UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

FACULTAD DE CIENCIAS

MATEMÁTICAS

LA HISTORIA DE LA TRIGONOMETRÍA COMO UNA HERRAMIENTA PARA LA COMPRENSIÓN Y ENSEÑANZA DE LA MISMA A NIVEL MEDIO SUPERIOR.

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

PRESENTA:
IVONNE DE REGULES SILVA

TUTOR PRINCIPAL: DRA. CARMEN MARTÍNEZ ADAME ISAIS
FACULTAD DE CIENCIAS

CDMX, NOVIEMBRE DE 2018.

Investigación realizada en el marco del programa UNAM – PAPIIT IN 403816.

La comprensión matemática.

Contenido

I. INTRODUCCIÓN

La enseñanza de la trigonometría a nivel medio superior sufre una dicotomía que implica un serio obstáculo para los alumnos. Por un lado se acostumbra iniciar con la trigonometría del triángulo, en la que los ángulos se miden en grados y las funciones trigonométricas se definen como las razones entre los lados de un triángulo rectángulo. Por otro lado, está la trigonometría del círculo, en la que los ángulos se miden en radianes y las funciones trigonométricas se expresan en términos de las coordenadas de un punto del círculo unitario con centro en el origen. ¿Acaso es de asombrarse que el alumno se sienta confundido al enfrentar estos dos tan distintos enfoques conceptuales de la trigonometría? Una vez que los alumnos empiezan a utilizar el seno y coseno como ejemplos de funciones periódicas, la trigonometría del círculo domina, pero ya es tradición que la trigonometría del triángulo es la más sencilla y básica y que los estudiantes deben abordarla previo a la introducción de la trigonometría del círculo.

Sin embargo, la historia de la trigonometría apunta exactamente en la dirección opuesta. La trigonometría – la del círculo – surgió cuando los griegos clásicos iniciaron el estudio del cosmos; tardó más de mil años desde los primeros esbozos de la trigonometría con Hiparco, a principios del siglo II antes de nuestra era, para que la trigonometría del triángulo hiciera su aparición. En el trabajo sobre sombras de Al-Khwarizmi, a principios del siglo IX de nuestra era, se observa un énfasis en el triángulo por encima del círculo, pero fue hasta el año 1021 cuando Al-Biruni lo desarrolló formalmente en su *Tratado Sobre las Sombras*. Aun así, el uso de la trigonometría de triángulos, en especial la interpretación de las funciones trigonométricas como las razones entre los lados de un triángulo rectángulo, tuvo su auge hasta el siglo XVI. Y el cambio de énfasis en la enseñanza de la trigonometría del círculo a la del triángulo sucedió hasta mediados o finales del siglo XIX.

El panorama histórico del desarrollo de la trigonometría, que a continuación se presenta, expondrá un sólido argumento para abordar las funciones trigonométricas iniciando desde la perspectiva del círculo.

Tenemos mucho que aprender de la historia; sin embargo tendemos a ignorar la ruta histórica que llevó a nuestros ancestros a descubrir ideas matemáticas importantes. Sería muy acertado iniciar el estudio de la trigonometría imitando a los astrónomos que descubrieron y exploraron las relaciones entre las medidas de arco y medidas de segmentos en un círculo unitario. De esta manera es posible percibir un significado más concreto y comprensible. De ahí, será entonces factible argumentar desde la perspectiva de triángulos semejantes, que dichas funciones también pueden representar razones. Trabajar de manera inversa, es decir, hacer que los alumnos primero memoricen las funciones trigonométricas como razones para después hacer la transición a conceptualizarla como longitudes, es un proceso que conlleva mayor dificultad. En palabras de Henri Poincaré, "La labor del educador es lograr que el espíritu del niño recorra el camino de sus antepasados, moviéndose rápidamente a través de algunas etapas, pero eliminando ninguna. En este sentido, nuestra guía debe ser la historia de las ciencias" (1899, p.160).

Efectivamente, el uso de la historia de las matemáticas como un recurso en su enseñanza es una metodología cada vez más aceptada y difundida en muchas partes del mundo. Esto es evidente en las oportunidades para debatir y discutir el tema que se ofrece en reuniones, conferencias y seminarios dedicados a la enseñanza de las matemáticas. En estos foros se disciernen al menos tres diferentes campos de investigación en este debate: historia de las matemáticas, historia *de* la educación matemática e historia *en* la educación matemática. El presente trabajo se desarrolla alrededor de ésta última ramificación.

En las discusiones y debates entre educadores matemáticos se han establecido una serie de metas para la incorporación de la historia de las matemáticas en su enseñanza, entre las cuales destacan:

- Mostrar el lado humano de las matemáticas, al concebirlas como un producto histórico, social y cultural;
- lograr que el estudiante comprenda los objetivos, valores, conceptos, métodos y demostraciones en las diferentes actividades que involucran a las matemáticas;
- conseguir que los estudiantes adquieran una actitud positiva hacia la práctica de las matemáticas a través de sumergir en un contexto histórico los problemas que en clase se proponen.

Con objeto de alcanzar las metas anteriormente expuestas así como proporcionar fundamentos teóricos y epistemológicos en el uso de la historia en la enseñanza de las matemáticas, investigadores y profesores han explorado diferentes vías. Sin embargo, a pesar de estos esfuerzos, aún existen cuestiones por discutir, entre las que se pueden mencionar:

- ¿Qué propuestas, prácticas, estrategias pedagógicas son relevantes y útiles para el establecimiento exitoso de un diálogo entre la historia de las matemáticas y su enseñanza?
- ¿En qué perspectivas teóricas se basa la integración de la historia a la enseñanza de las matemáticas?
- ¿En qué medida la producción de nuevos textos basados en la historia de las matemáticas puede contribuir a una mejor enseñanza?
- ¿De qué manera pueden las TIC ayudar a promover el diálogo entre historia y educación matemática?

Dado que la enseñanza de la trigonometría está presente en los planes de estudio de los diferentes programas de enseñanza media superior, el presente trabajo pretende reunir suficiente evidencia teórica que respalda la importancia de incorporar la historia en la enseñanza de las matemáticas, así como presentar un panorama histórico del desarrollo de la trigonometría con objeto de discutir algunas de las cuestiones arriba planteadas y hacer ver el potencial que tiene el permitir que la historia permee las matemáticas en el aula.

Con esto en mente, el trabajo está dividido en seis capítulos. El Capítulo II presenta las ideas de algunos teóricos de la educación matemática quienes abogan por la importancia y necesidad de abordar diferentes temas del área de las matemáticas desde su perspectiva histórica, con objeto de que los alumnos le encuentren un sentido y una razón de ser. Desde esta perspectiva se podría revertir la siempre presente pregunta de los alumnos "¿y esto de qué me va a servir?" por una de mayor profundidad y sentido: "¿esto de dónde viene, por qué y para qué surgió en el pensamiento del ser humano?" El Capítulo III presenta al lector un panorama general de la trayectoria histórica de la trigonometría, desde los que pudieran ser sus cimientos en la construcción de las pirámides en el antiguo Egipto hasta llegar a la formalización de una tabla de cuerdas – versión antigua de la actual tabla de senos – desarrollada por Ptolomeo en el periodo alejandrino, en el siglo II de nuestra era. Los Capítulos IV y V exponen con mayor detalle el trabajo de dos matemáticos sobresalientes en este tema: Euclides y Ptolomeo, respectivamente. La elección de estos dos personajes en particular se debe a que su trabajo hace evidente la relación estrecha que existe entre la geometría y la trigonometría, un aspecto que tendemos a olvidar u obviar al trabajar con estos temas en el salón de clases. Se intenta presentar la idea de que al integrar el contexto histórico de la geometría y la trigonometría en la enseñanza proporcionará significado a su aprendizaje. Para finalizar, se presenta una conclusión que aspira a que el lector se convenza que la labor de un profesor de matemáticas va más allá de conocer el programa y el libro de texto con el que trabaja. Que para estar verdaderamente involucrado en el tema que va a enseñar, el profesor debe involucrarse en la historia del mismo.

La visión moderna de habilidad matemática involucra la creatividad, la cual trasciende el concepto más limitado de habilidad técnica. El enfoque que este trabajo presenta propone inspirar a los profesores de matemáticas a reconocer la naturaleza creativa de la investigación matemática y lograr percibir la importancia de las técnicas de indagación, análisis y síntesis del pensamiento matemático a través del estudio de su historia.

II. MARCO TEÓRICO

Ningún tema pierde tanto cuando se le divorcia de su historia como las Matemáticas. E.T. Bell (1985).

a. Breve introducción

Es usual escuchar a las personas decir que las matemáticas “son diferentes”; a los alumnos quejarse de que las clases de matemáticas les parecen eternas y estáticas, en las que se habla de verdades inmutables y que en ellas todo está ya descubierto. Piensan que los matemáticos son seres enigmáticos y misteriosos dedicados a una ciencia fría, extraña, poderosa e incomprensible. Pero, como profesores de matemáticas… ¿acaso fomentamos nosotros esa concepción al dejar a un lado el origen de las Matemáticas y dando la idea, por omisión, de que éstas son atemporales?, o por el contrario ¿hacemos un esfuerzo por incluir en nuestras clases las necesidades y los problemas reales que dieron origen al pensamiento e investigación de nuevos métodos matemáticos desarrollados por personas reales? ¿Acaso mostramos poco interés e incluso un cierto desprecio por la historia de las matemáticas y por sus historiadores, pensando que ésta no es útil, que lo valioso de la matemática antigua ya está incorporado a la ciencia actual y como algo ya superado es mejor olvidarlo? ¿Es posible que la historia de las matemáticas tenga un rol que jugar en la educación matemática? De ser así, ¿cómo se puede integrar al currículo actual, y cuáles son los retos que enfrentan los profesores al incorporar la historia de las matemáticas en la enseñanza? A través de este capítulo se pretende dar algunas ideas de cómo introducir pinceladas de historia en el trabajo diario en el aula, a fin de promover la motivación en los alumnos.

¿Qué podemos decir de las matemáticas? En 1897, Andrew Russ Forsyth pronunció un discurso dirigido a la Asociación Británica para el Mejoramiento de las Ciencias, en el que afirmó: “Matemáticas es una de las ciencias más antiguas; es también una de las más activas; su fortaleza reside en el vigor de la perpetua juventud”. (Moritz, 1914). Esta cita nos da cuenta de una característica particular de las matemáticas, esto es que el pasado, presente y futuro de la materia están íntimamente relacionados entre sí; que las matemáticas son una ciencia acumulativa en el que el pasado está integrado con su presente y futuro.

Si nos enfocamos en la experiencia matemática desde su origen y desarrollo podemos afirmar que ha ayudado al desarrollo de otras ciencias, de las artes, la industria, el comercio, etcétera. A su vez, estas actividades han apoyado el desarrollo de las matemáticas. El pensamiento matemático ha crecido en respuesta a los impulsos y las necesidades de nuestros ancestros, en particular por dominar y comprender el mundo físico que nos rodea. Fue a partir de esta lucha con el medio físico que nuestros ancestros primitivos desarrollaron las primeras y fundamentales ideas de número, cantidad y espacio; difíciles para ellos y ahora conceptos fáciles. Debemos al hombre primitivo y a las civilizaciones antiguas los fundamentos de la aritmética y la geometría.

El pastor que contó sus borregos haciendo marcas en un hueso; comerciantes chinos que desarrollaron un sistema basado en los dedos capaz de expresar números hasta 10,000; el constructor que utilizó un madero del tamaño de su pie como una unidad de medida; el constructor de ruedas que reforzó su rueda con seis puntales del tamaño de un radio cada uno, descubriendo así que el radio de cualquier círculo cabe seis veces alrededor de la circunferencia en forma de cuerdas; el geógrafo y el topógrafo que descubrieron las propiedades de las figuras semejantes en su intento por imaginarse y representar la Tierra. Éstas y muchas otras instancias apuntan a las fuentes de inspiración a las que debemos el conocimiento matemático. Es este factor, el práctico, el que prevalece en muchos descubrimientos de la actualidad.

Otro estímulo que ha contribuido al desarrollo de las matemáticas es el impulso del ser humano por sistematizar y comprender hechos naturales. Como ejemplo se puede pensar en el avance que tuvieron las matemáticas debido al interés de nuestros antepasados por comprender el orden y movimiento de los astros, por calcular sus tamaños y distancias entre ellos, por conocer los ciclos que nos regulan, por comprender nuestro lugar en el espacio.

Se puede también pensar en el factor estético, impulsado por el pensamiento, por una mente inquisidora. Es decir, la idea de estudiar matemáticas por el hecho que se disfruta, por interés, por entretenimiento.

b. Factores que dificultan el aprendizaje de las matemáticas

De acuerdo a Brousseau (1997), existen obstáculos epistemológicos, como una de las características intrínsecas de la enseñanza de las matemáticas. Esto se refiere a que un conocimiento que se utiliza exitosamente para resolver ciertos problemas, puede subsecuentemente convertirse en un obstáculo en el aprendizaje al intentar aplicarlo en otros contextos. Un ejemplo muy sencillo se ve en los algoritmos para realizar operaciones con números naturales, en contraste con los algoritmos de las operaciones con las fracciones. El proceso de aprendizaje se retrasa al encontrarse con el conocimiento que está enraizado en la mente del aprendiz.

Moru et. al. (2008) afirman que la historia de las matemáticas puede utilizarse como fundamento para identificar en los estudiantes dichos obstáculos epistemológicos y así promover fluidez en el aprendizaje. Adicionalmente, afirman que la historia de las matemáticas también puede ayudar al profesor a identificar los conceptos erróneos de los estudiantes; lo que favorecería que el profesor diseñe nuevas y más adecuadas estrategias para beneficiar el aprendizaje en los estudiantes.

Otro factor que obstaculiza el aprendizaje de las matemáticas, de acuerdo con Selden (2001) es la interpretación errónea que los estudiantes derivan del lenguaje matemático, incluyendo sus definiciones y símbolos. Tall y Vinner (1981) utilizan los términos *definición del concepto* para referirse a la definición matemática formal del concepto, e *imagen del concepto* para referirse a la interpretación que el estudiante tiene del concepto. Es muy común que la imagen del concepto no corresponda a la definición del concepto, aunque éste último esté claramente establecido en la literatura. De acuerdo con Brown (1994), los estudiantes interpretan el lenguaje matemático con base en sus experiencias del salón de clases. Es común que durante la enseñanza el profesor utilice una versión simplificada de los conceptos, lo que puede traer como consecuencia disparidad entre la imagen del concepto y la definición del concepto (Freudenthal, 1991). Al respecto, Furinghetti (2007) comenta que el significado formal de los conceptos matemáticos se pierde por la reconstrucción y sobre-simplificación que sufren en los libros de texto y en manos de los profesores. Según Tall (1991), matemáticos y profesores tienden a dividir los conceptos matemáticos en partes más pequeñas y organizarlas en secuencias que les parecen lógicas con objeto de hacerlos más comprensibles. Sin embargo, los estudiantes pueden no ser capaces de ligar dichas partes con objeto de reconstruir el concepto del cual se partió. De ahí que esta "reconstrucción del conocimiento" puede resultar en confusiones para el alumno.

Otra consecuencia que resulta de la sobre-simplificación de los conceptos matemáticos, de acuerdo con Lingard (2001), es que da a los estudiantes una percepción de las matemáticas como una "materia muerta", en la que ya no existe nada por ser descubierto. A este respecto Schwartz, Michal y Myles (1985) comentan:

> Hay algo extraño en la forma en la que enseñamos matemáticas en las escuelas. Damos pocas o ninguna oportunidad para que los alumnos jueguen un papel activo y participativo en su aprendizaje; enseñamos matemáticas como si esperáramos que los alumnos no fueran capaces de inventar matemáticas nuevas.

Matemáticos como Lakatos (1976) y Tymoczko (1986) son partidarios de tomar una perspectiva de "falibilidad" en la enseñanza de las matemáticas. Dicha perspectiva se refiere a que las matemáticas no deben enseñarse como un cuerpo rígido de conocimiento, absoluto y siempre correcto, sin lugar para contribuciones por parte de los alumnos. Es importante que los estudiantes sientan que pueden contribuir al desarrollo del conocimiento matemático, y que aprecien el valor que éste tiene en su vida.

c. ¿Por qué conviene integrar la historia de las matemáticas en su enseñanza?

David Smith (1921) pronunció su discurso *Religio Mathematici*, ante la Asociación Matemática de América, en el que claramente se propone a favor de la integración de la historia en la enseñanza de las matemáticas.

> Las matemáticas incrementan la fe del hombre que tiene fe; le muestra su naturaleza finita en relación a lo Infinito; lo pone en contacto con la inmortalidad en la forma de leyes matemáticas que son eternas; y le muestra la futilidad de mostrar su arrogancia infantil de incredulidad hacia lo que no puede ver… Debemos enseñar la ciencia no solamente por su técnica; no solamente por este u otro pequeño grupo de leyes; no solamente como un cuerpo de proposiciones desligadas o para un examen establecido por las escuelas; debemos enseñarla primordialmente por la belleza de la disciplina, por la "música de las esferas", y por la fe que le da en la verdad, en la ley eterna, en el infinito, y en la realidad de lo imaginario; y por la sensación de humildad que resulta de nuestra comparación entre las leyes a nuestro alcance y aquéllas que se obtienen del dominio transfinito.
>
> Con un espíritu como éste de guía, ¡vaya profesores que seríamos!

