R$. Así, $eur \in euR$. $eur = e(ur) \in eR$. Por lo tanto, $euR \subseteq eR$.
Por otro lado, $er \in eR$. Como $u \in U$, entonces $\exists v \in R$ tal que $uv = vu = 1$. Y así, $er = e(1)r = e(uv)r = eu(vr) \in euR$. Por lo tanto, $eR \subseteq euR$.
$\therefore euR = eR$.

□

Proposición 2.0.3. *Sea R un anillo y sean $e, f \in E(R)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*
(i) $eR = fR$.
(ii) $ef = f$ y $fe = e$.
(iii) Existe $r \in R$ tal que $f = e + er\bar{e}$.
(iv) Existe $u \in U(R)$ tal que $f = eu$.
(v) $R\bar{e} = R\bar{f}$.

Demostración.
$(i) \Rightarrow (ii)$ Como $e \in eR = fR$, $\exists r_1 \in R$ tal que $e = fr_1$. Así,

$$\begin{gathered} e - fe = fr_1 - f(fr_1) = fr_1 - f^2 r_1 = fr_1 - fr_1 = 0 \\ e - fe = 0 \\ e = fe \end{gathered}$$

Ahora, como $f \in fR = eR$, $\exists r_2 \in R$ tal que $f = er_2$. Así,

$$\begin{gathered} f - ef = er_2 - e(er_2) = er_2 - e^2 r_2 = er_2 - er_2 = 0 \\ f - ef = 0 \\ f = ef \end{gathered}$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Notemos que,

$$e + ef\bar{e} = e + ef(1-e) = e + ef - efe$$

Por hipótesis, $ef = f$ y $fe = e$, así:

$$e + ef - efe = e + f - e(e) = e + f - e = f$$

$\therefore e + ef\bar{e} = f$.
$\therefore \exists f \in R$, tal que $f = e + ef\bar{e}$.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Por hipótesis $\exists r \in R$ tal que $f = e + er\bar{e}$. Sea $u = 1 + er\bar{e}$. Probemos que $u \in U$.
Consideremos $v = 1 - er\bar{e}$, así,

$$uv = (1 + er\bar{e})(1 - er\bar{e}) = (1 + er\bar{e}) - (1 + er\bar{e})(er\bar{e}) = 1 + er\bar{e} - er\bar{e} - er\bar{e}er\bar{e}$$

Recordemos que e y $\bar{e}$ son ortogonales, por lo que,

$$1 + er\bar{e} - er\bar{e} - er\bar{e}er\bar{e} = 1 + er\bar{e} - er\bar{e} + 0 = 1$$

$\therefore uv = 1$
Por otro lado,

$$vu = (1 - er\bar{e})(1 + er\bar{e}) = (1 + er\bar{e}) - (er\bar{e})(1 + er\bar{e}) = 1 + er\bar{e} - er\bar{e} - er\bar{e}er\bar{e} = 1$$

$\therefore vu = 1$.
$\therefore u \in U$.
Así, como por hipótesis $f = e + er\bar{e}$ y $e \in E$, tenemos lo siguiente:

$$f = e + e^2 r\bar{e}$$
$$f = e(1 + er\bar{e})$$
$$f = eu$$

$(iv) \Rightarrow (i)$ Por hipótesis $\exists u \in U(R)$, tal que $f = eu$.
Por proposición 2.0.2, sabemos que $euR = eR$. Así,

$$fR = (eu)R = eR$$
$$fR = eR$$

$(ii) \Rightarrow (v)$
P.D.1 $R\bar{e} \subseteq R\bar{f}$.
Sea $r\bar{e} \in R\bar{e}$. Por hipótesis $ef = f$, así:

$$1 - e = 1 - e - f + f = 1 - e - f + ef = 1 - e - (1-e)f = (1-e)(1-f)$$

Multiplicando por r ambos lados de la igualdad,

$$r\bar{e} = r(1-e) = r(1-e)(1-f) = (r - re)(1-f) = (r - re)\bar{f}$$

Por lo que, $r\bar{e} = (r - re)\bar{f} \in R\bar{f}$.
$\therefore R\bar{e} \subseteq R\bar{f}$.
P.D.2 $R\bar{f} \subseteq R\bar{e}$.
Sea $r\bar{f} \in R\bar{f}$. Como por hipótesis $fe = e$:

$$1 - f = 1 - f - e + e = 1 - f - e + fe = 1 - f - (1 - f)e = (1 - f)(1 - e)$$

Multiplicando por r ambos lados de la igualdad:

$$r\bar{f} = r(1 - f) = r(1 - f)(1 - e) = (r - rf)(1 - e) = (r - re)\bar{e}$$

Por lo que, $r\bar{f} = (r - rf)\bar{e} \in R\bar{e}$.
$\therefore R\bar{f} \subseteq R\bar{e}$.
$\therefore R\bar{e} = R\bar{f}$.
$(v) \Rightarrow (ii)$ Como $\bar{e} = 1(1 - e) \in R\bar{e} = R\bar{f}$, entonces $\exists r_1 \in R$ tal que:

$$1 - e = r_1(1 - f) = r_1 - r_1 f.$$

Por otro lado, como $\bar{f} = 1(1 - f) \in R\bar{f} = R\bar{e}$, entonces $\exists r_2 \in R$ tal que:

$$1 - f = r_2(1 - e) = r_2 - r_2 e.$$

Por lo que: $e = 1 - r_1 + r_1 f$ y $f = 1 - r_2 + r_2 e$. Así,

$$ef = (1 - r_1 + r_1 f)f = f - r_1 f + r_1 f^2 = f - r_1 f + r_1 f = f$$
$$fe = (1 - r_2 + r_2 e)e = e - r_2 e + r_2 e^2 = e - r_2 e + r_2 e = e$$

$\therefore ef = f$ y $fe = e$.

$\square$

Los complementos directos de un sumando directo que es ideal derecho pueden caracterizarse de la siguiente forma.

Lema 2.0.4. *Sea R un anillo, sean $e, g \in E$ y $R = eR \bigoplus gR$. Entonces $gR = (\bar{e} - er\bar{e})R$ para alguna $r \in R$ adecuada. De manera inversa, para todo $r \in R$, $(\bar{e} - er\bar{e})R$ es un complemento directo para eR.*

Demostración. De acuerdo con la proposición 2.0.1 $\exists f \in E$ tal que $eR = fR$ y $gR = \bar{f}R$. Así, por la proposición 2.0.3 $\exists r \in R$ tal que:

$$f = e + er\bar{e}$$

Y así,

$$\bar{f} = 1 - f = 1 - (e + er\bar{e}) = 1 - e - er\bar{e} = \bar{e} - er\bar{e}$$

Entonces,

$$gR = \bar{f}R = (\bar{e} - er\bar{e})R$$

De manera inversa, sea $r \in R$. Veamos que $(\bar{e} - er\bar{e})R$ es un complemento directo para eR. Consideremos $f = e + er\bar{e}$, y veamos que $f \in E$.

$$f^2 = (f)(f) = (e + er\bar{e})(e + er\bar{e}) = (e + er\bar{e})e + (e + er\bar{e})(er\bar{e}) = \\ e^2 + er\bar{e}e + e^2 r\bar{e} + er\bar{e}er\bar{e} = e + er\bar{e} = f$$

$\therefore f \in E$.
Entonces por la proposición 1.1.11 $R = fR \bigoplus \bar{f}R$.
P.D.1 $fR = eR$
Sea $s \in R$, $fs \in fR$. Como $f = e + er\bar{e}$, entonces $fs = (e + er\bar{e})s = e(1 + r\bar{e})s = e(s + r\bar{e}s) \in eR$.
$\therefore fR \subseteq eR$.
Por otro lado, notemos que:

$$(e+er\bar{e})(1-er\bar{e}) = (e+er\bar{e})-(e+er\bar{e})(er\bar{e}) = e+er\bar{e}-e^2r\bar{e}+er\bar{e}er\bar{e}) = e+er\bar{e}-er\bar{e} = e$$

Así, $es \in eR$ y,

$$es = (e + er\bar{e})(1 - er\bar{e})s = f(s - er\bar{e}s)$$

Por lo que, $es = f(s - er\bar{e}s) \in fR$.
$\therefore eR \subseteq fR$.
$\therefore eR = fR$.
P.D.2 $\bar{f}R = (\bar{e} - er\bar{e})R$
Como $f = e + er\bar{e}$, entonces:

$$\bar{f} = 1 - f = 1 - e - er\bar{e} = \bar{e} - er\bar{e}$$

$\therefore \bar{f}R = (\bar{e} - er\bar{e})R$.
$\therefore R = eR \bigoplus (\bar{e} - er\bar{e})R$.
$\therefore (\bar{e} - er\bar{e})R$ es un complemento directo para eR.

□

Definición 2.0.5. *Decimos que eR tiene complemento único, o es únicamente complementado, si $R = eR \bigoplus gR$ implica que $\bar{e}R = gR$.*

Proposición 2.0.6. *eR tiene complemento único si y sólo si $eR\bar{e} = 0$.*

Demostración.
$\Longrightarrow$ Supongamos que eR tiene complemento único.
Por el lema 2.0.4 sabemos que $\forall r \in R$ $(\bar{e} - er\bar{e})R$ es un complemento directo para eR y como eR es únicamente complementado entonces,

$$\forall r \in R,\ (\bar{e} - er\bar{e})R = \bar{e}R$$

Ahora, por la proposición 2.0.3 tenemos que $\forall r \in R$:

$$(\bar{e} - er\bar{e})\bar{e} = \bar{e} \\ (\bar{e})^2 - er(\bar{e})^2 = \bar{e} \\ \bar{e} - er\bar{e} = \bar{e}$$

Lo que implica que: $\forall r \in R$ $er\bar{e} = 0$.
$\therefore eR\bar{e} = 0$.
$\Longleftarrow$ Supongamos que $eR\bar{e} = 0$.
Por el lema 2.0.4 todos los complementos de eR son de la forma $(\bar{e} - er\bar{e})R$. Como $eR\bar{e} = 0$, tenemos que, $\bar{e} - er\bar{e} = \bar{e}$. Así, si todos los complementos de eR son de la forma $(\bar{e} - er\bar{e})R$, entonces $(\bar{e} - er\bar{e})R = \bar{e}R$. Por lo tanto eR tiene complemento único.

$\square$

Observación 2.0.7. *Análogamente, eR es el complemento directo único de $\bar{e}R$, es decir $\bar{e}R$ es únicamente complementado, si y sólo si $\bar{e}Re = 0$.*

Ahora consideremos, no sólo cuándo el complemento de eR es único, sino cuándo su idempotente generador, $\bar{e}$, lo es.

Proposición 2.0.8. *Sea R un anillo, $e, f \in E$ y $R = eR \bigoplus fR$. Entonces $f = \bar{e}$ si y sólo si $ef = fe$.*

Demostración.
$\Longrightarrow$ Supongamos $f = \bar{e}$.
Recordemos que e y $\bar{e}$ son ortogonales, $e\bar{e} = \bar{e}e = 0$.

$$\begin{aligned} ef = e\bar{e} = 0 \\ fe = \bar{e}e = 0 \end{aligned}$$

$\therefore ef = fe$.
$\Longleftarrow$ Supongamos $ef = fe$. Veamos que $fR = (ef)R \bigoplus (\bar{e}f)R$. Para ello, observemos primero que $\bar{e}f = f\bar{e}$.

$$\bar{e}f = (1-e)f = f - ef = f - fe = f(1-e) = f\bar{e}$$

Notemos que,

$$(ef)R = (fe)R \subseteq fR$$
$$(\bar{e}f)R = (f\bar{e})R \subseteq fR$$

Y como $(ef)R \subseteq eR$ y $(\bar{e}f)R \subseteq \bar{e}R$, y $eR \cap \bar{e}R = \{0\}$, entonces $(ef)R \cap (\bar{e}f)R = \{0\}$.
$\therefore (ef)R \bigoplus (\bar{e}f)R \subseteq fR$.
Por otro lado, sea $fr \in fR$, así,

$$fr = (f+0)r = (f+ef-ef)r = (ef+f-ef)r = (ef+(1-e)f)r = efr+(1-e)fr = efr+\bar{e}fr$$

$$fr = efr + \bar{e}fr \in (ef)R \bigoplus (\bar{e}f)R$$

$\therefore fR \subseteq (ef)R \bigoplus (\bar{e}f)R$.
$\therefore fR = (ef)R \bigoplus (\bar{e}f)R$.
Ahora, notemos que $(ef)R = (fe)R \subseteq eR \cap fR = \{0\}$. Por lo que $ef = 0$. Y así, $(ef)R = 0$.
$\therefore fR = (\bar{e}f)R$.
$fR = (\bar{e}f)R \subseteq \bar{e}R$.

Afirmamos que $\bar{e}R \subseteq fR$. Sea $\bar{e}r \in \bar{e}R$. Como $R = eR \bigoplus fR$, entonces $\exists s, t \in R$ tal que $r = es + ft$. Así,

$$\bar{e}r = (1-e)r = (1-e)(es+ft) = es + ft - e^2s - eft = es + ft - es = ft$$

$$\bar{e}r = ft \in fR$$

$\therefore \bar{e}R \subseteq fR$.
$\therefore \bar{e}R = fR$.
Como $\bar{e} \in \bar{e}R = fR$ y $f \in fR = \bar{e}R$ entonces $\exists r_1, r_2 \in R$ tal que,

$$\bar{e} = fr_1 \text{ y } f = \bar{e}r_2.$$

Ahora,

$$f\bar{e} = f(fr_1) = f^2r_1 = fr_1 = \bar{e}$$
$$\bar{e}f = \bar{e}(\bar{e}r_2) = (\bar{e})^2r_2 = \bar{e}r_2 = f$$

Ya probamos que $f\bar{e} = \bar{e}f$. Por lo que $\bar{e} = f\bar{e} = \bar{e}f = f$.
$\therefore \bar{e} = f$.

□

Una propiedad similar concierne a los ideales derechos, que conmutan, generados por idempotentes.

Proposición 2.0.9. *Sea R un anillo, $e, f \in E$ y $R = eR \bigoplus fR$. Si $\bar{e}RfR = fR\bar{e}R$, entonces $fR = \bar{e}R$.*

Demostración.
P.D.1 $\bar{e}R \subseteq (\bar{e}f)R$
Sea $\bar{e}r \in eR$. Como $R = eR \bigoplus fR$ y $r \in R$, entonces $\exists r_1, r_2 \in R$ tales que $r = er_1 + fr_2$. Así,

$$\bar{e}r = \bar{e}(er_1 + fr_2) = \bar{e}er_1 + \bar{e}fr_2 = \bar{e}fr_2$$

$\therefore \bar{e}r = \bar{e}fr_2 \in (\bar{e}f)R$.
$\therefore \bar{e}R \subseteq (\bar{e}f)R$.

P.D.2 $(\bar{e}f)R \subseteq \bar{e}RfR$
Sea $(\bar{e}f)r \in (\bar{e}f)R$. Luego,

$$(\bar{e}f)r = \bar{e}(1)f(r)$$

$\therefore (\bar{e}f)r = \bar{e}(1)f(r) \in \bar{e}RfR$.
$\therefore (\bar{e}f)R \subseteq \bar{e}RfR$.

P.D.3. $fR\bar{e}R \subseteq fR$
Sea $\sum_{i=1}^{n} fr_i\bar{e}s_i \in fR\bar{e}R$ donde $\forall i \in \{1, ..., n\}$ $r_i, s_i \in R$. Así,

$$\sum_{i=1}^{n} fr_i\bar{e}s_i = f(\sum_{i=1}^{n} r_i\bar{e}s_i) \in fR$$

Por lo tanto, $\sum_{i=1}^{n} fr_i\bar{e}s_i \in fR$.
$\therefore fR\bar{e}R \subseteq fR$.

Así, tenemos que:
$$\bar{e}R \subseteq (\bar{e}f)R \subseteq \bar{e}RfR = fR\bar{e}R \subseteq fR$$
$\therefore \bar{e}R \subseteq fR$.

P.D.4 $fR \subseteq fR\bar{e}R$
Por hipótesis $R = eR \bigoplus fR$, así por el lema 2.0.4 $\exists r \in R$ tal que $fR = (\bar{e} - er\bar{e})R$.
Sea $fr_1 \in fR$, así $\exists r_2 \in R$ tal que $fr_1 = (\bar{e} - er\bar{e})r_2$.

$$fr_1 = f(fr_1) = f(\bar{e}r_2 - er\bar{e}r_2) = f\bar{e}r_2 - fer\bar{e}r_2$$

$$fr_1 = f\bar{e}r_2 - fer\bar{e}r_2 = f(1)\bar{e}r_2 + f(-er)\bar{e}(r_2) \in fR\bar{e}R$$

$\therefore fr_1 \in fR\bar{e}R$
$\therefore fR \subseteq fR\bar{e}R$.
P.D.5 $\bar{e}RfR \subseteq \bar{e}R$
Sea $\sum_{i=1}^{n} \bar{e}r_ifs_i \in \bar{e}RfR$ donde $\forall i \in \{1, ..., n\}$ $r_i, s_i \in R$. Así,

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{e}r_ifs_i = \bar{e}(\sum_{i=1}^{n} r_ifs_i) \in \bar{e}R$$

Por lo tanto, $\sum_{i=1}^{n} \bar{e}r_ifs_i \in \bar{e}R$.
$\therefore \bar{e}RfR \subseteq \bar{e}R$.

Y así,
$$fR \subseteq fR\bar{e}R = \bar{e}RfR \subseteq \bar{e}R$$
$\therefore \bar{e}R = fR$.

□

Una propiedad de los elementos idempotentes de un anillo relacionada con la complementación única es la subconmutatividad.

Definición 2.0.10. [6] Un elemento $a \in R$ es subconmutativo derecho si $Ra \subseteq aR$ y es subconmutativo izquierdo si $aR \subseteq Ra$. Decimos que a es subconmutativo si es subconmutativo izquierdo y subconmutativo derecho. Un subconjunto de R es subconmutativo derecho (izquierdo) si cada uno de sus elementos lo es.

El concepto de subconmutatividad 'por un lado' aparece frecuentemente en la literatura de teoría de anillos bajo distintos nombres. Por ejemplo, Birkenmeier [1] define que un idempotente $e \in E$ es semicentral derecho (izquierdo) si $eR = eRe$ ($Re = eRe$).

Proposición 2.0.11. *Sea R un anillo, $e \in E(R)$. e es semicentral izquierdo si y sólo si e es subconmutativo derecho.*

Demostración.
$\Longrightarrow$ Supongamos e semicentral izquierdo.
Como e es semicentral izquierdo, entonces $Re = eRe$. Observemos que $eRe \subseteq eR$.
Si $ere \in eRe$, entonces $ere = e(re) \in eR$.
$\therefore Re \subseteq eR$.
$\therefore e$ es subconmutativo derecho.
$\Longleftarrow$ Supongamos e subconmutativo derecho.
Es claro que $eRe \subseteq Re$. Por otro lado, si $re \in Re$, como e es subconmutativo derecho, entonces $\exists s \in R$ tal que:

$$re = es$$

Multiplicando por e ambos lados de la igualdad tenemos que,

$$\begin{gathered} e(re) = e(es) \\ ere = e^2 s \\ ere = es = re \end{gathered}$$

Por lo que $re = ere \in eRe$.
$\therefore Re \subseteq eRe$.
$\therefore Re = eRe$.
$\therefore e$ es semicentral izquierdo.

$\square$

La subconmutatividad resulta importante en este contexto puesto que si $\alpha \in End(M)$ es subconmutativo derecho, entonces $\forall \beta \in End(M)$, $\beta(\alpha(M)) \subseteq \alpha(M)$, i.e., $\alpha(M)$ es totalmente invariante.
Ahora se muestra que un idempotente e es subconmutativo izquierdo si y sólo si eR tiene complemento único.

Proposición 2.0.12. *Sea R un anillo y sea $e \in E(R)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*
(i) e es subconmutativo izquierdo.
(ii) $eR\bar{e} = 0$.
(iii) $\bar{e}$ es subconmutativo derecho.
(iv) eR es únicamente complementado.

Demostración.
$(i) \Longleftrightarrow (ii)$
$\Longrightarrow$ Supongamos $eR \subseteq Re$. Así, $\forall r \in R$, $er \in Re$. Afirmamos que $eR\bar{e} \subseteq Re\bar{e}$.
Sea $er\bar{e} \in eR\bar{e}$, así $\exists r_1 \in R$, tal que,

$$er\bar{e} = (er)\bar{e} = (r_1 e)\bar{e} = r_1(e\bar{e}) \in Re\bar{e}$$

$\therefore eR\bar{e} \subseteq Re\bar{e}$.
Observemos que $Re\bar{e} = 0$. Puesto que e y $\bar{e}$ son ortogonales.

$\therefore eR\bar{e} \subseteq Re\bar{e} = 0$
$\therefore eR\bar{e} = 0.$
$\Longleftarrow$ Supongamos $eR\bar{e} = 0$. Sea $er \in eR$. Observemos que $r = r+re-re = re+r-re = re + r(1-e) = re + r\bar{e}$. Así,

$$er = e(re + r\bar{e}) = ere + er\bar{e} = ere = (er)e$$

$\therefore er = (er)e \in Re$
$\therefore eR \subseteq Re$
$\therefore e$ es subconmutativo izquierdo.

$(ii) \Longleftrightarrow (iii)$
$\Longrightarrow$ Supongamos $eR\bar{e} = 0$. Sea $r\bar{e} \in R\bar{e}$. Notemos que $r = r + er - er = er + r - er = er + (1-e)r = er + \bar{e}r$. Así,

$$r\bar{e} = (er + \bar{e}r)\bar{e} = er\bar{e} + \bar{e}r\bar{e} = \bar{e}r\bar{e}$$

$\therefore r\bar{e} = \bar{e}(r\bar{e}) \in \bar{e}R$
$\therefore R\bar{e} \subseteq \bar{e}R$
$\therefore \bar{e}$ es subconmutativo derecho.
$\Longleftarrow$ Supongamos $R\bar{e} \subseteq \bar{e}R$. Sea $er\bar{e} \in eR\bar{e}$, como $R\bar{e} \subseteq \bar{e}R$, entonces $\exists r_1 \in R$ tal que $r\bar{e} = \bar{e}r_1$. Así,

$$er\bar{e} = e(r\bar{e}) = e(\bar{e}r_1) = (e\bar{e})r_1 = 0$$

$\therefore eR\bar{e} = 0.$

$(ii) \Longleftrightarrow (iv)$ Esto está probado en la proposición 2.0.6.

