



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
ELÉCTRICA - CONTROL

MÉTODOS GEOFÍSICOS PARA DETECCIÓN DE DAÑO EN EDIFICIOS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
DIEGO LÓPEZ RODRÍGUEZ

TUTOR
DR. LUIS AGUSTÍN ÁLVAREZ-ICAZA LONGORIA
INSTITUTO DE INGENIERÍA UNAM

CIUDAD DE MÉXICO DICIEMBRE 2018



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO

Presidente. Dr. Marco Antonio Arteaga Pérez

Secretario. Dr. Gerardo René Espinosa Pérez

1^{er} vocal. Dr. Luis Agustín Álvarez Icaza Longoria

2^{do} vocal. Dr. José Alberto Escobar Sánchez

3^{er} vocal. Dr. Héctor Benítez Pérez

Esta tesis se realizó en el Laboratorio de Control de Vibraciones del Instituto de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México.

TUTOR

Dr. Luis Agustín Álvarez Icaza Longoria

A mi teté...

con todo mi $r = 1 - \cos \varphi$

Agradecimientos

A mis padres, Rocío y Hugo, por su amor.

A mi hermano, Huguito, por su compañía desde el inicio.

A mi abuelita, teté, por su valor, cualidad del valiente.

A mis tíos, Angélica, José, Melita, Memo y Román, por todo su apoyo y cariño.

Al Dr. Luis Alvarez Icaza, por aceptarme como su alumno y guiarme con sus ideas y comentarios a través del desarrollo de esta tesis.

A mis amigos controleros, por su ayuda a través de tantos problemas.

A mis amigos del Laboratorio de Control de Vibraciones, Francisco, Jesús, Manuel y Miguel por su ayuda para esta tesis.

A la educación pública de México, de la cual emanan grandes pensadores, a los cuales espero sumarme.

A la Universidad Nacional Autónoma de México y a su Facultad de Ingeniería, por formar a grandes profesionales, pero sobre todo, grandes seres humanos.

Al Instituto de Ingeniería de la UNAM, por apoyar los grandes proyectos que México necesita.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, sin el cual esta y otras miles de tesis no se podrían llevar a cabo.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Motivación y planteamiento del problema	1
1.2. Estado del Arte	2
1.3. Objetivos	3
1.4. Metodología	4
2. Modelado del sistema	5
2.1. Modelo clásico	5
2.1.1. Excitación en la base del edificio	6
2.2. Modelo Continuo	7
2.2.1. Modelo para vigas a esfuerzo cortante	8
2.2.2. Excitación en el soporte para modelos continuos	8
2.3. Discretización	9
2.3.1. Semi-discretización espacial	10
2.3.2. Diferencias Finitas	10
2.3.3. Aproximación de derivadas de orden superior	11
2.3.4. Condiciones de frontera	11
3. Implementación de los algoritmos	13
3.1. Discretización del sistema	13
3.1.1. Condiciones de frontera	15
3.1.2. Modelo completo	16
3.2. Parametrización del sistema	17
3.3. Filtros integrales	18
3.4. Estimación de parámetros	20
3.4.1. Algoritmo de Mínimos Cuadrados Recursivo	20
3.5. Detección de daño en edificios	22
3.5.1. Metodología de detección de daño	22
3.5.2. Algoritmo de detección de daño	25
4. Resultados	29
4.1. Resultados en simulación	29
4.2. Resultados en experimento	34
4.2.1. Implementación del Algoritmo de identificación de daño	35

4.2.2. Velocidad de Propagación	45
5. Conclusiones y trabajo futuro	51
5.1. Conclusiones	51
5.2. Algunas preguntas para trabajo futuro	52
A. Algunos detalles de implementación	53
A.1. Observaciones	55

Capítulo 1

Introducción

En este primer capítulo se presentará una visión general de el desarrollo de la presente tesis. Primero se planteará la motivación por la cual se decidió hacer este trabajo de investigación, esto es primordial pues considero que el desarrollo científico no debe ser neutro, es decir, debe tener un contenido social; después se procederá con una revisión del estado del arte para contextualizar este trabajo; en seguida se presenta la metodología con que se llevará a cabo la investigación; y finalmente, dados los puntos anteriores se presentan los objetivos que se desean lograr en esta tesis.

1.1. Motivación y planteamiento del problema

En [9] se presenta el mapa mostrado en la figura 1.1, el cual muestra las regiones del mundo que se encuentran amenazadas bajo peligro de actividad sísmica.

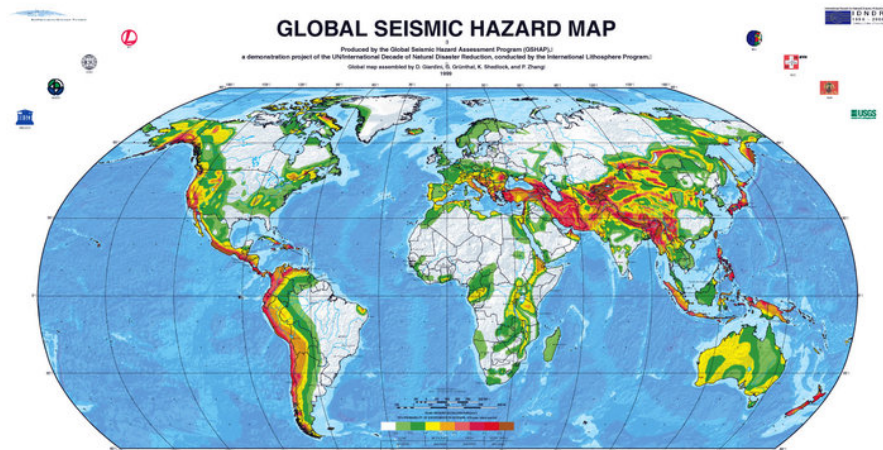


Figura 1.1: Peligro sísmico

Es importante notar que existen una gran cantidad de regiones con alta densidad de población que se encuentran en regiones amenazadas, entre las que destacan en América: Chile, el estado de California en los Estados Unidos y el centro/sur de México; en Europa: el sur de Italia, los Balcanes y Turquía; en Asia: Japón, Filipinas y el norte de India

Entre las regiones anteriores está nuestro país el cual ha reportado importantes actividades sísmicas a lo largo de la historia. Uno de los sismos más importantes fue el sismo del 19 de septiembre de 1985, en el que perdieron la vida 3200 personas según cifras oficiales con pérdidas económicas equivalentes al 2.4% del PIB de esa época [22], en [17] y [2] se estudia a fondo este evento sísmico. Más recientemente, el 19 de septiembre de 2017 un sismo de magnitud 7.1 azotó varias regiones de México en las que murieron 370 personas y hubo pérdidas económicas estimadas por más de 2 mil millones de dólares.

En estos sismos mencionados, existen casos documentados de muchos edificios que tuvieron que ser demolidos o que se derrumbaron después de la actividad sísmica. Un caso bien documentado [7] fue el de un edificio que se derrumbó 51 minutos después de el evento sísmico del 19 de septiembre de 2017 en la Ciudad de México.

Este tipo de casos muestran la necesidad de un mejor y mayor monitoreo de la salud estructural (SHM por sus siglas en inglés) de puentes, edificios, torres, etc., en México. Considero que el problema fundamental del SHM en nuestro país es la alta densidad de población que existe en regiones que están bajo amenaza sísmica combinado con la forma de realizar el monitoreo (pues para esto se envía personal capacitado a revisar las estructuras con posible daño estructural); estas dos condiciones implican que sea imposible satisfacer las necesidades de toda la población para verificar la salud estructural de su vivienda en tiempo y forma.

De esta forma, esta tesis intenta proponer una posible solución al problema planteado que se puede resumir como sigue: Considere un edificio de n pisos y suponga que es sometido a alguna entrada sísmica. Entonces la pregunta es ¿Es posible determinar de manera oportuna y certera si dicho edificio ha resultado con algún daño estructural que comprometa su integridad y por lo tanto la de la gente que vive en él?

La pregunta anterior da pie a muchas otras preguntas que se deben resolver antes, por ejemplo ¿Qué queremos decir con un “daño estructural” y como lo podemos caracterizar? ¿En qué principios debemos basarnos, es decir, en el marco de qué teoría se va a realizar este análisis? ¿A qué nos referimos con “oportuno” y “certero”? entre otras.

1.2. Estado del Arte

El estudio del SHM no es *sui generis* de las estructuras civiles, es más bien una teoría aplicable a cualquier tipo de sistema físico. En [8] se presenta una breve introducción al SHM, es éste se establece una metodología para realizar el monitoreo que se resumen en

- Evaluación operacional

- Adquisición, normalización y limpieza de datos.
- Condensación de la información y
- Modelado estadístico

En [18] se presenta de manera exhaustiva un análisis de la literatura sobre SHM. Se presentan objetivos, definiciones, metodologías, aplicaciones, etc. relacionadas con el monitoreo estructural.

Otro enfoque para el monitoreo estructural se presenta en [23], en donde los autores presentan una serie de axiomas los cuales reflejan ciertos (no todos) aspectos de la teoría de SHM.

Existen normas que presentan procedimientos y metodologías para asegurar la seguridad de un edificio tras un evento sísmico, por ejemplo, en [21] y [15] se presentan los procedimientos que se deben llevar a cabo tras una contingencia sísmica. Sin embargo, este tipo de normas son basadas en métodos heurísticos de evaluación de estructuras, esto es, se basan en la experiencia previa en sismos anteriores para concluir sobre la salud estructural de algún edificio en particular.

En este trabajo se utilizará un enfoque en poco distinto. Se recurrirá a principios fundamentales que modelan el comportamiento de este tipo de estructuras y se supondrá que cambios significativos en el comportamiento de estos sistemas se traducirán en daños estructurales que pueden comprometer la seguridad de sus habitantes.

Un ejemplo de un sistema de SHM aplicado a edificios se pueden encontrar en [1], en donde el monitoreo se realiza utilizando únicamente información de un satélite SAR. En [20] también se presenta un algoritmo de detección de daño en edificios pero con un enfoque basado en el comportamiento dinámico del sistema el cual contrasta con el método de procesamiento de señales implementado en [1]. El enfoque usado en [20] es un enfoque que se aproxima más al usado en este trabajo, pues se basan en principios fundamentales de el comportamiento del sistema, más específicamente en la dinámica de la propagación ondas.

Para finalizar se discutirá el estado de las modelos matemáticos que existen para representar la dinámica de este tipo de sistemas. En [3] se presenta el modelo clásico para representar edificios a esfuerzo cortante (*shear buildings*). Otro ejemplo de modelos se presentan en [10] y en [4] en donde utilizan métodos de dinámica estructural para modelar de manera continua elementos estructurales. La en la tesis doctoral [14] modela la dinámica de los edificios a esfuerzo cortante utilizando la ecuación de onda con amortiguamiento.

1.3. Objetivos

Dados los problemas anteriores se plantean los siguientes objetivos:

- Plantear un modelo matemático del sistema – en este caso de edificios de n pisos – que sea capaz de representar satisfactoriamente el comportamiento físico y que

además se pueda tener una interpretación física de sus parámetros y que estas interpretaciones sean tales que se pueda relacionar con propiedades significativas para detectar daños o fallas en el sistema real.

- Proponer algún método de estimación de parámetros del modelo matemático que cumpla con ciertas propiedades adecuadas a este tipo de sistemas.
- Realizar pruebas experimentales en un modelo a escala de un edificio de cinco pisos ante sismos para verificar la validez del modelo y de el algoritmo de estimación paramétrica planteados anteriormente.
- Planteamiento de un algoritmo que permita determinar si existe alguna falla o daño en el edificio.

1.4. Metodología

Para el planteamiento del modelo matemático se deberá realizar una revisión exhaustiva de los modelos existentes, de sus ventajas y desventajas y proponer algún modelo que se crea cumple con las condiciones necesarias para modelar de manera correcta el sistema real, esto es, que las salidas del sistema real ante alguna entrada sísmica sea cercanas en alguna métrica a las salidas del modelo matemático. Más aún, los parámetros de este modelo deben tener una interpretación física de alguna variable que este íntimamente relacionada con la salud estructural del sistema.

De una manera similar, se deberán revisar los algoritmos de estimación paramétrica y elegir alguno que cumpla con las necesidades requeridas. Para establecer las propiedades de este algoritmo debe tener es básicamente establecer las condiciones necesarias y suficientes para que el algoritmo logre converger a los parámetros reales en un determinado tiempo. Este tiempo de convergencia se debe proponer dependiendo de las características de los sismos, por ejemplo, si un sismo dura 20 segundos es ilógico diseñar un algoritmo de identificación paramétrica que converja en 30 segundos. Otro problema en el que se debe indagar es que uno nunca sabe en qué momento va a ocurrir la falla pues podría ocurrir empezando el sismo o al finalizar lo cual va a afectar la convergencia del estimador de parámetros

Una vez planteados estos fundamentos teóricos, se realizarán pruebas experimentales para garantizar su validez en una modelo a escala. En este punto se tendrán que resolver problemas propios de una implementación física, esto es, que tanto afectan los errores de medición, el ruido, las limitaciones de los sensores, etc. que siempre se presentan al momento de la adquisición de datos en la convergencia y la precisión del modelo matemático.

Finalmente realizando un análisis del comportamiento de las pruebas experimentales y de el análisis del modelo matemático y de la interpretación física que este tenga, se planteará un algoritmo para poder determinar si existe o no daño estructural que ponga en riesgo la salud del edificio.

Capítulo 2

Modelado del sistema

2.1. Modelo clásico

Existen diversos modelos matemáticos que representan el comportamiento de un edificio, estos modelos dependen de las suposiciones *a priori* que se hagan de la estructura. Considere el siguiente diagrama de un edificio de N pisos con parámetros concentrados. Donde m_i es la masa de i -ésimo piso, k_i la rigidez del i -ésimo piso, c_i

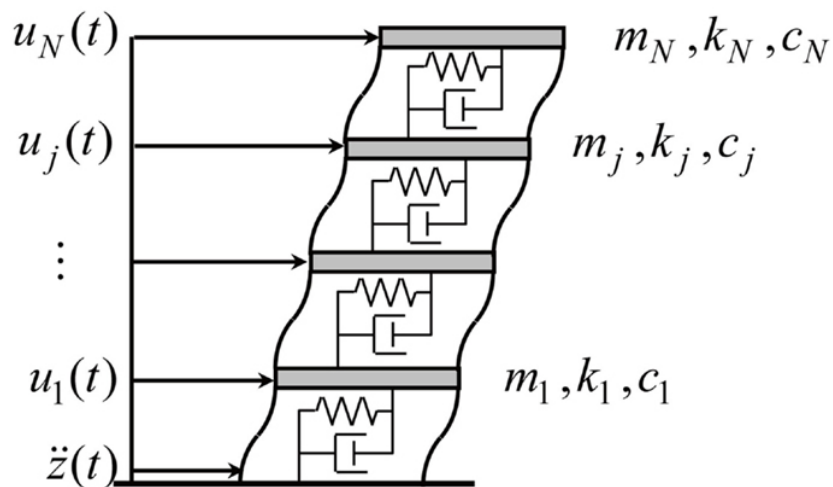


Figura 2.1: Edificio a esfuerzo cortante

el coeficiente de fricción viscosa del i -ésimo piso, u_i el desplazamiento del i -ésimo piso relativo al piso y \ddot{z} la aceleración del sismo, con $1 \leq i \leq N$.

Haciendo suma de fuerzas en cada piso se tiene el siguiente sistema [3]

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = F, \quad (2.1)$$

en donde

$$\begin{aligned}
M &= \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_N \end{bmatrix} \\
K &= \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & -k_i & k_i + k_{i+1} & -k_{i+1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -k_N & k_N \end{bmatrix}. \quad (2.2) \\
C &= \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & -c_i & c_i + c_{i+1} & -c_{i+1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -c_N & c_N \end{bmatrix} \\
u &= [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_N]^T \\
F &= [f_1 \quad f_2 \quad \cdots \quad f_N]
\end{aligned}$$

Donde f_i es la fuerza aplicada en el i -ésimo piso.

2.1.1. Excitación en la base del edificio

Suponga que el desplazamiento del sismo se da en la misma dirección que el desplazamiento del edificio, considere a u_g el desplazamiento de la tierra, el desplazamiento total del i -ésimo piso como u_i^t y el desplazamiento relativo de el i -ésimo piso con respecto a el suelo como u_i . De esta manera tenemos que para todo tiempo t se cumple

$$u_i^t(t) = u_g(t) + u_j(t), \quad (2.3)$$

si definimos $u^t := [u_1^t, u_2^t, \dots, u_N^t]^T$ y $u := [u_1, u_2, \dots, u_N]^T$, entonces

$$u^t(t) = u_g(t) \cdot \mathbf{1} + u(t), \quad (2.4)$$

donde $\mathbf{1}$ es un vector de unidades de tamaño N .

Cuando ocurre un sismo – suponiendo que este afecta de manera igual a todos los soportes de la estructura – se produce una fuerza externa efectiva f la cual depende de la inercia que depende a su vez de la masa del edificio y de la aceleración de las mismas causadas por el sismo. Así tenemos el modelo de la estructura

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = -M\mathbf{1}\ddot{u}_g(t). \quad (2.5)$$

2.2. Modelo Continuo

Ahora derivaremos el modelo considerando la estructura como una viga continua sin amortiguamiento. La viga tiene una rigidez $EI(x)$ y una masa $m(x)$ por unidad de longitud, $p(x, t)$ es la distribución de fuerza aplicada a la viga y $u(x, t)$ representa el desplazamiento de la viga.

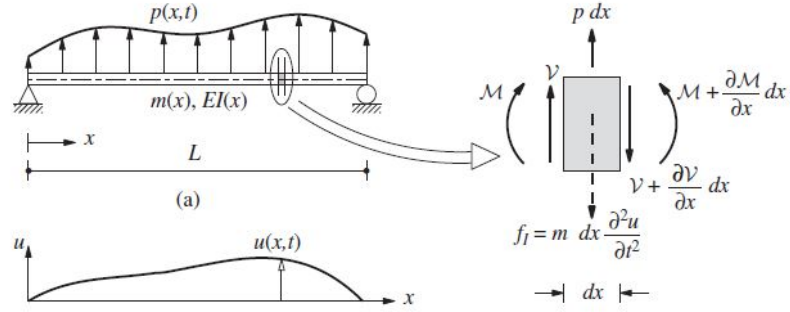


Figura 2.2: Modelo continuo

Considere el diagrama de cuerpo libre de un elemento diferencial de la viga dx mostrado en la figura 2.2, la ecuación de equilibrio para la suma de fuerzas es

$$\frac{\partial V}{\partial x} dx - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx + p dx = 0, \quad (2.6)$$

lo cual implica que

$$\frac{\partial V}{\partial x} + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p = 0. \quad (2.7)$$

Ahora, la ecuación de equilibrio para la suma de momentos es

$$\left(V + \frac{\partial V}{\partial x} dx \right) dx + p dx \frac{dx}{2} - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx \frac{dx}{2} + M + \frac{\partial M}{\partial x} dx - M = 0. \quad (2.8)$$

Sin tomar en cuenta las diferenciales de orden superior tenemos que

$$V + \frac{\partial M}{\partial x} = 0. \quad (2.9)$$

Sin tomar en cuenta las deformaciones cortantes tenemos que la curvatura es

$$\vartheta = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2.10)$$

Además

$$M = EI \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (2.11)$$

Sustituyendo en la ecuación de equilibrio de momentos

$$V = -\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right). \quad (2.12)$$

Finalmente sustituyendo en la ecuación de equilibrio de fuerzas

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = p. \quad (2.13)$$

2.2.1. Modelo para vigas a esfuerzo cortante

Ahora consideraremos el caso particular de vigas a esfuerzo cortante (shear beams). Una viga a esfuerzo cortante es una viga en la cual se considera que la pendiente a la cual se flexiona en cualquier punto es proporcional a la fuerza cortante aplicado en este punto.

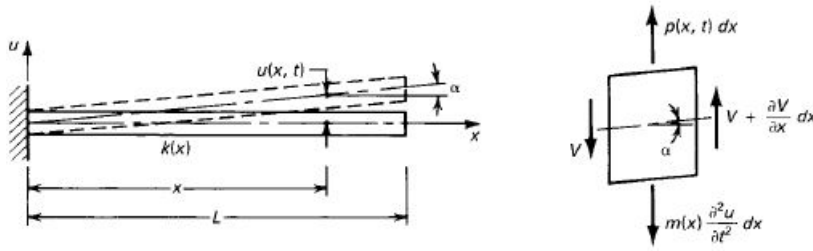


Figura 2.3: Vigas a esfuerzo cortante

Esta suposición se puede expresar como la siguiente ecuación.

$$V = k \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2.14)$$

donde la constante de proporcionalidad k es llamada la rigidez cortante

Sustituyendo la ecuación anterior (2.14) en la ecuación de equilibrios de suma de fuerzas (2.7) tenemos la ecuación que modela el comportamiento de una viga cortante.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p = 0. \quad (2.15)$$

2.2.2. Excitación en el soporte para modelos continuos

Se considerará una entrada de aceleración transversal al eje de la barra en la base de la misma. Así tenemos que el desplazamiento total u^t de la barra está dado por la ecuación

$$u^t(x, t) = u(x, t) + u_g(t), \quad (2.16)$$

lo cual implica

$$\frac{\partial^2 u^t(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u_g(t)}{\partial t^2}. \quad (2.17)$$

Así la ecuación de suma de fuerzas (2.7) queda de la siguiente manera

$$\frac{\partial V}{\partial x} + m \frac{\partial^2 u^t}{\partial t^2} + p = 0. \quad (2.18)$$

Si suponemos que la fuerza externa $p(x, t) = 0$, entonces tenemos que

$$\frac{\partial V}{\partial x} + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -m \frac{d^2 u_g}{dt^2}. \quad (2.19)$$

De esta manera las ecuaciones que describen el comportamiento de las vigas cuyas ecuaciones son (2.13) y (2.15) considerando una entrada de excitación en la base de la estructura son respectivamente

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -m \frac{d^2 u_g}{dt^2}. \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -m \frac{d^2 u_g}{dt^2}. \quad (2.21)$$

Es importante notar que el parámetro k en la ecuación (2.21) tiene unidades de $[\frac{kg \cdot m^2}{s^2}]$.