Es evidente que la inspiración para enseñar y aprender matemáticas debe provenir de su utilidad y del papel que juega en el desarrollo de las sociedades. Cualquier avance dentro de una sociedad está estrechamente ligado a la evolución de los progresos en matemáticas. La historia de las matemáticas da significado al mundo, asocia las matemáticas con los grupos de personas y sus necesidades, humaniza la disciplina, ayuda a eliminar el misticismo que la envuelve. Recordemos que las matemáticas no son magia, son el resultado de 10,000 años de pensamiento del ser humano, de errores y dudas, de lucha por encontrar soluciones a los problemas, son muestra de la tenacidad del hombre. Su enseñanza debe reconocer estas cualidades a través de incorporar la historia de las matemáticas como parte fundamental de su aprendizaje.

A través de la historia el ser humano ha logrado recopilar un registro muy extenso de útiles métodos para calcular, técnicas de resolución de problemas, herramientas de medición, problemas lógicos y demostraciones. Sin embargo, es poco común observar en un salón de clases un uso práctico de las fracciones de los babilonios, o el algoritmo de Euclides para calcular el máximo común divisor sin llevar a cabo la descomposición en primos. Ejemplos como éstos, que dan pauta de los extraordinarios logros en matemáticas, podrían ser invaluables para alentar a los estudiantes a que sientan aprecio o curiosidad por las matemáticas, así como demostrar cómo la historia de las matemáticas puede proporcionar experiencias enriquecedoras para lograr comprender el desarrollo de los conceptos matemáticos, sus conexiones y la forma en la que están inter-relacionados.

Existen artículos derivados de investigaciones (e.g., Swetz, 1994, Swetz et al 1995, Siu, 2004; Weng Kin, 2008) que argumentan que incorporar la historia de las matemáticas a la enseñanza proporciona oportunidades para encontrar las raíces y trazar el desarrollo de la humanidad, el desarrollo de las civilizaciones, y puede ser determinante para que los alumnos perciban de una forma diferente el poder de las matemáticas.

R. Wilder, en su libro publicado en 1968, afirma que las matemáticas son un fenómeno cultural y que el aprendizaje de las matemáticas en la escuela puede ser significativo si se estudia la relevancia cultural de ellas, el papel de la evolución de conceptos matemáticos y de descubrimientos científicos. Inclusive se podría afirmar que al enseñar matemáticas separada de su historia mostramos una cara poco interesante de ésta, además de que privamos a los alumnos de conocer la riqueza cultural desarrollada a través de los siglos.

Seguir el rastro del desarrollo intelectual de la humanidad a través de aprender acerca de la evolución de algunos conceptos matemáticos permitirá a los alumnos relacionar con los extraordinarios personajes que contribuyeron al desarrollo de la estructura y lenguaje de las matemáticas con los conceptos que deben aprender en la escuela. Panasuk (2013) afirma que si los alumnos perciben las matemáticas como un conjunto de temas aislados sin antecedentes históricos o sin una aproximación a su relevancia histórica, es muy probable que fracasen en encontrar las conexiones de los temas dentro de las matemáticas y en su relación con otras ciencias. A su vez, Krathwohl, Bloom y Masia (1973) argumentan que cuando los alumnos se enfrentan a diferentes experiencias relacionadas con los aspectos culturales e históricos de la evolución de las matemáticas, están en la posibilidad de desarrollar un gusto y apreciación por ellas y por su papel en el desarrollo de nuestra sociedad. Esto podría sentar las bases para el aprendizaje. Conocer las vicisitudes por las que pasó la humanidad para definir, comprender y aceptar conceptos matemáticos puede beneficiar al alumno al darse cuenta que inclusive los matemáticos más brillantes también tuvieron que batallar en el camino de su aprendizaje. Integrar la historia de las matemáticas a la enseñanza puede ser un factor para que los alumnos se sientan con más confianza al percatarse que los grandes matemáticos no encontraron las respuestas de manera inmediata, y que cometer errores, dudar, "presentar argumentos intuitivos y controversiales, buscar formas alternativas de resolver problemas son estrategias legítimas y una parte integral de hacer matemáticas" (Tzanakis & Arcavi, 2000, p. 205.)

Enfocar las matemáticas como una herramienta útil, servirse de ellas simplemente para realizar cálculos y obtener respuestas correctas limita su valor y relevancia. Dada la situación actual de la educación matemática, en la que se evidencia la necesidad de una mejoría tanto en su enseñanza como en logros por parte de los alumnos, ¿por qué no incluir su historia, presentarla como un cuerpo dinámico de conocimientos cuyo origen se remonta a miles de años? Las matemáticas no son algo que un individuo conoce o sabe, son parte de una cultura, es un conocimiento colectivo. Son una actividad humana, con innumerables conceptos y teorías, con obstáculos en la búsqueda por solucionar problemas. Proporciona rigor, lógica de pensamiento, conocimiento de ideologías, métodos y relaciones con otras disciplinas.

Heppel (1893), en la conferencia que dio a la *Asociación para el Mejoramiento de la Enseñanza de Geometría,* afirma que la historia de las matemáticas ayuda, pues "muestra al alumno cómo el progreso en la aritmética, geometría, álgebra y trigonometría que está aprendiendo da respuesta a las necesidades que el hombre ha sentido y los deseos que ha formado."

Expone tres restricciones o limitaciones que se deben tomar en cuenta en la enseñanza:

a. La historia de las matemáticas no debe ser una materia separada, debe verse como un auxiliar y estar subordinada a la enseñanza de las matemáticas.
b. Trabajar solamente las partes que apoyen el aprendizaje.
c. No debe ser materia de examen.

Para responder la gran pregunta "¿de qué maneras la historia permite que las matemáticas sean más fáciles de comprender, más claras o más interesantes?, Heppel comenta que la historia "proporciona una vista estereoscópica en lugar de sólo dibujos y diagramas", lo que nos permite ver un tema desde diferentes perspectivas. Posteriormente agrega que es a través de la historia que las diferentes líneas de pensamiento alrededor de un concepto pueden ayudar a comprender mejor dicho concepto. Otro beneficio es que la historia contrasta con la usual noción de que las matemáticas son aburridas, "si se recupera el valor cultural de las matemáticas se puede encontrar que están vivas, llenas de interés, que apelan a la imaginación y al intelecto y que tiene una poesía propia".

Siu (1997) argumenta que efectivamente utilizar historia de las matemáticas en el salón de clases no necesariamente implica que los estudiantes lograrán mejores calificaciones en la materia, sin embargo, puede ayudar a que el aprendizaje de las matemáticas sea una experiencia significativa y enriquecedora, de tal manera que en el aprendizaje se logre una mayor profundidad. Podría inclusive ayudar al profesor a ser más reflexivo, menos dogmático, más ávido de aprender y de buscar diferentes estrategias de enseñanza.

Incluso en el área del arte literario podemos encontrar argumentos en defensa de la incorporación de la historia de las diferentes disciplinas en la enseñanza. Julio Cortázar nos invita a tener una visión más exhaustiva del conocimiento:

> Creo que el novelista que sólo vive en un campo de novelas, o el poeta que sólo vive en un campo de poesía, tal vez no sean grandes novelistas ni grandes poetas. Creo en la necesidad de la apertura más amplia. En el fondo mi gran parangón, mi gran ejemplo ideal en este caso es alguien como Leonardo Da Vinci, es decir, un Leonardo que se interesa por la conducta de una hormiga que circula en una pared y cuyos movimientos le preocupan porque no los comprende, y que dos minutos después está en condiciones de elaborar una teoría estética basada en altas matemáticas, en nociones de perspectiva, etcétera. Yo no soy Leonardo, mi plano es muchísimo más modesto, pero Rayuela era un intento de visión leonardesca. Es decir, esa nostalgia que fue la gran nostalgia, el gran deseo del Renacimiento: una especie de mirada universal que todo lo comprendiera. Yo no comprendo nada, pero el deseo está ahí y la intención también. (Cortázar, 1995, p. 94)

Asimismo, una cita de Niels Henrik Abel (1802-1829) nos invita a reflexionar: *It appears to me that if one wants to make progress in mathematics one should study the masters*. (Me parece que si uno quiere progresar en matemáticas debe estudiar a los maestros. Nota al margen de uno de sus cuadernos (ca.1826), citado por Øystein Ore, *Niels Henrik Abel: Mathematician Extraordinary* (1957)).

El abordar problemas que ocuparon la mente del ser humano en la antigüedad, presenta una oportunidad tanto para el maestro como para los alumnos de comprender la motivación que respalda el origen y desarrollo de los conceptos y procedimientos matemáticos. De hecho, la belleza de un problema no reside solamente en su contenido matemático, más bien proviene de las razones por las que dicho problema surgió. (Tzanakis & Thomaidis, 2000). Los estudiantes pueden considerar más atractivo el trabajo con problemas de la antigüedad que dieron pie al desarrollo matemático que realizar los ejercicios de repaso que encuentran en sus cuadernos de trabajo (Simonson, 2000).

La principal tesis epistemológica y filosófica que respalda el *por qué* utilizar la historia en la enseñanza de las matemáticas presentada por la International Commission on Mathematical Instruction (ICMI), expone que los productos "terminados" de la actividad matemática corresponden solamente a los aspectos del conocimiento matemático que pueden ser comunicados, criticados y sirven como base para nuevas investigaciones. Sin embargo, desde el punto de vista didáctico, el proceso que involucra “hacer matemáticas” es un aspecto de igual importancia, que incluye comprender las motivaciones atrás de los problemas y preguntas, el proceso reflexivo dirigido a la construcción del significado al relacionar el conocimiento antiguo con el nuevo, y al extender y enriquecer marcos de referencia conceptuales existentes.

> Aquí encontramos el factor obvio, pero vital, en favor de los elementos históricos…cualquier matemática que queramos aprender, tiene raíces y motivaciones históricas y por lo tanto características importantes y posiblemente esenciales, resultado de sus antecedentes históricos… En otras palabras, la distinción entre ‘matemáticas’ e ‘historia de las matemáticas’ es en principio falsa: sólo existen problemas matemáticos que tienen una historia… (Grattan-Guinness, 1973, p. 446).

Por lo tanto, el argumento central y recursivo para integrar historia a la enseñanza de las matemáticas es que éstas se deben concebir no sólo como un sistema estructurado y rígido de resultados lógicos, claros y consistentes, sino como un proceso intelectual del ser humano, multifacético, que evoluciona continuamente, y que tiene relación con otras ciencias, la cultura y la sociedad.

Laubenbacher y Pengelley (1996) argumentan que se despierta una emoción muy especial en los alumnos cuando se les da la oportunidad de leer de primera mano un descubrimiento del pasado. Los textos originales, o en su defecto – en caso de que éstos se encuentren en un idioma no comprensible para los alumnos – una mirada a los procedimientos utilizados por sus creadores, puede contribuir a enriquecer la comprensión del papel que jugó el entorno cultural y matemático para que se descubrieran nuevas ideas. Estos mismos autores afirman que a través de una cuidadosa selección de las fuentes se permite a los alumnos apreciar los avances inmediatos y a largo plazo en cuanto a la claridad, elegancia y sofisticación de conceptos, técnicas y notación, así como ver cómo antiguos paradigmas en ocasiones impedían el progreso, hasta que un nuevo descubrimiento llegara a impulsar el conocimiento hacia una nueva era. Adicionalmente, este método permite visualizar con claridad la evolución del rigor y la abstracción matemática.

Laubenbacher y Pengelley (1996) agregan que a través de este enfoque se logra una percepción de las matemáticas dramáticamente diferente que la que obtienen los alumnos a través de cursos tradicionales. Pueden ellos llegar a visualizar a las matemáticas como un quehacer humano que evoluciona, a percibir las teorías como el resultado de genios batallando con los misterios del universo matemático, en lugar de un edificio des-motivante, osificado de axiomas y teoremas heredados, sin ninguna intervención del ser humano.

> Si las matemáticas se ven como una de las muchas formas de conocimiento, o inclusive como una forma de manifestación cultural o de actividad humana, entonces la historia de la disciplina será significativa y el estudio de su historia será un medio para comprender mejor las relaciones entre la humanidad y su conocimiento matemático, dentro de un contexto cultural (Silva y Araujo, 2001, p. 19–20).

En resumen, se podrían enunciar los siguientes objetivos que resultarían de incorporar la historia de las matemáticas en su enseñanza:

- Desarrollar en los estudiantes una actitud positiva hacia las matemáticas.
- Ayudar a los estudiantes a reconocer las interrelaciones entre diferentes conceptos a los que se enfrentan, logrando así una visión más integral de la disciplina.
- Pugnar porque el aprendizaje de las matemáticas sea significativo y de mayor profundidad.
- Despertar la curiosidad en los estudiantes.

d. ¿Cómo hacemos para integrar la historia?

La forma en la que se publican las ideas matemáticas en los libros de texto no corresponde a la cronología en la que se desarrollaron. Por lo general están reorganizadas de manera que cumple con los programas de las diferentes instituciones, y aunque es posible que dicha reorganización corresponda a una forma más clara y concisa de presentar la asignatura, por lo general resulta en una lista de conceptos, métodos y demostraciones sin cohesión ni coherencia. Sin embargo, echar una mirada retrospectiva a los aspectos básicos del desarrollo histórico e incorporarlos a la enseñanza puede desempeñar un rol importante al ayudar a revelar el significado de las matemáticas cuando éstas se presentan por primera vez a los alumnos. De esta manera sería posible presentar la asignatura de manera más natural, manteniéndola libre de 'vacíos' o de omisiones.

A continuación se mencionan algunas orientaciones didácticas que podrían beneficiar a la enseñanza de las matemáticas al utilizar una perspectiva histórica.

- Identificar motivaciones. Al incorporar preguntas y problemas que en el pasado sirvieron de paradigmas para desarrollar nuevas ideas, conceptos y métodos, puede ayudar a visualizar la razón fundamental por la que dicho desarrollo tuvo lugar.
- Toma de conciencia de dificultades y obstáculos. Al estudiar argumentos históricos relacionados con el material que el profesor pretende enseñar, puede contribuir a identificar las dificultades y obstáculos a los que históricamente se enfrentó el ser humano en forma análoga a lo que los estudiantes sienten y piensan. Este proceso puede conducir a un diseño de estrategias de enseñanza e implementación más apropiadas.
- Proceso creativo de *hacer matemáticas*. Tanto profesores como alumnos pueden involucrarse en el proceso de 'hacer matemáticas' a través de abordar preguntas y problemas en un contexto histórico. Se puede enfocar a través de resolver los problemas del pasado; a través de conectar dichos problemas con otros, con objeto de lograr una comprensión más profunda de las matemáticas involucradas y su evolución; a través de comprender los aspectos meta-matemáticos inherentes en los problemas que conduzcan a una mejor comprensión de la naturaleza de las matemáticas.
- Enriquecer el repertorio didáctico. La historia de las matemáticas constituye un camino que puede enriquecer el repertorio didáctico del profesor para incrementar sus habilidades para explicar, así como proveerle de formas para

abordar y comprender diferentes aspectos en matemáticas y acerca de matemáticas.

Adicionalmente se exponen una serie de sugerencias de formas en las que se puede incorporar la historia de las matemáticas que podrían resultar útiles en su enseñanza.

- Libros de texto de matemáticas permeados de historia, de manera implícita.
- Proyectos de investigación utilizando como base documentos originales.
- Hojas de trabajo, basadas en textos originales, con una serie de preguntas para introducir un tema nuevo; una serie de problemas, cuestiones a discutir, o un conjunto de ejercicios que propicien el dominio de procedimientos o enfocados a consolidar un tema.
- Extractos de documentos originales, con anotaciones, que sirvan como introducción a un tema, que ayude al estudiante a comprender mejor el contenido matemático, tanto en su forma moderna como en su contexto original.
- "Paquetes históricos", es decir una colección de materiales, lista para que el profesor la utilice en su salón, enfocándose en un tema en específico.
- Materiales didácticos cuyo objetivo sería clarificar los errores de los alumnos, concepciones alternativas, algún cambio de perspectiva, revisar suposiciones implícitas, argumentos intuitivos, como apoyo al aprendizaje y enseñanza de diferentes temas de matemáticas.
- Ejemplos de aspectos históricos que aún no han sido resueltos, que revelan el carácter evolutivo de las matemáticas y pueden captar el interés del alumno.

Sierpinska (1996) identificó cuatro diferentes maneras de visualizar el estudio y uso de la historia de las matemáticas, a las que llamó *historiador, epistemólogo, educador I, educador II*. De manera sucinta, el historiador se ocupa de saber cuándo y cómo ocurrieron los procesos matemáticos. Ellos perciben la historia de las matemáticas como una disciplina *per se,* su enfoque es asegurarse que se conozcan con precisión los hechos matemáticos presentados en el salón de clases. El epistemólogo enfoca su atención tanto en la naturaleza del conocimiento en matemáticas como en la forma en la que los estudiantes aprenden matemáticas; por lo tanto, se enfocan en la génesis psicológica de las ideas y desarrollos matemáticos. En cuanto a los educadores, ambos tipos se enfocan en la importancia de ideas matemáticas históricas en la enseñanza de las matemáticas. Los educadores del tipo I, se enfocan en el uso de la historia de las matemáticas como una herramienta para diseñar actividades de tal manera que los conceptos matemáticos se introduzcan dentro de contextos significativos. Los educadores del tipo II buscan "lo que realmente es pertinente para lograr la comprensión de un cierto concepto, método o teoría matemática, y cuál es la verdadera naturaleza de las dificultades de los alumnos" (Sierpinska, 1996 p. 295).

Por otro lado, Fulvia Furinghetti (1997) realizó diferentes estudios, mediante los cuales sugiere dos vertientes para integrar la historia de las matemáticas dentro del salón de clases. Una de ellas tiene como objetivo promover matemáticas y la otra la reflexión acerca de matemáticas. Propone un modelo que consiste de cinco fases: (1) conocer las fuentes; (2) seleccionar los temas adecuados para el grupo; (3) analizar las necesidades del grupo; (4) planear las actividades, tomando en cuenta los medios con los que se cuenta, los objetivos y el contexto de la actividad; (5) realizar el proyecto; y (6) evaluar la actividad.

