



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Introducción a la Dimensión Asintótica.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

Matemático

PRESENTA:

Manuel Martínez Lizcano

DIRECTORA DE TESIS:

Dra. Natalia Jonard Pérez



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2018



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Manuel
Martínez
Lizcano
5569844386
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
312674027

2. Datos de la tutora

Doctora
Natalia
Jonard
Pérez

3. Datos del sinodal 1

Doctor
Vinicio Antonio
Gómez
Gutiérrez

4. Datos del sinodal 2

Doctor
Max
Neumann
Coto

5. Datos del sinodal 3

Doctor
Hugo
Juárez
Anguiano

6. Datos del sinodal 4

Doctor
César
Hernández
Cruz

7. Datos del trabajo escrito

Introducción a la Dimensión Asintótica
81 p
2018

Índice general

Introducción.	5
1. Espacios métricos geodésicos y geometría métrica.	9
1.1. Espacios métricos geodésicos.	9
1.2. Cuasi-isometrías.	10
1.2.1. Funciones gruesas.	14
2. Grupos discretos.	17
2.1. Función longitud y métricas de longitud de palabra.	17
2.2. Gráficas de Cayley	23
3. Espacios hiperbólicos.	29
3.1. Espacios δ hiperbólicos.	29
3.2. Producto de Gromov.	31
3.3. Espacios δ -hiperbólicos en el sentido de Gromov.	34
3.3.1. Invarianza de espacios hiperbólicos bajo cuasi-isometrías.	39
3.4. Grupos hiperbólicos.	44
4. Dimensión asintótica.	47
4.1. Definición y propiedades básicas.	47
4.1.1. Dimensión asintótica de grupos hiperbólicos.	51
4.2. Cotas superiores para la dimensión asintótica	55
4.2.1. La mejor cota para la dimensión asintótica del producto.	59
4.3. Número de terminaciones.	65
5. Otros invariantes bajo cuasi-isometrías.	67
5.1. Docilidad.	67
5.1.1. Crecimiento de un grupo	72
5.2. Propiedad A	74
Bibliografía	79

Introducción.

Este trabajo está dedicado a entender la noción de dimensión asintótica y algunos conceptos que están íntimamente relacionados, como son la docilidad de un grupo (amenabilidad), o la Propiedad A.

La dimensión asintótica es una herramienta desarrollada para discernir espacios métricos donde otras ramas de las matemáticas como el álgebra, la topología o análisis han fracasado. La línea de pensamiento es, precisamente, dejar a un lado las condiciones locales y pensar a lo grande. En lugar de prestar atención a lo infinitesimal, enfocarse en observar el panorama desde lo lejos y sacar mejores conclusiones viendo todo desde un diferente punto de vista. El nombre que recibe esta categoría es *geometría a larga escala*.

La dimensión asintótica en espacios métricos es una versión a larga escala de la dimensión cubriente en espacios topológicos. Conviene recordar cómo funcionaba esta última. Para empezar, en un espacio topológico se considera una familia de abiertos cuya unión cubre a todo el espacio, esta familia recibe el nombre de cubierta abierta. Los refinamientos de la cubierta son cubiertas abiertas cuyos elementos se quedan contenidos en los elementos de la cubierta original. En el caso de \mathbb{R}^n cualquier cubierta abierta admite un refinamiento tal que sus elementos cumplen que solo se pueden intersectar $n + 1$ elementos a la vez. Por ejemplo, en el caso de \mathbb{R}^2 cualquier cubierta se puede refinar de tal manera que si tomamos ternas de elementos se puede intersectar, pero si tomamos cuartetos ya no. Algo similar ocurre con \mathbb{R}^n ; toda cubierta abierta admite un refinamiento tal que si tomamos $n + 1$ elementos, su intersección puede ser no vacía, pero si tomamos $n + 2$ elementos su intersección tiene que ser, forzosamente, vacía. Habiendo encontrado este patrón, era muy sugerente que este número que había surgido está intrínsecamente relacionado con la dimensión algebraica de \mathbb{R}^n , y se generalizó a espacios topológicos como sigue. Es de interés saber cual es número más pequeño k con el cual se puede garantizar que si nos tomamos $k + 1$ elementos de la cubierta, su intersección será vacía; a este número de intersecciones se le llama multiplicidad de la cubierta. La multiplicidad de la cubierta tiene el inconveniente de que si nos tomamos otra cubierta del mismo espacio topológico la multiplicidad podría cambiar. La dimensión cubriente de un espacio

topológico se define como el número más pequeño n tal que cualquier cubierta abierta tiene un refinamiento con multiplicidad a lo más $n + 1$. No es trivial demostrar que la dimensión topológica de \mathbb{R}^n es exactamente n , sin embargo, en este trabajo lo daremos por hecho. El lector puede consultar [5] para más información.

Descubrir la teoría de la dimensión cubriente como invariante topológico demostró que \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m no son homeomorfos si n es distinto de m . En algunos casos ya se sabía que no ocurría, por ejemplo \mathbb{R} no puede ser homeomorfo a \mathbb{R}^n para cada $n > 1$, pues si le quitamos un punto a \mathbb{R} queda desconexo, y si le quitamos un punto a \mathbb{R}^n sigue siendo conexo. Pero para dimensiones mayores el problema era extensamente más complicado. Un hecho importante a tener en cuenta y que nos será de gran ayuda más adelante es que si tomamos una cubierta de \mathbb{R}^n , y consideramos la imagen de esa cubierta bajo una homotecia, entonces la multiplicidad de la nueva cubierta no cambia respecto a la primera. Esta línea de pensamiento lleva a preguntarse qué pasaría si, justamente, añadimos el diámetro de los elementos de la cubierta a nuestra definición en caso de los espacios métricos. Esto último quedará más claro cuando se dé la definición de dimensión asintótica.

Ahora bien, ¿qué necesita cumplir una teoría de la dimensión para recibir tal nombre? Podemos hallar la respuesta en las teorías de la dimensión que ya conocemos. La dimensión de \mathbb{R}^n siempre es n . La dimensión es un invariante bajo isomorfismos y homeomorfismos en álgebra lineal y topología, respectivamente. La dimensión del producto de dos espacios no supera a la suma de las dimensiones de los dos espacios, y además, si un espacio resulta ser un subespacio compacto del otro la dimensión del subespacio debe ser menor o igual. Podemos tomar estos resultados como objetivos y ver cuales de ellos se cumplen a larga escala y ver en qué se diferencian. Ver si podemos debilitar algunas hipótesis, o necesitamos fortalecer otras. Por ejemplo, sería interesante si podemos encontrar una cota para la dimensión de un subespacio sin la necesidad que éste sea compacto.

Los grandes protagonistas serán los espacios discretos, pues, vistos de cerca son todos iguales, pero de lejos no queda tan claro que de verdad sean iguales. Hasta hace no mucho los espacios discretos no eran muy relevantes, pero últimamente con el gran desarrollo de la teoría de gráficas y avances en computación ha surgido la necesidad de estudiarlos más a fondo. Un conjunto importante aquí serán los grupos discretos, que, bajo una construcción adecuada, se les puede dotar de una métrica y nos proporcionarán una gran gama de ejemplos.

El primero en formalizar este tema fue Mikhail Gromov en 1993. A él le siguieron personajes como Bell, Dranishnikov, Nowak y Yu. Al ser un tema tan reciente e interesante, tiene gran proyección a futuro, además de ese toque de

actualidad que es tan importante. Razones suficientes para motivar este trabajo.

La estructura de esta tesis es la siguiente. En el primer capítulo daremos las definiciones básicas de la geometría a larga escala y veremos algunas propiedades de los morfismos de esta nueva categoría. En el segundo capítulo se construirán una gran gama de espacios métricos geodésicos, que nacerán de los grupos discretos bajo una construcción que se dará en el mismo capítulo. En el tercer capítulo nos enfocaremos en los espacios hiperbólicos. Estos serán importantes en el capítulo posterior, pues los grupos hiperbólicos nos servirán de ejemplo de espacios métricos con dimensión asintótica finita. Precisamente, en el cuarto capítulo trataremos el tema que da nombre a este trabajo, probaremos que la dimensión asintótica es un invariante en la categoría de geometría a larga escala, veremos en que se parece y diferencia a las demás teorías de la dimensión, y daremos varias cotas para poder calcular más fácilmente la dimensión asintótica de ciertos espacios. Concluiremos el trabajo en el quinto capítulo, donde se introducirán las nociones de docilidad y la propiedad A, dos conceptos relacionados con la dimensión asintótica y que han cobrado gran importancia recientemente.

Capítulo 1

Espacios métricos geodésicos y geometría métrica.

1.1. Espacios métricos geodésicos.

Recordemos que un conjunto X es un espacio métrico si existe una función $d_X : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ que cumple las siguientes propiedades.

1. $d_X(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$.
2. $d_X(x, y) = d_X(y, x)$ para todo x y y en X .
3. $d_X(x, y) \leq d_X(x, z) + d_X(z, y)$ para todo x, y y z en X .

De igual forma es conveniente recordar la noción de isometría. Una isometría es una función que preserva distancias. Es decir, una función $f : X \rightarrow Y$ entre espacios métricos que cumple que:

$$d_X(u, v) = d_Y(f(u), f(v)).$$

Definición 1.1.1. *Sea X un espacio métrico. Una **geodésica** en X es un encaje isométrico $\gamma : [0, d_X(x, y)] \rightarrow X$ tal que $\gamma(0) = x$ y $\gamma(d_X(x, y)) = y$. Diremos que X es geodésico si entre cualesquiera x y y en X existe una geodésica.*

A la imagen de dicha geodésica la denotaremos por $[x, y]$. Esta notación podría tener el problema de que no necesariamente las geodésicas son únicas, por lo cual, si en algún momento hay lugar a confusión, usaremos la notación $[x, y]_\gamma$ para hacer explícito de qué geodésica estamos hablando.

Definición 1.1.2. Sea X un espacio métrico. Un **triángulo geodésico** en X es una configuración de tres vértices a, b y c , y tres aristas, en las cuales los vértices son puntos en el espacio X y las aristas son geodésicas que unen dichos puntos. A dicho triángulo geodésico lo denotaremos por Δabc .

Definición 1.1.3. Sea X un espacio métrico. Sean $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ curvas de la forma $\alpha_i : [0, n_i] \rightarrow X$ tales que $\alpha_i(n_i) = \alpha_{i+1}(0)$. Entonces definimos $\alpha_1 \star \alpha_2 \star \dots \star \alpha_n$ como la concatenación de dichas curvas. Es decir, la curva que resulta de recorrer dichas curvas en orden de aparición ajustando la parametrización para que cuando termine la i -ésima curva siga la $i + 1$ -ésima curva, ambas con sus respectivas velocidades originales. Esto es:

$$\alpha_1 \star \alpha_2 \star \dots \star \alpha_n : [0, \sum_{i=1}^n n_i] \rightarrow X$$

$$\alpha_1 \star \alpha_2 \star \dots \star \alpha_n(t) = \alpha_j(t - \sum_{i=1}^{j-1} n_i)$$

donde t pertenece a $[\sum_{i=1}^{j-1} n_i, \sum_{i=1}^j n_i]$.

Dado un espacio métrico (X, d_X) usaremos la siguiente notación:

- $B_X(x, R) = \{y \in X \mid d_X(x, y) < R\}$, la bola abierta con centro en x y radio R .
- $B_X[x, R] = \{y \in X \mid d_X(x, y) \leq R\}$, la bola cerrada con centro en x y radio R .
- \overline{A} para la cerradura topológica de A .
- $Nube_X(A, R) = \bigcup_{a \in A} B(a, R)$, la nube de radio R alrededor de A .
- $A \Delta B$ para la diferencia simétrica de A y B .

1.2. Cuasi-isometrías.

Siempre que se habla de un espacio métrico surge un concepto muy importante que nos permite conocer mucho sobre la geometría del espacio: las isometrías. Es natural preguntarse que pasaría si permitimos algo de flexibilidad en el concepto de isometría y si esto nos lleva a resultados interesantes. Así nace el concepto de cuasi-isometría.

Definición 1.2.1. Sea (X, d) un espacio métrico:

1. Decimos que X es **uniformemente discreto** si existe $c > 0$ tal que $d(x, y) \geq c$ para todo $x \neq y$ en X .

2. Un espacio uniformemente discreto X se dice que es **localmente finito** si para todo x en X y $r \geq 0$ se tiene que el cardinal de la bola de radio r centrada en x es finito; i.e., $B(x, r) < \infty$.
3. Decimos que un espacio métrico localmente finito X tiene **geometría acotada** si para todo r en \mathbb{R} existe un número $N(r)$ tal que $|B(x, r)| \leq N(r)$ para todo x en X .

Recordemos que dado un espacio métrico (X, d_X) y $C > 0$, un subconjunto N de X es una C -red en X si para todo x en X existe y en N tal que $d_X(x, y) \leq C$.

Definición 1.2.2. Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) dos espacios métricos, $f : X \rightarrow Y$ y $g : X \rightarrow Y$ dos funciones. Decimos que f y g son **C -cercanas** si existe $C > 0$ tal que $d_Y(f(x), g(x)) \leq C$ para todo x en X . Si no nos importa el valor explícito de la C , diremos únicamente que son cercanas.

Definición 1.2.3. Sean X y Y dos espacios métricos y $f : X \rightarrow Y$ una función. Se dice que f es **métricamente propia** si para todo subconjunto acotado B de Y se cumple que $f^{-1}(B)$ es acotado en X .

Definición 1.2.4. Sean X y Y dos espacios métricos y $f : X \rightarrow Y$ una función. Diremos que f es una función **Lipschitz a larga escala** o **cuasi-Lipschitz** si:

1. existen constantes $\lambda, C > 0$ tales que

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq \lambda d_X(x, y) + C$$

para todo x, y en X .

2. f es métricamente propia.

En este caso diremos que f es (λ, C) -Lipschitz a larga escala o (λ, C) -cuasi-Lipschitz.

Evidentemente cualquier función Lipschitz es cuasi-Lipschitz, pero el recíproco no es cierto. Por ejemplo, la función techo

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ T(x) &= \lceil x \rceil \end{aligned}$$

es cuasi-lipschitz con constantes $\lambda = 1$ y $C = 1$, y no es siquiera continua.

Proposición 1.2.5. Sean X, Y y Z espacios métricos con $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ dos funciones Lipschitz a larga escala. Entonces la función $g \circ f : X \rightarrow Z$ es Lipschitz a larga escala.

Demostración. Tenemos que existen constantes $\lambda_1, C_1, \lambda_2, C_2 > 0$ tales que

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq \lambda_1 d_X(x_1, x_2) + C_1$$

para todo x_1, x_2 en X , y

$$d_Z(g(y_1), g(y_2)) \leq \lambda_2 d_Y((y_1, y_2)) + C_2$$

para todo y_1, y_2 en Y . Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} d_Z(g(f(x_1)), g(f(x_2))) &\leq \lambda_2 d_Y(f(x_1), f(x_2)) + C_2 \\ &\leq \lambda_2(\lambda_1 d_X(x_1, x_2) + C_1) + C_2 \\ &= \lambda_2 \lambda_1 d_X(x_1, x_2) + (\lambda_2 C_1 + C_2). \end{aligned}$$

Así, si $\lambda = \lambda_2 \lambda_1$ y $C = \lambda_2 C_1 + C_2$ se cumple que

$$d_Z(g(f(x_1)), g(f(x_2))) \leq \lambda d_X(x_1, x_2) + C.$$

Aparte, si A es un conjunto acotado en Z entonces $g^{-1}(A)$ es un conjunto acotado en Y , pues g es métricamente propia. De aquí que $f^{-1}(g^{-1}(A)) = (g \circ f)^{-1}(A)$ es acotado usando que f es métricamente propia. Por lo tanto $g \circ f$ es Lipschitz a larga escala.

□

Lema 1.2.6. *Supongamos que X es un espacio métrico y A una C -Red en X . Entonces existe una función $f : X \rightarrow A$ Lipschitz a larga escala.*

Demostración. Como A es una C -Red en X , para cada x en X elegimos a_x en A tal que $d_X(x, a_x) \leq C$. Si x pertenece a A elegimos $a_x = x$. Entonces, si definimos $f : X \rightarrow A$ dado por $f(x) = a_x$. Tenemos que f es suprayectiva, y por lo tanto su imagen es una red. Además

$$\begin{aligned} d_X(f(x), f(y)) &= d_X(a_x, a_y) \\ &\leq d_X(a_x, x) + d_X(x, y) + d_X(y, a_y) \\ &\leq d_X(x, y) + 2C. \end{aligned}$$

Por último, es métricamente propia pues la preimagen de un conjunto acotado se queda contenida en la nube de radio C del mismo conjunto. □

Definición 1.2.7. *Sean X y Y dos espacios métricos y $f : X \rightarrow Y$ una función. Se dice que f es una **cuasi-isometría** si se cumplen:*

1. *Existen constantes $\lambda, C > 0$ tales que*

$$\lambda^{-1} d_X(x, y) - C \leq d_Y(f(x), f(y)) \leq \lambda d_X(x, y) + C$$

para todo x, y en X .

2. *La imagen $f(X)$ es una red en Y .*

*Si existe una cuasi-isometría entre X y Y entonces se dice que X y Y son cuasi-isométricos. Si únicamente se satisface la primera condición entonces diremos que f es un **encaje cuasi-isométrico**.*

Ejemplo 1.2.8. *Supongamos que X es un espacio métrico y A una C -red en X . Entonces X y A son cuasi-isométricos.*

Demostración. Consideremos i la inclusión de A en X . Como A es una red en X se tiene que $d_A(x, y) \leq d_X(i(x), i(y)) \leq d_A(x, y)$ para todo x, y en A . \square

Como caso particular del ejemplo anterior tenemos que \mathbb{Z}^n y \mathbb{R}^n son cuasi-isométricos para toda n en los naturales.

El lector más perspicaz se habrá dado cuenta que la definición de cuasi-isometría que dimos no goza de la simetría respecto a tener una inversa con las mismas cualidades como estamos acostumbrados con homeomorfismos en topología, los isomorfismos en álgebra o, incluso, las isometrías usuales en espacios métricos (estas últimas cuando son suprayectivas). La siguiente proposición tiene como propósito esclarecer este hecho.

Proposición 1.2.9. *Sean X y Y dos espacios métricos con geometría acotada, y $f : X \rightarrow Y$ una función Lipschitz a larga escala. Entonces f es una cuasi-isometría si y solo si existe una función $g : Y \rightarrow X$ tal que g es Lipschitz a larga escala y cumple que $g \circ f$ y $f \circ g$ están cerca de las identidades 1_X y 1_Y , respectivamente.*

Demostración. Supongamos que f es una cuasi-isometría. Entonces $f(X)$ es una K -red en Y para algún $K > 0$ y por el Lema 1.2.6 existe una función $h : Y \rightarrow f(X)$ Lipschitz a la larga escala y tal que restringida a los elementos de la red es la identidad. Ahora, para todo y en $f(X)$ existe un x_y en X tal que $f(x_y) = y$. Definimos $k : f(X) \rightarrow X$ dada por $k(y) = x_y$. Veamos que dicha función es Lipschitz a la larga escala. Como f es una cuasi-isometría tenemos que existen constantes $\lambda, C > 0$ tales que

$$\lambda^{-1}d_X(x, y) - C \leq d_Y(f(x), f(y)) \leq \lambda d_X(x, y) + C$$

para todo x, y en X . En particular, para todo u y v en Y se tiene que:

$$\lambda^{-1}d_X(x_u, x_v) - C \leq d_Y(u, v),$$

de donde se obtiene la desigualdad:

$$d_X(x_u, x_v) \leq \lambda d_Y(u, v) + \lambda C.$$

Sea $g : Y \rightarrow X$ dada $g = k \circ h$ que es Lipschitz a la larga escala por ser composición de las mismas. Falta ver que $g \circ f$ y $f \circ g$ están cerca de la identidad y que g es propia. Tenemos que si x está en X entonces

$$\begin{aligned} d_X((g \circ f)(x), x) &= d_X(k(h(f(x))), x) \\ &= d_X(k(f(x)), x) \\ &\leq \lambda d_Y(f(k(f(x))), f(x)) + \lambda C \\ &\leq \lambda C. \end{aligned}$$

Por otra parte, si y está en Y , se cumple:

$$\begin{aligned} d_Y((f \circ g)(y), y) &= d_Y((f(k(h(y))), y) \\ &= d_Y((h(y), y) \\ &\leq K. \end{aligned}$$

Y finalmente, si S es un conjunto acotado en X , deberá estar contenido en un conjunto de la forma $B_X(x, r)$ para algún x en X y algún $r > 0$. Así tenemos que

$$g^{-1}(B_X(x, r)) \subseteq B_Y(f(x), \lambda r + C + K)$$

que es acotado.

Ahora, supongamos que existe una función $g : Y \rightarrow X$ tal que g es (λ, C) -Lipschitz a larga escala y $g \circ f$ y $f \circ g$ están P -cerca de la identidad en X y Y , respectivamente. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} d_X(u, v) &\leq d_X(u, (g \circ f)(u)) + d_X((g \circ f)(u), (g \circ f)(v)) + d_X((g \circ f)(v), v) \\ &\leq \lambda d_Y(f(u), f(v)) + (C + 2P). \end{aligned}$$

La otra desigualdad está garantizada gracias a que f es una función Lipschitz a larga escala.

Como $f \circ g$ están P -cerca de la identidad tenemos que:

$$d_Y(f(g(y)), y) \leq P$$

para todo y en Y . En particular, $f(X)$ es una P -red en Y , y por lo tanto, f es una cuasi-isometría.

□

1.2.1. Funciones gruesas.

Si las cuasi-isometrías son el análogo de las isometrías en geometría a larga escala, entonces también necesitamos un concepto análogo al de las funciones continuas. En esta sección nos abocaremos a construir dicho concepto.

Definición 1.2.10. Sean X y Y dos espacios métricos. Una función $f : X \rightarrow Y$ es **gruesa** si se cumplen las siguientes propiedades:

1. Existe una función $\rho_+ : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ no decreciente tal que

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq \rho_+(d_X(x, y))$$

para todo x, y en X .

