



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Simetrías Yangianas en Mecánica Clásica y
Teoría de Campos

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Física

PRESENTA:

Sarai Elizabeth Arellano Roque

TUTOR

Dr. José David Vergara Oliver

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2018





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

2

1. Datos del alumno

Arellano

Roque

Sarai Elizabeth

57 93 09 34

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física

411005454

2. Datos del tutor

Dr.

José David

Vergara

Oliver

3. Datos del sinodal 1

Dr.

Hernando

Quevedo

Cubillos

4. Datos del sinodal 2

Dr.

Mariano

Chernicoff

Minsberg

5. Datos del sinodal 3

Dr.

José Antonio Rafael

García

Zenteno

6. Datos del sinodal 4

Dr.

Hugo Aurelio

Morales

Técotl

7. Datos del trabajo escrito

Simetrías Yangianas en Mecánica Clásica y Teoría de Campos
269 páginas
2018

Agradecimientos

A mi máma y mi tía por el apoyo que me dieron durante estos años.

Agradezco en gran manera al Dr. Vergara, director de tesis, por su dedicación y paciencia que permitieron la realización de este trabajo.

Quiero agradecer también a mis sinodales el Dr. Hernando Quevedo, el Dr. Mariano Chernicoff, el Dr. José García, el Dr. Hugo Morales por haber participado en la evaluación de este trabajo y por las mejoras que sus comentarios trajeron al mismo.

A DGAPA-UNAM por la beca recibida para la realización de este trabajo, gracias al programa de Apoyo de Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPPIIT) de la UNAM IN103716.

Índice general

Agradecimientos	I
1. Introducción	1
2. Teorías de cantidades conservadas	11
2.1. Integrabilidad en un sistema clásico	11
2.1.1. Teoría de Liouville	13
2.2. Variables de ángulo acción	15
2.3. Teorema de Noether	22
2.4. Enredamiento	31
2.5. Pares de Lax	36
3. Interludio Matemático	45
3.1. Semigrupos y monoides	45
3.2. Grupos	46
3.2.1. Representación de grupos	47
3.2.2. Grupos de Lie	47
3.3. Anillos y campos	47
3.4. Espacios vectoriales	48
3.5. Álgebras de Lie	49
3.5.1. Álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2)$	50
3.5.2. Álgebras de Lie $\mathbb{H}(3, 1)$	51
3.5.3. Álgebra de Lie $\mathfrak{iso}(3, 1)$	52
3.6. Grupos de Poisson-Lie	53
3.7. Ecuación de Yang-Baxter	54
3.8. Álgebra universal envolvente	55
3.8.1. Álgebra universal envolvente $U(\mathfrak{sl}(2))$	56
3.9. Álgebras asociativas con unidad y \mathbb{C} -álgebras	56
3.9.1. Homeomorfismos entre K -álgebras	58
3.10. Coálgebra	58
3.10.1. Homeomorfismos entre coálgebras	59

3.11. Relación entre K-álgebras y coálgebras	60
3.12. Biálgebras	61
3.13. Álgebra de Hopf	61
3.13.1. Álgebra de Hopf $U(\mathfrak{sl}(2))$	63
3.13.2. Álgebra de Hopf $U(\mathbb{H}(3, 1))$	65
3.14. Álgebra de Lazos	68
3.14.1. Órbitas coadjuntas y el formalismo hamiltoniano	68
4. Teorías de Campo	71
4.1. Integrabilidad y Cargas no-locales	71
4.1.1. Simetrías Locales y Bilocales	71
4.1.2. Cargas no locales y Formulación de Lax	77
4.1.3. Modelo Quiral de Gross-Neveu	80
4.1.4. Simetrías no-locales como Cargas de Noether	83
4.2. Matriz de Monodromía	84
4.3. La estructura de Poisson y el problema de no-ultra localidad	100
4.3.1. Paréntesis de Maillet	102
4.4. r-matrices Clásicas	104
4.4.1. Propiedades analíticas	105
4.5. Solitones	107
4.5.1. Método de dispersión inverso clásico	110
5. Modelo de Hubbard	115
5.1. El hamiltoniano de Hubbard	115
5.2. Simetrías	121
5.2.1. Permutaciones	121
5.2.2. Simetrías espaciales	123
5.2.3. El operador de momento	124
5.2.4. Simetrías más discretas	126
5.2.5. Simetrías $SO(4)$	128
5.3. Aproximación algebraica al modelo de Hubbard	133
5.3.1. Integrabilidad	133
5.3.2. El álgebra de Yang-Baxter	134
5.3.3. Ecuación de Yang-Baxter	136
5.3.4. La base estándar	137
5.3.5. Modelos Fundamentales	141
5.3.6. El modelo XXX	143
5.3.7. Ansatz algebraico de Bethe para el modelo $gl(2)$ generalizado	146
5.3.8. Representación gráfica de la ecuación de Yang-Baxter	149
5.4. R-matriz de Shastry	151

5.4.1.	Los modelos XX	152
5.4.2.	Matriz conjugación	155
5.4.3.	Construcción de la R-matriz	155
5.4.4.	Forma explícita de la R-matriz (d=2)	161
5.4.5.	Invarianza de las ecuaciones de Yang-Baxter	162
5.5.	Método de dispersión inverso cuántico graduado	165
5.5.1.	Espacios vectoriales graduados	165
5.5.2.	Modelos fundamentales graduados	169
5.5.3.	Simetrías globales de simetrías locales	173
5.5.4.	Operadores de Fermi	174
5.5.5.	Ejemplos	177
5.6.	El modelo de Hubbard como modelo fundamental graduado	183
5.6.1.	Hamiltoniano y L-matriz	184
5.6.2.	Simetrías	190
5.6.3.	Solución del problema inverso cuántico	196
5.7.	Ansatz algebraico de Bethe para el modelo de Hubbard	197
5.8.	La simetría Yangiana del modelo de Hubbard	199
5.8.1.	Introducción	199
5.8.2.	Hamiltoniano de salto de rango variable	200
5.8.3.	Construcción de los generadores Yangianos	201
5.8.4.	Casos especiales	206
6.	Conclusiones	211
A.	r-matriz	215
B.	Ejemplo Circuitos	223
C.	Matriz-R de Shastry	229
D.	L-matriz	241
E.	Yang-Serre	245
	Bibliografía	253

Capítulo 1

Introducción

La idea general de la tesis es el estudio de simetrías en sistemas físicos y sus cargas conservadas asociadas y como estas simetrías nos permiten resolver la dinámica de un problema. En particular se intentará describir lo que son las simetrías Yangianas. Estas simetrías han aparecido en diversos sistemas físicos y recientemente ha adquirido un gran interés ya que están relacionadas a la integrabilidad de teoría de campos no triviales, como el límite planar (i.e. el límite de N grande) de la teoría de super Yang-Mills $\mathcal{N} = 4$ [1, 2].

Cuando consideramos un sistema hamiltoniano n -dimensional en mecánica clásica y queremos resolverlo, una forma de hacer esto es encontrar n cantidades conservadas F_i que sean independientes del tiempo y que están en involución i.e. $\{F_j, F_i\} = 0$. Una forma para encontrar las cantidades F_i es utilizar el método de variables de ángulo-acción entonces se dice que el sistema es integrable si podemos encontrar n -variables de acción. Las variables de acción son cantidades constantes que contienen información sobre las órbitas del sistema y son función sólo de las constantes de integración.

Por otro lado, existen teorías más generales para obtener cantidades conservadas como el teorema de Noether el cual dice que cuando tenemos un sistema dinámico descrito por una acción S e invariante bajo un grupo de simetría con un número finito de generadores, entonces, asociado a cada generador tenemos una corriente y una carga conservada. En esta tesis consideramos el teorema de Noether desde dos puntos de vista. Por una parte en forma Lagrangiana donde a partir de la simetría del sistema podemos encontrar cantidades conservadas. Por otro lado, consideraremos el teorema de Noether hamiltoniano en donde conociendo las cantidades conservadas podemos obtener sus simetrías. Así, por ejemplo calculamos las cantidades conservadas de un campo central y tomando como base el vector de Laplace-Runge-Lenz se calculan las transformaciones de simetría que genera este vector. Por último encontramos una derivada total $\delta\Omega$ al calcular la variación de

\mathcal{L} con respecto a estas transformaciones y usando la formulación completa obtener el vector de Laplace-Runge-Lenz.

Otra forma de generar cantidades conservadas es mediante los pares de Lax, este método consiste en encontrar dos matrices L y M (que no son únicas) con las cuales podemos escribir las ecuaciones de movimiento a partir de la ecuación de Lax $\dot{L} = [M, L]$, y cuando consideramos la traza de las potencias de L podemos obtener cargas conservadas (que no son todas independientes); el ejemplo más simple es el oscilador armónico de 1-dim. Los pares de Lax nos proveen cantidades conservadas sin ayuda de la estructura de Poisson, pero debido a la noción de integrabilidad de Liouville es necesario introducir la estructura de Poisson para asegurarnos de que las cantidades conservadas se encuentran en involución. Para un sistema integrable, los paréntesis de Poisson entre los elementos de L tienen una estructura especial en la cual los eigenvalores de L están en involución si y sólo si existe un elemento r_{12} (que pertenece a la matriz r). Hay que hacer notar que r es una matriz clásica constante que es necesario introducir para que los eigenvalores de L se encuentren en involución, si además r_{12} elemento de r cumple $r_{12} = -r_{21}$ entonces r satisface la ecuación clásica de Yang-Baxter la cual se relaciona con las ecuaciones de trenza, y de aquí con muchas estructuras matemáticas, como los grupos de trenza [3]. En algunos casos los pares de Lax dependen de un parámetro al que llamamos parámetro espectral que se introduce para generar las cantidades conservadas como es el caso del problema de Kepler.

Cuando una matriz Lax se encuentra en un sistema con un número infinito de grados de libertad, está puede interpretarse como una órbita coadjunta y podemos extender la idea de los pares de Lax a la teoría de campos eligiendo un álgebra de Lie adecuada. En nuestro caso vamos a considerar el grupo de Lie de lazos G y el álgebra de Lie \mathfrak{g} asociada a G . El grupo G actúa en \mathfrak{g} mediante la acción adjunta que denotamos como Ad , tenemos también la acción coadjunta (Ad^*) de G en el dual \mathfrak{g}^* del álgebra \mathfrak{g} , nosotros consideramos la versión infinitesimal de las acciones del álgebra de Lie \mathfrak{g} en \mathfrak{g} y \mathfrak{g}^* a las que denotamos como ad y ad^* respectivamente; además tenemos un álgebra de lazos superior $\tilde{\mathfrak{g}}$ compuesta por \mathfrak{g} y \mathfrak{g}^* , decimos que $\tilde{\mathfrak{g}}$ es un álgebra de lazos doble. Consideraremos una teoría de campo bidimensional en un cilindro y el álgebra de lazos $\tilde{\mathfrak{g}}$ que mapea del círculo S^1 al álgebra de Lie \mathfrak{g} . Para introducir algo de estructura en la dirección x , consideramos la extensión central del álgebra de lazos x al que denotamos como $\hat{\mathfrak{g}}$ y calculamos el conmutador de dos de sus elementos. Notamos que al aplicar la acción coadjunta ad^* a los elementos del espacio dual $\hat{\mathfrak{g}}^*$ de $\hat{\mathfrak{g}}$ y eligien-

do la órbita igual a uno obtenemos una expresión que podemos igualar con $\dot{L} = ad^*M \cdot L$ (esto debido a que las ecuaciones de movimiento se pueden ver como un flujo en la órbita coadjunta) y obtenemos la condición de curvatura cero $\partial_t U - \partial_x V + [U, V] = 0$ (i.e. la nueva ecuación de Lax), la cual expresa la condición de compatibilidad del sistema lineal asociado. Al extender esta teoría hay que notar que la construcción de las cantidades conservadas va a ser más complicada, por lo cual introducimos una nueva función llamada la matriz de transferencia Ψ generada a partir de los pares de Lax, esta función transporta a la conexión (U, V) (donde $L = U$ y $M = V$) a lo largo de una curva γ , en particular si γ es la trayectoria de $x \in [0, 2\pi]$ con el tiempo fijo, llamamos a la función $\Psi(\lambda; 2\pi, t) = T(\lambda, t)$ la matriz de monodromía, que además genera cantidades conservadas si consideramos la traza de sus potencias. Para tener una idea más clara calculamos las cantidades conservadas del modelo de Schrödinger no-lineal de forma detallada.

Hay que tener en cuenta que cuando consideramos los paréntesis de Poisson de los eigenvalores de L podemos tener diferentes casos: cuando la estructura es ultra local i.e, solamente tenemos $\delta(x - y)$ en la ecuación de involución para L , entonces la matriz de transporte satisface las relaciones fundamentales de Sklyanin y como consecuencia la traza de las potencias de la matriz de monodromía genera cantidades de Poisson conmutativas. En cambio si tenemos una estructura no-ultra local i.e. tenemos derivadas de $\delta(x - y)$ en la ecuación de involución para L , hay que escoger un par de matrices (r, s) que satisfagan la ecuación mixta de Yang-Baxter y a partir de ellas obtener los paréntesis de Poisson para la matriz de monodromía (al que llamamos paréntesis de Maillet), como ejemplo consideramos el modelo quiral.

Otro ejemplo que podemos considerar es la ecuación de Korteweg de Vries (KdV) que describe el movimiento de una onda solitaria a la que llamamos solitón; cuando consideramos sólo la parte lineal de la ecuación esta admite como solución a las ondas armónicas y si además la velocidad de fase es constante obtenemos una onda dispersiva. Por otro lado cuando considerando la ecuación KdV completa y suponemos $u(x, t) = U(x - ct) = U(z)$ obtenemos como solución a las funciones elípticas de Jacobi c_n a las que llamamos ondas senoidales, si consideramos $z \rightarrow \pm\infty$ obtenemos ondas de tipo permanente (u ondas solitarias) cuya forma no cambia con el tiempo. Las ecuaciones de KdV pueden escribirse en términos de los pares de Lax. Existe un método más general para resolver este problema al que llamamos método de dispersión inverso clásico, en donde partimos del problema auxiliar de Schrödinger y resolvemos para u con $\psi \neq 0$ integrando una vez con respecto a x , entonces tenemos nodos normalizables de ψ cuya solución son los estados ligados y podemos extender el problema a nodos no normalizables (con un comportamiento ondulante en el infinito espacial) si consideramos u constante.

Veamos ahora qué ocurre cuando consideramos una simetría interna espacio temporal infinitesimal en teoría de campos, sabemos que debido al teorema de Noether la simetría induce una corriente conservada que cumple la ley de conservación. En algunos casos dependiendo de la simetría podemos desarrollar la corriente en términos de los generadores de la simetría t_a que consideramos antihermitianos y satisfacen cierta álgebra. A partir de la corriente conservada j^μ podemos obtener las cargas conservadas J^μ . Como ejemplo calculamos la carga conservada de un boost de Lorentz que como veremos se puede reescribir como una integral bilocal. Cuando consideramos corrientes y cargas conservadas de $1 + 1$ -dim en donde la corriente local j^μ no solo se conserva sino que también satisface la condición de curvatura cero podemos definir una corriente conservada bilocal adicional \hat{j}^μ que tiene asociada a su vez una carga conservada bilocal adicional \hat{J}^μ . A partir de la conservación de la carga y la condición de curvatura cero podemos definir una derivada covariante $D_\mu = \partial_\mu + j_\mu$ con la cual podemos construir un número infinito de corrientes conservadas no-locales $j_\mu^{(n)}$ y como consecuencia un número infinito de cargas conservadas no-locales $J^{(n)}$. Como tenemos un conjunto de cargas conservadas y sabemos que una combinación de estas cargas nos da también una carga conservada, podemos pensar en construir una función generadora $T(u)$ cuya expansión en u nos de las cargas conservadas, hay que notar que esta función generadora es la matriz de monodromía y u es el parámetro espectral. Como ejemplo tenemos al modelo quirral de Gross-Neveu de dimensión $1 + 1$ que es una teoría integrable asintóticamente libre y puede resolverse en el límite N grande, con N el parámetro de la simetría global $\mathfrak{u}(N)$. Primero reescribimos el lagrangiano en términos de los generadores de la simetría $\mathfrak{u}(n)$ y obtenemos la corriente conservada, también podemos obtener la corriente axial (sin embargo en este modelo no se conserva). Existen algunos casos particulares en donde la simetría no local se puede ver como una simetría de Noether por ejemplo el modelo quirral principal de dimensión 2. Una idea que nos da este capítulo es que las simetrías Yangianas tienen que ver con la existencia de simetrías no locales.

Para entender las simetrías Yangianas introducimos el modelo de Hubbard, en donde vamos a considerar el modelo de Hubbard como el modelo de unidimensional de una banda de electrones que pueden saltar al vecino próximo. Escribimos el hamiltoniano del modelo de Hubbard en términos de los operadores de creación y aniquilación (u operadores de Fermi) e imponemos la condición de periodicidad ($c_{L,a} = c_{1,a}$), para que el hamiltoniano sea invariante bajo permutaciones cíclicas en la red. Cuando los operadores de Fermi $c_{j,a}^\dagger$ actúan sobre el vacío $|0\rangle$ podemos construir la base de Wannier la cual genera el espacio de estados del modelo de Hubbard. El hamiltoniano de Hub-

bard tiene esencialmente la estructura $\mathcal{H} = -tA + UD$, donde t y U son dos parámetros reales, que establecen la escala de energía y fijan la fuerza relativa de las dos sumas que contribuyen al hamiltoniano. Cuando consideramos $t = 0$, el hamiltoniano se reduce a $H = UD$, el operador D cuenta el número de sitios doblemente ocupados y es diagonal en la base de Wannier. La contribución del término UD a la energía es positiva para U positiva y aumenta con el número de sitios doblemente ocupados. Esto se puede ver como una repulsión entre electrones. Para U negativa implica atracción en la posición. Por otro lado cuando consideramos $U = 0$ tenemos $\mathcal{H} = -tA = H_0$ al que llamamos hamiltoniano de unión fuerte. Como el hamiltoniano es invariante bajo traslaciones, H_0 puede diagonalizarse con una transformación discreta de Fourier a partir del cual podemos obtener la base de Bloch que genera el espacio de estados de H_0 . En esta base el hamiltoniano H_0 es diagonal y describe una banda de electrones que no interactúan y tiene un ancho de $4t$. Debido a que el hamiltoniano H_0 y el operador D no conmutan el hamiltoniano de Hubbard no es diagonal en la base Bloch ni en la base de Wannier. La física del modelo de Hubbard surge de la competencia entre las dos contribuciones de H_0 y D del hamiltoniano. La contribución de H_0 de unión fuerte hace referencia a los electrones no localizados, en cambio la interacción D favorece la localización. El cociente $u = U/4t$ dado por la contribución relativa de ambos términos modifica al hamiltoniano como $H = -A + 4uD$.

El modelo de Hubbard tiene varias simetrías como: las permutaciones, las simetrías espaciales (o simetrías de polígono), las transformaciones discretas (como el salto de espín y la transformación de Shiba), las simetrías $SO(4)$ de traslaciones y las simetrías Yangianas. Para poder resolver el modelo de Hubbard hacemos una aproximación algebraica, para ello es necesario introducir el álgebra de Yang-Baxter. El método de dispersión inversa trata de generalizar las ideas del teorema de Liouville. El álgebra de Yang-Baxter cumple con los requisitos del teorema de Liouville en el límite clásico (si este existe). La ecuación de Yang-Baxter (YB) (en términos de la matriz R) es una condición suficiente para la consistencia del álgebra de Yang-Baxter. La ecuación de Yang-Baxter es similar a la relación de trenzas.

Para comprobar que las soluciones de la ecuación de YB dan lugar a la representación del álgebra de YB introducimos la matriz L (la representación fundamental). Para entender estas ideas mejor consideramos el modelo XXX. Para encontrar las soluciones del modelo XXX primero consideramos un álgebra apropiada, que nos proporcione una solución de la ecuación de YB sin parámetro espectral, posteriormente introducimos un parámetro espectral y por último aplicamos el formalismo anterior para construir el modelo fundamental correspondiente. El operador de transposición P_{ii+1} es una simetría del modelo XXX. Debido a que es difícil encontrar una R -matriz asociada al

modelo de Hubbard tenemos que construir primero la R-matriz de Shastry del modelo la cual debe satisfacer la ecuación de Yang-Baxter. Antes de construir la R-matriz de Shastry consideramos primero el modelo XX. El modelo XX es el modelo más general de espín 1/2 anisotrópico con interacciones de vecinos próximos, con $J_x = J_y = J/2$ y $J_z = 0$ que se relaciona con el modelo de unión fuerte de los fermiones sin espín mediante una transformación de Jordan-Wigner. El modelo XX tiene un álgebra de fermiones libres Q_{ii+1} .

La R-matriz de Shastry se construye pegando dos copias del modelo XX por medio de la matriz conjugación C , antes de construir la R-matriz de Shastry primero reescribimos la ecuación de Yang-Baxter usando la matriz conjugación C para obtener la ecuación de Yang-Baxter decorada, que es fundamental para obtener R-matriz de Shastry en su forma generalizada (obtenida por Massarani). Para comprender mejor cómo obtener la R-matriz de Shastry en esta tesis calculamos explícitamente la R-matriz de Shastry del modelo XX. Los modelos que contienen fermiones no pueden ser modelos fundamentales, como es el caso del modelo de Hubbard. Para introducir fermiones en la teoría debemos hacer una generalización de los operadores de proyección locales, entonces es necesario introducir espacios vectoriales graduados y álgebras graduadas. El espacio vectorial graduado es un espacio vectorial equipado con la noción de paridad, que nos permite tratar fermiones dentro del formalismo del método de dispersión inversa cuántico. Usando los operadores de proyección locales graduados obtenemos una nueva representación fundamental graduada del álgebra de Yang-Baxter. (i.e. la R-matriz, L-matriz, R-matriz de Shastry, y el hamiltoniano). Como ejemplos consideramos el modelo $su(2)$ -XX y el modelo $su(3)$ -XX.

Hay que notar que el modelo de Hubbard se puede interpretar como un modelo fundamental graduado, entonces es posible obtener: la R-matriz, L-matriz, R-matriz de Shastry, y el hamiltoniano usando la teoría anterior.

Por último hay que notar que hamiltoniano de Hubbard de una línea infinita es invariante bajo la acción de la suma directa de dos grupos cuánticos llamados Yangianos. Un grupo cuántico, matemáticamente hablando es un álgebra de Hopf. Estas álgebras son bialgebras, i.e. son álgebras que contienen un producto, un coproducto y una operación adicional llamada antípoda. Estas se describen en detalle en el capítulo 2. Introducimos dos representaciones de pares de fermiones del grupo cuántico Yangiano $Y(su(2))$ que conmutan con la versión trigonométrica [4] e hiperbólica [5, 6] del hamiltoniano de Hubbard con salto al vecino más próximo. Para construir los generadores de la simetría Yangiana del modelo de Hubbard usamos los operadores de corriente local S_{jk}^0 y S_{jk}^α . Usando los operadores de corriente local S_{jk}^0 y S_{jk}^α reescribimos el hamiltoniano de Hubbard H y definimos un nuevo operador J^α que conmuta con H . Las cargas J^α juegan el papel dentro del modelo de

Hubbard, de las cargas no locales. Ahora tenemos cargas locales correspondientes a las componentes del espín total y no locales, por lo que la condición de curvatura cero va a convertirse en una condición más compleja, a la que llamaremos relación de Yang-Serre. Hay que notar que si combinamos los operadores J^α con los operadores de espín S^α generamos una representación de $Y(su(2))$ Yangiana de Drinfeld [7], la cual satisface la relación de Yang-Serre, y así una simetría Yangiana es un conjunto de cargas locales y no locales que satisfacen la relación de Yang-Serre.

El contenido de la tesis es el siguiente: en el capítulo 2 se desarrolló la idea de integrabilidad mediante la teoría de Liouville en la cual queremos encontrar n cantidades conservadas independientes F_i que no dependen del tiempo y se encuentran en involución ($\{F_i, F_j\} = 0$), observamos que este es el caso de las variables de ángulo acción por lo que desarrollamos algunos ejemplos, como el oscilador armónico 1-dim y el problema de Kepler. Teniendo en mente la idea de cantidades conservadas introducimos el teorema de Noether en forma Lagrangiana y Hamiltoniana. Para completar esta idea calculamos las cantidades conservadas de un campo central en donde el vector de Laplace-Runge-Lenz es el generador de las transformaciones de simetría. Después introducimos la idea de enredamiento y observamos que existe una relación entre la idea de enredamiento y las variables de ángulo acción en el caso oscilador armónico acoplado. Por último incluimos otro método importante para obtener cantidades conservadas los pares de Lax, pero debido a la noción de integrabilidad de Liouville es necesario introducir la estructura de Poisson para que las cantidades conservadas estén en involución, como consecuencia de introducir la estructura de Poisson se genera la matriz r constante. En algunos casos en los pares de Lax dependen de un parámetro espectral, como es el caso del problema de Kepler.

En el capítulo 3 hacemos un pequeño repaso de grupos, semigrupos, monoides, anillos, campos y espacios vectoriales así como de grupos de Lie sus álgebras y representaciones, como por ejemplo el álgebra de Lie de $\mathfrak{sl}(2)$, $\mathbb{H}(3, 1)$ y $\mathfrak{iso}(3, 1)$. También introducimos los grupos de Poisson-Lie con los cuales podemos obtener la ecuación de Yang-Baxter. A partir del álgebra de Lie podemos generar el álgebra universal envolvente correspondiente usando el producto tensorial. Definimos las \mathbb{C} -álgebras y estudiamos las algebra asociadas con unidad, después introducimos las coálgebras y los homeomorfismo que hay entre coálgebras, así como las bialgebras que pueden ser de Hopf en casos especiales. Por último introducimos el álgebra de lazos y las órbitas coadjuntas, las cuales utilizaremos en el siguiente capítulo.

En el capítulo 4 consideramos un sistema con una simetría interna espacio-temporal y usando el teorema de Noether podemos definir una corriente conservada que podemos escribir en términos de los generadores de la simetría,

a partir de la corriente conservada obtenemos la carga conservada. Si consideramos un boost de Lorentz podemos obtener una carga conservada que podemos escribir como una integral bilocal. Al considerar que la corriente además de conservarse satisface la condición de curvatura cero podemos definir una corriente conservada bilocal adicional (corriente a nivel uno) y su correspondiente carga conservada nivel uno. A partir de la condición de curvatura cero y la conservación de la corriente definimos una derivada covariante con la cual construimos un número infinito de cargas no locales conservadas que podemos obtener mediante una función generadora que denotamos como matriz de monodromía. A continuación calculamos la corriente conservada y la corriente axial del modelo quirral de Gross-Neveu el cual tiene una simetría quirral $u(1)$. Existen algunos casos en que las simetrías no-locales se pueden interpretar como simetrías de Noether como es el caso del modelo quirral 2-dim. Usando el álgebra de lazos y la idea de órbitas coadjuntas extendemos la idea de los pares de Lax a la teoría de campos y obtenemos la matriz de monodromía con la cual podemos generar cantidades conservadas. La estructura de los paréntesis de Poisson puede ser ultra local o no ultra local dependiendo de la presencia de las derivadas de la delta de Dirac. Por último resolvemos el caso de solitones usando el método de dispersión inverso clásico.

En el capítulo 5 desarrollamos primero algo de notación para estudiar el hamiltoniano de Hubbard, comenzando con los operadores de creación y aniquilación, el espacio de Wannier y el de Bloch, e introducimos el operador de número de partículas. A continuación estudiamos las simetrías del modelo de Hubbard, como las permutaciones, las simetrías espaciales, las simetrías discretas (como el salto de espín y la transformación de Shiba) y las simetrías $SO(4)$ de rotaciones. Después estudiamos el álgebra y la ecuación de Yang-Baxter en términos de la matriz R e introducimos la matriz L que nos será de utilidad posteriormente, a continuación calculamos la R -matriz, la L -matriz y el hamiltoniano para el modelo XXX . Uno de los métodos para resolver modelos relacionados con el álgebra de Yang-Baxter es el ansatz algebraico de Bethe el cual desarrollamos para el modelo $gl(2)$ generalizado. Posteriormente construimos la R -matriz de Shastry que en algunos casos es necesaria para obtener el resultado, calculamos la R -matriz de Shastry del modelo XX para el caso $d = 2$. A continuación introducimos los operadores de Fermi dentro del esquema usando los operadores de proyección locales graduados, para ello primero tenemos que graduar el espacio vectorial i.e. agregar la noción de paridad en el espacio vectorial, también debemos agregar esta noción a la R -matriz y L -matriz, así como en el hamiltoniano. Desarrollamos algunos ejemplos de la R -matriz, L -matriz y el hamiltoniano equipados con la noción de paridad. Por último estudiamos las simetrías Yangianas del modelo

de Hubbard, así como sus generadores. Por último tenemos un capítulo de conclusiones.

Capítulo 2

Teorías de cantidades conservadas

En este capítulo se discutirá la idea de sistemas integrables en los cuales tenemos cantidades conservadas que se encuentran en involución y pueden ser resueltos por cuadraturas a los que llamamos sistemas integrables de Liouville. Además también podemos obtener cantidades conservadas con el teorema de Noether al considerar transformaciones infinitesimales. Estudiaremos también el enredamiento para el oscilador armónico y su relación con las variables de ángulo acción, y por último introduciremos la idea de pares de Lax.

2.1. Integrabilidad en un sistema clásico

Dentro del formalismo hamiltoniano el estado de un sistema es un punto en el espacio fase (q^μ, p_μ) . Físicamente es un espacio $2n$ -dimensional con coordenadas de posición q^μ y momento p_μ .

Partimos del Lagrangiano $\mathcal{L}(q^\mu, \dot{q}^\mu, t)$ que es la función que contiene toda la información del sistema físico. Consideremos la acción dada por

$$\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{L}, \quad (2.1)$$

cuando aplicamos el principio variacional a la acción obtenemos las siguientes ecuaciones de segundo orden

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\mu} = 0, \quad (2.2)$$

para describir el sistema en término de ecuaciones de primer orden uno realiza una transformación de Legendre para definir el hamiltoniano usando

$$p_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\mu}, \quad (2.3)$$

se tiene

$$H(p_\mu, q^\mu, t) = p_\mu \dot{q}^\mu - \mathcal{L}, \quad (2.4)$$

y sus ecuaciones de movimiento son un sistema de ecuaciones diferenciales a primer orden que tienen la forma:

$$\dot{q}^\mu = \frac{\partial H}{\partial p_\mu}, \quad \dot{p}_\mu = -\frac{\partial H}{\partial q^\mu}, \quad (2.5)$$

donde el punto se refiere a una derivada temporal. A partir de lo anterior cualquier función $F(q, p, t)$ en el espacio fase va ser $F(q(t), p(t), t)$ y cumple:

$$\dot{F} = \frac{dF}{dt} = \{H, F\} + \frac{\partial F}{\partial t}, \quad (2.6)$$

donde para cualquier función F y G los paréntesis de Poisson $\{F, G\}$ están definidos por

$$\{F, G\} \equiv \sum_\mu \frac{\partial F}{\partial p^\mu} \frac{\partial G}{\partial q_\mu} - \frac{\partial G}{\partial p^\mu} \frac{\partial F}{\partial q_\mu}. \quad (2.7)$$

Para las coordenadas p_μ, q^μ tenemos

$$\{q^\mu, q^\nu\} = \{p_\mu, p_\nu\} = 0, \quad \{q^\mu, p_\nu\} = \delta^\mu_\nu, \quad \forall \mu, \nu = 1, \dots, d. \quad (2.8)$$

Proposición 1. *El paréntesis de Poisson satisface las siguientes propiedades:*

$$\{F, G\} = -\{G, F\}, \quad (2.9)$$

$$\{\lambda F_1 + \mu F_2, G\} = \lambda \{F_1, G\} + \mu \{F_2, G\}, \quad (2.10)$$

$$\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0, \quad (2.11)$$

$$\{FG, H\} = F \{G, H\} + \{F, H\} G, \quad (2.12)$$

donde λ, μ son constantes y F, G, H son funciones en el espacio fase.

Cuando el hamiltoniano (2.4) depende del tiempo se sigue de (2.6) que

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (2.13)$$

pero si el hamiltoniano no depende del tiempo

$$\frac{dH}{dt} = 0, \quad (2.14)$$

lo que implica que el movimiento ocurre en la subvariedad del espacio fase definido por $H = E$ constante.

2.1.1. Teoría de Liouville

Consideremos un sistema dinámico hamiltoniano en el espacio fase M $2d$ -dimensional parametrizado por la variables canónicas (q^μ, p_μ) donde $\mu = 1, \dots, d$ y la función Hamiltoniana dada por $H(q^\mu, p_\mu)$. Además, suponemos que las variables canónicas satisfacen los paréntesis de Poisson (2.8). Generalmente la información del paréntesis de Poisson en M no degenerado es equivalente a la información de una 2-forma cerrada no degenerada, $d\omega = 0$, definida en M , llamada 2-forma simpléctica. En un espacio fase $2d$ -dimensional el sistema es integrable de Liouville si se pueden encontrar d cantidades conservadas independientes F_μ , $\mu = 1, \dots, d$ en involución, i.e.

$$\{F_\mu, F_\nu\} = 0, \quad \forall \mu, \nu = 1, \dots, d, \quad (2.15)$$

donde independiente se refiere a un conjunto linealmente independiente de uno formas de dF_μ . Como d es el cantidad máxima de F_μ y debido a que todas se conservan tenemos $\{H, F_\mu\} = 0$, $\forall \mu = 1, \dots, d$ a partir de lo cual concluimos que $H = H(F_\mu)$ i.e. el hamiltoniano en sí mismo es función de las cantidades F_μ .

Teorema 1. *Liouville.* Las ecuaciones de movimiento del sistema integrable de Liouville pueden ser resueltos por cuadraturas.

Demostración. Consideremos la siguiente 1-forma canónica

$$\alpha \equiv \sum_{\mu=1}^d p_\mu dq^\mu, \quad (2.16)$$

y la 2-forma simpléctica en M dada por

$$\omega \equiv d\alpha = \sum_{\mu=1}^d dp_\mu \wedge dq^\mu + p_\mu \wedge d(dq^\mu) = \sum_{\mu=1}^d dp_\mu \wedge dq^\mu, \quad (2.17)$$

en donde utilizamos $d(dq^\mu) = 0$.

Queremos construir una transformación canónica $(p_\mu, q^\mu) \rightarrow (F_\mu, \psi^\mu)$ tal que las cantidades conservadas F_μ sean los nuevos momentos del sistema, es decir

$$\omega \equiv d\alpha = \sum_{\mu=1}^d dp_\mu \wedge dq^\mu = \sum_{\mu=1}^d dF_\mu \wedge d\psi^\mu, \quad (2.18)$$

Si tenemos éxito al hacerlo, las ecuaciones de movimiento van a ser triviales:

$$\begin{aligned} \dot{F}_\mu &= \{H, F_\mu\} = 0, \\ \dot{\psi}^\mu &= \{H, \psi^\mu\} = \frac{\partial H}{\partial F_\mu} = \Omega^\mu, \end{aligned} \quad (2.19)$$

donde Ω^μ depende solo de F y es constante en el tiempo. En estas coordenadas, las soluciones de las ecuaciones de movimiento serán:

$$F_\mu(t) = F_\mu(0), \quad \psi^\mu(t) = \psi^\mu(0) + t \Omega^\mu. \quad (2.20)$$

Para construir esta transformación canónica, necesitamos la llamada función generadora \mathbf{S}^1 . Sea $M_f \equiv \{(q^\mu, p_\mu) \in M | F_\mu(q, p) = f_\mu\}$ la subvariedad d -dimensional, para algunas constantes f_μ , con $\mu = 1, \dots, d$. Supongamos que M_f puede ser resuelto para p_μ , es decir, que $p_\mu = p_\mu(f, q)$ en M_f . Consideremos ahora la función

$$\mathbf{S}(F, q) \equiv \int_C \alpha = \int_{q_0}^q \sum_{\mu=1}^d p_\mu(f, q) dq^\mu, \quad (2.21)$$

donde la trayectoria abierta de C se encuentra dentro de M_f y va del punto $(p(f, q_0), q_0)$ a $(p(f, q), q)$ (donde q_0 es un punto de referencia).

Suponiendo que esta función existe, i.e. si la integral no depende de la trayectoria tenemos que $p_\mu = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial q^\mu}$. Definiendo ψ^μ como

$$\psi^\mu = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial F_\mu}, \quad (2.22)$$

tenemos

$$d\mathbf{S} = \sum_{\mu} (\psi^\mu dF_\mu + p_\mu dq^\mu). \quad (2.23)$$

Como $d^2\mathbf{S} = 0$, deducimos que $\omega \equiv d\alpha = \sum_{\mu=1}^d dp_\mu \wedge dq^\mu = \sum_{\mu=1}^d dF_\mu \wedge d\psi^\mu$. Esto nos dice que si \mathbf{S} es una función bien definida, entonces la transformación es canónica.

Para demostrar que \mathbf{S} existe, debemos probar que la integral no depende de la trayectoria. Usando el teorema de Stokes, vamos a demostrar que:

$$d\alpha|_{M_f} = \omega|_{M_f} = 0. \quad (2.24)$$

Sea X_μ el campo vectorial hamiltoniano asociado a F_μ , definido por $dF_\mu = \omega(X_\mu, \cdot)$,

$$X_\mu = \sum_{\nu=1}^d \left(\frac{\partial F_\mu}{\partial q^\nu} \frac{\partial}{\partial p_\nu} - \frac{\partial F_\mu}{\partial p_\nu} \frac{\partial}{\partial q^\nu} \right). \quad (2.25)$$

Este campo vectorial es tangente a la subvariedad M_f debido a que F_μ se encuentra en involución, i.e.

$$X_\mu(F_\nu) = \{F_\mu, F_\nu\} = 0. \quad (2.26)$$

¹No hay que confundir \mathbf{S} con S (la acción).

Como las F_μ son funciones independientes, el espacio tangente a la subvariedad M_f se genera en cualquier punto $m \in M$ por los vectores $X_\mu|_m$ ($\mu = 1, \dots, d$). Entonces $\omega(X_\mu, X_\nu) = dF_\mu(X_\nu) = 0$ y hemos demostrado que $\omega|_{M_f} = 0$ por lo tanto \mathbf{S} existe. \square

La evolución en las nuevas coordenadas es por lo tanto lineal en el tiempo y puede obtenerse integrando directamente.

2.2. Variables de ángulo acción

La subvariedad M_f definida por la ecuación $F_\mu(q^\nu, p_\nu) = f_\mu$ despliega en general ciclos no-triviales que corresponden a una topología no trivial, por lo tanto, las nuevas coordenadas ψ^μ son en principio multivaluadas. Bajo las condiciones de compacidad y conectividad adecuadas, M_f es isomorfa a un toro T_d d-dimensional.

Tenemos por ejemplo, el oscilador armónico anisotrópico d-dimensional que admite d cantidades conservadas F_μ en involución y cuyo hamiltoniano está dado por

$$H_\mu = {}^2F_\mu = \frac{1}{2}(p_\mu^2 + \omega_\mu^2(q^\mu)^2), \quad (2.27)$$

donde convenientemente consideramos $m = 1$. A partir de la expresión anterior obtenemos $p_\mu = p_\mu(q^\nu, F_\nu)$, que es necesaria para construir \mathbf{S} (de (2.21)) con dos opciones de signo. Consideremos el caso en que la subvariedad M_f es exactamente un ciclo d no trivial C_μ , $\forall \mu = 1, \dots, d$. Las variables de acción está definida por

$$I_\mu = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_\mu} p_\mu dq^\mu. \quad (2.28)$$

Hay que remarcar que no se suma sobre μ , si no que está fijo y depende del ciclo. Además, como $p_\mu = p_\mu(q^\nu, F_\nu)$, I_μ solo depende de las constantes de movimiento F_μ , si suponemos que son independientes, tal que si los valores de I_μ son conocidos, entonces M_f está determinada.

\mathbf{S} es una funcional generadora de tipo 2 i.e. $\mathbf{S}(P_\mu, q^\mu)$. Por lo tanto, podemos considerar a \mathbf{S} en términos de las variables I_μ en lugar de F_μ como

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(I_\mu, q^\mu) \Rightarrow d\mathbf{S} = \sum_\mu \left(\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial I_\mu} dI_\mu + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial q^\mu} dq^\mu \right). \quad (2.29)$$

²Notemos que no es suma, μ está fijo

Denotemos como θ^μ la variable conjugada canónica de la variable de acción I_μ , la transformación canónica generada por \mathbf{S} está definida por

$$p_\mu = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial q_\mu}, \quad \theta^\mu = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial I_\mu}, \quad (2.30)$$

e imponemos

$$\oint_{C_\nu} d\theta_\mu = 2\pi\delta_\mu^\nu, \quad (2.31)$$

es decir, que el cambio de la variable θ_μ en un ciclo C_μ , sea igual a 2π . Entonces tenemos

$$\begin{aligned} d\theta^\nu &= \frac{\partial \theta^\nu}{\partial q^\mu} dq^\mu + \frac{\partial \theta^\nu}{\partial I_\nu} dI_\nu = \frac{\partial \theta^\nu}{\partial q^\mu} dq^\mu = \frac{\partial}{\partial q^\mu} \left(\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial I_\nu} \right) dq^\mu, \\ \oint_{C_\mu} d\theta_\nu &= \oint_{C_\mu} \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial q^\mu \partial I_\nu} dq^\mu = \frac{\partial}{\partial I_\nu} \oint_{C_\mu} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial q^\mu} dq^\mu = \frac{\partial}{\partial I_\nu} \oint_{C_\mu} p_\mu dq^\mu, \end{aligned}$$

en donde usamos que $dI_\mu = 0$ a lo largo del contorno, pues I_μ es constante en M_f , utilizando (2.28) tenemos

$$\oint_{C_\mu} d\theta^\nu = \frac{\partial}{\partial I_\nu} \oint_{C_\mu} p_\mu dq^\mu = 2\pi \frac{\partial}{\partial I_\nu} I_\mu = 2\pi\delta_\mu^\nu, \quad (2.32)$$

lo que demuestra que las variables θ_μ cambian una cantidad 2π a lo largo de su correspondiente ciclo C_μ . Esto muestra que θ_μ es una variable de ángulo parametrizada en un toro de dimensión d .

Consideremos ahora algunos ejemplos.

Oscilador armónico.

El espacio fase es de dimensión dos y el hamiltoniano está dado por

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2), \quad (2.33)$$

con los paréntesis de Poisson $\{q, p\} = 1$. Considerar $H = F$; para calcular la variable de acción I debemos despejar el momento p en función de q , lo que nos da

$$p = \pm \sqrt{2F - \omega^2 q^2}. \quad (2.34)$$

Calculamos ahora la variable de acción

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p dq = \frac{1}{2\pi} \oint \pm \sqrt{2F - \omega^2 q^2} dq. \quad (2.35)$$

Hay que notar que el signo positivo vale para la mitad del ciclo (en el que se incrementa q) y el negativo para la otra mitad (en el que decrece q). Por simetría se puede escribir esto como cuatro veces la integral que va del origen hasta el punto de máxima elongación en la dirección positiva, en este cuarto de ciclo $p > 0$ y por tanto el raíz es positiva

$$I = \frac{4}{2\pi} \int_0^{q_{max}} \sqrt{2F - \omega^2 q^2} dq, \quad (2.36)$$

hacemos el siguiente cambio de variable

$$q = \sqrt{\frac{2F}{\omega^2}} \sin \phi, \quad (2.37)$$

este cambio de variable nos define los límites de integración, reescribimos la integral como

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sqrt{2F - \omega^2 \left(\frac{2F}{\omega^2} \sin^2 \phi \right)} \sqrt{\frac{2F}{\omega^2}} \cos \phi d\phi \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{2F}{\omega} \right) \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 \phi} \cos \phi d\phi = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2F}{\omega} \int_0^{\pi/2} |\cos \phi| \cos \phi d\phi, \end{aligned}$$

en el intervalo $[0, \pi/2]$ tenemos que $|\cos \phi| = \cos \phi$, por lo tanto

$$\begin{aligned} I &= \frac{4F}{\omega\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \phi d\phi = \frac{4F}{\omega\pi} \left[\frac{1}{2} \left(\phi + \frac{\sin(2\phi)}{2} \right) \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{4F}{\omega\pi} \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{F}{\omega}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Si despejamos F tenemos

$$F \equiv H(I) = \omega I, \quad (2.39)$$

entonces la frecuencia de oscilación va estar dada por

$$\nu = \frac{\partial H}{\partial I} = \omega, \quad (2.40)$$

Por otro lado tenemos la variable de ángulo que debe satisfacer

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial I} = \nu(I), \Rightarrow \theta = \nu(I)t + \beta, \quad (2.41)$$

podemos sustituir el resultado que encontramos para ν

$$\theta = \omega t + \beta. \quad (2.42)$$

Con los resultados anteriores podemos reescribir q y p en función de las variables de ángulo acción (I, θ) de la siguiente forma:

$$q = \sqrt{\frac{I}{\omega}} \sin(\theta); \quad p = \sqrt{I\omega} \cos \theta, \quad (2.43)$$

la subvariedad está dada por

$$M_f = \{q = (\rho/\omega) \sin \phi, p = \rho \cos \phi | \rho > 0, \phi \in [0, 2\pi)\}.$$

El problema de Kepler .

Históricamente el problema de Kepler de dos cuerpos fue el primer sistema integrable. En el marco del centro de masa, las ecuaciones de movimiento toman la forma:

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = -\frac{\partial V(r)}{\partial x_i}, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \quad (2.44)$$

En el problema tradicional de Kepler, $V(r) = \beta/r$ (en donde β es una constante negativa), pero vamos a considerar cualquier potencial simétrico $V(r)$. Este es un sistema hamiltoniano con

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 p_i^2 + V(r), \quad (2.45)$$

y el parentesis de Poisson $\{p_i, x_j\} = \delta_{ij}$. El espacio fase es de dimensión 6 por lo tanto tenemos que encontrar tres cargas conservadas conmutativas. Debido a la simetría central, el momento angular

$$\vec{J} = (J_1, J_2, J_3), \quad J_{ij} = x_i p_j - x_j p_i = \epsilon_{ijk} J_k, \quad (2.46)$$

se conserva. ϵ_{ijk} el tensor de Levi Civita totalmente antisimétrico. Las tres componentes J_i se conservan pero no son un conjunto conmutativo de Poisson. Sin embargo, el conjunto $H, J_3 \equiv J_{12}, J^2 \equiv J_3^2 + J_1^2 + J_2^2$ forma un conjunto conmutativo de Poisson. Usando el resultado anterior podemos tomar ventaja de la conservación de \vec{J} y restringir las soluciones al plano perpendicular a \vec{J} donde toma lugar el movimiento. Sin embargo, vamos a demostrar como trabaja el teorema de Liouville, y usaremos sólo las tres cantidades conservadas. Debido a la simetría esférica del problema, es conveniente usar coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) :

$$x_1 = r \sin \theta \cos \phi, \quad x_2 = r \sin \theta \sin \phi, \quad x_3 = r \cos \theta, \quad (2.47)$$

donde $\theta \in [0, \pi]$ es el ángulo polar.

Introducimos el momento conjugado p_r , p_θ , p_ϕ para escribir la una forma canónica $\alpha = \sum p_i dx_i = p_r dr + p_\theta d\theta + p_\phi d\phi$. En estas coordenadas las cantidades conservadas se leen como

$$H = \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + V(r), \quad J^2 = p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta}, \quad J_3 = p_\phi. \quad (2.48)$$

En la superficie M_f correspondiente a los valores fijos de las cantidades conservadas, resolvemos para p en términos de las variables de posición, lo que nos da:

$$p_r = \sqrt{2(H - V(r)) - \frac{J^2}{r^2}}, \quad p_\theta = \sqrt{J^2 - \frac{J_3^2}{\sin^2 \theta}}, \quad p_\phi = J_3. \quad (2.49)$$

Notemos que en M_f , p_r depende solo de r , p_θ de θ y p_ϕ de ϕ (es constante). Las variables r , θ , ϕ son llamadas variables separables. La 1-forma α restringida en M_f es entonces obviamente cerrada. La función \mathbf{S} del teorema de Liouville se lee como:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \int \sum p_\mu dq_\mu = \int (p_r dr + p_\theta d\theta + p_\phi d\phi) \\ &= \int^r \sqrt{2(H - V(r)) - \frac{J^2}{r^2}} dr + \int^\theta \sqrt{J^2 - \frac{J_3^2}{\sin^2 \theta}} d\theta + \int^\phi J_3 d\phi. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Integramos cada una por separado.

$$J_\theta = \oint P_\theta d\theta = \int \sqrt{J^2 - \frac{J_3^2}{\sin^2 \theta}} d\theta = \int \sqrt{J^2 \sin^2 \theta - J_3^2} \frac{d\theta}{\sin^2 \theta}.$$

Haciendo el siguiente cambio de variable $\rho = \sin \theta \Rightarrow d\rho = \cos \theta d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{d\rho}{\cos \theta} = \frac{d\rho}{\sqrt{1-\sin^2 \theta}} \frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}$ tenemos

$$J_\theta = \int \sqrt{J^2 \rho^2 - J_3^2} \frac{1}{\rho \sqrt{1-\rho^2}} d\rho.$$

Observamos que tenemos un polo en $\rho = 0$, cuyo residuo es

$$\text{Res}(\rho = 0) = 2\pi i \frac{\sqrt{-J_3^2}}{\sqrt{1}} = 2\pi i^2 |J_3| = -2\pi J_3. \quad (2.51)$$

Ahora buscamos los polos en el infinito, para ello hacemos el siguiente cambio de variable $\rho = 1/z \Rightarrow d\rho = -1/z^2 dz$ y reescribimos la integral como

$$\begin{aligned} J_\theta &= \int \sqrt{J^2 \frac{1}{z^2} - J_3^2 \frac{z}{\sqrt{1 - (1/z)^2}}} \left(-\frac{dz}{z^2} \right) = - \int \sqrt{\frac{J^2}{z^2} - J_3^2 \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}}} \\ &= - \int \sqrt{J^2 - J_3^2 z^2} \frac{1}{z^2} \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}}. \end{aligned}$$

Tenemos un polo en $z = 0$ y el residuo está dado por

$$Res(z = 0) = -(-)2\pi i \frac{\sqrt{J^2}}{\sqrt{-1}} = 2\pi J. \quad (2.52)$$

Cerramos los polos reales en el sentido horario y los polos imaginarios en el sentido antihorario. Por último, sumamos ambos polos para obtener el resultado

$$J_\theta = Res(\rho = 0) + Res(z = 0) = 2\pi J - 2\pi J_z = 2\pi(J - J_3). \quad (2.53)$$

Para J_r tenemos

$$\begin{aligned} J_r &= \int \sqrt{2(H - V) - \frac{J^2}{r^2}} dr = \int \sqrt{2r^2(H - V) - J^2} \frac{dr}{r} \\ &= \int \sqrt{2r^2 H - 2\beta r - J^2} \frac{dr}{r}. \end{aligned}$$

Tenemos un polo en $r = 0$, cuyo residuo es

$$Res(r = 0) = 2\pi i \sqrt{-J^2} = -2\pi J. \quad (2.54)$$

Calculamos la raíz en el infinito haciendo $r = 1/z \Rightarrow dr = -1/z^2 dz$, reescribimos la integral como

$$\begin{aligned} J_r &= \int \sqrt{2r^2 H - 2\beta r - J^2} \frac{dr}{r} = \int \sqrt{2(1/z)^2 H - 2\beta(1/z) - J^2} z \left(-\frac{dz}{z^2} \right) \\ &= - \int \sqrt{2H - 2\beta z - J^2 z^2} \frac{dz}{z^2}. \end{aligned}$$

Tenemos un polo doble en $z = 0$, cuyo residuo es

$$\begin{aligned} Res(z = 0) &= -(-2\pi i) f'(z = 0)/1! = 2\pi i (-) \frac{1}{2} \frac{-2\beta - J^2 z}{\sqrt{2H - 2\beta z - J^2 z^2}} \Big|_{z=0} \\ &= 2\pi i \frac{\beta}{\sqrt{2H}}, \end{aligned} \quad (2.55)$$

en donde $f(z) = \sqrt{2H - 2\beta z - J^2 z^2}$, entonces

$$J_r = \int \sqrt{2(H - V) - \frac{J^2}{r^2}} dr = 2\pi i J + 2\pi i \frac{\beta}{\sqrt{2H}}.$$

Por último

$$J_\phi = \int d\phi J_3 = J_3 \pi. \quad (2.56)$$

Utilizando los resultados anteriores tenemos

$$S = J_\theta + J_r + J_\phi = 2\pi(J - J_3) + 2\pi i J + 2\pi i \frac{\beta}{\sqrt{2H}} + J_3 2\pi. \quad (2.57)$$

Las variables de ángulo correspondientes a nuestras variables de acción están dadas por

$$\psi_H = \frac{\partial S}{\partial H}, \quad \psi_{J^2} = \frac{\partial S}{\partial J^2}, \quad \psi_{J_3} = \frac{\partial S}{\partial J_3}. \quad (2.58)$$

y tenemos una evolución temporal con las frecuencias respectivas $(1, 0, 0)$ por la ecuación (2.19). Por lo tanto ψ_{J^2} y ψ_{J_3} permanecen constantes, mientras que $\psi_H = t - t_0$. Esto nos da la fórmula estándar para el movimiento de Kepler

$$t - t_0 = \int^r \frac{dr}{\sqrt{2(H - V(r)) - \frac{J^2}{r^2}}} \quad (2.59)$$

Notemos que la constancia de ψ_{J_3} implica:

$$\dot{\phi} = \frac{J_3}{\sin^2 \theta \sqrt{J^2 - \frac{J_3^2}{\sin^2 \theta}}} \dot{\theta}. \quad (2.60)$$

Esto, a su vez, implica la conservación de J_1 , J_2 :

$$\begin{aligned} J_1 &= -J_3 \cot \theta \cos \phi - \sin \phi \sqrt{J^2 - \frac{J_3^2}{\sin^2 \theta}}, \\ J_2 &= -J_3 \cot \theta \cos \phi - \cos \phi \sqrt{J^2 - \frac{J_3^2}{\sin^2 \theta}}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

tal que el movimiento toma lugar en el plano perpendicular a \vec{J} , como esperábamos. Vale la pena notar que el enfoque actual es el que prevalece en la mecánica cuántica, donde los tres componentes de \vec{J} no se pueden medir simultáneamente.

Como ya vimos existen más cantidades conservadas aparte J^2 , J_3 y H , las cuales son: J_x , J_y y el vector Laplace-Runge-Lenz.

$$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{J} + m\beta\hat{r}, \quad (2.62)$$

dónde \hat{r} es el vector unitario en la dirección radial. El número total de cantidades conservadas independientes está dado por $d + m$, donde $0 < m < d - 1$ llamamos al sistema super-integrable. Cuando $m = d - 1$ lo llamamos sistema máximo super integrable. En el caso del problema de Kepler, tenemos 8 cantidades conservadas E , J^2 , \vec{J} y \vec{A} , sin embargo, solo 5 son independientes y tenemos 3 relaciones

$$J^2 = \sum_{\mu=1}^3 J_{\mu}^2, \quad \vec{A} \cdot \vec{J} = 0, \quad A^2 = m^2\beta^2 + 2mEJ^2, \quad (2.63)$$

entonces es máximo super integrable pues $d = 3$.

En la siguiente sección mostraremos como encontrar las cantidades conservadas si conocemos las transformaciones que las generan.

2.3. Teorema de Noether

En esta sección se describe el teorema de Noether para el caso de teoría de campos. Los resultados son plenamente aplicables al caso de mecánica clásica tomando en cuenta la siguiente tabla

Consideremos la variación total de la acción para la teoría Clásica de Campos

$$\delta\mathcal{S} = \delta \int_{x_i}^{x_f} d^d x \mathcal{L}(\partial_{\mu}\psi_A, \psi_A, x^{\mu}), \quad (2.64)$$

y pedimos que

$$\delta\mathcal{S} = - \int_{x_i}^{x_f} d^d x \partial_{\mu}\delta\Omega^{\mu}. \quad (2.65)$$

Para calcular la variación total de la acción primero tenemos que hacer una variación total de la densidad Lagrangiana y del intervalo de integración.

Variamos la densidad Lagrangiana.

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}'(x') - \mathcal{L}(x), \quad (2.66)$$

escribimos la variación total usando la variación virtual.

La variación virtual satisface:

$$\tilde{\delta}x^{\mu} = 0. \quad (2.67)$$

	Mecánica Clásica	Teoría Clásica de Campos
	$q^a(t)$	$\Phi^A(t, \vec{x})$
Dimensión	$1 + 0$	$1 + d$
Parámetros	t	$x^\mu = (x^0, \vec{x}) = (ct, \vec{x})$
	$\dot{q}^a(t) = \frac{dq^a}{dt}$	$\frac{\partial \Phi^A}{\partial x^\mu} = \partial_\mu \Phi^A = \Phi^A_{,\mu}$
Lagrangiano	$L(q, \dot{q}, t)$	$L = \int dx^3 \mathcal{L}(\Phi^A, \partial \Phi^A, x^\mu)$
Momento	$P_a(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}$	$\Pi_A = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \Phi^A} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}^A}$
Acción	$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}, t)$	$S = \int_{x_1}^{x_2} dx^{d+1} \mathcal{L}(\Phi^A, \partial \Phi^A, x^\mu)$
Variaciones Virtuales	$\tilde{\delta} q^a = q'^a(t) - q^a(t)$	$\tilde{\delta} \Phi^A = \Phi'^A(x) - \Phi^A(x)$
	$\frac{d}{dt} \tilde{\delta} q^a = \tilde{\delta} \frac{dq^a}{dt}$	$\partial_\mu \tilde{\delta} \Phi^A = \tilde{\delta} \partial_\mu \Phi^A$
Variaciones Reales	$\delta q^a = q'^a(t') - q^a(t)$	$\delta \Phi^A = \Phi'^A(x') - \Phi^A(x)$

Entonces para $\tilde{\delta} \psi_A$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\tilde{\delta} \psi_A &= \psi'_A(x) - \psi_A(x) = \psi'_A(x) - \psi'_A(x') + \psi'_A(x') - \psi_A(x) \\
&= \psi'_A(x) - \psi'_A(x + \delta x) + \delta \psi_A \\
&= \psi'_A(x) - \psi'_A(x) - \delta x^\mu \partial_\mu \psi_A(x) + \delta \psi_A. \\
&\Rightarrow \tilde{\delta} \psi_A = \delta \psi_A - \delta x^\mu \partial_\mu \psi_A(x). \tag{2.68}
\end{aligned}$$

Para $\tilde{\delta} \partial_\mu \psi_A$ tenemos

$$\begin{aligned}
\tilde{\delta} \partial_\mu \psi_A &= \partial_\mu \psi'_A(x) - \partial_\mu \psi_A(x) \\
&= \partial_\mu \psi'_A(x) - \partial_\mu \psi'_A(x') + \partial_\mu \psi'_A(x') - \partial_\mu \psi_A(x) \\
&= \partial_\mu \psi'_A(x) - \partial_\mu \psi'_A(x + \delta x) + \delta \partial_\mu \psi_A \\
&= \partial_\mu \psi'_A(x) - \partial_\mu \psi'_A(x) - \delta x^\nu \partial_\nu \partial_\mu \psi_A(x) + \delta \partial_\mu \psi_A. \\
&\tilde{\delta} \partial_\mu \psi_A = \delta \partial_\mu \psi_A - \delta x^\nu \partial_\nu \partial_\mu \psi_A(x). \tag{2.69}
\end{aligned}$$

A partir de los resultados anteriores concluimos que:

$$\tilde{\delta} \mathcal{L} = \delta \mathcal{L} - \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L}, \tag{2.70}$$

podemos reescribir (2.64) como:

$$\delta \mathcal{S} = \int_{\Omega'} d^d x' \mathcal{L}'(x') - \int_{\Omega} d^d x \mathcal{L}(x). \tag{2.71}$$

Notemos lo siguiente

$$d^d x' = \left| \frac{\partial x'_\mu}{\partial x^\nu} \right| d^d x = \left| \frac{\partial(x^\mu + \delta x^\mu)}{\partial x^\nu} \right| d^d x = \left| \delta_\nu^\mu + \frac{\partial(\delta x^\mu)}{\partial x^\nu} \right| d^d x.$$

Calculamos el Jacobiano a primer orden.

$$\left| \delta_\nu^\mu + \frac{\partial(\delta x^\mu)}{\partial x^\nu} \right| = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial(\delta x^0)}{\partial x^0} & \frac{\partial(\delta x^0)}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial(\delta x^0)}{\partial x^{d-1}} \\ \frac{\partial(\delta x^1)}{\partial x^0} & 1 + \frac{\partial(\delta x^1)}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial(\delta x^1)}{\partial x^{d-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial(\delta x^{d-1})}{\partial x^0} & \frac{\partial(\delta x^{d-1})}{\partial x^1} & \cdots & 1 + \frac{\partial(\delta x^{d-1})}{\partial x^{d-1}} \end{vmatrix} = 1 + \frac{\partial(\delta x^\mu)}{\partial x^\mu}. \quad (2.72)$$

Utilizando el resultado anterior tenemos:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{S} &= \int_{\Omega} \left(1 + \frac{\partial(\delta x^\mu)}{\partial x^\mu} \right) d^d x (\delta \mathcal{L} + \mathcal{L}(x)) - \int_{\Omega} d^d x \mathcal{L}(x) \\ &= \int_{\Omega} d^d x \left(\delta \mathcal{L} + \mathcal{L}(x) \frac{\partial(\delta x^\mu)}{\partial x^\mu} \right) \\ &= \int_{\Omega} d^d x \left(\tilde{\delta} \mathcal{L} + \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L} + \partial_\mu (\delta x^\mu) \mathcal{L}(x) \right) \\ &= \int_{\Omega} d^d x \left(\tilde{\delta} \mathcal{L} + \partial_\mu (\delta x^\mu \cdot \mathcal{L}) \right). \end{aligned} \quad (2.73)$$

Desarrollamos $\tilde{\delta} \mathcal{L}$

$$\begin{aligned} \tilde{\delta} \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_A} \tilde{\delta} \psi_A + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi_A} \tilde{\delta} \partial_\mu \psi_A \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_A} \tilde{\delta} \psi_A + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi_A} \tilde{\delta} \psi_A \right) - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi_A} \right) \tilde{\delta} \psi_A. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Sustituimos (2.74) en (2.73)

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{S} &= \int_{\Omega} d^d x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_A} \tilde{\delta} \psi_A + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi_A} \tilde{\delta} \psi_A \right) - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi_A} \right) \tilde{\delta} \psi_A + \partial_\mu (\delta x^\mu \cdot \mathcal{L}) \right) \\ &= \int_{\Omega} d^d x \left(\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_A} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi_A} \right) \right] \tilde{\delta} \psi_A + \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi_A} \tilde{\delta} \psi_A + \delta x^\mu \cdot \mathcal{L} \right] \right). \end{aligned}$$

Si suponemos que las ecuaciones de Euler-Lagrange son válidas i.e.

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_A} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi_A} \right) = 0$, solo nos queda

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{S} &= \int_\Omega d^d x \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi_A} \tilde{\delta} \psi_A + \delta x^\mu \cdot \mathcal{L} \right) \\ &= \int_\Omega d^d x \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi_A} \delta \psi_A - \left(\delta x^\nu \partial_\nu \psi_A \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi_A} + \delta x^\nu \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \right) \right) \quad (2.75) \\ &= \int_\Omega d^d x \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi_A} \delta \psi_A - \delta x^\nu \left(\partial_\nu \psi_A \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi_A} - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \right) \right). \end{aligned}$$

Comparando esta expresión con su correspondiente en Mecánica Clásica podemos definir:

$$\Pi_{\mu A} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi_A}, \quad (2.76)$$

$$T_\nu^\mu = \partial_\nu \psi_A \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi_A} - \delta_\nu^\mu \mathcal{L}, \quad (2.77)$$

donde $\Pi_{\mu A}$ es como un momento y T_ν^μ el tensor de energía-momento. El Teorema de Noether establece que la invariancia de la acción bajo traslaciones espacio-temporales (δx^ν) da lugar a la ecuación de continuidad $\partial_\mu T_\nu^\mu = 0$.

Al principio impusimos una condición sobre $\delta \mathcal{S}$, igualando (2.75) con (2.65),

$$\begin{aligned} \int_\Omega d^d x \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi_A} \delta \psi_A - \delta x^\nu \left(\partial_\nu \psi_A \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi_A} - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \right) \right) &= - \int_\Omega d^d x \partial_\mu \delta \Omega^\mu, \\ \Rightarrow \int_\Omega d^d x \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi_A} \delta \psi_A - \delta x^\nu \left(\partial_\nu \psi_A \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi_A} - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \right) + \delta \Omega^\mu \right) &= 0. \end{aligned}$$

Definimos la corriente J^μ como

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi_A} \delta \psi_A - \delta x^\nu \left(\partial_\nu \psi_A \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi_A} - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \right) + \delta \Omega^\mu, \quad (2.78)$$

entonces tenemos

$$\int_\Omega d^d x \partial_\mu J^\mu = 0 \Rightarrow \partial_\mu J^\mu = 0. \quad (2.79)$$

En el caso de mecánica clásica esta corriente se reduce a la carga conservada

$$Q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\mu} \delta q^\mu - \delta t \left(\partial_\nu \psi_A \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\mu} q^\mu - \mathcal{L} \right) + \delta \Omega \quad (2.80)$$

Consideremos ahora una transformación canónica que preserve los paréntesis de Poisson básicos en términos de las variables originales (q, p) ,

$$\{Q^\mu, P_\nu\}_{(q,p)} = \delta_\nu^\mu, \quad \{Q^\mu, Q^\nu\}_{(q,p)} = 0, \quad \{P_\mu, P_\nu\}_{(q,p)} = 0. \quad (2.81)$$

En general, esta transformación canónica se obtienen a partir de una funcional generadora que escogemos de tipo dos $F_2(q, P, t)$ y en términos de esta escribimos la transformación identidad

$$F_2 = q^\mu P_\mu \quad (2.82)$$

tal que

$$p_\mu = \frac{\partial F_2}{\partial q^\mu} = P_\mu, \quad \text{y} \quad Q^\mu = \frac{\partial F_2}{\partial P_\mu} = q^\mu. \quad (2.83)$$

Basándonos en los resultados anteriores construimos las transformaciones canónicas infinitesimales a partir de

$$F_2 = q^\mu P_\mu + G(q, P, t), \quad (2.84)$$

donde $G = \epsilon^j G_j$. Usando (2.84) calculamos Q^ν y p_ν ,

$$Q^\nu = \frac{\partial F_2}{\partial P_\nu} = q^\nu + \frac{\partial G}{\partial P_\nu}, \quad (2.85)$$

$$p_\nu = \frac{\partial F_2}{\partial q^\nu} = P_\nu + \frac{\partial G}{\partial q^\nu}, \Rightarrow P_\nu = p_\nu - \frac{\partial G}{\partial q^\nu} \quad (2.86)$$

Notemos que si tomamos el valor de P_ν dado en (2.86) y lo sustituimos en (2.85) vamos a tener un término de orden dos en ϵ , como sólo contribuyen los términos a primer orden en ϵ la ecuación (2.85) se reduce a

$$Q^\nu = q^\nu + \frac{\partial G}{\partial p_\nu}, \quad (2.87)$$

Podemos reescribir (2.87) y (2.86) como ³

$$\begin{aligned} Q^\nu &= q^\nu + \{q^\nu, G\}, \\ P_\nu &= p_\nu + \{p_\nu, G\}. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Por otro lado, sabemos que el hamiltoniano bajo una transformación canónica se transforma como

$$K(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t}, \quad (2.89)$$

si consideramos la transformación dada por (2.88) obtenemos

$$K(q^\nu + \{q^\nu, G\}, p_\nu + \{p_\nu, G\}, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t}, \quad (2.90)$$

³esto se debe a que $\frac{\partial q^\nu}{\partial p_\mu} = 0 = \frac{\partial p_\nu}{\partial q^\mu}$ y $\frac{\partial q^\nu}{\partial q^\mu} = \delta^{\nu\mu}$, $\frac{\partial p_\nu}{\partial p_\mu} = \delta_{\nu\mu}$.

desarrollando encontramos

$$\begin{aligned} H(q^\nu, p_\nu, t) + \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} \frac{\partial G}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \frac{\partial G}{\partial q^\alpha} &= H(q, p, t) + \frac{\partial G}{\partial t}, \\ \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \frac{\partial G}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} \frac{\partial G}{\partial p_\alpha} + \frac{\partial G}{\partial t} &= 0, \\ \frac{dG}{dt} = \{G, H\} + \frac{\partial G}{\partial t} &= 0, \end{aligned} \quad (2.91)$$

donde usamos $K(q^\nu, p_\nu, t) = H(q^\nu, p_\nu, t)$; concluimos que G es una cantidad conservada y genera las transformaciones de simetría dentro del teorema de Noether

$$\begin{aligned} \delta q^\nu &= Q^\nu - q^\nu = \{q^\nu, G\}, \\ \delta p_\nu &= P_\nu - p_\nu = \{p_\nu, G\}, \end{aligned} \quad (2.92)$$

además estas transformaciones generan una órbita en nuestro espacio de soluciones.

Ejemplo

Consideremos un campo central, con el siguiente Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{\beta}{r}. \quad (2.93)$$

Vamos a demostrar que si aplicamos una transformación canónica infinitesimal de la forma

$$\begin{aligned} Q^\mu &= q^\mu + \{q^\mu, \epsilon^j G_j\} \Rightarrow \delta q^\mu = Q^\mu - q^\mu = \{q^\mu, \epsilon^j G_j\}, \\ &\Rightarrow \delta p^\mu = Q^\mu - q^\mu = \{p^\mu, \epsilon^j G_j\}, \end{aligned} \quad (2.94)$$

y el vector de Laplace-Runge-Lenz \vec{A} será el generador de la transformación. Vamos a comprobar si \mathcal{L} es invariante bajo la transformación (2.94) i.e.

$$\delta \mathcal{L} = 0 \quad \text{ó} \quad \delta \mathcal{L} = \frac{d\delta\Omega}{dt} \quad (2.95)$$

en donde $\delta\Omega$ es una cantidad conservada.

Para reescribir \mathcal{L} en términos de los momentos, calculamos

$$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \dot{x}, \quad p_y = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = \dot{y}, \quad p_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = \dot{z}. \quad (2.96)$$

El hamiltoniano va ser

$$\begin{aligned} H &= \dot{q}^\mu p_\mu - \mathcal{L} = \dot{x}p_x + \dot{y}p_y + \dot{z}p_z - \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{\beta}{r} \\ &= \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{\beta}{r}, \end{aligned} \quad (2.97)$$

y sus correspondientes ecuaciones canónicas son

$$\begin{aligned} -\dot{p}_x &= \frac{\partial H}{\partial x} = -\beta \frac{x}{r^3}, & -\dot{p}_y &= \frac{\partial H}{\partial y} = -\beta \frac{y}{r^3}, & -\dot{p}_z &= \frac{\partial H}{\partial z} = -\beta \frac{z}{r^3}, \\ \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} = p_x, & \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial p_y} = p_y, & \dot{z} &= \frac{\partial H}{\partial p_z} = p_z. \end{aligned}$$

Tenemos que reescribir \vec{A} en términos de p_x , p_y y p_z , consideramos $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \vec{p} \times \vec{J} + \beta \hat{r} = \dot{\vec{r}} \times (\vec{r} \times \vec{p}) + \beta \hat{r} = \dot{\vec{r}} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) + \beta \hat{r} \\ &= (\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}})\vec{r} - (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r})\dot{\vec{r}} + \beta \frac{\vec{r}}{r} = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \\ &\quad - (x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z})(\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}) + \beta \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ &= \left[(p_y^2 + p_z^2)x - (yp_y + zp_z)p_x + \beta \frac{x}{r} \right] \hat{i} + \left[(p_x^2 + p_z^2)y - (xp_x + zp_z)p_y + \beta \frac{y}{r} \right] \hat{j} \\ &\quad + \left[(p_x^2 + p_y^2)z - (xp_x + yp_y)p_z + \beta \frac{z}{r} \right] \hat{k}. \end{aligned} \tag{2.98}$$

Antes de utilizar el valor obtenido de \vec{A} tenemos que comprobar que es una cantidad conservada i.e. $\dot{\vec{A}} = 0$.

$$\begin{aligned} \dot{\vec{A}} &= \left[(2p_y\dot{p}_y + 2p_z\dot{p}_z)x - (\dot{y}p_y + y\dot{p}_y + \dot{z}p_z + zp_z\dot{p}_z)p_x + \beta \frac{\dot{x}}{r} + (p_y^2 + p_z^2)\dot{x} \right. \\ &\quad \left. - (yp_y + zp_z)\dot{p}_x - \beta \frac{x}{r^3}(x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}) \right] \hat{i} + \left[(2p_x\dot{p}_x + 2p_z\dot{p}_z)y + (p_x^2 + p_z^2)\dot{y} \right. \\ &\quad \left. - (xp_x + x\dot{p}_x + \dot{z}p_z + zp_z\dot{p}_z)p_y - (xp_x + zp_z)\dot{p}_y + \beta \frac{\dot{y}}{r} - \beta \frac{y}{r^3}(x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}) \right] \hat{j} \\ &\quad + \left[(2p_x\dot{p}_x + 2p_y\dot{p}_y)z + (p_x^2 + p_y^2)\dot{z} - (\dot{x}p_x + x\dot{p}_x + \dot{y}p_y + yp_y\dot{p}_z) \right. \\ &\quad \left. - (xp_x + yp_y)\dot{p}_z + \beta \frac{\dot{z}}{r} - \beta \frac{z}{r^3}(x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}) \right] \hat{k} \\ &= \left[-\frac{\beta}{r^3}(x^2 + y^2 + z^2)p_x + \beta \frac{p_x}{r} \right] \hat{i} + \left[-\frac{\beta}{r^3}(x^2 + y^2 + z^2)p_y + \beta \frac{p_y}{r} \right] \hat{j} \\ &\quad + \left[-\frac{\beta}{r^3}(x^2 + y^2 + z^2)p_z + \beta \frac{p_z}{r} \right] \hat{k} \\ &= \left[-\frac{\beta}{r}p_x + \beta \frac{p_x}{r} \right] \hat{i} + \left[-\frac{\beta}{r}p_y + \beta \frac{p_y}{r} \right] \hat{j} + \left[-\frac{\beta}{r}p_z + \beta \frac{p_z}{r} \right] \hat{k} = 0. \end{aligned}$$

Para comprobar que la acción es invariante con la simetría (2.94) usando el teorema de Noether tenemos que calcular las transformaciones δp_ν y δq^ν

generadas por \vec{A} .

$$\begin{aligned}\delta q^\nu &= Q^\nu - q^\nu = \{q^\nu, \epsilon^j A_j\} = \{q^\nu, \epsilon_x A_x + \epsilon_y A_y + \epsilon_z A_z\} \\ &= \left\{ q^\nu, \epsilon_x \left[(p_y^2 + p_z^2)x - (yp_y + zp_z)p_x + \beta \frac{x}{r} \right] + \epsilon_y \left[(p_x^2 + p_z^2)y \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (xp_x + zp_z)p_y + \beta \frac{y}{r} \right] + \epsilon_z \left[(p_x^2 + p_y^2)z - (xp_x + yp_y)p_z + \beta \frac{z}{r} \right] \right\}.\end{aligned}$$

Para simplificar denotamos $G = \epsilon_j A_j = \epsilon_x \left[(p_y^2 + p_z^2)x - (yp_y + zp_z)p_x + \beta \frac{x}{r} \right] + \epsilon_y \left[(p_x^2 + p_z^2)y - (xp_x + zp_z)p_y + \beta \frac{y}{r} \right] + \epsilon_z \left[(p_x^2 + p_y^2)z - (xp_x + yp_y)p_z + \beta \frac{z}{r} \right]$, vamos a tener

$$\begin{aligned}\delta x &= \{x, G\} = \epsilon_x [-(yp_y + zp_z)] + \epsilon_y [2p_x y - xp_y] + \epsilon_z [2p_x z - xp_z], \\ \delta y &= \{y, G\} = \epsilon_x [2p_y x - yp_x] + \epsilon_y [-(xp_x + zp_z)] + \epsilon_z [2p_y z - yp_z], \\ \delta z &= \{z, G\} = \epsilon_x [2p_z x - zp_x] + \epsilon_y [2p_z y - zp_y] + \epsilon_z [-(xp_x + yp_y)],\end{aligned}\quad (2.99)$$

$$\begin{aligned}\delta p_x &= \{p_x, G\} \\ &= - \left\{ \epsilon_x \left[p_y^2 + p_z^2 + \beta \frac{1}{r} - \beta \frac{x^2}{r^3} \right] - \epsilon_y \left[p_x p_y + \beta \frac{xy}{r^3} \right] - \epsilon_z \left[p_x p_z + \beta \frac{zx}{r^3} \right] \right\}, \\ \delta p_y &= \{p_y, G\} \\ &= - \left\{ -\epsilon_x \left[p_y p_x + \beta \frac{xy}{r^3} \right] + \epsilon_y \left[p_x^2 + p_z^2 + \beta \frac{1}{r} - \beta \frac{y^2}{r^3} \right] - \epsilon_z \left[p_y p_z + \beta \frac{zy}{r^3} \right] \right\}, \\ \delta p_z &= \{p_z, G\} \\ &= - \left\{ -\epsilon_x \left[p_z p_x + \beta \frac{xz}{r^3} \right] - \epsilon_y \left[p_z p_y + \beta \frac{yz}{r^3} \right] + \epsilon_z \left[p_x^2 + p_y^2 + \beta \frac{1}{r} - \beta \frac{z^2}{r^3} \right] \right\}.\end{aligned}\quad (2.100)$$

Antes de calcular $\delta \mathcal{L}$ vamos a comprobar que $\frac{d}{dt} \delta q^\mu = \delta \dot{q}^\mu = \delta p_\mu$.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \delta x &= \delta \dot{x}^\mu = -\epsilon_x [\dot{y}p_y + y\dot{p}_y + \dot{z}p_z + z\dot{p}_z] + \epsilon_y [2\dot{p}_x y + 2p_x \dot{y} - \dot{x}p_y - xp_y] \\ &\quad + \epsilon_z [2\dot{p}_x z + 2p_x \dot{z} - \dot{x}p_z - xp_z] \\ &= -\epsilon_x \left[p_y^2 + p_z^2 + \frac{\beta}{r} - \frac{\beta x^2}{r^3} \right] + \epsilon_y \left[\frac{\beta}{r^3} xy + p_x p_y \right] + \epsilon_z \left[\frac{\beta}{r^3} xz + p_x p_z \right] \\ &= \delta p_x.\end{aligned}$$

Para $\frac{d}{dt} \delta y = \delta \dot{y} = \delta p_y$ y $\frac{d}{dt} \delta z = \delta \dot{z} = \delta p_z$ tenemos un desarrollo similar. Calculemos ahora la variación de \mathcal{L} para comprobar si $\delta \mathcal{L} = 0$ o tenemos

alguna derivada total.

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} &= \dot{x}\delta\dot{x} + \dot{y}^2\delta\dot{y} + \dot{z}\delta\dot{z} + \beta\frac{1}{r^3}(x\delta x + y\delta y + z\delta z) \\
&= -p_x \left\{ \epsilon_x \left[p_y^2 + p_z^2 + \beta\frac{1}{r} - \beta\frac{x^2}{r^3} \right] + \epsilon_y \left[-p_x p_y - \beta\frac{xy}{r^3} \right] + \epsilon_z \left[-p_x p_z - \beta\frac{zx}{r^3} \right] \right\} \\
&\quad - p_y \left\{ \epsilon_x \left[-p_y p_x - \beta\frac{xy}{r^3} \right] + \epsilon_y \left[p_x^2 + p_z^2 + \beta\frac{1}{r} - \beta\frac{y^2}{r^3} \right] + \epsilon_z \left[-p_y p_z - \beta\frac{zy}{r^3} \right] \right\} \\
&\quad - p_z \left\{ \epsilon_x \left[-p_z p_x - \beta\frac{xz}{r^3} \right] + \epsilon_y \left[-p_z p_y - \beta\frac{yz}{r^3} \right] + \epsilon_z \left[p_x^2 + p_y^2 + \beta\frac{1}{r} - \beta\frac{z^2}{r^3} \right] \right\} \\
&\quad + \beta\frac{1}{r^3} \left\{ x\epsilon_x [-(yp_y + zp_z)] + x\epsilon_y [2p_x y - xp_y] + x\epsilon_z [2p_x z - xp_z] \right. \\
&\quad + y\epsilon_x [2p_y x - yp_x] + y\epsilon_y [-(xp_x + zp_z)] + y\epsilon_z [2p_y z - yp_z] \\
&\quad \left. + z\epsilon_x [2p_z x - zp_x] + z\epsilon_y [2p_z y - zp_y] + z\epsilon_z [-(xp_x + yp_y)] \right\} \\
&= \epsilon_x \left[-\frac{2\beta}{r}\dot{x} + \frac{\beta 2x}{r^3}(x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}) \right] + \epsilon_y \left[-\frac{2\beta}{r}\dot{y} + \frac{\beta 2y}{r^3}(x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}) \right] \\
&\quad + \epsilon_y \left[-\frac{2\beta}{r}\dot{z} + \frac{\beta 2z}{r^3}(x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}) \right] \\
&= \epsilon_x \frac{d}{dt} \left(-2\beta\frac{x}{r} \right) + \epsilon_y \frac{d}{dt} \left(-2\beta\frac{y}{r} \right) + \epsilon_z \frac{d}{dt} \left(-2\beta\frac{z}{r} \right) \\
&= \frac{d}{dt}\delta\Omega_x + \frac{d}{dt}\delta\Omega_y + \frac{d}{dt}\delta\Omega_z.
\end{aligned} \tag{2.101}$$

consideramos $\delta\Omega_x = -\epsilon_x 2\beta\frac{x}{r}$, $\delta\Omega_y = -\epsilon_y 2\beta\frac{y}{r}$ y $\delta\Omega_z = -\epsilon_z 2\beta\frac{z}{r}$. Concluimos que tiene una derivada total.

Ahora queremos ver si podemos obtener la cantidad conservada \vec{A} usando los valores de $\delta\Omega_j$ encontrados arriba,

$$\begin{aligned}
\vec{A} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\delta x + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}}\delta y + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{z}}\delta z + \delta\Omega_x + \delta\Omega_y + \delta\Omega_z \\
&= p_x \{ -\epsilon_x [yp_y + zp_z] + \epsilon_y [2p_x y - xp_y] + \epsilon_z [2p_x z - xp_z] \} \\
&\quad + p_y \{ \epsilon_x [2p_y x - yp_x] + \epsilon_y [-(xp_x + zp_z)] + \epsilon_z [2p_y z - yp_z] \} \\
&\quad + p_z \{ \epsilon_x [2p_z x - zp_x] + \epsilon_y [2p_z y - zp_y] + \epsilon_z [-(xp_x + yp_y)] \} \\
&\quad - 2\beta \left(\epsilon_x \frac{x}{r} + \epsilon_y \beta \frac{y}{r} + \epsilon_z \frac{z}{r} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{A} = & \epsilon_x \left\{ 2(p_y^2 + p_z^2)x - 2yp_xp_y - 2zp_xp_z - 2\beta\frac{x}{r} \right\} \\
& + \epsilon_y \left\{ 2(p_x^2 + p_z^2)y - 2xp_xp_y - 2zp_y p_z - 2\beta\frac{y}{r} \right\} \\
& + \epsilon_z \left\{ 2(p_x^2 + p_y^2)z - 2xp_xp_z - 2yp_y p_z - 2\beta\frac{z}{r} \right\}.
\end{aligned} \tag{2.102}$$

Concluimos que es posible obtener \vec{A} (2.98) usando $\delta\Omega_j$.

2.4. Enredamiento

Una idea que recientemente ha atraído mucha atención es la idea de la complejidad [8, 9].

En donde la idea fundamental es que mediante una transformación podemos pasar de un estado cuántico de referencia Ψ_R a un estado cuántico enredado Ψ_E , i.e.

$$\Psi_E = U\Psi_R. \tag{2.103}$$

Además, decimos que si U tiene una estructura polinomial P es fácilmente soluble, en cambio si U tiene una estructura no polinomial NP es difícil resolver el problema.

Consideremos el siguiente ejemplo, un par de osciladores armónicos acoplados:

$$H = \frac{1}{2} [p_1^2 + p_2^2 + \omega^2(x_1^2 + x_2^2) + \Omega^2(x_1 - x_2)^2], \tag{2.104}$$

en donde x_1, x_2 son los índices de las posiciones espaciales, por simplicidad consideramos $m_1 = m_2 = 1$. Para resolver este sistema, rescribimos el hamiltoniano en términos de los modos normales

$$H = \frac{1}{2} [p_+^2 + \omega_+^2 x_+^2 + p_-^2 + \omega_-^2 x_-^2], \tag{2.105}$$

donde

$$x_{\pm} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 \pm x_2), \quad \omega_+^2 = \omega^2, \quad \omega_-^2 = \omega^2 + 2\Omega^2. \tag{2.106}$$

Esta reestructuración del problema da como resultado dos osciladores armónicos simples desacoplados, y a partir de aquí resolvemos simplemente con los eigenestados y eigenfunciones del hamiltoniano. Podemos escribir la función de onda del estado base como el producto de dos funciones de onda del estado base de los osciladores individuales:

$$\psi_0(x_+, x_-) = \psi_{0+}(x_+)\psi_{0-}(x_-) = \frac{(\omega_+\omega_-)^{1/4}}{\sqrt{\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2}(\omega_+x_+^2 + \omega_-x_-^2) \right], \tag{2.107}$$

donde la normalización se elige de tal forma que $\int d^2x |\psi_0|^2 = 1$. En términos de las variables originales tenemos

$$\psi_0(x_1, x_2) = \frac{(\omega_1\omega_2 - \beta^2)^{1/4}}{\sqrt{\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2}(\omega_1x_1^2 + \omega_2x_2^2 + 2\beta x_1x_2) \right], \quad (2.108)$$

en donde

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{2}(\omega_+ + \omega_-), \quad \beta \equiv \frac{1}{2}(\omega_+ - \omega_-) < 0. \quad (2.109)$$

Lo siguiente es identificar un estado de referencia simple. Motivados por la discusión de la complexificación holográfica [10, 11, 12], así como cMERA[13] elegimos el estado de referencia en donde las dos masas son entradas, llamadas estados factorizados Gaussianos

$$\psi_R(x_1, x_2) = \sqrt{\frac{\omega_0}{\pi}} \exp \left[-\frac{\omega_0}{2}(x_1^2 + x_2^2) \right]. \quad (2.110)$$

Para el tiempo inicial, consideramos ω_0 como parámetro libre que caracteriza al sistema de referencia.

Ya tenemos el estado de referencia y el estado enredado, solo falta identificar un conjunto unitario simple para construir la transformación unitaria U , tal que $\psi_E = U\psi_R$. Los operadores que aparecen naturalmente en mecánica cuántica para el problema de dos osciladores acoplados son: las posiciones x_1, x_2 y los momentos $p_1 = -i\partial_1, p_2 = -i\partial_2$, que satisfacen las relaciones de conmutación canónica $[x_a, p_b] = i\delta_{ab}$. Podemos usar estos operadores para construir un conjunto de entradas elementales para nuestro problema:

$$\begin{aligned} H &= e^{i\epsilon x_0 p_0}, & J_a &= e^{i\epsilon x_0 p_a}, & K_a &= e^{i\epsilon x_a p_0}, \\ Q_{ab} &= e^{i\epsilon x_a p_b} \quad (\text{con } a \neq b), & Q_{aa} &= e^{\frac{i\epsilon}{2}(x_a p_a + p_a x_a)} = e^{\epsilon/2} e^{i\epsilon x_a p_a}, \end{aligned} \quad (2.111)$$

en donde x_0 y p_0 son constantes complejas. El punto clave es introducir un parámetro infinitesimal $\epsilon \ll 1$ en los exponentes de los operadores. Esto asegura que la acción de cualquiera de estas entradas produce solo un cambio pequeño en la función de onda. La acción de cualquiera de las entradas puede entenderse con los siguientes ejemplos:

$$\begin{aligned} H\psi(x_1, x_2) &= e^{i\epsilon x_0 p_0} \psi(x_1, x_2), & \text{cambio de fase (global),} \\ J_1\psi(x_1, x_2) &= \psi(x_1 + \epsilon x_0, x_2), & \text{cambiamos } x_1 \text{ por la constante } \epsilon x_0, \\ K_1\psi(x_1, x_2) &= e^{i\epsilon x_1 p_0} \psi(x_1, x_2), & \text{cambiamos } p_1 \text{ por la constante } \epsilon p_0, \\ Q_{21}\psi(x_1, x_2) &= \psi(x_1 + \epsilon x_2, x_2), & \text{cambiamos } x_1 \text{ por } \epsilon x_2, \\ Q_{11}\psi(x_1, x_2) &= e^{\frac{i\epsilon}{2}} \psi(e^\epsilon x_1, x_2), & \text{reescalamos } x_1 \rightarrow e^\epsilon x_1. \end{aligned} \quad (2.112)$$

Cuando trabajamos con funciones de onda en el espacio de posiciones, el cambio producido por K_1 (o K_2) en el momento implica introducir una pequeña componente de la onda plana en la función de onda (2.112). Nos referimos a Q_{11} y Q_{22} como entradas de escalamiento, por razones obvias, pues estos operadores escalan las coordenadas correspondientes una pequeña cantidad. Notemos que también se introduce un factor general de normalización, lo que asegura que la norma de la función de onda se preserve. Los operadores Q_{21} y Q_{12} combinan las posiciones x_j de las masas, debido a esto el enredamiento se incrementa entre los dos osciladores; nos referimos a estas entradas como entradas enredadas.

