



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Simulaciones Montecarlo para análisis de la
incertidumbre en mediciones criminalísticas

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

PRESENTA:

Levi Jahzeel Curiel Sánchez

TUTOR

Dr. Vicente Torres Zúñiga

Ciudad Universitaria, CDMX. 2018





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Datos del alumno y jurado

1. Alumno

Curiel

Sánchez

Levi

Jahzeel

Tel. 55 67 90 55 32

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física

Numero de Cuenta 306071500

2. Tutor

Dr.

Vicente

Torres

Zúñiga

3. Sinodal 1

Dra.

Karla

Paola

García

Pelagio

4. Sinodal 2

M. en C.

José

Guadalupe

Bañuelos

Muñetón

5. Sinodal 3

Fís. Jorge

Pérez

López

6. Sinodal 4

Dr. Víctor

Hugo

Meza

Laguna

7. Datos del trabajo escrito

Simulaciones Montecarlo para análisis de la incertidumbre en mediciones criminalísticas

91 p.

2018

Agradecimientos

Este trabajo ha recibido el apoyo económico de una entidad pública, la Universidad Nacional Autónoma de México, mediante los proyectos: UNAM-PAPIME-PE107216, y carece de conflicto de intereses.

Primeramente agradezco a Dios. A mis sinodales y tutor, por ayudarme a revisar y corregir la tesis. A mis padres, ya que me apoyaron durante todo este tiempo. A mis hermanos les dejo este trabajo como una demostración que con esfuerzo y perseverancia uno puede alcanzar sus metas. A todos los que me acompañaron en este tiempo, amigos, familiares.

Resumen

El objetivo central de esta tesis es diseñar, programar y someter a contraste (teórica y empíricamente) un algoritmo de técnica Montecarlo aplicado a tres casos de interés en el área de la ciencia forense: dos de hechos de tránsito (obtener la velocidad inicial de un automóvil) y otro de traumatología (fuerza de un golpe).

En criminalística, son muchas las periciales donde se requiere la obtención de parámetros físicos para lograr una reconstrucción forense completa y verosímil. Por ejemplo, magnitudes como la fuerza, la velocidad y la distancia son necesarios para realizar un reproducción factible en hechos de tránsito, balística, traumatología, entre otras especialidades.

Si bien, es posible obtener la incertidumbre mediante ecuaciones deterministas empleando cálculo diferencial o al disponer de muchas mediciones y utilizar estadística, el objeto de estudio forense es más elusivo para ocupar tales herramientas. En la mayoría de los casos se carece de suficiente información, su fiabilidad es cuestionable, además de que suele estar afectada por la variabilidad (especialmente la relacionada con la biomecánica humana). De modo que la mayoría de las cotas de incertidumbres obtenidas por medios estándares son imprecisas por laxas.

Sin embargo, utilizando la misma variabilidad de los parámetros se puede obtener la medida más probable con intervalos de fiabilidad. Este enfoque es llamado método Montecarlo, que se refiere (en general) al uso de cualquier técnica que utilice números aleatorios para resolver un problema.

En este trabajo de tesis mostramos integralmente un algoritmo adaptable para obtener la cota de incertidumbre en las variables físicas de tres diferentes casos forenses; donde confrontamos la información obtenida teóricamente con las observaciones en la literatura y experimentales.

Objetivos

- Proponer una distribución probabilística para vincularse a la medición y su incertidumbre asociada, que forme la propuesta de técnica Montecarlo.
- Probar la propuesta de técnica Montecarlo en diferentes casos forenses.
- Contrastar los resultados de la propuesta de técnica Montecarlo, mediante dos experimentos.
- Identificar los alcances de la propuesta de técnica Montecarlo.

Puntos a destacar:

- Asociamos a la medición y a su incertidumbre una distribución probabilística limitada, para insertarla en un proceso Montecarlo de análisis de propagación de errores.
- Probamos nuestra propuesta comparando resultados de la literatura y experimentales.
- Analizamos el alcance de la propuesta en casos forenses especializados, concretos y reales.

Palabras clave:

1) Método Montecarlo. 2) Ciencia Forense. 3) Criminalística. 4) Modelos Numéricos. 5) Incertidumbre en la Medición.

Índice general

| | |
|---|-----------|
| Resumen | I |
| Índice de figuras | VII |
| Índice de tablas | XI |
| 1. Escenario operativo y fundamentos teóricos | 2 |
| 1.1. Contexto forense | 2 |
| 1.2. Ejemplos de física aplicada en la ciencia forense | 4 |
| 1.3. Importancia de la teoría de valores extremos en el campo forense | 5 |
| 1.4. Análisis del error en la medición | 7 |
| 1.4.1. Perspectiva desde el cálculo diferencial | 7 |
| 1.4.2. Perspectiva desde la estadística y probabilidad | 8 |
| 1.4.2.1. Distribuciones estadísticas | 11 |
| 1.4.2.2. Teorema del límite central | 11 |
| 1.5. Método Montecarlo | 12 |
| 1.5.1. Breve historia del método Montecarlo | 12 |
| 1.5.2. Aplicaciones del método Montecarlo | 13 |
| 1.6. Funciones alimentadas con números aleatorios | 13 |
| 1.6.1. Generación de números aleatorios | 14 |
| 1.6.2. Generador de Lehmer o Generador Lineal Congruen- | |
| cial (GLC) | 16 |
| 1.6.3. Comportamiento de las funciones <i>rand</i> y <i>randn</i> | 16 |
| 1.6.4. Cálculo de pi mediante técnica Montecarlo | 17 |
| 1.6.5. Comparación de cuatro técnicas Montecarlo | 19 |
| 1.6.6. Comportamiento de funciones con argumento <i>rand</i> | 20 |
| 1.7. Una técnica Montecarlo para calcular el error | 22 |
| 2. Velocidad de impacto en hecho de tránsito | 24 |
| 2.1. Coeficiente de fricción | 28 |
| 2.2. Comparación entre la literatura y la propuesta | 28 |

| | |
|--|-----------|
| 2.2.1. Resultados parciales | 30 |
| 2.3. Caso forense: derrape de vehículo con salida del camino | 33 |
| 2.3.1. Análisis de propagación de errores por cálculo determinista | 35 |
| 2.3.2. Implementación de la técnica Montecarlo | 37 |
| 2.3.3. Resultados parciales | 38 |
| 2.4. Conclusiones de capítulo | 40 |
| 3. Fuerza de un golpe fijado en video | 41 |
| 3.1. Caso forense: Muerte del Perro Aguayo Jr. | 41 |
| 3.1.1. Video y su análisis | 42 |
| 3.2. Cálculo de la fuerza asociada al impacto | 43 |
| 3.2.1. Análisis de propagación de errores por cálculo determinista | 44 |
| 3.2.2. Implementación de la técnica Montecarlo | 45 |
| 3.2.3. Resultados parciales | 47 |
| 3.3. Contrastación experimental | 48 |
| 3.3.1. Resultados parciales | 50 |
| 3.4. Conclusiones de capítulo | 53 |
| 4. Conclusiones y prospectiva del trabajo | 54 |
| 4.1. Prospectiva de la investigación | 55 |
| 4.2. Palabras finales | 55 |
| Anexos | 56 |
| A. Fundamentos del programa Octave | 57 |
| B. Códigos Octave programados | 58 |
| B.1. Encuentra el valor de pi | 58 |
| B.2. Mapa puntos dentro de un cuadrado | 59 |
| B.3. Función normal dentro de funciones | 59 |
| B.4. Comportamiento de t. Montecarlo dentro de otras funciones | 60 |
| B.5. Algoritmo de referencia en hecho de tránsito | 62 |
| B.6. Algoritmo Corregido de la referencia en hecho de tránsito | 65 |
| B.7. Código del Camión Loco | 69 |
| B.8. Algoritmo para obtener la fuerza de una patada de canguro | 72 |
| C. Desarrollo de las incertidumbres usadas en la tesis | 76 |
| C.1. Incertidumbre para la ecuación del tiro parabólico | 76 |
| C.2. Incertidumbre para la ecuación de colisiones elásticas | 78 |

| | |
|--|-----------|
| D. Foros donde se presentó este trabajo | 83 |
| Bibliografía | 86 |

Índice de figuras

| | | |
|------|--|----|
| 1.1. | Comportamiento bidimensional e independiente de los comandos <i>rand</i> y <i>randn</i> con 100, 1 000 y 10 000 datos. | 17 |
| 1.2. | Mapa de 5×10^3 pares coordenados obtenidos aleatoriamente dentro (círculos azules) y fuera (cruces rojas) de un círculo unitario constreñidos dentro de un cuadrado unitario en el primer cuadrante cartesiano. En el Apéndice B.1 se encuentra el código fuente utilizado. | 18 |
| 1.3. | Arriba, error porcentual en el cálculo de π en función del número de datos. Abajo, distribución de datos en el cálculo de π | 19 |
| 1.4. | Distribución limitada mediante los valores $x + x_c(\text{rand} - \text{rand})$, donde: A) $x_c = 5$ unidades; B) $x_c = 15$ unidades; C) $x_c = 50$ unidades. Utilizando 10^6 componentes para cada caso. Observe que el valor central es invariante al cambio en x_c , pero la tendencia si se afecta aumentando la desviación estándar de la distribución. | 21 |
| 1.5. | Comparación de distribuciones cuadráticas, utilizando A) y_1^2 (línea continua negra) y B) $y_1 \times y_2$ (línea discontinua azul). | 22 |
| 1.6. | Efectos en la distribución limitada propuesta: $x + x_c(\text{rand} - \text{rand})$, donde x_c de 50, 15 y 5 unidades— mediante seis sendas funciones: A) suma, B) potencia cuadrada, C) raíz cuadrada, D) inverso, E) seno, y F) logaritmo. En todos los casos se emplearon 10^6 componentes. | 22 |
| 2.1. | Croquis de las posiciones finales de ambos autos luego de la colisión. Las posiciones antes del choque son ilustrativas, representan solo las direcciones de cada auto y no sus posiciones exactas. Imagen obtenida de [35] | 30 |

| | | |
|------|---|----|
| 2.2. | Reconstrucción de los resultados de la literatura utilizando 10^6 ciclos: A) Distribución de eventos cuando solo se varían las masas, B) Distribución de eventos cuando solo se varían las distancias, y C) Distribución de eventos cuando solo se varían los coeficientes de fricción. | 31 |
| 2.3. | Análisis de coherencia entre los datos simulados y el modelo gaussiano propuesto: A) Representación visual, B) Emparejamiento de la distribución simulada con la del modelo y C) Diferencia entre distribución simulada y modelo. | 32 |
| 2.4. | Análisis del modelo de literatura corregido mediante una redefinición distribución estocástica en la medición de la técnica Montecarlo. | 32 |
| 2.5. | Captura de pantalla de un noticiero, donde se muestra el momento de la colisión estudiada. La calidad del video es insuficiente para realizar mediciones confiables. | 34 |
| 2.6. | Parte del dictamen pericial de hechos de tránsito del caso estudiado, se observan los cálculos realizados para determinar la velocidad de un vehículo. | 38 |
| 2.7. | Análisis de coherencia entre los datos simulados y el modelo gaussiano propuesto del dictamen pericial: A) Representación visual, en azul la simulación y en rojo el modelo; B) Emparejamiento de la distribución simulada con la del modelo, en azul la simulación y en rojo el modelo; C) Diferencia entre distribución simulada y modelo. | 39 |
| 3.1. | Captura de pantalla del video estudiado en el programa Tracker, marcado con colores: 1) el eje coordenado, 2) el calibrador de longitud, 3) el primer y segundo punto de calibración y 4) la estatura del luchador “rey misterio”. | 43 |
| 3.2. | A) Modelo gaussiano ajustado a los datos simulados, B) ajuste entre modelo y los datos simulados a una línea recta, C) diferencia entre modelo y datos simulados (línea verde promedio, línea roja cota de una sigma). | 48 |
| 3.3. | Imágenes de la videocámara Chronos 1.4 de la marca <i>Kron Technologies</i> . De derecha a izquierda: isométrica frontal, isométrica posterior, y vista lateral del dispositivo. | 49 |

| | | |
|------|--|----|
| 3.4. | Captura de pantalla del análisis del video para el experimento Puño-costal. Para ambas fotos: en color azul se muestran los testigos métricos usados, en rosa los ejes. Para A: video realizado con la cámara Chronos 1.4, en blanco y negro para alcanzar un mayor contraste y precisión, en rojo se muestra la distancia de contacto entre el puño y el costal. Para B: video realizado con la cámara del celular Moto G5 Plus, en blanco se muestra la distancia de contacto entre el puño y el costal. | 49 |
| 3.5. | Captura de pantalla del video realizado con la cámara chronos 1.4 donde se muestra el arreglo del experimento Pendulo-Costal. En color azul se muestran los testigos métricos usados. | 50 |
| 3.6. | Para el experimento puño-costal: A) Modelo gaussiano ajustado a los datos simulados, B) ajuste entre modelo y los datos simulados a una línea recta, C) diferencia entre modelo y datos simulados (línea verde promedio, línea roja cota de una sigma). | 51 |
| 3.7. | Para el experimento péndulo-costal: A) Modelo gaussiano ajustado a los datos simulados, B) ajuste entre modelo y los datos simulados a una línea recta, C) diferencia entre modelo y datos simulados (línea verde promedio, línea roja cota de una sigma). | 53 |
| D.1. | Constancia recibida en el tercer foro de avances estudiantiles, en la Red Tematica CONACyT de Ciencias Forenses, Ciudad Universitaria, 11 de septiembre del 2018. | 83 |
| D.2. | Cartel presentado en el tercer foro de avances estudiantiles, en la Red Tematica CONACyT de Ciencias Forenses, Ciudad Universitaria, 11 de septiembre del 2018. | 84 |
| D.3. | Cartel presentado en Noveno Congreso Internacional de Ciencias Forenses, INCIFO, Ciudad de México 19-21 de septiembre del 2018. | 85 |

Índice de tablas

| | |
|--|----|
| 1.1. Principales diferencias entre académicos y operadores en la ciencia forense. | 4 |
| 1.2. Distribuciones discretas más comunes [51]. | 10 |
| 1.3. Distribuciones continuas más comunes [51]. | 10 |
| 1.4. Comparación del error porcentual de cuatro técnicas Montecarlo para obtener pi. | 20 |
| 2.1. Coeficiente de fricción, de acuerdo con diferentes autores [2, 24, 33, 36, 52]. | 29 |
| 2.2. Comparación de los resultados finales de la literatura y nuestra propuesta. | 33 |
| 2.3. Valores para estimar la velocidad de impacto, cotas para la simulación numérica y su error porcentual asociado. | 39 |
| 2.4. Comparación de los resultados finales de la literatura y nuestra propuesta. | 39 |
| 3.1. Valores para estimar la fuerza de impacto, valores de tolerancia para la simulación numérica y su error porcentual asociado. | 46 |
| 3.2. Valores para estimar la fuerza de impacto en el experimento del puñetazo. | 51 |
| 3.3. Valores para estimar la fuerza de impacto en el segundo experimento, valores de tolerancia para la simulación numérica y su error porcentual. | 52 |

Introducción

El desarrollo de esta tesis tiene como principal objetivo brindar un apoyo a los métodos usados en el área de peritaje. Principalmente cuando se trata de conocer con fidelidad las causas que provocaron accidentes de tránsito, lesiones y/o la muerte en peleas callejeras o deportivas, daños a la propiedad ajena, entre otros.

En una revisión a los métodos usados por los especialistas forenses, observamos que generalmente los dictámenes, donde se reporta algún cálculo como son la velocidad y fuerza de impacto, carecen de una incertidumbre asociada. Por ende, tales documentos están incompletos. Esto sucede por varias razones, pero por ello proponemos una técnica Montecarlo para mejorar estos informes y enmarcar la medición y su incertidumbre.

La propuesta de la técnica Montecarlo pretende encontrar un intervalo de incertidumbre a las variables, así como plantear un mecanismo de propagación en la medición (variable de interés) y con esto aumentar precisión en el análisis de los casos.

Estructura de la tesis

Con el fin de realizar una exposición ordenada y coherente organizamos este trabajo en capítulos modulares:

En el primero de ellos se plantean los cimientos teórico-prácticos del método Montecarlo, así como el contexto forense y sus fundamentos. En el segundo se realiza una comparación con la literatura, para dos incidentes vehiculares, en donde se busca la velocidad antes del impacto. En el tercer capítulo se analiza el caso de la muerte del «Hijo del Perro Aguayo» y se contrasta con un par de experimentos. En el cuarto, las conclusiones y trabajos a futuro son presentados.

Por ultimo, en los apéndices se desarrollan las ecuaciones utilizadas, los códigos de los programas y los carteles presentados en diferentes foros académicos.

Capítulo 1

Escenario operativo y fundamentos teóricos

Aquí establecemos el contexto de este trabajo de tesis de licenciatura. La pregunta central que intentamos resolver en esta parte es: ¿Por qué necesitamos usar un método aleatorio para asociar una incertidumbre a una medida procedente de un estudio forense?

Así, como si se tratase de un racimo de uvas maduras, se desprenden otras cuestiones importantes para comprender esta obra: ¿Qué es la ciencia forense?, ¿por qué tal área le debería de interesar a un físico?, ¿cómo un físico asocia un valor de incertidumbre a una medición?, ¿cómo funciona el método Montecarlo para obtener una incertidumbre donde la información es exigua?

Y es por medio de una mecánica del método Montecarlo que exploramos una solución a nuestro planteamiento principal. Por ello, debemos ahondar en los antecedentes, aplicaciones y ejemplos de la técnica propuesta.

1.1. Contexto forense

La ciencia forense es un campo de investigación *sui generis*. Consiste de un área multidisciplinar auxiliar del campo jurídico, que trata de indagar sobre las causas a partir de la observación de los efectos, en un contexto de información parcial o limitada por agentes naturales y socio-artificiales. Si en la mayoría de las áreas científicas se utilizan datos para predecir efectos en el futuro (como el meteorólogo de la televisión); el investigador forense, por lo general, se interesa en conocer las condiciones del pasado a partir de casos particulares presentes. Más aún, la ciencia forense muestra dos rostros: uno de académico y otro de operador. Por ejemplo, las investigaciones de los peritos están constreñidas a responder puntualmente las preguntas del ministerio

público (quien tiene un perfil profesional de abogado, no de científico); de modo que este operador técnico carece de autoridad legal para ahondar en la investigación. En la academia, el científico cuenta con más libertad para indagar sobre su objeto de estudio. La Tabla 1.1 desglosa algunas de las diferencias más sustanciales entre estas dos figuras de investigación [15].

Por otro lado, existen recomendaciones –de alcance internacional– para los jueces y abogados a fin de reconocer la pertinencia de la información científica; como el llamado estándar Daubert [22], que consta de cuatro recomendaciones generales¹, que enlistamos de modo resumido y laxo:

- **Falseable.** Que la teoría o la técnica se pueda reproducir o sea contrastable; deseando que sea demostrable.
- **Publicidad.** Que la teoría o la técnica haya sido publicada o bien haya sido revisada por miembros de la comunidad científica. Se espera que se presente a una revisión por pares en un medio especializado, por lo general una revista de circulación internacional.
- **Tasa de error.** Que se conozca el margen de error en el cual se puede incurrir. Sobre este punto se centra este documento, por lo que lo expondremos más adelante.
- **Aceptación.** Que la comunidad científica del área acepte la teoría o la técnica. Esto puede significar que la teoría o técnica sean parte de los libros de texto regulares.

De este modo, la obtención de la incertidumbre en la medición es más que una buena práctica técnica, también es una recomendación desde el área del derecho. Sin embargo, después de revisar algunas carpetas de investigación y entrevistar algunos peritos, observamos que el análisis de la propagación de la incertidumbre y la claridad en los alcances de los cálculos es vaga. En este documento, se pretende brindar una posible solución para algunas situaciones concretas a fin de asociar una incertidumbre (incluso probabilidad) a una medición y sus cotas.

¹Tales criterios son poco útiles para utilizarse como criterio de demarcación epistémica. Es decir, son insatisfactorios para distinguir entre la actividad científica de la no-científica. Tal vez planteamientos de varios parámetros (como el que sugiere Mario Bunge [10]) puede ser más adecuados para distinguir la calidad entre diferentes planteamientos epistemológicos.

Tabla 1.1: Principales diferencias entre académicos y operadores en la ciencia forense.

| Característica | Académicos | Operadores |
|----------------------------|-------------------------|---------------------------|
| 1) Agenda orientada por: | tendencia internacional | demandada por autoridades |
| 2) Tiempo de desarrollo: | abierto | limitado |
| 3) Datos generados: | intención | casuales |
| 4) Cantidad de datos: | grande | escasa |
| 5) Información compartida: | abiertamente | con reserva |
| 6) Producto principal: | artículos | declaraciones juradas |
| 7) Audiencia objetivo: | académicos | actores legales |
| 8) Calidad vigilada por: | revisión por pares | adversarialismo legal |
| 9) Retroalimentación: | frecuente | infrecuente |
| 10) Meta de producción: | impacto | velocidad |
| 11) Recompensas por: | prestigio | burocracia |

1.2. Ejemplos de física aplicada en la ciencia forense

Para algunos, más que una disciplina, la física es una forma de ver el mundo. Aunque es poco habitual encontrar físicos trabajando en el campo forense (todavía), sus aportes han sido significativos. Desde el punto de vista histórico, podemos mencionar varios casos donde los físicos aportan datos importantes, a mi parecer estos son los más representativos a nivel internacional:

1. **Arquímedes y la falsificación de una corona de oro.** Tal vez, el primer aporte de la física aplicada para resolver una controversia judicial fue el principio de Arquímedes. La historia cuenta cómo Arquímedes utilizó el desplazamiento de agua en una tina, donde se sumergió la corona del rey Hierón II; descubriendo que no era de oro puro. El relato ha sido rodeado de mito, pero es importante recordar que al principio era una propuesta para solucionar un caso particular, y a la postre se convirtió en la base de futuros descubrimientos y desarrollos tecnológicos. Mostrando que las investigaciones forenses, también pueden brindar conocimiento general [6, 53].
2. **L. Álvarez y el video análisis del asesinato del presidente JFK.** El premio Nobel de física 1968, Luis Walter Álvarez examinó a detalle marcos temporales y modelos espaciales en la película del asesinato del presidente norteamericano Kennedy de 1963. En el artículo: «un físico

examina la película del asesinato de Kennedy» muestra como la visión de la física puede aportar al campo forense [27, 5].

3. **R. Feynman y la tragedia del transbordador espacial.** Richard Feynman, premio Nobel de física 1965, participó en el comité de investigación de la explosión de la aeronave *Challenger* de 1986 (donde murieron siete astronautas). El físico mostró que las bajas temperaturas ambientales causaron una pérdida de elasticidad de la junta tórica del cohete acelerador derecho de la nave espacial [19, 40].
4. **E. N. Martínez y la eco-localización de gatilleros.** Rodolfo Pregliasco y Ernesto N. Martínez estudiaron los espectros acústicos en un video periodístico que capta la muerte de una mujer en Cutral-Có, Argentina, en 1997. Del sonido de 17 disparos, se caracterizaron los ecos producidos por los postes metálicos flanqueantes del puente que la policía despejaba. Así, en el equivalente de un sonar, localizaron la fuente de ocho disparos, de modo que el único indiciado (como se denomina hoy en México) resultó libre por no disparar el proyectil fatal [45, 46].

Después de la instauración del sistema de justicia penal acusatorio en México en el 2016 [4, 25], es de esperar que se presenten más oportunidades para que participen los físicos desde la academia y la operación en casos forenses en nuestro país. Así, que esta lista crecerá en México en un lapso relativamente corto.

1.3. Importancia de la teoría de valores extremos en el campo forense

Las condiciones ambientales que provocan la falla estructural de un material, o sobrepasar la velocidad de reacción de una persona o de un instrumento, o bien alcanzar un punto que resulta en una catástrofe, suelen ser temas de investigación forense. La variación de intensidad y dirección del viento que causa una oscilación en un puente el cual termina colapsado [18, 26], o bien los puntos de una ciudad donde la resonancia de un terremoto causa el derrumbe de edificios [21], son ejemplos de investigación académica. Todos estos son casos extremos, que en un modelo pueden representar un cambio de fase, un valor maximal en una función o un valor estadístico con desviación alta de la media probabilista. De hecho, una rama de la estadística trata de predecir condiciones extremas que las observadas previamente, lo cual puede ser útil para ingeniería estructural, riesgo en finanzas, incendios descontrolados, entre otros.

Estos enfoques suelen ser predictivos al utilizar algunos datos acumulados en el tiempo; en contraste, el campo forense se requiere de la prospección: describir causas que producen efectos, de tal forma que el problema se centra en obtener una media y su incertidumbre a través de pocos datos y donde se utilizan conjeturas. El problema se agrava cuando un efecto (observable) puede proceder de diferentes fuentes (causa); para aclarar este punto, utilizaremos un ejemplo fisiológico. Un ambiente social opresor, puede causar un aumento del *stress* en los individuos que lo conforman, por lo que deben mostrar una liberación de cortisona cuyo efecto de sencilla observación es un aumento de los niveles de azúcar y presión sanguínea [11]. De este modo, si se establece que el entorno es socialmente abusador podemos predecir que observaremos efectos fisiológicos. Sin embargo, la ruta de razonamiento contraria es indirecta. Podemos estar ante observaciones de individuos con altos niveles de azúcar y presión, pero no implicar indudablemente que tales personas provienen de un ambiente social insano.

Un ejemplo más físico y experimental puede ser el siguiente, podemos dejar caer (desde el reposo) huevos de gallina desde una altura y observar si se fracturan y a que distancia se separan sus partes después de la colisión, hacemos una medición de su estado final. Vinculamos mediante un modelo la observación de los restos y la energía potencial; pero el verdadero problema a resolver es determinar a partir de la posición de los fragmentos de un cascarón si el huevo original fue lanzado o cayó. En un inicio son múltiples las respuestas, por lo que se deben plantear escenarios donde se maximizan las condiciones de energía potencial y otros que maximicen la energía cinética². Mediante estos casos extremos se busca descartar las situaciones imposibles; esto es una primera etapa para alcanzar una respuesta lógica, plausible y verosímil. De alguna manera tal planteamiento se acoge a una frase atribuida a Conan Doyle a través de su personaje novelesco Sherlock Holmes, en *The sign of the four* (1980, cap. 6, p. 111): «Cuando todo aquello que es imposible ha sido eliminado, lo que quede, por muy improbable que parezca, es la verdad».

Obtener la medición es importante para todo campo de investigación, y asociar una incertidumbre es relevante para demarcar su significancia. Pero en el área forense la incertidumbre también delimita los valores posibles y puede aislar los improbables de los imposibles³.

²Desde el punto de vista reduccionista, tal vez la variable física y de información más propicia es la entropía; aunque este aspecto se debe desarrollar en otra publicación.

³Con todo se debe ser cuidadoso con el modelo teórico y la selección de datos conjeturados, observados, medidos para evitar caer en un sesgo, como puede suceder en los modelos Bayesianos que varios autores han advertido de su mal empleo [9].

1.4. Análisis del error en la medición

Todos los instrumentos presentan restricciones operacionales, las cuales limitan su uso. Además, tales reservas delimitan la capacidad para obtener una medición directa. Cuando se realizan varias mediciones, se puede utilizar un análisis estadístico, y al contar con un criterio adecuado se puede determinar la significación del número de muestras. Por ejemplo, una mesa al medirla con una regla estándar no requiere más de una medición, pues los efectos que pueden hacer que varíe la longitud del objeto son insignificantes en comparación con la capacidad de medición del instrumento. Sin embargo, si se desea medir la velocidad con la que los vehículos pasan por una calle, nos encontramos que existe una variabilidad importante que registraran los instrumentos empleados para tal tarea, de modo que se necesitaran varias muestras. Sabemos que el error asociado al promedio $\Delta\bar{x}$ es inversamente proporcional al inverso de N casos medidos (*e.i.* $\Delta\bar{x} \propto \sqrt{N^{-1}}$, [55]), de modo que trataremos de alcanzar una mejor representación en la medición al utilizar una muestra más grande; lo que también implica un mayor esfuerzo de investigación y gasto de recursos.

