UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ASPECTOS SEMÁNTICOS Y SINTÁCTICOS DE LAS LÓGICAS INFINITARIAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

MAURICIO ALEXIS FARRUGIA FUENTES

DIRECTOR DE TESIS:
M. EN C. FERNANDO JAVIER NUÑEZ ROSALEZ

CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX, 2018

La diferencia entre el poeta y el matemático es que el poeta intenta meter su cabeza en los cielos, mientras que el matemático intenta meter los cielos en su cabeza.

G.K. Chesterton.

Agradecimientos

Este trabajo representa el final de mi periodo como estudiante de matemáticas. Un logro, que por razones personales, me ha costado bastante. Por lo mismo, hay a muchas personas a quienes es menester agradecerles.

En primer lugar, a mi familia: Mauricio, Carmen y Christian. Por aguantarme en mis locuras y ansiedades, se les quiere mucho.

A mi tía Christina, por siempre haber ofrecido su apoyo en todo lo que se le ha pedido y seguir haciéndolo, hasta la fecha. A pesar de que su apoyo, en los momentos más difíciles haya sido un regaño o una reprimenda, sé que siempre lo hiciste con el corazón en la mano.

A mi tía Queña y mi sobrina Ana Sofía, por siempre estar al pendiente y ofrecer su incondicional apoyo.

A Raúl Coello, por demostrar ser un gran amigo y una increíble persona. Considerando que al día de hoy, chocamos en varios temas, pero siempre me has hecho creer que puedo con más y nunca has dejado que me rinda.

A Vicky Jasso, por haberme ayudado a encontrar mi vocación y enseñarme el verdadera significado de lo que es ser ”maestro”.

A mis alumnos de primaria que han sido, y seguirán siendo, mis conejillos de indias en cualquier locura que se me ocurra para que aprendan algo de matemáticas. Con la sincera esperanza de que hayan aprendido algo de mí, les agradezco los momentos que me hicieron pasar y, que hasta la fecha, algunos todavía se acuerdan de mis clases con gusto.

A mis compañeros de la facultad: Jonathan, Alejandro, Gabo, Gasde, Ernesto, Brenda, Melisa, por mencionar algunos. En particular a Jaime y Luis, que sufrieron la misma exposición que yo. Y, en especial, a Dania, con quien pasé momentos increíbles y aprecio muchísimo.

A Vicente, Enrique y Armando, por brindarme su confianza y permitirme la gran oportunidad de trabajar y crecer academicamente con ustedes.

Espero sigamos trabajando mucho juntos.

A mis sinodales, David Meza Alcántara, Osvaldo Alfonso Téllez Nieto, Luis Jesús Turcio Cuevas y David Valencia Gómez, por haber leído el trabajo y ofrecido grandes contribuciones al mismo. Su dedicación se aprecia y se agradece.

Y, por último, a mi tutor, Fernando Javier, por haber tenido tanta paciencia conmigo, haber demostrado ser un gran tutor y un buen amigo. Muchísimas gracias por todo.

Sin embargo, una última entrada en los agradecimientos resulta ser indispensable. Pues, en el poco tiempo que ha estado, esta persona me ha demostrado muchísimo apoyo, cariño y dedicación. Muchísimas gracias, Ana, por ser quien eres y haber llegado en el momento más indicado.

Índice

Introducción

El siglo XX fue de suma importancia para las matemáticas. Comenzando por el planteamiento de los 23 problemas de Hilbert en 1900, hasta la demostración del último teorema de Fermat por Andrew Wiles en 1995. La lógica matemática, en particular, también tuvo muchos e importantes avances. Los trabajos de Kurt Gödel hablan por sí solos en este aspecto. Sin embargo, en ese mismo siglo, Carol Karp se encontró con la necesidad de expresar una propiedad para la cual necesitaba de una cantidad infinita de conjunciones, por lo que desarrolló la idea de la lógica infinitaria.

Este trabajo tiene como objetivo presentar una construcción asequible de la Lógica Infinitaria κ, λ (ambos cardinales infinitos). Así como mencionar algunos de sus ejemplos, limitaciones y hacer una breve comparativa entre ella y la lógica de primer orden. Es importante mencionar que utilizaremos mucha herramienta de Teoría de Modelos, por lo mismo, le recomendamos al lector que haya llevado un curso de Teoría de Modelos o, al menos, esté familiarizado con los conceptos de Lógica de Predicados y un manejo básico de la misma. Además, se manejan algunos temas de cardinalidad infinita. No se profundiza en el tema pero no está de más mencionar su relevancia. Esto lo mencionamos pues a lo largo del trabajo abordamos el análisis de diferentes estructuras matemáticas, con la singularidad de que utilizaremos a la Lógica Infinitaria como herramienta para esto. Por lo que iremos acotando los cardinales κ, λ pues su tamaño llega a rebasar los objetivos planteados. Con esto en consideración, analizaremos un tipo específico de Lógicas Infinitarias, en las que las relaciones y funciones son de aridad finita. Los demás casos no se analizarán.

La tesis se presenta en cuatro capítulos. En el primero, comenzaremos con un breve repaso de los conceptos básicos de Lógica de Predicados y Teoría de Modelos.

En el segundo capítulo se presenta una construcción de Lógica Infinitaria como una extensión de la de predicados y se estudian algunos ejemplos de la misma.

El tercer capítulo se centra en los trabajos realizados por Carol Karp y Dana Scott. En primer lugar analizaremos el Teorema de Karp, el cual nos habla sobre la relación que hay cuando dos estructuras cumplen los mismos enunciados infinitarios y cuando son Back-and-Forth equivalentes. Después veremos el análisis de Scott y cómo logra capturar la noción de isomorfismo, entre estructuras numerables, bajo un enunciado infinitario, el Enunciado de Scott.

Por último, el cuarto capítulo, consiste en demostrar rigurosamente el Teorema de Correctitud-Completud para Lógicas Infinitarias ω_1, ω. Al igual que la demostración del homónimo para Lógica de Predicados, la demostración se realiza mediante una construcción de tipo Henkin. Pero, como se verá más adelante, el Teorema de Compacidad no se cumple en las Lógicas Infinitarias, por lo mismo el Teorema de Correctitud-Completud Extendido falla.

Capítulo I

Preliminares

I.1 Lógica de Primer Orden

Como mencionamos en la introducción, comenzaremos con un breve repaso de las nociones importantes sobre Lógica de Primer Orden, con el entendido de que el lector ya está familiarizado con ellos.

Definición I.1.1.- Un *tipo de semejanza* es un conjunto τ de símbolos, de la siguiente forma:

$$\tau = [\bigcup_{n<\omega} \mathcal{R}_n] \cup [\bigcup_{m<\omega} \mathcal{F}_m] \cup \mathcal{C}$$

donde $\mathcal{R}_n$ es un conjunto de símbolos relacionales de aridad n, $\mathcal{F}_m$ es un conjunto de símbolos funcionales de aridad m y $\mathcal{C}$ es un conjunto de símbolos de constantes. Además, no pedimos que los uniendos sean distintos del vacío. Supondremos que ningún símbolo es una sucesión de otros símbolos.

Definición I.1.2.- Sea τ un tipo de semejanza, diremos que $\mathfrak{A}$ es una *τ-estructura* si cumple ser un par ordenado $\langle A, I\rangle$ donde I es una función con dominio τ que valúa de la siguiente manera:

1. Para cada símbolo relacional R de aridad n, $I(R_n) \subseteq A^n$;

2. Para cada símbolo funcional f de aridad m, $I(f_m) : A^m \longrightarrow A$; y

3. Para cada c constante, $I(c) \in A$.

A la función I le llamaremos la función de interpretación. Así, dado τ un tipo de semejanza, denotaremos a la estructura $\mathfrak{A} = \langle A, I\rangle$ como sigue:

$$\mathfrak{A} = \langle A, \{I(R) : R \in \mathcal{R}\}, \{I(f) : f \in \mathcal{F}\}, \{I(c) : c \in \mathcal{C}\}\rangle$$

Por comodidad adoptaremos la siguiente notación; para cada $x \in \tau$, $I(x) = x^{\mathfrak{A}}$.

Dependiendo de la situación, también nos referiremos al universo de una estructura $\mathfrak{B}$, cualquiera, como $|\mathfrak{B}|$. Finalmente, denotaremos por V_τ a la clase de todas las τ-estructuras.

De aquí en adelante trabajaremos con un tipo de semejanza τ fijo.

Definición I.1.3.- Definimos el *Lenguaje de primer orden del tipo* τ, $\mathscr{L}_\tau$, como la unión de los siguientes conjuntos:

$$\mathscr{L}_\tau = \tau \cup \{v_n : n < \omega\} \cup \{\approx\} \cup \{\neg, \wedge\} \cup \{\exists\}$$

Donde cada uno de los conjuntos anteriores representa:

- el tipo de semejanza;
- las variables;
- símbolo de igualdad;
- conectivos lógicos; y
- cuantificador existencial.

Denotaremos al conjunto de variables como VAR, pues lo estaremos utilizando frecuentemente.

Definición I.1.4.- El *conjunto de los términos de tipo* τ, es el $\subseteq$-menor conjunto X, tal que:

- $\{v_i : i < \omega\} \cup \mathcal{C} \subseteq X$; y
- Si $f \in \mathcal{F}_m \subseteq \tau, 1 \leq m\ y\ t_1, ..., t_m \in X,$ entonces $f(t_1, ..., t_m) \in X$.

A dicho conjunto lo denotaremos como $TERM\tau$ y un τ-*término*, será un elemento del conjunto recién definido.

Definición I.1.5.- Una *fórmula atómica del tipo* τ es una expresión de alguna de las siguientes formas:

- $(t_1 \approx t_2)$; y
- $P(t_1, ..., t_n)$.

Donde, para toda $i \in \{1, ..., n\}$ $t_i \in TERM_\tau$ y $P \in \mathcal{R}_n$. Al conjunto de todas las fórmulas atómicas de tipo τ lo denotaremos como ATM_τ

Por comodidad, diremos que ψ es una *fórmula literal del tipo* τ, si ψ es una fórmula atómica o es la negación de una. Al conjunto de todas las literales lo denotaremos por LIT_τ.

Definición I.1.6.- El *conjunto de todas las fórmulas del tipo* τ, es el $\subseteq$-menor conjunto X, tal que:

- $ATM_\tau \subseteq X$;
- Si $\alpha, \beta \in X$, entonces $(\neg\alpha), (\alpha \wedge \beta) \in X$; y
- Dada $x \in VAR$ y $\varphi \in X$, entonces $(\exists x\varphi) \in X$.

Al conjunto mencionado anteriormente lo denotaremos por $\mathcal{L}_\tau$ y cualquier objeto que sea elemento de este conjunto será una *τ-fórmula*.

Notación.- Dadas $\alpha, \beta \in \mathcal{L}_\tau$ y $x \in VAR$, definimos las siguientes abreviaturas:

- Con $(\alpha \to \beta)$ nos referiremos a $\neg(\alpha \wedge \neg\beta)$;
- Con $(\alpha \vee \beta)$ nos referiremos a $\neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$;
- Con $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ nos referiremos a $((\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha))$; y
- Con $(\forall x\alpha)$ nos referiremos a $\neg(\exists x\neg\alpha)$.

Entenderemos que v_i *ocurre libre* en una fórmula β, o es libre para β, si no está dentro del alcance de algún cuantificador. En caso de estarlo, diremos que v_i es una variable acotada. Con esto en cuenta, denotaremos por $\mathcal{L}_\tau^n$ al conjunto de todas las τ-fórmulas con exactamente n variables libres. Y, en particular, a los elementos que se encuentren en $\mathcal{L}_\tau^0$ los llamaremos enunciados.

Notación.- Dada $\phi \in \mathcal{L}_\tau^n$, cuando sea necesario especificar las variables libres que aparecen en ϕ, escribiremos $\phi(v_1, ..., v_n)$. Además, en ocasiones escribiremos $\overline{x}$, lo cual se refiere a una sucesión de elementos (los cuales pueden ser del universo, contantes o variables), es decir $\overline{x} = \langle x_1, ..., x_n \rangle$.

Definición I.1.7.- Sea τ un tipo de semejanza, $\mathfrak{A} \in V_\tau,\ t \in TERM_\tau$ y $s : VAR \longrightarrow A$; denominada *asignación*, definimos la *interpretación de t en la estructura $\mathfrak{A}$ bajo la asignación s*, denotado por $t^{\mathfrak{A}}[s]$, por recursión sobre $TERM_\tau$.

1. Paso base: dadas $x \in VAR$ y $c \in \mathcal{C}$,

- $x^{\mathfrak{A}}[s] = s(x);$ y
- $c^{\mathfrak{A}}[s] = c^{\mathfrak{A}}$.

2. Paso recursivo: si $f \in \mathcal{F}_n$ y $t_1, ..., t_n \in TERM_\tau$, entonces

$$(f(t_1, ..., t_n))^{\mathfrak{A}}[s] = f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[s], ..., t_n^{\mathfrak{A}}[s]).$$

Denotaremos a una asignación s como un elemento del conjunto ${}^{\omega}A$. En donde, los índices de las variables nos permiten realizar la asignación de las mismas.

Definición I.1.8.- Sea τ un tipo de semejanza, $\mathfrak{A} \in V_\tau$, s una asignación para $\mathfrak{A}$ y $a \in A$, definimos la asignación $s(x/a) : \omega \longrightarrow A$ como sigue:

$$s(x/a)(y) = \begin{cases} a & x = y; \\ s(y) & \text{En otro caso.} \end{cases}$$

Ahora, presentaremos una definición de gran importancia.

Definición I.1.9.- (*Satisfacción de Tarski*) Dada una τ-estructura $\mathfrak{A}$, una asignación s para $\mathfrak{A}$ y $\phi \in \mathcal{L}_\tau$, definimos recursivamente $\mathfrak{A}$ *satisface a* ϕ *con* s, denotado por $\mathfrak{A} \vDash \phi_{[s]}$, de la siguiente manera:

1. Paso base:

   - Si $t_1, t_2 \in TERM_\tau$, entonces $\mathfrak{A} \vDash (t_1 \approx t_2)_{[s]}$ si y sólo si $t_1^{\mathfrak{A}}[s] = t_2^{\mathfrak{A}}[s]$
   - Si $R \in \mathcal{R}_m$ y $t_1, ..., t_m \in TERM_\tau$, entonces

   $$\mathfrak{A} \vDash R(t_1, ..., t_m)_{[s]} \text{ si y sólo si } \langle t_1^{\mathfrak{A}}[s], ..., t_m^{\mathfrak{A}}[s] \rangle \in R^{\mathfrak{A}}.$$

2. Paso recursivo:

   - Si $\varphi \in \mathcal{L}_\tau$, entonces $\mathfrak{A} \vDash \neg\varphi_{[s]}$ si y sólo si $\mathfrak{A} \nvDash \varphi_{[s]}$
   - Si $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_\tau$, entonces $\mathfrak{A} \vDash (\varphi \wedge \psi)_{[s]}$ si y sólo si $\mathfrak{A} \vDash \varphi_{[s]}$ y $\mathfrak{A} \vDash \psi_{[s]}$
   - Si $x \in VAR$ y $\psi \in \mathcal{L}_\tau$, entonces $\mathfrak{A} \vDash \exists x \psi_{[s]}$ si y sólo si existe $a \in A$, $\mathfrak{A} \vDash \psi_{[s(x/a)]}$.

Aprovechando lo anterior, diremos que una fórmula es *verdadera* para una estructura dada si la estructura satisface a la fórmula con cualquier asignación. Además, entenderemos por *Fórmula Universalmente Verdadera* a cualquier fórmula que sea verdadera para toda estructura. Esto último lo denotaremos por $\models \varphi$.

El siguiente lema habla sobre las asignaciones que coinciden en las mismas variables libres de alguna fórmula dada. Por comodidad, escribiremos las asignaciones explícitas, $\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, ..., a_n)$. Donde los $a_i \in A$, para toda $i \in \{1, ..., n\}$, y cada una representa la asignación de la variable libre correspondiente.

Lema I.1.10.- Sean $\mathfrak{A} \in V_\tau$, y s, s' dos asignaciones para $\mathfrak{A}$, para toda τ-fórmula φ tenemos que, si s y s' coinciden en todas las variables que ocurren libres en φ, entonces:

$$\mathfrak{A} \models \varphi_{[s]} \text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \models \varphi_{[s']}$$

Corolario I.1.11.- Dadas $\mathfrak{A} \in V_\tau$ y $\sigma \in \mathcal{L}_\tau^0$, tenemos

$$\mathfrak{A} \models \sigma \text{ ó } \mathfrak{A} \models \neg\sigma.$$

Las demostraciones anteriores pueden ser revisadas en [1].

Definición I.1.12.- Sean t_0, t τ-términos, $v \in VAR$ y $\varphi \in \mathcal{L}_\tau$, definimos por recursión, $(t)_{t_0}^v$, la *sustitución de t_0 en lugar de cada presencia libre de la variable v en t* y, $(\varphi)_t^v$, la *sustitución de t en lugar de cada presencia libre de la variable v en φ*, como sigue:

- Para términos tenemos,
  - si $t_0 = y$,
  $$(y)_t^v = \begin{cases} t & v = y; \\ y & v \neq y. \end{cases}$$
  - Si $t_0 = c$,
  $$(c)_t^v = c.$$
  - Si $t_0 = f(t_1, ..., t_n)$,
  $$(f(t_1, ..., t_n))_t^v = f((t_1)_t^v, ..., (t_n)_t^v).$$
- Para fórmulas tenemos,
  - Atómicas:
    - $(t_1 \approx t_2)_t^v = ((t_1)_t^v \approx (t_2)_t^v)$

◦ $(R(t_1,...,t_n))^v_t = R((t_1)^v_t,...,(t_n)^v_t)$

– Fórmulas compuestas:

$*(\neg\varphi)^v_t = \neg(\varphi)^v_t$

$*(\varphi\wedge\psi)^v_t = ((\varphi)^v_t \wedge (\psi)^v_t)$

$$*(\exists x\varphi)^v_t = \begin{cases} (\exists x\varphi) & x = v; \\ \exists x((\varphi)^v_t) & x \neq v \text{ y } x \text{ no aparece en } t \text{ o } v \text{ no aparece libre en } \varphi; \text{ y} \\ \exists z((\varphi)^x_z)^v_t & x \neq v \text{ y } x \text{ aparece en } t \text{ y } v \text{ aparece libre en } \varphi. \end{cases}$$

(Donde z es la primera nueva variable, $z \neq x$, que no aparece en $\exists x\varphi$, ni en t.)

Teorema I.1.13.- (Sustitución) Sean t, t_0 τ-términos, $\varphi \in \mathcal{L}_\tau$, $\mathfrak{A} \in V_\tau$ y $s \in {}^\omega A$, entonces:

- $t_0^{\mathfrak{A}}[s(x/t^{\mathfrak{A}}[s])] = ((t_0)^x_t)[s]$; y
- $\mathfrak{A} \models \varphi_{[s(x/t^{\mathfrak{A}}[s])]}$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models (\varphi)^x_{t[s]}$.

Corolario I.1.14.- Si hay un τ-término t, tal que $\mathfrak{A} \models (\varphi)^x_{t[s]}$, entonces $\mathfrak{A} \models (\exists x\varphi)_{[s]}$.

Corolario I.1.15.- Para cualquier τ-término, t, tenemos

$$\models \forall x(\varphi) \to (\varphi)^x_t.$$

Las demostraciones anteriores pueden ser revisadas en [1].

Definición I.1.16.- Dada $\mathfrak{A} = \langle A, I\rangle$, con $\mathfrak{A} \in V_\tau$, definimos el *cardinal de* $\mathfrak{A}$ como el cardinal de su universo, A. Es decir:

$$\|\mathfrak{A}\| = |A|.$$

Definición I.1.17.- Dado τ un tipo de semejanza, definimos el *cardinal del lenguaje* $\mathscr{L}_\tau$ como sigue:

$$|\mathscr{L}_\tau| = |\mathcal{L}_\tau|.$$

Definición I.1.18.- Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in V_\tau$ y $h : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$.

1. Diremos que h es un *Homomorfismo* de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$; denotado por $h : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$, si:

- Si f es una letra funcional de aridad m y $a_1, ..., a_m \in A$, entonces

$$h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, ..., a_m)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), ..., h(a_m));$$

- si R es una letra relacional de aridad m,

$$\langle a_1, ..., a_n \rangle \in R^{\mathfrak{A}} \text{ si y sólo si } \langle h(a_1), ..., h(a_n) \rangle \in R_n^{\mathfrak{B}}; y$$

- si c es una constante, entonces

$$h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}.$$

2. h es un *Encaje* de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$, denotado por $h : \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{B}$, si:
   - h es un homomorfismo y
   - h es una función inyectiva.
3. h es un *Isomorfismo* de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ si:
   - h es un encaje y
   - h es una función suprayectiva.

Cuando la función h sea un isomorfismo entre $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, escribiremos $h : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$. Además, cuando $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ sean isomorfas, escribiremos $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

Teorema I.1.19.- (Homomorfismo) Sea h un homomorfismo de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ y $s \in {}^{\omega}A$, entonces para todo $t \in TERM_\tau$ y toda $\alpha \in \mathcal{L}_\tau$, sucede:

1. $h(t^{\mathfrak{A}}[s]) = t^{\mathfrak{B}}[h \circ s]$;
2. si α no tiene cuantificadores ni $\approx$, entonces

$$\mathfrak{A} \models \alpha_{[s]} \text{ si y sólo si } \mathfrak{B} \models \alpha_{[h \circ s]};$$

3. si $h : \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{B}$ y α no tiene cuantificadores, entonces

$$\mathfrak{A} \models \alpha_{[s]} \text{ si y sólo si } \mathfrak{B} \models \alpha_{[h \circ s]};$$

4. si h es suprayectivo y α no tiene símbolo $\approx$, entonces

$$\mathfrak{A} \models \alpha_{[s]} \text{ si y sólo si } \mathfrak{B} \models \alpha_{[h \circ s]}; \text{ y}$$

5. si h es un isomorfismo, entonces

$$\mathfrak{A} \models \alpha_{[s]} \text{ si y sólo si } \mathfrak{B} \models \alpha_{[h \circ s]}.$$

La demostración de este teorema no es parte de este trabajo y puede ser revisada en [1] o [2]. Sin embargo, es fácil observar por qué se solicitan dichas restricciones. Por ejemplo, dado $h : \langle \mathbb{Z}, + \rangle \to \langle \mathbb{Z}_2, + \rangle$, tal que h manda a los pares al cero y a los impares al uno. Claramente obtenemos un homomorfismo suprayectivo y tomando $\varphi \in \mathcal{L}_\tau$ de la forma $(x + x + x \approx x)$, tenemos

$$\langle \mathbb{Z}_2, + \rangle \models \varphi \text{ pero } \langle \mathbb{Z}, + \rangle \not\models \varphi.$$

De igual manera podemos encontrar ejemplos sencillos de los demás casos.

Teorema I.1.20.- Dadas $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in V_\tau$, las siguientes son equivalentes:

- $h : \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{B}$
- para toda $\varphi(\overline{x}) \in ATM_\tau$ y para cualesquiera $\overline{a} \in A$, tenemos

$$\mathfrak{A} \models \varphi(\overline{x})_{[\overline{a}]} \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi(\overline{x})_{[h(\overline{a})]}.$$

Demostración.- Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in V_\tau$.

$\Rightarrow$] Supongamos que $h : A \hookrightarrow B$.