Podemos extender el ensamble de entradas introduciendo en la ecuación (2.111) los operadores de la forma

$$\exp \left[i\epsilon \frac{p_0}{x_0} x_1 x_2 \right] \quad \text{o} \quad \exp \left[i\epsilon \frac{x_0}{p_0} p_1^2 \right]. \quad (2.113)$$

También podemos introducir entradas con potencias pares superiores de x 's y p 's en el exponente. Sin embargo, sabemos que la colección de entradas en la ecuación (2.111) es suficiente para aplicar la transformación unitaria en los estados de referencia específicos (2.110) para los estados enredados deseados (2.108). Por simplicidad trabajamos dentro del subconjunto de todas las posibles entradas unitarias.

Consideremos el siguiente caso:

$$\psi_T = U\psi_R \equiv Q_{22}^{\alpha_3} Q_{21}^{\alpha_2} Q_{11}^{\alpha_1} \psi_R. \quad (2.114)$$

En donde Q_{11} actúa primero sobre α_1 e incrementa la frecuencia de referencia ω_0 que aparece en frente de x_1^2 en la ecuación (2.110) de la frecuencia ω_1 deseada en la ecuación (2.108). De forma similar para las entradas Q_{21} y Q_{22} generan α_2 y α_3 en el circuito y son fijados de forma única por ω_2 y β en el estado objetivo. Los detalles de los cálculos están en el apéndice A y el resultado final es

$$\alpha_1 = \frac{1}{2\epsilon} \log \left(\frac{\omega_1}{\omega_0} \right), \quad \alpha_2 = \frac{1}{\epsilon} \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_0}} \frac{\beta}{\sqrt{\omega_1 \omega_2 - \beta^2}}, \quad (2.115)$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2\epsilon} \log \left(\frac{\omega_1 \omega_2 - \beta^2}{\omega_0 \omega_1} \right).$$

Ahora queremos ver si dentro de las variables de ángulo acción existe esta estructura de enredamiento.

Consideremos primero al oscilador armónico 2-dimensional desacoplado con el siguiente hamiltoniano:

$$H = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2 + \omega_1^2 x_1^2 + \omega_2^2 x_2^2), \quad (2.116)$$

notemos que el sistema es separable i.e. $H = F_1 + F_2$ donde

$$F_1 = \frac{1}{2} (p_1^2 + \omega_1^2 x_1^2), \quad F_2 = \frac{1}{2} (p_2^2 + \omega_2^2 x_2^2). \quad (2.117)$$

Calculamos sus variables de acción

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 = \frac{1}{2\pi} \oint p_1 dx_1 + \frac{1}{2\pi} \oint p_2 dx_2 \\ &= \frac{4}{2\pi} \int_0^{x_{1max}} \sqrt{2F_1 - \omega_1^2 x_1^2} dx_1 + \frac{4}{2\pi} \int_0^{x_{2max}} \sqrt{2F_2 - \omega_2^2 x_2^2} dx_2 \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{x_{1max}} \sqrt{2F_1} \sqrt{1 - \frac{\omega_1^2 x_1^2}{2F_1}} dx_1 + \frac{2}{\pi} \int_0^{x_{2max}} \sqrt{2F_2} \sqrt{1 - \frac{\omega_2^2 x_2^2}{2F_2}} dx_2. \end{aligned}$$

Hacemos el siguiente cambio de variable

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\sqrt{2F_1}}{\omega_1} \sin \theta, & dx_1 &= \frac{\sqrt{2F_1}}{\omega_1} \cos \theta d\theta, \\ x_2 &= \frac{\sqrt{2F_2}}{\omega_2} \sin \phi, & dx_2 &= \frac{\sqrt{2F_2}}{\omega_2} \cos \phi d\phi. \end{aligned}$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{\pi} \sqrt{2F_1} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \frac{\sqrt{2F_1}}{\omega_1} \cos \theta d\theta + \frac{2}{\pi} \sqrt{2F_2} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 \phi} \frac{\sqrt{2F_2}}{\omega_2} \cos \phi d\phi \\ &= \frac{4F_1}{\pi\omega_1} \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right)_0^{\pi/2} + \frac{4F_2}{\pi\omega_2} \left(\frac{\phi}{2} + \frac{\sin 2\phi}{4} \right)_0^{\pi/2} = \frac{F_1}{\omega_1} + \frac{F_2}{\omega_2} \\ &= \frac{1}{\omega_1} \frac{1}{2} (p_1^2 + \omega_1^2 x_1^2) + \frac{1}{\omega_2} \frac{1}{2} (p_2^2 + \omega_2^2 x_2^2) \\ &= \frac{1}{2\omega_1\omega_2} (\omega_2 p_1^2 + \omega_1 p_2^2) + \frac{1}{2} (\omega_1 x_1^2 + \omega_2 x_2^2). \end{aligned} \quad (2.118)$$

Calculemos ahora las variables de acción para el caso del oscilador armónico acoplado con el hamiltoniano (2.105) en términos de los modos normales

$$H = \frac{1}{2} (p_+^2 + \omega_+^2 x_+^2 + p_-^2 + \omega_-^2 x_-^2) = F_+ + F_-, \quad (2.119)$$

en donde consideramos $x_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 \pm x_2)$, $\omega_+^2 = \omega^2$ y $\omega_-^2 = \omega^2 + 2\Omega^2$.

$$\begin{aligned} I &= I_+ + I_- = \frac{1}{2\pi} \oint p_+ dx_+ + \frac{1}{2\pi} \oint p_- dx_- \\ &= \frac{4}{2\pi} \int_0^{x_+max} \sqrt{2F_+ - \omega_+^2 x_+^2} dx_+ + \frac{4}{2\pi} \int_0^{x_-max} \sqrt{2F_- - \omega_-^2 x_-^2} dx_- \\ &= \frac{2\sqrt{2F_+}}{\pi} \int_0^{x_+max} \sqrt{1 - \frac{\omega_+^2 x_+^2}{2F_+}} dx_+ + \frac{2\sqrt{2F_-}}{\pi} \int_0^{x_-max} \sqrt{1 - \frac{\omega_-^2 x_-^2}{2F_-}} dx_-, \end{aligned}$$

haciendo el siguiente cambio de variable

$$\begin{aligned} x_+ &= \frac{\sqrt{2F_+}}{\omega_+^2} \sin \theta, & x_- &= \frac{\sqrt{2F_-}}{\omega_-^2} \sin \phi, \\ dx_+ &= \frac{\sqrt{2F_+}}{\omega_+^2} \cos \theta d\theta, & dx_- &= \frac{\sqrt{2F_-}}{\omega_-^2} \cos \phi d\phi, \end{aligned}$$

tenemos

$$\begin{aligned} I &= \frac{2\sqrt{2F_+}}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \frac{\sqrt{2F_+}}{\omega_+^2} \cos \theta d\theta \\ &+ \frac{2\sqrt{2F_-}}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 \phi} \frac{\sqrt{2F_-}}{\omega_-^2} \cos \phi d\phi \\ &= \frac{F_+}{\omega_+} + \frac{F_-}{\omega_-}, \end{aligned}$$

usamos las variables originales para reescribir el resultado anterior

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\omega_+} (p_+^2 + \omega_+^2 x_+^2) + \frac{1}{2\omega_-} (p_-^2 + \omega_-^2 x_-^2) = \frac{1}{2\omega_+ \omega_-} \\ &\left\{ \omega_- \left[\frac{(p_1 + p_2)^2}{2} + \omega_+^2 \frac{(x_2 + x_1)^2}{2} \right] + \omega_+ \left[\frac{(p_1 - p_2)^2}{2} + \omega_-^2 \frac{(x_2 - x_1)^2}{2} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2(\omega_1^2 - \beta^2)} [\omega_1(p_1^2 + p_2^2) - 2\beta p_1 p_2] + \frac{1}{2} [\omega_1 x_1^2 + \omega_2 x_2^2 + 2\beta x_1 x_2]. \end{aligned} \quad (2.120)$$

Notamos que la parte del generador que tiene componentes espaciales es proporcional al término que se encuentra en la exponencial de la ecuación (2.110), lo que quiere decir que hay una relación entre ambas teorías.

En mecánica clásica también podemos pasar del caso desacoplado al caso acoplado mediante una transformación infinitesimal de la forma $\delta q^\nu = Q^\nu - q^\nu = \{p^\nu, G\}$ en donde el generador de la simetría va estar dado por $G = \alpha_1 x_1 p_1 + \alpha_2 (x_1 p_2 + x_2 p_1) + \alpha_3 x_2 p_2$.

$$\begin{aligned} \{x_1^2 + x_2^2, \alpha_a G^a\} &= \{x_1^2 + x_2^2, \alpha_1 x_1 p_1 + \alpha_2 (x_1 p_2 + x_2 p_1) + \alpha_3 x_2 p_2\} \\ &= 2x_1(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) + 2x_2(\alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2) \\ &= 2\alpha_1 x_1^2 + 4\alpha_2 x_1 x_2 + 2\alpha_3 x_2^2, \end{aligned} \quad (2.121)$$

tomando $\alpha_1 = \frac{\omega_1}{2}$, $\alpha_2 = \frac{\beta}{2}$ y $\alpha_3 = \frac{\omega_2}{2}$ vemos que se recupera la estructura enredada (2.120), siendo esta transformación equivalente a la ecuación (2.114) a nivel cuántico.

2.5. Pares de Lax

El método de los pares de Lax consiste en reformular el sistema original de ecuaciones no lineales como una condición de compatibilidad de un sistema de ecuaciones lineales asociado a dos operadores, a los que llamamos pares de Lax.

Consideremos por ejemplo un sistema de ecuaciones de movimiento no lineales de $1 + 1$ dim

$$\vec{u}_t = \vec{F}(\vec{u}, \vec{u}_x, \vec{u}_{xx}, \dots), \quad (2.122)$$

donde x y t son las variables espacial y temporal, respectivamente. El vector $\vec{u}(x, t)$, en general, tiene N componentes u_i y \vec{F} es una función no lineal en sus argumentos.

Peter Lax demostró que las ecuaciones diferenciales parciales no lineales integrables tienen un sistema asociado de ecuaciones diferenciales parciales lineales en una función auxiliar $\phi(x, t)$:

$$L\phi = \lambda\phi, \quad (2.123)$$

$$\phi_t = M\phi, \quad (2.124)$$

donde L y M son operadores diferenciales lineales y $\phi(x, t)$ es la función propia de L correspondiente al valor propio λ . Los operadores (L, M) son conocidos como pares de Lax para (2.122).

La propiedad de que (2.122) sea completamente integrable se refleja en el hecho de que los valores propios no cambian con el tiempo como veremos a continuación. Consideremos un operador lineal L , que depende de una función $u(x, t)$, la variable espacial x y las derivadas espaciales u_x, u_{xx}, \dots , pero no de la variable temporal t en forma explícita, de forma que tenemos

$$L\phi = \lambda\phi, \quad \phi = \phi(x, t).$$

y usando el operador M , que cumple:

$$\phi_t = M\phi.$$

Calculemos la derivada temporal de (2.123)

$$\begin{aligned} \phi + L\phi_t &= \lambda_t\phi + \lambda\phi_t, \\ L_t\phi + LM\phi &= \lambda_t\phi + \lambda M\phi, \\ L_t\phi + LM\phi &= \lambda_t\phi + ML\phi, \\ (L_t + LM - LM)\phi &= \lambda_t\phi. \end{aligned}$$

Entonces, para el caso de funciones propias no triviales $\phi(x, t)$ se debe cumplir que

$$L_t + [L, M] = 0 \quad \text{o} \quad L_t = [M, L] \quad (2.125)$$

si y sólo si $\lambda_t = 0$ (en donde usamos la definición del conmutador $[L, M] := LM - ML$). La ecuación (2.125) es conocida como la representación de Lax de una ecuación diferencial parcial dada o como ecuación de Lax. En algunos casos los pares de Lax pueden ser dos matrices L y M .

De hecho, la solución de la ecuación (2.125) para matrices es de la forma

$$L(t) = g(t)L(0)g^{-1}(t), \quad (2.126)$$

donde la matriz invertible $g(t)$ está determinada por

$$M = \frac{dg}{dt}g^{-1} \quad (2.127)$$

De esto se sigue que si $I(L)$ es una función de L invariante por conjugación $L \rightarrow gLg^{-1}$, entonces $I(L(t))$ es una constante del movimiento. Tales funciones son funciones de los valores propios de L . Decimos que la ecuación de evolución (2.125) es isospectral, lo que significa que el espectro de L (λ_α) se conserva por el tiempo de evolución.

Los pares de Lax no son únicos, ya que hay al menos una libertad en la medida

$$L \rightarrow gLg^{-1}, \quad M \rightarrow gMg^{-1} + \frac{dg}{dt}g^{-1}, \quad (2.128)$$

donde g es una matriz invertible, función en el espacio fase.

Ejemplos.

Vamos a presentar un ejemplo simple para demostrar que las ecuaciones de movimiento pueden reescribirse realmente en la forma de Lax.

- El par de Lax para el oscilador armónico (con $m = 1$) puede ser escrito como

$$L = \begin{pmatrix} p & \omega q \\ \omega q & -p \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & -\omega/2 \\ \omega/2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.129)$$

Sustituimos los valores de L y M en (2.125).

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} p & \omega q \\ \omega q & -p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{p} & \omega \dot{q} \\ \omega \dot{q} & -\dot{p} \end{pmatrix} \\ [M, L] &= \begin{pmatrix} 0 & -\omega/2 \\ \omega/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & \omega q \\ \omega q & -p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p & \omega q \\ \omega q & -p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\omega/2 \\ \omega/2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\omega^2 q/2 & \omega p/2 \\ \omega p/2 & \omega^2 q/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \omega^2 q/2 & -\omega p/2 \\ -\omega p/2 & -\omega^2 q/2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

igualando ambos términos encontramos

$$\begin{pmatrix} \dot{p} & \omega\dot{q} \\ \omega\dot{q} & -\dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega^2q & \omega p \\ \omega p & \omega^2q \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \dot{p} = -\omega^2q \quad \dot{q} = p. \quad (2.130)$$

qué son las ecuaciones de movimiento del oscilador armónico. Notemos que podemos escribir el hamiltoniano H como $\frac{1}{4}\text{tr}L^2$ como veremos a continuación

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{4}\text{tr}L^2 = \frac{1}{4}\text{tr} \begin{pmatrix} p & \omega q \\ \omega q & -p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & \omega q \\ \omega q & -p \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\text{tr} \begin{pmatrix} p^2 + \omega^2q^2 & 0 \\ 0 & \omega^2q^2 + p^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}2(p^2 + \omega^2q^2) = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2q^2) \end{aligned}$$

Este ejemplo puede generalizarse a n osciladores armónicos independientes si escribimos las matrices de Lax L y M en bloques diagonales, donde los bloques son matrices de dos por dos como arriba.

Los pares de Lax nos proveen cantidades conservadas sin utilizar la estructura de Poisson. Sin embargo, la noción de integralidad de Liouville requiere de la estructura de Poisson junto con la propiedad de involución de las cantidades conservadas. Presentaremos ahora la forma general de los paréntesis de Poisson entre los elementos de la matriz de Lax que nos asegura la propiedad de involución entre las cantidades conservadas. Suponiendo que tenemos un par de Lax L, M , matrices de $N \times N$ y que podemos diagonalizar L de la forma

$$L = U\Lambda U^{-1}. \quad (2.131)$$

Los elementos λ_k de matriz diagonal Λ son cantidades conservadas. Primero introducimos algo de notación. Sea E_{ij} la base canónica de las matrices de $N \times N$, $(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$. Podemos escribir

$$L = \sum_{ij} L_{ij} E_{ij}.$$

Los componentes L_{ij} de la matriz de Lax son funciones en el espacio fase. Sea

$$L_1 = L \otimes 1 = \sum_{ij} L_{ij}(E_{ij} \otimes 1), \quad L_2 = 1 \otimes L = \sum_{ij} L_{ij}(1 \otimes E_{ij}). \quad (2.132)$$

El índice 1 o 2 se refiere al hecho de si la matriz L es el primero o segundo factor en el producto tensorial $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$. De forma similar, para T que vive en el producto de dos copias de las matrices de $N \times N$, tenemos

$$T = T_{12} = \sum_{ij,kl} T_{ij,kl} E_{ij} \otimes E_{kl}, \quad T_{21} = \sum_{ij,kl} T_{ij,kl} E_{kl} \otimes E_{ij}. \quad (2.133)$$

De forma más general, cuando tenemos el producto tensorial con más copias de las matrices de $N \times N$, denotamos por L_α a la L incrustada en la posición α , p.ej. $L_3 = 1 \otimes 1 \otimes L \otimes 1 \otimes \dots$ y $T_{\alpha\beta}$ a la T incrustada en la posición α y β . Además, denotamos por tr_α la parcial de la traza en la posición α del producto tensorial. Por ejemplo

$$tr_1 T_{12} = \sum_{ij,kl} T_{ij,kl} tr(E_{ij}) E_{kl}.$$

Definimos $\{L_1, L_2\}$ como la matriz de los paréntesis de Poisson entre los elementos de L

$$\{L_1, L_2\} = \sum_{ij,kl} \{L_{ij}, L_{kl}\} E_{ij} \otimes E_{kl}. \quad (2.134)$$

Para un sistema integrable, los paréntesis de Poisson entre los elementos de la matriz de Lax L pueden ser escritos de la siguiente forma especial:

Teorema 2. *Los eigenvalores de L está en involución si y sólo si existe un elemento $r_{21} \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, función de las variables del espacio fase, tal que*

$$\{L_1, L_2\} = [r_{12}, L_1] - [r_{21}, L_2], \quad (2.135)$$

donde $r_{21} = \pi \circ r_{12}$, π designa el operador de permutación actuando en dos copias de $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$.

La identidad de Jacobi en los paréntesis de Poisson, nos da la siguiente restricción en r :

$$\begin{aligned} & [L_1, [r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{32}, r_{13}] + \{L_2, r_{13}\} - \{L_3, r_{12}\}] + \\ & [L_2, [r_{13}, r_{21}] + [r_{23}, r_{21}] + [r_{23}, r_{31}] + \{L_3, r_{21}\} - \{L_1, r_{23}\}] + \\ & [L_3, [r_{31}, r_{12}] + [r_{21}, r_{32}] + [r_{31}, r_{32}] + \{L_1, r_{32}\} - \{L_2, r_{31}\}] = 0. \end{aligned} \quad (2.136)$$

En este sentido, resolver esta ecuación significa clasificar el sistema hamiltoniano integrable.

Si ocurre que r es constante, los únicos términos que quedan en la ecuación (2.136) son los primeros. En particular, la identidad de Jacobi se satisface si la r -matriz constante satisface

$$[r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{32}, r_{13}] = 0, \quad (2.137)$$

donde r es antisimétrica, $r_{12} = -r_{21}$, esta es llamada la ecuación clásica de Yang-Baxter (CYBE).

Los paréntesis de Poisson (2.135) son equivalentes a la involución de los eigenvalores de L . Un conjunto equivalente de hamiltonianos conmutativos H_n , está dado por la traza de las potencias de la matriz de Lax

$$H_n = \text{Tr}(L^n). \quad (2.138)$$

Los hamiltonianos H_n está en involución, $\{H_n, H_m\} = 0$ pues sus eigenvalores son polinomios simétricos. Además, demostramos que la evolución temporal de la matriz de Lax L con el hamiltoniano H_n toma naturalmente la forma de Lax.

Proposición 2. *Suponiendo que $\{L_1, L_2\} = [r_{12}, L_1] - [r_{21}, L_2]$. Si consideramos $H_n = \text{tr}(L^n)$ como los hamiltonianos, entonces las ecuaciones de movimiento admiten la representación de Lax*

$$\frac{dL}{dt_n} \equiv \{H_n, L\} = [M_n, L], \quad \text{con } M_n = -n \text{Tr}_1(L_1^{n-1} r_{21}). \quad (2.139)$$

Dem. Sea $m = 1$ en la ecuación (A.15) y si tomamos la traza sobre el primer espacio, llegamos a $dL/dt_n = [M_n, L]$ con $M_n = -n \text{tr}_1(L_1^{n-1} r_{21})$. Notemos que las matrices M_n no son únicas ya que si agregamos cualquier matriz conmutativa de L no cambian las ecuaciones de movimiento.

Ejemplos: A continuación daremos algunos ejemplos de la matriz r y de cómo se obtienen las cargas conservadas a partir de la traza de las potencias de L .

- La siguiente matriz es una solución constante de CYBE

$$r = e \otimes h - h \otimes e, \quad [h, e] = e. \quad (2.140)$$

El álgebra está basada en el subálgebra $sl(2)$ el triángulo de Borel generado por el elemento h de Cartan y una rotación denotada por e .

- La matriz r_{12} del oscilador armónico no constante

$$r_{12} = -\frac{\omega}{4\pi} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \otimes L = \frac{i\omega}{4\pi} \sigma_2 \otimes L, \quad (2.141)$$

donde $H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2)$ da la energía y $\{q, p\} = 1$ el paréntesis canónico de Poisson. Los eigenvalores de L en (2.129) son $\pm 2H$. $O_2 = \text{tr} L^2 = \text{tr} L^2 = \pm 2H$

- Trompo de Euler

En este caso, los pares de Lax aparecen naturalmente. Introducimos las matrices $J_{ij} = \epsilon_{ijk}J_k$ y $\Omega_{ij} = \epsilon_{ijk}\omega_k$ de 3×3 . Entonces las ecuaciones de movimiento $\frac{d\vec{J}}{dt} = -\omega \wedge \vec{J}$ se puede reescribir en forma de matriz como:

$$\frac{dJ}{dt} = [\Omega, J]. \quad (2.142)$$

Este es un par de Lax con $L = J$ y $M = \Omega$, pero desafortunadamente las cantidades conservadas, $tr(L^n)$, ya se anulan o son función de \vec{J} y por lo tanto el hamiltoniano no está incluido en el conjunto de cantidades conservadas.

Para resolver este problema tenemos que hacer algunas modificaciones. Introduzcamos una matriz diagonal: $\mathcal{I} = \text{diag}(\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_3)$ con $\mathcal{I}_k = 1/2(I_i + I_j + I_k)$, donde (i, j, k) es una permutación cíclica de $(1, 2, 3)$. Con ayuda de esta notación tenemos

$$J = \mathcal{I}\Omega + \Omega\mathcal{I}. \quad (2.143)$$

Suponiendo que todas las \mathcal{I}_j son diferentes e imponemos que

$$L(\lambda) = \mathcal{I}^2 + \frac{1}{\lambda}J, \quad M(\lambda) = \lambda\mathcal{I} + \Omega, \quad (2.144)$$

donde λ es un parámetro libre arbitrario llamado parámetro espectral. Comprobemos que la ecuación Lax reproducen las ecuaciones de movimiento, calculamos:

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{L}(\lambda) - [M(\lambda), L(\lambda)] = \dot{L}(\lambda) - [\lambda\mathcal{I} + \Omega, \mathcal{I}^2 + \frac{1}{\lambda}J] \\ &= \frac{1}{\lambda} \left(\dot{J} - [\Omega, J] \right), \quad \Rightarrow \dot{J} = [\Omega, J]. \end{aligned} \quad (2.145)$$

Solo los términos con $\frac{1}{\lambda}$ contribuyen y nos dan las ecuaciones de movimiento. Notemos que esto nuevos pares de Lax son mejores que los anteriores debido a que:

$$\begin{aligned} trL^2(\lambda) &= tr\mathcal{I}^2 - \frac{2}{\lambda^2}J^2, \\ trL^3(\lambda) &= tr\mathcal{I}^6 - \frac{3}{\lambda^2} \left(\frac{1}{4}(tr\mathcal{I})^2J^2 - I_1I_2I_3H \right), \end{aligned} \quad (2.146)$$

por lo tanto, ahora tenemos el hamiltoniano entre las cantidades conservadas de la forma $trL^n(u)$.

El punto importante es que la matriz de Lax depende de un parámetro espectral λ que fue necesario introducir para generar las cantidades conservadas apropiadas. Además, la ecuación Lax se cumple de manera idéntica en λ .

- Para el problema de Kepler tenemos los siguientes pares de Lax

$$L = \frac{1}{2} \sum_k \begin{pmatrix} -\frac{x_k \dot{x}_k}{\lambda - \lambda_k} & \frac{x_k x_k}{\lambda - \lambda_k} \\ -\frac{\dot{x}_k x_k}{\lambda - \lambda_k} & \frac{x_k \dot{x}_k}{\lambda - \lambda_k} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{\beta}{r^3} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.147)$$

El par de Lax depende de 3 variables complejas λ_μ , $\mu = 1, \dots, d$, y λ es el parámetro espectral. Comprobemos que a partir de (2.147) podemos obtener las ecuaciones de movimiento. Partimos de

$$\frac{dL}{dt} = [L, M], \quad (2.148)$$

calculamos

$$\begin{aligned} [L, M] &= LM - ML \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \frac{1}{\lambda - \lambda_k} \left\{ \begin{bmatrix} x_k x_k \frac{\beta}{r^3} & x_k \dot{x}_k \\ x_k \dot{x}_k \frac{\beta}{r^3} & \dot{x}_k \dot{x}_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{x}_k \dot{x}_k & -x_k \dot{x}_k \\ -\frac{\beta}{r^3} x_k \dot{x}_k & \frac{\beta}{r^3} x_k x_k \end{bmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \frac{1}{\lambda - \lambda_k} \begin{bmatrix} x_k x_k \frac{\beta}{r^3} - \dot{x}_k \dot{x}_k & x_k \dot{x}_k + x_k \dot{x}_k \\ x_k \dot{x}_k \frac{\beta}{r^3} + \frac{\beta}{r^3} x_k \dot{x}_k & \dot{x}_k \dot{x}_k - \frac{\beta}{r^3} x_k x_k \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.149)$$

Por otro lado tenemos

$$\frac{dL}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \frac{1}{\lambda - \lambda_k} \begin{bmatrix} -\dot{x}_k \dot{x}_k - x_k \ddot{x}_k & \dot{x}_k x_k + x_k \dot{x}_k \\ -\ddot{x}_k \dot{x}_k - \dot{x}_k \ddot{x}_k & \dot{x}_k \dot{x}_k + x_k \ddot{x}_k \end{bmatrix}. \quad (2.150)$$

Igualamos ambas ecuaciones tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \frac{1}{\lambda - \lambda_k} \begin{bmatrix} -\dot{x}_k \dot{x}_k - x_k \ddot{x}_k & \dot{x}_k x_k + x_k \dot{x}_k \\ -\ddot{x}_k \dot{x}_k - \dot{x}_k \ddot{x}_k & \dot{x}_k \dot{x}_k + x_k \ddot{x}_k \end{bmatrix} \\ = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \frac{1}{\lambda - \lambda_k} \begin{bmatrix} x_k x_k \frac{\beta}{r^3} - \dot{x}_k \dot{x}_k & x_k \dot{x}_k + x_k \dot{x}_k \\ x_k \dot{x}_k \frac{\beta}{r^3} + \frac{\beta}{r^3} x_k \dot{x}_k & \dot{x}_k \dot{x}_k - \frac{\beta}{r^3} x_k x_k \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.151)$$

al igualar los elementos de la matriz tenemos solamente las siguientes ecuaciones no triviales

$$\begin{aligned} x_k \ddot{x}_k &= -\frac{\beta x_k x_k}{r^3} \Rightarrow x_k (\ddot{x}_k = -\frac{\beta x_k}{r^3}), \\ 2\dot{x}_k \ddot{x}_k &= -2\frac{\beta x_k \dot{x}_k}{r^3} \Rightarrow \dot{x}_k (\ddot{x}_k = -\frac{\beta x_k}{r^3}). \end{aligned} \quad (2.152)$$

Lo que se reduce a las ecuaciones de Newton

$$\ddot{x}_k = -\frac{\beta x_k}{r^3}. \quad (2.153)$$

Notemos que el parámetro espectral λ_μ no contribuye.

Veamos que podemos obtener cantidades conservadas a partir de la traza de las potencias de L .

$$\begin{aligned} H_1 &= \text{tr} L = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \left(-\frac{x_k \dot{x}_k}{\lambda - \lambda_k} + \frac{x_k \dot{x}_k}{\lambda - \lambda_k} \right) = 0, \\ H_2 &= \text{tr} L^2 \\ &= \text{tr} \frac{1}{4} \sum_{k,l} \frac{1}{(\lambda - \lambda_k)(\lambda - \lambda_l)} \begin{pmatrix} x_k \dot{x}_k x_l \dot{x}_l - x_k x_k \dot{x}_l \dot{x}_l & 0 \\ 0 & -\dot{x}_k \dot{x}_k x_l x_l + x_k \dot{x}_k x_l \dot{x}_l \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k,l} \frac{2(x_k \dot{x}_k x_l \dot{x}_l - x_k x_k \dot{x}_l \dot{x}_l)}{(\lambda - \lambda_k)(\lambda - \lambda_l)} = \frac{1}{2} \sum_{k,l} \frac{x_k \dot{x}_l (x_l \dot{x}_k - x_k \dot{x}_l)}{(\lambda - \lambda_k)(\lambda - \lambda_l)}. \end{aligned} \quad (2.154)$$

Recordando que el momento angular se puede escribir como $J_i = \epsilon_{ijk} x_j \dot{x}_k$, si lo multiplicamos por ϵ_{ilm} tenemos

$$\begin{aligned} \epsilon_{ilm} J_i &= \epsilon_{ilm} \epsilon_{ijk} x_j \dot{x}_k, \\ \epsilon_{ilm} J_i &= (\delta_{lj} \delta_{mk} - \delta_{lk} \delta_{mj}) x_j \dot{x}_k, \\ \epsilon_{ilm} J_i &= x_l \dot{x}_m - x_m \dot{x}_l. \end{aligned} \quad (2.155)$$

Usando el resultado anterior podemos reescribir H_2 como:

$$H_2 = \frac{1}{2} \sum_{k,l,i} \frac{x_k \dot{x}_l \epsilon_{ilk} J_i}{(\lambda - \lambda_k)(\lambda - \lambda_l)}, \quad (2.156)$$

hay que recordar que ϵ es antisimétrico, por lo que los únicos términos que contribuyen son $i \neq j \neq k \neq i$, i.e.

$$\begin{aligned} H_2 &= \frac{1}{2} \left[\frac{x_3 \dot{x}_2 \epsilon_{123} J_1}{(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_2)} + \frac{x_2 \dot{x}_3 \epsilon_{132} J_1}{(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)} + \frac{x_1 \dot{x}_3 \epsilon_{231} J_2}{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_3)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{x_3 \dot{x}_1 \epsilon_{213} J_2}{(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_1)} + \frac{x_2 \dot{x}_1 \epsilon_{312} J_3}{(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_1)} + \frac{x_1 \dot{x}_2 \epsilon_{321} J_3}{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_2 &= \frac{1}{2} \left[\frac{(x_3\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_3)J_1}{(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)} + \frac{(x_1\dot{x}_3 - x_3\dot{x}_1)J_2}{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_3)} + \frac{(x_2\dot{x}_1 - x_1\dot{x}_2)J_3}{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{-J_1J_1}{(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)} + \frac{-J_2J_2}{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_3)} + \frac{-J_3J_3}{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)} \right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i \neq j \neq k \neq i} \frac{-J_iJ_i}{(\lambda - \lambda_j)(\lambda - \lambda_k)}.
\end{aligned} \tag{2.157}$$

En H_2 obtenemos el cuadrado de las componentes del momento angular. Para obtener otra cantidad conservada hay que seguir el mismo procedimiento para H_3, H_4, \dots

Capítulo 3

Interlúdio Matemático

En el siguiente capítulo daremos un repaso de algunas definiciones matemáticas como: grupos, anillos, campos, espacios vectoriales, álgebras y grupos de Lie, así como el álgebra universal envolvente, las álgebras asociativas con unidad, las \mathbb{C} álgebras, las coálgebras, las biálgebras y por último el álgebra de Hopf y el álgebra de lazos.

3.1. Semigrupos y monoides

Definición 1. Una operación $*$ en un conjunto X es una función $*$: $X \times X \rightarrow X$, y es llamada multiplicación.

Definición 2. La operación $*$: $X \times X \rightarrow X$ es asociativa si:

$$x * (y * z) = (x * y) * z, \quad \forall x, y, z \in X. \quad (3.1)$$

Definición 3. A la pareja ordenada $(X, *)$ se le denomina semigrupo. Por otro lado, si $*$ es una operación asociativa en X y $e \in X$ entonces,

1. e es un neutro izquierdo para $*$, si $e * x = x, \forall x \in X$.
2. e es un neutro derecho para $*$, si $x * e = x, \forall x \in X$.
3. e es un neutro derecho para $*$, si e es un neutro izquierdo y derecho para $*$.

Definición 4. La terna $(M, *, e)$ es un monoide si $(M, *)$ es un semigrupo y e es neutro para $*$.

Definición 5. La operación $*$ es conmutativa si:

$$a * b = b * a, \quad \forall a, b \in M. \quad (3.2)$$

3.2. Grupos

Definición 6. Un grupo es un monoide $(M, *, e)$ en el que cada elemento tiene inverso.

Definición 7. Si la operación en un grupo $(M, *, e)$ es conmutativa, entonces se dice que el grupo es conmutativo o abeliano.

Definición 8. El orden de un grupo G , es el número de elementos del conjunto de éste.

Ejemplo 1. Son grupos finitos:

- (\mathbb{Q}, \cdot) (producto ordinario).
- El grupo de dos elementos e, g . Donde $g^2 = e$. Por ejemplo, si tomamos 1 y -1 con la operación multiplicación se forma un grupo de este tipo.

Ejemplo 2. Son grupos infinitos:

- El conjunto de números reales \mathbb{R} es un grupo abeliano con la operación suma. Si excluimos el 0, entonces es el grupo abeliano con la operación multiplicación.
- El grupo de rotaciones de vectores en tres dimensiones.

Definición 9. Sea G un grupo y U un subconjunto de este. Se dice que U es un subgrupo si las operaciones de grupo cierran dentro de U .

$$\begin{aligned} \forall g, g'^{-1} \in U &\Rightarrow g \circ g'^{-1} \in U, \\ \forall g, g' \in U &\Rightarrow g^{-1} \circ g' \in U. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Definición 10. Dados dos grupos G y G' se dice que una aplicación $\varphi : G \rightarrow G'$ es un homeomorfismo, si preserva la estructura de grupo i.e.

$$\varphi(g \cdot h) = \varphi(g) * \varphi(h), \tag{3.4}$$

donde \cdot y $*$ son las operaciones correspondientes a los grupos G y G' . Si la aplicación es biyectiva, se dice que es un isomorfismo.

Ejemplo 3. Son subgrupos:

- $O(N)$: Un subgrupo de $GL(N, \mathbb{R})$ formado por las matrices ortogonales $N \times N$, que cumplen con la condición $\Omega \Omega^t = \mathbb{I}$.

Definición 11. Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial, llamaremos endomorfismo de V a cualquier aplicación lineal en la que el conjunto inicial y el conjunto final es V , es decir, cualquier aplicación lineal $T : V \rightarrow V$. Si un endomorfismo es biyectivo se dice que es un automorfismo.

3.2.1. Representación de grupos

Definición 12. Dado un grupo G llamamos *representación de este*, a un homeomorfismo $D : G \rightarrow GL(N, \mathbb{K})$ de dicho grupo en un grupo de matrices reales o complejas ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$). Así pues, a cada elemento g del grupo le corresponde una matriz $D(g)$, de tal forma que:

$$D(g_1 \circ g_2) = D(g_2)D(g_1). \quad (3.5)$$

Ejemplo 4. *Son representaciones:*

- El grupo de rotaciones $SO(n)$ es isomorfo al grupo de matrices ortogonales con determinante 1.
- El grupo de Lorentz es isomorfo al grupo $O(3, 1)$ de matrices que dejan invariante la métrica de Minkowski.

3.2.2. Grupos de Lie

Definición 13. Un grupo de Lie es una variedad diferencial \mathfrak{G} de dimensión finita que es también un grupo topológico en el cual las operaciones de multiplicación e inversión,

$$\begin{aligned} * : G \times G &\rightarrow G, & i : G &\rightarrow G, \\ (a, b) &\mapsto ab, & a &\mapsto a^{-1}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

son suaves (i.e. infinitamente diferenciables).

Ejemplo 5. *Son grupos de Lie:*

- \mathbb{R}^n , ya que es una variedad diferenciable de dimensión n , y adicionalmente forma un grupo topológico aditivo. Las operaciones de adición y cambio de signo son suaves.
- $O(n)$, el grupo ortogonal es un subgrupo topológico de $GL_n(\mathbb{R})$, adicionalmente también es una variedad diferencial de dimensión finita.

3.3. Anillos y campos

Definición 14. Un anillo es una quinteta $(R, +, *, 0, 1)$ tal que:

1. $(R, +, 0)$ es un grupo conmutativo.
2. $(R, *, 1)$ es un monoide.

3. $*$ se distribuye sobre $+$, por ambos lados, es decir:

$$\begin{aligned} r * (s + t) &= (r * s) + (r * t), & \forall r, s, t \in R, \\ (s + t) * r &= (s * r) + (t * r), & \forall r, s, t \in R. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Ejemplo 6. Son anillos bajo la suma y el producto ordinario.

- $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot, 0, 1)$.
- $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$.
- $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$.

Definición 15. Un anillo $(R, +, *, 0, 1)$ es un

1. Anillo conmutativo si $*$ es conmutativa.
2. Anillo con división si $(R/0, *, 1)$ es un grupo.
3. Campo si $(R/0, *, 1)$ es un grupo abeliano.

Definición 16. Sea A un anillo, se dice que $I \subset A$ es un ideal si:

1. $(I, +)$ es un subgrupo,
2. $a \in A, b \in I \Rightarrow ab, ba \in I$.

Notemos que estas propiedades nos aseguran que $+$ y \cdot son cerradas en I , y por lo tanto I hereda la estructura de anillo de A . Además 2) implica que I es invariante bajo multiplicación.

Ejemplo 7. Son ideales

- $\forall k, k\mathbb{Z}$ es un ideal de \mathbb{Z} .

3.4. Espacios vectoriales

Definición 17. Un espacio vectorial A es una quinteta $(V, +, e, K, \cdot : K \times V \rightarrow V)$, tal que:

1. $(V, +, e)$ es un grupo abeliano.
2. $\cdot : K \times V \rightarrow V$, satisface:

$$\text{a) } I \cdot a = a, \quad \forall a \in V,$$

$$b) (\alpha\beta) \cdot a = \alpha \cdot (\beta \cdot a), \quad \forall \alpha, \beta \in K, \forall a \in V,$$

$$c) (\alpha + \beta) \cdot a = \alpha \cdot a + \beta \cdot a, \quad \forall \alpha, \beta \in K, \forall a \in V,$$

$$d) \alpha \cdot (a + b) = \alpha \cdot a + \alpha \cdot b, \quad \forall \alpha \in K, \forall a, b \in V.$$

Los elementos de V se denominan vectores, y los de K escalares. Es común representar un espacio vectorial como V_K y se lee: el campo vectorial V sobre un campo K .

Ejemplo 8. Son espacios vectoriales:

$$1. (\mathbb{R}^n, \tilde{+}, \tilde{0}, \mathbb{R}, \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n).$$

$$\begin{aligned} (a_1, \dots, a_n) \tilde{+} (b_1, \dots, b_n) &= (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n). \\ c \cdot (a_1, \dots, a_n) &= (c \cdot a_1, \dots, c \cdot a_n). \end{aligned} \quad (3.8)$$

3.5. Álgebras de Lie

Definición 18. Sea A un espacio vectorial de dimensión r . Suponiendo que en este espacio se define una segunda operación binaria $*$: $A \times A \rightarrow A$. Si A cumple con las propiedades:

1. Es lineal respecto al segundo argumento:

$$v * (\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2) = \lambda_1 (v * \omega_1) + \lambda_2 (v * \omega_2), \quad \forall v, w \in A; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}. \quad (3.9)$$

2. Es antisimétrica:

$$v * w = -w * v. \quad (3.10)$$

3. Cumple con la identidad de Jacobi:

$$y * (v * w) + w * (y * v) + v * (w * y) = 0, \quad (3.11)$$

entonces se dice que A tiene estructura de álgebra de Lie.

Definición 19. Definimos el paréntesis de Poisson de dos funciones $f(x, p)$ y $g(x, p)$ en un espacio fase, como el producto escalar de sus gradientes :

$$\{f, g\} = \langle \nabla f, \nabla g \rangle = \sum_{\mu=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{\partial g}{\partial p_\mu} - \frac{\partial g}{\partial x^\mu} \frac{\partial f}{\partial p_\mu} \right), \quad (3.12)$$

con:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial p}, -\frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad \nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial p}, -\frac{\partial g}{\partial x} \right). \quad (3.13)$$

Proposición 3. De las propiedades (2.9-2.12) se sigue que en el espacio fase las funciones $f(x, p)$ forman un álgebra de Lie respecto al paréntesis de Poisson.

Ejemplo 9. Se denomina conmutador de dos operadores A y B en un espacio de Hilbert al objeto definido como:

$$[A, B] = AB - BA. \quad (3.14)$$

Proposición 4. El conmutador satisface,

$$\begin{aligned} [A, B] &= -[B, A], \\ [\lambda A + \mu B, C] &= \lambda[A, C] + \mu[B, C], \\ 0 &= [A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]], \\ [AB, C] &= A[B, C] + [A, C]B, \end{aligned} \quad (3.15)$$

donde λ, μ son números complejos.

De las propiedades anteriores se sigue que, en el espacio de Hilbert, los operadores A, B, C forman un álgebra de Lie, respecto al conmutador.

3.5.1. Álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2)$

El álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(2) = L(M_2(k))$ de matrices complejas de 2×2 es un álgebra cuatro dimensional. Las matrices,

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

forman una base de $\mathfrak{gl}(2)$. Estas matrices satisfacen las siguientes relaciones de conmutación,

$$[E, F] = H, \quad (3.16a)$$

$$[H, E] = 2E, \quad (3.16b)$$

$$[H, F] = -2F. \quad (3.16c)$$

Para (3.16a) tenemos:

$$[E, F] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = H.$$

Las relaciones (3.16b) y (3.16c), así como sus relaciones antisimétricas se corroboran de forma similar. Estas matrices también satisfacen la relación,

$$[E, [F, H]] + [F, [H, E]] + [H, [E, F]] = 2[E, F] + 2[F, E] + [H, H] = 0,$$

es decir, la identidad de Jacobi. De (3.16a-3.16c), la identidad de Jacobi y sus relaciones antisimétricas se sigue que $\mathfrak{gl}(2)$ forman un álgebra de Lie. Las matrices de traza cero en $\mathfrak{gl}(2)$ forman el subespacio $\mathfrak{sl}(2)$ extendido en la base $\{E, F, H\}$. La relación

$$[I, E] = [I, F] = [I, H] = 0,$$

muestra que $\mathfrak{sl}(2)$ es el ideal de $\mathfrak{gl}(2)$ y que este es un isomorfismo entre álgebras de Lie,

$$\mathfrak{gl}(2) \cong \mathfrak{sl}(2) \oplus kI.$$

Por lo cual el estudio del álgebra $\mathfrak{gl}(2)$ se reduce al de $\mathfrak{sl}(2)$.

3.5.2. Álgebras de Lie $\mathbb{H}(3, 1)$

Los operadores diferenciales

$$(X^\mu, P_\nu = -i\partial_\nu, \mathbb{I}), \quad (3.17)$$

satisfacen las siguientes relaciones de conmutación

$$[X^\mu, X^\nu] = 0, \quad (3.18a)$$

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \quad (3.18b)$$

$$[X^\mu, P_\nu] = i\delta_\nu^\mu. \quad (3.18c)$$

Las relaciones (3.18a-3.18c) son bilineales y antisimétricas, además satisfacen la identidad de Jacobi.

$$[X^\mu, [X^\nu, X^\rho]] + [X^\nu, [X^\rho, X^\mu]] + [X^\rho, [X^\mu, X^\nu]] = 0, \quad (3.19a)$$

$$[X^\mu, [X^\nu, P_\rho]] + [X^\nu, [P_\rho, X^\mu]] + [P_\rho, [X^\mu, X^\nu]] = 0, \quad (3.19b)$$

$$[X^\mu, [P_\nu, P_\rho]] + [P_\nu, [P_\rho, X^\mu]] + [P_\rho, [X^\mu, P_\nu]] = 0, \quad (3.19c)$$

$$[P_\mu, [P_\nu, P_\rho]] + [P_\nu, [P_\rho, P_\mu]] + [P_\rho, [P_\mu, P_\nu]] = 0. \quad (3.19d)$$

Calculemos (3.19c),

$$\begin{aligned} [X^\mu, [P_\nu, P_\rho]] &= [X^\mu, 0] = 0, \\ [P_\nu, [P_\rho X^\mu]] &= -i\delta_\rho^\mu [P_\nu, 1] = 0, \\ [P_\rho, [X^\mu, P_\nu]] &= i\delta_\nu^\mu [P_\rho, 1] = 0, \end{aligned} \quad (3.20)$$

de (3.20) se sigue,

$$[X^\mu, [P_\nu, P_\rho]] + [P_\nu, [P_\rho X^\mu]] + [P_\rho, [X^\mu, P_\nu]] = 0. \quad (3.21)$$

Las relaciones (3.19a), (3.19b) y (3.19d) se comprueban de forma análoga. De que las relaciones (3.18a-3.18c) sea bilineales, antisimétricas y satisfagan la identidad de Jacobi se sigue que los generadores (3.17) forman un álgebra de Lie denotada por $\mathbb{H}(3, 1)$, y es conocida como el álgebra de Lie del grupo de Heisenberg-Weyl [14].

3.5.3. Álgebra de Lie $\mathfrak{iso}(3, 1)$

Los operadores diferenciales,

$$\begin{aligned} P_\mu &= -i\partial_\mu, \\ M_{\mu\nu} &= i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Satisfacen las siguientes relaciones de conmutación,

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \quad (3.23a)$$

$$[M_{\mu\nu}, P_\rho] = \eta_{\nu\rho}P_\mu - \eta_{\mu\rho}P_\nu, \quad (3.23b)$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\alpha\beta}] = \eta_{\nu\alpha}M_{\mu\beta} - \eta_{\mu\alpha}M_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta}M_{\nu\alpha} - \eta_{\nu\beta}M_{\mu\alpha}. \quad (3.23c)$$

Calculemos (3.23c)

$$\begin{aligned} [M_{\mu\nu}, M_{\alpha\beta}] &= -(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)(x_\alpha\partial_\beta - x_\beta\partial_\alpha) + (x_\alpha\partial_\beta - x_\beta\partial_\alpha)(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) \\ &= -\eta_{\nu\alpha}x_\mu\partial_\beta + \eta_{\nu\beta}x_\mu\partial_\alpha + \eta_{\mu\alpha}x_\nu\partial_\beta - \eta_{\mu\beta}x_\nu\partial_\alpha \\ &\quad + \eta_{\beta\mu}x_\alpha\partial_\nu - \eta_{\beta\nu}x_\alpha\partial_\mu - \eta_{\alpha\mu}x_\beta\partial_\nu + \eta_{\alpha\nu}x_\beta\partial_\mu \\ &= \eta_{\nu\alpha}M_{\mu\beta} - \eta_{\mu\alpha}M_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta}M_{\nu\alpha} - \eta_{\nu\beta}M_{\mu\alpha}. \end{aligned}$$

Las relaciones (3.23a) y (3.23b) se comprueban de forma similar.

Las relaciones (3.23) son bilineales y antisimétricas, además de satisfacer la identidad de Jacobi.

$$[P_\mu, [P_\nu, P_\rho]] + [P_\nu, [P_\rho, P_\mu]] + [P_\rho, [P_\mu, P_\nu]] = 0, \quad (3.24a)$$

$$[M_{\alpha\beta}, [P^\mu, P^\nu]] + [P^\mu, [P^\nu, M_{\alpha\beta}]] + [P^\nu, [M_{\alpha\beta}, P^\mu]] = 0, \quad (3.24b)$$

$$[M_{\alpha\beta}, [M_{\mu\nu}, P^\rho]] + [M_{\mu\nu}, [P^\rho, M_{\alpha\beta}]] + [P^\rho, [M_{\alpha\beta}, M_{\mu\nu}]] = 0, \quad (3.24c)$$

$$[M_{\alpha\beta}, [M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}]] + [M_{\mu\nu}, [M_{\rho\sigma}, M_{\alpha\beta}]] + [M_{\rho\sigma}, [M_{\alpha\beta}, M_{\mu\nu}]] = 0. \quad (3.24d)$$

Calculemos los siguientes conmutadores

$$[M_{\alpha\beta}, [P^\mu, P^\nu]] = 0,$$

$$[P^\mu, [P^\nu, M_{\alpha\beta}]] = [P^\mu, -\eta_{\beta\nu}P_\alpha + \eta_{\alpha\nu}P_\beta] = -\eta_{\beta\nu}[P^\mu, P_\alpha] + \eta_{\alpha\nu}[P^\mu, P_\beta] = 0,$$

$$[P^\nu, [M_{\alpha\beta}, P^\mu]] = [P^\nu, \eta_{\beta\mu}P_\alpha - \eta_{\alpha\mu}P_\beta] = \eta_{\beta\mu}[P^\nu, P_\alpha] - \eta_{\alpha\mu}[P^\nu, P_\beta] = 0,$$

sustituimos los resultados anteriores en (3.24b)

$$[M_{\alpha\beta}, [P^\mu, P^\nu]] + [P^\mu, [P^\nu, M_{\alpha\beta}]] + [P^\nu, [M_{\alpha\beta}, P^\mu]] = 0.$$

La corroboración de (3.24a), (3.24c) y (3.24d) se realiza de forma análoga. De que las relaciones (3.23) sean bilineales, antisimétricas y satisfagan la relación de Jacobi, se sigue que los generadores P_μ y $M_{\mu\nu}$ forman un álgebra de Lie, denominada $\mathfrak{iso}(3, 1)$.

3.6. Grupos de Poisson-Lie

Si se consideran dos variedades de Poisson M_1 y M_2 . El producto cartesiano $M_1 \times M_2$ está equipado con una estructura natural de Poisson, ya que el espacio de funciones en $M_1 \times M_2$ es el producto tensorial de funciones en M_1 y en M_2 . Esto quiere decir que uno puede escribir cualquier función de la forma $f(x, y) = \sum_i f_i^{(1)}(x) f_i^{(2)}(y)$, donde la suma es en general infinita y requiere la definición de una topología. En este contexto definimos para dos funciones $f(x, y)$ y $g(x, y)$ el paréntesis,

$$\{f, g\}_{M_1 \times M_2} = \sum_{ij} \left\{ f_i^{(1)}, g_j^{(1)} \right\}_{M_1} f_i^{(2)} g_j^{(2)} + \left\{ f_i^{(2)}, g_j^{(2)} \right\}_{M_2} f_i^{(1)} g_j^{(1)}. \quad (3.25)$$

Este objeto satisface las propiedades de un paréntesis de Poisson e implica que toda función en M_1 conmuta con cualquier función en M_2 .

En particular si G es un grupo de Lie dotado con una estructura de Poisson, el producto $G \times G$ también tiene una estructura de Poisson. Uno puede preguntarse si la multiplicación $(g, h) \rightarrow gh$ de $G \times G$ a G es compatible con la estructura de Poisson, siendo más precisos, si se tienen dos variedades de Poisson M y N y un mapeo $\phi : M \rightarrow N$, este mapeo se denomina de Poisson, si para cualquier dos funciones f_1, f_2 , en N se tiene $\{f_1 \circ \phi, f_2 \circ \phi\}_M = \{f_1, f_2\}_N \circ \phi$. En este caso la multiplicación es de Poisson si,

$$\{f_1(gh), f_2(gh)\}_{G \times G} = \{f_1, f_2\}_G(gh), \quad (3.26)$$

donde del lado izquierdo de la ecuación $\{f_1(gh), f_2(gh)\}$ es vista como función en $G \times G$.

Un grupo de Poisson-Lie G es un grupo de Lie G equipado con una estructura de Poisson tal que la multiplicación en G , vista como el mapeo $G \times G \rightarrow G$, es un mapeo de Poisson.

Para describir la estructura de Poisson sobre G se usa el álgebra de Lie \mathfrak{g} ,

$$[E_a, E_b]_{\mathfrak{g}} = C^c_{ab} E_c. \quad (3.27)$$

Los generadores E_a actúan como derivadas sobre toda función en el punto $g \in G$. Consideramos los campos vectoriales invariantes por la derecha (o izquierda) ∇_a^R definidos por,

$$\nabla_a^R f(g) = \left. \frac{d}{dt} f(e^{tE_a} g) \right|_{t=0}. \quad (3.28)$$

Estos campos vectoriales forman una base en el espacio tangente $T_g G$, con $[\nabla_a^R, \nabla_b^R] = C^c_{ab} \nabla_c^R$, por lo tanto el paréntesis de Poisson de dos funciones $f_1, f_2 \in G$ se puede escribir como combinación lineal de derivadas con

coeficientes $\Omega^{ab}(g)$,

$$\{f_1, f_2\}_{G(g)} = \sum_{a,b} \Omega^{ab}(g) (\nabla_a^R f_1)(g) (\nabla_b^R f_2)(g). \quad (3.29)$$

Los coeficientes $\Omega^{ab}(g)$ contienen toda la información de la estructura de Poisson. De aquí, que el argumento $\Omega^{ab} \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ se escriba como:

$$\Omega(g) = \sum_{a,b} \Omega^{ab}(g) E_a \otimes E_b. \quad (3.30)$$

La relación entre la estructura de grupo de Lie y la estructura simpléctica de G se obtiene imponiendo que los campos ∇_a^R sean localmente hamiltonianos, es decir, que estos campos son generadores infinitesimales por medio de transformaciones simplécticas.

3.7. Ecuación de Yang-Baxter

Consideremos la siguiente definición del paréntesis de Poisson, para dos funciones A, B cualquiera que dependen de z .

$$\{A, B\} = \sum_{a,b} \Omega^{ab}(z) (\partial_a A)(z) (\partial_b B)(z). \quad (3.31)$$

Notemos lo siguiente

$$\{z^a, z^b\} = \Omega^{cd} (\partial_c z^a) (\partial_d z^b) = \Omega^{ab} = C^{ab} z^d.$$

De aquí para la identidad de Jacobi,

$$\begin{aligned} & \{ \{z^a, z^b\}, z^c \} + \{ \{z^c, z^a\}, z^b \} + \{ \{z^b, z^c\}, z^a \} = 0, \\ & \{ C^{ab} z^d, z^c \} + \{ C^{ca} z^d, z^b \} + \{ C^{bc} z^d, z^a \} = 0, \\ & C^{ab} z^d \Omega^{dc} + C^{ca} z^d \Omega^{db} + C^{bc} z^d \Omega^{da} = 0. \end{aligned}$$

Podemos reescribir el resultado anterior como

$$C^{ab} z^d \Omega^{dc} + C^{ca} z^d \Omega^{db} + C^{bc} z^d \Omega^{da} = 0, \quad (3.32)$$

si multiplicamos por $\Omega^{ic} \Omega^{jb} \Omega^{ka}$ y usamos $\Omega_{ab} \Omega^{bc} = \delta_a^c$,

$$\begin{aligned} & C^{ab} z^d \Omega^{dc} \Omega^{ic} \Omega^{jb} \Omega^{ka} + C^{ca} z^d \Omega^{db} \Omega^{ic} \Omega^{jb} \Omega^{ka} + C^{bc} z^d \Omega^{da} \Omega^{ic} \Omega^{jb} \Omega^{ka} = 0, \\ & C^{ab} z^d \delta_d^i \Omega^{jb} \Omega^{ka} + C^{ca} z^d \Omega^{ic} \delta_d^j \Omega^{ka} + C^{bc} z^d \Omega^{ic} \Omega^{jb} \delta_d^k = 0, \\ & C^{ab} z^d \Omega^{jb} \Omega^{ka} + C^{ca} z^d \Omega^{ic} \Omega^{ka} + C^{bc} z^d \Omega^{ic} \Omega^{jb} = 0, \end{aligned}$$

reescribimos la ecuación anterior como

$$C^i_{ab}\Omega^{jb}\Omega^{ka} + C^j_{ab}\Omega^{ia}\Omega^{kb} + C^k_{ab}\Omega^{ib}\Omega^{ja} = 0. \quad (3.33)$$

Esta es la condición que debe satisfacer $\Omega(g)$ para que se cumpla la identidad de Jacobi y es llamada ecuación clásica de Yang-Baxter.

En la literatura cuando se relaciona la ecuación de Yang-Baxter con los grupos de Poisson-Lie, el elemento $\Omega(g)$ se denomina r-matriz y se denota como $r(g)$. Definimos

$$\begin{aligned} r_{12} &= r^{ab}E_a \otimes E_b \otimes 1, \\ r_{13} &= r^{ab}E_a \otimes 1 \otimes E_b, \\ r_{12} &= r^{ab}1 \otimes E_a \otimes E_b, \end{aligned} \quad (3.34)$$

y calculamos sus conmutadores

$$\begin{aligned} [r_{12}, r_{13}] &= r^{ab}r^{cd}[E_a, E_c] \otimes E_b \otimes E_d = r^{ab}r^{cd}C^e_{ac}E_e \otimes E_b \otimes E_d, \\ [r_{12}, r_{23}] &= r^{ab}r^{cd}E_a \otimes [E_b, E_c] \otimes E_d = r^{ab}r^{cd}C^e_{bc}E_a \otimes E_e \otimes E_d, \\ [r_{13}, r_{23}] &= r^{ab}r^{cd}E_a \otimes E_c \otimes [E_b, E_d] = r^{ab}r^{cd}C^e_{bd}E_a \otimes E_c \otimes E_e. \end{aligned}$$

Podemos reescribir los resultados anteriores como:

$$\begin{aligned} [r_{12}, r_{13}] &= r^{db}r^{ec}C^a_{de}E_a \otimes E_b \otimes E_c, \\ [r_{12}, r_{23}] &= r^{ad}r^{ec}C^b_{de}E_a \otimes E_b \otimes E_c, \\ [r_{13}, r_{23}] &= r^{ad}r^{be}C^c_{de}E_a \otimes E_b \otimes E_c. \end{aligned}$$

Por lo tanto (3.33) es equivalente a la ecuación,

$$[r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{13}, r_{23}] = 0. \quad (3.35)$$

Esta es la forma en que comúnmente se presenta en la literatura la ecuación clásica de Yang-Baxter.

3.8. Álgebra universal envolvente

Definición 20. Si $T^0 = \mathbb{C}$, $T^1 = g$ y $T^n = g \otimes \dots \otimes g$ (n veces), entonces se define el álgebra tensorial de g como el elemento,

$$T(g) = \otimes_{n \geq 0} T^n. \quad (3.36)$$

Al subespacio de $T(g)$ generado por los elementos,

$$\forall g_a, g_b \in g : g_a \otimes g_b - g_b \otimes g_a - i \sum_{c=1}^p f_{abc}g_c = 0, \quad (3.37)$$

se le denomina ideal de $T(g)$ y se le denota como \mathcal{I} .

Definición 21. Si \mathfrak{g} es un álgebra de Lie sobre un campo F con una base p -dimensional, $(\mathfrak{g}_a)_{a \in \{1, \dots, p\}}$ y corchete $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}}$. Entonces el álgebra universal envolvente $U(\mathfrak{g})$ está definida como el cociente entre el álgebra tensorial $T(\mathfrak{g})$ (generada a través del producto tensorial de los elementos de \mathfrak{g}) y el ideal $\mathcal{I}_{\mathfrak{g}} \subset T(\mathfrak{g})$, es decir:

$$U(\mathfrak{g}) = \frac{T(\mathfrak{g})}{\mathcal{I}_{\mathfrak{g}}}. \quad (3.38)$$

3.8.1. Álgebra universal envolvente $U(\mathfrak{sl}(2))$

El álgebra universal envolvente $U = U(\mathfrak{sl}(2))$ es el álgebra de polinomios de elementos de $\mathfrak{sl}(2)$, por lo cual esta álgebra tiene como base a $\{E^i, F^j, H^k\}_{i,j,k \in \mathbb{N}}$. Uno puede demostrar por inducción que las relaciones (3.16), implican para esta álgebra,

$$E^p H^q = (H - 2pI)E^p, \quad (3.39a)$$

$$F^p H^q = (H + 2pI)F^p, \quad (3.39b)$$

$$[E, F^p] = p(H + (p-1)I)F^{p-1}, \quad (3.39c)$$

$$[E^p, F] = p(H - (p+1)I)F^{p-1}. \quad (3.39d)$$

Consideremos (3.39c), por inducción se satisface para $p = 1$. Para $p > 1$ se tiene,

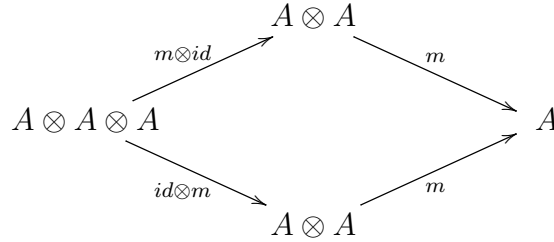
$$\begin{aligned} [E, F^p] &= [E, F^p] + [E, F^{p-1}]F + F^{p-1}[E, F] \\ &= (p-1)(H - (p-2)I)F^{p-2}F + F^{p-1}H = ((p-1)(H - pI) + H)F^{p-1} \\ &= pF^{p-1}(H - pI + I) = p(H + (p-1)I)F^{p-1}. \end{aligned}$$

La relación (3.39d) se comprueba de forma análoga, mientras que (3.39a) y (3.39b) se prueban usando doble inducción en p y q , y las relaciones $EH = (H - 2I)E$ y $FH = (H + 2I)F$.

3.9. Álgebras asociativas con unidad y \mathbb{C} -álgebras

Definición 22. Un álgebra asociativa con unidad (K -álgebra), es un triplete (A, m, i) , definido sobre un espacio vectorial A_K , donde los mapeos $m : A \otimes A \rightarrow A$ e $i : K \rightarrow A$, satisfacen las siguientes propiedades:

1. El mapeo multiplicación $m : A \otimes A \rightarrow A$, satisface el axioma de asociatividad expresado en términos del siguiente diagrama conmutativo:

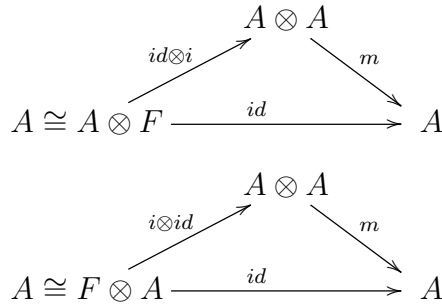


Equivalentemente: $m \circ (m \circ id) = m \circ (id \circ m)$, donde $i : A \rightarrow A$ es la aplicación identidad $a \mapsto a$, y el símbolo " \circ " indica la composición de los mapeos.

2. Existe un elemento unidad $1 \in A$ que satisface la propiedad:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a, \quad \forall a \in A. \quad (3.40)$$

Este axioma de unidad se puede expresar en términos de los siguientes diagramas conmutativos:



Equivalentemente $m \circ (id \otimes i) = id = m \circ (i \otimes id)$. Donde $i : F \rightarrow A$ es un mapeo lineal (mapeo inclusión) definido mediante $i(\alpha) = \alpha 1, \forall \alpha \in F$. Las aplicaciones denotadas por \cong , representan isomorfismos naturales entre $F \otimes A, A \otimes F$, y A , de tal forma que: $\alpha \otimes a = a \otimes \alpha = \alpha a$.

Con los tres diagramas anteriores es posible demostrar que realmente m define una multiplicación asociativa en A y que $i(1)$ es la unidad de A con respecto a esta multiplicación. En efecto, denotando $m(a \otimes b)$ por $a \cdot b$ vemos inmediatamente que la linealidad de m equivale a los axiomas usuales de la bilinealidad de la multiplicación, asociatividad y existencia de la unidad 1_A .

$$(a \cdot b) \cdot c = (m \circ (m \otimes id))(a \otimes b \otimes c) = (m \circ (id \otimes m))(a \otimes b \otimes c) = a \cdot (b \cdot c), \quad \forall a, b, c \in A.$$

Mientras que:

$$a \cdot i(1) = m \circ [(id \otimes i)(a \otimes 1)] = m \circ [(a \otimes i(1))] = a \cdot i(1) \equiv a, \quad \forall a \in A.$$

3.9.1. Homeomorfismos entre K -álgebras

Un homeomorfismo entre las K -álgebras A y B es una aplicación lineal $\varphi : A \rightarrow B$, expresado en términos de los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \xrightarrow{\varphi \otimes \varphi} & B \otimes B \\ \downarrow m_A & & \downarrow m_B \\ A & \xrightarrow{\varphi} & B \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{id} & F \\ \downarrow i_A & & \downarrow i_B \\ A & \xrightarrow{\varphi} & B \end{array}$$

Equivalentemente, $\varphi \circ m_A = m_B \circ (\varphi \otimes \varphi)$ y por otro lado, $\varphi \circ i_A = i_B$. Esto quiere decir simplemente: $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$, $\forall a, b \in A$ y que además $\varphi(1_A) = 1_B$.

Definición 23. Una \mathbb{C} -álgebra es un álgebra con unidad en donde el campo F es \mathbb{C} .

Ejemplo 10. El espacio vectorial \mathbb{R}^n , con la operación multiplicación $\mu : \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, definido por:

$$\mu((x_1, \dots, x_n) \otimes (y_1, \dots, y_n)) = (x_1 y_1, \dots, x_n y_n), \quad (3.41)$$

con la aplicación unidad $\eta : F \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida como:

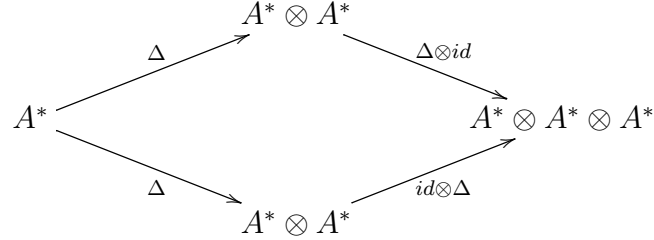
$$\eta(\alpha) = (\alpha, \dots, \alpha), \quad (3.42)$$

satisface los tres diagramas conmutativos anteriores, por lo tanto, es un álgebra asociativa con unidad sobre \mathbb{R} .

3.10. Coálgebra

Una coálgebra es un triplete (A^*, Δ, ϵ) , constituido por un espacio vectorial A^* sobre \mathbb{C} (en este caso, en general puede ser cualquier campo F), en donde los mapeos, $\Delta : A^* \rightarrow A^* \otimes A^*$ y $\epsilon : A^* \rightarrow \mathbb{C}$, satisfacen las siguientes propiedades:

1. El mapeo comultiplicación $\Delta : A^* \rightarrow A^* \otimes A^*$, satisface el axioma de coasociatividad, expresado en términos del siguiente diagrama conmutativo :

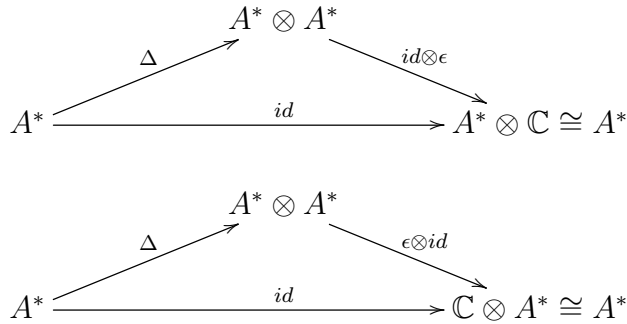


Equivalentemente, $(id \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes id) \circ \Delta$.

2. Existe un elemento unidad $1 \in A^*$ que satisface la propiedad:

$$a^* \cdot 1 = 1 \cdot a^*. \tag{3.43}$$

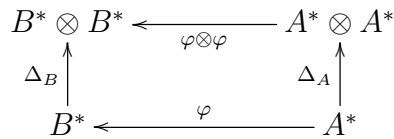
Este axioma de cunidad se puede expresar en términos de los siguientes diagramas conmutativos:



Equivalentemente, $(id \otimes \epsilon) \circ \Delta = id = (\epsilon \otimes id) \circ \Delta$.

3.10.1. Homeomorfismos entre coálgebras

Un homeomorfismo entre dos álgebras A^* y B^* es una aplicación lineal $\varphi : A^* \rightarrow B^*$ expresado en los siguientes diagramas conmutativos:



$$\begin{array}{ccc}
F & \xleftarrow{\quad id \quad} & F \\
\epsilon_B \uparrow & & \epsilon_A \uparrow \\
B & \xleftarrow{\quad \varphi \quad} & A
\end{array}$$

Equivalentemente tenemos las siguientes condiciones $(\varphi \otimes \varphi) \circ \Delta_A = \Delta_B \circ \varphi$ y además, $\epsilon_B \circ \varphi = \epsilon_A$.

Ejemplo 11. Si $C = \mathbb{C}[t]$, denota el conjunto de polinomios de una variable sobre \mathbb{C} , entonces la comultiplicación y counidad, vienen dados respectivamente por:

$$\begin{aligned}
\Delta(t^n) &= \sum_{p+q=n} t^p \otimes t^q, \\
\epsilon(t^n) &= \delta_{n0}.
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Por la coasociatividad (para $n=2$),

$$\begin{aligned}
(id \otimes \Delta) \circ \Delta(t^2) &= (id \otimes \Delta)(t^2 \otimes 1 + t \otimes t + 1 \otimes t^2) \\
&= t^2 \otimes 1 \otimes 1 + t \otimes 1 \otimes t + t \otimes t \otimes 1 + 1 \otimes t^2 \otimes 1 + 1 \otimes t \otimes t + 1 \otimes 1 \otimes t^2 \\
&= (\Delta \otimes id)(t^2 \otimes 1 + t \otimes t + 1 \otimes t^2) = (\Delta \otimes id) \circ \Delta(t^2).
\end{aligned}$$

Para mostrar que $\epsilon(t^n) = \delta_{n0}$ define el mapeo counidad se debe demostrar que: $(id \otimes \epsilon) \circ \Delta(t^n) = t^n \otimes 1$ y $(\epsilon \otimes id) \circ \Delta(t^n) = 1 \otimes t^n$. Para el primer caso tenemos:

$$(id \otimes \epsilon) \circ \Delta(t^n) = (id \otimes \epsilon) \left(\sum_{p+q=n} t^p \otimes t^q \right) = t^n \otimes 1, \tag{3.45}$$

para $(\epsilon \otimes id) \circ \Delta(t^n) = t^n \otimes 1$, se hace un desarrollo similar.

3.11. Relación entre K-álgebras y coálgebras

Si A es un espacio vectorial y $A^* = Hom(A, \mathbb{C})$ es su respectivo espacio dual, i.e. el espacio vectorial de las funciones lineales en A . Entonces $l : A \rightarrow \mathbb{C}$ debe estar en A^* si:

$$l(\alpha a + \beta b) = \alpha l(a) + \beta l(b), \quad \forall a, b \in A, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}. \tag{3.46}$$

Al asumir que A es una \mathbb{C} -álgebra, tenemos el triplete (A, m, i) (en donde los mapeos $m : A \otimes A \rightarrow A$ e $i : \mathbb{C} \rightarrow A$ satisfacen las propiedades de asociatividad y unidad). Entonces la multiplicación en A induce una estructura

en A^* mediante el mapeo $\Delta : A^* \rightarrow A^* \otimes A^*$, llamada comultiplicación o coproducto:

$$\Delta(l)(a \otimes b) = l(a \cdot b), \quad (3.47)$$

donde $l \in A^*$, y asigna a toda función lineal en A una función bilineal en $A \otimes A$. De la misma manera, el mapeo inclusión $i : \mathbb{C} \rightarrow A$ induce el mapeo counidad $\epsilon : A^* \rightarrow \mathbb{C}$, tal que:

$$\epsilon(l) = l(\epsilon), \quad l \in A^*. \quad (3.48)$$

Como consecuencia los diagramas de coasociatividad y counidad, son los respectivos duales de asociatividad y unidad. Mientras que los mapeos asociados a los homeomorfismos son equivalentes. Para obtener unos a partir de otros, solo hay que reemplazar A por A^* , i por ϵ y m por Δ , e invertir las direcciones de las flechas.

3.12. Biálgebras

Definición 24. Una biálgebra B es una quinteta $(A, m, i, \Delta, \epsilon)$, donde A es un espacio vectorial sobre un campo F dotado de las aplicaciones lineales m , i , Δ , ϵ tal que

1. (B, m, i) define un álgebra.
2. (B, Δ, ϵ) define una coálgebra.
3. La multiplicación m y la unidad i son homeomorfismos de la coálgebra.
4. La comultiplicación Δ y la counidad ϵ son homeomorfismos del álgebra.

3.13. Álgebra de Hopf

Definición 25. Una biálgebra B es llamada álgebra de Hopf si existe un mapeo biyectivo $S : B \rightarrow B$, llamado antípoda, con \mathbb{C} -álgebra un antihomeomorfismo, i.e.

$$S(a \cdot b) = S(b) \cdot S(a), \quad \forall a, b \in A, \quad (3.49)$$

y satisface el axioma de la antípoda: $m \circ (S \otimes id) \circ \Delta = m \circ (id \otimes S) \circ \Delta = i \circ \epsilon$, o en formas de diagramas:

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes A & \xrightarrow{S \otimes id} & A \otimes A \\
 \Delta \uparrow & & \downarrow m \\
 A & & A \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & C &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes A & \xrightarrow{id \otimes S} & A \otimes A \\
 \Delta \uparrow & & \downarrow m \\
 A & & A \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & C &
 \end{array}$$

En resumen una álgebra de Hopf es una sexteta $(A, m, i, \Delta, \epsilon, S)$, donde los mapeos satisfacen los axiomas enumerados anteriormente, el espacio dual A^* de un álgebra de Hopf A , tiene una estructura natural de álgebra de Hopf. En efecto, esto al definir la antípoda $S^* : A^* \rightarrow A^*$ de la siguiente manera:

$$S^*(l)(a) = l(S(a)), \quad (3.50)$$

donde $a \in A$ y $l \in A^*$.

Ejemplo 12. Si A es un álgebra compleja con generadores (x, g) , que satisfacen las relaciones $g^2 = 1$, $x^2 = 0$, $gxg = -x$. Los elementos $1, g, x, gx$ forman un espacio vectorial de A . Lo anterior aunado a las relaciones $\Delta(g) = g \otimes g$, $\Delta(x) = x \otimes g + 1 \otimes x$, $\epsilon(g) = 1$, $\epsilon(x) = 0$, $S(g) = g = g^{-1}$ y $S(x) = -x$ definen una estructura de Hopf sobre A . Esta álgebra es no-conmutativa [15].

Proposición 5. Toda álgebra universal envolvente $U(g)$ es un álgebra de Hopf con los mapeos Δ y S definidos por

$$\begin{aligned}
 \Delta(v_1 \cdots v_n) &= \sum_{k=0}^n \sum_{p \in P_{nk}} v_{p(1)} \cdots v_{p(k)} \otimes v_{p(k+1)} \cdots v_{p(n)}, \\
 S(v_1 v_2 \cdots v_n) &= (-1)^n v_n \cdots v_2 v_1,
 \end{aligned} \quad (3.51)$$

con $x_1, \dots, x_n \in g$ y en donde P_{nk} denota el conjunto de todas las permutaciones de $\{1, 2, \dots, n\}$.

3.13.1. Álgebra de Hopf $U(\mathfrak{sl}(2))$

El álgebra de Lie $U(\mathfrak{sl}(2))$ contiene una estructura natural de álgebra de Hopf. Para los generadores E, F, H y el elemento unidad I , se definen:

$$\begin{aligned}
\Delta(E) &= E \otimes 1 + 1 \otimes E, \\
\Delta(F) &= F \otimes 1 + 1 \otimes F, \\
\Delta(H) &= H \otimes 1 + 1 \otimes H, \\
\Delta(I) &= 1 \otimes 1, \\
\epsilon(E) &= \epsilon(F) = \epsilon(H) = 0, \quad \epsilon(I) = I, \\
S(E) &= -E, \quad S(F) = -F, \quad S(H) = -H, \quad S(I) = I.
\end{aligned} \tag{3.52}$$

a) Para corroborar la asociatividad primeramente se tiene que revisar que Δ define un morfismo del álgebra U en el álgebra $U \otimes U$, es decir Δ debe preservar las relaciones 3.16,

$$[\Delta(E), \Delta(F)] = \Delta(H), \tag{3.53a}$$

$$[\Delta(H), \Delta(E)] = 2\Delta(E), \tag{3.53b}$$

$$[\Delta(H), \Delta(F)] = -2\Delta(F). \tag{3.53c}$$

Calculamos (3.53a)

$$\begin{aligned}
[\Delta(E), \Delta(F)] &= (E \otimes 1 + 1 \otimes E)(F \otimes 1 + 1 \otimes F) \\
&\quad - (F \otimes 1 + 1 \otimes F)(E \otimes 1 + 1 \otimes E) \\
&= EF \otimes 1 + 1 \otimes EF - FE \otimes 1 - 1 \otimes FE \\
&= \Delta([E, F]) = \Delta(H).
\end{aligned}$$

Para (3.53b) y (3.53c) el procedimiento es análogo. Una vez satisfecho lo anterior es posible mostrar que se satisface el axioma de coasociatividad. Comprobemos para E , por un lado tenemos

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes id)\Delta(E) &= (\Delta \otimes id)(E \otimes 1 + 1 \otimes E) \\
&= \Delta(E) \otimes 1 + \Delta(1) \otimes E \\
&= E \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes E \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes E,
\end{aligned} \tag{3.54}$$

mientras que, por otro lado

$$\begin{aligned}
(id \otimes \Delta)\Delta(E) &= (id \otimes \Delta)(E \otimes 1 + 1 \otimes E) \\
&= E \otimes \Delta(1) + 1 \otimes \Delta(E) \\
&= E \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes E \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes E.
\end{aligned} \tag{3.55}$$

De (3.54) y (3.55) se concluye que

$$(\Delta \otimes id)\Delta(E) = (id \otimes \Delta)\Delta(E).$$

La coasociatividad para F y H se prueban de forma similar.

b) Para corroborar el axioma de counidad se tiene que revisar que ϵ define un morfismo del álgebra U en el álgebra $U \otimes U$, es decir que ϵ satisface las relaciones,

$$[\epsilon(E), \epsilon(F)] = \epsilon(H), \quad (3.56a)$$

$$[\epsilon(H), \epsilon(E)] = 2\epsilon(E), \quad (3.56b)$$

$$[\epsilon(H), \epsilon(F)] = -2\epsilon(F). \quad (3.56c)$$

Calculamos para (3.56a)

$$[\epsilon(E), \epsilon(F)] = 0 = \epsilon(H).$$

Las relaciones (3.56b) y (3.56c), se corroboran de la misma forma. De esta manera es posible comprobar el axioma de counidad para cada uno de los generadores, en particular para F

$$\begin{aligned} (\epsilon \otimes id)\Delta(F) &= (\epsilon \otimes id)(F \otimes 1 + 1 \otimes F) \\ &= \epsilon(F) \otimes 1 + \epsilon(1) \otimes F = 1 \otimes F, \end{aligned} \quad (3.57)$$

por otro lado

$$\begin{aligned} (id \otimes \epsilon)\Delta(F) &= (id \otimes \epsilon)(F \otimes 1 + 1 \otimes F) \\ &= F \otimes \epsilon(1) + 1 \otimes \epsilon(F) = F \otimes 1. \end{aligned} \quad (3.58)$$

De las relaciones (3.57) y (3.58) se satisface el axioma de counidad para F . Para revisar la counidad de E y H se procede de la misma manera.

c) De la misma forma que en el caso del coproducto y la counidad, antes de comprobar el axioma de counidad es necesario revisar que S define un morfismo del álgebra U en el álgebra $U \otimes U$, es decir,

$$[S(E), S(F)] = S(H), \quad (3.59a)$$

$$[S(H), S(E)] = 2S(E), \quad (3.59b)$$

$$[S(H), S(F)] = -2S(F). \quad (3.59c)$$

Para (3.59c) tenemos

$$\begin{aligned} [S(E), S(F)] &= S(F)S(H) - S(H)S(F) \\ &= FH - HF = -2F = -2S(F). \end{aligned}$$

Para (3.59a) y (3.59b) el procedimiento es el mismo. Satisfaciendose lo anterior es posible comprobar el axioma de la antípoda, en particular para H , por un lado vamos a tener

$$\begin{aligned}\mu(S \otimes id)\Delta(H) &= \mu(S \otimes id)(H \otimes 1 + 1 \otimes H) \\ &= \mu(S(H) \otimes 1 + S(1) \otimes H) \\ &= S(H) + S(1)H = -H + H = 0,\end{aligned}\tag{3.60}$$

por otro lado

$$\begin{aligned}\mu(id \otimes S)\Delta(H) &= \mu(id \otimes S)(H \otimes 1 + 1 \otimes H) \\ &= \mu(H \otimes S(1) + 1 \otimes S(H)) \\ &= HS(1) + S(H) = H - H = 0.\end{aligned}\tag{3.61}$$

De (3.60) y (3.61) se sigue,

$$\mu(S \otimes id)\Delta(H) = \mu(id \otimes S)\Delta(H) = \epsilon(H).$$

Por lo tanto, se satisface el axioma de la antípoda para H . Para los otros generadores la comprobación es similar.

3.13.2. Álgebra de Hopf $U(\mathbb{H}(3, 1))$

El álgebra de Lie $U(\mathbb{H}(3, 1))$ tiene una estructura de álgebra de Hopf, al definir para los generadores X^μ , P_ν y el elemento unidad,

$$\begin{aligned}\Delta(X^\mu) &= X^\mu \otimes 1 + 1 \otimes X^\mu, \\ \Delta(P_\nu) &= P_\nu \otimes 1 + 1 \otimes P_\nu, \\ \Delta(\delta_\nu^\mu) &= \delta_\nu^\mu \otimes 1 + 1 \otimes \delta_\nu^\mu, \\ \Delta(I) &= 1 \otimes 1, \\ \epsilon(X^\mu) &= \epsilon(P_\nu) = \epsilon(\delta_\nu^\mu) = 0 \quad \epsilon(I) = 1, \\ S(X^\mu) &= -X^\mu, \quad S(P_\nu) = -P_\nu \quad S(\delta_\nu^\mu) = \delta_\nu^\mu \quad S(I) = I.\end{aligned}\tag{3.62}$$

a) Para demostrar que Δ define un morfismo tienen que satisfacerse las relaciones

$$[\Delta(X^\mu), \Delta(X^\nu)] = \Delta(0),\tag{3.63a}$$

$$[\Delta(P_\mu), \Delta(P_\nu)] = \Delta(0),\tag{3.63b}$$

$$[\Delta(X^\mu), \Delta(P_\nu)] = i\Delta(\delta_\nu^\mu).\tag{3.63c}$$

Para (3.63c) tenemos,

$$\begin{aligned}
[\Delta(X^\mu), \Delta(P_\nu)] &= (X^\mu \otimes 1 + 1 \otimes X^\mu)(P_\nu \otimes 1 + 1 \otimes P_\nu) \\
&\quad - (P_\nu \otimes 1 + 1 \otimes P_\nu)(X^\mu \otimes 1 + 1 \otimes X^\mu) \\
&= X^\mu P_\nu \otimes 1 + X^\mu \otimes P_\nu + P_\nu \otimes X^\mu + 1 \otimes X^\mu P_\nu \\
&\quad - P_\nu X^\mu \otimes 1 - P_\nu \otimes X^\mu - X^\mu \otimes P_\nu + 1 \otimes P_\nu X^\mu \\
&= [X^\mu, P_\nu] \otimes 1 + 1 \otimes [X^\mu, P_\nu] \\
&= i\Delta(\delta_\nu^\mu).
\end{aligned}$$

Las relaciones (3.63a) y (3.63b) se corroboran de forma análoga.

Primeramente, se mostrará que se satisface el axioma de coasociatividad para X^μ . Por un lado,

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes id)\Delta(X^\mu) &= (\Delta \otimes id)(X^\mu \otimes 1 + 1 \otimes X^\mu) \\
&= X^\mu \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes X^\mu \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes X^\mu,
\end{aligned} \tag{3.64}$$

mientras por otro,

$$\begin{aligned}
(id \otimes \Delta)\Delta(X^\mu) &= (id \otimes \Delta)(X^\mu \otimes 1 + 1 \otimes X^\mu) \\
&= X^\mu \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes X^\mu \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes X^\mu.
\end{aligned} \tag{3.65}$$

De (3.64) y (3.65) se satisface el axioma para X^μ . Ahora veamos que se satisface para P_ν , por un lado,

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes id)\Delta(P_\nu) &= (\Delta \otimes id)(P_\nu \otimes 1 + 1 \otimes P_\nu) \\
&= P_\nu \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes P_\nu \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes P_\nu,
\end{aligned}$$

en tanto que,

$$\begin{aligned}
(id \otimes \Delta)\Delta(P_\nu) &= (id \otimes \Delta)(P_\nu \otimes 1 + 1 \otimes P_\nu) \\
&= P_\nu \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes P_\nu \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes P_\nu.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, también se satisface el axioma de coasociatividad para el caso de P_ν .

b) Para mostrar que ϵ define un morfismo se tiene que satisfacer,

$$\begin{aligned}
[\epsilon(X^\mu), \epsilon(X^\nu)] &= \epsilon(0), \\
[\epsilon(P_\mu), \epsilon(P_\nu)] &= \epsilon(0), \\
[\epsilon(X^\mu), \epsilon(P_\nu)] &= i\epsilon(\delta_\nu^\mu).
\end{aligned} \tag{3.66}$$

Las relaciones (3.66) se satisfacen trivialmente ya que $\epsilon(X^\mu) = \epsilon(P_\nu) = \epsilon(\delta_\nu^\mu) = 0$.

Veamos que X^μ satisface el axioma de counidad, por un lado,

$$\begin{aligned}
(\epsilon \otimes \Delta)\Delta(X^\mu) &= (\epsilon \otimes \Delta)(X^\mu \otimes 1 + 1 \otimes X^\mu) \\
&= \epsilon(X^\mu) \otimes 1 + \epsilon(1) \otimes X^\mu = 1 \otimes X^\mu,
\end{aligned} \tag{3.67}$$

mientras que por el otro,

$$\begin{aligned} (id \otimes \epsilon)\Delta(X^\mu) &= (id \otimes \epsilon)(X^\mu \otimes 1 + 1 \otimes X^\mu) \\ &= X^\mu \otimes \epsilon(1) + 1 \otimes \epsilon(X^\mu) = X^\mu \otimes 1. \end{aligned} \quad (3.68)$$

De las relaciones (3.67) y (3.68) se satisface este axioma de counidad para el generador X^μ . Veamos que ocurre para P_ν , por un lado,

$$\begin{aligned} (\epsilon \otimes \Delta)\Delta(P_\nu) &= (\epsilon \otimes \Delta)(P_\nu \otimes 1 + 1 \otimes P_\nu) \\ &= \epsilon(P_\nu) \otimes 1 + \epsilon(1) \otimes P_\nu = 1 \otimes P_\nu, \end{aligned} \quad (3.69)$$

en tanto que,

$$\begin{aligned} (id \otimes \epsilon)\Delta(P_\nu) &= (id \otimes \epsilon)(P_\nu \otimes 1 + 1 \otimes P_\nu) \\ &= P_\nu \otimes \epsilon(1) + 1 \otimes \epsilon(P_\nu) = P_\nu \otimes 1. \end{aligned} \quad (3.70)$$

De (3.69) y (3.70) también se satisface el axioma de counidad para P_ν .

c) Si S define un morfismo se tienen que satisfacer las relaciones,

$$\begin{aligned} [S(X^\mu), S(X^\nu)] &= S(0), \\ [S(P_\mu), S(P_\nu)] &= S(0), \\ [S(X^\mu), S(P_\nu)] &= iS(\delta_\nu^\mu). \end{aligned} \quad (3.71)$$

Estas relaciones se satisfacen directamente teniendo en cuenta que $S(X^\mu) = -X^\mu$ y $S(P_\nu) = -P_\nu$.

Para mostrar que X^μ satisface el axioma de la antípoda, tenemos por un lado,

$$\begin{aligned} \mu(S \otimes id)\Delta(X^\mu) &= \mu(S \otimes id)(X^\mu \otimes 1 + 1 \otimes X^\mu) \\ &= \mu(S(X^\mu) \otimes 1 + S(1) \otimes X^\mu) \\ &= \mu(-X^\mu \otimes 1 + 1 \otimes X^\mu) = -X^\mu + X^\mu = 0. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Por otro,

$$\begin{aligned} \mu(id \otimes S)\Delta(X^\mu) &= \mu(id \otimes S)(X^\mu \otimes 1 + 1 \otimes X^\mu) \\ &= \mu(X^\mu \otimes S(1) + 1 \otimes S(X^\mu)) \\ &= \mu(X^\mu \otimes 1 + 1 \otimes (-X^\mu)) = X^\mu - X^\mu = 0. \end{aligned} \quad (3.73)$$

De (3.72) y (3.73) se satisface el axioma de la antípoda para el generador X^μ . De forma análoga se puede mostrar que P_ν también satisface este axioma.

3.14. Álgebra de Lazos

3.14.1. Órbitas coadjuntas y el formalismo hamiltoniano

Al introducir la estructura simpléctica natural en el problema uno puede dar una interpretación Hamiltoniana de la ecuación de Lax. Esto también se usa para calcular los paréntesis de Poisson de los elementos de la matriz de Lax en términos de la r-matriz.

