



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA CIVIL – ESTRUCTURAS

COMPORTAMIENTO DE PUENTES CARRETEROS ANTE CARGAS EÓLICAS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
ISAAC ROSALES GARCÍA

DR. HUGO HERNÁNDEZ BARRIOS
FES ACATLÁN UNAM

CIUDAD DE MÉXICO, NOVIEMBRE 2018



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Gómez Martínez Roberto

Secretario: Dr. Pozos Estrada Adrián

Vocal: Dr. Hernández Barrios Hugo

1^{er}. Suplente: Dr. Chávez Cano Marcos Mauricio

2^{d o}. Suplente: Dr. Rivera Vargas Darío

México, Ciudad de México

TUTOR DE TESIS:

Dr. Hugo Hernández Barrios

FIRMA

Agradecimientos

En primer lugar quisiera agradecer al Dr. Hugo Hernández Barríos quien me estuvo apoyando desde la licenciatura y a lo largo de la maestría para poder concluir con este trabajo.

A la Facultad de ingeniería y FES Acatlán por la formación que me dieron y me permitieron desarrollarme ampliamente en el área de estructuras.

A mi papá cuyo apoyo ha sido incondicional desde siempre, y con el cual nunca habría terminado la maestría.

A mi mamá quien siempre me insistió a no rendirme a pesar de la adversidad y estuvo al pendiente de mí en todo momento.

A Laura, mi hermana, que ha estado conmigo mostrando su apoyo.

A mis tíos Enrique y Amalia que me hicieron ver lo valioso que soy para ellos y que han estado al pendiente de mi trayectoria.

A mi amiga Itzel, que con su sincera amistad me ha apoyado mucho al mostrarme las cosas desde otros puntos de vista.

A mi amigo Leo que ha estado ahí para escucharme y darme sus consejos.

A mis amigos de Acatlán, Paulina, Mirslaba, Javier, Dulce, Vicky Lety con quienes he podido compartir una bonita amistad.

Resumen

En este trabajo se presenta las ecuaciones para la obtención de las respuestas dinámicas en el dominio de la frecuencia y del tiempo tanto para ráfagas como desprendimiento de vórtices; además se presentan las ecuaciones para obtener la velocidad crítica de las condiciones de inestabilidad aeroelástica y la obtención de su respuesta dinámica. Para la obtención de la respuesta de aleteo se hicieron simulaciones de viento de ráfaga en el dominio del tiempo. Se aplicó el método Quasy-Steady para la respuesta de las ráfagas, mientras que para los vórtices se aplicó la teoría desarrollada por Vikery & Basu, para las condiciones de inestabilidad se obtuvieron por medio de la propuesta de Strommen y para la respuesta del aleteo se aplicaron las ecuaciones de Scanlan generando una simulación de viento por el método WAWS. Finalmente se aplicaron estas ecuaciones al puente San Cristóbal en etapa de construcción justo antes de su colapso, para ello los coeficientes y derivadas aerodinámicas se obtuvieron de puentes similares al San Cristóbal y sus propiedades dinámicas se obtuvieron de un modelo en SAP.

Índice general

Capítulo 1. Estado del conocimiento	1
1.1 Introducción	1
1.2 Objetivo y alcances	3
Capítulo 2. Conceptos básicos de estadística de ingeniería eólica	5
2.1 Introducción	5
2.2 Función de distribución, media y varianza	5
2.2.1 Ejemplo 2.1	6
2.3 Estadística en el dominio del tiempo	9
2.3.1 Ejemplo 2.2	11
2.4 Valores máximos	13
2.4.1 Ejemplo 2.3	14
2.5 2.5 Densidad de auto espectro	15
2.6 2.6 Densidad espectral cruzada	17
2.7 2.7 Conclusiones	18
Capítulo 3. Descripción estocástica del viento turbulento	20
3.1 Introducción	20
3.2 Velocidad media del viento	20
3.3 Estadística en un solo punto de flujo turbulento	21
3.3.1 Ejemplo 3.1	24
3.4 Propiedades espaciales del flujo turbulento	27
3.5 Conclusiones	32
Capítulo 4. Respuesta dinámica de un proceso estocástico	33
4.1 Introducción	33
4.2 Ecuación de equilibrio dinámico	33
4.3 Respuesta de un oscilador de un grado de libertad	35
4.4 Respuesta de un oscilador de varios grados de libertad	36
4.5 Ecuación de aleteo	37
4.6 Conclusiones	38
Capítulo 5. Cargas de viento y movimiento autoexcitable	39
5.1 Introducción	39
5.2 Teoría de ráfagas	40
5.3 Ecuación en el dominio del tiempo	45
5.3.1 Respuesta en el dominio del tiempo sin coherencia	45
5.3.2 Ejemplo 5.1	46
5.3.3 Respuesta coherente en el dominio del tiempo	48
5.3.4 Método Auto Regresivo (AR)	55
5.3.5 Ejemplo 5.2	57
5.4 Función de admitancia aerodinámica	62
5.5 Derivadas aerodinámicas	63
5.6 Desprendimiento de vórtices	66
5.7 Conclusiones	68

Capítulo 6 Respuesta dinámica inducida por el viento	70
6.1 Introducción	70
6.2 Respuesta ante ráfagas	70
6.2.1 Respuesta unidireccional considerando un solo modo	70
6.2.2 Función de aceptación conjunta normalizada	76
6.2.3 Ejemplo 6.1	77
6.2.4 Ejemplo 6.2	80
6.2.5 Respuesta a múltiples GDL ante ráfagas de viento	85
6.3 Desprendimiento de vórtices	86
6.3.1 Un solo modo con una sola componente	86
6.3.2 Ejemplo de aplicación	89
6.3.3 Respuesta a múltiples GDL	92
6.4 Verificación de la metodología	93
6.4.1 Puente Pierre Pfmilin	93
6.4.2 Puente Sognejford	96
6.5 Conclusiones	98
Capítulo 7. Inestabilidad aeroelástica	100
7.1 Introducción	100
7.2 Matriz de impedancia	100
7.3 Divergencia estática	101
7.3.1 Ejemplo 7.1	102
7.4 Galopeo	102
7.4.2 Ejemplo 7.2	103
7.5 Límite de estabilidad dinámica en torsión	103
7.6 Aleteo	104
7.6.1 Ejemplo 7.3	106
7.7 Ecuación de movimiento de aleteo	113
7.7.1 Método de Euler	114
7.7.2 Método de Euler modificado	114
7.7.3 Método de Runge Kutta	115
7.7.4 Método de Hamming	115
7.7.5 Ejemplo 7.4	115
7.7.6 Solución de la ecuación de aleteo	123
7.8 Conclusiones	127
Capítulo 8. Puente San Cristóbal	129
8.1 Introducción	129
8.2 Descripción del proyecto	129
8.3 Propiedades de la estructura	131
8.4 Resultados	132
8.4.1 Velocidad de diseño	132
8.4.2 Ráfagas	132
8.4.3 Vórtices	137
8.5 Aeroelasticidad	140

8.5.1	Divergencia estática	140
8.5.2	Galopeo	141
8.5.3	Inestabilidad a torsión	141
8.5.4	Aleteo	141
8.5.5	Respuesta en el dominio del tiempo ante aleteo	143
8.6	Conclusiones	146
	Capítulo 9. Conclusiones	147
	Referencias	148
	Apéndice A. Ecuación de movimiento en el dominio de la frecuencia	151
A.1	Introducción	151
A.2	Solución a la ecuación de movimiento	151
	Apéndice B. Propiedades dinámicas del puente San Cristóbal	155
B.1	Introducción	155
B.2	Modelo computacional del Puente San Cristóbal	155
B.3	Formas modales del puente San Cristóbal	156
B.4	Masa modal	158
B.5	Momento másico de inercia modal	159
B.6	Amortiguamiento	161

Índice de Figuras

Figura 1.1 Colapso del puente Tacoma Narrows	1
Figura 2.1 Propiedades estadísticas de un flujo turbulento	5
Figura 2.2 Función $x(t) = 3\cos(2t)$	7
Figura 2.3 Eventos simultáneos de un mismo proceso en diferentes puntos	10
Figura 2.4 Simulación de velocidad de viento para el ejemplo 2.3	14
Figura 2.5 Puntos donde el registro cruza el cero	15
Figura 3.1 Función de densidad de Kaimal	25
Figura 3.2 Función de densidad de Kaimal normalizado	26
Figura 3.3 Función de densidad de Kaimal con la ecuación (3.12)	27
Figura 3.4 Covarianza a lo largo de un tablero	28
Figura 3.5 Co espectro de diferentes valores Δ en la dirección u	30
Figura 3.4 Co espectro de diferentes valores en la dirección	31
Figura 3.5 Coherencia para diferentes puntos por el método de Davenport	32
Figura 4.1 Direcciones de análisis	34
Figura 4.2 funciones de espectro y transferencia en el dominio de la frecuencia	36
Figura 5.1 Movimiento auto-excitado debido al viento	39
Figura 5.2 dirección del viento fluctuante	40
Figura 5.3 Desplazamientos y flujos	41
Figura 5.4 Gráficas de los coeficientes aerodinámicos	43
Figura 5.5 Función de la respuesta en el dominio del tiempo para cada intervalo ω	47
Figura 5.6 Respuesta en el tiempo del espectro Ejemplo	48
Figura 5.7 Simulación de viento coherente para cada uno de los nodos analizados	55
Figura 5.8 Velocidad fluctuante con el método AR para el ejemplo	62
Figura 5.9 Derivadas aerodinámicas de flexión de una placa con el método de Theodorsen	65
Figura 5.10 Derivadas aerodinámicas de torsión de una placa con el método de Theodorsen	66
Figura 5.11 Fuerzas debido al desprendimiento de vórtices	66
Figura 6.1 Puente Pierre Pfmilin	93
Figura 6.2 Desplazamientos del puente Pierre Pfmilin	95
Figura 6.3 Desplazamientos del puente Pierre Pfmilin ante desprendimientos de vórtices	96
Figura 6.4 Puente Sognejford	96
Figura 6.5 Desplazamientos del puente Sogneford debido a ráfagas	98
Figura 7.1 Derivadas aerodinámicas para una placa	108
Figura 7.2 Solución de las ecuaciones de aleteo con las derivadas aerodinámicas de Therodorsen.	112
Figura 7.3 Solución de las ecuaciones de aleteo con las derivadas aerodinámicas Quasy-Steady	113
Figura 7.4 Solución de las ecuaciones por el método de Hamming	126
Figura 7.5 Solución de las ecuaciones por el método ode45 de Matlab	126
Figura 7.6 Desplazamientos debido al aleteo para condiciones estables e inestables	127

Figura 8.1 Localización del puente San Cristóbal	129
Figura 8.2 Elevación del puente San Cristóbal	130
Figura 8.3 Dimensiones de las dovelas	130
Figura 8.4 Función de densidad de Kaimal para San Cristóbal de las casas	133
Figura 8.5 Función de admitancia mecánica para el puente San Cristóbal	134
Figura 8.6 Función de admitancia conjunta del puente San Cristóbal	134
Figura 8.7 Espectro de respuesta del puente San Cristóbal	135
Figura 8.8 Desplazamientos del puente San Cristóbal	136
Figura 8.9 Variación de los desplazamientos contra velocidad	136
Figura 8.10 Respuesta del puente San Cristóbal en el dominio del tiempo para una velocidad resonante de 44.43 m/s	138
Figura 8.11 Función de transferencia mecánica para el desprendimiento de vórtices	138
Figura 8.12 Función de espectro de carga para el desprendimiento de vórtices	139
Figura 8.13 Espectro de respuesta del puente San Cristóbal para desprendimiento de vórtices	139
Figura 8.14 Desplazamientos máximos del puente San Cristóbal a diferentes velocidades	140
Figura 8.15 Derivadas aerodinámicas para el puente San Cristóbal	142
Figura 8.16 Raíces de la parte imaginaria y real de la determinante de la matriz de impedancia para el puente San Cristóbal	142
Figura 8.17 Simulación de velocidades para el puente San Cristóbal	143
Figura 8.18 Respuesta ante el efecto de aleteo del puente San Cristóbal	144
Figura 8.19 Condición de estabilidad del puente San Cristóbal ante aleteo	145
Figura B.1. Modelo del puente San Cristóbal en su etapa previa a la colocación de la dovela de cierre	155
Figura B.2 Forma modal vertical del puente San Cristóbal	156
Figura B.3 Forma modal horizontal del puente San Cristóbal	156
Figura B.4 Forma modal torsional del puente San Cristóbal	157
Figura B.5 Áreas asignadas del puente San Cristóbal	159

Índice de Tablas

Tabla 2.1 Valores para el cálculo de la desviación estándar	8
Tabla 2.2 Valores para aplicar la integración numérica de Simpson	9
Tabla 2.3 Obtención de la covarianza	12
Tabla 2.4 Aplicación del método de Simpson para la obtención de la covarianza	13
Tabla 3.1 Factores de conversión de velocidad	20
Tabla 3.2 Valores de las constantes	22
Tabla 3.3 Valores de A_u , A_v , A_w para la obtención de la función de Kaimal	23
Tabla 5.1 Espectro de respuesta del ejemplo	46
Tabla 5.2 Valores de frecuencia, función de densidad de desplazamiento, valor de ck , variable aleatoria y función en el dominio del tiempo	47
Tabla 5.3 Correlación para diferentes valores de Δx	58
Tabla 6.1 Función $\text{sen}(\pi\hat{x})$	77
Tabla 6.2 Multiplicación $f(\hat{x}_i)f(\hat{x}_j)$	78
Tabla 6.3 Valores de $\Delta\hat{x}= x_i - x_j $	78
Tabla 6.4 Multiplicación $f(\hat{x}_i)f(\hat{x}_j)e^{-2\lambda\hat{x}}$	79
Tabla 6.5 $\int_0^1 [\text{sen}(\pi\hat{x})^2 d\hat{x}]^2$	79
Tabla 6.6 Propiedades de un puente ejemplo	80
Tabla 6.7 Valores de la función de transferencia, admitancia conjunta y potencia espectral a diferentes valores ω , su multiplicación y su área basado en el método del trapecio	83
Tabla 6.8 Datos del ejemplo para obtener la respuesta ante desprendimiento de vórtices	89
Tabla 6.9 Propiedades estructurales y de diseño del puente Pierre Pfmilin	94
Tabla 6.10 Comparación de desplazamientos máximos obtenidos del puente Pierre Pfmilin ante ráfagas	95
Tabla 6.11 Propiedades para la obtención la respuesta ante desprendimiento vórtices del puente Pierre Pfmilin	95
Tabla 6.12 Comparación de desplazamientos máximos debido al desprendimiento de vórtices obtenidos del puente Pierre Pfmilin	96
Tabla 6.13 Propiedades del puente Sogneford	97
Tabla 7.1 Raíces reales e imaginarias de $\hat{\omega}$ del ejemplo para $\hat{V}=1.8$	112
Tabla 7.2 Solución de la ecuación diferencial ejemplo con el método de Euler	117
Tabla 7.3 Solución de la ecuación diferencial con diferentes métodos	121
Tabla 8.1 Propiedades dinámicas del puente San Cristóbal	131
Tabla 8.2 Coeficientes aerodinámicos del puente San Cristóbal	131
Tabla 8.3 desviación estándar, desplazamientos máximos y factores picos del puente San Cristóbal ante efectos de ráfaga	136
Tabla 8.4 Propiedades ante efectos de vórtices del puente San Cristóbal	137
Tabla 8.6 Desplazamientos máximos debido al aleteo a diferentes velocidades	145
Tabla 8.5 Resultados de la respuestas ante el aleteo	144

Tabla B.1 Formas Modales del puente San Cristóbal	152
Tabla B.2 Masas de las dovelas del puente San Cristóbal	153
Tabla B.3 Coordenadas y masas de los elementos del tablero del puente San Cristóbal	155
Tabla B.4 Obtención del momento másico de inercia	155

Capítulo 1

Estado del conocimiento

1.1 Introducción

Los puentes carreteros son susceptibles a la influencia de cargas dinámicas como sismos, movimiento de los automóviles, viento, etc. Cuando están sujetos a cargas de viento durante un periodo largo, pueden sufrir inestabilidad estructural y colapsar. Es por ello que los ingenieros deben considerar la influencia del viento en el análisis y diseño.

El colapso del puente Tacoma Narrows en 1940 (Figura 1.1) atrajo la atención de los ingenieros civiles en el tema de la ingeniería eólica sin embargo no fue el primero en colapsar, en Inglaterra en 1836 colapso el puente I Brighton Chain Pier, y en 1879 en Escocia el Tay Bridge (Holmes, 2007).

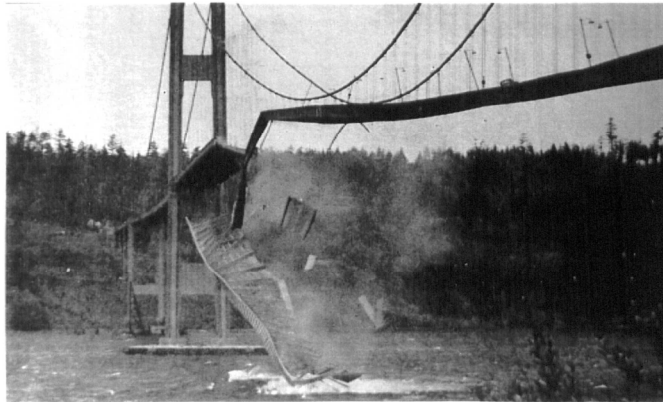


Figura 1.1 Colapso del puente Tacoma Narrows (Bashford,1940)

Cuando se construyó el puente Tacoma, la teoría de diseño eólico consideraba principalmente en cargas estáticas, al no considerar las cargas dinámicas se desestimaban las características aeroelásticas cuando el puente se movía (Jurado et al, 2011). De hecho lo que causó tanta conmoción fue que el puente se diseñó para una velocidad de viento de 44.72 m/s (161km/h) y una presión de 14.88 Pa (146 kg/m²) y colapsó ante un viento de 22.36 m/s con presiones de aproximadamente 2.48 Pa.

A partir del colapso del primer puente Tacoma se iniciaron las investigaciones con el fin de determinar el origen de la falla, llegando a la conclusión de que el viento actuó en conjunto con el puente reduciendo el amortiguamiento e incrementando el movimiento hasta llegar al colapso. Esta nueva teoría propuesta por Scanlan y Tomko (1976) es conocida como aleteo (Flutter) la cual establece que hay un acoplamiento entre los modos

flexión y torsión. En el caso del Tacoma Narrows, su rigidez a torsión era baja por lo que cuando se presentaron velocidades de viento bajas, se dio dicho acoplamiento generando un incremento en la torsión (Jurado et al,2011).

A partir del colapso del puente Tacoma se comenzó a utilizar la teoría de aeroelasticidad en la ingeniería civil, además de que los tableros de los puentes se comenzaron a construir con formas aerodinámicas como el puente Great Belt de Dinamarca.

En la actualidad el análisis de viento se hace para tres efectos distintos: (1) Ráfagas, (2) desprendimiento de vórtices y (3) condiciones de inestabilidad aeroelástica.

Las ráfagas es el efecto directo del viento el cual depende de la velocidad del mismo. El modo en que los cuerpos interactúan con el viento se puede medir con los coeficientes aerodinámicos. En un principio cuando se desarrolló la teoría de ráfagas, Davenport (1973) propuso las ecuaciones de fuerza de viento en función a los coeficientes aerodinámicos, esta teoría es conocida como cuasi-estática (Quasy Steady).

El desprendimiento de vórtices se genera cuando el flujo de viento entra en contacto con un cuerpo, el cual se mantiene adherido a él, sin embargo a lo largo del cuerpo se va generando una presión que puede llegar a ser negativa generando el desprendimiento del flujo y con ello un vórtice. Esto se da en cuerpos no aerodinámicos, es decir cuya forma no permite el flujo normal del viento.

Los efectos de inestabilidad son aquellos en lo que el viento interactúa con la estructura modificando sus propiedades dinámicas y con ello lleva al colapso la estructura. Strommen (2010) propone una metodología para obtener las velocidades críticas ante cuatro efectos de inestabilidad: (1) divergencia estática, (2) inestabilidad torsional, (3) galopeo y (4) aleteo.

La divergencia estática es aquella en la que el puente va perdiendo rigidez a torsión debido al viento, la inestabilidad a torsión es similar al a divergencia estática, sin embargo, considera los efectos dinámicos por lo que el puente pierde tanto rigidez como amortiguamiento a torsión. El galopeo es la pérdida de rigidez y amortiguamiento a flexión vertical y el aleteo es el acoplamiento de los modos de flexión vertical como aleteo en el cual se tiene que dar una serie de factores para entrar en esta inestabilidad.

La condiciones de inestabilidad son efecto debido a las ráfagas, es decir que las ecuaciones para resolverse provienen de la teoría de ráfagas. Como se mencionó anteriormente la teoría cuasi-estática (Quasy Steady) fue desarrollada por Davenport sin embargo para la revisión de inestabilidad fue Scanlan (1976) quién introdujo que las ecuaciones no estuvieran en función de los coeficientes aerodinámicos sino de unas derivadas aerodinámicas las cuales dependen de la sección del tablero.

Una característica importante en el análisis eólico es conocer la interacción del viento con el puente, es por ello que se desarrollaron los métodos ya mencionados. Sin embargo, otro tema muy importante es el comportamiento del viento.

El viento tiende a ser muy variado, dependiendo de la región en donde se encuentre, la altura en que se mida e incluso la temporada del año haciendo que se requiera de métodos probabilistas para su análisis. Para poder trabajar con una variable tan cambiante es necesario la aplicación de métodos estocásticos, sin embargo, se tiene que proponer ciertas hipótesis para poder aplicarlo de manera más sencilla. Una de estas hipótesis es que el viento se considera estacionario, es decir que sus propiedades estadísticas no varían, la segunda hipótesis es que se considera ergorico, eso significa que sus propiedades estadísticas no cambian durante todo el análisis y la tercera hipótesis es tiene un comportamiento homogéneo, con ello se asegura que el comportamiento estadístico de un punto analizado es igual que en todos los otros puntos.

El comportamiento estadístico del viento se comporta adecuadamente para ser representado como como una función con distribución de probabilidad Gaussiana. A pesar de saber cómo es la forma de la función de distribución existen muchos autores que han investigado diferentes ecuaciones para obtener esta función; por ejemplo, está la función de Kaimal la cual es usada en la mayoría de los reglamentos, otra es la de Davenport la cual se basa en una velocidad media a 10 metros sobre el nivel de terreno, existen otras como la Von Karman que tiene buenos valores comparados a los experimentales, y otros como Simiu, Tielman, Panosfky, etc (Liu, 2012).

Con estas funciones se puede obtener la respuesta ante ráfagas de manera directa como lo hace Strommen (2010), sin embargo con el crecimiento actual de la tecnología se pueden crear modelos computarizados que permitan obtener la respuesta de una estructura asignándole una historia en el tiempo. Esto conlleva a hacer simulaciones de viento basado en las funciones de densidad. Dado que es un proceso estocástico existen muchas manera de obtener las simulaciones, por ejemplo Shinozuka (1985), propone la obtención de la respuesta en el dominio del tiempo para un proceso simple el cual se basa en una suma de funciones que involucra la función de densidad multiplicada con la función coseno y un ángulo de fase aleatorio, este método es conocido como WAWS. El inconveniente de este método es que solo es válido sino se considera que existe correlación entre los puntos de análisis, para involucrar esta correlación Cao et al, (2010) muestran una metodología específicamente para puentes. Sin embargo en cuestión de simulaciones existe mucha literatura donde se puede obtener por medios de auto regresión donde se incluye ruido al análisis. Este método es conocido como ARMA donde Li & Kareemn (1990) indican cómo obtenerlo para la representación de viento.

1.2 Objetivo y Alcances

El objetivo de este trabajo es proveer herramientas matemáticas para la obtención de la respuesta dinámica de puentes carreteros ante efectos eólicos.

Los alcances de este trabajo constan de obtener la respuesta en el dominio de la frecuencia y del tiempo de una estructura tipo línea horizontal en 2D en el dominio

del tiempo para los efectos de ráfagas, desprendimiento de vórtices, y de la respuesta en el dominio del tiempo del aleteo, además de la obtención de las velocidades críticas para las condiciones de inestabilidad aeroelástica.

Capítulo 2

Conceptos básicos de estadística en ingeniería eólica

2.1 Introducción

Cuando se habla de un análisis dinámico de viento siempre se tiene la incertidumbre de cómo será el comportamiento del viento en algún tiempo determinado, esto causa que el problema tenga que resolverse con probabilidad. La rama de la probabilidad que será de gran utilidad son los procesos estocásticos, los cuales permitirán conocer con cierto grado de certidumbre el comportamiento del viento.

Antes de involucrarse en la respuesta dinámica del viento es necesario definir ciertos conceptos los cuales son básicos para la comprensión de los procesos estocásticos.

2.2 Función de distribución, media y varianza

Cuando se mide la velocidad del viento en un tiempo determinado y se grafican sus resultados (Figura 2.1), se puede observar que sus valores son distintos en cualquier punto de la gráfica, sin embargo, presenta un comportamiento que se puede predecir dentro de ciertos límites.

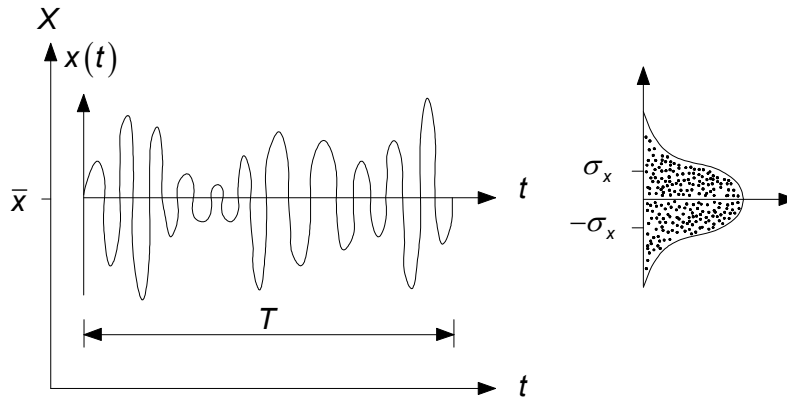


Figura 2.1 Propiedades estadísticas de un flujo turbulento

Una característica que se muestra en el comportamiento de la función de la Figura 2.1 es la media, que representa un valor que es independiente del tiempo, es decir, que no varía y se puede definir con la ecuación (2.1).

$$\bar{x} = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx \quad (2.1)$$

donde \bar{x} es la media, $E[X]$ es la esperanza de que se obtenga el valor X deseado, x es un valor esperado y $p(x)$ es una función de distribución, la cual se define más adelante. Sin embargo, cuando se hace una medición por lo general se tienen valores discretizados por lo que otra forma de definir la media es con la ecuación (2.2).

$$\bar{x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_k \quad (2.2)$$

donde N es la cantidad de datos medidos; entre más datos se tenga más preciso será el resultado.

En la ecuación (2.1) se introdujo el concepto de función de densidad. Esta función de densidad indica cual es la probabilidad de tener un cierto valor. Si se observa la parte derecha de la Figura 2.1 se muestra que los valores cercanos a la media se repiten más que los alejados, es decir, que se tiene mayor probabilidad de que un resultado este cerca de la media que cualquier otro valor. En la Figura 2.1 se muestra una distribución de Gauss, la cual matemáticamente se representa con la ecuación (2.3).

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma_x}\right)^2\right] \quad (2.3)$$

donde σ_x es la desviación estándar.

La desviación estándar es una medida que indica que tan dispersos están los datos, también puede ser considerada con una medida de incertidumbre. Se puede ver que la desviación estándar influye en la función de densidad, de tal modo que si la desviación estándar disminuye, la función se vuelve más estrecha. La desviación estándar se obtiene con la ecuación (2.4).

$$\sigma_x^2 = E\left[(X - \bar{x})^2\right] \quad (2.4)$$

La ecuación (2.4) se le conoce como varianza que también se puede escribir como la ecuación (2.5).

$$Var(X) = \sigma_x^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (X_k - \bar{x})^2 \quad (2.5)$$

2.2.1 Ejemplo 2.1

Sea la variable representada por la función continua,

$$x(t) = a \cos(\omega_0 t)$$

la varianza se puede obtener con:

$$\sigma^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [a \cos(\omega_0 t)]^2 dt$$

Haciendo un cambio de variable de tal modo que $T = n T_0$, donde n son números enteros y $\omega_0 = 2\pi/T_0$ entonces la varianza es,

$$\sigma^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n T_0} \left[n \int_0^{T_0} \left[a \cos \left[\frac{2\pi}{T_0} t \right] \right]^2 dt \right] = \frac{a^2}{2}$$

Tal que sea la variable representada por,

$$x(t) = 3 \cos(2t)$$

y t varía de 0 a π .

La gráfica de la ecuación se muestra en la Figura 2.2

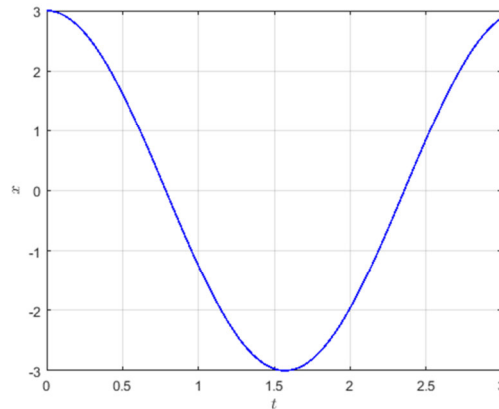


Figura 2.2 Función $x(t) = 3 \cos(2t)$

La varianza es:

$$\sigma^2 = \frac{a^2}{2} = \frac{3^2}{2} = 4.5$$

Si se aplica para elementos discretos

$$\sigma_x^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (X_k - \bar{x})^2$$

cuya media $\bar{x} = 0$. Los valores necesarios para el cálculo se muestran en la Tabla 2.1.

Tabla 2.1 Valores para el cálculo de la desviación estándar.

n	t	$x(t)$	$[x(t)]^2$
1	0.0000	3.0000	9.0000
2	0.3142	2.4271	5.8905
3	0.6283	0.9271	0.8594
4	0.9425	-0.9271	0.8594
5	1.2566	-2.4271	5.8905
6	1.5708	-3.0000	9.0000
7	1.8850	-2.4271	5.8905
8	2.1991	-0.9271	0.8594
9	2.5133	0.9271	0.8594
10	2.8274	2.4271	5.8905

$$\Sigma = 45$$

$$\sigma^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (X_k - \bar{x})^2 = \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{10} (X_k - 0)^2 = \frac{45}{10} = 4.5$$

Aplicando la integral para elementos discretos (Tabla 2.2),

$$\sigma^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [a \cos(\omega_0 t)]^2 dt$$

Se utilizará entonces la integral de Simpson (Chapra & Canale, 2015) que está definida como

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left[f(a) + 4 \sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}} f(x_{2k+1}) + 2 \sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}} f(x_{2k}) + f(b) \right]$$

donde, $n = N - 1$ sub intervalos. Se requiere que el número de sub intervalos sea par. El

ancho del sub intervalo es: $h = \frac{b-a}{n}$. En la tabla 2.2 en la quinta columna viene el valor

FM que indica la multiplicación ya sea por 4 o por 2 dependiendo el caso.

Tabla 2.2 Valores para aplicar la integración numérica de Simpson

n	t	$x(t)$	$[x(t)]^2$	FM	$FM [x(t)]^2$
1	0.0000	3.0000	9.000	1	9.0000
2	0.28274	2.5330	6.4161	4	25.6669
3	0.56548	1.2774	1.6318	2	3.2656
4	0.84822	-0.3759	0.1413	4	0.5632
5	1.13096	-1.9122	3.6565	2	7.3074
6	1.4137	-2.8531	8.1402	4	32.5231
7	1.69644	-2.9058	8.4437	2	16.8913
8	1.97918	-2.0537	4.2177	4	16.8916
9	2.26192	-0.5623	0.3162	2	0.6366
10	2.54466	1.1042	1.2193	4	4.8594
11	2.8274	2.4269	5.8898	1	5.8832

$$\Sigma = 123.53$$

$$n = N - 1 = 11 - 1 = 10$$

$$h = \frac{b - a}{n} = \frac{2.8274 - 0}{10} = 0.28274$$

$$\int_0^{2.8274} [f(x)]^2 dx \approx \frac{0.28274}{3} 123.53 \approx 11.6395$$

$$\sigma^2 \approx \frac{11.6395}{2.8274} \approx 4.1173$$

Cuando se emplea el método de Simpson, existe un error, el cual disminuirá cuando el número de datos se incremente.

Con base a estos valores (la media, la función de distribución, la desviación estándar y la varianza) se puede obtener el comportamiento del viento. A continuación se presenta conceptos que permiten conocer cómo influye el comportamiento del viento a un punto determinado en tiempos distintos o puntos distintos.

2.3 Estadística en el dominio del tiempo

El valor de un proceso aleatorio se puede obtener con su media y una variable dependiente al tiempo, como se muestra en la ecuación (2.6).

$$X = \bar{x} + x(t) \tag{2.6}$$

Es útil conocer el comportamiento del viento en un tiempo determinado, sin embargo hay que considerar que en una estructura tipo puente, el flujo no tiene el mismo valor a todo lo largo. El comportamiento de un punto puede depender de otro al mismo tiempo o en tiempos distintos. En la Figura 2.3 se muestra diferentes respuestas en un mismo tiempo a lo largo de varios puntos.

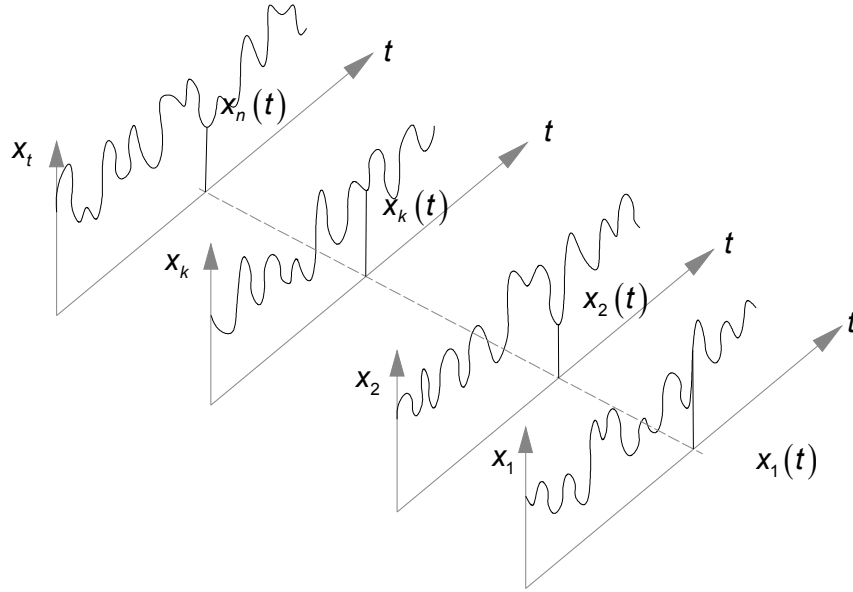


Figura 2.3 Eventos simultáneos de un mismo proceso en diferentes puntos

La relación entre el comportamiento de un punto a otro se le conoce como correlación, el cual puede tomar valores de 0 a 1.0, donde 0 indica que no influye nada y 1.0 que tiene completa influencia.

La correlación está directamente relacionada con los valores de dos eventos como se muestra en la ecuación (2.7)

$$R_{x_1x_2} = E[X_1(t) X_2(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X_1(t) X_2(t) dt \quad (2.7)$$

Por otro lado, cuando se mide la relación de error entre dos datos se le conoce como covarianza, ésta estima cuanto varían los dos valores de la media, por lo que su ecuación se considera una media de cero como se muestra en la ecuación (2.8). Si en un análisis la media es cero, la correlación y la covarianza, producen los mismos resultados.

$$Cov_{x_1x_2} = E[x_1(t) x_2(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_1(t) x_2(t) dt \quad (2.8)$$

En las ecuaciones (2.9) y (2.10) se muestran las correlaciones y covarianza, respectivamente, para valores discretos,

$$R_{x_1x_2} = E[X_1 X_2] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_{1k} X_{2k} \quad (2.9)$$

$$Cov_{x_1x_2} = E[(X_1 - \bar{x}_1)(X_2 - \bar{x}_2)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (X_{1k} - \bar{x}_{1k})(X_{2k} - \bar{x}_{2k}) \quad (2.10)$$

Con base a la definición anterior se puede obtener la correlación y covarianza de un mismo punto en tiempos distintos, como se muestran en las ecuaciones (2.11) y (2.12). A la auto-correlación es:

$$R_{x_1x_2} = E[X(t)X(t+\tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t)X(t+\tau)dt \quad (2.11)$$

y a la auto-covarianza es:

$$Cov_{x_1x_2} = E[x(t)x(t+\tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau)dt \quad (2.12)$$

Si son en distintos puntos y distinto tiempo se le conoce como correlación cruzada y covarianza cruzada, que se muestran en la ecuación (2.13) y (2.14), respectivamente.

$$R_{x_1x_2} = E[X_1(t)X_2(t+\tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X_1(t)X_2(t+\tau)dt \quad (2.13)$$

$$Cov_{x_1x_2} = E[x_1(t)x_2(t+\tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_1(t)x_2(t+\tau)dt \quad (2.14)$$

En esta sección se muestra la correlación y covarianza para dos puntos, sin embargo se puede aplicar a una cantidad N de puntos.

2.3.1 Ejemplo 2.2

Dado una viable $x(t) = a \cos(\omega_0 t)$, la covarianza se puede definir como

$$\begin{aligned} Cov_x(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau)dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T a \cos(\omega t) a \cos[\omega_0(t+\tau)]dt \\ &= \frac{a^2}{2} \cos(\omega_0 \tau) \end{aligned}$$

Si se acota con los mismos valores que el ejemplo anterior $a = 3$, $\omega_0 = 2$ y $T = 9\pi/10$ y un tiempo de desfase $\tau = 0.6283$,

$$Cov_x(\tau = 0.6283) = \frac{(3)^2}{2} \cos[2(0.6283)] = 1.3907$$

Aplicando la ecuación para valores discretos (Tabla 2.3) considerando un $\Delta t = 0.3142$ y $N = 10$

$$Cov_x(\tau = j\Delta t) = \frac{1}{N-j} \sum_{k=1}^{N-j} x_{k+j} x_k$$

$$Cov_x(\tau = 0.3142) = \frac{1}{10-j} \sum_{k=1}^{10-j} x_{k+j} x_k$$

$$j = \frac{\tau}{\Delta t}$$

$$j = \frac{0.6283}{0.3142} = 2$$

Tabla 2.3 Obtención de la covarianza

n	t	$x(t)$	$t + \tau$	$x(t + \tau)$	$x(t) \cdot x(t + \tau)$
1	0.0000	3.0000	0.6283	0.9271	2.7812
2	0.3142	2.4271	0.9425	-0.9271	-2.2500
3	0.6283	0.9271	1.2566	-2.4271	-2.2500
4	0.9425	-0.9271	1.5708	-3.0000	2.7812
5	1.2566	-2.4271	1.8850	-2.4271	5.8906
6	1.5708	-3.0000	2.1991	-0.9271	2.7812
7	1.8850	-2.4271	2.5133	0.9271	-2.2500
8	2.1991	-0.9271	2.8274	2.4271	-2.2500
9	2.5133	0.9271	---	---	---
10	2.8274	2.4271	---	---	---

$\Sigma = 5.2340$

$$Cov_x(0.6283) = \frac{1}{(10-2)} (5.2340) = 0.6543$$

Aplicando el método de Simpson (Tabla 2.4)

$$n = N - 1 = 11 - 1 = 10$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2.8274 - 0}{10} = 0.28274$$

$$\int_0^{2.8274} [f(x)][f(x+\tau)] dx = \frac{0.2827}{3} 30.2975 = 2.8550$$

$$Cov(0.6283) = \frac{2.8550}{2.8274} = 1.0099$$

Tabla 2.4 Aplicación del método de Simpson para la obtención de la covarianza

n	t	$x(t)$	$t + \tau$	$x(t + \tau)$	FM	$[FM][x(t)x(t + \tau)]$
1	0.0000	3.0000	0.6280	0.9289	1	2.7866
2	0.2827	2.5331	0.9107	-0.7440	4	-7.5382
3	0.5654	1.2778	1.1934	-2.1852	2	-5.5846
4	0.8481	-0.3752	1.4761	-2.9464	4	4.4222
5	1.1308	-1.9115	1.7588	-2.7904	2	10.6676
6	1.4135	-2.8528	2.0415	-1.7660	4	20.1514
7	1.6962	-2.9061	2.3242	-0.1918	2	1.1150
8	2.9789	-2.0550	2.6069	1.4420	4	-11.8530
9	2.2616	-0.5642	2.8896	2.6270	2	-2.9642
10	2.5443	1.1022	3.1723	2.9943	4	13.2014
11	2.8270	2.4255	3.4550	2.4297	1	5.8933

$$\Sigma = 30.2974$$

Cuando se acota el problema, hay un error muy grande ya que se usan pocos datos

2.4 Valores máximos

Los valores que más interesan en el diseño estructural son los máximos, ya que con base en ellos se hace el diseño. En procesos estocásticos el valor máximo se obtiene a partir de la ecuación (2.15) donde se tiene un valor medio independiente del tiempo, un factor pico y la desviación estándar

$$X_{\max} = \bar{x} + k_p \sigma_x \quad (2.15)$$

$$k_p = \sqrt{2 \ln [f_x(0)T]} + \frac{\gamma}{\sqrt{2 \ln [f_x(0)T]}} \quad (2.16)$$

donde k_p es el factor pico, \bar{x} la media, γ es la constante de Euler que equivale a 0.5772, σ_x la desviación estándar y $f_x(0)T$ es el número de cruces por cero.

Dependiendo del espectro de respuesta el factor pico puede tener diferentes valores, en este trabajo se obtiene el factor pico por medio de una simulación en el dominio del tiempo lo cual permite obtener con la ecuación (2.17) (Helliesen, 2013).

$$k_p = \frac{r_{x\max}}{\sigma_x} \quad (2.17)$$

donde $r_{x\max}$ es el valor máximo de la simulación. Este valor puede ser desplazamiento, velocidad, fuerza etc.

2.4.1 Ejemplo 2.3

Obtener el factor pico de la simulación de viento mostrada en la Figura 2.4

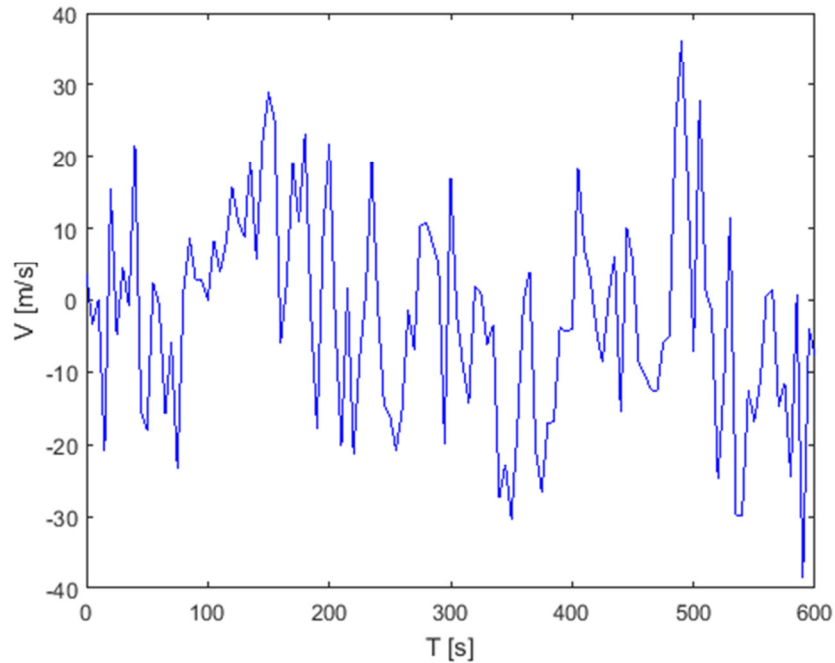


Figura 2.4 Simulación de velocidad de viento para el ejemplo 2.3

Para obtener el número de cruces por cero se identifica cuantas veces a lo largo del registro pasa por cero como se muestra en la Figura 2.5, donde se marca con un círculo rojo el punto donde el valor de la velocidad es cero.

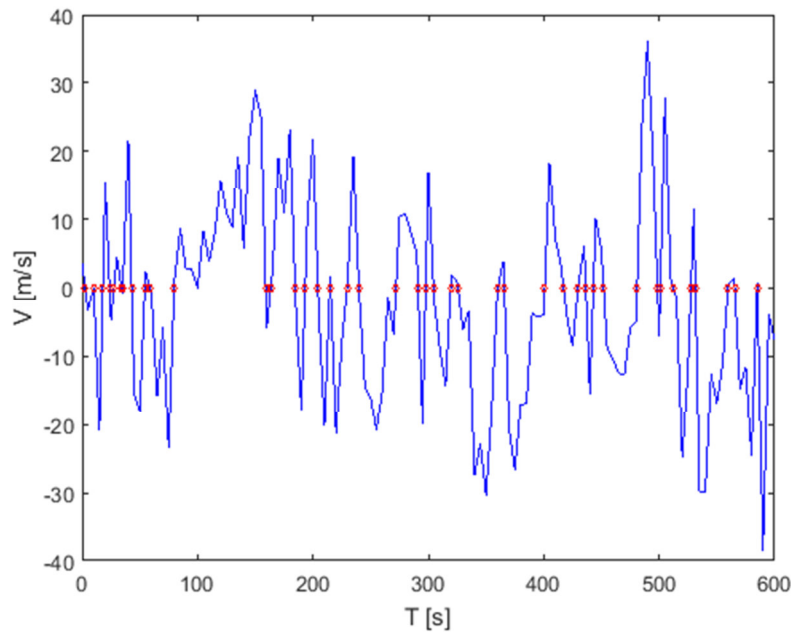


Figura 2.5 Puntos donde el registro cruza el cero

Al contar los puntos da un total de 45 veces que cruza por cero el registro, por lo que el factor pico es:

$$k_p = \sqrt{2 \ln(45)} + \frac{0.5772}{\sqrt{2 \ln(45)}} = 2.97$$

2.5 Densidad de auto espectro

La densidad de auto-espectro contiene las propiedades del proceso en el dominio de la frecuencia, es decir los valores de como varían los puntos a lo largo de la estructura tipo puente. Dicho en otras palabras, es la auto-varianza en el dominio de la frecuencia. Para ello será necesario aplicar la transformada de Fourier.

