



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

Universidad Nacional Autónoma de México  
Posgrado en Ciencia e Ingeniería de la Computación

# Iluminación de poliedros en $\mathbb{R}^3$ y transversales

## T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
DOCTOR EN CIENCIAS  
(COMPUTACIÓN)

PRESENTA:  
MAZAY OSWALDO JIMÉNEZ SALINAS

TUTOR:  
DR. JORGE URRUTIA GALICIA  
Instituto de Matemáticas, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:  
DR. JOSÉ DAVID FLORES PEÑALOZA  
Facultad de Ciencias, UNAM

DR. CARLOS BRUNO VELARDE VELÁQUEZ

Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas, UNAM

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX.

ENERO 2019



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



# Resumen

En esta tesis atacamos dos tipos de problemas, el primer tipo se enfoca en el estudio de poliedros ortogonales en  $\mathbb{R}^3$  y el segundo en problemas de transversales utilizando programación lineal. Dentro del primer tipo, empezamos tratando el problema de la clasificación de vértices convexos y cóncavos en poliedros ortogonales, la solución de este problema extiende el resultado de polígonos ortogonales al espacio. El segundo problema trata la minimización de ángulos sólidos en poliedros ortogonales, para su solución se caracterizan los poliedros ortogonales de acuerdo al tipo de sus ángulos sólidos internos. Además se establecen cotas sobre la máxima y mínima suma de ángulos sólidos que un poliedro ortogonal puede alcanzar. Posteriormente se estudia la variante del *Problema de la Galería de Arte*: Dado un poliedro ortogonal  $\mathcal{P}$  en  $\mathbb{R}^3$ , encuentre un conjunto mínimo de aristas guardia que vigilen  $\mathcal{P}$ . Para este problema se establecen cotas para vigilar poliedros ortogonales y se introduce el concepto de  $\pi/2$ -arista guardia, como una generalización de los reflectores ortogonales en el plano, este modelo de aristas guardia es más restrictivo ya que su rango de iluminación es mucho menor al de las aristas guardias conocidas en la literatura. Con este nuevo modelo de iluminación se encuentra una cota inferior para iluminar un poliedro ortogonal con  $\pi/2$ -aristas guardia, para la solución a este problema se encuentra un poliedro que puede ser extendido a una familia parametrizada por el número de aristas. Respecto a los problemas del segundo tipo, en la última parte se aborda el problema de encontrar transversales que atraviesan líneas generadas por puntos en movimiento. Las variantes que se estudian son puntos que se mueven con la misma velocidad y la misma dirección, puntos que se mueven con diferentes velocidades y la misma dirección y por último puntos que se mueven a diferentes velocidades y en diferentes direcciones. Primero se resuelve la variante de estos puntos en el plano y posteriormente se extiende para cualquier dimensión fija  $d$ .

Los resultados que presentamos fueron publicados en *Proceedings of the 28th Canadian Conference on Computational Geometry*, *Proceedings of the 20th Japan Conference on Computational Geometry, Graphs and Games* y en la revista *Elsevier - Information Processing Letters*.

# Contenido

<b>Resumen</b>	<b>iii</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>xi</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Terminología básica . . . . .	2
1.2 Variantes del problema de la galería de arte . . . . .	3
1.3 Algunos resultados para polígonos . . . . .	5
1.3.1 Teorema clásico de Chvátal de la galería de arte . . . . .	6
1.3.2 Galerías tradicionales . . . . .	7
1.3.3 Galerías ortogonales . . . . .	7
1.3.4 Galerías con huecos . . . . .	9
1.3.5 Iluminación con reflectores ortogonales . . . . .	10
1.4 Algunos resultados en poliedros . . . . .	12
1.4.1 Tetraedralización de poliedros . . . . .	12
1.4.2 Cotas en puntos guardia . . . . .	13
1.4.3 Cotas en aristas guardia . . . . .	14
1.4.4 Cotas en caras guardia . . . . .	17
1.5 Separabilidad y programación lineal . . . . .	19
<b>2 Poliedros</b>	<b>21</b>
2.1 Preliminares . . . . .	21
2.2 Clasificación de vértices en poliedros ortogonales . . . . .	23
2.3 Conclusiones . . . . .	27
<b>3 Suma de ángulos sólidos</b>	<b>29</b>
3.1 Introducción . . . . .	29
3.2 Preliminares . . . . .	31
3.3 Suma de ángulos sólidos en poliedros ortogonales . . . . .	33
3.4 Conclusiones . . . . .	38

---

<b>4 Iluminación de Poliedros</b>	<b>39</b>
4.1 Introducción . . . . .	39
4.2 Cuñas ortogonales . . . . .	40
4.3 Iluminación con $\pi/2$ -aristas . . . . .	42
4.4 Cota inferior para $\pi/2$ -aristas . . . . .	46
4.5 Conclusiones . . . . .	48
<b>5 Transversales</b>	<b>51</b>
5.1 Introducción . . . . .	51
5.2 Resultados anteriores relacionados . . . . .	53
5.3 Preliminares . . . . .	54
5.4 Puntos en movimiento . . . . .	55
5.4.1 Transversales en líneas de segmentos generadas por puntos en movimiento . . . . .	55
5.4.2 Variantes sobre puntos en movimiento . . . . .	56
5.4.3 Dimensión Fija . . . . .	57
5.5 Conclusiones . . . . .	58
<b>Bibliografía</b>	<b>61</b>
<b>Índice alfabético</b>	<b>67</b>

# Índice de Figuras

1.1	Triangulación de $P$ coloreada. . . . .	5
1.2	Polígono que necesita $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ guardias. . . . .	6
1.3	Un polígono que requiere $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ guardias móviles y los polígonos de Paige y Shermer. . . . .	7
1.4	Galería de arte tradicional. . . . .	8
1.5	Polígono que necesita $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ guardias. . . . .	8
1.6	Un polígono ortogonal que requiere $\lfloor \frac{3n+4}{16} \rfloor$ guardias móviles. . . . .	9
1.7	Un polígono con $n$ vértices y $h$ huecos que requiere $\lceil \frac{n+h}{3} \rceil$ guardias para ser vigilado. . . . .	9
1.8	Polígono con $n$ vértices que necesita $\lfloor \frac{2n}{7} \rfloor$ vértices guardia. . . . .	10
1.9	Un polígono que requiere $\lfloor \frac{3n+4h+4}{16} \rfloor$ guardias móviles. . . . .	11
1.10	Polígonos ortogonales que requieren $\lfloor \frac{3n-4}{8} \rfloor$ reflectores ortogonales. . . . .	12
1.11	Polígonos ortogonales con huecos que cumplen con la cota del teorema 1.10. . . . .	12
1.12	Poliedro de Schönhardt. . . . .	13
1.13	Octoplex. . . . .	14
1.14	a) Vista externa de un multiplex. b) Corte transversal de un multiplex con un punto en el centro de cada pequeño cubo. Alrededor de cada punto, existen puntos que son invisibles a todos los vértices. Por lo tanto, este tipo de poliedro no es vigilable con vértices guardia y el número de puntos guardia es proporcional al número de estos pequeños cubos. . . . .	15
1.15	Poliedro con $6k + 6$ aristas que requiere $k$ aristas guardia. . . . .	15
1.16	Poliedro ortogonal con $12k + 12$ aristas que requiere $k$ aristas guardia. . . . .	16
1.17	Poliedro ortogonal que requiere $\lfloor \frac{f}{6} \rfloor$ caras guardia abiertas. . . . .	18

1.18	Poliedro con $4k + 3$ caras que requiere $k$ caras guardia. Cada cara abierta ve la punta de al menos uno de los picos tetraédricos. . . . .	18
2.1	Existencia de la diagonal de un polígono. . . . .	22
2.2	Tipos de vértices en una cara de un poliedro ortogonal, $c$ es un vértice convexo, $r$ un vértice cóncavo, y $s$ un vértice llano. . . . .	24
3.1	Poliedros convexos que tienen un número cuadrático de tetraedros. . . . .	30
3.2	Curvaturas poliédricas. Fuente: [19] . . . . .	32
3.3	Clasificación de vértices en poliedros ortogonales. La región esférica traslucida que se observa en cada caso corresponde al complemento del ángulo sólido interno del vértice del poliedro. . . . .	34
3.4	Familias de poliedros que minimizan la suma de ángulos sólidos. . . . .	35
3.5	a) Un poliedro ortogonal cuya suma de ángulos es mínima. b) Un cuboide. c) Un poliedro ortogonal que maximiza la suma de los ángulos sólidos. . . . .	37
4.1	Una ilustración de una $\alpha$ -cuña y una $\pi/2$ -cuña. . . . .	41
4.2	Ilustración de los rangos de iluminación (en amarillo) de aristas guardia abiertas, cerradas y $\pi/2$ , respectivamente. . . . .	41
4.3	Vista interior de los tipos de aristas en poliedros ortogonales. . . . .	42
4.4	Las figuras (a) y (b) muestran las caras superiores en azul, las caras inferiores en verde. Las figuras (c) y (d) muestran las caras izquierdas en azul y las caras derechas en verde. Correspondientemente en cada figura se muestran en rojo las aristas derechas, izquierdas, superiores e inferiores. . . . .	44
4.5	(a) Un poliedro ortogonal “tallado” dentro de otro. (b) Dos poliedros ortogonales “pegados”. . . . .	45
4.6	Poliedro ortogonal que cumple la cota del teorema 4.3 . . . . .	47
4.7	Puntos distinguidos, los puntos rojos se colocan dentro de las prominencias verticales y los puntos negros en las prominencias horizontales. (a) vista frontal, (b) vista superior, (c) vista a $45^\circ$ . . . . .	49
4.8	(a) punto distinguido $p_1$ y el conjunto de $\pi/2$ -aristas guardia que lo vigilan (b) punto distinguido $p_2$ y el conjunto de $\pi/2$ -aristas guardia que lo vigilan. . . . .	50

4.9	Familia de poliedros ortogonales que necesitan $\frac{4e}{45} \pi/2$ -aristas guardia para vigilar el poliedro. El punto negro dentro de cada “puente” permanece en la misma posición como estaba en la prominencia original. . . . .	50
5.1	a) Representación de un punto y su vector de velocidad asociado a este. b) Conjunto de $n$ puntos en el plano moviéndose en dirección vertical a la misma velocidad. . . .	52
5.2	a) Dos conjuntos de puntos rojos y azules. b) Plano dual que muestra las rectas correspondientes a los puntos rojos y azules. . . . .	56
5.3	Segmentos de líneas generados por puntos que se mueven a diferentes velocidades y en la misma dirección. . . . .	57
5.4	Segmentos de líneas generados por puntos que se mueven a diferentes velocidades. . . . .	59



# Agradecimientos

Primero, quiero agradecer a mi familia, quien siempre me ha dado un apoyo incondicional para cada uno de los proyectos que he emprendido. A mi madre por escucharme y alentarme en momentos difíciles. A mi padre que me formo una gran disciplina desde niño y sin ello no podría ser lo que soy hoy. A mis hermanas y sobrinos que han sido la fuente de discusiones, pero sobre todo grandes alegrías.

Posteriormente quiero agradecer a Jorge, quien ha sido un gran guía y me ha dado una formación integral. Sus enseñanzas no se han limitado a la ciencia e investigación, sino también al de la comida y vino. Por sus buenos consejos y las implicaciones que hay al hacer matemáticas. Sin duda todas estas experiencias me han marcado en estos años.

No puedo dejar de agradecer a Israel Aldana, José Luis Álvarez, Carlos Catana, Gerardo Martínez, Erick Solís, Carlos Seara, quienes fueron coautores de los resultados presentados en esta tesis. Además quiero mencionar a Carlos Alegría, Nestaly Marin, Carlor Velarde, Leonardo Martínez, Deborah Oliveros, David Flores, David Orden, Mikio Kano, Hernán González con quienes tuve la fortuna de trabajar, y de todos ellos me llevo un valioso aprendizaje.

Quiero agradecer a mis sinodales: David Flores, Mucuy-kak Guevara , Carlos Velarde y Juan Montellano por sus valiosos comentarios y correcciones a esta tesis.

Por último quiero agradecer a Eva Clark, Héctor Felix, Boe Heynike, Pradeep Kinjawadekar, Richard Lam, Atzimba López y Kip Parent por todo el apoyo brindado en estos cuatro años de estudio.



# Capítulo 1

## Introducción

Uno de los problemas más antiguos y más estudiados en el área de la geometría computacional es el de la galería de arte. El estudio de problemas relacionados con galerías de arte resulta ser de gran importancia, dado que se tiene una gran variedad de aplicaciones en distintas áreas de la computación, entre las cuales destacan: la robótica [33, 54], la planeación de movimiento [34, 39], el reconocimiento de patrones y la visión computacional [7, 16, 49, 50], la graficación por computadora [55, 14], el diseño por computadora [36, 11] y las redes inalámbricas [22].

El problema de iluminar una habitación de forma que tenga suficiente luz y utilizando el menor número de focos posible es equivalente al problema de la galería de arte. Geométricamente se puede representar la habitación como un polígono  $P$  y a los focos como puntos en el interior de  $P$ . Se dice que un punto  $p$  de  $P$  está iluminado si y sólo si existe un foco  $f$  tal que el segmento que une a  $p$  con  $f$  está contenido totalmente en  $P$ . Es por eso que a los problemas de galerías de arte se les refiere también como problemas de iluminación. En ocasiones los términos de vigilar e iluminar, así como guardias y focos se usan indistintamente en esta área ya que son equivalentes.

Durante una conferencia en Stanford en agosto de 1976, V. Klee hizo la siguiente pregunta: *¿Cuántos guardias son siempre suficientes para vigilar cualquier polígono con  $n$  vértices?* Poco tiempo después, V. Chvátal [15] estableció lo que ahora se conoce como el *Teorema de la Galería de Arte de Chvátal*, el cual dice que:  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  guardias son siempre suficientes y a veces necesarios para vigilar un polígono simple  $P$  de  $n$  vértices.

A partir de la publicación del teorema de Chvátal comenzó a surgir

una gran cantidad de trabajos de investigación relacionado con problemas de iluminación y galerías de arte. En 1987, apareció el libro *Art Gallery Theorems and Algorithms* de J. O'Rourke [42], el primer libro dedicado completamente al estudio de este tipo de problemas. Con la publicación de este libro comienzan a ser estudiadas una gran cantidad de variantes del problema original. Posteriormente aparecen compendios por T. Shermer [47] y J. Urrutia [51], los cuales contienen una gran colección de resultados sobre variantes del problema de la galería de arte. La mayoría de estos resultados son para ambientes planos, pero muy poca investigación se ha desarrollado para el caso tridimensional o de dimensiones mayores.

Otro de los problemas clásicos en la geometría computacional es el llamado *problema de la separabilidad de objetos geométricos*. Algunos ejemplos de los tipos de objetos pueden ser puntos, líneas, planos, polígonos o configuraciones de puntos que cumplan con ciertas restricciones. Algunas variantes de estos problemas pueden ser resueltos utilizando programación lineal en tiempo  $O(n)$ . En dos artículos, Megiddo [37, 38] demuestra que varios problemas de la geometría computacional, incluyendo el problema de encontrar el círculo más pequeño que contiene a un conjunto de puntos en el plano, el problema de separabilidad de un conjunto de puntos rojos y azules en un espacio de dimensión fija y otros, son resueltos en tiempo lineal. En [38] Megiddo probó que la programación lineal en  $\mathbb{R}^d$  se resuelve en  $O(f(d)) \times n$ , cuando  $d$  es una constante se resuelve en tiempo lineal.

Esta tesis surge de la motivación de extender resultados de iluminación de polígonos a dimensiones mayores. En particular nos enfocaremos en poliedros ortogonales; sus tipos de vértices, sus ángulos sólidos internos y la iluminación de ellos. Respecto a la separabilidad de objetos geométricos observamos que las variantes en la literatura son para objetos fijos, por lo que se nos hace interesante explorar variantes para objetos en movimiento.

En el resto del capítulo se introducirán algunas definiciones y conceptos que pondrán en contexto esta tesis.

## 1.1 Terminología básica

**Definición 1.1.** *Un polígono  $P$  es una sucesión ordenada de  $n$  puntos en el plano  $p_1, \dots, p_n$ , para  $n \geq 3$ , llamados los vértices de  $P$ , junto con el conjunto de segmentos de línea que unen a  $v_i$  con  $v_{i+1}$ , para  $i = 1, \dots, n-1$ , y  $v_n$  con  $v_1$ , llamado conjunto de aristas de  $P$ .*

Se dice que  $P$  es simple si y sólo si cualquier par de aristas no consecutivas no se intersectan. Un polígono simple divide al plano en dos regiones, una no acotada, llamada el *exterior* y una acotada, el *interior*. Una *diagonal* de  $P$  es un segmento contenido en el interior de  $P$  que une dos vértices de  $P$  no consecutivos. Por simplicidad, al decir polígono nos referiremos a un polígono simple junto con su interior.

Llamamos a un vértice  $v$  de  $P$  *convexo* si el ángulo interno formado por sus dos aristas incidentes es menor o igual que  $\pi$ , en otro caso  $v$  es llamado *cóncavo*.

Un polígono simple es llamado *ortogonal* si todas sus aristas son paralelas a los ejes coordenados  $x$  o  $y$ .

Dados dos puntos  $p$  y  $q$  dentro de un polígono  $P$ , decimos que  $q$  es *visible* desde  $p$  si y sólo si el segmento que une a  $p$  y  $q$  está totalmente contenido en  $P$ . Decimos que los puntos de un subconjunto finito  $J$ , contenido en  $P$  *vigilan* o *iluminan* a  $P$  si y sólo si cualquier punto  $p$  de  $P$  es visible desde algún punto  $u$  de  $J$ . El término *iluminar* se sigue de la noción de que si colocamos una fuente de luz que irradia en todas las direcciones en cada elemento de  $J$ ,  $P$  esta totalmente iluminado. El uso del término *vigilar* se sigue de la noción de que si colocamos un guardia en cada elemento de  $P$ , todo  $P$  esta vigilado. En este documento utilizaremos el término *iluminar* y *vigilar* de forma indistinta.

Una triangulación  $T$  de un polígono  $P$ , es una división del interior de  $P$  en triángulos con interiores ajenos, de tal forma que las aristas de estos triángulos solamente pueden ser aristas o diagonales de  $P$ . Las triangulaciones de polígonos juegan un papel muy importante en el estudio de los problemas de galerías de arte ya que muchos resultados se derivan a partir de ellas. En 1991, B. Chazelle [13] demostró que cualquier polígono simple puede ser triangulado en tiempo lineal, en 2001, N. Amato *et. al.* [6] presentaron un algoritmo aleatorizado de tiempo lineal esperado.

## 1.2 Variantes del problema de la galería de arte

Algunas de la restricciones que dan pie a algunas de las variantes más estudiadas del problema de la galería de arte son los tipos de guardias que vigilan la galería y las formas de las galerías. Algunos tipos de guardias estudiados en la literatura se enuncian a continuación:

- **Puntos guardia.** Estos guardias pueden estar colocados en cualquier parte del  $P$ .