Laubenbacher y Pengelley (1996*)* informan que, tras haber utilizado el método tradicional expositivo, les resultó sumamente eficiente el combinar dos recursos pedagógicos: el "método del descubrimiento" y el registro escrito del proceso. Con el método del descubrimiento se espera que los alumnos 'descubran' las matemáticas por su cuenta. Así, la metodología descrita por Laubenbacher y Pengelley consistió en presentar la actividad basada en una fuente original, proporcionar su contexto histórico y matemático, hacer algunas aclaraciones que facilitaran el trabajo a los alumnos y exhortarlos a trabajar en parejas, permaneciendo alertas a las preguntas que pudieran surgir del trabajo. Para finalizar la sesión organizaron discusiones grupales en las que todos los alumnos compartían sus hallazgos y aclaraban dudas que aún quedaban. Los autores reportan que con este método lograron despertar un gran entusiasmo en los alumnos y una genuina sensación de descubrimiento. Adicionalmente se percataron que los alumnos alcanzaban una comprensión a profundidad del material trabajado, cosa que con el método tradicional no se lograba.

En su libro *Learning Activities from the History of Mathematics,* Katz (1994) enlista cinco estrategias que se pueden explorar.

1. Selección de la vida y obras de personajes matemáticos.
2. Obtención de información acerca del origen y significado de términos y símbolos matemáticos.
3. Asignación de problemas clásicos o históricos, indicando su origen o por qué resulta significativo.
4. Realización de actividades basándose en problemas o descubrimientos históricos.
5. Uso de películas o videos basados en sucesos históricos.

e. En materia de Trigonometría

Katz (1986), propone la siguiente práctica en el uso de las funciones trigonométricas. Inicia a partir del modelo histórico que resulta interesante y relevante trabajar con él, es decir el modelo griego del universo, el cual estaba representado por dos esferas: la esfera de la Tierra y la esfera de los cielos, ésta última girando diariamente alrededor de la primera. Dado que el avance en la astronomía sentó las bases para el desarrollo de las matemáticas, resulta importante discutir a detalle las ideas detrás de este modelo. Algunos de los conceptos en los que uno se puede enfocar incluyen la idea de un sistema de coordenadas, tanto en la Tierra como en el Universo, así como los métodos para medir tiempo, arcos, ángulos, distancias, etcétera.

Se puede partir de las fórmulas básicas para resolver triángulos rectángulos esféricos (ver Figura 1), entre las que se encuentran:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\operatorname{sen}a}{\operatorname{sen}c} \quad \cos\alpha = \frac{\tan b}{\tan c} \quad \tan\alpha = \frac{\tan a}{\operatorname{sen}b} \quad \cos c = \cos a \cdot \cos b.$$

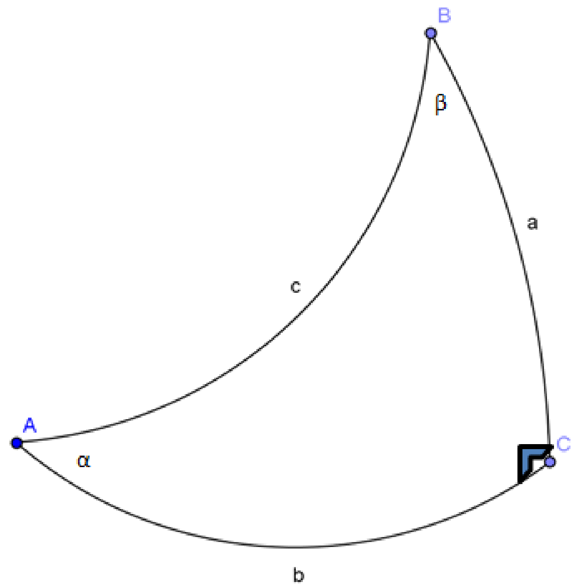

Figura 1. Triángulo rectángulo esférico.

Habiendo comprendido el diagrama básico del universo, conociendo las fórmulas anteriores, existen una variedad de problemas interesante que los estudiantes podrían abordar. Por ejemplo, en la Figura 2, H es el punto en el que el Sol cruza el horizonte en cierto día, E es el punto este en el horizonte, V es el punto vernal. Para propósitos de este ejercicio, λ corresponde al número de días después del equinoccio de primavera. Adicionalmente, φ indica la latitud de nuestra ubicación, por lo que $\angle HEC = 90 - \varphi$, y ∂ es la declinación del Sol (qué tan al norte o al sur se encuentra del ecuador celestial, es decir la proyección del ecuador terrestre en el cielo). Así, se podría pedir a los alumnos que calcularan la hora de la salida y puesta del Sol en determinados días en ciertos lugares de la Tierra, también pueden calcular los días en los que se puede observar el Sol de medianoche en latitudes mayores a los 66½°, o cuando el Sol está directamente arriba en latitudes menores a los 23½°. Estos contextos proporcionan una práctica en el uso de las funciones trigonométricas, situaciones que pueden resultar más estimulantes para los alumnos en lugar de pedirles que resuelvan los típicos problemas de triángulos de la trigonometría plana.

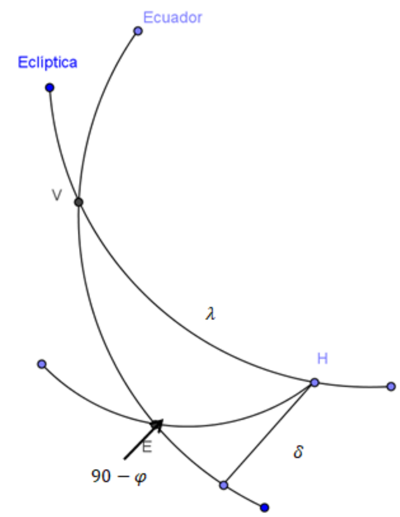

Figura 2. Diagrama que ilustra el cálculo de la salida y puesta del Sol.

Algunas otras ideas de cómo se puede incorporar la historia en la enseñanza de la trigonometría serían:

De los periodos helenístico y alejandrino, analizar el trabajo de Hiparco en relación a su curiosidad por encontrar si existe una relación entre la medida de un ángulo central y la medida de su cuerda, lo que ahora denominamos el seno del ángulo.

Explorar y reproducir los métodos para calcular las tablas de cuerdas, investigar en dónde y cómo inició la notación de trigonometría, indagar cuándo aparecieron las primeras definiciones y teoremas, encontrar las relaciones entre la trigonometría y la geometría, o entre la trigonometría y la astronomía.

Enfocarse en el razonamiento matemático de las demostraciones con objeto de analizar textos históricos.

Estudiar el Almagesto de Ptolomeo, el cual incluye un trabajo sistemático de cálculos para determinar las medidas de cuerdas de ángulos centrales, que corresponden a los lados de polígonos regulares inscritos; trabajo fundamental en el desarrollo de la trigonometría.

La implementación de la actividad puede consistir en una breve presentación del personaje y su época, seguido de su trabajo en la historia de la trigonometría, análisis de cuáles eran los objetivos del autor, para posteriormente guiar a los estudiantes a que traten de comprender el procedimiento y razonamiento atrás del trabajo del autor, que puede proporcionar nuevas ideas y perspectivas matemáticas.

III. HISTORIA DE LA TRIGONOMETRÍA

a. Breve contexto histórico

Lugar y tiempo: unos dos mil años antes de nuestra era, en la zona de la costa norte del continente africano. Ahí se revelan los primeros vestigios de lo que ahora se conoce como trigonometría; en el antiguo Egipto, en donde los arquitectos de las monumentales pirámides se enfrentaron con la necesidad de encontrar la relación entre la medida de los lados de un triángulo y la medida de sus ángulos, conocimiento determinante para poder calcular la pendiente de aquellos muros que tanta admiración causan a todo visitante de esa región. Al construir las pirámides fue esencial mantener una pendiente uniforme en todas sus caras, propósito que llevó a los egipcios a desarrollar lo que sería el equivalente a la cotangente del ángulo. Actualmente acostumbramos medir la pendiente de una línea recta a través de la razón entre el peralte (distancia vertical) y la huella (distancia horizontal). En Egipto acostumbraban utilizar el recíproco de dicha razón. Manejaban el concepto "seqt", para indicar la inclinación de los muros; esto es, el "seqt" de la cara de una pirámide se refería a la razón entre la distancia horizontal y la distancia vertical de ésta.

Un complemento a los hallazgos antes descritos lo caracteriza el Papiro Rhind – documento invaluable de un escriba egipcio (de alrededor de 1650 a. C.) –, en el que se presenta una especie de trivia matemática con problemas y sus soluciones para calcular medidas que también involucran triángulos. Por ejemplo, en el Problema 56 se pide calcular el "seqt" de una pirámide que mide 250 *codos* de altura, con una base cuadrada cuyo lado mide 360 *codos*. Dicho problema da la pauta de un ejercicio menos empírico y más enfocado a una forma primitiva de análisis numérico.

Un cambio de tiempo y espacio, en dirección a la zona Egea, cuna de la civilización del ingenio griego. Lo habitual es voltear la mirada hacia las obras maestras de la literatura, el arte y la arquitectura con su característica fama de belleza, verdad, libertad y humanismo. Sin embargo el griego, en su insaciable deseo por conocer el sentido y significado de todo en el universo, así como darle una explicación racional, fue conducido naturalmente hacia el desarrollo de las matemáticas, al razonamiento y la lógica.

El surgimiento de la matemática griega coincide en tiempo con el florecimiento de la civilización griega del siglo VI a. de C. A partir de sus más modestos inicios con los pitagóricos, la teoría de números y la geometría se desarrollaron a pasos agigantados, alcanzando su cenit con el trabajo de los grandes geómetras de la antigüedad – Euclides, Arquímedes y Apolonio. En lo sucesivo hubo descubrimientos de personajes como Ptolomeo, Pappus, Diofanto, quienes obtuvieron logros memorables. Fue entre los años 350 a 200 a. de C. cuando hubo la mayor producción de las matemáticas griegas.

La Grecia alejandrina contó con personajes ilustres, tal como lo fue Aristóteles, posiblemente el mejor representante de este perfil griego, quien no podía concebir nada más estético que los objetos matemáticos. Platón disfrutaba de la geometría y las maravillas de los números; Euclides… de Euclides se hablará en su debido momento así como de Ptolomeo, como se verá en breve.

Los griegos reunieron y transformaron una colección de reglas de cálculo empíricas en una unidad ordenada y sistemática, e hicieron de las matemáticas una disciplina. Evidentemente herederos de un cúmulo de conocimientos del oriente, los griegos moldearon una matemática más profunda, más abstracta, libre del uso cotidiano, y más racional que cualquiera de sus predecesores. Mientras que en Egipto y Mesopotamia las matemáticas fueron utilizadas principalmente como una herramienta, ya sea para aplicaciones prácticas o como parte de una educación de algunos escribas privilegiados, las matemáticas griegas eran una asignatura de carácter intelectual. Su interés no residía en, digamos, un campo triangular, más bien en el triángulo en sí y las características de dicha “triangularidad”. Si hay tanto de los griegos en las matemáticas, resulta indiscutible compenetrarnos en su historia en busca de los orígenes más formales de la trigonometría.

b. Aportaciones griegas

Efectivamente, al hacer un recorrido histórico de las raíces de la trigonometría, uno descubre que sus cimientos y gran parte de su contenido son de origen griego. Fueron los antiguos griegos quienes voltearon al firmamento y tuvieron la curiosidad de calcular las distancias entre las estrellas, así como aquéllas que requerían para surcar el mar y recorrer la tierra, conocimiento que constituyen los cimientos de la trigonometría – esto es, la medición a través de triángulos. Los griegos dieron los primeros pasos en este terreno, establecieron sus principios, dieron origen a su terminología, la transformaron en una ciencia ordenada, la vieron nacer para un fin para ellos crítico: resolver los enigmas que los cielos les planteaban. De ahí que la astronomía fuera la fuerza que impulsó los avances en esta área. Concretamente, se puede afirmar que la trigonometría es una ciencia griega, enriquecida por otras culturas y personajes con aportaciones posteriores.

Basándose en el trabajo de los egipcios, los griegos desarrollaron un estudio sistemático de las propiedades y relación entre el ángulo central de un círculo y la medida de su cuerda resultante. En el libro II de *Los Elementos*, obra maestra de Euclides (325 – 260 a. C.), las Proposiciones 12 y 13 son muy significativas ya que esbozan el interés por la trigonometría que en breve habría de florecer en Grecia. Dichas proposiciones abordan desde una perspectiva geométrica, no trigonométrica, lo que ahora se conoce como la ley de los cosenos, la primera para triángulos obtusos y la segunda para triángulos agudos del plano.

El tratado de Aristarco (315 – 225 a. C.) *Relativo a los tamaños y Distancias del Sol y la Luna* presenta evidencia de un acercamiento a problemas específicamente trigonométricos (Neugebauer, 1975). En dicho tratado Aristarco asumió que la Tierra está en el centro de una esfera alrededor de la cual gira la Luna, y que cuando hay media luna se puede ver la orilla de la sombra directamente desde la Tierra. Aristarco calculó que el ángulo formado entre la Luna y el Sol tiene una amplitud de 87° (actualmente se estima que es de alrededor de 89°). (Figura 3).

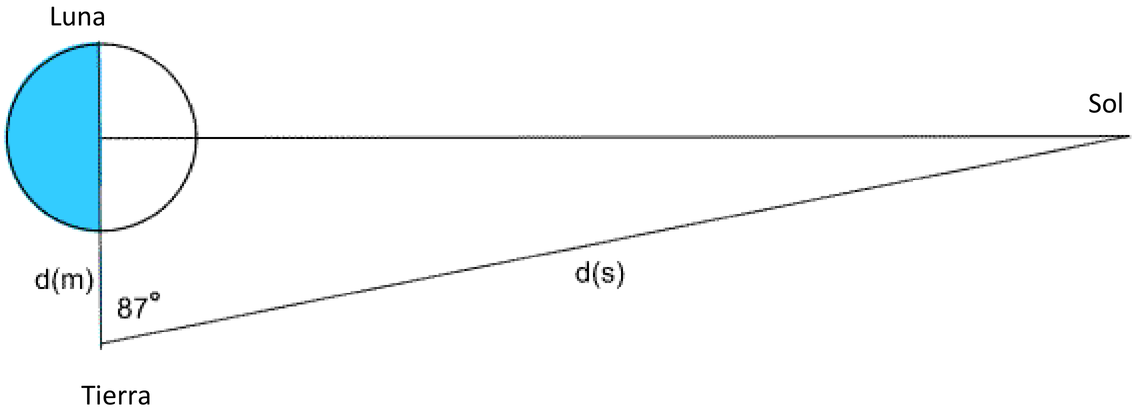

Figura 3. Diagrama de Aristarco para calcular el diámetro de la Luna.

Calculó el tiempo que tarda un eclipse, y así estimó que el diámetro de la Tierra equivale a dos diámetros de la Luna (que en realidad es cerca de tres veces). Debido a que en ese tiempo las tablas trigonométricas aún no se desarrollaban, Aristarco utilizó como recurso un teorema conocido en su época, el cual actualmente se expresaría en forma de la siguiente desigualdad:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\tan\alpha}{\tan\beta} \text{ para los ángulos } 0° < \beta < \alpha < 90°.$$

De ahí llegó a la conclusión que $\frac{1}{20} < \frac{d(m)}{d(s)} < \frac{1}{18}$, desde donde pudo afirmar que la distancia entre la Tierra y el Sol es más de dieciocho veces, pero menos de veinte veces, la distancia de la Tierra a la Luna. Este dato no se aproxima mucho a los datos que se conocen actualmente, que es más bien cerca de 400 veces, sin embargo, el método utilizado por Aristarco es impecable puesto que su error se deriva de una imprecisión en la medición del ángulo LTS = 87° (cuando en realidad tiene una amplitud de 89° 50') y no un error de procedimiento ni conceptual. Su estimación fue utilizada durante los siguientes 2000 años. En la actualidad esto simplemente implica el cálculo de $\cos 87° = \operatorname{sen} 3°$, sin embargo, las razones seno y coseno surgieron hasta muchos años después.

Los matemáticos griegos estudiaron las relaciones entre rectas y círculos durante cerca de dos siglos y medio, desde Hipócrates hasta Eratóstenes, con aplicaciones a problemas de astronomía, sin embargo, no lograron sistematizar la trigonometría. Se tiene evidencia que tanto Arquímedes (287 – 212 a. C.) como Apolonio (279 – 185 a. C.) se aventuraron en el terreno de los triángulos. Sin embargo, las figuras más sobresalientes de la Grecia antigua de quienes se conoce trabajo escrito relacionado con elementos trigonométricos fueron Hiparco (180 – 125 a. C.), Menelao (70 – 130 d. C) y Ptolomeo (100 – 170 d. C.)

En la segunda mitad del siglo II a. C. apareció la primera tabla trigonométrica, aparentemente compilada por Hiparco, gran astrónomo de Nicea (ahora Iznik, al noroeste de Turquía), a quien se le atribuye el nombre de "padre de la trigonometría". Fue Hiparco quien se dio a la tarea de tabular los valores de arcos y su correspondiente cuerda para una serie de ángulos, con fines de uso evidentemente astronómico.