2.3. Discretización

Algunos fenómenos físicos son representados de matemáticamente como ecuaciones diferenciales parciales (PDE por sus siglas en inglés). Para realizar el análisis de este tipo de sistemas se pueden tomar dos caminos:

1. Se puede realizar el análisis cualitativo y cuantitativo de dichos sistemas analizando las propiedades matemáticas sus PDE. Esto tiene como ventaja que como el sistema real (si se realizó un buen modelado) se comporta de una manera muy similar a la manera en que se comporta la ecuación, entonces el análisis realizado con la ecuación reflejará de manera precisa el comportamiento del sistema físico. Sin embargo el marco de estudio de las PDE es relativamente limitado con lo que el análisis se hace más escaso.
2. Podemos aproximar la PDE que representa el sistema a un conjunto de ODE o incluso a un conjunto de ecuaciones en diferencias. Esto hace que se pueda hacer un análisis más completo de la aproximación sistema debido a que el marco de estudio de ODE o de ecuaciones en diferencias son más completos con lo cual el análisis también lo será. Sin embargo, como estamos concluyendo a partir de una aproximación se tiene que justificar las condiciones necesarias para que esta conclusión refleje el comportamiento de la PDE.

En este trabajo asumiremos el segundo camino. Esto debido a que nos permite utilizar más herramientas matemáticas para concluir propiedades del sistema, además de que existen métodos de aproximación que nos permiten cuantificar el error entre la PDE y la PDE aproximada.

2.3.1. Semi-discretización espacial

En esta tesis optaremos por aproximar las PDE, para esto utilizaremos una semi-discretización espacial (que es también llamada método de líneas) el cual aproxima una PDE en un sistema de ODE, esto se hace realizando aproximaciones por diferencias finitas en las derivadas dependientes de variables espaciales, dejando como única variable independiente a t (tiempo) con lo que se consigue un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias dependientes del tiempo.

2.3.2. Diferencias Finitas

En esta sección introduciremos las herramientas necesarias para realizar la aproximación de PDE.

Sabemos que por definición la derivada parcial de una función $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ a lo largo de la primera variable en el punto (x, y) es

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}. \quad (2.22)$$

Realizando la expansión en series de Taylor de segundo orden de f en dirección x (*i.e.* dejando fija a y) tenemos que

$$f(x + h, y) = f(x, y) + h \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + O(h). \quad (2.23)$$

Así

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \approx \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}, \quad (2.24)$$

donde el error de aproximación es del orden de h . Esta aproximación es llamada la aproximación por la derecha de $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$.

De manera análoga aproximando $f(x - h, y)$ obtenemos

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \approx \frac{f(x, y) - f(x - h, y)}{h}, \quad (2.25)$$

La cual es llamada la aproximación por la izquierda de $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$.

Si sumamos ambas y resolvemos para $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ (lo cual es una promedio de ambas), entonces tenemos la llamada aproximación central

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \approx \frac{f(x + h, y) - f(x - h, y)}{2h} \quad (2.26)$$

Esta aproximación tiene un error del orden de h^2 con lo que se considera mejor que la aproximación derecha o izquierda

2.3.3. Aproximación de derivadas de orden superior

Dada una función $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ que sea al menos \mathcal{C}^{k+1} se desea encontrar una aproximación en diferencias finitas de su k -ésima derivada parcial en el punto (x, y) .

Consideremos los puntos $(x_1, y), \dots, (x_n, y)$, donde $n \geq k + 1$, por su expansión en serie de Taylor tenemos que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$

$$f(x_i, y) = f(x, y) + (x_i - x) \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \dots + \frac{1}{k!} (x_i - x)^k \frac{\partial^k f(x, y)}{\partial x^k} + \dots \quad (2.27)$$

Así, queremos encontrar los coeficientes c_i tales que

$$c_1 f(x_1, y) + c_2 f(x_2, y) + \dots + c_n f(x_n, y) \approx \frac{\partial^n f(x, y)}{\partial x^n}, \quad (2.28)$$

donde la aproximación sea lo mejor posible.

Sustituyendo la ecuación (2.27) en (2.28) se tiene el siguiente sistema de ecuaciones [13]

$$\frac{1}{(i-1)!} \sum_{j=1}^n c_j (x_j - x)^{(i-1)} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k + 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.29)$$

para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

Se espera que el orden de aproximación sea al menos $O(h^p)$ con $p = n - k$.

Un punto importante a resaltar en el método anterior es que como los puntos (x_j, y) son arbitrarios, entonces este método funciona para mallas no uniformes de los puntos de discretización.

2.3.4. Condiciones de frontera

A fin de que una ecuación diferencial parcial pueda tener solución única es necesario establecer condiciones iniciales y condiciones de frontera para esta. Esto es, para una ecuación diferencial con variable dependiente $u(x, t)$ la cual depende de una variable espacial y otra temporal es necesario establecer condiciones sobre u .

Estas condiciones son de naturaleza muy variada y dependen en la estructura de la ecuación diferencial parcial. Para efectos de esta tesis solo consideraremos condiciones sobre $u(x, 0)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)$ denominadas condiciones iniciales y condiciones sobre $u(0, t)$, $\frac{\partial u}{\partial x}(x_f, t)$ donde $x_f > 0$ denominadas condiciones de frontera (la primera de Dirichlet y la segunda de Neumann).

Capítulo 3

Implementación de los algoritmos

3.1. Discretización del sistema

Considere el sistema (2.21), debido a la regla del producto podemos reescribirla como sigue

$$\frac{dk(x)}{dx} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + k(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - m(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = -m \frac{d^2 u_g(t)}{dt^2}. \quad (3.1)$$

Utilizaremos una semi-discretización espacial para aproximar la ecuación (3.1) a una ecuación diferencial ordinaria. La discretización se realizará en los puntos $\{x_1, \dots, x_n\}$ donde n representa el número de puntos de discretización, además estos puntos cumplen que $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$, de esta manera podemos definir para cada $1 \leq i \leq n$ a $h_i := x_i - x_{i-1}$ y a $h_1 := x_1$.

Dado a que la discretización de la suma de funciones en un punto es la suma de las discretizaciones en dicho punto, primero vamos a discretizar cada término de la ecuación (3.1).

La aproximación en diferencias finitas del primer término $\frac{dk}{dx} \frac{\partial u}{\partial x}$ es a su vez el producto de la aproximación de ambos términos. Así utilizando una aproximación por diferencias finitas hacia adelante en el punto x_i para $1 < i < n$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{dk(x_i)}{dx} &\approx \frac{k(x_{i+1}) - k(x_i)}{h_{i+1}} \\ \frac{\partial u(x_i, t)}{\partial x} &\approx \frac{u(x_{i+1}, t) - u(x_i, t)}{h_{i+1}} \end{aligned} \quad (3.2)$$

De esta forma

$$\frac{dk(x)}{dx} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \left(\frac{k(x_{i+1}) - k(x_i)}{h_{i+1}} \right) \left(\frac{u(x_{i+1}, t) - u(x_i, t)}{h_{i+1}} \right) \quad (3.3)$$

De ahora en adelante para simplificar notación definimos

$$\begin{aligned} u_i(t) &:= u(x_i, t) \\ k_i &:= k(x_i) \\ m_i &:= m(x_i) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Note que la expresión $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ la deseamos expresar en términos de los puntos de discretización, sin embargo, estos pueden formar una malla no uniforme con lo que no podemos utilizar la fórmula para la aproximación centrada para derivadas de segundo orden.

En lugar utilizaremos la fórmula (2.29), de esta forma realizando la aproximación de $\frac{\partial^2 u(x_i,t)}{\partial x^2}$ en los puntos x_{i-1}, x_i, x_{i+1} entonces obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} c_{i-1} + c_i + c_{i+1} &= 0 \\ -h_i c_{i-1} + h_{i+1} c_{i+1} &= 0 \\ \frac{h_i^2}{2} c_{i-1} + \frac{h_{i+1}^2}{2} c_{i+1} &= 1 \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde c_i es el coeficiente de $u_i(t)$. Así, resolviendo el sistema de ecuaciones anterior tenemos

$$\begin{aligned} c_{i-1} &= \frac{2}{h_i^2 + h_i h_{i+1}} \\ c_i &= -\frac{2}{h_i h_{i+1}} \\ c_{i+1} &= \frac{2}{h_{i+1}^2 + h_i h_{i+1}} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \approx \frac{2}{h_i^2 + h_i h_{i+1}} u_{i-1}(t) - \frac{2}{h_i h_{i+1}} u_i(t) + \frac{2}{h_{i+1}^2 + h_i h_{i+1}} u_{i+1}(t) \quad (3.7)$$

Note que esta última aproximación es de orden $O(h_i)$.

De esta forma tenemos que el segundo término $k(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ es el producto de aproximaciones de los términos $k(x)$ y $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$.

$$k(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \approx k_i \left[\frac{2}{h_i^2 + h_i h_{i+1}} u_{i-1}(t) - \frac{2}{h_i h_{i+1}} u_i(t) + \frac{2}{h_{i+1}^2 + h_i h_{i+1}} u_{i+1}(t) \right] \quad (3.8)$$

Finalmente los últimos términos $m(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$ y $m(x) \frac{d^2 u_g(t)}{dt^2}$ se aproximan como

$$\begin{aligned} m(x_i) \frac{\partial^2 u(x_i, t)}{\partial t^2} &= m_i \frac{d^2 u_i(t)}{dt^2} \\ m(x_i) \frac{d^2 u_g(t)}{dt^2} &= m_i \frac{d^2 u_g(t)}{dt^2} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Así, para $1 < i < n$ podemos aproximar la PDE por

$$\left(\frac{k_{i+1} - k_i}{h_{i+1}}\right) \left(\frac{u_{i+1}(t) - u_i(t)}{h_{i+1}}\right) + k_i \left[\frac{2}{h_i^2 + h_i h_{i+1}} u_{i-1}(t) - \frac{2}{h_i h_{i+1}} u_i(t) + \frac{2}{h_{i+1}^2 + h_i h_{i+1}} u_{i+1}(t) \right] - m_i \frac{d^2 u_i(t)}{dt^2} = -m_i \frac{d^2 u_g(t)}{dt^2} \quad (3.10)$$

Factorizando para los términos u_i tenemos

$$\left[\frac{2k_i}{h_i^2 + h_i h_{i+1}} \right] u_{i-1} + \left[\frac{k_i - k_{i+1}}{h_{i+1}^2} - \frac{2k_i}{h_i h_{i+1}} \right] u_i(t) + \left[\frac{k_{i+1} - k_i}{h_{i+1}^2} + \frac{2k_i}{h_{i+1}^2 + h_i h_{i+1}} \right] u_{i+1}(t) - m_i \frac{d^2 u_i(t)}{dt^2} = -m_i \frac{d^2 u_g(t)}{dt^2} \quad (3.11)$$

3.1.1. Condiciones de frontera

Para conseguir un problema con solución única es necesario tomar en cuenta las condiciones de frontera y condiciones iniciales. En este caso la condición inicial se establece como

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Pues consideramos que la estructura parte de posición y velocidad cero antes de la actividad sísmica.

En las semi-discretizaciones temporales, estas condiciones iniciales de la PDE (3.1) van a ser las condiciones iniciales de la ODE que la aproxima.

Para las condiciones de frontera, como se está trabajando únicamente en una dimensión i.e. $u : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ y además u la estamos considerando como posiciones relativas respecto al suelo, entonces las condiciones de frontera son

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x_f, t) &= 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

La segunda condición de frontera hace referencia que la posición en el último piso no está sometida a algún tipo de esfuerzo. La primera condición de frontera es una condición de Dirichlet mientras que la segunda es una de Neumann.

Si consideramos la ecuación (3.11) para $i = 1$ entonces tenemos que

$$\left[\frac{2k_1}{h_1^2 + h_1 h_2} \right] u_0 + \left[\frac{k_1 - k_2}{h_2^2} - \frac{2k_1}{h_1 h_2} \right] u_1(t) + \left[\frac{k_2 - k_1}{h_2^2} + \frac{2k_1}{h_2^2 + h_1 h_2} \right] u_2(t) - m_1 \frac{d^2 u_1(t)}{dt^2} = -m_1 \frac{d^2 u_g(t)}{dt^2} \quad (3.14)$$

Como la condición de frontera es $u_0 = u(0, t) = 0$, entonces tenemos que

$$\left[\frac{k_1 - k_2}{h_2^2} - \frac{2k_1}{h_1 h_2} \right] u_1(t) + \left[\frac{k_2 - k_1}{h_2^2} + \frac{2k_1}{h_2^2 + h_1 h_2} \right] u_2(t) - m_1 \frac{d^2 u_1(t)}{dt^2} = -m_1 \frac{d^2 u_g(t)}{dt^2} \quad (3.15)$$

La cual es la ecuación de frontera que representa la dinámica del sistema para la planta baja sujeta a una condición de Dirichlet .

La discretización del sistema para el último piso x_n sería

$$\left(\frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h_n} \right) \left(\frac{k_{n+1} - k_{n-1}}{2h_n} \right) + \frac{k_n}{h_n^2} (u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}) - m_n \ddot{u}_n = -m_n \ddot{u}_n. \quad (3.16)$$

Note que se está usando una variable auxiliar u_{n+1} para realizar la discretización.

Esta última ecuación está sujeta a una condición de frontera de tipo Neumann, esto es,

$$\frac{du_n}{dx} = 0.$$

la cual expresada en términos de diferencias finitas es

$$\frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h_n} = 0. \quad (3.17)$$

donde se realizó una discretización centrada para la primera derivada.

De esta manera, resolviendo simultáneamente las ecuaciones (3.16) y (3.17) obtenemos la expresión que define la dinámica del último piso

$$\frac{2k_n}{h_n^2} (u_{n-1} - u_n) - m_n \ddot{u}_n = -m_n \ddot{u}_g. \quad (3.18)$$

3.1.2. Modelo completo

De esta manera podemos expresar la ecuación diferencial parcial (3.1) con el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales utilizando las discretizaciones (3.11),(3.15) y (3.18) expresadas en forma matricial como

$$Ku(t) - M\ddot{u}(t) = -M\ddot{u}_g \quad (3.19)$$

En donde las matrices M y K son

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots & m_n \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} \frac{k_1 - k_2}{h_2} - \frac{2k_1}{h_1 h_2} & \frac{k_2 - k_1}{h_2^2} + \frac{2k_1}{h_2^2 + h_1 h_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{2k_i}{h_i^2 + h_i h_{i+1}} & \frac{k_i - k_{i+1}}{h_{i+1}^2} - \frac{2k_i}{h_i h_{i+1}} & \frac{k_{i+1} - k_i}{h_{i+1}^2} + \frac{2k_i}{h_{i+1}^2 + h_i h_{i+1}} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{2k_n}{h_n^2} & -\frac{2k_n}{h_n^2} \end{bmatrix}$$

3.2. Parametrización del sistema

Debido a que queremos realizar estimación de parámetros, debemos encontrar una parametrización del sistema de la forma $Y = \vartheta U$ donde Y es un vector de salidas, U es un vector de entradas y ϑ es un vector de parámetros.

Nótese que podemos reescribir al sistema (3.19) de la siguiente manera

$$\ddot{u}(t) - \ddot{u}_g(t) = M^{-1}Ku(t) \quad (3.20)$$

Ahora, si tomamos la salida como

$$Y = \ddot{u}(t) - \ddot{u}_g.$$

si pudiéramos reescribir el término $M^{-1}Ku(t)$ de forma tal que $M^{-1}Ku(t) = V\vartheta$ donde ϑ es un vector de parámetros, entonces podríamos expresar la el sistema (3.19) en forma de modelo paramétrico estático. Más aún, buscamos que el vector de parámetros ϑ dependa únicamente de los valores de k_i y m_i para toda $1 \leq i \leq n$, mientras que V dependa únicamente de h_i y $u_i(t)$ para toda $1 \leq i \leq n$.

Note que como la matriz M es diagonal, entonces la matriz $M^{-1}K$ es igual a la matriz K con cada i -ésimo renglón multiplicado por el factor $\frac{1}{m_i}$, así cada i -ésimo renglón con $1 \leq i \leq n-1$ tiene como términos a $\frac{k_i}{m_i}$ y $\frac{k_{i+1}}{m_i}$ que los únicos que dependen de k_i y m_i para alguna i ; y el último renglón únicamente tiene al término $\frac{k_n}{m_n}$ como término dependiente de k_i y m_i para alguna i .

De esta manera si tomamos al vector de parámetros como

$$\vartheta = \left[\frac{k_1}{m_1}, \frac{k_2}{m_1}, \frac{k_2}{m_2}, \frac{k_3}{m_2}, \dots, \frac{k_i}{m_i}, \frac{k_{i+1}}{m_i}, \dots, \frac{k_{n-1}}{m_{n-1}}, \frac{k_n}{m_{n-1}}, \frac{k_n}{m_n} \right]^T \quad (3.21)$$

Entonces podemos conseguir el modelo paramétrico estático en donde la matriz de

regresión tiene la siguiente forma

$$V = \begin{bmatrix} \beta_1 u_1 + \gamma_1 u_2 & \frac{u_2}{h_2} - \frac{u_1}{h_2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 u_1 + \beta_2 u_2 + \gamma_2 u_3 & \frac{u_3}{h_3} - \frac{u_2}{h_3} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_i u_{i-1} + \beta_i u_i + \gamma_i u_{i+1} & \frac{u_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{u_i}{h_{i+1}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \frac{u_{n-1}}{h_n} - \frac{u_n}{h_n} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Donde para toda $0 < i \leq n$ definimos

$$\begin{aligned} \alpha_i &:= \frac{2}{h_i^2 + h_i h_{i+1}} \\ \beta_i &:= \frac{1}{h_{i+1}^2} - \frac{2}{h_i h_{i+1}} \\ \gamma_i &:= \frac{2}{h_{i+1}^2 + h_i h_{i+1}} - \frac{1}{h_{i+1}^2} \end{aligned} \quad (3.23)$$

De esta manera tenemos que la ecuación

$$Y = V\vartheta \quad (3.24)$$

se puede comprobar que es equivalente a el sistema (3.19).

Note que $\vartheta \in \mathbf{R}^{2n-1}$, $Y \in \mathbf{R}^n$ y $U \in \mathcal{M}_{n \times 2n-1}(\mathbf{R})$ (en donde $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbf{R})$ son las matrices de tamaño n por m con entradas en \mathbf{R}).

3.3. Filtros integrales

Para realizar un algoritmo de identificación paramétrica en el sistema parametrizado (3.24) es necesario conocer el valor del regresor U , sin embargo, éste depende de los valores $u_i(t)$ los cuales no estamos midiendo directamente, una forma de obtener estas señales es utilizando filtros integrales [5].

La ecuación (3.24) en el dominio de la frecuencia es

$$\mathcal{L}(\ddot{u}) + \iota \mathcal{L}(\ddot{u}_g) = V(s)\Theta(s). \quad (3.25)$$

Multiplicando por s^3 tenemos que

$$s^3 Y(s) = s^3 V(s)\Theta(s) = s \mathcal{L}(\ddot{V})\Theta \quad (3.26)$$

Así, en el dominio del tiempo tenemos

$$\ddot{Y}(t) = \ddot{V}(t)\Theta \quad (3.27)$$

Donde $[\frac{d^3 V}{dt^3}]_{ij} = \frac{d^3 [V]_{ij}}{dt^3}$ i.e. la matriz de derivadas entrada a entrada de V .