- **Vértices guardia.** En este caso, sólo se permite colocar guardias en los vértices de  $P$ .
- **Aristas guardia.** Los guardias son segmentos de línea escogidos de entre las aristas de  $P$ . Existen dos variantes en la literatura, aristas guardia cerradas y aristas guardia abiertas. Diremos que una arista guardia es cerrada si incluye sus puntos extremos y abierta si los excluye. A menos que se indique lo contrario, asumiremos que las aristas guardia son cerradas. Un punto se considera vigilado si es visible desde algún punto de la trayectoria de un guardia.
- **Caras guardia.** Los guardias son polígonos elegidos de entre las caras del poliedro. Al igual que las aristas guardia existen caras guardia abiertas y caras guardia cerradas. Diremos que una cara guardia es cerrada si incluye la frontera de la cara y abierta si la excluye.
- **Guardias móviles.** Los guardias tienen la habilidad de moverse sobre segmentos de línea cerrados completamente contenidos en  $P$ .
- **Vértices y puntos reflectores.** Al igual que los guardias, distinguimos entre los que se colocan en cualquier parte de  $P$  y los que sólo pueden estar en los vértices de  $P$ . Los reflectores fueron introducidos por J. Urrutia en 1990 en un taller de iluminación en Barbados. La motivación de este tipo de guardias se debe a que muchos dispositivos de vigilancia tienen un rango de visión limitado.
- **Módems.** Este tipo de guardias son modelados como dispositivos inalámbricos cuya señal de radio puede penetrar un número acotado de objetos. Se dice que un módem  $m$  ilumina a un punto  $p$ , si el segmento que los une intersecta a lo más un número acotado de objetos. Este tipo de guardias fue introducido por O. Aichholzer *et. al.* en [5].
- **Guardias cromáticos.** Para esta variante se asume que los guardias tienen colores asignados. Se dice que un conjunto coloreado de puntos  $G$  de un polígono  $P$  vigilan a  $P$  si todo elemento  $p$  de  $P$  es visible desde al menos un elemento de  $G$ , y todos los elementos de  $G$  que ven a  $p$  tienen un color diferente. Esta variante fue introducida por H. Erickson *et. al.* en [28]

Al imponer restricciones en la forma de las galerías, surge una gran cantidad de variantes, como son:

- **Galerías tradicionales.** En esta variante la galería está formada por un conjunto de habitaciones rectangulares dentro de un edificio rectangular. Cualquiera dos habitaciones contiguas tienen una puerta que las une.
- **Galerías ortogonales.** En este tipo de galerías se restringe a que cada arista sea paralela a alguno de los ejes coordenados.
- **Galerías con huecos.** Para esta variante, se permite que la galería contenga otros polígonos, llamados huecos, cuyo interior no se considera parte del interior de la galería.
- **Galerías curvilíneas.** Este tipo de galerías asume que las aristas de la galería son arcos de curva. Este tipo de galerías fue introducido por M. Karavelas *et. al.* en [32].

### 1.3 Algunos resultados para polígonos

A continuación presentamos un conjunto de resultados para polígonos, para ilustrar las técnicas principales en esta área de investigación.

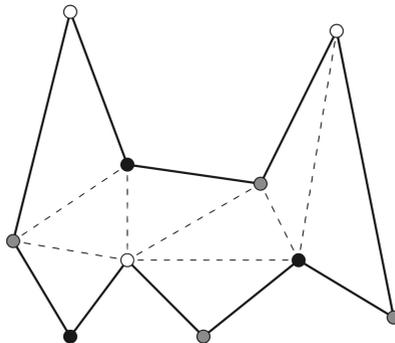


Figura 1.1: Triangulación de  $P$  coloreada.

### 1.3.1 Teorema clásico de Chvátal de la galería de arte

Empezamos con la prueba del teorema de la galería de arte de Chvátal, el cual fue propuesto originalmente para polígonos simples. Damos un bosquejo de la prueba de S. Fisk [24]:

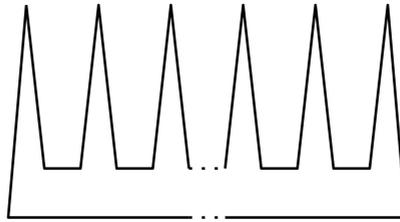


Figura 1.2: Polígono que necesita  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  guardias.

**Teorema 1.2.**  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  guardias son siempre suficientes y a veces necesarios para vigilar un polígono simple  $P$  con  $n$  vértices.

*Prueba.* Sea  $P$  un polígono simple con  $n$  vértices. Obtenemos una triangulación  $T$  de  $P$  agregando  $n - 2$  diagonales internas. Es fácil ver que podemos colorear los vértices de  $P$  usando tres colores, representados por los elementos del conjunto  $\{1, 2, 3\}$ , tales que cualesquiera dos vértices unidos por una arista de  $P$  o una diagonal de  $T$  tienen colores diferentes, vea figura 1.1. Esto divide el conjunto de vértices de  $P$  en tres clases cromáticas  $C_1, C_2, C_3$ . Como los vértices de cada triángulo de  $T$  tienen colores diferentes, cada una de las clases cromáticas vigila a  $P$ . Colocamos un guardia en cada vértice de la clase cromática más pequeña y el resultado se sigue.

Para ver que  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  guardias son algunas veces necesarios, consideremos el “polígono peine” mostrado en la figura 1.2. Cada “púa” del peine requiere un guardia, ya que ningún punto puede ver la punta de dos púas.  $\square$

En el caso de guardia móviles O’Rourke [41] demostró que:

**Teorema 1.3.**  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  guardias móviles son suficientes y en ocasiones necesarios para vigilar cualquier polígono con  $n$  vértices.

La figura 1.3a muestra un ejemplo de un polígono que requiere  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  guardias móviles para ser vigilado. Paige y Shelmer [47] se dieron cuenta

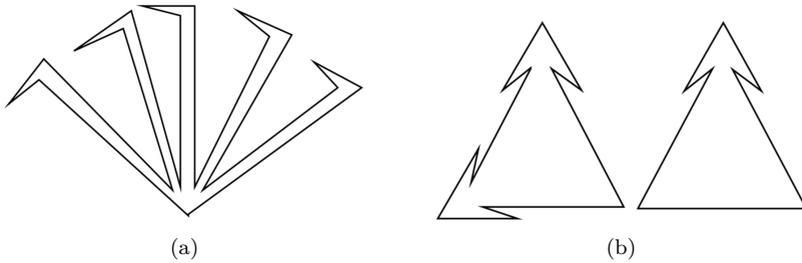


Figura 1.3: Un polígono que requiere  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  guardias móviles y los polígonos de Paige y Shermer.

que si cada guardia móvil es restringido a moverse sobre una arista del polígono, entonces  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  no son siempre suficientes. La figura 1.3b muestra los dos únicos contraejemplos que no cumplen la cota para aristas guardia.

### 1.3.2 Galerías tradicionales

En un escenario más realista, una galería de arte tradicional suele ser un edificio rectangular subdividido en habitaciones rectangulares. Se supone que cualesquiera dos habitaciones adyacentes tiene una puerta que las une, vea figura 1.4.

Entonces, ¿con cuántos guardias podemos vigilar una galería de arte tradicional de  $n$  habitaciones? Observemos que cualquier guardia colocado en la puerta de dos habitaciones es capaz de vigilar ambas habitaciones y dado que un guardia no puede estar en tres habitaciones a la vez, entonces faltan al menos  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  guardias para poder vigilar tal galería. El siguiente teorema [17] nos dice que esta cota es justa.

**Teorema 1.4.** *Cualquier galería de arte tradicional con  $n$  habitaciones puede ser vigilada exactamente por  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  guardias.*

### 1.3.3 Galerías ortogonales

La relajación de la estructura de galerías de arte a polígonos ortogonales simples permiten mejorar las cotas del número de guardias. El primer resultado para este tipo de galerías fue obtenido por J. Kahn *et al.* [30]

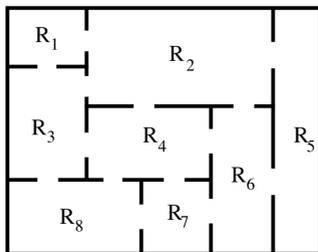


Figura 1.4: Galería de arte tradicional.

**Teorema 1.5.** *Cualquier polígono ortogonal con  $n$  vértices siempre puede ser vigilado usando a lo más  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  vértices guardia. En ocasiones  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  vértices guardia son necesarios.*

La prueba de este teorema se basa en una técnica similar a la usada por Fisk. La idea principal consiste en obtener una cuadrangulación convexa de  $P$ , lo cual induce una gráfica 4-coloreable, y tomando la clase cromática más pequeña se obtiene la cota. Estos guardias son ocasionalmente necesarios, por ejemplo para vigilar el “peine ortogonal” mostrado en la figura 1.5.

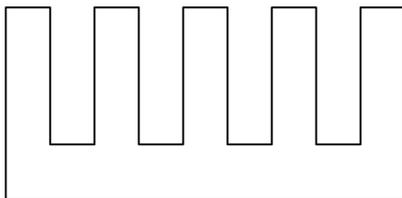


Figura 1.5: Polígono que necesita  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  guardias.

Esta prueba promovió el estudio de la descomposición de polígonos ortogonales en cuadriláteros convexos y en subpolígonos con forma de L, para más detalles consulte [47, 51].

Para guardias móviles en polígonos ortogonales, Aggarwal [4] demostró:

**Teorema 1.6.**  *$\lfloor \frac{3n+4}{16} \rfloor$  guardias móviles son suficientes y en ocasiones necesarios para vigilar cualquier polígono ortogonal con  $n$  vértices.*

Esta cota es justa, la figura 1.6 muestra un ejemplo de un polígono que cumple con la cota.

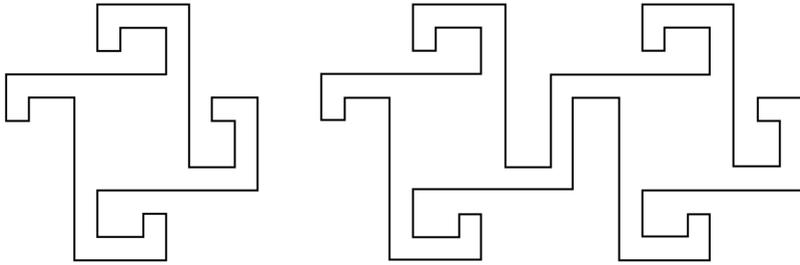


Figura 1.6: Un polígono ortogonal que requiere  $\lfloor \frac{3n+4}{16} \rfloor$  guardias móviles.

### 1.3.4 Galerías con huecos

Un *polígono con huecos* es un polígono  $P$  que encierra varios otros polígonos ajenos entre sí  $P_1, \dots, P_h$ , los huecos. Ninguna de las fronteras de  $P, P_1, \dots, P_h$  pueden intersectarse, y cada uno de los huecos es vacío. Se dice que  $P$  acota una región conexa de manera múltiple con  $h$  huecos: la región del plano interior a o en la frontera de  $P$ , pero fuera o sobre la frontera de  $P_1, \dots, P_h$ .

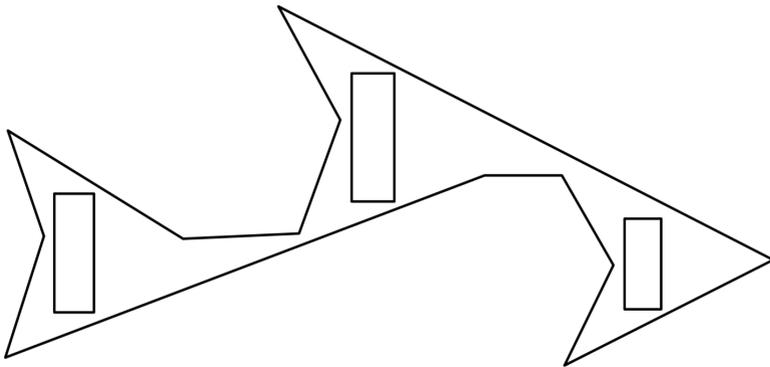


Figura 1.7: Un polígono con  $n$  vértices y  $h$  huecos que requiere  $\lceil \frac{n+h}{3} \rceil$  guardias para ser vigilado.

En 1991, Bjorling-Sachs y Sovaine [10] y Hoffmann, Kaufman y Kriegel [29] probaron de forma independiente el siguiente resultado para puntos guardia:

**Teorema 1.7.**  $\lceil \frac{n+h}{3} \rceil$  puntos guardia son siempre suficientes y en oca-

siones necesarios para vigilar cualquier polígono con  $n$  vértices y  $h$  huecos.

Para la cota inferior, la figura 1.7 muestra un polígono que requiere  $\lfloor \frac{n+h}{3} \rfloor$  guardias para ser vigilado.

Para polígonos ortogonales con  $n$  vértices y  $h$  huecos O'Rourke [42] demostró que

$$\left\lfloor \frac{n+2h}{4} \right\rfloor$$

vértices guardia son suficientes para vigilar cualquier polígono ortogonal. La figura 1.8 muestra una familia de polígonos ortogonales con huecos que requieren  $\lfloor \frac{2n}{7} \rfloor$  vértices guardia.

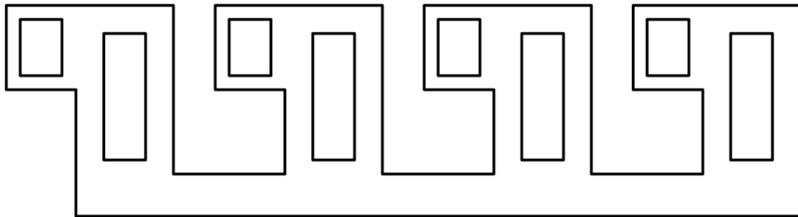


Figura 1.8: Polígono con  $n$  vértices que necesita  $\lfloor \frac{2n}{7} \rfloor$  vértices guardia.

El resultado de Aggarwal fue generalizado para guardias móviles en polígonos ortogonales con huecos por Györy, Hoffman, Kriegel y Shermer [27]. Ellos demostraron:

**Teorema 1.8.**  $\lfloor \frac{3n+4h+4}{16} \rfloor$  guardias móviles son siempre suficientes y en ocasiones necesarios para vigilar un polígono ortogonal.

La figura 1.9 muestra un ejemplo de un polígono que cumple con la cota.

### 1.3.5 Iluminación con reflectores ortogonales

En esta sección presentaremos la variante de iluminación con *reflectores*. En los problemas anteriores asumimos que los focos emiten la luz en todas las direcciones, sin embargo los reflectores emiten luz solamente en una zona angular de tamaño fijo. Entonces diremos que un reflector  $f_i$  es una fuente de luz colocada en un punto  $p$ , llamado su ápice;  $f_i$  ilumina dentro de una zona angular de tamaño  $\alpha_i$ , y dicha zona puede

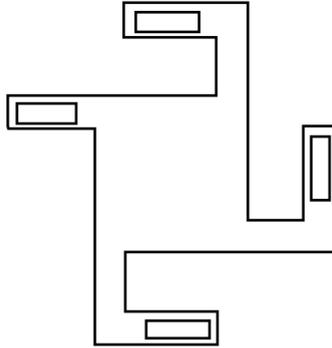


Figura 1.9: Un polígono que requiere  $\lfloor \frac{3n+4h+4}{16} \rfloor$  guardias móviles.

ser rotada sobre su ápice. Diremos que un reflector es ortogonal si su zona angular es de tamaño  $\pi/2$ .

Para polígonos ortogonales, Estivill-Castro y Urrutia [23] demuestran:

**Teorema 1.9.** *Cualquier polígono ortogonal con  $n$  vértices puede ser siempre iluminado usando a lo más  $\lfloor \frac{3n-4}{8} \rfloor$  vértices reflectores ortogonales. Si los reflectores pueden colocarse en cualquier parte de la frontera del polígono,  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  son suficientes. Ambas cotas son justas.*

La demostración del teorema 1.9 fue realizada obteniendo cuatro reglas de iluminación. En el capítulo 4 usaremos estas reglas para poliedros ortogonales. Las reglas de iluminación se definen de la siguiente forma: las aristas de un polígono ortogonal  $P$  se clasifican en cuatro tipos, *superior*, *izquierda*, *inferior* y *derecha*. La regla de iluminación *superior-derecha* se define como sigue: para cada vértice superior de cada arista derecha, y para cada vértice del extremo derecho de cada arista superior, colocamos un reflector ortogonal que ilumina el sector angular de  $\frac{\pi}{2}$  a  $\frac{3\pi}{2}$ . Es fácil verificar que estos reflectores iluminan  $P$ . Las reglas *superior-izquierda*, *inferior-izquierda* e *inferior-derecha* se definen de forma similar. Utilizando un argumento de conteo se demuestra que estas reglas de iluminación usan a lo más  $\lfloor \frac{3n-4}{8} \rfloor$  reflectores. Los ejemplos de la figura 1.10 cumplen con la cota.

Este resultado fue posteriormente extendido por Abello, Estivill-Castro, Shermer y Urrutia [2]. Ellos demostraron:

**Teorema 1.10.**  $\lfloor \frac{3n+4(h-1)}{8} \rfloor$  *vértices reflectores ortogonales son siem-*

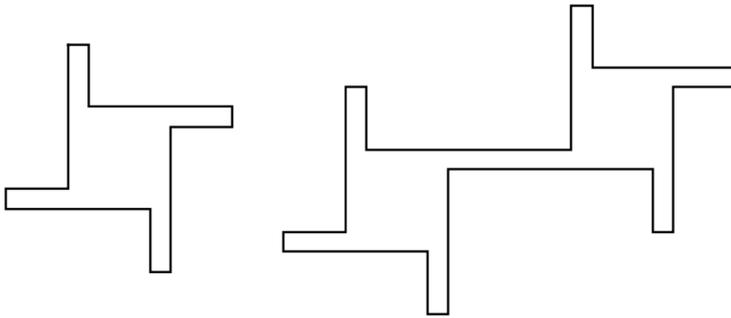


Figura 1.10: Polígonos ortogonales que requieren  $\lfloor \frac{3n-4}{8} \rfloor$  reflectores ortogonales.

*pre suficientes y en ocasiones necesarios para iluminar cualquier polígono ortogonal con  $n$  vértices y  $h$  huecos. La cota es justa.*

La figura 1.11 muestra polígonos ortogonales con huecos que cumplen con la cota.

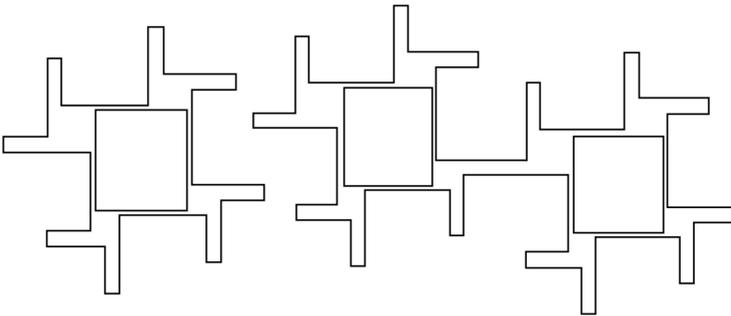


Figura 1.11: Polígonos ortogonales con huecos que cumplen con la cota del teorema 1.10.

## 1.4 Algunos resultados en poliedros

### 1.4.1 Tetraedralización de poliedros

La dificultad principal que surge cuando se intenta extender los resultados estudiados en la sección 1.3 a poliedros (la definición formal de

poliedro se da en el capítulo 2) es la triangulación, esta técnica usada en polígonos no se generaliza a dimensiones mayores. De hecho, existen poliedros cuyo interior no puede ser partido en tetraedros sin la adición de vértices. El poliedro de Schönhardt (figura 1.12), es el poliedro no convexo más simple que no puede ser tetraedralizado sin la adición de nuevos vértices, no hay forma de elegir cuatro de los seis vértices sin que el tetraedro generado quede completamente contenido dentro del poliedro, lo que lo hace no tetraedralizable. Sin embargo, si se agrega un vértice adicional en el centro del poliedro de Schönhardt, este puede ser partido en ocho tetraedros.