2. f es métricamente propia.

Ejemplo 1.2.11. La función exponencial es una función gruesa pero no es Lipschitz a larga escala.

Definición 1.2.12. Sean X y Y dos espacios métricos. Una función $f : X \rightarrow Y$ es una **equivalencia gruesa** si se cumplen las siguientes propiedades:

1. Existen funciones $\rho_+ : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ y $\rho_- : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ no decrecientes tales que $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_-(t) = \infty$ y

$$\rho_-(d_X(x, y)) \leq d_Y(f(x), f(y)) \leq \rho_+(d_X(x, y))$$

para todo x, y en X .

2. $f(X)$ es una red en Y .

En caso de que exista una función entre X y Y con estas características diremos que X y Y son gruesamente equivalentes.

Lema 1.2.13. Sean X y Y dos espacios métricos con geometría acotada. Si $f : X \rightarrow Y$ es una equivalencia gruesa y A es un subconjunto acotado de Y , entonces $f^{-1}(A)$ es acotado en X .

Demostración. Basta demostrar que $f^{-1}(B_Y(f(x), r))$ es acotado para todo $x \in X$ y $r > 0$ (como la imagen de f es una red todo conjunto acotado en Y está contenido en algún conjunto de este estilo).

Como f es una equivalencia gruesa, existe ρ_- que cumple la condición 1 en la Definición 1.2.12. Así se tiene que:

$$f^{-1}(B_Y(f(x), r)) \subseteq B_X(x, \rho_-(r))$$

y por tanto $f^{-1}(B_Y(f(x), r))$ está acotado en X .

Notemos que si varios conjuntos están acotados por la misma constante en el codominio, entonces, sus preimágenes estarán acotadas, también, por una misma constante, que es, precisamente, la que nos proporciona la función ρ_- . \square

Definición 1.2.14. Sea X un espacio métrico. Una **cuasi-geodésica** en X es un encaje cuasi-isométrico $\gamma : [0, d_X(x, y)] \rightarrow X$ tal que $\gamma(0) = x$ y $\gamma(d_X(x, y)) = y$. Decimos que X es cuasi-geodésico si entre cualesquiera x y y en X existe una cuasi-geodésica.

Teorema 1.2.15. Sea X un espacio métrico cuasi-geodésico y Y un espacio métrico con $f : X \rightarrow Y$ gruesa. Entonces f es Lipschitz a larga escala.

Demostración. Sean x y y en X . Como X es cuasigeodésico existe una (λ, C) -cuasi-isometría $\gamma : [0, d_X(x, y)] \rightarrow X$ tal que $\gamma(0) = x$ y $\gamma(d_X(x, y)) = y$. Sea n el entero más pequeño tal que $d_X(x, y) \leq n$ y definimos $x_i = \gamma(i)$ para todo i entero tal que $i < n$ y $x_n := y$. Como γ es una cuasi-isometría se tiene que:

$$d_X(x_i, x_{i+1}) \leq \lambda|i + 1 - i| + C = \lambda + C.$$

Como f es gruesa, existe una función $\rho_+ : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ no decreciente tal que $d_Y(f(x), f(y)) \leq \rho_+(d_X(x, y))$ para todo $x, y \in X$. Así:

$$\begin{aligned}
 d_Y(f(x), f(y)) &\leq \sum_{i=0}^{n-1} d_Y(f(x_i), f(x_{i+1})) \\
 &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \rho_+(d_X(x_i, x_{i+1})) \\
 &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \rho_+(\lambda + C) \\
 &= n\rho_+(\lambda + C) \\
 &\leq \rho_+(\lambda + C)(d_X(x, y) + 1).
 \end{aligned}$$

De donde se sigue que f es $(\rho_+(\lambda + C), \rho_+(\lambda + C))$ -Lipschitz a larga escala. \square

Corolario 1.2.16. *Sean X y Y dos espacios métricos cuasi-geodésicos y $f : X \rightarrow Y$ una equivalencia gruesa. Entonces f es una cuasi-isometría.*

En el siguiente capítulo daremos ejemplos de espacios cuasi-geodésicos.

Capítulo 2

Grupos discretos.

2.1. Función longitud y métricas de longitud de palabra.

Esta sección está dedicada a dotar de una métrica a todo grupo numerablemente generado y lograr visualizar la geometría que se genera con esta métrica.

Definición 2.1.1. Sea G un grupo. Decimos que $|\cdot| : G \rightarrow [0, \infty)$ es una **función longitud** si satisface las siguientes propiedades:

1. $|g| = 0$ si y solo si $g = e$, donde e denota el neutro del grupo.
2. $|g| = |g^{-1}|$ para todo g en G .
3. $|gh| \leq |g| + |h|$ para todo g y h en G .

Decimos que la función $|\cdot|$ es **propia** si, además, para todo $R > 0$ el cardinal del conjunto $\{g \in G \mid |g| \leq R\}$ es finito.

Recordemos que un conjunto S de generadores es simétrico si siempre que g esté en S entonces g^{-1} está en S .

Proposición 2.1.2. En todo grupo numerablemente generado existe una función longitud propia.

Demostración. Sea S un conjunto numerable de generadores. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que S es simétrico y que contiene a e , el elemento neutro del grupo. Es decir:

$$S = \{e, a_1^1, a_1^{-1}, a_2^1, a_2^{-1}, a_3^1, a_3^{-1}, \dots\}.$$

Propondremos una función $\beta : S \rightarrow [0, \infty)$ tal que $\beta(e) = 0$, $\beta(g) = \beta(g^{-1}) > 0$ y propia. Esto último es posible pues al ser S numerable basta asociarle a cada a_i

y a_i^{-1} el número i (notemos que no nos sirve asignarles a todo lo elementos a_i el número 1, puesto que de esta manera tendríamos, posiblemente, una cantidad infinita de elementos con norma uno, y solo queremos una cantidad finita). Ahora definimos $|\cdot|_{S,\beta} : G \rightarrow [0, \infty)$ dada por:

$$|g|_{S,\beta} = \min \left\{ \sum_{i=1}^n \beta(a_{g_i}) \mid g = a_{g_1} a_{g_2} \cdots a_{g_n}, a_{g_i} \in S \right\}$$

Se afirma que β es la función buscada:

1. $|g|_{S,\beta}=0$ si y solo si existen $a_{g_1}, a_{g_2}, \dots, a_{g_n}$ tales que $g = a_{g_1} a_{g_2} \cdots a_{g_n}$ y $\sum_{i=1}^n \beta(a_{g_i}) = 0$. Esto último pasa si y solo si $\beta(a_{g_1}), \beta(a_{g_2}), \dots, \beta(a_{g_n}) = 0$, lo cual es equivalente a $a_{g_1}, a_{g_2}, \dots, a_{g_n} = e$, y esto conduce a que $g = e$.

Por lo tanto $|g|_{S,\beta}=0$ si y solo si $g = e$.

2. Si $g = a_{g_1} a_{g_2} \cdots a_{g_n}$ es tal que $|g|_{S,\beta} = \sum_{i=1}^n \beta(a_{g_i})$, entonces $a_{g_n}^{-1} a_{g_{n-1}}^{-1} \cdots a_{g_1}^{-1} = g^{-1}$ y así:

$$\begin{aligned} |g|_{S,\beta} &= \sum_{i=1}^n \beta(a_{g_i}) \\ &= \sum_{i=1}^n \beta(a_{g_i}^{-1}) \\ &\geq |g^{-1}|_{S,\beta}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $|g|_{S,\beta} \geq |g^{-1}|_{S,\beta}$. Análogamente se obtiene la otra desigualdad.

3. Si $g = a_{g_1} a_{g_2} \cdots a_{g_n}$ es tal que $|g|_{S,\beta} = \sum_{i=1}^n \beta(a_{g_i})$ y $h = a_{h_1} a_{h_2} \cdots a_{h_m}$ es tal que $|h|_{S,\beta} = \sum_{i=1}^m \beta(a_{h_i})$ entonces $gh = a_{g_1} a_{g_2} \cdots a_{g_n} a_{h_1} a_{h_2} \cdots a_{h_m}$ y por tanto:

$$\begin{aligned} |gh|_{S,\beta} &\leq \sum_{i=1}^n \beta(a_{g_i}) + \sum_{j=1}^m \beta(a_{h_j}) \\ &= |g|_{S,\beta} + |h|_{S,\beta}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $|gh|_{S,\beta} \leq |g|_{S,\beta} + |h|_{S,\beta}$.

Para ver que la función es propia basta ver que si M es el número de elementos en $\{g \in S \mid \beta(g) \leq R\} := A$ entonces el conjunto $\{g \in G \mid |g| \leq R\} := B$ está acotado por las posibles combinaciones de palabras con a lo más (R/K) letras con M letras a elegir, donde $K = \min\{\beta(g) > 0 \mid g \in A\}$. Es decir, podemos encontrar la palabra más grande en extensión (número de letras que aparecen) en B y estará conformada por las letras de generadores con menos peso (con menor valor en $|\cdot|$). Como solo hay una cantidad finita de letras a utilizar y la extensión de la palabra está también acotada, entonces el número de combinaciones posibles sigue siendo finito. \square

2.1. FUNCIÓN LONGITUD Y MÉTRICAS DE LONGITUD DE PALABRA. 19

En caso de que G sea un grupo finitamente generado, esto es, G es generado por S donde S es un conjunto finito de generadores, podemos hacer que la función longitud valga uno en todos los generadores. En este caso dicha función longitud es llamada función longitud de palabra, y se ve de la siguiente forma:

$$|g| = \min\{n \mid g = g_1 g_2 \cdots g_n, g_i \in S\}.$$

Definición 2.1.3. Sea G un grupo equipado con la función longitud $|\cdot|$.

La función $d_G : G \times G \rightarrow [0, \infty)$ dada por $d_G(g, h) = |g^{-1}h|$ es llamada la **métrica de longitud de palabra**.

Proposición 2.1.4. La métrica de longitud de palabra es efectivamente una métrica y es invariante bajo la acción de traslación izquierda por elementos del grupo (o simplemente invariante por la izquierda).

Demostración. 1. $d_G(g, g) = |g^{-1}g| = |e| = 0$.

Si $d_G(g, h) = 0$ entonces $|g^{-1}h| = 0$, de donde se obtiene que $g^{-1}h = e$ y por lo tanto $g = h$.

2. $d_G(g, h) = |g^{-1}h| = |(h^{-1}g)^{-1}| = |h^{-1}g| = d_G(h, g)$, para todo g, h en G .

3. $d_G(g, h) = |g^{-1}h| = |g^{-1}tt^{-1}h| \leq |g^{-1}t| + |t^{-1}h| = d_G(g, t) + d_G(t, h)$ para cualesquier g, h, t en G .

Y finalmente, la métrica es invariante por la acción izquierda de elementos del grupo. Efectivamente:

$$d_G(tg, th) = |(tg)^{-1}th| = |g^{-1}t^{-1}th| = |g^{-1}h| = d_G(g, h).$$

□

Notemos, que si nos fijamos en los valores positivos de una función longitud propia, estos deben alcanzar su valor mínimo, pues de no hacerlo contradice precisamente que esta función sea propia. Este hecho conduce inmediatamente a que el grupo, visto como espacio métrico, sea discreto topológicamente.

Proposición 2.1.5. Sea G un grupo numerablemente generado y H un subgrupo de G numerablemente generado. Entonces H es una red en G si y solo si el índice de H en G , $|H : G|$, es finito.

Demostración. Supongamos que H es una red en G . Entonces existe $R > 0$ tal que para todo g en G existe h en H con $|h^{-1}g| = d_G(g, h) \leq R$. Esto último equivale a que $h^{-1}g$ pertenece a $B_G[e, R]$. Como la métrica es propia tenemos que $B_G[e, R] = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Entonces $h^{-1}g = a_i$ para algún i

menor o igual que n . Esto último es equivalente a que $g = ha_i$ donde ha_i pertenece a Ha_i . Por lo tanto

$$G = \bigcup_{i=1}^n Ha_i.$$

Ahora, supongamos que $|H : G|$ es finito. Entonces $G = \bigcup_{i=1}^n Ha_i$ para algún n en los naturales. Sea $R = \max_{i=1}^n \{|a_i|\}$ y sea g en G . Entonces g está en Ha_{i_0} para algún i_0 menor igual que n . Es decir, $g = h_0a_{i_0}$ para algún h_0 en H . De aquí que:

$$d_G(g, h_0) = d_G(h_0a_{i_0}, h_0) = d_G(a_{i_0}, e) = |a_{i_0}| \leq R.$$

Por lo tanto H es una R -red en G . □

Teorema 2.1.6. *Sea G un grupo con dos conjuntos de generadores simétricos y finitos S y S' con sus respectivas métricas de longitud de palabra, d y d' , inducidas por las funciones longitud de palabra $|\cdot|$ y $|\cdot|'$. Entonces (G, d) y (G, d') son cuasi-isométricos.*

Demostración. Supongamos que $|g| = n$ y $g = s_1s_2 \cdots s_n$ de tal manera que s_i esté en S para todo i . Denotemos por $L = \max\{|s|' : s \in S\}$.

Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} |g|' &= |s_1s_2 \cdots s_n|' \\ &\leq \sum_{i=1}^n |s_i|' \\ &\leq \sum_{i=1}^n L \\ &= Ln \\ &= L|g|. \end{aligned}$$

Con esto obtenemos:

$$\begin{aligned} d'(x, y) &= |x^{-1}y|' \\ &\leq L|x^{-1}y| \\ &= Ld(x, y). \end{aligned}$$

Análogamente se prueba que $d(x, y) \leq L'd'(x, y)$. □

Corolario 2.1.7. *Si G y H son dos grupos isomorfos finitamente generados. Entonces, G y H son cuasi-isométricos.*

Demostración. Basta ver que los isomorfismos mandan conjuntos generadores en conjuntos generadores y aplicar el teorema anterior. □

2.1. FUNCIÓN LONGITUD Y MÉTRICAS DE LONGITUD DE PALABRA. 21

Notemos que el regreso del corolario no es cierto, pues, podemos tomarnos el grupo trivial $G_0 = \{e\}$ y cualquier otro grupo finito G . Entonces G y G_0 serán cuasi-isométricos pero no son siquiera biyectables. O, en general, cualesquiera dos grupos finitos con distintas cardinalidades son cuasi-isométricos, pero no isomorfos.

Definición 2.1.8. Una **acción** de un grupo G sobre un conjunto X es una aplicación

$$\begin{aligned}\varphi : G \times X &\rightarrow X \\ \varphi(g, x) &= gx\end{aligned}$$

que cumple dos condiciones:

1. Si e es el neutro del grupo, tenemos que $ex = x$ para todo $x \in X$.
2. Tenemos que para todo $x \in X$ y $h, g \in G$ se cumple que $g(hx) = (gh)x$.

Definición 2.1.9. Decimos que la acción de un grupo G en un espacio métrico X es una **acción propiamente discontinua** si para todo subconjunto compacto K de X se tiene que el cardinal del conjunto $\{g \in G \mid gK \cap K\}$ es finito.

Para el siguiente lema necesitamos la noción de ser un **espacio métrico propio**: un espacio métrico X es propio si todas las bolas cerradas son compactas.

Lema 2.1.10. (Lema de Milnor-Svarc): Sea X un espacio métrico propio y geodésico, y sea G un grupo que actúa bajo isometrías en X . Supongamos que la acción de G es propiamente discontinua. Si existe un subconjunto compacto K de X tal que $GK = X$. Entonces, G es finitamente generado y para todo x_0 en X se tiene que la aplicación $f_{x_0} : G \rightarrow X$ dada por $f(g) = gx_0$ es una cuasi-isometría.

Demostración. Sea x_0 en X . Como existe un conjunto compacto K que G trasladado cubre a X podemos elegir un $R > 0$ suficientemente grande tal que

$$\bigcup_{g \in G} B(gx_0, R) = X.$$

La bola cerrada $B[gx_0, R]$ es compacta pues el espacio X es propio. Sea

$$S = \{g \in G \mid B[x_0, R] \cap B[gx_0, R] \neq \emptyset\}.$$

Notemos que $|S| < \infty$ pues la acción del grupo es propiamente discontinua. Sea

$$r = \inf_{g \notin S \cup \{e\}} \{d(B[x_0, R], B[gx_0, R])\}.$$

Donde $d(U, V) = \inf\{d_X(u, v) \mid u \in U, v \in V\}$.

Dicho r es positivo, pues, si no lo fuera podríamos encontrar una sucesión de $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset G \setminus (S \cup \{e\})$ tal que:

$$d_X(B[x_0, R], B[g_n x_0, R]) < 1/n$$

y entonces tendríamos que

$$|\{g \in G \mid B[x_0, R+1] \cap B[gx_0, R+1] \neq \emptyset\}| = |\mathbb{N}|$$

lo cual contradice que la acción es propiamente discontinua. Observemos que $r \leq R$.

Veamos que S genera a G . Sea g en G y sea $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset X$ tales que $d_X(x_0, x_1) < R$ y $d_X(x_i, x_{i+1}) < r$ para todo i . Sea $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\} \subset G$ tales que x_{i+1} esté en $B[\gamma_i x_0, R]$ con $\gamma_0 = e$ y $\gamma_n = g$. Veamos que $\gamma_{i-1}^{-1} \gamma_i$ está en S . Como G actúa mediante isometrías tenemos que:

$$\begin{aligned} d_X(B[\gamma_{i-1}^{-1} \gamma_i x_0, R], B[x_0, R]) &= d_X(B[\gamma_i x_0, R], B[\gamma_{i-1} x_0, R]) \\ &\leq d_X(x_{i+1}, x_i) \\ &< r. \end{aligned}$$

Ahora notemos que de la igualdad $g = \gamma_0^{-1} \gamma_1 \gamma_1^{-1} \gamma_2 \dots \gamma_{n-1}^{-1} \gamma_n$ se obtiene que G es finitamente generado y además $|g| \leq n$.

Nos falta probar que $f_{x_0} : G \rightarrow X$ dada por $f(g) = gx_0$ es una cuasi-isometría. Para esto nos basta probar la desigualdad:

$$r|g| - r \leq d_X(x_0, gx_0) \leq \lambda|g|.$$

Tomemos $\lambda = \max_{s \in S} \{d_X(x_0, sx_0)\}$ y $\{s_i\}_{i=1}^n$ en S tales que $g = s_1 s_2 \dots s_n$. Entonces:

$$\begin{aligned} d_X(x_0, gx_0) &\leq \sum_{i=1}^n d_X(x_0, s_i x_0) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \lambda \\ &= n\lambda \\ &= \lambda|g|. \end{aligned}$$

Para la otra desigualdad tomemos m en los naturales tal que

$$R + (m-1)r \leq d_X(x_0, gx_0) \leq R + mr$$

y sea $\{x_1, x_2, \dots, x_m\} \subset X$ tales que $d_X(x_0, x_1) < R$ y $d_X(x_i, x_{i+1}) < r$. Sea $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m\} \subset G$ tal que x_{i+1} esté en $B[\gamma_i x_0, R]$ con $\gamma_0 = e$ y $\gamma_m = g$. Siguiendo el razonamiento de la primera parte de la prueba tenemos que $|g| \leq m$. Así:

$$\begin{aligned} |g| &\leq m \\ &\leq d_X(x_0, gx_0)/r + 1 - R/r \\ &\leq d_X(x_0, gx_0)/r + 1 \end{aligned}$$

de donde se sigue que $r|g| - r \leq d_X(x_0, gx_0)$. □

2.2. Gráficas de Cayley

Las gráficas de Cayley son una muy buena herramienta para visualizar a los grupos como espacios métricos. Además, tienen propiedades como gráficas bastante interesantes. Probaremos algunas de estas últimas.

Definición 2.2.1. Una **gráfica** G es un par (V, E) donde V es un conjunto de elementos llamados **vértices**, y E es un conjunto de parejas no ordenadas de vértices llamadas **aristas**. Diremos que dos vértices $a, b \in V$ son **adyacentes** si y solo si $\{a, b\} \in E$. Es decir, hay una arista que conecta a a y b .

Definición 2.2.2. Una **trayectoria** en una gráfica $G = (V, E)$ es una sucesión finita de vértices v_1, v_2, \dots, v_n tal que $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ para todo $0 < i < n$. Una gráfica $G = (V, E)$ es **conexa** si para cualesquiera dos vértices existe una trayectoria que los conecte.

Definición 2.2.3. Sea G un gráfica conexa. Dados u y v dos vértices en G definimos la distancia de u a v como:

$$d(u, v) = \min\{\text{long}(\alpha)\},$$

donde α es una trayectoria que une a u con v , y $\text{long}(\alpha)$ es el número de aristas que tiene α .

Definición 2.2.4. Un **ciclo** en una gráfica es una sucesión finita de vértices distintos v_1, v_2, \dots, v_n , $n > 2$, tales que $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ para todo $1 \leq i < n$, y $\{v_1, v_n\} \in E$. Diremos que una gráfica conexa T es un **árbol** si no contiene ningún ciclo.

Definición 2.2.5. Sea G un grupo finitamente generado por S , un conjunto de generadores simétrico que no contenga al elemento neutro. La **gráfica de Cayley** $\text{Cay}(G, S)$ se define de la siguiente manera:

1. Los vértices de $\text{Cay}(G, S)$ son los elementos de G .
2. En $\text{Cay}(G, S)$ g y h determinan una arista si $g^{-1}h$ está en S .