Sea $\varphi(\overline{x}, \overline{v}) \in \mathcal{L}_\tau^n$ definida como $t_1(\overline{x}) \approx t_2(\overline{v})$, $\overline{a} \in A$,

$$\mathfrak{A} \models \varphi(\overline{x}, \overline{v})_{[\overline{a}]} \text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \models (t_1(\overline{x}) \approx t_2(\overline{v}))_{[\overline{a}]} \text{ si y sólo si } t_1^{\mathfrak{A}}[\overline{a}] = t_2^{\mathfrak{A}}[\overline{a}].$$

Por el teorema del homomorfismo,

$$h(t_1^{\mathfrak{A}}[\overline{a}]) = t_1^{\mathfrak{B}}[h(\overline{a})] = t_2^{\mathfrak{B}}[h(\overline{a})] = h(t_2^{\mathfrak{A}}[\overline{a}]).$$

Entonces,

$$t_1^{\mathfrak{B}}[h(\overline{a})] = t_2^{\mathfrak{B}}[h(\overline{a})] \text{ si y sólo si } \mathfrak{B} \models (t_1(\overline{x}) \approx t_2(\overline{v}))_{[h(\overline{a})]}$$

$$\text{si y sólo si } \mathfrak{B} \models \varphi(\overline{x}, \overline{v})_{[h(\overline{a})]}.$$

Sea $R \in \mathcal{R}_n$, $\varphi(\overline{x}) \in \mathcal{L}_\tau^n$ definida como $R(\overline{x})$ y $\overline{a} \in A$,

$$\mathfrak{A} \models \varphi(\overline{x})_{[\overline{a}]} \text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \models R(\overline{x})_{[\overline{a}]}$$

$$\text{si y sólo si } \langle x_1^{\mathfrak{A}}[\overline{a}], ..., x_n^{\mathfrak{A}}[\overline{a}]\rangle \in R^{\mathfrak{A}} \text{ si y sólo si } \langle x_1^{\mathfrak{B}}[h(\overline{a})], ..., x_n^{\mathfrak{B}}[h(\overline{a})]\rangle \in R^{\mathfrak{B}}$$

$$\text{si y sólo si } \mathfrak{B} \models R(\overline{x})_{[h(\overline{a})]} \text{ si y sólo si } \mathfrak{B} \models \varphi_{[h(\overline{a})]}.$$

Por lo tanto, para toda $\varphi(\overline{x}) \in ATM_\tau$ y para cualesquiera $\overline{a} \in A$,

$$\mathfrak{A} \models \varphi(\overline{x})_{[\overline{a}]} \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi(\overline{x})_{[h(\overline{a})]}.$$

$\Leftarrow$] Supongamos que para toda $\varphi(\overline{x}) \in ATM_\tau$ y para cualesquiera $\overline{a} \in A$, tenemos

$$\mathfrak{A} \models \varphi(\overline{x})_{[\overline{a}]} \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi(\overline{x})_{[h(\overline{a})]}.$$

Sea $c \in \mathcal{C}$, $\varphi(\overline{x}) \in \mathcal{L}_\tau^n$ definida como $c \approx \overline{x}$ y $a \in A$.

$$\mathfrak{A} \models \varphi(\overline{x})_{[a]} \text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \models (c \approx \overline{x})_{[a]} \text{ si y sólo si } c^{\mathfrak{A}}[a] = \overline{x}^{\mathfrak{A}}[a]$$

$$\text{si y sólo si } c^{\mathfrak{A}} = a.$$

Por hipótesis

$$\mathfrak{B} \models \varphi(\overline{x})_{[h(a)]} \text{ si y sólo si } \mathfrak{B} \models (c \approx \overline{x})_{[h(a)]} \text{ si y sólo si } c^{\mathfrak{B}}_{[h(a)]} = \overline{x}^{\mathfrak{B}}_{[h(a)]}$$

$$\text{si y sólo si } c^{\mathfrak{B}} = h(a).$$

$$\text{Por lo tanto, } \ h(c^{\mathfrak{A}}) = h(a) = c^{\mathfrak{B}}.$$

Sea $f \in \mathcal{F}_n$, $\varphi(v_0, \overline{v})\mathcal{L}_\tau^n$ definida como $v_0 \approx f(\overline{v})$ y $a\overline{a} \in A$.

$$\mathfrak{A} \models \varphi(v_0, \overline{v})_{[a\overline{a}]} \text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \models (v_0 \approx f(\overline{v}))_{[a\overline{a}]} \text{ si y sólo si } v_0^{\mathfrak{A}}[a\overline{a}] = f^{\mathfrak{A}}(\overline{v})[a\overline{a}]$$

$$\text{si y sólo si } a = f^{\mathfrak{A}}(v_1^{\mathfrak{A}}[a\overline{a}], ..., v_n^{\mathfrak{A}}[a\overline{a}]).$$

Por hipótesis

$$\mathfrak{B} \models \varphi(v_0, \overline{v})_{[h(a)h(\overline{a})]} \text{ si y sólo si } \mathfrak{B} \models (v_0 \approx f(\overline{v}))_{[h(a)h(\overline{a})]}$$

$$\text{si y sólo si } v_0^{\mathfrak{B}}[h(a)h(\overline{a})] = f^{\mathfrak{B}}(\overline{v})[h(a)h(\overline{a})]$$

$$\text{si y sólo si } h(a) = f^{\mathfrak{B}}(v_1^{\mathfrak{B}}[h(a)h(\overline{a})], ..., v_n^{\mathfrak{B}}[h(a)h(\overline{a})]).$$

Por lo tanto,

$$h(f^{\mathfrak{A}}(v_1^{\mathfrak{A}}[a\overline{a}], ..., v_n^{\mathfrak{A}}[a\overline{a}])) = h(a) = f^{\mathfrak{B}}(v_1^{\mathfrak{B}}[h(a)h(\overline{a})], ..., v_n^{\mathfrak{B}}[h(a)h(\overline{a})]).$$

Sea $R \in \mathcal{R}_n$, $\varphi(\overline{x}) \in \mathcal{L}_\tau^n$ definida como $R(\overline{x})$ y $\overline{a} \in A$.

$$\mathfrak{A} \models \varphi(\overline{x})_{[\overline{a}]} \text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \models R(\overline{x})_{[\overline{a}]} \text{ si y sólo si } \langle x_1^{\mathfrak{A}}[\overline{a}], ..., x_n^{\mathfrak{A}}[\overline{a}]\rangle \in R^{\mathfrak{A}}$$

si y sólo si $\langle x_1^{\mathfrak{B}}[h(\overline{a})], ..., x_n^{\mathfrak{B}}[h(\overline{a})]\rangle \in R^{\mathfrak{B}}$si y sólo si $\mathfrak{B} \models R(\overline{x})_{[h(\overline{a})]}\mathfrak{B} \models \varphi(\overline{x})_{[h(\overline{a})]}$.

De donde, $\langle x_1^{\mathfrak{A}}[\overline{a}], ..., x_n^{\mathfrak{A}}[\overline{a}]\rangle \in R^{\mathfrak{A}}$ si y sólo si $\langle x_1^{\mathfrak{B}}[h(\overline{a})], ..., x_n^{\mathfrak{B}}[h(\overline{a})]\rangle \in R^{\mathfrak{B}}$.

Por lo tanto, $h : A \longrightarrow B$ es un homomorfismo.

Ahora, sean $h(a_0), h(a_1) \in Im(h)$, tales que $h(a_0) \neq h(a_1)$. Tomando $\varphi(x_0, x_1) \in \mathcal{L}_\tau^n$ definida como $x_0 \approx x_1$. Sucede

$$x_0^{\mathfrak{B}}[h(a_0)h(a_1)] \neq x_1^{\mathfrak{B}}[h(a_0)h(a_1)] \text{ si y sólo si } \mathfrak{B} \not\models \varphi(x_0, x_1)_{[h(a_0)h(a_1)]}$$

si y sólo si $\mathfrak{A} \not\models \varphi(x_0, x_1)_{[a_0a_1]}$ si y sólo si $x_0^{\mathfrak{A}}[a_0a_1] \neq x_1^{\mathfrak{A}}[a_0a_1]$, de donde $a_0 \neq a_1$.

Por lo tanto, $h : \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{B}$■

Corolario I.1.21.- Dadas $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in V_\tau$, $h : \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{B}$ si y sólo si, para toda $\varphi(\overline{x}) \in LIT_\tau$ y para cualesquiera $\overline{a} \in A$, tenemos

$$\mathfrak{A} \models \varphi(\overline{x})_{[\overline{a}]} \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi(\overline{x})_{[h(\overline{a})]}.$$

Definición I.1.22.- Si para todo $\varphi \in \mathcal{L}_\tau^0$ sucede que $\mathfrak{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi$, diremos que las estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son *elementalmente equivalentes*, $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

Corolario I.1.23.- Si $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

Definición I.1.24.- Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in V_\tau$. Decimos que $\mathfrak{A}$ es *subestructura* de $\mathfrak{B}$ (o $\mathfrak{B}$ es una *extensión* de $\mathfrak{A}$), $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, si la inclusión es un encaje.

Lema I.1.25.- Dadas $\mathfrak{A} \in V_\tau$ y $S \subseteq A$, entonces las siguientes son equivalentes:

1. S es el universo de alguna $\mathfrak{B}$ tal que $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$; y
2. Para cada $c \in \mathcal{C}$, $c^{\mathfrak{A}} \in S$; y para cada $n < \omega$, cualquier $f \in \mathcal{F}$ de aridad n y para todo $s_1, ..., s_n \in S$, $f^{\mathfrak{A}}(s_1, ..., s_n) \in S$.

Si se cumple lo anterior, la subestructura $\mathfrak{B}$ es única. En este caso, llamaremos a $\mathfrak{B}$ *la subestructura de* $\mathfrak{A}$ *generada por* S, denotado por $\langle S\rangle_{\mathfrak{A}}$. El lema anterior puede ser verificado en [3] junto son su demostración.

I.2 Juegos de Ehrenfeucht-Fraissé para Lógica de Primer Orden

En esta sección, analizaremos algunas relaciones entre estructuras de primer orden. Más adelante, analizaremos las mismas relaciones vistas a través de la lógica infinitaria. Por esto mismo para lo siguiente fijaremos un tipo de semejanza arbitrario, τ, el cual se omitirá de la notación.

Las definiciones y resultados que veremos de ahora en adelante forman parte de la Teoría de Modelos y han sido sacados principalmente de [3].

Sean $\mathfrak{A} \in V_\tau$ y $\overline{a}$ una sucesión de elementos de A. Podemos agregar todos los elementos de $\overline{a}$ como parámetros al tipo de semejanza con el que estamos trabajando. Para esto tomamos una sucesión de constantes nuevas, $\overline{c}$, de la misma longitud que $\overline{a}$, y formamos el nuevo tipo de semejanza, $\tau(\overline{c})$, agregándolas a τ. Así, $(\mathfrak{A}, \overline{a})$ resulta ser una $\tau(\overline{c})$-estructura donde $a_i = c_i^{(\mathfrak{A},\overline{a})}$ para cada $i \in I$ (siendo I una indexación de la sucesión $\overline{a}$). De igual manera, si $\mathfrak{B} \in V_\tau$ y $\overline{b} \in B$, de la misma longitud que $\overline{c}$, hay $(\mathfrak{B}, \overline{b}) \in V_{\tau(\overline{c})}$ donde $b_i = c_i^{(\mathfrak{B},\overline{b})}$ para cada $i \in I$.

Observación.- Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in V_\tau$ y supongamos que $(\mathfrak{A}, \overline{a}), (\mathfrak{B}, \overline{b}) \in V_{\tau(\overline{c})}$. Entonces, un homomorfismo $f : (\mathfrak{A}, \overline{a}) \longrightarrow (\mathfrak{B}, \overline{b})$ es lo mismo que un homomorfismo $f : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ tal que $f(a_i) = b_j$ para algunas $i, j \in I$. Y, un encaje $f : (\mathfrak{A}, \overline{a}) \hookrightarrow (\mathfrak{B}, \overline{b})$ es lo mismo que un encaje $f : \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{B}$ tal que $f(a_i) = b_j$ para algunas $i, j \in I$. Además, para toda $\varphi \in \mathcal{L}_\tau$, tenemos

$$\mathfrak{A} \models \varphi_{[\overline{a}]} \Leftrightarrow (\mathfrak{A}, \overline{a}) \models \varphi_{[\overline{c}]}.$$

Lema I.2.1.-(Diagrama) Dadas $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in V_\tau$, $\overline{c}$ una sucesión de constantes y $(\mathfrak{A}, \overline{a}), (\mathfrak{B}, \overline{b}) \in V_{\tau(\overline{c})}$, entonces las siguientes son equivalentes:

1. para cada $\varphi \in ATM^0_{\tau(\overline{c})}$, $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \models \varphi \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, \overline{b}) \models \varphi$; y
2. hay $f : \langle \overline{a} \rangle_{\mathfrak{A}} \hookrightarrow \mathfrak{B}$ tal que, $f[\overline{a}] = \overline{b}$.

Este lema fue obtenido de [3] y su demostración puede ser revisada en el mismo.

Definición I.2.2.- Dada $\varphi \in \mathcal{L}_\tau$, definimos el *Rango de cuantificadores*, $Rc(\varphi)$, como sigue:

- Si $\varphi \in ATM$, entonces $Rc(\varphi) = 0$;
- $Rc(\neg\varphi) = Rc(\varphi)$;
- $Rc(\psi \wedge \eta) = sup\{Rc(\psi), Rc(\eta)\}$; y
- $Rc(\exists v \varphi) = Rc(\varphi) + 1$.

Definición I.2.3.- Dadas $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in V_\tau$ y $n < \omega$, diremos que $\mathfrak{A} \equiv_n \mathfrak{B}$ si para cualquier $\psi \in \mathcal{L}_\tau^0$ con $Rc(\psi) \leq n$, tenemos

$$\mathfrak{A} \models \psi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \psi.$$

Observación.- Claramente, dados $m, n < \omega$, con $m < n$, si $\mathfrak{A} \equiv_n \mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$.

Definición I.2.4.- Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in V_\tau$ y $\xi \leq \omega$. *El juego de Ehrenfreucht-Fraïssé de tamaño* ξ, denotado por $\mathrm{EF}_\xi(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, se juega como sigue. En el n-ésimo paso, $\forall$belardo (el primer jugador) juega $a_n \in A$ o $b_n \in B$. En el primer caso, $\exists$loisa (el segundo jugador) responde con $b_n \in B$ y, en el segundo caso, responde con $a_n \in A$. Al final del juego, las sucesiones $\overline{a} = (a_i : i < \xi)$ y $\overline{b} = (b_i : i < \xi)$ han sido jugadas. A la pareja $(\overline{a}, \overline{b})$ se le llama jugada.

El objetivo de cada uno de los jugadores es ganar el juego. Para $\forall$belardo esto consiste en ver que $\mathfrak{A} \ncong \mathfrak{B}$. Si, al finalizar el juego, $\forall$belardo no ha podido demostrar que $\mathfrak{A} \ncong \mathfrak{B}$, entonces $\exists$loisa será la ganadora. En otras palabras, $\exists$loisa gana si y sólo si al terminar el juego $\mathrm{EF}_\xi(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, con la jugada $(\overline{a}, \overline{b})$ se tiene $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv_0 (\mathfrak{B}, \overline{b})$. De no ser así, $\forall$belardo será el ganador. En el caso de existir una serie de pasos a seguir mediante los cuales se obtiene la victoria, ya sea para $\forall$belardo o $\exists$liosa, diremos que este jugador tiene estrategia ganadora.

Notación.- Al escribir $\mathfrak{A} \asymp_\xi \mathfrak{B}$, nos referimos a que $\exists$loisa tiene estrategia ganadora en $\mathrm{EF}_\xi(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

Observación.- Dadas $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in V_\tau$, entonces:
- Si $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, entonces, para todo $m < \omega$, $\mathfrak{A} \asymp_m \mathfrak{B}$;
- Si $n < m \leq \omega$ y $\mathfrak{A} \asymp_m \mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{A} \asymp_n \mathfrak{B}$; y
- Dado $m \leq \omega$ ordinal, $\asymp_m$ es una relación de equivalencia en V_τ.

Definición I.2.5.- Dadas $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in V_\tau$ y κ un cardinal infinito, un *sistema de back-and-forth equivalente de tamaño* κ *entre* $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, denotado por $\mathfrak{A} \cong_P^\kappa \mathfrak{B}$, es una colección, P, no vacía, de parejas $(\overline{a}, \overline{b})$, donde $\overline{a} \in A^\xi$ y $\overline{b} \in B^\xi$ con $\xi < \kappa$, que cumple las siguientes:

- si $(\overline{a}, \overline{b}) \in P$, entonces $\overline{a}$ y $\overline{b}$ son de la misma longitud y $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv_0 (\mathfrak{B}, \overline{b})$;
- para todas $(\overline{a}, \overline{b}) \in P$ y $c \in A$, hay $d \in B$ tal que $(\overline{a}c, \overline{b}d) \in P$; y
- para todas $(\overline{a}, \overline{b}) \in P$ y $d \in B$, hay $c \in A$ tal que $(\overline{a}c, \overline{b}d) \in P$.

De la definición anterior, tenemos que, dadas $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in V_\tau$, si $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, entonces, para todo κ cardinal, $\mathfrak{A} \cong_P^\kappa \mathfrak{B}$. Para esto basta tomar $P = h$ donde $h : \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{B}$, pues sabemos que existe.

Ahora veamos la relación que tienen las subestructuras generadas y las fórmulas con rango de cuantificadores igual a cero.

Lema I.2.6.- Dadas $(\mathfrak{A}, \overline{a}), (\mathfrak{B}, \overline{b}) \in V_{\tau(\overline{c})}$,

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv_0 (\mathfrak{B}, \overline{b}) \text{ si y sólo si } \langle \overline{a} \rangle_{\mathfrak{A}} \cong \langle \overline{b} \rangle_{\mathfrak{B}}.$$

Demostración.- Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in V_\tau$, $\overline{a} \in A^l$ y $\overline{b} \in B^l$.

$\Rightarrow$] Supongamos que $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv_0 (\mathfrak{B}, \overline{b})$

si y sólo si, para toda $\varphi \in \mathcal{L}^0$ con $Rc(\varphi) = 0$, $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \vDash \varphi \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, \overline{b}) \vDash \varphi$.

En particular, para toda $\varphi \in LIT^0$, $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \vDash \varphi \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, \overline{b}) \vDash \varphi$.

Donde, por el Lema del Diagrama, existe $h : \langle \overline{a} \rangle_{\mathfrak{A}} \hookrightarrow \mathfrak{B}$.

Tal que $h[\overline{a}] = \overline{b}$, veamos que es suprayectiva. Sea $b \in \langle \overline{b} \rangle_{\mathfrak{B}} \setminus \overline{b}$, entonces $b = t^{(\mathfrak{B}, \overline{b})}[\overline{b}] = t^{(\mathfrak{B}, \overline{b})}[h(\overline{a})] = h(t^{(\mathfrak{A}, \overline{a})}[\overline{a}])$.

Por lo tanto, $\langle \overline{a} \rangle_{\mathfrak{A}} \cong \langle \overline{b} \rangle_{\mathfrak{B}}$.

$\Leftarrow$] Supongamos $\langle \overline{a} \rangle_{\mathfrak{A}} \cong \langle \overline{b} \rangle_{\mathfrak{B}}$, es decir, existe h función tal que $h : \langle \overline{a} \rangle_{\mathfrak{A}} \hookrightarrow \mathfrak{B}$

Donde, por el Lema del Diagrama, para toda $\varphi \in LIT^0$

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \vDash \varphi \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, \overline{b}) \vDash \varphi.$$

Al considerar las combinaciones booleanas de los enunciados literales, obtenemos, para toda $\varphi \in \mathcal{L}^0$ con $Rc(\varphi) = 0$,

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \vDash \varphi \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, \overline{b}) \vDash \varphi.$$

Por lo tanto, $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv_0 (\mathfrak{B}, \overline{b})$■

Teorema I.2.7.- Dadas $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in V_\tau$, si $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son a lo más numerables y $\mathfrak{A} \cong_P^\omega \mathfrak{B}$[1], entonces $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

Demostración.- Sea P el conjunto de parejas que ratifica que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son back-and-forth equivalentes. Hagamos $E_A = (a_i : i < \omega)$ y $E_B = (a_i : i < \omega)$, enumeraciones de todos los elementos de A y B, respectivamente. Como $\phi \neq P$, podemos tomar $(\overline{a}, \overline{b}) \in P$ y construyamos recursivamente la siguiente sucesión de parejas ordenadas, todas elementos de P.

Tomemos $I_0 = (\overline{a}, \overline{b})$.

Sea $n < \omega$, I_{n+1} se construye como sigue:

Si $n + 1 = 2k$, para alguna $k \in \mathbb{Z}^+$, tomando $a' \in A$, el primer elemento tal que $a' \in E_A$ y $a' \notin Dom(I_n)$, sabemos que hay $b' \in B$ tal que $I_n \cup \{(a', b')\} \in P$. De tal forma $I_{n+1} = I_n \cup \{(a', b')\}$.

Y, si $n + 1 = 2k - 1$, para alguna $k \in \mathbb{Z}^+$, tomando $b' \in B$, el primer elemento tal que $b' \in E_B$ y $b' \notin Im(I_n)$, sabemos que hay $a' \in A$ tal que $I_n \cup \{(a', b')\} \in P$. De tal forma $I_{n+1} = I_n \cup \{(a', b')\}$.

Así, obtenemos una biyección, I, entre $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, de la forma

$$I = \bigcup_{n<\omega} I_n.$$

De donde

$$(\mathfrak{A}, A) \equiv_0 (\mathfrak{B}, B).$$

Y, por el lema anterior

$$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \blacksquare$$

Lema I.2.8.- Tomemos τ un tipo se semejanza finito. Dada $\mathfrak{A} \in V_\tau$, tal que $|A| = n < \omega$. Existe un enunciado $\varphi_{\mathfrak{A}}$ tal que para toda $\mathfrak{B} \in V_\tau$, tenemos

$$\mathfrak{B} \vDash \varphi_{\mathfrak{A}} \text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}.$$

Demostración.- Supongamos que $A = \{a_1, ..., a_n\}$ y sea $\overline{a} = \langle a_1, ..., a_n \rangle$.

$\Rightarrow$] Primero definamos a $\varphi_{\mathfrak{A}}$. Consideremos el siguiente conjunto X,

$$X = \{\eta \in LIT : \mathfrak{A} \vDash \eta_{[\overline{a}]}\}.$$

[1]Formalmente deberíamos de escribir $\aleph_0$ pero utilizaremos ω para ser consistentes con la notación.

Al estar hablando de una estructura $\mathfrak{A}$ con un universo finito y un tipo de semejanza finito, entonces $|X| < \omega$. Por lo tanto, tiene sentido hablar del siguiente enunciado $\varphi_{\mathfrak{A}} \in \mathcal{L}_\tau^0$ definida como sigue,

$$\exists v_1 \exists v_2 ... \exists v_n \Big[\bigwedge_{\eta \in X} \eta \wedge \forall v_{n+1} \bigvee_{i=1}^{n} v_i \approx v_{n+1} \Big].$$

Ahora, supongamos que

$$\mathfrak{B} \models \exists v_1 \exists v_2 ... \exists v_n \Big[\bigwedge_{\eta \in X} \eta \wedge \forall v_{n+1} \bigvee_{i=1}^{n} v_i \approx v_{n+1} \Big]$$

entonces hay $\overline{b} \in B^n$ tal que

$$\mathfrak{B} \models \Big[\bigwedge_{\eta \in X} \eta \wedge \forall v_{n+1} \bigvee_{i=1}^{n} v_i \approx v_{n+1} \Big]_{[\overline{b}]}$$

si y sólo si hay $\overline{b} \in B^n$ tal que

$$\mathfrak{B} \models \bigwedge_{\eta \in X} \eta_{[\overline{b}]} \text{ y } \mathfrak{B} \models \forall v_{n+1} \bigvee_{i=1}^{n} v_i \approx v_{n+1[\overline{b}]}.$$

Entonces

$$\text{para toda } \eta \in LIT,\ \mathfrak{A} \models \eta(\overline{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \eta(\overline{b}) \text{ y } |B| = n.$$

Sea $h : B \longrightarrow A$ dada por $h(b_i) = a_i$ para toda $i \in \{1, ..., n\}$, claramente biyectiva. Además

$$\text{para toda } \eta \in LIT,\ \mathfrak{A} \models \eta(h(\overline{b})) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \eta(\overline{b}).$$

Aplicando el Corolario I.1.21, obtenemos

$$h : \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{B} \text{ pero } |A| = |B|$$

Por lo tanto, h es el isomorfismo buscado entre $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$.