El trabajo de Hiparco se conoce a través del *Almagesto* de Ptolomeo. De Hiparco se sabe que alrededor de los años 190 y 120 a. C. desarrolló la primera tabla de cuerdas, enfoque que los griegos dieron a los ángulos, y una herramienta esencial para el desarrollo de la trigonometría. La tabla de cuerdas que construyó posibilitó el cálculo de la medida de los ángulos y lados de triángulos rectángulos presentes en problemas de astronomía, de manera análoga a como en la actualidad utilizamos la trigonometría. Su tabla de cuerdas consistía de longitudes de cuerdas para ángulos de 0° a 180° en intervalos de 7 ½°.

Se cree que Hiparco fue el primer astrónomo en calcular por medios numéricos el momento preciso de la aparición de las constelaciones del zodiaco en el firmamento, de donde se concluye que debió utilizar proposiciones de trigonometría esférica (Heath, 1921). De aquí se deriva la importancia de su tabla de cuerdas. Hiparco representó a los triángulos inscritos en una circunferencia, por lo que cada lado era una cuerda. En casos especiales dentro de la geometría plana es fácil calcular la longitud de cuerda; sin embargo, Hiparco debió utilizar otros conocimientos de trigonometría plana para completar su tabla, ya sea desarrollados por él o tomados de otros autores. Otra aportación de Hiparco fue la introducción a la ciencia griega de la notación sexagesimal de los babilonios, al dividir la circunferencia en 360 grados, el diámetro en 120 unidades e incluir el uso de grados, minutos y segundos, al estilo babilonio (Sarton, 1936).

Hiparco representa una figura de transición entre la astronomía de los babilonios y el trabajo de Ptolomeo. Dicha ciencia, habiendo florecido en Mesopotamia alrededor del 270 a. C. en tiempos de Berossos – posiblemente el único astrónomo babilonio a quien se conoce por nombre – vio en Hiparco el eslabón entre ambas culturas ya que fue él quien se dio a la tarea la transmisión de los conocimientos babilonios a los griegos.

Las principales contribuciones que se atribuyen a Hiparco en astronomía son la organización de datos empíricos derivado de los babilonios, el diseño de un catálogo de estrellas, perfeccionamiento de las constantes astronómicas (como la duración del mes y año, las dimensiones de la Luna y el ángulo de oblicuidad del plano de la eclíptica), así como el descubrimiento de la precesión de los equinoccios.

Posterior a Hiparco, Menelao fue otro matemático griego que hizo aportaciones a la trigonometría. Se cree que nació alrededor del año 70 d. C. en Alejandría, Egipto. El único trabajo de Menelao que sobrevivió el paso del tiempo fue un compendio de tres libros titulado *Sphaerica*, el cual contiene información sobre el desarrollo de la trigonometría y, en específico, de la trigonometría esférica. El libro I contiene referencias a la geometría del triángulo esférico, no obstante es, hasta el libro III, en el que verdaderamente aborda la trigonometría. Es importante recordar que los griegos no utilizaban terminología como *seno, coseno, tangente*, más bien hacían referencia al arco del círculo que subtiende un ángulo.

A continuación, a manera de ejemplo, veremos un desarrollo al estilo griego.

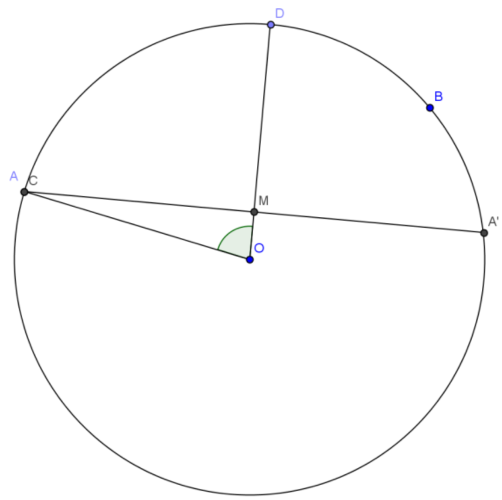

Figura 4. Cálculo de cuerda de un ángulo central.

En la Figura 4, el arco AD de la circunferencia con centro en O, subtiende un ángulo α desde el centro O. Se traza AM, un segmento perpendicular a OD, y se prolonga hasta cortar la circunferencia en A'. De ahí, sen $\alpha = \frac{AM}{AO}$ y AM es ½ AA', esto es, la mitad de la cuerda subtendida por el ángulo central 2α.

En su Libro I de *Sphaerica,* Menelao incluye la primera definición formal de un triángulo esférico (Heath, 1921), el cual define como el área determinada por la intersección de arcos de círculo sobre la superficie de una esfera, sujeto a la restricción de que los lados del triángulo es un arco cuya medida es menor al del semi-círculo. Posteriormente desarrolla las proposiciones de los triángulos esféricos en correspondencia con las proposiciones de Euclides acerca de los triángulos en el plano (Heath, 1921). Incluso introduce un teorema sin paralelo en el trabajo de Euclides – dos triángulos esféricos son congruentes si sus ángulos correspondientes son iguales; así como establecer el teorema sobre ángulos interiores A, B, C del triángulo esférico: $A + B + C > 180°$.

En el libro III se encuentra el “teorema de Menelao” como una aproximación típicamente griega, referente a las cuerdas de un círculo, a lo que actualmente conocemos como trigonometría. En la actualidad, si observamos la Figura 5, se diría de la cuerda AB:

$$AB = 2 \text{ sen}\left(\frac{\widehat{AOB}}{2}\right) \cdot OA$$

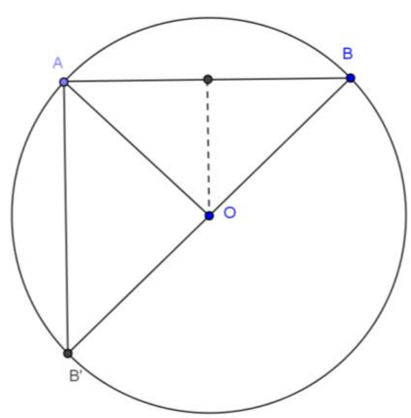

Figura 5

En cambio, Menelao, y sus sucesores griegos, se refirieron a *AB* como la cuerda que corresponde al arco AB. Si *BOB'* es diámetro del círculo O, entonces:

$$AB' = 2 \cdot \cos\frac{\widehat{AOB}}{2} \cdot OA$$

De ahí que los teoremas de Tales y Pitágoras, que conducen a la ecuación

$$AB^2 + AB'^2 = 4r^2$$

son equivalentes a la identidad trigonométrica

$$\mathrm{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1.$$

Una posterior contribución a la trigonometría de los griegos proviene de Ptolomeo. Su aportación consistió en completar y detallar el trabajo de Hiparco, además de recopilar y condensar en su *Almagesto* los tratados previos relativos a la trigonometría. De acuerdo a Toomer, el *Almagesto* es "una obra maestra en claridad y método, superior a cualquier libro científico de la antigüedad" (Toomer, 1984). El hecho es que el *Almagesto* de Ptolomeo es la fuente más importante de información relativa a Hiparco y la trigonometría alejandrina. "La naturaleza enciclopédica del Almagesto, su superioridad, y su perfección en formalidad fueron posiblemente las principales causas de la pérdida de los manuscritos originales de Hiparco. Los escribas antiguos posiblemente decidieron que el Almagesto sustituía cualquier otro trabajo previo considerándolos obsoletos y superfluos" (Sarton, 1936).

Las funciones seno, coseno y tangente hicieron su aparición varios cientos de años después, sin embargo, las tablas de cuerdas originadas por Hiparco cumplen una función similar para el trabajo con triángulos. En la obra de Ptolomeo se presentan cuerdas subtendidas por ángulos desde ½ hasta 180 ° en incrementos de ½ grado. En realidad, la tabla de cuerdas es equivalente a una tabla de senos para ángulos centrales desde 0° a 90°, en intervalos de 15', por lo tanto, puede utilizarse para resolver cualquier triángulo rectángulo al cual se le conozca un cateto.
El trabajo de Ptolomeo refleja que estaba familiarizado con la fórmula:

$$(cuerda\ de\ 2x)\ +\ (cuerda\ (180 - 2x))\ =\ 4r,$$

en donde x corresponde al ángulo y r corresponde al radio del círculo; la cual también es equivalente a:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Ptolomeo utilizó otra fórmula que posteriormente se conoció como el Teorema de Ptolomeo, la cual establece para los ángulos a y b:

$$cuerda\ (a - b) = \tfrac{1}{2}\left(cuerda\ a \cdot cuerda\ (180 - b)\right) - (cuerda\ b \cdot cuerda\ (180 - a))$$

En términos actuales, los cálculos de Ptolomeo se pueden representar de la siguiente manera:

$$sen\ x = \frac{1}{2}(cuerda\ 2x);\ \cos x = \frac{1}{2}\ cuerda\ (180 - 2x).$$

Toomer argumenta que el grado de exactitud que Ptolomeo logró hace que sus cálculos sean útiles inclusive en la actualidad, y esto fue debido a que llevó a cabo su trabajo con una exactitud hasta de cinco lugares sexagesimales (Toomer, 1984).

El periodo de tres siglos entre Hiparco y Ptolomeo vio una evolución en el desarrollo de las matemáticas aplicadas, astronomía, geografía, óptica, mecánica, sin embargo no en matemáticas puras. Es verdad que estos tres siglos marcaron el nacimiento y desarrollo de la trigonometría, sin embargo no como una parte de las matemáticas, sino más bien como una aplicación de la geometría a las necesidades de la astronomía. Fueron necesarias las aportaciones hindús y árabes para construir un puente entre la trigonometría clásica y la trigonometría como se considera actualmente – como una rama de las matemáticas.

IV. GEOMETRÍA Y EUCLIDES

Euclides, en su libro I, trata con magnitudes planas y para hacer esto presenta algunas relaciones geométricas entre triángulos. En este capítulo se explorarán algunas de estas relaciones.

Iniciemos con una geometría simple, fácil de demostrar. Si tomamos dos segmentos, los unimos extremo con extremo y con ellos formamos una línea recta es evidente que la magnitud resultante será la suma de las dos magnitudes. De la misma manera, si tomamos dos medidas angulares alrededor de un mismo punto en el plano, la rotación resultante será igual a la suma de ambas rotaciones. Una geometría simple, fácil de demostrar. En cambio, si lo que nos interesa es conocer la relación que existe entre los lados de un triángulo y sus ángulos encontraremos mayores dificultades. Figuras 6 y 7 ilustran esta relación compleja. Si dividimos un segmento en partes iguales, los ángulos resultantes no serán congruentes entre sí. De igual manera, si dividimos un ángulo en ángulos de igual medida, los segmentos resultantes proyectados sobre una línea perpendicular a la base del ángulo tampoco serán congruentes entre sí.

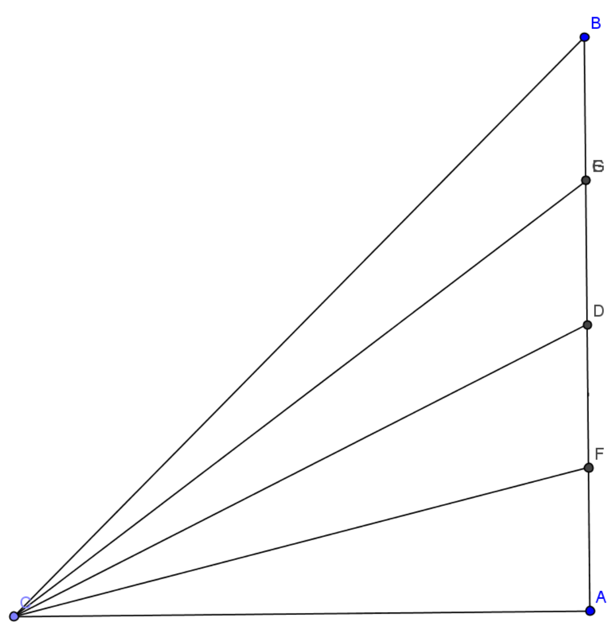

Fig. 6 Incrementos equidistantes verticales subtienden ángulos que no son congruentes.

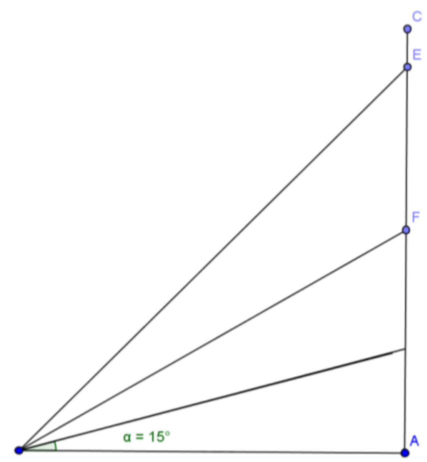

Fig. 7 Ángulos congruentes subtienden segmentos verticales desiguales.

Parecería conveniente preguntar, al estilo de Euclides, ¿se podrá establecer una relación entre segmentos y ángulos que cumplen con las características arriba descritas?

Como se vio en el Capítulo 2, el papiro Rhind ilustra cómo los egipcios utilizaron, con fines prácticos, una especie de trigonometría primitiva – descrita por algunos autores como proto-trigonometría – la cual fue fundamental en la construcción de sus pirámides. Los babilonios aplicaron las propiedades de la semejanza de triángulos para, a través de las sombras, determinar alturas que les eran inalcanzables. Dichos conocimientos fueron utilizados posteriormente por los griegos para calcular las dimensiones de la Tierra y, más tarde para calcular distancias astrales. Ninguno de ellos pudo imaginar que, a través de su trabajo, estaban sentando las bases para lo que actualmente conocemos como la trigonometría.

Siendo éste el tema de estudio pertinente al presente trabajo, será conveniente voltear a ver parte del conocimiento que Euclides nos legó, el cual – aunque principalmente estuvo centrado en la teoría de proporciones – apunta hacia los fundamentos que eventualmente darán origen a la teoría de triángulos.

¿Euclides conoció la trigonometría?

La obra más notable de Euclides, a la cual debe su reputación como el padre de la geometría, es la titulada los *Elementos*; una colección de definiciones, postulados, proposiciones (teoremas y construcciones) y demostraciones matemáticas que abordan magnitudes geométricas, proporciones y teoría de números. Este tratado marcó el inicio del pensamiento matemático moderno y dio pauta para la enseñanza de tal disciplina por más de veinte siglos. La precisión de sus descripciones, el procedimiento que utilizó para las demostraciones, la progresión de sus teoremas, aunado al periodo en que fue escrito, hacen de los *Elementos* una obra excepcional y única; equiparable, en cuanto a su difusión, a obras literarias como la Biblia, la Divina Comedia y el Quijote.

Los Elementos constan de trece libros. Los seis primeros tratan sobre geometría y teoría de proporciones, los tres siguientes sobre teoría de números, el décimo sobre las magnitudes inconmensurables y los tres últimos sobre geometría de sólidos. Debido a su afamada obra, en la antigüedad se le conoció como ‘Ο Στοιχειωτής, “escritor de los Elementos” o simplemente como ‘Ο Γεωμέτρης, “el geómetra”.

El libro I, en particular, lo dedicó a estudiar magnitudes geométricas. Sería lógico pensar, con mentalidad de un habitante del Siglo XXI, que Euclides habría escrito un tratado no sólo sobre geometría, sino más bien sobre Trigonometría pues, a final de cuentas, ésta estudia precisamente a los triángulos. Sin embargo, como a continuación se verá, los Elementos se aproximan y se refieren tangencialmente a aspectos trigonométricos, aunque no logran en realidad adentrarse en esta área de las matemáticas, la cual fue desarrollada en años posteriores.

En el Libro I, las Proposiciones 18 y 19 establecen:

Proposición 18: En todo triángulo, el lado mayor subtiende el ángulo mayor.

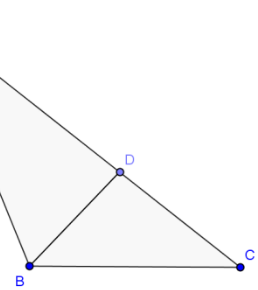

Figura 8

Sea *ABC* un triángulo que tiene el lado *AC* mayor que el lado *AB* (ver Fig. 8). Tómese en el lado *AC* el segmento *AD* igual al *AB* y trácese *BD*. Por ser el ángulo *ADB* externo del triángulo *BDC*, será mayor que el ángulo *DCB* interno y opuesto a él. Pero el ángulo *ADB* es igual al *ABD* porque el lado *AB* es igual al lado *AD*, y, por consiguiente, el ángulo *ABD* es mayor que el *ACB*; luego el ángulo *ABC* es mayor que el *ACB*. *Q.E.D.*

Proposición 19. En todo triángulo, el ángulo mayor subtiende el lado mayor.

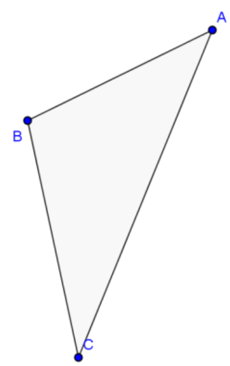

Figura 9

Sea ABC un triángulo que tiene el ángulo ABC mayor que el BCA (ver Fig. 9). También el lado AC es mayor que el AB, porque si no lo fuese sería igual o menor. No es igual, porque si lo fuera sería el ángulo ABC igual al ACB, y no lo es, y tampoco es menor, porque entonces el ángulo ABC sería menor que el ACB, y no lo es; y como quedó demostrado que no es igual, tiene que ser mayor. Q.E.D

Evidentemente, esta segunda proposición es el converso de la anterior. No es inusual encontrar, en el trabajo de Euclides, el uso de demostraciones por contradicción, basadas en proposiciones previas.

Al continuar con la lectura de los *Elementos*, se encuentran otras dos proposiciones, una el converso de la otra, que nuevamente manifiestan este interés que mostraba Euclides por las relaciones entre los ángulos y los lados opuestos de los triángulos.

