



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y  
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

**GEOMETRÍA EXTRÍNSECA DE SUPERFICIES INMERSAS EN  $R^5$**

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:

**FELIPE DE JESÚS MÉNDEZ VARELA**

TUTORES PRINCIPALES

**Dr. FEDERICO SÁNCHEZ BRINGAS, FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM.**

**Dr. PIERRE MICHEL BAYARD, FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM.**

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR

**Dra. ADRIANA ORTIZ RODRÍGUEZ, INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM.**

**Dr. OSCAR PALMAS VELASCO, FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM.**

CIUDAD UNIVERSITARIA AGOSTO DE 2018.  
CD. MX.



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A Diana e Iktán.*

*“[...] hasta el fondo de todos los abismos,  
hasta el último vuelo de la última ala,  
cuando la carne toda no sea carne, ni el alma  
sea alma.” (26-29)*

*Jaime Sabines, Entresuelo.*

## Agradecimientos.

Agradezco al Consejo de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por haber apoyado y patrocinado este proyecto de Tesis, y al proyecto DGAPA PAPIIT IN118217 por apoyar la presentación de la investigación en el “13th International Workshop on Real and Complex Singularities” que se llevó a cabo del 28 de Julio del 2014 al 8 de agosto de 2014 en el Intituto de Ciencias Matemáticas y Computación (ICMC) de la Universidad de Sao Paulo, campus Sao Carlos, Brasil.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>5</b>
<b>1. La clasificación de las aplicaciones cuadráticas <math>q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n</math> módulo isometrías.</b>	<b>7</b>
1.1. Las formas asociadas a una aplicación cuadrática. . . . .	8
1.2. Los invariantes escalares de una aplicación cuadrática. . . . .	15
1.3. La reducción simultánea de $L_{[q]}$ y $\Phi_{[q]}$ . . . . .	18
1.4. La clasificación . . . . .	25
<b>2. La elipse de Curvatura</b>	<b>27</b>
2.1. La definición y las primeras propiedades. . . . .	27
2.2. El estudio del caso degenerado . . . . .	32
<b>3. La aplicación de Gauss de una superficie en <math>\mathbb{R}^5</math>.</b>	<b>36</b>
3.1. La definición de la aplicación de Gauss y una interpretación geométrica de su diferencial. . . . .	38
3.2. Una nueva herramienta: La aplicación cuadrática $\delta$ . . . . .	40
3.2.1. Los invariantes numéricos de $\delta$ y su elipse asociada. . . . .	41
3.2.2. La reducción sustancial de codimensión en términos de $\delta$ . . . . .	44
<b>4. Los contactos de orden mayor de una superficie en términos de <math>\delta</math></b>	<b>46</b>
4.1. El cono de direcciones degeneradas y la ecuación de direcciones asintóticas. . . . .	46
4.2. La reducción isométrica de codimensión. . . . .	49
<b>Bibliografía</b>	<b>55</b>

# Introducción

En [14], Wilson y Moore mostraron que para una superficie inmersa en  $\mathbb{R}^{n+2}$  la segunda forma fundamental puede ser clasificada por una configuración que consiste de un punto y una elipse (*la elipse de curvatura*) que se encuentra en el espacio normal, y que dicha configuración determina los invariantes escalares de segundo orden. Para el caso de una superficie inmersa en  $\mathbb{R}^4$  los invariantes clásicos son cuatro: la curvatura Gaussiana  $K$ , la curvatura normal  $N$ , la norma del vector de curvatura media  $|\vec{H}|$  y la función discriminante  $\Delta$  que mide en cada punto la convexidad local de la superficie, [11]. Estos invariantes han sido estudiados por varios autores ([11], [14], [9], [23]) siendo su clasificación y estudio de actual interés ([1],[15]).

Para una superficie inmersa en  $\mathbb{R}^5$ , además de la curvatura Gaussiana, la norma del vector de curvatura media y la función  $\Delta$  se tienen dos invariantes más: la norma de un vector ortogonal al plano que contiene a la elipse, que puede ser entendido como el vector de curvatura normal:  $|\vec{N}|$  y  $\Gamma$  el cual está dado en términos del ángulo formado por el vector de curvatura media y el vector de curvatura normal. En general, para una superficie inmersa en  $\mathbb{R}^{n+2}$  los cinco invariantes antes mencionados se pueden generalizar y dar pie a un sistema completo de invariantes.

En cada punto de la superficie la segunda forma fundamental puede ser identificada con un aplicación cuadrática cuyo dominio y contradominio son, respectivamente, un espacio euclidiano de dimensión 2 y un espacio euclidiano de dimensión  $n$ .

El primer objetivo de este trabajo es generalizar la clasificación del conjunto de aplicaciones cuadráticas  $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  hecha en [1] a aplicaciones cuadráticas  $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Para  $n = 2$  dicha clasificación se hace en términos de cuatro invariantes,  $a$ ,  $b$ ,  $\alpha$  y  $\beta$ , que resultan naturalmente de la geometría de la elipse de curvatura:  $a$  y  $b$  son las longitudes de los semiejes de la elipse de curvatura y  $\alpha$  y  $\beta$  las proyecciones del vector de curvatura media sobre una base ortonormal orientada positiva determinada por las direcciones de los semiejes de la elipse. Estos invariantes están dados en términos de los invariantes clásicos (ver *teorema 1.7* de [1]).

En el primer capítulo se trata esta generalización. Cuando  $n \geq 3$  tenemos que el vector de curvatura media,  $\vec{H}$ , tiene 3 o más componentes y por lo tanto, además de los invariantes  $a$  y  $b$  debemos considerar las proyecciones de éste con los elementos de una base ortonormal  $\{N_i\}_{i=1}^n$  de  $\mathbb{R}^n$  con  $N_1$  y  $N_2$  en las direcciones de los semiejes de la elipse, es decir con  $\alpha = \langle \vec{H}, N_1 \rangle$  y  $\beta = \langle \vec{H}, N_2 \rangle$ . Mostramos que es posible elegir una base ortonormal orientada positiva  $\{N_i\}_{i=1}^n$  de  $\mathbb{R}^n$  de tal manera que  $\langle \vec{H}, N_i \rangle = 0$ ,  $i = \{4, \dots, n\}$ , y hacer entonces la clasificación agregando únicamente el invariante  $\gamma := \langle \vec{H}, N_3 \rangle$  a los cuatro ya mencionados. Debido a que el espacio generado por la imagen de una aplicación cuadrática  $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  es a lo más de dimensión 3, y es precisamente cuando  $n = 3$  que se obtienen los cinco invariantes descritos anteriormente, resulta natural restringir nuestro estudio a este caso. Por tal motivo, en el segundo capítulo consideramos una aplicación cuadrática  $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  y caracterizamos la forma y posición de su elipse de curvatura asociada en términos de sus invariantes numéricos.

El segundo objetivo de este trabajo es el de estudiar la geometría extrínseca de una superficie inmersa en  $\mathbb{R}^5$  en términos de los invariantes escalares de segundo orden asociados a ésta, y su relación con la teoría de contacto.

En el capítulo 3 se usa la aplicación de Gauss para interpretar los invariantes  $a$ ,  $b$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  como velocidades angulares asociadas a rotaciones infinitesimales del plano tangente de la superficie y se generaliza el concepto de direcciones axiales introducido en [7] para el caso de superficies inmersas en  $\mathbb{R}^4$ . En la segunda sección de este capítulo se define una nueva aplicación cuadrática  $\delta$  del haz tangente de  $M$  al haz normal que mide la complejidad de la diferencial de la aplicación de Gauss, se determinan los invariantes asociados a  $\delta$ , se caracterizan los puntos umbílicos y de inflexión en términos de estos y se muestra que la nulidad de  $\delta$  sobre  $M$  da pie a una reducción sustancial de la codimensión, es decir, a que  $M$  esté contenida en un subespacio afín de dimensión menor que 5, generalizando así, a la dimensión 5, la primera parte del *teorema 1.3* de [9].

Primero, en el capítulo 4 utilizamos la aplicación cuadrática  $\delta$  para estudiar el contacto de la superficie con hiperplanos de  $\mathbb{R}^5$ : se muestra que el cono de direcciones degeneradas definido en [12] coincide con el cono generado por la elipse asociada a  $\delta$ , y se da una ecuación intrínseca de direcciones asintóticas la cual fue introducida y estudiada en coordenadas locales en [8], [12] y [18]. En [19] se define la reducción isométrica de codimensión de una variedad inmersa en un espacio de forma. Para el caso de una superficie en  $M$  en  $\mathbb{R}^5$ , esta noción consiste en determinar una inmersión isométrica de  $M$  (con la métrica heredada de  $\mathbb{R}^5$ ) a  $\mathbb{R}^4$  de tal manera que la segunda forma fundamental de ésta, es isomorfa a la proyección sobre un subfibrado de rango 2 del fibrado normal a  $M \subset \mathbb{R}^5$ . Así las propiedades de segundo orden determinadas en este subfibrado se preservan bajo esta reducción de codimensión. En la segunda sección se establecen condiciones necesarias y suficientes para que exista una reducción isométrica de la codimensión. Se concluye dando un ejemplo donde se calculan los invariantes asociados a la superficie y se muestra que para ésta existe reducción isométrica de codimensión, pero no reducción sustancial.

# Capítulo 1

## La clasificación de las aplicaciones cuadráticas $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ módulo isometrías.

En este capítulo estudiamos el espacio vectorial  $\mathbb{Q}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n)$  de aplicaciones cuadráticas de  $\mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{R}^n$ . Suponemos que  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^n$  están orientados de manera canónica. Consideremos los grupos de isometrías que preservan la orientación de  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^n$ :  $SO(2)$  y  $SO(n)$ . Éstos actúan en  $\mathbb{Q}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n)$  por composición como sigue:

$$\begin{aligned} SO(n) \times \mathbb{Q}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n) \times SO(2) &\rightarrow \mathbb{Q}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n) \\ (g_1, q, g_2) &\mapsto g_1 \circ q \circ g_2. \end{aligned}$$

Estamos interesados en la descripción del conjunto cociente

$$SO(n) \backslash \mathbb{Q}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n) / SO(2). \tag{1.0.1}$$

Comenzamos la primera sección introduciendo formas invariantes asociadas a una aplicación cuadrática, a saber, una aplicación lineal,  $L$ , una aplicación bilineal antisimétrica  $A$ , y dos formas cuadráticas  $Q$  y  $\Phi$ . Damos una biyección,  $\Theta$ , entre el conjunto de estas formas, el cual denotamos por  $P$ , y el conjunto cociente  $\mathbb{Q}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3) / SO(2)$ . Finalizamos la sección definiendo una acción de  $SO(n)$  sobre  $P$  y  $\mathbb{Q}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n) / SO(2)$  la cual induce una aplicación biyectiva  $\bar{\Theta} : SO(n) \backslash \mathbb{Q}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n) / SO(2) \rightarrow SO(n) \backslash P$ .

En la segunda sección definimos invariantes escalares sobre el conjunto (1.0.1) asociados a las formas invariantes de la primera sección.

La tercera sección la dedicamos al estudio de las formas  $\Phi$  y  $L$ . Damos una representación de éstas en términos de los invariantes encontrados en la sección anterior, en una base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$ .

Finalmente, en la cuarta sección, damos una clasificación de los elementos de (1.0.1) en base a los invariantes escalares obtenidos en la sección 2. Estos últimos determinan las formas invariantes de la sección 1 módulo la acción de  $SO(n)$ , y éstas, a su vez, determinan un elemento del conjunto cociente  $SO(n) \backslash \mathbb{Q}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n) / SO(2)$ , via la biyección  $\bar{\Theta}$  y módulo la acción de un grupo de dos elementos  $G$ .

### 1.1. Las formas asociadas a una aplicación cuadrática.

Sea  $q \in \mathbb{Q}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n)$  y  $\nu \in \mathbb{R}^n$ . Denotamos por  $S_\nu$  al operador simétrico asociado a la forma cuadrática  $q_\nu := \langle q, \nu \rangle$ , es decir

$$\langle q(u), \nu \rangle = \langle S_\nu(u), u \rangle, \quad u \in \mathbb{R}^2.$$

Si  $\nu, \nu_1, \nu_2 \in \mathbb{R}^n$  definimos

$$L_q(\nu) = \frac{1}{2} \text{tr} S_\nu, \quad Q_q(\nu) = \det S_\nu \quad \text{y} \quad A_q(\nu_1, \nu_2) = \frac{1}{2} [S_{\nu_1}, S_{\nu_2}],$$

donde  $[S_{\nu_1}, S_{\nu_2}]$  denota al operador antisimétrico  $S_{\nu_1} \circ S_{\nu_2} - S_{\nu_2} \circ S_{\nu_1}$ , el cual identificamos con el número real

$$\langle [S_{\nu_1}, S_{\nu_2}](e_2), e_1 \rangle;$$

aquí  $\{e_1, e_2\}$  denota a la base canónica de  $\mathbb{R}^2$ . Notemos que  $L_q$  es una forma lineal,  $Q_q$  es una forma cuadrática y  $A_q$  es una forma bilineal antisimétrica definidas sobre  $\mathbb{R}^n$ . Estas formas pueden ser relacionadas como se indica en el siguiente lema.

**Lema 1.1.1.** *La forma cuadrática  $\Phi_q := L_q^2 - Q_q$  es no negativa y la siguiente identidad se cumple: para todo  $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{R}^n$*

$$\Phi_q(\nu_1)\Phi_q(\nu_2) = \tilde{\Phi}_q(\nu_1, \nu_2)^2 + A_q(\nu_1, \nu_2)^2 \quad (1.1.1)$$

donde  $\tilde{\Phi}_q$  denota la forma polar de  $\Phi_q$ .

*Demostración.* Supongamos que en la base canónica de  $\mathbb{R}^2$  se tiene

$$S_{\nu_1} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad S_{\nu_2} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}.$$

Notemos que

$$\Phi_q(\nu_1) = L^2(\nu_1) - Q(\nu_1) = \frac{1}{4}(a+c)^2 - (ac - b^2) = \frac{1}{4}(a-c)^2 + b^2 \quad (1.1.2)$$

lo cual prueba que  $\Phi_q$  es no negativa. Ahora

$$\tilde{\Phi}_q(\nu_1, \nu_2) = \frac{1}{4}(a-c)(e-g) + bf \quad (1.1.3)$$

y

$$A_q(\nu_1, \nu_2) = \frac{1}{2}((a-c)f - (e-g)b), \quad (1.1.4)$$

luego

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_q^2(\nu_1, \nu_2) + A_q^2(\nu_1, \nu_2) &= \frac{1}{16}(a-c)^2(e-g)^2 + b^2f^2 + \frac{1}{4}(a-c)^2f^2 + \frac{1}{4}(e-g)^2b^2 \\ &= \left( \frac{1}{4}(a-c)^2 + b^2 \right) \left( \frac{1}{4}(e-g)^2 + f^2 \right) \\ &= \Phi_q(\nu_1)\Phi_q(\nu_2), \end{aligned}$$

lo cual prueba (1.1.1). □

Denotemos por  $\mathbf{F}$  al espacio de operadores simétricos sin traza con dominio y codominio  $\mathbb{R}^2$ , y por  $S^\circ : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbf{F}$  la transformación lineal que a cada  $\nu \in \mathbb{R}^n$  asocia el operador simétrico sin traza

$$S_\nu^\circ := S_\nu - L(\nu)Id. \quad (1.1.5)$$

Las formas bilineales  $\tilde{\Phi}_q$  y  $A_q$  pueden ser expresadas en términos de  $S^\circ$  de la siguiente manera.

**Lema 1.1.2.** Las formas bilineales  $\tilde{\Phi}_q$  y  $A_q$  satisfacen

$$\tilde{\Phi}_q(\nu, \mu) = \frac{1}{2} \text{tr}(S_\nu^\circ \circ S_\mu^\circ) \quad (1.1.6)$$

$$A_q(\nu, \mu) = \frac{1}{2} [S_\nu^\circ, S_\mu^\circ] \quad (1.1.7)$$

para todo  $\mu, \nu \in \mathbb{R}^n$ .

*Demostración.* En efecto, dado que el operador  $Id$  conmuta con cualquier operador

$$\begin{aligned} [S_\nu^\circ, S_\mu^\circ] &= [S_\nu - L_q(\nu)Id, S_\mu - L_q(\mu)Id] \\ &= [S_\nu, S_\mu] - L_q(\mu)[S_\nu, Id] - L_q(\nu)[Id, S_\mu] + L_q(\nu)L_q(\mu)[Id, Id] \\ &= [S_\nu, S_\mu] \\ &= 2A_q(\nu, \mu). \end{aligned}$$

Ahora supongamos que

$$S_\nu = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad y \quad S_\mu = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

en la base canónica de  $\mathbb{R}^2$ . Entonces

$$S_\nu^\circ = \begin{pmatrix} \frac{a-c}{2} & b \\ b & \frac{c-a}{2} \end{pmatrix} \quad y \quad S_\mu^\circ = \begin{pmatrix} \frac{e-g}{2} & f \\ f & \frac{g-e}{2} \end{pmatrix},$$

y

$$\frac{1}{2} \text{tr}(S_\nu^\circ \circ S_\mu^\circ) = \frac{1}{4}(a-c)(e-g) + bf = \tilde{\Phi}_q(\nu, \mu).$$

□

**Definición 1.1.3.** Sea  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una forma bilineal. El núcleo de  $f$  es el conjunto

$$\text{Ker } f := \{\nu \in \mathbb{R}^n : f(\nu, \mu) = 0, \forall \mu \in \mathbb{R}^n\}.$$

Notemos que el operador asociado a  $f$ , que denotamos por  $U_f$ , satisface

$$\text{Ker } f = \text{Ker } U_f.$$

En efecto si  $\nu \in \text{Ker } f$  entonces  $f(\nu, \mu) = 0$ , para toda  $\mu \in \mathbb{R}^n$ , en particular para  $\mu = U_f(\nu)$ . En este caso

$$0 = f(\nu, U_f(\nu)) = \langle U_f(\nu), U_f(\nu) \rangle$$

lo que implica que  $U_f(\nu) = 0$ . El recíproco es inmediato.

**Lema 1.1.4.** Sea  $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un operador antisimétrico. Si  $U \neq 0$ , entonces la dimensión del núcleo de  $U$  es menor o igual a  $n - 2$ .

*Demostración.* Mostremos que si  $\dim(\text{Ker } U) > n - 2$  entonces  $U \equiv 0$ .

Supongamos que existe un conjunto ortonormal  $\alpha := \{v_i\}_{i=1}^{n-1}$  de  $\mathbb{R}^n$  tal que  $\alpha \subset \text{Ker } U$  y completemos  $\alpha$  a una base ortonormal  $\alpha \cup \{v\}$  de  $\mathbb{R}^n$ . Veamos que  $U(\alpha \cup \{v\}) = \{0\}$ . Como  $U(v_i) = 0$  para  $i = \{1, \dots, n-1\}$  basta mostrar que  $U(v) = 0$ . Supongamos que

$$U(v) = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-1} v_{n-1} + \lambda v$$

para  $\lambda, \lambda_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, \dots, n-1\}$ . Como  $U$  es antisimétrico y  $\alpha \cup \{v\}$  es una base ortonormal

$$\begin{aligned}\lambda_i &= \langle U(v), v_i \rangle = \langle v, -U(v_i) \rangle = 0 \\ \lambda &= \langle U(v), v \rangle = 0\end{aligned}$$

concluyendo de esta manera que  $U(v) = 0$  y por lo tanto  $U \equiv 0$ . □

La transformación lineal  $S^\circ$  definida en (1.1.5) y la ecuación (1.1.1) nos permite establecer relaciones entre  $\text{Ker } \tilde{\Phi}_q$  y  $\text{Ker } A_q$  de la siguiente manera.

**Lema 1.1.5.** *Sea  $q \in \mathbb{Q}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n)$ . Entonces*

- a)  $\text{Ker } S^\circ = \text{Ker } \tilde{\Phi}_q$
- b)  $\text{Ker } S^\circ \subset \text{Ker } A_q$ . Además, si  $A_q \neq 0$  entonces  $\text{Ker } S^\circ = \text{Ker } A_q$  y por lo tanto  $\text{Ker } A_q = \text{Ker } \tilde{\Phi}_q$ .
- c)  $\dim(\text{Ker } \tilde{\Phi}_q) \geq n - 2$ . De hecho  $\dim(\text{Ker } \tilde{\Phi}_q) = n - 2$  si y sólo si  $A_q \neq 0$ .

*Demostración.* a) Sea  $\nu \in \text{Ker } S^\circ$ . Para cada  $\mu \in \mathbb{R}^n$ , del Lema 1.1.2 tenemos que

$$\tilde{\Phi}_q(\nu, \mu) = \frac{1}{2} \text{tr}(S_\nu^\circ \circ S_\mu^\circ) = \frac{1}{2} \text{tr}(0) = 0,$$

es decir,  $\nu \in \text{Ker } \tilde{\Phi}_q$ , lo que prueba que  $\text{Ker } S^\circ \subset \text{Ker } \tilde{\Phi}_q$ . Para probar la otra contención consideremos  $\nu \in \text{Ker } \tilde{\Phi}_q$  y supongamos que

$$S_\nu^\circ = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix},$$

en la base canónica de  $\mathbb{R}^2$ . Entonces  $0 = \tilde{\Phi}_q(\nu, \nu) = \frac{1}{2} \text{tr } S_\nu^\circ \circ S_\nu^\circ = a^2 + b^2$  de donde tenemos que  $a = b = 0$  y por lo tanto  $S_\nu^\circ = 0$ . Concluimos que  $\nu \in \text{Ker } S^\circ$  y por lo tanto  $\text{Ker } \tilde{\Phi}_q \subset \text{Ker } S^\circ$ .

b) Sea  $\nu \in \text{Ker } S^\circ$ . Del Lema 1.1.2

$$A_q(\nu, \mu) = \frac{1}{2} [S_\nu^\circ, S_\mu^\circ] = \frac{1}{2} [0, S_\mu^\circ] = 0$$

para toda  $\mu \in \mathbb{R}^n$ , luego  $\nu \in \text{Ker } A_q$  y por lo tanto  $\text{Ker } S^\circ \subset \text{Ker } A_q$ .

Mostremos ahora que si  $A_q \neq 0$  entonces  $\text{Ker } S^\circ = \text{Ker } A_q$ . Para esto notemos que es suficiente mostrar que si  $\nu \in \text{Ker } A_q$  entonces  $\tilde{\Phi}_q(\nu) = 0$ , esto debido a que  $\Phi_q$  es semidefinida no negativa, y por lo tanto,  $\tilde{\Phi}_q(\nu) = 0$  implica que  $U_{\tilde{\Phi}_q}(\nu) = 0$ ; por lo tanto de la observación a la definición 1.1.3 y del inciso anterior se tiene que  $\nu \in \text{Ker } S^\circ$ .

Consideremos entonces  $\nu \in \text{Ker } A_q$  y la forma lineal  $\tilde{\Phi}_q(\nu, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\mu \mapsto \tilde{\Phi}_q(\nu, \mu)$ . Si  $\tilde{\Phi}_q(\nu, \cdot) \equiv 0$  entonces  $\tilde{\Phi}_q(\nu) = 0$ . Supongamos entonces que  $\tilde{\Phi}_q(\nu, \cdot) \not\equiv 0$ . En este caso  $\dim \text{Ker } \tilde{\Phi}_q(\nu, \cdot) = n - 1$ . Afirmamos que existe  $\mu \in \text{Ker } \tilde{\Phi}_q(\nu, \cdot)$  de tal manera que  $\tilde{\Phi}_q(\mu) \neq 0$ , de lo contrario para una base  $\{\mu_i\}_{i=1}^{n-1}$  de  $\text{Ker } \tilde{\Phi}_q(\nu, \cdot)$  se tendría  $\tilde{\Phi}_q(\mu_i) = 0$  para  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  y en este caso, de (1.1.1),  $A_q(\mu_i, \mu) = 0$  para todo  $\mu \in \mathbb{R}^n$  y para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  contradiciendo el lema anterior.

Ahora como  $A_q(\nu, \mu) = 0$  y  $\mu \in \text{Ker } \tilde{\Phi}_q(\nu, \cdot)$ , de (1.1.1) tenemos que

$$\tilde{\Phi}_q(\nu) \tilde{\Phi}_q(\mu) = \tilde{\Phi}_q(\nu, \mu)^2 = 0$$

y como  $\Phi_q(\mu) \neq 0$ ,  $\Phi_q(\nu) = 0$ .

c) Como  $\dim F = 2$  entonces  $\dim(\text{Ker } S^o) \geq n - 2$ , luego, por el inciso a) ,  $\dim(\text{Ker } \tilde{\Phi}_q) \geq n - 2$ . Para mostrar la segunda parte de este inciso, supongamos primero que  $A_q \neq 0$  y denotemos por  $U_A$  al operador antisimétrico asociado a  $A_q$ . Como  $\text{Ker } A_q = \text{Ker } U_A$ , del lema anterior y del inciso a) de este lema,

$$n - 2 \leq \dim(\text{Ker } \tilde{\Phi}_q) \leq \dim(\text{Ker } A_q) \leq n - 2,$$

es decir,  $\dim(\text{Ker } \tilde{\Phi}_q) = n - 2$ .

Para mostrar el recíproco, supongamos que  $A_q \equiv 0$  y que existe  $\nu \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\Phi_q(\nu) \neq 0$ . Para cada  $\mu \in \text{Ker } \tilde{\Phi}_q(\nu, \cdot)$  se tiene que

$$\Phi_q(\nu)\Phi_q(\mu) = \tilde{\Phi}_q(\nu, \mu)^2 = 0,$$

luego,  $\Phi_q(\mu) = 0$  y dado que  $\Phi_q$  es semidefinida no negativa  $\mu \in \text{Ker } \tilde{\Phi}_q$ . Luego  $\dim \text{Ker } \tilde{\Phi}_q \geq n - 1$ .  $\square$

En el siguiente lema damos una fórmula que nos permite expresar  $S_\nu$  en términos de sus formas invariantes. Dicha expresión nos permitirá recuperar la aplicación cuadrática  $q$  asociada a  $S_\nu$ , módulo la acción de  $SO(2)$  sobre  $q$ . Esta fórmula generaliza la que aparece en [1] sección 1, lema 1.2.