$\Leftarrow$] Supongamos que $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, por el Corolario I.1.23, tenemos $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. Y, por definición

$$\mathfrak{B} \models \varphi_{\mathfrak{A}} \blacksquare$$

Es más, tenemos también el siguiente resultado para estructuras finitas.

Corolario I.2.9.- Tomemos τ un tipo se semejanza finito. Dadas $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in V_\tau$, tal que $|A| = n < \omega$ y $|B| = m < \omega$,

$$\text{si } \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}, \text{ entonces } \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}.$$

En otras palabras, para estructuras finitas, ser elementalmente equivalente es lo mismo que ser isomorfas.

I.3 Un Sistema de Deducción para Lógica de Primer Orden

Ahora procederemos con el estudio sintáctico de la Lógica de Primer Orden, para lo cual daremos una serie de axiomas y reglas de inferencia que formaran el sistema formal que trabajaremos. Más adelante extenderemos este mismo sistema para trabajarlo en lógicas infinitarias.

Definimos el **Sistema** $\mathscr{E}$.

Axiomas:

1. Toda instancia de una tautología para lógica de enunciados del tipo τ;
2. $\forall x\varphi \to (\varphi)^x_t$, donde todas las ocurrencias libres de x se sustituyen por t en φ;
3. $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \forall x\psi)$, si x no ocurre libre en φ;
4. $x \approx x$; y
5. $x \approx t \to [\varphi \to \varphi_{|x,t|}]$, donde $\varphi_{|x,t|}$ significa que algunas (posiblemente todas o ninguna) de las ocurrencias libres de x han sido sustituidas por t.

Reglas de inferencia:

1. (MP) ψ se infiere de $\varphi,\ \varphi \to \psi$; y
2. (Generalización) $\forall x\varphi$ se infiere de φ cuando x no es una variable libre de la misma.

Teniendo lo anterior, recordemos algunas nociones importantes.

Una *prueba* en el sistema formal $\mathscr{E}$ es una lista finita de fórmulas de $\mathcal{L}_\tau$, donde cada una de ellas es un axioma de $\mathscr{E}$ o es consecuencia de anteriores por medio de las reglas de inferencia. La fórmula que aparece al final de una demostración en el $\mathscr{E}$ es un *teorema* de $\mathscr{E}$. Esto lo denotaremos por $\vdash_{\mathscr{E}} \varphi$ y φ será la fórmula con una demostración en $\mathscr{E}$.

Dados $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$ y $\varphi \in \mathcal{L}$, diremos que φ *es demostrable* o *derivable en* $\mathscr{E}$ *a partir de* Γ si existe una sucesión finita $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathcal{L}$ tales que $\alpha_n = \varphi$ y para cada $i \in \{1, ..., n\}$, α_i es un axioma de $\mathscr{E}$, o es un miembro de Γ o es una consecuencia de anteriores mediante reglas de inferencia. Lo cual denotaremos por $\Gamma \vdash_{\mathscr{E}} \varphi$.

Mencionamos ahora algunos teoremas importantes dentro de esta sección: para esto consideraremos $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_\tau$ y $\varphi, \eta \in \mathcal{L}_\tau$.

Teorema I.3.1.- Si $\Gamma \vdash_{\mathscr{E}} \varphi$ y x no ocurre libre en ninguna fórmula de Γ, entonces $\Gamma \vdash_{\mathscr{E}} \forall x\varphi$.

Teorema I.3.2.- $\Gamma, \eta \vdash_{\mathscr{E}} \varphi$ si y sólo si $\Gamma \vDash \eta \to \varphi$.

Teorema I.3.3.- Supongamos que $\Gamma \vdash_{\mathscr{E}} \varphi$ y que c es un símbolo de constante que no ocurre en Γ. Entonces hay una variable y (que no ocurre en φ) tal que $\Gamma \vdash_{\mathscr{E}} \forall y\varphi^c_y$. Además, hay una deducción de $\forall y\varphi^c_y$ a partir de Γ en la que c no ocurre.

Corolario I.3.4.- Supongamos que el símbolo de constante c no ocurre en φ ni en η ni en Γ y que $\Gamma, \eta^x_c \vdash_{\mathscr{E}} \varphi$. Entonces $\Gamma, \exists x\eta \vdash_{\mathscr{E}} \varphi$ y hay una deducción a partir de $\Gamma, \exists x\eta$ en la que c no ocurre.

Teorema I.3.5.- (Compacidad) Si cada subconjunto finito Γ_0 de Γ es satisfacible, entonces Γ es satisfacible.

Teorema I.3.6.- (Correctitud-Completud Extendido)

$$\Gamma \vdash_{\mathscr{E}} \varphi \text{ si y sólo si } \Gamma \vDash \varphi.$$

Teorema I.3.7.- (Löwenheim-Skolem) Sea Γ un conjunto satisfacible de fórmulas de un lenguaje de cardinalidad λ. Entonces Γ es satisfacible en alguna estructura de tamaño menor o igual a λ.

Teorema I.3.8.- (Löwenheim-Skolem-Tarski) Sea Γ un conjunto de fórmulas de un lenguaje de cardinalidad λ. Si Γ tiene modelo, entonces tiene un modelo de cardinalidad a lo más λ, y supongamos que Γ es satisfacible en alguna estructura infinita. Entonces, para todo cardinal $\kappa \geq \lambda$, hay una estructura de cardinalidad κ en la que Γ es satisfacible.

Todas las demostraciones anteriores pueden ser verificadas en [2] o [4].

Capítulo II

Lógica Infinitaria

II.1 Lógicas Infinitarias κ, λ

En este capítulo comenzaremos a trabajar con los lenguajes infinitarios. Para lo cual describiremos lo que son: su construcción, cómo se trabajan y algunos ejemplos de su poder expresivo. La construcción aquí planteada, así como las definiciones, se pueden verificar en [5], [6], [3] y [7].

Muchas de las definiciones que veremos en lo posterior se darán por entendidas, pues son análogas a las de los lenguajes de primer orden. Las nociones importantes las veremos formalmente y daremos algunas observaciones, cuando sean pertinentes.

Definición II.1.1.- Sean τ un tipo de semejanza, y κ, λ dos cardinales infinitos. Definimos el *Lenguaje infinitario* κ, λ *del tipo* τ como la unión de los siguientes conjuntos:

$$\mathscr{L}_{\kappa,\lambda}(\tau) = \tau \cup \{v_\rho : \rho < max\{\kappa, \lambda\}\} \cup \{\approx\} \cup \{\neg, \bigwedge\} \cup \{\exists\}.$$

Dónde cada uno de los conjuntos anteriores representa:

- el tipo de semejanza;
- las variables;
- símbolo de igualdad;
- conectivos lógicos (negación y conjunción sobre un conjunto, o clase, de a lo más κ fórmulas); y
- cuantificador existencial (sobre un conjunto de a lo más λ cuantificandos).

En el capítulo anterior definimos los tipos de semejanza y qué cualidades deben de cumplir las relacionales y funcionales que contienen. Sin embargo, al hablar de lógica infinitaria, la aridad de las relacionales y funcionales puede ser infinita, pero dicha situación no la analizaremos dentro de este trabajo. Por lo mismo, manejaremos tipos de semejanza tal y como fueron definidos anteriormente. A los lectores interesados, les recomendamos verificar [5], [6] o [7].

Antes de pasar a las definiciones formales, es importante mencionar las siguientes observaciones:

1. $ATM_{\kappa,\lambda}$ denota a las clase de fórmulas atómicas de $\mathscr{L}_{\kappa,\lambda}$. Además, por como se definieron los tipos de semejanza, tenemos $ATM_{\kappa,\lambda} = ATM$. De igual manera al escribir LIT nos referiremos al conjunto de las literales infinitarias, pues coincide con las literales de primer orden.

2. $\exists \overline{x}_\rho$ representa la expresión $\exists x_{\alpha_0} \exists x_{\alpha_1} ... \exists x_{\alpha_\rho} ...$ En donde $\overline{x}_\rho$ es un conjunto de ρ variables tal que $\rho < \lambda$. En ocasiones ocuparemos la notación $(\exists \overline{x}_\xi : \xi < \eta)$ que significa que $\exists x_\xi$ para toda $\xi < \eta$, en donde $\eta < \lambda$ para el lenguaje $\mathscr{L}_{\kappa,\lambda}$. Si no se especifica alguna cota para ξ, es claro que debe ser menor a λ.

3. $\bigwedge \Sigma$ denota a la conjunción de todos los elementos de Σ. En ocasiones utilizaremos esta misma notación o escribiremos, $\bigwedge_{\sigma \in \Sigma} \sigma$, pues nos resultará más práctica. Lo único que debemos pedirle a Σ es que sea de cardinalidad menor a κ pues de nos ser así, dicha conjunción se saldría de $\mathscr{L}_{\kappa,\lambda}$.

4. En el capítulo anterior se mencionó el Teorema de Sustitución. Ese mismo Teorema se puede aplicar para las lógicas infinitarias. De hecho, lo usaremos en el capítulo IV.

Ahora sí, para las siguientes definiciones tomaremos y fijaremos, un tipo de semejanza τ, junto con los cardinales infinitos κ, λ. Por lo que omitiremos la notación $\mathscr{L}_{\kappa,\lambda}(\tau)$ y adoptaremos una más sencilla, $\mathscr{L}_{\kappa,\lambda}$.

Definición II.1.2.- La *clase de todas las expresiones del Lenguaje infinitario κ, λ del tipo τ*, es la $\subseteq$-menor clase X, tal que:

- $ATM_{\kappa,\lambda} \subseteq X$;
- Si $\alpha \in X$, entonces $(\neg \alpha) \in X$;
- Dados $\rho < \lambda$ y $\varphi(x_1, x_2, ..., x_\rho, ...) \in X$, entonces

$$(\exists \overline{x}_\rho \varphi(x_1, x_2, ..., x_\rho, ...)) \in X; \text{ y}$$

- Dado $\Sigma \subseteq X,\ \Sigma \neq \phi\ y\ |\Sigma| < \kappa$, entonces $\bigwedge \Sigma \in X$.

A la clase de todas las expresiones infinitarias κ, λ, la denotaremos por $EXP_{\kappa,\lambda}$.

Definición II.1.3.- Diremos que ψ es una *fórmula infinitaria* κ, λ *del tipo* τ*,* τ*-fórmula infinitaria* κ, λ, si ψ es una expresión infinitaria κ, λ y ψ tiene menos de λ variables libres.

Al la clase mencionada anteriormente la denotaremos por $\mathcal{L}_{\kappa,\lambda}$. De igual manera, $\mathcal{L}^{\alpha}_{\kappa,\lambda}$ se refiere a la clase de fórmulas infinitarias κ, λ con exactamente α variables libres.

Definición II.1.4.- Dada $\varphi \in \mathcal{L}_{\kappa,\lambda}$, definimos recursivamente el conjunto (clase) de *subfórmulas* de φ, $sub(\varphi)$, como sigue:

- Si $\varphi \in ATM$, entonces $sub(\varphi) = \{\varphi\}$;
- $sub(\neg\varphi) = sub(\varphi) \cup \{\neg\varphi\}$;
- $sub(\exists x\varphi) = sub(\varphi) \cup \{\exists x\varphi\}$ y $sub(\forall x\varphi) = sub(\varphi) \cup \{\forall x\varphi\}$; y
- $sub(\bigwedge \Phi) = \bigcup_{\varphi\in\Phi} sub(\varphi) \cup \{\bigwedge \Phi\}$ *y* $sub(\bigvee \Phi) = \bigcup_{\varphi\in\Phi} sub(\varphi) \cup \{\bigvee \Phi\}$.

De igual manera, usaremos la notación de $sub^{\xi}(\varphi)$ para denotar al conjunto de subfórmulas de φ que tengan exactamente ξ variables libres, para algún ξ ordinal.

Analizando las definiciones y observaciones anteriores, podemos ver que κ nos acota el número de conjunciones que podremos aplicar dentro de una fórmula. Por el otro lado, λ está relacionado con la extensión que tendrán nuestros cuantificadores. Como las fórmulas tienen menos de λ variables libres, se pueden cerrar nuestras fórmulas bajo cuantificaciones. Con base en lo anterior no tiene sentido que consideremos algún lenguaje $\mathscr{L}_{\kappa,\lambda}$ con $\kappa < \lambda$, pues el alcance de nuestros cuantificadores se ve mucho mayor de lo que necesitamos. Por lo que, a partir de este punto sólo consideraremos el caso en que $\kappa \geq \lambda$.

Notación.- Dado $\Sigma \subseteq \mathcal{L}_{\kappa,\lambda}$ con $|\Sigma| = \rho$, para algún $\rho < \kappa$ y dado $\alpha < \lambda$,

- Con $\bigvee_{\sigma\in\Sigma} \sigma$ nos referimos a $\neg(\bigwedge_{\sigma\in\Sigma} \neg\sigma)$; y
- Con $\forall\overline{x}_{\alpha}\varphi$ nos referimos a $\neg(\exists\overline{x}_{\alpha}\neg\varphi)$.

Ya aclaradas las notaciones que vamos a utilizar, haremos algunos ajustes sobre las definiciones semánticas para poder trabajar:

1. Ajuste en las asignaciones. Recordando lo visto en la primer sección, a las asignaciones las identificábamos como $s \in {}^{\omega}A$, siendo A el universo de una estructura $\mathfrak{A} \in V_\tau$, pues el número de variables que teníamos eran exactamente ω. Como ahora tomamos un conjunto mayor de variables, κ, las denotaremos como elementos del siguiente conjunto ${}^{\kappa}A$.

2. Verdad de Tarski para fórmulas de conjunción arbitraria. Sea $\Sigma \subseteq \mathcal{L}_{\kappa,\lambda}$, con $|\Sigma| < \kappa$. Por estar trabajando en $\mathscr{L}_{\kappa,\lambda}$, tenemos que $\bigwedge_{\sigma\in\Sigma} \sigma \in \mathcal{L}_{\kappa,\lambda}$. Ahora, dada $\mathfrak{A} \in V_\tau$ y $s \in {}^{\kappa}A$, diremos:

$$\mathfrak{A} \models \bigwedge_{\sigma\in\Sigma} \sigma_{[s]} \text{ si y sólo si para toda } \sigma \in \Sigma,\ \mathfrak{A} \models \sigma_{[s]}.$$

A partir de este punto vamos a considerar el lenguaje $\mathscr{L}_{\infty,\lambda}$, que se define de manera análoga a $\mathscr{L}_{\kappa,\lambda}$. La clase de sus fórmulas se define como sigue:

$$\mathcal{L}_{\infty,\lambda} = \bigcup_{\kappa\geq\lambda} \mathcal{L}_{\kappa,\lambda}$$

En esta variante se permiten conjunciones arbitrariamente grandes pero nuestras fórmulas siguen teniendo un número menor de λ variables.

Definición II.1.5.- Dadas $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in V_\tau$. $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son $(\kappa, \lambda)-$*elementalmente equivalentes*, lo cual denotaremos por $\mathfrak{A} \equiv_{\kappa,\lambda} \mathfrak{B}$, si para todo $\varphi \in \mathcal{L}^0_{\kappa,\lambda}$, tenemos

$$\mathfrak{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi.$$

La definición anterior la podemos extender de manera natural a los lenguajes $\mathscr{L}_{\infty,\lambda}$.

A continuación daremos algunos ejemplos donde se puede observar el poder expresivo de los lenguajes infinitarios:

1. Si consideramos $\kappa = \lambda = \omega$, $\mathscr{L}_{\omega,\omega}$[1] resulta ser un lenguaje de primer orden. Por lo tanto, siempre que $\kappa, \lambda \geq \omega$, $\mathscr{L}_{\kappa,\lambda}$ termina siendo una extensión de $\mathscr{L}$.

[1]Anteriormente se mencionó que κ, λ deben de ser cardinales, pero por precedente histórico se escribe $\mathscr{L}_{\omega,\omega}$ en vez de $\mathscr{L}_{\aleph_0,\aleph_0}$. Así como, en el caso de $\mathscr{L}_{\omega_1,\omega}$ y $\mathscr{L}_{\omega_1,\omega_1}$

2. La caracterización de la aritmética de los naturales en $\mathscr{L}_{\omega_1,\omega}$: Sea $\mathcal{N}$ la clase de todas las estructuras $\mathfrak{A} \in V_\tau$ tales que $\mathfrak{A} \cong \langle \omega, +, \cdot, s, 0 \rangle$. $\mathcal{N}$ coincide con la clase de todos los modelos de los siguientes enunciados:

   a)
   $$\forall x \Big(\bigvee_{n<\omega} x \approx s^n(0) \Big)$$

   b)
   $$\bigwedge_{\substack{n,m<\omega \\ n\neq m}} \neg\Big(s^n(0) \approx s^m(0) \Big)$$

   c)
   $$\bigwedge_{n,m<\omega} \Big(s^n(0) \cdot s^m(0) \approx s^{nm}(0) \Big)$$

   d)
   $$\bigwedge_{n,m<\omega} \Big(s^n(0) + s^m(0) \approx s^{n+m}(0) \Big)$$

3. Otra caracterización de la aritmética de los números naturales en $\mathscr{L}_{\omega_1,\omega}$. Sea $\tau = \langle +, \cdot, s, 0 \rangle$, si consideramos los Axiomas de Peano (AP):

   a)
   $$\forall x_o \forall x_1 [s^n(x_0) \approx s^n(x_1) \longrightarrow x_0 \approx x_1]$$

   b)
   $$\forall x \exists y [s(x) \approx y]$$

   c)
   $$\neg \exists x [s(x) \approx 0]$$

   d)
   $$\bigwedge_{n<\omega} \bigwedge_{\varphi \in \mathcal{L}^{n+1}_{\omega,\omega}(\tau)} \forall x_0 \forall x_1 ... \forall x_{n-1} \Big[[\varphi(x_0, ..., x_{n-1}, 0) \wedge$$
   $$\forall x_n [\varphi(x_0, ..., , x_n) \longrightarrow \varphi(x_0, ..., s(x_n))]] \longrightarrow \forall x_n \varphi(x_0, ..., x_n) \Big]$$

   Dada cualquier estructura $\mathfrak{A}$ que satisfaga AP, existe un encaje del modelo estándar de los números naturales en $\mathfrak{A}$. Determinado por la siguiente función, f, en donde a cada $n < \omega$ le asignamos el enésimo sucesor del cero interpretado en $\mathfrak{A}$. Es decir, $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ dada por

$n \mapsto (s^n(0))^{\mathfrak{A}}$. Al considerar los axiomas sobre la función sucesor, f cumple ser un encaje. Por lo tanto, basta ver que el encaje es suprayectivo. El siguiente enunciado nos expresa precisamente eso,

$$\forall x\Big(\bigvee_{n<\omega} x \approx s^n(0)\Big)$$

Este axioma nos dice que todos los elementos de $\mathfrak{A}$ son una aplicación de finitas veces la función sucesor aplicada al cero. Por lo que el encaje f es suprayectivo. De tal manera, podemos afirmar que si

$$\mathfrak{A} \vDash AP \wedge \forall x\Big(\bigvee_{n<\omega} x \approx s^n(0)\Big)$$

donde AP es la conjunción de los Axiomas de Peano, entonces

$$\mathfrak{A} \cong \langle \omega, +, \cdot, s, 0\rangle$$

4. Caracterización de todos los conjuntos finitos en $\mathscr{L}_{\omega_1,\omega}$. Son todos los conjuntos que son modelos del siguiente enunciado

$$\bigvee_{n<\omega}\Big[\forall x_0 \forall x_1 ... \forall x_n\Big(\bigvee_{0\leq i<j\leq n} x_i \approx x_j\Big)\Big]$$

5. Caracterización de todos los buenos ordenes numerables en $\mathscr{L}_{\omega_1,\omega_1}$. Tomemos $\tau = \{\mathcal{R}\}$ de tal forma que $(A, \mathcal{R})$ forme un conjunto bien ordenado numerable. Tomando $\mathfrak{A} = \langle A, \mathcal{R}\rangle$, podemos ver que $\mathfrak{A}$ es modelo de:

   a)
$$\forall x \neg \mathcal{R}(x, x)$$

   b)
$$\forall x_0 \forall x_1 \forall x_2[(\mathcal{R}(x_0, x_1) \wedge \mathcal{R}(x_1, x_2)) \longrightarrow \mathcal{R}(x_0, x_2)]$$

   c)
$$\forall x_0 \forall x_1[\mathcal{R}(x_0, x_1) \vee \mathcal{R}(x_1, x_0) \vee x_0 \approx x_1]$$

   d)
$$(\forall \overline{v}_m : m < \omega) \bigvee_{n<\omega}\Big[\mathcal{R}(x_{n+1}, x_n) \vee (x_n \approx x_{n+1})\Big]$$

6. Caracterización de los grupos de torsión en $\mathscr{L}_{\omega_1,\omega}$. Sea $\mathcal{T}$ la clase de todos los grupos de torsión. $\mathcal{T}$ coincide con la clase de todos los modelos de los siguientes enunciados:

   a)
   $$\forall x(x * e \approx e)$$

   b)
   $$\forall x \exists v(x * v \approx e)$$

   c)
   $$\forall x_0 \forall x_1 \forall x_2[(x_0 * (x_1 * x_2)) \approx ((x_0 * x_1) * x_2)]$$

   d)
   $$\forall x\Big(\bigvee_{n<\omega} e \approx x^n\Big)$$

   En donde v^n se define recursivamente como, $v^1 = v$ y $v^{n+1} = v^n \cdot v$.

7. Si cambiamos el enunciado (d) del ejemplo anterior por el siguiente:
   $$\forall x\Big[x \approx e \vee \bigwedge_{1\leq n<\omega} \neg(x^n \approx e)\Big]$$
   Obtenemos a los grupos libres de torsión.

8. En $\mathscr{L}_{\kappa^+,\kappa}$ podemos expresar el concepto de cardinalidad menor a κ mediante el siguiente enunciado:
   $$\bigvee_{\lambda<\kappa} (\exists \overline{v}_\xi : \xi < \lambda)\Big[\bigwedge_{\substack{\gamma,\delta<\lambda \\ \gamma\neq\delta}} \neg(v_\gamma \approx v_\delta) \wedge \forall y \bigvee_{\varphi<\lambda} (y \approx v_\varphi)\Big]$$
   Observemos que este ejemplo es muy importante porque nos está expresando la cardinalidad de la estructura que lo satisface.

9. La clase de todos los espacios topológicos con una base numerable en $\mathscr{L}_{\omega_1,\omega_1}$[2]: tomando $\mathfrak{A} \in V_\tau$ donde $\mathfrak{A} = \langle X \cup \mathcal{T}, X, \mathcal{T}, \mathcal{E} \rangle$. En donde X es un conjunto cualquiera y $\mathcal{T}$ es una topología para X. Utilizaremos las siguientes letras relacionales unarias $\mathcal{P}$ y $\mathcal{A}$ para indicar punto y abierto, respectivamente. Además, se añadirá $\mathcal{E}$, un predicado binario. La clase de espacios con una base numerable se axiomatiza con los siguientes enunciados:

   a)
   $$\forall x_0 \forall x_1 [\mathcal{E}(x_0, x_1) \longrightarrow (\mathcal{P}(x_0) \wedge \mathcal{A}(x_1))]$$

   b)
   $$(\exists \overline{x}_m : m < \omega)\Big[\bigwedge_{i<\omega} \mathcal{A}(x_i) \wedge \forall z\big[\mathcal{P}(z) \longrightarrow \bigvee_{i<\omega} \mathcal{E}(z, x_i)\big] \wedge$$
   $$\forall y\big[(\mathcal{P}(y) \wedge \bigvee_{k,s<\omega} ((\mathcal{E}(y, x_k) \wedge (\mathcal{E}(y, x_s))) \longrightarrow$$
   $$(\bigvee_{t<\omega} \mathcal{E}(y, x_t) \wedge x_t \subseteq x_k \wedge x_t \subseteq x_s)\big] \wedge$$
   $$\forall h \forall z\big[\mathcal{E}(z, h) \longrightarrow (\bigvee_{g<\omega} \mathcal{E}(z, x_g) \wedge x_g \subseteq h)\big]\Big]$$

   Donde $x \subseteq h$ es la contención, definida como
   $$\forall z[\mathcal{E}(z, x) \longrightarrow \mathcal{E}(z, h)]$$

10. La clase de todos los árboles de altura finita y finito número de ramas en $\mathscr{L}_{\omega_1,\omega}$: tomando $\mathfrak{A} = \langle X, P, 0 \rangle$. En donde X es un conjunto cualquiera; P, una relación binaria que representa al predecesor de algún nodo (donde $P(x, y)$ se refiere a que x es el predecesor inmediato de y); y 0, una constante que representa la raíz del árbol. Cualquier modelo de los siguientes enunciados nos representará un árbol:

    a)
    $$\forall x[x \approx 0 \longleftrightarrow \neg \exists y P(y, x)]$$

    b)
    $$\forall x \forall y[P(x, y) \longrightarrow \neg(x \approx y)]$$

[2]El lector interesado puede verificar este ejemplo en [5].