Proposición 24. Si dos triángulos tienen dos lados de uno respectivamente iguales a dos lados de otro, pero de los ángulos comprendidos por los lados iguales uno es mayor que el otro, la base del uno será mayor que la del otro.

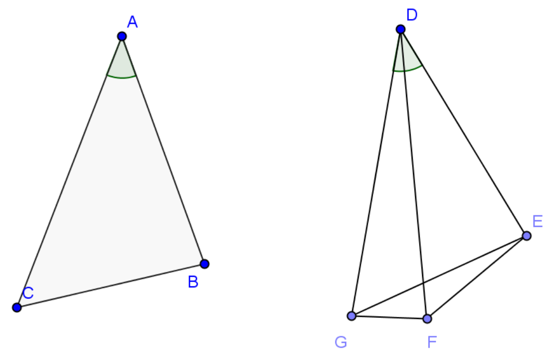

Figura 10

Sean *ABC* y *DEF* los dos triángulos que tienen los dos lados *AB* y *AC* respectivamente iguales a los lados *DE* y *DF*, pero el ángulo en *A* es mayor que el ángulo en *D*. Digo que la base *BC* es mayor que la *EF*. (Figura 10)

Puesto que el ángulo *BAC* es mayor que el *EDF*, constrúyase sobre la recta *DE*, en su punto *D*, el ángulo *EDG* igual al ángulo *BAC*; tómese *DG* igual a *AC* y a *DF* y trácese las rectas *EG* y *FG*. Por ser *AB* igual a *DE*, y *AC* igual a *DG* y el ángulo *BAC* igual al ángulo *EDG*, la base *BC* será igual a la *EG*. También el ángulo *DGF* será igual a *DFG* y el *DFG* mayor que el *EGF*, y por tanto el ángulo *EFG* es mucho mayor que el *EGF*.

En el triángulo *EFG* el ángulo *EFG* es mayor que el *EGF* y como el ángulo mayor subtiende un lado mayor, el lado *EG* será mayor que el *EF*, pero el lado *EG* es igual al *BC*, luego el lado *BC* es mayor que el *EF*. *Q.E.D.*

Proposición 25. Si dos triángulos tienen dos lados del uno respectivamente iguales a dos del otro, pero la base del uno es mayor que la del otro, el ángulo comprendido por los lados iguales del uno es mayor que el del otro.

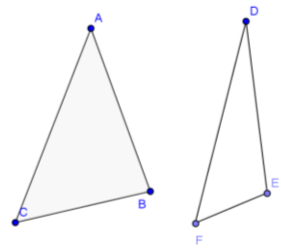

Figura 11

Sean *ABC* y *DEF* los dos triángulos que tienen los lados *AB* y *AC* respectivamente iguales a *DE* y *DF*, y la base *BC* mayor que la *EF* (Figura 11). Digo que también el ángulo *BAC* es mayor que el *EDF*, porque si no fuera mayor sería igual o menor. Igual no es porque entonces la base *BC* sería igual a la *EF*, y no lo es, y tampoco es menor porque si lo fuera, la base *AC* sería menor que la *EF*, y no lo es; luego el ángulo *BAC* que no es igual ni menor que el *EDF*, es mayor. *Q.E.D.*

Las proposiciones anteriores comienzan a brindar un tenue esbozo, un acercamiento tentativo a aspectos trigonométricos, sin llegar a enunciarlo ni a formalizarlo; sin embargo, tiene relación directa con lo que eventualmente se conocerá como la ley de los senos. Ésta, a diferencia de las proposiciones presentadas anteriormente, logra vincular de manera cuantitativa la amplitud de los ángulos con los correspondientes lados opuestos de un triángulo.

Con objeto de avanzar en esta línea de pensamiento, se dará un salto al Libro III, Proposición 20, en el que Euclides establece:

En un círculo, el ángulo central es el doble que el ángulo sobre la circunferencia, cuando ambos ángulos tiene la misma circunferencia.

En términos modernos, la proposición afirma que un ángulo inscrito (cuyo vértice se encuentra sobre la circunferencia) equivale a la mitad del ángulo central subtendido por la misma cuerda. (Figura 12). De este teorema se obtienen dos corolarios: (1) dado un círculo, todos los ángulos inscritos subtendidos por el mismo arco son iguales (Proposición 21 de Euclides, ver Figura 13); y (2) Todos los ángulos inscritos subtendidos por un diámetro son ángulos rectos (Figura 14).

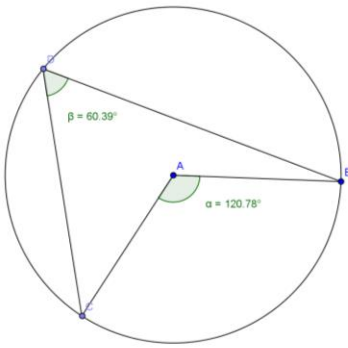

Figura 12

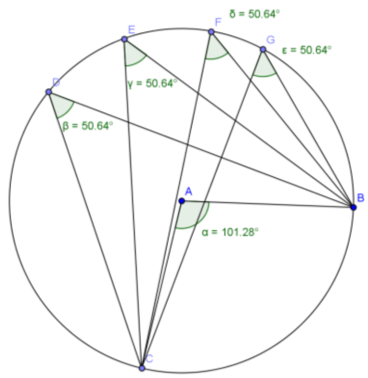

Figura 13

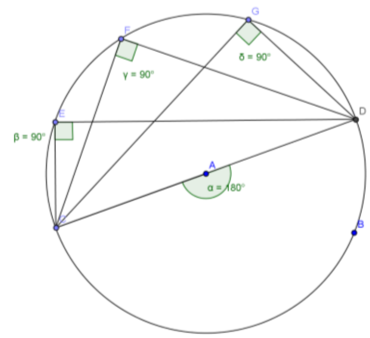

Figura 14

Con este sencillo teorema y sus corolarios se puede demostrar la ley de los senos desde un punto de vista geométrico, al estilo de Euclides – aunque con apoyo de la trigonometría que conocemos actualmente.

Dado un triángulo *ABC*, inscrito en un círculo con centro en *O* y radio *r* (ver Figura 15).

$\angle AOB = 2\ \angle ACB = 2\gamma$

Se traza la bisectriz del $\angle AOB$, perpendicular a *AB*, desde *O*.

$\operatorname{sen} \gamma = \left(\frac{c}{2}\right)/r$

Entonces $\frac{c}{\operatorname{sen} \gamma} = 2r$ es constante.

Dado que la razón $\frac{c}{\operatorname{sen} \gamma}$ es constante, se puede afirmar que

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{c}{\operatorname{sen} \gamma} = 2r.$$

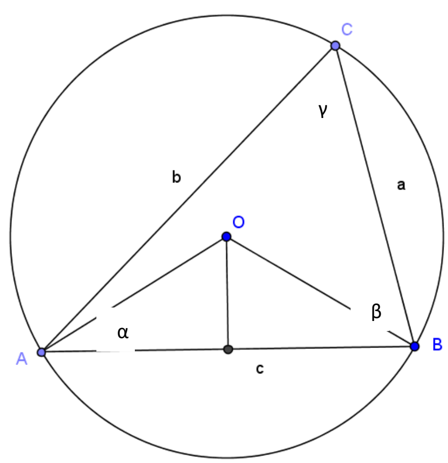

Figura 15

La simplicidad de esta demostración es realmente asombrosa. Más aún, si recordamos que tres puntos no co-lineares determinan un círculo único, se puede afirmar que todo triángulo está inscrito en exactamente un círculo (Recordemos que esto parte del contexto de la geometría euclidiana, en donde se considera válido el quinto postulado de su trabajo *Los Elementos*). Así, los ángulos de los triángulos son ángulos inscritos, y los lados del triángulo son cuerdas del círculo. Por consiguiente, la *ley de los senos* es, en realidad, un teorema acerca de círculos, más que de triángulos. Si, además, decidimos que la medida del diámetro del círculo circunscrito sea 1, y llamamos a éste un círculo unitario, entonces la ley de los senos simplemente afirma que

$$a = \operatorname{sen}\alpha, \qquad b = \operatorname{sen}\beta, \qquad c = \operatorname{sen}\gamma.$$

En otras palabras, cada lado de un triángulo inscrito en un círculo unitario es igual al seno de su ángulo opuesto. Mejor aún, se puede definir al seno de un ángulo como *la longitud de la cuerda que éste subtiende en un círculo unitario*.

Enunciando la ley de los senos como se conoce en la actualidad:

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c},$$

en donde a es el lado opuesto al ángulo A, b es el lado opuesto al ángulo B y c es el lado opuesto al ángulo C. En otras palabras, el seno del ángulo en un triángulo es proporcional al lado opuesto. (Fig. 16)

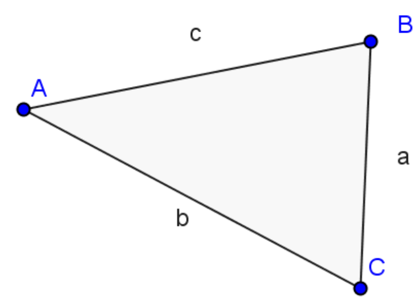

Figura 16

En consecuencia, es evidente que por medio de la ley de los senos se puede establecer una relación directa entre la apertura de un ángulo y la medida de su lado opuesto. Euclides comprendía que mientras mayor era el ángulo, mayor sería su lado opuesto, sin embargo él no indagó más acerca de en qué medida crecía uno con respecto al otro.

En la Proposición I.47, Euclides hace referencia al conocido Teorema de Pitágoras, para triángulos rectángulos. Es decir, si el triángulo ABC tiene un ángulo recto en A, en donde a, b, c son los lados opuestos a los ángulos A, B, C respectivamente, entonces se cumple la relación:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

A continuación, se presenta la demostración que Euclides nos legó.

Proposición 47. En los triángulos rectángulos, el cuadrado sobre el lado opuesto del ángulo recto es igual a la suma de los cuadrados sobre los lados que contienen el ángulo recto.

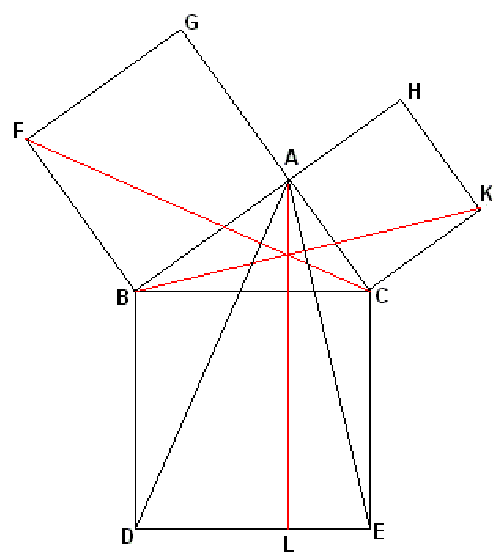

Figura 17

Sea ABC un triángulo rectángulo con el ángulo BAC recto. Digo que el cuadrado sobre BC es igual a la suma de los cuadrados sobre BA y AC.

Se traza el cuadrado $BDEC$ sobre el lado BC, y los cuadrados $BFGA$ y $AHKC$ sobre BA y AC respectivamente. Se traza AL, paralela a BD (o CE) y se unen AD y FC.

Dado que $\angle BAC$ y $\angle BAG$ son rectos, las rectas AC y AG son lados de ángulos rectos adyacentes, entonces CA está en línea recta con AG.

De igual manera, BA está en línea recta con AH.

Como $\angle DBC = \angle FBA$, ambos rectos, si se suma el $\angle ABC$ a cada uno, se puede afirmar que $\angle DBA = \angle FBC$.

Además, como $DB = BC$ y $FB = BA$, los lados AB y BD son iguales a los lados FB y BC respectivamente, y $\angle ABD = \angle FBC$, por lo tanto, la base AD es igual a la base FC, y el triángulo ABD es igual al triángulo FBC.

El paralelogramo BL es el doble del triángulo ABD, dado que tienen la misma base BD y se encuentran dentro de las paralelas BD y AL. Y el cuadrado GB es el doble del triángulo FBC, puesto que también comparten la base FB y están dentro de las paralelas FB y GC.

Por lo tanto, el paralelogramo BL es igual al cuadrado GB.

De manera similar, si se unen AE y BK, se puede demostrar que el paralelogramo CL es igual al cuadrado HC. Por lo tanto, el cuadrado $BDEC$ es igual a la suma de los cuadrados GB y HC.

Y el cuadrado $BDEC$ está trazado sobre BC, y los cuadrados $GB\ y\ HC$ están trazados sobre $BA\ y\ AC$ respectivamente. Por lo tanto, el cuadrado sobre BC es igual a la suma de los cuadrados sobre BA y AC.

Q.E.D.

(tomado de la Traducción de Sir Thomas Heath)

Este trabajo será fundamental para la construcción de las proposiciones 12 y 13 del Libro II, proposiciones que también exploran indirectamente aspectos de la trigonometría.

La proposición 12 se refiere a los triángulos obtusángulos.

Proposición 12. *En los triángulos obtusángulos, el cuadrado del lado que subtiende el ángulo obtuso es mayor que los cuadrados de los lados que lo comprenden en el doble del rectángulo comprendido por aquél de los lados del ángulo obtuso sobre el que cae la perpendicular y por la recta exterior que queda entre la perpendicular y el ángulo obtuso.*

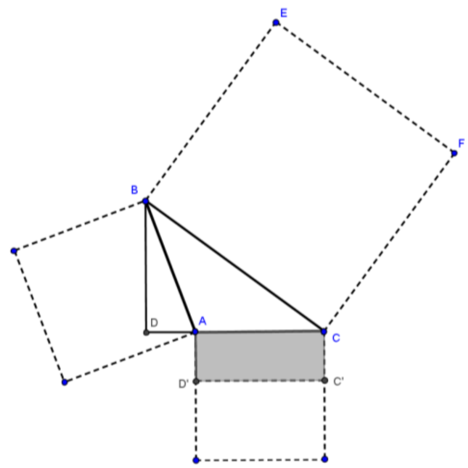

Figura 18

Sea *ABC* el triángulo que tiene el ángulo *BAC* obtuso y trácese desde *B* la perpendicular *BD* a la prolongación de *CA* (Fig. 18). Digo que el cuadrado de *BC* es mayor que los cuadrados de *AB* y *AC* en el doble del rectángulo comprendido por *AC* y *AD*. Puesto que la recta *CD* está dividida por el punto *A*, su cuadrado es igual a los cuadrados de *AC* y *AD* más el doble del rectángulo comprendido por *AC* y *AD*. Añádase el cuadrado común *BD* y entonces los cuadrados *CB* y *DB* equivaldrán a los de *CA*, *AD* y *BD* más el doble del rectángulo comprendido por *AC* y *AD*. Pero el cuadrado de *CB* equivale a los de *CB* y *DB* porque el ángulo junto a *D* es recto y además el cuadrado de *AB* equivale a los de *AD* y *BD*; luego el *CB* equivale a los de *AC* y *AB* más el doble del rectángulo de *AC* y *AD* y, por tanto, es mayor que los cuadrados de *AC* y *AB* en el doble del rectángulo comprendido por *AC* y *AD*. *Q.E.D.*

La proposición 13 se ocupa de los triángulos acutángulos.

Proposición 13. En los triángulos acutángulos, el cuadrado del lado que subtiende un ángulo agudo es menor que los cuadrados de los lados que lo comprenden en el doble del rectángulo comprendido por el lado sobre el que cae la perpendicular y por la recta interior que queda entre la perpendicular y el ángulo agudo.

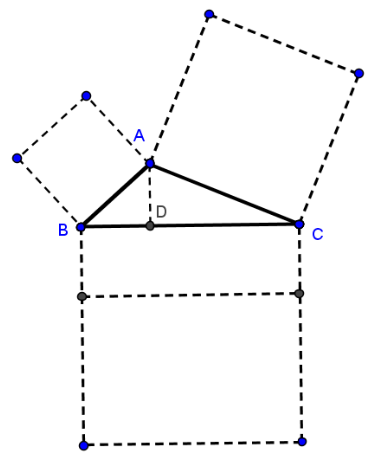

Figura 19

Sea *ABC* el triángulo acutángulo con un ángulo agudo en *B*, trácese desde *A* la recta *AD* perpendicular a la *BC* (Fig. 19). Digo que el cuadrado de *AC* es menor que los cuadrados de *CB* y *BA* en el doble del rectángulo comprendido por *CB* y *BD*.

Puesto que la recta *CB* está dividida por el punto *D*, los cuadrados de *CB* y *BD* equivaldrán al doble del rectángulo comprendido por *CB* y *BD* más el cuadrado de *DC*. Añádase el cuadrado común *DA*, y entonces los cuadrados de *CB*, *BD* y *DA* serán el doble del rectángulo de *CB* y *BD* más los cuadrados de *AD* y DC; pero el cuadrado de *AB* equivale a los de *BD* y *DA* porque el ángulo junto a *D* es recto; luego el cuadrado de *AC* equivale a los de *AD* y *DC*, de modo que los cuadrados de *CB* y *BA* equivalen al de *A*C más el doble del rectángulo comprendido por *CB* y *DB*. Por tanto, el cuadrado de *AC*, tomado aparte, equivale a los cuadrados de *CA* y *BA* menos el doble del rectángulo comprendido por *CB* y *DB*.

Q.E.D.