Considere ahora el siguiente operador. Sea $x : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ una función integrable definimos I_n de la siguiente manera

$$I_n(x(t)) = \frac{1}{\delta^n} \int_{t-\delta}^t \int_{\tau_1-\delta}^{\tau_1} \cdots \int_{\tau_{n-1}-\delta}^{\tau_{n-1}} x(\tau_n) d\tau_n \cdots d\tau_1 \quad (3.28)$$

Donde $\delta = nT_s$ con $n \in \mathbf{N}$ y T_s el tiempo de muestreo

Observación. Para toda $x \in \mathcal{C}^n$ se tiene que

$$I_n(x^{(n)}) = \frac{1}{\delta^n} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i x(t - i\delta) \quad (3.29)$$

Demostración. Por inducción sobre n . Si $n = 1$, entonces (3.29) se cumple trivialmente. Suponga (3.29), así tenemos que

$$\begin{aligned} I_{n+1}(x^{(n+1)}) &= I(I_n((x')^{(n)})) = I\left(\frac{1}{\delta^n} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i x'(t - i\delta)\right) \\ &= \frac{1}{\delta^{n+1}} \int_{t-\delta}^t \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i x'(\tau - i\delta) d\tau \end{aligned}$$

Aplicando la linealidad de la integración y separando algunos términos tenemos que

$$\begin{aligned} \delta^{n+1} I_{n+1}(x^{(n+1)}) &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i (x(t - i\delta) - x(t - (i+1)\delta)) \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i x(t - i\delta) - \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i x(t - (i+1)\delta) \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i x(t - i\delta) + \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} (-1)^i x(t - i\delta) \\ &= \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (-1)^i x(t - i\delta) + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i-1} (-1)^i x(t - i\delta) + x(t) + (-1)^{n+1} x(t - (n+1)\delta) \end{aligned}$$

Finalmente, factorizando y usando el hecho que $\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} = \binom{n+1}{i}$

$$\begin{aligned} I_{n+1}(x^{(n+1)}) &= \frac{1}{\delta^{n+1}} \left[\sum_{i=1}^n \left[\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} \right] (-1)^i x(t - i\delta) + x(t) + (-1)^{n+1} x(t - (n+1)\delta) \right] \\ &= \frac{1}{\delta^{n+1}} \left[\sum_{i=1}^n \binom{n+1}{i} (-1)^i x(t - i\delta) + x(t) + (-1)^{n+1} x(t - (n+1)\delta) \right] \\ &= \frac{1}{\delta^{n+1}} \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} (-1)^i x(t - i\delta) \end{aligned}$$

Que era lo que se deseaba. □

Así, aplicando (3.28) a (3.27) con $n = 5$, se tiene

$$I_5(\ddot{Y}) = I_5(\ddot{V}(t))\Theta \quad (3.30)$$

Como Y y \ddot{V} son conocidas y por la observación anterior, entonces se puede reescribir

$$\Xi(t) = \Psi(t)\Theta \quad (3.31)$$

Donde

$$\begin{aligned}\Xi(t) &= \frac{1}{\delta^3} I_2 \left(\sum_{i=0}^3 \binom{3}{i} (-1)^i Y(t - i\delta) \right) \\ \Psi(t) &= \frac{1}{\delta} I_4 \left(\sum_{i=0}^1 \binom{1}{i} (-1)^i \ddot{V}(t - i\delta) \right)\end{aligned}\tag{3.32}$$

En donde el operador I_n se aplica entrada a entrada del regresor o del vector de entradas en las ecuaciones anteriores

De esta manera tenemos una nueva parametrización del sistema en la ecuación (3.31). Note que a diferencia de la parametrización anterior, esta nueva parametrización depende en la entrada de la señal \ddot{V} la cual es medida directamente.

Una gran ventaja de estos filtros integrales mostrado en [5] es que si se realiza el análisis del sistema considerando un término de sesgo en las señales de entrada este converge a cero en un tiempo de 5δ y así no afecta en el cómputo de la parametrización (3.31).

3.4. Estimación de parámetros

Hasta ahora hemos logrado conseguir una reparametrización (3.31) del sistema discretizado (3.19) el cual representa al sistema continuo (3.1), por lo que estamos en posición de realizar una estimación de parámetros. Existen diversos métodos para realizar esta estimación, en este trabajo emplearemos el método de mínimos cuadrados recursivo y el método gradiente.

Para emplear los métodos de estimación paramétrica es necesario realizar cierta manipulación algebraica con la expresión del sistema. Se desea llevar al sistema a una forma denominada *Modelo Paramétrico Estática* (o SPM por sus siglas en inglés). Un modelo en la forma SPM tiene la siguiente estructura

$$z = (\vartheta^*)^T \varphi\tag{3.33}$$

donde $\vartheta \in \mathbf{R}^n$ es el vector de parámetros que se desea estimar su valor, mientras que $\varphi \in \mathcal{M}(n \times m)$ llamado el regresor o la matriz de regresión y $z \in \mathbf{R}^m$ son señales conocidas

3.4.1. Algoritmo de Mínimos Cuadrados Recursivo

El algoritmo de mínimos cuadrados data del siglo XVIII detallado por Legendre en 1805 pero desarrollado por Gauss. La idea básica detrás del algoritmo de mínimos cuadrados es aproximar de la mejor manera (minimizando el error) un conjunto de datos a algún modelo lineal. Por ejemplo aproximar un conjunto de puntos en el plano a una recta la cual es el modelo lineal.

El término recursivo significa básicamente que el algoritmo funciona con las mediciones anteriores para poder obtener el valor siguiente en la recursión. Esto difiere en los

algoritmos no recursivos en que en estos últimos se necesita tener la información completa para luego aplicar el algoritmo. Por esto, muchas veces se denominan los métodos recursivos como métodos en línea.

Para realizar esto considere el sistema (3.33) expresado en forma de un SPM. Y considere la siguiente funcional (denominada función de costo)

$$J(\vartheta) = \frac{1}{2} \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \frac{[z(\tau) - \vartheta^T(t)\varphi(\tau)]^2}{m_s^2(t)} d\tau + \frac{1}{2} e^{-\beta t} (\vartheta - \vartheta_0)^T Q_0 (\vartheta - \vartheta_0) \quad (3.34)$$

donde $Q_0 = Q_0^T > 0$ y $\beta \geq 0$ son variables de diseño y $\vartheta_0 = \vartheta(0)$ es la condición inicial de la estimación paramétrica. A β se le denomina factor de olvido. El factor m_s es un factor de normalización para garantizar que $\frac{\varphi}{m_s} \in L_\infty$

Note que (3.34) depende de qué tan cercano se encuentre $\vartheta(t)$ de su valor real ϑ^* pues si son iguales, entonces la función de costo se hace (eventualmente) cero. El factor de olvido β minimiza o aumenta el efecto que tienen los valores pasados del error.

Como $J(\vartheta)$ es una función convexa podemos computar mínimos locales resolviendo la ecuación

$$\nabla J(\vartheta(t)) = 0 \quad (3.35)$$

De esta manera podemos obtener la función $\vartheta(t)$ que es la estimación del valor real de los parámetros ϑ^* resolviendo la siguiente ecuación

$$\nabla J(\vartheta) = e^{-\beta t} Q_0 (\vartheta(t) - \vartheta_0) - \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \frac{z(\tau) - \vartheta^T(t)\varphi(\tau)}{m_s^2(\tau)} \varphi(\tau) d\tau = 0.$$

Así obtenemos el algoritmo de estimación no recursivo

$$\vartheta(t) = P(t) \left[e^{-\beta t} Q_0 \vartheta_0 + \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \frac{z(\tau)\varphi(\tau)}{m_s^2} d\tau \right]. \quad (3.36)$$

donde

$$P(t) = \left[e^{-\beta t} Q_0 + \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \frac{\varphi(\tau)\varphi^T(\tau)}{m_s^2} d\tau \right]^{-1} \quad (3.37)$$

es la matriz de covarianza.

derivando ϑ respecto a t y utilizando la identidad $0 = \frac{d}{dt} P P^{-1} = \dot{P} P^{-1} + P \frac{d}{dt} P^{-1}$ se puede obtener el algoritmo de mínimos cuadrados recursivos con factor de olvido

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta} &= P \varepsilon \varphi, \\ \dot{P} &= \beta P - P \frac{\varphi \varphi^T}{m_s^2} P^{-1}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Donde las condiciones iniciales son $\vartheta(0) = \vartheta_0$ y $P(0) = P_0 = Q_0^{-1}$. La estabilidad de este sistema depende de el valor de β sin embargo se puede afirmar lo siguiente [11].

Teorema. Si $\frac{\vartheta}{m_s}$ cumple la condición de excitación persistente, entonces el algoritmo de mínimos cuadrados recursivos con factor de olvido (3.38) garantiza que $P \in L_\infty$, $P^{-1} \in L_\infty$ y que $\vartheta(t) \rightarrow \vartheta^*$ cuando $t \rightarrow \infty$. Más aún, la convergencia de $\vartheta(t)$ a ϑ^* es exponencial cuando $\beta > 0$.

Donde una señal $x(t) \in \mathbf{R}^n$ se dice que cumple con la condición de excitación persistente [19] si existen $\delta > 0$ y $\alpha_0 > 0$ tales que para toda $\sigma \geq t_0$

$$\int_{\sigma}^{\sigma+\delta} x(t)x^T(t)dt \geq \alpha_0 I,$$

donde $I \in \mathcal{M}(n \times n)$ es la matriz identidad y t_0 es el tiempo inicial (normalmente igual a cero).

3.5. Detección de daño en edificios

Hasta ahora hemos planteado y resuelto el problema de la estimación de parámetros, así el problema de detección de daño en el edificio lo podemos plantear de la siguiente manera: Se cuenta con una señal $\vartheta(t)$ la cual representa la estimación de los parámetros para cada tiempo t . Así, como sabemos que si se cumple la condición de excitación persistente entonces $\vartheta(t)$ converge al valor de los parámetros podemos suponer que existe algún tiempo t_0 en el cual $\vartheta(t)$ con $t > t_0$ es *aproximadamente igual* a el valor real de los parámetros, más aún debido a la presencia de ruido en una implementación real es necesario suponer que la señal $\vartheta(t)$ es afectada por algún tipo de ruido. En este caso supondremos un ruido gaussiano aditivo con media cero.

Con todas estas hipótesis la pregunta fundamental sería ¿Cómo podemos detectar algún daño presente en el sistema conociendo dicha señal ϑ ?

Esta última pregunta genera otras preguntas posteriores tales como:

1. ¿De qué manera se puede caracterizar las fallas en el edificio? esto es ¿Cómo las fallas afectan el comportamiento cualitativo de las diversas señales que podemos obtener del sistema?
2. ¿En qué grado nos pueden afectar el ruido, las dinámicas no modeladas, los errores de medición, etc. para la determinación de la existencia o no de fallas? la pregunta anterior hace referencia acerca de la robustez de un posible algoritmo o método de detección de fallas lo cual es fundamental pues de no existir cierto grado de robustez entonces se podría concluir la existencia de alguna falla inexistente o viceversa.

3.5.1. Metodología de detección de daño

Para responder a la primera pregunta es necesario antes que nada definir que queremos decir con la palabra falla. Según Isermann [12] una falla (fault) es una desviación no permitida de al menos una propiedad característica con respecto a una condición estándar, usual y aceptable. Algunas observaciones importantes que hace Issermann sobre las fallas son las siguientes:

- Una falla es un estado dentro del sistema.

- La desviación no permitida es la diferencia entre el valor de la falla y el límite de la tolerancia para un valor usual.
- Una falla puede causar una reducción o la pérdida del sistema para realizar su función diseñada.
- Una falla puede iniciar un daño (*failure*).
- Las fallas pueden ser abruptas o incipientes.

Es importante notar que Isermann hace una distinción entre falla (*fault*) y un daño (*failure*). Para él un daño es una interrupción **permanente** de la habilidad de un sistema para realizar su función específica dadas ciertas condiciones de operación. Así, la diferencia principal es entre una falla y un daño es que un daño es originado por una falla (o un conjunto de fallas) el cual es irreversible.

Sin embargo en nuestro caso, debido a la naturaleza de nuestro sistema una falla siempre origina un daño con lo cual podemos usar ambas palabras de manera indistinguible.

De las observaciones respecto a las fallas que hace Isermann combinándolas con el conocimiento de nuestro sistema físico en particular podemos hacer notar lo siguiente.

- Cómo una falla es un estado dentro del sistema y las respuestas en aceleración del sistema dependen del estado del sistema entonces las fallas se pueden ver reflejadas en estas señales de aceleración, más aún, como la señal $\vartheta(t)$ depende de las señales de aceleración, también debería ser posible encontrar signos del daño en dicha señal.
- Las fallas podrían causar colapso en edificios.
- Dadas las señales que tenemos de la planta debemos encontrar una forma de cuantificar el daño y, más aún, debemos estimar un umbral límite que determina el buen funcionamiento del sistema.
- Como las fallas pueden ser abruptas o incipientes, en cualquier caso podemos suponer que en presencia de fallas existe algún tiempo t_1 para el cual dada alguna métrica establecida para cuantificar daño el valor de el daño en el tiempo t_1 en dicha métrica sobrepasa el límite de tolerancia.

Dado lo anterior, es claro que en presencia de una falla en el tiempo t_1 debe haber un cambio cualitativo sustancial en nuestras señales antes y después del tiempo t_1 .

Así para caracterizar las fallas y responder a nuestra primera pregunta deberíamos idealmente realizar pruebas destructivas donde podamos conocer exactamente, cómo, cuándo y dónde ocurrió la falla y posteriormente realizar diversos análisis a las señales disponibles para encontrar un patrón que indique de manera clara la existencia de daño en la estructura.

Sin embargo, debido a la falta de infraestructura este tipo de pruebas no pueden ser llevadas a cabo en nuestras instalaciones.

Otra forma de caracterizar las fallas utilizando la infraestructura que tenemos disponible es realizando experimentos cuando estamos seguros que no existe daño alguno en la estructura y después otros experimentos implantando un daño sintético no destructivo a la estructura para así poder analizar las diferencias entre las salidas de estos dos experimentos. Sin embargo, esta metodología tiene dos problemas fundamentales:

- De esta forma no podemos concluir la manera en cómo se dio la falla, es decir, si las fallas se dan de manera abrupta o de manera gradual o ambas, y si se pueden dar de ambas formas, ¿Qué propiedades debe tener la estructura y el sismo para que se presente una u otra forma de daño?
- La manera sintética de sembrar daño en la estructura puede que no refleja el verdadero mecanismo en el que se da el daño en un escenario real.

A pesar de estas debilidades en la segunda metodología planteada, consideramos que es la mejor forma de establecer un criterio de daño con la infraestructura que contamos.

Ahora, debido a que la señal ϑ con la que estamos trabajando tiene una estructura bien definida y más aún, una interpretación física muy clara la cual puede ser relacionada de manera heurístico con el daño en el edificio se tiene una hipótesis de como debe realizar un algoritmo de identificación de daño en el edificio.

La relación entre la señal ϑ se debe a que esta converge a los valores reales de los parámetros de la planta ϑ^* los cuales están relacionados con rigideces y otras propiedades fundamentales para la salud de los edificios. Si consideramos que el valor ϑ^* debe ser constante si no existe daño alguno, entonces una desviación significativa en estos debe representar una falla en el edificio.

Así, para establecer dicho algoritmo de identificación de daño simplemente debemos analizar el valor al que converge la señal ϑ .

Antes de presentar el algoritmo de identificación de daño tenemos que establecer que entenderemos por la convergencia de la señal ϑ .

Formalmente se dice que una señal cualquiera $x(t)$ que depende del tiempo t converge a una constante c si $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = c$. Sin embargo, en la práctica es imposible confirmar la convergencia con dicha definición. Así que debemos redefinir el concepto de convergencia para algún intervalo de tiempo finito.

Para esto realizaremos un análisis por ventanas, esto es, un análisis con el conjunto de datos $S_\delta(t) := \{\vartheta(\tau) : t - \delta \leq \tau \leq t\}$ en donde t es el valor de el tiempo actual y la constante δ es el tamaño de la ventana. Es claro que el S es finito por tratarse de un muestreo en tiempo discreto.

Ahora, para decir que una señal ha convergido en alguna ventana $S_\delta(t_0)$ tenemos que establecer un criterio para afirmar su convergencia. Un par de posibilidades para este criterio son las siguientes:

Definición.

1. Diremos que la señal ϑ ha convergido en el tiempo t_0 con respecto a la ventana δ y el criterio μ si y solo si $|\max S_\delta(t_0) - \min S_\delta(t_0)| < \mu$.

2. Diremos que la señal ϑ ha convergido en el tiempo t_0 con respecto a la ventana δ y el criterio μ si y solo si $\sigma\{S_\delta(t_0)\} < \mu$ donde $\sigma\{S_\delta(t_0)\}$ representa la desviación estándar de conjunto $S_\delta(t_0)$.

De esta forma podemos definir una función binaria $\text{CONV}(t)$ que asigne a cada tiempo t el valor 1 si ϑ ha convergido en el tiempo t con respecto a la ventana δ y el criterio μ y el valor 0 en el caso contrario. Intuitivamente la función CONV nos dice para cada tiempo t si la señal ϑ ha convergido en la ventana correspondiente.

Es importante señalar que este criterio de convergencia depende tanto del tamaño de la ventana δ y del criterio de convergencia μ , estos dos parámetros se deben escoger dependiendo de la señal que se desea analizar, por ejemplo, si la señal es muy ruidosa entonces el criterio μ debe ser amplio para evitar confusiones entre la convergencia y el ruido. Note que estos dos parámetros le proporcionarán al algoritmo de identificación de daños un cierto grado de robustez. Para establecer δ y μ se realizará de manera heurística, es decir, se analizarán varios resultados y se determinará intuitivamente la convergencia de la señal, a partir de esto se asignará un valor para δ y para μ .

3.5.2. Algoritmo de detección de daño

En esta sección presentaremos un algoritmo que pretende determinar la existencia de fallas en un edificio.

Primero consideramos que las siguientes hipótesis se cumplen

1. El valor real de los parámetros ϑ^* es constante a tramos
2. La entrada sísmica es tal que el sistema cumple con la condición de excitación persistente.
3. El valor de ϑ^* no se conoce a priori.
4. La falla ocurre después de que el algoritmo converja por primera vez.¹

Suponiendo las hipótesis anteriores podemos presentar el siguiente algoritmo de identificación

1. Se elige el tamaño de la ventana δ y el criterio de convergencia μ .
2. Para cada tiempo t tal que $t > \delta$ ² se realiza el cómputo de la desviación estándar para la ventana correspondiente $\sigma\{S_\delta(t)\}$ y dependiendo de este valor se asigna la función binaria $\text{CONV}(t)$ como se definió anteriormente.
3. El primer instante t_1 tal que se cumpla que $\text{CONV}(t_1) = 1$ entonces diremos que los parámetros nominales de la planta son $\vartheta_n := \vartheta(t_1) \approx \vartheta^*$.

¹Esto para poder tener información de ϑ antes y después de la falla

²Esto para evitar que existan ventanas más pequeñas que lo deseado.

4. Si para todo tiempo t tal que $t > t_1$ ocurre ³ que $\text{CONV}(t) = 1$ y $\vartheta(t) \equiv \vartheta_n$ o bien si $\text{CONV}(t) = 0$.

5. Si existe algún tiempo t_2 tal que $t_2 > t_1$ en el cual se tiene que $\text{CONV}(t_2) = 1$ y $\vartheta(t_2) \neq \vartheta_n$, entonces diremos que ocurrió una falla en el tiempo t_2 .

6. Se pueden repetir los pasos del 2 al 5 de manera recursiva para determinar daños múltiples si es que existen.

Es importante hacer notar que este algoritmo funciona para señales reales y en nuestro caso ϑ es un vector por lo que el algoritmo anterior se debe aplicar a cada canal del vector de parámetros ϑ .

Más aún, el algoritmo anterior únicamente nos podría decir si existe daño en el edificio en el caso en que exista un canal para el cual el algoritmo de positivo para daño. Sin embargo, no nos puede decir nada acerca de la localización del daño.

Para lograr establecer la localización del daño es necesario seguir una metodología similar que la planteada para caracterizar el daño. En este caso se realizarán pruebas con daño inducido y sin daño inducido en distintas localizaciones del edificio y observaremos el comportamiento de los parámetros estimados ϑ con lo que dependiendo de estos podremos dar alguna metodología para la localización del daño.

La siguiente figura muestra el diagrama de flujo del algoritmo de identificación de daño.