□

Una condición relacionada a la conmutatividad en anillos es cuando ideales 'unilaterales' resultan ser ideales bilaterales.

Definición 2.0.13. *Un anillo R es llamado dúo derecho (izquierdo) si todo ideal derecho (izquierdo) de R es ideal bilateral.*

Proposición 2.0.14. *Un anillo R es dúo derecho (izquierdo) si y sólo si el anillo es subconmutativo derecho (izquierdo).*

Demostración.
$\Longrightarrow$ Supongamos que R es dúo derecho.
Sea $a \in R$. Como aR es un ideal derecho, y R es dúo derecho, tenemos que aR es también un ideal izquierdo. Y así, como $a \in aR$ ideal izquierdo, entonces: $\forall r \in R$, $ra \in aR$.
$\therefore Ra \subseteq aR$.
$\therefore \forall a \in R$ a es subconmutativo derecho.
$\therefore R$ es subconmutativo derecho.
$\Longleftarrow$ Supongamos que R es subconmutativo derecho.

Sea I ideal derecho de R, y sea $i \in I$. Así, como $i \in R$ y R es subconmutativo derecho, $Ri \subseteq iR$. Pero $iR \subseteq I$ pues I es ideal derecho. Por lo que,

$$Ri \subseteq iR \subseteq I$$

$\therefore \forall i \in I,\ Ri \subseteq I$
$\therefore I$ es ideal izquierdo.
$\therefore R$ es dúo derecho.

$\square$

Capítulo 3

Anillos abelianos

En esta sección, se muestra la conexión entre R abeliano y la subconmutatividad de $E(R)$. Por otro lado, se verán resultados de suponer que el anillo es abeliano. Finalmente, damos una caracterización de R como anillo abeliano.

Recordemos que un anillo R es abeliano si $E(R) \subseteq Z(R)$. Un resultado sorprendente obtenido por Lam [5] es el siguiente:

Proposición 3.0.1. *Sea R un anillo, con E su conjunto de idempotentes. Las siguientes condiciones son equivalentes:*
(i) R es abeliano.
(ii) E es conmutativo.
(iii) $\forall e \in E$, e conmuta con $f \in E$ si $eR \cong fR$.

Demostración.
$(i) \Rightarrow (ii)$
Si R es abeliano, $\forall e \in E\ \forall r \in R\ er = re$. Así, si $f \in E \subseteq R$, entonces $\forall e \in E\ ef = fe$.
$\therefore \forall e, f \in E\ ef = fe$.
$\therefore E$ es conmutativo.

$(ii) \Rightarrow (iii)$
Si E es conmutativo, entonces $\forall e \in E$, e conmuta con todo $f \in E$. En particular, $\forall e \in E$, e conmuta con $f \in E$ si $eR \cong fR$.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Sea $e \in E$, $r \in R$. Observemos que $(e + er\bar{e})$, $(\bar{e} + \bar{e}re) \in E$.

$(e + er\bar{e})(e + er\bar{e}) = (e + er\bar{e})e + (e + er\bar{e})(er\bar{e}) = e^2 + er\bar{e}e + e^2r\bar{e} + er\bar{e}er\bar{e} = e + er\bar{e}$
$(\bar{e} + \bar{e}re)(\bar{e} + \bar{e}re) = (\bar{e} + \bar{e}re)\bar{e} + (\bar{e} + \bar{e}re)\bar{e}re = (\bar{e})^2 + \bar{e}re\bar{e} + (\bar{e})^2re + \bar{e}re\bar{e}re = \bar{e} + \bar{e}re$

$\therefore (e + er\bar{e})$, $(\bar{e} + \bar{e}re) \in E$.
Notemos que,

$$e(e + er\bar{e}) = e^2 + e^2r\bar{e} = e + er\bar{e}$$

$$(e + er\bar{e})e = e^2 + er\bar{e}e = e$$

$$\bar{e}(\bar{e}+\bar{e}re) = (\bar{e})^2 + (\bar{e})^2 re = \bar{e}+\bar{e}re$$
$$(\bar{e}+\bar{e}re)\bar{e} = (\bar{e})^2 + \bar{e}re\bar{e} = \bar{e}$$

Entonces por la proposición 2.0.3, se tiene que $eR = (e+er\bar{e})R$ y $\bar{e}R = (\bar{e}+\bar{e}re)R$.
$\therefore eR \cong (e+er\bar{e})R$ y $\bar{e}R \cong (\bar{e}+\bar{e}re)R$.
Así, por la hipótesis sabemos:

$$e(e+er\bar{e}) = (e+er\bar{e})e$$
$$\bar{e}(\bar{e}+\bar{e}re) = (\bar{e}+\bar{e}re)\bar{e}$$

Lo que implica que,

$$e+er\bar{e} = e$$
$$\bar{e}+\bar{e}re = \bar{e}$$

Así, $er\bar{e} = 0$ y $\bar{e}re = 0$.

$$0 = er\bar{e} = er(1-e) = er - ere \implies er = ere$$
$$0 = \bar{e}re = (1-e)re = re - ere \implies re = ere$$

$\therefore er = ere = re$
$\therefore er = re$
$\therefore R$ es abeliano.

□

Consecuentemente a esta proposición, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.0.2. *Sea R un anillo y E su conjunto de idempotentes. Son equivalentes:*
(i) E es conmutativo.
(ii) R es abeliano.
(iii) Todo ideal derecho generado por un idempotente es únicamente complementado.
(iv) E es subconmutativo.

Demostración.
$(i) \Rightarrow (ii)$ Proposición 3.0.1.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Sea $e \in E$.
Como R es abeliano, entonces $\forall r \in R$, $er = re$. Así, $\forall e \in E$, $eR \subseteq Re$.
$\therefore \forall e \in E$, e es subconmutativo izquierdo.
Entonces, de la proposición 2.0.12, se sigue que:
$\forall e \in E$, eR tiene complemento único.
$\therefore$ Todo ideal derecho generado por un idempotente es únicamente complementado.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Sea $e \in E$.
eR y $\bar{e}R$ son únicamente complementados por hipótesis. Como eR tiene complemento único, por la proposición 2.0.12, tenemos que e es subconmutativo izquierdo. Por otro

lado, como $\bar{e}R$ tiene complemento único, entonces por la proposición 2.0.12, $\bar{\bar{e}}$ es subconmutativo derecho, i.e., e es subconmutativo derecho.
$\therefore \forall e \in E$, e es subconmutativo.
$\therefore E$ es subconmutativo.

$(iv) \Rightarrow (i)$ Sea $e \in E$. e y $\bar{e}$ son subconmutativos por hipótesis. En particular, e y $\bar{e}$ son subconmutativos izquierdos. Por la proposición 2.0.12 $eR\bar{e} = 0$ y $\bar{e}R\bar{\bar{e}} = 0$, i.e., $eR\bar{e} = 0$ y $\bar{e}Re = 0$. Veamos que $\forall r \in R$, $r = re + r\bar{e}$.

$$re + r\bar{e} = re + r(1-e) = re + r - re = r$$

Así, sea $f \in E$.

$$fe = e(fe) + \bar{e}(fe) = efe = efe + 0 = efe + ef\bar{e} = (ef)e + (ef)\bar{e} = ef$$

Notemos que la primera igualdad se sigue de la proposición 1.1.11, la segunda igualdad del hecho que $\bar{e}Re = 0$, la cuarta igualdad de que $eR\bar{e} = 0$ y la sexta se sigue de la observación.
$\therefore \forall e, f \in E$, $ef = fe$.
$\therefore E$ es conmutativo.

$\square$

Ejemplo 3.0.3. Ahora daremos un ejemplo de un anillo abeliano no conmutativo. Para ello, sea $\{D_i \mid i \in I\}$ un conjunto de anillos con división, no isomorfos indicados por un conjunto arbitrario I, no todos campo. Sea $R = \prod_{i \in I} D_i$. Consideremos R como R-módulo derecho, y notemos que $E(R) = \{(a_i)_{i\in I} \mid a_i = 0_{D_i} \; o \; a_i = 1_{D_i}\}$.
Sea $(a_i)_{i\in I} \in E(R)$, donde $\forall i \; a_i \in D_i$. Así,

$$(a_i)_{i\in I} = (a_i)^2_{i\in I} = (a_i^2)_{i\in I}$$

Lo que implica que $\forall i \in I$,

$$\begin{gathered} a_i = a_i^2 \\ a_i^2 - a_i = 0 \\ a_i(a_i - 1) = 0 \end{gathered}$$

Así tenemos los siguientes dos casos,
Si $a_i = 0$. $\square$
Si $a_i \neq 0$, como D_i es un anillo con división y $a_i \neq 0$, $\exists a_i^{-1} \in D_i$ tal que $a_i a_i^{-1} = a_i^{-1} a_i = 1$. Así,

$$a_i^{-1} a_i (a_i - 1) = (a_i^{-1})0$$

$$a_i - 1 = 0$$

$$a_i = 1$$

$\therefore (a_i)_{i\in I} \in \{(a_i)_{i\in I} \mid a_i = 0_{D_i} \; o \; a_i = 1_{D_i}\}$
$\therefore E(R) \subseteq \{(a_i)_{i\in I} \mid a_i = 0_{D_i} \; o \; a_i = 1_{D_i}\}$

Ahora, sea $(a_i)_{i\in I} \in \{(a_i)_{i\in I} \mid a_i = 0_{D_i} \ o \ a_i = 1_{D_i}\}$.

$$(a_i)_{i\in I}^2 = (a_ia_i)_{i\in I} = (a_i^2)_{i\in I}$$

Como $\forall i \in I \ a_i = 1$ o $a_i = 0$, entonces $a_i^2 = a_i$. Por lo tanto,

$$(a_i^2)_{i\in I} = (a_i)_{i\in I}$$

$\therefore (a_i)_{i\in I}^2 = (a_i)_{i\in I}$.
$\therefore (a_i)_{i\in I} \in E(R)$.
$\therefore \{(a_i)_{i\in I} \mid a_i = 0_{D_i} \ o \ a_i = 1_{D_i}\} \subseteq E(R)$.
$\therefore E(R) = \{(a_i)_{i\in I} \mid a_i = 0_{D_i} \ o \ a_i = 1_{D_i}\}$.
Afirmamos lo siguiente, si $e \in E(R)$, $eR\bar{e} = 0$.
Sea $e = (a_i)_{i\in I} \in E(R)$, así si $(b_i)_{i\in I} \in R$,

$$(a_i)_{i\in I}(b_i)_{i\in I}((1)_{i\in I} - (a_i)_{i\in I}) = (a_i)_{i\in I}(b_i)_{i\in I}(1 - a_i)_{i\in I} \in eR\bar{e}$$

Como $e \in E$, entonces por la observación anterior $\forall i \in I \ a_i = 0$ o $a_i = 1$. Así,

$$(a_i)_{i\in I}(b_i)_{i\in I}(1 - a_i)_{i\in I} = 0$$

. $\therefore \forall e \in E$, $eR\bar{e} = 0$.
Por la proposición 2.0.12, $\forall e \in E$, eR es únicamente complementado. De lo que podemos concluir, bajo el teorema 3.0.2, que R es un anillo abeliano.
Por otro lado, por la construcción de R $\exists j \in I$ tal que D_j no es un campo. Por lo que $\exists x, y \in D_j$ tales que $xy \neq yx$.
Ahora consideremos los siguientes elementos de R,

$$(a_i)_{i\in I} \text{ donde } a_i = 0 \ \forall i \ i \neq j \text{ y } a_i = x \text{ si } i = j.$$
$$(b_i)_{i\in I} \text{ donde } b_i = 0 \ \forall i \ i \neq j \text{ y } b_i = y \text{ si } i = j.$$

Así,

$$(a_i)_{i\in I}(b_i)_{i\in I} = (a_ib_i)_{i\in I} \text{ donde } a_ib_i = 0 \ \forall i \ i \neq j \text{ y } a_ib_i = xy \text{ si } i = j$$
$$(b_i)_{i\in I}(a_i)_{i\in I} = (b_ia_i)_{i\in I} \text{ donde } b_ia_i = 0 \ \forall i \ i \neq j \text{ y } b_ia_i = yx \text{ si } i = j$$

Como $xy \neq yx$, entonces:

$$(a_i)_{i\in I}(b_i)_{i\in I} = (a_ib_i)_{i\in I} \neq (b_ia_i)_{i\in I} = (b_i)_{i\in I}(a_i)_{i\in I}$$

$\therefore R$ no es conmutativo.
$\therefore R$ es un anillo abeliano no conmutativo.

□

Los anillos abelianos tienen muchas propiedades en común con los anillos conmutativos; por ejemplo, hemos visto que los complementos y los idempotentes generadores de ideales generados por idempotentes son únicos. Otra propiedad se da en la siguiente proposición.

Proposición 3.0.4. *Si R es un anillo abeliano, entonces E es un álgebra de Boole respecto al orden natural $ef \leq e$.*

Demostración. Supongamos R anillo abeliano.
P.D.1 E es una retícula.
Por la proposición 1.1.6, sabemos que E es un COPO. Sean $e, f \in E$. Como R es abeliano y e, f son idempotentes,

$$(ef)(ef) = e(fe)f = e(ef)f = ef$$
$$(ef)e = e(ef) = ef \text{ y } f(ef) = (ef)f = ef$$

Entonces, $ef \in E$ y por definición de $\leq$, $ef \leq e$ y $ef \leq f$.
Si $g \in E$ es tal que $g \leq e$ y $g \leq f$, entonces:

$$ge = eg = g \text{ y } gf = gf = g$$

Así,

$$g(ef) = (ef)g = e(fg) = eg = g$$

$\therefore g \leq ef$.
$\therefore e \wedge f = \text{ínf}\,\{e, f\} = ef$
$\therefore \forall e, f \in E$ existe el ínfimo de e y f.
Por otro lado,

$$(e+f-ef)(e+f-ef) = e^2+fe-efe+ef+f^2-ef^2-e^2f-fef+efef = e+f-ef$$
$$(e+f-ef)e = e(e+f-ef) = e^2+ef-e^2f = e+ef-ef = e$$
$$f(e+f-ef) = (e+f-ef)f = ef+f^2-ef^2 = ef+f-ef = f$$

Así, $(e+f-ef) \in E$, $e \leq (e+f-ef)$ y $f \leq (e+f-ef)$.
Si $g \in E$ es tal que $e \leq g$ y $f \leq g$, entonces:

$$eg = ge = e \text{ y } fg = gf = f$$

De donde,

$$g(e+f-ef) = (e+f-ef)g = eg+fg-efg = e+f-ef$$

$\therefore (e+f-ef) \leq g$.
$\therefore e \vee f = \text{sup}\,\{e, f\} = e+f-ef$
$\therefore \forall e, f \in E$ existe el supremo de e y f.
$\therefore E$ es una retícula.
P.D.2 E es una retícula acotada.
Consideremos a los elementos $0, 1 \in E$. Así, si $e \in E$,

$$e(1) = 1(e) = e \text{ y } e(0) = 0(e) = 0$$

Por lo que $\forall e \in E$ $e \leq 1$ y $0 \leq e$.

$$e \wedge 1 = e \text{ y } e \vee 1 = 1$$
$$e \wedge 0 = 0 \text{ y } e \vee 0 = e$$

$\therefore E$ es una retícula acotada.
P.D.3 E es una retícula complementada.
Sea $e \in E$, así $\exists \bar{e} \in E$ tal que:

$$e \wedge \bar{e} = e(\bar{e}) = 0 \ e \vee \bar{e} = e + \bar{e} - e\bar{e} = e + 1 - e = 1$$

$\therefore E$ es una retícula complementada.
P.D.3 E es una retícula distributiva.
Sean $e, f, g \in E$. Notemos lo siguiente,

$$e \wedge (f \vee g) = e \wedge (f + g - fg) = e(f + g - fg) = ef + eg - efg$$

Por otro lado,

$$(e \wedge f) \vee (e \wedge g) = ef \vee eg = ef + eg - efeg = ef + eg - e(ef)g = ef + eg - efg$$

$\therefore e \wedge (f \vee g) = (e \wedge f) \vee (e \wedge g)$
$\therefore E$ es una retícula distributiva.
$\therefore E$ es un álgebra de Boole.

□

Corolario 3.0.5. *Sea R un anillo abeliano y sea L el conjunto de ideales derechos de R generados por un idempotente, ordenados por la inclusión. Entonces L es un álgebra de Boole y la función $e \mapsto eR$ de E en L es un isomorfismo de álgebras de Boole.*

Demostración.
P.D.1 L es un álgebra de Boole, respecto a la inclusión.
Es claro que $(L, \subseteq)$ es un COPO (conjunto parcialmente ordenado). Ahora, veamos que es una retícula. Sean $eR, fR \in L$, donde $e, f \in E$.
De la proposición anterior, 3.0.4, sabemos que $ef \in E$, por lo que $(ef)R \in L$. Notemos que:

$$(ef)R \subseteq eR \text{ y } (ef)R = (fe)R \subseteq fR$$

Y si $gR \in L$, fuese tal que $gR \subseteq eR$ y $gR \subseteq fR$, entonces tomemos $gr_1 \in gR$. Así, $gr_1 = er_2$ p.a. $r_2 \in R$ y $g = fr_3$ p.a. $r_3 \in R$. Como R es abeliano,

$$gr_1 = g^2r_1 = gr_1g = er_2(fr_3) = efr_2r_3$$

$\therefore gr_1 = (ef)r_2r_3 \in (ef)R.$
$\therefore gR \subseteq (ef)R.$
$\therefore eR \wedge fR = \text{ínf}\,\{eR, fR\} = (ef)R.$
Por otro lado, por la proposición anterior, 3.0.4, $(e + f - ef) \in E$, por lo que $(e + f - ef)R \in L$. Notemos que si $er \in eR$ y $fr \in fR$,

$$er = e^2r = e^2r + fer - fer = e^2r + f(er) - fe(er) = e(er) + f(er) - ef(er) = (e + f - ef)(er)$$

$$fr = f^2r = f^2r + efr - efr = e(fr) + f(fr) - ef(fr) = (e + f - ef)(fr)$$

Y por lo tanto $eR \subseteq (e + f - ef)R$ y $fR \subseteq (e + f - ef)R$. Y si $gR \in L$, fuese tal que $eR \subseteq gR$ y $fR \subseteq gR$. Entonces tomemos $(e + f - ef)r \in (e + f - ef)R$, así:

$$er = gr_1 \text{ p.a. } r_1 \in R$$
$$fr = gr_2 \text{ p.a. } r_2 \in R$$
$$efr = e(fr) = gr_3 \text{ p.a. } r_3 \in R$$

Por lo tanto,

$$(e+f-ef)r = er + fr - efr = gr_1 + gr_2 - gr_3 = g(r_1 + r_2 - r_3)$$

$\therefore (e+f-ef)r = g(r_1+r_2-r_3) \in gR$.
$\therefore (e+f-ef)R \subseteq gR$.
$\therefore eR \vee fR = \sup \{eR, fR\} = (e+f-ef)R$.
$\therefore L$ es una retícula.
Consideremos a $(0)R = 0 \in L$ y $(1)R = R \in L$. Sea $eR \in L$, así:

$$eR \wedge 0 = (e)0R = 0 \text{ y } eR \vee 0 = (e + 0 - (e)0)R = eR$$
$$eR \wedge 1 = (e)1R = eR \text{ y } eR \vee 1 = (e + 1 - (e)1)R = R$$

$\therefore L$ es una retícula acotada.
Ahora consideremos $eR \in L$, y veamos que $\bar{e}R$ es su complemento. Para ello notemos lo siguiente,

$$eR \wedge \bar{e}R = (e\bar{e})R = 0$$

$$eR \vee \bar{e}R = (e + \bar{e} - e\bar{e})R = R$$

$\therefore L$ es una retícula complementada.
Por último, veamos que L es una retícula distributiva. Sean $eR, fR, gR \in L$. Notemos,

$$eR \wedge (fR \vee gR) = eR \wedge (f+g-fg)R = (e(f+g-fg))R$$
$$(eR \wedge fR) \vee (eR \wedge gR) = (ef)R \vee (eg)R = (ef + eg - efeg)R$$

Por la proposición 3.0.4, $e(f+g-fg) = ef + ef - efeg$, entonces $(e(f+g-fg))R = (ef + eg - efeg)R$.
$\therefore eR \wedge (fR \vee gR) = (eR \wedge fR) \vee (eR \wedge gR)$
$\therefore L$ es una retícula distributiva.
$\therefore L$ es un álgebra de Boole.
P.D.2 La función h tal que $e \mapsto eR$ de E en L es un isomorfismo de álgebras de Boole.
Sean $e, f \in E$.

$$h(e \wedge_E f) = h(ef) = (ef)R = eR \wedge_L fR = h(e) \wedge_L h(f)$$
$$h(e \vee_E f) = h(e+f-ef) = (e+f-ef)R = eR \vee_L fR = h(e) \vee_L h(f)$$
$$h(0_E) = (0)R = 0 = 0_L$$
$$h(1_E) = (1)R = R = 1_L$$

$\therefore h$ es un homomorfismo.
Ahora supongamos que $h(e) = h(f)$, i.e., $eR = fR$. Así, por la proposición 2.0.3, tenemos que $ef = f$ y $fe = e$, pero por hipótesis R es abeliano, así, $f = ef = fe = e$.
$\therefore e = f$.
$\therefore h$ es inyectiva.
Y si $eR \in L$, entonces $\exists e \in E$ tal que $h(e) = eR$.
$\therefore h$ es suprayectiva.
$\therefore h$ es un isomorfismo de álgebras de Boole.