Primero introducimos algo de notación sobre la acción adjunta y coadjunta de las álgebras y grupos de Lie. Sea G el grupo de Lie del álgebra de Lie \mathcal{G} . El grupo G actúa en \mathcal{G} mediante la acción adjunta denotada como Ad :

$$X \rightarrow (Adg)(X) = gXg^{-1}, \quad g \in G, \quad X \in \mathcal{G} \quad (3.74)$$

De forma similar la acción coadjunta de G en el dual \mathcal{G}^* del álgebra de Lie \mathcal{G} está definido por:

$$(Ad^*g\xi)(X) = \xi(Adg^{-1}(X)), \quad g \in G, \quad X \in \mathcal{G}, \quad \xi \in \mathcal{G}^*. \quad (3.75)$$

La versión infinitesimal de estas acciones nos da la acción del álgebra de Lie \mathcal{G} en \mathcal{G} y \mathcal{G}^* , denotada como ad y ad^* respectivamente y está dada por:

$$\begin{aligned} adX(Y) &= [X, Y], \quad X, Y \in \mathcal{G}, \\ ad^*X\xi(Y) &= -\xi([X, Y]), \quad X, Y \in \mathcal{G}, \quad \xi \in \mathcal{G}^*. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Consideremos la matriz de Lax con solo una singularidad en $\lambda = 0$:

$$L(\lambda) = (g(\lambda)A_-(\lambda)g^{-1}(\lambda))_- \quad (3.77)$$

con $A_-(\lambda) = \sum_{r=-n}^{-1} A_r \lambda^r$, y $g(\lambda)$ un desarrollo alrededor de $\lambda = 0$. Los elementos de G son series regulares $g(\lambda) = \sum_{r=0}^{\infty} g_r \lambda^r$. La ley del producto es el producto puntual: $(gh)(\lambda) = g(\lambda)h(\lambda)$. Formalmente el álgebra de Lie \mathcal{G} de G está compuesto de elementos de la forma $X(\lambda) = \sum_{r=0}^{\infty} X_r \lambda^r$. Su corchete de Lie está dado por el conmutador puntual.

El dual \mathcal{G}^* de \mathcal{G} se puede identificar con el conjunto de matrices polares $\Xi(\lambda) = \sum_{r \geq 1} \Xi_r \lambda^{-r}$, donde la suma contiene un número finito pero arbitrariamente grande de términos, por la relación

$$\langle \Xi, X \rangle \equiv \text{tr} \text{res}_{\lambda=0}(\Xi(\lambda)X(\lambda)) = \sum_r \text{tr} \Xi_{r+1} X_r \quad (3.78)$$

donde $\text{res}_{\lambda=0}$ se define como el coeficiente de λ^{-1} .

La acción coadjunta de G en \mathcal{G}^* está definida por $((Ad^*g) \cdot \Xi)(X) = \Xi(g^{-1}Xg)$

para $\Xi \in \mathcal{G}^*$ y cualquier $X \in \mathcal{G}$. Usando el modelo anterior para \mathcal{G}^* , y como $\langle \Xi, g^{-1}Xg \rangle = \langle g\Xi g^{-1}, X \rangle = \langle (g\Xi g^{-1})_-, X \rangle$, tenemos

$$(Ad^*g) \cdot \Xi(\lambda) = (g\Xi g^{-1})_- \quad (3.79)$$

Esta es exactamente la ecuación (3.77). La matriz de Lax puede entonces interpretarse como miembro de la órbita coadjunta del elemento $A_-(\lambda)$ de \mathcal{G}^* bajo el grupo de lazo G .

Con esta interpretación, la ecuación de Lax se lee como:

$$\dot{L} = ad^*M \cdot L = [M, L] \quad (3.80)$$

Esto demuestra que las ecuaciones de movimiento se puede ver como un flujo en la órbita coadjunta.

Algunas de las herramientas descritas en este capítulo se utilizarán en el capítulo siguiente y se desarrollan aquí para hacer la tesis sea autocontenida.

Capítulo 4

Teorías de Campo

En este capítulo estudiaremos las corrientes locales y las no-locales, así como su correspondiente carga asociada, como ejemplo consideraremos el modelo quiral de Gross-Neveu. Posteriormente estudiaremos la matriz de monodromía y las matrices r clásicas. Por último desarrollaremos el método de dispersión inverso clásico para los solitones.

4.1. Integrabilidad y Cargas no-locales

La siguiente sección se puede considerar como una continuación del Teorema de Noether.

4.1.1. Simetrías Locales y Bilocales

Consideremos una teoría de campo con el Lagrangiano $\mathcal{L}(\phi_A, \partial\phi_A)$, donde ϕ_A representa el campo de la teoría (que no especificamos por el momento). Suponemos que el Lagrangiano tiene una simetría interna espacio-tiempo continua infinitesimal dada por la variación $\delta\phi_A$, entonces el cambio en el Lagrangiano va estar dado por una derivada total

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu f^\mu. \quad (4.1)$$

Debido al teorema de Noether (de la sección 2.3) podemos definir la corriente j_μ como

$$j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi_A}\delta\phi_A - \delta x^\nu \left(\partial_\nu\phi_A \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi_A} - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \right) + \delta\Omega^\mu, \quad (4.2)$$

la cual satisface

$$\int_M d^d x \partial_\mu j^\mu = 0 \Rightarrow \partial_\mu j^\mu = 0, \quad (4.3)$$

la simetría induce una corriente conservada que satisface la ley de conservación.

Consideremos el caso en que $\delta x^\nu = 0$ y $\delta\Omega^\mu = f^\mu(\phi_A)$, i.e.

$$j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi_A}\delta\phi_A + f^\mu(\phi_A). \quad (4.4)$$

Dependiendo de la simetría, puede ser conveniente desarrollar la corriente en términos de los generadores de la simetría, i.e. $j^\mu = j_a^\mu t_a$. El álgebra de la simetría \mathfrak{g} esta generada por los operadores t_a que suponemos antihermitianos i.e. $t_a = -t_a^\dagger$ y satisfacen la relación de conmutación

$$[t_a, t_b] = f_{abc} t_c. \quad (4.5)$$

Si integramos la corriente conservada en todo el espacio obtenemos la carga conservada

$$J(t) = \int d^{d-1}x j^0(t, x). \quad (4.6)$$

Debido a (4.3) la carga conservada cumple la ecuación

$$\frac{dJ(t)}{dt} = \int_V d^{d-1}x \frac{d}{dt} j^0(t, x) = - \int_V d^{d-1}x \nabla \cdot \vec{j}(t, x) = - \int_S d\vec{S} \cdot \vec{j}(t, x). \quad (4.7)$$

Si consideramos la dimensión espacio-tiempo $d = 2$, encontramos que la carga cumple

$$\frac{dJ(t)}{dt} = - \int_{s_-}^{s_+} dS \cdot j^1(t, x) = j^1(t, s_-) - j^1(t, s_+), \quad (4.8)$$

en donde s_\pm denotan los bordes del espacio. Ahora, suponemos que la corriente decae en los bordes espaciales i.e. $j^\mu(t, x) \xrightarrow{x \rightarrow s_\pm} 0$, como consecuencia la carga J es independiente del tiempo i.e. $\frac{dJ}{dt} = 0$. Para una dimensión espacio temporal $d = 3$ consideramos un volumen infinito V con $S_\pm \rightarrow \pm\infty$.

Boost de Lorentz

Consideremos una transformación de Lorentz como ejemplo de una simetría de Noether. Infinitesimalmente, esta transformación puede representarse como

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \lambda^\mu{}_\nu, \quad (4.9)$$

donde $\lambda^{\mu\nu} = -\lambda^{\nu\mu}$. Consideremos un campo escalar ϕ_A tal que

$$\phi'_A(x') = \phi_A(x),$$

y $x'^\mu = \lambda^\mu{}_\nu x^\nu$, entonces

$$\begin{aligned} \phi_A(x) &= \phi'_A(x') = \phi'_A(\Lambda^{-1}x) = \phi'_A(x + \lambda x) = \phi'_A(x) + \lambda^\mu{}_\nu x^\nu \partial_\mu \phi(x) \\ \Rightarrow \delta\phi_A(x) &= \phi_A(x') - \phi_A(x) = -\lambda^\mu{}_\nu x^\nu \partial_\mu \phi_A(x). \end{aligned}$$

De acuerdo a lo anterior el Lagrangiano transforma de acuerdo a

$$\delta\mathcal{L} = -\lambda^\mu{}_\nu x^\nu \partial_\mu \mathcal{L} = -\partial_\mu (\lambda^\mu{}_\nu x^\nu \mathcal{L}), \quad (4.10)$$

esto se debe a la antisimetría de $\lambda^\mu{}_\nu$. La corriente de Noether correspondiente tiene la forma

$$j^\mu = -\lambda^\rho{}_\nu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_A)} x^\nu \partial_\rho\phi_A(x) - \delta^\mu{}_\rho x^\nu \mathcal{L} \right) = -\lambda^\rho{}_\nu T^\mu{}_\rho x^\nu, \quad (4.11)$$

en donde $T^{\mu\nu}$ es el tensor de energía momento definido por:

$$T^\mu{}_\nu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_A)} \partial_\nu\phi_A(x) - \delta^\mu{}_\nu \mathcal{L}. \quad (4.12)$$

Notemos que $T^{\mu\nu}$ no depende de la transformación infinitesimal $\lambda^\rho{}_\nu$. La corriente j^μ (4.11) en el espacio-tiempo d -dimensional tiene $d(d-1)/2$ cantidades conservadas dadas por

$$(j^\mu)^{\rho\sigma} = x^\rho T^{\mu\sigma} - x^\sigma T^{\mu\rho}, \quad (4.13)$$

que satisfacen $\partial_\mu (j^\mu)^{\rho\sigma} = 0$. Para los índices espaciales $\rho, \sigma = i, j$, la transformación de Lorentz corresponde a una rotación, en cambio para $\rho, \sigma = 0, i$ una combinación de componentes tiempo y espacio, la transformación representa un boost de Lorentz. Nos interesa particularmente el espacio-tiempo 2-dim, en donde existe sólo una transformación de Lorentz (un boost), consideremos el caso $0i$ la cual nos da una carga conservada de la forma

$$J^{0i} = \int d^{d-1}x (x^0 T^{0i} - x^i T^{00}). \quad (4.14)$$

Si el campo tiene un espín no trivial podemos agregar un término extra a la transformación del boost. Notemos además que la densidad Hamiltoniana está definida como la componente 00 del tensor de energía momento,

$$T^{00} = H(x) = \pi^A(x) \dot{\phi}_A(x) - \mathcal{L}, \quad \pi^A(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}_A}. \quad (4.15)$$

Más aún, como la carga J^{0i} se conserva, su valor es independiente del tiempo, entonces podemos elegir $t = x^0 = 0$. Entonces, para $d = 1 + 1$ dim podemos reescribir la carga del Boost como el primer momento del hamiltoniano

$$\mathcal{B} \equiv J_{01} = \int dx x H(x). \quad (4.16)$$

Si suponemos que la integral va de s_- a s_+ podemos reescribir la carga conservada del boost como una integral bilocal de la forma

$$\mathcal{B} \cong \int_{s_-}^{s_+} dx \int_{s_-}^x dy 1 \cdot H(x) \equiv [\mathbb{I}|H] = \int_{s_-}^{s_+} dx (x \cdot H(x) - s_- \cdot H(x)), \quad (4.17)$$

módulo el término $s_- \int_{s_-}^{s_+} dx H(x)$ el cual es proporcional a la energía conservada y no modifica la propiedad del boost de ser una carga conservada, donde \mathbb{I} es la identidad. En (4.17) introducimos el producto ordenado definido por

$$[A|B] = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^x dy A(y)B(x). \quad (4.18)$$

Notemos que el ejemplo anterior de cargas de Noether se refiere a una simetría espacio-temporal. A continuación, desarrollaremos algunos ejemplos de simetrías internas y cargas asociadas que se pueden extender a las simetrías bilocales. La motivación de repasar las propiedades del boost de Lorentz quedaran claras al discutir las simetrías Yangianas.

Simetrías Bilocales

Vamos a considerar corrientes y cargas conservadas 1 + 1-dim. Suponemos que la corriente local j^μ no solo se conserva, sino que además es plana. Donde ser plano quiere decir que la corriente satisface la ecuación

$$[\partial_\mu + j_\mu, \partial_\nu + j_\nu] = 0, \quad (4.19)$$

i.e. define una conexión plana. De forma más explícita, la ecuación anterior puede ser escrita como:

$$F_{01} = \partial_0 j_1 - \partial_1 j_0 + [j_0, j_1] = 0.$$

Si consideramos $j_\mu = j_{\mu a} t_a$ y $[t_a, t_b] = f_{abc} t_c$ tenemos

$$\partial_0 j_{1a} - \partial_1 j_{0a} + f_{abc} j_{0b} j_{1c} = 0. \quad (4.20)$$

Bajo la condición de planeidad o condición de curvatura cero, definimos una corriente conservada bilocal adicional de la forma

$$\hat{j}_a^\mu(t, x) = \epsilon^{\mu\nu} j_{\nu a}(t, x) - \frac{1}{2} f_{abc} j_b^\mu(t, x) \int_{-\infty}^x dy j_c^0(t, y), \quad (4.21)$$

la cual se conserva módulo la condición de planeidad, ya que

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \hat{j}_a^\mu(t, x) &= \partial_\mu \epsilon^{\mu\nu} j_{a\nu}(t, x) \\
&- \frac{f_{abc}}{2} \left[(\partial_\mu j_b^\mu(t, x)) \int_{-\infty}^x dy j_c^0(t, y) + j_b^\mu(t, x) \partial_\mu \int_{-\infty}^x dy j_c^0(t, y) \right] \\
&= \partial_\mu \epsilon^{\mu\nu} j_{a\nu}(t, x) - \frac{1}{2} f_{abc} \left[0 \cdot \int_{-\infty}^x dy j_c^0(t, y) \right. \\
&\quad \left. + j_b^0(t, x) \partial_0 \int_{-\infty}^x dy j_c^0(t, y) + j_b^1(t, x) \partial_1 \int_{-\infty}^x dy j_c^0(t, y) \right] \\
&= \partial_\mu \epsilon^{\mu\nu} j_{a\nu}(t, x) - \frac{1}{2} f_{abc} \left[j_b^0(t, x) \int_{-\infty}^x dy \partial_0 j_c^0(t, y) + j_b^1(t, x) j_c^0(t, x) \right] \\
&= \partial_\mu \epsilon^{\mu\nu} j_{a\nu}(t, x) - \frac{1}{2} f_{abc} \left[j_b^0(t, x) \int_{-\infty}^x dy (-\partial_1 j_c^1(t, y)) + j_b^1(t, x) j_c^0(t, x) \right] \\
&= \partial_\mu \epsilon^{\mu\nu} j_{a\nu}(t, x) + \frac{1}{2} f_{abc} [j_b^0(t, x)(j_c^1(t, x) - j_c^1(t, -\infty)) - j_b^1(t, x) j_c^0(t, x)] \\
&= \partial_\mu \epsilon^{\mu\nu} j_{a\nu}(t, x) + \frac{1}{2} f_{abc} \epsilon_{\mu\nu} j_b^\mu(t, x) j_c^\nu(t, x) \\
&= -\partial_0 j_{1a}(t, x) + \partial_1 j_{0a}(t, x) - [j_0(t, x), j_1(t, x)]_a = 0,
\end{aligned}$$

con $\epsilon^{01} = -1$, nos vamos a referir j^μ como la corriente a nivel cero y a \hat{j}^μ como la corriente a nivel uno. De la misma forma que definimos la carga conservada para la corriente a nivel cero, definimos la correspondiente carga conservada para la corriente a nivel uno

$$\hat{J}_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \hat{j}_a^0(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx j_a^1(t, x) - \frac{1}{2} f_{abc} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^x dx dy j_b^0(t, x) j_c^0(t, y). \quad (4.22)$$

El orden de los términos en la integral 1-dimensional es similar a (4.17) solo que aquí ambas fases del operador bilocal son no triviales. Reescribimos la carga en forma compacta como

$$\hat{J}_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx j_a^1(t, x) - \frac{1}{2} f_{abc} [j_b^0(t) | j_c^0(t)], \quad (4.23)$$

donde hemos usado (4.18). Comprobemos explícitamente que bajo estas condiciones la carga es independiente del tiempo

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \hat{J}_a(t) &= - \int_{-\infty}^{\infty} dx \partial_0 j_a^1(t, x) - \frac{1}{2} f_{abc} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^x dx dy \partial_0 (j_b^0(t, x) j_c^0(t, y)) \\
&= - \int_{-\infty}^{\infty} dx (\partial_1 j_a^0(t, x) - f_{abc} j_b^0(t, x) j_c^1(t, x)) \\
&\quad - \frac{1}{2} f_{abc} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^x dx dy ((\partial_0 j_b^0(t, x)) j_c^0(t, y) + j_b^0(t, x) \partial_0 j_c^0(t, y)) \\
&= j_a^0(t, -\infty) - j_a^0(t, \infty) + f_{abc} \int_{-\infty}^{\infty} dx j_b^0(t, x) j_c^1(t, x) \\
&\quad - \frac{1}{2} f_{abc} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^x dx dy ((\partial_x j_b^1(t, x)) j_c^0(t, y) + j_b^0(t, x) \partial_y j_c^1(t, y)) \\
&= j_a^0(t, -\infty) - j_a^0(t, \infty) + f_{abc} \int_{-\infty}^{\infty} dx j_b^0(t, x) j_c^1(t, x) \\
&\quad - \frac{1}{2} f_{abc} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\partial_x (j_b^1(t, x) \int_{-\infty}^x dy j_c^0(t, y)) - j_b^1(t, x) \partial_x \int_{-\infty}^x dy j_c^0(t, y) \right] \\
&\quad - \frac{1}{2} f_{abc} \int_{-\infty}^{\infty} dx j_b^0(t, x) (j_c^1(t, x) - j_c^1(t, -\infty)) \\
&= j_a^0(t, -\infty) - j_a^0(t, \infty) + f_{abc} \int_{-\infty}^{\infty} dx j_b^0(t, x) j_c^1(t, x) \\
&\quad - \frac{1}{2} f_{abc} j_b^1(t, \infty) \int_{-\infty}^{\infty} dy j_c^0(t, y) + \frac{1}{2} f_{abc} \int_{-\infty}^{\infty} dx j_b^1(t, x) j_c^0(t, x) \\
&\quad - \frac{1}{2} f_{abc} \int_{-\infty}^{\infty} dx j_b^0(t, x) (j_c^1(t, x) - j_c^1(t, -\infty)), \\
\frac{d}{dt} \hat{J}_a(t) &= j_a^0(t, -\infty) - j_a^0(t, \infty) - \frac{1}{2} f_{abc} [j_b^1(t, \infty) J_c - J_b j_c^1(t, -\infty)],
\end{aligned}$$

donde usamos la condición de planeidad y la conservación de la corriente, además considerando que

$$j_a^\mu(t, x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0, \quad (4.24)$$

tenemos

$$\frac{d}{dt} \hat{J}_a(t) = 0. \quad (4.25)$$

Concluimos que la carga para la corriente a nivel uno es independiente del tiempo.

A partir de la propiedad de conservación y de planeidad de la corriente local j_μ obtendremos la corriente conservada bilocal y la carga asociada.

4.1.2. Cargas no locales y Formulación de Lax

Dada la condición de planeidad y la corriente conservada j_μ , podemos definir una derivada covariante $D_\mu = \partial_\mu + j_\mu$, de tal forma que la ley de conservación y la condición de planeidad se transforman en:

$$[\partial_\mu, D_\mu] = 0, \quad \Rightarrow \quad [D_\mu, D_\nu] = 0. \quad (4.26)$$

Consideremos ahora un enfoque inductivo. Supongamos que podemos construir una corriente conservada $j_\mu^{(n)}(x)$ a orden n . La conservación de la corriente implica que existe una función $\chi^{(n)}(x)$ (potencial asociado), para el cual

$$j_\mu^{(n)} = \epsilon_{\mu\nu} \partial^\nu \chi^{(n)}, \quad n \geq 0. \quad (4.27)$$

Como consecuencia, la corriente adicional puede definirse como

$$j_\mu^{(n+1)} = D_\mu \chi^{(n)}, \quad n \geq -1, \quad (4.28)$$

donde $\chi^{(-1)} = 1$. Esta corriente se conserva debido a (4.26), como veremos a continuación

$$\partial^\mu j_\mu^{(n+1)} = \partial^\mu D_\mu \chi^{(n)} = D_\mu \partial^\mu \chi^{(n)} = \epsilon^{\mu\nu} D_\mu D_\nu \chi^{(n-1)} = 0, \quad n \geq 0,$$

en donde también usamos (4.27) y (4.28), que implican $\partial^\mu \chi^{(n)} = \epsilon^{\mu\nu} j_\nu^{(n)} = \epsilon^{\mu\nu} D_\nu \chi^{(n-1)}$ y $\epsilon^{\mu\nu} [D_\mu, D_\nu] = -2[D_0, D_1] = 0$.

Para comenzar la inducción consideremos $\chi^{(-1)} = 1$ y $j_\mu^{(-1)} = 0$, tal que $j_\mu^{(0)} = j^\mu$, que suponemos se conserva. Podemos escribir

$$j_\mu^{(0)} = \epsilon_{\mu\nu} \partial^\nu \chi^{(0)}, \quad \Rightarrow \quad \chi^{(0)} = - \int_{-\infty}^x dy j^0(y), \quad (4.29)$$

entonces

$$\hat{j}_\mu \equiv j_\mu^{(1)} = D_\mu \chi^{(0)} = \epsilon^{\mu\nu} j^\nu(x) - j_\mu(x) \int_{-\infty}^x dy j^0(y). \quad (4.30)$$

Por lo tanto, demostramos la existencia de la corriente conservada $j_\mu^{(0)} = j_\mu$ que satisface (4.26), además podemos construir $j_\mu^{(1)} = \hat{j}_\mu$, así como un número infinito de corrientes conservadas no locales y como consecuencia un número infinito de cargas conservadas no-locales.

$$J^{(n)} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx j_0^{(n)}(x). \quad (4.31)$$

El parámetro espectral.

Ahora tenemos un conjunto de cargas conservadas, es obvio que cualquier combinación lineal de estas cargas conservadas nos da también una carga conservada. Esto nos induce a pensar en construir una función generadora conservada $T(u)$ cuyo desarrollo en λ genere las cargas conservadas

$$T(\lambda) \cong \sum_{k=-1}^{\infty} \lambda^{-k-1} J^{(k)}. \quad (4.32)$$

Comencemos usando una imagen geométrica, lo que nos sugiere que en apariencia tiene la forma de una derivada covariante. De hecho, vamos a definir una nueva derivada covariante $\mathcal{D}_\mu(\lambda) = \partial_\mu - L_\mu(\lambda)$, donde

$$L_\mu(t, x; \lambda) = \frac{1}{\lambda^2 - 1} [j_\mu(t, x) + \lambda \epsilon_{\mu\nu} j^\nu(t, x)], \quad (4.33)$$

llamada conexión de Lax que depende de un parámetro espectral λ . Además exigimos, que (4.26) se cumpla para toda λ i.e.

$$[\mathcal{D}_\mu(\lambda), \mathcal{D}_\nu(\lambda)] = 0. \quad (4.34)$$

Lo que nos proporciona una forma compacta de escribir la condición de planicidad y la conservación de la corriente j_μ . Notemos que podemos interpretar a los componentes de $L_\mu(\lambda)$ como una familia de 1-parámetros de pares de Lax.

La ecuación (4.34) puede interpretarse como una condición de compatibilidad para el llamado "problema lineal auxiliar"

$$\mathcal{D}_\mu(\lambda) \Phi(t, x) = 0, \quad (4.35)$$

que representa un sistema de dos ecuaciones diferenciales de la función $\Phi(t, x)$. De hecho, aplicando otra derivada covariante $\mathcal{D}_\nu(\lambda)$ en la ecuación se demuestra que la solución de Φ solo está bien definida si (4.34) se cumple. La ecuación (4.35) describe una transformación infinitesimal generada por ∂_μ en la conexión $L_\mu(\lambda)$.

Lo que sigue es determinar la matriz de transporte $T(t, x_0, x; \lambda)$ que transporta la solución $\Phi(t, x_0, \lambda)$ a lo largo del intervalo $[x_0, x]$:

$$\Phi(t, x, \lambda) = T(t, x_0, x; \lambda)\Phi(t, x_0, \lambda). \quad (4.36)$$

Notemos que la matriz de transporte puede ser definida por las ecuaciones

$$\mathcal{D}_1(\lambda)T(t, x_0, x; \lambda) = 0, \quad T(t, x_0, x_0; \lambda) = 1. \quad (4.37)$$

Podemos integrar (4.37) a lo largo del eje x y obtener la solución explícita con una trayectoria ordenada

$$T(t, x_0, x; \lambda) = \mathcal{P} \exp \left[\int_{x_0}^x dx' L_1(t, x'; \lambda) \right]. \quad (4.38)$$

Aquí \mathcal{P} denota el ordenamiento en la trayectoria donde el crecimiento en x es a la izquierda. Basándonos en esta expresión, definimos la matriz de monodromía $T(t; \lambda)$ como la matriz de transporte a lo largo de todo el eje x

$$T(t; \lambda) \equiv T(t, -\infty, \infty; \lambda). \quad (4.39)$$

Desarrollamos $T(t; \lambda)$ en potencias de $1/\lambda$,

$$T(t; \lambda) = 1 - \frac{1}{\lambda} \frac{d}{d(1/\lambda)} L_1 + \frac{1}{\lambda^2} \frac{d^2}{d(1/\lambda)^2} L_1 + \dots$$

notemos que para $v = 1/\lambda$ tenemos

$$\begin{aligned} L_\mu(t, x; v)|_{v=0} &= 0, & \frac{d}{dv} L_\mu(t, x; v)|_{v=0} &= \epsilon_{\mu\nu} j^\mu(t, x), \\ \frac{d^2}{dv^2} L_\mu(t, x; v)|_{v=0} &= 2j_\mu(t, x), \end{aligned}$$

y al sustituir obtenemos

$$T(t; \lambda) = 1 - \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} dx j_0(t, x) + \frac{1}{\lambda^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx j_1(t, x) + \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^x dy j_0(t, x) j_0(t, y) \right].$$

En la expresión anterior encontramos que la carga a nivel cero y nivel uno son los primeros coeficientes del desarrollo (4.32). Suponiendo que $j_\mu(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$, podemos demostrar que en general

$$\frac{d}{dt}T(t; \lambda) = L_0(t, +\infty, \lambda)T(t; \lambda) - T(t; \lambda)L_0(t, -\infty, \lambda) \rightarrow 0. \quad (4.40)$$

Es la matriz de monodromía $T(\lambda) \equiv T(t; \lambda)$ la que realmente complementa la función generadora conservada para un número infinito de cargas conservadas $J^{(n)}$.

4.1.3. Modelo Quiral de Gross-Neveu

Repasemos algunos conceptos para el modelo Quiral de Gross-Neveu de dimensión $1 + 1$. Esta teoría fue introducida 1947 por Gross y Neveu [16], representa una versión 2-dim del modelo de Nambu-Jona-Lasino 4-dim [17]. Es un modelo de juguete completo para QCD. Adicionalmente, la teoría es asintóticamente libre y puede resolverse en el límite N grande, donde N es el parámetro de simetría global $\mathfrak{u}(N)$, además es una teoría integrable.

Corriente locales y no-locales. Consideremos el Lagrangiano de la simetría quiral $\mathfrak{u}(N)$.

$$\mathcal{L} = \sum_{\alpha=1}^N \bar{\psi}^\alpha (i\not{\partial})\psi_\alpha + \frac{g^2}{2} \left[\left(\sum_{\alpha=1}^N \bar{\psi}^\alpha \psi_\alpha \right)^2 - \left(\sum_{\alpha=1}^N \bar{\psi}^\alpha \gamma_5 \psi_\alpha \right)^2 \right]. \quad (4.41)$$

Los fermiones de Dirac están denotados por $\psi_{\alpha j}$ y $\bar{\psi}_j^\alpha = \psi_i^{\dagger\alpha} (\gamma^0)_{ij}$ con $i, j = 1, 2$ y los índices α fundamentales o anti-fundamentales $\mathfrak{u}(N)$ respectivos. Las matrices gamma 2-dim en la representación de Weyl tienen la forma

$$\gamma_0 = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 = i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \gamma_0\gamma_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y satisfacen el álgebra de Clifford $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\eta_{\mu\nu}$. El Lagrangiano también tiene una simetría quiral $\mathfrak{u}(1)$

$$\psi_\alpha \rightarrow e^{i\theta\gamma_5}\psi_\alpha, \quad (4.42)$$

que no se rompe a nivel cuántico ya que las partículas masivas generadas por el rompimiento espontáneo de la simetría no están cargadas bajo esta

simetría y las partículas que portan una carga quiral doble se desacoplan.

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}^\alpha(i\cancel{D})\psi_\alpha &\rightarrow \psi^{\dagger\alpha}e^{-i\theta\gamma_5}\gamma^0(i\cancel{D})e^{i\theta\gamma_5}\psi_\alpha = \psi^{\dagger\alpha}e^{-i\theta\gamma_5}\gamma^0e^{-i\theta\gamma_5}(i\cancel{D})\psi_\alpha \\
&= \psi^{\dagger\alpha}e^{-i\theta\gamma_5}e^{i\theta\gamma_5}\gamma^0(i\cancel{D})\psi_\alpha = \psi^{\dagger\alpha}\gamma^0(i\cancel{D})\psi_\alpha = \bar{\psi}^\alpha(i\cancel{D})\psi_\alpha \\
\bar{\psi}^\alpha\psi_\alpha\bar{\psi}^\beta\psi_\beta &\rightarrow \psi^{\dagger\alpha}e^{-i\theta\gamma_5}\gamma^0e^{i\theta\gamma_5}\psi_\alpha\psi^{\dagger\beta}e^{-i\theta\gamma_5}\gamma^0e^{i\theta\gamma_5}\psi_\beta \\
&= \psi^{\dagger\alpha}\gamma^0e^{i\theta\gamma_5}e^{i\theta\gamma_5}\psi_\alpha\psi^{\dagger\beta}e^{-i\theta\gamma_5}e^{-i\theta\gamma_5}\gamma^0\psi_\beta \\
&= \psi^{\dagger\alpha}\gamma^0\psi_\alpha e^{2i\theta\gamma_5}e^{-2i\theta\gamma_5}\psi^{\dagger\beta}\gamma^0\psi_\beta = \bar{\psi}^\alpha\psi_\alpha\bar{\psi}^\beta\psi_\beta \\
\bar{\psi}^\alpha\gamma_5\psi_\alpha\bar{\psi}^\beta\gamma_5\psi_\beta &\rightarrow \psi^{\dagger\alpha}e^{-i\theta\gamma_5}\gamma^0\gamma_5e^{i\theta\gamma_5}\psi_\alpha\psi^{\dagger\beta}e^{-i\theta\gamma_5}\gamma^0\gamma_5e^{i\theta\gamma_5}\psi_\beta \\
&= \psi^{\dagger\alpha}\gamma^0e^{i\theta\gamma_5}\gamma_5e^{i\theta\gamma_5}\psi_\alpha\psi^{\dagger\beta}\gamma^0e^{i\theta\gamma_5}\gamma_5e^{i\theta\gamma_5}\psi_\beta
\end{aligned}$$

Podemos escribir el Lagrangiano de forma alternativa como

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}^\alpha(i\cancel{D})\psi_\alpha + g^2 (\bar{\psi}\gamma_\mu t_a \psi) (\bar{\psi}\gamma^\mu t_a \psi), \quad (4.43)$$

con la suma doble sobre los índices $a, b, \dots = 1, \dots, N^2$, $\alpha, \beta, \dots = 1, \dots, N$ y $t_a = -t_a^*$ son los N^2 generadores de $\mathfrak{u}(N)$. A partir de ahora consideraremos a la ecuación (4.43) como el Lagrangiano Quiral de Gross-Neveu. Por practicidad consideremos a los generadores t_a de $\mathfrak{su}(N)$ en lugar de $\mathfrak{u}(N)$.

La equivalencia entre ambos Lagrangianos puede demostrarse usando la identidad de Fierz

$$(\gamma_\mu)_{ij}(\gamma^\mu)_{kl} = \delta_{il}\delta_{kj} - (\gamma_5)_{il}(\gamma_5)_{kj}, \quad (4.44)$$

así, como la siguiente identidad de los generadores de $\mathfrak{u}(N)$

$$(t_a)_\alpha^\beta (t_a)_\gamma^\delta = -\frac{1}{2}\delta_\gamma^\beta \delta_\alpha^\delta. \quad (4.45)$$

La ecuación de movimiento (Euler-Lagrange) van a ser

$$\begin{aligned}
0 &= i\partial_\mu \bar{\psi}^\alpha \gamma^\mu - 2g^2 (\bar{\psi}\gamma^\mu t_a \psi) (\bar{\psi}\gamma_\mu t_a)^\alpha, \\
0 &= i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_\alpha + 2g^2 (\gamma_\mu t_a \psi)_\alpha (\bar{\psi}\gamma^\mu t_a \psi).
\end{aligned} \quad (4.46)$$

Multiplicando estas ecuaciones por ψ y $\bar{\psi}$, respectivamente y usando la identidad (4.45). Combinando las dos ecuaciones de movimiento tenemos

$$i(\partial_\mu \bar{\psi}^\alpha)\gamma^\mu \psi_\beta + i\bar{\psi}^\alpha \gamma^\mu \partial_\mu \psi_\beta = 0, \quad (4.47)$$

que implica directamente que la corriente se conserva

$$j_a^\mu = -2g^2 i(\bar{\psi}^\alpha \gamma^\mu (t_a)_\alpha^\beta \psi_\beta). \quad (4.48)$$

La normalización se escoge convenientemente. Para ver la corriente es plana, notemos que las ecuaciones de movimiento implican

$$\epsilon^{\mu\nu} i\partial_\mu (\bar{\psi}^\alpha \gamma_\nu \psi_\beta) = 2g^2 \epsilon^{\mu\nu} (\bar{\psi}^\alpha \gamma_\mu \psi_\gamma) (\bar{\psi}^\gamma \gamma_\nu \psi_\beta), \quad (4.49)$$

donde usamos que $\{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0$ y $\gamma_\mu \gamma_5 = -\epsilon_{\mu\nu} \gamma^\nu$ así como la identidad (4.45). En términos de la corriente y contrayendo con el generador t_a , toma la forma

$$\epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu (j_\nu)_\beta^\alpha (t_a)^\beta = \epsilon^{\mu\nu} (j_\mu)_\gamma^\alpha (j_\nu)_\beta^\gamma (t_a)^\beta, \quad (4.50)$$

y así tenemos la condición de curvatura cero

$$\partial_0 j_{1a} - \partial_1 j_{0a} + [j_0, j_1]_a = 0. \quad (4.51)$$

Como consecuencia, podemos construir una corriente bilocal \hat{j} de acuerdo al procedimiento descrito anteriormente.

Corriente axial.

Consideremos ahora la corriente axial dada por,

$$(j_{axial})_a^\mu = -2g^2 i \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu t_a \psi = \epsilon^{\mu\nu} j_{\nu a}, \quad (4.52)$$

que es la forma familiar en la teoría cuántica de campos, sin embargo en este modelo no se conserva

$$\partial_\mu (j_{axial})_a^\mu = \partial_\mu \epsilon^{\mu\nu} j_{\nu a} = -\partial_0 j_{1a} + \partial_1 j_{0a} \neq 0. \quad (4.53)$$

A pesar de ello, cuando construimos la corriente bilocal j_a^μ (la cual si se conserva) podemos interpretar la corriente axial como el complemento no local de la corriente bilocal.

$$\hat{j}_{\mu a} = (j_{axial})_{\mu a} - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x dy [j_\mu(x), j_0(y)]_a. \quad (4.54)$$

Álgebra de Poisson y Formalismo de Lax.

Para estudiar la simetría del álgebra generada por las corrientes anteriores, definimos los paréntesis de Poisson para los fermiones de Dirac

$$\{F, G\} = i \int dx \sum_{\substack{\alpha=1 \\ j=1,2}}^N F \left(\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \psi_j^{\dagger\alpha}(x)} \frac{\vec{\delta}}{\delta \psi_{\alpha,j}(x)} + \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \psi_{\alpha,j}(x)} \frac{\vec{\delta}}{\delta \psi_j^{\dagger\alpha}} \right) G.$$

Donde las flechas se introducen cuidadosamente en la estadística de Grassmann de los campos e indican si la variación actúa sobre la función F o G . Usando la definición de los paréntesis de Poisson podemos demostrar que la corriente (4.48) satisface las siguientes relaciones del álgebra

$$\{j_a^\mu(x), j_b^\nu(y)\} = 2g^2 \delta(x-y) f_{abc} j_c^{|\mu-\nu|},$$

con f_{abc} la constante de estructura de $\mathfrak{su}(N)$. La conexión de Lax y la matriz de monodromía pueden ser definidos como en (4.33) y (4.38), respectivamente.

4.1.4. Simetrías no-locales como Cargas de Noether

Nos podemos preguntar ahora si la simetría no local puede interpretarse como una simetría de Noether, pero esto solo ocurre en algunos casos particulares [18, 19]. Para ilustrarlo, usemos algunos resultados de [18] y consideremos el llamado modelo quiral principal 2-dim con el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16} \text{Tr}[\partial_\mu g(x) \partial^\mu g^{-1}(x)], \quad (4.55)$$

donde el campo $g(x)$ es un grupo valuado i.e. un elemento del grupo G . Las ecuaciones de movimiento toman la forma de la ecuación de conservación

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad (4.56)$$

donde la corriente está dada por

$$j_\mu \equiv g^{-1} \partial_\mu g = -(\partial_\mu g^{-1})g.$$

Notemos que esta corriente tiene curvatura cero, i.e. $\partial_0 j_1 - \partial_1 j_0 + [j^0, j^1] = 0$.

$$\begin{aligned} [j^0, j^1] &= [g^{-1} \partial_0 g, g^{-1} \partial_1 g] = (g^{-1} \partial_0 g) g^{-1} \partial_1 g - (g^{-1} \partial_1 g) g^{-1} \partial_0 g \\ &= -(\partial_0 g^{-1}) g g^{-1} \partial_1 g + (\partial_1 g^{-1}) g g^{-1} \partial_0 g \\ &= -[\partial_0 (g^{-1} \partial_1 g) - g^{-1} \partial_0 \partial_1 g] + \partial_1 (g^{-1} \partial_0 g) - g^{-1} \partial_1 \partial_0 g \\ &= -\partial_0 (g^{-1} \partial_1 g) + \partial_1 (g^{-1} \partial_0 g) = -\partial_0 j_1 + \partial_1 j_0 \end{aligned} \quad (4.57)$$

Ahora definimos la siguiente variación de campo no-local

$$\delta_\rho^{(1)} g = -4g[\chi^{(0)}, \rho], \quad \chi^{(0)}(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dy \epsilon(x-y) j_0(y), \quad (4.58)$$

con $\rho = t^a \rho^a$, donde t^a son los generadores del grupo G y las ρ^a son constantes. Aquí $\chi^{(0)}$ representa de nuevo un potencial asociado a la corriente de nivel cero (4.29). El Lagrangiano es invariante bajo esta transformación salvo una derivada total y para demostrarlo reescribimos el Lagrangiano

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{16} \text{Tr}[\partial_\mu g(x) \partial^\mu g^{-1}(x)] = \frac{1}{16} \text{Tr}[g g^{-1} \partial_\mu g(x) \partial^\mu g^{-1}(x)] \\ &= \frac{1}{16} \text{Tr}[g^{-1} \partial_\mu g(x) (\partial^\mu g^{-1}(x)) g] = \frac{1}{16} \text{Tr}[j_\mu (-j^\mu)]. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Calculamos la variación sobre \mathcal{L}

$$\delta_\rho^{(1)} \mathcal{L} = -\frac{1}{16} \text{Tr}[2j_\mu \delta j^\mu] = -\frac{1}{8} \text{Tr}[j_\mu \delta j^\mu] = \frac{1}{2} \text{Tr} j_\mu \partial^\mu [\chi^{(0)}, \rho]$$

Veamos que el término anterior se puede escribir como una derivada total

$$\begin{aligned}
Tr(j_\mu \partial^\mu([\chi^{(0)}, \rho])) &= Tr(j_\mu \partial^\mu(\chi^{(0)} \rho) - j_\mu \partial^\mu(\rho \chi^{(0)})) \\
&= Tr(j_\mu \partial^\mu(\chi^{(0)} \rho) - \partial^\mu(\rho \chi^{(0)}) j_\mu) \\
&= Tr(j_\mu \partial^\mu(\chi^{(0)} \rho) - (\partial^\mu \rho) \chi^{(0)} j_\mu - \rho (\partial^\mu \chi^{(0)}) j_\mu) \\
&= Tr(j_\mu \partial^\mu(\chi^{(0)} \rho) - \chi^{(0)} j_\mu (\partial^\mu \rho) - (\partial^\mu \chi^{(0)}) j_\mu \rho) \\
&= Tr[(\partial^\mu j_\mu) \chi^{(0)} \rho + j_\mu \partial^\mu(\chi^{(0)} \rho) - (\partial^\mu \chi^{(0)}) j_\mu \rho \\
&\quad - \chi^{(0)} (\partial^\mu j_\mu) \rho - \chi^{(0)} j_\mu (\partial^\mu \rho)] \\
&= Tr(\partial^\mu(j_\mu \chi^{(0)} \rho - \chi^{(0)} j_\mu \rho)) \\
&= Tr(\partial^\mu([j_\mu, \chi^{(0)}] \rho)).
\end{aligned}$$

en donde utilizamos $\partial^\mu j_\mu = 0$, si utilizamos

$$\Rightarrow \delta_\rho^{(1)} \mathcal{L} = \frac{1}{2} Tr j_\mu \partial^\mu[\chi^{(0)}, \rho] = \partial^\mu \frac{1}{2} Tr[(\frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu} [\partial^\nu \chi^{(0)}, \chi^{(0)}] + \epsilon_{\mu\nu} j^\nu) \rho]. \quad (4.60)$$

La simetría de nivel uno nos da la conservación de la corriente de Noether a orden uno

$$j_\mu^{(1)} = -\epsilon_{\mu\nu} j^\nu + [j_\mu, \chi^{(0)}] - \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu} [\partial^\nu \chi^{(0)}, \chi^{(0)}]. \quad (4.61)$$

La conservación de la corriente a nivel uno implica que la corriente a nivel cero tiene curvatura cero

$$\partial^\mu j_\mu^{(1)} \cong -\partial_0 j_1 + \partial_1 j_0 - [j_0, j_1].$$

Notamos que la corriente (4.61) no tiene la forma estándar de (4.21). De hecho, la corriente se conserva haciendo uso de las ecuaciones de movimiento.

$$\partial_\mu \chi^{(1)} = -\epsilon_{\mu\nu} j^\nu.$$

(4.61) se reduce a la forma estándar (4.21) para la corriente a nivel uno. Notemos que podemos comenzar el ansatz con (4.61) para determinar $\xi^{(0)}$ tal que $j^{(1)}$ se conserva. Notablemente, la simetrías anteriores pueden ser extendidas a una familia uni paramétrica de simetrías de Noether no-locales [19]. Como la matriz de monodromía considerada arriba, esta familia complementa la función generadora para el parámetro de simetrías independientes.

4.2. Matriz de Monodromía

Para un sistema con un número infinito de grados de libertad, una matriz de Lax puede interpretarse como una órbita coadjunta. Esta interpretación

puede extenderse a la teoría de campo eligiendo adecuadamente el álgebra de Lie involucrada. Consideraremos la teoría de campo bidimensional en un cilindro con la variable espacial $x \in [0, 2\pi]$ y variable temporal $t \in [-\infty, +\infty]$. Para introducir la variable espacial x , consideramos el álgebra de lazos $\tilde{\mathfrak{g}}$ de mapeos (periódicos) del círculo S^1 hasta alguna álgebra de Lie \mathfrak{g} , es decir, el mapeo $S^1 \rightarrow \mathfrak{g}$. El caso más simple es elegir \mathfrak{g} igual al álgebra de las matrices $N \otimes N$, pero generalmente, será un elemento de un álgebra de lazos con el parámetro espectral λ como en el caso de dimensión infinita. Entonces, estamos trabajando con álgebras de lazo doble. Para introducir la estructura en la dirección x , consideramos la extensión central del álgebra x -loop

$$\hat{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{g}} + \mathbb{C}K. \quad (4.62)$$

El conmutador de dos elementos $X_i = \tilde{X}_i(x) + c_i K$ que por definición es

$$[X_1, X_2] = [\tilde{X}_1(x), \tilde{X}_2(x)] + \int_0^{2\pi} (\tilde{X}_1(x) \partial_x \tilde{X}_2(x)) dx K, \quad (4.63)$$

donde (\cdot, \cdot) es una forma bilineal invariante no degenerada en \mathfrak{g} . El espacio dual $\hat{\mathfrak{g}}^*$ de $\hat{\mathfrak{g}}$ se puede relacionar con el espacio de los pares de elementos de la forma $\Xi = (\Xi(x), \varsigma)$ con

$$\Xi(X) = \int_0^{2\pi} (\tilde{\Xi}(x), \tilde{X}(x)) dx + \varsigma c. \quad (4.64)$$

La acción coadjunta se define como $(ad^* X \cdot \Xi)(Y) = -\Xi([X, Y])$ y toma la forma

$$\begin{aligned} (ad^* X \cdot \Xi)(Y) &= - \int_0^{2\pi} (\tilde{\Xi}(x), [\tilde{X}(x), \tilde{Y}(x)]) dx - \varsigma \int_0^{2\pi} (\tilde{X}(x) \partial_x \tilde{Y}(x)) dx \\ &= \int_0^{2\pi} (-[\tilde{\Xi}(x), \tilde{X}(x)] + \varsigma \partial_x \tilde{X}(x), \tilde{Y}(x)) dx, \end{aligned} \quad (4.65)$$

tal que

$$ad^* X \cdot \Xi = (-[\tilde{\Xi}(x), \tilde{X}(x)] + \varsigma \partial_x \tilde{X}(x), 0). \quad (4.66)$$

Vemos que ς es invariante bajo la acción coadjunta, y elegiremos convenientemente órbitas con $\varsigma = 1$. Con este ajuste, la ecuación de Lax para $L = (U, 1)$ y $M = V$ va ser:

$$\partial_t U - \partial_x V + [U, V] = 0, \quad (4.67)$$

que es la condición de curvatura cero.

Alternativamente, se puede decir que la variable x se comporta como una

variable temporal en los sistemas de dimensión finita. Sin embargo, la construcción de cantidades conmutativas es más complicada porque tenemos que construir funciones invariantes bajo la acción coadjunta (4.66). La condición de curvatura cero (4.67) expresa la condición de compatibilidad del sistema lineal asociado

$$(\partial_x - U)\Psi = 0, \quad (\partial_t - V)\Psi = 0. \quad (4.68)$$

Las matrices U y V se pueden considerar como los componentes x y t de la conexión. Esta conexión se llamará conexión de Lax. Dados U y V , el sistema lineal (4.68) determina la matriz Ψ bajo la multiplicación a la derecha por una matriz constante, que podemos fijar pidiendo $\Psi(\lambda, 0, 0) = 1$, con λ el parámetro espectral. Está Ψ se llamará función de onda.

Elijiendo una trayectoria γ y el origen en el punto (x, t) , la función de onda se puede escribir como

$$\Psi(x, t) = \overleftarrow{\exp} \left[\int_{\gamma} (U dx + V dt) \right], \quad (4.69)$$

donde $\overleftarrow{\exp}$ denota el orden de la trayectoria en la exponencial. Este es solo el transporte paralelo a lo largo de la curva γ de la conexión (U, V) . Como la conexión de Lax satisface la relación de curvatura cero (4.67), el valor de la exponencial $\overleftarrow{\exp}$ es independiente de la elección de la trayectoria. En particular, si γ es la trayectoria $x \in [0, 2\pi]$ con el tiempo fijo t , llamamos a $\Psi(2\pi, t)$ la matriz de monodromía $T(\lambda, t)$:

$$T(\lambda, t) = \Psi(\lambda, 2\pi, t) \equiv \overleftarrow{\exp} \left[\int_0^{2\pi} U(\lambda, x, t) dx \right], \quad (4.70)$$

donde suponemos que $U(\lambda, x, t)$ y $V(\lambda, x, t)$ dependen de un parámetro espectral λ y como están definidos para un tiempo fijo t , la variación dt en (4.69) no contribuye.

Proposición 6. *Supongamos que todos los campos son periódicos en x con periodo 2π . Sea $T(\lambda, t)$ la matriz de monodromía y*

$$H^{(n)}(\lambda) = \text{tr}(T^n(\lambda, t)), \quad (4.71)$$

entonces, $H^{(n)}(\lambda)$ es independiente del tiempo. Por lo tanto, las trazas de las potencias de la matriz de monodromía generan cantidades conservadas.

Demostración. Pensando en la exponencial con la trayectoria $[a, b]$ como

$$\overleftarrow{\exp} \left[\int_a^b U(x) dx \right] \sim (1 + \delta x U(x_n)) \cdots (1 + \delta x U(x_1)),$$

con $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, tal que $x_{i+1} - x_i = \delta x \rightarrow 0$, la exponencial tiene un orden en la trayectoria, usando (4.67) y (4.68) se obtiene

$$\begin{aligned}
\partial_t T(\lambda, t) &= \int_0^{2\pi} dx e^{\int_x^{2\pi} U dx} \dot{U}(\lambda, t) e^{\int_0^x U dx} \\
&= \int_0^{2\pi} dx e^{\int_x^{2\pi} U dx} (\partial_x V + [V, U]) e^{\int_0^x U dx} \\
&= \int_0^{2\pi} dx e^{\int_x^{2\pi} U dx} (\partial_x V + VU - UV) e^{\int_0^x U dx} \\
&= \int_0^{2\pi} dx \left\{ e^{\int_x^{2\pi} U dx} (\partial_x V) e^{\int_0^x U dx} + e^{\int_x^{2\pi} U dx} V \partial_x e^{\int_0^x U dx} \right. \\
&\quad \left. + (\partial_x e^{\int_x^{2\pi} U dx}) V e^{\int_0^x U dx} \right\},
\end{aligned}$$

que podemos reescribir como

$$\partial_t T(\lambda, t) = \int_0^{2\pi} dx \partial_x \left(e^{\int_x^{2\pi} U dx} V e^{\int_0^x U dx} \right).$$

Integrando tenemos

$$\begin{aligned}
\partial_t T(\lambda, t) &= e^{\int_{2\pi}^{2\pi} U dx} V e^{\int_0^{2\pi} U dx} - e^{\int_0^{2\pi} U dx} V e^{\int_0^0 U dx} \\
&= V(\lambda, 2\pi, t) T(\lambda, t) - T(\lambda, t) V(\lambda, 0, t).
\end{aligned}$$

Entonces, si los campos son periódicos, tenemos $V(\lambda, 2\pi, t) = V(\lambda, 0, t)$ y la relación se convierte en

$$\partial_t T(\lambda, t) = [V(\lambda, 0, t), T(\lambda, t)]. \quad (4.72)$$

Esta es la ecuación de Lax e implica que $H^{(n)}(\lambda)$ es independiente del tiempo. Desarrollando en λ obtenemos un conjunto infinito de cantidades conservadas. \square

Es la matriz de monodromía la que desempeña el papel de la matriz de Lax en el contexto de teoría de campos.

Ejemplo

- Consideremos la densidad Lagrangiana del modelo de Schrödinger no-lineal en la teoría de campo clásica no relativista de dim $1 + 1$.

$$\mathcal{L} = i\hbar\psi^* \frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\hbar}{m} \partial_i \psi^* \partial^i \psi - \kappa |\psi^* \psi|^2, \quad (4.73)$$

con κ una constante de acoplo real. Primero calculamos las ecuaciones de movimiento para este modelo, sus derivadas parciales están dadas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} &= -2\kappa|\psi^*\psi|\psi^* & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} &= i\hbar\psi^* & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_i \psi} &= -\frac{\hbar}{m}\partial^i \psi^* \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} &= i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} - 2\kappa|\psi^*\psi|\psi & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^*} &= 0 & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_i \psi^*} &= -\frac{\hbar}{m}\partial^i \psi. \end{aligned} \quad , \quad y$$

entonces tenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} + \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_i \psi} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0 \Rightarrow i\hbar\dot{\psi}^* - \frac{\hbar}{m}\partial_i \partial^i \psi^* + 2\kappa|\psi^*\psi|\psi^* = 0, \quad (4.74)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^*} + \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_i \psi^*} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} = 0 \Rightarrow -\frac{\hbar}{m}\partial_i \partial^i \psi - i\hbar\dot{\psi} + 2\kappa|\psi^*\psi|\psi = 0. \quad (4.75)$$

Donde (4.75) es la ecuación de Schrödinger no lineal.

Debido a que el momento canónico conjugado de ψ está dado por

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = i\hbar\psi^*, \quad (4.76)$$

satisface el siguiente paréntesis de Poisson

$$\{\psi(x), \psi^*(y)\} = \delta(x - y). \quad (4.77)$$

Calculemos ahora el hamiltoniano de la teoría

$$\begin{aligned} H &= \int_{-\infty}^{\infty} d^n x \left(\pi \dot{\psi} - \mathcal{L} \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d^n x \left(i\hbar\psi^*\dot{\psi} - i\hbar\psi^*\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\hbar}{m}\partial_i \psi^* \partial^i \psi + \kappa|\psi^*\psi|^2 \right). \end{aligned}$$

Consideremos el caso $n = 1$, i.e. solo una dimensión, y $\hbar = 1 = m$ entonces tenemos

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{\partial \psi^2}{\partial x} + \kappa|\psi|^4 \right), \quad (4.78)$$

y la ecuación de Schrödinger no-lineal (4.75) va ser

$$i\psi_t = -\psi_{xx} + 2\kappa|\psi|^2\psi, \quad (4.79)$$

suponemos que la función compleja $\psi(x, t)$ es infinitamente diferenciable en ambos argumentos. Vamos a resolver el problema (4.79) por el método de dispersión inverso, lo que nos reduce al problema al estudio de las características espectrales del conjunto de operadores diferenciales lineales $\frac{d}{dx} - L(x, \lambda)$.

El par de Lax para este modelo está dado por

$$L = \begin{pmatrix} -i\frac{\lambda}{2} & i\kappa\psi^* \\ -i\psi & i\frac{\lambda}{2} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} i\frac{\lambda^2}{2} + i\kappa|\psi|^2 & \kappa\frac{\partial\psi^*}{\partial x} - i\kappa\lambda\psi^* \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} + i\lambda\psi & -i\frac{\lambda^2}{2} - i\kappa|\psi|^2 \end{pmatrix}, \quad (4.80)$$

y depende de un parámetro complejo espectral λ . Podemos reescribir $L(x, \lambda)$ como

$$L(x, \lambda) = \begin{pmatrix} -i\frac{\lambda}{2} & i\kappa\bar{\psi}(x) \\ -i\psi(x) & i\frac{\lambda}{2} \end{pmatrix} = -i\frac{\lambda}{2}\sigma_3 + i\kappa\bar{\psi}(x)\sigma_+ - i\psi(x)\sigma_-, \quad (4.81)$$

con

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A partir de aquí vamos a considerar el tiempo t fijo.

Elegimos la matriz L de forma no simétrica en la constante de conexión κ , lo que nos va permitir considerar de manera uniforme tanto el caso repulsivo $\kappa > 0$, como el atractivo $\kappa < 0$.

Introducimos la matriz de transición $T_{x_1}^{x_2}(\lambda)$ para un intervalo finito $[x_1, x_2]$ como la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{\partial}{\partial x_2} T_{x_1}^{x_2}(\lambda) = L(x_2, \lambda) T_{x_1}^{x_2}(\lambda), \quad (4.82)$$

con la condición inicial

$$T_x^x(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}. \quad (4.83)$$

Enumeremos algunas propiedades de la matriz $T_{x_1}^{x_2}(\lambda)$.

$$i) \quad (T_{x_1}^{x_2}(\lambda))^{-1} = T_{x_2}^{x_1}(\lambda), \quad (4.84a)$$

$$ii) \quad T_{x_2}^{x_3}(\lambda)T_{x_1}^{x_2}(\lambda) = T_{x_1}^{x_3}(\lambda), \quad (4.84b)$$

$$iii) \quad \frac{\partial}{\partial x_1} T_{x_1}^{x_2}(\lambda) = -T_{x_1}^{x_2}(\lambda)L(x_1, \lambda), \quad (4.84c)$$

$$iv) \quad \overline{T_{x_1}^{x_2}(\lambda)} = KT_{x_1}^{x_2}(\bar{\lambda})K, \quad (4.84d)$$

$$v) \quad \det T_{x_1}^{x_2}(\lambda) = 1, \quad (4.84e)$$

en donde

$$K = \begin{pmatrix} 0 & \kappa^{1/2} \\ \kappa^{-1/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad K^2 = \mathbb{I},$$

Las propiedades $i) - iii)$ se siguen directamente de la definición de $T_{x_1}^{x_2}(\lambda)$. La propiedad de simetría $iv)$ se sigue de la propiedad análoga del operador L

$$\overline{L(x, \lambda)} = KL(x, \bar{\lambda})K, \quad (4.85)$$

que podemos comprobar directamente. Notemos que (4.84d) implica que la matriz $T_{x_1}^{x_2}(\lambda)$ tiene la forma

$$T_{x_2}^{x_1}(\lambda) = \begin{pmatrix} a_{x_2}^{x_1}(\lambda) & \overline{\kappa b_{x_2}^{x_1}(\bar{\lambda})} \\ b_{x_2}^{x_1}(\lambda) & \overline{a_{x_2}^{x_1}(\bar{\lambda})} \end{pmatrix}. \quad (4.86)$$

Por último, la propiedad $v)$ se sigue de la ecuación $\text{tr}L(x, \lambda) = 0$.

Sustituyendo (4.86) en (4.84e) obtenemos para λ real la relación de "unitariedad"

$$|a_{x_2}^{x_1}(\lambda)|^2 - \kappa|b_{x_2}^{x_1}(\lambda)|^2 = 1, \quad \lambda = \bar{\lambda}. \quad (4.87)$$

Definimos ahora las matrices de transición $T_-(x, \lambda)$, $T_+(x, \lambda)$, $T(\lambda)$ para los intervalos semi-infinitos $(-\infty, x]$ y $[x, \infty)$ y el intervalo infinito $(-\infty, \infty)$, respectivamente, como los siguientes límites

$$T_-(x, \lambda) = \lim_{x_1 \rightarrow -\infty} T_{x_1}^x(\lambda)e(x_1, \lambda), \quad (4.88)$$

$$T_+(x, \lambda) = \lim_{x_2 \rightarrow \infty} e(-x_2, \lambda)T_x^{x_2}(\lambda), \quad (4.89)$$

$$T(\lambda) = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow -\infty \\ x_2 \rightarrow +\infty}} e(-x_2, \lambda)T_{x_1}^{x_2}(\lambda)e(x_1, \lambda), \quad (4.90)$$

donde introducimos

$$e(x, \lambda) = \exp(-i\frac{\lambda}{2}\sigma_3 x).$$

Se sigue de (4.88) que $T_-(x, \lambda)$ satisface con respecto a las variables x la ecuación diferencial (4.82) con la condición de frontera $x \rightarrow -\infty$

$$T_-(x, \lambda) - e(x, \lambda) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0. \quad (4.91)$$

Análogamente, $T_+(x, \lambda)$ satisface con respecto a las variables x la ecuación diferencial (4.84c) con la condición de frontera $x \rightarrow +\infty$

$$T_+(x, \lambda) - e(-x, \lambda) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0. \quad (4.92)$$

Se sigue de (4.84b) que para cualquier x

$$T(\lambda) = T_+(x, \lambda)T_-(x, \lambda). \quad (4.93)$$

Para $T_{\pm}(x, \lambda)$ y $T(\lambda)$ uno puede deducir la propiedad de simetría (4.84d) y la propiedad de unitariedad (4.87).

Enlistamos algunas propiedades de las funciones matriciales $T_{x_1}^{x_2}(\lambda)$, $T_{\pm}(x, \lambda)$ y $T(\lambda)$ con respecto al parámetro espectral λ . $T_{x_1}^{x_2}(\lambda)$ es una función holomorfa en todo el plano complejo λ . Los elementos $a_-(x, \lambda)$, $b_-(x, \lambda)$, $a_+(x, \lambda)$, $\overline{b_+(x, \bar{\lambda})}$, $a(\lambda)$ se pueden extender analíticamente al semi-plano $\text{Im}\lambda > 0$, así como los elementos $\overline{a_-(x, \bar{\lambda})}$, $\overline{b_-(x, \bar{\lambda})}$, $\overline{a_+(x, \bar{\lambda})}$, $\overline{b_+(x, \bar{\lambda})}$, $\overline{a(\bar{\lambda})}$ se pueden extender analíticamente al semi-plano $\text{Im}\lambda < 0$. Los elementos $b(\lambda)$, $\overline{b(\bar{\lambda})}$, en general, se definen sólo para λ real. Para demostrar las propiedades analíticas anteriores y también la existencia de los límites (4.88-4.92) usamos las ecuaciones integrales y la representación integral de $T_{x_1}^{x_2}(\lambda)$, $T_{\pm}(x, \lambda)$ y $T(\lambda)$.

Podemos reescribir las ec. (4.82-4.83) e integrar de x_1 a x_2

$$\partial T_{x_1}^x(\lambda) = \partial_x L(x, \lambda)T_{x_1}^x(\lambda), \quad \Rightarrow T_{x_1}^{x_2}(\lambda) = I + \int_{x_1}^{x_2} dx L(x, \lambda)T_{x_1}^x(\lambda), \quad (4.94)$$

de forma similar para (4.84c-4.83)

$$T_{x_1}^{x_2}(\lambda) = I + \int_{x_1}^{x_2} dx T_{x_1}^x(\lambda)L(x, \lambda), \quad (4.95)$$

Queremos extraer el término del potencial $V = i\kappa\bar{\psi}(x)\sigma_+ - i\psi(x)\sigma_-$ de

$L(x, \lambda)$, entonces hacemos el siguiente desarrollo

$$\begin{aligned}
T_{x_1}^{x_2}(\lambda) &= I + \int_{x_1}^{x_2} dx_3 L(x_3, \lambda) T_{x_1}^{x_3}(\lambda) = I + \int_{x_1}^{x_2} dx_3 \left(-i\frac{\lambda}{2}\sigma_3 + V(x_3)\right) T_{x_1}^{x_3}(\lambda) \\
&= I + \int_{x_1}^{x_2} dx_3 \left(-i\frac{\lambda}{2}\sigma_3\right) T_{x_1}^{x_3}(\lambda) + \int_{x_1}^{x_2} dx_3 V(x_3) T_{x_1}^{x_3}(\lambda) \\
&= I + \int_{x_1}^{x_2} dx_3 \left(-i\frac{\lambda}{2}\sigma_3\right) \left[I + \int_{x_1}^{x_3} dx_4 \left(-i\frac{\lambda}{2}\sigma_3 + V(x_4)\right) T_{x_1}^{x_4}(\lambda) \right] \\
&\quad + \int_{x_1}^{x_2} dx_3 V(x_3) T_{x_1}^{x_3}(\lambda) \\
&= I + \int_{x_1}^{x_2} dx_3 \left(-i\frac{\lambda}{2}\sigma_3\right) + \int_{x_1}^{x_2} dx_3 \left(-i\frac{\lambda}{2}\sigma_3\right) \int_{x_1}^{x_3} dx_4 \left(-i\frac{\lambda}{2}\sigma_3\right) T_{x_1}^{x_4}(\lambda) \\
&\quad + \int_{x_1}^{x_2} dx_3 \int_{x_1}^{x_3} dx_4 \left(-i\frac{\lambda}{2}\sigma_3\right) V(x_4) T_{x_1}^{x_4}(\lambda) + \int_{x_1}^{x_2} dx_3 V(x_3) T_{x_1}^{x_3}(\lambda) \\
&= I + \int_{x_1}^{x_2} dx_3 \left(-i\frac{\lambda}{2}\sigma_3\right) + \int_{x_1}^{x_2} dx_3 \left(-i\frac{\lambda}{2}\sigma_3\right) \int_{x_1}^{x_3} dx_4 \left(-i\frac{\lambda}{2}\sigma_3\right) \cdot \\
&\quad \left[I + \int_{x_1}^{x_4} dx_5 \left(-i\frac{\lambda}{2}\sigma_3 + V(x_5)\right) T_{x_1}^{x_5}(\lambda) \right] \\
&\quad + \int_{x_1}^{x_2} dx_3 \int_{x_1}^{x_3} dx_4 \left(-i\frac{\lambda}{2}\sigma_3\right) V(x_4) T_{x_1}^{x_4}(\lambda) + \int_{x_1}^{x_2} dx_3 V(x_3) T_{x_1}^{x_3}(\lambda) \\
&= I + \left(-i\frac{\lambda}{2}\sigma_3\right)(x_2 - x_1) + \int_{x_1}^{x_2} dx_3 \int_{x_1}^{x_3} dx_4 \left(-i\frac{\lambda}{2}\sigma_3\right)^2 \\
&\quad + \int_{x_1}^{x_2} dx_3 \int_{x_1}^{x_3} dx_4 \int_{x_1}^{x_4} dx_5 \left(-i\frac{\lambda}{2}\sigma_3\right)^3 T_{x_1}^{x_5}(\lambda) \\
&\quad + \int_{x_1}^{x_2} dx_3 \int_{x_1}^{x_3} dx_4 \int_{x_1}^{x_4} dx_5 \left(-i\frac{\lambda}{2}\sigma_3\right)^2 V(x_5) T_{x_1}^{x_5}(\lambda) \\
&\quad + \int_{x_1}^{x_2} dx_3 \int_{x_1}^{x_3} dx_4 \left(-i\frac{\lambda}{2}\sigma_3\right) V(x_4) T_{x_1}^{x_4}(\lambda) + \int_{x_1}^{x_2} dx_3 V(x_3) T_{x_1}^{x_3}(\lambda)
\end{aligned} \tag{4.96}$$

Notemos que podemos integrar el quinto y sexto término de (4.96) por partes; para el sexto término consideremos

$$\begin{aligned} dv &= dx_4 & u &= \int_{x_1}^{x_3} dx_4 V(x_4) T_{x_1}^{x_4}(\lambda) \\ v &= x_4 & du &= dx_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \int_{x_1}^{x_3} dx_4 V(x_4) T_{x_1}^{x_4}(\lambda) \end{aligned}$$

usando lo anterior tenemos

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_2} dx_3 \int_{x_1}^{x_3} dx_4 (-i \frac{\lambda}{2} \sigma_3) V(x_4) T_{x_1}^{x_4}(\lambda) \\ &= -i \frac{\lambda}{2} \sigma_3 \left\{ \left[\int_{x_1}^{x_3} dx_4 V(x_4) T_{x_1}^{x_4}(\lambda) \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} dx_3 x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \int_{x_1}^{x_3} dx_4 V(x_4) T_{x_1}^{x_4}(\lambda) \right\} \\ &= -i \frac{\lambda}{2} \sigma_3 \left\{ x_2 \int_{x_1}^{x_2} dx_4 V(x_4) T_{x_1}^{x_4}(\lambda) - \int_{x_1}^{x_2} dx_3 x_3 V(x_3) T_{x_1}^{x_3}(\lambda) \right\} \\ &= \int_{x_1}^{x_2} dx_3 (-i \frac{\lambda}{2} \sigma_3) (x_2 - x_3) V(x_3) T_{x_1}^{x_3}(\lambda) \end{aligned} \tag{4.97}$$

para el quinto término de (4.96) consideramos

$$\begin{aligned} dv &= dx_3 & u &= \int_{x_1}^{x_3} dx_4 \int_{x_1}^{x_4} dx_5 V(x_5) T_{x_1}^{x_5}(\lambda) \\ v &= x_3 & du &= dx_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \int_{x_1}^{x_3} dx_4 \int_{x_1}^{x_4} dx_5 V(x_5) T_{x_1}^{x_5}(\lambda) \end{aligned}$$

vamos a tener

$$\begin{aligned}
& \int_{x_1}^{x_2} dx_3 \int_{x_1}^{x_3} dx_4 \int_{x_1}^{x_4} dx_5 (-i\frac{\lambda}{2}\sigma_3)^2 V(x_5) T_{x_1}^{x_5}(\lambda) = (-i\frac{\lambda}{2}\sigma_3)^2. \\
& \left\{ \left[x_4 \int_{x_1}^{x_3} dx_4 \int_{x_1}^{x_4} dx_5 V(x_5) T_{x_1}^{x_5}(\lambda) \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} dx_3 x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \int_{x_1}^{x_3} dx_4 \int_{x_1}^{x_4} dx_5 V(x_5) T_{x_1}^{x_5}(\lambda) \right\} \\
& = (-i\frac{\lambda}{2}\sigma_3)^2 \left\{ x_2 \int_{x_1}^{x_2} dx_4 \int_{x_1}^{x_4} dx_5 V(x_5) T_{x_1}^{x_5}(\lambda) - \int_{x_1}^{x_2} dx_3 x_3 \int_{x_1}^{x_3} dx_5 V(x_5) T_{x_1}^{x_5}(\lambda) \right\}, \\
& \tag{4.98}
\end{aligned}$$

para el primer término de (4.98) podemos utilizar (4.97)

$$\begin{aligned}
x_2 \int_{x_1}^{x_2} dx_4 \int_{x_1}^{x_4} dx_5 V(x_5) T_{x_1}^{x_5}(\lambda) &= x_2 \int_{x_1}^{x_2} dx_4 (x_2 - x_4) V(x_4) T_{x_1}^{x_4}(\lambda) \\
&= \int_{x_1}^{x_2} dx_3 (x_2^2 - x_2 x_3) V(x_3) T_{x_1}^{x_3}(\lambda) \\
& \tag{4.99}
\end{aligned}$$

para el segundo término de (4.98) consideramos

$$\begin{aligned}
dv &= dx_3 x_3 & u &= \int_{x_1}^{x_4} dx_5 V(x_5) T_{x_1}^{x_5}(\lambda) \\
v &= \frac{x_3^2}{2} & du &= dx_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \int_{x_1}^{x_4} dx_5 V(x_5) T_{x_1}^{x_5}(\lambda)
\end{aligned}$$

vamos a tener

$$\begin{aligned}
& \int_{x_1}^{x_2} dx_3 x_3 \int_{x_1}^{x_3} dx_5 V(x_5) T_{x_1}^{x_5}(\lambda) \\
&= \left[\frac{x_3^2}{2} \int_{x_1}^{x_4} dx_5 V(x_5) T_{x_1}^{x_5}(\lambda) \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} dx_3 \frac{x_3^2}{2} \frac{\partial}{\partial x_3} \int_{x_1}^{x_4} dx_5 V(x_5) T_{x_1}^{x_5}(\lambda) \\
&= \frac{x_2^2}{2} \int_{x_1}^{x_2} dx_5 V(x_5) T_{x_1}^{x_5}(\lambda) - \int_{x_1}^{x_2} dx_3 \frac{x_3^2}{2} V(x_3) T_{x_1}^{x_3}(\lambda) \\
&= \int_{x_1}^{x_2} dx_3 \frac{x_2^2 - x_3^2}{2} V(x_3) T_{x_1}^{x_3}(\lambda)
\end{aligned} \tag{4.100}$$

sustituimos (4.99) y (4.100) en (4.98)

$$\begin{aligned}
& \int_{x_1}^{x_2} dx_3 \int_{x_1}^{x_3} dx_4 \int_{x_1}^{x_4} dx_5 (-i \frac{\lambda}{2} \sigma_3)^2 V(x_5) T_{x_1}^{x_5}(\lambda) \\
&= (-i \frac{\lambda}{2} \sigma_3)^2 \left\{ \int_{x_1}^{x_2} dx_3 (x_2^2 - x_2 x_3) V(x_3) T_{x_1}^{x_3}(\lambda) - \int_{x_1}^{x_2} dx_3 \frac{x_2^2 - x_3^2}{2} V(x_3) T_{x_1}^{x_3}(\lambda) \right\} \\
&= (-i \frac{\lambda}{2} \sigma_3)^2 \int_{x_1}^{x_2} dx_3 \frac{x_2^2 - 2x_2 x_3 + x_3^2}{2} V(x_3) T_{x_1}^{x_3}(\lambda) \\
&= \int_{x_1}^{x_2} dx_3 (-i \frac{\lambda}{2} \sigma_3)^2 \frac{(x_2 - x_3)^2}{2} V(x_3) T_{x_1}^{x_3}(\lambda)
\end{aligned} \tag{4.101}$$

ahora utilizamos (4.97) y (4.101) en (4.96) y obtenemos

$$\begin{aligned}
T_{x_1}^{x_2}(\lambda) &= I + (-i \frac{\lambda}{2} \sigma_3)(x_2 - x_1) + (-i \frac{\lambda}{2} \sigma_3)^2 \frac{1}{2} (x_2 - x_2)^2 + \dots + \\
&+ \int_{x_1}^{x_2} dx_3 (-i \frac{\lambda}{2} \sigma_3)^2 \frac{1}{2} (x_2 - x_3)^2 V(x_3) T_{x_1}^{x_3}(\lambda) \\
&+ \int_{x_1}^{x_2} dx_3 (-i \frac{\lambda}{2} \sigma_3)(x_2 - x_3) V(x_4) T_{x_1}^{x_4}(\lambda) + \int_{x_1}^{x_2} dx_3 V(x_3) T_{x_1}^{x_3}(\lambda)
\end{aligned}$$

$$T_{x_1}^{x_2}(\lambda) = I + (-i\frac{\lambda}{2}\sigma_3)(x_2 - x_1) + (-i\frac{\lambda}{2}\sigma_3)^2\frac{1}{2}(x_2 - x_1)^2 + \dots + \\ + \int_{x_1}^{x_2} dx_3 \left[I + (-i\frac{\lambda}{2}\sigma_3)(x_2 - x_3) + (-i\frac{\lambda}{2}\sigma_3)^2\frac{1}{2}(x_2 - x_3)^2 + \dots \right] V(x_3)T_{x_1}^{x_3}(\lambda)$$

Entonces tenemos las siguientes ecuaciones integrales para $T_{x_1}^{x_2}(\lambda)$

$$T_{x_1}^{x_2}(\lambda) = e(x_2 - x_1, \lambda) + \int_{x_1}^{x_2} dx e(x_2 - x, \lambda)V(x)T_{x_1}^x(\lambda), \quad (4.102)$$

ó

$$T_{x_1}^{x_2}(\lambda) = e(x_2 - x_1, \lambda) + \int_{x_1}^{x_2} dx T_x^{x_2}(\lambda)V(x)e(x - x_1, \lambda). \quad (4.103)$$

La segunda ecuación integral se obtiene de forma similar a la primera. De (4.88), (4.102) y (4.103) tenemos la siguiente ecuación integral

$$T_-(x, \lambda) = e(x, \lambda) + \int_{-\infty}^x dy e(x - y, \lambda)V(y)T_-(y, \lambda), \quad (4.104)$$

y la representación integral

$$T_-(x, \lambda) = e(x, \lambda) + \int_{-\infty}^x dy T_y^x(\lambda)V(y)e(y, \lambda), \quad (4.105)$$

para $T_-(x, \lambda)$. Análogamente, para (4.89), (4.102) y (4.103) obtenemos la ecuación integral

$$T_+(x, \lambda) = e(-x, \lambda) + \int_x^{\infty} dy T_+(y, \lambda)V(y)e(y - x, \lambda), \quad (4.106)$$

y la representación integral

$$T_+(x, \lambda) = e(-x, \lambda) + \int_x^{-\infty} dy e(-y, \lambda)V(y)T_x^y(\lambda), \quad (4.107)$$

para $T_+(x, \lambda)$. Por último, para $T(\lambda)$ usando (4.90), (4.102) y (4.103) tenemos las siguientes dos representaciones integrales

$$T(\lambda) = I + \int_{-\infty}^{\infty} dx e(-x, \lambda)V(x)T_-(x, \lambda), \quad (4.108)$$

y

$$T(\lambda) = I + \int_{-\infty}^{\infty} dx T_+(x, \lambda) V(x) e(x, \lambda). \quad (4.109)$$

Para obtener la solución de (4.102) ó (4.102) primero escribimos explícitamente cada elemento.

$$\begin{aligned} T_{x_1}^{x_2}(\lambda) &= e(x_2 - x_1, \lambda) + \int_{x_1}^{x_2} dx e(x_2 - x, \lambda) V(x) T_{x_1}^x(\lambda), \\ \begin{pmatrix} a_{x_1}^{x_2}(\lambda) & \overline{\kappa b_{x_1}^{x_2}(\bar{\lambda})} \\ b_{x_1}^{x_2}(\lambda) & \overline{a_{x_1}^{x_2}(\bar{\lambda})} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\lambda}{2}(x_2-x_1)} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\lambda}{2}(x_2-x_1)} \end{pmatrix} + \\ \int_{x_1}^{x_2} dx \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\lambda}{2}(x_2-x)} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\lambda}{2}(x_2-x)} \end{pmatrix} & \left[i\kappa \bar{\psi}(x) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - i\psi(x) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \\ \begin{pmatrix} a_{x_1}^x(\lambda) & \overline{\kappa b_{x_1}^x(\bar{\lambda})} \\ b_{x_1}^x(\lambda) & \overline{a_{x_1}^x(\bar{\lambda})} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\lambda}{2}(x_2-x_1)} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\lambda}{2}(x_2-x_1)} \end{pmatrix} \\ + \int_{x_1}^{x_2} dx \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\lambda}{2}(x_2-x)} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\lambda}{2}(x_2-x)} \end{pmatrix} & \left[i\kappa \bar{\psi}(x) \begin{pmatrix} b_{x_1}^x(\lambda) & \overline{a_{x_1}^x(\bar{\lambda})} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right. \\ - i\psi(x) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{x_1}^x(\lambda) & \overline{\kappa b_{x_1}^x(\bar{\lambda})} \end{pmatrix} & \left. \right] = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\lambda}{2}(x_2-x_1)} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\lambda}{2}(x_2-x_1)} \end{pmatrix} \\ + i \int_{x_1}^{x_2} dx \begin{pmatrix} \kappa e^{-i\frac{\lambda}{2}(x_2-x)} \bar{\psi}(x) b_{x_1}^x(\lambda) & \kappa e^{-i\frac{\lambda}{2}(x_2-x)} \bar{\psi}(x) \overline{a_{x_1}^x(\bar{\lambda})} \\ -e^{i\frac{\lambda}{2}(x_2-x)} \psi(x) a_{x_1}^x(\lambda) & -\kappa e^{i\frac{\lambda}{2}(x_2-x)} \psi(x) \overline{b_{x_1}^x(\bar{\lambda})} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

entonces tenemos

$$a_{x_1}^{x_2}(\lambda) = e^{-i\frac{\lambda}{2}(x_2-x_1)} + i\kappa \int_{x_1}^{x_2} dx e^{-i\frac{\lambda}{2}(x_2-x)} \bar{\psi}(x) b_{x_1}^x(\lambda), \quad (4.110)$$

$$b_{x_1}^{x_2}(\lambda) = -i \int_{x_1}^{x_2} dx e^{i\frac{\lambda}{2}(x_2-x)} \psi(x) a_{x_1}^x(\lambda),$$

para obtener $\overline{\kappa b_{x_1}^{x_2}(\bar{\lambda})}$ y $\overline{a_{x_1}^{x_2}(\bar{\lambda})}$ solo conjugamos (4.110).

Para obtener la solución de (4.110) utilizamos el método de iteración,

para ello escribimos la solución en series de potencias de κ

$$\begin{aligned} a_{x_1}^{x_2}(\lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} \kappa^n (a_{x_1}^{x_2})_{(n)}(\lambda), \\ b_{x_1}^{x_2}(\lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} \kappa^n (b_{x_1}^{x_2})_{(n)}(\lambda), \end{aligned} \quad (4.111)$$

y sustituimos en (4.110),

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \kappa^n (a_{x_1}^{x_2})_{(n)}(\lambda) &= e^{-i\frac{\lambda}{2}(x_2-x_1)} + i \sum_{n=0}^{\infty} \kappa^{n+1} \int_{x_1}^{x_2} dx e^{-i\frac{\lambda}{2}(x_2-x)} \bar{\psi}(x) (b_{x_1}^x)_{(n)}(\lambda) \\ &= e^{-i\frac{\lambda}{2}(x_2-x_1)} + i \sum_{n=1}^{\infty} \kappa^n \int_{x_1}^{x_2} dx e^{-i\frac{\lambda}{2}(x_2-x)} \bar{\psi}(x) (b_{x_1}^x)_{(n-1)}(\lambda), \\ \sum_{n=0}^{\infty} \kappa^n (b_{x_1}^{x_2})_{(n)}(\lambda) &= -i \sum_{n=0}^{\infty} \kappa^n \int_{x_1}^{x_2} dx e^{i\frac{\lambda}{2}(x_2-x)} \psi(x) (a_{x_1}^x)_{(n)}(\lambda), \end{aligned}$$

igualamos las potencias de κ

$$\begin{aligned} n=0 \quad (a_{x_1}^{x_2})_{(0)}(\lambda) &= e^{-i\frac{\lambda}{2}(x_2-x_1)}, \\ (b_{x_1}^{x_2})_{(0)}(\lambda) &= -i \int_{x_1}^{x_2} dx e^{i\frac{\lambda}{2}(x_2-x)} \psi(x) (a_{x_1}^x)_{(0)}(\lambda), \\ n=1, 2, \dots \quad (a_{x_1}^{x_2})_{(n)}(\lambda) &= i \int_{x_1}^{x_2} dx e^{-i\frac{\lambda}{2}(x_2-x)} \bar{\psi}(x) (b_{x_1}^x)_{(n-1)}(\lambda), \\ (b_{x_1}^{x_2})_{(n)}(\lambda) &= -i \int_{x_1}^{x_2} dx e^{i\frac{\lambda}{2}(x_2-x)} \psi(x) (a_{x_1}^x)_{(n)}(\lambda), \end{aligned} \quad (4.112)$$

combinamos los resultados de (4.112) para obtener la solución

$$\begin{aligned}
n = 0 \quad (a_{x_1}^{x_2})_{(0)}(\lambda) &= e^{-i\frac{\lambda}{2}(x_2-x_1)} \\
(b_{x_1}^{x_2})_{(0)}(\lambda) &= -i \int_{x_1}^{x_2} dx e^{i\frac{\lambda}{2}(x_2-x)} \psi(x) (a_{x_1}^x)_{(0)}(\lambda) \\
&= -i \int_{x_1}^{x_2} dx e^{i\frac{\lambda}{2}(x_2-x_1)} \psi(x) e^{-i\frac{\lambda}{2}(x-x_1)} = -ie^{i\frac{\lambda}{2}(x_2+x_1)} \int_{x_1}^{x_2} dx e^{-i\lambda x} \psi(x) \\
n = 1 \quad (a_{x_1}^{x_2})_{(1)}(\lambda) &= i \int_{x_1}^{x_2} dx e^{-i\frac{\lambda}{2}(x_2-x)} \bar{\psi}(x) (b_{x_1}^x)_{(0)}(\lambda) \\
&= i \int_{x_1}^{x_2} dy_1 e^{-i\frac{\lambda}{2}(x_2-y_1)} \bar{\psi}(y_1) \left[-ie^{i\frac{\lambda}{2}(y_1+x_1)} \int_{x_1}^{y_1} dz_1 e^{-i\lambda z_1} \psi(z_1) \right] \\
&= e^{-i\frac{\lambda}{2}(x_2-x_1)} \int_{x_1}^{x_2} dy_1 \int_{x_1}^{y_1} dz_1 e^{i\lambda(y_1-z_1)} \bar{\psi}(y_1) \psi(z_1) \\
(b_{x_1}^{x_2})_{(1)}(\lambda) &= -i \int_{x_1}^{x_2} dx e^{i\frac{\lambda}{2}(x_2-x)} \psi(x) (a_{x_1}^x)_{(1)}(\lambda) \\
&= -i \int_{x_1}^{x_2} dz_2 e^{i\frac{\lambda}{2}(x_2-z_2)} \psi(z_2) \left[e^{-i\frac{\lambda}{2}(z_2-x_1)} \int_{x_1}^{z_2} dy_1 \int_{x_1}^{y_1} dz_1 e^{i\lambda(y_1-z_1)} \bar{\psi}(y_1) \psi(z_1) \right] \\
&= -ie^{i\frac{\lambda}{2}(x_2+x_1)} \int_{x_1}^{x_2} dz_2 \int_{x_1}^{z_2} dy_1 \int_{x_1}^{y_1} dz_1 e^{i\lambda(y_1-z_1-z_2)} \psi(z_2) \bar{\psi}(y_1) \psi(z_1) \\
&\vdots \\
n \quad (a_{x_1}^{x_2})_{(n)}(\lambda) &= e^{-i\frac{\lambda}{2}(x_2-x_1)} \int_{x_1}^{x_2} dy_n \int_{x_1}^{y_n} dz_n \cdots \int_{x_1}^{z_2} dy_1 \int_{x_1}^{y_1} dz_1 \\
&\quad e^{i\lambda(y_1+\cdots+y_n-z_1+\cdots-z_n)} \bar{\psi}(y_n) \psi(z_n) \cdots \bar{\psi}(y_1) \psi(z_1) \\
(b_{x_1}^{x_2})_{(n)}(\lambda) &= -ie^{i\frac{\lambda}{2}(x_2+x_1)} \int_{x_1}^{x_2} dz_{n+1} \int_{x_1}^{z_{n+1}} dy_n \cdots \int_{x_1}^{z_2} dy_1 \int_{x_1}^{y_1} dz_1 \\
&\quad e^{i\lambda(y_1+\cdots+y_n-z_1-\cdots-z_{n+1})} \psi(z_{n+1}) \bar{\psi}(y_n) \psi(z_n) \cdots \psi(z_2) \bar{\psi}(y_1) \psi(z_1)
\end{aligned}$$

A partir del resultado anterior podemos escribir la siguiente represen-

tación de series de potencias para $a(\lambda)$ y $b(\lambda)$.

$$\begin{aligned}
a(\lambda) &= e^{-i\frac{\lambda}{2}(x_2-x_1)} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \kappa^n \int_{x_1}^{x_2} dy_n \int_{x_1}^{y_n} dz_n \cdots \int_{x_1}^{z_2} dy_1 \int_{x_1}^{y_1} dz_1 \right. \\
&\quad \left. e^{i\lambda(y_1+\cdots+y_n-z_1+\cdots-z_n)} \bar{\psi}(y_n)\psi(z_n) \cdots \bar{\psi}(y_1)\psi(z_1) \right] \\
b(\lambda) &= -ie^{i\frac{\lambda}{2}(x_2-x_1)} \sum_{n=1}^{\infty} \kappa^n \int_{x_1}^{x_2} dz_{n+1} \int_{x_1}^{z_{n+1}} dy_n \cdots \int_{x_1}^{z_2} dy_1 \int_{x_1}^{y_1} dz_1 \\
&\quad e^{i\lambda(y_1+\cdots+y_n-z_1+\cdots-z_{n+1})} \psi(z_{n+1})\bar{\psi}(y_n)\psi(z_n) \cdots \psi(z_2)\bar{\psi}(y_1)\psi(z_1)
\end{aligned} \tag{4.113}$$

Podemos obtener un desarrollo similar para los elementos de las matrices $T_{\pm}(x, \lambda)$ y $T(\lambda)$ a partir de (4.113).

Notemos lo siguiente: para $\kappa > 0$ la función $a(\lambda)$ no tiene ceros en $\text{Im}\lambda > 0$, pero para $\kappa < 0$ podemos tener un número infinito de ceros en la parte superior del semiplano :

$$a(\lambda_j) = 0, \quad \text{Im}\lambda_j > 0, \quad j = 1, \dots, N \tag{4.114}$$

Esta propiedad del coeficiente $a(\lambda)$ está estrechamente relacionada con la existencia para $\kappa < 0$ de soluciones del solitón para (4.79).

4.3. La estructura de Poisson y el problema de no-ultra localidad

Como ya vimos, la ecuación de curvatura cero conduce a la construcción de un conjunto infinito de cantidades conservadas. Queremos calcular ahora los paréntesis de Poisson de las cargas conservadas asociadas a estas corrientes conservadas. Para eso, primero calculemos el paréntesis de Poisson de los elementos de la matriz de monodromía.

Suponiendo que existe una relación matricial r tal que:

$$\{L_1(x, t, \lambda), L_2(y, t, \mu)\} = [r_{12}(\lambda-\mu), L_1(x, t, \lambda)+L_2(y, t, \mu)]\delta(x-y), \tag{4.115}$$

donde suponemos que r es una r-matriz no-dinámica de la forma

$$r_{12}(\lambda, \mu) = -r_{21}(\mu, \lambda) = -\frac{C_{12}}{\lambda - \mu}. \tag{4.116}$$

Consideremos la matriz de transporte de x a y a un tiempo fijo

$$T(\lambda; x, y) = \overleftarrow{\exp} \left[\int_x^y U(\lambda, z) dz \right], \quad (4.117)$$

en particular la matriz de monodromía está dada por $T(\lambda) = T(\lambda; 2\pi, 0)$ y los elementos de la matriz $[T]_{ij}$ de $T(\lambda; x, y)$ son funciones en el espacio fase.

Teorema 3. *Si la ecuación (4.115) se satisface, tenemos las relaciones fundamentales de Sklyanin para la matriz de transporte:*

$$\{T_1(\lambda; y, x), T_2(\mu; y, x)\} = [r_{12}(\lambda, \mu), T_1(\lambda; y, x)T_2(\mu; y, x)]. \quad (4.118)$$

Como consecuencia, la traza de las potencias de la matriz de monodromía $H^{(n)}(\lambda) = \text{Tr}(T^n(\lambda))$, genera cantidades de Poisson conmutativos (i.e. en involución).

$$\{H^{(n)}(\lambda), H^{(m)}(\mu)\} = 0. \quad (4.119)$$

Vamos a enfatizar que es el proceso de integración involucrado en la matriz de transporte el que nos lleva del paréntesis lineal de Poisson (4.115) al paréntesis cuadrático de Sklyanin Poisson (4.118).