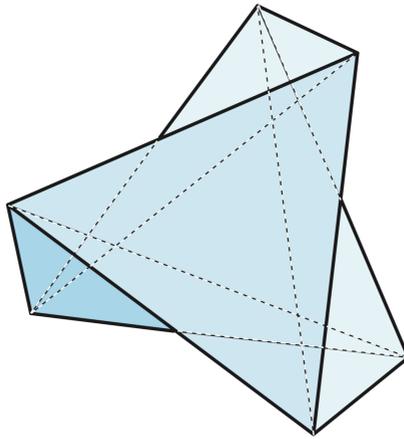


Figura 1.12: Poliedro de Schönhardt.

En el caso de poliedros ortogonales también existen ejemplos que no son tetraedralizables. Uno de los más conocidos es el llamado *octoplex*. Para ver que el octoplex no es tetraedralizable, observe que existen puntos  $p$  alrededor del centro del octoplex, tales que el segmento que conecta a  $p$  con cualquier vértice necesariamente cruza la frontera, vea la figura 1.13.

A continuación se enuncian algunas cotas y resultados para el caso del problema de la galería de arte para poliedros.

### 1.4.2 Cotas en puntos guardia

La clase de poliedros ilustrado en la figura 1.14a generaliza al octoplex. Este poliedro simple conexo es llamado *multiplex* [42]. Para poliedros ortogonales la cota del teorema 1.11 es justa, como lo demostraron

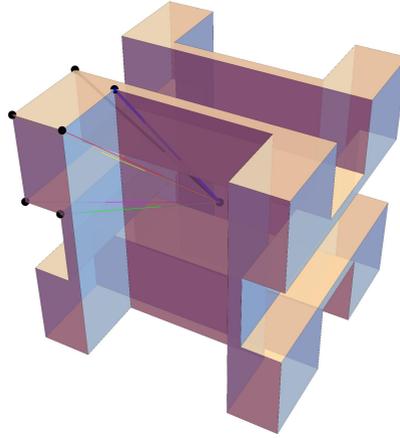


Figura 1.13: Octoplex.

Paterson y Yao en [44], vía particionamiento de espacio binario.

**Teorema 1.11.** (Paterson-Yao)  $\Theta(n^{3/2})$  puntos guardia son suficientes y ocasionalmente necesarios para vigilar un poliedro ortogonal con  $n$  vértices.

### 1.4.3 Cotas en aristas guardia

Ya que existen ejemplos de poliedros que no pueden ser vigilados por sus vértices incluso si colocamos un guardia en cada uno de ellos. Urrutia planteó la iluminación de poliedros con aristas guardia en [51] y hace las siguientes observaciones:

**Observación 1.12.** Existen poliedros con  $e$  aristas que requieren al menos

$$\left\lfloor \frac{e}{6} \right\rfloor - 1$$

aristas guardia para ser vigilados, para cualquier  $e$  grande.

La figura 1.15 muestra un ejemplo.

Para poliedros ortogonales, la cota inferior se demedia.

**Observación 1.13.** Existen poliedros ortogonales con  $e$  aristas que requieren al menos

$$\left\lfloor \frac{e}{12} \right\rfloor + O(1)$$

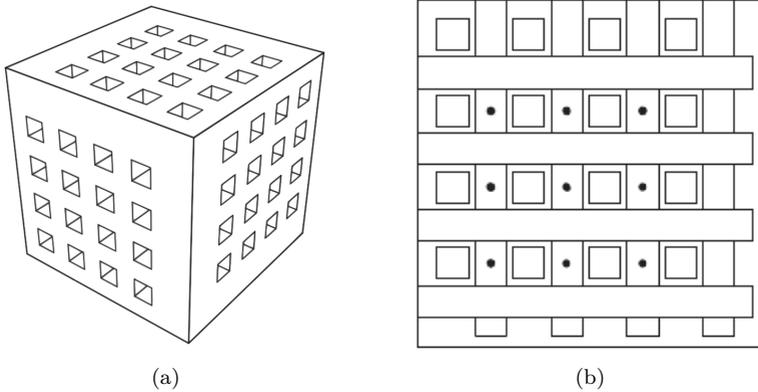


Figura 1.14: a) Vista externa de un multiplex. b) Corte transversal de un multiplex con un punto en el centro de cada pequeño cubo. Alrededor de cada punto, existen puntos que son invisibles a todos los vértices. Por lo tanto, este tipo de poliedro no es vigilable con vértices guardia y el número de puntos guardia es proporcional al número de estos pequeños cubos.

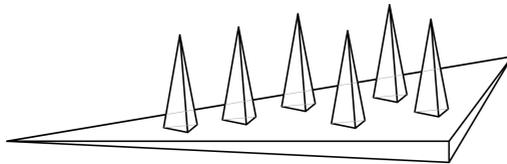


Figura 1.15: Poliedro con  $6k + 6$  aristas que requiere  $k$  aristas guardia.

*aristas guardia para ser vigilados, para  $e$  arbitrariamente grande.*

La figura 1.16 muestra un ejemplo.

El mismo autor también conjetura que estas cotas inferiores son justas.

**Conjetura 1.14.** *Cualquier poliedro simplemente conexo homeomorfo a la esfera con  $e$  aristas es vigilable por a lo mas*

$$\frac{e}{6} + O(1)$$

*aristas guardia.*

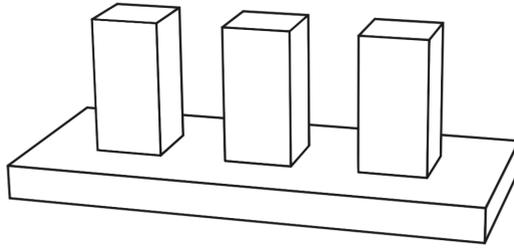


Figura 1.16: Poliedro ortogonal con  $12k+12$  aristas que requiere  $k$  aristas guardia.

**Conjetura 1.15.** *Cualquier poliedro ortogonal con  $e$  aristas es vigilable por a lo mas*

$$\frac{e}{12} + O(1)$$

*aristas guardia.*

También enunció el siguiente teorema.

**Teorema 1.16.** *Cualquier poliedro ortogonal con  $e$  aristas es vigilable por a lo mas*

$$\left\lfloor \frac{e}{6} \right\rfloor$$

*aristas guardia.*

Después de once años Benbernou *et al.* [9, 52] demostraron:

**Teorema 1.17.** *Todo poliedro ortogonal con  $e$  aristas y género arbitrario  $g$  puede siempre ser vigilado con*

$$\frac{11}{72}e - \frac{g}{6} - 1$$

*aristas guardia abiertas.*

En 2012, Cano, Tóth y Urrutia [12], redujeron ligeramente la cota superior de las aristas guardia para poliedros generales.

**Teorema 1.18.** *Cualquier poliedro con  $e$  aristas es vigilable por a lo mas*

$$\left\lfloor \frac{27e}{32} \right\rfloor$$

*aristas guardia.*

### 1.4.4 Cotas en caras guardia

Este modelo de iluminación fue introducido por Souvaine *et al.* [48] en el 2011. Ellos demostraron para poliedros ortogonales que:

**Teorema 1.19.** *Sea  $g$  el número mínimo de caras guardia cerradas suficientes para vigilar cualquier poliedro ortogonal con  $f$  caras homeomorfo a la esfera. Entonces*

$$\left\lfloor \frac{f}{7} \right\rfloor \leq g \leq \left\lfloor \frac{f}{6} \right\rfloor$$

Y para poliedros generales que:

**Teorema 1.20.** *Sea  $g$  el número de caras guardia cerradas suficientes para vigilar cualquier poliedro con  $f$  caras homeomorfo a la esfera. Entonces*

$$\left\lfloor \frac{f}{5} - \frac{2}{5} \right\rfloor \leq g \leq \left\lfloor \frac{f}{2} \right\rfloor$$

Viglietta [53, 52] estudió la variante de caras guardia abiertas y demostró los siguientes resultados:

**Teorema 1.21.** *Cualquier poliedro con sus caras orientadas en  $c$  direcciones con  $f$  caras es vigilable por*

$$\left\lfloor \frac{f}{2} - \frac{f}{c} \right\rfloor$$

*caras guardia abiertas (resp. cerradas).*

Para el caso de poliedros ortogonales la cota se vuelve justa:

**Teorema 1.22.** *Para vigilar un poliedro ortogonal con  $f$  caras,*

$$\left\lfloor \frac{f}{6} \right\rfloor$$

*caras guardia abiertas son suficientes y ocasionalmente necesarias.*

La figura 1.17 muestra un ejemplo.

**Teorema 1.23.** *Para vigilar un poliedro con  $f$  caras orientadas en 4 direcciones distintas,*

$$\left\lfloor \frac{f}{4} \right\rfloor$$

*caras guardia abiertas son siempre suficientes y en ocasiones necesarias.*

La figura 1.18 muestra un ejemplo.

Viglietta en su tesis doctoral estudia no sólo la iluminación de poliedros ortogonales sino también la exploración de ellos, el autor puede referirse a [52] para conocer más acerca de este tipo de problemas.

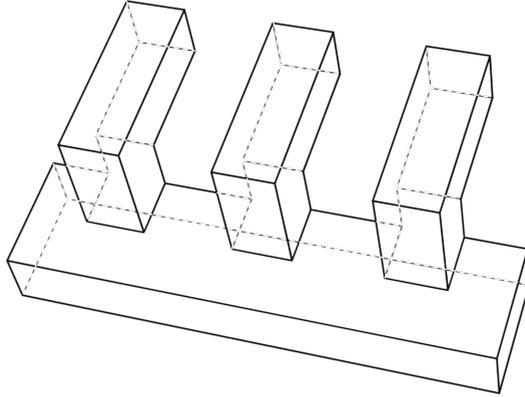


Figura 1.17: Poliedro ortogonal que requiere  $\lfloor \frac{f}{6} \rfloor$  caras guardia abiertas.

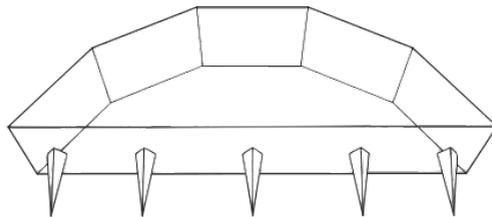


Figura 1.18: Poliedro con  $4k + 3$  caras que requiere  $k$  caras guardia. Cada cara abierta ve la punta de al menos uno de los picos tetraédricos.

## 1.5 Separabilidad y programación lineal

Un problema de optimización tiene la forma

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && f_0(\mathbf{x}) \\ &\text{sujeto a} && f_i \leq b_i, \quad \text{para } i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (1.1)$$

el vector  $\mathbf{x}$  es la *variable de optimización* del problema, la función  $f_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es la *función objetivo*, las funciones  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  son las *funciones de restricción* y las constantes  $b_i$  son los límites o cotas, para las restricciones. Un vector  $\mathbf{x}^*$  es llamado *solución* del problema (1.1), si  $f_0(\mathbf{x}^*)$  tiene el mínimo para todos los vectores que satisfacen las restricciones.

A continuación damos una breve descripción del algoritmo de Megiddo para resolver problemas de programación lineal en tiempo lineal, para el caso bidimensional. La descripción completa para el caso  $n$ -dimensional puede encontrarse en [38]. El algoritmo asume que la estructura del programa de optimización es de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && y \\ &\text{sujeto a} && \\ &&& y \geq a_i x + b_i, \quad i \in I_1 \\ &&& y \leq a_i x + b_i, \quad i \in I_2 \\ &&& a \leq x \leq b \end{aligned} \quad (1.2)$$

con  $|I_1| + |I_2| \leq n$  y  $-\infty \leq a, b \leq \infty$ . Se definen las funciones  $h$  y  $g$  como sigue,

$$\begin{aligned} g(x) &= \max\{a_i x + b_i \mid i \in I_1\} \\ h(x) &= \min\{a_i x + b_i \mid i \in I_2\} \end{aligned}$$

$g$  y  $h$  son funciones lineales a tramos,  $g$  es convexa y  $h$  es cóncava  $I_1$  representa el conjunto de restricciones *piso* e  $I_2$  representa el conjunto de restricciones *techo* del programa de programación lineal. Un programa de la forma (1.1) puede ser transformado a la forma (1.2) en tiempo  $O(n)$ , ver [37].

El algoritmo se puede describir en cuatro pasos:

- *Emparejamiento*: Se forman pares de líneas de forma arbitraria tanto para las restricciones techo como para las restricciones piso,

y se calculan los puntos de intersección de ellas. Si hay un par de líneas paralelas, una de ellas puede ser removida ya que es redundante y no formará parte de la solución final.

- *Mediana*: Se encuentra la mediana  $x_m$  respecto a la coordenada  $x$  de entre los puntos de intersección.
- *Óptimo relativo*: Se quiere decidir en que dirección, respecto a  $x_m$ , se encuentra el valor óptimo. Para  $x_m$  se calculan  $g(x_m)$  y  $h(x_m)$  sobre las restricciones que pasan por  $x_m$ . Se calculan las pendientes a partir de las derivadas de  $g(x_m)$  y  $h(x_m)$ . Por propiedades de convexidad, si existe una pendiente que decrece, el valor óptimo debe estar sobre esa dirección. En otro caso la mediana es un mínimo y el problema esta resuelto.
- *Podado*: Para cada par de líneas, con punto de intersección opuesto a la dirección del punto óptimo respecto a la mediana, removemos la mitad de las restricciones (una de ellas no participará en la solución final).

En cada iteración, se eliminan un cuarto de las restricciones del conjunto actual. Cada uno de los pasos se resuelve en tiempo lineal en el número de las restricciones. Repetir este proceso implica que el tiempo de ejecución  $T(n)$  del algoritmo satisface  $T(n) = O(n) + T(\frac{3}{4}n)$ . Por lo tanto el tiempo total de ejecución del algoritmo es  $O(n)$ .

Este algoritmo fue utilizado por Megiddo para resolver varios problemas geométricos, de los cuales algunos son: el centro ponderado de un árbol, el círculo más pequeño que encierra  $n$  puntos, la separabilidad de puntos rojos y azules, separabilidad circular de puntos rojos y azules. Este algoritmo será de gran importancia en la solución de los problemas planteados en el capítulo 5.

# Capítulo 2

## Poliedros

En este capítulo estudiaremos el problema de la clasificación de vértices en poliedros ortogonales. Extenderemos algunos resultados de polígonos en  $\mathbb{R}^2$  a poliedros en  $\mathbb{R}^3$ . La primera sección provee algunas definiciones sobre polígonos y poliedros que serán de utilidad en la demostración del resultado principal del capítulo. En la segunda sección, primero se presenta un resultado para poliedros ortogonales homeomorfos a la esfera y posteriormente se extiende a poliedros ortogonales generales.

### 2.1 Preliminares

**Definición 2.1.** *Un poliedro  $\mathcal{P}$  en  $\mathbb{R}^3$  es un conjunto compacto acotado por una variedad lineal a tramos.*

Una *cara* de un poliedro es un subconjunto máximo planar de su frontera cuyo interior es conexo y no vacío. Un poliedro es *ortogonal* si todas sus caras son paralelas a los planos  $xy$ ,  $xz$  o  $yz$ . Las caras de un poliedro pueden ser polígonos con huecos, y si el poliedro es ortogonal, entonces sus caras y sus huecos también son ortogonales. Un *vértice* de un poliedro es un vértice de cualquiera de sus caras. Una *arista* es un segmento de línea recta de longitud positiva mínima compartida entre dos caras y que une dos vértices del poliedro.

El *género*  $g$  de una superficie orientable conexa es el máximo número de curvas cerradas simples que no se intersectan, y que se pueden dibujar sobre la superficie sin separarla [40]. En términos muy generales, se puede interpretar como el número de agujeros de una superficie.

**Teorema 2.2** (Teorema de Triangulación [42]). *Un polígono de  $n$  vértices se puede dividir en  $n - 2$  triángulos mediante la adición de  $n - 3$  diagonales internas.*

*Prueba.* La prueba es por inducción sobre  $n$ . El teorema es trivialmente cierto para  $n = 3$  ya que el polígono es un triángulo. Sea  $P$  un polígono con  $n \geq 4$  vértices. Sea  $v_2$  un vértice convexo de  $P$  y sean  $v_1, v_2, v_3$  tres vértices consecutivos. Buscamos una diagonal interna  $d$ . Si el segmento  $v_1v_3$  está completamente al interior de  $P$ , es decir, sin intersectar la frontera de  $P$ , entonces  $d = v_1v_3$ . En otro caso el triángulo  $v_1v_2v_3$  deberá contener al menos un vértice de  $P$ . Sea  $u$  el vértice más alejado de  $v_1v_3$  (ver figura 2.1) y  $d = v_2u$ . En cualquiera de los casos,  $d$  divide a  $P$  en dos polígonos más pequeños  $P_1$  y  $P_2$ . Si  $P_i$  tiene  $n_i$  vértices,  $i = 1, 2$ , entonces  $n_1 + n_2 = n + 2$  ya que los puntos extremos de  $d$  están compartidos entre  $P_1$  y  $P_2$ . Claramente  $n_i \geq 3$ ,  $i = 1, 2$ , lo cual implica que  $n_i < n$ ,  $i = 1, 2$ . Aplicando hipótesis de inducción a cada polígono resulta en una triangulación para  $P$  de  $(n_1 - 2) + (n_2 - 2) = n - 2$  triángulos, y  $(n_1 - 3) + (n_2 - 3) + 1 = n - 3$  diagonales, incluyendo  $d$ .  $\square$

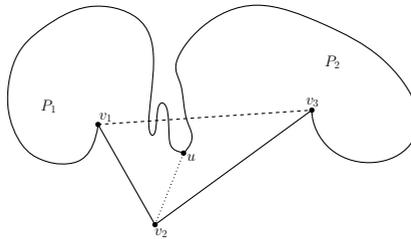


Figura 2.1: Existencia de la diagonal de un polígono.

**Corolario 2.3.** *La suma de los ángulos internos de un polígono simple es  $(n - 2)\pi$ .*

*Prueba.* Por el teorema 2.2, todo polígono simple de  $n$  vértices puede ser dividido en exactamente  $n - 2$  triángulos usando diagonales que unen pares de vértices del polígono, y como la suma de los ángulos de un triángulo es  $\pi$ , entonces la suma de los ángulos internos de un polígono simple es  $(n - 2)\pi$ .  $\square$

**Observación 2.4.** *En un polígono ortogonal todos sus ángulos son de  $\pi/2$  para cada vértice convexo y  $3\pi/2$  para cada vértice cóncavo.*

**Lema 2.5** ([42]). *En un polígono ortogonal de  $n$  vértices, de los cuáles  $k$  son convexos,  $n = 2k - 4$ .*

*Prueba.* Sea  $r$  el número de vértices cóncavos, entonces,  $n = k + r$ . Ya que la suma de los ángulos internos de un polígono simple es  $(n - 2)\pi$ , entonces,

$$(n - 2)\pi = k(\pi/2) + r(3\pi/2)$$

Resolviendo para  $r$  y substituyendo en  $n = k + r$  se obtiene  $n = 2k - 4$ .  $\square$

Se sigue del lema 2.5 el siguiente corolario,

**Corolario 2.6.** *El número de vértices convexos en polígonos ortogonales es  $k = (n + 4)/2$  y el número de vértices cóncavos es  $r = (n - 4)/2$ .*

A continuación se enuncia una generalización de la fórmula de Euler, conocida como la fórmula de Euler–Poincaré, la cual incluye el género y los huecos en las caras de un poliedro.

**Teorema 2.7** ([45]). *Para cualquier poliedro de género  $g$  con  $f$  caras,  $e$  aristas,  $v$  vértices y un total de  $h$  huecos en sus caras, la identidad*

$$v - e - h + f = 2 - 2g$$

*se cumple.*

Ahora estamos listos para extender algunos de estos resultados a  $\mathbb{R}^3$ .

