



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**POSGRADO EN ASTROFÍSICA**  
**ASTROFÍSICA TEÓRICA**

TÍTULO:

MODELACIÓN DE SUPERFICIES DE TRABAJO EN JETS ASTROFÍSICOS EN 1D  
EN EL LÍMITE DE CHOQUE FUERTE RELATIVISTA.

# TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN CIENCIAS (ASTROFÍSICA)

PRESENTA:

MANUEL EDUARDO DE LA CRUZ HERNÁNDEZ

TUTOR DE TESIS:

DR. SERGIO MENDOZA RAMOS  
INSTITUTO DE ASTRONOMÍA, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR

DRA. ERIKA MARÍA BENÍTEZ LIZAOLA, IA, UNAM  
DR. JOSE ALEJANDRO ESQUIVEL SALAZAR, ICN, UNAM

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX. ENERO DE 2019



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



# Índice general

|  |            |
|--|------------|
| <b>Agradecimientos</b>   | <b>VII</b> |
| <b>Lista de símbolos</b>   | <b>IX</b>  |
| <b>Resumen.</b>  | <b>XI</b>  |
| <b>1. Introducción</b>   | <b>1</b>   |
| <b>2. Hidrodinámica relativista</b>                                    | <b>5</b>   |
| 2.1. Ecuaciones de la hidrodinámica relativista . . . . .              | 5          |
| 2.2. Ecuación de estado Bondi-Wheeler . . . . .                        | 8          |
| <b>3. Ondas de choque en dinámica de fluidos relativistas.</b>         | <b>11</b>  |
| 3.3. Superficies de discontinuidad . . . . .                           | 11         |
| 3.4. Velocidades características . . . . .                             | 16         |
| 3.5. Superficies de trabajo . . . . .                                  | 18         |
| 3.6. Condiciones de choque fuerte. . . . .                             | 20         |
| <b>4. Condiciones de salto para un flujo de gas ultra-relativista.</b> | <b>23</b>  |
| 4.7. Cálculo de las condiciones de salto. . . . .                      | 23         |
| 4.8. Perfiles hidrodinámicos. . . . .                                  | 34         |
| 4.9. Condiciones de energía y curva de Luz. . . . .                    | 41         |
| 4.10. Discusión . . . . .  | 45         |
| <b>Conclusión</b>  | <b>51</b>  |

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Apéndice 1</b>   | <b>55</b> |
| .1. Relaciones útiles de factores de Lorentz en relatividad especial. . . . .           | 55        |
| <b>Apéndice 2: Relaciones hidrodinámicas entre los estados pre-choque y post-choque</b> | <b>59</b> |
| .2. Hidrodinámica relativista . . . . .   | 59        |
| Demostración de las ecuaciones (3.8) . . . . .  | 63        |
| .3. Límites clásicos. . . . .   | 67        |
| .4. Caso ultra-relativista. . . . .   | 68        |
| .5. Ondas de choque relativistas débiles. . . . .                                       | 69        |
| .6. Invariantes de Riemann . . . . .  | 75        |
| .7. Luminosidad en unidades cgs . . . . .   | 78        |

# Índice de figuras

|  |    |
|--|----|
| 3.1. Fluido generando una onda de choque . . . . .   | 12 |
| 3.2. Adiabática de Taub. . . . .   | 14 |
| 3.3. Superficie de trabajo generada por una discontinuidad inicial. . . . .                                      | 19 |
| 3.4. Condiciones de choque fuerte. . . . .   | 21 |
| 4.1. Superficie de trabajo dentro de un flujo relativista . . . . .  | 24 |
| 4.2. Sistema de referencia: onda de choque en reposo. . . . .  | 25 |
| 4.3. Cambio de sistema de referencia . . . . .   | 29 |
| 4.4. Perfiles hidrodinámicos 1 . . . . .   | 37 |
| 4.5. Perfiles hidrodinámicos 2 . . . . .   | 38 |
| 4.6. Perfiles hidrodinámicos 3 . . . . .   | 39 |
| 4.7. Errores relativos entre soluciones analíticas . . . . .   | 40 |
| 4.8. Velocidad de inyección variable . . . . .   | 42 |
| 4.9. Curvas de luz del modelo de superficie de trabajo relativista . . . . .                                     | 44 |
| 4.10. Modelo de superficie de trabajo por Cantó et al. (2013) . . . . .  | 46 |
| 4.11. Modelo de Uhm (2011) que muestra dos ondas de choque separadas por una discontinuidad de contacto. . . . . | 48 |



# Agradecimientos

Quiero dar mis profundos agradecimientos al Instituto de Astronomía de la UNAM por brindarme sus instalaciones, servicios, materiales, etc. Que me permitieron realizar el proyecto de maestría en el tiempo y forma correspondientes al posgrado de Astrofísica.

Les agradezco a todos los investigadores que me impartieron clases sobre Astronomía y Astrofísica general, que me ofrecieron sus amplios conocimientos.

A las Instituciones que me apoyaron económicamente como el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), muchas gracias.

Agradezco a la UNAM en general por darme la oportunidad de ser estudiante durante todo este periodo de alimentación científica.

Así como a mis sinodales: Dr. Juan Carlos Hidalgo Cuellar, Dr. Diego Lopez cámara Ramirez, Dr. Fabio de Colle, Dr. Jorge Daniel Cantó Illa y al Dr. Alejandro Cruz que revisaron este trabajo y me dieron sus observaciones, correcciones así como sus comentarios.

Mis mas grandes agradecimientos a mi tutor principal y director de tesis el Dr. Sergio Mendoza Ramos que me otorgó sus conocimientos sobre astrofísica relativista, así como sus consejos, lecciones y sugerencias durante todo el tiempo que duró la maestría, que me ayudaron a crecer como profesional.

A Alejandro Aguayo Ortiz, que me proporcionó su ayuda con el código aztecas, además de las discusiones que alimentaron mi conocimiento sobre códigos numéricos y jets relativistas, muchas gracias.

Por último pero no menos importante, a mis padres, que nunca terminaré de agradecerles por todo el amor, cuidado y cariño que me han dado durante estos 25 años de vida. Que con toda la ayuda de ellos, he logrado llegar hasta este punto de mi camino, formándome como astrónomo profesional, meta que siempre quise en mi vida.





# Lista de símbolos

|                            |   |
|----------------------------|---|
| $\mathbf{v}$               | velocidad (cm/s)  |
| $v^x$                      | velocidad en la dirección $x$ (cm/s)  |
| $c_s$                      | velocidad del sonido no-relativista y relativista (cm/s)                              |
| $c$                        | velocidad de la luz (cm/s)  |
| $e$                        | densidad de energía total propia por unidad de volumen propio (erg cm <sup>-3</sup> ) |
| $n$                        | número of partículas por unidad de volumen propio (cm <sup>-3</sup> )                 |
| $V := 1/n$                 | volumen propio por partícula (cm <sup>3</sup> )                                       |
| $j$                        | flujo de masa (cm <sup>-2</sup> s <sup>-1</sup> )                                     |
| $p$                        | presión (erg cm <sup>-3</sup> )   |
| $u^\mu = g^{\mu\nu} u_\nu$ | cuadri-velocidad (cm/s)   |
| $t$                        | tiempo (s)  |
| $\Gamma$                   | factor de Lorentz   |
| $\kappa$                   | índice politrópico  |
| $\rho$                     | densidad de masa (g/cm <sup>3</sup> )   |
| $\sigma$                   | entropía específica propia (erg/K)  |
| $\omega$                   | entalpía específica propia (erg)  |

|  |  |
|--|--|
| $\dot{m}$  | descarga (g/s)   |
| $L$  | luminosidad (erg/s cm <sup>-3</sup> )                          |
| $\varepsilon$                                      | densidad de energía interna específica (erg cm <sup>-3</sup> ) |
| $T^{\mu\nu}$                                       | tensor energía-impulso   |
| <b>índices griegos:</b> $\{\alpha, \beta, \dots\}$ | toman valores 0, 1, 2, 3,                                      |
| <b>índices latinos:</b> $\{a, b, \dots\}$          | toman valores 1, 2, 3,   |

## Resumen.

En el presente trabajo se describe un modelo analítico exacto de una superficie de trabajo, es decir, un conjunto de dos ondas de choque separadas por una discontinuidad de contacto que se mueve a lo largo de un flujo relativista en una dirección espacial en el límite de choque fuerte relativista, esto es, cuando la energía térmica del fluido es mucho mayor que la energía en reposo del mismo fluido. Esta solución analítica exacta se presenta con un enfoque hidrodinámico y más general que un estudio balístico como el que muestran Mendoza et al. (2009) y Cantó et al. (2013). La superficie de trabajo surge a partir de la ruptura de una discontinuidad inicial en las cantidades hidrodinámicas de presión, densidad y velocidad. Esta discontinuidad inicial se genera por una inyección de velocidad variable en el tiempo dentro de un jet astrofísico relativista.

Sí la energía térmica dentro de la superficie de trabajo se radía completamente mediante procesos radiativos no térmicos que dependen del jet astrofísico relativista de estudio, como un blazar, se calcula entonces la luminosidad  $L := -de/dt$ . A partir de esto, se modela una muestra de curvas de luz emitidas por la superficie de trabajo. Estas curvas de luz dependen cuantitativamente de los saltos en las cantidades hidrodinámicas pre-choque y post-choque.



# Capítulo 1

## Introducción

El estudio de modelos de la formación y propagación de una superficie de trabajo en el tiempo y en el espacio, es decir, de dos ondas de choque separadas por una discontinuidad de contacto (véase sección 3.5) a lo largo de un flujo relativista han sido descritos de manera semi-analítica, analítica y numérica a partir de diferentes suposiciones. La aproximación analítica de la formación de una superficie de trabajo que se presenta en Mendoza et al. (2009) asume que los tiempos de escala de radiación son más pequeños que los tiempos dinámicos característicos del problema, en consecuencia la presión del fluido es despreciable y la colisión de elementos del fluido se describe de manera balística, es decir, se describe el movimiento del fluido y su interacción con otros elementos de fluido y es válida si el flujo es adiabático. Por otra parte, el modelo que describe Cantó et al. (2013) sobre la superficie de trabajo asume que la conservación del momento lineal no es válida para flujos relativistas donde la descarga relativista  $\dot{m}$  por radiación debe ser tomada en cuenta. Ambos modelos suponen que la fuente que eyecta el flujo tiene velocidad y descarga dependientes del tiempo del cual se produce la superficie de trabajo.

Modelos que surgen a partir de las condiciones de salto de conservación de Taub (véase la sección 3.3) como el que plantean Martí & Müller (1994), formulan una solución analítica general del problema de Riemann relativista, es decir, que del decaimiento de una discontinuidad inicial, esta forma diferentes tipos de estructuras formadas por la combinación de discontinuidades como ondas de choque, discontinuidades de contacto u ondas de rarefacción como función del tiempo. De estos tipos de estructuras se forma la superficie de trabajo y depende de las condiciones iniciales de velocidad, presión y energía del problema. Sin embargo, este modelo no muestra una solución exacta de como se obtiene el valor de la presión dentro de la superficie de trabajo a partir de las condiciones iniciales. Mas adelante, Beloborodov & Uhm (2006) obtiene las condiciones de salto en las cantidades hidrodinámicas de velocidad, presión y densidad de masa a través de una onda de

choque, en un sistema de referencia donde la onda de choque se encuentra en reposo. Asumiendo un gas relativista pre-choque con presión despreciable, una energía en reposo  $e = \rho c^2$  y una ecuación de estado que depende de un índice adiabático variable (véase sección 4.10). Este modelo se aplica a un blast wave autosimilar en el artículo de Uhm (2011), que considera una estructura de dos ondas de choque separadas por una discontinuidad de contacto y asume que en el interior de esta estructura se viola la ley de conservación de la energía.

En códigos numéricos hidrodinámicos también es posible resolver el problema de Riemann relativista como parte de una prueba inicial (Martí et al., 1997, Toro, 2009, Lora-Clavijo et al., 2013, Rezzolla, 2013, Aguayo-Ortiz et al., 2018). No obstante, estos métodos no son completamente exactos, debido a que siempre existe una propagación de errores en ellos, aunque, son una muy buena aproximación a problemas astrofísicos complejos. Una razón importante del estudio de los modelos discutidos anteriormente es la descripción astrofísica de la formación de choques internos en jets astrofísicos relativistas.

Los jets astrofísicos son conductos físicos a lo largo de los cuales la masa, el momento, la energía y el flujo magnético se canalizan desde objetos estelares, galácticos y extragalácticos al medio exterior (de Gouveia Dal Pino, 2005). En particular, los jets astrofísicos relativistas, son jets con velocidades cercanas a la de la luz que están presentes en muchas partes del universo. Abarcan un amplio rango de luminosidades, los valores típicos son de  $\approx 10^{37}$  erg s<sup>-1</sup> en un microquasar, de  $10^{42}$  erg s<sup>-1</sup> hasta  $10^{47}$  erg s<sup>-1</sup> en un núcleo activo de galaxia (AGN), y mayor a  $10^{50}$  erg s<sup>-1</sup> en destellos de rayos gamma (GRBs, por sus siglas en inglés, Romero et al., 2011, Ghisellini et al., 2017). Estos objetos existen en diversas escalas por ejemplo, los destellos de rayos gamma (GRB) se extienden en el medio interestelar con longitudes menores a 1 pc, los factores de Lorentz iniciales durante la emisión rápida de rayos gamma son muy altos,  $\Gamma_0 \geq 100$  y por lo tanto se observa emisión en sincrotrón principalmente a muy pequeños ángulos,  $\theta \leq \Gamma_0^{-1} \leq 10^{-2}$  rad, respecto a nuestra línea de visión. Los núcleos activos de galaxias pueden llegar a medir típicamente alrededor de 100 kpc y hasta algunos Mpc. Los jets extragalácticos de estos objetos emanan de agujeros negros supermasivos que están rodeados por un disco de acreción (Kulkarni et al., 1999), son altamente colimados y terminan en grandes lóbulos. En particular, los jets en blazares, se definen como radiofuentes conformados por los objetos BL-Lac (Blazar-Lacertae), y FSRQ (Flat Spectrum Radio Quasar) que representan la clase más energética. Ellos se conocen por tener los más potentes jets. Estos jets de tipo BL-Lac y FSRQ son altamente relativistas y apuntan siempre hacia el observador.

La interacción de estos jets con inhomogeneidades del medio circundante, la deflexión de los jets y las fluctuaciones en el tiempo de los parámetros iniciales de eyección producen nodos que son regiones de brillo aumentado que se han observado en emisión en sincrotrón, que pueden ser

interpretados como choques internos (Rees, 1978). Cabrera et al. (2013) realizan un estudio de curvas de luz del blazar PKS1510-089 generado por estos choques internos. Este estudio consiste en el ajuste de curvas de luz observadas con el modelo balístico de Mendoza et al. (2009), con el propósito de tener una mejor comprensión de los parámetros físicos asociados al mecanismo que produce la luminosidad observada. Del conocimiento acumulado de simulaciones hidrodinámicas, se sabe que que estos choques se forman como resultado de la interacción con el medio que los rodea y por lo tanto, se forman a grandes distancias del objeto central (Martí et al., 1997).

El objetivo de la presente tesis es encontrar una solución analítica exacta a una superficie de trabajo, dentro de un flujo en una dimensión, en el límite de choque fuerte relativista, en el sistema de referencia en el que la superficie de trabajo se mueve en la misma dirección y el mismo sentido que el flujo. La motivación astrofísica es que dicha superficie de trabajo se genera por una inyección de material a velocidad variable en la base de un jet relativista. Se modelan los perfiles de densidad, presión y velocidad de manera analítica bajo las condiciones de formación de una superficie de trabajo y se comparan estos resultados con el modelo analítico que presentan Martí & Müller (1994) con la intención de verificar la convergencia de ambos resultados en el límite de choque fuerte relativista. Suponiendo que la energía dentro de la superficie de trabajo se radía fuertemente mediante algún proceso radiativo no térmico, se calcula también la luminosidad que dicho fenómeno mecánico generaría. Además, se caracterizan perfiles de curvas de luz a partir de la emisión no térmica de la superficie de trabajo. Estas curvas de luz resultan ser importantes para la determinación de los parámetros hidrodinámicos iniciales de presión, densidad de masa y velocidad que produce a la superficie de trabajo.





## Capítulo 2

### Hidrodinámica relativista

En este capítulo se describen los principios básicos de la hidrodinámica relativista (Mendoza, 2016, Rezzolla, 2013). La importancia de tener en cuenta los efectos relativistas puede deberse no solo a una gran velocidad del movimiento macroscópico, si no también, a una gran velocidad del movimiento microscópico de las partículas del fluido (Landau & Lifshitz, 1987).

Además, se toma en cuenta que para gases ultra-relativistas, una ecuación de estado que caracteriza a este fluido es necesaria para cerrar el sistema de ecuaciones hidrodinámico.

#### 2.1. Ecuaciones de la hidrodinámica relativista

Para comenzar esta descripción es necesario definir un objeto matemático cuyas propiedades contengan la información de un fluido en movimiento (Landau & Lifshitz, 1987), se define el tensor de energía-momento  $T^{\mu\nu}$  como:

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu} = (\rho c^2 + p + \varepsilon)u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu} p, \quad (1.1)$$

donde  $u^\mu$  es la cuadri-velocidad del fluido,  $\varepsilon$  es la densidad de energía térmica interna por unidad de volumen,  $p$  es la presión,  $\rho$  es la densidad de masa del elemento del fluido y  $g^{\mu\nu}$  es la métrica del espacio-tiempo que toma la forma:

$$g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1). \quad (1.2)$$

Una parte importante a resaltar es que estas cantidades termodinámicas  $p$ ,  $\rho$  y  $\varepsilon$  se miden en el sistema de referencia propio del fluido, en el cual el elemento de fluido en consideración está en reposo. La cuadri-velocidad está dada por:

$$u^\mu = \frac{du^\mu}{ds} = \Gamma \left( 1, \frac{\mathbf{v}}{c} = \frac{dx^i}{cdt} \right), \quad (1.3)$$

en donde la componente  $u^i$  toma la forma

$$u^i = \frac{v^i/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (1.4)$$

por lo que se define al factor de Lorentz como  $\Gamma = 1/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ .

Las ecuaciones de campo que describen el movimiento y la evolución de los fluidos como función de las coordenadas  $x^\mu$  están dadas por la divergencia nula del tensor energía-momento (Landau & Lifshitz, 1987):

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = 0, \quad (1.5)$$

al desglosar esta última ecuación en componentes se tiene:

$$\frac{\partial T^{0\mu}}{\partial x^\mu} = \frac{1}{c} \frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \frac{\partial T^{0i}}{\partial x^i} = 0, \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial T^{i\mu}}{\partial x^\mu} = \frac{1}{c} \frac{\partial T^{i0}}{\partial t} + \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^j} = 0, \quad (1.7)$$

estas ecuaciones expresan las leyes de la conservación de la energía y momento para el sistema físico al que pertenece  $T^{\mu\nu}$ .

Cada componente del tensor-energía-momento representa un importante papel en estas ecuaciones, la componente temporal  $T^{00}$  representa la densidad de energía relativista (energía por unidad de volumen, erg cm<sup>-3</sup>), mientras que el vector  $cT^{0i}$  es el flujo de energía por unidad de tiempo (erg s<sup>-1</sup>) que pasa a través de una superficie perpendicular a la dirección  $x^i$ , por todo esto la ecuación (1.6) es una ecuación en forma conservativa de la energía.

Por otro lado, el vector  $T^{i0}/c$  representa la densidad de momento (momento por unidad de volumen) y  $T^{ij}$  es el flujo de la componente  $i$ -ésima del momento por unidad de tiempo en la dirección perpendicular a una superficie cuyo vector normal es  $x^j$ , de tal forma que la ecuación (1.7) es una ecuación conservativa para el momento lineal (Landau & Lifshitz, 1987).

Es necesario utilizar también el principio de conservación del número de partículas  $n$  (cm<sup>-3</sup>), que no está contenido en (1.5). En un sistema de referencia fijo donde se observa al fluido moverse,

cada partícula se mueve con una velocidad  $v$  y la densidad de partículas medida en dicho sistema es  $\Gamma n$ . Así, el número de partículas de fluido que se encuentran encapsuladas dentro de un volumen en reposo  $V$  ( $\text{cm}^3$ ) en el sistema de referencia inercial del laboratorio, es decir, el sistema de referencia desde donde se analiza al fluido que se mueve es entonces

$$\int_V \Gamma n dV, \quad (1.8)$$

tomada a lo largo de todo volumen  $V$ , por consiguiente, el número de partículas por unidad de tiempo que fluye a través de un elemento de área  $d\mathbf{a}$  está dado por:

$$\oint_{\delta V} \Gamma n \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a}, \quad (1.9)$$

donde  $\mathbf{v}$  es la velocidad del elemento de fluido. Debido a que el elemento de área apunta hacia afuera de la superficie, entonces la cantidad  $\Gamma n \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a}$  es positiva si el fluido fluye hacia afuera y negativa en caso contrario (Mendoza, 2016),  $\delta V$  es la superficie de frontera de  $V$ . Por otro lado, la tasa de decremento de partículas en dicho volumen es

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \Gamma n dV. \quad (1.10)$$

En ausencia de fuentes o sumideros, las dos cantidades anteriores se igualan resultando en la forma integral de la ecuación de conservación del número de partículas:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \Gamma n dV = -\frac{1}{c} \oint_{\delta V} \Gamma n \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{1}{c} \int_V \nabla \cdot [\Gamma n \mathbf{v}] dV. \quad (1.11)$$

Dado que el volumen  $V$  es arbitrario, los integrandos del lado derecho e izquierdo son iguales de modo que la ecuación (1.11) implica que:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\Gamma n) = -\frac{1}{c} \nabla \cdot [\Gamma n \mathbf{v}], \quad (1.12)$$

es decir, se obtiene la ecuación de continuidad igualando a cero la divergencia del vector de flujo  $nu^\alpha := n\Gamma(1, \mathbf{v}/c)$

$$\frac{\partial nu^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0. \quad (1.13)$$

## 2.2. Ecuación de estado Bondi-Wheeler

Hasta este punto, es fácil notar que las ecuaciones (1.5) y (1.13) son 5 ecuaciones de conservación, 1 ecuación de energía, una ecuación de continuidad y tres ecuaciones de momento lineal, con seis incógnitas hidrodinámicas  $p$ ,  $\varepsilon$ ,  $\rho$ ,  $u^x$ ,  $u^y$  y  $u^z$ , por lo que el sistema de ecuaciones aún no está cerrado, es necesario considerar una ecuación de estado que relacione dos cantidades hidrodinámicas y que esté intrínsecamente asociada a un gas ultra-relativista, caso de nuestro interés. Para esto se considera un gas ideal que fluye adiabáticamente a través de una onda de choque, este gas ideal cumple la siguiente relación politrópica (Stanyukovich, 1960):

$$p = A\rho^k, \quad (2.1)$$

donde  $k = 1 + 1/n$  es el índice politrópico del flujo,  $A$  es la constante politrópica y  $\rho$  es la densidad de masa que satisface la ecuación de continuidad. La ecuación (2.1) cumple:

$$dp = Ad\rho^k, \quad (2.2)$$

$$dp = A\kappa\rho^{k-1}d\rho, \quad (2.3)$$

$$dp = A\gamma\rho^k\rho^{-1}d\rho, \quad (2.4)$$

$$dp = \kappa p\rho^{-1}d\rho, \quad (2.5)$$

$$\frac{dp}{\kappa p} = \frac{d\rho}{\rho}, \quad (2.6)$$

mientras que para el caso de un proceso adiabático, la primera ley de la termodinámica está dada por (Mendoza, 2016):

$$d(eV) = -pdV, \quad (2.7)$$

$$de|_{ad} = \frac{1}{V}(-edV - pdV), \quad (2.8)$$

$$de|_{ad} = -\frac{\omega}{V}dV, \quad (2.9)$$

$$de|_{ad} = -\omega\rho d\frac{1}{\rho}, \quad (2.10)$$

$$de|_{ad} = \frac{\omega}{\rho}d\rho, \quad (2.11)$$

donde  $\omega = e + p$  es la entalpía específica por unidad de volumen ( $\text{erg cm}^{-3}$ ) y  $e$  la densidad de energía por unidad de volumen total específica ( $\text{erg cm}^{-3}$ ) que está dada por:

$$e = nmc^2 + \varepsilon = \rho c^2 + \varepsilon. \quad (2.12)$$

Igualando las ecuaciones (2.6) y (2.11) se obtiene:

$$\frac{dp}{\kappa p} = \frac{de}{e + p}, \quad (2.13)$$

o bien, la ecuación (2.13) se puede expresar como:

$$p \frac{de}{dp} - \frac{e}{\kappa} = \frac{p}{\kappa}, \quad (2.14)$$

la solución general de la ecuación (2.14) se compone de una solución homogénea  $e_h = Cp^{1/\kappa}$  y una solución particular de la forma  $e_p = p/(\kappa - 1)$  si  $\kappa \neq 1$ . Así que la solución general de la ecuación (2.14) es de la forma:

$$e = Cp^{1/\kappa} + \frac{p}{\kappa - 1}, \quad (2.15)$$

con la elección de que  $C = c^2/A^{1/\kappa}$ , por tanto la ecuación (2.15) es:

$$e = c^2 \left( \frac{p}{A} \right)^{1/\kappa} + \frac{p}{\kappa - 1}. \quad (2.16)$$

La ecuación de estado más general para un gas politrópico relativista se obtiene al sustituir la ecuación (2.1) en (2.16) para obtener (Tooper, 1965):

$$e = \rho c^2 + \frac{p}{\kappa - 1}, \quad (2.17)$$

sin embargo, sucede que en algunos fenómenos astrofísicos cuando se trata de describir gases ultra-relativistas la presión  $p$  del mismo es mucho mayor que su densidad de masa en reposo  $\rho c^2$ , es decir,  $p \gg \rho c^2$  que tiene como consecuencia que  $e = \varepsilon$ . Esto equivale a elegir  $C = 0$  y a la relación resultante se le denomina la ecuación de estado de Bondi-Wheeler para flujos ultra-relativistas (Tooper, 1965):

$$p = (\kappa - 1)e. \quad (2.18)$$

En el caso de un gas de fotones o electrones que se mueven a velocidades ultra-relativistas, el

índice politrópico es  $\kappa = 4/3$  (Landau & Lifshitz, 1986).