1.4.1. Perspectiva desde el cálculo diferencial

Como lo mencionamos anteriormente, en el área forense operativa se suele contar con exiguos datos. Tal vez, desde el área académica se cuenta con un modelo teórico que permita asociar la incertidumbre a la medición buscada. Si el modelo es estadístico-probabilístico deberá contar con sus cotas numéricas, pero si proviene de una teorización por medio de modelos reduccionistas se suele emplear un determinismo como el siguiente:

Si q representa una función de n variables x_1, x_2, \dots, x_n , asociadas a medidas de incertidumbre independientes y aleatorias: $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$; entonces, la incertidumbre de q se relaciona con la derivada de la función $q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de la siguiente manera [55]:

$$\Delta q = \sqrt{\left(\frac{dq}{dx_1}\Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{dq}{dx_2}\Delta x_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{dq}{dx_n}\Delta x_n\right)^2} \quad (1.1)$$

La Ec. 1.1 es una expresión general. De hecho, la obtención de la incertidumbre desde la perspectiva del cálculo diferencial suele ser una exigencia en las actividades de aprendizaje en las asignaturas con laboratorio del área físico-matemáticas. No obstante, esta misma expresión matemática es poco utilizada por los operadores forenses en su quehacer de investigación [35].

Consideramos que tal perspectiva se puede describir una sola vez por fenómeno, codificarla en un lenguaje de programación (tal vez en *Octave*), enlazarla por bloques de eventos; y donde se requiera conjeturar y añadir la información de modo claro para la comparación (y tal vez corrección). En esta tesis exploramos tal propuesta, esperando que sea correcta y útil para el área forense.

Para resolver tal problema, planteamos usar números aleatorio. Por ello exponemos, a continuación, cómo un proceso estocástico permite obtener un valor, considerado tradicionalmente, como predeterminado por la geometría euclidiana.

1.4.2. Perspectiva desde la estadística y probabilidad

De las disciplinas de estadística y probabilidad, entendemos por población al conjunto total de objetos (reales o conceptuales), o eventos que componen un fenómeno como lo son las mediciones u observaciones, estos pueden ser finitos o infinitos dependiendo de la naturaleza de lo analizando. A un subconjunto de datos obtenidos de la población se le llama muestra.

Cuando una población es difícil de observar o medir por ser muy grande o bien por existir factores que impidan registrar las suficientes muestras, se realiza una extrapolación de los datos obtenidos para así conocer a la población, a esto se le conoce como inferencia estadística.

Las muestras que pueden ser usadas por este método deben ser significativas; esto es, que representen razonablemente la población. Para esto se deben examinar muestras al azar, de otro modo, podemos llegar a malas interpretaciones de los datos. Por ejemplo, cuando se mide algún objeto se tiene una probabilidad de cometer un error ya sea de tipo sistemático o aleatorio, y por tanto al expresar esa medición siempre va acompañado de una incertidumbre asociada al error.

Una forma en la que se determinan estos errores es registrando los datos repetidamente, asegurándose que las muestras tomadas sean representativas del fenómeno, obteniendo así una distribución de las mediciones mediante el cual se infiere como el valor real al promedio estadístico de las muestras, las cuales pueden ser consideradas como aleatorias [32, 58].

Para entender mejor el comportamiento de las muestras aleatorias nos apoyaremos de la teoría de probabilidad y estadística donde encontramos las siguientes definiciones:

El espacio muestral es el conjunto de todos los posibles resultados del experimento, generalmente consiste en todas las cosas que podrían suceder cuando se elige una muestra. El espacio muestral se denota con el símbolo Ω .

Los sucesos son un subconjunto del espacio muestral, $A \subset \Omega$.

Si consideramos $A, B \subset \Omega$ sucesos dentro del espacio, se define como sucesos disjuntos si $A \cap B = \emptyset$

La probabilidad es una regla que asigna a un número $0 \leq P(A) \leq 1$ para cada suceso A de un espacio muestral, con $P(\Omega) = 1$, tal que para cualquier secuencia de sucesos disjuntos A_i se cumple la regla de la suma:

$$P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i P(A_i), \quad (1.2)$$

dicho de otra manera, la probabilidad de un suceso (o resultado) es la proporción de veces en que el evento ocurrirá a largo plazo en experimentos repetidos [30, 32, 51].

Una variable aleatoria es cualquier función que asigna un valor numérico a cada posible resultado del espacio muestral [32], estas serán denotadas con las letras latinas mayúsculas X, Y, Z .

Se dice que tienen una distribución discreta si solamente para un conjunto numerable de valores reales x_i :

$$P(X = x_i) > 0; \text{ con } \sum_i P(X = x_i) = 1 \quad (1.3)$$

A la función $f(x) = P(X = x)$ se le conoce como función de masa de probabilidad "pmf". Donde $x \in \mathbb{R}$.

Cuando una variable aleatoria tiene una distribución continua para cualquier $a, b \in \mathbb{R}$, entonces se cumple que:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx, \quad (1.4)$$

a f se le conoce como función de densidad de probabilidad (PDF) de X [30, 51].

Una función cualquiera $g(x)$ es también una variable aleatoria, y la esperanza de una variable aleatoria X es el valor medio o esperado de su distribución, en general si la pensamos como una función su esperanza sera escrita como:

$$\mu_X = E(X) \begin{cases} \sum_i g(x_i)f(x_i) & \text{(Caso discreto),} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx & \text{(Caso continuo).} \end{cases} \quad (1.5)$$

La variable que corresponde a la medida de dispersión de una serie de datos respecto a su media se conoce como varianza y esta se calcula mediante:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2. \quad (1.6)$$

La raíz cuadrada de la varianza es llamada desviación estándar σ , que corresponde a una medida de variación que se expresa en las mismas unidades que la variable aleatoria [30, 32, 51].

Finalmente, las distribuciones discretas más comunes se encuentran las que presenta la Tabla 1.2. Mientras que las distribuciones continuas más comunes se muestran en la Tabla 1.3.

Tabla 1.2: Distribuciones discretas más comunes [51].

| Nombre | Notación | $f(x)$ | $x \in$ | Parámetros |
|------------|-------------------|-------------------------------------|----------------------|-------------------------------------|
| Binomial | $Bin(n, p)$ | $\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$ | $\{0, 1, \dots, n\}$ | $0 \leq p \leq 1, n \in \mathbb{N}$ |
| Uniforme | $DU(1, \dots, n)$ | $\frac{1}{n}$ | $\{1, \dots, n\}$ | $n \in \mathbb{N}$ |
| Geométrica | $G(p)$ | $p(1-p)^{x-1}$ | $\{1, 2, \dots\}$ | $0 \leq p \leq 1$ |
| Poisson | $Poi(\lambda)$ | $e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$ | \mathbb{N} | $\lambda > 0$ |

Tabla 1.3: Distribuciones continuas más comunes [51].

| Nombre | Notación | $f(x)$ | $x \in$ | Parámetros |
|-------------|--------------------------|---|-------------------|----------------------------------|
| Uniforme | $U[\alpha, \beta]$ | $\frac{1}{\beta - \alpha}$ | $[\alpha, \beta]$ | $\alpha < \beta$ |
| Normal | $N(\mu, \sigma^2)$ | $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ | \mathbb{R} | $\sigma > 0, \mu \in \mathbb{R}$ |
| Gamma | $Gamma(\alpha, \lambda)$ | $\frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}$ | \mathbb{R}_+ | $\alpha, \lambda > 0$ |
| Exponencial | $Exp(\lambda)$ | $\lambda e^{-\lambda x}$ | \mathbb{R}_+ | $\lambda > 0$ |

1.4.2.1. Distribuciones estadísticas

Si una muestra de tamaño n se extrae de una población con la media μ y la varianza σ^2 , se define \bar{X}_n como una variable aleatoria cuya distribución tiene la media μ , y la varianza es σ^2/n , y de nombre promedio o media muestral [32].

En este punto, requerimos definir un teorema importante a considerar en el método Montecarlo:

Ley débil de los grandes números. Sean X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatorias independientes y cada una con las misma media μ y varianza σ^2 ; entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{X}_n - \mu| < \epsilon) = 1 \quad (1.7)$$

Esto quiere decir que mientras aumente el tamaño de la muestra ilimitadamente, la probabilidad de que la media muestral difiera de la media poblacional μ , por más de una cantidad arbitraria ϵ , disminuye [23, 29, 30, 32].

La importancia de este teorema recae en que conforme aumenta el tamaño de la muestra obtenida por números aleatorios el promedio se vuelve más cercano al valor de la media poblacional y por tanto una estimación del valor buscado más confiable. Un ejemplo de lo anterior lo encontramos cuando queremos conocer el valor medio de los resultados al tirar un dado, se avientan muchos dados o por equivalencia se toman los resultados de muchas personas lanzando el dado y se calcula el promedio de los resultados.

1.4.2.2. Teorema del límite central

El fundamento del método de Montecarlo se encuentra dentro del teorema del límite central de la teoría de probabilidades, el teorema describe la distribución de la media de una muestra aleatoria proveniente de una población con varianza finita. Cuando el tamaño de la muestra es lo suficientemente grande, la distribución de las medias sigue aproximadamente una distribución normal. Para esto se toma una variable aleatoria G_N , promedio de una función $g(X)$, con valores g_N y se define:

$$t_N = \frac{g_N - \langle g(X) \rangle}{\sqrt{\sigma(G_N)}} = \frac{g_N - \langle g(X) \rangle}{\frac{\sqrt{\sigma(g_N)}}{\sqrt{N}}}. \quad (1.8)$$

El teorema del límite central establece que:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P(a < t_N < b) = \int_a^b dt \frac{e^{-\frac{1}{2}t^2}}{\sqrt{2\pi}}. \quad (1.9)$$

Cuando N es muy grande los valores de G_N se comportan como una distribución normal de media $\mu = \langle g(X) \rangle$ y varianza σ^2/N con $\sigma^2 = \text{var}(g(X))$. Si realizamos un cambio de variable obtenemos que:

$$t_N = \frac{g_N - \mu}{\sigma/\sqrt{N}}, dt_N = \frac{dg_N}{\sigma/\sqrt{N}} \quad (1.10)$$

Por tanto, para $N \gg 1$, G_N se distribuye según⁴:

$$f_{G_N}(g_N) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma/\sqrt{N}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{g_N - \mu}{\sigma/\sqrt{N}} \right)^2 \right], \quad (1.11)$$

para cualquier distribución f_x [23, 29, 30, 32]. Lo que implica que cuando el número de muestras N es lo suficientemente grande esta se comporta como distribución normal.

1.5. Método Montecarlo

1.5.1. Breve historia del método Montecarlo

Definiremos en este texto al método de Montecarlo como toda simulación que utiliza números aleatorios para evaluar expresiones matemáticas, las que pueden ser desde ecuaciones simples, integrales definidas, sistemas de ecuaciones o modelos matemáticos más sofisticados.

Históricamente, se decidió llamar a este método Montecarlo en alusión a la capital de los juegos de azar de principios del siglo XX, en aquella época era el casino Montecarlo ubicado en Mónaco.

Este método fue ideado por Stanislaw Ulam y John Von Neumann, y surge de una idea que se le ocurrió al primero mientras estaba enfermo en el año de 1946 [17]. Esta consistía en que es más simple tener una idea del resultado general del juego de naipes solitario haciendo pruebas múltiples con las cartas y contando las proporciones de los resultados que calcular todas las posibilidades de combinación formalmente. Esta observación podía utilizarla en su estudio sobre la difusión de neutrones, la idea residía en probar con experimentos mentales las miles de posibilidades, y en cada etapa, determinar por un número aleatorio que sucedería, y por tanto una manera de comprender el proceso físico.

En los siguientes meses Ulam le menciono el método a Von Neuman, quien con un poco de escepticismo se interesó y comenzó a desarrollar un procedimiento sistemático.

⁴La flecha significa tiende.

En 1947 Von Neuman escribió el primer informe escrito del método, en este sugería aplicar el método para rastrear la generación isótropa de neutrones desde una composición variable de material activo a lo largo del radio de una esfera. Sostenía que el problema era adecuado para implementarse en la computadora ENIAC (tal vez la más potente en esos años) y estimaba que tardaría 5 horas en calcular la acción de 100 eventos [50].

1.5.2. Aplicaciones del método Montecarlo

Entre las aplicaciones académicas más representativas en el método de Montecarlo, podemos mencionar:

- Modelaje de flujos de tráfico terrestre [8].
- Pronóstico de comportamiento de las transacciones en la bolsa de valores [38].
- Estimación de efectos radiactivos y diseño de reactores nucleares [13, 57].
- Comportamiento de nano-estructuras. Por ejemplo, para simular una característica de interés tecnológico, como la banda de valencia para interacciones de absorción de energía y emisión de fotones [56].
- Física médica, como es el transporte de radiación [20], medición de la respuesta de los tejidos y tumores en tratamientos radioterapéuticos [44], entre otros.
- Ciencia forense, en la literatura reciente encontramos estudios diversos sobre: hechos de tránsito terrestres [12], toxicología [47], delitos cibernéticos [39], entre otras especialidades del área.

1.6. Funciones alimentadas con números aleatorios

Existen muchas formas matemáticas para obtener el valor de π , inspirado por la «aguja de Buffon» donde se propone el análisis de áreas geométricas para obtener el factor de proporcionalidad entre dos figuras circunscritas. Una forma de ejecución puede ser la siguiente, en un cuadrado se traza la diagonal (definiendo un triángulo rectángulo); después se arrojan semillas dentro del cuadrado [30, 31]; se cuentan las semillas dentro del área del triángulo y se

dividen por el total de semillas dentro del cuadrado trazado. El resultado será cercano a un $1/2$ que es el factor de proporcionalidad entre el cuadrado y el triángulo. De modo similar se puede trazar un círculo dentro del cuadrado para obtener π .

La idea antes expuesta se puede escribir como un algoritmo para ordenador. Definiendo generación de pares ordenados dentro de un cuadro unitario, el número de pares que cuenten con una distancia menor o igual al radio de un círculo unitario se divide entre el número neto de puntos, obteniendo π . Este algoritmo se ha hecho muy popular para la enseñanza de programación y el funcionamiento de números aleatorios. En nuestro caso, nos sirve de base ilustrativa para después exponer el tópico de incertidumbre en mediciones. A continuación damos detalles y anotaciones sobre este proceso, ya que su comprensión es importante para la exposición de los siguientes temas.

1.6.1. Generación de números aleatorios

Los números aleatorios son aquellos valores en un conjunto que pueden ser obtenidos de tal manera que su probabilidad es la misma, esto es que no dependan de alguna relación causal con otros. Por tanto se puede decir que un número aleatorio es aquel obtenido al azar. De lo anterior se obtiene que una secuencia de números aleatorios es una sucesión de variables aleatorias X_1, X_2, \dots, X_N donde se cumple que:

- Las series son no-correlacionadas. Esto es, que para una secuencia original encontraremos una subsecuencia que no se encuentra relacionada con ninguna otra subsecuencia del conjunto.
- Existe independencia estadística y equiprobabilidad. Esto implica que cualquier número aleatorio de la secuencia presenta la misma probabilidad de aparecer, así como la aparición de algún número no influye en la aparición de los demás [14, 28].

Existen diferentes métodos para encontrar números aleatorios. Por ejemplo los métodos manuales, como lanzando dados, o extrayendo y reponiendo consecutivamente bolitas numeradas, o bien con naipes desde el mazo de una baraja, entre otras opciones. Por su popularidad y facilidad de adquisición, los métodos digitales por medio de ordenadores son los que más se emplean para tratar de obtener números aleatorios. Sin embargo, su tecnología a base de circuitos electrónicos⁵, son deterministas. ¿Cómo se puede

⁵Se ha propuesto utilizar tecnologías cuánticas las cuales podrían generar eficientemente números aleatorios [54].

obtener un número al azar de una máquina que suprime los efectos estocásticos en su funcionamiento? En realidad, de estos dispositivos obtenemos números pseudo-aleatorios, que para fines prácticos (en particular para esta tesis) son adecuados para utilizarlos en el estudio de casos criminalistas.

Los números pseudo-aleatorios, son aquellos que tienen la misma probabilidad de ser elegidos a pesar de que son generados por algún algoritmo. Estos no presentan ningún patrón o regularidad alguna dentro de un cierto intervalo, por lo que pueden considerarse aleatorios dentro del mismo, este criterio se utilizará en el texto cuando mencionemos números aleatorios.

Dicho lo anterior, algunos usos que se le dan a los números aleatorios son: criptografía, donde cada grupo de bits es cifrado como el número de iteraciones necesarias para generar el mismo a partir de un conjunto de semillas [3]; esteganografía, para validar el algoritmo usado [42]; el método de Montecarlo, juegos, entre otros ejemplos.

Entre los algoritmos utilizados comúnmente para generar números aleatorios se encuentran: **1)** los basados en un generador lineal congruencial (GLC), **2)** el método de los cuadrados medios, **3)** el método de registros desfasados, **4)** los generadores paralelos de números aleatorios, **5)** los de Fibonacci retardados, **6)** los binarios, entre otros algoritmos [14, 28].

Dentro de este texto nos enfocaremos en el GLC, dado a que este es la base de la función/comando *rand* en diferentes tipos de lenguajes de programación.

Para concluir esta sección, debemos mencionar algunas de las recomendaciones más comunes al utilizar cualquier método para generar números aleatorios, tales como:

- Repetibilidad: Toda secuencia de números aleatorios en un experimento debe reproducirse por otro experimentador, a partir de la semilla.
- Velocidad: El generador de números debe ser rápido, lo cual formalmente es subjetivo.
- Complejidad de codificación: El generador debe ser lo más sencillo de programar.
- Economía: En cuanto al uso de memoria y otros recursos de la computadora.

1.6.2. Generador de Lehmer o Generador Lineal Congruencial (GLC)

El método GLC consiste en una relación de recurrencia como:

$$X_{n+1} = (aX_n + c) \pmod{m} \quad (1.12)$$

donde X es la secuencia de números aleatorios; m , $0 < m$ es el modulo; a , $0 < a < m$ es el multiplicador; c , $0 < c < m$ es el incremento; X_0 , $0 < X_0 < m$ es la semilla inicial. Todas las cuales son variables enteras específicas para el generador.

De la ecuación anterior podemos observar dos casos peculiares que no son convenientes para el cálculo de variables aleatorias, estos son cuando $a = 0$ ya que produciría el mismo número; y cuando $a = 1$ ya que se genera una secuencia, permitiendo dudar de la aleatoriedad.

Los generadores de números pseudoaleatorios forman una sucesión la cual se repite después de m términos como mucho, a este ciclo se le conoce como periodo. Esto ocurre debido al principio del palomar o Dirichlet, el cual nos dice que no puede existir una función inyectiva entre un conjunto de m elementos y otro de n elementos, si $m > n$, esto implica que al menos a un elemento de n tiene 2 elementos de m . Para la elección del módulo se considera que m debe ser lo más grande posible ya que $m \leq$ periodo.

Por otro lado, también se tiene que tomar en cuenta la velocidad ya que el módulo requiere el uso de la división que es una operación lenta para la computadora, por lo que se acostumbra usar $m = 2^r$ donde r es el tamaño palabra del sistema digital, esto es, los ordenadores actuales tiene un tamaño de palabra de 32 ó 64 bits, pues el cálculo se reduce significativamente.

Para el multiplicador se utiliza un valor que genere una secuencia con el mayor número de dígitos posibles, este debe ser menor que m y debe cumplir que $(a - 1)$ es múltiplo de 4, si m es múltiplo de 4 [14, 23, 28].

1.6.3. Comportamiento de las funciones *rand* y *randn*

La Fig. 1.1 ilustra el comportamiento bidimensional e independiente de las funciones *rand* y *randn* (ejecutadas en el programa *Octave*⁶) con 100, 1000 y 10 000 datos. El comando *rand*, definido para producir valores entre 0 y 1, tiende a llenar el área sin una tendencia aparente. En contraste, la función *randn* muestra valores marginales y una tendencia por los valores alrededor del cero. Ambos comportamientos son lo esperado. Así, en general,

⁶Estos nombres de funciones son populares, por lo que se les puede encontrar en muchos otros softwares.

rand produce datos distribuidos uniformemente y *randn* datos con una distribución normal. Esta observación cualitativa es importante para comenzar a evitar posibles sesgos en los cálculos. Más adelante mostraremos su diferencia cuantitativa.

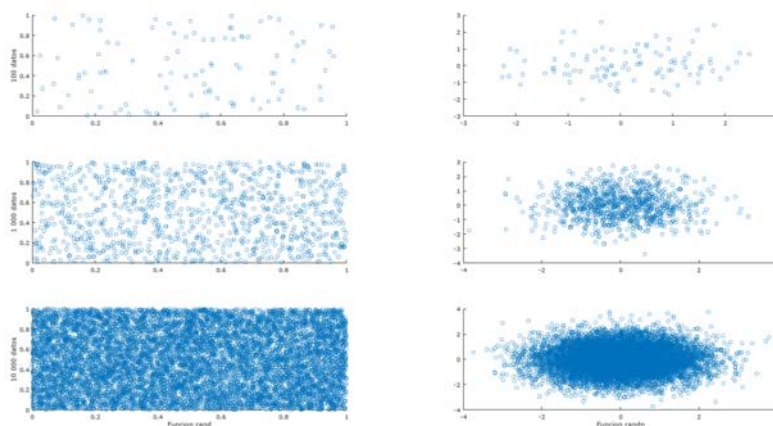


Figura 1.1: Comportamiento bidimensional e independiente de los comandos *rand* y *randn* con 100, 1 000 y 10 000 datos.

1.6.4. Cálculo de pi mediante técnica Montecarlo

Implementando las ideas expuesta en los primeros párrafos de la sección 1.6, programamos un *script* para calcular π mediante una técnica Montecarlo, en la Fig. 1.2 se muestra como se distribuyen los pares coordenados dentro de las geometrías definidas por el primer cuadrante coordenado delimitando un círculo.

Como mencionamos antes, dividiendo el número total de puntos entre los que se encuentran en el círculo se obtiene π , pero necesitamos saber la efectividad del procedimiento. Por ello, en la Fig. 1.3A) presentamos la tendencia del cálculo del error porcentual en la obtención de π con hasta 10^7 pares ordenados. En términos matemáticos podemos escribir:

$$E = 100 \frac{|\text{valor} - \pi|}{\pi}. \quad (1.13)$$

Por la capacidad de la memoria del ordenador utilizado, no se calcularon valores mayores⁷. Después de calcular 10^4 pares ordenados la convergencia a cero es clara; el cálculo Montecarlo permite obtener valores cercanos a π . En

⁷Y en términos pragmáticos, es irrelevante forzar más el cálculo numérico.

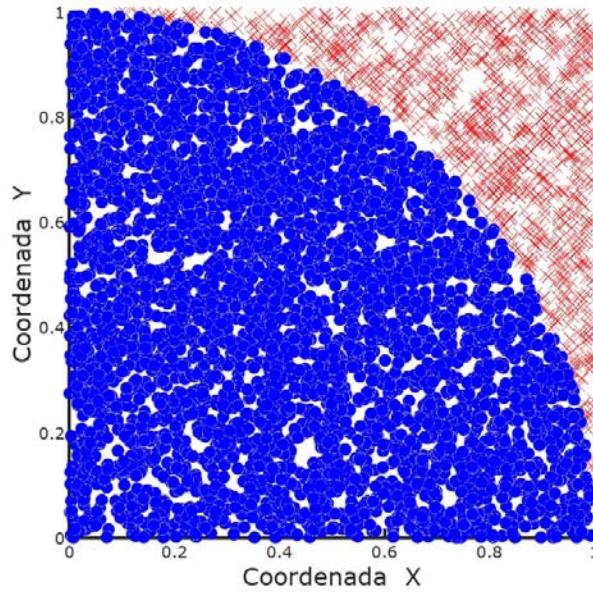


Figura 1.2: Mapa de 5×10^3 pares coordenados obtenidos aleatoriamente dentro (círculos azules) y fuera (cruces rojas) de un círculo unitario constreñidos dentro de un cuadrado unitario en el primer cuadrante cartesiano. En el Apéndice B.1 se encuentra el código fuente utilizado.

la Tabla 1.4 se pueden observar los valores de una corrida. En todo caso la interpretación es: a mayor número de datos la exactitud aumenta.

La Fig. 1.3B) muestra la frecuencia de distribución en función del radio r , mediante 10^7 pares coordenados parcelados en 100 datos. La interpretación de la gráfica es geométrica; la obtención de los datos es dentro de un cuadrante unitario, por lo que el recuento de r es polar, es decir, ya que la distribución de coordenadas es aleatoria, el radio que abarque más espacio del cuadrado mostrará un máximo; que es el caso del radio unitario que contiene. Mientras que los puntos donde el radio cubre una cantidad ínfima de puntos, será un mínimo, que es el caso de las coordenadas de los vértices del cuadrado: $(0, 0)$ y $(1, 1)$.

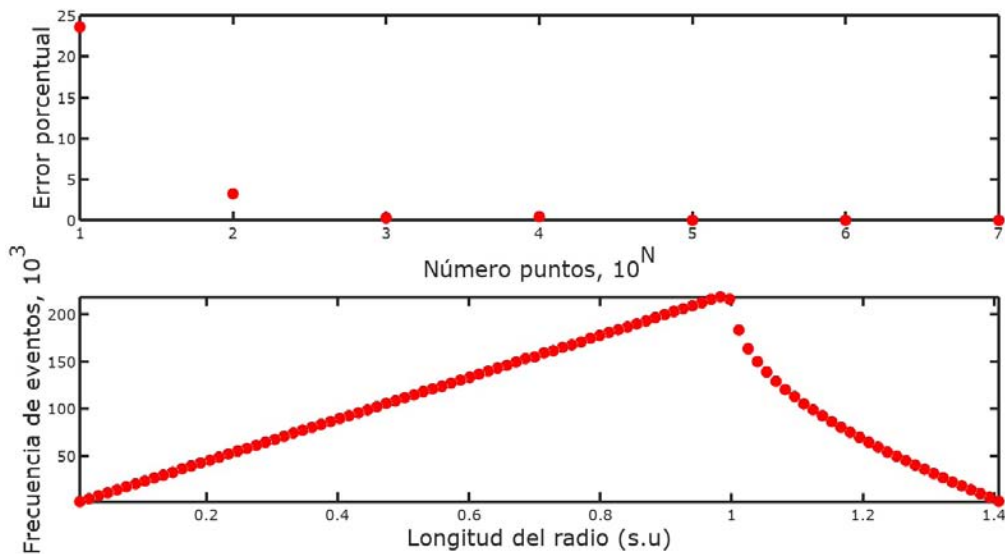


Figura 1.3: Arriba, error porcentual en el cálculo de π en función del número de datos. Abajo, distribución de datos en el cálculo de π .

Siguiendo la misma idea, observamos que el crecimiento de la distribución es lineal, pues no hay demarcaciones a su crecimiento, pero después del radio unitario, el cuadrado constriñe al radio, por lo que disminuye el número de puntos; y reduce la frecuencia de radios hasta cero. Si bien la distribución es de construcción aleatoria, la tendencia de su perfil es dictada por las condiciones geométricas –deterministas– y limitada. Esta observación nos sirvió para proponer la técnica Montecarlo que en este trabajo desarrollamos y explicaremos más adelante en la sección 1.7.

