



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN INGENIERÍA EN EXPLORACIÓN Y EXPLOTACIÓN DE RECURSOS NATURALES

JERARQUIZACIÓN DE ASIGNACIONES DE PEMEX EXPLORACIÓN Y PRODUCCIÓN EN TÉRMINOS DE EFICIENCIA, APLICANDO LA TÉCNICA DE ANÁLISIS DE ENVOLVENTE DE DATOS (DEA)

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE  
MAESTRO EN INGENIERÍA EN EXPLORACIÓN Y EXPLOTACIÓN DE RECURSOS NATURALES

PRESENTA:

GERMÁN LÓPEZ BAUTISTA

DIRECTOR DE TESIS

DR. RICARDO ACEVES GARCÍA

POSGRADO DE INGENIERÍA

Ciudad Universitaria, Cd. Mx. Enero 2019



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

---

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Néstor Martínez Romero

Secretario: Dra. Zaida Estefanía Alarcón Bernal

Vocal: Dr. Ricardo Aceves García

1 er. Suplente: M. en I. Francisco Castellanos Páez

2 do. Suplente: M. I. Horacio Andrés Ortega Benavides

Ciudad Universitaria, Ciudad de México

TUTOR DE TESIS:

Dr. Ricardo Aceves García



FIRMA

---

## Agradecimientos

Al Ing. José Luis Chávez Suárez por la oportunidad de permitirme realizar este trabajo, ya que sin su apoyo y persistencia no sería posible terminarla, además del tiempo permitido para dedicarme al desarrollo de este proyecto.

Al Dr. Ricardo Aceves, quien sin conocerme me dio la oportunidad de incursionar en temas inexplorados para mí y que han sido de gran utilidad en mi desarrollo profesional, además de que se ha abierto una puerta para desarrollar nuevas técnicas en la industria petrolera.

A mi familia por darme el ánimo que se requiere para continuar en este camino, a mi compañera de vida, mi esposa Magaly quien me ha permitido ausentarme en su vida diaria, y todo por la inquietud de superación personal, sin embargo, siempre ha estado junto a mí con su amor y comprensión animándome cada momento para lograr concluir este episodio de nuestras vidas.

A nuestros hijos Edmundo, Daniela, Germán y Paloma, y no los nombro por orden de importancia si no por la edad, cada uno de ellos ha contribuido con su cariño, paciencia, amor y locura para que juntos logremos los objetivos planteados, siempre serán el motor de mi vida.

A mi Chepinita adorada, mi madre que siempre me ha guiado en este camino del bien y de la superación, quien me sigue apoyando a pesar de sus años siempre está a mi lado con su amor y dedicación, gracias madrecita adorada.

Un especial reconocimiento a mi padre Oscar quién ya no está entre nosotros, pero su amor hacia nosotros nos alimenta para continuar en este camino.

Finalmente, a mis compañeros de trabajo a los doctores Rufino y Benjamín que, con su conocimiento, explicaciones y comentarios en el desarrollo de este trabajo, han fortalecido el entendimiento del tema desarrollado.

---

## I. RESUMEN

---

El objetivo primordial de Pemex Exploración y Producción (PEP) es generar valor económico para el País través de la explotación de las asignaciones petroleras que le fueron conferidas con la reforma energética en 2014. Por ello el portafolio de PEP debe estar sustentado técnica y económicamente para cumplir con este objetivo.

Puntualizando el tema del análisis Data Envelopment Analysis (DEA) podemos decir que es una técnica de programación matemática, no-paramétrica y determinista, que permite establecer intuitivamente una superficie envolvente como frontera de eficiencia técnica relativa de un conjunto de DMU, por sus siglas (Decision Making Units, DMU) o bien Unidades Tomadoras de Decisiones organizacionales homogéneas. Esta técnica no solo permite construir la frontera de eficiencia, pero además medir la eficiencia relativa de cada unidad respecto de la DMU más eficiente.

El presente trabajo busca contribuir a este logro mediante un análisis matemático que permita a PEP contar con una evaluación de sus asignaciones a través de la eficiencia de sus indicadores económicos, empleando el análisis (DEA), utilizando como base la información documentada en la cartera de proyectos y el uso de un software especializado, de tal manera que se pueda aplicar de forma sistemática y continua con fines de soporte para la toma de decisiones.

En este trabajo se empleó la información correspondiente a la cartera 2018 para un grupo de 30 asignaciones de petroleras, las cuales se localizan en las diferentes zonas geográficas de México y son operadas a través de las Subdirecciones de Producción Bloques Aguas Someras 01, 02, Sur y Norte (SPBAS01, SPBAS02, SPBSur, SPBNorte).

Esto se pudo realizar gracias a una de las ventajas más significativas de la metodología DEA y es el de poder emplear variables con diferentes unidades de medida que representan la actividad de producción de manera global, pero que al mismo tiempo reflejan las características

---

singulares de cada subdirección en su propio esquema de explotación y del régimen fiscal que les aplique.

Los resultados esperados deben representar que aquellas asignaciones consideradas como de alta productividad en el sector petrolero mexicano se comportan como técnicamente eficientes y que más de la mitad de las asignaciones evaluadas sean ineficientes. Así mismo se contempla determinar un grupo de referencia de las asignaciones eficientes que deben servir como guía a las ineficientes para definir las estrategias que les permitan mejorar su desempeño y con ello posicionarlas o en su caso proponer grupos para buscar socios comerciales que impulsen el desarrollo de estas.

Palabras clave: Eficiencia, Supereficiencia, Evaluación de eficiencia, Análisis envolvente de datos (DEA), Valor Presente Neto VPN Antes y después de Impuestos (VPN AI, VPN DI), PEP, DMU.

---

## II. ÍNDICE

---

I. Resumen .....	4
II. Índice.....	6
III. Listado de figuras.....	8
IV. Listado de Tablas.....	10
V. Introducción.....	12
1 Planteamiento del problema.....	14
1.1 Definición del problema .....	14
1.2 Objetivo General .....	15
1.3 Objetivo específico .....	15
2 Justificación.....	16
3 Marco teórico y conceptual.....	18
3.1 Generalidades.....	18
3.1.1 Teoría del portafolio .....	20
3.1.2 Selección de la cartera, de acuerdo con la teoría de Markowitz .....	23
3.2 Estado del arte del DEA .....	26
3.3 Modelos Establecidos Para La Medición De La Eficiencia Con La Técnica De La DEA	32
3.3.1 Elección de la alternativa óptima .....	32
3.3.2 Esquemas de programación lineal y fraccional.....	33
3.4 Modelos De DEA Alternativos .....	36
3.4.1 Enfoques RTS (Returns to Scale) con modelos BCC (Banker-Charnes-Cooper).....	36
3.4.2 Análisis del Modelo de Libre Disposición FDH.....	41
3.4.3 Modelo de referencia variable (Benchmarking).....	43
3.4.4 Modelos de medición de la eficiencia basados en holguras .....	49
3.4.5 El programa dual del modelo SBM.....	59

---

3.4.6	Extensiones del modelo SBM .....	60
3.4.7	Modelo Super-SBM.....	62
3.4.8	Tratamiento de datos no positivos en los modelos de SBM .....	65
4	Aplicación del Modelo y Resultados .....	68
4.1	Aplicación del modelo DEA.....	68
4.1.1	Técnicas de eficiencia. ....	69
4.1.2	Escala de eficiencia en la DEA. ....	74
4.1.3	Super eficiencia. ....	77
4.2	Análisis del portafolio .....	81
4.3	Jerarquización de asignaciones.....	89
5	Conclusiones y Próximos Pasos .....	98
5.1	Próximos pasos.....	100
6	Apéndice.....	101
6.1	Apéndice A .....	101
6.2	Apéndice B .....	103
7	Referencias.....	105



---

### III. LISTADO DE FIGURAS

---

Figura 3-1. A modo de resumen se muestra la línea de tiempo de la evolución de las investigaciones encaminadas al análisis del portafolio.	23
Figura 3-2. Conjunto eficiente en el plano $\sigma i^2$	25
Figura 3-3 Fronteras de producción del modelo BCC	36
Figura 3-4 Retorno de escala	37
Figura 3-5 Modelo de referencia variable	46
Figura 3-6. Comparativa de los modelos propuestos para cada DMU.	58
Figura 4-1 Combinaciones entrada-salida para varias empresas (unidades).	69
Figura 4-2 Representación diagramática de la eficiencia técnica según Farrell (1957).	72
Figura 4-3 Modelos establecidos bajo diferentes supuestos, (Bogetoft & Otto, 2011)	73
Figura 4-4 Clasificación de las tecnologías, (Bogetoft & Otto, 2011)	42
Figura 4-5. Análisis de rendimiento marginal de capital.	82
Figura 4-6 Cambio de la posición de las unidades, respecto a la aplicación de los impuestos	83
Figura 4-7 Eficiencia de la inversión respecto al VPN AI	84
Figura 4-8 Flujo de efectivo acumulado para DMU's mayores a 600 mil millones de pesos	87
Figura 4-9 Flujo de efectivo acumulado para DMU's menores a 600 mil millones de pesos	87
Figura 4-10 Modelo VRS, muestra una función de producción de entrada única, salida única	92
Figura 4-11 El valor de eficiencia del modelo FDH.	94
Figura 4-12 Comparación de la solución FDH y VRS.	95
Figura 4-13 Jerarquización de Unidades en función de la propuesta VRS y FDH vs Cartera.	96
Figura 4-14 Jerarquización de Unidades en función de la propuesta VRS vs FDH.	97



---

## IV. LISTADO DE TABLAS

---

Tabla 3-1 Ejemplo 1, para una jerarquización DMU	56
Tabla 3-2 Valores y rangos de eficiencia para el ejemplo 1	56
Tabla 3-3 Valores y rangos de eficiencia para el ejemplo 1	58
Tabla 3-4 Modelos Super-SBM	64
Tabla 3-5 Resultados negativos en la salida de datos	67
Tabla 4-1 SUPER EFICIENCIA	78
Tabla 4-2 Jerarquización de unidades en función de su VPN AI	82
Tabla 4-3 Jerarquización de unidades en función de su VPN DI	83
Tabla 4-4 Jerarquización de unidades en función de su VPN AI/VPI	84
Tabla 4-5 Jerarquización de unidades en función de su punto de equilibrio antes de impuestos (BE AI), en dólares por barril	85
Tabla 4-6 Jerarquización de unidades en función de su punto de equilibrio después de impuestos (BE DI), en dólares por barril	86
Tabla 4-7 Resumen de la Jerarquización de unidades en función	88
Tabla 4-8 Datos para el modelo (miles de millones)	89
Tabla 4-9 Salida al modelo VRS Súper Eficiencia a la salida	91
Tabla 4-10 Salida al modelo FDH Súper Eficiencia a la salida	93



---

## V. INTRODUCCIÓN

---

El objetivo de este trabajo es presentar una técnica, que de acuerdo a sus indicadores de rentabilidad permita medir la eficiencia de las asignaciones petroleras de PEP y con ello jerarquizar a través de una herramienta no paramétrica sistematizada inicialmente por (Charnes, Cooper, & Rhodes, 1978) denominada por sus siglas DEA, por lo que, a partir de esta técnica es posible precisar la eficiencia de los indicadores, en función de una serie de insumos (inputs) que son transformados para generar un producto (output).

Recordemos que la eficiencia es un concepto que posee diversas interpretaciones en diferentes ramos de la industria, la cual va desde la farmacéutica hasta la nuclear, por lo que llevar una interpretación del análisis del portafolio de Pemex Exploración y Producción a través de la eficiencia de las asignaciones apoyará la toma de decisiones de inversión, producción, manejo operativo entre otras.

Haciendo referencia a (Gravelle & Rees, 1981), quien menciona que “Quizá la idea más extendida de eficiencia sea el concepto de óptimo Paretiano, bajo la cual se establece que ninguna asignación de recursos puede modificarse para mejorar la situación de alguien sin empeorar la de otro” (Rincón Soto, 2016)

Como parte de la conceptualización de la industria del petróleo en México a través de la historia, Pemex ha sido parte fundamental del desarrollo del país gracias a los ingresos generados por décadas, sin embargo en la actualidad los yacimientos cada vez demandan mayores condiciones de análisis y estudio, por lo que contar con un portafolio robusto, bien analizado y caracterizado con técnicas, modelos matemáticos y estadísticos, se logrará incrementar el valor de las asignaciones de PEP y con ello soportar decisiones que minimicen el riesgo y mejoren la eficiencia de las inversiones, provocando una directriz enfocada a la rentabilidad del portafolio. En la actualidad en PEP el análisis del portafolios es determinado por criterios deterministas dejando a un lado la incertidumbre asociada al riesgo de las inversiones.

---

Existen muchos sistemas en los cuales están presentes incertidumbres en su modelo, ya sea en la misma descripción del sistema o como perturbaciones o quizás propiamente las ponderaciones de variables de entrada, proporcionadas por especialistas en su tema. Existen muchas variables aleatorias que se pueden mencionar, tal es el caso de los precios de los hidrocarburos, paridades de las divisas, inversiones, gastos, demanda gas para Bombeo Neumático (BN), la producción de los pozos, entre muchas otras. Esto lo podemos considerar como un sistema estocástico, o un sistema de variables a resolver en el cual se puede tener un enfoque particular para cada solución.

Cómo parte de un entendimiento del tema, el nombre de Data Envelopment Analysis (DEA) se debe a la forma en que "envuelve" las observaciones para identificar una "frontera" que se usa para evaluar las observaciones que representan el desempeño de todas las variables que se van a evaluar.

Para el caso de estudio aplicando la metodología DEA, se busca generar una solución para los escenarios propuestos del portafolio de PEP en función de los insumos proporcionados para el análisis de rentabilidad. Un escenario se puede definir como la posible evolución del sistema hacia un estado futuro, en este aspecto de la formulación de múltiples escenarios se pueden plantear algunas técnicas que permiten resolver este problema, como parte de este proyecto se describe en la siguiente sección el marco teórico y conceptual para el mejor entendimiento del análisis.

---

# 1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

---

Los constantes cambios en la industria petrolera de México han provocado que el área encargada de administrar el portafolio de Pemex Exploración y Producción implemente dentro del proceso de seguimiento y control, herramientas que apoyen a la documentación y análisis de las asignaciones petroleras.

Uno de los principales retos dentro de PEP, es contar con un portafolio robusto y eficiente que garantice la rentabilidad de la empresa, por esa razón el analizar y evaluar cada asignación en función de indicadores económicos, por ejemplo, el Valor Presente Neto, antes y después de impuestos, eficiencia de la inversión, ingresos, impuestos, etc. lo cual es fundamental.

Actualmente se tienen herramientas que apoyen al análisis de rentabilidad, sin embargo, el análisis realizado aplica la teoría clásica del portafolio, obteniendo resultados de manera determinista, por lo tanto, necesita de métodos de mayor complejidad que fortalezcan el análisis y los resultados para la toma de decisiones.

## 1.1 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

Tradicionalmente el análisis del portafolio se realiza a través de métodos simples, utilizando herramientas de trabajo tal es el caso de Excel y PowerPoint, en donde se grafican los resultados de la evaluación económica,  $VPN AI$ ,  $VPN DI$ ,  $VPN/VPI$ , punto de equilibrio, etc.

Dentro de PEP, se tienen áreas sustantivas que generan valor a través de la producción de hidrocarburos por medio de las asignaciones petroleras, las cuales son administradas por subdirecciones; cada subdirección tiene a su cargo un determinado número de éstas, conformando el conjunto a nivel nacional, de tal forma que dependiendo de los resultados se jerarquizan, provocando que existan asignaciones que por sus niveles bajos de producción o por el resultado en el indicador sean descartadas o limitadas para la asignación de los recursos, asimismo aquellas asignaciones que resultan en las primeras posiciones pueden ocultar sobreinversiones, bajos gasto de operación, malas prácticas etc.

---

## **1.2 OBJETIVO GENERAL**

Especialmente incursionar en el Análisis de Envoltante de Datos (DEA) en la administración de asignaciones petroleras en PEP y obtener una jerarquización en función de la eficiencia de datos, tanto a la entrada como a la salida de los indicadores económicos.

## **1.3 OBJETIVO ESPECÍFICO**

Identificar las asignaciones de mayor eficiencia con la metodología (DEA), mostrando los resultados comparativos entre el método propuesto y la forma tradicional del análisis del portafolio.

Implementar las buenas prácticas en el uso de la metodología con la finalidad de tener mayor certidumbre en la toma de decisiones, proponiendo políticas de mejoramiento a las asignaciones ineficientes, en función de las buenas prácticas de aquellas asignaciones con resultados positivos o de mayor eficiencia y por lo tanto, obteniendo un diagnóstico del portafolio más robusto.



---

## 2 JUSTIFICACIÓN

---

Las empresas petroleras cuya cadena de valor es la exploración, producción y refinación, necesitan desarrollar habilidades, herramientas y prácticas que le permitan medir la eficiencia de cada uno de sus proyectos internos, con lo que podrán asegurar el mejor rendimiento en sus operaciones, sin embargo, cuando de medir la eficiencia técnica relativa se trata el tema no resulta nada sencillo, porque cada proyecto desarrollado tiene características propias y particulares que dificultan hacerlos comparables, para determinar la medición de su eficiencia.

Pemex Exploración y Producción, como una empresa productiva subsidiaria del estado especializada en explorar y producir hidrocarburos a través de asignaciones conferidas por el estado comparte esta necesidad y cuenta con las características necesarias que requiere la aplicación de la metodología Data Envelopment Analysis (DEA) por sus siglas en inglés, la cual se ha venido consolidando en las últimas décadas, como una de las herramientas metodológicas más importantes de la medición de la eficiencia técnica relativa, por lo cual para el análisis del portafolio estaremos aplicando por primera vez.

Las asignaciones petroleras en adelante serán referenciadas como DMU's que significa unidades de decisión de acuerdo con el lenguaje de la metodología DEA y que serán el objeto de estudio, se encuentran localizadas en las subdirecciones de producción Aguas Someras, Aguas Profundas y Terrestres en México y comparten características homogéneas que permiten que sean comparables entre sí, condición necesaria para la aplicación de la metodología DEA. Principalmente, este trabajo tiene por objeto aportar una herramienta útil al incremento de la productividad de las subdirecciones de producción y crear un modelo adecuado para la evaluación de su eficiencia y consecuentemente enfocarse en las asignaciones de menor eficiencia con la finalidad de generar mayor valor económico.



---

## 3 MARCO TEÓRICO Y CONCEPTUAL

---

### 3.1 GENERALIDADES

La teoría matemática de la DEA, tiene una aplicación natural en el campo de las finanzas. Desde una perspectiva general, el comportamiento de los agentes económicos frente a la incertidumbre implica equilibrar los riesgos esperados y las recompensas esperadas. Por ejemplo, el problema de selección de una cartera de proyectos petroleros se refiere a la compensación óptima entre riesgo y recompensa.

Decimos que una cartera es óptima en el sentido de que es la mejor cartera entre muchas otras alternativas. El criterio que mide la " calidad " de una cartera en relación con las otras se conoce como la función objetivo en la teoría de la optimización. El conjunto de carteras entre las que estamos eligiendo se denomina el conjunto de soluciones factibles o el conjunto de puntos factibles.

La definición de una solución a través del análisis de eficiencia de insumos puede traducirse en varios tipos de beneficios que, si bien se encuentran interrelacionados entre sí, resultan analíticamente distinguibles:

- **El aumento de la rentabilidad y el incremento de la producción** derivado a la redefinición de la estrategia para enfocar las inversiones a las asignaciones con mayor oportunidad para el negocio.
- **El crecimiento de la producción nacional** (beneficio para el país) **y del ingreso** (beneficio para la empresa).
- **La disminución del tiempo para la recuperación de la inversión** y como consecuencia reinvertir en mayores oportunidades para el mantenimiento de la producción.

que trae como resultante una solución a los productos generados.

Uno de los puntos de mayor importancia es la presencia de variables aleatoria dentro de la formulación del problema, las cuales generan que éste se torne muy complejo de resolver bajo

---

técnicas tradicionales de optimización, en particular se está trabajando con un problema de optimización estocástica, la cual está asociado a una gran cantidad de escenarios que representan las posibles realizaciones de las variables aleatorias en estudio, lo que conlleva a que su tamaño sea significativo y por consecuencia se requiere un trato especial con sistemas complejos y un avanzado sistema de cómputo.

Se tiene conocimiento que desde hace más de 20 años se han desarrollado una serie de modelos matemáticos que permiten determinar las decisiones óptimas al momento de planear las estimaciones de la producción, así, en primera instancia se desarrollaron modelos determinísticos, donde los insumos son datos estimados por los procesos de simulación numérica a lo largo de la vida del campo.

Otros modelos más complejos han sido desarrollados, sin embargo, debido al dinamismo inherente que presentan los mercados mundiales, impulsados por el efecto de la globalización y otros factores económicos, variables tales como el precio de los hidrocarburos, la producción de petróleo a nivel mundial, así como las inversiones que se deben realizar en el horizonte de explotación, estas debían ser incluidas como variables aleatorias.

Entonces, como parte de la investigación el enfoque que debemos considerar es el de la optimización de un portafolio de inversiones en la industria petrolera y en concreto el de Pemex Exploración y Producción a través de la propuesta en el uso de la metodología DEA.

Uno de los puntos de mayor relevancia que debemos remarcar es, el entendimiento del análisis de un portafolio y de la optimización. Con la finalidad de comprender la evolución de las teorías de optimización y construir una línea del tiempo, debemos entender un poco de la historia, por lo que debemos reconocer a uno de los teóricos de mayor impacto en la teoría del portafolio fue Harry Markowitz (“Markowitz”) quien es considerado como un pionero por sus contribuciones teóricas a la economía financiera y las finanzas corporativas.

---

### 3.1.1 Teoría del portafolio

En 1990, Markowitz compartió un Premio Nobel por sus contribuciones a estos campos, publicando en su ensayo "Portfolio Selection" (1952) publicado por primera vez en "The Journal of Finance", y más extensamente en su libro, "Portfolio Selection: Efficient Diversification" en (1959). Su innovador trabajo formó la base de lo que ahora se conoce popularmente como "Modern Portfolio Theory" (MPT). Los fundamentos de esta teoría se ampliaron sustancialmente más tarde por el ganador del Premio Nobel de Markowitz, William Sharpe, quien es ampliamente conocido por su trabajo de Modelo de fijación de precios de activos de capital de 1964 sobre la teoría de la formación de precios de activos financieros.

La variación de las inversiones es una práctica estudiada un poco antes de 1952, preliminar al trabajo de Markowitz (1952), los inversionistas simplemente centraban su atención en como maximizar los niveles esperados en el retorno de la inversión. Por lo tanto, el inversionista calculaba simplemente el grado esperado de rendimientos de un conjunto de activos y luego invertiría todo su capital en aquel activo que le proporcionara la mayor rentabilidad esperada sin algún análisis de mayor certidumbre.

Graham, Dodd y Cottle (1934), realiza uno de los trabajos más antiguos que contempla el análisis bursátil donde se publicó de qué manera se realiza un análisis de los estados financieros de las empresas con la intención de establecer uno de los criterios apropiados para la selección de bonos y acciones para propósitos de inversión.

Posteriormente Hicks (1935) propone la Teoría Pura de la Inversión de Portafolios, la cual mostraba, la necesidad de una teoría mejorada del dinero y lo deseable de construir una teoría del dinero alineada con la teoría del valor. También discutía la existencia de fricciones tales como el costo de transferir activos e introducía el riesgo. Específicamente señalaba que el riesgo total en que se incurre cuando se efectúa más de una inversión riesgosa no tiene una relación con el riesgo que produce cada una de las inversiones en particular si se tomaran por separado.

---

Tres años después Marschak (1938) construyó una Teoría de la Elección Bajo Incertidumbre, donde se observan los primeros trabajos relacionados con este tema. Asumía una dirección de preferencias en el espacio de parámetros de las distribuciones de probabilidades y a su vez expresó las preferencias por inversiones mediante curvas de indiferencia. También busca alcanzar la teoría del dinero mediante su integración con la Teoría General de los Precios, expresando los problemas de la inversión con las herramientas de una teoría económica en la que se requería de una extensión del concepto de los gustos humanos y las condiciones de producción. El problema se presenta cuando hay que explicar las cantidades objetivo de bienes mantenidos en cualquier punto del tiempo, así como los precios objetivo del mercado a los que se intercambian, dado los gustos y expectativas de los individuos en ese punto.