La densidad de espectro en función del tiempo se tienen valores deterministas, en cambio, en el dominio de la frecuencia los valores son aleatorios. Para hacer eso (y basado en la definición de la transformada de Fourier) se hace la suma de varios armónicos como se muestra en la ecuación (2.18).

$$x(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N X_k(\omega_k, t) \quad (2.18)$$

donde

$$\begin{aligned}\omega_k &= k\Delta\omega \\ \Delta\omega &= 2\pi / T\end{aligned}\quad (2.19)$$

Cada armónico se puede obtener con

$$X_k(\omega_k, t) = c_k \cos(\omega_k t + \varphi_k) \quad (2.20)$$

donde las amplitudes son

$$c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

y el ángulo de fase

$$\varphi_k = \arctan(b_k / a_k)$$

donde a_k y b_k se definen en la ecuación (2.21).

$$\begin{bmatrix} a_k \\ b_k \end{bmatrix} = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \begin{bmatrix} \cos \omega_k t \\ \sin \omega_k t \end{bmatrix} dt \quad (2.21)$$

Por medio de este cambio la función de auto-espectro de un solo lado (para valores positivos de ω) se define similar a la varianza dividido entre $\Delta\omega$, como se muestra en la ecuación (2.22).

$$S_x(\omega_k) = \frac{E[X_k^2]}{\Delta\omega} = \frac{\sigma_{x_k}^2}{\Delta\omega} \quad (2.22)$$

$$S_x(\omega_k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta\omega} \frac{1}{T} \int_0^T [c_k \cos(\omega_k t + \varphi_k)]^2 dt \quad (2.23)$$

Si se define que la componente armónica t es $T_k = 2\pi / \omega_k$ y T como $n \cdot T_k$ entonces se tiene que la función de densidad de un solo lado es:

$$S_x(\omega_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta\omega} \frac{1}{nT_k} n \int_0^{T_k} \left[c_k \cos\left(\frac{2\pi}{T_k} t + \varphi_k\right) \right]^2 dt = \frac{c_k^2}{2\Delta\omega} \quad (2.24)$$

Considerando para los valores negativos, entonces se tiene que

$$S_x(\pm\omega_k) = \frac{E[X_k^* X_k]}{\Delta\omega} = \frac{c_{x_k}^2}{4\Delta\omega} \quad (2.25)$$

Si se considera que c_k es la amplitud de la transformada entonces se puede poner que

$$S_x(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} a^*(\omega) a(\omega) \quad (2.26)$$

2.6 Densidad espectral cruzada

La función de densidad espectral cruzada contiene las propiedades de coherencia en el dominio de la frecuencia, es el mismo concepto que la covarianza pero en el dominio de la frecuencia.

Similar a la ecuación (2.25) el espectro se puede definir como:

$$S_{xy}(\pm\omega_k) = \frac{E[X_k^* Y_k]}{\Delta\omega} = \frac{1}{2\pi T} a_{X_k}^* a_{Y_k} \quad (2.27)$$

Dado que se está empleando la transformada de Fourier donde la respuesta se define como la suma de armónicos $X_k(\omega_k, t)$ y $Y_k(\omega_k, t)$ entonces se puede definir la respuesta como:

$$\begin{aligned} x(t) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{-N}^N X_k(\omega_k, t) \\ y(t) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{-N}^N Y_k(\omega_k, t) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Por lo que la covarianza se puede definir como

$$\begin{aligned} \text{Cov}_{xy} &= E[x(t)y(t)] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{-N}^N (E[X_k Y_k]) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{-N}^N S_{xy}(\pm\omega_k) \Delta\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(\pm\omega_k) d\omega \end{aligned} \quad (2.29)$$

El co-espectro S_{xy} por lo general es un valor complejo donde la parte real se conoce como densidad co-espectral $Co_{xy}(\omega)$ y la parte imaginaria quad-espectral $Qu_{xy}(\omega)$. Esto se puede representar como:

$$\begin{aligned} S_{xy}(\omega) &= Co_{xy}(\omega) - iQu_{xy}(\omega) \\ &= |S_{xy}(\omega)| e^{i\phi_{xy}(\omega)} \end{aligned} \quad (2.30)$$

La función de coherencia se define como

$$Coh_{xy}(\omega) = \frac{|S_{xy}(\omega)|^2}{S_x(\omega)S_y(\omega)} \quad (2.31)$$

Si se considera que todo ocurre en un mismo proceso de tal forma que $x = y$ entonces el espectro cruzado (ahora auto-espectro) queda:

$$S_{xx} = S_x(\omega) \sqrt{Coh_{xx}(\omega)} e^{i\phi_{xx}(\omega)} \quad (2.32)$$

Para cuestiones prácticas, las partes imaginarias pueden ser despreciadas por lo que $e^{i\phi_{xx}(\omega)} = 1$, si se introduce el concepto de co-espectro normalizado como se muestra en la ecuación (2.33) y se considera que la respuesta es debido al mismo proceso tal que $x = y$ entonces la parte real del espectro se puede obtener como se ve en la ecuación (2.34).

$$\hat{Co}_{xy}(\omega) = \frac{\text{Re}[S_{xy}(\omega)]}{\sqrt{S_x(\omega)S_y(\omega)}} \quad (2.33)$$

$$\text{Re}[S_{xy}(\omega)] = S_x(\omega) \hat{Co}_{xy}(\omega) \quad (2.34)$$

A partir de la ecuación (2.34) se puede obtener la función de densidad para los diferentes puntos que se muestran en la Figura 2.2 considerando como contribuyen cada uno al comportamiento total de la estructura.

2.7 Conclusiones

En este capítulo se mostraron las ecuaciones que permiten obtener los valores estadísticos de cualquier función. El viento presenta un comportamiento estadístico Gaussiano Las ecuaciones aquí presentadas están presentadas para funciones continuas sin embargo en la ingeniería la mayoría de las veces se cuenta con sistemas discretos, es

por ello que se presentó como obtener valores similares por medio de la integral se Simpson permitiendo tener valores precisos dependiendo del número de datos.

Capítulo 3

Descripción estocástica del viento turbulento

3.1 Introducción

El viento es un fenómeno natural que tiene un comportamiento estocástico, es decir, que es aleatorio. La manera de describir el flujo es mediante

$$U = V + u(t) \quad (3.1)$$

Donde U depende de un valor medio V , el cual depende de la altura y las características del terreno, y un valor estocástico que depende de la turbulencia, $u(t)$.

3.2 Velocidad media del viento

Cuando se hace el análisis estático de viento para estructuras que son poco sensibles a las ráfagas de viento, es suficiente con considerar la velocidad media ya que la turbulencia no genera efectos considerable en la estructura. En cambio, cuando la estructura es sensible, se requiere hacer un análisis que incluya la turbulencia del viento. Independientemente del tipo de análisis eólico es necesario obtener la velocidad media del viento.

El Manual de Diseño de Obras Civiles, (MDOC, 2008) y el reglamento de construcciones de la ciudad de México tienen un apartado para obtener una velocidad de diseño el cual se obtuvo a partir de la medición de registros a una altura de 10 m en un terreno abierto con un tiempo de promediación de 3s. Sin embargo, las metodologías descritas en la literatura para obtener el comportamiento eólico emplean un tiempo promediado a 10 minutos por lo que la organización mundial meteorología en su apéndice II (Harper et al., 2008) propone algunos factores de conversión los cuales dependen del tipo de terreno. Estos factores se muestran en la Tabla 3.1

Tabla 3.1 Factores de conversión de velocidad

Terreno	$V3/V10$	$V10/V3$
Terreno casi abierto	1.66	0.60
Terreno dentro de la línea costera	1.52	0.66
Terreno fuera de la línea costera	1.38	0.72
Mar abierto	1.23	0.81

Para hacer la conversión solo se tiene que dividir la velocidad de diseño entre el factor que le corresponde de la Tabla 3.1.

3.3 Estadística en un solo punto de flujo turbulento

Para determinar la contribución de la turbulencia, $u(t)$, se considera que el proceso aleatorio tiene una media de cero y es estacionario. El comportamiento de la turbulencia es considerado como una función de densidad de probabilidad de Gauss cuyas varianzas en la dirección del viento es, σ_u^2 , en la perpendicular, σ_v^2 , y en la vertical, σ_w^2 , y se definen en la ecuación (3.1):

$$\begin{bmatrix} \sigma_u^2 \\ \sigma_v^2 \\ \sigma_w^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{T} \int_0^T \begin{bmatrix} u^2(t) \\ v^2(t) \\ w^2(t) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Por medio de estos valores se puede obtener la intensidad de turbulencia. La intensidad de turbulencia es un parámetro que permite ver la variación del viento debido a la turbulencia y se define matemáticamente con la ecuación (3.2),

$$I_n(z) = \frac{\sigma_n(z)}{\bar{u}(z)} \quad (3.2)$$

donde I_n es el índice de turbulencia, σ_n es la desviación estándar a la altura deseada y $\bar{u}(z) = V$ es la velocidad media calculada a una altura z .

Este índice se puede calcular con la ecuación (3.3) y (3.4) los cuales se pueden encontrar en el Eurocódigo

$$I_u(z) = \frac{1}{\ln\left(\frac{z}{z_0}\right)} \quad z_{\min} \leq z \leq z_{\max} \quad (3.3)$$

$$I_u(z) = \frac{1}{\ln\left(\frac{z_{\min}}{z_0}\right)} \quad z \leq z_{\min} \quad (3.4)$$

donde z_0 y z_{\min} son parámetros que dependen del terreno y se muestran en la Tabla 3.2 y $z_{\max} = 200m$.

Tabla 3.2 Valores de las constantes

Categoría del terreno	k_r	z_0 (m)	z_{\min} (m)	Descripción del terreno
1	0.17	0.01	1	Mar abierto, terreno llano sin obstáculos
2	0.19	0.05	2	Granjas con setos, pequeñas estructuras agrarias ocasionales, casas o árboles
3	0.29	0.30	5	Áreas suburbanas o industriales, bosques permanentes
4	0.43	1.00	10	Áreas urbanas con al menos 15 % de superficie cubierta con edificios de altura media mayor a 15 m

Para obtener los índices de turbulencia en las direcciones v, w se puede aplicar la ecuación (3.5).

$$\begin{bmatrix} I_v \\ I_w \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 3/4 \\ 1/2 \end{bmatrix} I_u \quad (3.5)$$

Otro parámetro importante es la longitud de escala de turbulencia, la cual indica el tamaño de las ráfagas la cual se puede obtener con la ecuación (3.6).

$${}^{xf}L_n = VT_n = \bar{u}(z)T_n \quad (3.6)$$

donde ${}^{xf}L_n$ es la longitud de escala de turbulencia, V es la velocidad media y T_n es el tiempo de escala, es decir, el promedio de duración de la ráfaga. El tiempo de escala se define en la ecuación (3.7).

$$T_n = \int_0^{\infty} \rho_n(\tau) d\tau \quad (3.7)$$

Strommen (2010) propone la expresión (3.8) para la obtención de la longitud de escala turbulenta.

$${}^{xf}L_u(z) = 100 \left(\frac{z}{100} \right)^{0.3} \quad (3.8)$$

Para obtener las demás longitudes de escala para las diferentes direcciones se pueden obtener con la ecuación (3.9),

$$\begin{bmatrix} {}^{yf}L_u \\ {}^{zf}L_u \\ {}^{xf}L_v \\ {}^{yf}L_v \\ {}^{zf}L_v \\ {}^{xf}L_\omega \\ {}^{yf}L_\omega \\ {}^{zf}L_\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/12 \\ 1/12 \\ 1/16 \\ 1/16 \end{bmatrix} {}^{xf}L_u \quad (3.9)$$

La ecuación (3.10) representa la forma matemática de la función de densidad espectral, que es una buena representación de las propiedades turbulentas la cual fue propuesta por Kaimal

$$\frac{fS_n(f)}{\sigma_n^2} = \frac{A_n \hat{f}_n}{(1 + 1.5 A_n \hat{f}_n)^{5/3}} \quad (3.10)$$

donde f es la frecuencia en Hz, $S_n(f)$ es la función de densidad, σ_n es la desviación estándar, A_n es un parámetro que depende de la dirección a analizar, $n = u, v, w$, la cual se muestra en la Tabla 3.3 y $\hat{f}_n = f \cdot {}^{xf}L_n / V$

Tabla 3.3 Valores de A_u , A_v , A_w

Constante	Frecuencia	
	Hz	rad/s
A_u	6.8	1.08
A_v	9.4	1.50
A_w	9.4	1.50

Simplificando la ecuación (3.10) se llega a la ecuación (3.11) la cual puede usar frecuencias en Hz ó en radianes/s. Cabe destacar que siempre será en la dirección xf , que es la dirección del viento.

$$\frac{S_n(f)}{\sigma_n^2} = \frac{A_n {}^{xf}L_n / V}{(1 + 1.5 A_n f {}^{xf}L_n / V)^{5/3}} \quad (3.11)$$

La ecuación (3.11) considera en el denominador la desviación estándar, Kaimal (1972), establece la función de densidad como se muestra en la ecuación (3.12),

$$S_u(\omega, z) = U_*^2 \frac{105 \frac{z}{V}}{\left(1 + 33 \frac{\omega z}{2\pi V}\right)^{5/3}} \quad (3.12)$$

$$S_w(\omega, z) = U_*^2 \frac{2 \frac{z}{V}}{\left(1 + 5.3 \frac{\omega z}{2\pi V}\right)^{5/3}}$$

donde U_* se define en la ecuación (3.13), z la altura, V la velocidad media, ω la frecuencia angular,

$$U_* = \frac{0.4V}{\ln\left(\frac{z}{z_0}\right)} \quad (3.13)$$

donde z_0 es la rugosidad del terreno que se puede encontrar en la Tabla 3.2.

3.3.1 Ejemplo 3.1

Graficar la función de densidad de turbulencia para una altura z de 15 m en el estado de Chiapas para una categoría de terreno tipo 2.

El manual de diseño MDOC (2008) establece que la velocidad media en Chiapas para un periodo de retorno de 50 años promediada a 3s, es $V_R = 110 \text{ km/h}$. Para obtener la velocidad media de diseño se empleara el Eurocódigo en el apartado 4.3 donde establece que la velocidad media se obtiene con:

$$V_m(z) = c_r(z) c_o(z) V_R$$

donde $c_r(z)$ es el factor de rugosidad que varía con la altura, $c_o(z)$ es el factor de orografía el cual se tomará como 1 para este caso y V_r es la velocidad regional en m/s promediado a 10 minutos.

Dado que se necesita la velocidad en otras unidades se transforma la velocidad regional

$$V_R = 110 \frac{\text{km}}{\text{h}} \left(\frac{1000\text{m}}{1\text{km}} \right) \left(\frac{1\text{h}}{3600\text{s}} \right) = 30.56 \text{ m/s}$$

Para la obtener el tiempo de promediación a 10 minutos se aplica la Tabla 3.1 para el primer terreno de la siguiente manera:

$$V_R = \frac{30.56}{1.66} = 18.41 \text{ m/s}$$

Una vez obtenida la velocidad regional en las unidades y tiempo de promediación adecuada se requiere obtener el factor de rugosidad de la siguiente manera:

$$c_r(z) = k_r \ln\left(\frac{z}{z_0}\right)$$

empleando la Tabla 3.2 para la categoría de terreno 2 se tiene que $k_r = 0.19$ y $z_0 = 0.05$ m obteniendo un factor de rugosidad de

$$c_r(z=15) = 0.19 \ln\left(\frac{15}{0.05}\right) = 1.08$$

por lo que la velocidad media de diseño es

$$V_m(15) = 1.08(1)(18.41) = 19.88 \text{ m/s}$$

Para obtener la función de densidad es necesario obtener la longitud de escala turbulenta, esto se logra aplicando la ecuación (3.8) para la dirección u y la ecuación (3.9) para la dirección w quedando

$${}^{xf}L_u(z) = 100\left(\frac{15}{100}\right)^{0.3} = 56.60$$

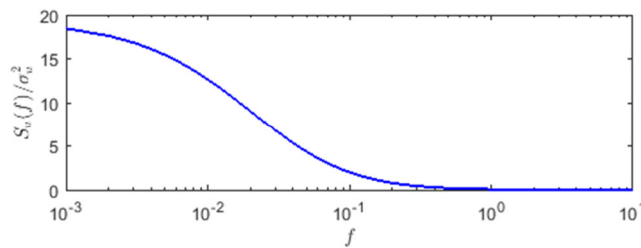
$${}^{xf}L_w(15) = \frac{56.60}{12} = 4.72$$

La función de densidad de Kaimal se obtiene con la ecuación (3.11), la cual tiene como denominador a la varianza.

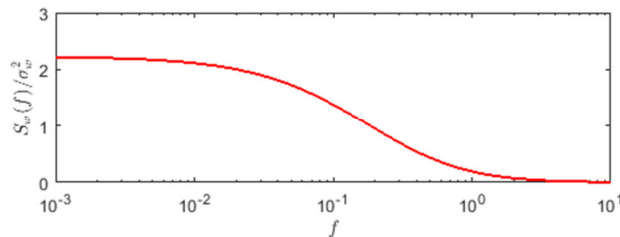
$$\frac{S_u(f)}{\sigma_n^2} = \frac{6.8(56.60/19.88)}{(1+(1.5)(6.8)(56.60/19.88)f)^{5/3}} = \frac{19.36}{(1+29.04f)^{5/3}}$$

$$\frac{S_w(f)}{\sigma_n^2} = \frac{2.23}{(1+3.35f)^{5/3}}$$

En la Figura 3.1 se muestran las gráficas de las funciones, donde se puede ver claramente que la función de densidad en la dirección u tiene valores mayores que en la dirección w .



a) Función de kaimal dirección u



b) Función de kaimal dirección w

Figura 3.1 Función de densidad de Kaimal

Si se define la frecuencia reducida como

$$\hat{f} = \frac{f^x L_n}{V}$$

y la densidad reducida de auto espectro como

$$\hat{S}_n = f \frac{S_n(f)}{\sigma_n^2}$$

Entonces se puede graficar la función de densidad reducida de auto espectro como se muestra en la Figura 3.2.

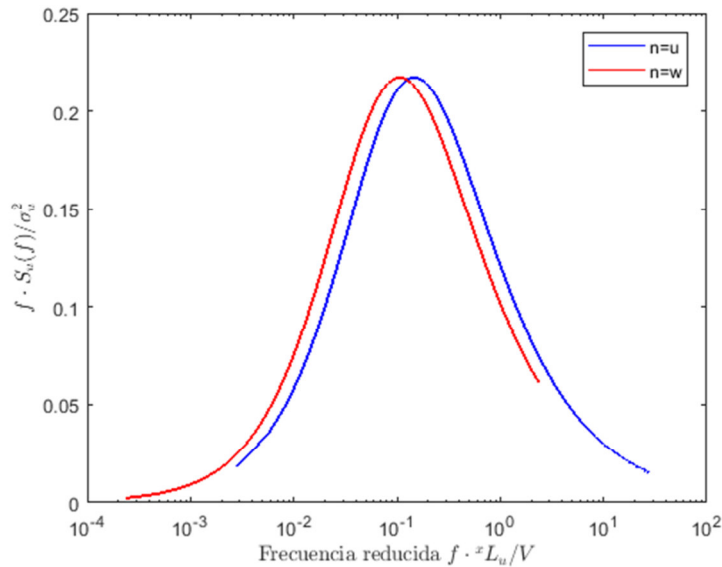


Figura 3.2 Función de densidad de Kaimal normalizado

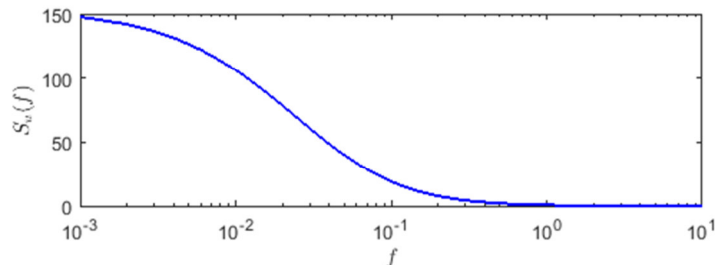
Otra manera de obtener la función de densidad de Kaimal es con la ecuación (3.12). La diferencia con la ecuación (3.11) radica en que ésta requiere la varianza mientras que la otra la velocidad de corte U_* . A continuación se muestra la obtención de la función de densidad con la ecuación (3.12).

$$U_* = \frac{0.4(19.33)}{\ln\left(\frac{15}{0.05}\right)} = 1.35$$

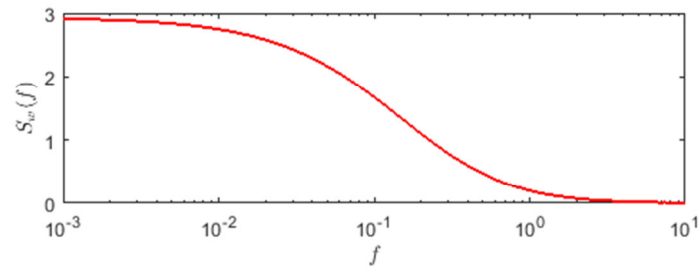
$$S_u(f, z=15) = 1.35^2 \frac{105 \frac{15}{19.88}}{\left(1 + 33f \frac{15}{19.33}\right)^{5/3}} = \frac{149.73}{(1 + 25.61f)^{5/3}}$$

$$S_u(f, z=15) = 1.35^2 \frac{2 \frac{15}{19.88}}{\left(1 + 9.8 \frac{\omega}{2\pi} \frac{15}{19.88}\right)^{5/3}} = \frac{2.8520}{(1 + 7.60\omega)^{5/3}}$$

En la Figura 3.3 se muestran las gráficas de las funciones de densidad de Kaimal aplicando la ecuación (3.12) para este ejemplo



a) Función de kaimal dirección u



b) Función de kaimal dirección w

Figura 3.3 Función de densidad de Kaimal con la ecuación (3.12)

3.4 Propiedades espaciales del flujo turbulento

Dado que el viento varía a lo largo de la estructura tipo línea horizontal es importante tener en cuenta cómo influye de manera espacial en cada punto el flujo. Esto se puede saber por medio de la covarianza la cual relaciona tanto el espacio como en el tiempo de dos puntos.

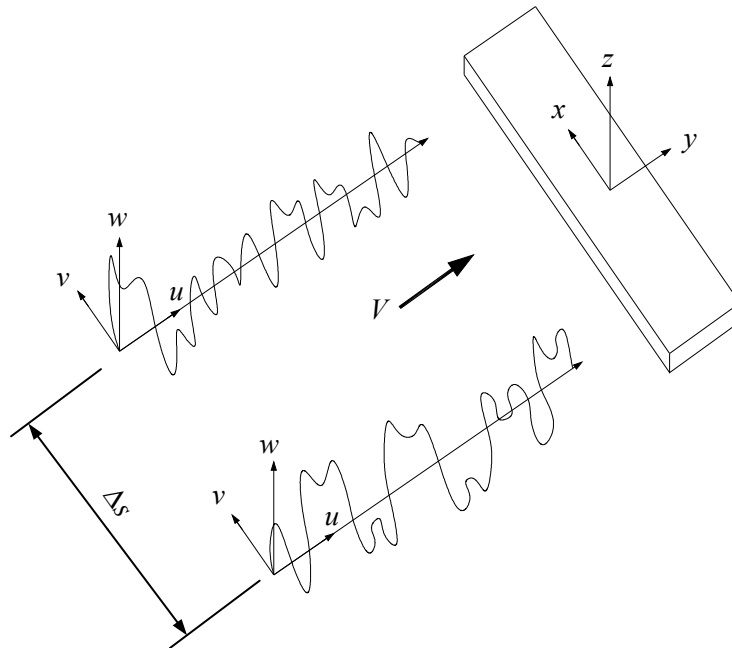


Figura 3.4 Covarianza a lo largo de un tablero

En la Figura 3.4 se muestra el flujo turbulento en el dominio del tiempo para dos puntos a lo largo de un tablero. Se muestra como la velocidad va en la dirección y del tablero, el cual, puede causar flujo turbulento en tres direcciones ortogonales a la velocidad u , v y w . Los puentes presentan características de una estructura tipo línea horizontal, lo cual hace que el viento en un punto sea distinto que en otro, para ello se emplea la covarianza el cual nos indica cómo afecta esta distancia entre los puntos. Para casos distintos de las estructuras tipo línea, como placas, se puede presentar covarianza en dos direcciones simultáneamente, en el caso del puente, se presenta únicamente a lo largo del mismo. En la Figura 3.4 se muestra que existe covarianza en la dirección x del puente el cual corresponde a una función, sin embargo en la Figura 3.4 no se especifica para cual componente fluctuante u , v o w corresponden, por lo que puede existir para la dirección x covarianza para un flujo de la componente u en un punto y v para otro punto. Considerando todas las combinaciones, se tiene que para una dirección existen 9 funciones de covarianza posible, además, si se consideran las tres direcciones del puente con sus respectivas componente fluctuantes, se tiene un total de 27 funciones de covarianza.

Afortunadamente, las funciones de covarianza que son de importancia son aquellas cuando influye el proceso de un mismo componente turbulento, es decir, que la turbulencia en una dirección no influye con respecto a otra. Esto permite reducir a tres funciones de covarianza por cada dirección.

En la ecuación (3.14) se muestran las funciones de covarianza para cada componente turbulenta.

$$\begin{aligned}
 Cov_{uu}(\Delta s, \tau) &= E[u(s, t)u(s + \Delta s, t + \tau)] = \frac{1}{T} \int_0^T u(s, t)u(s + \Delta s, t + \tau) dt \\
 Cov_{vv}(\Delta s, \tau) &= E[v(s, t)v(s + \Delta s, t + \tau)] = \frac{1}{T} \int_0^T v(s, t)v(s + \Delta s, t + \tau) dt \\
 Cov_{ww}(\Delta s, \tau) &= E[w(s, t)w(s + \Delta s, t + \tau)] = \frac{1}{T} \int_0^T w(s, t)w(s + \Delta s, t + \tau) dt
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

donde $s = x^f, y^f, z^f$ con lo cual, considerando las tres direcciones del viento, se tienen 9 funciones de covarianza.

Para el caso de las estructuras tipo línea, se considera solo una dirección del viento, reduciendo a 3 funciones de covarianza.

Las funciones de covarianza representan la variación espacial de la turbulencia en el dominio del tiempo, para tener la representación en el dominio de la frecuencia se emplean las funciones de densidad de espectro cruzado, la cual se puede obtener con:

$$S_{nn}(\Delta s, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Cov_{nn}(\Delta s, \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \tag{3.15}$$

El espectro cruzado se puede definir por el espectro de un solo punto e incluyendo la función de coherencia y el espectro de fase como se muestra en la ecuación (3.16)

$$S_{nn}(\Delta s, \omega) = \frac{1}{2\pi} S_n(\omega) \sqrt{Coh_{nn}(\Delta s, \tau)} \exp(i\varphi) \tag{3.16}$$

Para las estructuras tipo línea horizontal el espectro de fase puede ser despreciado, además si se considera que el espectro de un solo punto es conocido y tomando solo la parte real del espectro cruzado se puede definir el co-espectro normalizado (Strommen, 2010).

El co-espectro contiene la información que indica cómo está distribuida espectralmente la covarianza. El co-espectro normalizado se puede obtener con la ecuación (3.17), también conocido como coherencia.

$$\hat{C}o_{nn}(\Delta s, \omega) = 2\pi \frac{\text{Re}[S_{nn}(\Delta s, f)]}{S_n(\omega)} \tag{3.17}$$

En la literatura se puede encontrar como obtener el valor del co-espectro como una primera aproximación y bajo condiciones homogéneas como se indica en la ecuación (3.18) (Strommen, 2010).

$$\hat{C}o_{nn}(\Delta s, \omega) = \exp\left(-c_{ns} \frac{\omega \Delta s}{2\pi V}\right) \tag{3.18}$$

donde ω es la frecuencia angular en rad/s, Δs es la distancia entre elementos y V es la velocidad media. En la ecuación (3.17) se muestran los valores de c_{ns} ,

$$c_{ns} = \begin{cases} c_{wyf} = c_{uzf} \approx 9 \\ c_{vyf} = c_{vzf} = c_{wyf} \approx 6 \\ c_{\omega zf} \approx 3 \end{cases} \quad (3.19)$$

El coespectro muestra cómo se relaciona un punto con respecto a otro, es por ello que entre mayor sea la distancia de Δs el coespectro será menor.

Al hacer el análisis por ráfagas, los datos que más interesan son para la dirección u y w . En la Figura 3.5 se muestra el coespectro en la dirección u horizontal para diferentes distancias Δs con una velocidad media $V = 10$ m/s. Se puede ver claramente como el coespectro es menor conforme aumenta la frecuencia, teniendo un mayor decremento cuando se considera un espacio mayor.

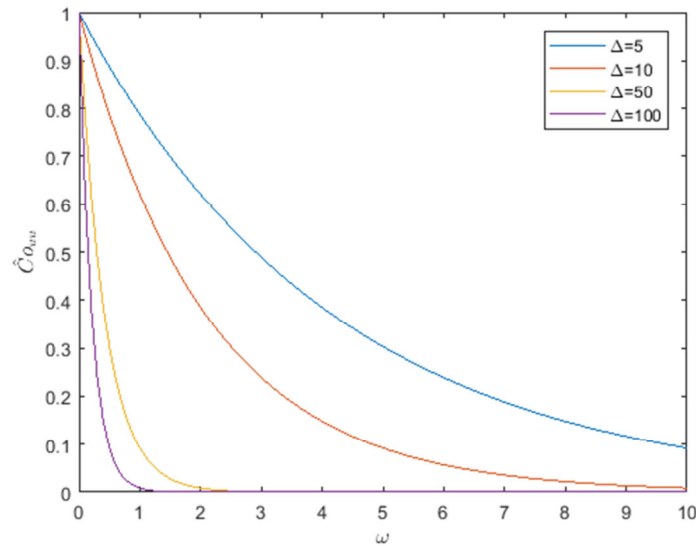


Figura 3.5 Función de coespectro normalizado de diferentes valores Δ en la dirección u

En la Figura 3.6 Se muestran el coespectro para la dirección w , donde se puede observar que exista una mayor relación entre los puntos que en la dirección u mostrados en la Figura 3.5

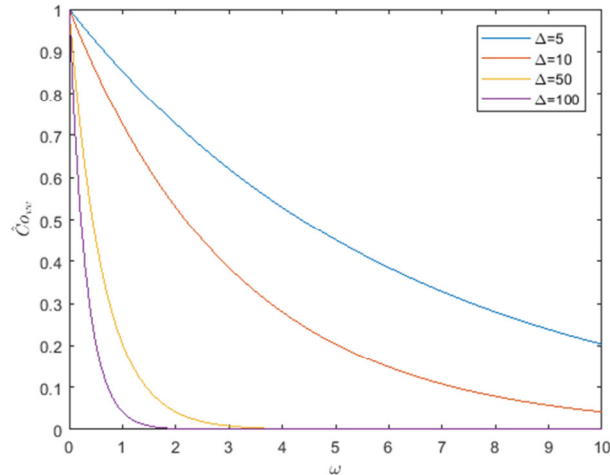


Figura 3.6 Función de coespectro de diferentes valores Δ en la dirección w

La ecuación (3.18) y (3.19) indican el coespectro para viento los cuales serán usadas para obtener el comportamiento de las ráfagas.

La ecuación (3.20) indica el coespectro obtenido por Davenport (1967). En la Figura 3.5 se muestra el comportamiento para diferentes Δ sin embargo Davenport no hace distinción en las direcciones,

$$C = \exp\left(-\frac{\lambda\omega\Delta}{2\pi V}\right) \quad (3.20)$$

donde C es el coespectro, λ es un valor que varía entre 7 y 10, que en la mayoría de las referencias se usa un valor de 10, ω es la frecuencia angular en rad/s, Δ es la separación entre tramos, en puentes esta separación debe ser la misma para aplicar las simplificaciones que se usan en las ecuaciones futuras usadas en este trabajo, y V es la velocidad media. En la Figura 3.7 se muestran como varía el coespectro aplicando la ecuación (3.20).

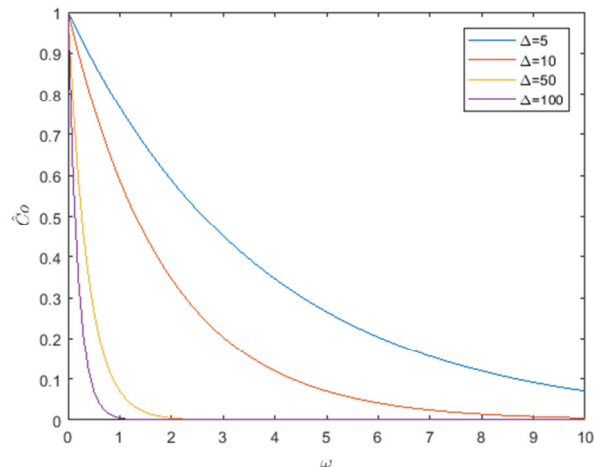


Figura 3.7 Coherencia para diferentes puntos por el método de Davenport

3.5 Conclusiones

En este capítulo se trató sobre el comportamiento del viento, y se mostró como a partir del MANUAL se obtiene la velocidad de diseño. Se puede ver que la velocidad del viento depende tanto del tipo de terreno como la altura. Existen otros factores que para estructuras pequeñas no son necesarias como es la función de densidad de Kaimal, el cual describe el comportamiento del viento en el dominio de la frecuencia. Se eligió este porque es el que presenta mejores resultados, sin embargo, existen varios que pueden ser usados como los de Davenport o Karman. Por otro lado el comportamiento espacial, el cual indica cómo se correlaciona el viento en diferentes puntos, puede ser aplicado con las ecuaciones (3.16), (3.17) y (3.18) sin embargo son aproximaciones ya que obtener estos datos suele ser complicado, existiendo en la literatura muchas formas de obtenerlo.

Capítulo 4

Respuesta dinámica de un proceso estocástico

4.1 Introducción

Cuando el comportamiento de un fenómeno físico está regido por un proceso estocástico es necesario resolver la ecuación de movimiento haciendo uso de la estadística y la probabilidad. Es común obtener la respuesta en el dominio de la frecuencia, por lo que para resolverlo se hace uso de la transformada de Fourier.

4.2 Ecuación de equilibrio dinámico

La expresión (4.1) se muestra la ecuación de movimiento de un oscilador de un grado de libertad,

$$m\ddot{r}(t) + c\dot{r}(t) + kr(t) = q_{tot}(t) \quad (4.1)$$

donde m es la masa, c el amortiguamiento, k la de rigidez, $q_{tot}(t)$ la fuerza del viento y $r(t)$ el desplazamiento.

Considerando que la fuerza debido al viento es aleatoria la respuesta también lo es, como se muestra en la ecuación (4.2).

$$\begin{aligned} r_{tot}(x,t) &= \bar{r}(x) + r(x,t) \\ q_{tot}(x,t) &= \bar{q}(x) + q(x,t) \end{aligned} \quad (4.2)$$

donde $\bar{r}(x)$ y $\bar{q}(x)$ son los valores medios de la respuesta y la carga, respectivamente; y $r(x,t)$ y $q(x,t)$ son sus componentes aleatorias.

La fuerza $q(x,t)$ se puede separar en dos variables como se muestra en la ecuación (4.3). $\hat{q}(x,t)$ es la fuerza debido al viento directamente y $q_{ae}(x,t,r,\dot{r},\ddot{r})$ debido a la interacción con la estructura.

$$q(x,t) = \hat{q}(x,t) + q_{ae}(x,t,r,\dot{r},\ddot{r}) \quad (4.3)$$

Cuando se representa de forma matricial la ecuación de equilibrio dinámico, los valores de la ecuación (4.1) deben tener las componentes en las direcciones deseadas,

generalmente, se consideran la dirección y , z y θ que corresponden a las direcciones mostradas en la Figura 4.1.

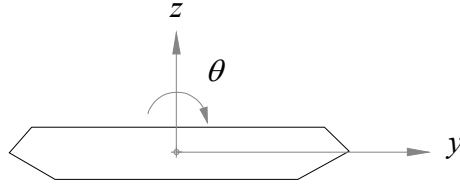


Figura 4.1 Direcciones de análisis

Considerando las diferentes direcciones, la ecuación de movimiento se puede escribir como la ecuación (4.3),

$$M \ddot{r} + C \dot{r} + K r = Q_{tot} \quad (4.3)$$

donde las letras mayúsculas corresponden a las matrices.

La ecuación (4.3) se puede poner en función de sus componentes generalizadas, para ello se considera que la respuesta depende de una matriz de forma modal ϕ y un vector de amplitud modal η también conocido como vector de coordenadas generalizadas. Esta relación se muestra en la ecuación (4.4).

$$r = \phi \eta \quad (4.4)$$

Si se sustituye (4.4) en (4.3) se tiene la ecuación de movimiento en coordenadas generalizadas como se muestra en la ecuación (4.5),

$$\tilde{M} \ddot{\eta} + \tilde{C} \dot{\eta} + \tilde{K} \eta = \tilde{Q}_{tot} \quad (4.5)$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{M}_i &= \int_L (\phi_i^T M \phi_i) dx \\ \tilde{C}_i &= 2\tilde{M}_i \omega_i \zeta_i \\ \tilde{K}_i &= \omega_i^2 \tilde{M}_i \\ \tilde{Q}_{tot_i} &= \int_{L_{exp}} (\phi_i^T Q_{tot}) dx \end{aligned} \quad (4.6)$$

donde \tilde{M}_i es la masa generalizada, \tilde{C}_i es el amortiguamiento generalizado, \tilde{K}_i es la rigidez generalizada, \tilde{Q}_{tot_i} es la fuerza generalizada, ω_i es la frecuencia angular y ζ_i es el

coeficiente de amortiguamiento, cada una correspondiente al modo i característico. Mientras que L es la longitud de toda la estructura y L_{exp} es la longitud donde actúa el viento.

4.3 Respuesta de un oscilador de un grado de libertad

Para obtener la respuesta de un oscilador de un grado de libertad ante efectos eólicos se considera que no hay un acoplamiento entre modos verticales, horizontales y torsionales además de que no existe covarianza que relacione los modos. Para obtener la varianza en cada dirección, se suman las contribuciones de cada modo como se muestra en la ecuación (4.7).

$$\begin{bmatrix} \sigma_y^2 \\ \sigma_z^2 \\ \sigma_\theta^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{iy} \sigma_{iy}^2 \\ \sum_{iz} \sigma_{iz}^2 \\ \sum_{iy} \sigma_{iz}^2 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

La varianza se puede obtener a partir de la función de densidad espectral como se muestra en la ecuación (4.8),

$$\sigma_{ri}^2 = \int_0^\infty S_{ri}(x_r, \omega) = \frac{\phi_i^2(x_r)}{k^2} \int_0^\infty |\hat{H}(\omega)|^2 S_{\hat{Q}_i}(\omega) \quad (4.8)$$

La función de densidad espectral de desplazamiento se define en la ecuación (4.9),

$$S_r(x_r, \omega) = \phi_i^2(x_r) \frac{|\hat{H}(\omega)|^2}{k^2} S_{\hat{Q}_i}(\omega) \quad (4.9)$$

Para la determinación de la ecuación de movimiento véase el apéndice A.

En la Figura 4.1 se muestra la representación gráfica del espectro de respuesta de carga $S_{\hat{Q}_i}(\omega)$, la función de admitancia mecánica $|\hat{H}(\omega)|^2$ y el espectro de respuesta de desplazamiento $S_r(x_r, \omega)$.

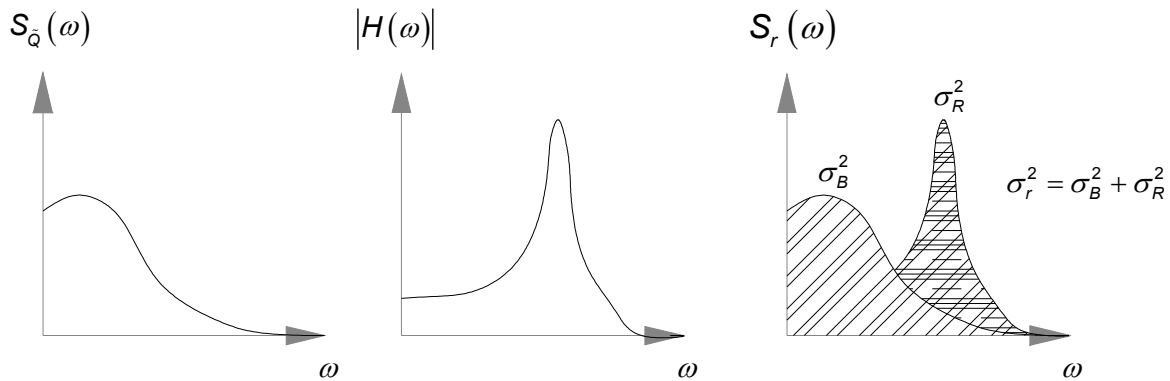


Figura 4.2 funciones de espectro y transferencia en el dominio de la frecuencia

En la Figura 4.2 se puede observar que el área bajo la curva del espectro es la desviación estándar, en la parte derecha, se observa que la desviación estándar total es la suma de la desviación estándar de base (de fondo) y la de resonancia.

4.3 Respuesta de un oscilador de varios grados de libertad

En la sección anterior se vio como obtener la respuesta de forma independiente para cada modo y cada fuerza. En esta sección se presenta la ecuación para considerar los modos superiores de vibrar. Aunque en este trabajo no se aplica esta metodología.

El procedimiento es igual que para un solo modo, dejando en términos matriciales la ecuación (4.9) se expresa como:

$$S_{rr}(x_r, \omega) = \phi_r(x_r) \left[\hat{H}_n^*(\omega) S_{\hat{Q}_i}(\omega) \hat{H}_n^T(\omega) \right] \phi_r^T(x_r) \quad (4.10)$$

Los valores de \hat{H} y ϕ se obtienen de una análisis de valores característicos por lo que falta mostrar cómo se obtiene la función de densidad de carga $S_{\hat{Q}_i}$. En la ecuación (4.10) no viene el término de la rigidez como se muestra en la ecuación (4.9) ya que se incluye en el espectro de la carga modal.

4.4 Ecuación de aleteo

Las ecuaciones (4.8) y (4.9) pueden ser usadas para obtener la respuesta de cualquier estructura ante efectos de ráfagas como de desprendimiento de vórtices, sin embargo, en estas ecuaciones no existe acoplamiento entre modos lo cual sucede cuando se evalúa el efecto ante aleteo.

Theodorsen (1935) propuso las ecuaciones de aleteo para una placa, ignorando la separación de flujo, esto limita su propuesta para puentes, por lo que Scanlan (1978) modificó la teoría de Theodorsen. La teoría de Scanlan utiliza derivadas aerodinámicas, las cuales se definen más adelante, primero la ecuación (4.3) se puede reescribir como:

$$M[\ddot{h} + 2\zeta_h \omega_h \dot{h} + \omega_h^2 h] = L_h + L_b \quad (4.11a)$$

$$I[\ddot{\alpha} + 2\zeta_\alpha \omega_\alpha \dot{\alpha} + \omega_\alpha^2 \alpha] = M_\alpha + M_b \quad (4.11b)$$

donde M es la masa modal, I es el momento de inercia másico, h es el desplazamiento vertical, α es la rotación, ζ_n es el amortiguamiento crítico, ω_n es la frecuencia circular donde $n \in \{h, \alpha\}$, L_h es el levante aerodinámico, M_α es el momento, L_b es la fuerza de levante debido a las ráfagas y M_b el momento debido a las ráfagas.

Scanlan define las fuerzas autoexcitables como:

$$L_h = \frac{1}{2} \rho V^2 (2B) \left[KH_1^* \frac{\dot{h}}{V} + KH_2^* \frac{B\dot{\alpha}}{V} + K^2 H_3^* \alpha \right] \quad (4.12a)$$

$$M_\alpha = \frac{1}{2} \rho V^2 (2B^2) \left[KA_1^* \frac{\dot{h}}{V} + KA_2^* \frac{B\dot{\alpha}}{V} + K^2 A_3^* \alpha \right] \quad (4.12b)$$

donde ρ es la densidad del viento, B es el ancho del tablero del puente, K es la frecuencia reducida que se obtiene con $K = B\omega / V$, V es la velocidad media, H_n^* y A_n^* y $n \in \{1, 2, 3\}$ son las derivadas aerodinámicas.

Las fuerzas debido a las ráfagas las define como:

$$L_b = \frac{1}{2} \rho V^2 B \left[2C_L \frac{u(t)}{V} + \left(\frac{dC_L}{d\alpha} + C_D \right) \frac{w(t)}{V} \right] \quad (4.13a)$$

$$M_b = \frac{1}{2} \rho V^2 B^2 \left[2C_M \frac{u(t)}{V} + \left(\frac{dC_M}{d\alpha} \right) \frac{w(t)}{V} \right] \quad (4.13b)$$

donde $u(t)$ y $w(t)$ es la velocidad horizontal y vertical debido a la ráfaga, respectivamente.

C_D es el coeficiente de arrastre, C_L el de levante, C_m el de momento, $\frac{dC_L}{d\alpha}$ es la derivada del coeficiente de levante y $\frac{dC_M}{d\alpha}$ la derivada del coeficiente de momento.

Liu (2011) presenta las fuerzas de ráfaga como se muestra en las ecuaciones 4.14 las cuales se evalúan a partir de las derivadas aerodinámicas.

$$L_h = \frac{1}{2} \rho V^2 B \left[kH_1^* \frac{\dot{h}}{V} + kH_2^* \frac{B}{V} \dot{\alpha} + k^2 H_3^* \alpha + k^2 H_4^* \frac{h}{B} \right] \quad (4.14a)$$

$$M_h = \frac{1}{2} \rho V^2 B^2 \left[kA_1^* \frac{\dot{h}}{V} + kH_2^* \frac{B}{V} \dot{\alpha} + k^2 H_3^* \alpha + k^2 H_4^* \frac{h}{B} \right] \quad (4.14b)$$

La diferencia entre las ecuaciones (4.12) y (4.14) es en que la primera solo emplea seis derivadas aerodinámicas y la segunda ocupa ocho derivadas aerodinámicas. Estas derivadas aerodinámicas describen el comportamiento a flexión, torsión y la combinación de ambas por lo que la ecuación (4.14) considera todas las combinaciones posibles entre flexión y torsión.

4.5 Conclusiones

En este capítulo se revisó como obtener la respuesta ante efectos ráfagas y vórtices en el dominio de la frecuencia, esto permite trabajar con las funciones de densidad las cuales se encuentran en este dominio.

También se mostraron las ecuaciones propuestas por Scanlan para el efecto de aleteo las cuales involucran un acoplamiento torsional y a flexión vertical, esto permitirá resolver las ecuaciones en el dominio del tiempo.

Capítulo 5

Cargas de viento y movimiento autoexcitable

5.1 Introducción

Cuando un puente está sujeto a un flujo de viento, el ángulo de incidencia cambiara dependiendo del instante en el que actué, esto causara que la fuerza en la estructura varíe como se muestra en la Figura 5.1.

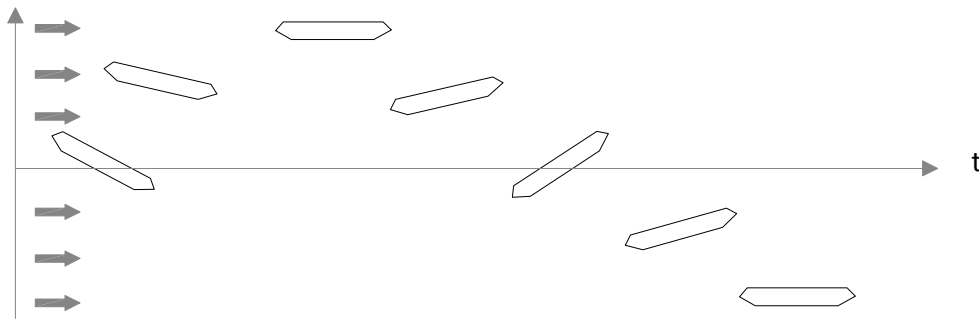


Figura 5.1 Movimiento auto-excitable debido al viento

En el análisis de viento, se consideran tres direcciones que corresponden a las direcciones fluctuantes, estas dependen de la dirección del viento y se descomponen en u , v y w que son en la dirección paralela, perpendicular horizontal y perpendicular vertical al viento V respectivamente. En la Figura 5.2 se muestran las direcciones del flujo.