## 2.2 Clasificación de vértices en poliedros ortogonales

Sea  $v$  un vértice de un poliedro ortogonal  $\mathcal{P}$ . Dada una cara  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{P}$  que contiene a  $v$ , decimos que  $v$  es un vértice *convexo*, *llano* o *cóncavo* de  $\mathcal{F}$  si el ángulo de  $\mathcal{F}$  en  $v$  es menor que  $\pi$ , igual a  $\pi$ , o mayor que  $\pi$ , respectivamente, ver figura 2.2. Obsérvese que en el plano, los vértices llanos en polígonos no tienen mucho sentido, sin embargo, cuando se trata de poliedros, en muchos casos un vértice puede aparecer como un vértice llano en alguna de sus caras, ver por ejemplo la figura 3.3d.

Decimos que un vértice  $v$  de un poliedro  $\mathcal{P}$  es *convexo en las caras*, por simplicidad *convexo*, si es convexo o llano en todas las caras de  $\mathcal{P}$  en las que participa. Si  $v$  es un vértice cóncavo en exactamente una de las

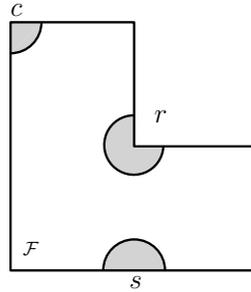


Figura 2.2: Tipos de vértices en una cara de un poliedro ortogonal,  $c$  es un vértice convexo,  $r$  un vértice cóncavo, y  $s$  un vértice llano.

caras en que participa, lo llamamos vértice *cóncavo* de  $\mathcal{P}$ . Probaremos un resultado que generaliza al corolario 2.6.

Comenzamos demostrando el siguiente resultado respecto a los poliedros que son homeomorfos a la esfera, y cuyo 1-esqueleto es una gráfica cúbica conexa. Posteriormente extendemos este resultado a poliedros ortogonales generales.

**Teorema 2.8.** *Sea  $\mathcal{P}$  un poliedro ortogonal en  $\mathbb{R}^3$  homeomorfo a la esfera, con  $n = 2k$  vértices, y tal que su 1-esqueleto es una gráfica cúbica conexa. Entonces  $\mathcal{P}$  tiene  $(n + 8)/2$  vértices convexos y  $(n - 8)/2$  vértices cóncavos*

*Prueba.* Ya que cada vértice tiene grado tres, el número de aristas  $e$  es  $3k$ . Por la fórmula de Euler, el número de caras  $f$  es  $k + 2$ . El número de vértices cóncavos en un polígono ortogonal es  $(n - 4)/2$ , por lo tanto el número de vértices cóncavos en la cara de  $\mathcal{P}$  es  $(V_i - 4)/2$ , donde  $V_i$  es el número de vértices en dicha cara. Entonces el número de vértices cóncavos de  $\mathcal{P}$  es

$$r = \sum_{i=1}^{k+2} \frac{V_i - 4}{2}. \quad (2.1)$$

Multiplicando por 2 la ecuación (2.1), tenemos

$$2r = \sum_{i=1}^{k+2} V_i - \sum_{i=1}^{k+2} 4.$$

Ya que el total de vértices es  $2k$  y como cada vértice es incidente a tres caras, entonces el número de vértices es contado tres veces cuando la

primer suma es calculada, se obtiene

$$\begin{aligned} 2r &= 6k - 4(k + 2), \text{ equivalente a} \\ r &= k - 4. \end{aligned}$$

Como  $n = 2k$ ,  $r = (n - 8)/2$ , y como  $n = c + r$ ,  $c = (n + 8)/2$ .  $\square$

A continuación presentamos dos lemas que nos ayudarán a incorporar los vértices llanos y los huecos en las caras en el conteo de vértices convexos y cóncavos de un poliedro ortogonal.

**Lema 2.9.** *Considere un polígono ortogonal  $P$  con  $n$  vértices de los cuales  $s$  son llanos. Entonces el número de vértices cóncavos y convexos de  $P$  es  $r = (n - s - 4)/2$  y  $c = (n - s + 4)/2$ , respectivamente.*

*Prueba.* Como la suma de los ángulos internos de un polígono simple es  $\pi(n - 2)$ , mientras que el ángulo de cada vértice convexo es  $\pi/2$ , el de cada vértice cóncavo es  $3\pi/2$  y el de cada vértice llano es  $\pi$ , entonces

$$\pi(n - 2) = \left(\frac{\pi}{2}\right)c + \left(\frac{3\pi}{2}\right)r + (\pi)s.$$

Resolviendo para  $c$  y sustituyendo en  $n = c + r + s$  obtenemos  $n = 2r + s + 4$ . Por lo tanto,  $r = (n - s - 4)/2$  y  $c = (n - s + 4)/2$ .  $\square$

Ahora probaremos el siguiente lema para los polígonos ortogonales con huecos:

**Lema 2.10.** *Sea  $P$  un polígono ortogonal con  $n$  vértices,  $h$  huecos, y un total de  $s$  vértices llanos. Entonces el número de vértices cóncavos y convexos son  $r = (n - s + 4h - 4)/2$  y  $c = (n - s - 4h + 4)/2$ , respectivamente.*

*Prueba.* Obsérvese que un hueco es un polígono ortogonal tal que sus vértices convexos son cóncavos en  $P$ , sus vértices cóncavos son convexos en  $P$  y sus vértices llanos son llanos en  $P$ . Por lo tanto, usando el lema 2.9, tenemos que si  $m$  es el número de vértices en  $P$  sin los huecos,  $s_m$  de los cuales son llanos, y cada hueco tiene  $n_i$  vértices,  $s_i$  de los cuales son llanos, entonces el número de vértices cóncavos de  $P$  es

$$r = \left(\sum_{i=1}^h \frac{n_i - s_i + 4}{2}\right) + \frac{m - s_m - 4}{2} = \frac{n - s + 4h - 4}{2}.$$

Entonces se sigue automáticamente que el número de vértices convexos en  $P$  es  $c = (n - s - 4h + 4)/2$ .  $\square$

Sean  $k_3$  los vértices de grado 3,  $k_4$  los vértices de grado 4, y  $k_6$  los vértices de grado 6 en el 1-esqueleto de un poliedro.

Ahora estamos listos para presentar la extensión del teorema 2.8 a poliedros ortogonales generales.

**Teorema 2.11.** *Sea  $\mathcal{P}$  un poliedro ortogonal en  $\mathbb{R}^3$  con  $n = k_3 + k_4 + k_6$  vértices y género arbitrario  $g$ . Entonces  $\mathcal{P}$  tiene  $(n - 3(k_4 + k_6) + 8g - 8)/2$  vértices cóncavos y  $(n + 3(k_4 + k_6) - 8g + 8)/2$  vértices convexos.*

*Prueba.* El número de aristas  $e$  es  $3k_3/2 + 2k_4 + 3k_6$ . Usando la fórmula de Euler-Poincaré, el número de caras  $f$  es  $k_3/2 + k_4 + 2k_6 + 2 + h - 2g$ . Por el lema 2.10, el número de vértices cóncavos en  $\mathcal{P}$  es

$$r = \sum_{i=1}^f \frac{V_i - s_i + 4h_i - 4}{2}, \quad (2.2)$$

donde  $V_i$ ,  $s_i$ , y  $h_i$  son el número de vértices, vértices llanos, y huecos respectivamente, de la  $i$ -ésima cara de  $\mathcal{P}$ .

De la ecuación (2.2) obtenemos

$$2r = \sum_{i=1}^f V_i - \sum_{i=1}^f s_i + \sum_{i=1}^f 4h_i - \sum_{i=1}^f 4.$$

En la primera suma contamos el número total de vértices: los  $k_3$  vértices son contados tres veces, los  $k_4$  vértices son contados 4 veces y los vértices  $k_6$  son contados 6 veces. La segunda suma cuenta el número total de vértices llanos pero estos son solamente vértices  $k_4$  y estos son contados dos veces. La tercer suma da el total del número de huecos en  $\mathcal{P}$ . Entonces tenemos

$$2r = 3k_3 + 4k_4 + 6k_6 - 2k_4 + 4h - 4 \left( \frac{k_3}{2} + k_4 + 2k_6 + 2 + h - 2g \right)$$

$$2r = k_3 - 2k_4 - 2k_6 - 8 + 8g. \quad (2.3)$$

Como  $n = k_3 + k_4 + k_6$ , tenemos

$$r = (n - 3(k_4 + k_6) + 8g - 8)/2.$$

Ya que  $n = c + r$ ,  $c = (n + 3(k_4 + k_6) + 8 - 8g)/2$ . □

Esta es la generalización enunciada del corolario 2.6.

## 2.3 Conclusiones

En este capítulo, hemos caracterizado los vértices convexos y cóncavos en poliedros ortogonales, esta es la extensión natural del resultado de polígonos ortogonales al espacio. Una de las preguntas que quedan abiertas es si este resultado puede extenderse a poliedros generales, para poliedros generales el tipo de ángulos en sus caras no está acotado como en el caso de los poliedros ortogonales por lo que este mismo tipo de enfoque no suena factible, sin embargo si acotamos el número de direcciones de las caras del poliedro general podríamos caracterizar algunas familias y sentar bases para un resultado más general.



# Capítulo 3

## Suma de ángulos sólidos

En este capítulo se obtiene cotas superiores e inferiores sobre la suma de ángulos sólidos que un poliedro ortogonal de  $n$  vértices puede alcanzar.

### 3.1 Introducción

En el plano, para medir el ángulo interno de un polígono en un vértice  $v$ , usualmente consideramos un círculo lo suficientemente pequeño centrado en  $v$  y que no contenga ninguno de los otros vértices del polígono, medimos la longitud de la porción del círculo que cae dentro del polígono, y entonces lo dividimos entre su radio. De esta forma tenemos ángulos que varían entre 0 y  $2\pi$ . Es bien conocido desde la antigüedad que la suma de los ángulos de un triángulo es  $\pi$ . En el caso de un polígono simple de  $n$  vértices, la suma de los ángulos internos es  $(n - 2)\pi$  (ver corolario 2.3). Extenderemos estas ideas a poliedros en  $\mathbb{R}^3$ .

Sea  $\mathcal{P}$  un poliedro en  $\mathbb{R}^3$  y  $v$  un vértice de  $\mathcal{P}$ . El *ángulo sólido* de  $\mathcal{P}$  en  $v$  se define como sigue: Considere una esfera lo suficientemente pequeña  $\mathcal{C}$  centrada en  $v$  y que no contenga ninguno de los otros vértices del poliedro. El tamaño del ángulo de  $\mathcal{P}$  en  $v$  es el *área* de la porción de la frontera de  $\mathcal{C}$  que cae dentro de  $\mathcal{P}$  dividida por el radio de  $\mathcal{C}$  al cuadrado. Ya que el área de una esfera unitaria es  $4\pi$ , entonces el máximo tamaño de los ángulos sólidos en los vértices del poliedro es a lo más  $4\pi$ .

En el plano es bien conocido que la suma de ángulos de un triángulo es siempre  $\pi$ . Este resultado no se generaliza a tetraedros en  $\mathbb{R}^3$ , ya que para cualquier  $\alpha < 2\pi$  existe un tetraedro tal que la suma de sus ángulos sólidos es  $\alpha$ , ver [25]. De hecho, no es difícil ver que hay

poliedros con un número arbitrariamente grande de vértices tal que la suma de sus ángulos sólidos es arbitrariamente pequeña. Una forma fácil de mostrar ésto es como sigue: Encuentre un poliedro convexo  $\mathcal{P}$  con  $n$  vértices tal que tiene una tetraedralización con un número cuadrático  $m$  de tetraedros. Como la suma de los ángulos sólidos de los tetraedros usados en la tetraedralización de  $\mathcal{P}$  es la suma de los ángulos sólidos de  $\mathcal{P}$ , los cuales suman a lo más  $2n\pi$ , se cumple que la tetraedralización contiene un tetraedro tal que la suma de sus ángulos sólidos es a lo más  $\frac{2n\pi}{m}$ , la cual tiende a cero conforme  $m$  se incrementa. Esto puede ser alcanzado usando un poliedro cíclico cuyos vértices son los  $n$  puntos de la curva de momento  $\{p_i = (i, i^2, i^3) : i = 1, \dots, n\}$ . Es bien conocido que tal poliedro tiene una tetraedralización con  $(n-1)^2$  tetraedros, ver [26]. Nosotros damos otro poliedro, al cual llamamos *concha de mar*, ver figura 3.1. Una concha de mar de tamaño  $(r \times r)$  puede ser tetraedralizada usando  $(n-1)^2$  tetraedros.

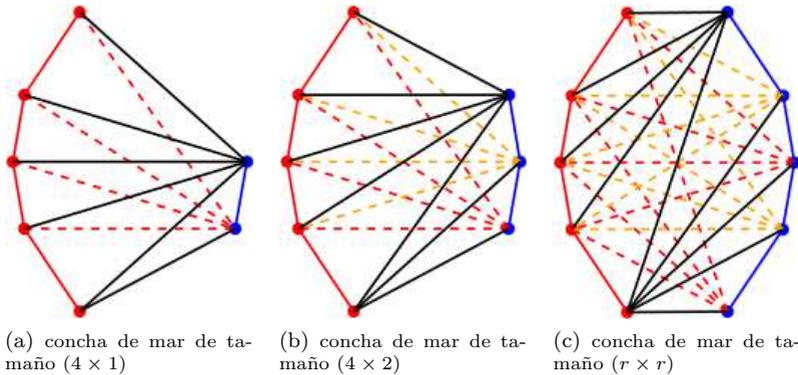


Figura 3.1: Poliedros convexos que tienen un número cuadrático de tetraedros.

Los vértices de una concha de mar de tamaño  $(r \times 1)$  son los  $n$  vértices de una cadena convexa contenida en un plano  $P$  en  $\mathbb{R}^3$ , más los vértices de un segmento no paralelo a  $P$ , opuesto a la cadena convexa y lo suficientemente lejano de ella. Una concha de mar de tamaño  $(r \times 1)$  tiene una tetraedralización con  $n-1$  tetraedros, en la figura 3.1a se muestra una concha de mar de tamaño  $(4 \times 1)$ . Una concha de mar de tamaño  $(r \times s)$  tiene  $n+m$  vértices,  $n$  sobre una cadena convexa contenida en un plano  $P$  en  $\mathbb{R}^3$  y  $m$  en una segunda cadena convexa contenida en un plano ortogonal a  $P$ . Estas cadenas convexas están una frente a la otra, y a una distancia lo suficientemente lejana. Una concha

de mar de tamaño  $(r \times s)$  tiene una tetraedralización con  $(n-1) \times (m-1)$  tetraedros, ver figura 3.1b.

Una concha de mar de tamaño  $(r \times r)$  es convexa, y tiene una tetraedralización con  $(n-1)^2$  tetraedros. Para ver esto, observe que una concha de mar de tamaño  $(r \times r)$  es la unión de  $n-1$  diferentes conchas de mar de tamaño  $(r \times 1)$ , y a su vez cada una de ellas es la unión de  $n-1$  tetraedros, ver figura 3.1c.

Obsérvese que para los poliedros ortogonales el tamaño del ángulo sólido en cada uno de sus vértices es de al menos  $\pi/2$ , y como máximo  $7\pi/2$ , cada vértice de un poliedro ortogonal cubre uno, tres, cuatro, cinco, o siete octantes, vea la figura 3.3. Así, una pregunta natural que surge es la siguiente: ¿Podemos caracterizar los poliedros ortogonales de  $n$  vértices que minimizan, o maximizan, la suma de sus ángulos sólidos?

En este capítulo se demuestra que la suma de los ángulos sólidos de cualquier poliedro ortogonal con  $n$  vértices y género arbitrario  $g$  es al menos  $(n-4+4g)\pi$  y a lo mucho  $(3n-24-4g)\pi$ ,  $n \geq 8$ . También damos la clasificación de las familias de poliedros ortogonales que alcanzan estas cotas.

## 3.2 Preliminares

**Definición 3.1.** *La curvatura Gaussiana  $K(v)$  en un vértice  $v$  de una superficie poliédrica es  $2\pi$  menos la suma de los ángulos de las caras incidentes a  $v$ .*

A la curvatura Gaussiana también se le referencia como el *déficit de un ángulo* en un vértice. La figura 3.2 muestra algunos ejemplos de curvaturas poliédricas.

La curvatura total de un poliedro se concentra en los vértices. El siguiente teorema relaciona la curvatura total de un poliedro con su característica de Euler–Poincaré, en otras palabras este teorema relaciona la geometría del poliedro con su topología. Este teorema fue descubierto por Descartes y posteriormente extendido por varios autores entre ellos Gauss y Bonnet.

**Teorema 3.2.** *(Gauss-Bonnet) Para un poliedro  $\mathcal{P}$  con género arbitrario  $g$ ,*

$$\sum_{v \in \mathcal{P}} K(v) = 2\pi(2 - 2g). \quad (3.1)$$

Una demostración del teorema se encuentra en [19]. La demostración se hace utilizando la fórmula de Euler–Poincaré.

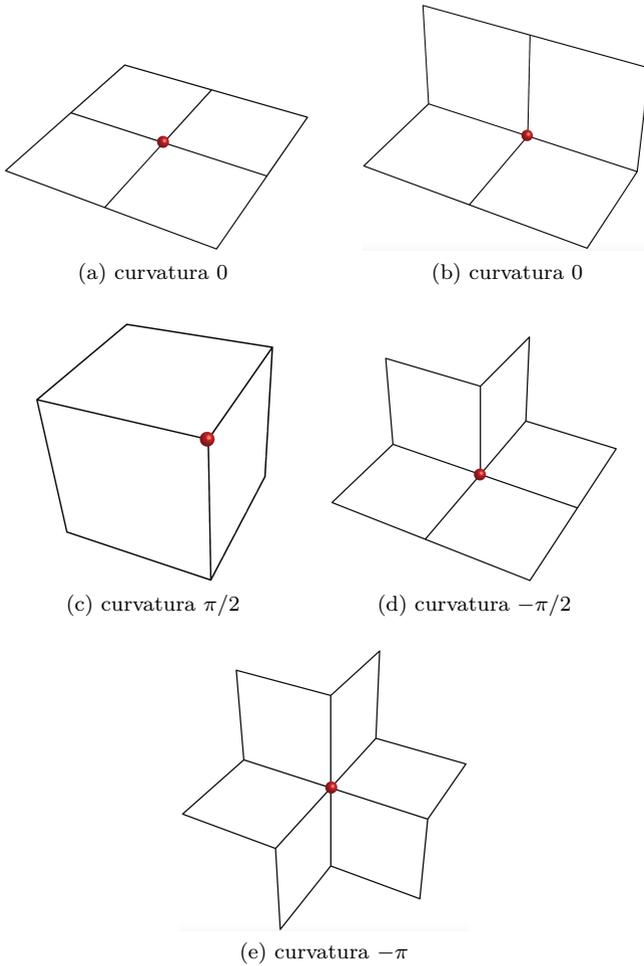


Figura 3.2: Curvaturas poliédricas. Fuente: [19]

### 3.3 Suma de ángulos sólidos en poliedros ortogonales

Sea  $\mathcal{P}$  un poliedro ortogonal en  $\mathbb{R}^3$ . Clasificamos los vértices de  $\mathcal{P}$  según el tamaño de los ángulos sólidos internos. Un vértice  $x$  de  $\mathcal{P}$  se clasifica como *1-octante* si su ángulo sólido interno es  $\pi/2$  (ver figura 3.3a) y *3-octante* si su ángulo sólido interno es  $3\pi/2$  (ver figura 3.3b). Los vértices *4-octante*, *5-octante* y *7-octante* se definen de manera similar, como se ilustra en figuras 3.3c a 3.3f.