En ese mismo periodo, Williams (1938) hacía la observación de que los dividendos futuros de una acción o el interés y el otorgamiento de un bono pueden ser inciertos. La propuesta en la cual se basa en ese caso, se debían asignar probabilidades a los diversos valores posibles del título financiero y usar la media de esos valores como el valor del título. Finalmente, asegura que invertir en varios títulos financieros de manera suficiente podía virtualmente eliminar el riesgo, en este punto ya se contempla el cálculo de funciones estadísticas.

Para mediados de los 40's, Leavens (1945) mostraba los beneficios de la diversificación en el supuesto de que los riesgos son independientes, lo cual coincidía con la teoría de Williams, afirmaba que la diversificación entre compañías de una industria no puede protegerse contra factores desfavorables que afectan a toda la industria, el entorno genera un impacto fundamental en la misma; para ese propósito se considera que es necesario una diversificación adicional. Aunado a ello, tampoco la diversificación puede proteger a la industria contra factores cíclicos que lleven a una depresión de manera simultánea a todas las industrias del mismo género o que estén ligadas entre sí.

En esta misma década, Friedman y Savage (1948) sugieren que una clase importante de las reacciones de las personas ante el riesgo puede ser racionalizada por un análisis de la curva de utilidad argumentado que la curvatura de la función de utilidad de un individuo difiere en función de la cantidad de la riqueza de la persona, esto se explica de la siguiente manera. Esta

---

función de utilidad podría explicar por qué un individuo es amante del riesgo cuando tiene más riqueza y con aversión al riesgo cuando es más pobre. Estas curvas sirven para comprender el comportamiento de la Demanda y deben ser entendidas como construcciones abstractas donde se establecen relaciones proporcionales, no magnitudes empíricamente medidas.

Finalmente, al mismo tiempo que Markowitz (1952) estableciera el punto de inicio de la Teoría del Portafolio, Roy (1952) analizó las contrariedades del problema de la elección bajo incertidumbre basado en la suposición de que es razonable para un individuo maximizar la ganancia esperada o ganancia en términos reales o de dinero. Definió tres objeciones a este enfoque.

- **Primer lugar**, el inversionista tiene que considerar los posibles resultados de un determinado curso de acción: la media.
- **Segundo lugar**, el principio de maximizar el rendimiento esperado no explica el fenómeno de la diversificación de los recursos entre una amplia gama de activos.
- **Tercer lugar**, la encamina hacia el conocimiento impreciso del inversionista de conocer todos los posibles resultados de una determinada línea de acción, junto con sus respectivas probabilidades y por lo tanto es poco.

Un punto fundamental de la teoría de selección del portafolio se estructura mediante un modelo que muestra como maximizar el rendimiento y minimizar el riesgo, mediante una adecuada elección de los activos que conforman un portafolio, que para el caso de PEP considera unidades de inversión de las asignaciones. La propuesta de selección fue originada por Markowitz (1952), donde propone que un inversionista debe analizar el portafolio como un todo, estudiando las características del riesgo y del rendimiento global, en lugar de escoger valores individuales en función del rendimiento esperado de cada valor en particular.

Considerar como un parteaguas el documento de Markowitz (1952), el cual ha tenido un gran impacto no sólo en la investigación académica, sino también en el sector financiero, ya que cambió de los valores individuales a la diversificación de las inversiones, asimismo el análisis

del impacto de los valores individuales que conforman un portafolio en función de las características del riesgo y su rendimiento.

Por lo que entender que el objetivo de la optimización del portafolio es encontrar un equilibrio óptimo entre rendimiento y riesgo. Tradicionalmente, esto se hizo de forma independiente de la compensación asociada con el intercambio temporal. Sin embargo, esto a menudo conducirá a portafolios que incurren en grandes costos de impacto de mercado.

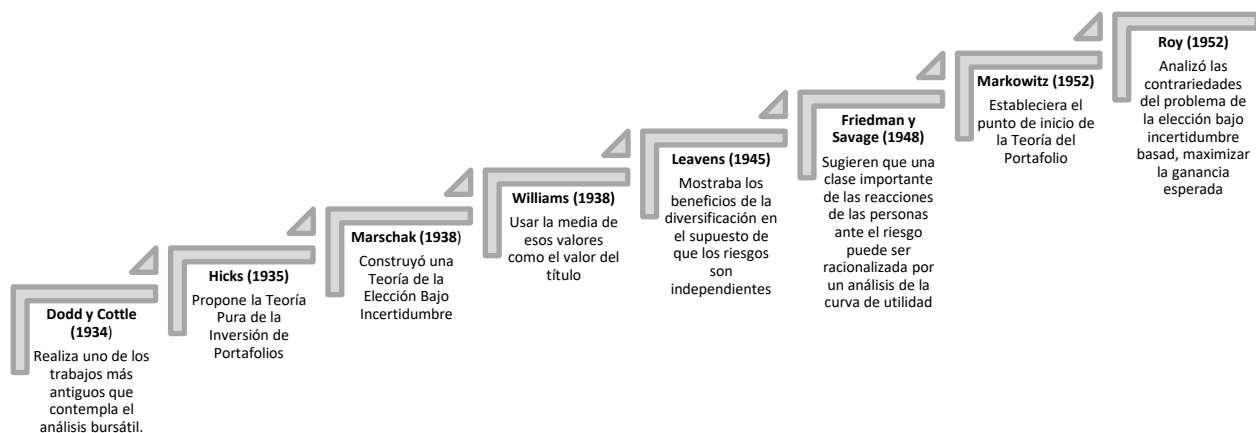


Figura 3-1. A modo de resumen se muestra la línea de tiempo de la evolución de las investigaciones encaminadas al análisis del portafolio.

### 3.1.2 Selección de la cartera, de acuerdo con la teoría de Markowitz

Una de las preguntas que constantemente nos realizamos es, ¿Qué cartera es la mejor?, esta pregunta es probablemente tan antigua como el mercado de valores en sí. Sin embargo, cuando Markowitz publicó su artículo sobre selección de cartera en 1952, proporcionó la base para la teoría de la cartera moderna como un problema matemático, el cual estaremos abordando como parte del entendimiento del tema propuesto.



Consideremos como retorno de una cartera ( $R_t$ ) en el tiempo ( $t$ ), la cual podemos definir como valor total ( $T_t$ ) de la cartera, dividido por el valor total en un momento anterior ( $t - 1$ ), es decir:

$$R_t = \frac{T_t}{T_{t-1}} - 1, \quad 3-1$$

por lo tanto, es simplemente el cambio porcentual entre los valores. La teoría de la cartera de Markowitz proporciona un método para analizar qué tan buena es la cartera dada en función de los medios y la varianza de los rendimientos de los activos contenidos en la cartera. Se supone que un inversor es escéptico al riesgo, por lo tanto, quiere una pequeña variación del rendimiento (es decir, un riesgo pequeño) y un alto rendimiento esperado.

Considere una cartera con  $n$  activos diferentes donde el número de cada activo  $i$  dará el rendimiento  $R_i$ . Considerar que  $\mu_i$  y  $\sigma_i^2$  serán la media y la varianza correspondientes y dejar que  $\sigma_{ij}$  sea la covarianza entre  $R_i$  y  $R_j$ . Supongamos que la cantidad relativa del valor de la cartera invertida en el activo  $i$  es  $x_i$ . Si  $R$  es el rendimiento de toda la cartera, entonces:

$$\mu = E[R] = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i \quad 3-2$$

$$\sigma = Var[R] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j \quad 3-3$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1 \quad 3-4$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \quad 3-5$$

La condición que se presenta en la ecuación 3-5, es lo mismo que decir, solo se permiten posiciones positivas, por lo tanto, si la venta de algún producto debe incluirse en el modelo, esta condición debe omitirse. Para diferentes elecciones de  $x_1, \dots, x_n$  el inversionista obtendrá diferentes combinaciones de  $\mu_i$  y  $\sigma_i^2$ . El conjunto de todas las combinaciones posibles  $(\sigma_i^2, \mu_i)$  se denomina conjunto posible.

Si se considera  $(\sigma_i^2, \mu_i)$  como mínimo  $\sigma_i^2$  para un determinado  $\mu$ , o máximo  $\mu$  para un determinado  $\sigma_i^2$  a esto lo podemos llamar el conjunto eficiente (o frontera eficiente). Dado que un inversionista busca altas ganancias con un bajo riesgo, por lo que busca la maximizar  $\mu$  y minimizar  $\sigma_i^2$ , por lo tanto, busca una combinación que le permita la mayor eficiencia. En la figura 1, se determina como el conjunto alcanzable el interior de la elipse y el conjunto eficiente es la parte superior izquierda de su límite, de acuerdo con la propuesta de Markowitz.

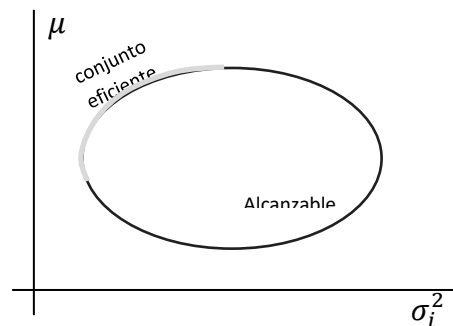


Figura 3-2. Conjunto eficiente en el plano  $\sigma_1^2$

Sin embargo, la discusión para determinar el mejor portafolio que pudiera existir, no es tema de este trabajo, por lo que, para el caso del análisis del portafolio, nos adentraremos al análisis utilizando la metodología DEA, como se ha comentado anteriormente.

---

### 3.2 ESTADO DEL ARTE DEL DEA

Uno de los puntos clave para el análisis de eficiencia a través de la DEA que es una de las técnicas no-paramétricas más empleadas, inicialmente desarrollado por Charnes, Cooper y Rhodes (1978), para determinar la evaluación de la eficiencia relativa de un grupo de entidades o unidades tomadores de decisiones DMU, basado en el concepto que la eficiencia de escala refleja el hecho que posiblemente existe un desempeño óptimo relativo de DMU y que no todas las DMU operan en esta escala óptima (Tolosa s.f.).

El Análisis de envolvente de datos (DEA) es un enfoque "orientado a datos" para evaluar el rendimiento de un conjunto de entidades homólogas denominadas unidades de toma de decisiones (DMU), por sus siglas en inglés, que convierten múltiples entradas en múltiples salidas. La definición de DMU es genérica y flexible. En los últimos años se ha visto una gran variedad de aplicaciones de (DEA) para su uso en la evaluación de los rendimientos de muchos tipos diferentes de entidades dedicadas a actividades y contextos diferentes en muchos países.

Estas aplicaciones DEA han usado DMU de varias formas para evaluar el rendimiento de entidades, como hospitales, vuelos de la Fuerza Aérea de EE. UU., Universidades, ciudades, tribunales, empresas comerciales y otras, incluido el rendimiento de países, regiones, etc. Principalmente se debe a que requiere muy pocas suposiciones, la DEA también ha abierto posibilidades de uso en casos en los que han sido resistentes a otros enfoques debido a la naturaleza compleja (a menudo desconocida) de las relaciones entre los múltiples insumos y los múltiples productos involucrados en las DMU (W. Cooper, M. Seiford, & Zhu, 2011).

Como se señaló la DEA también se ha utilizado para proporcionar nuevos conocimientos sobre actividades y entidades que han sido previamente evaluadas por otros métodos. Por ejemplo, los estudios de prácticas de evaluación comparativa con la DEA han identificado numerosas fuentes de ineficiencia en algunas de las empresas más rentables, empresas que habían servido como puntos de comparación y referente internacional en el criterio de rentabilidad, en

---

la actualidad la técnica de análisis de la DEA ha proporcionado un medio para identificar mejores resultados en la eficiencia en muchos estudios aplicados.

Desde que la DEA se introdujo por primera vez en 1978 en su forma actual, los investigadores en una serie de campos han reconocido rápidamente que es una metodología excelente y fácil de usar para modelar procesos operativos, así como, para evaluaciones de desempeño.

Esto ha sido acompañado por otros desarrollos. Por ejemplo, Zhu (2003a, 2009) proporciona una serie de modelos de hojas de cálculo de DEA que se pueden utilizar en la evaluación del rendimiento y la evaluación comparativa. La orientación empírica de la DEA y la ausencia de una necesidad de los numerosos supuestos a priori que acompañan a otros enfoques (como las formas estándar de análisis de regresión estadística) han dado lugar a su uso en una serie de estudios que implican una estimación de frontera eficiente en el sector gubernamental y sin fines de lucro. en el sector regulado y en el sector privado.

Explícitamente, DEA es una metodología dirigida a las fronteras en vez de las tendencias centrales. En lugar de tratar de ajustar un plano de regresión a través del centro de los datos como en regresiones estadísticas, por ejemplo, uno se mantiene en una superficie lineal por partes para mantenerse sobre la parte superior de las observaciones. Debido a esta perspectiva, la técnica de la DEA se muestra particularmente práctica en descubrir relaciones que permanecerían ocultas a otras metodologías. Por ejemplo, considere una variable cualquiera que sea determinada por la eficiencia o, más en general, una variable dentro de una DMU sea más eficiente que otra DMU. Esto se logra de manera directa por DEA sin requerir suposiciones explícitamente formuladas y variaciones que se requieren con varios tipos de modelos tales como modelos de regresión lineal y no lineal.

La eficiencia relativa en la metodología de la DEA es interpretada con la siguiente definición, que tiene la ventaja de evitar la necesidad de asignar medidas a priori de importancia relativa a cualquier entrada o salida.

---

*Definición 3-1 Eficiencia: Definición ampliada de Pareto-Koopmans. La DMU alcanza la eficiencia total del 100%, si y sólo si, ninguna de sus entradas o salidas se pueden mejorar sin empeorar algunas de sus otras entradas o salidas (W. Cooper, M. Seiford, & Zhu, 2011).*

En la mayoría de las aplicaciones de gestión o ciencias sociales, los niveles de eficiencia teóricamente posibles no se conocerán. La definición precedente es, por lo tanto, reemplazada por enfatizar sus usos con solo la información empíricamente disponible como en la siguiente definición:

*Definición 3-2 Eficiencia relativa: Una DMU se debe calificar como completamente 100% eficiente sobre la base de la evidencia disponible, si y sólo si, el rendimiento de otras DMU no muestra que algunas de sus entradas o salidas se pueden mejorar sin empeorar algunas de sus otras entradas o salidas (W. Cooper, M. Seiford, & Zhu, 2011).*

Observamos que esta definición evita la necesidad de recurrir a los precios u otras suposiciones que requieren de alguna ponderación, que se seleccionan previamente y se supone que reflejan la importancia relativa de las diferentes entradas o salidas. Asimismo, evita la necesidad de especificar explícitamente las relaciones formales que se supone que existen entre las entradas y las salidas. Sin embargo, este tipo de eficiencia básica, denominada "eficiencia técnica", puede extenderse a otros tipos de eficiencia cuando los datos como precios, costos unitarios, etc., están disponibles para su uso con DEA.

El economista suizo-italiano Vilfredo Pareto fue quien estableció las bases de la "economía del bienestar" moderna, es decir, la parte de la economía que se ocupa de evaluar las políticas públicas, al señalar que una política social podría justificarse si hizo que algunas personas mejoraran sin empeorar otras. De esta forma, se puede evitar la necesidad de hacer comparaciones entre el valor de las ganancias para algunos y las pérdidas para otros.

---

De acuerdo a los trabajos realizados por (McLure, 2001), las obras de Pareto más relevantes para esta son sus cuatro principales tratados teóricos: el Cours d'Economie Politique de 1896-97 (Pareto 1971a); el 1901-02 "Les Systèmes Socialistes" (Pareto 1974b); el 1906 Manuale di Economia Politica (Pareto 1974c); y el Trattato di Sociologia Generale de 1916 (Pareto 1935).

Se pueden citar muchos casos cuando el valor de intercambio de los bienes depende de otras variables que son independientes de la naturaleza del individuo y los bienes. Por ejemplo, el precio de los valores negociados en la bolsa de valores a menudo depende de  $dp / dt$ , donde ( $p = \text{precios}, t = \text{tiempo}$ ). Sin embargo, si los precios son proporcionales, se deduce que dependen de otras variables que no son solo las determinadas únicamente por la naturaleza del individuo y los bienes (McLure, 2001).

Por lo tanto, las uniformidades sustantivas asociadas con las élites son limitadas, y el investigador que aplica estas uniformidades debe trabajar dentro de estas limitaciones. Dado que no existe un patrón evidente para los cambios en la forma de un equilibrio social y las leyes generales de la evolución social, los hallazgos de Pareto son de asistencia limitada para el científico social interesado en predecir la forma o el momento del cambio político (McLure, 2001).

Esta propiedad, conocida como el "criterio de Pareto" tal como se usa en la economía del bienestar, fue trasladada, o adaptada, en un libro editado por Koopmans (1951). En este contexto, fueron los "bienes finales" los que se otorgaron a esta propiedad, en el sentido de que estaban todos limitados para que no se permitiera mejorar el bien final si esta mejora provocaba el empeoramiento de uno o más productos finales.

Estos bienes finales las cuales se consideran como las salidas deben satisfacer en cantidades estipuladas, mientras que los insumos deben determinarse de manera óptima en respuesta a los precios y montos fijados exógenamente para cada producto asociado al bien final. Koopmans prestó principal atención a los "precios de eficiencia", que son los precios asociados con la asignación eficiente de recursos (= insumos) para satisfacer las demandas preasignadas de bienes finales.

---

Farrell, sin embargo, extendió la propiedad de Pareto-Koopmans tanto a los insumos como a los productos y evitó explícitamente cualquier uso de precios de mecanismos de intercambio relacionados. Más importante aún, usó los desempeños de otras unidades DMU para evaluar el comportamiento su comportamiento relativo a las salidas y las entradas de cada una de las otras DMU utilizadas.

Farrell, en su artículo pionero en 1957, permitió determinar empíricamente las eficiencias relativas, destinado a corregir las deficiencias encontradas en los índices de productividad, este trabajo realmente reemplazó el concepto de productividad con el concepto más general de "eficiencia relativa".

Charnes en 1978 propuso una formulación de programación fraccional donde las relaciones se restringen al estar entre los valores de cero y la unidad. Esta formulación extendió la medida de la eficiencia de la relación de entrada única y salida única, a múltiples entradas y salidas sin requerir el uso de pesos establecidos a priori, tales como los que se usan habitualmente en ingeniería para tratar estos casos.

El (DEA) es un método alternativo no paramétrico de medición de la eficiencia que utiliza programación matemática en lugar de regresión. Aquí, se evita el problema de especificar una forma explícita de la función de producción y se hace solo un número mínimo de suposiciones sobre la tecnología subyacente. Farrell (1957) formuló un modelo de programación lineal (LP) para medir la eficiencia técnica de una empresa con referencia a una tecnología de referencia caracterizada por un modelo de retorno a escala constante (CRS). Esta medida de eficiencia corresponde al coeficiente de utilización de recursos definido por Debreu (1951) y es igual a la función de distancia de Shepard (1953).





---

### 3.3 MODELOS ESTABLECIDOS PARA LA MEDICIÓN DE LA EFICIENCIA CON LA TÉCNICA DE LA DEA

#### 3.3.1 Elección de la alternativa óptima

Los análisis de eficiencia se refieren principalmente a la obtención de los puntajes de eficiencia y las fuentes y cantidades de cualquier ineficiencia de cada miembro del conjunto de DMU que se evaluarán y también a proporcionar los pares correspondientes que pueden usarse como puntos de referencia. Sin embargo, a veces los analistas están interesados en estimar las ponderaciones con el propósito de obtener información adicional sobre el valor relativo de las entradas y salidas involucradas en dichos análisis.

Un problema que a menudo surge en la práctica, especialmente en el caso de las unidades extremadamente eficientes, es que podemos tener diferentes pesos óptimos asociados con el puntaje de eficiencia de una DMU dada y esto puede proporcionar ideas muy diferentes sobre el papel desempeñado por las variables utilizadas en la evaluación de la eficiencia. En la práctica, los analistas generalmente usan los pesos proporcionados por el software utilizado, pasando por alto la posibilidad de que haya otros pesos óptimos que lleven a conclusiones muy diferentes. Por esta razón, los autores afirman que es necesario seleccionar pesos de entre las soluciones óptimas de los modelos de acuerdo algunos criterios.

Si bien las brechas pueden identificarse con respecto a las medidas de desempeño individual, sigue siendo una tarea desafiante combinar las múltiples medidas en la etapa final. Por lo tanto, se necesitan modelos de evaluación comparativa que puedan abordar múltiples medidas de rendimiento y proporcionar una medida integrada de evaluación comparativa.

Una vez que se establece la frontera, podemos comparar un conjunto de nuevas DMU con la frontera. Sin embargo, cuando una nueva DMU supera a la frontera identificada, la DEA genera una nueva frontera. Como resultado, no tenemos la misma referencia (frontera) para otras (nuevas) DMU.

En este apartado, presentamos varios modelos de evaluación comparativa basados en DEA en los que cada (nuevo) DMU se evalúa en comparación con un conjunto de puntos de referencia (estándares) dados.

### 3.3.2 Esquemas de programación lineal y fraccional

En esta sección estaremos revisando el desarrollo de forma matemática y precisa, por lo que iniciamos con la formulación de programación fraccional, la cual toca dos puntos relevantes:

1. Generaliza la proporción de una salida a otra entrada para la ingeniería y la ciencia
2. Deriva sus evaluaciones de eficiencia para cada DMU en relación con el rendimiento de todas las DMU.

El desarrollo propuesto (W. Cooper, M. Seiford, & Zhu, 2011) es el siguiente:

$$\text{máx } h_0(u, v) = \frac{\sum_r u_r y_{r0}}{\sum_i v_i x_{i0}}$$

sujeto a

$$\frac{\sum_r u_r y_{rj}}{\sum_i v_i x_{ij}} \leq 1 \text{ para } j = 1, \dots, n,$$

con

$$\frac{u_r}{\sum_{i=1}^m v_i x_{i0}}, \frac{v_i}{\sum_{i=1}^m v_i x_{i0}} \geq \varepsilon > 0, \quad 3-6$$

donde  $y_{rj}$  y  $x_{ij}$  se observan valores de salidas y entradas,  $r = 1, \dots, s$ , y  $i = 1, \dots, m$ , para cada  $j = 1, \dots, n$ , en las DMUs y la  $y_{r0}$  y  $x_{i0}$  en la función objetivo representan las salidas y entradas

para que la DMUo sea evaluada. Aquí  $\varepsilon$  es un elemento no arquimediano el cual es una propiedad que afirma que todo número real admite un entero mayor que él.

Este uso de  $\varepsilon > 0$  garantiza que las soluciones serán positivas en todas las variables, de modo que se tendrá algún dato, por pequeño que sea, a cada entrada y salida. El problema representado en la ecuación (3-27), es no lineal y no convexo. Sin embargo, podemos aplicar la transformación de variables de Charnes y Cooper (1962) y convertirlo en un problema de programación lineal equivalente:

$$\text{máx } z = \sum_{r=1}^s \mu_r y_{r0}$$

sujeto a

$$\sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0, j = 1, \dots, n; \quad 3-7$$

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{i0} = 1$$

$$\mu_r, v_i \geq \varepsilon > 0$$

para cada PL, programación lineal dual es:

$$z_0^* = \text{mín} \theta - \varepsilon (\sum_{r=1}^s s_i^- + s_r^+)$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j + s_i^- = \theta x_{i0} \quad i = 1, \dots, m;$$

---

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j + s_r^+ = y_{r0} \quad r = 1, \dots, s; \quad 3-8$$

$$\lambda_j, s_i^-, s_r^+ \geq 0, \forall i, j, r.$$

Podemos observar que, en ambos casos los planteamientos (3-6) y (3-7), incorporan la definición de eficiencia, con (3-7) la evaluación del denominador en el objetivo en la unidad.