Si se examinan las proposiciones II.12 y II.13 desde un punto de vista moderno, éstas se pueden expresar como sigue:

Si el ángulo es obtuso en lugar de recto, se concluye que:

$a^2 = b^2 + c^2 + 2c(AD).$

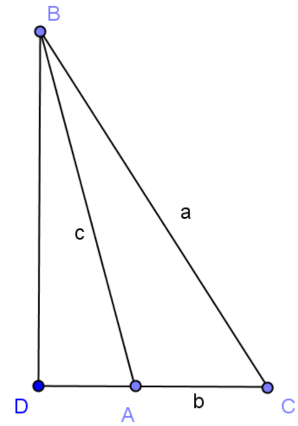

Figura 20

De la proposición II.13 se obtiene una conclusión semejante para los triángulos acutángulos.

Analizando las conclusiones de ambas Proposiciones se puede entrever la conocida ley de los cosenos. Al visualizar la comparación:

Proposición II.12 $\quad a^2 = b^2 + c^2 + 2c(AD)$

ley de los cosenos $\quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc(\cos A)$

Pero como, en términos actuales, sabemos que $AD = -b\cos A$ (el coseno de un ángulo obtuso es negativo), se puede concluir que estas proposiciones de Euclides son la versión geométrica de la ley de los cosenos para triángulos oblicuángulos.

El trabajo de Euclides no contiene trigonometría en el sentido estricto de la palabra. Sin embargo, como se vio anteriormente, sus teoremas son equivalentes a fórmulas o leyes trigonométricas específicas, presentados desde un punto de vista geométrico. Serán los teoremas que tratan de la longitud de cuerdas asociadas a un ángulo central lo que permitirá el nacimiento de la trigonometría. Con esto en mente, corresponde proceder a investigar qué fue lo que inspiró a Ptolomeo a elaborar una tabla con propiedades trigonométricas.

V. TRIGONOMETRÍA Y PTOLOMEO

Un precepto indiscutible que caracteriza a la historia es que ésta se va construyendo, es decir, lo que sucede con anterioridad sienta las bases para futuros desarrollos, descubrimientos, inventos, etcétera. El tema que aquí nos atañe es un digno representante de esta ineludible característica. No es posible hablar de la obra de un personaje sin referirse a aquéllos que lo precedieron, a aquéllos que legaron su conocimiento para que alguien lo tomara en sus manos y le siguiera dando vida. Así, sería injusto hablar de Ptolomeo sin antes referirnos al trabajo de Hiparco.

Hiparco, como se mencionó en el Capítulo II, fue un renombrado matemático y astrónomo griego, a quien algunos historiadores han nombrado *padre de la trigonometría,* ya que se cree que fue él quien por primera vez en la historia calculó y presentó una tabla de cuerdas, instrumento precursor a las tablas trigonométricas actuales. Hiparco requería de una tabla de lo que actualmente conocemos como razones trigonométricas que le permitiera llevar a cabo sus cálculos astronómicos. Como éstas aún no existían tuvo que encontrar la manera de calcularlas. Trabajó con triángulos inscritos en circunferencias, de tal manera que cada lado del triángulo era una cuerda de la circunferencia. Su principal reto fue calcular la longitud de una cuerda en función de su ángulo central. Aunque el procedimiento no haya sido inventado por él, se cree que Hiparco fue la primera persona en dejar evidencia escrita de un uso sistemático de la trigonometría. (Heath, 1921).

Toomer se dio a la tarea de reconstruir la tabla de cuerdas de Hiparco; el tratamiento matemático que utilizó para calcularla fue como sigue.

Hiparco utilizó un círculo dividido en 360°, y cada grado dividido en 60 minutos. Se basó en $\frac{360\cdot 60}{2\pi} = 3438$ minutos como la medida del radio del círculo. En tiempos modernos, se puede establecer que las cuerdas (crd) de Hiparco se relacionan con la función seno de la siguiente manera:

$$\frac{crd\ 2a}{2} = 3438 \cdot \text{sen}\, a.$$

a. Tabla de Cuerdas de Hiparco

La construcción de esta tabla inicia con las cuerdas de los ángulos centrales de 60° y 90° – la primera corresponde a la medida del radio, la segunda se calcula con el teorema de Pitágoras. De ahí Hiparco dedujo que si se conoce $crd\,\theta$, también se puede calcular $crd(180° - \theta)$, como se muestra en la Figura 21.

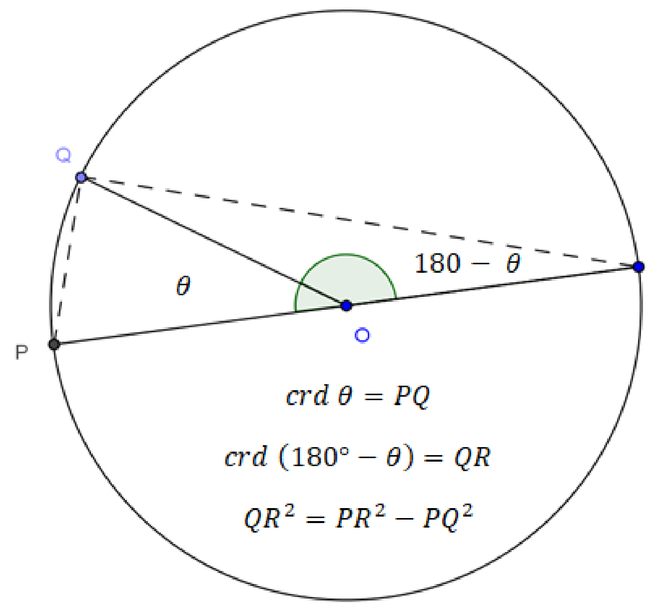

Figura 21

Adicionalmente, si se conoce $crd\,\theta$ también se puede calcular $crd\,\frac{1}{2}\theta$, por el siguiente procedimiento.

Sea $\angle AOB = \theta$. Se ubica F tal que $CF = CB$, se ubica D tal que $\angle DOA = \frac{1}{2}\theta$, se ubica E tal que DE es perpendicular a AC. Entonces

$$\angle ACD = \frac{1}{2}\angle AOD = \frac{1}{2}\angle BOD = \angle DCB.$$

Por lo que los triángulos BCD y DCF son congruentes. Entonces $DF = BD = DA$, y $EA = \frac{1}{2}AF$. Pero también $CF = CB = crd(180° - \theta)$, así que podemos calcular CF, así como AF y EA. Los triángulos AED y ADC son semejantes, por lo tanto $\frac{AD}{AE} = \frac{AC}{DA}$ o $AD^2 = AE \cdot AC$, lo que nos permite calcular AD. Y AD es $crd\,\frac{1}{2}\theta$.

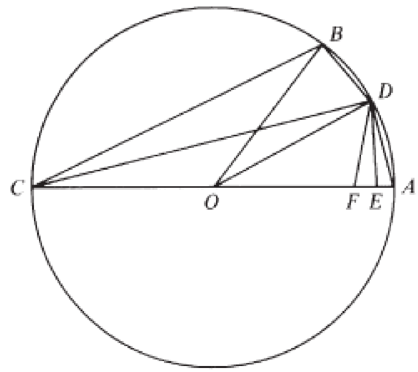

Figura 22

De manera análoga se pueden calcular las cuerdas de $30°, 15°, 7\frac{1}{2}°, 45°, 22\frac{1}{2}°, 150°, 165°$, etcétera. Eventualmente se obtienen las cuerdas de todos los múltiplos de $7\frac{1}{2}°$. La tabla comienza así:

θ	$0°$	$7\frac{1}{2}°$	$15°$	$22\frac{1}{2}°$	$30°$	$37\frac{1}{2}°$	$45°$	$52\frac{1}{2}°$
$crd\ \theta$	0	450	897	1341	1779	2210	2631	3041

Aquellos ángulos cuya cuerda no se muestra en la tabla, o las cuerdas cuyos ángulos no se muestran en la tabla se pueden calcular por interpolación. Por ejemplo, el ángulo cuya cuerda es 2852 sería:

$$\left(45 + \frac{2852-2631}{3041-2631} \times 7\frac{1}{2}\right)° \approx 49°.$$

Desafortunadamente los escritos originales de Hiparco se perdieron, debido a que el éxito del Almagesto de Ptolomeo los hizo obsoletos. Para inicios del Siglo IV de nuestra era el Almagesto se convirtió en el libro de texto de astronomía, lugar que ocuparía por más de mil años.

Toomer (1984) resume de manera concisa las contribuciones de Hiparco:

> *...es muy probable que Hiparco haya sido el primer matemático en calcular una tabla de cuerdas y así proporcionar una solución a problemas trigonométricos. De aquí se deriva un*

corolario, previo al trabajo de Hiparco los métodos geométricos de los griegos no contaban con tablas astronómicas. De ser así Hiparco fue, además del fundador de la trigonometría, el hombre que transformó la astronomía griega de una ciencia teórica a una ciencia aplicada.

¿Qué aspectos de la trigonometría se ven en la obra de Ptolomeo?
Es probable que Ptolomeo no sea el autor original del material, digamos, proto-trigonométrico que presenta en su obra, sin embargo, él se encargó de extraer y condensar, de tratados anteriores el menor número de proposiciones necesarias para establecer el método y desarrollar las fórmulas que requería para hacer sus cálculos de índole astronómica. En la sección preliminar del Libro I, en relación a la Tabla de Cuerdas, Ptolomeo relata:

> *Primero mostraremos cómo podemos establecer un método sistemático y veloz para obtener las longitudes de cuerdas basándonos en el uso de la menor cantidad de proposiciones, de tal manera que no sólo obtengamos las longitudes de cuerdas, sino que obtengamos una demostración de nuestros métodos para obtenerla basadas en consideraciones geométricas.* (Heath, 1921).

Posteriormente procede a explicar que dividirá al círculo en 360 partes iguales o grados y utilizará un círculo cuyo diámetro mide 120 partes iguales, expresando las fracciones de dicho diámetro utilizando el sistema sexagesimal.
Adentrémonos ahora en la mente brillante de Ptolomeo.

b. El Almagesto de Ptolomeo

σύνταξις nombre griego del Almagesto de Ptolomeo, originalmente conocido como la 'Sintaxis Matemática', es un compendio magistral de la astronomía griega. De forma análoga a los *Elementos*, la obra de Ptolomeo se convirtió, desde principios del Siglo IV, en el libro de texto de astronomía y así se mantuvo durante más de mil años. Por consiguiente, su importancia reside tanto en su valor como fuente histórica de las teorías y observaciones de los griegos, así como en la forma en la que influyó en la astronomía de la antigüedad y de la Edad Media (tanto en tierras islámicas como cristianas) hasta el Siglo XVI.

El Almagesto compila los conocimientos griegos tanto de astronomía como de trigonometría, derivados del trabajo de Hiparco y Menelao. Sin embargo, como el Almagesto sobrevivió tantos siglos, Ptolomeo se considera la persona que más influyó en el desarrollo de la trigonometría.

c. Una mirada a algunos aspectos del Almagesto

El *Almagesto* presenta una estructura muy lógica. El Libro I inicia con una breve descripción de la naturaleza del universo, para continuar con la teoría trigonométrica requerida para los capítulos subsiguientes, libro que será de particular interés para el presente trabajo. Los libros II al XII discuten aspectos de la posición de la Tierra, teoría del Sol, de la Luna, los eclipses, las estrellas y los planetas. En general, en el orden de la presentación dentro de cada libro y dentro del tratado en general, permea la lógica del método didáctico.

d. ¿Qué debe saber un lector acerca del *Almagesto*?

Los astrónomos griegos dieron continuidad al trabajo de los babilonios, les resultó ventajoso adoptar su sistema sexagesimal de numeración – primer sistema posicional de la historia –, como una forma conveniente de expresar fracciones y de llevar a cabo cálculos con ellas. Actualmente, en traducciones, se ha adoptado una notación moderna, más conveniente, que consiste en utilizar la coma y el punto y coma para separar cantidades. Por ejemplo 6, 13; 10, 3 significa

$$6 \times 60^{1} + 13 \times 60^{0} + 10 \times 60^{-1} + 3 \times 60^{-2}.$$

Como símbolo convencional, Ptolomeo coloca una *p* como superíndice (por ejemplo 60^p) la cual se refiere a las 'partes' en las que está subdividido el diámetro del círculo, medidas arbitrarias en cálculos trigonométricos.

A falta de las *razones* trigonométricas, los griegos – y sus sucesores los hindús y árabes – utilizaron las *rectas* trigonométricas, las cuales se derivaron de las cuerdas de una circunferencia; siendo Ptolomeo quien logró asociar cada cuerda con un valor numérico (aproximado). Para lograr esto fue necesario utilizar dos ideas: a) una estrategia para subdividir la circunferencia y b) un criterio para dividir el diámetro del círculo. La evidencia muestra que desde los tiempos de Hiparco, en Grecia, ya se utilizaba la división de la circunferencia en 360 grados, posiblemente como una herencia de la división del zodiaco en 12 signos y del ciclo de aproximadamente 360 días que determinaba las estaciones. Adicionalmente, partiendo del sistema fraccionario posicional babilónico fue natural para Ptolomeo el subdividir los grados en sesenta "*partes minutae primae*" y éstas a su vez en sesenta "*partes minutae secundae*", términos de donde se originaron nuestras palabras "minutos" y "segundos". Tomando como base el uso del sistema sexagesimal, Ptolomeo pudo haber decidido subdividir el diámetro de su círculo trigonométrico en 120 partes, éstas a su vez en 60 minutos y los minutos a su vez en 60 segundos.

La *cuerda* fue la única función trigonométrica que Ptolomeo utilizó. No dejó instrucciones escritas específicas de la forma en la que se aplica a los cálculos trigonométricos, sin embargo, su método es evidente a través de sus ejemplos. A continuación se presenta una traducción literal de los cálculos típicos que involucran a la trigonometría.

Dada una situación como la que se muestra en la Figura 3, el arco ΘH mide 30°, AD mide 60^p, AH mide $2;30^p$. Se requiere encontrar el ángulo ADH. En trigonometría moderna esto implica aplicar la razón coseno. Sin embargo, como esto no le era familiar a Ptolomeo, él procede a trazar la perpendicular HK, para transformar el problema a uno de solución de triángulos rectángulos, un procedimiento que le resultaba estándar.

'Así, dado que el arco ΘH mide 30°, el ángulo ΘAH medirá 30 de aquellas unidades de las que 4 ángulos rectos forman 360, y 60 de aquellas unidades de las que 2 ángulos rectos son 360. Por lo que el arco en HK mide 60 unidades del círculo circunscrito al triángulo rectángulo HKA, y el arco en AK es 120, cuyo suplemento completa el semi-círculo. Por lo que, de las cuerdas subtendidas por ellos, HK será 60 de las unidades de cuya hipotenusa mide 120 y AK será 103;55 de las mismas unidades.'

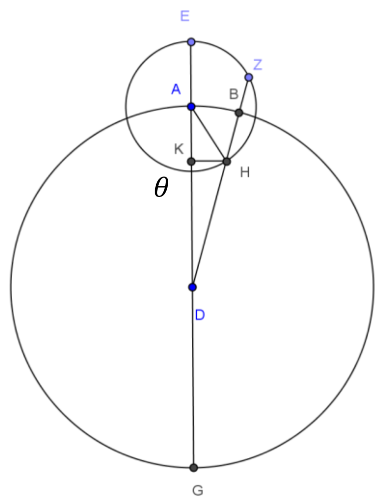

Figura 23

Con objeto de resolver un triángulo rectángulo (*HKA*), Ptolomeo imagina un círculo circunscrito a él. Entonces la hipotenusa del triángulo es el diámetro del círculo y lo toma, inicialmente como 120 partes (radio=60 unidades es la medida estándar sobre la cual Ptolomeo construye su tabla de cuerdas.) Dados los dos ángulos agudos del triángulo, los otros dos lados pueden expresarse utilizando las mismas unidades: son las cuerdas de los arcos del círculo circunscrito, esto es el doble de los ángulos del triángulo (debido a que son iguales a los ángulos centrales). En lugar de explícitamente duplicar dichos ángulos, Ptolomeo siempre los expresa en 'unidades tales que 2 ángulos rectos son 360'. (Por una convención inventada por B.R. Goldstein, se utiliza la notación °° para los semi-grados, reservando la notación ° para los grados estándares en los que 90° corresponden a un ángulo recto). Esto le permite, sin dificultad, transferir del triángulo al círculo:

un ángulo de magnitud Θ° es de 20°°, por lo que el arco del círculo circunscrito que corresponde a dicho ángulo es de 20°.

'Por lo tanto, en dichas unidades de cuya línea AH es 2;30 y el radio AD es 60, HK será 1;15, y AK será 2;10, y KD el complemento 57;50.'

Los lados del triángulo *AKH* se convierten a la norma representando su tamaño real (*AH* = 2;30^{p}, por lo tanto se multiplican por 2;30/120). De ahí se obtienen dos lados del siguiente triángulo rectángulo por resolver, *DHK*: *HK* y (al sustraer *AK* de *AD*, dado) *KD*.

'Y como la suma de los cuadrados sobre estos lados equivalen al cuadrado sobre DH, la longitud de éste último será aproximadamente 57;51 de las unidades de las que la línea KH será 1;15.'

Ptolomeo utiliza el Teorema de Pitágoras para calcular la hipotenusa del triángulo rectángulo en cuestión. Él utiliza la palabra 'de longitud' para indicar que toma la raíz cuadrada (esto es, el lado del cuadrado, por lo tanto una longitud).

'Así, de aquellas unidades de las cuales la hipotenusa DH es 120, la línea HK será 2;34 y su arco HK será 2;27 de aquellas unidades de las cuales el círculo circunscrito a DHK es 360. Por lo tanto, el ángulo HDK es 2;27 de aquellas unidades de las cuales dos ángulos rectos son 360, y aproximadamente 1;14 de aquellas unidades de las cuales 4 ángulos rectos son 360.'