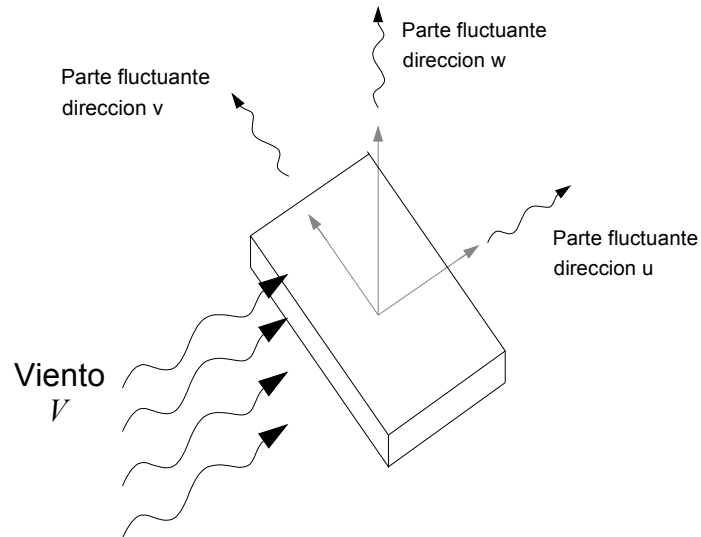


Figura 5.2 dirección del viento fluctuante

Las fuerzas por metro lineal se pueden descomponer en tres componentes: una fuerza que genera un desplazamiento en dirección del viento $q_d(x,t)$, otra que genera un desplazamiento perpendicular al viento $q_L(x,t)$ y otra que genera un giro del tablero $q_M(x,t)$. A continuación se presenta como obtener las fuerzas del viento incluyendo su cambio de posición.

5.2 Teoría de ráfagas

La teoría que se presenta a continuación fue desarrollada por Davenport (Strommen, 2010). En este caso es aplicada a estructuras tipo línea con una velocidad media de flujo a cierta altura a lo largo del puente.

En la Figura 5.3 se muestran las fuerzas y desplazamientos causados por el viento y como va cambiando el ángulo del tablero, causando que la fuerza varíe dependiendo del ángulo de ataque, esto se representa con la Figura 5.3 que se expresa con la ecuación (5.1).

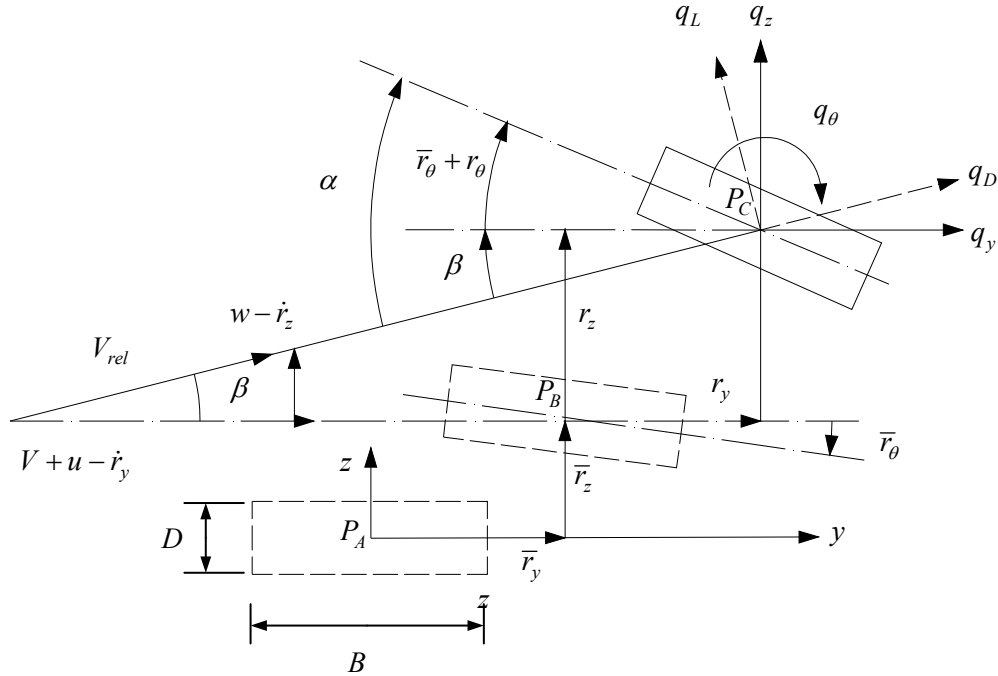


Figura 5.3 Desplazamientos y flujos

En la Figura 5.3 el tablero se encuentra en el punto P_A antes de estar sometido al efecto del viento. Una vez que el viento actúa, el tablero, tiene los desplazamientos \bar{r}_y , \bar{r}_z y \bar{r}_θ moviendo el tablero al punto P_B . Una vez que se encuentra el punto P_B , el tablero, se encuentra sometido a una velocidad relativa V_{rel} la cual se descomponen en su componente horizontal expresada como $V+u-\dot{r}_y$ y su componente vertical $w-\dot{r}_z$, formando un ángulo β . La velocidad relativa en el punto P_B genera los desplazamientos r_y , r_z y r_θ cambiando la posición del tablero al punto P_C . La nueva posición depende de la posición inmediatamente anterior por lo que los desplazamientos nuevos, se suman a los anteriores, sin embargo el ángulo de ataque del viento cambia, por lo que la rotación del tablero con referencia a la dirección de la velocidad relativa V_{rel} es $\beta + (\dot{r}_\theta + r_\theta)$ a la cual se le denomina α . En cada nueva posición la presión de viento cambia la cual se puede expresar la obtención de esta presión en función del ángulo de ataque como se muestra en la ecuación (5.1),

$$\begin{bmatrix} q_D(x,t) \\ q_L(x,t) \\ q_M(x,t) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \rho V_{rel}^2 \begin{bmatrix} DC_D(\alpha) \\ BC_L(\alpha) \\ B^2 C_M(\alpha) \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

donde q es la presión dinámica, ρ es la densidad del viento, V_{rel} es la velocidad relativa del viento en un instante determinado, D es el peralte del puente, B es el ancho del puente, α es el ángulo de incidencia del viento y C_D , C_L y C_M son los coeficientes de arrastre, levante y momento respectivamente.

Para incluir la rotación del tablero debido a las ráfagas se emplea la matriz de rotación multiplicada por las presiones de las ecuación (5.1).

$$\begin{bmatrix} q_y \\ q_z \\ q_{\theta} \end{bmatrix}_{tot} = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_D \\ q_L \\ q_M \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

donde

$$\beta = \arctan\left(\frac{w - \dot{r}_z}{V + u - \dot{r}_y}\right) \quad (5.3)$$

Normalmente se considera que β es pequeño lo cual permite hacer las siguientes consideraciones: $\cos(\beta) \approx 1$, $\sin(\beta) \approx \beta$ y $\beta \approx (w + \dot{r}_z) / V$ y la velocidad relativa se puede obtener con la ecuación (5.1)

$$V_{rel}^2 = (V + u - \dot{r}_y)^2 + (V + w - \dot{r}_z)^2 \approx V^2 + 2Vu - 2V\dot{r}_y \quad (5.4)$$

El ángulo de incidencia α se divide en un valor medio $\bar{\alpha}$ y una parte fluctuante α_f . Con esto se puede obtener los coeficientes aerodinámicos como se muestra en la ecuación (5.5).

$$\begin{bmatrix} C_D(\alpha) \\ C_L(\alpha) \\ C_M(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_D(\bar{\alpha}) \\ C_L(\bar{\alpha}) \\ C_M(\bar{\alpha}) \end{bmatrix} + \alpha_f \begin{bmatrix} C'_D(\bar{\alpha}) \\ C'_L(\bar{\alpha}) \\ C'_M(\bar{\alpha}) \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

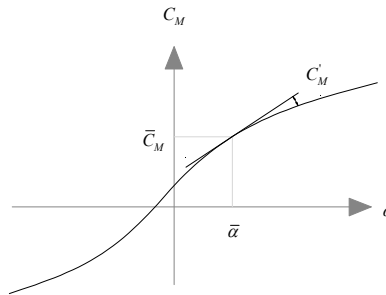
donde C'_D, C'_L, C'_M son las pendientes de la variación del ángulo $\bar{\alpha}$.

En la Figura 5.4 se muestra la variación de los coeficientes aerodinámicos.



a) Coeficiente de arrastre

b) Coeficiente de levante



c) Coeficiente de momento

Figura 5.4 Gráficas de los coeficientes aerodinámicos

Sustituyendo la ecuación (5.5) en (5.1) se tiene:

$$\begin{bmatrix} q_y \\ q_z \\ q_\theta \end{bmatrix} = \rho V \left(\frac{V}{2} + u - \dot{r}_y \right) \left\{ \begin{bmatrix} D\bar{C}_D \\ B\bar{C}_L \\ B^2\bar{C}_M \end{bmatrix} + \left(r_\theta + \frac{w}{V} - \frac{\dot{r}_z}{V} \right) \begin{bmatrix} DC'_D \\ BC'_L \\ B^2C'_M \end{bmatrix} + \frac{w - \dot{r}_z}{V} \begin{bmatrix} -B\bar{C}_L \\ D\bar{C}_D \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad (5.6)$$

Si se asume que el producto de las variables de orden mayor (las derivadas multiplicadas por derivadas) es suficientemente pequeño para no ser considerado, se tiene la ecuación (5.7).

$$q_{tot}(x,t) = \bar{q} + B_q v + C_{ae} r + K_{ae} r \quad (5.7)$$

Considerando la dirección del viento $v(x,t) = [u \ w]^T$ y los desplazamientos relativos

$r(x,t) = [r_y \ r_z \ r_\theta]^T$ se tiene que la presión media del viento es:

$$\bar{q}(x) = \begin{bmatrix} \bar{q}_y \\ \bar{q}_z \\ \bar{q}_\theta \end{bmatrix} = \frac{\rho V^2 B}{2} \begin{bmatrix} (D/B)\bar{C}_D \\ \bar{C}_L \\ B\bar{C}_M \end{bmatrix} = \frac{\rho V^2 B}{2} \cdot \hat{b}_q \quad (5.8)$$

La parte fluctuante (la parte dinámica) es

$$B_q(x) = \frac{\rho VB}{2} \begin{bmatrix} c(D/B)\bar{C}_D & ((D/B)C'_D - \bar{C}_L) \\ 2\bar{C}_L & (C'_D + (D/B)\bar{C}_D) \\ 2B\bar{C}_M & BC'_M \end{bmatrix} = \frac{\rho VB}{2} \cdot \hat{B}_q \quad (5.9)$$

$$C_{ae}(x) = -\frac{\rho VB}{2} \begin{bmatrix} 2(D/B)\bar{C}_D & ((D/B)C'_D - \bar{C}_L) & 0 \\ 2\bar{C}_L & (C'_D + (D/B)\bar{C}_D) & 0 \\ 2B\bar{C}_M & BC'_M & 0 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

$$K_{ae}(x) = \frac{\rho V^2 B}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & (D/B)C'_D \\ 0 & 0 & C'_L \\ 0 & 0 & BC'_M \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Dejando en términos matriciales se puede escribir que la parte fluctuante como

$$q(x,t) = B_q v + [C_{ae} \dot{r} + K_{ae} r] \quad (5.12)$$

En la ecuación (5.12) se puede observar que la fuerza debido al viento depende de una constante $B_q v$ y otra $[C_{ae} \dot{r} + K_{ae} r]$ que depende de la estructura. La segunda parte es la que se conoce como fuerzas autoexcitables ya que la propia estructura contribuye al desplazamiento debido a las ráfagas.

Para obtener la solución de la ecuación (5.12) en el dominio de la frecuencia, se aplica la transformada de Fourier como se muestra en la ecuación (5.13).

$$a_q = B_q a_u + (i\omega C_{ae} + K_{ae}) a_r \quad (5.13)$$

donde a_q son los valores asociados a las cargas del viento en las dos direcciones y el giro, a_r son los valores asociados a los desplazamientos relativos y a_u son los valores asociados a las direcciones de la turbulencia.

El término B_q , en la ecuación (5.12) se obtiene con la ecuación (5.14).

$$B_q(x) = \frac{\rho VB}{2} \begin{bmatrix} (D/B)\bar{C}_D A_{yu} & ((D/B)C'_D - \bar{C}_L) A_{yw} \\ 2\bar{C}_L A_{zu} & (C'_D + (D/B)\bar{C}_D) A_{zw} \\ 2B\bar{C}_M A_{\theta u} & BC'_M A_{\theta w} \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

La ecuación (5.12) se conoce como las funciones de admitancia las cuales depende de la sección del tablero. Estos valores pueden obtener a partir de experimentos de túnel de viento.

Strommen (2010) propone una ecuación para obtener la admitancia aerodinámica la cual se muestra en la ecuación (5.15), sin embargo en la literatura se pueden encontrar diferentes formas de obtener la función de admitancia aerodinámica.

$$A_{mn}(\omega) = \frac{1}{(1 + a_{mn} B \omega / V)^{b_{mn}}} \quad (5.15)$$

donde a_{mn} y b_{mn} son constantes que dependen de la sección. Los valores de A_{mn} varían de 0 a 1 dependiendo de la frecuencia circular.

Este método que se mostró es conocido como el Quasy Steady (QS) el cual se basa en proponer valores de las derivadas aerodinámicas en función a sus coeficientes aerodinámicos, esto se muestra en las ecuaciones (5.9), (5.10) y (5.11) permitiendo obtener la respuesta de la estructura ya que en la literatura existen muchas propuestas para los coeficientes aerodinámicos. La popularidad de este método es debido a la simplicidad de aplicación. Tielman (2003) argumenta que éste método puede ser aplicado solamente para predecir la fuerza en regiones de estancamiento, fallando al predecir la fuerza para regiones separadas. Otra desventaja que tiene es que sobre estima la fuerza.

5.3 Ecuación en el dominio del tiempo

En ocasiones es necesario transformar la función del dominio de la frecuencia al dominio del tiempo, por ejemplo en las ecuaciones de aleteo se requieren las velocidades fluctuantes en el dominio del tiempo, sin embargo la función de densidad de Kaimal, la cual permite conocer la turbulencia, está en el dominio de la frecuencia. También cuando se aplican las ecuaciones mostradas en el capítulo 4 para obtener la respuesta ante ráfagas y desprendimiento de vórtices se encuentran en el dominio de la frecuencia y para obtener los valores máximos es necesario transformar la función al dominio del tiempo.

5.3.1 Respuesta no coherente en el dominio del tiempo

Para obtener la respuesta en el dominio del tiempo es necesario transformar el espectro de respuesta (Strommen, 2010) con la ecuación (5.16)

$$x(t) = \sum_{k=1}^N c_k \cos(\omega_k t + \theta_k) \quad (5.16)$$

donde $x(t)$ es la respuesta en el tiempo, ω_k es la frecuencia angular, t es el tiempo y θ_k es una variable aleatoria en 0 y 2π .

La constante c_k se obtiene a partir del espectro de respuesta la cual se muestra a continuación:

$$S_x(\omega_k) = \frac{c_k^2}{2\Delta\omega_k} \quad (5.17)$$

donde $S_x(\omega_k)$ es el espectro de respuesta en el dominio de la frecuencia, y $\Delta\omega_k$ es la diferencia de frecuencias.

Despejando c_k de la ecuación (5.17) y sustituyendo en (5.16), la respuesta en el tiempo es:

$$x(t) = \sum_{k=1}^N \sqrt{2\Delta\omega_k S(\omega_k)} \cos(\omega_k t + \theta_k) \quad (5.18)$$

Entre más valores de la frecuencia se usen, el resultado será más preciso.

5.3.2 Ejemplo 5.1

Supóngase que se tiene los valores del espectro de respuesta que se muestran en la Tabla 5.1.

Tabla 5.1 Espectro de respuesta del ejemplo

ω	S_x
0.2	0.5927
0.4	49.5155
0.6	0.0346
0.8	0.0032
1.0	0.0006

Dado que son 5 valores, se tendrán 5 ecuaciones que se sumaran. Para obtener la primera ecuación se tiene que,

$$\begin{aligned} \Delta\omega &= 0.2 \\ S_x(\Delta\omega = 0.2) &= 0.5927 \\ c_k &= \sqrt{2(0.2)(0.5927)} = 0.4869 \\ \theta &= 2\pi(0.87) = 5.52 \\ x_1 &= 0.49 \cos(0.2t + 5.52) \end{aligned}$$

Siguiendo el mismo procedimiento, en la Tabla 5.2 se muestran los datos para las demás valores del espectro de respuesta.

Tabla 5.2 Valores de frecuencia, función de densidad de desplazamiento, valor de c_k , variable aleatoria y función en el dominio del tiempo

ω	S_x	c_k	θ	$x(t)$
0.2	0.5927	0.4869	5.52	$0.49 \cos(0.2t + 5.52)$
0.4	49.5155	4.4504	2.43	$4.45 \cos(0.4t + 2.43)$
0.6	0.0346	0.1177	4.55	$0.12 \cos(0.6t + 4.55)$
0.8	0.0032	0.0358	3.29	$0.04 \cos(0.8t + 3.29)$
1.0	0.0006	0.0158	2.86	$0.02 \cos(1.0t + 2.86)$

En la Figura 5.5 se muestra la gráfica de las 5 funciones, definidas en la última columna de la Tabla 5.2.

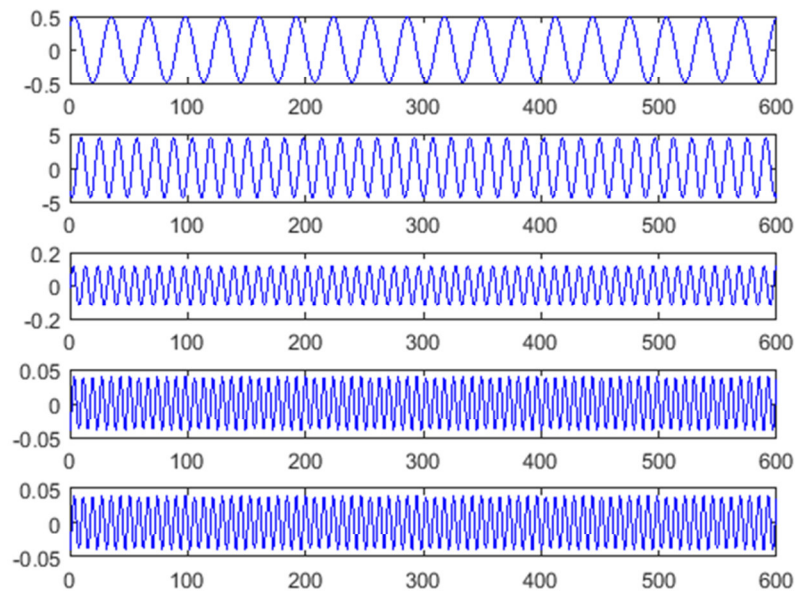


Figura 5.5 Función de la respuesta en el dominio del tiempo para cada intervalo ω

La suma de todas las funciones $x(t)$ dará la respuesta total. En este ejemplo, se aplicó a 5 frecuencias; sin embargo, es recomendable hacerlo para más valores. En la Figura 5.6 se muestra la gráfica al sumar todas las funciones para 2000 frecuencias para tener mayor precisión.

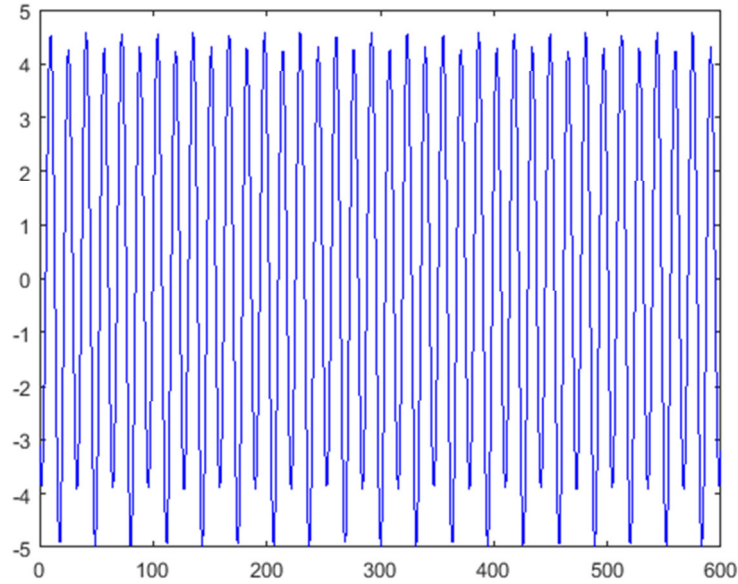


Figura 5.6 Respuesta en el tiempo del espectro Ejemplo

5.3.3 Respuesta coherente en el dominio del tiempo

Cao et al., (2000) muestra que se puede obtener la simulación de un proceso ergódico estocástico multivariado con la ecuación (5.19),

$$L_j(t) = \sqrt{2(\Delta\omega)} \sum_{m=1}^j \sum_{l=1}^N |H_{jm}(\omega_l)| \cos(\omega_l t + \phi_{ml}) \quad (5.19)$$

donde L_j es la simulación en el dominio del tiempo, $\Delta\omega$ es la separación entre frecuencias, $H_{jm}(\omega_l)$ es la descomposición de Cholesky de la matriz de espectro cruzado de $S^0(\omega)$, t es el tiempo, ω_l es la frecuencia angular, ϕ_{ml} es una variable aleatoria en 0 y 2π , j es el número de simulación y N es el número de frecuencias. Entre más frecuencias se usen, mayor será la precisión.

La ecuación (5.20) muestra cómo se obtiene la descomposición de Cholesky de la matriz de espectro cruzado.

$$H(\omega) = \sqrt{S(\omega)}G(\omega) \quad (5.20)$$

donde $S(\omega)$ es la función de espectro y $G(\omega)$ es la descomposición de Cholesky de la matriz de coherencia.

La descomposición de Cholesky se puede obtener con la ecuación (5.21) al considerar que los nodos a evaluar están separados espacialmente de forma equidistante. Es decir que ΔS es igual para todos los puntos.

$$G(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ C & \sqrt{1-C^2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ C^2 & C\sqrt{1-C^2} & \sqrt{1-C^2} & 0 & \dots & 0 \\ C^3 & C^2\sqrt{1-C^2} & C\sqrt{1-C^2} & \sqrt{1-C^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C^{n-1} & C^{n-2}\sqrt{1-C^2} & C^{n-3}\sqrt{1-C^2} & C^{n-4}\sqrt{1-C^2} & \dots & \sqrt{1-C^2} \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

Esta matriz puede obtener con el algoritmo de la ecuación (5.22)

$$g_{j,m}(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq j < m \leq n \\ C^{|j-m|} & \text{si } m=1, m \leq j \leq n \\ C^{|j-m|}\sqrt{1-C^2} & \text{si } 2 \leq m \leq j \leq n \end{cases} \quad (5.22)$$

donde C es la coherencia, $g(\omega)$ es el elemento de la matriz $G(\omega)$ de la ecuación (5.21). j y m son la fila y la columna de la matriz respectivamente y n es el número de puntos a evaluar.

Por ejemplo, para obtener la descomposición de Cholesky de una matriz de coherencia con 5 nodos usando la expresión de Davenport de la ecuación (3.18) con $\lambda=10$, separación $\Delta=0.5$ m, velocidad media $V=40$ m/s y frecuencia angular $\omega=4$ rad/s se sigue el siguiente procedimiento:

Primero se obtiene la coherencia; dado que está separado equidistantemente la coherencia entre puntos será la misma.

$$C = \exp\left(-\frac{\lambda\omega\Delta}{2\pi V}\right)$$

$$C = \exp\left(-\frac{10(4)(0.5)}{2\pi(40)}\right) = 0.9235$$

Aplicando el algoritmo de la ecuación (5.22) para 5 elementos se tiene que $n=5$, j hace referencia a las filas y m a las columnas de la matriz.

Para la primera fila de la matriz de la descomposición de Cholesky se tiene que

$$j=1, m=1, n=5$$

$$m=1, m \leq j \leq n$$

$$g_{1,1} = C^{|j-m|} = C^{|1-1|} = (0.9235)^0 = 1$$

Para los demás valores de la fila

$$j = 1, m = 2..n, n = 5$$

$$1 \leq j < m \leq n$$

$$g_{1,2..n} = 0$$

$$G(\omega) = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix}$$

Para la segunda fila se tiene:

$$j = 2, m = 1, n = 5$$

$$m = 1, m \leq j \leq n$$

$$g_{2,1} = C^{|j-m|} = C^{|2-1|} = (0.9235)^1 = 0.9235$$

$$j = 2, m = 2, n = 5$$

$$2 \leq m \leq j \leq n$$

$$g_{2,2} = C^{|j-m|} \sqrt{1-C^2} = 0.9235^{|2-2|} \sqrt{1-(0.9235)^2} = 0.3836$$

$$j = 2, m = 3..n, n = 5$$

$$1 \leq j < m \leq n$$

$$g_{2,3..n} = 0$$

$$G(\omega) = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.9235 & 0.3836 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix}$$

Para la tercera fila se tiene:

$$j = 3, m = 1, n = 5$$

$$m = 1, m \leq j \leq n$$

$$g_{3,1} = C^{|3-1|} = 0.9235^{|2|} = 0.8529$$

$$j = 3, m = 2, n = 5$$

$$2 \leq m \leq j \leq n$$

$$g_{3,2} = C^{|j-m|} \sqrt{1-C^2} = 0.9235^{|3-2|} \sqrt{1-(0.9235)^2} = 0.3542$$

$$m = 3$$

$$g_{3,3} = C^{|j-m|} \sqrt{1-C^2} = 0.9235^{|3-3|} \sqrt{1-(0.9235)^2} = 0.3836$$

$$j = 2, m = 4..n, n = 5$$

$$1 \leq j < m \leq n$$

$$g_{2,3..n} = 0$$

$$G(\omega) = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.9235 & 0.3836 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.8529 & 0.3542 & 0.3836 & 0.0000 & 0.0000 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix}$$

Para la cuarta fila se tiene:

$$\begin{aligned} j &= 4, m = 1, n = 5 \\ m &= 1, m \leq j \leq n \\ g_{4,1} &= C^{|4-1|} = 0.9235^{|3|} = 0.7876 \\ j &= 4, m = 2, n = 5 \\ 2 &\leq m \leq j \leq n \\ g_{4,2} &= 0.9235^{|4-2|} \sqrt{1 - (0.9235)^2} = 0.3721 \\ m &= 3 \\ g_{4,3} &= 0.9235^{|4-3|} \sqrt{1 - (0.9235)^2} = 0.3542 \\ m &= 4 \\ g_{4,4} &= 0.9235^{|4-3|} \sqrt{1 - (0.9235)^2} = 0.3836 \\ j &= 2, m = 5, n = 5 \\ 1 &\leq j < m \leq n \\ g_{4,5} &= 0 \end{aligned}$$

$$G(\omega) = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.9235 & 0.3836 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.8529 & 0.3542 & 0.3836 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.7876 & 0.3271 & 0.3542 & 0.3836 & 0.0000 \\ & & & & \end{bmatrix}$$

Para la quinta fila se tiene:

$$\begin{aligned} j &= 5, m = 1, n = 5 \\ m &= 1, m \leq j \leq n \\ g_{5,1} &= C^{|5-1|} = 0.9235^{|4|} = 0.7274 \\ j &= 5, m = 2, n = 5 \\ 2 &\leq m \leq j \leq n \\ g_{5,2} &= 0.9235^{|5-2|} \sqrt{1 - (0.9235)^2} = 0.3021 \\ m &= 3 \\ g_{5,3} &= 0.9235^{|5-2|} \sqrt{1 - (0.9235)^2} = 0.3721 \\ m &= 4 \\ g_{5,4} &= 0.9235^{|5-4|} \sqrt{1 - (0.9235)^2} = 0.3542 \\ m &= 4 \end{aligned}$$

$$g_{5,5} = 0.9235^{|5-5|} \sqrt{1 - (0.9235)^2} = 0.3836$$

$$j = 2, m = 4 \dots n, n = 5$$

$$1 \leq j < m \leq n$$

$$g_{2,3 \dots n} = 0$$

$$G(\omega) = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.9235 & 0.3836 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.8529 & 0.3542 & 0.3836 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.7876 & 0.3271 & 0.3542 & 0.3836 & 0.0000 \\ 0.7274 & 0.3021 & 0.3271 & 0.3542 & 0.3836 \end{bmatrix}$$

Con base a lo anterior se puede reescribir la ecuación (5.19) como,

$$L_j(t) = \sum_{m=1}^j \sum_{l=1}^N \sqrt{2\Delta\omega S(\omega_l)} g_{jm}(\omega_l) \cos(\omega_l t + \phi_{ml}) \quad (5.23)$$

Por ejemplo, si se desea obtener la simulación de velocidad para 3 nodos en el dominio del tiempo con la función de densidad de Kaimal considerando la coherencia entre nodos se sigue el procedimiento siguiente:

Se define la función de Kaimal con la ecuación (5.12) para una altura ya definida. En este caso se usa la expresión siguiente:

$$S(\omega) = \frac{1163}{(1 + 9.95\omega)^{5/3}}$$

Se define la función de coherencia, ya sea con la ecuación (3.20) ó (3.18). En este caso se muestra la expresión simplificada en función de la frecuencia.

$$C = \exp(-1.125\omega)$$

Se obtiene una matriz de números aleatorios de dimensiones $j \times N$ donde j es el número de nodos y N el número de frecuencias. El intervalo de números aleatorios debe ser entre 0 y 2π .

En este ejemplo se hará la simulación tomando $j=3$ y $N=2$ quedando una matriz aleatoria de 3×2 .

$$\phi = \begin{bmatrix} 0.7000 & 0.6000 \\ 0.1000 & 0.4000 \\ 0.1000 & 0.7000 \end{bmatrix} (2\pi) = \begin{bmatrix} 4.3982 & 3.7699 \\ 0.6283 & 2.5133 \\ 0.6283 & 4.3982 \end{bmatrix}$$

Se define el radical de la ecuación (5.23) con la letra a como:

$$a(\omega_i) = \sqrt{2(\Delta\omega)S(\omega_i)}$$

Se define el intervalo de frecuencia a usar

$$\Delta\omega = 0.4$$

Con estos datos ya se puede aplicar la ecuación (5.23); para ello se comenzara con una frecuencia $\omega_1 = 0.4$ por lo que la función de densidad espectral, la coherencia y el radical son:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 0.4 \\ S(\omega_1) &= \frac{1163}{[1 + 9.95(0.4)]^{5/3}} = 80.08 \\ C &= \exp[-1.125(0.4)] = 0.6376 \\ a_1(\omega_1) &= \sqrt{2(0.4)(80.08)} = 8.0040 \end{aligned}$$

Se obtiene la descomposición de Cholesky con la ecuación (5.22)

$$G(\omega) = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.6376 & 0.7704 & 0.0000 \\ 0.4065 & 0.4912 & 0.7704 \end{bmatrix}$$

Se aplica la ecuación (5.23) para $m=1$, $l=1$ y $j=1$ donde m hace referencia al nodo, l a la frecuencia y j a que lo aplicamos al primer nodo.

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1(\omega_1)g_{11}(\omega_1)\cos(\omega_1 t + \phi_{11}) \\ x_1 &= 8.0040\cos(0.4t + 4.3982) \end{aligned}$$

Al aplicarlo al segundo nodo se tiene $j=2$ por lo que al emplear la ecuación (5.23) queda:

$$\begin{aligned} x_2 &= a(\omega_1)g_{21}(\omega_1)\cos(\omega_1 t + \phi_{11}) + a(\omega_1)g_{22}(\omega_1)\cos(\omega_1 t + \phi_{21}) \\ x_2 &= 8.0040(0.6376)\cos(0.4t + 4.3982) + 8.0040(0.7704)\cos(0.4t + 0.6283) \end{aligned}$$

Aplicándolo al tercer nodo entonces $j=3$ y empleando la ecuación (5.23) entonces se tiene:

$$\begin{aligned} x_3 &= a(\omega_1)g_{31}(\omega_1)\cos(\omega_1 t + \phi_{11}) + a(\omega_1)g_{32}(\omega_1)\cos(\omega_1 t + \phi_{21}) + a(\omega_1)g_{33}(\omega_1)\cos(\omega_1 t + \phi_{31}) \\ x_3 &= 8.0040(0.4065)\cos(0.4t + 4.3982) + 8.0040(0.4912)\cos(0.4t + 0.6283) \\ &\quad + 8.0040(0.7704)\cos(0.4t + 0.6283) \end{aligned}$$

Este procedimiento se hizo para $N=1$ y al principio se indicó que $N=2$ por lo que se repite al procedimiento anterior con ω diferente y el resultado que se obtiene se suma al anterior. A continuación se muestra el procedimiento.

Dado que $\Delta\omega = 0.4$ entonces $\omega_2 = \Delta\omega + \omega_1$,

$$\begin{aligned}\omega_2 &= 0.4 + 0.4 = 0.8 \\ S(\omega_2) &= \frac{1163}{[1 + 9.95(0.8)]^{5/3}} = 30.09 \\ C &= \exp[-1.125(0.8)] = 0.4066 \\ a_1(\omega_1) &= \sqrt{2(0.4)(30.09)} = 4.9062\end{aligned}$$

Se obtiene la descomposición de Cholesky

$$G(\omega_2) = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.4066 & 0.9136 & 0.0000 \\ 0.1653 & 0.3715 & 0.9136 \end{bmatrix}$$

Para el primer nodo sumando el resultado anterior se tiene:

$$\begin{aligned}x_1 &= a(\omega_1)g_{11}(\omega_1)\cos(\omega_1 t + \phi_{11}) \\ &\quad + a(\omega_2)g_{11}(\omega_2)\cos(\omega_2 t + \phi_{12}) \\ x_1 &= 8.0040\cos(0.4t + 4.3982) \\ &\quad + 4.9062\cos(0.8t + 2.5133)\end{aligned}$$

Para el segundo nodo sumado al resultado anterior

$$\begin{aligned}x_2 &= a(\omega_1)g_{21}(\omega_1)\cos(\omega_1 t + \phi_{11}) + a(\omega_1)g_{22}(\omega_1)\cos(\omega_1 t + \phi_{21}) \\ &\quad + a(\omega_2)g_{21}(\omega_2)\cos(\omega_2 t + \phi_{12}) + a(\omega_2)g_{22}(\omega_2)\cos(\omega_2 t + \phi_{22}) \\ x_2 &= 5.1033\cos(0.4t + 4.3982) + 6.1663\cos(0.4t + 0.6283) \\ &\quad + 1.9949\cos(0.8t + 3.7699) + 4.4823\cos(0.8t + 2.5133)\end{aligned}$$

Para el tercer nodo sumado al resultado anterior

$$\begin{aligned}x_3 &= a(\omega_1)g_{31}(\omega_1)\cos(\omega_1 t + \phi_{11}) + a(\omega_1)g_{32}(\omega_1)\cos(\omega_1 t + \phi_{21}) + a(\omega_1)g_{33}(\omega_1)\cos(\omega_1 t + \phi_{31}) \\ &\quad + a(\omega_2)g_{31}(\omega_2)\cos(\omega_2 t + \phi_{12}) + a(\omega_2)g_{32}(\omega_2)\cos(\omega_2 t + \phi_{22}) + a(\omega_2)g_{33}(\omega_2)\cos(\omega_2 t + \phi_{32}) \\ x_3 &= 3.2536\cos(0.4t + 4.3982) + 3.9315\cos(0.4t + 0.6283) + 6.1663\cos(0.4t + 0.6283) \\ &= 0.8110\cos(0.8t + 3.7699) + 1.8227\cos(0.8t + 2.5133) + 4.4823\cos(0.8t + 0.4.3982)\end{aligned}$$

En la Figura 5.7 Se muestra la simulación de los tres puntos

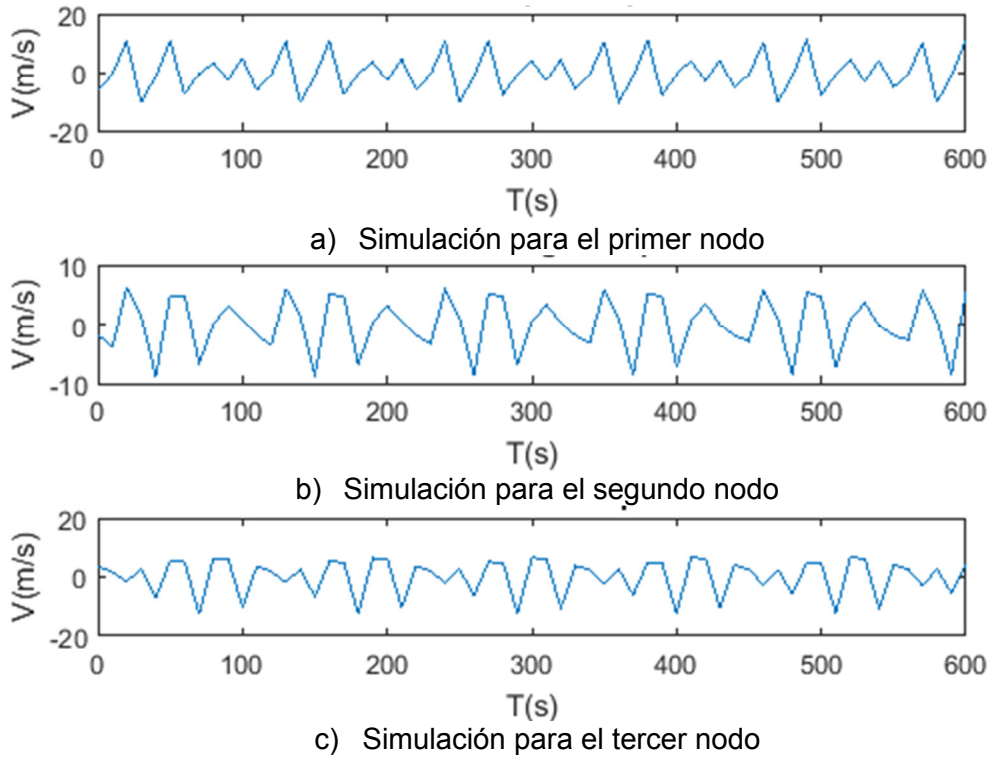


Figura 5.7 Simulación de viento coherente para cada uno de los nodos analizados

Para considerar más puntos a evaluar y dominio de frecuencia se puede emplear el programa «SimulacionesWAWS.m». El programa solo obtiene las componentes fluctuantes, considerando una media de cero, es decir que si se desea obtener la velocidad total se requiere sumar la velocidad media del viento V .

5.3.4 Método Auto Regresivo (AR)

Dado que se considera la velocidad del viento como una variable espacial aleatoria en el tiempo, se puede idealizar como un proceso estocástico multivariado, además de considerarse estacionario. Esto permite utilizar el método auto regresivo (AR) (Hong, 2009) con la ecuación (5.24) para una cantidad M de puntos espacialmente distribuidos,

$$[u(t)] = \sum_{k=1}^P [\psi_k] [u(t - k\Delta t)] + [N(t)] \quad (5.24)$$

donde $u(t)$ es la matriz de velocidades en el tiempo t , P es el orden del modelo AR, ψ es una matriz de coeficientes del modelo AR, N es la variable aleatoria normalmente distribuido con media cero y varianza de uno.

Para el cálculo de ψ se post multiplica la ecuación (5.24) en ambos lados por $u(t - j\Delta t)$ quedando la ecuación (5.25),

$$E\{[u(t)][u(t - j\Delta t)]\} = \sum_{k=1}^P E\{\psi_k [u(t - k\Delta t)][u(t - j\Delta t)]\} + E\{[N(t)][u(t - j\Delta t)]\} \quad (5.25)$$

Esta expresión se conoce como covarianza (como se explica en el capítulo 2) por lo que la ecuación (5.25) se puede expresar con la ecuación (5.26),

$$R_u(j\Delta t) = \sum_{k=1}^P [\psi_k] R_u[j - k]\Delta t \quad (5.26)$$

donde R_u es la matriz de covarianza y $j=1,2,\dots,P$. La ecuación (5.26) se puede reescribir como:

$$R = [\bar{R}][\psi] \quad (5.27)$$

donde

$$[R] = \begin{bmatrix} R_u(\Delta t) \\ R_u(2\Delta t) \\ \vdots \\ R_u(P\Delta t) \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

$$[\psi] = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_P \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

$$[\bar{R}] = \begin{bmatrix} R_u(0) & R_u(\Delta t) & \cdots & R_u[(p-2)(\Delta t)] & R_u[(p-1)(\Delta t)] \\ R_u(\Delta t) & R_u(0) & \cdots & R_u[(p-3)(\Delta t)] & R_u[(p-2)(\Delta t)] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ R_u[(p-2)(\Delta t)] & R_u[(p-3)(\Delta t)] & \cdots & R_u(0) & R_u(\Delta t) \\ R_u[(p-1)(\Delta t)] & R_u[(p-2)(\Delta t)] & \cdots & R_u(\Delta t) & R_u(0) \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

$$[R_u(j\Delta t)] = \begin{bmatrix} R_u^{11}(j\Delta t) & \cdots & R_u^{1M}(j\Delta t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_u^{M1}(j\Delta t) & \cdots & R_u^{MM}(j\Delta t) \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

$$[\psi_j] = \begin{bmatrix} \psi_j^{11} & \cdots & \psi_j^{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_j^{M1} & \cdots & \psi_j^{MM} \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

Para obtener la relación entre la función de densidad de potencia espectral y la correlación se hace uso del teorema de Wiener-Khinchin,

$$R_u^{ik}(j\Delta t) = \int_0^\infty S_u^{ik}(\omega) \cos(\omega j\Delta t) d\omega \quad (5.33)$$

donde $S_{ij}(\omega)$ es el espectro cruzado y ω es la frecuencia angular

$$S_{ij}(\omega) = \sqrt{S_{ii}(\omega)S_{jj}(\omega)} \text{coh}_{ij}(\omega) \quad (5.34)$$

donde coh_{ij} es la coherencia entre los puntos i, j .

Para la obtención de la variable aleatoria θ se aplica la ecuación (5.35)

$$[N(t)] = [G][n(t)] \quad (5.35)$$

donde $[G]$ es la descomposición de Cholesky de la matriz $[R_n]$ y $[n(t)]$ son variables aleatorias independientes normalmente distribuidas con varianza de uno.

La obtención de $[R_n]$ se obtiene con la ecuación (5.36).

$$[R_N] = [R_u(0)] - \sum_{k=1}^P [\psi_k][R_u(k\Delta t)] \quad (5.36)$$

Para calcular la velocidad fluctuante se aplica la ecuación (5.37)

$$\begin{bmatrix} u_1(h\Delta t) \\ \vdots \\ u_M(T) \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^P [\psi_k] \begin{bmatrix} u_1(h-k)\Delta t \\ \vdots \\ u_M(T) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_1(h\Delta T) \\ \vdots \\ N_M(T) \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

donde $h \in \{1, 2, \dots, N_p\}$, T es el tiempo total de la simulación, N_p es la cantidad de puntos a revisar la cual se obtiene de $N_p = T \times \Delta t$.

5.3.5 Ejemplo 5.2

Se desea obtener la simulación en el dominio del tiempo con el método AR para $P = 4$ con una función de densidad de potencia espectral de Kaimal

$$S_u(\omega) = \frac{1163}{(1 + 9.95\omega)^{5/3}}$$

Con la función de coherencia

$$Co = \exp(-0.2\Delta x\omega)$$

Considerando que se desea la simulación para tres puntos distanciados equidistantemente $\Delta x = 28$ m. La correlación se obtiene con la ecuación (5.23) donde:

$$R_u = \int_0^{\infty} \frac{1163}{(1 + 9.95\omega)^{5/3}} \exp(-0.2\Delta x\omega) \cos[\omega\Delta t(p-1)] d\omega$$

Considerando que $j\Delta t = (p-1)\Delta t$. La integral se considerará con un límite superior de 50.

En la Tabla 5.3 se muestran los valores para la correlación para diferentes valores de Δx considerando una $p=1$ y un $\Delta t=0.1$. Estos valores se obtuvieron con la función nativa "Integral" en el programa Matlab.

Tabla 5.3 Correlación para diferentes valores de Δx

Δx	R
0	172.54
28	63.41
56	43.83

Armando la matriz de correlación con la ecuación (5.31) queda:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 172.54 & 63.41 & 43.83 \\ 63.41 & 172.54 & 63.41 \\ 43.83 & 63.41 & 43.83 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} p=1 \\ j=0 \end{matrix}$$

Para las demás matrices se obtienen las integrales con la ecuación (5.23) las cuales se muestran en la Tabla 5.4 para un $\Delta t = 0.1$,

Tabla 5.4 Correlación para diferentes valores de Δx y p

p	Δx	R	p	Δx	R
1	0	172.54	2	0	164.2
	28	63.41		28	63.41
	56	43.83		56	43.83
3	0	158.3	4	0	153.5
	28	63.40		28	63.38
	56	43.83		56	43.83

$$R_2 = \begin{bmatrix} 164.2 & 63.41 & 43.83 \\ 63.41 & 164.2 & 63.41 \\ 43.83 & 63.41 & 164.2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} p=2 \\ j=1 \end{matrix}$$

$$R_3 = \begin{bmatrix} 158.3 & 63.40 & 43.83 \\ 63.40 & 158.3 & 63.40 \\ 43.83 & 63.40 & 158.3 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} p = 3 \\ j = 2 \end{array}$$

$$R_4 = \begin{bmatrix} 153.5 & 63.38 & 43.83 \\ 63.38 & 153.5 & 63.38 \\ 43.83 & 63.38 & 153.5 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} p = 4 \\ j = 3 \end{array}$$

Se obtiene una matriz de correlaciones con un $\Delta t(p-1) = 4\Delta t$ el cual servirá para aplicar la ecuación (5.28).

$$R_5 = \begin{bmatrix} 149.15 & 63.36 & 43.82 \\ 63.36 & 149.15 & 63.36 \\ 43.82 & 63.36 & 149.15 \end{bmatrix} \quad p\Delta t = 4\Delta t$$

Se aplica la ecuación (5.30) con las matrices $R_{1,2,3,4}$.