La incorporación de la definición de eficiencia de Pareto-Koopmans se representa en (3-8); entonces de acuerdo con lo que hemos descrito en las definiciones anteriores los planteamientos están relacionadas entre sí por la teoría de la dualidad de la programación lineal.

### 3.4 MODELOS DE DEA ALTERNATIVOS

#### 3.4.1 Enfoques RTS (Returns to Scale) con modelos BCC (Banker-Charnes-Cooper)

El modelo BCC tiene sus fronteras de producción abarcadas por el casco convexo de las DMU existentes. Las fronteras tienen características lineales y cóncavas por secciones tal como se observa en la Figura 3-3.

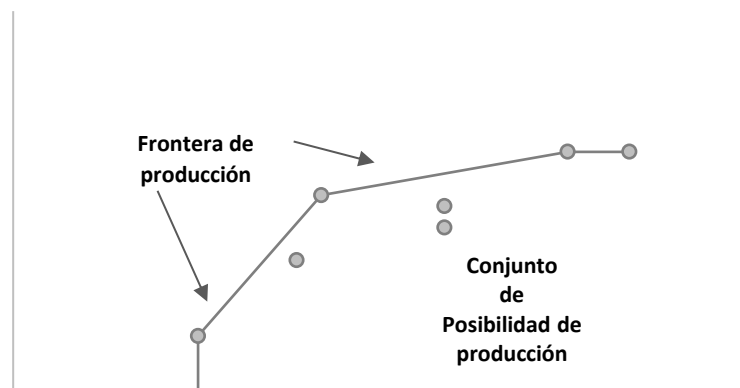


Figura 3-3 Fronteras de producción del modelo BCC

Para facilitar la referencia, presentamos aquí los modelos BCC. Supongamos que tenemos  $n$  DMU's, donde todas las  $DMU_j, j = 1, 2, \dots, n$ , produce las mismas salidas  $s$  en (posiblemente) diferentes cantidades,  $y_{rj}, (r = 1, 2, \dots, s)$ , usando las mismas  $m$  entradas,  $x_{ij}, (i = 1, 2, \dots, m)$ , también en (posiblemente) cantidades diferentes. La eficiencia de un  $DMU_o$  específico puede evaluarse mediante el "modelo BCC" de DEA en "forma envolvente" de la siguiente manera:

$$\text{mín } \theta_o - \varepsilon \left( \sum_{i=1}^m s_i^- + \sum_{r=1}^s s_r^+ \right)$$

sujeto a

$$\theta_o x_{io} = \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j + s_i^- \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

$$y_{ro} = \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j - s_r^+ \quad (r = 1, 2, \dots, s),$$

$$1 = \sum_{j=1}^n \lambda_j,$$

$$0 \leq \lambda_j, s_i^-, s_r^+ \quad \forall i, r, j,$$

3-9

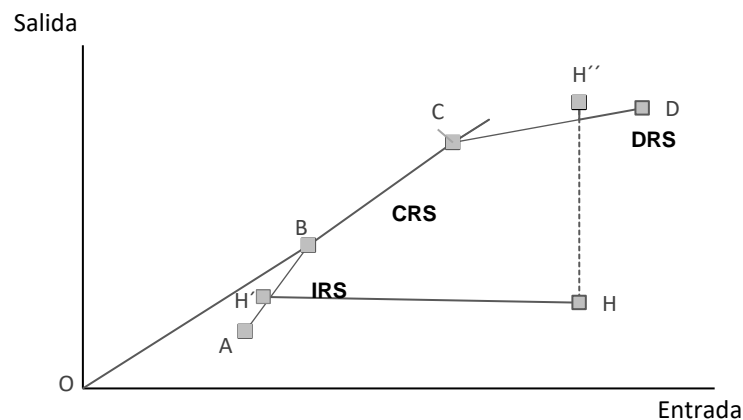


Figura 3-4 Retorno de escala (Zhu, 2009)

Para este caso se limita la atención a las versiones orientadas a los insumos de estos modelos de medidas radiales y retrasamos la discusión de los cambios en la combinación, a diferencia de los cambios de escala, hasta que llegamos a la clase de modelos aditivos donde las orientaciones de entrada y salida se hacen simultaneas.

Finalmente, usamos orientaciones de salida en el caso de modelos multiplicativos porque, como se verá, las formulaciones en ese caso no crean problemas para distinguir entre cambios de escala y combinaciones.

Sin embargo, deberíamos tener en cuenta que los modelos orientados a la entrada y a la salida pueden dar resultados diferentes en sus hallazgos en (RTS Returns to Scale) el cual es el concepto económico de *Rendimientos a Escala* por sus siglas en inglés. Ver la figura 3-4.

Por lo tanto, el resultado asegurado puede depender de la orientación utilizada. El (IRS, Increasing Returns to Scale) *Rendimientos Crecientes a Escala* por sus siglas en inglés, puede ser el resultado de un modelo orientado a la entrada, mientras que una aplicación de un modelo orientado a la salida puede producir una caracterización (DRS, Decreasing Returns to Scale) *Rendimientos Decrecientes a Escala* por sus siglas en inglés a partir de los mismos datos.

La forma dual (multiplicador) del modelo BCC representado en (3-9) se obtiene a partir de los mismos datos que luego se utilizan de la siguiente forma:

$$\text{máx } z = \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} - u_o$$

sujeto a

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{ro} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + u_o \leq 0, \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{io} = 1,$$

$$v_i \geq \varepsilon, \quad u_r \geq \varepsilon, \quad u_o \text{ sin signo} \quad 3-10$$

Las formulaciones anteriores suponen que  $x_{ij}, y_{rj} \geq 0 \quad \forall i, r, j$ . Todas las variables en (3-10) también están restringidas a ser no negativas, excepto para  $u_o$ , que puede ser positivo,

negativo o cero, con consecuencias que hacen posible usar valores óptimos de esta variable para identificar RTS. Cuando un  $DMU_o$  es eficiente de acuerdo con:

*Definición 3-3 (Eficiencia DEA). El rendimiento de  $DMU_o$  es completamente (100%) eficiente si y solo si ambos 1)  $\theta^* = 1$  y (1)  $\theta^* = 1$  y 2)  $s_i^{-*} = s_r^{+-*} = 0$ . (W. Cooper, M. Seiford, & Zhu, 2011)*

Donde el valor óptimo de  $u_o$ , es decir,  $u_o^*$ , en (3-10), se puede usar para caracterizar la situación para RTS.

RTS generalmente tiene un significado inequívoco sólo si  $DMU_o$  se encuentra en la frontera de la eficiencia, ya que sólo en este estado se requiere una compensación entre las entradas y las salidas para mejorar uno u otro de estos elementos. Sin embargo, no hay necesidad de preocuparse por el estado de la eficiencia en nuestros análisis porque la eficiencia siempre se puede lograr de la siguiente manera.

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{x}_{io} = \theta_o^* x_{io} - s_i^{-*} = \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j^*, \quad i = 1, \dots, m, \\ \hat{y}_{ro} = y_{ro} + s_r^{+-*} = \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j^*, \quad r = 1, \dots, s, \end{array} \right. \quad 3-11$$

donde el símbolo “\*” denota un valor óptimo. En ocasiones se los denomina fórmulas de proyección CCR, debido a que Charnes en 1978 mostró que el  $\hat{x}_{io} \leq x_{io}$  y  $\hat{y}_{ro} \geq y_{ro}$  corresponde a las coordenadas de un punto en la frontera de eficiencia. Son, de hecho, las coordenadas del punto utilizado para evaluar  $DMU_o$  cuando se emplea (3-9).



Supongamos que tenemos cinco DMU, A, B, C, D y H como se muestra en la figura 3-4 anteriormente. La línea OBC es la frontera *Constante de Retornos a Escala* (CRS), por sus siglas en inglés. AB, BC y CD constituyen la frontera del BCC y exhiben rendimientos crecientes, constantes y decrecientes a escala, respectivamente. B y C exhiben CRS. En el segmento de línea AB, el IRS prevalece a la izquierda de B para el modelo BCC y en el segmento de línea CD, DRS prevalece a la derecha de C, aplicando (3-11) al punto H, tenemos un punto de frontera H' en el segmento de línea AB donde prevalece el IRS. Sin embargo, si usamos el modelo de BCC orientado a la salida, la proyección es en H'' donde prevalecen los DRS. Esto se debe al hecho de que los modelos BCC orientados a la entrada y a la salida producen diferentes puntos de proyección en la frontera BCC y es en la frontera donde se determina RTS. (W. Cooper, M. Seiford, & Zhu, 2011)

Las siguientes condiciones identifican la situación de RTS para el modelo BCC dado en (3-10),

### **Teorema 3-1**

- (i) *IRS prevalece en  $(\hat{x}_o, \hat{y}_o)$  sí y sólo si  $u_o^* < 0$  para todas las soluciones óptimas.*
- (ii) *DRS prevalece en  $(\hat{x}_o, \hat{y}_o)$  sí y sólo si  $u_o^* > 0$  para todas las soluciones óptimas.*
- (iii) *CRS prevalece en  $(\hat{x}_o, \hat{y}_o)$  sí y sólo si  $u_o^* = 0$  para al menos una solución óptima.*

Aquí, se puede observar,  $(\hat{x}_o, \hat{y}_o)$  son las coordenadas del punto en la frontera de eficiencia que se obtiene de (3-11) en la evaluación de DMUo a través de la solución a (3-9). Tenga en cuenta, por lo tanto, que el uso de la proyección hace innecesario asumir que los puntos a analizar están todos en la frontera eficiente de BCC (W. Cooper, M. Seiford, & Zhu, 2011)

### 3.4.2 Análisis del Modelo de Libre Disposición FDH.

Se asume una variante especial de libre disposición que se llama Free Disposal Hull (FDH). Una forma de ver este supuesto es que el límite del conjunto y su conexión representan el "contorno" definido como el "conjunto más pequeño" que encierra todas las posibilidades de producción que pueden generarse a partir de las observaciones. Formalmente,

$$FDH = \{(x, y) | x \geq x_j, y \leq y_j, x, y \geq 0, j = 1, \dots, n\}$$

donde  $x_j (\geq 0), y_j (\geq 0)$  en las que se observan acciones para las DMU's en  $J = 1, \dots, n$ . En otras palabras, un número es un miembro del conjunto de posibilidades de producción si todas sus coordenadas de entrada son al menos tan grandes como corresponden en el vector de valores observados en  $x_j$  para cualquier  $J = 1, \dots, n$  y si sus coordenadas de salida no son mayores que sus correspondientes en los vectores  $y_j$  los valores observados para esta misma  $J$ .

Por lo tanto, se supone que, si un plan de producción es factible, también podemos usar un poco menos de entradas para producir un poco menos de salidas y un poco más de entradas para producir un poco más de salidas.

Teóricamente, esta propiedad puede no ser atractiva, e incluso puede parecer internamente inconsistente porque no utilizamos el cambio de escala; solo permitimos el cambio de escala de observaciones reales y no la de las observaciones formadas utilizando la libre disposición de las observaciones existentes.

Aun así, desde el punto de vista de las aplicaciones, esta propiedad tiene un atractivo considerable. Permite al usuario identificar empresas existentes específicas para imitar bajo la condición plausible de que una empresa puede redimensionarse a un grado limitado sin cambiar realmente la organización y el modo de operación.

La forma en que expresamos el modelo FDH puede parecer algo compleja junto a la simplicidad de la tecnología FDH. Esta complejidad sirve, sin embargo, para permitirnos expresar todos los modelos de una manera similar y así enfatizar sus relaciones. Por lo tanto,

queda claro a partir de las formulaciones anteriores que cuanto mayor sean las suposiciones, mayor será la tecnología estimada. Por lo tanto, podemos clasificar parcialmente las tecnologías de menor a mayor (indicadas por las flechas a continuación) de la siguiente manera:

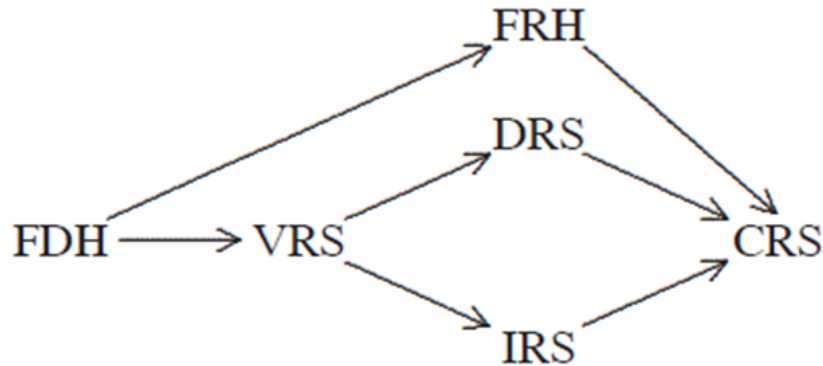


Figura 3-5 Clasificación de las tecnologías, (Bogetoft & Otto, 2011)

Por lo tanto, FDH es el conjunto de tecnología más pequeño. Variable Returns to Scale (VRS) es más grande porque hemos "llenado los agujeros". Al permitir algunas escalas, llegamos a un conjunto más grande, ya sea DRS (que amplía el conjunto para valores de entrada pequeños) o IRS, que amplía la tecnología para los valores de entrada grandes. Al permitir el cambio de escala y la convexidad, determinamos nuestra tecnología más grande, la tecnología CRS. La FRH es algo menos comparable a las otras, pero es más grande que FDH y más pequeña que CRS.

Por lo tanto, la eficiencia de FDH es siempre la más grande y la eficiencia de CRS la más pequeña para una empresa determinada. Además, la eficiencia de VRS es siempre un poco más grande que la eficiencia de DRS e IRS.

La mayoría de los estudios de la DEA que se utilizan es la noción de eficiencia de Farrell medida como la mayor contracción proporcional posible de todas las entradas o la mayor expansión proporcional posible de todas las salidas. La estimación de la tecnología combinada

y el problema de medición se pueden formular como problemas de programación lineal simple separados en los casos VRS, DRS, IRS y CRS. En los casos de FDH y FRH, es necesario utilizar una programación de enteros mixtos más avanzada, aunque la eficiencia del modelo FDH también se puede determinar utilizando técnicas de enumeración simples.

### 3.4.3 Modelo de referencia variable (Benchmarking)

Cook, Seiford y Zhu en 2004, desarrollan un conjunto de modelo de referencia variable. Consideremos que  $E^*$  represente el conjunto de puntos de referencia o las mejores prácticas identificadas por la DEA. Con base en el modelo de envolvente de CRS orientado a la entrada, tenemos, (Zhu, 2009)

$$\text{mín} \delta^{CRS}$$

sujeto a

$$\sum_{j \in E^*} \lambda_j x_{ij} \leq \delta^{CRS} x_i^{nuevo}$$

$$\sum_{j \in E^*} \lambda_j y_{rj} \geq y_r^{nuevo}$$

$$\lambda_j \geq 0, j \in E^*$$

3-12

donde una nueva observación está representada por  $DMU^{nuevo}$  con entradas nueva  $x_i^{nuevo}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) y salidas  $y_r^{nuevo}$  ( $r = 1, \dots, s$ ) el superíndice de CRS indica que la frontera de referencia compuesta por DMU's de referencia en el conjunto  $E^*$  muestra CRS.

El modelo (3-12) mide el rendimiento de la  $DMU^{nuevo}$  con respecto a las DMU de referencia en el conjunto  $E^*$  cuando las salidas se fijan en sus niveles actuales. De manera similar, en función del modelo de envolvente de CRS orientado a resultados, podemos tener un modelo

que mida el rendimiento de  $DMU^{nuevo}$  en términos de salidas cuando las entradas se fijan en sus niveles actuales.

$$\text{máx } \tau^{CRS}$$

sujeto a

$$\sum_{j \in E^*} \lambda_j x_{ij} \leq x_i^{nuevo}$$

$$\sum_{j \in E^*} \lambda_j y_{rj} \geq \tau^{CRS} y_r^{nuevo}$$

$$\lambda_j \geq 0, j \in E^*$$

3-13

### **Teorema 3-2**

$\delta^{CRS^*} = \frac{1}{\tau^{CRS^*}}$ , donde  $\tau^{CRS^*}$  es el valor óptimo para el modelo (3-13)

[prueba]: Supongamos  $\lambda_j^* (j \in E^*)$  es una solución óptima asociada con  $\delta^{CRS^*}$  en el modelo (3-13). Ahora, tenemos que  $\tau^{CRS^*} = \frac{1}{\delta^{CRS^*}}$ , y  $\lambda_j' = \lambda_j^* \delta_0^{CRS^*}$  donde  $\tau^{CRS^*}$  y  $\lambda_j'$  son un modelo óptimo (3-13). Así entonces  $\delta^{CRS^*} = \frac{1}{\tau^{CRS^*}}$

El modelo (3-12) o (3-13) produce un punto de referencia para  $DMU^{nuevo}$ . La  $i$ -ésima entrada y la cuarta salida para el punto de referencia se pueden expresar como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j \in E^*} \lambda_j^* x_{ij} \text{ (} i \text{ - éxima entrada )} \\ \sum_{j \in E^*} \lambda_j^* y_{rj} \text{ (cuarta salida )} \end{array} \right. \quad 3-14$$

Debemos tener en cuenta también que, si bien las DMU asociadas con el conjunto  $E^*$  están dadas, la referencia resultante puede ser diferente para cada nueva DMU bajo una misma evaluación. Porque para cada DMU nueva es una evaluación, (3-14) puede representar una combinación diferente de DMU asociadas con el conjunto  $E^*$ . Por lo tanto, los modelos (3-12) y (3-13) representan un escenario de referencia variable.

### **Teorema 3-3**

- (iv)  $\delta^{CRS^*} < 1$  ó  $\tau^{CRS^*} > 1$ , indica que el rendimiento de  $DMU_0^{nuevo}$  está dominado por el punto de referencia en (3-14).
- (v)  $\delta^{CRS^*} = 1$  ó  $\tau^{CRS^*} = 1$ , indica que  $DMU^{nuevo}$  alcanza el mismo nivel de rendimiento del punto de referencia en (3-14).
- (vi)  $\delta^{CRS^*} > 1$  ó  $\tau^{CRS^*} < 1$ , indica que existen ahorros de insumos o excedentes de producción en  $DMU^{nuevo}$  o en comparación con el punto de referencia en (3-14).

[prueba]: (i) y (ii) son resultados obvios en términos del concepto de eficiencia DEA. Ahora,  $\delta^{CRS^*} > 1$  indica que la  $DMU^{nuevo}$  puede aumentar sus entradas para alcanzar el punto de referencia. Esto a su vez indica que  $\delta^{CRS^*} - 1$  mide el ahorro de entrada logrado por  $DMU^{nuevo}$ . Similar,  $\tau^{CRS^*} < 1$  indica que  $DMU^{nuevo}$  puede disminuir sus salidas para alcanzar el punto de

referencia. Esto a su vez indica que  $1 - \tau^{CRS*}$  mide el excedente de producción logrado por la  $DMU^{nuevo}$ .

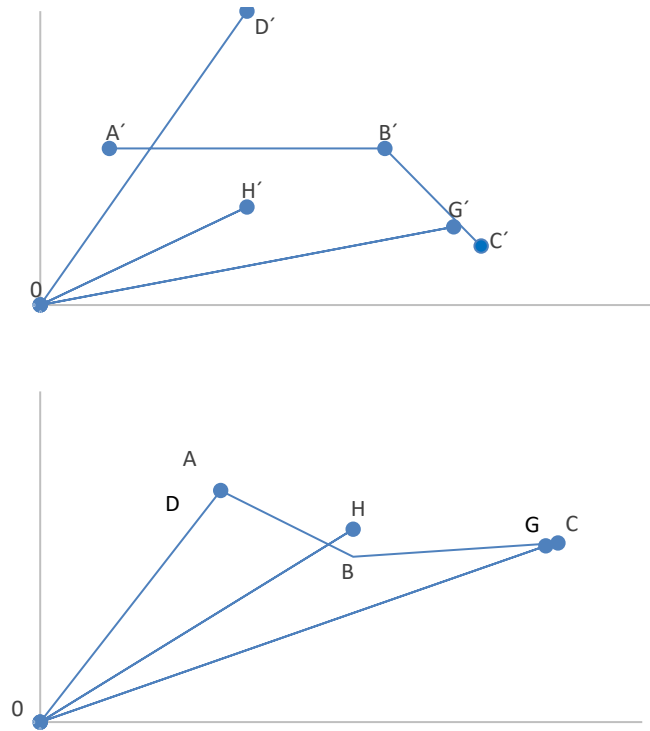


Figura 3-6 Modelo de referencia variable

La Figura (3-5) ilustra los tres casos descritos en el Teorema 3.2. ABC (A'B'C') representa la frontera de referencia de entrada (salida). D, H y G (o, D', H' y G ') representan las nuevas DMU que se compararán con ABC (o, A'B'C'). Tenemos  $\delta_D^{CRS*} > 1$  para DMU D ( $\tau_D^{CRS*} < 1$  para DMU D') lo que indica que DMU D puede aumentar sus valores de entrada por  $\delta_D^{CRS*}$  mientras produce la misma cantidad de salidas generadas por el punto de referencia (DMU D' puede disminuir sus niveles de salida usando la misma cantidad de niveles de entrada consumidos por el punto de referencia). Por lo tanto,  $\delta_D^{CRS*} > 1$  es una medida del ahorro de insumos logrado por DMU D y  $\tau_D^{CRS*} < 1$  es una medida de los excedentes de producción logrados por DMU D'.

Ahora bien, para la DMU G y DMU G', tenemos  $\delta_G^{CRS^*} = 1$  y  $\tau_{G'}^{CRS^*} = 1$  que indican que alcanzan el mismo nivel de rendimiento del índice de referencia y no existen ahorros de entrada o excedentes de salida. Para la DMU H y DMU H', tenemos  $\delta_H^{CRS^*} < 1$  y  $\tau_{H'}^{CRS^*} > 1$  lo que indica que existe ineficiencia en el rendimiento de estas dos DMU.

Debemos de tomar en cuenta que, por ejemplo, en la Figura 3-5, una combinación convexa de DMU A y DMU B se utiliza como punto de referencia para DMU D, mientras que una combinación convexa de DMU B y DMU C se usa como punto de referencia para DMU G. Por lo tanto, los modelos (3-9) y (3-10) se denominan modelos de referencia variable.

A partir del Teorema 3.3, podemos definir  $\delta^{CRS^*} - 1$  ó  $1 - \tau^{CRS^*}$  como la brecha de rendimiento entre  $DMU^{nuevo}$  y el punto de referencia. Sobre la base  $\delta^{CRS^*}$  o  $\tau^{CRS^*}$ , se puede obtener una clasificación del rendimiento de la evaluación comparativa. Es probable que se permita la ineficiencia de escala en la evaluación comparativa.

Por lo tanto, modificamos los modelos (3-12) y (3-13) para incorporar la ineficiencia de escala asumiendo VRS.

$$\text{mín} \delta^{VRS}$$

sujeto a

$$\sum_{j \in E^*} \lambda_j x_{ij} \leq \delta^{VRS} x_i^{nuevo}$$

$$\sum_{j \in E^*} \lambda_j y_{rj} \geq y_r^{nuevo}$$

$$\sum_{j \in E^*} \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0, j \in E^*$$

3-15



Ahora para máximo en VRS

$$\text{máx } \tau^{VRS}$$

sujeto a

$$\sum_{j \in E^*} \lambda_j x_{ij} \leq x_i^{\text{nuevo}}$$

$$\sum_{j \in E^*} \lambda_j y_{rj} \geq \tau^{VRS} y_r^{\text{nuevo}}$$

$$\sum_{j \in E^*} \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0, j \in E^*$$

3-16

De manera similar al Teorema 3.3, tenemos

#### **Teorema 3-4**

- (i)  $\delta^{VRS^*} < 1$  ó  $\tau^{VRS^*} > 1$ , indica que el rendimiento de  $DMU^{\text{nuevo}}$  está dominado por el punto de referencia en (3-14).
- (ii)  $\delta^{VRS^*} = 1$  ó  $\tau^{VRS^*} = 1$ , indica que  $DMU^{\text{nuevo}}$  alcanza el mismo nivel de rendimiento del punto de referencia en (3-14).
- (iii)  $\delta^{VRS^*} > 1$  ó  $\tau^{VRS^*} < 1$ , indica que existen ahorros de insumos o excedentes de producción en  $DMU^{\text{nuevo}}$  o en comparación con el punto de referencia en (3-14).