□

Definición 3.0.6. *Sea R un anillo. R es Dedekind finito si $\forall a, b \in R$, $ab = 1$ implica que $ba = 1$.*

Proposición 3.0.7. *Si R es un anillo abeliano, entonces R es Dedekind finito.*

Demostración.
Sean $a, b \in R$ tales que $ab = 1$. Notemos que,

$$ba = b(1)a = b(ab)a = (ba)(ba)$$

$\therefore ba \in E$.
Como R es un anillo abeliano, entonces por el teorema 3.0.2, E es subconmutativo, de donde $ba \in E$ es subconmutativo. En particular, ba es subconmutativo izquierdo. Así, por la proposición 2.0.12, $(ba)R(1 - ba) = 0$. Como $b \in R$,

$$\begin{gathered} (ba)b(1 - ba) = 0 \\ a(ba)b(1 - ba) = (a)0 = 0 \\ (ab)(ab)(1 - ba) = 0 \\ (1)(1 - ba) = 0 \\ 1 = ba \end{gathered}$$

$\therefore R$ es Dedekind finito.

□

Observación 3.0.8. *El converso de la proposición anterior es falso.*
Para ello, consideremos al anillo de matrices de $2x2$ con coeficientes en $\mathbb{R}$, $M_2(\mathbb{R})$.
P.D.1 $M_2(\mathbb{R})$ es Dedekind finito.
Sean $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Supongamos que:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Demostremos que,

$$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es decir, supongamos:

$$ae + bg = 1 \tag{3.1}$$
$$af + bh = 0 \tag{3.2}$$
$$ce + dg = 0 \tag{3.3}$$
$$cf + dh = 1 \tag{3.4}$$

Y demostremos lo siguiente:

$$\begin{aligned} ea+fc&=1\\ eb+fd&=0\\ ga+hc&=0\\ gb+hd&=1 \end{aligned}$$

Observación. $a=0 \Leftrightarrow h=0$
$\Rightarrow$ Si $a=0$, entonces $ae+bg=1$ implica que $bg=1$, de donde $b\neq 0$. Por otro lado, como $af+bh=0$, entonces $bh=0$, y como $b\neq 0$, $h=0$.
$\Leftarrow$ Si $h=0$, entonces $cf+dh=1$ implica que $cf=1$, por lo que $f\neq 0$. Por otro lado, como $af+bh=0$, entonces $af=0$, y como $f\neq 0$, $a=0$.

Observación. $e=0 \Leftrightarrow d=0$
$\Rightarrow$ Si $e=0$, entonces $ae+bg=1$ implica que $bg=1$, de donde $g\neq 0$. Por otro lado, como $ce+dg=0$, entonces $dg=0$, y como $g\neq 0$, $d=0$.
$\Leftarrow$ Si $d=0$, entonces $cf+dh=1$ implica que $cf=1$, por lo que $c\neq 0$. Por otro lado, como $ce+dg=0$, entonces $ce=0$, y como $c\neq 0$, $e=0$.

Caso 1. $a=0$
Si $a=0$, entonces,

$$\begin{aligned} ae+bg=1 &\implies bg=1\\ af+bh=0 &\implies bh=0 \end{aligned}$$

Como $\mathbb{R}$ es un campo, entonces $bg=1 \implies b,h\neq 0$ y $b=\frac{1}{g}$; por la observación sabemos que si $a=0$, entonces $h=0$. Así, nuestra hipótesis queda de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} bg&=1\\ bh&=0\\ ce+dg&=0\\ cf&=1 \end{aligned}$$

Notemos que $cf=1$, implica $c,f\neq 0$ y $f=\frac{1}{c}$.
Así,

$$\begin{aligned} &ea+fc=0+cf=cf=1\\ &eb+fd=e(\frac{1}{g})+(\frac{1}{c})d=\frac{e}{g}+\frac{d}{c}=\frac{ec+gd}{gc}=\frac{ce+dg}{gc}=\frac{0}{gc}=0\\ &ga+hc=0+0=0\\ &gb+hd=gb+0=gb=bg=1 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Caso 2. $e = 0$
Análogo al caso 1.

Caso 3. $a, e, d, h \neq 0$
Observación. $ae = dh$ y $bg = cf$.
De las ecuaciones (3.2) y (3.3) de la hipótesis, se sigue que:

$$c = \frac{-dg}{e}$$
$$f = \frac{-bh}{a}$$

Por la ecuación (3.4), tenemos:

$$\begin{aligned} cf + dh &= 1 \\ (\frac{-dg}{e})(\frac{-bh}{a}) + dh &= 1 \\ \frac{dgbh}{ea} + dh &= 1 \\ \frac{dhbg}{ae} + dh &= 1 \\ dh(\frac{bg}{ae} + 1) &= 1 \\ \frac{bg}{ae} + 1 &= \frac{1}{dh} \\ \frac{bg + ae}{ae} &= \frac{1}{dh} \\ \frac{ae + bg}{ae} &= \frac{1}{dh} \end{aligned}$$

Ahora, por la ecuación (3.1) $ae + bg = 1$, por lo que:

$$\frac{1}{ae} = \frac{1}{dh} \implies ae = dh$$

Por otro lado, por (3.1) y (3.4),

$$\begin{aligned} 1 - ae &= bg \\ 1 - dh &= bg \\ cf &= bg \end{aligned}$$

$\therefore ae = dh$ y $bg = cf$.
Por (3.4) $cf + dh = 1$ y sabemos que $dh = ae$, por lo que $ae + cf = 1$. Como $\mathbb{R}$ es un campo, $ea + fc = ae + cf = 1$.
Por (3.1) $ae + bg = 1$ y sabemos que $ae = dh$, por lo que $dh + bg = 1$. Como $\mathbb{R}$ es un

campo, $gb + hd = dh + bg = 1$.
De (3.3) $c = \frac{-dg}{e}$ y sabemos que $cf = bg$. Así,

$$\begin{aligned}(\frac{-dg}{e})f &= bg\\ \frac{-df}{e} &= b\\ -df &= be\\ be + df &= 0\end{aligned}$$

Así, como $\mathbb{R}$ es campo $eb + fd = be + df = 0$.
Por (3.3) $c = \frac{-dg}{e}$ y sabemos que $ae = dh$, así $a = \frac{dh}{e}$.

$$ag = (\frac{dh}{e})g = -(\frac{-dg}{e})h = -ch$$

$\therefore ag + ch = 0$.
Como $\mathbb{R}$ es campo, $ga + hc = ag + ch = 0$.
Por lo tanto,

$$\begin{aligned}ea + fc &= 1\\ eb + fd &= 0\\ ga + hc &= 0\\ gb + hd &= 1\end{aligned}$$

Y así,

$$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore M_2(\mathbb{R})$ es Dedekind finito.
P.D.2 $M_2(\mathbb{R})$ no es un anillo abeliano.
Consideremos $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ y probemos que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in E(M_2(\mathbb{R}))$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in E(M_2(\mathbb{R}))$.
Ahora, consideremos $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Así,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo que,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ no conmuta con todo elemento de $M_2(\mathbb{R})$.

$\therefore M_2(\mathbb{R})$ no es abeliano.
$\therefore M_2(\mathbb{R})$ es un anillo Dedekind finito que no es abeliano.
Notemos que en vez de $\mathbb{R}$ se puede tomar $\mathbb{K}$ un campo y la prueba se sigue de igual forma.

□

Proposición 3.0.9. *Sea R un anillo abeliano y sean $e, f \in E$. Entonces $(ef)R = eRfR = eR \cap fR$.*

Demostración.
Sea $efr \in (ef)R$, así $efr = e(1)fr \in eRfR$.
$\therefore (ef)R \subseteq eRfR$.
Sea $\sum_{i=1}^{n} er_ifs_i \in eRfR$. Como R es abeliano,

$$\sum_{i=1}^{n} er_ifs_i = e(\sum_{i=1}^{n} r_ifs_i)$$
$$\sum_{i=1}^{n} er_ifs_i = \sum_{i=1}^{n} fer_is_i = f(\sum_{i=1}^{n} er_is_i)$$

$\therefore \sum_{i=1}^{n} er_ifs_i \in eR \cap fR$.
$\therefore eRfR \subseteq eR \cap fR$.
$\therefore (ef)R \subseteq eRfR \subseteq eR \cap fR$.
Sea $x \in eR \cap fR$, así $x = er = fs$ p.a. $r, s \in R$. Como $er = fs$, entonces $e^2r = efs$, $x = er = efs \in (ef)R$.
$\therefore eR \cap fR \subseteq (ef)R$.
$\therefore (ef)R = eRfR = eR \cap fR$.

□

Finalmente, consideramos la semiconmutatividad de E.

Definición 3.0.10. [3] Sea R un anillo. Decimos que $X \subseteq R$ es semiconmutativo si $\forall a, b \in X$, $ab = 0$ implica que $aRb = 0$.

Proposición 3.0.11. *E es semiconmutativo si y sólo si R es abeliano.*

Demostración.

$\Longrightarrow$ Supongamos E semiconmutativo.

Así $\forall e \in E$, como $e\bar{e} = 0$, entonces $eR\bar{e} = 0$. Por la proposición 2.0.6, $\forall e \in E$, eR tiene complemento único. Y por el teorema 3.0.2, R es abeliano.

$\Longleftarrow$ Supongamos R abeliano.

Sean $e, f \in E$ tales que $ef = 0$. Ahora, tomemos $erf \in eRf$; como R es abeliano, $erf = (ef)r = (0)r = 0$.

$\therefore eRf = 0$.

$\therefore E$ es semiconmutativo.

$\square$

Capítulo 4

Módulos con anillos de endomorfismos abelianos

En este capítulo se muestra cómo los resultados del capítulo anterior aplican a anillos de endomorfismos de módulos.

4.1. Módulos endabelianos

Definición 4.1.1. *Sea $M \in Mod{-}R$, un R módulo derecho unitario. M es un módulo endabeliano si su anillo de endomorfismos, $End(M)$, es abeliano.*

Proposición 4.1.2. *Sea $M \in Mod{-}R$. Si $M = J \bigoplus K$, entonces las proyecciones asociadas ε_J y ε_K, son los idempotentes únicamente determinados en $E(End(M))$, para los cuales $J = \operatorname{Im} \varepsilon_J = \operatorname{Nuc} \varepsilon_K$ y $K = \operatorname{Im} \varepsilon_K = \operatorname{Nuc} \varepsilon_J$. Así, $\varepsilon_K = \bar{\varepsilon_J}$.*

Demostración.
Por la proposición 1.1.15, sabemos que existen dos idempotentes únicos, ε_J y ε_K, tales que $\varepsilon_J|_J = id$, $\varepsilon_J|_K = 0$ y $\varepsilon_K|_K = id$, $\varepsilon_K|_J = 0$. Así, $J = \operatorname{Im} \varepsilon_J = \operatorname{Nuc} \varepsilon_K$ y $K = \operatorname{Im} \varepsilon_K = \operatorname{Nuc} \varepsilon_J$.
Ahora, sea $m = j + k \in M$, p.a. $j \in J$, $k \in K$. Así,

$$\bar{\varepsilon_J}(m) = \bar{\varepsilon_J}(j+k) = j + k - \varepsilon_J(j+k) = j + k - j = k = \varepsilon_K(j+k) = \varepsilon_K(m)$$

$\therefore \varepsilon_K = \bar{\varepsilon_J}$.

□

Ahora, se muestra que los sumandos de M están determinados únicamente por los ideales derechos generados por idempotentes y viceversa.

Lema 4.1.3. *Sea $M = J \bigoplus K$. Entonces $\varepsilon_J End(M) = \{f \in End(M) \mid f(M) \subseteq J\}$.*

Demostración.
Sea $\varepsilon_J f \in \varepsilon_J End(M)$, y sea $m \in M$. Como ε_J es la proyección en J, entonces para toda $m \in M$, $\varepsilon_J(m) \in J$. Por otro lado, como $f \in End(M)$, entonces para toda $m \in M$,

$f(m) \in M$.
Así, $\varepsilon_J f(m) \in J$.
$\therefore \varepsilon_J End(M) \subseteq \{f \in End(M) \mid f(M) \subseteq J\}$.
Por otro lado, sea $f \in End(M)$, tal que $f(M) \subseteq J$. Afirmamos que $f = \varepsilon_J f$.
Sea $m \in M$, como $f(m) \in J$, entonces $\varepsilon_J f(m) = f(m)$.
$\therefore f \in \varepsilon_J End(M)$.
$\therefore \{f \in End(M) \mid f(M) \subseteq J\} \subseteq \varepsilon_J End(M)$.
$\therefore \varepsilon_J End(M) = \{f \in End(M) \mid f(M) \subseteq J\}$.

□

Lema 4.1.4. *De manera inversa al lema anterior, sea $\varepsilon \in E(End(M))$ y sea J el submódulo de M generado por $\{\varepsilon f(M) \mid f \in End(M)\}$. Entonces $M = J \bigoplus K$, $\varepsilon_J = \varepsilon$ y $\varepsilon_K = \bar{\varepsilon}$.*

Demostración.
Sean J el submóduulo de M generado por $\{\varepsilon f(M) \mid f \in End(M)\}$, y K el submódulo de M generado por $\{\bar{\varepsilon} f(M) \mid f \in End(M)\}$.
Notemos que, $m = \varepsilon(m) + m - \varepsilon(m)$, es decir, $m = \varepsilon(m) + \bar{\varepsilon}(m)$, donde $\varepsilon(m) \in J$ y $\bar{\varepsilon}(m) \in K$. Probaremos que $J \cap K = 0$. Sea $m \in J \cap K$, así,

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon f_i(m_i) r_i = m = \sum_{j=1}^{n} \bar{\varepsilon} f_j(m_j) r_j$$

Donde $\forall i, j \in \{1, ..., n\}$ $f_i, f_j \in End(M)$, $m_i, m_j \in M$ y $r_i, r_j \in R$. Así, si aplicamos $\bar{\varepsilon}$ a m, tenemos:

$$\bar{\varepsilon}(m) = \bar{\varepsilon}(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon f_i(m_i) r_i) = \sum_{i=1}^{n} \bar{\varepsilon}\varepsilon f_i(m_i) r_i = 0$$
$$\bar{\varepsilon}(m) = \bar{\varepsilon}(\sum_{j=1}^{n} \bar{\varepsilon} f_j(m_j) r_j) = \sum_{j=1}^{n} \bar{\varepsilon} f_j(m_j) r_j = m$$

$\therefore m = 0$
$\therefore J \cap K = 0$.
$\therefore M = J \bigoplus K$.
Por otro lado, sea $m \in M$, como $M = J \bigoplus K$, $m = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon f_i(m_i) r_i + \sum_{j=1}^{n} \bar{\varepsilon} f_j(m_j) r_j$. De donde

$$\varepsilon(m) = \varepsilon(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon f_i(m_i) r_i + \sum_{j=1}^{n} \bar{\varepsilon} f_j(m_j) r_j) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon f_i(m_i) r_i = \varepsilon_J(m)$$
$$\bar{\varepsilon}(m) = \bar{\varepsilon}(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon f_i(m_i) r_i + \sum_{j=1}^{n} \bar{\varepsilon} f_j(m_j) r_j) = \sum_{j=1}^{n} \bar{\varepsilon} f_j(m_j) r_j = \varepsilon_K(m)$$

$\therefore \varepsilon_J = \varepsilon$ y $\varepsilon_K = \bar{\varepsilon}$.

□

Lema 4.1.5. *Sea $M \in Mod{-}R$, $M = J \bigoplus K$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*
(i) J es únicamente complementado en M.
(ii) $\varepsilon_J End(M)$ es únicamente complementado en $End(M)$, considerado como un $End(M)$ módulo derecho.
(iii) $\varepsilon_J End(M)\varepsilon_K = 0$.
(iv) K es totalmente invariante en M.

Demostración.
$(i) \Rightarrow (ii)$
Primero probemos que si L es un sumando complementario de J en M, entonces $\varepsilon_L End(M)$ es un sumando complementario de $\varepsilon_J End(M)$ en $End(M)$.
Así, estamos suponiendo que $M = J \bigoplus L$. Sea $\alpha \in End(M)$, $\forall m \in M$, $\alpha(m) = j + l$ p. a. $j \in J$, $l \in L$.
Por otro lado,

$$\varepsilon_J \circ \alpha(m) = \varepsilon_J(\alpha(m)) = \varepsilon_J(j + l) = j$$
$$\varepsilon_L \circ \alpha(m) = \varepsilon_L(\alpha(m)) = \varepsilon_L(j + l) = l$$

Por lo tanto, $(\varepsilon_J \circ \alpha + \varepsilon_L \circ \alpha)(m) = j + l = \alpha(m)$.
$\therefore \varepsilon_J \circ \alpha + \varepsilon_L \circ \alpha = \alpha$.
Ahora, sea $f \in \varepsilon_J End(M) \cap \varepsilon_L End(M)$, así como estamos suponiendo que $M = J \bigoplus L$, por el lema 4.1.3, sabemos:

$$\varepsilon_J End(M) = \{f \in End(M) \mid f(M) \subseteq J\}$$
$$\varepsilon_L End(M) = \{f \in End(M) \mid f(M) \subseteq L\}$$

Por lo que $f \in J \cap L = 0$.
$\therefore f = 0$.
$\therefore \varepsilon_J End(M) \cap \varepsilon_L End(M) = 0$.
$\therefore End(M) = \varepsilon_J End(M) \bigoplus \varepsilon_L End(M)$.
$\therefore \varepsilon_L End(M)$ es un sumando complementario de $\varepsilon_J End(M)$.
Así, como por hipótesis J es únicamente complementado en M, entonces se sigue que $\varepsilon_J End(M)$ es únicamente complementado en $End(M)$.

$(ii) \Rightarrow (i)$
Sea L un sumando de M. Probemos que si $\varepsilon_L End(M)$ es un sumando complementario para $\varepsilon_J End(M)$ en $End(M)$, entonces L es un sumando complementario para J en M.
Así, estamos suponiendo que $End(M) = \varepsilon_J End(M) \bigoplus \varepsilon_L End(M)$; de donde existen $f, g \in End(M)$ tales que,

$$id = \varepsilon_J \circ f + \varepsilon_L \circ g$$

Así,

$$id(m) = (\varepsilon_J \circ f + \varepsilon_L \circ g)(m)$$
$$id(m) = \varepsilon_J \circ f(m) + \varepsilon_L \circ g(m)$$
$$m = \varepsilon_J(f(m)) + \varepsilon_L(g(m))$$

Donde $\varepsilon_J(f(m)) \in J$ y $\varepsilon_L(g(m)) \in L$, por lo que $m = j + l$, donde $j = \varepsilon_J(f(m))$ y $l\varepsilon_L(g(m))$.
Ahora, si $m \in J \cap L$, existen $j \in J$ y $l \in L$ tal que $m = j = l$. Observemos que,

$$0 = \varepsilon_J(l) = \varepsilon_J(m) = \varepsilon_J(j) = j$$

$\therefore m = 0$
$\therefore J \cap L = 0.$
$\therefore M = J \bigoplus L.$
Por hipótesis $\varepsilon_J End(M)$ es únicamente complementado en $End(M)$, entonces se sigue que J es únicamente complementado en M.

$(ii) \Rightarrow (iii)$
Como $\varepsilon_J End(M)$ es únicamente complementado, entonces por la proposición 2.0.6 $\varepsilon_J End(M)\bar{\varepsilon_J} = 0$. Pero como $M = J \bigoplus K$, entonces por la proposición 4.1.2, $\bar{\varepsilon_J} = \varepsilon_K$.
$\therefore \varepsilon_J End(M)\varepsilon_K = 0.$

$(iii) \Rightarrow (ii)$
Como $M = J \bigoplus K$, entonces por la proposición 4.1.2, $\bar{\varepsilon_J} = \varepsilon_K$. Así, por hipótesis $\varepsilon_J End(M)\bar{\varepsilon_J} = 0$, entonces por la proposición 2.0.6, $\varepsilon_J End(M)$ es únicamente complementado en $End(M)$.

$(iii) \Leftrightarrow (iv)$
Probemos primero que K es totalmente invariante si y sólo si $Hom_R(K, J) = 0$.
$\Longrightarrow$ Supongamos K totalmente invariante. Sea $f \in Hom_R(K, J)$. Notemos que f se puede extender a un endomorfismo de M en M, de la siguiente forma:

$$f' : M \longrightarrow M$$
$$f'(j + k) = f(k)$$

Es claro que $f' \in End(M)$. Por definición de f' y como $f \in Hom_R(K, J)$, $\operatorname{Im} f' = J$. Por hipótesis K es totalmente invariante, así $\forall k \in K$ $f'(k) = f(k) \in K$. Pero $\operatorname{Im} f' = J$. Así $\forall k \in K$ $f'(k) = f(k) \in K \cap J = 0$.
$\therefore f = 0.$
$\therefore Hom_R(K, J) = 0.$
$\Longleftarrow$ Supongamos $Hom_R(K, J) = 0$.
Sea $f \in End(M)$. Por teorema 1.2.15, tenemos que:

$$\operatorname{End}(M) = Hom_R(J, J) \bigoplus Hom_R(J, K) \bigoplus Hom_R(K, J) \bigoplus Hom_R(K, K)$$

Así, $f = f_1 + f_2 + f_3 + f_4$, donde $f_1 \in Hom_R(J, J)$, $f_2 \in Hom_R(J, K)$, $f_3 \in Hom_R(K, J)$ y $f_4 \in Hom_R(K, K)$. Sea $k \in K$.

$$f(k) = (f_3 + f_4)(k)$$

Pero, por hipótesis $Hom_R(K, J) = 0$, así $f_3 = 0$. Por lo tanto,

$$f(k) = f_4(k)$$

Donde $f_4 \in Hom_R(K, K)$. Por lo que $\forall k \in K,\ f(k) \in K$.
$\therefore K$ es totalmente invariante.
Afirmamos que $Hom_R(K, J) = \varepsilon_J End(M)\varepsilon_K$. Sea $f \in End(M)$ y sea $m = j + k \in M$, p. a. $j \in J$, $k \in K$. Así,

$$\varepsilon_J \circ f \circ \varepsilon_K(j + k) = \varepsilon_J(f(k))$$

Por lo que $\varepsilon_J \circ f \circ \varepsilon_K \in Hom_R(K, J)$.
$\therefore \varepsilon_J End(M)\varepsilon_K \subseteq Hom_R(K, J)$.
Por otro lado, si $f \in Hom_R(K, J)$, luego

$$\varepsilon_J \circ f \circ \varepsilon_K(k) = \varepsilon_J(f(\varepsilon_K(k))) = \varepsilon_J(f(k)) = f(k)$$

$\therefore f \in \varepsilon_J End(M)\varepsilon_K$.
$\therefore Hom_R(K, J) \subseteq \varepsilon_J End(M)\varepsilon_K$.
$\therefore Hom_R(K, J) = \varepsilon_J End(M)\varepsilon_K$.
Así, K es totalmente invariante $\iff Hom_R(K, J) = 0 \iff \varepsilon_J End(M)\varepsilon_K = 0$.
$\therefore K$ es totalmente invariante si y sólo si $\varepsilon_J End(M)\varepsilon_K = 0$.