El teorema demuestra que podemos tomar como hamiltoniano cualquier elemento de la familia generada por $H^{(n)}(\mu)$. Demostremos que la ecuación de movimiento correspondiente toma la forma de la condición de curvatura cero.

Proposición 7. *Tomando a $H^{(n)}(\mu)$ como el hamiltoniano, tenemos*

$$\begin{aligned} \dot{U}(\lambda, x) &\equiv \{H^{(n)}(\mu), U(\lambda, x)\} \\ &= \partial_x V^{(n)}(\lambda, \mu, x) + [V^{(n)}(\lambda, \mu, x), U(\lambda, x)] \end{aligned} \quad (4.120)$$

donde

$$V^{(n)}(\lambda, \mu; x) = n \text{Tr} (T_1(\mu; 2\pi, x) r_{12}(\lambda, \mu) T_1(\mu; x, 0) T_1^{n-1}(\mu; 2\pi, 0)) \quad (4.121)$$

Esto proporciona las ecuaciones de movimiento para una jerarquía de tiempos, cuando lo desarrollamos alrededor de μ .

Por lo tanto, las variables L y T pueden considerarse como las variables más convenientes para mostrar la estructura integrable del modelo.

Con la suposición descrita antes (4.115), la identidad de Jacobi para las relaciones de intercambio de Sklyanin admiten de nuevo como condición suficiente la ecuación clásica de Yang-Baxter con parámetro espectral, denotado por

$$\begin{aligned} [r_{12}(u_1 - u_2), r_{13}(u_1 - u_3)] + [r_{12}(u_1 - u_2), r_{23}(u_2 - u_3)] \\ + [r_{13}(u_1 - u_3), r_{23}(u_2 - u_3)] = 0. \end{aligned} \quad (4.122)$$

Los paréntesis de Poisson (4.115) son llamados ultra locales, debido a que solo tienen la función delta de Dirac y no derivadas de esta. Cuando tenemos derivadas de $\delta(x-y)$ presentes, hablamos de no ultra localidad en la estructura de Poisson.

4.3.1. Paréntesis de Maillet

Cuando los paréntesis de Poisson entre las componentes espaciales de los pares de Lax tienen la forma

$$\begin{aligned} \{L_1(x, t, u), L_2(y, t, u')\} &= \delta(x-y)[r_-(u, u'), L_1(x, t, u)] \\ &+ \delta(x-y)[r_+(u, u'), L_2(y, t, u')] + \delta'(x-y)(r_-(u, u') - r_+(u, u')), \end{aligned} \quad (4.123)$$

i.e. es una estructura no-ultra local tenemos que escogemos un par de matrices (r, s) que satisfagan la ecuación mixta de Yang Baxter

$$\begin{aligned} [(r+s)_{13}(u_1, u_3), (r-s)_{12}(u_1, u_2)] &+ [(r+s)_{23}(u_2, u_3), (r+s)_{12}(u_1, u_2)] \\ &+ [(r+s)_{23}(u_2, u_3), (r+s)_{13}(u_1, u_3)] = 0, \end{aligned} \quad (4.124)$$

donde $r_+ = r + s$, $r_- = r - s$.

Los paréntesis de Poisson para la matriz de monodromía clásica $T = \overleftarrow{\epsilon x p} \int L$ puede obtenerse de (4.123) mediante un tratamiento cuidadoso de la ambigüedad que surge de la no ultra localidad

$$\begin{aligned} \{T(u) \otimes 1, 1 \otimes T(u')\} &= [r(u, u'), T(u) \otimes T(u')] \\ &- [1 \otimes T(u')]s(u, u')[T(u) \otimes 1] + [T(u) \otimes 1]s(u, u')[1 \otimes T(u')]. \end{aligned} \quad (4.125)$$

Tomando la traza de (4.125) podemos demostrar tranquilamente que un conjunto infinito de cargas conservadas clásicas en involución se generan por $TrT(u)$. Sin embargo, hasta ahora no se ha establecido un proceso de cuantización de los paréntesis (4.125), a pesar de ello la s-matriz cuántica puede obtenerse usando las simetrías del sistema.

Ejemplo

El modelo Quiral principal nos da un ejemplo estándar de la estructura de Maillet. Esta es la teoría de un elemento de g un grupo compacto G con el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2\gamma} tr(j_\mu j^\mu), \quad j_\mu = (\partial_\mu g)g^{-1}, \quad (4.126)$$

que admite simetría global derecha $g \rightarrow ge^{if}$, $j_\mu \rightarrow j_\mu$ e izquierda $g \rightarrow e^{if}g$, $j_\mu \rightarrow e^{if}j_\mu e^{-if}$. γ es la constante de acoplamiento en la teoría.

Debido a que no es trivial ver que j^μ se conserva vamos a demostrarlo. Primero notemos lo siguiente

$$\partial_\mu(gg^{-1}) = 0 = (\partial_\mu g)g^{-1} + g\partial_\mu g^{-1} \Rightarrow (\partial_\mu g)g^{-1} = -g\partial_\mu g^{-1}. \quad (4.127)$$

Calculemos ahora las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g} &= -\frac{1}{2\gamma} \frac{\partial}{\partial g} \text{tr}(j_\mu j^\mu) = -\frac{1}{2\gamma} \text{tr} \frac{\partial}{\partial g} (j_\mu j^\mu) = -\frac{1}{2\gamma} \text{tr} \left\{ 2j_\mu \frac{\partial j^\mu}{\partial g} \right\} \\ &= -\frac{1}{\gamma} \text{tr} \left\{ (\partial_\mu g)g^{-1} (\partial_\mu g) \frac{\partial g^{-1}}{\partial g} \right\} = -\frac{1}{\gamma} \text{tr} \left\{ (\partial_\mu g)g^{-1} (\partial_\mu g)(-)g^{-1}g^{-1} \right\} \\ &= -\frac{1}{\gamma} \text{tr} \left\{ (\partial_\mu g)(\partial_\mu g^{-1})g^{-1} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu g} &= -\frac{1}{2\gamma} \partial_\mu \frac{\partial}{\partial \partial_\mu g} \text{tr}(j_\nu j^\nu) = -\frac{1}{2\gamma} \text{tr} \partial_\mu \frac{\partial}{\partial \partial_\mu g} (j_\nu j^\nu) = -\frac{1}{2\gamma} \text{tr} \partial_\mu \left\{ 2j_\nu \frac{\partial j^\nu}{\partial \partial_\mu g} \right\} \\ &= -\frac{1}{\gamma} \text{tr} \partial_\mu \left\{ (\partial_\nu g)g^{-1} \frac{\partial(\partial^\nu g)}{\partial \partial_\mu g} g^{-1} \right\} = -\frac{1}{\gamma} \text{tr} \partial_\mu \left\{ (\partial_\nu g)g^{-1} \delta^{\nu\mu} g^{-1} \right\} \\ &= -\frac{1}{\gamma} \text{tr} \partial_\mu \left\{ (\partial^\mu g)g^{-1}g^{-1} \right\} \\ &= -\frac{1}{\gamma} \text{tr} \left\{ (\partial_\mu \partial^\mu g)g^{-1}g^{-1} + (\partial^\mu g)(\partial_\mu g^{-1})g^{-1} + (\partial^\mu g)g^{-1} \partial_\mu g^{-1} \right\}, \end{aligned}$$

podemos reescribir el tercer término de la ecuación anterior como

$$\begin{aligned} \text{tr} \left\{ (\partial^\mu g)g^{-1} \partial_\mu g^{-1} \right\} &= \text{tr} \left\{ -(\partial^\mu g)g^{-1}g^{-1} (\partial_\mu g)g^{-1} \right\} = \text{tr} \left\{ -g^{-1} (\partial^\mu g)g^{-1}g^{-1} (\partial_\mu g) \right\} \\ &= \text{tr} \left\{ (\partial^\mu g^{-1})g^{-1} (\partial_\mu g) \right\} = \text{tr} \left\{ (\partial_\mu g)(\partial^\mu g^{-1})g^{-1} \right\} \end{aligned}$$

en donde utilizamos la ciclicidad de la traza, entonces tenemos

$$\begin{aligned} \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu g} &= -\frac{1}{\gamma} \text{tr} \left\{ (\partial_\mu \partial^\mu g)g^{-1}g^{-1} + (\partial_\mu g)(\partial^\mu g^{-1})g^{-1} + (\partial_\mu g)(\partial^\mu g^{-1})g^{-1} \right\} \\ &= -\frac{1}{\gamma} \text{tr} \left\{ (\partial_\mu \partial^\mu g)g^{-1}g^{-1} + 2(\partial_\mu g)(\partial^\mu g^{-1})g^{-1} \right\} \end{aligned}$$

Usando los resultados anteriores la ecuación de movimiento va ser

$$\begin{aligned} \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu g} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g} &= 0 = -\frac{1}{\gamma} \text{tr} \left\{ (\partial_\mu \partial^\mu g)g^{-1}g^{-1} + 2(\partial_\mu g)(\partial^\mu g^{-1})g^{-1} \right\} \\ &\quad - (-) \frac{1}{\gamma} \text{tr} \left\{ (\partial_\mu g)(\partial^\mu g^{-1})g^{-1} \right\} \\ 0 &= -\frac{1}{\gamma} \text{tr} \left\{ (\partial_\mu \partial^\mu g)g^{-1}g^{-1} + (\partial_\mu g)(\partial^\mu g^{-1})g^{-1} \right\}. \end{aligned}$$

Podemos reescribir la ecuación de movimiento como:

$$0 = -\frac{1}{\gamma} \text{tr} \{ \partial_\mu ((\partial^\mu g) g^{-1}) g^{-1} \} \Rightarrow \partial_\mu ((\partial^\mu g) g^{-1}) = 0 = \partial_\mu j^\mu, \quad (4.128)$$

con lo que demostramos que j^μ se conserva.

Con la signatura de Minkowsky $x^0 = t$, $x^1 = x$ y la conservación de j^μ está dada por $\partial_\mu j^\mu = \partial_0 j_0 - \partial_1 j_1 = 0$. Además podemos definir las corrientes izquierdas y derechas como:

$$j_\mu^L = j_\mu = (\partial_\mu g) g^{-1}, \quad j_\mu^R = -g^{-1} (\partial_\mu g), \quad (4.129)$$

estas pertenecen al álgebra de Lie de \mathfrak{g} . Las corrientes son uniformes i.e.

$$\partial_\mu j_\nu^{L,R} - \partial_\nu j_\mu^{L,R} - [j_\mu^{L,R}, j_\nu^{L,R}] = 0, \quad (4.130)$$

y los pares de Lax van a ser

$$L = \frac{u j_0 + j_1}{1 - u^2}, \quad M = \frac{u j_1 + j_0}{1 - u^2}, \quad (4.131)$$

entonces los pares (r, s) son

$$r(u, u') = \frac{1}{2} \frac{\zeta(u) + \zeta(u')}{u - u'} C_\otimes, \quad s(u, u') = \frac{1}{2} \frac{\zeta(u) - \zeta(u')}{u - u'} C_\otimes, \quad (4.132)$$

con

$$\zeta(u) = \gamma \frac{u^2}{1 - u^2}, \quad C_\otimes = \sum_{a,b} \kappa_{ab} t_a \otimes t_b, \quad (4.133)$$

en términos de los generadores t^a del álgebra de Lie y κ_{ab} la forma de Killing.

4.4. r-matrices Clásicas

Matemáticamente el proceso de cuantizar involucra el concepto de biálgebra de Lie y los llamados tripletes de Manin. El término cuantizar incorpora el significado de completar la estructura algebraica clásica a un grupo cuántico, o equivalentemente, obtener de una r-matriz clásica una solución de la ecuación cuántica de Yang Baxter.

$$R_{12} R_{13} R_{23} = R_{23} R_{13} R_{12}, \quad R_{ij} \sim 1 \otimes 1 + i\hbar r_{ij} + O(\hbar^2). \quad (4.134)$$

La cuantización de las relaciones de cambio de Sklyanin se obtienen simplemente completando la series de \hbar en la famosa relación RTT.

$$\hat{T}_1(u) \hat{T}_2(u) R(u - u') = R(u - u') \hat{T}_2(u) \hat{T}_1(u), \quad \hat{T}(u) = T(u) + O(\hbar), \quad (4.135)$$

donde la matriz de monodromía cuántica \hat{T} se entiende ahora como el orden normal de las expresiones integrales de productos clásicos. . Podemos ver que (4.135) tiene a (4.117) cuando $\hbar \rightarrow 0$.

El grupo cuántico asociado surge de este proceso de cuantización y se clasifican: el grupo elíptico cuántico ($\dim(\Gamma)=2$), álgebras afines cuánticas ($\dim(\Gamma) = 1$) y Yangianas ($\Gamma = \{0\}$).

Esto es en efecto el trabajo matemático por transitividad del régimen clásico al cuántico en la física

$$\{A, B\} = \lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{[A, B]}{i\hbar}. \quad (4.136)$$

Podemos decir que para este sistema integrable tenemos una fórmula exacta (explícitamente) de r.h.s de (4.136) como función de \hbar . En este sentido las relaciones de cambio de Sklyanin son el mejor punto de inicio para cuantizar la teoría.

4.4.1. Propiedades analíticas

Repasemos algunas de las propiedades analíticas de la r-matriz clásica como función de parámetros espectrales complejos.

Ejemplo

Una forma conveniente de mostrar la relación entre la r-matriz clásica y el grupo cuántico asociado es el caso del Yangiano. Consideremos la llamada r-matriz de Yang

$$r = \kappa \frac{\mathcal{C}_{\otimes}}{u_2 - u_1}. \quad (4.137)$$

Esta será el prototipo de la solución racional de CYBE. En efecto, por definición del Casimir \mathcal{C}_{\otimes} , tenemos $[\mathcal{C}_{\otimes}, t^a \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \mathcal{C}_{\otimes}] = 0 \forall a$ y podemos probar fácilmente que (4.137) es solución de CYBE.

Esta r-matriz clásica es la relevante para el modelo no-lineal de Schrödinger (4.73), como demostró Sklyanin [9]. Usando este resultado fundamental, es fácil demostrar que, combinando (4.137), y (4.118) con (4.86), en particular obtenemos que $\{a(u), a(u')\} = 0$.

De hecho, tras cuantización se encuentra que el modelo NLS conserva el número de partículas y en cualquier sector del espacio de Fock con un número fijo de partículas se reduce a un problema de mecánica cuántica con interacciones mutuas de funciones delta. Posteriormente Sklyanin demostró que el efecto de ordenamiento normal cuantizan la r-matriz clásica (4.137) en la R-matriz canónica Yangiana (en unidades adecuadas):

$$R = \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + i\kappa \frac{\mathcal{C}_{\otimes}}{u_2 - u_1},$$

solución de la ecuación cuántica de Yang-Baxter.

Uno puede expandir la r-matriz clásica (4.137) como

$$\frac{r}{\kappa} = \frac{\mathcal{C}_{\otimes}}{u_2 - u_1} = \frac{\sum_a t_a \otimes t_a}{u_2 - u_1} = \sum_a \sum_{n \geq 0} t_a u_1^n \otimes t_a u_2^{-n-1} = \sum_{a, n \geq 0} t_{a, n} \otimes t_{a, -n-1},$$

donde suponemos que $|\frac{u_1}{u_2}| < 1$ por definición. Ahora somos capaces de atribuir la dependencia del parámetro espectral $u_1(u_2)$ con el generador del primer (segundo) espacio. Esto nos permite interpretar la fórmula (4.137) como la representación de una r-matriz, que en abstracto es un objeto que vive en el producto tensorial de $\mathcal{A}_{u_1}[\mathfrak{g}] \otimes \mathcal{A}_{u_2}[\mathfrak{g}]$ de dos copias grandes del álgebra $\mathcal{A}_u[\mathfrak{g}]$ construidos a partir de \mathfrak{g} . La noción

$$t_{a, n} = u^n t_a, \quad (4.138)$$

de (4.138) tenemos

$$[t_{a, m}, t_{b, n}] = \sum_c f_{abc} t_{c, m+n}, \quad (4.139)$$

en términos de la constante de estructura f_{abc} . Las relaciones (4.139) se identifican en este caso con el álgebra $\mathcal{A}_u[\mathfrak{g}]$ como el álgebra de lazos $\mathcal{L}_u[\mathfrak{g}]$ asociado a \mathfrak{g} .

Para que tenga sentido la operación de restar las relaciones (4.139) lejos de una representación específica (4.138) de donde se ve que emerge originalmente. Usando solamente estas relaciones de conmutación uno puede comprobar la expresión formal (abstracta)

$$r = \sum_a \sum_{n \geq 0} t_{a, n} \otimes t_{a, -n-1}, \quad (4.140)$$

que nos da una r-matriz clásica consistente independientemente de la representación específica (4.139). A su vez, el álgebra envolvente universal $U(\mathcal{L}_u[\mathfrak{g}])$ del álgebra de lazos $\mathcal{L}_u[\mathfrak{g}]$ no es más que el límite clásico del Yangiano $\mathcal{Y}(\mathfrak{g})$:

$$\mathcal{Y}(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathcal{L}_u[\mathfrak{g}]) \quad \text{cuando} \quad \hbar \rightarrow 0. \quad (4.141)$$

Teorema 4. *Los tramos de los generadores que aparecen por separado en cada factor de r deben formar dos subálgebras de Lie de \mathfrak{g} .*

Demostración. Escribimos $r = \sum_{ab} r_{ab}(u) z^a \otimes r^b$, donde las z 's son un subconjunto de las t 's, uno tiene que cerca del polo $u_1 = u_2$ el CYBE se reduce a

$$\sum_{abcd} \frac{c_{ab}(u_1)}{u_1 - u_2} r_{cd}(u_1 - u_3) ([z_a, z_c] \otimes z_b \otimes z_d + z_a \otimes [z_b, z_c] \otimes z_d) = 0, \quad (4.142)$$

con alguna función $c_{ab}(u_1)$. Esto implica que

$$[z_a, z_c] = \sum_d f_{acd} z_d, \quad (4.143)$$

para un subconjunto de las constantes de estructura f_{abc} . En [27], la identidad de Jacobi se demuestra, lo que prueba que las dos longitudes discutidas arriba forman subálgebras de Lie de \mathfrak{g} . \square

4.5. Solitones

La ecuación de Korteweg-de Vries (KdV) es un modelo matemático que describe el movimiento de una onda solitaria, llamada solitón. La ecuación original tiene la forma

$$\partial_t \eta = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{l}} \partial_x \left(\frac{1}{2} \eta^2 + \frac{2}{3} \alpha \eta + \frac{1}{3} \sigma \partial_x^2 \eta \right), \quad (4.144)$$

donde x es la variable a lo largo de un canal de dimensión uno, t es el tiempo, $\eta(x, t)$ es la elevación de la superficie del agua por encima del nivel de equilibrio l , g es la constante de gravitación, α es una constante relacionada al movimiento uniforme del líquido y σ es una constante definida por

$$\sigma = \frac{1}{3} l^3 - \frac{Tl}{\rho g}, \quad (4.145)$$

con T la tensión de capilaridad superficial y ρ la densidad.

Podemos obtener la forma estándar de la ecuación Korteweg-de Vries (KdV) con una transformación de variables que remueve de la ecuación toda referencia del problema físico original. Una forma muy común surge con la transformación

$$\bar{t} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{l\sigma}} t, \quad \bar{x} = -\frac{x}{\sqrt{\sigma}}, \quad \bar{u} = -\frac{1}{2} \eta - \frac{1}{3} \alpha, \quad (4.146)$$

con el cual obtenemos

$$\partial_{\bar{t}} u - 6u \partial_{\bar{x}} u + \partial_{\bar{x}}^3 u = 0. \quad (4.147)$$

El factor numérico del segundo término no tiene ningún significado particular. De hecho, si consideramos la transformación $x, t \rightarrow \bar{x}, \bar{t}$, $\eta \rightarrow u$ en (4.144) podemos obtener

$$\partial_{\bar{t}} u + \mu \partial_{\bar{x}} u + \nu u \partial_{\bar{x}} u + \gamma \partial_{\bar{x}}^3 u = 0, \quad (4.148)$$

donde $\mu, \nu \neq 0, \gamma \neq 0$ son factores numéricos que podemos elegir a voluntad. Sin embargo, vemos a demostrar que es útil de la forma (4.147). Quitando las barras de la variables, la ecuación Korteweg-de Vries (KdV) será:

$$\partial_t u - 6u\partial_x u + \partial_x^3 u = 0. \quad (4.149)$$

Hay que notar que la ecuación satisface la propiedad de invarianza Galileana, en el siguiente sentido:

Consideremos la transformación

$$t^* = t, \quad x^* = x - ct, \quad u^*(x^*, t^*) = u^*(x^* + ct^*, t^*) + \frac{1}{6}c, \quad (4.150)$$

entonces u^* satisface

$$\partial_{t^*} u^* - 6u^* \partial_{x^*} u^* + \partial_{x^*}^3 u^* = 0. \quad (4.151)$$

Consideremos por el momento la ecuación KdV lineal, i.e.

$$\partial_t u + \partial_x^3 u = 0. \quad (4.152)$$

La ecuación admite como solución a las ondas armónicas

$$u(x, t) = Ae^{ik(x-ct)}, \quad (4.153)$$

siempre que, para cualquier número de onda k , la velocidad de fase c satisfaga

$$c = -k^2 \quad (4.154)$$

Las ondas para las cuales la velocidad de fase no es una constante (como una función del número de onda) son llamadas dispersivas. La relación (4.154) se llama relación de dispersión. Como la ecuación (4.152) es lineal, cualquier superposición de ondas armónicas (con diferentes número de ondas) es nuevamente una solución de (4.152). Notemos que todas las soluciones de onda dispersivas de la ecuación KdV lineal viaja hacia la izquierda (con un incremento en el tiempo).

Regresemos a la ecuación KdV completa y busquemos la existencia de soluciones especiales llamadas ondas de tipo permanentes, también llamadas ondas viajantes u ondas progresivas. Estas son ondas que, cuando se ven en un sistema de coordenadas particular en movimiento, tiene una forma que no cambia con el tiempo. Suponemos entonces que:

$$u(x, t) = U(x - ct) = U(z) \quad (4.155)$$

Al sustituimos en la ecuación KdV nos lleva, a la ecuación diferencial no-lineal ordinaria

$$U''' - (6U + c)U' = 0 \quad (4.156)$$

donde las primas denotan diferenciación con respecto a z . Integrando una vez tenemos:

$$U'' - 3U^2 - cU = m \quad (4.157)$$

donde m es una constante arbitraria. Multiplicando por U' e integrando de nuevo encontramos

$$\frac{U'^2}{2} - \frac{3}{3}U^3 - \frac{c}{2}U^2 - mU = n' \Rightarrow U'^2 - 2U^3 - cU^2 - 2mU = n \quad (4.158)$$

donde n es de nuevo una constante arbitraria.

A partir de la última ecuación U puede calcularse por medio de integrales elípticas y de este resultado podemos deducir la existencia de soluciones periódicas $U(z) = U(z + T)$, que puede ser expresada en términos de la función elíptica de Jacobi c_n y son por lo tanto llamadas ondas senoidales.

Consideremos ahora las soluciones de tipo permanente $U(z)$ que son aquellas en las que U y sus derivadas se anulan cuando $z \rightarrow \mp\infty$. Estas soluciones serán llamadas ondas solitarias.

Para una onda solitaria podemos considerar en (4.157) $m = 0$ y en (4.158) $n = 0$. Entonces tenemos

$$U'^2 = U^2(2U + c). \quad (4.159)$$

La ecuación puede integrarse simplemente y encontramos

$$u(x, t) = U(x - ct) = -\frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{c}(x - ct + x_0) \right), \quad (4.160)$$

donde x_0 es una constante arbitraria. Más aun:

$$\operatorname{sech}^2 z = \frac{1}{(\cosh z)^2} = \frac{4}{(e^z + e^{-z})^2}. \quad (4.161)$$

Vemos que la onda solitaria decae exponencialmente para $z \rightarrow \mp\infty$.

Tenemos dos observaciones importantes:

La solución de onda solitaria solo existe para $c > 0$. Entonces, cualquier onda solitaria de la ecuación KdV se mueve a la derecha (con un incremento en t). La velocidad de propagación de la onda solitaria c es proporcional a la amplitud de la onda (que equivale a $-c/2$). Entonces, una onda solitaria más grande se mueve más rápido que una más pequeña.

La ecuación de KdV también puede escribirse en términos de pares de Lax, estos corresponden a

$$L = i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \lambda - u & 0 \end{pmatrix}, \quad M = i \begin{pmatrix} -u_x & -4\lambda - 2u \\ 4\lambda^2 - 2\lambda u + u_{xx} - 2u^2 & u_x \end{pmatrix}. \quad (4.162)$$

Las leyes de conservación extra de la jerarquía integrable evitan que las ondas pierdan sus perfiles a lo largo de la evolución temporal. Vamos a discutir un método más general para resolver la ecuación integral y encontrar una solución del solitón en una variedad de casos.

4.5.1. Método de dispersión inverso clásico

Mostraremos cómo Gardner, Green, Krunkal y Miura [20] resolvieron la ecuación KdV, con un método que se convirtió en el procedimiento estándar para las ecuaciones diferenciales parciales integrables.

La característica principal que surge de los cálculos numéricos realizados de la ecuación KdV, es que hay soluciones que describen múltiples perfiles de propagación, que sin embargo se dispersan unos a otros preservando la forma del perfil individual a lo largo del proceso. Esto es una completa sorpresa para una ecuación no lineal, por un lado, y se debe a una competencia entre la no linealidad $\phi \partial_x \phi$ (tratando de concentrar el perfil) y la dispersión $\partial_x^3 \phi$ (tratando de dispersar el perfil). También muestra, de una forma como la integrabilidad es capaz de restaurar algunas características, que podrían pensarse como parte del comportamiento lineal, en un sistema super no-lineal. Gardner considera el problema auxiliar de Schrödinger

$$\partial_x^2 \psi = (u - \lambda(t))\psi, \quad (4.163)$$

donde u satisface (4.149). La ecuación (4.163) es equivalente a la primera ecuación de nuestro problema auxiliar lineal (4.68) $\partial_x \psi = L\psi$, después de promover ∂_x en este último y después de proyectarlo en la primera componente del vector. Resolvemos para u en (4.163), para ψ diferente de cero y sustituyendo de nuevo en (4.149) tenemos

$$(\partial_t \lambda) \psi^2 + [\psi Q_x - \psi_x Q]_x = 0, \quad Q = \partial_t \psi + \partial_x^3 \psi - 3(u + \lambda) \partial_x \psi. \quad (4.164)$$

Del resultado anterior vemos que si ψ se anula suficientemente rápido para $|x| \rightarrow \infty$, integrar la primera ecuación de (4.164) a lo largo de toda la línea real implica $\partial_t \lambda = 0$, por lo tanto λ es una constante de parámetro espectral. Esto quiere decir que efectivamente estamos resolviendo la parte normalizable

del problema espectral $\partial_x^2 \psi = (u - \lambda)\psi$. También quiere decir que nos queda resolver

$$[\psi Q_x - \psi_x Q]_x = 0 \quad \text{i.e.} \quad \psi Q_{xx} = Q \psi_{xx}, \quad (4.165)$$

es sencillo comprobarlo, diferenciado la ecuación

$$Q(x, t) = C(t)\psi + D(t)\psi \int^x \frac{dx}{\psi^2}, \quad (4.166)$$

dos veces con respecto a x , $C(t)$ y $D(t)$ dos constantes de integración arbitraria y reutilizando (4.166) una vez, obtenemos (4.165).

En este punto, suponemos que u se anula en el espacio infinito en cualquier tiempo dado.

- Los nodos normalizables de ψ , para $C = D = 0$, satisfacen

$$0 = Q(x, t) \rightarrow \partial_t \psi + \partial_x^3 \psi - 3\lambda \partial_x \psi, \quad \text{cuando} \quad |x| \rightarrow \infty, \quad (4.167)$$

cuya solución son los estados ligados

$$\psi_n \rightarrow c_n e^{\pm 4k_n^3 t \mp k_n x}, \quad \text{para} \quad |x| \rightarrow \pm \infty, \quad k_n = \sqrt{-\lambda_n}, \quad \lambda_n < 0, \quad (4.168)$$

que esperamos formen la parte discreta del problema auxiliar espectral.

- Podemos extender nuestro problema a modos no normalizables con un comportamiento ondulante en el infinito espacial, considerando u como constante. Para eso primero tenemos que regresar a (4.163) y deducir por ejemplo, para $k^2 = \lambda > 0$

$$\begin{aligned} \psi_n &\rightarrow e^{-ikx} + be^{-ikx}, \quad \text{para} \quad x \rightarrow \infty, \\ \psi_n &\rightarrow ae^{-ikx}, \quad \text{para} \quad x \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (4.169)$$

Las soluciones son ondas asintóticas planas para $x \rightarrow \pm \infty$ llamadas soluciones Jost. Sustituyendolas en (4.166) podemos encontrar como soluciones $D = 0$, $C = 4ik^3$ y los datos de dispersión a , b están determinados por

$$a(k, t) = a(k, 0), \quad b(k, t) = b(k, 0)e^{8ik^3 t}. \quad (4.170)$$

Este problema es llamado problema de dispersión directo.

La combinación de toda esta información resulta ser suficiente para reconstruir u . Esto quiere decir que podemos reconstruir el potencial u a partir del problema auxiliar de Schrödinger (4.163) con los datos de dispersión. Este es el problema de dispersión inverso. Es un hecho, que si $K(x, y)$ para $y \geq x$ es solución de la ecuación de Gel'fand-Levitan-Marchenco

$$K(x, y) + B(x + y) + \int_{-\infty}^x dz K(x, z) B(y + z) = 0, \quad (4.171)$$

donde

$$B(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk b(k) e^{ikx} + \sum_n c_n^2 e^{-8k_n^3 t} e^{k_n x}, \quad (4.172)$$

en términos de los coeficientes $b(k, t)$ de (4.170) y c_n, k_n de (4.168) tenemos

$$u = 2 \frac{d}{dx} K(x, x). \quad (4.173)$$

La teoría detrás de las ecuaciones de Gel'fand-Levitan-Marchenco está profundamente arraigado en la tecnología que nos permite reconstruir el potencial para el problema de Schrödinger dado a partir de los coeficientes de reflexión y transmisión, que se encuentran en (4.172). El método de dispersión clásico inverso se considera como una generalización de la transformación de Fourier para un problema no lineal. Vamos a esbozar aquí un argumento que motiva a las fórmulas (4.171-4.173) en un caso simple.

Consideremos el problema espectral

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2} \omega + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \omega = V(x) \omega, \quad (4.174)$$

donde $V(x)$ tiene soporte compacto $[-R, R]$ en la dirección espacial x . Esto quiere decir que, en la región $x < -R$ y $x > R$, ω satisface las ecuaciones de onda libre, entonces podemos escribir

$$\begin{aligned} \omega &= f_-(x - t) + g_-(x + t), & x < -R, \\ \omega &= f_+(x - t) + g_+(x + t), & x > R. \end{aligned} \quad (4.175)$$

Consideremos ahora dos soluciones diferentes, caracterizadas por el siguiente límites asintótico

- Caso 1

$$\begin{aligned} \omega &= \delta(x - t), & t \ll -R, \\ \omega &= g_-(x + t) + f_+(x - t), & t \gg R. \end{aligned} \quad (4.176)$$

Para una velocidad finita de propagación, la solución se anula para $x > t$.

■ Caso 2

$$\begin{aligned}\omega &= \delta(x-t) + g_+(x+t), & t \ll -R, \\ \omega &= f_+(x-t), & t \gg R.\end{aligned}\quad (4.177)$$

En ambos casos, las funciones f_{\pm} y g_{\pm} que aparecen se representarán como perfiles suficientemente localizados. Démosle un nombre especial a la función g i.e.

$$g_-(z) \equiv B(z). \quad \text{Dato de dispersión} \quad (4.178)$$

Nos enfocamos en el caso 2 y hacemos el ansatz

$$\omega = \delta(x-t) + K(x,t)\Theta(x-t), \quad (4.179)$$

para la solución completa (4.174), con Θ la función escalón de Heaviside. Asumiendo que K se anula para $x < -R$. Proyectamos el ansatz de nuevo en (4.174) y sumamos los términos proporcionales a $\delta(x-t)$, tenemos

$$V(x) = 2\frac{d}{dx}K(x,x). \quad (4.180)$$

Notamos que si $\omega(x,t)$ resuelve (4.174) también lo hace $\omega(x,-t+s)$ para una constante arbitraria s . Por lo tanto

$$\omega(x,t) + \int_{-\infty}^{\infty} ds B(s)\omega(x,-t+s), \quad (4.181)$$

también. Si usamos el ansatz (4.179), es decir

$$\delta(x-t) + K(x,t)\Theta(x-t) + B(x+t) + \int_{-\infty}^{\infty} ds B(x+t)K(x,s), \quad (4.182)$$

soluciona (4.174) y coincide con $\delta(x-t) + B(x+t)$ cuando $x < -R$. Por lo tanto, la solución corresponde al caso 1 de arriba, entonces, debe anularse para $x > t$. Esto a su vez implica

$$K(x,t) + B(x+t) + \int_{-\infty}^x ds B(s+t)K(x,s). \quad (4.183)$$

La forma usada en el caso de la ecuación KdV involucra básicamente la transformación de Fourier en el procedimiento que acabamos de bosquejar. Como ejemplo, la solución de un solo solitón para la ecuación de KdV se obtiene del procedimiento anterior en el caso en que $b = 0$ y es el único eigenvalor discreto λ . En esta situación, solo tenemos

$$B(x) = \gamma e^{kx}, \quad \gamma \equiv c^2 e^{-8k^3 t}, \quad (4.184)$$

y por lo tanto es conveniente hacer el ansatz para k de la forma

$$K(x, y) = K(x) e^{ky}. \quad (4.185)$$

La ecuación (4.171) se vuelve fácil de resolver después de una integración simple para $k > 0$:

$$K(x) = -\frac{2\gamma k e^{kx}}{\gamma e^{2kx} + 2k}. \quad (4.186)$$

Inmediatamente de (4.173) tenemos

$$u = -\frac{16c^2 k^3 e^{2k(-4k^2 t + x)}}{[c^2 e^{2k(-4k^2 t + x)} + 2k]^2}, \quad (4.187)$$

sí escogemos $c^2 = 2k$ obtenemos

$$u = -2k^2 \operatorname{sech}^2[k(-4k^2 t + x)], \quad (4.188)$$

que coincide con (4.160) para $c = 4k^2$ y $x_0 = 0$.

Capítulo 5

Modelo de Hubbard

Un ejemplo concreto de las simetrías Yangianas se presenta, en un modelo mecánico de muchos cuerpos conocido como el modelo de Hubbard. El modelo de Hubbard es un modelo iterativo, en donde los electrones interactúan en una red. La estructura y la dimensión de la red determinan sus características. Solo estudiaremos el caso en que la red es 1-dim, pues solo para este caso la solución exacta es conocida. Solo en 1-dim tenemos la oportunidad de profundizar en la estructura de sistemas de muchos cuerpos interactuantes.

Trabajaremos con las propiedades básicas del hamiltoniano de Hubbard, los resultados se pueden generalizar en algunas casos a redes de dimensión arbitraria. En este capítulo desarrollaremos la teoría necesaria para estudiar la simetría Yangiana del modelo de Hubbard.

5.1. El hamiltoniano de Hubbard

Antes que nada hay que notar que existen muchas variaciones y generalizaciones del hamiltoniano original del modelo de Hubbard que se han considerado a lo largo de los años. Nos referiremos como el modelo de Hubbard al modelo 1-dim de una banda de electrones que pueden saltar al vecino más próximo definido por el hamiltoniano [21],

$$H = -t \sum_{j=1}^L \sum_{a=\uparrow,\downarrow} (c_{j,a}^\dagger c_{j+1,a} + c_{j+1,a}^\dagger c_{j,a}) + U \sum_{j=1}^L n_{j,\uparrow} n_{j,\downarrow}, \quad (5.1)$$

donde $c_{j,a}^\dagger$ y $c_{j,a}$ son los operadores de creación y aniquilación de los electrones con espín a ($a = \uparrow, \downarrow$) que se encuentran en la órbita j de la red 1-dim y

$$n_{j,a} = c_{j,a}^\dagger c_{j,a}. \quad (5.2)$$

Además, tenemos que U y t son números reales, que establecen la escala de energía y fijan la fuerza relativa de las dos sumas que contribuyen al hamiltoniano. Imponemos la condición de frontera periódica en los operadores $c_{L+1,a} = c_{1,a}$. Con esta definición el hamiltoniano es invariante bajo permutaciones cíclicas en la red o equivalentemente bajo traslaciones en el anillo con L posiciones. Los operadores $c_{j,a}^\dagger$ y $c_{j,a}$ son los operadores canónicos de Fermi y satisfacen las relaciones de anticonmutación:

$$\{c_{j,a}, c_{k,b}\} = 0 = \{c_{j,a}^\dagger, c_{k,b}^\dagger\}, \quad (5.3a)$$

$$\{c_{j,a}, c_{k,b}^\dagger\} = \delta_{jk}\delta_{ab}, \quad (5.3b)$$

para $j, k = 1, \dots, L$ y $a, b = \uparrow, \downarrow$. Los operadores de creación $c_{j,a}^\dagger$ generan el espacio de estados $\mathcal{H}^{(L)}$ del modelo de Hubbard al actuar en la red vacía (o estado de vacío $|0\rangle$) definida por la condición

$$c_{j,a}|0\rangle = 0, \quad j = 1, \dots, L, \quad a = \uparrow, \downarrow. \quad (5.4)$$

Introducimos los siguientes vectores fila para las coordenadas de electrones y espines, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ y $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_N)$ con $x_j \in \{1, \dots, L\}$ y $a_j = \uparrow, \downarrow$. El espacio de estados para el modelo de Hubbard está compuesto por una combinación lineal de los estados

$$|\mathbf{x}, \mathbf{a}\rangle = c_{x_N, a_N}^\dagger \cdots c_{x_1, a_1}^\dagger |0\rangle, \quad (5.5)$$

estos son estados de electrones con espín a_j que se encuentran en la posición x_j ($j = 1, \dots, N$) de la órbita atómica y son llamados estados de Wannier. El número de estados linealmente independiente es necesariamente finito, pues de acuerdo a (5.3a), los operadores de creación en diferentes posiciones o con espín diferente anticonmutan y $(c_{j,a}^\dagger)^2 = 0$. Una base \mathcal{B} de estados en el espacio se obtiene ordenando los operadores de Fermi en (5.5). Escogemos por ejemplo

$$\mathcal{B} = \left\{ |\mathbf{x}, \mathbf{a}\rangle \in \mathcal{H}^{(L)} \mid \begin{array}{l} N = 0, \dots, 2L \\ x_{j+1} \geq x_j, \quad a_{j+1} > a_j \quad \text{si} \quad x_{j+1} = x_j \end{array} \right\}, \quad (5.6)$$

donde por convención $\uparrow < \downarrow$ y $N = 0$ es el estado del vacío $|0\rangle$. La base \mathcal{B} es llamada la base de Wannier.

El número total de vectores linealmente independientes de la forma (5.5) para un número fijo de partículas N es igual a $\binom{2L}{N}$. Entonces la dimensión del espacio de estados $\mathcal{H}^{(L)}$ es

$$\dim \mathcal{H}^{(L)} = \sum_{N=0}^{2L} \binom{2L}{N} = 4^L. \quad (5.7)$$

Podemos obtener la misma cantidad si consideramos el hecho de que tenemos cuatro estados

$$|0\rangle, \quad c_{j,\uparrow}^\dagger|0\rangle, \quad c_{j,\downarrow}^\dagger|0\rangle, \quad c_{j,\uparrow}^\dagger c_{j,\downarrow}^\dagger|0\rangle. \quad (5.8)$$

asociadas a todas las posiciones de la red. Estos estados corresponden al estado del vacío, el estado ocupado por un electrón con espín hacia arriba o hacia abajo y el estado doblemente ocupado respectivamente; debido a que $(c_{j,a}^\dagger)^2 = 0$, los electrones con el mismo espín no pueden ocupar la misma posición en la red. Este es el principio de Pauli que está incorporado en la definición de los operadores de Fermi. El operador $n_{j,a}^\dagger = c_{j,a}^\dagger c_{j,a}$ es el operador local de número de partículas por electrón con espín a en la posición j . De (5.3) y (5.4) tenemos

$$[n_{j,a}, c_{k,b}] = \delta_{jk} \delta_{ab} c_{k,b}^\dagger, \quad n_{j,a}|0\rangle = 0, \quad (5.9)$$

y por lo tanto

$$n_{j,a}|\mathbf{x}, \mathbf{a}\rangle = \sum_{k=1}^N \delta_{j,x_k} \delta_{a,a_k} |\mathbf{x}, \mathbf{a}\rangle. \quad (5.10)$$

Entonces, $n_{j,a}|\mathbf{x}, \mathbf{a}\rangle = |\mathbf{x}, \mathbf{a}\rangle$, si la posición j está ocupada por un electrón de espín a y cero en otro caso.

La primera interpretación del modelo de Hubbard puede obtenerse si consideramos las dos contribuciones del hamiltoniano (5.1) por separado. Para $t = 0$ el hamiltoniano se reduce a $H = UD$, donde

$$D = \sum_{j=1}^L n_{j\uparrow} n_{j\downarrow}. \quad (5.11)$$

Usando (5.10) podemos calcular la acción de D en el estado $|\mathbf{x}, \mathbf{a}\rangle$

$$\begin{aligned} D|\mathbf{x}, \mathbf{a}\rangle &= \sum_{j=1}^L n_{j\uparrow} n_{j\downarrow} |\mathbf{x}, \mathbf{a}\rangle = \sum_{j,k=1}^N n_{j\uparrow} \delta_{j,x_k} \delta_{\downarrow,a_k} |\mathbf{x}, \mathbf{a}\rangle \\ &= \sum_{k=1}^N n_{x_k\uparrow} \delta_{\downarrow,a_k} |\mathbf{x}, \mathbf{a}\rangle = \sum_{k,l=1}^N \delta_{x_k,x_l} \delta_{\downarrow,a_l} \delta_{\uparrow,a_k} |\mathbf{x}, \mathbf{a}\rangle \\ &= \sum_{1 \leq k \leq l \leq N} \delta_{x_k,x_l} (\delta_{\uparrow,a_k} \delta_{\downarrow,a_l} + \delta_{\downarrow,a_k} \delta_{\uparrow,a_l}) |\mathbf{x}, \mathbf{a}\rangle \\ &= \sum_{1 \leq k \leq l \leq N} \delta_{x_k,x_l} (\delta_{\uparrow,a_k} + \delta_{\downarrow,a_k}) (\delta_{\uparrow,a_l} + \delta_{\downarrow,a_l}) |\mathbf{x}, \mathbf{a}\rangle = \sum_{1 \leq k \leq l \leq N} \delta_{x_k,x_l} |\mathbf{x}, \mathbf{a}\rangle. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Donde usamos $\delta_{\uparrow,a_k}\delta_{\downarrow,a_k} = 0$ y el principio de Pauli. A partir de (5.12) podemos decir que todo estado $|\mathbf{x}, \mathbf{a}\rangle$ es un eigenestado del operador D , además D va ser diagonal en la base de Wannier. El límite $t \rightarrow 0$ del hamiltoniano de Hubbard (5.1) es llamado límite atómico, pues el eigenestado $|\mathbf{x}, \mathbf{a}\rangle$ describe electrones localizados en las posiciones x_1, \dots, x_N que se relaciona con la posición de las órbitas atómicas que ocupan los electrones.

El significado del operador D es evidente en la ecuación (5.12). D cuenta el número de posiciones con ocupación doble en el estado $|\mathbf{x}, \mathbf{a}\rangle$. La contribución del término UD a la energía es positiva para U positiva y aumenta con el números de posiciones doblemente ocupadas. Esto se puede ver como una repulsión entre electrones. Por otro lado, para U negativa implica atracción en la posición. Entonces, es natural referirse a D como el operador de interacción en una posición.

Para el otro caso, cuando $U = 0$ el hamiltoniano (5.1) se convierte en

$$H_0 = -t \sum_{j=1}^L \sum_{a=\uparrow,\downarrow} (c_{j,a}^\dagger c_{j+1,a} + c_{j+1,a}^\dagger c_{j,a}), \quad (5.13)$$

al que llamamos hamiltoniano de unión fuerte. Como el hamiltoniano es invariante bajo traslaciones, puede diagonalizarse con una transformación discreta de Fourier. Definimos

$$\tilde{c}_{l,a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{j=1}^L e^{i\phi l j} c_{j,a}^\dagger \quad \text{con } l = 0, \dots, L-1, \quad (5.14)$$

donde $\phi = 2\pi/L$. Entonces, la transformación inversa de Fourier es

$$c_{j,a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{l=0}^{L-1} e^{-i\phi j l} \tilde{c}_{l,a}^\dagger \quad \text{con } j = 1, \dots, L. \quad (5.15)$$

La ecuación (5.15) es fácil de comprobar sustituyendo en (5.14) del lado izquierdo y usando la fórmula de suma geométrica. Claramente $\tilde{c}_{l+L,a}^\dagger = \tilde{c}_{l,a}^\dagger$. Insertando (5.15) en (5.13) obtenemos

$$H_0 = -2t \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{a=\uparrow,\downarrow} \cos(\phi l) \tilde{n}_{l,a}, \quad (5.16)$$

donde $\tilde{n}_{l,a}^\dagger = \tilde{c}_{l,a}^\dagger \tilde{c}_{l,a}$.

La transformada de Fourier deja invariantes las relaciones canónicas de anticonmutación (5.3),

$$\{\tilde{c}_{l,a}, \tilde{c}_{m,b}\} = 0 = \{\tilde{c}_{l,a}^\dagger, \tilde{c}_{m,b}^\dagger\}, \quad (5.17a)$$

$$\{\tilde{c}_{l,a}, \tilde{c}_{m,b}^\dagger\} = \delta_{lm} \delta_{ab}. \quad (5.17b)$$

Una transformación con estas propiedades es llamada canónica. Aplicando (5.14) al estado de la red vacía $|0\rangle$, obtenemos el análogo de (5.4),

$$\tilde{c}_{l,a}|0\rangle = 0, \quad l = 0, \dots, L-1, \quad a = \uparrow, \downarrow. \quad (5.18)$$

Por lo tanto, actuando con los operadores de creación \tilde{c}_l^\dagger en la red vacía $|0\rangle$ obtenemos una base alternativa $\tilde{\mathcal{B}}$. Introducimos el vector $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_N) = \phi(l_1, \dots, l_N)$ y los estados

$$|\mathbf{q}, \mathbf{a}\rangle = \tilde{c}_{x_N, a_N}^\dagger \cdots \tilde{c}_{x_1, a_1}^\dagger |0\rangle, \quad (5.19)$$

estos estados son eigenestados del operador de momento de la red con eigenvalores $(\sum_{j=1}^N q_j)$ módulo 2π . El conjunto

$$\tilde{\mathcal{B}} = \left\{ |\mathbf{q}, \mathbf{a}\rangle \in \mathcal{H}^{(L)} \mid \begin{array}{l} N = 0, \dots, 2L \\ q_{j+1} \geq q_j, \quad a_{j+1} > a_j \quad \text{si} \quad q_{j+1} = q_j \end{array} \right\}, \quad (5.20)$$

es una base de $\mathcal{H}^{(L)}$. Esta base es llamada la base de Bloch. Los electrones en los estados de Bloch $|\mathbf{q}, \mathbf{a}\rangle$ no están localizados, pero tienen un momento definido q_1, \dots, q_N .

Debido a (5.17), los análogos de (5.9) y (5.10) se satisfacen para $\tilde{n}_{l,a}$ y $\tilde{c}_{l,b}^\dagger$. Se sigue que

$$H_0|\mathbf{q}, \mathbf{a}\rangle = -2t \sum_{j=1}^N \cos(q_j) |\mathbf{q}, \mathbf{a}\rangle. \quad (5.21)$$

Entonces el hamiltoniano H_0 de unión fuerte es diagonal en la base de Bloch y describe una banda de electrones que no interactúan, además la banda tiene un ancho de $4t$ en forma de coseno.

El hamiltoniano H_0 que describe la unión fuerte y el operador D que cuenta el número de sitios doblemente ocupados no conmutan. Por lo tanto, el hamiltoniano de Hubbard no puede ser diagonal en la base de Bloch ni en la base de Wannier. La física del modelo de Hubbard surge de la competencia entre las contribuciones de H_0 y D del hamiltoniano (5.1). La contribución de H_0 de unión fuerte hace referencia a los electrones no localizados, mientras que la interacción D favorece la localización.

El cociente

$$u = \frac{U}{4t}, \quad (5.22)$$

es una medida para la contribución relativa de ambos términos y es la constante de acoplamiento intrínseca y adimensional del modelo de Hubbard.

Para nuestros propósitos, medimos la energía en unidades de t . Esto es equivalente a considerar $t = 1$. Entonces el hamiltoniano (5.1) se va a convertir

en

$$H = - \sum_{j=1}^L \sum_{a=\uparrow,\downarrow} (c_{j,a}^\dagger c_{j+1,a} + c_{j+1,a}^\dagger c_{j,a}) + 4u \sum_{j=1}^L n_{j\uparrow} n_{j\downarrow}. \quad (5.23)$$

Ahora discutiremos brevemente la influencia de un campo magnético externo B acoplado al espín de los electrones y un potencial químico μ . Entonces el hamiltoniano tiene que ser modificado como

$$H_{\mu,B} = H - \mu \hat{N} - 2BS^z, \quad (5.24)$$

donde introducimos el operador de número de partícula

$$\hat{N} = \sum_{j=1}^L (n_{j,\uparrow} + n_{j,\downarrow}), \quad (5.25)$$

y el operador

$$S^z = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^L (n_{j,\uparrow} - n_{j,\downarrow}), \quad (5.26)$$

la componente z del espín total. H y $H_{\mu,B}$ tienen el mismo conjunto de eigenestados ya que el número de partículas y la componente z del espín total se conservan,

$$[H, \hat{N}] = [H, S^z] = 0, \quad (5.27)$$

y como $[\hat{N}, S^z] = 0$.

Esto se puede ver de la siguiente forma: introducimos el operador de número de partículas para electrones con espín hacia arriba y espín hacia abajo, respectivamente

$$\hat{N}_a = \sum_{j=1}^L n_{j,a} \quad a = \uparrow, \downarrow, \quad (5.28)$$

si sumamos sobre j en la ecuación (5.9) tenemos

$$[\hat{N}_a, c_{k,b}^\dagger] = \delta_{ab} c_{k,b}^\dagger, \quad [\hat{N}_a, c_{k,b}] = -\delta_{ab} c_{k,b}. \quad (5.29)$$

Donde la segunda ecuación es la conjugada Hermitiana de la primera, se sigue de lo anterior

$$[\hat{N}_a, c_{j,b}^\dagger c_{k,b}] = [\hat{N}_a, c_{j,b}^\dagger] c_{k,b} + c_{j,b}^\dagger [\hat{N}_a, c_{k,b}] = 0, \quad (5.30)$$

de la última ecuación concluimos que

$$[H, \hat{N}_a] = 0, \quad a = \uparrow, \downarrow, \quad (5.31)$$

De esta forma, el número de electrones con espín hacia arriba y espín hacia abajo se conservan por separado. Entonces, tenemos que $\hat{N} = \hat{N}_\uparrow + \hat{N}_\downarrow$ y $S^z = \frac{1}{2}(\hat{N}_\uparrow - \hat{N}_\downarrow)$ también se conservan y de esto se sigue (5.27).

Denotaremos al número conservado de electrones con espín hacia abajo por M y al número total conservado de electrones por N . El valor de la componente z del espín total para estados con M electrones de espín hacia abajo es $N/2 - M$.

Debido a la conservación del número de partículas, podemos sumar el término $-2u\hat{N} + uL$ al hamiltoniano (5.23) sin afectar sus eigenfunciones. La expresión que resulta es

$$H = - \sum_{j=1}^L \sum_{a=\uparrow,\downarrow} (c_{j,a}^\dagger c_{j+1,a} + c_{j+1,a}^\dagger c_{j,a}) + u \sum_{j=1}^L (1 - 2n_{j\uparrow})(1 - 2n_{j\downarrow}). \quad (5.32)$$

Como veremos después (5.32) tiene una simetría mayor que (5.23), si L es par.

5.2. Simetrías

El modelo de Hubbard 1-dim tiene muchas simetrías. Algunas de ellas, como la simetría traslacional o la simetría bajo giros de espín, que son obvias y conmutan. A parte de estas simetrías obvias, existen otras menos usuales. Distinguimos entre simetrías independientes de la constante de acoplamiento u y otras que por el contrario dependen de u . La existencia de estas últimas simetrías se relaciona con el hecho de que el modelo de Hubbard 1-dim es exactamente soluble. Este tipo de simetrías incluye las simetrías abelianas generadas por una serie de operadores conservados de orden mayor mutuamente conmutativos y la llamada simetría no-abeliana llamada Yangiana.

Nos concentramos por el momento en las simetrías independientes de u . En el contexto del modelo de Hubbard 1-dim Heilmann y Lieb [22] fueron los primeros en estudiar sistemáticamente estas simetrías, gran parte de su análisis se puede llevar a una dimensión arbitraria de la red. Las simetrías que consideraron son de tres tipos: simetrías espaciales relacionadas con la red, simetrías conectadas con el espín y simetrías asociadas con las características especiales del modelo de Hubbard.

5.2.1. Permutaciones

Debido a que el modelo de Hubbard está definido en una red, el conjunto de todas las posibles transformaciones espaciales es igual al conjunto de todas

las permutaciones de posición en los índices. Estas permutaciones pertenecen al grupo de simetría \mathfrak{S}^L . El primer objetivo, es por lo tanto, construir una representación que sea fiel a la simetría del grupo en términos de los operadores de Fermi. Para este propósito es suficiente construir las representaciones de las transposiciones elementales, que generan el grupo de simetría.

Comencemos con los espines fermiónicos, $\{c_j, c_k\} = \{c_j^\dagger, c_k^\dagger\} = 0$, $\{c_j, c_k^\dagger\} = \delta_{jk}$ en una red 1-dim con L posiciones. Sea

$$P_{ij} = 1 - (c_i^\dagger - c_j^\dagger)(c_i - c_j). \quad (5.33)$$

Es fácil ver que P_{ij} permuta fermiones. Además tenemos las siguientes identidades

$$P_{ij} = P_{ij}^\dagger, \quad P_{ij} = P_{ji}. \quad (5.34)$$

Usando los anticonmutadores fundamentales para los fermiones, tenemos

$$P_{ij}c_i = c_jP_{ij}, \quad i \neq j, \quad (5.35)$$

y de (5.34) se sigue que

$$P_{ij}c_j = c_iP_{ij}, \quad P_{ij}c_i^\dagger = c_j^\dagger P_{ij}, \quad P_{ij}c_j^\dagger = c_i^\dagger P_{ij}, \quad i \neq j. \quad (5.36)$$

Demostremos que $P_{ij}c_j = c_iP_{ij}$ se cumple,

$$\begin{aligned} P_{ij}c_j &= [1 - (c_i^\dagger - c_j^\dagger)(c_i - c_j)]c_j = c_j - (c_i^\dagger - c_j^\dagger)c_i c_j \\ &= c_j - (c_i^\dagger - c_j^\dagger)c_i(c_j - c_i) = c_j - (-c_i c_i^\dagger + 1 + c_i c_j^\dagger)(c_j - c_i) \\ &= c_j - c_j + c_i + (c_i c_i^\dagger - c_i c_j^\dagger)(c_j - c_i) = c_i + c_i(c_i^\dagger - c_j^\dagger)(c_j - c_i) \\ &= c_i[1 - (c_i^\dagger - c_j^\dagger)(c_i - c_j)] = c_i P_{ij}, \end{aligned}$$

en donde utilizamos $(c_i)^2 = 0$. Por lo tanto, los operadores P_{ij} inducen la acción de transposición en los índices de posición de los operadores de Fermi. Ahora mostremos que P_{ij} genera la representación del grupo de simetrías. Primero, de (5.35) y (5.36) tenemos

$$P_{ij}P_{jk} = P_{ik}P_{ij} = P_{jk}P_{ik}, \quad i \neq j \neq k \neq i, \quad (5.37)$$

con un cálculo similar al de la ecuación (5.35) se demuestra

$$P_{ij}P_{ij} = 1. \quad (5.38)$$

Por último, tenemos la identidad

$$[P_{ij}, P_{kl}] = 0, \quad \text{con } i, j \neq k, l. \quad (5.39)$$

Las relaciones (5.37-5.39) son una opción posible para definir las relaciones del grupo simétrico.

Formalmente, los índices i, j, k son solo etiquetas y podemos reemplazarlas por una más complicadas sin que pierdan su validez. Reemplazamos $j \rightarrow ja$, donde j es el índice de posición y $a = \uparrow, \downarrow$ el índice de espín, tenemos:

$$P_{ia,jb} = 1 - (c_{i,a}^\dagger - c_{j,b}^\dagger)(c_{i,a} - c_{j,b}). \quad (5.40)$$

Este operador de transposición fue introducido por Heilmann y Lieb [22] en su análisis de las simetrías del modelo de Hubbard. Describe transposiciones simultáneas de índices de posición y espín o en términos físicos intercambia electrones en las órbitas de Wannier.

5.2.2. Simetrías espaciales

Imaginemos que las L órbitas de Wannier del modelo de Hubbard 1-dim forman un polígono regular con L bordes y esquinas. Las simetrías espaciales del modelo de Hubbard son entonces simetrías del polígono. Están generadas por una rotación $2\pi/L$ y por una reflexión arbitraria que mapea el polígono en si mismo. El operador de simetría correspondiente es el operador de desplazamiento y el operador de paridad.

El operador de desplazamiento es una representación del generador del subgrupo cíclico de orden L del grupo simétrico [22]. Para espines fermiónicos definimos

$$\hat{U}_n = P_{n-1n} \cdots P_{23} P_{12}, \quad n = 2, \dots, L. \quad (5.41)$$

Usando la ecuación (5.35) podemos comprobar que

$$\hat{U}_L c_j = \begin{cases} c_{j-1} \hat{U}_L, & \text{si } j = 2, \dots, L, \\ c_L \hat{U}_L, & \text{si } j = 1. \end{cases} \quad (5.42)$$

Esto quiere decir que \hat{U}_L actúa como el operador de desplazamiento izquierdo en los operadores elementales de Fermi. Ahora, (5.41) implica que

$$\hat{U}_L^\dagger = P_{12} \cdots P_{L-1L}. \quad (5.43)$$

De la ecuación (5.38) se sigue que \hat{U}_L es unitario, $\hat{U}_L \hat{U}_L^\dagger = \hat{U}_L^\dagger \hat{U}_L = 1$. El operador \hat{U}_L^\dagger genera el desplazamiento a la derecha para una posición en la red.

Para obtener el operador de desplazamiento para electrones, tenemos que adjuntar una etiqueta de espín a los operadores anteriores. Definimos los operadores de desplazamiento $U_{L\uparrow}$ y $U_{L\downarrow}$ para electrones con espín hacia

arriba y hacia abajo al reemplazar $P_{j,j+1}$ en la ecuación (5.41) por $P_{j\uparrow,j+1\uparrow}$ y $P_{j\downarrow,j+1\downarrow}$ respectivamente. Observamos que $[\hat{U}_{L\uparrow}, c_{j\downarrow}] = [\hat{U}_{L\downarrow}, c_{j\uparrow}] = 0$, entonces

$$\hat{U} = \hat{U}_{L\uparrow}\hat{U}_{L\downarrow}. \quad (5.44)$$

que es el operador de desplazamiento izquierdo para electrones. Usando la definición (5.14) de $\tilde{c}_{k,a}$ obtenemos

$$\hat{U}\tilde{c}_{k,a}^\dagger = e^{i\phi k}\tilde{c}_{k,a}^\dagger\hat{U}. \quad (5.45)$$

De donde se sigue que \hat{U} actúa diagonalmente en la base $\tilde{\mathcal{B}}$ de los estados de Bloch, de la ecuación (5.20), tenemos

$$\hat{U}|\mathbf{q}, \mathbf{a}\rangle = e^{i\phi(k_1+\dots+k_N)}|\mathbf{q}, \mathbf{a}\rangle. \quad (5.46)$$

Obviamente, el hamiltoniano de Hubbard (5.32) es invariante bajo intercambios de índice de posición de los operadores de Fermi de j a $L-j+1$.

El operador de paridad correspondiente R_L puede expresarse de forma conveniente en términos de los operadores \hat{U}_n , (5.41), como un producto ordenado

$$R_L = \hat{U}_2\dots\hat{U}_L. \quad (5.47)$$

Equivalentemente, R_L se puede escribir como

$$R_L = \prod_{j=1}^{[L/2]} P_{j,L-j+1}, \quad (5.48)$$

donde $[L/2]$ denota la parte entera de $L/2$, que es $L/2$ para L par y $(L-1)/2$ para L impar. De (5.38) y (5.48) es claro que $R_L^2 = id$ y $R_L = R_L^\dagger$. Entonces R_L es unitario y Hermitiano. Podemos definir el operador de paridad para electrones como $R = R_{L\uparrow}R_{L\downarrow}$, después de colocar las etiquetas de espín \uparrow y \downarrow a los operadores en (5.48).

5.2.3. El operador de momento

Los observables en mecánica cuántica están descritos por operadores Hermitianos. Por esta razón nos gustaría definir el operador de momento hermitiano que genera los desplazamientos en la red. Genéricamente, el operador de momentos se define como el generador de desplazamientos espaciales infinitesimales. Esta definición, sin embargo, no funciona en una red ya que solo podemos tener traslaciones finitas. Alternativamente, siguiendo [23] podemos

tratar de definir el operador de momentos de la red $\hat{\Pi}$ con las siguientes tres condiciones:

$$e^{i\hat{\Pi}} = \hat{U}, \quad (5.49a)$$

$$\hat{\Pi} = \hat{\Pi}^\dagger, \quad (5.49b)$$

$$[H, \hat{\Pi}] = 0. \quad (5.49c)$$

Notemos que la elección

$$\Pi = \phi \sum_{k=1}^{L-1} k \tilde{c}_k^\dagger \tilde{c}_k, \quad (5.50)$$

que se encuentra frecuentemente en la literatura y que actúa diagonalmente en la base $\tilde{\mathcal{B}}$ de los estados de Bloch, no satisface (5.49c). No es una cantidad conservada para el modelo de Hubbard. Una forma de resolver este problema viene de la condición (5.49a) que fija el momento solo módulo 2π .

Para $\alpha \in \mathbb{C}$ definimos

$$g(\alpha) := \sum_{k=0}^{L-1} i e^{-i\phi k \alpha} = i \frac{1 - e^{-i\phi L \alpha}}{1 - e^{-i\phi \alpha}}. \quad (5.51)$$

En donde aplicamos la formula de suma geométrica para obtener la segunda ecuación. De (5.51) se sigue que

$$g'(m) = \sum_{k=1}^{L-1} \phi k e^{-i\phi k m}, \quad m = 1, \dots, L. \quad (5.52)$$

donde $g'(m)$ es la derivada de $g(m)$ con respecto a su argumento. Por lo tanto, la inversa de Fourier es

$$\phi k = \frac{1}{L} \sum_{m=1}^L g'(m) e^{i\phi k m}, \quad k = 1, \dots, L-1. \quad (5.53)$$

Para $m = 1, \dots, L-1$, los coeficientes de $g'(m)$ se obtienen diferenciando el lado derecho de (5.51). Encontramos que $g'(m) = \phi L / (e^{-i\phi m} - 1)$. Por otro lado, de (5.52) tenemos $g'(L) = \phi L(L-1)/2$. Entonces,

$$\phi k = \phi \sum_{m=1}^{L-1} \left(\frac{1}{2} + \frac{e^{i\phi k m}}{e^{-i\phi m} - 1} \right), \quad k = 1, \dots, L-1. \quad (5.54)$$

El lado derecho de esta ecuación es una suma de Fourier periódica que se extiende a todos los enteros $k \in \mathbb{Z}$. Haciendo $x = \phi k$ vemos que esta ecuación

define la "función de diente de sierra" $f(x) = x \bmod 2\pi$ sobre el conjunto $\phi\mathbb{Z}$.

Por hipótesis, el espectro del operador de momento $\hat{\Pi}$ que estamos buscando está contenido en $\phi\mathbb{Z}$. Supongamos que tenemos un operador de momento que satisface (5.47). Entonces, sustituyendo $\hat{\Pi}$ por ϕk en (5.54) nos lleva a la restricción de $\hat{\Pi}$ módulo 2π . Debido a la condición (5.49a), obtenemos

$$\hat{\Pi} = \phi \sum_{m=1}^{L-1} \left(\frac{1}{2} + \frac{\hat{U}^m}{e^{-i\phi m} - 1} \right). \quad (5.55)$$

Entonces, no importa cuál es la forma real del operador Π , pues la restricción módulo 2π nos lleva a algo conocido: el lado derecho de (5.55) es un polinomio en el operador de desplazamiento \hat{U} .

Por lo tanto, podemos tomar (5.55) como la definición de operador de momento. Comprobemos que $\hat{\Pi}$ definido de esta forma satisface (5.49). Primero, usamos (5.46) y (5.54) y obtenemos

$$\hat{\Pi}|\mathbf{q}, \mathbf{a}\rangle = \phi \sum_{m=1}^{L-1} \left(\frac{1}{2} + \frac{e^{-i\phi(k_1+\dots+k_N)m}}{e^{-i\phi m} - 1} \right) |\mathbf{q}, \mathbf{a}\rangle = (\phi(k_1+\dots+k_N) \bmod 2\pi) |\mathbf{q}, \mathbf{a}\rangle. \quad (5.56)$$

Usando (5.46) y (5.56) concluimos que

$$e^{i\hat{\Pi}}|\mathbf{q}, \mathbf{a}\rangle = e^{i\phi(k_1+\dots+k_N)}|\mathbf{q}, \mathbf{a}\rangle = \hat{U}|\mathbf{q}, \mathbf{a}\rangle, \quad (5.57)$$

para toda $|\mathbf{q}, \mathbf{a}\rangle \in \tilde{\mathcal{B}}$. Entonces, (5.49a) se satisface. Para comprobar la condición (5.49b) usamos la unitariedad de \hat{U} y el hecho de que $\hat{U}^L = 1$. (5.49c) se satisface, debido a que el hamiltoniano de Hubbard conmuta con \hat{U} .

5.2.4. Simetrías más discretas

Consideremos ahora dos transformaciones discretas: el salto de espín y la llamada transformación de Shiba. Ambas son útiles para restringir el orden de N y M , el número de electrones y espines hacia abajo. Además, la invariancia del hamiltoniano de Hubbard, módulo el signo de acoplamiento, bajo la transformación de Shiba es la razón de la aparición de una segunda simetría $su(2)$ además de la simetría rotacional.

El hamiltoniano de Hubbard es invariante bajo la inversión de todos los espines, causada por una transformación de similitud con el operador

$$J^{(s)} = \prod_{j=1}^L P_{j\uparrow, j\downarrow}. \quad (5.58)$$

Esta transformación mapea los eigenestados con M electrones con espín hacia abajo y $N - M$ electrones con espín hacia arriba uno a uno a los eigenestados con M electrones espín hacia arriba y $N - M$ electrones con espín hacia abajo. Por lo tanto, la componente z del espín total cambia de signo. Como consecuencia restringimos los valores positivos $N/2 - M$ de S^z , cuando diagonalizamos el hamiltoniano de Hubbard. Es claro de la definición del operador de transposición (5.38) que la transformación (5.58) deja al estado del vacío $|0\rangle$ invariante.

Consideremos una red con un número par de posiciones. Definimos los operadores

$$J_a^{(sh)} = (c_{L,a}^\dagger - c_{L,a})(c_{L-1,a}^\dagger + c_{L-1,a}) \cdots (c_{2,a}^\dagger - c_{2,a})(c_{1,a}^\dagger + c_{1,a}), \quad a = \uparrow, \downarrow. \quad (5.59)$$

Notemos que los signos se alternan, $-$ para un número par y $+$ para un número impar. Los operadores (5.59) generan una transformación partícula-hueco en espines tipo a , acompañado por un cambio de signo cada segunda posición en la red. Obtenemos, por ejemplo, $[J_\downarrow^{(sh)}, c_{j,\uparrow}] = 0$ y

$$J_\downarrow^{(sh)} c_{j,\downarrow} (J_\downarrow^{(sh)})^\dagger = (-1)^j c_{j,\downarrow}^\dagger. \quad (5.60)$$

Claramente para un número par de posiciones en la red, la parte de unión fuerte del hamiltoniano de Hubbard (5.32) es invariante bajo las transformaciones generadas por $J_a^{(sh)}$, $a = \uparrow, \downarrow$, donde la parte interactuante cambia de signo. Entonces, $H(U)$ se mapea a $H(-U)$. La red vacía se mapea a

$$J_a^{(sh)} |0\rangle = c_{L,a}^\dagger \cdots c_{1,a}^\dagger |0\rangle, \quad (5.61)$$

que es el estado de la banda semillena completamente polarizada.

La transformación (5.60) es llamada transformación de Shiba. Es posible definir la transformación de Shiba para un número impar, pero en este caso la parte de la unión fuerte del hamiltoniano de Hubbard (5.32) no será invariante bajo la transformación de Shiba. Debido a las condiciones de frontera periódicas, las dos posiciones impares en la red 1 y L serán vecinos cercanos y los términos $c_1^\dagger c_L$ y $c_L^\dagger c_1$ tendrán un signo menos.

Para una red con un número par de posiciones, podemos realizar la transformación de Shiba para los espines hacia arriba y hacia abajo. Entonces el hamiltoniano no se altera, ya que el signo de acoplamiento cambia dos veces, pero el estado de la red del vacío se mapea a un estado doblemente ocupado. Por lo tanto, todos los eigenestados del hamiltoniano de Hubbard (5.32) con N electrones se mapean a un eigenestado con $2L - N$ electrones y puede restringirse a $N \leq L$, cuando diagonalizamos el hamiltoniano de Hubbard.

El salto de espín y la transformación de Shiba afectan al número de partículas y al operador de la componente z del espín total de forma no trivial

$$J^{(s)} \hat{N} J^{(s)} = \hat{N}, \quad J^{(s)} S^z J^{(s)} = -S^z, \quad (5.62a)$$

$$J_{\downarrow}^{(sh)} \hat{N} (J_{\downarrow}^{(sh)})^{\dagger} = L + 2S^z, \quad J_{\downarrow}^{(sh)} 2S^z (J_{\downarrow}^{(sh)})^{\dagger} = \hat{N} - L, \quad (5.62b)$$

$$J_{\uparrow}^{(sh)} \hat{N} (J_{\uparrow}^{(sh)})^{\dagger} = L - 2S^z, \quad J_{\uparrow}^{(sh)} 2S^z (J_{\uparrow}^{(sh)})^{\dagger} = L - \hat{N}. \quad (5.62c)$$

Esto tiene implicaciones inmediatas en la energía libre de Gibbs para las posiciones de la red

$$f(\mu, B, T, u) = -\frac{T}{L} \ln \left(\text{tr} \left\{ \exp \left(-\frac{H(u) - \mu \hat{N} - 2BS^z}{T} \right) \right\} \right), \quad (5.63)$$

que determina las propiedades del equilibrio termodinámico del modelo de Hubbard como función del potencial químico μ , el campo magnético B y la temperatura T , además depende paraméricamente de la constante de acoplamiento u . Usando la conmutatividad mutua de los operadores H , \hat{N} y S^z y la invarianza de la traza en el producto de las matrices bajo permutaciones cíclicas de las matrices concluimos con (5.62) que

$$f(\mu, B, T, u) = f(\mu, -B, T, u) \quad (5.64a)$$

$$= f(B, \mu, T, -u) - \mu + B \quad (5.64b)$$

$$= f(-B, -\mu, T, -u) - \mu - B. \quad (5.64c)$$

Combinando las últimas ecuaciones obtenemos

$$f(\mu, B, T, u) + \mu = f(-\mu, B, T, u) - \mu. \quad (5.65)$$

Finalmente, tenemos las fórmulas de transformación

$$J_{\uparrow}^{(sh)} J_{\downarrow}^{(sh)} \hat{N} (J_{\downarrow}^{(sh)})^{\dagger} (J_{\uparrow}^{(sh)})^{\dagger} = 2L - \hat{N}, \quad (5.66a)$$

$$J_{\uparrow}^{(sh)} J_{\downarrow}^{(sh)} S^z (J_{\downarrow}^{(sh)})^{\dagger} (J_{\uparrow}^{(sh)})^{\dagger} = -S^z. \quad (5.66b)$$

para una aplicación simultánea de dos transformaciones de Shiba al operador de número de partícula y al operador de la componente z del espín total que se siguen de (5.62).

5.2.5. Simetrías $SO(4)$

Vimos en la sección (5.2.1) que el hamiltoniano de Hubbard conserva la componente z de S^z del espín total y el número de partículas \hat{N} . Ambos operadores generan transformaciones en $U(1)$. El operador S^z es el generador de

las rotaciones alrededor del eje z y el operador de número de partículas \hat{N} genera la transformación global de norma. Ahora definimos los operadores S^x y S^y , que son las componentes x y y del espín total. S^x , S^y y S^z se combinan en una representación del álgebra de Lie $su(2)$ que genera al grupo $SU(2)$ de rotaciones en el espacio de espines. Vamos a mostrar que el hamiltoniano de Hubbard conmuta con S^x , S^y y S^z y por lo tanto es invariante rotacional. Para un número par de posiciones en la red, veremos que el número de partículas es otra simetría $su(2)$ oculta que tiene su origen en la invarianza del signo de acoplamiento del hamiltoniano de Hubbard bajo la transformación de Shiba (5.60). Esta extensión no abeliana de la simetría de norma es llamada simetría η -par. En la sección 5.8.3 veremos que estas cargas conservadas jugarán el papel de las cargas locales introducidas en el capítulo 4 y faltaría ver que estructuras jugaran el papel de las cargas no-locales.

Definimos el operador de las componentes del espín total como

$$S^\alpha = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^L \sum_{a,b=1}^2 c_{j,a}^\dagger (\sigma^\alpha)^a_b c_{j,b}, \quad \alpha = x, y, z. \quad (5.67)$$

En la segunda suma consideramos $\uparrow = 1$ y $\downarrow = 2$. Las matrices σ^α son las matrices de Pauli:

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.68)$$

Las cuales forman una base de la representación fundamental del álgebra de Lie $su(2)$ y satisfacen las relaciones de conmutación

$$[\sigma^\alpha, \sigma^\beta] = 2i\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\sigma^\gamma, \quad \alpha = x, y, z, \quad (5.69)$$

donde $\epsilon^{\alpha\beta\gamma}$ es el tensor de antisimetría total. Los operadores de espín generan una representación de $su(2)$

$$[S^\alpha, S^\beta] = i\epsilon^{\alpha\beta\gamma}S^\gamma, \quad \alpha = x, y, z, \quad (5.70)$$

y conmutan con el hamiltoniano de Hubbard

$$[H, S^\alpha] = 0, \quad \alpha = x, y, z. \quad (5.71)$$

Para comprobar (5.70) y (5.71) usamos las relaciones fundamentales de anticonmutación (5.3) para el cálculo de varios conmutadores.

Es conveniente introducir los llamados operadores de corriente. Primero definimos un operador matriz de 2×2 S_{jk} cuyos elementos están dados por

$$S_{jka}^b = c_{j,a}^\dagger c_{k,b} \quad \text{para } a, b = 1, 2. \quad (5.72)$$

Usando las relaciones fundamentales de anticonmutación (5.3) obtenemos los conmutadores

$$[S_{jka}^b, S_{lm}^d] = \delta_{kl}\delta_c^b S_{jm}^d - \delta_{mj}\delta_a^d S_{lk}^b. \quad (5.73)$$

Además, introducimos las proyecciones de S_{jk} sobre la base de $gl(2)$ que consta de las matrices de Pauli y la matriz unidad I_2 de 2×2

$$S_{jk}^a = tr(\sigma^a S_{jk}), \quad S_{jk}^0 = tr(S_{jk}). \quad (5.74)$$

Estos son los operadores de corriente mencionados. Como consecuencia de (5.73), obtenemos los conmutadores

$$[S_{jk}^0, S_{lm}^0] = \delta_{kl}S_{jm}^0 - \delta_{mj}S_{lk}^0, \quad (5.75a)$$

$$[S_{jk}^0, S_{lm}^\alpha] = \delta_{kl}S_{jm}^\alpha - \delta_{mj}S_{lk}^\alpha, \quad (5.75b)$$

$$[S_{jk}^\alpha, S_{lm}^\beta] = \delta^{\alpha\beta}(\delta_{kl}S_{jm}^0 - \delta_{mj}S_{lk}^0) + i\epsilon^{\alpha\beta\gamma}(\delta_{kl}S_{jm}^\gamma + \delta_{mj}S_{lk}^\gamma). \quad (5.75c)$$

La ecuación (5.75a) se obtiene considerando $a = b$ y $c = d$ en (5.73) y sumando sobre a y c . Para la ecuación (5.75b) primero multiplicamos (5.73) por las matrices de Pauli y tomamos las trazas. Para obtener (5.75c), tenemos que multiplicar (5.73) por dos matrices de Pauli y usar la identidad $\sigma^\alpha\sigma^\beta = \delta^{\alpha\beta} + i\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\sigma^\gamma$.

Notemos que $S_j^\alpha = \frac{1}{2}S_{jj}^\alpha$ es el operador de espín local ("operador de densidad de espín") y $S_j^0 = S_{jj}^0 = n_{j,\uparrow} + n_{j,\downarrow}$ es el operador de número de partículas locales. Haciendo $j = k$ y $l = m$ en (5.75c) y multiplicando por $1/4$ tenemos el conmutador

$$[S_j^\alpha, S_l^\beta] = \delta_{jl}i\epsilon^{\alpha\beta\gamma}S_j^\gamma. \quad (5.76)$$

para el operador de espín local. De esta ecuación obtenemos (5.70) si sumamos sobre j y l .

El hamiltoniano (5.32) expresado en términos de los operadores S_{jk}^0 está dado por

$$H = - \sum_{j=1}^L (S_{jj+1}^0 + S_{j+1j}^0 - 2u(S_{jj}^0 - 1)^2 + u). \quad (5.77)$$

En donde utilizamos

$$\begin{aligned} n_{j,\uparrow}^2 &= c_{j,\uparrow}^\dagger c_{j,\uparrow} c_{j,\uparrow}^\dagger c_{j,\uparrow} = c_{j,\uparrow}^\dagger c_{j,\uparrow} (1 - c_{j,\uparrow} c_{j,\uparrow}^\dagger) = c_{j,\uparrow}^\dagger c_{j,\uparrow} = n_{j,\uparrow}, \\ n_{j,\downarrow}^2 &= c_{j,\downarrow}^\dagger c_{j,\downarrow} c_{j,\downarrow}^\dagger c_{j,\downarrow} = c_{j,\downarrow}^\dagger c_{j,\downarrow} (1 - c_{j,\downarrow} c_{j,\downarrow}^\dagger) = c_{j,\downarrow}^\dagger c_{j,\downarrow} = n_{j,\downarrow}. \end{aligned}$$

Usando (5.75b) obtenemos

$$[S_{jk}^0, S_l^\alpha] = \frac{1}{2}(\delta_{kl}S_{jl}^\alpha - \delta_{lj}S_{lk}^\alpha). \quad (5.78)$$

Sumando sobre l tenemos $[S_{jk}^0, S^\alpha] = 0$, que junto con (5.77) implica la conservación del espín total (5.71).

Usualmente se usan los operadores escalón $S^\pm = S^x \pm iS^y$ en lugar de S^x y S^y , los cuales tienen la siguiente forma explícita

$$S^+ = \sum_{j=1}^L c_{j,\uparrow}^\dagger c_{j,\downarrow}, \quad S^- = \sum_{j=1}^L c_{j,\downarrow}^\dagger c_{j,\uparrow}, \quad (5.79)$$

y cumplen las relaciones de conmutación

$$[S^z, S^\pm] = \pm S^\pm, \quad [S^+, S^-] = 2S^z, \quad (5.80)$$

que se siguen de (5.70).

Es ahora el turno de la simetría η -par. Tiene su origen en la invarianza módulo el signo de acoplamiento del hamiltoniano de Hubbard (5.32) bajo la transformación de Shiba (5.60). Aplicamos la transformación de Shiba (5.60) a los operadores de espín S^\pm y S^z . Luego

$$J_\downarrow^{(sh)} S^+ (J_\downarrow^{(sh)})^\dagger = \sum_{j=1}^L (-1)^j c_{j,\uparrow}^\dagger c_{j,\downarrow}^\dagger = -\eta^+, \quad (5.81a)$$

$$J_\downarrow^{(sh)} S^- (J_\downarrow^{(sh)})^\dagger = \sum_{j=1}^L (-1)^j c_{j,\downarrow} c_{j,\uparrow} = -\eta^-, \quad (5.81b)$$

$$J_\downarrow^{(sh)} S^z (J_\downarrow^{(sh)})^\dagger = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^L (n_{j,\uparrow} + n_{j,\downarrow} - 1) = \frac{1}{2} (\hat{N} - L) = \eta^z. \quad (5.81c)$$

El signo $-$ en (5.81a) y (5.81b) se introduce por convención. Aplicando la transformación de Shiba en (5.80) obtenemos las relaciones de conmutación de $su(2)$

$$[\eta^z, \eta^\pm] = \pm \eta^\pm, \quad [\eta^+, \eta^-] = 2\eta^z, \quad (5.82)$$

para los operadores η de paridad. Ahora definimos η^x y η^y

$$\eta^x = \frac{1}{2}(\eta^+ + \eta^-), \quad \eta^y = -\frac{i}{2}(\eta^+ - \eta^-), \quad (5.83)$$

que debido a (5.82) satisface

$$[\eta^\alpha, \eta^\beta] = i\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\eta^\gamma, \quad \gamma = x, y, z. \quad (5.84)$$

La invarianza del hamiltoniano de Hubbard (5.32) bajo la simetría η -par se sigue de $[H(-u), S^\alpha] = 0$ por la aplicación de la transformación de Shiba

$$[H, \eta^\alpha] = 0, \quad \alpha = x, y, z. \quad (5.85)$$

Una implicación trivial pero importante de (5.71) y (5.85) que será útil más adelante es que el hamiltoniano de Hubbard (5.32) también conmuta con los operadores de Casimir $(S^\alpha)^2$ y $(\eta^\alpha)^2$.

Para tener una mejor comprensión de las simetrías del hamiltoniano de Hubbard consideremos los conmutadores mutuos de los dos conjuntos de generadores S^α y η^β . Afirmamos que

$$[S^\alpha, \eta^\beta] = 0, \quad \alpha, \beta = x, y, z, \quad (5.86)$$

Debido a la antisimetría, este es un conjunto de seis ecuaciones independientes que hay que comprobar. Podemos, por ejemplo, comenzar con $c_{j,\uparrow}^\dagger c_{j,\downarrow} c_{k,\downarrow}^\dagger c_{k,\uparrow} = c_{k,\downarrow}^\dagger c_{k,\uparrow} c_{j,\uparrow}^\dagger c_{j,\downarrow}$ que implica $[S^+, \eta^+] = 0$. Volteando todos los espines obtenemos $[S^-, \eta^+] = 0$, por (5.80), también $[S^z, \eta^+] = 0$. Como η^+ es invariante bajo rotaciones y η^- es la conjugada hermitiana de η^+ , entonces es invariante bajo rotaciones también. Por último debido a (5.82) también es cierto para η^z y probamos (5.86).

Hemos demostrado que el hamiltoniano de Hubbard (5.32) conmuta con la suma directa de dos representaciones de $su(2)$. Recordemos que la invarianza bajo la simetría η -par en la ecuación (5.85) solo es para un número par de L posiciones en la red. Este hecho impone restricciones en la representación irreducibles conjuntas de espín y η -espin basados en eigenestados del hamiltoniano de Hubbard. De las definiciones (5.26), (5.28), (5.81c) obtenemos

$$S^z + \eta^z = \hat{N}_\uparrow - L/2. \quad (5.87)$$

Se sigue de (5.81c) y (5.82) que η^+ y η^- no preservan el número de partículas

$$[H, \eta^\pm] = \pm 2\eta^\pm. \quad (5.88)$$

El operador η^+ crea al llamado η -par un eigenestado del hamiltoniano, η^- es el correspondiente operador de aniquilación. Como consecuencia inmediata de las definiciones (5.81a) y (5.81b) tenemos

$$\{\hat{U}, \eta^\pm\} = 0. \quad (5.89)$$

De esta forma, el par η tiene un momento π en la red.

La simetría completa $SO(4) \cong SU(2) \times SU(2)/\mathbb{Z}_2$ solo es válida para el hamiltoniano de Hubbard de la forma (5.32). Agregando el término de campo magnético $-2BS^z$ se rompe la invarianza rotacional, mientras que la invarianza η -par se preserva. Por otro lado, sumando un término de potencial químico $-\mu\hat{N}$, se rompe la simetría η -par, pero se preserva la invarianza bajo rotaciones.

5.3. Aproximación algebraica al modelo de Hubbard

5.3.1. Integrabilidad

Probablemente sea justo decir que no existe ningún concepto de integrabilidad en la mecánica cuántica que sea tan general como el teorema de Liouville. Por analogía con el caso clásico discutido en el capítulo 2 supongamos que nos dan un hamiltoniano H contenido en un conjunto de integrales de movimiento F_j , $j = 1, \dots, N$ cuántico mutuamente conmutativo. Entonces no hay un teorema general que explique cómo obtener el espectro y las eigenfunciones de H a partir de relaciones de conmutación

$$[F_j, F_k] = 0. \quad (5.90)$$

solamente. La construcción de las variables de ángulo acción no es fácilmente trasladada a la mecánica cuántica.

De alguna forma esto nos dice que necesitamos información adicional. Una idea razonable es pensar en introducir el álgebra conmutativa (5.90) de las integrales cuánticas de movimiento en algún álgebra más grande, donde los estados del espacio de nuestro sistema jueguen el papel de la representación en el espacio de esta álgebra. Consideremos por ejemplo, el oscilador armónico [24]. Este depende del álgebra de Lie de Heisenberg

$$[a, a^\dagger] = 1. \quad (5.91)$$

Suponiendo que nos dan una representación de mayor peso del álgebra (5.91) i.e. la representación tiene un estado de mayor peso $|0\rangle$ o estado base, tal que $a|0\rangle = 0$. Suponemos además que a y a^\dagger son mutuamente adjuntas. Sea $H = a^\dagger a + \frac{1}{2}$. La ecuación (5.91) implica que $[a, \cdot]$ actúa como una derivada en funciones de a^\dagger , i.e. $[a, (a^\dagger)^n] = n(a^\dagger)^{n-1}$. Además, se sigue que

$$\begin{aligned} H(a^\dagger)^n|0\rangle &= ((a^\dagger)^n H + [H, (a^\dagger)^n])|0\rangle = \left(\frac{1}{2}(a^\dagger)^n + a^\dagger[a, (a^\dagger)^n] \right)|0\rangle \\ &= \left(n + \frac{1}{2} \right) (a^\dagger)^n|0\rangle. \end{aligned} \quad (5.92)$$

Entonces, los estados $|n\rangle = (a^\dagger)^n|0\rangle$ son eigenestados del hamiltoniano $H = a^\dagger a + \frac{1}{2}$.

La relación con la física viene de representar los operadores a y a^\dagger en términos de las variables del espacio fase como

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + ip) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + \partial_x), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - ip) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - \partial_x), \quad (5.93)$$

que actúa en el espacio de las soluciones de las funciones integrables en la línea real. El estado de mayor peso es la solución normalizada única

$$\psi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{\pi}}, \quad (5.94)$$

de la ecuación diferencial

$$a\psi(x) = 0, \quad (5.95)$$

que es el bien conocido estado base del oscilador armónico.

Notamos que el esquema anterior dependen solo de 1) del álgebra (5.91) y 2) la existencia del estado de mayor peso $|0\rangle$. El método de dispersión inversa trata de generalizar estas ideas para álgebras más complicadas como veremos a continuación.