El conjunto de ecuaciones que se van a resolver son:

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = 0, \quad (2.19)$$

que corresponde a la conservación de energía y momento lineal,

$$\frac{\partial nu^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0, \quad (2.20)$$

es la ecuación de continuidad de masa y

$$p = (\kappa - 1)e, \quad (2.21)$$

representa a la ecuación de estado de Bondi-Wheeler. El número de ecuaciones como se puede ver forman un sistema cerrado de ecuaciones e incógnitas hidrodinámicas.

## Capítulo 3

### Ondas de choque en dinámica de fluidos relativistas.

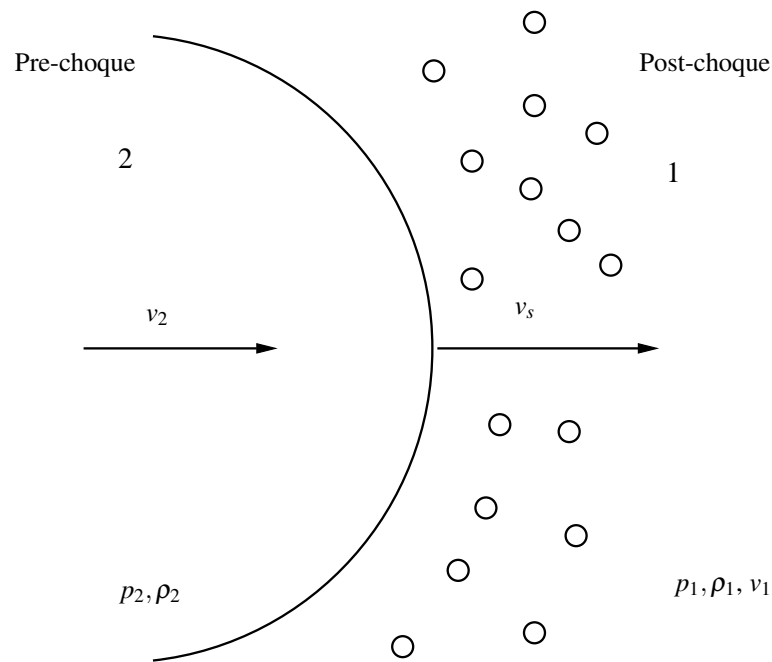
Este capítulo se enfoca en la descripción de la formación de distintas superficies de discontinuidad como ondas de choque, discontinuidades tangenciales, discontinuidades de contacto y discontinuidades iniciales. Siguiendo sobre este camino, se hace un análisis sobre las condiciones de salto necesarias que deben cumplir las ondas de choque y las discontinuidades de contacto, de tal forma que se cumplan las leyes de conservación en hidrodinámica relativista, además de como evolucionan con respecto a su movimiento siguiendo líneas *características*. Por último se introduce la definición de una superficie de trabajo, que se genera a partir de discontinuidades iniciales, asumiendo condiciones de choque fuerte relativista.

#### 3.3. Superficies de discontinuidad

La existencia de flujos en los que se producen discontinuidades en las cantidades hidrodinámicas son posibles cuando se presentan cambios grandes en los gradientes de densidad, presión y velocidad, los parámetros que se consideran varían discontinuamente cuando se cruzan dichas superficies que se denominan *superficies de discontinuidad*. Las partículas del fluido en su movimiento pueden cruzar una superficie de discontinuidad. Debido a que esta *superficie de discontinuidad* representa un salto en las cantidades hidrodinámicas matemáticamente hablando, deben cumplirse condiciones de frontera que no son arbitrarias y deben satisfacer las ecuaciones de conservación de un lado y del otro de la discontinuidad (Landau & Lifshitz, 1987).

En el caso relativista, hay muchas situaciones en las que se presentan estas discontinuidades a través de un fluido. Supongamos que un fluido se eyecta lo suficientemente fuerte de tal manera que su velocidad es cercana a la velocidad de la luz a velocidades supersónicas, los gradientes de presión entonces en ese sistema son tan grandes debido a este contraste de velocidades entre el





**Figura 3.1:** Un ejemplo de onda de choque se produce cuando un fluido ultra-relativista ( $v_s \approx c$ ) es eyectado por algún proceso físico de alta energía a una velocidad supersónica  $c_s$  que alcanza a un fluido cuyo estado tiene parámetros  $p_1$ ,  $v_1$  y  $\rho_1$  y pasa a un estado  $p_2$ ,  $v_2$  y  $\rho_2$ , debido a la alta presión  $p_2$  que se ejerce, se genera una onda de choque en la misma dirección de movimiento del fluido relativista. El arco muestra la superficie de discontinuidad denominada *onda de choque*, las flechas muestran la dirección del movimiento del fluido post-choque ( $v_2$ ) y la discontinuidad ( $v_s$ ), que está chocando con un fluido el cual se encuentra en un sistema de referencia en reposo (círculos).

fluido eyectado y el medio con el que interactúa, así, se genera una superficie de discontinuidad delante del fluido eyectado (pre-choque) denominado *onda de choque* (figura 3.1).<sup>†</sup> Si un elemento del fluido atraviesa este tipo de discontinuidad cambiará su presión, densidad y velocidad de manera drástica. Los diferentes tipos de discontinuidad que son posibles en un fluido se presentan a continuación.

En la descripción matemática del flujo, las superficies de discontinuidad representan fronteras para el análisis del fluido tanto detrás como delante de la superficie. El flujo de masa, energía y

<sup>†</sup> En el caso más general, ocurre que la discontinuidad inicial se separa en dos ondas de choque, el frente de choque y una onda de choque de reversa propagándose a través de la eyección, la primera por ser más energética e ir en la dirección del flujo se toma más en consideración que la onda de reversa, en la mayoría de los casos, mientras que la onda de reversa se disipa más rápido.

momento deben ser conservados al cruzar la discontinuidad.

La teoría de ondas de choque en dinámica de fluidos relativista se construye análogamente a la teoría no-relativista (H. Taub, 1948). Sí se considera un sistema de referencia tal que la superficie de discontinuidad se encuentra en reposo. El gas se mueve a través de la onda de choque y pasa de un estado inicial pre-choque 1 hacia el lado final 2 post-choque como en la figura 3.1. Si denotamos la diferencia de valores de cualquier cantidad hidrodinámica  $q$  antes y después de la discontinuidad como  $[q] := q_1 - q_2$ , las condiciones de continuidad para las densidades de flujo de número de partículas, momento y energía en un flujo unidimensional en la componente  $x$  respectivamente son:

$$[n^x] = [nu^x] = 0, \quad (3.1)$$

$$[T^{xx}] = [\omega(u^x)^2 + p] = 0, \quad (3.2)$$

$$c[T^{0x}] = c[\omega u^0 u^x] = 0, \quad (3.3)$$

o, después de realizar la sustitución de las componentes de la 4-velocidad,

$$v_1 \Gamma_1 / V_1 = v_2 \Gamma_2 / V_2 := j, \quad (3.4)$$

$$\omega_1 v_1^2 \Gamma_1^2 / c^2 + p_1 = \omega_2 v_2^2 \Gamma_2^2 / c^2 + p_2, \quad (3.5)$$

$$\omega_1 v_1 \Gamma_1^2 = \omega_2 v_2 \Gamma_2^2. \quad (3.6)$$

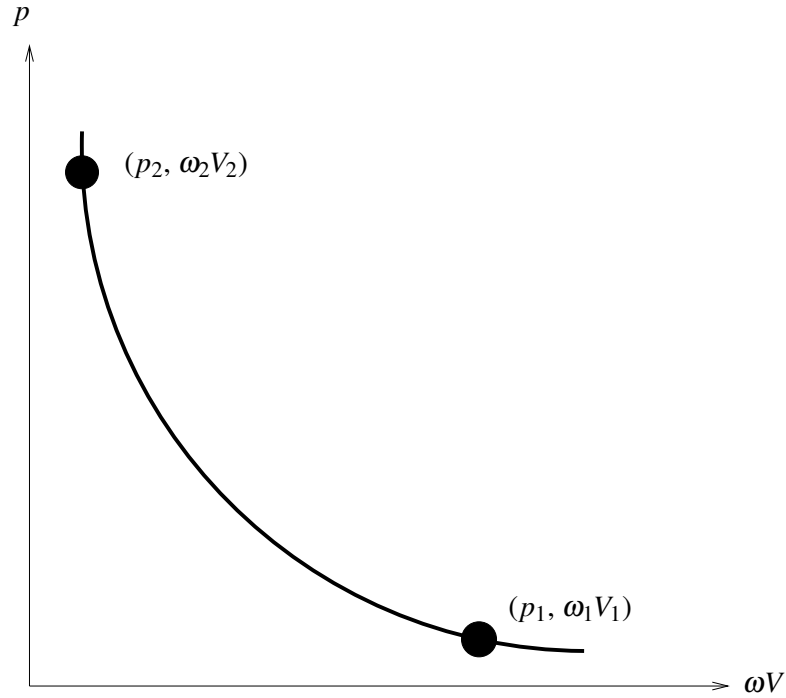
donde  $\Gamma_{1,2} := 1/\sqrt{1 - v_{1,2}^2/c^2}$  son los factores de Lorentz de las velocidades del fluido  $v_1$  y  $v_2$  en la región 1 y 2 respectivamente. Las cantidades  $V_{1,2} := 1/n_{1,2}$  representan el volumen por partícula ( $\text{cm}^3$ ) asociado a estas mismas regiones y  $j$  es el flujo de masa ( $\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ ).

De estas condiciones de frontera se pueden derivar dos tipos distintos de discontinuidades. Las discontinuidades en las que las partículas de fluido atraviesan la discontinuidad se denominan *ondas de choque*. En ellas la condición  $[nu^x] = 0$  implica, de acuerdo a las igualdades (3.1) y (3.2), que las velocidades tangenciales  $u^y$  y  $u^z$  son continuas a en la onda de choque debido a que el flujo se mueve en la componente  $x$ .

Análogo a la hidrodinámica no-relativista se obtiene de las ecuaciones (3.1)-(3.3) una relación entre las variables termodinámicas en ambos lados de la onda de choque, junto con la ecuación de estado  $p = p(e)$ , y fijado el estado 1 pre-choque, llamada la adiabática de Taub (H. Taub, 1948), que admite una representación en el plano  $p - \omega V$  (véase e.g. la figura 3.2) donde el lugar geométrico de todos los estados 2 post-choque pueden ser conectados con el estado 1 pre-choque a través de

una onda de choque. La adiábata de Taub es representada matemáticamente en la forma:

$$\omega_1^2 V_1^2 - \omega_2^2 V_2^2 + (p_2 - p_1)(\omega_1 V_1^2 + \omega_2 V_2^2) = 0. \quad (3.7)$$



**Figura 3.2:** La línea sólida representa esquemáticamente a la adiábata de Taub en el plano  $p$  vs  $\omega V$ , los estados  $(p_2, \omega_2 V_2)$  son mayores a los estados  $(p_1, \omega_1 V_1)$  ya que la entropía debe incrementar a través del choque.

También, derivadas de (3.2) y (3.3) y asumiendo que  $v/c = \tanh(\phi)$  y  $\Gamma = \cosh(\phi)$ , se obtienen expresiones para las velocidades del gas de ambos lados de la discontinuidad (Landau & Lifshitz, 1987):

$$\left(\frac{v_1}{c}\right)^2 = \frac{(p_2 - p_1)(e_2 + p_1)}{(e_2 - e_1)(e_1 + p_2)}, \quad \left(\frac{v_2}{c}\right)^2 = \frac{(p_2 - p_1)(e_1 + p_2)}{(e_2 - e_1)(e_2 + p_1)}, \quad (3.8)$$

la derivación de las ecuaciones (3.8) se detallan en el apéndice .2. Además, la velocidad relativa de los gases sobre uno de los lados de la discontinuidad es, de acuerdo a la regla de adición de velocidades relativistas:

$$v_{12} = v_1 \ominus v_2 := \frac{v_1 - v_2}{1 - \frac{v_1 v_2}{c^2}} = c \sqrt{\frac{(p_2 - p_1)(e_2 - e_1)}{(e_1 + p_2)(e_2 + p_1)}}. \quad (3.9)$$

A partir de la ecuación de estado (2.18) de la sección 2.2 cuando el índice politrópico  $\kappa = 4/3$  resulta que  $p = e/3$  y de las ecuaciones (3.8) se obtienen

$$\left(\frac{v_1}{c}\right)^2 = \frac{3e_2 + e_1}{3(3e_1 + e_2)}, \quad \left(\frac{v_2}{c}\right)^2 = \frac{3e_1 + e_2}{3(3e_2 + e_1)}, \quad (3.10)$$

y al multiplicar ambas velocidades  $v_1 v_2 = c^2/3$  (véase apéndice .4). En el caso en el que la onda de choque es fuerte ( $e_2 \rightarrow \infty$ ),  $v_1$  tiende a la velocidad de la luz y  $v_2$  tiende a  $c/3$ , es decir, el gas pre-choque se desacelera cuando atraviesa la onda de choque y pasa al estado post-choque.

El segundo grupo de discontinuidades se caracterizan por la ausencia de un flujo de masa a través de la discontinuidad, es decir,  $[j] = 0$ . De esto se sigue que:

$$[p]_{\text{dt}} = 0.$$

Las componentes de la velocidad  $v^y$  y  $v^z$  que son tangenciales a la superficie, aceptan cualquier diferencia entre ambos lados de la discontinuidad (Landau & Lifshitz, 1987). Este tipo de discontinuidades se denominan *discontinuidades tangenciales*, las cuales son inestables y se les denomina inestabilidades de Kelvin-Helmholtz, si la velocidad tangencial relativa es distinta de cero, entonces las perturbaciones por muy pequeñas que sean producen turbulencias. En el caso contrario, cuando las velocidades tangenciales son las mismas se le denomina una *superficie de contacto*. La discontinuidad de contacto es estacionaria respecto al gas en ambos lados de la discontinuidad de contacto y no se mezclan, puesto que no existe ningún movimiento del gas a través de una discontinuidad tangencial. Finalmente, las expresiones de (3.8) implican que

$$[v^x]_{\text{sc}} = 0, \quad (3.11)$$

es decir, que las velocidades en la componente  $x$  en cada lado de la discontinuidad de contacto son las mismas.

---

<sup>†</sup> En este trabajo se toma a los símbolos  $\oplus$  y  $\ominus$  como la regla de adición de velocidades relativistas, es decir,  $v_1 \oplus v_2 = (v_1 \pm v_2)/(1 \pm v_1 v_2)$ .

### 3.4. Velocidades características

Otro elemento importante a considerar, es la velocidad del sonido en hidrodinámica relativista. Consideremos una perturbación en el fluido de tal forma que las cantidades  $p = p_0 + \hat{p}$ ,  $e = e_0 + \hat{e}$  y  $v = v_0 + \hat{v}$  donde  $\hat{e}$ ,  $\hat{p}$  y  $\hat{v}$  son cantidades pequeñas alrededor de los valores fijos de energía  $e_0$ , presión  $p_0$  y  $v_0 = 0$ . Sustituyendo esto en las ecuaciones de conservación se obtiene a primer orden de aproximación:

$$\frac{e_0 + p_0}{c^2} \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{p}}{\partial r} = 0, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \hat{e}}{\partial t} + (e_0 + p_0) \frac{1}{r^\kappa} \frac{\partial (r^\kappa \hat{v})}{\partial r} = 0. \quad (4.2)$$

Igualando la divergencia de la ecuación (4.1) con la derivada temporal de la ecuación (4.2), se encuentra que

$$\frac{\partial^2 \hat{e}}{\partial t^2} = c^2 \frac{1}{r^\kappa} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^\kappa \frac{\partial \hat{p}}{\partial r} \right], \quad (4.3)$$

de la primera ley de la termodinámica, dado que una onda sonora en un fluido ideal es adiabática entonces la variación pequeña de  $\hat{e}$  de la energía está relacionada con la pequeña modificación  $\hat{p}$  de la presión a través de  $\hat{e} = (\partial e / \partial p)_\sigma \hat{p}$ , con lo cual se obtiene la ecuación de onda para la presión  $\hat{p}$ , o alternativamente para la energía  $\hat{e}$  (Blandford & McKee, 1976). En ambos casos la velocidad de propagación de la onda es la velocidad del sonido  $c_s$ , tal que

$$c_s^2 = c^2 \left( \frac{\partial p}{\partial e} \right)_\sigma. \quad (4.4)$$

Utilizando la ecuación de estado relativista  $p = e/3$  (véase cf. 2.2), la velocidad del sonido es entonces  $c_s = c/\sqrt{3}$ . Esta es la velocidad de propagación de la información en fluidos relativistas. De esta manera, las desigualdades  $v_1 > c_{s1}$  y  $v_2 > c_{s2}$  son válidas para ondas de choque relativistas y son necesarias dado que la onda de choque es evolutiva espacial y temporalmente (véase apéndice .5).

Consideremos ahora un flujo relativista unidimensional en el cual los procesos de disipación no son tomados en cuenta. Esto es, la entropía permanece constante cuando el fluido se mueve (Mendoza, 2000). Para este particular caso, la ecuación de continuidad, y la componente  $x$  de la ecuación de movimiento, están dados por

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Gamma\rho) + \frac{\partial}{\partial x}(\Gamma\rho v^x) = 0, \quad (4.5)$$

y

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t}(\omega v^x \Gamma^2) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\omega v^2 \Gamma^2}{c^2} - p \right) = 0, \quad (4.6)$$

respectivamente. Si definimos las cantidades:

$$\alpha := \frac{c_s}{c} := \left( \frac{\partial p}{\partial e} \right)_\sigma^{1/2}, \quad (4.7)$$

$$\phi := \frac{1}{c} \int \frac{c_s}{\rho} d\rho, \quad (4.8)$$

entonces la ecuación (4.5) y la ecuación (4.6) pueden ser escritas como (véase el apéndice .6):

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left\{ \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^x}{c} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\} + \frac{\alpha}{c} \left\{ \frac{v^x}{c^2} \frac{\partial v^x}{\partial t} + \frac{\partial v^x}{\partial x} \right\} = 0, \quad (4.9)$$

$$\alpha \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left\{ \frac{v^x}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial v^x}{\partial t} + \frac{v^x}{c^2} \frac{\partial v^x}{\partial x} = 0. \quad (4.10)$$

Sumando y restando estas dos relaciones se obtiene:

$$\mathcal{D}_\pm \left( \frac{v^x}{c} \right) \pm \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \mathcal{D}_\pm \phi = 0, \quad (4.11)$$

donde

$$\mathcal{D}_\pm f := \left( 1 \pm \alpha \frac{v^x}{c} \right) \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} \pm \left( \alpha \pm \frac{v^x}{c} \right) \frac{\partial f}{\partial x}, \quad (4.12)$$

para cualquier función  $f(t, x)$ . De las definiciones del operador  $\mathcal{D}_\pm$  en la ecuación (4.12), se sigue que:

$$\frac{\mathcal{D}_\pm (v^x/c)}{1 - v^2/c^2} = \mathcal{D}_\pm \ln \left( \frac{1 + v^x/c}{1 - v^x/c} \right)^{1/2}, \quad (4.13)$$

y entonces, las ecuaciones (4.11) se convierten en:

$$(1 - v^2/c^2) \mathcal{D}_\pm \left\{ \ln \left( \frac{1 + v^x/c}{1 - v^x/c} \right)^{1/2} \pm \phi \right\} = 0. \quad (4.14)$$

Si ahora introducimos los invariantes de Riemann como:

$$\mathcal{J}_{\pm} := \phi \pm \ln \left( \frac{1 + v^x/c}{1 - v^x/c} \right)^{1/2}, \quad (4.15)$$

entonces las ecuaciones (4.14), es decir, (4.5)-(4.6), se vuelven equivalente a (H. Taub, 1948, Taub, 1978):

$$\left[ \left( 1 \pm \alpha \frac{v^x}{c} \right) \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \pm \left( \alpha \pm \frac{v^x}{c} \right) \frac{\partial}{\partial x} \right] \mathcal{J}_{\pm} = 0, \quad (4.16)$$

de esta relación se sigue que los invariantes de Riemann  $\mathcal{J}_{\pm}$  son constantes a lo largo de las curvas  $dx/dt = \pm c(\alpha \pm v^x/c)/(1 \pm \alpha v^x/c)$  respectivamente. Estas curvas  $\mathcal{C}_{\pm}$  son llamadas *velocidades características* y juegan un rol esencial en hidrodinámica. Los operadores diferenciales que aparecen dentro de los corchetes cuadrados en la ecuación (4.16) son los operadores de diferenciación a lo largo del trayecto de las *velocidades características*  $\mathcal{C}_{\pm}$  en el plano  $x-t$ .

Como un punto a destacar, las discontinuidades de contacto admiten invariantes de Riemann, que vienen dados por la presión y la velocidad. Por lo tanto, estas discontinuidades admiten velocidades características y se mueven a la velocidad del flujo que atraviesa la discontinuidad de contacto.

### 3.5. Superficies de trabajo

Cuando un elemento de fluido atraviesa la onda de choque las cantidades hidrodinámicas cambian de modo que la entropía por unidad de volumen  $\sigma$  aumenta, en completa concordancia con la segunda ley de la termodinámica (Landau & Lifshitz, 1987). Utilizando, como antes los subíndices 1 y 2 para las cantidades antes y después de la onda de choque respectivamente, esto significa que (Khalatnikov, 1954):

$$\sigma_2 > \sigma_1,$$

esta desigualdad determina la forma en que cambian el resto de las cantidades hidrodinámicas (Taub, 1978), de tal forma que (véase apéndice .5):

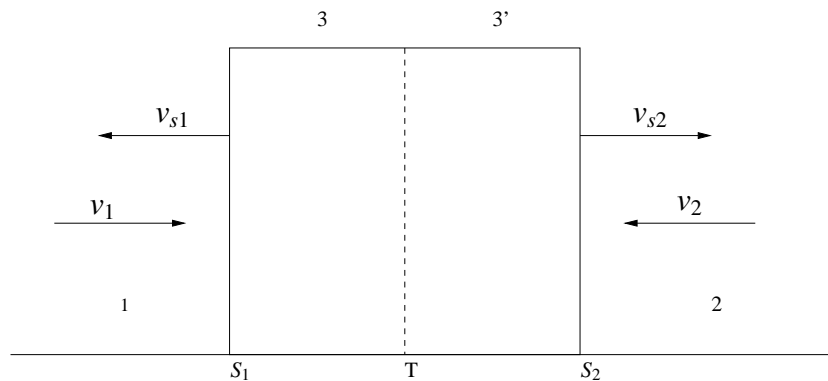
$$n_2 > n_1, \quad p_2 > p_1, \quad \omega_2 > \omega_1. \quad (5.1)$$

Una información importante que puede extraerse del estudio de la adiabática de Taub está

dada por la magnitud de las velocidades de flujo en cada lado del choque y como se comparan las velocidades del sonido locales (cf. 3.4). Si adicionalmente se hace uso de las desigualdades (5.1) se deduce que la magnitud de la velocidad a través de la onda de choque debe decrecer, es decir,  $v_1 > v_2$ .

Por lo tanto, los cambios en las cantidades hidrodinámicas no son arbitrarios. El flujo de momento, energía y masa deben ser conservados al pasar de un lado a otro de la onda de choque. Una de las razones más importantes para la presencia de una superficie de trabajo en un flujo de gas es la posibilidad de discontinuidades en las condiciones iniciales en las cantidades hidrodinámicas, ya sea, de presión  $p$ , densidad  $\rho$  o velocidad  $v$ . Deben cumplirse condiciones sobre las superficies de discontinuidad estables en un flujo de gas, como por ejemplo, en una onda de choque las discontinuidades de presión y de densidad están relacionadas por la adiabática de Taub que se expresa en la ecuación (3.7) (H. Taub, 1948).

En particular esta discontinuidad inicial se divide en varios tipos de discontinuidades sobre la superficie de discontinuidad estable en el flujo de gas, como ondas de choque y discontinuidades de contacto, estas condiciones se discuten en breve.