Sea  $V_i$  el número de vértices de  $i$ -octantes,  $i = 1, 3, 4, 5, 7$ . La suma de ángulos de un poliedro ortogonal es

$$S = \frac{\pi}{2}V_1 + \frac{3\pi}{2}V_3 + 2\pi V_4 + \frac{5\pi}{2}V_5 + \frac{7\pi}{2}V_7. \quad (3.2)$$

Ya que un poliedro ortogonal tiene  $n$  vértices,

$$V_1 + V_3 + V_4 + V_5 + V_7 = n. \quad (3.3)$$

Obsérvese que la curvatura de los vértices de 1 octante y 7 octantes es  $\pi/2$ , la curvatura de los vértices de 3 octantes y 5 octantes es  $-\pi/2$  y la curvatura de los vértices de 4 octantes es  $-\pi$ . Aplicando el teorema 3.2, obtenemos

$$\frac{\pi}{2}(V_1 + V_7) - \frac{\pi}{2}(V_3 + 2V_4 + V_5) = 4\pi - 4\pi g \quad (3.4)$$

Multiplicando (3.3) por  $\pi$  y substrayendo (3.4) tenemos:

$$\frac{\pi}{2}V_1 + \frac{3\pi}{2}V_3 + 2\pi V_4 + \frac{3\pi}{2}V_5 + \frac{\pi}{2}V_7 = n\pi - 4\pi + 4\pi g \quad (3.5)$$

Sumando  $\pi V_5 + 3\pi V_7$  a ambos lados de (3.5) obtenemos:

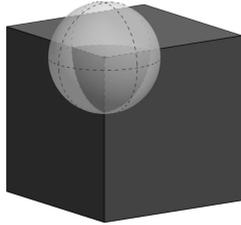
$$\frac{\pi}{2}V_1 + \frac{3\pi}{2}V_3 + 2\pi V_4 + \frac{5\pi}{2}V_5 + \frac{7\pi}{2}V_7 = \pi n - 4\pi + 4\pi g + \pi V_5 + 3\pi V_7 \quad (3.6)$$

El lado izquierdo de (3.6) corresponde a la suma de ángulos sólidos:

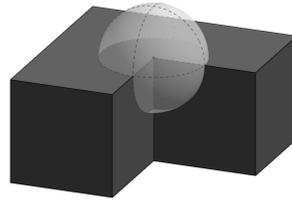
$$S = \pi(n - 4 + 4g + V_5 + 3V_7) \quad (3.7)$$

Por lo tanto (3.7) es minimizado cuando  $V_5$  y  $V_7$  son igual a cero.

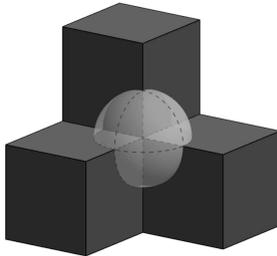
Ahora veremos que existen poliedros ortogonales cuyos vértices son sólo de 1 octante y 3 octantes, y poliedros ortogonales cuyos vértices son



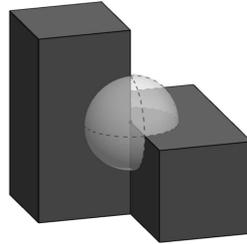
(a) vértice 1-octante



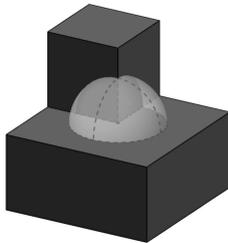
(b) vértice 3-octante



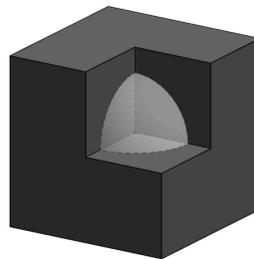
(c) vértice 4-octante



(d) vértice 4-octante



(e) vértice 5-octante

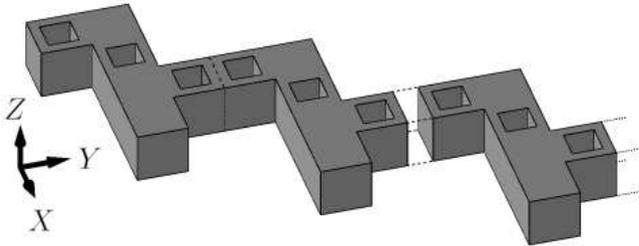


(f) vértice 7-octante

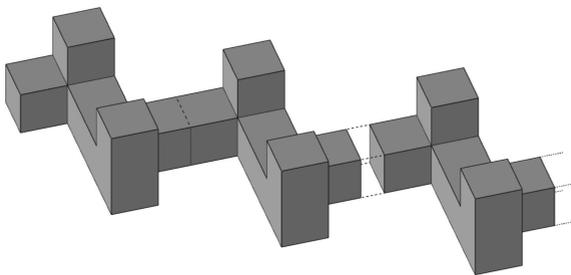
Figura 3.3: Clasificación de vértices en poliedros ortogonales. La región esférica traslúcida que se observa en cada caso corresponde al complemento del ángulo sólido interno del vértice del poliedro.

sólo vértices de 1 octante, 3 octantes y 4 octantes, ambos con género arbitrario. Entonces, por (3.7) la suma de sus ángulos sólidos es mínima.

Una familia de poliedros ortogonales que minimiza la suma de ángulos sólidos internos lo forman los poliedros ortogonales obtenidos a partir de polígonos ortogonales en el plano de la siguiente manera: Considere un polígono ortogonal (posiblemente con huecos)  $P$  en el plano  $xy$  de  $\mathbb{R}^3$ . Las coordenadas de cualquier punto en  $P$  son de la forma  $(x_1, y_1, 0)$  para algún  $x_1, y_1$ . Sea  $\mathcal{P}_l$  el poliedro ortogonal en  $\mathbb{R}^3$  tal que un punto  $p$  pertenece a  $\mathcal{P}_l$  si sus coordenadas son  $(x_1, y_1, z_1)$  tal que  $(x_1, y_1, 0) \in P$ , y  $0 \leq z_1 \leq \lambda$ , donde  $\lambda$  es un número real mayor que cero. Decimos que  $\mathcal{P}_l$  es obtenido por *levantamiento* de  $P$ , y lo llamamos *levantamiento de un polígono ortogonal*, por simplicidad *poliedro ortogonal de levantamiento*. Vea la figura 3.4a.



(a) Una familia de poliedros ortogonales de levantamiento con vértices de 1 y 3 octantes que minimiza la suma de ángulos sólidos.



(b) Una familia de poliedros ortogonales con vértices de 1, 3 y 4 octantes que minimiza la suma de ángulos sólidos.

Figura 3.4: Familias de poliedros que minimizan la suma de ángulos sólidos.

Obsérvese que cada vértice convexo de  $P$  se convierte en un vértice de 1 octante de  $\mathcal{P}_l$ , y cada vértice cóncavo en  $P$  se convierte en un

vértice de 3 octantes en  $\mathcal{P}_l$ , además  $g = h$ , donde  $h$  es el número de huecos en  $P$ . Puesto que  $P$  tiene  $\frac{m+4-4h}{2}$  vértices convexos y  $\frac{m-4+4h}{2}$  vértices cóncavos, entonces la suma de los ángulos sólidos internos de vértices de 1 octante de  $\mathcal{P}_l$  es  $\frac{\pi}{2}(m+4-4g)$  y la suma de ángulos sólidos internos de vértices de 3 octantes en  $\mathcal{P}_l$  es  $\frac{3\pi}{2}(m-4+4g)$ . Por lo tanto, la suma de los ángulos sólidos internos de  $\mathcal{P}_l$  es  $\pi(n-4+4g)$ .

Nótese que en la ecuación (3.7), se consideran vértices de 1 octante, 3 octantes y 4 octantes, por lo tanto, cualquier poliedro ortogonal cuyos vértices sean sólo de 1 octante, 3 octantes y 4 octantes también minimizará la suma de sus ángulos sólidos. En la figura 3.4b, mostramos cómo construir una familia de poliedros ortogonales que contienen sólo vértices de 1 octante, 3 octantes y 4 octantes. La base de nuestra construcción es un poliedro ortogonal  $\mathcal{P}$  que tiene 28 vértices. Si pegamos  $k$  copias de  $\mathcal{P}$  como se muestra en la figura 3.4b, obtenemos poliedros ortogonales con  $28 + 20k$  vértices y  $g = 0$ . La suma de ángulos sólidos internos de cada poliedro es  $24\pi$ , pero cuando pegamos una copia de este poliedro se pierden cuatro vértices de 1 octante en cada poliedro. Por lo tanto, la suma de los ángulos sólidos internos es  $\pi(24 + 20k)$ . Finalmente, en términos del número de vértices la suma de los ángulos sólidos internos de  $\mathcal{P}$  es igual a  $\pi(n-4)$ . Un vértice de 4 octantes se puede ver como la unión de un vértice de 1 octante y un vértice de 3 octantes, entonces cuando se añade un vértice de 4 octantes se mantiene la proporción par y la suma de ángulos sólidos internos es minimizada.

Enunciamos el siguiente resultado para poliedros de 1, 3 y 4 octantes.

**Teorema 3.3.** *La mínima suma de ángulos sólidos internos de un poliedro ortogonal con  $n$  vértices y género  $g$  es  $(n-4+4g)\pi$  y es alcanzado por poliedros que tienen sólo vértices de 1 octante, 3 octantes y 4 octantes.*

La máxima suma de ángulos sólidos internos se alcanza cuando maximizamos el número de vértices  $V_7$  y  $V_5$  en (3.7). Para hacer esto, observamos que si colocamos un poliedro ortogonal  $\mathcal{P}_{min}$  (figura 3.5a) que minimiza la suma de sus ángulos sólidos dentro de un cuboide  $\mathcal{P}_c$  (figura 3.5b) entonces sus vértices de 1 octante se convierten en vértices de 7 octantes y sus vértices de 3 octantes se convierten en vértices de 5 octantes. Sin embargo, el poliedro que resulta no cumple con nuestra definición de poliedro ya que su frontera es una variedad disconexa. Para solucionar esto, conectamos una cara de  $\mathcal{P}_{min}$  con una de las caras de  $\mathcal{P}_c$ . La mejor forma de conectar  $\mathcal{P}_{min}$ , es por medio de una de sus caras que solo contenga cuatro vértices de 1 octante (dentro del cuboide vértices de 7 octantes), de esta forma solo cuatro vértices de 7

octantes se convierten en vértices de 3 octantes. Juntando estas ideas, primero obtenemos el complemento de la suma mínima de ángulos sólidos de un poliedro con  $m = n - 8$  vértices y después le restamos los ángulos sólidos de los vértices de 7 octantes que se volvieron vértices de 3 octantes y los ocho vértices de 1 octante del cuboide  $\mathcal{P}_c$ , esto es,  $4\pi m - \pi(m - 12 + 4g) - 12\pi$ , lo que resulta en  $(3n - 24 - 4g)\pi$ . Un ejemplo de un poliedro que cumple esta cota se muestra en la figura 3.5c.

**Teorema 3.4.** *La máxima suma de ángulos sólidos internos de poliedros ortogonales con  $n$  vértices y género  $g$  es  $(3n - 24 - 4g)\pi$ .*

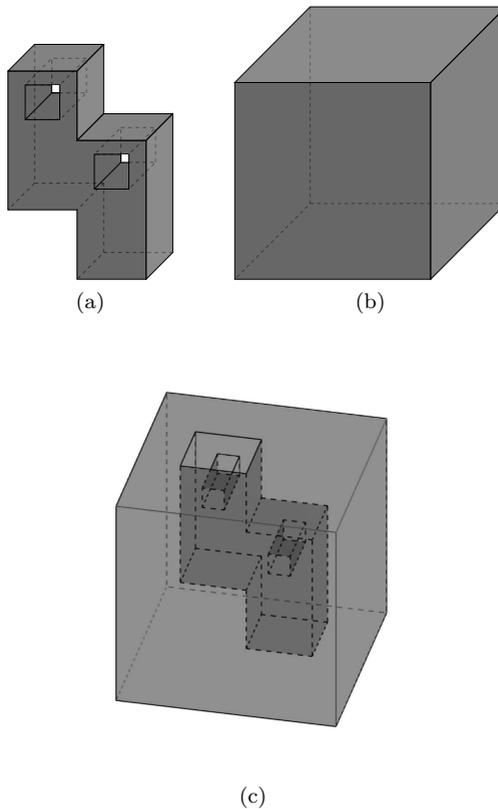


Figura 3.5: a) Un poliedro ortogonal cuya suma de ángulos es mínima. b) Un cuboide. c) Un poliedro ortogonal que maximiza la suma de los ángulos sólidos.

## 3.4 Conclusiones

En este capítulo, hemos caracterizado los poliedros ortogonales que minimizan la suma de sus ángulos sólidos internos. Además establecimos cotas sobre la máxima y mínima suma de ángulos que un poliedro puede alcanzar. Este resultado no se generaliza a poliedros generales, ya que para cualquier  $\alpha < 2\pi$  existe un tetraedro tal que la suma de sus ángulos sólidos es  $\alpha$ . Dimos un ejemplo de un poliedro que llamamos concha de mar el cual tiene una tetraedralización con  $(n-1)^2$  tetraedros y muestra como podemos hacer la suma de ángulos tan pequeña como queramos.

# Capítulo 4

## Iluminación de Poliedros

En el capítulo 2 se caracterizaron los vértices cóncavos y convexos en poliedros ortogonales. En este capítulo utilizaremos el resultado del teorema 2.11 para tratar una variante del Problema de Galería de Arte en poliedros ortogonales.

### 4.1 Introducción

La mayor parte de la investigación sobre problemas de galería de arte se ha centrado en polígonos en el plano. Por ejemplo, es bien sabido que todo polígono simple con  $n$  vértices siempre puede ser vigilado con a lo más  $\lfloor n/3 \rfloor$  guardias vértice, ver Chvátal [15]. Para polígonos ortogonales  $\lfloor n/4 \rfloor$  guardias vértice son siempre suficientes, véase Khan, Klawe y Kleitman [31]. Estivill-Castro y Urrutia [23] demostraron que todo polígono ortogonal puede ser vigilado con un máximo de  $3(n-1)/8$  *reflectores ortogonales*; es decir, guardias vértice que tienen un ángulo de visión de  $\pi/2$ . Más adelante en [1] se demostró que  $(3n+4(h-1))/8$  guardias vértice ortogonales son siempre suficientes para proteger un polígono ortogonal con  $n$  vértices y  $h$  huecos.

Dada una arista  $f$  de un poliedro  $\mathcal{P}$ , un punto  $q \in \mathcal{P}$  es vigilado por  $f$  si hay un punto  $p \in f$  tal que el segmento de línea que une  $p$  a  $q$  está contenido en  $\mathcal{P}$ . El problema de determinar cotas en el número de aristas necesarias para vigilar un poliedro fue introducido por Urrutia [51]. Él conjeturó que cualquier poliedro con  $e$  aristas en  $\mathbb{R}^3$  puede ser siempre vigilado con  $e/6$  aristas, para poliedros ortogonales conjeturó que  $e/12$  aristas siempre son suficientes. Estas conjeturas permanecen abiertas. Benbernou *et al.* [9] demostraron que todo poliedro ortogonal con  $e$

aristas y género arbitrario  $g$  puede siempre ser vigilado con  $(11/72)e - g/6 - 1$  guardias arista abiertos (es decir, excluyendo sus extremos). Cano *et al.* [12] demostraron que cualquier poliedro siempre puede ser vigilado por  $(27/32)e$  aristas guardia, y si las caras del poliedro son todas triángulos la cota mejora a  $(29/36)e$ .

A continuación extenderemos el modelo de iluminación de *reflectores ortogonales* del plano, definido por Estivill-Castro y Urrutia en [23], al espacio 3-dimensional.

## 4.2 Cuñas ortogonales

Una *cuña* en  $\mathbb{R}^3$  es la intersección, o la unión, de dos semiespacios cuyos planos de soporte se intersectan en una línea. La línea de intersección de los planos de soporte se denomina *eje* de la cuña. Una cuña se llama *pequeña*, si es la intersección de dos semiespacios. Se llama *grande* si es la unión de dos semiespacios. Tenga en cuenta que si una cuña  $\mathcal{W}$  es pequeña, entonces la intersección de  $\mathcal{W}$  con un plano ortogonal al eje de  $\mathcal{W}$ , es una región angular  $\mathcal{A}$  de tamaño menor o igual a  $\pi$ , si  $\mathcal{W}$  es una cuña grande, entonces el tamaño de  $\mathcal{A}$  es mayor que  $\pi$ . La cuña  $\mathcal{W}$  se llamará  $\alpha$ -cuña si el tamaño de  $\mathcal{A}$  es  $\alpha$ . Una *cuña ortogonal* en  $\mathbb{R}^3$  es la intersección o la unión de dos semiespacios cuyos planos de soporte son ortogonales. Si una cuña ortogonal es pequeña, es una  $\pi/2$ -cuña, si es grande es una  $3\pi/2$ -cuña.

Sea  $e$  una arista de un poliedro  $\mathcal{P}$ . Llamamos  $e$  a una  $\alpha$ -arista guardia de  $\mathcal{P}$  si  $e$  vigila todos los puntos de  $\mathcal{P}$  visibles desde  $e$  y contenidos en una  $\alpha$ -cuña cuyo eje contiene a  $e$ , vea la figura 4.1a. Si  $\alpha = \pi/2$  llamamos a  $e$  una *arista guardia ortogonal*. Observamos que  $\alpha$ -aristas y aristas guardia ortogonales son generalizaciones naturales de  $\alpha$ -reflectores y  $\pi/2$ -reflectores en el plano. Consideramos que una  $\alpha$ -arista guardia  $e$  puede ser girada hasta alcanzar una orientación final. En el resto de este capítulo asumiremos que nuestras  $\alpha$ -aristas siempre están colocados de tal manera que sus planos de soporte son paralelos a los planos  $xy$ ,  $xz$  o  $yz$  de  $\mathbb{R}^3$ . En nuestro lenguaje, las aristas guardia abiertas utilizadas por Benbernou *et al.* son  $3\pi/2$ -aristas guardia en las que los extremos de las aristas no están incluidos. En nuestro trabajo probaremos un resultado similar al que demostraron Benbernou *et al.*, pero usando  $\pi/2$ -aristas guardia.

De hecho, usaremos orto- $\pi/2$ -aristas guardia  $e$ , estos guardias vigilan sólo puntos  $p$  dentro de una  $\pi/2$ -cuña con la restricción adicional de que el segmento de línea más corto que une  $p$  a  $e$  es un segmento de línea ortogonal a  $e$ , vea la figura 4.1b. Por simplicidad, nos referiremos a estas

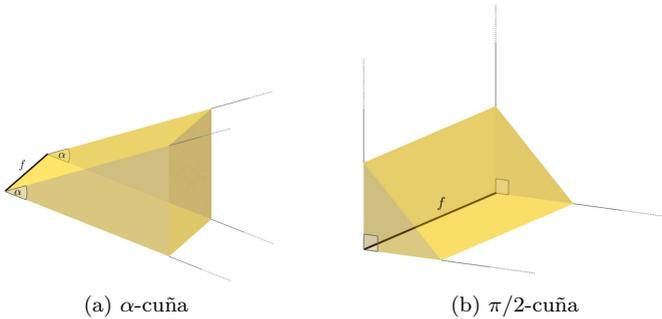


Figura 4.1: Una ilustración de una  $\alpha$ -cuña y una  $\pi/2$ -cuña.

aristas guardia como  $\pi/2$ -aristas guardia.