Debemos tener en cuenta que el modelo (3-13) siempre es factible, y el modelo (3-12) es inviable solo si hay ciertos patrones de datos presentes tales como cero (Zhu, 2009).

Por lo tanto, si asumimos que todos los datos son positivos, (3-12) siempre es factible. Sin embargo, a diferencia de los modelos (3.12) y (3.13), los modelos (3-15) y (3-16) pueden ser inviables

### **Teorema 3-5**

- (i) Si el modelo (3-15) no es factible, entonces el vector de salida de  $DMU^{nuevo}$  domina el vector de salida del índice de referencia en (3-14).
- (ii) Si el modelo (3-16) no es factible, entonces el vector de entrada de  $DMU^{nuevo}$  domina el vector de entrada del índice de referencia en (3-14).

Si cambiamos la restricción  $\sum_{j \in E^*} \lambda_j = 1$  a  $\sum_{j \in E^*} \lambda_j \leq 1$  y  $\sum_{j \in E^*} \lambda_j \geq 1$  entonces obtenemos los modelos de referencia variable IRS y DRS, respectivamente. La inviabilidad puede estar asociada con estos dos tipos de fronteras RTS.

#### **3.4.4 Modelos de medición de la eficiencia basados en holguras**

Para entender lo que se quiere decir con eficiencia en términos del análisis de envolvente de datos, debemos saber que existen dos tipos de modelos en DEA: radial y no radial. Los modelos radiales están representados por el modelo CCR (Charnes-Cooper-Rhodes). Básicamente, se ocupan de los cambios proporcionales de las entradas o salidas. Como tal, la puntuación de CCR refleja la tasa de reducción (expansión) de entrada (salida) maximizando la proporcionalidad en las entradas, la cual es común en este modelo (W. Cooper, M. Seiford, & Zhu, 2011). Sin embargo, en las empresas del mundo real, no todas las entradas (salidas) se comportan de forma proporcional.

Por ejemplo, si empleamos mano de obra, materiales y capital como insumos, algunos de ellos son sustitutivos y no cambian proporcionalmente; otro de los inconvenientes en los modelos radiales es el descuido de la holgura en el resultado del valor de la eficiencia. En muchos casos, encontramos una gran cantidad de holguras no radiales restantes.

Por lo tanto, si estas holguras tienen un papel importante en la evaluación de la eficiencia a nivel directivo, por lo que en el enfoque radial se pueden inducir al error en la decisión cuando utilizamos el puntaje de eficiencia como el único índice para evaluar el desempeño de las DMU.

Por el contrario, los modelos de Medición de la Eficiencia Basados en Holguras no radiales (“Slacks-Based Measure, SBM”, por sus siglas en inglés) dejan de lado el supuesto de cambios proporcionales en los insumos y productos, y se ocupan directamente de las holguras. Esto puede descartar proporciones variables de entradas y salidas originales. Los modelos SBM están diseñados para cumplir con las siguientes dos condiciones.

1. Unidades invariantes: la medida es invariante con respecto a las unidades de datos.
2. Monótona: la medida debe ser monótona disminuyendo en cada holgura de entrada y salida.

#### 3.4.4.1 Modelos SBM (Slacks-Based Measure)

A continuación, nos introduciremos en los modelos SBM para los casos de entrada, salida y que no están orientados bajo el supuesto de rendimientos constantes; este modelo SBM fue introducido por Tone en 2001, el cual tiene tres variaciones, es decir, entradas, salidas y no orientados, el modelo no orientado indica tanto orientado a la entrada como a la salida.

Para un conjunto de DMU sea  $J = \{1, 2, \dots, n\}$ , cada DME tiene  $m$  entradas y  $s$  salidas. Denotamos los vectores de entradas y salidas para  $DMU_j$  de  $x_j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj})^T$  y  $y_j = (y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{sj})^T$ , respectivamente. Esto lo podemos definir como entradas y salidas de matrices por,

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^{mn} \text{ y } Y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in R^{sn} \quad 3-17$$

Debemos asumir que los valores son positivos, esto es;  $x > 0$  y  $y > 0$ .

### 3.4.4.2 Posibilidad de producción

El conjunto de posibilidades de producción se define utilizando la combinación no negativa de las DMU en el conjunto J como:

$$P = \{(x, y) | x \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j, 0 \leq y \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j, \lambda \geq 0\} \quad 3-18$$

$\lambda = (\lambda_{1j}, \lambda_{2j}, \dots, \lambda_n)^T$  se llama vector de intensidad.

Las desigualdades en (3-18) pueden transformarse en igualdad introduciendo holguras de la siguiente manera:

$$x = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j + s^-,$$

$$y = \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j - s^+, \quad 3-19$$

$$s^- \geq 0, \quad s^+ \geq 0,$$

donde  $s^- = (s_1^-, s_2^-, \dots, s_m^-)^T \in R^m$  y  $s^+ = (s_1^+, s_2^+, \dots, s_s^+)^T \in R^s$ , ambas respectivamente llamadas holgura de entrada y holgura de salida.

### 3.4.4.3 SBM orientado a la entrada

Para evaluar la eficiencia relativa debemos considerar que,  $DMU_o = (x_o, y_o)$ , la podemos resolver con la Programación Lineal (PL), este planteamiento es representado por  $n$  tiempos desde  $o = (1, \dots, n)$ .

Considere el [SBM-I-C] a la entrada bajo suposición de retornos a escala constantes (W. Cooper, M. Seiford, & Zhu, 2011)

$$\rho_I^* = \min_{\lambda, s^-, s^+} 1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{s_i^-}{x_{io}},$$

sujeto a

$$x_{io} = \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j + s_i^- \quad (i = 1, \dots, m),$$

$$y_{ro} = \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j - s_r^+ \quad (r = 1, \dots, s),$$

$$\lambda_j \geq 0 (\forall j), \quad s_i^- \geq 0 (\forall i), \quad s_r^+ \geq 0 (\forall r). \quad 3-20$$

$\rho_I^*$  se llama eficiencia de entrada de SBM

*Proposición 3-1:  $\rho_I^*$  es independiente de las unidades en las que se miden las entradas y salidas.*

Asumamos que una solución óptima de [SBM-I-C] sea  $(\lambda^*, s^{-*}, s^{+*})$ .

*Definición 3-4: una  $DMU_o = (x_o, y_o)$  se define como Eficiencia de Entrada de SBM, si se mantiene como  $\rho_I^* = 1$ .*

Esto significa  $s^{-*} = \mathbf{0}$ , es decir, todas las holguras de entrada son cero. Sin embargo, las holguras de salida pueden ser diferentes de cero.

*Definición 3-5: utilizando una solución óptima para  $(\lambda^*, s^{-*}, s^{+*})$ . se define como una proyección de una  $DMU_o = (x_o, y_o)$  por*

$$(\bar{x}_o, \bar{y}_o) = (x_o - s^{-*}, y_o + s^{+*}) \quad 3-21$$

---

*Proposición 3-2: la DMU proyectada tiene Eficiencia de Entrada SBM*

*Definición 3-6: Definimos un conjunto de referencia para una  $DMU_o = (x_o, y_o)$  tal como*

$$R = \{j | \lambda_j^* > 0, j \in J\}. \quad 3-22$$

Por lo tanto,  $(x_o, y_o)$  se puede expresar de la siguiente manera:

$$x_{io} = \sum_{j \in R} x_{ij} \lambda_j^* + s_i^{-*} \quad i = (1, \dots, m),$$

$$y_{io} = \sum_{j \in R} y_{rj} \lambda_j^* - s_r^{+*} \quad r = (1, \dots, s), \quad 3-23$$

*Proposición 3-3: la DMU en el conjunto de referencia de los  $R$  en  $(x_o, y_o)$ , cumple con la Eficiencia de Entrada SBM*

*Proposición 3-4: el valor de la eficiencia de entrada de la SBM no es mayor que el valor de la eficiencia de CCR.*

#### 3.4.4.4 SBM orientado a la salida

La SBM enfocada a la eficiencia de salida en función de la  $DMU_o = (x_o, y_o)$ , la cual está definida por [SBM-O-C]

$$\frac{1}{\rho_o^*} = \max_{\lambda, s^-, s^+} 1 + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{s_r^+}{y_{ro}}$$

sujeto a

$$x_{io} = \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j + s_i^- \quad (i = 1, \dots, m),$$

$$y_{ro} = \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j - s_r^+ \quad (r = 1, \dots, s),$$

$$\lambda_j \geq 0 (\forall j), \quad s_i^- \geq 0 (\forall i), \quad s_r^+ \geq 0 (\forall r). \quad 3-24$$

Asumamos que una solución óptima de [SBM-O-C] sea  $(\lambda^*, s^{-*}, s^{+*})$ .

*Definición 3-7: una DMU<sub>o</sub> = (x<sub>0</sub>, y<sub>0</sub>) se define como Eficiencia de Salida de SBM, si se mantiene como  $\rho_o^* = 1$ .*

Esto significa  $s^{+*} = 0$ , es decir, todas las holguras de salida son cero. Sin embargo, las holguras de entrada pueden ser diferentes de cero.

*Definición 3-8: utilizando una solución óptima para  $(\lambda^*, s^{-*}, s^{+*})$ . Podemos definir como una proyección de una DMU<sub>o</sub> = (x<sub>0</sub>, y<sub>0</sub>) por*

$$(\bar{x}_o, \bar{y}_o) = (x_o - s^{-*}, y_o + s^{+*}) \quad 3-25$$

*Proposición 3-5: la DMU proyectada tiene Eficiencia de Salida SBM*

#### 3.4.4.5 SBM No Orientado

La eficiencia  $\rho_{I_o}^*$  de las SBM no orientadas o ambas orientadas está definida por [SBM-C]

$$\rho_{I_o}^* = \frac{\min_{\lambda, s^-, s^+} 1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{s_i^-}{x_{io}}}{\min_{\lambda, s^-, s^+} 1 + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{s_r^+}{y_{ro}}}$$

sujeto a

$$x_{io} = \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j + s_i^- \quad (i = 1, \dots, m),$$

$$y_{ro} = \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j - s_r^+ \quad (r = 1, \dots, s),$$

$$\lambda_j \geq 0 (\forall j), \quad s_i^- \geq 0 (\forall i), \quad s_r^+ \geq 0 (\forall r). \quad 3-26$$

*Definición 3-9 (SBM-Eficiente): una DMU<sub>o</sub> = (x<sub>o</sub>, y<sub>o</sub>) se define como Eficiencia de SBM, si se mantiene como  $\rho_{I_o}^* = 1$ .*

Esto significa  $s^{+*} = \mathbf{0}$  y  $s^{-*} = \mathbf{0}$ , esto es, todas las holguras de salida son cero.

Utilizando la transformación Charnes-Cooper la [SBM-C] se puede transformar en un programa lineal, tal como se presenta a continuación (W. Cooper, M. Seiford, & Zhu, 2011)

[SBM-C-LP]

$$\tau^* = \min_{t, \lambda, s^-, s^+} t - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{s_i^-}{x_{io}},$$

sujeto a

$$1 = t + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{s_r^+}{y_{ro}},$$

$$tx_{io} = \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j - s_i^- \quad (i = 1, \dots, m),$$



$$ty_{ro} = \sum_{j=1}^n y_{rj} \Lambda_j - s_r^+ \quad (r = 1, \dots, s),$$

$$\Lambda_j \geq 0(\forall j), \quad s_i^- \geq 0(\forall i), \quad s_r^+ \geq 0(\forall r), \quad t > 0. \quad 3-27$$

Para ejemplificar lo antes revisado, considere los siguientes datos de la tabla:

Tabla 3-1 Ejemplo 1, para una jerarquización DMU

<i>DMU</i>	<i>(I)x</i> <sub>1</sub>	<i>(I)x</i> <sub>2</sub>	<i>(O)y</i> <sub>1</sub>	<i>(O)y</i> <sub>2</sub>
<b>A</b>	4	3	1	2
<b>B</b>	14	6	2	6
<b>C</b>	24	3	3	12
<b>D</b>	20	2	2	6
<b>E</b>	48	4	4	16
<b>F</b>	50	7.5	5	30

Tabla 3-2 Valores y rangos de eficiencia para el ejemplo 1

<b>DMU</b>	<b>CCR-I</b>		<b>SBM-I-C</b>		<b>SBM-O-C</b>		<b>SBM-C</b>	
	Evaluación	Posición	Evaluación	Posición	Evaluación	Posición	Evaluación	Posición
<b>A</b>	1	1	1	1	1	1	1	1
<b>B</b>	0.8085106	6	0.75	6	0.8067227	6	0.6923077	6
<b>C</b>	1	1	1	1	1	1	1	1
<b>D</b>	1	1	0.9	4	0.8571429	5	0.7714286	5
<b>E</b>	1	1	0.8333333	5	1	1	0.8333333	4
<b>F</b>	1	1	1	1	1	1	1	1

Asumamos que la solución óptima para  $(\tau^*, t^*, \lambda^*, s^{-*}, s^{+*})$ . Entonces tenemos una solución óptima para [SBM-CLP], la cual está definida por

$$\rho^* = \tau, \quad \lambda^* = \frac{\lambda^*}{t^*}, \quad s^{-*} = \frac{s^{-*}}{t^*}, \quad s^{+*} = \frac{s^{+*}}{t^*}. \quad \mathbf{3-28}$$

En el ejemplo antes mencionado en la tabla 3-1 y 3-2, se muestran 6 DMU's, de las cuales presentan 2 entradas  $(x_1, x_2)$  y 2 salidas  $(x_1, x_2)$  donde (I) y (O) indica la entrada y la salida respectivamente.

Podemos observar que la tabla 3.2, se presentan los resultados de los modelos SBM junto con el modelo CCR orientado a la Entrada (I), el cual estaremos describiendo a continuación.

[CCR-I]

$$\theta^* = \min_{\theta, \lambda, s^-, s^+} \theta,$$

sujeto a

$$\theta x_{io} = \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j - s_i^- \quad (i = 1, \dots, m),$$

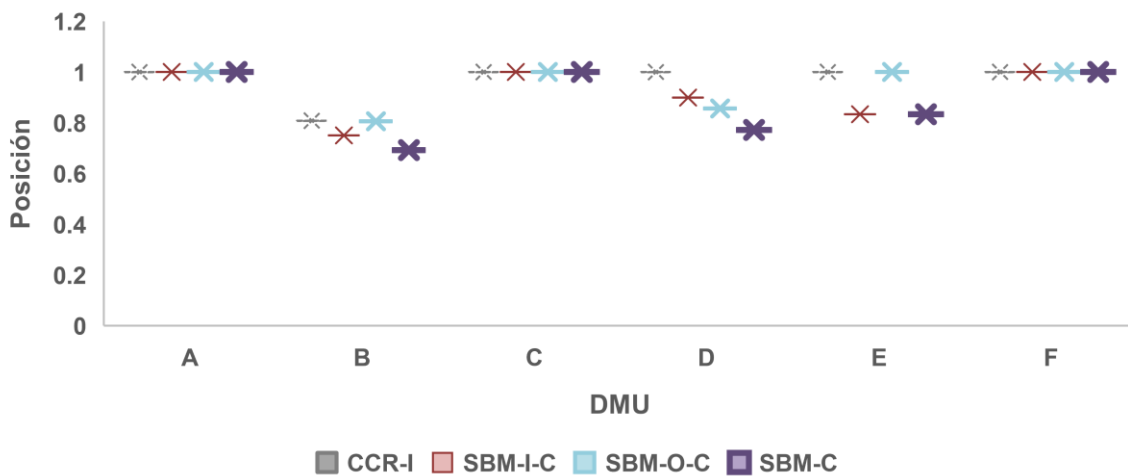


Tabla 3-3 Valores y rangos de eficiencia para el ejemplo 1

DMU	CCR-I					SBM-I-C				
	$\theta^*$	$S_1^-*$	$S_2^-*$	$S_1^{+*}$	$S_2^{+*}$	$\rho_i^*$	$S_1^-*$	$S_2^-*$	$S_1^{+*}$	$S_2^{+*}$
A	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
B	0.8085106	0	0	0	0	0.75	0	3	0	1
C	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
D	1	4	0	0	2	0.9	4	0	0	2
E	1	16	0	0	0	0.83333333	16	0	0	0
F	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0

$$y_{ro} = \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j - s_r^+ \quad (r = 1, \dots, s),$$

$$\lambda_j \geq 0(\forall j), \quad s_i^- \geq 0(\forall i), \quad s_r^+ \geq 0(\forall r). \quad 3-29$$

Figura 3-7. Comparativa de los modelos propuestos para cada DMU.

En el modelo CCR-I se encontraron cinco DMU's eficientes, de las seis presentadas. Esto se debe a la naturaleza radial del modelo, aunque se observan holguras en algunas de ellas. Sin embargo, los modelos de SBM tratan directamente con holguras y se encontró que las DMU's "B", "D" y "E" son ineficientes. En el modelo SBM-O-C, la DMU "E" se considera eficiente, ya que esta DMU no tiene holguras de salida, tal como lo podemos observar en la posición de la tabla 3-2.

En la tabla 3-3, se muestran las holguras óptimas para los modelos CCR-I y SM-I-C. En estos modelos podemos observar que la DMU "D" y "E" tienen una holgura positiva a la entrada y a

la salida. El modelo CCR-I, no los toma en cuenta en la medida de la eficiencia. Sin embargo, el modelo SBM-I-C considera las holguras de entrada en la medición de la eficiencia, y las DMU "B", "D" y "E" se consideran ineficientes.

### 3.4.5 El programa dual del modelo SBM

El programa dual de se puede expresar de la siguiente manera, con las variables duales  $v \in R^m$  y  $u \in R^s$ :

[SBM-C-LP-dual]

$$\text{máx}_{\xi, v, u} \xi,$$

Sujeto a

$$\xi + vx_o - uy_o = 1,$$

$$-vX + uY \leq 0,$$

$$v \geq \frac{1}{m} \left[ \frac{1}{x_o} \right],$$

$$u \geq \frac{\xi}{s} \left[ \frac{1}{y_o} \right], \quad 3-30$$

donde la notación  $1/x_o$  designa el vector  $(1/x_{1o}, 1/x_{2o}, \dots, 1/x_{mo})$ . Al eliminar  $\xi$  del programa anterior, tenemos el siguiente programa equivalente.

$$\text{máx}_{v, u} uy_o - vx_o,$$

Sujeto a

$$\xi + vx_o - uy_o = 1,$$

$$\begin{aligned}
 -vX + uY &\leq 0, \\
 v &\geq \frac{1}{m} \left[ \frac{1}{x_o} \right], \\
 u &\geq \frac{1-vx_o+uy_o}{s} \left[ \frac{1}{y_o} \right].
 \end{aligned}
 \tag{3-31}$$

Las variables duales  $\mathbf{v} \in R^m$  y  $\mathbf{u} \in R^s$  se pueden ser interpretadas como los costos y precios virtuales de los elementos de entrada y salida, respectivamente. El programa dual tiene como objetivo, encontrar los costos y precios virtuales óptimos para la  $DMU_o = (x_o, y_o)$  principalmente para que el beneficio  $uy_j - vx_j$  no rebase al cero para ninguna DMU, incluido  $(x_o, y_o)$ , y maximizar el beneficio  $uy_o - vx_o$  para el objetivo  $DMU_o = (x_o, y_o)$  aparentemente, el beneficio óptimo en el mejor de los casos es cero y por lo tanto  $\xi^* = 1$ , para las DMU's eficientes SBM-C.

### 3.4.6 Extensiones del modelo SBM

En esta sección, se busca ampliar lo revisado del modelo SBM y llevarlo al entorno VRS en donde estaremos introduciéndonos al modelo SBM ponderado y al super SBM.

#### 3.4.6.1 Modelo de retorno a escala variable

Todos los modelos se pueden ajustar al entorno VRS añadiendo la restricción el  $e\lambda = \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ , donde  $\mathbf{e}$  indica un vector de fila en el que todos los elementos son iguales a uno. Por lo tanto, el conjunto de posibilidades de producción se modifica a:

$$P_{VRS} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid x_i \geq \sum_{j=1}^n x_{ij}(\forall i), 0 \leq y_r \leq \sum_{j=1}^n y_{rj}(\forall r), e\lambda = 1, e\lambda \geq 0\}.
 \tag{3-32}$$

Por ejemplo, la SBM orientado a entrada bajo el entorno VRS se puede definir de la siguiente manera:

---

[SBM-I-V] (SBM orientada a entrada bajo el supuesto de una de retorno a escala variable)

$$\rho_i^* = \min_{\lambda, s^-, s^+} 1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{s_i^-}{x_{io}},$$

sujeto a

$$x_{io} = \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j + s_i^- \quad (i = 1, \dots, m),$$

$$y_{ro} = \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j - s_r^+ \quad (r = 1, \dots, s),$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1,$$

$$\lambda_j \geq 0 (\forall j), \quad s_i^- \geq 0 (\forall i), \quad s_r^+ \geq 0 (\forall r).$$

3-33

Del mismo modo, podemos definir modelos [SBM-O-V] y [SBM-V].

### 3.4.6.2 Modelo SBM ponderado

Podemos asignar el peso a los juegos de entrada y de salida en la función objetivo de la ecuación (3-26), *tal como se presenta a continuación:*

[SBM-I-V-Ponderado]

$$\rho_{io}^* = \min_{\lambda, s^-, s^+} \frac{1 - (1/m) \sum_{i=1}^m (w_i^- s_i^- / x_{io})}{1 + (1/s) \sum_{r=1}^s (w_r^- s_r^- / y_{ro})},$$

sujeto a

$$x_{io} = \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j + s_i^- \quad (i = 1, \dots, m),$$

$$y_{ro} = \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j - s_r^+ \quad (r = 1, \dots, s), \quad 3-34$$

$$\lambda_j \geq 0 (\forall j), \quad s_i^- \geq 0 (\forall i), \quad s_r^+ \geq 0 (\forall r).$$

Con  $\sum_{i=1}^m w_i^- = m$  y  $\sum_{i=1}^m w_i^+ = s$ . Las ponderaciones deben reflejar los propósitos de los responsables de la toma de decisiones. Por lo que podemos definir a los modelos SBM-ponderados orientados a la entrada (salida) al pasar por alto el denominador (numerador) de la función objetivo en (3-34).

### 3.4.7 Modelo Super-SBM

Para clasificar las DMU eficientes en SBM, podemos usar los modelos Super-SBM.

Suponer que  $DMU_o = (x_o, y_o)$  es una SBM eficiente; si y sólo si,  $\delta^* = 1, s^- = 0$ , y  $s^{+*} = 0$ .