1.6.5. Comparación de cuatro técnicas Montecarlo

La Tabla 1.4 exhibe la comparación de cuatro técnicas Montecarlo para calcular π . Encontramos que solo la técnica basada en $\sqrt{rand^2 + rand^2}$ converge al valor de π . Ello es porque en cada llamada a un número aleatorio el par-coordenado se ubica geométrica y uniformemente dentro del primer cuadrante del plano cartesiano, en un cuadrado de área unitaria. Las técnicas que solo hacen una única llamada a la función aleatoria (ver: columna 2 y 4 de la Tabla 1.4) representan puntos sobre la función dos-veces-identidad; así, son inadecuadas para la obtención de π . Por otro lado, la función $randn$ genera puntos aleatorios sobre una distribución gaussiana centrados en cero; en otras palabras, la técnica $\sqrt{randn^2 + randn^2}$ conglojera más puntos cerca de la coordenada $(0, 0)$, además de producir coordenadas fuera del cuadrante

de área unitaria; por todo ello, tal función es inadecuada para obtener π .

Tabla 1.4: Comparación del error porcentual de cuatro técnicas Montecarlo para obtener pi.

| N. de datos | $\sqrt{rand^2 + rand^2}$ | $\sqrt{2rand^2}$ | $\sqrt{randn^2 + randn^2}$ | $\sqrt{2randn^2}$ |
|-------------|--------------------------|------------------|----------------------------|-------------------|
| 10^1 | 10.9 | 23.6 | 87.3 | 1.86 |
| 10^2 | 7.05 | 18.5 | 58.0 | 37.6 |
| 10^3 | 1.99 | 10.4 | 52.4 | 33.4 |
| 10^4 | 1.91×10^{-1} | 9.62 | 49.9 | 32.0 |
| 10^5 | 6.01×10^{-2} | 9.78 | 50.1 | 33.6 |
| 10^6 | 6.39×10^{-3} | 9.99 | 49.9 | 33.7 |
| 10^7 | 2.71×10^{-3} | 9.95 | 49.9 | 33.7 |

Desde la geometría, la obtención del par coordenado $(rand, rand)$ resultado exacto y preciso, pero también el par del cuarto cuadrante cartesiano: $(rand, -rand)$. Este es el que nos inspiró a su utilización para relacionarlo con las cotas de incertidumbre de una medición; tema que expondremos con mayor profundidad en los siguientes capítulos.

1.6.6. Comportamiento de funciones con argumento rand

Con el fin de observar el comportamiento de la propuesta ante la restricción de otras funciones definimos como valor central $x = 100$ unidades y afectada con constricciones de $x_c = 50, 25$ y 5 unidades. En la Fig. 1.4 se muestra la tendencia cuando la función es $y = x \pm x_c(rand - rand)$.

Entonces, es importante observar cómo es el comportamiento del valor central y su cota asociada ante la propuesta de técnica Montecarlo, afectada por algunas funciones utilizadas para teorizar soluciones en física.

Primero, observamos el comportamiento de la función $y = x + x_c(rand - rand)$ variando el parámetro x_c . Su distribución es limitada, con máximo en el valor central x , acotada por dos líneas rectas que alcanzan sus valores mínimos en $x - x_c$ y $x + x_c$, respectivamente, ver Fig. 1.4.

Es importante definir las reglas de operación en los algoritmo Montecarlo. Diferentes relaciones entre las operaciones pueden implicar cálculos adicionales de números aleatorios. Por ejemplo, si deseamos calcular el valor cuadrado podemos definir: $y_1 = x + x_c(rand - rand)$ y utilizar y_1^2 (ver la línea continua negra en la Fig. 1.5); o bien utilizar un cálculo adicional de $y_2 = x + x_c(rand - rand)$, y operar $y_1 \times y_2$ (ver la línea discontinua azul en la Fig. 1.5), los dos operaciones dan resultados diferentes en tendencia e

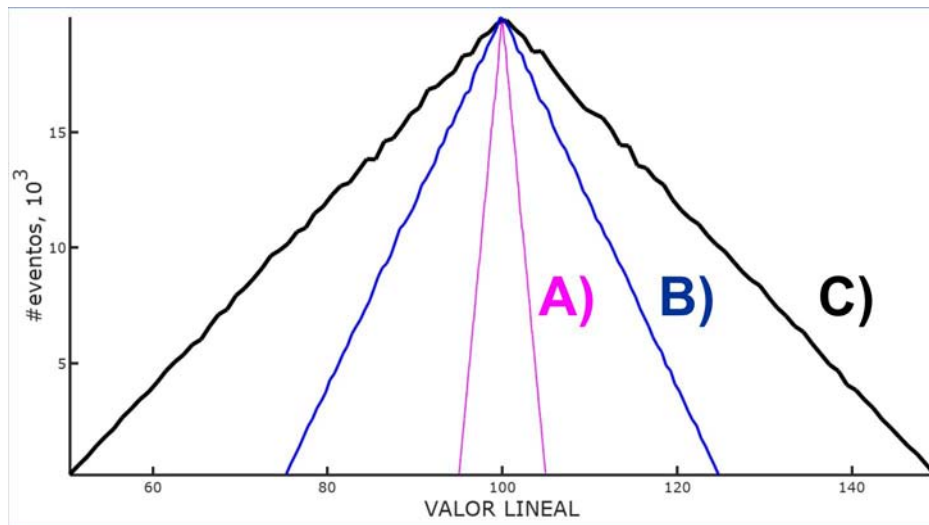


Figura 1.4: Distribución limitada mediante los valores $x + x_c(\text{rand} - \text{rand})$, donde: A) $x_c = 5$ unidades; B) $x_c = 15$ unidades; C) $x_c = 50$ unidades. Utilizando 10^6 componentes para cada caso. Observe que el valor central es invariante al cambio en x_c , pero la tendencia si se afecta aumentando la desviación estándar de la distribución.

índices estadísticos, pues la segunda implica el doble de cálculos aleatorios: lo que conlleva a un suavizamiento de la distribución resultante.

Por último se realizó un ejercicio donde se utilizan algunas de las funciones más comunes para mostrar el comportamiento al aplicarle la variable $y = x + x_c(\text{rand} - \text{rand})$, ver Fig. 1.6.

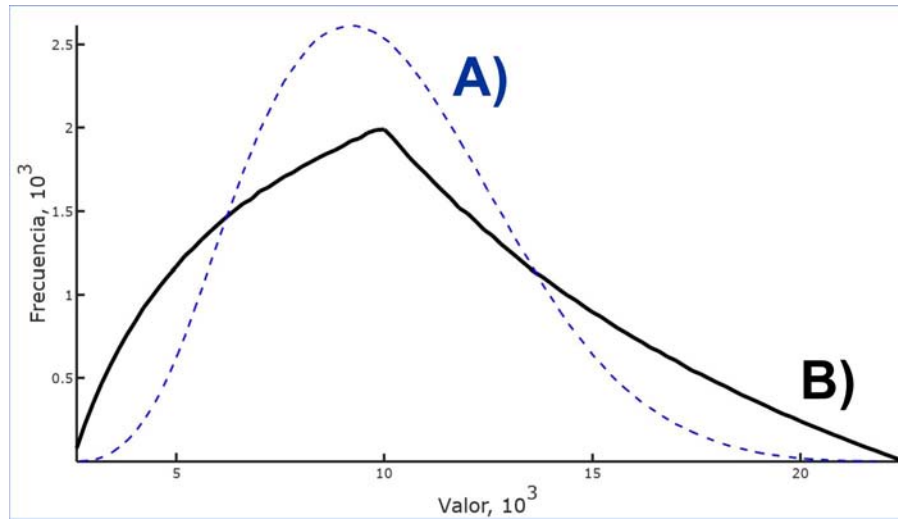


Figura 1.5: Comparación de distribuciones cuadráticas, utilizando A) y_1^2 (línea continua negra) y B) $y_1 \times y_2$ (línea discontinua azul).

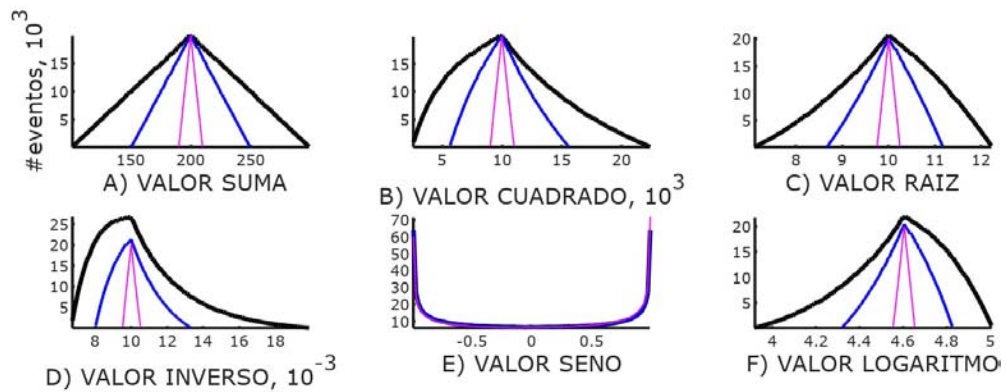


Figura 1.6: Efectos en la distribución limitada propuesta: $x + x_c(rand - rand)$, donde x_c de 50, 15 y 5 unidades— mediante seis sendas funciones: **A)** suma, **B)** potencia cuadrada, **C)** raíz cuadrada, **D)** inverso, **E)** seno, y **F)** logaritmo. En todos los casos se emplearon 10^6 componentes.

1.7. Una técnica Montecarlo para calcular el error

Por si sola, la medición y su incertidumbre no están asociadas a una distribución de probabilidades; de modo que toda propuesta de asociación es artificial. Aquí, proponemos una distribución limitante particular para cada parámetro involucrado en la medición: $y = x + x_c(rand - rand)$; x es el

valor estimado o medido inicialmente, x_c es la cota estimada, la cual debe proponerse desde una base grande, pero real (incluso plausible y verosímil).

Se podrían proponer (desde el principio) otras distribuciones; pero todas ellas mostrarían sus dificultades. Por ejemplo, la distribución gaussiana es una función continua con dominio $(-\infty, \infty)$, por lo que requiere ser acotada para establecer una incertidumbre asociada a la medición. Nosotros proponemos utilizar la función limitada como semilla en la técnica Montecarlo, y que en operación con otros parámetros se suaviza la distribución simulada. Estas últimas se pueden ajustar a modelos teóricos estadísticos. Por ejemplo, al utilizar muchos datos simulados podemos ajustar a la función normal, como sugiere el teorema de límite central.

En los siguientes capítulos ponemos a prueba nuestra propuesta. Contrastando con la literatura y con datos experimentales (vía diferentes análisis numéricos) establecemos el alcance de la distribución limitada al asociarse a la incertidumbre de una medición.

Capítulo 2

Velocidad de impacto en hecho de tránsito

En una colisión vehicular, se pueden fincar agravantes contra el conductor si se concluye que superó el límite de velocidad legal; por ello la dictaminación de la velocidad antes del impacto es una de las tareas más importantes entre los peritos. Por lo general, la fórmula que más utilizan los especialistas en hechos de tránsito es:

$$v_i^2 = \sum v_j^2, \quad (2.1)$$

donde v_i es la velocidad al instante de la colisión, y v_j son componentes (velocidad debido al efecto de: la colisión, tiro parabólico, huellas de frenado, entre otros) de la velocidad asociadas a efectos post-choque, de modo que los parámetros de la fórmula son variables observables y medibles; es decir: indicios. En los cálculos aritméticos, los peritos suelen utilizar el modelo de masa puntal, evitando la teoría de mecánica de cuerpo rígido o de sistema de partículas. Si bien, existen programas de computadora que consideran tales perspectivas, principalmente por sus costos¹, son poco utilizados por los operadores de las investigaciones forenses. En cualquier caso, debería ser mayor la contrastación científica que determine el modelo o herramientas que se debe emplear para un caso específico, y menos una práctica histórica, estándar jurídico positivista o manual² en particular.

A continuación, describiremos el marco teórico físico-matemático de algunos fenómenos, en términos de posibles indicios, que pueden presentarse

¹Por ejemplo, una única licencia del software *VirtualCrash-4* cuesta \$5,600 dolares americanos (es decir, alrededor de \$112,000 pesos mexicanos, al tipo de cambio actual). Como se puede comprobar de la página web: vcrashusa.com (julio, 2018).

²Los cuales son poco accesibles, por un bajo tiraje y por no encontrarse a la venta, tampoco son distribuidos electrónicamente.

en un hecho de tránsito: colisión, proyección por lanzamiento parabólico y marcas de huellas de neumático.

Colisión

Consideremos primero el caso de una colisión longitudinal (contra el frente o la parte trasera entre dos vehículos) considerando dos cuerpos³, se puede utilizar conservación de energía y momento lineal, suponiendo una colisión elástica⁴, escribimos respectivamente:

$$m_a v_{ia} + m_b v_{ib} = m_a v_{fa} + m_b v_{fb}, \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{2} m_a v_{ia}^2 + \frac{1}{2} m_b v_{ib}^2 = \frac{1}{2} m_a v_{fa}^2 + \frac{1}{2} m_b v_{fb}^2, \quad (2.3)$$

donde m_a y m_b son las masas de los vehículos involucrados en el choque, mientras que v_{ix} y v_{fx} son las velocidades pre- y post-colisión de vehículo x .

Reagrupando las masas en la Ec. 2.2 obtenemos:

$$m_a (v_{ia} - v_{fa}) = m_b (v_{fb} - v_{ib}). \quad (2.4)$$

Por otro lado, considerando arreglar de modo similar la Ec. 2.3, tenemos:

$$m_a v_{ia}^2 - m_a v_{fa}^2 = m_b v_{fb}^2 - m_b v_{ib}^2, \quad (2.5)$$

$$m_a (v_{ia}^2 - v_{fa}^2) = m_b (v_{fb}^2 - v_{ib}^2), \quad (2.6)$$

y la escribimos de modo conveniente,

$$m_a (v_{ia} - v_{fa})(v_{ia} + v_{fa}) = m_b (v_{fb} - v_{ib})(v_{fb} + v_{ib}). \quad (2.7)$$

Dividimos la Ecs. 2.7 entre 2.4, para obtener:

$$v_{ia} + v_{fa} = v_{ib} + v_{fb}, \quad (2.8)$$

despejamos v_{ia} :

$$v_{ia} = v_{ib} + v_{fb} - v_{fa}. \quad (2.9)$$

³Se dirá que el cuerpo es blando si corresponde a un animal o persona, por ejemplo. Y se denominará cuerpo duro cuando se trata de un vehículo o bien infraestructura como puede ser un poste o una pared.

⁴Formalmente, existe un grado de inelasticidad. Aquí comenzamos suponiendo despreciable el efecto. En trabajos futuros profundizaremos en el tema.

Sustituyendo el resultado anterior en la Ec. 2.4.

$$m_a(v_{ib} + v_{ib} - v_{fa} - v_{fa}) = m_b(v_{fb} - v_{ib}), \quad (2.10)$$

$$m_a(v_{ib} + v_{fb} - 2v_{fa}) = m_b(v_{fb} - v_{ib}) \quad (2.11)$$

$$v_{ib}(m_b + m_a) = 2m_a v_{fa} + v_{fb}(m_b - m_a) \quad (2.12)$$

$$v_{ib} = \frac{2m_a v_{fa} + v_{fb}(m_b - m_a)}{(m_b + m_a)}. \quad (2.13)$$

Y sustituyendo en la Ec. 2.9

$$v_{ia} = \frac{2m_a v_{fa} + v_{fb}(m_b - m_a)}{(m_b + m_a)} + v_{fb} - v_{fa}. \quad (2.14)$$

Finalmente, obtenemos el par de ecuaciones buscadas, que describen las velocidades iniciales de los cuerpos en términos de las masas y las velocidades inducidas por la colisión:

$$v_{ia} = \left(\frac{2m_a}{m_a + m_b} - 1 \right) v_{fa} + \left(\frac{m_b - m_a}{m_b + m_a} + 1 \right) v_{fb}, \quad (2.15)$$

$$v_{ib} = \left(\frac{2m_a}{m_a + m_b} \right) v_{fa} + \left(\frac{m_b - m_a}{m_b + m_a} \right) v_{fb}. \quad (2.16)$$

Si bien las velocidades finales, de este caso, no son un observable para el investigador forense, pues implican un estado no-estacionario de los cuerpos, si se pueden relacionar con otros fenómenos que si presentan indicios: marcas de neumático en el pavimento o bien si desarrollaron una trayectoria parabólica.

Ahora bien, existen otras condiciones en las colisiones, como una dependencia en el ángulo de impacto y efectos de deformación en los materiales. Por los objetivos de esta tesis, estos casos deberán ser expuestos en publicaciones futuras.

Trayectoria de tiro parabólico

En un hecho de tránsito se presentan muchos fenómenos mecánicos. Por ejemplo, puede suceder que el vehículo salga disparado por un barranco o saliente en el camino. De modo que utilizando el modelo de trayectoria parabólica, la velocidad de lanzamiento v_p asociada es⁵:

$$v_p = \sqrt{\frac{x_f^2 g}{x_f \sin 2\alpha - 2y_f \cos^2 \alpha}} \quad (2.17)$$

donde la coordenada (x_f, y_f) se obtiene de la posición final donde se localiza el vehículo respecto a un eje coordenado previamente establecido. Con todo, estadísticamente es poco usual que se presente esta situación parabólica en los hechos de tránsito de la Ciudad de México.

Huellas de neumático en el asfalto

Otro fenómeno que es común en los hechos de tránsito terrestre y de interés forense son las huellas de las ruedas sobre el camino. Al accionar los frenos, parte de la energía cinética E_k se transforma en trabajo T , que puede dejar una huella de frenado por fricción estática o dinámica, que bien se pueden presentar antes o después de la colisión. De modo que la velocidad v_j y la distancia de la huella marcada en el terreno d_j se relacionan mediante la expresión⁶:

$$v_j = \sqrt{2g(\mu_j - \tan \alpha)d_j} \quad (2.18)$$

donde g es la aceleración en caída libre, y μ_j es el coeficiente de fricción estático, o bien dinámico, y α es la inclinación del terreno, respecto a la horizontal.

El cálculo de la incertidumbre asociada a las ecuaciones teóricas presentadas, de la colisión y tiro parabólico son presentadas en el Apéndice-C y la correspondiente a la huella de frenado, en la Sección 2.3.1.

En resumen, el perito debe utilizar todos los indicios para considerar los modelos que describen los fenómenos mecánicos en un hecho de tránsito. En principio, la selección de modelos será juzgada por la contrastación; de otro modo se puede incurrir en errores graves.

⁵Consideramos innecesario desarrollar la deducción de esta ecuación pues se encuentra en varios libros de texto universitarios.

⁶Es importante recordar que a bajas velocidades no se observara huella en el camino. Es posible que la relación velocidad-huella sea un valor extremal. De modo que la velocidad inicial sea una cota. En trabajos futuros se debe de ahondar sobre tal asunto.

A continuación, dedicaremos algunos párrafos al coeficiente de fricción, para brindar mayor claridad a la importancia de verificar los modelos forenses y sus parámetros físicos.

2.1. Coeficiente de fricción

Tanto el coeficiente de fricción estático como el dinámico son importantes parámetros para obtener la velocidad inicial a partir de las huellas de frenado. Sin embargo, algunos autores –después de comparar los resultados por vídeo-análisis y las huellas en el asfalto– aseguran que las velocidades calculadas están sobrevaloradas a partir de tal rastro [2].

En todo caso, en la literatura especializada se encuentran grandes diferencias entre los valores de los coeficientes de fricción para neumáticos con los sustratos: concreto, nieve, lodo, entre otros. Ya sea que se utilicen métodos experimentales convencionales [52] o sofisticados [2, 24] para obtener los coeficientes de fricción, su precisión es pequeña. De hecho, por una necesidad operativa, es extraño que los peritos midan el coeficiente de fricción en el lugar de los hechos, en su lugar consultan tablas estándar. La Tabla 2.1 muestra algunos valores del coeficiente de fricción; en general, podemos decir que tales datos son disimiles, lo que dificulta una valoración objetiva de los dictámenes forenses. Si estos parámetros son tan diferentes, ¿pueden ajustarse para una causa particular? El ministerio público (que también podemos llamar: fiscal) prefiere valores altos para establecer agravantes por superar el límite de velocidad; por su parte la defensa se inclinara por valores bajos, con el fin de evitar la agravante.

De cualquier forma, el análisis de errores siempre debería de estar presente en los dictámenes. Pero si se dificulta realizar los cálculos deterministas; entonces se puede recurrir al método Montecarlo, como sugieren varios autores [29, 35]. A continuación mostraremos como nuestra propuesta Montecarlo, se compara con un caso reportado en la literatura.

2.2. Comparación entre la literatura y la propuesta

En la literatura localizamos muchas aplicaciones de técnicas Montecarlo para la pericial de hechos de tránsito, las más cercanas al área criminalística son poco descriptivas del proceso utilizado [1]. En contraste, las más académicas son poco explícitas en su algoritmo; por lo que no es muy clara la función de números aleatorios y su relación con las ecuaciones deterministas

Tabla 2.1: Coeficiente de fricción, de acuerdo con diferentes autores [2, 24, 33, 36, 52].

| Neumáticos sobre | Coeficientes de fricción μ | | | | |
|------------------|--------------------------------|----------|----------|---------|---------|
| | Martínez | Ahn | Ghandour | Blog | Koshkin |
| Asfalto seco | 0.80-1.20 | 0.85-1.0 | 0.9 | 0.8-1.0 | 0.4-0.6 |
| Asfalto mojado | 0.50-0.80 | 0.25 | 0.6 | 0.30 | |
| Ripio firme | 0.55-0.85 | | | | |
| Ripio suelto | 0.40-0.70 | | | | |
| Hielo liso | 0.10-0.25 | 0.15-2 | 0.05 | | |
| Nieve suelta | 0.10-0.25 | | 0.2 | | |
| Nieve compactada | 0.30-0.55 | 0.35-0.4 | | | |
| Barro | 0.40-0.50 | | | | |

[59]. Con todo, localizamos en la literatura un enfoque explícito y claro de método Montecarlo aplicado para obtener la velocidad inicial en la colisión (que sucede en un plano) de dos vehículos: un Peugeot 504 y un IES Súper América. Utilizamos esta referencia documental para contrastar nuestra propuesta de técnica Montecarlo,

Así, reconstruimos el análisis reportado, y luego lo adaptamos para ajustarlo a nuestra propuesta. Encontramos que nuestro enfoque concuerda mejor al modelo gaussiano.

El hecho de tránsito estudiado consistió en una colisión transversal entre dos vehículos. De acuerdo con el documento estudiado, como se muestra en la Fig. 2.1, la ecuación para obtener la velocidad de la colisión es [35]:

$$v_p = \sqrt{\left[\sqrt{2g\mu_p(14.3 - x) + \frac{m_{IES}}{m_p} \frac{(11.38 - x)\sqrt{2g\mu_{IES}}}{\sqrt[4]{(11.38 - x)^2 + 4.93^2}}} \right] + 2g\mu_p(13.6 + x)} \quad (2.19)$$

Donde g es la constante de aceleración de gravedad en la tierra, μ_{IES} y m_{IES} son el coeficiente de fricción dinámico y la masa para el carro IES Súper América, así como μ_p y m_p son el coeficiente de fricción dinámico y la masa para el carro Peugeot.

Sin embargo, el enfoque Montecarlo propuesto en este documento de referencia solo utilizó un generador de números aleatorios por medición [35]. Por ejemplo, para el caso de la distancia x , se propone utilizar una cota de 3 m; es decir que x va de -1.5m a 1.5m :

$$x = 3.0 * rand - 1.5 \quad (2.20)$$

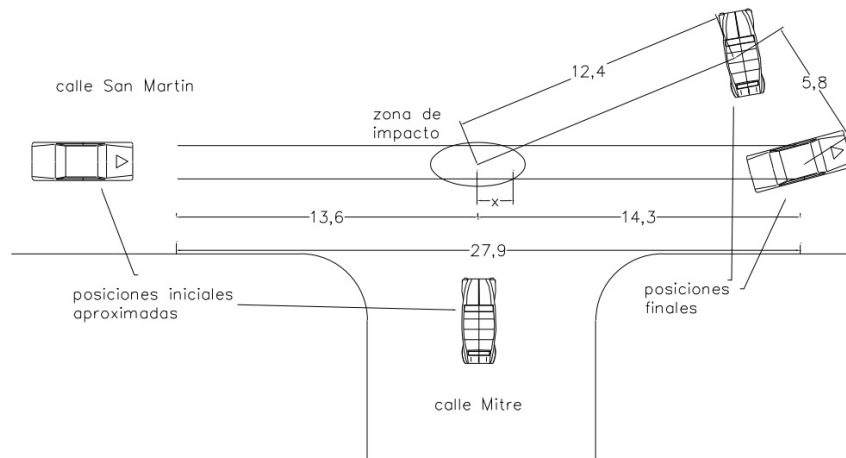


Figura 2.1: Croquis de las posiciones finales de ambos autos luego de la colisión. Las posiciones antes del choque son ilustrativas, representan solo las direcciones de cada auto y no sus posiciones exactas. Imagen obtenida de [35]

Además, por las características de las computadoras de la época (alrededor del año 2003), solo utilizaron 10^3 ciclos de números aleatorios para ajustarlos a un modelo de distribución gaussiano. Con sus herramientas, en el documento reportan que la velocidad calculada, en un intervalo de $\pm\sigma$, fue de 91 ± 3 km/hr (3%).

2.2.1. Resultados parciales

Aunque el autor de la referencia omitió presentar el código fuente, su reconstrucción teórica es sencilla. De modo que escribimos una versión plausible, ver Apéndice-B.5. Utilizando 10^6 ciclos de números aleatorios logramos obtener los mismos resultados que los reportados en la literatura, pero profundizamos en su análisis.

Primero, observamos que el comportamiento de las variables aleatorias al utilizar más ciclos, muestra gráficas diferentes a la distribución gaussiana. De hecho, la **Fig. 2.2 A)** y la **Fig. 2.2 C)** muestran una zona central semi-constante. Mientras que la **Fig. 2.2 B)** exhibe una tendencia donde, a lo más, nos permite afirmar que la frecuencia de eventos es proporcional a la velocidad.

La Fig. 2.3 presenta el análisis del modelo (considerando todas las variables) contrastando con los datos simulados. En la **Fig. 2.3 A)** se observa que los datos simulados muestran una tendencia menor a la distribución gaussiana (correlación $R^2 = 0.96$); de hecho, la simulación completa hereda el comportamiento semi-constante en el centro de la distribución que exhiben

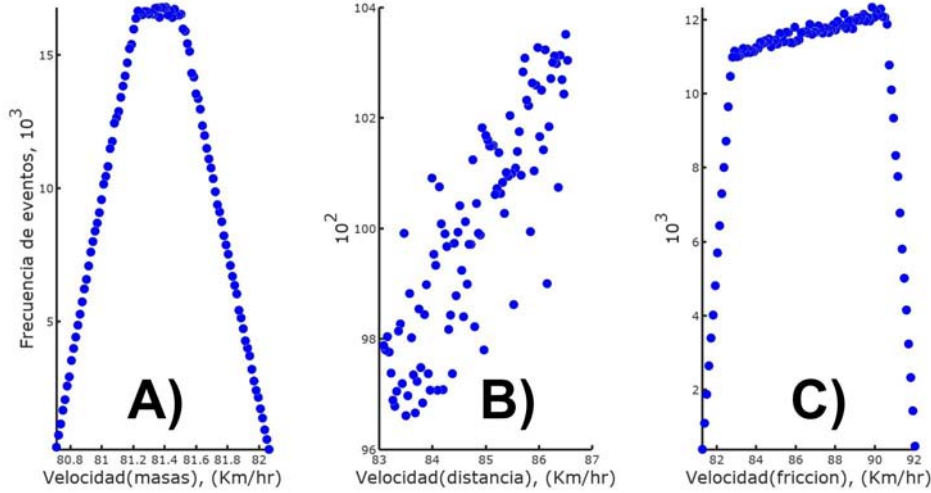


Figura 2.2: Reconstrucción de los resultados de la literatura utilizando 10^6 ciclos: **A)** Distribución de eventos cuando solo se varían las masas, **B)** Distribución de eventos cuando solo se varían la distancias, y **C)** Distribución de eventos cuando solo se varían los coeficientes de fricción.

las simulaciones parciales de las velocidades y los coeficientes de fricción. La gráfica de datos modelados *vs.* simulados claramente dista de ser una línea recta. Además los errores por diferencia absoluta entre datos simulados y el modelo es superior al 25 %.