La figura 4.2 ilustra las variantes consideradas en la literatura, arista guardia cerrada, arista guardia abierta y  $\pi/2$ -arista guardia. Se puede ver que la  $\pi/2$ -arista guardia es un modelo más débil ya que tiene un rango de iluminación más pequeño que las aristas guardias cerradas o abiertas.

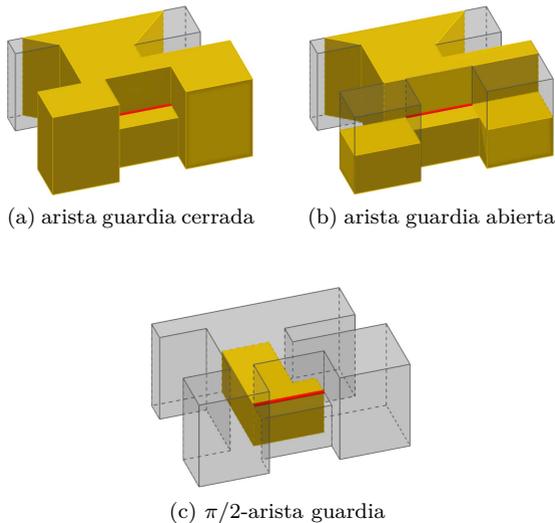


Figura 4.2: Ilustración de los rangos de iluminación (en amarillo) de aristas guardia abiertas, cerradas y  $\pi/2$ , respectivamente.

Ahora que hemos definido la iluminación con  $\alpha$ -guardias, la sección 4.3 aborda la siguiente variante del Problema de Galería de Arte para poliedros ortogonales: Dado un poliedro ortogonal  $\mathcal{P}$  en  $\mathbb{R}^3$ , encuentre un conjunto mínimo de  $\pi/2$ -aristas guardia que vigilen  $\mathcal{P}$ . Probaremos que si  $\mathcal{P}$  tiene  $k_4$  vértices de grado 4,  $k_6$  vértices de grado 6, género  $g$  y  $h$  huecos en sus caras, entonces podemos vigilarlo usando como máximo  $(11e - k_4 - 3k_6 - 12g - 24h + 12)/72$   $\pi/2$ -aristas guardia.

### 4.3 Iluminación con $\pi/2$ -aristas

Aplicamos los resultados obtenidos en la sección 4.2 para atacar la siguiente variante del Problema de la Galería de Arte: Dado un poliedro ortogonal  $\mathcal{P}$  en  $\mathbb{R}^3$ , determinar un conjunto de  $\pi/2$ -aristas guardia que vigilan  $\mathcal{P}$ .

Nótese que  $\mathcal{P}$  tiene dos tipos de aristas: aristas convexas que cubren un ángulo sólido interno de dos octantes, vea la figura 4.3a, y aristas cóncavas que cubren un ángulo sólido interno de seis octantes, 4.3b.

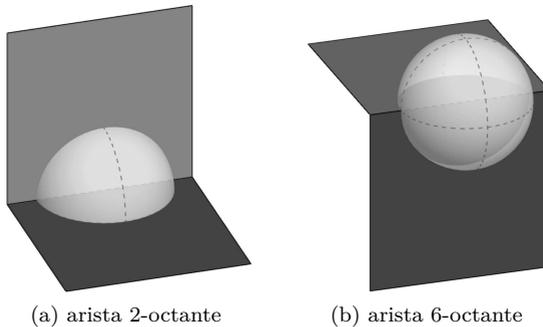


Figura 4.3: Vista interior de los tipos de aristas en poliedros ortogonales.

Es fácil ver que para vigilar  $\mathcal{P}$  es suficiente colocar una  $\pi/2$ -arista guardia en algunas de las aristas de  $\mathcal{P}$ . De hecho, también podemos vigilar  $\mathcal{P}$  colocando una  $\pi/2$ -arista guardia en aristas paralelas todas al mismo eje  $x$ ,  $y$ , o  $z$ , llamémoslas aristas  $x$ , o  $y$ , o  $z$  de  $\mathcal{P}$ , respectivamente. Esto se deduce de los resultados demostrados en [3]. Por completud, describimos brevemente cómo probar ésto.

Considere todas las caras de  $\mathcal{P}$  paralelas al plano  $xy$ . Llamamos a una cara  $f$  de  $\mathcal{P}$  una *cara superior*, si para cualquier punto interior  $q$  de  $f$  hay un  $\epsilon > 0$  tal que cualquier punto a distancia menor o igual a  $\epsilon$  de

$q$ , y debajo de  $f$  pertenece al interior de  $\mathcal{P}$ . Las caras *derecha*, *inferior* e *izquierda* se definen de manera similar, ver figura 4.4.

Sea  $e$  una  $x$ -arista y  $f$  una cara superior o inferior de  $\mathcal{P}$ . Llamamos a  $e$  una *arista derecha* de  $f$  si hay un  $\epsilon > 0$  tal que cualquier punto a la izquierda de  $e$  en el plano de  $f$  y que diste del punto medio de  $e$  menos de  $\epsilon$ , pertenece al interior de  $f$ . Una *arista izquierda* se define de una manera similar. Dada una cara derecha (izquierda)  $f$ , las aristas superior e inferior son definidas de forma similar a las aristas izquierdas y derechas, ver Figura 4.4.

Definimos ahora una regla de colocación para  $\pi/2$ -aristas guardia en las  $x$ -arista de  $\mathcal{P}$  como sigue: En la regla *superior-derecha* en cada arista derecha de cada cara superior de  $\mathcal{P}$ , y en cada arista superior de cada cara derecha de  $\mathcal{P}$  ponemos una  $\pi/2$ -arista guardia cuyo ángulo de iluminación cubra el intervalo de direcciones  $3\pi/2$  a  $2\pi$ . Definimos tres reglas adicionales, la regla *superior-izquierda*, *inferior-derecha* e *inferior-izquierda* de una manera similar, equivalentemente rotando nuestros poliedros 90, 180 y 270 grados con respecto al eje  $x$ , y aplicando la regla superior-derecha al poliedro obtenido de  $\mathcal{P}$  después de aplicar estas rotaciones.

Observe que si colocamos  $\pi/2$ -aristas guardia en las  $x$ -aristas de  $\mathcal{P}$  usando simultáneamente las cuatro reglas de iluminación definidas arriba, en cada  $x$ -arista convexa colocamos una  $\pi/2$ -arista guardia, y en cada  $x$ -arista cóncava colocamos dos  $\pi/2$ -aristas guardia.

A continuación probamos el siguiente lema:

**Lema 4.1.** *Sea  $\mathcal{P}$  un poliedro ortogonal con género  $g$  y  $h$  huecos en sus caras. Entonces  $\mathcal{P}$  puede ser vigilado por las  $\pi/2$ -aristas guardia colocadas en sus  $x$ -aristas mediante una de las siguientes reglas: superior-derecha, superior-izquierda, inferior-derecha o inferior-izquierda.*

*Prueba.* Probaremos nuestro resultado para la regla superior-derecha, las otras reglas se pueden probar de una manera similar. Sea  $p$  un punto en  $\mathcal{P}$  y  $\beta$  un plano paralelo al plano  $yz$  que contiene a  $p$ . Sea  $Q$  la intersección de  $\mathcal{P}$  con  $\beta$ .  $Q$  consiste de un conjunto de polígonos ortogonales contenidos en  $\beta$ . No es difícil ver que la regla superior-derecha coloca  $\pi/2$ -vértices guardia como en la regla de vigilancia superior-derecha de [3] que ilumina  $Q$ , y por lo tanto vigila a  $p$ . De esto se sigue nuestro resultado.  $\square$

Algunas caras de un poliedro ortogonal  $\mathcal{P}$  pueden tener huecos, llamaremos a estos huecos en las caras del poliedro como  $h$ . Cuando estos huecos aparecen, el 1-esqueleto de  $\mathcal{P}$  puede ser desconexo, por ejemplo

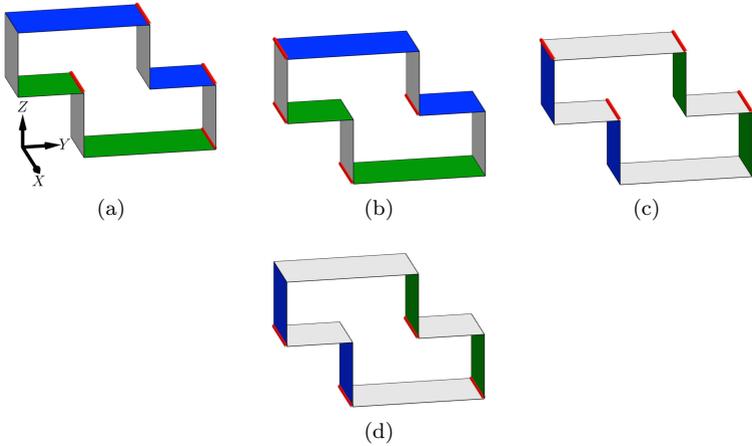


Figura 4.4: Las figuras (a) y (b) muestran las caras superiores en azul, las caras inferiores en verde. Las figuras (c) y (d) muestran las caras izquierdas en azul y las caras derechas en verde. Correspondientemente en cada figura se muestran en rojo las aristas derechas, izquierdas, superiores e inferiores.

ver figura 4.5a. En ese ejemplo hemos “tallado” un poliedro ortogonal  $\mathcal{H}$  en el centro de una de las caras del cuboide, llamémosle  $f$  a esta última. Observe que los vértices  $k$ -octante de  $\mathcal{H}$  se convirtieron en vértices  $(8 - k)$ -octante de  $\mathcal{P}$ , excepto por aquellos que se encuentran en  $f$ , en este caso los vértices 1-octante de  $\mathcal{H}$  se convirtieron en vértices 3-octante de  $\mathcal{P}$ , y los vértices 3-octante de  $\mathcal{H}$  se convirtieron en vértices 1-octante de  $\mathcal{P}$ , es decir, los vértices convexos se convierten en cóncavos y los vértices cóncavos se convierten en convexos. Observe que al menos cuatro de los vértices de  $\mathcal{H}$  en  $f$  son cóncavos, y que dos de las aristas que inciden en ellos son convexas, mientras que la otra es cóncava. Por lo tanto, nuestras reglas de vigilancia colocan solamente cuatro guardias arista en esas aristas. Esto se utilizará en la demostración de nuestro siguiente teorema, ya que esto nos permitirá ahorrar cuatro aristas por cada hueco que tallamos en un poliedro ortogonal (en esa prueba colocaremos cinco  $\pi/2$ -aristas guardia en las aristas incidentes a un vértice cóncavo de grado tres).

Hay un segundo caso en el que el 1-esqueleto de  $\mathcal{P}$  se desconecta, y ésto sucede cuando en vez de tallar un poliedro ortogonal, “pegamos”  $\mathcal{H}$  en medio de una cara  $f$  de  $\mathcal{P}$ , vea la figura 4.5b. En este caso es más fácil ver que cuando aplicamos las reglas de vigilancia a  $\mathcal{P}$  descritas

arriba, los puntos de  $\mathcal{P}$  en  $\mathcal{H}$  estarán protegidos por aristas en  $\mathcal{H}$ , y las aristas en  $\mathcal{P}-\mathcal{H}$  pueden vigilarse con las aristas del 1-esqueleto de  $\mathcal{P}-\mathcal{H}$ . Esto implica que las aristas de  $\mathcal{H}$  en  $f$  pueden considerarse como aristas convexas al aplicar las reglas de vigilancia descritas anteriormente. Por lo tanto, ahorramos al menos cuatro guardias arista, una por cada arista cóncava de  $\mathcal{H}$  en  $f$ .

En ambos casos se ahorran al menos cuatro guardias por hueco.

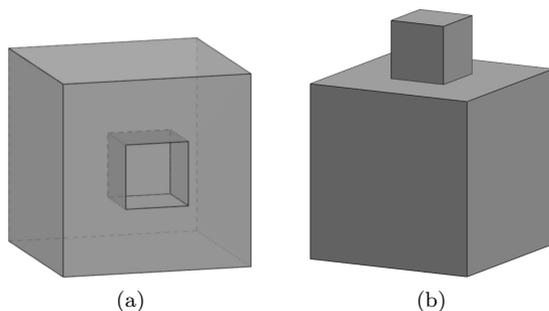


Figura 4.5: (a) Un poliedro ortogonal “tallado” dentro de otro. (b) Dos poliedros ortogonales “pegados”.

**Teorema 4.2.** *Sea  $\mathcal{P}$  un poliedro ortogonal con  $n$  vértices,  $k_4$  de grado 4 y  $k_6$  de grado 6, con  $e$  aristas, de género  $g$  y con  $h$  huecos en las caras. Entonces  $(11e - k_4 - 3k_6 - 12g - 24h + 12)/72$  ( $\pi/2$ )-aristas guardia son siempre suficientes para vigilar el interior de  $\mathcal{P}$ .*

*Prueba.* Primero observamos los tipos de vértices del poliedro  $\mathcal{P}$ , y describimos el número de aristas convexas y cóncavas que inciden a cada tipo de vértice.

Cada vértice 1-octante es incidente a tres aristas convexas. Cada vértice 3-octante es incidente a dos aristas convexas y una arista cóncava. Cada vértice 4-octante de grado cuatro es incidente a dos aristas convexas y dos aristas cóncavas. Cada vértice 4-octante con grado seis es incidente a tres aristas convexas y tres aristas cóncavas. Cada vértice 5-octante es incidente a una arista convexa y dos aristas cóncavas. Finalmente, cada vértice 7-octante es incidente a tres aristas cóncavas.

En el peor de los casos, cada vértice convexo es adyacente a tres aristas cóncavas, cada vértice 4-octante de grado cuatro es adyacente a dos aristas cóncavas y dos aristas convexas; cada vértice 4-octante de grado seis es adyacente a tres aristas convexas y tres aristas cóncavas, y

cada vértice cóncavo es adyacente a dos aristas cóncavas y a una arista convexa.

Por el teorema 2.11,  $\mathcal{P}$  tiene  $c = (n + 3(k_4 + k_6) - 8g + 8)/2$  vértices convexos y  $r = (n - 3(k_4 + k_6) + 8g - 8)/2$  vértices cóncavos. Recuerde que de acuerdo con nuestra definición, los vértices 4-octante, ya sean de grado cuatro o seis son convexos. Entonces  $\mathcal{P}$  tiene  $c' = (n + k_4 + k_6 - 8g + 8)/2$  vértices convexos de grado tres,  $k_4$  vértices 4-octante de grado cuatro,  $k_6$  vértices 4-octante de grado seis, y  $r = (n - 3(k_4 + k_6) + 8g - 8)/2$  vértices cóncavos.

Colocamos  $\pi/2$ -aristas guardia en todas las  $x$ -aristas usando todas las reglas de vigilancia superior-izquierda, superior-derecha, inferior-izquierda e inferior-derecha. De forma similar, colocamos  $\pi/2$ -aristas guardia en todas las  $y$ -aristas y  $z$ -aristas de  $\mathcal{P}$ . En total se utilizan  $6c' + 6k_4 + 9k_6 + 5r$   $\pi/2$ -aristas guardia. Supongamos que  $\mathcal{P}$  tiene menos o igual  $x$ -aristas que  $y$ -aristas o  $z$ -aristas. Entonces elegimos de entre las cuatro reglas de vigilancia aquella que coloque un número menor de  $\pi/2$ -aristas guardia.

Se sigue que los  $(6c' + 6k_4 + 9k_6 + 5r)/24$   $\pi/2$ -aristas guardia siempre son suficientes para vigilar  $\mathcal{P}$ , ya que solo utilizamos una de las cuatro reglas de vigilancia, una dirección del tipo de aristas ( $x$ -aristas o  $y$ -aristas o  $z$ -aristas) y cada guardia es contado dos veces (ya que los guardias los colocamos en función de los vértices y cada arista tiene dos vértices). Sustituyendo  $c'$  y  $r$  en la expresión anterior, tenemos un total de  $(11n + 3k_4 + 9k_6 - 8g + 8)/48$   $\pi/2$ -aristas guardia.

Como  $\mathcal{P}$  tiene  $h$  huecos en sus caras, y para cada uno de ellos ahorramos cuatro guardias arista, concluimos que el número total de  $\pi/2$ -aristas guardia en  $\mathcal{P}$  es  $11n + 3k_4 + 9k_6 - 8g - 16h + 8)/48$ . Si sustituimos el número de aristas en términos del número de vértices  $n = (2e - k_4 - 3k_6)/3$  en el número de  $\pi/2$ -aristas guardia, entonces finalmente obtenemos que  $(11e - k_4 - 3k_6 - 12g - 24h + 12)/72$   $\pi/2$ -aristas guardia son siempre suficientes para vigilar el interior de  $\mathcal{P}$ .  $\square$

## 4.4 Cota inferior para $\pi/2$ -aristas

El modelo de iluminación con  $\pi/2$ -aristas guardia es mucho más restrictivo respecto a los modelos de aristas abiertas y cerradas, ver figura 4.2. En esta sección presentamos una cota inferior para la iluminación de poliedros ortogonales con  $\pi/2$ -aristas guardia.

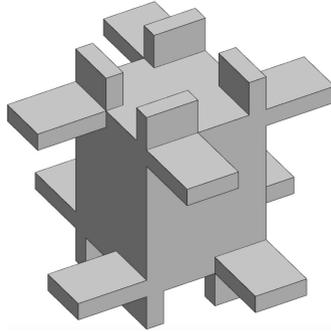


Figura 4.6: Poliedro ortogonal que cumple la cota del teorema 4.3

**Teorema 4.3.** *Existen poliedros ortogonales con  $e$  aristas tales que el número de  $\pi/2$ -aristas guardia necesarias para vigilarlos es a lo más  $\frac{4}{45}e$ .*

*Prueba.* Considere el poliedro  $\mathcal{P}$  ilustrado en la figura 4.6. Está conformado por un cubo en el que cada uno de sus vértices se reemplazó por un poliedro en forma de  $L$ . Cada  $L$  está conformada por 21 aristas y 14 vértices. Las formas de  $L$  junto con las 12 aristas del cubo original resultan en un poliedro con un total de 180 aristas. Mostraremos que  $\mathcal{P}$  requiere al menos dieciséis  $\pi/2$ -aristas guardia para ser vigilado.

Sea  $\mathcal{A}$  el conjunto de 16 puntos rojos y negros en el interior de  $\mathcal{P}$  mostrados en la figura 4.7. Probaremos que ninguna arista de  $\mathcal{P}$  puede vigilar más de un punto de  $\mathcal{A}$ .

Sean  $p_1$  un punto rojo y  $p_2$  un punto negro en  $\mathcal{A}$ , como se muestran en las figuras 4.8a y 4.8b. Observe que el conjunto  $\mathcal{E}_1$  de las aristas gruesas mostradas en la figura 4.8a tienen las únicas aristas de  $\mathcal{P}$  en las que se puede colocar  $\pi/2$ -aristas guardia que ven  $p_1$  y ninguna de ellas ve ningún otro punto en  $\mathcal{A}$ . Observe también que el conjunto de aristas  $\mathcal{E}_2$  mostradas en la figura 4.8b tiene las únicas aristas de  $\mathcal{P}$  en las que se puede colocar  $\pi/2$ -aristas guardia que ven  $p_2$  y ninguna de ellas ve ningún otro punto en  $\mathcal{A}$ . Se sigue que ninguna  $\pi/2$ -arista guardia ve dos puntos en  $\mathcal{A}$ . Entonces, se necesita una  $\pi/2$ -arista guardia por cada punto en  $\mathcal{A}$  para vigilar este conjunto, y por lo tanto necesitamos por lo menos dieciséis  $\pi/2$ -aristas guardia para vigilar  $\mathcal{P}$ .