**Lema 1.1.6.** *Sea  $q \in \mathbb{Q}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n)$ . Existe  $\nu_0 \in \mathbb{R}^n$  y una base ortonormal orientada de manera positiva  $\{e_1, e_2\}$  de  $\mathbb{R}^2$  tal que la siguiente igualdad se cumple:*

$$S_\nu = L_q(\nu)I + \tilde{\Phi}_q(\nu_0, \nu)E_1 + A_q(\nu_0, \nu)E_2, \quad (1.1.8)$$

para todo  $\nu \in \mathbb{R}^n$  y donde  $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  y  $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

*Demostración.* Si  $\Phi_q \neq 0$  existe  $\nu_0 \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\Phi_q(\nu_0) = 1$ . Fijemos dicho  $\nu_0$ . Los valores propios de  $S_{\nu_0}$  son las raíces del polinomio  $\lambda^2 - 2L_q(\nu_0) + Q_q(\nu_0)$  y por lo tanto éstas son  $\lambda = L_q(\nu_0) \pm 1$ . Elegimos una base ortonormal  $\{e_1, e_2\}$  de  $\mathbb{R}^2$  orientada de manera positiva, tal que en esa base

$$S_{\nu_0} = L_q(\nu_0)Id + E_1.$$

Dado que  $S_\nu^o = S_\nu - L_q(\nu)Id$  representa un operador simétrico sin traza, éste, en principio, puede ser escrito como

$$S_\nu^o = a_\nu E_1 + b_\nu E_2,$$

donde  $a_\nu$  y  $b_\nu$  pertenecen a  $\mathbb{R}$ .

Observemos que  $S_{\nu_0}^o = E_1$ , así

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_q(\nu_0, \nu) &= \frac{1}{2} \text{tr}(S_{\nu_0}^o S_\nu^o) = \frac{1}{2} \text{tr}(a_\nu E_1 E_1 + b_\nu E_2 E_1) = \\ &= \frac{1}{2} \text{tr} \begin{pmatrix} a_\nu & -b_\nu \\ b_\nu & a_\nu \end{pmatrix} = a_\nu \end{aligned}$$

y

$$A_q(\nu_0, \nu) = \frac{1}{2} [S_{\nu_0}^o, S_\nu^o] = \frac{1}{2} (a_\nu [E_1, E_1] + b_\nu [E_1, E_2]) = b_\nu.$$

De esta manera

$$S_\nu = L_q(\nu)Id + \tilde{\Phi}_q(\nu_0, \nu)E_1 + A_q(\nu_0, \nu)E_2,$$

en la base  $\{e_1, e_2\}$ . Ahora, si  $\Phi_q \equiv 0$  entonces el polinomio característico asociado a  $S_\nu$  tiene una raíz doble, es decir,  $S_\nu$  es una homotecia para todo  $\nu \in \mathbb{R}^n$  y por lo tanto  $S_\nu = L_q(\nu)Id$ , cumpliéndose la fórmula anterior (aquí  $\nu_0$  y  $\{e_1, e_2\}$  pueden ser elegidos arbitrariamente).  $\square$

**Lema 1.1.7.** *Las formas  $L_q$ ,  $\Phi_q$  y  $A_q$  son invariantes bajo la acción de  $SO(2)$  sobre  $q$ , es decir, si  $g \in SO(2)$  entonces*

$$L_{q \circ g} = L_q, \quad \Phi_{q \circ g} = \Phi_q \quad y \quad A_{q \circ g} = A_q.$$

*Demostración.* Denotemos por  $S_\nu^{q \circ g}$  al operador asociado a la forma cuadrática  $\langle q \circ g(\cdot), \nu \rangle$  y por  $S_\nu^q$  al correspondiente asociado a  $\langle q(\cdot), \nu \rangle$ . Puesto que  $g$  es una isometría, para toda  $u \in \mathbb{R}^2$  se tiene

$$\begin{aligned} \langle S_\nu^{q \circ g}(u), u \rangle &= \langle q \circ g(u), \nu \rangle = \langle q(g(u)), \nu \rangle \\ &= \langle S_\nu^q(g(u)), g(u) \rangle = \langle g^{-1} \circ S_\nu^q \circ g(u), u \rangle, \end{aligned}$$

es decir,  $S_\nu^{q \circ g} \equiv g^{-1} \circ S_\nu^q \circ g$ . Entonces

$$\begin{aligned} L_{q \circ g}(\nu) &= \frac{1}{2} \text{tr } S_\nu^{q \circ g} = \frac{1}{2} \text{tr } g^{-1} \circ S_\nu^q \circ g \\ &= \frac{1}{2} \text{tr } S_\nu^q = L_q(\nu), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{q \circ g}(\nu) &= \det S_\nu^{q \circ g} = \det g^{-1} \circ S_\nu^q \circ g \\ &= \det S_\nu^q = \Phi_q(\nu), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2A_{q \circ g}(\nu, \mu) &= [S_\nu^{q \circ g}, S_\mu^{q \circ g}] \\ &= [g^{-1} \circ S_\nu^q \circ g, g^{-1} \circ S_\mu^q \circ g] \\ &= g^{-1} \circ S_\mu^q \circ g \circ g^{-1} \circ S_\nu^q \circ g - g^{-1} \circ S_\nu^q \circ g \circ g^{-1} \circ S_\mu^q \circ g \\ &= g^{-1} \circ (S_\mu^q \circ S_\nu^q - S_\nu^q \circ S_\mu^q) \circ g \\ &= S_\mu^q \circ S_\nu^q - S_\nu^q \circ S_\mu^q \\ &= [S_\nu^q, S_\mu^q] \\ &= 2A_q(\nu, \mu). \end{aligned}$$

□

Veamos ahora que estas formas contienen toda la información de  $q$  módulo esta acción. Considerando

$$P = \{(L_q, \Phi_q, A_q) \in (\mathbb{R}^n)^* \times S^2(\mathbb{R}^n)^* \times \Lambda^2(\mathbb{R}^n)^* : \Phi \text{ es no negativa y (1.1.1) se cumple}\},$$

donde  $S^2(\mathbb{R}^n)^*$  y  $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)^*$  denotan los conjuntos de las formas simétricas y antisimétricas definidas sobre  $\mathbb{R}^n$ , tenemos el siguiente resultado:

**Proposición 1.1.8.** *La aplicación  $\Theta : \mathbb{Q}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n)/SO(2) \rightarrow P$  dada por  $\Theta([q]) = (L_{[q]}, \Phi_{[q]}, A_{[q]})$  es biyectiva.*

*Demostración.* Para probar la suprayectividad, si  $L$ ,  $\Phi$  y  $A$  son dados, primero elegimos  $\nu_0$  tal que  $\Phi(\nu_0) = 1$  (si  $\Phi \not\equiv 0$ ) y definimos entonces  $S_\nu$  en la base canónica de  $\mathbb{R}^2$  como

$$S_\nu = L(\nu)Id + \tilde{\Phi}(\nu_0, \nu)E_1 + A(\nu_0, \nu)E_2 = \begin{pmatrix} L(\nu) + \tilde{\Phi}(\nu_0, \nu) & A(\nu_0, \nu) \\ A(\nu_0, \nu) & L(\nu) - \tilde{\Phi}(\nu_0, \nu) \end{pmatrix}.$$

Sea  $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  la aplicación cuadrática tal que para cada  $\nu \in \mathbb{R}^n$

$$\langle q(u), \nu \rangle = \langle S_\nu u, u \rangle,$$

donde  $u$  está expresado en la base canónica de  $\mathbb{R}^2$ . Mostraremos que sus formas invariantes  $L_q$ ,  $\Phi_q$  y  $A_q$  coinciden con las formas  $L$ ,  $\Phi$  y  $A$  dadas en un principio. Notemos primero que el operador simétrico asociado a  $\langle q(\cdot), \mu \rangle$  es  $S_\mu$ , luego

$$L_q(\mu) = \frac{1}{2} \text{tr}(S_\mu) = \frac{1}{2} \text{tr} \begin{pmatrix} L(\mu) + \tilde{\Phi}(\nu_0, \mu) & A(\nu_0, \mu) \\ A(\nu_0, \mu) & L(\mu) - \tilde{\Phi}(\nu_0, \mu) \end{pmatrix} = L(\mu).$$

Por otra parte, por el *Lema 1.1.1*

$$\begin{aligned} \Phi_q(\mu) = L_q^2(\mu) - Q_q(\mu) &= L^2(\mu) - \det \begin{pmatrix} L(\mu) + \tilde{\Phi}(\nu_0, \mu) & A(\nu_0, \mu) \\ A(\nu_0, \mu) & L(\mu) - \tilde{\Phi}(\nu_0, \mu) \end{pmatrix} = \\ &= \tilde{\Phi}^2(\nu_0, \mu) + A^2(\nu_0, \mu) = \Phi(\nu_0)\Phi(\mu) = \Phi(\mu). \end{aligned}$$

Veamos ahora que  $A_q \equiv A$ . Para esto notemos que

$$\Phi(\nu)\Phi(\mu) = \tilde{\Phi}(\nu, \mu)^2 + A(\nu, \mu)^2 \quad (1.1.9)$$

$$\Phi_q(\nu)\Phi_q(\mu) = \tilde{\Phi}_q(\nu, \mu)^2 + A_q(\nu, \mu)^2, \quad (1.1.10)$$

de donde obtenemos  $A_q(\nu, \mu) = A(\nu, \mu)$  ó  $A_q(\nu, \mu) = -A(\nu, \mu)$ , pues  $\Phi_q \equiv \Phi$ . Supongamos que  $A_q(\nu, \mu) = -A(\nu, \mu)$ . Notemos que

$$A_q(\nu, \mu) = \frac{1}{2}[S_\nu, S_\mu] = \tilde{\Phi}(\nu_0, \nu)A(\nu_0, \mu) - \tilde{\Phi}(\nu_0, \mu)A(\nu_0, \nu), \quad (1.1.11)$$

y que debido a que  $\Phi(\nu_0) = 1$  y  $A_q(\nu_0, \nu_0) = 0$ ,  $A_q(\nu_0, \mu) = A(\nu_0, \mu)$  para toda  $\mu \in \mathbb{R}^n$ .

Entonces

$$A_q(\nu_0, \mu) = -A(\nu_0, \mu) \quad y \quad A_q(\nu_0, \mu) = A(\nu_0, \mu)$$

lo que implica que  $A(\nu_0, \mu) = 0$  para toda  $\mu \in \mathbb{R}^n$  y por lo tanto  $\nu_0 \in \text{Ker } A$ . Luego, de (1.1.11),  $A_q \equiv 0$  y por lo tanto  $A \equiv 0$ .

Para probar la inyectividad de  $\Theta$  supongamos que  $\Theta([q_1]) = \Theta([q_2])$ . Del Lema 1.1.6 sabemos que existen bases orientadas positivas  $\mathbf{e} := \{e_1, e_2\}$  y  $\mathbf{f} := \{f_1, f_2\}$  en las que

$$(S_\nu^{q_1}, \mathbf{e}) = L_{q_1}(\nu)I + \tilde{\Phi}_{q_1}(\nu_0, \nu)E_1 + A_{q_1}(\nu_0, \nu)E_2,$$

y

$$(S_\nu^{q_2}, \mathbf{f}) = L_{q_2}(\nu)I + \tilde{\Phi}_{q_2}(\nu_0, \nu)E_1 + A_{q_2}(\nu_0, \nu)E_2,$$

luego, como  $(L_{[q_1]}, \Phi_{[q_1]}, A_{[q_1]}) = (L_{[q_2]}, \Phi_{[q_2]}, A_{[q_2]})$ , concluimos que  $(S_\nu^{q_1}, \mathbf{e}) = (S_\nu^{q_2}, \mathbf{f})$ . Ahora,

$$(S_\nu^{q_1}, \mathbf{f}) = M_{\mathbf{e}}^{\mathbf{f}}(S_\nu^{q_1}, \mathbf{e})M_{\mathbf{f}}^{\mathbf{e}},$$

donde  $M_{\mathbf{e}}^{\mathbf{f}}$  denota a la matriz de cambio de base, de la base  $\mathbf{e}$  a la base  $\mathbf{f}$ . Por otro lado  $M_{\mathbf{e}}^{\mathbf{f}}$  induce una rotación en  $\mathbb{R}^2$  dada por  $[\sigma(\nu)]_{\mathbf{f}} =: M_{\mathbf{e}}^{\mathbf{f}} \cdot [\nu]_{\mathbf{f}}$ , luego

$$\begin{aligned} (S_\nu^{q_1 \circ \sigma}, \mathbf{f}) &= M_{\mathbf{f}}^{\mathbf{e}}(S_\nu^{q_1}, \mathbf{f})M_{\mathbf{e}}^{\mathbf{f}} \\ &= M_{\mathbf{f}}^{\mathbf{e}}(M_{\mathbf{e}}^{\mathbf{f}}(S_\nu^{q_1}, \mathbf{e})M_{\mathbf{f}}^{\mathbf{e}})M_{\mathbf{e}}^{\mathbf{f}} \\ &= (S_\nu^{q_1}, \mathbf{e}) \\ &= (S_\nu^{q_2}, \mathbf{f}). \end{aligned}$$

Esto último muestra que  $q_1 \circ \sigma = q_2$  en la base  $\mathbf{f}$  y por lo tanto  $[q_1] = [q_2]$ . □

La acción natural de  $SO(n)$  sobre  $\mathbb{Q}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n)/SO(2)$  transforma las formas  $L_{[q]}$ ,  $\Phi_{[q]}$  y  $A_{[q]}$  como

$$L_{g[q]} = L_{[q]} \circ g^{-1}, \quad \Phi_{g[q]} = \Phi_{[q]} \circ g^{-1} \quad y \quad A_{g[q]} = A_{[q]} \circ (g^{-1}, g^{-1}).$$

En efecto, si  $g \in SO(n)$  entonces  $\langle g \circ q(\cdot), \nu \rangle = \langle q(\cdot), g^{-1}(\nu) \rangle$  por ser  $g$  una isometría y por lo tanto  $S_{\nu}^{g \circ q} = S_{g^{-1}(\nu)}^q$ . De esta manera tenemos que

$$L_{g \circ q}(\nu) = \frac{1}{2} \text{tr}(S_{\nu}^{g \circ q}) = \frac{1}{2} \text{tr}(S_{g^{-1}(\nu)}^q) = L_q(g^{-1}(\nu)) = L_q \circ g^{-1}(\nu).$$

Las igualdades restantes se obtienen de manera análoga.

Considerando la acción de  $SO(n)$  sobre  $P$  dada por

$$g(L, \Phi, A) := (L \circ g^{-1}, \Phi \circ g^{-1}, A \circ (g^{-1}, g^{-1}))$$

tenemos que  $\Theta$  es  $SO(n)$  – *equivariante* y por lo tanto induce una aplicación biyectiva

$$\bar{\Theta} : SO(n) \backslash \mathbb{Q}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n) / SO(2) \rightarrow SO(n) \backslash P. \quad (1.1.12)$$

## 1.2. Los invariantes escalares de una aplicación cuadrática.

Dado un operador  $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tenemos, asociados a éste,  $n$  invariantes numéricos bajo la acción natural de  $SO(n)$ , a saber, los números  $\sigma_r(\rho)$  que satisfacen

$$p_\rho(\lambda) := \sum_{i=0}^n (-1)^{n+i} \sigma_i(\rho) \lambda^{n-i} \quad (1.2.1)$$

donde  $p_\rho(\lambda)$  es el polinomio característico asociado a  $\rho$ . Dichos coeficientes también son los  $r$ -ésimos polinomios simétricos elementales asociados al operador  $\rho$ . Si  $(a_{ij})$  es la representación de  $\rho$  en alguna base de  $\mathbb{R}^n$ , el  $r$ -ésimo invariante está dado por

$$\sigma_r(\rho) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \det \begin{pmatrix} a_{i_1, i_1} & a_{i_1, i_2} & \dots & a_{i_1, i_r} \\ a_{i_2, i_1} & a_{i_2, i_2} & \dots & a_{i_2, i_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_r, i_1} & a_{i_r, i_2} & \dots & a_{i_r, i_r} \end{pmatrix} \quad (1.2.2)$$

donde  $\sigma_0(\rho) := 1$ . Los invariantes  $\sigma_1(\rho)$  y  $\sigma_n(\rho)$  son conocidos como la traza y el determinante de  $\rho$  respectivamente.

**Definición 1.2.1.** Consideremos

1. El vector  $\vec{H} \in \mathbb{R}^n$  tal que para toda  $\nu \in \mathbb{R}^n$ ,  $\langle \vec{H}, \nu \rangle = L_{[q]}(\nu)$  y su norma

$$|\vec{H}| := \sqrt{\langle \vec{H}, \vec{H} \rangle}.$$

2. El operador antisimétrico  $U_A$  tal que  $A_{[q]}(\nu, \mu) = \langle U_A(\nu), \mu \rangle$  y el número

$$\|U_A\|^2 := \frac{1}{2} \text{tr}(U_A U_A^t).$$

3. Los tres números reales

$$K := \sigma_1(U_Q), \quad \Delta := \sigma_2(U_Q), \quad \Gamma^2 := \sigma_3(U_Q),$$

donde  $U_Q$  denota al operador simétrico de  $\mathbb{R}^n$  asociado a la forma cuadrática  $Q$ .

En la observación 1.2.4 veremos que  $\sigma_3(U_Q) \geq 0$  lo que justifica la expresión anterior.

**Observación 1.2.2.** Para  $n \geq 4$  se tiene que  $\sigma_r(U_Q) = 0$ ,  $r \in \{4, \dots, n\}$ . Para mostrar esto construyamos primero una base de vectores propios de  $U_\Phi$  de la siguiente manera.

Definamos  $\vec{H}^\perp := \{\nu \in \mathbb{R}^n : \langle \vec{H}, \nu \rangle = 0\}$  y notemos que  $\dim H^\perp \geq n - 1$ . Del Lema 1.1.5 tenemos que  $\dim(\text{Ker}(U_\Phi)) \geq n - 2$ , entonces  $\dim(\text{Ker } U_\Phi \cap \vec{H}^\perp) \geq n - 3$  y por lo tanto podemos elegir un conjunto ortonormal  $\{N_i\}_{i=4}^n \subset \text{Ker } U_\Phi \cap \vec{H}^\perp$ . Completamos este conjunto a una base ortonormal  $\{N_i\}_{i=3}^n$  de  $\text{Ker } U_\Phi$ . Notemos que  $N_i \in \text{Ker } U_\Phi$  es un vector propio de  $U_\Phi$  cuyo valor propio es cero y completamos el conjunto  $\{N_i\}_{i=3}^n$  a una base ortonormal orientada positiva de vectores propios de  $U_\Phi$ ,  $\{N_i\}_{i=1}^n$ . En esta base

$$\Phi_{[q]} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.2.3)$$

y

$$\vec{H} = \alpha N_1 + \beta N_2 + \gamma N_3. \quad (1.2.4)$$

Luego

$$L_{[q]}^2(\nu) = \langle \vec{H}, \nu \rangle^2 = (\alpha\nu_1 + \beta\nu_2 + \gamma\nu_3)^2,$$

donde  $\nu = \sum_{i=1}^n \nu_i N_i$  y por lo tanto

$$L_{[q]}^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha\beta & \beta^2 & \beta\gamma & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.2.5)$$

Finalmente de (1.1.1)

$$Q_{[q]} = L_{[q]}^2 - \Phi_{[q]} = \begin{pmatrix} \alpha^2 - a^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha\beta & \beta^2 - b^2 & \beta\gamma & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.2.6)$$

De esta expresión se sigue que  $\sigma_r(U_Q) = 0$  debido a que todo menor de  $U_Q$  de  $r \times r$ ,  $r \geq 4$  tiene un renglón de ceros.

Notemos la base  $\{N_i\}$  no está únicamente determinada. De hecho podemos considerar la base  $\{-N_1, -N_2, \dots, N_n\}$  y obtener el mismo resultado.

Los invariantes asociados a la forma cuadrática  $\Phi_{[q]}$  pueden ser expresados en términos de los invariantes asociados a las formas  $L_{[q]}$ ,  $Q_{[q]}$  y  $A_{[q]}$  como lo indica el siguiente lema.

**Lema 1.2.3.** *Los invariantes asociados a  $U_\Phi$  están dados por*

$$\sigma_1(U_\Phi) = |\vec{H}|^2 - K, \quad \sigma_2(U_\Phi) = \frac{1}{4} \|U_A\|^2 \quad \text{y} \quad \sigma_r(U_\Phi) = 0, \quad r > 3.$$

*Demostración.* Sea  $\{N_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^n$  una base como en la observación anterior. En esta base  $U_\Phi$ ,  $U_Q$  y  $\vec{H}$  tienen la representación (1.2.3), (1.2.6) y (1.2.4) respectivamente. Por un lado  $\sigma_1(U_\Phi) = a^2 + b^2$  y por otro lado

$$K := \sigma_1(U_Q) = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - (a^2 + b^2) = |\vec{H}|^2 - (a^2 + b^2)$$

luego  $\sigma_1(U_\Phi) = |\vec{H}|^2 - K$ . Ahora, del hecho de que  $U_\Phi = \left( \tilde{\Phi}_q(N_i, N_j) \right)$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , de (1.1.1) y de la definición (1.2.1) tenemos que

$$\begin{aligned} \sigma_2(U_\Phi) &= \sum_{i < j} \left[ \Phi_q(N_i) \Phi_q(N_j) - \tilde{\Phi}_q(N_i, N_j)^2 \right] \\ &= \sum_{i < j} A_q(N_i, N_j)^2 \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} \text{tr}(U_A U_A^t) \right) \\ &= \frac{1}{4} \|U_A\|^2. \end{aligned}$$

De la expresión (1.2.3) y de (1.2.2) se sigue que  $\sigma_r(U_\Phi) = 0$  para  $r > 3$ . □

**Observación 1.2.4.** Podemos dar una expresión para  $\Gamma^2 := \sigma_3(U_Q)$  de la siguiente manera. Sea  $\{N_i\}_{i=1}^n$  una base como en la observación 1.2.2. De (1.2.6) tenemos que

$$\begin{aligned}\Gamma^2 := \sigma_3(U_Q) &= \det \begin{pmatrix} \alpha^2 - a^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2 - b^2 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2 \end{pmatrix} \\ &= \gamma^2 \det \begin{pmatrix} \alpha^2 - a^2 & \alpha\beta & \alpha \\ \alpha\beta & \beta^2 - b^2 & \beta \\ \alpha & \beta & 1 \end{pmatrix} \\ &= \gamma^2 \det \begin{pmatrix} -a^2 & 0 & 0 \\ 0 & -b^2 & 0 \\ \alpha & \beta & 1 \end{pmatrix} \\ &= \gamma^2 a^2 b^2.\end{aligned}$$

Por otro lado, del Lema 1.2.3,  $\sigma_2(U_\Phi) = \frac{1}{4}\|U_A\|^2$ , y de (1.2.3) tenemos que  $\sigma_2(U_\Phi) = a^2 b^2$ . Entonces

$$a^2 b^2 = \frac{1}{4}\|U_A\|^2 \quad (1.2.7)$$

y por lo tanto

$$\gamma^2 \|U_A\|^2 = 4\Gamma^2. \quad (1.2.8)$$

**Observación 1.2.5.** Consideremos ahora la forma bilineal antisimétrica  $A_q$ . Dado que el operador asociado a  $A_q$ ,  $U_A$ , es antisimétrico, existe un único  $\vec{N} \in \mathbb{R}^3$  tal que

$$U_A(\nu) = \vec{N} \times \nu, \quad \forall \nu \in \mathbb{R}^3. \quad (1.2.9)$$

Notemos que  $\vec{N} = 0$  si y sólo si  $U_A \equiv 0$ , es decir,  $\vec{N} = 0$  si y sólo si  $A_q \equiv 0$ . Si  $\vec{N} \neq 0$  entonces  $A_q \not\equiv 0$  y por lo tanto, del inciso b) del Lema 1.1.5 tenemos que  $\text{Ker } A_q = \text{Ker } \Phi_q$ . Luego, como  $\vec{N} \in \text{Ker } A_q$ , pues  $U_A(\vec{N}) = 0$ , tenemos que  $\vec{N} \in \text{Ker } \Phi_q$  y por consiguiente  $\vec{N} \in \text{Ker } U_\Phi$ .

**Definición 1.2.6.** El vector  $\vec{N}$  descrito en la observación anterior es el vector de curvatura normal asociado a  $q$ .

**Observación 1.2.7.** Si  $n = 3$ , en la observación 1.2.4, podemos elegir la base  $\{N_1, N_2, N_3\}$  de tal manera que  $N_3$  esté en la dirección de  $\vec{N}$ , donde  $\vec{N}$  es como en la observación anterior, y en este caso  $\gamma^2 = \langle \vec{H}, \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} \rangle^2$ . Por otro lado,  $\|U_A\| = |\vec{N}|$ , pues

$$\begin{aligned}\|U_A\|^2 &= A_q(N_1, N_2)^2 + A_q(N_1, N_3)^2 + A_q(N_2, N_3)^2 \\ &= \langle U_A(N_1), N_2 \rangle^2 + \langle U_A(N_1), N_3 \rangle^2 + \langle U_A(N_2), N_3 \rangle^2 \\ &= \langle \vec{N} \times N_1, N_2 \rangle^2 + \langle \vec{N} \times N_1, N_3 \rangle^2 + \langle \vec{N} \times N_2, N_3 \rangle^2 \\ &= \langle \vec{N}, N_3 \rangle^2 \\ &= |\vec{N}|^2,\end{aligned} \quad (1.2.10)$$

y por lo tanto  $\Gamma^2 = \frac{1}{4} \langle \vec{H}, \vec{N} \rangle^2$ . Dada la unicidad del vector  $\vec{N}$ , definimos

$$\Gamma = \frac{1}{2} \langle \vec{H}, \vec{N} \rangle \quad (1.2.11)$$

para este caso. Notemos también que, de (1.2.7),  $|\vec{N}| = 4ab$ .