Las gráficas de Cayley son una herramienta importante pues nos dan una idea de como construir un espacio geodésico donde se pueda encajar el grupo G isométricamente. Si g y h determinan una arista en la gráfica Cayley consideraremos el espacio de adjunción que nace de pegar el intervalo $[0, 1]$ con la pareja g y h uno a cada extremo. A la imagen de los vértices bajo la adjunción les seguiremos llamando vértices y al intervalo generado arista. Definimos la métrica en este intervalo exactamente igual como se medía en el intervalo $[0, 1]$. De esta manera la distancia entre g y h en este nuevo espacio métrico sigue siendo 1 y obtenemos una geodésica $[g, h]$ que une a g y a h . Hacemos lo mismo para las demás aristas. Ahora bien, para definir la métrica en todo el espacio hay que considerar los siguientes casos:

1. Si a y b son dos vértices, definimos la métrica exactamente igual que la que tenían en el grupo:

$$d(a, b) = d_G(a, b)$$

2. Si a es un vértice y b no lo es, tendremos que b pertenece a una arista con dos vértices a sus extremos: b_1 y b_2 . Definimos:

$$d(a, b) = \min\{d_G(a, b_1) + d_{[b_1, b_2]}(b_1, b), d_G(a, b_2) + d_{[b_1, b_2]}(b_2, b)\}$$

3. Si tanto a como b no son vértices, tendremos que b pertenece a una arista con dos vértices a sus extremos: b_1 y b_2 . Definimos:

$$d(a, b) = \min\{d(a, b_1) + d_{[b_1, b_2]}(b_1, b), d(a, b_2) + d_{[b_1, b_2]}(b_2, b)\}$$

De aquí en adelante pensaremos una gráfica conexa no sólo como una estructura combinatoria de arista y vértices, también será considerado como un espacio métrico geodésico considerando la construcción anterior.

Denotaremos por $\langle \text{Cay}(G, S) \rangle$ a la realización de la gráfica de Cayley como un espacio métrico geodésico con la construcción anterior. De igual forma, si Γ una gráfica y la consideramos como un espacio métrico con la métrica antes mencionada, la misma construcción se puede repetir, obteniendo un espacio métrico que también denotaremos por $\langle \Gamma \rangle$.

Observemos que con esta construcción $\langle \Gamma \rangle$ y Γ son cuasi-isométricos, y por lo tanto, G se encaja cuasi-isométricamente en $\langle \text{Cay}(G, S) \rangle$.

Proposición 2.2.6. *Sea G un grupo finitamente generado por S , con un conjunto de generadores simétrico (sin contar al neutro). Entonces $\text{Cay}(G, S)$ es una gráfica $|S|$ -regular, i.e., en cada vértice inciden exactamente $|S|$ aristas.*

Demostración. Sea u un vértice de $\text{Cay}(G, S)$, entonces, por la definición de $\text{Cay}(G, S)$, tenemos que si v es adyacente a u entonces $u^{-1}v = a_i$ para algún a_i en S . Esto último es equivalente a que $v = ua_i$, lo cual nos dice que los vecinos de u (vértices adyacentes a u) los podemos ver de la forma

$$\{ua_i \mid a_i \in S\}.$$

Esto nos dice que u tiene a lo más tantos vecinos como elementos hay en S . La igualdad es resultado de que si $ua_i = ua_j$, entonces $a_i = a_j$, por lo cual, al variar un a_i diferente obtenemos un vecino distinto cada vez. \square

Proposición 2.2.7. *Sea G un grupo finitamente generado por S equipado con la métrica de longitud de palabra. Entonces G tiene geometría acotada.*

Demostración. Observemos que todos los elementos de G están por lo menos a distancia uno. Por la proposición anterior sabemos la bola $B(e, r)$ tiene a lo

más $|S|^r$ elementos. Como la métrica es invariante por la izquierda tenemos que $B(x, r) = x^{-1}B(e, r)$, y por tanto:

$$\begin{aligned} |B(x, r)| &= |xB(e, r)| \\ &= |B(e, r)| \\ &\leq |S|^r. \end{aligned}$$

□

A continuación presentamos gráficas de Cayley de algunos grupos interesantes.

Ejemplo 2.2.8. Consideremos el friso que aparece en la figura 2.1 y su grupo de isometrías G . Dicho grupo de isometrías está generado por la reflexiones

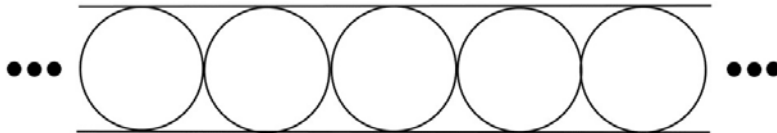


Figura 2.1: Friso.

sobre las líneas a , b y c como se marcan en la figura 2.2.

En la figura 2.3 se muestra una representación de la Gráfica de Cayley del grupo G con generadores $\{a, b, c\}$ (las reflexiones sobre esas líneas). Vemos que además de reflexiones hay traslaciones, pasos y rotaciones.

Las T representan traslaciones, P pasos, Rot rotaciones en las intersecciones de líneas punteadas negras con a , rot rotaciones en las intersecciones de líneas punteadas rojas con a , Ref reflexiones sobre líneas rojas, y ref reflexiones sobre líneas rojas. Además, en cada arista está indicado bajo que elemento de los generadores están conectados los vértices de dicha arista.

Ejemplo 2.2.9. Consideremos el tetraedro que aparece en la figura 2.4 y su grupo de isometrías G . En la misma figura se muestran tres planos $\{x, y, z\}$ que marcan las reflexiones que generan G . En la figura 2.5 se muestra la gráfica de Cayley de G con generadores $\{x, y, z\}$ (las reflexiones sobre esos planos).

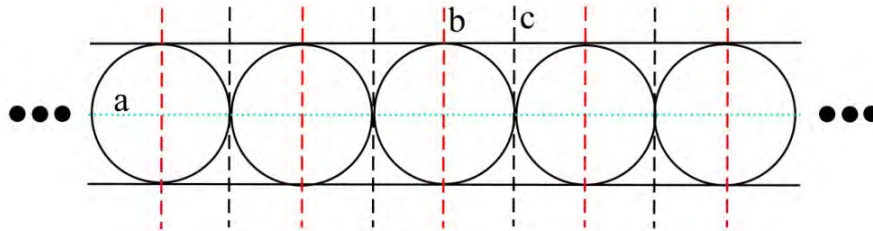


Figura 2.2: Friso en el cual las líneas punteadas denotan la existencia de reflexiones sobre esas líneas.

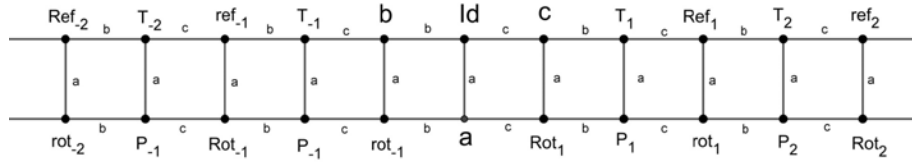


Figura 2.3: La gráfica de Cayley del grupo de isometrías del friso.

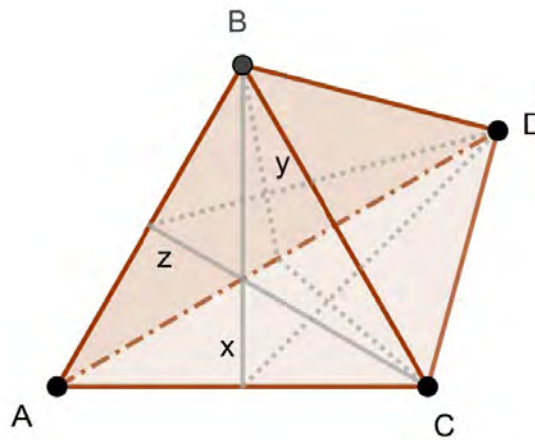


Figura 2.4: Tetraedro con las reflexiones sobre los planos punteados x, y y z .

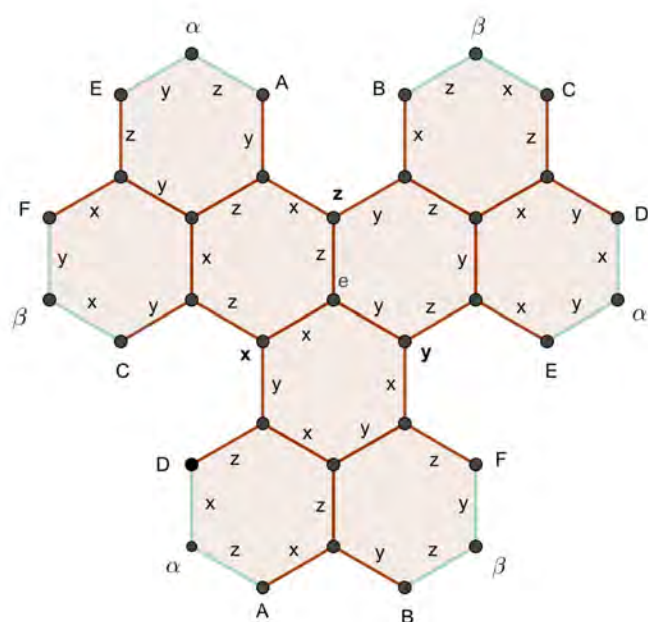


Figura 2.5: Gráfica de Cayley del grupo de simetrías del tetraedro con x, y y z como generadores donde se muestra bajo que elemento del conjunto generador están unidos dos vértices por una arista. Los vértices de la frontera que solo tienen dos adyacencias se deben identificar con sus respectivas parejas o ternas, siguiendo las letras respectivas.

Capítulo 3

Espacios hiperbólicos.

En este capítulo se introducirán dos nociones de espacios hiperbólicos. Se probarán algunos resultados que justifican su relevancia en geometría métrica, y más precisamente, en este trabajo. Este capítulo es un peldaño importante para la construcción de ejemplos de espacios con dimensión asintótica finita.

3.1. Espacios δ hiperbólicos.

Definición 3.1.1. Sea Δabc un triángulo geodésico. Decimos que Δabc es δ -**delgado** si la nube de radio δ alrededor de cualquier par de aristas contiene a la arista restante.

Definición 3.1.2. Sea $\delta > 0$. Un espacio métrico X es δ -**hiperbólico** si todo triángulo geodésico en X es δ -delgado.

Ejemplo 3.1.3. Sea T un árbol entonces. $\langle T \rangle$ es 0 -hiperbólico.

Demostración. Sea Δabc un triángulo geodésico en $\langle T \rangle$ y consideremos las geodésicas $[a, c]$ y $[b, c]$. Sin pérdida de generalidad supongamos que a, b y c son vértices. Recordemos que en todo árbol las trayectorias son únicas. Podemos ver a $[a, b]$ como una sucesión de vértices finita, i.e., $[a, b] = \{a = x_1, x_2, \dots, x_n = b\}$. Definimos

$$u = \max_{i=1}^n \{x_i \in [a, b] \cap [a, c]\}$$

que existe pues a está en $[a, b] \cap [a, c]$. Notemos que $[a, u]$ se queda contenido en $[a, c]$.

Veamos que u está en la arista $[b, c]$. Si $u = c$ se cumple. Si $u \neq c$ y u no pertenece a $[b, c]$ entonces $[u, c] \star [c, b]$ una geodésica entre u y b pero u pertenece a la geodésica $[a, b]$ y dado que las geodésicas son únicas concluimos que $[u, c] \star [c, b]$

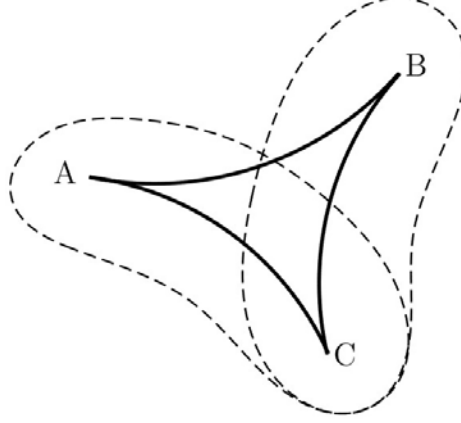


Figura 3.1: Se muestra como la geodésica $[A,B]$ se queda contenida en las nubes alrededor de las geodésicas $[A,C]$ y $[B,C]$.

se queda contenido en $[a, b]$. Entonces c pertenece a $[a, b]$, en particular a la intersección de $[a, b]$ con $[a, c]$, y

$$c = \max_i \{x_i \in [a, b] \cap [a, c]\},$$

lo cual es una contradicción, pues, $u \neq c$. Por lo cual concluimos que u pertenece a la arista $[b, c]$.

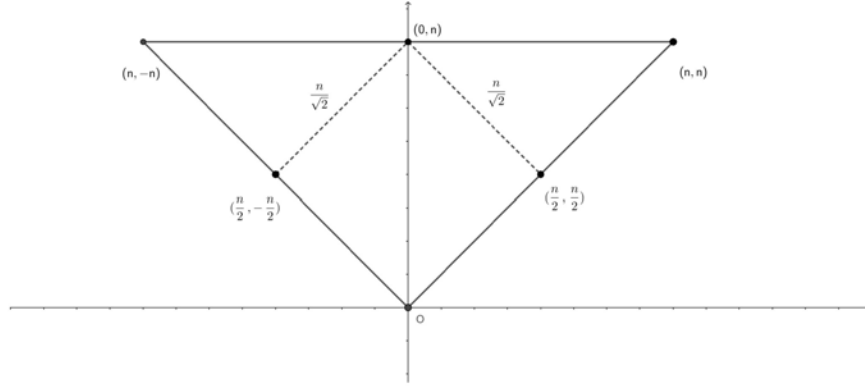
Ahora bien, por lo anterior tenemos que $[u, b]$ es una geodésica entre u y b pero u pertenece a la geodésica $[a, b]$ y como las geodésicas son únicas se tiene que $[u, b]$ se queda contenido en $[a, b]$, más aún $[u, b] \cap [a, b] = [u, b]$. Por lo tanto, tenemos que $[a, u]$ se queda contenido en $[a, c]$ y que $[u, b]$ se queda contenido en $[b, c]$. Esto implica que $[a, b] = [a, u] \cup [u, b]$ se queda contenido en $[a, c] \cup [b, c]$. \square

Ejemplo 3.1.4. Si un espacio métrico X es acotado, es δ -hiperbólico para todo $\delta > \text{diam}(X)$.

Ejemplo 3.1.5. Para cada $n \geq 2$ se tiene que \mathbb{R}^n no es δ -hiperbólico para ningún $\delta > 0$.

Demostración. Basta probar que \mathbb{R}^2 no es hiperbólico pues todo \mathbb{R}^n con $n \geq 2$ tiene una copia isométrica de \mathbb{R}^2 . Considérese la familia de triángulos geodésicos $T_n = \Delta(0, 0)(-n, n)(n, n)$.

Prestemos atención al punto $(0, n)$ que pertenece a la geodésica $[(-n, n), (n, n)]$. La distancia de $(0, n)$ a ambas geodésicas $[(-n, n), (n, n)]$ y $[(-n, n), (0, n)]$ es exactamente $n/\sqrt{2}$ por lo cual, haciendo tender n a infinito, podemos concluir que \mathbb{R}^2 no es δ -hiperbólico para ningún $\delta > 0$. \square

Figura 3.2: Triángulo T_n .

3.2. Producto de Gromov.

Cuando Gromov estaba estudiando los espacios hiperbólicos se dio cuenta que la siguiente expresión estaba íntimamente relacionada con los triángulos δ -delgados.

Definición 3.2.1. Sea X un espacio métrico. Definimos el **producto de Gromov** $(x|y)_p$ dado por

$$(x|y)_p = \frac{d_X(x, p) + d_X(y, p) - d_X(x, y)}{2}.$$

La introducción del producto de Gromov podría parecer un tanto arbitraria, pero el siguiente ejemplo está destinado a proporcionar una mejor perspectiva de la razón por la cual es de nuestro interés.

Ejemplo 3.2.2. Sea Δabc un triángulo geodésico en \mathbb{R}^n . Entonces $(a|b)_c$ es la distancia entre el vértice c y cualquiera de las dos intersecciones del incírculo y las geodésicas $[a, c]$ y $[b, c]$.

Demostración. Sea p_1 la intersección del incírculo del triángulo Δabc con la geodésica $[a, c]$, p_2 la intersección del incírculo del triángulo Δabc con la geodésica $[b, c]$ y sea p_3 la intersección del incírculo del triángulo Δabc con la geodésica $[a, b]$. Recordemos que el centro del incírculo es la intersección de las bisectrices, las cuales, a su vez, están caracterizadas como el conjunto de los puntos que equidistan de las rectas que bisectan. Esta última propiedad nos permite definir las bisectrices únicamente mediante propiedades métricas y nos ayuda a

darnos cuenta de las siguientes igualdades:

$$d(c, p_1) = d(c, p_2)$$

$$d(a, p_1) = d(a, p_3)$$

$$d(b, p_2) = d(b, p_3).$$

Así:

$$d(a, p_1) = d(a, c) - d(p_1, c),$$

$$d(b, p_2) = d(b, c) - d(p_2, c),$$

$$d(a, p_3) + d(p_3, b) = d(a, b).$$

De aquí concluimos que

$$\begin{aligned} d(a, b) &= d(a, p_1) + d(b, p_2) \\ &= d(a, c) - d(p_1, c) + d(b, c) - d(p_2, c). \end{aligned}$$

Y por tanto

$$d(p_1, c) = d(p_2, c) = \frac{d(a, c) + d(b, c) - d(a, b)}{2} = (a|b)_c.$$

□

Observemos que la misma demostración funciona en el plano hiperbólico o en el disco de Poincaré como se muestra en la Figura 3.3.

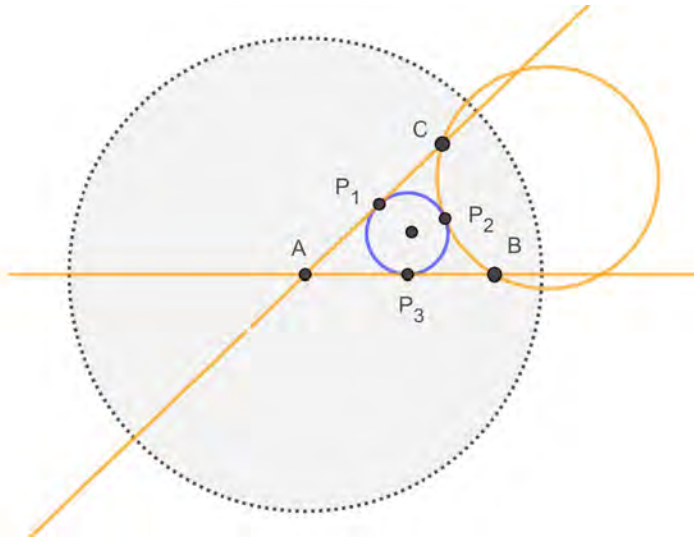


Figura 3.3: Un triángulo geodésico ΔABC y su incírculo en el disco de Poincaré.

Lema 3.2.3. *Sea X un espacio métrico. El producto de Gromov cumple las siguientes propiedades:*

1. $d_X(x, y) = (x|z)_y + (y|z)_x$.
2. $(x|p)_p = (p|z)_p = 0$.
3. $0 \leq (x|y)_p \leq \min\{d_X(x, p), d_X(y, p)\}$.
4. $|(x|y)_p - (x|y)_q| \leq d_X(p, q)$.
5. $|(x|y)_p - (x|z)_p| \leq d_X(y, z)$.
6. Si p está en la geodésica $[x, y]$, entonces, $(x|y)_p = 0$.

Demostración. 1. Tenemos que para todo x, y y z en X :

$$\begin{aligned} 2((x|z)_y + (y|z)_x) &= d_X(x, y) + d_X(z, y) - d_X(x, z) + d_X(z, x) + d_X(y, x) - d_X(y, z) \\ &= 2d_X(x, y). \end{aligned}$$

Al dividir entre 2 tenemos el resultado deseado.

2. Para todo x y p en X , se tiene que:

$$2(x|p)_p = d_X(x, p) + d_X(p, p) - d_X(x, p) = 0.$$

3. Dados x, y y p en X , se tiene que:

$$\begin{aligned} 2(x|y)_p &= d_X(x, p) + d_X(y, p) - d_X(x, y) \\ &\leq d_X(x, p) + d_X(y, p) - (d_X(x, p) - d_X(y, p)) \\ &= 2d_X(x, p). \end{aligned}$$

Intercambiando los lugares de x y y obtenemos la desigualdad:

$$2(x|y)_p \leq 2d_X(y, p).$$

Por lo tanto $(x|y)_p \leq \min\{d_X(x, p), d_X(y, p)\}$.

Por otro lado, como $d_X(x, y) \leq d_X(x, p) + d_X(y, p)$ concluimos que:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{d_X(x, p) + d_X(y, p) - d_X(x, y)}{2} \\ &= (x|y)_p. \end{aligned}$$

4. Tenemos que para todo x, y, p y q en X :

$$\begin{aligned} 2|(x|y)_p - (x|y)_q| &= |d_X(x, p) + d_X(y, p) - d_X(x, y) - (d_X(x, q) + d_X(y, q) - d_X(x, y))| \\ &= |d_X(x, p) - d_X(x, q) + d_X(y, p) - d_X(y, q)| \\ &\leq |d_X(x, p) - d_X(x, q)| + |d_X(y, p) - d_X(y, q)| \\ &\leq 2d_X(p, q). \end{aligned}$$

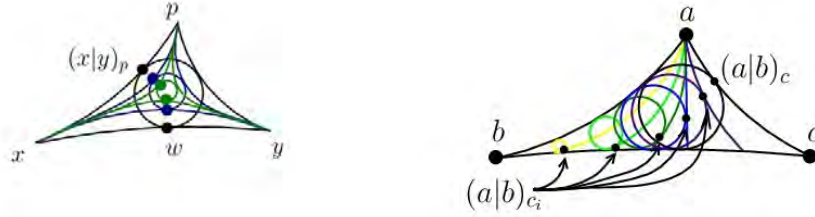
Al dividir entre 2 tenemos la desigualdad deseada.

5. Dados x, y, z y p en X :

$$\begin{aligned} 2|(x|y)_p - (x|z)_p| &= |d_X(x, p) + d_X(y, p) - d_X(x, y) - (d_X(x, p) + d_X(z, p) - d_X(x, z))| \\ &= |d_X(y, p) - d_X(z, p) + (d_X(x, z) - d_X(x, y))| \\ &= |d_X(y, p) - d_X(p, z)| + |d_X(y, x) - d_X(x, z)| \\ &\leq 2d_X(y, z). \end{aligned}$$

6. Sea p en la geodésica $[x, y]$. Entonces $d_X(x, y) = d_X(x, p) + d_X(p, y)$ y por lo tanto $2(x|y)_p = d_X(x, p) + d_X(y, p) - d_X(x, y) = d_X(x, y) - d_X(x, y) = 0$. Dividimos entre 2 para obtener el resultado. □

Las siguientes dos figuras están destinadas a generar mejor intuición sobre el comportamiento del producto de Gromov.