5.3.2. El álgebra de Yang-Baxter

El método de dispersión inverso cuántico trata con sistemas que se basan en un álgebra cuadrática asociativa \mathcal{T}_R definida en términos de sus generadores $T_\beta^\alpha(\lambda)$, $\alpha, \beta = 1, \dots, d$; $\lambda \in \mathbb{C}$, por la relación

$$R(\lambda, \mu)T_1(\lambda)T_2(\mu) = T_2(\mu)T_1(\lambda)R(\lambda, \mu). \quad (5.96)$$

En donde se ha usado la siguiente notación

$$T(\mu) = \begin{pmatrix} T_1^1(\lambda) & \cdots & T_1^d(\lambda) \\ \vdots & & \vdots \\ T_d^1(\lambda) & \cdots & T_d^d(\lambda) \end{pmatrix}, \quad (5.97)$$

$$T_1(\lambda) = T(\lambda) \otimes I_d, \quad (5.98)$$

$$T_2(\lambda) = I_d \otimes T(\lambda), \quad (5.99)$$

donde I_d es la matriz unidad de $d \times d$. $R(\lambda, \mu) \in \text{End}(\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d)$ es una matriz numérica de $d^2 \times d^2$, llamada la matriz R. La matriz-R fija la estructura del álgebra cuadrática \mathcal{T}_R . Suponemos que R es invertible para toda $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. El álgebra \mathcal{T}_R definida así tiene una rica subálgebra conmutativa. Multiplicando la ecuación (5.96) por $R^{-1}(\lambda, \mu)$ del lado derecho y tomando la traza obtenemos

$$\text{tr} (R(\lambda, \mu)T_1(\lambda)T_2(\mu)R^{-1}(\lambda, \mu)) = R_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(\lambda, \mu)T_{1\sigma\rho}^{\gamma\delta}(\lambda)T_{2\kappa\tau}^{\sigma\rho}(\mu)R_{\alpha\beta}^{-1\kappa\tau}(\lambda, \mu). \quad (5.100)$$

A partir de (5.98) y (5.99) tenemos,

$$T_{1\sigma\rho}^{\gamma\delta}(\lambda) = T_\sigma^\gamma \delta_\rho^\delta(\lambda), \quad T_{2\sigma\rho}^{\gamma\delta}(\lambda) = \delta_\sigma^\gamma T_\rho^\delta(\lambda), \quad (5.101)$$

usando el resultado anterior en (5.100) obtenemos

$$\begin{aligned}
 \text{tr} \left(R(\lambda, \mu) T_1(\lambda) T_2(\mu) R^{-1}(\lambda, \mu) \right) &= R_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(\lambda, \mu) T_\sigma^\gamma(\lambda) \delta_\rho^\delta \delta_\kappa^\sigma T_\tau^\rho(\mu) R_{\alpha\beta}^{-1\kappa\tau}(\lambda\mu) \\
 &= R_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(\lambda, \mu) T_\kappa^\gamma(\lambda) T_\tau^\delta(\mu) R_{\alpha\beta}^{-1\kappa\tau}(\lambda\mu) \\
 &= R_{\alpha\beta}^{-1\kappa\tau}(\lambda, \mu) R_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(\lambda, \mu) T_\kappa^\gamma(\lambda) T_\tau^\delta(\mu) \\
 &= \delta_\gamma^\kappa \delta_\delta^\tau T_\kappa^\gamma(\lambda) T_\tau^\delta(\mu) \\
 &= T_\kappa^\kappa(\lambda) T_\tau^\tau(\mu).
 \end{aligned} \tag{5.102}$$

En donde se sobreentiende la suma cuando tenemos índices dobles, por otro lado tenemos:

$$\text{tr} \left(R^{-1}(\lambda, \mu) T_2(\mu) T_1(\lambda) R(\lambda, \mu) \right) = R_{\gamma\delta}^{-1\alpha\beta}(\lambda, \mu) T_{2\sigma\rho}^{\gamma\delta}(\mu) T_{1\kappa\tau}^{\sigma\rho}(\lambda) R_{\alpha\beta}^{\kappa\tau}(\lambda, \mu),$$

utilizando nuevamente (5.101) obtenemos

$$\begin{aligned}
 \text{tr} \left(R^{-1}(\lambda, \mu) T_2(\mu) T_1(\lambda) R(\lambda, \mu) \right) &= R_{\gamma\delta}^{-1\alpha\beta}(\lambda, \mu) \delta_\sigma^\gamma T_\rho^\delta(\mu) T_\kappa^\sigma(\lambda) \delta_\tau^\rho R_{\alpha\beta}^{\kappa\tau}(\lambda\mu) \\
 &= R_{\alpha\beta}^{\kappa\tau}(\lambda\mu) R_{\gamma\delta}^{-1\alpha\beta}(\lambda, \mu) T_\tau^\delta(\mu) T_\kappa^\gamma(\lambda) \\
 &= \delta_\gamma^\kappa \delta_\delta^\tau T_\tau^\delta(\mu) T_\kappa^\gamma(\lambda) = T_\tau^\tau(\mu) T_\kappa^\kappa(\lambda) \\
 &= T_\kappa^\kappa(\lambda) T_\tau^\tau(\mu).
 \end{aligned} \tag{5.103}$$

Con la definición

$$t(\lambda) = T_\gamma^\gamma(\lambda) = \text{tr}(T(\lambda)), \tag{5.104}$$

obtenemos el siguiente resultado importante

$$[t(\lambda), t(\mu)] = 0. \tag{5.105}$$

Esto quiere decir que $t(\lambda)$ es la función generadora del álgebra conmutativa de \mathcal{T}_R , i.e., si $t(\lambda) = F_0 + \lambda F_1 + \lambda^2 F_2 + \dots$, entonces (5.105) implica que $[F_j, F_k] = 0$.

Supongamos que se nos da una representación de \mathcal{T}_R en el espacio de estados de algún sistema físico. Entonces $t(\lambda)$ genera un conjunto de operadores mutuamente conmutativos que por construcción está inmerso en el álgebra cuadrática \mathcal{T}_R . Así, por un lado, tenemos la posibilidad de cumplir con los requisitos del teorema de Liouville en el límite clásico (si este existe) y por otro lado, las relaciones cuadráticas del álgebra \mathcal{T}_R pueden proporcionar medios para diagonalizar simultáneamente las integrales de movimiento cuánticas, generadas por $t(\lambda)$ de manera similar al ejemplo del oscilador armónico.

El álgebra cuadrática asociativa \mathcal{T}_R es el álgebra de Yang-Baxter. $T(\lambda)$ es

la matriz de monodromía y $t(\lambda)$ es la matriz de transferencia asociada. Su argumento complejo λ es el parámetro espectral. El espacio \mathbb{C}^d es llamado espacio auxiliar, mientras que el nombre del espacio de la representación del álgebra de Yang-Baxter usualmente es el espacio cuántico.

Hay que enfatizar lo siguiente

$$(I_d \otimes T(\mu))(T(\lambda) \otimes I_d) \neq T(\lambda) \otimes T(\mu), \quad (5.106)$$

debido a que los elementos de T_β^α y T_δ^γ de la matriz de monodromía, en general, no conmutan.

Una forma alternativa de escribir las relaciones (5.96) del álgebra de Yang-Baxter es usando la matriz $\check{R}(\lambda, \mu)$ con elementos

$$\check{R}_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(\lambda, \mu) = R_{\gamma\delta}^{\beta\alpha}(\lambda, \mu). \quad (5.107)$$

Es fácil ver que (5.96) es equivalente a

$$\check{R}(\lambda, \mu)(T(\lambda) \otimes T(\mu)) = (T(\mu) \otimes T(\lambda))\check{R}(\lambda, \mu). \quad (5.108)$$

Esta formulación es en ocasiones más conveniente por razones de cálculo.

5.3.3. Ecuación de Yang-Baxter

La ecuación de Yang-Baxter es una condición suficiente para la consistencia del álgebra de Yang-Baxter \mathcal{T}_R . Al mismo tiempo garantiza la existencia de una representación no trivial de \mathcal{T}_R .

Introducimos el álgebra \mathcal{T}_R en el producto tensorial $\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$ de espacios auxiliares, con $T_1(\lambda) = T(\lambda) \otimes I_d \otimes I_d$, $T_2(\lambda) = I_d \otimes T(\lambda) \otimes I_d$, $T_3(\lambda) = I_d \otimes I_d \otimes T(\lambda)$ y denotamos las tres posibles inclusiones canónicas de la matriz-R $R(\lambda, \mu)$ en el espacio de endomorfismos de $\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$ por $R_{13}(\lambda, \mu)$ y $R_{23}(\lambda, \mu)$. Entonces $R_{12}(\lambda, \mu) = R(\lambda, \mu) \otimes I_d$ y $R_{23}(\lambda, \mu) = I_d \otimes R(\lambda, \mu)$. La tercera posibilidad no puede ser escrita de forma simple. Del requisito $(R_{13}(\lambda, \mu)\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} \otimes \mathbf{z})^{\alpha\beta\gamma} = R_{\delta\varphi}^{\alpha\gamma}(\lambda, \mu)x^\delta y^\beta z^\varphi$ concluimos que $R_{13\delta\epsilon\varphi}^{\alpha\beta\gamma} = R_{\delta\varphi}^{\alpha\gamma}(\lambda, \mu)\delta_\epsilon^\beta$.

De la definición (5.96) del álgebra de Yang-Baxter podemos ver que existen dos formas diferentes de invertir el orden en las matrices de monodromía en el triple producto $T_1(\lambda)T_2(\mu)T_3(\nu)$ al aplicar las R-matrices

$$\begin{aligned} R_{12}(\lambda, \mu)R_{13}(\lambda, \nu)R_{23}(\mu, \nu)T_1(\lambda)T_2(\mu)T_3(\nu) \\ = T_3(\nu)T_2(\mu)T_1(\lambda)R_{12}(\lambda, \mu)R_{13}(\lambda, \nu)R_{23}(\mu, \nu), \end{aligned} \quad (5.109)$$

$$\begin{aligned} R_{23}(\mu, \nu)R_{13}(\lambda, \nu)R_{12}(\lambda, \mu)T_1(\lambda)T_2(\mu)T_3(\nu) \\ = T_3(\nu)T_2(\mu)T_1(\lambda)R_{23}(\mu, \nu)R_{13}(\lambda, \nu)R_{12}(\lambda, \mu). \end{aligned} \quad (5.110)$$

Obviamente, estas dos ecuaciones son siempre compatibles, si la matriz- R satisface la ecuación

$$R_{12}(\lambda, \mu)R_{13}(\lambda, \nu)R_{23}(\mu, \nu) = R_{23}(\mu, \nu)R_{13}(\lambda, \nu)R_{12}(\lambda, \mu). \quad (5.111)$$

Esta es la famosa ecuación de Yang-Baxter. No solo es la única condición suficiente para la consistencia de \mathcal{T}_R como un álgebra asociativa, sino que también provee la llamada representación fundamental que estudiaremos posteriormente .

La mayoría de las soluciones conocidas de la ecuación de Yang-Baxter que están relacionadas a aplicaciones en física dependen de la diferencia de parámetros espectrales (i.e $\lambda - \mu$). En estos casos, existe una matriz $R(\lambda)$ de un solo argumento, tal que $R(\lambda, \mu) = R(\lambda - \mu)$ es una solución de la ecuación de Yang-Baxter. La matriz R de Shastry que relaciona el modelo de Hubbard con la solución de la ecuación de Yang-Baxter no tiene un argumento en forma de diferencia. Por lo tanto, introducimos la ecuación de Yang-Baxter en su forma más general (5.111).

5.3.4. La base estándar

Para obtener las expresiones convenientes para nuestra formulación final primero introducimos algo de notación. Necesitamos introducir la base estándar en el espacio de endomorfismos, $End(\mathbb{C}^d)$, de \mathbb{C}^d . A partir de ahora denotaremos por $e_\gamma \in \mathbb{C}^d$, $\gamma = 1, \dots, d$, el vector columna en donde la entrada en la fila γ es la única distinta de cero y vale 1. El conjunto $\{e \in \mathbb{C}^d | \gamma = 1, \dots, d\}$ es una base de \mathbb{C}^d . Sea $e_\beta^\alpha \in End(\mathbb{C}^d)$, tal que $e_\alpha^\beta e_\gamma = \delta_\gamma^\beta e_\alpha$. Entonces $\{e_\alpha^\beta \in \mathbb{C}^d | \alpha, \beta = 1, \dots, d\}$ es una base de $End(\mathbb{C}^d)$. e_α^β es una matriz $d \times d$ en donde la entrada en la fila α y la columna β es diferente de cero y vale 1. Por lo tanto, e_α^β multiplica de acuerdo a la regla

$$e_\alpha^\beta e_\gamma^\delta = \delta_\gamma^\beta e_\alpha^\delta, \quad (5.112)$$

ya que

$$e_\alpha^\beta e_\gamma^\delta e_\rho = e_\alpha^\beta \delta_\rho^\delta e_\gamma = \delta_\rho^\delta \delta_\gamma^\beta e_\alpha = \delta_\gamma^\beta e_\alpha^\delta e_\rho. \quad (5.113)$$

Expresando el mismo factor con diferentes palabras, podemos decir también que la base $\{e_\alpha^\beta\}$ es una base del espacio de operadores en el espacio auxiliar \mathbb{C}^d . Ahora consideremos las representaciones del álgebra de Yang-Baxter, donde el espacio cuántico es un producto tensorial de L veces el espacio auxiliar \mathbb{C}^d . Entonces, para $d = 2$ y $L = 1$, el espacio cuántico es igual a \mathbb{C}^2 y podemos interpretarlo como el espacio de estados de espín $\frac{1}{2}$. Para $d = 2$ y una L arbitraria tenemos el espacio de estados de una cadena de espín $\frac{1}{2}$

cuántica de longitud L . Para $d > 2$ el espín es reemplazado por un espín generalizado llamado espín $su(d)$. Para construir operadores en el espacio de estados de una cadena de espín consideramos la inmersión de la base $\{e_\alpha^\beta\}$ en $End(\mathbb{C}^d)^{\otimes L}$,

$$e_{j\alpha}^\beta = I_d^{\otimes(j-1)} \otimes e_\alpha^\beta \otimes I_d^{\otimes(L-j)}. \quad (5.114)$$

El índice $j = 1, \dots, L$ se llamará índice de posición. De (5.112) y (5.114) deducimos la regla de multiplicación local

$$e_{j\alpha}^\beta e_{j\gamma}^\delta = \delta_\gamma^\beta e_{j\alpha}^\delta, \quad (5.115)$$

y las relaciones de conmutación

$$[e_{j\alpha}^\beta, e_{k\gamma}^\delta] = 0 \quad \text{para } j \neq k. \quad (5.116)$$

Con la ayuda de los operadores base $e_{j\alpha}^\beta$ podemos expresar de forma conveniente operadores más complicados. Podemos, por ejemplo, expandir la inmersión canónica $R_{jk}(\lambda, \mu)$ de la R-matriz en la ecuación de Yang-Baxter (5.111) en términos de $e_{j\alpha}^\beta$. Sea $L = 3$, entonces

$$R_{jk}(\lambda, \mu) = R_{\beta\delta}^{\alpha\gamma} e_{j\alpha}^\beta e_{k\gamma}^\delta \quad \text{para } jk = 12, 13, 23. \quad (5.117)$$

También podemos obtener expresiones muy útiles para el operador de transposición P_{jk} que juega un papel importante en la construcción de modelos integrales de redes con interacciones locales

$$P_{jk} = e_{j\alpha}^\beta e_{k\beta}^\alpha. \quad (5.118)$$

Las siguientes propiedades de los operadores de transposición son fáciles de comprobar. Se siguen de (5.115) y (5.116)

$$P_{kj} = P_{jk}, \quad (5.119a)$$

$$P_{jj} = d \cdot id, \quad (5.119b)$$

$$P_{jk}^2 = id, \quad j \neq k, \quad (5.119c)$$

$$P_{jk} e_{k\alpha}^\beta = e_{j\alpha}^\beta P_{jk}, \quad (5.119d)$$

$$P_{jk} e_{l\alpha}^\beta = e_{l\alpha}^\beta P_{jk}, \quad l \neq j, k \quad (5.119e)$$

De estas propiedades vemos que P_{jk} induce la acción del grupo simétrico en los índices de posición de las matrices $e_{j\beta}^\alpha$. Debido a (5.119d) y (5.119e), P_{jk} genera una representación fiel del grupo simétrico \mathfrak{S}^L ,

$$P_{jk} P_{kl} = P_{jl} P_{jk} = P_{kl} P_{jl}. \quad (5.120)$$

5.3. APROXIMACIÓN ALGEBRAICA AL MODELO DE HUBBARD 139

Combinando las definiciones (5.107) y (5.118) con (5.117) y usando (5.115) tenemos

$$\begin{aligned} P_{jk}R_{jk} &= P_{jk}R_{\beta\delta}^{\alpha\gamma}e_{j\alpha}^{\beta}e_{k\gamma}^{\delta} = R_{\beta\delta}^{\alpha\gamma}e_{k\alpha}^{\beta}P_{jk}e_{k\gamma}^{\delta} \\ &= R_{\beta\delta}^{\alpha\gamma}e_{k\alpha}^{\beta}e_{j\gamma}^{\delta}P_{jk} = R_{\beta\delta}^{\alpha\gamma}e_{k\alpha}^{\beta}e_{j\gamma}^{\delta}e_{j\rho}^{\sigma}e_{k\sigma}^{\rho} \\ &= R_{\beta\delta}^{\alpha\gamma}e_{k\alpha}^{\beta}\delta_{\rho}^{\delta}e_{j\gamma}^{\sigma}e_{k\sigma}^{\rho} = R_{\beta\rho}^{\alpha\gamma}e_{k\alpha}^{\beta}e_{j\gamma}^{\sigma}e_{k\sigma}^{\rho}. \end{aligned}$$

Por (5.116) $e_{j\gamma}^{\sigma}$ y $e_{k\sigma}^{\rho}$ conmutan, entonces

$$\begin{aligned} P_{jk}R_{jk} &= R_{\beta\rho}^{\alpha\gamma}e_{j\gamma}^{\sigma}e_{k\alpha}^{\beta}e_{k\sigma}^{\rho} = R_{\beta\rho}^{\alpha\gamma}e_{j\gamma}^{\sigma}\delta_{\sigma}^{\beta}e_{k\alpha}^{\rho} \\ &= R_{\sigma\rho}^{\alpha\gamma}e_{j\gamma}^{\sigma}e_{k\alpha}^{\rho} = \check{R}_{\sigma\rho}^{\alpha\gamma}e_{j\gamma}^{\sigma}e_{k\alpha}^{\rho} = \check{R}_{jk}, \\ \Rightarrow \check{R}_{jk}(\lambda, \mu) &= P_{jk}R_{jk}(\lambda, \mu). \end{aligned}$$

Además, tenemos que

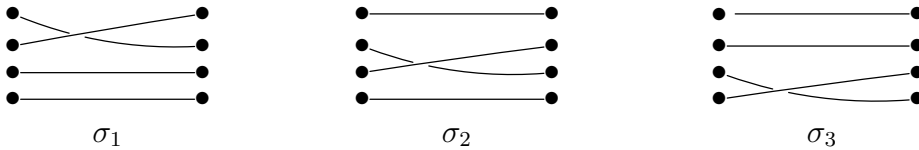
$$\begin{aligned} P_{ij}R_{kj} &= P_{ij}R_{\sigma\rho}^{\alpha\gamma}e_{k\alpha}^{\sigma}e_{j\gamma}^{\rho} = R_{\sigma\rho}^{\alpha\gamma}e_{k\alpha}^{\sigma}P_{ij}e_{j\gamma}^{\rho} \\ &= R_{\sigma\rho}^{\alpha\gamma}e_{k\alpha}^{\sigma}e_{i\gamma}^{\rho}P_{ij} = R_{ki}P_{ij}, \\ \Rightarrow P_{ij}\check{R}_{kj} &= \check{R}_{ki}P_{ij}. \end{aligned}$$

Esto nos permite reescribir la ecuación de Yang-Baxter de forma alternativa, si multiplicamos (5.111) por $P_{23}P_{12}P_{23} = P_{12}P_{23}P_{12}$ lo que nos da

$$\begin{aligned} P_{12}P_{23}P_{12}R_{12}R_{13}R_{23} &= P_{12}P_{23}\check{R}_{12}R_{13}R_{23} = P_{12}\check{R}_{13}P_{23}R_{13}R_{23} \\ &= P_{12}\check{R}_{13}R_{12}P_{23}R_{23} = \check{R}_{23}P_{12}R_{12}\check{R}_{23} \\ &= \check{R}_{23}\check{R}_{12}\check{R}_{23}, \\ P_{23}P_{12}P_{23}R_{23}R_{13}R_{12} &= P_{23}P_{12}\check{R}_{23}R_{13}R_{12} = P_{23}\check{R}_{13}P_{12}R_{13}R_{12} \\ &= \check{R}_{12}P_{23}R_{23}P_{12}R_{12} = \check{R}_{12}\check{R}_{23}\check{R}_{12}, \\ \Rightarrow \check{R}_{23}\check{R}_{12}\check{R}_{23} &= \check{R}_{12}\check{R}_{23}\check{R}_{12}. \end{aligned} \tag{5.121}$$

Escrita de esta forma la ecuación de Yang-Baxter es sorprendentemente similar a la relación de trenza.

Para hacer notoria esta similitud consideremos las siguientes tres trenzas:



Cualquier trenza en \mathbf{B}_4 pueden ser escritas como una composición de un número de estas trenzas o sus inversas. En otras palabras estas tres trenzas generan el grupo \mathbf{B}_4 . Para ver esto, consideremos una trenza arbitraria, donde analizamos de la izquierda a la derecha la intersección; comenzando de arriba, si una intersección comienza en i y finaliza en $i + 1$, se escribe σ_i o σ_i^{-1} , dependiendo de si el hilo (hebra) i queda debajo o sobre la hebra $i+1$. Después de llegar al final (a la derecha), la trenza se escribe como un producto de σ 's y sus inversas.

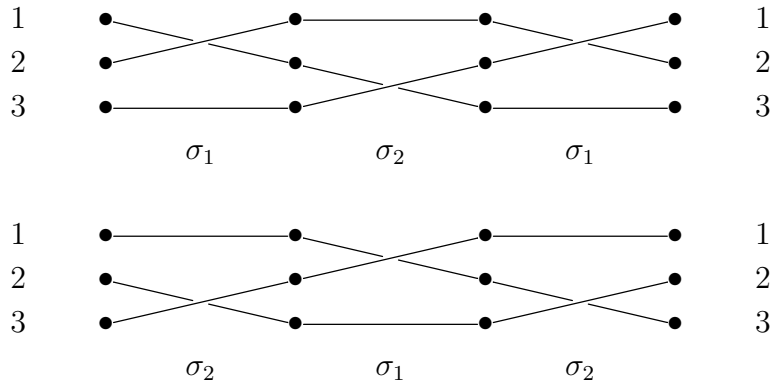
Es claro que

$$\sigma_1\sigma_3 = \sigma_3\sigma_1, \tag{5.122}$$

mientras que las siguientes dos relaciones no son obvias

$$\begin{aligned} \sigma_1\sigma_2\sigma_1 &= \sigma_2\sigma_1\sigma_2, \\ \sigma_2\sigma_3\sigma_2 &= \sigma_3\sigma_2\sigma_3, \end{aligned} \tag{5.123}$$

cómo podemos demostrar en



Así las relaciones (5.123) son esencialmente equivalentes a la ecuación de Yang-Baxter escrita en (5.121).

Además se puede demostrar que las otras relaciones entre las trenzas σ_1 , σ_2 y σ_3 también se siguen de estas relaciones y los axiomas del grupo.

Podemos generalizar este ejemplo a n hilos, el grupo \mathbf{B}_n puede ser definido de forma abstracta mediante la siguiente representación:

$$\mathbf{B}_n = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}, \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \rangle,$$

donde el primer grupo de relaciones satisface $1 \leq i \leq n - 2$ y el segundo grupo de relaciones $|i - j| \geq 2$. Esta representación nos da la generalización de los grupos de trenza llamados grupos de Artin. Las relaciones cúbicas, conocidas como las relaciones trenza juegan un papel importante en la teoría de la ecuación de Yang-Baxter.

De hecho, toda representación de la relación trenza en $End(\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d)$ nos da un parámetro espectral independiente solución de la ecuación de Yang-Baxter (5.121). Nuevamente, si $\check{R}(\lambda, \mu) = \check{R}(\lambda - \mu)$, entonces $\check{R}(\lambda)$ es una solución diferente de (5.121).

5.3.5. Modelos Fundamentales

Ahora vamos a explicar cómo las soluciones de la ecuación de Yang-Baxter (5.111) dan lugar a la representación del álgebra de Yang-Baxter (5.108). Primero, usando (5.115) y (5.116), reescribimos la ecuación de Yang-Baxter en componentes

$$R_{\alpha'\beta'}^{\alpha\beta}(\lambda, \mu) R_{\alpha''\gamma'}^{\alpha'\gamma}(\lambda, \nu) R_{\beta''\gamma''}^{\beta'\gamma'}(\mu, \nu) = R_{\beta'\gamma'}^{\beta\gamma}(\mu, \nu) R_{\alpha'\gamma''}^{\alpha\gamma'}(\lambda, \nu) R_{\alpha''\beta''}^{\alpha'\beta'}(\lambda, \mu). \quad (5.124)$$

Después, introducimos la L-matriz en la posición j para definir los elementos de la matriz

$$L_{j\beta}^{\alpha}(\lambda, \mu) = R_{\beta\delta}^{\alpha\gamma}(\lambda, \mu) e_{j\gamma}^{\delta}. \quad (5.125)$$

Estos elementos de matriz son operadores en $(End(\mathbb{C}^d))^{\otimes L}$. La multiplicación de la ecuación de Yang-Baxter (5.124) por $e_{j\gamma}^{\gamma''}$ implica que

$$\check{R}(\lambda, \mu) (L_j(\lambda, \nu) \otimes L_j(\mu, \nu)) = (L_j(\mu, \nu) \otimes L_j(\lambda, \nu)) \check{R}(\lambda, \mu). \quad (5.126)$$

Entonces, $L_j(\lambda, \nu)$ es la representación del álgebra de Yang-Baxter (5.108). Esta representación es llamada representación fundamental.

De (5.116) y (5.127) sabemos que $[L_{j+1\beta}^{\alpha}(\lambda, \nu_{j+1}), L_{j\delta}^{\gamma}(\lambda, \nu_j)] = 0$. Se sigue que

$$\check{R}(\lambda, \mu) (L_j(\lambda, \nu) \otimes L_j(\mu, \nu)) = (L_j(\mu, \nu) \otimes L_j(\lambda, \nu)) \check{R}(\lambda, \mu). \quad (5.127)$$

Por lo tanto, (5.126) y (5.127) implican que el producto $L_{j+1}(\lambda, \nu_{j+1})L_j(\lambda, \nu_j)$ de dos L-matrices también es una representación del álgebra de Yang-Baxter (5.108). Esta representación puede ser interpretada como la representación del producto tensorial de dos representaciones fundamentales. La propiedad del álgebra de Yang-Baxter, de que un producto tensorial de dos representaciones es una representación, es llamada propiedad de comultiplicación como se vió en la sección 3.10. Mediante comultiplicaciones iteradas podemos demostrar fácilmente que el producto ordenado de L veces la matriz L

$$T(\lambda) = L_L(\lambda, \nu_L) \cdots L_1(\lambda, \nu_1), \quad (5.128)$$

es una representación del álgebra de Yang-Baxter (5.108). La traza de la matriz de monodromía, $t(\lambda) = tr(T(\lambda))$, pertenece por construcción a la

familia conmutativa de las matrices de transferencia, $[t(\lambda), t(\mu)] = 0$. La solución $R(\lambda, \mu)$ de la ecuación de Yang-Baxter (5.124) se llama regular, si hay valores λ_0, ν_0 de los parámetros espectrales, tal que $R_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(\lambda_0, \nu_0) = \delta_\delta^\alpha \delta_\gamma^\beta$. Para una R-matriz regular se sigue de la definición (5.125) que

$$L_{j\beta}^\alpha(\lambda_0, \nu_0) = e_{j\beta}^\alpha. \quad (5.129)$$

Haciendo $\nu_j = \nu_0$ para $j = 1, \dots, L$ en (5.128) y usando la definición del operador de transposición (5.118) obtenemos

$$\begin{aligned} t(\lambda_0) &= L_{L\beta_{L-1}}^{\beta_L}(\lambda_0, \nu_0) \cdots L_{2\beta_1}^{\beta_2}(\lambda_0, \nu_0) L_{1\beta_L}^{\beta_1}(\lambda_0, \nu_0) \\ &= e_{1\beta_L}^{\beta_1} e_{2\beta_1}^{\beta_2} e_{3\beta_2}^{\beta_3} \cdots e_{L\beta_{L-1}}^{\beta_L} \\ &= P_{12} P_{23} \cdots P_{L-1L} = \hat{U}, \end{aligned} \quad (5.130)$$

donde el operador \hat{U} está definido en la última ecuación de (5.130) y es el operador de desplazamiento derecho, que es el generador del desplazamiento cíclico de los índices de posición.

Junto con la matriz de transferencia $t(\lambda)$ en sí misma cada función diferenciable de $t(\lambda)$ elegida adecuadamente puede ser usada como función generadora del conjunto de los operadores mutuamente conmutativos. Una elección particularmente útil de la función generadora es $\tau(\lambda) = \ln(\hat{U}^{-1}t(\lambda))$. Que desarrollada alrededor de $\lambda = \lambda_0$ es

$$\tau(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)\hat{U}^{-1}t'(\lambda_0) + \mathcal{O}((\lambda - \lambda_0)^2). \quad (5.131)$$

Se puede demostrar [25] que los coeficientes del desarrollo en serie son locales en el sentido de que el coeficiente n -ésimo es una suma sobre las densidades locales que actúan de forma no trivial en $n + 1$ posiciones vecinas como máximo. El término para dos posiciones es

$$H = \hat{U}^{-1}t'(\lambda_0) = \sum_{j=1}^L H_{j-1,j}, \quad (5.132)$$

donde por definición $H_{0,1} = H_{L,1}$ y la prima denota diferenciación con respecto el argumento, puede ser interpretado como un hamiltoniano local. Para las densidades $H_{j-1,j}$ obtenemos la expresión explícita

$$H = \hat{U}^{-1}t'(\lambda_0) = \sum_{j=1}^L H_{j-1,j} = \partial_\lambda \check{R}_{j-1,j}(\lambda, \nu_0)|_{\lambda=\lambda_0}. \quad (5.133)$$

No es difícil comprobar esta ecuación. Primero notemos que

$$\begin{aligned} t'(\lambda_0) &= \partial_\lambda L_{1\beta_L}^{\beta_1}(\lambda, \nu_0)|_{\lambda=\lambda_0} e_{2\beta_1}^{\beta_2} \cdots e_{L\beta_{L-1}}^{\beta_L} \\ &+ \cdots + e_{1\beta_L}^{\beta_1} \cdots e_{L-1\beta_{L-2}}^{\beta_{L-1}} \partial_\lambda L_{L\beta_{L-1}}^{\beta_L}(\lambda, \nu_0)|_{\lambda=\lambda_0}. \end{aligned} \quad (5.134)$$

Entonces, debido a

$$\begin{aligned}
 e_{j-1\beta_{j-2}}^{\beta_{j-1}} e_{j\beta_{j-1}}^{\beta_j} H_{j1,j} &= e_{j-1\beta_{j-2}}^{\beta_{j-1}} e_{j\beta_{j-1}}^{\beta_j} \partial_\lambda \check{R}_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(\lambda, \nu_0)|_{\lambda=\lambda_0} e_{j-1\alpha}^\gamma e_{j\beta}^\delta \\
 &= e_{j-1\beta_{j-2}}^\gamma \delta_\alpha^{\beta_{j-1}} \delta_\beta^{\beta_j} \partial_\lambda R_{\gamma\delta}^{\beta\alpha}(\lambda, \nu_0)|_{\lambda=\lambda_0} e_{j-1\beta_{j-1}}^\delta \\
 &= e_{j-1\beta_{j-2}}^{\beta_{j-1}} \partial_\lambda R_{\beta_j\gamma}^{\beta_{j-1}\delta}(\lambda, \nu_0)|_{\lambda=\lambda_0} e_{j\gamma}^\delta \\
 &= e_{j-1\beta_{j-2}}^{\beta_{j-1}} \partial_\lambda L_{j\beta_{j-1}}^{\beta_j}(\lambda, \nu_0)|_{\lambda=\lambda_0}
 \end{aligned} \tag{5.135}$$

la ecuación (5.133) se sigue de (5.130), (5.132) y (5.134).

Los próximos coeficientes en el desarrollo de la serie de $\tau(\lambda)$ pueden ser calculados de forma similar. Podemos comprobar que el segundo término es

$$\frac{1}{2} t''(\lambda_0) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^L \{ \partial_\lambda^2 \check{R}_{j-1,j}(\lambda, \nu_0)|_{\lambda=\lambda_0} - H_{j-1,j}^2 - [H_{j-1,j}, H_{j,j-1}] \}, \tag{5.136}$$

donde las condiciones de frontera periódicas en los índices son de nuevo implícitas. Notemos que no se conoce una fórmula cerrada y explícita para el término de orden n -ésimo. Los cálculos de derivadas de orden mayor de $\tau(\lambda)$ son complicados. Una forma más eficiente de calcular operadores conmutativos de orden mayor es por medio de las relaciones de recursión generadas por el operador de boost [26]. Los operadores de conmutación de orden mayor usualmente no tienen una interpretación intuitiva simple en términos físicos y su forma explícita no importa mucho para las aplicaciones. En su mayoría son interesantes por su existencia desnuda, lo que nos dice algo acerca de la estructura matemática del modelo.

Decimos que la ecuación (5.128) define al modelo fundamental asociado con la R-matriz $R(\lambda, \nu)$. Si todas las ν_j , $j = 1, \dots, L$ son iguales, el modelo es llamado homogéneo, de forma contraria inhomogéneo. Solo los modelos homogéneos conducen al hamiltoniano local H , (5.132).

5.3.6. El modelo XXX

Las clases de soluciones de la ecuación de Yang-Baxter a menudo se pueden construir considerando primero un álgebra apropiada, que proporciona una solución de la ecuación de Yang-Baxter sin el parámetro espectral, y el segundo paso es, intentar introducir un parámetro espectral en las ecuaciones. Este procedimiento tiene la ventaja de que cada representación del álgebra en cuestión ofrece una nueva solución de la ecuación de Yang-Baxter. Consideremos, por ejemplo, el álgebra asociativa con la unidad id definida

en términos de los generadores A_i , $i = 1, \dots, L$, por las relaciones

$$A_i A_{i+1} A_i = A_{i+1} A_i A_{i+1}, \quad (5.137a)$$

$$A_i A_j = A_j A_i, \quad (5.137b)$$

$$A_i^2 = id, \quad (5.137c)$$

donde por definición $A_{L+1} = A_1$. Esta álgebra es isomorfa al grupo algebraico del grupo simétrico \mathfrak{S}^L . Notemos que la relación trenza (5.137a) es muy similar al parámetro espectral independiente de la ecuación de Yang-Baxter (5.121). Un pequeño cálculo, demuestra que

$$(id + \lambda A_2)(id + (\lambda + \mu) A_1)(id + \mu A_2) = (id + \mu A_1)(id + (\lambda + \mu) A_2)(id + \lambda A_1). \quad (5.138)$$

Claramente, el operador de transposición P_{ii+1} (5.118), proporciona una representación $A_i = P_{ii+1}$ de (5.137). Sea $P = e_\alpha^\beta \otimes e_\beta^\alpha$. Entonces, por (5.138), la matriz $\check{R}(\lambda) = \alpha(\lambda)(id + \lambda P)$, con una función arbitraria $\alpha(\lambda)$, es una solución diferente de la ecuación de Yang-Baxter (5.121). Tengamos en cuenta que como $d = 2, 3, 4, \dots$ es arbitrario, obtenemos soluciones de la ecuación de Yang-Baxter de dimensión arbitrariamente alta. La función $\alpha(\lambda)$ puede ser introducida debido a la homogeneidad de la ecuación de Yang-Baxter y podemos escogerla de tal manera que la matriz $\check{R}(\lambda)$ tenga una normalización conveniente. Eligiendo, por ejemplo, $\alpha(\lambda) = 1/(\lambda + 1)$ encontramos

$$\check{R}(\lambda)\check{R}(-\lambda) = id. \quad (5.139)$$

que se sigue de $P^2 = id$. Si la R-matriz tiene esta propiedad es llamada unitaria.

Podemos reescalar el parámetro espectral, $\lambda \rightarrow \lambda/ic$, donde c es alguna constante de acoplamiento. Se sigue que la matriz

$$\check{R}(\lambda) = \frac{ic \cdot id + \lambda P}{ic + \lambda}, \quad (5.140)$$

es solución diferente de la ecuación de Yang-Baxter (5.121). Al introducir las funciones

$$b(\lambda) = \frac{ic}{ic + \lambda}, \quad c(\lambda) = \frac{\lambda}{ic + \lambda}, \quad (5.141)$$

la matriz $\check{R}(\lambda)$ toma la forma

$$\check{R}(\lambda) = b(\lambda)id + c(\lambda)P. \quad (5.142)$$

Para el caso particular $d = 2$, por ejemplo, es la matriz de 4×4

$$\check{R}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b(\lambda) & c(\lambda) & 0 \\ 0 & c(\lambda) & b(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.143)$$

Hemos obtenido un conjunto de soluciones para la ecuación de Yang-Baxter ahora podemos aplicar el formalismo de las secciones anteriores y construir el modelo fundamental correspondiente. Hay que notar que la construcción del modelo fundamental no es única y puede ser modificada por una serie de transformaciones triviales, como saltos o reescalamientos del parámetro espectral, o multiplicaciones de, por ejemplo, el hamiltoniano por un número. Consideraremos libremente esta posibilidad.

Reescribir la R-matriz $R(\lambda, \mu) = P\check{R}(\lambda, \mu)$ en términos de $\check{R}(\lambda, \mu)$ usando (5.142) en componentes. Tenemos

$$\begin{aligned} R(\lambda, \mu) &= c(\lambda - \mu)id + b(\lambda - \mu)P \\ &= c(\lambda - \mu)e_\alpha^\alpha \otimes e_\beta^\beta + b(\lambda - \mu)e_\alpha^\beta \otimes e_\beta^\alpha \\ &= (c(\lambda - \mu)\delta_\beta^\alpha \delta_\delta^\gamma + b(\lambda - \mu)\delta_\delta^\alpha \delta_\beta^\gamma) e_\alpha^\beta \otimes e_\gamma^\delta, \end{aligned} \quad (5.144)$$

las componentes de la R-matriz se pueden leer desde el lado derecho de esta ecuación. Se sigue que

$$L_{j\beta}^\alpha(\lambda, \mu) = c(\lambda - \mu)\delta_\beta^\alpha + b(\lambda - \mu)e_{j\beta}^\alpha. \quad (5.145)$$

Cuando $b(0) = 1$ y $c(0) = 0$, la R-matriz (5.144) es regular. La matriz de monodromía del modelo fundamental correspondiente esta dado por la ecuación (5.128) con $L_{j\beta}^\alpha(\lambda, \mu)$ a partir de (5.145). La densidad Hamiltoniana es (comparado con (5.133))

$$\begin{aligned} H_{j-1,j} &= i\partial_\lambda \check{R}_{j-1,j}(\lambda, 0)|_{\lambda=0} = i(b'(0) + c'(0)P_{j-1j}) \\ &= (P_{j-1j} - 1)/c, \end{aligned} \quad (5.146)$$

donde el factor i se introduce para hacer la expresión hermitiana.

El operador $H_{j-1,j}$ está actuando en un producto tensorial de espacios cuánticos locales \mathbb{C}^d de dimensión d . Para $d = 2$ podemos usar la bien conocida fórmula $P_{j-1j} = \frac{1}{2}(1 + \sigma_{j-1}^\alpha \sigma_j^\alpha)$ y obtener el hamiltoniano

$$\hat{H} = \frac{1}{2c} \sum_{j=1}^L (\sigma_{j-1}^\alpha \sigma_j^\alpha - 1), \quad (5.147)$$

de la cadena de Heisenberg isotrópica (o XXX). Si la constante de acoplamiento c es positiva tenemos una cadena antiferromagnética, si c es negativa la cadena es ferromagnética. Para una d general el hamiltoniano

$$\hat{H} = \frac{1}{c} \sum_{j=1}^L (P_{j-1j} - 1), \quad (5.148)$$

define la llamada cadena $su(d)$ -XXX.

La matriz de transferencia de la cadena de $su(d)$ -XXX puede ser diagonalizada usando el álgebra de Yang-Baxter (5.108). El procedimiento es llamado el ansatz algebraico anidado de Bethe. El ansatz Bethe algebraico anidado para la cadena $su(d)$ -XXX fue construido por Kulish y Reshetikhin [27].

5.3.7. Ansatz algebraico de Bethe para el modelo $gl(2)$ generalizado

Los modelos relacionados con el álgebra Yang-Baxter son interesantes para los físicos principalmente porque existen métodos poderosos para la solución del problema espectral. Uno de estos métodos es el ansatz algebraico de Bethe. El cual se basa en el uso directo de las relaciones de conmutación cuadráticas (5.108) que definen el álgebra de Yang-Baxter. Para que el ansatz algebraico de Bethe funcione, debe ser posible identificar los elementos de la matriz de monodromía como operadores de creación y aniquilación de "partículas". En particular, debe existir un estado de pseudo vacío que sea aniquilado por todos los operadores de aniquilación. En todos los casos conocidos, donde el ansatz algebraico de Bethe ha tenido éxito hasta el momento, los elementos de la matriz de monodromía pueden construirse de tal manera que la matriz de monodromía actúe como una matriz triangular superior en el pseudo vacío, y el pseudo vacío sea un eigenestado de los elementos diagonales.

Consideremos el álgebra de Yang-Baxter (5.108) con la R-matriz (5.143). La correspondiente matriz de monodromía es la matriz de 2×2

$$T(\lambda) = \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix}. \quad (5.149)$$

El modelo generalizado $gl(2)$ es el conjunto de todas las representaciones (lineales) del álgebra de Yang-Baxter (5.108) con la R-matriz (5.143), para las cuales existe un pseudo vacío $|0\rangle$, tal que $T(\lambda)$ actúa triangularmente en $|0\rangle$.

$$A(\lambda)|0\rangle = a(\lambda)|0\rangle, \quad D(\lambda)|0\rangle = d(\lambda)|0\rangle, \quad (5.150)$$

$$C(\lambda)|0\rangle = 0, \quad B(\lambda)|0\rangle = |\lambda\rangle. \quad (5.151)$$

Las funciones complejas $a(\lambda)$ y $d(\lambda)$ son llamados los parámetros del modelo generalizado.

Vamos a denotar al espacio de representación de una representación dada del modelo generalizado por \mathcal{H} . Es claro de las relaciones de conmutación

5.3. APROXIMACIÓN ALGEBRAICA AL MODELO DE HUBBARD 147

cuadráticas contenidas en (5.108) y de (5.150), (5.151) que podemos suponer que \mathcal{H} estará compuesto por todos los vectores de la forma

$$|\mu_1, \dots, \mu_M\rangle = B(\mu_1)\dots B(\mu_M)|0\rangle. \quad (5.152)$$

La familia de matrices de transferencia que queremos diagonalizar está dada por

$$t(\lambda) = \text{tr}(T(\lambda)) = A(\lambda) + D(\lambda). \quad (5.153)$$

Esta es una familia conmutativa de matrices de transferencia, $[t(\lambda), t(\mu)] = 0$, por construcción. Por lo tanto, $t(\lambda)$ y $t(\mu)$ tienen un sistema común de eigenfunciones, lo que quiere decir que los eigenvectores de $t(\lambda)$ son independientes del parámetro espectral λ . La tarea del ansatz algebraico de Bethe para el modelo generalizado es diagonalizar $t(\lambda)$ i.e. resolver el problema de eigenvalores

$$t(\lambda)|\Psi\rangle = \Lambda(\lambda)|\Psi\rangle. \quad (5.154)$$

Esta tarea se puede lograr simplemente recurriendo al álgebra de Yang-Baxter (5.108) y las propiedades (5.150), (5.151) del estado de pseudo vacío. Tomando en cuenta que las matrices de monodromía son de (2×2) entonces en (5.108) tendríamos 16 relaciones cuadráticas, de estas seleccionamos las siguientes tres

$$A(\lambda)B(\mu) = \frac{B(\mu)A(\lambda)}{c(\mu - \lambda)} - \frac{b(\mu - \lambda)}{c(\mu - \lambda)}B(\lambda)A(\mu), \quad (5.155a)$$

$$D(\lambda)B(\mu) = \frac{B(\mu)D(\lambda)}{c(\lambda - \mu)} - \frac{b(\lambda - \mu)}{c(\lambda - \mu)}B(\lambda)D(\mu), \quad (5.155b)$$

$$B(\lambda)B(\mu) = B(\mu)B(\lambda). \quad (5.155c)$$

Estamos interesados en la relación de conmutación del producto $B(\mu_1)\dots B(\mu_M)$ con $A(\lambda)$ y $D(\lambda)$. Esta relación de conmutación se pueden obtener mediante el uso iterado de (5.155). De esta forma obtenemos

$$\begin{aligned} A(\lambda) \prod_{k=1}^M B(\mu_k) &= \left[\prod_{k=1}^M B(\mu_k) \right] A(\lambda) \prod_{k=1}^M \frac{1}{c(\mu_k - \lambda)} \\ &- \prod_{k=1}^M \left[B(\lambda) \prod_{l=1, l \neq k}^M B(\mu_l) \right] A(\mu_k) \frac{b(\mu_k - \lambda)}{c(\mu_k - \lambda)} \prod_{l=1, l \neq k}^M \frac{1}{c(\mu_l - \mu_k)}, \end{aligned} \quad (5.156a)$$

$$D(\lambda) \prod_{k=1}^M B(\mu_k) = \left[\prod_{k=1}^M B(\mu_k) \right] D(\lambda) \prod_{k=1}^M \frac{1}{c(\lambda - \mu_k)} - \prod_{k=1}^M \left[B(\lambda) \prod_{l=1, l \neq k}^M B(\mu_l) \right] D(\mu_k) \frac{b(\lambda - \mu_k)}{c(\lambda - \mu_k)} \prod_{l=1, l \neq k}^M \frac{1}{c(\mu_k - \mu_l)}. \quad (5.156b)$$

La demostración de (5.156) se encuentra en .

Ahora podemos sumar las ecuaciones (5.156a) y (5.156b). Estas nos dan las relaciones de conmutación entre $t(\lambda)$ y el producto múltiple $B(\mu_1) \dots B(\mu_M)$. Usando el hecho de que $b(\lambda)/c(\lambda)$ es una función impar de λ obtenemos

$$t(\lambda) \prod_{k=1}^M B(\mu_k) = \left[\prod_{k=1}^M B(\mu_k) \right] \left\{ A(\lambda) \prod_{k=1}^M \frac{1}{c(\mu_k - \lambda)} + D(\lambda) \prod_{k=1}^M \frac{1}{c(\lambda - \mu_k)} \right\} + \sum_{k=1}^M \left[B(\lambda) \prod_{l=1, l \neq k}^M B(\mu_l) \right] \frac{b(\lambda - \mu_k)}{c(\lambda - \mu_k)} \prod_{l=1, l \neq k}^M \frac{1}{c(\mu_k - \mu_l)} \times \left\{ A(\mu_k) \prod_{l=1, l \neq k}^M \frac{c(\mu_k - \mu_l)}{c(\mu_l - \mu_k)} - D(\mu_k) \right\}. \quad (5.157)$$

Por hipótesis, $|0\rangle$ es un eigenvector adjunto de $A(\lambda)$ y $D(\lambda)$ con eigenvalores $a(\lambda)$ y $d(\lambda)$. Cuando actuamos con la ecuación (5.157) en el pseudo vacío, por lo tanto, podemos reemplazar los operadores $A(\lambda)$ y $D(\lambda)$ por sus eigenvalores en el pseudo vacío. Entonces la primera llave del lado derecho en (5.157) se convierte en

$$\Lambda(\lambda) = a(\lambda) \prod_{k=1}^M \frac{1}{c(\mu_k - \lambda)} + d(\lambda) \prod_{k=1}^M \frac{1}{c(\lambda - \mu_k)}. \quad (5.158)$$

La segunda llave se anula, si se cumple la siguiente relación

$$\frac{d(\mu_k)}{a(\mu_k)} = \prod_{l=1, l \neq k}^M \frac{c(\mu_k - \mu_l)}{c(\mu_l - \mu_k)}, \quad (5.159)$$

para $k = 1, \dots, M$. Entonces $|\Psi\rangle = B(\mu_1) \dots B(\mu_M) |0\rangle$ es un eigenvector de la matriz de transferencia $t(\lambda)$ con eigenvalor $\Lambda(\lambda)$ si las ecuaciones (5.159) se cumplen. Estas ecuaciones son, por supuesto, las ecuaciones del ansatz de Bethe.

Como aplicación de nuestra solución abstracta del ansatz de Bethe, consideremos la cadena de espines $\frac{1}{2}$ -XXX. La matriz de monodromía (5.128) es

entonces el producto de L veces la L-matriz elemental (5.145), y de esta forma define una representación del álgebra de Yang-Baxter con la R-matriz (5.143). Un pseudo vacío apropiado es el estado ferromagnético $|0\rangle = \binom{1}{0}^{\otimes L}$. La única cosa que tenemos que hacer si queremos aplicar nuestro resultado general (5.158),(5.159) es calcular los parámetros $a(\lambda)$ y $d(\lambda)$. Notemos que

$$L_j(\lambda, \nu_j)|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 & b(\lambda, \nu_j)e_{j2}^1 \\ 0 & c(\lambda, \nu_j) \end{pmatrix} |0\rangle. \quad (5.160)$$

Se sigue que

$$a(\lambda) = 1, \quad d(\lambda) = \prod_{j=1}^L c(\lambda, \nu_j). \quad (5.161)$$

En el caso homogéneo, cuando $\nu_j = 0$, $j = 1, \dots, L$, las ecuaciones (5.158), (5.159) y (5.161) nos dan los eigenvalores E para el hamiltoniano de espín $\frac{1}{2}$ -XXX (5.147). Comparando (5.132), (5.133) y (5.146) encontramos (para $L \geq 2$)

$$E = i \frac{\Lambda'(0)}{\Lambda(0)} = i \sum_{k=1}^M \frac{c'(\mu_k)}{c(\mu_k)} = - \sum_{k=1}^M \frac{c}{\mu_k(\mu_k + ic)}, \quad (5.162)$$

donde μ_k , $k = 1, \dots, M$ están sujetos a las ecuaciones del ansatz de Bethe (5.159) con $a(\lambda)$ y $d(\lambda)$ de acuerdo a (5.161).

Si consideremos $\mu_k = \lambda_k - ic/2$ en las ecuaciones (5.159) y (5.162) y $c = 2$ en (5.147), (5.159) y (5.162). Entonces llegamos al siguiente resultado clásico debido a Bethe [28].

5.3.8. Representación gráfica de la ecuación de Yang-Baxter

En esta sección daremos un versión complementaria sobre el método de dispersión inversa cuántica, las R-matrices pueden ser representadas por diagramas. Las relaciones entre los productos de las R-matrices se convierten en relaciones entre gráficos o reglas gráficas para los cálculos. El uso de estas reglas gráficas a veces simplifica las demostraciones algebraicas. El origen de esta representación gráfica es la mecánica estadística de los modelos de vértices [29]. Es cuestión de gustos si uno prefiere trabajar con la representación algebraica o gráfica.

Representemos $R(\lambda, \mu)$ por dos flechas cruzadas, una de las cuales pensamos que lleva el parámetro espectral λ y el otro el parámetro espectral μ . Este símbolo también puede considerarse como un vértice (dirigido). Adjuntamos

los índices α , β , γ y δ a los cuatro extremos del vértice. Los índices en las puntas de las flechas se llaman índices salientes y los índices en las colas son índices entrantes. La posición de los índices en el vértice es único si acordamos ponerlos en la dirección de las manecillas del reloj, comenzando con α como el índice saliente más a la izquierda. De esta forma también establecemos una correspondencia única entre los índices salientes α y β y los parámetros espectrales λ y μ . Entonces, podemos identificar de manera única a los elementos $R_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}$ de la R-matriz con los vértices etiquetados

$$R_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(\lambda, \mu) = \begin{array}{c} \beta \\ \uparrow \\ \alpha \leftarrow \text{---} \lambda \text{---} \gamma \\ \mu \downarrow \\ \delta \end{array}$$

El punto clave que hace que la representación gráfica sea adecuada para los cálculos es simbolizar la contracción de los índices mediante la conexión de líneas. Entonces tenemos, por ejemplo,

$$R_{\alpha'\alpha''}^{\alpha\beta}(\lambda, \mu) R_{\beta''\gamma''}^{\alpha'\gamma}(\lambda, \nu) = \begin{array}{c} \beta \qquad \gamma \\ \uparrow \qquad \uparrow \\ \alpha \leftarrow \text{---} \lambda \text{---} \beta'' \\ \mu \downarrow \qquad \nu \downarrow \\ \alpha'' \qquad \gamma'' \end{array}$$

En esta ecuación se implica que a lo largo de la flecha de β'' a α viaja el parámetro espectral λ . Esto es consistente con nuestra convención de suma para definir

$$\alpha \leftarrow \text{---} \lambda \text{---} \beta = \delta_{\beta}^{\alpha}$$

Con la ayuda de nuestra reglas podemos expresar varias identidades que involucran R-matrices de forma gráfica. Por ejemplo la ecuación de Yang-Baxter (5.124).

En su forma gráfica es probablemente más fácil de memorizar. La condición de unitariedad (5.139), va estar dada por

Finalmente, la R-matriz regular con puntos de salto (λ_0, μ_0) satisface

5.4. R-matriz de Shastry

Poco después de que se creó el método de dispersión inversa cuántica, se hizo evidente que la mayoría de los modelos que se pueden resolver mediante coordenadas del ansatz de Bethe se pueden conectar al álgebra de Yang-Baxter. Sin embargo, resultó ser difícil encontrar una matriz R asociada al modelo Hubbard. La razón se debe al argumento de Reshetikhin [30], el modelo de Hubbard no puede construirse como un modelo fundamental con una matriz R en forma de diferencia $(\lambda - \mu)$. Otro obstáculo está dado por el hecho de que el modelo de Hubbard está formulado en términos de grados de libertad completamente fermiónica y no solo de espín. Este problema se puede evitar considerando el modelo de espín relacionado con el modelo de Hubbard mediante una transformación de Jordan-Wigner [31]. Una matriz R para este modelo de espín fue obtenida por B. S. Shastry en 1986 [32, 33]. El trabajo original de Shastry [32, 33] se basa más bien en cálculos de fuerza bruta que involucran una extensa álgebra computacional. Más adelante, en un elegante artículo [34], se introdujo un novedoso medio algebraico, la llamada relación del triángulo estrellado decorado que permitió derivar la R-Matriz simultáneamente con una representación peculiar del álgebra de Yang-Baxter. Esta construcción, sin embargo, no incluyó una prueba que demuestre que la matriz R así construida satisface la ecuación de Yang-Baxter. Una prueba algebraica basada en la representación de Korepanov [35] del álgebra tetraédrica de Zamolodchikov fue dada por Shiroishi y Wadati [36].

5.4.1. Los modelos XX

Comencemos nuestras observaciones introduciendo los modelos $su(d)$ -XX que nos servirán como bloque de construcción para la construcción de la R-matriz de Shastry.

El modelo más general de espín- $\frac{1}{2}$ anisotrópico con interacciones de vecinos próximos está definida por el hamiltoniano

$$H_{XYZ} = \sum_{j=1}^L (J_x \sigma_{j-1}^x \sigma_j^x + J_y \sigma_{j-1}^y \sigma_j^y + J_z \sigma_{j-1}^z \sigma_j^z), \quad (5.163)$$

donde las condiciones de frontera periódicas, $\sigma_0^\alpha = \sigma_L^\alpha$, $\alpha = x, y, z$, están implícitas y J_x , J_y y J_z son tres constantes de acoplamiento generalmente distintos. H_{XYZ} es llamado el Hamiltoniano XYZ. El Hamiltoniano XYZ se conecta con el famoso modelo de ocho vértices de Baxter que es una solución de la ecuación de Yang-Baxter [37, 38, 29]. Para $J_x = J_y$ el hamiltoniano describe al modelo parcialmente anisotrópico llamado XXZ. El caso completamente anisotrópico $J_x = J_y = J_z$ es llamado modelo XXX. Aquí discutiremos otra familia interesante de soluciones de la ecuación de Yang-Baxter conectada con una elección especial de las constantes de acoplamiento en (5.163). Para $J_x = J_y = \frac{J}{2}$ y $J_z = 0$ el Hamiltoniano XYZ se convierte en

$$H_{XX} = \frac{J}{2} \sum_{j=1}^L (\sigma_{j-1}^x \sigma_j^x + \sigma_{j-1}^y \sigma_j^y) = J \sum_{j=1}^L (\sigma_{j-1}^+ \sigma_j^- + \sigma_{j-1}^- \sigma_j^+). \quad (5.164)$$

Al que llamamos Hamiltoniano XX o Hamiltoniano XX0. El modelo XX se relaciona con el modelo de unión fuerte de los fermiones sin espín mediante una transformación de Jordan-Wigner.

Consideremos el álgebra asociativa con la unidad definida en términos de los generadores A_i , $i = 1, \dots, L$, por las relaciones

$$A_i A_{i+1} A_i = 0 = A_{i+1} A_i A_{i+1}, \quad (5.165a)$$

$$A_i A_j = A_j A_i, \quad \text{para } |i - j| > 1, \quad (5.165b)$$

$$A_i^3 = A_i, \quad (5.165c)$$

$$\{A_i^2, A_{i\pm 1}\} = A_{i\pm 1}, \quad (5.165d)$$

donde imponemos las condiciones de frontera periódicas en los generadores. Los corchetes en la última línea denotan el anticonmutador. El álgebra definida por (5.165) fue introducida por Massarani [39] y se denominó como "álgebra de fermiones libres". Notemos que (5.165a) implica que A_i satisface la relación trenza. Usando (5.165c) y (5.165d) vemos que lo mismo ocurre

para A_i^2 , $A_i^2 A_{i+1}^2 A_i^2 = 0 = A_{i+1}^2 A_i^2 A_{i+1}^2$.

Usando el álgebra de fermiones libres (5.165) y los teoremas de suma para las funciones trigonométricas es fácil comprobar que

$$\begin{aligned}
& (\cos \lambda + A_2^2(1 - \cos \lambda) + A_2 \sin \lambda) \times [\cos(\lambda + \mu) + A_1^2(1 - \cos(\lambda + \mu)) \\
& + A_1 \sin(\lambda + \mu)] \times (\cos \mu + A_2^2(1 - \cos \mu) + A_2 \sin \mu) \\
& = (\cos \mu + A_1^2(1 - \cos \mu) + A_1 \sin \mu) \times (\cos(\lambda + \mu) + A_2^2(1 - \cos(\lambda + \mu)) \\
& + A_2 \sin(\lambda + \mu)) \times (\cos \lambda + A_1^2(1 - \cos \lambda) + A_1 \sin \lambda).
\end{aligned} \tag{5.166}$$

La última ecuación constituye una solución abstracta de la ecuación de Yang-Baxter. Sea $\mathcal{Q} \in \text{End}(\mathbb{D}^d \otimes \mathbb{D}^d)$, tal que $A_i = \mathcal{Q}_{ii+1} = \mathcal{Q}_{\beta\delta}^{\alpha\gamma} e_{i\alpha}^\beta e_{i+1\gamma}^\delta$ es una representación del álgebra de fermiones libre. Sea $P^{(1)} = \mathcal{Q}^2$ y $P^{(2)} = id - P^{(1)}$. Entonces (5.166) implica que

$$\check{R}(\lambda) = P^{(1)} + P^{(2)} \cos \lambda + \mathcal{Q} \sin \lambda, \tag{5.167}$$

es una solución en forma de diferencia de la ecuación de Yang-Baxter (5.121). Esta solución es regular, ya que

$$\check{R}(0) = P^{(1)} + P^{(2)} = id. \tag{5.168}$$

A partir de la relaciones del álgebra de fermiones libres concluimos que $P^{(1)}$ y $P^{(2)}$ forman un conjunto completo de operadores de proyección,

$$P^{(i)} P^{(j)} = \delta_{ij} P^{(j)}, \quad i, j = 1, 2. \tag{5.169}$$

El operador \mathcal{Q} , que es la raíz cuadrada de $P^{(1)}$ satisface

$$P^{(1)} \mathcal{Q} = \mathcal{Q} P^{(1)} = \mathcal{Q}, \tag{5.170a}$$

$$P^{(2)} \mathcal{Q} = \mathcal{Q} P^{(2)} = 0. \tag{5.170b}$$

Usando (5.169) y (5.170) se sigue que

$$\check{R}(\lambda) \check{R}(-\lambda) = \cos^2 \lambda \cdot id. \tag{5.171}$$

Entonces $\check{R}(\lambda) / \cos^2 \lambda$ es unitaria. De acuerdo a la ecuación (5.133) la densidad del hamiltoniano del modelo homogéneo fundamental generado por $\check{R}(\lambda)$ es

$$H_{j-1,j} = \partial_\lambda \check{R}_{j-1j}(\lambda)|_{\lambda=0} = \mathcal{Q}_{j-1j}. \tag{5.172}$$

El trabajo que queda por hacer es construir representaciones del álgebra de fermiones libres (5.165). Hemos afirmado que construiríamos la R-matriz del

modelo XX y sus generalizaciones $su(d)$. Entonces, comparando (5.164) y (5.172) la densidad Hamiltoniana $\frac{1}{2}(\sigma_{j-1}^x \sigma_j^x + J_y \sigma_{j-1}^y \sigma_j^y) = e_{j-11}^2 e_{j2}^1 + e_{j-12}^1 e_{j1}^2$ debe generar el álgebra de fermiones libres (5.82). Tenemos, por ejemplo

$$\begin{aligned} & (e_{11}^2 e_{22}^1 + e_{12}^1 e_{21}^2)(e_{21}^2 e_{32}^1 + e_{22}^1 e_{31}^2)(e_{11}^2 e_{22}^1 + e_{12}^1 e_{21}^2) \\ & = (e_{11}^2 e_{22}^1 e_{32}^1 + e_{12}^1 e_{21}^1 e_{31}^2)(e_{11}^2 e_{22}^1 + e_{12}^1 e_{21}^2) = 0, \end{aligned} \quad (5.173)$$

y la primera relación (5.165a) se comprueba. Las relaciones restantes (5.165) se comprueban de forma similar. Entonces,

$$\mathcal{Q} = e_1^2 \otimes e_2^1 + e_2^1 \otimes e_1^2, \quad (5.174)$$

generan las representaciones del álgebra de fermiones libres (5.165).

Este resultado se generaliza directamente. Uno comprueba con cálculos directos que $A_i = \mathcal{Q}_{ii+1}$ con

$$\mathcal{Q} = \sum_{\alpha=2}^d (x e_1^\alpha \otimes e_\alpha^1 + x^{-1} e_\alpha^1 \otimes e_1^\alpha), \quad (5.175)$$

y $d = 2, 3, \dots$ genera las representaciones del álgebra (5.165). Aquí $x \in \mathbb{C}$ es un parámetro libre. Usando (5.167) obtenemos la siguiente solución en forma de diferencia de la ecuación de Yang-Baxter (5.121),

$$\begin{aligned} \check{R}(\lambda) &= \sum_{\alpha=2}^d (e_1^1 \otimes e_\alpha^\alpha + e_\alpha^\alpha \otimes e_1^1) + \left[e_1^1 \otimes e_1^1 + \sum_{\alpha, \beta=2}^d e_\alpha^\alpha \otimes e_\beta^\beta \right] \cos \alpha \\ &+ \sum_{\alpha=2}^d (x e_1^\alpha \otimes e_\alpha^1 + x^{-1} e_\alpha^1 \otimes e_1^\alpha) \sin \alpha. \end{aligned} \quad (5.176)$$

Esta solución fue obtenida originalmente en [40]. Nuestros cálculos siguen el desarrollo de [39]. El modelo fundamental generado por $R(\lambda) = P\check{R}(\lambda)$ es llamado modelo $su(d)$ -XX. Hay que tener en cuenta que estos modelos (para $d > 2$) son casos especiales degenerados de los modelos XXZ de orden mayor.

Más adelante, cuando calculemos la expresión explícita de la R-matriz de Shastry de 16×16 para el modelo de Hubbard, necesitaremos la forma explícita de $\check{R}(\lambda)$ para el caso del espacio auxiliar de dos dimensiones, $d = 2$

$$\check{R}(\lambda) = \begin{pmatrix} \cos \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \sin \lambda & 0 \\ 0 & x^{-1} \sin \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \lambda \end{pmatrix}. \quad (5.177)$$

Hay que notar que podemos obtener la misma R-matriz (con $x = 1$) con un límite apropiado de la R-matriz de Baxter del modelo de ocho vértices [29].

5.4.2. Matriz conjugación

La R-matriz de Shastry se construye pegando dos copias del modelo XX por medio de la matriz conjugación $C \in \text{End}(\mathbb{C}^d)$. Siguiendo [39] lo caracterizamos por sus propiedades

$$C^2 = id, \quad \{C_i, \mathcal{Q}_{12}\} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (5.178a)$$

$$C_1 \mathcal{Q}_{12} = \mathcal{Q}_{12} C_2, \quad \mathcal{Q}_{12}^2 = \frac{1}{2}(I_{d^2} - C_1 C_2), \quad (5.178b)$$

donde $\mathcal{Q} \in \text{End}(\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d)$ es una representación de álgebra de fermiones libres (5.165). Regresando a nuestra representación (5.175) es fácil comprobar que

$$C = e_1^1 - \sum_{\alpha=2}^d e_\alpha^\alpha, \quad (5.179)$$

es la matriz de conjugación correspondiente.

Tenemos que (5.178a) implica $[C_i, P_{12}^{(j)}] = 0$ para $i, j = 1, 2$. Entonces

$$C_i \check{R}_{12}(\lambda) = \check{R}_{12}(-\lambda) C_i, \quad i = 1, 2. \quad (5.180)$$

La matriz de conjugación cambia el signo del argumento de $\check{R}(\lambda)$. Puede ser usada para demostrar que la R-matriz del modelo XX satisface otra ecuación funcional aparte de la ecuación de Yang-Baxter. Para este propósito primero reescribimos la ecuación de Yang-Baxter (5.111) en forma de diferencia,

$$R_{12}(\lambda - \mu) R_{13}(\lambda) R_{23}(\mu) = R_{23}(\mu) R_{13}(\lambda) R_{12}(\lambda - \mu). \quad (5.181)$$

Después cambiamos λ y μ por ν y multiplicamos (5.181) por $C_1 C_2$ del lado izquierdo y por C_3 del lado derecho e invertimos el signo de μ para obtener la llamada ecuación de Yang-Baxter decorada

$$R_{12}(\lambda + \mu) C_1 R_{13}(\lambda) R_{23}(\mu) = R_{23}(\mu) R_{13}(\lambda) C_1 R_{12}(\lambda + \mu). \quad (5.182)$$

Una forma equivalente de esta ecuación fue introducida por Shastry en [34] y denominada "relación de triangulo estrella decorada".

5.4.3. Construcción de la R-matriz

Ahora podemos introducir la R-matriz de Shastry en la forma generalizada construida por Massarani [41, 39]. Está compuesta por dos copias de la R-matriz del modelo XX (5.176) y su construcción se basa en las ecuaciones (5.181), (5.182) y las propiedades (5.178) de la matriz de conjugación.

Consideremos primero un sistema que está compuesto por dos modelos XX que interactúan. Definimos

$$\check{r}_\uparrow(\lambda) = \check{R}_{\beta\delta}^{\alpha\gamma}(\lambda) e_\alpha^\beta \otimes I_d \otimes e_\gamma^\delta \otimes I_d, \quad (5.183a)$$

$$\check{r}_\downarrow(\lambda) = \check{R}_{\beta\delta}^{\alpha\gamma}(\lambda) I_d \otimes e_\alpha^\beta \otimes I_d \otimes e_\gamma^\delta, \quad (5.183b)$$

donde $\check{R}(\lambda)$ es la R-matriz del modelo XX (5.176), y las matrices de transposición asociadas están dadas por

$$P_\uparrow = e_\alpha^\beta \otimes I_d \otimes e_\gamma^\delta \otimes I_d, \quad P_\downarrow = I_d \otimes e_\alpha^\beta \otimes I_d \otimes e_\gamma^\delta. \quad (5.184)$$

Entonces, por construcción ambas matrices $r_\uparrow(\lambda) = P_\uparrow \check{r}_\uparrow(\lambda)$ y $r_\downarrow(\lambda) = P_\downarrow \check{r}_\downarrow(\lambda)$, satisfacen la ecuación de Yang-Baxter en su forma (5.181) y como conmutan entre sí ocurre lo mismo para su producto

$$r(\lambda) = r_\uparrow(\lambda) r_\downarrow(\lambda), \quad (5.185)$$

se satisface (5.181). $r(\lambda)$ actúa en el producto tensorial $(\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d) \otimes (\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d)$ de dos espacios auxiliares $\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$. El espacio vectorial $\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$ es isomorfo a \mathbb{C}^{d^2} . Entonces, podemos interpretar $r(\lambda)$ como una matriz en $End(\mathbb{C}^{d^2} \otimes \mathbb{C}^{d^2})$ si empleamos la convención usual $e_1^1 \otimes e_1^1 \rightarrow e_1^1$, $e_1^1 \otimes e_2^1 \rightarrow e_2^1$, etc. para el producto tensorial de dos matrices. Entonces $r(\lambda)$ es una matriz de $d^4 \times d^4$. El operador de transposición P que intercambia los factores de dos tensores en $\mathbb{C}^{d^2} \otimes \mathbb{C}^{d^2}$ está dado por el producto $P = P_\uparrow P_\downarrow$.

Consideremos brevemente el modelo fundamental asociado a la R-matriz $r(\lambda)$. Siguiendo los pasos de la sección anterior. Los componentes de la L-matriz son

$$l_{j\beta}^\alpha(\lambda) = r_{\beta\delta}^{\alpha\gamma}(\lambda) e_{j\gamma}^\delta, \quad (5.186)$$

donde los índices griegos corren de 1 a d^2 y la suma sobre γ y δ está implícita, generamos una representación fundamental del álgebra de Yang-Baxter,

$$\check{r}(\lambda - \mu)(l_j(\lambda) \otimes l_j(\mu)) = (l_j(\mu) \otimes l_j(\lambda)) \check{r}(\lambda - \mu). \quad (5.187)$$

Debido a la regularidad de la R-matriz del modelo XX tenemos $\check{r}'(0) = \check{r}'_\uparrow(0) + \check{r}'_\downarrow(0)$. Por lo tanto el hamiltoniano del modelo homogéneo correspondiente es igual a

$$H = \sum_{j=1}^L (\mathcal{Q}_{j-1,j}^\uparrow + \mathcal{Q}_{j-1,j}^\downarrow), \quad (5.188)$$

con $\mathcal{Q}^\sigma = \check{r}'_\sigma(0)$, $\sigma = \uparrow, \downarrow$. Es claro por construcción que \mathcal{Q}^\uparrow y \mathcal{Q}^\downarrow conmutan. Estos operadores corresponden a dos inmersiones independientes de \mathcal{Q} en $\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$. El hamiltoniano (5.188) se puede entender como la suma

directa de dos hamiltonianos XX.

Para acoplar los dos modelos XX necesitamos dos copias conmutativas, $C^\uparrow = C \otimes I_d$ y $C^\downarrow = I_d \otimes C$, de la matriz de conjugación (5.179). La matriz $r(\lambda)$ satisface entonces (5.182) al remplazar C por $C^\uparrow C^\downarrow$. Se sigue que

$$\check{r}(\lambda + \mu)(C^\uparrow C^\downarrow \otimes I_{d^2})(l_j(\lambda) \otimes l_j(\mu)) = (l_j(\mu) \otimes l_j(\lambda))(I_{d^2} \otimes C^\uparrow C^\downarrow)\check{r}(\lambda + \mu). \quad (5.189)$$

La observación original de Shastry [34] fue que (5.187) y (5.189) pueden usarse para construir una representación del álgebra de Yang-Baxter que se relaciona con el modelo Hubbard junto con su R-matriz. Posteriormente, Massarani [39] notó que la construcción de Shastry se puede generalizar a la familia de modelos XX. El procedimiento de Shastry fue el siguiente:

- (i) Construyó un operador conservado I_2 superior del modelo de Hubbard, i.e. construyó un operador que conmuta con el hamiltoniano de Hubbard.
- (ii) Por medio de la transformación de Jordan-Wigner obtuvo "operadores de cadena de espín", $H^{(s)}$, $I_2^{(s)}$ que están relacionados con el hamiltoniano de Hubbard y al operador conservado I_2 .
- (iii) Supuso una L-matriz, tal que la serie de operadores conservados generados por la matriz de transferencia asociada $t(\lambda)$ comiencen de la forma

$$\ln(U^{-1}t(\lambda)) = \lambda H^{(s)} + \lambda^2 I_2^{(s)}.$$

- (iv) Construyó una R-matriz, tal que su L-matriz aparece como la representación fundamental del álgebra de Yang-Baxter definida para la R-matriz. No haremos todos los pasos de la derivación de Shastry, pues lo que nos interesa es la R-matriz.

Definimos la matriz $G(h) \in (\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d)$ como:

$$G(h) = \exp \{hC^\uparrow C^\downarrow/2\} = \cosh(h/2) + C^\uparrow C^\downarrow \sinh(h/2), \quad (5.190)$$

$G(h)$ actúa en el espacio auxiliar de $r(\lambda)$. Lo siguiente es definir las matrices $L_j(\lambda)$ y $L_j(\mu)$ como

$$L_j(\lambda) = G(h)l_j(\lambda)G(h), \quad L_j(\mu) = G(l)l_j(\mu)G(l), \quad (5.191)$$

Se sigue de (5.187) y (5.189) que

$$\begin{aligned} & (G(l) \otimes G(h))\check{r}(\lambda - \mu)(G(-h) \otimes G(-l))(L_j(\lambda) \otimes L_j(\mu)) \\ &= (L_j(\mu) \otimes L_j(\lambda))(G(-l) \otimes G(-h))\check{r}(\lambda - \mu)(G(h) \otimes G(l)), \\ & (G(l) \otimes G(h))\check{r}(\lambda + \mu)(C^\uparrow C^\downarrow \otimes I_{d^2})(G(-h) \otimes G(-l))(L_j(\lambda) \otimes L_j(\mu)) \\ &= (L_j(\mu) \otimes L_j(\lambda))(G(-l) \otimes G(-h))(I_{d^2} \otimes C^\uparrow C^\downarrow)\check{r}(\lambda + \mu)(G(h) \otimes G(l)). \end{aligned}$$

Consideremos una combinación lineal arbitraria de estas ecuaciones con coeficientes α, β . Entonces

$$\begin{aligned} & \{ (G(l) \otimes G(h)) [\beta \check{r}(\lambda - \mu) + \alpha \check{r}(\lambda + \mu) (C^\dagger C^\downarrow \otimes I_{d^2})] (G(-h) \otimes G(-l)) \} \\ & \times (L_j(\lambda) \otimes L_j(\mu)) = (L_j(\mu) \otimes L_j(\lambda)) \\ & \times \{ (G(-l) \otimes G(-h)) [\beta \check{r}(\lambda - \mu) + \alpha (I_{d^2} \otimes C^\dagger C^\downarrow) \check{r}(\lambda + \mu)] (G(h) \otimes G(l)) \}. \end{aligned}$$

Esta ecuación toma la forma de las relaciones definidas por el álgebra de Yang-Baxter si podemos encontrar los coeficientes α, β tal que los términos entre corchetes en el lado derecho y el izquierdo de la ecuación sean iguales, i.e. tenemos que determinar α y β tal que

$$\begin{aligned} & (G(2l) \otimes G(2h)) [\beta \check{r}(\lambda - \mu) + \alpha \check{r}(\lambda + \mu) (C^\dagger C^\downarrow \otimes I_{d^2})] \\ & = [\beta \check{r}(\lambda - \mu) + \alpha (I_{d^2} \otimes C^\dagger C^\downarrow) \check{r}(\lambda + \mu)] (G(2h) \otimes G(2l)). \end{aligned}$$

Usando (5.190) y (5.180) se puede ver que esto es equivalente a

$$\begin{aligned} & \beta [\sinh(h) \cosh(l) (C^\dagger C^\downarrow \otimes I_{d^2}) + \cosh(h) \sinh(l) (I_{d^2} \otimes C^\dagger C^\downarrow), \check{r}(\lambda - \mu)] - \\ & \alpha [\cosh(h) \cosh(l) (C^\dagger C^\downarrow \otimes I_{d^2}) + \sinh(h) \sinh(l) (I_{d^2} \otimes C^\dagger C^\downarrow), \check{r}(\lambda + \mu)] = 0. \end{aligned}$$

Por un cálculo directo basado en (5.178) la ecuación anterior se reduce aún más a

$$\begin{aligned} & \{ \beta \cos(\lambda - \mu) \sinh(h - l) - \alpha \cos(\lambda + \mu) \cosh(h - l) \} (I_{d^2} \otimes C^\dagger C^\downarrow - C^\dagger C^\downarrow \otimes I_{d^2}) \\ & + \{ \beta \sin(\lambda - \mu) \sinh(h + l) - \alpha \sin(\lambda + \mu) \cosh(h + l) \} \\ & \times [\mathcal{Q}^\dagger (C^\dagger \otimes C^\downarrow - C^\dagger C^\downarrow \otimes I_{d^2}) + \mathcal{Q}^\downarrow (C^\downarrow \otimes C^\dagger - C^\dagger C^\downarrow \otimes I_{d^2})] = 0. \end{aligned}$$

La última ecuación se satisface si y sólo si los términos en llaves se anulan, así

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\cos(\lambda - \mu) \sinh(h - l)}{\cos(\lambda + \mu) \cosh(h - l)} = \frac{\sin(\lambda - \mu) \sinh(h + l)}{\sin(\lambda + \mu) \cosh(h + l)}. \quad (5.192)$$

Estas son dos ecuaciones algebraicas. Usando los teoremas de suma para las funciones hiperbólicas y trigonométricas demostramos que la segunda ecuación en (5.192) es equivalente a

$$\frac{\sinh(2h)}{\sin(2\lambda)} = \frac{\sinh(2l)}{\sin(2\mu)} = u. \quad (5.193)$$

En donde el parámetro u es un parámetro libre que resulta ser la constante de acoplamiento del hamiltoniano de Hubbard. La ecuación (5.193) define una función que expresa h en términos de λ, u y l en términos de μ y u . Para definir esta función de forma única escogemos la rama principal de la función

sinh inversa. Entonces $h(\lambda = 0) = l(\mu = 0) = 0$. La primera ecuación (5.192) fija la razón α/β como función de λ , μ y u . Como solo la razón se fija, β sigue siendo una función libre. Esto, se debe a la homogeneidad del álgebra de Yang-Baxter.

Resumiendo, hemos encontrado que la L-matriz (5.191) es una representación del álgebra de Yang-Baxter con la R-matriz

$$\begin{aligned} \check{R}(\lambda, \mu) = & \beta((G(l) \otimes G(h)) \times [\check{r}(\lambda - \mu) + (\alpha/\beta)\check{r}(\lambda + \mu)(C^\uparrow C^\downarrow \otimes I_{d^2})] \\ & (G(-h) \otimes G(-l)), \end{aligned} \quad (5.194)$$

siempre que h y l están fijos como función de λ , μ y u por (5.193), y α/β está dado por (5.192). La matriz (5.194) es la R-matriz de Shastry en su forma generalizada obtenida por Massarani. Nuestro cálculo está basado en las propiedades (5.178) de la matriz de conjugación y en la ecuación de Yang-Baxter decorada (5.182).

La R-matriz (5.194) es muy especial, por que no esta en forma de diferencia. El segundo parámetro espectral μ es un verdadero parámetro independiente. Para $\mu = 0$ la R-matriz $R(\lambda, \mu) = P\check{R}(\lambda, \mu)$ toma la forma simple

$$R(\lambda, 0) = \frac{\beta}{\cosh(h)}(G(h) \otimes I_{d^2})r(\lambda)(G(h) \otimes I_{d^2}). \quad (5.195)$$

De acuerdo a nuestra fórmula general (5.125) la L-matriz asociada es

$$L_j(\lambda, 0) = \frac{\beta}{\cosh(h)}G(h)l_j(\lambda)G(h) = \frac{\beta}{\cosh(h)}L_j(\lambda), \quad (5.196)$$

con $L_j(\lambda)$ de (5.191). Este es un resultado interesante, pues si fijamos cualquier β de $\cosh(h)$ en (5.196) o cambiamos la definición (5.191) podemos interpretar $L_j(\lambda)$ como una representación fundamental del álgebra de Yang-Baxter. Por otro lado, (5.196) también implica que $R(\lambda, \mu)$ satisface la ecuación de Yang-Baxter (5.111) para $\nu = 0$.

De hecho, la R-matriz (5.111) satisface la ecuación de Yang-Baxter (5.111) para toda λ , μ y ν . Para el caso $d = 2$, que corresponde al modelo de Hubbard, esto puede, demostrarse con la ayuda de algún álgebra computacional [32]. Para d general es necesaria una comprensión más profunda de las propiedades algebraicas de los modelos XX. La ecuación de Yang-Baxter decorada (5.182) es parte de un álgebra completa de relaciones similares. Esta es llamada el álgebra tetraédrica de Zamolodchikov.

La razón α/β , de la ecuación (5.192) se hace cero para $\mu = \lambda$. Se sigue que

$$\check{R}(\lambda, \lambda) = \beta(\lambda, \lambda) \cdot id. \quad (5.197)$$

Entonces $R(\lambda, \mu)$ es regular para una elección apropiada de la función $\beta(\lambda, \mu)$ que no está fija por (5.192). Además deducimos de la unicidad de la R-matriz del modelo XX y de $[\check{r}(\lambda - \mu), \check{r}(\lambda + \mu)] = 0$ que

$$\begin{aligned} \check{R}(\lambda, \mu)\check{R}(\mu, \lambda) &= \beta(\lambda, \mu)\beta(\mu, \lambda) \times \cos^2(\lambda - \mu) \\ &\quad (\cos^2(\lambda - \mu) - \cos^2(\lambda + \mu) \tanh(h - l)). \end{aligned} \quad (5.198)$$

Entonces $R(\lambda, \mu)$ se hace unitaria para cualquiera de las dos opciones

$$\beta(\lambda, \mu) = \frac{\cosh(h - l)}{\cos(\lambda - \mu)} [\cos(\lambda - \mu) \cosh(h - l) \pm \cos(\lambda + \mu) \sinh(h - l)]^{-1}. \quad (5.199)$$

A menos que digamos lo contrario, supondremos que $\beta(\lambda, \mu)$ está dada por (5.199) con el signo más. Con esta elección de $\beta(\lambda, \mu)$ tenemos $\beta(\lambda, \lambda) = 1$ y $R(\lambda, \mu)$ es también regular.

Para la interpretación del modelo fundamental generado por $\check{R}(\lambda, \mu)$ aún tenemos que calcular el hamiltoniano para el caso homogéneo. Nos restringimos a $\mu = 0$, así

$$\partial_\lambda \check{R}(\lambda, 0)|_{\lambda=0} = \mathcal{Q}^\dagger + \mathcal{Q}^\downarrow + \frac{u}{2}(C^\dagger C^\downarrow \otimes I_{d^2} + I_{d^2} \otimes C^\dagger C^\downarrow) - u. \quad (5.200)$$

En donde usamos (5.195), (5.199) y (5.193). Para esta interpretación es más apropiado considerar el espacio cuántico local como $\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$ en lugar de \mathbb{C}^{d^2} . Con la definición

$$e_{j,\uparrow\alpha}^\beta = I_{d^2}^{\otimes(j-1)} \otimes (e_\alpha^\beta \otimes I_d) \otimes I_{d^2}^{\otimes(L-j)}, \quad (5.201a)$$

$$e_{j,\downarrow\alpha}^\beta = I_{d^2}^{\otimes(j-1)} \otimes (I_d \otimes e_\alpha^\beta) \otimes I_{d^2}^{\otimes(L-j)}, \quad (5.201b)$$

$\alpha, \beta = 1, \dots, d$, el hamiltoniano se lee como

$$H = \sum_{j=1}^L \sum_{a=\uparrow,\downarrow} \sum_{\alpha=2}^d (e_{j-1,a1}^\alpha e_{j,a\alpha}^1 + e_{j-1,a\alpha}^1 e_{j,a1}^\alpha) + u \sum_{j=1}^L (C_j^\dagger C_j^\downarrow - 1), \quad (5.202)$$

Para $d = 2$ podemos expresar las matrices bajo la sumas en términos de las matrices de Pauli, entonces tenemos $e_1^2 = \sigma^+$, $e_2^1 = \sigma^-$ y $C = \sigma^z$ y H se convierte en

$$H = \sum_{j=1}^L \sum_{a=\uparrow,\downarrow} (\sigma_{j-1,a}^+ \sigma_{j,a}^- + \sigma_{j-1,a}^- \sigma_{j,a}^+) + u \sum_{j=1}^L (\sigma_{j,\uparrow}^z \sigma_{j,\downarrow}^z - 1), \quad (5.203)$$

que es el hamiltoniano de espín original de Shastry. El hamiltoniano es, hasta un giro de las condiciones de contorno, equivalente al hamiltoniano de Hubbard mediante una transformación de Jordan-Wigner [34].

expresión explícita para las cargas de Boltzmann es

$$\rho_1(\lambda, \mu) = \cos \lambda \cos \mu e^{h-l} + \sin \lambda \sin \mu e^{l-h}, \quad (5.205a)$$

$$\rho_4(\lambda, \mu) = \cos \lambda \cos \mu e^{l-h} + \sin \lambda \sin \mu e^{h-l}, \quad (5.205b)$$

$$\rho_3(\lambda, \mu) = \frac{\cos \lambda \cos \mu e^{h-l} - \sin \lambda \sin \mu e^{l-h}}{\cos^2 \lambda - \sin^2 \mu}, \quad (5.205c)$$

$$\rho_5(\lambda, \mu) = \frac{\cos \lambda \cos \mu e^{l-h} - \sin \lambda \sin \mu e^{h-l}}{\cos^2 \lambda - \sin^2 \mu}, \quad (5.205d)$$

$$\rho_6(\lambda, \mu) = \frac{\sinh(2(h-l))}{2u(\cos^2 \lambda - \sin^2 \mu)}, \quad (5.205e)$$

$$\rho_7(\lambda, \mu) = \rho_4(\lambda, \mu) - \rho_5(\lambda, \mu), \quad (5.205f)$$

$$\rho_8(\lambda, \mu) = \rho_1(\lambda, \mu) - \rho_3(\lambda, \mu), \quad (5.205g)$$

$$\rho_9(\lambda, \mu) = \sin \lambda \cos \mu e^{l-h} - \cos \lambda \sin \mu e^{h-l}, \quad (5.205h)$$

$$\rho_{10}(\lambda, \mu) = \sin \lambda \cos \mu e^{h-l} - \cos \lambda \sin \mu e^{l-h}. \quad (5.205i)$$

Los parámetros λ , μ , h y l están sujetos a la constricciones (5.193). Notamos las siguientes relaciones [42] que a menudo son útiles en los cálculos,

$$\rho_1 \rho_4 + \rho_9 \rho_{10} = 1, \quad (5.206a)$$

$$\rho_1 \rho_5 + \rho_3 \rho_4 = 2, \quad (5.206b)$$

$$\rho_3 \rho_5 + \rho_6^2 = 1. \quad (5.206c)$$

Existe otro conjunto de identidades que describen el comportamiento de las cargas de Boltzmann bajo el intercambio de los argumentos λ y μ . Si definimos $\bar{\rho}_j(\lambda, \mu) = \rho_j(\mu, \lambda)$, entonces

$$\bar{\rho}_1 = \rho_4, \quad \bar{\rho}_3 = \rho_5, \quad \bar{\rho}_7 = \rho_8, \quad (5.207a)$$

$$\bar{\rho}_6 = -\rho_6, \quad \bar{\rho}_9 = -\rho_9, \quad \bar{\rho}_{10} = -\rho_{10}. \quad (5.207b)$$

5.4.5. Invarianza de las ecuaciones de Yang-Baxter

La ecuación de Yang-Baxter es invariante bajo varios tipos de transformaciones. Consideremos el siguiente lema, en donde suponemos que $R(\lambda, \mu) \in \text{End}(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n)$ es una solución de la ecuación de Yang-Baxter (5.121).

Lema 1. *Transformaciones de Norma.* Sea $V(\lambda) \in (\mathbb{C}^n)$ una matriz de $n \times n$ invertible. Entonces $(V(\mu) \otimes V(\lambda)) \tilde{R}(\lambda - \mu) (V^{-1}(\lambda) \otimes V^{-1}(\mu))$ es una solución de la ecuación de Yang-Baxter (5.121).

Dos soluciones de la ecuación de Yang-Baxter que están conectadas mediante una transformación de norma a veces se llaman equivalentes de norma. Por ejemplo la R-matriz de Shastry (5.194) es una norma equivalente a

$$\check{R}(\lambda, \mu) = \beta \check{r}(\lambda - \mu) + \alpha \check{r}(\lambda + \mu)(C^\dagger C^\downarrow \otimes I_{d^2}). \quad (5.208)$$

Lema 2. *Transformación de torsión. Supongamos que $V \in \text{End}(\mathbb{C}^n)$ es invertible y satisface la condición*

$$[\check{R}(\lambda, \mu), V \otimes V] = 0 \quad (5.209)$$

Entonces las matrices $(V \otimes I_n)\check{R}(\lambda, \mu)(V^{-1} \otimes I_n)$ y $(I_n \otimes V)\check{R}(\lambda, \mu)(I_n \otimes V^{-1})$ satisfacen la ecuación de Yang-Baxter (5.121).

La transformación de torsión puede usarse para acoplar los electrones en el modelo de Hubbard a un campo electromagnético externo.

El Lema anterior es un caso especial.

Lema 3. *Torsión generalizada [43, 44]. Sea $V \in \text{End}(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n)$ una solución invertible de la ecuación de Yang-Baxter*

$$V_{12}V_{13}V_{23} = V_{23}V_{13}V_{12}, \quad (5.210)$$

tal que

$$[\check{R}_{23}(\lambda, \mu), V_{13}V_{12}] = [\check{R}_{12}(\lambda, \mu), V_{13}V_{23}] = 0. \quad (5.211)$$

Entonces $V\check{R}V^{-1}$ es una solución de la ecuación de Yang-Baxter.