En la que podemos definir la supereficiencia como  $(x_o, y_o)$  el valor óptimo de la función objetivo  $\delta^*$  para el siguiente programa:

[Super-SBM-C]

$$\delta^* = \min_{\bar{x}, \bar{y}, \lambda} \frac{(1/m) \sum_{i=1}^m (\bar{x}/x_{io})}{(1/s) \sum_{r=1}^s (\bar{y}/y_{ro})},$$

sujeto a

$$\bar{x}_i \geq \sum_{j=1, j \neq 1}^n x_{ij} \lambda_j \quad (i = 1, \dots, m),$$

$$\bar{y}_r \leq \sum_{j=1, j \neq 1}^n y_{rj} \lambda_j \quad (r = 1, \dots, s),$$

$$\bar{\mathbf{x}} \geq x_o, \quad \mathbf{y} \leq y_o,$$

$$\bar{\mathbf{y}} \geq x_o, \quad \boldsymbol{\lambda} \leq 0.$$

3-35

Podemos interpretar este índice de la siguiente manera. El numerador es una distancia  $l_1$  ponderada de  $x_o$  a  $\bar{x}(\geq x_o)$ , y, por lo tanto, expresa una tasa de expansión promedio de  $x_o$  a  $\bar{x}(\geq x_o)$ . El denominador es una distancia  $l_1$  ponderada de  $y_o$  a  $\bar{y}(\geq y_o)$ , y, por lo tanto, expresa una tasa de reducción promedio de  $y_o$  a  $\bar{y}(\geq y_o)$ . Cuanto menor es el denominador, más lejos está  $y_o$  en relación con  $\bar{y}$ . La inversa se puede interpretar como un índice de la distancia de  $y_o$  a  $\bar{y}$ . Por lo tanto, la función objetivo en (3.35) es un producto de dos índices ambos índices son adimensionales:

1. La distancia en el espacio de entrada
2. El espacio de salida.

Este programa fraccionario se puede resolver transformándolo en un programa lineal (COOPER, SEIFORD, & TONE, 2006). Tratando con el numerador o el denominador de la función objetivo, tenemos super-SBM orientado a entrada o salida de la siguiente manera:

[Super-SBM-I-C]

$$\delta_l^* = \min_{\bar{x}, \bar{y}, \lambda} 1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{\bar{x}_i}{x_{io}},$$

sujeto a

$$\bar{x}_i \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n x_{ij} \lambda_j \quad (i = 1, \dots, m),$$

$$\bar{y}_r \leq \sum_{j=1, j \neq r}^n y_{rj} \lambda_j \quad (r = 1, \dots, s),$$

$$\bar{x} \geq x_o, \quad \mathbf{y} \leq y_o,$$

$$\bar{y} \geq x_o, \quad \boldsymbol{\lambda} \leq 0.$$

3-36



Ahora bien, de manera similar, podemos desarrollar el modelo de supereficiencia orientado a resultados de la siguiente manera:

[Super-SBM-O-C]

$$\delta^* = \min_{\bar{x}, \bar{y}, \lambda} \frac{1}{(1/s) \sum_{r=1}^s (\bar{y}/y_{ro})},$$

sujeto a

$$\bar{x}_i \geq \sum_{j=1, j \neq 1}^n x_{ij} \lambda_j \quad (i = 1, \dots, m),$$

$$\bar{y}_r \leq \sum_{j=1, j \neq 1}^n y_{rj} \lambda_j \quad (r = 1, \dots, s),$$

$$\bar{x} \geq x_o, \quad \mathbf{y} \leq y_o,$$

$$\bar{\mathbf{y}} \geq x_o, \quad \boldsymbol{\lambda} \leq 0.$$

3-37

TABLA 3-4 Modelos Super-SBM

DMU	Super-SBM-C		Super-SBM-I-C		Super-SBM-O-C	
	Evaluación	Posición	Evaluación	Posición	Evaluación	Posición
<b>A</b>	1.3	1	1.375	1	1.3333333	1
<b>B</b>	0.6923077	6	0.75	6	0.8067227	6
<b>C</b>	1.1428571	2	1.2083333	2	1.1428571	2
<b>D</b>	0.7714286	5	0.9	4	0.8571429	5
<b>E</b>	0.8333333	4	0.8333333	5	1	4
<b>F</b>	1.0909091	3	1.1	3	1.0909091	3

La Tabla 3.4 muestra los puntajes de supereficiencia para las DMU's eficientes A, C y F del ejemplo 1. En cualquier modelo, DMU A se clasifica como el mejor seguido de C (segundo) y F (tercero).

### 3.4.8 Tratamiento de datos no positivos en los modelos de SBM

Hasta ahora, hemos tratado con conjuntos de datos positivos (X, Y). Sin embargo, ocasionalmente, encontramos datos no positivos. En muchos modelos DEA, es un tema crucial cómo tratar con datos negativos en la evaluación de la eficiencia. Especialmente, en los modelos de SBM, los datos no positivos afectan el esquema de manera crítica, desde los términos  $s_i^-/x_{io}$  y/o  $s_r^+/y_{ro}$  que pierden su significado original en términos de holgura. Si  $x_{io} \leq 0$ , entonces podemos reemplazar  $x_{io}$  por un número más pequeño y con ello despreciar el término  $s_i^-/x_{io}$  en el objetivo de la función.

Por la naturaleza del análisis los insumos deberán ser positivos, ya que no tiene sentido que los insumos negativos produzcan resultados positivos. Sin embargo, los datos negativos de salida deberían tener su papel correspondiente en la medición de la eficiencia. Como resultado, una gran pérdida es peor que uno pequeño.

Como se demuestra en (3-26), el modelo SBM-C tiene la función objetivo como se describe a continuación (W. Cooper, M. Seiford, & Zhu, 2011).

$$\text{mín } \rho = \frac{1 - (1/m) \sum_{i=1}^m s_i^-/x_{io}}{1 + (1/s) \sum_{r=1}^s s_r^+/y_{ro}}. \quad 3-38$$

ahora supongamos  $y_{ro} \leq 0$  donde  $\bar{y}_r^+$  y  $\underline{y}_r^+$  es definido por:

$$\bar{y}_r^+ = \max_{j=1, \dots, n} \{y_{rj} \mid y_{rj} > 0\},$$

$$\underline{y}_r^+ = \underset{j=1, \dots, n}{\text{máx}} \{y_{rj} | y_{rj} > 0\}. \quad 3-39$$

Si la salida  $r$  no tiene elementos positivos, entonces se define de la siguiente manera:

$$\bar{y}_r^+ = \underline{y}_r^+ = 1$$

reemplazamos

$$s_r^+ / y_{r0}$$

en la función objetivo de la siguiente manera, se debe considerar que nunca cambiamos los valores de  $y_{r0}$  en las restricciones.

1. Si  $\bar{y}_r^+ > \underline{y}_r^+$ , reemplazamos por el término siguiente

$$\frac{s_r^+}{(\underline{y}_r^+ (\bar{y}_r^+ - \underline{y}_r^+) / \bar{y}_r^+ - y_{r0})} = \quad 3-40$$

2. Si  $\bar{y}_r^+ = \underline{y}_r^+$ , reemplazamos por el término siguiente

$$\frac{s_r^+}{((\underline{y}_r^+)^2 / B (\bar{y}_r^+ - y_{r0}))} = \quad 3-41$$

donde  $B$  es un gran número positivo, por ejemplo,  $B = 1,000$ .

En cualquier caso, el denominador es positivo y estrictamente menor que  $\underline{y}_r^+$ . Además, está en proporción inversa a la distancia  $\bar{y}_r^+ - y_{r0}$ . Por lo tanto, este esquema tiene en cuenta la magnitud de la salida no positiva de manera positiva. El puntaje obtenido es unidades invariantes, es decir, es independiente de las unidades de medida utilizadas.

En la tabla 3.5 se muestra un ejemplo de una DMU "D", "E", "F" y "G" tienen una salida no positiva, es decir negativa. La puntuación (derecha) refleja su magnitud. En este caso, tenemos:

$$\bar{y}^+ = 3, \quad \underline{y}^+ = 1.$$

TABLA 3-5 Resultados negativos en la salida de datos

<b>DMU</b>	<b>(I)x</b>	<b>(O)x</b>	<b>Calificación</b>	<b>Posición</b>
<b>A</b>	1	3	1	1
<b>B</b>	1	2	0.6666667	2
<b>C</b>	1	1	0.3333333	3
<b>D</b>	1	0	0.1818182	4
<b>E</b>	1	-1	0.1111111	5
<b>F</b>	1	-2	0.0740741	6
<b>G</b>	1	-3	5.26E-02	7

Por lo tanto, los denominadores de la ecuación (3.24) para las DMU con valor de salida no positivo son los siguientes:

$$D = \frac{1 \times 2}{3 - 0} = 0.6666, \quad E = \frac{1 \times 2}{3 - (-1)} = 0.5, \quad F = \frac{1 \times 2}{3 - (-2)} = 0.4, \quad G = \frac{1 \times 2}{3 - (-3)} = 0.3333.$$

Las holguras de salida óptimas (contra A) son, respectivamente,

$$S_D^{+*} = 3, \quad S_E^{+*} = 4, \quad S_F^{+*} = 5, \quad S_G^{+*} = 6.$$

Utilizando estos valores obtenemos los resultados de la tabla 3.5, para el modelo SBM-V. La DMU A, es la referencia de todas las DMU's.

---

## 4 APLICACIÓN DEL MODELO Y RESULTADOS

---

En este apartado se realiza la comparación de los resultados obtenidos utilizando el análisis DEA vs la jerarquización que tradicionalmente se realiza en el área de integración del portafolio. Es importante mencionar que las unidades que se estarán utilizando en el análisis y la jerarquización, son del siguiente orden: 1-DMU, 2-DMU, ...,30-DMU. Asimismo, en el análisis del portafolio mostraremos la forma tradicional del análisis para la caracterización del portafolio de las asignaciones petroleras

### 4.1 APLICACIÓN DEL MODELO DEA

A algunos autores les gusta conceptualizar el modelo de la DEA como un modelo de análisis de actividad con referencia a Koopmanns, el primer Premio Nobel de Economía (1975). Para las personas capacitadas en programación lineal, esto tiene mucho sentido porque el análisis de actividad es un enfoque de modelado muy poderoso que se ha utilizado desde la década de 1950 para modelar problemas reales utilizando problemas de LP.

En un modelo de análisis de actividad, básicamente comenzamos por describir las diferentes actividades en una organización: por ejemplo, las diferentes máquinas o procesos. Estos procesos están representados por vectores de columna que definen cómo las entradas se transforman en salidas. En un modelo para una granja, por ejemplo, cada vaca podría ser una actividad que transforme diferentes tipos de insumos: alimentos, mano de obra y capital en diferentes tipos de producción: leche, terneros, estiércol, etc. Además, podríamos incluir actividades que representen diferentes cultivos. La pregunta que se hace en el análisis de actividad es, qué tan intensamente usar las diferentes actividades: por ejemplo, cómo dividir los alimentos entre las vacas y cómo dividir el trabajo entre los animales y los cultivos. Las restricciones en este caso, por lo tanto, reflejarán los recursos disponibles: la cantidad de alimentos disponibles y el reparto de los diferentes recursos. (Bogetoft & Otto, 2011)

Está claro que los problemas de la DEA son similares a los modelos clásicos de investigación de operaciones. Simplemente utilizamos combinaciones de entrada-salida realizadas como

diferentes columnas en el problema del PL, y la cuestión de la intensidad de la actividad se convierte en una cuestión de encontrar el peso  $\lambda$ . Por lo tanto, los modelos DEA son esencialmente modelos de análisis de actividades con la característica adicional, de que la información sobre las actividades se proporciona a través de observaciones reales en lugar de descripciones de expertos en el tema en cuestión sobre lo que se podría hacerse.

Esto también apunta a otra característica novedosa de la DEA. En DEA, usamos PL para evaluar el pasado, mientras que OR tradicional usa PL para planificar el futuro.

Esta analogía también puede guiar la combinación de DEA con otras técnicas. Si podemos hacer que los ingenieros o los especialistas en organizaciones descubran nuevas formas de transformar los recursos en servicios, en principio podemos incluirlos como columnas en el problema de la DEA de la misma manera que hacemos las combinaciones de entrada-salida que desarrollamos. No solo contra las mejores prácticas utilizadas (Benchmark), sino también contra posibles mejoras en las mejores prácticas (Jaime & Luque Calvo, 2016).

#### 4.1.1 Técnicas de eficiencia.

Cuando se comparan las combinaciones de entrada y salida para varias unidades tal como se observa en la figura siguiente:

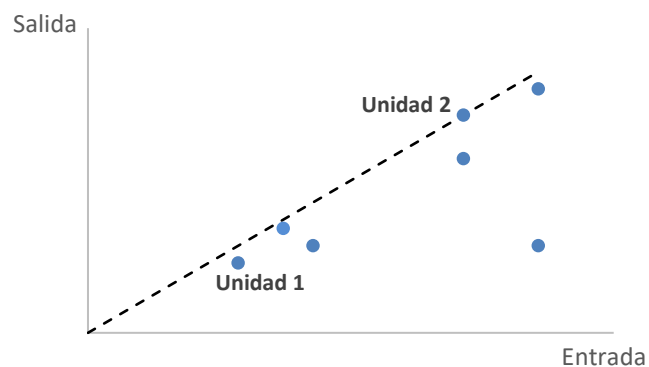


Figura 4-1 Combinaciones entrada-salida para varias empresas (unidades).

---

Asumimos implícitamente que podemos escalar arbitrariamente la entrada y la salida hacia arriba y hacia abajo, es decir, asumimos rendimientos constantes a escala. Ahora relajaremos esta suposición. Buscaremos una definición alternativa de eficiencia  $E$  con la misma interpretación, pero sin este supuesto de escalado.

Definiremos la eficiencia de entrada para una combinación de entrada-salida  $(x, y)$  como el factor  $E$  más pequeño por el cual podemos multiplicar la entrada  $x$  para que  $Ex$  aún pueda producir la salida  $y$ . Si tuviéramos que utilizar una cantidad de entrada más pequeña que  $Ex$ , sería imposible producir  $y$ . Por lo tanto

$$E(x, y) = \text{mín}\{e \mid ex \text{ puede producir } y\}$$

Otra forma de ver  $E$  es decir que es posible ahorrar  $(1 - E)x$  de la entrada y todavía produce la misma salida  $y$ .

Para determinar si una entrada puede producir o no una salida, necesitamos conocimiento de la tecnología. Para ello, introducimos el conjunto tecnológico.

El conjunto tecnológico  $T$  es el conjunto de composiciones de entrada y salida, de modo que la entrada puede producir realmente la salida.

$$T = \{(x, y) \mid x \text{ puede producir } y\}$$

Un problema principal en la evaluación comparativa es estimar cómo se ve el conjunto de tecnología a partir de algunas observaciones reales de entrada y salida de varias unidades.

Si no hay ruido en los datos, entonces el conjunto de tecnología consiste al menos en nuestras observaciones de combinaciones de entrada-salida para las unidades observadas. El conjunto de tecnología más pequeño que contiene todas las observaciones es precisamente el conjunto de todas las observaciones.

Para entender el análisis del comportamiento de las unidades consideremos algunos ejemplos. En el caso de dos entradas, podemos dibujar la isocuanta de entrada para salidas dadas, y con dos salidas podemos dibujar la isocuanta de salida o la frontera de salida para entradas dadas, supongamos que se conoce la frontera productiva eficiente.

---

Entonces, sería posible calcular índices que cuantifiquen los siguientes tipos de eficiencias.

La eficiencia técnica la cual se puede descomponer en las medidas de eficiencia técnica pura (PTE, Pure Technical Efficiency) y la eficiencia de escala (SE, Scale Efficiency). La ineficiencia técnica pura se refiere a las desviaciones de la frontera de la eficiencia, resultantes de la falta de una utilización eficiente de los recursos. Por lo tanto, esta medida supone que las empresas están operando bajo el supuesto de rendimientos constantes a escala. Las ineficiencias de escala, por el contrario, son pérdidas debidas a la falta de operar con rendimientos constantes a escala.

En primer lugar, estudiemos las medidas de eficiencia a partir de una orientación basada en el uso de los recursos; es decir, basándonos en la premisa de analizar en cuánto se puede reducir el uso de recursos equiproporcionalmente sin alterar las cantidades producidas. Para poder hacer una representación diagramática, consideremos el caso en que se produce un solo producto con dos recursos o factores.

En la figura siguiente se presenta la solución tal como ya se expresó en este la isocuanta unitaria, resultante de los análisis realizados a las 30 DMU's. Este comportamiento cuantifica las combinaciones de recursos  $x_1$  y  $x_2$  necesarios para producir una unidad de producto, en condiciones de máxima eficiencia.



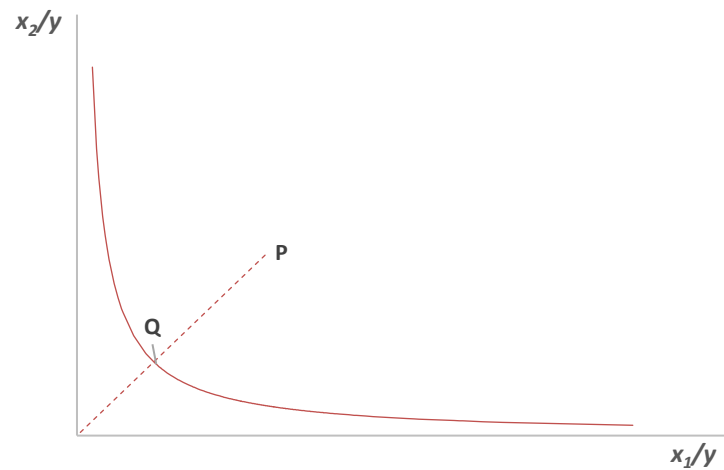


Figura 4-2 Representación diagramática de la eficiencia técnica según Farell (1957).

Por ello, cualquier DMU que utilice combinaciones de recursos que se encuentren por encima de la curva, por ejemplo, el punto P, tendrían que ser consideradas como menos eficientes. Por otro lado, el punto Q correspondería a una DMU eficiente, puesto que, comparada con P, se reduce la utilización de ambos recursos, de forma equiproporcional y produce la misma cantidad. Entonces, si medimos la distancia entre P y Q, tendríamos una medida de en cuánto se puede reducir el uso de recursos, sin alterar la producción y calcular el índice de eficiencia técnica.

Como se mencionó anteriormente, todos los modelos de la DEA comparten la idea de estimar la tecnología utilizando un enfoque de extrapolación mínima, y solo difieren en los supuestos que invocan. A continuación, resumimos los supuestos invocados en seis modelos DEA clásicos: a saber, el modelo de retorno a escala constante (CRS) original; los modelos de retorno a escala (DRS, IRS y VRS) que disminuyen, aumentan y varían; y los modelos de libre disposición y replicabilidad libre (FDH, FRH). Estos últimos no siempre se denominan modelos DEA, pero utilizamos esta terminología debido a la idea conceptual común de extrapolación mínima.

Usando el mismo enfoque aquí, vemos que los seis modelos DEA en el caso de entrada única, salida única generan tecnologías como las que se ilustran en la Figura siguiente.

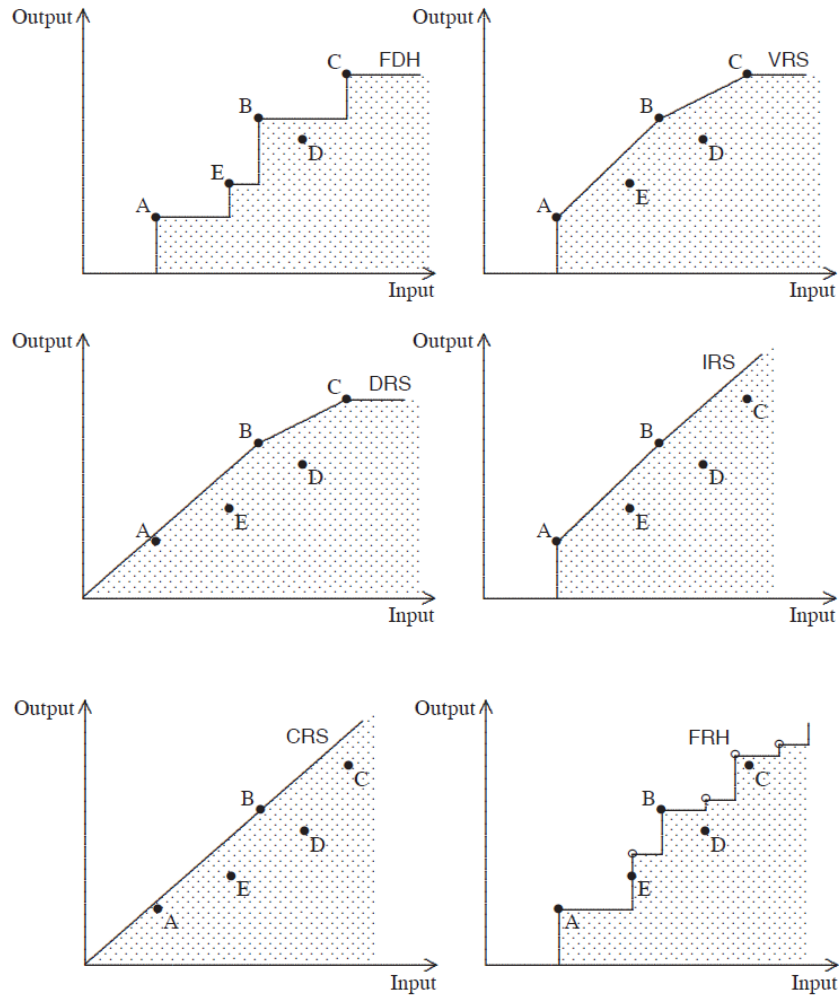


Figura 4-3 Modelos establecidos bajo diferentes supuestos, (Bogetoft & Otto, 2011)

Vemos que el enfoque de la DEA implica buscar el conjunto más pequeño que incluya o envuelva las observaciones de entrada y salida para todas las DMU's. Esto también explica el nombre: Data Envelopment Analysis.

---

#### 4.1.2 Escala de eficiencia en la DEA.

La propuesta de Farrell es visualizar a la eficiencia desde una perspectiva real no ideal, donde cada unidad de producción sea evaluada en relación con otras tomadas de un grupo representativo y comparable. Así, las medidas de eficiencia serían relativas y no absolutas, donde el valor alcanzado por una determinada unidad productiva corresponda a una expresión de la desviación observada respecto a aquéllas consideradas como más eficientes dada la información disponible.

Sea un conjunto más o menos extenso de unidades productivas comparables entre sí con la particularidad de que emplean el mismo tipo de recursos o factores para producir un conjunto de productos similares o equivalentes.

En el modelo CRS, y en cierta medida los modelos DRS e IRS, el retorno a las propiedades de escala se fija por supuesto. Este no es el caso para el modelo VRS y, por lo tanto, uno puede desear saber qué sucederá si cambiamos la escala de una empresa. Una posibilidad es que las entradas y salidas se escalarán hacia arriba y hacia abajo con las mismas proporciones.

En un modelo VRS de una sola entrada, para un modelo de una sola salida es fácil ver que a medida que avanzamos a lo largo de la frontera de entradas más pequeñas a más grandes, los rendimientos a escala aumentan primero, luego se vuelven constantes y finalmente disminuyen. Geométricamente, esto significa que una línea desde (0,0) hasta un punto de la frontera tiene una pendiente que primero aumenta, luego se detiene y finalmente disminuye. Económicamente, significa que el producto promedio, es decir, el número de salidas por unidad de entrada - primero aumenta, luego es constante y luego cae.

Ahora, para medir la pérdida por no operar en un tamaño de escala óptimo, usamos la noción de (scale efficiency SE), por sus siglas en inglés, eficiencia de escala. Calculamos esto como la relación entre la eficiencia de entrada en un modelo de CRS y la de un modelo VRS, es decir,

$$SE(x^0, y^0) = \frac{(x^0, y^0; CRS)}{(x^0, y^0; VRS)}$$

Vemos que esta medida nunca es más alta que 1 y que es precisamente 1 cuando las tecnologías VRS y CRS coinciden, es decir, cuando una empresa está operando a un tamaño de escala óptimo. Cuanto menor sea el valor de SE, más se pierde al no tener el producto de promedio alto que uno tendría en la escala más productiva. Para entender mejor la SE, podemos reescribir la definición anterior como

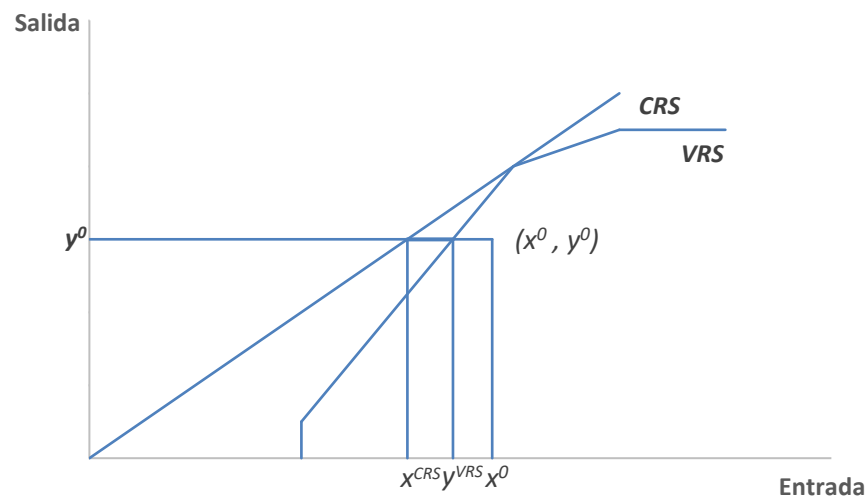
$$(x^0, y^0; CRS) = (x^0, y^0; VRS) * SE(x^0, y^0)$$

En este sentido, la metodología que propone Farrell es una técnica basada en el concepto de “benchmark” o de referencia. Esto significa que podemos descomponer la eficiencia (relacionada con la tecnología CRS) en dos componentes:

- a. Eficiencia pura (técnica) que mide la capacidad de usar las mejores prácticas en la tecnología VRS
- b. Eficiencia de escala que mide la capacidad de operar donde el promedio de salida por grupo de datos de entrada es máximo.