### 1.3. La reducción simultánea de $L_{[q]}$ y $\Phi_{[q]}$

En el Lema 1.2.3 de la sección anterior calculamos los invariantes  $\sigma_i(U_\Phi)$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ . De la expresión (1.2.2) tenemos que el polinomio característico asociado a  $U_\Phi$  esta dado por

$$\lambda^{n-2}(\lambda^2 - (|\vec{H}|^2 - K)\lambda + \frac{1}{4}|\vec{N}|^2),$$

y por lo tanto

$$a^2 = \frac{1}{2} \left( (|\vec{H}|^2 - K) + \sqrt{(|\vec{H}|^2 - K)^2 - \|U_A\|^2} \right) \quad (1.3.1)$$

y

$$b^2 = \frac{1}{2} \left( (|\vec{H}|^2 - K) - \sqrt{(|\vec{H}|^2 - K)^2 - \|U_A\|^2} \right) \quad (1.3.2)$$

con  $a^2$  y  $b^2$  como en (1.2.3).

De igual forma que  $a^2$  y  $b^2$ , las componentes  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  del vector  $\vec{H}$  en alguna base de la observación 1.2.2, pueden ser expresadas en términos de los invariantes clásicos que fueron introducidos en la sección anterior y por lo tanto resultan ser invariantes del conjunto cociente  $SO(n) \backslash \mathbb{Q}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n) / SO(2)$ . Este hecho lo mostramos en los siguientes lemas además de que damos una expresión para  $\Phi_{[q]}$  y  $\vec{H}$ , y por lo tanto para  $L_{[q]}$ , en términos de los invariantes  $a^2$ ,  $b^2$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ .

**Lema 1.3.1.** *Sea  $n \geq 4$  y supongamos que  $\|U_A\| \neq 0$ . Si  $|\vec{H}|^2 - K \neq \|U_A\|$ , existe una base ortonormal de vectores propios de  $U_\Phi$  orientada positiva,  $\{N_i\}_{i=1}^n$ , en la que  $\Phi_{[q]}$  tiene la representación (1.2.3) con  $a^2$  y  $b^2$  como en (1.3.1) y (1.3.2) respectivamente. Además esta base puede ser elegida de tal manera que,*

i) si  $\vec{H} \notin \text{Ker } U_\Phi$  y  $\vec{H} \notin (\text{Ker } U_\Phi)^\perp$ ,  $\vec{H} = \alpha N_1 + \beta N_2 + \gamma N_3$  con

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{(|\vec{H}|^2 - K)^2 - \|U_A\|^2}} \left( \Delta + a^2 |\vec{H}|^2 + b^2 \frac{4\Gamma^2}{\|U_A\|^2} - \frac{1}{4} \|U_A\|^2 \right)} \quad (1.3.3)$$

$$\beta = \sqrt{-\frac{1}{\sqrt{(|\vec{H}|^2 - K)^2 - \|U_A\|^2}} \left( \Delta + b^2 |\vec{H}|^2 + a^2 \frac{4\Gamma^2}{\|U_A\|^2} - \frac{1}{4} \|U_A\|^2 \right)} \quad (1.3.4)$$

$$\gamma = \frac{2|\Gamma|}{\|U_A\|} \quad (1.3.5)$$

y que ésta quede determinada módulo una rotación en el espacio  $\{N_1, N_2, N_3\}^\perp$ .

ii) si  $\vec{H} \in \text{Ker } U_\Phi$  y  $\vec{H} \neq 0$ ,  $\vec{H} = \gamma N_3$  con  $\gamma = |\vec{H}|$  y que ésta quede determinada módulo la composición de reflexiones en  $(\text{Ker } U_\Phi)^\perp$  respecto de las direcciones determinadas por  $N_1$  y  $N_2$  y una rotación del espacio  $\{N_1, N_2, N_3\}^\perp$ .

iii) si  $\vec{H} \in (\text{Ker } U_\Phi)^\perp$ , entonces  $\vec{H} \neq 0$  y

a)  $\vec{H}$  no es un vector propio de  $U_\Phi$ ,  $\vec{H} = \alpha N_1 + \beta N_2$  con

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{(|\vec{H}|^2 - K)^2 - \|U_A\|^2}} \left( \Delta - \frac{1}{4} \|U_A\|^2 + a^2 |\vec{H}| \right)} \quad (1.3.6)$$

y

$$\beta = \sqrt{-\frac{1}{\sqrt{(|\vec{H}|^2 - K)^2 - \|U_A\|^2}} \left( \Delta - \frac{1}{4} \|U_A\|^2 + b^2 |\vec{H}| \right)}. \quad (1.3.7)$$

y que ésta quede determinada módulo una rotación de  $\text{Ker } U_\Phi$ .

b)  $\vec{H}$  es un vector propio de  $U_\Phi$ ,  $\vec{H} = \alpha N_1$  con  $\alpha = \frac{\vec{H}}{|\vec{H}|}$ , que  $N_2 \in \{N_i\}_{i=1}^n$  esté determinado módulo signo y, una vez fijo éste, la base  $\{N_i\}_{i=1}^n$  quede determinada módulo una rotación en  $\text{Ker } U_\Phi$ .

iv) si  $\vec{H} = 0$  ésta quede determinada módulo la composición de reflexiones en  $(\text{Ker } U_\Phi)^\perp$  respecto de las direcciones determinadas por  $N_1$  y  $N_2$  y una rotación en  $\text{Ker } U_\Phi$ .

*Demostración.* i) Supongamos que  $\vec{H} \notin \text{Ker } U_\Phi$  y  $\vec{H} \notin (\text{Ker } U_\Phi)^\perp$ . Dado que  $\|U_A\| \neq 0$ ,  $\text{Ker } U_\Phi$  es un subespacio propio de  $U_\Phi$  de dimensión  $n-2$  (ver Lema 1.1.5), luego podemos elegir un conjunto ortonormal  $\{N_1, N_2\} \in (\text{Ker } U_\Phi)^\perp$  de vectores propios de  $U_\Phi$  tal que  $\langle \vec{H}, N_1 \rangle > 0$  y  $\langle \vec{H}, N_2 \rangle > 0$ . Ahora, como  $\vec{H} \notin (\text{Ker } U_\Phi)^\perp$ , existe  $N_3 \in (\text{Ker } U_\Phi) \setminus \vec{H}^\perp$  tal que  $\langle N_3, \vec{H} \rangle > 0$ , luego completamos el conjunto  $\{N_1, N_2, N_3\}$  a una base ortonormal orientada positiva  $\{N_i\}_{i=1}^n$  de  $\mathbb{R}^n$  tal que  $\{N_i\}_{i=4}^n \subset (\text{Ker } U_\Phi) \cap \vec{H}^\perp$ . En esta base  $U_\Phi$  está representada por (1.2.3) y  $\langle \vec{H}, N_i \rangle = 0$  para  $i = 4, \dots, n$ , es decir,  $\vec{H} = \alpha N_1 + \beta N_2 + \gamma N_3$  con  $\alpha, \beta, \gamma > 0$ . Para determinar los valores de  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$  consideremos la representación (1.2.6) de  $Q$  y notemos que

$$\Delta := \sigma_2(U_Q) = -a^2\beta^2 - b^2\alpha^2 + a^2b^2 - (a^2 + b^2)\gamma^2 \quad (1.3.8)$$

y

$$|\vec{H}|^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2, \quad (1.3.9)$$

donde  $a^2b^2 = \frac{1}{4}\|U_A\|^2$  y  $\gamma^2 = \frac{4\Gamma^2}{\|U_A\|^2}$  (ver observación 1.2.7). Resolviendo (1.3.8)-(1.3.9) para  $\alpha^2$  y  $\beta^2$  obtenemos

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{1}{a^2 - b^2} \left( \Delta - \frac{1}{4}\|U_A\|^2 + a^2|\vec{H}|^2 + \frac{4\Gamma^2}{\|U_A\|^2}b^2 \right) \\ \beta^2 &= -\frac{1}{a^2 - b^2} \left( \Delta - \frac{1}{4}\|U_A\|^2 + b^2|\vec{H}|^2 + \frac{4\Gamma^2}{\|U_A\|^2}a^2 \right) \end{aligned}$$

Finalmente notemos que  $a^2 - b^2 = \sqrt{(|\vec{H}|^2 - K)^2 - \|U_A\|^2}$  y que por lo tanto se cumplen las fórmulas (1.3.3)-(1.3.5).

Notemos que es este caso, la base  $\{N_i\}_{i=1}^n$  está únicamente determinada módulo una rotación del espacio  $\{N_1, N_2, N_3\}$ .

ii) Si  $\vec{H} \in \text{Ker } U_\Phi$  y  $\vec{H} \neq 0$ , definimos  $N_3 := \frac{\vec{H}}{|\vec{H}|}$ , elegimos un conjunto ortonormal de vectores propios de  $U_\Phi$ ,  $\{N_1, N_2\} \subset (\text{Ker } U_\Phi)^\perp$  y completamos  $\{N_1, N_2, N_3\}$  a una base ortonormal orientada positiva  $\{N_i\}_{i=1}^n$  de  $\mathbb{R}^n$ . En esta base  $U_\Phi$  tiene la representación (1.2.3) y  $\vec{H} = \gamma N_3$  con  $\gamma = |\vec{H}|$ . En este caso el conjunto  $\{N_1, N_2\}$  queda determinado módulo la composición de reflexiones en  $(\text{Ker } U_\Phi)^\perp$  respecto de los ejes determinados por  $N_1$  y  $N_2$ . Una vez que fijamos el conjunto  $\{N_1, N_2, N_3\}$ , la base  $\{N_i\}_{i=1}^n$  queda determinada módulo una rotación en el espacio  $\{N_1, N_2, N_3\}^\perp$ .

iii) Supongamos ahora que  $\vec{H} \in (\text{Ker } U_\Phi)^\perp$  y  $\vec{H} \neq 0$ .

a) Si  $\vec{H}$  no es un vector propio de  $U_\Phi$  consideramos un conjunto ortonormal de vectores propios de  $U_\Phi$ ,  $\{N_1, N_2\} \subset (\text{Ker } U_\Phi)^\perp$  tal que  $\langle \vec{H}, N_1 \rangle > 0$  y  $\langle \vec{H}, N_2 \rangle > 0$ , y completamos este conjunto a una base ortonormal orientada positiva  $\{N_i\}_{i=1}^n$  de  $\mathbb{R}^n$ . En esta base  $U_\Phi$  tiene la representación (1.2.3) y  $\vec{H} = \alpha N_1 + \beta N_2$  con  $\alpha, \beta > 0$ . Por otro lado, de (1.2.5) y (1.2.6) tenemos que

$$\Delta := \sigma_2 \begin{pmatrix} \alpha^2 - a^2 & \alpha\beta & 0 \\ \alpha\beta & \beta^2 - b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -a^2\beta^2 - b^2\alpha^2 + a^2b^2 \quad (1.3.10)$$

y

$$|\vec{H}|^2 = \alpha^2 + \beta^2. \quad (1.3.11)$$

Resolviendo el sistema (1.3.10)-(1.3.11) para  $\alpha^2$  y  $\beta^2$  obtenemos

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{1}{a^2 - b^2} \left( \Delta - a^2 b^2 + a^2 |\vec{H}| \right) \\ \beta^2 &= -\frac{1}{a^2 - b^2} \left( \Delta - a^2 b^2 + b^2 |\vec{H}| \right) \end{aligned}$$

y dado que  $\alpha, \beta > 0$  se cumplen (1.3.6) y (1.3.7).

En este caso la base  $\{N_i\}_{i=1}^n$  está determinada módulo una rotación en  $\text{Ker } U_\Phi$ .

b) Si  $\vec{H}$  es un vector propio de  $U_\Phi$  definimos  $\frac{\vec{H}}{|\vec{H}|}$  y elegimos un vector unitario  $N_2 \in (\text{Ker } U_\Phi)^\perp$  tal que  $\langle N_1, N_2 \rangle = 0$  y completamos esta conjunto a una base ortonormal orientada positiva  $\{N_i\}_{i=1}^n$  de  $\mathbb{R}^n$ . En esta base  $U_\Phi$  esta representada por (1.2.3) y  $\vec{H} = \alpha N_1$  con  $\alpha = \frac{|\vec{H}|}{|N_1|}$ . Notemos que  $\{N_2\} \in \{N_i\}_{i=1}^n$  está determinado módulo signo. Una vez que fijamos éste, la base queda determinada módulo una rotación en  $\text{Ker } U_\Phi$ .

iv) Si  $\vec{H} = 0$  elegimos un conjunto ortonormal de vectores propios de  $U_\Phi$ ,  $\{N_1, N_2\} \subset (\text{Ker } U_\Phi)^\perp$  y completamos éste a una base ortonormal orientada positiva de  $\mathbb{R}^n$ . En esta base  $U_\Phi$  esta representada por (1.2.3). El conjunto  $\{N_1, N_2\}$  está determinado módulo la composición de reflexiones en  $(\text{Ker } U_\Phi)^\perp$  respecto de los ejes determinados por  $N_1$  y  $N_2$ . Una vez que fijamos el conjunto  $\{N_1, N_2\}$ , la base  $\{N_i\}_{i=1}^n$  queda determinada módulo una rotación en  $\text{Ker } U_\Phi$ .  $\square$

Notemos que si  $n = 3$  en el lema anterior no podemos garantizar la elección de una base  $\{N_i\}_{i=1}^3$  tal que las proyecciones de  $\vec{H}$  sobre los elementos de la misma sean positivas. De hecho tenemos el siguiente resultado.

**Lema 1.3.2.** *Sea  $n = 3$  y supongamos que  $\|U_A\| \neq 0$ . Si  $|\vec{H}|^2 - K \neq \|U_A\|$ , existe una base ortonormal  $\{N_1, N_2, N_3\}$  de vectores propios de  $U_\Phi$  orientada positiva con  $N_3 = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$  (ver observación 1.2.5) y en la que  $\Phi_{[q]}$  tiene la representación (1.2.3). La base  $\{N_1, N_2, N_3\}$  no está determinada de manera única ya que  $\Phi_{[q]}$  tiene la misma representación en la base  $\{-N_1, -N_2, N_3\}$ .*

*En una de estas bases, el vector  $\vec{H}$  tiene la expresión  $\alpha N_1 + \beta N_2 + \gamma N_3$  donde*

$$\alpha^2 = \frac{1}{\sqrt{(|\vec{H}|^2 - K)^2 - \|U_A\|^2}} \left( \Delta + a^2 |\vec{H}|^2 + b^2 \frac{4\Gamma^2}{\|U_A\|^2} - \frac{1}{4} \|U_A\|^2 \right) \quad (1.3.12)$$

$$\beta^2 = -\frac{1}{\sqrt{(|\vec{H}|^2 - K)^2 - \|U_A\|^2}} \left( \Delta + b^2 |\vec{H}|^2 + a^2 \frac{4\Gamma^2}{\|U_A\|^2} - \frac{1}{4} \|U_A\|^2 \right) \quad (1.3.13)$$

$$\gamma = \frac{2\Gamma}{\|U_A\|}. \quad (1.3.14)$$

*Notemos que por la ambigüedad en la definición de la base  $\{N_i\}_{i=1}^3$ , el par  $(\alpha, \beta)$  está determinado módulo signo.*

*Demostración.* Hagamos  $N_3 = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$ , de la Observación 1.2.5 tenemos que  $\vec{N} \in \text{Ker } U_\Phi$ . Completamos  $\{N_3\}$  a una base ortonormal orientada positiva de vectores propio de  $U_\Phi$ ,  $\{N_1, N_2, N_3\}$ . En esta base  $\Phi_{[q]}$  tiene la representación (1.2.3) con  $a^2$  y  $b^2$  como en (1.3.1) y (1.3.2) respectivamente, además

$\vec{H} = \alpha N_1 + \beta N_2 + \gamma N_3$ . Por otro lado, en esta base,  $Q_{[q]}$  está dada por (1.2.6) y de manera análoga al caso  $n = 4$  tenemos

$$\alpha^2 = \frac{1}{\sqrt{(|\vec{H}|^2 - K)^2 - \|U_A\|^2}} (\Delta + a^2 |\vec{H}|^2 + b^2 \frac{4\Gamma^2}{\|U_A\|^2} - \frac{1}{4} \|U_A\|^2)$$

$$\beta^2 = -\frac{1}{\sqrt{(|\vec{H}|^2 - K)^2 - \|U_A\|^2}} (\Delta + b^2 |\vec{H}|^2 + a^2 \frac{4\Gamma^2}{\|U_A\|^2} - \frac{1}{4} \|U_A\|^2)$$

Finalmente, de la observación 1.2.7,  $\gamma = \frac{2|\Gamma|}{\|U_A\|}$  cumpliéndose así las fórmulas (1.3.12-1.3.14)  $\square$

**Lema 1.3.3.** *Sea  $n \geq 4$  y supongamos que  $\|U_A\| \neq 0$  y  $|\vec{H}|^2 - K = \|U_A\|$ .*

i) *Si  $\vec{H} \notin \text{Ker } U_\Phi$  entonces existe una base  $\{N_i\}_{i=1}^n$  de vectores propios de  $U_\Phi$  en la que  $\Phi_q$  tiene la representación (1.2.3) con*

$$a^2 = b^2 = \frac{1}{2} (|\vec{H}|^2 - K). \quad (1.3.15)$$

*Además, en esta base,  $\vec{H} = \alpha N_1 + \gamma N_3$  donde*

$$\alpha = \sqrt{-\frac{\Delta}{a^2} - 8 \frac{\Gamma^2}{\|U_A\|^2} + a^2} \quad (1.3.16)$$

*y*

$$\gamma = \frac{2|\Gamma|}{\|U_A\|}. \quad (1.3.17)$$

ii) *Si  $\vec{H} \in \text{Ker } U_\Phi$  entonces existe una base  $\{N_i\}_{i=1}^n$  de vectores propios de  $U_\Phi$  en la que  $\Phi_q$  tiene la representación (1.2.3) cumpliéndose (1.3.15) y en la que  $\vec{H} = \gamma N_3$  con  $\gamma = |\vec{H}|$ .*

*En ninguno de estos dos casos la base  $\{N_i\}_{i=1}^n$  está determinada de manera única.*

*Demostración.* Dado que  $|\vec{H}|^2 - K = \|U_A\|$ , de (1.3.1) y (1.3.2) tenemos que  $a^2 = b^2 = \frac{1}{2} (|\vec{H}|^2 - K)$ . Notemos que si  $\mu \in (\text{Ker } U_\Phi)^\perp$  entonces  $U_\Phi(\mu) = a^2 \mu$ , es decir,  $\mu$  es vector propio de  $U_\Phi$ .

i) Tomando lo anterior en cuenta y suponiendo que  $\vec{H} \notin \text{Ker } U_\Phi$ , elegimos un vector unitario  $N_2 \in (\text{Ker } U_\Phi)^\perp$  tal que  $\langle \vec{H}, N_2 \rangle = 0$ . Notemos que  $N_2$  está determinado módulo signo pues  $\langle \vec{H}, -N_2 \rangle = 0$ . Consideramos ahora el vector unitario  $N_1 \in (\text{Ker } U_\Phi)^\perp$  que satisface  $\langle N_1, N_2 \rangle = 0$  y  $\langle \vec{H}, N_1 \rangle > 0$ . Finalmente elegimos un conjunto ortonormal  $\{N_i\}_{i=3}^n \subset \text{Ker } U_\Phi$  tal que  $\{N_i\}_{i=4}^n \subset \vec{H}^\perp$ ,  $N_3 \in \text{Ker } U_\Phi \setminus \vec{H}^\perp$  con  $\langle \vec{H}, N_3 \rangle > 0$ , y  $\{N_i\}_{i=1}^n$  sea una base orientada positiva. En esta base  $U_\Phi$  tiene la representación (1.2.3) con  $a^2 = b^2$  y  $\vec{H} = \alpha N_1 + \gamma N_3$  con  $\alpha, \gamma > 0$ .

De (1.2.5) y (1.2.6) tenemos que

$$Q_q = \begin{pmatrix} \alpha^2 - a^2 & 0 & \alpha\gamma \\ 0 & -a^2 & 0 \\ \alpha\gamma & 0 & \gamma^2 \end{pmatrix}.$$

Luego

$$\Delta = -a^2 \alpha^2 + a^4 - 2a^2 \gamma^2$$

con  $\gamma^2$  como en (1.2.8). Finalmente, dado que  $\alpha, \gamma > 0$

$$\alpha = \sqrt{-\frac{\Delta}{a^2} + a^2 - 8 \frac{\Gamma^2}{\|U_A\|^2}}$$

$$\gamma = \frac{2|\Gamma|}{\|U_A\|}$$

El vector  $N_2$  de la base  $\{N_i\}_{i=1}^n$  está determinado módulo el signo. Una vez fijo éste, la base está determinada módulo una rotación del espacio  $\{N_1, N_2, N_3\}^\perp$ .

ii) Si  $\vec{H} \in T$  y  $\vec{H} \neq 0$  consideramos  $N_3 = \frac{\vec{H}}{|\vec{H}|}$ , elegimos una base ortonormal  $\{N_1, N_2\}$  para  $(\text{Ker } U_\Phi)^\perp$  y completamos el conjunto  $\{N_1, N_2, N_3\}$  a una base ortonormal orientada positiva  $\{N_i\}_{i=1}^n$  de  $\mathbb{R}^n$ . En esta base  $\Phi_q$  tiene la representación (1.2.3) con  $a^2 = b^2$  y  $\vec{H} = \alpha N_3$  con  $\alpha = |\vec{H}|$ .

Si  $\vec{H} = 0$  elegimos una base  $\{N_1, N_2\}$  para  $(\text{Ker } U_\Phi)^\perp$  y completamos este conjunto a una base ortonormal  $\{N_i\}_{i=1}^n$  orientada positiva para  $\mathbb{R}^n$ . Notemos que una vez elegido el conjunto  $\{N_1, N_2\}$ , la base  $\{N_i\}_{i=1}^n$  está determinada módulo una rotación en el espacio  $\{N_1, N_2\}^\perp$ .  $\square$

**Lema 1.3.4.** *Sea  $n = 3$  y supongamos que  $\|U_A\| \neq 0$  y que  $|\vec{H}|^2 - K = \|U_A\|$ .*

i) Si  $\vec{H} \notin \text{Ker } U_\Phi$ , existe una base ortonormal  $\{N_1, N_2, N_3\}$  de vectores propios de  $U_\Phi$  orientada positiva con  $N_3 = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$  y  $U_\Phi$  tiene la representación (1.2.3) con  $a^2 = b^2$  y además tal que la proyección de  $\vec{H}$  sobre el plano  $\{N_1, N_2\}$  está en la dirección y en el sentido del vector  $N_1$ . Esta base está determinada de manera única y  $\vec{H} = \alpha N_1 + \gamma N_3$  con

$$\alpha = \sqrt{-\frac{\Delta}{a^2} - 8\frac{\Gamma^2}{|\vec{N}|^2} + a^2} \quad (1.3.18)$$

y

$$\gamma = 2\frac{\Gamma}{\|U_A\|}. \quad (1.3.19)$$

ii) Si  $\vec{H} \in \text{Ker } U_\Phi$ , existe una base ortonormal  $\{N_1, N_2, N_3\}$  de vectores propios de  $U_\Phi$  orientada positiva con  $N_3 = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$  y  $U_\Phi$  tiene la representación (1.2.3) con  $a^2 = b^2$ . Esta base está determinada módulo una rotación en el plano  $N_3^\perp$ . Y en este caso  $\vec{H} = \gamma N_3$  con  $\gamma = 2\frac{\Gamma}{|\vec{N}|}$ .

*Demostración.* i) Como  $\vec{H} \notin \text{Ker } U_\Phi$  podemos considerar el vector  $N_2 := \frac{\vec{H} \times \vec{N}}{|\vec{H} \times \vec{N}|}$  y completar  $\{N_1, \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}\}$  a una base ortonormal orientada positiva  $\{N_1, N_2, N_3\}$  de vectores propios de  $U_\Phi$ , donde  $N_3 = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$ . Si  $\langle \vec{H}, N_1 \rangle$  es positivo consideramos la base  $\{N_1, N_2, N_3\}$ , en caso contrario consideramos la base  $\{-N_1, -N_2, N_3\}$  y renombramos los elementos de ésta. En esta base  $\Phi$  es de la forma (1.2.3) con  $a^2 = b^2$  y  $\vec{H} = \alpha N_1 + \gamma N_3$ , de (1.2.6) tenemos que

$$\Delta = -a^2\alpha^2 + a^4 - 2a^2\gamma^2,$$

y por lo tanto

$$\alpha^2 = -\frac{\Delta}{a^2} - 2\gamma^2 + a^2.$$

Finalmente, de la observación 1.2.7,  $\gamma = 2\frac{\Gamma}{|\vec{N}|}$  con lo que obtenemos (1.3.18).

ii) Si  $\vec{H} \in \text{Ker } U_\Phi$  hacemos  $N_3 = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$  y completamos  $\{N_3\}$  a una base ortonormal orientada positiva  $\{N_1, N_2, N_3\}$  de  $\mathbb{R}^3$ . En este caso,  $\vec{H} = \alpha N_1 + \beta N_2 + \gamma N_3$  con  $\alpha = \beta = 0$  y  $\gamma = 2\frac{\Gamma}{|\vec{N}|}$ .  $\square$

**Observación 1.3.5.** *En los lemas anteriores consideramos los casos cuando  $\vec{H} \in \text{Ker } U_\Phi$  y  $\vec{H} \notin \text{Ker } U_\Phi$ . Este hecho puede ser descrito en términos de los números  $|H|$ ,  $\|U_A\|$  y  $\Gamma^2$  de la siguiente manera.*

Supongamos que  $\|U_A\| \neq 0$ . Elijamos una base ortonormal orientada positiva de vectores propios de  $U_\Phi$ ,  $\{N_i\}_{i=1}^n$ , tal que  $\{N_i\}_{i=4}^n \subset \vec{H}^\perp$  y  $\{N_i\}_{i=1}^3 \subset \text{Ker } U_\Phi$ . Del Lema 1.1.5 tenemos que  $\dim(\text{Ker } U_\Phi) = n - 2$  y por lo tanto  $\{N_1, N_2\} \subset (\text{Ker } U_\Phi)^\perp$ . En esta base

$$\vec{H} = \alpha N_1 + \beta N_2 + \gamma N_3,$$

donde  $\gamma^2 = \frac{4\Gamma^2}{\|U_A\|}$  (ver Observación 1.2.7). Por otro lado  $|\vec{H}|^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq \gamma^2$  y por lo tanto

$$|\vec{H}|^2 \|U_A\|^2 - 4\Gamma^2 \geq 0. \quad (1.3.20)$$

Ahora, si  $\vec{H} \in \text{Ker } U_\Phi$  entonces  $\alpha^2 + \beta^2 = 0$  y por lo tanto se cumple la igualdad en la inecuación. Si  $\vec{H} \notin \text{Ker } U_\Phi$  entonces  $\alpha^2 + \beta^2 > 0$  por lo que la desigualdad es estricta. Con base en lo anterior tenemos el siguiente resultado.