Consideremos el caso especial en que V es una matriz diagonal. Entonces (5.210) se cumple trivialmente y las únicas restricciones sobre V vienen de (5.211). Es conveniente escribir V como

$$V = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D \end{pmatrix}, \quad (5.212)$$

donde

$$A = \text{diag}(a_1, a_2, a_3, a_4), \dots, D = \text{diag}(d_1, d_2, d_3, d_4). \quad (5.213)$$

Además introducimos las matrices

$$\check{A} = \text{diag}(a_1, b_1, c_1, d_1), \dots, \check{D} = \text{diag}(a_4, b_4, c_4, d_4). \quad (5.214)$$

5.5. Método de dispersión inverso cuántico graduado

Introduciremos ahora los operadores de Fermi dentro del formalismo. Como ya vimos los modelos que contienen fermiones no pueden ser modelos fundamentales de la clase presentada anteriormente. Entonces para introducir fermiones debemos hacer una generalización de los operadores de proyección locales, sabemos que aún satisfacen (5.115), pero conmutan o anticonmutan dependiendo de los valores de los índices α, β de la matriz. Entonces, es necesario introducir espacios vectoriales graduados y álgebras graduadas. De acuerdo a lo anterior a los operadores $e_{j\alpha}^{\beta}$ los llamamos "operadores de proyección locales graduados".

Con ayuda de los operadores de proyección locales podemos construir los modelos fundamentales graduados casi de forma similar que en la sección anterior. La transformación de los operadores de proyección fermiónicos a los operadores de proyección locales graduados puede interpretarse como una generalización de la transformación de Jordan-Wigner [31] de fermiones con número arbitrario de grados de libertad internos (fermiones $su(n)$). De hecho, para espines fermiónicos la transformación de Jordan-Wigner se recupera. El siguiente material se toma de los artículos [45, 46].

5.5.1. Espacios vectoriales graduados

Repasemos algunos conceptos básicos de espacios vectoriales graduados y el álgebra asociativa graduada. En el contexto del método de dispersión inverso cuántico estos conceptos fueron usados por primera vez por Kulish y Sklyanin [47, 48]. Introduciremos las nociones de "operadores de proyección locales graduados" y los operadores de transposición graduados.

El espacio vectorial graduado es un espacio vectorial equipado con la noción de par o impar, lo que nos permite tratar fermiones dentro del formalismo del método de dispersión inversa cuántico. Comencemos con un espacio local de dimensión finita de estados V , en donde imponemos una estructura adicional, la paridad, desde el principio. Sea $V = V_0 \otimes V_1$, $\dim V_0 = m$, $\dim V_1 = n$. Diremos que $v_0 \in V_0$ es par y $v_1 \in V_1$ es impar. Los subespacios V_0 y V_1 se llaman componentes homogéneas de V . La paridad p es una función de $V_i \rightarrow \mathbb{Z}_2$ definida sobre las componentes homogéneas de V ,

$$p(v_i) = i, \quad i = 0, 1, \quad v_i \in V_i. \quad (5.221)$$

El espacio vectorial V dotado con esta estructura es llamado espacio vectorial graduado o super espacio. Vamos a fijar una base $\{e_1, \dots, e_{m+n}\}$ con paridad

definida y definimos $p(\alpha) := p(e_\alpha)$.

Para introducir los operadores de Fermi en el formalismo del método de dispersión inverso cuántico tenemos que construir un álgebra de operadores conmutativa y anticonmutativa. Para este propósito la paridad debe ser extendida a los operadores en $End(V)$ y en el producto tensorial de estos operadores. Sea $e_\alpha^\beta \in End(V)$, tal que $e_\alpha^\beta e_\gamma = \delta_\gamma^\beta e_\alpha$. El conjunto $\{e_\alpha^\beta \in End(V) | \alpha, \beta = 1, \dots, m+n\}$ es una base de $End(V)$. Entonces, la definición

$$p(e_\alpha^\beta) = p(\alpha) + p(\beta), \quad (5.222)$$

induce una graduación en $End(V)$ considerada como un espacio vectorial. Es fácil ver que un elemento $A = A_\beta^\alpha e_\alpha^\beta \in End(V)$ es homogéneo con paridad $p(A)$, si y sólo si

$$(-1)^{p(\alpha)+p(\beta)} A_\beta^\alpha = (-1)^{p(A)} A_\beta^\alpha. \quad (5.223)$$

La ecuación anterior implica que el producto AB de dos elementos homogéneos $A, B \in End(V)$ es homogéneo con paridad

$$p(AB) = p(A) + p(B). \quad (5.224)$$

En otras palabras, la multiplicación de matrices en $End(V)$ preserva la homogeneidad y por lo tanto $End(V)$ dotado con la graduación (5.222) es un álgebra asociativa graduada [48].

Consideremos la potencia tensorial de L veces el $End(V)$, $\mathcal{H} = (End(V))^{\otimes L}$. La definición (5.222) tiene una extensión natural de \mathcal{H} , es decir

$$p(e_{\alpha_1}^{\beta_1} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_L}^{\beta_L}) = p(\alpha_1) + p(\beta_1) + \dots + p(\alpha_L) + p(\beta_L). \quad (5.225)$$

A partir de lo cual notamos que los elementos homogéneos $A = A_{\beta_1 \dots \beta_L}^{\alpha_1 \dots \alpha_L} e_{\alpha_1}^{\beta_1} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_L}^{\beta_L}$ de \mathcal{H} con paridad $p(A)$ están caracterizados por la ecuación

$$(-1)^{\sum_{j=1}^L (p(\alpha_j) + p(\beta_j))} A_{\beta_1 \dots \beta_L}^{\alpha_1 \dots \alpha_L} = (-1)^{p(A)} A_{\beta_1 \dots \beta_L}^{\alpha_1 \dots \alpha_L}, \quad (5.226)$$

que generaliza (5.223). De nuevo el producto AB es homogéneo con paridad $p(AB) = p(A) + p(B)$, si A y B son homogéneos. Entonces la definición (5.225) induce la estructura del álgebra asociativa graduada en \mathcal{H} .

Ahora definimos el super corchete

$$[X, Y]_\pm = XY - (-1)^{p(X)p(Y)} YX, \quad (5.227)$$

para X, Y de las componentes homogéneas del $End(V)$ y lo extendemos linealmente a $End(V)$ en sus dos argumentos. Entonces, $End(V)$ dotado con el super corchete se convierte en la super álgebra de Lie $gl(m|n)$. Notemos

que la definición anterior del super corchete tiene sentido en cualquier álgebra graduada y es particularmente válida en \mathcal{H} .

La siguiente definición de operadores de proyección locales graduados [46] será crucial para nuestra definición de las representaciones fundamentales graduadas del álgebra de Yang-Baxter. Definimos las matrices

$$e_{j\alpha}^\beta = (-1)^{(p(\alpha)+p(\beta))\sum_{k=j+1}^L p(\gamma_k)} I_{m+n}^{\otimes(j+1)} \otimes e_\alpha^\beta \otimes e_{\gamma_{j+1}}^{\gamma_{j+1}} \otimes \cdots \otimes e_{\gamma_L}^{\gamma_L}, \quad (5.228)$$

donde I_{m+n} es la matriz unidad de $(m+n) \times (m+n)$ y la suma sobre índices tensoriales dobles se sobreentiende. El índice j del lado izquierdo en (5.228) se refiere a la posición j -ésimo del modelo físico de redes y es llamado índice de posición. Una consecuencia simple de la definición (5.228) para $j \neq k$ es la relación de conmutación

$$e_{j\alpha}^\beta e_{k\gamma}^\delta = (-1)^{(p(\alpha)+p(\beta))(p(\gamma)+p(\delta))} e_{k\gamma}^\delta e_{j\alpha}^\beta. \quad (5.229)$$

Se sigue de la ecuación (5.228) que $e_{j\alpha}^\beta$ es homogénea con paridad

$$p(e_{j\alpha}^\beta) = p(\alpha) + p(\beta). \quad (5.230)$$

Por lo tanto, de forma intuitiva, la ecuación (5.229) nos dice que las matrices impares con diferentes índices de posición anticonmutan mutuamente, mientras que las matrices pares conmutan con cualquier otra incluso con las matrices impares. Para los productos de matrices $e_{j\alpha}^\beta$ que actúan en la misma posición (5.228) implica la propiedad de proyección

$$e_{j\alpha}^\beta e_{j\gamma}^\delta = \delta_\gamma^\beta e_{j\alpha}^\delta. \quad (5.231)$$

Las ecuaciones (5.229) y (5.231) justifican nuestra terminología. Los $e_{j\alpha}^\beta$ son análogos graduados de los operadores de proyección local. Los llamamos operadores de proyección locales graduados u operadores de proyección, para abreviar. Usando el super-corchete (5.227), las ecuaciones (5.229) y (5.231) pueden combinarse en

$$[e_{j\alpha}^\beta, e_{k\gamma}^\delta]_\pm = \delta_{jk}(\delta_\gamma^\beta e_{j\alpha}^\delta - (-1)^{(p(\alpha)+p(\beta))(p(\gamma)+p(\delta))} \delta_\alpha^\delta e_{j\gamma}^\beta). \quad (5.232)$$

Si consideramos $j = k$ en la ecuación anterior el lado derecho nos da la constante de estructura de la super álgebra de Lie $gl(m|n)$ con respecto a la base $\{e_{j\alpha}^\beta\}$.

Como cualquier espacio vectorial de dimensión $m+n$ sobre los números complejos, este espacio es isomorfo a \mathcal{C}^{m+n} y podemos considerar $V = \mathcal{C}^{m+n}$. Podemos suponer además que nuestra base homogénea $\{e_\alpha \in \mathcal{C}^{m+n} | \alpha =$

$1, \dots, m+n\}$ es canónica, i.e. podemos representar los vectores e_α por medio de un vector columna donde la entrada en la fila α vale $+1$ y es la única distinta de cero. Nuestras matrices bases e_α^β son matrices de $(m+n) \times (m+n)$ donde solo la entrada en la fila α y la columna β vale $+1$ y las demás cero, y recuperamos (5.114) de (5.228) para $m = d$ y $n = 0$.

Observación. El significado de (5.228) se vuelve más evidente al considerar un ejemplo simple. Sea $m = n = 1$ y $p(1) = 0$, $p(2) = 1$. Luego, usando (5.232), tenemos

$$[e_{j1}^2, e_{k1}^2]_\pm = \{e_{j1}^2, e_{k1}^2\} = 0, \quad (5.233)$$

$$[e_{j2}^1, e_{k2}^1]_\pm = \{e_{j2}^1, e_{k2}^1\} = 0, \quad (5.234)$$

$$[e_{j1}^2, e_{k2}^1]_\pm = \{e_{j2}^1, e_{k1}^2\} = \delta_{jk}(e_{j1}^1 + e_{j2}^2) = \delta_{jk}, \quad (5.235)$$

para $j, k = 1, \dots, L$. El corchete en (5.233) y (5.234) denota el anticonmutador. Las matrices e_{j1}^2 y e_{j2}^1 satisfacen las relaciones de anticonmutación canónicas para los operadores de espín de Fermi. Por lo tanto, podemos identificar a $e_{j1}^2 \rightarrow c_j$ y $e_{k2}^1 \rightarrow c_k^\dagger$. Si ahora introducimos las matrices de Pauli $\sigma^+ = e_1^2$, $\sigma^- = e_2^1$ y $\sigma^z = e_1^1 - e_2^2$ obtenemos, mediante la suma, la siguiente representación matricial explícita de nuestra definición básica (5.228):

$$c_j = I_2^{\otimes(j-1)} \otimes \sigma^+ \otimes (\sigma^z)^{\otimes(L-j)}, \quad (5.236)$$

$$c_k^\dagger = I_2^{\otimes(k-1)} \otimes \sigma^- \otimes (\sigma^z)^{\otimes(L-k)}. \quad (5.237)$$

Esta es la bien conocida transformación de Jordan-Wigner [31] en donde expresamos los operadores de Fermi para espines fermiónicos en términos de las matrices de Pauli. Por lo tanto podemos interpretar la ecuación (5.228) como una generalización de la transformación de Jordan-Wigner. En general, la transformación (5.228) nos proporciona una representación matricial no de los operadores de Fermi, sino más general, de los operadores de proyección fermiónicos. La representación de los operadores de Fermi puede obtenerse tomando una combinación lineal de las matrices $e_{j\alpha}^\beta$ apropiada.

Los operadores de transposición juegan un papel importante en la construcción de los modelos de redes locales integrables. Introducimos la expresión para el operador de salto en redes homogéneas. En el caso graduado la definición del operador de transposición requiere de la siguiente modificación de signo,

$$P_{jk} = (-1)^{p(\beta)} e_{j\alpha}^\beta e_{k\beta}^\alpha. \quad (5.238)$$

Como indica su nombre, este operador induce la acción del grupo simétrico \mathfrak{S}^L en los índices de posición de las matrices $e_{j\alpha}^\beta$. Las propiedades de P_{jk} (para $j \neq k$) son las mismas que en el caso no graduado. Esto es fácil de

comprobar con (5.229) y (5.231).

Definamos una matriz de monodromía cuyas entradas son elementos de \mathcal{H} . Consideremos matrices de $(m+n) \times (m+n)$ A, B, C, D, \dots con entradas en \mathcal{H} , tal que $p(A_\beta^\alpha) = p(B_\beta^\alpha) = p(C_\beta^\alpha) = \dots = p(\alpha) + p(\beta)$ para $\alpha, \beta = 1, \dots, m+n$. Estas matrices forman un álgebra asociativa, digamos \mathcal{A} , como $p(A_\beta^\alpha B_\gamma^\beta) = p(\alpha) + p(\gamma)$. Para $A, B \in \mathfrak{A}$ definimos un super producto tensorial (o producto tensorial graduado)

$$(A \times_s B)_{\beta\delta}^{\alpha\gamma} = (-1)^{p(\alpha)+p(\beta)p(\gamma)} A_\beta^\alpha B_\delta^\gamma. \quad (5.239)$$

Esta definición tiene una consecuencia interesante. Sea $A, B, C, D \in \mathcal{A}$, tal que

$$[B_\beta^\alpha, C_\delta^\gamma]_\pm = 0, \quad (5.240)$$

entonces

$$(A \times_s B)(C \times_s D) = AC \times_s BD. \quad (5.241)$$

También podemos definir la super traza de una matriz $A \in \mathcal{A}$ como

$$\text{str}(A) = (-1)^{p(\alpha)} A_\alpha^\alpha. \quad (5.242)$$

5.5.2. Modelos fundamentales graduados

Ahora vamos a introducir la noción de representaciones graduadas fundamentales del álgebra de Yang-Baxter [46]. Para una graduación dada, asociamos un modelo fundamental a cada solución de la ecuación de Yang-Baxter (5.124) que satisfaga la condición de compatibilidad de Kulish y Sklyanin [48],

$$R_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(\lambda, \mu) = (-1)^{p(\alpha)+p(\beta)+p(\gamma)+p(\delta)} R_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(\lambda, \mu). \quad (5.243)$$

Esta condición de compatibilidad simplemente significa que ciertos elementos de la matriz desaparecen. Para la R-matriz que satisface (5.243) definimos la L-matriz graduada en la posición j ,

$$\mathcal{L}_{j\beta}^\alpha(\lambda, \mu) = (-1)^{p(\alpha)+p(\gamma)} R_{\beta\delta}^{\alpha\gamma}(\lambda, \mu) e_{j\gamma}^\delta. \quad (5.244)$$

Sus propiedades se resumen a continuación.

Lema 4. *Propiedades de la L-matriz graduada:*

(i) *Homogeneidad. Los elementos de la L-matriz graduada son homogéneos con paridad*

$$p(\mathcal{L}_{j\beta}^\alpha(\lambda, \mu)) = p(\alpha) + p(\beta) \quad (5.245)$$

(ii) *Conmutatividad.* Las entradas de la super L -matriz graduada conmutan para diferentes índices de posición,

$$[\mathcal{L}_{j\beta}^\alpha(\lambda, \mu), \mathcal{L}_{k\delta}^\gamma(\nu, \rho)]_{\pm} = 0, \quad (5.246)$$

para $j \neq k$.

(iii) *Relación bilineal.* Las entradas de L -matriz graduada en la misma red satisfacen la relación bilineal

$$\check{R}(\lambda, \mu) (\mathcal{L}_j(\lambda, \nu) \otimes_s \mathcal{L}_j(\mu, \nu)) = (\mathcal{L}_j(\mu, \nu) \otimes_s \mathcal{L}_j(\lambda, \nu)) \check{R}(\lambda, \mu), \quad (5.247)$$

donde, como en el caso no graduado (5.107), la matriz $\check{R}(\lambda, \mu)$ está definida por $\check{R}_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(\lambda, \mu) = R_{\gamma\delta}^{\beta\alpha}(\lambda, \mu)$

El lema se sigue de la ecuación de Yang-Baxter (5.124) y de la ecuación (5.243). La ecuación (5.247) puede interpretarse como la definición del álgebra de Yang-Baxter graduada con la R -matriz $\check{R}(\lambda, \mu)$. Llamamos a $\mathcal{L}_j(\lambda, \mu)$ su representación fundamental graduada.

A partir de (5.247) podemos construir modelos de redes integrables como en el caso no graduado. Recordemos brevemente la construcción con énfasis en las modificaciones que aparecen debido a la graduación. Definimos ahora una matriz de monodromía $\mathcal{T}(\lambda)$ como un producto ordenado de L veces la L -matriz fundamental,

$$\mathcal{T}(\lambda) = \mathcal{L}_L(\lambda, \nu_L) \dots \mathcal{L}_1(\lambda, \nu_1), \quad (5.248)$$

es decir sus elementos de matriz son

$$\mathcal{T}_\beta^\alpha(\lambda) = \mathcal{L}_{L\beta}^{\gamma_L}(\lambda, \nu_L) \mathcal{L}_{L-1\gamma_L}^{\gamma_{L-1}}(\lambda, \nu_{L-1}) \dots \mathcal{L}_{1\gamma_2}^\alpha(\lambda, \nu_1). \quad (5.249)$$

Debido a la ecuación (5.224) los elementos de la matriz $\mathcal{T}(\lambda)$ son homogéneos con paridad $p(\mathcal{T}_\beta^\alpha(\lambda)) = p(\alpha) + p(\beta)$. La aplicación repetida de (5.247) y (5.241) demuestra que esta matriz de monodromía es una representación del álgebra de Yang-Baxter graduada,

$$\check{R}(\lambda, \mu) (\mathcal{T}(\lambda) \otimes_s \mathcal{T}(\mu)) = (\mathcal{T}(\mu) \otimes_s \mathcal{T}(\lambda)) \check{R}(\lambda, \mu). \quad (5.250)$$

La cual podemos comparar con (5.108) y debido a (5.105) y (5.243) se sigue que

$$[str(\mathcal{T}(\lambda)), str(\mathcal{T}(\mu))] = 0, \quad (5.251)$$

lo que nos da una analogía completa con el caso no graduado. Vemos que la matriz de transferencia está dada ahora por $t(\lambda) = str(\mathcal{T}(\lambda))$.

La construcción del hamiltoniano de red local también es muy similar al

5.5. MÉTODO DE DISPERSIÓN INVERSO CUÁNTICO GRADUADO 171

del caso no graduado. Supongamos que $R(\lambda, \mu)$ es una solución regular de la ecuación de Yang-Baxter, $R_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(\lambda_0, \nu_0) = \delta_\delta^\alpha \delta_\gamma^\beta$ para alguna $\lambda_0, \nu_0 \in \mathbb{C}$. Entonces (5.244) implica que

$$\mathcal{L}_{j\beta}^\alpha(\lambda_0, \nu_0) = (-1)^{p(\alpha)p(\beta)} e_{j\beta}^\alpha, \quad (5.252)$$

y podemos ver que (comparando con (5.238)) como en el caso no graduado, obtenemos el operador de desplazamiento derecho para $\nu_1 = \dots = \nu_L$ y $\lambda = \lambda_0$,

$$t(\lambda_0) = P_{12}P_{23}\dots P_{L-1L} = \hat{U}. \quad (5.253)$$

Se sigue que $\tau(\lambda) = \hat{U}^{-1}t(\lambda)$ genera una secuencia de operadores locales [25]

$$\tau(\lambda_0) = (\lambda - \lambda_0)\hat{U}^{-1}t'(\lambda_0) + \mathcal{O}((\lambda - \lambda_0)^2), \quad (5.254)$$

que, como consecuencia de (5.251), conmutan mutuamente. Como se esperaba, los términos locales $H_{j-1,j}$ en el hamiltoniano

$$\hat{H} = \hat{U}^{-1}t'(\lambda_0) = \sum_{j=1}^L H_{j-1,j}, \quad (5.255)$$

(donde $H_{0,1} = H_{L,1}$) viene ahora con cierto número de signos menos,

$$H_{j-1,j} = (-1)^{p(\gamma)(p(\alpha)+p(\gamma))} \partial_\lambda \check{R}_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(\lambda, \mu_0)|_{\lambda=\lambda_0} e_{j-1\alpha}^\gamma e_{j\beta}^\delta. \quad (5.256)$$

Nos gustaría enfatizar los siguientes puntos: (i) La R-matriz $\check{R}(\lambda, \mu)$ en la ecuación (5.247) no se modifica debido a la graduación. (ii) La única condición de compatibilidad necesaria que debe cumplirse para introducir una representación fundamental graduada del álgebra de Yang-Baxter asociada con la solución de la ecuación de Yang-Baxter es la ecuación (5.243).

El papel de la matriz $\check{R}(\lambda, \mu)$ en el álgebra de Yang-Baxter graduada (5.247) es cambiar el orden de los espacios auxiliares. Este operador se introdujo en varios modelos importantes en [49, 50, 51] y se denominó R-operador fermiónico. Una definición general del R-operador fermiónico asociado a la solución $R(\lambda, \mu)$ de la ecuación de Yang-Baxter (5.124) se obtuvo en [45]. Para una graduación dada y una solución $R(\lambda, \mu)$ de la ecuación de Yang-Baxter (5.124) que es compatible con esta graduación definimos (siguiendo [45]) el R-operador fermiónico

$$\mathcal{R}_{jk}^f(\lambda, \mu) = (-1)^{p(\gamma)+p(\alpha)(p(\beta)+p(\gamma))} R_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(\lambda, \mu) e_{j\alpha}^\gamma e_{k\beta}^\delta. \quad (5.257)$$

A continuación resumimos sus propiedades.

Lema 5. *La propiedades del R-operador fermiónico son:*

(i) *Paridad. El R-operador fermiónico es par*

$$p(\mathcal{R}_{jk}^f(\lambda, \mu)) = 0. \quad (5.258)$$

(ii) *Relación bilineal. El R-operador fermiónico satisface*

$$\mathcal{R}_{jk}^f(\nu_j, \nu_k) \mathcal{L}_k(\lambda, \nu_k) \mathcal{L}_j(\lambda, \nu_j) = \mathcal{L}_j(\lambda, \nu_j) \mathcal{L}_k(\lambda, \nu_k) \mathcal{R}_{jk}^f(\nu_j, \nu_k), \quad (5.259)$$

(iii) *Ecuación de Yang-Baxter. El R-operador fermiónico satisface la siguiente forma de la ecuación de Yang-Baxter,*

$$\mathcal{R}_{12}^f(\lambda, \mu) \mathcal{R}_{13}^f(\lambda, \nu) \mathcal{R}_{23}^f(\mu, \nu) = \mathcal{R}_{23}^f(\mu, \nu) \mathcal{R}_{13}^f(\lambda, \nu) \mathcal{R}_{12}^f(\lambda, \mu) \quad (5.260)$$

(iv) *Regularidad. Si $R(\lambda, \mu)$ es regular, decimos que $\mathcal{R}_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(\lambda_0, \nu_0) = \delta_\delta^\alpha \delta_\gamma^\beta$, entonces*

$$\mathcal{R}_{jk}^f(\lambda_0, \nu_0) = P_{jk} \quad (5.261)$$

donde P_{jk} es el operador de permutación graduado (5.238).

(v) *Unitariedad. Si $R(\lambda, \mu)$ es unitario, i.e. si*

$$R_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(\lambda, \mu) R_{\alpha'\beta'}^{\gamma\delta}(\mu, \lambda) = \delta_{\beta'}^\alpha \delta_{\alpha'}^\beta, \quad (5.262)$$

entonces $\mathcal{R}_{jk}^f(\lambda, \mu)$ es unitaria en el sentido que

$$\mathcal{R}_{jk}^f(\lambda, \mu) \mathcal{R}_{kj}^f(\mu, \lambda) = id. \quad (5.263)$$

El R-operador fermiónico tiene al menos tres aplicaciones interesantes. En primer lugar, lo necesitamos para probar el teorema de inversión [45] que nos permite expresar los operadores de proyección local graduados $e_{j\alpha}^\beta$ en términos de los elementos de la matriz de monodromía (5.248). En segundo lugar, la forma (5.260) de la ecuación de Yang-Baxter es a veces más conveniente para la construcción de modelos fermiónicos genéricos. Ilustraremos este punto a continuación con un ejemplo. Finalmente, es posible definir un "operador de monodromía" [50, 51] y usar (5.260) como punto de partida para el ansatz algebraico de Bethe. Para este propósito, introducimos dos posiciones fermionicas auxiliares, por ejemplo a y b y definimos

$$\mathcal{T}_a^f(\lambda) = \mathcal{R}_{a,L}^f(\lambda, \nu_L) \dots \mathcal{R}_{a,1}^f(\lambda, \nu_1). \quad (5.264)$$

Entonces

$$\mathcal{R}_{ab}^f(\lambda, \mu) \mathcal{T}_a^f(\lambda) \mathcal{T}_b^f(\mu) = \mathcal{T}_b^f(\mu) \mathcal{T}_a^f(\lambda) \mathcal{R}_{ab}^f(\lambda, \mu). \quad (5.265)$$

El operador de monodromía está conectado con la matriz de monodromía (5.248) por la fórmula

$$\mathcal{T}_a^f(\lambda) = (-1)^{p(\beta)+p(\alpha)p(\beta)} e_{a\alpha}^\beta \mathcal{T}_\beta^\alpha(\lambda). \quad (5.266)$$

5.5.3. Simetrías globales de simetrías locales

Las simetrías de los modelos fundamentales que se pueden resolver mediante el método de dispersión inversa cuántica se comprenden de forma más natural en términos de las simetrías de la R-matriz correspondiente. Supongamos que la R-matriz $R(\lambda, \mu) \in \text{End}(\mathbb{C} \otimes \mathbb{C})$ satisface

$$[R(\lambda, \mu), x \otimes I_d + I_d \otimes x] = 0 \quad (5.267)$$

para alguna $x = x_\beta^\alpha e_\alpha^\beta \in \mathfrak{gl}(d)$ y para toda $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Entonces la matriz de transferencia del modelo inhomogéneo correspondiente conmuta con

$$X = \sum_{j=1}^L x_\beta^\alpha e_{j\alpha}^\beta = \sum_{j=1}^L x_j. \quad (5.268)$$

Un punto de partida natural para la generalización del caso graduado es la ecuación de invarianza

$$[\mathcal{R}(\lambda, \mu), x_1 + x_2] = 0 \quad (5.269)$$

para el R-operador fermiónico, que se convierte en (5.267) en el caso no graduado. Supongamos que $\mathcal{R}_{12}^f(\lambda, \mu)$ se construye a partir de una solución dada de la ecuación de Yang-Baxter (5.124) compatible con alguna graduación $p : \{1, \dots, m+n\} \rightarrow \mathbb{Z}_2$. Supondremos además que $x = x_\beta^\alpha e_\alpha^\beta$ es homogéneo con paridad $p(x)$ en $\mathfrak{gl}(m|n)$. Introduciendo la definición del R-operador fermiónico (5.257) en (5.269) y comparando los coeficientes frente a $e_{1\alpha}^\beta e_{2\gamma}^\delta$ obtenemos

$$\begin{aligned} & \tilde{R}_{\beta'\delta}^{\alpha\gamma}(\lambda, \mu) x_\beta^{\beta'} - x_\alpha^\alpha \tilde{R}_{\beta\delta}^{\alpha'\gamma}(\lambda, \mu) \\ &= (-1)^{p(x)p(\alpha)} x_\gamma^{\gamma'} \tilde{R}_{\beta\delta}^{\alpha\gamma'}(\lambda, \mu) - (-1)^{p(x)p(\beta)} \tilde{R}_{\beta\delta'}^{\alpha\gamma}(\lambda, \mu) x_\delta^{\delta'}, \end{aligned} \quad (5.270)$$

donde $\tilde{R}_{\beta\delta}^{\alpha\gamma}(\lambda, \mu) = (-1)^{p(\alpha)p(\gamma)} R_{\beta\delta}^{\alpha\gamma}(\lambda, \mu)$. Usando las ecuaciones (5.223) y (5.243) reorganizamos los signos menos en (5.270). La ecuación (5.270) es la ecuación invariante básica para la R-matriz que reemplaza a (5.267) en el caso graduado y obviamente se convierte en (5.267) cuando la graduación es trivial. La ecuación correspondiente para la L-matriz es

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_{j\beta'}^\alpha(\lambda, \mu) x_\beta^{\beta'} - x_\alpha^\alpha \mathcal{L}_{j\beta}^{\alpha'}(\lambda, \mu) \\ &= (-1)^{p(x)p(\alpha)} x_j \mathcal{L}_{j\beta}^\alpha(\lambda, \mu) - (-1)^{p(x)p(\beta)} \mathcal{L}_{j\beta}^\alpha(\lambda, \mu) x_j, \end{aligned} \quad (5.271)$$

y se obtiene de (5.270) al multiplicar por $e_{j\gamma}^\delta$. Una argumento de inducción simple lleva de (5.271) a la ecuación de invarianza

$$\mathcal{T}_{\beta'}^\alpha(\lambda) x_\beta^{\beta'} - x_\alpha^\alpha \mathcal{T}_\beta^{\alpha'}(\lambda) = (-1)^{p(x)p(\alpha)} X \mathcal{T}_\beta^\alpha(\lambda) - (-1)^{p(x)p(\beta)} \mathcal{T}_\beta^\alpha(\lambda) X, \quad (5.272)$$

para la matriz de monodromía. De nuevo $X = x_1 + \cdots + x_L$. Usando la definición (5.227) del super corchete (5.272) puede reescribirse de forma equivalentemente como

$$[\mathcal{T}_\beta^\alpha(\lambda), X]_\pm = (-1)^{p(x)p(\alpha)}(x_{\alpha'}^\alpha \mathcal{T}_\beta^{\alpha'}(\lambda) - \mathcal{T}_{\beta'}^\alpha(\lambda)x_\beta^{\beta'}). \quad (5.273)$$

La ecuación anterior es útil para estudiar las propiedades de los estados de mayor peso dentro del ansatz algebraico de Bethe. Multiplicando (5.273) por $(-1)^{p(\alpha)}$, después haciendo $\beta = \alpha$, y sumando sobre α concluimos que

$$[\text{str}(\mathcal{T}(\lambda)), X] = 0 \quad (5.274)$$

En muchos casos, la simetría de la matriz-R es evidente por construcción, por ejemplo, cuando la matriz-R es un entrelazado de representaciones de grupos cuánticos. Sin embargo, hay algunos ejemplos, como la matriz-R de Shastry del modelo Hubbard, en donde las simetrías son menos obvias. Además, como se puede ver a partir del cálculo anterior, las simetrías de la matriz de transferencia están determinadas por las simetrías de \tilde{R} en lugar de R y, por lo tanto, dependen de la elección de la graduación.

Se puede argumentar que, en presencia de una graduación, la matriz \tilde{R} es más fundamental que R , ya que \tilde{R} determina a la matriz-L (5.244), las simetrías del modelo y (si existe) el límite semiclásico [48]. Sustituyendo \tilde{R} en la ecuación de Yang-Baxter (5.124), obtenemos la llamada ecuación de Yang-Baxter graduada, que podría haberse tomado como el punto de partida en el álgebra de Yang-Baxter graduada. Sin embargo, dado que es la matriz no graduada \tilde{R} , la que fija la estructura del álgebra de Yang-Baxter (5.247), no adoptamos este punto de vista.

5.5.4. Operadores de Fermi

Vamos a explicar ahora cómo los diversos objetos graduados introducidos en las subsecciones anteriores pueden expresarse en términos de operadores de Fermi. El punto clave es que, en lo que se refiere a las matrices $e_{j\alpha}^\beta$, todos los cálculos en las subsecciones anteriores dependen únicamente de las relaciones de conmutación (5.229) y la propiedad de proyección (5.231). Los operadores de proyección fermiónicos satisfacen las mismas ecuaciones, entonces podemos decir que las matrices $e_{j\alpha}^\beta$ son representaciones matriciales del operador de proyección fermiónico. Como ya vimos, las matrices $e_{j\alpha}^\beta$ son convenientes para formular una versión graduada del método de dispersión inversa cuántica. Para la interpretación física de un hamiltoniano construido a partir de una solución dada de la ecuación de Yang-Baxter, sin embargo, es útil introducir a los operadores de Fermi en el formalismo.

5.5. MÉTODO DE DISPERSIÓN INVERSO CUÁNTICO GRADUADO 175

Para comenzar, consideremos espines de fermiones en un anillo con L posiciones en la red,

$$\{c_j, c_k\} = \{c_j^\dagger, c_k^\dagger\} = 0, \quad \{c_j, c_k^\dagger\} = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, \dots, L. \quad (5.275)$$

Es fácil comprobar que las entradas $(X_j)_\beta^\alpha$ de la matriz

$$X_j = \begin{pmatrix} 1 - n_j & c_j \\ c_j^\dagger & n_j \end{pmatrix} \quad (5.276)$$

son operadores de proyección fermiónicos: definimos $X_{j\alpha}^\beta = (X_j)_\beta^\alpha$; entonces

$$X_{j\alpha}^\beta X_{j\gamma}^\delta = \delta_{\gamma\beta} X_{j\alpha}^\delta, \quad (5.277)$$

consideremos un caso particular para comprobar que se cumple la relación anterior

$$\begin{aligned} X_{j1}^2 X_{j2}^1 &= (X_j)_2^1 (X_j)_1^2 = c_j c_j^\dagger, \\ \delta_2^2 X_{j1}^1 &= (X_j)_1^1 = 1 - n_j = 1 - c_j^\dagger c_j = c_j c_j^\dagger. \\ \Rightarrow X_{j1}^2 X_{j2}^1 &= \delta_2^2 X_{j1}^1 \end{aligned}$$

Los operadores $X_{j\alpha}^\beta$ tienen paridad, inducida por la regla de anticonmutación (5.275) para los operadores de Fermi. Para $j \neq k$ $X_{j\alpha}^\beta$ y $X_{k\gamma}^\delta$ anticonmutan, si ambos están formados por un número impar de operadores de Fermi, y de otro modo conmutan. Este hecho puede expresarse como sigue. Sea $p(1) = 0$, $p(2) = 1$ y $p(X_{j\alpha}^\beta) = p(\alpha) + p(\beta)$. Entonces $X_{j\alpha}^\beta$ es impar (contiene un número impar de operadores de Fermi), si $p(X_{j\alpha}^\beta) = 1$ y un número par, si $p(X_{j\alpha}^\beta) = 0$. Las reglas de conmutación para los proyectores $X_{j\alpha}^\beta$ son entonces

$$X_{j\alpha}^\beta X_{k\gamma}^\delta = (-1)^{(p(\alpha)+p(\beta))(p(\gamma)+p(\delta))} X_{k\gamma}^\delta X_{j\alpha}^\beta. \quad (5.278)$$

Ahora (5.277) y (5.278) son de la misma forma que (5.231) y (5.229), respectivamente. Como los cálculos en las secciones previas se basan únicamente en (5.229) y (5.231), podemos simplemente reemplazar $e_{j\alpha}^\beta \rightarrow X_{j\alpha}^\beta$ en las ecuaciones (5.244) y (5.256).

Las representaciones fermionicas compatibles con una graduación arbitraria pueden construirse considerando varias especies de fermiones y productos graduados de operadores de proyección. Vamos a explicar esto para el caso de dos especies. Este es el caso más interesante en aplicaciones, ya que podemos interpretar las dos especies como electrones con espín hacia arriba y espín hacia abajo. Tenemos que agregar un índice de espín a los operadores

de Fermi, $c_j \rightarrow c_{j\sigma}$, $\sigma = \uparrow, \downarrow$, $\{c_{j\sigma}, c_{k\tau}^\dagger\} = \delta_{jk}\delta_{\sigma\tau}$. En consecuencia, hay dos especies de operadores de proyección, $X_{j\alpha}^\beta \rightarrow X_{j\alpha}^{\sigma\beta}$.

Definimos los operadores de proyección para electrones con el producto tensorial

$$X_{j\alpha\gamma}^{\beta\delta} = (-1)^{(p(\alpha)+p(\beta))p(\gamma)} X_{j\alpha}^{\downarrow\beta} X_{j\gamma}^{\uparrow\delta} = \left(X_j^\downarrow \otimes_s X_j^\uparrow \right)_{\beta\delta}^{\alpha\gamma}. \quad (5.279)$$

Luego, de (5.277) se tiene

$$X_{j\alpha\gamma}^{\beta\delta} X_{j\alpha'\gamma'}^{\beta'\delta'} = \delta_{\alpha'}^\beta \delta_{\gamma'}^\delta X_{j\alpha\gamma}^{\beta'\delta'}. \quad (5.280)$$

$X_{j\alpha\gamma}^{\beta\delta}$ hereda la paridad de $X_{j\alpha}^{\downarrow\beta}$ y $X_{j\gamma}^{\uparrow\delta}$. El número de los operadores de Fermi contenidos en $X_{j\alpha\gamma}^{\beta\delta}$ es la suma del número de los operadores de Fermi en $X_{j\alpha}^{\downarrow\beta}$ y $X_{j\gamma}^{\uparrow\delta}$. Entonces $p(X_{j\alpha\gamma}^{\beta\delta}) = p(X_{j\alpha}^{\downarrow\beta}) + p(X_{j\gamma}^{\uparrow\delta}) = p(\alpha) + \dots + p(\delta)$ y el análogo de (5.278) también es válido para $X_{j\alpha\gamma}^{\beta\delta}$. Presentamos de nuevo los operadores de proyección en forma de matriz $(X_j)_{\beta\delta}^{\alpha\gamma} = X_{j\alpha\gamma}^{\beta\delta}$,

$$\begin{aligned} X_j &= \left(X_j^\downarrow \otimes_s X_j^\uparrow \right) \\ &= \begin{pmatrix} (1-n_{j\downarrow})(1-n_{j\uparrow}) & (1-n_{j\downarrow})c_{j\uparrow} & c_{j\downarrow}(1-n_{j\uparrow}) & c_{j\downarrow}c_{j\uparrow} \\ (1-n_{j\downarrow})c_{j\uparrow}^\dagger & (1-n_{j\downarrow})n_{j\uparrow} & -c_{j\downarrow}c_{j\uparrow}^\dagger & -c_{j\downarrow}n_{j\uparrow} \\ c_{j\downarrow}^\dagger(1-n_{j\uparrow}) & c_{j\downarrow}^\dagger c_{j\uparrow} & n_{j\downarrow}(1-n_{j\uparrow}) & n_{j\downarrow}c_{j\uparrow} \\ -c_{j\downarrow}^\dagger c_{j\uparrow}^\dagger & -c_{j\downarrow}^\dagger n_{j\uparrow} & n_{j\downarrow}c_{j\uparrow}^\dagger & n_{j\downarrow}n_{j\uparrow} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.281)$$

Donde usamos el orden estándar de los elementos de matriz del producto tensorial, que corresponde a una reenumeración (11) \rightarrow 1, (12) \rightarrow 2, (21) \rightarrow 3, (22) \rightarrow 4. Con esta convención $X_{j\alpha\gamma}^{\beta\delta}$ es reemplazado por $X_{j\alpha}^\beta$, con $\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$, que satisfacen (5.277) y (5.278) con la graduación $p(1) = p(4) = 0$, $p(2) = p(3) = 1$.

Notemos que los operadores fermiónicos pueden recuperarse como una combinación lineal de los operadores de proyección. Por inspección en la ecuación (5.281) obtenemos

$$c_{j\uparrow}^\dagger = X_{j2}^1 + X_{j4}^3, \quad c_{j\uparrow} = X_{j1}^2 + X_{j3}^4, \quad (5.282a)$$

$$c_{j\downarrow}^\dagger = X_{j3}^1 - X_{j4}^2, \quad c_{j\downarrow} = X_{j1}^3 - X_{j2}^4, \quad (5.282b)$$

La identificación de los operadores de proyección fermiónicos $X_{j\alpha}^\beta$ con las matrices $e_{j\alpha}^\beta$ nos da la representación matricial de los operadores de Fermi:

$$\begin{aligned} c_{j\uparrow}^\dagger &= e_{j2}^1 + e_{j4}^3 = I_4^{\otimes(j-1)} \otimes (e_2^1 + e_4^3) \otimes e_{\gamma_{j+1}}^{\gamma_{j+1}} (-1)^{p(\gamma_{j+1})} \otimes \dots \otimes e_{\gamma_L}^{\gamma_L} (-1)^{p(\gamma_L)} \\ &= I_4^{\otimes(j-1)} \otimes (I_2 \otimes \sigma^-) \otimes (\sigma^z \otimes \sigma^z)^{\otimes(L-j)} \\ &= I_4^{\otimes(2j-1)} \otimes \sigma^- \otimes (\sigma^z)^{\otimes 2(L-j)}, \end{aligned} \quad (5.283)$$

de forma similar tenemos

$$c_{j,\downarrow}^\dagger = e_{j3}^1 - e_{j4}^2 = I_4^{\otimes 2(j-1)} \otimes \sigma^- \otimes (\sigma^z)^{\otimes (2L-2j+1)}, \quad (5.284)$$

$$c_{j,\uparrow} = e_{j1}^2 + e_{j3}^4 = I_4^{\otimes (2j-1)} \otimes \sigma^+ \otimes (\sigma^z)^{\otimes 2(L-j)}, \quad (5.285)$$

$$c_{j\downarrow} = e_{j1}^3 - e_{j2}^4 = I_4^{\otimes 2(j-1)} \otimes \sigma^+ \otimes (\sigma^z)^{\otimes (2L-2j+1)}, \quad (5.286)$$

Esta es, por supuesto, una generalización de la transformación de Jordan-Wigner a los fermiones con grados de libertad en los espines.

Hasta aquí, hemos considerado el caso de espines fermiónicos en un espacio de estados de dimensión dos local y graduación $m = n = 1$ y el caso de electrones con un espacio de estados de dimensión cuatro y graduación $m = n = 2$. Hay cuatro posibilidades diferentes para obtener (5.229) y (5.231) en el caso del espacio de estados de dimensión tres local, $m + n = 3$. Este puede obtenerse eliminando las filas y columnas α 's de la matriz X_j en la ecuación (5.281), $\alpha = 1, 2, 3, 4$. (5.277) y (5.278) siguen siendo válidas, ya que los operadores $X_{j\alpha}^\beta$ son proyectores.

Es claro ahora como generalizar las consideraciones anteriores a un número arbitrario de especies de fermiones. En el caso de N especies podemos definir

$$X_{j\alpha_1 \dots \alpha_N}^{\beta_1 \dots \beta_N} = (X_j^N \otimes_s \dots \otimes_s X_j^1)_{\beta_1 \dots \beta_N}^{\alpha_1 \dots \alpha_N}. \quad (5.287)$$

Luego

$$X_{j\alpha_1 \dots \alpha_N}^{\beta_1 \dots \beta_N} X_{j\gamma_1 \dots \gamma_N}^{\delta_1 \dots \delta_N} = \delta_{\gamma_1}^{\beta_1} \dots \delta_{\gamma_N}^{\beta_N} X_{j\alpha_1 \dots \alpha_N}^{\delta_1 \dots \delta_N}, \quad (5.288)$$

$$X_{j\alpha_1 \dots \alpha_N}^{\beta_1 \dots \beta_N} X_{j\gamma_1 \dots \gamma_N}^{\delta_1 \dots \delta_N} = (-1)^{\sum_{j,k=1}^N (p(\alpha_j) + p(\beta_j))(p(\gamma_k) + p(\delta_k))} X_{j\gamma_1 \dots \gamma_N}^{\delta_1 \dots \delta_N} X_{j\alpha_1 \dots \alpha_N}^{\beta_1 \dots \beta_N} \quad (5.289)$$

que puede demostrarse por inducción sobre el número de especies. Donde la graduación es $m = n = 2^{N-1}$. El caso más general se obtiene eliminando filas y columnas de X_j en (5.287), en analogía con el ejemplo anterior.

Notemos que el operador $X_{j\alpha}^\beta$ para dos especies de fermiones aparece bajo el nombre de operadores de proyección de Hubbard en la literatura.

5.5.5. Ejemplos

Algunos ejemplos simples nos harán estar más familiarizados con el formalismo desarrollado hasta ahora. El ejemplo más simple no trivial nos lo ofrece el modelo $su(2)$ -XX con la R-matriz (5.177) y graduación $p(1) = 0$, $p(2) = 1$. Esta elección de graduación es compatible con la R-matriz (ver (5.243)). Para encontrar el hamiltoniano local correspondiente partimos de la ecuación (5.256),

$$H_{j-1,j} = (-1)^{p(\gamma)(p(\alpha) + p(\gamma))} \partial_\lambda \check{R}_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(\lambda, \nu_0)|_{\lambda=\lambda_0} e_{j-1\alpha}^\gamma e_{j\beta}^\delta$$

en donde $\lambda_0 = 0$. Hay que notar primero lo siguiente, en una de las secciones anteriores encontramos:

$$\begin{aligned}\check{R}_{11}^{11}(\lambda) &= \cos \lambda = \check{R}_{22}^{22}(\lambda) \\ \check{R}_{12}^{12}(\lambda) &= 1 = \check{R}_{21}^{21}(\lambda) \\ \check{R}_{21}^{12}(\lambda) &= x \sin \lambda \quad \check{R}_{12}^{21}(\lambda) = x^{-1} \sin \lambda\end{aligned}$$

a partir de lo anterior solo tenemos los siguientes elementos

$$\begin{aligned}H_{j-1,j} &= (-1)^{p(1)(p(1)+p(1))} \partial_\lambda \check{R}_{11}^{11}(\lambda)|_{\lambda=0} e_{j-11}^1 e_{j1}^1 \\ &+ (-1)^{p(2)(p(2)+p(2))} \partial_\lambda \check{R}_{22}^{22}(\lambda)|_{\lambda=0} e_{j-12}^2 e_{j2}^2 \\ &+ (-1)^{p(1)(p(1)+p(1))} \partial_\lambda \check{R}_{12}^{12}(\lambda)|_{\lambda=0} e_{j-11}^1 e_{j2}^2 \\ &+ (-1)^{p(2)(p(2)+p(2))} \partial_\lambda \check{R}_{21}^{21}(\lambda)|_{\lambda=0} e_{j-12}^2 e_{j1}^1 \\ &+ (-1)^{p(2)(p(1)+p(2))} \partial_\lambda \check{R}_{21}^{12}(\lambda)|_{\lambda=0} e_{j-11}^2 e_{j2}^1 \\ &+ (-1)^{p(1)(p(2)+p(1))} \partial_\lambda \check{R}_{12}^{21}(\lambda)|_{\lambda=0} e_{j-12}^1 e_{j1}^2.\end{aligned}$$

Sustituimos los valores de $p(\alpha)$, $p(\gamma)$ y $\check{R}_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(\lambda)$

$$\begin{aligned}H_{j-1,j} &= (-1)^0 \partial_\lambda (\cos \lambda)|_{\lambda=0} e_{j-11}^1 e_{j1}^1 + (-1)^2 \partial_\lambda (\cos \lambda)|_{\lambda=0} e_{j-12}^2 e_{j2}^2 \\ &+ (-1)^0 \partial_\lambda (1)|_{\lambda=0} e_{j-11}^1 e_{j2}^2 + (-1)^2 \partial_\lambda (1)|_{\lambda=0} e_{j-12}^2 e_{j1}^1 \\ &+ (-1)^1 \partial_\lambda (x \sin \lambda)|_{\lambda=0} e_{j-11}^2 e_{j2}^1 + (-1)^0 \partial_\lambda (x^{-1} \sin \lambda)|_{\lambda=0} e_{j-12}^1 e_{j1}^2 \\ &= (-\sin \lambda)|_{\lambda=0} e_{j-11}^1 e_{j1}^1 + (-\sin \lambda)|_{\lambda=0} e_{j-12}^2 e_{j2}^2 \\ &- (x \cos \lambda)|_{\lambda=0} e_{j-11}^2 e_{j2}^1 + (x^{-1} \cos \lambda)|_{\lambda=0} e_{j-12}^1 e_{j1}^2,\end{aligned}$$

$$\Rightarrow H_{j-1,j} = x^{-1} e_{j-12}^1 e_{j1}^2 - x e_{j-11}^2 e_{j2}^1. \quad (5.290)$$

Podemos reescribir $H_{j-1,j}$ en términos de los operadores de Fermi si usamos los operadores de proyección, i.e. reemplazamos $e_{j\alpha}^\beta \rightarrow X_{j\alpha}^\beta = (X_j)_{\beta}^\alpha$.

$$\begin{aligned}H_{j-1,j} &= x^{-1} X_{j-12}^1 X_{j1}^2 - x X_{j-11}^2 X_{j2}^1 \\ &= x^{-1} (X_{j-1})_1^2 (X_j)_2^1 - x (X_{j-1})_2^1 (X_j)_1^2,\end{aligned}$$

ahora utilizamos (5.276), y sumamos sobre j

$$\begin{aligned}H_{j-1,j} &= x^{-1} c_{j-1}^\dagger c_j - x c_{j-1} c_j^\dagger = x^{-1} c_{j-1}^\dagger c_j - x (-c_j^\dagger c_{j-1}), \\ H &= \sum_{j=1}^L H_{j-1,j} = \sum_{j=1}^L (x^{-1} c_{j-1}^\dagger c_j + x c_j^\dagger c_{j-1}).\end{aligned}$$

5.5. MÉTODO DE DISPERSIÓN INVERSO CUÁNTICO GRADUADO 179

Si consideramos $x = -1$ y redefinimos la suma podemos reescribir el resultado anterior como

$$H = - \sum_{j=1}^L (c_j^\dagger c_{j+1} + c_{j+1}^\dagger c_j), \quad (5.291)$$

que es el hamiltoniano del modelo de espines de unión fuerte. Podemos obtener la L-matriz correspondiente usando (5.244).

$$\mathcal{L}_{j\beta}^\alpha(\lambda) = (-1)^{p(\alpha)+p(\gamma)} R_{\beta\delta}^{\alpha\gamma}(\lambda) e_{j\gamma}^\delta.$$

Tenemos que calcular por separado cada elemento, pero primero tenemos que obtener R , usando $R = P\check{R}$, en donde P está dado por

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

al hacer el producto $P\check{R}$ obtenemos:

$$\begin{aligned} R_{11}^{11}(\lambda) &= \cos \lambda = -R_{22}^{22}(\lambda), \\ R_{12}^{12}(\lambda) &= \sin \lambda = R_{21}^{21}(\lambda), \\ R_{21}^{12}(\lambda) &= -1 = R_{12}^{21}(\lambda), \end{aligned} \quad (5.292)$$

en donde consideramos $x = -1$ nuevamente y $\mathcal{L}_j(\mu, \nu) = \mathcal{L}_j(\mu - \nu) = \mathcal{L}_j(\lambda)$. Ahora podemos calcular $\mathcal{L}_{j\beta}^\alpha(\lambda)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{j1}^1(\lambda) &= (-1)^{p(1)+p(1)} R_{11}^{11}(\lambda) e_{j1}^1 + (-1)^{p(1)+p(2)} R_{12}^{12}(\lambda) e_{j2}^2 = \cos \lambda e_{j1}^1 - \sin \lambda e_{j2}^2, \\ \mathcal{L}_{j2}^1(\lambda) &= (-1)^{p(1)+p(2)} R_{21}^{12}(\lambda) e_{j2}^1 = -(-1) e_{j2}^1 = e_{j2}^1, \\ \mathcal{L}_{j1}^2(\lambda) &= (-1)^{p(2)+p(1)} R_{12}^{21}(\lambda) e_{j1}^2 = -(-1) e_{j1}^2 = e_{j1}^2, \\ \mathcal{L}_{j2}^2(\lambda) &= (-1)^{p(2)+p(1)} R_{21}^{21}(\lambda) e_{j1}^1 + (-1)^{p(2)+p(2)} R_{22}^{22}(\lambda) e_{j2}^2 \\ &= -\sin \lambda e_{j1}^1 + (-\cos \lambda) e_{j2}^2. \end{aligned}$$

si reemplazamos $e_{j\alpha}^\beta \rightarrow X_{j\alpha}^\beta$, obtenemos

$$\mathcal{L}_j(\lambda) = \begin{pmatrix} \cos \lambda X_{j1}^1 - \sin \lambda X_{j2}^2 & X_{j2}^1 \\ X_{j2}^1 & -\sin \lambda X_{j1}^1 - \cos \lambda X_{j2}^2 \end{pmatrix}, \quad (5.293)$$

que satisface la relación bilineal (5.247) con la R-matriz (5.292).

El siguiente ejemplo esta generado por la R-matriz del modelo $su(3)$ -XX, i.e.

5.5. MÉTODO DE DISPERSIÓN INVERSO CUÁNTICO GRADUADO 181

entonces sólo contribuyen los términos con $\sin \lambda$, i.e.

$$\begin{aligned}
 H_{j-1,j} &= -\partial_\lambda \check{R}_{21}^{12}(\lambda)|_{\lambda=0} e_{j-11}^2 e_{j2}^1 - \partial_\lambda \check{R}_{31}^{13}(\lambda)|_{\lambda=0} e_{j-11}^3 e_{j3}^1 \\
 &\quad + \partial_\lambda \check{R}_{12}^{21}(\lambda)|_{\lambda=0} e_{j-12}^1 e_{j1}^2 + \partial_\lambda \check{R}_{13}^{31}(\lambda)|_{\lambda=0} e_{j-13}^1 e_{j1}^3 \\
 &= -\partial_\lambda (x \sin \lambda)|_{\lambda=0} e_{j-11}^2 e_{j2}^1 - \partial_\lambda (x \sin \lambda)|_{\lambda=0} e_{j-11}^3 e_{j3}^1 \\
 &\quad + \partial_\lambda (x^{-1} \sin \lambda)|_{\lambda=0} e_{j-12}^1 e_{j1}^2 + \partial_\lambda (x^{-1} \sin \lambda)|_{\lambda=0} e_{j-13}^1 e_{j1}^3 \\
 &= - (x \cos \lambda)|_{\lambda=0} e_{j-11}^2 e_{j2}^1 - (x \cos \lambda)|_{\lambda=0} e_{j-11}^3 e_{j3}^1 \\
 &\quad + (x^{-1} \cos \lambda)|_{\lambda=0} e_{j-12}^1 e_{j1}^2 + (x^{-1} \cos \lambda)|_{\lambda=0} e_{j-13}^1 e_{j1}^3,
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow H_{j-1,j} = -x(e_{j-11}^2 e_{j2}^1 + e_{j-11}^3 e_{j3}^1) + x^{-1}(e_{j-12}^1 e_{j1}^2 + e_{j-13}^1 e_{j1}^3), \quad (5.295)$$

que es la densidad Hamiltoniana en términos de los operadores de proyección local $e_{j\alpha}^\beta$. Para fermionizar podemos usar el conjunto de operadores fermiónicos obtenidos de la matriz X_j en (5.281) al eliminar la cuarta fila y columna. Los elementos $(X_j)^\alpha_\beta$, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$, de la matriz reducida son

$$X_j = \begin{pmatrix} (1 - n_{j\downarrow})(1 - n_{j\uparrow}) & (1 - n_{j\downarrow})c_{j\uparrow} & c_{j\downarrow}(1 - n_{j\uparrow}) \\ (1 - n_{j\downarrow})c_{j\uparrow}^\dagger & (1 - n_{j\downarrow})n_{j\uparrow} & -c_{j\downarrow}c_{j\uparrow}^\dagger \\ c_{j\downarrow}^\dagger(1 - n_{j\uparrow}) & c_{j\downarrow}^\dagger c_{j\uparrow} & n_{j\downarrow}(1 - n_{j\uparrow}) \end{pmatrix}, \quad (5.296)$$

así, obtenemos un conjunto completo de operadores de proyección en el espacio de estados localmente distribuidos por vectores base $|0\rangle$, $c_{j\uparrow}^\dagger|0\rangle$, $c_{j\downarrow}^\dagger|0\rangle$. La ocupación doble en las posiciones de la red está prohibida en este espacio. Sea $X_{j\alpha}^\beta = (X_j)^\alpha_\beta$, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$. El operador

$$X_{j\alpha}^\alpha = 1 - n_{j\uparrow}n_{j\downarrow}, \quad (5.297)$$

proyecta el espacio local de la red de electrones en el espacio del que se excluye la ocupación doble. El operador de proyección global correspondiente es

$$P_0 = \prod_{j=1}^L (1 - n_{j\uparrow}n_{j\downarrow}). \quad (5.298)$$

Remplazando los operadores de proyección local graduados $e_{j\alpha}^\beta$ por $X_{j\alpha}^\beta$ y haciendo $x = -1$ en (5.295) obtenemos el hamiltoniano local

$$\begin{aligned}
 H_{j-1,j} &= -x(X_{j-11}^2 X_{j2}^1 + X_{j-11}^3 X_{j3}^1) + x^{-1}(X_{j-12}^1 X_{j1}^2 + X_{j-13}^1 X_{j1}^3) \\
 &= -x((X_{j-1}^1)_2 (X_j^1)_1^2 + (X_{j-1}^1)_3 (X_j^1)_1^3) + x^{-1}((X_{j-1}^1)_1^2 (X_j^1)_2 + (X_{j-1}^1)_1^3 (X_j^1)_3) \\
 &= -(-1)[(1 - n_{j-1,\downarrow})c_{j-1,\uparrow}(1 - n_{j,\downarrow})c_{j,\uparrow}^\dagger + c_{j-1,\downarrow}(1 - n_{j-1,\uparrow})c_{j,\downarrow}^\dagger(1 - n_{j,\uparrow})] \\
 &\quad + (-1)[(1 - n_{j-1,\downarrow})c_{j-1,\uparrow}^\dagger(1 - n_{j,\downarrow})c_{j,\uparrow} + c_{j-1,\downarrow}^\dagger(1 - n_{j-1,\uparrow})c_{j,\downarrow}(1 - n_{j,\uparrow})] \\
 &= [c_{j-1,\uparrow}c_{j,\uparrow}^\dagger(1 - n_{j-1,\downarrow})(1 - n_{j,\downarrow}) + c_{j-1,\downarrow}c_{j,\downarrow}^\dagger(1 - n_{j-1,\uparrow})(1 - n_{j,\uparrow})] \\
 &\quad - [c_{j-1,\uparrow}^\dagger c_{j,\uparrow}(1 - n_{j-1,\downarrow})(1 - n_{j,\downarrow}) + c_{j-1,\downarrow}^\dagger c_{j,\downarrow}(1 - n_{j-1,\uparrow})(1 - n_{j,\uparrow})]
 \end{aligned}$$

en donde utilizamos $[n_{j,a}, c_{k,b}^\dagger] = \delta_{jk}\delta_{ab}c_{k,b}^\dagger$ y $[n_{j,a}, c_{k,b}] = -\delta_{jk}\delta_{ab}c_{k,b}$, recordando que no hay suma sobre j, k, a y b , y si ahora usamos $\{c_{j,a}, c_{k,b}^\dagger\} = \delta_{jk}\delta_{ab}$ y agrupamos términos comunes obtenemos

$$H_{j-1,j} = -\left\{ (c_{j,\uparrow}^\dagger c_{j-1,\uparrow} + c_{j-1,\uparrow}^\dagger c_{j,\uparrow})(1 - n_{j-1,\downarrow})(1 - n_{j,\downarrow}) \right. \\ \left. + (c_{j,\downarrow}^\dagger c_{j-1,\downarrow} + c_{j-1,\downarrow}^\dagger c_{j,\downarrow})(1 - n_{j-1,\uparrow})(1 - n_{j,\uparrow}) \right\}. \quad (5.299)$$

Debido a que actúa en el espacio sin ocupación doble, podemos reemplazarlo por $H_{j-1,j}P_0$, esto nos lleva a la forma compacta del hamiltoniano

$$H = \sum_{j=1}^L H_{j-1,j}P_0 = -P_0 \sum_{j=1}^L (c_{j,a}^\dagger c_{j+1,a} + c_{j+1,a}^\dagger c_{j,a})P_0. \quad (5.300)$$

Identificamos este modelo como el hamiltoniano $t=0$. La L-matriz (5.244) que genera el modelo $t=0$ como modelo fundamental graduado es de la forma $\mathcal{L}_j(\lambda, \mu) = \mathcal{L}_j(\lambda - \mu)$, para obtener $\mathcal{L}_j(\lambda - \mu)$ primero tenemos que calcular $R_{\beta\delta}^{\alpha\gamma}(\lambda)$ usando $R = PR$, en donde P está dado por

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

al hacer el producto encontramos:

$$R_{11}^{11}(\lambda) = \cos \lambda = -R_{22}^{22}(\lambda) = -R_{32}^{23}(\lambda) = -R_{23}^{32}(\lambda) = -R_{33}^{33}(\lambda), \\ R_{12}^{12}(\lambda) = R_{21}^{21}(\lambda) = R_{13}^{13}(\lambda) = R_{31}^{31}(\lambda) = \sin \lambda, \\ R_{21}^{12}(\lambda) = R_{12}^{21}(\lambda) = R_{31}^{13}(\lambda) = R_{13}^{31}(\lambda) = -1, \quad (5.301)$$

Calculamos ahora los elementos de $\mathcal{L}_j(\lambda)$ usando (5.301),

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{j1}^1(\lambda) &= (-1)^{p(1)+p(1)} R_{11}^{11}(\lambda) e_{j1}^1 + (-1)^{p(1)+p(2)} R_{12}^{12}(\lambda) e_{j2}^2 + (-1)^{p(1)+p(3)} R_{13}^{13}(\lambda) e_{j3}^3 \\
&= \cos \lambda e_{j1}^1 - \sin \lambda e_{j2}^2 - \sin \lambda e_{j3}^3, \\
\mathcal{L}_{j2}^1(\lambda) &= (-1)^{p(1)+p(2)} R_{21}^{12}(\lambda) e_{j2}^1 = -(-1) e_{j2}^1 = e_{j2}^1, \\
\mathcal{L}_{j3}^1(\lambda) &= (-1)^{p(1)+p(3)} R_{31}^{13}(\lambda) e_{j3}^1 = -(-1) e_{j3}^1 = e_{j3}^1, \\
\mathcal{L}_{j1}^2(\lambda) &= (-1)^{p(2)+p(1)} R_{12}^{21}(\lambda) e_{j1}^2 = -(-1) e_{j1}^2 = e_{j1}^2, \\
\mathcal{L}_{j2}^2(\lambda) &= (-1)^{p(2)+p(1)} R_{21}^{21}(\lambda) e_{j1}^1 + (-1)^{p(2)+p(2)} R_{22}^{22}(\lambda) e_{j2}^2 \\
&= -\sin \lambda e_{j1}^1 + (-\cos \lambda) e_{j2}^2, \\
\mathcal{L}_{j3}^2(\lambda) &= (-1)^{p(2)+p(3)} R_{32}^{23}(\lambda) e_{j3}^2 = -\cos \lambda e_{j3}^2, \\
\mathcal{L}_{j1}^3(\lambda) &= (-1)^{p(3)+p(1)} R_{13}^{31}(\lambda) e_{j1}^3 = -(-1) e_{j1}^3 = e_{j1}^3, \\
\mathcal{L}_{j2}^3(\lambda) &= (-1)^{p(3)+p(2)} R_{23}^{32}(\lambda) e_{j2}^3 = -\cos \lambda e_{j2}^3, \\
\mathcal{L}_{j3}^3(\lambda) &= (-1)^{p(3)+p(1)} R_{31}^{31}(\lambda) e_{j1}^1 + (-1)^{p(3)+p(3)} R_{33}^{33}(\lambda) e_{j3}^3 = -\sin \lambda e_{j1}^1 - \cos \lambda e_{j3}^3
\end{aligned}$$

si ahora reemplazamos $e_{j\alpha}^\beta \rightarrow X_{j\alpha}^\beta$, obtenemos

$$\mathcal{L}_j(\lambda) = \begin{pmatrix} \cos \lambda X_{j1}^1 - \sin \lambda (X_{j2}^2 + X_{j3}^3) & X_{j2}^1 & X_{j3}^1 \\ X_{j1}^2 & -\sin \lambda X_{j1}^1 - \cos \lambda X_{j2}^2 & -\cos \lambda X_{j3}^2 \\ X_{j1}^3 & -\cos \lambda X_{j2}^3 & -\sin \lambda X_{j1}^1 - \cos \lambda X_{j3}^3 \end{pmatrix}. \quad (5.302)$$

Con esto hemos concluido la construcción de dos modelos que nos van a servir de base para la construcción del modelo de Hubbard.

5.6. El modelo de Hubbard como modelo fundamental graduado

Ahora vamos a mostrar que el modelo de Hubbard se puede interpretar como un modelo graduado fundamental. Este es un hecho importante, pues significa que se puede aplicar la teoría general desarrollada en la sección anterior. Además, nos permitirá volver a expresar los operadores locales de Fermi en términos de los elementos de matriz de monodromía. Hay que enfatizar que la elección de la matriz R apropiada es crucial para nuestras consideraciones. Esta R -matriz apropiada no es la R -matriz original de Shastry (5.204), sino nuestra versión modificada (5.219).

Desarrollamos (5.256) y sustituimos

$$\begin{aligned}
H_{j-1,j} &= 2u(e_{j-11}^1 e_{j1}^1 + e_{j-11}^1 e_{j4}^4 + e_{j-14}^4 e_{j1}^1 + e_{j-14}^4 e_{j4}^4) \\
&\quad + u(e_{j-11}^1 e_{j2}^2 + e_{j-11}^1 e_{j3}^3 + e_{j-12}^2 e_{j1}^1 + e_{j-13}^3 e_{j1}^1 + e_{j-12}^2 e_{j4}^4 + e_{j-13}^3 e_{j4}^4 \\
&\quad + e_{j-14}^4 e_{j2}^2 + e_{j-14}^4 e_{j3}^3) + e_{j-11}^2 e_{j2}^1 + e_{j-11}^3 e_{j3}^1 - e_{j-12}^1 e_{j1}^2 - e_{j-13}^1 e_{j1}^3 \\
&\quad + e_{j-11}^2 e_{j4}^3 - e_{j-12}^1 e_{j3}^4 - e_{j-12}^4 e_{j3}^1 + e_{j-14}^2 e_{j1}^3 - e_{j-11}^3 e_{j4}^2 + e_{j-12}^4 e_{j4}^2 \\
&\quad + e_{j-13}^1 e_{j2}^4 + e_{j-13}^4 e_{j2}^1 + e_{j-13}^4 e_{j4}^3 - e_{j-14}^3 e_{j1}^2 - e_{j-14}^4 e_{j2}^4 - e_{j-14}^3 e_{j3}^4 \\
&= (e_{j-11}^2 + e_{j-13}^4)(e_{j2}^1 + e_{j4}^3) - (e_{j-12}^1 + e_{j-14}^3)(e_{j1}^2 + e_{j3}^4) \\
&\quad + (e_{j-11}^3 - e_{j-12}^4)(e_{j3}^1 - e_{j4}^2) - (e_{j-13}^1 - e_{j-14}^4)(e_{j1}^3 - e_{j2}^4) \\
&\quad + u[(e_{j-11}^1 + e_{j-14}^4)(e_{j1}^1 + e_{j4}^4) + (e_{j-12}^2 + e_{j-13}^3)(e_{j1}^1 + e_{j4}^4) \\
&\quad + (e_{j-11}^1 + e_{j-14}^4)(e_{j1}^1 + e_{j2}^2 + e_{j3}^3 + e_{j4}^4)].
\end{aligned}$$

si sumamos un cero de la forma $(e_{j-12}^2 + e_{j-13}^3)(e_{j2}^2 + e_{j3}^3) - (e_{j2}^2 + e_{j3}^3)(e_{j-12}^2 + e_{j-13}^3)$ y usando (5.227) podemos reescribir el resultado anterior como:

$$\begin{aligned}
H_{j-1,j} &= (e_{j-11}^2 + e_{j-13}^4)(e_{j2}^1 + e_{j4}^3) + (e_{j1}^2 + e_{j3}^4)(e_{j-12}^1 + e_{j-14}^3) \\
&\quad + (e_{j-11}^3 - e_{j-12}^4)(e_{j3}^1 - e_{j4}^2) + (e_{j1}^3 - e_{j2}^4)(e_{j-13}^1 - e_{j-14}^2) \\
&\quad + u[(e_{j-11}^1 + e_{j-14}^4)(e_{j1}^1 + e_{j4}^4) - (e_{j2}^2 + e_{j3}^3)(e_{j-12}^2 + e_{j-13}^3) + 1].
\end{aligned}$$

Esta expresión puede ser fermionizada al reemplazar los operadores de proyección graduados locales $e_{j\alpha}^\beta$ con los operadores de proyección de Hubbard (5.281). Recordemos que de acuerdo a nuestra convención tenemos que usar la transpuesta de (5.281). Entonces

$$\begin{aligned}
H_{j-1,j} &= ((X_{j-1})_2^1 + (X_{j-1})_4^3)((X_j)_1^2 + (X_j)_3^4) + ((X_j)_2^1 + (X_j)_4^3)((X_{j-1})_1^2 + (X_{j-1})_3^4) \\
&\quad + ((X_{j-1})_3^1 - (X_{j-1})_4^2)((X_j)_1^3 - (X_j)_2^4) + ((X_j)_3^1 - (X_j)_4^2)((X_{j-1})_1^3 - (X_{j-1})_2^4) + u \\
&\quad + u[((X_{j-1})_1^1 + (X_{j-1})_4^4)((X_j)_1^1 + (X_j)_4^4) - ((X_j)_2^2 + (X_j)_3^3)((X_{j-1})_2^2 + (X_{j-1})_3^3)] \\
&= c_{j-1\uparrow} c_{j\uparrow}^\dagger + c_{j\uparrow} c_{j-1\uparrow}^\dagger + c_{j-1\downarrow}(c_{j\downarrow}^\dagger - 2c_{j\downarrow}^\dagger n_{j\uparrow}) + c_{j\downarrow}(c_{j-1\downarrow}^\dagger - 2c_{j-1\downarrow}^\dagger n_{j-1\uparrow}) \\
&\quad + u[(1 - n_{j-1\downarrow} - n_{j-1\uparrow} + 2n_{j-1\downarrow} n_{j-1\uparrow})(1 - n_{j\downarrow} - n_{j\uparrow} + 2n_{j\downarrow} n_{j\uparrow}) \\
&\quad - (n_{j-1\downarrow} + n_{j-1\uparrow} - 2n_{j-1\downarrow} n_{j-1\uparrow})(n_{j\downarrow} + n_{j\uparrow} - 2n_{j\downarrow} n_{j\uparrow}) + 1] \\
&= -c_{j\uparrow}^\dagger c_{j-1\uparrow} - c_{j-1\uparrow}^\dagger c_{j\uparrow} - c_{j\downarrow}^\dagger c_{j-1\downarrow} - c_{j-1\downarrow}^\dagger c_{j\downarrow} \\
&\quad + u\left[\frac{1}{2}(1 - 2n_{j-1\uparrow})(1 - 2n_{j-1\downarrow}) + \frac{1}{2}(1 - 2n_{j\uparrow})(1 - 2n_{j\downarrow}) + 1\right].
\end{aligned}$$

El resultado anterior se puede reescribir como:

$$\begin{aligned}
H_{j-1,j} &= -c_{j-1,a}^\dagger c_{j,a} - c_{j,a}^\dagger c_{j-1,a} \\
&\quad + \frac{u}{2} [(1 - 2n_{j-1,\uparrow})(1 - 2n_{j-1,\downarrow}) + (1 - 2n_{j,\uparrow})(1 - 2n_{j,\downarrow})] + u, \tag{5.307}
\end{aligned}$$

donde ρ_j están dadas en (5.304) y los elementos de R son:

$$\begin{aligned}
R_{11}^{11}(\lambda, 0) &= R_{44}^{44}(\lambda, 0) = \frac{\cos \lambda}{\rho_4} e^h & R_{22}^{22}(\lambda, 0) &= R_{33}^{33}(\lambda, 0) = \frac{\cos \lambda}{\rho_4} e^{-h} \\
R_{14}^{14}(\lambda, 0) &= R_{41}^{41}(\lambda, 0) = \frac{\sin^2 \lambda}{\cos \lambda \rho_4} e^h & R_{23}^{23}(\lambda, 0) &= R_{32}^{32}(\lambda, 0) = -\frac{\sin^2 \lambda}{\cos \lambda \rho_4} e^{-h} \\
R_{41}^{14}(\lambda, 0) &= R_{14}^{41}(\lambda, 0) = \frac{e^h}{\cos \lambda \rho_4} e^h & R_{32}^{23}(\lambda, 0) &= R_{23}^{32}(\lambda, 0) = \frac{e^{-h}}{\cos \lambda \rho_4} e^{-h} \\
-R_{12}^{12}(\lambda, 0) &= -R_{13}^{13}(\lambda, 0) = R_{42}^{42}(\lambda, 0) = R_{43}^{43}(\lambda, 0) = \frac{\sin \lambda}{\rho_4} e^h \\
-R_{21}^{21}(\lambda, 0) &= R_{24}^{24}(\lambda, 0) = -R_{31}^{31}(\lambda, 0) = R_{34}^{34}(\lambda, 0) = \frac{\sin \lambda}{\rho_4} e^{-h} \\
R_{21}^{12}(\lambda, 0) &= R_{31}^{13}(\lambda, 0) = R_{12}^{21}(\lambda, 0) = R_{13}^{31}(\lambda, 0) = \frac{1}{\rho_4} \\
R_{42}^{24}(\lambda, 0) &= R_{43}^{34}(\lambda, 0) = R_{24}^{42}(\lambda, 0) = R_{34}^{43}(\lambda, 0) = \frac{1}{\rho_4} \\
R_{23}^{14}(\lambda, 0) &= -R_{32}^{14}(\lambda, 0) = -R_{14}^{23}(\lambda, 0) = -R_{41}^{23}(\lambda, 0) = -\frac{\sin \lambda}{\cos \lambda \rho_4} \\
R_{14}^{32}(\lambda, 0) &= R_{41}^{32}(\lambda, 0) = R_{23}^{41}(\lambda, 0) = -R_{32}^{41}(\lambda, 0) = -\frac{\sin \lambda}{\cos \lambda \rho_4}
\end{aligned} \tag{5.309}$$

Con ayuda del resultado anterior calculamos cada uno de los elementos de $\mathcal{L}_j(\lambda, 0)$ y obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_j(\lambda, 0) &= \frac{e^h}{\cos^2 \lambda} \\
&\times \begin{pmatrix} e^h f_{j,\downarrow} f_{j,\uparrow} & -f_{j,\downarrow} c_{j,\uparrow}^\dagger & -f_{j,\uparrow} c_{j,\downarrow}^\dagger & -e^h c_{j,\downarrow}^\dagger c_{j,\uparrow}^\dagger \\ -f_{j,\downarrow} c_{j,\uparrow} & e^{-h} f_{j,\downarrow} g_{j,\uparrow} & -e^{-h} c_{j,\downarrow}^\dagger c_{j,\uparrow} & -g_{j,\uparrow} c_{j,\downarrow}^\dagger \\ -f_{j,\uparrow} c_{j,\downarrow} & -e^{-h} c_{j,\uparrow}^\dagger c_{j,\downarrow} & e^{-h} g_{j,\downarrow} f_{j,\uparrow} & g_{j,\downarrow} c_{j,\uparrow}^\dagger \\ -e^h c_{j,\uparrow} c_{j,\downarrow} & -g_{j,\uparrow} c_{j,\downarrow} & g_{j,\downarrow} c_{j,\uparrow} & e^h g_{j,\downarrow} g_{j,\uparrow} \end{pmatrix}, \tag{5.310}
\end{aligned}$$

donde

$$f_{j,a} = n_{j,a} \sin \lambda - (1 - n_{j,a}) \cos \lambda, \tag{5.311a}$$

$$g_{j,a} = n_{j,a} \cos \lambda + (1 - n_{j,a}) \sin \lambda, \tag{5.311b}$$

para $a = \uparrow, \downarrow$, los cálculos detallados se encuentran en el Apéndice D.

El álgebra de Yang-Baxter graduada (5.250) con la R-matriz (5.219) y la matriz de monodromía (5.248) construida a partir de un producto ordenado

de L veces la L-matriz (5.310) es el punto inicial para la solución del ansatz algebraico de Bethe del modelo de Hubbard.

En general, podemos mantener separado todo ν_j que entran en la definición de la matriz de monodromía (5.248).

De hecho la R-matriz (5.219) no tiene la forma de una diferencia (i.e. $\lambda - \mu$) y tiene una consecuencia interesante [36]: el segundo parámetro espectral μ es un parámetro independiente adicional del modelo. Haciendo todos los ν_j , $j = 1, \dots, L$ en (5.248) igual a μ obtenemos el modelo homogéneo que depende de μ y que se reduce el modelo de Hubbard para el caso especial $\mu = 0$. El modelo generalizado genera una familia de hamiltonianos locales, esto se debe a la regularidad de la R-matriz (5.219) que se extiende a toda $\lambda = \mu$. Usando una vez más la ecuación (5.256), esta vez con $\lambda_0 = \nu_0 = \mu$, obtenemos el hamiltoniano

$$\begin{aligned}
H = & -\frac{1}{\cosh(2l)} \sum_{j=1}^L \sum_{a=\uparrow, \downarrow} (t_{j,-a}^{(-)} c_{j,a}^\dagger c_{j-1,a} + t_{j,-a}^{(+)} c_{j-1,a}^\dagger c_{j,a}) \\
& + \frac{u}{\cosh(2l)} \sum_{j=1}^L [(1 - 2n_{j,\uparrow})(1 - 2n_{j,\downarrow}) + \cos^2(2\mu)] \\
& + \frac{u \sin^2(2\mu)}{\cosh(2l)} \sum_{j=1}^L [(c_{j,\downarrow}^\dagger c_{j-1,\downarrow} - c_{j-1,\downarrow}^\dagger c_{j,\downarrow})(c_{j,\uparrow}^\dagger c_{j-1,\uparrow} - c_{j-1,\uparrow}^\dagger c_{j,\uparrow}) \\
& - (1 - n_{j-1,\downarrow} - n_{j,\downarrow}) + (1 - n_{j-1,\uparrow} - n_{j,\uparrow})].
\end{aligned} \tag{5.312}$$

En donde usamos la convención $-\uparrow = \downarrow$ y $-\downarrow = \uparrow$. Las amplitudes de transición $t_{j,a}^{(\pm)}$ dependen de si las posiciones $j-1$ y j están ocupadas o no.

$$t_{j,-a}^{(\pm)} = a_\pm + (n_{j-1,a} + n_{j,a})(1 - a_\pm) + n_{j-1,a} n_{j,a} (a_+ + a_- - 2) \tag{5.313}$$

para $a = \uparrow, \downarrow$ con

$$a_\pm = \cosh(2l) \pm \sinh(2l) \cos(2\mu). \tag{5.314}$$

Tales tipos de amplitudes, dependiendo de la densidad de la partícula, a veces se denominan amplitudes de salto correlacionadas.

El hamiltoniano (5.312) es hermitiano para μ puramente imaginario, $Re[\mu] = 0$. La interacción adicional en la tercer suma del lado derecho de (5.312) acopla la corriente local de los electrones con espín hacia abajo y espín hacia arriba y la densidad promedio de los electrones con espín hacia abajo y espín hacia arriba en posiciones vecinas de la red. Notemos que el hamiltoniano (5.312) es invariante bajo la inversión de espín y, hasta un cambio trivial, se transforma en $H(-u)$ bajo la transformación de Shiba (5.60).

El modelo definido por (5.312) se obtuvo por primera vez en [36, 50].

y

$$\Sigma_{\eta}^{+} = e_1^4 = \sigma^{+} \otimes \sigma^{+}, \quad \Sigma_{\eta}^{-} = e_4^1 = \sigma^{-} \otimes \sigma^{-}, \quad (5.320)$$

$$\Sigma_{\eta}^z = e_1^1 - e_4^4 = \frac{1}{2}(\sigma^z \otimes I_2 + I_2 \otimes \sigma^z), \quad (5.321)$$

para los generadores. Las etiquetas ' s ' y ' η ' se refieren a espines y η -espines, respectivamente. Haciendo $\Sigma_j^x = \Sigma_j^{+} + \Sigma_j^{-}$ y $\Sigma_j^y = -i(\Sigma_j^{+} - \Sigma_j^{-})$ para $j = s, \eta$ encontramos las relaciones de conmutación de $su(2)$

$$[\Sigma_j^{\alpha}, \Sigma_j^{\beta}] = 2i\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\Sigma_j^{\gamma}, \quad (5.322)$$

para $j = s, \eta$, $\alpha = x, y, z$.

Resulta que la simetría de espín y η -espín no se pueden tratar en la misma base. La invarianza del modelo de Hubbard bajo rotaciones en el espacio de espines es una simetría en el sentido de la sección (5.5.3) i.e. es consecuencia de la invarianza del álgebra de Lie en la matriz $\tilde{R}(\lambda, \mu)$. La invarianza (para un número par de posiciones en la red) del hamiltoniano y las cantidades conservadas superiores bajo rotaciones del η -espín, por otro lado, se siguen de un razonamiento diferente.

Primero consideremos el espín. Pedimos que

$$[\tilde{R}(\lambda, \mu), \Sigma_s^{\alpha} \otimes I_4 + I_4 \otimes \Sigma_s^{\alpha}] = 0, \quad (5.323)$$

para $\alpha = x, y, z$. Esta condición es fácil de comprobar. Uno puede, por ejemplo, comprobar primero Σ_s^{+} mediante la multiplicación explícita de la matriz de 16×16 . La ecuación correspondiente para Σ_s^{-} se sigue de tomar la transpuesta de la ecuación invariante para Σ_s^{+} y considerar que $\tilde{R}(\lambda, \mu)$ es simétrica. Finalmente, la ecuación para Σ_s^z se obtiene usando $[\Sigma_s^{+}, \Sigma_s^{-}] = \Sigma_s^z$ y la identidad de Jacobi.

Tenemos, entonces que establecer la invarianza de $\tilde{R}(\lambda, \mu)$ en el sentido de la ecuación (5.270), con respecto a la representación de $su(2)$ generada por Σ_s^{α} y podemos seguir el razonamiento de la sección (5.5.3). Los operadores globales del espacio cuántico correspondientes a las matrices Σ_s^{α} son dos operadores de espín temporales (5.67). Esto se sigue del análogo graduado de (5.268) después de la fermionización. Entonces (5.273) nos dice que

$$[\mathcal{T}(\lambda), \frac{1}{2}\Sigma_s^{\alpha} + S^{\alpha}] = 0, \quad (5.324)$$

para $\alpha = x, y, z$. Notemos que Σ_s^{α} actúa en el espacio auxiliar, pero S^{α} actúa en el espacio cuántico. La ecuación (5.324) codifica las relaciones de conmutación de los elementos de la matriz de monodromía con los operadores de

espín S^α . Es válido tanto en el caso homogéneo como en el caso inhomogéneo. De acuerdo a nuestra fórmula general (5.274) se sigue que

$$[str(\mathcal{T}(\lambda)), S^\alpha] = 0, \quad (5.325)$$

para $\alpha = x, y, z$. Como consecuencia, en el caso homogéneo el hamiltoniano y todos los operadores mutuamente conmutativos generados por $\tau(\lambda) = \ln(\hat{U}^{-1}str(\mathcal{T}(\lambda)))$ preservan el espín.

Las matrices Σ_s^\pm no generan ecuaciones de invarianza como (5.323), pero sí las siguientes relaciones

$$\left\{ \tilde{R}(\lambda, \mu), \Sigma_s^\pm \otimes I_4 + I_4 \otimes \Sigma_s^\pm \right\} = 0 \quad (5.326)$$

Estas relaciones son muy fáciles de comprobar. Una de ellas se comprueba mediante cálculos explícitos, y la otra se sigue de tomar la transpuesta y usar la simetría de $\tilde{R}(\lambda, \mu)$.

La primera implicación de (5.326) es la ecuación invariante

$$[\tilde{R}(\lambda, \mu), \Sigma_\eta^z \otimes I_4 + I_4 \otimes \Sigma_\eta^z] = 0. \quad (5.327)$$

La demostración depende de la identidad $[A, [B, C]] = \{\{A, B\}, C\} - \{\{A, C\}, B\}$, que se satisface para matrices arbitrarias y del hecho de que $[\Sigma_\eta^+, \Sigma_\eta^-] = \Sigma_\eta^z$. El operador de espacio cuántico correspondiente a Σ_η^z es $\sum_{j=1}^L (X_{j1} - X_{j4}) = L - \hat{N} = -2\eta^z$. Usando la ecuación (5.273) obtenemos las relaciones de conmutación entre los elementos de la matriz de monodromía y el operador de número de partículas

$$[\mathcal{T}(\lambda), \Sigma_\eta^z - \hat{N}] = 0. \quad (5.328)$$

Tomando la super traza en la última ecuación llegamos a

$$[str(\mathcal{T}(\lambda)), \hat{N}] = 0, \quad (5.329)$$

y, por lo tanto, hemos demostrado la invarianza de todas las cantidades conservadas superiores del modelo de Hubbard bajo las transformaciones de norma globales.

Por el momento, trabajamos con las consecuencias de la ecuación (5.326). Escribamos x para cualquier Σ_η^+ o Σ_η^- . Luego, separando en componentes, (5.326) se lee

$$\tilde{R}_{\beta'\delta}^{\alpha\gamma}(\lambda, \mu)x_\beta^{\beta'} + x_{\alpha'}^\alpha \tilde{R}_{\beta\delta}^{\alpha'\gamma}(\lambda, \mu) = \tilde{R}_{\beta\delta'}^{\alpha\gamma}(\lambda, \mu)x_\delta^{\delta'} + x_{\gamma'}^\gamma \tilde{R}_{\beta\delta}^{\alpha\gamma'}(\lambda, \mu). \quad (5.330)$$

Se sigue que

$$\mathcal{L}_{j\beta'}^\alpha(\lambda, \mu)x_\beta^{\beta'} + x_{\alpha'}^\alpha \mathcal{L}_{j\beta}^{\alpha'}(\lambda, \mu) = \mathcal{L}_{j\beta}^\alpha(\lambda, \mu)x_j + x_j \mathcal{L}_{j\beta}^\alpha(\lambda, \mu), \quad (5.331)$$

y para un número par de posiciones en la red

$$\mathcal{T}_{\beta'}^{\alpha}(\lambda)x_{\beta}^{\beta'} + x_{\alpha'}^{\alpha}\mathcal{T}_{\beta}^{\alpha'}(\lambda) = -\mathcal{T}_{\beta}^{\alpha}(\lambda)\sum_{j=1}^L(-1)^j x_j - \sum_{j=1}^L(-1)^j x_j \mathcal{T}_{\beta}^{\alpha}(\lambda). \quad (5.332)$$

La demostración es bastante simple. Primero usamos (5.331) para demostrar (5.332) para dos posiciones y después procedemos por inducción.

Para Σ_{η}^{+} y Σ_{η}^{-} obtenemos los operadores locales en el espacio cuántico $x_j = c_{j,\downarrow}c_{j,\uparrow}$ y $x_j = c_{j,\uparrow}^{\dagger}c_{j,\downarrow}^{\dagger}$, respectivamente y (5.332) se convierte en

$$[\mathcal{T}(\lambda), \Sigma_{\eta}^{\pm}] = \{\mathcal{T}(\lambda), \eta^{\mp}\}. \quad (5.333)$$

Esta ecuación comprime todas las relaciones de conmutación entre los elementos de la matriz de monodromía y η^{\pm} . Tomando la supertraza llegamos a

$$\{str(\mathcal{T}(\lambda)), \eta^{\mp}\} = 0. \quad (5.334)$$

Por lo tanto, a diferencia de los generadores de $su(2)$, S^{α} , η^z , el operador η^{\pm} anticonmuta con la matriz de transferencia. Considerando $\lambda = 0$ en el caso homogéneo recuperamos nuestro resultado anterior (ver (5.29)) $\{\hat{U}, \eta^{\mp}\} = 0$.

Se sigue que la función generadora de las cantidades conservadas locales, $\tau(\lambda)$ conmuta con η^{\pm} ,

$$[\tau(\lambda), \eta^{\pm}] = 0 \quad (5.335)$$

Entonces, todo el conjunto de operadores mutuamente conmutativos generados por $\tau(\lambda)$ es invariante bajo rotaciones del η -espín.

Pasemos ahora a la discusión de las simetrías discretas de la matriz de monodromía. La aplicación del operador de giro de espín (5.58) en la matriz L (5.310) da lugar a

$$J^{(s)}\mathcal{L}(\lambda, 0)J^{(s)} = M\mathcal{L}(\lambda, 0)M, \quad (5.336)$$

donde

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.337)$$

Como $(J^{(s)})^2 = id$ y $M^2 = I_4$, concluimos que la matriz de monodromía del modelo homogéneo satisface

$$J^{(s)}\mathcal{T}(\lambda)J^{(s)} = M\mathcal{T}(\lambda)M. \quad (5.338)$$

La ecuación anterior describe el comportamiento de los elementos de la matriz de monodromía bajo giros de espín. En particular, tenemos

$$[t(\lambda), J^{(s)}] = 0, \quad (5.339)$$

recordando que $t(\lambda) = str(\tau(\lambda))$. Por lo tanto, no solo el hamiltoniano sino todos los operadores conservados superiores generados por $\tau(\lambda)$ son invariantes bajo inversión de espín.