A continuación, vemos que el tamaño de SE, se calcula comparando las entradas necesarias en la frontera VRS eficiente y las entradas necesarias en la frontera CRS.

$$E(x^0, y^0; CRS) = \frac{\|x^{CRS}\|}{\|x^0\|} = \frac{\|x^{CRS}\|}{\|x^{VRS}\|} * \frac{\|x^{VRS}\|}{\|x^0\|} = SE(x^0, y^0) * E(x^0, y^0; VRS)$$



Gráfica 4-1 Escala de eficiencia en tecnología VRS

La eficiencia de la escala expresa, qué tan cerca está la DMU del tamaño óptimo de la escala, por eso, cuanto más grande es la SE, más cerca está la DMU de la escala óptima. Esta información es interesante porque indica los beneficios probables de ajustar la escala de la DMU. Desafortunadamente, no muestra en qué medida una SE inferior a 1 pueda ser demasiado pequeña o demasiado grande. Si la suma es menor que 1, la DMU está por debajo del tamaño de la escala óptima, y para el caso de que se encuentre por encima de 1, la DMU está por encima del tamaño de escala óptima.

Para resumir nuestras discusiones hasta ahora, las herramientas modernas de evaluación comparativa abordan dos problemas fundamentales en las evaluaciones prácticas. La falta de una preferencia clara o información prioritaria que se maneja al pasar de la efectividad a la eficiencia y la falta de información tecnológica se maneja haciendo supuestos débiles o flexibles, estimando las fronteras tecnológicas y evaluando la eficiencia en relación con la frontera estimada (mejores prácticas), enfocándonos a los resultados obtenidos el concepto de super eficiencia es importante ya que con este método logramos que la información mostrara comportamientos estables, tal como la gráfica de “Representación diagramática de la eficiencia técnica según Farell (1957)”.

### 4.1.3 Super eficiencia.

Lo que ahora se llama supereficiencia y se calcula de forma rutinaria utilizando varios programas de cómputo, se sugirió por primera vez como un medio para diferenciar entre unidades fronterizas. En muchas aplicaciones, varias empresas están clasificadas como totalmente eficientes, y puede ser interesante considerar las formas de clasificarlas.

La medida de super eficiencia se construye evitando que la empresa evaluada pueda ayudar contribuir a la tecnología. Consideremos que  $T^*(\gamma | - k)$  sea una aproximación DEA de la tecnología que utiliza los supuestos y se basa en todas las observaciones excepto en la de la empresa  $k$ .

$$T^*(\gamma | - k) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^n \mid \exists \lambda \in \Lambda^{k-1}(\gamma) : x \geq \sum_{j \neq k} \lambda^j x^j, y \leq \sum_{j \neq k} \lambda^j y^j \right\}.$$

Ahora la eficiencia de  $(x^k, y^k)$  relativo a  $T^*(\gamma | - k)$ , es llamada super eficiencia

$$E^{SUPk} = E\left((x^k, y^k); T^*(\gamma | - k)\right),$$

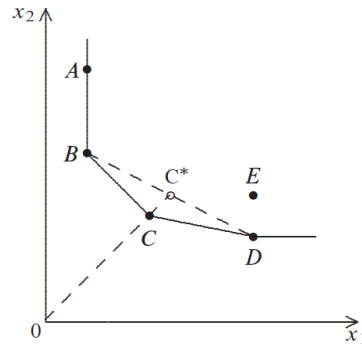
$$F^{SUPk} = F\left((x^k, y^k); T^*(\gamma | - k)\right),$$

Considere los datos en la Tabla 4.1 Asumiendo VRS, la isocuanta de entrada se gráfica en la figura a la derecha de la tabla (Bogetoft & Otto, 2011).

Podemos observar que la eficiencia de entrada habitual de la DMU C es 1,  $E^1 = 1$ . Si dejamos C fuera del conjunto de las DMU's que generan el modelo, la isocuanta corresponde a la línea discontinua. La supereficiencia de la DMU C debe evaluarse con respecto a esta isocuanta en lugar del original, y obtenemos  $E^{SUPC} = 1.2$ . La proyección correspondiente de C se convierte en  $C^*$ .

Tabla 4-1 SUPER EFICIENCIA

<i>DMU</i>	$x_1$	$y_2$	$y$
<b>A</b>	2	12	1
<b>B</b>	2	8	1
<b>C</b>	5	5	1
<b>D</b>	10	4	1
<b>E</b>	10	6	1



Las medidas de supereficiencia en el lado de la entrada y la salida no se limitan a un nivel inferior o superior al 1. En realidad, esto es parte de la motivación para usarlas. Lo que nos interesa diferenciar entre las empresas con puntajes de eficiencia tradicionales de 1 es la contribución de la puntuación de supereficiencia  $E^{SUPk}$  puede ser mayor que 1; y para la empresa  $k$  podría haber incrementado sus entradas en un factor  $E^{SUPk}$  y aún no haber estado sujeta a una unidad de referencia. Del mismo modo,  $F^{SUPk}$  puede ser menor que 1 si la empresa  $k$  consiguiera reducir todas sus salidas en un factor  $F^{SUPk}$  sin estar dominado por una unidad de referencia.

Por lo tanto, las medidas de supereficiencia contienen al menos la misma información y, a veces, también contienen información adicional por lo que, para fines de toma de decisiones y remuneraciones presentan algunas ventajas, tales como la toma de decisiones e incentivos que le empresa pudiese obtener por el uso de las mismas.

El único inconveniente de las medidas de supereficiencia basadas en Farrell es que los programas resultantes pueden no tener soluciones factibles. En esos casos, definimos la supereficiencia como:

$$E^{SUPk} = \alpha \text{ y } F^{SUPk} = -\alpha$$

La presencia de supereficiencia infinita simplemente significa que no hay otras unidades contra las cuales medir la  $DMU k$  con los datos dados y las tecnológicas propuestas. Estas  $DMU$ 's a

---

veces se denominan hipereficiencia. Usando las medidas habituales de Farrell, siempre podemos encontrar soluciones para los problemas de programación lineal y las DMU's hipereficientes se clasificarían como totalmente eficientes.

Matemáticamente, estas definiciones son naturales porque corresponden a conjuntos vacíos, lo que significa que mínimo y máximo no existen, sin embargo, es la idea conceptual. Esto no quiere decir que el problema de la existencia carezca de relevancia. En la práctica, y particularmente cuando basamos los procedimientos de toma de decisiones e incentivos en la supereficiencia, la falta de soluciones crea algunas complicaciones en el sentido de que las DMU's correspondientes necesitan atención especial.

En relación con la supereficiencia, la orientación del gráfico ofrece la ventaja de que siempre hay una solución al problema de la programación no lineal, mientras que, con la orientación de entrada y salida, puede que no siempre haya una solución.

Es importante reconocer que el alcance de la toma de decisiones define lo que puede considerarse como variables de elección y la función de criterio debe formularse de manera adecuada. Por ejemplo, en muchas situaciones prácticas, la salida producida puede ser una tarea asignada que se determina de forma externa. El analista elige solo entre los datos de entrada disponibles que pueden producir la orientación a la salida. En este contexto, la eficiencia radica en minimizar el costo de producción.

El beneficio obvio de la medición de la eficiencia es que proporciona una base objetiva para evaluar el desempeño de un directivo para la toma de decisiones. El resultado en el nivel más alto de eficiencia (por ejemplo, el máximo beneficio posible) proporciona un estándar absoluto para la gestión por objetivos.

La producción es un acto de transformar entradas en salidas. Dado que el objetivo de la producción es crear valor a través de la transformación, los resultados son, en general, resultados deseables. Por lo tanto, más salida es mejor.



---

Al mismo tiempo, las entradas son recursos valiosos con usos alternativos. La cantidad sin utilizar de cualquier entrada se puede procesar para producir más de la misma salida o para producir una salida diferente.

---

## 4.2 ANÁLISIS DEL PORTAFOLIO

Uno de los principales arreglos que se utilizan en el análisis del portafolio de PEP para determinar la posición de cada DMU, es la curva de rendimiento marginal de capital, esto es, los rendimientos que darán una cierta inversión en el futuro. Estos rendimientos dependerán de las ventas y costos esperados durante el tiempo de vida útil de la asignación o proyecto, es decir, de la rentabilidad económica esperada, la misma que es llamada el rendimiento probable de la inversión.

Keynes explica una curva de la eficiencia marginal del capital que consiste en ligar el volumen de inversiones y la eficiencia marginal o la rentabilidad de la inversión. Todas las empresas tendrán su curva de eficiencia marginal del capital, y si se suma todas estas curvas se podría tener una curva del mercado la que la teoría general la denomina la curva de demanda de las inversiones o la curva de eficiencia marginal del capital. (Maynard Keynes, 1992).

Particularmente para el escenario propuesto en el caso de estudio, tenemos el siguiente orden de acuerdo con el rendimiento utilizando en el Valor Presente Neto antes de Impuestos (VPN AI), que va de la 1-DMU a la 30-DMU y el Valor Presente Neto después de Impuestos (VPN DI), igualmente se presenta el Valor Presente de la Inversión (VPI) en donde al aplicar el régimen fiscal se tiene un orden diferente, principalmente aquellas asignaciones que cuentan con gastos e inversiones que pareciera no van de acuerdo con sus niveles de producción, tal es el caso de la 3-DMU que de estar en el tercer puesto se va al último; otro caso es la 5-DMU la cual se va al de la posición 5 al 19, esto lo podremos observar en la figura 4-5.

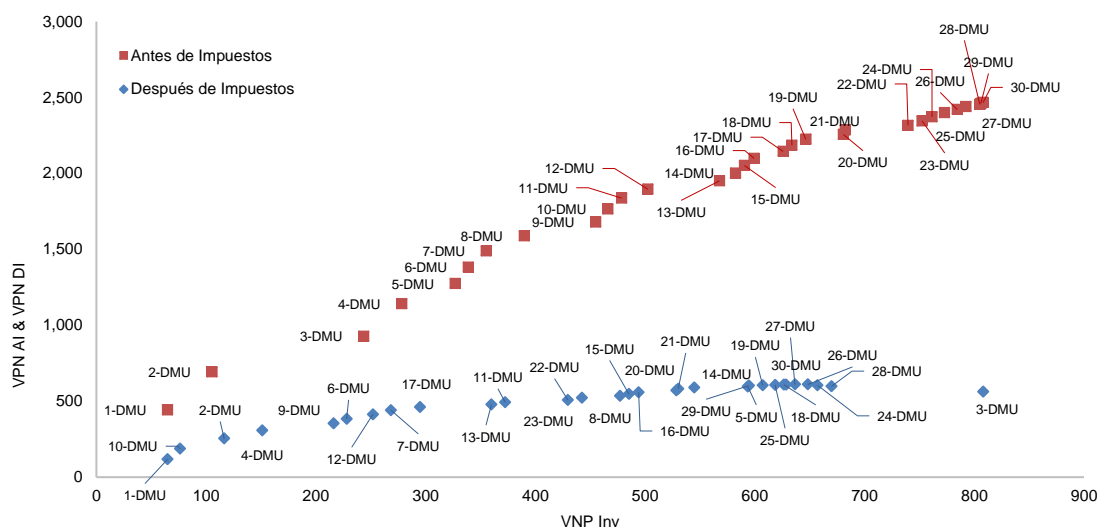


Figura 4-4. Análisis de rendimiento marginal de capital.

De las 30 DMU's se observa que varían de posición de acuerdo con los impuestos ejercidos para cada una de ellas, tabla 4-2 y 4-3.

TABLA 4-2 Jerarquización de unidades en función de su VPN AI (mmpesos)

<i>Posición</i>	<i>DMU</i>	<i>VPN AI</i>	<i>Posición</i>	<i>DMU</i>	<i>VPN AI</i>	<i>Posición</i>	<i>DMU</i>	<i>VPN AI</i>
<b>1</b>	1-DMU	441,882	<b>11</b>	11-DMU	72,545	<b>21</b>	21-DMU	30,726
<b>2</b>	2-DMU	251,937	<b>12</b>	12-DMU	58,630	<b>22</b>	22-DMU	29,264
<b>3</b>	3-DMU	232,699	<b>13</b>	13-DMU	54,788	<b>23</b>	23-DMU	29,040
<b>4</b>	4-DMU	215,256	<b>14</b>	14-DMU	51,401	<b>24</b>	24-DMU	27,238
<b>5</b>	5-DMU	132,616	<b>15</b>	15-DMU	49,574	<b>25</b>	25-DMU	26,513
<b>6</b>	6-DMU	107,990	<b>16</b>	16-DMU	47,429	<b>26</b>	26-DMU	21,871
<b>7</b>	7-DMU	107,049	<b>17</b>	17-DMU	45,380	<b>27</b>	27-DMU	18,872
<b>8</b>	8-DMU	99,994	<b>18</b>	18-DMU	40,838	<b>28</b>	28-DMU	14,008
<b>9</b>	9-DMU	89,925	<b>19</b>	19-DMU	38,880	<b>29</b>	29-DMU	6,897
<b>10</b>	10-DMU	85,308	<b>20</b>	20-DMU	31,730	<b>30</b>	30-DMU	6,552

Considerando el impuesto emitido a cada DMU, se tiene la siguiente posición de las DMU's propuestas para el análisis, tal como se muestra en la tabla 4-3.

TABLA 4-3 Jerarquización de unidades en función de su VPN DI (mmpesos)

<i>Posición</i>	<i>DMU</i>	<i>VPN DI</i>	<i>Posición</i>	<i>DMU</i>	<i>VPN DI</i>	<i>Posición</i>	<i>DMU</i>	<i>VPN DI</i>
1	1-DMU	117,835	11	11-DMU	15,353	18	21-DMU	10,954
3	2-DMU	67,105	7	12-DMU	29,229	12	22-DMU	15,103
30	3-DMU	-34,311	10	13-DMU	17,285	13	23-DMU	14,002
4	4-DMU	53,910	19	14-DMU	9,228	28	24-DMU	-5,003
20	5-DMU	6,491	15	15-DMU	12,144	23	25-DMU	2,102
6	6-DMU	31,208	16	16-DMU	12,085	27	26-DMU	39
8	7-DMU	27,153	9	17-DMU	20,105	26	27-DMU	736
14	8-DMU	12,546	24	18-DMU	956	29	28-DMU	-7,162
5	9-DMU	45,083	22	19-DMU	2,859	21	29-DMU	5,507
2	10-DMU	68,895	17	20-DMU	10,975	25	30-DMU	928

Observando lo anterior, la posición de las DMU's del escenario sin impuestos difieren principalmente las unidades 3-DMU y 24-DMU, sin embargo, hay otras unidades que sufren ajustes en su jerarquización, tal como lo observamos en el gráfico 4-6.

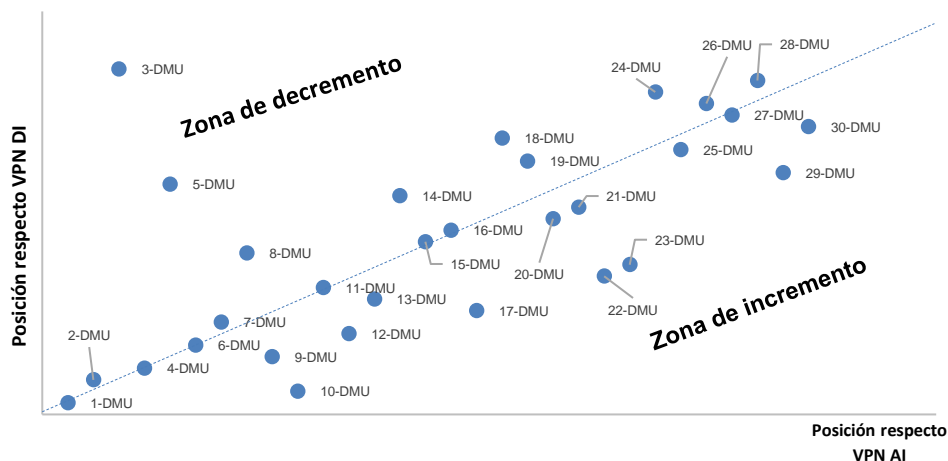


Figura 4-5 Cambio de la posición de las unidades, respecto a la aplicación de los impuestos

Otra de las formas de jerarquización en el portafolio de PEP, es midiendo la eficiencia de la inversión y para tal efecto se muestra el siguiente gráfico.

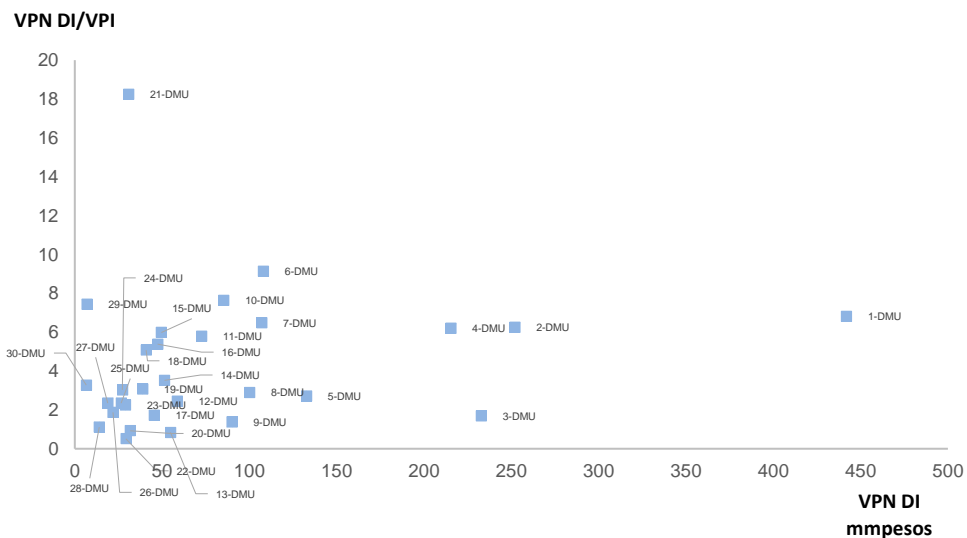


Figura 4-6 Eficiencia de la inversión respecto al VPN AI

TABLA 4-4 Jerarquización de unidades en función de su VPN AI/VPI

<i>Posición</i>	<b>DMU</b>	<b>VPN AI/VPI</b>	<i>Posición</i>	<b>DMU</b>	<b>VPN AI/VPI</b>	<i>Posición</i>	<b>DMU</b>	<b>VPN AI/VPI</b>
<b>5</b>	1-DMU	6.8	<b>10</b>	11-DMU	5.8	<b>1</b>	21-DMU	18.2
<b>7</b>	2-DMU	6.2	<b>19</b>	12-DMU	2.4	<b>30</b>	22-DMU	0.5
<b>25</b>	3-DMU	1.7	<b>29</b>	13-DMU	0.8	<b>22</b>	23-DMU	2.3
<b>8</b>	4-DMU	6.2	<b>13</b>	14-DMU	3.5	<b>16</b>	24-DMU	3.0
<b>18</b>	5-DMU	2.7	<b>9</b>	15-DMU	6.0	<b>21</b>	25-DMU	2.3
<b>2</b>	6-DMU	9.1	<b>11</b>	16-DMU	5.4	<b>23</b>	26-DMU	1.9
<b>6</b>	7-DMU	6.5	<b>24</b>	17-DMU	1.7	<b>20</b>	27-DMU	2.3
<b>17</b>	8-DMU	2.9	<b>12</b>	18-DMU	5.1	<b>27</b>	28-DMU	1.1
<b>26</b>	9-DMU	1.4	<b>15</b>	19-DMU	3.1	<b>4</b>	29-DMU	7.4
<b>3</b>	10-DMU	7.6	<b>28</b>	20-DMU	0.9	<b>14</b>	30-DMU	3.3

En el gráfico 4-7 y tabla 4-4 podemos ver que la jerarquización a través de la eficiencia de la inversión nos indica que para el caso de las DMU's, 21-DMU y 6-DMU, están por encima de las otras DMU's, sin embargo, en cuestión de rentabilidad la 21-DMU está por debajo de los otros indicadores, para el caso de la 6-DMU esta se mantiene.

Quizás esta no es la mejor jerarquización que se espera, sin embargo, el conjunto de varios análisis nos puede orientar a la toma de decisiones, tal es el caso del Breake Even (BE), o punto de equilibrio.

En este sentido para el caso del cálculo del BE antes de impuestos, tenemos que el mejor posicionado es la unidad 29-DMU, seguida de la 10-DMU, un dato diferente al de la eficiencia de la inversión. Es importante mencionar que el cálculo de BE está compuesto por la siguiente expresión:

$$BE = \frac{VP_{inv.} + VP_{go} + VP_{Imp.}}{VP_p * P}$$

donde

$BE = Break\ even$

$VP_{inv} = Valor\ presente\ de\ la\ inversión$

$VP_{gop} = Valor\ presente\ del\ gasto\ de\ operación$

$VP_{Imp.} = Valor\ presente\ de\ los\ impuestos$

$VP_p = Valor\ presente\ de\ la\ producción$

$P = Paridad$

TABLA 4-5 Jerarquización de unidades en función de su punto de equilibrio antes de impuestos (BE AI), en dólares por barril

<i>Posición</i>	<i>DMU</i>	<i>BE AI</i>	<i>Posición</i>	<i>DMU</i>	<i>BE AI</i>	<i>Posición</i>	<i>DMU</i>	<i>BE AI</i>
<b>6</b>	1-DMU	9	<b>5</b>	11-DMU	8	<b>3</b>	21-DMU	7
<b>4</b>	2-DMU	8	<b>22</b>	12-DMU	22	<b>30</b>	22-DMU	30
<b>23</b>	3-DMU	25	<b>29</b>	13-DMU	29	<b>21</b>	23-DMU	21
<b>7</b>	4-DMU	9	<b>10</b>	14-DMU	11	<b>27</b>	24-DMU	28
<b>19</b>	5-DMU	19	<b>11</b>	15-DMU	11	<b>13</b>	25-DMU	14
<b>8</b>	6-DMU	9	<b>12</b>	16-DMU	11	<b>20</b>	26-DMU	20
<b>9</b>	7-DMU	10	<b>26</b>	17-DMU	26	<b>16</b>	27-DMU	17
<b>14</b>	8-DMU	16	<b>15</b>	18-DMU	16	<b>28</b>	28-DMU	28
<b>24</b>	9-DMU	25	<b>18</b>	19-DMU	18	<b>1</b>	29-DMU	5
<b>2</b>	10-DMU	7	<b>25</b>	20-DMU	25	<b>17</b>	30-DMU	17

TABLA 4-6 Jerarquización de unidades en función de su punto de equilibrio después de impuestos (BE DI), en dólares por barril

<i>Posición</i>	<i>DMU</i>	<i>BE AI</i>	<i>Posición</i>	<i>DMU</i>	<i>BE AI</i>	<i>Posición</i>	<i>DMU</i>	<i>BE AI</i>
<b>6</b>	1-DMU	37	<b>11</b>	11-DMU	39	<b>3</b>	21-DMU	27
<b>7</b>	2-DMU	37	<b>8</b>	12-DMU	37	<b>30</b>	22-DMU	62
<b>27</b>	3-DMU	54	<b>16</b>	13-DMU	44	<b>5</b>	23-DMU	36
<b>9</b>	4-DMU	38	<b>13</b>	14-DMU	41	<b>29</b>	24-DMU	58
<b>25</b>	5-DMU	51	<b>19</b>	15-DMU	45	<b>17</b>	25-DMU	44
<b>15</b>	6-DMU	44	<b>20</b>	16-DMU	45	<b>26</b>	26-DMU	52
<b>21</b>	7-DMU	46	<b>14</b>	17-DMU	42	<b>24</b>	27-DMU	48
<b>23</b>	8-DMU	48	<b>4</b>	18-DMU	34	<b>22</b>	28-DMU	47
<b>12</b>	9-DMU	40	<b>28</b>	19-DMU	54	<b>1</b>	29-DMU	9
<b>2</b>	10-DMU	13	<b>10</b>	20-DMU	38	<b>18</b>	30-DMU	44

Considerando ahora los valores aplicando los derechos fiscales, tenemos que la unidad 29-DMU la podemos ubicar en el primer sitio, esta jerarquización presentada hasta el momento nos arroja la movilidad de cada unidad respecto a la otra, principalmente.