(a) Trayectoria de un punto de tangencia del incírculo del triángulo Δxyp mientras este último se va haciendo más delgado. (b) Trayectoria de un punto de tangencia del incírculo del triángulo Δabc_i , donde c_i yace sobre la arista que une a b y c .

Figura 3.4: Comportamiento del producto de Gromov.

3.3. Espacios δ -hiperbólicos en el sentido de Gromov.

Supongamos que tenemos un triángulo δ delgado Δxyp para algún $\delta \geq 0$. Y tomamos un punto z en la geodésica como se ve en la Figura 3.5. Si nos fijamos en $(x|z)_p - (x|y)_p$ y $(z|y)_p - (x|y)_p$, vemos que dichos valores se refieren a que tan cercanos son el punto de tangencia del círculo verde y el punto de tangencia del círculo rojo, y que tan cercanos son el punto de tangencia del círculo amarillo y el punto de tangencia del círculo rojo, respectivamente. En la Figura 3.5 se nos referimos a estos valores como δ_1 y δ_2 . Si el lector se hace el trabajo de imaginar como nuestro triángulo Δxyp va haciéndose más delgado, notará que todos los puntos de tangencia van convergiendo hacia el interior, y por lo tanto δ_1 y δ_2 se

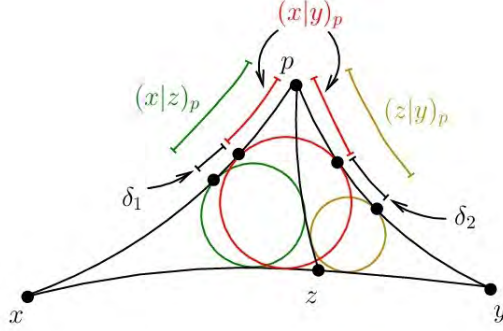


Figura 3.5: Un triángulo Δxyp δ -hiperbólico a través del producto de Gromov.

van haciendo cada vez más pequeños. Resulta ser que los valores δ_1 y δ_2 están íntimamente relacionados con que tan delgado es un triángulo. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 3.3.1. Sea $\delta > 0$. Un espacio métrico X es δ -hiperbólico en el sentido de Gromov si se cumple la desigualdad

$$(x|y)_p \geq \min\{(x|z)_p, (y|z)_p\} - \delta$$

para todo x, y, z y p en X .

El propósito de los siguientes lemas es demostrar que la noción de ser δ -hiperbólico en el sentido de Gromov y la que se dio en un principio para espacios hiperbólicos son equivalentes en la clase de los espacios métricos geodésicos. La primera definición podría parecer más intuitiva pero más tarde en el texto nos daremos cuenta que en la práctica la definición de Gromov es más manejable.

Una gran ventaja del producto de Gromov es que podemos hablar sobre si un espacio es hiperbólico o no lo es, sin necesitar la existencia de las geodésicas. Veremos que ambas definiciones referentes a ser hiperbólico coinciden en un ambiente geodésico.

Lema 3.3.2. Sea $[y, z]$ una geodésica entre y y z , y sea x en X . Entonces, $(y|z)_x \leq d_X(x, [y, z])$.

Demostración. Sea p en $[y, z]$. Al estar p en la geodésica entre y y z se tiene que

$d_X(y, z) = d_X(y, p) + d_X(p, z)$. Entonces se tiene que:

$$\begin{aligned}
 2d_X(x, p) &= d_X(x, p) + d_X(x, p) \\
 &\geq d_X(x, z) - d_X(z, p) + d_X(x, y) - d_X(y, p) \\
 &= d_X(x, z) + d_X(x, y) - (d_X(z, p) + d_X(y, p)) \\
 &= d_X(x, z) + d_X(x, y) - d_X(z, y) \\
 &= 2(y|z)_x.
 \end{aligned}$$

Como la desigualdad anterior es cierta para todo p en $[y, z]$, deducimos que $(y|z)_x \leq d_X(x, [y, z])$. \square

El lema anterior es válido en cualquier espacio métrico, pero, resulta que, en el caso de espacios hiperbólicos se puede acotar la distancia de un punto a una geodésica también por encima con el producto de Gromov, salvo una constante. Encaminados en ese rumbo surge la siguiente definición.

Definición 3.3.3. Decimos que un espacio geodésico X cumple la **propiedad** (P, δ) si para toda geodésica $[b, c]$, para cualquier punto p en dicha geodésica y cualquier punto a en X se cumple:

$$\min\{(a|b)_p, (a|c)_p\} \leq \delta.$$

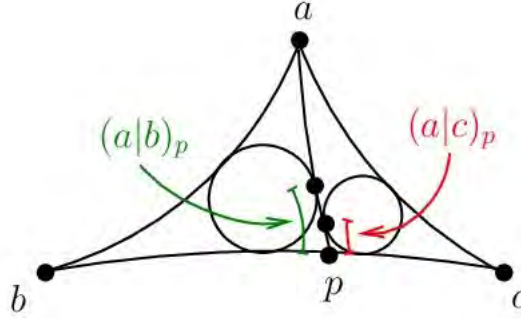


Figura 3.6: Propiedad (P, δ) .

Veamos que tanto los espacios hiperbólicos como los espacios hiperbólicos en el sentido de Gromov cumplen dicha propiedad.

Proposición 3.3.4. Sea X un espacio métrico geodésico y δ -hiperbólico. Entonces X cumple la propiedad (P, δ) .

Demostración. Sea p en la geodésica $[b, c]$ y a en X . Consideremos el triángulo geodésico Δabc . Como el espacio es δ -hiperbólico se tiene que $d_X(p, [a, b] \cup [a, c]) \leq \delta$ por lo cual existe un q en $[a, b] \cup [a, c]$ tal que $d_X(p, q) \leq \delta$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que q yace en $[a, c]$. Entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} d_X(a, p) + d_X(p, c) &\leq d_X(a, q) + d_X(q, p) + d_X(p, q) + d_X(q, c) \\ &\leq 2\delta + d_X(a, q) + d_X(q, c) \\ &= 2\delta + d_X(a, c). \end{aligned}$$

De donde se sigue que $(a|c)_p = 1/2(d_X(a, p) + d_X(p, c) - d_X(a, c)) \leq \delta$. Por lo tanto $\min\{(a|b)_p, (a|c)_p\} \leq \delta$. \square

Proposición 3.3.5. *Sea X un espacio métrico geodésico y δ -hiperbólico en el sentido de Gromov. Entonces, X cumple la propiedad (P, δ) .*

Demostración. Sea p en la geodésica $[b, c]$ y a en X . Consideremos el triángulo geodésico Δabc . Recordemos que si p está en la geodésica $[b, c]$ por el Lema 3.2.3 se tiene que $(a|b)_p = 0$. Entonces de la definición de δ -hiperbólico en el sentido de Gromov tenemos que:

$$\min\{(a|b)_p, (a|c)_p\} - \delta \leq (a|b)_p = 0.$$

De donde se obtiene $\min\{(a|b)_p, (a|c)_p\} \leq \delta$. \square

Proposición 3.3.6. *Sea X un espacio geodésico que cumple la propiedad (P, δ) . Entonces, se cumple la desigualdad $d_X(p, [b, c]) \leq (b|c)_p + 2\delta$ para toda geodésica $[b, c]$ y p en X .*

Demostración. Como X cumple la propiedad (P, δ) , tenemos que la unión de los siguiente conjuntos

$$\begin{aligned} B &= \{x \in [b, c] \mid (b|p)_x \leq \delta\}, \\ C &= \{x \in [b, c] \mid (c|p)_x \leq \delta\} \end{aligned}$$

cubren a $[b, c]$. Aparte $[b, c]$ es conexo por ser imagen continua de un conexo y los conjuntos B y C son cerrados por ser preimagen continua del conjunto cerrado $[0, \delta]$, y además B y C son tales que b pertenece a B y c pertenece a C . Entonces debe existir un y en la intersección de B y C (si no $\{B, C\}$ sería una separación de $[b, c]$, lo cual es una contradicción). Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} 4\delta &\geq 2(p|b)_y + 2(p|c)_y \\ &= 2d_X(p, y) + d_X(b, y) + d_X(c, y) - d_X(p, b) - d_X(p, c) \\ &= 2d_X(p, y) + d_X(b, c) - d_X(p, b) - d_X(p, c) \\ &= 2d_X(p, y) - 2(b|c)_p \\ &\geq 2d_X(p, [b, c]) - 2(b|c)_p. \end{aligned}$$

Despejando obtenemos que $d_X(p, [b, c]) \leq (b|c)_p + 2\delta$, como se quería demostrar. \square

Con esta nueva cota estamos listos para probar la equivalencia de ambas definiciones para espacio hiperbólicos.

Proposición 3.3.7. *Sea X un espacio geodésico δ -hiperbólico. Entonces X es 3δ -hiperbólico en el sentido de Gromov.*

Demostración. Sean a, b, c y p elementos de X . Consideremos el triángulo Δabc . Entonces $[b, c]$ se queda contenida en $Nube_X([a, b] \cup [a, c], \delta)$. Aplicando la desigualdad triangular obtenemos que

$$\begin{aligned} d_X(p, [a, c]) &\leq d_X(p, [b, c]) + \delta, \\ d_X(p, [a, b]) &\leq d_X(p, [b, c]) + \delta. \end{aligned}$$

Entonces, por las Proposiciones 3.3.4 y 3.3.6 inferimos que:

$$\begin{aligned} \min\{(a|c)_p, (a|b)_p\} &\leq \min\{d_X(p, [a, c]), d_X(p, [a, b])\} \\ &\leq d_X(p, [b, c]) + \delta \\ &\leq (b|c)_p + 2\delta + \delta \\ &= (b|c)_p + 3\delta. \end{aligned}$$

Que es equivalente a $\min\{(a|c)_p, (a|b)_p\} - 3\delta \leq (b|c)_p$. Esto prueba que X es 3δ -hiperbólico en el sentido de Gromov. \square

Proposición 3.3.8. *Sea X un espacio geodésico δ -hiperbólico en el sentido de Gromov. Entonces X es 3δ -hiperbólico.*

Demostración. Consideremos el triángulo geodésico Δabc y p en la geodésica $[b, c]$. Entonces, por las Proposiciones 3.3.5 y 3.3.6 tenemos que:

$$\begin{aligned} d_X(p, [a, b]) &\leq (a|b)_p + 2\delta d_X(p, [a, c]) \\ &\leq (a|c)_p + 2\delta. \end{aligned}$$

Y como X es δ -hiperbólico en el sentido de Gromov deducimos que:

$$\begin{aligned} d_X(p, [a, c] \cup [a, b]) &= \min\{d_X(p, [a, c]), d_X(p, [a, b])\} \\ &\leq \min\{(a|c)_p, (a|b)_p\} + 2\delta \\ &\leq (b|c)_p + \delta + 2\delta \\ &= \delta + 2\delta \\ &= 3\delta. \end{aligned}$$

Y como p es un punto arbitrario en $[b, c]$ concluimos que $[b, c]$ se queda contenida en $Nube_X([a, c] \cup [a, b], 3\delta)$. \square

Ya habiendo probado la equivalencia de ambas definiciones, de ahora en adelante nos referiremos a un espacio hiperbólico en el sentido de Gromov simplemente como un espacio hiperbólico.

Corolario 3.3.9. *Sea X es un espacio hiperbólico. Entonces se cumple la desigualdad $(b|c)_p \leq d_X(p, [b, c]) \leq (b|c)_p + 2\delta$ para todo b, c y p en X .*

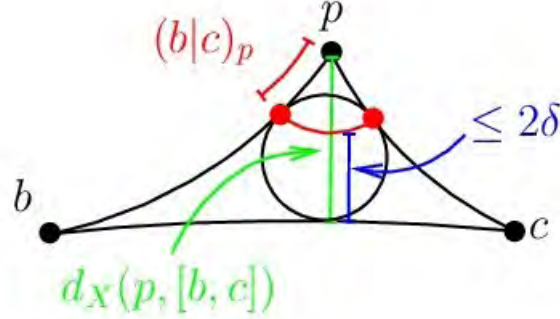


Figura 3.7: Desigualdad del Corolario 3.3.9.

3.3.1. Invarianza de espacios hiperbólicos bajo cuasi-isometrías.

En esta sección probaremos que la propiedad de ser hiperbólico es invariante bajo cuasi-isometrías. Para ello necesitaremos los siguientes lemas.

Lema 3.3.10. *Sea X un espacio métrico geodésico y $f : [0, d_X(x, y)] \rightarrow X$ una (λ, C) cuasi-geodésica entre x y y . Entonces existe una (λ', C') cuasi-geodésica $g : [0, d_X(x, y)] \rightarrow X$ continua que une a x y y , donde λ', C' dependen únicamente de λ y C .*

Demostración. Sea n el entero más pequeño tal que $d_X(x, y) \leq n$ y definimos como $x_i = f(i)$ para todo i entero tal que $0 \leq i < n$ y $x_n := y$. Definimos $g = [x_0, x_1] \star [x_1, x_2] \star \cdots \star [x_{i-1}, x_i] \star \cdots \star [x_{n-1}, x_n]$. Notemos que g es continua por el lema del pegado. Sean $u < v$ en $[0, d_X(x, y)]$, i_u el entero más pequeño mayor o igual que u , e i_v el entero más grande menor o igual que v . Entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} d_X(g(u), g(v)) &\leq d_X(g(u), g(i_u)) + d_X(g(i_u), g(i_v)) + d_X(g(i_v), g(v)) \\ &\leq (i_u - u) + \lambda(i_v - i_u) + C + (v - i_v) \\ &\leq \lambda(i_v - i_u) + (C + 2) \\ &\leq \lambda(v - u) + (C + 2). \end{aligned}$$

Por lo que concluimos que g es una $(\lambda, C + 2)$ cuasi-geodésica. \square

Lema 3.3.11. *Sea X un espacio geodésico δ -hiperbólico y sean x y y en X . Si α es una trayectoria de x a y de longitud al menos uno y $[x, y]$ es una geodésica entre x y y , entonces, para todo punto p en $[x, y]$ se tiene que:*

$$d_X(p, \alpha) \leq \delta \log_2(\text{long}(\alpha)) + 2.$$

Demostración. Procederemos por inducción sobre curvas con longitud menor o igual a 2^n . Si $long(\alpha) \leq 2$ esto implica $d_X(x, y) \leq 2$ y entonces $d_X(p, \alpha) \leq d_X(p, y) \leq 2$ y se cumple el enunciado.

Si $2^n \leq long(\alpha) \leq 2^{n+1}$ con $n > 0$ podemos usar el teorema del valor intermedio para encontrar un punto q en α que separe a α en dos curvas α_1 y α_2 tales que $1/2 long(\alpha) = long(\alpha_1) = long(\alpha_2)$. Fijémonos en un triángulo geodésico Δxyq . Como el espacio X es δ -hiperbólico existe un punto p' en $[x, q] \cup [x, y]$ tal que $d_X(p, p') \leq \delta$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que p' yace sobre $[x, q]$.

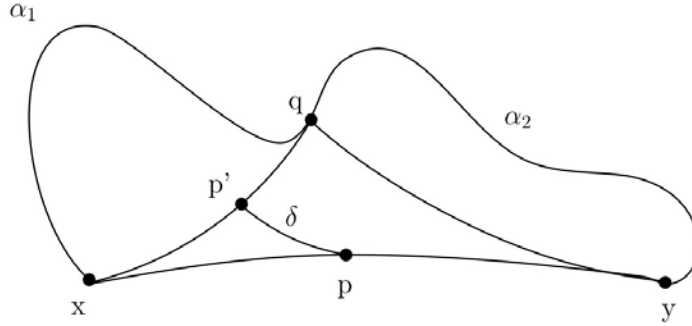


Figura 3.8: Curva α subdividida en dos curvas α_1 y α_2 .

Ahora, si prestamos especial atención a la geodésica $[x, q]$ y α_1 notaremos que comparten el punto inicial y final, y que α_1 tiene justamente la mitad de la longitud de α , i.e., $2^{n-1} \leq long(\alpha_1) \leq 2^n$. Aplicando la hipótesis de inducción, obtenemos:

$$\begin{aligned}
 d_X(p, \alpha) &\leq d_X(p, p') + d_X(p', \alpha) \\
 &\leq d_X(p, p') + d_X(p', \alpha_1) \\
 &\leq \delta + \delta \log_2(long(\alpha_1)) + 2 \\
 &= \delta + \delta \log_2(1/2 long(\alpha)) + 2 \\
 &= \delta(\log_2(1/2 long(\alpha)) + 1) + 2 \\
 &= \delta(\log_2(1/2 long(\alpha)) + \log_2(2)) + 2 \\
 &= \delta \log_2(long(\alpha)) + 2.
 \end{aligned}$$

Completando así el paso inductivo. □

Corolario 3.3.12. Para todo punto p en la geodésica $[x, y]$ se tiene que

$$d_X(p, \alpha) \leq \log_2(\lambda d_X(x, y) + C) + 2$$

para toda (λ, C) -cuasi-geodésica α que une a x y a y con longitud mayor a 1.

Lema 3.3.13. (Lema de Morse) Sea X un espacio geodésico δ -hiperbólico. Entonces para toda (λ, C) -cuasi-geodésica α entre dos puntos x y y en X , se tiene que existe una geodésica $[x, y]$ y una constante $R > 0$, que depende únicamente de λ y C , tales que α se queda contenido en la nube de radio R alrededor de la geodésica $[x, y]$.

Demostración. Por el Lema 3.3.10 podemos suponer sin pérdida de generalidad que α es continua y que la curva mide al menos 1. Consideremos una geodésica $[x, y]$ y sea p en $[x, y]$ tal que $d_X(p, \alpha) = m$ donde

$$m = \max_{z \in [x, y]} \{d_X(z, \alpha)\}$$

que sabemos que existe, pues α es continua y por tanto su imagen es compacta, al igual que $[x, y]$. Sea x' sobre $[x, y]$ tal que $d_X(p, x') = \min\{2m, d_X(p, x)\}$ y sea y' sobre $[x, y]$ tal que $d_X(p, y') = \min\{2m, d_X(p, y)\}$. Por la elección de m sabemos que existen dos puntos x'' y y'' sobre α tales que $d_X(x', x'') \leq m$ y $d_X(y'', y') \leq m$. En caso de que x coincida con x' definimos $x'' := x$, y en caso de que y coincida con y' definimos $y'' := y$. Consideremos las geodésicas $[x', x'']$ y $[y'', y']$. Ahora consideremos α' la subtrayectoria de α que conecta a x'' y y'' y sea

$$\beta = [x', x''] \star \alpha' \star [y'', y'].$$

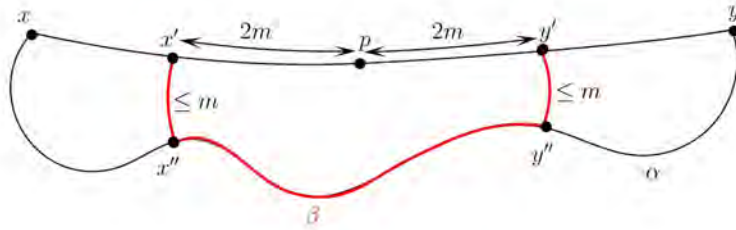


Figura 3.9: Curva β como en la construcción.

Notemos que cada punto de cualquiera de las geodésicas $[x', x'']$ y $[y'', y']$ está por lo menos a distancia m de p . Tenemos dos caso. Si $d_X(p, x') \geq 2m$ y q yace

sobre $[x', x'']$ tenemos que

$$\begin{aligned} d_X(p, q) &\geq d_X(p, x') - d_X(x', q) \\ &= 2m - m \\ &= m \end{aligned}$$

y análogamente para $[y'', y']$. En caso de que $d_X(p, x') > 2m$ tendríamos que $x = x'$, y por la elección de m y p obtenemos:

$$m = d_X(p, \alpha) \leq d_X(p, x).$$

Además, por la elección de m , también cualquier punto sobre α' dista por lo menos m de p . Por esto $d_X(p, \beta) \geq m$.

Por otra parte, por la elección de x', x'', y' y y'' , tenemos que:

$$\begin{aligned} d_X(x'', y'') &\leq d_X(x'', x') + d_X(x', p) + d_X(p, y') + d_X(y', y'') \\ &\leq m + 2m + 2m + m \\ &= 6m \end{aligned}$$

por lo cual $long(\alpha') \leq \lambda 6m + C$ y con esto concluimos que $long(\beta) \leq \lambda 6m + C + 2m$. Juntando todo lo anterior y haciendo uso del Lema 3.3.11 tenemos que:

$$\begin{aligned} m &\leq d_X(p, \beta) \\ &\leq \delta \log_2(long(\beta)) + 2 \\ &\leq \delta \log_2(\lambda 6m + C + 2m) + 2 \\ &= \frac{\delta \ln(\lambda 6m + C + 2m)}{\ln(2)} + 2 \\ &\leq \frac{\delta(\lambda 6m + C + 2m)}{\ln(2)} + 2. \end{aligned}$$

Y despejando m obtenemos que:

$$m \leq \frac{\frac{\delta C}{\ln(2)} + 2}{1 - \frac{6\delta\lambda + 2}{\ln(2)}}$$

por lo cual m está acotado.

Ya casi acabamos. Hasta ahora sabemos que todo punto de $[x, y]$ está a distancia menor o igual que m de α , y este m está acotado por algo que solo depende de δ, λ y C . Falta ver que los puntos de α se queden cerca de $[x, y]$. Sea u sobre α . Si $d_X(u, [x, y]) \leq m$ no hay nada que hacer.