**Figura 3.3:** La figura muestra el perfil de presión  $p$  respecto a la posición  $x$  en la que se producen dos ondas de choque  $S_1$  y  $S_2$  separadas por una discontinuidad de contacto  $T$  estacionaria respecto al flujo del gas post choque 3 y 3' que rodea a esta discontinuidad. Este sistema hidrodinámico es generado a partir de la ruptura de una discontinuidad inicial generada por las cantidades hidrodinámicas iniciales. A éste conjunto de discontinuidades se le llama superficie de trabajo y tiene la característica de tener velocidad relativa de los estados pre-choque 1 y 2 suficientemente grande. Además, las presiones post y pre choque cumplen que  $p_3 = p_{3'} > p_2 > p_1$ . Las flechas indican la dirección del movimiento de las ondas de choque (líneas continuas) y del movimiento del flujo en la componente  $x$  en el sistema de referencia en donde la discontinuidad de contacto se encuentra en reposo.

Supongamos que tenemos un flujo de gas con velocidad variable. Si un elemento de fluido



viaja a lo largo del flujo a una velocidad más rápida que otro elemento de fluido anteriormente eyectado entonces eventualmente el flujo rápido alcanzará al flujo lento. Así pues, el flujo se vuelve multivaluado. La naturaleza resuelve esta aparente contradicción formando una discontinuidad inicial la cual se convierte eventualmente en una superficie de trabajo, es decir, dos ondas de choque moviéndose en direcciones opuestas separadas por una discontinuidad de contacto en reposo. La figura 3.3 muestra una de las posibilidades de ruptura de la discontinuidad inicial que da origen a dos ondas de choque  $S_1$  y  $S_2$  moviéndose en la dirección de los estados pre-choque 1 y 2, y una discontinuidad tangencial T entre ellas. Esta discontinuidad T es estacionaria respecto al gas en ambas caras de la misma (Landau & Lifshitz, 1987).

Para que una discontinuidad inicial forme esta superficie de trabajo, es necesario que dos elementos de fluido choquen entre ellas a una velocidad relativa lo suficientemente grande (Rezzolla, 2013), es decir,

$$v_1 \ominus v_2 > \sqrt{\frac{(p_1 - p_2)(e - e_2)}{(e + p_2)(e_2 + p_1)}}. \quad (5.2)$$

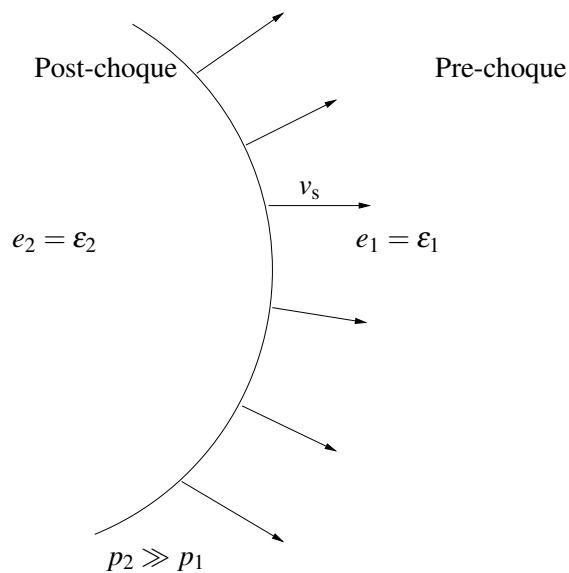
Por otra parte, dado que la adiabática de Taub de la figura 3.2 es monótona decreciente, se cumple que  $p_3 = p_{3'} > p_2 > p_1$  (véase sección 100 de Landau & Lifshitz, 1987).

### 3.6. Condiciones de choque fuerte.

En términos de presiones, un choque fuerte significa que la presión post-choque  $p_2$  es mucho mayor a la presión pre-choque  $p_1$ , es decir, se cumple la desigualdad,  $p_2 \gg p_1$ . Cuando se tienen en mente fenómenos de alta energía como las ondas de choque, es necesario entender cuando se generan choques intensos y cuál es su significado en la descripción de la hidrodinámica relativista.

La densidad de energía total pre-choque está dada por  $e_1 = n_1 mc^2 + \varepsilon_1$ , donde  $\varepsilon_1$  es la densidad de energía térmica del flujo, y la densidad de energía total post-choque está dada por  $e_2 = n_2 mc^2 + \varepsilon_2$  con  $\varepsilon_2$  la densidad de energía térmica al flujo correspondiente. Además en el caso de fluidos ultra-relativistas de interés, la energía en reposo del elemento del fluido pre y post choque es mucho menor que cada una de las correspondientes densidades de energías térmicas, es decir,  $\varepsilon_1 \gg n_1 mc^2$  y  $\varepsilon_2 \gg n_2 mc^2$ , esto implica que la densidad de energía total pre-choque puede aproximarse como  $e_1 \approx \varepsilon_1$ , así como la densidad de energía post-choque puede ser puramente energía térmica, esto es,  $e_2 \approx \varepsilon_2$ .

La figura 3.4 muestra el significado de una onda de choque fuerte en hidrodinámica relativista para el caso de un fluido ultra-relativista con ecuación de estado de Bondi-Wheeler. Los resultados encontrados en la sección 3.5 siguen siendo válidos también para choques fuertes, para los cuales los saltos en los estados que están adelante y detrás del choque pueden ser grandes. Las condiciones de choque fuerte mencionadas anteriormente resultan de interés en la astrofísica relativista. Por ejemplo, en términos simples si el fluido pre-choque previamente ha chocado con el medio circundante, entonces la temperatura del fluido aumenta de tal forma que, si la densidad de energía térmica  $\varepsilon_1$  supera a la energía en reposo, las condiciones de choque fuerte pueden ser aplicadas.



**Figura 3.4:** Una onda de choque fuerte es donde la densidad de energía interna post-choque  $e_2$  es mucho más grande que la energía interna en reposo  $e_1$ . Las flechas muestran la dirección de la propagación de la onda de choque con velocidad  $v_s$ . La densidad de energía total, la presión y la energía interna térmica están dadas por  $(e, p, \varepsilon)$  y los subíndices 1 y 2 se refieren a los flujos pre y post choque. En un choque fuerte la densidad de energía total pre-choque y post-choque tienen solo una contribución, que está relacionada con la densidad de energía térmica del flujo  $\varepsilon$ .



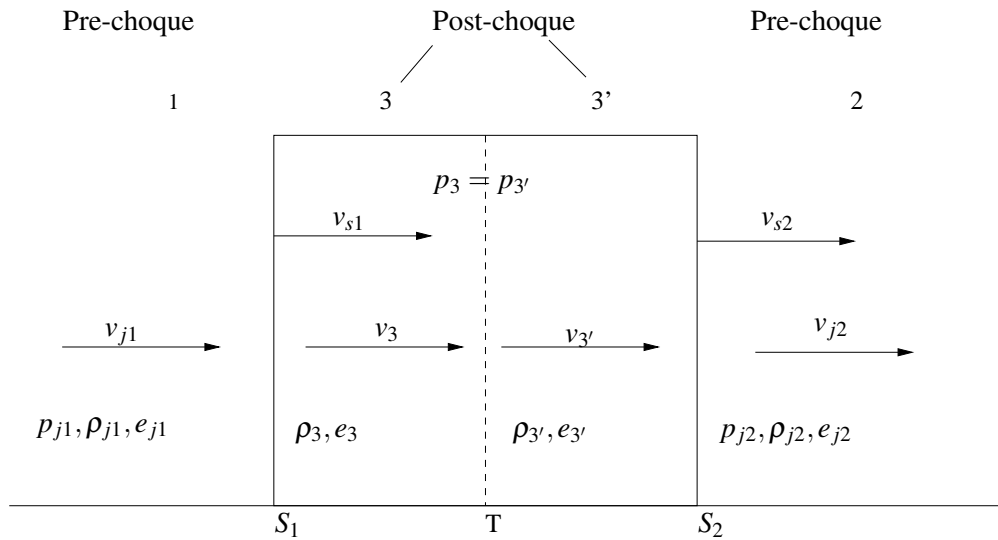
## Capítulo 4

### Condiciones de salto para un flujo de gas ultra-relativista.

En este trabajo se desarrolla un modelo analítico para el estudio de una superficie de trabajo que se mueve a velocidades ultra-relativistas en una dimensión en el límite de choque fuerte a través de un flujo cuya eyección de velocidad es variable. A partir del sistema de referencia descrito en Landau & Lifshitz (1987) en donde el conjunto de dos ondas de choque moviéndose en sentidos opuestos están separadas por una discontinuidad de contacto en reposo, es posible cambiar a un sistema de referencia en donde las superficies de discontinuidad se mueven en la misma dirección de movimiento a través de la regla de adición de velocidades en relatividad especial y, en consecuencia, se obtienen las condiciones de salto de los parámetros hidrodinámicos de cada una de las ondas de choque que conforman la superficie de trabajo y a través de la discontinuidad de contacto. Se muestran diferentes casos de perfiles hidrodinámicos para distintos valores iniciales de la velocidad  $v$ , presión  $p$  y densidad de masa  $\rho$  que demuestran que la solución a la que se llega concuerda con el modelo analítico de Martí & Müller (1994) y el código hidrodinámico AZTEKAS de Aguayo-Ortiz et al. (2018). Para finalizar, se muestran curvas de luz en el rango de valores de factores de Lorentz que se obtienen en Cabrera et al. (2013) a partir de la aplicación de la modelación de choques internos en fenómenos astrofísicos como blazares (Mendoza et al., 2009).

#### 4.7. Cálculo de las condiciones de salto.

Consideremos un flujo de gas politrópico relativista unidimensional en coordenadas cartesianas eyectado con una presión  $p_{j1}$ , una densidad de energía por unidad de volumen  $e_{j1}$ , una densidad de masa  $\rho_{j1}$  y con una velocidad variable ultra-relativista en unidades de la velocidad de la luz  $v_{j1} \leq 1$ . Supongamos además que la ecuación de estado del fluido es ultra-relativista de tal manera que la energía interna específica es mucho más grande que la energía en reposo de cada partícula



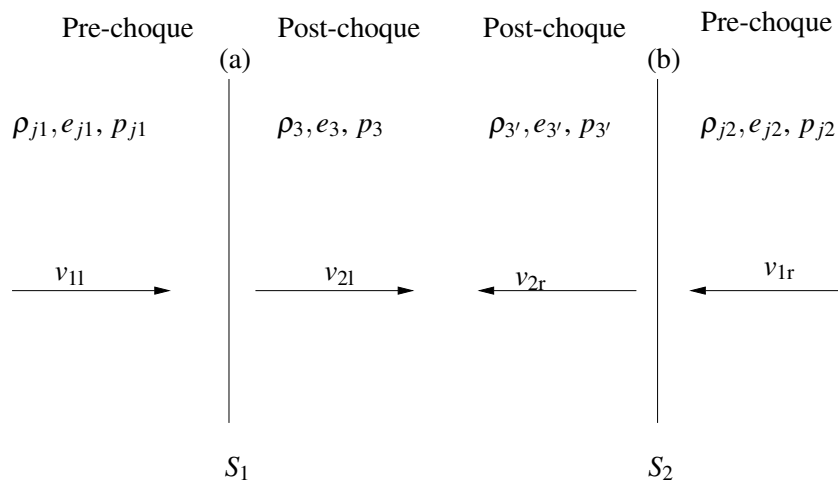
**Figura 4.1:** La figura muestra una superficie de trabajo, es decir, dos ondas de choque separadas por una discontinuidad de contacto la cual se propaga sobre un gas en movimiento con velocidad  $v_{j2}$ . Se asume que la superficie de trabajo ha sido generada por una inyección de flujo variable en velocidad proveniente del lado izquierdo de la figura. Las líneas solidas verticales representan las ondas de choque  $S_1$  y  $S_2$  y la línea discontinua es la discontinuidad de contacto T. Las flechas indican la dirección de la velocidad del flujo y de las ondas de choque. Las cantidades  $\rho$ ,  $e$  y  $p$  son diferentes en cada una de las regiones de la superficie de trabajo y están determinadas a partir de las condiciones iniciales del flujo de eyección y el flujo externo inicial en movimiento.

del fluido, es decir,  $\epsilon \gg \rho c^2$  que satisface una ecuación de estado de Bondi-Wheeler  $p = e/3$  (véase sección 2.2). Este flujo es eyectado sobre otro flujo cuya velocidad constante es  $v_{j2} < v_{j1}$  con una presión  $p_{j2}$ , una densidad de energía  $e_{j2}$  y densidad de masa  $\rho_{j2}$ . Las suposiciones de un flujo ultra-relativista eyectado periódicamente en la parte inicial del jet dan como origen la formación de una superficie de trabajo desde que un particular elemento de flujo rápido eventualmente alcanza a un elemento de flujo lento en algún punto a lo largo del jet generando así un flujo multivaluado. La naturaleza resuelve este problema generando una discontinuidad inicial el cual rápidamente forma dos ondas de choque separadas por una discontinuidad de contacto. Todas estas discontinuidades se mueven en la misma dirección y sentido del flujo eyectado ( Landau & Lifshitz, 1987, Mendoza et al., 2009).

La figura 4.1 muestra una superficie de trabajo, es decir, dos ondas de choque separadas por una discontinuidad de contacto generadas por una velocidad variable en el tiempo de eyección.

Denotemos a la parte derecha entre la discontinuidad de contacto y la onda de choque como la región 3' que contiene material chocado. La onda de choque produce una discontinuidad en las cantidades hidrodinámicas entre el medio pre-choque ( $p_{j2}, \rho_{j2}, v_{j2}$ ) y el flujo post-choque ( $p_{3'}, \rho_{3'}, v_{3'}$ ). La región 3 contiene material chocado con una densidad de masa distinta de la región 3'. Las regiones 3 y 3' están separadas por una discontinuidad de contacto T. La onda de choque en la región 3 también produce una discontinuidad fuerte en las cantidades hidrodinámicas entre el flujo eyectado ( $p_{j1}, \rho_{j1}, v_{j1}$ ) y el gas post-choque ( $p_3, \rho_3, v_3$ ).

Para encontrar la solución exacta a este problema se procede de la siguiente manera. Cada una de las ondas de choque puede ser estudiada de manera separada en un sistema de referencia en donde la onda de choque se encuentra en reposo, como se muestra en la figura 4.2 para las dos ondas de choque (a) y (b), las condiciones de velocidad (3.8) descritas en la sección 3.3 (Landau & Lifshitz, 1987) se denotan con los índices  $ir$  para la onda de choque derecha e  $il$  para la onda de choque de la izquierda. A partir de este método, se deduce que el salto en la densidad de masa en la discontinuidad de contacto surge naturalmente a través de la unión de ambas soluciones.



**Figura 4.2:** La figura muestra dos ondas de choque  $S_1$  y  $S_2$  en sistemas de referencia separados: (a) La onda de choque  $S_1$  está en el sistema de referencia en donde se encuentra en reposo y el flujo pre-choque se mueve de izquierda a derecha. (b) La onda de choque  $S_2$  se encuentra en reposo y el flujo pre-choque se mueve de derecha a izquierda. Las flechas indican la dirección del movimiento de los flujos,  $v_{il}$  representa la velocidad de los flujos pre y post choque del lado izquierdo y  $v_{ir}$  representa la velocidad de los flujos pre y post choque del lado derecho.

Tomando a la onda de choque (a) del lado izquierdo de la figura 4.2, y la dirección del flujo de

izquierda a derecha, las ecuaciones (3.8) en unidades de la velocidad de la luz son:

$$v_{1l}^2 = \frac{(p_3 - p_1)(e_3 + p_1)}{(e_3 - e_1)(e_1 + p_3)}, \quad (7.1)$$

$$v_{2l}^2 = \frac{(p_3 - p_1)(e_1 + p_3)}{(e_3 - e_1)(e_3 + p_1)}, \quad (7.2)$$

donde el subíndice 1 represente el gas en el estado pre-choque y el subíndice 3 representa el gas en el estado post-choque.

Sustitución directa de la ecuación de estado relativista (2.18), es decir,  $p = e/3$  en las ecuaciones (7.1) y (7.2) resulta que

$$v_{1l}^2 = \frac{3e_3 + e_1}{3(3e_1 + e_3)}, \quad (7.3)$$

$$v_{2l}^2 = \frac{3e_1 + e_3}{3(3e_3 + e_1)}, \quad (7.4)$$

entonces en el límite de choque fuerte relativista ( $e_3 \rightarrow \infty$ ), se obtiene  $v_{1l}v_{2l} = 1/3$ ,  $v_{1l}$  tiende a la velocidad de la luz y  $v_{2l}$  tiende a  $1/3$  de la velocidad de la luz.

Asumiendo que la energía  $e_3 \gg e_1$  en el límite de choque fuerte relativista, sin hacer que la energía post-choque tienda a infinito, la expresión (7.3) es:

$$v_{1l}^2 = \frac{3 + e_1/e_3}{3(3e_1/e_3 + 1)}, \quad (7.5)$$

de esta manera el cociente  $e_1/e_3$  es una cantidad pequeña de primer orden. De aquí en adelante se utilizan aproximaciones lineales de la forma  $(1+x)^n = 1 + nx + \dots \approx 1 + nx$  donde  $x$  es un termino que cumple la condición  $x \ll 1$ . Así, la ecuación (7.5) se puede aproximar a primer orden de la forma

$$v_{1l} \approx \sqrt{\frac{1}{3} \left( 3 - 8 \frac{e_1}{e_3} \right)}, \text{ y por lo tanto:}$$

$$v_{1l} \approx 1 - \frac{4}{3} \frac{e_1}{e_3}, \quad (7.6)$$

Nótese que, cuando  $e_3 \rightarrow \infty$  entonces  $v_{1l}$  tiende a la velocidad de la luz.

El factor de Lorentz asociado a esta velocidad es

$$\Gamma_{1l}^2 = \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{4}{3} \frac{e_1}{e_3}\right)^2} \approx \frac{3}{8} \frac{e_3}{e_1}. \quad (7.7)$$

Siguiendo este mismo razonamiento para la velocidad post-choque  $v_{2l}$

$$v_{2l}^2 = \frac{3 \frac{e_1}{e_3} + 1}{9 \left(1 + \frac{1}{3} \frac{e_1}{e_3}\right)} \approx \frac{1}{9} \left(1 + \frac{8}{3} \frac{e_1}{e_3}\right), \quad (7.8)$$

por lo tanto, a primer orden obtenemos

$$v_{2l} \approx \frac{1}{3} \left(1 + \frac{4}{3} \frac{e_1}{e_3}\right). \quad (7.9)$$

Una vez más, en el límite en el que  $e_3 \rightarrow \infty$  entonces  $v_{2l}$  tiende a  $1/3$ . El factor de Lorentz asociado a  $v_{2l}$  es:

$$\Gamma_{2l}^2 = \frac{1}{1 - \frac{1}{9} \left(1 + \frac{4}{3} \frac{e_1}{e_3}\right)^2} \approx \frac{9}{8} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{e_1}{e_3}\right). \quad (7.10)$$

Con estos resultados es posible calcular la velocidad relativa  $v_{1l2l} := v_{1l} \ominus v_{2l}$  de un lado a otro del choque en el límite de choque fuerte relativista

$$v_{1l2l} = \frac{v_{1l} - v_{2l}}{1 - v_{1l}v_{2l}} = \frac{1 - \frac{1}{3} - \left(\frac{4}{3} + \frac{4}{9}\right) \frac{e_1}{e_3}}{1 - \frac{1}{3} \left(1 + \frac{4}{3} \frac{e_1}{e_3}\right) \left(1 - \frac{4}{3} \frac{e_1}{e_3}\right)} = 1 - \frac{8}{3} \frac{e_1}{e_3}, \quad (7.11)$$

y el factor de Lorentz asociado a  $v_{1l2l}$  es

$$\Gamma_{1l2l}^2 = \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{8}{3} \frac{e_1}{e_3}\right)^2} \approx \frac{3}{16} \frac{e_3}{e_1}. \quad (7.12)$$

Análogos a estos resultados se procede de la misma manera para la onda de choque (b) del lado derecho de la figura 4.2 y se calculan las velocidades  $v_{1r}$  y  $v_{2r}$  con sus factores de Lorentz correspondientes, respetando el signo que deben de llevar, ya que se toma como positiva la dirección el flujo que va de izquierda a derecha, entonces estos resultados son:



$$-v_{1r} \approx \left(1 - \frac{4}{3} \frac{e_2}{e_{3'}}\right), \quad (7.13)$$

$$\Gamma_{1r}^2 = \frac{3}{8} \frac{e_{3'}}{e_2}, \quad (7.14)$$

$$-v_{2r} \approx \frac{1}{3} \left(1 + \frac{4}{3} \frac{e_2}{e_{3'}}\right), \quad (7.15)$$

$$\Gamma_{2r}^2 \approx \frac{9}{8} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{e_2}{e_{3'}}\right). \quad (7.16)$$

Los factores de Lorentz asociados a  $v_{1l}$ ,  $v_{2l}$ ,  $v_{1r}$  y  $v_{2r}$  se calculan debido a que existen propiedades que se presentan en el apéndice 4.10, que facilitan el cambio de sistema de referencia en el que las ondas de choque se encuentran en reposo a un sistema en donde ambas ondas de choque se muevan en la misma dirección.

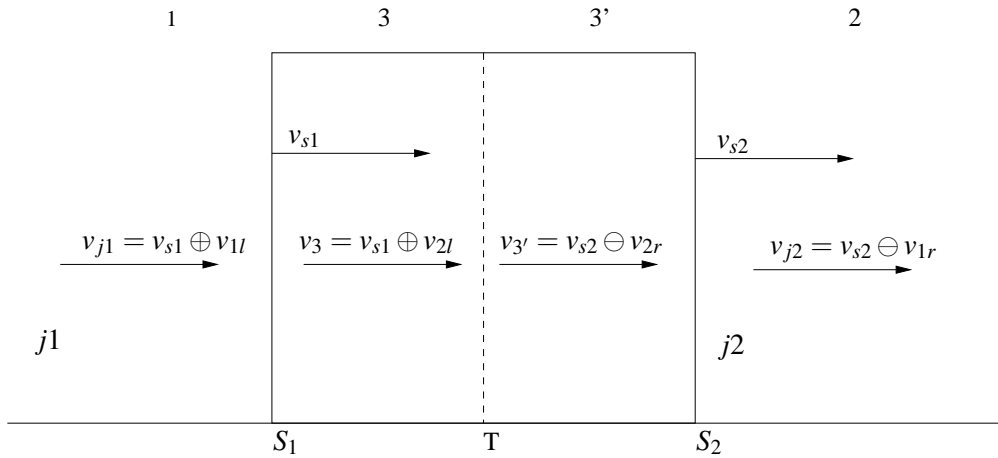
Ahora, se cambia al sistema de referencia en el que ambas ondas de choque se mueven en la misma dirección y sentido, el cual es el caso que nos interesa. Para esto, se utiliza la regla de transformación de velocidades en relatividad especial. Se suma una velocidad  $v_{s1} = 1 - \varepsilon_1$  ultra-relativista para la onda de choque de la izquierda  $S_1$ , en donde  $\varepsilon_1 \ll 1$  es un parámetro pequeño. Así, la onda de choque se mueve con esta misma velocidad, mientras que para la onda de choque de la derecha  $S_2$ , se suma una velocidad  $v_{s2} = 1 - \varepsilon_2$  ultra-relativista, con  $\varepsilon_2 \ll 1$ , que cumple con ser mayor tanto a  $v_{2r}$  como  $v_{1r}$  de tal forma que el flujo y la onda de choque se muevan en la misma dirección y sentido que la onda de choque de la izquierda como se muestra en la figura 4.3

La manera más conveniente (pero no la única) de proceder, es a partir de los factores de Lorentz asociados a cada una de las velocidades de las distintas regiones, ya que es posible relacionar el factor de Lorentz de la suma de dos velocidades  $v_1 \oplus v_2$  relativistas con los factores de Lorentz de cada una de las velocidades  $v_1$  y  $v_2$  medidas en su sistema de referencia (apéndice .1), es decir,

$$\Gamma_{1 \oplus 2}^2 = 4\Gamma_1^2 \Gamma_2^2. \quad (7.17)$$

Se aplica esta transformación a la región pre-choque de la onda de choque de lado izquierdo  $S_1$  para la velocidad  $v_{j1}$  y se tiene:

$$\Gamma_{j1}^2 = 4\Gamma_{s1}^2 \Gamma_{1l}^2, \quad (7.18)$$



**Figura 4.3:** Mediante la transformación adecuada de velocidades aplicado a las dos ondas de choque izquierda y derecha, ambas ondas de choque  $S_1$  y  $S_2$  se han cambiado de sistema de referencia desde la figura 4.2 a un sistema completo en movimiento, sin que las cantidades hidrodinámicas de presión, energía y densidad de masa sean afectadas, ya que no dependen del sistema de referencia al ser escalares. Los símbolos  $\ominus$  y  $\oplus$  representan esta regla de adición de velocidades relativistas.