$\square$

Teorema 4.1.6. *Sea $M \in Mod{-}R$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*
(i) todos los sumandos directos de M son únicamente complementados.
(ii) M es un módulo endabeliano.
(iii) todos los sumandos directos de M son totalmente invariantes.

Demostración.
$(i) \Leftrightarrow (iii)$ Es directo del lema 4.1.5.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Supongamos que todo sumando directo de M es únicamente complementado. Sea $\varepsilon End(M)$ un ideal derecho generado por el idempotente $\varepsilon \in E(End(M))$. Por el lema 4.1.4, $M = J \bigoplus K$, donde J es el submódulo generado por$\{\varepsilon f(M) \mid f \in End(M)\}$ y $\varepsilon = \varepsilon_J$.
Notemos que para todo ideal derecho generado por un idempotente, existe J, sumando de M, tal que, $\varepsilon End(M) = \varepsilon_J End(M)$.
Por hipótesis, J es únicamente complementado, entonces por el lema 4.1.5, $\varepsilon_J End(M)$ es únicamente complementado. Así, por lo observación, tenemos que todo ideal derecho generado por un idempotente es únicamente complementado, lo que implica que, por el teorema 3.0.2, $End(M)$ es abeliano.
$\therefore M$ es un módulo endabeliano.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Supongamos $End(M)$ es abeliano.
Por el teorema 3.0.2, todo ideal derecho generado por un idempotente tiene complemento único.
Recordemos que para todo J sumando directo de M, ε_J, la proyección asociada, es un idempotente en $End(M)$. Así, $\varepsilon_J End(M)$ es únicamente complementado, entonces por el lema 4.1.5, J es únicamente complementado.
$\therefore$ Todo sumando directo de M es únicamente complementado.

□

4.2. Módulos casi conmutativos

Definición 4.2.1. *Un anillo R con su conjunto de idempotentes E es llamado casi conmutativo si:*
(1) R es abeliano.
(2) Para todo $0 \neq a \in R$, existe $e \in E$ idempontente primitivo tal que $ea \neq 0$.

Definición 4.2.2. *Sea $M \in Mod{-}R$. Decimos que M es un módulo casi conmutativo si $End(M)$ es casi conmutativo.*

Observación 4.2.3. *La condición (2) implica que todo idempotente no cero en E domina a un idempotente primitivo, esto es, para todo $0 \neq e \in E$, existe $f \in E$, f un idempotente primitivo tal que $fe = f = ef$.*

El siguiente teorema describe la estructura de los anillos casi conmutativos.

Teorema 4.2.4. *Sea R un anillo casi conmutativo, y sea F un conjunto ortogonal máximo de idempotentes primitivos en R. Entonces R es un producto subdirecto de $\{eR \mid e \in F\}$, que contiene a $\bigoplus\limits_{e\in F} eR$. Es decir,*

$$\bigoplus_{e\in F} eR \leqslant R \leqslant \prod_{e\in F} eR$$

Demostración.
R en general no es el anillo trivial, así existe $a \in R$, $a \neq 0$. Como R es un anillo casi conmutativo, para $a \in R$, existe $e \in E$ idempotente primitivo tal que $ea \neq 0$. Así, el conjunto de los idempotentes primitivos es distinto al vacío. Consideremos $\mathcal{H} = \{A_i \mid A_i \textit{ es un conjunto de idempotentes primitivos ortogonales}\}$. $\mathcal{H}$ es claramente un conjunto parcialmente ordenado con la inclusión $\subseteq$ entre conjuntos. Es no vacío ya que existe $A_i = \{e\} \in \mathcal{H}$. Y si $A_{i1} \subseteq A_{i2} \subseteq ...$ es un cadena en $\mathcal{H}$, luego $\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} A_{ij}$ es la cota superior. Luego, $\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} A_{ij} \in \mathcal{H}$, ya que si $e \in \bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} A_{ij}$, luego $e \in A_{in}$ para alguna $n \in \mathbb{N}$, como $A_{in} \in \mathcal{H}$, luego e es primitivo. Por otro lado si $e, f \in \bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} A_{ij}$, luego $e \in A_{in}$ y $f \in A_{il}$ para algunos $n, l \in \mathbb{N}$. Sin perdida de generalidad, por la propiedad de cadena, $A_{in} \subseteq A_{il}$, luego $e \in A_{il}$. Como $A_{il} \in \mathcal{H}$, luego e y f son ortogonales. Por lo que $\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} A_{ij} \in \mathcal{H}$. Así por el Lema de Zorn, existe $\mathbf{F}$ un conjunto ortogonal máximo de idempotentes primitivos en R.
Así, sea $\mathbf{F}$ un conjunto ortogonal máximo de idempotentes primitivos en R. Definamos:

$$\begin{aligned} \theta : R &\longrightarrow \prod_{e\in F} eR \\ r &\longmapsto (er)_{e\in F} \end{aligned}$$

Veamos que θ es un monomorfismo de R módulos derechos y preserva la multiplicación. Sean $r_1, r_2, r \in R$. Así,

$$\theta(r_1+r_2) = (e(r_1+r_2)) = (er_1+er_2) = (er_1)+(er_2) = \theta(r_1)+\theta(r_2)$$
$$\theta(r_1 r) = (e(r_1 r)) = ((er_1)r) = (er_1)r = \theta(r_1)r$$

$\therefore \theta$ es un homomorfismo de módulos.
Sea $x \in Nuc(\theta)$. Supongamos que $x \neq 0$, como R es un anillo casi conmutativo, luego existe f un idempotente primitivo tal que $fx \neq 0$. Por otro lado, como $x \in Nuc(\theta)$, $\theta(x) = 0$, i.e. $ex = 0$ para toda $e \in F$. Así, $f \notin \mathbf{F}$. Pero $\forall e \in \mathbf{F}$, $fe = ef = f$ o $fe = 0$. Si $fe = f$, luego $fex = fx \neq 0$. Pero $fex = f(0) = 0$. Por lo que $fe = 0$ para toda $e \in \mathbf{F}$. Así, $\mathbf{F} \cup \{f\}$ es un conjunto de idempotentes primitivos ortogonales que contiene propiamente a F, pero F es máximo, por lo que tenemos una contradicción. Así, $Nuc(\theta) = 0$.
$\therefore \theta$ es un monomorfismo.
Por otro lado, $\theta(r_1 r_2) = (e(r_1 r_2)) = (eer_1 r_2) = (er_1 er_2) = (er_1)(er_2) = \theta(r_1)\theta(r_2)$. Así, θ preserva la multiplicación.
$\therefore \theta$ es un encaje.
Para ver que es un producto subdirecto consideremos π_e las proyecciones de $\prod_{e \in F} eR$ en eR y veamos que $\pi_e \circ \theta$ es un epimorfismo para toda $e \in \mathbf{F}$.
Como para toda $e \in \mathbf{F}$, π_e es un morfismo y θ es un morfismo, luego para toda $e \in \mathbf{F}$, $\pi_e \circ \theta$ es un morfismo. Sea $e \in \mathbf{F}$, y sea $er \in eR$. Existe $r \in R$, tal que $\pi_e \circ \theta(r) = \pi_e(\theta(r)) = \pi_e(er) = er$. Así, para toda $e \in \mathbf{F}$, $\pi_e \circ \theta$ es un epimorfismo. Y por lo tanto, R es un producto subdirecto de $\{eR \mid e \in F\}$.
Por otro lado, para toda $e \in \mathbf{F}$, $eR \subseteq R$. Como $\bigoplus_{e \in F} eR$ es el supremo de $\{eR \mid e \in \mathbf{F}\}$, luego $\bigoplus_{e \in F} eR \leqslant R$. Así,

$$\bigoplus_{e \in F} eR \leqslant R \leqslant \prod_{e \in F} eR$$

□

Corolario 4.2.5. *Si R es un anillo casi conmutativo, entonces R es un producto subdirecto de ideales inescindibles.*

Demostración. Por el teorema anterior, R es un producto subdirecto de $\{eR \mid e \in F\}$, donde para toda $e \in F$, e es un idempotente primitivo. Por la proposición 1.1.12, para toda $e \in F$, eR es un ideal inescindible. Así, R es un producto subdirecto de ideales inescindibles.

□

Observación 4.2.6. *Notemos que la condición de pedirle a R que sea abeliano se puede debilitar a pedirle a R que sus idempotentes primitivos sean centrales.*

Definición 4.2.7. *Una familia $\mathcal{M}$ de R- módulos derechos es rígida si para todos $L, N \in \mathcal{M}$, $L \ncong N$, $Hom(L, N) = 0$.*

Nuestro teorema principal de estrucuta es el siguiente:

Teorema 4.2.8. *Sea $M \in Mod{-}R$. M es un módulo casi conmutativo si y sólo si existe una familia rígida $\mathcal{M}$ de R-módulos derechos inescindibles totalmente invariantes tales que,*

$$\bigoplus_{N\in\mathcal{M}} N \leqslant M \leqslant \prod_{N\in\mathcal{M}} N \text{ y } Hom(M/\bigoplus_{N\in\mathcal{M}} N, M) = 0.$$

Demostración.
$\Longrightarrow$ Supongamos que M es un módulo casi conmutativo.
Como M es un módulo casi conmutativo, $End(M)$ es un anillo casi conmutativo. Así, por el corolario 4.2.5, $End(M)$ es un producto subdirecto de $\{eR \mid e \in F\}$ donde eR son ideales inescindibles generados por idempotentes primitivos y F es un conjunto ortogonal máximo de idempotentes primitivos.
Llamemos J_γ a los submódulos de M generados por $\{\gamma f(M) \mid f \in End(M)\}$, donde $\gamma \in F$. Sea $\mathcal{M} = \{J_\gamma\}$. Notemos que por el lema 4.1.4, $\forall \gamma \in F$, J_γ es un sumando de M. Afirmamos que $\mathcal{M}$ es una familia rígida.
Sean $N, L \in \mathcal{M}$, $N \ncong L$. Sea $f \in Hom(N, L)$. Como M es un módulo endabeliano, por el teorema 4.1.6, todos los sumandos directos de M son totalmente invariantes, así N es totalmente invariante. Por lo que $f(N) \subseteq N \cap L$. Por otro lado, $N = J_\alpha$ y $L = J_\beta$, donde $\alpha, \beta \in F$, es decir son idempotentes primitivos ortogonales. Así, $\forall n \in N$, $f(n) = n' = l$, donde $n' \in N$ y $l \in L$.

$$n' = \sum_{i=1}^{k} \alpha f_i(m_i) r_i = f(n) = l = \sum_{j=1}^{r} \beta g_j(m'_j) r'_j$$

Donde $\forall i, j,\ f_i, g_j \in End(M)$, $m_i, m'_j \in M$ y $r_i, r'_j \in R$. Así, por un lado,

$$\alpha(n') = \alpha(\sum_{i=1}^{k} \alpha f_i(m_i) r_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha\alpha f_i(m_i) r_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha f_i(m_i) r_i = n'.$$

Por otro lado como α y β son ortogonales,

$$\alpha(l) = \alpha(\sum_{j=1}^{r} \beta g_j(m'_j) r'_j) = \sum_{j=1}^{r} \alpha\beta g_j(m'_j) r'_j = 0$$

Así, $\forall n \in N\ f(n) = n' = \alpha(n') = \alpha(l) = 0$. Por lo que $Hom(N, L) = 0$.
$\therefore \mathcal{M}$ es una familia rídiga de R módulos derechos.
Ahora, afirmamos que $\forall J_\gamma \in \mathcal{M}$, J_γ es inescindible. Sea $\gamma \in F$, supongamos $J_\gamma = A \oplus B$. Notemos que, por la proposición 1.1.12, $\forall \gamma \in F$, $\gamma End(M)$ es un sumando ideal derecho mínimo, es decir, es un submódulo de $End(M)$ inescindible. Así, $\forall \sum_{i=1}^{n} \gamma f_i(m_i) r_i \in J_\gamma$, existen $a \in A$, $b \in B$ tales que $\sum_{i=1}^{n} \gamma f_i(m_i) r_i = a + b$. Notemos que $\gamma End(M) = \varepsilon_A End(M) \oplus \varepsilon_B End(M)$, donde ε_A es la proyección sobre A y ε_B la proyección sobre B.
$\subseteq$ Si $\gamma \circ f \in \gamma End(M)$, luego $\forall m \in M$, $\gamma \circ f(m) \in J_\gamma$, así $\forall m \in M$, $\gamma \circ f(m) = a + b$, para algunos $a \in A$ y $b \in B$. De donde, $\varepsilon_A(\gamma \circ f(m)) = a$ y $\varepsilon_B(\gamma \circ f(m)) = b$. Así, $\forall m \in M$, $\gamma \circ f(m) = a + b = \varepsilon_A(\gamma \circ f) + \varepsilon_B(\gamma \circ f)(m)$. Por lo que, $\gamma \circ f =$

$\varepsilon_A(\gamma \circ f) + \varepsilon_B(\gamma \circ f) \in \varepsilon_A End(M) \oplus \varepsilon_B End(M)$.
$\supseteq$ Por el lema 4.1.3, $\varepsilon_A End(M) = \{f \in End(M) \mid f(M) \subseteq A\}$ y $\varepsilon_B End(M) = \{f \in End(M) \mid f(M) \subseteq B\}$. Así, tomemos $f + g \in \varepsilon_A End(M) \oplus \varepsilon_B End(M)$.
Observemos que $\forall a \in A$, $b \in B$, $\gamma(a) = a$ y $\gamma(b) = b$. Como $a \in J_\gamma$, $a = \sum_{i=1}^{n} \gamma f_i(m_i) r_i$.
Luego $\gamma(a) = \gamma(\sum_{i=1}^{n} \gamma f_i(m_i) r_i) = \sum_{i=1}^{n} \gamma f_i(m_i) r_i = a$. Análogamente, $b = \gamma(b)$.
Así, $\forall m \in M$, existen $a \in A$ y $b \in B$, tales que $a + b = f + g(m)$. Pero $\gamma(f + g(m)) = \gamma(a + b) = \gamma(a) + \gamma(b) = a + b = f + g(m)$. Por lo que $f + g = \gamma(f + g) \in \gamma End(M)$.
$\therefore$ $\gamma End(M) = \varepsilon_A End(M) \oplus \varepsilon_B End(M)$. Como $\gamma End(M)$ es inescindible, entonces, sin pérdida de generalidad, $\gamma End(M) = \varepsilon_A End(M)$, lo que implica que el submódulo generado por $\gamma End(M)$, que es J_γ, es igual al submódulo generado por $\varepsilon_A End(M)$. El submódulo generado por $\varepsilon_A End(M)$ es A, para ello es fácil ver que si $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_A f_i(m_i) r_i \in \varepsilon_A End(M) M$, entonces $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_A f_i(m_i) r_i \in A$, por definición de ε_A. Y si tomamos $a \in A$, luego $a = \varepsilon_A(id(a)) \in \varepsilon_A End(M) M$. Por lo que $J_\gamma = A$.
$\therefore$ J_γ es inescindible. Así, la familia $\mathcal{M}$ es una familia rígida de R-módulos derechos inescindibles. Como cada $N \in \mathcal{M}$ es un sumando de M, luego $\forall N \in \mathcal{M}$, $N \leqslant M$. Por lo que, $\bigoplus_{N \in \mathcal{M}} N \leqslant M$.
Consideremos $N \in \mathcal{M}$. Llamemos ρ_N a las proyecciones de M en cada sumando N. También existen $\pi_N : \prod_{N \in \mathcal{M}} N \longrightarrow N$ las proyección canónica del producto en N. Así, por la propiedad universal del producto existe una única $f : M \longrightarrow \prod_{N \in \mathcal{M}} N$, tal que $\pi_N f = \rho_N$. Notemos que $Nuc(f) = \cap_{N \in \mathcal{M}} Nuc(N) = \cap_{\gamma \in F} Nuc(J_\gamma) = 0$. Por lo que f es una función inyectiva. Así, $M \leqslant \prod_{N \in \mathcal{M}} N$. De donde podemos concluir que,

$$\bigoplus_{N \in \mathcal{M}} N \leqslant M \leqslant \prod_{N \in \mathcal{M}} N$$

Por otro lado, consideremos la siguiente sucesión,

$$0 \to \bigoplus_{N \in \mathcal{M}} N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\rho} M \Big/ \bigoplus_{N \in \mathcal{M}} N \to 0$$

Dnde i es la inclusión y ρ es la proyección canónica. Así, es claro que la sucesión es exacta. Si tomamos $\varphi \in Hom(M / \bigoplus_{N \in \mathcal{M}} N, M)$, luego $\varphi\rho \in End(M)$. Por lo que, $(\varphi\rho)|_{\bigoplus_{N \in \mathcal{M}} N} = 0$. Por lo que como $\forall m \in M$, $\gamma(m) \in \bigoplus_{N \in \mathcal{M}} N$, entonces $\forall \gamma \in F$, $\gamma\varphi\rho = 0$. Si $\varphi \neq 0$, luego $\varphi\rho \neq 0$ y como $\varphi\rho \in End(M)$ y $End(M)$ es casi conmutativo, luego existe $\beta \in E(End(M))$ primitivo tal que $\beta(\varphi\rho) \neq 0$. Pero entonces $\beta \notin F$. Pero $\forall \gamma \in F$, $\gamma\beta = \beta\gamma = \beta$ o $\beta\gamma = 0$. Si $\gamma\beta = \beta$, luego $0 \neq \beta(\varphi\rho) = \beta\gamma(\varphi\rho) = 0$. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\beta\gamma = 0$. Lo que implicaría que $\beta \in F$. Lo cua también es una contradicción. Así, $\varphi = 0$. Y por lo tanto, $Hom(M / \bigoplus_{N \in \mathcal{M}} N, M) = 0$.

$\Longleftarrow$ Supongamos que existe una familia rígida $\mathcal{M}$ de R-módulos derechos inescindibles totalmente invariantes tales que $\bigoplus_{N\in\mathcal{M}} N \leqslant M \leqslant \prod_{N\in\mathcal{M}} N$ y $Hom(M/\bigoplus_{N\in\mathcal{M}} N, M) = 0$.
Como cada N es totalmente invariante, cada $End(N)$ es un ideal sumando de $End(M)$. Su suma es directa, ya que si $N, L \in \mathcal{M}$, como la familia $\mathcal{M}$ es rígida y N y L son totalmente invariantes, $End(N) \cap End(L) = \{0\}$. Así, $\bigoplus_{N\in\mathcal{M}} End(N) \leqslant End(M)$. Por otro lado, consideremos la siguiente función:

$$\theta : End(M) \longrightarrow \prod_{N\in\mathcal{M}} End(N)$$
$$f \mapsto (\varepsilon_N f)$$

Veamos que θ es un monomorfismo. Para ello, sean $f, g, h \in End(M)$.

$$\theta(f+g) = (\varepsilon_N(f+g)) = (\varepsilon_N f + \varepsilon_N g) = (\varepsilon_N f) + (\varepsilon_N g) = \theta(f) + \theta(g)$$

$$\theta(fh) = (\varepsilon_N fh) = (\varepsilon_N f)h = \theta(f)h$$

$\therefore \theta$ es un homomorfismo.
Si $f \in Nuc(\theta)$, luego $\theta(f) = 0$, es decir $(\varepsilon_N f) = 0$, así $\forall N \in \mathcal{M}$, $\varepsilon_N f = 0$. Así, $f(\bigoplus_{N\in\mathcal{M}} N) = 0$. Por otro lado, si $f \in End(M)$ tal que $f(\bigoplus_{N\in\mathcal{M}} N) = 0$, luego $\forall N \in \mathcal{M}$, $\varepsilon_N f = 0$. Por lo que $\theta(f) = (\varepsilon_N f) = 0$. Así, $f \in Nuc(\theta)$.
$\therefore Nuc(\theta) = \{f \in End(M) \mid f(\bigoplus_{N\in\mathcal{M}} N) = 0\}$. Por hipótesis $Hom(M/\bigoplus_{N\in\mathcal{M}} N, M) = 0$, por lo que $Nuc(\theta) = \{f \in End(M) \mid f(\bigoplus_{N\in\mathcal{M}} N) = 0\} = 0$. Y por lo tanto, θ es un monomorfismo. De donde,

$$\bigoplus_{N\in\mathcal{M}} End(N) \leqslant End(M) \leqslant \prod_{N\in\mathcal{M}} End(N)$$

Sea $\alpha \in E(End(M))$, un idempotente. Como $\forall N \in \mathcal{M}$, N es inescindible, luego por la proposición 1.1.17, $\forall N \in \mathcal{M}$, los únicos idempotentes en $End(N)$ son 0 y la identidad. Por lo que, $E(\prod_{N\in\mathcal{M}} End(N)) = \{(\gamma)_{N\in\mathcal{M}} \mid \gamma = 0 \ o \ \gamma = id\}$. Así, como $End(M) \leqslant \prod_{N\in\mathcal{M}} End(N)$, $\alpha = (\gamma_j)_{N\in\mathcal{M}}$, como α es idempotente en M, $\alpha = \alpha\alpha = (\gamma_j)_{N\in\mathcal{M}}(\gamma_j)_{N\in\mathcal{M}} = (\gamma_j\gamma_j)_{N\in\mathcal{M}} = (\gamma_j)_{N\in\mathcal{M}}$. Por lo que $(\gamma)_{N\in\mathcal{M}}$ es un idempotente en $\prod_{N\in\mathcal{M}} End(N)$, de donde, $\alpha \in \{(\gamma)_{N\in\mathcal{M}} \mid \gamma = 0 \ o \ \gamma = id\}$. Así, si $f \in End(M)$, luego $f \in \prod_{N\in\mathcal{M}} End(N)$, por lo que $f = (f_i)_{N\in\mathcal{M}}$. Veamos que como $\alpha \in \{(\gamma)_{N\in\mathcal{M}} \mid \gamma = 0 \ o \ \gamma = id\}$, luego $\forall j$, $\gamma_j = 0$ o $\gamma_j = id$. Así,

$$\alpha f = (\gamma_j)_{N\in\mathcal{M}}(f_i)_{N\in\mathcal{M}} = (\gamma_j f_i)_{N\in\mathcal{M}} = (f_i\gamma_j)_{N\in\mathcal{M}} = (f_i)_{N\in\mathcal{M}}(\gamma_j)_{N\in\mathcal{M}} = f\alpha$$

Por lo que los idempotentes en $End(M)$ son centrales. Por lo tanto, $End(M)$ es abeliano.
Sea $0 \neq f \in End(M)$. Como $End(M) \prod_{N\in\mathcal{M}} End(N)$, luego $f = (\gamma_i)_{N\in\mathcal{M}}$, donde existe

i tal que $\gamma_i \neq 0$. Así, si consideremos $e = (\alpha_j)_{N \in \mathcal{M}}$, donde $\alpha_j = 0$ para toda $j \neq i$, y $\alpha_i = 1$. Es claro que e es un idempotente primitivo y que $fe \neq 0$. Así, $End(M)$ es un anillo casi conmutativo.
$\therefore M$ es un módulo casi conmutativo.