$c)$

$$\forall y\Big[\neg(y\approx 0)\longrightarrow\Big(\bigvee_{n<\omega}\exists x_0...\exists x_n P(0,x_0)\wedge\bigwedge_{i=1}^{n-1}P(x_i,x_{i+1})\wedge P(x_n,y)\Big)\Big]$$

$d)$

$$\forall y\bigwedge_{n<\omega}\neg\exists x_0...\exists x_n\Big[P(y,x_0)\wedge\bigwedge_{i=1}^{n-1}P(x_i,x_{i+1})\wedge P(x_n,y)\Big]$$

$e)$

$$\forall w\forall y\forall z\Big[\Big(\bigvee_{n<\omega}\exists x_0...\exists x_n\big[P(w,x_0)\wedge\bigwedge_{i=1}^{n-1}P(x_i,x_{i+1})\wedge P(x_n,y)\big]\wedge$$

$$\bigvee_{m<\omega}\exists v_0...\exists v_m\big[P(y,v_0)\wedge\bigwedge_{i=1}^{m-1}P(v_i,v_{i+1})\wedge P(v_m,z)\big]\Big)\longrightarrow$$

$$\bigvee_{p<\omega}\exists u_0...\exists u_p\big[P(w,u_0)\wedge\bigwedge_{i=1}^{p-1}P(u_i,u_{i+1})\wedge P(u_p,z)\big]\Big]$$

$f)$

$$\bigwedge_{1\leq n<\omega}\bigvee_{m<\omega}\forall x_0\forall x_1...\forall x_m\Big[\big(\bigwedge_{k\leq m}\exists u_0...\exists u_{n-2}(P(0,u_0)\wedge$$

$$\bigwedge_{i=1}^{n-3}P(u_i,u_{i+1})\wedge P(u_{n-2},x_k))\big)\longrightarrow\bigvee_{0\leq i<j\leq m}x_i\approx x_j\Big]$$

$g)$

$$\forall y\forall z\Big[\bigvee_{n<\omega}\exists u_0...\exists u_n[P(y,u_0)\wedge\bigwedge_{i=1}^{n-1}P(u_i,u_{i+1})\wedge P(u_n,z)]\vee$$

$$\bigvee_{q<\omega}\exists v_0...\exists v_q[P(z,v_0)\wedge\bigwedge_{i=1}^{q-1}P(v_i,v_{i+1})\wedge P(v_q,y)]\vee$$

$$\bigvee_{m,p<\omega}\exists x_0...\exists x_m\exists w_0...\exists w_p[(P(0,x_0)\wedge\bigwedge_{i=1}^{m-1}P(x_i,x_{i+1})\wedge P(x_m,y))\wedge$$

$$(P(0,w_0) \wedge \bigwedge_{i=1}^{p-1} P(w_i,w_{i+1}) \wedge P(w_p,z))\wedge$$

$$\bigwedge_{i=0}^{p} \neg(w_i \approx y) \wedge \bigwedge_{i=0}^{m} \neg(x_i \approx z)] \vee y \approx z\Big]$$

Con estos enunciados caracterizamos a todos los árboles de altura numerable y con cantidad finita de elementos en cada nivel. Si agregamos el siguiente enunciado, que dice que podemos acotar la cantidad de niveles del árbol, obtenemos todos los árboles de altura finita y finito número de ramas.

h)

$$\bigvee_{n<\omega} \forall x\Big[\neg(x \approx 0) \longrightarrow$$

$$\bigvee_{m\leq n} \exists u_0 ... \exists u_m \big[P(0,u_0) \wedge \bigwedge_{i=1}^{m-1} P(u_i,u_{i+1}) \wedge P(u_m,x)\big]\Big]$$

Observaciones.-

Los ejemplos anteriores nos brindan una buena perspectiva de los alcances que tienen los lenguajes infinitarios, ahora veamos algunas de sus limitaciones y diferencias al compararlos con la lógica de primer orden.

Lo primero a notar es que El Teorema de Compacidad falla para lógicas infinitarias. Junto con el teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski. El siguiente contraejemplo sirve para ambos:

Sea τ un tipo de semejanza que tenga las constantes $c_0, c_1, ..., c_\omega$. Si consideramos

$$\Sigma = \Big\{\forall x \bigvee_{n<\omega} x \approx c_n, \neg(c_\omega \approx c_0), \neg(c_\omega \approx c_1), ...\Big\}.$$

Veamos que para todo $\Sigma_0 \subset \Sigma$, con $|\Sigma_0| < \omega$, hay $\mathfrak{A} \in V_\tau$ tal que

$$\mathfrak{A} \models \Sigma_0.$$

Supongamos que $|\Sigma_0| = m$, para alguna $m < \omega$. Tenemos los siguientes casos:

1. Si $\forall x \bigvee_{n<\omega} x \approx c_n \in \Sigma_0$, sin pérdida de generalidad hagamos

$$\Sigma_0 = \Big\{\forall x \bigvee_{n<\omega} x \approx c_n, \neg(c_\omega \approx c_0), ..., \neg(c_\omega \approx c_{m-2})\Big\}.$$

   Afirmación:

$$\mathfrak{A} = \langle\{0, 1, 2, ..., m-1\}, 0, 1, 2, ..., m-1\rangle \vDash \Sigma_0.$$

   Basta tomar $c_i = i$ para cada $i \in \{0, 1, 2, ..., m-2\}$ y $c_\omega = m-1$.

2. Si $\forall x \bigvee_{n<\omega} x \approx c_n \notin \Sigma_0$, sin pérdida de generalidad hagamos

$$\Sigma_0 = \Big\{\neg(c_\omega \approx c_0), ..., \neg(c_\omega \approx c_{m-1})\Big\}.$$

   Podemos ver que la misma estructura del ejemplo anterior nos sirve como modelo de este.

Además, es fácil ver que $\mathfrak{A}$ es modelo de Σ si y sólo si es modelo del siguiente conjunto de enunciados:

$$\Gamma = \Big\{\forall x \bigvee_{n<\omega} x \approx c_n, \exists x \bigwedge_{n<\omega} \neg(x \approx c_n)\Big\}.$$

El cual, claramente no tiene modelos. Por lo que, Σ tampoco los tiene, contradiciendo el Teorema de Compacidad.

Ahora, el siguiente enunciado no puede tener un modelo de cardinalidad mayor a ω,

$$\forall x \bigvee_{n<\omega} x \approx c_n.$$

Por lo que sirve como contraejemplo para el Teorema de Loweheim-Skolem-Tarski.

Con respecto a este tema, existe una forma de extender compacidad a lo que se le conoce como η-compacidad, donde η es un cardinal infinito compacto. Sin embargo, esto no se abordará en este trabajo, al lector interesado se le recomienda verificarlo en [5] y [8].

Capítulo III

Resultados Importantes dentro de la Lógica Infinitaria

III.1 El Teorema de Karp

A continuación extenderemos algunas definiciones vistas en los capítulos precedentes para poder trabajar dentro de los lenguajes infinitarios. Algunos de los resultados aquí obtenidos serán generalizaciones de sus correspondientes.

Anteriormente, se definió el rango de cuantificadores para la lógica de primer orden, aquí lo podemos extender de la siguiente manera para considerar a los enunciados que tienen una cantidad infinita de cuantificadores.

Definición III.1.1.- Dada $\varphi \in \mathcal{L}_{\infty,\lambda}$, definimos el *Rango de cuantificadores*, $Rc(\varphi)$, como sigue:

$$\bullet\ Si\ \varphi \in ATM,\ entonces\ Rc(\varphi) = 0;$$

$$\bullet\ Rc(\neg\varphi) = Rc(\varphi);$$

$$\bullet\ Rc(\bigwedge_{\varphi \in X} \varphi) = sup\{Rc(\varphi) : \varphi \in X\};\ \text{y}$$

$$\bullet\ Rc(\exists v\varphi) = Rc(\varphi) + 1.$$

Observaciones.-

1. Una fórmula $\varphi \in \mathcal{L}_{\infty,\lambda}$ cumple con $Rc(\varphi) = 0$ si y sólo si φ es literal o es combinación booleana de literales.

2. Dada una fórmula $\varphi \in \mathcal{L}_{\infty,\lambda}$ y η un ordinal límite. $Rc(\varphi) = \eta$ si y sólo si sucede una de las siguientes:

   a) φ es de la forma $\neg\sigma$, donde $Rc(\sigma) = \eta$;

   b) φ es de la forma $\bigwedge \Sigma$, donde, para alguna $\sigma \in \Sigma$, $Rc(\sigma) = \eta$; y

   c) φ es de la forma $\bigwedge \Sigma$, donde, para toda $\sigma \in \Sigma$, $Rc(\sigma) < \eta$ y $\eta = sup\{Rc(\xi) : \xi \in \Sigma\}$.

Notemos que el caso (b) se termina viendo, tarde o temprano, como el caso (c). Pues si alguna $\sigma \in \Sigma$ tiene rango cuantificadores η, con η ordinal límite, entonces debe ser la conjunción (o disyunción) de fórmulas que tienen a η como supremo en el conjunto de sus rangos de cuantificadores.

Definición III.1.2.- Dadas $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in V_\tau$ y $\alpha \in OR$, diremos que $\mathfrak{A} \equiv_\alpha \mathfrak{B}$ si para cualquier $\psi \in \mathcal{L}^0_{\infty,\lambda}$ con $Rc(\psi) \leq \alpha$, tenemos

$$\mathfrak{A} \models \psi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \psi.$$

Observación.- Claramente, dados α, β ordinales, con $\alpha < \beta$, si $\mathfrak{A} \equiv_\beta \mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{A} \equiv_\alpha \mathfrak{B}$.

Las definiciones anteriores son para los lenguajes infinitarios $\mathscr{L}_{\infty,\lambda}$. Sin embargo, los resultados que veremos a continuación son para los lenguajes infinitarios $\mathscr{L}_\infty, \omega$.

El siguiente lema nos será de gran utilidad para el Teorema de Karp, el cual veremos a continuación del mismo.

Lema III.1.3.- Dadas $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in V_\tau$ y $\overline{a} \in A^n$, $\overline{b} \in B^n$, si $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv_{\infty,\omega} (\mathfrak{B}, \overline{b})$ y $c \in A$, entonces hay $d \in B$ tal que:

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}c) \equiv_{\infty,\omega} (\mathfrak{B}, \overline{b}d).$$

Demostración.- Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in V_\tau$ y $\overline{a} \in A^n$, $\overline{b} \in B^n$. Supongamos que:

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv_{\infty,\omega} (\mathfrak{B}, \overline{b})$$

y existe $c_0 \in A$, tal que para toda $d \in B$ tenemos:

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}c_0) \not\equiv_{\infty,\omega} (\mathfrak{B}, \overline{b}d)$$

Entonces, podemos asegurar que hay, para cada $d \in B$, $\psi_d \in \mathcal{L}^{n+1}_{\infty,\omega}$ tal que $\mathfrak{A} \models \psi_d(\overline{a}, c_0)$ y $\mathfrak{B} \models \neg\psi_d(\overline{b}, d)$.

De donde

$$\mathfrak{A} \models \bigwedge_{d \in B} \psi_d(\overline{a}, c_0), \text{ entonces } \mathfrak{A} \models \exists v \bigwedge_{d \in B} \psi_d(\overline{a}, v).$$

Por hipótesis,

$$\mathfrak{B} \models \exists v \bigwedge_{d \in B} \psi_d(\overline{b}, v).$$

Por Tarski, hay $d_0 \in B$ tal que

$$\mathfrak{B} \models \bigwedge_{d\in B} \psi_d(\bar{b}, d_0) \text{ si y sólo si para cada } d \in B, \mathfrak{B} \models \psi_d(\bar{b}, d_0).$$

En particular

$$\mathfrak{B} \models \psi_{d_0}(\bar{b}, d_0). \text{ Contradicción.}$$

Por lo tanto, para cada $c \in A$ hay $d \in B$ tal que

$$(\mathfrak{A}, \bar{a}c) \equiv_{\infty,\omega} (\mathfrak{B}, \bar{b}d)_{\blacksquare}$$

Teorema III.1.4.- (Karp) Dadas $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in V_\tau$, las siguientes son equivalentes:
$\cdot$) $\mathfrak{A} \equiv_{\infty,\omega} \mathfrak{B}$;
$\cdot\cdot$) $\mathfrak{A} \cong^{\omega}_{P} \mathfrak{B}$; y
$\cdots$) $\mathfrak{A} \asymp_{\omega} \mathfrak{B}$.

Demostración.- Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in V_\tau$.

$\cdot$) $\Rightarrow \cdots$) Supongamos que $\mathfrak{A} \equiv_{\infty,\omega} \mathfrak{B}$.

a) Sea $n = 0$. Por hipótesis, $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ satisfacen a los mismos enunciados infinitarios; en particular, a los mismos enunciados atómicos y a todas sus combinaciones booleanas.

Por lo tanto, $\mathfrak{A} \equiv_0 \mathfrak{B}$.

b) Sea $n > 0$. Supongamos que $\mathfrak{A} \asymp_n \mathfrak{B}$. La estrategia ganadora para $\mathrm{EF}_{n+1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ consiste en primero jugar los n pasos de la estrategia ganadora para $\mathrm{EF}_n(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. En tal caso, si $\forall$belardo decide tirar $a \in A$ en el $n+1$ paso. por el Lema III.1.3, tenemos que hay $b \in B$ tal que $(\mathfrak{A}, \bar{a}a) \equiv_{\infty,\omega} (\mathfrak{B}, \bar{b}b)$.

De igual manera, $(\mathfrak{A}, \bar{a}a)$ y $(\mathfrak{B}, \bar{b}b)$ satisfacen los mismos enunciados.

Por lo tanto, $(\mathfrak{A}, \bar{a}a) \equiv_0 (\mathfrak{B}, \bar{b}b)$.

El caso en donde $\forall$belardo tire $b \in B$ en el $n + 1$ paso es análogo.

Por lo tanto, $\mathfrak{A} \asymp_\omega \mathfrak{B}$.

$\cdot\cdot) \Rightarrow \cdot)$ Por inducción sobre la formación de fórmulas se probará que para toda $\varphi \in \mathcal{L}_{\infty,\omega}$ y para toda $(\overline{a}, \overline{b}) \in P$,

$$\mathfrak{A} \models \varphi_{[\overline{a}]} \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi_{[\overline{b}]}.$$

Sea P un sistema back-and-forth equivalente de tamaño ω entre $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$. Tomando $(\overline{a}, \overline{b}) \in P$ tenemos,

1) Paso Base:

$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv_0 (\mathfrak{B}, \overline{b})$ si y sólo si para toda $\varphi \in \mathcal{L}^0_{\infty,\omega},$ tal que $Rc(\varphi) = 0$, tenemos

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \models \varphi \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, \overline{b}) \models \varphi.$$

En particular, para toda $\varphi \in LIT^0$, tenemos

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \models \varphi \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, \overline{b}) \models \varphi$$

si y sólo si, para toda $\varphi \in LIT$, tenemos

$$\mathfrak{A} \models \varphi_{[\overline{a}]} \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi_{[\overline{b}]}.$$

2) Paso Inductivo:

i) Sea $\varphi \in \mathcal{L}_{\infty,\omega}$ de la forma $\neg\sigma$ para alguna $\sigma \in \mathcal{L}_{\infty,\omega}$.

$$\mathfrak{A} \models \varphi_{[\overline{a}]} \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \neg\sigma_{[\overline{a}]} \Leftrightarrow \mathfrak{A} \not\models \sigma_{[\overline{a}]} \Leftrightarrow \mathfrak{B} \not\models \sigma_{[\overline{b}]} \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \neg\sigma_{[\overline{b}]} \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi_{[\overline{b}]}.$$

ii) Sea $\varphi \in \mathcal{L}_{\infty,\omega}$ de la forma

$$\bigwedge_{\sigma \in X} \sigma.$$

Dónde $X \subseteq \mathcal{L}_{\infty,\omega}$ y para toda $\sigma \in X$ se cumple

$$\mathfrak{A} \models \sigma_{[\overline{a}]} \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \sigma_{[\overline{b}]}.$$

Entonces

$$\mathfrak{A} \models \varphi_{[\overline{a}]} \text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \models \bigwedge_{\sigma \in X} \sigma_{[\overline{a}]} \text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \models \sigma_{[\overline{a}]} \text{ para toda } \sigma \in X.$$

Aplicando la hipótesis de inducción:

$$\mathfrak{B} \models \sigma_{[\overline{b}]} \text{ para toda } \sigma \in X \text{ si y sólo si } \mathfrak{B} \models \bigwedge_{\sigma \in X} \sigma_{[\overline{b}]} \text{ si y sólo si } \mathfrak{B} \models \varphi_{[\overline{b}]}.$$

iii) Sea $\varphi \in \mathcal{L}_{\infty,\omega}$ de la forma $\exists x\ \sigma(x, \overline{w})$ con

$$\mathfrak{A} \models \sigma_{[\overline{a}]} \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \sigma_{[\overline{b}]}.$$

$\Rightarrow]$ $\mathfrak{A} \models \varphi(\overline{a})$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \exists x\sigma(x, \overline{a})$ si y sólo si, existe $e \in A$ tal que $\mathfrak{A} \models \sigma(e, \overline{a})$ si y sólo si $(\mathfrak{A}, \overline{a}e) \models \sigma_{[c_e\overline{c}]}$.

Podemos encontrar $d \in B$, tal que $(\overline{a}e, \overline{b}d) \in P$. Por lo que $(\mathfrak{A}, \overline{a}e) \equiv_0 (\mathfrak{B}, \overline{b}d)$, de donde $(\mathfrak{B}, \overline{b}d) \models \sigma_{[c_d\overline{c}]}$ si y sólo si existe $d \in B$ tal que $\mathfrak{B} \models \sigma(d, \overline{b})$ si y sólo si $\mathfrak{B} \models \exists x\sigma(x, \overline{b})$ si y sólo si $\mathfrak{B} \models \varphi(\overline{b})$.

$\Leftarrow]$ $\mathfrak{B} \models \varphi(\overline{b})$ si y sólo si $\mathfrak{B} \models \exists x\sigma(x, \overline{b})$ si y sólo si, existe $d \in B$ tal que $\mathfrak{B} \models \sigma(d, \overline{b})$ si y sólo si $(\mathfrak{B}, \overline{b}d) \models \sigma_{[c_d\overline{c}]}$.

Podemos encontrar $e \in A$, tal que $(\overline{a}e, \overline{b}d) \in P$. Por lo que $(\mathfrak{A}, \overline{a}e) \equiv_0 (\mathfrak{B}, \overline{b}d)$, de donde $(\mathfrak{A}, \overline{a}e) \models \sigma_{[c_e\overline{c}]}$ si y sólo si existe $e \in A$ tal que $\mathfrak{A} \models \sigma(e, \overline{a})$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \exists x\sigma(x, \overline{a})$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \varphi(\overline{a})$.

La inducción recién utilizada funciona cuando $\varphi \in \mathcal{L}_{\infty,\omega}$ y como $\mathcal{L}^0_{\infty,\omega} \subseteq \mathcal{L}_{\infty,\omega}$, se obtiene lo que se busca.

Por lo tanto, si $\mathfrak{A} \cong^{\omega}_{P} \mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{A} \equiv_{\infty,\omega} \mathfrak{B}$.

$\cdots) \Rightarrow \cdot\cdot)$ Supongamos que $\mathfrak{A} \asymp_{\omega} \mathfrak{B}$.

Sea P el conjunto de todos las posibles jugadas de longitud menor a ω, entre $\forall$beladro y $\exists$loisa. Con la restricción que $\exists$loisa siempre jugó mediante su estrategia ganadora. Por lo que, para cada jugada $(\overline{a}, \overline{b}) \in P$ y para cada $n < \omega$, con $\overline{a} \in A^n$ y $\overline{b} \in B^n$, tenemos $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv_0 (\mathfrak{B}, \overline{b})$.

P es distinto del vacío pues $\exists$loisa tiene estrategia ganadora para toda $n < \omega$, en particular para el juego $\mathrm{EF}_0(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Por lo tanto, la jugada vacía está en P. Dicho de otra manera, $\phi \in P$.

Ahora, tomemos $(\overline{a}, \overline{b}) \in P$. Existe $n < \omega$ para la cual $(\overline{a}, \overline{b})$ es la jugada de $\mathrm{EF}_n(\mathfrak{A}.\mathfrak{B})$ y aplicando la estrategia ganadora de $\exists$liosa podemos extenderla a ser la jugada de $\mathrm{EF}_{n+1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Es decir, para cada $c \in A$, hay $d \in B$ tal que $(\overline{a}c, \overline{b}d) \in P$ y para cada $d \in B$, hay $a \in A$ tal que $(\overline{a}c, \overline{b}d) \in P$.

Por lo tanto, $\mathfrak{A} \cong^{\omega}_{P} \mathfrak{B}$ ■

III.2 El Análisis de Scott

En esta sección veremos el análisis de Scott. Comenzaremos con algunas definiciones y de ahí con la construcción del Enunciado de Scott para alguna estructura dada.

Definición III.2.1.- Dadas $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in V_\tau$, para cada ordinal α, dada $n \in \mathbb{N}$ con $\overline{a} \in A^n$ y $\overline{b} \in B^n$, se define la relación $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \sim_\alpha (\mathfrak{B}, \overline{b})$ de la siguiente manera:

- $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \sim_0 (\mathfrak{B}, \overline{b})$ si y sólo si $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv_0 (\mathfrak{B}, \overline{b})$;
- Para todo ordinal α, $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \sim_{\alpha+1} (\mathfrak{B}, \overline{b})$ si y sólo si para todo $c \in A$, hay $d \in B$ tal que $(\mathfrak{A}, \overline{a}c) \sim_\alpha (\mathfrak{B}, \overline{b}d)$ y para todo $d \in B$, hay $c \in A$ tal que $(\mathfrak{A}, \overline{a}c) \sim_\alpha (\mathfrak{B}, \overline{b}d)$; y
- Para todo ordinal límite β, $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \sim_\beta (\mathfrak{B}, \overline{b})$ si y sólo si $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \sim_\alpha (\mathfrak{B}, \overline{b})$ para todo $\alpha < \beta$.

Además, definimos la siguiente sucesión de $\mathcal{L}_{\infty,\omega}$-fórmulas, $\varphi^{\mathfrak{A}}_{\overline{a},\alpha}(\overline{v})$.

Definición III.2.2.- Para cada $\overline{a} \in A^{<\omega}$ y α ordinal se define recursivamente:

Si $\alpha = 0$,

$$\varphi^{\mathfrak{A}}_{\overline{a},0}(\overline{v}) = \bigwedge_{\psi \in X} \psi(\overline{v}).$$

Donde $X = \{\psi \in LIT : \mathfrak{A} \vDash \psi(\overline{a})\}$.