Es un poco más difícil entender el comportamiento de la L-matriz (5.310) bajo la transformación de Shiba generada por $J_a^{(sh)}$ (5.59). Consideremos un número par L de posiciones en la red desde el principio. Comencemos con $a = \downarrow$. Entonces las funciones $f_{j,\downarrow}$, $g_{j,\downarrow}$ definidas en (5.311) transforman como

$$J_{\downarrow}^{(sh)} f_{j,\downarrow} (J_{\downarrow}^{(sh)})^{\dagger} = (1 - 2n_{j,\downarrow}) g_{j,\downarrow}, \quad (5.340)$$

$$J_{\downarrow}^{(sh)} g_{j,\downarrow} (J_{\downarrow}^{(sh)})^{\dagger} = -(1 - 2n_{j,\downarrow}) f_{j,\downarrow}. \quad (5.341)$$

La L-matriz (5.310) se convierte en

$$\begin{aligned} & J_{\downarrow}^{(sh)} \mathcal{L}_j(\lambda, 0|u) (J_{\downarrow}^{(sh)})^{\dagger} \\ &= e^{2h} (1 - 2n_{j,\downarrow}) ((\sigma^z)^j \otimes I_2) (\sigma^y \otimes \sigma^z) \mathcal{L}_j(\lambda, 0| - u) (\sigma^y \otimes \sigma^z) ((\sigma^z)^{j-1} \otimes I_2). \end{aligned} \quad (5.342)$$

Indicamos explícitamente la dependencia de la L-matriz con respecto a la constante de acoplamiento u . Tomando en cuenta que $1 - 2n_{j,\downarrow} = e^{i\pi n_{j,\downarrow}}$ (1) y que L es par, obtenemos la regla de transformación para la matriz de monodromía en la forma

$$J_{\downarrow}^{(sh)} \mathcal{T}(\lambda|u) (J_{\downarrow}^{(sh)})^{\dagger} = e^{2hL + i\pi \hat{N}_{\downarrow}} (\sigma^y \otimes \sigma^z) \mathcal{T}(\lambda| - u) (\sigma^y \otimes \sigma^z). \quad (5.344)$$

A partir de aquí, se puede determinar cómo la función generadora $\tau(\lambda)$ se comporta bajo la transformación de Shiba. Observando que $str\{(\sigma^y \otimes \sigma^z) \mathcal{T}(\lambda|u) (\sigma^y \otimes \sigma^z)\} = -str\{\mathcal{T}(\lambda|u)\}$ encontramos

$$J_{\downarrow}^{(sh)} t(\lambda|u) (J_{\downarrow}^{(sh)})^{\dagger} = -e^{2hL + i\pi \hat{N}_{\downarrow}} t(\lambda| - u), \quad (5.345)$$

$$J_{\downarrow}^{(sh)} \hat{U}^{-1} (J_{\downarrow}^{(sh)})^{\dagger} = -\hat{U}^{-1} e^{-i\pi \hat{N}_{\downarrow}}. \quad (5.346)$$

1

$$\begin{aligned} e^{i\pi n_{j,\downarrow}} &= 1 + i\pi n_{j,\downarrow} + \frac{1}{2!} (i\pi n_{j,\downarrow})^2 + \frac{1}{3!} (i\pi n_{j,\downarrow})^3 + \frac{1}{4!} (i\pi n_{j,\downarrow})^4 + \dots \\ &= 1 + i\pi n_{j,\downarrow} + \frac{1}{2!} (i\pi)^2 n_{j,\downarrow} + \frac{1}{3!} (i\pi)^3 n_{j,\downarrow} + \frac{1}{4!} (i\pi)^4 n_{j,\downarrow} + \dots + n_{j,\downarrow} - n_{j,\downarrow} \\ &= 1 + [1 + i\pi + \frac{1}{2!} (i\pi)^2 + \frac{1}{3!} (i\pi)^3 + \frac{1}{4!} (i\pi)^4 + \dots] n_{j,\downarrow} - n_{j,\downarrow} \\ &= 1 + e^{i\pi} n_{j,\downarrow} - n_{j,\downarrow} \\ &= 1 - 2n_{j,\downarrow} \end{aligned} \quad (5.343)$$

Se sigue que

$$J_{\downarrow}^{(sh)} \tau(\lambda|u) (J_{\downarrow}^{(sh)})^{\dagger} = \tau(\lambda| - u) + 2h(\lambda|u)L. \quad (5.347)$$

Entonces $\tau(\lambda|u)$ es invariante bajo la transformación de Shiba hasta un cambio de signo en la constante de acoplamiento y un cambio general trivial.

Observación. Se puede evitar el término $2h(\lambda|u)L$ modificando la normalización de la L-matriz(5.310). Si reemplazamos el factor $e^h / \cos^2 \lambda$ en la ecuación (5.310) por 1, entonces el término $\tau(\lambda|u)$ desaparece de las ecuaciones (5.344) y (5.347). Otra posibilidad es tomar (5.347) más simétrica si redefinimos la función generadora $\tau(\lambda|u)$. Haciendo $\tilde{\tau}(\lambda|u) = \tau(\lambda|u) - h(\lambda|u)L$ obtenemos

$$J_{\downarrow}^{(sh)} \tilde{\tau}(\lambda|u) (J_{\downarrow}^{(sh)})^{\dagger} = \tilde{\tau}(\lambda| - u). \quad (5.348)$$

A partir de nuestra discusión anterior debería quedar claro que la transformación de Shiba relaciona el modelo de Hubbard con u positivo con el modelo de Hubbard de u negativo. En lugar de trabajar con la transformación de Shiba para electrones con espín hacia abajo podemos equivalentemente trabajar con la transformación de Shiba para los electrones con espín hacia arriba. Los operadores correspondientes $J_{\downarrow}^{(sh)}$ y $J_{\uparrow}^{(sh)}$ se relacionan por una transformación de inversión de espín. Entonces, podemos aplicar la transformación (5.338) en la ecuación (5.344) para obtener la regla de transformación para la matriz de monodromía bajo la transformación de Shiba que afecta a los espines hacia arriba. Multiplicando la ecuación (5.344) por $J^{(s)}M$ del lado izquierdo y el lado derecho y usando (5.338) y $M(\sigma^y \otimes \sigma^z)M = I_2 \otimes \sigma^y$, tenemos

$$J_{\uparrow}^{(sh)} \mathcal{T}(\lambda|u) (J_{\uparrow}^{(sh)})^{\dagger} = e^{2hL+i\pi\hat{N}_{\uparrow}} (I_2 \otimes \sigma^y) \mathcal{T}(\lambda| - u) (I_2 \otimes \sigma^y). \quad (5.349)$$

Debido a (5.339), la ecuación (5.347) es invariante bajo la inversión de espín. La acción simultánea de la transformación de Shiba para espines hacia arriba y hacia abajo en la matriz de monodromía se obtienen al combinar (5.344) y (5.349),

$$J_{\downarrow}^{(sh)} J_{\uparrow}^{(sh)} \mathcal{T}(\lambda|u) (J_{\downarrow}^{(sh)} J_{\uparrow}^{(sh)})^{\dagger} = e^{i\pi\hat{N}} (\sigma^y \otimes \sigma^z) \mathcal{T}(\lambda|u) (\sigma^y \otimes \sigma^z). \quad (5.350)$$

Como consecuencia obtenemos la siguiente ecuación invariante para la función generadora $\tau(\lambda)$,

$$J_{\downarrow}^{(sh)} J_{\uparrow}^{(sh)} \tau(\lambda|u) (J_{\downarrow}^{(sh)} J_{\uparrow}^{(sh)})^{\dagger} = \tau(\lambda|u). \quad (5.351)$$

5.6.3. Solución del problema inverso cuántico

El método de dispersión inverso cuántico se basa en una transformación de un conjunto de "operadores de campo" locales $\{e_{j\alpha}^\beta\}$ a un conjunto de operadores no locales, elementos de la matriz de monodromía. Es natural preguntar: ¿Cuál es la transformación inversa? Esta pregunta tiene una respuesta notablemente simple [45, 52, 53]. Aquí presentaremos el resultado de [45], donde la transformación inversa se construyó para modelos graduados fundamentales.

Supongamos que tenemos una solución de la ecuación de Yang-Baxter (5.124) que es regular y unitaria. Sea p la graduación compatible con la R-matriz en el sentido de la ecuación (5.243) y sea $\mathcal{T}(\lambda)$ la correspondiente matriz de monodromía inhomogénea (5.248). Entonces la fórmula de inversión correspondiente es

$$e_{n\alpha}^\beta = (-1)^{p(\alpha)p(\beta)} \prod_{j=1}^{n-1} \text{str}(\mathcal{T}(\nu_j)) \cdot \mathcal{T}_\alpha^\beta(\nu_n) \cdot \prod_{j=n+1}^L \text{str}(\mathcal{T}(\nu_j)). \quad (5.352)$$

Notemos que debido a (5.251), no se necesita un orden para el producto del lado derecho de (5.253).

En el caso homogéneo la fórmula de inversión toma una forma particularmente simple. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que el punto de salto donde los elementos de la L-matriz son proporcionales a $e_{j\alpha}^\beta$ (ver (5.252)) es en $\lambda_0 = \nu_0 = 0$. Entonces $\text{str}(\mathcal{T}(0)) = \hat{U}$, donde \hat{U} es el operador de desplazamiento (5.253) y la ecuación (5.352) se convierte en

$$e_{n\alpha}^\beta = (-1)^{p(\alpha)p(\beta)} \hat{U}^{n-1} \mathcal{T}_\alpha^\beta(0) \hat{U}^{L-n}. \quad (5.353)$$

Notemos que $\hat{U}^L = id$, entonces, la ecuación anterior es equivalente a

$$e_{1\alpha}^\beta = (-1)^{p(\alpha)p(\beta)} \mathcal{T}_\alpha^\beta(0) \hat{U}^{-1}, \quad (5.354)$$

por una transformación similar a \hat{U}^{1-n} .

La demostración de (5.354) es más simple que la demostración de la fórmula inversa (5.352) para el modelo inhomogéneo. Solo evaluamos los elementos de la matriz de monodromía en el punto de desplazamiento, digamos $\lambda_0 = \nu_0 = 0$, donde (5.252) es válido. Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_\alpha^\beta(0) &= (-1)^{p(\alpha)p(\beta_{L-1})+p(\beta_{L-1})p(\beta_{L-2})+\dots+p(\beta_1)p(\beta)} e_{L\beta_{L-1}}^\alpha \dots e_{2\beta_1}^{\beta_2} e_{1\beta}^{\beta_1} \\ &= (-1)^{p(\alpha)p(\beta)+p(\beta_1)+\dots+p(\beta_{L-1})} e_{1\beta}^{\beta_1} e_{2\beta_1}^{\beta_2} \dots e_{L\beta_{L-1}}^\alpha \\ &= (-1)^{p(\alpha)p(\beta)} e_{1\beta}^\alpha P_{12} \dots P_{L-1L} \\ &= (-1)^{p(\alpha)p(\beta)} e_{1\beta}^\alpha \hat{U}, \end{aligned} \quad (5.355)$$

y la demostración de (5.354) esta completa.

Ahora ilustraremos la ecuación (5.353) con el ejemplo del modelo de Hubbard. Es más natural dividir la matriz de monodromía de 4×4 del modelo de Hubbard en cuatro bloques de 2×2 ,

$$\mathcal{T}(\lambda) = \begin{pmatrix} D_1^1(\lambda) & C_1^1(\lambda) & C_2^1(\lambda) & D_2^1(\lambda) \\ B_1^1(\lambda) & A_1^1(\lambda) & A_2^1(\lambda) & B_2^1(\lambda) \\ B_1^2(\lambda) & A_1^2(\lambda) & A_2^2(\lambda) & B_2^2(\lambda) \\ D_1^2(\lambda) & C_1^2(\lambda) & C_2^2(\lambda) & D_2^2(\lambda) \end{pmatrix} \quad (5.356)$$

Esta estructura de bloques refleja la simetría discreta y la simetría de $SO(4)$, que está conectada a los bloques $A(\lambda)$ y $D(\lambda)$ de la matriz de monodromía. Usando el mismo esquema de fermionización que en las secciones previas obtenemos

$$c_{n,\uparrow}^\dagger = \hat{U}^{n-1}(C_1^1(0) + B_2^2(0))\hat{U}^{L-n}, \quad (5.357a)$$

$$c_{n,\uparrow} = \hat{U}^{n-1}(B_1^1(0) + C_2^2(0))\hat{U}^{L-n}, \quad (5.357b)$$

$$c_{n,\downarrow}^\dagger = \hat{U}^{n-1}(C_2^1(0) - B_2^1(0))\hat{U}^{L-n}, \quad (5.357c)$$

$$c_{n,\downarrow} = \hat{U}^{n-1}(B_1^2(0) - C_1^2(0))\hat{U}^{L-n}. \quad (5.357d)$$

Los operadores del lado derecho son elementos de la matriz de monodromía (5.356) evaluados en $\lambda = 0$. Hay fórmulas similares para los operadores de espín locales. En el caso inhomogeneo el término \hat{U}^{n-1} y \hat{U}^{L-n} son reemplazados por el producto de la super traza de $\mathcal{T}(\lambda)$ evaluada en la inhomogeneidad.

5.7. Ansatz algebraico de Bethe para el modelo de Hubbard

Para poder aplicar el ansatz algebraico de Bethe son necesarias las relaciones de conmutación entre los elementos de la matriz de monodromía, obtenidas en el álgebra de Yang-Baxter, para diagonalizar la matriz de transferencia. Además, es necesario que la matriz de monodromía actúe triangularmente en un estado de pseudo vacío apropiado, de modo que el pseudo vacío sea un estado propio de los operadores de la diagonal, este requisito lo cumple el modelo de Hubbard. Sin embargo, no existe una receta general para el ansatz algebraico de Bethe. Dependiendo de la estructura de la R-matriz, el ansatz algebraico de Bethe, puede ser una tarea difícil.

Para el caso del modelo de Hubbard, la construcción del ansatz algebraico de Bethe se mantuvo como un problema importante durante bastante tiempo. Comentemos los motivos: (i) El álgebra de Yang-Baxter para una R-matriz

de 16×16 tiene 256 relaciones de conmutación y no es una herramienta conveniente para los cálculos, siempre que no se identifique una subestructura de las relaciones de conmutación. (ii) Además, la parametrización de las cargas de Boltzmann de la R-matriz (5.219) en términos de λ y μ es inconveniente, debido a la restricción (5.193), y no cae en el esquema habitual de clasificación de R-matrices racionales, trigonométricas o elípticas. La R-matriz no tiene forma de diferencia ($\lambda - \mu$). Sabemos, sin embargo, por la solución del ansatz de Bethe que el "problema de espín" del modelo de Hubbard está íntimamente relacionado con la R-matriz racional de la cadena de espín XXX (o el modelo de 6 vértices con cargas de Boltzmann racionales). Por lo tanto, debe haber una "estructura oculta de 6 vértices" dentro del álgebra Yang-Baxter generada por la R-matriz (5.219). (iii) El hecho de que las ecuaciones de Lieb-Wu puedan ser generadas formalmente por el álgebra de Yang-Baxter conectada con la R-matriz invariante de 3×3 de $\mathfrak{gl}(1|2)$ (ver [43, 54]) deja la posibilidad de que hay un ansatz algebraico de Bethe que no se basa en la R-matriz de Shastry y está aún por descubrirse. (iv) La matriz de monodromía contiene demasiados operadores de creación lo que dificulta identificar los operadores relevantes para el ansatz algebraico de Bethe.

Las dificultades relacionadas con la estructura del álgebra de Yang-Baxter para el modelo de Hubbard fueron superadas por Martins y Ramos, quienes construyeron un ansatz algebraico de Bethe en [55, 56] (ver también [57]). Los puntos clave en su análisis fueron el descubrimiento de una estructura de 6 vértices escondida dentro del álgebra Yang-Baxter y una construcción recursiva de los vectores propios, que se inspiró en la obra de Tarasov [58] del ansatz algebraico de Bethe para el modelo de Izergin-Korepi. Martín y Ramos llegaron a la estructura oculta de 6 vértices a través del análisis de un modelo de vértice racional generado por el enlace de dos representaciones cuadráticas de $Y(\mathfrak{gl}(1|2))$ [59]. Este enlace es un matriz de 16×16 con 36 cargas de Boltzmann que no se anulan en la misma posición que nuestra R-matriz (5.219).

En la siguiente sección se introducirá una simetría adicional del modelo de Hubbard, esta no está directamente relacionada con la estructura de 6 vértices del álgebra de Yang-Baxter pero extiende las simetrías $\mathfrak{su}(2)$ encontradas anteriormente.

5.8. La simetría Yangiana del modelo de Hubbard

En esta sección estudiaremos otra pieza de la estructura algebraica del modelo de Hubbard. Como observó por primera vez Uglov y Korepin [60], el hamiltoniano de Hubbard de una línea infinita es invariante bajo la acción de la suma directa de dos grupos cuánticos llamados Yangianos. En [61] se muestra el problema en un contexto más general. Introducimos dos representaciones de pares de fermiones del grupo cuántico Yangiano $Y(su(2))$ que conmutan con la versión trigonométrica [4] e hiperbólica [5, 6] del hamiltoniano de Hubbard con salto al vecino más próximo. En ambos casos las representaciones son mutuamente conmutativas, entonces podemos combinarlas en una representación $Y(su(2)) \otimes Y(su(2))$. Los generadores de la simetría Yangiana del modelo de Hubbard (con salto a los vecinos próximos) y una serie de otros modelos interesantes como las cadenas de espín de Haldane-Shastry [71, 72] se obtienen como casos especiales de nuestro resultado general. Los grupos cuánticos son álgebras de Hopf, como las estudiadas en la sección (3.13) con la característica de que su coproducto $\Delta(A)$ no es simétrico.

5.8.1. Introducción

Los grupos cuánticos fueron introducidos por Drinfeld [7, 62]. Su intención original era poner lo que llamamos álgebra de Yang-Baxter en el contexto matemáticamente más convencional de las álgebras de Hopf. Los Yangianos son un grupo cuántico especial. Su representación teórica [63, 64] está íntimamente relacionado con la clasificación de sistemas cuánticos integrables con R-matriz racionales.

Más tarde [65] se hizo evidente que los Yangianos también juega un papel importante como una simetría oculta adicional del sistema integrable y además [66], los Yangianos son parte del álgebra de la simetría de sistemas integrables muy estudiados como el modelo de Heisenberg de vecinos próximos. Esta simetría se ha estudiado por mucho tiempo, para modelos con interacciones entre vecinos próximos, los cuales son incompatibles con las condiciones de frontera periódicas y por esa razón no combina con el ansatz de Bethe.

5.8.2. Hamiltoniano de salto de rango variable

Consideramos una variante del modelo de Hubbard con amplitud de salto más general:

$$H = \sum_{j,k} t_{jk} c_{j,a}^\dagger c_{k,a} + u \sum_j (1 - 2n_{j\uparrow})(1 - 2n_{j\downarrow}), \quad (5.358)$$

donde $t_{jk} = t_{j-k}$ es una función de la diferencia entre los índices de posición y

$$t_n = \begin{cases} -i \sinh(\kappa) \sinh^{-1}(\kappa n) & \text{para } n \neq 0 \\ 0 & \text{para } n = 0 \end{cases} \quad (5.359)$$

El hamiltoniano (5.358) es hermitiano si y sólo si la matriz de salto es $t_{jk} = \bar{t}_{kj}$. Haciendo $\kappa = a + ib$ en la definición (5.359), vemos que el requisito de hermiticidad del hamiltoniano es equivalente a $a = 0$ o $b = m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$. Más aún, para el caso $b = m\pi$ es fácil reconocer la equivalencia de norma con el caso $b = 0$. Por lo tanto, nos limitamos a valores puramente reales o puramente imaginarios de κ . De forma más precisa, nuestras opciones de κ son $\kappa = i\pi/N$ para una red finita con N posiciones (caso trigonométrico) y $\kappa > 0$ para una red infinita (caso hiperbólico). La escala de energía ha sido elegida de tal forma que la amplitud de salto entre posiciones vecinas tiene valor absoluto 1. La suma en los índices va desde 0 a $N - 1$ en el caso trigonométrico y sobre todos los enteros en el caso hiperbólico. El límite termodinámico del modelo trigonométrico y el límite $\kappa \rightarrow 0$ del modelo hiperbólico coinciden. En ambos casos t_{jk} se convierte en $-i/(j - k)$. El modelo es llamado modelo de Hubbard $1/r$ o modelo quirral de Hubbard. En el límite $\kappa \rightarrow \infty$, el modelo hiperbólico se convierte bajo una transformación local de norma en un modelo de Hubbard de vecinos cercanos.

Es interesante notar que las amplitudes de salto trigonométrica e hiperbólica pueden ser interpretadas como una q -deformación de salto $1/r$. La noción de la q -deformación está definida por $r_q = (q^r - q^{-r})/(q - q^{-1})$. Haciendo q igual a e^κ la amplitud de salto se convierte en $t_{jk} = -i/(j - k)_q$. Para entender el significado de la física de las clases de amplitudes de salto anteriores tenemos que considerar la relación de dispersión del modelo libre $u = 0$ [5, 77, 4, 61]. Para el caso trigonométrico tenemos

$$\epsilon(p) = \sum_{n=1}^{N-1} t_n e^{ipn} = \frac{N}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{N}\right)(\pi - p), \quad (5.360)$$

donde $p = 2\pi(m + 1/2)/N$, $m = 0, \dots, N - 1$. Esto nos da $\epsilon(p) = \pi - p$ en el límite termodinámico. La relación de dispersión (5.360) es lineal en

la primera zona de Brillouin, el modelo es quirral. Contiene sólo partículas moviéndose a la izquierda. En el caso hiperbólico la relación de dispersión es

$$\epsilon(p) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n e^{ipn} = 2 \sinh(\kappa) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(pn)}{\sinh(\kappa n)}. \quad (5.361)$$

La última expresión se reconoce fácilmente como, hasta una redefinición de escalas, la derivada logarítmica de la función theta de Jacobi ϑ_4 [67].

La transformación local de norma $c_{j,a} \rightarrow e^{i\varphi_j} c_{j,a}$, φ_j real, no altera las relaciones de anticonmutación entre los operadores de Fermi. La densidad de electrones $n_j = n_{j,\uparrow} + n_{j,\downarrow}$ es invariante bajo esta transformación, de ahí que la parte de interacción del hamiltoniano (5.358) también sea invariante. Esto significa que siempre podemos usar la transformación local de norma para modificar el término de salto a nuestra conveniencia. El modelo modificado será completamente equivalente al modelo original. Consideremos el ejemplo $\varphi_j = j\pi$. Esta transformación introduce un factor $(-1)^{j-k}$ en la expresión para las amplitudes de salto y cambia las relaciones de dispersión por medio período. Usando esta transformación, nuestra convención cumplen con la convención de Gebhard y Ruckenstein [4]. Para recuperar el modelo de Hubbard de vecinos cercanos en la forma familiar (5.30), no es suficiente considerar $\kappa \rightarrow \infty$. Sino que además tenemos que aplicar una transformación de norma con $\varphi_j = j\pi/2$. Esta transformación elimina el factor i de enfrente de la amplitud de salto, cambia la amplitud de salto a una función par y modifica la relación de dispersión por un cuarto de período. Por lo tanto, la parte inferior cuadrática de la banda sinusoidal se desplaza a $p = 0$.

Para nuestro hamiltoniano (5.358) el papel de la transformación de Shiba (5.58) es tomado por

$$c_{j,\downarrow} \rightarrow c_{j,\downarrow}^\dagger. \quad (5.362)$$

Esta transformación deja a todo hamiltoniano de la forma (5.358) con matriz de salto antisimétrica invariante. Sin embargo, el operador de espín total se mapea a un nuevo operador independiente. Por lo tanto, la aparición de dos simetrías $su(2)$ es genérica para los modelos de Hubbard con amplitudes de salto antisimétricas. El modelo de Hubbard de vecinos cercanos ordinario tiene dos simetrías $su(2)$, ya que es equivalente al modelo con amplitudes de salto antisimétricas obtenidas con el límite $\kappa \rightarrow \infty$ de la versión hiperbólica de nuestro hamiltoniano (5.358).

5.8.3. Construcción de los generadores Yangianos

Ahora presentaremos una construcción de los generadores de la simetría de Yangiana del hamiltoniano (5.358). Los generadores se escriben como su-

mas que involucran los operadores de corriente local S_{jk}^0, S_{jk}^α , que introducimos en las primeras secciones del capítulo (ver (5.72)).

El álgebra de los operadores de corriente es bastante rica. Primero tenemos los conmutadores calculados anteriormente

$$[S_{jk}^0, S_{lm}^0] = \delta_{kl}S_{jm}^0 - \delta_{mj}S_{lk}^0, \quad (5.363a)$$

$$[S_{jk}^0, S_{lm}^\alpha] = \delta_{kl}S_{jm}^\alpha - \delta_{mj}S_{lk}^\alpha, \quad (5.363b)$$

$$[S_{jk}^\alpha, S_{lm}^\beta] = \delta^{\alpha\beta}(\delta_{kl}S_{jm}^0 - \delta_{mj}S_{lk}^0) + i\epsilon^{\alpha\beta\gamma}(\delta_{kl}S_{jm}^\gamma - \delta_{mj}S_{lk}^\gamma). \quad (5.363c)$$

Sin embargo, hay más relaciones de anticonmutadores que son fáciles de derivar de forma similar a las relaciones anteriores

$$S_{jk}^\alpha S_{lm}^\alpha + S_{jk}^0 S_{lm}^0 + 2S_{jm}^0 S_{lk}^0 = 4\delta_{kl}S_{jm}^0 + 2\delta_{lm}S_{jk}^0, \quad (5.364a)$$

$$S_{jk}^0 S_{lm}^\alpha + S_{lm}^0 S_{jk}^\alpha + S_{lk}^0 S_{jm}^\alpha + S_{jm}^0 S_{lk}^\alpha = \delta_{jk}S_{lm}^\alpha + \delta_{lm}S_{jk}^\alpha + \delta_{lk}S_{jm}^\alpha + \delta_{jm}S_{lk}^\alpha, \quad (5.364b)$$

$$S_{jk}^\alpha S_{lm}^\beta + S_{jk}^\beta S_{lm}^\alpha + S_{jm}^\alpha S_{lk}^\beta + S_{jm}^\beta S_{lk}^\alpha = \delta^{\alpha\beta}(S_{jm}^0(2\delta_{lk} - S_{lk}^0) + S_{jm}^\gamma S_{lk}^\gamma), \quad (5.364c)$$

$$-i\epsilon^{\alpha\beta\gamma}S_{jk}^\beta S_{lm}^\gamma + S_{jm}^0 S_{lk}^\alpha + S_{lk}^0 S_{jm}^\alpha = 2\delta_{kl}S_{jm}^\alpha + \delta_{jk}S_{lm}^\alpha - \delta_{lm}S_{jk}^\alpha. \quad (5.364d)$$

Las ecuaciones (5.363) y (5.364) generan una gran lista de relaciones sucesivas menos generales si consideramos sistemáticamente todas las combinaciones posibles de índices de posición. Al generar esta lista, puede resultar conveniente introducir S_j^0 como notación abreviada para el operador del número de partículas.

Reescribimos el hamiltoniano (5.358) en términos de los operadores S_{jk}^0 como

$$H = \sum_{j,k} t_{jk} S_{jk}^0 + 2u \sum_j ((S_j^0 - 1)^2 - 1/2). \quad (5.365)$$

Como el número de partículas $\hat{N} = \sum_j S_j^0$ se conserva, solo el término $(S_j^0)^2$ es relevante en la parte de la interacción del hamiltoniano. El otro término puede ser removido mediante un cambio en el potencial químico.

Olvidemos temporalmente la definición (5.359) y consideremos el hamiltoniano (5.365) con una matriz de salto antisimétrica no especificada $t_{jk} = -t_{kj}$. Para $\alpha = x, y, z$ definimos los operadores

$$J^\alpha = \frac{1}{2} \sum_{j,k} [(f_{jk} + h_{jk}(S_j^0 + S_k^0 - 2))S_{jk}^\alpha + 4g_{jk}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}S_j^\beta S_k^\gamma], \quad (5.366)$$

donde g_{jk} y h_{jk} son funciones impares y $f_{jj} = g_{jj} = h_{jj} = 0$ por convención. Usando las ecuaciones (5.363) y (5.364) se puede comprobar que H conmuta

con J^α si y sólo si las siguientes ecuaciones funcionales para los coeficientes se satisfacen

$$t_{jk} = h_0 h_{jk}, \quad (5.367a)$$

$$(g_{jl} - g_{kl})h_{jk} = \frac{i}{2} h_{jl} h_{kl}, \quad j \neq k \neq l \neq j, \quad (5.367b)$$

$$iu f_{jk}/h_0 + g_{jk} h_{jk} = -\frac{i}{4} \sum_l h_{jl} h_{kl}, \quad j \neq k, \quad (5.367c)$$

$$\sum_l (f_{jl} h_{kl} - f_{lk} h_{lj}) = 0. \quad (5.367d)$$

Donde h_0 es un parámetro libre que fija la escala para J^α .

Las únicas soluciones de la ecuación (5.367) corresponden a las amplitudes de salto del caso trigonométrico e hiperbólico (5.359) consideradas antes. En el caso trigonométrico encontramos

$$f_{jk} = 0, \quad g_{jk} = \frac{1}{2} \cot(\pi(j-k)/N), \quad h_{jk} = i \sin^{-1}(\pi(j-k)/N), \quad (5.368)$$

mientras que la solución en el caso hiperbólico es

$$f_{jk} = \frac{\sinh(\kappa)(j-k)}{2u \sinh(\kappa)(j-k)}, \quad g_{jk} = \frac{1}{2} \cot(\kappa(j-k)), \quad h_{jk} = i \sinh^{-1}(\kappa(j-k)). \quad (5.369)$$

El parámetro h_0 tiene que ser real para que J^α sea autoadjunto. Eligiendo $h_0 = -\sin(\pi/N)$ en el caso trigonométrico y $h_0 = -\sinh(\kappa)$ en el caso hiperbólico regresamos a nuestra definición (5.359) de amplitudes de salto. Es un hecho inesperado que J^α no dependa de u en el caso trigonométrico, donde, por lo tanto, la parte de salto y la parte de interacción del hamiltoniano conmuta por separado con J^α . Las cargas J^α juegan el papel dentro del modelo de Hubbard, de las cargas no locales introducidas en el capítulo 4. Sin embargo, ahora al tener varias cargas locales y varias no locales la condición de curvatura cero va a traducirse en una condición más complicada, la llamada relación de Yang-Serre.

Los operadores J^α son de un tipo diferente a los operadores conservados generados por el logaritmo de la matriz de transferencia del modelo de Hubbard. De hecho, resulta que los operadores J^α combinados con los operadores de espín S^α (ver ecuación (5.65)) generan una representación de $Y(su(2))$ Yangiana de Drinfeld [7], es decir, los operadores de espín S^α y las cantidades conservadas J^α satisfacen las relaciones

$$[S^\lambda, S^\mu] = f_{\lambda\mu\nu} S^\nu, \quad (5.370a)$$

$$[S^\lambda, J^\mu] = f_{\lambda\mu\nu} J^\nu, \quad (5.370b)$$

$$[[J^\lambda, J^\mu], [S^\rho, J^\sigma]] + [[J^\rho, J^\sigma], [S^\lambda, J^\mu]] = -4\delta(a_{\lambda\mu\nu\alpha\beta\gamma}f_{\rho\sigma\nu} + a_{\rho\sigma\nu\alpha\beta\gamma}f_{\lambda\mu\nu}) \{S^\alpha, S^\beta, J^\gamma\}, \quad (5.370c)$$

donde $\delta = -1$ en el caso trigonométrico, $\delta = 1$ en el caso hiperbólico y usamos las abreviaciones

$$f_{\lambda\mu\nu} = i\epsilon^{\lambda\mu\nu} \quad (5.371a)$$

$$a_{\lambda\mu\nu\alpha\beta\gamma} = f_{\lambda\alpha\rho}f_{\mu\beta\sigma}f_{\nu\gamma\tau}f_{\rho\sigma\tau}, \quad (5.371b)$$

$$\{x_1, x_2, x_3\} = \frac{1}{6} \sum_{i \neq j \neq k \neq i} x_i x_j x_k \quad (5.371c)$$

La ecuación (5.370a) no es más que la relación de conmutación de $su(2)$ entre los operadores de espín. La ecuación (5.370b) significa que J^α transforma como la representación vectorial de $su(2)$ y es fácil confirmarlo para nuestra J^α . (5.370c) es llamada relación de Yang-Serre. Debido a que (5.370b) y (5.370c) son homogéneas podemos introducir un parámetro de deformación, digamos $h^2 \neq 0$ en el lado izquierdo de la relación Yang-Serre (5.370c). Debido a que este parámetro solamente fija la escala de J^α y no tiene un significado físico más profundo lo suprimimos aquí. Las ecuaciones (5.370) fueron comprobadas mediante cálculos directos en [61]. La relación de Yang-Serre en el contexto de álgebras de Hopf puede verse como la condición que el coproducto de $\Delta(S^\alpha)$ y $\Delta(J^\alpha)$ es un homomorfismo. Esto se mostrará en el apéndice E.

Bajo la transformación (5.362) los generadores S^α, J^β se transforman en un conjunto independiente de generadores S'^α, J'^β de otra representación del Yangiano $Y(su(2))$. Además, las dos representaciones conmutan mutuamente, entonces podemos combinarlas en una representación de suma directa $Y(su(2)) \oplus Y(su(2))$. Su conmutatividad mutua es no trivial. Depende de la forma específica de las amplitudes de salto t_{jk} y de las ecuaciones funcionales (5.367). Por lo tanto, se puede decir que es de "origen dinámico". Por supuesto, aplicando una transformación de norma local con parámetros $\varphi_j = j\pi/2$ a los operadores S'^\pm se convierten en η^\pm y S'^z se convierte en η^z . Entonces, una de las representaciones Yangianas se extiende a la representación de espín de $su(2)$ mientras que la otra se extiende a la representación η -espín.

Parece bastante difícil verificar la validez de las relaciones de Yang-Serre para nuestros operadores J^α con la formulación original (5.370c). Podemos utilizar la siguiente simplificación en su lugar: sea

$$K^\alpha = -\epsilon^{\alpha\beta\gamma}[J^\beta, J^\gamma] - 4\delta(S^\beta)^2 S^\alpha. \quad (5.372)$$

Luego, con un cálculo un poco complicado es posible mostrar que (5.370c) se reduce a

$$[J^\alpha, K^\beta] + [J^\beta, K^\alpha] = 0. \quad (5.373)$$

El lado izquierdo de (5.373) tiene una propiedad que resulta muy útil en cálculos prácticos. Esta no tiene traza. Suponiendo que nos dan un operador J^α , ya sabemos que transforma como un vector en la representación de $su(2)$. Este conocimiento nos asegura la identidad $[J^\alpha, K^\alpha] = 0$. Por lo tanto, es suficiente demostrar que el lado izquierdo de la ecuación (5.373) es proporcional a $\delta^{\alpha\beta}$. Esta es una simplificación severa, ya que la simetrización del conmutador produce varios términos proporcionales a $\delta^{\alpha\beta}$, que pueden ser despreciados de acuerdo a la definición anterior. En nuestro caso la expresión explícita de K^α es

$$\begin{aligned} K^\alpha = \frac{1}{2} \sum_{j,k,l} \left\{ 8(8g_{jk}g_{jl} - \delta)S_j^\beta S_k^\beta S_l^\alpha + 2A_{jl}A_{lk}S_{jk}^\alpha - 8iA_{jk}(g_{jl} - g_{kl})S_{jk}^0 S_l^\alpha \right. \\ \left. + 4A_{jk}(g_{jl} + g_{kl})\epsilon^{\alpha\beta\gamma} S_{jk}^\beta S_l^\gamma + ih_{jl}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}(A_{jk}S_{jk}^\beta - A_{kj}S_{kj}^\beta)(S_{jl}^\gamma - S_{lj}^\gamma) \right\}, \end{aligned} \quad (5.374)$$

donde $A_{jk} = f_{jk} + h_{jk}(S_j^0 + S_k^0 - 2)$. Para comprobar (5.373) tenemos que usar la siguiente relación entre los coeficientes de f_{jk} , g_{jk} , h_{jk} , además de las ecuaciones funcionales definidas anteriormente

$$f_{jk}(g_{jl} - g_{kl}) = \frac{i}{2}(f_{jl}h_{kl} - f_{kl}h_{jl}), \quad j \neq k \neq l \neq j, \quad (5.375a)$$

$$g_{jk}g_{jl} + g_{kl}g_{kj} + g_{lj}g_{lk} = \frac{\delta}{4}, \quad j \neq k \neq l \neq j, \quad (5.375b)$$

$$4g_{jk}^2 + h_{jk}^2 = \delta, \quad j \neq k. \quad (5.375c)$$

Donde no hay suma sobre índices repetidos y $\delta = 1$ en el caso hiperbólico y $\delta = -1$ en el caso trigonométrico. La homogeneidad de las redes no se ha utilizado en la comprobación de la relación Yangiana de Serre. Sin embargo, es necesario garantizar la conmutatividad de J^α con el hamiltoniano. Esta situación es similar al caso de las simétricas yangianas de las cadenas de espín. Por lo tanto, suponemos (como en [61]) la existencia de un hamiltoniano de Hubbard de largo alcance con simetría Yangian en una red no homogénea. En analogía con el caso de la cadena de espín [68], el generador de la simetría Yangiana se podría construirse agregando "términos potenciales" al generador de Yang de segundo orden K^α , ecuación (5.372).

Hay que enfatizar que la simetría Yangiana no implica integrabilidad. Sin embargo, parece probable que los modelos considerados aquí sean exactamente solubles, y son casos especiales de un modelo simétrico no-Yangiano

más general, más exacto y soluble, con amplitudes de salto elípticas, que se sabe tienen operadores conservados adicionales de tipo no Yangiano [69].

5.8.4. Casos especiales

Nuestra representación (5.366) de los generadores J^α del Yangiano $Y(su(2))$ tiene dos parámetros libres κ y u en el caso hiperbólico. Esto ofrece la posibilidad de considerar varios casos de límites. Otra posibilidad viene de considerar la restricción del espacio de estados de la cadena de espines con cada posición de la red ocupado exactamente por un electrón. Como veremos a continuación, esta restricción tiene sentido tanto en el caso trigonométrico como en el hiperbólico.

Hemos demostrado anteriormente que el hamiltoniano Hubbard ordinario es un caso especial del hamiltoniano (5.358) con amplitudes de salto hiperbólico y se recupera en el límite $\kappa \rightarrow \infty$ a través de una transformación de norma local $c_{j,a} \rightarrow i^j c_{j,a}$. Vamos a aplicar el mismo procedimiento al generador de primer nivel J^α de la representación Yangiana. Para $\kappa \rightarrow \infty$ las soluciones (5.369) de las ecuaciones funcionales (5.367) tienen los límites $f_{jk} = \delta_{|j-k|,1}/2u$, $g_{jk} = \text{signo}(j-k)/2$, $h_{jk} = 0$. Así obtenemos

$$J^\alpha = \frac{i}{4u} \sum_j (S_{jj+1}^\alpha - S_{jj-1}^\alpha) - 2 \sum_{j < k} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} S_j^\beta S_k^\gamma \quad (5.376)$$

para $\alpha = x, y, z$. Estos operadores son generadores de la simetría Yangiana del modelo de Hubbard en una red infinita. Los generadores Yangianos E_1 , F_1 y H_1 de Uglov y Korepin [60] son combinaciones lineales de estos operadores, $E_1 = 2u(J^x + iJ^y)$, $F_1 = 2u(J^x - iJ^y)$ y $H = 4uJ^z$.

Manteniendo κ fijo, pero enviando u al infinito obtenemos otro caso límite interesante.

Definamos

$$J_0^\alpha = \frac{1}{2} \sum_{j,k} [h_{jk}(S_j^0 - S_k^0 - 2)S_{jk}^\alpha + 4g_{jk}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}S_j^\beta S_k^\gamma], \quad (5.377)$$

$$J_1^\alpha = \frac{u}{2} \sum_{j,k} f_{jk} S_{jk}^\alpha. \quad (5.378)$$

Entonces J_1^α es independiente de u y

$$J^\alpha = J_1^\alpha + \frac{1}{u} J_0^\alpha. \quad (5.379)$$

Esta fórmula también se mantiene para el caso trigonométrico donde $f_{jk} = 0$. Es claro, que S^α y J_0^β , $\alpha, \beta = x, y, z$ generan la representación de $Y(su(2))$.

Pero cuál es el hamiltoniano invariante correspondiente a $Y(su(2))$.

Notemos que

$$[S_j^\alpha, P_0] = [J_0^\alpha, P_0] = 0 \quad (5.380)$$

donde $P_0 = \prod_j (1 - n_{j\uparrow} n_{j\downarrow})$ es el operador de proyección en el espacio con ocupación doble invariante en las posiciones de la red. Esto es consecuencia de las identidades locales

$$[S_j^\alpha, P_0] = [(S_j^0 + S_k^0 - 2)S_{jk}^\alpha, P_0] = 0 \quad (5.381)$$

que se siguen de (5.363), (5.364). Consideremos el hamiltoniano $H = T + 4uD$, donde

$$T = \sum_{j,k} t_{jk} c_{j,a}^\dagger c_{k,a}, \quad D = \sum_j n_{j,\uparrow} n_{k,\downarrow}. \quad (5.382)$$

Este hamiltoniano conmuta con J^α , ya que el hamiltoniano (5.358) conmuta con J^α y $[J^\alpha, \hat{N}] = 0$. Por lo tanto,

$$[H, J^\alpha] = [T, J_0^\alpha] + 4u[D, J_0^\alpha] + \frac{1}{u}[T, J_1^\alpha] + 4[D, J_1^\alpha] = 0 \quad (5.383)$$

para toda $u \in \mathbb{R}$. Concluimos que $[D, J_0^\alpha] = 0$, lo que demuestra nuestra petición anterior en el caso trigonométrico para la parte del salto y la parte de la interacción del hamiltoniano conmuta separadamente con J^α . Además, concluimos que $[T, J_0^\alpha] = 4[J_1^\alpha, D]$ y entonces usando (5.380) y $P_0 D = D P_0 = 0$, tenemos

$$[P_0 T P_0, J_0^\alpha] = P_0 [T, J_0^\alpha] P_0 = 4P_0 [J_1^\alpha, D] P_0 = 0. \quad (5.384)$$

Esto significa que el hamiltoniano $t = 0$

$$H_{t=0} = P_0 \sum_{j,k} t_{jk} c_{j,a}^\dagger c_{k,a} P_0, \quad (5.385)$$

con las amplitudes de salto trigonométricas e hiperbólicas (5.359) conmutan con los generadores Yangianos J_0^α . De nuevo por (5.380) también conmuta con los operadores de espín S^α . Por lo tanto, los modelos $t = 0$ trigonométricos e hiperbólicos son invariantes Yangianos.

Tenemos otra opción para especializar más los generadores J_0^α . La ecuación (5.380) implica que S^α y J_0^α dejan el espacio con un número fijo de posiciones doblemente ocupadas invariante. Más aún, $[J_0^\alpha, \hat{N}] = [S^\alpha, \hat{N}] = 0$. De ello se deduce que las restricciones de J_0^α y S^α en el espacio de estados de la cadena de espines, por ejemplo, \mathcal{H}_S , donde cada posición de la red está ocupado exactamente por un electrón, forma una representación del Yangiano

$Y(su(2))$. Ahora, como $[(S_j^0 + S_k^0 - 2), S_{jk}^\alpha] = 0$ y $S_j^0 + S_k^0 - 2$ aniquila a \mathcal{H}_S , la restricción de J_0^α en \mathcal{H}_S es

$$J_S^\alpha = 2 \sum_{j,k} g_{jk} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} S_j^\alpha S_k^\alpha. \quad (5.386)$$

La restricción de $H_{t=0}$ en \mathcal{H}_S , sin embargo elimina la identidad. Un hamiltoniano no trivial conmutativo con J_S^α tiene que construirse por medios independientes. Usando el ansatz simple

$$H_S = \sum_{j,k} s_{jk} S_j^\alpha S_k^\alpha, \quad (5.387)$$

para una función par s_{jk} haciendo $j = k$ obtenemos el conmutador

$$\begin{aligned} [H_S, J_S^\alpha] = 4i \sum_{j \neq k \neq l \neq j} [s_{jk}(g_{lj} - g_{lk}) + s_{jl}(g_{kj} - g_{kl})] S_j^\alpha S_k^\beta S_l^\beta \\ + 4i \sum_{j \neq k} s_{jk} g_{kj} S_j^\alpha (2 - S_k^0) S_k^0. \end{aligned} \quad (5.388)$$

Para que esta expresión sea cero, ambas sumas tienen que desaparecer de forma independiente. La cancelación de los términos del corchete en el primera suma es equivalente a $s_{jk} = c|t_{jk}|^2$, donde t_{jk} es la amplitud de salto (5.359) y c es una constante arbitraria. Al insertar este resultado en la segunda suma vemos que solo desaparece cuando se restringe el espacio de estados de la cadena de espines, donde podemos reemplazar S_k^0 por 1 y S_j^α por $\frac{1}{2}\sigma_j^\alpha$. En el espacio de estados de la cadena de espines, el hamiltoniano H_S se reduce al bien estudiado ([70]) hamiltoniano de Haldane-Shastry [71, 72] o a su homólogo hiperbólico [73]. La simetría Yangiana de estos modelos fue descubierta y discutida en [74, 75].

Observación. Finalmente deseamos señalar la siguiente sutileza: en el caso hiperbólico, el límite $\kappa \rightarrow \infty$ de los generadores Yangianos J_S^α da

$$J_S^\alpha = \sum_{j \neq k} \text{signo}(j - k) \epsilon^{\alpha\beta\gamma} S_j^\alpha S_k^\alpha. \quad (5.389)$$

Como vimos anteriormente, estos operadores (junto con los operadores de espín correspondientes) generan la representación de $Y(su(2))$ conmutativa con el hamiltoniano

$$H_{t=0} = -P_0 \sum_j (c_{j,a}^\dagger c_{j+1,a} + c_{j+1,a}^\dagger c_{j,a}) P_0, \quad (5.390)$$

del modelo $t = 0$ usual. Uno podría ingenuamente pensar que J_s^α (5.389) podría también conmutar con $\sum_j S_j^\alpha S_{j+1}^\alpha$ y por esa razón el hamiltoniano $t = J$

$$H_{t-J} = P_0 \left[- \sum_j (c_{j,a}^\dagger c_{j+1,a} + c_{j+1,a}^\dagger c_{j,a}) + J \sum_j S_j^\alpha S_{j+1}^\alpha \right] P_0, \quad (5.391)$$

será invariante Yangiano. Este sin embargo, no es el caso. Debido a (5.388) solo la restricción de H_{t-J} al espacio de estados de la cadena de espines, que es equivalente al hamiltoniano de Heisenberg, conmuta con $J\alpha_S$. Esto se relaciona con el hecho de que, para el modelo general J , el modelo $t = J$ no es solucionable por el ansatz anidado de Bethe [76].

Capítulo 6

Conclusiones

En esta tesis se obtuvieron los siguientes resultados.

Utilizando el formalismo hamiltoniano se construyeron las transformaciones de simetría que generan al vector de Laplace-Runge-Lenz. En la literatura no es fácil encontrar estas transformaciones y además nunca se menciona si el lagrangiano es invariante o no bajo estas transformaciones. En las ecuaciones (2.99) y (2.100) se encontraron las transformaciones explícitas y en (2.101) se mostró que el lagrangiano transforma como una derivada total.

Utilizando la teoría de los pares de Lax (2.148) obtuvimos las ecuaciones de movimiento para el problema de Kepler, en donde usamos los valores de L y M dados en (2.147), los cuales dependen de un parámetro espectral, con lo que demostramos que el parámetro espectral no modifica las ecuaciones de movimiento y se mostró que la traza de las potencias de L producen cargas conservadas.

Posteriormente en ese mismo capítulo se introdujo la idea de complejidad. Esta idea establece que mediante una transformación podemos pasar de un estado cuántico de referencia a un estado cuántico enredado $\psi_E = U\psi_R$. Por ejemplo, cuando tenemos un par de osciladores armónicos acoplados, si los reescribimos en términos de los modos normales obtenemos dos osciladores armónicos desacoplados de donde podemos calcular los eigenestados y eigenfunciones del hamiltoniano. Entonces podemos escribir la función de onda del estado acoplado como el producto de dos funciones de onda base de los osciladores individuales en términos de las variables de modo normal y pasar posteriormente a las coordenadas originales para ver el enredamiento. .

Para construir la transformación U podemos usar los operadores de posición y momento de los osciladores para construir un conjunto de entradas del operador unitario U , cada una de estas entradas actúa en la función de onda ψ_R de forma diferente y al combinarlas podemos obtener la función de onda del estado acoplado ψ_E . En esta tesis mostramos que esta idea se puede im-

plementar de manera clásica mediante las variables de ángulo acción, cuando calculamos las variables de ángulo acción del oscilador armónico desacoplado podemos mediante una transformación canónica infinitesimal llegar a las variables de ángulo acción del oscilador armónico acoplado (al reescribir en términos de los modos normales), lo que nos da la idea de que ambas ideas tanto clásica como cuántica están ligadas.

Posteriormente en el capítulo 4 usando los resultados de la sección (2.3) para el teorema de Noether obtenemos la corriente j^μ la cual se conserva, si además satisface la condición de curvatura cero (4.19) podemos definir una corriente bilocal adicional \hat{j}^μ y su correspondiente carga \hat{J} . Demostramos explícitamente que la carga \hat{J} es independiente del tiempo (4.25) y para ello usamos la conservación de la corriente j^μ y la condición de curvatura cero, así como los límites adecuados (4.24). Posteriormente en este mismo capítulo consideramos el modelo quiral de Gross-Neveu el cual tiene una simetría quiral $\mathfrak{u}(N)$, en esta tesis demostramos a detalle que el Lagrangiano (4.41) es invariante bajo la simetría quiral $\mathfrak{u}(1)$ (4.42), además encontramos que la corriente axial de este modelo no se conserva (4.53), pero se puede ver como el complemento no local de la corriente bilocal \hat{j} (4.54) la cual si se conserva. Tomando como base el resultado anterior (i.e. a las corrientes no-locales) queremos ver si es posible interpretar una simetría no local como una simetría de Noether, para ello consideramos el modelo quiral principal 2-dim (4.55), la corriente j^μ del modelo se conserva y tiene curvatura cero (4.57), cuando definimos las variaciones de campo no-locales (4.58) encontramos que el Lagrangiano se transforma como una derivada total (4.60), entonces podemos ver a la simetría no-local como una simetría de Noether no-local.

Cuando extendemos la idea de los pares de Lax a la teoría de campos generamos la matriz de monodromía a partir de la cual obtenemos las cantidades conservadas. En esta tesis calculamos explícitamente los componentes de la matriz de monodromía para el campo de Schrödinger no-lineal a partir del par de Lax L (4.81). Debido a que la matriz L debe satisfacer (4.82) y (4.83) podemos obtener T (4.94) la cual iteramos (infinitamente) hasta obtener (4.102), posteriormente desarrollamos para cada elemento de la matriz T iterando nuevamente hasta llegar a (4.113).

Para terminar este capítulo estudiamos la ecuación Korteweg-de Vries (KdV) que describe el movimiento de una onda solitaria (solitón), la ecuación KdV original es (4.144) y cuando aplicamos la transformación (4.146) obtenemos la ecuación KdV que generalmente se encuentra en la literatura (4.147). La ecuación KdV lineal admite como solución a las ondas armónicas; la ecuación KdV completa admite como solución a las ondas solitarias de la forma (4.160).

Por último, se mostró explícitamente como Gardner, Green, Kruskal y

Miura [20] desarrollaron el método de dispersión inverso clásico para resolver la ecuación de KdV.

En el caso del modelo de Hubbard se estudiaron en detalle sus simetrías (las permutaciones, las simetría espaciales, la transformaciones discretas y las simetrías $SO(4)$ de traslaciones). Como tenemos que hacer una aproximación algebraica para resolver el modelo de Hubbard introducimos el álgebra de Yang-Baxter y la ecuación de Yang Baxter (en términos de la matriz R), así como la representación fundamental (matriz L) y la R -matriz de Shastry. Demostramos explícitamente que usando (5.194) podemos obtener la matriz de Shastry (5.204) para el caso $d = 2$. Cuando hay fermiones en la teoría es necesario graduar el espacio i.e. introducir la noción de paridad, como ejemplos desarrollamos el modelo $su(2)$ -XX y el modelo $su(3)$ -XX. Como el modelo de Hubbard se puede interpretar como un modelo fundamental graduado calculamos: la R -matriz, L -matriz, R -matriz de Shastry, y el hamiltoniano de forma explícita. Por último notamos que el hamiltoniano de Hubbard es invariante bajo la acción de la suma directa de dos grupos cuánticos llamados Yangianos. Los operadores J^α (no locales) y los operadores de espín (locales) generan una representación de $Y(su(2))$ Yangiana de Drinfeld [7] del modelo, la cual satisface la relación de Yang-Serre (5.370c). Notemos que la relación de Yang-Serre en el contexto de álgebras de Hopf puede verse como la condición que el coproducto de $\Delta(S^\alpha)$ y $\Delta(J^\alpha)$ es un homomorfismo, con lo que demostramos que el álgebra de Hopf tiene una aplicación en la física.

Apéndice A

r-matriz

Vamos a demostrar el teorema 2 que nos dice:
 Los eigenvalores de L están en involución si y sólo si existe un elemento $r_{21} \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, función de las variables del espacio fase, tal que

$$\{L_1, L_2\} = [r_{12}, L_1] - [r_{21}, L_2] \quad (\text{A.1})$$

donde $r_{21} = \pi r_{12}$, π designa el operador de permutación actuando en dos copias de $g \otimes g$.

\Rightarrow Suponemos que los eigenvalores de L están en involución i.e $\{\lambda_i, \lambda_j\} = 0$. Recordamos que L está diagonalizada por U , $L = U\Lambda U^{-1}$. Como U es una función en el espacio fase y $L_1 = L \otimes 1$, $L_2 = 1 \otimes L$ tenemos:

$$\begin{aligned} \{L_1, L_2\} &= \{U_1\Lambda_1U_1^{-1}, U_2\Lambda_2U_2^{-1}\} \\ &= \{U_1, U_2\} \Lambda_1U_1^{-1}\Lambda_2U_2^{-1} + U_2\{U_1, \Lambda_2\} \Lambda_1U_1^{-1}U_2^{-1} + U_2\Lambda_2\{U_1, U_2^{-1}\} \Lambda_1U_1^{-1} \\ &+ U_1\{\Lambda_1, U_2\} U_1^{-1}\Lambda_2U_2^{-1} + U_1U_2\{\Lambda_1, \Lambda_2\} U_1^{-1}U_2^{-1} + U_1U_2\Lambda_2\{\Lambda_1, U_2^{-1}\} U_1^{-1} \\ &+ U_1\Lambda_1\{U_1^{-1}, U_2\} \Lambda_2U_2^{-1} + U_1\Lambda_1U_2\{U_1^{-1}, \Lambda_2\} U_2^{-1} + U_1\Lambda_1U_2\Lambda_2\{U_1^{-1}, U_2^{-1}\} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Hay que notar lo siguiente

$$\begin{aligned} 0 = \{I, \Lambda_i\} &= \{U_jU_j^{-1}, \Lambda_i\} = \{U_j, \Lambda_i\}U_j^{-1} + U_j\{U_j^{-1}, \Lambda_i\} \\ &\Rightarrow \{U_j, \Lambda_i\}U_j^{-1} = -U_j\{U_j^{-1}, \Lambda_i\} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

en donde $i, j = 1, 2$ y no es suma sobre j .

Usando (A.3) podemos reescribir algunos términos de (A.2) como:

$$\begin{aligned}
U_2 \{U_1, \Lambda_2\} \Lambda_1 U_1^{-1} U_2^{-1} &= U_2 \{U_1, \Lambda_2\} U_1^{-1} U_1 \Lambda_1 U_1^{-1} U_2^{-1} \\
&= U_2 \{U_1, \Lambda_2\} U_1^{-1} L_1 U_2^{-1} = U_2 \{U_1, \Lambda_2\} U_1^{-1} U_2^{-1} L_1 \\
U_1 \{\Lambda_1, U_2\} U_1^{-1} \Lambda_2 U_2^{-1} &= -U_1 \{U_2, \Lambda_1\} U_1^{-1} U_2^{-1} U_2 \Lambda_2 U_2^{-1} \\
&= -U_1 \{U_2, \Lambda_1\} U_1^{-1} U_2^{-1} L_2 = -U_1 \{U_2, \Lambda_1\} U_2^{-1} U_1^{-1} L_2 \\
U_1 U_2 \Lambda_2 \{\Lambda_1, U_2^{-1}\} U_1^{-1} &= -U_1 U_2 \Lambda_2 U_2^{-1} U_2 \{U_2^{-1}, \Lambda_1\} U_1^{-1} \\
&= U_1 L_2 \{U_2, \Lambda_1\} U_2^{-1} U_1^{-1} = L_2 U_1 \{U_2, \Lambda_1\} U_2^{-1} U_1^{-1} \\
U_1 \Lambda_1 U_2 \{U_1^{-1}, \Lambda_2\} U_2^{-1} &= U_1 \Lambda_1 U_2 U_1^{-1} U_1 \{U_1^{-1}, \Lambda_2\} U_2^{-1} \\
&= -U_1 \Lambda_1 U_2 U_1^{-1} \{U_1, \Lambda_2\} U_1^{-1} U_2^{-1} = -U_1 \Lambda_1 U_1^{-1} U_2 \{U_1, \Lambda_2\} U_1^{-1} U_2^{-1} \\
&= -L_1 U_2 \{U_1, \Lambda_2\} U_1^{-1} U_2^{-1}
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Si sumamos los cuatro términos anteriores tenemos

$$\begin{aligned}
&U_2 \{U_1, \Lambda_2\} \Lambda_1 U_1^{-1} U_2^{-1} + U_1 \{\Lambda_1, U_2\} U_1^{-1} \Lambda_2 U_2^{-1} + U_1 \Lambda_1 U_2 \{U_1^{-1}, \Lambda_2\} U_2^{-1} \\
&+ U_1 U_2 \Lambda_2 \{\Lambda_1, U_2^{-1}\} U_1^{-1} = U_2 \{U_1, \Lambda_2\} U_1^{-1} U_2^{-1} L_1 - U_1 \{U_2, \Lambda_1\} U_2^{-1} U_1^{-1} L_2 \\
&+ L_2 U_1 \{U_2, \Lambda_1\} U_2^{-1} U_1^{-1} - L_1 U_2 \{U_1, \Lambda_2\} U_1^{-1} U_2^{-1} \\
&= [U_2 \{U_1, \Lambda_2\} U_1^{-1} U_2^{-1}, L_1] - [U_1 \{U_2, \Lambda_1\} U_2^{-1} U_1^{-1}, L_2] \\
&= [q_{12}, L_1] - [q_{21}, L_2]
\end{aligned} \tag{A.5}$$

en donde tomamos $q_{12} = U_2 \{U_1, \Lambda_2\} U_1^{-1} U_2^{-1}$ y $q_{21} = U_1 \{U_2, \Lambda_1\} U_2^{-1} U_1^{-1}$.
Notemos además que:

$$\begin{aligned}
0 &= \{I, U_i\} = \{U_j U_j^{-1}, U_i\} = \{U_j, U_i\} U_j^{-1} + U_j \{U_j^{-1}, U_i\} \\
&\Rightarrow \{U_j, U_i\} U_j^{-1} = -U_j \{U_j^{-1}, U_i\} \\
0 &= \{U_i, I\} = \{U_i, U_j U_j^{-1}\} = \{U_i, U_j\} U_j^{-1} + U_j \{U_i, U_j^{-1}\} \\
&\Rightarrow \{U_i, U_j\} U_j^{-1} = -U_j \{U_i, U_j^{-1}\}
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Usando (A.6) podemos reescribir los siguientes términos:

$$\begin{aligned}
U_2\Lambda_2\{U_1, U_2^{-1}\}\Lambda_1U_1^{-1} &= U_2\Lambda_2U_2^{-1}U_2\{U_1, U_2^{-1}\}U_1^{-1}U_1\Lambda_1U_1^{-1} \\
&= -L_2\{U_1, U_2\}U_2^{-1}U_1^{-1}L_1 = -L_2\{U_1, U_2\}U_1^{-1}U_2^{-1}L_1 \\
U_1\Lambda_1\{U_1^{-1}, U_2\}\Lambda_2U_2^{-1} &= U_1\Lambda_1U_1^{-1}U_1\{U_1^{-1}, U_2\}U_2^{-1}U_2\Lambda_2U_2^{-1} \\
&= -L_1\{U_1, U_2\}U_1^{-1}U_2^{-1}L_2 \\
U_1\Lambda_1U_2\Lambda_2\{U_1^{-1}, U_2^{-1}\} &= -U_1\Lambda_1U_2\Lambda_2U_2^{-1}U_2\{U_2^{-1}, U_1^{-1}\} \\
&= -U_1\Lambda_1L_2\{U_2, U_1^{-1}\}U_2^{-1} = U_1\Lambda_1L_2U_1^{-1}U_1\{U_1^{-1}, U_2\}U_2^{-1} \\
&= U_1\Lambda_1U_1^{-1}L_2\{U_1, U_2\}U_1^{-1}U_2^{-1} = L_1L_2\{U_1, U_2\}U_1^{-1}U_2^{-1} \\
\{U_1, U_2\}\Lambda_1U_1^{-1}\Lambda_2U_2^{-1} &= \{U_1, U_2\}U_1^{-1}U_1\Lambda_1U_1^{-1}U_2^{-1}U_2\Lambda_2U_2^{-1} \\
&= \{U_1, U_2\}U_1^{-1}L_1U_2^{-1}L_2 = \{U_1, U_2\}U_1^{-1}U_2^{-1}L_1L_2
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Si ahora sumamos los cuatro términos obtenemos

$$\begin{aligned}
U_2\Lambda_2\{U_1, U_2^{-1}\}\Lambda_1U_1^{-1} + U_1\Lambda_1\{U_1^{-1}, U_2\}\Lambda_2U_2^{-1} + U_1\Lambda_1U_2\Lambda_2\{U_1^{-1}, U_2^{-1}\} \\
+ \{U_1, U_2\}\Lambda_1U_1^{-1}\Lambda_2U_2^{-1} &= -L_2\{U_1, U_2\}U_1^{-1}U_2^{-1}L_1 - L_1\{U_1, U_2\}U_1^{-1}U_2^{-1}L_2 \\
&\quad + L_1L_2\{U_1, U_2\}U_1^{-1}U_2^{-1} + \{U_1, U_2\}U_1^{-1}U_2^{-1}L_1L_2
\end{aligned} \tag{A.8}$$

si definimos $k_{12} = \{U_1, U_2\}U_1^{-1}U_2^{-1}$ vamos a tener

$$\begin{aligned}
U_2\Lambda_2\{U_1, U_2^{-1}\}\Lambda_1U_1^{-1} + U_1\Lambda_1\{U_1^{-1}, U_2\}\Lambda_2U_2^{-1} + U_1\Lambda_1U_2\Lambda_2\{U_1^{-1}, U_2^{-1}\} \\
+ \{U_1, U_2\}\Lambda_1U_1^{-1}\Lambda_2U_2^{-1} &= -L_2k_{12}L_1 - L_1k_{12}L_2 + L_1L_2k_{12} + k_{12}L_1L_2 \\
&= [k_{12}, L_2]L_1 - L_1[k_{12}, L_2] = [[k_{12}, L_2], L_1]
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Notemos lo siguiente

$$[[k_{12}, L_2], L_1] = \frac{1}{2}[[k_{12}, L_2], L_1] - \frac{1}{2}[[k_{21}, L_1], L_2] \tag{A.10}$$

en donde es necesario suponer que $L_1L_2 = L_2L_1$ i.e. $(L \otimes 1)(1 \otimes L) = (1 \otimes L)(L \otimes 1)$ y que $k_{12} = -k_{21}$. Usando (A.10) en (A.9) obtenemos

$$\begin{aligned}
U_2\Lambda_2\{U_1, U_2^{-1}\}\Lambda_1U_1^{-1} + U_1\Lambda_1\{U_1^{-1}, U_2\}\Lambda_2U_2^{-1} + U_1\Lambda_1U_2\Lambda_2\{U_1^{-1}, U_2^{-1}\} \\
+ \{U_1, U_2\}\Lambda_1U_1^{-1}\Lambda_2U_2^{-1} &= \frac{1}{2}[[k_{12}, L_2], L_1] - \frac{1}{2}[[k_{21}, L_1], L_2]
\end{aligned} \tag{A.11}$$

Ahora sustituimos (A.11) y (A.11) en (A.2).

$$\begin{aligned}
\{L_1, L_2\} &= U_1 U_2 \{\Lambda_1, \Lambda_2\} U_1^{-1} U_2^{-1} \\
&+ [q_{12}, L_1] - [q_{21}, L_2] + \frac{1}{2} [[k_{12}, L_2], L_1] - \frac{1}{2} [[k_{12}, L_1], L_2] \\
&= U_1 U_2 \{\Lambda_1, \Lambda_2\} U_1^{-1} U_2^{-1} + [q_{12} + \frac{1}{2} [k_{12}, L_2], L_1] - [q_{21} + \frac{1}{2} [k_{21}, L_1], L_2] \\
&= U_1 U_2 \{\Lambda_1, \Lambda_2\} U_1^{-1} U_2^{-1} + [r_{12}, L_1] - [r_{21}, L_2],
\end{aligned} \tag{A.12}$$

en donde usamos $r_{12} = q_{12} + \frac{1}{2} [k_{12}, L_2]$. Como los eigenvalores están en involución i.e. $\{\Lambda_1, \Lambda_2\} = 0$ tenemos el resultado deseado.

$$\{L_1, L_2\} = [r_{12}, L_1] - [r_{21}, L_2]. \tag{A.13}$$

\Leftrightarrow Ahora suponemos que existe r_{12} tal que

$$\{L_1, L_2\} = [r_{12}, L_1] - [r_{21}, L_2] \tag{A.14}$$

entonces en cualquier representación se satisface

$$\{L_1^n, L_2^m\} = [a_{12}^{n,m}, L_1] + [b_{12}^{n,m}, L_2] \tag{A.15}$$

con

$$\begin{aligned}
a_{12}^{n,m} &= \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{m-1} L_1^{n-p-1} L_2^{m-q-1} r_{12} L_1^p L_2^q \\
b_{12}^{n,m} &= - \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{m-1} L_1^{n-p-1} L_2^{m-q-1} r_{21} L_1^p L_2^q
\end{aligned} \tag{A.16}$$

considerando la traza de (A.16) y recordando que la traza de un conmutador es cero tenemos

$$\{L_1^n, L_2^m\} = 0 = \{\lambda_1^n, \lambda_2^m\} \tag{A.17}$$

entonces los eigenvalores de L están en involución.

Consideremos un ejemplo. Vamos a construir la matriz r del oscilador armónico unidimensional. Sabemos que los pares de Lax del oscilador armónico unidimensional son:

$$L = \begin{pmatrix} p & \omega q \\ \omega q & -p \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & -\omega/2 \\ \omega/2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{A.18}$$

reescribimos L en términos de θ y ρ y diagonalizamos L

$$\begin{aligned}
 \det(L - x\mathbb{I}) &= \begin{vmatrix} \rho \cos \theta - x & \rho \sin \theta \\ \rho \sin \theta & -\rho \cos \theta - x \end{vmatrix} \\
 &= (\rho \cos \theta - x)(-\rho \cos \theta - x) - \rho^2 \sin^2 \theta \\
 &= -\rho^2 \cos^2 \theta + x^2 - \rho^2 \sin^2 \theta \\
 &= x^2 - \rho^2 = 0, \quad \Rightarrow x = \pm \rho,
 \end{aligned} \tag{A.19}$$

Calculamos los vectores propios:

$$\begin{aligned}
 &\begin{pmatrix} \rho \cos \theta - \rho & \rho \sin \theta \\ \rho \sin \theta & -\rho \cos \theta - \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &(\rho \cos \theta - \rho)x + \rho \sin \theta y = 0 \\
 &\Rightarrow -2 \sin^2(\theta/2)x + 2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)y = 0 \\
 &\Rightarrow -\sin(\theta/2)x + \cos(\theta/2)y = 0 \\
 &v_1 = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{A.20}$$

$$\begin{aligned}
 &\begin{pmatrix} \rho \cos \theta + \rho & \rho \sin \theta \\ \rho \sin \theta & -\rho \cos \theta + \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\rho \sin \theta x - (\rho \cos \theta - \rho)y = 0 \\
 &\Rightarrow 2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)x + 2 \sin^2(\theta/2)y = 0 \\
 &\Rightarrow \cos(\theta/2)x + \sin(\theta/2)y = 0 \\
 &v_2 = \begin{pmatrix} \sin(\theta/2) \\ -\cos(\theta/2) \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{A.21}$$

concluimos que

$$U = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & \sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & -\cos(\theta/2) \end{pmatrix} = U^{-1} \tag{A.22}$$

y

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & -\rho \end{pmatrix} \tag{A.23}$$

Usando los resultados anteriores calculamos k_{12}

$$\begin{aligned}
k_{12} &= \{U_1, U_2\} U_1^{-1} U_2^{-1} \\
&= \{U \otimes 1, 1 \otimes U\} (U^{-1} \otimes 1)(1 \otimes U^{-1}) \\
&= \left[\left(\frac{\partial U}{\partial p} \otimes 1 \right) \left(1 \otimes \frac{\partial U}{\partial q} \right) - \left(1 \otimes \frac{\partial U}{\partial p} \right) \left(\frac{\partial U}{\partial q} \otimes 1 \right) \right] (U^{-1} \otimes U^{-1}) \\
&= \left[\frac{\partial U}{\partial p} \otimes \frac{\partial U}{\partial q} - \frac{\partial U}{\partial q} \otimes \frac{\partial U}{\partial p} \right] (U \otimes U) \\
&= \left[\frac{\partial U}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial p} \otimes \frac{\partial U}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial q} - \frac{\partial U}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial q} \otimes \frac{\partial U}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial p} \right] (U \otimes U) \\
&= \frac{\partial \theta}{\partial p} \frac{\partial \theta}{\partial p} \left[\frac{\partial U}{\partial \theta} \otimes \frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{\partial U}{\partial \theta} \otimes \frac{\partial U}{\partial \theta} \right] (U \otimes U) = 0,
\end{aligned} \tag{A.24}$$

encontramos que para este caso $r_{12} = 0$, ahora calculamos q_{12} ,

$$\begin{aligned}
q_{12} &= U_2 \{U_1, \Lambda_2\} U_1^{-1} U_2^{-1} \\
&= (1 \otimes U) \{U \otimes 1, 1 \otimes \Lambda\} (U^{-1} \otimes 1)(1 \otimes U^{-1}) \\
&= (1 \otimes U) \left[\left(\frac{\partial U}{\partial p} \otimes 1 \right) \left(1 \otimes \frac{\partial \Lambda}{\partial q} \right) - \left(1 \otimes \frac{\partial \Lambda}{\partial p} \right) \left(\frac{\partial U}{\partial q} \otimes 1 \right) \right] (U^{-1} \otimes U^{-1}) \\
&= (1 \otimes U) \left[\frac{\partial U}{\partial p} \otimes \frac{\partial \Lambda}{\partial q} - \frac{\partial U}{\partial q} \otimes \frac{\partial \Lambda}{\partial p} \right] (U \otimes U) \\
&= (1 \otimes U) \left[\frac{\partial U}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial p} \otimes \frac{\partial \Lambda}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial q} - \frac{\partial U}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial q} \otimes \frac{\partial \Lambda}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \right] (U \otimes U)
\end{aligned} \tag{A.25}$$

recordando que $p = \rho \cos \theta$ y $q = \frac{\rho}{\omega} \sin \theta$ y $p^2 + \omega^2 q^2 = \rho^2$, $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\omega q / \rho}{p / \rho} = \frac{\omega q}{p}$, calculamos las parciales

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial \theta} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial \rho} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\
\frac{\partial \theta}{\partial p} &= \frac{\partial}{\partial p} \tan^{-1}(\omega q / p) = \frac{1}{1 + (\omega q / p)^2} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\omega q}{p} \right) = \frac{p^2}{p^2 + \omega^2 q^2} \left(-\frac{\omega q}{p^2} \right) = -\frac{\omega q}{\rho^2}, \\
\frac{\partial \theta}{\partial q} &= \frac{\partial}{\partial q} \tan^{-1}(\omega q / p) = \frac{1}{1 + (\omega q / p)^2} \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\omega q}{p} \right) = \frac{p^2}{p^2 + \omega^2 q^2} \left(\frac{\omega}{p} \right) = \frac{\omega p}{\rho^2}, \\
\frac{\partial \rho}{\partial q} &= \frac{\partial}{\partial q} \sqrt{p^2 + \omega^2 q^2} = \frac{1}{2} \frac{2\omega^2 q}{\rho} = \frac{\omega^2 q}{\rho}, \\
\frac{\partial \rho}{\partial p} &= \frac{\partial}{\partial p} \sqrt{p^2 + \omega^2 q^2} = \frac{1}{2} \frac{2p}{\rho} = \frac{p}{\rho},
\end{aligned} \tag{A.26}$$

sustituimos el valor de las parciales

$$\begin{aligned}
q_{12} &= (1 \otimes U) \left[-\frac{\omega q}{2\rho^2} \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \otimes \frac{\omega^2 q}{\rho} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\omega p}{2\rho^2} \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \otimes \frac{p}{\rho} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] U \otimes U \\
&= (1 \otimes U) \left[-\frac{\omega}{2\rho^2} \frac{\rho \sin \theta}{\omega} \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \otimes \frac{\omega^2 \rho \sin \theta}{\rho \omega} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\omega}{2\rho^2} \rho \cos \theta \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \otimes \frac{\rho \cos \theta}{\rho} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] U \otimes U \\
&= (1 \otimes U) \left[-\frac{\sin \theta}{2\rho} \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \otimes \omega \sin \theta \Lambda \right. \\
&\quad \left. - \frac{\omega}{2\rho} \cos \theta \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \otimes \cos \theta \Lambda \right] U \otimes U \\
&= -\frac{\sin \theta}{2\rho} \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & -\cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \otimes \omega \sin \theta U \Lambda U \\
&\quad - \frac{\omega}{2\rho} \cos \theta \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & -\cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \otimes \cos \theta U \Lambda U \\
&= -\frac{\sin \theta}{2\rho} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \frac{\omega}{\rho} \sin \theta L - \frac{\omega \cos \theta}{2\rho} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{\rho} \cos \theta L \\
&= -\frac{\omega \sin^2 \theta}{2\rho^2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes L - \frac{\omega \cos^2 \theta}{2\rho^2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes L \\
&= -\frac{\omega}{2\rho^2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes L
\end{aligned} \tag{A.27}$$

El cual es el resultado dado en [78].

Apéndice B

Ejemplo Circuitos

En esta sección, analizaremos a profundidad algunos circuitos discretos. En particular, consideremos el ejemplo dado en la ecuación (2.114)

$$\psi_T = U_1 \psi_R = Q_{22}^{\alpha_3} Q_{21}^{\alpha_2} Q_{11}^{\alpha_1} \psi_R, \quad (\text{B.1})$$

donde la función de onda objetivo está dada en la ecuación (2.108) y la función de onda de referencia en (2.110). La cuestión es determinar los exponentes α_i de la ecuación, i.e., el número de tiempos de cualquier tipo de entrada que se aplica al circuito.

Intuitivamente, U_1 es una condición de entrada que corre de la derecha a la izquierda. La primera entrada que se aplica es Q_{11} , esta reescala el coeficiente x_1^2 de la exponencial en la función de onda Gaussiana. Después aplicamos Q_{21} , haciendo que los dos osciladores se enreden y finalmente la entrada Q_{22} reescala x_2 lo que asegura que x_2^2 aparezca como coeficiente de corrección. Comencemos con el análisis cuantitativo:

$$Q_{11}^{\alpha_1} \psi_0(x_1, x_2) = e^{\epsilon \alpha_1 / 2} \psi(e^{\epsilon \alpha_1} x_1, x_2) = \sqrt{\frac{\omega_0}{\pi}} e^{\epsilon \alpha_1 / 2} \exp \left[-\frac{\omega_1}{2} x_1^2 - \frac{\omega_0}{2} x_2^2 \right],$$

donde

$$\omega_1 \equiv e^{2\epsilon \alpha_1} \omega_0 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{2\epsilon} \log \left(\frac{\omega_1}{\omega_0} \right). \quad (\text{B.2})$$

Si ahora aplicamos la entrada Q_{21} obtenemos

$$\begin{aligned} Q_{21}^{\alpha_2} Q_{11}^{\alpha_1} \psi_0(x_1, x_2) &= \sqrt{\frac{\omega_0}{\pi}} e^{\epsilon \alpha_1 / 2} e^{i\epsilon \alpha_2 p_1} \exp \left[-\frac{\omega_1}{2} x_1^2 - \frac{\omega_0}{2} x_2^2 \right] \\ &= \sqrt{\frac{\omega_0}{\pi}} e^{\epsilon \alpha_1 / 2} \exp \left[-\frac{\omega_1}{2} (x_1 + \epsilon \alpha_2 x_2)^2 - \frac{\omega_0}{2} x_2^2 \right] \\ &= \sqrt{\frac{\omega_0}{\pi}} e^{\epsilon \alpha_1 / 2} \exp \left[-\frac{\omega_1}{2} x_1^2 - \frac{1}{2} (\omega_0 + \epsilon^2 \alpha_2^2 \omega_1) x_2^2 - \epsilon \alpha_2 \omega_1 x_1 x_2 \right]. \end{aligned}$$

Por último, reescalamos x_2 con la entrada Q_{22} :

$$\begin{aligned}
& Q_{22}^{\alpha_3} Q_{21}^{\alpha_2} Q_{11}^{\alpha_1} \psi_0(x_1, x_2) \\
&= Q_{22}^{\alpha_3} \sqrt{\frac{\omega_0}{\pi}} e^{\epsilon \alpha_1/2} \exp \left[-\frac{\omega_1}{2} x_1^2 - \frac{1}{2} (\omega_0 + \epsilon^2 \alpha_2^2 \omega_1) x_2^2 - \epsilon \alpha_2 \omega_1 x_1 x_2 \right] \\
&= \sqrt{\frac{\omega_0}{\pi}} e^{\epsilon(\alpha_1 + \alpha_3)/2} \exp \left[-\frac{\omega_1}{2} x_1^2 - \frac{1}{2} (\omega_0 + \epsilon^2 \alpha_2^2 \omega_1) e^{2\epsilon \alpha_3} x_2^2 - \epsilon \alpha_2 \omega_1 x_1 e^{\epsilon \alpha_3} x_2 \right] \\
&= \sqrt{\frac{\omega_0}{\pi}} e^{\epsilon(\alpha_1 + \alpha_3)/2} \exp \left[-\frac{\omega_1}{2} x_1^2 - \frac{\omega_2}{2} x_2^2 - \beta x_1 x_2 \right],
\end{aligned} \tag{B.3}$$

en donde consideramos:

$$\omega_2 = (\omega_0 + \epsilon^2 \alpha_2^2 \omega_1) e^{2\epsilon \alpha_3}, \quad \beta = \epsilon \alpha_2 \omega_1 e^{\epsilon \alpha_3}. \tag{B.4}$$

Del resultado anterior podemos obtener

$$\alpha_2 = \frac{1}{\epsilon} \sqrt{\frac{\omega_0}{\omega_1}} \frac{\beta}{\sqrt{\omega_1 \omega_2 - \beta^2}}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{2\epsilon} \log \left(\frac{\omega_1 \omega_2 - \beta^2}{\omega_0 \omega_1} \right), \tag{B.5}$$

Haciendo un cálculo simple podemos observar que el factor de normalización de la función de onda final se convierte en:

$$\sqrt{\frac{\omega_0}{\pi}} e^{\epsilon(\alpha_1 + \alpha_3)/2} = \frac{(\omega_1 \omega_2 - \beta^2)^{1/4}}{\sqrt{\pi}}, \tag{B.6}$$

lo es cierto para la función de onda que tiene norma uno. Es lo que esperábamos, las entradas de enredamiento y escalamiento, Q_{ij} y Q_{ii} preservan la norma cuando actúan en la función de onda.

Ahora presentamos brevemente otros ejemplos de circuitos simples para familiarizarnos más. Primero, vamos a aplicar las entrada de enredamiento antes de las entradas de escalamiento:

$$\psi_T = U_2 \psi_R = Q_{22}^{\tilde{\alpha}_3} Q_{11}^{\tilde{\alpha}_1} Q_{21}^{\tilde{\alpha}_2} \psi_R. \tag{B.7}$$

Para los propósitos de comparación notemos que, el orden de los exponentes están asociados con la misma entrada que aparece en la ecuación (B.1). Los cálculos son esencialmente como arriba y al final, solo igualamos los coeficientes

$$\omega_1 = \omega_0 e^{2\epsilon \tilde{\alpha}_1}, \quad \omega_2 = (1 + \epsilon^2 \tilde{\alpha}_2^2) \omega_0 e^{2\epsilon \tilde{\alpha}_3}, \quad \beta = \epsilon \tilde{\alpha}_2 \omega_0 e^{\epsilon(\tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_3)}. \tag{B.8}$$

Resolviendo para los exponentes α_i tenemos

$$\tilde{\alpha}_1 = \frac{1}{2\epsilon} \log \left(\frac{\omega_1}{\omega_0} \right), \quad \tilde{\alpha}_2 = \frac{1}{\epsilon} \frac{\beta}{\sqrt{\omega_1 \omega_2 - \beta^2}}, \quad \tilde{\alpha}_3 = \frac{1}{2\epsilon} \log \left(\frac{\omega_1 \omega_2 - \beta^2}{\omega_0 \omega_1} \right). \quad (\text{B.9})$$

Comparando los resultados de las ecuaciones (B.2) y (B.5) con la ecuación (B.9), vemos que los exponentes para las entradas de escalamiento son idénticos, i.e. $\alpha_1 = \tilde{\alpha}_1$ y $\alpha_3 = \tilde{\alpha}_3$, y solo el exponente para la entrada de enredamiento es diferente. Como tercer ejemplo, consideremos aplicar la entrada de enredamiento después de las entradas de escalamiento:

$$\psi_T = U_3 \psi_R = Q_{21}^{\hat{\alpha}_2} Q_{22}^{\hat{\alpha}_3} Q_{11}^{\hat{\alpha}_1} \psi_R. \quad (\text{B.10})$$

De nuevo nos saltamos los detalles de los cálculos; encontramos los coeficientes

$$\omega_1 = \omega_0 e^{2\epsilon \hat{\alpha}_1}, \quad \omega_2 = (e^{2\epsilon \hat{\alpha}_3} + \epsilon^2 \hat{\alpha}_2^2 e^{2\epsilon \hat{\alpha}_1}) \omega_0, \quad \beta = \epsilon \hat{\alpha}_2 \omega_0 e^{2\epsilon \hat{\alpha}_1}. \quad (\text{B.11})$$

Calculando los exponentes α_i tenemos

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{1}{2\epsilon} \log \left(\frac{\omega_1}{\omega_0} \right), \quad \hat{\alpha}_2 = \frac{1}{\epsilon} \frac{\beta}{\omega_1}, \quad \hat{\alpha}_3 = \frac{1}{2\epsilon} \log \left(\frac{\omega_1 \omega_2 - \beta^2}{\omega_0 \omega_1} \right). \quad (\text{B.12})$$

Comparando nuevamente con los exponentes de la ecuación (B.2) y (B.5) o la ecuación (B.9), vemos que como en la ecuación (B.9), solo el exponente para la entrada de enredamiento cambia. Consideremos un par más de ejemplos. Otro ejemplo interesante es

$$\psi_T = U_4 \psi_R = Q_{22}^{\bar{\alpha}_3} Q_{21}^{\bar{\alpha}_2} (Q_{21}^{-1} Q_{11})^{\bar{\alpha}_1} \psi_R. \quad (\text{B.13})$$

Notemos que

$$(Q_{21}^{-1} Q_{11})^n \psi(x_1, x_2) = e^{n\epsilon/2} \psi \left(e^{n\epsilon} x_1 - \epsilon e^\epsilon \frac{1 - e^{n\epsilon}}{1 - e^\epsilon} x_2, x_2 \right), \quad (\text{B.14})$$

el desarrollo es como sigue: primero, consideremos

$$Q_{11} \psi = e^{\epsilon/2} \psi(e^\epsilon x_1, x_2) \Rightarrow Q_{21}^{-1} Q_{11} \psi = e^{\epsilon/2} \psi(e^\epsilon x_1 - \epsilon e^\epsilon x_2, x_2). \quad (\text{B.15})$$

Entonces al actuar la combinación dos veces tenemos

$$\begin{aligned} (Q_{21}^{-1} Q_{11})^2 \psi &= e^{2\epsilon/2} Q_{21}^{-1} \psi(e^{2\epsilon} x_1 - \epsilon e^\epsilon x_2, x_2) \\ &= e^{2\epsilon/2} \psi(e^{2\epsilon}(x_1 - \epsilon x_2) - \epsilon e^\epsilon x_2, x_2) \\ &= e^{2\epsilon/2} \psi(e^{2\epsilon} x_1 - e^\epsilon(e^\epsilon + 1)\epsilon x_2, x_2). \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Y la tercera vez:

$$\begin{aligned} (Q_{21}^{-1}Q_{11})^3\psi &= e^{3\epsilon/2}Q_{21}^{-1}\psi(e^{2\epsilon}x_1 - e^\epsilon(e^\epsilon + 1)\epsilon x_2, x_2) \\ &= e^{3\epsilon/2}\psi(e^{3\epsilon}x_1 - e^\epsilon(e^{2\epsilon} + e^\epsilon + 1)\epsilon x_2, x_2). \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Ahora el patrón es claro, y deducimos

$$(Q_{21}^{-1}Q_{11})^n\psi = e^{n\epsilon/2}Q_{21}^{-1}\psi\left(e^{n\epsilon}x_1 - \epsilon e^\epsilon \sum_{k=0}^{n-1} e^{k\epsilon}x_2, x_2\right). \quad (\text{B.18})$$

Puesto que

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{k\epsilon} = \frac{1 - e^{n\epsilon}}{1 - e^\epsilon}, \quad (\text{B.19})$$

se convierte en (B.14), como afirmamos.

Ahora, actuando el circuito U_4 e igualando los coeficientes como antes, encontramos

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_1 &= \frac{1}{2\epsilon} \log\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right), \\ \bar{\alpha}_2 &= \frac{1}{\epsilon} \sqrt{\omega_0\omega_1} \frac{\beta}{\sqrt{\omega_1\omega_2 - \beta^2}} + \frac{1}{e^{-\epsilon} - 1} \left(1 - \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_0}}\right), \\ \bar{\alpha}_3 &= \frac{1}{2\epsilon} \log\left(\frac{\omega_1\omega_2 - \beta^2}{\omega_0\omega_1}\right). \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Desarrollando $\bar{\alpha}_2$ alrededor de $\epsilon \approx 0$, tenemos

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_2 &= \frac{1}{\epsilon} \sqrt{\frac{\omega_0}{\omega_1}} \frac{\beta}{\sqrt{\omega_1\omega_2 - \beta^2}} - \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{2} + \mathcal{O}(\epsilon)\right) \left(1 - \sqrt{\frac{\omega_0}{\omega_1}}\right) \\ &= \frac{1}{\epsilon} \left[\sqrt{\frac{\omega_0}{\omega_1}} \left(1 + \frac{\beta}{\sqrt{\omega_1\omega_2 - \beta^2}}\right) - 1 \right] - \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{\omega_0}{\omega_1}}\right) + \mathcal{O}(\epsilon). \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

En general, podemos describir la forma del circuito profundo desde el principio con un factor general $1/\epsilon$ seguido por un coeficiente determinado por los parámetros físicos que caracterizan el estado objetivo y el estado de referencia. Más general, el circuito profundo puede estar dado por un desarrollo en ϵ , comenzando con el término $1/\epsilon$ seguido por un término finito de términos y los términos potenciales involucran potencias positivas de ϵ . Sin embargo, como $\epsilon \ll 1$, determinar la complejificación esencialmente requiere encontrar el circuito que minimiza el coeficiente del término principal $1/\epsilon$. Comparando con el desarrollo de la aproximación geométrica, expresamos los

resultados en términos de las frecuencias de modo normal usando la ecuación (2.109). Si enfocamos nuestra atención en el primer circuito U_1 de la ecuación (B.1), los exponentes dados en la ecuación (B.2) y (B.5) se convierten en

$$\alpha_3 = \frac{1}{2\epsilon} \log \left(\frac{\tilde{\omega}_+ + \tilde{\omega}_-}{2\omega_0} \right), \quad \alpha_2 = \frac{1}{\epsilon} \sqrt{\frac{\omega_0}{\tilde{\omega}_+ + \tilde{\omega}_-}} \frac{\tilde{\omega}_- - \tilde{\omega}_+}{\sqrt{2\tilde{\omega}_+\tilde{\omega}_-}}, \quad (\text{B.22})$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2\epsilon} \log \left(\frac{2\tilde{\omega}_+\tilde{\omega}_-}{\omega_0(\tilde{\omega}_+ + \tilde{\omega}_-)} \right),$$

Como vimos arriba, con un procedimiento más extenso puede obtenerse el valor de la frecuencia de referencia ω_0 respecto a la frecuencia de modo normal.

Apéndice C

Matriz-R de Shastry

Vamos a demostrar explícitamente que a partir de (5.194) podemos obtener (5.204) para el caso $d = 2$.