$\square$

Capítulo 5

Submódulos totalmente invariantes de M

Nos conciernen propiedades de $End(M)$ que impliquen que ciertas clases de submódulos de M son totalmente invariantes. Por ejemplo, en el capítulo 4 se probó que los sumandos directos del módulo M son totalmente invariantes si y sólo si M es un módulo endabeliano. Con esto en mente, damos las siguientes definiciones.

Definición 5.0.1. *Sea $M \in Mod{-}R$. Decimos que M es estable si todas las imágenes de los endomorfismos de M son totalmente invariantes.*

Definición 5.0.2. *Sea $M \in Mod{-}R$. Decimos que M es subestable si todos los núclos de los endomorfismos de M son totalmente invariantes.*

Recordemos que en el capítulo 2, se hizo la siguiente observación: si $\alpha \in End(M)$ es subconmutativo derecho, entonces $\alpha(M)$ es totalmente invariante. Por lo que si $End(M)$ es subconmutativo derecho, entonces M es un módulo estable.

Proposición 5.0.3. *Sea $M \in Mod{-}R$. Supongamos que $End(M)$ es conmutativo, entonces M es estable y subestable.*

Demostración.
Sea $\alpha \in End(M)$.
P.D.1 $Im(\alpha)$ es totalmente invariante.
Sea $\beta \in End(M)$, tomemos $\beta(\alpha(m)) \in \beta Im(\alpha)$. Como $End(M)$ es conmutativo,

$$\beta(\alpha(m)) = \alpha(\beta(m))$$

Pero $\alpha(\beta(m)) \in Im(\alpha)$.
$\therefore \beta(\alpha(m)) \in Im(\alpha)$.
$\therefore Im(\alpha)$ es totalmente invariante.
P.D.2 $Nuc(\alpha)$ es totalmente invariante.
Sea $\beta \in End(M)$, tomemos $\beta(m) \in \beta Nuc(\alpha)$. Como $End(M)$ es conmutativo y $m \in Nuc(\alpha)$, entonces,

$$\alpha(\beta(m)) = \beta(\alpha(m)) = \beta(0) = 0$$

$\therefore \beta(m) \in Nuc(\alpha($.
$\therefore Nuc(\alpha)$ es totalmente invariante.
$\therefore M$ es estable y subestable.

$\square$

Nuestro objetivo es explicar las relaciones entre la (sub)estabilidad de M y la subconmutatividad de $End(M)$.

Proposición 5.0.4. *Sea $M \in Mod{-}R$ y sea $\alpha \in End(M)$.*
(i) Si α es subconmutativo izquierdo entonces $Nuc(\alpha)$ es totalmente invariante.
(ii) Si $Im(\alpha)$ es un sumando de M y $Nuc(\alpha)$ es totalemnte invariante, entonces α es subconmutativo izquierdo.

Demostración.
P.D.1 Si α es subconmutativo izquierdo entonces $Nuc(\alpha)$ es totalmente invariante.
Supongamos que $\alpha End(M) \subseteq End(M)\alpha$. Sea $\beta \in End(M)$ y sea $m \in Nuc(\alpha)$. Así existe $h \in End(M)$ tal que,

$$\alpha(\beta(x)) = h(\alpha(x)) = h(0) = 0$$

$\therefore \beta(x) \in Nuc(\alpha)$.
$\therefore Nuc(\alpha)$ es totalmente invariante.

P.D.2 Si $Im(\alpha)$ es un sumando de M y $Nuc(\alpha)$ es totalemnte invariante, entonces α es subconmutativo izquierdo.
Supongamos que $M = Im(\alpha) \bigoplus H$. Sea $\beta \in End(M)$. Definimos:

$$\begin{gathered} \gamma : M \longrightarrow M \\ \gamma(\alpha(m)) = \alpha(\beta(m)) \\ \gamma(h) = 0 \end{gathered}$$

Donde $\alpha(m) \in Im(\alpha)$ y $h \in H$.
Notemos que γ está bien definida ya que si

$$\begin{gathered} \alpha(m_1) = \alpha(m_2) \\ \alpha(m_1) - \alpha(m_2) = 0 \\ \alpha(m_1 - m_2) = 0 \end{gathered}$$

$\therefore (m_1 - m_2) \in Nuc(\alpha)$. Como Nuc($\alpha$) es totalmente invariante, entonces $\beta(m_1 - m_2) \in Nuc(\alpha)$, i. e., $\alpha(\beta(m_1 - m_2)) = 0$. Por lo que,

$$\begin{gathered} \alpha(\beta(m_1)) = \alpha(\beta(m_2)) \\ \gamma(\alpha(m_1)) = \gamma(\alpha(m_2)) \end{gathered}$$

$\therefore \gamma$ está bien definida.
Por otro lado, $\gamma \in End(M)$, ya que si $\alpha(m_1) + h_1, \alpha(m_2) + h_2 \in M = Im(\alpha) \bigoplus H$ y

$r \in R$, entonces:

$$\begin{aligned}\gamma((\alpha(m_1)+h_1)+(\alpha(m_2)+h_2)) &= \gamma(\alpha(m_1+m_2)+(h_1+h_2))\\ &= \alpha(\beta(m_1+m_2))\\ &= \alpha(\beta(m_1))+\alpha(\beta(m_2)\\ &= \gamma(\alpha(m_1)+h_1)+\gamma(\alpha(m_2)+h_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma((\alpha(m_1)+h_1)r) &= \gamma(\alpha(m_1 r)+h_1 r)\\ &= \alpha(\beta(m_1 r))\\ &= (\alpha(\beta(m_1))r\\ &= (\gamma(\alpha(m_1)+h_1))r\end{aligned}$$

$\therefore \gamma \in End(M)$.
Así, $\forall m \in M$, $\forall \beta \in End(M)$, existe $\gamma \in End(M)$, tal que $\alpha(\beta(m)) = \gamma(\alpha(m))$.
$\therefore \alpha End(M) \subseteq End(M)\alpha$.
$\therefore \alpha$ es subconmutativo izquierdo.

$\square$

Corolario 5.0.5. *Sea $M \in Mod{-}R$. Si $\alpha \in End(M)$ es un idempotente o un epimorfismo, entonces α es subconmutativo izquierdo si y sólo si $Nuc(\alpha)$ es totalmente invariante.*

Demostración.
$\Longrightarrow$ Supongamos α subconmutativo izquierdo.
Se sigue de la proposición anterior, 5.0.4 (i).
$\Longleftarrow$ Supongamos $Nuc(\alpha)$ totalmente invariante.
Por hipótesis, $\alpha \in End(M)$ es un idempotente o un epimorfismo. Si α es un idempotente, entonces por la proposición 1.1.14, $Im(\alpha)$ es un sumando de M. Y si α fuese un epimorfismo, entonces $Im(\alpha) = M$. En cualquier caso, $Im(\alpha)$ es un sumando de M. Por hipótesis, $Nuc(\alpha)$ es totalmente invariante, así como también $Im(\alpha)$ es un sumando de M, entonces por la proposición 5.0.4(ii), α es subconmutativo izquierdo.

$\square$

Por otro lado, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 5.0.6. *Sea $M \in Mod{-}R$ y sea $\alpha \in End(M)$.*
(i) Si α es subconmutativo derecho entonces $Im(\alpha)$ es totalmente invariante.
(ii) Si α es un monomorfismo y $Im(\alpha)$ es totalemnte invariante, entonces α es subconmutativo derecho.

Demostración.
P.D.1 Si α es subconmutativo derecho entonces $Im(\alpha)$ es totalmente invariante.
Sea $\beta \in End(M)$ y sea $\alpha(m) \in Im(\alpha)$. Como α es subconmutativo derecho, entonces existe $\gamma \in End(M)$ tal que, $\beta \circ \alpha = \alpha \circ \gamma$. Así,

$$\beta(\alpha(m)) = \alpha(\gamma(m))$$

$\therefore \beta(\alpha(m)) \in Im(\alpha)$.
$\therefore Im(\alpha)$ es totalmente invariante.

P.D.2 Si α es un monomorfismo y $Im(\alpha)$ es totalemnte invariante, entonces α es subconmutativo derecho.
Como $Im(\alpha)$ es totalmente invariante, entonces $\forall \beta \in End(M)$, $\forall x \in M$, existe $m \in M$ tal que $\beta \circ \alpha(x) = \alpha(m)$.
Si $m' \in M$ es tal que $\alpha(m') = \beta(\alpha(x))$, entonces $\alpha(m') = \alpha(m)$ y como α es un monomorfismo, entonces $m' = m$. Así, podemos concluir que $\forall x \in M$, existe una única $m \in M$, tal que $\beta \circ \alpha(x) = \alpha(m)$. Ahora, con esto en mente, definamos:

$$\gamma : M \Longrightarrow M$$
$$\gamma(x) = m$$

Donde m es la única m que existe, para $x \in M$, tal que $\beta \circ \alpha(x) = \alpha(m)$. Por la unicidad de m, γ está bien definida.
Por otro lado, $\gamma \in End(M)$. Sean $x, y \in M$, $r \in R$.

$$\gamma(x + y) = m$$

Donde $\beta \circ \alpha(x + y) = \alpha(m)$.
Para $x \in M$ $\exists! a \in M$ tal que $\beta \circ \alpha(x) = \alpha(a)$. Así, $\gamma(x) = a$.
Para $y \in M$ $\exists! b \in M$ tal que $\beta \circ \alpha(y) = \alpha(b)$. Así, $\gamma(y) = b$.
Por lo tanto,

$$\beta(\alpha(x)) + \beta(\alpha(y)) = \alpha(a) + \alpha(b)$$
$$\beta(\alpha(x + y)) = \alpha(a + b)$$

$\therefore \alpha(m) = \alpha(a + b)$. Como α es inyectiva, $m = a + b$.

$$\gamma(x + y) = m = a + b = \gamma(x) + \gamma(y)$$

Por otro lado,

$$\gamma(xr) = m'$$

Donde $\beta \circ \alpha(xr) = \alpha(m')$.
Para $x \in M$ $\exists! a' \in M$ tal que $\beta \circ \alpha(x) = \alpha(a')$. Así, $\gamma(x) = a'$.
De donde,

$$\beta(\alpha(x))r = \alpha(a')r$$
$$\beta(\alpha(xr) = \alpha(a'r)$$

$\therefore \alpha(m') = \alpha(a'r)$. Como α es un monomorfismo, $m' = a'r$.
Así,

$$\gamma(xr) = m' = a'r = \gamma(x)r$$

$\therefore \gamma \in End(M)$.
Probemos que $\beta \circ \alpha = \alpha \circ \gamma$. Sea $x \in M$, así existe un único $m \in M$ tal que $\beta \circ \alpha(x) = \alpha(m)$. Así, $\gamma(x) = m$. Por lo que $\forall x \in M$,

$$\beta \circ \alpha(x) = \alpha(m)$$
$$\beta(\alpha(x)) = \alpha(\gamma(x))$$

$\therefore \forall \beta \in End(M)$, existe $\gamma \in End(M)$ tal que $\beta \circ \alpha = \alpha \circ \gamma$.
$\therefore End(M)\alpha \subseteq \alpha\,\mathrm{End}(M)$.
$\therefore \alpha$ es subconmutativo derecho.

$\square$

Corolario 5.0.7. *Sea $M \in Mod{-}R$. Si $\alpha \in End(M)$ es un idempotente o un monomorfismo, entonces α es subconmutativo derecho si y sólo si $Im(\alpha)$ es totalmente invariante.*

Demostración.
$\Longrightarrow$ Supongamos α subconmutativo derecho.
Se sigue de la proposición anterior, 5.0.6 (i).
$\Longleftarrow$ Supongamos $Im(\alpha)$ totalmente invariante.
Caso 1. α idempotente.
Sea $\beta \in End(M)$, como $Im(\alpha)$ es totalmente invariante, $\beta(Im(\alpha)) \subseteq Im(\alpha)$. Así, $\forall m \in M$, existe $m' \in M$, tal que $\beta(\alpha(m)) = \alpha(m')$.
Afirmamos que $\beta \circ \alpha = \alpha \circ (\beta \circ \alpha)$. Por un lado, para $x \in M$, existe $y \in M$, tal que $\beta(\alpha(x)) = \alpha(y)$. Así como α es idempotente,

$$\begin{aligned}\alpha \circ (\beta \circ \alpha)(x) &= \alpha(\beta(\alpha(x)) \\ &= \alpha(\alpha(y)) \\ &= \alpha(y) \\ &= \beta(\alpha(x)) \\ &= \beta \circ \alpha(x)\end{aligned}$$

$\therefore \beta \circ \alpha = \alpha \circ (\beta \circ \alpha)$.
$\therefore End(M)\alpha \subseteq \alpha End(M)$.
$\therefore \alpha$ es subconmutativo derecho.

Caso 2. α monomorfismo.
Como α es un monomorfismo y $Im(\alpha)$ es totalmente invariante, entonces por la proposición 5.0.6 (ii), α es subconmutativo derecho.

$\square$

Corolario 5.0.8. *Sea $M \in Mod{-}R$.*
(i) Si $End(M)$ es subconmutativo derecho, entonces M es estable. El converso es cierto si todo endomorfismo es un monomorfismo.
(ii) Si $End(M)$ es subconmutativo izquierdo, entonces M es subestable. El converso es cierto si todo endomorfismo es un epimorfismo.

Demostración.
P.D.1 Si $End(M)$ es subconmutativo derecho, entonces M es estable. El converso es

cierto si todo endomorfismo es un monomorfismo.
$\Longrightarrow$ Supongamos $End(M)$ subconmutativo derecho.
$\forall\alpha \in End(M)$, α es subconmutativo derecho. Entonces, por la proposición 5.0.6 (i), $\forall\alpha \in End(M)$, $Im(\alpha)$ es totalmente invariante.
$\therefore M$ es estable.

$\Longleftarrow$ Supongamos M estable y todo endomorfismo es mónico.
Así, $\forall\alpha \in End(M)$, $Im(\alpha)$ es totalmente invariante y α es un monomorfismo, entonces por la proposición 5.0.6 (ii), $\forall\alpha \in End(M)$, α es subconmutativo derecho.
$\therefore End(M)$ es subconmutativo derecho.

P.D.2 Si $End(M)$ es subconmutativo izquierdo, entonces M es subestable. El converso es cierto si todo endomorfismo es un epimorfismo.
$\Longrightarrow$ Supongamos $End(M)$ subconmutativo izquierdo.
$\forall\alpha \in End(M)$, α es subconmutativo izquierdo, entonces por la proposición 5.0.4, $\forall\alpha \in End(M)$, $Nuc(\alpha)$ es totalmente invariante.
$\therefore M$ es subestable.
$\Longleftarrow$ Supongamos M subestable y todo endomorfismo es un epimorfismo.
Como M es subestable, $\forall\alpha \in End(M)$, $Nuc(\alpha)$ es totalmente invariante, y por hipótesis $\forall\alpha \in End(M)$, α es un epimorfismo. Así, por el corolario 5.0.5, $\forall\alpha \in End(M)$, α es subconmutativo izquierdo.
$\therefore End(M)$ es subconmutativo izquierdo.

□

Proposición 5.0.9. *Sea $M \in Mod{-}R$. Si $\varepsilon \in End(M)$ es un idempotente central, entonces $M = Im(\varepsilon) \bigoplus Nuc(\varepsilon)$, donde cada sumando es totalmente invariante en M.*

Demostración.
Como ε es un idempotente, entonces por la proposición 1.1.14, $M = Im(\varepsilon) \bigoplus Nuc(\varepsilon)$.

P.D.1 $Im(\varepsilon)$ es totalmente invariante.
Sea $h \in End(M)$, y sea $\varepsilon(x) \in Im(\varepsilon)$. Así, $h(\varepsilon(x)) \in h(Im(\varepsilon))$. Como ε es central,

$$h(\varepsilon(x)) = \varepsilon(h(x))$$

$\therefore h(\varepsilon(x)) \in Im(\varepsilon)$.
$\therefore h(Im(\varepsilon)) \subseteq Im(\varepsilon)$.
$\therefore Im(\varepsilon)$ es totalmente invariante.

P.D.2 $Nuc(\varepsilon)$ es totalmente invariante.
Sea $h \in End(M)$, y sea $x \in Nuc(\varepsilon)$. Así, $h(x) \in h(Nuc(\varepsilon))$. Como ε es central,

$$\varepsilon(h(x)) = h(\varepsilon(x)) = h(0) = 0$$

$\therefore h(x) \in Nuc(\varepsilon)$.
$\therefore h(Nuc(\varepsilon)) \subseteq Nuc(\varepsilon)$.
$\therefore Nuc(\varepsilon)$ es totalmente invariante.

□

Observación 5.0.10. De la proposición anterior, si $Im(\varepsilon)$ y $Nuc(\varepsilon)$ son totalmente invariantes, entonces por el lema 4.1.5, $Im(\varepsilon)$ y $Nuc(\varepsilon)$ son únicamente complementados en M.

Ahora queremos abordar el converso de la proposición 5.0.9, es decir, si M es la suma directa de dos módulos totalmente invariantes, ¿son éstos la imagen y núcleo de un idempotente central en $End(M)$? En general, si H es un submódulo totalmente invariante de M, ¿cuándo es H un sumando con un complemento totalmente invariante?

Primero consideremos la relación entre los submódulos totalmente invariantes de M y los ideales bilaterales de $End(M)$. Sea $\mathcal{H}$ el conjunto de los submódulos totalmente invariantes de M y sea $\mathcal{I}$ el conjunto de ideales bilaterales de $End(M)$.

Proposición 5.0.11. *$\mathcal{H}$ e $\mathcal{I}$ son retículas completas.*

Demostración.
P.D.1 $\mathcal{H}$ es una retícula completa.
Es claro que $(\mathcal{H}, \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.
Tomemos $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}$.
Afirmamos que $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F$ es el ínfimo de $\mathcal{F}$.
Primero, veamos que $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F$ es totalmente invariante. Para ello, tomemos $h \in End(M)$ y sea $x \in \bigcap_{F\in\mathcal{F}} F$. Así, $h(x) \in h(\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F)$.
Como $x \in \bigcap_{F\in\mathcal{F}} F$, entonces $\forall F \in \mathcal{F}$, $x \in F$. Pero toda $F \in \mathcal{F}$ es totalmente invariante por hipótesis, lo que implica que $\forall F \in \mathcal{F}$, $h(x) \in F$.
$\therefore h(x) \in \bigcap_{F\in\mathcal{F}} F$.
$\therefore \bigcap_{F\in\mathcal{F}} F \in \mathcal{H}$.
Es claro que, $\forall F \in \mathcal{F}$, $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F \subseteq F$.
Sea S tal que $\forall F \in \mathcal{F}$, $S \subseteq F$. Si $s \in S$, luego $\forall F \in \mathcal{F}$, $s \in F$. Por lo que $s \in \bigcap_{F\in\mathcal{F}} F$.
$\therefore S \subseteq \bigcap_{F\in\mathcal{F}} F$.
$\therefore \bigcap_{F\in\mathcal{F}} F$ es el ínfimo de $\mathbb{F}$.
Afirmamos que $\sum_{F\in\mathcal{F}} F$ es el supremo de $\mathcal{F}$.
$\mathcal{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha\in I}$. Sea $x_{\alpha 1} + ... + x_{\alpha n} \in \mathcal{F}$. Sea $h \in End(M)$.

$$h(x_{\alpha 1} + ... + x_{\alpha n}) = h(x_{\alpha 1}) + ... + h(x_{\alpha n})$$

Como $\forall i$, $x_{\alpha i} \in F_{\alpha i}$, y $F_{\alpha i}$ es totalmente invariante, entonces $\forall i$, $h(x_{\alpha i}) \in F_{\alpha i}$. Por lo tanto,

$$h(x_{\alpha 1} + ... + x_{\alpha n}) = h(x_{\alpha 1}) + ... + h(x_{\alpha n}) \in F_{\alpha 1} + ... + F_{\alpha n} \subseteq \sum_{F \in \mathcal{F}} F$$

$\therefore \sum_{F \in \mathcal{F}} F$ es totalmente invariante.
$\therefore \sum_{F \in \mathcal{F}} F \in \mathcal{H}$.
Es claro que, $\forall F \in \mathcal{F}$, $F \subseteq \sum_{F \in \mathcal{F}} F$.
Sea $S \in \mathcal{H}$ tal que, $\forall F \in \mathcal{F}$, $F \subseteq S$. Y tomemos, $f_{\alpha 1} + ... + f_{\alpha n} \in \sum_{F \in \mathcal{F}} F$. Donde $\forall i$, $f_{\alpha i} \in F_{\alpha i}$. Como $\forall i$, $F_{\alpha i} \subseteq S$, entonces $f_{\alpha 1} + ... + f_{\alpha n} \in S$.
$\therefore \sum_{F \in \mathcal{F}} F \subseteq S$.
$\therefore \sum_{F \in \mathcal{F}} F$ es el supremo de $\mathcal{F}$.
$\therefore \mathcal{F}$ tiene supremo e ínfimo.
$\therefore \mathcal{H}$ es una retícula completa.