Si  $\|U_A\| \neq 0$  entonces  $\vec{H} \in \text{Ker } U_\Phi$  si y sólo si  $|\vec{H}|^2 \|U_A\|^2 - 4\Gamma^2 = 0$  o de manera equivalente  $\vec{H} \notin \text{Ker } U_\Phi$  si y solo si  $|\vec{H}|^2 \|U_A\|^2 - 4\Gamma^2 > 0$

**Lema 1.3.6.** Supongamos que  $U_A = 0$ . Si  $|\vec{H}|^2 - K > \|U_A\|$  entonces existe una base ortonormal positiva  $\{N_i\}_{i=1}^n$  de vectores propios de  $U_\Phi$  en la que

$$\Phi_{[q]} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (1.3.21)$$

con  $a^2 = |\vec{H}|^2 - K$ . Además

i) si  $\vec{H} \notin (\text{Ker } U_\Phi)^\perp$  y  $\vec{H} \notin \text{Ker } U_\Phi$  podemos elegir la base  $\{N_i\}_{i=1}^n$  de tal manera que  $\vec{H} = \alpha N_1 + \beta N_2$  con

$$\alpha = \sqrt{|\vec{H}|^2 + \frac{\Delta}{a^2}} \quad (1.3.22)$$

y

$$\beta = \sqrt{-\frac{\Delta}{a^2}}. \quad (1.3.23)$$

Si  $n \geq 4$ , la base  $\{N_i\}_{i=1}^n$  queda determinada módulo una rotación del espacio  $\{N_1, N_2\}^\perp$ . Si  $n = 3$  la base  $\{N_i\}_{i=1}^3$  queda determinada de manera única.

ii) si  $\vec{H} \in (\text{Ker } U_\Phi)^\perp$  y  $\vec{H} \neq 0$ , la base  $\{N_i\}_{i=1}^n$  puede ser elegida de tal modo que  $\vec{H} = \alpha N_1$  con  $\alpha = |\vec{H}|$ . La base  $\{N_i\}_{i=1}^n$  queda determinada módulo una rotación en  $\text{Ker } U_\Phi$ .

iii) si  $\vec{H} \in \text{Ker } U_\Phi$  y  $\vec{H} \neq 0$ , podemos elegir  $\{N_i\}_{i=1}^n$  de tal manera que  $\vec{H} = \beta N_2$  con  $\beta = |\vec{H}|$ . En este caso  $N_1 \in \{N_i\}_{i=1}^n$  queda determinado módulo signo y una vez fijo éste, la base  $\{N_i\}_{i=1}^n$  queda determinada módulo una rotación del espacio  $\{N_1, N_2\}^\perp$ .

iv) si  $\vec{H} = 0$ ,  $N_1 \in \{N_i\}_{i=1}^n$  queda determinado módulo signo. Una vez fijo éste, la base  $\{N_i\}_{i=1}^n$  queda determinada módulo una rotación en  $\text{Ker } U_\Phi$

*Demostración.* Dado que  $\|U_A\| \neq 0$ , de (1.3.1) y (1.3.2) tenemos que  $a^2 = |\vec{H}|^2 - K$  y  $b^2 = 0$ , y por lo tanto  $\dim(\text{Ker } U_\Phi) = n - 1$ .

i) Si  $\vec{H} \notin (\text{Ker } U_\Phi)^\perp$  y  $\vec{H} \notin \text{Ker } U_\Phi$  podemos elegir de manera única un vector  $N_1 \in (\text{Ker } U_\Phi)^\perp$  de tal manera que  $\langle \vec{H}, N_1 \rangle > 0$ , además, como  $\vec{H}$  no es colineal a  $N_1$ ,  $\dim(N_1^\perp \cap \vec{H}^\perp) = n - 2$  y por

lo tanto existe una única dirección  $N_2 \in \text{Ker } U_\Phi$  tal que  $\langle \vec{H}, N_2 \rangle > 0$  y tal que  $\langle N_2, v \rangle = 0$  para todo  $v \in N_1^\perp \cap \vec{H}^\perp$ . Completamos  $\{N_1, N_2\}$  a una base ortonormal orientada positiva de  $\mathbb{R}^n$ . En esta base  $\Phi_{[q]}$  esta representada por (1.3.21) y  $\vec{H} = \alpha N_1 + \beta N_2$ , luego

$$L_{[q]} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha\beta & \beta^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (1.3.24)$$

y por lo tanto

$$Q_{[q]} = \begin{pmatrix} \alpha^2 - a^2 & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha\beta & \beta^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.3.25)$$

De esta manera  $\Delta = \sigma_2(U_Q) = -a^2\beta^2$  y por consiguiente  $\beta = \sqrt{-\frac{\Delta}{a^2}}$ . Como  $|\vec{H}|^2 = \alpha^2 + \beta^2$  tenemos que  $\alpha = \sqrt{|\vec{H}|^2 + \frac{\Delta}{a^2}}$ .

Si  $n = 3$  hacemos  $N_3 = N_1 \times N_2$  y de esta manera  $\{N_i\}_{i=1}^3$  queda determinada de manera única.

ii) Si  $\vec{H} \in (\text{Ker } U_\Phi)^\perp$  y  $\vec{H} \neq 0$  hacemos  $\frac{\vec{H}}{|\vec{H}|}$  y completamos  $\{N_1\}$  a una base ortonormal positiva de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\{N_i\}_{i=1}^n$ . En esta base  $\Phi_{[q]}$  esta dada por (1.3.21) y  $\vec{H} = |\vec{H}|N_1$ . Además la base así elegida queda determinada módulo una rotación del espacio  $N_1^\perp$ .

iii) Si  $\vec{H} \in \text{Ker } U_\Phi$  y  $\vec{H} \neq 0$  hacemos  $N_2 = \frac{\vec{H}}{|\vec{H}|}$  y fijamos  $N_1 \in (\text{Ker } U_\Phi)^\perp$ . Una vez fijo este completamos el conjunto  $\{N_1, N_2\}$  a una base ortonormal positiva de  $\mathbb{R}^n$ . En esta base  $\Phi_{[q]}$  esta dada por (1.3.21) y  $\vec{H} = |\vec{H}|N_2$ .

iv) Si  $\vec{H} = 0$ , fijamos  $N_1 \in (\text{Ker } U_\Phi)^\perp$ , una vez fijo este, completamos  $\{N_i\}_{i=1}^n$  a una base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$ . En esta base  $\Phi_{[q]}$  está representada por (1.3.21). □

**Lema 1.3.7.** Si  $|\vec{H}|^2 - K = \|U_A\|$  y  $U_A = 0$  entonces  $\Phi_q \equiv 0$ . Además existe una base ortonormal de vectores propios de  $U_\Phi$ ,  $\{N_i\}_{i=1}^n$  en la que,

i) si  $\vec{H} \neq 0$ ,  $\vec{H} = \alpha N_1$  con  $\alpha > 0$ . Ésta base queda determinada módulo una rotación del espacio  $N_1^\perp$ .

ii) si  $\vec{H} = 0$ , esta base queda determinada módulo una rotación en  $\mathbb{R}^n$ .

*Demostración.* Dado que  $|\vec{H}|^2 - K = \|U_A\|$  y  $U_A = 0$ , de (1.3.1), (1.3.2) y (1.2.3) tenemos que  $\Phi \equiv 0$ .

i) En este caso  $\vec{H}$  es un vector propio de  $\Phi_q$  y por lo tanto podemos considerar  $N_1 := \frac{\vec{H}}{|\vec{H}|}$ , es decir,  $\vec{H} = \alpha N_1$  con  $\alpha = |\vec{H}|$ . Completamos  $\{N_1\}$  a una base ortonormal orientada positiva  $\{N_i\}_{i=1}^n$  de  $\mathbb{R}^n$ . Notemos que ésta base queda determinada módulo una rotación en  $N_1^\perp$ .

ii) Si  $\vec{H} = 0$ , elegimos cualquier base ortonormal orientada positiva de  $\mathbb{R}^n$ . Ésta queda determinada módulo una rotación en  $\mathbb{R}^n$  □

## 1.4. La clasificación

En esta sección damos una clasificación del conjunto  $SO(n)\backslash\mathbb{Q}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n)/SO(2)$  en términos de los invariantes definidos en la sección anterior. Dados los invariantes clásicos de  $[q] \in SO(n)\backslash\mathbb{Q}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n)/SO(2)$  (ver definición 1.2.2), definimos tres funciones  $L$ ,  $\Phi$  y  $A$  por medio de los invariantes  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $a^2$  y  $b^2$  para después considerar la clase  $[L, \Phi, A]$  y recuperar  $[q]$  via la biyección (1.1.12).

Como vimos en la sección anterior, si  $n = 3$  los números  $\alpha$  y  $\beta$  no siempre están determinados de manera única (ver Lema 1.3.2). De hecho  $\alpha^2$  y  $\beta^2$  determinan dos clases: la clase donde  $\vec{H} = (\alpha, \beta, \gamma)$  y la clase donde  $\vec{H} = (-\alpha, \beta, \gamma)$  (nótese que  $(-\alpha, -\beta, \gamma)$  y  $(\alpha, -\beta, \gamma)$  pueden ser llevados a  $(\alpha, \beta, \gamma)$  y a  $(-\alpha, \beta, \gamma)$  respectivamente via  $g \in SO(3)$ ). Por este motivo consideramos el grupo  $G := \{Id, g\}$  donde  $Id$  denota a la función identidad en  $\mathbb{R}^3$  y  $g$  está dada por

$$g := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en la base canónica de  $\mathbb{R}^3$ . De esta manera las clases antes mencionadas quedarán determinadas módulo la acción del grupo  $G$ .

**Teorema 1.4.1.** (*Clasificación*) Sea  $[q] \in SO(n)\backslash\mathbb{Q}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n)/SO(2)$  y  $|\vec{H}|$ ,  $\|U_A\|$ ,  $K$ ,  $\Delta$  y  $\Gamma$  sus invariantes.

1. Si  $|\vec{H}|^2 - K > \|U_A\|$ ,  $\|U_A\| \neq 0$  y
  - i)  $|\vec{H}|^2\|U_A\|^2 - 4\Gamma^2 \neq 0$  entonces  $|\vec{H}|$ ,  $\|U_A\|$ ,  $K$ ,  $\Gamma$  y  $\Delta$  determinan  $[q]$  si  $n \geq 4$ . Si  $n = 3$ ,  $[q]$  queda determinada módulo la acción del grupo  $G$ .
  - ii)  $|\vec{H}|^2\|U_A\|^2 - 4\Gamma^2 = 0$  entonces  $|\vec{H}|$ ,  $\|U_A\|$  y  $K$  determinan  $[q]$ .
2. Si  $|\vec{H}|^2 - K = \|U_A\|$ ,  $\|U_A\| \neq 0$  y
  - i)  $|\vec{H}|^2\|U_A\|^2 - 4\Gamma^2 \neq 0$  entonces los invariantes  $|\vec{H}|$ ,  $\|U_A\|$ ,  $K$ ,  $\Gamma$  y  $\Delta$  determinan  $[q]$ .
  - ii)  $|\vec{H}|^2\|U_A\|^2 - 4\Gamma^2 = 0$  entonces  $|\vec{H}|$ ,  $K$  y  $\|U_A\|$  determinan  $[q]$ .
3. Si  $|\vec{H}|^2 - K \neq \|U_A\|$  y  $U_A = 0$  entonces  $|\vec{H}|$ ,  $K$  y  $\Delta$  determinan  $[q]$ .
4. Si  $|\vec{H}|^2 - K = \|U_A\|$  y  $U_A = 0$  entonces  $|\vec{H}|$  determina  $[q]$ .

*Demostración.* Consideremos la biyección (1.1.12)

1. Supongamos que  $|\vec{H}|^2 - K > \|U_A\|$  y  $\|U_A\| \neq 0$ .

- i) Si  $n \geq 4$  y  $|\vec{H}|^2\|U_A\|^2 - 4\Gamma^2 \neq 0$  definimos

$$\vec{H} := (\alpha, \beta, \gamma, 0, \dots, 0); \quad \Phi := \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad A = \frac{1}{2}\|U_A\| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

con  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  como en (1.3.3)-(1.3.5) y  $a^2$ ,  $b^2$  como en (1.3.1) y (1.3.2). Notemos que  $(L, \Phi, A) \in [L_{[q]}, \Phi_{[q]}, A_{[q]}]$  y por lo tanto  $\vec{\Theta}([q]) = [L, \Phi, A]$ . Dicho de otra forma definimos  $S_\nu$  a partir de  $(L, \Phi, A)$  como en (1.1.8) y de esta manera obtenemos  $[q]$ .

Si  $n = 3$  definimos  $\vec{H} := (\alpha, \beta, \gamma)$  con  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  como en (1.3.12)-(1.3.14). Por la ambigüedad en los signos de  $\alpha$  y  $\beta$ ,  $[q]$  queda determinada módulo la acción del grupo  $G$ .

ii) Si  $|\vec{H}|^2 \|U_A\|^2 - 4\Gamma^2 = 0$ , definimos

$$\vec{H} := (0, 0, |\vec{H}|, 0, \dots, 0); \quad \Phi := \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad A = \frac{1}{2} \|U_A\| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

con  $a^2, b^2$  como en (1.3.1) y (1.3.2). Notemos que  $(L, \Phi, A) \in [L_{[q]}, \Phi_{[q]}, A_{[q]}]$ . Luego  $\bar{\Theta}([q]) = [L, \Phi, A]$ .

2. Supongamos que  $|\vec{H}|^2 - K = \|U_A\|$  y  $\|U_A\| \neq 0$ .

i) Si  $|\vec{H}|^2 \|U_A\|^2 - 4\Gamma^2 \neq 0$  y  $n \geq 4$  definimos

$$\vec{H} := (\alpha, 0, \gamma, 0, \dots, 0); \quad \Phi := \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad A = \frac{1}{2} \|U_A\| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

con  $\alpha$  y  $\gamma$  como en (1.3.16) y (1.3.17) respectivamente y  $a^2$  como en (1.3.15). Notemos que  $(L, \Phi, A) \in [L_{[q]}, \Phi_{[q]}, A_{[q]}]$ . Luego  $\bar{\Theta}([q]) = [L, \Phi, A]$ .

Si  $n = 3$  definimos  $\Phi$  y  $A$  como antes y  $\vec{H} := (\alpha, 0, \gamma)$  con  $\alpha$  y  $\gamma$  como en (1.3.18) y (1.3.19). La aplicación  $[q]$  está determinada por  $\bar{\Theta}([q]) = [L, \Phi, A]$ .

ii) Si  $|\vec{H}|^2 \|U_A\|^2 - 4\Gamma^2 = 0$  definimos

$$\vec{H} := (0, 0, \gamma, 0, \dots, 0); \quad \Phi := \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad A = \frac{1}{2} \|U_A\| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

con  $\gamma = |\vec{H}|$  y  $a^2$  como en (1.3.15). En este caso también se cumple  $\bar{\Theta}([q]) = [L, \Phi, A]$ .

3. Si  $|\vec{H}|^2 - K \neq \|U_A\|$  y  $|\vec{N}| = 0$  entonces hacemos

$$\vec{H} := (\alpha, \beta, 0, 0, \dots, 0); \quad y \quad \Phi := \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

con  $a^2 = |\vec{H}|^2 - K$  y  $\alpha$  y  $\beta$  como en (1.3.22) y (1.3.23). Via (1.1.12) obtenemos  $[q]$  a partir de  $(L, \Phi, 0)$ .

4. Si  $|\vec{H}|^2 - K = \|U_A\|$  y  $U_A = 0$  definimos  $\vec{H} := (|\vec{H}|, 0, \dots, 0)$ ,  $\Phi \equiv 0$  y  $A \equiv 0$ . La clase  $[q]$  queda determinada por  $\bar{\Theta}([q]) = [L, 0, 0]$ .

□

## Capítulo 2

# La elipse de Curvatura

En este capítulo definimos la elipse de curvatura asociada a una aplicación cuadrática  $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  y establecemos una relación entre este objeto y los invariantes numéricos asociados a  $q$ . Dedicamos la primera sección al estudio del caso no degenerado de la elipse y damos una ecuación intrínseca de ésta (ver proposición 2.1.3). En la segunda sección se hace un estudio de la elipse cuando ésta es degenerada.

### 2.1. La definición y las primeras propiedades.

Sea  $q \in \mathbb{Q}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ . El conjunto  $\mathcal{E} := \{q(u) : u \in S^1\}$  es conocido como *la elipse de curvatura asociada a la aplicación cuadrática  $q$* .

Consideremos una base ortonormal de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\{u, u^\perp\}$ , orientada de manera positiva. Por un lado, para cada  $\nu \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \langle q(u) + q(u^\perp), \nu \rangle &= \langle q(u), \nu \rangle + \langle q(u^\perp), \nu \rangle \\ &= \langle S_\nu(u), u \rangle + \langle S_\nu(u^\perp), u^\perp \rangle \\ &= \text{tr } S_\nu = 2L_q(\nu) = \langle 2\vec{H}, \nu \rangle \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

lo que implica que  $q(u) + q(u^\perp) = 2\vec{H}$ .

Definamos  $q^\circ \in \mathbb{Q}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$  como

$$q(u) = \vec{H} \langle u, u \rangle + q^\circ(u). \tag{2.1.2}$$

En este caso

$$q(u) = \vec{H} + q^\circ(u)$$

para cada  $u \in S^1$ , y por lo tanto la elipse de curvatura asociada a  $q$ , puede ser obtenida via una traslación por el vector  $\vec{H}$  de la elipse de curvatura asociada a  $q^\circ$ , que denotamos por  $\mathcal{E}^\circ$ . Describamos entonces la forma de  $\mathcal{E}^\circ$  en términos de los invariantes asociados a  $q$ .

**Proposición 2.1.1.** *Sea  $q \in \mathbb{Q}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ . Entonces para cualquier base ortonormal  $\{u, u^\perp\}$  de  $\mathbb{R}^2$ , orientada de manera positiva, se tiene que*

$$\Phi_q(\nu) = \langle q^\circ(u), \nu \rangle^2 + \langle q(u, u^\perp), \nu \rangle^2, \quad \forall \nu \in \mathbb{R}^3 \tag{2.1.3}$$

y donde  $q^\circ$  es como en (2.1.2).

*Demostración.* Por un lado notemos que para cada  $u \in S^1$

$$q^\circ(u) + q^\circ(u^\perp) = q(u) + q(u^\perp) - 2\vec{H} = 2\vec{H} - 2\vec{H} = 0$$

y por lo tanto  $q^\circ(u) = -q^\circ(u^\perp)$ . Además

$$\begin{aligned} q^\circ(u, u^\perp) &= \frac{1}{2}q^\circ(u + u^\perp) = q^\circ\left(\frac{u + u^\perp}{\sqrt{2}}\right) = q\left(\frac{u + u^\perp}{\sqrt{2}}\right) - \vec{H} \\ &= \frac{1}{2}\{q(u + u^\perp) - q(u) - q(u^\perp)\} \\ &= q(u, u^\perp). \end{aligned}$$

Por otro lado, para cada  $\nu \in \mathbb{R}^3$ ,

$$\langle q^\circ(u), \nu \rangle = \langle q(u), \nu \rangle - L_q(\nu) \quad (2.1.4)$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \langle q^\circ(u), \nu \rangle^2 + \langle q(u, u^\perp), \nu \rangle^2 &= \langle q(u, u^\perp), \nu \rangle^2 - \langle q^\circ(u), \nu \rangle \langle q^\circ(u^\perp), \nu \rangle \\ &= \langle q(u, u^\perp), \nu \rangle^2 - (\langle q(u), \nu \rangle - L_q(\nu)) (\langle q(u^\perp), \nu \rangle - L_q(\nu)) \\ &= \langle q(u, u^\perp), \nu \rangle^2 - \langle q(u), \nu \rangle \langle q(u^\perp), \nu \rangle \\ &\quad + L_q(\nu) (\langle q(u), \nu \rangle + \langle q(u^\perp), \nu \rangle) - L_q^2(\nu) \\ &= -\det(S_\nu) + L_q^2(\nu) = -Q_q(\nu) + L_q^2(\nu), \end{aligned}$$

es decir

$$\Phi_q(\nu) = \langle q^\circ(u), \nu \rangle^2 + \langle q(u, u^\perp), \nu \rangle^2 .$$

□

Si denotamos por  $S_\nu^\circ$  al operador simétrico asociado a la forma cuadrática  $\langle q^\circ, \nu \rangle$ , la segunda igualdad del párrafo anterior y la última ecuación muestran que

$$\Phi_q(\nu) = -\det S_\nu^\circ. \quad (2.1.5)$$

Además de (2.1.4) tenemos que  $S_\nu^\circ = S_\nu - L_q(\nu)Id$ , es decir,  $S_\nu^\circ$  es el operador simétrico sin traza asociado a la forma cuadrática  $\langle q, \nu \rangle$ . Luego del lema 1.1.5,  $\Phi_q(\nu) = 0$  si y sólo si  $S_\nu^\circ \equiv 0$ .

Sea  $\vec{N}$  como en la observación 1.2.5. De la ecuación (2.1.3) se sigue el siguiente resultado:

**Proposición 2.1.2.** *La elipse de curvatura  $\mathcal{E}$  es degenerada si y sólo si  $\vec{N} = 0$ .*

*Demostración.* Supongamos primero que  $\vec{N} = 0$ . En este caso, de la observación 1.2.5, tenemos que la dimensión de  $Ker U_\Phi$  es mayor o igual a 2, y por lo tanto podemos elegir un conjunto  $\{\nu_1, \nu_2\} \subset Ker \Phi_q$  linealmente independiente. De (2.1.3)

$$0 = \Phi_q(\nu_i) = \langle q^\circ(u), \nu_i \rangle^2 + \langle q(u, u^\perp), \nu_i \rangle^2 \quad (2.1.6)$$

para  $i = 1, 2$  y una base ortonormal  $\{u, u^\perp\}$  de  $\mathbb{R}^2$ . Esto implica que

$$\langle q^\circ(u), \nu_i \rangle = 0 \quad y \quad \langle q(u, u^\perp), \nu_i \rangle = 0$$

para  $i = 1, 2$ . Por otro lado, si  $w = xu + yu^\perp \in S^1$ ,

$$q^\circ(w) = (x^2 - y^2)q^\circ(u) + 2xyq(u, u^\perp),$$

luego,  $\langle q^\circ(w), \nu_i \rangle = 0$  para  $i = 1, 2$  y por lo tanto  $q^\circ(w) = \lambda(w)\vec{v}$  para algún  $\vec{v} \in \{\nu_1, \nu_2\}^\perp$  y  $\lambda(w) \in \mathbb{R}$ . Entonces  $q(w) = \vec{H} + \lambda(w)\vec{v}$ , es decir,  $\mathcal{E}$  es degenerada.