³El símbolo \equiv significa que las señales son casi iguales en el sentido que su diferencia no implica una falla. Un criterio que se puede usar es que $\vartheta(t) \equiv \vartheta_n$ si y solo si $|\vartheta(t) - \vartheta_n| < 0,15 * \vartheta_n$

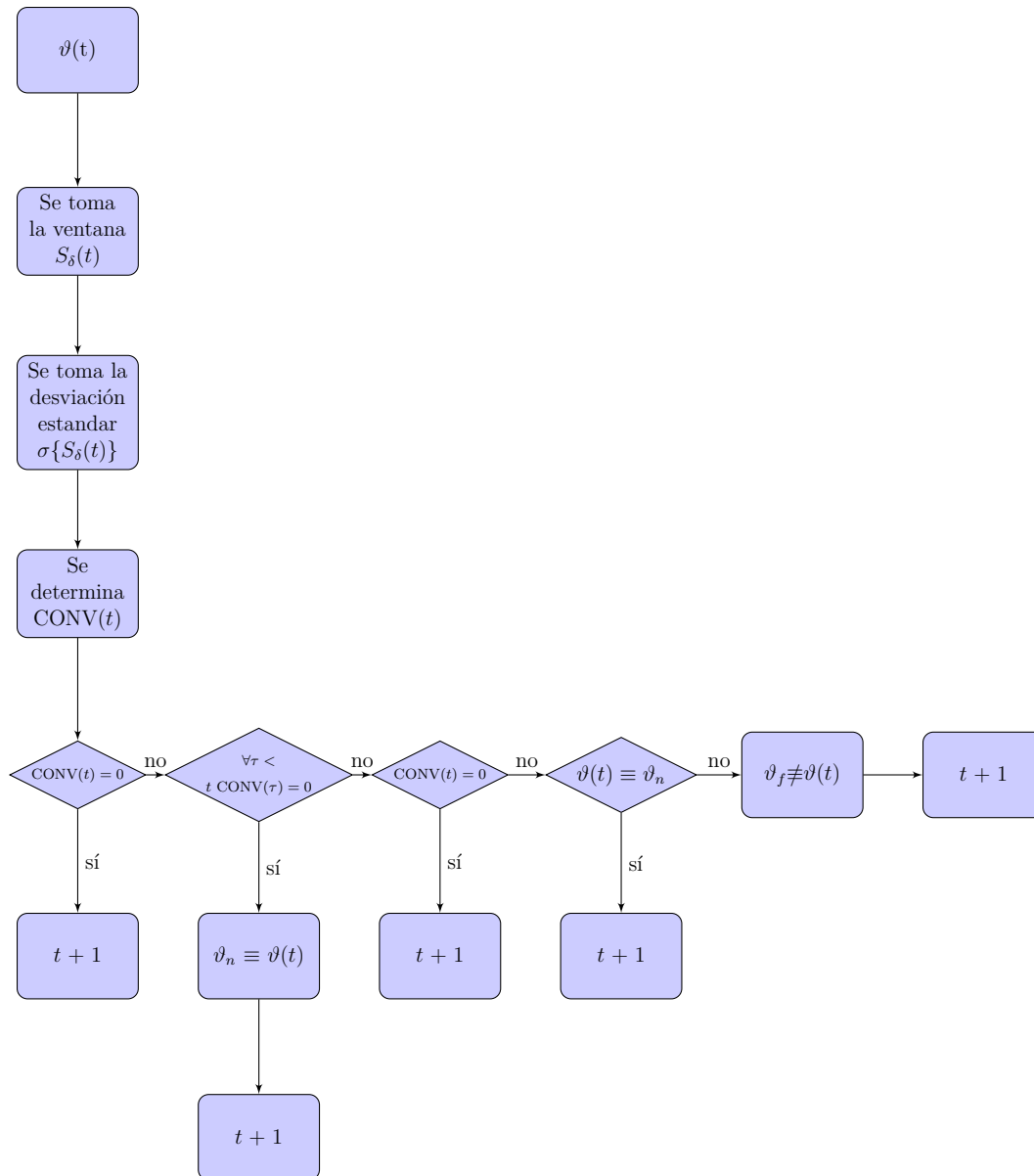


Figura 3.1: Diagrama de flujo

El siguiente código representa el algoritmo anterior programado en MATLAB.

```

% El par tiempo, theta es el valor de la señal a la que se le quiere
% identificar el dano. ventana es el valor en segundos y mu es la
% desviacion estandar usada para el criterio de convergencia
function [Falla,Nom] = falla(time,theta,ventana,mu)
T = time(2) - time(1);
l = length(theta);
ventana = round(ventana/T);
V = zeros(ventana,1);
  
```

```
s = zeros(1,1);
conv = zeros(1,1);
flag1 = 0;
flag2 = 0;
ThetaNom = 0;
ThetaFalla = 0;
TiempoNom = 0;
TiempoFalla = 0;

for i = 1:l
    V = circshift(V,1);
    V(1) = theta(i);
    s(i) = std(V);
    if s(i) < mu && i >= ventana
        conv(i) = 1; %Checamos convergencia
        if flag1 == 0 %la primera convergencia es el valor nominal
            ThetaNom = theta(i);
            TiempoNom = time(i);
            flag1 = 1;
        end
    end

    if conv(i) == 1 && abs(theta(i)-ThetaNom) >= abs(0.15*ThetaNom) &&
        ↪ flag2 == 0 %hay una falla
        ThetaFalla = theta(i);
        TiempoFalla = time(i);
        flag2 = 1;
    end
end

Falla = [TiempoFalla;ThetaFalla];
Nom = [TiempoNom;ThetaNom];

end
```

Capítulo 4

Resultados

En este capítulo se presentan algunos resultados tanto en simulación por computadora como experimentales de los algoritmos propuestos tanto de identificación paramétrica como de detección de daño.

Con la finalidad de probar la consistencia de los algoritmos se han utilizado para las excitaciones sísmicas datos reales de los sismos de Chile 2010 y de El Centro 1940, los cuales se escalaron para acoplarse a las características dinámicas del modelo con el que se cuenta. De igual manera, para probar consistencia se realizaron experimentos y simulaciones con daño entre los pisos 1 y 2, entre los pisos 2 y 3, y entre los pisos 3 y 4.

Note que por lo discutido anteriormente, el algoritmo de detección de daño no se puede aplicar directamente en los experimentos realizados pues éste requiere que el daño ocurra en tiempo real. Sin embargo, se mostrará la comparativa entre los experimentos realizados sin daño y con daño inducido.

Finalmente en la última sección de el presente capítulo se presentan algunos resultados experimentales los cuales estiman la velocidad de viaje de las perturbaciones sísmicas y cómo estos resultados se pueden compara con los resultados obtenidos a través del enfoque planteado.

4.1. Resultados en simulación

En esta sección se presentan los resultados en simulación de los algoritmos analizados durante los capítulos anteriores, en todas las simulaciones se implantó un daño simulado en el tercer piso que ocurre a la mitad del tiempo de simulación.

El daño simulado representa una pérdida de rigidez en las columnas del tercer piso equivalente al 20% de su valor nominal.

El tamaño de la ventana de integración se ajustó de tal manera que represente un tiempo de 0.05 segundos.

Se utilizaron valores de $m_i = 8,4[kg]$ para toda $i = 1, \dots, 5$ para la masa de los pisos y $k_i = 1500 \frac{kg \cdot m^2}{s^2}$ para toda $i = 1, \dots, 5$ para los coeficientes de rigidez. Estos valores se ajustarán para que la salida experimental y la respuesta simulada sean lo más parecidas posible.

De esta forma el valor de los parámetros es $\vartheta_i = 178,57$ cuando no existe un daño simulado y cuando existe un daño simulado en el piso m el valor de las ϑ_j que dependen de k_m son $\vartheta_j = 142,86$.

Las siguientes gráficas de las figuras 4.1 y 4.2 muestran la entrada sísmica para las simulaciones de los sismos de Chile y de El Centro respectivamente, en cada caso se muestra el sismo tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia.

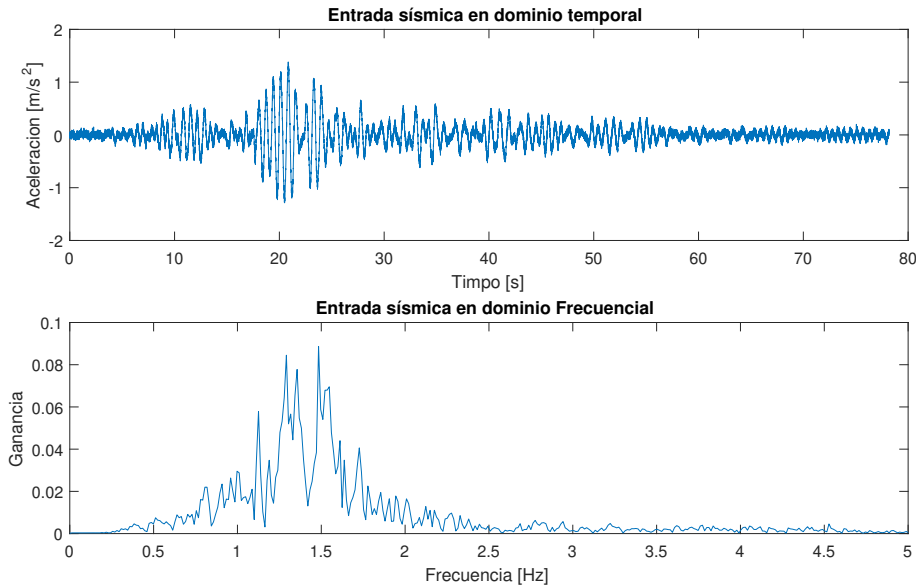


Figura 4.1: Entrada Sísmica (Chile 2010)

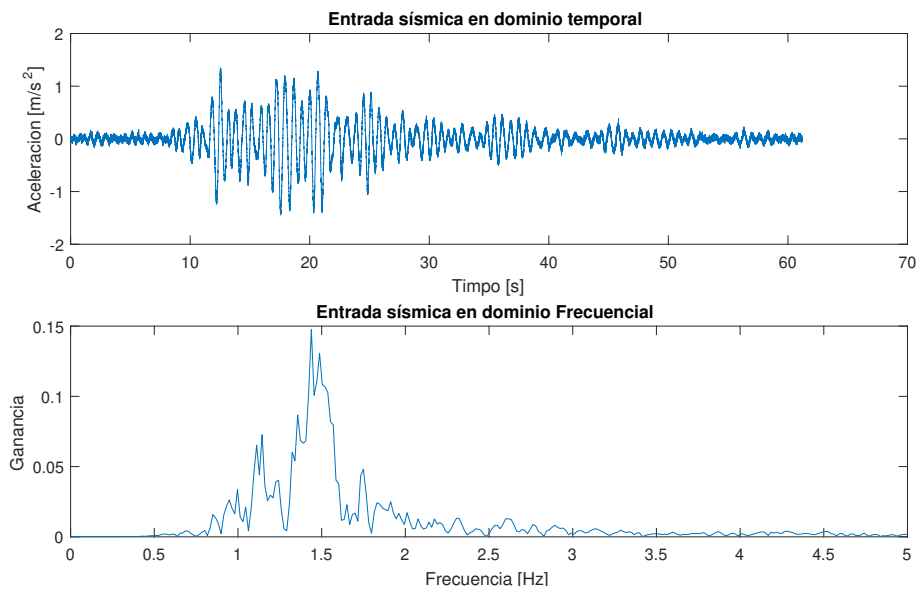


Figura 4.2: Entrada Sísmica (El Centro 1940)

En las figuras 4.3 y 4.4 se muestran los valores de los parámetros ϑ presentados en el capítulo anterior. Es importante observar cómo el algoritmo detecta de manera correcta los daños simulados en cada caso, es decir, cuando existe un daño simulado entre el primer y segundo piso (k_2 disminuye 80% de su valor nominal) entonces los valores para $\vartheta_2 = \frac{k_2}{m_1}$ y $\vartheta_3 = \frac{k_2}{m_2}$ disminuyen proporcionalmente; en el caso de daño entre el piso 2 y el 3 $\vartheta_4 = \frac{k_3}{m_2}$ y $\vartheta_5 = \frac{k_3}{m_3}$ disminuyen; y en el caso de daño entre los pisos 3 y 4 $\vartheta_6 = \frac{k_4}{m_3}$ y $\vartheta_7 = \frac{k_4}{m_4}$ disminuyen de igual manera.

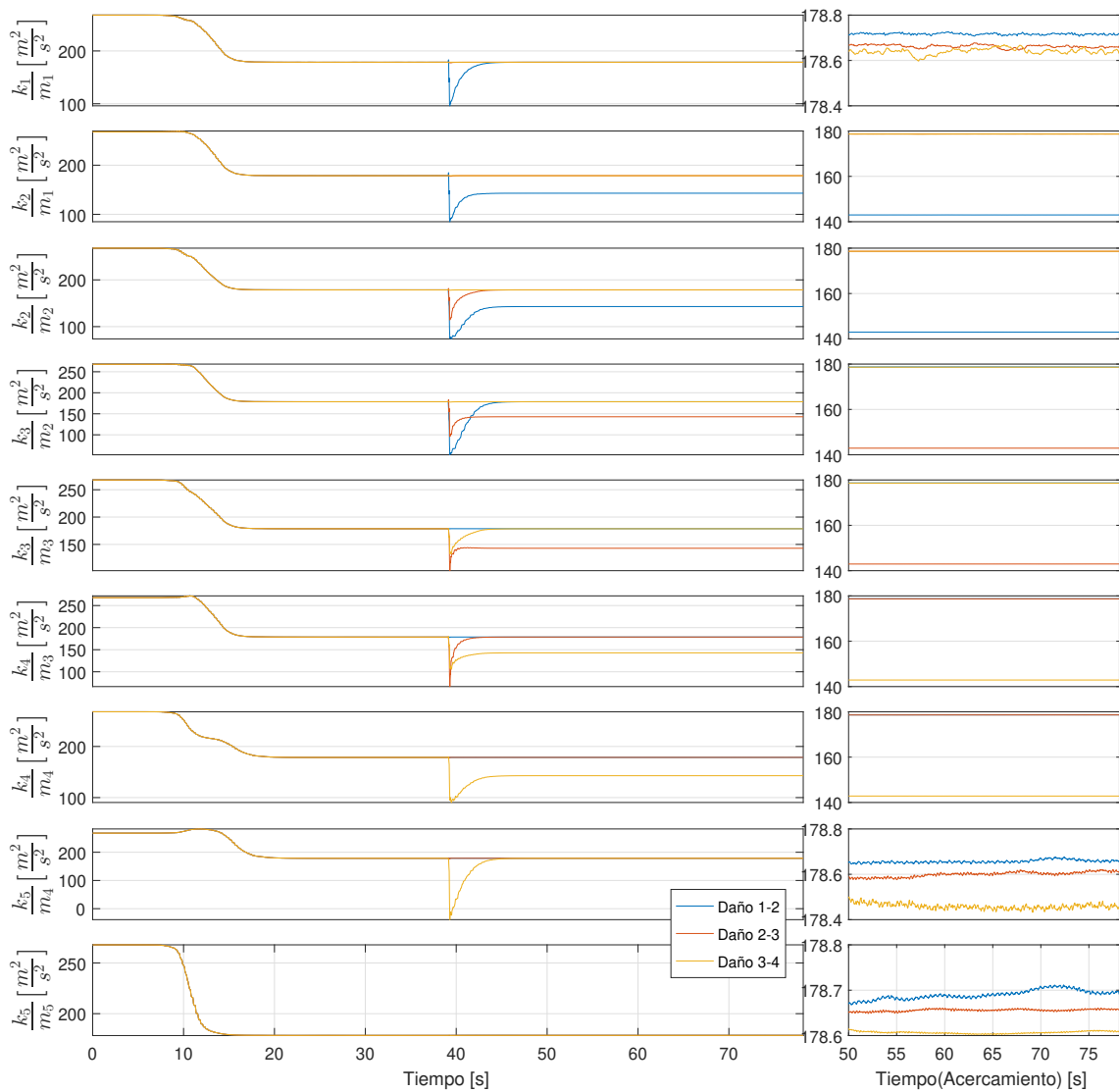


Figura 4.3: Parámetros estimados sismo de Chile (daño simulado en $t = 40$ [s])

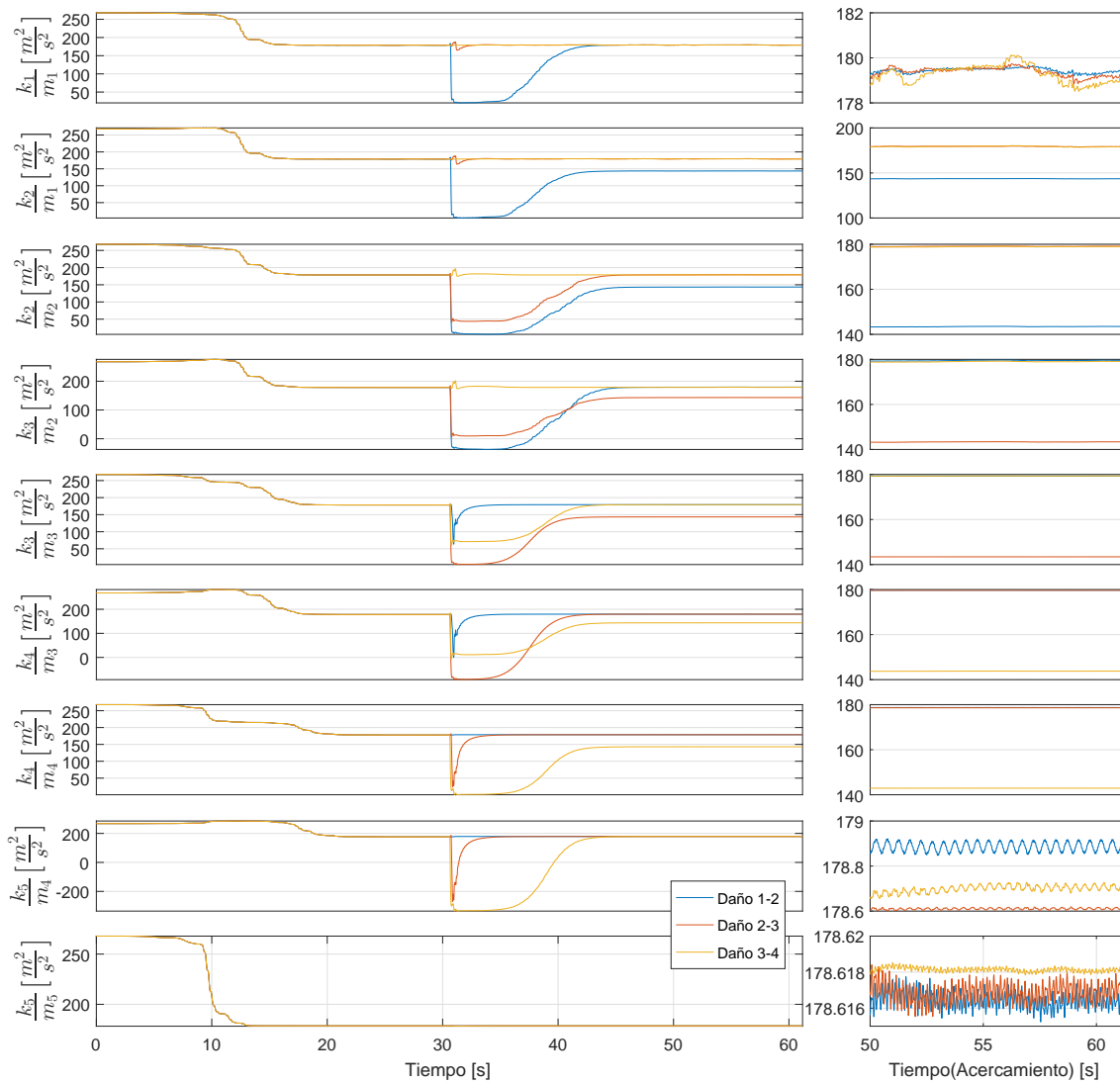


Figura 4.4: Parámetros estimados sismo de El Centro (daño simulado en $t = 40$ [s])

Los ejes de la derecha de la figura muestran un acercamiento de cada parámetro a partir del segundo 50 en adelante, esto para mostrar los valores finales de convergencia del algoritmo.

Ahora, las gráficas de las figuras 4.5 y 4.6 muestran las salidas de aceleración del edificio en el dominio de la frecuencia.

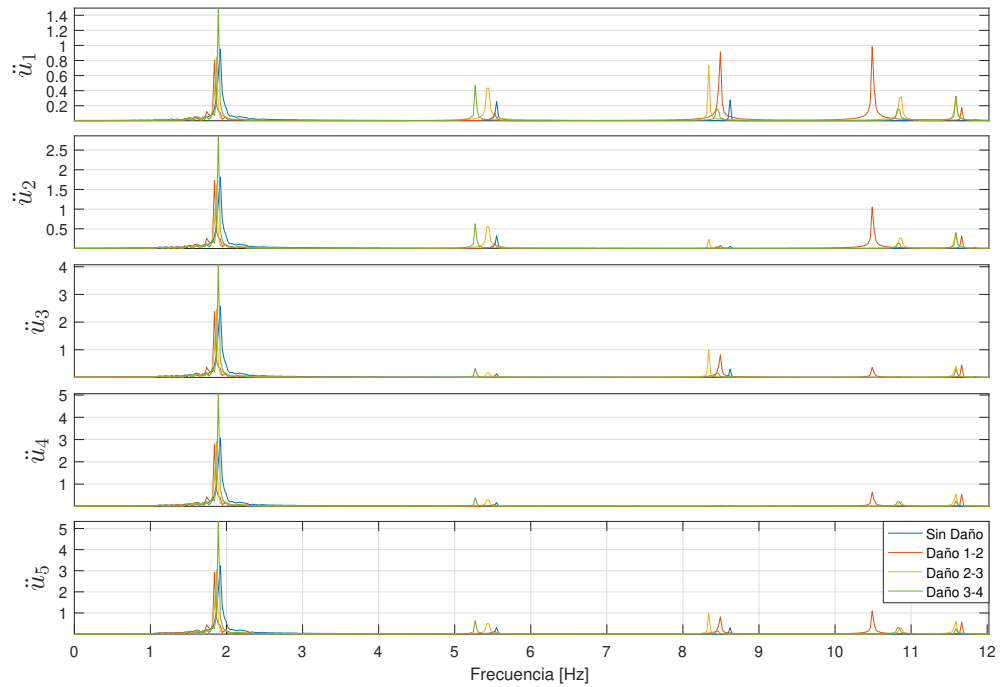


Figura 4.5: Espectro de la salida sismo de Chile

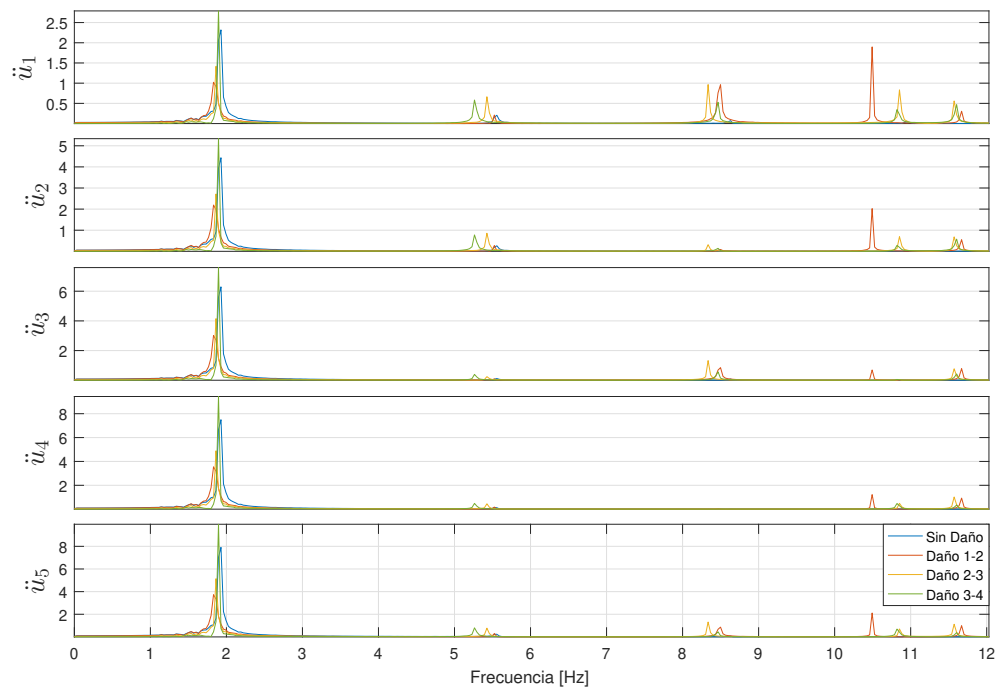


Figura 4.6: Espectro de la salida sismo de El Centro

Finalmente las tablas 4.1 y 4.2 muestran los resultados del algoritmo de detección de daños para cada parámetro utilizando el sismo de Chile en el experimento con daño

implantado entre el piso 1 y 2, se muestra tanto el tiempo en el que se detecta el daño (o el valor nominal) como el valor de el mismo.