P.D.2 $\mathcal{I}$ es una retícula completa.
Es claro que $(\mathcal{I}, \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.
Tomemos $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$ y afirmamos que $\bigcap_{J \in \mathcal{J}} J$ es el ínfimo de $\mathcal{J}$.
Notemos que como todo $J \in \mathcal{J}$ es un ideal bileteral de $End(M)$, entonces $\bigcap_{J \in \mathcal{J}} J$ es un ideal bilateral de $End(M)$.
$\therefore \bigcap_{J \in \mathcal{J}} J \in \mathcal{I}$.
Es claro que $\forall J \in \mathcal{J}$, $\bigcap_{J \in \mathcal{J}} J \subseteq J$.
Y sea $S \in \mathcal{I}$, tal que $\forall J \in \mathcal{J}$, $S \subseteq J$. Así, si $s \in S$, entonces $\forall J \in \mathcal{J}$, $s \in J$. Por lo que $s \in \bigcap_{J \in \mathcal{J}} J$.
$\therefore S \subseteq \bigcap_{J \in \mathcal{J}} J$.
$\therefore \bigcap_{J \in \mathcal{J}} J$ es el ínfimo de $\mathcal{J}$.

Ahora, probemos que $\sum_{J \in \mathcal{J}} J$ es el supremo de $\mathcal{J}$.
Es claro que $\sum_{J \in \mathcal{J}} J$ es un ideal bilateral de $End(M)$, ya que $\forall J \in \mathcal{J}$, J es un ideal bilateral de $End(M)$.
$\therefore \sum_{J \in \mathcal{J}} J \in \mathcal{I}$.
También es claro que por definición de la suma de ideales, $\forall J \in \mathcal{J}$, $J \subseteq \sum_{J \in \mathcal{J}} J$.
Por otro lado, sea $S \in \mathcal{I}$ tal que $\forall J \in \mathcal{J}$, $J \subseteq S$. Consideremos $\mathcal{J} = \{J_\alpha\}_{\alpha \in I}$. Así, tomemos $x = x_1 + ... + x_n \in \sum_{J \in \mathcal{J}} J$, donde $\forall i$, $x_i \in J_{\alpha i}$. Como $\forall J \in \mathcal{J}$, $J \subseteq S$, luego $x_1, ..., x_n \in S$, y S es un ideal, por lo que $x_1 + ... + x_n \in S$.

$\therefore \sum\limits_{J\in\mathcal{J}} J \subseteq S$.
$\therefore \sum\limits_{J\in\mathcal{J}} J$ es el supremo de $\mathcal{J}$.
$\therefore \mathcal{I}$ es una retícula completa.

$\square$

Denotamos por $\mathcal{H}^{op}$ la retícula opuesta de $\mathcal{H}$.
$\mathcal{H}^{op} = (\mathcal{H}, \leq)$ tal que $H \leq K$ si y sólo si $K \subseteq H$.

Para todo $H \in \mathcal{H}$, sean

$$H' = Ann(H) = \{\alpha \in End(M) \mid \alpha(H) = 0\}$$

$$H^* = Ann(M/H) = \{\alpha \in End(M) \mid \alpha(M) \subseteq H\}$$

Proposición 5.0.12. *Sea $H \in \mathcal{H}$. Entonces, H' y H^* son elementos de $\mathcal{I}$.*

Demostración.
P.D.1 $H' \in \mathcal{I}$.
Claramente, $H' \subseteq End(M)$.
Si $\alpha = 0$, entonces $\alpha(H) = 0$. Por lo que, $H' \neq \emptyset$.
Sean α, $\beta \in H'$. Si $h \in H$,

$$\alpha + \beta(h) = \alpha(h) + \beta(h) = 0 + 0 = 0$$

$$-\alpha(h) = -(\alpha(h)) = 0$$

$\therefore \alpha + \beta \in H'$ y $-\alpha \in H'$.
$\therefore H'$ es un subgrupo aditivo de $End(M)$.
Ahora, sea $\alpha \in H'$, sea $\beta \in End(M)$ y sea $h \in H$. Como H es totalmente invariante, $\beta(h) \in H$. Así,

$$\alpha \circ \beta(h) = \alpha(\beta(h)) = 0$$

$$\beta \circ \alpha(h) = \beta(\alpha(h)) = \beta(0) = 0$$

$\therefore \alpha \circ \beta \in H'$ y $\beta \circ \alpha \in H'$.
$\therefore H'$ es un ideal bilateral de $End(M)$.
$\therefore H' \in \mathcal{I}$.

P.D.2 $H^* \in \mathcal{I}$.
Claramente, $H^* \subseteq End(M)$.
Si $\alpha = 0$, luego $\alpha(M) = \{0\} \subseteq H$. Por lo que, $H^* \neq \emptyset$.
Sean $\alpha, \beta \in H^*$. Como H es cerrado bajo sumas, si $m \in M$,

$$\alpha + \beta(m) = \alpha(m) + \beta(m) \subseteq H$$

$$-\alpha(m) = -(\alpha(m)) \subseteq H$$

$\therefore \alpha + \beta$, $-\alpha \in H^*$.
$\therefore H^*$ es un subgrupo aditivo de $End(M)$.
Ahora, sea $\alpha \in H^*$, sea $\beta \in End(M)$ y sea $m \in M$.
$\alpha \circ \beta(m) = \alpha(\beta(m))$. Donde $\beta(m) \in M$ y como $\alpha \in H^*$, luego $\alpha(\beta(m)) \in H$.
$\therefore \alpha \circ \beta \in H^*$.
$\beta \circ \alpha(m) = \beta(\alpha(m))$ Como $\alpha \in H^*$, $\alpha(m) \in H$, y como H es totalmente invariante $\beta(\alpha(m)) \in H$.
$\therefore \beta \circ \alpha \in H^*$.
$\therefore H^*$ es un ideal bilateral de $End(M)$.
$\therefore H^* \in \mathcal{I}$.

$\square$

Definamos, para todo $I \in \mathcal{I}$,

$$I' = \{a \in M \mid Ia = 0\}$$

$$I^* = IM, \textit{ el submódulo de } M \textit{ generado por } \{\alpha(a) \mid \alpha \in I \textit{ y } a \in M\}$$

Proposición 5.0.13. *Sea $I \in \mathcal{I}$. Entonces, I' y I^* son elementos de $\mathcal{H}$.*

Demostración.
P.D.1 $I' \in \mathcal{H}$.
Claramente, $I' \subseteq M$.
Para toda $i \in I$, $i(0) = 0$. Por lo que, $0 \in I'$. Por lo tanto, $I' \neq \emptyset$.
Si a, $b \in I'$, y si $\alpha \in I$. Luego,

$$\alpha(a + b) = \alpha(a) + \alpha(b) = 0$$

Puesto que $a, b \in I'$, $\alpha(a) = 0 = \alpha(b)$.
$\therefore a + b \in I'$.
Por otro lado, $\alpha(-a) = \alpha(a)(-1) = 0$.
$\therefore -a \in I'$.
$\therefore I'$ es un subgrupo de M.
Sea $r \in R$, sea $a \in I'$ y sea $\alpha \in I$.

$$\alpha(ar) = \alpha(a)r = 0(r) = 0$$

$\therefore ar \in I'$.
$\therefore I'$ es un submódulo de M.
Ahora, tomemos $h \in End(M)$, y sea $h(a) \in h(I')$. Sea $\alpha \in I$.
Como I es un ideal bilateral de $End(M)$, $IEnd(M) = I = End(M)I$. Así, existen $\gamma \in End(M)$ y $f \in I$ tales que $\alpha \circ h = \gamma \circ f$. Notemos que como $f \in I$ y $a \in I'$, $f(a) = 0$ Por lo que,

$$\alpha(h(a)) = \gamma(f(a)) = \gamma(0) = 0$$

$\therefore h(a) \in I'$.
$\therefore h(I') \subseteq I'$.

$\therefore I'$ es totalmente invariante.
$\therefore I' \in \mathcal{H}$.

P.D.2 $I^* \in \mathcal{H}$.
Por definición, I^* es un submódulo de M.
Sea $h \in End(M)$ y sea $x = \alpha_1(a_1)r_1 + ...\alpha(a_n)r_n \in I^*$, donde $\forall i \in \{1, ..., n\}$, $\alpha_i \in I$, $a_i \in M$ y $r_i \in R$. Así, $h(x) \in h(I^*)$.

$$\begin{aligned} h(x) &= h(\alpha_1(a_1)r_1 + ...\alpha(a_n)r_n) \\ &= h(\alpha(a_1)r_1) + ... + h(\alpha(a_n)r_n) \\ &= h(\alpha(a_1))r_1 + ... + h(\alpha(a_n))r_n \\ &= h \circ \alpha(a_1)r_1 + ... + h \circ \alpha(a_n)r_n \end{aligned}$$

Como I es un ideal bilateral de $End(M)$, entonces $End(M)I = I$, así $h \circ \alpha \in I$.
$\therefore h(x) = h \circ \alpha(a_1)r_1 + ... + h \circ \alpha(a_n)r_n \in I^*$.
$\therefore h(I^*) \subseteq I^*$.
$\therefore I^*$ es totalmente invariante.
$\therefore I^* \in \mathcal{H}$.

□

Definición 5.0.14. *Sean $(P, \leq)$, $(Q, \preceq)$ conjuntos parcialmente ordenados. Sean $\Theta : P \longrightarrow Q$, $\Theta(x) = x^*$ y $\Psi : Q \longrightarrow P$, $\Psi(y) = y^*$ cualesquiera dos correspondencias tales que:*
(i) Si $x_1 \leq x_2$, entonces $x_2^* \preceq x_1^*$.
(ii) Si $y_1 \leq y_2$, entonces $y_2^+ \preceq y_1^+$.
(iii) $x \leq (x^*)^+$ y $y \preceq (y^+)^*$.
A Θ y Ψ se les llaman correspondencias de Galois entre P y Q.

Proposición 5.0.15. *Sean*

$$\begin{aligned} \Theta' : \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{I} & \Psi' : \mathcal{I} &\longrightarrow \mathcal{H} \\ H &\longmapsto H' & I &\longmapsto I' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Theta^* : \mathcal{H}^{op} &\longrightarrow \mathcal{I} & \Psi^* : \mathcal{I} &\longrightarrow \mathcal{H}^{op} \\ H &\longmapsto H^* & I &\longmapsto I^* \end{aligned}$$

Entonces,
(i) Θ' y Ψ' son correspondencias de Galois entre $\mathcal{H}$ y $\mathcal{I}$.
(ii) Θ^* y Ψ^* son correspondencias de Galois entre $\mathcal{H}^{op}$ y $\mathcal{I}$.

Demostración.
P.D.1 Θ' y Ψ' son correspondencias de Galois entre $\mathcal{H}$ y $\mathcal{I}$.
Por la proposición 5.0.11, $(\mathcal{H}, \subseteq)$ y $(\mathcal{I}, \subseteq)$ son conjuntos parcialmente ordenados.

Sean $H, K \in \mathcal{H}$, supongamos $H \subseteq K$.
Tomemos $\alpha \in K'$. Así, $\alpha(K) = 0$. Pero como $H \subseteq K$, entonces $\alpha(H) = 0$. Por lo que, $\alpha \in H'$.
$\therefore K' \subseteq H'$.
Sean $I, J \in \mathcal{I}$, supongamos $I \subseteq J$.
Tomemos $a \in J'$. Así, $\forall \alpha \in J$, $\alpha(a) = 0$. Pero $I \subseteq J$, así $\forall \beta \in I$, $\beta(a) = 0$. Por lo que, $a \in I'$.
$\therefore J' \subseteq I'$.
Sean $H \in \mathcal{H}$, $I \in \mathcal{I}$.
Sea $h \in H$. Notemos que: $(H')' = \{a \in M \mid H'(a) = 0\}$. Sea $\alpha \in H'$, por definición de H', $\alpha(h) = 0$. Por lo que $h \in (H')'$.
$\therefore H \subseteq (H')'$.
Sea $\beta \in I$. Notemos que: $(I')' = \{\alpha \in End(M) \mid \alpha(I') = 0\}$. Sea $a \in I'$, por definición de I', $\beta(a) = 0$. Por lo que $\beta \in (I')'$.
$\therefore I \subseteq (I')'$.
$\therefore \Theta'$ y Ψ' son correspondencias de Galois entre $\mathcal{H}$ y $\mathcal{I}$.

P.D.2 Θ^* y Ψ^* son correspondencias de Galois entre $\mathcal{H}^{op}$ y $\mathcal{I}$.
Por la proposición 5.0.11, $\mathcal{H}^{op}$ y $\mathcal{I}$ son conjuntos parcialmente ordenados.
Sean $H, K \in \mathcal{H}^{op}$. Supongamos $H \leq K$.
Sea $\alpha \in K^*$, así $\alpha(M) \subseteq K$. Como $H \leq K$, entonces $K \subseteq H$, así $\alpha(M) \subseteq H$. Por lo que $\alpha \in H^*$.
$\therefore K^* \subseteq H^*$.
Sean $I, J \in \mathcal{I}$. Supongamos $I \subseteq J$.
Sea $x = \alpha_1(a_1)r_1 + ...\alpha(a_n)r_n \in I^*$, donde $\forall i \in \{1, ..., n\}$, $\alpha_i \in I$, $a_i \in M$ y $r_i \in R$. Pero como $I \subseteq J$, $\forall i$, $\alpha_i \in J$. Entonces $x = \alpha_1(a_1)r_1 + ...\alpha(a_n)r_n \in I^*$, donde $\forall i \in \{1, ..., n\}$, $\alpha_i \in J$, $a_i \in M$ y $r_i \in R$. Por lo que, $x \in J^*$.
$\therefore I^* \subseteq J^* \Leftrightarrow J^* \leq I^*$.
Sean $H \in \mathcal{H}$, $I \in \mathcal{I}$.
Notemos que $(H^*)^*$ es el submódulo de M generado por $\{\alpha(a) \mid \alpha \in H^* \ y \ a \in M\}$. Así, si $h \in (H^*)^*$, $h = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(a_i)r_i$, donde $\forall i$, $\alpha_i \in H^*$, $a_i \in M$ y $r_i \in R$.
Como $\forall i$, $\alpha_i \in H^*$, entonces $\alpha_i(a_i) \in H$. Como H es un R-módulo derecho, entonces $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(a_i)r_i \in H$. Así, $h \in H$.
$\therefore (H^*)^* \subseteq H \Leftrightarrow H \leq (H^*)^*$.
Sea $\beta \in I$. Notemos que: $(I^*)^* = \{\alpha \in End(M) \mid \alpha(M) \subseteq I^*\}$. Como $\beta \in I$, entonces es claro que $\beta(M) \in I^*$. Así, $\beta \in (I^*)^*$.
$\therefore I \subseteq (I^*)^*$.
$\therefore \Theta^*$ y Ψ^* son correspondencias de Galois entre $\mathcal{H}^{op}$ y $\mathcal{I}$.

□

Observación 5.0.16. *Notemos que por la proposición anterior, en particular, para todo $H \in \mathcal{H}$, $H \subseteq (H')'$ y $(H^*)^* \subseteq H$. Y para toda $I \in \mathcal{I}$, $I \subseteq (I')'$ e $I \subseteq (I^*)^*$.*

Definición 5.0.17. *Sean $H \in \mathcal{H}$, $I \in \mathcal{I}$. Decimos que H es '-cerrado si $H = (H')'$ y *-cerrado si $H = (H^*)^*$. Y decimos que I es '-cerrado si $I = (I')'$ y *-cerrado si $I = (I^*)^*$.*

Proposición 5.0.18. *Sean $H \in \mathcal{H}$, $I \in \mathcal{I}$.*
(i) H es '-cerrado si y sólo si $H = I'$ para algún $I \in \mathcal{I}$.
(ii) I es '-cerrado si y sólo si $I = H'$ para algún $H \in \mathcal{H}$.
(iii) H es *-cerrado si y sólo sí $H = I^*$ para algún $I \in \mathcal{I}$.
(iv) I es *-cerrado si y sólo si $I = H^*$ para algún $H \in \mathcal{H}$.

Demostración.
P.D.1 H es '-cerrado si y sólo si $H = I'$ para algún $I \in \mathcal{I}$.
$\Longrightarrow$ Supongamos H '-cerrado.
Sea $I = H' \in \mathcal{I}$, así $I' = (H')'$. Como H es '-cerrado, entonces $H = (H')'$, por lo que $I' = H$.
$\Longleftarrow$ Supongamos $H = I'$ para algún $I \in \mathcal{I}$. Si $H = I'$, entonces $H' = (I')'$, pero por la observación 5.0.16, $I \subseteq (I')'$, así $I \subseteq H'$, por la proposición 5.0.15, $(H')' \subseteq I'$, pero $I' = H$, así $(H')' \subseteq H$ Y por la observación 5.0.16, $H \subseteq (H')'$. Por lo que $H = (H')'$.
Las demostraciones de (ii), (iii) y (iv) son completamente análogas a la demostración de (i).

□

Teorema 5.0.19. *Sea $M \in Mod{-}R$. Sea $End(M) = I \bigoplus J$, donde $I, J \in \mathcal{I}$. Entonces I es generado por un idempotente central y es únicamente complementado.*

Demostración.
De la proposición 2.0.1, se sigue que existe $\alpha \in E(End(M))$ tal que $I = \alpha End(M)$ y $J = \bar{\alpha} End(M)$
Sea $\gamma \in End(M)$. Así,

$$Id = \alpha + \bar{\alpha}$$
$$\gamma = \gamma\alpha + \gamma\bar{\alpha}$$
$$\gamma = \alpha\gamma + \bar{\alpha}\gamma$$

Como I, J son ideales bilaterales, $\gamma\alpha \in I$ y $\gamma\bar{\alpha} \in J$. También $\alpha\gamma \in I$ y $\bar{\alpha}\gamma \in J$. Así,

$$\gamma\alpha + \gamma\bar{\alpha} = \alpha\gamma + \bar{\alpha}\gamma$$

Donde $\gamma\alpha, \alpha\gamma \in I$ y $\gamma\bar{\alpha}, \bar{\alpha}\gamma \in J$. Por lo tanto, $\gamma\alpha = \alpha\gamma$ y $\gamma\bar{\alpha} = \bar{\alpha}\gamma$.
$\therefore$ α es central.
$\therefore$ I está generado por un idempotente central.
Probemos que $\alpha End(M)\bar{\alpha} = 0$. Sea $\alpha\gamma\bar{\alpha} \in \alpha End(M)\bar{\alpha}$. Por un lado, como $\alpha \in I$ e I es un ideal bilateral, entonces $\alpha\gamma\bar{\alpha} = \alpha(\gamma\bar{\alpha}) \in I$. Por otro lado, como $\bar{\alpha} \in J$ y J es un ideal bilateral, entonces $\alpha\gamma\bar{\alpha} = (\alpha\gamma)\bar{\alpha} \in J$. Así, $\alpha\gamma\bar{\alpha} \in I \cap J$.
$\therefore$ $\alpha\gamma\bar{\alpha} = 0$.
Ahora, por la proposición 2.0.12, $\alpha End(M)$ es únicamente complementado.
$\therefore$ I es únicamente complementado.

□

Teorema 5.0.20. *Sea $M \in Mod{-}R$. $M = H \bigoplus K$, donde $H, K \in \mathcal{H}$. Entonces, H es imagen de un idempotente central y es únicamente complementado.*

Demostración.
Por la proposición 4.1.2, existe un único $\varepsilon_H \in E(End(M))$ tal que $H = Im(\varepsilon_H)$ y $Nuc(\varepsilon_H) = K$.
Así, $M = Im(\varepsilon_H) \bigoplus \mathrm{Nuc}(\varepsilon_H)$. Sea $\beta \in End(M)$. Sea $m = h + k \in M$, donde $h \in H$ y $k \in K$. Luego,

$$\beta(\varepsilon_H(h+k)) = \beta(h)$$

Por otro lado,

$$\varepsilon_H(\beta(h+k)) = \varepsilon_H(\beta(h) + \beta(k))$$

Como $h \in H$ y H es totalmente invariante, entonces $\beta(h) \in H$. De igual forma, $k \in K$ y K es totalmente invariante, así $\beta(k) \in K$.
Por lo que,

$$\varepsilon_H(\beta(h) + \beta(k)) = \beta(h)$$

Por lo tanto $\beta\varepsilon_H = \varepsilon_H\beta$.
$\therefore \varepsilon_H$ es un idempotente central.
$\therefore H = Im(\varepsilon_H)$, es imagen de un idempotente central.
Como K es totalmente invariante, entonces por el lema 4.1.5, H es únicamente complementado en M.