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 & R_3 & R_4 \\ R_2 & R_1 & R_2 & R_3 \\ R_3 & R_2 & R_1 & R_2 \\ R_4 & R_3 & R_2 & R_1 \end{bmatrix}$$

Se aplica la ecuación (5.28) con las matrices $R_{2,3,4,5}$.

$$R = \begin{bmatrix} R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \end{bmatrix}$$

El factor Auto regresivo se obtiene con la ecuación (5.29) al obtener la inversa de \bar{R} multiplicando con R ,

$$[\psi] = [\bar{R}]^{-1} [R] = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 & R_3 & R_4 \\ R_2 & R_1 & R_2 & R_3 \\ R_3 & R_2 & R_1 & R_2 \\ R_4 & R_3 & R_2 & R_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix}$$

donde al hacer estas operaciones se obtiene cuatro matrices de dimensiones $N_p \times N_p$ donde N_p es al número de nodos. Cada matriz ψ corresponde a los diferentes valores de p . En este ejemplo se eligió una $p=4$, es por ello que se obtienen 4 ψ .

$$\psi_1 = \begin{bmatrix} 0.8159 & 0.0067 & 0.0027 \\ 0.0067 & 0.8142 & 0.0067 \\ 0.0027 & 0.0067 & 0.8159 \end{bmatrix}$$

$$\psi_2 = \begin{bmatrix} 0.0674 & 0.0015 & 0.0006 \\ 0.0015 & 0.06698 & 0.0015 \\ 0.0006 & 0.0015 & 0.0674 \end{bmatrix}$$

$$\psi_3 = \begin{bmatrix} 0.0364 & 0.0014 & 0.0006 \\ 0.0014 & 0.0360 & 0.0014 \\ 0.0006 & 0.0014 & 0.0364 \end{bmatrix}$$

$$\psi_4 = \begin{bmatrix} 0.0347 & 0.0053 & 0.0023 \\ 0.0053 & 0.0331 & 0.0053 \\ 0.0023 & 0.0053 & 0.0347 \end{bmatrix}$$

Para la obtención de la matriz de variables aleatorias se aplica la ecuación (5.36) por lo que:

$$R_N = R_1 - \psi_1 R_2 - \psi_2 R_3 - \psi_3 R_4 - \psi_4 R_5$$

quedando,

$$R_N = \begin{bmatrix} 15.8643 & 0.1043 & 0.0417 \\ 0.1043 & 15.8385 & 0.1043 \\ 0.0417 & 0.1043 & 15.8643 \end{bmatrix}$$

después se aplica la descomposición de Cholesky a R_n para aplicar la ecuación (5.35). Este valor se obtuvo con la función nativa “chol” en Matlab.

$$G = \begin{bmatrix} 3.9830 & 0 & 0 \\ 0.0261 & 3.9796 & 0 \\ 0.0104 & 0.0261 & 3.9829 \end{bmatrix}$$

Se genera una serie de números aleatorios con variación normal y desviación estándar de uno. Se deben generar N matrices de números aleatorios de dimensiones $M \times 1$ donde M es el número de nodos y N es la cantidad de Δt en la simulación, en este ejemplo la simulación es de 600 segundos y el $\Delta t = 0.1$ por lo que $N = 600 / 0.1 = 6000$. A continuación se muestran las primeros cuatro matrices de números aleatorios.

$$n_1 = \begin{bmatrix} 0.5377 \\ -0.4913 \\ 1.1408 \end{bmatrix}$$

$$n_2 = \begin{bmatrix} 1.8338 \\ 0.6577 \\ 0.9330 \end{bmatrix}$$

$$n_3 = \begin{bmatrix} -2.2588 \\ 1.4360 \\ -0.5206 \end{bmatrix}$$

$$n_4 = \begin{bmatrix} 0.8621 \\ -1.5350 \\ -0.5897 \end{bmatrix}$$

La velocidad cuando $t = 0.1$ se obtiene con la ecuación (5.37). Se tiene que $h = 1$ y $k = 1$ por lo que:

$$u(h\Delta t) = \sum_{k=1}^P [\psi_k] u(h-k)\Delta t + [G][n(t)]$$

$$u(1(0.1)) = \sum_{k=1}^P [\psi_k] u_1(1-k)(0.1) + \begin{bmatrix} 3.9830 & 0 & 0 \\ 0.0261 & 3.9796 & 0 \\ 0.0104 & 0.0261 & 3.9829 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5377 \\ -0.4913 \\ 1.1408 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} t = 0.1 \\ h = 1 \end{matrix}$$

$$u(0.1) = [0] + \begin{bmatrix} 2.1415 \\ 1.9412 \\ 4.5363 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.1415 \\ 1.9412 \\ 4.5363 \end{bmatrix}$$

Para los siguientes cuatro intervalos de tiempo se tiene que:

$$u(h\Delta t) = \sum_{k=1}^P [\psi_k] u(h-k)\Delta t + [G][n(t)]$$

$$u(2(0.1)) = \sum_{k=1}^P [\psi_k] u(2-k)\Delta t + [G][n(t)]$$

$$u(0.2) = [G][n_2] + [\psi_1][u(0.1)]$$

$$u(0.2) = \begin{bmatrix} 3.9830 & 0 & 0 \\ 0.0261 & 3.9796 & 0 \\ 0.0104 & 0.0261 & 3.9829 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.8338 \\ 0.6577 \\ 0.9330 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8159 & 0.0067 & 0.0027 \\ 0.0067 & 0.8142 & 0.0067 \\ 0.0027 & 0.0067 & 0.8159 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.1415 \\ 1.9412 \\ 4.5363 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} t = 0.2 \\ h = 2 \end{matrix}$$

$$u(0.2) = \begin{bmatrix} 9.0509 \\ 1.1300 \\ 7.4468 \end{bmatrix}$$

$$u(3(0.1)) = \sum_{k=1}^P [\psi_k] u(3-k)\Delta t + [G][n(t)]$$

$$u(0.3) = \sum_{k=1}^P [\psi_k] u(3-k)\Delta t + [G][n(t)]$$

$$u(0.3) = [G][n_3] + [\psi_1][u(0.2)] + [\psi_2][u(0.1)]$$

$$u(0.3) = \begin{bmatrix} -1.4399 \\ 6.5680 \\ 4.3525 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} t = 0.3 \\ h = 3 \end{matrix}$$

$$u(4(0.1)) = \sum_{k=1}^P [\psi_k] u(4-k)\Delta t + [G][n(t)]$$

$$u(0.4) = \sum_{k=1}^P [\psi_k] u(4-k)\Delta t + [G][n(t)]$$

$$u(0.4) = [G][n_4] + [\psi_1][u(0.3)] + [\psi_2][u(0.2)] + [\psi_3][u(0.1)]$$

$$u(0.4) = \begin{bmatrix} 3.0097 \\ -0.6771 \\ 1.8853 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} t = 0.4 \\ h = 4 \end{matrix}$$

Para obtener las velocidades en el punto 5 se obtiene:

$$u(0.5) = [G][n_5] + [\psi_1][u(0.4)] + [\psi_2][u(0.3)] + [\psi_3][u(0.2)] + [\psi_4][u(0.1)] \quad \begin{matrix} t = 0.5 \\ h = 5 \end{matrix}$$

Para las demás velocidades se tiene:

$$u(h) = [G][n_h] + [\psi_1][u[(h-1)\Delta t]] + [\psi_2][u[(h-2)\Delta t]] + [\psi_3][u[(h-3)\Delta t]] + [\psi_4][u[(h-4)\Delta t]]$$

En la Figura 5.8 se muestra la velocidad fluctuante para la simulación en 600 s.

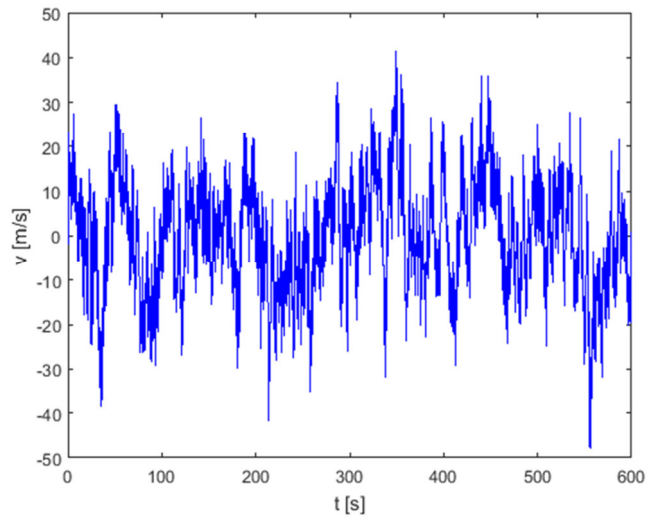


Figura 5.8 Velocidad fluctuante con el método AR para el ejemplo

Para la obtención de las simulaciones en las direcciones u y w se creó el programa «SimulacionesAR.m» en Matlab cuyo código se muestra en el apéndice C.

Este método puede tener problemas de estabilidad al momento de obtener la matriz de Cholesky ya que al aplicar la ecuación (3.6) se puede tener valores negativos haciendo imposible obtener la descomposición. Esto sucede cuando la función de densidad llega a tener valores pequeños como es el caso de la función de Kaimal para la dirección w para valores de la altura considerables. Para poder obtener resultados estables se recomienda usar la función de Davenport.

5.4 Función de admitancia aerodinámica

El método QS se caracteriza por su simplicidad fallando en la precisión. Una forma de mejorar la precisión es por medio de la función de admitancia aerodinámica.

La función de admitancia aerodinámica se define como una función de transferencia de un operador aerodinámico lineal a una variación de flujo debido al cuerpo mismo, es decir

que mientras en el método QS no importa la forma del cuerpo más que para las fuerzas aerodinámicas, la función de admitancia aerodinámica corrige el comportamiento debido a la forma del cuerpo. Es por ello que la función depende de qué tipo de elemento se evalúe ya que será diferente para el ala de un avión, el tablero de un puente o un vehículo en movimiento.

Davenport consideró que el tablero de un puente tiene un comportamiento similar a la de un ala de avión por lo que propuso tomar las funciones desarrolladas por Sears para aplicarlas a viento, sin embargo Jancauskas & Melbourne (1980) muestra que se puede tener una aproximación con la función de Liepmann la cual se muestra en la ecuación (5.38),

$$\chi(\omega) = \frac{1}{1 + 2\pi^2 \left(\frac{\omega B}{V} \right)^2} \quad (5.38)$$

donde χ es la admitancia aerodinámica, ω es la frecuencia angular, B es el ancho del puente y V es la velocidad media del viento.

Estas fuerzas se obtienen en el dominio de la frecuencia, sin embargo no se puede aplicar el mismo método que se mostró para obtener la respuesta en el dominio del tiempo ya que la evolución física de la ráfaga puede ser violada.

Para obtener la simulación del viento aplicando la función de admitancia aerodinámica lo que se hace es obtener la simulación de viento (con o sin coherencia) en el dominio del tiempo, transformarla al dominio de la frecuencia aplicando la transformada de Fourier, aplicar la admitancia aerodinámica, y para regresarla al dominio del tiempo aplicar la transformada inversa de Fourier. Sin embargo en este trabajo, se aplicó la metodología de Strommen quien no emplea dicha admitancia aerodinámica.

5.5 Derivadas aerodinámicas

En la sección anterior se mostró cómo está compuesta la parte fluctuante. Una parte debido a la velocidad media del viento, otra que varía dependiendo de la estructura y la fuerza del viento y la tercera que depende de las componentes aerodinámicas, es decir las que modifican la rigidez K_{ae} y amortiguamiento C_{ae} , la masa del viento se desprecia ya que es muy pequeña comparada a la estructura.

La rigidez y el amortiguamiento aerodinámico se desarrolló primero en el área de la aeronáutica para el diseño de aviones, el primero en desarrollarla fue Theodorsen posteriormente Scanlan la adaptó para puentes. Las matrices de amortiguamiento y de rigidez se presentan en la ecuación (5.39) en el dominio de la frecuencia.

$$C_{ae} = \begin{bmatrix} P_1 & P_5 & BP_2 \\ H_5 & H_1 & BH_2 \\ BA_5 & BA_1 & B^2 A_2 \end{bmatrix}$$

$$K_{ae} = \begin{bmatrix} P_4 & P_6 & BP_3 \\ H_6 & H_4 & BH_3 \\ BA_6 & BA_4 & B^2 A_3 \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

Estas son conocidas como las derivadas aerodinámicas, las cuales dependen de las frecuencias características del viento asociada a la velocidad cuando entra en resonancia con la estructura. Para ello se involucra la velocidad reducida la cual se muestra en la ecuación (5.40) la cual involucra la frecuencia característica.

$$\hat{V} = V / (B\omega_i) \quad (5.40)$$

Al normalizar el amortiguamiento y la rigidez aerodinámica se tiene entonces,

$$C_{ae} = \frac{\rho B^2}{2} \omega_i(V)$$

$$\hat{C}_{ae} K_{ae} = \frac{\rho B^2}{2} [\omega_i(V)]^2 \hat{K}_{ae} \quad (5.41)$$

donde

$$C_{ae} = \begin{bmatrix} P_1^* & P_5^* & P_2^* \\ H_5^* & H_1^* & H_2^* \\ A_5^* & A_1^* & A_2^* \end{bmatrix} \text{ y } K_{ae} = \begin{bmatrix} P_4^* & P_6^* & P_3^* \\ H_6^* & H_4^* & H_3^* \\ A_6^* & A_4^* & A_3^* \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

$$P_1^* = -2\bar{C}_D \frac{D}{B} \frac{V}{B\omega_i(V)} \quad H_1^* = -(C'_L \bar{C}_D) \frac{D}{B} \frac{V}{B\omega_i(V)} \quad A_1^* = -C'_M \frac{V}{B\omega_i(V)}$$

$$P_2^* = 0 \quad H_2^* = 0 \quad A_2^* = 0$$

$$P_3^* = -C'_D \frac{D}{B} \left(\frac{V}{B\omega_i(V)} \right)^2 \quad H_3^* = C'_L \frac{V}{B\omega_i(V)} \quad A_3^* = C'_M \left(\frac{V}{B\omega_i(V)} \right)^2 \quad (5.43)$$

$$P_4^* = 0 \quad H_4^* = 0 \quad A_4^* = 0$$

$$P_5^* = (\bar{C}_L - C'_D) \frac{D}{B} \frac{V}{B\omega_i(V)} \quad H_5^* = -2\bar{C}_L \frac{V}{B\omega_i(V)} \quad A_5^* = -2\bar{C}_M \frac{V}{B\omega_i(V)}$$

$$P_6^* = 0 \quad H_6^* = 0 \quad A_6^* = 0$$

Theodorsen (1935) dedujo las funciones de las derivadas aerodinámicas de flexión y torsión (H_n^* y A_n^*) para una placa, en ocasiones cuando no se cuenta con las derivadas aerodinámicas se pueden usar las Theodorsen, sobre todo si se hace análisis de aleteo ya que el método QS no toma en cuenta la mitad de las derivadas aerodinámicas que requiere la ecuación Scanlan.

$$\begin{bmatrix} H_1^* & A_1^* \\ H_2^* & A_2^* \\ H_3^* & A_3^* \\ H_4^* & A_4^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\pi F\hat{V} & -\frac{1}{2}F\hat{V} \\ \frac{\pi}{2}(1+F+4G\hat{V})\hat{V} & -\frac{\pi}{8}(1-F-4G\hat{V})\hat{V} \\ 2\pi(F\hat{V}-G/4)\hat{V} & \frac{\pi}{2}(F\hat{V}-G/4)\hat{V} \\ \frac{\pi}{2}(1-4G\hat{V}) & \frac{\pi}{2}G\hat{V} \end{bmatrix} \quad (5.44a)$$

$$F\left(\frac{\hat{\omega}}{2}\right) = \frac{J_1(J_1+Y_0)+Y_1(Y_1-J_0)}{(J_1+Y_0)^2+(Y_1-J_0)^2} \quad (5.44b)$$

$$G\left(\frac{\hat{\omega}}{2}\right) = \frac{J_1J_0+Y_1Y_0}{(J_1+Y_0)^2+(Y_1-J_0)^2} \quad (5.44c)$$

donde F y G son las funciones de Bessel, y $\hat{\omega}$ es la frecuencia reducida.

En la Figura 5.9 y 5.10 se muestran las derivadas aerodinámicas aplicando la ecuación (5.44).

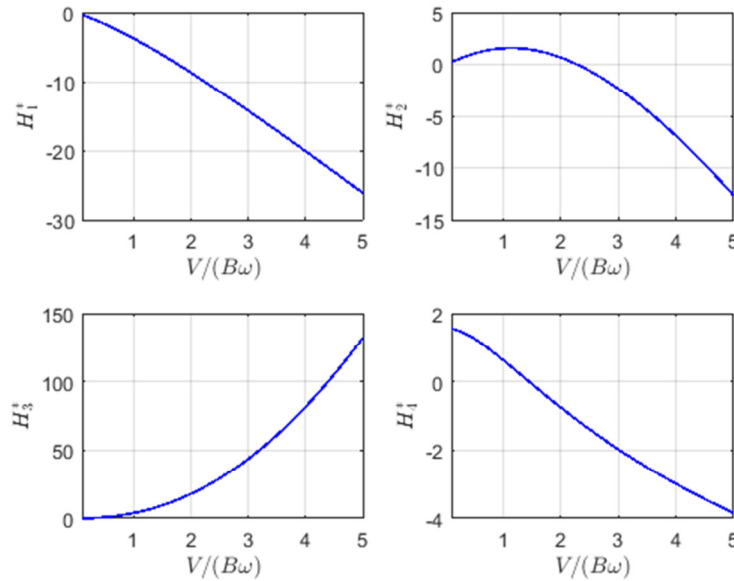


Figura 5.9 Derivadas aerodinámicas de flexión de una placa con el método de Theodorsen

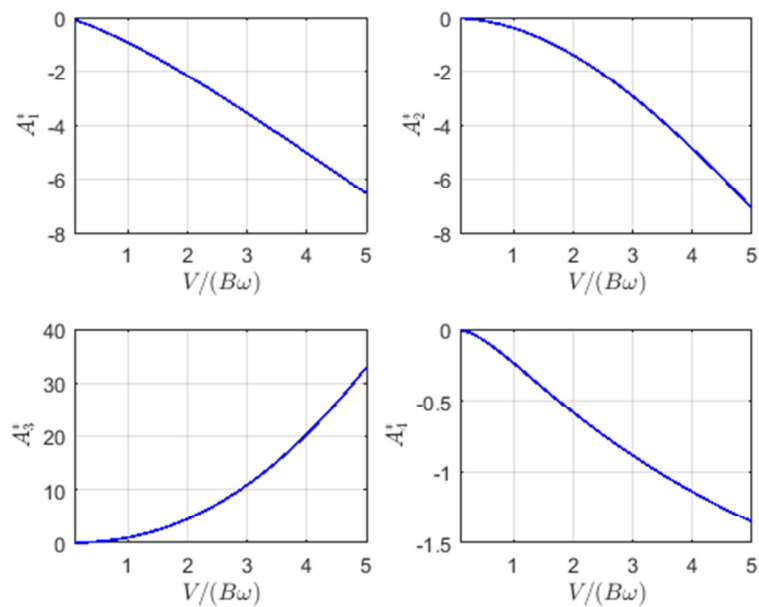


Figura 5.10 Derivadas aerodinámicas de torsión de una placa con el método de Theodorsen

5.6 Desprendimiento de vórtices

El efecto de desprendimiento de vórtices ocurre cuando el flujo se separa del cuerpo, causando un vórtice al momento de la separación. Esto sucede en cuerpos robustos ya que hay un cambio de dirección brusca del viento causando la separación. El efecto de desprendimiento de vórtices tiene mayor relevancia en la componente vertical del puente y en torsión por lo que solo es necesario revisar bajo esos dos casos como se muestra en la Figura 5.11.

Figura 5.11 Fuerzas debido al desprendimiento de vórtices

Una propiedad importante en el desprendimiento de vórtices es la frecuencia, la cual está definida en la ecuación (5.45),

$$f_s = St \frac{V}{D} \quad (5.45)$$

donde f_s es la frecuencia del vórtice, St es el número de Strouhal, V es la velocidad media del viento y D es el peralte del puente. Teóricamente hablando, el mayor efecto que puede causar es cuando se llega a una resonancia, es decir cuando la frecuencia de los vórtices es igual a la frecuencia fundamental de la estructura. Bajo este concepto se puede obtener una velocidad de resonancia la cual se muestra en la ecuación (5.46).

$$V_R = f_s D / St \quad (5.46)$$

Cuando la frecuencia del vórtice y de la frecuencia es similar, se le conoce como *lock-in*. Este efecto es muy agresivo, sin embargo cuando se presentan movimientos autoextraíbles, los vórtices, dejan de tener efecto, es por ello que se considera que el desprendimiento de vórtices es auto-limitante.

La descripción matemática se hace a partir de proceso estocásticos a partir de la teoría de Vickery & Basu (1983) la cual se muestra en la ecuación (5.33),

$$\begin{bmatrix} S_{qz}(\omega) \\ S_{q\theta}(\omega) \end{bmatrix} = \frac{\left(\frac{1}{2}\rho V^2\right)^2}{\sqrt{\pi}\omega_s} \begin{bmatrix} \frac{(B\hat{\sigma}_{qz})^2}{b_z} \exp\left\{-\left(\frac{1-\omega/\omega_s}{b_z}\right)^2\right\} \\ \frac{(B\hat{\sigma}_{q\theta})^2}{b_\theta} \exp\left\{-\left(\frac{1-\omega/\omega_s}{b_\theta}\right)^2\right\} \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

donde S_{qn} es el espectro de carga de viento, $\hat{\sigma}_{qn}$ es el coeficiente adimensional de la raíz media cuadrada de levante o torsión, b_n es un parámetro adimensional del ancho de banda del espectro de carga, el cual puede tener valores entre 0.1 y 0.3. ω y ω_s son la frecuencia angular del flujo y de la estructura respectivamente; y $n \in \{z, \theta\}$.

La coherencia se define como:

$$\hat{C}_{o_{qm}}(\Delta x) = \cos\left(\frac{2}{3}\frac{\Delta x}{\lambda_n D}\right) \exp\left[-\left(\frac{\Delta x}{3\lambda_n D}\right)^2\right] \quad (5.48)$$

donde $\hat{C}_{o_{qm}}(\Delta x)$ es la coherencia, λ_n es la longitud de escala adimensional de la coherencia, Δx es la separación entre nodos del puente, el cual puede tener valores entre 2 y 5.

Las direcciones más importantes a evaluar en el desprendimiento de vórtices son: vertical y torsión. Por lo que las derivadas aerodinámicas para desprendimiento de vórtices se pueden definir como;

$$C_{ae} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_1^* & 0 \\ 0 & 0 & A_2^* \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

$$K_{ae} = 0$$

$$H_1^* = K_{az} \left[1 - \left(\frac{\sigma_z}{a_z D} \right)^2 \right] \quad (5.50)$$

$$A_2^* = K_{a\theta} \left[1 - \left(\frac{\sigma_\theta}{a_\theta} \right)^2 \right]$$

donde σ_n es la desviación estándar, a_n es un valor asociado con la naturaleza auto-limitante del desprendimiento de vórtices y K_{an} es un coeficiente de velocidad que depende del amortiguamiento.

El amortiguamiento de la estructura es afectado por el flujo por lo que el amortiguamiento total es:

$$\zeta_{tot} = \zeta - \zeta_{ae_n} \quad (5.51)$$

donde ζ es el amortiguamiento de la estructura y ζ_{ae_n} es el amortiguamiento aerodinámico definido como:

$$\zeta_{ae_z} = \frac{\bar{C}_{ae_{zz}}}{2\omega_z M_z} = \frac{\rho B^2 H_1^*}{4\tilde{m}_z} \frac{\int_{L_{exp}} \phi_z^2 dx}{\int_L \phi_z^2 dx} \quad (5.38)$$

$$\zeta_{ae_\theta} = \frac{\bar{C}_{ae_{\theta\theta}}}{2\omega_\theta M_\theta} = \frac{\rho B^4 A_2^*}{4\tilde{m}_\theta} \frac{\int_L \phi_z^2 dx}{\int_L \phi_z^2 dx}$$

Vickery & Basu proponen que para poder predecir el comportamiento del viento, se tiene que hacer una modificación a las propiedades de la estructura, es por ello que se considera el amortiguamiento aerodinámico en el análisis.

5.7 Conclusiones

Este capítulo muestra las ecuaciones del comportamiento tanto de las ráfagas como vórtices y al principio se indica cómo obtener la respuesta dinámica de la estructura con

las funciones de densidad. Se puede observar que para las ráfagas la teoría se puede aplicar con el método Quasy-Steady y así obtener la función de densidad, sin embargo para los vórtices es necesario obtener tanto las fuerzas debido al viento como el cambio en las propiedades dinámicas de la estructura. En ambos casos se presentan métodos teóricos que tienen sus desventajas con los experimentales, como es el caso de las derivadas aerodinámicas donde las variables H_2 , H_4 , A_2 y A_4 son cero, y al realizar el ensayo experimental si existen valores diferentes de cero.

Capítulo 6

Respuesta dinámica inducida por el viento

6.1 Introducción

En el capítulo anterior se mostraron las ecuaciones para obtener los espectros de carga y para realizar los registros sintéticos de velocidades de viento. En este capítulo se emplearán los espectros de carga para obtener el espectro de respuesta para ráfagas y vórtices en el plano.

6.2 Respuesta ante ráfagas

6.2.1 Respuesta unidireccional considerando un solo modo

El espectro de carga $S_{\tilde{Q}_i}$ se define en la ecuación (6.1) la cual, la parte derecha depende de la amplitud de Fourier a_{Q_i} de su conjugado $a_{Q_i}^*$ y del tiempo T .

$$S_{\tilde{Q}_i}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} (a_{Q_i}^* a_{Q_i}) \quad (6.1)$$

Si se considera la forma modal en dirección y (paralela al viento) entonces la carga modal inducida por el flujo del viento se define como:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_y(t) &= \int_{L_{\text{exp}}} \phi_y(x) q_y(x, t) \\ \tilde{Q}_y(t) &= \frac{\rho V B}{2} \int_{L_{\text{exp}}} \phi_y(x) \left[2 \frac{D}{B} \bar{C}_D u(x, t) + \left(\frac{D}{B} C'_D - \bar{C}_L \right) w(x, t) \right] dx \end{aligned} \quad (6.2)$$

La ecuación (6.2) se obtuvo con la ecuación (5.14).

Tomando la transformada de Fourier en ambos lados de la ecuación (6.2) entonces:

$$\begin{aligned} a_{\tilde{Q}_n}(\omega) &= \int_{L_{\text{exp}}} \phi_n(x) a_{q_n}(x, \omega) dx \\ a_{\tilde{Q}_y}(\omega) &= \frac{\rho V B}{2} \int_{L_{\text{exp}}} \phi_y(x) \left[2 \frac{D}{B} \bar{C}_D a_u(x, \omega) + \left(\frac{D}{B} C'_D - \bar{C}_L \right) a_w(x, \omega) \right] dx \\ a_{\tilde{Q}_z}(\omega) &= \frac{\rho V B}{2} \int_{L_{\text{exp}}} \phi_z(x) \left[2 \bar{C}_L a_u(x, \omega) + \left(C'_L + \frac{D}{B} \bar{C}_D \right) a_w(x, \omega) \right] dx \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$a_{\bar{Q}_m}(\omega) = \frac{\rho VB}{2} \int_{L_{\text{exp}}} \phi_m(x) \left[2B\bar{C}_m a_u(x, \omega) + (BC'_m) a_w(x, \omega) \right] dx$$

Sustituyendo (6.2) en (6.1)

$$\begin{aligned} S_{\bar{Q}_y}(\omega) &= \left(\frac{\rho VB}{2} \right)^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} \left\{ \int_{L_{\text{exp}}} \phi_y \left[2 \frac{D}{B} \bar{C}_D a_u^* + \left(\frac{D}{B} C'_D - \bar{C}_L \right) a_w^* \right] dx \right\} \\ &\quad \left\{ \int_{L_{\text{exp}}} \phi_y \left[2 \frac{D}{B} \bar{C}_D a_u + \left(\frac{D}{B} C'_D - \bar{C}_L \right) a_w \right] dx \right\} \\ S_{\bar{Q}_z}(\omega) &= \left(\frac{\rho VB}{2} \right)^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} \left\{ \int_{L_{\text{exp}}} \phi_z \left[2\bar{C}_L a_u^* + \left(C'_L - \frac{D}{B} \bar{C}_D \right) a_w^* \right] dx \right\} \\ &\quad \left\{ \int_{L_{\text{exp}}} \phi_z \left[2\bar{C}_L a_u + \left(C'_L - \frac{D}{B} \bar{C}_D \right) a_w \right] dx \right\} \\ S_{\bar{Q}_m}(\omega) &= \left(\frac{\rho VB}{2} \right)^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} \left\{ \int_{L_{\text{exp}}} \phi_m \left[2B\bar{C}_m a_u^* + (BC'_m) a_w^* \right] dx \right\} \\ &\quad \left\{ \int_{L_{\text{exp}}} \phi_m \left[2 \frac{D}{B} \bar{C}_m a_u + (BC'_m) a_w \right] dx \right\} \end{aligned} \tag{6.4}$$

la cual se puede simplificar como se muestra en la ecuación (6.5),

$$\begin{aligned} S_{\bar{Q}_y}(\omega) &= \left[\frac{\rho V^2 B}{2} J_y(\omega) \right]^2 \\ S_{\bar{Q}_z}(\omega) &= \left[\frac{\rho V^2 B}{2} J_z(\omega) \right]^2 \\ S_{\bar{Q}_m}(\omega) &= \left[\frac{\rho V^2 B}{2} J_m(\omega) \right]^2 \end{aligned} \tag{6.5}$$

donde

$$\begin{aligned} J_y^2(\omega) &= \iint_{L_{\text{exp}}} \phi_y(x_1) \phi_y(x_2) \left\{ \left(2 \frac{D}{B} \bar{C}_D I_u \right)^2 \frac{S_{uu}(\Delta x, \omega)}{\sigma_u^2} \right. \\ &\quad \left. + \left[\left(\frac{D}{B} C'_D - \bar{C}_L \right) I_w \right]^2 \frac{S_{ww}(\Delta x, \omega)}{\sigma_w^2} \right\} dx_1 dx_2 \end{aligned} \tag{6.6}$$

$$\begin{aligned}
 J_z^2(\omega) &= \iint_{L_{\text{exp}}} \phi_z(x_1) \phi_z(x_2) \left\{ \left(2\bar{C}_L I_u \right)^2 \frac{S_{uu}(\Delta x, \omega)}{\sigma_u^2} \right. \\
 &\quad \left. + \left[\left(\frac{D}{B} C_D' + \bar{C}_L \right) I_w \right]^2 \frac{S_{ww}(\Delta x, \omega)}{\sigma_w^2} \right\} dx_1 dx_2 \\
 J_\theta^2(\omega) &= \iint_{L_{\text{exp}}} \phi_\theta(x_1) \phi_\theta(x_2) \left\{ \left(2\bar{C}_M I_u \right)^2 \frac{S_{uu}(\Delta x, \omega)}{\sigma_u^2} \right. \\
 &\quad \left. + \left[C_M' I_w \right]^2 \frac{S_{ww}(\Delta x, \omega)}{\sigma_w^2} \right\} dx_1 dx_2
 \end{aligned}$$

las cual se conoce como la función de aceptación conjunta. La ecuación (6.6) ya incluye el efecto de la turbulencia.

Si se define el espectro cruzado como:

$$\begin{aligned}
 S_{uu}(\Delta x, \omega) &= S_u \hat{C}o_{uu}(\Delta x, \omega) \\
 S_{ww}(\Delta x, \omega) &= S_w \hat{C}o_{ww}(\Delta x, \omega)
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

y el espectro de Kaimal, $\frac{S_n(\omega)}{\sigma_n^2}$ definido en la ecuación (3.11), se sustituye en la ecuación (6.7), entonces el espectro cruzado queda:

$$\begin{aligned}
 S_{uu}(\Delta x, \omega) &= \frac{S_u(\omega)}{\sigma_u^2} \hat{C}o_{uu}(\Delta x, \omega) \\
 S_{ww}(\Delta x, \omega) &= \frac{S_{ww}(\omega)}{\sigma_w^2} \hat{C}o_{ww}(\Delta x, \omega)
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

donde la coherencia $\hat{C}o_{ww}(\Delta x, \omega)$ se definió en la ecuación (3.18).

Sustituyendo (6.8) en (6.6),

$$\begin{aligned}
 J_y^2(\omega) &= \iint_{L_{\text{exp}}} \phi_y(x_1) \phi_y(x_2) \left\{ \left(2\frac{D}{B} \bar{C}_D I_u \right)^2 \frac{S_u(\omega)}{\sigma_u^2} \hat{C}o_{uu}(\Delta x, \omega) \right. \\
 &\quad \left. + \left[\left(\frac{D}{B} C_D' - \bar{C}_L \right) I_w \right]^2 \frac{S_w(\omega)}{\sigma_w^2} \hat{C}o_{ww}(\Delta x, \omega) \right\} dx_1 dx_2 \\
 J_z^2(\omega) &= \iint_{L_{\text{exp}}} \phi_z(x_1) \phi_z(x_2) \left\{ \left(2\bar{C}_L I_u \right)^2 \frac{S_u(\omega)}{\sigma_u^2} \hat{C}o_{uu}(\Delta x, \omega) \right. \\
 &\quad \left. + \left[\left(\frac{D}{B} C_D' + \bar{C}_L \right) I_w \right]^2 \frac{S_w(\omega)}{\sigma_w^2} \hat{C}o_{ww}(\Delta x, \omega) \right\} dx_1 dx_2
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

$$J_{\theta}^2(\omega) = \iint_{L_{\text{exp}}} \phi_{\theta}(x_1)\phi_{\theta}(x_2) \left\{ (2\bar{C}_M I_u)^2 \frac{S_u(\omega)}{\sigma_u^2} \hat{C}_{O_{uu}}(\Delta x, \omega) + [C'_M I_w]^2 \frac{S_{ww}(\omega)}{\sigma_w^2} \hat{C}_{O_{ww}}(\Delta x, \omega) \right\} dx_1 dx_2$$

La función de aceptación conjunta normalizada se define como:

$$\hat{J}_n(\omega) = J_n / \int_L \phi_n^2 dx \quad (6.10)$$

Sustituyendo la ecuación en la ecuación (6.5) en (4.9) se obtiene el espectro de respuesta de desplazamientos,

$$S_r(x_r, \omega) = \phi_i^2(x_r) \frac{|\hat{H}(\omega)|^2}{\tilde{K}^2} \left[\frac{\rho V^2 B}{2} J_y(\omega) \right]^2 \quad (6.11)$$

donde

$$\tilde{K} = \tilde{m} \omega^2 \int_L \phi(x) dx \quad (6.12)$$

Sustituyendo (6.12) en (6.11),

$$S_r(x_r, \omega) = \phi_i^2(x_r) \frac{|\hat{H}(\omega)|^2}{\left(\tilde{m} \int_L \phi^2(x) dx \right)^2} \left[\frac{\rho V^2 B}{2} J(\omega) \right]^2 \quad (6.13)$$

Empleado la ecuación (6.10) en (6.13) y ordenando los datos:

$$S_r(x_r, \omega) = \left[\phi(x_r) \left(\frac{\rho V^2 B}{2 \tilde{m} \omega^2} \right) |\hat{H}(\omega)| \hat{J}(\omega) \right]^2 \quad (6.14)$$

Para obtener la función de transferencia mecánica se aplica la ecuación (6.15),

$$\begin{aligned} \hat{H}_y(\omega) &= \left[1 - k_{ae_y} - \left(\frac{\omega}{\omega_y} \right)^2 + 2i(\zeta_y - \zeta_{ae_y}) \frac{\omega}{\omega_y} \right]^{-1} \\ \hat{H}_z(\omega) &= \left[1 - k_{ae_z} - \left(\frac{\omega}{\omega_z} \right)^2 + 2i(\zeta_z - \zeta_{ae_z}) \frac{\omega}{\omega_z} \right]^{-1} \\ \hat{H}_{\theta}(\omega) &= \left[1 - k_{ae_{\theta}} - \left(\frac{\omega}{\omega_{\theta}} \right)^2 + 2i(\zeta_{\theta} - \zeta_{ae_{\theta}}) \frac{\omega}{\omega_{\theta}} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (6.15)$$

donde las rigideces aerodinámicas son:

$$\begin{aligned} k_{ae_y} &= 0 \\ k_{ae_z} &= 0 \end{aligned} \quad (6.16)$$

$$k_{ae_\theta} = \frac{\rho B^4}{2\tilde{m}_\theta} C'_M \left(\frac{V}{B\omega} \right)^2 \frac{\int_{L_{exp}} \phi_\theta^2 dx}{\int_L \phi_\theta^2 dx}$$

y el amortiguamiento aerodinámico es:

$$\begin{aligned} \zeta_{ae_y} &= -\frac{\rho}{2\tilde{m}_y} \bar{C}_D D \left(\frac{V}{\omega} \right) \frac{\int_L \phi_y^2 dx}{\int_L \phi_y^2 dx} \\ \zeta_{ae_z} &= -\frac{\rho B^2}{4\tilde{m}_y} \left(C'_L + \bar{C}_D \frac{D}{B} \right) \left(\frac{V}{B\omega} \right) \frac{\int_L \phi_y^2 dx}{\int_L \phi_y^2 dx} \\ \zeta_{ae_\theta} &= 0 \end{aligned} \quad (6.17)$$

La desviación estándar se define como la integral del espectro de respuesta definida en la ecuación (6.18).

$$\sigma^2(x_r, \omega) = \int_0^\infty \left[\phi(x_r) \left(\frac{\rho V^2 B}{2\tilde{m}\omega^2} \right) |\hat{H}(\omega)| |\hat{J}(\omega)| \right]^2 \quad (6.18)$$

Para obtener el espectro de respuesta para estructuras tipo puente ante efecto de ráfagas, en ocasiones, se pueden hacer algunas simplificaciones si se considera que,

$$\left. \begin{array}{l} \bar{C}_D \\ C'_L \\ C'_M \end{array} \right\} \neq 0 \quad \left. \begin{array}{l} C'_D \\ \bar{C}_L \\ \bar{C}_M \end{array} \right\} = 0 \quad (6.19)$$

Sustituyendo (6.19) en (6.9) se obtiene la función de admitancia conjunta,

$$\begin{aligned} J_y^2(\omega) &= \left(2 \frac{D}{B} \bar{C}_D I_u \right)^2 \iint_{L_{exp}} \phi_y(x_1) \phi_y(x_2) \frac{S_{uu}(\Delta x, \omega)}{\sigma_u^2} dx_1 dx_2 \\ J_z^2(\omega) &= \left(C'_L I_w \right)^2 \iint_{L_{exp}} \phi_z(x_1) \phi_z(x_2) \frac{S_{ww}(\Delta x, \omega)}{\sigma_w^2} dx_1 dx_2 \\ J_\theta^2(\omega) &= \left(C'_M I_w \right)^2 \iint_{L_{exp}} \phi_\theta(x_1) \phi_\theta(x_2) \frac{S_{ww}(\Delta x, \omega)}{\sigma_w^2} dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (6.20)$$

Considerando la función adimensional de admitancia conjunta normalizada como:

$$\begin{aligned}
 \bar{J}_y^2(\omega) &= \frac{\iint \phi_y(x_1)\phi_y(x_2)\hat{C}O_{uu}(\Delta x, \omega)dx_1dx_2}{\left(\int_L \phi_y^2(x)dx\right)^2} \\
 \bar{J}_z^2(\omega) &= \frac{\iint \phi_z(x_1)\phi_z(x_2)\hat{C}O_{uu}(\Delta x, \omega)dx_1dx_2}{\left(\int_L \phi_z^2(x)dx\right)^2} \\
 \bar{J}_m^2(\omega) &= \frac{\iint \phi_m(x_1)\phi_m(x_2)\hat{C}O_{uu}(\Delta x, \omega)dx_1dx_2}{\left(\int_L \phi_m^2(x)dx\right)^2}
 \end{aligned} \tag{6.21}$$

por lo que el espectro de respuesta queda definido de manera simplificada,

$$\begin{aligned}
 S_{r_y}(\omega, x_r) &= \left[\phi_y(x_r) \frac{\rho B^2 D}{\tilde{m}_y} \left(\frac{V}{B\omega_y} \right)^2 \bar{C}_D I_u |\hat{H}_y(\omega)| \bar{J}_y(\omega) \right]^2 \frac{S_u(\omega)}{\sigma_u^2} \\
 S_{r_z}(\omega, x_r) &= \left[\phi_z(x_r) \frac{\rho B^2 D}{\tilde{m}_z} \left(\frac{V}{B\omega_z} \right)^2 C'_L I_w |\hat{H}_z(\omega)| \bar{J}_z(\omega) \right]^2 \frac{S_w(\omega)}{\sigma_w^2} \\
 S_{r_\theta}(\omega, x_r) &= \left[\phi_\theta(x_r) \frac{\rho B^2 D}{\tilde{m}_\theta} \left(\frac{V}{B\omega_\theta} \right)^2 C'_M I_w |\hat{H}_w(\omega)| \bar{J}_w(\omega) \right]^2 \frac{S_u(\omega)}{\sigma_w^2}
 \end{aligned} \tag{6.22}$$

La desviación estándar se obtiene aplicando la integral a la ecuación (6.22).

$$\begin{aligned}
 \sigma_y(x_r) &= \left| \phi_y(x_r) \right| \frac{\rho B^2 D}{\tilde{m}_y} \bar{C}_D I_u \left(\frac{V}{B\omega_y} \right)^2 \left[\int_0^\infty |\hat{H}_y(\omega)|^2 \frac{S_u(\omega)}{\sigma_u^2} \bar{J}_y^2(\omega) d\omega \right]^{1/2} \\
 \sigma_z(x_r) &= \left| \phi_z(x_r) \right| \frac{\rho B^3}{2\tilde{m}_y} C'_L I_w \left(\frac{V}{B\omega_z} \right)^2 \left[\int_0^\infty |\hat{H}_z(\omega)|^2 \frac{S_w(\omega)}{\sigma_w^2} \bar{J}_z^2(\omega) d\omega \right]^{1/2} \\
 \sigma_\theta(x_r) &= \left| \phi_\theta(x_r) \right| \frac{\rho B^4}{2\tilde{m}_\theta} C'_M I_w \left(\frac{V}{B\omega_\theta} \right)^2 \left[\int_0^\infty |\hat{H}_\theta(\omega)|^2 \frac{S_w(\omega)}{\sigma_w^2} \bar{J}_\theta^2(\omega) d\omega \right]^{1/2}
 \end{aligned} \tag{6.23}$$

6.2.2 Función de aceptación conjunta normalizada

La función de aceptación conjunta representada por la ecuación (6.9), requiere de la obtención de una doble integral, la cual puede consumir muchos recursos computacionales si se desea obtener dicha integral para valores discretos. Por lo que a continuación se muestra una manera más sencilla de obtener esta doble integral.

Si se considera que todos los valores son constantes excepto $\phi(x)$ y $\hat{C}_{o_{mn}}(\Delta x, \omega)$, la ecuación (6.9) aplicada a la dirección y se puede reescribir quedando como,

$$J_y^2(\omega) = \left(2 \frac{D}{B} \bar{C}_D I_u\right)^2 \frac{S_u(\omega)}{\sigma_u^2} \iint_{L_{\text{exp}}} \phi_y(x_1) \phi_y(x_2) \hat{C}_{o_{uu}}(\Delta x, \omega) dx_1 dx_2$$

$$+ \left[\left(\frac{D}{B} C'_D - \bar{C}_L \right) I_w \right]^2 \frac{S_w(\omega)}{\sigma_w^2} \iint_{L_{\text{exp}}} \phi_y(x_1) \phi_y(x_2) \hat{C}_{o_{ww}}(\Delta x, \omega) dx_1 dx_2 \quad (6.24)$$

Haciendo un cambio de variable la ecuación (6.24) queda:

$$J_y^2(\omega) = \left(2 \frac{D}{B} \bar{C}_D I_u\right)^2 \frac{S_u(\omega)}{\sigma_u^2} I(\beta_u) + \left[\left(\frac{D}{B} C'_D - \bar{C}_L \right) I_w \right]^2 \frac{S_w(\omega)}{\sigma_w^2} I(\beta_w) \quad (6.25)$$

Del mismo modo se puede hacer el cambio de variable para la función de aceptación normalizada mostrada en la ecuación (6.10) como:

$$\hat{J}_y^2(\omega) = \left(2 \frac{D}{B} \bar{C}_D I_u\right)^2 \frac{S_u(\omega)}{\sigma_u^2} \hat{I}(\beta_u) + \left[\left(\frac{D}{B} C'_D - \bar{C}_L \right) I_w \right]^2 \frac{S_w(\omega)}{\sigma_w^2} \hat{I}(\beta_w) \quad (6.26)$$

donde,

$$I(\beta_n) = \int_0^1 \int_0^1 f(\hat{x}_1) f(\hat{x}_2) \hat{C}o(\beta_n, \Delta \hat{x}) d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 \quad (6.27)$$

$$\hat{I}(\beta_n) = \frac{\int_0^1 \int_0^1 f(\hat{x}_1) f(\hat{x}_2) \hat{C}o(\beta_n, \Delta \hat{x}) d\hat{x}_1 d\hat{x}_2}{\int_0^1 [f(\hat{x})^2 d\hat{x}]^2} \quad (6.28)$$

donde,

$$\beta = \frac{C_{mn} \omega L_{\text{exp}}}{V} \quad (6.28a)$$

$$\Delta \hat{x} = |\hat{x}_1 - \hat{x}_2| \quad (6.28b)$$

$$0 \leq \hat{x}_1 \leq 1 \quad (6.28c)$$

$$0 \leq \hat{x}_2 \leq 1 \quad (6.28c)$$

$$\hat{C}o(\beta, \Delta x) = e^{-\beta \Delta \hat{x}} \quad (6.28d)$$

$$n \in \{u, w\} \quad (6.28e)$$

En ocasiones obtener la integral puede ser imposible o realizarla con un método numérico puede consumir mucho tiempo, por lo que la función se puede expresar con la ecuación (6.29)

$$I(\beta) = \frac{1}{N^2} \sum_{p=1}^N \sum_{k=1}^N f(\hat{x}_1) f(\hat{x}_2) e^{-\beta \Delta \hat{x}} \quad (6.29)$$

6.2.3 Ejemplo 6.1

Por ejemplo si se desea obtener la integral $\hat{I}(\beta)$ para una función $f(\hat{x}) = \text{sen}(\pi \hat{x})$ para una $\beta = 2$ entonces se tiene que,

$$\hat{I}(\beta) = \frac{\int_0^1 \int_0^1 f(\hat{x}_1) f(\hat{x}_2) \hat{C}_o(\beta, \Delta \hat{x}) d\hat{x}_1 d\hat{x}_2}{\int_0^1 [f(\hat{x})^2 d\hat{x}]^2}$$

$$\hat{I}(\beta) = \frac{\int_0^1 \int_0^1 \text{sen}(\pi \hat{x}_1) \text{sen}(\pi \hat{x}_2) e^{-\beta \Delta \hat{x}} d\hat{x}_1 d\hat{x}_2}{\int_0^1 [\text{sen}(\pi \hat{x})^2 d\hat{x}]^2}$$

$$\hat{I}(\beta) = \frac{4}{\beta^2 + \pi^2} \left\{ \beta + \frac{2\pi^2}{\beta^2 + \pi^2} [1 - e^{-\beta} \cos(\pi)] \right\}$$

Sustituyendo $\beta = 2$ entonces

$$\hat{I}(2) = \frac{4}{2^2 + \pi^2} \left\{ 2 + \frac{2\pi^2}{2^2 + \pi^2} [1 - e^{-2} \cos(\pi)] \right\}$$

$$\hat{I}(2) = 1.0428$$

Si se desea hacer con datos discretizados se aplica la ecuación (6.28) para ello se define una $N = 10$ y se obtiene los valores para intervalo \hat{x} mostrados en la Tabla 6.1.

Tabla 6.1 Función $\text{sen}(\pi \hat{x})$

n	\hat{x}	$\text{sen}(\pi \hat{x})$
1	0.10	0.3090
2	0.20	0.5878
3	0.30	0.8090
4	0.40	0.9511
5	0.50	1.0000
6	0.60	0.9511
7	0.70	0.8090
8	0.80	0.5878
9	0.90	0.3090
10	1.00	0.0000

Posteriormente se requiere obtener la multiplicación $f(\hat{x}_i)f(\hat{x}_j)e^{-\beta\Delta\hat{x}}$. Para ello primero se obtiene $f(\hat{x}_i)f(\hat{x}_j)$. Esto se hace multiplicando cada elemento de $f(\hat{x}_i)$ por cada elemento de $f(\hat{x}_j)$. Para ello se puede emplear una distribución como la que se muestra en la Tabla 6.2, donde en la primer fila se colocan los valores de $\sin(\pi\hat{x})$, haciendo lo mismo para la primer columna. Después se multiplica la segunda fila por toda la primera columna, y así sucesivamente para los demás valores.