donde los subíndices  $i$  denotan al factor de Lorentz  $\Gamma_i$  asociado a la velocidad  $v_i$ . Además, otro importante resultado que se asocia el factor de Lorentz de la adición de dos velocidades cualesquiera  $v_1$  y  $v_2$  es de la forma:

$$\Gamma_{1\oplus 2}^2 = \Gamma_1^2 \Gamma_2^2 (1 + v_1 v_2)^2, \quad (7.19)$$

que tiene como consecuencia que, cuando  $v_2 < 1$  arbitrario y  $v_1$  es ultra-relativista (apéndice .1):

$$\Gamma_{1\oplus 2}^2 = \Gamma_1^2 \Gamma_2^2 (1 + v_2)^2. \quad (7.20)$$

Se aplica esta última relación a la velocidad  $v_3$  de la región post-choque de la onda de choque de lado izquierdo, tomando en cuenta que  $v_{2l}$  tiende a  $1/3$  de la velocidad de la luz, entonces:

$$\Gamma_3^2 = \Gamma_{s1\oplus 2l}^2 = \frac{16}{9} \Gamma_{s1}^2 \Gamma_{2l}^2. \quad (7.21)$$

Sustituyendo la ecuación (7.10) en (7.21) a orden cero de aproximación se obtiene:

$$\Gamma_3^2 = \Gamma_{1s\oplus 2l}^2 = 2\Gamma_{s1}^2, \quad (7.22)$$

La relación (7.22) representa la velocidad de movimiento de la onda de choque izquierda  $S_1$ . Este

choque se debe mover a la mitad de la velocidad del material post-choque. La división entre la relación (7.18) y (7.22) implica que:

$$\Gamma_3^2 = \frac{1}{2} \frac{\Gamma_{j1}^2}{\Gamma_{1l}^2}, \quad (7.23)$$

y sustituyendo la relación (7.7) en (7.23) resulta que:

$$\Gamma_3^2 = \frac{4}{3} \frac{e_{j1}}{e_3} \Gamma_{j1}^2. \quad (7.24)$$

es decir, el factor de Lorentz post-choque debe de moverse un factor  $4e_{j1}/3e_3$  más lento que el factor de Lorentz pre-choque. Así pues, considerando que la onda de choque de la izquierda es un choque fuerte relativista, la ecuación (7.7) implica que:

$$e_3 = \frac{4}{3} \frac{\Gamma_{j1}^2}{\Gamma_3^2} e_{j1}. \quad (7.25)$$

Esto identifica cuantitativamente el salto en las densidades de energía (y por lo tanto el salto en las presiones) y varia según sean las velocidades pre-choque y post-choque. Cumple la condición  $\Gamma_{j1} > \Gamma_3$  y por tanto el salto de energías respeta el incremento en la entropía  $\sigma_3 > \sigma_{j1}$ . Por último, las ecuaciones (7.22) y (7.7) dan una relación entre los factores de Lorentz (y por lo tanto de sus velocidades) pre-choque  $\Gamma_{j1}$  y el asociado a la onda de choque  $\Gamma_{s1}$ :

$$\Gamma_{s1}^2 = \frac{2}{3} \frac{e_{j1}}{e_3} \Gamma_{j1}^2. \quad (7.26)$$

Por otro lado, y bajo la condición que la superficie de trabajo se mueva en una misma dirección, las transformaciones de velocidades pre-choque  $v_{j2}$  y post-choque  $v_{3'}$  de la onda de choque de la derecha  $S_2$  son sustracción de dos velocidades. Dado que este camino es más complejo, es conveniente notar que si  $v_{j2} = v_{s2} \ominus v_{1r}$ , entonces  $v_{s2} = v_{j2} \oplus v_{1r}$ , por lo que es posible utilizar de nuevo la relación (7.17) a los factores de Lorentz asociados a las velocidades  $v_{j2}$ ,  $v_{s2}$  y  $v_{1r}$  que den como resultado relaciones similares como en la onda de choque de la izquierda, entonces:

$$\Gamma_{s2}^2 = 4\Gamma_{j2}^2\Gamma_{1r}^2. \quad (7.27)$$

Al igual que como se hizo en la relación (7.19) es posible demostrar que (véase apéndice .1):

$$\Gamma_{1\ominus 2}^2 = \Gamma_1^2 \Gamma_2^2 (1 - v_1 v_2)^2, \quad (7.28)$$

para el caso en el que  $v_2$  tiene cualquier valor y  $v_1$  es ultra-relativista (apéndice .1):

$$\Gamma_{1\ominus 2}^2 = \Gamma_1^2 \Gamma_2^2 (1 - v_2)^2, \quad (7.29)$$

entonces utilizando (7.30) para  $v_{3'}$  y considerando que  $v_{2r} \rightarrow 1/3$  la relación implica que:

$$\Gamma_{3'}^2 = \frac{4}{9} \Gamma_{s2}^2 \Gamma_{2r}^2, \quad (7.30)$$

a orden cero de aproximación  $\Gamma_{2r}^2 = 9/8$  y por lo tanto:

$$\Gamma_{3'}^2 = \frac{1}{2} \Gamma_{s2}^2. \quad (7.31)$$

Así pues, el movimiento de la onda de choque de la derecha  $S_2$  debe ser dos veces más rápido que el movimiento del gas post-choque. Sustituyendo las ecuaciones (7.31) en (7.27) se obtiene:

$$\Gamma_{3'}^2 = 2 \Gamma_{j2}^2 \Gamma_{1r}^2. \quad (7.32)$$

Por otra parte, sustituyendo (7.37) en (7.32) da como resultado:

$$\Gamma_{3'}^2 = \frac{3}{4} \frac{e_{3'}}{e_{j2}} \Gamma_{j2}^2, \quad (7.33)$$

o bien

$$e_{3'} = \frac{4}{3} \frac{\Gamma_{3'}^2}{\Gamma_{j2}^2} e_{j2}, \quad (7.34)$$

el cual expresa el salto de energías (presiones) post-choque y pre-choque que depende de los factores de Lorentz pre-choque y post-choque del choque derecho. Como consecuencia de (7.31) y (7.33) se obtiene:

$$\Gamma_{s2}^2 = \frac{3}{2} \frac{e_{3'}}{e_{j2}} \Gamma_{j2}^2. \quad (7.35)$$

Algo importante que mencionar sobre las relaciones (7.33) y (7.35) es que expresan el hecho de que el factor de Lorentz asociado a  $v_{3'}$  y  $v_{s2}$  son más grandes por un cociente de  $e_{3'}/e_{j2}$  respecto a  $\Gamma_{j2}$  en el límite de choque fuerte relativista.

Para poder obtener una relación que describa los saltos en las densidades a través de una onda de choque, partamos de la adiabática de Taub (3.7), ya que contiene toda la información de las condiciones de salto de las ecuaciones conservativas relativistas. Si la entalpía específica por unidad de volumen es (Landau & Lifshitz, 1987):

$$\omega = \frac{\kappa p}{\kappa - 1}, \quad (7.36)$$

entonces, para un gas politropo relativista  $\kappa = 4/3$ , esto implica que  $\omega = 4p$ , por lo que la adiabática de Taub (3.7) se convierte en:

$$4^2 p_1^2 V_1^2 - 4^2 p_2^2 V_2^2 + (p_2 - p_1) (4p_1 V_1^2 + 4p_2 V_2^2) = 0, \quad (7.37)$$

la cual puede ser resuelta para  $V_2$  ( $\rho_2$ ) fijando los parámetros  $V_1$  ( $\rho_1$ ),  $p_2$  y  $p_1$ . En términos de densidad de masa, la ecuación (2.29) es:

$$4 \frac{p_1^2}{\rho_1^2} - 4 \frac{p_2^2}{\rho_2^2} + (p_2 - p_1) \left( \frac{p_1}{\rho_1^2} + \frac{p_2}{\rho_2^2} \right) = 0. \quad (7.38)$$

Por lo tanto la solución a la ecuación anterior es (véase apéndice .2):

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \sqrt{\frac{p_2}{p_1} \left( \frac{3 \frac{p_2}{p_1} - 1}{3 + \frac{p_2}{p_1}} \right)} \approx \sqrt{\frac{3p_2}{p_1}}, \quad (7.39)$$

para el caso de choque fuerte en el que  $p_2 \gg p_1$ . La relación (7.39) indica que la densidad post-choque es más grande que la densidad pre-choquey cumple con la condición del aumento de entropía al pasar de un lado al otro del choque  $\sigma_2 > \sigma_1$ . Además, a diferencia de la condición de salto en hidrodinámica no-relativista, en donde el salto en densidades es constante para un choque fuerte y depende únicamente del índice politrópico del gas de la forma  $(\kappa + 1)/(\kappa - 1)$ , aquí, el salto en densidades puede llegar a ser tan grande como el cociente de presiones  $p_2/p_1$  lo sea. Sin embargo, debido a que el límite en donde se asume la ecuación (7.39) es el ultra-relativista, no es posible regresar al límite no-relativista en donde el contraste de densidades es  $\rho_2/\rho_1 = 4$  cuando  $\kappa = 5/3$ .

Para unir el sistema completamente, es decir, las ondas de choque  $S_1$ ,  $S_2$  y la discontinuidad de contacto, dentro de la superficie de trabajo la presión es continua, es decir,  $p_3 = p_3'$  pero no así la densidad de masa (y por lo tanto tampoco la temperatura ni la entropía). Debido a que el movimiento del flujo es en una sola dirección y sentido, su velocidad intrínseca es perpendicular a la discontinuidad de contacto que se forma de manera natural, y por lo tanto la velocidad es

continua a través de la discontinuidad de contacto. En otras palabras,  $v_3 = v_{3'}$  y  $\Gamma_3 = \Gamma_{3'}$  (Landau & Lifshitz, 1987). Así las ecuaciones (7.25) y (7.34) toman la forma:

$$p_3 = \frac{4}{3} \frac{\Gamma_{j1}}{\Gamma_3} p_{j1} = \frac{4}{3} \frac{\Gamma_3^2}{\Gamma_{j2}^2} p_{j2} = p_{3'}, \quad (7.40)$$

$$\Gamma_3^4 = \Gamma_{j1}^2 \Gamma_{j2}^2 \frac{p_{j1}}{p_{j2}}, \quad (7.41)$$

$$\Gamma_3^2 = \Gamma_{j1} \Gamma_{j2} \sqrt{\frac{p_{j1}}{p_{j2}}}. \quad (7.42)$$

De aquí se puede obtener que la velocidad a la que se mueve el interior de la superficie de trabajo es:

$$v_3 = v_{3'} = \left( 1 - \left( \frac{p_{j2}}{p_{j1}} \right)^{1/2} (1 - v_{j1}^2)^{1/2} (1 - v_{j2}^2)^{1/2} \right)^{1/2}, \quad (7.43)$$

$$\approx 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{p_{j2}}{p_{j1}} \right)^{1/2} \Gamma_{j1}^{-1} \Gamma_{j2}^{-1}. \quad (7.44)$$

Sustitución directa de la ecuación (7.42) ya sea en (7.25) o (7.34) implica que:

$$p_3 = p_{3'} = \frac{4}{3} \frac{\Gamma_{j1}}{\Gamma_{j2}} (p_{j1} p_{j2})^{1/2}, \quad (7.45)$$

en donde queda completamente determinada  $p_3 = p_{3'}$  en términos de las condiciones de frontera  $p_{j1}$ ,  $p_{j2}$ ,  $\Gamma_{j1}$  y  $\Gamma_{j2}$  que se le impongan. Por último, utilizando la ecuación (7.39), el salto en la densidad de masa a través de la discontinuidad de contacto está dado por:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_3}{\rho_{j1}} &= \sqrt{\frac{p_3}{p_{j1}} \left( \frac{3p_3/p_{j1} - 1}{3 + p_3/p_{j1}} \right)} \approx \sqrt{\frac{3p_3}{p_{j1}}}, \\ \frac{\rho_{3'}}{\rho_{j2}} &= \sqrt{\frac{p_{3'}}{p_{j2}} \left( \frac{3p_{3'}/p_{j2} - 1}{3 + p_{3'}/p_{j2}} \right)} \approx \sqrt{\frac{3p_{3'}}{p_{j2}}}, \end{aligned} \quad (7.46)$$

y se puede notar que al sustituir la ecuación (7.45) en (7.46) se obtiene:

$$\frac{\rho_{3'}}{\rho_{j1}} = \sqrt{4 \frac{\Gamma_{j1}}{\Gamma_{j2}} \left( \frac{p_{j2}}{p_{j1}} \right)^{1/4}}, \quad (7.47)$$

es decir, como se supone  $v_{j2} < v_{j1}$  entonces  $\Gamma_{j2} < \Gamma_{j1}$ , por lo que  $\rho_3$  puede crecer tanto como el valor de  $\Gamma_{j1}$  lo sea. Las ecuaciones (7.45), (7.44) y el conjunto de ecuaciones de (7.46) determinan la solución completamente analítica de la superficie de trabajo. Los saltos en las cantidades hidrodinámicas quedan determinadas por las condiciones de frontera externas a la superficie de trabajo.

#### 4.8. Perfiles hidrodinámicos.

Una manera de comprobar que nuestra solución analítica está en el camino correcto, es comparar la convergencia de la solución con alguna otra solución exacta, semi-analítica o con códigos numéricos que resuelvan el mismo problema hidrodinámico en cuestión en el límite de choque fuerte relativista que se discute en la sección 3.6 y ecuación de estado ultra-relativista de la sección 2.2.

Una solución que resuelve el problema de tubo de choque relativista de manera semi-analítica está descrito por Martí & Müller (1994), el cual consiste en encontrar los estados intermedios de las ondas de choque, así como encontrar las posiciones de las ondas de choque separadas por los cuatro estados  $j1$ ,  $3$ ,  $3'$  y  $j2$ , este modelo se utiliza para probar códigos numéricos hidrodinámicos relativistas por lo que es el mejor candidato para probar el modelo analítico que se obtiene en la sección 4.7. La prueba consiste en obtener los mismos perfiles de presión, velocidad y densidad de masa a partir de las mismas condiciones iniciales y asumiendo choque fuerte relativista. La solución de tubo de choque de Martí & Müller (1994) está implementada de tal forma que si se asignan los estados iniciales  $j1$  y  $j2$  de presión  $p_{j1,2}$ , velocidad  $v_{1,2}$ , densidad de masa  $\rho_{j1,2}$  y un tiempo fijo  $t$  entre 0 y 1, se obtiene un archivo de datos para que sea posible graficar los cuatro estados pre-choque y post-choque en los perfiles de presión  $p$ , velocidad  $v$  y densidad de masa  $\rho$  como función de la posición  $x$ .

Las condiciones hidrodinámicas (7.44), (7.45) y (7.46) se evolucionan al paso del tiempo y de la posición  $x$  a partir de un estado inicial  $t = 0$  y  $x = 0$ , para que la superficie de trabajo evolucione en función del tiempo y la posición como un sistema completo. Las posiciones de las ondas de choque evolucionan estrictamente con las velocidades del choque dadas por las expresiones (7.26) y (7.35) siguiendo las líneas características  $dx/dt = \pm c(\alpha \pm v^x/c)/(1 \pm \alpha v^x/c)$  descritas en la sección 3.4, mientras que la evolución de la posición de la discontinuidad de contacto viaja con la velocidad (7.44).

Así, se evolucionan al paso del tiempo y de la posición cada uno de los perfiles de densidad, presión y velocidad de la superficie de trabajo. Las figuras 4.4, 4.5 y 4.6 muestran la posición de los



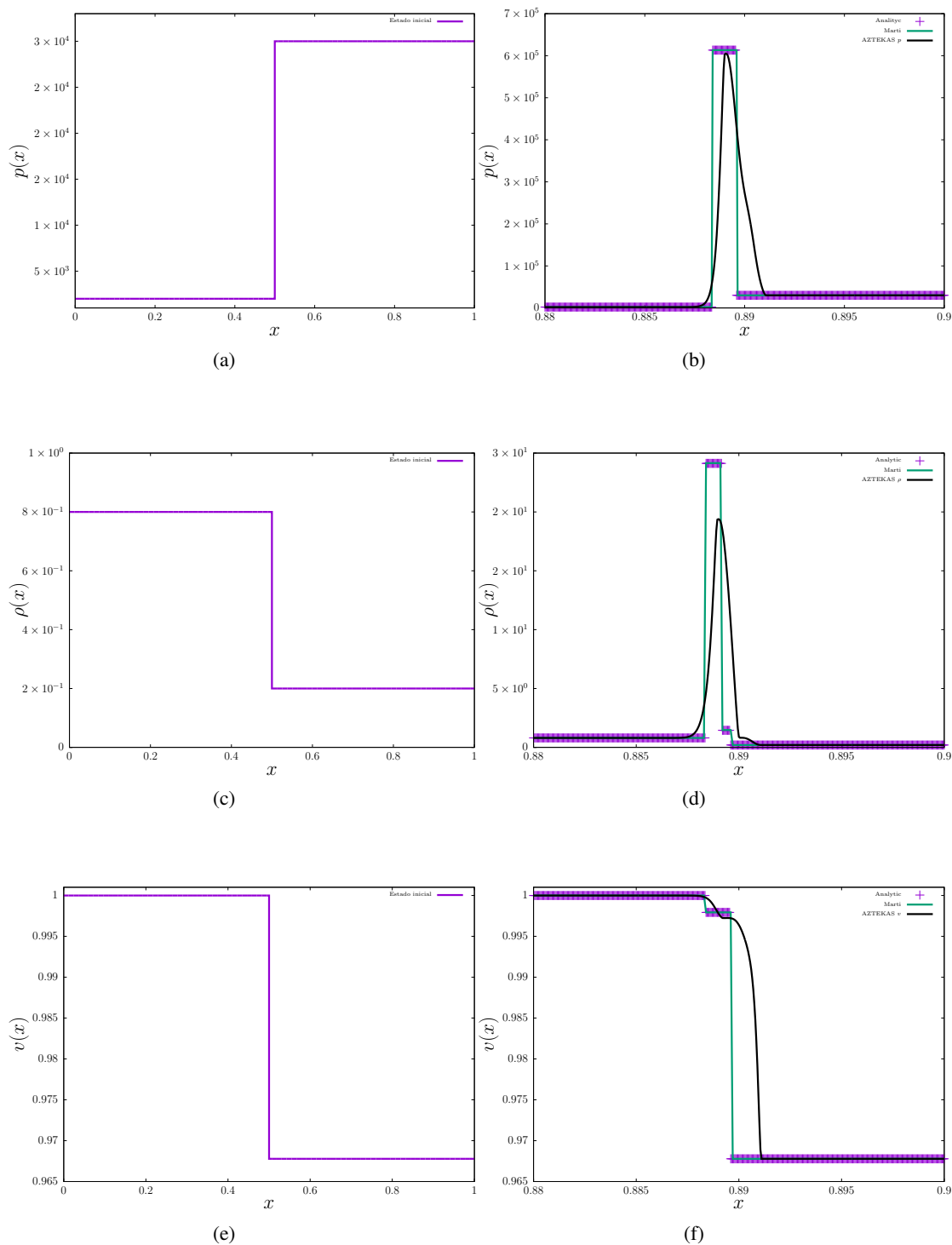


entre  $\Gamma = 50$  y  $\Gamma = 500$ , estos valores se ajustan a curvas de luz observadas del blazar PKS 1510-089, el cual es uno de los parámetros importantes para la emisión de una curva de luz en jets relativistas. Así, los parámetros hidrodinámicos iniciales que se asumen en la figuras 4.4, 4.5 y 4.6 están enlistados en la tabla 4.2. Estos parámetros cumplen con la condición (5.2) y la condición de choque fuerte  $p_1 \gg \rho_1$  para el estado pre-choque y el estado post-choque  $p_2 \gg \rho_2$ .

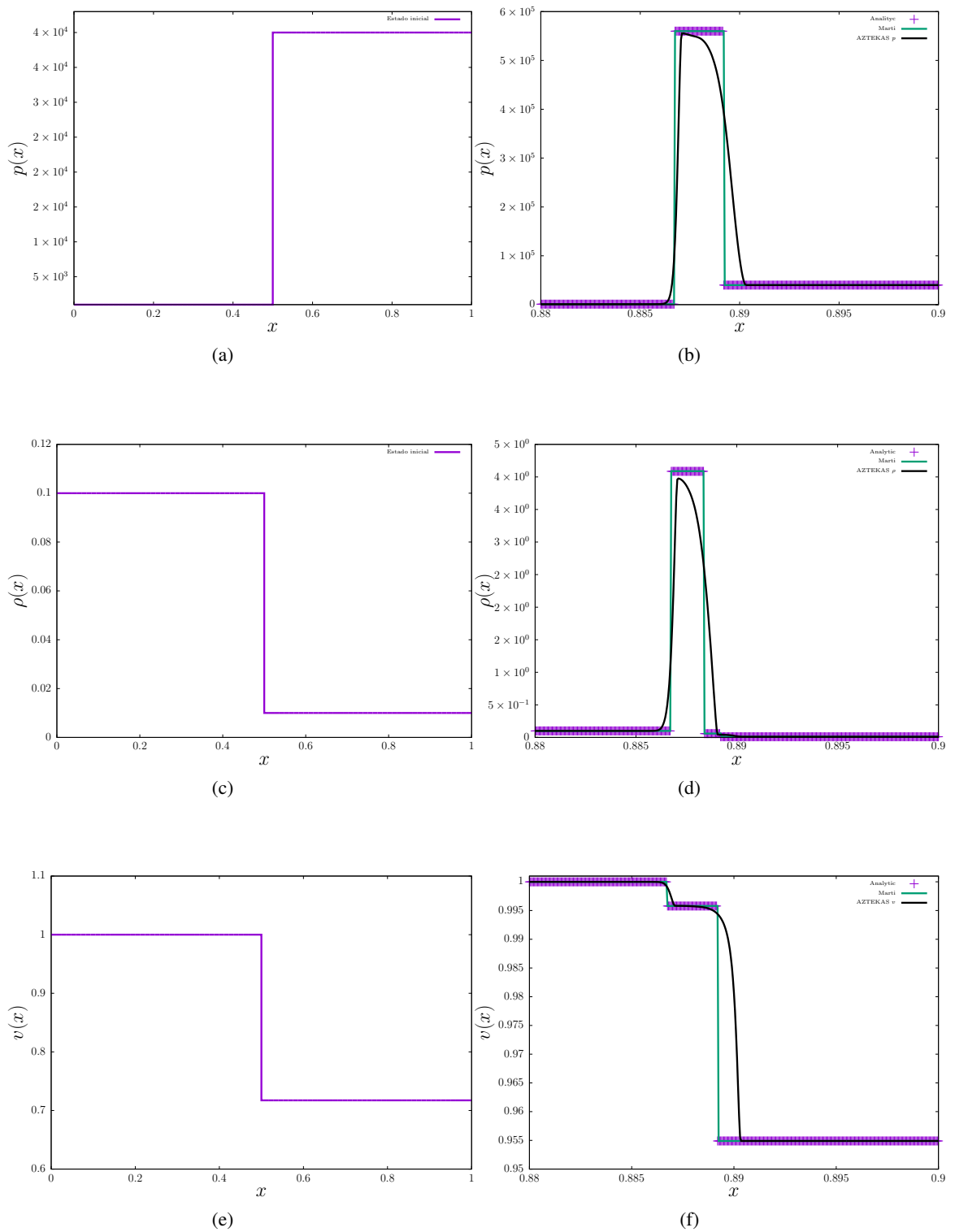
| Prueba     | $p_{j1}$ | $p_{j2}$ | $\rho_{j1}$ | $\rho_{j2}$ | $v_{j1}$ | $v_{j2}$ |
|------------|----------|----------|-------------|-------------|----------|----------|
| Figura 4.4 | 2000.0   | 30000.0  | 0.8         | 0.2         | 0.999991 | 0.96778  |
| Figura 4.5 | 1000.0   | 40000.0  | 0.1         | 0.01        | 0.99999  | 0.717315 |
| Figura 4.6 | 1000.0   | 20000.0  | 0.1         | 0.01        | 0.999799 | 0.909355 |

**Cuadro 4.2:** Parámetros hidrodinámicos iniciales asociados a los perfiles de densidad de masa, presión y velocidad que se utilizan en cada una de las tres pruebas.