Si α es un ordinal límite,

$$\varphi^{\mathfrak{A}}_{\overline{a},\alpha}(\overline{v}) = \bigwedge_{\beta < \alpha} \varphi^{\mathfrak{A}}_{\overline{a},\beta}(\overline{v}).$$

Si $\alpha = \beta + 1$,

$$\varphi^{\mathfrak{A}}_{\overline{a},\beta+1}(\overline{v}) = \bigwedge_{b \in A} \exists w \varphi^{\mathfrak{A}}_{\overline{a}b,\beta}(\overline{v}, w) \wedge \forall w \bigvee_{b \in A} \varphi^{\mathfrak{A}}_{\overline{a}b,\beta}(\overline{v}, w).$$

La sucesión definida anteriormente nos será de gran utilidad pues logra capturar la relación $\sim_\alpha$ y expresarla mediante la lógica infinitaria. El siguiente lema expresa justo esto.

Lema III.2.3.- Dadas $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in V_\tau$, $\overline{a} \in A^l$, $\overline{b} \in B^l$ y α un ordinal, entonces

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \sim_\alpha (\mathfrak{B}, \overline{b}) \text{ si y sólo si } \mathfrak{B} \models \varphi^{\mathfrak{A}}_{\overline{a},\alpha}(\overline{b}).$$

Demostración.- Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in V_\tau$, $\overline{a} \in A^l$, $\overline{b} \in B^l$ y α un ordinal.

Por inducción sobre α.

a) Sea $\alpha = 0$.

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \sim_0 (\mathfrak{B}, \overline{b}).$$

Consideremos el siguiente conjunto X:

$$X = \{\psi \in LIT : \mathfrak{A} \models \psi(\overline{a})\}.$$

Tenemos,

$$\mathfrak{A} \models \varphi^{\mathfrak{A}}_{\overline{a},0}(\overline{a}) \text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \models \bigwedge_{\psi \in X} \psi(\overline{a}) \text{ si y sólo si } \mathfrak{B} \models \bigwedge_{\psi \in X} \psi(\overline{b})$$

$$\text{si y sólo si } \mathfrak{B} \models \varphi^{\mathfrak{A}}_{\overline{a},0}(\overline{b}).$$

b) Sea α un ordinal límite.

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \sim_\alpha (\mathfrak{B}, \overline{b}) \text{ si y sólo si para todo } \beta < \alpha,\ (\mathfrak{A}, \overline{a}) \sim_\beta (\mathfrak{B}, \overline{b})$$

$$\text{si y sólo si para todo } \beta < \alpha,\ \mathfrak{B} \models \varphi^{\mathfrak{A}}_{\overline{a},\beta}(\overline{b}) \text{ si y sólo si } \mathfrak{B} \models \varphi^{\mathfrak{A}}_{\overline{a},\alpha}(\overline{b}).$$

c) Sea $\alpha = \beta + 1$.

$$\mathfrak{B} \models \varphi^{\mathfrak{A}}_{\overline{a},\beta+1}(\overline{b})$$

$$\text{si y sólo si } \mathfrak{B} \models \bigwedge_{c \in A} \exists w \varphi^{\mathfrak{A}}_{\overline{a}c,\beta}(\overline{b}, w) \wedge \forall w \bigvee_{c \in A} \varphi^{\mathfrak{A}}_{\overline{a}c,\beta}(\overline{b}, w)$$

$$\text{si y sólo si } \mathfrak{B} \models \bigwedge_{c \in A} \exists w \varphi^{\mathfrak{A}}_{\overline{a}c,\beta}(\overline{b}, w) \text{ y } \mathfrak{B} \models \forall w \bigvee_{c \in A} \varphi^{\mathfrak{A}}_{\overline{a}c,\beta}(\overline{b}, w)$$

$$\text{si y sólo si, para toda } c \in A, \text{ hay } d \in B \text{ tal que } \mathfrak{B} \models \varphi^{\mathfrak{A}}_{\overline{a}c,\beta}(\overline{b}, d)$$

$$\text{y, para toda } d \in B, \text{ hay } c \in A \text{ tal que } \mathfrak{B} \models \varphi^{\mathfrak{A}}_{\overline{a}c,\beta}(\overline{b}, d).$$

Aplicando la hipótesis de inducción obtenemos,

$$\text{para toda } c \in A \text{ hay } d \in B, \text{ tal que } (\mathfrak{A}, \overline{a}c) \sim_\beta (\mathfrak{B}, \overline{b}d)$$

y, para toda $d \in B$ hay $c \in A$, tal que $(\mathfrak{A}, \overline{a}c) \sim_\beta (\mathfrak{B}, \overline{b}d)$.

Por definición $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \sim_{\beta+1} (\mathfrak{B}, \overline{b})$.

Por lo tanto, $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \sim_\alpha (\mathfrak{B}, \overline{b})$■

Lema III.2.4.- Dados $\mathfrak{A} \in V_\tau$, $\alpha \in OR, n < \omega$ y $\overline{a} \in A^n$, se cumple

$$Rc(\varphi^{\mathfrak{A}}_{\overline{a},\alpha}(\overline{v})) = \alpha.$$

Demostración.- Por inducción sobre α. Sean $\mathfrak{A} \in V_\tau$, $n < \omega$ y $\overline{a} \in A^n$.

a) Sea $\alpha = 0$

$$Rc(\varphi^{\mathfrak{A}}_{\overline{a},0}(\overline{v})) = Rc\Big(\bigwedge_{\sigma \in X} \sigma(\overline{v})\Big) = sup\{Rc(\sigma(\overline{v})) : \sigma(\overline{v}) \in X\}$$

donde $X = \{\psi \in LIT : \mathfrak{A} \vDash \psi(\overline{a})\}$, entonces $Rc(\psi) = 0$ para cada $\psi \in X$.

Por lo tanto, $Rc(\varphi^{\mathfrak{A}}_{\overline{a},0}(\overline{v})) = 0$.

b) Tomemos ahora $\alpha \in OR$ límite y supongamos que para toda $\beta < \alpha$, $Rc(\varphi^{\mathfrak{A}}_{\overline{a},\beta}(\overline{v})) = \beta$.

$$Rc(\varphi^{\mathfrak{A}}_{\overline{a},\alpha}(\overline{v})) = Rc\Big(\bigwedge_{\beta<\alpha} \varphi^{\mathfrak{A}}_{\overline{a},\beta}(\overline{v})\Big) = sup\{Rc(\varphi^{\mathfrak{A}}_{\overline{a},\beta}(\overline{v})) : \beta < \alpha\} =$$

$$sup\{\beta : \beta < \alpha\} = \alpha.$$

Por lo tanto, $Rc(\varphi^{\mathfrak{A}}_{\overline{a},\alpha}(\overline{v})) = \alpha$.

c) Sea $\alpha = \beta+1$ y supongamos que, para toda $n < \omega$ y $\overline{a} \in A^n$, $Rc(\varphi^{\mathfrak{A}}_{\overline{a},\beta}(\overline{v})) = \beta$.

$$Rc(\varphi^{\mathfrak{A}}_{\overline{a},\beta}(\overline{v})) = Rc\Big(\bigwedge_{c \in A} \exists w \varphi^{\mathfrak{A}}_{\overline{a}c,\beta}(\overline{v}, w) \wedge \forall u \bigvee_{d \in A} \varphi^{\mathfrak{A}}_{\overline{a}d,\beta}(\overline{v}, u)\Big) =$$

$$sup\{Rc\Big(\bigwedge_{c \in A} \exists w \varphi^{\mathfrak{A}}_{\overline{a}c,\beta}(\overline{v}, w)\Big),\ Rc\Big(\forall u \bigvee_{d \in A} \varphi^{\mathfrak{A}}_{\overline{a}d,\beta}(\overline{v}, u)\Big)\}.$$

Analizando, obtenemos:

$$Rc\Big(\bigwedge_{c \in A} \exists w \varphi^{\mathfrak{A}}_{\overline{a}c,\beta}(\overline{v}, w)\Big) = sup\{Rc(\exists w \varphi^{\mathfrak{A}}_{\overline{a}c,\beta}(\overline{v}, w)) : c \in A\} = \beta + 1.$$

Por el otro lado, tenemos

$$Rc\Big(\forall u \bigvee_{d \in A} \varphi^{\mathfrak{A}}_{\overline{a}d,\beta}(\overline{v}, u)\Big) = Rc\Big(\bigvee_{d \in A} \varphi^{\mathfrak{A}}_{\overline{a}d,\beta}(\overline{v}, u)\Big)+1 = sup\{Rc(\varphi^{\mathfrak{A}}_{\overline{a}d,\beta}(\overline{v}, u)) : d \in A\}+1$$

$$\text{Por lo tanto, } Rc(\varphi^{\mathfrak{A}}_{\overline{a},\alpha}(\overline{v})) = \alpha_{\blacksquare}$$

Teorema III.2.5.- Para cualesquiera $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in V_\tau$, $\alpha \in OR$, $n < \omega$ y $\overline{a} \in A^n$, $\overline{b} \in B^n$, se cumple

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \sim_\alpha (\mathfrak{B}, \overline{b}) \text{ si y sólo si } (\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv_\alpha (\mathfrak{B}, \overline{b}).$$

Demostración.- Sea $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in V_\tau$, $n < \omega$ y $\overline{a} \in A^n$, $\overline{b} \in B^n$.

$\Leftarrow$]

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv_\alpha (\mathfrak{B}, \overline{b}).$$

Entonces $\mathfrak{B} \vDash \varphi^{\mathfrak{A}}_{\overline{a},\alpha}(\overline{b})$

$$\text{Por lo tanto, } (\mathfrak{A}, \overline{a}) \sim_\alpha (\mathfrak{B}, \overline{b}).$$

$\Rightarrow$] Por inducción sobre α.

a) Sea $\alpha = 0$. Por definición,

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \sim_0 (\mathfrak{B}, \overline{b}) \text{ si y sólo si } (\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv_0 (\mathfrak{B}, \overline{b}).$$

b) Sea α límite. Si

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \sim_\alpha (\mathfrak{B}, \overline{b}),$$

$$\text{entonces, para todo } \beta < \alpha,\ (\mathfrak{A}, \overline{a}) \sim_\beta (\mathfrak{B}, \overline{b}).$$

$$\text{De donde, para todo } \beta < \alpha,\ (\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv_\beta (\mathfrak{B}, \overline{b}).$$

Sea $\varphi \in \mathcal{L}^0_{\infty,\omega}$ tal que $Rc(\varphi) = \alpha$, entonces (por la observación de la definición III.1.1.), sin pérdida de generalidad, hay $\Sigma \subseteq \mathcal{L}_{\infty,\omega}$, tal que φ es de la forma

$$\bigwedge \Sigma$$

y, para toda $\sigma \in \Sigma$, sucede $Rc(\sigma) < \alpha$, pero $\alpha = sup\{Rc(\sigma) : \sigma \in \Sigma\}$.

Por hipótesis de inducción, para toda $\sigma \in \Sigma$,

$$\mathfrak{A} \vDash \sigma(\overline{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash \sigma(\overline{b}),$$

$$\text{si y sólo si } \mathfrak{A} \vDash \bigwedge \Sigma(\overline{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash \bigwedge \Sigma(\overline{b}) \text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \vDash \varphi(\overline{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash \varphi(\overline{b}).$$

$$\text{Por lo tanto, } (\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv_\alpha (\mathfrak{B}, \overline{b}).$$

c) Sea $\alpha = \beta + 1$ y $\varphi \in \mathcal{L}^0_{\infty,\omega}$, de la forma $\exists x\psi(\overline{v}, x)$, tal que $Rc(\varphi) = \alpha$ y $Rc(\psi) = \beta$. De donde

$\mathfrak{A} \models \varphi(\overline{a})$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \exists x\psi(\overline{a}, x)$ si y sólo si para alguna $c \in A$, $\mathfrak{A} \models \psi(\overline{a}, c)$

por hipótesis de inducción y para alguna $d \in B$

$$\mathfrak{B} \models \psi(\overline{b}, d) \text{ si y sólo si } \mathfrak{B} \models \exists x\psi(\overline{b}, x) \text{ si y sólo si } \mathfrak{B} \models \varphi(\overline{b}).$$

Por lo tanto, $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv_\alpha (\mathfrak{B}, \overline{b})$■

Corolario III.2.6.- Para cualesquiera $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in V_\tau$, $\alpha \in OR$, $n < \omega$ y $\overline{a} \in A^n$, $\overline{b} \in B^n$, se cumple

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv_\alpha (\mathfrak{B}, \overline{b}) \text{ si y sólo si } \mathfrak{B} \models \varphi^{\mathfrak{A}}_{\overline{a},\alpha}(\overline{b}).$$

Ya que logramos capturar a la relación $\sim_\rho$ bajo un enunciado (gracias al Lema III.2.3), veremos que existe un ordinal η que logra capturar a la misma relación para todos los demás ordinales. Para este lema, definiremos un conjunto Γ_β formado por las parejas del mismo universo que no nos preservan la relación $\sim_\beta$. Veremos que si un ordinal β no preserva la relación, ninguno mayor a él logrará preservarla.

Lema III.2.7.- Dada $\mathfrak{A} \in V_\tau$, existe un ordinal α, $\alpha < |\mathfrak{A}|^+$, tal que si $\overline{a}, \overline{b} \in A^l$ y $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \sim_\alpha (\mathfrak{A}, \overline{b})$, entonces $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \sim_\beta (\mathfrak{A}, \overline{b})$ para todo β ordinal.

Demostración.- Sea $\mathfrak{A} \in V_\tau$, $\overline{a}, \overline{b} \in A^l$, con $l < \omega$ y α ordinal. Definimos el conjunto Γ_α como sigue:

$$\Gamma_\alpha = \{(\overline{a}, \overline{b}) : \overline{a}, \overline{b} \in A^l \; y \; (\mathfrak{A}, \overline{a}) \nsim_\alpha (\mathfrak{A}, \overline{b})\}$$

Para demostrar este lema, basta mostrar las siguientes afirmaciones:

$\cdot$) $\Gamma_\alpha \subseteq \Gamma_\beta$ para toda $\alpha < \beta$.

$\cdot\cdot$) Si $\Gamma_\alpha = \Gamma_{\alpha+1}$, entonces $\Gamma_\alpha = \Gamma_\beta$ para toda $\beta > \alpha$.

$\cdots$) Existe un ordinal α, $\alpha < |A|^+$, tal que $\Gamma_\alpha = \Gamma_{\alpha+1}$.

$\cdot$) Sean $\alpha, \beta \in OR$ tales que $\beta > \alpha$. Si

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \sim_\beta (\mathfrak{A}, \overline{b}).$$

Entonces

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv_\beta (\mathfrak{A}, \overline{b}),$$

en particular

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv_\alpha (\mathfrak{A}, \overline{b}).$$

Por lo tanto, $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \sim_\alpha (\mathfrak{A}, \overline{b})$.

$\cdot\cdot$) Supongamos que $\Gamma_\alpha = \Gamma_{\alpha+1}$. Por inducción:

• Sea β límite y para todo $\alpha < \rho < \beta$, se cumple $\Gamma_\alpha = \Gamma_\rho$. Tenemos

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \nsim_\rho (\mathfrak{A}, \overline{b}), \text{ entonces } (\mathfrak{A}, \overline{a}) \nsim_\beta (\mathfrak{A}, \overline{b}).$$

Por lo tanto, $\Gamma_\alpha = \Gamma_\beta$.

• Sup $\beta = \rho + 1$ y para todo $\alpha < \rho < \beta$, se cumple $\Gamma_\alpha = \Gamma_\rho$. Claramente $\Gamma_\alpha \subseteq \Gamma_{\rho+1}$, por lo que solo veremos la otra contención.

$(\overline{a}, \overline{b}) \notin \Gamma_\alpha$ entonces,$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \sim_\alpha (\mathfrak{A}, \overline{b})$ si y sólo si $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \sim_{\alpha+1} (\mathfrak{A}, \overline{b})$

si y sólo si, para todo $a \in A$ hay $d \in B, (\mathfrak{A}, \overline{a}c) \sim_\alpha (\mathfrak{A}, \overline{b}d)$

si y sólo si, para todo $a \in A$ hay $d \in B, (\mathfrak{A}, \overline{a}c) \sim_\rho (\mathfrak{A}, \overline{b}d)$

si y sólo si $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \sim_{\rho+1} (\mathfrak{A}, \overline{b})$.

Por lo tanto, $(\overline{a}, \overline{b}) \notin \Gamma_{\rho+1}$.

$\cdots$) Supongamos que no existe $\alpha < |A|^+$ ordinal tal que $\Gamma_\alpha = \Gamma_{\alpha+1}$

Es decir, para todo $\alpha < |A|^+$ ordinal $\phi \neq \Gamma_{\alpha+1} \setminus \Gamma_\alpha$.

Consideremos $h : |A|^+ \longrightarrow \displaystyle\bigcup_{\alpha<|A|^+} \left\{ (\overline{a}_m, \overline{b}_m) : (\overline{a}_m, \overline{b}_m) \in \Gamma_{\alpha+1} \setminus \Gamma_\alpha \right\}$

Donde para cada $\beta < |A|^+,\ h(\beta) = (\overline{a}_\beta, \overline{b}_\beta)$ con $\beta < \omega$.

Claramente h es inyectiva, de donde

$$|A|^+ \leq |\bigcup_{n<\omega} A^n \times A^n| \leq \sum_{n<\omega} |A^n \times A^n| = \sum_{n<\omega} |A^n| = \omega \bullet |A| = |A|.$$

Contradicción.

Por lo tanto, hay $\alpha < |A|^+$ tal que $\Gamma_\alpha = \Gamma_{\alpha+1}$ ■

Definición III.2.8.- Dadas, $\mathfrak{A} \in V_\tau$ y $\overline{a} \in A^l$, con $l \in \mathbb{N}$, definimos el *Rango de Scott* para la estructura $\mathfrak{A}$, $Rs(\mathfrak{A})$, como sigue:

$min\{\alpha < |A|^+ : \forall n \in \mathbb{Z}^+ \, \forall \overline{a}, \overline{b} \in A^n, (\mathfrak{A}, \overline{a}) \sim_\alpha (\mathfrak{A}, \overline{b}) \Rightarrow \forall \beta > \alpha \, (\mathfrak{A}, \overline{a}) \sim_\beta (\mathfrak{A}, \overline{b})\}$.

Además, notemos que el Lema III.2.7 nos asegura que le Rango de Scott existe para cualquier estructura dada.

Ahora sí, con toda la herramienta anterior podemos concluir esta sección con El Teorema del Isomorfismo de Scott. Para el cual primero definimos formalmente el Enunciado de Scott.

Definición III.2.9.- Dada $\mathfrak{A} \in V_\tau$, de cardinalidad κ, tal que $Rs(\mathfrak{A}) = \alpha$, definimos *El Enunciado de Scott para* $\mathfrak{A}$, $\Phi^{\mathfrak{A}}$, como sigue:

$$\Phi^{\mathfrak{A}} = \varphi^{\mathfrak{A}}_{\phi,\alpha} \wedge \bigwedge_{l=0}^{\infty} \bigwedge_{\overline{a} \in A^l} \forall \overline{v} \Big(\varphi^{\mathfrak{A}}_{\overline{a},\alpha}(\overline{v}) \rightarrow \varphi^{\mathfrak{A}}_{\overline{a},\alpha+1}(\overline{v}) \Big).$$

Notemos que $\Phi^{\mathfrak{A}} \in \mathcal{L}^0_{\kappa^+,\omega}$.

Teorema III.2.10.- Dadas $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in V_\tau$ y $\Phi^{\mathfrak{A}} \in \mathcal{L}^0_{\infty,\omega}$ el enunciado de Scott para $\mathfrak{A}$, con $Rs(\mathfrak{A}) = \alpha$. Entonces

$$\mathfrak{A} \equiv_{\infty,\omega} \mathfrak{B} \text{ si y sólo si } \mathfrak{B} \models \Phi^{\mathfrak{A}}.$$

Demostración.- Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in V_\tau$ y $\Phi^{\mathfrak{A}} \in \mathcal{L}^0_{\infty,\omega}$ el enunciado de Scott para $\mathfrak{A}$, con $Rs(\mathfrak{A}) = \alpha$.

$\Rightarrow$] Trivial.
$\Leftarrow$] Veamos que $\mathfrak{A} \asymp_\omega \mathfrak{B}$. Suponiendo

$$\mathfrak{B} \models \Phi^{\mathfrak{A}},$$

tenemos $\mathfrak{B} \models \varphi^{\mathfrak{A}}_{\phi,\alpha}$ si y sólo si $\mathfrak{A} \equiv_\alpha \mathfrak{B}$, en particular $\mathfrak{A} \equiv_0 \mathfrak{B}$. Por lo que $\exists$loisa tiene estrategia ganadora en $\mathrm{EF}_0(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

Supongamos que $\exists$loisa tiene estrategia ganadora para el juego $\mathrm{EF}_n(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, con $n < \omega$. La estrategia ganadora de $\exists$loisa para el juego $\mathrm{EF}_{n+1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ primero consiste en jugar la estrategia ganadora de $\mathrm{EF}_n(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Sea $(\overline{a}, \overline{b})$ la jugada obtenida del juego $\mathrm{EF}_n(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

Además, como $\mathfrak{B} \models \varphi^{\mathfrak{A}}_{\phi,\alpha+1}$ si y sólo si $\mathfrak{A} \equiv_{\alpha+1} \mathfrak{B}$ si y sólo si, para todo $a \in A$ hay $b \in B$ tal que $(\mathfrak{A}, \mathfrak{a}) \equiv_{\alpha} (\mathfrak{B}, b)$ y, para todo $b \in B$ hay $a \in A$ tal que $(\mathfrak{A}, \mathfrak{a}) \equiv_{\alpha} (\mathfrak{B}, b)$ si y sólo si $\mathfrak{B} \models \varphi^{\mathfrak{A}}_{a,\alpha}(b)$. Este proceso se repite hasta obtener $\mathfrak{B} \models \varphi^{\mathfrak{A}}_{\overline{a},\alpha}(\overline{b})$, por lo que $\mathfrak{B} \models \varphi^{\mathfrak{A}}_{\overline{a},\alpha+1}(\overline{b})$ si y sólo si $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv_{\alpha+1} (\mathfrak{B}, \overline{b})$.

De tal manera, si $\forall$belardo juega $c \in A$ hay $d \in B$, $(\mathfrak{A}, \overline{a}c) \equiv_{\alpha} (\mathfrak{B}, \overline{b}d)$. En particular, $(\mathfrak{A}, \overline{a}c) \equiv_{0} (\mathfrak{B}, \overline{b}d)$.

Análogamente, si $\forall$belardo juega $d \in B$ hay $a \in A$, $(\mathfrak{A}, \overline{a}c) \equiv_{\alpha} (\mathfrak{B}, \overline{b}d)$. En particular, $(\mathfrak{A}, \overline{a}c) \equiv_{0} (\mathfrak{B}, \overline{b}d)$. Es decir, $\mathfrak{A} \asymp_{\omega} \mathfrak{B}$.

Por lo tanto, $\mathfrak{A} \equiv_{\infty,\omega} \mathfrak{B}$■

Corolario III.2.11.- (Teorema de Isomorfismo de Scott.) Dadas $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in V_{\tau}$ numerables, sucede

$$\mathfrak{B} \models \Phi^{\mathfrak{A}} \text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}.$$

Capítulo IV

Existencia de Modelos y Teorema de Correctitud-Completud para Lógicas Infinitarias ω_1, ω

IV.1 Propiedad de Consistencia y Existencia de Modelos

Ya que tenemos bastante herramienta y un moderado entendimiento de lo que son las Lógicas Infinitarias, veremos un resultado de suma importancia. Primero, comenzaremos con la siguiente definición.

Definición IV.1.1.- Dada $\varphi \in \mathcal{L}_{\infty,\lambda}$, definimos la *negación formal* de φ, $\multimap \varphi$, como sigue:

- Si $\varphi \in ATM$, entonces $\multimap \varphi$ es $\neg\varphi$;
- $\multimap (\neg\varphi)$ es φ;
- $$\multimap \bigwedge_{\varphi\in X} \varphi \; es \; \bigvee_{\varphi\in X} \multimap \varphi \; y \; \multimap \bigvee_{\varphi\in X} \varphi \; es \; \bigwedge_{\varphi\in X} \multimap \varphi;$$
- $\multimap \exists x\varphi$ es $\forall x \multimap \varphi$ y $\multimap \forall x\varphi$ es $\exists x \multimap \varphi$.