Tabla 6.2 Multiplicación $f(\hat{x}_i)f(\hat{x}_j)$

$f(\hat{x})$	0.3090	0.5878	0.8090	0.9511	1.0000	0.9511	0.8090	0.5878	0.3090	0.0000
0.3090	0.0955	0.1816	0.2500	0.2939	0.3090	0.2939	0.2500	0.1816	0.0955	0.0000
0.5878	0.1816	0.3455	0.4755	0.5590	0.5878	0.5590	0.4755	0.3455	0.1816	0.0000
0.8090	0.2500	0.4755	0.6545	0.7694	0.8090	0.7694	0.6545	0.4755	0.2500	0.0000
0.9511	0.2939	0.5590	0.7694	0.9045	0.9511	0.9045	0.7694	0.5590	0.2939	0.0000
1.0000	0.3090	0.5878	0.8090	0.9511	1.0000	0.9511	0.8090	0.5878	0.3090	0.0000
0.9511	0.2939	0.5590	0.7694	0.9045	0.9511	0.9045	0.7694	0.5590	0.2939	0.0000
0.8090	0.2500	0.4755	0.6545	0.7694	0.8090	0.7694	0.6545	0.4755	0.2500	0.0000
0.5878	0.1816	0.3455	0.4755	0.5590	0.5878	0.5590	0.4755	0.3455	0.1816	0.0000
0.3090	0.0955	0.1816	0.2500	0.2939	0.3090	0.2939	0.2500	0.1816	0.0955	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000

Para obtener $e^{-\beta\Delta\hat{x}}$ primero se obtiene $\Delta\hat{x}=|x_i - x_j|$ aplicando el método mostrado en la Tabla 6.2 con la diferencia que en vez de multiplicar los valores, se restan y se obtiene su valor absoluto. El resultado de estas operaciones se muestra en la Tabla 6.3 donde la primera fila corresponde a los valores de \hat{x} los cuales se repiten para la primera columna de la Tabla 6.3.

Tabla 6.3 Valores de $\Delta\hat{x}=|x_i - x_j|$

$\hat{x}_1 \hat{x}_2$	0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.5000	0.6000	0.7000	0.8000	0.9000	1.0000
0.1000	0.0000	0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.5000	0.6000	0.7000	0.8000	0.9000
0.2000	0.1000	0.0000	0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.5000	0.6000	0.7000	0.8000
0.3000	0.2000	0.1000	0.0000	0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.5000	0.6000	0.7000
0.4000	0.3000	0.2000	0.1000	0.0000	0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.5000	0.6000
0.5000	0.4000	0.3000	0.2000	0.1000	0.0000	0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.5000
0.6000	0.5000	0.4000	0.3000	0.2000	0.1000	0.0000	0.1000	0.2000	0.3000	0.4000
0.7000	0.6000	0.5000	0.4000	0.3000	0.2000	0.1000	0.0000	0.1000	0.2000	0.3000
0.8000	0.7000	0.6000	0.5000	0.4000	0.3000	0.2000	0.1000	0.0000	0.1000	0.2000
0.9000	0.8000	0.7000	0.6000	0.5000	0.4000	0.3000	0.2000	0.1000	0.0000	0.1000
1.0000	0.9000	0.8000	0.7000	0.6000	0.5000	0.4000	0.3000	0.2000	0.1000	0.0000

Finalmente se multiplica cada valor de la Tabla 6.2 con $e^{-\beta \hat{\Delta}x}$, considerando que $\Delta \hat{x}$ es cada valor de la Tabla 6.3. Estos valores se muestran en la Tabla 6.4

Tabla 6.4 Multiplicación $f(\hat{x}_i)f(\hat{x}_j)e^{-2\hat{\Delta}x}$

0.0955	0.1487	0.1676	0.1613	0.1389	0.1081	0.0753	0.0448	0.0193	0.0000
0.1487	0.3455	0.3893	0.3747	0.3226	0.2512	0.1749	0.1041	0.0448	0.0000
0.1676	0.3893	0.6545	0.6299	0.5423	0.4223	0.2941	0.1749	0.0753	0.0000
0.1613	0.3747	0.6299	0.9045	0.7787	0.6063	0.4223	0.2512	0.1081	0.0000
0.1389	0.3226	0.5423	0.7787	1.0000	0.7787	0.5423	0.3226	0.1389	0.0000
0.1081	0.2512	0.4223	0.6063	0.7787	0.9045	0.6299	0.3747	0.1613	0.0000
0.0753	0.1749	0.2941	0.4223	0.5423	0.6299	0.6545	0.3893	0.1676	0.0000
0.0448	0.1041	0.1749	0.2512	0.3226	0.3747	0.3893	0.3455	0.1487	0.0000
0.0193	0.0448	0.0753	0.1081	0.1389	0.1613	0.1676	0.1487	0.0955	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

$$\Sigma\Sigma = 25.97$$

La suma de todos los datos es $\Sigma\Sigma = 25.97$, considerando $N = 10$ entonces la integral $I(\beta)$ queda:

$$I(2) = \frac{25.97}{10^2} = 0.2597$$

Para obtener la integral normalizada se requiere $\int_0^1 [\text{sen}(\pi \hat{x})^2 d\hat{x}]^2$ por lo que se emplea el método de Simpson. Los valores de la integral se muestran en la Tabla 6.5

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = 0.1$$

Tabla 6.5 $\int_0^1 [\text{sen}(\pi \hat{x})^2 d\hat{x}]^2$

n	\hat{x}	$\text{sen}(\pi \hat{x})^2$	FM	$FM [x(t)]^2$
1	0.0000	0.0000	1	0.0000
2	0.1000	0.0955	4	0.3820
3	0.2000	0.3455	2	0.6910
4	0.3000	0.6545	4	2.6180
5	0.4000	0.9045	2	1.8090

Tabla 6.5 $\int_0^1 [\text{sen}(\pi \hat{x})^2 d\hat{x}]^2$ (continuación)

n	\hat{x}	$\text{sen}(\pi \hat{x})^2$	FM	$FM [x(t)]^2$
6	0.5000	1.000	4	4.0000
7	0.6000	0.9045	2	1.8090
8	0.7000	0.6545	4	2.6180
9	0.8000	0.3455	2	0.6910
10	0.9000	0.0955	4	0.3820
11	1.0000	0	1	0

$$\Sigma = 15.0000$$

$$\int_0^1 [\text{sen}(\pi \hat{x})^2 d\hat{x}]^2 \approx \left(15.0000 \frac{0.1}{3} \right)^2 = 0.2500$$

Por lo que integral normalizada queda:

$$\hat{I}(2) \approx \frac{0.2597}{0.2500} \approx 1.0388$$

El Error se obtiene con:

$$e = \frac{x_{real} - x_{aprox}}{x_{real}}$$

donde x_{real} es el valor exacto y x_{aprox} es el valor aproximado.

$$e = \frac{1.0428 - 1.0388}{1.0428} = 0.0038$$

Para esta función el error es $e = 0.38\%$, dependiendo de la función el error puede variar, sin embargo este error disminuye entre más datos se usan.

6.2.4 Ejemplo 6.2

Obtener la desviación estándar de la respuesta ante efecto de ráfagas de un puente con las características mostradas en la Tabla 6.6.

Tabla 6.6 Propiedades del puente ejemplo 6.2

Característica	Símbolo	Valor
Coefficiente de arrastre	\bar{C}_D	0.7
Ancho del puente (m)	B	20
Peralte del puente (m)	D	4
Masa (kg/m)	m_y	10 000

Tabla 6.6 Propiedades del puente ejemplo 6.2 (continuación)

Característica	Símbolo	Valor
Frecuencia angular (rad/s)	ω_y	0.4
Amortiguamiento	ζ_y	0.005
Densidad del viento (kg/m ³)	ρ	1.25
Función de potencia espectral	$\frac{S_u(\omega)}{\sigma_u^2}$	$\frac{174.96}{V \left(1 + \frac{262.44\omega}{V}\right)^{5/3}}$
Velocidad media (m/s)	V	45
Longitud (m)	L	500
Constante que define la coherencia	C_{mn}	$\frac{9}{2\pi} = 1.4$

Considerando $L_{exp} = L$ entonces $\frac{\int_L \phi_y^2 dx}{\int_L \phi_y^2 dx} = 1$ el amortiguamiento aerodinámico es (ecuación 6.17),

$$\zeta_{ae_y} = -\frac{\rho}{2\tilde{m}_y} \bar{C}_D D \left(\frac{V}{\omega}\right)$$

$$\zeta_{ae_y} = -\frac{1.25}{2(10000)} (0.7)(4) \left(\frac{45}{0.4}\right)$$

$$\zeta_{ae_y} = -0.0197$$

por lo que la función de transferencia mecánica es (ecuación 6.15):

$$\hat{H}_y(\omega) = \left[1 - \left(\frac{\omega}{0.4}\right)^2 + 2i(0.005 + 0.0197)\frac{\omega}{0.4} \right]^{-1}$$

$$\hat{H}_y(\omega) = [1 - 6.25\omega^2 + 0.1234\omega i]^{-1}$$

Dado que es una función compleja, el valor se absoluto es

$$|\hat{H}_y(\omega)| = \left[\sqrt{(1 - 6.25\omega^2)^2 + (0.1234\omega i)^2} \right]^{-1}$$

$$|\hat{H}_y(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{39.0625\omega^4 - 12.4848\omega^2 + 1}}$$

$$|\hat{H}_y(\omega)|^2 = \frac{1}{39.0625\omega^4 - 12.4848\omega^2 + 1}$$

Si se desea obtener la respuesta a mitad del claro, para una velocidad de $V = 45$ m/s y una frecuencia de $\omega = 0.4$ entonces la función de densidad de potencia queda:

$$\frac{S_u(\omega)}{\sigma_u^2} = \frac{174.96}{45 \left(1 + \frac{262.44(0.4)}{45} \right)^{5/3}} = 0.5229$$

$$|\hat{H}_y(\omega)|^2 = \frac{1}{39.0625(0.4)^4 - 12.4848(0.4)^2 + 1}$$

$$|\hat{H}_y(\omega)|^2 = 410.1907$$

Se obtiene el valor de la frecuencia normalizada β (ecuación 6.28a).

$$\beta = C_{mn} \omega L_{\text{exp}} / V$$

$$\beta = \frac{(1.4)(0.4)(500)}{45} = 6.2222$$

Para obtener la función de admitancia conjunta normalizada, se obtiene la integral normalizada obtenida al inicio del ejemplo 6.1, la cual es la misma que la función de admitancia conjunta adimensional normalizada

$$\hat{I}(6.2222) = \frac{4}{6.2222^2 + \pi^2} \left\{ 6.2222 + \frac{2\pi^2}{6.2222^2 + \pi^2} \left[1 - e^{-6.2222} \cos(\pi) \right] \right\}$$

$$I(6.2222) = 0.5183$$

$$\bar{J}(0.4) = 0.5183$$

La función de densidad de desplazamiento para la mitad del claro donde $\phi(0.5) = 1$.

Aplicando la ecuación (6.22) para una estructura tipo puente considerando únicamente el coeficiente de arrastre, el espectro de respuesta queda:

$$S_{r_y}(0.4,1) = \left[1 \frac{(1.25)(20)^2(4)}{10000} \left(\frac{45}{(20)(0.4)} \right)^2 (0.7)(0.15) \right]^2 (410.1907)(0.5229)(0.5229)$$

$$S_{r_y}(0.4,1) = 49.5155 \text{ s} \cdot \text{m}^2$$

La desviación estándar es (ecuación 6.23),

$$\sigma_y(x_r) = |\phi_y(x_r)| \frac{\rho B^2 D}{\bar{m}_y} \bar{C}_D I_u \left(\frac{V}{B\omega_y} \right)^2 \left[\int_0^\infty |\hat{H}_y(\omega)|^2 \frac{S_u(\omega)}{\sigma_u^2} \bar{J}_y^2(\omega) d\omega \right]^{1/2}$$

La desviación se puede obtener con el área bajo la curva de la función de densidad, por lo que aplicando el método de trapecio se puede obtener la desviación estándar. La integral tiene un límite superior infinito, sin embargo se puede acotar ya que para valores muy grandes, el resultado es despreciable. Para ello se obtuvieron los valores de la función de admitancia conjunta, la de densidad de potencia espectral y la de transferencia para diferentes valores de ω como se muestra en la Tabla 6.7.

Para obtener los valores de la Tabla 6.7 se empleó el método del trapecio para obtener la integral. Para aplica la ecuación (6.22) se obtuvieron los valores de,

$$\hat{H}_y(\omega)$$

$$\bar{J}_y^2(\omega)$$

$$\frac{S_u(\omega)}{\sigma_u^2}$$

que se consideran como:

$$\text{Mult} = \left[\hat{H}_y(\omega) \right] \left[\bar{J}_y^2(\omega) \right] \left[\frac{S_u(\omega)}{\sigma_u^2} \right]$$

La última columna se obtuvo con:

$$\text{Area}_n = \frac{(\text{Mult}_n)(\text{Mult}_{n+1})(\omega_{n+1} - \omega_n)}{2}$$

Para el primer valor se obtiene

$$\text{Mult}_1 = [1][0.5183][3.8505] = 1.9958$$

$$\text{Mult}_2 = [1][0.5206][3.8136] = 1.9856$$

$$\text{Area}_1 = \frac{(1.9958)(1.9856)(0.002 - 0.001)}{2} = 0.0020$$

Tabla 6.7 Valores de la función de transferencia, admitancia conjunta y potencia espectral a diferentes valores ω , su multiplicación y su área basado en el método del trapecio

n	ω	$\hat{H}_y(\omega)$	$\hat{J}_y^2(\omega)$	$\frac{S_u(\omega)}{\sigma_u^2}$	Mult	Área
1	0.001	1.0000	0.5183	3.8505	1.9958	0.0020
2	0.002	1.0000	0.5206	3.8136	1.9856	0.0020
3	0.003	1.0001	0.5229	3.7772	1.9755	0.0020
4	0.004	1.0002	0.5253	3.7414	1.9657	0.0020
5	0.005	1.0003	0.5276	3.7061	1.9560	0.0020
6	0.006	1.0004	0.5300	3.6714	1.9466	0.0019

Tabla 6.7 Valores de la función de transferencia, admitancia conjunta y potencia espectral a diferentes valores ω , su multiplicación y su área basado en el método del trapecio (continuación)

n	ω	$\hat{H}_y(\omega)$	$\hat{J}_y^2(\omega)$	$\frac{S_u(\omega)}{\sigma_u^2}$	Mult	Área
7	0.007	1.0006	0.5323	3.6372	1.9373	0.0019
8	0.008	1.0008	0.5347	3.6035	1.9282	0.0019
9	0.009	1.0010	0.5370	3.5702	1.9193	0.0019
10	0.010	1.0012	0.5394	3.5375	1.9105	0.0187
11	0.020	1.0050	0.5633	3.2350	1.8313	0.0180
12	0.030	1.0113	0.5869	2.9718	1.7640	0.0173
13	0.040	1.0203	0.6098	2.7413	1.7055	0.0168
14	0.050	1.0320	0.6313	2.5381	1.6536	0.0163
15	0.060	1.0465	0.6511	2.3580	1.6067	0.0159
16	0.070	1.0641	0.6688	2.1975	1.5640	0.0154
17	0.080	1.0850	0.6843	2.0538	1.5247	0.0151
18	0.090	1.1093	0.6973	1.9246	1.4887	0.0147
19	0.100	1.1376	0.7078	1.8079	1.4558	0.1399
20	0.200	1.7759	0.7053	1.0719	1.3426	0.1821
21	0.300	5.1873	0.6152	0.7205	2.2990	5.7226
22	0.400	410.1907	0.5229	0.5229	112.1533	5.6356
23	0.500	3.1229	0.4472	0.3996	0.5581	0.0318
24	0.600	0.6378	0.3876	0.3171	0.0784	0.0050
25	0.700	0.2347	0.3406	0.2588	0.0207	0.0014
26	0.800	0.1110	0.3031	0.2159	0.0073	0.0005
27	0.900	0.0605	0.2726	0.1834	0.0030	0.0002
28	1.000	0.0363	0.2475	0.1581	0.0014	0.0007
29	2.000	0.0017	0.1273	0.0565	0.0000	0.0000
30	3.000	0.0003	0.0853	0.0301	0.0000	
Suma					11.8856	

Por lo que:

$$\int_0^3 |\hat{H}_y(\omega)|^2 \frac{S_u(\omega)}{\sigma_u^2} \hat{J}_y^2(\omega) d\omega = 11.8856$$

La desviación estándar queda:

$$\sigma_y(1) = 1 \frac{1.25(20)^2(4)}{10000} 0.7(0.15) \left[\frac{45}{(20)0.4} \right]^2 [11.8856]^{1/2} = 2.29 \text{ m}$$

6.2.5 Respuesta de múltiples GDL ante ráfagas de viento

A diferencia de considerar un solo modo de vibrar cuando se consideran múltiples grados de libertad, GDL, se utiliza una matriz de formas modales. El espectro de respuesta de desplazamiento para matrices se define en la ecuación (6.30).

La relación de frecuencias queda en forma matricial considerando la rigidez y el amortiguamiento aerodinámico como se muestra en la ecuación (6.31).

$$\hat{H}_\eta(\omega) = \left\{ 1 - k_{ae} - \left(\omega \operatorname{diag} \left[\frac{1}{\omega_i} \right] \right)^2 + (2i\omega) \operatorname{diag} \left[\frac{1}{\omega_i} \right] (\zeta - \zeta_{ae}) \right\}^{-1} \quad (6.30)$$

donde k_{ae} es la matriz de rigidez aerodinámica, ω es la frecuencia del viento, ω_i es la matriz de frecuencias características del sistema, ζ es la matriz de amortiguamiento de cada modo y ζ_{ae} es la matriz de amortiguamiento aerodinámico.

Las matrices aerodinámicas están en función a las derivadas aerodinámicas presentadas en el capítulo 5. Estas matrices se obtienen como se muestran en las ecuaciones (6.31) y (6.32)

$$k_{aeij} = \frac{\rho B^2}{2\tilde{m}_i} \frac{\int_{L_{exp}} (\varphi_i^T \hat{K}_{ae} \varphi_j) dx}{\int_{L_{exp}} (\varphi_i^T \varphi_j) dx} \quad (6.31)$$

$$\zeta_{aeij} = \frac{\rho B^2}{2\tilde{m}_i} \frac{\int_{L_{exp}} (\varphi_i^T \hat{C}_{ae} \varphi_j) dx}{\int_{L_{exp}} (\varphi_i^T \varphi_j) dx} \quad (6.32)$$

Si se considera que la matriz de espectros de carga modal se define como

$$S_{\hat{Q}}(\omega) = \begin{bmatrix} \ddots & & \ddots \\ & S_{\hat{Q}_i \hat{Q}_j} & \\ \ddots & & \ddots \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

donde

$$S_{\hat{Q}_i \hat{Q}_j}(\omega) = \frac{\rho B^3}{2\tilde{m}_i} \frac{\rho B^3}{2\tilde{m}_j} \left(\frac{V}{B\omega_i} \right)^2 \left(\frac{V}{B\omega_j} \right)^2 \hat{J}_{ij}^2 \quad (6.34)$$

$$\hat{J}_{ij}^2 = \frac{\iint_{L_{\text{exp}}} \varphi_i^T(x_1) \left\{ \hat{B}_q \left[I_u^2 \hat{S}_u(\Delta x, \omega) \right] \hat{B}_q^T \right\} \varphi_j(x_2) dx_1 dx_2}{\left(\int_L \varphi_i^T \varphi_i dx \right) \left(\int_L \varphi_j^T \varphi_j dx \right)} \quad (6.35)$$

A partir de estas ecuaciones se puede obtener la respuesta para modos acoplados.

6.3 Desprendimiento de vórtices

6.3.1 Respuesta unidireccional considerando un GDL

La obtención de la respuesta ante desprendimiento de vórtices es similar a la respuesta ante efectos de ráfaga, cambiando las derivadas aerodinámicas mostradas en la ecuación (6.39).

El espectro de respuesta se calcula con la ecuación (6.35),

$$S_{r_n}(x_r, \omega) = \phi_i^2(x_r) \left| \hat{H}(\omega) \right|^2 S_{\hat{Q}_n}(\omega) \quad (6.36)$$

La obtención de $\hat{H}(\omega)$ y $S_{\hat{Q}_n}$ se obtienen con la ecuación (6.36) y (6.37), respectivamente

$$\hat{H}_n(\omega) = \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 + 2i \left(\zeta_y - \zeta_{ae_n} \right) \frac{\omega}{\omega_n} \right]^{-1} \quad (6.37)$$

$$S_{\hat{Q}_n}(\omega) = 2\lambda D \frac{S_{q_n}(\omega) \int \phi_n^2(x) dx}{L_{\text{exp}} \left(\omega_n^2 \tilde{M}_n \right)^2} \quad (6.38)$$

donde el amortiguamiento aerodinámico ζ_{ae_n} se obtiene con la ecuación (6.40) empelando la ecuación (6.38).

$$C_{ae} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{a_z} \left[1 - \left(\frac{\sigma_z}{a_z D} \right)^2 \right] & 0 \\ 0 & 0 & B^2 K_{a_\theta} \left[1 - \left(\frac{\sigma_\theta}{a_\theta} \right)^2 \right] \end{bmatrix} \quad K_{ae} = [0] \quad (6.39)$$

$$\zeta_{ae_n} = \frac{C_{ae_m}}{2\omega_n \tilde{M}_z} \quad (6.40)$$

Sustituyendo la ecuación (6.39) en (6.40),

$$\zeta_{ae_z} = \frac{\rho B^2}{4m_z} K_{a_z} \left[1 - \left(\frac{\sigma_z}{a_z D} \right)^2 \right] \frac{\int_{L \text{Exp}} \phi_z^2 dx}{\int_L \phi_z^2 dx} \quad (6.41)$$

$$\zeta_{ae_\theta} = \frac{\rho B^4}{4\tilde{m}_\theta} K_{a_\theta} \left[1 - \left(\frac{\sigma_\theta}{a_\theta} \right)^2 \right] \frac{\int_{L \text{Exp}} \phi_\theta^2 dx}{\int_L \phi_\theta^2 dx}$$

El espectro de carga se obtiene mediante la ecuación (6.42) la cual fue desarrollada por Vickery & Basu (1983).

$$S_{q_n}(\omega) = \frac{\left(\frac{1}{2} \rho V^2 \right)^2}{\sqrt{\pi} \omega_s} \frac{(B \hat{\sigma}_{q_n})^2}{b_z} e^{-\left(\frac{1-\omega/\omega_s}{b_z} \right)^2} \quad (6.42)$$

Sustituyendo (6.41) en (6.37),

$$S_{\hat{Q}_n}(\omega) = 2\lambda D \frac{\left(\frac{1}{2} \rho V^2 B \hat{\sigma}_{q_z} \right)^2}{\sqrt{\pi} b_s \omega_s} e^{-\left(\frac{1-\omega/\omega_s}{b_z} \right)^2} \frac{\int_{L \text{Exp}} \phi_n^2(x) dx}{(\omega_n^2 \tilde{M}_n)^2} \quad (6.43)$$

A partir de la ecuación (6.43) se puede obtener el espectro de carga correlacionado. Para obtener la varianza se integra el espectro de respuesta como se indica en la ecuación (6.44).

$$\sigma_{r_n}^2 = \int_0^\infty S_{r_n} d\omega \approx \phi_n^2(x_r) \int_0^\infty |\hat{H}(\omega)|^2 d\omega \cdot S_{\hat{Q}_n}(\omega_n) \quad (6.44)$$

Strommen (2010) reescribe la varianza como se muestra en la ecuación (6.45) y (6.46).

$$\sigma_{r_n}^2 = \phi_n^2(x_r) \frac{\pi \omega_n S_{\hat{Q}_n}(\omega_n)}{4(\zeta_n - \zeta_{ae_n})} \quad (6.45)$$

$$\frac{\sigma_{r_z}^2}{D} = \frac{|\phi_z(x_r)|}{2^{7/2} \pi^{7/4}} \frac{\rho B D \hat{\sigma}_{q_z}}{\tilde{m}_z St^2} \left[\frac{\lambda}{b_z (\zeta_z - \zeta_{ae_z})} \right]^{1/2} \frac{\left(D \int_{L \text{Exp}} \phi_z^2 dx \right)^{1/2}}{\int_L \phi_z^2 dx} g_z(V_{r_z}, V) \quad (6.46)$$

$$\sigma_{r_z}^2 = \frac{|\phi_z(x_r)|}{2^{7/2} \pi^{7/4}} \frac{\rho (BD)^2 \hat{\sigma}_{q_\theta}}{\tilde{m}_\theta St^2} \left[\frac{\lambda}{b_z (\zeta_\theta - \zeta_{ae_\theta})} \right]^{1/2} \frac{\left(D \int_{L \text{Exp}} \phi_\theta^2 dx \right)^{1/2}}{\int_L \phi_\theta^2 dx} g_\theta(V_{r_\theta}, V)$$

donde $\hat{\sigma}_{q_n}$ es el coeficiente adimensional de la raíz cuadrada media de la fuerza de levante o momento y,

$$g_n(V_{R_n}, V) = \left(\frac{V}{V_{R_n}} \right)^{3/2} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1-V_{R_n}/V}{b_n} \right)} \quad (6.47)$$

donde la velocidad resonante es

$$V_{R_n} = \frac{D\omega_n}{2\pi St} \quad (6.48)$$

La ecuación (6.46) queda en función del amortiguamiento aerodinámico, sin embargo para obtener el amortiguamiento se requiere de la varianza, por lo que la solución a este problema se puede hacer al hacer un cambio de variable (Strommen, 2010), como se muestra a continuación.

Primero se deja en términos de una ecuación de cuarto grado para la respuesta en dirección z .

$$\hat{\sigma}_{r_z} - (1 - \hat{\zeta})\hat{\sigma}_{r_z}^2 - \hat{\beta}^2 = 0 \quad (6.49)$$

donde la solución es

$$\hat{\sigma}_{r_z} = \left\{ \frac{1 - \hat{\zeta}}{2} + \left[\left(\frac{1 - \hat{\zeta}}{2} \right)^2 + \hat{\beta}^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/2} \quad (6.50)$$

y

$$\hat{\zeta} = \frac{4\tilde{m}_z}{\rho B^2} \frac{\zeta_z}{K_{a_z}} \frac{\int_L \phi_z^2 dx}{\int_{L \exp} \phi_z^2 dx} \quad (6.51)$$

$$\hat{\beta} = \frac{|\phi_z(x_r)|}{2^{5/2} \pi^{7/2}} \left(\frac{\rho D^3}{\tilde{m}_z} \frac{\lambda}{\int_L \phi_z^2 dx} \frac{1}{b_z K_{a_z}} \right)^{1/2} \frac{\hat{\sigma}_{q_z} g_z}{St^2 a_z} \quad (6.52)$$

Por lo que la desviación estándar es

$$\sigma_{r_z} = \hat{\sigma}_{r_z} a_z D \quad (6.53)$$

Para la dirección θ el procedimiento es el siguiente.

$$\hat{\sigma}_{r_\theta} - (1 - \hat{\zeta})\hat{\sigma}_{r_\theta}^2 - \hat{\beta}^2 = 0 \quad (6.54)$$

La solución a la ecuación es:

$$\hat{\sigma}_{r_\theta} = \left\{ \frac{1 - \hat{\zeta}}{2} + \left[\left(\frac{1 - \hat{\zeta}}{2} \right)^2 + \hat{\beta}^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/2} \quad (6.55)$$

donde

$$\hat{\zeta} = \frac{4\tilde{m}_\theta \zeta_\theta}{\rho B^4 K_{a_\theta}} \frac{\int_L \phi_\theta^2 dx}{\int_{L_{exp}} \phi_\theta^2 dx} \quad (6.56)$$

$$\hat{\beta} = \frac{|\phi_\theta(x_r)|}{2^{5/2} \pi^{7/2}} \left(\frac{\rho D^5}{\tilde{m}_\theta \int_L \phi_\theta^2 dx} \cdot \frac{\lambda}{b_\theta K_{a_\theta}} \right)^{1/2} \frac{\hat{\sigma}_{q_\theta} g_\theta}{St^2 a_\theta} \quad (6.57)$$

Por lo que la desviación estándar es

$$\sigma_{r_z} = \hat{\sigma}_{r_z} a_z \quad (6.58)$$

Para el desprendimiento de vórtices se requieren de ciertos valores que se obtienen a partir de túnel de viento. Dado que no se cuenta con esos datos se supondrán valores provenientes de la literatura.

6.3.2 Ejemplo de aplicación

Para el siguiente ejemplo se desea conocer la respuesta en el centro del claro de un puente ante efectos de desprendimiento de vórtices, con los datos de la Tabla 6.8.

Tabla 6.8 Datos del ejemplo para obtener la respuesta ante desprendimiento de vórtices

Dato	Símbolo	Valor
Masa (kg / m)	a_z	0.4
Longitud (m)	L	500
Frecuencia angular en la dirección vertical (rad / s)	ω_z	0.8
Función de la forma modal	ϕ_z	$\text{sen} \pi x / L$
Ancho del puente (m)	B	20
Peralte del puente (m)	D	4
Densidad del viento (kg / m^3)	ρ	1.25
Longitud de escala adimensional de la coherencia en dirección vertical	λ	1.2
Coefficiente adimensional de la raíz cuadrada media de la fuerza de levante	$\hat{\sigma}_{q_z}$	0.9

Tabla 6.8 Datos del ejemplo para obtener la respuesta ante desprendimiento de vórtices (continuación)

Dato	Símbolo	Valor
Parámetro de ancho de banda en la dirección vertical	b_z	0.15
Número de Strouhal	St	0.1
Coefficiente de velocidad dependiente al amortiguamiento	K_{a_z}	0.2

Para obtener la respuesta primero se requiere obtener la desviación estándar por lo que se aplica la ecuación (6.58), para ello se obtienen los valores siguientes:

Obtención de $\hat{\zeta}$ (ecuación 6.56).

$$\hat{\zeta} = \frac{4\bar{m}_z \zeta_z}{\rho B^2 K_{a_z}} \frac{\int_L \phi_z^2 dx}{\int_{L_{exp}} \phi_z^2 dx} = \frac{4(10^4)}{1.25(20)^2} \left(\frac{0.005}{0.2} \right) 1 = 2$$

Obtención de $\hat{\beta}$ (ecuación 6.57).

Primero se obtiene g_z , sin embargo el punto crítico se da cuando existe resonancia, es decir la frecuencia del viento y la del puente es el mismo por lo que $g_z = 1$

Por otro lado se calcula la integral $\int_L \phi_z^2$

$$\int_L \phi_z^2 = \int_0^L \text{sen}(\pi x / L)^2 dx = \frac{L}{2} = 250$$

$$\hat{\beta} = \frac{|\phi_z(x_r)|}{2^{5/2} \pi^{7/4}} \left(\frac{\rho D^3}{\bar{m}_z \int_L \phi_z^2 dx} \frac{\lambda}{b_z K_{a_z}} \right)^{1/2} \frac{\hat{\sigma}_{q_z} g_z}{St^2 a_z}$$

$$\hat{\beta} = \frac{|1|}{2^{5/2} \pi^{7/2}} \left(\frac{1.25(4)^3}{10^4(250)} \cdot \frac{1.2}{0.15(0.2)} \right)^{1/2} \frac{0.9}{(0.1)^2} \frac{1}{0.4} = 0.19$$

Obtención de la desviación estándar reducida $\hat{\sigma}_{r_z}$ (ecuación 6.55).

$$\hat{\sigma}_{r_z} = \left\{ \frac{1 - \hat{\zeta}}{2} + \left[\left(\frac{1 - \hat{\zeta}}{2} \right)^2 + \hat{\beta}^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/2}$$

$$\hat{\sigma}_{r_z} = \left\{ \frac{1-2}{2} + \left[\left(\frac{1-2}{2} \right)^2 + (0.19)^2 \right]^{1/2} \right\} = 0.19$$

La desviación estándar es:

$$\begin{aligned} \sigma_{r_z} &= \hat{\sigma}_{r_z} a_z D \\ \sigma_{r_z} &= (0.19) 0.4 (4) = 0.30 \end{aligned}$$

Una vez obtenido la desviación estándar se puede obtener el espectro de respuesta, para ello se obtiene la velocidad resonante (ecuación 6.48),

$$V_{R_n} = \frac{D \omega_n}{2\pi S t} = \frac{4(0.8)}{2\pi(0.1)} = 5.09 \text{ m/s}$$

el amortiguamiento aerodinámico (6.41),

$$\begin{aligned} \zeta_{ae_z} &= \frac{\rho B^2}{4m_z} K_{a_z} \left[1 - \left(\frac{\sigma_z}{a_z D} \right)^2 \right] \frac{\int_L \phi_z^2 dx}{\int_L \phi_z^2 dx} \\ \zeta_{ae_z} &= \frac{1.25(20)}{4(10^4)} 0.2 \left[1 - \left(\frac{0.3}{0.4(4)} \right)^2 \right] 1 = 0.0024 \end{aligned}$$

La función de transferencia, la cual se obtiene de la misma manera que en el análisis de ráfagas.

$$\begin{aligned} \hat{H}_n(\omega) &= \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 + 2i(\zeta_y - \zeta_{ae_n}) \frac{\omega}{\omega_n} \right]^{-1} \\ \hat{H}_n(\omega) &= \left[1 - \left(\frac{0.8}{0.8} \right)^2 + 2i(0.005 - 0.0024) \frac{0.8}{0.8} \right]^{-1} \\ \hat{H}_n(\omega) &= [0 + 0.005i]^{-1} \\ |\hat{H}_n(\omega)|^2 &= 37589.70 \end{aligned}$$

Se obtiene el valor $\tilde{M}_n = \int_L \phi^2 dx \cdot m_n$ para poder aplicar la ecuación (6.43)

$$\begin{aligned} \tilde{M}_n &= \int_L \phi^2 dx m_n = \int_{500} \text{sen} \left(\frac{\pi x}{500} \right)^2 dx \cdot 10^4 = 25 \times 10^6 \\ S_{\hat{Q}_n}(\omega) &= 2\lambda D \frac{\left(\frac{1}{2} \rho V^2 B \hat{\sigma}_{q_z} \right)^2}{\sqrt{\pi b_s \omega_s}} e^{-\left(\frac{1-\omega/\omega_s}{b_z} \right)^2} \frac{\int_{L \text{exp}} \phi_n^2(x) dx}{(\omega_n^2 \tilde{M}_n)^2} \end{aligned}$$

$$S_{\hat{Q}_n}(\omega) = 2(1.2)(4) \frac{\left[\frac{1}{2}(1.25)(5.09)^2(20)(0.9) \right]^2}{\sqrt{\pi}(0.15)(0.8)} e^{-\left(\frac{1-0.8/0.8}{0.15}\right)^2} \frac{250}{\left[(0.8)^2 (25 \times 10^6) \right]^2}$$

$$S_{\hat{Q}_n}(\omega) = 0.0003753$$

La respuesta ante desprendimiento de vórtices es

$$S_{r_n}(x_r, \omega) = \phi_i^2(x_r) |\hat{H}(\omega)|^2 S_{\hat{Q}_n}(\omega)$$

$$S_{r_n}(x_r, \omega) = (1)^2 (37589.70)(0.000375) = 14.11 \text{ m} \cdot \text{s}^2$$

6.3.3 Respuesta a múltiples GDL

Dado que la contribución de varios modos es importante ante el efecto de desprendimiento de vórtices, el espectro de respuesta se puede obtener con la ecuación (6.59), la cual está representada en forma matricial.

$$S_{qq}(\Delta x, \omega) \approx \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_{q_z q_z} & 0 \\ 0 & 0 & S_{q_\theta q_\theta} \end{bmatrix} \quad (6.59)$$

donde

$$S_{q_z q_z} = S_{q_z}(\omega) \cdot \hat{C}o_{q_z}(\Delta x)$$

$$S_{q_\theta q_\theta} = S_{q_\theta}(\omega) \cdot \hat{C}o_{q_\theta}(\Delta x) \quad (6.60)$$

$$S_{\hat{Q}_i}(\omega) = \frac{2\lambda D \left[S_{q_z}(\omega) \int_{L_{ex}} \phi_{i_z}^2 dx + S_{q_\theta}(\omega) \int_{L_{ex}} \phi_{i_\theta}^2 dx \right]}{(\omega_i^2 \tilde{M}_i)^2} \quad (6.61)$$

Considerando la ecuación anterior entonces $S_{\hat{Q}_i}$ queda como se muestra en la ecuación (6.62)

$$S_{\hat{Q}_i}(\omega_i) = \frac{2\lambda D}{(\omega_i^2 \tilde{M}_i)^2} \frac{(\rho V^2 B / 2)^2}{\sqrt{\pi} \omega_s} \left\{ \frac{\sigma_{q_z}^2}{b_z} \right\} \int_{L_{exp}} \phi_{i_z}^2 dx \exp \left[\left(-\frac{1 - \omega_i / \omega_s}{b_z} \right)^2 \right]$$

$$+ \frac{(B \sigma_{q_\theta})^2}{b_\theta} \int_{L_{ex}} \phi_{i_\theta}^2 dx \exp \left[1 \left(\frac{1 - \omega_i / \omega_s}{b_\theta} \right)^2 \right] \quad (6.62)$$

$$\hat{H}_\eta(\omega) = \left\{ I - \left(\omega \text{diag} \left[\frac{1}{\omega_i} \right] \right)^2 + 2i \omega \text{diag} \left[\frac{1}{\omega_i} \right] (\zeta - \zeta_{ae}) \right\}^{-1} \quad (6.63)$$

Donde el amortiguamiento aerodinámico es

$$\zeta_{ae_j} = \frac{\rho B^2}{4\tilde{m}_i} \frac{\int_{L_{ex}} \phi_{i_z} \phi_{j_z} K_{a_z} \left[1 - \left(\frac{\sigma_z}{a_z D} \right)^2 \right] dx + B^2 \int_{L_{ex}} \phi_{i_\theta} \phi_{j_\theta} K_{a_\theta} K_{a_\theta} \left[1 - \left(\frac{\sigma_\theta}{a_\theta} \right)^2 \right] dx}{\int_L (\phi_{y_i}^2 + \phi_{z_i}^2 + \phi_{\theta_i}^2) dx} \quad (6.64)$$

Para obtener la desviación estándar se puede emplear la ecuación (6.65)

$$\sigma_{r_i}^2 = \int_0^\infty |\hat{H}_{r_i}(\omega)|^2 S_{\hat{Q}_i}(\omega) d\omega \approx \int_0^\infty |\hat{H}_{r_i}(\omega)|^2 d\omega S_{\hat{Q}_i}(\omega) \quad (6.65)$$

La cual la solución es

$$\sigma_{r_i}^2 = \frac{\pi \omega_i S_{\hat{Q}_i}(\omega_i)}{4(\zeta_i - \zeta_{ae_i})} \quad (6.66)$$

6.4 Verificación de la metodología

Para validar el procedimiento se verifico la metodología con el puente Pierre Pfimlin (Helliesen, 2013) y el puente Sogneford (Walbækken, 2013).

6.4.1 Puente Pierre Pfimlin

El puente Pfimlin se encuentra ubicado sobre el río Rin entre Alemania y Francia. Tiene una longitud total de 957 m con una tablero que varía a lo largo del puente como se muestra en la Figura 6.1.



Figura 6.1 Puente Pierre Pfimlin (Ulrich, 2016)

Con fines de verificar la metodología empleada en este trabajo, se consideraron los datos del puente tomadas de Helliesen (2013), y los mismos que se muestran en la Tabla 6.9.

Tabla 6.9 Propiedades estructurales y de diseño del puente Pierre Pfinlin

Dato	Símbolo	Valor
Masa (kg / m)	M	11526.99
Frecuencia circular horizontal (rad / s)	ω_w	1.401
Frecuencia circular vertical (rad / s)	ω_u	6.10
Longitud total (m)	L	159.80
Amortiguamiento	c	0.008
Ancho del tablero (m)	B	11.1
Peralte del tablero (m)	D	3.4
Altura sobre el terreno (m)	h	30.08
Coefficiente de arrastre	C_D	2.00
Coefficiente de levante	C_L	0.5
Coefficiente de momento	C_M	NA
Derivada del coeficiente de arrastre	$\frac{\partial C_D}{\partial \alpha}$	0
Derivada del coeficiente de levante	$\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}$	0
Derivada del coeficiente de momento	$\frac{\partial C_M}{\partial \alpha}$	0
Velocidad de diseño (m / s)	V	38.4
Intensidad de turbulencia horizontal	I_u	0.14
Intensidad de turbulencia vertical	I_w	0.07

Con estos valores se aplicó el programa “Buffeting” hecho en Matlab descrito en el apéndice C. obteniendo la respuesta en el dominio del tiempo la cual se muestra en la Figura 6.2. En la Tabla 6.11 se muestra la comparación entre los resultados obtenidos en este trabajo y los de Helliesen (2013).

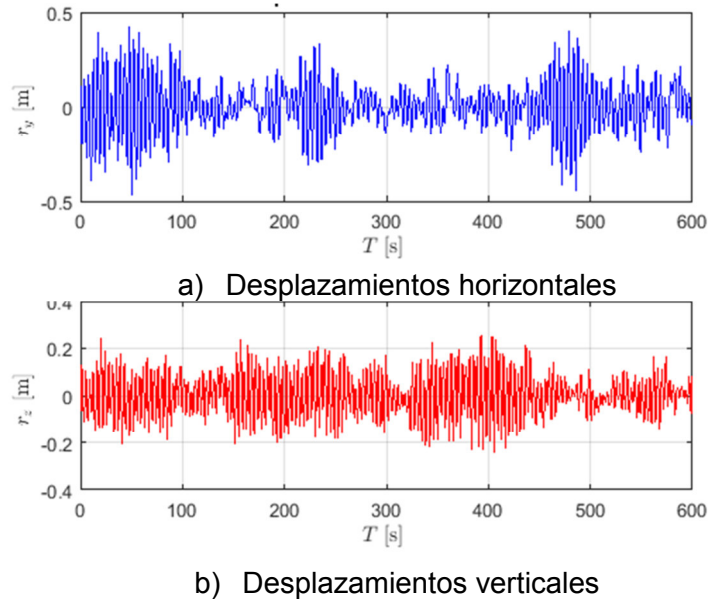


Figura 6.2 Desplazamientos ante ráfagas del puente Pierre Pfmilin

Tabla 6.10 Comparación de desplazamientos máximos obtenidos del puente Pierre Pfmilin ante ráfagas

Autor	Desplazamiento horizontal (m)	Desplazamiento vertical (m)
Helliesen, 2013	0.44	0.23
Este trabajo	0.47	0.26

Para verificar los valores obtenidos en relación al desprendimiento de vórtices se utilizó el programa «Buffeting.m» cuyo código se muestra en el apéndice C. aplicando los datos se muestran en la Tabla 6.11.

Tabla 6.11 Propiedades para la obtención la respuesta ante desprendimiento vórtices del puente Pierre Pfmilin

Dato	Símbolo	Valor
Masa (kg / m)	a_z	0.4
Longitud de escala adimensional de la coherencia en dirección vertical	λ	2.0
Coficiente adimensional de la raíz cuadrada media de la fuerza de levante	$\hat{\sigma}_{q_z}$	1.0
Parámetro de ancho de banda en la dirección vertical	b_z	0.15
Número de Strouhal	St	0.11
Coficiente de velocidad dependiente al amortiguamiento	K_{a_z}	0.2

En la Figura 6.3 se muestran los desplazamientos en el dominio del tiempo y en la Tabla 6.12 se muestra la comparación de resultados.

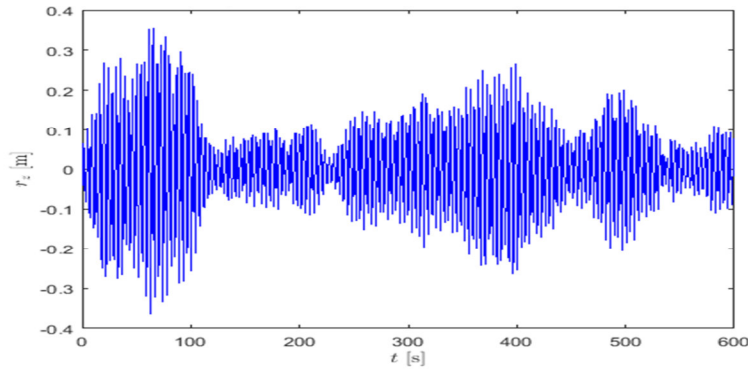


Figura 6.3 Desplazamientos del puente Pierre Pfinlin ante desprendimientos de vórtices

Tabla 6.12 Comparación de desplazamientos máximos debido al desprendimiento de vórtices obtenidos del puente Pierre Pfinlin

Autor	Desplazamiento máximo vertical (m)
Helliesen, 2013	0.34
Este trabajo	0.36

6.4.2 Puente Sognejford

El puente Sognejford se ubica en Noruega y consta de una parte flotante, otra sumergida y una última suspendida, salvando un claro de 3 700 m Sognejford (Ellevset & Skorpa, 2011). La parte suspendida es la que se evaluó ante efectos de ráfaga. En la Figura 6.4 se muestra el puente Sognejford.



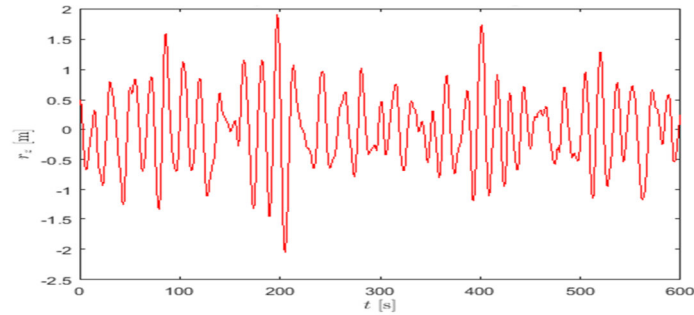
Figura 6.4 Puente Sognejford (Ellevset & Skorpa, 2011)

Para la evaluación del puente Sognejord se tienen los datos que se muestran en la Tabla 6.13 (Walbækken, 2013).

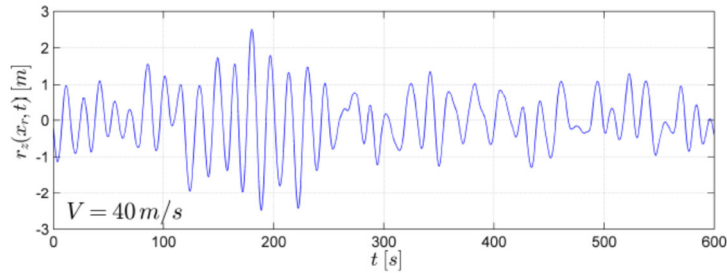
Tabla 6.13 Propiedades del puente Sognejord

Dato	Símbolo	Valor
Masa (kg / m)	M	33893
Frecuencia circular vertical (rad / s)	ω_u	0.3863
Longitud total (m)	L	159.80
Amortiguamiento	c	0.005
Ancho del tablero (m)	B	15
Peralte del tablero (m)	D	2
Altura sobre el terreno (m) dato propuesto ya que Walbækken, (2013) no lo define.	h	90
Coefficiente de arrastre	C_D	1.5
Coefficiente de levante	C_L	-0.15
Coefficiente de momento	C_M	0.13
Derivada del coeficiente de arrastre	$\frac{\partial C_D}{\partial \alpha}$	0
Derivada del coeficiente de levante	$\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}$	5.46
Derivada del coeficiente de momento	$\frac{\partial C_M}{\partial \alpha}$	0.04
Velocidad de diseño (m / s)	V	40
Intensidad turbulenta horizontal	I_u	0.14

Con base a los datos de la Tabla se obtuvieron los resultados que se muestran en la Figura 6.5, utilizando el programa «Buffeting» mostrado en el apéndice C.



Desplazamientos verticales obtenidos en este trabajo.



a) Desplazamientos verticales obtenidos por Walbækken (2013)

Figura 6.5 Desplazamientos del puente Sogneford debido a ráfagas

Se puede ver que los resultados obtenidos llegan a desplazamientos de hasta 2.2 m contra 2.5 m que presenta el Walbækken (2013).

No se hizo revisión por desprendimiento de vórtices ya que Walbækken (2013) no hizo la revisión para este efecto.