Ahora supongamos que  $\mathcal{E}$  es degenerada, es decir,  $q(w) = \vec{H} + \lambda(w)\vec{v}$  para todo  $w \in S^1$ . Entonces  $q^\circ(w) = q(w) - \vec{H} = \lambda(w)\vec{v}$  y por lo tanto  $\langle q^\circ(w), \nu \rangle = 0$  para toda  $\nu \in \vec{v}^\perp$ . Por otro lado,  $q(w, w^\perp) = q^\circ(\frac{w+w^\perp}{2})$ , de donde se tiene que

$$\langle q^\circ(w), \nu \rangle^2 + \langle q(w, w^\perp), \nu \rangle^2 = \Phi_q(\nu) = 0$$

para todo  $\nu \in \vec{v}^\perp$ . Finalmente, dado que  $\dim \vec{v}^\perp \geq 2$ ,  $\dim \text{Ker } U_\Phi \geq 2$ , luego, del inciso c) del lema 1.1.5  $A_q \equiv 0$  y por lo tanto, de la observación 1.2.5,  $\vec{N} = 0$ .  $\square$

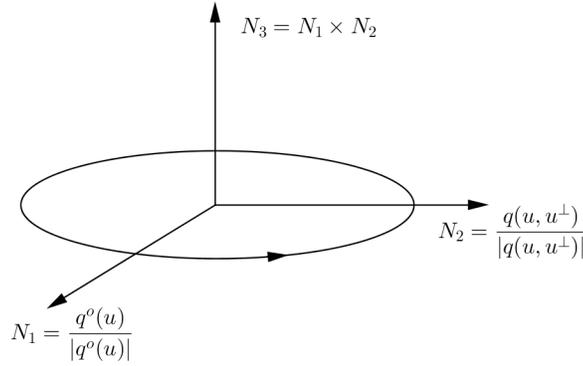
De la proposición anterior tenemos que si  $\vec{N} \neq 0$  entonces  $\mathcal{E}$  es no degenerada, de hecho podemos elegir una base ortonormal  $\{e_1, e_2\}$  de  $\mathbb{R}^2$  orientada de manera positiva de tal manera que  $q^\circ(e_1)$  y  $q(e_1, e_2)$  sean aplicados en los semiejes de  $\mathcal{E}^\circ$  (Ver [9]). Ahora, haciendo

$$N_1 = \frac{q^\circ(e_1)}{|q^\circ(e_1)|} \quad y \quad N_2 = \frac{q(e_1, e_2)}{|q(e_1, e_2)|},$$

de (2.1.3) tenemos que

$$\Phi_q(\nu) = |q^\circ(e_1)|^2 \langle N_1, \nu \rangle^2 + |q(e_1, e_2)|^2 \langle N_2, \nu \rangle^2 \quad (2.1.7)$$

para cada  $\nu \in \mathbb{R}^3$ , y completando  $\{N_1, N_2\}$  a una base ortonormal orientada de manera positiva de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\{N_1, N_2, N_3\}$  (ver la siguiente figura),



obtenemos

$$\Phi_q(x, y, z) = |q^\circ(e_1)|^2 x^2 + |q(e_1, e_2)|^2 y^2, \quad (2.1.8)$$

donde  $\nu = xN_1 + yN_2 + zN_3$ . En esta base

$$U_\Phi = \begin{pmatrix} |q^\circ(e_1)|^2 & 0 & 0 \\ 0 & |q(e_1, e_2)|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.1.9)$$

y por lo tanto  $|q^\circ(e_1)|^2$  y  $|q(e_1, e_2)|^2$  son valores propios de  $U_\Phi$ , que sin pérdida de generalidad, podemos suponer  $|q^\circ(e_1)|^2 = a^2$  y  $|q(e_1, e_2)|^2 = b^2$ , donde  $a^2$  y  $b^2$  son como en (1.3.1) y (1.3.2).

Ahora, de la observación 1.2.5, tenemos que si  $\vec{N} \neq 0$  entonces éste es un vector propio de  $U_\Phi$  cuyo valor propio correspondiente es cero, pues  $\vec{N} \in \text{Ker } U_\Phi$ . Notemos que en este caso  $\Phi_q(\vec{N}) = 0$  y por (2.1.3) y la definición de  $N_1$  y  $N_2$  se tiene que  $\vec{N}$  es perpendicular al plano que contiene a  $\mathcal{E}^\circ$ . Luego  $\text{vec}N$  es colineal a  $N_3$ . Consideremos la restricción de  $\Phi_q$  al espacio  $\vec{N}^\perp$ . El operador simétrico asociado a  $\Phi|_{\vec{N}^\perp}$  es  $U_{\Phi|_{\vec{N}^\perp}}$  y además  $\det U_{\Phi|_{\vec{N}^\perp}} = a^2b^2 \neq 0$ , luego, podemos considerar  $U_{\Phi|_{\vec{N}^\perp}}^{-1}$  y definir

$$\Phi_q^*(\nu) := \langle U_{\Phi|_{\vec{N}^\perp}}^{-1}(\nu), \nu \rangle. \quad (2.1.10)$$

En la siguiente proposición damos una ecuación intrínseca de la elipse de curvatura en términos de  $\Phi_q^*$ .

**Proposición 2.1.3.** *Sea  $q \in \mathbb{Q}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$  tal que  $\vec{N} \neq 0$ . Entonces  $\nu \in \mathcal{E}^\circ$  si y sólo si  $\Phi_q^*(\nu) = 1$ .*

*Demostración.* Sea  $\{e_1, e_2\}$  la base de  $\mathbb{R}^2$  definida en (2.1.7) y sea  $w \in \mathbb{R}^2$ . Por un lado  $w = w_1e_1 + w_2e_2$  y por lo tanto

$$\begin{aligned} q^\circ(w) &= (w_1^2 - w_2^2)q^\circ(e_1) + 2w_1w_2q(e_1, e_2) \\ &= (w_1^2 - w_2^2)|q^\circ(e_1)|N_1 + 2w_1w_2|q(e_1, e_2)|N_2 \\ &= (w_1^2 - w_2^2)aN_1 + 2w_1w_2bN_2. \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \Phi_q^*(q^\circ(w)) &= \langle U_{\Phi|_{\vec{N}^\perp}}^{-1}(q^\circ(w)), q^\circ(w) \rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (w_1^2 - w_2^2)a \\ 2w_1w_2b \end{pmatrix}, ((w_1^2 - w_2^2)a, 2w_1w_2b) \right\rangle \\ &= (w_1^2 + w_2^2)^2, \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

de donde se sigue que  $\Phi_q^*(q^\circ(w)) = 1$  si y sólo si  $|w| = w_1^2 + w_2^2 = 1$ .  $\square$

Si en la proposición anterior hacemos  $q^\circ(w) = xN_1 + yN_2$  tenemos que la elipse  $\mathcal{E}^\circ$  satisface la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

en la base  $\{N_1, N_2\}$  de  $\vec{N}^\perp$ . Entonces los valores propios no cero de  $U_\Phi$  representan el cuadrado de las longitudes de los semiejes de  $\mathcal{E}^\circ$  y en consecuencia de  $\mathcal{E}$ . Luego, de la observación 1.2.7, se tiene que el área de  $\mathcal{E}$ , que denotamos por  $\text{área}(\mathcal{E})$ , está dada por

$$\text{área}(\mathcal{E}) = \pi ab = \frac{1}{2}\pi|\vec{N}|. \quad (2.1.13)$$

Notemos además que  $\mathcal{E}^\circ$  está contenida en el plano  $\vec{N}^\perp$  y por lo tanto  $\mathcal{E}$  está contenida en el plano afín  $\text{Aff}_{\mathcal{E}} := \vec{H} + \vec{N}^\perp$ . En consecuencia,  $\Gamma := \frac{1}{2} \langle \vec{H}, \vec{N} \rangle = 0$  si y sólo si  $\text{Aff}_{\mathcal{E}}$  pasa por el origen de  $\mathbb{R}^3$  (Ver figura 2.1).

De hecho, la base definida en (2.1.8) satisface las condiciones del lema 1.3.2, y por lo tanto obtenemos la siguiente forma normal de  $q$ ,

$$\begin{aligned} q(w) &= (w_1^2 + w_2^2)\vec{H} + (w_1^2 - w_2^2)aN_1 + 2w_1w_2bN_2 \\ &= ((\alpha + \mathbf{a})\mathbf{w}_1^2 + (\alpha - \mathbf{a})\mathbf{w}_2^2) \mathbf{N}_1 + (\beta\mathbf{w}_1^2 + 2\mathbf{b}\mathbf{w}_1\mathbf{w}_2 + \beta\mathbf{w}_2^2) \mathbf{N}_2 + \gamma(\mathbf{w}_1^2 + \mathbf{w}_2^2) \mathbf{N}_3, \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

donde  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  satisfacen las ecuaciones (1.3.12)-(1.3.14).

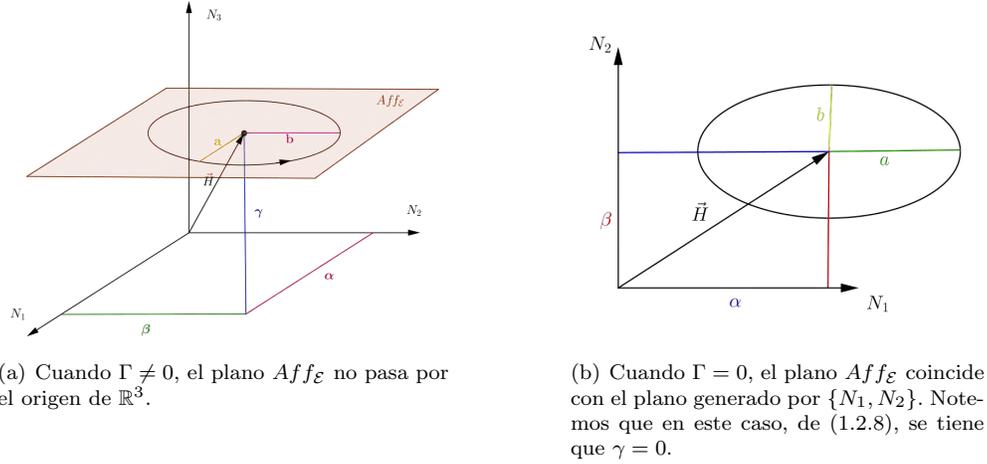
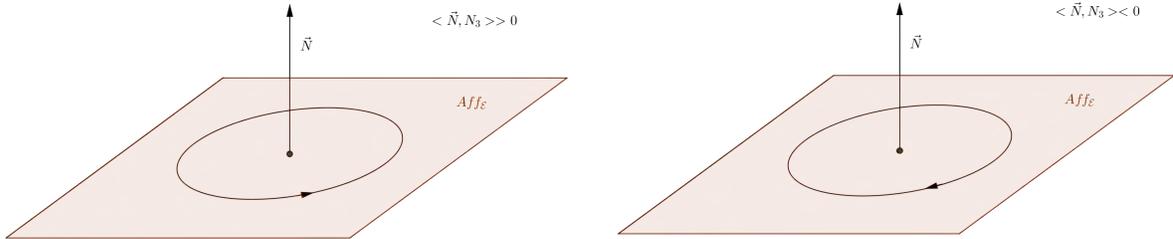


Figura 2.1: Posición de  $\mathcal{E}$  respecto del origen de  $\mathbb{R}^3$ , según la nulidad del invariante  $\Gamma$ .

Si  $\Gamma = 0$ , de las observaciones 1.2.4 y 1.2.7 tenemos que  $\gamma = 0$  y en este caso

$$q(w) = ((\alpha + \mathbf{a})\mathbf{w}_1^2 + (\alpha - \mathbf{a})\mathbf{w}_2^2) \mathbf{N}_1 + (\beta\mathbf{w}_1^2 + 2\mathbf{b}\mathbf{w}_1\mathbf{w}_2 + \beta\mathbf{w}_2^2) \mathbf{N}_2 \quad (2.1.15)$$

**Observación 2.1.4.** Sea nuevamente  $\{N_1, N_2, N_3\}$  como en (2.1.8) e identifiquemos a  $q(\theta)$  con  $q(w)$  donde  $w = \cos \theta u + \sin \theta u^\perp$ , y  $\theta$  es el ángulo medido de  $u$  a  $w$  en la orientación de  $\mathbb{R}^2$ . El vector  $\vec{N}$  determina una orientación en  $Aff_{\mathcal{E}}$ . Si  $\langle \vec{N}, N_3 \rangle > 0$  entonces la elipse  $\mathcal{E}$  es recorrida por la parametrización  $q(\theta)$  en el sentido antihorario, vista desde  $\vec{N}$ ; si  $\langle \vec{N}, N_3 \rangle < 0$  entonces la elipse es recorrida en el sentido opuesto.



Además

$$\frac{1}{2\pi} |\langle \vec{N}, N_3 \rangle| = \text{área}(\mathcal{E})$$

y por lo tanto podemos asignar un signo a  $\text{área}(\mathcal{E})$  según la orientación de  $\mathcal{E}$  respecto de  $\vec{N}$ .

**Observación 2.1.5.** Para  $u \in S^1 \subset \mathbb{R}^2$  tenemos que  $q(u, u^\perp)$  está en la dirección tangente a  $\mathcal{E}$  en el punto  $q(u)$ . En efecto, si  $\sigma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S^1$  es una curva parametrizada por longitud de arco de tal manera que  $\sigma(0) = u$  y  $\sigma$  recorra a  $S^1$  en el sentido antihorario, entonces

$$\frac{d}{d\theta} q(\sigma(\theta), \sigma(\theta))|_{t=0} = 2 q(\sigma(\theta), \sigma'(\theta))|_{t=0} = 2 q(u, u^\perp)$$

## 2.2. El estudio del caso degenerado

Ahora, si  $\vec{N} = 0$ , de la observación 1.2.5 tenemos que  $\dim Ker U_{\Phi} \geq 2$ . Por otro lado la proposición 2.1.2 nos garantiza que

$$q(w) = \vec{H} + \lambda(w)\vec{v}$$

para todo  $w \in S^1$ , donde  $\lambda(w)$  es una función real-valuada y  $\vec{v} \in (Ker U_{\Phi})^{\perp}$ .

Entonces, si  $\dim Ker U_{\Phi} = 3$ ,  $\vec{v} = 0$  y por lo tanto  $\mathcal{E}$  degenera en un punto, a saber, en el punto final del vector  $\vec{H}$ ; si  $\dim Ker U_{\Phi} = 2$  entonces  $\vec{v} \neq 0$  y por lo tanto  $\mathcal{E}$  degenera en un segmento de recta.

Para determinar de manera más precisa al segmento  $\mathcal{E}$  consideremos el siguiente

**Lema 2.2.1.** *Sea  $q \in \mathbb{Q}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$  tal que  $\vec{N} = 0$ . Si  $\dim Ker U_{\Phi} = 2$  entonces existe  $u \in S^1$  tal que  $q^{\circ}(u) \neq 0$  y  $q(u, u^{\perp}) = 0$ , y por lo tanto la ecuación (2.1.3) puede escribirse como*

$$\Phi_q(\nu) = \langle q^{\circ}(u), \nu \rangle^2, \quad (2.2.1)$$

para toda  $\nu \in \mathbb{R}^3$ .

*Demostración.* Sea  $\mu \in (Ker U_{\Phi})^{\perp}$ ,  $\mu \neq 0$ ; y sea  $u \in S^1$  un vector propio de  $S_{\mu}^{\circ}$ . De (2.1.5) tenemos que  $S_{\mu}^{\circ}(u) \neq 0$ , de lo contrario  $\Phi_q(\mu) = 0$  (y por lo tanto del Lema 1.1.5  $\mu \in Ker U_{\Phi}$ ). Entonces

$$\langle q^{\circ}(u), \mu \rangle = \langle S_{\mu}^{\circ}(u), u \rangle = \lambda \langle u, u \rangle \neq 0$$

lo que implica que  $q^{\circ}(u) \neq 0$ . Además

$$\langle q(u, u^{\perp}), \mu \rangle = \langle S_{\mu}^{\circ}(u), u^{\perp} \rangle = \lambda \langle u, u^{\perp} \rangle = 0,$$

y dado que  $S_{\nu}^{\circ} \equiv 0$  para toda  $\nu \in Ker U_{\Phi}$  (ver lema 1.1.5),

$$\langle q(u, u^{\perp}), \nu \rangle = \langle S_{\nu}^{\circ}(u), u^{\perp} \rangle = 0,$$

para todo  $\nu \in Ker U_{\Phi}$ . Concluimos que  $q(u, u^{\perp}) = 0$ .  $\square$

**Observación 2.2.2.** *Notemos que en el lema anterior podemos considerar  $u^{\perp}$  en lugar de  $u$ , en este caso, dado que  $q^{\circ}(u) = -q^{\circ}(u^{\perp})$ , se sigue cumpliendo la ecuación (2.2.1).*

*Notemos también que  $q^{\circ}(u)$  es un vector propio de  $U_{\Phi}$  (ver (2.1.9)). De hecho  $U_{\Phi}(q^{\circ}(u)) = a^2 q^{\circ}(u)$  donde  $a^2$  es como en el lema 1.3.6 y*

$$\Phi_q(q^{\circ}(u)) = |q^{\circ}(u)|^4 \neq 0.$$

*Entonces*

$$|q^{\circ}(u)|^4 = \Phi_q(q^{\circ}(u)) = \langle U_{\Phi}(q^{\circ}(u)), q^{\circ}(u) \rangle = a^2 |q^{\circ}(u)|^2$$

*lo que implica que  $a = |q^{\circ}(u)|$ .*

**Proposición 2.2.3.** *Sea  $q \in \mathbb{Q}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$  tal que  $\vec{N} = 0$  y  $\dim Ker U_{\Phi} = 2$ . Entonces*

$$\mathcal{E} = [\vec{H} - aN_1, \vec{H} + aN_1],$$

*donde  $N_1 \in (Ker U_{\Phi})^{\perp}$  y  $|N_1| = 1$ .*

*Demostración.* Sea  $u \in S^1$  como en el lema anterior y hagamos  $N_1 = \frac{q^{\circ}(u)}{|q^{\circ}(u)|}$ . De la observación anterior tenemos que  $a = |q^{\circ}(u)|$  y por lo tanto, para cada  $w \in S^1$ ,

$$q^{\circ}(w) = q^{\circ}(w_1 u + w_2 u^{\perp}) = (w_1^2 - w_2^2)q^{\circ}(u) = a(w_1^2 - w_2^2)N_1.$$

Luego,  $q(w) = \vec{H} + a(w_1^2 - w_2^2)N_1$  y por lo tanto  $\mathcal{E} = [\vec{H} - aN_1, \vec{H} + aN_1]$ .  $\square$

**Observación 2.2.4.** Si  $\vec{H}$  no es colineal a  $N_1$ , podemos considerar una base ortonormal  $\{N_1, N_2, N_3\}$  que cumpla las características del inciso i) del lema 1.3.6 y en este caso

$$q(w) = ((\alpha + \mathbf{a})\mathbf{w}_1^2 + (\alpha - \mathbf{a})\mathbf{w}_2^2) \mathbf{N}_1 + \beta (\mathbf{w}_1^2 + \mathbf{w}_2^2) \mathbf{N}_2, \quad \text{para todo } w \in \mathbb{R}^2, \quad (2.2.2)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  satisfacen (1.3.22) y (1.3.23). Ver Figura 2.2.

Si  $\vec{H}$  es colineal a  $N_1$  y no cero, entonces  $\vec{H} \in (\text{Ker } U_{\mathbb{F}})^\perp$  y por lo tanto, el inciso ii) del lema 1.3.6 garantiza que

$$q(w) = ((\alpha + \mathbf{a})\mathbf{w}_1^2 + (\alpha - \mathbf{a})\mathbf{w}_2^2) \mathbf{N}_1 \quad (2.2.3)$$

donde  $\alpha = |\vec{H}|$ .

Finalmente, si  $\vec{H} = 0$ ,

$$q(w) = \mathbf{a}(\mathbf{w}_1^2 - \mathbf{w}_2^2) \mathbf{N}_1. \quad (2.2.4)$$

Cuando  $\vec{N} = 0$  la colinealidad de  $\vec{H}$  y  $N_1$  queda determinada por el invariante  $\Delta$ , que fue introducido en (1.2.1).

**Proposición 2.2.5.** Sea  $q \in \mathbb{Q}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$  tal que  $\vec{N} = 0$  y  $\dim \text{Ker } U_{\mathbb{F}} = 2$ , es decir, ta que  $|\vec{H}|^2 - K \neq 0$ . Sea también  $N_1$  como en la proposición anterior. Entonces  $\vec{H}$  es colineal a  $N_1$  si y sólo si  $\Delta = 0$ .

*Demostración.* Supongamos que  $\vec{H}$  es colineal a  $N_1$ . En este caso  $\vec{H} = \lambda q^\circ(u)$  y por lo tanto

$$q(u) = \vec{H} + q^\circ(u) = (\lambda + 1)q^\circ(u).$$

Luego, de (2.2.1), si  $\nu \in \text{Ker } U_{\mathbb{F}}$  entonces  $\langle q(u), \nu \rangle = 0$ . De hecho, dado que  $q(u^\perp) = 2\vec{H} - q(u)$  y  $\text{Ker } U_{\mathbb{F}} \subset \vec{H}^\perp$ , también se tiene que  $\langle q(u^\perp), \nu \rangle = 0$ . Por otro lado, para cada  $\nu \in \mathbb{R}^3$ ,

$$Q(\nu) = \det S_\nu = \langle q(u), \nu \rangle \langle q(u^\perp), \nu \rangle,$$

pues  $q(u, u^\perp) = 0$ , y por lo tanto

$$Q(\nu, \mu) = \frac{1}{2} (\langle q(u), \nu \rangle \langle q(u^\perp), \mu \rangle + \langle q(u^\perp), \nu \rangle \langle q(u), \mu \rangle) \quad (2.2.5)$$

para todo  $\nu, \mu \in \mathbb{R}^3$ . Ahora, si  $\{N_1, N_2, N_3\}$  es una base ortonormal orientada positiva de  $\mathbb{R}^3$ ,  $Q(N_i, N_j) = 0$  al menos para  $(i, j) \neq (1, 1)$ , pues  $N_2, N_3 \in \text{Ker } U_{\mathbb{F}}$ , luego, es esta base,

$$U_Q = \begin{pmatrix} Q(N_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

lo que implica que  $\sigma_2(U_Q) = \Delta = 0$ .

Para mostrar el recíproco, notemos primero que si  $q(u) = 0$  ó  $q(u^\perp) = 0$  entonces  $\vec{H}$  es colineal a  $q^\circ(u)$  pues en este caso  $\vec{H} \pm q^\circ(u) = 0$ , luego,  $\vec{H}$  es colineal a  $N_1$ . Supongamos entonces que  $q(u) \neq 0$  y  $q(u^\perp) \neq 0$ . Como  $\Delta = 0$  y  $\Gamma = 0$  (pues  $\vec{N} = 0$ ), entonces  $U_Q(\nu) = 0$  si y sólo si  $Q(\nu) = 0$ , pues en este caso  $Q$  es semidefinida no negativa o semidefinida no positiva, dependiendo del signo de  $\sigma_1(U_Q) = K$ . Luego, para cada  $\nu \in \text{Ker } U_Q$  se tiene que

$$0 = Q(\nu) = \langle q(u), \nu \rangle \langle q(u^\perp), \nu \rangle.$$

Si  $\langle q(u), \nu \rangle = 0$  entonces, de (2.2.5),

$$\langle q(u^\perp), \nu \rangle \langle q(u), \mu \rangle = 0 \quad \text{para toda } \mu \in \mathbb{R}^3,$$

$$\vec{N} = 0, \quad \Delta \neq 0, \quad |\vec{H}|^2 - K \neq 0.$$

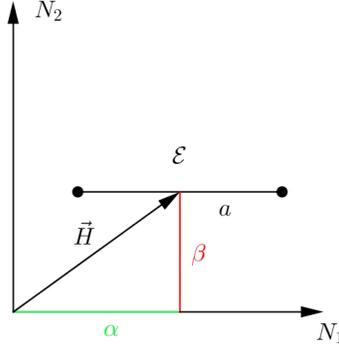


Figura 2.2: La proposición 2.2.5 muestra que  $\mathcal{E}$  degenera en un segmento no alineado con el origen si y sólo si  $\Delta \neq 0$ .

y por lo tanto  $\langle q(u^\perp), \nu \rangle = 0$ . Si suponemos que  $\langle q(u^\perp), \nu \rangle = 0$  un proceso análogo muestra que  $\langle q(u), \nu \rangle = 0$ . Entonces  $q(u), q(u^\perp) \in (\text{Ker } U_Q)^\perp$ , es decir,  $q(u) = \lambda q(u^\perp)$ , luego

$$2\vec{H} = q(u) + q(u^\perp) = (\lambda + 1)q(u^\perp) = (\lambda + 1)(\vec{H} - q^o(u))$$

de donde se sigue que  $\vec{H}$  es colineal a  $q^o(u)$  y por lo tanto a  $N_1$ .  $\square$

La condición de que  $\dim \text{Ker } U_\Phi = 2$  es equivalente a la condición de que  $|\vec{H}|^2 - K \neq 0$  ya que en este caso el valor propio no cero de  $\Phi_q$  satisface  $a^2 = |\vec{H}|^2 - K$ .

**Observación 2.2.6.** En la proposición anterior el invariante  $K = \sigma_1(U_Q)$  determina la posición de  $\mathcal{E}$  respecto del origen de  $\mathbb{R}^3$ . A saber, si  $K = 0$ , entonces  $Q \equiv 0$  y por lo tanto,

$$\langle q(u), \nu \rangle \langle q(u^\perp), \nu \rangle = 0 \quad \text{para todo } \nu \in \mathbb{R}^3;$$

luego  $q(u) = 0$  ó  $q(u^\perp) = 0$ . Ahora, de la proposición 2.2.3, tenemos que

$$\mathcal{E} = [\vec{H} - aN_1, \vec{H} + aN_1] = [q(u), q(u^\perp)]$$

y entonces  $\mathcal{E} = [0, \vec{H} + aN_1]$  ó  $\mathcal{E} = [\vec{H} - aN_1, 0]$ .

Si  $K < 0$  entonces

$$Q(q(u)) = |q(u)|^2 \langle q(u^\perp), q(u) \rangle < 0$$

y por lo tanto  $q(u)$  está en dirección opuesta a  $q(u^\perp)$ ; luego  $0 \in [q(u), q(u^\perp)] = \mathcal{E}$ .