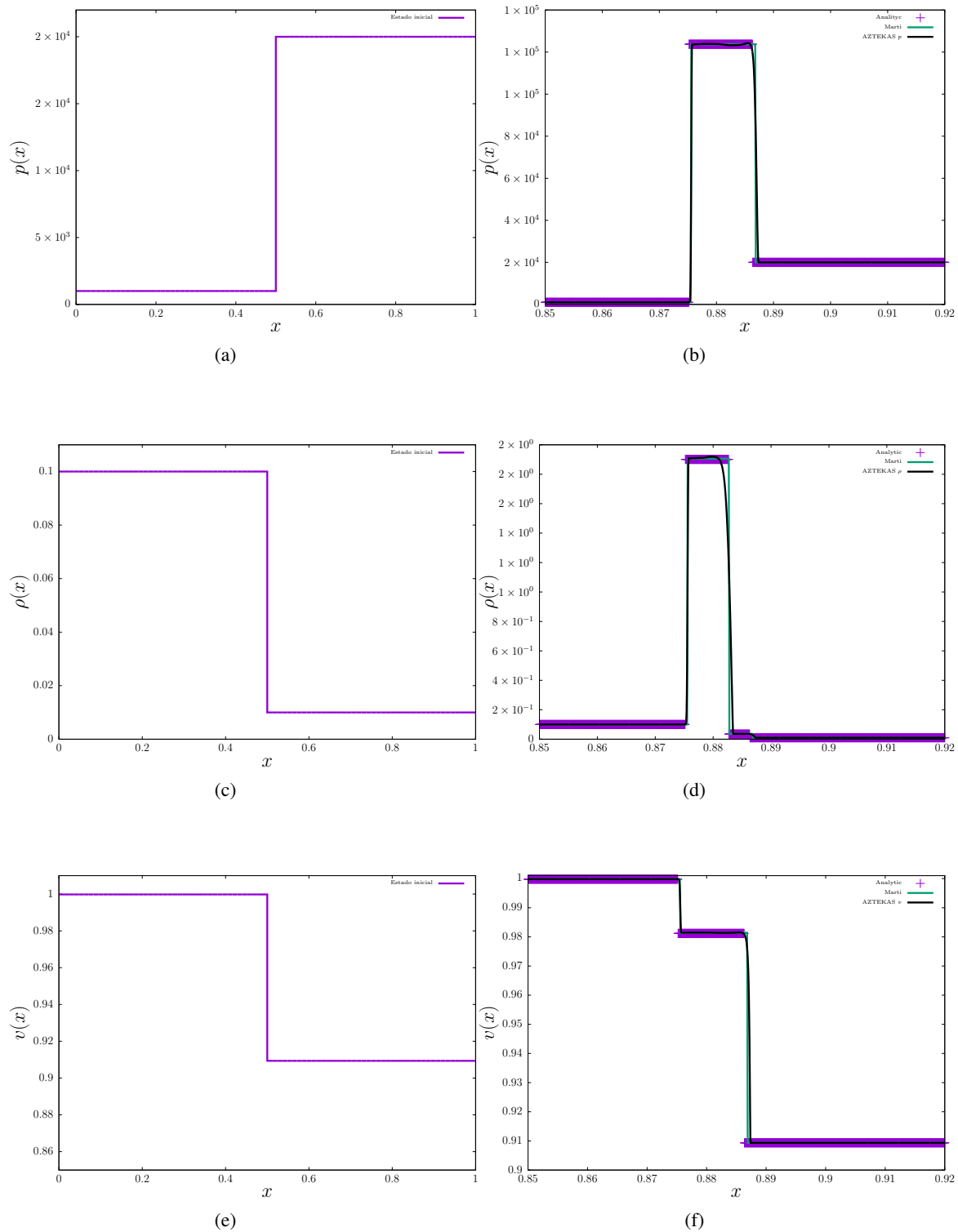
Adicionalmente, se muestran los errores relativos  $|e_{analitica} - e_{Marti}|/e_{Marti}$  de las soluciones analíticas de cada uno de los perfiles hidrodinámicos en la figura 4.7. Se puede notar que el error relativo de ambas soluciones analíticas va disminuyendo y tiende a 0 conforme el factor de Lorentz  $\Gamma_{j1}$  de inyección va incrementando de valor, es decir, conforme la velocidad de inyección  $v_{j1}$  tiende a la velocidad de la luz.



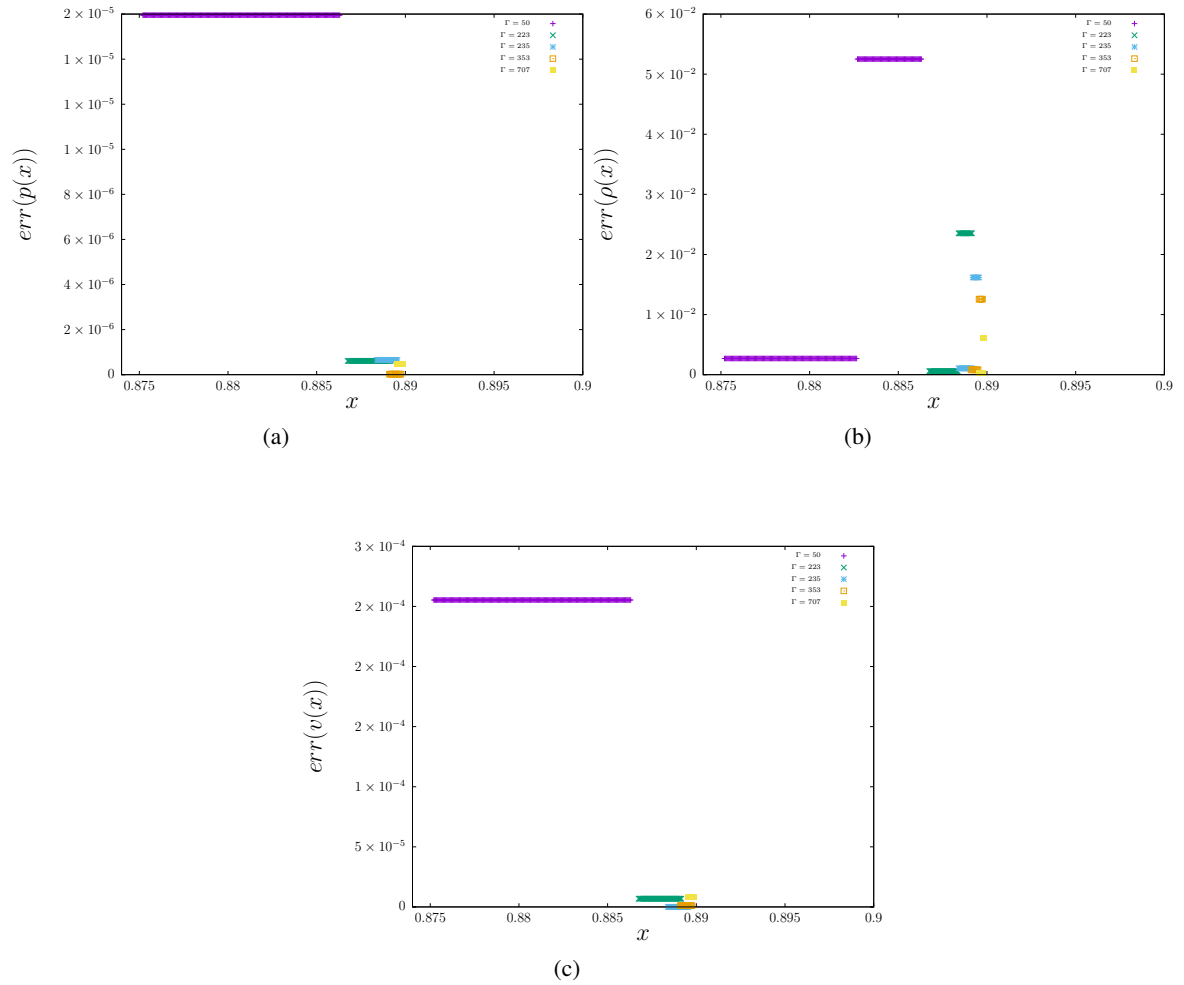
**Figura 4.4:** Las gráficas muestran el instante espacial de formación de la superficie de trabajo tomando en cuenta los saltos en (b) la presión  $p(x)$ , (d) densidad  $\rho(x)$  y (f) velocidad  $v(x)$  como función de la posición a un tiempo  $t = 0.39$ . La línea continua verde representa la solución de tubo de choque propuesta por Martí & Müller (1994), la línea continua negra representa numéricamente esta misma solución generado con el código AZTEKAS (Aguayo-Ortiz et al., 2018), mientras que las cruces representan la solución analítica resultado de este trabajo. Cada una de las gráficas están construidas utilizando los siguientes parámetros hidrodinámicos iniciales: (a)  $p_{j1} = 2000.0$ ,  $p_{j2} = 30000.0$ , (c)  $\rho_{j1} = 0.8$ ,  $\rho_{j2} = 0.2$ , (e)  $v_{j1} = 0.999991$ ,  $v_{j2} = 0.96778$ .



**Figura 4.5:** Las gráficas muestran el instante espacial de formación de la superficie de trabajo tomando en cuenta la variación de (b) la presión  $p(x)$ , (d) densidad  $\rho(x)$  y (f) velocidad  $v(x)$  como función de la posición a un tiempo  $t = 0.39$  fijo. Cada una de las gráficas están construidas utilizando los siguientes parámetros hidrodinámicos iniciales: (a)  $p_{j1} = 1000.0$ ,  $p_{j2} = 40000.0$ , (c)  $\rho_{j1} = 0.1$ ,  $\rho_{j2} = 0.01$ , (e)  $v_{j1} = 0.99999$ ,  $v_{j2} = 0.717315$ .



**Figura 4.6:** Las gráficas muestran el instante espacial de formación de la superficie de trabajo tomando en cuenta la variación de (b) la presión  $p(x)$ , densidad (d)  $\rho(x)$  y (f) velocidad  $v(x)$  como función de la posición a un tiempo  $t = 0.39$  fijo. Cada una de las gráficas están construidas utilizando los siguientes parámetros hidrodinámicos: (a)  $p_{j1} = 1000.0$ ,  $p_{j2} = 20000.0$ , (c)  $\rho_{j1} = 0.1$ ,  $\rho_{j2} = 0.01$ , (e)  $v_{j1} = 0.999799$ ,  $v_{j2} = 0.909355$ .



**Figura 4.7:** Las gráficas muestran el error relativo  $|e_{analítica} - e_{Martí}|/e_{Martí}$  de los perfiles de (a) presión, (b) densidad de masa y (c) velocidad dentro de la superficie de trabajo. Esta comparación es entre la solución que se describe en este trabajo (véase sección 4.7) y la descrita en Martí & Müller (1994).

### 4.9. Condiciones de energía y curva de Luz.

Se calcula ahora la energía por unidad de volumen  $e_T$  dependiente del tiempo que se produce dentro de la superficie de trabajo. Dicha energía es la suma de las energías  $e_{k3}$  y  $e_{k3'}$  producidas en las regiones 3 y 3', es decir:

$$e_T(t) = e_{k3}(t) + e_{k3'}(t), \quad (9.1)$$

donde las energías por unidad de volumen de cada región están dadas respectivamente por:

$$e_{k3}(t) = \varepsilon_3, \quad e_{k3'} = \varepsilon_{3'}, \quad (9.2)$$

considerando que la energía en reposo del sistema es mucho menor que la energía térmica interna, es decir  $\rho \ll p$ , en unidades  $m = 1$  y  $c = 1$ . Así,  $\varepsilon_3 = 4p_3$  y  $\varepsilon_{3'} = 4p_{3'}$  son las energías internas por unidad de volumen en las regiones 3 y 3'. Por lo tanto la energía total por unidad de volumen que se calcula con ayuda del Computer Algebra System (CAS) Maxima ([www.maxima.sourceforge.net](http://www.maxima.sourceforge.net)), que es un software libre similar a Mathematica, capaz de manipular expresiones simbólicas y numéricas, el cual implica que:

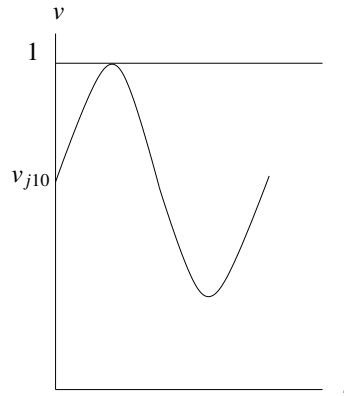
$$e_T(t) = \frac{2^{9/2}}{3} \left( \frac{1 - v_{j2}(t)^2}{1 - v_{j1}(t)} \right) p_{j1}^{1/2} p_{j2}^{1/2}. \quad (9.3)$$

El modelo de superficie planteado en la sección 4.7 supone que las ondas de choque son adiabáticas, es decir, que la entropía se mantiene constante  $dS = 0$ , esto implica que no hay perdida de calor en la superficie de trabajo  $dQ = 0$ , sin embargo, la temperatura aumenta dentro de los estados post-choque 3 y 3' dentro de la superficie de trabajo, por lo que eventualmente el sistema libera la energía de manera cinética. Entonces, si se asume que la energía  $e_T$  es radiada completamente de la superficie de trabajo debido a algún proceso de radiativo no-térmico totalmente eficiente, es posible calcular la luminosidad  $L := -de_T/dt$  que es emitida por la superficie de trabajo. Supongamos ahora que la eyección de flujo es oscilante y que su velocidad está dada por:

$$v_{j1}(t) = v_{j10} + v_{j11} \sin(wt), \quad (9.4)$$

donde  $v_{j10} \leq 1$  es una velocidad de eyección constante,  $v_{j11} \ll 1$  es un parámetro positivo pequeño y constante. La frecuencia angular de la oscilación está representado por  $w$ . Esta elección representa una pequeña perturbación sinusoidal alrededor de una velocidad base  $v_{j10}$  cercana a la velocidad de la luz. El parámetro  $v_{j11} \sin wt$  es elegido suficientemente pequeño y depende del valor de  $v_{j10}$

de tal forma que el movimiento no sea superlumínico, es decir, que la velocidad total  $v_{j1}(t)$  no viole el segundo postulado de la relatividad especial que dice que la velocidad máxima es la velocidad de la luz  $c$ . La figura 4.8 muestra el primer periodo de esta oscilación generada por la velocidad  $v_{j1}(t)$  que forma una superficie de trabajo.



**Figura 4.8:** La gráfica muestra un tipo de variabilidad que se impone a la velocidad de inyección  $v_{j1}(t)$  en la base del jet como se muestra en la ecuación (9.4). El término sinusoidal produce ondulaciones alrededor de una velocidad de fondo fija  $v_{j10}$ . A la velocidad de eyección se le impone ser menor o igual a la velocidad en unidades de  $c$ , es decir,  $v_{j1} \leq 1$  para que el movimiento no sea superlumínico.

Adicionalmente, supongamos que la eyección de densidad de masa  $\rho_{j1}$  es constante y dado que el gas es un polítopo relativista, entonces la presión  $p_{j1}$  también es constante en el flujo inicial. Dimensionalmente la luminosidad depende de las cantidades  $c$ ,  $v_{j10}$ ,  $v_{j11}$ ,  $p_{j1}$ ,  $p_{j2}$  y  $w$ . Si elegimos un sistema de unidades tal que  $c = 1$ , con dimensiones correspondientes  $[c] = 1$ , entonces las dimensiones de la densidad de masa son  $ml^{-3}$  y la frecuencia  $[w] = 1/l$ , con  $m$  las dimensiones de masa y  $l$  las dimensiones de longitud respectivamente. Además, ya que  $v_{j10}$  y  $v_{j11}$  son adimensionales, entonces las dimensiones de  $L$  en este sistema son  $[L] = l^2$ .

A manera de ejemplo, se calcula la luminosidad como función del tiempo derivando la ecuación (2.15) respecto al tiempo, la expresión completa de la luminosidad  $L(t)$  calculada en Maxima (CAS), es de la forma:

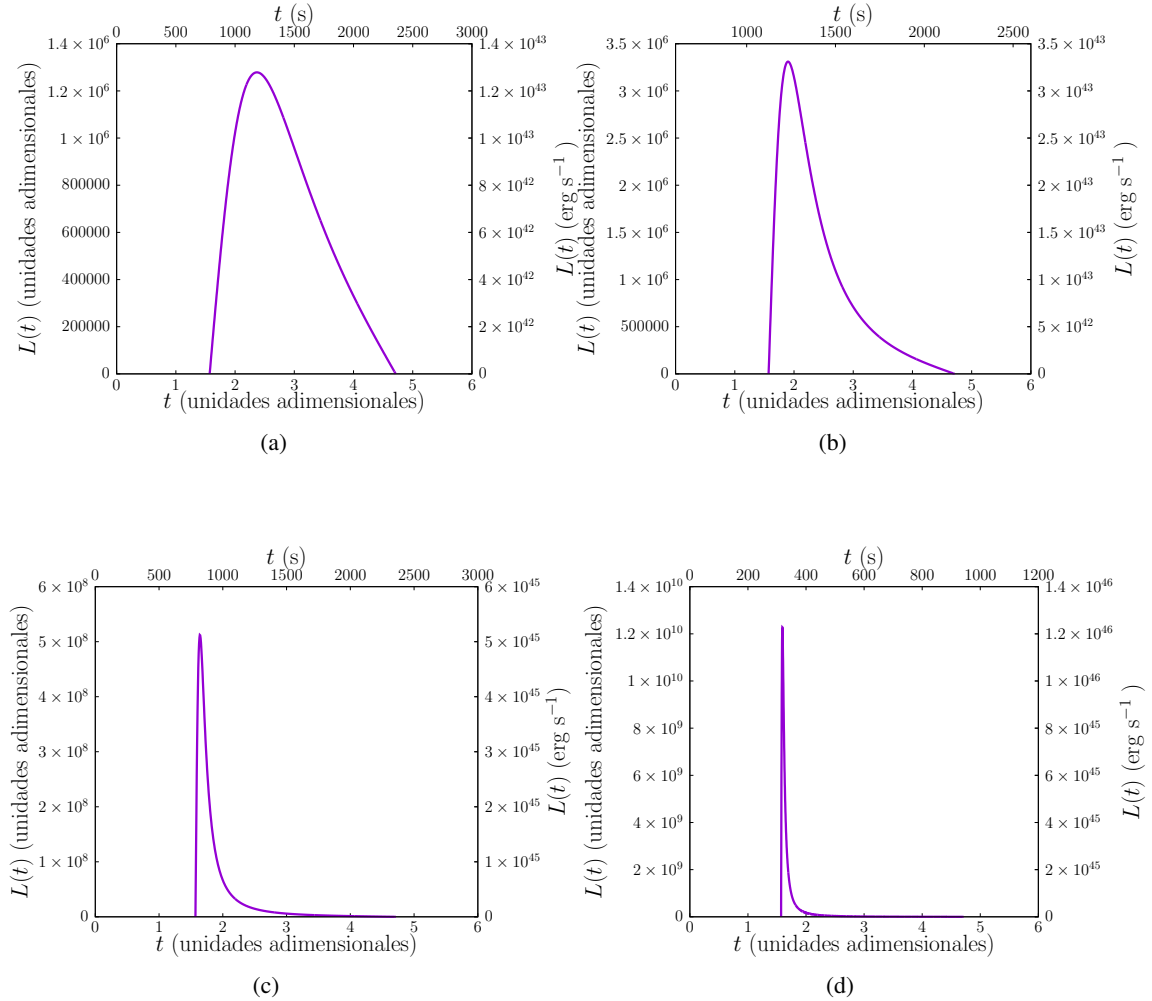
$$L(t) = \frac{2^{7/2}}{3} \frac{v_{j11}(1 - v_{j2}^2) \cos(wt)}{(1 - v_{j11} \sin(wt) - v_{j10})^2 \left( \frac{1 - v_{j2}^2}{1 - v_{j11} \sin(wt) - v_{j10}} \right)^{1/2}} w p_{j1}^{1/2} p_{j2}^{1/2}. \quad (9.5)$$

| Figura 4.9 | $v_{j10}$ | $v_{j11}$  | $v_{j2}$ | $p_{j1} \times 10^{38}$ (erg cm <sup>-3</sup> ) | $p_{j2} \times 10^{38}$ (erg cm <sup>-3</sup> ) | $n_{j1}$ (cm <sup>-3</sup> ) |
|------------|-----------|------------|----------|---|---|------------------------------|
| (a)        | 0.9       | 0.05       | 0.5      | 1000.0  | 20000.0   | 10 <sup>3</sup>              |
| (b)        | 0.999     | 0.0009     | 0.1      | 1000.0  | 30000.0   | 10 <sup>3</sup>              |
| (c)        | 0.999998  | 0.00000199 | 0.96     | 1000.0  | 40000.0   | 10 <sup>3</sup>              |
| (d)        | 0.999998  | 0.00001999 | 0.99     | 10000.0   | 90000.0   | 10 <sup>3</sup>              |

**Cuadro 4.3:** Valores asociados a la generación de cada curva de luz de la figura 4.9.

Mientras que en unidades cgs, es necesario que la energía total dentro de la superficie de trabajo sea de la forma  $E_T(t) = m e_T(t)/\rho(t)$ , donde  $m$  es la masa y  $\rho = mn$ . Por lo tanto la luminosidad en unidades de erg s<sup>-1</sup> es  $L := -dE_T/dt$  (véase apéndice .7). La figura 4.9 muestra las curvas de luz que corresponden a las ecuaciones (9.5) y  $L := -dE_T/dt$  para distintos parámetros hidrodinámicos tanto en unidades adimensionales (eje horizontal abajo y eje vertical izquierdo) como en unidades cgs (eje horizontal arriba y eje vertical derecho), que se enlistan en el cuadro 4.3 y sirven de ejemplos que cumplen con la condición (5.2). Sin embargo, las figuras (c) y (d) se encuentran en el rango propuesto por (Cabrera et al., 2013), en donde se muestra que las curvas de luz que se ajustan a las observaciones del blazar PKS 1510-089 deben ser causadas por una velocidad de eyección  $v_{j1}$  que se asocia al factor de Lorentz  $\Gamma_{j1}$  entre el rango de 50 y 500 y tiempos típicos de duración de entre 10<sup>2</sup> s y 10<sup>3</sup> s. Estas figuras caracterizan la pérdida de energía con el paso del tiempo de la superficie de trabajo. Las curva de luz no inician desde un tiempo  $t = 0$  ya que el flujo cuyo movimiento es rápido alcanza al flujo lento a un tiempo  $t > 0$  en el cual se genera la superficie de trabajo. Además se muestra un crecimiento abrupto en la luminosidad debido a la suposición de que la pérdida de energía por la superficie de trabajo es radiada de manera eficiente. Esto hace que el flujo deje de ser adiabático debido a la transferencia de energía con el flujo lento delante de la superficie de trabajo. Esta disipación de energía por enfriamiento ocurre en intervalos de tiempo entre 200 y 1500 s en unidades cgs, por lo que la curva de luz decrece monótonamente hasta que el flujo vuelva a permanecer estable y sea alterado por alguna otra variación de velocidad.





**Figura 4.9:** Las curvas muestran la luminosidad  $L$  que produce la superficie de trabajo con respecto al tiempo  $t$ , tanto en unidades adimensionales (eje horizontal abajo y eje vertical izquierdo) como en unidades cgs (eje horizontal arriba y eje vertical derecho). Estas curvas de luz muestran un crecimiento abrupto en un intervalo de tiempo que caracteriza la energía emitida por la superficie de trabajo. Esta energía liberada decrece monótonamente por lo que el flujo regresa a ser estable mientras no haya un cambio que lo perturbe. Cada curva de luz fue construida utilizando los parámetros hidrodinámicos enlistados en el cuadro 4.3.

## 4.10. Discusión

El modelo que se presenta en la sección 4.7 es un modelo completamente analítico y los parámetros hidrodinámicos dentro de la superficie de trabajo 3 y 3' quedan completamente determinados por las cantidades externas  $j_1$  y  $j_2$ . Respecto a esta determinación del modelo de superficie de trabajo, existen trabajos previos que modelan la dinámica de choques internos en jets relativistas, este es el caso de Cantó et al. (2013) en donde asume una eyección de velocidad  $v_2$  y una descarga  $\dot{m}$  dependientes del tiempo el cual produce una superficie de trabajo como se muestra en la figura 4.10. En particular, se obtiene que la velocidad  $v_{ws}$  dentro de la superficie de trabajo en el caso ultra-relativista es de la forma:

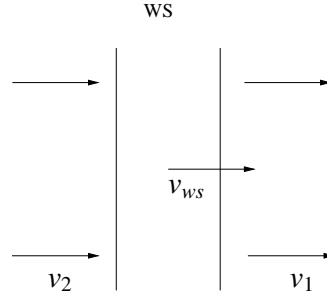
$$v_{ws} \approx 1 - \frac{\Gamma_2^2 + \lambda \Gamma_1^2}{2\Gamma_1^2 \Gamma_2^2 (1 + \lambda)}, \quad (10.1)$$

donde  $\lambda = (br)^{1/2}$ ,  $b = \dot{m}_2/\dot{m}_1$ ,  $r = \Gamma_2/\Gamma_1$  y se cumple que  $v_1 < v_{ws} < v_2$ . Esta velocidad  $v_{ws}$  depende de la descarga de las regiones externas  $\dot{m}_1$  y  $\dot{m}_2$ , así como de las velocidades  $v_1$  y  $v_2$ , mientras que la ecuación (7.44) que se refiere a la velocidad  $v_3 = v_{3'}$  dentro de la superficie de trabajo depende de las cantidades  $p_{j1}$ ,  $p_{j2}$ ,  $v_{j1}$  y  $v_{j2}$ . Las suposiciones para las cuales se determinan estas velocidades son diferentes, Cantó et al. (2013) asume que la conservación de momento lineal no es valida para flujos relativistas donde la descarga relativista por radiación  $\dot{m}$  es tomada en cuenta. En este trabajo se asume que la conservación de momento lineal es valida a través de las ondas de choque  $S_1$  y  $S_2$ . Por todo esto, no hay manera de comparar las velocidades (10.1) y (7.44) debido a las diferentes dependencias y suposiciones en las cantidades hidrodinámicas y las cantidades conservadas, por un lado la primera depende del cociente  $\dot{m}_2/\dot{m}_1$  y la segunda depende del cociente  $p_{j2}/p_{j1}$ .<sup>†</sup>

Otro modelo que propone la formación de dos ondas de choque separadas por una discontinuidad de contacto se presenta en Uhm (2011). El modelo analítico que se expone en este artículo calcula las condiciones de salto en las cantidades hidrodinámicas a través de una onda de choque relativista, asumiendo que las condiciones de salto en las cantidades conservativas de masa, momento y energía que debe cumplir un elemento de fluido a través de una onda de choque relativista

---

<sup>†</sup> Para que las relaciones (10.1) y (7.44) sean equivalentes entonces los segundos términos de cada ecuación deben ser iguales, es decir,  $(\Gamma_{j1}^2 + \lambda \Gamma_{j2}^2)/(2\Gamma_{j2}^2 \Gamma_{j1}^2 (1 + \lambda)) = \frac{1}{2} \left(\frac{p_{j2}}{p_{j1}}\right)^{1/2} \Gamma_{j1}^{-1} \Gamma_{j2}^{-1}$  en la misma notación. En el caso en el que  $\Gamma_{j1} \gg \Gamma_{j2}$  se obtiene que  $p_{j2}/p_{j1} b^{1/2} \approx \Gamma_{j1}^{1/2}/\Gamma_{j2}^{1/2}$  entonces  $\Gamma_{j1} \approx \Gamma_{j2} b (p_{j2}/p_{j1})^2$ , es decir, el Factor de Lorentz  $\Gamma_{j1}$  depende del cociente de descarga  $b$  y del cociente de presiones  $p_{j2}/p_{j1}$ , el cual no concuerda con el modelo de Cantó et al. (2013) que no considera presiones externas.