Si por el contrario $d_X(u, [x, y]) > m$ podemos fijarnos en α_1 y α_2 las subtrayectorias de α que unen a x con u , y a u con y . Todo punto en $[x, y]$ está a lo más a distancia m de ya bien α_1 o α_2 y tenemos que x dista cero de α_1 y que y dista

cero de α_2 . Entonces, por el teorema del valor intermedio, existe un punto z en $[x, y]$ que está a lo más distancia m de α_1 y de α_2 . Por esto último, tenemos que, existen puntos u_1 y u_2 en α_1 y α_2 , respectivamente, tales que $d_X(u_1, z) \leq m$ y $d_X(u_2, z) \leq m$, por lo cual:

$$\begin{aligned} d_X(u_1, u_2) &\leq d_X(u_1, z) + d_X(z, u_2) \\ &\leq m + m \\ &= 2m. \end{aligned}$$

De aquí que la longitud de la subtrayectoria de α que conecta a u_1 y a u_2 tenga longitud a lo más $2m\lambda + C$. Finalmente, tenemos que:

$$\begin{aligned} d_X(u, [x, y]) &\leq d_X(u, u_1) + d_X(u_1, [x, y]) \\ &\leq d_X(u, u_1) + d_X(u_1, z) \\ &\leq 2m\lambda + C + m. \end{aligned}$$

Tomando $R = (2\lambda + 1)m + C$ se tiene el resultado. \square

Definición 3.3.14. Sea X un espacio métrico. Un **triángulo cuasi-geodésico** es una configuración de tres vértices a, b y c y tres aristas en las cuales los vértices son puntos en el espacio X y las aristas son cuasi-geodésicas que unen dichos puntos. A dicho triángulo cuasi-geodésico lo denotaremos igual que que a los triángulo geodésicos, Δabc . Si hay lugar a confusión en alguna prueba haremos las anotaciones pertinentes.

Teorema 3.3.15. Sea Y un espacio métrico geodésico δ -hiperbólico y supongamos que X es un un espacio métrico geodésico cuasi-isométrico a Y . Entonces X es δ' -hiperbólico para algún $\delta' \geq 0$.

Demostración. Como X y Y son cuasi-isométricos existe $f : X \rightarrow Y$ una (λ, C) -cuasi-isometría. Sea Δabc un triángulo geodésico en X y consideremos el triángulo cuasi-geodésico $\Delta f(a)f(b)f(c)$ con aristas $f([a, b])$, $f([a, c])$ y $f([b, c])$. Por el Lema de Morse existe $K > 0$ tal que :

$$\begin{aligned} f([a, b]) &\subset Nube([f(a), f(b)], K), \\ f([a, c]) &\subset Nube([f(a), f(c)], K), \\ f([b, c]) &\subset Nube([f(b), f(c)], K). \end{aligned}$$

Ahora consideremos la arista geodésica $[f(a), f(b)]$. Como Y es δ hiperbólico

$$[f(a), f(b)] \subset Nube([f(b), f(c)] \cup [f(a), f(c)], \delta).$$

Juntando las contenciones anteriores obtenemos que

$$f([a, b]) \subset Nube(f([a, c]) \cup f([b, c]), 2K + \delta)$$

pues la distancia de todo punto de $f([a, b])$ a $f([a, c])$, por ejemplo, es menor o igual que primero pasar por la geodésica $[f(a), f(b)]$, después por la geodésica

$[f(a), f(c)]$ y finalmente llegar $f([a, c])$.

Por el Lema 1.2.9 sabemos que

$$f^{-1}(Nube(f([a, c]) \cup f([b, c]), 2K + \delta)) \subset Nube([a, c] \cup [b, c], \lambda'(2K + \delta) + C')$$

donde λ' y C' únicamente dependen de λ y C . Y dado que

$$[a, c] \subset f^{-1}(Nube(f([a, c])))$$

concluimos que

$$[a, c] \subset Nube([a, c] \cup [b, c], \lambda'(2K + \delta) + C').$$

Como λ' , C' y K son constantes que únicamente dependen de las constantes de la cuasi-isometría se tiene el resultado haciendo $\delta' = \lambda'(2K + \delta) + C'$. \square

3.4. Grupos hiperbólicos.

Definición 3.4.1. *Decimos que un grupo G con un conjunto de generadores S es un **grupo hiperbólico** si $\langle Cay(G, S) \rangle$ lo es.*

Notemos que en la definición anterior podemos usar cualquiera de las dos nociones de ser δ -hiperbólico aprovechando $\langle Cay(G, S) \rangle$ es un espacio métrico geodésico. Esto último es importante por que las geodésicas jugaron un papel decisivo en ver que ser δ -hiperbólico se preserva bajo cuasi-isometrías.

Ejemplo 3.4.2. \mathbb{Z} es un grupo hiperbólico.

Demostración. Basta ver que la gráfica de Cayley de \mathbb{Z} es un árbol y hacer uso del Ejemplo 3.1.3 para ver que es 0-hiperbólico. \square

Ejemplo 3.4.3. \mathbb{R} es hiperbólico.

Demostración. Sabemos que la realización como espacio métrico geodésico de la gráfica de Cayley de \mathbb{Z} es isométrica a \mathbb{R} , y ya sabemos que dicha gráfica de Cayley es hiperbólica. \square

Ejemplo 3.4.4. *Todo grupo G finito es hiperbólico.*

Demostración. Al ser G finito está acotado. Por la misma razón $Cay(G)$ también estará acotada. Podemos hacer uso del Ejemplo 3.1.4 para obtener el resultado. \square

Ejemplo 3.4.5. *Para cada $n \geq 2$ se tiene que \mathbb{Z}^n no es hiperbólico.*

Demostración. Sabemos que la propiedad de ser hiperbólico es invariante bajo cuasi-isometrías. Además, \mathbb{R}^n y $Cay(\mathbb{Z}^n)$ son cuasi-isométricos. Haciendo uso del Teorema 3.3.15 se tiene el resultado. \square

El último ejemplo es, de hecho, un contraejemplo que prueba que el producto de grupos hiperbólicos, en general, no es un grupo hiperbólico.

Capítulo 4

Dimensión asintótica.

4.1. Definición y propiedades básicas.

Este capítulo da nombre a este trabajo. El capítulo consiste en construir un invariante en la categoría de geometría gruesa y estudiarlo más a fondo. Aprovechar los espacios hiperbólicos para tener ejemplos con dimensión asintótica finita. Y finalmente, desarrollar herramienta para poder calcular la dimensión asintótica de una gran gama de espacios métricos, entre ellos nuestro protagonista: \mathbb{Z}^n .

Definición 4.1.1. Sean X un espacio métrico, $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ una cubierta de X y $R > 0$. La **R -multiplicidad de la cubierta \mathcal{U}** es el entero n más pequeño tal que para todo x en X la bola $B(x, R)$ interseca a lo más n elementos de \mathcal{U} .

Definición 4.1.2. Decimos que una familia \mathcal{U} está **uniformemente acotada** si

$$\sup_{U \in \mathcal{U}} \text{diam}(U) < \infty.$$

Definición 4.1.3. Sea X un espacio métrico. La **dimensión asintótica** de X es el entero n más pequeño tal que para todo $R > 0$ existe una cubierta uniformemente acotada con R -multiplicidad $n + 1$. Usaremos la notación $\text{Asdim}(X) = n$ para denotar dicho entero.

Si no existe tal n diremos que X tiene dimensión asintótica infinita y lo denotaremos por $\text{Asdim}(X) = \infty$

Ejemplo 4.1.4. Todo espacio métrico acotado X tiene dimensión asintótica cero.

Demostración. Basta tomar la cubierta $\mathcal{U} = \{X\}$ para cada $R > 0$. □

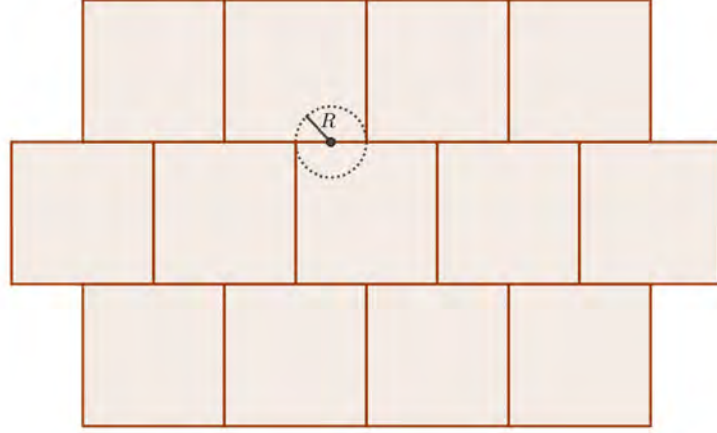


Figura 4.1: Parte de una cubierta de \mathbb{R}^2 con R -multiplicidad 3, para algún $R > 0$. Notemos que el lugar más conflictivo es el punto medio de dos vértices adyacentes donde inciden tres aristas, por lo cual la distancia entre estos dos vértices debe ser mayor a $2R$.

Ejemplo 4.1.5. El conjunto $A = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ con la métrica heredada de \mathbb{R} tiene dimensión asintótica cero.

Demostración. Sea $R > 0$. Para probar el resultado nos basta construir una cubierta con R -multiplicidad 1.

Existe N_0 tal que para todo $n^2, m^2 > N_0$ se tiene que $d_A(n^2, m^2) > 2R$. Proponemos como cubierta

$$\mathcal{U}_R = \{B(0, N_0 + 1)\} \cup \{B(n^2, R)\}_{n^2 > N_0 + 1}.$$

Es evidente que \mathcal{U}_R cubre al conjunto A . Su R -multiplicidad igual a 1 está garantizada por la elección de $N_0 + 1$, y está uniformemente acotada por el máximo entre $N_0 + 1$ y $2R$. Por lo tanto $Asdim(A) = 0$. \square

Ejemplo 4.1.6. La dimensión asintótica de \mathbb{Z} es menor o igual a uno.

Demostración. Sea $R > 0$. Para probar el resultado nos basta construir una cubierta abierta con R -multiplicidad 2.

Proponemos como cubierta

$$\mathcal{U}_R = \{[2nR, 2(n+1)R - 1]\}_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Tenemos que \mathcal{U}_R está uniformemente acotada por $2R$, es evidente que cubre y dado que el diámetro de cada elemento de \mathcal{U}_R es $2R$ tenemos que cada bola $B(n, R)$ interseca a lo más dos elementos de \mathcal{U}_R . Por lo tanto, $Asdim(\mathbb{Z}) \leq 1$. \square

Para probar la igualdad en el ejemplo anterior, o, más en general, para probar que $Asdim(\mathbb{Z}^n) = n$ nos conviene desarrollar más teoría. Pero este ejemplo en particular nos empieza a mostrar las ventajas de este nuevo concepto. La dimensión topológica no alcanza a discernir entre \mathbb{Z}^n y \mathbb{Z}^m , pues ambos espacios son homeomorfos. Sin embargo, nuestra intuición y el acomodo geométrico que solemos darle a estos espacios nos dice que estos espacios métricos deben ser distintos desde una óptica adecuada.

Proposición 4.1.7. *Sea X un espacio métrico y A un subespacio de X . Entonces $Asdim(A) \leq Asdim(X)$.*

Demostración. Sea $R > 0$. Sea $\mathcal{U}_R = \{U_i\}_{i \in I}$ una cubierta de X uniformemente acotada con R -multiplicidad $Asdim(X) + 1$. Usemos dicha cubierta para construir una cubierta de A . Sea

$$\mathcal{V}_R = \{U_i \cap A\}_{i \in I}.$$

Que \mathcal{V}_R sea cubierta y que esté uniformemente acotada lo hereda de \mathcal{U}_R . Para calcular su R -multiplicidad basta ver que $B_A(x, R)$ interseca a lo más tantos elementos de \mathcal{V}_R como $B_X(x, R)$ interseca a elementos de \mathcal{U}_R , pues,

$$B_A(x, R) = B_X(x, R) \cap A.$$

De esto se sigue que la R -multiplicidad de \mathcal{V}_R es menor o igual a $Asdim(X) + 1$. Por lo tanto $Asdim(A) \leq Asdim(X)$. \square

Proposición 4.1.8. *Sean X y Y dos espacios métricos gruesamente equivalentes. Entonces $Asdim(X) = Asdim(Y)$.*

Demostración. Sea $R > 0$. Queremos construir una cubierta de X con R -multiplicidad $Asdim(Y) + 1$. Como X y Y son gruesamente equivalentes existen funciones $f : X \rightarrow Y$ y $\rho_+, \rho_- : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ con ρ_+ y ρ_- no decrecientes tales que $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_-(t) = \infty$ y

$$\rho_-(d_X(x, y)) \leq d_Y(f(x), f(y)) \leq \rho_+(d_X(x, y))$$

para todo x, y en X .

Sea $\mathcal{U}_{\rho_+(R)} = \{U_i\}_{i \in I}$ una cubierta de Y uniformemente acotada con $\rho_+(R)$ -multiplicidad $Asdim(Y) + 1$. Construyamos una cubierta en X a partir de $\mathcal{U}_{\rho_+(R)}$. Sea

$$\mathcal{V}_R = \{f^{-1}(U_i)\}_{i \in I}.$$

$B_X(x, R)$ interseca a lo más tantos elementos de \mathcal{V}_R como $f(B_X(x, R))$ interseca a elementos de $\mathcal{U}_{\rho_+(R)}$, pues, si $B_X(x, R) \cap f^{-1}(U_i) \neq \emptyset$ entonces

$$f(B_X(x, R)) \cap U_i \neq \emptyset,$$

y además,

$$f(B_X(x, R)) \subseteq B_Y(f(x), \rho_+(R)).$$

Para ver que la cubierta \mathcal{V}_R es uniformemente acotada nos valemos que la cubierta $\mathcal{U}_{\rho_+(R)}$ lo es y aplicamos el Lema 1.2.13. Entonces tenemos que \mathcal{V}_R es una cubierta con R -multiplicidad $Asdim(Y) + 1$ y uniformemente acotada. De este hecho obtenemos la desigualdad

$$Asdim(X) \leq Asdim(Y).$$

Observación: Notemos que basta que exista una función gruesa de X a Y para obtener la desigualdad anterior.

Invirtiendo los papeles de X y Y , y usando la función gruesa de Y a X se obtiene la desigualdad $Asdim(Y) \leq Asdim(X)$, y con ello se obtiene el resultado. \square

Proposición 4.1.9. $Asdim(\mathbb{Z}^n) > n - 1$.

Demostración. Supongamos que no es cierto. Es decir, $Asdim(\mathbb{Z}^n) \leq n - 1$. Entonces para todo $R > 0$ existe una cubierta abierta $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de \mathbb{Z}^n con R -multiplicidad menor o igual a n tal que $diam(U_\alpha) < D$, para algún $D > 0$, y para todo α en A . Consideremos $[\cdot]^n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$, la función dada por $[(x_1, x_2, \dots, x_n)]^n = ([x_1], [x_2], \dots, [x_n])$. La función $[\cdot]^n$ es una $(1, \sqrt{n})$ cuasi-isometría entre \mathbb{R}^n y \mathbb{Z}^n . Consideremos la cubierta abierta de \mathbb{R}^n dada por

$$\mathcal{V} = \{Nube([\cdot]^n)^{-1}(U_\alpha, \epsilon)\}_{\alpha \in A}$$

para un ϵ suficientemente pequeño para que no cambie la multiplicidad de la cubierta. Esto último es posible pues podemos elegir un R suficientemente grande que nos permita hacerlo. Notemos que la cubierta \mathcal{V} tiene multiplicidad, respecto a la dimensión cubriente, menor o igual a n y que está uniformemente acotada por una constante K que solo depende de las constantes de la cuasi-isometría, de D y ϵ .

Ahora consideremos a I^n , el producto cartesiano del intervalo $[0, 1]$ n veces, y $\mathcal{W} = \{W_\beta\}_{\beta \in B}$ una cubierta abierta de todo \mathbb{R}^n arbitraria. Queremos construir un refinamiento de \mathcal{W} con multiplicidad menor o igual a n en la restricción de la cubierta a I^n y así llegar a la contradicción deseada. Como I^n es compacto existe un número de Lebesgue d tal que para todo conjunto cuyo diámetro sea menor que d implica que dicho conjunto se queda contenido en algún W_β . Consideremos la homotecia $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $H(x) = (d/K)x$. Las homotecias no cambian la multiplicidad de las cubiertas, respecto a la dimensión cubriente, y mandan abiertos en abiertos. Por lo anterior nos conviene considerar la cubierta abierta dada por la imagen de los elementos de la cubierta \mathcal{V} bajo H :

$$\mathcal{M} = \{H(Nube([\cdot]^n)^{-1}(U_\alpha, \epsilon))\}_{\alpha \in A}.$$

La cubierta \mathcal{M} restringida a I^n es un refinamiento abierto de la cubierta \mathcal{W} restringida a I^n , pues, cumple la condición del número de Lebesgue. Aparte su multiplicidad es menor o igual a n , lo cual contradice que $Dim(I^n) = n$.

Por lo tanto $Asdim(\mathbb{Z}^n) > n - 1$. \square

Nos faltaría corroborar la otra desigualdad para ver que la dimensión asintótica de \mathbb{Z}^n es exactamente n . Un camino a seguir sería dar una cubierta de \mathbb{Z}^n uniformemente acotada con R -multiplicidad $n + 1$, sin embargo esta opción es muy difícil de escribir y es fácil perderse en las cuentas. Por lo cual, por el momento, nos saltaremos ese resultado y seguiremos desarrollando teoría que nos facilitará probarlo después.

Sin embargo este resultado nos permite mostrar el siguiente ejemplo de un espacio con dimensión asintótica infinita.

Ejemplo 4.1.10. *El grupo $\mathbb{Z}^{(\infty)} = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}$ (funciones de los naturales en \mathbb{Z} con soporte finito) equipado con la métrica propia e invariante por la izquierda*

$$d_{\mathbb{Z}^{(\infty)}}((x_1, x_2, \dots, x_n, \dots), (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)) = \sum_{i=1}^{\infty} i|x_i - y_i|$$

tiene dimensión asintótica infinita.

Demostración. Para cada n en \mathbb{N} consideremos el encaje $(n, 0)$ -cuasi-isométrico

$$\begin{aligned} h_n : \mathbb{Z}^n &\rightarrow \mathbb{Z}^{(\infty)} \\ h_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots). \end{aligned}$$

Por lo cual, gracias a las Proposiciones 4.1.8 y 4.1.7, para cada n en \mathbb{N} se tiene que:

$$n \leq \text{Asdim}(\mathbb{Z}^n) = \text{Asdim}(h_n(\mathbb{Z}^n)) \leq \text{Asdim}(\mathbb{Z}^{(\infty)}).$$

Concluimos que $\text{Asdim}(\mathbb{Z}^{(\infty)}) = \infty$ □

4.1.1. Dimensión asintótica de grupos hiperbólicos.

Los grupos hiperbólicos son altamente estudiados en geometría a larga escala. Una de las razones es que son un buen ejemplo de grupos con dimensión asintótica finita.

Proposición 4.1.11. *Sea T un árbol. Entonces $\text{Asdim}(T) \leq 1$.*

Demostración. Sea v un vértice fijo en T , sea $R > 0$ y dejemos correr n en los naturales. Primero probaremos que $\text{Asdim}(\langle T \rangle) \leq 1$. Haciendo esto también tendríamos el resultado deseado para T , pues este último se encaja isométricamente en $\langle T \rangle$. Definimos

$$A_n^R = \{x \in \langle T \rangle \mid Rn \leq d_T(x, v) \leq R(n+1)\}.$$

Notemos que A_n^R es una cubierta de $\langle T \rangle$ con R -multiplicidad menor o igual a 2 pero no cumple la condición de ser uniformemente acotados. Para solventar dicho problema procederemos a subdividir cada uno de los A_n^R mediante la

siguiente relación de equivalencia. Sean x y y en A_n^R con n fijo, entonces $x \sim_n y$ si y solo si $(x|y)_v \geq R(n-1)$. Veamos que es efectivamente una relación de equivalencia:

1. Reflexividad: $x \sim_n x$ ya que $(x|x)_v = d_T(x, v) \geq Rn \geq R(n-1)$ usando que x pertenece a A_n^R .
2. Simetría: Si $x \sim_n y$ entonces $R(n-1) \leq (x|y)_v = (y|x)_v$. Por lo tanto $y \sim_n x$.
3. Transitividad: Si $x \sim_n y$ y $y \sim_n z$ entonces tenemos que

$$\begin{aligned} (x|y)_v &\geq R(n-1) \\ (y|z)_v &\geq R(n-1). \end{aligned}$$

Recordemos que si T es un árbol por el Ejemplo 3.1.3 T es 0-hiperbólico y por la Proposición 3.3.7 tenemos que T es también 0-hiperbólico en el sentido de Gromov por lo cual

$$(x|z)_v \geq \min\{(x|y)_v, (y|z)_v\} - 0 \geq R(n-1)$$

por lo tanto $x \sim_n z$.

Veamos que dichas clases de equivalencia están uniformemente acotadas. Sean x y y en A_n^R tales que $x \sim_n y$. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} d_T(x, y) &= d_T(x, v) + d_T(y, v) - 2(x|y)_v \\ &\leq R(n+1) + R(n+1) - 2R(n-1) \\ &= 4R. \end{aligned}$$

Ahora solo nos falta ver que la R -multiplicidad no cambia al hacer dichas subdivisiones, y esto resulta de que si tomas dos clases en el mismo A_n^R y son distintas, éstas están $2R$ separadas. Probemos esto último.

Sean x y y en A_n^R tales que $x \not\sim_n y$. Entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} 2R(n-1) &> 2(x|y)_v \\ &= d_T(x, v) + d_T(y, v) - d_T(x, y) \\ &\geq Rn + Rn - d_T(x, y). \end{aligned}$$

De donde, despejando, obtenemos que $d_T(x, y) > 2R$. □

Corolario 4.1.12. *Para todo $n \geq 1$ en \mathbb{N} se tiene que F^n , el grupo libre con n generadores (sin contar sus inversos), tiene dimensión asintótica 1.*

Demostración. Gracias a la Proposición 4.1.11 basta fijarnos que la gráfica Cay(F^n, S) es un árbol y por lo tanto $Asdim(F^n) \leq 1$. Aparte \mathbb{Z} se encaja isométricamente en cualquier F^n mediante la aplicación $k \mapsto \sigma^k$ donde σ es cualquiera de los generadores de F^n . Entonces, por las Proposiciones 4.1.8 y 4.1.7, se tiene que $Asdim(F^n) \geq Asdim(\mathbb{Z}) = 1$.