Si  $K > 0$  entonces  $\langle q(u), q(u^\perp) \rangle > 0$ , es decir,  $q(u)$  está en la dirección de  $q(u^\perp)$  y por lo tanto  $0 \notin \mathcal{E}$ . Ver Figura 2.3.

$$\vec{N} = 0, \quad \Delta = 0, \quad |\vec{H}|^2 - K \neq 0$$

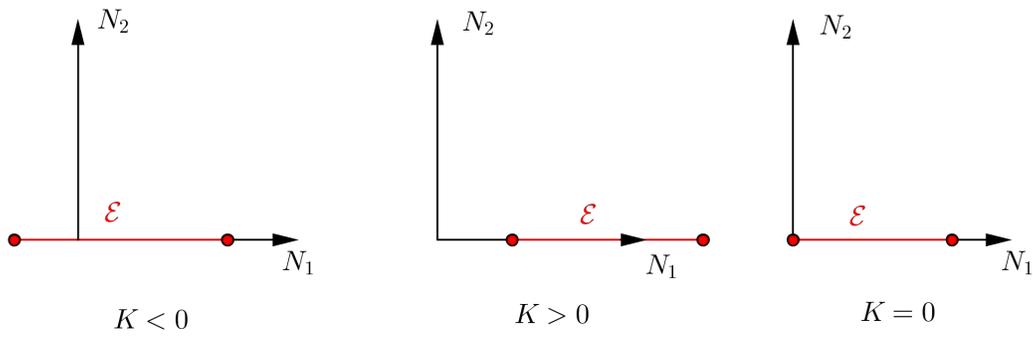


Figura 2.3: El invariante  $K$  determina la posición de  $\mathcal{E}$  respecto del origen de  $\mathbb{R}^3$ .

## Capítulo 3

# La aplicación de Gauss de una superficie en $\mathbb{R}^5$ .

En lo que sigue consideraremos una inmersión isométrica  $\mathbf{x} : M \rightarrow \mathbb{R}^5$  de una superficie orientada, en el espacio euclidiano de dimensión 5. De manera usual, identificamos  $M$  con su imagen  $\mathbf{x}(M)$  y consideramos la descomposición ortogonal  $T_p\mathbb{R}^5 = T_pM \oplus N_pM$  para cada  $p \in M$ . Los haces tangente y normal a  $M$  se denotarán por  $TM$  y  $NM$  y los espacios de secciones suaves, tangentes y normales, se denotarán por  $\tau(M)$  y  $\tau(M)^\perp$ , respectivamente. Usaremos los símbolos  $\nabla$  y  $\nabla^\perp$  para referirnos a las conexiones riemanniana y normal definidas sobre  $M$  y que están inducidas por la conexión riemanniana de  $\mathbb{R}^5$ ,  $\bar{\nabla}$ .

La segunda forma fundamental asociada a la inmersión  $\mathbf{x}$  es el  $(2, 1)$ -*tensor*

$$\begin{aligned} II : \tau(M) \times \tau(M) &\rightarrow \tau(M)^\perp \\ (X, Y) &\mapsto (\bar{\nabla}_X \bar{Y})^\perp, \end{aligned}$$

donde  $\bar{X}$  y  $\bar{Y}$  son extensiones locales de  $X$  y  $Y$ , respectivamente. Entonces para cada  $p \in M$ , la restricción de  $II$  a  $T_pM$ , es una aplicación cuadrática con dominio  $T_pM \cong \mathbb{R}^2$  y codominio  $N_pM \cong \mathbb{R}^3$ , cuyos invariantes y elipse de curvatura asociados fueron estudiados en los capítulos anteriores. En este caso, el invariante  $K$  coincide con la curvatura Gaussiana de la superficie y el vector  $\vec{H}$  es el vector de curvatura media. Denotaremos por  $II^\circ$  la parte sin traza de  $II$ .

Recordemos que para  $X, Y, Z \in \tau(M)$  y  $\eta \in \tau(M)^\perp$ , la ecuación de Codazzi está dada por

$$(\bar{\nabla}_X II)(Y, Z, \eta) = (\bar{\nabla}_Y II)(X, Z, \eta), \quad (3.0.1)$$

donde

$$(\bar{\nabla}_X II)(Y, Z, \eta) := XII(Y, Z, \eta) - II(\nabla_X Y, Z, \eta) - II(Y, \nabla_X Z, \eta) - II(Y, Z, \nabla_X^\perp \eta)$$

y  $II(Y, Z, \eta) := \langle II(Y, Z), \eta \rangle$ . También recordemos que dado un  $(2, 1)$ -*tensor*, podemos definir sobre  $M$  un  $(3, 1)$ -*tensor* de la siguiente manera: sea  $T : \tau(M) \times \tau(M) \rightarrow \tau(M)^\perp$  un  $(2, 1)$ -*tensor*. Para  $X, Y, Z \in \tau(M)$  definimos

$$(\tilde{\nabla} T)(X, Y, Z) := \nabla_Z^\perp T(X, Y) - T(\nabla_Z X, Y) - T(X, \nabla_Z Y). \quad (3.0.2)$$

Cuando  $T = II$  se sigue de la ecuación de Codazzi que el  $(3, 1)$ -*tensor*,  $\tilde{\nabla} II$ , es simétrico.

Denotamos por  $\Lambda^k \mathbb{R}^n$  al espacio vectorial de  $k$ -vectores de  $\mathbb{R}^n$ , el cual tiene dimensión  $\binom{n}{k}$ . Definimos un producto punto en  $\Lambda^k \mathbb{R}^n$  como sigue: si  $u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_k, v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k \in \Lambda^k \mathbb{R}^n$  hacemos

$$\langle u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_k, v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k \rangle := \det (\langle u_i, v_j \rangle), \quad i \leq k, j \leq k \quad (3.0.3)$$

donde el símbolo  $\langle, \rangle$  que se encuentra en el lado derecho de la igualdad denota al producto punto usual de  $\mathbb{R}^n$ .

### 3.1. La definición de la aplicación de Gauss y una interpretación geométrica de su diferencial.

Denotamos por  $G_2^5$  a la variedad de Grassmann de 2-planos orientados por el origen de  $\mathbb{R}^5$ .

**Proposición 3.1.1.** *La transformación*

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : G_2^5 &\rightarrow \Lambda^2 \mathbb{R}^5 \\ P &\mapsto u \wedge u^\perp, \end{aligned}$$

donde  $\{u, u^\perp\}$  es una base ortonormal de  $P \subset \mathbb{R}^5$  orientada de manera positiva, es inyectiva y su imagen  $\mathbf{Q} := \{\eta \in \Lambda^2 \mathbb{R}^5 : |\eta| = 1, \eta \wedge \eta = 0\}$  es una subvariedad de  $\Lambda^2 \mathbb{R}^5$  de dimensión 6.

**Definición 3.1.2.** *Sea  $\mathbf{x} : M \rightarrow \mathbb{R}^5$  una inmersión. La aplicación de Gauss asociada a la inmersión  $\mathbf{x}$  es la aplicación*

$$\begin{aligned} G : M &\rightarrow \mathbf{Q} \\ p &\mapsto u \wedge u^\perp, \end{aligned}$$

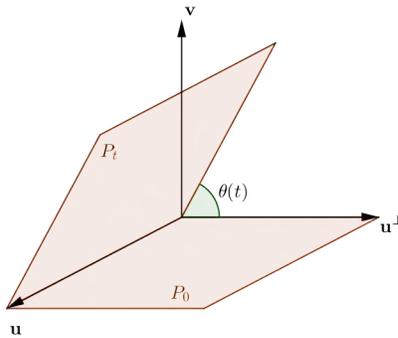
donde  $\{u, u^\perp\}$  es una base ortonormal de  $T_p M$ , orientada de manera positiva.

Consideremos por un momento  $P_0 \in G_2^5$  y  $\{u, u^\perp\}$  una base ortonormal positiva de  $P_0$ . Sea  $v \in \mathbb{R}^5$ ,  $v \neq 0$ , un vector ortogonal a  $P_0$  y denotemos por  $E^3$  al espacio generado por  $\{u, u^\perp, v\}$  con la orientación definida por esta base.

Si  $\epsilon > 0$ , para cada  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ , el bivector

$$u \wedge \left( u^\perp \cos(t\|v\|) + \frac{v}{\|v\|} \operatorname{sen}(t\|v\|) \right) \in \Lambda^2 \mathbb{R}^5.$$

puede ser identificado con el plano  $P_t \subset E^3$  que forma un ángulo  $\theta(t) = t\|v\|$  con el plano  $P_0$  y que tiene en común con éste la recta  $\mathbb{R}.u$ .



El plano  $P_t$  puede ser entendido como el plano que resulta de rotar  $P_0$  en el espacio  $E^3$  respecto del eje  $\mathbb{R}.u$  en el tiempo  $t$ , con velocidad angular  $\|v\|$ .

Ahora, podemos considerar el límite  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_t - P_0}{t}$  como una rotación infinitesimal de  $P_0$  en el espacio  $E^3$  respecto de  $\mathbb{R}.u$ , en el instante  $t = 0$ .

De hecho,

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_t - P_0}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u \wedge \left( u^\perp \cos(t\|v\|) + \frac{v}{\|v\|} \operatorname{sen}(t\|v\|) \right) - u \wedge u^\perp}{t} \\
&= u \wedge \lim_{t \rightarrow 0} \left( u^\perp \frac{\cos(t\|v\|) - 1}{t} + \frac{v}{\|v\|} \frac{\operatorname{sen}(t\|v\|)}{t} \right) \\
&= u \wedge \frac{v}{\|v\|} \|v\| \\
&= u \wedge v.
\end{aligned}$$

De esta manera,  $u \wedge v \in \Lambda^2 \mathbb{R}^5$  puede ser interpretado como una rotación infinitesimal del plano  $P_0$  en el 3-espacio  $E^3$  alrededor de  $u$ , con velocidad angular  $\|v\|$ .

Ahora sea  $\{u, u^\perp\}$ , una base ortonormal de  $T_p M$  orientada de manera positiva y sea  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  una geodésica tal que  $\alpha(0) = p$  y  $\alpha'(0) = u$ . Denotemos por  $\{u(t), u^\perp(t)\}$  al marco ortonormal tangente a  $M$ , orientado de manera positiva respecto a la superficie  $M$ , tal que  $\alpha'(t) = u(t)$ . En este caso  $\nabla_u u = \nabla_u u^\perp = 0$  y por lo tanto

$$\begin{aligned}
dG_p(u) &= \frac{d}{dt} (G \circ \alpha)(t)|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} (u(t) \wedge u^\perp(t))|_{t=0} \\
&= u \wedge II(u, u^\perp) - u^\perp \wedge II(u, u) \\
&= r_u + m_u + t_u,
\end{aligned} \tag{3.1.1}$$

donde  $r_u := u \wedge II(u, u^\perp)$ ,  $m_u := -u^\perp \wedge \vec{H}$  y  $t_u := -u^\perp \wedge II^o(u, u)$ .

Notemos que  $r_u$ ,  $m_u$  y  $t_u$  representan rotaciones infinitesimales de  $T_p M$  en un cierto 3-espacio:  $r_u$  representa una rotación infinitesimal en el 3-espacio  $T_p M \oplus \mathbb{R} \cdot II(u, u^\perp)$ , en la dirección  $\mathbb{R} \cdot u$  y de velocidad angular  $|II(u, u^\perp)|$ ;  $m_u$  una rotación en el 3-espacio  $T_p M \oplus \mathbb{R} \cdot \vec{H}$ , en la dirección  $\mathbb{R} \cdot u^\perp$  y de velocidad angular  $|\vec{H}|$ , conocida como la rotación infinitesimal media, y  $t_u$  una rotación en  $T_p M \oplus \mathbb{R} \cdot II(u, u^\perp)$  en la dirección  $\mathbb{R} \cdot u$  y de velocidad angular  $|II^o(u, u)|$ .

Los valores máximo y mínimo de las velocidades angulares  $|II(u, u^\perp)|$  de  $r_u$  y  $|II^o(u, u)|$  de  $t_u$  son precisamente los invariantes  $a$  y  $b$ , puesto que estos representan las longitudes de los semiejes de la elipse de curvatura. Dichos valores son alcanzados en las direcciones ortogonales  $e_1, e_2 \in T_p M$  definidas como las preimágenes bajo la segunda forma fundamental de los vértices de la elipse de curvatura, ver (2.1.7). De hecho, como  $N_1$  y  $N_2$  son paralelos a los ejes principales tenemos

$$r_{e_1} = e_1 \wedge II(e_1, e_2) = be_1 \wedge N_2, \quad r_{e_2} = -e_2 \wedge II(e_1, e_2) = -be_2 \wedge N_2,$$

$$t_{e_1} = -e_2 \wedge II(e_1, e_1) = -ae_2 \wedge N_1 \quad y \quad t_{e_2} = e_1 \wedge II(e_2, e_2) = ae_1 \wedge N_1.$$

Las direcciones que estos generan son generalizaciones naturales de las direcciones de curvatura axial para superficies inmersas en  $\mathbb{R}^4$ , [7]. Aún más, podemos interpretar estas direcciones como las aquellas donde las velocidades angulares consideradas anteriormente alcanzan sus valores extremos.

Consideremos ahora la rotación infinitesimal

$$dG_p(u) - m_u = r_u + t_u.$$

Notemos que  $r_u + t_u$  es una rotación en el hiperplano  $T_pM \oplus \mathbb{R}II^o(u, u) \oplus \mathbb{R}II(u, u^\perp)$ , el cual es ortogonal a la dirección  $N_3$ , por lo que no depende de la dirección  $u \in T_pM$ . Por otro lado,

$$m_u = -u^\perp \wedge \vec{H} = -u^\perp \wedge \alpha N_1 - u^\perp \wedge \beta N_2 - u^\perp \wedge \gamma N_3 \quad (3.1.2)$$

y dado que  $N_1, N_2 \in \mathbb{R}II^o(u, u) \oplus \mathbb{R}II(u, u^\perp)$ , el invariante  $\gamma$  puede ser interpretado como la velocidad angular de la proyección de la rotación infinitesimal en el 3-espacio  $T_pM \oplus \mathbb{R}\vec{N}_3$ .

Ahora,

$$m_u - u^\perp \wedge \gamma N_3 = -u^\perp \wedge (\vec{H} - \gamma N_3) = -u^\perp \wedge (\alpha N_1 + \beta N_2), \quad (3.1.3)$$

es decir,  $m_u - u^\perp \wedge \gamma N_3$  representa la proyección de la rotación infinitesimal media en el hiperplano  $N_3^\perp$  y la velocidad angular de esta rotación está determinada por los números  $\alpha$  y  $\beta$ , a saber,

$$|\vec{H} - \gamma N_3| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Por otro lado si  $\vec{H} \neq \gamma N_3$ ,  $\alpha$  y  $\beta$  también determinan la posición de los espacios  $T_pM \oplus \mathbb{R}N_1$  y  $T_pM \oplus \mathbb{R}N_2$  con respecto del hiperplano  $T_pM \oplus \mathbb{R}(\vec{H} - \gamma N_3)$  en  $N_3^\perp$ : hacemos  $n_1 = \frac{\vec{H} - \gamma N_3}{|\vec{H} - \gamma N_3|}$  y consideramos el vector  $n_2$  que cumple que  $\{n_1, n_2, N_3\}$  es una base ortonormal positiva de  $N_3^\perp \subset N_pM$ , en este caso

$$N_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}n_1 - \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}n_2, \quad N_2 = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}n_1 + \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}n_2$$

### 3.2. Una nueva herramienta: La aplicación cuadrática $\delta$ .

Para  $u \in T_pM$  definimos la aplicación cuadrática

$$\delta(u) := -\frac{1}{2}dG_p(u) \wedge dG_p(u). \quad (3.2.1)$$

De (3.1.1) tenemos que si  $\{u, u^\perp\}$  es una base ortonormal de  $T_pM$  orientada de manera positiva entonces

$$\delta(u) = u \wedge u^\perp \wedge II(u, u) \wedge II(u, u^\perp) \quad (3.2.2)$$

Consideremos el *operador de Hodge*

$$\begin{aligned} \star : \Lambda^4 \mathbb{R}^5 &\rightarrow \Lambda^1 \mathbb{R}^5 \\ \eta &\mapsto \star \eta \end{aligned}$$

donde  $\omega \wedge \star \eta = \langle \omega, \eta \rangle \cdot 1$  para todo  $\omega \in \Lambda^4 \mathbb{R}^5$  y donde 1 es el neutro multiplicativo de  $\Lambda^5 \mathbb{R}^5 \approx \mathbb{R}$ . El operador  $\star$  es un isomorfismo y debido a que  $\langle, \rangle$  es definida positiva,  $\star \star = Id$ , donde el primer símbolo  $\star$  es identificado con el operador

$$\begin{aligned} \star : \Lambda^1 \mathbb{R}^5 &\rightarrow \Lambda^4 \mathbb{R}^5 \\ \eta &\mapsto \star \eta. \end{aligned}$$

Entonces

$$\langle u, \star \delta(u) \rangle \cdot 1 = u \wedge \star \star \delta(u) = u \wedge \delta(u) = 0$$

y

$$\langle u^\perp, \star \delta(u) \rangle \cdot 1 = u^\perp \wedge \star \star \delta(u) = u^\perp \wedge \delta(u) = 0$$

por lo que  $\star\delta(u) \in N_pM$ . Además  $\star\delta(u) = II(u, u) \times II(u, u^\perp)$  donde  $\times$  representa el producto vectorial en  $N_pM$ . En lo que sigue identificamos  $\delta(u)$  con su imagen bajo el operador  $\star$

$$\delta(u) = II(u, u) \times II(u, u^\perp). \quad (3.2.3)$$

**Observación 3.2.1.** Para  $u \in S^1(T_pM)$ , consideremos la transformación lineal

$$\begin{aligned} II(u, \cdot) : T_pM &\rightarrow N_pM \\ w &\mapsto II(u, w). \end{aligned}$$

La imagen de  $S^1(T_pM)$  bajo  $II(u, \cdot)$  es una elipse que denotamos por  $\mathcal{E}_u$ , cuyo centro está en  $p$  y que se encuentra en el plano ortogonal a  $\delta(u)$ . De hecho, tenemos que el área encerrada por  $\mathcal{E}_u$  está dada por

$$\int_{\overline{D}^1} |\det II(u, \cdot)| dA = \pi |\det II(u, \cdot)| = \pi |II(u, u) \times II(u, u^\perp)| = \pi |\delta(u)|.$$

Ahora, para  $u \in S^1(T_pM)$ , tenemos

$$\begin{aligned} \delta(u) &= (\vec{H} + II^0(u)) \times II(u, u^\perp) \\ &= \vec{H} \times II(u, u^\perp) + II^0(u) \times II(u, u^\perp), \end{aligned}$$

por otro lado, si  $u = xe_1 + ye_2$  donde  $\{e_1, e_2\}$  es una base de  $T_pM$  de tal manera que  $II^0(e_1) = aN_1$ ,  $II^0(e_2) = -aN_1$  y  $II(e_1, e_2) = bN_2$  con  $\{N_1, N_2\}$  como en (2.1.7), entonces

$$\begin{aligned} II^0(u) \times II(u, u^\perp) &= (a(x^2 - y^2)N_1 + 2xybN_2) \times (-2axyN_1 + b(x^2 - y^2)N_2) \\ &= ab((x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2)N_1 \times N_2 \\ &= abN_3, \end{aligned}$$

es decir,

$$\delta(u) = \vec{H} \times II(u, u^\perp) + \frac{1}{2}\vec{N} \quad (3.2.4)$$

si la orientación de  $\mathcal{E}$  respecto de  $\vec{N}$  es positiva ( $N_3 = \vec{N}$ ) y

$$\delta(u) = \vec{H} \times II(u, u^\perp) - \frac{1}{2}\vec{N} \quad (3.2.5)$$

si la orientación de  $\mathcal{E}$  respecto de  $\vec{N}$  es negativa ( $N_3 = -\vec{N}$ ) (ver observación 2.1.4).

De esta manera vemos que la imagen de  $S^1(T_pM)$  bajo  $\delta$  es una elipse en  $N_pM$  que denotamos por  $\mathcal{E}(\delta)$ , cuyo centro está en el punto final de  $\frac{1}{2}\vec{N}$  o  $-\frac{1}{2}\vec{N}$ , según la orientación de  $\mathcal{E}$  respecto de  $\vec{N}$  y el plano que la contiene es perpendicular a  $\vec{H}$ .

### 3.2.1. Los invariantes numéricos de $\delta$ y su elipse asociada.

En esta sección aplicamos a  $\delta$  el análisis hecho en los capítulos y secciones anteriores: calculamos sus invariantes numéricos y en base a estos determinamos la forma y posición de su elipse asociada  $\mathcal{E}(\delta)$ . Mostramos la relación que guarda la posición de  $\mathcal{E}(\delta)$  y la correspondiente a la elipse de curvatura  $\mathcal{E}$ .

Los invariantes numéricos asociados a la forma cuadrática  $\delta$  están dados en términos de los invariantes numéricos asociados a la segunda forma fundamental.

**Proposición 3.2.2.** Denotemos por  $L_\delta$  la forma lineal, por  $Q_\delta$  la forma cuadrática y por  $A_\delta$  la forma bilineal antisimétrica asociadas a  $\delta$  que resultan invariantes bajo la acción de  $SO(2)$  en  $T_pM$ .

- 1.- El invariante asociado a  $L_\delta$  está dado por  $\frac{1}{2}|\vec{N}|$ ,
- 2.- Los invariantes asociados a  $U_{Q_\delta}$ , donde  $U_{Q_\delta}$  es el operador simétrico que satisface  $Q_\delta(u) = \langle U_{Q_\delta}(u), u \rangle$ , están dados por

$$\sigma_1(U_{Q_\delta}) = \Delta, \quad \sigma_2(U_{Q_\delta}) = \Gamma^2 K, \quad \text{y} \quad \sigma_3(U_{Q_\delta}) = \Gamma^4$$

- 3.- El invariante asociado a  $A_\delta$  está dado por  $\Gamma|\vec{H}|$ ,

donde  $|\vec{H}|$ ,  $K$ ,  $\Delta$ ,  $\Gamma$  y  $|\vec{N}|$  son los invariantes numéricos asociados a  $II_p$ .

*Demostración.* Sea  $\nu \in N_pM$  y denotemos por  $S_\nu^\delta$  al operador simétrico que satisface

$$\delta(u) = \langle S_\nu^\delta(u), u \rangle.$$

Por un lado,

$$S_\nu^\delta = (\langle S_\nu^\delta(u), u^\perp \rangle)_{i,j=1,2}$$

para cualquier base ortonormal  $\{u, u^\perp\}$  de  $T_pM$  orientada de manera positiva, de donde obtenemos

$$\begin{aligned} L_\delta(\nu) &= \frac{1}{2} \text{tr} S_\nu^\delta = \frac{1}{2} (\langle S_\nu^\delta(u), u \rangle + \langle S_\nu^\delta(u^\perp), u^\perp \rangle) \\ &= \langle \frac{1}{2} (\delta(u) + \delta(u^\perp)), \nu \rangle = \langle \pm \frac{1}{2} \vec{N}, \nu \rangle. \end{aligned}$$

donde el signo depende de la orientación de  $\mathcal{E}$  respecto de  $\vec{N}$ .

Ahora, sea  $\{N_1, N_2, N_3\}$  una base como en la observación 1.2.5. En esta base  $II(u) = \vec{H} + aN_1$ ,  $II(u^\perp) = \vec{H} - aN_1$  y  $II(u, u^\perp) = bN_2$ . Notemos que

$$Q_\delta(\nu) = \langle \delta(u), \nu \rangle \langle \delta(u^\perp), \nu \rangle - \langle \delta(u, u^\perp), \nu \rangle^2$$

y que si  $\nu = \nu_1 N_1 + \nu_2 N_2 + \nu_3 N_3$  entonces

$$\begin{aligned} \langle \delta(u), \nu \rangle &= -\nu_1 b \gamma + \nu_3 b \alpha + \nu_3 a b, \\ \langle \delta(u^\perp), \nu \rangle &= \nu_1 b \gamma - \nu_3 b \alpha + \nu_3 a b, \\ \langle \delta(u, u^\perp), \nu \rangle &= -\nu_2 a \gamma + \nu_3 a \beta, \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

y por lo tanto

$$U_{Q_\delta} = \begin{pmatrix} -b^2 \gamma^2 & 0 & b^2 \gamma \alpha \\ 0 & -a^2 \gamma^2 & a^2 \beta \gamma \\ b^2 \gamma \alpha & a^2 \beta \gamma & b^2 a^2 - b^2 \alpha^2 - a^2 \beta^2 \end{pmatrix}$$

en la base  $\{N_1, N_2, N_3\}$ . Luego, de (1.3.8) y (1.2.8)

$$\begin{aligned} \sigma_1(U_{Q_\delta}) &= b^2 a^2 - b^2 \alpha^2 - a^2 \beta^2 - (a^2 + b^2) \gamma^2 = \Delta \\ \sigma_2(U_{Q_\delta}) &= a^2 b^2 \gamma^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - (a^2 + b^2)) \\ &= \Gamma^2 (|\vec{H}|^2 - (|\vec{H}|^2 - K)) = \Gamma^2 K \\ \sigma_3(U_{Q_\delta}) &= (\gamma^2 a^2 b^2)^2 = \Gamma^4. \end{aligned}$$

Ahora, el invariante asociado a  $A_\delta$  está dado por

$$\|A_\delta\| = \sqrt{A_\delta(N_2, N_3)^2 + A_\delta(N_3, N_1)^2 + A_\delta(N_1, N_2)^2}$$

donde

$$A_\delta(N_i, N_j) = S_{N_i}^\delta \circ S_{N_j}^\delta - S_{N_j}^\delta \circ S_{N_i}^\delta.$$

Por otro lado

$$S_{N_i}^\delta = \begin{pmatrix} \langle \delta(e_1), N_i \rangle & \langle \delta(e_1, e_2), N_i \rangle \\ \langle \delta(e_1, e_2), N_i \rangle & \langle \delta(e_1), N_i \rangle \end{pmatrix}$$

y por lo tanto, de (3.2.6)-(3.2.6)

$$S_{N_1} = \begin{pmatrix} -b\gamma & 0 \\ 0 & b\gamma \end{pmatrix}, \quad S_{N_2} = \begin{pmatrix} 0 & -a\gamma \\ -a\gamma & 0 \end{pmatrix}, \quad y \quad S_{N_3} = \begin{pmatrix} b\alpha + ab & a\beta \\ a\beta & -b\alpha + ab \end{pmatrix}.$$

Luego

$$\begin{aligned} A_\delta(N_2, N_3) &= ab\alpha\gamma \\ A_\delta(N_3, N_1) &= ab\beta\gamma \\ A_\delta(N_1, N_2) &= ab\gamma^2, \end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$\|A_\delta\| = ab\gamma\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} = |\Gamma|\|\vec{H}\|.$$

□

**Observación 3.2.3.** Notemos que si  $\mathcal{E}_p$  está contenida en un plano que pasa por  $p$ , es decir,  $\Gamma = 0$ , entonces  $\mathcal{E}(\delta)$  degenera en un segmento de recta perpendicular al plano que contiene a  $\mathcal{E}_p$  (o en un punto) puesto que en este caso el invariante asociado a  $A_\delta$  se anula y  $\sigma_2(U_{Q_\delta}) = \sigma_3(U_{Q_\delta}) = 0$  (Ver proposición 2.2.5). En este caso, de la observación 2.2.6, tenemos que el invariante  $\Delta$  determina la posición de  $\mathcal{E}(\delta)$  respecto de  $p$  (ver Figura 3.1),

- i) si  $\Delta > 0$  entonces  $\mathcal{E}(\delta)$  no contiene a  $p$ ,
- ii) si  $\Delta < 0$  entonces  $\mathcal{E}(\delta)$  contiene a  $p$  sin ser un extremo,
- iii) si  $\Delta = 0$  entonces  $p$  es un extremo de  $\mathcal{E}(\delta)$ .