Tabla 4.1: Valores Nominales sismo de Chile

.	ϑ_1	ϑ_2	ϑ_3	ϑ_4	ϑ_5	ϑ_6	ϑ_7	ϑ_8	ϑ_9
tiempo	19.58	19.725	19.009	19.18	19.682	20.396	22.436	23.436	17.426
valor	178.8	178.8	178.77	178.8	178.76	178.8	178.62	178.6	178.68

Tabla 4.2: Valores Falla sismo de Chile

.	ϑ_1	ϑ_2	ϑ_3	ϑ_4	ϑ_5	ϑ_6	ϑ_7	ϑ_8	ϑ_9
tiempo	-	45.962	47.099	-	-	-	-	-	-
valor	-	142.94	142.88	-	-	-	-	-	-

Análogamente, las tablas 4.3 y 4.4 muestran los resultados para el sismo de El Centro utilizando el experimento con daño implantado en entre el piso 3 y 4.

Tabla 4.3: Valores Nominales sismo de El Centro)

.	ϑ_1	ϑ_2	ϑ_3	ϑ_4	ϑ_5	ϑ_6	ϑ_7	ϑ_8	ϑ_9
tiempo	19.109	19.136	20.036	20.316	20.949	22.269	23.282	26.562	15.063
valor	179.06	179.11	178.57	178.56	178.47	178.31	178.05	176.2	178.63

Tabla 4.4: Valores Falla sismo de El Centro)

.	ϑ_1	ϑ_2	ϑ_3	ϑ_4	ϑ_5	ϑ_6	ϑ_7	ϑ_8	ϑ_9
tiempo	-	-	-	-	-	46.697	46.924	-	-
valor	-	-	-	-	-	143.55	142.84	-	-

4.2. Resultados en experimento

Para los resultados en experimento se utilizó una ventana de integración para los filtros integrales de 0.05 segundos que corresponden a 50 pasos con un muestreo de 1 mseg.

En el apéndice se pueden encontrar algunos detalles importantes de la implementación física utilizada en estos experimentos. En los experimentos que tienen un daño inducido lo que se hizo fue colocar una barra de aluminio adicional de el mismo grosor de las columnas entre los pisos en los cuales se deseaba inducir un daño. El experimento sin daño inducido sirve como un tipo de experimento de control contra el cual comparar los demás experimentos.

Note que en este caso se espera encontrar un aumento en la rigidez del sistema en lugar de una disminución como se esperaría tener en un daño real, sin embargo, optamos por esta metodología pues primero es más fácil de implementar y segundo consideramos que para efectos del algoritmo es equivalente una pérdida que un aumento de rigidez de las columnas.

4.2.1. Implementación del Algoritmo de identificación de daño

Las figuras 4.7 y 4.8 muestran las entradas sísmicas utilizadas en los experimentos tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia

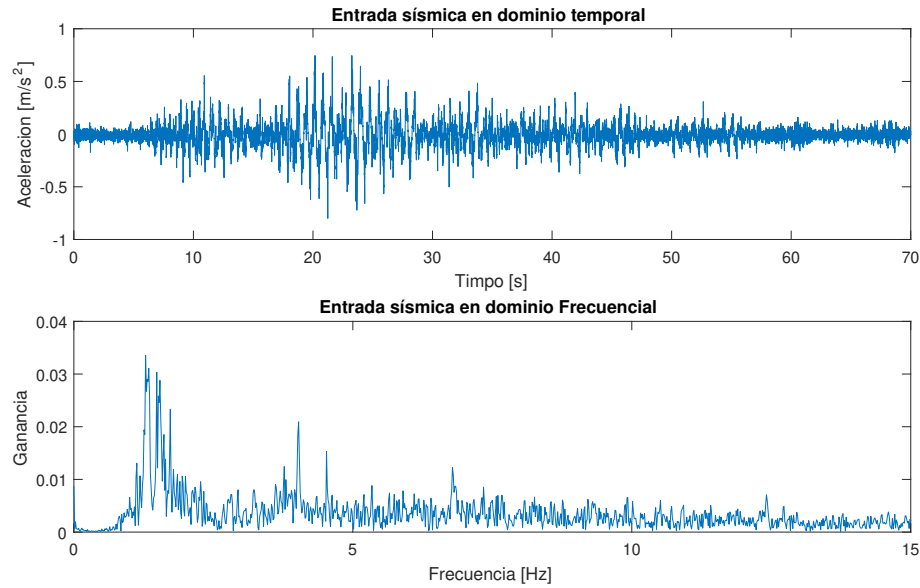


Figura 4.7: Entrada Sísmica (Chile)

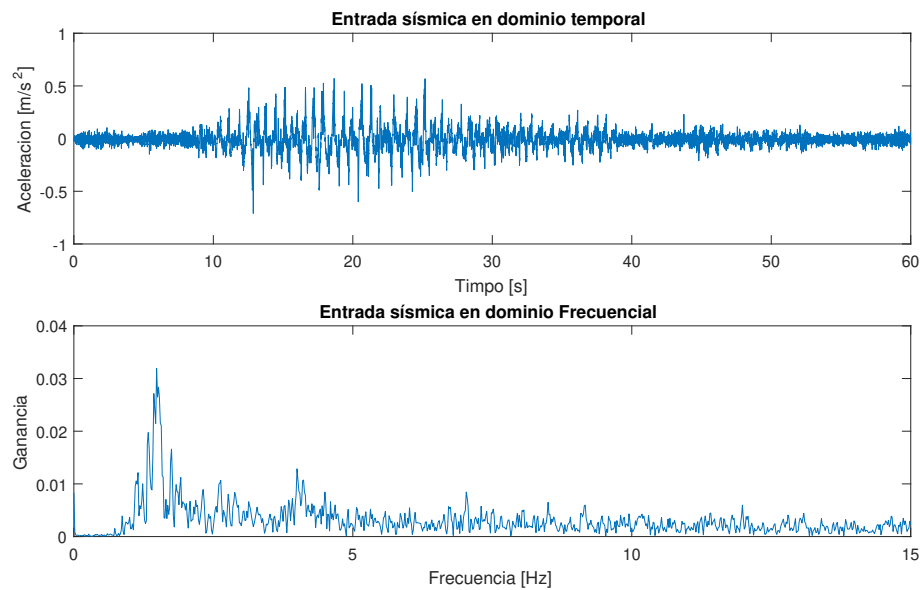


Figura 4.8: Entrada Sísmica (El Centro)

En las gráficas de las figuras 4.9 y 4.10 se comparan las estimaciones de los parámetros entre el experimento sin daño inducido y con daño entre los pisos 1 y 2 para el

sismo de Chile y de El Centro respectivamente. Un acercamiento del segundo 50 en adelante se muestra en las gráficas de la derecha.

En las gráficas se puede observar como en ambos experimentos se nota un incremento de la rigidez en los parámetros $\vartheta_2 = \frac{k_2}{m_1}$ y $\vartheta_3 = \frac{k_2}{m_2}$, lo cual concuerda con las hipótesis planteadas, sin embargo, también se puede observar una disminución de la rigidez para los parámetros $\vartheta_1 = \frac{k_1}{m_1}$ y $\vartheta_1 = \frac{k_3}{m_2}$ con respecto al experimento sin daño inducido, esta disminución es más notoria en el experimento con el sismo de Chile que con el de El Centro.

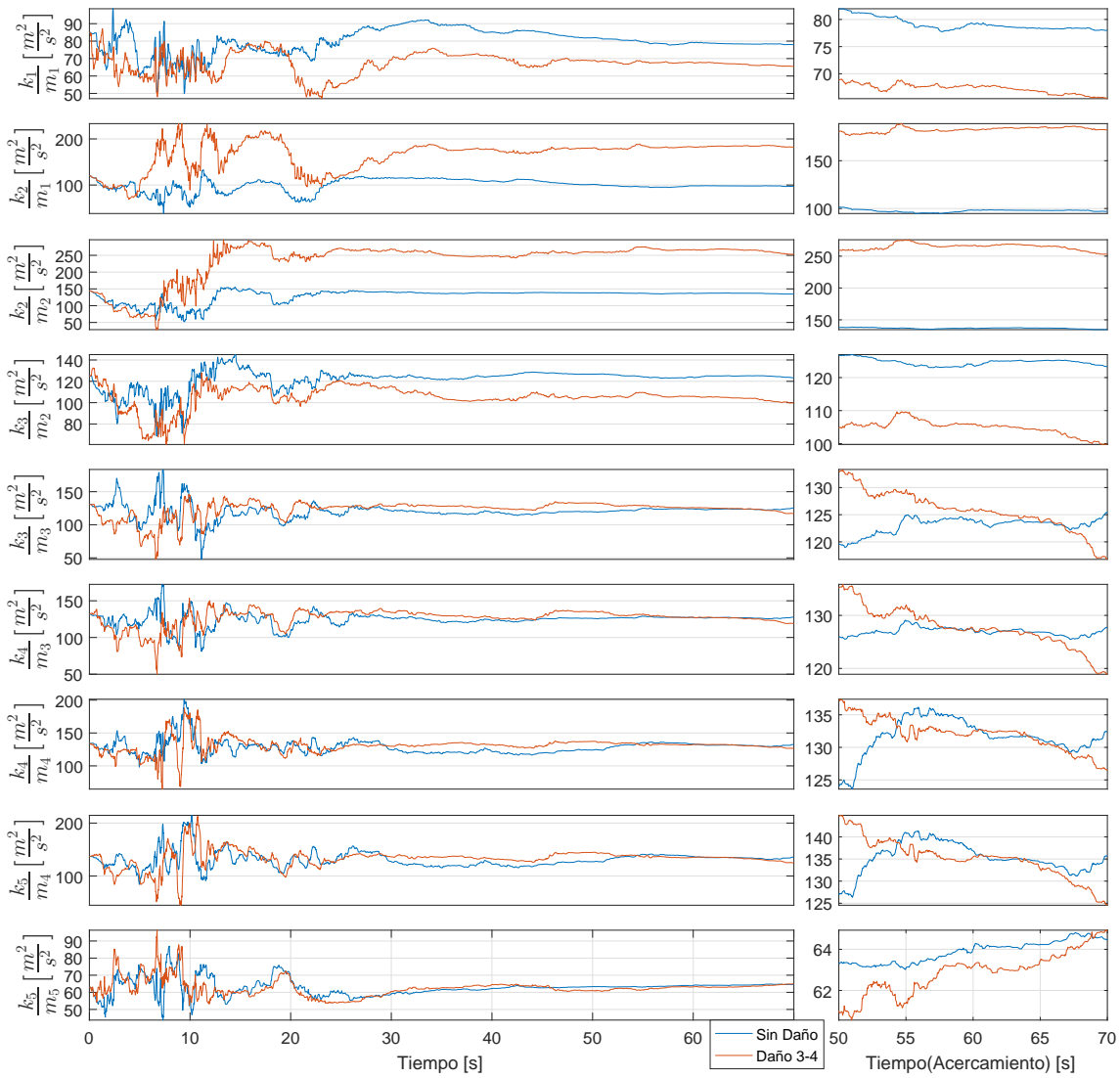


Figura 4.9: Estimación paramétrica con daño entre el 1^{er} piso y el 2^{do} piso (Chile)

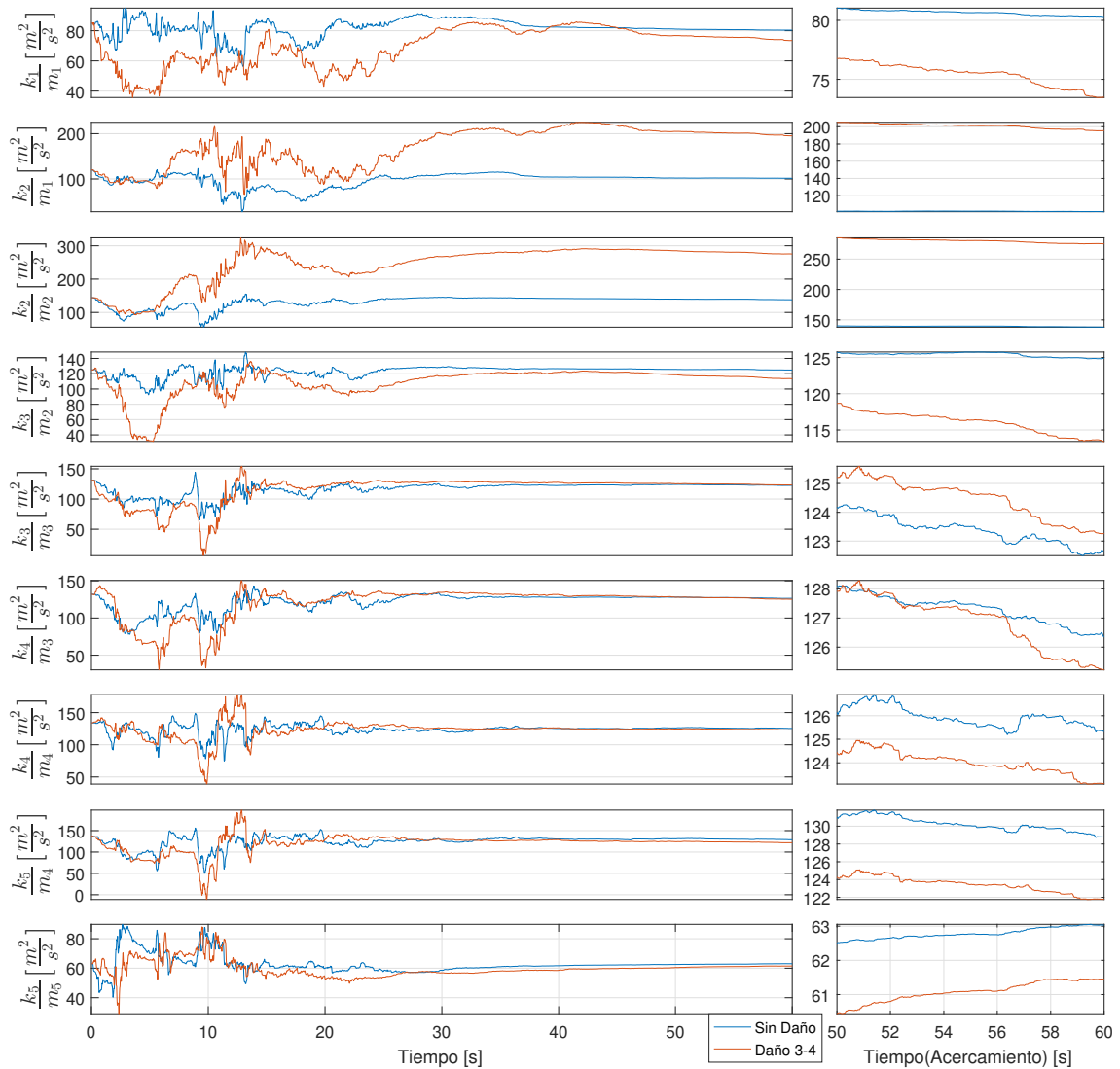


Figura 4.10: Estimación paramétrica con daño entre el 1^{er} piso y el 2^{do} piso (El Centro)

En las gráficas de las figuras 4.11 y 4.12 se comparan las estimaciones de los parámetros entre el experimento sin daño inducido y con daño entre los pisos 2 y 3 para el sismo de Chile y de El Centro respectivamente. Un acercamiento del segundo 50 en adelante se muestra en las gráficas de la derecha.

En las gráficas se puede observar como en ambos experimentos se nota un incremento de la rigidez en los parámetros $\vartheta_4 = \frac{k_3}{m_2}$ y $\vartheta_5 = \frac{k_3}{m_3}$, lo cual concuerda con las hipótesis planteadas, sin embargo, también se puede observar una disminución de la rigidez para los parámetros $\vartheta_3 = \frac{k_2}{m_2}$ y $\vartheta_6 = \frac{k_4}{m_3}$ con respecto al experimento sin daño inducido.

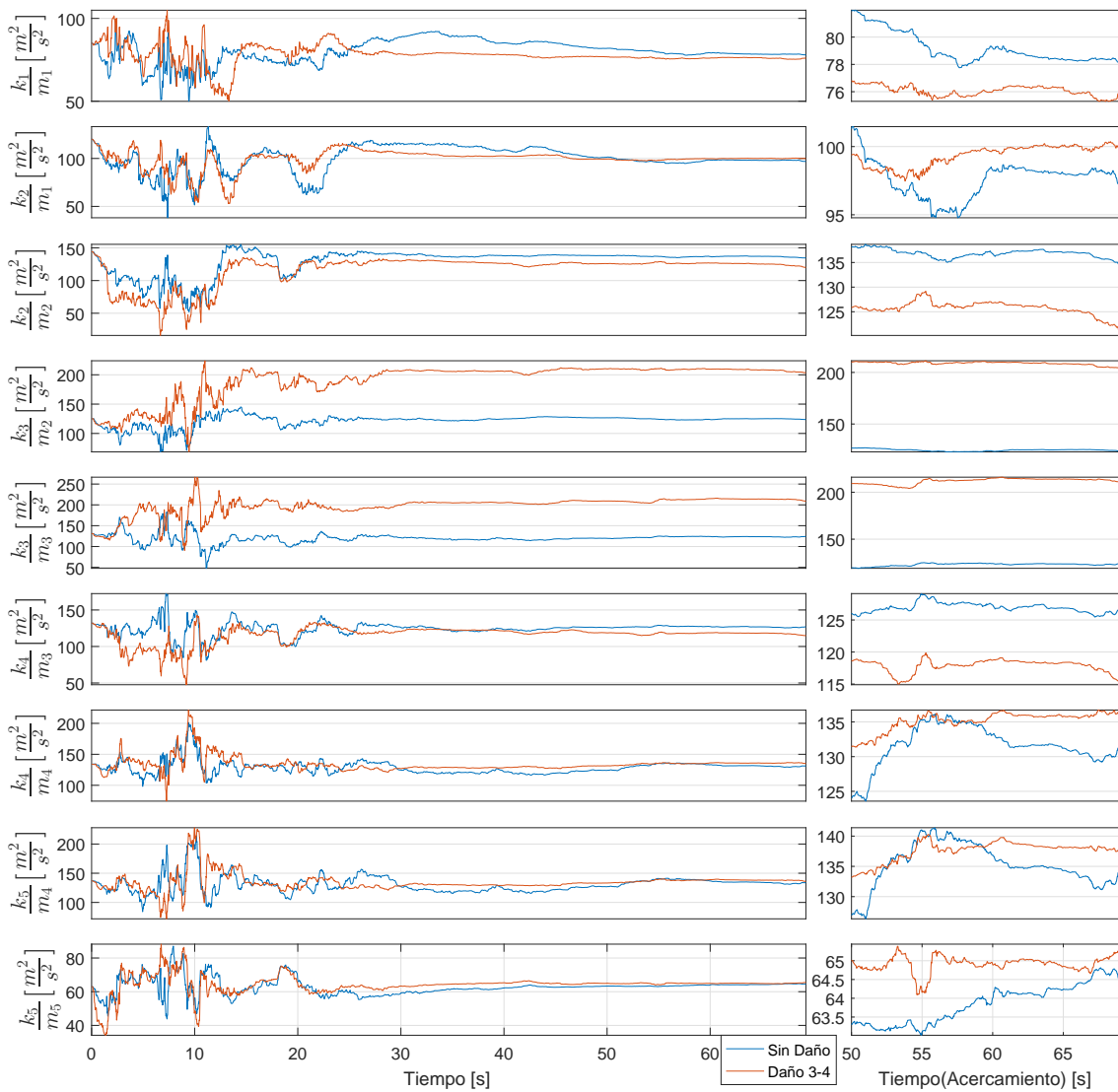


Figura 4.11: Estimación paramétrica con daño entre el 2^{do} piso y el 3^{er} piso (Chile)