Por lo tanto $Asdim(F^n) = 1$. □

Definición 4.1.13. Sea X un espacio métrico discreto. Decimos que X tiene **crecimiento acotado** si para todo $s > 0$ existe un número N_s tal que toda bola de radio $R + s$ puede ser cubierta usando a lo mas N_s bolas de radio R .

Lema 4.1.14. Sea G un grupo con geometría acotada. Entonces G tiene crecimiento acotado.

Demostración. Sea $s > 0$ y $R > 0$. Consideremos las bolas $B(e, 2s + 1)$ y $B(e, s + R)$. Como G tiene geometría acotada sabemos que existe un número $N(2s + 1)$ tal que $|B(e, 2s + 1)| \leq N(2s + 1)$. Afirmamos que la unión

$$\bigcup_{x \in B(e, 2s+1)} B(x, R)$$

cubre a $B(e, s + R)$.

Sea y en $B(e, s + R)$. Si y pertenece a $B(e, 2s + 1)$ el resultado es claro. Si y no pertenece a $B(e, 2s + 1)$ podemos apoyarnos en $\langle G \rangle$ y fijarnos en una geodésica $[e, y]$ y denotar por p_y al punto donde dicha geodésica corta a la esfera de radio $2s$ centrada en e . Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} d_G(y, p_y) &= d_G(y, e) - d_G(e, p_y) \\ &\leq s + R - 2s \\ &= R - s. \end{aligned}$$

Por lo cual y pertenece a $B_G(p_y, R)$. Dado que existe una isometría que manda cualquier bola a una centrada en el origen se tiene el resultado. \square

En particular, por la Proposición 2.2.7, los grupos finitamente generados tienen crecimiento acotado.

Proposición 4.1.15. Sea G un grupo finitamente generado δ -hiperbólico en el sentido de Gromov. Entonces la dimensión asintótica de G es finita.

Demostración. Sea $R > 0$. Para cada n en los naturales definimos

$$A_n^R = \{g \in \langle \text{Cay}(G) \rangle \mid nR \leq |g| \leq (n + 1)R\}$$

y para todo $K > 0$ definimos

$$S(e, K) = \{g \in \langle \text{Cay}(G) \rangle : |g| = K\}.$$

Al igual que en el caso de los árboles tenemos que los A_n^R cumplen ser cubierta y tienen R -multiplicidad menor o igual a dos pero no cumplen la condición de ser uniformemente acotados. Para solventar este problema procederemos a subdividir cada uno de los A_n^R . Para cada $S(e, nR)$ tomemos un conjunto $M_n = \{m_{n_i}\}_{i=1}^{a_n}$ R -separado y máximo con esta propiedad. Es decir, si u pertenece a $S(e, nR)$ pero no a $\{m_{n_i}\}_{i=1}^{a_n}$ entonces existe un m_{n_i} tal que $d_G(u, m_{n_i}) \leq R$.

Para cada m_{n_i} consideremos el conjunto

$$A_{n_i}^R = \{g \in A_n^R \mid (g|m_{n_i})_e \geq (n - 1/2)R - \delta\}.$$

Veamos que dichos conjuntos efectivamente cubren a A_n^R . Apoyémonos, nuevamente, de $\langle \text{Cay}(G) \rangle$. Sea x en A_n^R y sea $[e, x]$ una geodésica que conecta a e y a x . Sea p_x un punto en la intersección $[e, x] \cap S(e, nR)$. Por la definición de p_x es claro que $d_G(p_x, e) = nR$ y aparte tenemos que $(x|p_x)_e = nR$ pues p_x yace sobre la geodésica $[e, x]$. Ahora, usando que M_n es máximo con la propiedad de ser R -separado, tenemos que existe un m_{n_i} tal que $d_G(p_x, m_{n_i}) \leq R$, o, equivalentemente, $-d_G(p_x, m_{n_i}) \geq -R$. Esto nos conduce a la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} 2(p_x|m_{n_i})_e &= d_G(p_x, e) + d_G(m_{n_i}, e) - d_G(p_x, m_{n_i}) \\ &\geq nR + nR - R \\ &= 2R(n - 1/2). \end{aligned}$$

Por lo cual $(p_x|m_{n_i})_e \geq R(n - 1/2)$. Y ahora, usando que G es δ -hiperbólico en el sentido de Gromov, tenemos que:

$$\begin{aligned} (x|m_{n_i})_e &\geq \min\{(x|p_x)_e, (p_x|m_{n_i})_e\} - \delta \\ &\geq \min\{nR, R(n - 1/2)\} - \delta \\ &= R(n - 1/2) - \delta. \end{aligned}$$

Con lo cual concluimos que x pertenece a $A_{n_i}^R$.

Nos falta ver que los $A_{n_i}^R$ son uniformemente acotados y que tienen R -multiplicidad finita. Veamos que son uniformemente acotados calculando la distancia de un punto x en $A_{n_i}^R$ a m_{n_i} :

$$\begin{aligned} d_G(x, m_{n_i}) &= d_G(x, e) + d_G(e, m_{n_i}) - 2(x|m_{n_i})_e \\ &\leq (n + 1)R + nR - 2((n - 1/2)R - \delta) \\ &= 2R + 2\delta. \end{aligned}$$

Finalmente, veamos que la R -multiplicidad es finita. Sea y en A_n^R y supongamos que la intersección $B_G(y, R) \cap A_{n_i}^R$ es no vacía. Tomemos x en dicha intersección. Consideremos una geodésica $[e, y]$ que una a e y a y y tomemos un q_y en la intersección $[e, y] \cap S(e, (n - 1/2)R)$. Y, análogamente, como pasaba con p_x tenemos que $d_G(q_y, e) = (n - 1/2)R = (y|q_y)_e$. Entonces:

$$\begin{aligned} 2(y|x)_e &= d_G(y, e) + d_G(x, e) - d_G(x, y) \\ &\geq Rn + Rn - R \\ &= 2R(n - 1/2), \end{aligned}$$

por lo cual $(y|x)_e \geq R(n - 1/2)$. Con esta cota se tiene que:

$$\begin{aligned} (q_y|x)_e &\geq \min\{(q_y|y)_e, (y|x)_e\} - \delta \\ &\geq \min\{R(n - 1/2), R(n - 1/2)\} - \delta \\ &= R(n - 1/2) - \delta. \end{aligned}$$

Y usando que $(x|m_{n_i})_e \geq R(n-1/2) - \delta$ pues x pertenece a $A_{n_i}^R$ tenemos que:

$$\begin{aligned} (q_y|m_{n_i})_e &\geq \text{mín}\{(q_y|x)_e, (x|m_{n_i})_e\} - \delta \\ &\geq \text{mín}\{R(n-1/2) - \delta, R(n-1/2) - \delta\} - \delta \\ &= R(n-1/2) - 2\delta. \end{aligned}$$

Y con esta última desigualdad podemos acotar la distancia entre m_{n_i} y q_y :

$$\begin{aligned} d_G(m_{n_i}, q_y) &= d_G(m_{n_i}, e) + d_G(q_y, e) - 2(q_y|m_{n_i})_e \\ &\leq nR + (n-1/2)R - 2(R(n-1/2) - 2\delta) \\ &= (1/2)R + 4\delta. \end{aligned}$$

Entonces m_{n_i} pertenece a la bola $B(q_y, 1/2R + 4\delta)$, y como G tiene crecimiento acotado el número de elementos en esta bola es finito y está acotado. Por lo tanto la R -multiplicidad es finita. \square

4.2. Cotas superiores para la dimensión asintótica

Proposición 4.2.1. *Sean X y Y dos espacios métricos con dimensión asintótica finita. Entonces la dimensión asintótica de $X \times Y$, equipado con la métrica $d_{X \times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$, es menor o igual que $(\text{Asdim}(X) + 1)(\text{Asdim}(Y) + 1) - 1$.*

Demostración. Sea $R > 0$. Como la dimensión asintótica de X y Y es finita, existen cubiertas $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ y $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta \in B}$ con R -multiplicidad $\text{Asdim}(X) + 1$ y $\text{Asdim}(Y) + 1$, y uniformemente acotadas por constantes K_1 y K_2 , respectivamente. Consideremos la cubierta de $X \times Y$ dada por

$$\mathcal{W} = \{U_\alpha \times V_\beta \mid \alpha \in A, \beta \in B\}.$$

La cubierta \mathcal{W} está uniformemente acotada por $K_1 + K_2$ y tiene R -multiplicidad $(\text{Asdim}(X) + 1)(\text{Asdim}(Y) + 1)$. Veamos esto último. Tenemos que

$$B_{X \times Y}((x, y), R) \subset B_X(x, R) \times B_Y(y, R)$$

por lo cual si $B_{X \times Y}((x, y), R)$ interseca a lo más tantos elementos de \mathcal{W} como $B_X(x, R)$ interseca a elementos de \mathcal{U} por tantos elementos como $B_Y(y, R)$ interseca a elementos de \mathcal{V} . Por lo tanto

$$\text{Asdim}(X \times Y) = (\text{Asdim}(X) + 1)(\text{Asdim}(Y) + 1) - 1.$$

\square

Podría parecer que al traducir a un grupo en espacio métrico nos olvidamos de la estructura de grupo y nos quedamos únicamente con la estructura métrica. Las siguientes definiciones y resultados nos muestran que al concepto de dimensión asintótica sí le es relevante la estructura de grupo.

Definición 4.2.2. Sea G un grupo finitamente generado que actúa mediante isometrías en un espacio métrico X y sea $R > 0$. Para cada x en X definimos el R -estabilizador de x como el conjunto

$$\text{Stab}_R(x) = \{g \in G \mid d_X(x, gx) \leq R\}.$$

Observemos que cuando $R = 0$ el R -estabilizador es el estabilizador usual de un punto bajo la acción del grupo G . El R -estabilizador está motivado por el pensamiento de que el R -estabilizador se ve como un estabilizador visto desde suficientemente lejos.

Teorema 4.2.3. Sea G un grupo finitamente generado que actúa mediante isometrías en un espacio métrico X , y sea x_0 en X . Si existe un $k > 0$ tal que $\text{Asdim}(\text{Stab}_R(x_0)) \leq k$ para todo $R > 0$ y X tiene dimensión asintótica finita. Entonces

$$\text{Asdim}(G) \leq (\text{Asdim}(X) + 1)(k + 1) - 1.$$

Demostración. Sean $R > 0$ y S un conjunto finito de generadores simétrico de G . Definimos $O : G \rightarrow X$ como $O(g) = gx_0$. De inmediato notamos que $\text{Stab}_R(x_0) = f^{-1}(B_X[x_0, R])$. Ahora bien, si definimos $\lambda = \max\{d_X(x_0, \sigma x_0) \mid \sigma \in s\} + 1$ y $g = \sigma_1 \sigma_1 \cdots \sigma_m$ con $\sigma_i \in S$ tenemos que:

$$\begin{aligned} d_X(O(g), O(e)) &= d_X(gx_0, ex_0) \\ &= d_X(\sigma_1 \sigma_1 \cdots \sigma_m x_0, x_0) \\ &\leq \sum_{i=1}^m d_X(\sigma_i x_0, x_0) \\ &\leq \sum_{i=1}^m \lambda \\ &= \lambda m \\ &= \lambda |g|. \end{aligned}$$

Y dado que

$$\begin{aligned} d_X(O(g), O(h)) &= d_X(gx_0, hx_0) \\ &= d_X(h^{-1}gx_0, ex_0) \\ &= d_X(O(h^{-1}g), O(e)) \end{aligned}$$

Concluimos que O es λ -Lipschitz.

Ahora, como X tiene dimensión asintótica finita se tiene que existe una cubierta

$\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ uniformemente acotada por $a/2 > 0$ de la órbita de x_0 , Gx_0 , con R -multiplicidad menor o igual a $\text{Asdim}(X) + 1$. Y como $\text{Asdim}(\text{Stab}_a(x_0)) \leq k$, para todo $R > 0$ tenemos que existe una cubierta $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ uniformemente acotada por $b > 0$ con R -multiplicidad $k + 1$. Para cada i en I elegimos un elemento g_i en G tal que $g_i x_0$ pertenezca a U_i . Definimos

$$\mathcal{W} = \{g_i V_j \cap O^{-1}(U_i) \mid i \in I, j \in J\}.$$

Afirmamos que \mathcal{W} es la cubierta buscada. Veamos que cumple las tres condiciones.

Sea g en G . Como $g x_0$ pertenece a algún U_i , tenemos que $g_i^{-1} U_i \subset B_X(x_0, a)$ pues la cubierta \mathcal{U} está uniformemente acotada por $a/2$, y por lo tanto, $g_i^{-1} g x_0$ pertenece a $B_X(x_0, a)$. Es decir, $g_i^{-1} g$ pertenece a $\text{Stab}_a(x_0)$.

Aparte, $g_i^{-1} g$ debe pertenecer a algún V_j , por lo cual g pertenece a $g_i V_j$. Juntando ambas contenciones tenemos que g pertenece a $g_i V_j \cap O^{-1}(U_i)$ y por lo tanto \mathcal{W} efectivamente cubre.

La cubierta \mathcal{W} es uniformemente acotada, pues la cubierta \mathcal{V} es uniformemente acotada y

$$\begin{aligned} \text{diam}(g_i V_j \cap O^{-1}(U_i)) &\leq \text{diam}(g_i V_j) \\ &\leq \text{diam}(V_j). \end{aligned}$$

Y por último, como O es λ -Lipschitz por la observación en la Proposición 4.1.8 tenemos que la r/λ -multiplicidad de \mathcal{U} es a lo más $\text{Asdim}(X) + 1$, por lo cual cualquier bola de radio R en G puede intersecar a lo más $\text{Asdim}(X) + 1$ elementos de la forma $O^{-1}(U_i)$. Aparte como la traslación izquierda por g_i es una isometría en G y la cubierta \mathcal{V} tiene R -multiplicidad a lo más $k + 1$ se tiene que cualquier bola de radio R en G puede intersecar a lo más $k + 1$ elementos de la forma $g_i V_j$. Juntando estos dos hechos tenemos que la R -multiplicidad de la cubierta es a lo más $(\text{Asdim}(X) + 1)(k + 1)$, y por lo tanto,

$$\text{Asdim}(G) \leq (\text{Asdim}(X) + 1)(k + 1) - 1.$$

□

Sean G un grupo con un conjunto de generadores simétrico S y H un subgrupo normal de G . Denotemos por $\pi : G \rightarrow G/H$ la proyección canónica al cociente. Entonces es claro que el conjunto $\{\pi(\sigma) \mid \sigma \in S\}$ es un conjunto de generadores simétrico y podemos dotar a G/H con la métrica que induce este conjunto de generadores.

Lema 4.2.4. *Sea H un subgrupo normal finitamente generado de un grupo finitamente generado G . Entonces $\pi : G \rightarrow G/H$ es 1-Lipschitz con la métrica en G/H mencionada anteriormente.*

Demostración. Basta ver que si $g = \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ con σ_i generadores de G se tiene que:

$$\begin{aligned} |\pi(g)| &= |\pi(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)| \\ &\leq |\pi(\sigma_1)\pi(\sigma_2) \cdots \pi(\sigma_n)| \\ &\leq n \\ &= |g|. \end{aligned}$$

□

De igual forma tenemos que G actúa en G/H mediante isometrías con la multiplicación por la izquierda $(g, aH) \mapsto (ga)H$. Para este caso particular tenemos la siguiente caracterización del R -estabilizador de X .

Lema 4.2.5. *Sea G un grupo finitamente generado y H un subgrupo normal en G . Si consideramos la acción de G en G/H tenemos que $Stab_R(e) = Nube_G(H, R+1)$ para todo $R > 0$.*

Demostración. Si g pertenece a $Stab_R(e)$ tenemos que $|gH| = d_{G/H}(H, gH) \leq R$, i.e., existen generadores $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_t$ tales que $\pi(\sigma_1)\pi(\sigma_2) \cdots \pi(\sigma_t) = gH = \pi(g)$ con $t \leq R$. Sea $h = \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_t$ Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} \pi(gh^{-1}) &= \pi(g)\pi(h^{-1}) \\ &= \pi(g)(\pi(h))^{-1} \\ &= \pi(g)(\pi(g))^{-1} \\ &= H. \end{aligned}$$

Por lo cual, tenemos que gh^{-1} pertenece a H .
Aparte tenemos que:

$$\begin{aligned} d_G(g, gh^{-1}) &= d_G(e, h^{-1}) \\ &= |h^{-1}| \\ &= t \\ &\leq R. \end{aligned}$$

Lo cual implica que $d_g(g, H) \leq R$. Por lo tanto g pertenece a $Nube_G(H, R+1)$. Ahora bien, si g pertenece a $Nube_G(H, R+1)$ tenemos que $d_G(g, H) \leq R$, i.e., existe un h en H tal que $d_G(g, h) \leq R$. Entonces por el Lema 4.2.4 tenemos que

$$\begin{aligned} d_{G/H}(H, gH) &= d_{G/H}(\pi(h), \pi(g)) \\ &\leq 1d_G(g, h) \\ &\leq R. \end{aligned}$$

Por lo cual g pertenece a $Stab_R(e)$.

□

Teorema 4.2.6. *Sea G un grupo finitamente generado y H un subgrupo normal de G . Entonces $Asdim(G) \leq (Asdim(H) + 1)(Asdim(G/H) + 1) - 1$.*

Demostración. Considerando que G actúa mediante isometrías en G/H tenemos que, por el proposición anterior, H es gruesamente equivalente a $Stab_R(e)$ para todo $R > 0$ y por la Proposición 4.1.8 tenemos que

$$Asdim(H) = Asdim(Stab_R(e)).$$

Con esto se cumplen todas las hipótesis del Teorema 4.2.3 y con él tenemos que

$$Asdim(G) \leq (Asdim(H) + 1)(Asdim(G/H) + 1) - 1.$$

□

4.2.1. La mejor cota para la dimensión asintótica del producto.

Nuestra intuición y conocimientos sobre álgebra lineal nos dicen que la dimensión asintótica del producto de dos espacios debería ser la suma de las dimensiones asintóticas pero la cota que se da en la Proposición 4.2.1 está bastante lejos de este valor. Resulta que nuestra intuición está en lo correcto, como suele ser muchas veces en matemáticas, pero para poder demostrarlo es conveniente utilizar una definición equivalente de dimensión asintótica e introducir el concepto de funciones de control dimensional.

Proposición 4.2.7. *Sea X un espacio métrico. Entonces $Asdim(X) \leq n$ si y solo si para todo $R > 0$ existen familias $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots, \mathcal{U}_{n+1}$ tales que los elementos de cada \mathcal{U}_i están R -separados, uniformemente acotados, y la unión de esas familias cubre a todo X .*

Demostración. \Rightarrow Sean $R > 0$ y \mathcal{V} una cubierta de X con $3^{n+1}R$ -multiplicidad $n + 1$ y uniformemente acotada por $a > 0$.

Sea $P_{n+1} = \{\{V_{i_1}, V_{i_2}, \dots, V_{i_{n+1}}\} \mid V_{i_k} \in \mathcal{V}\}$. Para cada A en P_{n+1} definimos

$$I_A^{n+1} = \{x \in X \mid B_X(x, 3^n R) \cap V_{i_k} \neq \emptyset \quad \forall V_{i_k} \in A, \\ B_X(x, 3^n R) \cap V_j = \emptyset \quad \forall V_j \notin A\}.$$

Y definimos:

$$\mathcal{U}_{n+1} = \{I_A^{n+1}\}_{A \in P_{n+1}}.$$

Observemos que si I_A^{n+1} e I_B^{n+1} son elementos distintos de \mathcal{U}_{n+1} , entonces están $3^n R$ separados.

Ahora fijémonos en $X \setminus \bigcup \mathcal{U}_{n+1}$ y en la cubierta \mathcal{W}^1 que nace de intersecar los elementos de la cubierta \mathcal{V} con $X \setminus \bigcup \mathcal{U}_{n+1}$. Inmediatamente notamos que la

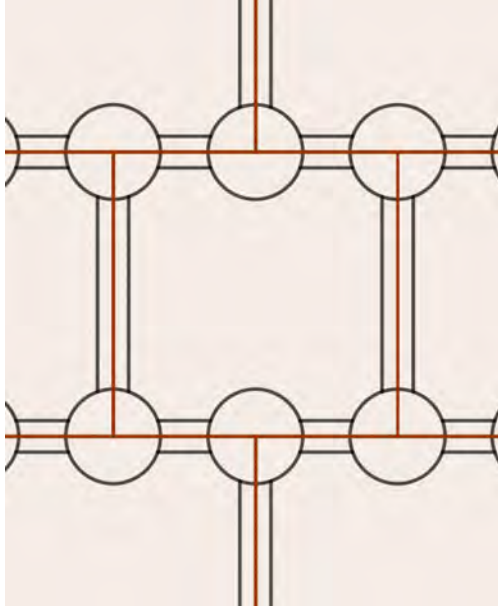


Figura 4.2: Así se ven los elementos I_A^n para la cubierta de \mathbb{R}^2 dada en la figura 4.1

cubierta \mathcal{W}^1 tiene $3^n R$ -multiplicidad n . Definimos $P_n = \{\{W_{i_1}, W_{i_2}, \dots, W_{i_n}\} \mid W_{i_n} \in \mathcal{W}^1\}$ y para cada A en P_n definimos:

$$I_A^n = \{x \in X \setminus \bigcup \mathcal{U}_{n+1} \mid B_X(x, 3^{n-1}R) \cap V_{i_k} \neq \emptyset \quad \forall V_{i_k} \in A, \\ B_X(x, 3^{n-1}R) \cap V_j = \emptyset \quad \forall V_j \notin A\}.$$

Y con esto definimos:

$$\mathcal{U}_n = \{I_A^n\}_{A \in P_n}.$$

Notemos que ahora si I_A^n e I_B^n son elementos distintos de \mathcal{U}_n , entonces están $3^{n-1}R$ separados.