6.5 Conclusiones

En este capítulo se muestra la obtención de las respuestas de las ráfagas como desprendimiento de vórtices, tanto en el dominio de la frecuencia como el dominio del tiempo. Al obtener dicha respuesta en el dominio del tiempo se logra obtener los desplazamientos de manera directa y con ello el desplazamiento máximo además de la desviación estándar y factor pico.

También se probó con un programa de Matlab la respuesta de puente ya evaluado donde los resultados son similares, por lo que el procedimiento se puede tomar como válido, sin embargo, en el desprendimiento de vórtices existen valores que se obtuvieron de forma experimental por lo que la revisión de este efecto depende mucho de pruebas ante túnel de viento.

Capítulo 7

Inestabilidad aeroelástica

7.1 Introducción

Cuando la velocidad aumenta los efectos debido a ráfaga comienzan a hacer muy importantes debido a que los desplazamientos comienzan a aumentar. Además pueden presentarse acoplamiento entre torsión y flexión llevando a una condición de inestabilidad. En este capítulo se muestran los efectos de inestabilidad, las velocidades críticas y las condiciones para que considerar dicha inestabilidad.

7.2 Matriz de impedancia

Para poder determinar la inestabilidad se hace uso de la matriz de impedancia definida en la ecuación (7.1) (Strommen, 2012),

$$\hat{E}_\eta(\omega, V) = \left\{ 1 - k_{ae} - \left(\omega \text{diag} \left[\frac{1}{\omega_i} \right] \right)^2 + 2i\omega \text{diag} \left[\frac{1}{\omega_i} \right] (\zeta - \zeta_{ae}) \right\} \quad (7.1)$$

La ecuación (7.1) está en función a la frecuencia, la rigidez y amortiguamiento. Cuando las velocidades son grandes las propiedades dinámicas cambian debido al flujo. Esto se ve reflejado en la rigidez aerodinámica y el amortiguamiento aerodinámico. La masa no tiene gran contribución ya que es muy pequeña comparado al puente.

Como se está trabajando con un sistema de N formas modales, todo lo que se escribe en la ecuación (7.1) se trata de matrices las cuales se definen en la ecuación (7.2) y (7.3).

$$k_{aeij} = \frac{\tilde{K}_{aeij}}{\omega_i^2 \tilde{M}_i} = \frac{\rho B^2}{2\tilde{m}_i} \left[\frac{\omega_i(V)}{\omega_i} \right]^2 \frac{\int_{L_{\text{exp}}} (\varphi_i^T \hat{K}_{ae} \varphi_j) dx}{\int_L (\varphi_i^T \varphi_j) dx} \quad (7.2)$$

$$\zeta_{aeij} = \frac{\omega_i}{2} \frac{\tilde{C}_{aeij}}{\omega_i^2 \tilde{M}_i} = \frac{\rho B^2}{4\tilde{m}_i} \frac{\omega_i(V)}{\omega_i} \frac{\int_{L_{\text{exp}}} (\varphi_i^T \hat{C}_{ae} \varphi_j) dx}{\int_L (\varphi_i^T \varphi_j) dx} \quad (7.3)$$

La ecuación (7.1) es un problema de valores característicos con N_{mod} raíces. Por lo que las condiciones que importan son,

$$\left| \hat{E}_\eta(\omega, V) \right| = 0 \quad (7.4)$$

La ecuación (7.3) está en función de la frecuencia ω y la velocidad V del sistema. Esto se puede simplificar al considerar estabilidad estática con $\omega=0$ mientras que para una estabilidad dinámica la respuesta dependerá tanto de la frecuencia como la velocidad asociados a valores de resonancia con la estructura. Para la estabilidad dinámica los resultados que importan son los que están asociados a la velocidad más pequeña conocida como velocidad crítica V_{cr} y la frecuencia ω_r asociada a esta velocidad.

Los límites de estabilidad se pueden clasificar en cuatro dependiendo del modo que más afecte.

- 1) Debido a torsión para un problema estático que se conoce como divergencia estática
- 2) Debido a un movimiento dinámico vertical conocido como galopeo
- 3) Debido a torsión dinámica y
- 4) Debido a una combinación de los dos anteriores conocido como aleteo.

Estos efectos, en donde se presenta la inestabilidad, están asociados a modos verticales ϕ_z y torsionales ϕ_θ por lo que la matriz de impedancia puede escribirse como,

$$\hat{E}_\eta(\omega_r, V_{cr}) = \left\{ \begin{aligned} & \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{cc} k_{ae11} & k_{ae12} \\ k_{ae21} & k_{ae22} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{cc} (\omega_r / \omega_1)^2 & 0 \\ 0 & (\omega_r / \omega_2)^2 \end{array} \right] \\ & + 2i \left[\begin{array}{cc} (\omega_r / \omega_1)^2 & 0 \\ 0 & (\omega_r / \omega_2)^2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} \zeta_1 - \zeta_{ae11} & -\zeta_{ae12} \\ -\zeta_{ae21} & \zeta_2 - \zeta_{ae22} \end{array} \right] \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

7.3 Divergencia estática

La divergencia estática es debido a los efectos de torsión por lo que la forma modal que interesa es debido a la torsión ϕ_θ además se considera que $\omega_r = 0$ por lo que la matriz de impedancia queda,

$$\hat{E}_\eta(0, V_{cr}) = 1 - k_{ae\theta\theta} \quad (7.6)$$

donde

$$k_{ae\theta\theta} = \frac{\rho B^4}{2\tilde{m}_\theta} \left(\frac{\omega_\theta(V_{cr})}{\omega_\theta} \right)^2 A_3^* \frac{\int_L \phi_\theta^2 dx}{\int_L \phi_\theta^2 dx} \quad (7.7)$$

Para obtener el determinante de tal manera que la matriz de impedancia sea cero, se puede ver que $k_{ae\theta\theta} = 1$ por lo que la velocidad crítica es:

$$V_{cr} = B\omega_\theta \left(\frac{2\tilde{m}_\theta \int_L \phi_\theta^2 dx}{\rho B^4 C'_M \int_{L_{exp}} \phi_\theta^2 dx} \right)^{1/2} \quad (7.8)$$

7.3.1 Ejemplo 7.1

Obtener la velocidad crítica para divergencia estática de un puente con una ancho $B=20$ m, una frecuencia circular $\omega_\theta=0.8$ rad/s, una derivada de coeficiente de momento de $C'_m=0.6$ y un momento másico de inercia $\tilde{m}_\theta=6 \times 10^5$ kgm²/m y se considera que la longitud expuesta es igual a lo longitud total.

$$V_{cr} = (20)(0.8) \left(\frac{2(6 \times 10^5)}{(1.23)(20^4)(0.6)} \right)^{1/2} = 51.00 \text{ m/s}$$

7.4 Galopeo

Los modos que más afectan en este caso es el vertical ϕ_z y el subíndice asociado a la ecuación (7.4) es $\omega_1 = \omega_z$ de igual forma con el amortiguamiento, quedando la matriz de impedancia como:

$$\hat{E}_\eta(\omega_r, V_{cr}) = 1 - k_{aezz} - (\omega_r / \omega_z)^2 + 2i(\zeta_z - \zeta_{aezz})\omega_r / \omega_z \quad (7.9)$$

donde

$$k_{aezz} = \frac{\rho B^2}{2\tilde{m}_z} \left(\frac{\omega_r}{\omega_z} \right)^2 H_4^* \frac{\int_L \phi_z^2 dx}{\int_L \phi_z^2 dx} \quad y \quad \zeta_{aezz} = \frac{\rho B^2}{4\tilde{m}_z} \frac{\omega_r}{\omega_z} H_1^* \frac{\int_L \phi_z^2 dx}{\int_L \phi_z^2 dx} \quad (7.10)$$

Obteniendo el determinante e igualando a cero se puede dividir en la parte real e imaginaria donde la parte real se puede definir como:

$$\omega_r = \omega_z \left(1 + \frac{\rho B^2 \int_{L_{exp}} \phi_\theta^2 dx}{2\tilde{m}_z \int_L \phi_\theta^2 dx} \right)^{-1/2} \quad (7.11)$$

y la parte imaginaria como:

$$\zeta_z = \zeta_{aezz} = \frac{\rho B^2 \omega_r}{4\tilde{m}_z \omega_z} H_1^* \frac{\int_L \phi_z^2 dx}{\int_L \phi_z^2 dx} \quad (7.12)$$

Los valores de inestabilidad se presentan cuando el valor de $H_1^* > 0$, el cual se puede poner en función de la velocidad crítica como se muestra en la ecuación (7.13).

$$V_{cr} = B\omega_z \frac{\zeta_z}{-(C'_L + \bar{C}_D \cdot D/B)} \frac{4\tilde{m}_z}{\rho B^2} \frac{\int_L \phi_z^2 dx}{\int_{L_{exp}} \phi_z^2 dx} \quad (7.13)$$

Para que la inestabilidad por galopeo se presente se debe cumplir que $C'_L < -\bar{C}_D \cdot D/B$

7.4.1 Ejemplo 7.2

Obtener la velocidad crítica para divergencia de galopeo de un puente con una ancho $B=20$ m, un peralte $D=4$ m una frecuencia circular $\omega_z=0.5$ rad/s, una derivada de coeficiente de levante de $C'_L=-1.6$, un coeficiente de arrastre de $\bar{C}_D=1.8$, un coeficiente de amortiguamiento crítico $\zeta_z=0.05$, una masa distribuida $\tilde{m}_z=3 \times 10^4$ kg/m y se considera que la longitud expuesta es igual a la longitud total

Primero se verifica que se puede presentar el galopeo.

$$-1.6 < -1.84(4/20)$$

$$-1.6 < -0.36$$

por lo que se sí se presenta inestabilidad por galopeo.

La velocidad crítica es:

$$V_{cr} = 20(0.5) \cdot \frac{0.05}{-(-1.6 + 0.36)} \frac{4(3 \times 10^4)}{1.23(20)^2} (1) = 98.35 \text{ m/s}$$

7.5 Límite de estabilidad dinámica en torsión

Los modos que más afectan en este caso es el vertical ϕ_θ y el subíndice asociado a la ecuación (7.4) es $\omega_2 = \omega_\theta$ de igual forma con el amortiguamiento, quedando la matriz de impedancia como:

$$\hat{E}_\eta(\omega_r, V_{cr}) = 1 - k_{ae\theta\theta} - (\omega_r / \omega_\theta)^2 + 2i(\zeta_\theta - \zeta_{ae\theta\theta})\omega_r / \omega_\theta \quad (7.14)$$

donde

$$k_{ae\theta\theta} = \frac{\rho B^4}{2\tilde{m}_\theta} \left(\frac{\omega_r}{\omega_\theta} \right)^2 A_3^* \frac{\int_L \phi_\theta^2 dx}{\int_L \phi_\theta^2 dx} \quad y \quad \zeta_{ae\theta\theta} = \frac{\rho B^4}{4\tilde{m}_\theta} \frac{\omega_r}{\omega_\theta} A_2^* \frac{\int_L \phi_\theta^2 dx}{\int_L \phi_\theta^2 dx} \quad (7.15)$$

Obteniendo el determinante e igualando a cero se puede dividir en la parte real e imaginaria donde la parte real se puede definir como

$$\omega_r = \omega_\theta \left(1 + \frac{\rho B^4}{2\tilde{m}_\theta} \frac{\int_L \phi_\theta^2 dx}{\int_L \phi_\theta^2 dx} \right)^{-1/2} \quad (7.16)$$

y la parte imaginaria como

$$\zeta_\theta = \zeta_{ae\theta\theta} = \frac{\rho B^2}{4\tilde{m}_z} \frac{\omega_r}{\omega_z} A_2^* \frac{\int_L \phi_\theta^2 dx}{\int_L \phi_\theta^2 dx} \quad (7.17)$$

Los valores de inestabilidad se presentan cuando el valor de $A_2^* > 0$, el cual se puede poner en función de la velocidad crítica como se muestra en la ecuación (7.12).

Sin embargo, en este trabajo se presenta que $A_2^* = 0$ por lo que no se presentará inestabilidad por torsión simple.

7.6 Aleteo

El aleteo se da cuando se combina los efectos por torsión ϕ_θ y por flexión vertical ϕ_z para que esto ocurra las frecuencias resonantes debido a torsión y flexión son iguales:

$$\omega_r = \omega_z(V_{cr}) = \omega_\theta(V_{cr}) \quad (7.18)$$

Para obtener el determinante de la matriz de impedancia es conveniente separarlo en cuatro matrices, dos reales y dos imaginarias asociadas a flexión y a torsión como se muestra en la ecuación (7.20) y (7.21).

$$\hat{E}_\eta = \hat{E}_1 + \hat{E}_2 + 2i(\hat{E}_3 + \hat{E}_4) \quad (7.19)$$

$$\begin{aligned}
 \hat{E}_1 &= \begin{bmatrix} 1 - k_{aezz} - (\omega_r / \omega_z)^2 & 0 \\ -k_{ae\theta z} & 0 \end{bmatrix} & \hat{E}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & -k_{aez\theta} \\ 0 & 1 - k_{ae\theta\theta} - (\omega_r / \omega_\theta)^2 \end{bmatrix} \\
 \hat{E}_3 &= \begin{bmatrix} (\zeta_z - \zeta_{aezz}) \cdot \omega_r / \omega_z & 0 \\ -\zeta_{ae\theta z} \cdot \omega_r / \omega_\theta & 0 \end{bmatrix} & \hat{E}_4 &= \begin{bmatrix} 1 - k_{aezz} - (\omega_r / \omega_z)^2 & 0 \\ -k_{ae\theta z} & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{7.20}$$

El límite de estabilidad se define con las siguientes condiciones, la parte real y la parte imaginaria,

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re}(\det(\hat{E}_\eta)) &= \det(\hat{E}_1 + \hat{E}_2) - 4 \det(\hat{E}_3 + \hat{E}_4) = 0 \\
 \operatorname{Im}(\det(\hat{E}_\eta)) &= 2 [\det(\hat{E}_1 + \hat{E}_4) + \det(\hat{E}_2 + \hat{E}_3)] = 0
 \end{aligned} \tag{7.21}$$

Expandiendo se tiene que,

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re}(\det(\hat{E}_\eta)) &= 1 - k_{aezz} - k_{ae\theta\theta} + k_{aezz}k_{ae\theta\theta} - k_{aez\theta}k_{ae\theta z} - \\
 & 4 [(\zeta_z - \zeta_{aezz})(\zeta_\theta - \zeta_{ae\theta\theta}) - \zeta_{aez\theta}\zeta_{ae\theta z}] (\omega_r / \omega_z)(\omega_r / \omega_\theta) - \\
 & (1 - k_{ae\theta\theta})(\omega_r / \omega_z)^2 - (1 - k_{aezz})(\omega_r / \omega_\theta)^2 + (\omega_r / \omega_z)^2 (\omega_r / \omega_\theta)^2 \\
 & = 0 \\
 \operatorname{Im}(\det(\hat{E}_\eta)) &= 2 \{ [(1 - k_{ae\theta\theta})(\zeta_z - \zeta_{zz}) - k_{ae\theta z}\zeta_{aez\theta}] \omega_r / \omega_z + \\
 & [(1 - k_{aezz})(\zeta_\theta - \zeta_{ae\theta\theta}) - k_{aez\theta}\zeta_{ae\theta z}] \omega_r / \omega_\theta - \\
 & (\zeta_\theta - \zeta_{ae\theta\theta})(\omega_r / \omega_\theta) \cdot (\omega_r / \omega_z)^2 - (\zeta_z - \zeta_{aezz})(\omega_r / \omega_z)(\omega_r / \omega_\theta)^2 \} \\
 & = 0
 \end{aligned} \tag{7.22}$$

donde

$$\begin{aligned}
 k_{aezz} &= \frac{\rho B^2}{2\tilde{m}_z} \left(\frac{\omega_r}{\omega_z} \right)^2 H_4^* \frac{\int_L \phi_z^2 dx}{\int_L \phi_z^2 dx} & k_{aez\theta} &= \frac{\rho B^3}{2\tilde{m}_z} \left(\frac{\omega_r}{\omega_z} \right)^2 H_3^* \frac{\int_L \phi_z \phi_\theta dx}{\int_L \phi_z^2 dx} \\
 k_{ae\theta\theta} &= \frac{\rho B^4}{2\tilde{m}_\theta} \left(\frac{\omega_r}{\omega_\theta} \right)^2 A_3^* \frac{\int_L \phi_\theta^2 dx}{\int_L \phi_\theta^2 dx} & k_{ae\theta z} &= \frac{\rho B^3}{2\tilde{m}_\theta} \left(\frac{\omega_r}{\omega_\theta} \right)^2 A_4^* \frac{\int_L \phi_\theta \phi_z dx}{\int_L \phi_\theta^2 dx} \\
 \zeta_{aezz} &= \frac{\rho B^2}{4\tilde{m}_z} \frac{\omega_r}{\omega_z} H_1^* \frac{\int_L \phi_z^2 dx}{\int_L \phi_z^2 dx} & \zeta_{aez\theta} &= \frac{\rho B^3}{4\tilde{m}_z} \frac{\omega_r}{\omega_z} H_2^* \frac{\int_L \phi_z \phi_\theta dx}{\int_L \phi_z^2 dx} \\
 \zeta_{ae\theta\theta} &= \frac{\rho B^4}{4\tilde{m}_\theta} \frac{\omega_r}{\omega_\theta} A_2^* \frac{\int_L \phi_\theta^2 dx}{\int_L \phi_\theta^2 dx} & \zeta_{ae\theta z} &= \frac{\rho B^3}{4\tilde{m}_\theta} \frac{\omega_r}{\omega_\theta} A_1^* \frac{\int_L \phi_\theta \phi_z dx}{\int_L \phi_\theta^2 dx}
 \end{aligned} \tag{7.23}$$

Selberg (1961) propone una fórmula que permite obtener la velocidad crítica

$$V_{cr} = 0.6 B \omega_\theta \cdot \left\{ \left[1 - \left(\frac{\omega_z}{\omega_\theta} \right)^2 \right] \cdot \frac{(\tilde{m}_z \cdot \tilde{m}_\theta)^{1/2}}{\rho B^3} \right\}^{1/2} \tag{7.24}$$

7.6.1 Ejemplo 7.3

Obtener la velocidad y frecuencias críticas para una estructura donde cuyas formas modales $\phi_z \approx \phi_\theta$ y la longitud expuesta es igual a la longitud total. El ancho del puente es $B = 20$ m, $\tilde{m}_z = 10^4$ kg/m, $\tilde{m}_\theta = 6 \cdot 10^5$ kg · m²/m, $\omega_z = 0.8$ rad/s, $\omega_\theta = 1.6$ rad/s, $\zeta_z = \zeta_\theta = 0.005$.

Se puede hacer unos cambio de variable (Kvamstad, 2011) de tal modo que

$$\begin{aligned}
 \beta_z &= \frac{\rho B^2}{\tilde{m}_z} & \beta_z &= 0.05 \\
 \beta_\theta &= \frac{\rho B^2}{\tilde{m}_\theta} & \beta_\theta &= 0.33 \\
 \gamma &= \frac{\omega_\theta}{\omega_z} & \gamma &= 2 \\
 \psi_{z\theta} &= \frac{\int_L \phi_z \phi_\theta dx}{\int_L \phi_z^2 dx} \cdot \frac{\int_L \phi_z \phi_\theta dx}{\int_L \phi_\theta^2 dx} & \psi_{z\theta} &= 1
 \end{aligned}$$

$$\hat{\omega}_r = \frac{\omega_r}{\omega_\theta} \quad \text{Incógnita}$$

La ecuación 7.22 queda:

$$\begin{aligned} \text{Re}(\det(\hat{E})) &= 1 - \left(1 + \gamma^2 + 4\gamma\zeta_z\zeta_\theta + \frac{\beta_z}{2}\gamma^2 H_4^* + \frac{\beta_\theta}{2} A_3^* \right) \hat{\omega}_r^2 + \gamma \left(\zeta_\theta \beta_z \gamma H_1^* + \zeta_z \beta_\theta A_2^* \right) \hat{\omega}_r^3 \\ &\quad + \gamma^2 \left[1 + \frac{\beta_z}{2} H_4^* + \frac{\beta_\theta}{2} A_3^* + \frac{\beta_z \beta_\theta}{4} \left(A_1^* H_2^* \psi_{z\theta} - A_3^* H_1^* + A_3^* H_4^* - A_4^* H_3^* \psi_{z\theta} \right) \right] \hat{\omega}_r^4 = 0 \\ \text{Im}(\det(\hat{E})) &= 2 \left\{ \zeta_z \gamma + \zeta_\theta - \frac{1}{4} \left(\beta_z \gamma^2 H_1^* + \beta_\theta A_2^* \right) \hat{\omega}_r - \left[\zeta_z \left(\frac{\beta_\theta}{2} A_3^* + \gamma \right) + \zeta_\theta \gamma^2 \left(\frac{\beta_z}{2} H_4^* + 1 \right) \right] \hat{\omega}_r^2 \right. \\ &\quad \left. + \gamma^2 \left[\frac{\beta_z \beta_\theta}{8} \left(H_1^* A_3^* - H_2^* A_4^* \psi_{z\theta} - H_3^* A_1^* \psi_{z\theta} + H_4^* A_2^* \right) + \frac{1}{4} \left(\beta_z H_1^* + \beta_\theta A_2^* \right) \right] \hat{\omega}_r^3 \right\} = 0 \end{aligned} \quad (7.25)$$

Se puede observar que la parte real es una ecuación de cuarto grado y la parte imaginaria una de tercer grado por lo que la inestabilidad se da cuando en ambos casos el determinante es igual a cero.

Para obtener la solución de la ecuación (7.25) se requieren las derivadas aerodinámicas. En este ejemplo se ocuparan las de Theodorsen (1935), que se muestran en la Figura 7.1.

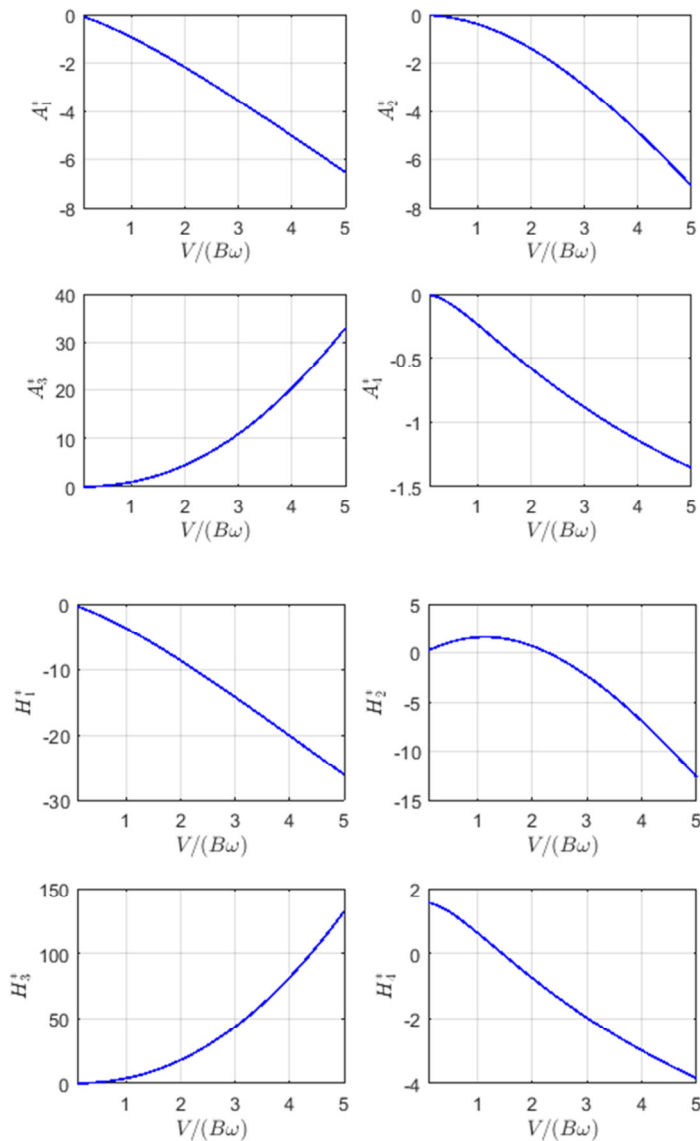


Figura 7.1 Derivadas aerodinámicas para una placa

El proceso para obtener la velocidad crítica es iterativo. Para ello se varía la velocidad crítica obteniendo diferentes frecuencia crítica. Cuando la frecuencia de la parte imaginaria sea la misma que la parte real, se considera que existe inestabilidad.

La primera iteración se propone $\hat{V}=1.8$ por lo que se obtienen las derivadas aerodinámicas aplicando las ecuaciones (5.44) del capítulo 5.

Para aplicar la ecuación (5.44b) y (5.44c) se requieren las funciones de Bessel para el valor $\frac{\hat{\omega}}{2}$

$$\frac{\hat{\omega}}{2} = \frac{B\omega(V)}{2V} = \frac{1}{2\hat{V}}$$

$$\frac{\hat{\omega}}{2} = \frac{1}{2(1.1)} = 0.45$$

Para obtener las funciones de Bessel se usó Matlab con el siguiente código:

```
% Funciones de Bessel para w/2=0.45
```

```
J0 = besselj(0,w/2);
```

```
J1 = besselj(1,w/2);
```

```
Y0 = bessely(0,w/2);
```

```
Y1 = bessely(1,w/2);
```

$$J_0 = 0.9490 \quad J_1 = 0.2215$$

$$Y_0 = -0.5141 \quad Y_1 = -1.5958$$

Aplicando las ecuaciones (5.44b) y (5.44c),

$$F\left(\frac{\hat{\omega}}{2}\right) = \frac{J_1(J_1 + Y_0) + Y_1(Y_1 - J_0)}{(J_1 + Y_0)^2 + (Y_1 - J_0)^2}$$

$$F(0.45) = \frac{0.2215(0.2215 - 0.5141) + (-1.5958)(-1.5958 - 0.9490)}{(0.2215 - 0.5141)^2 + (-1.5958 - 0.9490)^2} = 0.6090$$

$$G\left(\frac{\hat{\omega}}{2}\right) = \frac{J_1 J_0 + Y_1 Y_0}{(J_1 + Y_0)^2 + (Y_1 - J_0)^2}$$

$$G(0.45) = \frac{(0.2215)(0.9490) + (-1.5958)(-0.5141)}{(0.2215 - 0.5141)^2 + (-1.5958 - 0.9490)^2} = -0.1571$$

Aplicando la ecuación (5.44a)

$$\begin{bmatrix} H_1^* & A_1^* \\ H_2^* & A_2^* \\ H_3^* & A_3^* \\ H_4^* & A_4^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\pi F\hat{V} & -\frac{1}{2}F\hat{V} \\ \frac{\pi}{2}(1 + F + 4G\hat{V})\hat{V} & -\frac{\pi}{8}(1 - F - 4G\hat{V})\hat{V} \\ 2\pi(F\hat{V} - G/4)\hat{V} & \frac{\pi}{2}(F\hat{V} - G/4)\hat{V} \\ \frac{\pi}{2}(1 - 4G\hat{V}) & \frac{\pi}{2}G\hat{V} \end{bmatrix}$$

$$H_1^* = -2\pi F\hat{V}$$

$$H_1^* = -2\pi(0.6090)(1.1)$$

$$H_1^* = -4.21$$

$$A_1^* = -\frac{1}{2}F\hat{V}$$

$$A_1^* = -\frac{1}{2}(0.6090)(1.1)$$

$$A_1^* = -1.05$$

$$\begin{aligned}
 H_2^* &= \frac{\pi}{2}(1 + F + 4G\hat{V})\hat{V} & A_2^* &= -\frac{\pi}{8}(1 - F - 4G\hat{V})\hat{V} \\
 H_2^* &= \frac{\pi}{2}(1 + 0.6090 + 4(-0.1571)(1.1))(1.1) & A_2^* &= -\frac{\pi}{8}(1 - 0.6090 - 4(-0.1571)(1.1))1.1 \\
 H_2^* &= 1.59 & A_2^* &= -0.47 \\
 H_3^* &= 2\pi(F\hat{V} - G/4)\hat{V} & A_3^* &= \frac{\pi}{2}(F\hat{V} - G/4)\hat{V} \\
 H_3^* &= 2\pi(0.6090(1.1) - (-0.1571)/4)(1.1) & A_3^* &= \frac{\pi}{2}((0.6090)(1.1) - (-0.1571)/4)(1.1) \\
 H_3^* &= 4.90 & A_3^* &= 1.23 \\
 H_4^* &= \frac{\pi}{2}(1 - 4G\hat{V}) & A_4^* &= \frac{\pi}{2}G\hat{V} \\
 H_4^* &= \frac{\pi}{2}(1 - 4(-0.1571)(1.1)) & A_4^* &= \frac{\pi}{2}(-0.1571)(1.1) \\
 H_4^* &= 0.49 & A_4^* &= -0.27
 \end{aligned}$$

Para obtener la parte real e imaginaria se aplica la ecuación (7.25), para ello se puede poner en forma polinómica de la siguiente manera

$$\text{Re}(\det(\hat{E})) = R_4\hat{\omega}^4 + R_3\hat{\omega}^3 + R_2\hat{\omega}^2 + R_1\hat{\omega} + R_0$$

$$\text{Im}(\det(\hat{E})) = I_3\hat{\omega}^3 + I_2\hat{\omega}^2 + I_1\hat{\omega} + I_0$$

donde

$$R_4 = \gamma^2 \left[1 + \frac{\beta_z}{2} H_4^* + \frac{\beta_\theta}{2} A_3^* + \frac{\beta_z \beta_\theta}{4} (A_1^* H_2^* \psi_{z\theta} - A_3^* H_1^* + A_3^* H_4^* - A_4^* H_3^* \psi_{z\theta}) \right]$$

$$R_3 = \gamma (\zeta_\theta \beta_z \gamma H_1^* + \zeta_z \beta_\theta A_2^*)$$

$$R_2 = \left(1 + \gamma^2 + 4\gamma \zeta_z \zeta_\theta + \frac{\beta_z}{2} \gamma^2 H_4^* + \frac{\beta_\theta}{2} A_3^* \right)$$

$$R_1 = 0$$

$$R_0 = 1$$

$$I_3 = 2\gamma^2 \left[\frac{\beta_z \beta_\theta}{8} (H_1^* A_3^* - H_2^* A_4^* \psi_{z\theta} - H_3^* A_1^* \psi_{z\theta} + H_4^* A_2^*) + \frac{1}{4} (\beta_z H_1^* + \beta_\theta A_2^*) \right] \hat{\omega}$$

$$I_2 = -2 \left[\zeta_z \left(\frac{\beta_\theta}{2} A_3^* + \gamma \right) + \zeta_\theta \gamma^2 \left(\frac{\beta_z}{2} H_4^* + 1 \right) \right]$$

$$I_1 = -2 \frac{1}{4} (\beta_z \gamma^2 H_1^* + \beta_\theta A_2^*)$$

$$I_0 = 2(\zeta_z \gamma + \zeta_\theta)$$

Al sustituirlo los valores se tiene que,

$$R_4 = 2^2 \left[1 + \frac{0.33}{2} 0.4852 + \frac{0.33}{2} 1.23 + \frac{0.33(0.05)}{4} ((-1.05)(1.59) - (1.23)(-4.21) + (1.23)(0.4852) - (-0.2714)(4.40)) \right]$$

$$R_4 = 4.84$$

$$R_3 = 2(0.005(0.005)(2)(-4.21) + 0.05(0.33)(-0.47))$$

$$R_3 = -0.0058$$

$$R_2 = - \left(1 + 2^2 + 42(0.005)(0.005) + \frac{0.05}{2} 2^2 0.4852 + \frac{0.33}{2} 1.23 \right)$$

$$R_2 = -5.23$$

$$R_1 = 0$$

$$R_0 = 1$$

$$I_3 = 2(2^2) \left[\frac{0.05(0.33)}{8} ((-0.49)(1.23) - (1.59)(-0.27) - (4.90)(-1.05) + (0.49)(-0.47)) + \frac{1}{4} (0.5(-4.21) + 0.33(-0.47)) \right]$$

$$I_3 = -0.73$$

$$I_2 = -2 \left[0.005 \left(\frac{0.33}{2} 1.23 + 2 \right) + 0.05(2)^2 \left(\frac{0.05}{2} (0.49) + 1 \right) \right]$$

$$I_2 = -0.06$$

$$I_1 = -2 \frac{1}{4} (0.05(2)^2 (-4.21) + 0.33(-0.47))$$

$$I_1 = 0.50$$

$$I_0 = 2(\zeta_z \gamma + \zeta_\theta)$$

$$I_0 = 0.03$$

Por lo que las ecuaciones quedan:

$$\text{Re}(\det(\hat{E})) = 4.84\hat{\omega}^4 - 0.0058\hat{\omega}^3 - 5.25\hat{\omega}^2 + 1$$

$$\text{Im}(\det(\hat{E})) = -0.73\hat{\omega}^3 - 0.06\hat{\omega}^2 0.50\hat{\omega} + 0.03$$

Para obtener las raíces se empleó la función nativa de Matlab “roots” con el siguiente código:

```
% Obtención de raíces reales e imaginarias; Re=reales, Im=Imaginarias
Re = roots([R4 R3 R2 R1 R0]);
Im = roots([I3 I2 I1 I0]);
```

En la Tabla 7.1 se muestran las raíces de $\hat{\omega}$

Tabla 7.1 Raíces reales e imaginarias de $\hat{\omega}$ del ejemplo para $\hat{V}=1.8$

Raíces reales	Raíces imaginarias
-0.9156	0.8153
-0.4954	-0.8410
0.9173	0.06
0.4959	

Se toman los valores máximos positivos reales para ambos casos por lo que cuando $\hat{V}=1.8$ entonces $\text{Re} = 0.9173$ y $\text{Im} = 0.8153$.

Para demás valores se revisó a diferentes velocidades reducidas empelando este método. Los resultados se muestran en la Figura 7.2. El punto de intersección es la velocidad crítica reducida.

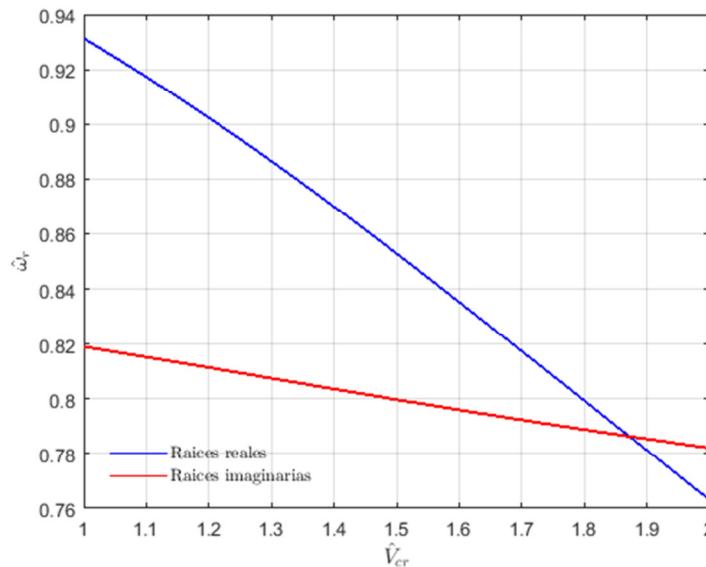


Figura 7.2 Solución de las ecuaciones de aleteo con las derivadas aerodinámicas de Theodorsen.

El punto de intersección es $\hat{V}_{cr} = 1.87$ y $\hat{\omega}_r = 0.79$ por lo que:

$$V_{cr} = (\hat{V}_{cr})(\hat{\omega}_r)(\omega_{\theta})(B)$$

$$V_{cr} = 1.87(0.79)(1.6)(20) = 47.27 \text{ m/s}$$

Si aplica la ecuación (7.24) se tiene que,

$$\frac{V_{cr}}{B\omega_{\theta}} = 0.6 \left\{ \left[1 - \left(\frac{0.8}{1.6} \right)^2 \right] \left[\frac{(10^4)(6 \times 10^6)}{1.25(20)^3} \right]^{1/2} \right\}^{1/2}$$

$$\frac{V_{cr}}{B\omega_\theta} = 1.44$$

$$V_{cr} = 20(1.6)(1.44) = 46.08 \text{ m/s}$$

Si se desea obtener el mismo resultado pero con el método Quasy-Steady es decir que $A_2^* = A_4^* = H_2^* = H_4^* = 0$, se obtiene una gráfica diferente como se muestra en la Figura 7.3.

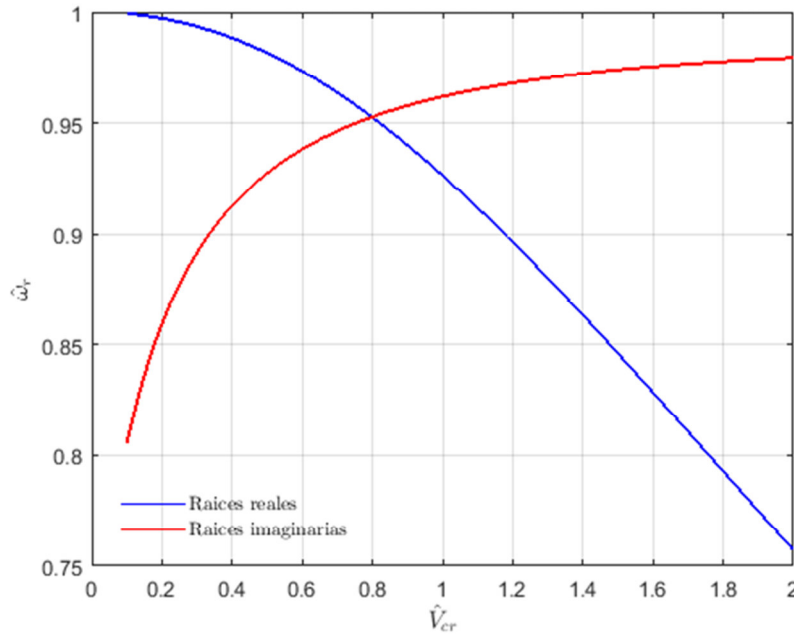


Figura 7.3 Solución de las ecuaciones de aleteo con las derivadas aerodinámicas Quasy-Steady

El punto de intersección es $\hat{V}_{cr} = 0.8$ y $\hat{\omega}_r = 0.95$ por lo que:

$$V_{cr} = (\hat{V}_{cr})(\hat{\omega}_r)(\omega_\theta)(B)$$

$$V_{cr} = 0.8(0.95)(1.6)(20) = 24.32 \text{ m/s}$$

Esto muestra como las cuatro derivadas aerodinámicas que se eliminaron influyen para obtener la velocidad crítica.

7.7 Ecuación de movimiento de aleteo

Se puede observar que por medio de la matriz de impedancia se puede obtener la inestabilidad aeroelástica de las estructuras tipo puente, otra manera de verlo es resolviendo las ecuaciones de movimiento de aleteo las cuales se definen en el capítulo 4 en las ecuaciones (4.11a) y (4.11b):

$$M[\ddot{h} + 2\zeta_h \omega_h \dot{h} + \omega_h^2 h] = L_h \quad (4.11a)$$

$$I[\ddot{\alpha} + 2\zeta_\alpha \omega_\alpha \dot{\alpha} + \omega_\alpha^2 \alpha] = M_\alpha \quad (4.11b)$$

utilizando 8 derivadas aerodinámicas como se muestra en las ecuaciones (4.14a) y (4.14b),

$$L_h = \frac{1}{2} \rho V^2 B \left[kH_1^* \frac{\dot{h}}{V} + kH_2^* \frac{B}{V} \dot{\alpha} + k^2 H_3^* \alpha + k^2 H_4^* \frac{h}{B} \right] \quad (4.14a)$$

$$M_h = \frac{1}{2} \rho V^2 B^2 \left[kA_1^* \frac{\dot{h}}{V} + kH_2^* \frac{B}{V} \dot{\alpha} + k^2 H_3^* \alpha + k^2 H_4^* \frac{h}{B} \right] \quad (4.14b)$$

Para resolver esta ecuación se puede hacer uso de un método numérico como el de Euler, Euler modificado o Runge Kutta que se muestran en las ecuaciones (7.26) , (7.27) y (7.28) respectivamente (Chapra et al, 2015).

Para ello se pone la ecuación diferencial como si fuera una función $\dot{y} = f(x,y)$ y se tiene un intervalo de cambio h .

7.7.1 Método de Euler

Para resolver una ecuación diferencial por el método de Euler se aplica la ecuación (7.27)

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h \quad (7.26)$$

7.7.2 Método de Euler modificado

Para resolver una ecuación diferencial por el método de Euler modificado se aplica la ecuación (7.28). Este método es una extensión de la ecuación (7.27).

$$k_1 = f(x_i, y_i) \quad (7.27a)$$

$$y_p = y_i + k_1 h \quad (7.27b)$$

$$x_p = x_i + h \quad (7.27c)$$

$$k_2 = f(x_p, y_p) \quad (7.27d)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [k_1 + k_2] \quad (7.27e)$$

7.7.3 Método de Runge Kutta

El método de Runge Kutta tiene una mayor precisión que el de Euler, sin embargo su precisión no es suficiente para los problemas en la práctica (Chung et al, 2005). La ecuación (7.28) muestra el método de Runke Kutta de cuarto orden, el cual es el más utilizado.

$$k_1 = f(x_i, y_i) \quad (7.28a)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + k_1 \frac{h}{2}\right) \quad (7.28b)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + k_2 \frac{h}{2}\right) \quad (7.28c)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3 h) \quad (7.28d)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h \quad (7.28e)$$

7.7.4 Método de Hamming

El método haming es predictor corrector, el cual consiste en predecir un valor y corregirlo. Las ecuaciones se muestra a continuación:

Predictor
$$p_{k+1} = y_{k-3} + \frac{4h}{3}(2f_{k-2} - f_{k-1} + 2f_k) \quad (7.29a)$$

Modificador
$$m_{k+1} = p_{k+1} + \frac{112}{121}(c_k - p_k) \quad (7.29b)$$

Corrector
$$c_{k+1} = \frac{1}{8}\{9y_k - y_{k-2} + 3h[-f_{k-1} + 2f_k + f(t_{k+1}, m_{k+1})]\} \quad (7.29c)$$

$$y_{k+1} = c_{k+1} - \frac{9}{121}(c_{k+1} - p_{k+1}) \quad (7.29d)$$

Para usar el método de Hamming se requiere de predecir los primeros intervalos por lo que para los primeros pasos se aplica el método de Runge Kutta.

7.7.5 Ejemplo 7.4

Para ver como se aplican los métodos descritos en la secciones 7.7.1 al 7.7.4 se empleara la siguiente ecuación diferencial,

$$\ddot{x} = -4x$$

que describe la ecuación de movimiento en vibración libre para un sistema de un grado libertad sin amortiguamiento.

Además se presentan las condiciones iniciales de velocidad y desplazamiento donde

$$\begin{aligned}\dot{x}(0) &= 0 \\ x(0) &= 2\end{aligned}$$

Dado que los métodos presentados anteriormente solo resuelven sistemas de primer orden, se tiene que transformar la ecuación de segundo orden a dos ecuaciones de primer orden por lo que:

$$\begin{aligned}z(t) &= \dot{x}(t) \\ \dot{z}(t) &= -4x(t)\end{aligned}$$

Por lo que z representa la velocidad y x el desplazamiento. Esto implica que se tendrán que resolver dos ecuaciones diferenciales de primer orden al mismo tiempo.

El primer paso es poner en términos de función por lo que la función $\dot{y} = f(x,y)$ por lo que el desplazamiento es:

$$f(t, x, z) = z(t) + 0 \cdot x(t)$$

Y la velocidad

$$g(t, x, z) = 0 \cdot z(t) - 4x(t)$$

Simplificando,

$$\begin{aligned}f(t, x, z) &= z(t) \\ g(t, x, z) &= -4x(t)\end{aligned}$$

El segundo paso es aplicar cualquier método es definir el tamaño de paso h . Entre más pequeño sea h mayor precisión se obtendrá. Para esto se usará $h = 0.2$.