Ptolomeo convierte los lados del triángulo *DHK* a una medida estándar en el que la hipotenusa es 120^{p}, permitiéndole así utilizar la tabla de cuerdas para determinar el tamaño del arco correspondiente al lado opuesto al ángulo *HDK*, por calcular. Este último, al estar sobre el círculo circunscrito, es la mitad del arco. Ptolomeo expresa esta razón afirmando que es el mismo número de 'semi-grados', como el arco es en grados, y así logra convertir los semi-grados a grados.

Ptolomeo dedica su primer libro al estudio de la relación entre la Tierra y el Universo, al movimiento del Sol y la Luna y los fenómenos resultantes de él, a la teoría de las estrellas y los planetas. Utiliza como referencia para sus demostraciones el conocimiento de los antiguos, y los métodos de la geometría.

Se basa en las premisas de que el Universo es esférico y se mueve como una esfera; que la Tierra también es esférica y está ubicada al centro del Universo y es estática.

Con objeto de lograr demostrar lo dicho anteriormente, Ptolomeo se dispuso primero a determinar el tamaño del arco del círculo que rodea una esfera, y para lograr esto comienza con la explicación de su método geométrico para calcular longitudes de cuerda.

Una proposición geométrica – de vital importancia para sus cálculos de cuerdas – conocida como el "teorema de Ptolomeo" establece que si $ABCD$ es un cuadrilátero cóncavo inscrito en un circunferencia (Figura 24), entonces,

$$AD \cdot BC + AB \cdot CD = AC \cdot BD.$$

Es decir, la suma de los productos de los dos pares de lados opuestos de un cuadrilátero cíclico es igual al producto de sus diagonales.

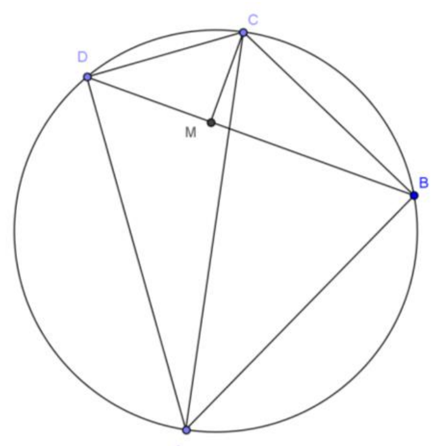

Figura 24

Para demostrarlo, sobre la diagonal BD se localiza el punto M tal que $\widehat{ACB} = \widehat{MCD}$. Dado que $\widehat{BAC}$ y $\widehat{BDC}$ subtienden el mismo arco, entonces son congruentes. Por el teorema de la semejanza de triángulos, ABC y DMC son triángulos semejantes. De ahí se obtiene,

$$\frac{CD}{MD} = \frac{AC}{AB} \quad \text{o} \quad AB \cdot CD = AC \cdot MD.$$

De la misma forma, $\widehat{BCM} = \widehat{ACD}$; por lo tanto los triángulos BCM y ACD son semejantes. Entonces se obtiene,

$$\frac{BC}{BM} = \frac{AC}{AD} \quad \text{o} \quad BC \cdot AD = AC \cdot BM.$$

Con ambas identidades se llega a la identidad

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot MD + AC \cdot BM$$

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD.$$

Un caso especial del teorema de Ptolomeo: si ABC es un triángulo inscrito, y si BD es una cuerda que biseca el ángulo ABC, entonces:

$$\frac{(AB + BC)}{BD} = \frac{AC}{AD}.$$

Un segundo caso especial del teorema de Ptolomeo, y de mayor utilidad, es aquél en que un lado del triángulo, AD, es un diámetro del círculo (Figura 5). Entonces si

$$AD = 2r$$

$$2r \cdot BC + AB \cdot CD = AC \cdot BD$$

y si se nombra al arco $BD = 2\alpha$ y al arco $CD = 2\beta$

se puede concluir que

$$BC = 2r \cdot \operatorname{sen}(\alpha - \beta)$$

$$AB = 2r \cdot \operatorname{sen}(90° - \alpha)$$

$$BD = 2r \cdot \operatorname{sen} \alpha$$

$$CD = 2r \cdot \operatorname{sen} \beta$$

$$AC = 2r \cdot \operatorname{sen}(90° - \beta).$$

De ahí, el Teorema de Ptolomeo conduce a:

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta.$$

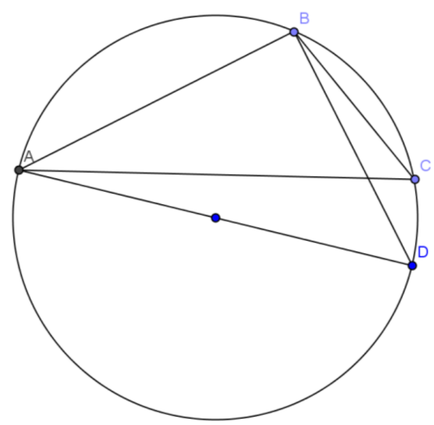

Figura 25

Aparentemente, una fórmula que resultó muy eficiente, utilizada por Ptolomeo, es la equivalente a lo que actualmente se conoce como la fórmula del semi-ángulo.

En la Figura 26, si D es punto medio del arco BC en la circunferencia con diámetro AC = 2r, si $AB = AE$ y DF biseca perpendicularmente a EC, se puede mostrar que

$$FC = \frac{1}{2}(2r - AB).$$

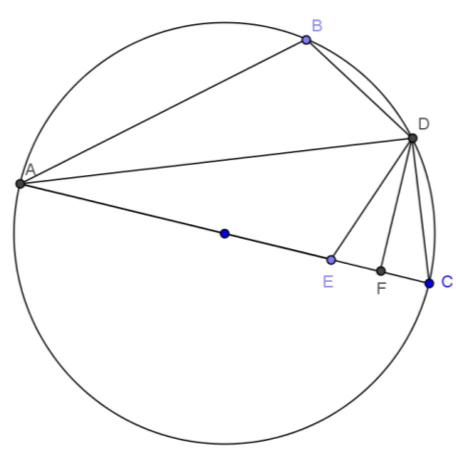

Figura 26

Por geometría básica, se sabe que

$$(DC)^2 = AC \cdot FC,$$

entonces $(DC)^2 = r(2r - AB)$.

Si el arco $BC = 2\alpha$, entonces $DC = 2r \cdot \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$ y $AB = 2r \cdot \cos\alpha$,

de donde se puede deducir la ecuación moderna

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(1 - \cos\alpha)}{2}}.$$

Es decir, si se conoce la cuerda de un arco dado, también se conoce la cuerda del su semi-arco. Con esto, Ptolomeo contaba con las herramientas necesarias para construir una tabla de cuerdas con tanta precisión como se deseara.

Cálculo de la medida de las cuerdas.

Sea el semi-círculo *ABG*, con centro en *D* y cuyo diámetro es *AG*. (Figura 27). Se traza el segmento *BD*, perpendicular a *AG* en *D*. Se localiza el punto *E*, que biseca *DG* y se traza el segmento *EB*. Se ubica el punto *Z* tal que *EZ* sea congruente a *EB*, se traza el segmento *BZ*.

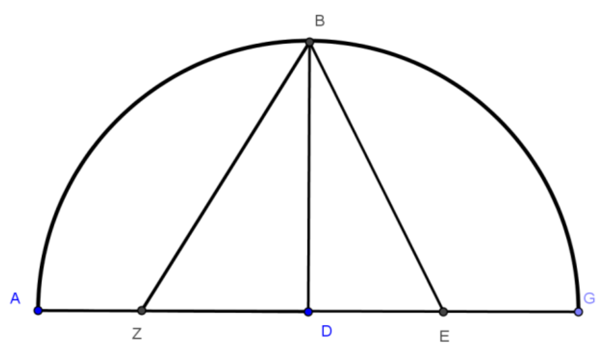

Figura 27

Se puede afirmar que *ZD* será el lado de un decágono regular y *BZ* el lado de un pentágono regular.

Demostración. Dado que *E* biseca el segmento *DG*,

$GZ \cdot ZD = DB^2$ (Euclides II)

$$EZ^2 = BE^2 \ (BE = EZ),$$

$$EB^2 = ED^2 + DB^2.$$

$$\text{por tanto } GZ \cdot ZD + ED^2 = ED^2 + DB^2$$

$$y\ GZ \cdot ZD = DB^2,$$

$$\text{es decir, } GZ \cdot ZD = DG^2.$$

De aquí se demuestra que *D* divide en la razón extremo y medio a *ZG*. Dado que el lado de un hexágono y el de un decágono inscritos en el mismo círculo, están en razón de extremo y medio de un segmento; como *GD*, por ser un radio, representa el lado de un hexágono, se puede afirmar que *DZ* representa el lado de un decágono.

Cálculo de las cuerdas de los arcos de 36° y 72°.

De manera análoga, dado que el cuadrado sobre el lado del pentágono es igual a la suma de los cuadrados sobre el lado del hexágono y del decágono (todos inscritos en el mismo círculo) y, en el triángulo rectángulo *BDZ*, el cuadrado sobre el lado *BZ* es igual a la suma de los cuadrados sobre *BD* – el lado del hexágono – y sobre *DZ* – el lado del decágono – se puede concluir que *BZ* es el lado del pentágono.

Si se establece la medida del diámetro del círculo en 120 partes, como lo hizo Ptolomeo, entonces

$$DE = 30^p \ (DE \text{ es la mitad del radio})$$

$$DE^2 = 900^p$$

$$BD = 60^p \ (BD \text{ es un radio})$$

$$BD^2 = 3600^p$$

$$EZ^2 = EB^2 = 4500^p = DE^2 + BD^2,$$

$$\text{por tanto } EZ \approx 67; 4, 55^p,$$

$$\text{y entonces } EZ - DE = 37; 4, 55^p.$$

Por lo tanto, el lado del decágono, que subtiende un ángulo de 36°, mide $37; 4, 55^p$ cuando el diámetro mide 120^p.

También, como

$$DZ = 37;4,55^p$$

$$DZ^2 = 1375;4,15^p$$

$$\text{y } DB^2 = 3600^p$$

$$\text{entonces } BZ^2 = DZ^2 + DB^2 = 4975;4,15^p$$

$$y\ BZ \approx 70;32,3^p.$$

En consecuencia, el lado de un pentágono, que subtiende un ángulo de 72°, mide $70;32,3^p$ cuando el diámetro mide 120^p.

Es evidente que el lado del hexágono inscrito que es igual a un radio, y que subtiende un ángulo de 60°, mide 60^p.

Adicionalmente, dado que el lado del cuadrado inscrito, el cual subtiende un ángulo de 90°, al elevarlo al cuadrado es igual al doble del cuadrado del radio, y dado que el lado del triángulo inscrito, el cual subtiende un ángulo de 120°, al elevarlo al cuadrado es igual al triple del cuadrado del radio; siendo 3600^p el cuadrado del radio, se obtiene que el cuadrado del lado del cuadrado es 7200^p y el cuadrado del lado del triángulo es 10800^p.

$$\text{por tanto } Crd\ 90° \approx 84;51,10^p$$

$$\text{y } Crd\ 120° \approx 103;55,23^p$$

cuando el diámetro mide 120^p.

Cuerdas de los ángulos suplementarios.

Ptolomeo posteriormente se dispuso a calcular las cuerdas de los ángulos suplementarios a los ángulos anteriormente calculados. Explica que, dada una cuerda, la cuerda del arco suplementario se obtiene pues se sabe que la suma de sus cuadrados equivale al cuadrado del diámetro. Por ejemplo, se sabe que

$$Crd\ 36° = 37;4,55^p$$

$$(Crd\ 36°)^2 = 1375;4,15^p$$

$$AG^2 \text{ (diámetro)} = 14400^p.$$

El cuadrado de la cuerda del arco suplementario (144°) será la diferencia

$$(Crd\ 144°)^2 = AG^2 - (Crd\ 36°)^2$$

$$(Crd\ 144°)^2 = 14400^p - 1375;4,15^p$$

$$y\ Crd\ 144° \approx 114;7,37^p.$$

Utilizando este procedimiento Ptolomeo calcula las cuerdas de los suplementos de los arcos conocidos.

Para calcular la medida de otras cuerdas, primero procede a establecer un teorema. Dado un círculo con un cuadrilátero inscrito arbitrario *ABGD*. Se unen *AG* y *BD*. Por demostrar que $AG \cdot BD = AB \cdot DG + AD \cdot BG^2$. (Ver Figura 28)

Demostración.

Se ubica el punto E tal que $\angle ABE = \angle DBG$

Como $\angle EBD$ es común,

entonces $\angle ABD = \angle EBG$

También, $\angle BDA = \angle BGE$ pues subtienden el mismo segmento

por tanto triángulo $ABD \sim$ triángulo BGE

$$y\ \frac{BG}{GE} = \frac{BD}{DA}$$

entonces $BG \cdot AD = BD \cdot GE$ (1).

También, como $\angle ABE = \angle DBG$

y $\angle BAE = \angle BDG$

triángulo $ABE \sim$triángulo BGD

por tanto $\frac{BA}{AE} = \frac{BD}{DG}$

y $BA \cdot DG = BD \cdot AE$ (2)

Por adición, usando (1) y (2)

$AG \cdot BD = AB \cdot DG + AD \cdot BG$

$Q.E.D.$

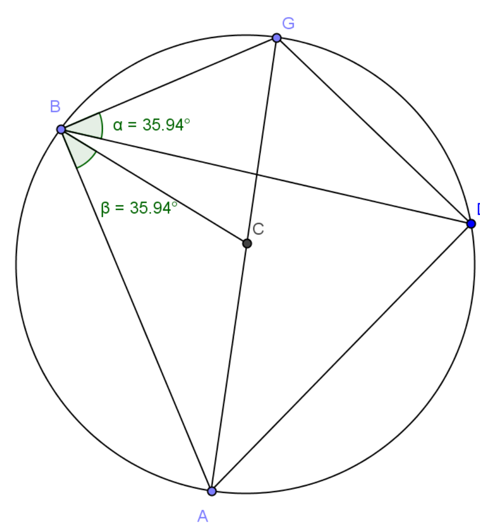

Figura 28

Cuerda resultante de la diferencia de dos cuerdas

Después de esta demostración, Ptolomeo procede a demostrar que: dado el semicírculo *ABGD*, con diámetro *AD*, se trazan dos cuerdas *AB* y *AG*, ambas dadas en términos del diámetro de 120^p. Al unir los puntos B y G, la distancia BG también se conoce.

Demostración:
Se traza BD y GD. Dado que BD y GD son cuerdas de los arcos suplementarios a AB y AG respectivamente, también se conocen (ver figura 29).

Dado que $ABGD$ es un cuadrilátero cíclico,

$$AB \cdot GD + AD \cdot BG = AG \cdot BD$$

Pero se conocen $AG \cdot BD$ y $AB \cdot GD$, AD es diámetro, por lo tanto $AD \cdot BG$ se puede calcular. Por lo tanto, se conoce BG.

Q.E.D.

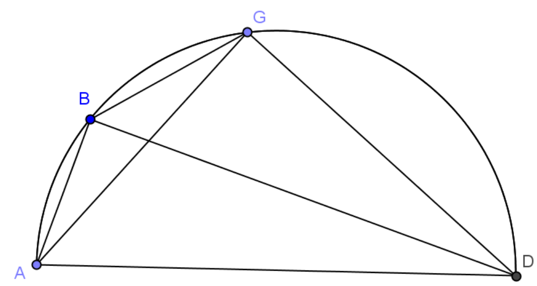

Figura 29

Queda demostrado que, si se conocen los arcos de dos cuerdas correspondientes, se puede calcular la cuerda resultante de la diferencia de los arcos.

Así Ptolomeo obtuvo los primeros datos para organizar su tabla de cuerdas, con los datos ya calculados y con las diferencias de las cuerdas que ya conoce.

Cuerdas de la mitad de arco

El siguiente paso para Ptolomeo fue demostrar que si se conocen un arco y su cuerda, se puede calcular la cuerda de la mitad del arco.

ABG es un semi-círculo, con diámetro *AG*, *GB* es una cuerda. (Ver figura 30). El punto *D* biseca al arco *GB*. Se trazan los segmentos *AB*, *AD*, *BD*, *DG* y la recta *DZ* perpendicular a *AG* desde *D*.

Por demostrar: $ZG = \frac{1}{2}\,(AG - AB)$.

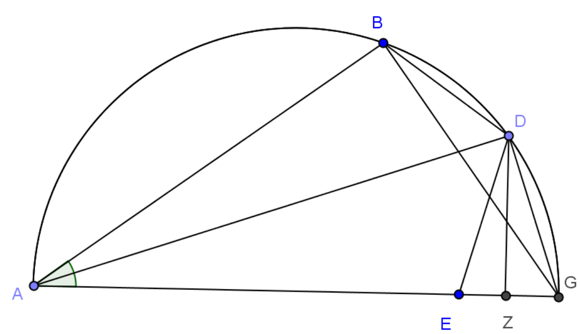

Figura 30

Demostración:

$$\text{Se encuentra el punto } E \text{ tal que } AE = AB$$

$$\text{Se traza } DE.$$

$$\text{Dados los triángulos } ABD \text{ y } ADE, AB = AE \text{ y } AD \text{ es común}$$

$$\angle BAD = \angle EAD$$

$$\text{así } BD = DE$$

$$\text{como } BD = DG \text{ (por construcción)}$$

$$\text{entonces } DG = DE$$

Dado que en el triángulo isósceles DEG se trazó la perpendicular *DZ* desde un vértice hacia su base,

$$EZ = ZG$$

$$\text{pero } EG = AG - AE = AG - AB.$$

Ahora, si se conoce la cuerda del arco *BG* entonces también se conoce la cuerda *AB*, por ser su suplementario.