En contraste, la Fig. 2.4 muestra los resultados obtenidos con nuestra propuesta de técnica Montecarlo (aplicando una distribución limitante lineal), conservando la misma cota utilizada en la literatura, ver el Apéndice-B.6. Obtuvimos una distribución de puntos simulados más parecida a una función gaussiana, como exhibe la Fig. 2.4**A)**. El aparejamiento de datos simulados con los datos del modelo se asemeja más a la función identidad, como muestra la Fig. 2.4**B)**. También, el error porcentual por diferencia absoluta, es menor de 10 %. En otras palabras, nuestra propuesta de técnica Montecarlo es más confiable por ser más preciso al modelo gaussiano.

Mediante nuestra propuesta obtuvimos una velocidad de 86 ± 4 km/hr (5 %), como se presenta en la Tabla. 2.2; menor a la velocidad de la literatura, pero si las comparamos son un 95 % similares en su valor central. De hecho hay un traslape entre las dos cotas: entre 88 y 90 km/hr. Cabe señalar que una cota de error alrededor de $\pm\sigma$ cubre aproximadamente el 66 % de los casos posibles; dejando sin cubrir una cantidad alta de casos. Por ello es preferible utilizar una cota $\pm 3\sigma$ que abarca alrededor del 99.7 % de los posibles casos (sin superar las cotas máximas definidas antes de aplicar la técnica

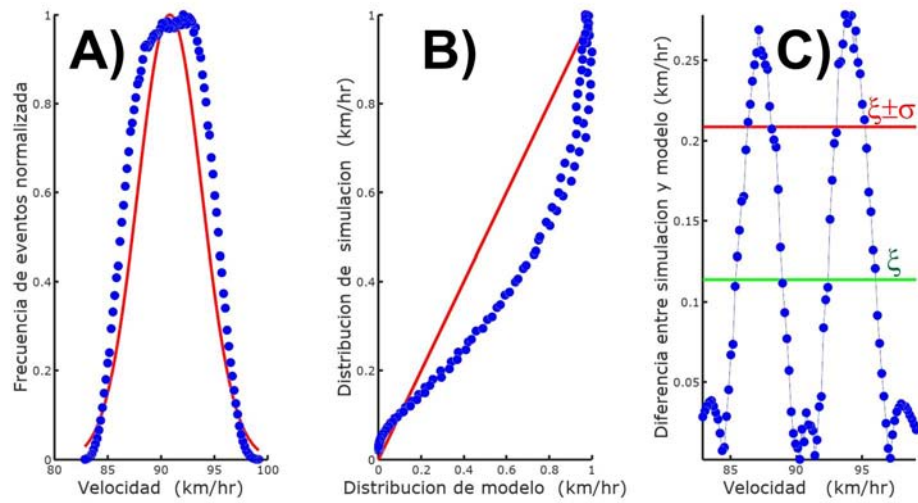


Figura 2.3: Análisis de coherencia entre los datos simulados y el modelo gaussiano propuesto: **A)** Representación visual, **B)** Emparejamiento de la distribución simulada con la del modelo y **C)** Diferencia entre distribución simulada y modelo.

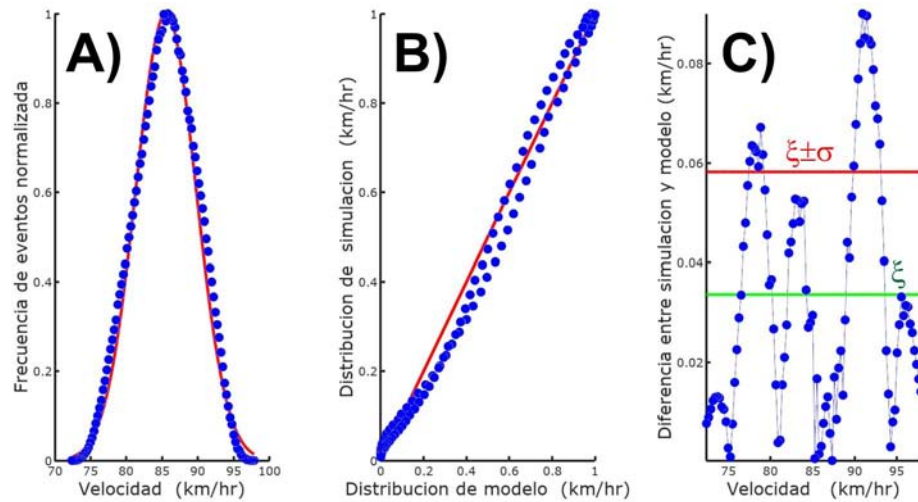


Figura 2.4: Análisis del modelo de literatura corregido mediante una re-definición distribución estocástica en la medición de la técnica Montecarlo.

Montecarlo). En conclusión la medición de la velocidad es de 86 ± 12 km/hr (15%). Debemos mencionar que la interpretación de esta medición y su cota como agravante es decisión exclusiva del juez, no del perito.

2.3. Caso forense: derrape de vehículo con salida del camino

Para este trabajo de tesis se analizó una colisión que sucedió en la Avenida Insurgentes Norte, en la Colonia Santa Isabel Tola, Del. Gustavo A. Madero, en la Ciudad de México, en septiembre del 2011. Dos vehículos en movimiento (noroeste a sureste) colisionaron y luego se proyectaron sobre el arroyo de circulación contraria, cinco metros a desnivel. En el percance fallecieron cinco personas. De acuerdo a la Procuraduría General de Justicia del Distrito Federal uno de los conductores perdió el control de su vehículo. Los resultados periciales en tránsito vehicular, mecánica de hechos y fotografía, entre otros, establecieron que uno de los automovilistas invadió el carril de extrema derecha por donde corría el otro vehículo. Al tratar de esquivar el golpe, el chofer giró el volante perdiendo también el control y volcando sobre el carril de contraflujo. En la Fig. 2.5 se presenta una captura de pantalla, donde se observa el video brindado por la PGJ-DF a los medios de comunicación. La vía se compone de dos arroyos de circulación a desnivel y camellón central, con una amplitud de 35.8 m, donde se localizan señalamientos restrictivos de velocidad máxima de 60 km/hr. La colisión sucedió en el arroyo noreste, de 14.0 m de amplitud, compuesto de cuatro carriles y con pendiente descendiente 3.5 grados.

En la Fig. 2.6 se muestra parte de la sección del análisis físico-matemático de la opinión técnica de hechos de tránsito; donde se omite los efectos de colisión y el análisis de errores. Para ganar claridad en el análisis de incertidumbres y aplicar la técnica Montecarlo, reescribimos la ecuación para obtener la velocidad inicial v_i :

$$v_i = \left[2g(\mu_e - \tan \alpha)d_e + 2g(\mu_k - \tan \alpha)d_k + \frac{x_f^2 g}{x_f \sin 2\alpha - 2y_f \cos^2 \alpha} \right]^{1/2}, \quad (2.21)$$

donde g es la constante de aceleración de gravedad en la tierra; μ_e y μ_k son

Tabla 2.2: Comparación de los resultados finales de la literatura y nuestra propuesta.

| Fuente | v_p (km/hr) | σ (km/hr) | $100\sigma/v_p$ |
|------------|---------------|------------------|-----------------|
| Literatura | 91 | 3 | 3 |
| Propuesta | 86 | 4 | 5 |



Figura 2.5: Captura de pantalla de un noticiero, donde se muestra el momento de la colisión estudiada. La calidad del video es insuficiente para realizar mediciones confiables.

los coeficientes de fricción estática y dinámica, respectivamente; d_e y d_k son las distancias donde se identifica la marca de derrape estática y dinámica, respectivamente. Por su parte (x_f, y_f) son las coordenadas donde se encontró el vehículo después de realizar una trayectoria parabólica. Finalmente, α es el ángulo entre el terreno y la horizontal.

Aunque, el dictamen se realizó empleando tablas estándar⁷, es evidente que los valores de los coeficientes de fricción difieren de los de la literatura consultada, ver Tabla 2.1. El reporte marca valores de $\mu = 0.3$ y 0.4 , que son inferiores a los correspondientes para el asfalto seco. Más que señalar un error en el dictamen estudiado, queremos llamar la atención de las incoherencias que pueden presentarse por utilizar inadecuadamente el coeficiente de fricción.

⁷De acuerdo con los dictámenes periciales se hace referencia a manuales de capacitación, sin embargo estos no son accesibles al público en general. Otra referencia suelen ser libros de texto de física.

2.3.1. Análisis de propagación de errores por cálculo determinista

De acuerdo a lo expuesto en la Sección 2.3, si se propone una ecuación para obtener la velocidad al instante de la colisión, entonces también podemos obtener una ecuación para calcular el error asociado a tal velocidad. Sin embargo, tal propuesta requiere precisión en las mediciones correspondientes. Por si sola la Ec. 2.21 es demasiado extensa como para expresarla en un solo párrafo. Pero se puede escribir como un pequeño programa de computadora, que facilite los cálculos y su revisión. En los siguientes párrafos se expondrán las expresiones que describen la incertidumbre asociada a la Ec. 2.21.

Error asociado al movimiento

En general y usando la Ec. 2.1, el error relativo asociado a la velocidad al instante de la colisión (v_i) en función de sus componentes fenomenológicas (v_j). Donde las (v_j) están relacionadas con la velocidad resultante del movimiento en tiro parabólico, huella de frenado, entre otros. Se puede escribir como:

$$\frac{\Delta v_i}{v_i} = v_i^{1/2} \sum v_j' \Delta v_j \quad (2.22)$$

Una interpretación de la Ec. 2.22 puede ser la siguiente: el mismo valor $v_i^{1/2}$ modula el cálculo del error, pues cuando el v_i es superior a la unidad, el valor de la raíz es inferior al valor de entrada; pero mientras más componentes fenomenológicas, mayor será el error propagado. De hecho, aumentará la cuantía del error final si se presentan componentes de velocidad (v_j) grandes o incertidumbres asociadas altas a tal componente. Revisaremos los tres fenómenos que mencionamos al inicio del capítulo.

Error en la huella de frenado

Las ecuaciones de velocidad por frenado asociadas a la fricción estática y dinámica comparten la misma estructura; de modo que lo podemos escribir como:

$$v(z) = \sqrt{A(z + B)}, \quad (2.23)$$

donde $v(z)$ es la velocidad en función de la variable independiente, z es la variable independiente (utilizada como apoyo algebraico), mientras que A y

B son parámetros. Así, después de realizar las derivadas correspondientes, el error asociado se puede escribir como:

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dz} \Delta z = \frac{1}{2} \frac{z'}{(z+B)}, \quad (2.24)$$

de modo que para las velocidades en función de los parámetros físicos muestra un error relativo igual a:

$$\frac{\Delta v_j}{v_j} = \frac{gd_j}{v_j^2} \Delta \mu_j + \frac{gd_j}{v_j^2 \cos^2 \alpha} \Delta \alpha + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta g}{g} + \frac{\Delta d_j}{d_j} \right). \quad (2.25)$$

Mediante la Ec. 2.25 se muestra que si se cuenta con valores grandes en la velocidad, disminuirá el error asociado, pero este crecerá mientras más inclinado se encuentra el terreno. Si bien, es deseable contar con una medida precisa de la aceleración en caída libre, un valor estándar de 9.8 m/s^2 presenta un error inferior del 3%. Finalmente, para disminuir el error sobre la distancia de la huella, se consideran valores grandes.

Error en el tiro parabólico

De presentarse una trayectoria modelada como parábola, se puede utilizar la Ec. 1.1 para obtener la incertidumbre asociada a la velocidad de lanzamiento, la cual es descrita por la Ec. 2.17. Obteniendo:

$$\begin{aligned} (\Delta v_p)^2 = & \frac{1}{4} \left(\frac{x_f^2}{g(x_f \sin 2\alpha - 2y_f \cos^2 \alpha)} (\Delta g)^2 + \frac{2 \cos^2 \alpha}{x_f^2 g (x_f \sin 2\alpha - 2y_f \cos^2 \alpha)^3} (\Delta y_f)^2 \right. \\ & \left. + \frac{2x_f \cos 2\alpha + 4y_f \cos \alpha \sin \alpha}{x_f^2 g (x_f \sin 2\alpha - 2y_f \cos^2 \alpha)^3} (\Delta \alpha)^2 + \frac{x_f^2 g \sin 2\alpha - 4gx_f y_f \cos^2 \alpha}{x_f^2 g (x_f \sin 2\alpha - 2y_f \cos^2 \alpha)^3} (\Delta x_f)^2 \right) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Error en colisiones elásticas

De nuevo utilizamos la Ec. 1.1 para calcular la incertidumbre asociada a las velocidades iniciales en una colisión elástica frontal entre dos cuerpos. Partiendo de la Ec. 2.15 y la Ec. 2.16, que describen las velocidades iniciales en función de las masas m_a , m_b y velocidades resultantes v_{fa} , v_{fb} ; obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\Delta v_{ia} = \left[\frac{4(v_{fa} - v_{fb})^2}{(m_a + m_b)^4} (m_b^2(\Delta m_a)^2 + m_a^2(\Delta m_b)^2) + \frac{(m_a - m_b)^2}{(m_a + m_b)^2} (\Delta v_{fa})^2 + \frac{4m_b^2}{(m_a + m_b)^2} (\Delta v_{fb})^2 \right]^{1/2}, \quad (2.27)$$

$$\Delta v_{ib} = \left[\frac{4(v_{fa} - v_{fb})^2}{(m_a + m_b)^4} (m_b^2(\Delta m_a)^2 + m_a^2(\Delta m_b)^2) + \frac{(m_b - m_a)^2}{(m_a + m_b)^2} (\Delta v_{fb})^2 + \frac{4m_a^2}{(m_a + m_b)^2} (\Delta v_{fa})^2 \right]^{1/2}, \quad (2.28)$$

2.3.2. Implementación de la técnica Montecarlo

Siguiendo la propuesta de metodo Montecarlo en la Sección 2.2, elegimos una aplicación intuitiva y sencilla de programar, ver Apéndice B.7. El valor de referencia y central x es acotado por $\pm x_c$; este último valor será grande pero físicamente aceptable; además en una etapa del proceso de cálculo, x_c se multiplicará aleatoriamente por un valor entre -1 y 1.

Como valores centrales utilizamos los reportados en la pericial, ver Fig. 2.6, y consideramos que la máxima cota para las longitudes es de un metro, un grado para el ángulo y 0.1 para los coeficientes de fricción, la Tabla 2.3 resume estos valores.

Así, mediante la Ec. 2.22: el error porcentual de la velocidad inicial será de 74.175 %; a esto nos referíamos a descomunal, pero esperamos que el proceso aleatorio compense esta cota extrema.

De tal modo, la Ec. 2.1 adquiere la siguiente estructura:

$$v_{MC} = MC_N \left[v_i(\mu_e \pm \mu_{ec}, \mu_k \pm \mu_{kc}, d_e \pm d_{ec}, d_k \pm d_{kc}, x_f \pm x_{fc}, y_f \pm y_{fc}, \alpha \pm \alpha_c) \right]. \quad (2.29)$$

2. Vehículo a K OF SPORT, placas de circulación a una velocidad del orden de los 70KPH.

$\mu_1 = 0.4$ $\mu_2 = 0.3$ $h = 5.0$ metros.
 $d_1 = 40.9$ $d_2 = 7.3$ $d_3 = 9.0$ metros.

$V_1^2 = V_0^2 - 2 \mu_1 g d_1$ $V_2^2 = V_0^2 - 2 \mu_2 g d_2$ $V_3 = d_3 \sqrt{g/2h}$ $V_3^2 = d_3^2 g/2h$

Si: $V_0^2 = V_1^2 + V_2^2 + V_3^2$ *sustituyendo*

$V_0^2 = 2 \mu_1 g d_1 + 2 \mu_2 g d_2 + d_3^2 g/2h$

$V_0^2 = \sqrt{2 (\mu_1 - p) g d_1 + 2 (\mu_2 - p) g d_2 + d_3^2 g/2h}$

Factorizando, se tiene que:

$V_0^2 = \sqrt{2g \{ (\mu_1 - p) d_1 + (\mu_2 - p) d_2 \} + d_3^2 g/2h}$

Sustituyendo:

$V_0 = \sqrt{2(9.81) \{ (0.4 - 0.06)(40.9) + (0.3 - 0.06)(7.3) \} + 9^2(9.81/2(5))}$

$V_0 = \sqrt{19.62(13.9 + 1.75) + 79.46}$

$V_0 = \sqrt{19.62(15.65) + 79.46}$

$V_0 = \sqrt{307.20 + 79.46}$

$V_0 = \sqrt{386.55}$

$V_0 = 19.66 \text{ m/s} = 70.77 \text{ KPH}$

Figura 2.6: Parte del dictamen pericial de hechos de tránsito del caso estudiado, se observan los cálculos realizados para determinar la velocidad de un vehículo.

2.3.3. Resultados parciales

Encontramos una correlación de 0.996 entre los datos simulados y el modelo gaussiano, como se muestra en la Figura 2.7.A). Se puede observar como al comparar la frecuencia estadística en ambos casos, esta se muestra casi como una línea recta, ver Figura 2.7.B). Y el error porcentual por diferencia absoluta es menor al 5 %, ver Figura 2.7.C). Por tanto se obtiene una velocidad promedio y $\pm \sigma$ de 63 ± 4 Km/hr (6.4 %), entre los límites de 53 y 73 km/hr.

Si bien el valor obtenido por el método Montecarlo es menor al calculado por las periciales, este nos arroja un error asociado el cual puede ser utilizado

Tabla 2.3: Valores para estimar la velocidad de impacto, cotas para la simulación numérica y su error porcentual asociado.

| Variable | x | x_c | $100(x_c/x)$ |
|--|---------------------|------------|-----------------------------|
| Coefficiente de fricción estática, μ_e | 0.3 | 0.1 | 33.3 % |
| Coefficiente de dinámica, μ_k | 0.4 | 0.1 | 25 % |
| Longitudes, d_e, d_k, x_f, y_f (m) | 40.9, 7.3, 9.0, 5.0 | 1, 1, 1, 1 | 2.4 %, 13.7 %, 11.1 %, 20 % |
| Ángulo, α | 5.0 | 0.5 | 10 % |

para añadir o quitar agravantes a la hora de dictaminar el caso, en comparación con la información calculada por el peritaje que no cuenta con estos datos, ver Tabla 2.4.

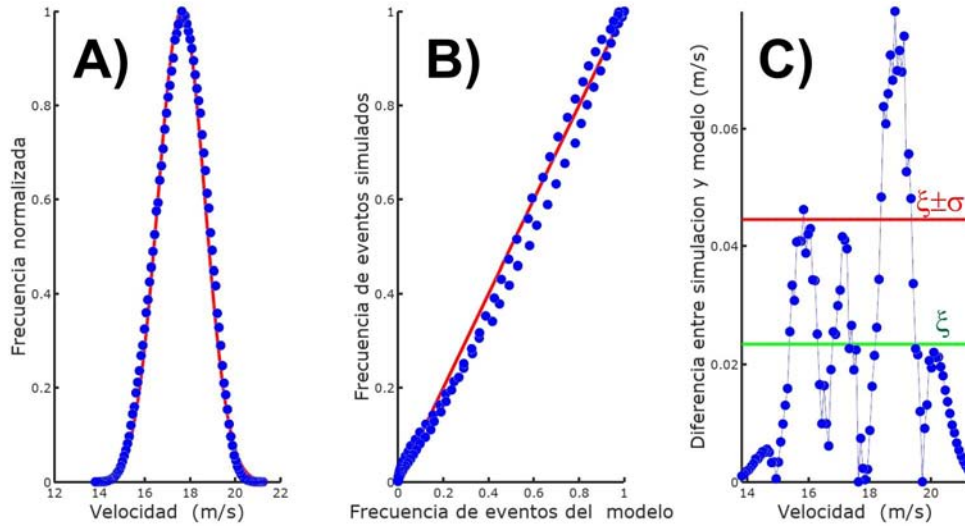


Figura 2.7: Análisis de coherencia entre los datos simulados y el modelo gaussiano propuesto del dictamen pericial: **A)** Representación visual, en azul la simulación y en rojo el modelo; **B)** Emparejamiento de la distribución simulada con la del modelo, en azul la simulación y en rojo el modelo; **C)** Diferencia entre distribución simulada y modelo.

Tabla 2.4: Comparación de los resultados finales de la literatura y nuestra propuesta.

| Fuente | v_p (km/hr) | σ (km/hr) | $100\sigma/v_p$ |
|--------------|---------------|------------------|-----------------|
| Pericial | 70.77 | - | - |
| N. propuesta | 63 | 4 | 6.4 |

2.4. Conclusiones de capítulo

- Observamos que el proceso Montecarlo da como resultado valores medios por debajo de los valores centrales inicialmente calculados.
- Al comparar nuestros resultados contra los de la literatura, como se mostró en la Sección 2.2, encontramos que nuestra propuesta es más exacta para ajustarse a la distribución probabilística normal, y por tanto la consideramos más cercana al valor real.
- Después de utilizar las ecuaciones resultantes del análisis determinista para calcular el error, ver Sección 2.3, se observó una disminución en el error de 67.6 %, y con esto una presunta mejora en la medición.
- Si bien, fue inviable realizar experimentos cuidadosos para estudiar el alcance de la propuesta técnica Montecarlo en un hecho de tránsito; por ejemplo, obtener un automotor, acelerarlo, provocar una huella de frenado por fricción en el asfalto y comparar con el resultado. En el siguiente capítulo se realizó una comparación experimental para otras periciales con el fin de comprobar la factibilidad de la técnica, así como los alcances en el área forense.

Capítulo 3

Fuerza de un golpe fijado en video

Además de la pericial de hechos de tránsito, esta propuesta se puede aplicar en otros contextos; por ejemplo, donde se fijen golpes entre personas. En este capítulo presentamos el análisis de la fuerza asociada a una patada, que un deportista conecta contra su adversario.

Si los argumentos del capítulo anterior mostraban evidencia teórica de que la propuesta es razonable para obtener una estimación de la incertidumbre, en esta sección además de realizar el análisis Montecarlo correspondiente, realizamos un par de experimentos ilustrativos. Generamos datos y luego degradamos la información; si los indicios degradados recuperan la información vía Montecarlo, obtendremos una conclusión similar a la que brindan los datos originales. Tales las detallamos en este capítulo.

3.1. Caso forense: Muerte del Perro Aguayo Jr.

La noche del 21 de marzo del 2015, en el Auditorio Municipal de Tijuana, México, el luchador llamado Rey Misterio, realizó un movimiento habitual de este deporte-espectáculo, conocido como: «patada de canguro», consiste en un salto de frente y que conecta las piernas sobre su rival en turno, en este caso: a Pedro Aguayo Ramírez, quien se hacia llamar El hijo del Perro Aguayo o Perro Aguayo Jr. [41, 49]. Al ser impactado cayó sobre las cuerdas, y al poco tiempo perdió la vida como resultado de una lesión cervical. Aunque Rey Misterio fue liberado de cargos, en los medios públicos fue vituperado [48]. Un aficionado video-grabó frontalmente el encuentro, y lo instaló en el sitio *YouTube* [37]. La información de tales imágenes es el objeto de estudio de este capítulo.

3.1.1. Video y su análisis

La videograbación es adecuada para realizar un análisis y así obtener la fuerza del golpe. Los pies impactados sobre el hombro producen una traslación pequeña y cuasi-paralela al plano de la escena. Sin embargo, en las imágenes se requiere establecer testigos métricos y correcciones por el movimiento de la cámara. Entonces, con el propósito de iniciar el estudio de la escena, descargamos el video a una computadora personal. Para analizar el film utilizamos el programa de distribución libre: *Tracker*, el cual es multi-plataforma; lo que implica que se puede operar en diferentes sistemas operativos. Con el fin de obtener la fuerza lo más precisa posible, ya con la película dentro del programa *Tracker*, realizamos las siguientes acciones:

1. **Preselección de los fotogramas relevantes.** El video tiene una duración de 14:13 minutos, por lo que realizamos una selección preliminar de los cuadros de interés; antes de que Rey Misterio iniciara el salto y un poco después de que Aguayo se encontrara en las cuerdas. Seleccionamos entre los fotogramas marcados como 11431 a 11561 (que representan 130 imágenes en un tiempo de 5 s).
2. **Instalación del eje coordenado.** El salto completo de Rey Misterio es casi paralelo al plano de la cámara, por lo que instalamos el eje coordenado de modo que coincidiera con el plano que describe el salto, con origen sobre la lona del cuadrilátero y del lado derecho de la escena. Donde la horizontal (eje- x) es paralela a la cuerda intermedia del cuadrilátero, de modo que se asegura la correcta orientación del sistema, ver Fig. 3.1.
3. **Colocación del testigo métrico.** Por reglamento la distancia entre las cuerdas en el cuadrilátero es de 6 m [34]; este fue nuestro testigo métrico, y lo colocamos al nivel de los hombros de ambos luchadores; colocarlo en una posición delantera o posterior conduciría a un error de perspectiva. A modo de comprobación de la conveniencia de la posición y dimensión del testigo, como se muestra en la Fig. 3.1, medimos la estatura del Rey Misterio (quien se encontraba en posición erguida) obteniendo un valor de 1.67 m, e.i. 99 % de su estatura reportada [7].
4. **Corrección del movimiento de la cámara.** Utilizamos puntos de calibración para corregir las rotaciones y traslaciones de las imágenes en el plano de la escena. Aunque son imperceptibles los efectos de acercamiento/alejamiento (*i.e. zoom*), también permite su corrección. Los puntos de calibración consisten en señalar dos puntos físicamente fijos

que se presenten en las imágenes; las coordenadas relativas entre ellos permiten rectificar la posición del eje coordenado y el testigo métrico. Aquí, los puntos seleccionados fueron: **1)** el cruce visual entre el esquinero de la tercera cuerda y el poste superior derecho y **2)** la esquina donde se interceptan las líneas del poste inferior y la reja de contención a la derecha de la imagen, ver Fig. 3.1.

- 5. Demarcación de la distancia y tiempo de contacto.** Utilizando la herramienta de zoom, marcamos manualmente las coordenadas donde los pies de Rey Misterio impactan con el hombro de su rival. Entonces, la distancia de contacto fue de 0.05 m en un tiempo de 0.01 s. Esta información es importante para estimar la fuerza neta en la colisión.