Aplicando el método de Euler se utiliza la ecuación (7.26), recordando las condiciones iniciales de $z_1 = 0$ y $x_1 = 2$. Cuando $t = 0.2$ entonces,

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 + f(t_1, x_1, z_1)h \\ x_2 &= 2 + f(t = 0, x = 2, z = 0)(0.2) \\ x_2 &= 2 + 0(0.2) = 2 \\ z_2 &= z_1 + g(t_1, x_1, z_1)h \\ z_2 &= 0 + z(t = 0, x = 2, z = 0)(0.2) \\ z_2 &= 0 + [-4(2)](0.2) = -1.6\end{aligned}$$

Cuando $t = 0.4$ entonces,

$$\begin{aligned}
 x_3 &= x_2 + f(t_2, x_2, z_2)h \\
 x_3 &= 2 + f(t = 0.2, x = 2, z = -1.6)(0.2) \\
 x_2 &= 2 + [-1.6](0.2) = 1.68 \\
 z_3 &= z_2 + g(t_2, x_2, z_2)h \\
 z_3 &= -1.6 + z(t = 0.2, x = 2, z = -1.6)(0.2) \\
 z_3 &= -1.6 + [-4(2)](0.2) = -3.2
 \end{aligned}$$

En la Tabla 7.2 se muestra los resultados para los diferentes valores

Tabla 7.2 Solución de la ecuación diferencial ejemplo con el método de Euler

i	t_i	x_i	z_i
1	0.000	2.000	0.000
2	0.200	2.000	-1.600
3	0.400	1.680	-3.200
4	0.600	1.040	-4.544
5	0.800	0.131	-5.376
6	1.000	-0.944	-5.481

Usando el método de Runge-Kutta se define de igual manera las funciones

$$\begin{aligned}
 x &= f(t, x, z) = z \\
 z &= g(t, x, z) = -4x
 \end{aligned}$$

El siguiente paso consiste en obtener las k , sin embargo al ser dos ecuaciones que requieren resolverse al mismo tiempo se necesitan obtener un valor de k para x y otro para z . Para que no confundir los valores se aplicará la nomenclatura de k_n^x para hacer referencia a x y k_n^z para z , donde $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Aplicando la ecuación 7.28a,

$$\begin{aligned}
 k_1^x &= f(t = 0, x = 2, z = 0) = 0 \\
 k_1^z &= g(t = 0, x = 2, z = 0) = -4(2) = -8
 \end{aligned}$$

Para obtener k_2 se aplica la ecuación (7.28b), la cual se reescribe a continuación.

$$k_2 = f\left(x + \frac{1}{2}h, y + k_1 \frac{h}{2}\right)$$

Se puede ver que esta ecuación está en función a dos variables (x y y) y las funciones para este ejemplo dependen de tres (t , x y z) por lo que para este problema se anexa la tercera variable de la siguiente manera:

$$k_2^x = f(t_1 + 0.5h, x_1 + 0.5k_1^x h, z_1 + 0.5k_1^z h)$$

$$k_2^z = g(t_1 + 0.5h, x_1 + 0.5k_1^x h, z_1 + 0.5k_1^z h)$$

Para obtener los k_2 , primero se requiere obtener nuevos valores de las tres variables por lo que se reescribirá de la siguiente manera:

$$k_2^x = f(t_{k_2}, x_{k_2}, z_{k_2})$$

$$k_2^z = g(t_{k_2}, x_{k_2}, z_{k_2})$$

donde,

$$t_{k_2} = t_1 + 0.5(h)$$

$$t_{k_2} = 0 + 0.5(0.2) = 0.1$$

$$x_{k_2} = x_1 + 0.5k_1^x h$$

$$x_{k_2} = 2 + 0.5(0)0.2 = 2$$

$$z_{k_2} = z_1 + 0.5k_1^z h$$

$$z_{k_2} = 0 + 0.5(-8)(0.2) = -0.8$$

Aplicando la ecuación 7.28b,

$$k_2^x = f(t = 0.1, x = 2, z = -0.8) = -0.8$$

$$k_2^z = g(t = 0.1, x = 2, z = -0.8) = -4(2) = -8$$

Para obtener los valores de k_3 se tiene que,

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + k_2 \frac{h}{2}\right)$$

Aplicando, el mismo procedimiento que se hizo para k_2 se tiene,

$$k_3^x = f(t_1 + 0.5h, x_1 + 0.5k_2^x h, z_1 + 0.5k_2^z h)$$

$$k_3^z = g(t_1 + 0.5h, x_1 + 0.5k_2^x h, z_1 + 0.5k_2^z h)$$

Haciendo un cambio de variable,

$$k_3^x = f(t_{k_3}, x_{k_3}, z_{k_3})$$

$$k_3^z = g(t_{k_3}, x_{k_3}, z_{k_3})$$

donde

$$t_{k_3} = t_1 + 0.5(h)$$

$$t_{k_3} = 0 + 0.5(0.2) = 0.1$$

$$x_{k_2} = x_1 + 0.5k_2^x h$$

$$x_{k_2} = 2 + 0.5(-0.8)0.2 = 1.92$$

$$z_{k_3} = z_1 + 0.5k_2^z h$$

$$z_{k_3} = 0 + 0.5(-8)(0.2) = -0.8$$

Se aplica la ecuación (7.28c) para obtener los valores de k_3

$$k_3^x = f(t = 0.1, x = 1.92, z = -0.8) = -0.8$$

$$k_3^z = g(t = 0.1, x = 1.92, z = -0.8) = -4(1.92) = -7.68$$

Para obtener los valores de k_4 se tiene que,

$$k_3 = f(x_i + h, y_i + k_3 h)$$

Aplicando, el mismo procedimiento que se hizo para k_3 se tiene,

$$k_4^x = f(t + h, x(t) + k_3^x h, z(t) + k_3^z h)$$

$$k_4^z = g(t + 0.5h, x(t) + 0.5k_3^x h, z(t) + 0.5k_3^z h)$$

Haciendo el cambio de variable,

$$k_4^x = f(t_{k_4}, x_{k_4}, z_{k_4})$$

$$k_4^z = g(t_{k_4}, x_{k_4}, z_{k_4})$$

donde,

$$t_{k_4} = t + h$$

$$t_{k_4} = 0 + 0.2 = 0.2$$

$$x_{k_4} = x(t = 0) + k_3^x h$$

$$x_{k_4} = 2 + (-0.8)0.2 = 1.84$$

$$z_{k_4} = z(t = 0) + k_3^z h$$

$$z_{k_4} = 0 + (-7.68)(0.2) = -1.536$$

Aplicando la ecuación (7.28d) para obtener los valores de k_4

$$k_4^x = f(t = 0.2, x = 1.84, z = -1.536) = -1.536$$

$$k_4^z = g(t = 0.2, x = 1.84, z = -1.536) = -4(1.84) = -7.36$$

Para obtener el siguiente valor se aplica la ecuación (7.28e),

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$$

Por lo que aplicando a los valores de x y z se tiene

$$x_2 = x_1 + \frac{1}{6}(k_1^x + 2k_2^x + 2k_3^x + k_4^x)h$$

$$x_2 = 2 + \frac{1}{6}(0 + 2(-0.8) + 2(-0.8) + -1.536)(0.2) = 1.8421$$

$$z_2 = z_1 + \frac{1}{6}(k_1^z + 2k_2^z + 2k_3^z + k_4^z)h$$

$$z_2 = 0 + \frac{1}{6}(-8 + 2(-8) + 2(-7.68) + -7.36)(0.2) = 1.5573$$

A continuación se mostrara como obtener la solución de la ecuación con el método de Euler modificado. Para obtener k_1 se aplica la ecuación (7.27a),

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

Aplicando a la ecuación deseada para las condiciones iniciales,

$$k_1^x = f(t=0, x=2, z=0) = 0$$

$$k_1^z = g(t=0, x=2, z=0) = -4(2) = -8$$

El predictor y_p se obtiene con la ecuación (7.27b).

$$y_p = y_i + k_1 h$$

Al aplicarlo a la ecuación queda

$$x_p = x_1 + k_1^x h$$

$$x_p = 2 + 0(0.2) = 2$$

$$z_p = z_1 + k_1^z h$$

$$z_p = 0 + -8(0.2) = -1.6$$

Se obtiene el k_2 , el cual permitirá corregir la predicción definida con la ecuación (7.27d).

$$k_2 = f(x_i + h, y_i + k_1 h)$$

Aplicando al ejemplo

$$k_2^x = f(t+h, x+k_1^x h, z+k_1^z h)$$

$$k_2^z = g(t+h, x+k_1^x h, z+k_1^z h)$$

Haciendo un cambio de variable

$$k_2^x = f(t_{k_2}, x_{k_2}, z_{k_2})$$

$$k_2^z = g(t_{k_2}, x_{k_2}, z_{k_2})$$

donde

$$t_{k_4} = t + h$$

$$t_{k_4} = 0 + 0.2 = 0.2$$

$$x_{k_2} = x + k_1^x h$$

$$x_{k_2} = 2 + 0(0.2) = 2$$

$$z_{k_2} = z + k_1^z h$$

$$z_{k_2} = 0 + -8(0.2) = -1.6$$

Por lo que k_2 queda

$$k_2^x = f(t = 0.2, x = 2, z = -1.6) = -1.6$$

$$k_2^z = g(t = 0, x = 2, z = -1.6) = -4(2) = -8$$

El nuevo valor se obtiene con la ecuación (7.27d).

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [k_1 + k_2]$$

Aplicándolo a las variables,

$$x_2 = x_1 + \frac{h}{2} [k_1 + k_2]$$

$$x_2 = 2 + \frac{0.2}{2} [0 + (-1.6)] = 1.84$$

$$z_2 = z_1 + \frac{h}{2} [k_1^z + k_2^z]$$

$$z_2 = 0 + \frac{0.2}{2} [(-8) + (-8)] = -1.6$$

En la Tabla 7.3 se muestran los resultados para los distintos métodos y el exacto.

Tabla 7.3 Solución de la ecuación diferencial con diferentes métodos

i	t_i	Exacto		Euler		Runge Kutta		Euler modificado	
		x_i	z_i	x_i	z_i	x_i	z_i	x_i	z_i
1	0	2.00	0.00	2.00	0.00	2.00	0.00	2.00	0
2	0.2	1.84	-1.56	2.00	-1.60	1.84	-1.56	1.84	-1.6
3	0.4	1.39	-2.87	1.68	-3.20	1.39	-2.87	1.37	-2.94
4	0.6	0.72	-3.73	1.04	-4.54	0.73	-3.73	0.67	-3.81
5	0.8	-0.06	-4.00	0.13	-5.38	-0.06	-4.00	-0.14	-4.04
6	1	-0.83	-3.64	-0.94	-5.48	-0.83	-3.64	-0.93	-3.61

Para aplicar el método de Hamming se hará uso de la Tabla 7.2 usando el método exacto para los primeros 3 valores x y z . Para aplicar este método k debe ser mayor a 4.

El primer paso es obtener los primeros tres valores de la función, Esto se puede obtener con Euler, Euler modificado o Runge Kutta, pero generalmente se usa el de Runge Kuta.

La obtención de estos valores para cuando $k = 4$ es:

$$f_{k-2} = f(t = 0.2, x = 1.84, z = -1.56) = -1.56$$

$$g_{k-2} = g(t = 0.2, x = 1.84, z = -1.56) = -4(1.84) = -7.36$$

$$f_{k-1} = f(t=0.4, x=1.39, z=-2.87) = -2.87$$

$$g_{k-1} = g(t=0.4, x=1.39, z=-2.87) = -4(1.39) = -5.56$$

$$f_k = f(t=0.6, x=0.72, z=-3.73) = -3.73$$

$$g_k = g(t=0.6, x=0.72, z=-3.73) = -4(0.72) = -2.88$$

Ordenando los datos queda:

$$f_2 = -1.56 \qquad g_2 = -7.36$$

$$f_3 = -2.87 \qquad g_3 = -5.56$$

$$f_4 = -3.73 \qquad g_4 = -2.88$$

Dado que no se tiene un predictor p_k se pondrá que

$$p_k^x = f_k = -3.73$$

$$p_4^x = -3.73$$

$$p_k^z = g_k = -2.88$$

$$p_4^z = -2.88$$

Y el corrector c_k de igual manera

$$c_k^x = f_k = -3.73$$

$$c_4^x = -3.73$$

$$c_k^z = g_k = -2.88$$

$$c_4^z = -2.88$$

Aplicando la ecuación (7.29a) para el ejemplo

$$p_5^x = x_1 + \frac{4h}{3}(2f_2 - f_3 + 2f_4)$$

$$p_5^x = 2 + \frac{4(0.2)}{3}[2(-1.56) - (-2.87) + 2(-3.73)] = -0.056$$

$$p_5^z = z_1 + \frac{4h}{3}(2g_2 - g_3 + 2g_4)$$

$$p_5^z = 0 + \frac{4(0.2)}{3}[2(-7.36) - (-5.56) + 2(-2.88)] = -3.98$$

El modificando se obtiene con la ecuación (7.29b)

$$m_5^x = p_5^x + \frac{112}{121}(c_4^x - p_4^x)$$

$$m_5^x = -0.056 + \frac{112}{121}[-3.73 - (-3.73)] = -0.056$$

$$m_5^z = p_5^z + \frac{112}{121}(c_4^z - p_4^z)$$

$$m_5^z = -3.98 + \frac{112}{121}[-2.88 - (-2.88)] = -3.98$$

El corrector se usa la ecuación (7.29c)

$$c_5^x = \frac{1}{8} \left\{ 9x_4 - x_2 + 3h \left[-f_3 + 2f_4 + f(t_5, m_5^x, m_5^z) \right] \right\}$$

$$f(t_5 = 0.8, m_5^x = -0.056, m_5^z = -3.98) = -3.98$$

$$c_5^x = \frac{1}{8} \left\{ 9(0.72) - (1.84) + 3(0.2) \left[-(-2.87) + 2(-3.73) + (-3.98) \right] \right\} = -0.063$$

$$c_5^z = \frac{1}{8} \left\{ 9z_4 - z_2 + 3h \left[-g_3 + 2g_4 + g(t_5, m_5^x, m_5^z) \right] \right\}$$

$$g(t_5 = 0.8, m_5^x = -0.056, m_5^z = -3.98) = -4(-0.056) = 0.224$$

$$c_5^z = \frac{1}{8} \left\{ 9(-3.73) - (-1.56) + 3(0.2) \left[-(-5.56) + 2(-2.88) + (0.224) \right] \right\} = -4.00$$

Aplicando la ecuación (7.29d) se obtiene el nuevo valor

$$x_5 = c_5^x - \frac{9}{121} (c_5^x - p_5^x)$$

$$x_5 = -0.063 - \frac{9}{121} \left[-0.063 - (-0.056) \right] = -0.062$$

$$z_5 = c_5^z - \frac{9}{121} (c_5^z - p_5^z)$$

$$z_5 = -4 - \frac{9}{121} \left[-4 - (-3.98) \right] = -4$$

7.7.6 Solución de la ecuación de aleteo

Las ecuaciones de aleteo se muestran en el capítulo 4. Estas ecuaciones son de segundo grado y están acopladas por lo que para resolverlas con los métodos descritos se requiere transformarlas a cuatro ecuaciones de primer orden. Para esto se emplearán las ecuaciones (4.11), (4.13) y (4.14).

Las ecuaciones necesarias para resolver el sistema se muestra a continuación.

$$m \left[\ddot{h} + 2\zeta_h \omega_h \dot{h} + \omega_h^2 h \right] = L_{ae} + L_b \quad (7.31a)$$

$$I \left[\ddot{\alpha} + 2\zeta_\alpha \omega_\alpha \dot{\alpha} + \omega_\alpha^2 \alpha \right] = M_{ae} + M_b \quad (7.31b)$$

$$L_{ae} = \frac{1}{2} \rho V^2 B \left[kH_1^* \frac{\dot{h}}{V} + kH_2^* \frac{B}{V} \dot{\alpha} + k^2 H_3^* \alpha + k^2 H_4^* \frac{h}{B} \right] \quad (7.31c)$$

$$M_{ae} = \frac{1}{2} \rho V^2 B^2 \left[kA_1^* \frac{\dot{h}}{V} + kA_2^* \frac{B}{V} \dot{\alpha} + k^2 A_3^* \alpha + k^2 A_4^* \frac{h}{B} \right] \quad (7.31d)$$

$$L_b = \frac{1}{2} \rho V^2 B \left[2C_L \frac{u(t)}{V} + \left(\frac{dC_L}{d\alpha} + C_D \right) \frac{w(t)}{V} \right] \quad (7.31e)$$

$$M_b = \frac{1}{2} \rho V^2 B^2 \left[2C_M \frac{u(t)}{V} + \left(\frac{dC_M}{d\alpha} \right) \frac{w(t)}{V} \right] \quad (7.31f)$$

Estas ecuaciones ya se definieron en el capítulo 4, aquí se reescriben para tener un seguimiento más sencillo.

Dividiendo entre m la ecuación (7.31a) y entre I la ecuación (7.31b) queda:

$$\left[\ddot{h} + 2\zeta_h \omega_h \dot{h} + \omega_h^2 h \right] = \frac{L_{ae}}{m} + \frac{L_b}{m} \quad (7.32a)$$

$$\left[\ddot{\alpha} + 2\zeta_\alpha \omega_\alpha \dot{\alpha} + \omega_\alpha^2 \alpha \right] = \frac{M_{ae}}{I} + \frac{M_b}{I} \quad (7.32b)$$

Considerando que la presión dinámica de base es,

$$q = \frac{1}{2} \rho V^2 \quad (7.33)$$

Sustituyendo y reescribiendo (7.31c), (7.31d), (7.31e) y (7.31f)

$$\frac{L_{ae}}{m} = qB \left[k \frac{H_1^*}{m} \frac{\dot{h}}{V} + k \frac{H_2^*}{m} \frac{B}{V} \dot{\alpha} + k^2 \frac{H_3^*}{m} \alpha + k^2 \frac{H_4^*}{m} \frac{h}{B} \right] \quad (7.34a)$$

$$\frac{M_{ae}}{I} = qB^2 \left[k \frac{A_1^*}{I} \frac{\dot{h}}{V} + k \frac{A_2^*}{I} \frac{B}{V} \dot{\alpha} + k^2 \frac{A_3^*}{I} \alpha + k^2 \frac{A_4^*}{I} \frac{h}{B} \right] \quad (7.34b)$$

$$\frac{L_b}{m} = qB \left[2C_L \frac{u(t)}{mV} + \left(\frac{dC_L}{d\alpha} + C_D \right) \frac{w(t)}{mV} \right] \quad (7.35c)$$

$$\frac{M_b}{I} = qB^2 \left[2C_M \frac{u(t)}{IV} + \left(\frac{dC_M}{d\alpha} \right) \frac{w(t)}{IV} \right] \quad (7.36d)$$

Considerando que:

$$H_1 = qB \left(k \frac{H_1^*}{mV} \right) \quad A_1 = qB^2 \left(k \frac{A_1^*}{IV} \right)$$

$$H_2 = qB \left(k \frac{H_2^*}{m} \frac{B}{V} \right) \quad A_2 = qB^2 \left(k \frac{H_2^*}{I} \frac{B}{V} \right)$$

$$H_3 = qB \left(k^2 \frac{H_3^*}{m} \right) \quad A_3 = qB^2 \left(k^2 \frac{H_3^*}{I} \right)$$

$$H_4 = qB \left(k^2 \frac{H_4^*}{mB} \right) \quad A_4 = qB^2 \left(k^2 \frac{H_4^*}{IB} \right)$$

$$B_1 = qB \left(\frac{2C_L}{mV} \right) \quad B_3 = qB^2 \left(\frac{2C_M}{IV} \right)$$

$$B_2 = qB \left[\left(\frac{dC_L}{d\alpha} + C_D \right) \frac{1}{mV} \right] \quad B_4 = qB^2 \left(\frac{dC_M}{d\alpha} \frac{1}{IV} \right)$$

Y sustituyendo en (7.32a) y (7.32b)

$$\ddot{h} + 2\zeta_h \omega_h \dot{h} + \omega_h^2 h = H_1 \dot{h} + H_2 \dot{\alpha} + H_3 \alpha + H_4 h + B_1 u(t) + B_2 w(t) \quad (7.37a)$$

$$\ddot{\alpha} + 2\zeta_\alpha \omega_\alpha \dot{\alpha} + \omega_\alpha^2 \alpha = A_1 \dot{h} + A_2 \dot{\alpha} + A_3 \alpha + A_4 h + B_3 u(t) + B_4 w(t) \quad (7.37b)$$

Para poderlo resolver se tienen que despejar las ecuaciones y transformarlas a ecuaciones de primer orden por lo que,

$$h_2 = \dot{h} \quad (7.38a)$$

$$\alpha_2 = \dot{\alpha} \quad (7.38b)$$

$$\dot{h}_2 = (H_4 - \omega_h^2) h + H_3 \alpha + (H_1 - 2\zeta_h \omega_h) h_2 + H_2 \alpha_2 \quad (7.38c)$$

$$\dot{\alpha}_2 = A_4 h + (A_3 - \omega_\alpha^2) \alpha + A_1 h_2 + (A_2 - 2\zeta_\alpha \omega_\alpha) \alpha_2 \quad (7.38d)$$

Una vez definida estas ecuaciones se resuelven por algún método numérico donde el tamaño de paso es pequeño.

Para resolver estas ecuaciones no se aplicó el método de Euler ya que no llegó a converger, por lo que se usó el método de Hamming, sin embargo para tener resultados precisos se requiere aplicar intervalos de tiempo muy pequeños por lo que se optó a usar una función de Matlab llamada "ode45" la cual tiene una precisión buena para este tipo de problemas.

En la Figura 7.4 se muestra un ejemplo resolviendo la ecuación con Hamming para 100000 datos, comparado con el ode45 (Figura 7.5).

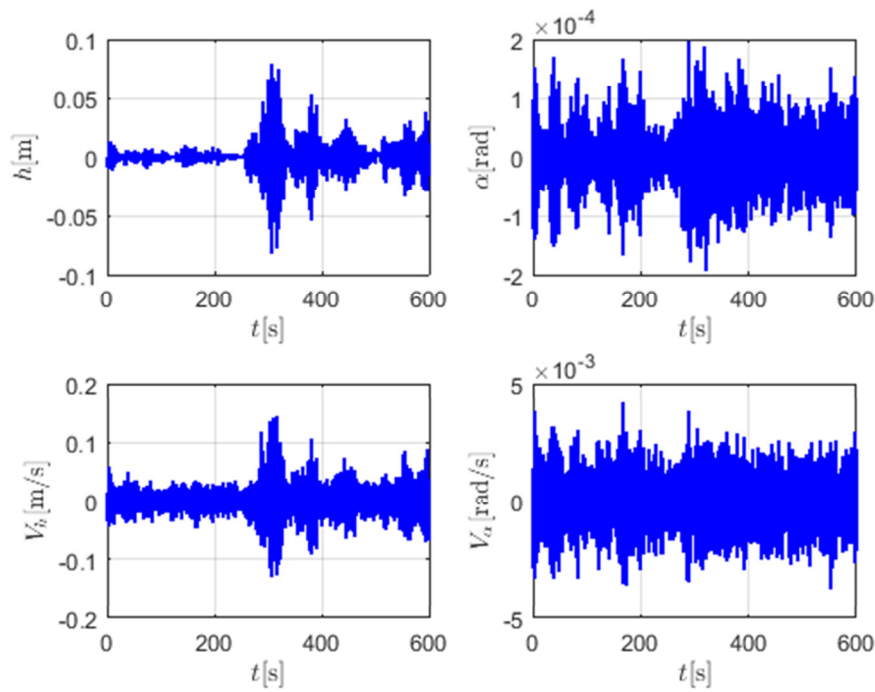


Figura 7.4 Solución de las ecuaciones por el método de Hamming

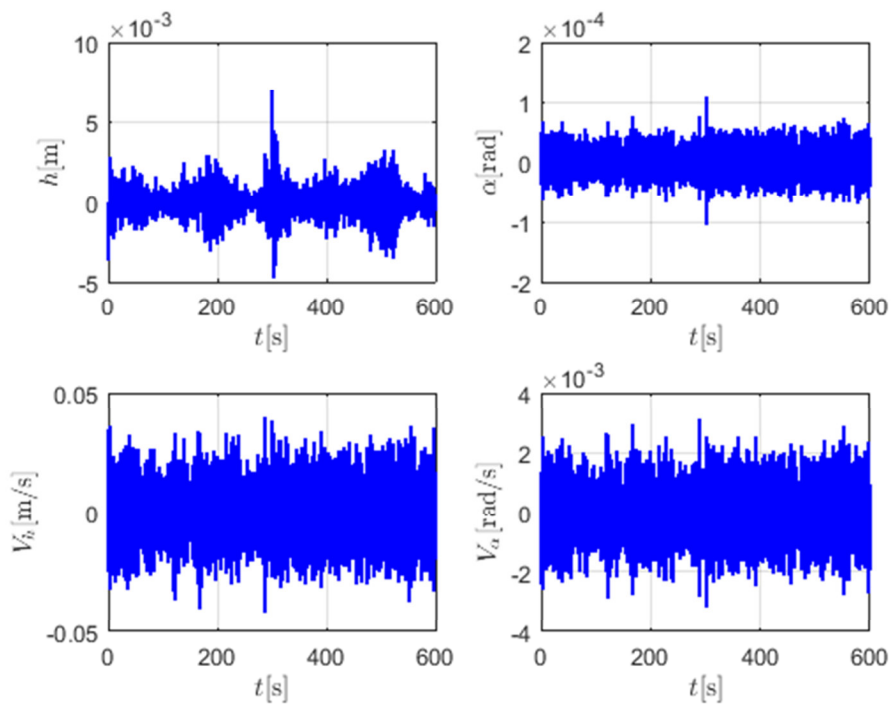
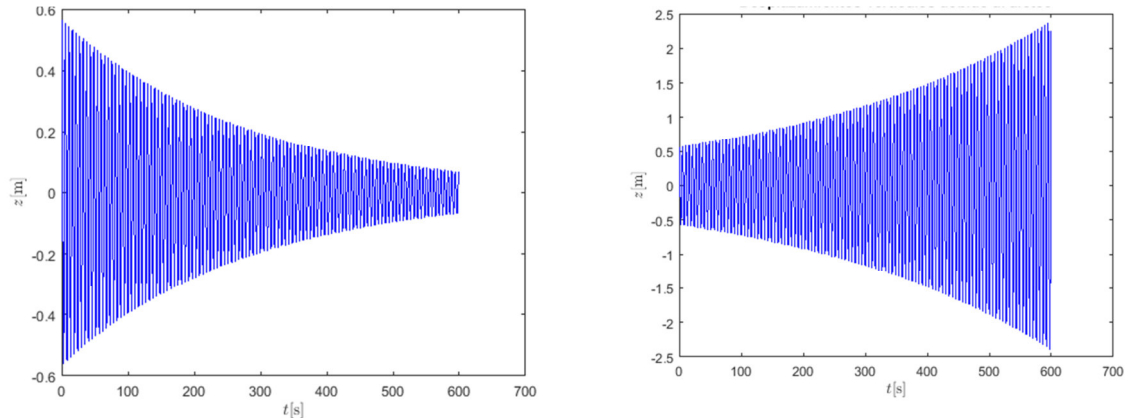


Figura 7.5 Solución de las ecuaciones por el método ode45 de Matlab

Se puede ver que llega a ver pequeñas diferencias, sin embargo los resultados pueden tomarse como aceptables.

Hay que tener en cuenta que no todos los problemas tienen inestabilidad por aleteo, esto se puede ver en la Figura 7.6, donde se muestra el comportamiento de aleteo sin considerar una velocidad fluctuante, sino las modificaciones dinámicas debido a la rigidez y amortiguamiento aerodinámico. En otras palabras es un problema de aleteo en vibración libre.



a) Estabilidad debido al aleteo

b) Inestabilidad debido al aleteo

Figura 7.6 Desplazamientos debido al aleteo para condiciones estables e inestables

La parte izquierda muestra que converge por lo que los desplazamientos serán limitados, por otro lado, la parte derecha los desplazamiento se incrementan generando la inestabilidad.

7.8 Conclusiones

En este capítulo se revisaron las ecuaciones que determinan la velocidad crítica para obtener la inestabilidad en diferentes condiciones, siendo el aleteo la más compleja de obtener ya que requiere de iterar para obtener la solución. También se puede ver que dependiendo de las derivadas aerodinámicas puede darse la condición de aleteo o no es por ello que la obtención de ellas es muy importante. En la mayoría de la literatura, estas derivadas se obtienen a partir de ensayos experimentales.

Por otro lado, se obtuvo la respuesta en el dominio del tiempo de las condiciones de aleteo, para ello fue necesario retomar las ecuaciones de Scanlan y resolverlas con algún método numérico. Se presentaron varios métodos sin embargo la precisión de varios generaba resultados no esperados. Esto se dio principalmente en el método de Euler comparado con el de Hamming en el cual el primero presentaba inestabilidad aeroelástica mientras que el segundo no, sin embargo esta precisión depende mucho de la cantidad

de valores en el cual se divide el tiempo. El método usado para este trabajo fue con ayuda de Matlab el cual usa un método numérico iterativo, el cual el tamaño de paso depende del resultado anterior. Cuando la precisión es baja el tamaño de paso es más pequeño por lo que también el tiempo de ejecución depende de la variación de los resultados. Además hay que tener en cuenta que se requiere de la obtención de la velocidad turbulento con media de cero considerando el factor de aleatoriedad, esto hace que al momento de aplicar el método numérico empleado con Matlab varíe dependiendo de esta aleatoriedad.

Capítulo 8. Puente San Cristóbal

8.1 Introducción

México es una zona donde los sismos y el viento son factores que afectan las construcciones de manera importante, es por ello que se requiere de un análisis para ambos casos. Los puentes carreteros que llegan a ser muy largo tienen periodos largos lo cual los hace susceptibles a efectos del viento es por ello que se decidió hacer el análisis de viento del puente San Cristóbal ya que en el 2004 colapso siendo el viento una posible causa.

8.2 Descripción del proyecto

El puente conecta San Cristóbal de las casas con Tuxtla Gutiérrez ubicado en las coordenadas 16.694278, -92.821903 en la carretera de cuota Tuxtla Gutiérrez – San Cristóbal de las casas. Debido a la orografía de la zona era necesario construir en puente para salvar un claro de aproximadamente 324m como se muestra en la Figura 8.1.

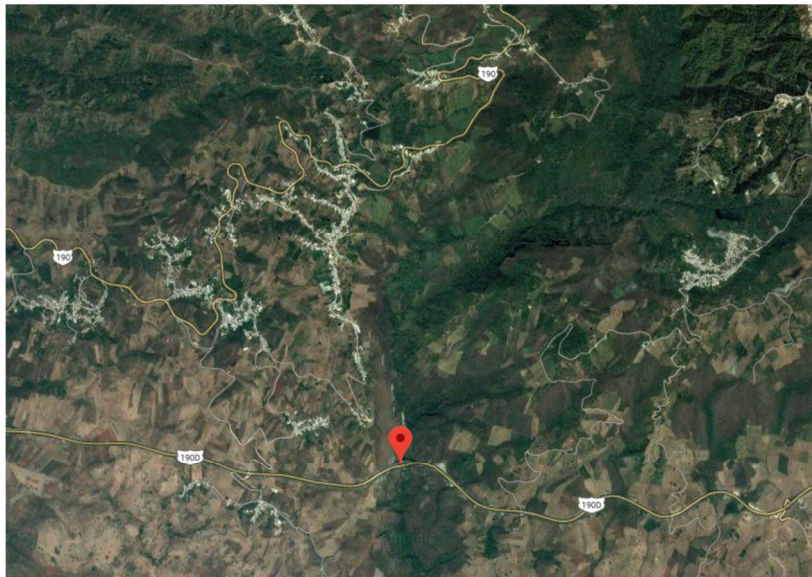


Figura 8.1 Localización del puente San Cristóbal

El puente se localiza en una curva horizontal con una curvatura de $2^{\circ}45'$ y pendientes transversales y longitudinales de 10% y 5%, respectivamente. La subestructura está compuesta de dos estribos de concreto reforzado convencionales y dos pilas del mismo material de sección transversal rectangular hueca, aproximadamente, de 61 m de altura cada una. La profundidad máxima desde la superestructura al fondo de la barranca era de 192 m.

La superestructura consiste en un cajón de tres tramos con una longitud total de 324 m y una altura de 192 m (Figura 8.2). El ancho de calzada es de 13.64 m con dos carriles (Figura 8.3) (Instituto Ingeniera UNAM, 2006).

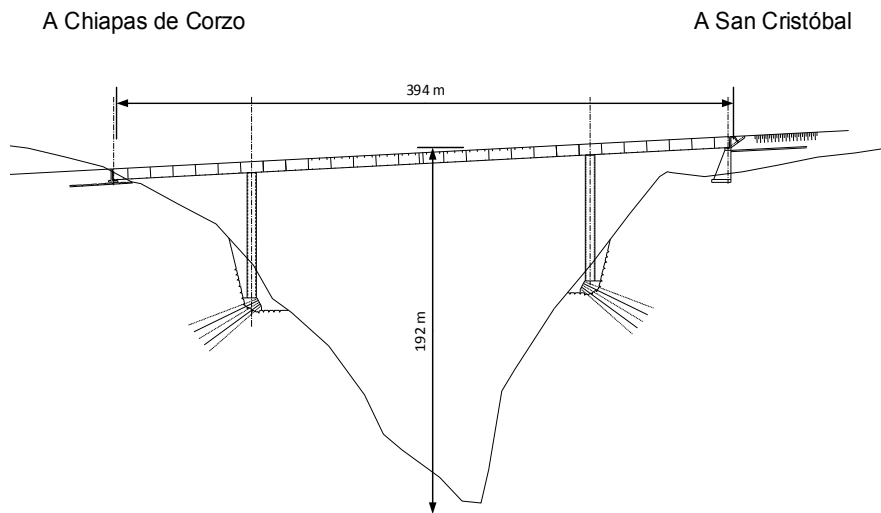


Figura 8.2 Elevación del puente San Cristóbal

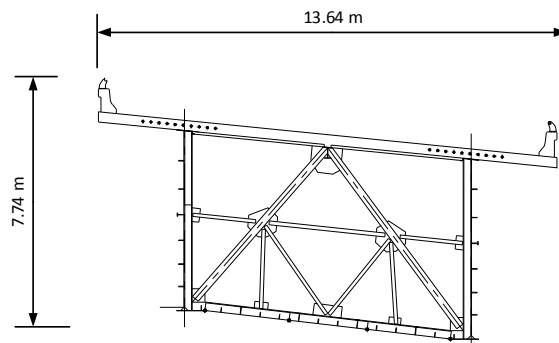


Figura 8.3 Dimensiones de las dovelas

El método constructivo que se empleó para el puente fue a partir del empujado de dovelas donde se van colocando a partir de los extremos hasta unirse en el centro (García, 2007). Esto causa que el puente se encuentre en voladizo haciéndolo más flexible en la construcción que en operación, es por ello se revisó en esta etapa. Los datos mostrados en la tabla 8.1 describen las propiedades para 14 dovelas.

8.3 Propiedades de la estructura

Para el análisis eólico de la estructura, se consideró solo la superestructura. Los coeficientes aerodinámicos se obtuvieron de (Rosales, 2016) los cuales se muestran en la Tabla 8.2, las propiedades dinámicas se obtuvieron en colaboración de García, 2018 los cuales se muestran en la Tabla 8.1. En el apéndice B se muestra la obtención de las masas modales y momentos másico de inercia.

Tabla 8.1 Propiedades dinámicas del puente San Cristóbal

Dato	Símbolo	Valor
Masa modal (kg / m)	M	18936.72
Momento másico de inercia ($kg - m^2 / m$)	I	154172.74
Frecuencia angular horizontal (rad / s)	ω_u	6.10
Frecuencia angular vertical (rad / s)	ω_v	3.98
Frecuencia angular a torsión (rad / s)	ω_α	13.92
Longitud total (m)	L	159.80
Amortiguamiento crítico en ambas direcciones	c	0.05
Ancho del tablero (m)	B	13.64
Peralte del tablero (m)	D	7.74
Altura sobre el terreno (m)	h	192.00

Tabla 8.2 Coeficientes aerodinámicos del puente San Cristóbal

Angulo de ataque	α	0°
Coefficiente de arrastre	C_D	1.83
Coefficiente de levante	C_L	1.27
Coefficiente de momento	C_M	0.76
Derivada del coeficiente de arrastre	$\frac{\partial C_D}{\partial \alpha}$	-0.3
Derivada del coeficiente de levante	$\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}$	0.5
Derivada del coeficiente de momento	$\frac{\partial C_M}{\partial \alpha}$	-0.05

8.4 Resultados

8.4.1 Velocidad de diseño e intensidad de turbulencia

Basado en la tabla C.1 del apéndice del manual de Diseño de Obras Civiles (MDOC, 2008) se tiene que la velocidad regional es $V_R = 150$ km/h lo que equivale a $V_R = 41.67$ m/s, la categoría de terreno, basado en la Tabla 3.2, se tomó como 2. Los valores necesarios para la obtención de la velocidad diseño son: $k_r = 0.19$, $z_0 = 0.05$ m y $z = 192$ m de acuerdo a la Tabla 3.2..

Dado que la velocidad de diseños del manual de Diseño de Obras Civiles está promediada a 3 s y las ecuaciones empeladas del Eurocódigo son a 10 min se aplica la Tabla 3.1 considerando que es un terreno casi abierto se elige el factor «en tierra», por lo que la velocidad de regional promediada a 10 min es

$$V_D = \frac{V_R}{1.66} = \frac{41.67}{1.66} = 25.10 \text{ m/s}$$

Con esta velocidad se puede obtener la velocidad de diseño para la altura del puente quedando

$$V_D = C_r V_R$$

$$C_r = 0.19 \ln\left(\frac{192}{0.05}\right) = 1.56$$

$$V_D = 1.56(25.10) = 39.16 \text{ m/s}$$

La intensidad turbulenta es:

$$I_u = \frac{1}{\ln\left(\frac{z}{z_0}\right)} = \frac{1}{\ln\left(\frac{192}{0.05}\right)} = 0.12$$

$$I_w = 0.5 I_u = 0.5(0.12) = 0.06$$

$$V_D = 1.56(25.10) = 39.16 \text{ m/s}$$

8.4.2 Ráfagas

A partir de la velocidad diseño y las propiedades del puente de la Tabla 8.1 y 8.2 se obtuvo la respuesta en el dominio del tiempo con el programa «buffeting.m» de MATLAB del apéndice C.

La función de densidad de Kaimal se muestra en la Figura 8.4

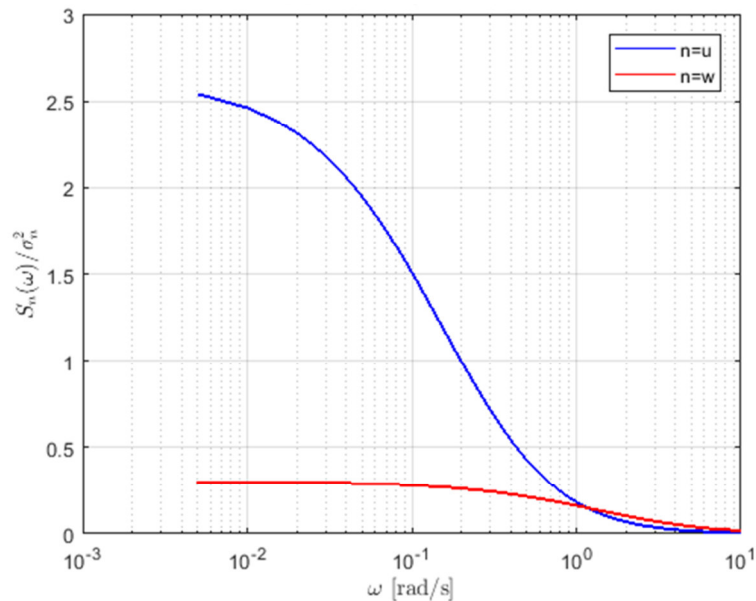


Figura 8.4 Función de densidad de Kaimal para San Cristóbal de las casas

Se puede observar que se tiene mayor respuesta en la dirección paralela al viento en frecuencias bajas, pero a partir de frecuencias mayores las funciones de densidad llegan a tener valores similares.

En la Figura 8.5 se pueden observar las funciones de admitancia mecánica, es decir, en que frecuencias tiene mayor respuesta mecánica. Se puede observar que la componente y (paralela al flujo de viento) tiene mayor respuesta para las frecuencias cercanas a 4 y la componente z (transversal vertical) tiene mayor respuesta para frecuencias cercanas a 6 aunque son menores comparadas a la componente y . Hay que tener en cuenta que esta función depende del amortiguamiento aerodinámico y este a su vez de la velocidad de diseño por lo que la admitancia varía dependiendo de la velocidad de diseño, en este caso 38.24 m/s.

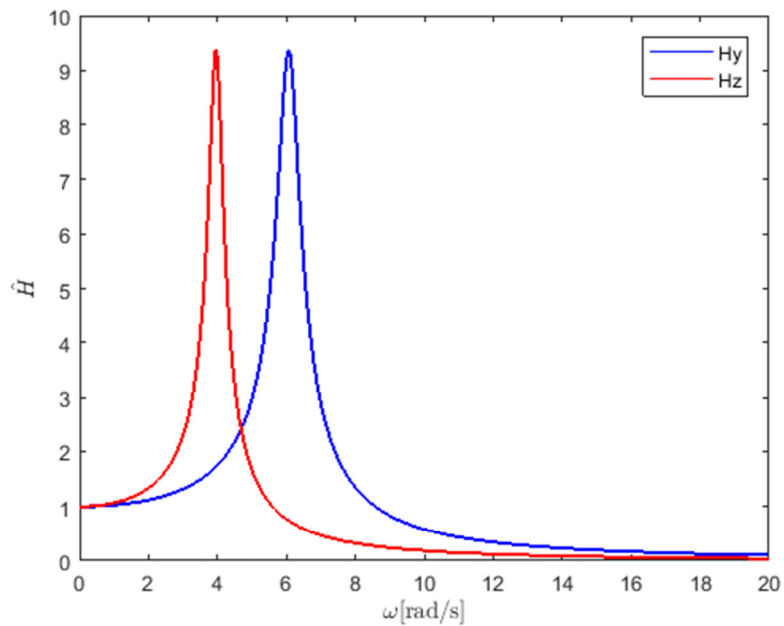


Figura 8.5 Función de admitancia mecánica para el puente San Cristóbal

En la Figura 8.6 se muestra la función de admitancia conjunta, la cual correlaciona la fuerza del viento con las propiedades aerodinámicas del puente. Se puede observar que la admitancia en ambos casos es similar aunque su pico máximo sea en diferentes frecuencias.

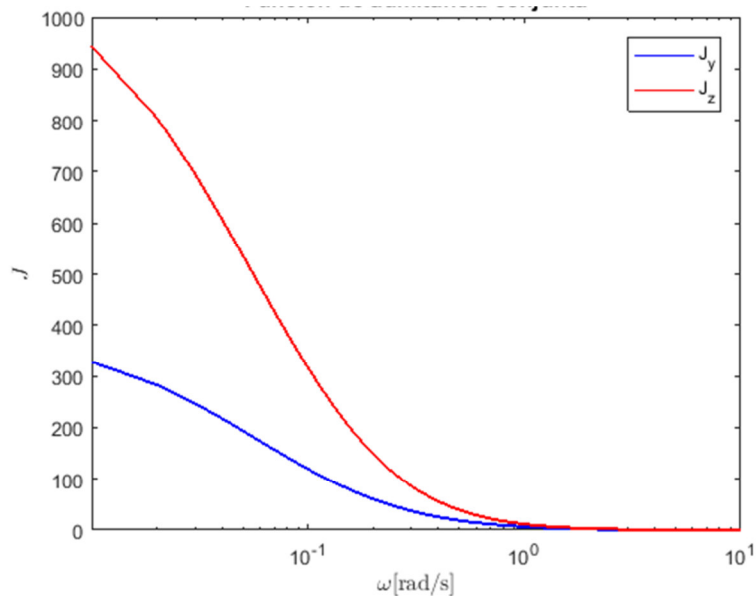


Figura 8.6 Función de admitancia conjunta del puente San Cristóbal

Las frecuencias de los modos horizontales y verticales son 6.10 y 3.98 rad/s respectivamente los cuales corresponden a valores muy bajos de la función de admitancia

conjunta, esto quiere decir que la respuesta del puente ante ráfagas es baja por lo que la mayor contribución será de la parte estática.

A partir de estos datos se puede obtener la función de respuesta la cual se muestra en la Figura 8.7, el cual muestra valores pequeños para ambos sentidos siendo la componente vertical la que tiene mayor respuesta.

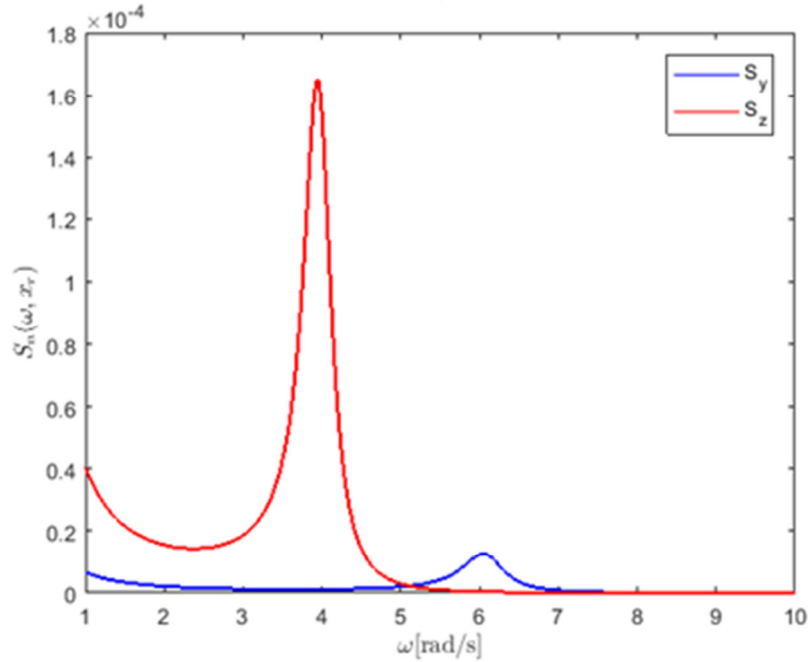


Figura 8.7 Espectro de respuesta del puente San Cristóbal

En la Figura 10.8 se muestra la simulación en el dominio del tiempo donde se puede observar que los desplazamientos son pequeños llegando a 2 cm para la componente horizontal y 8 cm en la vertical. En la Tabla 8.3 se muestran las desviaciones estándar, factores pico y desplazamientos máximos en las dos direcciones.

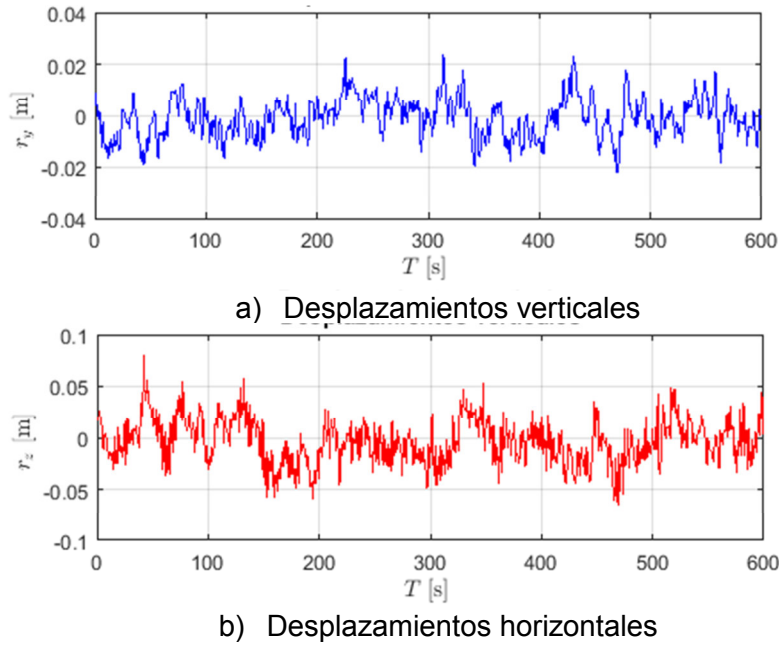


Figura 8.8 Desplazamientos del puente San Cristóbal

Tabla 8.3 desviación estándar, desplazamientos máximos y factores picos del puente San Cristóbal ante efectos de ráfaga

σ_y	0.008 m
σ_z	0.0243 m
\max_y	0.0236 m
\max_z	0.0798 m
kp_y	2.9406
kp_z	3.5756

En la Figura 8.9 se puede observar la variación de los desplazamientos a diferentes velocidades, se puede observar como a mayor velocidad el desplazamiento vertical se incrementa más que la componente horizontal.

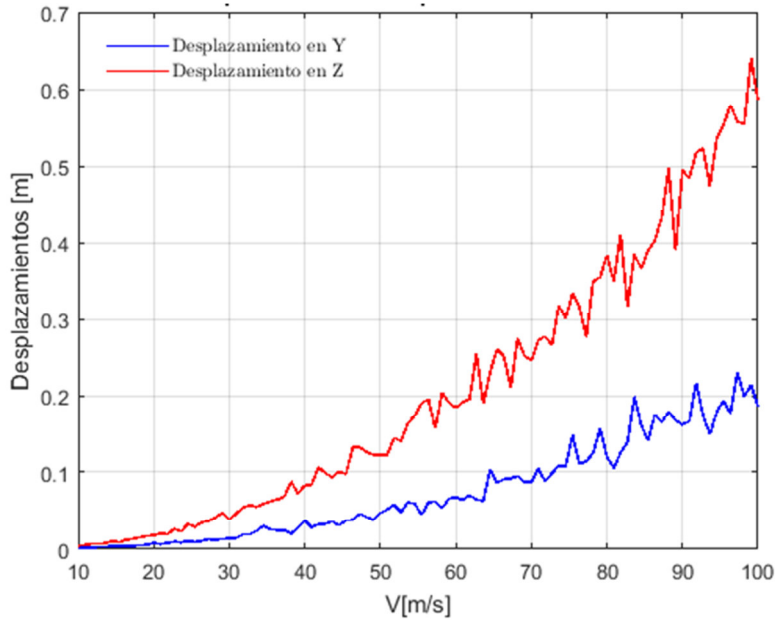


Figura 8.9 Variación de los desplazamientos contra velocidad

8.4.3 Vórtices

Para el desprendimiento de vórtices se usaron los datos los cuales propone (Helliesen, 2013) debido a que no se cuenta con estas propiedades del puente San Cristóbal a excepción del número de Strouhal el cual se obtuvo del Eurocodigo, 2002. En la Tabla 8.4 se muestran los valores usados. Se usó el programa «Vórtices.m» del apéndice C.

Tabla 8.4 Propiedades ante efectos de vórtices del puente San Cristóbal

Dato	Símbolo	Valor
Valor asociado con la naturaleza autolimitante del desprendimiento de vórtices	a_z	0.4
Longitud de escala adimensional de la coherencia en dirección vertical	λ	2.0
Coefficiente adimensional de la raíz cuadrada media de la fuerza de levante	$\hat{\sigma}_{q_z}$	1.0
Parámetro de ancho de banda en la dirección vertical	b_z	0.15
Número de Strouhal	St	0.11
Coefficiente de velocidad dependiente al amortiguamiento	K_{a_z}	0.2

Para el desprendimiento de vórtices, se considera que es altamente resonante por lo que los desplazamientos ya no se le agrega el desplazamiento medio. En el caso del puente

San Cristóbal la velocidad resonante fue de 44.43 m/s lo cual es superior a la velocidad media. En la Figura 8.10 se muestra la respuesta en el dominio del tiempo donde se puede ver que los desplazamientos llegan a ser de 1 m, lo cual se considera alto para el puente.