Otro de los parámetros utilizados para la caracterización del portafolio es, la reserva a recuperar, producción de los hidrocarburos, flujo de efectivo y algunas otras más que estaremos analizando.

Ahora bien, mostraremos el flujo de efectivo acumulado con el fin de exponer la posición de las unidades en función de esta variable. Antes de mostrar el resultado gráfico se describe un poco del porqué la utilización del flujo de efectivo en los análisis de rentabilidad.

Principalmente surge debido a que se tenía alta incertidumbre en los estados financieros tradicionales y sobre todo, el exponer cómo se utilizaron los recursos financieros, además de la necesidad de tener un panorama claro por parte de los inversionistas y acreedores así como los usos a que fueron destinados sus recursos durante un periodo determinado, el cual los hacía perder utilidad. Para el caso de las 30 DMU's que se analizan, se presentan dos gráficos por separado principalmente por los niveles de inversión y gastos asociados, el primero considera la 1-DMU, 2-DMU y 3-DMU y el resto en el segundo, gráfico 4-8 y 4-9.

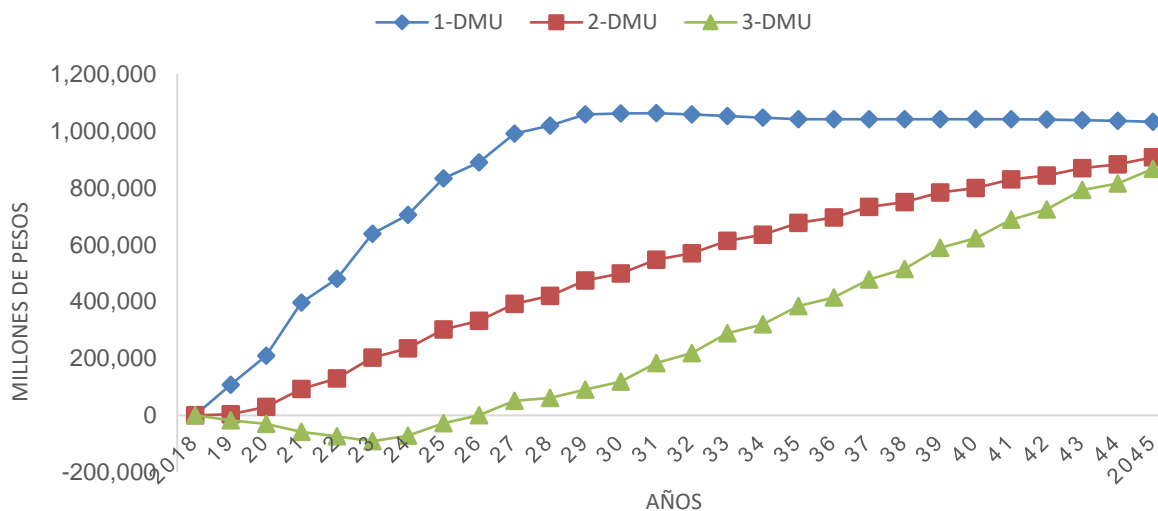


Figura 4-7 Flujo de efectivo acumulado para DMU’s mayores a 600 mil millones de pesos

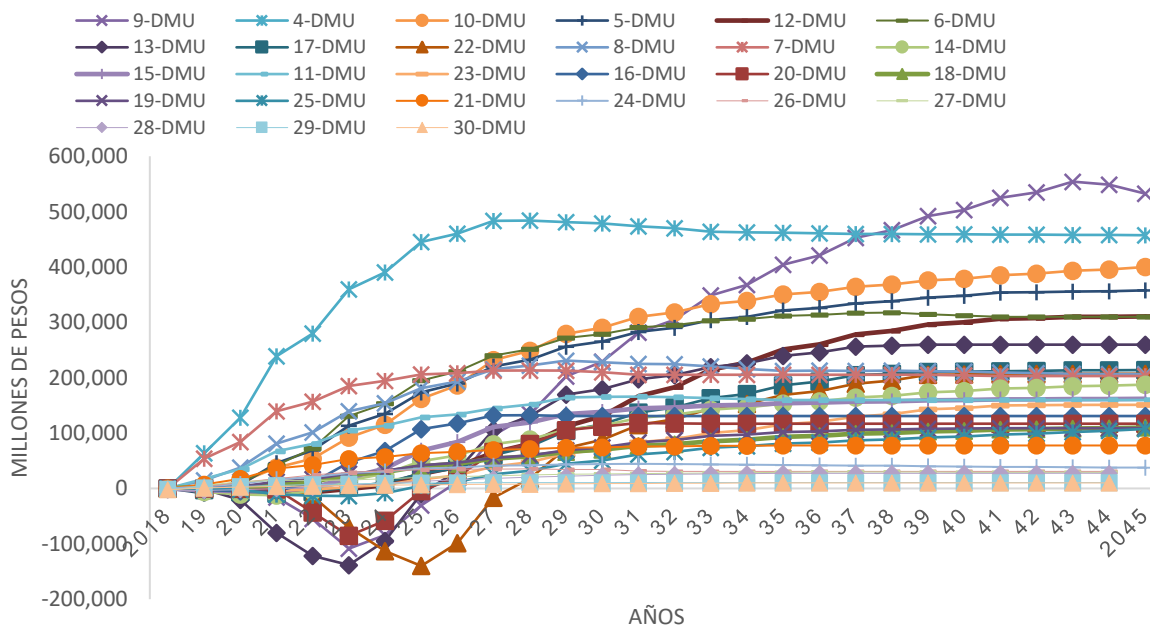


Figura 4-8 Flujo de efectivo acumulado para DMU’s menores a 600 mil millones de pesos



Para este caso se observa que la 9-DMU y la 10-DMU, cambian de posición respecto a su VPN antes y después de impuestos. Normalmente las variables asociadas a la jerarquización del portafolio son las mostradas en este apartado por lo que a continuación mostraremos una tabla resumen de la posición de las unidades respecto a una ponderación, la cual consiste en la suma entre las cinco variables de cada unidad, la resultante se divide entre la suma total de las unidades, obteniendo el valor correspondiente para la jerarquización.

TABLA 4-7 Resumen de la Jerarquización de unidades en función

<b>DMU</b>	<b>VPN AI</b>	<b>VPN DI</b>	<b>VPN DI / VPI</b>	<b>BE AI</b>	<b>BE DI</b>	<b>FE-ACUM</b>	<b>Posición</b>
<b>1-DMU</b>	1	1	5	6	6	1	1
<b>2-DMU</b>	2	3	7	4	7	2	2
<b>3-DMU</b>	3	30	25	23	27	3	21
<b>4-DMU</b>	4	4	8	7	9	5	4
<b>5-DMU</b>	5	20	18	19	25	7	15
<b>6-DMU</b>	6	6	2	8	15	9	5
<b>7-DMU</b>	7	8	6	9	21	14	6
<b>8-DMU</b>	8	14	17	14	23	13	14
<b>9-DMU</b>	9	5	26	24	12	4	10
<b>10-DMU</b>	10	2	3	2	2	6	3
<b>11-DMU</b>	11	11	10	5	11	17	7
<b>12-DMU</b>	12	7	19	22	8	8	9
<b>13-DMU</b>	13	10	29	29	16	10	20
<b>14-DMU</b>	14	19	13	10	13	15	11
<b>15-DMU</b>	15	15	9	11	19	16	12
<b>16-DMU</b>	16	16	11	12	20	19	16
<b>17-DMU</b>	17	9	24	26	14	11	18
<b>18-DMU</b>	18	24	12	15	4	21	17
<b>19-DMU</b>	19	22	15	18	28	22	24
<b>20-DMU</b>	20	17	28	25	10	20	22
<b>21-DMU</b>	21	18	1	3	3	24	8
<b>22-DMU</b>	22	12	30	30	30	12	26
<b>23-DMU</b>	23	13	22	21	5	18	19
<b>24-DMU</b>	24	28	16	27	29	25	29
<b>25-DMU</b>	25	23	21	13	17	23	23
<b>26-DMU</b>	26	27	23	20	26	26	28
<b>27-DMU</b>	27	26	20	16	24	27	27
<b>28-DMU</b>	28	29	27	28	22	28	30
<b>29-DMU</b>	29	21	4	1	1	29	13
<b>30-DMU</b>	30	25	14	17	18	30	25

### 4.3 JERARQUIZACIÓN DE ASIGNACIONES

La técnica utilizada para la jerarquización de las unidades es la denominada Benchmark, la cual refleja un ajuste en función de las entradas y salidas de cada modelo. Además, se analizó el comportamiento de los modelos, CRS, FDH, VRS, DRS e IRS y de acuerdo a los resultados obtenidos explicaremos la solución óptima para la jerarquización de las unidades DMU de las asignaciones petroleras.

A continuación, se presentan en las tablas siguientes los datos utilizados para el análisis de cada DMU.

TABLA 4-8 Datos para el análisis

DMU	Entrada (MM Pesos)	Salida (MM Pesos)	Salida + Impuestos (MM Pesos)	VPN AI (MM Pesos)	VPN AI (MM Pesos)
1-DMU	641,883	149,201	528,946	441,882	117,835
2-DMU	613,340	373,221	569,617	251,937	67,105
3-DMU	440,485	254,511	511,263	232,699	-34,311
4-DMU	324,157	83,400	275,217	215,256	53,910
5-DMU	239,811	108,408	246,883	132,616	6,491
6-DMU	144,670	26,519	113,550	107,990	31,208
7-DMU	161,789	47,863	145,072	107,049	27,153
8-DMU	169,726	63,001	164,524	99,994	12,546
9-DMU	168,846	83,967	128,361	89,925	45,083
10-DMU	115,394	26,327	44,205	85,308	68,895
11-DMU	114,441	39,560	107,166	72,545	15,353
12-DMU	102,392	45,748	75,866	58,630	29,229
13-DMU	138,054	85,475	125,467	54,788	17,285
14-DMU	135,374	82,051	126,839	51,401	9,228
15-DMU	68,063	14,494	55,317	49,574	12,144
16-DMU	66,938	13,308	53,598	47,429	12,085
17-DMU	90,986	46,437	73,160	45,380	20,105
18-DMU	85,876	46,790	90,817	40,838	956
19-DMU	61,327	19,696	58,498	38,880	2,859
20-DMU	77,670	45,260	67,668	31,730	10,975

<b>DMU</b>	<b>ENTRADA</b> (MM Pesos)	<b>SALIDA</b> (MM Pesos)	<b>SALIDA + IMPUESTOS</b> (MM Pesos)	<b>VPN AI</b> (MM Pesos)	<b>VPN AI</b> (MM Pesos)
<b>21-DMU</b>	44,314	10,771	34,216	30,726	10,954
<b>22-DMU</b>	98,915	73,775	88,270	29,264	15,103
<b>23-DMU</b>	53,738	26,486	42,223	29,040	14,002
<b>24-DMU</b>	67,186	45,662	83,081	27,238	-5,003
<b>25-DMU</b>	76,435	50,807	75,422	26,513	2,102
<b>26-DMU</b>	43,441	19,983	46,140	21,871	39
<b>27-DMU</b>	35,984	17,974	39,310	18,872	736
<b>28-DMU</b>	43,475	31,445	55,527	14,008	-7,162
<b>29-DMU</b>	10,586	3,108	4,771	6,897	5,507
<b>30-DMU</b>	11,526	5,860	12,463	6,552	928

Con la finalidad de analizar el comportamiento de las unidades a nivel práctico, debemos comprender que el punto de referencia para la medición de la eficiencia depende fundamentalmente de cómo se especifique el conjunto viable de las DMU's de entrada-salida.

Una combinación de entrada-salida se considera viable siempre que la cantidad de salida no exceda el valor de una función estimada en las cantidades de entrada especificadas.

Para el nivel más bajo de toma de decisiones, el objetivo es producir la cantidad máxima de salida de las DMU's de entrada específico. La referencia está determinada por la tecnología en sí misma, y la comparación de las DMU's real producida con la cantidad de referencia produce una medida de la eficiencia técnica. La eficiencia técnica es un componente importante de la eficiencia económica y una empresa no puede lograr la eficiencia económica completa a menos que sea técnicamente eficiente.

Sin embargo, al utilizar más de dos entradas para una sola salida en el caso relativamente simple de producción, ya no podemos discutir la productividad promedio de una manera positiva.

Para tales efectos de simplificar el problema se considera una sola entrada, de una sola salida, el concepto de productividad promedio medido por la relación de cantidad de entrada-entrada se mantiene.

Ahora para efectos de la revisión de los resultados se presentan de acuerdo a la aplicación del modelo de Retornos de Escala Variable (VRS), tenemos que:

TABLA 4-9 Salida al modelo VRS Súper Eficiencia a la salida

DMU	Entrada (MM Pesos)	Salida (MM Pesos)	Posición	Puntuación	Super Eficiencia	Holgura Entrada	Holgura Salida
1-DMU	149,201	641,883	1	1.0	1.0	0	0
6-DMU	26,519	144,670	2	1.0	0.6	0	0
29-DMU	3,108	10,586	3	1.0	0.8	0	0
16-DMU	13,308	66,938	4	1.0	1.0	0	0
2-DMU	373,221	613,340	5	1.0	Ind	224,019	0
15-DMU	14,494	68,063	6	1.1	1.1	0	0
4-DMU	83,400	324,157	7	1.2	1.2	0	0
21-DMU	10,771	44,314	8	1.2	1.2	0	0
10-DMU	26,327	115,394	9	1.2	1.2	0	0
7-DMU	47,863	161,789	10	1.4	1.4	0	0
3-DMU	254,511	440,485	11	1.5	1.5	105,310	0
19-DMU	19,696	61,327	12	1.7	1.7	0	0
8-DMU	63,001	169,726	13	1.7	1.7	0	0
11-DMU	39,560	114,441	14	1.7	1.7	0	0
5-DMU	108,408	239,811	15	2.0	2.0	0	0
12-DMU	45,748	102,392	16	2.2	2.2	0	0
9-DMU	83,967	168,846	17	2.2	2.2	0	0
30-DMU	5,860	11,526	18	2.3	2.3	0	0
26-DMU	19,983	43,441	19	2.5	2.5	0	0
17-DMU	46,437	90,986	20	2.5	2.5	0	0
18-DMU	46,790	85,876	21	2.6	2.6	0	0
27-DMU	17,974	35,984	22	2.7	2.7	0	0
23-DMU	26,486	53,738	23	2.7	2.7	0	0
14-DMU	82,051	135,374	24	2.7	2.7	0	0
13-DMU	85,475	138,054	25	2.8	2.8	0	0
20-DMU	45,260	77,670	26	2.8	2.8	0	0
25-DMU	50,807	76,435	27	3.2	3.2	0	0
24-DMU	45,662	67,186	28	3.3	3.3	0	0
22-DMU	73,775	98,915	29	3.4	3.4	0	0
28-DMU	31,445	43,475	30	3.8	3.8	0	0

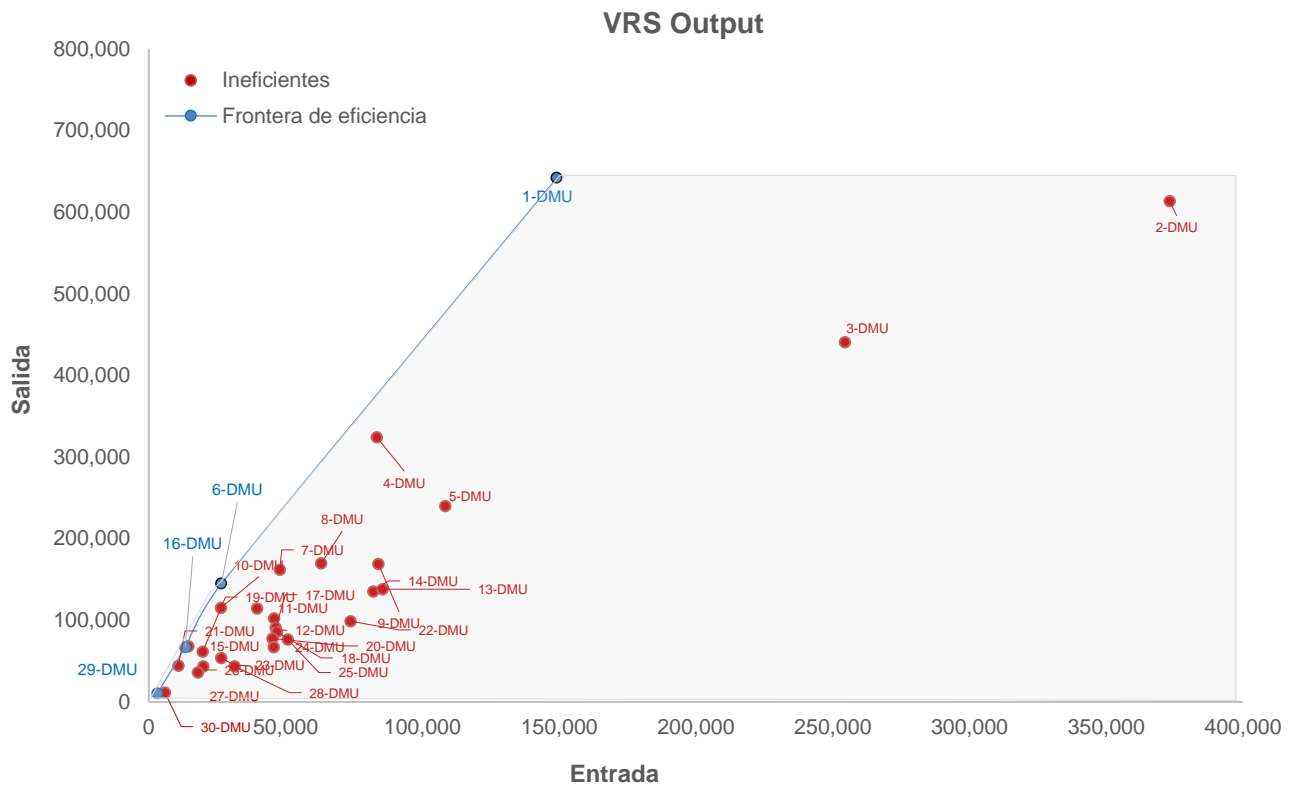


Figura 4-9 Modelo VRS, muestra una función de producción de entrada única, salida única

En cuanto a la selección de la entrada se considera el valor presente de los egresos (VP Egresos), el cual está compuesto por: Inversiones, Gasto de Operación, Tarifas de Transporte y Compras de Gas. Para el caso de la salida tenemos el Valor Presente de los Ingresos (VP Ingresos), el cual lo componen: Volumen de aceite, gas y condensados producidos y el precio correspondiente.

Como podemos observar la orientación de las DMU's 29,16, 6 y 1 forman parte de la envolvente, por ejemplo, para las DMU's ubicadas dentro la envolvente podemos encontrar un punto eficiente reduciendo la entrada y aumentando la salida al mismo tiempo, con lo que podemos afirmar que para ser eficientes el resto de las DMU's debemos comenzar aumentando la salida (desplazamiento vertical) pero a su vez forzosamente nos vemos obligados a aumentar la entrada (desplazamiento horizontal) para que el punto siga perteneciendo al conjunto de posibilidades de pertenecer a la frontera de eficiencia.

Los planes de referencia que minimizan los egresos y maximizan los ingresos se pueden encontrar resolviendo problemas de programación lineal simple. Una de las particularidades del modelo de Disposición Libre Hull (FDH) tiene como característica fundamental el proyectar sobre las unidades productivas existentes, a través de modelos enteros mixtos.

TABLA 4-10 Salida al modelo FDH Súper Eficiencia a la salida

DMU	Entrada (MM Pesos)	Salida (MM Pesos)	Posición	Puntuación	Super Eficiencia	Holgura Entrada	Holgura Salida
1-DMU	149,201	641,883	1	1.0	0.5	0	0
4-DMU	83,400	324,157	2	1.0	0.5	0	0
8-DMU	63,001	169,726	3	1.0	1.0	0	0
7-DMU	47,863	161,789	4	1.0	0.9	0	0
6-DMU	26,519	144,670	5	1.0	0.8	0	0
10-DMU	26,327	115,394	6	1.0	0.6	0	0
15-DMU	14,494	68,063	7	1.0	1.0	0	0
16-DMU	13,308	66,938	8	1.0	0.7	0	0
21-DMU	10,771	44,314	9	1.0	0.3	0	0
29-DMU	3,108	10,586	10	1.0	0.0	0	0
30-DMU	5,860	11,526	11	1.0	0.9	0	0
2-DMU	373,221	613,340	12	1.0	1.0	224,019	0
19-DMU	19,696	61,327	13	1.1	1.1	5,202	0
14-DMU	82,051	135,374	14	1.3	1.3	19,050	0
11-DMU	39,560	114,441	15	1.3	1.3	13,041	0
5-DMU	108,408	239,811	16	1.4	1.4	25,008	0
12-DMU	45,748	102,392	17	1.4	1.4	19,229	0
3-DMU	254,511	440,485	18	1.5	1.5	105,310	0
26-DMU	19,983	43,441	19	1.6	1.6	5,489	0
17-DMU	46,437	90,986	20	1.6	1.6	19,918	0
18-DMU	46,790	85,876	21	1.7	1.7	20,271	0
22-DMU	73,775	98,915	22	1.7	1.7	10,774	0
20-DMU	45,260	77,670	23	1.9	1.9	18,741	0
27-DMU	17,974	35,984	24	1.9	1.9	3,480	0
9-DMU	83,967	168,846	25	1.9	1.9	567	0
25-DMU	50,807	76,435	26	2.1	2.1	2,944	0
23-DMU	26,486	53,738	27	2.1	2.1	160	0
24-DMU	45,662	67,186	28	2.2	2.2	19,143	0
13-DMU	85,475	138,054	29	2.3	2.3	2,074	0
28-DMU	31,445	43,475	30	3.3	3.3	4,926	0

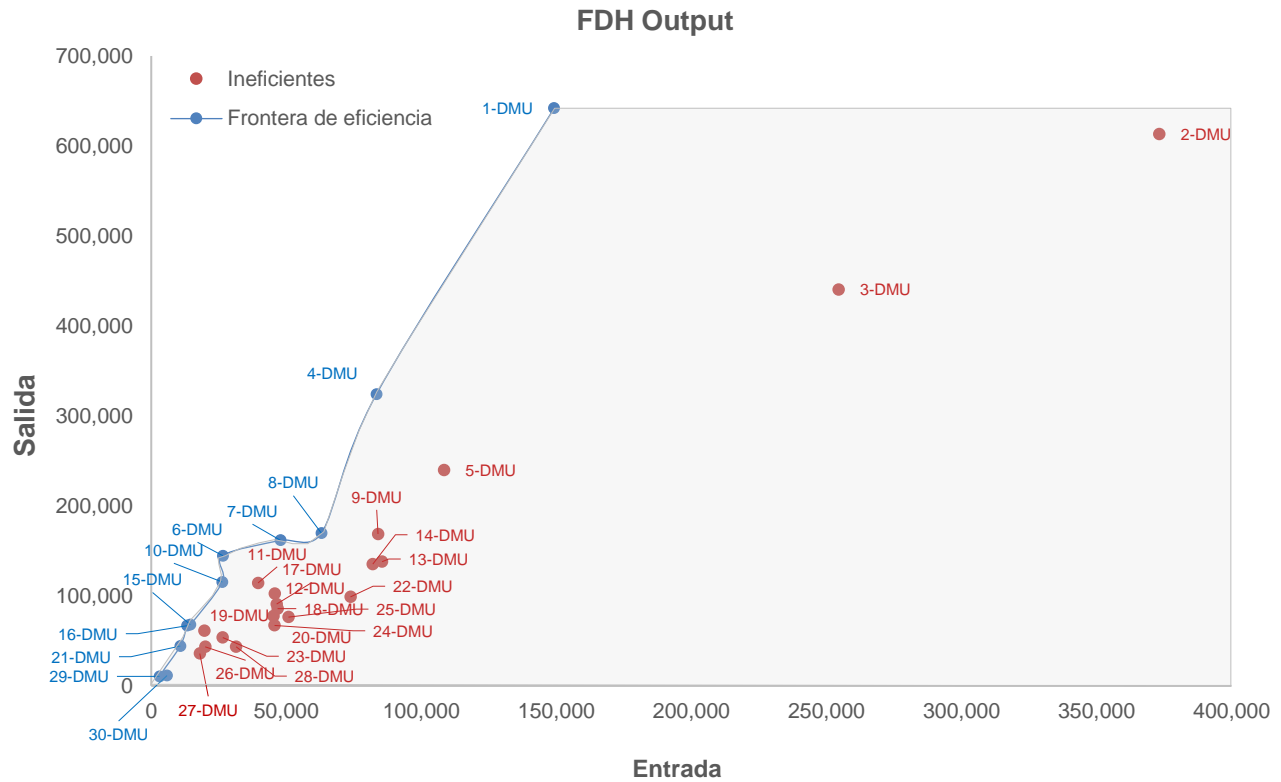


Figura 4-10 El valor de eficiencia del modelo FDH.