Partimos de

$$\begin{aligned} \check{R}(\lambda, \mu) &= \beta(G(l) \otimes G(h)) \\ &\times [\check{r}(\lambda - \mu) + \frac{\alpha}{\beta} \check{r}(\lambda + \mu)(C^\dagger C^\downarrow \otimes I_{d^2})](G(-h) \otimes G(-l)), \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

vamos a utilizar las siguientes definiciones:

$$\check{R}(\lambda) = e_1^1 \otimes e_2^2 + e_2^2 \otimes e_1^1 + [e_1^1 \otimes e_1^1 + e_2^2 \otimes e_2^2] \cos \lambda + [x e_1^2 \otimes e_2^1 + x^{-1} e_2^1 \otimes e_1^2] \sin \lambda,$$

$$\check{r}(\lambda) = \check{r}_\uparrow(\lambda) \check{r}_\downarrow(\lambda),$$

$$\check{r}_\uparrow(\lambda) = \check{R}_{\beta\delta}^{\alpha\gamma}(\lambda)(e_\alpha^\beta \otimes I_d \otimes e_\gamma^\delta \otimes I_d),$$

$$\check{r}_\downarrow(\lambda) = \check{R}_{\sigma\nu}^{\rho\mu}(\lambda)(I_d \otimes e_\rho^\sigma \otimes I_d \otimes e_\mu^\nu),$$

$$\beta = \frac{\cosh(h-l)}{\cos(\lambda-\mu)} [\cos(\lambda-\mu) \cosh(h-l) \pm \cos(\lambda+\mu) \sinh(h-l)]^{-1},$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\cos(\lambda-\mu) \sinh(h-l)}{\cos(\lambda+\mu) \cosh(h-l)} = \frac{\sin(\lambda-\mu) \sinh(h+l)}{\sin(\lambda+\mu) \cosh(h+l)},$$

$$C = e_1^1 - \sum_{\alpha=2}^d e_\alpha^\alpha, \quad C^\dagger = C \otimes I_d, \quad C^\downarrow = I_d \otimes C.$$

(C.2)

Para calcular $\check{R}(\lambda)$ consideramos

$$e_1^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.3})$$

entonces los productos tensoriales van a estar dados por:

$$\begin{aligned}
 e_1^1 \otimes e_2^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = e_3^3, \\
 e_2^2 \otimes e_1^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = e_2^2,
 \end{aligned} \tag{C.4}$$

de forma similar tenemos

$$\begin{aligned}
 e_1^1 \otimes e_1^1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = e_1^1, & e_2^2 \otimes e_2^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e_4^4, \\
 e_1^2 \otimes e_2^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = e_2^3, & e_2^1 \otimes e_1^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = e_3^2,
 \end{aligned} \tag{C.5}$$

usando los productos anteriores obtenemos

$$\check{R}(\lambda) = \begin{pmatrix} \cos \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \sin \lambda & 0 \\ 0 & x^{-1} \sin \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \lambda \end{pmatrix}, \tag{C.6}$$

a partir de lo anterior tenemos:

$$\begin{aligned}
 \check{R}_{11}^{11}(\lambda) &= \check{R}_{22}^{22}(\lambda) = \cos \lambda, & \check{R}_{12}^{12}(\lambda) &= \check{R}_{21}^{21}(\lambda) = 1, \\
 \check{R}_{21}^{12}(\lambda) &= x \sin \lambda, & \check{R}_{12}^{21}(\lambda) &= x^{-1} \sin \lambda.
 \end{aligned} \tag{C.7}$$

Para este ejemplo vamos a considerar $x = 1 = x^{-1}$.

Ahora calculamos $\check{r}(\lambda)$ recordando que $\check{r}(\lambda) = \check{r}_\uparrow(\lambda)\check{r}_\downarrow(\lambda)$ y usando (C.2) tenemos

$$\begin{aligned}
 \check{r}(\lambda) &= \check{r}_\uparrow(\lambda)\check{r}_\downarrow(\lambda) = \check{R}_{\beta\delta}^{\alpha\gamma}(\lambda)(e_\alpha^\beta \otimes I_d \otimes e_\gamma^\delta \otimes I_d)\check{R}_{\sigma\nu}^{\rho\mu}(\lambda)(I_d \otimes e_\rho^\sigma \otimes I_d \otimes e_\mu^\nu) \\
 &= \check{R}_{\beta\delta}^{\alpha\gamma}(\lambda)\check{R}_{\sigma\nu}^{\rho\mu}(\lambda)(e_\alpha^\beta \otimes e_\rho^\sigma \otimes e_\gamma^\delta \otimes e_\mu^\nu).
 \end{aligned} \tag{C.8}$$

Para β vamos a utilizar el siguiente resultado

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{\cosh(h-l)}{\cos(\lambda-\mu)} [\cos(\lambda-\mu) \cosh(h-l) \pm \cos(\lambda+\mu) \sinh(h-l)]^{-1} \\ &= \frac{\cosh(h-l)}{\cos(\lambda-\mu)} \cdot \frac{1}{\rho_4},\end{aligned}\tag{C.10}$$

en donde utilizamos

$$\begin{aligned}\rho_4(\lambda, \mu) &= \cos \lambda \cos \mu e^{l-h} + \sin \lambda \sin \mu e^{h-l} \\ &= \cos \lambda \cos \mu (\cosh(h-l) - \sinh(h-l)) + \sin \lambda \sin \mu [\sinh(h-l) + \cosh(h-l)] \\ &= (\cos \lambda \cos \mu + \sin \lambda \sin \mu) \cosh(h-l) - (\cos \lambda \cos \mu - \sin \lambda \sin \mu) \sinh(h-l).\end{aligned}$$

Enlistamos algunas de las propiedades que utilizaremos:

$$\begin{aligned}\cosh(h-l) \cosh(h+l) &= \cosh^2 h \cosh^2 l - \sinh^2 h \sinh^2 l, \\ \sinh(h-l) \sinh(h+l) &= \sinh^2 h \cosh^2 l - \cosh^2 h \sinh^2 l, \\ \cosh(h-l) \sinh(h+l) &= \cosh h \sinh h + \sinh l \cosh l, \\ \sinh(h-l) \cosh(h+l) &= \cosh h \sinh h - \sinh l \cosh l, \\ \sinh(h-l) \cosh(h-l) &= \sinh h \cosh h (\cosh^2 l + \sinh^2 l) \\ &\quad \sinh l \cosh l (\cosh^2 h + \sinh^2 h), \\ \cosh(h-l) \sinh(h+l) + \sinh(h-l) \cosh(h+l) &= 2 \cosh h \sinh h, \\ \cosh(h-l) \cosh(h+l) + \sinh(h-l) \sinh(h+l) &= \cosh^2 h + \sinh^2 h, \\ \cosh(h-l) \cosh(h+l) - \sinh(h-l) \sinh(h+l) &= \cosh^2 l + \sinh^2 l, \\ \sin(\lambda-\mu) \cos(\lambda+\mu) &= \sin \lambda \cos \lambda - \cos \mu \sin \mu, \\ \cos(\lambda-\mu) \sin(\lambda+\mu) &= \sin \lambda \cos \lambda + \cos \mu \sin \mu, \\ \Rightarrow \sin(\lambda-\mu) \cos(\lambda+\mu) + \cos(\lambda-\mu) \sin(\lambda+\mu) &= 2 \sin \lambda \cos \lambda, \\ \Rightarrow \cos(\lambda-\mu) \cos(\lambda+\mu) &= \cos^2 \lambda - \sin^2 \mu.\end{aligned}\tag{C.11}$$

Para calcular $\check{R}(\lambda, \mu)$ desarrollamos cada uno de los términos,

$$\begin{aligned}G(l) \otimes G(h) &= [\cosh(l/2)I_{d^2} + C \otimes C \sinh(l/2)] \otimes [\cosh(h/2)I_{d^2} + C \otimes C \sinh(h/2)] \\ &= \cosh(l/2) \cosh(h/2)I_{d^4} + \cosh(l/2) \sinh(h/2)I_{d^2} \otimes C \otimes C \\ &\quad + \sinh(l/2) \cosh(h/2)C \otimes C \otimes I_{d^2} + \sinh(l/2) \sinh(h/2)C \otimes C \otimes C \otimes C \\ &= \cosh(l/2) \cosh(h/2)I_{d^4} + \sinh(h/2) \cosh(l/2)A + \cosh(h/2) \sinh(l/2)B \\ &\quad + \sinh(h/2) \sinh(l/2)D \\ &= \cosh\left(\frac{h+l}{2}\right) E + \cosh\left(\frac{h-l}{2}\right) F + \sinh\left(\frac{h+l}{2}\right) G + \sinh\left(\frac{h-l}{2}\right) H.\end{aligned}\tag{C.12}$$

Si ahora hacemos $h \rightarrow -h$ y $l \rightarrow -l$ tenemos

$$\begin{aligned}
G(-h) \otimes G(-l) &= \cosh\left(\frac{-h-l}{2}\right) E + \cosh\left(\frac{-h-(-l)}{2}\right) F \\
&+ \sinh\left(\frac{-h-l}{2}\right) G + \sinh\left(\frac{-h-(-l)}{2}\right) H \\
&= \cosh\left(\frac{h+l}{2}\right) E + \cosh\left(\frac{h-l}{2}\right) F - \sinh\left(\frac{h+l}{2}\right) G - \sinh\left(\frac{h-l}{2}\right) H
\end{aligned} \tag{C.13}$$

en donde consideramos

$$\begin{aligned}
A &= \text{diag}(1, -1, -1, 1|1, -1, -1, 1|1, -1, -1, 1|1, -1, -1, 1), \\
B &= \text{diag}(1, 1, 1, 1|-1, -1, -1, -1|-1, -1, -1, -1|1, 1, 1, 1), \\
D &= \text{diag}(1, -1, -1, 1|-1, 1, 1, -1|-1, 1, 1, -1|1, -1, -1, 1), \\
E &= \text{diag}(1, 0, 0, 1|0, 1, 1, 0|0, 1, 1, 0|1, 0, 0, 1), \\
F &= \text{diag}(0, 1, 1, 0|1, 0, 0, 1|1, 0, 0, 1|0, 1, 1, 0), \\
G &= \text{diag}(1, 0, 0, 1|0, -1, -1, 0|0, -1, -1, 0|1, 0, 0, 1), \\
H &= \text{diag}(0, -1, -1, 0|1, 0, 0, 1|1, 0, 0, 1|0, -1, -1, 0).
\end{aligned} \tag{C.14}$$

A partir de las definiciones anteriores notamos que $G(l) \otimes G(h)$ y $G(-h) \otimes G(-l)$ solo tienen elementos en la diagonal.

Calculemos $C^\uparrow C^\downarrow \otimes I_{d^2}$, con $d = 2$

$$C^\uparrow C^\downarrow \otimes I_{d^2} = (C \otimes I_d)(I_d \otimes C) \otimes I_{d^2} = C \otimes C \otimes I_{d^2} = B, \tag{C.15}$$

en donde $C = e_1^1 - e_2^2$.

Para obtener la matriz \check{R} vamos a multiplicar término a término i.e.

$$\begin{aligned}
\check{R}_{jk}(\lambda, \mu) &= \beta(G(l) \otimes G(h))_{jl} \times [\check{r}_{lm}(\lambda - \mu) + \frac{\alpha}{\beta} \check{r}_{ln}(\lambda + \mu)(C^\uparrow C^\downarrow \otimes I_{d^2})_{nm}] \\
&(G(-h) \otimes G(-l))_{mk}
\end{aligned} \tag{C.16}$$

Hay que notar que algunos elementos tienen términos idénticos entonces los cálculos son los mismos.

Para \check{R}_{11} y $\check{R}_{16,16}$, entonces

$$\begin{aligned}
\check{R}_{11} = \check{R}_{16,16} &= \frac{\cosh(h-l)}{\cos(\lambda-\mu)} \cdot \frac{1}{\rho_4} \left[\cosh\left(\frac{h+l}{2}\right) + \sinh\left(\frac{h+l}{2}\right) \right] \times \\
&\left[\cos^2(\lambda-\mu) + \frac{\cos(\lambda-\mu) \sinh(h-l)}{\cos(\lambda+\mu) \cosh(h-l)} \cos^2(\lambda+\mu) \right] \cdot \left[\cosh\left(\frac{h+l}{2}\right) - \sinh\left(\frac{h+l}{2}\right) \right] \\
&= \frac{1}{\rho_4} \left[\cosh^2\left(\frac{h+l}{2}\right) - \sinh^2\left(\frac{h+l}{2}\right) \right] (\cos(\lambda-\mu) \cosh(h-l) + \cos(\lambda+\mu) \sinh(h-l)) \\
&= \frac{1}{\rho_4} [(\cos \lambda \cos \mu + \sin \lambda \sin \mu) \cosh(h-l) + (\cos \lambda \cos \mu - \sin \lambda \sin \mu) \sinh(h-l)] \\
&= \frac{1}{\rho_4} [\cos \lambda \cos \mu (\cosh(h-l) + \sinh(h-l)) + \sin \lambda \sin \mu (\cosh(h-l) + \sinh(h-l))] \\
&= \frac{1}{\rho_4} [\cos \lambda \cos \mu e^{h-l} + \sin \lambda \sin \mu e^{l-h}] = \frac{\rho_1}{\rho_4}
\end{aligned} \tag{C.17}$$

Para \check{R}_{44} y $\check{R}_{13,13}$, tenemos

$$\begin{aligned}
\check{R}_{44} = \check{R}_{13,13} &= \frac{\cosh(h-l)}{\cos(\lambda-\mu)} \cdot \frac{1}{\rho_4} \left[\cosh\left(\frac{h+l}{2}\right) + \sinh\left(\frac{h+l}{2}\right) \right] \times \\
&\left[1 + \frac{\cos(\lambda-\mu) \sinh(h-l)}{\cos(\lambda+\mu) \cosh(h-l)} \right] \cdot \left[\cosh\left(\frac{h+l}{2}\right) - \sinh\left(\frac{h+l}{2}\right) \right] \\
&= \frac{1}{\rho_4} \left[\cosh^2\left(\frac{h+l}{2}\right) - \sinh^2\left(\frac{h+l}{2}\right) \right] \left(\frac{\cosh(h-l)}{\cos(\lambda-\mu)} + \frac{\sinh(h-l)}{\cos(\lambda+\mu)} \right) \\
&= \frac{1}{\rho_4} \frac{\cosh(h-l) \cos(\lambda+\mu) + \sinh(h-l) \cos(\lambda-\mu)}{\cos(\lambda-\mu) \cos(\lambda+\mu)} \\
&= \frac{1}{\rho_4} \frac{\cosh(h-l) (\cos \lambda \cos \mu - \sin \lambda \sin \mu) + \sinh(h-l) (\cos \lambda \cos \mu + \sin \lambda \sin \mu)}{\cos^2 \lambda - \sin^2 \mu} \\
&= \frac{1}{\rho_4} \frac{\cos \lambda \cos \mu (\cosh(h-l) + \sinh(h-l)) - \sin \lambda \sin \mu (\cosh(h-l) - \sinh(h-l))}{\cos^2 \lambda - \sin^2 \mu} \\
&= \frac{1}{\rho_4} \frac{\cos \lambda \cos \mu e^{h-l} - \sin \lambda \sin \mu e^{l-h}}{\cos^2 \lambda - \sin^2 \mu} = \frac{\rho_3}{\rho_4}
\end{aligned} \tag{C.18}$$

Para \check{R}_{66} y $\check{R}_{11,11}$, tenemos

$$\begin{aligned}
\check{R}_{66} = \check{R}_{11,11} &= \frac{\cosh(h-l)}{\cos(\lambda-\mu)} \cdot \frac{1}{\rho_4} \left[\cosh\left(\frac{h+l}{2}\right) - \sinh\left(\frac{h+l}{2}\right) \right] \times \\
&\left[\cos^2(\lambda-\mu) - \frac{\cos(\lambda-\mu) \sinh(h-l)}{\cos(\lambda+\mu) \cosh(h-l)} \cos^2(\lambda+\mu) \right] \cdot \left[\cosh\left(\frac{h+l}{2}\right) + \sinh\left(\frac{h+l}{2}\right) \right]
\end{aligned} \tag{C.19}$$

$$\begin{aligned}
\check{R}_{66} &= \check{R}_{11,11} \\
&= \frac{1}{\rho_4} \left[\cosh^2\left(\frac{h+l}{2}\right) - \sinh^2\left(\frac{h+l}{2}\right) \right] (\cos(\lambda - \mu) \cosh(h-l) - \cos(\lambda + \mu) \sinh(h-l)) \\
&= \frac{1}{\rho_4} [(\cos \lambda \cos \mu + \sin \lambda \sin \mu) \cosh(h-l) - (\cos \lambda \cos \mu - \sin \lambda \sin \mu) \sinh(h-l)] \\
&= \frac{1}{\rho_4} [\cos \lambda \cos \mu (\cosh(h-l) - \sinh(h-l)) + \sin \lambda \sin \mu (\cosh(h-l) + \sinh(h-l))] \\
&= \frac{1}{\rho_4} [\cos \lambda \cos \mu e^{l-h} + \sin \lambda \sin \mu e^{h-l}] = \frac{\rho_4}{\rho_4}
\end{aligned} \tag{C.20}$$

Para \check{R}_{77} y $\check{R}_{10,10}$, tenemos

$$\begin{aligned}
\check{R}_{77} = \check{R}_{10,10} &= \frac{\cosh(h-l)}{\cos(\lambda - \mu)} \cdot \frac{1}{\rho_4} \left[\cosh\left(\frac{h+l}{2}\right) - \sinh\left(\frac{h+l}{2}\right) \right] \times \\
&\left[1 - \frac{\cos(\lambda - \mu) \sinh(h-l)}{\cos(\lambda + \mu) \cosh(h-l)} \right] \cdot \left[\cosh\left(\frac{h+l}{2}\right) + \sinh\left(\frac{h+l}{2}\right) \right] \\
&= \frac{1}{\rho_4} \left[\cosh^2\left(\frac{h+l}{2}\right) - \sinh^2\left(\frac{h+l}{2}\right) \right] \left(\frac{\cosh(h-l)}{\cos(\lambda - \mu)} - \frac{\sinh(h-l)}{\cos(\lambda + \mu)} \right) \\
&= \frac{1}{\rho_4} \frac{\cosh(h-l) \cos(\lambda + \mu) - \sinh(h-l) \cos(\lambda - \mu)}{\cos(\lambda - \mu) \cos(\lambda + \mu)} \\
&= \frac{1}{\rho_4} \frac{\cosh(h-l) (\cos \lambda \cos \mu - \sin \lambda \sin \mu) - \sinh(h-l) (\cos \lambda \cos \mu + \sin \lambda \sin \mu)}{\cos^2 \lambda - \sin^2 \mu} \\
&= \frac{1}{\rho_4} \frac{\cos \lambda \cos \mu (\cosh(h-l) - \sinh(h-l)) - \sin \lambda \sin \mu (\cosh(h-l) + \sinh(h-l))}{\cos^\lambda - \sin^\mu} \\
&= \frac{1}{\rho_4} \frac{\cos \lambda \cos \mu e^{l-h} - \sin \lambda \sin \mu e^{h-l}}{\cos^\lambda - \sin^\mu} = \frac{\rho_5}{\rho_4}
\end{aligned} \tag{C.21}$$

Para $\check{R}_{7,10}$ y $\check{R}_{10,7}$, tenemos

$$\begin{aligned}
\check{R}_{7,10} = \check{R}_{10,7} &= \frac{\cosh(h-l)}{\cos(\lambda - \mu)} \cdot \frac{1}{\rho_4} \left[\cosh\left(\frac{h+l}{2}\right) - \sinh\left(\frac{h+l}{2}\right) \right] \times \\
&\left[\sin^2(\lambda - \mu) - \frac{\cos(\lambda - \mu) \sinh(h-l)}{\cos(\lambda + \mu) \cosh(h-l)} \sin^2(\lambda + \mu) \right] \cdot \left[\cosh\left(\frac{h+l}{2}\right) + \sinh\left(\frac{h+l}{2}\right) \right] \\
&= \frac{1}{\rho_4} \left[\cosh^2\left(\frac{h+l}{2}\right) - \sinh^2\left(\frac{h+l}{2}\right) \right] \frac{\cosh(h-l)}{\cos(\lambda - \mu)} \\
&\left[1 - \cos^2(\lambda - \mu) - \frac{\cos(\lambda - \mu) \sinh(h-l)}{\cos(\lambda + \mu) \cosh(h-l)} (1 - \cos^2(\lambda + \mu)) \right]
\end{aligned} \tag{C.22}$$

$$\begin{aligned}
\check{R}_{7,10} &= \check{R}_{10,7} \\
&= \frac{1}{\rho_4} \left[\frac{\cosh(h-l)}{\cos(\lambda-\mu)} - \frac{\sinh(h-l)}{\cos(\lambda+\mu)} \right] - \frac{1}{\rho_4} [\cos(\lambda-\mu) \cosh(h-l) - \cos(\lambda+\mu) \sinh(h-l)] \\
&= \frac{1}{\rho_4} (\rho_5 - \rho_4) = -\frac{1}{\rho_4} (\rho_4 - \rho_5) = -\frac{\rho_7}{\rho_4}
\end{aligned} \tag{C.23}$$

Para $\check{R}_{4,13}$ y $\check{R}_{13,4}$, entonces

$$\begin{aligned}
\check{R}_{4,13} = \check{R}_{13,4} &= \frac{\cosh(h-l)}{\cos(\lambda-\mu)} \cdot \frac{1}{\rho_4} \left[\cosh\left(\frac{h+l}{2}\right) - \sinh\left(\frac{h+l}{2}\right) \right] \times \\
&\left[\sin^2(\lambda-\mu) + \frac{\cos(\lambda-\mu) \sinh(h-l)}{\cos(\lambda+\mu) \cosh(h-l)} \sin^2(\lambda+\mu) \right] \cdot \left[\cosh\left(\frac{h+l}{2}\right) - \sinh\left(\frac{h+l}{2}\right) \right] \\
&= \frac{1}{\rho_4} \left[\cosh^2\left(\frac{h+l}{2}\right) - \sinh^2\left(\frac{h+l}{2}\right) \right] \frac{\cosh(h-l)}{\cos(\lambda-\mu)} \\
&\left[1 - \cos^2(\lambda-\mu) + \frac{\cos(\lambda-\mu) \sinh(h-l)}{\cos(\lambda+\mu) \cosh(h-l)} (1 - \cos^2(\lambda+\mu)) \right] \\
&= \frac{1}{\rho_4} \left[\frac{\cosh(h-l)}{\cos(\lambda-\mu)} + \frac{\sinh^2(h-l)}{\cos(\lambda+\mu)} \right] - \frac{1}{\rho_4} [\cos(\lambda-\mu) \cosh(h-l) + \cos(\lambda+\mu) \sinh(h-l)] \\
&= \frac{1}{\rho_4} (\rho_3 - \rho_1) = -\frac{1}{\rho_4} (\rho_1 - \rho_3) = -\frac{\rho_8}{\rho_4}
\end{aligned} \tag{C.24}$$

Para \check{R}_{52} , $\check{R}_{8,14}$, $\check{R}_{9,3}$ y $\check{R}_{12,15}$, entonces

$$\begin{aligned}
\check{R}_{52} = \check{R}_{8,14} = \check{R}_{9,3} = \check{R}_{12,15} &= \frac{\cosh(h-l)}{\cos(\lambda-\mu)} \cdot \frac{1}{\rho_4} \left[\cosh\left(\frac{h-l}{2}\right) + \sinh\left(\frac{h-l}{2}\right) \right] \times \\
&\left[\sin(\lambda-\mu) \cos(\lambda-\mu) - \frac{\cos(\lambda-\mu) \sinh(h-l)}{\cos(\lambda+\mu) \cosh(h-l)} \cos(\lambda+\mu) \sin(\lambda+\mu) \right] \\
&\cdot \left[\cosh\left(\frac{h-l}{2}\right) - \sinh\left(\frac{h-l}{2}\right) \right] \\
&= \frac{1}{\rho_4} \left[\cosh^2\left(\frac{h-l}{2}\right) - \sinh^2\left(\frac{h-l}{2}\right) \right] (\sin(\lambda-\mu) \cosh(h-l) - \sin(\lambda+\mu) \sinh(h-l)) \\
&= \frac{1}{\rho_4} [(\sin \lambda \cos \mu - \cos \lambda \sin \mu) \cosh(h-l) - (\sin \lambda \cos \mu + \cos \lambda \sin \mu) \sinh(h-l)] \\
&= \frac{1}{\rho_4} [\sin \lambda \cos \mu (\cosh(h-l) - \sinh(h-l)) - \cos \lambda \sin \mu (\cosh(h-l) + \sinh(h-l))] \\
&= \frac{1}{\rho_4} [\sin \lambda \cos \mu e^{l-h} - \cos \lambda \sin \mu e^{h-l}] = \frac{\rho_9}{\rho_4}
\end{aligned}$$

Para \check{R}_{25} , $\check{R}_{14,8}$, $\check{R}_{3,9}$ y $\check{R}_{15,12}$, entonces

$$\begin{aligned}
\check{R}_{25} = \check{R}_{14,8} = \check{R}_{3,9} = \check{R}_{15,12} &= \frac{\cosh(h-l)}{\cos(\lambda-\mu)} \cdot \frac{1}{\rho_4} \left[\cosh\left(\frac{h-l}{2}\right) - \sinh\left(\frac{h-l}{2}\right) \right] \times \\
&\left[\sin(\lambda-\mu) \cos(\lambda-\mu) + \frac{\cos(\lambda-\mu) \sinh(h-l)}{\cos(\lambda+\mu) \cosh(h-l)} \cos(\lambda+\mu) \sin(\lambda+\mu) \right] \\
&\cdot \left[\cosh\left(\frac{h-l}{2}\right) + \sinh\left(\frac{h-l}{2}\right) \right] \\
&= \frac{1}{\rho_4} \left[\cosh^2\left(\frac{h-l}{2}\right) - \sinh^2\left(\frac{h-l}{2}\right) \right] (\sin(\lambda-\mu) \cosh(h-l) + \sin(\lambda+\mu) \sinh(h-l)) \\
&= \frac{1}{\rho_4} [(\sin \lambda \cos \mu - \cos \lambda \sin \mu) \cosh(h-l) + (\sin \lambda \cos \mu + \cos \lambda \sin \mu) \sinh(h-l)] \\
&= \frac{1}{\rho_4} [\sin \lambda \cos \mu (\cosh(h-l) + \sinh(h-l)) - \cos \lambda \sin \mu (\cosh(h-l) - \sinh(h-l))] \\
&= \frac{1}{\rho_4} [\sin \lambda \cos \mu e^{h-l} - \cos \lambda \sin \mu e^{l-h}] = \frac{\rho_{10}}{\rho_4}
\end{aligned}$$

Para \check{R}_{22} , \check{R}_{33} , $\check{R}_{14,14}$ y $\check{R}_{15,15}$, entonces

$$\begin{aligned}
\check{R}_{22} = \check{R}_{33} = \check{R}_{14,14} = \check{R}_{15,15} &= \frac{\cosh(h-l)}{\cos(\lambda-\mu)} \cdot \frac{1}{\rho_4} \left[\cosh\left(\frac{h-l}{2}\right) - \sinh\left(\frac{h-l}{2}\right) \right] \times \\
&\left[\cos(\lambda-\mu) + \frac{\cos(\lambda-\mu) \sinh(h-l)}{\cos(\lambda+\mu) \cosh(h-l)} \cos(\lambda+\mu) \right] \cdot \left[\cosh\left(\frac{h-l}{2}\right) - \sinh\left(\frac{h-l}{2}\right) \right] \\
&= \frac{1}{\rho_4} \left[\cosh\left(\frac{h-l}{2}\right) - \sinh\left(\frac{h-l}{2}\right) \right]^2 (\cosh(h-l) + \sinh(h-l)) \\
&= \frac{1}{\rho_4} [\cosh(h-l) - \sinh(h-l)] (\cosh(h-l) + \sinh(h-l)) \\
&= \frac{1}{\rho_4} [\cosh^2(h-l) - \sinh^2(h-l)] = \frac{1}{\rho_4}
\end{aligned}$$

Para \check{R}_{55} , \check{R}_{88} , \check{R}_{99} y $\check{R}_{12,12}$, entonces

$$\begin{aligned}
\check{R}_{55} = \check{R}_{88} = \check{R}_{99} = \check{R}_{12,12} &= \frac{\cosh(h-l)}{\cos(\lambda-\mu)} \cdot \frac{1}{\rho_4} \left[\cosh\left(\frac{h-l}{2}\right) + \sinh\left(\frac{h-l}{2}\right) \right] \times \\
&\left[\cos(\lambda-\mu) - \frac{\cos(\lambda-\mu) \sinh(h-l)}{\cos(\lambda+\mu) \cosh(h-l)} \cos(\lambda+\mu) \right] \cdot \left[\cosh\left(\frac{h-l}{2}\right) + \sinh\left(\frac{h-l}{2}\right) \right] \\
&= \frac{1}{\rho_4} \left[\cosh\left(\frac{h-l}{2}\right) + \sinh\left(\frac{h-l}{2}\right) \right]^2 (\cosh(h-l) - \sinh(h-l)) \\
&= \frac{1}{\rho_4} [\cosh(h-l) + \sinh(h-l)] (\cosh(h-l) - \sinh(h-l))
\end{aligned}$$

$$\check{R}_{55} = \check{R}_{88} = \check{R}_{99} = \check{R}_{12,12} = \frac{1}{\rho_4} [\cosh^2(h-l) - \sinh^2(h-l)] = \frac{1}{\rho_4}$$

Para \check{R}_{47} , $\check{R}_{4,10}$, $\check{R}_{13,7}$ y $\check{R}_{13,10}$, entonces

$$\begin{aligned} \check{R}_{47} = \check{R}_{4,10} = \check{R}_{13,7} = \check{R}_{13,10} &= \frac{\cosh(h-l)}{\cos(\lambda-\mu)} \cdot \frac{1}{\rho_4} \left[\cosh\left(\frac{h+l}{2}\right) + \sinh\left(\frac{h+l}{2}\right) \right] \times \\ &\left[\sin(\lambda-\mu) - \frac{\cos(\lambda-\mu)\sinh(h-l)}{\cos(\lambda+\mu)\cosh(h-l)} \sin(\lambda+\mu) \right] \cdot \left[\cosh\left(\frac{h+l}{2}\right) + \sinh\left(\frac{h+l}{2}\right) \right] \\ &= \frac{1}{\rho_4} \left[\cosh\left(\frac{h+l}{2}\right) + \sinh\left(\frac{h-l}{2}\right) \right]^2 \left(\frac{\sin(\lambda-\mu)}{\cos(\lambda-\mu)} \cosh(h-l) - \frac{\sin(\lambda+\mu)}{\cos(\lambda+\mu)} \sinh(h-l) \right) \\ &= \frac{1}{\rho_4} \frac{\cosh(h+l) + \sinh(h+l)}{\cos(\lambda-\mu)\cos(\lambda+\mu)} [\sin(\lambda-\mu)\cos(\lambda+\mu)\cosh(h-l) \\ &+ \sin(\lambda+\mu)\cos(\lambda-\mu)\sinh(h-l)] \\ &= \frac{1}{\rho_4} \frac{1}{\cos^2\lambda - \sin^2\mu} \left\{ \sin(\lambda-\mu)\cos(\lambda+\mu)[\cosh(h-l)\cosh(h+l) \right. \\ &+ \sinh(h+l)\cosh(h-l)] - \sin(\lambda+\mu)\cos(\lambda-\mu)[\cosh(h+l)\sinh(h-l) \\ &+ \sinh(h+l)\sinh(h-l)] \left. \right\} \\ &= \frac{1}{2\rho_4} \frac{1}{\cos^2\lambda - \sin^2\mu} \left\{ \sin(\lambda-\mu)\cos(\lambda+\mu)[2\cosh(h-l)\cosh(h+l) \right. \\ &+ 2(\sinh h \cosh h + \sinh l \cosh l)] - \sin(\lambda+\mu)\cos(\lambda-\mu)[2(\cosh h \sinh h \\ &- \cosh l \sinh l) + 2\sinh(h+l)\sinh(h-l)] \left. \right\} \\ &= \frac{1}{2\rho_4} \frac{\sin(\lambda-\mu)\cos(\lambda+\mu)}{\cos^2\lambda - \sin^2\mu} [\cosh(h-l)\cosh(h+l) + \sinh(h-l)\sinh(h+l) \\ &+ \cosh(h-l)\cosh(h+l) - \sinh(h-l)\sinh(h+l) + 2(\sinh h \cosh h + \sinh l \cosh l)] \\ &- \frac{\sin(\lambda+\mu)\cos(\lambda-\mu)}{\cos^2\lambda - \sin^2\mu} [2(\cosh h \sinh h - \cosh l \sinh l) + \sinh(h+l)\sinh(h-l) \\ &- \cosh(h+l)\cosh(h-l) + \cosh(h+l)\cosh(h-l) + \sinh(h+l)\sinh(h-l)] \\ &= \frac{1}{2\rho_4} \frac{\sin(\lambda-\mu)\cos(\lambda+\mu)}{\cos^2\lambda - \sin^2\mu} [\cosh^2 h + \sinh^2 h + \cosh^2 l + \sinh^2 l \\ &+ 2(\sinh h \cosh h + \sinh l \cosh l)] - \frac{\sin(\lambda+\mu)\cos(\lambda-\mu)}{\cos^2\lambda - \sin^2\mu} \\ &[2(\cosh h \sinh h - \cosh l \sinh l) - \cosh^2 l - \sinh^2 l + \cosh^2 h + \sinh^2 h] \\ &= \frac{1}{2\rho_4} \frac{\sin(\lambda-\mu)\cos(\lambda+\mu)}{\cos^2\lambda - \sin^2\mu} [(\cosh h + \sinh h)^2 + (\cosh l + \sinh l)^2] \\ &- \frac{\sin(\lambda+\mu)\cos(\lambda-\mu)}{\cos^2\lambda - \sin^2\mu} [(\cosh h + \sinh h)^2 - (\cosh l + \sinh l)^2] \end{aligned}$$

Apéndice D

L-matriz

Vamos a calcular la L-matriz a detalle para el caso en que $\mu = 0$. Usando (5.308) calculamos cada uno de los elementos de $\mathcal{L}_j(\lambda, 0)$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{j1}^1(\lambda, 0) &= (-1)^{p(1)p(1)} R_{11}^{11}(\lambda, 0)e_{j1}^1 + (-1)^{p(1)p(2)} R_{12}^{12}(\lambda, 0)e_{j2}^2 \\
 &\quad + (-1)^{p(1)p(3)} R_{13}^{13}(\lambda, 0)e_{j3}^3 + (-1)^{p(1)p(4)} R_{14}^{14}(\lambda, 0)e_{j4}^4 \\
 &= R_{11}^{11}(\lambda, 0)X_{j1}^1 + R_{12}^{12}(\lambda, 0)X_{j2}^2 + R_{13}^{13}(\lambda, 0)X_{j3}^3 + R_{14}^{14}(\lambda, 0)X_{j4}^4 \\
 &= \frac{1}{\rho_4} \left[\cos \lambda e^h(X_j)_1^1 - \sin \lambda e^h(X_j)_2^2 - \sin \lambda e^h(X_j)_3^3 + \frac{\sin^2 \lambda}{\cos \lambda} e^h(X_j)_4^4 \right] \\
 \mathcal{L}_{j2}^2(\lambda, 0) &= (-1)^{p(2)p(1)} R_{21}^{21}(\lambda, 0)e_{j1}^1 + (-1)^{p(2)p(2)} R_{22}^{22}(\lambda, 0)e_{j2}^2 \\
 &\quad + (-1)^{p(2)p(3)} R_{23}^{23}(\lambda, 0)e_{j3}^3 + (-1)^{p(2)p(4)} R_{24}^{24}(\lambda, 0)e_{j4}^4 \\
 &= R_{21}^{21}(\lambda, 0)X_{j1}^1 - R_{22}^{22}(\lambda, 0)X_{j2}^2 - R_{23}^{23}(\lambda, 0)X_{j3}^3 + R_{24}^{24}(\lambda, 0)X_{j4}^4 \\
 &= \frac{1}{\rho_4} \left[-\sin \lambda e^{-h}(X_j)_1^1 - \cos \lambda e^{-h}(X_j)_2^2 + \frac{\sin^2 \lambda}{\cos \lambda} e^{-h}(X_j)_3^3 + \sin \lambda e^{-h}(X_j)_4^4 \right] \\
 \mathcal{L}_{j3}^3(\lambda, 0) &= (-1)^{p(3)p(1)} R_{31}^{31}(\lambda, 0)e_{j1}^1 + (-1)^{p(3)p(2)} R_{32}^{32}(\lambda, 0)e_{j2}^2 \\
 &\quad + (-1)^{p(3)p(3)} R_{33}^{33}(\lambda, 0)e_{j3}^3 + (-1)^{p(3)p(4)} R_{34}^{34}(\lambda, 0)e_{j4}^4 \\
 &= R_{31}^{31}(\lambda, 0)X_{j1}^1 - R_{32}^{32}(\lambda, 0)X_{j2}^2 - R_{33}^{33}(\lambda, 0)X_{j3}^3 + R_{34}^{34}(\lambda, 0)X_{j4}^4 \\
 &= \frac{1}{\rho_4} \left[-\sin \lambda e^{-h}(X_j)_1^1 + \frac{\sin^2 \lambda}{\cos \lambda} e^{-h}(X_j)_2^2 - \cos \lambda e^{-h}(X_j)_3^3 + \sin \lambda e^{-h}(X_j)_4^4 \right] \\
 \mathcal{L}_{j4}^4(\lambda, 0) &= (-1)^{p(4)p(1)} R_{41}^{41}(\lambda, 0)e_{j1}^1 + (-1)^{p(4)p(2)} R_{42}^{42}(\lambda, 0)e_{j2}^2 \\
 &\quad + (-1)^{p(4)p(3)} R_{43}^{43}(\lambda, 0)e_{j3}^3 + (-1)^{p(4)p(4)} R_{44}^{44}(\lambda, 0)e_{j4}^4 \\
 &= R_{41}^{41}(\lambda, 0)X_{j1}^1 + R_{42}^{42}(\lambda, 0)X_{j2}^2 + R_{43}^{43}(\lambda, 0)X_{j3}^3 + R_{44}^{44}(\lambda, 0)X_{j4}^4 \\
 &= \frac{1}{\rho_4} \left[\frac{\sin^2 \lambda}{\cos \lambda} e^h(X_j)_1^1 + \sin \lambda e^h(X_j)_2^2 + \sin \lambda e^h(X_j)_3^3 + \cos \lambda e^h(X_j)_4^4 \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{j_2}^1(\lambda, 0) &= (-1)^{p(1)p(2)} R_{21}^{12}(\lambda, 0) e_{j_2}^1 + (-1)^{p(1)p(4)} R_{23}^{14}(\lambda, 0) e_{j_4}^3 \\
&= R_{21}^{12}(\lambda, 0) X_{j_2}^1 + R_{23}^{14}(\lambda, 0) X_{j_4}^3 = \frac{1}{\rho_4} \left[(X_j)_1^2 - \frac{\sin \lambda}{\cos \lambda} (X_j)_3^4 \right] \\
\mathcal{L}_{j_3}^1(\lambda, 0) &= (-1)^{p(1)p(3)} R_{31}^{13}(\lambda, 0) e_{j_3}^1 + (-1)^{p(1)p(4)} R_{32}^{14}(\lambda, 0) e_{j_4}^2 \\
&= R_{31}^{13}(\lambda, 0) X_{j_3}^1 + R_{32}^{14}(\lambda, 0) X_{j_4}^2 = \frac{1}{\rho_4} \left[(X_j)_1^3 + \frac{\sin \lambda}{\cos \lambda} (X_j)_2^4 \right] \\
\mathcal{L}_{j_4}^1(\lambda, 0) &= (-1)^{p(1)p(4)} R_{41}^{14}(\lambda, 0) e_{j_4}^1 = R_{41}^{14}(\lambda, 0) X_{j_4}^1 = \frac{1}{\rho_4} \frac{e^h}{\cos \lambda} (X_j)_1^4 \\
\mathcal{L}_{j_1}^2(\lambda, 0) &= (-1)^{p(2)p(1)} R_{12}^{21}(\lambda, 0) e_{j_1}^2 + (-1)^{p(2)p(3)} R_{14}^{23}(\lambda, 0) e_{j_3}^4 \\
&= R_{12}^{21}(\lambda, 0) X_{j_1}^2 - R_{14}^{23}(\lambda, 0) X_{j_3}^4 = \frac{1}{\rho_4} \left[(X_j)_2^1 - \frac{\sin \lambda}{\cos \lambda} (X_j)_3^4 \right] \\
\mathcal{L}_{j_3}^2(\lambda, 0) &= (-1)^{p(2)p(3)} R_{32}^{23}(\lambda, 0) e_{j_3}^2 = -R_{32}^{23}(\lambda, 0) X_{j_3}^2 = -\frac{1}{\rho_4} \frac{e^{-h}}{\cos \lambda} (X_j)_3^2 \\
\mathcal{L}_{j_4}^2(\lambda, 0) &= (-1)^{p(2)p(3)} R_{41}^{23}(\lambda, 0) e_{j_3}^1 + (-1)^{p(2)p(4)} R_{42}^{24}(\lambda, 0) e_{j_4}^2 \\
&= -R_{41}^{23}(\lambda, 0) X_{j_3}^1 + R_{42}^{24}(\lambda, 0) X_{j_4}^2 = \frac{1}{\rho_4} \left[-\frac{\sin \lambda}{\cos \lambda} (X_j)_1^3 + (X_j)_2^4 \right] \\
\mathcal{L}_{j_1}^3(\lambda, 0) &= (-1)^{p(3)p(1)} R_{13}^{31}(\lambda, 0) e_{j_1}^3 + (-1)^{p(3)p(2)} R_{14}^{32}(\lambda, 0) e_{j_2}^4 \\
&= R_{13}^{31}(\lambda, 0) X_{j_1}^3 - R_{14}^{32}(\lambda, 0) X_{j_2}^4 = \frac{1}{\rho_4} \left[(X_j)_3^1 + \frac{\sin \lambda}{\cos \lambda} (X_j)_2^4 \right] \\
\mathcal{L}_{j_2}^3(\lambda, 0) &= (-1)^{p(3)p(2)} R_{23}^{32}(\lambda, 0) e_{j_2}^3 = -R_{23}^{32}(\lambda, 0) X_{j_2}^3 = -\frac{1}{\rho_4} \frac{e^{-h}}{\cos \lambda} (X_j)_2^3 \\
\mathcal{L}_{j_4}^3(\lambda, 0) &= (-1)^{p(3)p(2)} R_{41}^{32}(\lambda, 0) e_{j_2}^1 + (-1)^{p(3)p(4)} R_{43}^{34}(\lambda, 0) e_{j_4}^3 \\
&= -R_{41}^{32}(\lambda, 0) X_{j_2}^1 + R_{43}^{34}(\lambda, 0) X_{j_4}^3 = \frac{1}{\rho_4} \left[\frac{\sin \lambda}{\cos \lambda} (X_j)_1^2 + (X_j)_3^4 \right] \\
\mathcal{L}_{j_1}^4(\lambda, 0) &= (-1)^{p(4)p(1)} R_{14}^{41}(\lambda, 0) e_{j_1}^4 = R_{14}^{41}(\lambda, 0) X_{j_1}^4 = \frac{1}{\rho_4} \frac{e^h}{\cos \lambda} (X_j)_1^4 \\
\mathcal{L}_{j_2}^4(\lambda, 0) &= (-1)^{p(4)p(1)} R_{23}^{41}(\lambda, 0) e_{j_1}^3 + (-1)^{p(4)p(2)} R_{24}^{42}(\lambda, 0) e_{j_2}^4 \\
&= R_{23}^{41}(\lambda, 0) X_{j_1}^3 + R_{24}^{42}(\lambda, 0) X_{j_2}^4 = \frac{1}{\rho_4} \left[-\frac{\sin \lambda}{\cos \lambda} (X_j)_3^1 + (X_j)_2^4 \right] \\
\mathcal{L}_{j_3}^4(\lambda, 0) &= (-1)^{p(4)p(1)} R_{32}^{41}(\lambda, 0) e_{j_1}^2 + (-1)^{p(4)p(3)} R_{34}^{43}(\lambda, 0) e_{j_3}^4 \\
&= R_{32}^{41}(\lambda, 0) X_{j_1}^2 + R_{34}^{43}(\lambda, 0) X_{j_3}^4 = \frac{1}{\rho_4} \left[\frac{\sin \lambda}{\cos \lambda} (X_j)_2^1 + (X_j)_3^4 \right]
\end{aligned}$$

Ahora sustituimos el valor de X_j (5.281)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{j1}^1(\lambda, 0) &= \frac{e^h}{\cos \lambda} \left[\cos \lambda e^h (1 - n_{j\downarrow})(1 - n_{j\uparrow}) - \sin \lambda e^h (1 - n_{j\downarrow})n_{j\uparrow} \right. \\
&\quad \left. - \sin \lambda e^h n_{j\downarrow}(1 - n_{j\uparrow}) + \frac{\sin^2 \lambda}{\cos \lambda} e^h n_{j\downarrow}n_{j\uparrow} \right] \\
&= \frac{e^{2h}}{\cos^2 \lambda} (n_{j\downarrow} \sin \lambda - (1 - n_{j\downarrow}) \cos \lambda)(n_{j\uparrow} \sin \lambda - (1 - n_{j\uparrow}) \cos \lambda) \\
\mathcal{L}_{j2}^2(\lambda, 0) &= \frac{e^h}{\cos \lambda} \left[-\sin \lambda e^{-h}(1 - n_{j\downarrow})(1 - n_{j\uparrow}) - \cos \lambda e^{-h}(1 - n_{j\downarrow})n_{j\uparrow} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sin^2 \lambda}{\cos \lambda} e^{-h}n_{j\downarrow}(1 - n_{j\uparrow}) + \sin \lambda e^{-h}n_{j\downarrow}n_{j\uparrow} \right] \\
&= \frac{e^h e^{-h}}{\cos^2 \lambda} (n_{j\downarrow} \sin \lambda - (1 - n_{j\downarrow}) \cos \lambda)(n_{j\uparrow} \cos \lambda + (1 - n_{j\uparrow}) \sin \lambda) \\
\mathcal{L}_{j3}^3(\lambda, 0) &= \frac{e^h}{\cos \lambda} \left[-\sin \lambda e^{-h}(1 - n_{j\downarrow})(1 - n_{j\uparrow}) + \frac{\sin^2 \lambda}{\cos \lambda} e^{-h}(1 - n_{j\downarrow})n_{j\uparrow} \right. \\
&\quad \left. - \cos \lambda e^{-h}n_{j\downarrow}(1 - n_{j\uparrow}) + \sin \lambda e^{-h}n_{j\downarrow}n_{j\uparrow} \right] \\
&= \frac{e^h e^{-h}}{\cos^2 \lambda} (n_{j\downarrow} \cos \lambda + (1 - n_{j\downarrow}) \sin \lambda)(n_{j\uparrow} \sin \lambda - (1 - n_{j\uparrow}) \cos \lambda) \\
\mathcal{L}_{j4}^4(\lambda, 0) &= \frac{e^h}{\cos \lambda} \left[\frac{\sin^2 \lambda}{\cos \lambda} e^h (1 - n_{j\downarrow})(1 - n_{j\uparrow}) + \sin \lambda e^h (1 - n_{j\downarrow})n_{j\uparrow} \right. \\
&\quad \left. + \sin \lambda e^h n_{j\downarrow}(1 - n_{j\uparrow}) + \cos \lambda e^h n_{j\downarrow}n_{j\uparrow} \right] \\
&= \frac{e^{2h}}{\cos^2 \lambda} (n_{j\downarrow} \cos \lambda + (1 - n_{j\downarrow}) \sin \lambda)(n_{j\uparrow} \cos \lambda + (1 - n_{j\uparrow}) \sin \lambda) \\
\mathcal{L}_{j2}^1(\lambda, 0) &= \frac{e^h}{\cos \lambda} \left[(1 - n_{j\downarrow})c_{j\uparrow}^\dagger - \frac{\sin \lambda}{\cos \lambda} n_{j\downarrow}c_{j\uparrow}^\dagger \right] \\
&= -\frac{e^h}{\cos^2 \lambda} [n_{j\downarrow} \sin \lambda - (1 - n_{j\downarrow}) \cos \lambda] c_{j\uparrow}^\dagger \\
\mathcal{L}_{j3}^1(\lambda, 0) &= \frac{e^h}{\cos \lambda} \left[c_{j\downarrow}^\dagger (1 - n_{j\uparrow}) + \frac{\sin \lambda}{\cos \lambda} (-c_{j\downarrow}^\dagger n_{j\uparrow}) \right] \\
&= -\frac{e^h}{\cos^2 \lambda} [n_{j\uparrow} \sin \lambda - (1 - n_{j\uparrow}) \cos \lambda] c_{j\downarrow}^\dagger \\
\mathcal{L}_{j4}^1(\lambda, 0) &= -\frac{e^{2h}}{\cos^2 \lambda} c_{j\downarrow}^\dagger c_{j\uparrow}^\dagger \\
\mathcal{L}_{j1}^2(\lambda, 0) &= \frac{e^h}{\cos \lambda} \left[(1 - n_{j\downarrow})c_{j\uparrow} - \frac{\sin \lambda}{\cos \lambda} n_{j\downarrow}c_{j\uparrow} \right] \\
&= -\frac{e^h}{\cos^2 \lambda} [n_{j\downarrow} \sin \lambda - (1 - n_{j\downarrow}) \cos \lambda] c_{j\uparrow} \\
\mathcal{L}_{j3}^2(\lambda, 0) &= -\frac{e^h e^{-h}}{\cos^2 \lambda} c_{j\downarrow}^\dagger c_{j\uparrow}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{j4}^2(\lambda, 0) &= \frac{e^h}{\cos \lambda} \left[-\frac{\sin \lambda}{\cos \lambda} c_{j\downarrow}^\dagger (1 - n_{j\uparrow}) - c_{j\downarrow}^\dagger n_{j\uparrow} \right] \\
&= -\frac{e^h}{\cos^2 \lambda} [n_{j\uparrow} \cos \lambda + (1 - n_{j\uparrow}) \sin \lambda] c_{j\downarrow}^\dagger \\
\mathcal{L}_{j1}^3(\lambda, 0) &= \frac{e^h}{\cos \lambda} \left[c_{j\downarrow} (1 - n_{j\uparrow}) + \frac{\sin \lambda}{\cos \lambda} (-c_{j\downarrow} n_{j\uparrow}) \right] \\
&= -\frac{e^h}{\cos^2 \lambda} [n_{j\uparrow} \sin \lambda - (1 - n_{j\uparrow}) \cos \lambda] c_{j\downarrow} \\
\mathcal{L}_{j2}^3(\lambda, 0) &= -\frac{e^h e^{-h}}{\cos^2 \lambda} (-c_{j\downarrow} c_{j\uparrow}^\dagger) = -\frac{e^h e^{-h}}{\cos^2 \lambda} c_{j\uparrow}^\dagger c_{j\downarrow} \\
\mathcal{L}_{j4}^3(\lambda, 0) &= \frac{e^h}{\cos \lambda} \left[\frac{\sin \lambda}{\cos \lambda} (1 - n_{j\downarrow}) c_{j\uparrow}^\dagger + n_{j\downarrow} c_{j\uparrow}^\dagger \right] \\
&= \frac{e^h}{\cos^2 \lambda} [n_{j\downarrow} \cos \lambda + (1 - n_{j\downarrow}) \sin \lambda] c_{j\uparrow}^\dagger \\
\mathcal{L}_{j1}^4(\lambda, 0) &= \frac{e^{2h}}{\cos^2 \lambda} c_{j\downarrow} c_{j\uparrow} = -\frac{e^{2h}}{\cos^2 \lambda} c_{j\uparrow} c_{j\downarrow} \\
\mathcal{L}_{j2}^4(\lambda, 0) &= \frac{e^h}{\cos \lambda} \left[-\frac{\sin \lambda}{\cos \lambda} c_{j\downarrow} (1 - n_{j\uparrow}) - c_{j\downarrow} n_{j\uparrow} \right] \\
&= -\frac{e^h}{\cos^2 \lambda} [n_{j\uparrow} \cos \lambda + (1 - n_{j\uparrow}) \sin \lambda] c_{j\downarrow} \\
\mathcal{L}_{j3}^4(\lambda, 0) &= \frac{e^h}{\cos \lambda} \left[\frac{\sin \lambda}{\cos \lambda} (1 - n_{j\downarrow}) c_{j\uparrow} + n_{j\downarrow} c_{j\uparrow} \right] \\
&= \frac{e^h}{\cos^2 \lambda} [n_{j\downarrow} \cos \lambda + (1 - n_{j\downarrow}) \sin \lambda] c_{j\uparrow}
\end{aligned}$$

si definimos

$$f_{j,a} = n_{j,a} \sin \lambda - (1 - n_{j,a}) \cos \lambda, \quad (\text{D.1a})$$

$$g_{j,a} = n_{j,a} \cos \lambda + (1 - n_{j,a}) \sin \lambda, \quad (\text{D.1b})$$

para $a = \uparrow, \downarrow$, vamos a obtener

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_j(\lambda, 0) &= \frac{e^h}{\cos^2 \lambda} \\
&\times \begin{pmatrix} e^h f_{j,\downarrow} f_{j,\uparrow} & -f_{j,\downarrow} c_{j\uparrow}^\dagger & -f_{j,\uparrow} c_{j,\downarrow}^\dagger & -e^h c_{j,\downarrow}^\dagger c_{j\uparrow}^\dagger \\ -f_{j,\downarrow} c_{j,\uparrow} & e^{-h} f_{j,\downarrow} g_{j\uparrow} & -e^{-h} c_{j,\downarrow}^\dagger c_{j\uparrow} & -g_{j,\uparrow} c_{j,\downarrow}^\dagger \\ -f_{j,\uparrow} c_{j,\downarrow} & -e^{-h} c_{j,\uparrow}^\dagger c_{j,\downarrow} & e^{-h} g_{j,\downarrow} f_{j\uparrow} & g_{j,\downarrow} c_{j,\uparrow}^\dagger \\ -e^h c_{j,\uparrow} c_{j,\downarrow} & -g_{j,\uparrow} c_{j,\downarrow} & g_{j,\downarrow} c_{j\uparrow} & e^h g_{j,\downarrow} g_{j,\uparrow} \end{pmatrix}, \quad (\text{D.2})
\end{aligned}$$

Apéndice E

Yang-Serre

La representación de $Y(su(2))$ Yangiana de Drinfeld [7], del álgebra de Lie $su(2)$ generada por los operadores de espín S^α y las cantidades conservadas J^α satisfacen las relaciones (por conveniencia utilizaremos índices latinos)

$$[S^a, S^b] = f_{abc}S^c, \quad (\text{E.1a})$$

$$[S^a, J^b] = f_{abc}J^c, \quad (\text{E.1b})$$

donde f_{abc} es la constante de estructura del álgebra de Lie $su(2)$.

La estructura de biálgebra está dada por una counidad trivial

$$\epsilon(S^a) = 0 = \epsilon(J^a), \quad \epsilon(I) = I, \quad (\text{E.2})$$

y el coproducto

$$\Delta(S^a) = I \otimes S^a + S^a \otimes I, \quad \Delta(J^a) = I \otimes J^a + J^a \otimes I + \frac{\alpha}{2} f_{abc} S^b \otimes S^c. \quad (\text{E.3})$$

Además necesitamos definir la antípoda para que sea un álgebra de Hopf

$$S(S^a) = -S^a \quad S(J^a) = -J^a + \frac{\alpha}{2} f_{abc} S^b S^c. \quad (\text{E.4})$$

Veamos que el coproducto preserva las relaciones (E.1a) y (E.1b)

$$[\Delta(S^a), \Delta(S^b)] = f_{abc} \Delta(S^c), \quad (\text{E.5a})$$

$$[\Delta(S^a), \Delta(J^b)] = f_{abc} \Delta(J^c), \quad (\text{E.5b})$$

para (E.5a) tenemos

$$\begin{aligned}
[\Delta(S^a), \Delta(S^b)] &= (I \otimes S^a + S^a \otimes I)(I \otimes S^b + S^b \otimes I) \\
&\quad - (I \otimes S^b + S^b \otimes I)(I \otimes S^a + S^a \otimes I) \\
&= I \otimes S^a S^b + S^a \otimes S^b + S^b \otimes S^a + S^a S^b \otimes I \\
&\quad - I \otimes S^b S^a - S^a \otimes S^b - S^b \otimes S^a - S^b S^a \otimes I \quad (\text{E.6}) \\
&= I \otimes [S^a, S^b] + [S^a, S^b] \otimes I \\
&= I \otimes f_{abc} S^c + f_{abc} S^c \otimes I \\
&= f_{abc} \Delta(S^c)
\end{aligned}$$

por otro lado para (E.5b) tenemos

$$\begin{aligned}
[\Delta(S^s), \Delta(J^b)] &= (I \otimes S^a + S^a \otimes I)(I \otimes J^b + J^b \otimes I + \frac{\alpha}{2} f_{bcd} S^c \otimes S^d) \\
&\quad - (I \otimes J^b + J^b \otimes I + \frac{\alpha}{2} f_{bcd} S^c \otimes S^d)(I \otimes S^a + S^a \otimes I) \\
&= I \otimes S^a J^b + S^a \otimes J^b + J^b \otimes S^a + S^a J^b \otimes I \\
&\quad - I \otimes J^b S^a - S^a \otimes J^b - J^b \otimes S^a - J^b S^a \otimes I \\
&\quad + \frac{\alpha}{2} f_{bcd} [S^c \otimes S^a S^d + S^a S^c \otimes S^d - S^c \otimes S^d S^a - S^c S^a \otimes S^d] \\
&= I \otimes [S^a, J^b] + [S^a, J^b] \otimes I + \frac{\alpha}{2} f_{bcd} (S^c \otimes [S^a, S^d] + [S^a, S^c] \otimes S^d) \\
&= I \otimes f_{abc} J^c + f_{abc} J^c \otimes I + \frac{\alpha}{2} f_{bcd} [S^c \otimes f_{ade} S^e + f_{ace} S^e \otimes S^d] \\
&= f_{abc} I \otimes J^c + f_{abc} J^c \otimes I + \frac{\alpha}{2} [-f_{bce} f_{acd} S^e \otimes S^d - f_{bdc} f_{ace} S^e \otimes S^d] \\
&= f_{abc} (I \otimes J^c + J^c \otimes I) - \frac{\alpha}{2} [f_{bce} f_{acd} + f_{bdc} f_{ace}] S^e \otimes S^d \\
&= f_{abc} (I \otimes J^c + J^c \otimes I) + \frac{\alpha}{2} f_{abc} f_{ced} S^e \otimes S^d \\
&= f_{abc} \Delta(J^c), \quad (\text{E.7})
\end{aligned}$$

en donde utilizamos una propiedad de las constantes de estructura

$$\begin{aligned}
&f_{bce} f_{acd} + f_{bdc} f_{ace} + f_{abc} f_{dce} = 0, \\
\Rightarrow &f_{bce} f_{acd} + f_{bdc} f_{ace} = -f_{abc} f_{ced}. \quad (\text{E.8})
\end{aligned}$$

Al pedir que (E.3) sea un homomorfismo nos da la relación de Yang-Serre

$$\frac{1}{2}f_{d[ab}[J^c, J^d] = \frac{\alpha^2}{24}a_{abcdeg} S^{(d}S^eS^g), \quad (\text{E.10})$$

en donde usamos

$$f_{abc} = i\epsilon^{abc}, \quad (\text{E.11a})$$

$$a_{abcdef} = f_{adi}f_{bej}f_{cfk}f_{ijk}, \quad (\text{E.11b})$$

La relación (E.9) implica la siguiente relación

$$f_{cdk}[[J^a, J^b], J^k] + f_{abk}[[J^c, J_d], J_k] = \frac{\alpha^2}{24}(a_{abklmn}f_{cdk} + a_{cdklmn}f_{abk}) S^{(l}S^mJ^n), \quad (\text{E.12})$$

o de forma más conocida

$$[[J^a, J^b], [S^c, J^d]] + [[J^c, J^d], [J^a, J^b]] = \frac{\alpha^2}{24}(a_{abklmn}f_{cdk} + a_{cdklmn}f_{abk}) S^{(l}S^mJ^n). \quad (\text{E.13})$$

Vamos a demostrar solamente como obtener (E.9) usando el coproducto. La demostración sigue las ideas sugeridas en [84]. Usemos la definición del coproducto para $\Delta(S^a)$ y $\Delta(J^a)$ dadas en (E.3) y definamos la cantidad

$$Z^{ab} := \Delta([J^a, J^b]) - [J^a, J^b] \otimes I - I \otimes [J^a, J^b], \quad (\text{E.14})$$

en la que Δ actúa como un homomorfismo. Ahora introducimos

$$u_{ab} := f_{cda}v_{cdb} - f_{cdb}v_{cda} = -u_{ba}, \quad f_{abc}u_{ab} = 0, \quad (\text{E.15})$$

donde v_{abc} es totalmente antisimétrico. Ahora vamos a contraer (E.14) con u_{ab} , pero primero hay que notar lo siguiente

¹donde

$$\begin{aligned} f_{d[ab}J^c] &= \frac{1}{3!} (f_{dab}J^c + f_{dbc}J^a f_{dca}J^b - f_{dac}J^b + f_{dba}J^c f_{dcb}J^a) \\ S^{(d}S^eS^g) &= \frac{1}{3!} (S^dS^eS^g + S^eS^gS^d + S^gS^dS^e + S^dS^gS^e + S^eS^dS^g + S^gS^eS^d) \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

$$\begin{aligned}
\Delta([J^a, J^b]) &= [\Delta(J^a), \Delta(J^b)] \\
&= [I \otimes J^a + J^a \otimes I + \frac{\alpha}{2} f_{acd} S^c \otimes S^d, I \otimes J^b + J^b \otimes I + \frac{\alpha}{2} f_{bef} S^e \otimes S^f] \\
&= I \otimes [J^a, J^b] + [J^a, J^b] \otimes I + \frac{\alpha}{2} f_{acd} (S^c \otimes [S^d, J^b] + [S^c, J^b] \otimes S^d) \\
&\quad + \frac{\alpha}{2} f_{bef} (S^e \otimes [J^a, S^f] + [J^a, S^e] \otimes S^f) \\
&\quad + \frac{\alpha^2}{4} f_{acd} f_{bef} (S^c S^e \otimes S^d S^f - S^e S^c \otimes S^f S^d)
\end{aligned} \tag{E.16}$$

Consideremos ahora los términos que solo tienen una α

$$\begin{aligned}
&f_{acd} (S^c \otimes [S^d, J^b] + [S^c, J^b] \otimes S^d) + f_{bef} (S^e \otimes [J^a, S^f] + [J^a, S^e] \otimes S^f) \\
&= f_{acd} (S^c \otimes [S^d, J^b] + [S^c, J^b] \otimes S^d) + f_{bcd} (S^c \otimes [J^a, S^d] + [J^a, S^c] \otimes S^d) \\
&= f_{acd} (S^c \otimes f_{dbe} J^e + f_{cbe} J^e \otimes S^d) + f_{bcd} (S^c \otimes f_{ade} J^e + f_{ace} J^e \otimes S^d) \\
&= (f_{acd} f_{dbe} + f_{bcd} f_{ade}) S^c \otimes J^e + (f_{acd} f_{cbe} + f_{bcd} f_{ace}) J^e \otimes S^d \\
&= f_{bad} f_{cde} S^c \otimes J^e - f_{bac} f_{dce} J^e \otimes S^d \\
&= f_{abe} f_{cde} (S^c \otimes J^d + J^c \otimes S^d).
\end{aligned} \tag{E.17}$$

Para el término con α^2 tenemos

$$\begin{aligned}
&f_{acd} f_{bef} (S^c S^e \otimes S^d S^f - S^e S^c \otimes S^d S^f) \\
&= f_{acd} f_{bef} (S^c S^e \otimes S^d S^f - S^e S^c \otimes S^d S^f + S^e S^c \otimes S^d S^f - S^e S^c \otimes S^f S^d) \\
&= f_{acd} f_{bef} ([S^c, S^e] \otimes S^d S^f + S^e S^c \otimes [S^d, S^f]) \\
&= f_{acd} f_{bef} (f_{ceg} S^g \otimes S^d S^f + S^e S^c \otimes f_{dfg} S^g) \\
&= f_{acd} f_{bef} f_{ceg} (S^g \otimes S^d S^f + S^f S^d \otimes S^g)
\end{aligned} \tag{E.18}$$

Usando los resultados anteriores podemos reescribir (E.16) como:

$$\begin{aligned}
\Delta([J^a, J^b]) &= [\Delta(J^a), \Delta(J^b)] \\
&= I \otimes [J^a, J^b] + [J^a, J^b] \otimes I + \frac{\alpha}{2} f_{abe} f_{cde} (S^c \otimes J^d + J^c \otimes S^d) \\
&\quad + \frac{\alpha^2}{4} f_{acd} f_{bef} f_{ceg} (S^g \otimes S^d S^f + S^f S^d \otimes S^g).
\end{aligned} \tag{E.19}$$

Usando (E.19) en (E.14) tenemos

$$Z^{ab} = \frac{\alpha}{2} f_{abe} f_{cde} (S^c \otimes J^d + J^c \otimes S^d) + \frac{\alpha^2}{4} f_{acd} f_{bef} f_{ceg} (S^g \otimes S^d S^f + S^f S^d \otimes S^g), \tag{E.20}$$

al contraer con u_{ab} tenemos

$$\begin{aligned}
u_{ab}Z^{ab} &= \frac{\alpha}{2}u_{ab}f_{abe}f_{cde}(S^c \otimes J^d + J^c \otimes S^d) \\
&+ \frac{\alpha^2}{4}u_{ab}f_{acd}f_{bef}f_{ceg}(S^g \otimes S^d S^f + S^f S^d \otimes S^g) \\
&= \frac{\alpha^2}{4}(u_{ab}f_{acd}f_{bef}f_{ceg}S^g \otimes S^d S^f + u_{ab}f_{acf}f_{bed}f_{ceg}S^d S^f \otimes S^g) \\
&= \frac{\alpha^2}{4}(u_{ab}f_{acd}f_{bef}f_{ceg}S^g \otimes S^d S^f + u_{ba}f_{bef}f_{acd}f_{ceg}S^d S^f \otimes S^g) \quad (\text{E.21}) \\
&= \frac{\alpha^2}{4}u_{ab}f_{acd}f_{bef}f_{ceg}(S^g \otimes S^d S^f + S^d S^f \otimes S^g) \\
&= \frac{\alpha^2}{4}(v_{ijb}f_{ija} - v_{ija}f_{ijb})f_{acd}f_{bef}f_{ceg}(S^g \otimes S^d S^f + S^d S^f \otimes S^g) \\
&= \frac{\alpha^2}{4}(A - B)(S^g \otimes S^d S^f + S^d S^f \otimes S^g)
\end{aligned}$$

en donde se anula el primer término al usar (E.15) y donde A y B están dados por

$$\begin{aligned}
A &= v_{ijb}f_{ija}f_{acd}f_{bef}f_{ceg} \\
B &= v_{ija}f_{ijb}f_{acd}f_{bef}f_{ceg}
\end{aligned} \quad (\text{E.22})$$

Notemos que podemos reescribir A y B si usamos la identidad de Jacobi. Para A tenemos:

$$\begin{aligned}
A &= v_{ijb}f_{ija}f_{acd}f_{bef}f_{ceg} \\
&= v_{ijb}(f_{jca}f_{iad} + f_{cia}f_{jad})f_{bef}f_{ceg} \\
&= (v_{jib}f_{ica}f_{jad} + v_{ijb}f_{cia}f_{jad})f_{bef}f_{ceg} \\
&= -2v_{ijb}f_{ajd}f_{cia}f_{ceg}f_{bef} \\
&= -2v_{ijb}f_{ajd}(-f_{cei}f_{cag} - f_{cae}f_{cig})f_{bef} \\
&= 2v_{ijb}(f_{ajd}f_{cei}f_{cag}f_{bef} + f_{ajd}f_{cae}f_{cig}f_{bef}).
\end{aligned} \quad (\text{E.23})$$

Por otro lado para B tenemos

$$\begin{aligned}
B &= v_{ija}f_{ijb}f_{acd}f_{bef}f_{ceg} \\
&= v_{ijb}f_{ija}f_{bcd}f_{aef}f_{ceg} \\
&= v_{ijb}(f_{jea}f_{iaf} + f_{eia}f_{jaf})f_{bcd}f_{ceg} \\
&= (v_{jib}f_{iea}f_{jaf} + v_{ijb}f_{eia}f_{jaf})f_{bcd}f_{ceg} \\
&= -2v_{ijb}f_{iae}f_{ajf}f_{bcd}f_{ceg} \\
&= -2v_{ijb}f_{ajf}f_{bcd}(-f_{cie}f_{aeg} - f_{ace}f_{ieg}) \\
&= 2v_{ijb}(f_{ajf}f_{bcd}f_{cie}f_{aeg} + f_{ajf}f_{bcd}f_{ace}f_{ieg}).
\end{aligned} \quad (\text{E.24})$$

Por conveniencia vamos a reescribir $A - B = C + D$ donde C y D están dados por:

$$\begin{aligned} C &= 2v_{ijb}(f_{ajd}f_{cei}f_{cag}f_{bef} - f_{ajf}f_{bcd}f_{cie}f_{aeg}) \\ D &= 2v_{ijb}(f_{ajd}f_{cae}f_{cig}f_{bef} - f_{ajf}f_{bcd}f_{ace}f_{ieg}). \end{aligned} \quad (\text{E.25})$$

Hay que notar que si renombramos los índices en C y después aplicamos la identidad de Jacobi obtenemos:

$$\begin{aligned} C &= 2v_{ijb}(f_{ajd}f_{cei}f_{cag}f_{bef} - f_{ajf}f_{bcd}f_{cie}f_{aeg}) \\ &= 2(v_{ijb}f_{ajd}f_{cei}f_{cag}f_{bef} - v_{ibj}f_{ebf}f_{jad}f_{aic}f_{ecg}) \\ &= 2v_{ijb}f_{ajd}f_{bef}(f_{cei}f_{cag} + f_{aic}f_{ecg}) \\ &= 2v_{ijb}f_{ajd}f_{bef}f_{aec}f_{icg} \\ &= -2v_{ijb}f_{ajd}f_{bef}f_{cae}f_{cig}, \end{aligned} \quad (\text{E.26})$$

si ahora renombramos los índices en el segundo término de D obtenemos

$$\begin{aligned} D &= 2v_{ijb}(f_{ajd}f_{cae}f_{cig}f_{bef} - f_{ajf}f_{bcd}f_{ace}f_{ieg}) \\ &= 2(v_{ijb}f_{ajd}f_{cae}f_{cig}f_{bef} - v_{ibj}f_{ebf}f_{jad}f_{cea}f_{icg}) \\ &= 4v_{ijb}f_{ajd}f_{cae}f_{cig}f_{bef} = -2C. \end{aligned} \quad (\text{E.27})$$

Usando los resultados anteriores tenemos

$$\begin{aligned} u_{ab}f_{acd}f_{bef}f_{ceg} &= 2v_{ijb}f_{ajd}f_{cae}f_{cig}f_{bef} \\ &= 2v_{ijb}f_{cig}f_{ajd}f_{bef}f_{cae} \\ &= -2v_{ijb}f_{igc}f_{jda}f_{bfe}f_{cae} \\ &= -2v_{ija}f_{igc}f_{jdb}f_{afe}f_{cbe} \\ &= -2v_{ija}a_{ijagdf} \end{aligned} \quad (\text{E.28})$$

Usando (E.28) reescribimos $u_{ab}Z^{ab}$ como

$$\begin{aligned} u_{ab}Z^{ab} &= (v_{ijb}f_{ija} - v_{ija}f_{ijb})Z^{ab} \\ &= v_{ija}f_{ijb}Z^{ba} - v_{ija}f_{ijb}Z^{ab} \\ &= -2v_{ija}f_{ijb}Z^{ab} \\ &= -\frac{2\alpha^2}{4}v_{ija}a_{ijagdf}(S^g \otimes S^d S^f + S^d S^f \otimes S^g) \\ \Rightarrow 2v_{ija}f_{ijb}Z^{ab} &= \frac{\alpha^2}{2}v_{ija}a_{ijagdf}(S^g \otimes S^d S^f + S^d S^f \otimes S^g). \end{aligned} \quad (\text{E.29})$$

Debido a que contraemos con un tensor totalmente antisimétrico, podemos reescribir (E.29) como

$$2v_{ija}f_{b[ij}Z^{a]b} = \frac{\alpha^2}{2}v_{ija}a_{[ija]gdf}(S^g \otimes S^d S^f + S^d S^f \otimes S^g). \quad (\text{E.30})$$

Además, notemos que

$$\begin{aligned} a_{[ija]gdf} &= a_{ija(gdf)}, \\ a_{ija(gdf)}(S^g \otimes S^d S^f + S^d S^f \otimes S^g) &= a_{ijagdf}(S^{(g} \otimes S^d S^f) + S^{(d} S^f \otimes S^g)). \end{aligned} \quad (\text{E.31})$$

Entonces al usar (E.31) en (E.30) obtenemos

$$2v_{ija}f_{b[ij}Z^{a]b} = \frac{\alpha^2}{2}v_{ija}a_{ijagdf}(S^{(g} \otimes S^d S^f) + S^{(d} S^f \otimes S^g)). \quad (\text{E.32})$$

Además, si usamos (E.3) de forma recursiva podemos demostrar que

$$S^{(g} \otimes S^d S^f) + S^{(d} S^f \otimes S^g) = \frac{1}{3}(\Delta(S^{(g} S^d S^f)) - S^{(g} S^d S^f) \otimes I - I \otimes S^{(g} S^d S^f)). \quad (\text{E.33})$$

Entonces usando (E.33) en (E.32) encontramos

$$v_{ija}f_{b[ij}Z^{a]b} = \frac{\alpha^2}{12}v_{ija}a_{ijagdf}(\Delta(S^{(g} S^d S^f)) - S^{(g} S^d S^f) \otimes I - I \otimes S^{(g} S^d S^f)). \quad (\text{E.34})$$

Ahora definimos

$$W^{gdf} = \Delta(S^g S^d S^f) - S^g S^d S^f \otimes I - I \otimes S^g S^d S^f \quad (\text{E.35})$$

y usamos nuevamente las propiedades (E.31) en (E.34) tenemos:

$$\begin{aligned} v_{ija}f_{b[ij}Z^{a]b} &= \frac{\alpha^2}{12}v_{ija}a_{ijagdf}W^{(gdf)} = \frac{\alpha^2}{12}v_{ija}a_{ija(gdf)}W^{gdf} \\ &= \frac{\alpha^2}{12}v_{ija}a_{[ija]gdf}W^{gdf} \\ &\Rightarrow v_{ija}(f_{b[ij}Z^{a]b} = \frac{\alpha^2}{12}a_{[ija]gdf}W^{gdf}). \end{aligned} \quad (\text{E.36})$$

Como esta última expresión es válida para cada tensor antisimétrico v_{ija} , concluimos que

$$f_{b[ij}Z^{a]b} = \frac{\alpha^2}{12}a_{[ija]gdf}W^{gdf}, \quad (\text{E.37})$$

si desarrollamos Z^{ab} y W^{ab} tenemos

$$\begin{aligned}
& f_{b[ij]} (\Delta([J^a], J^b) - [J^a], J^b) \otimes I - I \otimes [J^a], J^b) \\
&= \frac{\alpha^2}{12} a_{[ija]gdf} (\Delta(S^g S^d S^f) - S^g S^d S^f \otimes I - I \otimes S^g S^d S^f), \\
\Delta(f_{b[ij]}[J^a], J^b) - \frac{\alpha^2}{12} a_{[ija]gdf} S^g S^d S^f) - (f_{b[ij]}[J^a], J^b) - \frac{\alpha^2}{12} a_{[ija]gdf} S^g S^d S^f) \otimes I \\
& - I \otimes (f_{b[ij]}[J^a], J^b) - \frac{\alpha^2}{12} a_{[ija]gdf} S^g S^d S^f) = 0,
\end{aligned} \tag{E.38}$$

lo que se reduce a

$$f_{b[ij]}[J^a], J^b) = \frac{\alpha^2}{12} a_{[ija]gdf} S^g S^d S^f, \tag{E.39}$$

si usamos las propiedades (E.31) obtenemos

$$f_{b[ij]}[J^a], J^b) = \frac{\alpha^2}{12} a_{ijagdf} S^{(g} S^d S^f), \tag{E.40}$$

que es la propiedad que deseábamos demostrar y a partir de la cual podemos obtener la relación de Yang-Serre más conocida.

Bibliografía

- [1] N. Beisert, et al, Review of Ads/CFT Integrability: An Overview, *Lett. Math. Phys.* 99 (2012)3.
- [2] N. Beisert, A. Gares and M. Rosso, Yangian Symmetry and Integrability of Planar $N = 4$ Super symmetric Yang-Mills Theory, *Phys. Rev. Lett.* 118 (2017)141603.
- [3] W. Magnus, Braid groups: a survey, an *Theory of Groups*, Lecture Notes in Mathematics 372, editado por M. F. Newman, Springer-Verlag, Berlin 1979.
- [4] F. Gebhard and A. E. Ruckenstein, Exact results for a Hubbard chain with long-range hopping, *Phys. Rev. Lett.* 68 (1992) 244.
- [5] P.-A. Bares and F. Gebhard, Asymptotic Bethe-ansatz results for a Hubbard chain with $1/\sinh$ -hopping, *Europhys. Lett.* 29 (1995) 573.
- [6] P.-A. Bares and F. Gebhard, Critical behavior of a one-dimensional Hubbard-model with $1/\sinh$ hopping, *J. Phys.: Condens. Matter* 7 (1995) 2285.
- [7] V. G. Drinfel'd, Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation, *Dokl. Acad. Nauk SSSR* 283 (1985) 1060.
- [8] L. Susskind, *Fortschr. Phys.* 64 (2016)24.
- [9] R.A. Jefferson and R.C. Myers, *SHEP* 1710(2017)107.
- [10] L. Susskind, "Computational Complexity and Black Hole Horizons," *Fortsch. Phys.* 64 (2016) 24–43, arXiv:1403.5695 [hep-th].
- [11] L. Susskind and Y. Zhao, "Switchbacks and the Bridge to Nowhere," arXiv:1408.2823 [hep-th].

- [12] L. Susskind, "Entanglement is not enough," *Fortsch. Phys.* 64 (2016) 49–71, arXiv:1411.0690 [hep-th].
- [13] J. Haegeman, T. J. Osborne, H. Verschelde, and F. Verstraete, "Entanglement Renormalization for Quantum Fields in Real Space," *Phys. Rev. Lett.* 110 no. 10, (2013) 100402, arXiv:1102.5524v1 [hep-th].
- [14] A. Perelomov, *Generalized Coherent States and Their Applications*, Springer-Verlag, Berlin 1986.
- [15] M. E. Sweedler, *Hopf Algebras*, Benjamin Press 1969.
- [16] D. J. Gross and A. Neveu, "Dynamical Symmetry Breaking in Asymptotically Free Field Theories", *Phys. Rev. D* 10. 3235 (1974).
- [17] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, "Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. 1." *Phys. Rev.* 122, 345 (1961). • Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, "Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. II." *Phys. Rev.* 124, 246 (1961).
- [18] L. Dolan and A. Ross, "Nonlocal Currents as Noether Currents", *Phys. Rev. D* 22, 2018 (1980).
- [19] B.-y. Hou, M.-l. Ge and Y.-s. Wu, "Noether Analysis for the Hidden Symmetry Responsible for Infinite Set of Nonlocal Currents", *Phys. Rev. D* 24, 2238 (1981).
- [20] C. S. Gardner, J. M. Green, M. D. Krushal and R. M. Miura, Method for solving the Korteweg- de Vries equation, *Phys. Rev. Lett.* 19(1967) 1095.
- [21] E. H. Lieb and F. Y. Wu, Absence of Mott transition in an exact solution of the short-range, one-band model in one dimension, *Phys. Rev. Lett.* 20 (1968) 1445. Erratum: *Phys. Rev. Lett.* 21 (1968) 192.
- [22] O. J. Heilmann and E. H. Lieb, Violation of noncrossing rule–Hubbard Hamiltonian for benzene, *Ann. N.Y. Acad. Sci.* 172 (1971) 584.
- [23] F. Göhmann and S. Murakami, Algebraic and analytic properties of the one dimensional Hubbard model, *J. Phys. A* 30 (1997) 5269.
- [24] W. Heisenberg, Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen, *Z. Phys.* 33 (1925) 879.

- [25] M. Lüscher, Dynamical charges in the quantized renormalized massive Thirring model, *Nucl. Phys. B* 117 (1976) 475.
- [26] M. G. Tetel'man, Lorentz group for two-dimensional integrable lattice systems, *Sov. Phys. JETP* 55 (1982) 306.
- [27] P. P. Kulish and N. Yu. Reshetikhin, Generalized Heisenberg ferromagnet and the Gross-Neveu model, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 80 (1981) 214.
- [28] H. Bethe, Zur Theorie der Metalle. I. Eigenwerte und Eigenfunktionen der linearen Atomkette, *Z. Phys.* 71 (1931) 205.
- [29] R. J. Baxter, *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics* (London: Academic Press, 1982).
- [30] P. P. Kulish and E. K. Sklyanin, Quantum spectral transform method—recent developments, in *Lecture Notes in Physics* 151 (Berlin: Springer Verlag, 1982), 61–119.
- [31] P. Jordan and E. Wigner, Über das Paulische Äquivalenzverbot, *Z. Phys.* 47 (1928) 631.
- [32] B. S. Shastry, Exact integrability of the one-dimensional Hubbard-model, *Phys. Rev. Lett.* 56 (1986) 2453.
- [33] B. S. Shastry, Infinite conservation-laws in the one-dimensional Hubbard-model, *Phys. Rev. Lett.* 56 (1986) 1529. Erratum: 2334.
- [34] B. S. Shastry, Decorated star triangle relations and exact integrability of the one-dimensional Hubbard-model, *J. Stat. Phys.* 50 (1988) 57.
- [35] I. G. Korepanov, Tetrahedral Zamolodchikov algebras corresponding to Baxters's L-operators, *Comm. Math. Phys.* 154 (1993) 85.
- [36] M. Shiroishi and M. Wadati, Yang-Baxter equation for the R-matrix of the one-dimensional Hubbard model, *J. Phys. Soc. Jpn.* 64 (1995) 57.
- [37] R. J. Baxter, Eight-vertex model in lattice statistics, *Phys. Rev. Lett.* 26 (1971) 832.
- [38] R. J. Baxter, Partition function of the eight-vertex lattice model, *Ann. Phys. (N.Y.)* 70 (1972) 193.

- [39] Z. Maassarani, Hubbard models as fusion products of free fermions, *Int. J. Mod. Phys. B* 12 (1998) 1893.
- [40] Z. Massarani and P. Mathieu, The $su(n)$ XX model, *Nucl. Phys. B* 517(1998) 395.
- [41] Z. Maassarani, Exact integrability of the $su(n)$ Hubbard model, *Mod. Phys. Lett. B* 12 (1998) 51.
- [42] E. Olmedilla, M. Wadati and Y. Akutsu, Yang-Baxter relations for spin models and Fermion models, *J. Phys. Soc. Jpn.* 56 (1987) 2298.
- [43] F. Göhmann, The one-dimensional Hubbard model-exact solution and algebraic structure, *Habilitationsschrift, Universität Bayreuth* (2001).
- [44] A. Kundu, Integrability and exact solution of correlated hopping multi-chain electron systems, *Nucl. Phys. B* 618 (2001) 500.
- [45] F. Göhmann and V. E. Korepin, Solution of the quantum inverse problem, *J. Phys. A* 33 (2000) 1199.
- [46] F. Göhmann and S. Murakami, Fermionic representations of integrable lattice systems, *J. Phys. A* 31 (1998) 7729.
- [47] P. P. Kulish, Integrable graded magnets, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI* 145 (1985) 140.
- [48] P. P. Kulish and E. K. Sklyanin, Solutions of the Yang-Baxter equation, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI* 95(1980)129.
- [49] C. Destri and T. Segalini, A local and integrable lattice regularization of the massive Thirring model, *Nucl. Phys. B* 455 (1995) 759.
- [50] Y. Umeno, M. Shiroishi and M. Wadati, Fermionic R-operator and integrability of the one-dimensional Hubbard model, *J. Phys. Soc. Jpn.* 67 (1998) 2242.
- [51] Y. Umeno, M. Shiroishi and M. Wadati, Fermionic R-operator of the Fermion chain model, *J. Phys. Soc. Jpn.* 67 (1998) 1930.
- [52] N. Kitanine, J. M. Maillet and V. Terras, Form factors of the XXZ Heisenberg spin- $\frac{1}{2}$ finite chain, *Nucl. Phys. B* 554 (1999) 647.
- [53] J. M. Maillet and V. Terras, On the quantum inverse problem, *Nucl. Phys. B* 575 (2000) 627.

- [54] F. Göhmann, Algebraic Bethe ansatz for the $gl(1|2)$ generalized model and Lieb-Wu equations, Nucl. Phys. B 620 (2002) 501.
- [55] M. J. Martins and P. B. Ramos, The quantum inverse scattering method for Hubbard-like models, Nucl. Phys. B 522 (1998) 413.
- [56] M. J. Martins and P. B. Ramos, Algebraic Bethe ansatz approach for one-dimensional Hubbard model, J. Phys. A 30 (1997) L195.
- [57] M. J. Martins and P. B. Ramos, The algebraic Bethe ansatz for braid-monoid lattice models, Nucl. Phys. B 500 (1997) 579.
- [58] V. O. Tarasov, Algebraic Bethe ansatz for the Izergin-Korepin R-matrix, Theor. Math. Phys. 76 (1988) 793.
- [59] P. B. Ramos and M. J. Martins, One-parameter family of an integrable $sp(2|1)$ vertex model: Algebraic Bethe ansatz and ground state structure, Nucl. Phys. B474 (1996) 678.
- [60] D. B. Uglov and V. E. Korepin, The Yangian symmetry of the Hubbard model, Phys. Lett. A 190 (1994) 238.
- [61] F. Göhmann and V. Inozemtsev, The Yangian symmetry of the Hubbard models with variable range hopping, Phys. Lett. A 214 (1996) 161.
- [62] V. G. Drinfel'd, Quantum groups, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 798 (American Mathematical Society, 1987).
- [63] V. Chari and A. Pressley, Yangians and R-matrices, L'Enseignement Mathématique 36 (1990) 267.
- [64] V. Chari and A. Pressley, Fundamental representations of Yangians and singularities of R-matrices, J. Reine Angew. Math. 417 (1991) 87.
- [65] D. Bernard, Hidden Yangians in 2D massive current algebras, Comm. Math. Phys. 137 (1991) 191.
- [66] D. Bernard, An introduction to Yangian symmetries, Int. J. Mod. Phys. B 7 (1993) 3517.
- [67] E. T. Whittaker and G. N. Watson, A Course of Modern Analysis, 4th edition (Cambridge: Cambridge University Press, 1963), ch. 21.

- [68] K. Hikami, Yangian symmetry and Virasoro character in a lattice spin system with long-range interactions, *Nucl. Phys. B* 441 (1995) 530.
- [69] V. I. Inozemtsev and R. Sasaki, Scalar symmetries of the Hubbard models with variable range hopping, *Phys. Lett. A* 289 (2001) 301.
- [70] F. D. M. Haldane, Physics of the ideal semion as: spinons and quantum symmetries of the integrable Haldane-Shastry spin chain, in A. Okiji and N. Kawakami, eds., *Correlation Effects in Low Dimensional Electron Systems* (Berlin: Springer Verlag, 1994).
- [71] F. D. M. Haldane, Exact Jastrow-Gutzwiller resonating-valence-bond ground-state of the spin 1/2 antiferromagnetic Heisenberg chain with $1/R^2$ exchange, *Phys. Rev. Lett.* 60(1988) 635.
- [72] B. S. Shastry, Exact solution of an $S = 1/2$ Heisenberg antiferromagnetic chain with long-ranged interactions, *Phys. Rev. Lett.* 60 (1988) 639.
- [73] V. I. Inozemtsev, On the connection between the one-dimensional $S = 1/2$ Heisenberg chain and Haldane-Shastry model, *J. Stat. Phys.* 59 (1990) 1143.
- [74] D. Bernard, M. Gaudin, F. D. M. Haldane and V. Pasquier, Yang-Baxter equation in long-range interacting systems, *J. Phys. A* 26 (1993) 5219.
- [75] F. D. M. Haldane, Z. N. C. Ha, J. C. Talstra, D. Bernard and V. Pasquier, Yangian symmetry of integrable quantum chains with long-range interactions and a new description of states in conformal field-theory, *Phys. Rev. Lett.* 69 (1992) 2021.
- [76] P. Schlottmann, Integrable narrow-band model with possible relevance to heavy fermion systems, *Phys. Rev. B* 36 (1987) 5177.
- [77] F. Gebhard, *The Mott Metal-Insulator Transition* (Berlin: Springer Verlag, 1997).
- [78] O. Babelon, D. Bernard and M. Talon, *Introduction to Classical Integrable Systems*, Cambridge University Press, (2003).
- [79] F. H. L. Essler, H. Frahm, F. Göhmann, A. Klümper and V. E. Korepin, *The one-dimensional Hubbard model*, Cambridge University Press, (2005).

- [80] F. H. L. Essler and V. E. Korepin, Higher conservation laws and algebraic Bethe Ansatz for the supersymmetric t-J model, *Phys. Rev. B* 46 (1992) 9147.
- [81] F. H. L. Essler, V. E. Korepin and K. Schoutens, New exactly solvable model of strongly correlated electrons motivated by high-Tc superconductivity, *Phys. Rev. Lett.* 68 (1992) 2960.
- [82] F. H. L. Essler, V. E. Korepin and K. Schoutens, Exact solution of an electronic model of superconductivity, *Int. J. Mod. Phys. B* 8 (1994) 3205
- [83] A. Foerster and M. Karowski, Algebraic properties of the Bethe ansatz for an $sl(2,1)$ -supersymmetric t-J model, *Nucl. Phys. B* 396 (1993) 611.
- [84] N. J. MacKay, Introduction to Yangian symmetry in integrable field theory, *Int. J. Mod. Phys. A* 20 (2005) 7189, hep-th/0409183.