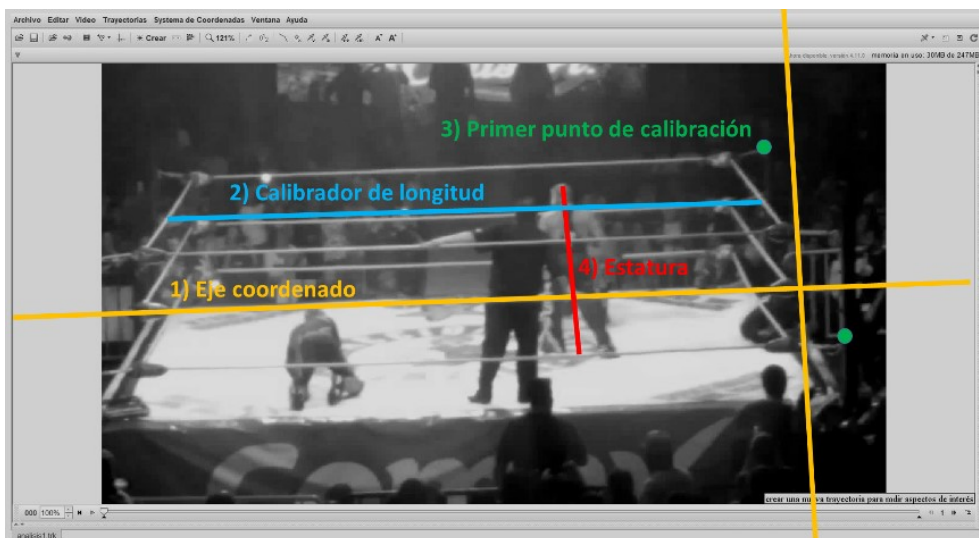


Figura 3.1: Captura de pantalla del video estudiado en el programa Tracker, marcado con colores: 1) el eje coordenado, 2) el calibrador de longitud, 3) el primer y segundo punto de calibración y 4) la estatura del luchador “rey misterio”.

3.2. Cálculo de la fuerza asociada al impacto

En la colisión de un objeto puntal, la fuerza es representada como una función impulsiva $\mathbf{F}(t)$. Es decir, la fuerza varía en un intervalo temporal (en que sucede el contacto) desde un valor cero a un máximo único, y finalmente regresa a cero cuando se pierde el contacto; pero tal comportamiento puede sustituirse numéricamente por una fuerza neta y constante durante ese

lapso. Por la resolución y la frecuencia de registro del video estudiado, esta simplificación es adecuada. Por tanto, la fuerza neta del impacto F se puede obtener multiplicando la masa de las piernas m por la distancia de contacto entre los cuerpos L , dividiendo entre el cuadrado del tiempo de contacto t :

$$F = \frac{mL}{t^2} \quad (3.1)$$

En esas fechas, de acuerdo con compañías que contrataron al luchador, la masa de Rey Misterio¹ era de 79 Kg. Aunque, como se observa en el video, únicamente las piernas son impulsadas para golpear el cuerpo de su rival. Los brazos, el torso, la cabeza, entre otras partes, no participan en el impacto. En la literatura de antropología encontramos que las piernas representan aproximadamente el 24.43 % de la masa corporal total. Con la magnitud de la masa rectificada, la distancia y tiempo de contacto podemos estimar la fuerza neta del impacto.

3.2.1. Análisis de propagación de errores por cálculo determinista

Si, la fuerza neta en el impacto es obtenida por la Ec. 3.1, de acuerdo con la teoría de propagación de incertidumbres [55], el error relativo del cálculo de la fuerza es la suma de los errores relativos de las componentes, es decir:

$$\frac{\Delta F}{|F|} = \frac{\Delta m}{|m|} + \frac{\Delta L}{|L|} + 2\frac{\Delta t}{|t|}, \quad (3.2)$$

donde Δx representa el error asociado al parámetro² x . Aquí, el desplazamiento de los píxeles L_p es transformado en desplazamiento métrico L mediante una función lineal que utiliza la calibración entre píxeles C_p y el testigo métrico en el video C . Obteniendo:

$$\frac{\Delta F}{|F|} = \frac{\Delta m}{|m|} + \frac{\Delta L_p}{|L_p|} + \frac{\Delta C_p}{|C_p|} + \frac{\Delta C}{|C|} + 2\frac{\Delta t}{|t|}. \quad (3.3)$$

En el caso estudiado, si la fuente de medición fuera primaria, utilizando balanzas convencionales (± 0.5 kg), flexómetros estándar (± 0.005 m), sus contribuciones en la propagación de errores serían menores del 1 %; pero considerando que el video se constituye a 30 fotogramas por segundo (± 0.0165 s), el tiempo es la principal fuente de error, aportando un 33 % a la fuerza neta

¹El evento fue organizado por un particular del cual no se encontraron datos.

²El parámetro x se refiere a cualquier variable que se encuentre dentro de la función, en este caso puede ser: la fuerza, la masa, la distancia o el tiempo.

medida. Entonces, la fuerza es 136 ± 46 N (33.7%). Lo que implica que la máxima fuerza posible es 182 N.

Retomando, la Ec. 3.3 nos permite calcular las cotas asociadas a la fuerza neta y es mayor que la incertidumbre considerando independencia estadística entre parámetros. Además, permite analizar por partes la importancia de los parámetros para obtener la fuerza. Por ejemplo, suponiendo que se puedan controlar los parámetros de esta ecuación, se prefiere utilizar una masa mayor y un instrumento con mayor precisión para atenuar el efecto de la propagación de errores. Los errores relativos a la calibración se pueden disminuir seleccionando dentro de las imágenes del video un testigo métrico preciso en longitud (e.i. de varias cifras significativas) y que abarquen una amplia distancia entre pixeles. En comparación con el resto de parámetros, el tiempo es el doble de susceptible en propagar el error; para mejorar este parámetro sería conveniente contar con cámaras de mayor velocidad para que la incertidumbre relativa del tiempo disminuya.

Desafortunadamente, en investigaciones forenses tales parámetros son incontrolables. De hecho, presentan algunos problemas en la exactitud y vigencia de la información obtenida. Por ejemplo, en relación a la obtención del valor de la masa por medio de fuentes secundarias: el deportista puede variar de peso desde que fue medido, la medición entre las cuerdas del cuadrilátero puede variar un par de centímetros. Además, la distancia y tiempo de impacto puede ser medida de modo ligeramente distinto por otros investigadores. Finalmente, representa un problema conceptual, el hecho de que: todos los valores dentro de la cota obtenida por la Ec. 3.3 cuentan con la misma indefinición en la probabilidad de suceder, por lo que siempre es preferible reportar un valor extremo que el central, y dependiendo de la causa (del abogado o el fiscal) puede ser la magnitud mínima en lugar del máximo.

El cálculo del error asociado a la media por cálculo determinista es adecuado cuando realizamos la medición mediante fuentes primarias y el error aleatorio es pequeño. Pero en varias situaciones forenses se requiere considerar la variabilidad en la medición; por ello nos apoyamos en la técnica Montecarlo para simular el registro de distintas medidas y observar como esta variabilidad afecta al valor promedio.

3.2.2. Implementación de la técnica Montecarlo

Otro ejemplo del método Montecarlo propuesto en la Sec. 2.3.2 donde se obtuvo el valor de la velocidad final en el caso que implicó a dos vehículos en movimiento que colisionaron y luego se proyectaron sobre el arroyo de circulación contraria, a cinco metros a desnivel, es el expuesto en este capítulo donde se busca calcular la fuerza neta en las patadas voladoras del Rey

Misterio hacia el hijo del perro Aguayo. Para esto se tomaran como valores centrales los calculados preliminarmente mediante el video-análisis. También consideraremos que la masa puede variar diez kilogramos, que la distancia de contacto fluctúa centímetros y que el tiempo oscila medio fotograma³, todos ellos implican valores muy altos, la Tabla 3.1 resume estos valores. Así, empleando la Ec. 3.2: el error porcentual de la fuerza neta será de 106 %; a esto nos referíamos a descomunal, pero esperamos que el proceso aleatorio compense esta cota extrema.

Tabla 3.1: Valores para estimar la fuerza de impacto, valores de tolerancia para la simulación numérica y su error porcentual asociado.

| Variable | x | x_c | $100(x_c/x)$ |
|-------------------|------|--------|--------------|
| Masa, m (kg) | 79 | 10 | 13 % |
| Longitud, L (m) | 0.05 | 0.03 | 60 % |
| Tiempo, t (s) | 0.1 | 0.0165 | 16.5 % |

De tal modo, la Ec. 3.1 adquiere la siguiente estructura:

$$F_{MC} = MC_N \left[\frac{(m \pm m_c)(L \pm L_c)}{(t \pm t_c)^2} \right]. \quad (3.4)$$

MC_N representa el proceso aleatorio que se repetiría N veces, en nuestro caso equivale a un millón de ciclos, ejecutados durante 2.5 s en una computadora convencional⁴. F_{MC} es una distribución estadística de la fuerza; su análisis permite obtener valores representativos y cotas asociadas. En el Apéndice-B.8 se presenta el código fuente escrito en *Octave*.

El núcleo de la técnica Montecarlo consiste en multiplicar el valor de tolerancia por (*rand -rand*), donde *rand* es la función de *Octave* que genera un número aleatorio entre 0 y 1, en cada ciclo. Es decir, se produce un número aleatorio, que es restado por otro número aleatorio (de la operación esperamos un número entre -1 y 1), este último valor se multiplica por el valor de tolerancia, y se suma al valor estimado en el video análisis. Finalmente, del millón de valores de fuerza neta, se hace una agrupación de 100 parcelas para realizar el análisis estadístico. Este algoritmo fue el óptimo para lograr la mayor precisión entre los datos simulados y el modelo estadístico de distribución

³Tomando en cuenta que la capacidad de la cámara de los celulares es de 30 fotogramas por segundo promedio, esto quiere decir que cada fotograma equivale a 1/30 de segundo promedio.

⁴Se toma como computadora convencional un equipo que cuente con un procesador Intel Core i5 o equivalente, y al menos 4 GB de memoria RAM.

normal. Así, la función de ajuste fue:

$$F_{MC} \approx Ae^{-\frac{(F-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (3.5)$$

donde, A es directamente proporcional al máximo de la distribución, F es la fuerza de impacto, μ es el promedio en los datos distribuidos y σ es la desviación estándar.

3.2.3. Resultados parciales

Evaluación del ajuste del modelo a los datos simulados

Encontramos que el modelo gaussiano se ajusta adecuadamente a los datos simulados. Cuenta con una correlación de $R^2 = 0.991$, (ver Fig. 3.2A), la cual es aceptable. De hecho, como muestra la Fig. 3.2B), el aparejamiento del modelo y los datos simulados puede ajustarse con una línea recta, obteniendo una pendiente $m = 0.986$ (el valor ideal es 1.000), y el parámetro independiente $b = 0.003$ (el valor ideal es 0.000) y una correlación por el ajuste lineal de 0.985, suficientemente cercana a la unidad, el valor ideal. Completando, obtuvimos una diferencia máxima de 10% entre cada punto del modelo y los datos simulados, (ver Fig. 3.2C), disminuyendo notablemente la diferencia (menor al 4%) entre puntos para valores altos de la fuerza. En otras palabras, es aceptable utilizar el modelo gaussiano para representar la tendencia de los datos simulados.

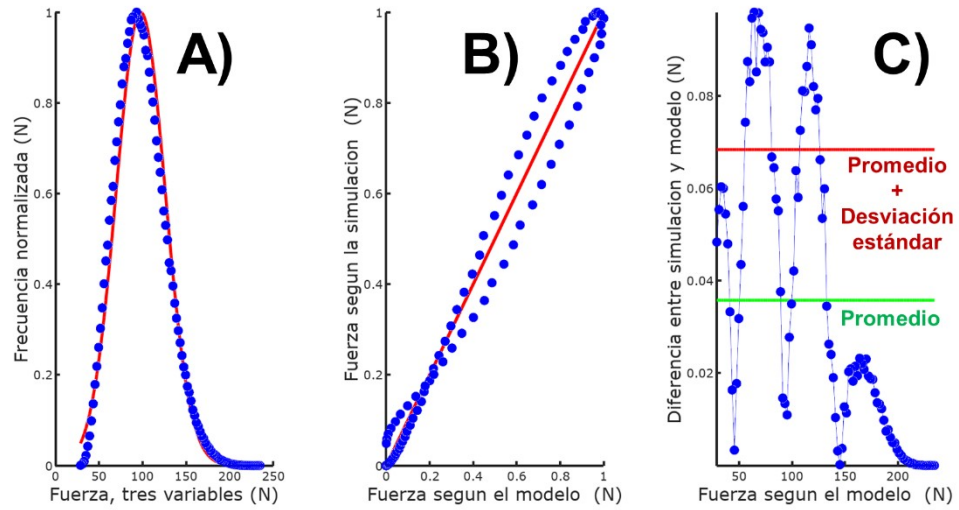


Figura 3.2: A) Modelo gaussiano ajustado a los datos simulados, B) ajuste entre modelo y los datos simulados a una línea recta, C) diferencia entre modelo y datos simulados (línea verde promedio, línea roja cota de una sigma).

3.3. Contrastación experimental

Como se menciona al inicio del capítulo, y con el fin de comprobar la validez del método Montecarlo propuesto, se realizaron dos experimentos para medir la fuerza neta aplicada sobre un costal: en el primer caso se impactó un puño contra el costal; en el segundo caso, utilizamos un péndulo para golpear el costal

Para ambos casos, para monitorear los efectos se colocaron dos videocámaras a una distancia⁵ de $8 \pm 0.0005\text{m}$ y perpendicular a la dirección del movimiento del puño. Una de las cámaras corresponde a la Chronos 1.4 de la marca *Kron Technologies*, ver Fig 3.3, esta es de alta velocidad y se configuró para registrar 1057 fotogramas por segundo; mientras que la otra cámara es de un *smartphone*, Motorola Moto G5 plus, configurada para grabar 30 fotogramas por segundo.

En el primer caso, para calibrar las distancias dentro del video se colocó una caja rectangular de $24.2 \pm 0.05\text{cm}$ de largo y $7.5 \pm 0.05\text{cm}$ de alto ajustada en el borde de la mesa, como se muestra en la Figura 3.4.

Mientras que para el segundo, se utilizó la distancia entre las cuerdas, $21.5 \pm 0.05\text{cm}$, que sujetaban el tubo como se muestra en la Fig 3.5, como segundo objeto de referencia se usó un cubo de ribik de $5.5 \pm 0.05\text{cm}$.

⁵Para las mediciones correspondientes a distancias se utilizó una cinta métrica graduada en mm, por tanto tomamos como error la mitad de la mínima escala



Figura 3.3: Imágenes de la videocámara Chronos 1.4 de la marca *Kron Technologies*. De derecha a izquierda: isométrica frontal, isométrica posterior, y vista lateral del dispositivo.

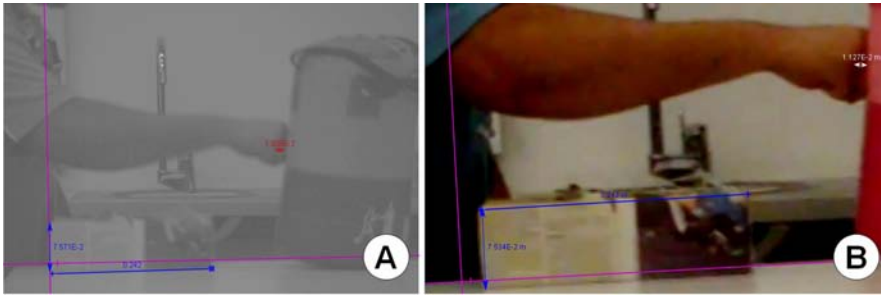


Figura 3.4: Captura de pantalla del análisis del video para el experimento Puño-costal. Para ambas fotos: en color azul se muestran los testigos métricos usados, en rosa los ejes. Para A: video realizado con la cámara Chronos 1.4, en blanco y negro para alcanzar un mayor contraste y precisión, en rojo se muestra la distancia de contacto entre el puño y el costal. Para B: video realizado con la cámara del celular Moto G5 Plus, en blanco se muestra la distancia de contacto entre el puño y el costal.

Este arreglo pretendía recrear los sistemas de videograbación que comúnmente se encuentran en la calle, en tales dispositivos la incertidumbre asociada puede ser grande por tan solo las características tecnológicas: tiempo de captura y resolución. Los datos procedente del *smarphone* los etiquetamos como "SCel". Al mismo tiempo se tiene un sistema con la suficiente información para que el error asociado sea minimizado, el registrado por la videocámara rápida y etiquetado como "SChr". De esta manera y utilizando el método Montecarlo esperamos que la medición e incertidumbre del resultado obtenido de SCel se traslape con el obtenido en el sistema SChr.

Para el primer experimento consideramos que el golpe se realizó solo extendiendo el brazo; al no intervenir otra parte del cuerpo en movimiento,

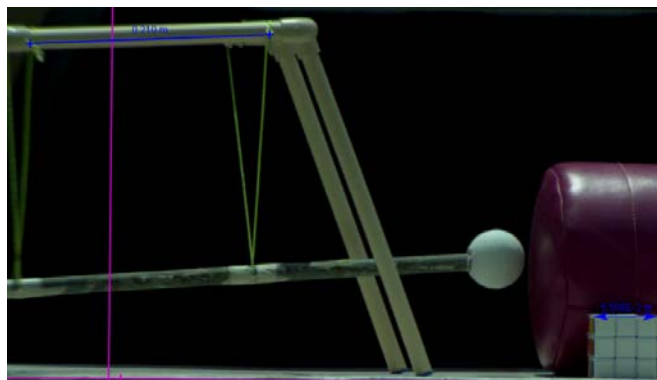


Figura 3.5: Captura de pantalla del video realizado con la cámara chronos 1.4 donde se muestra el arreglo del experimento Pendulo-Costal. En color azul se muestran los testigos métricos usados.

podemos comparar con la patada de canguro ejecutada por los luchadores (consistente en una extensión de las piernas horizontal), mientras el cuerpo se encuentra suspendido en el aire.

Por otro lado, para ambos experimentos tomamos en cuenta: 1) El golpe debe estar centrado. 2) El costal se encontraba en reposo sobre la mesa. 3) Utilizamos el mismo programa de computo para estudiar todos los casos: *Tracker*.

3.3.1. Resultados parciales

Comparación de los resultados obtenidos entre los sistemas

Al realizar el primer experimento se obtuvieron los datos mostrados en la Tabla 3.2. Tomando el tiempo de la cámara chronos se obtiene una fuerza de $45.694 \pm 0.3157\text{N}$ que se tomara como parámetro de comparación. Mientras que usando los datos extraídos de la cámara de celular y aplicando el código del metodo de Montecarlo usado en el caso del hijo del Perro Aguayo se obtiene una fuerza de $45.6635 \pm 4.1929\text{N}$ con una correlación de $R^2 = 0.99627\%$ en el modelo gaussiano, como se muestra en la figura 3.6A), también al realizar una comparación entre el modelo y los datos obtenidos de la simulación con una linea recta, se obtiene una pendiente de $m = 0.978$ y el parámetro $b = 0.016$, tomando en cuenta que el valor ideal para a,b es de 1,0 respectivamente, ver figura 3.6B). Por ultimo se observa como la fuerza promedio resultante del sistema SChr se encuentra dentro del primer σ obtenido con el metodo Montecarlo para el sistema SCel.

Por otro lado, para el segundo experimento se obtienen los datos de la Tabla 3.3, como se puede observar y utilizando únicamente la ecuación 3.1

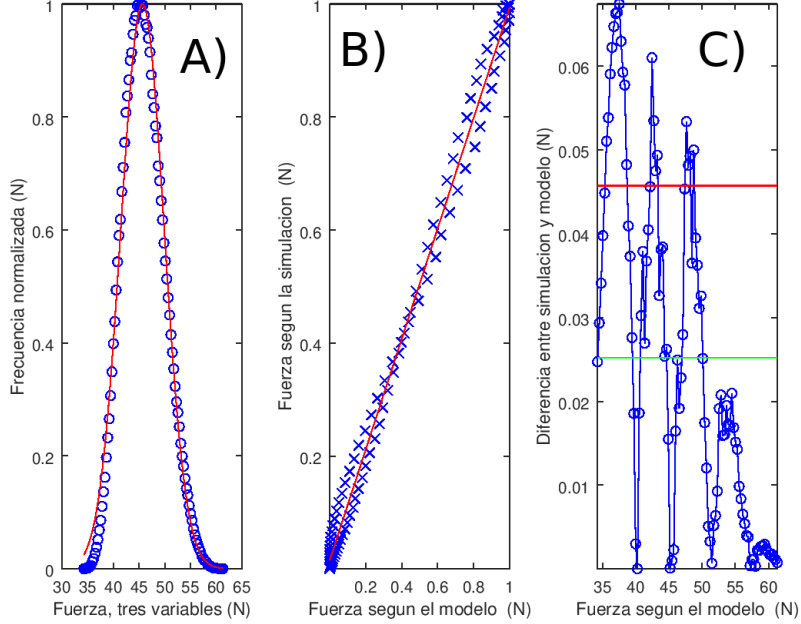


Figura 3.6: Para el experimento puño-costal: A) Modelo gaussiano ajustado a los datos simulados, B) ajuste entre modelo y los datos simulados a una línea recta, C) diferencia entre modelo y datos simulados (línea verde promedio, línea roja cota de una sigma).

Tabla 3.2: Valores para estimar la fuerza de impacto en el experimento del puñetazo.

| Variable | x | x_c | $100(x_c/x)$ |
|-------------------------------|-------|-----------|--------------|
| Masa, m (kg) | 100 | 10 | 10 % |
| Longitud, L (cm) | 1.497 | 0.05 | 3.34 % |
| Tiempo Chronos, t_{chr} (s) | 0.181 | 10^{-4} | 9.46 % |
| Tiempo Celular, t_{cel} (s) | 0.1 | 0.0165 | 16.5 % |

se encuentra una fuerza de $0.036634 \pm 0.08642N$. Al utilizar el método de Montecarlo sobre los datos obtenidos mediante la cámara de celular se obtiene una fuerza promedio de 0.328691 ± 0.078429 con una correlación de $R^2 = 0.96898 \%$ en el modelo gaussiano, esto se puede observar en la figura 3.7A), también observamos como al realizar la comparación entre el modelo y los datos obtenidos de la simulación con una línea recta, obtuvimos una pendiente de $m = 1.029$ y el parámetro $b = 0.032$. Recordemos que

el valor ideal para m y b son 1 y 0, respectivamente, ver figura 3.7B). Así que el modelo gaussiano es aceptable para representar la tendencia de los datos simulados. Por ultimo, se observa como la fuerza promedio resultante del sistema SChr se encuentra dentro del primer σ obtenido con el metodo Montecarlo para el sistema SCell. Es decir, la técnica Montecarlo propuesta permite recuperar la información, de este contexto.

Tabla 3.3: Valores para estimar la fuerza de impacto en el segundo experimento, valores de tolerancia para la simulación numérica y su error porcentual.

| Variable | x | x_c | $100(x_c/x)$ |
|-------------------------------|--------|-----------|--------------|
| Masa, m (kg) | 0.2137 | 0.00005 | 0.023 % |
| Longitud Chronos, L (cm) | 0.006 | 0.0005 | 8.33 % |
| Longitud Celular, L (cm) | 0.007 | 0.0005 | 7.14 % |
| Tiempo Chronos, t_{chr} (s) | 0.035 | 10^{-4} | 9.46 % |
| Tiempo Celular, t_{cel} (s) | 0.067 | 0.0165 | 16.5 % |

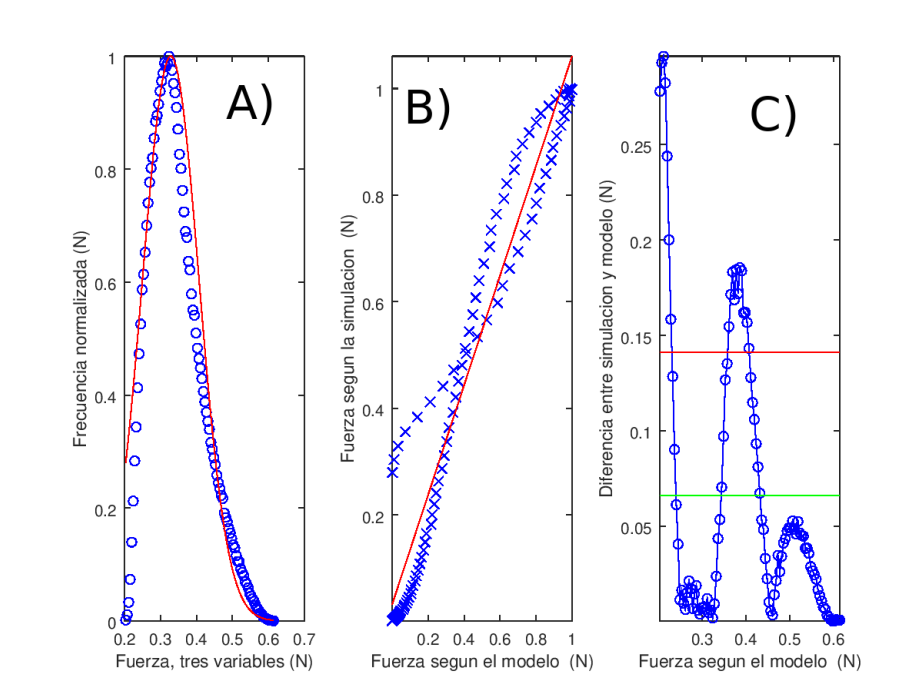


Figura 3.7: Para el experimento péndulo-costal: A) Modelo gaussiano ajustado a los datos simulados, B) ajuste entre modelo y los datos simulados a una línea recta, C) diferencia entre modelo y datos simulados (línea verde promedio, línea roja cota de una sigma).

3.4. Conclusiones de capítulo

- Encontramos que el modelo gaussiano se ajusta adecuadamente a los datos simulados en las secciones 3.2, 3.3.
- Tanto para el experimento Puño-Costal como el Péndulo-Costal desarrollados en la Sección 3.3, se observó que el valor promedio de la fuerza obtenida con el método Montecarlo se encontraba por debajo de la obtenida con la cámara chronos. Sin embargo la fuerza obtenida por el sistema SCRh se encuentra dentro del primer sigma obtenido del método Montecarlo, con esto podemos asegurar que se logro recuperar información bajo ciertos criterios.
- Por lo anterior el resultado obtenido en la simulación para el caso del Hijo del Perro Aguayo se puede considerar viable.

Capítulo 4

Conclusiones y prospectiva del trabajo

En función de la evidencia mostrada en este trabajo podemos mencionar nuestras principales conclusiones

- La técnica Montecarlo propuesta es un tipo de herramienta, muy útil, de muestreo auxiliar en mediciones. En particular donde se carecen de datos que permitan obtener la incertidumbre mediante cálculo diferencial.
- La propuesta es sencilla de implementar, mucho más que realizar todos los cálculos o contar por módulos con las ecuaciones básicas de los fenómenos. Pero su adopción por parte de los operarios forenses puede mostrar rechazo. En todo caso, sostenemos que todas los dictámenes periciales deben presentar un análisis de posibles errores o incertidumbres.
- Mostramos que la propuesta se puede utilizar en diferentes casos forenses, pero se requiere una perspectiva cuantitativa en todos. Por ello, es importante contrastar con diferentes situaciones. Por ello enfatizamos que esta propuesta teóricamente es coherente con el modelo gaussiano y desde el punto de vista empírico brinda resultados congruentes.