□

Observación 5.0.21. *Notemos que en el teorema 5.0.19, es importante pedir que ambos sumandos sean ideales bilaterales. Ya que podemos tener el siguiente caso:*
Consideremos el siguiente anillo $R = \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & 0 \\ \mathbb{R} & \mathbb{R} \end{pmatrix}$. Analicemos sus ideales izquierdos y sus ideales derechos.
Si $\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}$ es un ideal izquierdo de R, luego:

$$\begin{pmatrix} \mathbb{Q} & 0 \\ \mathbb{R} & \mathbb{R} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{Q}A & 0 \\ \mathbb{R}A + \mathbb{R}B & \mathbb{R}C \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}$$

Lo que implica que $\mathbb{Q}A \subseteq A$, $\mathbb{R}C \subseteq C$ y $\mathbb{R}A + \mathbb{R}B \subseteq B$. Así, $A = 0$ o $A = \mathbb{Q}$, C es un subespacio de $\mathbb{R}$. Si $A = 0$, como $\mathbb{R}A + \mathbb{R}B \subseteq B$, luego B es un subespacio de $\mathbb{R}$; y si $A = \mathbb{Q}$, luego $B = \mathbb{R}$. Así, los ideales izquierdos son los siguientes:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{R} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{R} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ X & Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{R} & \mathbb{R} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & 0 \\ \mathbb{R} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & 0 \\ \mathbb{R} & \mathbb{R} \end{pmatrix}.$$

Donde la colección de parejas (x,y), con $x \in X$ y $y \in Y$, consituye un subespacio vectorial de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Ahora analicemos los ideales derechos de R. Sea $\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}$ un ideal derecho de R, luego:

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbb{Q} & 0 \\ \mathbb{R} & \mathbb{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\mathbb{Q} & 0 \\ B\mathbb{Q}+C\mathbb{R} & C\mathbb{R} \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}$$

Lo que implica que $A\mathbb{Q} \subseteq A$, $B\mathbb{Q}+C\mathbb{R} \subseteq B$ y $C\mathbb{R} \subseteq C$. Así, $A = 0$ o $A = \mathbb{Q}$, $C = 0$ o $C = \mathbb{R}$. Si $C = \mathbb{R}$, como $B\mathbb{Q}+C\mathbb{R} \subseteq B$, luego $B = \mathbb{R}$; y si $C = 0$, luego $B\mathbb{Q} \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$, por lo que B es un $\mathbb{Q}$-subespacio vectorial de $\mathbb{R}$. Así, los ideales derechos son los siguientes:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ S & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{R} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{R} & \mathbb{R} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & 0 \\ S & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & 0 \\ \mathbb{R} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & 0 \\ \mathbb{R} & \mathbb{R} \end{pmatrix}.$$

Donde S es un $\mathbb{Q}$ subespacio vectorial de $\mathbb{R}$. Así los ideales bilaterales de R son:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{R} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{R} & \mathbb{R} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & 0 \\ \mathbb{R} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & 0 \\ \mathbb{R} & \mathbb{R} \end{pmatrix}.$$

Sea $I = \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & 0 \\ \mathbb{R} & 0 \end{pmatrix}$, donde I es un ideal bilateral de R. Notemos que $R = I \bigoplus \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{R} \end{pmatrix}$. Pero $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{R} \end{pmatrix}$ no es un ideal bilateral (sólo es ideal izquierdo). Es más, I es esencial en R como ideal derecho, y así la intersección de I con cualquier ideal derecho es distinta de 0. Por lo que, $R = I \bigoplus \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{R} \end{pmatrix}$ es una descomposición de R en ideales izquierdos pero no derechos. De igual forma si consideremos $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{R} & \mathbb{R} \end{pmatrix}$. Luego $R = J \bigoplus \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donde $\begin{pmatrix} \mathbb{Q} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ no es un ideal derecho y J es esencial como ideal izquierdo. Así, $R = J \bigoplus \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es una descomposición de R en ideales derechos pero no izquierdos.
De este ejemplo podemos concluir que en el teorema 5.0.19, es importante pedir que en la descomposición del anillo ambos sumandos sean ideales bilaterales de él.

Observación 5.0.22. *Le podemos pedir condiciones al anillo R para asegurar que si $R = I \bigoplus J$, donde I es un ideal bilateral, J también sea ideal bilateral. Para ello consideremos las siguientes definiciones.*

Definición 5.0.23. *Un ideal bilateral propio I de R es primo si para toda pareja de ideales P y Q de R tales que $PQ \subseteq I$, se tiene que $P \subseteq I$ o $Q \subseteq I$.*

Definición 5.0.24. *R es anillo primo si $\{0\}$ es ideal primo.*

Definición 5.0.25. *Un ideal bilateral propio I de R es semiprimo si para todo ideal P tal que $P^2 \subseteq I$, entonces $P \subseteq I$.*

Definición 5.0.26. *R es anillo semiprimo si* $\{0\}$ *es ideal semiprimo.*

De aquí, tenemos el siguiente teorema que asegura que en la descomposición de $R = I \bigoplus J$, donde I es bilateral, J también lo sea.

Teorema 5.0.27. *Si R es anillo semiprimo y $R = I \bigoplus J$ donde I es ideal bilateral y J es un ideal izquierdo, entonces J es ideal bilateral.*

Ahora, se describen condiciones para $I \in \mathcal{I}$ y para $H \in \mathcal{H}$ que aseguren que son sumandos de $End(M)$ y M, respectivamente.

Proposición 5.0.28. *Sea $I \in \mathcal{I}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*
(i) I es sumando de $End(M)$.
(ii) I es '-cerrado, $I \cap (I')^* = 0$ y todo endomorfismo de I' se extiende a un endomorfismo de M.
(iii) I es *-cerrado, $I \cap (I^*)' = 0$ y todo endomorfismo de ${}^{M}\!/_{I^*}$ se alza a un endomorfismo de M.
Si estas condiciones se satisfacen, entonces $M = I' \bigoplus I^*$.

Demostración.
$(i) \Rightarrow (ii)$ Supongamos que I es sumando de $End(M)$, entonces por el teorema 5.0.19, existe α idempotente central tal que $\alpha End(M) = I$ y $End(M) = \alpha End(M) \bigoplus \bar{\alpha} End(M)$.
Afirmamos que $\bar{\alpha}(M) = I'$.
Sea $m \in M$, $\bar{\alpha}(m) \in \bar{\alpha}(M)$. Y sea $\alpha\gamma \in I = \alpha End(M)$. Así como α es central, $\alpha\gamma\bar{\alpha}(m) = \gamma\alpha\bar{\alpha}(m) = 0$. Por lo tanto, $\bar{\alpha}(m) \in I'$.
$\therefore \bar{\alpha}(M) \subseteq I'$.
Sea $a \in I'$. Como $\alpha \in I$, $\alpha(a) = 0$. Así, $a = a - o = a - \alpha(a) = \bar{\alpha}(a)$. Por lo tanto, $a \in \bar{\alpha}(M)$.
$\therefore \bar{\alpha}(M) = I'$.
Llamemos $H = \bar{\alpha}(M) = I' \in \mathcal{H}$.
Afirmamos que $H' = I$.
Sea $\beta \in H'$. Así, $\forall m \in M$,

$$\begin{gathered}
\beta(\bar{\alpha}(m)) = 0 \\
\beta(Id(m) - \alpha(m)) = 0 \\
\beta(m) - \beta(\alpha(m)) = 0 \\
\beta(m) = \beta(\alpha(m)) \\
\beta(m) = \alpha(\beta(m))
\end{gathered}$$

$\therefore \beta = \alpha\beta \in \alpha End(M) = I$.
$\therefore H' \subseteq I$.
Sea $\alpha\gamma \in I$. Y sea $\bar{\alpha}(m) \in H$. Como α es central, $\alpha\gamma(\bar{\alpha}(m)) = \gamma\alpha(\bar{\alpha}(m)) = 0$. Por lo tanto $\alpha\gamma \in H'$.
$\therefore H' = I$.
Por la proposición 5.0.18, como $I = H'$ para $H \in \mathcal{H}$, entonces I es '-cerrado.
Afirmamos que $H = Nuc(\alpha)$.
Sea $\bar{\alpha}(m) \in H$. Luego, $\alpha(\bar{\alpha}(m)) = 0$. Por lo que, $\bar{\alpha}(m) \in Nuc(\alpha)$.

Sea $a \in Nuc(\alpha)$, luego $a = a - o = a - \alpha(a) = \bar{\alpha}(a)$. Por lo que, $a \in H$.
$\therefore H = Nuc(\alpha)$.
Afirmamos que $(I')^* = \bar{\alpha}End(M)$.
Notemos que $I' = H = Nuc(\alpha)$. Sea $\beta \in (I')^*$. Así, $\forall m \in M$, $\beta(m) \in Nuc(\alpha)$, es decir, $\alpha(\beta(m)) = 0$. Así, $\beta(m) = \beta(m) - 0 = \beta(m) - \alpha(\beta(m)) = \bar{\alpha}(\beta(m))$. Por lo que $\beta = \bar{\alpha}\beta \in \bar{\alpha}End(M)$.
$\therefore (I')^* \subseteq \bar{\alpha}End(M)$.
Sea $\bar{\alpha}\beta \in \bar{\alpha}End(M)$. Así, $\forall m \in M$, $\alpha(\bar{\alpha}\beta)(m) = 0$. Entonces, $\forall m \in M$, $\bar{\alpha}\beta(m) \in Nuc(\alpha)$. Por lo tanto, $\bar{\alpha}\beta(m) \in (I')^*$.
$\therefore (I')^* = \bar{\alpha}End(M)$.
Pero como $\alpha End(M) \cap \bar{\alpha}End(M) = 0$, entonces $I \cap (I')^* = 0$.
Por último, afirmamos que $I^* = Im(\alpha)$.
Sea $\sum_{i=1}^{n}(\alpha\beta_i(m_i))r_i$, donde $\forall i$, $\alpha\beta_i \in I$, $m_i \in M$, $r_i \in R$. Luego, $\sum_{i=1}^{n}(\alpha\beta_i(m_i))r_i = \alpha(\sum_{i=1}^{n}\beta_i(m_i r_i)) \in Im(\alpha)$.
$\therefore I^* \subseteq Im(\alpha)$.
Si $\alpha(m) \in Im(\alpha)$, como $\alpha \in I$, $\alpha(m) \in I^*$.
$\therefore I^* = Im(\alpha)$.
Como $\alpha \in End(M)$ es un idempotente central, entonces por la proposición 5.0.9, $M = Im(\alpha) \bigoplus Nuc(\alpha)$. Pero $Nuc(\alpha) = I'$ y $Im(\alpha) = I^*$. Por lo tanto, $M = I' \bigoplus I^*$.
Sea $\varepsilon \in End(I')$. Definamos

$$\begin{aligned} \varepsilon_M : I' \oplus I^* &\longrightarrow I' \oplus I^* \\ a + b &\mapsto \varepsilon(a) \end{aligned}$$

Donde $a \in I'$ y $b \in I^*$.
Veamos que $\varepsilon_M \in End(M)$. Sean $r \in R$, $a_1 + b_1, a_2 + b_2 \in M$ tales que $a_1, a_2 \in I'$ y $b_1, b_2 \in I^*$. Así,

$$\begin{aligned} \varepsilon_M((a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)) &= \varepsilon_M((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)) \\ &= \varepsilon(a_1 + a_2) \\ &= \varepsilon(a_1) + \varepsilon(a_2) \\ &= \varepsilon_M(a_1 + b_1) + \varepsilon(a_2 + b_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_M((a_1 + b_1)r) &= \varepsilon_M(a_1 r + b_1 r) \\ &= \varepsilon(a_1 r) \\ &= \varepsilon(a_1)r \\ &= \varepsilon_M(a_1 + b_1)r \end{aligned}$$

$\therefore \varepsilon_M \in End(M)$.
Y por como definimos ε_M, $\varepsilon_M|_I' = \varepsilon$.
$\therefore$ todo endomorfismo de I' se extiende a un endomorfismo de M.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Supongamos que $I = (I')'$, $I \cap (I')^* = 0$ y que todo endomorfismo de I' se extiende a un endomorfismo de M.
Consideremos la siguiente sucesión:

$$I'' \overset{\iota}{\hookrightarrow} End(M) \overset{\rho}{\twoheadrightarrow} End(M)^{I'}$$

Donde $End(M)^{I'}$ es el anillo de endomorfismos de I' que pueden extenderse a endomorfismos de M, ι es la inclusión y ρ la restricción. Notemos que ρ está bien definida puesto que I' es un módulo totalmente invariante. ι es inyectiva y ρ es suprayectiva, pues por hipótesis todo endomorfismo de I' se extiende a un endomorfismo de M.
Como ι es inyectiva, $Im\iota = I''$. Veamos que $Im(\iota) = I'' = Nuc(\rho)$.
Sea $\beta \in I''$, luego $\rho(\beta) = \beta|'_I$. Como $\beta \in I''$, entonces $\because$ $(I') = 0$. Por lo tanto, $\rho(\beta) = \beta|'_I = 0$.
$\therefore \beta \in Nuc(\rho)$.
Sea $\alpha \in Nuc(\rho)$. Así, $\rho(\alpha) = 0$, es decir $\alpha'_I = 0$. Por lo que, $\alpha(I') = 0$, lo que implica que $\alpha \in I''$.
$\therefore Im(\iota) = I'' = Nuc(\rho)$.
Por lo tanto la sucesión,

$$I'' \overset{\iota}{\hookrightarrow} End(M) \overset{\rho}{\twoheadrightarrow} End(M)^{I'}$$

es exacta. Como todo endomorfismo de I' se extiende a uno de M, entonces podemos definir,

$$f : End(M)^{I'} \longrightarrow End(M)$$
$$\alpha \mapsto \alpha_M$$

Donde α_M es el endomorfismo que se obtiene de extender α a un endomorfismo de M.
Notemos que $\rho \circ f = id_{End(M)^{I'}}$. Así, la sucesión se escinde. Por lo tanto,

$$End(M) \cong I'' \bigoplus End(M)^{I'}$$

Como I es '-cerrado, entonces $I'' = I$.
Así, $End(M) \cong I \bigoplus End(I')$. Como todo endomorfismo de I' se extiende a uno de M, entonces $End(M)^{I'} = End(I')$. Así, $End(M) \cong I \bigoplus End(I')$.
$\therefore I$ es un sumando de $End(M)$.

$(i) \Rightarrow (iii)$ Supongamos que I es sumando de $End(M)$, entonces por el teorema 5.0.19, existe α idempotente central tal que $\alpha End(M) = I$ y $End(M) = \alpha End(M) \bigoplus \bar{\alpha} End(M)$.
Probemos que $I^* = \alpha(M)$.
Sea $x \in I^*$, así $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha \circ \gamma_i(m_i) r_i$ donde $\forall i$, $\alpha \circ \gamma_i \in I = \alpha End(M)$, $m_i \in M$ y $r_i \in R$.
Luego, $\sum_{i=1}^{n} \alpha \circ \gamma_i(m_i) r_i = \alpha(\sum_{i=1}^{n} \gamma_i(m_i) r_i) \in \alpha(M)$.
$\therefore I^* \subseteq \alpha(M)$.
Si $\alpha(m) \in \alpha(M)$, como $\alpha \in I$, $\alpha(m) \in I^*$.

$\therefore I^* = \alpha(M)$.
Llamemos $I^* = \alpha(M) = H \in \mathcal{H}$.
Ahora, veamos que $H^* = I$.
Sea $\beta \in H^*$. Así $\beta(M) \subseteq \alpha(M)$. Así, $\forall m \in M$, existe $m' \in M$ tal que $\beta(m) = \alpha(m')$.
Notemos que $\forall m \in M$, como α es un idempotente,

$$\begin{gathered}\beta(m) = \alpha(m') \\ \alpha \circ \beta(m) = \alpha(m') \\ \alpha \circ \beta(m) = \beta(m)\end{gathered}$$

Por lo tanto $\beta = \alpha \circ \beta \in I$.
$\therefore H^* \subseteq I$.
Ahora, si tomamos $\alpha \circ \gamma \in I$, luego $\alpha \circ \gamma(m) \in \alpha(M)$. Por lo tanto, $\alpha \circ \gamma \in \alpha(M)^* = H^*$.
$\therefore H^* = I$.
Por la proposición 5.0.18, como $I = H^*$ para $H \in \mathcal{H}$, entonces I es *-cerrado.
Probemos que $\alpha(M)' = \bar{\alpha}End(M)$.
Sea $\beta \in \alpha(M)'$, así $\beta(\alpha(M)) = 0$. Notemos que como α es central, $\forall m \in M$,

$$\begin{aligned}\beta(m) &= \beta(m) - 0 \\ &= \beta(m) - \beta(\alpha(m)) \\ &= \beta(m) - \alpha(\beta(m)) \\ &= (Id - \alpha)(\beta(m)) \\ &= \bar{\alpha}(\beta(m))\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\beta = \bar{\alpha} \circ \beta \in \bar{\alpha}End(M)$.
$\therefore \alpha(M)' \subseteq \bar{\alpha}End(M)$.
Por otro lado, sea $\bar{\alpha} \circ \gamma \in \bar{\alpha}End(M)$ y $m \in M$. Como α es central, entonces $\bar{\alpha} \circ \gamma(\alpha(m)) = \gamma(\bar{\alpha}\alpha(m)) = 0$. Por lo tanto, $\bar{\alpha} \circ \gamma \in \alpha(M)'$.
$\therefore \alpha(M)' = \bar{\alpha}End(M)$.
Así, $\bar{\alpha}End(M) = \alpha(M)' = (I^*)'$. Como $\alpha End(M) \cap \bar{\alpha}End(M) = 0$, entonces $I \cap (I^*)' = 0$.
Afirmamos que $Nuc(\alpha) = I'$.
Sea $a \in Nuc(\alpha)$ y sea $\alpha \circ \beta \in I$. Luego como α es central, $\alpha \circ \beta(a) = \beta \circ \alpha(a) = \beta(0) = 0$. Por lo tanto, $a \in I'$.
Sea $a \in I'$. Como $\alpha \in I$, $\alpha(a) = 0$. Por lo tanto, $a \in Nuc(\alpha)$.
$\therefore Nuc(\alpha) = I'$.
Como $\alpha \in End(M)$ es un idempotente central, entonces por la proposición 5.0.9, $M = Im(\alpha) \bigoplus Nuc(\alpha)$. Pero $Nuc(\alpha) = I'$ y $Im(\alpha) = I^*$. Por lo tanto, $M = I' \bigoplus I^*$.
Sea $\varepsilon \in End({}^{M}\!/_{I^*})$. Notemos que, como $M = I' \bigoplus I^*$, entonces $\forall m \in M$, $m = a + b$ donde $a \in I'$ y $b \in I^*$. Así, $\forall m \in M$, $m + I^* = (a + b) + I^* = a + I^*$. Por lo que si $m = a + b$, $m' = a' + b'$, donde $a, a' \in I'$ y $b, b' \in I^*$ y $\varepsilon(m + I^*) = m' + I^*$, entonces $\varepsilon(m + I^*) = \varepsilon(a + I^*) = m' + I^* = a' + I^*$.
Definamos,

$$\begin{gathered}\varepsilon^*_M : I' \oplus I^* \longrightarrow I' \oplus I^* \\ a + b \mapsto a'\end{gathered}$$

Donde $a, a' \in I'$, $b \in I^*$ y $\varepsilon(a+b+I^*) = a' + I^*$.
Notemos que ε_M^* está bien definida. Si $a+I^* = a_1 + I^*$, entonces $\varepsilon(a+I^*) = \varepsilon(a_1+I^*)$, por lo que $a'+I^* = a_1'+I^*$. Así, $a'-a_1' \in I^*$. Pero como $a, a' \in I'$, entonces $a-a' \in I'$. Por lo tanto, $a'-a_1' \in I' \cap I^* = 0$. Así, $a'-a_1' = 0$. Es decir, $a' = a_1'$. Por lo tanto, ε_M^* está bien definida.
Veamos que $\varepsilon_M^* \in End(M)$. Sean $r \in R$, $a_1+b_1, a_2+b_2 \in M$ tales que $a_1, a_2 \in I'$ y $b_1, b_2 \in I^*$. Notemos que como $\varepsilon \in End(M/I^*)$,

$$\begin{aligned}(a_1+a_2)' &= \varepsilon((a_1+a_2)+I^*)\\ &= \varepsilon((a_1+b_1)+I^*+(a_2+b_2)+I^*)\\ &= \varepsilon((a_1+b_1)+I^*)+\varepsilon((a_2+b_2)+I^*)\\ &= a_1'+a_2'\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}\varepsilon_M^*((a_1+b_1)+(a_2+b_2)) &= \varepsilon_M^*((a_1+a_2)+(b_1+b_2))\\ &= (a_1+a_2)'\\ &= a_1'+a_2'\\ &= \varepsilon_M^*(a_1+b_1)+\varepsilon_M^*(a_2+b_2)\end{aligned}$$

Ahora como $\varepsilon \in End(M/I^*)$,

$$\begin{aligned}(a_1r)' &= \varepsilon(a_1r+I^*)\\ &= \varepsilon(((a_1+b_1)+I^*)r)\\ &= \varepsilon((a_1+b_1)+I^*)r\\ &= a_1'r\end{aligned}$$

Por lo que,

$$\begin{aligned}\varepsilon_M^*((a_1+b_1)r) &= \varepsilon_M^*(a_1r+b_1r)\\ &= (a_1r)'\\ &= a_1'r\\ &= \varepsilon_M^*(a_1+b_1)r\end{aligned}$$