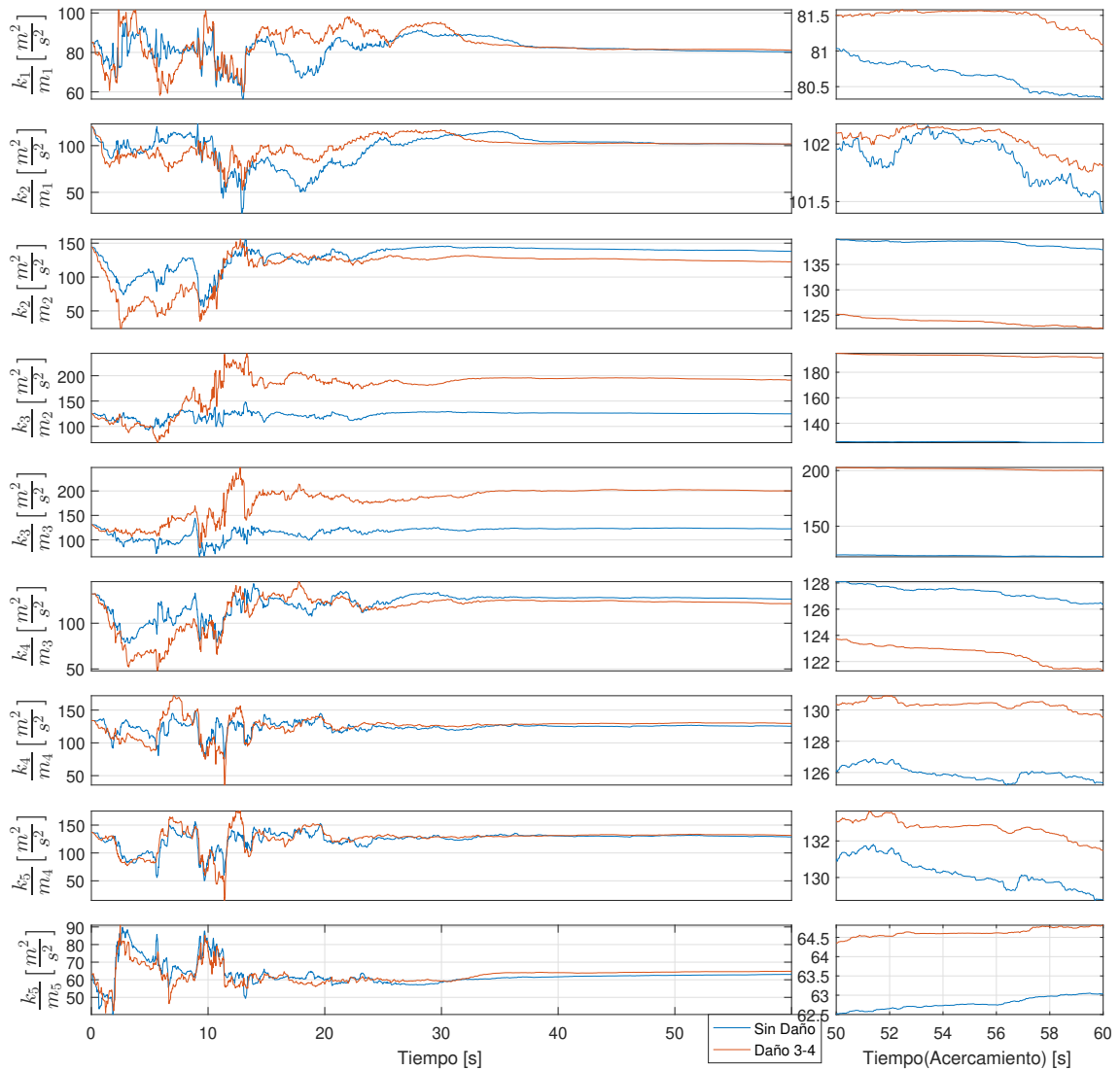


Figura 4.12: Estimación paramétrica con daño entre el 2^{do} piso y el 3^{er} piso (El Centro)

En las gráficas de las figuras 4.13 y 4.14 se comparan las estimaciones de los parámetros entre el experimento sin daño inducido y con daño entre los pisos 3 y 4 para el sismo de Chile y de El Centro respectivamente. Un acercamiento del segundo 50 en adelante se muestra en las gráficas de la derecha.

En las gráficas se puede observar como en ambos experimentos se nota un incremento de la rigidez en los parámetros $\vartheta_6 = \frac{k_4}{m_3}$ y $\vartheta_7 = \frac{k_4}{m_4}$, lo cual concuerda con las hipótesis planteadas, sin embargo, también se puede observar una disminución de la rigidez para los parámetros $\vartheta_5 = \frac{k_3}{m_3}$, $\vartheta_8 = \frac{k_5}{m_4}$, $\vartheta_1 = \frac{k_1}{m_1}$ y $\vartheta_2 = \frac{k_2}{m_1}$ con respecto al experimento sin daño inducido.

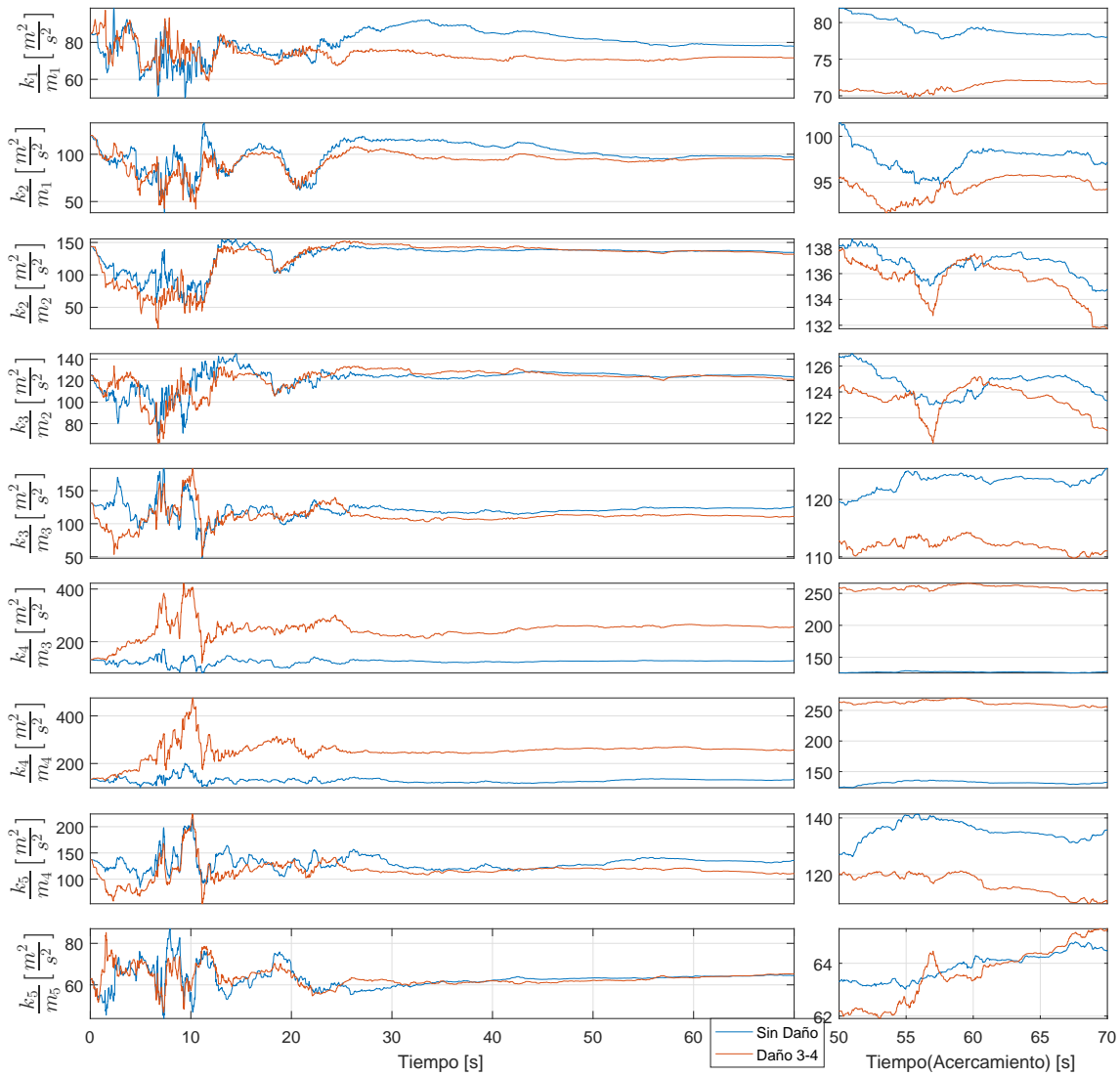


Figura 4.13: Estimación paramétrica con daño entre el 3^{er} piso y el 4^{to} piso (Chile)

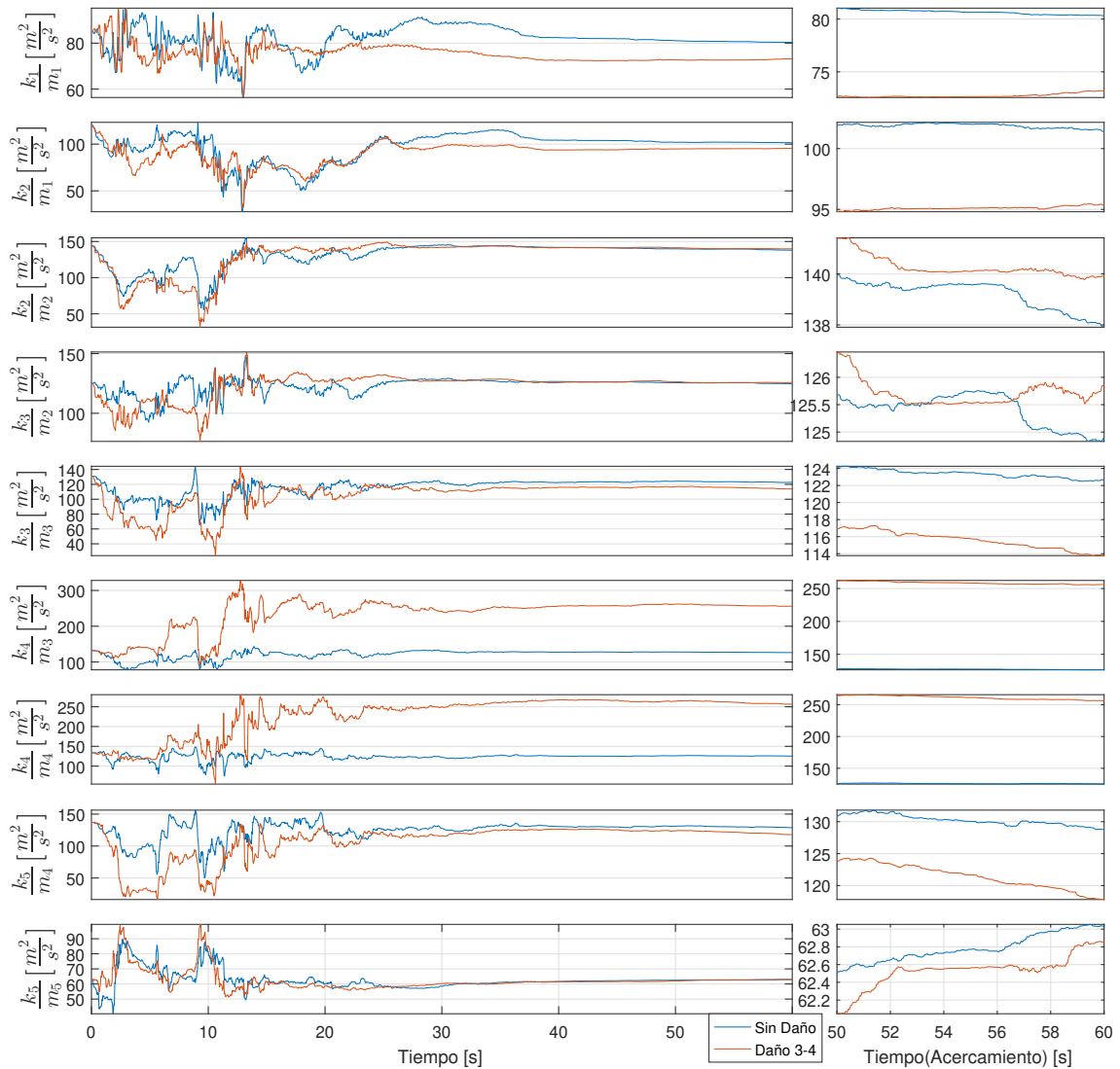


Figura 4.14: Estimación paramétrica con daño entre el 3^{er} piso y el 4^{to} piso (El Centro)

En las figuras 4.15 y 4.16 se muestran a manera de resumen todos los experimentos anteriores juntos. De estas gráficas se pueden concluir algunas observaciones interesantes:

1. En general los experimentos con el sismo de el centro se comportan de una manera más ideal que con el sismo de Chile. Esto se puede deber a que el sismo de El Centro cumple una “mejor condición” de excitación persistente que el sismo de Chile.
2. Existe una notable diferencia entre la magnitud a la que convergen los parámetros $\vartheta_1 = \frac{k_1}{m_1}$ y $\vartheta_9 = \frac{k_5}{m_5}$ contra la magnitud a la que convergen los demás parámetros, esto se puede deber a que estos parámetros dependen de la condición de frontera de la PDE.

3. Es consistente que exista una disminución de la rigidez entre los parámetros que dependen de los pisos aledaños a donde se implanta el daño, incluso en las figuras 4.13 y 4.14 muestra una disminución en ϑ_1 y ϑ_2 que dependen de pisos no contiguos al piso donde se implementó el daño. Esto se puede deber a la discretización planteada, o incluso a dinámicas no modeladas.

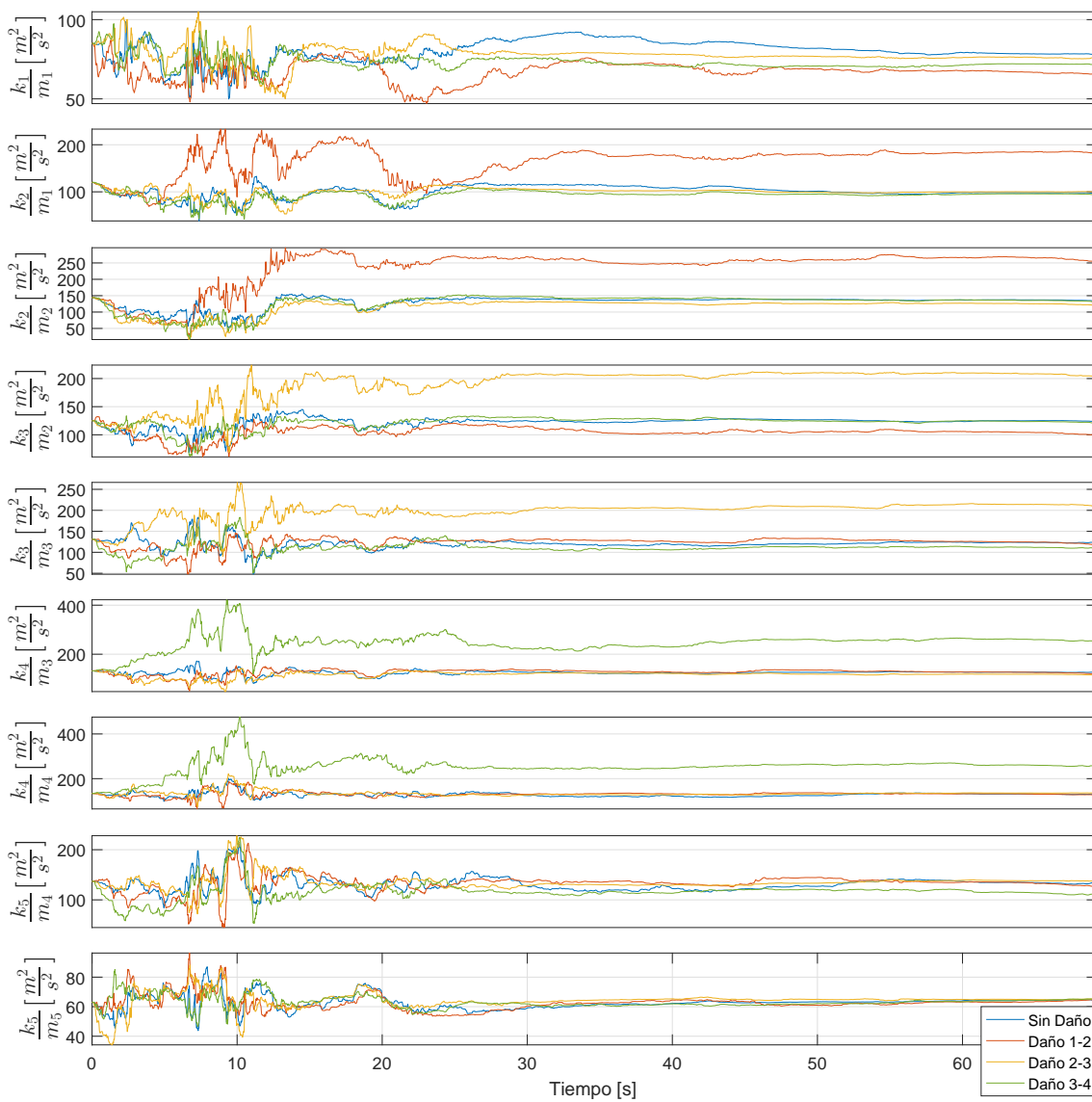


Figura 4.15: Resumen de estimación paramétrica con daño (Chile)

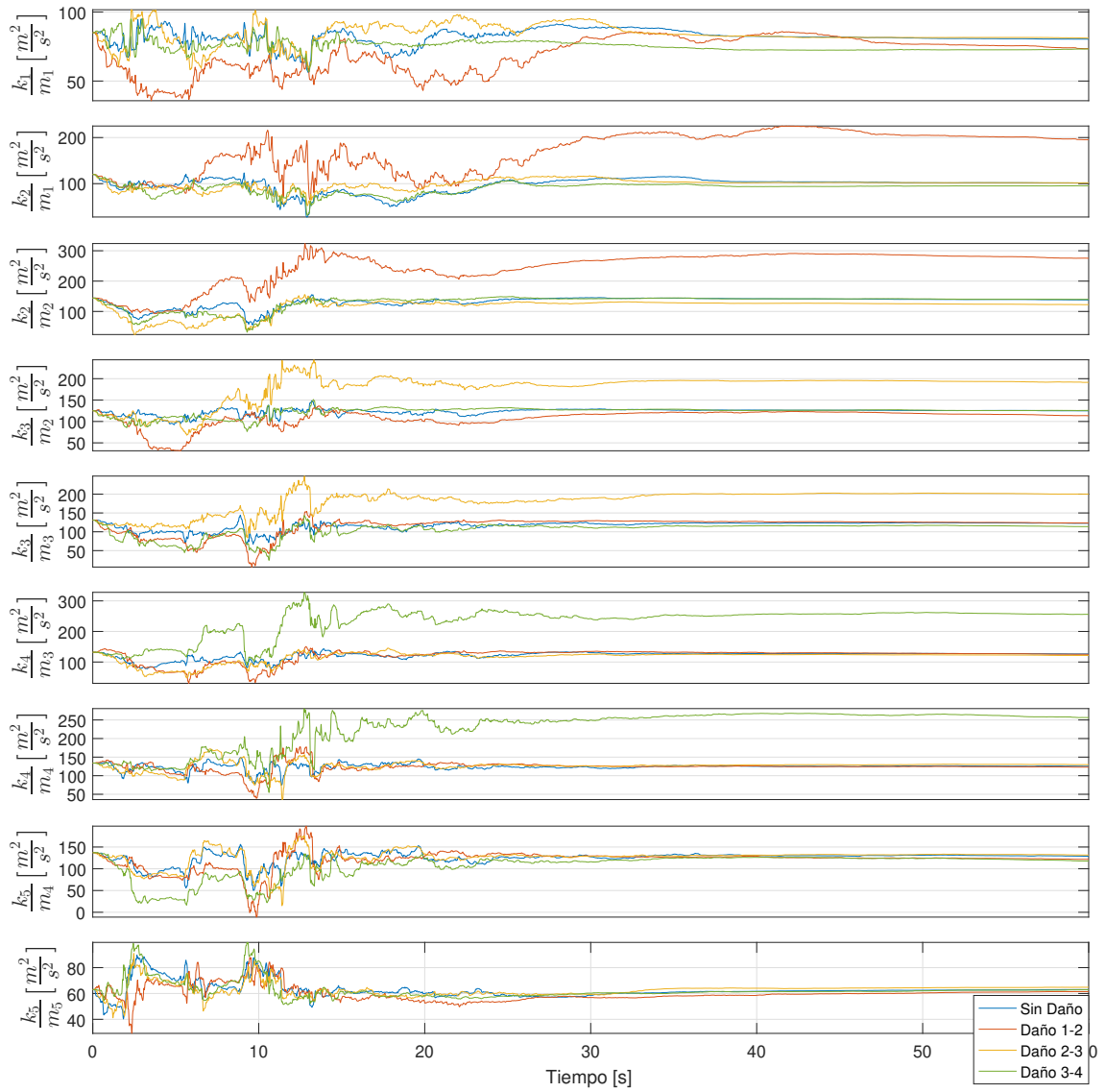


Figura 4.16: Resumen de estimación paramétrica con daño (El Centro)

Finalmente en las figuras 4.17 y 4.18 se muestran el espectro para las salidas del sistema (en este caso la aceleración en cada piso).