**Figura 4.10:** Diagrama esquemático que muestra una superficie de trabajo formada por la interacción de dos flujos relativistas. Los flujos delante y detrás de la superficie de trabajo WS se mueven con velocidades  $v_2$  y  $v_1$  respectivamente y cumplen la condición  $v_2 > v_1$ .

están dadas por las condiciones de salto de Taub (Taub, 1978):

$$\Gamma_2 v_2 \rho_2 = \Gamma_1 v_1 \rho_1 \quad (10.2)$$

$$\Gamma_2^2 v_2 (e_2 + p_2) = \Gamma_1^2 v_1 \rho_1 c^2 \quad (10.3)$$

$$\Gamma_2^2 v_2^2 (e_2 + p_2) + p_2 = \Gamma_1^2 v_1^2 \rho_1 c^2 \quad (10.4)$$

se asume entonces que  $p_1 = 0$  y  $e_1 = \rho_1 c^2$ , con esto es imposible hacer una comparación con el modelo presentado en este trabajo. Además, el sistema de ecuaciones se cierra con una ecuación de estado de un gas relativista de la forma

$$p_2 = k_2 (e_2 - \rho_2 c^2), \quad (10.5)$$

en donde  $k_2 = 1/3 (1 + 1/\Gamma_{12})$  para un gas mono-energético  $1/3 \leq k_2 \leq 2/3$ ,  $\Gamma_{12} = 1/(1 - v_{12}^2)^{1/2}$  es el factor de Lorentz de la velocidad relativa entre los estados pre-choque  $v_1$  y post-choque  $v_2$ .

† Este factor  $k_2$  surge de considerar que las partículas en el gas tienen el mismo momento  $\vec{p}$  o el mismo factor de Lorentz  $\bar{\Gamma}$ . Se asume una función de distribución del momento lineal como una función delta de Dirac de la forma  $f(\vec{p}) = n\delta(\vec{p} - \bar{p})$  el cual satisface una condición de normalización de la forma  $n = \int_0^\infty f(\vec{p})d\vec{p}$ . Estas condiciones se introducen en las integrales de presión y energía de la teoría cinética de los gases y se obtiene:

---

† La ecuación (10.5) es totalmente diferente a la ecuación de Bondi Wheeler (2.18) que se utiliza en esta tesis. La ecuación (10.5) en palabras de los autores es construida en general para flujos no-relativistas y relativistas que depende del factor de Lorentz  $\Gamma_{12}$ , por lo que se contradice al supuesto comúnmente utilizado en problemas de hidrodinámica relativista, en donde se utiliza en general la ecuación (2.18).

$$p = \frac{1}{3} \int_0^\infty \tilde{p} v(\tilde{p}) f(\tilde{p}) d\tilde{p} = n(mc^2) \frac{\bar{\Gamma}^2 - 1}{3\bar{\Gamma}}, \quad (10.6)$$

$$e = \int_0^\infty \varepsilon(\tilde{p}) f(\tilde{p}) d\tilde{p} = n(\bar{\Gamma} mc^2), \quad (10.7)$$

por lo que  $k_2$  resulta ser entonces:

$$k_2 = \frac{p}{e - \rho c^2} = \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{1}{\bar{\Gamma}} \right). \quad (10.8)$$

De las condiciones de salto (10.2)-(10.4) se obtienen las siguientes condiciones de salto en las cantidades hidrodinámicas de densidad, presión y velocidad a través de una onda de choque relativista:

$$\Gamma_1^2 = \frac{(4\Gamma_{12} - 1)^2}{8\Gamma_{12} + 1}, \quad \text{o } v_1 = \frac{4v_{12}}{v_{12} + 3}, \quad (10.9)$$

$$\Gamma_2^2 = \frac{9\Gamma_{12}}{8\Gamma_{12} + 1}, \quad \text{o } v_2 = \frac{v_{12}}{3}, \quad (10.10)$$

$$p_2 = \frac{4}{3}(\Gamma_{12} - 1)\rho_1 c^2, \quad (10.11)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = 4\Gamma_{12}, \quad (10.12)$$

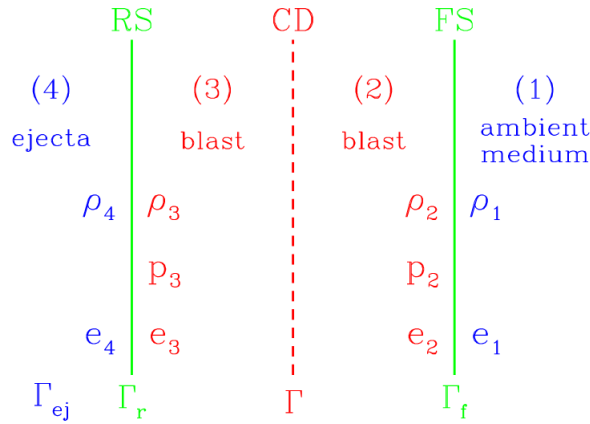
$$e_2 = 4\Gamma_{12}^2 \rho_1 c^2, \quad (10.13)$$

estas relaciones están medidas en el sistema de referencia en donde la onda de choque se encuentra en reposo. El valor del factor de Lorentz  $\Gamma_{12}$  se considera un parámetro libre junto con los parámetros del estado pre-choque  $\rho_1$ ,  $\Gamma_1$ .

Las condiciones (10.9)-(10.13) se aplican a un modelo autosimilar de blast wave tipo Blandford & McKee (1976), en donde se consideran dos ondas de choque separadas por una discontinuidad de contacto (Uhm, 2011, véase figura 3.4).<sup>†</sup> Las regiones se dividen en una región pre-choque del medio ambiente (1), la región post-choque del medio ambiente (2), la región pre-choque de la eyección (3) y la región post-choque de la eyección como se muestra en la figura 4.11. Las regiones post-choque 2 y 3 están separadas por una discontinuidad de contacto. Este sistema se modela con las condiciones de salto (10.9)-(10.13) y se aplican tanto para la onda de choque delantera, como

<sup>†</sup> El modelo que se presenta en este trabajo no es autosimilar y por tanto es de carácter más general que el modelo presentado por Uhm (2011).

para la onda de choque de reversa, simplemente se sustituyen los subíndices 1 por 4 y 2 por 3.



**Figura 4.11:** Modelo de Uhm (2011) que muestra dos ondas de choque separadas por una discontinuidad de contacto.

Para encontrar la evolución dinámica del blast wave autosimilar se utilizan dos distintos métodos

- Balance de presiones  $p_2 = p_3$ :

La evolución dinámica dentro del blast wave debe cumplir que la presión post-choque permanece constante. A partir de esta suposición se obtiene una relación entre los factores de Lorentz  $\Gamma_{12}$  con respecto a  $\Gamma_4$  de la forma:

$$\Gamma_{12} = \Gamma_4 \left[ 1 + 2\Gamma_4 \left( \frac{\rho_1}{\rho_4} \right)^{1/2} \right]^{-1/2}, \quad p_2 = p_3. \quad (10.14)$$

Sin embargo, en palabras de los autores, “el factor de Lorentz  $\Gamma_{12}$  no contiene información sobre el estado termodinámico del gas en el blast wave, la suposición de que  $p_2 = p_3$  es en si misma dudosa . . . y viola la conservación de la energía para blast waves adiabáticos”. Por último, bajo esta suposición no se encuentra una relación matemática exacta que describa analíticamente lo que sucede a través de los saltos pre-choque y post-choque en las presiones  $p_1$  y  $p_2$ , así como en  $p_4$  y  $p_3$ .

- $p_2 \gg p_3$ :

Este caso muestra que la presión  $p_3$  debe caer repentinamente a 0 cuando la onda de cho-

que de reversa alcance el borde de la eyección (Beloborodov & Uhm, 2006).<sup>†</sup> Bajo esta suposición se obtiene que el cociente entre presiones  $p_3/p_2$  es entonces:

$$\frac{p_3}{p_2} = \frac{\rho_4}{4\Gamma_4^2\rho_1} \left( \frac{\Gamma_4^2}{\Gamma_{12}^2} - 1 \right), \quad (10.15)$$

que depende de los parámetros  $\rho_1$ ,  $\rho_4$ ,  $\Gamma_4$  y  $\Gamma_{12}$ .

Por consiguiente, las condiciones de salto (10.9)-(10.13) se obtienen de métodos completamente distintos a las condiciones de salto obtenidas en la sección 4.7. Más aún, las suposiciones iniciales aplicadas a las condiciones de salto de Taub difieren, debido a las distintas ecuaciones de estado y el tipo de gas que se asume. Por un lado se tiene la suposición de un gas mono-energético con constante  $k_2$  (Uhm, 2011) y por otro lado la consideración de un gas ultra-relativista con índice politrópico  $\kappa = 4/3$  (Landau & Lifshitz, 1987). Por consiguiente, tratar de modelar los perfiles hidrodinámicos como se muestra en la sección 4.8 y compararlo con los perfiles hidrodinámicos realizados con la solución analítica de este trabajo, no es posible. Debido a que la ecuación (10.11) implica que la presión post-choque  $p_2$  depende de la energía en reposo  $\rho_1 c^2$ , el cual es una suposición completamente diferente al supuesto en este trabajo, esto es, la ecuación (7.45) depende únicamente de la energía térmica pre-choque que están dadas por las presiones  $p_{j1}$  y  $p_{j2}$ . Por lo tanto, se puede concluir que las expresiones obtenidas son matemáticamente distintas. Otro punto importante es que estas condiciones de salto (10.9)-(10.13) se utilizan para modelar la onda de choque de frente y de reversa de un blast wave. Esto quiere decir que se toma a ambas ondas de choque en reposo en un solo sistema de referencia. Esta suposición va en contra de lo que en este trabajo se realiza, puesto que para la formación de una superficie de trabajo la discontinuidad de contacto es la que se encuentra en reposo, mientras que ambas ondas de choque se mueven en direcciones opuestas como se ve en la sección 2.2 (c.f sección 100 Landau & Lifshitz, 1987). Por lo tanto, cambiar a un sistema de referencia en donde ambas ondas de choque se encuentren en reposo es imposible. Adicionalmente, el conjunto de condiciones de salto de densidad de masa  $\rho$ , presión  $p$  y factores de Lorentz  $\Gamma$  para la onda de choque  $S_1$  y  $S_2$  son distintos uno de otro. Dado que la superficie de trabajo se mueve en la misma dirección del flujo, esto implica que los parámetros externos son distintos en la región  $j1$  y la región  $j2$ .

Por último, la determinación de las cantidades hidrodinámicas dentro de la superficie de trabajo de esta tesis quedan determinados únicamente por los parámetros libres iniciales externos de

---

<sup>†</sup> En el caso de una superficie de trabajo adiabática formada por flujo rápido que alcanza a flujo lento no existe ningún sistema de referencia en el cual la onda de choque de reversa regrese al lugar de eyección del flujo (c.f sección 100 Landau & Lifshitz, 1987).

las cantidades con subíndice  $j1$  y  $j2$  de la figura 4.1 y ninguna de las leyes de conservación se viola. <sup>†</sup> En tanto que el modelo analítico de Beloborodov & Uhm (2006) además de considerar los parámetros hidrodinámicos externos, se requiere de otro parámetro libre  $\Gamma_{12}$  para determinar los parámetros internos a las ondas de choque.

En la sección 4.8 se utiliza el modelo de tubo de choque de Martí & Müller (1994) para hacer una comparación entre los perfiles de densidad de masa, presión y velocidad de este modelo y el obtenido en este trabajo para un gas ultra-relativista en el límite de choque fuerte. Los perfiles hidrodinámicos de ambos modelos resultan ser idénticos. Sin embargo, debe señalarse que el modelo de Martí & Müller (1994) no determina analíticamente la presión dentro de la superficie de trabajo. <sup>‡</sup> A diferencia, en la ecuación (7.45) se expresa analíticamente el valor de la presión  $p_3 = p_{3'}$  dentro de la superficie de trabajo. Asimismo, las expresiones (7.44) y las expresiones de (7.46) resultan ser más simples matemáticamente. Esta es una ventaja si se requiere evolucionar en el tiempo y en el espacio a la superficie de trabajo como se hace en la sección 4.8, así como determinar las energías dentro de la superficie de trabajo como se realiza en la sección 4.9.

---

<sup>†</sup> Tal como debe ocurrir en un problema de ecuaciones diferenciales, es decir, la solución del problema depende únicamente de las condiciones de frontera del mismo.

<sup>‡</sup> La presión se encuentra resolviendo una ecuación trascendental por el método de Runge-Kutta de cuarto orden.

# Conclusión

Usando las condiciones de salto de Taub, se ha determinado una solución analítica unidimensional de una superficie de trabajo que se mueve a lo largo de un flujo relativista. Esta solución analítica describe el comportamiento que ocurre a través de las ondas de choque y la discontinuidad de contacto en el valor de las cantidades hidrodinámicas de densidad de masa, presión, energía y velocidad en el límite de choque fuerte. Como resultado de esto, las cantidades hidrodinámicas dentro de la superficie de trabajo están completamente determinadas por las condiciones iniciales externas a este sistema, como lo son las presiones  $p_{j1,j2}$ , las densidades  $\rho_{j1,j2}$  y las velocidades  $v_{j1,j2}$ . Adicionalmente, las velocidades con las que se mueven las ondas de choque y la discontinuidad de contacto evolucionan temporalmente por medio de velocidades características como se muestra en la sección 3.4 y también se determinan por estas condiciones iniciales externas.

Se muestran los resultados sobre los perfiles hidrodinámicos que caracterizan a una superficie de trabajo, estos perfiles se comparan con el modelo analítico de Martí & Müller (1994) y se determina que los perfiles generados por el modelo de este trabajo son consistentes con el modelo de Martí y Müller en el límite de choque fuerte. Si bien las condiciones iniciales no fueron arbitrarias, se trata de mostrar que la solución puede aplicarse a fenómenos altamente energéticos y ultra-relativistas. En Cabrera et al. (2013) se concluye que los choques internos del Blazar PKS 1510-089 que se modelan, pueden alcanzar factores de Lorentz  $\Gamma$  en un rango de entre (50, 500) con la solución semi-analítica de Mendoza et al. (2009), rango en el que los factores de Lorentz y por lo tanto las velocidades de eyección del flujo inicial chocan a lo largo del flujo en movimiento con factores de Lorentz menores. Este rango de valores se utiliza en este trabajo para producir los perfiles de densidad de masa, presión y velocidad.

Siguiendo el camino a las aplicaciones astrofísicas, se calcula la luminosidad, es decir, la densidad de energía por unidad de volumen por unidad de tiempo, generada en la región de la superficie de trabajo, suponiendo un proceso de enfriamiento de emisión radiativa eficiente no térmica, la



energía puramente mecánica de la superficie de trabajo se libera en función del tiempo. A causa de esto, es posible graficar la luminosidad como función del tiempo llamada curva de luz, que proporciona información sobre los parámetros hidrodinámicos iniciales que producen la formación de la superficie de trabajo y por lo tanto, la liberación de esta energía que cambia respecto al tiempo. Como muestra de esto, Cabrera et al. (2013) modela las curvas de luz generadas por los choques internos del blazar PKS 1510-089 similares en forma como se muestra en la sección 4.9. En esta misma sección se modelaron distintas curvas de luz con parámetros iniciales diferentes, considerando el límite de choque fuerte relativista, en donde la velocidad del flujo de eyección se supone variable y periódica en el tiempo, mientras que la presión de eyección permanece constante. Como resultado de esto la curva de luz crece de manera abrupta y por lo tanto la cantidad de luminosidad radiada crece, conforme se va aumentando la velocidad de eyección inicial en un intervalo de tiempo en unidades adimensionales. Una vez que esta energía sea completamente radiada, el flujo relativista vuelve a su estado original. Además, puesto que las curvas de luz se encuentran en unidades cgs, el rango de luminosidades que se obtienen es de entre  $10^{42}$  a  $10^{46}$  erg cm<sup>-3</sup> s<sup>-1</sup>, el cual es el rango típico de emisión de los blazares (Romero et al., 2011, Ghisellini et al., 2017).

Se concluye que el modelo analítico presentado en este trabajo es el más completo y más simple matemáticamente, dado que solo se requieren las expresiones (7.44), (7.45) y las contenidas en (7.46) para describir a la superficie de trabajo de manera hidrodinámica. Además, el modelo de superficie de trabajo descrito por Landau & Lifshitz (1987) y que es extendido a la parte relativista en la sección 3.5 es fundamental para obtener las condiciones de salto en las cantidades hidrodinámicas entre la onda de choque delantera y la onda de choque de reversa, así como a través de la discontinuidad de contacto, puesto que la superficie de trabajo se trata como un sistema unido, es decir, la evolución temporal y espacial de una de las discontinuidades depende de la evolución temporal y espacial de las otras dos discontinuidades, por lo tanto las condiciones de salto de la onda de choque delantera dadas por las ecuaciones (7.31), (7.34), (7.35) y la segunda expresión en (7.46) son distintas a las condiciones de salto de la onda de choque de reversa dadas por las ecuaciones (7.24), (7.25), (7.26) y la primera expresión en (7.46).

Mientras que el modelo como el de Martí & Müller (1994), que no muestra explícitamente como se obtiene el valor de la presión dentro de la superficie de trabajo, o el modelo analítico de Uhm (2011) en donde las condiciones de salto a través de una onda de choque que se obtienen en Beloborodov & Uhm (2006), se utilizan para las dos ondas de choque, la delantera y la de reversa que forman la estructura de dos ondas de choque separadas por una discontinuidad de contacto. Esto se interpreta como si ambas ondas de choque son estacionarias en un mismo sistema de referencia

debido a que las condiciones de salto de Beloborodov & Uhm (2006) se obtienen en el sistema de referencia en donde la onda de choque se encuentra en reposo.



# Apéndice 1

## .1. Relaciones útiles de factores de Lorentz en relatividad especial.

En esta sección, mostraremos como obtener un conjunto de útiles formulas en el cual los factores de Lorentz en distintos sistemas de referencia pueden relacionarse unos a otros para los casos en donde las velocidades son ultra-relativistas.

**Teorema 1** *Sí  $v_1$  y  $v_2$  son dos velocidades completamente arbitrarias que satisfacen la regla de adición de velocidades:*

$$v_2 \oplus v_1 = \frac{v_2 \pm v_1}{1 \pm v_2 v_1}, \quad (1.1)$$

entonces el factor de Lorentz asociado a esta transformación es:

$$\Gamma_{v_2 \oplus v_1}^2 = \Gamma_1^2 \Gamma_2^2 (1 \pm v_2 v_1)^2. \quad (1.2)$$

La demostración a esta propiedad es como sigue:

$$\begin{aligned} \Gamma_{v_2 \oplus v_1}^2 &= \frac{1}{1 - \left( \frac{v_2 \pm v_1}{1 \pm v_2 v_1} \right)^2}, \\ &= \frac{(1 \pm v_2 v_1)^2}{(1 \pm v_2 v_1)^2 - (v_2 \pm v_1)^2}, \\ &= \frac{(1 \pm v_2 v_1)^2}{1 + v_2^2 v_1^2 - v_2^2 - v_1^2}, \\ &= \frac{(1 \pm v_2 v_1)^2}{(1 - v_1^2)(1 - v_2^2)}, \end{aligned}$$

donde

$$\Gamma_1^2 = \frac{1}{1-v_1^2}, \quad \Gamma_2^2 = \frac{1}{1-v_2^2},$$

por lo tanto se llega al resultado (1.2). De la relación (1.2) se pueden obtener propiedades importantes sobre los factores de Lorentz:

**Teorema 2** *Supongamos que  $\Gamma_1 \gg 1$  y  $\Gamma_2 \gg 1$ , es decir,  $v_{1,2} = 1 - \varepsilon_{1,2}$ , con  $\varepsilon_{1,2} \ll 1$  perturbaciones pequeñas que cumplen que  $v_1$  y  $v_2$  son ultra-relativistas, entonces*

$$\Gamma_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon_{1,2}}}, \quad (1.3)$$

y con la relación (1.2) se cumple que:

$$\begin{aligned} \Gamma_{v_2 \oplus v_1} &= 2\Gamma_1\Gamma_2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} + \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} \right), \\ \Gamma_{v_2 \ominus v_1} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} + \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} \right). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Procedemos con la ecuación (1.2) sin cuadrados:

$$\begin{aligned} \Gamma_{v_2 \oplus v_1} &= \Gamma_1\Gamma_2 (1 \pm (1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2)), \\ &= \Gamma_1\Gamma_2 (1 \pm 1 \mp (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \pm \varepsilon_1\varepsilon_2), \\ &= \Gamma_1\Gamma_2 \begin{cases} 2 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \varepsilon_1\varepsilon_2 & \text{signo +,} \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1\varepsilon_2 & \text{signo -,} \end{cases} \\ &= \Gamma_1\Gamma_2 \begin{cases} 2 - \frac{1}{2}(\Gamma_1^{-2} + \Gamma_2^{-2}) + \frac{1}{4}\Gamma_1^{-2}\Gamma_2^{-2} & \text{signo +,} \\ \frac{1}{2}(\Gamma_1^{-2} + \Gamma_2^{-2}) - \frac{1}{4}\Gamma_1^{-2}\Gamma_2^{-2} & \text{signo -,} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2\Gamma_1\Gamma_2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} + \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} \right) & \text{signo +, a orden } \mathcal{O}(\Gamma^{-4}), \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} + \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} \right) & \text{signo -, a orden } \mathcal{O}(\Gamma^{-4}), \end{cases} \end{aligned}$$

por lo tanto se llegan a los resultados (1.4) de los factores de Lorentz asociados a la adición y sustracción de velocidades.

Como consecuencia directa se encuentra que:

**Corolario 1** *La suma de los factores de Lorentz de (1.4) es de la forma:*

$$\Gamma_{v_2 \oplus v_1} + \Gamma_{v_2 \ominus v_1} = 2\Gamma_1 \Gamma_2. \quad (1.5)$$

Prosigamos ahora con otra propiedad, partiendo nuevamente con la relación (1.2)

$$\begin{aligned} \Gamma_{v_2 \oplus v_1}^2 &= \Gamma_1^2 \Gamma_2^2 (1 \pm v_2 v_1)^2, \\ &= \Gamma_1^2 \Gamma_2^2 \begin{cases} (2 - \varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 & \text{signo +,} \\ (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 & \text{signo -,} \end{cases} \\ &\approx \Gamma_1^2 \Gamma_2^2 \begin{cases} 4(1 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)) & \text{signo +,} \\ \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 & \text{signo -,} \end{cases} \\ &\approx \Gamma_1^2 \Gamma_2^2 \begin{cases} 4(1 - (\Gamma_1^{-2} + \Gamma_2^{-2})) & \text{signo +,} \\ \frac{1}{4}(\Gamma_1^{-4} + \Gamma_2^{-4}) + \frac{1}{2}\Gamma_1^{-2}\Gamma_2^{-2} & \text{signo -,} \end{cases} \\ &\approx \begin{cases} 4\Gamma_1^2 \Gamma_2^2 & \text{signo +,} \\ \frac{1}{4} \left( \frac{\Gamma_2^2}{\Gamma_1^2} + \frac{\Gamma_1^2}{\Gamma_2^2} \right) + \frac{1}{2} & \text{signo -,} \end{cases} \end{aligned}$$

por lo tanto resulta que:

$$\Gamma_{v_2 \oplus v_1}^2 = 4\Gamma_1^2 \Gamma_2^2, \quad (1.6)$$

$$\Gamma_{v_2 \ominus v_1}^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left( \frac{\Gamma_2^2}{\Gamma_1^2} + \frac{\Gamma_1^2}{\Gamma_2^2} \right) \quad (1.7)$$

Para finalizar esta sección consideremos que alguna de las dos velocidades en (1.2) sigue siendo arbitraria. La siguiente identidad resulta de utilidad para esta situación.