A partir de  $\mathcal{P}$  se puede obtener una familia de poliedros ortogonales, pegando un número arbitrario de copias de  $\mathcal{P}$ , una después de otra, como sigue: De cada copia de  $\mathcal{P}$ , prologue una prominencia horizontal (sin mover el punto distinguido del caso) y péguela a una cara del cuboide

central de la copia siguiente, véase la figura 4.9. Es fácil ver que si colocamos  $k$  copias de  $\mathcal{P}$ , el poliedro obtenido tiene  $e = 180 \times k$  vértices y no puede ser vigilado con menos de  $16 \times k = 16 \times \frac{e}{180} \Rightarrow \frac{4}{45}e$   $\pi/2$ -aristas guardia.  $\square$

## 4.5 Conclusiones

En este capítulo, hemos estudiado una variante del *Problema de la Galería de Arte*. Establecimos cotas para vigilar poliedros ortogonales e introducimos el concepto de  $\pi/2$ -arista guardia, como una generalización de los reflectores ortogonales en el plano, este modelo de aristas guardia es más restrictivo ya que su rango de iluminación es mucho menor al de las aristas guardias conocidas en la literatura. Con este nuevo modelo de iluminación encontramos una cota inferior para iluminar un poliedro ortogonal con  $\pi/2$ -aristas guardia, para la solución a este problema se encuentra un poliedro que puede ser extendido a una familia parametrizada por el número de aristas. Las cotas establecidas fueron derivadas gracias a la caracterización de los vértices convexos y cóncavos del capítulo 2.

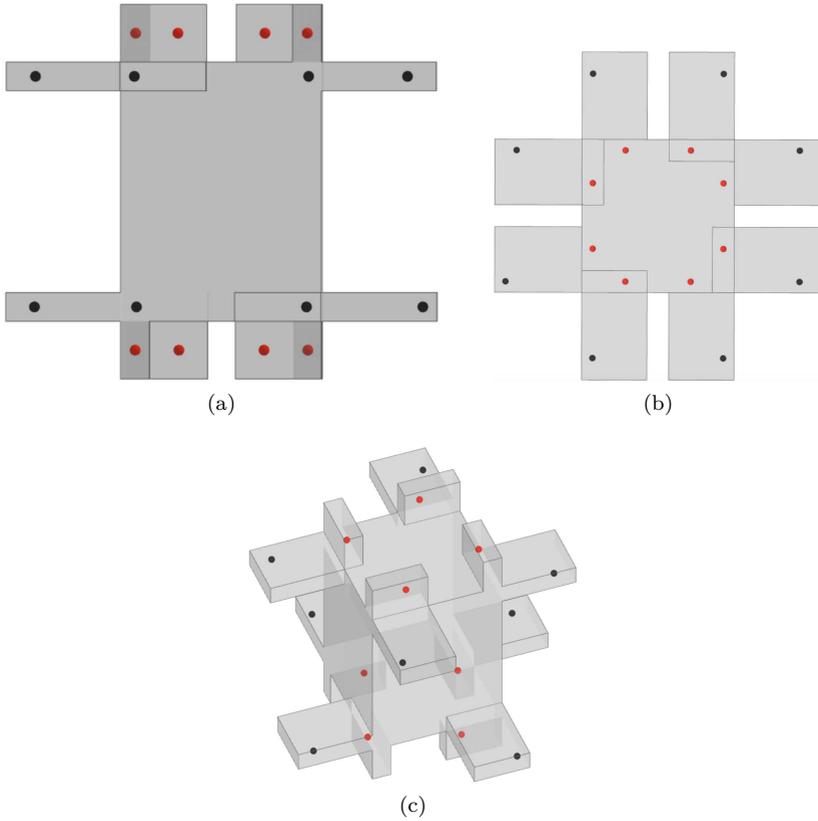


Figura 4.7: Puntos distinguidos, los puntos rojos se colocan dentro de las prominencias verticales y los puntos negros en las prominencias horizontales. (a) vista frontal, (b) vista superior, (c) vista a 45°.

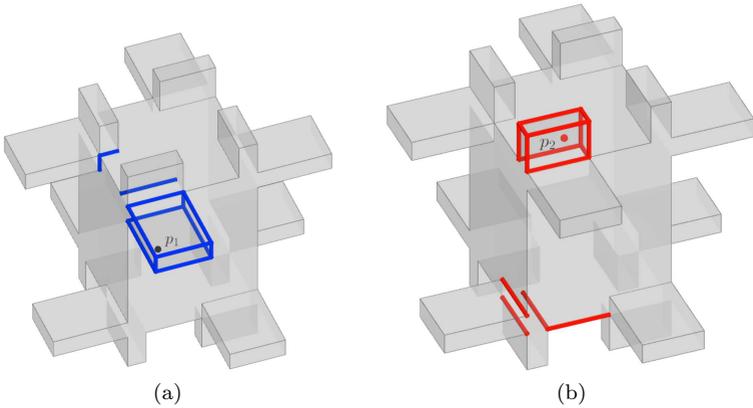


Figura 4.8: (a) punto distinguido  $p_1$  y el conjunto de  $\pi/2$ -aristas guardia que lo vigilan (b) punto distinguido  $p_2$  y el conjunto de  $\pi/2$ -aristas guardia que lo vigilan.

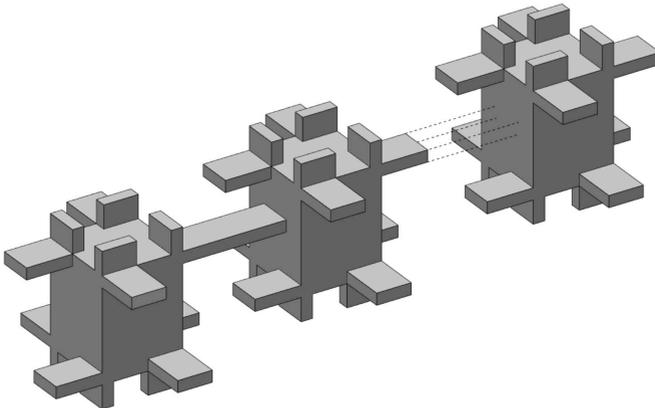


Figura 4.9: Familia de poliedros ortogonales que necesitan  $\frac{4e}{45} \pi/2$ -aristas guardia para vigilar el poliedro. El punto negro dentro de cada "puente" permanece en la misma posición como estaba en la prominencia original.

# Capítulo 5

## Transversales

Sea  $P = \{p_1, \dots, p_n\}$  un conjunto de  $n$  puntos en el plano y suponga que en el tiempo  $t = 0$  comienzan a moverse en la dirección vertical con velocidad unitaria; es decir, si  $p_i = (a_i, b_i)$ , en el tiempo  $t$   $p_i$  se habrá movido al punto  $p_i(t) = (a_i, b_i + t)$ . Sea  $l_t^i$  el segmento de línea cerrado con puntos extremos  $p_i$  y  $p_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . En este capítulo abordamos el siguiente problema: Encontrar el tiempo más pequeño  $t$  para el cual hay una línea transversal  $\ell$ , que atraviesa a todos los segmentos de línea  $l_t^1, \dots, l_t^n$ . Probaremos que el problema puede resolverse en tiempo lineal. También demostraremos que el mismo problema cuando los elementos de  $P$  son puntos en el espacio  $d$ -dimensional  $\mathbb{R}^d$  que se mueven hacia arriba, y a diferentes velocidades también se puede resolver en tiempo lineal para  $d$  fijo.

### 5.1 Introducción

Un problema clásico en geometría computacional que puede resolverse en tiempo lineal usando programación lineal es el llamado *problema de separabilidad de puntos rojos y azules*: Dados  $n$  puntos en el plano, algunos de los cuales son rojos y otros azules, ¿existe una línea que separe los puntos rojos de los azules? En dos artículos Megiddo [37, 38] demuestra que varios problemas de la geometría computacional, incluyendo el problema de encontrar el círculo más pequeño que contiene a un conjunto de puntos en el plano y el problema de separabilidad de un conjunto de puntos rojos y azules en un espacio de dimensión fija y otros, son resueltos en tiempo lineal. En [38] Megiddo probó que la programación lineal en  $\mathbb{R}^d$  se resuelve en  $O(f(d)) \times n$ , cuando  $d$  es una

constante se resuelve en tiempo lineal. La función  $f(d)$  es exponencial en  $d$ . Entonces es fácil ver que el problema de separabilidad de puntos rojos y azules en  $\mathbb{R}^d$  puede reducirse a un programa de programación lineal en  $\mathbb{R}^d$ .

Otro problema estudiado en geometría computacional, es este: *Dada una familia de segmentos de líneas  $\{l_1, \dots, l_n\}$  encuentre, si existe, una transversal que atraviese todas las  $\{l_1, \dots, l_n\}$ .* Es fácil ver que si todas las  $\{l_1, \dots, l_n\}$  son segmentos verticales, decidir si existe una transversal y encontrarla, puede resolverse en tiempo lineal. Si los segmentos tienen diferentes orientaciones, este problema puede resolverse en tiempo  $O(n \log n)$ , y este es óptimo, ver [21, 8].

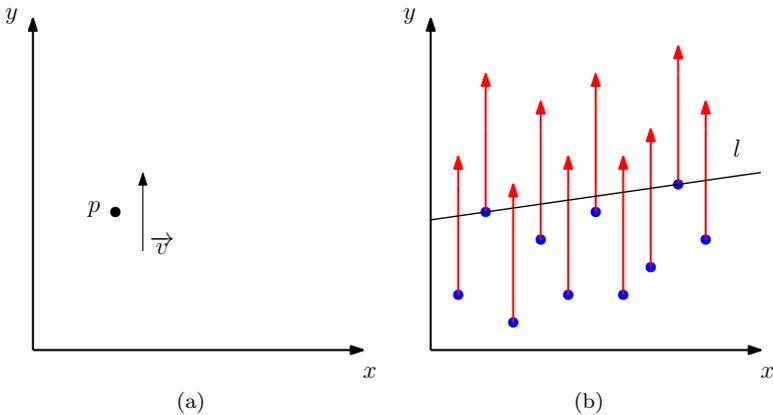


Figura 5.1: a) Representación de un punto y su vector de velocidad asociado a este. b) Conjunto de  $n$  puntos en el plano moviéndose en dirección vertical a la misma velocidad.

En este capítulo resolveremos una nueva variante de problemas de transversales que surgen de atravesar segmentos de líneas generados por puntos en movimiento. Estos problemas pueden considerarse como un problema híbrido combinando la separabilidad de puntos rojos y azules, y la separabilidad de segmentos de líneas. Empezamos con el siguiente problema:

**Problema 1.** Sea  $P = \{p_1, \dots, p_n\}$  un conjunto de  $n$  puntos en el plano, y suponga que los elementos de  $P$  comienzan a moverse en el tiempo  $t = 0$  a velocidad unitaria constante, ver figura 5.1a. Supongamos que  $p_i = (a_i, b_i)$ . A medida que  $p_i$  sube, en el tiempo  $t$  el punto  $p_i$  se ha movido al punto  $p_i(t) = (a_i, b_i + t)$ , y ha recorrido un segmento de

línea  $l_t^i$  de longitud  $t$ , comenzando en  $p_i$  y terminando en el punto  $p_i(t)$ . Nuestro problema es encontrar el  $t$  más pequeño de modo que exista una transversal  $\ell$  que atraviese  $l_t^1, l_t^2, \dots, l_t^n$ , vea figura 5.1b.

Mostraremos que el problema 1 puede resolverse en tiempo  $O(n)$ . También probaremos que las siguientes variaciones del problema anterior pueden resolverse en tiempo lineal:

**Problema 2.** Cada punto  $p_i$  se mueve en dirección vertical, a su propia velocidad.

**Problema 3.** Mismo problema que arriba para  $p_i \in \mathbb{R}^d$  cuando  $d$  es fija. En este caso, queremos encontrar un hiperplano que atraviese los segmentos trazados por los puntos en movimiento.

Mostraremos que todos los problemas anteriores pueden resolverse usando programación lineal en  $\mathbb{R}^{d+1}$ , y entonces pueden resolverse en tiempo lineal para la constante  $d$ .

## 5.2 Resultados anteriores relacionados

Otros problemas resueltos usando la programación lineal en tiempo lineal, incluyendo la separabilidad circular de dos conjuntos de puntos  $R$  y  $B$  fueron estudiados por O'Rourke *et al.* [43], ellos demostraron que determinar si hay un círculo que contiene los puntos de  $R$  en su interior, mientras que deja los puntos de  $B$  en su exterior se puede resolver en tiempo lineal. Para segmentos de línea en el plano, Edelsbrunner *et al.* [21] presentaron un algoritmo para calcular las transversales que atraviesan un conjunto de  $n$  segmentos de líneas (si existen) en tiempo  $O(n \log n)$ . Más tarde Avis *et al.* [8] presentaron un árbol de decisión algebraico de orden fijo  $\Omega(n \log n)$  como cota inferior para determinar la existencia de una transversal que atraviesa una familia de  $n$  segmentos de líneas en el plano. Para  $\mathbb{R}^d$  un hiperplano que atraviesa  $n$  segmentos se puede encontrar en  $O(n^d)$  [20], en el mismo artículo un algoritmo de orden  $O(n^{d-1}m)$  se presenta para encontrar un plano que atraviesa un conjunto de  $m$  poliedros con un total de  $n$  aristas. Para objetos que no sean líneas, Rappaport en [46] presentó un algoritmo para encontrar la región de transversales de un conjunto de  $n$  discos en tiempo  $O(n)$ . En [37] Megiddo presentó un conjunto de problemas de separación de objetos geométricos que se pueden resolver en tiempo lineal usando programación lineal. En todos los documentos relacionados con transversales y separabilidad, los conjuntos de segmentos o puntos son

estáticos. Nuestra contribución es la de introducir un nuevo enfoque que trata con puntos en movimiento y segmentos que crecen con el tiempo.

En la sección 5.3, mostramos cómo transformar un problema geométrico en un problema de programación lineal y definimos algunos conceptos para la transformación dual de puntos a líneas y viceversa. En la Sección 5.4, demostramos que todos los problemas descritos se pueden resolver en tiempo  $O(n)$ , cuando  $d$  es fijo.

### 5.3 Preliminares

Empezaremos definiendo algunos conceptos sobre programación lineal, dualidad y continuaremos con la transformación usada por Megiddo para reducir el problema de separabilidad de conjuntos de puntos rojos y azules a un problema de programación lineal. También presentaremos una breve descripción del algoritmo de Megiddo para resolver programas de programación lineal en tiempo lineal. Las soluciones a los problemas presentados aquí tienen reducciones similares.

Un problema de optimización tiene la forma

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && f_0(\mathbf{x}) \\ &\text{sujeto a} && f_i \leq b_i, \quad \text{para } i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (5.1)$$

el vector  $\mathbf{x}$  es la *variable de optimización* del problema, la función  $f_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es la *función objetivo*, las funciones  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  son las *funciones de restricción* y las constantes  $b_i$  son los límites o cotas, para las restricciones. Un vector  $\mathbf{x}^*$  es llamado la *solución* del problema (5.1), si tiene el menor valor objetivo entre todos los vectores que satisfacen las restricciones.

La *dualidad* es una transformación que mapea líneas y puntos en puntos y líneas, respectivamente, conservando algunas propiedades en el proceso. La imagen de un objeto bajo una transformación de dualidad se llama el *dual* del objeto. Sea  $p = (a, b)$  un punto en el plano. La línea dual de  $p$ , denotada por  $\ell_p$ , es la línea no vertical con ecuación  $y = ax - b$ . El dual de  $\ell_p$  es  $p$ .

Decimos que la transformación de dualidad mapea objetos del *plano primal* al *plano dual*. Ciertas propiedades que se cumplen en el plano primal también lo hacen en plano dual:

**Observación 5.1.** *Sea  $p$  un punto en el plano y sea  $\ell$  una línea no vertical en el plano. La transformación de dualidad  $o \mapsto o^*$  tiene las siguientes propiedades.*

- *Preserva incidencia:*  $p \in \ell$  si y solo si  $\ell^* \in p^*$ .
- *Preserva orden:*  $p$  esta por encima de  $\ell$  si y solo si  $\ell^*$  esta por encima de  $p^*$ .

La transformación de dualidad puede aplicarse a otros objetos y no solo a puntos y líneas. Las definiciones sobre dualidad presentadas en esta sección pueden consultarse en Berg [18].

Considere un conjunto  $B = \{p_1, \dots, p_s\}$  de  $s$  puntos azules, y un conjunto  $R = \{q_1, \dots, q_t\}$  de  $t$  puntos rojos. El problema de decidir si existe una línea  $\ell$  que deja todos los puntos rojos arriba de ella, y todos los puntos azules por debajo de ella, es entonces transformado dentro del siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && y \\ &\text{sujeito a} && \\ &&& a_i x - y - b_i \leq 0 \\ &&& a'_j x - y - b'_j \geq 0 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Donde  $p_i = (a_i, b_i)$ ,  $1 \leq i \leq s$ ; y  $q_j = (a'_j, b'_j)$ ,  $1 \leq j \leq t$ . Véase figura 5.2a. Note que si existe una línea que separa el conjunto de puntos azules de los rojos, entonces el problema de programación lineal enunciado arriba tiene una solución factible, cualquier punto (si este existe) en el espacio dual que este por abajo de todas las líneas azules, y por arriba de todas las líneas rojas en el espacio dual, corresponde a una línea que separa los puntos azules de los rojos, ver figura 5.2b. Para más detalles, el lector es referido a Matoušek [35], página 21.

## 5.4 Puntos en movimiento

### 5.4.1 Transversales en líneas de segmentos generadas por puntos en movimiento

Ahora mostramos como transformar el Problema 1 a un problema de programación lineal. Consideramos el conjunto de puntos  $P = \{p_1, \dots, p_n\}$  en  $\mathbb{R}^2$  y suponemos que en el tiempo  $t > 0$ , estos se han movido al conjunto de puntos  $P(t) = \{p_1(t), \dots, p_n(t)\}$ , como se definieron antes. Podemos considerar el conjunto de puntos  $P$  como un conjunto de puntos rojos fijos, y  $P(t)$  como un conjunto de puntos azules que se están moviendo hacia arriba. En el espacio dual, cada punto rojo

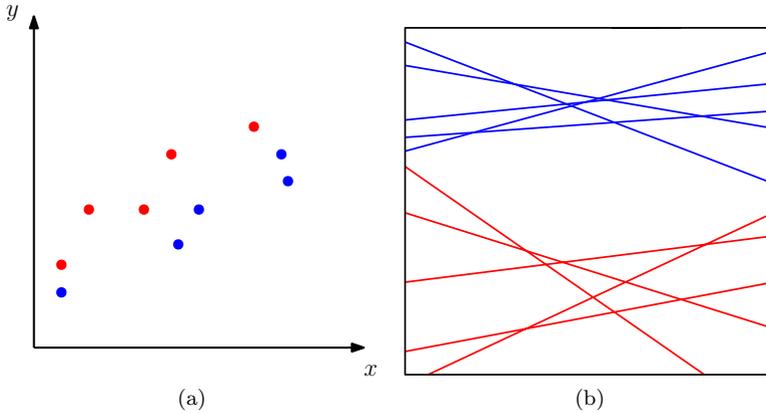


Figura 5.2: a) Dos conjuntos de puntos rojos y azules. b) Plano dual que muestra las rectas correspondientes a los puntos rojos y azules.