$\therefore \varepsilon_M^* \in End(M)$.
$\therefore$ todo endomorfismo de M/I^* se alza a un endomorfismo de M.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Supongamos que I es *-cerrado, $I \cap (I^*)' = 0$ y todo endomorfismo de M/I^* se alza a un endomorfismo de M.
Consideremos la siguiente sucesión:

$$(I^*)^* \overset{m}{\hookrightarrow} End(M) \overset{n}{\twoheadrightarrow} End(M)^{M/I^*}$$

Donde $End(M)^{M/I^*}$ es el anillo de endomorfismos de M/I^* que se alzan a endomorfismos de M, m es la inclusión y n la siguiente función:

$$\begin{aligned} n : End(M) &\longrightarrow End(M)^{M/I^*} \\ f &\longmapsto \bar{f} \end{aligned}$$

Donde,

$$\begin{aligned} \bar{f} : M/I^* &\to M/I^* \\ m + I^* &\mapsto f(m) + I^* \end{aligned}$$

$\bar{f}$ está bien definida ya que si $m_1 + I^* = m_2 + I^*$, luego $m_1 - m_2 \in I^*$, pero I^* es un submódulo de M totalmente invariante, por lo que, $f(m_1 - m_2) \in I^*$, es decir $f(m_1) + I^* = f(m_2) + I^*$. Así, $\bar{f}(m_1 + I^*) = \bar{f}(m_2 + I^*)$. Es claro que $\bar{f} \in End(M)^{M/I^*}$, puesto que $f \in End(M)$.
Como m es la inclusión, m es inyectiva. n es suprayectiva ya que por hipótesis todo endomorfismo de $End(M)^{M/I^*}$ se alza a un endomorfismo de M, así si $\alpha \in End(M)^{M/I^*}$, existe $\beta \in End(M)$ tal que $\beta(m) = m'$, donde $\alpha(m + I^*) = m' + I^*$. Así, $n(\beta) = \bar{\beta}$, $\bar{\beta}(m + I^*) = \beta(m) + I^* = m' + I^* = \alpha(m + I^*)$. Por lo tanto, existe $\beta \in End(M)$, tal que $n(\beta) = \alpha$. Lo que implica que n es suprayectiva.
Ahora, veamos que $Im(m) = (I^*)^* = Nuc(n)$.
Sea $\alpha \in (I^*)^*$. Luego $n(\alpha) = \bar{\alpha}$, donde $\bar{\alpha}(m + I^*) = \alpha(m) + I^*$. Pero como $\alpha \in (I^*)^*$, $\forall m \in M$, $\alpha(m) \in I^*$. Así, $\alpha(m) + I^* = I^*$. Por lo tanto, $n(\alpha) = 0$. Lo que implica que, $\alpha \in Nuc(n)$.
$\therefore (I^*)^* \subseteq Nuc(n)$.
Sea $\alpha \in Nuc(n)$, así $\forall m \in M$, $\bar{\alpha}(m + I^*) = I^*$. Por definición, $\bar{\alpha}(m + I^*) = \alpha(m) + I^*$, así $\forall m \in M$, $\alpha(m) + I^* = I^*$. Por lo que $\forall m \in M$, $\alpha(m) \in I^*$. Lo que implica que, $\alpha \in (I^*)^*$.
$\therefore (I^*)^* = Nuc(n)$.
Así la sucesión,

$$(I^*)^* \overset{m}{\hookrightarrow} End(M) \overset{n}{\twoheadrightarrow} End(M)^{M/I^*}$$

es exacta. Como todo endomorfismo de M/I^* se alza a uno de M, entonces la sucesión se escinde. Por lo tanto,

$$End(M) \cong (I^*)^* \bigoplus End(M)^{M/I^*}.$$

Como I es *-cerrado, entonces $I = (I^*)^*$. Así,$End(M) \cong I \bigoplus End(M)^{M/I^*}$.
$\therefore I$ es un sumando de $End(M)$.
Así, $(iii) \Leftrightarrow (i) \Leftrightarrow (ii)$. Y de suponer (i) ya probamos que $M = I' \bigoplus I^*$.

$\square$

Proposición 5.0.29. *Sea $H \in \mathcal{H}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*
(i) H es sumando de M. Con complemento $K \in \mathcal{H}$.
(ii) H es '-cerrado, $H' \cap H^* = 0$ y todo endomorfismo de H se extiende a un endomorfismo de M.
(iii) H es *-cerrado, $H^* \cap H' = 0$ y todo endomorfismo de M/H se alza a un endomorfismo de M.
Si estas condiciones se satisfacen, entonces $End(M) = H' \bigoplus H^*$.

Demostración.
$(i) \Rightarrow (ii)$ Supongamos que H es un sumando de M con complemento $K \in \mathcal{H}$. Así, $M = H \bigoplus K = K \bigoplus H$. Entonces por el teorema 5.0.20, $K = Im(\varepsilon_K)$ y $H = Nuc(\varepsilon_K)$, donde ε_K es un idempotente central. Por la proposición 1.1.9, $\bar{\varepsilon_K}$ también es central.
Sea $I = \varepsilon_K End(M)$, $L = \bar{\varepsilon_K} End(M)$. Como $\varepsilon_K \in E(End(M))$, por la proposición 1.1.11, $End(M) = I \bigoplus L$. Notemos que $I, L \in \mathcal{I}$, pues ε_K y $\bar{\varepsilon_K}$ son centrales.
Afirmamos que $H = I'$. Para ello tomemos $a \in H = Nuc(\varepsilon_K)$, y sea $\varepsilon_K \circ \alpha \in I = \varepsilon_K End(M)$. Luego como ε_K es central, $\varepsilon_K \circ \alpha(a) = \alpha(\varepsilon_K(a)) = 0$. Por lo tanto, $a \in I'$.
$\therefore H \subseteq I'$.
Sea $a \in I'$, como $\varepsilon_K = \varepsilon_K \circ id$, luego $\varepsilon_K \in I$. Así, $\varepsilon_K(a) = 0$. Y por lo tanto, $a \in Nuc(\varepsilon_K) = H$.
$\therefore H = I'$.
Por la proposición 5.0.18 se sigue que H es '-cerrado.
Ahora, veamos que $I = H'$.
Sea $\varepsilon_K \circ \alpha \in I$ y sea $a \in Nuc(\varepsilon_K)$, luego como ε_K es central, $\varepsilon_K \circ \alpha = \alpha(\varepsilon_K(a)) = 0$, por lo que $\varepsilon_K \circ \alpha \in H'$.
$\therefore I \subseteq H'$.
Sea $\beta \in H'$ y sea $m = k + h \in M$, donde $k \in K$ y $h \in H$. Luego como $\beta \in H'$ y ε_K es central, $\forall m \in M$, $\varepsilon_K \circ \beta(m) = \varepsilon_K(\beta(k+h)) = \varepsilon_K(\beta(k) + \beta(h)) = \varepsilon_K(\beta(k)) = \beta(\varepsilon_K(k)) = \beta(k) = \beta(k) + \beta(h) = \beta(k+h) = \beta(m)$. Por lo tanto, $\beta = \varepsilon_K \circ \beta \in I$.
$\therefore I = H'$.
Probemos que $L = H^*$.
Como $M = H \bigoplus K$, por la proposición 4.1.3, $\varepsilon_H End(M) = \{f \in End(M) \mid f(M) \subseteq H\}$, pero por la proposición 4.1.2, $\varepsilon_H = \bar{\varepsilon_K}$, así $\bar{\varepsilon_K} End(M) = \{f \in End(M) \mid f(M) \subseteq H\}$. Pero por definición, $H^* = \{f \in End(M) \mid f(M) \subseteq H\}$, por lo que
$H^* = \bar{\varepsilon_K} End(M) = L$.
Como $End(M) = I \bigoplus L$, luego $I \cap L = 0$, es decir $H' \cap H^* = 0$. De aquí también se sigue que $End(M) = H' \bigoplus H^*$.
Sea $\beta \in End(H)$, definamos

$$\begin{aligned} \beta_M : H \oplus K &\longrightarrow H \oplus K \\ h + k &\longmapsto \beta(h) \end{aligned}$$

Veamos que $\beta_M \in End(M)$. Sean $h_1 + k_1, h_2 + k_2 \in M$, donde $h_1, h_2 \in H$, $k_1, k_2 \in K$

y sea $r \in R$.

$$\begin{aligned}\beta_M((h_1+k_1)+(h_2+k_2)) &= \beta_M((h_1+h_2)+(k_1+k_2))\\ &= \beta(h_1+h_2)\\ &= \beta(h_1)+\beta(h_2)\\ &= \beta_M(h_1+k_1)+\beta_M(h_2+k_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_M((h_1+k_1)r) &= \beta_M(h_1r+k_1r)\\ &= \beta(h_1r)\\ &= \beta(h_1)r\\ &= \beta_M(h_1+k_1)r\end{aligned}$$

$\therefore\ \beta_M \in End(M)$. Es claro que $\beta_M|_H = \beta$. Por lo que todo endomorfismo de H se extiende a un endomorfismo de M.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Supongamos que H es '-cerrado, $H' \cap H^* = 0$ y todo endomorfismo de H se extiende a un endomorfismo de M.
Por hipótesis H es '-cerrado, así de la proposición 5.0.18, se sigue que existe $I \in \mathcal{I}$, tal que $H = I'$. En la proposición 5.0.28, se probó que $End(M) \cong I'' \oplus End(M)^{I'}$. Así, $End(M) \cong H' \oplus End(M)^H$. Como todo endomorfismo de H se extiende a un endomorfismo de M, $End(M)^H \cong \{\beta \in End(M) \mid \beta(M) \subseteq H\} = H^*$. De donde, $End(M) = H' \oplus H^*$, con $H', H^* \in \mathcal{I}$. Por el teorema 5.0.19, existe α un idempotente central tal que $H' = \alpha End(M)$ y $H^* = \bar{\alpha} End(M)$. Como α es un idempotente central, entonces por la proposición 5.0.9, $M = Im(\alpha) \bigoplus Nuc(\alpha)$, donde $Im(\alpha), Nuc(\alpha) \in \mathcal{H}$.
Probemos que $Nuc(\alpha) = (\alpha End(M))'$.
Sea $a \in Nuc(\alpha)$, y sea $\alpha \circ \beta \in \alpha End(M)$. Como α es central, entonces $\alpha \circ \beta(a) = \beta \circ \alpha(a) = \beta(\alpha(a)) = 0$. Por lo tanto, $a \in (\alpha End(M))'$.
$\therefore Nuc(\alpha) \subseteq (\alpha End(M))'$.
Sea $a \in (\alpha End(M))'$, como $\alpha \in \alpha End(M)$, luego $\alpha(a) = 0$. Por lo tanto, $a \in Nuc(\alpha)$.
$\therefore Nuc(\alpha) = (\alpha End(M))'$.
Así, $Nuc(\alpha) = (\alpha End(M))' = H'' = H$. Por lo que $M = H \bigoplus Im(\alpha)$.
$\therefore H$ es un sumando de M, con complemento $Im(\alpha) \in \mathcal{H}$.

$(i) \Rightarrow (iii)$ Supongamos que H es un sumando de M con complemento $K \in \mathcal{H}$.
Así, $M = H \bigoplus K$. Entonces por el teorema 5.0.20, $H = Im(\varepsilon_H)$ y $K = Nuc(\varepsilon_H)$, donde ε_H es un idempotente central. Por la proposición 1.1.9, $\bar{\varepsilon_H}$ también es central.
Sea $I = \varepsilon_H End(M)$, $L = \bar{\varepsilon_H} End(M)$. Como $\varepsilon_H \in E(End(M))$, por la proposición 1.1.11, $End(M) = I \bigoplus L$. Notemos que $I, L \in \mathcal{I}$, pues ε_H y $\bar{\varepsilon_H}$ son centrales.
Afirmamos que $H = I^*$.
Sea $\varepsilon_H(m) \in H = Im(\varepsilon_H)$. Así, $\varepsilon_H(m) = \varepsilon_H \circ Id(m) \in (\varepsilon_H End(M))^* = I^*$. Por lo tanto, $\varepsilon_H(m) \in I^*$.
$\therefore H \subseteq I^*$.
Sea $\sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_H \circ \gamma_i(m_i)r_i \in I^*$, luego $\sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_H \circ \gamma_i(m_i)r_i = \varepsilon_H(\sum\limits_{i=1}^{n} \gamma_i(m_i)r_i \in Im(\varepsilon_H) = H$. Por

lo tanto, $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_H \circ \gamma_i(m_i)r_i \in Im(\varepsilon_H) = H$.
$\therefore H = I^*$.
Por la proposición 5.0.18 se sigue que H es *-cerrado.
Probemos que $I = H^*$.
Sea $\varepsilon_H \circ \alpha \in I$. $\forall m \in M$, $\varepsilon_H \circ \alpha(m) \in Im(\varepsilon_H)$. Por lo tanto, $\varepsilon_H \circ \alpha \in H^*$.
$\therefore I \subseteq H^*$. Sea $\beta \in H^*$. Luego, $\beta(M) \subseteq Im(\varepsilon_H) = H$, por lo que $\forall m \in M$, $\varepsilon_H(f(m)) = f(m)$. Por lo tanto, $f = \varepsilon_H \circ f \in I$.
$\therefore I = H^*$.
Veamos que $L = H'$. Sea $\bar{\varepsilon_H} \circ \gamma \in L$, y sea $\varepsilon_H(m) \in Im(\varepsilon_H)$. Luego como $\bar{\varepsilon_H}$ es central y $\bar{\varepsilon_H}$ y ε_H son ortogonales, $\bar{\varepsilon_H} \circ \gamma(\varepsilon_H(m)) = \gamma(\bar{\varepsilon_H}(\varepsilon_H(m))) = 0$. Por lo tanto, $\bar{\varepsilon_H} \circ \gamma \in H'$.
$\therefore L \subseteq H'$.
Sea $\beta \in H'$, luego $\forall m \in M$, $\beta(\varepsilon_H(m)) = 0$. Así, $\forall m \in M$, $\bar{\varepsilon_H} \circ \beta(m) = \beta(m) - \varepsilon_H(\beta(m)) = \beta(m) - \beta(\varepsilon_H(m)) = \beta(m)$. Por lo tanto $\beta = \bar{\varepsilon_H} \circ \beta \in L$.
$\therefore L = H'$.
Como $End(M) = I \bigoplus L$, luego $I \cap L = 0$, por lo que $H^* \cap H' = 0$. De aquí también se sigue que $End(M) = H^* \bigoplus H'$.
Sea $\varepsilon \in End(M/H)$. Notemos que, como $M = K \bigoplus H$, entonces $\forall m \in M$, $m = a + b$ donde $a \in K$ y $b \in H$. Así, $\forall m \in M$, $m + H = (a + b) + H = a + H$. Por lo que si $m = a + b$, $m' = a' + b'$, donde $a, a' \in K$ y $b, b' \in H$ y $\varepsilon(m + H) = m' + H$, entonces $\varepsilon(m + H) = \varepsilon(a + H) = m' + H = a' + H$.
Definamos,

$$\begin{gathered} \varepsilon_M : K \oplus H \longrightarrow K \oplus H \\ a + b \mapsto a' \end{gathered}$$

Donde $a, a' \in K$, $b \in H$ y $\varepsilon((a + b) + H) = a' + H$.
Notemos que ε_M está bien definida. Si $a + H = a_1 + H$, entonces $\varepsilon(a + H) = \varepsilon(a_1 + H)$, por lo que $a' + H = a_1' + H$. Así, $a' - a_1' \in H$. Pero como $a, a' \in K$, entonces $a - a' \in K$. Por lo tanto, $a' - a_1' \in K \cap H = 0$. Así, $a' - a_1' = 0$. Es decir, $a' = a_1'$. Por lo tanto, ε_M está bien definida.
Veamos que $\varepsilon_M \in End(M)$. Sean $r \in R$, $a_1 + b_1, a_2 + b_2 \in M$ tales que $a_1, a_2 \in K$ y $b_1, b_2 \in H$. Notemos que como $\varepsilon \in End(M/H)$,

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2)' &= \varepsilon((a_1 + a_2) + H) \\ &= \varepsilon((a_1 + b_1) + H + (a_2 + b_2) + H) \\ &= \varepsilon((a_1 + b_1) + H) + \varepsilon((a_2 + b_2) + H) \\ &= a_1' + a_2' \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} \varepsilon_M((a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)) &= \varepsilon_M((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)) \\ &= (a_1 + a_2)' \\ &= a_1' + a_2' \\ &= \varepsilon_M(a_1 + b_1) + \varepsilon_M(a_2 + b_2) \end{aligned}$$

Ahora como $\varepsilon \in End(M/H)$,

$$\begin{aligned}(a_1r)' &= \varepsilon(a_1r + H)\\ &= \varepsilon(((a_1 + b_1) + H)r)\\ &= \varepsilon((a_1 + b_1) + H)r\\ &= a_1'r\end{aligned}$$

Por lo que,

$$\begin{aligned}\varepsilon_M((a_1 + b_1)r) &= \varepsilon_M(a_1r + b_1r)\\ &= (a_1r)'\\ &= a_1'r\\ &= \varepsilon_M(a_1 + b_1)r\end{aligned}$$

$\therefore \varepsilon_M \in End(M)$.
$\therefore$ todo endomorfismo de M/H se alza a un endomorfismo de M.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Supongamos H es *-cerrado, $H^* \cap H' = 0$ y todo endomorfismo de M/H se alza a un endomorfismo de M.
Por hipótesis H es *-cerrado, así de la proposición 5.0.18, se sigue que existe $I \in \mathcal{I}$, tal que $H = I^*$. En la proposición 5.0.28, se probó que $End(M) \cong (I^*)^* \oplus End(M)^{M/I^*}$. Así, $End(M) \cong H^* \oplus End(M)^{M/H}$. Como todo endomorfismo de M/H se alza a un endomorfismo de M, $End(M)^{M/H} \cong \{\beta \in End(M) \mid \beta(H) = 0\} = H'$. De donde, $End(M) = H^* \oplus H'$, con $H', H^* \in \mathcal{I}$. Por el teorema 5.0.19, existe α un idempotente central tal que $H^* = \alpha End(M)$ y $H' = \bar{\alpha} End(M)$. Como α es un idempotente central, entonces por la proposición 5.0.9, $M = Im(\alpha) \bigoplus Nuc(\alpha)$, donde $Im(\alpha)$, $Nuc(\alpha) \in \mathcal{H}$.
Afirmamos que $Im(\alpha) = (\alpha End(M))^*$.
Sea $\alpha(m) \in Im(\alpha)$, luego $\alpha(m) = \alpha \circ id(m) \in (\alpha End(M))^*$. Por lo tanto, $\alpha(m) \in (\alpha End(M))^*$.
$\therefore Im(\alpha) \subseteq (\alpha End(M))^*$.
Sea $\sum_{i=1}^{n} \alpha \circ \gamma_i(m_i)r_i \in (\alpha End(M))^*$, donde $\forall i$, $\alpha \circ \gamma_i \in \alpha End(M)$, $m_i \in M$ y $r_i \in R$. Luego, $\sum_{i=1}^{n} \alpha \circ \gamma_i(m_i)r_i = \alpha(\sum_{i=1}^{n} \gamma_i(m_i)r_i) \in Im(\alpha)$.Por lo tanto, $\sum_{i=1}^{n} \alpha \circ \gamma_i(m_i)r_i \in Im(\alpha)$.
$\therefore Im(\alpha) = (\alpha End(M))^*$.
Así, $Im(\alpha) = (\alpha End(M))^* = (H^*)^* = H$. Por lo que $M = H \bigoplus Nuc(\alpha)$.
$\therefore H$ es un sumando de M, con complemento $Nuc(\alpha) \in \mathcal{H}$.
Así, $(iii) \Leftrightarrow (i) \Leftrightarrow (ii)$. Y de suponer (i) se sigue que $End(M) = H' \bigoplus H^*$.

$\square$

Los criterios en las proposiciones 5.0.28 y 5.0.29, simplifican el caso si $End(M)$ es abeliano ya que por el teorema 4.1.6 todos los sumandos directos serían totalmente invariantes. El siguiente teorema es inmediato.

Teorema 5.0.30. *Sea R un anillo y $M \in Mod{-}R$, un módulo endabeliano. Sea H un submódulo de M, I un ideal bilateral de $End(M)$.*
(i) Las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) H es un sumando directo de M.

(b) H es totalmente invariante y '-cerrado, $H' \cap H^* = 0$ y todo endomorfismo de H se extiende a un endomorfismo de M.

(c) H es totalmente invariante y *-cerrado, $H^* \cap H' = 0$ y todo endomorfismo de M/H se alza a un endomorfismo de M.

En este caso, $End(M) = H' \bigoplus H^*$.

(ii) Las siguentes condiciones son equivalentes:

(a) I es un sumando directo de $End(M)$.

(b) I es '-cerrado, $I \cap (I')^* = 0$ y todo endomorfismo de I' se extiende a un endomorfismo de M.

(c) I es *-cerrado, $I \cap (I^*)' = 0$ y todo endomorfismo de M/I^* se alza a un endomorfismo de M.

En este caso, $M = I' \bigoplus I^*$.

Bibliografía

[1] G. F. Birkenmeier, *Idempotents and completely semiprime ideals*, Comm. Algebra 11 (1983), 567-580.

[2] G. Calugareanu, P. Schultz, *Modules with abelian endomorphism rings*, Bull. Aust. Math. Soc. 82 (2010), 99–112.

[3] V. Camillo, P. P. Nielsen, *McCoy rings and zero-divisors*, J. Pure Appl. Algebra 212 (2008) 599-615.

[4] P. A. Krylov, A. V. Mikhalev, A. A. Tuganbaev, *Endomorphism Rings of Abelian Groups*, Algebras and Applications, 2 (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003).

[5] T. Y. Lam, *Exercises in Classical Ring Theory*, Problem Books in Mathematics (Springer, New York, 1995)

[6] J. D. Reid, *On subcommutative rings*, Acta Math, Acad. Sci. Hungar. 16 (1995), 23-26.