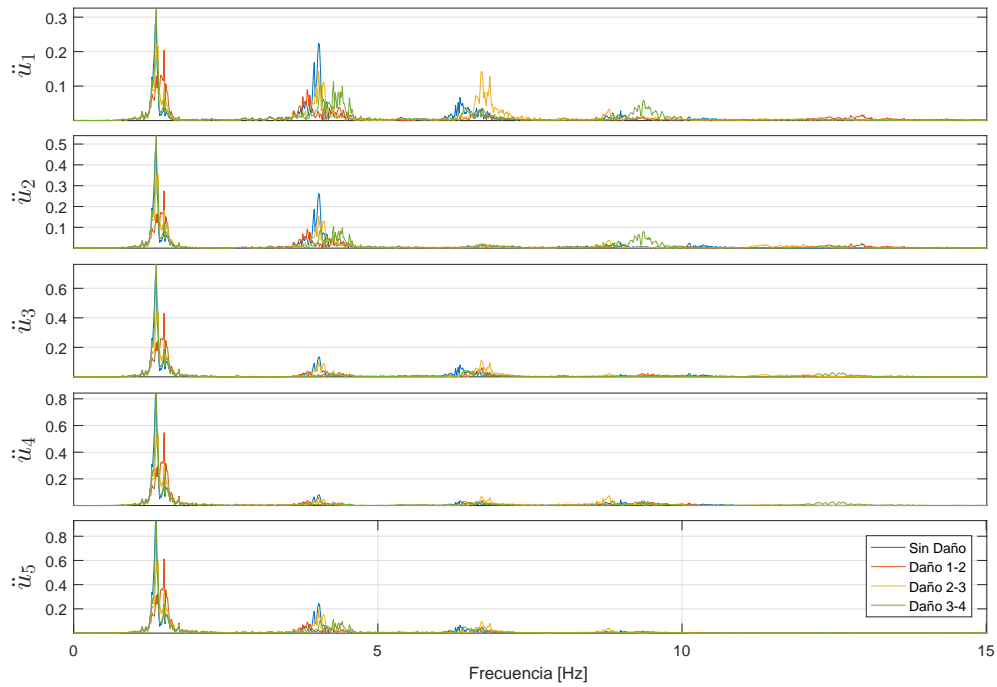


Figura 4.17: Espectro de señales de aceleración (Chile)

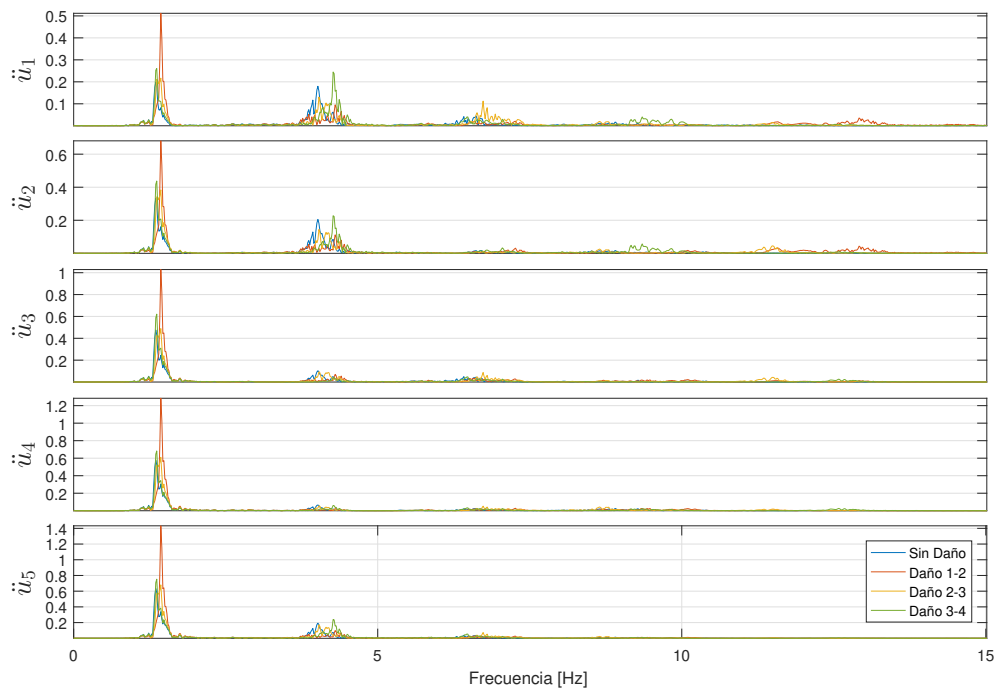


Figura 4.18: Espectro de señales de aceleración (El Centro)

4.2.2. Velocidad de Propagación

En esta sección se muestran algunas pruebas que intentan dar significado físico a los resultados obtenidos por el algoritmo presentado en esta tesis.

Como ya se ha mencionado, se tiene la hipótesis que estos daños estructurales están íntimamente relacionados a la manera en cómo se propaga la perturbación sísmica en este tipo de estructura, más aún, se cree que la velocidad de dicha propagación es un indicador fundamental.

En las siguientes figuras se muestran las salidas de aceleración para cada piso de la estructura con una entrada escalón para la posición. Se muestra únicamente las señales en el tiempo del primer arribo de la propagación de la entrada. De esta forma podemos computar la velocidad diferencial de propagación entre dos pisos dividiendo la distancia entre los pisos por el tiempo de desfase entre las señales.

En cada caso para computar el desfase se realizaron cinco experimentos y se obtiene la media en cada caso para así obtener el desfase.

Para la figura 4.19 la cual representa la prueba para la estructura sin daño podemos resumir los resultados en la siguiente tabla 4.5. Se puede observar que el desfase entre señales es relativamente homogénea entre pisos.

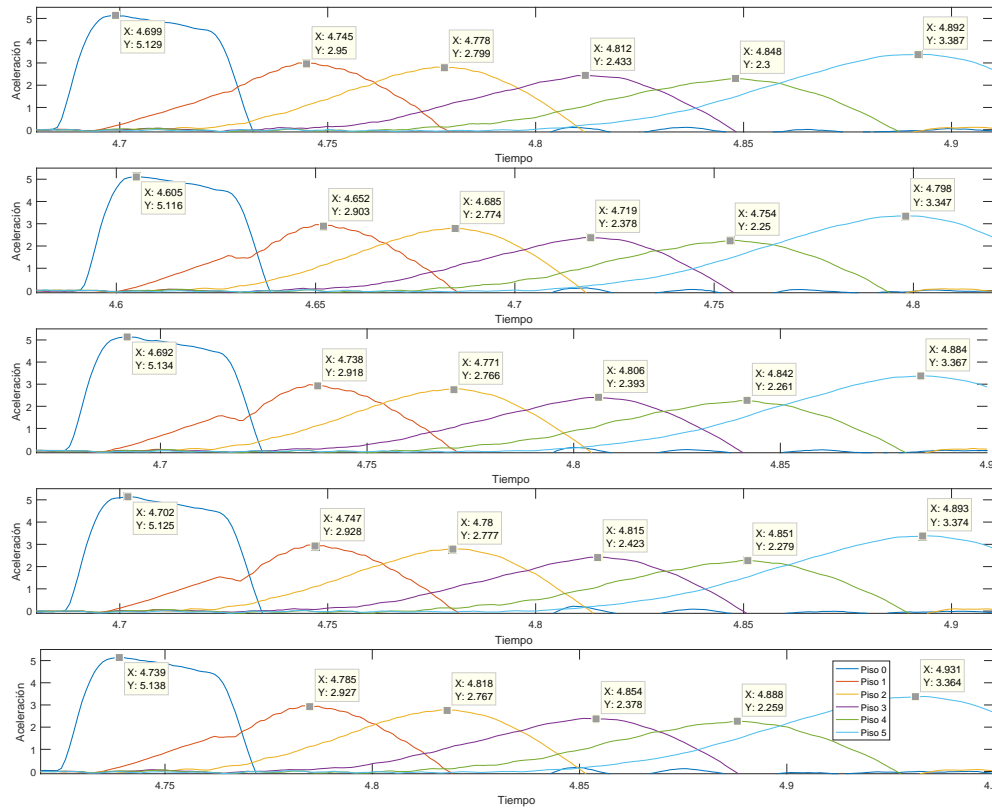


Figura 4.19: Experimentos para la estructura sin daño

Tabla 4.5: Información de la figura 4.19

Desfase entre: \ Prueba	1	2	3	4	5	Promedio
Piso 0 y Piso 1 [s]	0.046	0.047	0.046	0.045	0.046	0.046
Piso 1 y Piso 2 [s]	0.033	0.033	0.033	0.033	0.033	0.033
Piso 2 y Piso 3 [s]	0.034	0.034	0.035	0.035	0.036	0.0348
Piso 3 y Piso 4 [s]	0.036	0.035	0.036	0.036	0.034	0.0354
Piso 4 y Piso 5 [s]	0.044	0.044	0.042	0.042	0.043	0.043

Para la figura 4.20 la cual representa la prueba para la estructura con daño entre los pisos 1 y 2 podemos resumir los resultados en la tabla 4.6.

Se puede observar que el desfase entre los pisos 1 y 2 es menor que el desfase entre los demás pisos.

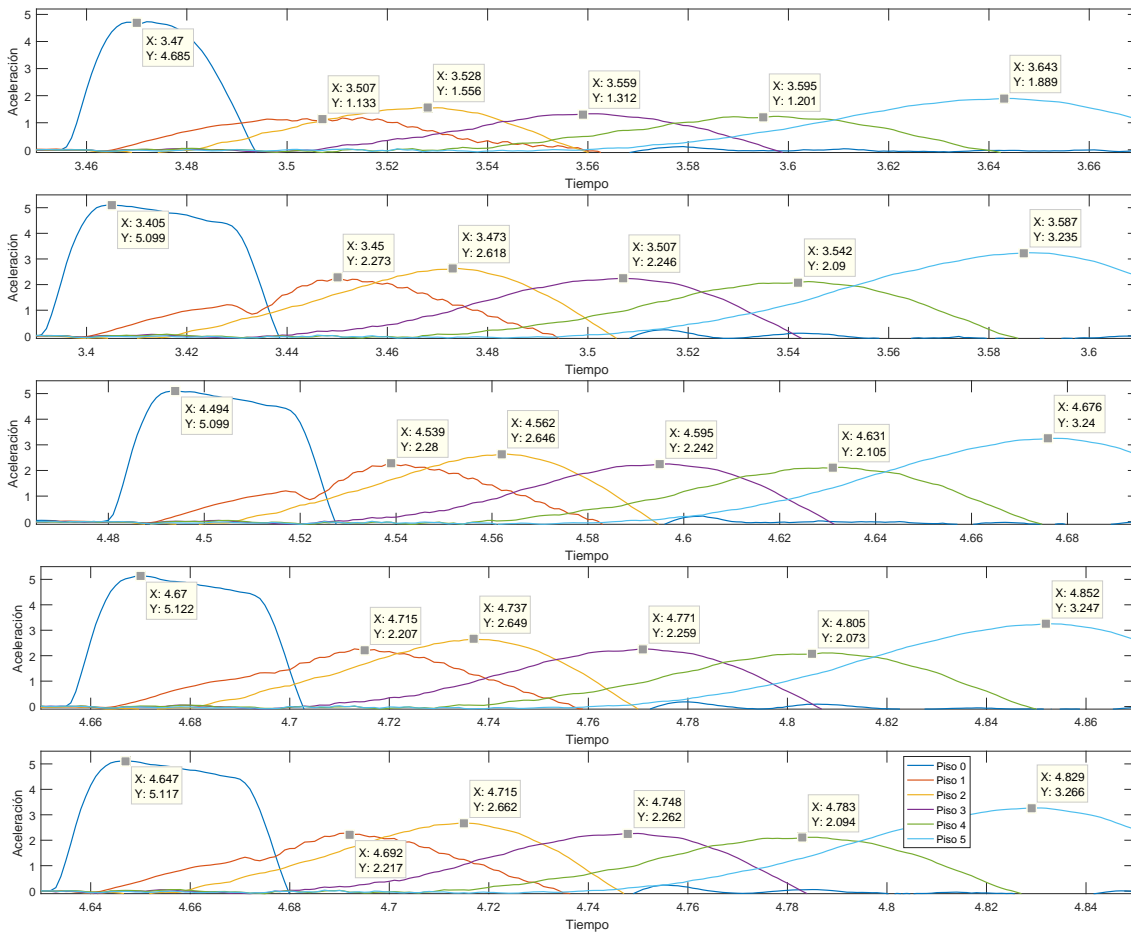


Figura 4.20: Experimentos para la estructura con daño en el 2^{do} piso

Tabla 4.6: Información de la figura 4.20

Desfase entre: \ Prueba	1	2	3	4	5	Promedio
Piso 0 y Piso 1 [s]	0.037	0.045	0.045	0.045	0.045	0.0434
Piso 1 y Piso 2 [s]	0.021	0.023	0.023	0.022	0.023	0.0224
Piso 2 y Piso 3 [s]	0.031	0.034	0.033	0.034	0.033	0.033
Piso 3 y Piso 4 [s]	0.036	0.035	0.036	0.034	0.035	0.0352
Piso 4 y Piso 5 [s]	0.048	0.045	0.045	0.047	0.046	0.0462

Para la figura 4.21 la cual representa la prueba para la estructura con daño entre los pisos 2 y 3 podemos resumir los resultados en la tabla 4.7.

Se puede observar que el desfase entre los pisos 2 y 3 es menor que el desfase entre los demás pisos.

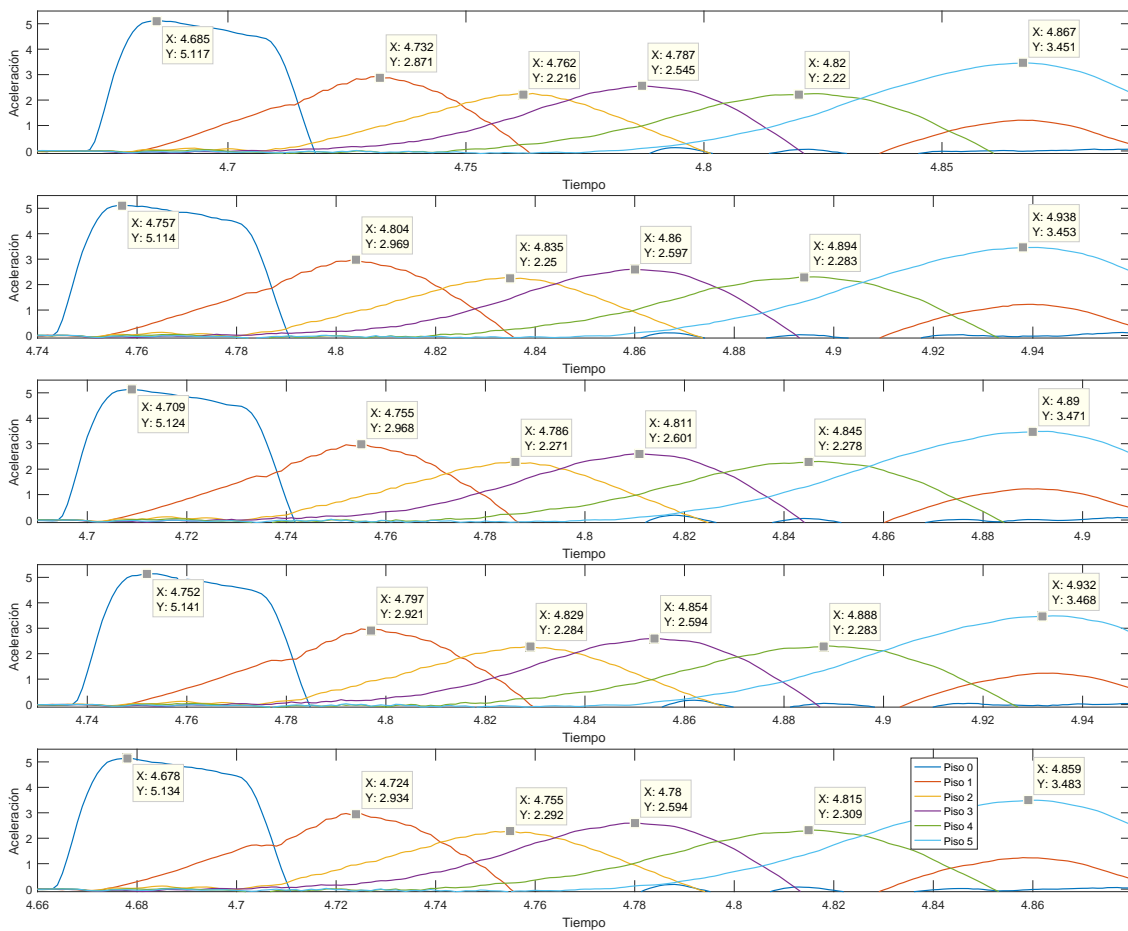


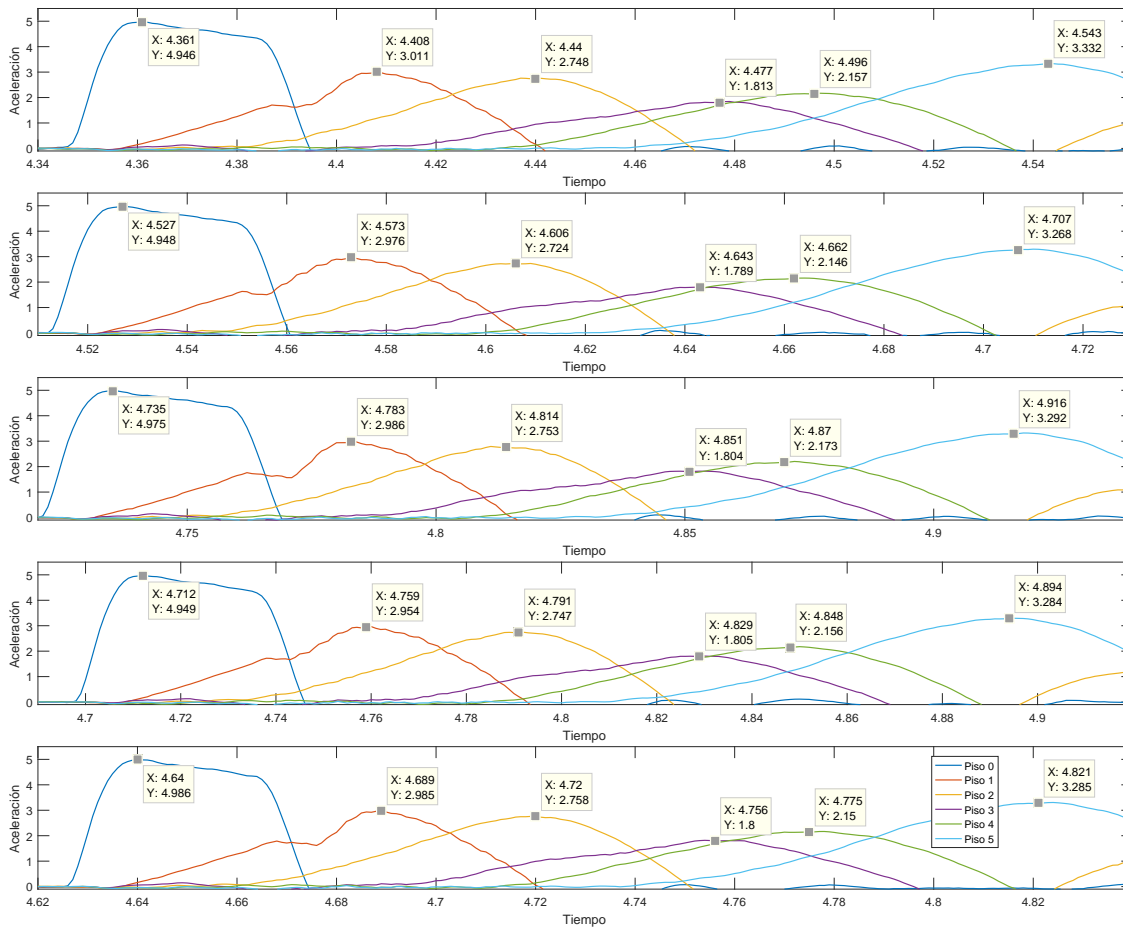
Figura 4.21: Experimentos para la estructura con daño en el 3^{er} piso

Tabla 4.7: Información de la figura 4.21

Desfase entre: \ Prueba	1	2	3	4	5	Promedio
Piso 0 y Piso 1 [s]	0.047	0.047	0.046	0.045	0.046	0.0462
Piso 1 y Piso 2 [s]	0.03	0.031	0.031	0.032	0.031	0.031
Piso 2 y Piso 3 [s]	0.025	0.025	0.025	0.025	0.025	0.025
Piso 3 y Piso 4 [s]	0.033	0.034	0.034	0.034	0.035	0.034
Piso 4 y Piso 5 [s]	0.047	0.044	0.045	0.044	0.044	0.0448

Para la figura 4.22 la cual representa la prueba para la estructura con daño entre los pisos 3 y 4 podemos resumir los resultados en la tabla 4.8.