**Teorema 3** *Sea  $v_2 < 1$  (sin perdida de generalidad), y sea  $v_1$  ultra-relativista, es posible considerar que:*

$$v_1 = 1 - \frac{1}{2\Gamma_1^2}, \quad (1.8)$$

*esto implica que:*

$$\Gamma_{v_1 \oplus v_2}^2 = \Gamma_1^2 \Gamma_2^2 (1 \pm v_2)^2 \text{ para } \Gamma_1 \gg 1 \text{ \& } v_2 < 1. \quad (1.9)$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{v_1 \oplus v_2}^2 &= \Gamma_1^2 \Gamma_2^2 (1 \pm v_1 v_2)^2, \\
 &= \Gamma_1^2 \Gamma_2^2 \left( 1 \pm v_2 \left[ 1 - \frac{1}{2\Gamma_1^2} \right] \right)^2, \\
 &= \Gamma_1^2 \Gamma_2^2 \left( 1 \pm v_2 \mp \frac{v_2}{2\Gamma_1^2} \right)^2, \\
 &= \Gamma_1^2 \Gamma_2^2 \left( (1 \pm v_2)^2 \mp \frac{(1 \pm v_2)v_2}{\Gamma_1^2} + \dots \right), \\
 &\approx \Gamma_1^2 \Gamma_2^2 (1 \pm v_2)^2.
 \end{aligned}$$

De aquí se sigue entonces el resultado (1.9). La idea de (1.9) es que  $v_2$  es una velocidad arbitraria y no necesariamente debe ser ultra-relativista como la velocidad  $v_1$ .

# Apéndice 2: Relaciones hidrodinámicas entre los estados pre-choque y post-choque

## .2. Hidrodinámica relativista

Condiciones de salto de Taub en hidrodinámica relativista

$$[n^\alpha] = [nu^\alpha] = 0, \quad (2.1)$$

$$[T^{xx}] = [\omega(u^x)^2 + p] = 0, \quad (2.2)$$

$$c[T^{0x}] = c[\omega u^0 u^x] = 0, \quad (2.3)$$

ya que  $u^\mu = (\Gamma, \Gamma v/c)$ , entonces  $u^x = \Gamma v^x/c$ ,  $u^0 = \Gamma$ , con  $\Gamma = 1/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ . Expandiendo estas últimas relaciones

$$\frac{1}{c}[n\Gamma v^x] = 0, \quad (2.4)$$

$$\left[\frac{\omega\Gamma^2 v^2}{c^2} + p\right] = 0, \quad (2.5)$$

$$\frac{1}{c}[\omega\Gamma^2 v^x] = 0. \quad (2.6)$$



esto es:

$$n_1 \Gamma_1 v_1 = n_2 \Gamma_2 v_2 := j, \quad (2.7)$$

$$\frac{\omega_1 \Gamma_1^2 v_1^2}{c^2} + p_1 = \frac{\omega_2 \Gamma_2^2 v_2^2}{c^2} + p_2, \quad (2.8)$$

$$\omega_1 \Gamma_1^2 v_1 = \omega_2 \Gamma_2^2 v_2. \quad (2.9)$$

donde los subíndices 1 y 2 denotan el estado del material pre-choque y post-choque respectivamente. El salto en la conservación de masa (3.7) implica:

$$v_1 = \frac{j}{\Gamma_1} V_1, \quad (2.10)$$

$$v_2 = \frac{j}{\Gamma_2} V_2, \quad (2.11)$$

donde  $V_1 = 1/n_1$  y  $V_2 = 1/n_2$  es el volumen por partícula.<sup>†</sup> Sustituyendo estas relaciones en la ecuación de conservación del momento:

$$\frac{\omega_1 j^2 V_1^2 \Gamma_1^2}{\Gamma_1^2 c^2} + p_1 = \frac{\omega_2 j^2 V_2^2 \Gamma_2^2}{\Gamma_2^2 c^2} + p_2, \quad (2.12)$$

$$j^2 \left( \frac{\omega_1 V_1^2}{c^2} - \frac{\omega_2 V_2^2}{c^2} \right), \quad (2.13)$$

por tanto

$$j^2 = \frac{c^2(p_2 - p_1)}{\omega_1 V_1^2 - \omega_2 V_2^2}. \quad (2.14)$$

Por otro lado del salto en la ecuación de conservación de energía y de (2.11) se obtiene

$$\omega_1^2 V_1^2 \Gamma_1^2 = \omega_2^2 V_2^2 \Gamma_2^2, \quad (2.15)$$

además de (2.11)

$$v_1^2 = \frac{j^2 V_1^2}{\Gamma_1^2}, \quad (2.16)$$

---

<sup>†</sup> No es el volumen por unidad de masa, además  $j$  difiere aquí de un factor de masa  $m$ .

y de la definición del factor de Lorentz

$$\Gamma_1^2 = \frac{1}{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}, \quad (2.17)$$

$$\Gamma_1^2 = \frac{1}{1 - \frac{j^2 V_1^2}{\Gamma_1^2 c^2}}, \quad (2.18)$$

$$\Gamma_1^2 = \frac{\Gamma_1^2}{\Gamma_1^2 - \frac{j^2 V_1^2}{c^2}}, \quad (2.19)$$

$$\Gamma_1^2 - \frac{j^2 V_1^2}{c^2} = 1, \quad (2.20)$$

por lo tanto se obtiene que:

$$\Gamma_1^2 = 1 + \frac{j^2 V_1^2}{c^2}, \text{ así como también } \Gamma_2^2 = 1 + \frac{j^2 V_2^2}{c^2}. \quad (2.21)$$

sustituyendo (2.21) en (2.15)

$$\omega_1^2 V_1^2 \left( 1 + \frac{j^2 V_1^2}{c^2} \right) = \omega_2^2 V_2^2 \left( 1 + \frac{j^2 V_2^2}{c^2} \right), \quad (2.22)$$

$$\omega_1^2 V_1^2 - \omega_2^2 V_2^2 + j^2 \left( \frac{\omega_1^2 V_1^4}{c^2} - \frac{\omega_2^2 V_2^4}{c^2} \right) = 0, \quad (2.23)$$

sustituyendo la relación (2.14) en esta ultima ecuación

$$\omega_1^2 V_1^2 - \omega_2^2 V_2^2 + \frac{c^2 (p_2 - p_1)}{\omega_1 V_1^2 - \omega_2 V_2^2} \left( \frac{\omega_1^2 V_1^4}{c^2} - \frac{\omega_2^2 V_2^4}{c^2} \right) = 0, \quad (2.24)$$

$$\omega_1^2 V_1^2 - \omega_2^2 V_2^2 + \frac{(p_2 - p_1)}{\omega_1 V_1^2 - \omega_2 V_2^2} (\omega_1^2 V_1^4 - \omega_2^2 V_2^4) = 0, \quad (2.25)$$

$$\omega_1^2 V_1^2 - \omega_2^2 V_2^2 + \frac{(p_2 - p_1)}{\omega_1 V_1^2 - \omega_2 V_2^2} (\omega_1 V_1^2 - \omega_2 V_2^2) (\omega_1 V_1^2 + \omega_2 V_2^2) = 0, \quad (2.26)$$

se llega al importante resultado mostrado por H. Taub (1948):

$$\omega_1^2 V_1^2 - \omega_2^2 V_2^2 + (p_2 - p_1)(\omega_1 V_1^2 + \omega_2 V_2^2) = 0, \quad (2.27)$$

la cual es conocida como la adiábica de Taub. Una manera de ver esta función es en el plano

$pc^2$  vs  $\omega V$  que se muestra en la figura 3.2, ya que en la ecuación (2.14)  $j^2$  es la pendiente en las coordenadas elegidas desde el estado 1 al estado 2.

Para poder obtener una relación que describa los saltos en las densidades a través de una onda de choque, se parte de la adiabática de Taub (2.27), ya que contiene toda la información de las condiciones de salto de las ecuaciones conservativas relativistas. Si la entalpía específica por unidad de volumen es (Landau & Lifshitz, 1987):

$$\omega = \frac{\kappa p}{\kappa - 1}, \quad (2.28)$$

entonces, para un gas politropo relativista  $\kappa = 4/3$ , esto implica que  $\omega = 4p$ , por lo que la adiabática de Taub se convierte en:

$$4^2 p_1^2 V_1^2 - 4^2 p_2^2 V_2^2 + (p_2 - p_1) (4p_1 V_1^2 + 4p_2 V_2^2) = 0, \quad (2.29)$$

la cual puede ser resuelta para  $V_2$  ( $\rho_2$ ) fijando los parámetros  $V_1$  ( $\rho_1$ ),  $p_2$  y  $p_1$ . Se reescribe la ecuación (2.29) en términos de densidad de masa, siendo  $V = 1/\rho$

$$4 \frac{p_1^2}{\rho_1^2} - 4 \frac{p_2^2}{\rho_2^2} + (p_2 - p_1) \left( \frac{p_1}{\rho_1^2} + \frac{p_2}{\rho_2^2} \right) = 0, \quad (2.30)$$

sean

$$\alpha_1 = 4 \frac{p_1^2}{\rho_1^2}, \quad \alpha_2 = \frac{p_1}{\rho_1^2}, \quad (2.31)$$

se multiplica (2.30) por  $\rho_2^2$ , y se agrupan términos de la manera siguiente:

$$\alpha_1 \rho_2^2 - 4p_2^2 + (p_2 - p_1)(\alpha_2 \rho_2^2 + p_2) = 0, \quad (2.32)$$

$$\rho_2^2 (\alpha_1 + \alpha_2(p_2 - p_1)) = 4p_2^2 - (p_2 - p_1)p_2, \quad (2.33)$$

$$\rho_2^2 (\alpha_1 + \alpha_2(p_2 - p_1)) = p_2(3p_2 - p_1), \quad (2.34)$$

$$\rho_2^2 = \frac{p_2(3p_2 - p_1)}{\alpha_1 + \alpha_2(p_2 - p_1)}, \quad (2.35)$$

$$\rho_2^2 = \frac{p_2(3p_2 - p_1)}{4\frac{p_2^2}{\rho_1^2} + \frac{p_1}{\rho_1^2}(p_2 - p_1)}, \quad (2.36)$$

$$\rho_2^2 = \frac{p_2(3p_2 - p_1)}{\frac{p_1}{\rho_1}(3p_1 + p_2)}, \quad (2.37)$$

$$\frac{\rho_2^2}{\rho_1^2} = \frac{p_2}{p_1} \left( \frac{3\frac{p_2}{p_1} - 1}{3 + \frac{p_2}{p_1}} \right), \quad (2.38)$$

por lo tanto

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \sqrt{\frac{p_2}{p_1} \left( \frac{3\frac{p_2}{p_1} - 1}{3 + \frac{p_2}{p_1}} \right)}, \quad (2.39)$$

y en el caso en el que  $p_2 \gg p_1$ , el cociente de densidades tiende a  $\sqrt{3p_2/p_1}$ .

### Demostración de las ecuaciones (3.8)

Ahora, del salto en la conservación del momento

$$\frac{\omega_1 \Gamma_1^2 v_1^2}{c^2} + p_1 = \frac{\omega_2 \Gamma_2^2 v_2^2}{c^2} + p_2, \quad (2.40)$$

sea  $v/c = tgh(\phi)$ , entonces<sup>†</sup>

$$\Gamma = \frac{1}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^{1/2}}, \quad (2.41)$$

$$\Gamma = \frac{1}{(1 - tgh^2\phi)^{1/2}}, \quad (2.42)$$

$$\Gamma = \frac{1}{(1 - \frac{sh^2\phi}{ch^2\phi})^{1/2}}, \quad (2.43)$$

$$\Gamma = ch\phi \quad (2.44)$$

entonces las ecuaciones (2.15) y (2.40) se convierten en

$$\omega_1 ch^2\phi_1 tgh^2\phi_1 + p_1 = \omega_2 ch^2\phi_2 tgh^2\phi_2 + p_2, \quad (2.45)$$

$$\omega_1 tgh\phi_1 ch^2\phi_1 = \omega_2 tgh\phi_2 ch^2\phi_2, \quad (2.46)$$

esto implica:

$$\omega_1 sh^2\phi_1 + p_1 = \omega_2 sh^2\phi_2 + p_2, \quad (2.47)$$

$$\omega_1 sh\phi_1 ch\phi_1 = \omega_2 sh\phi_2 ch\phi_2, \quad (2.48)$$

tomando el cuadrado de (2.48):

$$\omega_1^2 sh^2\phi_1 ch^2\phi_1 = \omega_2^2 sh^2\phi_2 ch^2\phi_2 = \omega_2^2 sh^2\phi_2 (1 + sh^2\phi_2), \quad (2.49)$$

esto implica

$$sh^4\phi_2 + sh^2\phi_2 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} sh^2\phi_1 ch^2\phi_1 = 0. \quad (2.50)$$

un camino es resolver esta ultima expresión para  $sh^2\phi$  y sustituir en (2.47), esto es:

$$sh^2\phi_2 = \frac{1}{2} \left( -1 + \sqrt{1 + 4 \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} sh^2\phi_1 ch^2\phi_1} \right), \quad (2.51)$$

---

<sup>†</sup> Se utilizara la notación  $tgh\phi = tangh(\phi)$ ,  $sh\phi = sinh(\phi)$  y  $ch\phi = cosh(\phi)$ .

entonces

$$\omega_1 sh^2 \phi_1 + p_1 = \frac{\omega_2}{2} \left( -1 + \sqrt{1 + 4 \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} sh^2 \phi_1 ch^2 \phi_1} \right) + p_2, \quad (2.52)$$

$$\omega_1 sh^2 \phi_1 + (p_1 - p_2) + \frac{\omega_2}{2} = \frac{\omega_2}{2} \left( \sqrt{1 + 4 \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} sh^2 \phi_1 ch^2 \phi_1} \right), \quad (2.53)$$

$$\omega_1^2 sh^4 \phi_1 + 2\omega_1 sh^2 \phi_1 \left( (p_1 - p_2) + \frac{\omega_2}{2} \right) + \left( (p_1 - p_2) + \frac{\omega_2}{2} \right)^2 = \frac{\omega_2^2}{4} \left( 1 + 4 \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} sh^2 \phi_1 ch^2 \phi_1 \right), \quad (2.54)$$

$$\omega_1^2 sh^2 \phi_1 (sh^2 \phi_1 - ch^2 \phi_1) + 2\omega_1 sh^2 \phi_1 \left( (p_1 - p_2) + \frac{\omega_2}{2} \right) + \left( (p_1 - p_2) + \frac{\omega_2}{2} \right)^2 = \frac{\omega_2^2}{4}, \quad (2.55)$$

$$-\omega_1^2 sh^2 \phi_1 + 2\omega_1 sh^2 \phi_1 \left( (p_1 - p_2) + \frac{\omega_2}{2} \right) + \left( (p_1 - p_2) + \frac{\omega_2}{2} \right)^2 = \frac{\omega_2^2}{4}, \quad (2.56)$$

$$\omega_1 sh^2 \phi_1 \left( \frac{(p_1 - p_2)}{2} + \omega_2 - \omega_1 \right) + (p_1 - p_2)^2 + \omega_2 (p_1 - p_2) = 0, \quad (2.57)$$

ya que  $\omega_1 = e_1 + p_1$  y  $\omega_2 = e_2 + p_2$ , entonces:

$$(e_1 + p_1) sh^2 \phi_1 (2(p_1 - p_2) + (e_2 + p_2) - \omega_1) + (p_1 - p_2)^2 + (e_2 + p_2)(p_1 - p_2) = 0, \quad (2.58)$$

$$(e_1 + p_1) sh^2 \phi_1 (2p_1 - p_2 + e_2 - \omega_1) + (p_1 - p_2)^2 + (e_2 + p_2)(p_1 - p_2) = 0, \quad (2.59)$$

despejando  $sh^2 \phi_1$  se tiene:

$$sh^2 \phi_1 = \frac{(p_1 - p_2)^2 + (e_2 + p_2)(p_1 - p_2)}{(e_1 + p_1)(2p_1 - p_2 + e_2 - \omega_1)} = -1 + ch^2 \phi_1, \quad (2.60)$$

por lo que

$$ch^2 \phi_1 = \frac{(p_1 - p_2)^2 + (e_2 + p_2)(p_1 - p_2) + (e_1 + p_1)(2p_1 - p_2 + e_2 - \omega_1)}{(e_1 + p_1)(2p_1 - p_2 + e_2 - \omega_1)}, \quad (2.61)$$

entonces

$$tgh^2 \phi_1 = \frac{-(p_1 - p_2)^2 + (e_2 + p_2)(p_2 - p_1)}{-(p_1 - p_2)^2 + (e_2 + p_2)(p_2 - p_1) + (e_1 + p_1)(2p_1 - p_2 + e_2 - \omega_1)} = \frac{N}{D}, \quad (2.62)$$

simplifiquemos por separado N y D:

$$N = (p_2 - p_1)^2 + (e_2 + p_2)(p_1 - p_2), \quad (2.63)$$

$$= (p_2 - p_1)(p_1 - p_2 + (e_2 + p_2)), \quad (2.64)$$

$$= (p_2 - p_1)(p_1 + e_2). \quad (2.65)$$

$$D = -(p_1 - p_2)^2 + (e_2 + p_2)(p_2 - p_1) + (e_1 + p_1)(2p_1 - p_2 + e_2 - \omega_1), \quad (2.66)$$

$$= -(p_1 - p_2)^2 + (e_2 + p_2)(p_2 - p_1) + (e_1 + p_1)(p_1 - p_2 + e_2 - e_1), \quad (2.67)$$

$$= p_2 e_2 - e_1 p_2 - e_1^2 + e_1 e_2, \quad (2.68)$$

$$= e_2(p_2 + e_1) - e_1(p_2 + e_1), \quad (2.69)$$

de esto se obtiene:

$$tgh^2 \phi_1 = \frac{(p_2 - p_1)(e_2 + p_1)}{(e_2 - e_1)(p_2 + e_1)}, \quad (2.70)$$

y ya que  $tgh \phi_1 = v_1/c$ , por lo tanto

$$\frac{v_1}{c} = \sqrt{\frac{(p_2 - p_1)(e_2 + p_1)}{(e_2 - e_1)(p_2 + e_1)}}. \quad (2.71)$$

Para obtener  $tgh \phi_2$  basta con ver la simetría del problema, si ahora resolvemos para  $sh^4 \phi_1$  la ecuación (2.50) se llega al resultado para  $v_2$ , por lo tanto:

$$\frac{v_2}{c} = \sqrt{\frac{(p_2 - p_1)(e_1 + p_2)}{(e_2 - e_1)(p_1 + e_2)}}. \quad (2.72)$$

La velocidad relativa entre el gas en el estado 1 pre-choque y el estado 2 post-choque es:

$$v_{12} = \frac{v_1 - v_2}{1 - v_1 v_2 / c^2}, \quad (2.73)$$

$$= c \sqrt{\frac{p_2 - p_1}{e_2 - e_1}} \left( \sqrt{\frac{e_2 + p_1}{p_2 + e_1}} - \sqrt{\frac{e_1 + p_2}{p_1 + e_2}} \right) \left( \frac{1}{1 - \frac{p_2 - p_1}{e_2 - e_1}} \right), \quad (2.74)$$

$$= c \sqrt{\frac{p_2 - p_1}{e_2 - e_1}} \left( \frac{p_1 - p_2 + e_2 - e_1}{\sqrt{\frac{p_2 + e_1}{p_1 + e_2}}} \right) \left( \frac{\sqrt{e_2 - e_1}}{e_2 - e_1 + p_1 - p_2} \right), \quad (2.75)$$

$$(2.76)$$

así,

$$v_{12} = c \sqrt{\frac{(p_2 - p_1)(e_2 - e_1)}{(p_2 + e_1)(p_1 + e_2)}}. \quad (2.77)$$

mientras que al multiplicar  $v_1 v_2$  se obtiene:

$$v_1 v_2 = c^2 \sqrt{\frac{(p_2 - p_1)(e_2 + p_1)}{(e_2 - e_1)(p_2 + e_1)}} \sqrt{\frac{(p_2 - p_1)(e_1 + p_2)}{(e_2 - e_1)(p_1 + e_2)}}, \quad (2.78)$$

$$= c^2 \frac{(p_2 - p_1)}{(e_2 - e_1)}. \quad (2.79)$$

### .3. Límites clásicos.

Para llegar a la convergencia de los resultados anteriores con la hidrodinámica no-relativista, los límites en las velocidades deben ser  $v \ll c$  y en la energía por unidad de volumen se debe cumplir que  $p \ll e$ , de esta forma  $e \rightarrow mc^2 = mc^2/V$ , así la ecuación (2.14) tiende a:

$$j^2 = \frac{c^2(p_2 - p_1)}{V_1^2(e_1 + p_1) - V_2^2(e_2 + p_2)} \rightarrow \frac{c^2(p_2 - p_1)}{mc^2(V_1 - V_2)}, \quad (3.1)$$

por tanto<sup>†</sup>

$$j^2 \rightarrow \frac{p_2 - p_1}{m(V_1 - V_2)}. \quad (3.2)$$

---

<sup>†</sup>  $V \rightarrow Vm$  y  $j \rightarrow j/m$ .



En este limite la ecuación (2.77) es:

$$v_{12} \rightarrow c \sqrt{\frac{(p_2 - p_1)mc^2(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1})}{\frac{m^2c^4}{V_1V_2}}}, \quad (3.3)$$

de tal forma que

$$v_{12} \rightarrow v_1 - v_2 = \sqrt{(p_2 - p_1)(V_1 - V_2)/m}. \quad (3.4)$$

También, de la adiabática de Taub (3.7)

$$\omega_1^2 V_1^2 - \omega_2^2 V_2^2 + (p_2 - p_1)(\omega_1 V_1^2 + \omega_2 V_2^2) = 0, \quad (3.5)$$

en el limite no-relativista  $\omega V \rightarrow mc^2 + m(\varepsilon + Vp) = mc^2 + \omega_{nr}$ , con  $\varepsilon$  la energía interna por unidad de masa y  $\omega_{nr}$  la función de calor por unidad de masa entonces, la adiabática de Taub en este limite es:

$$(mc^2 + m\omega_{nr1})^2 - (mc^2 + m\omega_{nr2})^2 + (p_2 - p_1)[(mc^2 + m\omega_{nr1})V_1 + (mc^2 + m\omega_{nr2})V_2] = 0, \quad (3.6)$$

ahora,  $\omega_{nr}$ ,  $p$  y  $V$  son cantidades de primer orden, entonces, mantenemos términos de este orden y despreciamos los términos de mayor orden,

$$2m^2(\omega_{nr1} - \omega_{nr2}) + mc^2(p_2 - p_1)(V_1 - V_2) \quad (3.7)$$

por lo tanto en el limite no-relativista:

$$(\omega_{nr1} - \omega_{nr2}) + \frac{1}{2m}(p_2 - p_1)(V_1 + V_2) = 0, \quad (3.8)$$

el cual es la adiabática de Hugoniot (choque adiabático).

#### **.4. Caso ultra-relativista.**

Utilizamos ahora la ecuación de estado para un gas ultra-relativista, esta es conocida como la ecuación de estado de Bondi-Wheeler  $p = e/3$ , sustituyendo esta expresión en la relación (2.71)

$$\frac{v_1}{c} = \sqrt{\frac{(\frac{e_2}{3} - \frac{e_1}{3})(e_2 + \frac{e_1}{3})}{(e_2 - e_1)(e_1 + \frac{e_2}{3})}}, \quad (4.1)$$

$$= \sqrt{\frac{1}{3} \frac{(3e_2 + e_1)(e_2 - e_1)}{(3e_1 + e_2)(e_2 - e_1)}}, \quad (4.2)$$

por tanto se obtiene para  $v_1/c$  y por simetría, también para  $v_2/c$ :

$$\frac{v_1}{c} = \sqrt{\frac{3e_2 + e_1}{3(3e_1 + e_2)}}, \quad \frac{v_2}{c} = \sqrt{\frac{3e_1 + e_2}{3(3e_2 + e_1)}}. \quad (4.3)$$

que al sustituir la ecuación de estado ultra-relativista  $p = e/3$  la multiplicación entre  $v_1 v_2$  de la ecuación (2.79) es por lo tanto:

$$v_1 v_2 = \frac{c^2}{3}. \quad (4.4)$$

Mientras que cuando el choque es fuerte, es decir,  $e_2 \rightarrow \infty$  entonces  $v_1 \rightarrow c$  y  $v_2 \rightarrow c/3$  (Landau & Lifshitz, 1987).