Notemos que la condición  $\delta(u) = 0$  es equivalente a la condición de colinealidad de  $II(u)$  y  $II(u, u^\perp)$ . Entonces la posición de  $\mathcal{E}(\delta)$  respecto de  $p$  determina la posición de  $\mathcal{E}$  respecto de  $p$ , a saber, si  $\Delta > 0$  entonces

$$\delta(u) = II(u) \times II(u, u^\perp) \neq 0$$

para todo  $u \in T_p M$  lo que garantiza que  $p$  se encuentra dentro de  $\mathcal{E}$ . Si  $\Delta < 0$  entonces deben existir dos direcciones para las cuales  $II(u)$  y  $II(u, u^\perp)$  son colineales, es decir,  $p$  está fuera de  $\mathcal{E}$ . Finalmente, si  $\Delta = 0$  entonces debe existir una sola dirección para la cual  $\delta(u) = 0$ , lo que implica que  $p$  pertenece a  $\mathcal{E}$ .

**Proposición 3.2.4.** Los invariantes asociados a la forma cuadrática  $\Phi_\delta$  son

$$\begin{aligned} \sigma_1(U_{\phi_\delta}) &= \frac{|\vec{N}|^2 - 4\Delta}{4} \\ \sigma_2(U_{\phi_\delta}) &= \Gamma^2 \vec{H}^2 \\ \sigma_3(U_{\phi_\delta}) &= 0. \end{aligned}$$

$$\Gamma = 0, \quad \vec{N} \neq 0.$$

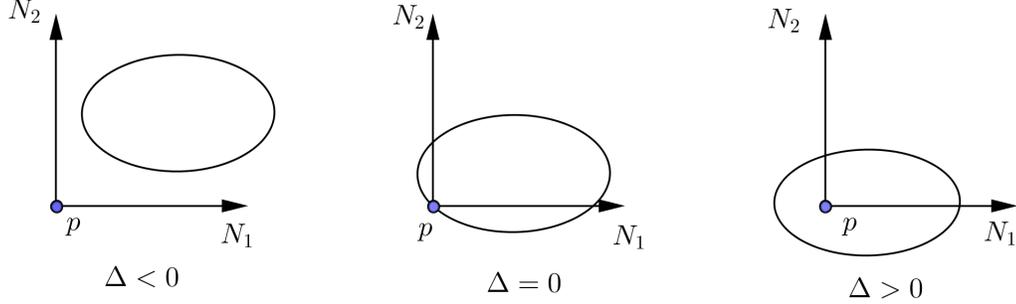


Figura 3.1: Cuando  $\Gamma = 0$  y  $\vec{N} \neq 0$ , el invariante  $\Delta$  determina la posición de  $\mathcal{E}$  respecto de  $p$  en  $Aff_{\mathcal{E}}$ .

De la proposición anterior tenemos que el cuadrado de las longitudes de los semiejes de  $\mathcal{E}(\delta)$  están dados por

$$a^2(\delta), b^2(\delta) = \frac{1}{8} \left( |\vec{N}|^2 - 4\Delta \pm \sqrt{(|\vec{N}|^2 - 4\Delta)^2 - 64\Gamma^2|\vec{H}|^2} \right).$$

### 3.2.2. La reducción sustancial de codimensión en términos de $\delta$ .

**Definición 3.2.5.** Dada una inmersión  $\mathbf{x} : M \rightarrow \mathbb{R}^5$  definimos el primer espacio normal de  $\mathbf{x}$  en  $p \in M$  como el subespacio  $\mathcal{N}_1(p) \subset N_p M$  generado por la segunda forma fundamental  $II$  en  $p$ , es decir

$$\mathcal{N}_1(p) = \text{gen}\{II(x, y) : x, y \in T_p M\}. \quad (3.2.7)$$

Decimos que la inmersión  $\mathbf{x}$  es 1-regular si la dimensión de  $\mathcal{N}_1(p)$  es constante sobre  $M$ .

**Definición 3.2.6.** Una inmersión  $\mathbf{x} : M \rightarrow \mathbb{R}^5$  admite una reducción de codimensión a  $r$  si existe un subespacio vectorial afín de  $\mathbb{R}^5$  de dimensión  $2+r$ ,  $E^{2+r}$ ,  $0 < r < 3$ , tal que  $\mathbf{x}(M) \subset E^{2+r}$ . La inmersión  $\mathbf{x}$  es sustancial si la codimensión de  $\mathbf{x}$  no puede ser reducida. La codimensión más pequeña a la que  $\mathbf{x}$  puede ser reducida se llama codimensión sustancial de  $\mathbf{x}$ .

En [9] se muestra que si  $\mathbf{x} : M \rightarrow \mathbb{R}^4$  es un inmersión isométrica de una superficie conexa en el espacio euclidiano de dimensión 4, para la cual  $\delta \equiv 0$  y  $dG_p$  es no singular para cada  $p \in M$ , entonces  $\mathbf{x}$  tiene codimensión sustancial 1. La siguiente proposición establece que este hecho también es cierto para el caso de una inmersión isométrica  $x : M \rightarrow \mathbb{R}^5$ ; en la prueba usaremos el siguiente resultado, debido a *Erbacher*, [6]:

**Teorema 3.2.7.** Sea  $\mathbf{x} : M \rightarrow \mathbb{R}^5$  una inmersión 1-regular. Si  $\mathcal{N}_1$  es un subhaz  $\nabla^\perp$ -paralelo de rango  $0 < r < 3$  entonces  $\mathbf{x}$  tiene codimensión sustancial  $r$ .

**Teorema 3.2.8.** Consideremos una inmersión  $\mathbf{x} : M \rightarrow \mathbb{R}^5$ . Si  $dG_p$  es no singular para todo  $p \in M$  y  $\delta \equiv 0$  sobre  $M$ , entonces  $\mathbf{x}$  tiene codimensión sustancial 1.

*Demostración.* Supongamos que  $\delta \equiv 0$ . De la proposición 3.2.2 tenemos que para cada  $p \in M$ ,  $\Gamma = 0$ ,  $\vec{N} = 0$  y  $\Delta = 0$ , luego, por la proposición 2.2.5 y la observación 2.2.4 podemos garantizar la existencia

de bases ortonormales  $\{e_1(p), e_2(p)\}$  y  $\{N_1(p), N_2(p), N_3(p)\}$  de  $T_pM$  y  $N_pM$ , respectivamente, tales que

$$II(w) = ((\alpha + a)w_1^2 + (\alpha - a)w_2^2)N_1(p) \quad (3.2.8)$$

donde  $w = w_1e_1(p) + w_2e_2(p)$ . Consideremos un marco móvil  $\{e_1, e_2, N_1, N_2, N_3\}$  definido en una vecindad de  $V \subset M$  para el cual la ecuación anterior es válida para cada  $q \in V$ . Por el teorema anterior, basta mostrar que  $\mathbf{x}$  es una inmersión 1-regular y que  $N_1$  es  $\nabla^\perp$ -paralelo para obtener el resultado. Veamos primero que el hecho de que  $dG_q$  sea no singular para cada  $q \in M$  garantiza que  $\mathbf{x}$  sea una inmersión 1-regular. Por un lado  $\{dG_q(e_1), dG_q(e_2)\}$  es un conjunto linealmente independiente, por otro lado, de (3.1.1)

$$dG_q(e_1) = -e_2 \wedge II(e_1, e_1) = -(\alpha + a)e_2 \wedge N_1 \quad \text{y} \quad dG_q(e_2) = e_1 \wedge II(e_2, e_2) = (\alpha - a)e_1 \wedge N_1,$$

puesto que  $II(e_1, e_2) = 0$ ; entonces  $dG_q$  es no singular si y sólo si  $(\alpha + a) \neq 0$  y  $(\alpha - a) \neq 0$ , lo que muestra que  $\mathbf{x}$  es 1-regular, de hecho  $\dim \mathcal{N}_1(q) = 1$ .

Ahora mostremos que  $N_1$  es  $\nabla^\perp$ -paralelo. Para esto notemos que si  $X \in \tau(M)$ ,

$$\nabla_X^\perp N_1 = \langle \nabla_X^\perp N_1, N_2 \rangle N_2 + \langle \nabla_X^\perp N_1, N_3 \rangle N_3. \quad (3.2.9)$$

Por otro lado, si  $i = 2, 3$ ,  $\langle II(X, Y), N_i \rangle = 0$  para todo  $X, Y \in \tau(M)$  y como  $II(e_1, e_2) = 0$  tenemos

$$(\overline{\nabla}_{e_1} II)(e_2, e_1, N_i) = -\langle II(e_1, e_2), \nabla_{e_1}^\perp N_i \rangle = 0,$$

luego, de la ecuación de Codazzi (3.0.1)

$$\begin{aligned} 0 = (\overline{\nabla}_{e_1} II)(e_2, e_1, N_i) &= (\overline{\nabla}_{e_2} II)(e_1, e_1, N_i) \\ &= -\langle II(e_1, e_1), \nabla_{e_2}^\perp N_i \rangle \\ &= -(\alpha + a) \langle N_1, \nabla_{e_2}^\perp N_i \rangle, \end{aligned}$$

lo que implica que  $\langle N_1, \nabla_{e_2}^\perp N_i \rangle = 0$  pues  $(\alpha + a) \neq 0$ . De manera análoga

$$\begin{aligned} 0 = (\overline{\nabla}_{e_2} II)(e_1, e_2, N_i) &= (\overline{\nabla}_{e_1} II)(e_2, e_2, N_i) \\ &= -\langle II(e_2, e_2), \nabla_{e_1}^\perp N_i \rangle \\ &= -(\alpha - a) \langle N_1, \nabla_{e_1}^\perp N_i \rangle, \end{aligned}$$

de donde se tiene que  $\langle N_1, \nabla_{e_1}^\perp N_i \rangle = 0$  puesto que  $\alpha - a \neq 0$ . Finalmente  $\langle N_1, \nabla_X^\perp N_i \rangle = 0$  para  $i = 2, 3$  y para todo  $X \in \tau(M)$ , lo que muestra que  $N_1$  es  $\nabla^\perp$ -paralelo, que es lo que queríamos.  $\square$

## Capítulo 4

# Los contactos de orden mayor de una superficie en términos de $\delta$

En [12] se introduce el concepto de dirección asintótica sobre una superficie  $M$  inmersa en  $\mathbb{R}^5$ , en términos de su contacto con hiperplanos del espacio ambiente, y en [18] se presenta un análisis local de las foliaciones definidas por tales direcciones. La herramienta principal para esta descripción es una forma cuántica introducida en [8] cuyos coeficientes dependen de la segunda forma fundamental. En la primera sección de este capítulo estudiamos la relación que guarda la forma cuadrática  $\delta$  con el contacto mencionado anteriormente y damos una ecuación intrínseca equivalente a la forma cuántica de direcciones asintóticas.

En la segunda sección identificamos direcciones especiales sobre la superficie, en las cuales es posible obtener una reducción isométrica de la codimensión (ver [19]) y damos un ejemplo que muestra la existencia de dichas direcciones.

### 4.1. El cono de direcciones degeneradas y la ecuación de direcciones asintóticas.

Comenzamos recordando los conceptos de función altura y dirección degenerada, y establecemos una relación de estas direcciones con la elipse asociada a la aplicación cuadrática  $\delta(u)$ .

**Definición 4.1.1.** Sea  $\mathbf{x} : M \rightarrow \mathbb{R}^5$  una inmersión. Para cada  $\nu \in S^4 \subset \mathbb{R}^5$  definimos la función altura en  $p \in M$  respecto de la dirección  $\nu$  como

$$\begin{aligned} h_\nu : M &\rightarrow \mathbb{R} \\ q &\mapsto \langle q, \nu \rangle, \end{aligned}$$

donde  $M$  es identificada con su imagen  $\mathbf{x}(M)$  y  $\langle, \rangle$  denota el producto punto usual de  $\mathbb{R}^5$ .

Para toda  $\nu \in N_p M$ , el punto  $p \in M$  es un punto singular de  $h_\nu$ . En efecto, si  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  es tal que  $\alpha(0) = p$  y  $\alpha'(0) = w \in T_p M$ , entonces

$$dh_{\nu_p}(w) = (h_\nu \circ \alpha)'(0) = \langle \alpha'(0), \nu \rangle = 0.$$

**Definición 4.1.2.** Sea  $w \in T_p M$ ,  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  tal que  $\alpha(0) = p$  y  $\alpha'(0) = w$ , y  $\nu \in N_p M$ . Definimos la Hessiana de la función altura  $h_\nu$  en  $p$  como

$$Hess_p h_\nu(w) = \frac{d^2(h_\nu \circ \alpha)}{dt^2} \Big|_{t=0}.$$

Notemos que

$$\frac{d^2(h_\nu \circ \alpha)}{dt^2} \Big|_{t=0} = \langle \alpha''(0), \nu \rangle = \langle II_p(w, w), \nu \rangle$$

y por lo tanto el operador simétrico asociado a la Hessiana de la función altura  $h_\nu$  en  $p$  coincide con el operador simétrico asociado a la segunda forma fundamental en  $p$ ,  $S_\nu$ .

**Definición 4.1.3.** Decimos que  $p$  es un punto singular no degenerado de la función altura  $h_\nu$  o de igual forma, que  $h_\nu$  tiene una singularidad de tipo Morse en  $p$ , si  $\det(S_\nu) \neq 0$  o de manera equivalente, si  $Q_{II}(\nu) \neq 0$ . En caso contrario decimos que  $p$  es un punto singular degenerado de  $h_\nu$  y que  $\nu$  es una dirección degenerada de  $M$  en  $p$ .

En [12] se muestra que cuando  $\mathcal{E}_p$  es no degenerada, y el plano que la contiene no pasa por el origen de  $N_pM$ , es decir, en términos de nuestros invariantes  $\Gamma(p) \neq 0$ , todas las direcciones degeneradas en  $p$  forman un cono llamado el *cono de direcciones degeneradas* asociado a  $M$  en  $p$ . Notemos que este cono es precisamente el conjunto

$$\mathcal{C} := \{\nu \in N_pM : Q_{II}(\nu) = 0\}.$$

Si  $\nu \in N_pM$  es una dirección degenerada entonces existe  $u \in \text{Ker } S_\nu$ ,  $u \neq 0$ . Esta dirección es llamada una *dirección de contacto* asociada a  $\nu$ .

La aplicación cuadrática  $\delta$  guarda una estrecha relación con el cono de direcciones degeneradas.

**Proposición 4.1.4.** Sea  $p \in M$  tal que  $\Gamma(p) \neq 0$ . El cono de direcciones degeneradas asociado a  $M$  en  $p$  coincide con el cono generado por la elipse  $\mathcal{E}(\delta)$ . De hecho,  $u \in \text{Ker } S_{\delta(u)}$  y  $S_{\delta(u)}(u^\perp) = \pm 2\Gamma u^\perp$ , donde el signo en la última expresión depende de la orientación de  $\mathcal{E}$  respecto de  $\vec{N}$ .

*Demostración.* Sea  $u \in S^1(T_pM)$  y  $\{u, u^\perp\}$  una base ortonormal orientada de manera positiva de  $T_pM$ . En esta base y puesto que  $\delta(u) = II(u, u) \times II(u, u^\perp)$

$$\begin{aligned} S_{\delta(u)}(u) &= \langle S_{\delta(u)}, u \rangle u + \langle S_{\delta(u)}, u^\perp \rangle u^\perp \\ &= \langle II(u), \delta(u) \rangle u + \langle II(u, u^\perp), \delta(u) \rangle u^\perp = 0. \end{aligned}$$

Entonces  $u \in \text{Ker } S_{\delta(u)}$  y por lo tanto  $Q_{II}(\delta(u)) = 0$ . Ahora, usando el hecho de que  $\delta(u) = \vec{H} \times II(u, u^\perp) \pm \vec{N}$  (ver (3.2.4) y (3.2.5)) tenemos

$$\begin{aligned} S_{\delta(u)}(u^\perp) &= \langle S_{\delta(u)}(u^\perp), u^\perp \rangle u^\perp \\ &= \langle II(u^\perp), \delta(u) \rangle u^\perp \\ &= \langle \vec{H} - II^0(u), \frac{1}{2}\vec{N} + \delta^0(u) \rangle u^\perp \\ &= \frac{1}{2} \langle \vec{H}, \vec{N} \rangle u^\perp - \langle II^0(u), \delta^0(u) \rangle u^\perp \\ &= \pm \Gamma u^\perp + \langle II^0(u) \times II(u, u^\perp), \vec{H} \rangle u^\perp \\ &= \pm \Gamma u^\perp + \langle \pm \frac{1}{2}\vec{N}, \vec{H} \rangle u^\perp \\ &= \pm 2\Gamma u^\perp, \end{aligned}$$

lo que concluye la prueba.  $\square$

**Definición 4.1.5.** Sean  $C \subset \mathbb{R}^n$  una curva diferenciable y  $\mathcal{H}$  una hipersuperficie de  $\mathbb{R}^n$  tales que  $p \in C \cap \mathcal{H}$ . Sean  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow C \subset \mathbb{R}^n$  una parametrización regular de  $C$  en  $p$  y  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una submersión tal que  $g^{-1}(0) = \mathcal{H}$ .

Decimos que  $C$  tiene orden de contacto  $k \in \mathbb{N}$  con  $\mathcal{H}$  en  $p$  si  $g \circ \alpha^m(0) = 0$  y  $g \circ \alpha^k(0) \neq 0$  para  $m = 1, 2, \dots, k-1$ .

**Observación 4.1.6.** La función  $g \circ \alpha$  de la proposición anterior se conoce como aplicación de contacto para  $C$  y  $\mathcal{H}$ . El orden de contacto no depende de la elección de  $\alpha$  y  $g$  (ver [13]).

**Definición 4.1.7.** Sea  $M$  una superficie inmersa en  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathcal{H}$  una hipersuperficie de  $\mathbb{R}^n$  tales que  $p \in M \cap \mathcal{H}$ . Decimos que  $M$  tiene orden de contacto  $k \in \mathbb{N}$  en  $p$  y en la dirección  $u \in T_p M$  con  $\mathcal{H}$ , si existe una curva  $C \subset M$  con  $p \in C$  y  $u \in T_p C$  tal que  $C$  tiene orden de contacto  $k$  con  $\mathcal{H}$  en  $p$ .

Consideremos  $p \in M$  y  $\nu \in N_p M$ . La función  $\tilde{h}_\nu : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\tilde{h}_\nu(q) = \langle q, \nu \rangle$  es una submersión puesto que  $d\tilde{h}_\nu(\nu) = \langle \nu, \nu \rangle \neq 0$ ; además  $\tilde{h}_\nu^{-1}(0)$  coincide con el 4-plano  $\nu^\perp$ . Entonces, si  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  es una curva tal que  $\alpha(0) = p$  y  $\alpha'(0) = u$ , el contacto de  $M$  en  $p$  y en la dirección  $u$  con  $\mathcal{H}$  estará medido por el valor de las derivadas de la composición  $\tilde{h}_\nu \circ \alpha$  en  $t = 0$ . Estas derivadas hasta orden 3 están dadas por

$$(\tilde{h}_\nu \circ \alpha)'(0) = \langle u, \nu \rangle = 0 \quad (4.1.1)$$

$$(\tilde{h}_\nu \circ \alpha)''(0) = \langle II(u, u), \nu \rangle \quad (4.1.2)$$

$$(\tilde{h}_\nu \circ \alpha)'''(0) = \langle II(u, \nabla_{\alpha'} \alpha'|_{t=0}) + \nabla_{\alpha'}^\perp II(\alpha', \alpha')|_{t=0}, \nu \rangle. \quad (4.1.3)$$

Si  $\nu = \frac{\delta(u)}{|\delta(u)|}$ , la expresión (4.1.2) y el hecho de que  $\delta(u) = II(u, u) \times II(u, u^\perp)$  muestran que la superficie  $M$  tiene orden de contacto  $\geq 2$  en  $p$  y en la dirección  $u$  con el 4-plano  $\delta(u)^\perp$ . De hecho, si  $\nu \in N_p M$  es una dirección degenerada, la proposición 4.1.4 garantiza que existe  $u \in T_p M$  tal que  $\nu = \lambda \delta(u)$ . Luego, en esta dirección, la superficie tiene contacto de orden mayor o igual a 2 con  $\nu^\perp$ .

Dentro de todas las direcciones degeneradas, las *direcciones binormales*,  $\nu \in N_p M$ , son aquellas donde el hiperplano  $\nu^\perp$  que pasa a través de  $p$  tiene un contacto de orden mayor o igual a 3 con la superficie en  $p$ . La correspondiente dirección de contacto asociada a una dirección binormal es llamada *dirección asintótica* de  $M$  en  $p$ .

**Proposición 4.1.8.** Sean  $M$  una superficie inmersa en  $\mathbb{R}^5$ ,  $p \in M$  y  $u \in T_p M$  tal que  $\delta(u) \neq 0$ . Entonces  $M$  tiene orden de contacto  $\geq 3$ , en  $p$  y en la dirección  $u$ , con el 4-plano  $\delta(u)^\perp$  si y sólo si  $\langle \tilde{\nabla} II(u, u, u), \frac{\delta(u)}{|\delta(u)|} \rangle = 0$ .

*Demostración.* Consideremos una curva  $\alpha$  adaptada en  $u \in T_p M$ . Por un lado, de (4.1.3) y del hecho de que  $\delta(u)$  es ortogonal en  $N_p M$  al plano generado por  $\{II(u, u), II(u, u^\perp)\}$ , tenemos que

$$\begin{aligned} (\tilde{h}_\nu \circ \alpha)'''(0) &= \langle II(u, \nabla_{\alpha'} \alpha'|_{t=0}) + \nabla_{\alpha'}^\perp II(\alpha', \alpha')|_{t=0}, \frac{\delta(u)}{|\delta(u)|} \rangle \\ &= \langle \nabla_{\alpha'}^\perp II(\alpha', \alpha')|_{t=0}, \frac{\delta(u)}{|\delta(u)|} \rangle. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\nabla} II(u, u, u), \frac{\delta(u)}{|\delta(u)|} \rangle &= \langle \nabla_{\alpha'}^\perp II(\alpha', \alpha')|_{t=0} - 2II(u, \nabla_{\alpha'} \alpha'|_{t=0}), \frac{\delta(u)}{|\delta(u)|} \rangle \\ &= \langle \nabla_{\alpha'}^\perp II(\alpha', \alpha')|_{t=0}, \frac{\delta(u)}{|\delta(u)|} \rangle \\ &= (\tilde{h}_\nu \circ \alpha)'''(0), \end{aligned}$$

de donde obtenemos el resultado. □

**Corolario 4.1.9.** La ecuación de direcciones asintóticas introducida en [12] puede ser escrita de manera intrínseca como

$$\langle \tilde{\nabla} II(u, u, u), \delta(u) \rangle = 0. \quad (4.1.4)$$

## 4.2. La reducción isométrica de codimensión.

Sean  $\mathbf{x} : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^5$  una inmersión isométrica y  $\nu$  un campo normal definido sobre  $M$ . Denotemos por  $B_\nu$  al haz fibrado de rango 2 sobre  $M$ , cuya fibra en cada punto  $p$  es el plano  $\nu_p^\perp \subset N_p M$ , ortogonal a  $\nu$ . Decimos que  $M$  admite una reducción isométrica de la codimensión en  $\mathbb{R}^4$ , que preserva la proyección de la segunda forma fundamental sobre  $B_\nu$ , si existe una inmersión isométrica

$$\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^4$$

que se extiende a un isomorfismo de haces fibrados

$$\bar{\varphi} : B_\nu \rightarrow NM \subset \mathbb{R}^4$$

tal que para todo  $X, Y \in TM$  y  $\mu, \mu'$  secciones de  $B_\nu$ , las siguientes ecuaciones se cumplen

$$\langle \bar{\varphi}(\mu), \bar{\varphi}(\mu') \rangle = \langle \mu, \mu' \rangle, \quad \bar{\varphi}(II^\nu(X, Y)) = II(X, Y), \quad \bar{\varphi}(\nabla_X^B \mu) = \nabla_X^\perp \bar{\varphi}(\mu),$$

donde  $II^\nu$  y  $\nabla_X^B$  son las proyecciones ortogonales de la segunda forma fundamental y la conexión normal de  $M \subset \mathbb{R}^5$  sobre  $B_\nu$  respectivamente, y  $II$  y  $\nabla^\perp$  son la segunda forma fundamental y la conexión normal de  $\varphi(M) \subset \mathbb{R}^4$ , respectivamente. A una inmersión con estas propiedades le llamamos una *reducción isométrica de la codimensión de  $M$  en la dirección  $\nu$* . En [19], se establecen condiciones necesarias y suficientes para la existencia de tales inmersiones para un caso más general.