Se puede observar que el desfase entre los pisos 3 y 4 es menor que el desfase entre los demás pisos.

Figura 4.22: Experimentos para la estructura con daño en el 4^{to} piso

Ahora, conociendo estos desfases y la altura entre pisos de la estructura podemos calcular la velocidad de propagación como ya hemos mencionado, la tabla 4.9 muestra estos cálculos para cada uno de los casos

Tabla 4.8: Información de la figura 4.22

Desfase entre:\Prueba	1	2	3	4	5	Promedio
Piso 0 y Piso 1 [s]	0.047	0.046	0.048	0.047	0.049	0.0474
Piso 1 y Piso 2 [s]	0.032	0.033	0.031	0.032	0.031	0.0318
Piso 2 y Piso 3 [s]	0.037	0.037	0.037	0.038	0.036	0.037
Piso 3 y Piso 4 [s]	0.019	0.019	0.019	0.019	0.019	0.019
Piso 4 y Piso 5 [s]	0.047	0.045	0.046	0.046	0.046	0.046

Tabla 4.9: Cómputo de la velocidad de propagación

Velocidad entre\Prueba	Sin daño	Daño 1 a 2	Daño 2 a 3	Daño 3 a 4
Piso 0 y Piso 1 [$\frac{m}{s}$]	7.17391	7.60369	7.14286	6.96203
Piso 1 y Piso 2 [$\frac{m}{s}$]	10.0	14.7321	10.6452	10.3774
Piso 2 y Piso 3 [$\frac{m}{s}$]	10.3448	10.9091	14.4	9.72973
Piso 3 y Piso 4 [$\frac{m}{s}$]	10.1695	10.2273	10.5882	18.9474
Piso 4 y Piso 5 [$\frac{m}{s}$]	8.37209	7.79221	8.03571	7.82609

Finalmente para compara los resultados de estos experimentos con los experimentos de la sección 4.2.1 se presentamos las siguientes gráficas

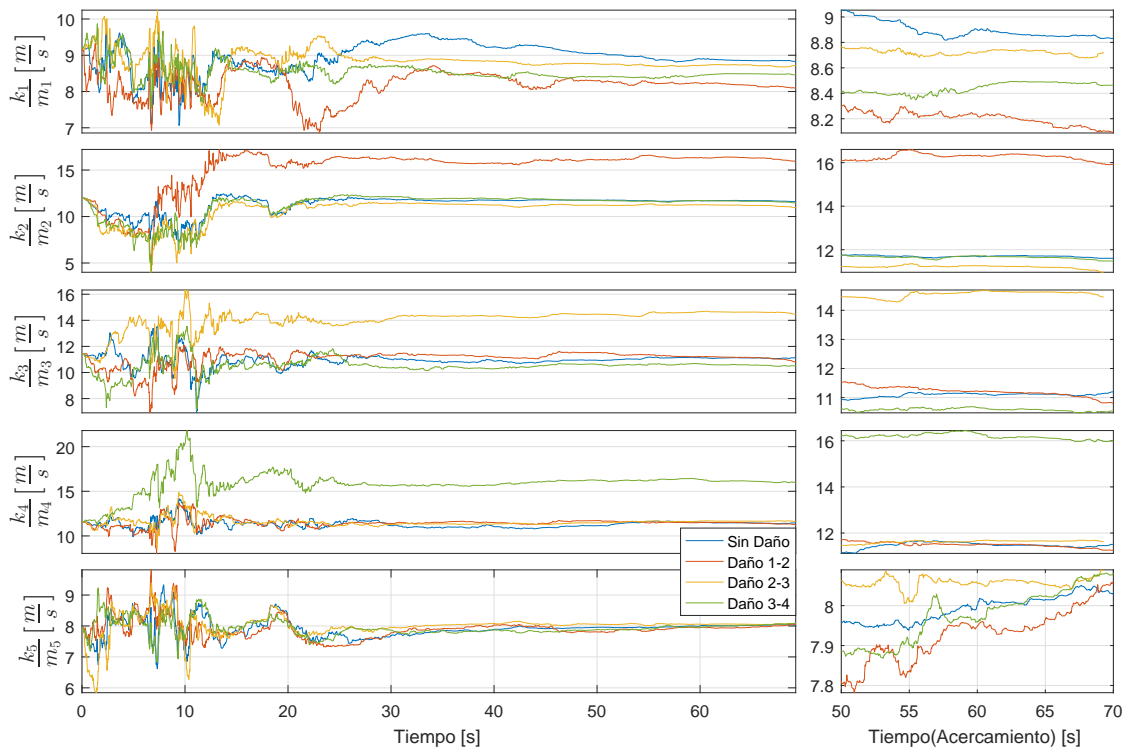


Figura 4.23: Velocidad de propagación estimada (Chile)

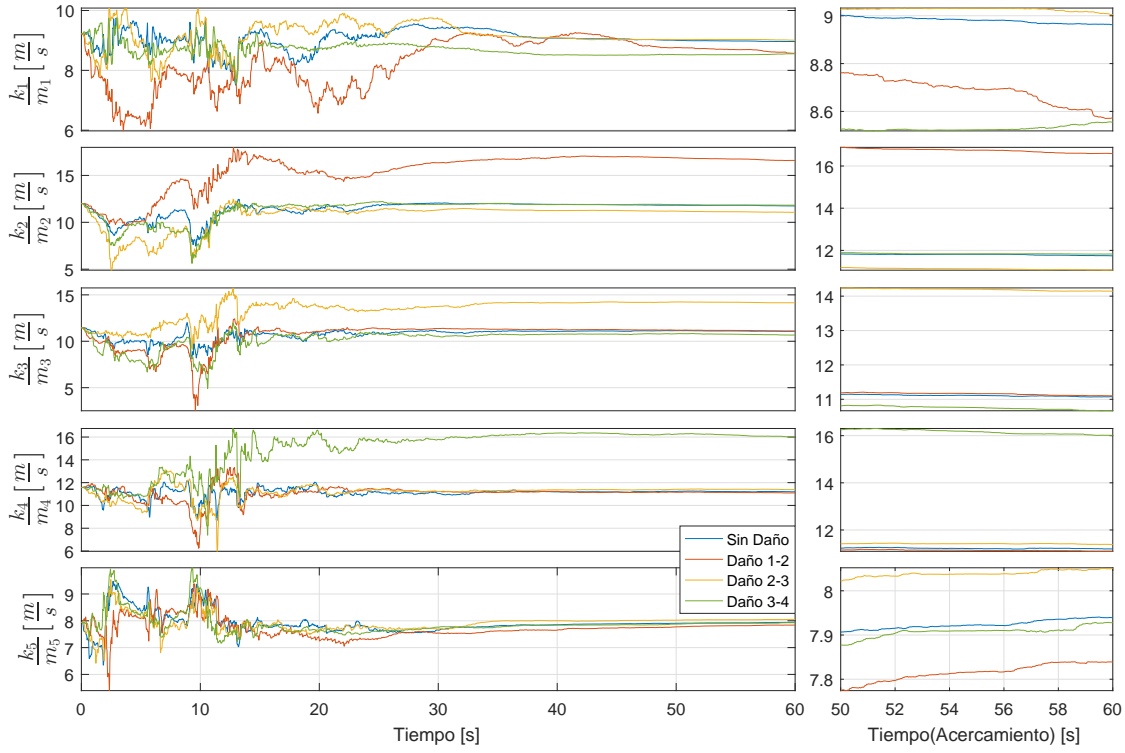


Figura 4.24: Velocidad de propagación estimada (El Centro)

En las figuras 4.23 y 4.24 se muestran los valores para $\sqrt{\vartheta_1} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$, $\sqrt{\vartheta_3} = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$, $\sqrt{\vartheta_5} = \sqrt{\frac{k_3}{m_3}}$, $\sqrt{\vartheta_7} = \sqrt{\frac{k_4}{m_4}}$ y $\sqrt{\vartheta_9} = \sqrt{\frac{k_5}{m_5}}$ que se tienen en las gráficas de las figuras 4.15 y 4.16.

Note que la magnitud de estos parámetros mostrados es una magnitud de velocidad ($[\frac{m}{s}]$), mas aún, cada parámetro depende de los valores de cada planta y convergen a valores relativamente similares a los mostrados en la tabla 4.9, con lo cual podemos decir que existe una relación entre los parámetros estimados y la velocidad de propagación.

Capítulo 5

Conclusiones y trabajo futuro

En este último capítulo se presentan las conclusiones sobre los resultados que se obtuvieron en este trabajo, así como de las conclusiones que podemos acerca del procedimiento que se realizó para llegar a dichos resultados. También se plantean algunas preguntas que dan pie a trabajo futuro que se puede realizar en el camino marcado por esta tesis.

5.1. Conclusiones

Como se puede observar en el capítulo anterior, se obtuvieron resultados positivos para realizar la detección de daño en edificios con esfuerzo cortante, sin embargo, como se observan en las gráficas (4.15) y (4.16) existe un comportamiento no deseado de disminución de los parámetros el cual habría que analizarse más a profundidad para resolver el problema de como evitarlo o minimizarlo, pues este fenómeno podría llevarnos a conclusiones falsas sobre la salud estructural del edificio.

También se presentó un algoritmo automático el cual puede (en teoría) detectar la existencia de fallas en tiempo real para edificios, sin embargo, nos fue imposible probar si dicho algoritmo funciona experimentalmente pues no ideamos como implantar daño en tiempo real. Este algoritmo presentado creemos que se puede extender para prescindir de algunas hipótesis y para evitar el ajuste “manual” de la longitud de la ventana de muestreo δ y de el criterio de convergencia μ .

Más aún, debido a la aproximación con la que se abordó el problema se puede usar una metodología similar para tratar problemas más complejos como el problema de identificación de fallas considerando la existencia de torsión y de un sismo bidireccional, esto pues las ecuaciones diferenciales parciales que rigen la dinámica de estas extensiones tienen una estructura similar a la planteada en este trabajo.

Los resultados obtenidos también nos permitieron realizar un algoritmo de detección de daño más directo que en otros trabajos como en [14], esto es debido a que en este trabajo se considera la ecuación diferencial parcial de onda con una velocidad de propagación variable, sin embargo, al momento de realizar la discretización obtenemos mayor numero de parámetros con lo cual tenemos una complejidad computacional mayor, lo

cual es una desventaja.

5.2. Algunas preguntas para trabajo futuro

Existen muchas preguntas abiertas que pueden dar origen a mucho trabajo futuro en esta área, por ejemplo:

- ¿Es posible considerar la ecuación Euler-Bernoulli con coeficiente variable y amortiguamiento?
- ¿Qué ventajas podría tener el análisis considerando dicho amortiguamiento?
- Más aún ¿Cómo se podría realizar un análisis similar utilizando la ecuación más general de barras que se tiene, la ecuación de Timochenko? y ¿Qué se podría ganar con dicho análisis?
- ¿Cómo se realizaría el análisis aplicado en éste trabajo para analizar torsión en edificios?
- ¿Es posible contemplar un análisis similar al planteado teniendo en cuenta una geometría más complicada para edificios o incluso en otro tipo de estructuras civiles?
- ¿Qué ventajas se tiene cuando se comparan este análisis (y otros de la misma naturaleza) contra aproximaciones más relacionadas con procesamiento de señales tales como el análisis de Fourier o análisis de *Wavelets*?
- ¿Cómo podríamos realizar una metodología para realizar experimentos no destructivos de detección de fallas en tiempo real?
- ¿Cómo se podría incluir la condición de excitación persistente en el algoritmo de identificación de daños? Esto con el fin de prescindir de cierta manera con la hipótesis de excitación persistente.
- ¿Cómo formalizar la relación encontrada entre la velocidad de propagación de onda con los valores de los parámetros encontrados?
- ¿Qué tan efectivo podrían ser los algoritmos presentados en estructuras reales con daño real?
- ¿Qué tan sensible es este algoritmo de identificación de daños?, es decir,
- ¿Qué tan efectivo el método planteado para identificar daños múltiples?
- ¿Cómo afecta el orden de la discretización en los resultados obtenidos? y ¿Qué ventajas o desventajas tendría realizar una discretización por otros métodos tales como elemento finito?

Considero que el problema de verificar si este algoritmo es efectivo y consistente implementado en edificios reales es primordial.

Apéndice A

Algunos detalles de implementación

En este apéndice se presentan datos y observaciones relevantes sobre la implementación física del modelo a escala un edificio. Una explicación mas detallada de esta implementación se puede encontrar en

El diagrama básico de la instrumentación se puede presentar como en la figura A

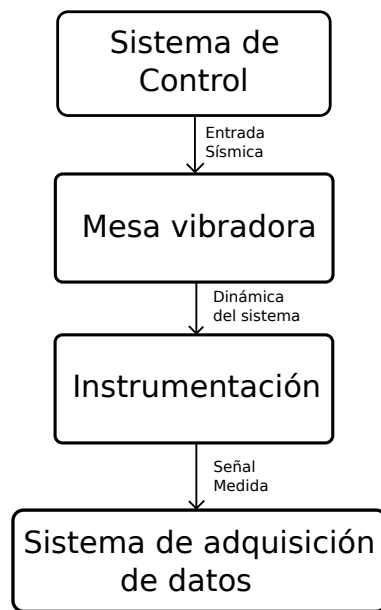


Figura A.1: Esquema básico de la implementación física

En este diagrama el primer bloque es el sistema de control, el cual se encarga de procesar la señal de entrada de la mesa vibradora sobre la cual descansa la estructura, esta señal de entrada representa a una señal sísmica de perturbación para la estructura. Esta entrada sísmica implica un comportamiento dinámico de la estructura, la cual por medio de la etapa de la instrumentación es medida y finalmente esta señal pasa por el sistema de adquisición de datos.

La siguiente imagen A muestra la estructura a escala utilizada. Las barras de alu-

minio que forman las columnas de la estructura tienen un espesor de $1/4$ de pulgada, la distancia entre pisos es de $0,33m$ entre los pisos 0 y 1 y entre los pisos 1 y 2, y la distancia entre los demas pisos es de $0,36m$, la masa de cada piso es de aproximadamente $8,4kg$.



Figura A.2: Modelo a escala utilizado

Se puede observar que cada piso está instrumentada con dos acelerómetros bidireccionales, sin embargo, para fines de este trabajo únicamente es necesario la información de un acelerómetro por cada planta.

La PCB de la implementación de los acelerómetros se muestra en la imagen A.

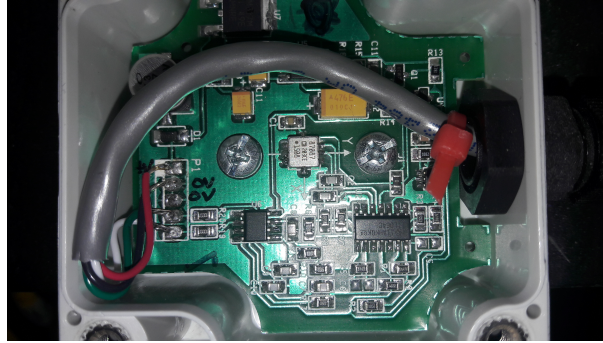


Figura A.3: PCB de los acelerómetros utilizados

Se puede observar que el núcleo central de esta implementación es el acelerómetro 203CE de Analog Device.

Por otra parte, para la mesa vibradora se utilizó un servo motor lineal Parker 406T03LXR el cual se muestra en la figura A

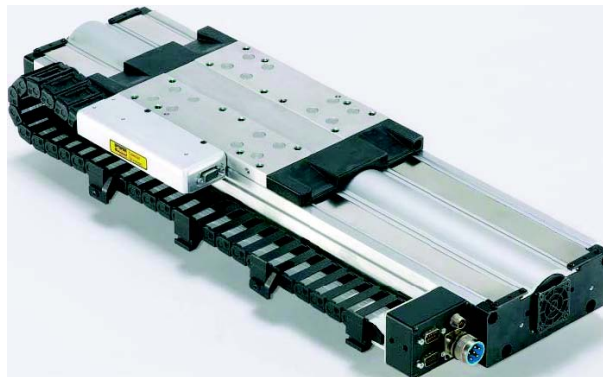


Figura A.4: Motor lineal utilizado

Finalmente para el sistema de adquisición de datos se utilizaron tarjetas *National Instruments* modelo PCI-MO-16E-4 la cual permite una conexión con el entorno de programación *Simulink* de *Matlab* con una velocidad máxima de muestreo de una muestra por un mili segundo.

A.1. Observaciones

Ahora presentamos algunos datos importantes sobre la resolución, rango, ruido, muestreo, etc. sobre la implementación física. Más información se puede encontrar en las hojas de datos [6] y [16]

Información de los acelerómetros.

1. Tiene un rango de $\pm 1,7G$ ($1G = 9,8 \left[\frac{m}{s^2} \right]$)

2. Su resolución es de 1 mG a 60 Hz.
3. Ancho de banda de 0.5 Hz a 2.5 Hz.
4. Posee dos ejes X e Y ortogonales para medir aceleración.
5. Tiene un ruido de salida de 1 a 3 mV_{rms} .
6. Tiene un 0.2% de no linealidad con respecto a la escala total.
7. La salida tiene una desviación a 0G de $\pm 25mG$.

Información del motor.

1. 8 Polos.
2. 250mm de recorrido.
3. 12,6Kg de masa.
4. Carga nominal de 180kg.
5. Tiene una aceleración máxima de 5G.
6. Una resolución de $5\mu m$ con una precisión de $20\mu m$.
7. Una velocidad máxima de 3m/s.

Bibliografía

- [1] Timo Balz and Mingsheng Liao. Building-damage detection using post-seismic high-resolution sar satellite data. *International Journal of Remote Sensing*, 31(13):3369–3391, 2010.
- [2] Adrian M. Chandler. Building damage in mexico city earthquake. *Nature*, 320:497–501, 1986.
- [3] Anil K. Chopra. *Dynamics of structures: theory and applications to earthquake engineering*. Prentice Hall, 4 edition, 2012.
- [4] Ray W. Clough and Joseph Penzien. *Dynamics of Structures*. 1975.
- [5] Antonio Concha, Luis Alvarez-Icaza, and Rubén Garrido. Simultaneous parameter and state estimation of shear buildings. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 70-71:788 – 810, 2016.
- [6] Analog Devices. Data sheet adxl103/adxl203. http://www.analog.com/media/en/technical-documentation/data-sheets/ADXL103_203.pdf.
- [7] Excelsior. Así cayó un edificio en la roma casi una hora después del sismo. <http://www.excelsior.com.mx/comunidad/2017/10/02/1191657>.
- [8] Charles R. Farrar and Keith Worden. An introduction to structural health monitoring. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 365(1851):303–315, 2007.
- [9] Domenico Giardini, Gottfried Grünthal, Kaye M. Shedlock, and Peizhen Zhang. The gshap global seismic hazard map. *Annals of Geophysics*, 42(6), 1999.
- [10] J. L. Humar. Dynamics of structures. 2002.
- [11] Petros A Ioannou and Jing Sun. *Robust adaptive control*, volume 1. PTR Prentice-Hall Upper Saddle River, NJ, 1996.
- [12] Rolf Isermann. *Fault-diagnosis systems: an introduction from fault detection to fault tolerance*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [13] Randall J LeVeque. *Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: steady-state and time-dependent problems*, volume 98. Siam, 2007.

- [14] Jesús Morales. Identificación de parámetros en edificios mediante tiempos de propagación de ondas para detección de daño.
- [15] American Society of Civil Engineers. *ASCE standard ASCE SEI 41-13 : American Society of Civil Engineers : seismic evaluation and retrofit of existing buildings*.
- [16] Parker. Linear servo motor driven 400lrx series. http://www.parkermotion.com/Support/Product_Manuals/406LXR_Manual.pdf.
- [17] S. K. Singh, E. Mena, and R. Castro. Some aspects of source characteristics of the 19 september 1985 michoacan earthquake and ground motion amplification in and near mexico city from strong motion data. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 78(2):451–477, 1988.
- [18] Hoon Sohn, Charles R. Farrar, Francois M. Hemez, and Jerry J. Czarnecki. A review of structural health review of structural health monitoring literature 1996-2001. Technical report, Los Alamos National Laboratory, 2002.
- [19] Gang Tao. *Adaptive control design and analysis*, volume 37. John Wiley & Sons, 2003.
- [20] Maria I. Todorovska and Mihailo D. Trifunac. Earthquake damage detection in the imperial county services building i: The data and time–frequency analysis. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 27(6):564–576, 2007.
- [21] Federal Emergency Management Agency (US). *Rapid visual screening of buildings for potential seismic hazards: A handbook*. Government Printing Office, 2017.
- [22] Daniel Villegas. Terremoto destruyó 2.4% del pib del país. <http://www.elfinanciero.com.mx/sismo-1985/terremoto-destruyo-del-pib-del-pais>.
- [23] Keith Worden, Charles R. Farrar, Graeme Manson, and Gyuhae Park. The fundamental axioms of structural health monitoring. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 463, pages 1639–1664. The Royal Society, 2007.