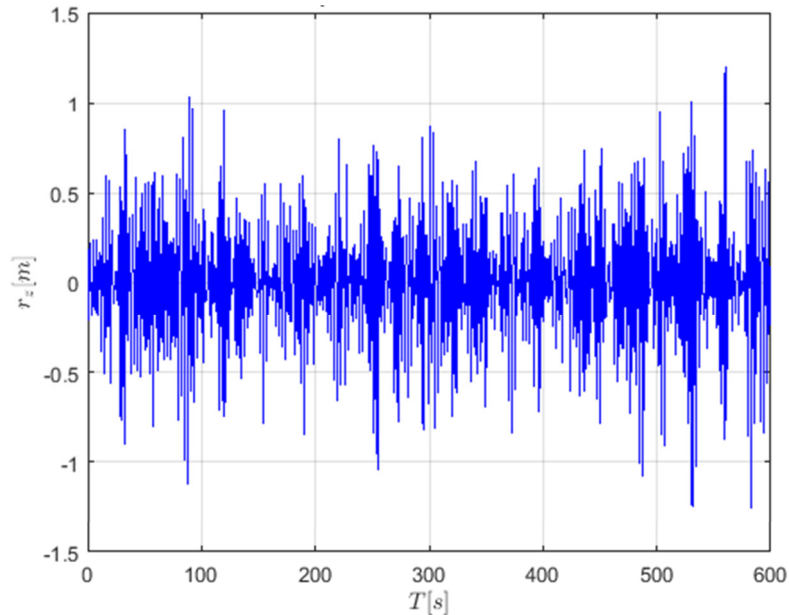


Figura 8.10 Respuesta del puente San Cristóbal en el dominio del tiempo para una velocidad resonante de 44.43 m/s

En la Figura 8.11 Se muestra la función de transferencia mecánica donde se puede observar que es superior a las de ráfagas debido a que el amortiguamiento aerodinámico en los vórtices es negativo mientras que para las ráfagas es positivo.

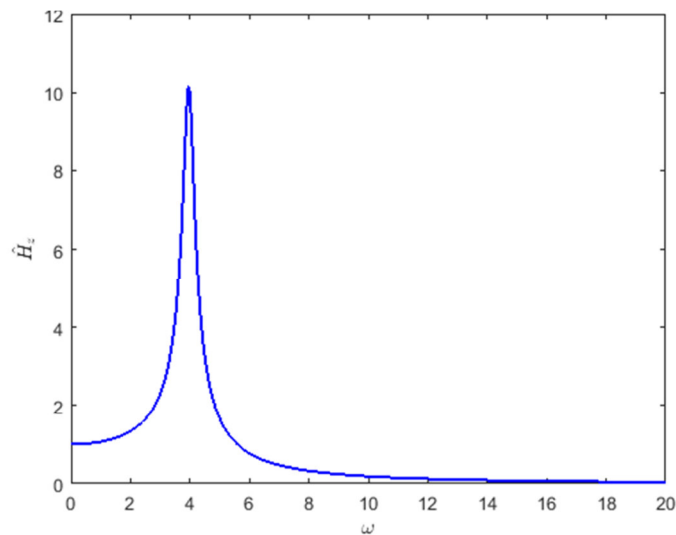


Figura 8.11 Función de transferencia mecánica para el desprendimiento de vórtices

En la Figura 8.12 se muestra el espectro de carga el cual ya incluye la correlación. Se puede observar que para la frecuencia circular de 3.98 rad/s el cual equivale a la frecuencia del modo vertical la función de transferencia y es espectro de carga tienen su pico máximo.

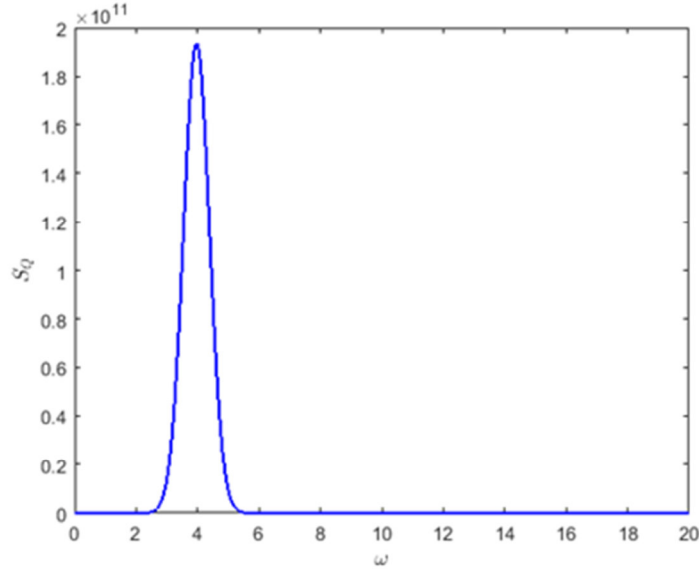


Figura 8.12 Función de espectro de carga para el desprendimiento de vórtices

En la Figura 8.13 Se muestra el espectro de respuesta el cual se muestran valores altos aunque no abarca un rango grande de frecuencias por lo que lo hace de banda estrecha.

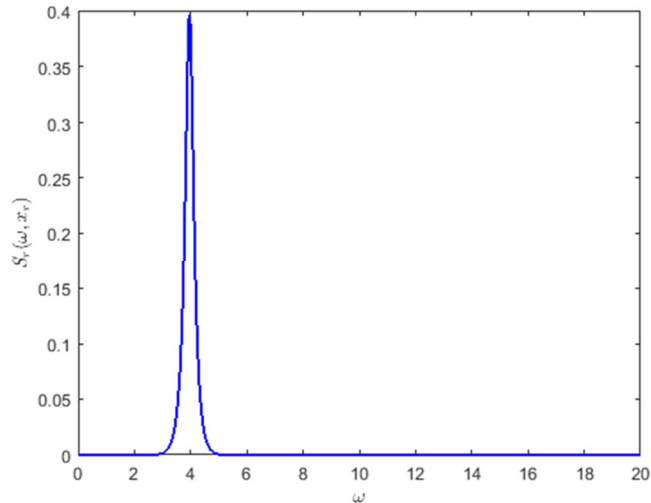


Figura 8.13 Espectro de respuesta del puente San Cristóbal para desprendimiento de vórtices

Si se grafican los desplazamientos máximos a diferentes velocidades como se muestra en la Figura 8.14 se puede observar que los desplazamientos son grandes incluso para

velocidades resonantes mayores a la calculada, también se puede observar que el incremento considerable se da a partir de los 30m/s.

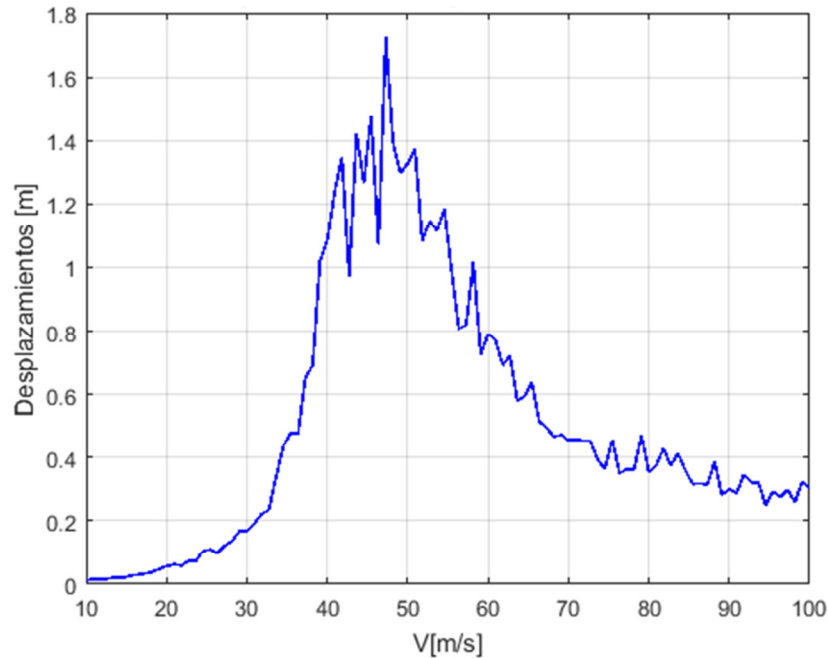


Figura 8.14 Desplazamientos máximos del puente San Cristóbal a diferentes velocidades

8.5 Aeroelasticidad

8.5.1 Divergencia estática

Para la divergencia estática se considera que la forma modal expuesta y la de la estructura es la misma, el momento másico de inercia es $\tilde{m}_\theta = 154172.74 \text{ kgm}^2/\text{m}$ y su frecuencia $\omega_\theta = 13.92 \text{ rad/s}$

$$V_{cr} = B\omega_\theta \left(\frac{2\tilde{m}_\theta}{\rho B^4 C_M} \cdot 1 \right)^{1/2}$$

$$V_{cr} = (13.64)(13.92) \left(\frac{2(154172.74)}{1.25(13.64)^4 (0.76)} \cdot 1 \right)^{1/2} = 581.41 \text{ m/s}$$

La velocidad crítica supera las velocidad máximas registradas por huracanes de categoría 5 por lo que la divergencia estática no se presentará.

8.5.2 Galopeo

Para que se dé el galopeo se requiere que se cumpla la siguiente desigualdad

$$C_L' < -\bar{C}_D (D/B)$$

$$0.2 < -(-0.3)(7.74/13.64)$$

$$0.2 < 0.17$$

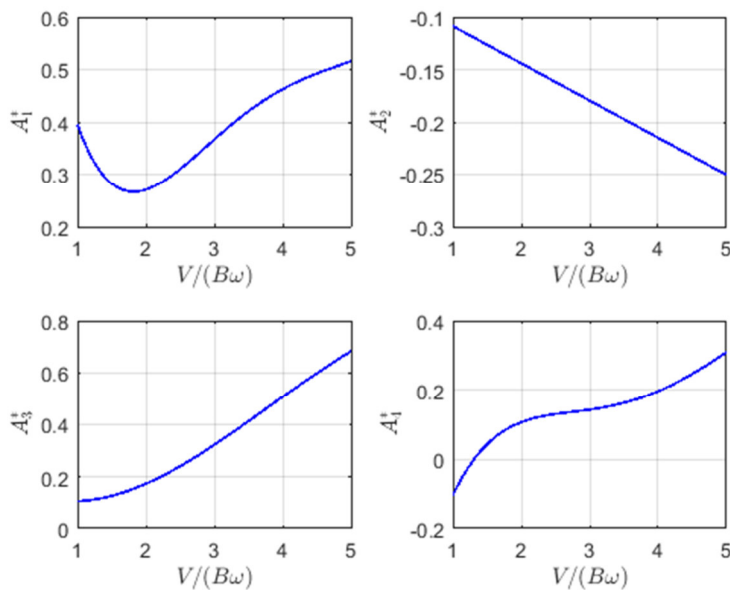
Dado que la desigualdad es falsa no se presentará galopeo. Otra forma de comprobarlo es con la derivada aerodinámica H_1^* (Figura 8.15) donde se la inestabilidad con valores positivos para esta derivada aerodinámica donde el puente San Cristóbal presenta valores negativos.

8.5.3 Inestabilidad a torsión

Para que exista inestabilidad por torsión el amortiguamiento aerodinámico debe ser positivo por lo que la derivada aerodinámica A_2^* debe ser mayor a cero. Al usar el método Quasy-Steady la derivada es cero, y si se ocupa la de la Figura 8.15 su valor es negativo.

8.5.4 Aleteo

Para considerar el aleteo se requieren las derivadas aerodinámicas del puente San Cristóbal las cuales se presentan en la Figura 8.15 (Arias,2012). Para obtener la velocidad crítica de la Figura 8.16 se empleó el programa «Vortices.m» del apéndice C



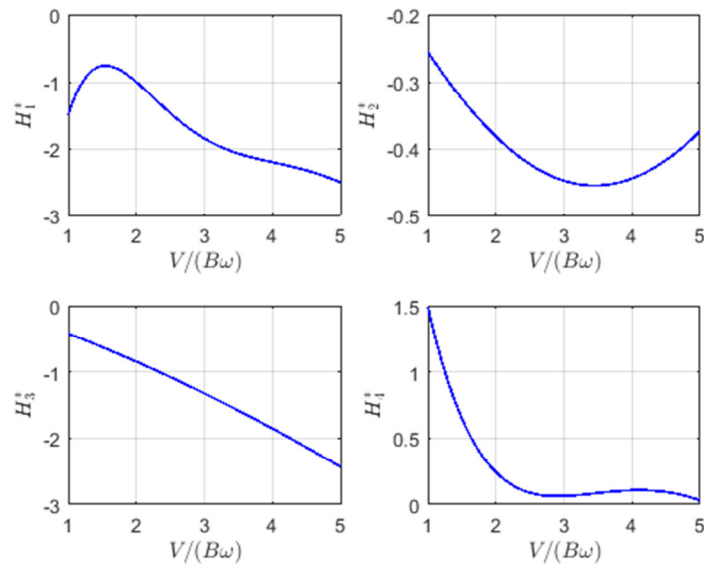


Figura 8.15 Derivadas aerodinámicas para el puente San Cristóbal

En la figura 8.16 se tienen las gráficas de los valores reales e imaginarios, siendo el punto de intersección el valor de la velocidad crítica donde se genera la inestabilidad.

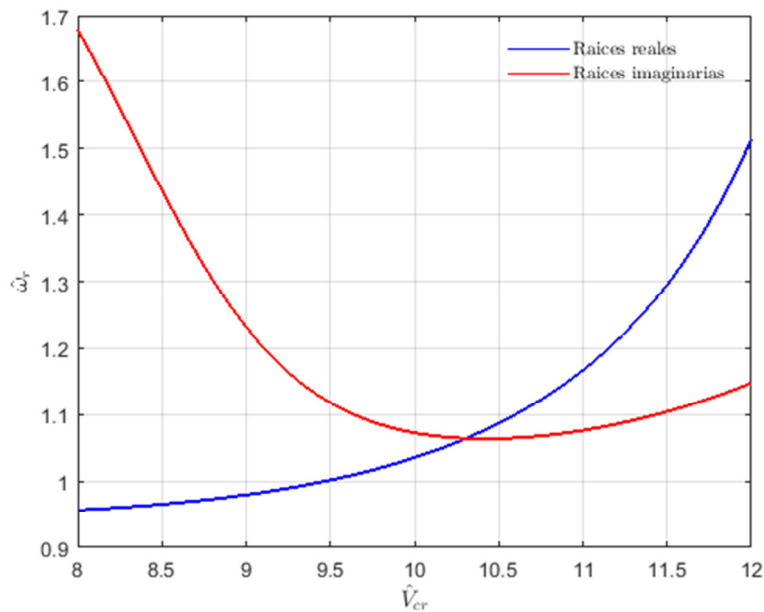


Figura 8.16 Raíces de la parte imaginaria y real de la determinante de la matriz de impedancia para el puente San Cristóbal

El punto de intersección es $\hat{V}_{cr} = 10.30$ y $\hat{\omega}_r = 1.06$ por lo que

$$V_{cr} = (\hat{V}_{cr})(\hat{\omega}_r)(\omega_h)(B)$$

$$V_{cr} = 10.3(1.06)(6.10)(13.64) = 908.42 \text{ m/s}$$

8.5.5 Respuesta en el dominio del tiempo ante aleteo

Para obtener la respuesta primero se requiere obtener la simulación de velocidad como se mostró en el capítulo 5. Para el puente San Cristóbal se muestra la simulación de ráfagas en las dos direcciones en la Figura 10.17 las cuales se obtuvieron considerando coherencia entre los puntos aplicando el programa «SimulacionesWAWS.m» del apéndice C.

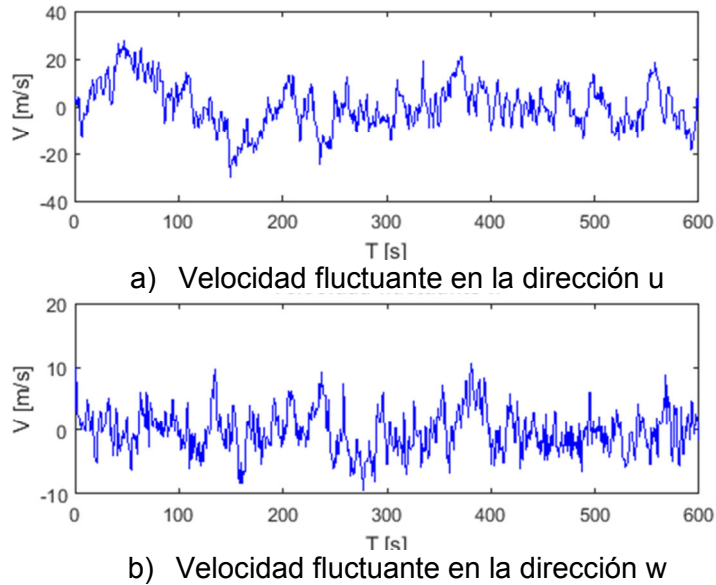


Figura 8.17 Simulación de velocidades para el puente San Cristóbal

En la Figura 8.18 se muestra la respuesta ante aleteo y en la tabla 8.5 se muestran los desplazamientos, desviación estándar y factor pico. Para ello es empleado el programa «flutterOde45.m» del apéndice C

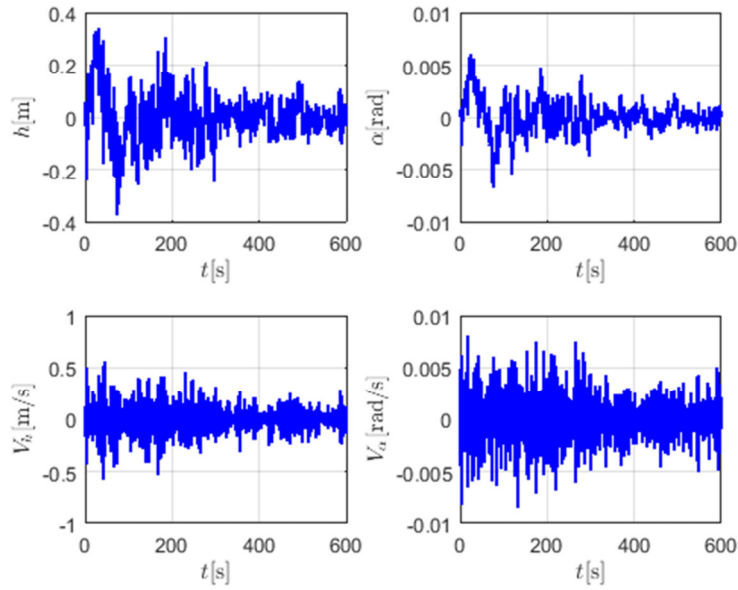


Figura 8.18 Respuesta ante el efecto de aleteo del puente San Cristóbal

Siendo el desplazamiento vertical máximo 0.3772 m

Tabla 8.5 Resultados de la respuesta ante el aleteo

Dato	Símbolo	Valor
Desviación estándar a torsión	σ_{α}	0.0016
Desviación estándar a flexión vertical	σ_h	0.09538
Rotación máxima	\max_{α}	0.0068 rad
Desplazamiento máximo vertical	\max_h	0.3772 m
Factor pico a torsión	kp_{α}	4.3592
Factor pico a flexión vertical	kp_h	4.0224

Se puede observar que el desplazamiento es considerablemente mayor que al efecto ante ráfagas, a pesar de que no presenta inestabilidad aeroelástica por aleteo a esta velocidad. Para verificar si existe inestabilidad, por medio del programa «flutterOde45.m» se asignó la velocidad fluctuante en las direcciones u y w igual a 0, además se escogió de forma arbitraria las condiciones iniciales de desplazamiento horizontal de 1 cm y rotación de 0.001 rad. En la Figura 8.19 se muestra su comportamiento en vibración libre.

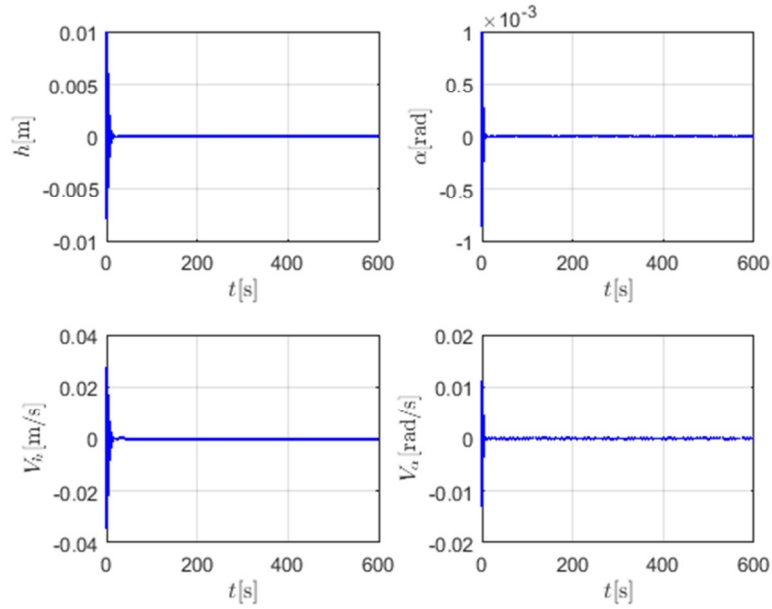


Figura 8.19 Condición de estabilidad del puente San Cristóbal ante aleteo

Esta es otra forma de verificar que la estructura es estable ante aleteo, sin embargo tiene desplazamientos considerables.

A continuación se muestra el resultado para diferentes velocidades ante efecto de aleteo en la Tabla 8.6, donde la segunda columna se muestra el valor de la velocidad fluctuante con media de cero, y la tercera columna es el desplazamiento de la velocidad media más la velocidad fluctuante.

Tabla 8.6 Desplazamientos máximos debido al aleteo a diferentes velocidades

Velocidad(m/s)	Desplazamiento vertical fluctuante(m)	Desplazamiento vertical total (m)
39.16	0.3772	0.4930
50	0.5396	0.7269
60	1.1809	1.4488
70	1.3339	1.6963
80	1.8069	2.2777
90	2.5538	3.1468
100	2.6996	3.4287

8.6 Conclusiones

En este capítulo se obtuvo la respuesta del puente San Cristóbal ante diferentes cargas, siendo las ráfagas las que menor efecto tenía, también se observó que ante las cuatro condiciones de inestabilidad la velocidad crítica está fuera del rango de velocidades que se pueden alcanzar en la naturaleza. En el caso del aleteo se puede observar que los desplazamientos fueron muy superiores a las ráfagas por lo que la torsión influyó en los desplazamientos alcanzando un valor de 0.49m. En cuanto al desprendimiento de vórtices, se puede ver que tiene desplazamientos importantes, logrando alcanzar hasta 1 m por lo que este pudo ser un causante de que la columna fallara en 2006.

Capítulo 9

Conclusiones

A lo largo de estos capítulos se mostró como obtener la respuesta de un puente ante los efectos de ráfaga, desprendimiento de vórtices y aleteo de las estructuras tipo línea horizontal que representa a los puentes en 2D y se mostró el comportamiento del puente San Cristóbal ante dichos efectos considerando solo dos dimensiones. Para ello fue necesario el uso de varias herramientas matemáticas como el uso de procesos estocásticos, métodos numéricos, etc.; así como de programas computacionales como MATLAB y SAP2000. A pesar de tener estas herramientas aún existe la incertidumbre dado que se requieren pruebas experimentales para conocer el comportamiento real, sin embargo en el capítulo 6 y 7 se mostró que los resultados son aceptables al aplicar la metodología.

En este trabajo se hizo la revisión del puente San Cristóbal con el fin de aplicar las ecuaciones a un caso práctico. Para este puente sus propiedades aerodinámicas no generan inestabilidad aeroelástica sí se puede ver que ante efectos de desprendimiento de vórtices los desplazamientos son importantes lo cual pudo haber causado el colapso cuando se estaba construyendo. Ante el efecto de torsión no presenta problemas ya que por ser una sección cuadrada tiene bastante rigidez y esto se puede ver incluso en su periodo llegando a ser 0.45s. La respuesta ante aleteo llegó a ser importante alcanzando un desplazamiento de 50 cm, mientras que por ráfagas el desplazamiento fue mucho menor llegando a 8 cm. Cuando se hizo la revisión ante estos efectos muchos de sus valores se obtuvieron de puentes que son similares al puente San Cristóbal sin embargo una manera de corroborar estos resultados es por medio pruebas de túnel de viento, además de conocer cómo sería el comportamiento en tres dimensiones.

Normalmente las revisiones para los puentes se hacen cuando está en servicio, sin embargo se tiene que revisar también durante el proceso constructivo ya que, como el puente San Cristóbal, es más susceptible a tener efectos dinámicos de viento en construcción que cuando está terminado.

Referencias

Arias Rojas, H. (Agosto de 2012). Respuesta eólica de un puente en curva . Universidad Michacana de San Nicolás de Hidalgo.

Balboa. (2006). La Jornada. Obtenido de <http://www.jornada.unam.mx/2006/04/12/index.php?section=estados&article>

Bashford, James (1940). Foto “Bridge midsection crashing into the waters of the Tacoma Narrows” PH Coll. 290.36 Biblioteca de la University de Washington. Recuperado de <http://www.lib.washington.edu/specialcollections/collections/exhibits/tnb/collapse>

Cao, Y., Xiang, H., & Zhou, Y. (2000). Simulation of Stochastic Wind Velocity on Long-Span Bridges. Journal of Engineering Mechanics .

Chapra, S., & Canale, R. (2015). Numerical Methods SEVENTH EDITION. Nueva York: McGraw-Hill Education.

Comisión Federal de Electricidad. (2008). Manual de Diseño de Obras Civiles, Diseño por Viento. México.

Eurocódigos (1998). Eurocódigo 1. Bases de proyecto y acciones en estructuras, parte 2-4: acciones en estructuras. Acciones del viento

García Pérez, D. (2007). Reconstrucción del puente San Cristóbal, en el estado de Chiapas. Mexico: Universidad Nacional Autónoma de México.

García, F. (2007). El Curso Interactivo de Física en Internet. Obtenido de <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/solido/teoria/teoria.htm#Teorema%20de%20Steiner>

García Ruiz, Rey Franciso (2018). Tesis: Propuestas reglamentarias para el diseño eólico de Puente . México, Universidad Nacional Autónoma de México (en proceso de publicación)

Harper, B., Kepert, J., & Ginger, J. (Octubre de 2008). Guidelines for converting between various wind averaging periods in tropical cyclone conditin. Word Meteorological Organization.

Helliesen, M. Ø. (06 de Junio de 2013). Wind Induced Dynamic Response of Concrete Box Girders During a. Noruega: NTNU- Norwegian University of Science and Technology.

Holmes, J. (2007). Wind Loading Structures. Nueva york: Taylor & Francis Group.

Hong, S. (Octubre de 2009). Time Domain Buffeting Analysis of Large-Span Cable-Stayed Bridges. Unviersidade do Porto Faculdade de Engenharia.

Jurado, H. and Mosquera. (2011). Bridge Aeroelasticity Sensitivity Analysis and Optimal Design. Coruña, España. WIT Press.

Kaimal. (1972). Spectral characteristics of surface-layer turbulence. *Journal of the Royal Meteorological Society*, Vol 98, 563-589.

Kvamstad, T. H. (14 de Junio de 2014). Assessment of the flutter stability limit of the Hålogaland Bridge using a. Noruega: NTNU- Norwegian University of Science and Technology.

Li, Y., and Kareem. (1990). Ardma representation of wind field, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 415-427.

Liu, Z. (2012). On The Investigation of Bridge Buffeting. University of Nottingham.

Melbourne, & Jancauskas. (1980). The measurement of aerodynamic admittance using discrete frequency gust generation. 7th Australian Hydraulics and Fluid Conference, (págs. 18-22). Australia.

Rosales García, I. (Junio de 2016). Coeficientes Aerodinámicos de Tableros de Puentes. Universidad Nacional Autónoma de México.

Scanlan, R. (1978). The action of flexible bridges under wind, I: flutter theory. *Journal of Sound and Vibration* , 187-199.

Scanlan, R. H. (1976). Modern Approaches to Solution of the Wind Problems of Long Span Bridges. *ENGINEERING JOURNAL / AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION*, 26-34.

Scanlan, R. H. (1976). Modern Approaches to Solution of the Wind Problems of Long Span Bridges. *Engineering Journal american Institute of steel construction*, 26-34.

Strommen, E. (2010). *Theory of Bridge Aerodynamics*. Trondheim, Noruega: Springer.

Tamura, Y., & Kareem, A. (2013). *Advance Structural Wind Engineering*. Japón: Springer.

Theodorsen, T. (1935). General theory of aerodynamic instability and mechanism of flutter. Washington DC: NACA Report No. 496.

Tieleman, H. (2003). Wind tunnel simulation of wind loading on low-rise structures: a review. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* , 1627-1649.

UNAM, I. d. (2006). Instituto de Ingeniera UNAM. Obtenido de http://eventos.iingen.unam.mx/Informe2005_2006/A_2_3_san_cristobal.html

Vikery, & Basu. (1983). Across-wind vibrations of structure of circular cross-section. Part II. Development of a mathematical model for full-scale application. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 75-97.

Vikery, B. (1983). Across-wind vibrations of structure of circular cross-section. Part I. Development of a mathematical model for full-scale application. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 75-96

Walbækken, S. (9 de Junio de 2013). Aerodynamic stability of slender. Noruega: NTNU-Norwegian University of Science and Technology.

Yang, W. Y., Cao, W., Chung, T.-S., & Morris, J. (2005). Applied Numerical Methods Using Matlab. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.

Apéndice A

Ecuación de movimiento en el dominio de la frecuencia

A.1 Introducción

En este apéndice se muestra la obtención de la respuesta en el dominio de la frecuencia para la ecuación de movimiento ante efectos de eólicos (Tamura & Kareem, 2013).

A.2 Solución a la ecuación de movimiento

La ecuación de movimiento está definida como

$$m \cdot \ddot{x}(t) + c \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = f(t) \quad (\text{a.1})$$

Considérese la frecuencia como:

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad (\text{a.2})$$

Y el amortiguamiento

$$\zeta_0 = \frac{c}{2m\omega_0} \quad (\text{a.3})$$

donde ω_0 es la frecuencia natural del sistema en rad / s , c es el coeficiente de amortiguamiento crítico y m es la masa. La solución a la ecuación de movimiento en vibración libre es

$$x(t) = \exp(-\zeta_s \omega_0 t) [A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t)] \quad (\text{a.4})$$

Mientras que la respuesta a una excitación forzada $F(t)$ conocida como integral de Duhamel es

$$x(t) = \int_0^t F(s)h(t-s)ds \quad (\text{a.5})$$

donde $h(t)$ es la función de respuesta a un impulso la cual se define como:

$$h(t) = (m\omega_0)^{-1} \exp(-\zeta_s \omega_0 t) \sin \omega_0 t \quad (\text{a.6})$$

La solución a la ecuación (a.5) se puede aproximar como

$$x(t) \approx \{1 - \exp(-\zeta_s \omega_0 t) \cos \omega_0 t\} / k = A(t) \quad (\text{a.7})$$

Por lo que la función de respuesta a un impulso se puede escribir

$$h(t) = dA / dt \quad (\text{a.8})$$

Por lo que la ecuación a.5 se puede escribir como

$$x(t) = \int_0^t F(t-s) A'(s) ds \quad (\text{a.9})$$

Si se considera una excitación armónica $F(T) = \exp(i\omega t)$ la solución es

$$x(t) = \left(\frac{e^{i\omega t}}{k} \right) \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + i \cdot 2\zeta_s \frac{\omega}{\omega_0} \right]^{-1} = \frac{F(t)H(\omega)}{k} \quad (\text{a.10})$$

donde $H(\omega)/k$ se le conoce como la función de respuesta mecánica la cual permite conocer la respuesta en el dominio de la frecuencia al obtener la transformada de Fourier de la función.

La respuesta a una carga aleatoria se puede formular como se muestra en la ecuación (a.11)

$$x(t) = \int_0^t F(t-\theta)h(\theta) d\theta \quad (\text{a.11})$$

Por otro lado, si se tiene que la auto-covarianza de la señal $x(t)$ es

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} F(t-\theta)h(\theta) d\theta \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} F(t+\tau-\theta)h(\theta) d\theta \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_F(\tau+\theta_1-\theta_2)h(\theta_1)h(\theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \end{aligned} \quad (\text{a.12})$$

Si se toma la transformada de Fourier de $R_x(\tau)$ entonces se tiene que

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (\text{a.13})$$

Sustituyendo (a.12) en (a.13)

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_F(\tau + \theta_1 - \theta_2) h(\theta_1) h(\theta_2) d\theta_1 d\theta_2 d\tau \quad (\text{a.14})$$

Expandiendo

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta_1) e^{-i\omega\theta_1} d\theta_1 \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta_2) e^{-i\omega\theta_2} d\theta_2 \int_{-\infty}^{\infty} R_F(\tau + \theta_1 - \theta_2) e^{-i\omega(\tau + \theta_1 - \theta_2)} d\tau \quad (\text{a.14})$$

La solución de la ecuación (a.14) tiene una solución en el campo de los reales y de los imaginarios (que se expresa con un asterisco '*') de tal modo que reescribiendo queda

$$S_x(\omega) = \frac{\hat{H}(\omega)}{k} \frac{\hat{H}^*(\omega)}{k} \int_{-\infty}^{\infty} R_F(\theta) e^{-i\omega\theta} d\theta \quad (\text{a.15})$$

La ecuación (a.15) se puede escribir como

$$S_x(\omega) = \frac{|\hat{H}(\omega)|^2}{k^2} S_F(\omega) \quad (\text{a.16})$$

donde

$$\hat{H}(\omega) = \left[1 - \frac{k_{ae}}{k} - \left(1 - \frac{m_{ae}}{m} \right) \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + 2i \left(\zeta_0 - \frac{c_{ae}}{2\omega_0 m} \right) \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \right]^{-1} \quad (\text{A.17})$$

donde el subíndice *ae* corresponde a las propiedades aerodinámicas y S_f en (a.16) es la función de densidad del viento, es decir, la contribución del viento.

La ecuación (a.16) se conoce como el espectro de respuesta de desplazamiento. Si el sistema es continuo, se puede obtener a una distancia x_r , como se muestra en la ecuación (a.18).

$$S_x(x_r, \omega) = \phi_i^2(x_r) \frac{|\hat{H}(\omega)|^2}{k^2} S_F(\omega) \quad (\text{a.18})$$

donde ϕ_i es un punto en específico en función a la forma modal deseada.

Apéndice B

Propiedades dinámicas del puente San Cristóbal

B.1 Introducción

El puente que se analiza en este trabajo es el San Cristóbal cuya ubicación esta en Chiapas. Este puente sufrió un colapso cuando estaba a punto de terminarse (Balboa, 2006). Para el análisis eólico se revisó en el estado del puente cuando colapsó. Para ello se tuvo colaboración con Francisco quien realizo el modelo en SAP2000 de donde se obtuvieron las propiedades dinámicas del puente.

B.2 Modelo computacional del Puente San Cristóbal

En la Figura B.1 se muestra modelo computacional del puente San cristpobal

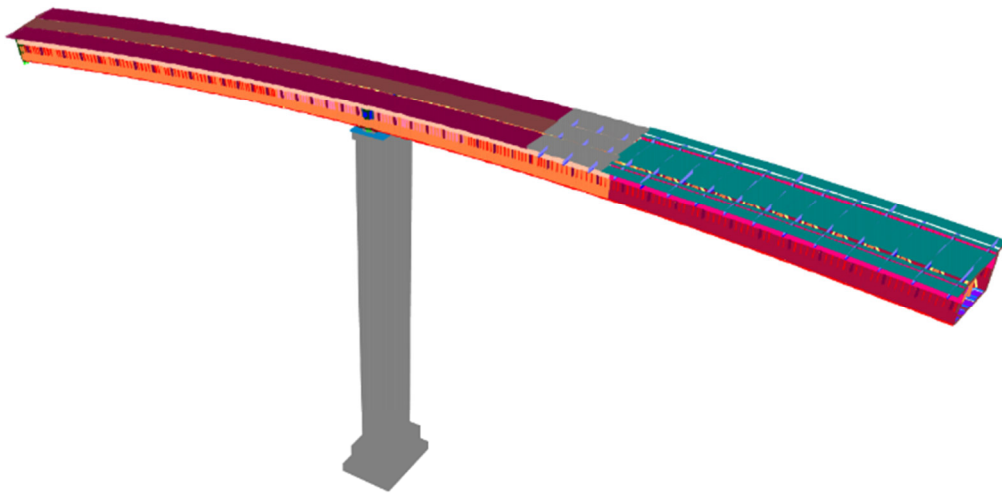


Figura B.1. Modelo del puente San Cristóbal en su etapa previa a la colocación de la dovela de cierre. (García, 2018)

B.3 Formas modales del puente San Cristóbal

En la Figura B.2, B.3 y B.4 Se muestran sus formas modales que describe el software

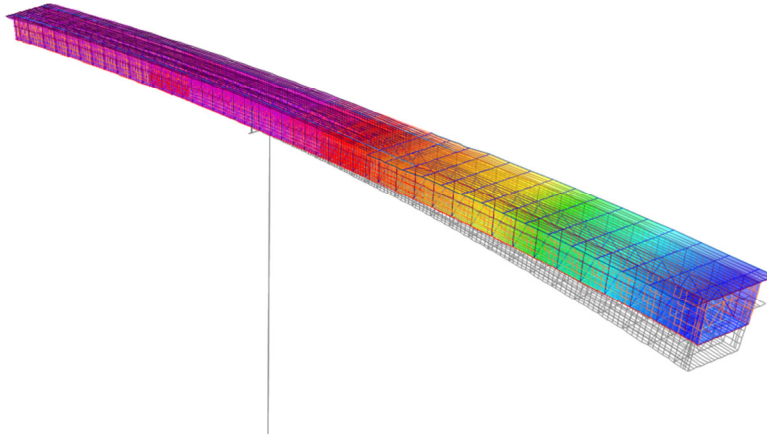


Figura B.2 Forma modal vertical del puente San Cristóbal ($f=0.63$ hz)

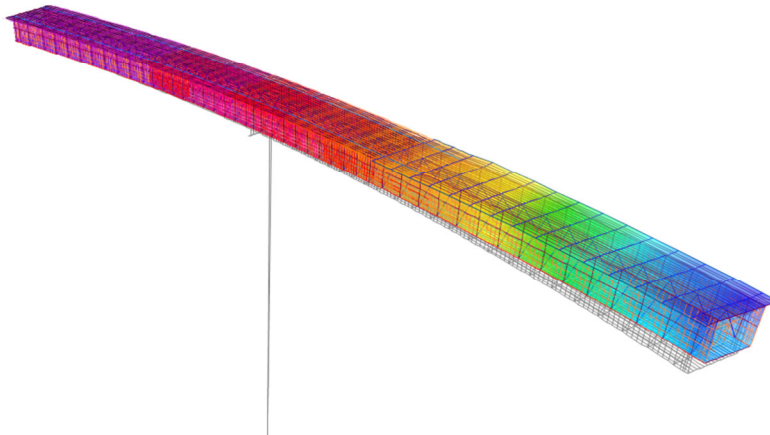


Figura B.3 Forma modal horizontal del puente San Cristóbal ($f=0.97$ hz)

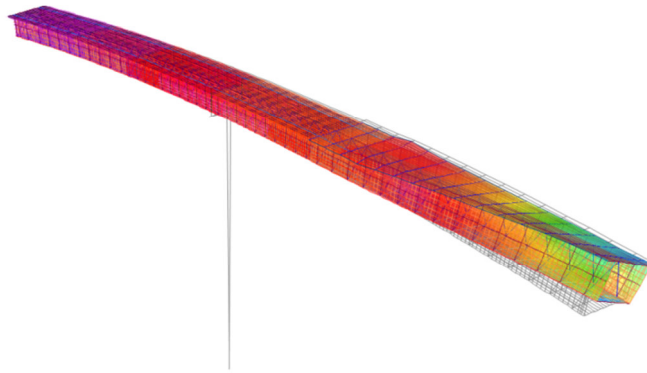


Figura B.4 Forma modal torsional del puente San Cristóbal (f=2.21 hz)

En Tabla B.1 se muestran los valores de las formas modales normalizados al extremo libre.

Tabla B.1 Formas Modales del puente San Cristóbal

N	ϕ_y	ϕ_z	ϕ_α	N	ϕ_y	ϕ_z	ϕ_α
1	1.0000	1.0000	0.9949	25	0.0114	0.1677	0.0062
2	0.9444	0.9504	1.0000	26	-0.0073	0.1518	0.0026
3	0.8884	0.8994	0.9524	27	-0.0189	0.1407	0.0007
4	0.8321	0.8472	0.8824	28	-0.0287	0.1304	-0.0007
5	0.7757	0.7941	0.7951	29	-0.0368	0.1208	-0.0016
6	0.7192	0.7403	0.6992	30	-0.0435	0.1117	-0.0021
7	0.6629	0.6863	0.6012	31	-0.0488	0.1029	-0.0024
8	0.6070	0.6327	0.5038	32	-0.0526	0.0946	-0.0025
9	0.5517	0.5800	0.4066	33	-0.0551	0.0866	-0.0024
10	0.4973	0.5290	0.3024	34	-0.0562	0.0788	-0.0021
11	0.4439	0.4802	0.1883	35	-0.0560	0.0713	-0.0018
12	0.3918	0.4344	0.0818	36	-0.0545	0.0640	-0.0013
13	0.3405	0.3903	0.0947	37	-0.0505	0.0544	-0.0001
14	0.2945	0.3597	0.0771	38	-0.0449	0.0455	-0.0012
15	0.2510	0.3300	0.0648	39	-0.0382	0.0372	0.0009
16	0.2203	0.3105	0.0562	40	-0.0309	0.0302	0.0020
17	0.1910	0.2918	0.0478	41	-0.0236	0.0237	0.0032
18	0.1630	0.2738	0.0401	42	-0.0169	0.0170	0.0045
19	0.1365	0.2565	0.0333	43	-0.0110	0.0118	0.0052
20	0.1116	0.2399	0.0274	44	-0.0059	0.0071	0.0052
21	0.0883	0.2241	0.0223	45	-0.0013	0.0008	0.0014
22	0.0666	0.2089	0.0178	46	0.0003	-0.0033	-0.0036
23	0.0464	0.1944	0.0136	47	0.0008	-0.0052	-0.0057
24	0.0280	0.1805	0.0097				

B.4 Masa modal

Para obtener la masa modal se aplicó la ecuación (B.1) obteniendo la integral con el método de Simpson

$$\tilde{m} = \frac{\int m \cdot \phi(x)^2 dx}{\int \phi(x)^2 dx} \quad (B.1)$$

Donde \tilde{m} es la masa modal m es la masa de cada elemento, $\phi(x)$ es la forma modal.

En la Tabla B.2 se muestran los valores de las masas

Tabla B.2 Masas de las dovelas del puente San Cristóbal

N	m (kg)	N	m (kg)
1	9000	26	40090
2	15400	27	42575
3	13750	28	46800
4	13500	29	46535
5	15400	30	46540
6	12900	31	45470
7	12900	32	44385
8	14100	33	43380
9	14100	34	43380
10	13900	35	42505
11	15150	36	58030
12	17200	37	59185
13	33735	38	59100
14	54525	39	64165
15	41735	40	54050
16	41880	41	95450
17	42705	42	156300
18	42455	43	156300
19	42470	44	152050
20	44965	45	178530
21	46525	46	107700
22	46535	47	29795
23	46795		
24	47610		
25	39545		

Masa modal y

$$\int m \cdot \phi_y(x)^2 dx = 337045.98$$

$$\int \phi_y(x)^2 dx = 20.90$$

$$\tilde{m}_y = \frac{337045.98}{20.90} = 16126.6 \text{ kg/m}$$

Masa modal z

$$\int m \cdot \phi_z(x)^2 dx = 449958.97$$

$$\int \phi_z(x)^2 dx = 24.17$$

$$\tilde{m}_z = \frac{449958.97}{24.17} = 18616.42 \text{ kg/m}$$

B.5 Momento másico de inercia modal

Para el momento másico de inercia se usa el método de Steiner (Franco, 2007) que se muestra en la ecuación B.2

$$I_0 = \sum m_i r_i^2 \quad (\text{B.2})$$

Donde I_0 es el momento másico de inercia, m es la masa del elemento, r es la distancia al centro de masas

Para ello el puente se divide en 13 áreas como se muestra en la Figura B.5

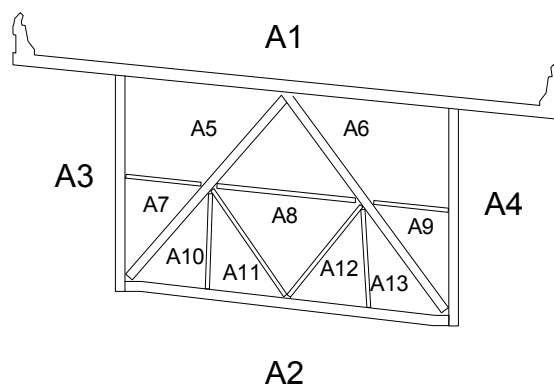


Figura B.5 Áreas asignadas del puente San Cristóbal

En la tabla B.3 se muestra sus masas y coordenadas para el tablero de la Figura B.5.

Tabla B.3 Coordenadas y masas de los elementos del tablero del puente San Cristóbal

Elemento	X (m)	Y (m)	Masa (kg)
A1	8.04	5.79	2602
A2	8.03	0.44	2417
A3	3.78	3.53	1813
A4	12.05	2.70	1973
A5	5.97	3.50	140
A6	9.81	3.12	140
A7	4.97	3.56	10
A8	8.02	3.23	20
A9	11.11	2.92	10
A10	6.06	2.10	13
A11	7.05	2.04	17
A12	8.94	1.89	17
A13	9.94	1.67	13

A partir de la Tabla B.3 se obtiene que el centro de masas es

$$x_c = \frac{\sum mx_i}{\sum m} = \frac{71797.26}{9004.97} = 7.97$$

$$y_c = \frac{\sum mx_i}{\sum m} = \frac{28541.82}{9004.97} = 3.17$$

En la tabla B.4 se muestran las distancias y la multiplicación de las masas por la distancia al cuadrado.

Tabla B.4 Obtención del momento másico de inercia

Elemento	Distancia (m)	$I_0 = (m)(r^2)$ (kg · m ²)
A1	6.87	17876.2
A2	7.45	18013.3
A3	17.71	32117.4
A4	16.84	30203.0
A5	4.12	577.0
A6	3.38	472.7
A7	9.17	91.7
A8	0.01	0.1
A9	9.90	99.0
A10	4.80	64.1
A11	2.13	35.5
A12	2.57	42.9
A13	6.12	81.6
	Σ	99674.4

$$\int m \cdot \phi_{\alpha}(x)^2 dx = 2752501.61$$
$$\int \phi_{\alpha}(x)^2 dx = 17.85$$
$$\tilde{m}_{\alpha} = \frac{2752501.61}{17.85} = 154172.74 \text{ kg-m}^2/\text{m}$$

B.6 Amortiguamiento

En la literatura no existe información del amortiguamiento por lo que se propuso un valor de 0.05 el porcentaje de amortiguamiento crítico para los tres modos.