$p_i = (a_i, b_i)$  se transforma a una línea  $\ell_i$  con ecuación  $y = a_i x - b_i$ , y cada punto azul  $p_i(t) \in P(t)$  a una línea  $\ell'_i$  con ecuación  $y = a_i x - b_i - t$ .

Ahora es fácil ver que la solución al Problema 1 es equivalente a resolver el siguiente problema de programación lineal en  $\mathbb{R}^3$  con variables  $x$ ,  $y$  y  $t$ :

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && t \\ &\text{sujeto a} && \\ &&& a_i x - y - b_i \leq 0 \\ &&& a_i x - y - t - b_i \geq 0 \end{aligned}$$

De esta forma tenemos el siguiente resultado:

**Teorema 5.2.** *El tiempo más pequeño  $t$  para el cual una línea  $\ell$  atraviesa los segmentos de línea  $l_t^1, \dots, l_t^n$  puede calcularse en tiempo  $O(n)$ .*

### 5.4.2 Variantes sobre puntos en movimiento

Ahora consideramos el Problema 2, la figura 5.3 los segmentos generados por el movimiento de los puntos. De la misma forma que antes, consideramos el conjunto de puntos  $P$  como un conjunto de puntos rojos fijos, y  $P(t)$  como un conjunto de puntos azules que se mueven hacia arriba a diferentes velocidades. Supongamos que cada punto  $p_i$  se mueve

hacia arriba a la velocidad  $s_i$ , por lo que en el momento  $t$ , el punto  $p_i$  se ha movido al punto  $p_i(t) = (a_i, b_i + s_i t)$ .

Luego, en el espacio dual, cada punto rojo  $p_i = (a_i, b_i)$  se asigna a la línea  $y = a_i x - b_i$ , y cada punto azul a la línea  $y = a_i x - b_i - s_i t$ . El problema 2 se puede expresar como el siguiente problema de programación lineal en  $\mathbb{R}^3$  con variables  $x$ ,  $y$  y  $t$ :

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && t \\ &\text{sujeto a} && \\ &&& a_i x - y - b_i \leq 0 \\ &&& a_i x - y - b_i - s_i t \geq 0 \end{aligned}$$

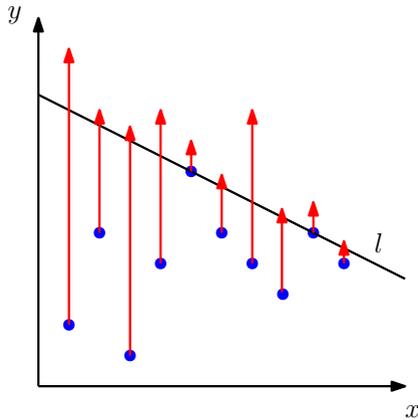


Figura 5.3: Segmentos de líneas generados por puntos que se mueven a diferentes velocidades y en la misma dirección.

### 5.4.3 Dimensión Fija

En el caso  $d$ -dimensional los problemas 1, 2 y 3 se pueden resolver en tiempo lineal. Sea  $\mathbb{R}^d$  el espacio de los reales de dimensión  $d$  y  $p = (a_1, \dots, a_d)$  un punto en  $\mathbb{R}^d$ . Como antes, en el espacio dual de  $\mathbb{R}^d$ , el punto  $p = (a_1, \dots, a_d)$  se asigna al hiperplano con la ecuación  $x_d = a_1 x_1 + \dots + a_{d-1} x_{d-1} - a_d$ .

Considere un conjunto de puntos  $P = \{p_1, \dots, p_n\}$  en  $\mathbb{R}^d$ , donde  $p_i = (a_1^i, \dots, a_d^i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Supongamos que en el tiempo  $t = 0$  comienzan

a moverse hacia arriba, cada  $p_i$  se mueve a su propia velocidad  $s_i$ . Por lo tanto, en el momento  $t$ ,  $p_i$  se ha movido al punto  $p_i(t) = (a_1^i, \dots, a_d^i + s_i t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Sea  $P(t) = \{p_1(t), \dots, p_n(t)\}$ .

En el espacio dual, cada punto  $p_i \in P$  se transforma en un hiperplano  $x_d = a_1^i x_1 + \dots + a_{d-1}^i x_{d-1} - a_d^i$  y cada punto  $p_i \in P(t)$  se convierte en un hiperplano  $x_d = a_1^i x_1 + \dots + a_{d-1}^i x_{d-1} - a_d^i - s_i t$ .

El caso  $d$ -dimensional se puede expresar como el siguiente problema de programación lineal, que se puede resolver en tiempo lineal cuando  $d$  es una constante:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & t \\ \text{sujeto a} & \\ & a_1^i x_1 + \dots + a_{d-1}^i x_{d-1} - x_d - a_d^i \leq 0 \\ & a_1^i x_1 + \dots + a_{d-1}^i x_{d-1} - x_d - a_d^i - s_i t \geq 0 \end{array}$$

**Teorema 5.3.** *Para cualquier dimensión fija  $d$ , los problemas 1, 2 y 3 pueden resolverse en tiempo  $O(n)$ .*

## 5.5 Conclusiones

En este capítulo, hemos introducido un nuevo tipo de problemas para los segmentos de línea generados por puntos en movimiento. Probamos cómo estos problemas se pueden convertir en problemas de programación lineal y se pueden resolver en tiempo lineal. Algunos problemas abiertos permanecen. Uno de los más interesantes es el siguiente: como en el problema 1, considere un conjunto de puntos en el plano que comienzan a moverse en el tiempo  $t = 0$ , pero ahora cada punto se mueve con su dirección y rapidez fija (figura 5.4) encuentre los  $t$  más pequeños para los cuales hay (si existe) una línea que atraviesa los segmentos de línea trazados por los puntos en movimiento. No es difícil obtener un algoritmo para resolver este problema en tiempo  $O(n^2 \log n)$ . ¿Se podrá resolver este problema en tiempo  $O(n \log n)$ ? Una forma de demostrar que no podemos resolver este problema en un tiempo mejor que  $O(n \log n)$  es el siguiente: Como se mencionó anteriormente, Avis *et al.* [8] demostraron que el problema de decidir dónde hay una línea que atraviesa un conjunto de segmentos de línea no puede ser resuelto mejor que  $O(n \log n)$  con el modelo de árbol de decisión algebraico. Usando este resultado, no es difícil ver que cuando nuestros puntos se mueven en direcciones diferentes, nuestro problema resuelve el problema

de atravesar el conjunto de segmentos de línea de la siguiente manera: Sea  $L = \{l_1, \dots, l_n\}$  un conjunto de segmentos, ninguno de los cuales es horizontal (esta restricción se puede eliminar fácilmente aplicando una rotación). Para cada segmento  $l_i$  sean  $p_i$  y  $q_i$  el punto final más bajo y el punto final más alto de  $l_i$ , respectivamente. Supongamos que en el tiempo  $t = 0$  cada punto  $p_i$  comienza a moverse hacia  $q_i$  a una velocidad proporcional a la longitud de  $l_i$ , por lo tanto en el tiempo  $t = 1$  el punto  $p_i$  se habrá movido a la posición del punto  $q_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Como antes,  $p_i(t)$  es la posición de  $p_i$ , y  $l_t^i$  es el segmento con puntos finales  $p_i$  y  $p_i(t)$ . Observe que si el  $t$  más pequeño, para el cual existe una transversal  $L(t) = \{l_t^1, \dots, l_t^n\}$ , es menor o igual a 1, entonces el conjunto  $L$  tiene una transversal. Por lo tanto, encontrar tal  $t$  no se puede hacer mejor que  $O(n \log n)$ . ¿Qué hay de la complejidad del último problema en dimensiones más altas?

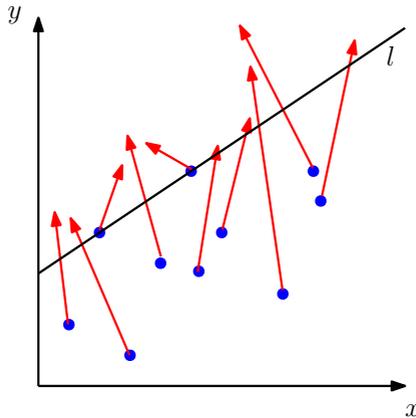


Figura 5.4: Segmentos de líneas generados por puntos que se mueven a diferentes velocidades.



# Bibliografía

- [1] J. Abello, V. Estivill-Castro, T. Shermer, and J. Urrutia. Illumination with Orthogonal Floodlights. In John Staples, Peter Eades, Naoki Katoh, and Alistair Moffat, editors, *Algorithms and Computations: 6th International Symposium*, pages 362–371, Berlin, Heidelberg, December 1995. Springer Berlin Heidelberg.
- [2] J. Abello, V. Estivill-Castro, T. Shermer, and J. Urrutia. Illumination of Orthogonal Polygons with Orthogonal Floodlights. *International Journal of Computational Geometry & Applications*, 08(01):25–38, 1998.
- [3] J. Abello, V. Estivill-Castro, T. Shermer, and J. Urrutia. Illumination of Orthogonal Polygons with Orthogonal Floodlights. *International Journal of Computational Geometry & Applications*, 8(01):25–38, 1998.
- [4] A. Aggarwal. *The Art Gallery Theorem: Its Variations, Applications and Algorithmic Aspects*. PhD thesis, Johns Hopkins University, 1984. AAI8501615.
- [5] O. Aichholzer, R. Fabila-Monroy, D. Flores-Peñaloza, T. Hackl, J. Urrutia, and B. Vogtenhuber. Modern illumination of monotone polygons. *Computational Geometry*, 68:101 – 118, 2018. Special Issue in Memory of Ferran Hurtado.
- [6] N. M. Amato, M. T. Goodrich, and E. A. Ramos. A Randomized Algorithm for Triangulating a Simple Polygon in Linear Time. *Discrete & Computational Geometry*, 26(2):245–265, January 2001.
- [7] D. Avis and H. Elgindy. A combinatorial approach to polygon similarity. *IEEE Transactions on Information Theory*, 29(1):148–150, January 1983.

- [8] D. Avis, J. M. Robert, and R. Wenger. Lower bounds for line stabbing. *Information Processing Letters*, 33(2):59 – 62, 1989.
- [9] N. Benbernou, E. Demaine, M. Demaine, A. Kurdia, J. O’Rourke, G. Toussaint, J. Urrutia, and G. Viglietta. Edge-guarding Orthogonal Polyhedra. In *Proceedings of the 23rd Canadian Conference on Computational Geometry*, pages 461–466, August 2011.
- [10] I. Bjorling-Sachs. A Tight Bound for Guarding General Polygons with Holes. Technical report, Department of Computer Science, Rutgers University, 1991.
- [11] W. F. Bronsvoort. Boundary evaluation and direct display of CSG models. *Computer-Aided Design*, 20(7):416 – 419, 1988.
- [12] J. Cano, C. D. Tóth, and J. Urrutia. Edge Guards for Polyhedra in 3-Space. In *Proceedings of the 24th Canadian Conference on Computational Geometry*, pages 155–160, August 2012.
- [13] B. Chazelle. Triangulating a simple polygon in linear time. *Discrete & Computational Geometry*, 6(3):485–524, September 1991.
- [14] B. Chazelle and J. Incerpi. Triangulation and Shape-complexity. *ACM Transactions on Graphics*, 3(2):135–152, April 1984.
- [15] V. Chvátal. A Combinatorial Theorem in Plane Geometry. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 18(1):39–41, 1975.
- [16] J. Czyzowicz, B. Gaujal, E. Rivera-Campo, J. Urrutia, and J. Zaks. Illuminating high-dimensional convex sets. *Geometriae Dedicata*, 56(2):115–120, July 1995.
- [17] J. Czyzowicz, E. Rivera-Campo, N. Santoro, J. Urrutia, and J. Zaks. Guarding rectangular art galleries. *Discrete Applied Mathematics*, 50(2):149 – 157, 1994.
- [18] M. de Berg, O. Cheong, M. van Kreveld, and M. Overmars. *Computational Geometry: Algorithms and Applications*. Springer-Verlag TELOS, Santa Clara, CA, USA, 3rd edition, 2008.
- [19] S. L. Devadoss and J. O’Rourke. *Discrete and Computational Geometry*. Princeton University Press, 2011.
- [20] Rae A. Earnshaw, editor. *Theoretical Foundations of Computer Graphics and CAD*, volume 40. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1988.

- [21] H. Edelsbrunner, H. A. Maurer, F. P. Preparata, A. L. Rosenberg, E. Welzl, and D. Wood. Stabbing line segments. *BIT Numerical Mathematics*, 22(3):274–281, September 1982.
- [22] K. S. Eo and C. M. Kyung. Hybrid shadow testing scheme for ray tracing. *Computer-Aided Design*, 21(1):38 – 48, 1989.
- [23] V. Estivill-Castro and J. Urrutia. Optimal Floodlight Illumination of Orthogonal Art Galleries. In *Proceedings of the 6th Canadian Conference on Computational Geometry*, pages 81–86, 01 1994.
- [24] S. Fisk. A short proof of Chvátal’s Watchman Theorem. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 24(3):374, 1978.
- [25] J. W. Gaddum. The Sums of the Dihedral and Trihedral Angles in a Tetrahedron. *The American Mathematical Monthly*, 59(6):370–371, 1952.
- [26] B. Grünbaum, V. Klee, M. A. Perles, and G. C. Shephard. *Convex Polytopes*. Springer, 1967.
- [27] E. Györi, F. Hoffmann, K. Kriegel, and T. Shermer. Generalized guarding and partitioning for rectilinear polygons. *Computational Geometry*, 6(1):21 – 44, 1996.
- [28] L. H. Erickson and S. M. LaValle. An Art Gallery Approach to Ensuring that Landmarks are Distinguishable. Master’s thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign, 06 2011.
- [29] F. Hoffmann, M. Kaufmann, and K. Kriegel. The art gallery theorem for polygons with holes. In *Proceedings of the 32nd Annual Symposium of Foundations of Computer Science*, pages 39–48, October 1991.
- [30] J. Kahn, M. Klawe, and D. Kleitman. Traditional Galleries Require Fewer Watchmen. *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*, 4(2):194–206, 1983.
- [31] J. Kahn, M. Klawe, and D. Kleitman. Traditional Galleries Require Fewer Watchmen. *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*, 4(2):194–206, 1983.
- [32] M. I. Karavelas, C. D. Tóth, and E. P. Tsigaridas. Guarding curvilinear art galleries with vertex or point guards. *Computational Geometry*, 42(6):522 – 535, 2009.

- [33] R. Kuc and M. Siegel. Efficient representation of reflecting structures for a sonar navigation model. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volume 4, pages 1916–1923, March 1987.
- [34] T. Lozano-Pérez and M. A. Wesley. An Algorithm for Planning Collision-free Paths Among Polyhedral Obstacles. *Communications of the ACM*, 22(10):560–570, October 1979.
- [35] J. Matoušek and B. Gärtner. *Understanding and using linear programming*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [36] M. McKenna. Worst-case Optimal Hidden-surface Removal. *ACM Transactions on Graphics*, 6(1):19–28, January 1987.
- [37] N. Megiddo. Linear-time algorithms for linear programming in  $\mathbb{R}^3$  and related problems. *SIAM Journal on Computing*, 12(4):759–776, 1983.
- [38] N. Megiddo. Linear Programming in Linear Time When the Dimension Is Fixed. *Journal of the ACM*, 31(1):114–127, January 1984.
- [39] J. S. B. Mitchell. An algorithmic approach to some problems in terrain navigation. *Artificial Intelligence*, 37(1):171 – 201, 1988.
- [40] J. R. Munkres. *Topology*. Featured Titles for Topology Series. Prentice Hall, Incorporated, 2000.
- [41] J. O’Rourke. Galleries need fewer mobile guards: A variation on Chvátal’s theorem. *Geometriae Dedicata*, 14(3):273–283, September 1983.
- [42] J. O’Rourke. *Art Gallery Theorems and Algorithms*, volume 57. Oxford University Press Oxford, 1987.
- [43] J. O’Rourke, S. Rao Kosaraju, and N. Megiddo. Computing circular separability. *Discrete & Computational Geometry*, 1(2):105–113, June 1986.
- [44] M. S. Paterson and F. F. Yao. Optimal binary space partitions for orthogonal objects. *Journal of Algorithms*, 13(1):99 – 113, 1992.
- [45] H. Poincaré. Sur la Généralisation d’un Théoreme d’Euler Relatif aux Polyedres. *Comptes Rendus de Séances de l’Academie des Sciences*, 117:144, 1893.

- [46] D. Rappaport. A convex hull algorithm for discs, and applications. *Computational Geometry*, 1(3):171 – 187, 1992.
- [47] T. C. Shermer. Recent results in art galleries [geometry]. *Proceedings of the IEEE*, 80(9):1384–1399, September 1992.
- [48] D. L. Souvaine, R. Veroy, and A. Winslow. Face Guards for Art Galleries. In *XIV Spanish Meeting on Computational Geometry*, pages 39–42, 2011.
- [49] J. Stenstrom and C. Connolly. Building wire frames from multiple range views. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volume 3, pages 615–620, April 1986.
- [50] G. T. Toussaint. Computational Geometric Problems in Pattern Recognition. In J. Kittler, K. Sun Fu, and L. F. Pau, editors, *Pattern Recognition Theory and Applications*, pages 73–91, Dordrecht, 1982. Springer Netherlands.
- [51] J. Urrutia. Art Gallery and Illumination Problems. In J. R. Sack and J. Urrutia, editors, *Handbook of Computational Geometry*, pages 973 – 1027. North-Holland, Amsterdam, 2000.
- [52] G. Viglietta. *Guarding and Searching Polyhedra*. PhD thesis, Università de Pisa, 2012.
- [53] G. Viglietta. Face-guarding Polyhedra. *Computational Geometry*, 47:833–846, 2013.
- [54] S. Xie, T. W. Calvert, and B. K. Bhattacharya. Planning views for the incremental construction of model bodies. In *Proceedings of the 8th IEEE International Conference on Pattern Recognition*, pages 154–157, 1986.
- [55] M. Yachida. 3-D Data acquisition by multiple views. In O. Faugeras and G. Giralt, editors, *The Third International Symposium in Robotics Research*, pages 11–18, Cambridge, Massachusetts, December 1986. MIT Press.



# Índice alfabético

- $\pi/2$ -arista guardia, 40
- algoritmo de Megiddo, 19
- aristas guardia, 4
  - abiertas, 4
  - cerradas, 4
- caras guardia, 4
- concha de mar, 30
- curvatura Gaussiana, 31
- cuña, 40
  - ortogonal, 40
- dualidad, 54
- función de restricción, 54
- función objetivo, 54
- fórmula Euler–Poincaré, 23
- galería, 5
  - con huecos, 5
  - curvilínea, 5
  - ortogonal, 5
  - tradicional, 5
- guardias crómicos, 4
- guardias móviles, 4
- género, 21
- modems, 4
- multiplex, 13
- octante, 33
- octoplex, 13
- poliedro, 21
- poliedro de Schönhardt, 13
- poliedro ortogonal
  - de levantamiento, 35
- polígono, 2
  - ortogonal, 3
  - simple, 3
- problema de optimización, 19
- problema de separabilidad, 51
- puntos guardia, 3
- reglas de iluminación, 43
- teorema de Chvátal, 6
- teorema de Gauss-Bonnet, 31
- teorema de triangulación, 21
- triangulación, 3
- variable de optimización, 54
- vértice
  - convexo, 3, 23
  - cóncavo, 3, 23
  - llano, 23
- vértices guardia, 4
- vértices reflectores, 4
- ángulo sólido, 29