Lema IV.1.2.- Dada $\mathfrak{A} \in V_\tau$, para toda $\varphi \in \mathcal{L}_{\infty,\omega}$ se cumple

$$\mathfrak{A} \models \neg\varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \multimap \varphi.$$

Demostración.- Sea $\mathfrak{A} \in V_{\tau.}$ y $\varphi \in \mathcal{L}_{\infty,\omega}$.

- Si $\varphi \in ATM$. Por definición $\multimap \varphi = \neg\varphi$.

  Por lo tanto, para toda $\varphi \in ATM$, $\mathfrak{A} \models \neg\varphi$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \multimap \varphi$.

- Si φ es de la forma $\neg\eta$, para alguna $\eta \in \mathcal{L}$.

$$\mathfrak{A} \models \multimap \varphi \text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \models \multimap (\neg\eta) \text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \models \eta \text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \not\models \neg\eta$$

$$\text{si y sólo si } \mathfrak{A} \not\models \varphi \text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \models \neg\varphi.$$

- Si φ es de la forma $\bigwedge_{\eta\in X}\eta$, para algún $X\subseteq\mathcal{L}$.

$$\mathfrak{A}\models\!\multimap\varphi \text{ si y sólo si } \mathfrak{A}\models\!\multimap\bigwedge_{\eta\in X}\eta \text{ si y sólo si } \mathfrak{A}\models\bigvee_{\eta\in X}\multimap\eta \text{ si y sólo si}$$

$$\text{existe } \eta_0\in X,\ \mathfrak{A}\models\!\multimap\eta_0 \text{ si y sólo si } \mathfrak{A}\models\neg\eta_0 \text{ si y sólo si } \mathfrak{A}\not\models\eta_0$$
$$\text{si y sólo si } \mathfrak{A}\not\models\bigwedge_{\eta\in X}\eta \text{ si y sólo si } \mathfrak{A}\models\neg\bigwedge_{\eta\in X}\eta \text{ si y sólo si } \mathfrak{A}\models\neg\varphi.$$

- Si φ es de la forma $\exists x\eta(x)$, para alguna $\eta\in\mathcal{L}$.

$$\mathfrak{A}\models\!\multimap\varphi \text{ si y sólo si } \mathfrak{A}\models\!\multimap\exists x\eta(x) \text{ si y sólo si } \mathfrak{A}\models\forall x\multimap\eta(x) \text{ si y sólo si}$$

$$\text{para toda } a\in A,\ \mathfrak{A}\models\!\multimap\eta(a) \text{ si y sólo si para toda } a\in A,\ \mathfrak{A}\models\neg\eta(a)$$
$$\text{si y sólo si } \mathfrak{A}\models\forall x\neg\eta(x) \text{ si y sólo si } \mathfrak{A}\models\neg\exists x\eta(x) \text{ si y sólo si } \mathfrak{A}\models\neg\varphi\blacksquare$$

Para la construcción que haremos tomaremos C, un conjunto con una cantidad numerable de constantes que no aparecen en τ. Este conjunto lo agregaremos al conjunto de constantes de τ. Por lo que, a lo largo de esta sección trabajaremos con el tipo de semejanza $\tau'=C\cup\tau$.

Definición IV.1.3.- Dado $\Sigma\subseteq\mathcal{L}_\tau$, definimos el tipo de Σ, $\rho(\Sigma)$, como el siguiente conjunto

$$\rho(\Sigma)=\{s\,:\,s \text{ es un símbolo no lógico de } \tau \text{ y } s \text{ aparece en alguna fórmula de } \Sigma\}.$$

Definición IV.1.4.- (Propiedad de Consistencia) Sea Σ una colección de conjuntos, σ, de forma que cada uno cumple con $\sigma\subseteq\mathcal{L}^0_{\omega_1,\omega}(\tau')$ y $|\sigma|\leq\aleph_0$. A Σ la llamaremos una *Propiedad de Consistencia* si para toda $\sigma\in\Sigma$, suceden las siguientes:

1. si $\mu\subseteq\sigma$, entonces $\mu\in\Sigma$;
2. para cada $\varphi\in\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}(\tau')$ sucede $\varphi\notin\sigma$ o $(\neg\varphi)\notin\sigma$;
3. si $\neg\varphi\in\sigma$, entonces existe $\mu\in\Sigma$ tal que $\sigma\cup\{\multimap\varphi\}\subseteq\mu$;
4. si $\left(\bigwedge_{\varphi\in\Phi}\varphi\right)\in\sigma$, entonces para cada $\varphi\in\Phi$ hay $\mu\in\Sigma$ tal que $\sigma\cup\{\varphi\}\subseteq\mu$;
5. si $\left(\bigvee_{\varphi\in\Phi}\varphi\right)\in\sigma$, entonces existe $\varphi\in\Phi$ y $\mu\in\Sigma$ tal que $\sigma\cup\{\varphi\}\subseteq\mu$;

6. si $\forall x\varphi(x) \in \sigma$, entonces para cada $c \in C$ hay $\mu \in \Sigma$ tal que $\sigma \cup \{\varphi(c)\} \subseteq \mu$;

7. si $\exists x\varphi(x) \in \sigma$, entonces hay $c \in C$ y $\mu \in \Sigma$ tal que $\sigma \cup \{\varphi(c)\} \subseteq \mu$; y

8. sea t un τ-término sin variables y sean $c, d \in C$,

   $\cdot$) si $(c \approx d) \in \sigma$, entonces hay $\mu \in \Sigma$ tal que $\sigma \cup \{d \approx c\} \subseteq \mu$;

   $\cdot\cdot$) si $c \approx t,\ \varphi(t) \in \sigma$, entonces hay $\mu \in \Sigma$ tal que $\sigma \cup \{\varphi(c)\} \subseteq \mu$; y

   $\cdots$) existe $\mu \in \Sigma$ y $e \in C$ tal que $\sigma \cup \{e \approx t\} \subseteq \mu$.

Lema IV.1.5.- Dada Σ una propiedad de consistencia y $\sigma \in \Sigma$, con $c, d, e \in C$, suceden las siguientes:

a) hay $\mu \in \Sigma,\ \sigma \subseteq \mu$, tal que $c \approx c \in \mu$;
b) si $c \approx d,\ d \approx e \in \sigma$, entonces $\sigma \cup \{c \approx e\} \in \Sigma$; y
c) si $\varphi,\ \neg\varphi \vee \psi \in \sigma$, entonces hay $\mu \in \Sigma,\ \sigma \subseteq \mu$, con $\psi \in \mu$.

Demostración.- Sean Σ una propiedad de consistencia y $\sigma \in \Sigma$, con $c, d, e \in C$.

a) Claramente hay $f \in C$ tal que $\sigma \cup \{f \approx c\} \in \Sigma$. De donde, $\sigma \cup \{c \approx f,\ f \approx c\} \in \Sigma$. Haciendo $\varphi(v)$ de la forma $v \approx f$, obtenemos $\sigma \cup \{c \approx f,\ f \approx c,\ c \approx c\} \subseteq \mu$, para alguna $\mu \in \Sigma$.

b) Como $c \approx d,\ d \approx e \in \sigma$, haciendo $\varphi(v)$ de la forma $v \approx e$, tenemos que hay $\mu \in \Sigma$ tal que $\sigma \cup \{\varphi(c)\} \subseteq \mu$. Por lo tanto, $\sigma \cup \{c \approx e\} \in \Sigma$.

c) Existen $\eta \in \{\neg\varphi, \psi\}$ y $\mu \in \Sigma$, tal que $\sigma \cup \{\eta\} \subseteq \mu$. Además, como $\varphi \in \sigma$, sucede que $\eta \neq \neg\varphi$, por lo tanto $\eta = \psi$. Obteniendo lo deseado.■

Ahora probaremos, mediante una construcción estilo Henkin, que cualquier propiedad de consistencia tiene modelo. Debido a la complejidad de la construcción, la demostración la dividiremos en varios lemas. Comenzaremos con la siguiente construcción sobre una propiedad de consistencia, Σ, dada y una $\sigma \in \Sigma$, fija:

Sea Λ el conjunto más pequeño de τ'-enunciados ω_1, ω tal que:

1. $\sigma \subseteq \Lambda$;

2. si $\psi(\overline{v}) \in sub^n(\varphi)$, para alguna $\varphi \in \Lambda$, y $\overline{c} \in C^n$, entonces $\psi(\overline{c}) \in \Lambda$;

3. si $c, d \in C$, entonces $c \approx d \in \Lambda$; y
4. si $\neg\varphi \in \Lambda$, entonces $\multimap \varphi \in \Lambda$.

Sea $\varphi_0, \varphi_1, ...$ una enumeración de todos los enunciados de Λ y $t_0, t_1, ...$ una enumeración de todos los τ-términos sin variables.

Como Σ es una propiedad de consistencia, hagamos

$$\sigma = \sigma_0 \subseteq \sigma_1 \subseteq ...$$

donde $\sigma_i \in \Sigma$ para cada $i < \omega$ y:

1. si $\sigma_n \cup \{\varphi_n\} \in \Sigma$, entonces $\varphi_n \in \sigma_{n+1}$;
2. si $\sigma_n \cup \{\varphi_n\} \in \Sigma$ y φ_n es de la forma $\bigvee_{\eta \in X} \eta$, entonces $\eta \in \sigma_{n+1}$ para alguna $\eta \in X$;
3. si $\sigma_n \cup \{\varphi_n\} \in \Sigma$ y φ_n es de la forma $\exists v \eta(v)$, entonces $\eta(c) \in \sigma_{n+1}$ para alguna $c \in C$;
4. $c \approx t_n \in \sigma_{n+1}$ para alguna $c \in C$.

Además, sea

$$\Gamma = \bigcup_{n<\omega} \sigma_n$$

diremos que dadas $c, d \in C$, $c \simeq d$ si y sólo si $c \approx d \in \Gamma$.

Lema IV.1.6.- $\simeq$ es una relación de equivalencia en C.

Demostración.-

Reflexividad.- dada $c \in C$, por la construcción de Λ, $c \approx c \in \Lambda$. Entonces hay $n < \omega$ tal que φ_n es de la forma $c \approx c$. Por el Lema IV.1.5, para todo $\sigma \in \Sigma$, $\sigma \cup \{c \approx c\} \in \Sigma$. En particular, tomando $\sigma_n \in \Sigma$, tenemos $\sigma_n \cup \{\varphi_n\} \in \Sigma$, por lo que $\varphi_n \in \sigma_{n+1}$, es decir $c \approx c \in \sigma_{n+1} \subseteq \Gamma$.

Por lo tanto, $c \simeq c$.

Simetría.- dadas $c, d \in C$, si $c \simeq d$, entonces hay $n < \omega$ tal que $c \approx d \in \sigma_n$. Además, por Σ ser una propiedad de consistencia, $\sigma_n \cup \{d \approx c\} \in \Sigma$. Por otro lado, $d \approx c \in \Lambda$, de donde hay $h < \omega$, tal que φ_h es de la forma $d \approx c$. De tal forma $\sigma_n \cup \{\varphi_h\} \in \Sigma$. Por tricotomía, tenemos:

1. Si $n = h$, entonces $\sigma_h \cup \{\varphi_h\} \in \Sigma$, entonces $\varphi_h \in \sigma_{h+1} \subseteq \Gamma$.
2. Si $n < h$, tomando $\sigma_h \in \Sigma$, como $c \approx d \in \sigma_n \subseteq \sigma_h \in \Sigma$, entonces tenemos $\sigma_h \cup \{d \approx c\} \in \Sigma$. De donde $\varphi_h \in \sigma_{h+1} \subseteq \Gamma$.
3. Si $h < n$, entonces $\sigma_h \cup \{\varphi_h\} \subseteq \sigma_n \cup \{\varphi_h\} \in \Sigma$. De donde $\sigma_h \cup \{\varphi_h\} \in \Sigma$, por lo que $\varphi_h \in \sigma_{h+1} \subseteq \Gamma$.

En los tres casos, concluimos que $d \approx c \in \sigma_{h+1} \subseteq \Gamma$.

Por lo tanto, $d \simeq c$.

Transitividad.- dadas $c, d, e \in C$. Si $c \simeq d,\ d \simeq e$, entonces hay $j < \omega$ tal que $c \approx d,\ d \approx e \in \sigma_j$. Por Lema IV.1.5, $\sigma_j \cup \{c \approx e\} \in \Sigma$. Además, $c \approx e \in \Lambda$, por lo que hay $k < \omega$ tal que φ_k es de la forma $c \approx e$. De donde, $\sigma_j \cup \{\varphi_k\} \in \Sigma$. Lo cual se reduce al mismo caso de tricotomía probado anteriormente.

Por lo tanto, $c \simeq e$■

Con esto se asegura que $\simeq$ es una relación de equivalencia en C. Ahora, denotemos por $[c]$ a la $\simeq$-clase de $c \in C$. Y sea $A = \{[c] : c \in C\}$. Lo que sigue es construir una interpretación, $\mathfrak{A}$, que tenga a A como universo y que sea modelo de Γ.

Definimos para cada $\mathcal{R}_n, \mathcal{F}_n, c \in \rho(\Gamma)$; $\mathcal{R}_n^{\mathfrak{A}}, \mathcal{F}_n^{\mathfrak{A}}, c^{\mathfrak{A}}$ sobre A:

• para cada $[t_1], ..., [t_n] \in A$ y $\mathcal{R}_n \in \rho(\Gamma)$,

$$\langle [t_1], ..., [t_n] \rangle \in \mathcal{R}_n^{\mathfrak{A}} \text{ si y sólo si } \mathcal{R}(t_1, ..., t_n) \in \Gamma;$$

• para cada $f_n \in \rho(\Gamma)$, $f_n^{\mathfrak{A}}([t_1], ..., [t_n]) = [f_n(t_1, ..., t_n)]$; y

• para cada constante $c \in \rho(\Gamma)$, $c^{\mathfrak{A}} = [c]$.

Veamos que las definiciones anteriores no dependen del representante.

1.- Si t es una constante del tipo τ'. Por construcción hay $c \in C$ tal que $t \approx c \in \Gamma$, tomando en cuenta como definimos nuestra asignación, tenemos $t^{\mathfrak{A}} = [c]$.

2.- Si t es un τ'-término de la forma $f(t_1(\overline{v}_1), ..., t_m(\overline{v}_m))$ con $t_1(\overline{v}_1), ..., t_m(\overline{v}_m)$ τ-términos tales que para cada $i \leq m$ hay $d_i \in C$ tal que $d_i \approx t_i(\overline{c}_i) \in \Gamma$, por inducción $[d_i] = t_i^{\mathfrak{A}}([\overline{c}_i])$. Hay $d \in C$ tal que $d \approx f(t_1(\overline{c}_1), ..., t_m(\overline{c}_m)) \in \Gamma$ y tenemos $d \approx f(d_1, ..., d_m) \in \Gamma$. Por lo tanto,

$$t^{\mathfrak{A}}([\overline{c}]) = f^{\mathfrak{A}}(t_1([\overline{c}_i]), ..., t_m([\overline{c}_m])) = f^{\mathfrak{A}}([d_1], ..., [d_m]) = [f(d_1, ..., d_m)] = [d]$$

3.- Además, si R es una letra relacional de aridad n de τ, dadas $c_1, c_2, ..., c_n \in \tau$, con $d_i \simeq c_i$ para toda $i < \omega$.

Por lo tanto, si $R(c_1, ..., c_n) \in \Gamma$, entonces $R(d_1, ..., d_n) \in \Gamma$.

De tal forma, tenemos $\mathfrak{A} = \langle A, \mathcal{R}_m^{\mathfrak{A}}, \mathcal{F}_m^{\mathfrak{A}}, c^{\mathfrak{A}} \rangle$, con $\mathcal{R}_m, \mathcal{F}_m, c \in \rho(\Gamma)$.

Lema IV.1.7.- Dado $t(v_1, ..., v_n)$ un τ'-término y $c_1, ..., c_n, d \in C$. Si $d \approx t(c_1, ..., c_n) \in \Gamma$, entonces $t^{\mathfrak{A}}([c_1], ..., [c_n]) = [d]$.

Demostración.- Por inducción sobre la formación de términos,

1. Si $t = c \in C$ entonces $t^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{A}} = [c] \in A$. Además, si $t = d \notin C$ entonces hay $c \in C$ tal que $d \simeq c$ entonces $[d] = [c]$ donde $d^{\mathfrak{A}} = [d]$.

$$\text{Por lo tanto, } t^{\mathfrak{A}} = d^{\mathfrak{A}} = [d] = [c] \in A$$

2. Supongamos $t \approx f(t_1(\overline{c}_1), ..., t_n(\overline{c}_n))$, donde t_i es un término cerrado y $\overline{c}_i \in C$ para cada $i \leq n$. Por construcción, para cada $i \in \{1, ..., n\}$ hay $d_i \in C$ tal que $d_i \simeq t_i(\overline{c})$, por hipótesis de inducción $[d_i] = t_i^{\mathfrak{A}}([\overline{c}])$ para cada $i \leq n$. Entonces $t^{\mathfrak{A}} = (f(t_1(\overline{c}_1), ..., t_n(\overline{c}_n)))^{\mathfrak{A}} = f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}(\overline{c}_1), ..., t_n^{\mathfrak{A}}(\overline{c}_n)) = f^{\mathfrak{A}}([d_1], ..., [d_n]) = [f(d_1, ..., d_n)] = [d]$.

$$\text{Por lo tanto, } t^{\mathfrak{A}} = [d] \blacksquare$$

Lema IV.1.8.- Para todo $[d] \in A$, hay $c \in \rho(\Gamma)$, tal que $[d] = [c]$.

Demostración.- Por inducción sobre la formación de términos,

1.- Dada d una constante de τ, hay $c \in C$ y $n < \omega$ tal que $c \approx d \in \sigma_n \subseteq \Gamma$. Aparte, si $d \in C$, usando lo anterior $d \approx d \in \Gamma$.

2.- Dada f una función de aridad n de τ, con $c_1, c_2, ..., c_n \in \tau$. Hay $d \in C$ tal que $d \approx f(c_1, c_2, ..., c_n) \in \Gamma$. Además, supongamos $d_1 \in C$ y $d_1 \approx f(c_1, c_2, ..., c_n) \in \Gamma$. Entonces hay $m < \omega$ tal que $d_1 \approx f(c_1, c_2, ..., c_n), d \approx f(c_1, c_2, ..., c_n) \in \sigma_m \in \Sigma$. Por lo que, $\sigma_m \cup \{d \approx d_1\} \in \Sigma$ con φ_l de la forma $d \approx d_1$ y $\varphi_l \in \Lambda$ para alguna $l < \omega$. Por lo visto anteriormente, $d \approx d_1 \in \sigma_{l+1} \subseteq \Gamma$.

$$\text{Por lo tanto, } d \simeq d_1.$$

Además, dada f una función de aridad n de τ, con $c_0, c_1, c_2, ..., c_n \in \tau$. Si $c_0 \approx f(c_1, c_2, ..., c_n) \in \Gamma$ y $d_i \simeq c_i$ para toda $i \in \{0, ..., n\}$, con $d_i \in C$ para toda $i \in \{0, ..., n\}$. Podemos encontrar $k < \omega$ tal que $c_0 \approx f(c_1, c_2, ..., c_n), d_0 \approx$

$c_0, d_1 \approx c_1, ..., d_n \approx c_n \in \sigma_k$ y, tenemos que $\sigma_k \cup \{d_0 \approx f(d_1, d_2, ..., d_n)\} \in \Sigma$.

Por otro lado, como $c_0 \approx f(c_1, c_2, ..., c_n), d_0 \approx c_0, d_1 \approx c_1, ..., d_n \approx c_n \in \sigma_k$ entonces $c_0 \approx f(c_1, c_2, ..., c_n), d_0 \approx c_0, d_1 \approx c_1, ..., d_n \approx c_n \in \Lambda$. Pues, o estaban en σ_0 o se fueron agregando en la construcción hasta llegar a σ_k. Tomando φ de la forma $v_0 \approx f(v_1, ..., v_n)$ y como $f(c_1, ..., c_n), c_0, c_1, ..., c_n$ son τ'-términos, obtenemos que $d_0 \approx f(d_1, ..., d_n) \in \Lambda$.

Por lo tanto, $d_0 \approx f(d_1, ..., d_n) \in \Gamma$ si y sólo si $d_0 \simeq f(d_1, ..., d_n)$■

Lema IV.1.9.- Para toda $\varphi \in \Gamma$, $\mathfrak{A} \vDash \varphi$.

Demostración.- Sea $\varphi \in \mathcal{L}_{\omega_1,\omega}(\tau')$ tal que $\varphi \in \Gamma$.

- Si φ es de la forma $t_1 \approx t_2$, hay $c_1, c_2 \in C$ tales que $c_1 \approx t_1, c_2 \approx t_2 \in \Gamma$. De donde hay $n < \omega$ tal que $c_1 \approx t_1, c_2 \approx t_2, t_1 \approx t_2 \in \sigma_n$. Con $\eta(v)$ de la forma $c_1 \approx v$, se obtiene $\sigma_n \cup \{c_1 \approx c_2\} \in \Sigma$. Habiendo $h < \omega$ tal que φ_h es de la forma $c_1 \approx c_2$. Utilizando las mismas propiedades de antes, $c_1 \approx c_2 \in \sigma_{h+1} \subseteq \Gamma$ si y sólo si $[c_1] = [c_2]$. Es decir, $t_1^{\mathfrak{A}} = t_2^{\mathfrak{A}}$,

  Por lo tanto, $\mathfrak{A} \vDash t_1 \approx t_2$.

- Si φ es de la forma $R(t_1, ..., t_n)$ con R una letra relacional de aridad n del tipo τ. Análogamente, hay $c_1, ..., c_n \in C$ tales que para toda $i \in \{1, ..., n\}$, $c_i \approx t_i \in \Gamma$. Tomando una $m < \omega$ conveniente para que $R(t_1, ..., t_n) \in \sigma_m$ y para toda $i \in \{1, ..., n\}$, $c_i \approx t_i \in \sigma_m$. De nuevo, $R(c_1, ..., c_n) \in \sigma_{h+1} \subseteq \Gamma$ y para toda $i \in \{1, ..., n\}$, $c_i \approx t_i \in \sigma_{h+1}$ si y sólo si para toda $i \in \{1, ..., n\}$, $[c_i] = t_i^{\mathfrak{A}}$.

  Por lo tanto, $R(c_1, ..., c_n) \in \Gamma \Leftrightarrow \langle [c_1], ..., [c_n] \rangle \in R^{\mathfrak{A}} \Leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash R(c_1, ..., c_n)$.

- Si φ es de la forma $\bigwedge_{\eta \in X} \eta \in \Gamma$, entonces hay $n < \omega$ tal que $\varphi \in \sigma_n$. Por Σ ser una propiedad de consistencia, para cada $\eta \in X$, tenemos $\sigma_n \cup \{\eta\} \in \Sigma$. Por construcción de Γ, $\eta \in \Gamma$ para cada $\eta \in X$. Por hipótesis de inducción

  $$\text{para cada } \eta \in X\ \mathfrak{A} \vDash \eta \text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \vDash \bigwedge_{\eta \in X} \eta$$

  Por lo tanto, $\mathfrak{A} \vDash \varphi$.

- Si φ es de la forma $\exists x\psi(x) \in \Gamma$, por Σ ser una propiedad de consistencia, existe $c_0 \in C$ tal que $\sigma_n \cup \{\psi(c_0)\} \in \Sigma$. Por construcción de Γ, $\psi(c_0) \in \Gamma$. Por hipótesis de inducción $\mathfrak{A} \models \psi(c_0)$.