## .5. Ondas de choque relativistas débiles.

La discontinuidad en la entropía a través de una onda de choque es de tercer orden en la discontinuidad de presión, es decir, (Khalatnikov, 1954):

$$\sigma_2 - \sigma_1 = \frac{1}{12} \left( \frac{1}{\omega V^2 T} \left( \frac{\partial^2(\omega V^2)}{\partial p^2} \right)_{ad} \right) (p_2 - p_1)^3, \quad (5.1)$$

Dado que en la discontinuidad debe cumplirse que

$$\sigma_2 > \sigma_1, \quad (5.2)$$

si la onda de choque es compresible ( $p_2 > p_1$ ), entonces

$$\left( \frac{\partial^2(\omega V^2)}{\partial p^2} \right)_{ad} > 0, \quad (5.3)$$

el cual es la generalización de la condición no-relativista. Para entender (5.1), sea

$$d\varepsilon = Tds - pdV, \quad (5.4)$$

$$d(\varepsilon + pV) = Tds + Vdp, \quad (5.5)$$

$$d(W) = Tds + Vdp, \quad (5.6)$$

$$(5.7)$$

donde  $W = \varepsilon + pV = V\omega$  y si  $s = V\sigma$

$$d(V\omega) = Td(\sigma V) + Vdp, \quad (5.8)$$

entonces para un proceso adiabático  $d(\omega V) = Vdp$ , además:

$$\left(\frac{\partial(\omega V^2)}{\partial p}\right)_{\sigma V} = V \left(\frac{\partial(\omega V)}{\partial p}\right)_{\sigma V} + \omega V \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{\sigma V} \left(\frac{\partial^2(\omega V^2)}{\partial p^2}\right)_{\sigma V}, \quad (5.9)$$

$$= \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{\sigma V} \left(\frac{\partial(\omega V)}{\partial p}\right)_{\sigma V} + V \left(\frac{\partial^2(\omega V)}{\partial p^2}\right)_{\sigma V} + \left(\frac{\partial(\omega V)}{\partial p}\right)_{\sigma V} \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{\sigma V} \quad (5.10)$$

$$+ \omega V \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_{\sigma V}, \quad (5.11)$$

$$(5.12)$$

para un proceso adiabático

$$d(\omega V) = Vdp, \quad (5.13)$$

$$\left(\frac{\partial(\omega V)}{\partial p}\right)_{ad} = V, \quad (5.14)$$

$$\left(\frac{\partial^2(\omega V)}{\partial p^2}\right)_{ad} = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{ad}, \quad (5.15)$$

entonces

$$\left(\frac{\partial(\omega V^2)}{\partial p}\right)_{\sigma V} = 3V \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{ad} + \omega V \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_{ad} > 0, \quad (5.16)$$

si y solo si

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_{ad} > -\frac{3}{\omega} \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{ad} \quad (5.17)$$

en el limite no-relativista, necesariamente

$$\frac{1}{\omega} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_{ad} \rightarrow 0, \quad (5.18)$$

entonces<sup>†</sup>

$$\left( \frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_{ad} > 0. \quad (5.19)$$

Ahora, para un choque compresible, se cumple que:

$$p_2 > p_1, \quad (5.20)$$

de la ecuación (2.14) y (3.7), se obtiene

$$\omega_1 V_1^2 - \omega_2 V_2^2 > 0, \quad (5.21)$$

$$\omega_1^2 V_1^2 - \omega_2^2 V_2^2 < 0, \quad (5.22)$$

el cual implica necesariamente que:

$$\omega_1 V_1^2 > \omega_2 V_2^2, \quad (5.23)$$

$$\omega_1 V_1 < \omega_2 V_2, \quad (5.24)$$

se sigue entonces la serie de desigualdades:

$$V_1 > \frac{\omega_1 V_1^2}{\omega_1 V_1} > \frac{\omega_2 V_2^2}{\omega_1 V_1} > \frac{\omega_2 V_2^2}{\omega_2 V_2} > V_2, \quad (5.25)$$

por lo tanto

$$V_1 > V_2. \quad (5.26)$$

Esto es, el volumen a través de la onda de choque debe decrecer más rápidamente que el incremento de  $\omega V$  para que se cumpla la desigualdad  $\omega_1 V_1 < \omega_2 V_2$ .

---

<sup>†</sup> Cuidado: la ecuación (5.18) no es un caso limite solo es una sustitución, ya que  $\partial^2 V / \partial p_{ad}^2 > 3/\omega |\partial V / \partial p|_{ad} > 0$ , si y solo si  $-\partial V / \partial p$  es compresible adiabático como usualmente sucede.

Por otro lado, para ondas de choque débiles, a primera aproximación las velocidades  $v_1$  y  $v_2$  deben aproximarse a primer orden a la velocidad del sonido del medio, esto es:

$$\frac{v_1}{c} = \sqrt{\frac{(p_2 - p_1)(e_2 + p_1)}{(e_2 - e_1)(p_2 + e_1)}} \xrightarrow[p_2 - p_1 \rightarrow 0]{e_2 - e_1 \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\partial p}{\partial e_{ad}}}, \quad (5.27)$$

$$\frac{v_2}{c} = \sqrt{\frac{(p_2 - p_1)(e_1 + p_2)}{(e_2 - e_1)(p_1 + e_2)}} \xrightarrow[p_2 - p_1 \rightarrow 0]{e_2 - e_1 \rightarrow 0} \sqrt{\frac{dp}{de_{ad}}}.^\dagger \quad (5.28)$$

Dadas las desigualdades de (5.20) y (5.24), la relación (2.14)

$$j^2 = \frac{c^2(p_2 - p_1)}{\omega_1 V_1^2 - \omega_2 V_2^2}, \quad (5.29)$$

cuando  $p_2 \rightarrow p_1$  y  $\omega_2 V_2^2 \rightarrow \omega_1 V_1^2$  se convierte en el limite

$$j^2 \rightarrow -\frac{\partial pc^2}{\partial \omega V^2}. \quad (5.30)$$

Supongamos que

$$j^2 > -\frac{\partial(pc^2)}{\partial(\omega V^2)}, \quad (5.31)$$

entonces

$$j^2 = \frac{v_1^2 \Gamma_1^2}{V_1^2} > -\frac{\partial(pc^2)}{\partial(\omega V^2)}, \quad (5.32)$$

$$\left(\frac{v_1}{c}\right)^2 \Gamma_1^2 > -V_1^2 \frac{\partial p}{\partial(\omega V^2)}, \quad (5.33)$$

$$tgh^2 \phi_1 ch^2 \phi_1 > -V_1^2 \frac{\partial p}{\partial(\omega V^2)}, \quad (5.34)$$

$$sh^2 \phi_1 > -V_1^2 \frac{\partial p}{\partial(\omega V^2)}, \quad (5.35)$$

---

<sup>†</sup> Vease Thorne, 1973, para una prueba más formal.

y

$$sh^2\phi_1 = 1 + ch^2\phi_1 > -V_1^2 \frac{\partial p}{\partial(\omega V^2)}, \quad (5.36)$$

$$ch^2\phi_1 > -V_1^2 \frac{\partial p}{\partial(\omega V^2)} + 1, \quad (5.37)$$

$$-ch^2\phi_1 < V_1^2 \frac{\partial p}{\partial(\omega V^2)} - 1, \quad (5.38)$$

$$-\frac{1}{ch^2\phi_1} > \frac{1}{V_1^2 \frac{\partial p}{\partial(\omega V^2)} - 1}, \quad (5.39)$$

del cual se puede obtener

$$\left(\frac{v_1}{c}\right)^2 = tgh^2\phi_1 = \frac{sh^2\phi_1}{ch^2\phi_1} > -\frac{V_1^2}{ch^2\phi_1} \frac{\partial p}{\partial(\omega V^2)} > \frac{\frac{\partial p}{\partial(\omega V^2)}}{\frac{V_1^2 \partial p}{\partial(\omega V^2)} - 1}, \quad (5.40)$$

Para un choque adiabático, tenemos que

$$d(\omega V) = V dp, \quad (5.41)$$

$$\frac{\partial(\omega V)}{\partial p} = V, \quad (5.42)$$

además:

$$\frac{1}{V_1^2} \frac{\partial(\omega V^2)}{\partial p} \Big|_{ad} = \frac{1}{V_1^2} \left[ V_1 \frac{\partial(\omega V^2)}{\partial p} \Big|_{ad} + \omega V_1 \frac{\partial(\omega V_1^2)}{\partial p} \Big|_{ad} \right], \quad (5.43)$$

$$= \frac{1}{V_1^2} \left[ V_1^2 + \omega V_1 \frac{\partial(\omega V^2)}{\partial p} \Big|_{ad} \right], \quad (5.44)$$

$$= 1 + \frac{\omega}{V_1} \frac{\partial(\omega V^2)}{\partial p} \Big|_{ad}, \quad (5.45)$$

$$-\frac{\omega}{V_1} \frac{\partial(\omega V^2)}{\partial p} \Big|_{ad} = 1 - \frac{1}{V_1^2} \frac{\partial(\omega V^2)}{\partial p} \Big|_{ad}, \quad (5.46)$$

sustituyendo esta ultima relación en la ecuación (5.40)

$$\frac{v_1^2}{c^2} > -\frac{1}{\frac{\omega}{V_1} \frac{\partial(\omega V^2)}{\partial p} |_{ad}}, \quad (5.47)$$

$$\frac{v_1^2}{c^2} > -\frac{V_1}{\omega} \frac{\partial p}{\partial V} |_{ad}, \quad (5.48)$$

pero

$$d(eV) |_{ad} = -pdV, \quad (5.49)$$

$$de |_{ad} = \frac{1}{V} (-edV - pdV), \quad (5.50)$$

$$de |_{ad} = -\frac{\omega}{V} dV, \quad (5.51)$$

por lo que la desigualdad (5.48) se convierte en

$$\frac{v_1^2}{c^2} > \frac{V_1}{\omega_1} \frac{\omega_1}{V_1} \frac{\partial p}{\partial e} |_{ad} = \frac{\partial p}{\partial e} |_{ad}, \quad (5.52)$$

$$v_1^2 > c^2 \frac{\partial p}{\partial e} |_{ad} = c_{s1}^2. \quad (5.53)$$

por lo tanto la velocidad pre-choque debe ser mayor a la velocidad del sonido  $c_{s1}$  pre-choque, es decir:

$$v_1 > c_{s1}. \quad (5.54)$$

Si ahora suponemos que

$$j^2 < -\frac{\partial(pc^2)}{\partial(\omega V^2)}, \quad (5.55)$$

entonces, mediante un análisis análogo al anterior, la velocidad post-choque  $v_2$  debe ser menor que la velocidad del sonido post-choque  $c_{s2}$

$$v_2 < c_{s2}. \quad (5.56)$$

Ambas desigualdades resultantes (5.54) y (5.56) son los mismo resultados que se obtienen para ondas de choque en hidrodinámica no-relativista.

## .6. Invariantes de Riemann

A partir de la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Gamma \rho) + \frac{\partial}{\partial x} (\Gamma \rho v^x) = 0, \quad (6.1)$$

que en su forma extendida es de la forma

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho v^x}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \right) = 0, \quad (6.2)$$

derivando la relación (6.2) se obtiene:

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \frac{v^x}{c^2} \frac{dv^x}{dt} + \frac{v^x}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\rho}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \frac{\partial v^x}{\partial x} + \frac{\rho v^x}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \frac{v^x}{c^2} \frac{\partial v^x}{\partial x} = 0, \quad (6.3)$$

multiplicando la ecuación (6.3) por  $\left(1 - v^2/c^2\right)^{3/2}$ :

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + v^x \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v^x}{\partial x} \right] + \rho \frac{v^x}{c^2} \left[ v^x \frac{\partial v^x}{\partial x} + \frac{\partial v^x}{\partial t} \right] = 0, \quad (6.4)$$

donde el tercer y cuarto término se transforman en:

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \rho \frac{\partial v^x}{\partial x} + \rho \frac{v^2}{c^2} \frac{\partial v^x}{\partial x} = \rho \left[ 1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{v^2}{c^2} \right] \frac{\partial v^x}{\partial x}, \quad (6.5)$$

$$= \rho \frac{\partial v^x}{\partial x}, \quad (6.6)$$

entonces la ecuación (6.4) se reduce a

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + v^x \frac{\partial \rho}{\partial x} \right] + \rho \left[ \frac{1}{c^2} \frac{\partial v^x}{\partial x} + v^x \frac{\partial v^x}{\partial t} \right] = 0, \quad (6.7)$$

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left[ \frac{1}{\rho} \frac{c_s}{c^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{v^x}{c^2} \frac{c_s}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right] + \frac{c_s}{c^2} \left[ \frac{1}{c^2} \frac{\partial v^x}{\partial x} + v^x \frac{\partial v^x}{\partial t} \right] = 0, \quad (6.8)$$

si se define la cantidad auxiliar:



$$\alpha := \frac{c_s}{c} := \left( \frac{\partial p}{\partial e} \right)_\sigma^{1/2}, \quad (6.9)$$

$$\phi := \frac{1}{c} \int \frac{c_s}{\rho} d\rho, \quad (6.10)$$

se obtiene por lo tanto:

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left\{ \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^x}{c} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\} + \frac{\alpha}{c} \left\{ \frac{v^x}{c^2} \frac{\partial v^x}{\partial t} + \frac{\partial v^x}{\partial x} \right\} = 0. \quad (6.11)$$

Análogamente a este procedimiento, la ecuación de momento lineal en la componente  $x$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\omega v^x \Gamma^2) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\omega v^2 \Gamma^2}{c^2} - p \right) = 0 \quad (6.12)$$

se transforma en:

$$\alpha \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left\{ \frac{v^x}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial v^x}{\partial t} + \frac{v^x}{c^2} \frac{\partial v^x}{\partial x} = 0. \quad (6.13)$$

Si sumamos (6.11) y (6.13) se obtiene

$$\mathcal{D}_+ \left( \frac{v^x}{c} \right) + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \mathcal{D}_+ \phi = 0, \quad (6.14)$$

donde

$$\mathcal{D}_+ f := \left(1 + \alpha \frac{v^x}{c}\right) \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} + \left(\alpha + \frac{v^x}{c}\right) \frac{\partial f}{\partial x}, \quad (6.15)$$

mientras que si se restan las ecuaciones (6.11) y (6.13) se obtiene:

$$\mathcal{D}_- \left( \frac{v^x}{c} \right) - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \mathcal{D}_- \phi = 0, \quad (6.16)$$

donde

$$\mathcal{D}_- f := \left(1 - \alpha \frac{v^x}{c}\right) \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} - \left(\alpha - \frac{v^x}{c}\right) \frac{\partial f}{\partial x}, \quad (6.17)$$

para cualquier función  $f(t, x)$ . Una identidad útil del operador  $\mathcal{D}$  es la siguiente:

$$\mathcal{D}_{\pm} \ln \left( \frac{1+v^x/c}{1-v^x/c} \right)^{1/2} = \left( 1 \pm \alpha \frac{v^x}{c} \right) \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \ln \left( \frac{1+v^x/c}{1-v^x/c} \right)^{1/2} \pm \left( \alpha \pm \frac{v^x}{c} \right) \frac{\partial}{\partial x} \ln \left( \frac{1+v^x/c}{1-v^x/c} \right)^{1/2}, \quad (6.18)$$

donde se deduce que para  $x^{\mu} = (t, x)$ :

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \ln \left( \frac{1+v^x/c}{1-v^x/c} \right)^{1/2} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \frac{1}{2} [\ln(1+v^x/c) - \ln(1-v^x/c)], \quad (6.19)$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{1+v^x/c} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \frac{v^x}{c} + \frac{1}{1-v^x/c} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \frac{v^x}{c} \right], \quad (6.20)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1+v^x/c + 1-v^x/c}{1-v^2/c^2} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \frac{v^x}{c}, \quad (6.21)$$

$$= \frac{1}{1-v^2/c^2} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \frac{v^x}{c}, \quad (6.22)$$

por lo que este resultado implica que

$$\mathcal{D}_{\pm} \ln \left( \frac{1+v^x/c}{1-v^x/c} \right)^{1/2} = \frac{\mathcal{D}_{\pm} \left( \frac{v^x}{c} \right)}{1-v^2/c^2}. \quad (6.23)$$

La definición (6.17) se aplica a la función  $f = v^x/c$ , de tal forma que el primer término de las ecuaciones (6.14) y (6.16) se multiplican por un factor  $(1-v^2/c^2)/(1-v^2/c^2)$ , entonces de la relación (6.23) se obtiene por tanto:

$$(1-v^2/c^2) \mathcal{D}_{\pm} \left\{ \ln \left( \frac{1+v^x/c}{1-v^x/c} \right)^{1/2} \pm \phi \right\} = 0. \quad (6.24)$$

Si se definen los invariantes de Riemann como:

$$\mathcal{I}_{\pm} := \phi \pm \ln \left( \frac{1+v^x/c}{1-v^x/c} \right)^{1/2}, \quad (6.25)$$

la ecuación (6.24) es de la forma:

$$(1-v^2/c^2) \left[ \left( 1 \pm \alpha \frac{v^x}{c} \right) \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \pm \left( \alpha \pm \frac{v^x}{c} \right) \frac{\partial}{\partial x} \right] \mathcal{I}_{\pm} = 0. \quad (6.26)$$

## .7. Luminosidad en unidades cgs

Sí la densidad de energía total  $e_T$  es de la forma

$$e_T(t) = e_{k3}(t) + e_{k3'}(t), \quad (7.1)$$

entonces la energía total  $E_T$  es de la forma

$$E_T(t) = m \left( \frac{e_{k3}(t)}{\rho_3(t)} + \frac{e_{k3'}(t)}{\rho_{3'}(t)} \right), \quad (7.2)$$

donde  $m$  es la masa de las partículas que se consideren y  $\rho = mn$ , con  $n$  el número de partículas por unidad de volumen. Por tanto la luminosidad en unidades de  $\text{erg s}^{-1}$  esta dado por  $L := -dE_T/dt$ . Si se considera una velocidad de inyección variable dada por la ecuación (9.4), entonces con ayuda del software Maxima (CAS) se obtiene:

$$\begin{aligned} L(t) = & -m * ((2^{(3/2)} * v_{j11} * (1 - v_{j2}^2)^{(3/4)} * w * \sqrt{p_{j1}} * \sqrt{p_{j2}} * \\ & \cos(w * t) * (1 - (v_{j11} * \sin(w * t) + v_{j10})^2)^{(1/4)}) / (3 * (p_{j1} / p_{j2})^{(1/4)} \\ & * r_{j2} * ((-v_{j11} * \sin(w * t)) - v_{j10} + 1)^2 * \sqrt{(1 - v_{j2}^2)} / ((-v_{j11} * \\ & \sin(w * t)) - v_{j10} + 1))) + (2^{(3/2)} * v_{j11} * (1 - v_{j2}^2)^{(3/4)} * w * \\ & \sqrt{p_{j1}} * \sqrt{p_{j2}} * \cos(w * t) * (1 - (v_{j11} * \sin(w * t) + v_{j10})^2)^{(1/4)}) / \\ & (3 * (p_{j2} / p_{j1})^{(1/4)} * r_{j1} * ((-v_{j11} * \sin(w * t)) - v_{j10} + 1)^2 * \\ & \sqrt{(1 - v_{j2}^2)} / ((-v_{j11} * \sin(w * t)) - v_{j10} + 1))) - (2^{(3/2)} * v_{j11} * \\ & w * \sqrt{p_{j1}} * \sqrt{p_{j2}} * \cos(w * t) * (v_{j11} * \sin(w * t) + v_{j10}) * \\ & \sqrt{(1 - v_{j2}^2)} / ((-v_{j11} * \sin(w * t)) - v_{j10} + 1))) / (3 * (1 - v_{j2}^2)^{(1/4)} * \\ & (p_{j1} / p_{j2})^{(1/4)} * r_{j2} * (1 - (v_{j11} * \sin(w * t) + v_{j10})^2)^{(3/4)}) - (2^{(3/2)} * v_{j11} * \\ & w * \sqrt{p_{j1}} * \sqrt{p_{j2}} * \cos(w * t) * (v_{j11} * \sin(w * t) + v_{j10}) * \\ & \sqrt{(1 - v_{j2}^2)} / ((-v_{j11} * \sin(w * t)) - v_{j10} + 1))) / (3 * \\ & (1 - v_{j2}^2)^{(1/4)} * (p_{j2} / p_{j1})^{(1/4)} * r_{j1} * (1 - (v_{j11} * \sin(w * t) + \\ & v_{j10})^2)^{(3/4)})), \end{aligned}$$

donde  $r_{j1} = \rho_{j1}$ ,  $p_{j1} = p_{j1}$ ,  $v_{j11} = v_{j1}$ ,  $v_{j10} = v_{j10}$ ,  $r_{j2} = \rho_{j2}$ ,  $p_{j2} = p_{j2}$  y  $v_{j2} = v_{j2}$ .

# Bibliografía

- AGUAYO-ORTIZ, A., MENDOZA, S. & OLVERA, D., 2018. A direct Primitive Variable Recovery Scheme for hyperbolic conservative equations: The case of relativistic hydrodynamics. *PLoS ONE*, **13**, e0195494.
- BELOBORODOV, A. M. & UHM, Z. L., 2006. Mechanical Model for Relativistic Blast Waves. *ApJL*, **651**, L1–L4.
- BLANDFORD, R. D. & MCKEE, C. F., 1976. Fluid dynamics of relativistic blast waves. *Physics of Fluids*, **19**, 1130–1138.
- CABRERA, J. I., CORONADO, Y., BENÍTEZ, E., MENDOZA, S., HIRIART, D. & SORCIA, M., 2013. A hydrodynamical model for the Fermi-LAT  $\gamma$ -ray light curve of blazar PKS 1510-089. *MNRAS*, **434**, L6–L10.
- CANTÓ, J., LIZANO, S., FERNÁNDEZ-LÓPEZ, M., GONZÁLEZ, R. F. & HERNÁNDEZ-GÓMEZ, A., 2013. Shock dynamics in relativistic jets. *MNRAS*, **430**, 2703–2714.
- DE GOUVEIA DAL PINO, E. M., 2005. Astrophysical jets and outflows. *Advances in Space Research*, **35**, 908–924.
- GHISELLINI, G., RIGHI, C., COSTAMANTE, L. & TAVECCHIO, F., 2017. The Fermi blazar sequence. *MNRAS*, **469**, 255–266.
- H. TAUB, A., 1948. Relativistic Rankine-Hugoniot Equations. **74**, 328–334.
- KULKARNI, S. R., DJORGOVSKI, S. G., ODEWAHN, S. C., BLOOM, J. S., GAL, R. R. ET AL., 1999. The afterglow, redshift and extreme energetics of the  $\gamma$ -ray burst of 23 January 1999. *Nature*, **398**, 389–394.

- LANDAU, L. D. & LIFSHITZ, E. M., 1986. *Física Estadística, Curso de Física Teórica, V. 5*. Editorial Reverté, México, 1st ed.
- LANDAU, L. D. & LIFSHITZ, E. M., 1987. *Fluid Mechanics, Course on theoretical Physics V.6*. Pergamon Press, London, 2nd ed.
- LORA-CLAVIJO, F. D., CRUZ-PÉREZ, J. P., F., S. & GONZÁLEZ, J. A., 2013. Exact solution of the 1D Riemann Problem in Newtonian and Relativistic Hydrodynamics. *Revista Mexicana de Física*, **59**, 28 – 50.
- MARTÍ, J. M. & MÜLLER, E., 1994. Analytical solution of the Riemann problem in relativistic hydrodynamics. *Journal of Fluid Mechanics*, **258**, 317–333.
- MARTÍ, J. M., MÜLLER, E., FONT, J. A., IBÁÑEZ, J. M. Z. & MARQUINA, A., 1997. Morphology and Dynamics of Relativistic Jets. *ApJ*, **479**, 151–163.
- MENDOZA, S., 2000. *Shocks and Jets in Radio Galaxies and Quasars*. Ph.D. thesis, Cambridge, U.K.
- MENDOZA, S., 2016. *Astrofísica Relativista*. <http://www.mendoza.org/sergio/gravitacion>.
- MENDOZA, S., HIDALGO, J. C., OLVERA, D. & CABRERA, J. I., 2009. Internal shocks in relativistic jets with time-dependent sources. *MNRAS*, **395**, 1403–1408.
- REES, M. J., 1978. The M87 jet - Internal shocks in a plasma beam. *MNRAS*, **184**, 61P–65P.
- REZZOLLA, L. E. A., 2013. *Relativistic Hydrodynamics*. Oxford University Press.
- ROMERO, G. E., SUNYAEV, R. A. & BELLONI, T., eds., 2011. *Jets at All Scales (IAU S275)*, vol. 275 of *IAU Symposium*.
- STANYUKOVICH, K. P., 1960. *Non-steady motion of continuous media*. Oxford University Press, Oxford, U.K.
- TAUB, A. H., 1978. Relativistic Fluid Mechanics. *Annual Reviews of Fluid Mechanics*, **10**, 301–332.
- TOOPER, R. F., 1965. Adiabatic Fluid Spheres in General Relativity. *Astrophysical Journal*, **142**, 1541–+.

TORO, E. F., 2009. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer.

UHM, Z. L., 2011. A Semi-analytic Formulation for Relativistic Blast Waves with a Long-lived Reverse Shock. *ApJ*, **733**, 86.