Inductivamente podemos construir cubiertas \mathcal{W}^i para $X \setminus (\bigcup_{j \geq n+1-i} \mathcal{U}_j)$ y conjuntos \mathcal{U}_i que están $3^{n+1-i}R$ separados para toda i entera $0 < i \leq n+1$. Afirmamos que $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots, \mathcal{U}_{n+1}$ son las familias buscadas. La unión de los \mathcal{U}_i cubre a X por construcción y por el hecho de que si x está en X entonces $B_X(x, R) \subset B_X(x, 3^{n+1}R)$ interseca a lo más $n+1$ elementos de la cubierta \mathcal{V} .

Cada I_A^i está acotado por $(n+1)(a+3^{n+1}R)$ pues:

$$\begin{aligned} \text{diam}(I_A^i) &\leq \sum_{V_{i_k} \in A} (\text{diam}(V_{i_k}) + 3^{n+1}R) \\ &\leq \sum_{V_{i_k} \in A} (a + 3^{n+1}R) \\ &\leq (n+1)(a + 3^{n+1}R). \end{aligned}$$

Que los elementos de cada \mathcal{U}_i estén R -separados lo garantiza la construcción.

⇐] Sea $R > 0$. Supongamos que existen $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots, \mathcal{U}_{n+1}$ familias de conjuntos $2R$ separados y uniformemente acotados tales que su unión cubre a X . Es decir,

$$\bigcup_{i=1}^{n+1} \mathcal{U}_i = X.$$

Aparte, como los elementos de cada \mathcal{U}_i están $2R$ separados tenemos que cualquier bola de radio R interseca a los más un elemento de cada \mathcal{U}_i . Esto último nos dice precisamente que la R -multiplicidad es a los más $n+1$. Por lo tanto $\text{Asdim}(X) \leq n$. \square

Corolario 4.2.8. *Sea X es un espacio métrico. Entonces $\text{Asdim}(X) \leq n$ si y solo si existe una función $D_X : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ que cumple que para todo $R > 0$ existe una cubierta $\mathcal{U} = \bigcup_{i=1}^{n+1} \mathcal{U}_i$ tal que los elementos de cada \mathcal{U}_i están R -separados, y además están uniformemente acotados por $D_X(R)$.*

Definición 4.2.9. *La función D_X que se menciona en el corolario anterior se llama **función de control n -dimensional** de X .*

Ahora, si tenemos que $k \geq n+1$ podemos generalizar un poco más. Una **función de control (n, k) -dimensional** de X es una función $D_X : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ que cumple que para todo $R > 0$ existe una cubierta $\mathcal{U} = \bigcup_{i=1}^k \mathcal{U}_i$ tal que los elementos de cada \mathcal{U}_i están R -separados, están uniformemente acotados por $D_X(R)$, y además, $\bigcup_{i \in T} \mathcal{U}_i = X$ para todo conjunto T que cumpla $T \subset \{1, 2, 3, \dots, k\}$ y que el cardinal de T sea mayor o igual que $n+1$. Notemos que esta última condición es equivalente a que para todo x en X , x está en elementos de por lo menos $k - n$ familias distintas.

Lema 4.2.10. *Si D_X^{n+1} una función de control n -dimensional de X podemos definir, recursivamente, $\{D_X^i\}_{i \geq n+1}$ mediante:*

$$D_X^{i+1}(R) = D_X^i(3R) + 2R.$$

Entonces, cada D_X^k es una función de control (n, k) -dimensional de X .

Demostración. Procederemos por inducción. El caso $k = n + 1$ se cumple trivialmente.

Supongamos que el resultado es válido para algún $k \geq n + 1$. Sea $\mathcal{U} = \cup_{i=1}^k \mathcal{U}_i$ una cubierta tal que los elementos de cada \mathcal{U}_i están $3R$ -separados, están uniformemente acotados por $D_X^k(3R)$, y además $\cup_{i \in T} \mathcal{U}_i = X$ para todo conjunto T que cumpla $T \subset \{1, 2, 3, \dots, k\}$ y que el cardinal de T sea mayor o igual que $n + 1$. Definimos para todo i tal que $0 < i \leq k$:

$$\mathcal{U}'_i = \{Nube_X(U, R)\}_{U \in \mathcal{U}_i}$$

Notemos que ahora los \mathcal{U}'_i están R -separados y uniformemente acotados por $D_X^k(3R) + 2R$.

Sea P el conjunto de subconjuntos de $\{1, 2, 3, \dots, k\}$ con a lo más $k - n$ elementos. Ahora definimos:

$$\mathcal{U}'_{k+1} = \left\{ \bigcap_{s \in S} A_s \setminus \bigcup_{i \notin S} \mathcal{U}'_i \right\}_{S \in P}$$

donde cada A_s pertenece a \mathcal{U}_s . En otras palabras, tomamos intersecciones de a los más s elementos, los cuales pertenecen a una familia, se toma uno solo por familia, y le quitamos los elementos que pertenecen a familias no seleccionadas pero con todo y sus nubes correspondientes. Observemos que cada elemento de \mathcal{U}'_{k+1} se queda contenido en algún \mathcal{U}_j por lo cual están uniformemente acotados por $D_X^k(3R) + 2R$. Falta ver que los elementos de \mathcal{U}'_{k+1} están R -separados. Supongamos que no lo están, i.e, existen

$$A = \bigcap_{s \in S} A_s \setminus \bigcup_{i \notin S} \mathcal{U}'_i,$$

$$B = \bigcap_{t \in T} B_t \setminus \bigcup_{i \notin T} \mathcal{U}'_i$$

con S distinto de T y elementos a en A y b en B tales que $d_X(a, b) \leq R$. Entonces existe un s_0 en $S \setminus T$ tal que a pertenece a A_{s_0} , o bien, existe un t_0 en $T \setminus S$ tal que b pertenece a B_{t_0} . Sin pérdida de generalidad, consideremos el primer caso. Entonces existe un elemento de \mathcal{U}_{s_0} cuya nube de radio R contiene a b , y por lo tanto, b pertenece a algún elemento de \mathcal{U}'_{s_0} , una contradicción pues s_0 no está en T .

Finalmente, tomemos un subconjunto W de $\{1, 2, 3, \dots, k + 1\}$ con al menos $n + 1$ elementos. Notemos que si $k + 1$ no pertenece a W entonces $\cup_{i \in W} \mathcal{U}'_i$ cubre a todo X , pues los \mathcal{U}_i originales tenían dicha propiedad. De igual manera se cumple si W contiene al menos $n + 1$ elementos distintos a $k + 1$. Solo faltaría ver que pasa si $|W| = n + 1$ y $k + 1$ pertenece a W .

Sea x en X y supongamos que $W = \{\mathcal{U}'_{i_1}, \mathcal{U}'_{i_2}, \mathcal{U}'_{i_3}, \dots, \mathcal{U}'_{i_n}, \mathcal{U}'_{k+1}\}$. Si x está en algún \mathcal{U}_{i_j} con $1 \leq j \leq n$ no hay nada que hacer. Si x no está en ningún \mathcal{U}_{i_j} sea:

$$H = \{i \in \{1, 2, \dots, k\} \mid x \in \mathcal{U}_i\}$$

y notemos que $0 < |H| \leq k - n$, pues, x no está en por lo menos n elementos y debe estar en al menos uno, pues, la unión de los \mathcal{U}_i cubría. Por esto x pertenece a:

$$\bigcap_{h \in H} A_h \setminus \bigcup_{i \notin H} \mathcal{U}'_i$$

que a su vez se queda contenido en \mathcal{U}'_{k+1} .

Por lo tanto D_X^k es una función de control (n, k) -dimensional de X . \square

Teorema 4.2.11. Sean X y Y dos espacios métricos con dimensión asintótica finita. Entonces

$$Asdim(X \times Y) \leq Asdim(X) + Asdim(Y).$$

Demostración. Sean $R > 0$, $n = Asdim(X)$, $m = Asdim(Y)$ y denotemos $k = m + n + 1$. Sean D_X^k una función de control (n, k) -dimensional de X y D_Y^k una función de control (m, k) -dimensional de Y . Tomemos una familia $\{\mathcal{U}_i\}_{i=1}^k$ R separada, y uniformemente acotada por $D_X^k(R)$ tal que cualquier subfamilia cuyos índices estén en $\{1, 2, 3, \dots, k\}$ de cardinalidad al menos n sea cubierta de X . Análogamente, tomemos una familia $\{\mathcal{V}_i\}_{i=1}^k$ R separada y uniformemente acotada por $D_Y^k(R)$ tal que cualquier subfamilia cuyos índices estén en $\{1, 2, 3, \dots, k\}$ de cardinalidad al menos m sea cubierta de Y . Definamos

$$\mathcal{W} = \{\mathcal{U}_i \times \mathcal{V}_i\}_{i=1}^k$$

y notemos que \mathcal{W} cubre pues si (x, y) pertenece a $X \times Y$ entonces x está en por lo menos $k - n = m + 1$ familias de $\{\mathcal{U}_i\}_{i=1}^k$, y y está en por lo menos $k - m = n + 1$ familias de $\{\mathcal{V}_i\}_{i=1}^k$. La suma de los elementos de la cubierta en las que están x y y respectivamente es $n + 1 + m + 1 = k + 1$ por lo cual debe existir al menos un índice que j tal que x pertenece a \mathcal{U}_j y y pertenece a \mathcal{V}_j .

Ver que los elementos de \mathcal{W} están R -separados es trivial. Por último, es uniformemente acotada, pues:

$$\begin{aligned} diam(\mathcal{U}_i \times \mathcal{V}_i) &\leq diam(\mathcal{U}_i) + diam(\mathcal{V}_i) \\ &\leq D_X^k(R) + D_Y^k(R). \end{aligned}$$

\square

Corolario 4.2.12. $Asdim(\mathbb{Z}^n) = n$.

Demostración. Gracias al teorema anterior tenemos que, inductivamente, $Asdim(\mathbb{Z}^n) \leq n$, y por la Proposición 4.1.9 tenemos que $Asdim(\mathbb{Z}^n) \geq n$. \square

Corolario 4.2.13. No existe ningún árbol cuasi-isométrico a \mathbb{R}^n para $n > 1$.

Demostración. Se sigue de que la dimensión asintótica es un invariante cuasi-isométrico y que la dimensión asintótica de \mathbb{R}^n es n mientras que la de un árbol es menor o igual a uno. \square

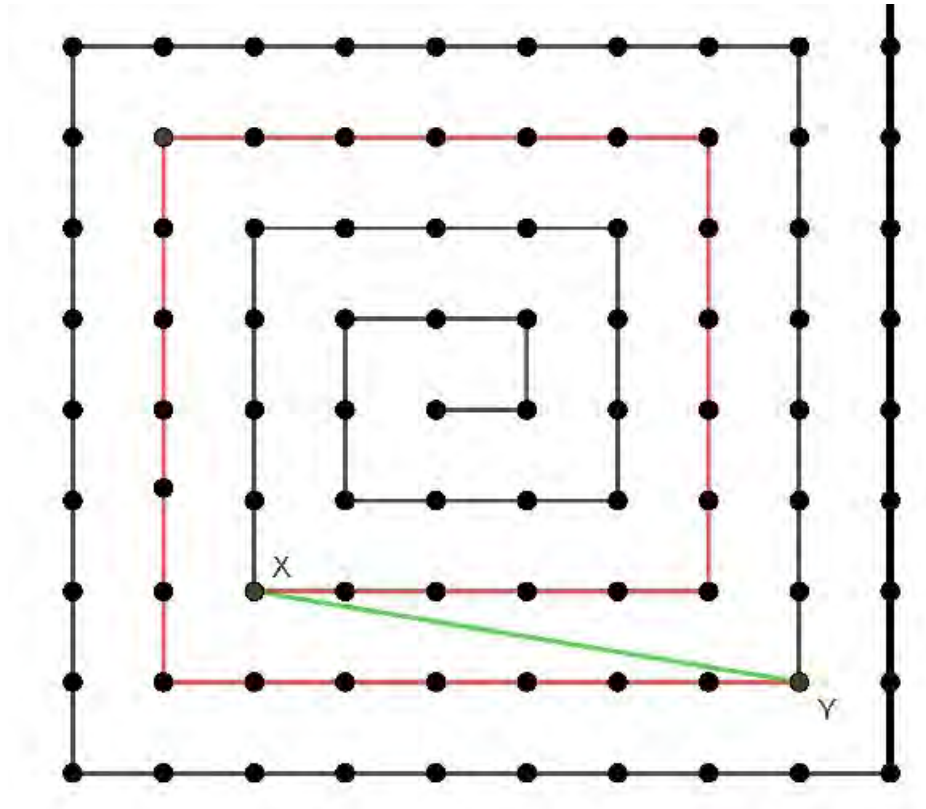


Figura 4.3: Árbol encajado en \mathbb{R}^2 cuyos vértices tienen coordenadas enteras. En una primera instancia podría parecer que dicho árbol es una red en \mathbb{R}^2 , pero, si observamos de cerca la trayectoria roja (que denota una geodésica en la gráfica) y la verde (que denota una geodésica en \mathbb{R}^2) vemos que las formas de tomar distancias son ampliamente distintas.

4.3. Número de terminaciones.

Ya sabemos que todos los árboles tienen dimensión asintótica cero pero no sabemos si todos los árboles son gruesamente equivalentes entre ellos. La respuesta, como el lector podría anticipar, es que no. Una buena forma de darse cuenta de esto es mediante el número de terminaciones de una gráfica, que, intuitivamente, cuenta el número de componentes conexas en el infinito.

Definición 4.3.1. *Sea G una gráfica conexa. El número de terminaciones de G es el número n más pequeño tal que para todo subconjunto de vértices finito F tenemos que $G \setminus F$ tiene a lo más n componentes conexas no acotadas.*

Ejemplo 4.3.2. *Si G es una gráfica finita, entonces, G tiene cero terminaciones.*

Ejemplo 4.3.3. *La gráfica $\text{Cay}(\mathbb{Z})$ tiene número de terminaciones igual a dos.*

Demostración. Sea F un subconjunto de los enteros finito. Sea $p = \max\{a \mid a \in F\}$ y sea $q = \min\{a \mid a \in F\}$. Entonces tenemos que los intervalos $(-\infty, q)$ y (p, ∞) son las únicas componentes conexas y no acotadas. Y, como F fue arbitrario podemos concluir que $\text{Cay}(\mathbb{Z})$ tiene número de terminaciones igual a dos. \square

Teorema 4.3.4. *Supongamos que un árbol G es gruesamente equivalente a un árbol H , ambos con número de terminaciones finito. Entonces G y H tienen el mismo número de terminaciones.*

Demostración. Supongamos que G tiene número de terminaciones n y que H tiene número de terminaciones m .

Sea $f : H \rightarrow G$ una equivalencia gruesa y sea F un conjunto finito de vértices de G tal que $G - F$ tiene n componentes conexas no acotadas $\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$. Entonces $f^{-1}(F)$ es un conjunto finito y la preimagen de cada C_i es un conjunto no acotado, pues, de no serlo contradiría que la función gruesa inversa es propia. Aparte las preimágenes de los C_i son ajenas, pues, los C_i no se intersecaban. Dado que H es un árbol, la única manera que dos preimágenes de componentes conexas terminaran estando en la misma componente conexa sería que alguno de sus vértices (uno de cada uno) compartiesen una y solo una arista. Para remediar esto último, basta añadir a F la imagen de uno de los vértices de dicha arista, lo cual podemos hacer pues es una cantidad finita. De esta manera tendríamos por lo menos n componentes conexas no acotadas en H y como H tiene número de terminaciones m concluimos que $n \leq m$.

Análogamente obtenemos la otra desigualdad usando la función gruesa inversa. \square

Ejemplo 4.3.5. *Las siguientes gráficas no son gruesamente equivalentes.*



(a) Árbol con número terminaciones igual a 3.

(b) Árbol con número terminaciones igual a 5.

Figura 4.4: Árboles no cuasi-isométricos.

Capítulo 5

Otros invariantes bajo cuasi-isometrías.

5.1. Docilidad.

Otro invariante bajo cuasi-isometrías es el concepto de la docilidad de un grupo. La docilidad de un grupo admite varias presentaciones. Una de ellas está definida con base en una condición isoperimétrica. La isoperimetría es la relación entre el volumen de un conjunto y el área de su frontera geométrica.

Definición 5.1.1. Sea G un grupo y A un subconjunto de G . Dado $R > 0$, la R -frontera de A se define de la siguiente manera:

$$\partial_R(A) = \{g \in G \setminus A \mid d_G(g, A) \leq R\}.$$

La isoperimetría ayuda a entender la docilidad como la existencia de conjuntos finitos con R -frontera pequeña. La siguiente definición se la debemos a Følner por cual a menudo se refieren a ella como condición de conjuntos de Følner.

Definición 5.1.2. Sea G un grupo finitamente generado. Diremos que G es *dócil* o *amenable* si para todo $R > 0$ y $\epsilon > 0$ existe un subconjunto F finito y no vacío, $F \subset G$, que cumple:

$$\frac{|\partial_R(F)|}{|F|} \leq \epsilon.$$

En este caso diremos que F es un conjunto de Følner.

Ejemplo 5.1.3. Si G es un grupo finito entonces G es dócil.

Demostración. Sea $R > 0$ y $\epsilon > 0$. Como G es finito podemos tomar a G mismo para satisfacer la condición de docilidad. Así la R -frontera, por definición, es vacía y tenemos que:

$$\frac{|\partial_R(G)|}{|G|} = \frac{0}{|G|} = 0 \leq \epsilon.$$

□

Ejemplo 5.1.4. \mathbb{Z} es dócil.

Demostración. Sea $R > 0$ y $\epsilon = \frac{1}{n}$ para algún n en \mathbb{N} . Entonces para cada n en \mathbb{N} definimos:

$$F_{R,n} = B_{\mathbb{Z}}[0, nR].$$

Y así tenemos que la R -frontera de $F_{R,n}$ es:

$$\begin{aligned} \partial_R(F_{R,n}) = \{ & -Rn - R, -Rn - (R - 1), \dots, -Rn - 2, -Rn - 1 \} \cup \\ & \{ Rn + 1, Rn + 2, \dots, Rn + (R - 1), Rn + R \}. \end{aligned}$$

Verifiquemos que efectivamente son conjuntos de Følner:

$$\begin{aligned} \frac{|\partial_R(F_{R,n})|}{|F_{R,n}|} &= \frac{2R}{2nR + 1} \\ &= \frac{1}{n + \frac{1}{2R}} \\ &\leq \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

□

Proposición 5.1.5. Sean G un grupo finitamente generado con dos conjuntos de generadores finitos S y S' . Si G es dócil respecto a la métrica generada por S también lo es respecto a la métrica generada por S' .

Demostración. Sean $R > 0$ y $\epsilon > 0$. Denotemos por $|\cdot|$ y $|\cdot|'$ a las funciones longitud de palabra generadas por S y S' , respectivamente. Recordemos que por el Teorema 2.1.6 tenemos que existe $L > 0$ tal que

$$|g|' \leq L|g|$$

para todo g en G .

De aquí concluimos que la R -frontera de un conjunto respecto a $|\cdot|$ se queda contenida en la LR -frontera del mismo conjunto pero respecto a $|\cdot|'$.

Entonces existe un conjunto de Følner $F_{LR,\epsilon}$ tal que

$$\frac{|\partial'_{LR}(F_{LR,\epsilon})|}{|F_{LR,\epsilon}|} \leq \epsilon$$

donde la frontera primada denota que es la frontera respecto a $|\cdot|'$. Y si lo juntamos con el resultado sobre las R -fronteras tenemos que:

$$\frac{|\partial_R(F_{LR,\epsilon})|}{|F_{LR,\epsilon}|} \leq \frac{|\partial'_{LR}(F_{LR,\epsilon})|}{|F_{LR,\epsilon}|} \leq \epsilon,$$

lo cual nos permite concluir el resultado deseado. \square

Proposición 5.1.6. *Sean G y H dos grupos finitamente generados tales que H es subgrupo de G . Entonces, si G es dócil, H también lo es.*

Demostración. Sean $R > 0$ y $\epsilon > 0$. Por la proposición anterior sabemos que la docilidad no depende de la elección de los generadores, por lo cual podemos elegir, sin pérdida de generalidad, conjuntos de generadores A y B de G y H , respectivamente, tales que B se quede contenido en A .