4.1. Prospectiva de la investigación

Para el área forense esta propuesta de asociar la incertidumbre a una medida requiere más trabajo teórico y empírico, que permita la comparación de los resultados, y que precise la interpretación. Para ello al corto plazo se pueden realizar varias acciones, como las siguientes:

- Refinar los experimentos controlados, es decir que se involucre la colisión de vehículos u objetos. Utilizar un protocolo de doble ciego para que un investigador, por un lado, cuente con toda la información; en contraste, otro investigador solo contaría con información sesgada, propia para utilizar la técnica Montecarlo. Para después comparar resultados.
- Realizar un estudio comparativo teórico entre las propuestas. Con el fin de consolidar la más exacta y a la vez la que mejor se pueda presentar en la corte. Por ejemplo, al momento de redactar las palabras finales de este trabajo. Encontramos un sitio web a cargo de *National Institute of Standards and Technology*, llamada: Uncertainty Machine, donde se muestra una calculadora Montecarlo, con opciones para seleccionar las condiciones de diferentes parámetros, funciones y distribuciones de probabilidad. La construcción de este instrumento, en principio, no fue forense. Sin embargo, adaptamos nuestra propuesta a la interface, con lo que obtuvimos validación de los resultados que presentamos en esta tesis. Trabajos futuros contrastaran más a detalle nuestra propuesta y la del NIST.
- Programar una herramienta cómoda para que el operario forense o el investigador ponga a prueba esta propuesta.
- Utilizar esta propuesta para analizar otros casos forenses cerrados.

4.2. Palabras finales

El método Montecarlo es un herramienta, no un fin en sí. Debería utilizarse como un último recurso en los casos donde se carece de la información pertinente. En esta etapa, considero que antes que se use como parte de una prueba pericial deben realizarse más investigaciones al respecto, como las mencionadas en la Sección 4.1.

Anexos

Apéndice A

Fundamentos del programa Octave

Octave es un lenguaje de alto nivel que permite realizar cálculos numéricos en la computadora, además es un *software* capaz de interpretar su lenguaje para realizar las operaciones. *Octave* ofrece una interfaz de usuario cómoda, interactiva, orientada a línea de comandos, pero también puede ser operada en modo no-interactivo, leyendo sus órdenes a través de fichero [43].

En un principio, *Octave* fue desarrollado para fortalecer el proceso enseñanza y aprendizaje a los estudiantes de la universidad de Texas, sin que estos tuvieran que enfrentarse a las dificultades de la programación. Su flexibilidad lo hizo popular y su uso se expandió a tareas relacionadas con el álgebra lineal y las ecuaciones diferenciales; obteniendo aportes de entre su comunidad de usuarios.

Otros programas de características similares a *Octave* (y compatibles hasta cierto grado) son el lenguaje *R* de la FSF, *Matlab* y *Scilab* [16]. Estos dos últimos propietarios. *Octave* es software libre (bajo licencia GNU), lo que significa que se puede usar y redistribuir libremente, y que cualquiera puede ayudar para mejorarlo. *Octave* está disponible en Internet en: www.octave.org

Porque es flexible, *freeware* y por fácil de aprender, optamos por *Octave* como el lenguaje para trabajar los temas de esta tesis.

Apéndice B

Códigos Octave programados

A continuación, a modo de ser transparentes con los métodos utilizados en este trabajo, y fortalecer el compartir la información, presentamos los códigos esenciales de los programas realizados. Debemos mencionar, que si bien realizamos una amplia documentación en los *scripts*, se omitieron los acentos en las palabras.

B.1. Encuentra el valor de π

Esta rutina utilizamos para encontrar el valor de π

```
1 %% Guion para probar la estabilidad de la generacion de numeros
  aleatorios.
2 %% %Autor: Levi Jahzeel Curiel Sanchez y Vicente Torres Zuniga
3 %% %Fecha: 10-ene-2018
4 tic % Inicia el reloj
5 clc; clear; close all %% Limpieza de la pantalla, memoria y
  ventanas.
6 %CALCULOS
7 n =7; % 10^n valos maximo de puntos
8 Valor_Pi= zeros(n, 1);
9 for j = 1:n
10     Contador_Interno = 0;
11     N = 10^j;
12     r = sqrt( (rand(N,1)).^2 + (rand(N,1)).^2); % Corazon del
      Montecarlo
13     Contador_Interno = sum( r < 1);
14     Valor_Pi(j,1) = 4*Contador_Interno/N;
15 end
16 ErrorPorcentual = 100*abs(Valor_Pi - pi)/pi
17 [frec , radio] = hist(r, 100);
18 subplot(2,1,1) ; plot(ErrorPorcentual, 'or', "markersize", 15, "
  markerfacecolor", "red")
```

```

19 xlabel('Numero puntos, 10^N',"fontsize", 30); ylabel('Error
    porcentual',"fontsize", 30);
20 set(gca, "linewidth", 4, "fontsize", 20)
21 subplot(2,1,2); plot(radius, freq/1000, 'or',"markersize", 15,"
    markerfacecolor", "red")%como un sonar
22 axis('tight')
23 xlabel('Longitud del radio (s.u)',"fontsize", 30); ylabel('
    Frecuencia de eventos, 10^3',"fontsize", 30);
24 set(gca, "linewidth", 4, "fontsize", 20)
25 toc %se imprime el reloj
26 %FIN DE GUION

```

B.2. Mapa puntos dentro de un cuadrado

Esta rutina utilizamos para construir la Fig. 1.2.

```

1 %% Guion para graficar puntos en un circulo
2 %% Autores: Levi Jahzeel Curiel Sanchez y Vicente Torres Zuniga
3 %% Fecha: 10-ene-2018
4 clc; clear; close all %%Limpia memoria.
5 tic %inicia reloj
6 N = 5*10^3; %numero de puntos
7 x = rand(N, 1); y = rand(N, 1);
8 r = sqrt((x).^2 + (y).^2);
9 A = [x, y, r] ;
10 hold on
11 idx1 = find(A(:,3) < 1);
12 plot(A(idx1,1), A(idx1,2), 'ob')
13 idx2 = find(A(:,3) >=1);
14 plot(A(idx2,1), A(idx2,2), 'xr')
15 xlabel('Coordenada X'); ylabel('Coordenada Y')
16 hold off
17 toc %imprime el reloj; Fin de guion

```

B.3. Función normal dentro de funciones

```

1 %% Guion para probar la estabilidad de la generacion de numeros
    aleatorios.
2 %% Autor: Levi Jahzeel Curiel Sanchez y Vicente Torres Zuniga
3 %% Fecha: 1-feb-2018
4 clc; clear; close all %% Limpieza de la pantalla, memoria y
    ventanas.
5 %DATOS DE ENTRADA
6 x = 0.1:1:100.1;
7 mu = 50;

```

```

8 sigma = 30;
9 y = 50*exp(-((x-mu).^2)/(2*sigma.^2)); %FUNCION GAUSSIANA
10 figure; plot(x,y)
11 figure; plot(x, (1./(y.^2)))
12 %FIN DE GUION

```

B.4. Comportamiento de t. Montecarlo dentro de otras funciones

```

1 %% Guion para probar la estabilidad de la generacion de numeros
  aleatorios.
2 %%%Autor: Levi Jahzeel Curiel Sanchez y Vicente Torres Zuniga
3 %%%Fecha: 10-ene-2018
4 tic % inicia el reloj
5 clc; clear; close all %% Limpieza de la pantalla, memoria y
  ventanas.
6 %DATOS DE ENTRADA
7 N = 1e6; %Numero de ciclos
8 Medida = 100; %
9 tolerancia1 = 50; % Tolerancia alta
10 tolerancia2 = 25; % Tolerancia media
11 tolerancia3 = 5; % Tolerancia baja
12 %CALCULOS
13 %VECTOR MONTECARLO
14 MontecarloA1 = Medida + tolerancia1*(rand(N,1) - rand(N,1));
15 MontecarloB1 = Medida + tolerancia2*(rand(N,1) - rand(N,1));
16 MontecarloC1 = Medida + tolerancia3*(rand(N,1) - rand(N,1));
17 % Grupo de funciones de alta tolerancia
18 FuncionA1 = MontecarloA1; %SE CREAN CURVAS ENVOLVENTES
  DEPENDIENDO DE LA FUNCION
19 FuncionA2 = (MontecarloA1).^2; %
20 FuncionA3 = sqrt(MontecarloA1); %
21 FuncionA4 = 1./(MontecarloA1); %
22 FuncionA5 = cos(MontecarloA1); %
23 FuncionA6 = (MontecarloA1+MontecarloA1); %
24 FuncionA7 = log(MontecarloA1); %
25 % Grupo de funciones de media tolerancia
26 FuncionB1 = MontecarloB1;
27 FuncionB2 = (MontecarloB1.^2); %
28 FuncionB3 = sqrt(MontecarloB1);
29 FuncionB4 = 1./(MontecarloB1);
30 FuncionB5 = cos(MontecarloB1);
31 FuncionB6 = (MontecarloB1+MontecarloB1); %
32 FuncionB7 = log(MontecarloB1);
33 % Grupo de funciones de baja tolerancia
34 FuncionC1 = MontecarloC1;
35 FuncionC2 = (MontecarloC1.^2);
36 FuncionC3 = sqrt(MontecarloC1);

```

```

37 FuncionC4 = 1./(MontecarloC1);
38 FuncionC5 = cos(MontecarloC1);
39 FuncionC6 = (MontecarloC1+MontecarloC1);
40 FuncionC7 = log(MontecarloC1);
41 %PARCELANDO LOS DATOS
42 [frecA1 , valorA1] = hist(FuncionA1 , 100);
43 [frecA2 , valorA2] = hist(FuncionA2 , 100);
44 [frecA3 , valorA3] = hist(FuncionA3 , 100);
45 [frecA4 , valorA4] = hist(FuncionA4 , 100);
46 [frecA5 , valorA5] = hist(FuncionA5 , 100);
47 [frecA6 , valorA6] = hist(FuncionA6 , 100);
48 [frecA7 , valorA7] = hist(FuncionA7 , 100);
49
50 [frecB1 , valorB1] = hist(FuncionB1 , 100);
51 [frecB2 , valorB2] = hist(FuncionB2 , 100);
52 [frecB3 , valorB3] = hist(FuncionB3 , 100);
53 [frecB4 , valorB4] = hist(FuncionB4 , 100);
54 [frecB5 , valorB5] = hist(FuncionB5 , 100);
55 [frecB6 , valorB6] = hist(FuncionB6 , 100);
56 [frecB7 , valorB7] = hist(FuncionB7 , 100);
57
58 [frecC1 , valorC1] = hist(FuncionC1 , 100);
59 [frecC2 , valorC2] = hist(FuncionC2 , 100);
60 [frecC3 , valorC3] = hist(FuncionC3 , 100);
61 [frecC4 , valorC4] = hist(FuncionC4 , 100);
62 [frecC5 , valorC5] = hist(FuncionC5 , 100);
63 [frecC6 , valorC6] = hist(FuncionC6 , 100);
64 [frecC7 , valorC7] = hist(FuncionC7 , 100);
65
66 hold on
67 plot(valorA1 , frecA1/1000 , 'k',"linewidth",6); plot(valorB1 ,
    frecB1/1000 , 'b',"linewidth",4); plot(valorC1 , frecC1/1000 , '
    m',"linewidth",2);
68 ylabel("#eventos , 10^3","fontsize", 30); xlabel ("VALOR LINEAL","
    fontsize", 30);
69 axis('tight'); set(gca, "linewidth", 4, "fontsize", 20)
70 hold off
71
72 figure
73 subplot(3,3,1); hold on
74 plot(valorA6 , frecA6/1000 , 'k',"linewidth",6); plot(valorB6 ,
    frecB6/1000 , 'b',"linewidth",4); plot(valorC6 , frecC6/1000 ,
    'm',"linewidth",2)
75 ylabel("#eventos , 10^3","fontsize", 30); xlabel (" A) VALOR SUMA
    ","fontsize", 30);
76 axis('tight'); set(gca, "linewidth", 4, "fontsize", 20); hold off
77
78 subplot(3,3,2); hold on
79 plot(valorA2/1000 , frecA2/1000 , 'k',"linewidth",6); plot(valorB2

```

```

      /1000, freqB2/1000, 'b',"linewidth",4); plot(valorC2/1000,
      freqC2/1000, 'm',"linewidth",2)
80 xlabel ("B) VALOR CUADRADO, 10^3","fontsize", 30);
81 axis('tight'); set(gca, "linewidth", 4, "fontsize", 20); hold off
82
83 subplot(3,3,3); hold on
84 plot(valorA3, freqA3/1000, 'k',"linewidth",6); plot(valorB3,
      freqB3/1000, 'b',"linewidth",4); plot(valorC3, freqC3/1000, '
      m',"linewidth",2)
85 xlabel ("C) VALOR RAIZ","fontsize", 30);
86 axis('tight'); set(gca, "linewidth", 4, "fontsize", 20); hold off
87
88 subplot(3,3,4); hold on
89 plot(valorA4*1e3, freqA4/1000, 'k',"linewidth",6); plot(valorB4*1
      e3, freqB4/1000, 'b',"linewidth",4); plot(valorC4*1e3, freqC4
      /1000, 'm',"linewidth",2)
90 xlabel ("D) VALOR INVERSO, 10^{-3}","fontsize", 30);
91 axis('tight'); set(gca, "linewidth", 4, "fontsize", 20); hold off
92
93 subplot(3,3,5); hold on
94 plot(valorA5, freqA5/1000, 'k',"linewidth",6); plot(valorB5,
      freqB5/1000, 'b',"linewidth",4); plot(valorC5, freqC5/1000, '
      m',"linewidth",2)
95 xlabel ("E) VALOR SENO","fontsize", 30);
96 axis('tight'); set(gca, "linewidth", 4, "fontsize", 20); hold off
97
98 subplot(3,3,6); hold on
99 plot(valorA7, freqA7/1000, 'k',"linewidth",6); plot(valorB7,
      freqB7/1000, 'b',"linewidth",4); plot(valorC7, freqC7/1000, '
      m',"linewidth",2)
100 xlabel ("F) VALOR LOGARITMO","fontsize", 30);
101 axis('tight'); set(gca, "linewidth", 4, "fontsize", 20); hold off
102 toc %se imprime el reloj
103 %FIN DE GUION

```

B.5. Algoritmo de referencia en hecho de tránsito

```

1 % Reconstruccion de los calculos del articulo de Martinez.
2 % Autor: Levi Jahzeel Curiel Sanchez y Vicente Torres Zuniga
3 % Fecha: 16-feb-2018
4 tic % inicia el reloj
5 clc; clear; close all % Limpia memoria
6 %DECLARACION DE FUNCIONES
7 function vel_peu = vp(mu_peu, mu_ies, ma_peu, ma_ies, dist)
8     primo = ener_k(mu_peu, mu_ies, ma_peu, ma_ies, dist);
9     segu = 2*9.8*mu_peu.*(13.6+dist);
10    vel_peu = sqrt(primo + segu);

```



```

11 end
12 function velocidad_cua = ener_k (mu_peu, mu_ies, ma_peu, ma_ies,
    dist)
13     primer_termino = sqrt(2*9.8* mu_peu *(14.3- dist));
14     segundo_termino = seg_ter (mu_ies, ma_peu, ma_ies, dist);
15     velocidad_cua = (primer_termino + segundo_termino).^2;
16 end
17 function segundo_termino = seg_ter (mu_ies, ma_peu, ma_ies, dist)
18     prim = (11.38 - dist) .* sqrt(2*9.8*mu_ies);
19     seg = ((11.38 - dist).^2 + 4.93^2).^(1/4);
20     div = prim ./ seg;
21     segundo_termino = masa_red(ma_ies,ma_peu) .* div;
22 end
23 function cos_masa = masa_red(a,b)
24     cos_masa = a./b;
25 end
26 function vel_p = velocidad_peugeot(mu_peu, mu_ies, ma_peu, ma_ies
    , dist)
27     vel_p = sqrt(((sqrt(2*9.8*mu_peu*(14.3- dist)) + (ma_ies./ma_peu
        ).*(((11.38 - dist) * sqrt(2*9.8*mu_ies))/(((11.38 - dist)^2
            + 4.93^2)^(1/4)))) )^2 + (2*9.8*mu_peu*(13.6+ dist)));
28 end
29 %Declaracion de variables
30 N = 1e6; %Numero de ciclos
31 %Masa en kilogramos, para ambos pasajeros el peso debe variar
    entre 0 y el maximo,
32 %mientras, el peso del carro permanece fijo.
33 %peu->carro Peugeot 504, ies->carro IES Super Ammerica
34 masa_peu = 1267;
35 masa_pasajero_peu = 60;
36 masa_ies = 550;
37 masa_pasajero_ies = 40;
38 %Coeficiente de friccion
39 mu_peu = 0.7;
40 mu_ies = 0.7;
41 tolerancia_mu = 0.2;
42 %Distancia de 3 metros como tolerancia, ie +-1.5
43 distancia = 3;
44 tolerancia_dist = 1.5;
45 %%CALCULOS
46 %%VECTORES MONTECARLO
47 %El articulo menciona la distancia con una tolerancia de 3
    metros
48 MASA_PEU = masa_peu + masa_pasajero_peu*rand(N,1);
49 MASA_IES = masa_ies + masa_pasajero_ies*rand(N,1);
50 DISTANCIA = distancia*rand(N,1) - tolerancia_dist; % Asi lo tiene
    reportado en el articulo pero me da una dispersion de datos
    muy grande
51 MU_PEU = mu_peu + tolerancia_mu*rand(N,1);

```

```

52 MU_IES = mu_ies + tolerancia_mu*rand(N,1);
53 %Considerando 1 variable
54 VELOCIDAD_PEU_MA = vp(mu_peu, mu_ies, MASA_PEU, MASA_IES,
    distancia);
55 VELOCIDAD_PEU_MU = vp(MU_PEU, MU_IES, masa_peu, masa_ies,
    distancia);
56 VELOCIDAD_PEU_DIST = vp(mu_peu, mu_ies, masa_peu, masa_ies,
    DISTANCIA);
57 % Considerando el efecto de las 5 variables actuando al mismo
    tiempo
58 VELOCIDAD_P = vp(MU_PEU, MU_IES, MASA_PEU, MASA_IES, DISTANCIA)
    ;
59 [frec , vel] = hist(VELOCIDAD_P, 100); % visualizando los datos
60 %VISUALIZACION DE LOS EFECTOS DE UNA VARIABLE
61 subplot (1,3,1);
62 [frec_mas, velocidad_peu_ma] = hist(VELOCIDAD_PEU_MA, 100); %
    visualizando los datos
63 plot(velocidad_peu_ma*3.6, frec_mas, 'ob') % grafica de los
    puntos obtenidos
64 ylabel("frecuencia de eventos"); xlabel ("Velocidad del Peugeot
    al variar las masas(Km/hr)");
65 %
66 subplot (1,3,2);
67 [frec_distancia , velocidad_peu_dist] = hist(VELOCIDAD_PEU_DIST,
    100); % visualizando los datos
68 plot(velocidad_peu_dist*3.6, frec_distancia , 'ob') % grafica de
    los puntos obtenidos
69 xlabel ("Velocidad del Peugeot al variar la distancia (Km/hr)");
70 %
71 subplot (1,3,3);
72 [frec_mu , velocidad_peu_mu] = hist(VELOCIDAD_PEU_MU, 100); %
    visualizando los datos
73 plot(velocidad_peu_mu*3.6, frec_mu , 'ob'); % grafica de los
    puntos obtenidos
74 xlabel ("Velocidad al variar los coeficientes de friccion (Km/hr)
    ");
75 %CALCULOS Y VISUALIZACION, EFECTO DE LAS 5 VARIABLES
76 [Desviacion_S ,Promedio ,A] = mygaussfit(vel ,frec);
77 Modelo=A*exp(-(vel-Promedio).^2/(2*Desviacion_S^2));
78 Modelo = Modelo/max(Modelo); %normalizacion
79 frec = frec/max(frec);
80 %
81 figure; subplot (1,3,1);
82 plot(vel*3.6, frec , 'ob' ,...
83 vel*3.6, Modelo, '-r') % grafica gaussiana modelada
84 ylabel ("Frecuencia normalizada");
85 xlabel ("Velocidad considerando las tres variables (Km/hr)");
86 %
87 diferencia =abs(frec - Modelo);

```

```

88 prom_dif =mean(diferencia);
89 std_dif =std(diferencia);
90 %
91
92 %% Ajuste a linea recta entre datos montecarlo y modelo
93 p=polyfit(frec , Modelo,1);
94 m=p(1); b=p(2);
95 linea_modelo =m*frec +b;
96 Corre_linea = corr(frec , linea_modelo);
97
98
99 subplot (1,3,2); hold on
100 plot(frec , Modelo, 'xb' ,...
101      frec , linea_modelo, '-r')
102 ylabel("Distribucion de datos simulados");
103 xlabel("Distribucion de datos del modelo");
104 %
105 subplot (1, 3, 3);
106 plot(vel*3.6, diferencia , '-ob' ,...
107      vel*3.6, prom_dif*ones(size(frec)), '-g' ,...
108      vel*3.6, (prom_dif+std_dif)*ones(size(frec)), '-r');
109 ylabel("Diferencia entre distribuciones simulada y modelada");
110 xlabel("Velocidad segun el modelo (Km/hr)");
111 %%CALCULOS PARA GENERAR TABLAS DE COMPARACION
112 % Salida de Valores obtenidos
113
114 disp("VALIDEZ DEL MODELO")
115 disp("Correlacion entre datos simulados y modelo gaussiano:")
116 disp(corr(frec , Modelo)) % correlacion entre los puntos obtenidos
    y la gaussiana modelada
117 disp("parametros de datos linealizados (corr , m, b):")
118 disp([Corre_linea , m, b])
119 disp(" ")
120 disp("COTAS CALCULADAS")
121 disp("El promedio (km/hr) y la desviacion estandar son:")
122 disp([Promedio , Desviacion_S] *3.6) %Km/hr
123 disp(" "); toc %se imprime el reloj; FIN DE GUION

```

B.6. Algoritmo Corregido de la referencia en hecho de tránsito

```

1 %% Simulacion de la colision de dos carros utilizando la ecuacion
    del articulo de Martinez y el metodo de montecarlo en octave
2 %% Autor: Levi Jahzeel Curiel Sanchez
3 %% Fecha: 16-3-2018
4 tic % inicia el reloj
5 clc; clear; close all %% Limpia memoria.
6 %DECLARACION DE FUNCIONES

```

```

7 function vel_peu = vp(mu_peu, mu_ies, ma_peu, ma_ies, dist)
8     primo = ener_k (mu_peu, mu_ies, ma_peu, ma_ies, dist);
9     segu = 2*9.8*mu_peu.*(13.6+dist);
10    vel_peu = sqrt(primo + segu);
11 end
12 function velocidad_cua = ener_k (mu_peu, mu_ies, ma_peu, ma_ies,
13     dist)
14     primer_termino = sqrt(2*9.8* mu_peu *(14.3 - dist));
15     segundo_termino = seg_ter (mu_ies, ma_peu, ma_ies, dist);
16     velocidad_cua = (primer_termino + segundo_termino).^2;
17 end
18 function segundo_termino = seg_ter (mu_ies, ma_peu, ma_ies, dist)
19     prim = (11.38 - dist) .* sqrt(2*9.8*mu_ies);
20     seg = ((11.38 - dist).^2 + 4.93^2).^(1/4);
21     div = prim ./ seg;
22     segundo_termino = masa_red(ma_ies,ma_peu) .* div;
23 end
24 function cos_masa = masa_red(a,b)
25     cos_masa = a./b;
26 end
27 function vel_p = velocidad_peugeot(mu_peu, mu_ies, ma_peu, ma_ies
28     , dist)
29     vel_p = sqrt((sqrt(2*9.8*mu_peu.*(14.3 - dist)) + (ma_ies/ma_peu
30     ).*(((11.38 - dist) .* sqrt(2*9.8*mu_ies))/(((11.38 - dist)^2
31     + 4.93^2).^(1/4)))) ^2 + (2*9.8*mu_peu*(13.6+dist)));
32 end
33 %Masa de los carros en kilogramos(kg), para ambos pasajeros el
34     peso debe variar entre 0 y el maximo que se define en las
35     variables ,
36 %mientras que el peso del carro permanece fijo .
37 %Nomenclatura (peu—>carro Peugeot 504 ,ies —>carro IES Super
38     America)
39 N = 1e6;%
40 masa_peu = 1267;
41 masa_pasajero_peu = 60;
42 masa_ies = 550;
43 masa_pasajero_ies = 40;
44 %Coeficiente de friccion
45 mu_peu = 0.7;
46 mu_ies = 0.7;
47 tolerancia_mu =0.2;
48 %Se toma una distancia de 3 metros como tolerancia , ie +-1.5
49 distancia = 3;
50 tolerancia_dist = 1.5;
51 %CALCULOS
52 %VECTOR MONIECARLO
53 %cantidades totales
54 %En el articulo menciona que lo que varia es la masa del

```

```

    pasajaero entre 0 y la masa maxima delcarada al inicio del
    script
49 % por otro lado el la distancia la toma con una tolerancia de 3
    metros
50 MASA_PEU = masa_peu + masa_pasajero_peu*(rand(N,1) - rand(N,1));
51 MASA_IES = masa_ies + masa_pasajero_ies*(rand(N,1) - rand(N,1));
52 DISTANCIA = distancia*(rand(N,1) - rand(N,1)) - tolerancia_dist;%
    Asi lo tiene reportado en el articulo pero me da una
    dispersion de datos muy grande
53 %DISTANCIA = distancia*rand - distancia*rand; %De esta forma la
    distribucion se observa mejor
54 MU_PEU = mu_peu + tolerancia_mu*(rand(N,1) - rand(N,1));
55 MU_IES = mu_ies + tolerancia_mu*(rand(N,1) - rand(N,1));
56 % Considerando 1 variable
57 VELOCIDAD_PEU_MA = vp(mu_peu, mu_ies, MASA_PEU, MASA_IES,
    distancia);
58 VELOCIDAD_PEU_MU = vp(MU_PEU, MU_IES, masa_peu, masa_ies,
    distancia);
59 VELOCIDAD_PEU_DIST = vp(mu_peu, mu_ies, masa_peu, masa_ies,
    DISTANCIA);
60 % Considerando el efecto de las 5 variables actuando al mismo
    tiempo
61 VELOCIDAD_P = vp(MU_PEU, MU_IES, MASA_PEU, MASA_IES, DISTANCIA);
62 [frec , vel] = hist(VELOCIDAD_P, 100); % visualizando los datos
63 %%VISUALIZACION DE LOS EFECTOS DE UNA VARIABLE
64 subplot (1,3,1);
65 [frec_mas , velocidad_peu_ma] = hist(VELOCIDAD_PEU_MA, 100); %
    visualizando los datos
66 axis ("tight"); plot(velocidad_peu_ma, frec_mas, 'ob') % grafica
    de los puntos obtenidos
67 ylabel("frecuencia de eventos"); xlabel ("Velocidad del Peugeot
    al variar las masas(m/s)");
68 %
69 subplot (1,3,2);
70 [frec_distancia , velocidad_peu_dist] = hist(VELOCIDAD_PEU_DIST,
    100); % visualizando los datos
71 axis ("tight"); plot(velocidad_peu_dist, frec_distancia, 'ob') %
    grafica de los puntos obtenidos
72 xlabel ("Velocidad del Peugeot al variar la distancia (m/s)");
73 %
74 subplot (1,3,3);
75 [frec_mu , velocidad_peu_mu] = hist(VELOCIDAD_PEU_MU, 100); %
    visualizando los datos
76 axis ("tight"); plot(velocidad_peu_mu, frec_mu, 'ob'); % grafica
    de los puntos obtenidos
77 xlabel ("Velocidad al variar los coeficientes de friccion (m/s)");
    ;
78 %%CALCULOS Y VISUALIZACION %%EFECTO DE LAS 5 VARIABLES
79 [Desviacion_S , Promedio , A]=mygaussfit (vel , frec);