  Supongamos que $\mathfrak{A} \not\models \exists x\psi(x)$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \forall x \neg\psi(x)$ si y sólo si para toda $a \in A$, $\mathfrak{A} \models \neg\psi(x)_{[s(x/a)]}$ si y sólo si para toda $[c] \in A$, $\mathfrak{A} \models \neg\psi(x)_{[s(x/[c])]}$. En particular cuando $c_0 \in [c]$, $\mathfrak{A} \models \neg\psi(x)_{[s(x/[c_0])]}$

  $$\text{Por lo que } \mathfrak{A} \models \psi(c_0) \text{ y } \mathfrak{A} \models \neg\psi(c_0).$$

  $$\text{Por lo tanto, } \mathfrak{A} \models \exists x\psi(x).$$

- Si φ es de la forma $\neg\psi \in \Gamma$ para alguna $\psi \in \mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$, entonces hay $n < \omega$ tal que $\neg\psi \in \sigma_n$. De donde $\sigma_n \cup \{\multimap \psi\} \in \Sigma$. Además, por construcción de Λ, hay $h < \omega$ tal que φ_h está definida como $\multimap \psi$ y $\varphi_h \in \Lambda$. De nuevo, aquí obtenemos que $\varphi_h \in \sigma_{h+1} \subseteq \Gamma$.

  $$\text{Por lo tanto, } \multimap \psi \in \Gamma.$$

  Veamos por los diferentes tipos de fórmulas que puede tomar ψ:

  1. Sea ψ de la forma $t_1 \approx t_2$. Entonces $\multimap \psi$ es de la forma $\neg(t_1 \approx t_2)$ y $\neg(t_1 \approx t_2) \in \Gamma$. Por la propiedad 2 de Σ, tenemos $t_1 \approx t_2 \notin \Gamma$ si y sólo si $\neg(t_1 \simeq t_2)$ si y sólo si $[t_1] \neq [t_2]$. Además, hay $c_1, c_2 \in \Gamma$ tales que $c_1 \approx t_1, c_2 \approx t_2 \in \Gamma$ si y sólo si $c_1 \simeq t_1$ y $c_2 \simeq t_2$ si y sólo si $[c_1] = [t_1]$ y $[c_2] = [t_2]$. Pero $t_1^{\mathfrak{A}} = [c_1]$ y $t_2^{\mathfrak{A}} = [c_2]$. De donde

     $$t_1^{\mathfrak{A}} \neq t_2^{\mathfrak{A}} \text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \not\models t_1 \approx t_2 \text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \models \neg\psi$$

     $$\text{Por lo tanto, } \mathfrak{A} \models \multimap \psi.$$

  2. Sea ψ de la forma $R(t_1, ..., t_n)$ para alguna letra relacional R de τ de aridad n. Entonces $\multimap \psi$ está definida por $\neg R(t_1, ..., t_n)$ y $\neg R(t_1, ..., t_n) \in \Gamma$. Además, hay $c_1, ..., c_n \in C$ tales que para toda $i \in \{1, ..., n\}$, tenemos $c_i = t_i \in \Gamma$. Análogamente, $\neg R(c_1, ..., c_n) \in \Gamma$ y $R(c_1, ..., c_n) \notin \Gamma$ si y sólo si $\langle [c_1], ..., [c_n] \rangle \notin R^{\mathfrak{A}}$ si y sólo si $\mathfrak{A} \not\models R(c_1, ..., c_n)$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \neg R(c_1, ..., c_n)$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \neg R(t_1, ..., t_n)$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \neg\psi$.

     $$\text{Por lo tanto, } \mathfrak{A} \models \multimap \psi.$$

  3. Sea ψ de la forma $\neg\eta$ para alguna $\eta \in \mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$. Entonces $\multimap \psi$ está dada por η y $\eta \in \Gamma$. Por hipótesis de inducción $\mathfrak{A} \models \eta$

     $$\text{Por lo tanto, } \mathfrak{A} \models \multimap \psi.$$

4. Sea ψ de la forma $\bigwedge_{\eta\in\Delta}\eta$. Entonces $\multimap\psi$ está dada por $\bigvee_{\eta\in\Delta}\multimap\eta$ y $\bigvee_{\eta\in\Delta}\multimap\eta\in\Gamma$. De donde, hay $n<\omega$ tal que $\bigvee_{\eta\in\Delta}\multimap\eta\in\sigma_n$, obteniendo los siguientes casos:
   - Si $n=0$, entonces $\bigvee_{\eta\in\Delta}\multimap\eta\in\sigma_0\subseteq\Lambda$. De donde hay $j<\omega$ tal que $\varphi_j=\bigvee_{\eta\in\Delta}\multimap\eta$.
   - Si $n=m+1$ para alguna $m<\omega$, entonces $\bigvee_{\eta\in\Delta}\multimap\eta\in\sigma_{m+1}=\sigma_m\cup\{\varphi_m\}$. Ahora, si $\bigvee_{\eta\in\Delta}\multimap\eta=\varphi_m\in\Lambda$, se obtiene lo deseado. Por el otro lado, si $\bigvee_{\eta\in\Delta}\multimap\eta\neq\varphi_m\in\Lambda$, entonces $\bigvee_{\eta\in\Delta}\multimap\eta\in\sigma_m$. De nuevo, $m=0$ o $m=p+1$ para alguna $p<\omega$. Por lo tanto,

   $$\text{para alguna } j<\omega, \bigvee_{\eta\in\Delta}\multimap\eta=\varphi_j\in\Lambda \text{ o } \bigvee_{\eta\in\Delta}\multimap\eta\in\sigma_0\subseteq\Lambda.$$

   En ambos casos, se obtiene que $\bigvee_{\eta\in\Delta}\multimap\eta\in\Lambda$. Además, tenemos para toda $\multimap\eta\in\Delta$, $\multimap\eta\in\Lambda$. De donde, hay $p<\omega$ tal que $\varphi_p=\multimap\eta$. Y, como Σ es una propiedad de consistencia y como $\bigvee_{\eta\in\Delta}\multimap\eta\in\sigma_0$. Entonces hay $\multimap\eta\in\Delta$, tal que $\sigma_0\cup\{\multimap\eta\}\in\Sigma$. Sea $q<\omega$ tal que $\multimap\eta$ sea de la forma φ_q y $\varphi_q\in\Sigma\cap\Lambda$. De nuevo obtenemos que $\multimap\eta\in\sigma_{q+1}\subseteq\Gamma$. Aplicando la hipótesis de inducción,

   $$\mathfrak{A}\models\multimap\eta \text{ de donde } \mathfrak{A}\models\bigvee_{\eta\in\Delta}\multimap\eta.$$

   $$\text{Por lo tanto, } \mathfrak{A}\models\multimap\psi.$$

5. Sea ψ de la forma $\exists x\eta(x)$, entonces $\multimap\psi$ está dada por $\forall x\multimap\eta(x)$ y $\forall x\multimap\eta(x)\in\Gamma$. De donde, hay $n<\omega$ tal que $\forall x\multimap\eta(x)\in\sigma_n$. Obteniendo los dos casos que se trataron en el inciso anterior, es decir

   $$\forall x\multimap\eta(x)\in\Lambda.$$

   Además, para toda $c\in C$, $\multimap\eta(c)\in\Lambda$. Y, para toda $c\in C$, $\sigma_n\cup\{\multimap\eta(c)\}\in\Sigma$. De donde, para toda $c\in C$, $\multimap\eta(c)\in\sigma_{n+1}\subseteq\Gamma$.

   Por hipótesis de inducción, para toda $c\in C$ $\mathfrak{A}\models\multimap\eta(c)$, en particular, para toda $c\in A$, $\mathfrak{A}\models\multimap\eta(c)$.

   $$\text{Por lo tanto, } \mathfrak{A}\models\forall x\multimap\eta(x).$$

De tal manera, $\mathfrak{A}\models\Gamma$, donde $\sigma\subseteq\Gamma$.

$$\text{Por lo tanto, } \mathfrak{A}\models\sigma\blacksquare$$

Teorema IV.1.10.- (Existencia de Modelos) Dada Σ una propiedad de consistencia y $\sigma \in \Sigma$, existe $\mathfrak{A}$ numerable tal que $\mathfrak{A} \models \sigma$.

La demostración de este teorema se obtiene mediante los lemas anteriores.

Corolario IV.1.11.- (Existencia de Modelos Extendido.) Dados T un conjunto numerable de τ-enunciados ω_1, ω y Σ una propiedad de consistencia tal que para todo $\sigma \in \Sigma$ y $\delta \in T,\ \sigma \cup \{\delta\} \in \Sigma$, entonces existe $\mathfrak{A}$ numerable tal que $\mathfrak{A} \models \sigma$.

La demostración de el Corolario IV.1.11 es muy similar a la del Teorema IV.1.10. Es decir, también se obtiene por los lemas previos, sólo basta enumerar a los $\delta' s \in T$ y construir la cadena de $\sigma' s \in \Sigma$ de tal forma que para toda $n < \omega,\ \delta_n \in \sigma_{n+1}$.

IV.2 Un Sistema Formal para Lógicas Infinitarias ω_1, ω

Aquí comenzaremos a trabajar con la parte sintáctica de los lenguajes infinitarios ω_1, ω. Varias de las definiciones que se vieron en lo correspondiente al capítulo uno se preservan, sólo se harán algunas modificaciones que se mencionan más adelante.

Definiremos ahora un conjunto de axiomas y reglas de inferencia para un lenguaje infinitario ω_1, ω. Este sistema formal está basado en los que aparecen en [5], [2] y [4]. Por comodidad, adoptaremos el siguiente sistema y lo llamaremos el sistema $\mathscr{M}$ para $\mathscr{L}_{\omega_1,\omega}$.

Axiomas:

1. Toda instancia de una tautología para lógica de enunciados del tipo τ;
2. $\forall x\varphi \to (\varphi)^x_t$, donde todas las ocurrencias libres de x se sustituyen por t en φ;
3. $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \forall x\psi)$, si x no ocurre libre en φ;
4. $x \approx x$;
5. $x \approx t \to [\varphi \to \varphi_{|x,t|}]$, donde $\varphi_{|x,t|}$ significa que algunas (posiblemente todas o ninguna) de las ocurrencias libres de x han sido sustituidas por t;

6. $\neg\varphi \leftrightarrow \multimap \varphi$; y

7. $\bigwedge \Sigma \to \sigma$, con $\sigma \in \Sigma$;

Reglas de inferencia:

1. (MP) ψ se infiere de $\varphi, \varphi \to \psi$;

2. (Generalización) $\forall x\varphi$ se infiere de φ cuando x no es una variable libre de la misma; y

3. (Conjunción arbitraria) $\psi \to \bigwedge \Sigma$ se infiere cuando para cada $\sigma \in \Sigma$, tenemos $\psi \to \sigma$.

Como se puede ver, resulta que $\mathscr{E} \subseteq \mathscr{M}$. Las únicas variantes son que se agregaron los axiomas 6, 7 y la regla de inferencia 3.

Definición IV.2.1.- Una *prueba* en el sistema formal $\mathscr{M}$ para lógicas infinitarias ω_1, ω es una lista de longitud menor a ω_1 de fórmulas de $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$ donde cada una es un axioma de $\mathscr{M}$ o es consecuencia de anteriores por medio de las reglas de inferencia. La fórmula que aparece al final de una demostración en el $\mathscr{M}$ es un *teorema* de $\mathscr{M}$. Esto lo denotaremos por $\vdash_{\mathscr{M}} \varphi$. Donde φ es la fórmula que tiene una demostración en $\mathscr{M}$.

IV.3 Teorema de Correctitud-Completud para Lógicas Infinitarias ω_1, ω

En esta sección, veremos como se relacionan la parte sintáctica y la parte semántica de las lógicas infinitarias. Comenzaremos con el Teorema de Correctitud para el sistema $\mathscr{M}$. Es decir, demostraremos que el conjunto de axiomas elegido es un conjunto de fórmulas infinitarias ω_1, ω universalmente verdaderas y que las reglas de inferencia preservan la asignación de verdad.

Lema IV.3.1.- Sean $\mathfrak{A} \in v_\tau$ y $t, x, y \in TERM$ y $s \in {}^{\omega_1}A$, entonces $t^{\mathfrak{A}}[s] = t^{\mathfrak{A}}_{|x,y|}[s]$.

Demostración.- Por inducción sobre la formación de términos.

• Si $t = c$ o $t = v$ (con $v \neq x$), entonces $t^{\mathfrak{A}}[s] = t^{\mathfrak{A}}_{|x,y|}[s]$. Y, si $t = x$, entonces $t^{\mathfrak{A}}[s] = y^{\mathfrak{A}}[s]$, por como está definida s.

• Si $t = f_n(\bar{t})$, donde para toda $i \in \{1, ..., n\}$, $t_i^{\mathfrak{A}}[s] = (t_{i|x,y|})^{\mathfrak{A}}[s]$, entonces $t^{\mathfrak{A}}_{|x,y|}[s] = (f_n(\bar{t})_{|x,y|})^{\mathfrak{A}}[s] = f_n^{\mathfrak{A}}(t^{\mathfrak{A}}_{1|x,y|}[s], ..., t^{\mathfrak{A}}_{n|x,y|}[s]) = f_n^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[s], ..., t_n^{\mathfrak{A}}[s]) = (f_n(\bar{t}))^{\mathfrak{A}}[s] = t^{\mathfrak{A}}[s]$■

Teorema IV.3.2.- (Correctitud para Lógicas Infinitarias ω_1, ω) Dada $\sigma \in \mathcal{L}^0_{\omega_1,\omega}$,

$$\text{si } \vdash_{\mathscr{M}} \sigma \text{ entonces } \models \sigma.$$

Demostración.- Sea τ un tipo de semejanza, $\mathfrak{A} \in V_\tau$ y $s \in {}^{\omega_1}A$

1. Denotemos por TAU al conjunto de todas las tautologías. Claramente, $\mathfrak{A} \models \varphi$ para toda $\varphi \in TAU$

$$\text{Por lo tanto, } \models TAU$$

2. Supongamos que t se puede sustituir por x en φ. Y supongamos que

$$\mathfrak{A} \models \forall x \varphi_{[s]} \text{ si y sólo si para todo } a \in A,\ \mathfrak{A} \models \varphi_{[s(x/a)]}.$$

   En particular, sea $a = s(t)$,

$$\mathfrak{A} \models \varphi_{[s(x/s(t))]}.$$

   Por el lema de sustitución, obtenemos

$$\mathfrak{A} \models ((\varphi)^x_t)_{[s]}.$$

$$\text{Por lo tanto, } \mathfrak{A} \models \forall x \varphi \to \varphi^x_t.$$

3. Supongamos que x no aparece libre en φ y

$$\mathfrak{A} \not\models \forall x(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \forall x \psi)_{[s]}$$

$$\text{si y sólo si } \mathfrak{A} \models \forall x(\varphi \to \psi)_{[s]} \text{ y } \mathfrak{A} \not\models \varphi \to \forall x \psi_{[s]}$$

$$\text{si y sólo si } \mathfrak{A} \models \forall x(\varphi \to \psi)_{[s]},\ \mathfrak{A} \models \varphi_{[s]} \text{ y } \mathfrak{A} \not\models \forall x \psi_{[s]}$$

si y sólo si para todo $d \in A$, $\mathfrak{A} \vDash \varphi \to \psi_{[s(x/d)]}$, $\mathfrak{A} \vDash \varphi_{[s(x/d)]}$ y $\mathfrak{A} \nvDash \forall x \psi_{[s]}$.

De donde, para todo $d \in A, \mathfrak{A} \vDash \psi_{[s(x/d)]}$ y $\mathfrak{A} \nvDash \forall x \psi_{[s]}$.

Es decir, $\mathfrak{A} \vDash \forall x \psi_{[s]}$ y $\mathfrak{A} \nvDash \forall x \psi_{[s]}$. Contradicción.

Por lo tanto, $\mathfrak{A} \vDash \forall x(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \forall x \psi)$.

4.

$$\mathfrak{A} \nvDash x \approx x_{[s]} \text{ si y sólo si } x^{\mathfrak{A}}[s] \neq x^{\mathfrak{A}}[s], \text{ contradicción.}$$

Por lo tanto, $\mathfrak{A} \vDash x \approx x$.

5. (Por inducción sobre la formación de fórmulas) Supongamos que

$$\mathfrak{A} \vDash x \approx t_{[s]} \text{ y } \mathfrak{A} \vDash \varphi_{[s]}.$$

• Sea φ de la forma $t_1(\overline{x}) \approx t_2(\overline{x})$. Entonces $\varphi_{|x,t|}$ está dada por $t_1(\overline{x})_{|x,t|} \approx t_2(\overline{x})_{|x,t|}$.

$\mathfrak{A} \vDash \varphi_{[s]}$ si y sólo si $\mathfrak{A} \vDash (t_1(\overline{x}) \approx t_2(\overline{x}))_{[s]}$ si y sólo si $t_1^{\mathfrak{A}}[s] = t_2^{\mathfrak{A}}[s]$ si y sólo si $t^{\mathfrak{A}}_{1|x,t|}[s] = t^{\mathfrak{A}}_{2|x,t|}[s]$ si y sólo si $\mathfrak{A} \vDash (t_1(\overline{x})_{|x,t|} \approx t_2(\overline{x})_{|x,t|})_{[s]}$ si y sólo si $\mathfrak{A} \vDash (\varphi_{|x,t|})_{[s]}$.

Sea φ de la forma $\mathcal{R}_n(\overline{x})$. Entonces $\varphi_{|x,t|}$ está dada por $\mathcal{R}_n(\overline{x})_{|x,t|}$.

$$\mathfrak{A} \vDash \varphi_{[s]} \text{ si y sólo si } \langle x_1^{\mathfrak{A}}[s], ..., x_n^{\mathfrak{A}}[s] \rangle \in \mathcal{R}^{\mathfrak{A}} \text{ si y sólo si}$$

$$\langle x^{\mathfrak{A}}_{1|x,t|}[s], ..., x^{\mathfrak{A}}_{n|x,t|}[s] \rangle \in \mathcal{R}^{\mathfrak{A}}_{|x,t|} \text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \vDash \varphi_{|x,t|[s]}$$

• Sea φ de la forma $\neg\psi$ para alguna $\psi \in \mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$. Entonces $\varphi_{|x,t|}$ está dada por $\neg\psi_{|x,t|}$.

$$\mathfrak{A} \vDash \varphi_{[s]} \text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \vDash \neg\psi_{[s]} \text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \nvDash \psi_{[s]} \text{ si y sólo si}$$

$$\mathfrak{A} \nvDash \psi_{|x,t|[s]} \text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \vDash \neg\psi_{|x,t|[s]} \text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \vDash \varphi_{|x,t|[s]}.$$

• Sea φ de la forma $\psi \wedge \eta$ con $\psi, \eta \in \mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$. Entonces $\varphi_{|x,t|}$ está dada por $\psi_{|x,t|} \wedge \eta_{|x,t|}$.

$\mathfrak{A} \vDash \varphi_{[s]}$ si y sólo si $\mathfrak{A} \vDash (\psi \wedge \eta)_{[s]}$ si y sólo si $\mathfrak{A} \vDash \psi_{[s]}$ y $\mathfrak{A} \vDash \eta_{[s]}$ si y sólo si

$$\mathfrak{A} \vDash \psi_{|x,t|[s]} \text{ y } \mathfrak{A} \vDash \eta_{|x,t|[s]} \mathfrak{A} \vDash (\psi_{|x,t|} \wedge \eta_{|x,t|})_{[s]} \text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \vDash \varphi_{|x,t|[s]}.$$

• Sea φ de la forma $\exists y \psi(y)$ para alguna $\psi \in \mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$. Entonces $\varphi_{|x,t|}$ está dada por $(\exists y \psi(y))_{|x,t|}$ y el caso de interés es cuando $x = y$.

$\mathfrak{A} \vDash \varphi_{[s]}$ si y sólo si $\mathfrak{A} \vDash \exists x \psi(x)_{[s]}$ si y sólo si existe $d \in A$ tal que $\mathfrak{A} \vDash \psi_{[s(x/d)]}$ si y sólo si existe $d \in A$ tal que $\mathfrak{A} \vDash \psi_{|x,t|[s(x/d,t/d)]}$ si y sólo si $\mathfrak{A} \vDash \exists x \psi(x)_{|x,t|[s]}$ si y sólo si $\mathfrak{A} \vDash \varphi_{[s]}$.

6. Sea $\varphi \in \mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$. Supongamos

$$\mathfrak{A} \not\models (\neg\varphi \leftrightarrow\multimap \varphi)_{[s]} \text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \models \neg(\neg\varphi \leftrightarrow\multimap \varphi)_{[s]} \text{ si y sólo si}$$

$$\mathfrak{A} \models \neg[(\neg\varphi \to\multimap \varphi) \wedge (\multimap \varphi \to \neg\varphi)]_{[s]} \text{ si y sólo si}$$

$$\mathfrak{A} \models [\neg(\neg\varphi \to\multimap \varphi) \vee \neg(\multimap \varphi \to \neg\varphi)]_{[s]} \text{ si y sólo si}$$

$$\mathfrak{A} \models [(\neg\varphi \wedge \neg(\multimap \varphi)) \vee (\multimap \varphi \wedge \neg(\neg\varphi))]_{[s]} \text{ si y sólo si}$$

$$\mathfrak{A} \models (\neg\varphi \wedge \neg(\multimap \varphi))_{[s]} \text{ o } \mathfrak{A} \models (\multimap \varphi \wedge \varphi)_{[s]} \text{ si y sólo si}$$

Caso 1.- Supongamos

$$\mathfrak{A} \models (\neg\varphi \wedge \neg(\multimap \varphi))_{[s]} \text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \models \neg\varphi_{[s]} \text{ y } \mathfrak{A} \models \neg(\multimap \varphi)_{[s]}$$

Es decir

$$\mathfrak{A} \models \neg\varphi_{[s]} \text{ y } \mathfrak{A} \not\models\multimap \varphi_{[s]}.$$

Lo cual contradice el Lema IV.1.2.

Caso 2.- Supongamos

$$\mathfrak{A} \models (\multimap \varphi \wedge \varphi)_{[s]} \text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \models\multimap \varphi_{[s]} \text{ y } \mathfrak{A} \models \varphi_{[s]}$$

Es decir

$$\mathfrak{A} \models\multimap \varphi_{[s]} \text{ y } \mathfrak{A} \not\models \neg\varphi_{[s]}.$$

Lo cual contradice el Lema IV.1.2.

$$\text{Por lo tanto, } \mathfrak{A} \models \neg\varphi \leftrightarrow\multimap \varphi.$$

7. Sea $\sigma_0 \in \Sigma$.

$$\mathfrak{A} \not\models \left(\bigwedge \Sigma \to \sigma_0\right)_{[s]} \text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \models \neg\left(\bigwedge \Sigma \to \sigma_0\right)_{[s]} \text{ si y sólo si}$$

$$\mathfrak{A} \models \left(\bigwedge \Sigma \wedge \neg\sigma_0\right)_{[s]} \text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \models \bigwedge \Sigma_{[s]} \text{ y } \mathfrak{A} \models \neg\sigma_{0[s]}$$

$$\text{si y sólo si para toda } \sigma \in \Sigma \mathfrak{A} \models \sigma_{[s]} \text{ y } \mathfrak{A} \models \neg\sigma_{0[s]}$$

$$\text{en particular} \mathfrak{A} \models \sigma_{0[s]} \text{ y } \mathfrak{A} \models \neg\sigma_{0[s].} \text{ Contradicción.}$$

$$\text{Por lo tanto, para toda } \sigma \in \Sigma,\ \mathfrak{A} \models \left(\bigwedge \Sigma \to \sigma\right).$$

Ahora probemos que las reglas de inferencia preservan la asignación de verdad: sean $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$ y $\Sigma \subseteq \mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$.