Como G es dócil sabemos que existe un conjunto de Følner $F_{R,\epsilon}$ para $R > 0$ y $\epsilon > 0$ dados, y consideremos $\{H_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ las clases laterales izquierdas de H en G . Para todo $i \in \mathbb{N}$ definimos:

$$K_i = H_i \cap F_{R,\epsilon}.$$

Ahora bien si denotamos por ∂_R^G y ∂_R^H a las R -fronteras en G y H , respectivamente, tenemos, por la elección de los conjuntos generadores, que $\partial_R^H(F_{R,\epsilon})$ se queda contenida en $\partial_R^G(F_{R,\epsilon})$. De este hecho tenemos que:

$$|\partial_R^G(F_{R,\epsilon})| \geq |\partial_R^H(F_{R,\epsilon})| = \sum_{i \in \mathbb{N}} |\partial_R^H(K_i)|.$$

De aquí obtenemos que:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{|K_i|}{|F_{R,\epsilon}|} \cdot \frac{|\partial_R^H(K_i)|}{|K_i|} &\leq \frac{|\partial_R^H(F_{R,\epsilon})|}{|F_{R,\epsilon}|} \\ &\leq \frac{|\partial_R^G(F_{R,\epsilon})|}{|F_{R,\epsilon}|} \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

Afirmamos que existe un índice i_0 tal que:

$$\frac{|\partial_R^H(K_{i_0})|}{|K_{i_0}|} \leq \epsilon$$

pues, de lo contrario tendríamos que:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{|K_i|}{|F_{R,\epsilon}|} \cdot \frac{|\partial_R^H(K_i)|}{|K_i|} &> \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{|K_i|}{|F_{R,\epsilon}|} \cdot \epsilon \\ &= 1 \cdot \epsilon \\ &= \epsilon, \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto K_{i_0} es un conjunto de Følner, y como H_{i_0} es isométrico a H se tiene el resultado. \square

Lema 5.1.7. *Sea H un subgrupo de un grupo G . Si H es una C -red en G , entonces existe una cuasi-isometría suprayectiva de $H \times \mathbb{Z}_n$ en G para algún n en \mathbb{N} .*

Demostración. Como la métrica en G es propia, existe un $n > 0$ tal que todas las bolas de radio C tienen a lo más n elementos. Como H es una C -red en G la unión de todas las bolas con centro en puntos de H y radio C cubre a G . Entonces para cada h en H nos podemos fijar en su bola de radio C y enumerar sus elementos desde 1 hasta n , i.e.,

$$B_G(h, C) = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}.$$

Nuestra función buscada es la que manda a (h, i) a h_i . Es suprayectiva por construcción y es $(1, 2C)$ -cuasi-isometría, pues es justamente el valor del diámetro de la bola de radio C . \square

Teorema 5.1.8. *Sean G y H dos grupos finitamente generados y cuasi-isométricos. Si H es dócil, entonces G también lo es.*

Demostración. Sean $R > 0$, $\epsilon > 0$ y $f : G \rightarrow H$ una (λ, C) cuasi-isometría. Gracias al Lema 5.1.7 y que la docilidad se hereda a subgrupos podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que f es suprayectiva. Como H es dócil existe $F_{\lambda R+C, \epsilon}$ un conjunto de Følner en H . Definimos:

$$F_G = f^{-1}(F_{\lambda R+C, \epsilon}).$$

F_G es finito pues f regresa conjuntos acotados en conjuntos acotados, y para grupos finitamente generados estas dos nociones son equivalentes, por tener una métrica propia. Veamos que F_G es un conjunto de Følner para R y ϵ . Dado que f es una (λ, C) cuasi-isometría tenemos que la imagen de la R -frontera de F_G se queda contenida en la $(\lambda R + C)$ -frontera de $F_{\lambda R+C, \epsilon}$, y por lo tanto,

$$|\partial_R^G(F_G)| \leq |\partial_{\lambda R+C}^H(F_{\lambda R+C, \epsilon})|.$$

Usando que f es suprayectiva obtenemos que:

$$|F_{\lambda R+C, \epsilon}| \leq |F_G|.$$

Finalmente, juntando ambas desigualdades, llegamos a:

$$\frac{|\partial_R^G(F_G)|}{|F_G|} \leq \frac{|\partial_{\lambda R+C}^H(F_{\lambda R+C, \epsilon})|}{|F_{\lambda R+C, \epsilon}|} \leq \epsilon,$$

como se quería demostrar. \square

Recordemos que si G es un grupo, F es un subconjunto de G y $g \in G$ denotamos por $Fg = \{fg \mid f \in F\}$ a la traslación derecha del subconjunto F por g ; y que $A\Delta B$ denota la diferencia simétrica de los conjuntos A y B .

Proposición 5.1.9. *Sea G un grupo finitamente generado. Entonces G es dócil si y solo si para todo $\epsilon > 0$ y $R > 0$ existe un subconjunto finito F tal que*

$$\frac{|F\Delta F\gamma|}{|F|} \leq \epsilon$$

para todo γ en G que cumpla $|\gamma| \leq R$.

Demostración. Primero veamos que

$$\bigcup_{|\gamma| \leq R} F\gamma \setminus F = \partial_R(F).$$

En efecto, si x pertenece a $F\gamma \setminus F$ entonces $x = f\gamma$ para algún f en F , y así:

$$\begin{aligned} d_G(x, F) &\leq d_G(x, f) \\ &= d_G(f\gamma, f) \\ &= d_G(\gamma, e) \\ &= |\gamma| \\ &\leq R. \end{aligned}$$

Y análogamente, si $d_G(x, F) \leq R$, entonces, existe un f en F tal que $d_G(x, f) \leq R$, y por tanto $|f^{-1}x| \leq R$. Así, x pertenece a $F\gamma$ con $\gamma = f^{-1}x$. De esta igualdad obtenemos que:

$$\begin{aligned} |\partial_R(F)| &= \left| \bigcup_{|\gamma| \leq R} F\gamma \setminus F \right| \\ &\leq \sum_{|\gamma| \leq R} |F\gamma \setminus F| \\ &\leq \sum_{|\gamma| \leq R} |F\gamma\Delta F|. \end{aligned}$$

Aparte, para cada $|\gamma| \leq R$ se tiene que

$$\begin{aligned} |F\gamma\Delta F| &= |F\gamma \setminus F| + |F \setminus F\gamma| \\ &= |F \setminus F\gamma^{-1}| + |F \setminus F\gamma| \end{aligned}$$

y como $|\gamma| = |\gamma^{-1}| \leq R$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \sum_{|\gamma| \leq R} |F\gamma\Delta F| &= 2 \sum_{|\gamma| \leq R} |F\gamma \setminus F| \\ &\leq 2|B_G[e, R]|(\max_{|\gamma| \leq R} (|F\gamma \setminus F|)) \\ &\leq 2|B_G[e, R]|(|\partial_R(F)|). \end{aligned}$$

De aquí obtenemos las desigualdades:

$$\frac{\sum_{|\gamma| \leq R} |F\gamma\Delta F|}{2|B_G[e, R]|} \leq |\partial_R(F)| \leq \sum_{|\gamma| \leq R} |F\gamma\Delta F|.$$

Ahora bien, si G es dócil, para cada $\epsilon > 0$ y $R > 0$ debe existir un conjunto de Følner F tal que:

$$\frac{|\partial_R(F)|}{|F|} \leq \frac{\epsilon}{2|B_G[e, R]|}.$$

Y por tanto:

$$\begin{aligned} \frac{|F\gamma\Delta F|}{|F|} &\leq \frac{\sum_{|\gamma| \leq R} |F\gamma\Delta F|}{|F|} \\ &\leq \frac{2|B_G[e, R]| |\partial_R(F)|}{|F|} \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

De igual forma, si para todo $|\gamma| \leq R$ se tiene que existe un conjunto finito F , tal que para todo $\epsilon > 0$ y $R > 0$ se cumple:

$$\frac{|F\Delta F\gamma|}{|F|} \leq \frac{\epsilon}{|B_G[e, R]|}.$$

Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{|\partial_R(F)|}{|F|} &\leq \frac{\sum_{|\gamma| \leq R} |F\Delta F\gamma|}{|F|} \\ &\leq \frac{|B_G[e, R]| \max_{|\gamma| \leq R} (|F\Delta F\gamma|)}{|F|} \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

□

5.1.1. Crecimiento de un grupo

Definición 5.1.10. Sea G un grupo finitamente generado con un conjunto de generadores S . Entonces definimos la **función volumen** $Vol_{G,S} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dado por:

$$Vol_{G,S}(n) = |B_G[e, n]|$$

donde G está equipado con la métrica generada por S .

Definición 5.1.11. Decimos que G tiene a lo más *crecimiento exponencial* si existe $C > 0$ tal que:

$$\text{Vol}_{G,S}(n) \leq \exp(Cn).$$

Definición 5.1.12. Decimos que G tiene *crecimiento sub-exponencial* si se cumple que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\text{Vol}_{G,S}(n))}{n} = 0.$$

Si por el contrario, dicho límite no se hace cero decimos que G tiene *crecimiento exponencial*.

Ejemplo 5.1.13. \mathbb{Z}^k tiene *crecimiento sub-exponencial*.

Demostración. Basta ver que la cardinalidad de elementos en la bola cerrada centrada en e y radio n , con los generadores usuales, es:

$$|B_{\mathbb{Z}^k}[e, n]| = \frac{1}{k!}(2n)^k + \frac{1}{(k-1)!}(2n)^{k-1} + \frac{1}{(k-2)!}(2n)^{k-2} + \dots .$$

□

Ejemplo 5.1.14. F_k , el grupo libre con k generadores, tiene *crecimiento exponencial* para todo $k \geq 2$.

Demostración. Basta ver que la cardinalidad de elementos en la bola centrada en e y radio n con los generadores usuales es:

$$|B_{F^k}[e, n]| = \frac{k}{k-1}(2k-1)^n - \frac{1}{k-1}.$$

□

Aunque el valor explícito de la función volumen depende del conjunto de generadores, el tipo de crecimiento no depende del conjunto de generadores, pues, utilizando el Teorema 2.1.6, existe un $L > 0$ tal que $B_{G,S}[e, n]$ se queda contenida en $B_{G,S'}[e, Ln]$.

De igual forma la razón de crecimiento es invariante bajo cuasi-isometrías pues si G y H son cuasi-isométricos existen constantes λ y C tales que $B_G[e, n]$ se queda contenida en $B_H[e, \lambda n + C]$.

El siguiente teorema nos relaciona el concepto de docilidad con el de crecimiento de un grupo.

Teorema 5.1.15. Sea G un grupo con *crecimiento sub-exponencial*. Entonces G es *dócil*.

Demostración. Consideremos la bola cerrada $B_G[e, n]$ y descomongámosla de la siguiente manera en conjuntos ajenos:

$$B_G[e, n] = B_G[e, n-1] \cup S_G(e, n) = B_G[e, n-1] \cup \partial_1(B_G[e, n-1])$$

donde $S_G(e, n)$ denota la esfera de radio n centrada en e .

Entonces, podemos ver el cardinal de $B_G(e, n)$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} |B_G[e, n]| &= |B_G[e, n-1]| + |S_G(e, n)| \\ &= |B_G[e, n-1]| \left(1 + \frac{|S_G(e, n)|}{|B_G[e, n-1]|} \right) \\ &= |B_G[e, n-2]| \left(1 + \frac{|S_G(e, n-1)|}{|B_G[e, n-2]|} \right) \left(1 + \frac{|S_G(e, n)|}{|B_G[e, n-1]|} \right) \\ &= \dots \\ &= \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{|S_G(e, i)|}{|B_G[e, i-1]|} \right). \end{aligned}$$

Y, si suponemos que G no es dócil, tendríamos que existe un $K > 0$ tal que:

$$\frac{|\partial_K(B_G[e, n-1])|}{|B_G[e, n-1]|} > \epsilon_0$$

para algún $\epsilon_0 > 0$. Pero podemos suponer sin pérdida de generalidad que $K = 1$ pues G es cuasi-isométrico a G con la misma métrica dividida por K .

Entonces, por los cálculos previos, tenemos que:

$$|B_G[e, n]| = \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{|S_G(e, i)|}{|B_G[e, i-1]|} \right) > (1 + \epsilon_0)^n.$$

Y esto implica que el crecimiento del grupo es exponencial. \square

5.2. Propiedad A

En general la docilidad de un grupo y la dimensión asintótica podrían parecer conceptos algo lejanos. Sin embargo, hay un punto de concurrencia de ambos conceptos llamada Propiedad A. Esta sección está dedicada a probar dichos vínculos.

Definición 5.2.1. *Sea X un espacio uniformemente discreto. Decimos que X tiene la **Propiedad A** si para todo $\epsilon > 0$ y $R > 0$ existe una colección de conjuntos finitos $\{A_x\}_{x \in X}$ tales que cada $A_x \subset X \times \mathbb{N}$ para todo x en X , y existe una constante $S > 0$ tal que:*

1. *Si se cumple que $d_X(x, y) \leq R$, entonces*

$$\frac{|A_x \Delta A_y|}{|A_x \cap A_y|} \leq \epsilon,$$

2. y además,

$$A_x \subset B_X(x, S) \times \mathbb{N}$$

La condición 1 nos dice que los conjuntos A_x son muy parecidos si sus índices son R cercanos y son ajenos si sus índices son $2S$ lejanos.

Teorema 5.2.2. *Sea G un grupo finitamente generado. Si G es dócil entonces G tiene la Propiedad A.*

Demostración. Sean ϵ y $R > 0$. Por la Proposición 5.1.9 tenemos que existe un conjunto finito tal que para todo γ en G que cumpla $|\gamma| \leq R$ se tiene que

$$\frac{|F\Delta\gamma F|}{|F|} \leq \frac{\epsilon}{1+\epsilon}.$$

Definamos $A_g = gF \times \{1\}$. Observemos que todos los A_g se quedan contenidos en $B_G(g, \text{diam}(F) + 1) \times \{1\}$.

De tal manera que si $d_G(x, y) \leq R$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{|A_x\Delta A_y|}{|A_x \cap A_y|} &= \frac{|xF\Delta yF|}{|xF \cap yF|} \\ &= \frac{|F\Delta x^{-1}yF|}{|F \cap x^{-1}yF|} \\ &= \frac{|F\Delta x^{-1}yF|}{|F|} \cdot \frac{|F|}{|F \cap x^{-1}yF|}. \end{aligned}$$

La primera parte ya está acotada por la elección de F . Veamos que pasa con el segundo cociente.

$$\begin{aligned} \frac{|F \cap x^{-1}yF|}{|F|} &= \frac{|F \cup x^{-1}yF|}{|F|} - \frac{|F\Delta x^{-1}yF|}{|F|} \\ &\geq 1 - \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \\ &= \frac{1}{1+\epsilon}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, tomando inversos, tenemos que:

$$\frac{|A_x\Delta A_y|}{|A_x \cap A_y|} \leq \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \cdot (1+\epsilon) = \epsilon,$$

lo cual concluye la prueba. \square

Teorema 5.2.3. *Sean X y Y dos espacios uniformemente discretos, con geometría acotada, y cuasi-isométricos entre si. Entonces, si Y tiene la Propiedad A, X también la tiene.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ y $R > 0$. Como X y Y son cuasi-isométricos existe una (λ, C) -cuasi-isometría $f : X \rightarrow Y$. Sea $N = \sup_{y \in Y} \{|f^{-1}(y)|\}$, el cual es un valor finito ya que los espacios tienen geometría acotada. Ahora, como Y tiene la Propiedad A tenemos que existe una familia de conjuntos finitos $\{B_y\}_{y \in Y}$ para los cuales se cumple que

$$\frac{|B_x \Delta B_y|}{|B_x \cap B_y|} \leq \frac{\epsilon}{N}$$

siempre que $d_X(x, y) \leq \lambda R + C$. Y además se cumple que $B_y \subset B_Y(x, S') \times \mathbb{N}$ para algún $S' > 0$. Definimos para cada x en X el conjunto:

$$A_x = \{(z, n) \in X \times \mathbb{N} \mid (f(z), n) \in B_{f(z)}\}.$$

Como los $B_y \subset B_Y(x, S') \times \mathbb{N}$ y f es una (λ, C) -cuasi-isometría se tiene que $A_x \subset B_X(x, S) \times \mathbb{N}$, donde S es una constante mayor que cero que únicamente depende de los valores λ, C y S' . Además, tenemos que

$$|A_x \Delta A_y| \leq N \cdot |B_{f(x)} \Delta B_{f(y)}|$$

por las propiedades de la imagen inversa y a elección de N . Ahora bien, si $d_X(x, y) \leq R$ se tiene que

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq \lambda d_X(x, y) + C \leq \lambda R + C$$

Haciendo uso de la desigualdad que ya habíamos obtenido y que, además, se cumple que $|A_x \cap A_y| \geq |B_{f(x)} \cap B_{f(y)}|$, se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{|A_x \Delta A_y|}{|A_x \cap A_y|} &\leq \frac{N \cdot |B_{f(x)} \Delta B_{f(y)}|}{|B_{f(x)} \cap B_{f(y)}|} \\ &\leq \frac{N \cdot \epsilon}{N} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

La desigualdad anterior completa la prueba. \square

Lema 5.2.4. *Sea X un espacio métrico que cumple la propiedad A. Dados $\epsilon > 0$ y $R > 0$ sean $\{A_x\}_{x \in X}$ los conjuntos como en la definición. Entonces, si $d_X(x, y) \leq R$, se cumple que:*

$$1 \leq \frac{|A_x|}{|A_x \cap A_y|} \leq 1 + \epsilon$$

y

$$\frac{1}{1 + \epsilon} \leq \frac{|A_x|}{|A_y|} \leq 1 + \epsilon.$$

Demostración. Sean x, y en X tales que $d_X(x, y) \leq R$. Entonces, como $A_x \setminus A_y \subset A_x \Delta A_y$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{|A_x \setminus A_y|}{|A_x \cap A_y|} &\leq \frac{|A_x \Delta A_y|}{|A_x \cap A_y|} \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

De donde obtenemos que:

$$|A_x \setminus A_y| \leq \epsilon |A_x \cap A_y|$$

y por tanto

$$|A_x \cap A_y| \leq |A_x| = |A_x \setminus A_y| + |A_x \cap A_y| = (1 + \epsilon) |A_x \cap A_y|.$$

De aquí, dividiendo entre $|A_x \cap A_y|$ obtenemos:

$$1 \leq \frac{|A_x|}{|A_x \cap A_y|} \leq 1 + \epsilon.$$

Y como la misma desigualdad se vale para $|A_y|$ obtenemos:

$$\frac{1}{1 + \epsilon} \leq \frac{|A_x \cap A_y|}{|A_y|} \leq \frac{|A_x|}{|A_y|} \leq \frac{(1 + \epsilon) |A_x \cap A_y|}{|A_y|} \leq 1 + \epsilon.$$

□

Teorema 5.2.5. *Sea X un espacio métrico uniformemente discreto, con geometría acotada y con dimensión asintótica finita. Entonces, X tiene la Propiedad A.*

Demostración. Sean $R > 0$, $\epsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $Asdim(X) \leq n + 1$. Dado $L = 2R + \frac{2Rn}{\epsilon}$, consideremos una cubierta uniformemente acotada $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ con $5L$ -multiplicidad n . Sea

$$\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha \in A} = \{Nube(U_\alpha, 2L)\}_{\alpha \in A}.$$

Observemos que \mathcal{V} es una nueva cubierta de X con L multiplicidad n , y además tiene la propiedad de ser una cubierta abierta que tiene número de Lebesgue por lo menos L .

Para cada V_α elegimos un v_α que pertenezca a dicho elemento de la cubierta, y definimos para todo x en X :

$$A_x = \bigcup_{x \in V_\alpha} \{v_\alpha\} \times \{1, 2, \dots, l_\alpha(x)\}$$

donde l_α es el entero más pequeño que supera al ínfimo de las distancias de x al complemento de V_α entre R . Es decir:

$$l_\alpha(x) = \left\lceil \frac{d_X(x, X \setminus V_\alpha)}{R} \right\rceil.$$

La función l_α está bien definida por que la cubierta está uniformemente acotada. Inmediatamente notamos que si $d_X(x, y) \leq R$, entonces:

$$|l_\alpha(x) - l_\alpha(y)| \leq 1$$

Por lo cual, al calcular la diferencia simétrica de A_x con A_y encontraremos que dicho valor es exactamente el mismo de la diferencia simétrica considerando únicamente a los v_α (hacer diferencia simétrica en la primera coordenada). Se cumple que:

$$|A_x \Delta A_y| \leq 2n,$$

pues, cada punto puede estar en a lo más n elementos distintos de la cubierta por la característica de la multiplicidad de la cubierta.

Afirmamos que si $d_X(x, y) \leq R$ la intersección de A_x con A_y tiene por lo menos $\frac{L-R}{R} - 1$ elementos. Como $d_X(x, y) \leq R$ tenemos que tanto x como y pertenecen a $B_X[x, L]$. Aparte por la condición del número de Lebesgue de la cubierta tenemos que existe por lo menos un α tal que $B_X[x, L] \subset V_\alpha$. Calculemos $l_\alpha(x)$ y $l_\alpha(y)$

$$\begin{aligned} \frac{d_X(x, X \setminus V_\alpha)}{R} &\geq \frac{L}{R} \\ \frac{d_X(y, X \setminus V_\alpha)}{R} &\geq \frac{d_X(x, X \setminus V_\alpha)}{R} - R = \frac{L-R}{R}. \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} |A_x \cap A_y| &\geq |\{v_\alpha\} \times \{1, 2, \dots, \min\{l_\alpha(x), l_\alpha(y)\}\}| \\ &= \frac{L-R}{R} \\ &= 1 + \frac{2n}{\epsilon}. \end{aligned}$$

Así, finalmente, obtenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{|A_x \Delta A_y|}{|A_x \cap A_y|} &\leq \frac{2n}{1 + \frac{2n}{\epsilon}} \\ &< \frac{2n}{\frac{2n}{\epsilon}} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

□

Terminamos este trabajo con el siguiente corolario.

Corolario 5.2.6. *Los grupos hiperbólicos finitamente generados tienen la Propiedad A.*

Demostración. Sabemos por la Proposición 4.1.15 que los grupos hiperbólicos finitamente generados tienen dimensión asintótica finita. Además, sabemos que se cumplen todas las hipótesis del Teorema 5.2.5. \square

Conclusiones: La dimensión asintótica de un espacio métrico es una buena generalización de la dimensión cubriente aplicada a los espacios métricos. Se comporta como uno esperaría en el caso euclideo, y no es trivial en los espacios discretos. La dimensión asintótica es un teoría muy rica, pero no es la única que merece esa mención en este trabajo. Todos los conceptos que giran a su alrededor como son la Propiedad A, espacios hiperbólicos, docilidad o amenabilidad son nociones de gran interés.

Bibliografía

- [1] G. Bell , A. Dranishnikov, *Asymptotic dimension*, Topology and its Applications 155 (2007), 1265–1296.
- [2] M. Cencelj, J. Dydak, A. Vavpetič, *Property A and asymptotic dimensión*, Glasnik Matematički 47 (2012), 441-444.
- [3] M. Gromov, *Hyperbolic groups*, Essays in group theory (1987), 75–264.
- [4] P. Nowak, G. Yu, *Large Scale Geometry*, Warszawa, Poland, European Mathematical Society, 2004.
- [5] R. Pears, *Dimesion Theory of General Spaces*, London, Great Britain, Cambridge University Press, 1975.
- [6] J. Roe, *Hyperbolic groups have finite asymptotic dimension*, The American Mathematical Society 133, (2005), 2489–2490.
- [7] N. Towner *Coarse Geometry and Finitely Generated Groups*. Paisés Bajos: Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden. 2013.
- [8] J. Väisälä, *Gromov Hiperbolic Spaces*, Matematiikan laitos, Helsinki, Finlandia, 2004.