```

```

80 Modelo=A*exp(-(vel-Promedio).^2/(2*Desviacion_S^2));
81 Modelo = Modelo/max(Modelo); %normalizacion
82 frec = frec/max(frec);
83 %
84 figure; subplot(1,3,1);
85     plot(vel, frec, 'ob',...
86         vel, Modelo, '-r') % grafica gaussiana modelada
87     ylabel("Frecuencia normalizada");
88     xlabel("Velocidad considerando las tres variables (m/s)");
89 %
90 diferencia = abs(frec - Modelo);
91 prom_dif = mean(diferencia);
92 std_dif =std(diferencia);
93 %% Ajuste a linea recta entre datos montecarlo y modelo
94 p=polyfit(frec, Modelo,1);
95 m=p(1); b=p(2);
96 linea_modelo =m*frec +b;
97 Corre_linea = corr(frec, linea_modelo);
98 %
99 subplot(1,3,2); %FALTA OBTENER LA MEJOR RECTA QUE PASA ENTRE LOS
    PUNTOS SIMULADOS Y EL MODELO
100 plot(frec, Modelo, 'xb',...
101     frec, linea_modelo, '-r')
102 axis("tight");
103 ylabel("Velocidad segun la simulacion (m/s)");
104 xlabel("Velocidad segun el modelo (m/s)");
105
106 subplot(1,3,3)
107     plot(vel, diferencia, '-ob',...
108         vel, prom_dif*ones(size(frec)), '-g',...
109         vel, (prom_dif+std_dif)*ones(size(frec)), '-r');
110     axis("tight");
111     ylabel("Diferencia entre velocidades simulada y modelada (m/s)
112         ");
112     xlabel("Velocidad segun el modelo (m/s)");
113 %%CALCULOS PARA GENERARAR TABLAS DE COMPARACION
114 Min = Promedio - Desviacion_S; %intervalo con casi el 66% de
    datos
115 Max = Promedio + Desviacion_S;
116 %
117 Min3 = Promedio - 3*Desviacion_S; %intervalo con casi el 99% de
    datos
118 Max3 = Promedio + 3*Desviacion_S;
119 %Cotas inferior y superior donde funciona el algoritmo, no tiene
    caso un 4 sigma
120 Vel_minima = vp((mu_peu - tolerancia_mu), (mu_ies -
    tolerancia_mu), (masa_peu - masa_pasajero_peu), (masa_ies -
    masa_pasajero_ies), (distancia - tolerancia_dist));
121 Vel_maxima = vp((mu_peu + tolerancia_mu), (mu_ies +

```

```

    tolerancia_mu), (masa_peu + masa_pasajero_peu), (masa_ies +
    masa_pasajero_ies), (distancia + tolerancia_dist));
122 % Salida de Valores obtenidos
123 disp("VALIDEZ DEL MODELO")
124 disp("Correlacion entre los puntos obtenidos y la gaussiana
    modelada:")
125 disp(corr(frec , Modelo)) % correlacion entre los puntos obtenidos
    y la gaussiana modelada
126 disp("parametros de datos linealizados (corr , m, b):")
127 disp([Corre_linea , m, b])
128 %
129 disp(" "); disp("COTAS CALCULADAS")
130 disp("El promedio(km/s) y la desviacion estandar son:")
131 disp([Promedio , Desviacion_S] *3.6)
132 disp(" "); toc % se imprime el reloj; FIN DE GUION

```

B.7. Código del Camión Loco

```

1 %% Obtencion de la velocidad inicial de un vehiculo que presenta
    friccion estatica , friccion dinamica y una proyeccion
    parabolica
2 %% Autor: Levi Jahzeel Curiel Sanchez y Vicente Torres Zuniga
3 %% Fecha: 18-feb-2018
4 tic % inicia el reloj
5 clc; clear; close all %% Limpieza de la pantalla , memoria y
    ventanas .
6 %Declaracion de variables
7 N = 1e6; %Numero de ciclos , para pruebas: 1e4, respuesta optima
    : 1e6
8 %Coeficiente de friccion
9 mu_e = 0.3;
10 mu_k = 0.4;
11 tolerancia_mu = 0.1;
12
13 %Distancia derrape , en metros
14 distancia_e = 40.9;
15 distancia_k = 7.3;
16 Xf = 9.0;
17 Yf = 5.0;
18 tolerancia_dist = 1;
19 %% El angulo esta en grados , lo convertimos a radianes
20 angulo = 5;
21 tol_ang = 0.5;
22 %DECLARACION DE FUNCIONES
23 % dist_e , mu_e -> distancia de derrape y coef de ficcion estatica
24 % dist_k , mu_k -> distancia de derrape y coef de friccion
    dinamica
25 % Xf e Yf -> distancia final de la proyeccion parabolica

```

```

26 %%DECLARACION DE FUNCIONES
27 function vel_peu = vp(mu_e, mu_k, dist_k, dist_e, Xf, Yf, angulo)
28     primo = huellas(mu_e, dist_e, angulo);
29     segun = huellas(mu_k, dist_k, angulo);
30     terce = ter_ter(Xf, Yf, angulo);
31     vel_peu = sqrt(primo + segun + terce);
32 end
33 %%mu coeficiente de friccion %dist_der distancia de derrape
34 function vel_hue = huellas (mu, dist_der, angulo)
35     vel_hue = (2 * 9.81 * (mu - (tan(angulo)) ) .* dist_der);
36 end
37 function tercer_termino = ter_ter (Xf, Yf, angulo)
38     arriba = 9.81*(Xf.^2);
39     abajo = Xf.*(sin(2*angulo)) - 2*Yf.*(cos(angulo)).^2;
40     tercer_termino = (abs(arriba./abajo));
41 end
42 %CALCULOS
43 %%VECTORES MONTECARLO
44     DISTANCIA_E = distancia_e + tolerancia_dist*(rand(N,1)-rand(N
45     ,1));
46     DISTANCIA_K = distancia_k + tolerancia_dist*(rand(N,1)-rand(N
47     ,1));
48     XFINAL = Xf + tolerancia_dist*(rand(N,1)-rand(N,1));
49     YFINAL = Yf + tolerancia_dist*(rand(N,1)-rand(N,1));
50     ANGULO = (pi/180) .* (angulo + tol_ang.*(rand(N,1) - rand(N,1))
51     );
52     MU_E = mu_e + tolerancia_mu*(rand(N,1)-rand(N,1));
53     MU_K = mu_k + tolerancia_mu*(rand(N,1)-rand(N,1));
54
55 %%Considerando 1 variable
56     VELOCIDAD_D = vp(mu_e, mu_k, DISTANCIA_K, DISTANCIA_E, XFINAL,
57     YFINAL, angulo);
58     VELOCIDAD_MU = vp(MU_E, MU_K, distancia_k, distancia_e, Xf, Yf,
59     angulo);
60     VELOCIDAD_XY = vp(mu_e, mu_k, distancia_k, distancia_e, Xf, Yf,
61     ANGULO);
62
63 %% Considerando el efecto de las 5 variables actuando al mismo
64     tiempo
65     VELOCIDAD_P = vp(MU_E, MU_K, DISTANCIA_K, DISTANCIA_E, XFINAL,
66     YFINAL, ANGULO);
67     [frec , vel] = hist(VELOCIDAD_P, 100); % visualizando los datos
68
69 %%VISUALIZACION DE LOS EFECTOS DE UNA VARIABLE
70     subplot(1,3,1);
71     [frec_d, velocidad_d] = hist(VELOCIDAD_D, 100); % visualizando los
72     datos
73     axis ("tight"); plot(velocidad_d, frec_d, 'ob') % grafica de los
74     puntos obtenidos

```



```

65 ylabel("frecuencia de eventos"); xlabel ("Velocidad (m/s)
    variando las distancias ");
66
67 subplot(1,3,2);
68 [frec_distancia , velocidad_xy] = hist(VELOCIDAD_XY, 100); %
    visualizando los datos
69 axis ("tight"); plot(velocidad_xy , frec_distancia , 'ob') %
    grafica de los puntos obtenidos
70 xlabel ("Velocidad (m/s) al variar la distancia final ");
71
72 subplot(1,3,3);
73 [frec_mu , velocidad_mu] = hist(VELOCIDAD_MU, 100); % visualizando
    los datos
74 axis ("tight"); plot(velocidad_mu , frec_mu , 'ob'); % grafica de
    los puntos obtenidos
75 xlabel ("Velocidad al variar los coeficientes de fricci\ 'on (m/s)
    ");
76
77 %%CALCULOS Y VISUALIZACION %%EFECTO DE LAS 5 VARIABLES
78 [Desviacion_S , Promedio , A]=mygaussfit (vel , frec );
79 Modelo=A*exp(-(vel-Promedio).^2/(2*Desviacion_S^2));
80 Modelo = Modelo/max(Modelo); %normalizacion
81 frec = frec/max(frec);
82
83 figure; subplot(1, 3, 1);
84 hold on
85 plot(vel , frec , 'ob') % grafica de los puntos obtenidos
86 plot(vel , Modelo , '-r') % grafica gaussiana modelada
87 ylabel ("Frecuencia normalizada");
88 xlabel ("Velocidad considerando las tres variables (m/s)");
89 hold off
90 %
91 diferencia = abs(frec - Modelo);
92 prom_dif = mean(diferencia);
93 std_dif =std(diferencia);
94 %
95 subplot (1, 3, 2); %ALTA OBTNER LA MEJOR RECTA QUE PASA ENTRE
    LOS PUNTOS SIMULADOS Y EL MODELO
96 hold on
97 plot(frec , Modelo , 'xb') %en el caso ideal debe verse la linea
    recta identidad
98 plot(frec , frec , '-r') %en el caso ideal debe verse la linea
    recta identidad#
99 ylabel("Frecuencia de eventos simulados (m/s)");
100 xlabel("Frecuencia de eventos del modelo (m/s)");
101 hold off
102 %
103 subplot(1,3,3)
104 hold on

```

```

105 axis ([min(vel) max(vel) min(diferencia) max(diferencia)]);
106 plot(vel, diferencia, '-ob'); %en el caso ideal debe verse la
    linea recta identidad
107 plot(vel, prom_dif*ones(size(frec)), '-g');
108 plot(vel, (prom_dif+std_dif)*ones(size(frec)), '-r');
109 ylabel("Diferencia entre velocidades simulada y modelada (m/s)
    ");
110 xlabel("Velocidad segun el modelo (m/s)");
111 hold off
112
113 %%CALCULOS PARA GENERARAR TABLAS DE COMPARACION
114 %%Cotas inferior y superior donde funciona el algoritmo, no tiene
    caso un 4 sigma
115 Vel_minima = vp((mu_e - tolerancia_mu), (mu_k - tolerancia_mu),
    (distancia_k - tolerancia_dist), (distancia_e -
    tolerancia_dist), (Xf - tolerancia_dist), (Yf -
    tolerancia_dist), (pi/180) .* (angulo - tol_ang));
116 Vel_maxima = vp((mu_e + tolerancia_mu), (mu_k + tolerancia_mu),
    (distancia_k + tolerancia_dist), (distancia_e +
    tolerancia_dist), (Xf + tolerancia_dist), (Yf +
    tolerancia_dist), (pi/180) .* (angulo + tol_ang));
117 % Salida de Valores obtenidos
118 disp("Correlacion entre puntos simulados y modelo:")
119 corr(frec, Modelo) % correlacion entre los puntos obtenidos y la
    gaussiana modelada
120 disp("El promedio y la desviacion estandar (km/hr) son:")
121 [Promedio, Desviacion_S] * 3.6
122 disp("Velocidad min, velocidad maxima en (km/hr) ")
123 [Vel_minima, Vel_maxima] * 3.6
124 toc % se imprime el reloj; FIN DE GUION

```

B.8. Algoritmo para obtener la fuerza de una patada de canguro

```

1 %% Guion, sin acentos, para realizar para utilizar el metodo
    Montercarlo para calcular la fuerza promedio de la masa de
    piernas durante la distancia y el tiempo de neto de contacto
    durante el impacto.
2 %% Autor: Levi Jahzeel Curiel Sanchez y Vicente Torres Zuniga;
3 % Fecha: 19-dic-2017
4 tic % inicia el reloj
5 clc; clear; close all %% Limpieza de memoria
6 %% DATOS DE ENTRADA
7 N = 1e6; % Numero de ciclos.
8 %
9 peso_rey_misterio = 79; % kilogramos
10 tolerancia_peso = 10; % kilogramos, casi 13% de error

```

```

11 Masa_piernas = 24.43/100; %Masa porcentual de las piernas:
    24.43% del peso corporal ,
12 %"Body Segment Parameters, A Survey of Measurement Techniques",
    Drillis , Contini, y Bluestein.
13 distancia_contacto = 0.05; %metros
14 tolerancia_distancia = 0.03; %metros, 0.03      60% de error
15 %
16 tiempo_contacto = 0.1; %segundo
17 tolerancia_tiempo = 0.0165; %segundos, 0.0165      16.5% de error
18 %CALCULOS
19 error_deriv = (tolerancia_peso/peso_rey_misterio) + ...
20 (tolerancia_distancia/distancia_contacto)+ 2*(tolerancia_tiempo/
    tiempo_contacto);
21 % Error asociado por derivadas: "An introduction to error
    analysis", John R. Taylor
22 % Vector Montecarlo
23 peso = peso_rey_misterio + tolerancia_peso*(rand(N,1) - rand(N
    ,1)); %funcion rand: [0,1]
24 distancia = distancia_contacto + tolerancia_distancia*(rand(N,1)
    - rand(N,1));
25 tiempo = tiempo_contacto + tolerancia_tiempo*(rand(N,1) - rand(N
    ,1));
26 %
27 % Considerando el efecto de una sola variable actuante
28 Fuerza_peso = Masa_piernas*peso*distancia_contacto./(
    tiempo_contacto.^2);
29 Fuerza_distancia = Masa_piernas*peso_rey_misterio*distancia./(
    tiempo_contacto.^2);
30 Fuerza_tiempo = Masa_piernas*peso_rey_misterio*
    distancia_contacto./(tiempo.^2);
31 % Considerando el efecto de las tres variables
32 Fuerza = Masa_piernas.*peso.*distancia./(tiempo.^2);
33 %
34 [frec , fuerza] = hist(Fuerza , 100); %parcelando datos
35 %
36 %%VISUALIZACION DE LOS EFECTOS DE UNA VARIABLE
37 subplot (1, 3, 1); [frec_peso , fuerza_peso] = hist(Fuerza_peso ,
    100);
38 plot(fuerza_peso , frec_peso , 'ob')
39 ylabel("frecuencia de eventos"); xlabel ("Fuerza al variar el
    peso (N)");
40 %
41 subplot (1, 3, 2); [frec_distancia , fuerza_distancia] = hist(
    Fuerza_distancia , 100);
42 plot(fuerza_distancia , frec_distancia , 'ob')
43 xlabel ("Fuerza al variar la distancia (N)");
44 %
45 subplot (1, 3, 3); [frec_tiempo , fuerza_tiempo] = hist(
    Fuerza_tiempo , 100);

```

```

46 plot(fuerza_tiempo, frec_tiempo, 'ob')
47 xlabel("Fuerza al variar el tiempo (N)");
48 %%CALCULOS Y VISUALIZACION
49 [Desviacion_S, Promedio, A]=mygaussfit(fuerza, frec);
50 Modelo=A*exp(-(fuerza-Promedio).^2/(2*Desviacion_S^2));
51 Modelo = Modelo/max(Modelo); %normalizacion
52 frec = frec/max(frec);
53 %
54 diferencia = abs(frec - Modelo);
55 prom_dif = mean(diferencia);
56 std_dif =std(diferencia);
57 %% Ajuste a linea recta entre datos montecarlo y modelo
58 p=polyfit(frec, Modelo,1);
59 m=p(1); b=p(2);
60 linea_modelo =m*frec +b;
61 Corre_linea = corr(frec, linea_modelo);
62 %
63 figure; subplot(1,3,1); plot(fuerza, frec, 'ob', fuerza,
    Modelo, '-r') % grafica de los puntos obtenidos
64 ylabel("Frecuencia normalizada (N)"); xlabel("Fuerza, tres
    variables (N)");
65 %
66 subplot(1,3,2); plot(frec, Modelo, 'xb', frec, linea_modelo, '-r'
    ) %en el caso ideal debe coincidir con la linea recta
    identidad
67 axis('tight'); ylabel("Fuerza segun la simulacion (N)"); xlabel
    ("Fuerza segun el modelo (N)");
68 %
69 subplot(1,3,3); plot(fuerza, diferencia, '-ob', fuerza,
    prom_dif*ones(size(frec)), '-g', fuerza, (prom_dif+std_dif)*
    ones(size(frec)), '-r')
70 axis('tight'); ylabel("Diferencia entre simulacion y modelo (N)")
    ; xlabel("Fuerza segun el modelo (N)");
71 %
72 %%CALCULOS PARA GENERARAR TABLAS DE COMPARACION
73 Min3 = Promedio - 3*Desviacion_S; %intervalo con casi el 99.7%
    de datos
74 Max3 = Promedio + 3*Desviacion_S;
75 %
76 %Cotas inferior y superior donde funciona el algoritmo, es un
    sinsentido 4 sigma
77 Fuerza_minima = Masa_piernas*(peso_rey_misterio-tolerancia_peso)
    *(distancia_contacto-tolerancia_tiempo)/((tiempo_contacto+
    tolerancia_tiempo)^2); %Fuerza minima con las condiciones de
    tolerancia
78 Fuerza_maxima = Masa_piernas*(peso_rey_misterio+tolerancia_peso)
    *(distancia_contacto+tolerancia_tiempo)/((tiempo_contacto-
    tolerancia_tiempo)^2); %Fuerza maxima con las condiciones de
    tolerancia

```

```
79 %SALIDA DE VALORES
80 disp("VALIDEZ DEL MODELO")
81 disp("Correlacion entre datos simulados y modelo gaussiano:")
82 disp(corr(frec , Modelo)) % correlacion entre los puntos obtenidos
    y la gaussiana modelada
83 disp("parametros de datos linealizados (corr , m, b):")
84 disp([Corre_linea , m, b])
85 disp("Error porcental neto y el error porcental estadistico:");
86 disp([100*error_deriv , 100*Desviacion_S/Promedio])
87 %
88 disp(" ")
89 disp("COTAS CALCULADAS")
90 disp("El promedio y la desviacion estandar son:")
91 disp([Promedio , Desviacion_S])
92 disp("Fuerza min, -3sigma , Promedio , +3sigma , Fuerza max:")
93 disp([Fuerza_minima , Min3 , Promedio , Max3 , Fuerza_maxima])
94 disp(" ")
95 toc % se imprime el reloj; % FIN DE GUION
```

Apéndice C

Desarrollo de las incertidumbres usadas en la tesis

En el siguiente apéndice se desarrollaran las incertidumbres de las ecuaciones usadas en la tesis.

C.1. Incertidumbre para la ecuación del tiro parabólico

Del capítulo 2 la ecuación para la velocidad inicial del tiro parabólico es:

$$v_p = \sqrt{\frac{x_f^2 g}{x_f \sin 2\alpha - 2y_f \cos^2 \alpha}} \quad (\text{C.1})$$

Calculando sus derivadas parciales considerando las variables: g , x_f , y_f , α

$$\frac{\partial v_p}{\partial g} = \frac{1}{2} \left(\frac{x_f^2 g}{x_f \sin 2\alpha - 2y_f \cos^2 \alpha} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{x_f^2}{x_f \sin 2\alpha - 2y_f \cos^2 \alpha} \right) \quad (\text{C.2})$$

Para ∂x_f

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_p}{\partial x_f} &= \frac{1}{2} \left(\frac{x_f^2 g}{x_f \sin 2\alpha - 2y_f \cos^2 \alpha} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{2x_f g (x_f \sin 2\alpha - 2y_f \cos^2 \alpha) - x_f^2 g \sin 2\alpha}{(x_f \sin 2\alpha - 2y_f \cos^2 \alpha)^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{x_f^2 g}{x_f \sin 2\alpha - 2y_f \cos^2 \alpha} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{2x_f^2 g \sin 2\alpha - 4gx_f y_f \cos^2 \alpha - x_f^2 g \sin 2\alpha}{(x_f \sin 2\alpha - 2y_f \cos^2 \alpha)^2} \right) \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\frac{\partial v_p}{\partial x_f} = \frac{1}{2} \left(\frac{x_f^2 g}{x_f \sin 2\alpha - 2y_f \cos^2 \alpha} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{x_f^2 g \sin 2\alpha - 4g x_f y_f \cos^2 \alpha}{(x_f \sin 2\alpha - 2y_f \cos^2 \alpha)^2} \right) \quad (\text{C.3})$$

Mientras que para para ∂y_f

$$\frac{\partial v_p}{\partial y_f} = \frac{1}{2} \left(\frac{x_f^2 g}{x_f \sin 2\alpha - 2y_f \cos^2 \alpha} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{2 \cos^2 \alpha}{(x_f \sin 2\alpha - 2y_f \cos^2 \alpha)^2} \right) \quad (\text{C.4})$$

Para $\partial \alpha$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_p}{\partial \alpha} &= \frac{1}{2} \left(\frac{x_f^2 g}{x_f \sin 2\alpha - 2y_f \cos^2 \alpha} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{-(2x_f \cos 2\alpha - 2y_f(2 \cos \alpha(-\sin \alpha)))}{(x_f \sin 2\alpha - 2y_f \cos^2 \alpha)^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{x_f^2 g}{x_f \sin 2\alpha - 2y_f \cos^2 \alpha} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{-(2x_f \cos 2\alpha + 4y_f \cos \alpha \sin \alpha)}{(x_f \sin 2\alpha - 2y_f \cos^2 \alpha)^2} \right) \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\frac{\partial v_p}{\partial \alpha} = -\frac{1}{2} \left(\frac{x_f^2 g}{x_f \sin 2\alpha - 2y_f \cos^2 \alpha} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{2x_f \cos 2\alpha + 4y_f \cos \alpha \sin \alpha}{(x_f \sin 2\alpha - 2y_f \cos^2 \alpha)^2} \right) \quad (\text{C.5})$$

Sabemos por la ecuación 1.1 que la incertidumbre la podemos escribir como:

$$\Delta v_p = \sqrt{\left(\frac{dv_p}{dx_f} \Delta x_f \right)^2 + \left(\frac{dv_p}{dy_f} \Delta y_f \right)^2 + \left(\frac{dv_p}{d\alpha} \Delta \alpha \right)^2 + \left(\frac{dv_p}{dg} \Delta g \right)^2} \quad (\text{C.6})$$

Por tanto sustituyendo obtenemos:

$$\begin{aligned} (\Delta v_p)^2 &= \left(\frac{1}{2} \left(\frac{x_f^2 g}{x_f \sin 2\alpha - 2y_f \cos^2 \alpha} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{x_f^2 g \sin 2\alpha - 4g x_f y_f \cos^2 \alpha}{(x_f \sin 2\alpha - 2y_f \cos^2 \alpha)^2} \right) \Delta x_f \right)^2 \\ &+ \left(\frac{1}{2} \left(\frac{x_f^2 g}{x_f \sin 2\alpha - 2y_f \cos^2 \alpha} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{2 \cos^2 \alpha}{(x_f \sin 2\alpha - 2y_f \cos^2 \alpha)^2} \right) \Delta y_f \right)^2 \\ &+ \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x_f^2 g}{x_f \sin 2\alpha - 2y_f \cos^2 \alpha} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{2x_f \cos 2\alpha + 4y_f \cos \alpha \sin \alpha}{(x_f \sin 2\alpha - 2y_f \cos^2 \alpha)^2} \right) \Delta \alpha \right)^2 \\ &+ \left(\frac{1}{2} \left(\frac{x_f^2 g}{x_f \sin 2\alpha - 2y_f \cos^2 \alpha} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{x_f^2}{x_f \sin 2\alpha - 2y_f \cos^2 \alpha} \right) \Delta g \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\Delta v_p)^2 &= \frac{1}{4} \left(\frac{x_f^2 g}{x_f \sin 2\alpha - 2y_f \cos^2 \alpha} \right)^{-1} \left(\left(\frac{2x_f \cos 2\alpha + 4y_f \cos \alpha \sin \alpha}{(x_f \sin 2\alpha - 2y_f \cos^2 \alpha)^2} \right)^2 (\Delta \alpha)^2 \right. \\
 &\quad + \left(\frac{2 \cos^2 \alpha}{(x_f \sin 2\alpha - 2y_f \cos^2 \alpha)^2} \right)^2 (\Delta y_f)^2 + \left(\frac{x_f^2}{x_f \sin 2\alpha - 2y_f \cos^2 \alpha} \right)^2 (\Delta g)^2 \\
 &\quad \left. + \left(\frac{x_f^2 g \sin 2\alpha - 4g x_f y_f \cos^2 \alpha}{(x_f \sin 2\alpha - 2y_f \cos^2 \alpha)^2} \right)^2 (\Delta x_f)^2 \right) \\
 (\Delta v_p)^2 &= \frac{1}{4} \left(\frac{x_f^2}{g (x_f \sin 2\alpha - 2y_f \cos^2 \alpha)} (\Delta g)^2 + \frac{2 \cos^2 \alpha}{x_f^2 g (x_f \sin 2\alpha - 2y_f \cos^2 \alpha)^3} (\Delta y_f)^2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2x_f \cos 2\alpha + 4y_f \cos \alpha \sin \alpha}{x_f^2 g (x_f \sin 2\alpha - 2y_f \cos^2 \alpha)^3} (\Delta \alpha)^2 + \frac{x_f^2 g \sin 2\alpha - 4g x_f y_f \cos^2 \alpha}{x_f^2 g (x_f \sin 2\alpha - 2y_f \cos^2 \alpha)^3} (\Delta x_f)^2 \right)
 \end{aligned} \tag{C.7}$$

C.2. Incertidumbre para la ecuación de colisiones elásticas

En el capítulo 2 se obtiene un par de ecuaciones iniciales para la velocidad de los cuerpos, estas son:

$$v_{ia} = \left(\frac{2m_a}{m_a + m_b} - 1 \right) v_{fa} + \left(\frac{m_b - m_a}{m_b + m_a} + 1 \right) v_{fb}, \tag{C.8}$$

$$v_{ib} = \left(\frac{2m_a}{m_a + m_b} \right) v_{fa} + \left(\frac{m_b - m_a}{m_b + m_a} \right) v_{fb}. \tag{C.9}$$

Calculamos las parciales con respecto a m_a, m_b, v_{fa}, v_{fb} para la ecuación C8. Para la ∂m_a tenemos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v_{ia}}{\partial m_a} &= \left(\frac{2(m_a + m_b) - 2m_a}{(m_a + m_b)^2} \right) v_{fa} + \left(\frac{-(m_a + m_b) - (m_b - m_a)}{(m_a + m_b)^2} \right) v_{fb} \\
 &= \left(\frac{2m_b}{(m_a + m_b)^2} \right) v_{fa} + \left(\frac{-2m_b}{(m_a + m_b)^2} \right) v_{fb}.
 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\frac{\partial v_{ia}}{\partial m_a} = \frac{2m_b}{(m_a + m_b)^2} (v_{fa} - v_{fb}), \quad (\text{C.10})$$