1. Supongamos que

$$\mathfrak{A} \vDash \varphi_{[s]} \text{ y } \mathfrak{A} \vDash \varphi \to \psi_{[s]} \text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \vDash \varphi_{[s]} \text{ y } \mathfrak{A} \vDash \neg\varphi_{[s]} \text{ o } \mathfrak{A} \vDash \psi_{[s]}$$

$$\text{Por lo tanto, } \mathfrak{A} \vDash \psi_{[s]}.$$

2. Supongamos que x es una variable que no aparece libre en φ y

$$\mathfrak{A} \vDash \varphi_{[s]} \text{ sea } a \in A, \text{ entonces } \mathfrak{A} \vDash \varphi_{[s(x/a)]}.$$

   Como esto pasa para toda $a \in A$, entonces

$$\mathfrak{A} \vDash \forall x \varphi.$$

3. Supongamos que para toda $\sigma \in \Sigma$

$$\mathfrak{A} \vDash \psi \to \sigma_{[s]} \text{ si y sólo si para toda } \sigma \in \Sigma\ \mathfrak{A} \vDash \neg\psi_{[s]} \text{ o } \mathfrak{A} \vDash \sigma_{[s]}.$$

$$\text{Si } \mathfrak{A} \vDash \neg\psi_{[s]}, \text{ entonces } \mathfrak{A} \vDash \psi_{[s]} \text{ o } \mathfrak{A} \vDash \bigwedge \Sigma_{[s]} \text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \vDash \psi \to \bigwedge \Sigma_{[s]}.$$

$$\text{Si para toda } \sigma \in \Sigma\ \mathfrak{A} \vDash \sigma_{[s]}, \text{ entonces } \mathfrak{A} \vDash \bigwedge \Sigma_{[s]} \text{ de donde}$$

$$\mathfrak{A} \vDash \neg\psi_{[s]} \text{ o } \mathfrak{A} \vDash \bigwedge \Sigma_{[s]} \text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \vDash \psi \to \bigwedge \Sigma_{[s]}.$$

$$\text{Por lo tanto, } \mathfrak{A} \vDash \psi \to \bigwedge \Sigma_{[s]} \blacksquare$$

Para el Teorema de Completud, basta demostrar que el conjunto de todos los conjuntos finitos de τ'-enunciados consistentes es una propiedad de consistencia. Pues, por el Teorema de Existencia de Modelos, toda propiedad de consistencia tiene modelo.

Para el siguiente teorema necesitamos mucha herramienta sintáctica que no será probada en este trabajo. En vez de eso, aprovecharemos el hecho de que el sistema formal que estamos utilizando para Lógicas Infinitarias es una extensión del de Lógica de primer orden, por lo que todos los teoremas del Cálculo de predicados son teoremas de el sistema $\mathscr{M}$.

Reglas sintácticas que usaremos:
- Modus Tollens (MT);
- D'Morgan;
- Adición, si $\vdash_{\mathscr{M}} \alpha$, entonces para toda $\gamma \in \mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$ $\vdash_{\mathscr{M}} \alpha \vee \gamma$;
- Conjunción, si $\vdash_{\mathscr{M}} \alpha$ y $\vdash_{\mathscr{M}} \beta$, entonces $\vdash_{\mathscr{M}} \alpha \wedge \beta$;

• Particularización, si $\vdash_{\mathscr{M}} \forall x\alpha$, entonces $\vdash_{\mathscr{M}} \exists x\alpha$; y
• Existencia, si $\vdash_{\mathscr{M}} \alpha(c_0)$, entonces $\vdash_{\mathscr{M}} \exists x\alpha(x)$.

Concluiremos este trabajo presentando una demostración sintáctica de que el conjunto de todos los conjuntos finitos σ de τ'-enunciados tales que tienen un número finito de constantes y no $\vdash_{\mathscr{M}} \neg \bigwedge \sigma$, es una propiedad de consistencia, por lo que tiene modelo.

Teorema IV.3.2.- (Completud para Lógicas Infinitarias ω_1, ω) Dada $\varphi \in \mathcal{L}^0_{\omega_1,\omega}$,

$$\text{si } \models \varphi \text{ entonces } \vdash_{\mathscr{M}} \varphi.$$

Demostración.- Sea, $\Sigma \subseteq \mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$, el conjunto de todos los conjuntos finitos σ de τ'-enunciados tales que tienen un número finito de constantes y no $\vdash_{\mathscr{M}} \neg \bigwedge \sigma$. Veamos que Σ cumple las ocho propiedades de una propiedad de consistencia: sea $\sigma \in \Sigma$;

1. Sea $\mu \subseteq \sigma$, por construcción de Σ, $\mu \in \Sigma$.

2. sea $\varphi \in \mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$ y supongamos que $\varphi, \neg\varphi \in \sigma$.

1.	$\vdash_{\mathscr{M}} \varphi \vee \neg\varphi$	Tautología
2.	$\vdash_{\mathscr{M}} \varphi \vee \neg\varphi \vee \bigvee_{\psi \in \sigma \setminus \{\varphi, \neg\varphi\}} \neg\psi$	Adición
3.	$\vdash_{\mathscr{M}} \bigvee \neg\sigma$	Abreviación (2)
4.	$\vdash_{\mathscr{M}} \neg \bigwedge \sigma$	D´Morgan. Contradicción.

Por lo tanto, $\varphi \notin \sigma$ o $\neg\varphi \notin \sigma$.

3. Sea $\varphi \in \mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$ tal que $\neg\varphi \in \sigma$. Supongamos que $\sigma \cup \{\multimap \varphi\} \notin \Sigma$. Sea $\sigma' = \sigma \cup \{\multimap \varphi\}$, entonces:

1.	$\vdash_{\mathscr{M}} \neg(\bigwedge \sigma')$	Hipótesis
2.	$\vdash_{\mathscr{M}} \neg(\bigwedge \sigma \wedge \multimap \varphi)$	Desglose σ'
3.	$\vdash_{\mathscr{M}} \neg(\bigwedge \sigma) \vee \neg(\multimap \varphi)$	D'Morgan
4.	$\vdash_{\mathscr{M}} \neg(\multimap \varphi)$	Pues no $\vdash_{\mathscr{M}} \neg(\bigwedge \sigma)$
5.	$\vdash_{\mathscr{M}} \neg\varphi \leftrightarrow \multimap \varphi$	Axioma 6
6.	$\vdash_{\mathscr{M}} [\neg\varphi \leftrightarrow \multimap \varphi] \rightarrow ([\multimap \varphi \rightarrow \neg\varphi] \wedge [\neg\varphi \rightarrow \multimap \varphi])$	Tautología
7.	$\vdash_{\mathscr{M}} [\multimap \varphi \rightarrow \neg\varphi] \wedge [\neg\varphi \rightarrow \multimap \varphi]$	MP(5,6)
8.	$\vdash_{\mathscr{M}} ([\multimap \varphi \rightarrow \neg\varphi] \wedge [\neg\varphi \rightarrow \multimap \varphi]) \rightarrow [\neg\varphi \rightarrow \multimap \varphi]$	Axioma 7
9.	$\vdash_{\mathscr{M}} \neg\varphi \rightarrow \multimap \varphi$	MP(7,8)
10.	$\vdash_{\mathscr{M}} \neg(\neg\varphi)$	MT(9,4)
11.	$\vdash_{\mathscr{M}} \neg(\neg\varphi) \rightarrow \varphi$	Tautología
12.	$\vdash_{\mathscr{M}} \varphi$	MP(10,11)
13.	$\vdash_{\mathscr{M}} (\bigwedge \sigma) \rightarrow \neg\varphi$	Axioma 7
14.	$\vdash_{\mathscr{M}} [(\bigwedge \sigma) \rightarrow \neg\varphi] \rightarrow [\neg(\bigwedge \sigma) \vee \neg\varphi]$	Tautología
15.	$\vdash_{\mathscr{M}} \neg(\bigwedge \sigma) \vee \neg\varphi$	MP(13,14)
16.	$\vdash_{\mathscr{M}} \neg\varphi$	Pues no $\vdash_{\mathscr{M}} \neg(\bigwedge \sigma)$
17.	$\vdash_{\mathscr{M}} \neg\varphi \wedge \varphi$	Conjunción (9,13). Contradicción

Por lo tanto, Si $\neg\varphi \in \sigma$, entonces $\sigma \cup \{\multimap \varphi\} \in \Sigma$.

4. Supongamos que $\bigwedge \Phi \in \sigma$ pero existe una $\varphi_0 \in \Phi$, tal que $\sigma \cup \{\varphi_0\} \notin \Sigma$. Como $\sigma \cup \{\varphi_0\}$ sigue siendo un conjunto finito de τ'-enunciados, entonces sucede $\vdash_M \neg(\bigwedge \sigma \cup \{\varphi_0\})$ Sea $\sigma' = \sigma \cup \{\varphi\}$, entonces:

1.	$\vdash_{\mathscr{M}} \neg(\bigwedge \sigma')$	Hipótesis
2.	$\vdash_{\mathscr{M}} \neg(\bigwedge \sigma \wedge \varphi_0)$	Desglose σ'
3.	$\vdash_{\mathscr{M}} \neg(\bigwedge \sigma) \vee \neg\varphi_0$	D'Morgan
4.	$\vdash_{\mathscr{M}} \neg(\bigwedge_{\eta\in\sigma\setminus\{\bigwedge \Phi\}} \eta \wedge \bigwedge \Phi) \vee \neg\varphi_0$	Desglose σ
5.	$\vdash_{\mathscr{M}} \neg(\bigwedge_{\eta\in\sigma\setminus\{\bigwedge \Phi\}} \eta) \vee \bigvee \neg\Phi \vee \neg\varphi_0$	D'Morgan
6.	$\vdash_{\mathscr{M}} \neg(\bigwedge_{\eta\in\sigma\setminus\{\bigwedge \Phi\}} \eta) \vee \bigvee \neg\Phi$	Pues $\varphi_0 \in \Phi$
7.	$\vdash_{\mathscr{M}} \neg(\bigwedge_{\eta\in\sigma\setminus\{\bigwedge \Phi\}} \eta \wedge \bigwedge \Phi)$	D'Morgan
8.	$\vdash_{\mathscr{M}} \neg(\bigwedge \sigma)$	Hipótesis. Contradicción

Por lo tanto, para toda $\varphi \in \Phi$, $\sigma \cup \{\varphi\} \in \Sigma$.

5. Supongamos que $\bigvee \Phi \in \sigma$ pero para cada $\varphi \in \Phi$, sucede que $\sigma \cup \{\varphi\} \notin \Sigma$. Como para cada $\varphi \in \Phi$, $\sigma \cup \{\varphi\}$ sigue siendo un conjunto finito de τ'-enunciados, entonces sucede $\vdash_M \neg(\bigwedge \sigma \cup \{\varphi\})$. Tomando $\varphi_0 \in \Phi$, sea $\sigma' = \sigma \cup \{\varphi_0\}$, entonces:

1.	$\vdash_{\mathscr{M}} \neg(\bigwedge \sigma')$	Hipótesis
2.	$\vdash_{\mathscr{M}} \neg(\bigwedge \sigma \wedge \varphi_0)$	Desglose σ'
3.	$\vdash_{\mathscr{M}} \neg(\bigwedge \sigma) \vee \neg\varphi_0$	D'Morgan
4.	$\vdash_{\mathscr{M}} [\neg(\bigwedge \sigma) \vee \neg\varphi_0] \to [(\bigwedge \sigma) \to \neg\varphi_0]$	Tautología
5.	$\vdash_{\mathscr{M}} \bigwedge \sigma \to \neg\varphi_0$	MP(3,4)
6.	$\vdash_{\mathscr{M}} \bigwedge \sigma \to \bigwedge_{\varphi\in\Phi} \neg\varphi$	Regla inferencia 2
7.	$\vdash_{\mathscr{M}} [\bigwedge \sigma \to \bigwedge_{\varphi\in\Phi} \neg\varphi] \longrightarrow [\neg(\bigwedge \sigma) \vee \bigwedge_{\varphi\in\Phi} \neg\varphi]$	Tautología
8.	$\vdash_{\mathscr{M}} \neg(\bigwedge \sigma) \vee \bigwedge_{\varphi\in\Phi} \neg\varphi$	MP(6,7)
9.	$\vdash_{\mathscr{M}} \neg[\bigwedge \sigma \wedge \bigvee_{\varphi\in\Phi} \varphi]$	D'Morgan.
10.	$\vdash_{\mathscr{M}} \neg(\bigwedge \sigma)$	Pues $\bigvee_{\varphi\in\Phi} \varphi \in \sigma$. Contradicción.

Por lo tanto, para alguna $\varphi \in \Phi$, $\sigma \cup \{\varphi\} \in \Sigma$.

6. Supongamos que $\forall x\varphi(x) \in \sigma$ pero para alguna $c_0 \in C$, sucede que $\sigma \cup \{\varphi(c_0)\} \notin \Sigma$. Tomemos c_0 tal que no aparece en σ. Como $\sigma \cup \{\varphi(c_0)\}$ sigue siendo un conjunto finito de τ'-enunciados, entonces no sucede $\vdash_M \neg(\bigwedge \sigma \cup \{\varphi(c_0)\})$. Sea $\sigma' = \sigma \cup \{\varphi(c_0)\}$, entonces:

1.	$\vdash_{\mathscr{M}} \neg(\bigwedge \sigma')$	Hipótesis
2.	$\vdash_{\mathscr{M}} \neg(\bigwedge \sigma \wedge \varphi(c_0))$	Desglose σ'
3.	$\vdash_{\mathscr{M}} \neg(\bigwedge \sigma) \vee \neg\varphi(c_0)$	D'Morgan
4.	$\vdash_{\mathscr{M}} \neg\varphi(c_0)$	Pues no $\vdash_{\mathscr{M}} \neg(\bigwedge \sigma)$
5.	$\vdash_{\mathscr{M}} \neg\varphi(c_0) \to \exists x\neg\varphi(x)$	Existencia
6.	$\vdash_{\mathscr{M}} \exists x\neg\varphi(x)$	MP(4,5)
7.	$\vdash_{\mathscr{M}} \exists x\neg\varphi(x) \to \neg\forall x\varphi(x)$	Equivalencia
8.	$\vdash_{\mathscr{M}} \neg\forall x\varphi(x)$	MP(6,7)
9.	$\vdash_{\mathscr{M}} \neg\forall x\varphi(x) \vee \neg \bigwedge \sigma$	Adición
10.	$\vdash_{\mathscr{M}} \neg(\forall x\varphi(x) \wedge \bigwedge \sigma)$	D´Morgan
10.	$\vdash_{\mathscr{M}} \neg(\bigwedge \sigma)$	Pues $\forall x\varphi(x) \in \sigma$. Contradicción

Por lo tanto, para toda $c \in C$, $\sigma \cup \{\varphi(c)\} \in \Sigma$.

7. Supongamos que $\exists x\varphi(x) \in \sigma$ pero para cada $c \in C$, sucede que $\sigma \cup \{\varphi(c)\} \notin \Sigma$. Sea $c_0 \in C$ donde c_0 no aparece en σ. Como $\sigma \cup \{\varphi(c_0)\}$ sigue siendo un conjunto finito de τ'-enunciados, entonces sucede $\vdash_M \neg(\bigwedge \sigma \cup \{\varphi(c_0)\})$. Sea $\sigma' = \sigma \cup \{\varphi(c_0)\}$, entonces:

1.	$\vdash_{\mathscr{M}} \neg(\bigwedge \sigma')$	Hipótesis
2.	$\vdash_{\mathscr{M}} \neg(\bigwedge \sigma \wedge \varphi(c_0))$	Desglose σ'
3.	$\vdash_{\mathscr{M}} \neg(\bigwedge \sigma) \vee \neg\varphi(c_0)$	D'Morgan
4.	$\vdash_{\mathscr{M}} \neg\varphi(c_0)$	Pues no $\vdash_{\mathscr{M}} \neg(\bigwedge \sigma)$
5.	$\vdash_{\mathscr{M}} \forall x\neg\varphi(x)$	Generalización
6.	$\vdash_{\mathscr{M}} \forall x\neg\varphi(x) \to \neg\exists x\varphi(x)$	Equivalencia
7.	$\vdash_{\mathscr{M}} \neg\exists x\varphi(x)$	MP(5,6)
8.	$\vdash_{\mathscr{M}} \neg\exists x\varphi(x) \vee \neg \bigwedge \sigma$	Adición
9.	$\vdash_{\mathscr{M}} \neg(\exists x\varphi(x) \wedge \bigwedge \sigma)$	D'Morgan
10.	$\vdash_{\mathscr{M}} \neg(\bigwedge \sigma)$	Pues $\exists x\varphi(x) \in \sigma$. Contradicción.

Por lo tanto, para alguna $c \in C,\ \sigma \cup \{\varphi(c)\} \in \Sigma$.

8. $\cdot$) Sean $c, d \in C$ y supongamos que $c \approx d \in \sigma$ pero $\sigma \cup \{d \approx c\} \notin \Sigma$. Sea $\sigma' = \sigma \cup \{d \approx c\}$, entonces:

1.	$\vdash_{\mathscr{M}} \neg(\bigwedge \sigma')$	Hipótesis
2.	$\vdash_{\mathscr{M}} \neg(\bigwedge \sigma \wedge d \approx c)$	Desglose σ'
3.	$\vdash_{\mathscr{M}} \neg(\bigwedge \sigma) \vee \neg(d \approx c)$	D'Morgan
4.	$\vdash_{\mathscr{M}} [\neg(\bigwedge \sigma) \vee \neg(d \approx c)] \to [(\bigwedge \sigma) \to \neg(d \approx c)]$	Tautología
5.	$\vdash_{\mathscr{M}} (\bigwedge \sigma) \to \neg(d \approx c)$	MP(3,4)
6.	$\vdash_{\mathscr{M}} \bigwedge \sigma \to (c \approx d)$	Axioma 7
7.	$\vdash_{\mathscr{M}} [\bigwedge \sigma \to (c \approx d)] \to [\neg \bigwedge \sigma \vee (c \approx d)]$	Tautología
8.	$\vdash_{\mathscr{M}} \neg \bigwedge \sigma \vee (c \approx d)$	MP(7,8)
9.	$\vdash_{\mathscr{M}} (c \approx d)$	Pues no $\vdash_{\mathscr{M}} \neg \bigwedge \sigma$
10.	$\vdash_{\mathscr{M}} (c \approx d) \to [(c \approx d) \to (d \approx d)]$	Axioma 5
11.	$\vdash_{\mathscr{M}} (c \approx d) \to (d \approx d)$	MP(9,10)
12.	$\vdash_{\mathscr{M}} (d \approx d)$	MP(9,11)
13.	$\vdash_{\mathscr{M}} (d \approx d) \to [(c \approx d) \to (d \approx c)]$	Axioma 5
14.	$\vdash_{\mathscr{M}} (c \approx d) \to (d \approx c)$	MP(12,13)
15.	$\vdash_{\mathscr{M}} (d \approx c)$	MP(12,14)
16.	$\vdash_{\mathscr{M}} \neg(\bigwedge \sigma)$	MT(5,15). Contradicción.

Por lo tanto, si $c \approx d \in \sigma$, entonces $\sigma \cup \{d \approx c\} \in \Sigma$.

$\cdot\cdot$) Sea $c \in C$, t un término sin variables libres, $\varphi(x) \in \mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$. Supongamos que $c \approx t, \varphi(t) \in \sigma$ pero $\sigma \cup \{\varphi(c)\} \notin \Sigma$. Sea $\sigma' = \sigma \cup \{\varphi(c)\}$, entonces:

1.	$\vdash_{\mathscr{M}} \neg(\bigwedge \sigma')$	Hipótesis
2.	$\vdash_{\mathscr{M}} \neg(\bigwedge \sigma \wedge \varphi(c))$	Desglose σ'
3.	$\vdash_{\mathscr{M}} \neg(\bigwedge \sigma) \vee \neg\varphi(c)$	D'Morgan
4.	$\vdash_{\mathscr{M}} \neg\varphi(c)$	Pues no $\vdash_{\mathscr{M}} \neg(\bigwedge \sigma)$
5.	$\vdash_{\mathscr{M}} \bigwedge \sigma \to \varphi(t)$	Axioma 7
6.	$\vdash_{\mathscr{M}} [\bigwedge \sigma \to \varphi(t)] \to [\neg \bigwedge \sigma \vee \varphi(t)]$	Tautología
7.	$\vdash_{\mathscr{M}} \neg(\bigwedge \sigma) \vee \varphi(t)$	MP(4,5)
8.	$\vdash_{\mathscr{M}} \varphi(t)$	Pues no $\vdash_{\mathscr{M}} \neg(\bigwedge \sigma)$
9.	$\vdash_{\mathscr{M}} \bigwedge \sigma \to (c \approx t)$	Axioma 7
10.	$\vdash_{\mathscr{M}} [\bigwedge \sigma \to (c \approx t)] \to [\neg(\bigwedge \sigma) \vee (c \approx t)]$	Tautología
11.	$\vdash_{\mathscr{M}} \neg(\bigwedge \sigma) \vee (c \approx t)$	MP(5,6)
12.	$\vdash_{\mathscr{M}} (c \approx t)$	Pues no $\vdash_{\mathscr{M}} \neg(\bigwedge \sigma)$
13.	$\vdash_{\mathscr{M}} (c \approx t) \to [\varphi(t) \to \varphi(c)]$	Axioma 5
14.	$\vdash_{\mathscr{M}} \varphi(t) \to \varphi(c)$	MP(12,13)
15.	$\vdash_{\mathscr{M}} \varphi(c)$	MP(8,14)
16.	$\vdash_{\mathscr{M}} \neg\varphi(c) \wedge \varphi(c)$	Conjunción (4,15). Contradicción.

Por lo tanto, si $c \approx t, \varphi(t) \in \sigma$, entonces $\sigma \cup \{\varphi(c)\} \in \Sigma$.

$\cdots$) Sea t un término sin variables libres. Tomemos $d \in C$ tal que d no aparece en σ ni en t, tomemos $\sigma' = \sigma \cup \{d \approx t\}$ y supongamos que $\sigma' \notin \Sigma$, entonces:

1.	$\vdash_{\mathscr{M}} \neg(\bigwedge \sigma')$	Hipótesis
2.	$\vdash_{\mathscr{M}} \neg(\bigwedge \sigma \wedge d \approx t)$	Desglose σ'
3.	$\vdash_{\mathscr{M}} \neg(\bigwedge \sigma) \vee \neg(d \approx t)$	D'Morgan
4.	$\vdash_{\mathscr{M}} \neg(d \approx t)$	Pues no $\vdash_{\mathscr{M}} \neg(\bigwedge \sigma)$

Tomando $y \in VAR$ y y no sucede en σ. Podemos sustituir d por y y obtenemos.

5.	$\vdash_{\mathscr{M}} \neg(y \approx t)$	Sustitución
6.	$\vdash_{\mathscr{M}} \forall y \neg(y \approx t)$	Generalización
7.	$\vdash_{\mathscr{M}} \forall y \neg(y \approx t) \to \neg(t \approx t)$	Axioma 2
8.	$\vdash_{\mathscr{M}} \neg(t \approx t)$	MP(6,7). Contradicción

Por lo tanto, para cualquer término sin variables, t, hay $d \in C$, tal que $\sigma \cup \{d \approx t\} \in \Sigma$.

Con esto se prueba que Σ es una propiedad de consistencia.

Por lo tanto, Σ tiene modelo$\blacksquare$

Bibliografía

[1] J. A. Amor, *Compacidad en la Lógica de Primer Orden y su Relación con el Teorema de Completud*. Coordinacion de Servicios Escolares, Facultad de Ciencias, UNAM, 2009.

[2] H. B. Enderton, *Una Introducción Matemática a la Lógica*. Filosofía Contemporanea. UNAM, 2004.

[3] W. Hodges, *Model Theory*, vol. 42 in Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 1993.

[4] E. Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic*. CRC press, 2009.

[5] M. Dickman, *Large Infinitary Languages*. North-Holland Publishing Company, 1975.

[6] D. Marker, *Lectures on Infinitary Model Theory*, vol. 46 in Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 2016.

[7] H. J. Keisler, *Model Theory for Infinitary Logic*. North-Holland Publishing Company, 1971.

[8] D. Valencia Gómez, *Aplicaciones de los Ultraproductos en la Teoría de Conjuntos*. Facultad de Ciencias, UNAM, 2017.