**Definición 4.2.1.** Sea  $\nu \in \tau(M)^\perp$ . Decimos que

- i)  $\nu$  es un campo de Codazzi, si  $\dim(\text{Ker } S_\nu) = 1$  y  $\nabla_X^\perp \nu = 0$  para toda  $X \in \text{Ker } S_\nu$ .
- ii)  $\nu$  es un campo de Ricci si  $S_\nu \equiv 0$  y se cumple la siguiente condición: si  $\{\nu_1, \nu_2, \nu_3\}$  es un marco normal a  $M$  tal que  $\nu = \nu_3$  entonces

$$\begin{vmatrix} \langle \nabla_X^\perp \nu_1, \nu_3 \rangle & \langle \nabla_Y^\perp \nu_1, \nu_3 \rangle \\ \langle \nabla_X^\perp \nu_2, \nu_3 \rangle & \langle \nabla_Y^\perp \nu_2, \nu_3 \rangle \end{vmatrix} = 0 \quad (4.2.1)$$

para todo  $X, Y \in TM$ .

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata del teorema 4.11 de [19]:

**Teorema 4.2.2.** Sea  $M$  una superficie inmersa en  $\mathbb{R}^5$  simplemente conexa y  $\nu \in \tau(M)^\perp$ .

- i) Si la dimensión de  $\text{Ker } S_\nu = 1$  para todo  $p \in M$ , entonces existe una inmersión isométrica

$$\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^4$$

que se extiende a un isomorfismo de haces fibrados

$$\bar{\varphi} : \nu^\perp \rightarrow TM^\perp$$

que preserva la proyección de la segunda forma fundamental sobre  $\nu^\perp$  si y sólo si  $\nu$  es un campo de Codazzi.

- ii) Si la dimensión de  $\text{Ker } S_\nu = 2$  para todo  $p \in M$ , entonces existe una inmersión isométrica

$$\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^4$$

que se extiende a un isomorfismo de haces fibrados

$$\bar{\varphi} : \nu^\perp \rightarrow TM^\perp$$

que preserva la proyección de la segunda forma fundamental sobre  $\nu^\perp$  si y sólo si  $\nu$  es un campo de Ricci.

Dada una superficie inmersa en  $\mathbb{R}^5$  y un punto  $p \in M$  tal que  $\Gamma(p) \neq 0$ , podemos construir un campo normal local  $\nu$ , de tal manera que  $\dim(\text{Ker } S_\nu) = 1$  como sigue: sea  $u$  un campo tangente unitario definido en una vecindad  $V \subset M$  de  $p$  para la cual  $\Gamma(q) \neq 0$  para todo  $q \in V$ . Entonces, el campo  $\nu = \frac{\delta(u)}{|\delta(u)|}$ , está bien definido pues  $|\delta_q(u(q))| \neq 0$  como consecuencia de que  $\Gamma(q) \neq 0$ . Además de la proposición 4.1.4 se tiene que

$$S_{\delta_p(u(p))}(u(p)) = 0 \quad y \quad S_{\delta_p(u(p))}(u(p)^\perp) = 2\Gamma(p)u(p)^\perp$$

y por lo tanto  $\dim(\text{Ker } S_{\nu(q)}) = 1$  para todo  $q \in V$ .

Ahora, dado que  $\text{Ker } S_\nu$  está generado por  $u(p)$ , basta mostrar que

$$\nabla_u^\perp \nu = 0$$

para que  $\nu$  cumpla con la definición de campo de Codazzi. La siguiente proposición caracteriza esta última condición en términos de dos ecuaciones que debe cumplir el campo  $u$ , una de ellas es la ecuación de direcciones asintóticas (4.1.4).

**Proposición 4.2.3.** *Sea  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  una curva parametrizada por longitud de arco tal que  $\alpha(0) = p$  y  $\alpha'(0) = u$ , supongamos además que  $\delta(u) \neq 0$ . Definamos sobre  $\alpha$  el campo*

$$\nu(t) = \frac{\delta(\alpha'(t))}{|\delta(\alpha'(t))|}.$$

Entonces  $\nu(t)$  es paralelo en  $t = 0$ , si y sólo si

$$\langle \tilde{\nabla} II(u, u, u), \delta(u) \rangle = \langle \tilde{\nabla} II(u, u^\perp, u), \delta(u) \rangle = 0.$$

*Demostración.* Para cada  $u \in T_p M$ ,  $|u| = 1$  tenemos que  $\delta(u) = II(u, u) \times II(u, u^\perp)$  y por lo tanto

$$\begin{aligned} (\tilde{\nabla} \delta)(u) &:= (\tilde{\nabla} \delta)(u, u, u) \\ &= \tilde{\nabla} II(u, u, u) \times II(u, u^\perp) + II(u, u) \times \tilde{\nabla} II(u, u^\perp, u). \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Por otro lado

$$\nabla_{\alpha'(t)}^\perp \nu(t)|_{t=0} = \frac{\tilde{\nabla} \delta(u)}{|\delta(u)|} - \frac{\langle \tilde{\nabla} \delta(u), \delta(u) \rangle}{|\delta(u)|^3} \delta(u).$$

Entonces, si  $\nabla_{\alpha'(t)}^\perp \nu(t)|_{t=0} = 0$ ,

$$\tilde{\nabla} \delta(u) = \frac{\langle \tilde{\nabla} \delta(u), \delta(u) \rangle}{|\delta(u)|^2} \delta(u)$$

lo que implica que

$$\langle \tilde{\nabla} \delta(u), II(u, u) \rangle = 0 \quad y \quad \langle \tilde{\nabla} \delta(u), II(u, u^\perp) \rangle = 0.$$

De estas últimas ecuaciones y de (4.2.2) se tiene que

$$\langle \tilde{\nabla} II(u, u, u) \times II(u, u^\perp), II(u, u) \rangle = 0$$

$$\langle II(u, u) \times \tilde{\nabla} II(u, u^\perp, u), II(u, u^\perp) \rangle = 0$$

de donde se sigue que

$$\langle \tilde{\nabla} II(u, u, u), \delta(u) \rangle = \langle \tilde{\nabla} II(u, u^\perp, u), \delta(u) \rangle = 0.$$

De manera recíproca, si

$$\langle \widetilde{\nabla} II(u, u, u), \delta(u) \rangle = \langle \widetilde{\nabla} II(u, u^\perp, u), \delta(u) \rangle = 0$$

entonces  $\widetilde{\nabla} \delta(u) = \lambda \delta(u)$  donde  $\lambda = \frac{\langle \widetilde{\nabla} \delta(u), \delta(u) \rangle}{|\delta(u)|^2}$ , con lo que se tendría  $\nabla_{\alpha'(t)}^\perp \nu(t)|_{t=0} = 0$ .<sup>1</sup>  $\square$

Sea  $u \in T_p M$  de tal manera que  $\delta(u) \neq 0$ . Notemos que  $\delta(u)^\perp = T_p M \oplus \mathcal{O}_u$  donde  $\mathcal{O}_u$  es un 2-plano contenido en  $N_p M$ . De hecho, como  $\delta(u) = II(u) \times II(u, u^\perp)$ ,  $\mathcal{O}_u$  coincide con el plano generado por  $\{II(u), II(u, u^\perp)\}$  y puesto que  $II(u, u^\perp)$  es tangente a la elipse de curvatura,  $\mathcal{E}$ , en  $II(u)$  (Ver observación 2.1.5), este plano es tangente al cono generado por  $\mathcal{E}$ . El plano  $\mathcal{O}_u$  es llamado el *plano osculador de la superficie  $M$  en  $p$ , en la dirección  $u$* .

**Observación 4.2.4.** *Notemos que si  $\vec{N} = 0$  y  $\Delta = 0$ ,  $\Gamma = 0$  y así todos los invariantes asociados a la forma cuadrática  $\delta$  se anulan (ver proposición 3.2.2) y por lo tanto  $\delta \equiv 0$ . Entonces, si  $\vec{N} = 0$  y  $\Delta = 0$ , el hiperplano osculador no está definido para ninguna dirección en  $T_p M$ . Es decir, si  $\mathcal{E}$  degenera en un segmento colineal a  $p \in M$ , o en un punto, entonces no es posible definir un plano osculador en ninguna dirección  $u \in T_p M$ .*

Para el caso donde  $\Gamma = 0$  pero  $\vec{N} \neq 0$ , el plano  $\mathcal{O}_u$  coincide con el plano  $Aff_{\mathcal{E}}$ , pues en este caso, de la observación 3.2.3, se tiene que  $\delta(u)$  es ortogonal a  $Aff_{\mathcal{E}}$  para todo  $u \in T_p M$ .

Si  $\vec{N} = 0$  y  $\Delta \neq 0$ , de las proposiciones 2.1.2 y 2.2.5, tenemos que  $\mathcal{E}$  degenera en un segmento que no está alineado con  $p$ . En este caso, al igual que en el anterior, se tiene que  $\delta(u)$  es ortogonal al plano que contiene a  $\mathcal{E}$  y que pasa por  $p$ , el cual también denotamos por  $Aff_{\mathcal{E}}$ , pues  $II(u)$  y  $II(u, u^\perp)$  están contenidos en este plano. Luego, el plano,  $\mathcal{O}_u$ , coincide con  $Aff_{\mathcal{E}}$  para toda  $u \in T_p M$ .

De la proposición 4.2.3 y del hecho de que  $\mathcal{O}_u$  es un plano en  $N_p M$  ortogonal a  $\delta(u)$ , tenemos el siguiente

**Teorema 4.2.5.** *Sean  $M$  una superficie inmersa en  $\mathbb{R}^5$  tal que  $\Gamma(p) \neq 0$  para todo  $p \in M$  y  $u \in \tau(M)$  unitario. Si*

$$\langle \overline{\nabla} II(u, u, u), \delta(u) \rangle = 0 \quad \text{y} \quad \langle \overline{\nabla} II(u, u^\perp, u), \delta(u) \rangle = 0,$$

entonces existe una inmersión isométrica  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^4$  que se extiende a un isomorfismo de haces fibrados

$$\overline{\varphi} : \mathcal{O} \rightarrow TM^\perp$$

que preserva la proyección de la segunda forma fundamental sobre  $\mathcal{O}_u$ .

El hecho de que  $\Gamma(p) \neq 0$  garantiza que la codimensión sustancial de la inmersión es igual a 3, es decir, la superficie no puede ser inmersa en un espacio euclidiano de dimensión menor a 5, preservando su segunda forma fundamental. Este resultado se sigue del hecho de que la elipse de curvatura de una superficie inmersa en un espacio afín de dimensión 4, en cada punto  $p \in M$ , debe estar contenida en un plano que contiene a  $p$ , lo cual ocurre si y sólo si  $\Gamma(p) = 0$ .

El siguiente es un ejemplo de una superficie inmersa en  $\mathbb{R}^5$  donde se tiene una reducción isométrica de la codimensión en todas las direcciones pertenecientes al cono de direcciones degeneradas, puesto que las expresiones de las últimas tres entradas son cuadráticas; sin embargo no existe una reducción sustancial pues se muestra que  $\Gamma \neq 0$ . Nos apoyamos en el programa *wxMaxima 15.08.2* para realizar los cálculos.

<sup>1</sup>observación: Dado que la condición \* es tensorial la hipótesis de que  $\alpha$  sea geodésica se puede sustituir por la condición de que  $\alpha$  sea regular adaptada. Es decir que esta propiedad sólo depende de la dirección  $\nu$  por la que nos referimos entonces a que el vector  $\delta(u)$  es paralelo a lo largo de  $uM$

**Ejemplo 4.2.6.** Consideremos la superficie  $M$  inmersa en  $\mathbb{R}^5$  parametrizada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, u^2 - v^2, 4uv, u^2 + v^2).$$

Un cálculo directo muestra que para  $(u, v) \neq (0, 0)$

$$\tilde{e}_1(u, v) := (1, 0, 2u, 4v, 2u) \quad (4.2.3)$$

$$\tilde{e}_2(u, v) := (-16uv, 16v^2 + 8u^2 + 1, 2v, 16v^2 + 24u^2 + 1, 4u(8u^2 + 1), 2v(16v^2 - 8u^2 + 1)) \quad (4.2.4)$$

$$\tilde{N}_1(u, v) := (0, 0, v^2 - u^2, -uv, v^2 + u^2) \quad (4.2.5)$$

$$\tilde{N}_2(u, v) := -\tilde{e}_1 \times \tilde{e}_2 \times \tilde{N}_1 \times \tilde{N}_3 \quad (4.2.6)$$

$$\tilde{N}_3(u, v) := (2v(2v^2 - u^2), 2u(v^2 - 2u^2), -uv, u^2 - v^2, 0) \quad (4.2.7)$$

forman un marco ortogonal adaptado en  $M$ , orientado de manera positiva.

Consideremos el marco ortonormal  $\{e_1(u, v), e_2(u, v), N_1(u, v), N_2(u, v), N_3(u, v)\}$  donde  $e_i(u, v) = \frac{\tilde{e}_i(u, v)}{|\tilde{e}_i(u, v)|}$ ,  $i = 1, 2$ , y  $N_i(u, v) = \frac{\tilde{N}_i(u, v)}{|\tilde{N}_i(u, v)|}$  para  $i \in \{1, 2, 3\}$  y definamos

$$e_1(0, 0) := (1, 0, 0, 0, 0) \quad (4.2.8)$$

$$e_2(0, 0) := (0, 1, 0, 0, 0) \quad (4.2.9)$$

$$N_1(0, 0) := \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad (4.2.10)$$

$$N_2(0, 0) := \left(0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad (4.2.11)$$

$$N_3(0, 0) := (0, 0, 0, -1, 0) \quad (4.2.12)$$

En este marco

$$II_{(u, v)}(x, y) := (II_{1(u, v)}(x, y), II_{2(u, v)}(x, y), II_{3(u, v)}(x, y)) \quad (4.2.13)$$

donde

$$\begin{aligned}
C_1 \cdot II_{1(u,v)}(x, y) &= \left(4v^2 \sqrt{128v^4 + (64u^2 + 24)v^2 + 128u^4 + 24u^2 + 1}\right) x^2 \\
&+ 8uv(32v^2 + 8u^2 + 1)xy \\
&+ (4u^2(32v^2 + 8u^2 + 1)^2) y^2
\end{aligned} \tag{4.2.14}$$

$$\begin{aligned}
C_2 \cdot II_{2(u,v)}(x, y) &= (2u^2(40v^4 - 16u^2v^2 + v^2 - 32u^4 - 2u^2)) x^2 \\
&+ \left(\frac{8uv(128v^6 - 768u^2v^4 - 8v^4 - 64u^2v^2 - v^2 + 320u^6 + 16u^4 - u^2)}{\sqrt{128v^4 + (64u^2 + 24)v^2 + 128u^4 + 24u^2 + 1}}\right) xy \\
&- \left(\frac{2v^2(8192v^8 + 20480u^2v^6 + 1536v^6 - 43008u^4v^4 + 768u^2v^4 + 96v^4)}{(128v^4 + (64u^2 + 24)v^2 + 128u^4 + 24u^2 + 1)}\right) y^2
\end{aligned} \tag{4.2.15}$$

$$\begin{aligned}
&+ \left(\frac{2v^2(-13312u^6v^2 - 4992u^4v^2 - 48u^2v^2 + 2v^2 + 9728u^8 - 192u^6 - 120u^4 - u^2)}{(128v^4 + (64u^2 + 24)v^2 + 128u^4 + 24u^2 + 1)}\right) y^2 \\
C_3 \cdot II_{3(u,v)}(x, y) &= \left(2uv\sqrt{128v^4 + (64u^2 + 24)v^2 + 128u^4 + 24u^2 + 1}\right) x^2 \\
&+ 8(16v^4 - 16u^2v^2 + v^2 - 8u^4u^2)xy \\
&- \left(\frac{2uv(1280v^4 - 512u^2v^2 + 96v^2 - 448u^4 - 48u^2 + 1)}{\sqrt{128v^4 + (64u^2 + 24)v^2 + 128u^4 + 24u^2 + 1}}\right) y^2
\end{aligned} \tag{4.2.16}$$

con

$$C_1 = (16v^2 + 8u^2 + 1) \sqrt{2v^4 + u^2v^2 + 2u^4} \sqrt{128v^4 + (64u^2 + 24)v^2 + 128u^4 + 24u^2 + 1} \tag{4.2.17}$$

$$\begin{aligned}
C_2 &= \left(- (16v^2 + 8u^2 + 1) \sqrt{2v^4 + u^2v^2 + 2u^4} \sqrt{128v^4 + (64u^2 + 24)v^2 + 128u^4 + 24u^2 + 1}\right) \cdot \\
&\quad \cdot \left(\sqrt{16v^6 + (1 - 12u^2)v^4 + (-12u^4 - u^2)v^2 + 16u^6 + u^4}\right)
\end{aligned} \tag{4.2.18}$$

$$\begin{aligned}
C_3 &= \left(- (16v^2 + 8u^2 + 1) \sqrt{128v^4 + (64u^2 + 24)v^2 + 128u^4 + 24u^2 + 1}\right) \cdot \\
&\quad \cdot \left(\sqrt{16v^6 + (1 - 12u^2)v^4 + (-12u^4 - u^2)v^2 + 16u^6 + u^4}\right),
\end{aligned} \tag{4.2.19}$$

y los invariantes clásicos asociados a la inmersión están dados por

$$K(u, v) = -\frac{16(8v^2 + 8u^2 + 1)}{(128v^4 + 64u^2v^2 + 24v^2 + 128u^4 + 24u^2 + 1)^2} \quad (4.2.20)$$

$$\begin{aligned} |\vec{H}(u, v)|^2 &= \frac{4(4096v^8 + 65536u^2v^6 + 3840v^6 + 270336u^4v^4 + 38400u^2v^4 + 672v^4 + 65536u^6v^2)}{(128v^4 + 64u^2v^2 + 24v^2 + 128u^4 + 24u^2 + 1)^3} \\ &+ \frac{4(38400u^4v^2 + 3456u^2v^2 + 44v^2 + 4096u^8 + 3840u^6 + 672u^4 + 44u^2 + 1)}{(128v^4 + 64u^2v^2 + 24v^2 + 128u^4 + 24u^2 + 1)^3} \end{aligned} \quad (4.2.21)$$

$$\Delta(u, v) = -\frac{16(16v^2 + 16u^2 + 1)}{(128v^4 + 64u^2v^2 + 24v^2 + 128u^4 + 24u^2 + 1)^3} \quad (4.2.22)$$

$$|\vec{N}(u, v)|^2 = \frac{64(256v^6 + 6144u^2v^4 + 224v^4 + 6144u^4v^2 + 832u^2v^2 + 28v^2 + 256u^6 + 224u^4 + 28u^2 + 1)}{(128v^4 + 64u^2v^2 + 24v^2 + 128u^4 + 24u^2 + 1)^4} \quad (4.2.23)$$

$$\Gamma(u, v) := \frac{1}{2} \langle \vec{H}, \vec{N} \rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{16}{(128v^4 + 64u^2v^2 + 24v^2 + 128u^4 + 24u^2 + 1)^2} \right) \quad (4.2.24)$$

Del hecho de que  $\Gamma > 0$  tenemos que la elipse de curvatura en cada punto de la superficie es no degenerada y además ésta no está contenida en un plano que contenga a  $p$ .

En la proposición 4.2.3 caracterizamos un campo de Codazzi en términos de dos ecuaciones que involucran a la derivada de la segunda forma fundamental y a la aplicación  $\delta$ . En la siguiente proposición mostramos que un campo de Ricci queda determinado por el vector de curvatura normal y la aplicación cuadrática  $\delta$ .

**Proposición 4.2.7.** Sean  $p \in M$  y  $\nu \in N_pM$ , y supongamos que  $\delta \neq 0$ . Entonces  $S_\nu \equiv 0$  si y sólo si  $\Gamma = 0$  y  $\nu = \lambda\delta(u)$  para algún  $\lambda \in \mathbb{R}$  y para algún  $u \in T_pM$ .

*Demostración.* Si  $\delta \neq 0$  entonces existe  $u \in T_pM$  tal que  $\delta(u) \neq 0$ . Por otro lado, si  $S_\nu \equiv 0$  entonces

$$\langle S_\nu(u), u \rangle = \langle II(u, u), \nu \rangle = 0 \quad \text{y} \quad \langle S_\nu(u), u^\perp \rangle = \langle II(u, u^\perp), \nu \rangle = 0,$$

luego  $\nu = \lambda II(u, u) \times II(u, u^\perp) = \lambda\delta(u)$ ; además de la proposición 4.1.4

$$0 = S_\nu(u^\perp) = \lambda S_{\delta(u)}(u^\perp) = \pm 2\lambda\Gamma u^\perp,$$

lo que implica que  $\Gamma = 0$ .

La necesidad se sigue del hecho de que  $S_{\delta(u)}(u^\perp) = \pm 2\Gamma u^\perp$ .  $\square$

Si  $\delta \neq 0$  sobre una superficie  $M$ , el hecho de que  $\nu \in \tau(M)^\perp$  sea un campo de Ricci sobre  $M$  implica que la elipse de curvatura este contenida en el plano osculador  $\mathcal{O}_u$  para cada  $p \in M$ , pues en este caso  $\Gamma = 0$ . Además, si  $\vec{N} \neq 0$ , el hecho de que  $\nu$  sea unitario implica que  $\nu = \pm \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$  pues en este caso el vector de curvatura normal, es perpendicular al plano  $\mathcal{O}_u$ , como se vió después de la observación 4.2.4. Por otra parte, la condición 4.2.1 es equivalente a que  $\left\{ \nabla_X^\perp \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}, \nabla_Y^\perp \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} \right\}$  sea linealmente dependiente para todo  $X, Y \in \tau(M)$  con lo que se tiene la siguiente

**Proposición 4.2.8.** Sea  $M$  una superficie conexa y  $\mathbf{x} : M \rightarrow \mathbb{R}^5$  inmersión para la cual  $\delta \neq 0$ . Supongamos también que  $\vec{N} \neq 0$  sobre  $M$ ; entonces  $\nu \in \tau(M)^\perp$  es un campo de Ricci si y sólo si  $\nu = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$  y  $\left\{ \nabla_X^\perp \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}, \nabla_Y^\perp \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} \right\}$ .

# Bibliografía

- [1] P. Bayard, F. Sánchez-Bringas, Geometric invariants of surfaces in  $\mathbb{R}^4$ , *Topology and its Applications* 159 (2012) 405-413.
- [2] P. Bayard, F. Sánchez-Bringas, Geometric invariants and principal configurations on spacelike surfaces immersed in  $\mathbb{R}^3$ , *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* 140 (6) (2010) 1141-1160.
- [3] M. P. do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, (1976).
- [4] M. P. do Carmo, *Riemannian Geometry*, Birkhäuser Boston, (1992).
- [5] S.I.R. Costa, S.M. Moraes, M.C Romero-Fuster, Geometric contacts of surfaces immersed in  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 5$ , *Diferential Geometry and its Applications* 27 (2009) 442-454.
- [6] J.A. Erbacher, Reduction of the codimension of an isometric immersion., *J. Differential Geometry*, 5, 333-340 (1971).
- [7] R. A. Garcia and J. Sotomayor, Lines of axial curvature on surfaces immersed in  $\mathbb{R}^4$ , *Differential Geom. Appl.* 12(2000), 253-269
- [8] E. Lane, *A treatise on projective differential geometry*, Chicago University Press, 1942.
- [9] J.A. Little, On the singularities of submanifolds of higher dimensional Euclidean Spaces, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) 83 (1969) 261-336.
- [10] H. Maillot, Courbures et basculements des sous-variétés riemanniennes, *Mem. Soc. Math. Fr. Sér.* 2 22 (1986) 1152.
- [11] D.K.H. Mochida, M.C. Romero-Fuster, M.A.S. Ruas, The Geometry of Surfaces in 4-Space from a Contact Viewpoint, *Geometriae Dedicata* 54 (1995) 323-332.
- [12] D.K.H. Mochida, M.C. Romero-Fuster, M.A.S. Ruas, Inflection points and non singular embeddings of surfaces in  $\mathbb{R}^5$ , *Rocky Mountain J. Math.* 33 (3) (2003) 995-1010.
- [13] J. A. Montaldi, *Contact with applications to submanifolds*, Thesis, Liverpool, (1983).
- [14] C.L.E. Moore and E.B. Wilson, *Differential geometry of two-dimensional surfaces in hyperspaces*, *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences*, 52 (1916), 267-368.
- [15] A. Montesinos-Amilibia, Invariants of the second fundamental form, *Matematiques* 5 (1) (2010) 119-140.
- [16] I. R. Porteous, *Geometric Differentiation*, Cambridge University Press, (1994).
- [17] M. Spivak, *A comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vol 5, Publish or Perish Inc., Berkeley, (1979).

- [18] M.C. Romero-Fuster, M.A.S. Ruas, F. Tari, Asymptotic curves on surfaces in  $\mathbb{R}^5$ , *Comm. Contemp. Math.* 10 (3) (2008) 1-27.
- [19] M. C. Romero-Fuster, F. Sánchez-Bringas, Isometric immersions with prefixed second order geometry in minimal codimension,
- [20] F. Tari. Self-adjoint operators on surfaces in  $\mathbb{R}^n$ , *Diff. Geom. Appl.* 27 (2009), 296-306.
- [21] R. S. Ward and R. O. Wells. *Twistor geometry and field theory*, Cambridge University Press, (1991)
- [22] J. L. Weiner, The Gauss Map for surfaces in 4-Space, *Math. Ann.* 269, 541-560, (1984).
- [23] Y.C. Wong, Contributions to the theory of surfaces in a 4.space of constant curvature, *Trans. Amer. Math. Soc.* 59 (3) (1946) 467-507.