Para ∂m_b tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_{ia}}{\partial m_b} &= \left(\frac{(m_a + m_b) - (m_b - m_a)}{(m_a + m_b)^2} \right) v_{fb} + \left(\frac{-2m_a}{(m_a + m_b)^2} \right) v_{fa} \\ &= \left(\frac{-2m_a}{(m_a + m_b)^2} \right) v_{fa} + \left(\frac{2m_a}{(m_a + m_b)^2} \right) v_{fb}. \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\frac{\partial v_{ia}}{\partial m_b} = \frac{2m_a}{(m_a + m_b)^2} (v_{fb} - v_{fa}), \quad (\text{C.11})$$

para ∂v_{fa} tenemos:

$$\frac{\partial v_{ia}}{\partial v_{fa}} = \left(\frac{2m_a}{m_a + m_b} - 1 \right), \quad (\text{C.12})$$

mientras que para ∂v_{fb} tenemos:

$$\frac{\partial v_{ia}}{\partial v_{fb}} = \left(\frac{m_b - m_a}{m_a + m_b} + 1 \right). \quad (\text{C.13})$$

Considerando la Ec. 1.1, la incertidumbre la podemos escribir como:

$$\Delta v_{ia} = \sqrt{\left(\frac{dv_{ia}}{dm_a} \Delta m_a \right)^2 + \left(\frac{dv_{ia}}{dm_b} \Delta m_b \right)^2 + \left(\frac{dv_{ia}}{dv_{fa}} \Delta v_{fa} \right)^2 + \left(\frac{dv_{ia}}{dv_{fb}} \Delta v_{fb} \right)^2}.$$

De modo que sustituimos y simplificamos :

$$\begin{aligned} \Delta v_{ia}^2 &= \left(\frac{2m_b}{(m_a + m_b)^2} (v_{fa} - v_{fb}) \Delta m_a \right)^2 + \left(\frac{2m_a}{(m_a + m_b)^2} (v_{fb} - v_{fa}) \Delta m_b \right)^2 \\ &\quad + \left(\left(\frac{2m_a}{m_a + m_b} - 1 \right) \Delta v_{fa} \right)^2 + \left(\left(\frac{m_b - m_a}{m_a + m_b} + 1 \right) \Delta v_{fb} \right)^2. \end{aligned}$$

Finalizamos escribiendo:

$$\begin{aligned}
 (\Delta v_{ia})^2 &= \frac{4(v_{fa} - v_{fb})^2}{(m_a + m_b)^4} (m_b^2(\Delta m_a)^2 + m_a^2(\Delta m_b)^2) \\
 &\quad + \frac{(m_a - m_b)^2}{(m_a + m_b)^2} (\Delta v_{fa})^2 + \frac{4m_b^2}{(m_a + m_b)^2} (\Delta v_{fb})^2 \quad (C.14)
 \end{aligned}$$

Por otro lado, calculamos las parciales con respecto a m_a, m_b, v_{fa}, v_{fb} para la ecuación C9. Para la ∂m_a tenemos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v_{ib}}{\partial m_a} &= \left(\frac{2(m_a + m_b) - 2m_a}{(m_a + m_b)^2} \right) v_{fa} + \left(\frac{-(m_a + m_b) - (m_b - m_a)}{(m_a + m_b)^2} \right) v_{fb} \\
 &= \left(\frac{2m_b}{(m_a + m_b)^2} \right) v_{fa} + \left(\frac{-2m_b}{(m_a + m_b)^2} \right) v_{fb}.
 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\frac{\partial v_{ib}}{\partial m_a} = \frac{2m_b}{(m_a + m_b)^2} (v_{fa} - v_{fb}), \quad (C.15)$$

para ∂m_b tenemos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v_{ib}}{\partial m_b} &= \left(\frac{-2m_a}{(m_a + m_b)^2} \right) v_{fa} + \left(\frac{(m_a + m_b) - (m_b - m_a)}{(m_a + m_b)^2} \right) v_{fb} \\
 &= \left(\frac{-2m_a}{(m_a + m_b)^2} \right) v_{fa} + \left(\frac{2m_a}{(m_a + m_b)^2} \right) v_{fb}.
 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\frac{\partial v_{ia}}{\partial m_b} = \frac{2m_a}{(m_a + m_b)^2} (v_{fb} - v_{fa}); \quad (C.16)$$

mientras que para ∂v_{fa} tenemos:

$$\frac{\partial v_{ia}}{\partial v_{fa}} = \frac{2m_a}{m_a + m_b}. \quad (C.17)$$

Para ∂v_{fb} tenemos:

$$\frac{\partial v_{ia}}{\partial v_{fb}} = \frac{m_b - m_a}{m_a + m_b} \quad (C.18)$$

$$\Delta v_{ib} = \sqrt{\left(\frac{dv_{ib}}{dm_a} \Delta m_a \right)^2 + \left(\frac{dv_{ib}}{dm_b} \Delta m_b \right)^2 + \left(\frac{dv_{ib}}{dv_{fa}} \Delta v_{fa} \right)^2 + \left(\frac{dv_{ib}}{dv_{fb}} \Delta v_{fb} \right)^2}$$

Sustituimos y obtenemos:

$$\Delta v_{ib}^2 = \left(\frac{2m_b}{(m_a + m_b)^2} (v_{fa} - v_{fb}) \Delta m_a \right)^2 + \left(\frac{2m_a}{(m_a + m_b)^2} (v_{fb} - v_{fa}) \Delta m_b \right)^2 \\ + \left(\frac{2m_a}{m_a + m_b} \Delta v_{fa} \right)^2 + \left(\frac{m_b - m_a}{m_a + m_b} \Delta v_{fb} \right)^2$$

$$\Delta v_{ib}^2 = \frac{4}{(m_a + m_b)^4} (m_b^2 (v_{fa} - v_{fb})^2 (\Delta m_a)^2 + m_a^2 (v_{fa} - v_{fb})^2 (\Delta m_b)^2) \\ + \frac{4m_a^2}{(m_a + m_b)^2} (\Delta v_{fa})^2 + \frac{(m_b - m_a)^2}{(m_a + m_b)^2} (\Delta v_{fb})^2.$$

Finalmente, obtenemos:


$$(\Delta v_{ib})^2 = \frac{4(v_{fa} - v_{fb})^2}{(m_a + m_b)^4} (m_b^2 (\Delta m_a)^2 + m_a^2 (\Delta m_b)^2) \\ + \frac{4m_a^2}{(m_a + m_b)^2} (\Delta v_{fa})^2 + \frac{(m_b - m_a)^2}{(m_a + m_b)^2} (\Delta v_{fb})^2 \quad (\text{C.19})$$

Apéndice D

Foros donde se presentó este trabajo



Figura D.1: Constancia recibida en el tercer foro de avances estudiantiles, en la Red Temática CONACyT de Ciencias Forenses, Ciudad Universitaria, 11 de septiembre del 2018.



CIENCIAS
CIENCIA FORENSE
UNAM

Técnica Montecarlo para obtener la incertidumbre de la velocidad inicial de un vehículo colisionado

Levi Jahzeel Curiel Sanchez; cusaleja@gmail.com Facultad de Ciencias, UNAM
 Vicente Torres Zúñiga; vicentz@gmail.com Licenciatura en Ciencia Forense, UNAM

Resumen

Donde faltan datos para obtener el error asociado a una media, o donde se crea que el calculo es complicado; se puede utilizar la técnica Montecarlo para estimar la incertidumbre. Proponemos un algoritmos simple de implementar. Lo ponemos a prueba en un caso colisión y comparamos mediante un experimento; contamos con alta coherencia teórica y fáctica.

Introducción

Cómo se calcula una velocidad inicial usando indicios:

$$v_i^2 = \sum v_j^2$$

Cómo se obtiene su error asociado a la medida;

$$\Delta q = \sqrt{\left(\frac{dq}{dx_1} \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{dq}{dx_2} \Delta x_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{dq}{dx_n} \Delta x_n\right)^2}$$

Por ejemplo, marcas de neumático en el pavimento,

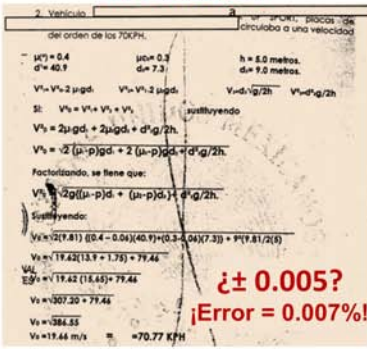
$$v_j = \sqrt{2g(\mu_j - \tan \alpha) d_j}$$

El error asociado es:

$$\frac{\Delta v_j}{v_j} = \frac{g d_j}{v_j^2} \Delta \mu_j + \frac{g d_j}{v_j^2 \cos^2 \alpha} \Delta \alpha + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta g}{g} + \frac{\Delta d_j}{d_j} \right)$$

Por módulos, se puede programar las ecuaciones para tener toda la información de la medida y el error.

La realidad es:



± 0.005?
¡Error = 0.007%!

Propuesta:

Utilizar el azar para resolver el problema

$$x \pm \Delta x \rightarrow x + x(\text{rand} - \text{rand})$$

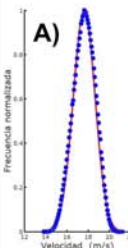
x_c debe ser lo más grande posible, pero tratando de que sea físicamente posible y produzca datos que tiendan a la función normal. Empleando $N = 10^7$.

Resultados

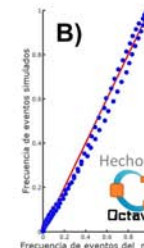
Del dictamen:


$$v_{MC} = MC_N \left[v_i(\mu_e, \mu_k, d_e, d_k, x_f, y_f, \alpha) \right]$$

A)

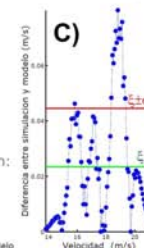


B)



Hecho en: 

C)




Te Proporcionamos el Algoritmo GRATIS

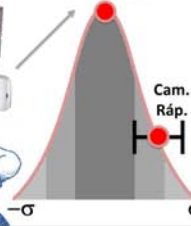
| Comparando estudios | Fuente | v_p (km/hr) | σ (km/hr) | Error % |
|---------------------|--------|---------------|------------------|---------|
| Pericial | | 70.77 | - | - |
| N. propuesta | | 63 | 4 | 6.4 |

Del experimento:

Cámara rápida: 1054 fps
vs.
Cámara común: 30 fps



+Montecarlo



Cam. Ráp.


Conclusiones

- 1) La propuesta es coherente entre teoría y experimentos
- 2) Debemos establecer reglas estándar para x_c
- 3) Necesitamos más casos empíricos

Gracias a: UNAM-PAPIME-PE107216

Figura D.2: Cartel presentado en el tercer foro de avances estudiantiles, en la Red Tematica CONACyT de Ciencias Forenses, Ciudad Universitaria, 11 de septiembre del 2018.

84



DETERMINACIÓN DE LA FUERZA DE IMPACTO VÍA VIDEO ANÁLISIS Y TÉCNICA MONTECARLO

Curiel Sanchez, Levi Jahzeel: cusaleja@gmail.com Facultad de Ciencias, UNAM
Torres-Zúñiga, Vicente: vicentz@gmail.com Licenciatura en Ciencia Forense, UNAM



Objetivo

Obtener la medición, incertidumbre asociada y la probabilidad de la fuerza de un golpe videograbado dadas condiciones de información insuficiente.

Introducción

Es una tendencia creciente la videograbación de hechos de interés forense; su contexto debe también ser analizado. Por ejemplo, para obtener parámetros físicos: dimensiones, velocidades, fuerzas en colisiones.

El 21/03/2015, mediante un smartphone se fijó en video a un luchador profesional conectar un golpe rutinario (patadas dobles) sobre su rival, quien cae sobre las cuerdas y al poco tiempo fallece (tal vez, por agravarse una lesión cervical previa).

Para obtener la fuerza: el marco teórico requiere obtener la masa de las piernas m , la distancia en que contactan los cuerpos Δd y el tiempo asociado Δt .

$$F = m \frac{\Delta d}{\Delta t^2}$$

Mediante datos públicos y video-análisis es posible estimar tal fuerza. Pero son poco confiables o presentan poca precisión. Proponemos utilizar método Montecarlo para rectificar la medida y obtener la incertidumbre asociada.

Para cada variable, se utilizará la medida x la incertidumbre asociada será un valor crítico x_c multiplicado por la suma de dos números aleatorios $\theta \leq a_i \leq t$:

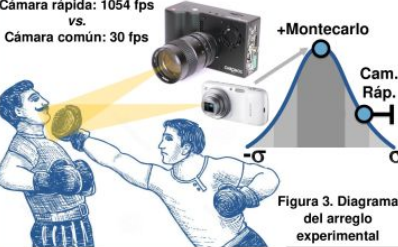
$$x \pm \delta x \rightarrow x + x_c(a_1 - a_2)$$

x_c debe ser grande, sin mostrar incoherencias lógicas y manteniendo una alta concordancia teórica con la distribución normal, evitando sesgos asimétricos.

Contrastamos experimentando

Generamos un evento, registrado por dos medios: uno de ellos deficiente, pero añadiendo la técnica Montecarlo se recupera la información.

Cámara rápida: 1054 fps
vs.
Cámara común: 30 fps



+Montecarlo

Cam. Ráp.

σ

Figura 3. Diagrama del arreglo experimental

Materiales y métodos







Figura 4. Flujo de trabajo para video-analizar con Tracker

10⁷ eventos programados en:  **Hacia la simulación numérica** **Dato primario**

| Variable | x | $\pm x_c$ | $100(x_c/x)$ |
|-------------------|------|-----------|--------------|
| Masa, m (kg) | 79 | 10 | 13% |
| Longitud, L (m) | 0.05 | 0.03 | 60% |
| Tiempo, t (s) | 0.1 | 0.0165 | 16.5% |

Resultados y discusión

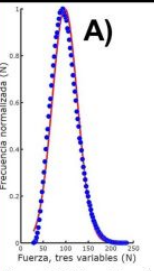
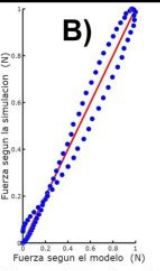
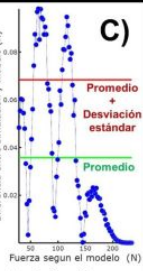




Figura 5. **A)** Los datos simulados se ajustan adecuadamente a la función gaussiana, **B)** con buena respuesta correlación ($R^2 > 0.99$), linealización ($y = 0.986x + 0.003$) y **C)** diferencia puntual ($< 10\%$).

También se recupera la información del experimento dentro del intervalo de sigma. Pero es poco claro el criterio para escoger x_c .

Conclusiones

- 1) La propuesta es coherente entre teoría y experimentos
- 2) Debemos establecer reglas estándar para x_c .
- 3) Necesitamos más casos empíricos

Referencias

- 1) T. Lafarge, The NIST Uncertainty Machine. NCSLI Measure Journal of Measurement Science, 10(3):20–27, 2015.
- 2) D. Hall. An Introduction to Measurement Uncertainty. Measurement Standards Laboratory of New Zealand, Lower Hutt, New Zealand, 2018.
- 3) V Torres-Zúñiga, Medición de la velocidad de automotor durante impactos y lanzamiento de peatones mediante video-análisis, *Gac. Inter. Cien. For.*, 5-12 (2018)
- 4) V. Torres Zúñiga, Modelos físicos y numéricos para la reconstrucción de hechos en ciencia forense: derrumbe de edificios, *Lat. Am. J. Phys. Educ.* 11 (2), 2308:1-6, 2017
- 5) V Torres-Zúñiga, Video-análisis por software-libre para obtener la velocidad de un automotor al impactar a un peatón, *Rev. Cien. For. Hon* 3 (1), 10-18 2017.

Gracias a: UNAM-PAPIME-PE107216

Figura D.3: Cartel presentado en Noveno Congreso Internacional de Ciencias Forenses, INCIFO, Ciudad de México 19-21 de septiembre del 2018.

Bibliografía

- [1] Henrique P. Carvalho and Affonso Armigliato and Lino L. Almeida, Antonio R. Correia y Carlo R. De Musis. «Análise probabilística de colisoes veiculares pelo método de Monte Carlo». En: *Revista Brasileira de Criminalística* (2016), págs. 46-50.
- [2] Changsun Ahn, Huei Peng y H. Eric Tseng. «Robust Estimation of Road Frictional Coefficient». En: *Proceedings of the 2011 American Control Conference* (2011), págs. 3948-3953.
- [3] José Manuel Albornoz y Antonio Parravano. «Generadores de números pseudoaleatoios acoplados y sus aplicaciones en criptografía». En: *Scientific Journal from the Experimental Faculty of Sciences, at La Universidad del Zulia* 14 (2006), págs. 143-151. ISSN: 1315-2076.
- [4] Claudia Altamirano. *México inaugura su sistema de justicia penal acusatorio*. URL: https://elpais.com/internacional/2016/06/18/mexico/1466268324_944192.html. Accesado por última vez el 23/06/2018.
- [5] Luis W. Alvarez. «A physicist examines the Kennedy assassination film». En: *American Journal of Physics* 44.9 (1976), págs. 813-827.
- [6] Miguel García Álvarez. *Arquímedes y el problema de la corona de oro del rey Hierón*. URL: <https://recuerdosdepondora.com/ciencia/quimica/el-principio-de-arquimedes-eureka-corona-oro-hebron>. Accesado por última vez el 20/06/2018.
- [7] Anónimo. *Rey Misterio*. URL: https://es.wikipedia.org/wiki/Rey_Mysterio. Accesado por última vez el 03/10/2018.
- [8] N. Bellomo y L. Gibelli. «Behavioral crowds: Modeling and Monte Carlo simulations toward validation». En: *Computers and Fluids* 141 (2016). Advances in Fluid-Structure Interaction, págs. 13-21.
- [9] Mario Bunge. «Bayesianism: Science or Pseudoscience?» En: *International Review of Victimology* 15.2 (2008), págs. 165-178.
- [10] Mario Bunge. *Ciencia, técnica y desarrollo*. Siglo XXI, México, 1980.

-
- [11] Mario Bunge. «Knowledge: Genuine and Bogus». En: *Science and Education* 20.5 (2011), págs. 411-438.
- [12] Ming Cai y col. «Evaluation of simulation uncertainty in accident reconstruction via combining Response Surface Methodology and Monte Carlo Method». En: *Transportation Research Part C: Emerging Technologies* 48 (2014), págs. 241-255. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0968090X14002514>.
- [13] J. Carlson y col. «Quantum Monte Carlo methods for nuclear physics». En: *Rev. Mod. Phys.* 87 (3 2015), págs. 1067-1118.
- [14] Antonio Salmerón Cerdán y Mária Morales Giraldo. *Estadística Computacional*. 2.^a ed. 2001.
- [15] Simon A. Cole. «Forensic culture as epistemic culture: the sociology of forensic science.» En: *Studies in History and Philosophy of Science Part C: Studies in History and Philosophy of Biological and Biomedical Sciences* 44.1 (2013), págs. 36-46.
- [16] John W. Eaton y col. *GNU Octave, Free your numbers*. 4.^a ed. 2018.
- [17] R. Eckhardt. «Stan Ulam, John von Neumann, and the Monte Carlo method». En: *Los Alamos Sci.* 15.Special Issue (1987), págs. 131-137.
- [18] Bernard J. Feldman. «What to Say About the Tacoma Narrows Bridge to Your Introductory Physics Class». En: *The Physics Teacher* 41.2 (2003), págs. 92-96.
- [19] Richard P. Feynman. *¿Qué te importa lo que piensen los demás?* 1.^a ed. Editorial Alianza, 2016. ISBN: 978-84-9104-280-8.
- [20] J.A. Fleck y J.D. Cummings. «An implicit Monte Carlo scheme for calculating time and frequency dependent nonlinear radiation transport». En: *Journal of Computational Physics* 8.3 (1971), págs. 313-342.
- [21] J. Flores, O. Novaro y T. H. Seligman. «Possible resonance effect in the distribution of earthquake damage in Mexico City». En: *Nature* 326.23 (1987), págs. 783-785.
- [22] Zoraida Garcia. *Ciencia forense en el contexto de nuevo sistema de judicial penal*. 1.^a ed. Tribunal Superior de Justicia de la Ciudad de México, Red temática de Ciencias Forenses., 2016. ISBN: 978-607-9082-20-8.
- [23] James E. Gentle. *Random number generation and Monte Carlo Methods*. 2.^a ed. George Mason University, 2002.

- [24] Raymond Ghandour, Alessandro Correa Victorino y et. al. «Tire/road friction coefficient estimation applied to road safety». En: *18th Mediterranean Conference on Control and Automation (Med'10')* (2010), págs. 1485-1490.
- [25] Cord. Arely Gómez González. *Reforma Penal 2008-2016. El Sistema Penal Acusatorio en México*. 1.^a ed. 2016.
- [26] Daniel Green y William G. Unruh. «The failure of the Tacoma Bridge: A physical model». En: *American Journal of Physics* 74.8 (2006), págs. 706-716.
- [27] Sebastián Grinschpun. *La luz de sincrotrón, descubrir la estructura de la materia*. 1.^a ed. Edicions U A B, 2016. ISBN: 978-84-945163-1-3.
- [28] Alfonso Manuel Mancilla Herrera. «Números aleatorios; Historia, teoría y aplicaciones». En: *Revista Científica Ingeniería y Desarrollo* 8 (2000).
- [29] Malvin H. Kalos y Paula A. Whitlock. *Monte Carlo Methods*. 2.^a ed. Wiley-VCH, 2008. ISBN: 978-3-527-40760-6.
- [30] José Ignacio Iliana. *Métodos Monte Carlo*. 2.^a ed. Departamento de Física Teórica y del Cosmos, Universidad de Granada, 2008. URL: <http://www.ugr.es/~jilliana/Docencia/FM/mc.pdf>.
- [31] Adam M. Johansen y Ludger Evers. *Monte Carlo Methods, Lecture Notes*. University of Bristol, 2007.
- [32] Richard A. Johnson. *Probabilidad y estadística para ingenieros*. 8.^a ed. Pearson, 2012. ISBN: 978-607-32-0799-7.
- [33] N. I. Koshkin y M. G. Shirkévich. *Manual de física elemental*. MIR, Moscú, 1975.
- [34] Juan Manuel Ruiz-Gálvez Martín. *Diseño de un cuadrilátero de combate desmontable*. Universidad Carlos III de Madrid, Departamento de Medios Continuos y Teoría de Estructuras, 2015.
- [35] Ernesto N. Martínez. *Cálculo de cotas de error en accidentología usando la técnica de Monte Carlo*. URL: <http://www.perarg.com.ar/docs/asist-per/documentos/1-2012-El-Metodo-MONTE-CARLO.pdf>. (accessed: 19.06.2018).
- [36] Ernesto N. Martínez. *La física forense en el aula*. Centro de Formación Continua, Instituto Balseiro, UN Cuyo, Centro Atómico Bariloche, CNEA. URL: <http://fisica.cab.cnea.gov.ar/forense/publicaciones/for-aula.pdf>.

- [37] Mastiner. *NUEVO!! MOMENTO PATADA DE REY MISTERIO Muerte del Hijo del Perro Aguayo! (VIDEO ORIGINAL)*. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=L30NpiiPIXs>. Accesado por última vez el 20/07/2018.
- [38] Qiu Meikang y col. «Data transfer minimization for financial derivative pricing using Monte Carlo simulation with GPU in 5G». En: *International Journal of Communication Systems* 29.16 (2016), págs. 2364-2374.
- [39] X. Mingfu y col. «Monte Carlo Based Test Pattern Generation for Hardware Trojan Detection». En: *2013 IEEE 11th Int. Conf. on Dependable, Autonomic and Secure Computing*. 2013, págs. 131-136.
- [40] Israel Morillas. *El Challenger, Richard Feynman y la verdad tras el desastre*. URL: <http://empiricamentecierto.com/index/2016/05/17/el-challenger-richard-feynman-y-la-verdad-tras-el-desastre/>. Accesado por última vez el 20/06/2018.
- [41] Jethro Mullen. *Estrella de la lucha libre mexicana Hijo del Perro Aguayo muere tras una patada en el ring*. URL: <https://cnnespanol.cnn.com/2015/03/22/estrella-de-la-lucha-libre-mexicana-hijo-del-perro-aguayo-muere-tras-una-patada-en-el-ring/>. Accesado por última vez el 20/07/2018.
- [42] Guillermo Sergio Navas y Gustavo Rodríguez Medina. «Esteganografía Simulada para Análisis de Efectos sobre Portadores Imagen». En: *XIX Workshop de Investigadores en Ciencias de la Computación (WICC 2017, ITBA, Buenos Aires)* (2017), págs. 1048-1052.
- [43] Guillem Borrell i Nogueras. *Introducción informal a Matlab y Octave*. 2008. ISBN: 978-84-691-3626-3.
- [44] Harald Paganetti. «Range uncertainties in proton therapy and the role of Monte Carlo simulations». En: *Physics in Medicine and Biology* 57.11 (2012), R99.
- [45] RG Pregliasco y EN Martínez. «Estudio acústico de un homicidio». En: *Ciencia Hoy* (2001).
- [46] RG Pregliasco y EN Martínez. «Estudio acústico de un homicidio». En: *Journal of Forensic Sciences* 47.6 (2002), págs. 1309-1318.
- [47] «QSPR in forensic analysis – The prediction of retention time of pesticide residues based on the Monte Carlo method». En: *Talanta* 178 (2018), págs. 656-662.

- [48] Redacción. *Atacan en Twitter a Rey Myisterio por muerte de Hijo de Perro Aguayo*. URL: http://www.zocalo.com.mx/new_site/articulo/atacan-en-twitter-a-rey-misterio-por-muerte-de-hijo-de-perro-aguayo-1426965. Accesado por última vez el 20/07/2018.
- [49] Redacción. *¿Qué lesión mató al hijo del Perro Aguayo?* URL: <https://www.excelsior.com.mx/adrenalina/2015/03/23/1015043>. Accesado por última vez el 20/07/2018.
- [50] Christian Robert y George Casella. «A Short History of Markov Chain Monte Carlo: Subjective Recollections from Incomplete Data». En: *Statist. Sci.* 26.1 (2011), págs. 102-115.
- [51] Reuven Y. Rubinstein y Dirk P. Kroese. *Simulation and the Monte Carlo method*. 2.^a ed. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2008. ISBN: 978-0-470-17794-5.
- [52] Javier Sánchez. *Calcular el coeficiente de rozamiento estático y dinámico*. URL: <http://elfisicoloco.blogspot.com/2014/05/calcular-el-coeficiente-de-rozamiento.html>. (accessed: 19.06.2018).
- [53] Josip Slisko. «Sacándole más jugo al problema de la corona. Primera parte: el tratamiento conceptual». En: *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias* (2005).
- [54] M. Stipcevic y R. Ursin. «An On-Demand Optical Quantum Random Number Generator with In-Future Action and Ultra-Fast Response». En: *Sci. Rep.* 5.10214 (2015).
- [55] John R. Taylor. *Introduction To Error Analysis: The Study of Uncertainties in Physical Measurements*. University Science Books, 1997.
- [56] AJ Williamson y col. «Quantum Monte Carlo calculations of nanostructure optical gaps: Application to silicon quantum dots». En: *Physical Review Letters* 89 (19 2002), pág. 196803.
- [57] Yican Wu y col. «CAD-based Monte Carlo program for integrated simulation of nuclear system SuperMC». En: *Annals of Nuclear Energy* 82 (2015). Joint International Conference on Supercomputing in Nuclear Applications and Monte Carlo 2013, SNA + MC 2013. Pluri- and Trans-disciplinarity, Towards New Modeling and Numerical Simulation Paradigms, págs. 161-168. ISSN: 0306-4549.
- [58] Carlos J. Zapata. *Análisis probabilístico y simulación*. Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia, 2010.

- [59] T. Zou y col. «Methods for analyzing the uncertainty of a reconstructed result in a traffic accident with interval and probabilistic traces». En: *Forensic Science International* 270 (2017), págs. 200-210.