De acuerdo a los resultados obtenidos, observamos pequeñas variaciones las cuales se deben a la propia naturaleza de cada modelo, por ejemplo, para el caso del VRS para las unidades 2-DMU y 3-DMU se tiene una diferencia considerable respecto al resto de las unidades, debido principalmente a que las entradas y salidas están en una proporción mayor al resto, por tal motivo en la jerarquización tradicional las hemos apartado en el gráfico de flujo de efectivo acumulado, sin embargo la solución que nos arroja nos permite pensar que debemos revisar los componentes de la entrada con la finalidad de buscar la eficiencia.

Se observa la diferencia al resolver un problema mediante el modelo FDH o el modelo entero. El modelo FDH toma como unidades eficientes las unidades existentes y proyecta sobre éstas

las no eficientes, para solucionar el problema con variables enteras podría eliminar soluciones mejores que las simples proyecciones sobre las unidades existentes.

De acuerdo al comportamiento de las unidades y como se comentó en el apartado anterior cuando nos encontremos con un modelo con orientación de salida, el valor de eficiencia del modelo FDH nunca será mayor que el proporcionado por el modelo CRS o VRS. Es comprobable lo anterior, debido a que la tecnología FDH está contenida en la tecnología VRS entera y por lo tanto también en la tecnología CRS entera Figura 4-12.

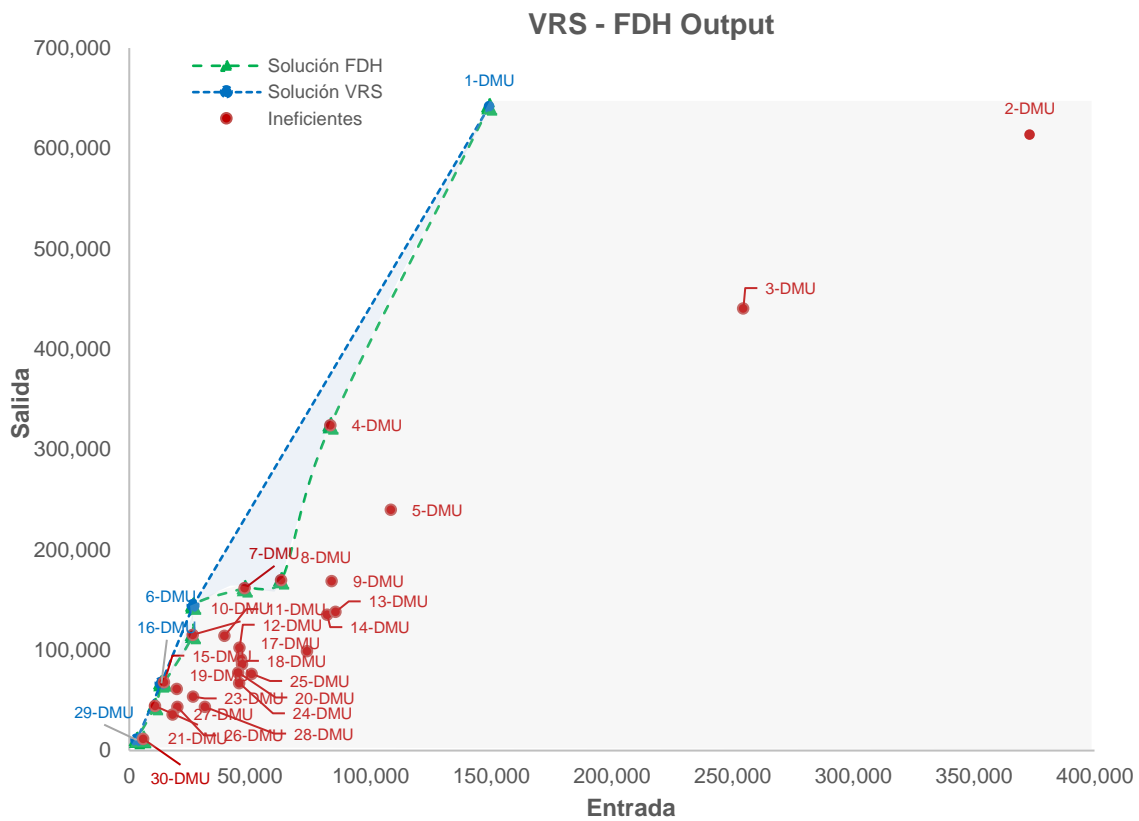


Figura 4-11 Comparación de la solución FDH y VRS.



Ahora bien, para efectos de resumen mostramos un gráfico en el cual se observa la variación de la jerarquización de cada uno de los escenarios respecto al documentado de manera tradicional.

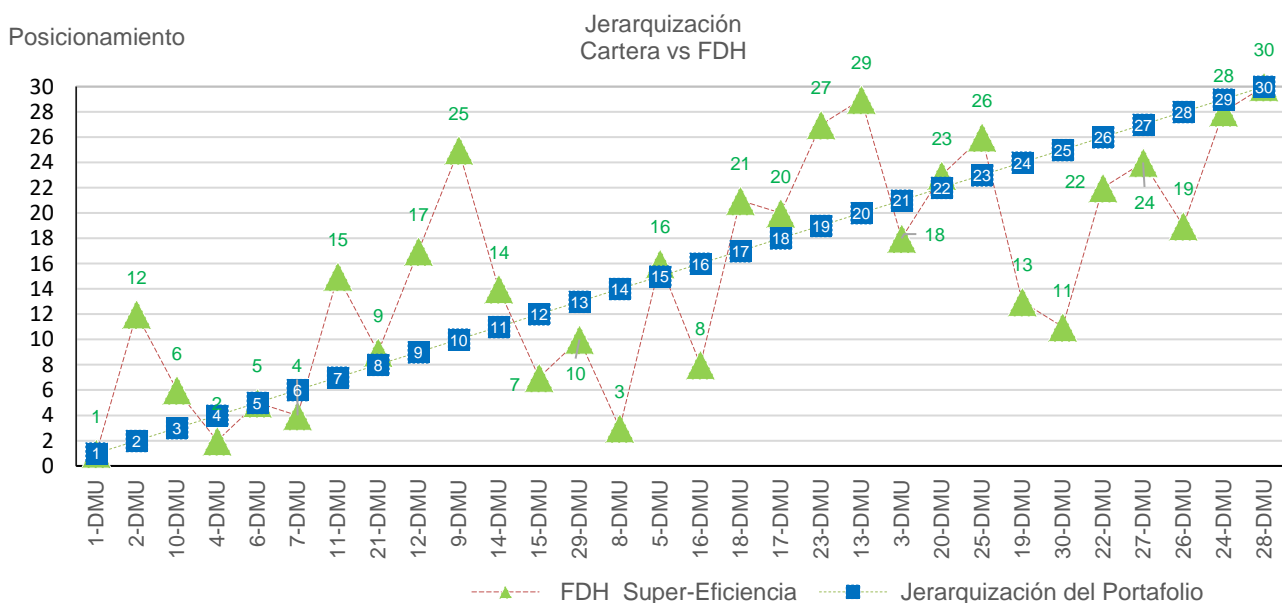
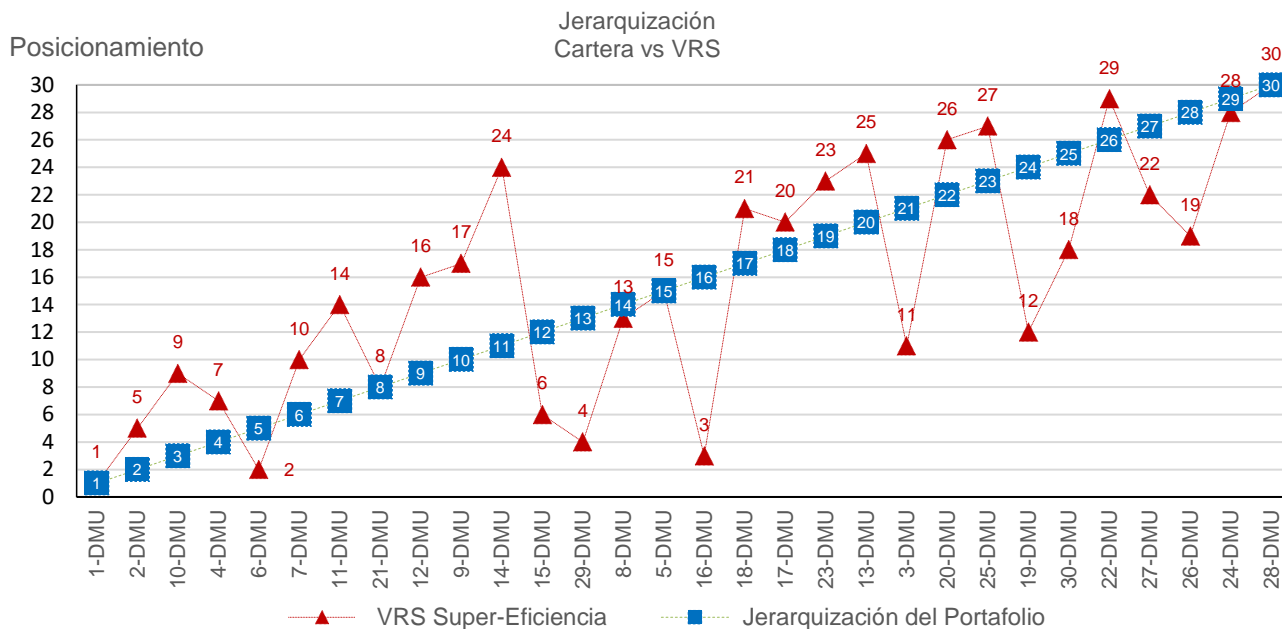


Figura 4-12 Jerarquización de Unidades en función de la propuesta VRS y FDH vs Cartera.

Los modelos CRS, IRS y DRS presentados muestran una solución estable con algunas variantes en la determinación de los puntos de eficiencia, analizando los resultados de estos métodos se comprueba que no fueron los esperados, por tal motivo no se incluyen en los resultados de la jerarquización. En cuanto a los métodos VRS y FDH son los que presentan una solución con un mayor número de unidades eficiente, tal como se describe en este apartado, por lo que se muestran las variaciones existentes respecto a la solución presentada por el análisis de cartera. Para el caso de la jerarquización VRS vs Cartera podemos observar que tenemos que cuatro de las DMU's 1-DMU, 8-DMU, 15-DMU y 30-DMU tienen coincidencia y para el método de FDH se observan tres coincidencias, 1-DMU, 5-DMU y 30-DMU.

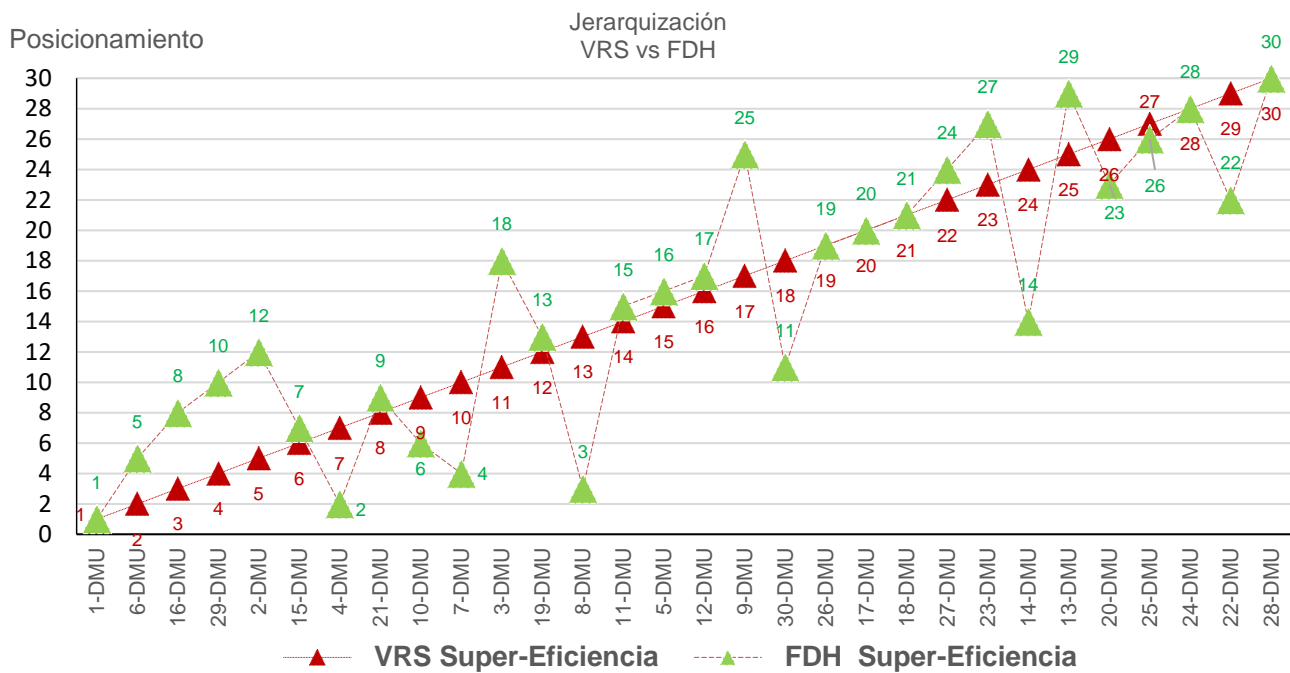


Figura 4-13 Jerarquización de Unidades en función de la propuesta VRS vs FDH.

Sin embargo, la variación que existe entre las tecnologías VRS y FDH son menores tal como se observa en la figura 4-14, por lo que seleccionar una de estas tecnologías para la jerarquización de asignaciones tendrá un impacto en la toma de decisiones para PEP.

---

## 5 CONCLUSIONES Y PRÓXIMOS PASOS

---

Como se dijo en su momento, se han dedicado grandes esfuerzos al desarrollo de modelos que permitieran establecer una ordenación parcial o total de las DMU's en eficientes e ineficientes, históricamente se han presentado nuevos métodos que superan las deficiencias o limitaciones de los anteriores. En este documento se han presentado, explicado, detallado e ilustrado ejemplos de los métodos de ordenación de unidades eficientes que utilizan los modelos del Análisis de Envolvente de Datos DEA.

Hemos presentado alguno de los modelos SBM no radiales y sus extensiones. Los modelos de SBM utilizan la cantidad de holguras en una medida máxima para medir la eficiencia. Esto podría ser un mérito, así como un demérito. Los modelos SBM ponderados sirven para hacer que los modelos sean más confiables.

En cuanto al método en sí, debemos decir que se obtienen resultados idénticos con independencia de la orientación, cuando se aplica a modelos CRS. Sin embargo, la ordenación es diferente en función de la orientación, cuando se aplica sobre tecnologías VRS. Esta situación no supone ningún inconveniente, ya que este método siempre ofrecerá una jerarquización única al modelo aplicado a un problema de eficiencia concreto.

Es importante algo que debemos remarcar, las grandes ventajas que presenta nuestro comparativo de los métodos propuestos:

1. Presentan comportamientos estables a las entradas y salidas.
2. Obtiene un posicionamiento único, evitando dejar en manos del que decide los posibles criterios a emplear en la elaboración del ranking.
3. Se puede aplicar a cualquier grupo de asignaciones, sólo debemos tener claro las entradas y salidas que debemos utilizar.
4. Podemos identificar las asignaciones de mayor eficiencia, para obtener nuestra ordenación. Aseguramos así la coherencia entre identificación y ordenación.
5. Es posible determinar que variable de entrada o salida genera el mayor impacto en la eficiencia de las asignaciones.

---

Una de las observaciones que debemos tener en cuenta para este proyecto es que las unidades que tiene las inversiones y gastos de operación mayores no necesariamente con estas técnicas salen del rango del análisis, así como las unidades que de menores inversiones y gastos presentan al igual un comportamiento de acuerdo a su eficiencia mostrada en los resultados del análisis. Tal es el caso de las unidades 3-DMU y 2-DMU las cuales en su entrada y salida respectivamente presentan datos superiores al resto, sin embargo, la 1-DMU es parte de la envolvente contrariamente a que se encuentra en una situación similar en su entrada y salida siendo esta la referencia para las otras DMU's.

En cuanto a la a la envolvente generada a través de la tecnología VRS se puede decir que muestra una buena representación por lo que el uso de este método apoyará a la toma de decisiones de Pemex Exploración y Producción.

Por otra parte, la envolvente que se presenta es con la tecnología FDH es generada por un mayor número de DMU's en la que podemos observar la misma 1-DMU forma parte de la frontera de eficiencia y es referente para toda aquella DMU que presente en la entrada y la salida cifras superiores al resto. Asimismo, las DMU's se aproximan de manera sustancial a la frontera de eficiencia, por lo que este método puede ser aplicado para el análisis de eficiencias de las asignaciones de PEP.

Finalmente es importante hacer énfasis a que el resto de las tecnologías presentadas en este proyecto no presentan un comportamiento como las utilizadas para el análisis, por lo que se sugiere un replanteamiento del problema para su aplicación.

---

## 5.1 PRÓXIMOS PASOS

La suma importancia darle la continuidad a este tema ya que, en la industria del petróleo no se han documentado hasta el momento trabajos similares y sobre todo a la administración de campos o asignaciones que impulse la toma de decisiones para una buena administración de los recursos.

Presentar trabajos con el impacto que representaría el cambio en las inversiones, gastos, producción etc. Lo cual nos apoyaría en el análisis para la mejora en la toma de decisiones, así como en el posicionamiento de las asignaciones, además de revisar que variables son las de mayor impacto en el estudio.

También es importante mencionar que una manera de medir la eficiencia de una empresa consiste el comparar el valor agregado generado por ella, con el valor agregado determinado por la función de producción, vale la pena que se revise el método de frontera de producción estocástica a través de la DEA.

---

## 6 APÉNDICE

---

### 6.1 APÉNDICE A

Formulación matemática de programación lineal del modelo DEA básico

Para la medición de la eficiencia técnica global se utilizará el modelo-CCR. Obtenemos la eficiencia técnica  $\theta^*$  por cada unidad  $j = 1, 2, \dots, n$  resolviendo el siguiente problema de programación lineal (fase I):

$$\text{Mín} = Z_o = \theta$$

Sujeto a

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta x_{ro} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{ro} \quad r = 1, 2, \dots, s$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad r = 1, 2, \dots, s$$

Para la medición de la eficiencia técnica pura se utilizará el modelo-BCC. Obtenemos la eficiencia técnica  $\theta^*$  por cada unidad  $j = 1, 2, \dots, n$  resolviendo el siguiente problema de programación lineal (fase II):

$$\text{mín} \theta_o - \varepsilon \left( \sum_{i=1}^m s_i^- + \sum_{r=1}^s s_r^+ \right)$$

sujeto a

$$\theta_o x_{io} = \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j + s_i^- \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

---

$$y_{ro} = \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j - s_r^+ \quad (r = 1, 2, \dots, s),$$

$$1 = \sum_{j=1}^n \lambda_j,$$

$$0 \leq \lambda_j, s_i^-, s_r^+ \quad \forall i, r, j,$$

---

## 6.2 APÉNDICE B

# Notación

PEP	Pemex Exploración y Producción
DEA	Data Envelopment Analysis
DMU	Decision Making Units
VPN AI	Valor Presente Neto Antes de Impuestos
VPN DI	Valor Presente Neto Después de Impuestos
PAUSD	Precio del Aceite
PGUSD	Precio del Gas
PA	Volumen de Aceite
PG	Volumen de Gas
INV	Inversión
GOP	Gasto de Operación
BE AI	Break Even Antes de impuestos
BE DI	Break Even Después de impuestos
FE-ACUM	Flujo de Efectivo Acumulado
RTS	Returns to Scale
IRS	Increasing Returns to Scale
DRS	Decreasing Returns to Scale
CRS	Constant Returns to Scale
VRS	Variable Returns to Scale
FDH	Free Disposal Hull
BCC	Banker, Charnes y Cooper
CCR	Charnes, Cooper y. Rhodes
SBM	Slacks-Based Measure
SBM-I-C	SBM orientado a la entrada
SBM-O-C	SBM orientado a la Salida
PL	Programación Lineal
SE	Scale Efficiency





## 7 REFERENCIAS

---

- Bogetoft, P., & Otto, L. (2011). *Benchmarking with DEA, SFA, and R*. New York, NY: Springer Science+Business Media.
- Canales Salinas, R. (2013). Análisis Envolvente de Datos: Estimación de la eficiencia técnica y asignativa del sector bancario nicaragüense, periodo 2008-2011. *Revista Electrónica de Investigación en Ciencias Económicas*, 63-94.
- Chediak P., F., & Valencia A., L. S. (2008). Metodología para medir la eficiencia mediante la técnica del Análisis Envolvente de Datos -DEA-. *Vector*, 3, 70-81.
- COOPER, W. W., SEIFORD, L. M., & TONE, K. (2006). *Data Envelopment Analysis, A Comprehensive Text with Models*. New York: Springer.
- Jaime, J. A., & Luque Calvo, P. L. (2016). *Formulaciones en el Análisis Envolvente de Datos (DEA) "Resolución de Casos Prácticos"*. Sevilla : Universidad de Sevilla.
- Maynard Keynes, J. (1992). *Teoría general de la ocupación, el interés y el dinero*. México: Fondo de Cultura Económica.
- McLure, M. (2001). *Pareto, Economics and Society*. USA and Canada: Routledge.
- Rachev, S. T., Stoyanov, S. V., & Fabozzi, F. J. (Julio de 2008). *Advanced Stochastic Models, Risk Assessment, and Portfolio Optimization*. (Wiley, Ed.) Published simultaneously in Canada, canada: John Wiley & Sons, Inc.
- Rincón Soto, I. B. (2016). Metodología de Análisis Envolvente de Datos (DEA), procesos administrativos y operacionales de las políticas gubernamentales en los países latinoamericanos. *TLATEMOANI, Revista Académica de Investigación*, 63-88.
- Tolosa, B. (s.f.). Evaluación de eficiencia en el sector de distribución de energía eléctrica en Colombia empleando la metodología de análisis envolvente de datos – DEA. Manizales, Colombia.
- W. Cooper, W. C., M. Seiford, L., & Zhu, J. (2011). *Handbook on Data Envelopment Analysis* (Vol. 164). New York: Springer.
- Zhu, J. (2009). *Quantitative Models for Performance Evaluation and Benchmarking, Data "Envelopment Analysis with Spreadsheets"*. New York: Springer.