Por lo tanto, también se conoce *ZG*, que es $\frac{1}{2}\ (AG - AB)$.

Dado que se trazó la recta perpendicular *DZ* en el triángulo rectángulo *AGD*

Entonces

$$\text{triángulo } ADG \sim \text{triángulo } DGZ \text{ (ambos son triángulos rectángulos)}$$

$$\text{por tanto } \frac{AG}{GD} = \frac{GD}{GZ}$$

$$\text{y } AG \cdot GZ = GD^2.$$

Como se conoce $AG \cdot GZ$, también se conoce GD^2, y por lo tanto se conoce la cuerda GD, la cual subtiende la mitad del arco de la cuerda *B*.

Este nuevo teorema permite calcular una gran cantidad de cuerdas. Por ejemplo, como se conoce la cuerda del arco de 12°, se puede conocer las cuerdas de los arcos de 6°, 3°, 1½ °. De acuerdo a los cálculos de Ptolomeo, la cuerda de 1½° mide aproximadamente $1;34,15^p$ con el diámetro de 120^p, y la cuerda de ¾° mide aproximadamente $0;47,8^p$ de las mismas unidades.

Cuerda resultante de la suma de dos cuerdas

Dado el semi-círculo *ABGD*, con diámetro *AD* y centro *Z*. Se trazan dos cuerdas sucesivas, *AB* y *BG*. Por demostrar que si se conocen *AB* y *BG*, se puede calcular *AG*. (Ver figura 31).

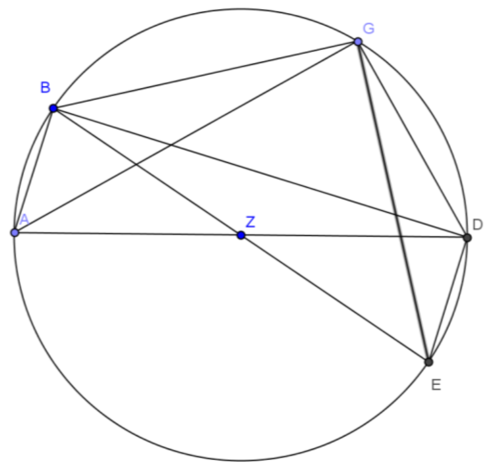

Figura 31

Demostración

Se traza el diámetro *BZ*E, se unen *BD*, *DG*, *GE*, *DE*. Al conocer *BG*, se puede calcular **GE**, por ser suplementarios. De la misma forma, *BD* y *DE* se calculan a partir de *AB*. Dado que *BGDE* es un cuadrilátero cíclico, cuyas diagonales son *BD* y *GE*, el producto de las diagonales equivale a la suma del producto de los lados opuestos,

es decir, $BD \cdot GE = BG \cdot DE + BE \cdot GD.$

Como se conocen $BD \cdot GE$ y $BG \cdot DE$ entonces se puede calcular $BE \cdot GD$. Como *BE* es diámetro, también se conoce, y por lo tanto se puede calcular GD y por consiguiente *GA*, que es la cuerda de su suplementario.

Por lo tanto, si se conocen dos arcos y sus correspondientes cuerdas, la cuerda que corresponde a la suma de dichos arcos también se conoce.

De esta manera, al combinar la cuerda de 1½° con las cuerdas previamente obtenidas y calculando cuerdas sucesivas se pueden obtener todas las cuerdas de arcos que son múltiplos de 1½°.

Lema para calcular la cuerda de un arco de ½°

Dado que la tabla que Ptolomeo se propuso elaborar contendría intervalos de ½°, aún queda por calcular la cuerda de un arco de ½°. Para lograr esto se propuso demostrar un lema que le permitiría deducir la medida de la cuerda de un arco de 1°.

Si se conocen dos cuerdas desiguales, la razón del arco mayor al menor es menor que la razón entre sus arcos correspondientes. Es decir, dado el círculo *ABGD*, con *AB* un arco menor que el arco *BG*. (Ver figura 32). Entonces

$$\frac{GB}{BA} < \frac{arco\ BG}{arco\ BA}.$$

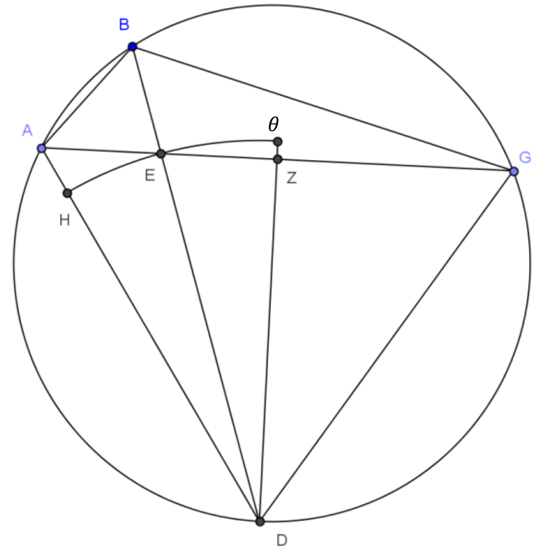

Figura 32

Demostración

Dado el ∠*ABG*, bisecado por la cuerda *BD*. Se trazan los segmentos *AEG*, *AD*, *GD*.

Como *BED* es bisectriz de ∠*ABG*,

$$GD = AD$$

$$\text{y } GE > EA.$$

Se traza *DZ*, desde el punto *D* perpendicularmente hacia *AEG*.

Entonces, como *AD* > *ED* y *ED* > *DZ* el círculo trazado desde el centro en *D*, con radio *DE*, cortará *AD* en *H* y la prolongación de *DZ* en *Θ*. Dicho arco será *HEΘ*. Como el sector *DEΘ* > triángulo *DEZ*, y el triángulo *DEA* > sector *DEH*,

entonces

$$\frac{triángulo\ DEZ}{triángulo\ DEA} < \frac{sector\ DE\Theta}{sector\ DEH}$$

pero

$$\frac{triángulo\ DEZ}{triángulo\ DEA} = \frac{EZ}{EA}$$

y

$$\frac{sector\ DE\Theta}{sector\ DEH} = \frac{\angle ZDE}{\angle EDA}$$

$$\text{por tanto } \frac{ZE}{EA} < \frac{\angle ZDE}{\angle EDA}$$

$$\frac{ZA}{EA} < \frac{\angle ZDA}{\angle EDA}.$$

Si se duplica el lado izquierdo de la desigualdad,

$$\frac{GA}{AE} < \frac{\angle GDA}{\angle EDA}$$

de ahí,

$$\frac{GE}{EA} < \frac{\angle GDE}{\angle EDA}$$

pero

$$\frac{GE}{EA} = \frac{GB}{BA}$$

y,

$$\frac{\angle GDB}{\angle BDA} = \frac{arco\ GB}{arco\ BA}$$

entonces,

$$\frac{GB}{BA} < \frac{arco\ GB}{arco\ BA} \qquad Q.E.D.$$

Ahora, se traza el círculo ABG, con las cuerdas AB y AG (ver figura 33). Se toma que AB es la cuerda de un arco de $\frac{1}{4}°$ y que AG es la cuerda de un arco de 1°. Como $\frac{AG}{BA} < \frac{arco\ AG}{arco\ BA}$

$$\text{y } arco\ AG = \frac{4 \cdot\ arco\ AB}{3}$$

$$AG < \frac{4 \cdot AB}{3}.$$

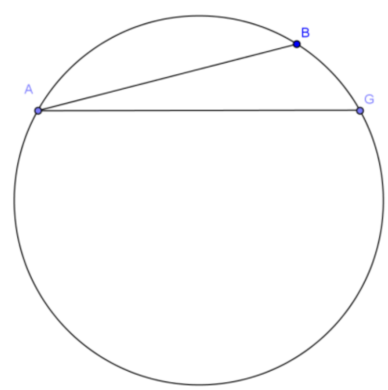

Figura 33

Expresado en unidades considerando que el diámetro mide 120^p, sabemos que

$$AB = 0;47,8^p$$

$$\therefore AG < 1;2,50^p \left(ya\ que \frac{4}{3}\ de\ 0;47,8^p \approx 1;2,50^p\right).$$

Utilizando la misma figura, supongamos que AB es la cuerda de un arco de 1° y AG es la cuerda de un arco de 1½°, utilizando el mismo argumento,

$$arco\ AG = \frac{3 \cdot arco\ AB}{2}$$

$$AG < \frac{3 \cdot AB}{2}.$$

Nuevamente, en unidades considerando que el diámetro mide 120^p, sabemos que

$$AG = 1;34,15^p$$

$$\text{y}\ \ AB > 1;2,50^p \text{ ya que } \frac{3}{2}\ de\ 1;2,50^p \approx 1;34,15^p.$$

Como se demostró que la cuerda del arco de 1° es tanto mayor como menor que la misma cantidad, se puede establecer que mide aproximadamente $1;2,50^p$ con un diámetro de 120^p. Con las proposiciones anteriores, también se puede establecer que la cuerda de un arco de ½ ° mide aproximadamente $0;31,25^p$. Habiendo obtenido estos valores y utilizando las proposiciones anteriores, ya es posible elaborar su Tabla de Cuerdas para arcos subtendidos por arcos con incrementos de ½ ° hasta 180°; es decir una Tabla de Seno para ángulos desde ¼° hasta 90° con incrementos de ¼°.

Ptolomeo utiliza el principio de incremento proporcional como un método para calcular aproximaciones a las cuerdas subtendidas por un número impar de minutos entre 0' y 30'. Agregó una columna a su Tabla en la que incluye cuánto se tiene que reducir dicha cuerda para obtener la cuerda subtendida por un arco 30' menor. Por ejemplo, calculó que la cuerda subtendida por un arco de 2 ½° mide 2; $37{,}4^p$. La diferencia entre la cuerda de 2 ½ ° y la de 2° es de 0; $31{,}24^p$, $\frac{1}{30}$ de esto es 0; 1,2, 48^p. Así, si se quiere calcular la cuerda subtendida por un arco de 2° 25', se toma la cuerda del arco de 2° (2; $5{,}40^p$) y se le aumenta 25 veces dicho incremento (25 x 0; 1,2, 48^p).

Es conveniente mencionar un aspecto interesante que resulta de la Tabla de Cuerdas de Ptolomeo. Dado que la cuerda subtendida por un arco de 1°= 1,2, 50^p, la circunferencia medirá 360 x 1,2, 50^p, cuando el diámetro mide 120^p, el valor de π será

$$\pi = 3\left(1 + \frac{2}{60} + \frac{50}{3600}\right)$$

$$\pi = 3 + \frac{6}{60} + \frac{150}{3600}$$

$$\pi = 3.141666\ldots,$$

valor utilizado por Ptolomeo en sus cálculos.

En términos generales, el valor del seno que se obtiene de la Tabla de Cuerdas de Ptolomeo es correcto hasta 5 lugares decimales.

Provisto con las fórmulas de cuerdas, de sumas y diferencias, y de cuerdas de medio arco, y habiendo obtenido un valor bastante exacto para la cuerda de $\frac{1}{2}°$, Ptolomeo procedió a construir una tabla de cuerdas con arcos desde $\frac{1}{2}°$ hasta 180° con intervalos de $\frac{1}{2}°$, que prácticamente corresponde a la tabla del seno desde $\frac{1}{4}°$ hasta 90° con intervalos de $\frac{1}{4}°$. Dicha tabla fue una herramienta indispensable para el trabajo de los astrónomos por más de 1000 años. El trabajo de Ptolomeo fue retomado por los eruditos de la India y Arabia, quienes edificaron el puente entre la geometría de la Grecia antigua y la trigonometría del mundo moderno.

VI. ¿CÓMO INTEGRAR LA HISTORIA EN LA ENSEÑANZA DE LA TRIGONOMETRÍA?

Si pretendemos que nuestros estudiantes comprendan las funciones trigonométricas como tales, es decir como funciones, entonces puede resultar adecuado tratarlas desde su origen histórico, como la relación entre dos longitudes – segmentos de recta y arcos. Investigadores, como Moore (2009) y Weber (2005) – entre otros – se percataron de la confusión que surge tanto en alumnos como en profesores al tratar de relacionar el seno visto como un número que describe una familia de triángulos semejantes con el seno que está vinculado con la función de un ángulo.

Tenemos mucho que aprender de la historia, tendemos a ignorar – en propio perjuicio – la ruta histórica que condujo a nuestros ancestros al descubrimiento de ideas matemáticas importantes. Podría resultar apropiado introducir el tema de la trigonometría imitando a los astrónomos que descubrieron y estudiaron estas funciones al analizarlas como la relación entre arcos y cuerdas de una circunferencia. Esto no significa que debemos ignorar la importancia de la trigonometría del triángulo, ni desdeñar el concepto de función trigonométrica como razón, sin embargo si la introducción de las funciones trigonométricas inicia como cuerdas de círculo con radio unitario, entonces se les da un significado concreto. Partiendo de ahí, se puede argumentar por semejanza de triángulos que dichas funciones también representan razones.

Enseñar de tal manera que los estudiantes comprendan el “por qué”, enseñar para encontrarle sentido y significado, enseñar de tal manera que los alumnos visualicen y aprecien la naturaleza, el rol y lo fascinantes que son las matemáticas, enseñar con objeto de que los alumnos se percaten que el hombre sigue creando matemáticas y que inclusive ellos pueden disfrutar la emoción del descubrimiento – son los eternos y esquivos retos en la enseñanza.

Es evidente que el sentido histórico *per se* no garantiza que se logren dichos objetivos. Sin embargo, con un enfoque adecuado, la historia de las matemáticas, aunado a un sentido contemporáneo de las matemáticas y sus aplicaciones, puede ser una herramienta útil en manos de un profesor interesado en los “por qué”. Adicionalmente, la historia de las matemáticas servirá como herramienta de enseñanza solamente si el profesor (1) está convencido de que su inclusión tiene un propósito significativo y (2) planea cuidadosamente su uso con objeto de lograr dicho propósito.

Resulta interesante cómo se ha dado la relación biunívoca entre las matemáticas y el mundo físico a través de la historia. Las necesidades de la física basadas en ideas tangibles tales como los puntos y líneas han servido para estimular el pensamiento e intuición del matemático; a su vez, las matemáticas desarrolladas como una teoría abstracta han desempeñado un papel como vehículo para el descubrimiento de las teorías de la física e inclusive económico – sociales.

El proceso de generalizaciones sucesivas se ha llevado a cabo a lo largo de los siglos. Veamos este proceso tanto como una necesidad como un problema pedagógico en el diseño y enseñanza del currículum de matemáticas. Podemos rastrear un ejemplo muy claro de este proceso de extensión y generalización en el desarrollo de las funciones trigonométricas como las conocemos hoy en día. La geometría de Euclides, en particular su demostración de la construcción de polígonos regulares, fue de mucha utilidad para la astronomía griega, quienes al visualizar a los planetas girando en órbitas circulares desarrollaron la necesidad de determinar la longitud de las cuerdas de circunferencias basándose en la longitud de su arco correspondiente. Esto permitió a Hiparco iniciar los cálculos de longitudes de las cuerdas y posteriormente a Ptolomeo quién logró compilar una tabla de cuerdas de gran exactitud. Los matemáticos de alrededor del año 500 d. de C. utilizaron la tabla de Ptolomeo y nos legaron, indirectamente, la palabra “seno”. Este término llega a nosotros como la versión en español de la palabra utilizada en latín para traducir una palabra en árabe, la cual procedía de la palabra hindú *jya,* cuyo significado es “mitad de cuerda”. A través de los siglos, el seno ha tenido diversas definiciones, por ejemplo “es la medida de uno de los lados de un triángulo rectángulo dado un ángulo agudo y cuya hipotenusa mide 1”, “en un triángulo rectángulo, es la razón entre el lado opuesto a un ángulo agudo y la hipotenusa”, “es la razón entre la ordenada y vector radial determinado por el ángulo central”, “es la ordenada de un punto en un círculo unitario determinado por un segmento de recta que gira alrededor del círculo”, “es el límite de una serie infinita que corresponde a un número real dado sustituido dentro de la serie”, “es la función inversa de una relación determinada por una integral definida”. Todas estas definiciones del seno son, de alguna manera, equivalentes entre sí o unas se pueden derivar de las otras. Todas ellas se pueden utilizar para resolver problemas relacionados con las cuerdas de círculos o con los lados de triángulos tanto rectángulos como oblicuángulos. Sin embargo, las definiciones más abstractas y generales, las que no dependen de la idea de ángulo, de triángulos, e inclusive de círculos o arcos, son las definiciones que resaltan una de las propiedades – posiblemente la más importante – de las funciones trigonométricas: su periodicidad.

En la actualidad resulta conveniente presentar a los estudiantes las funciones seno y coseno como ejemplos de funciones periódicas. Científicos en el campo de la biología, la física, las ciencias sociales las utilizan para modelar fenómenos periódicos, y no como la forma de calcular la medida del lado desconocido de un triángulo rectángulo.

Esto nos da la pauta para preguntar, ¿cómo utilizamos la historia de las matemáticas para mejorar su comprensión de su relación con el mundo físico, de cómo y por qué fueron creadas, crecieron, se desarrollaron, cambiaron, se generalizaron; de su aspecto internacional; de lo práctico que resultan las generalizaciones, extensiones y abstracciones; de su naturaleza que implica estructura, axiomatización, demostración?

No existe una receta sencilla para responder a esto. La edad y los antecedentes de los alumnos, así como el ingenio del profesor se conjuntan para determinar el enfoque que se puede utilizar. Puede ser desde una breve anécdota histórica, o el planteamiento de un problema como con el que se enfrentaron los griegos al querer calcular distancias entre los planetas. Algunas historias pueden servir para trabajo independiente, en clubes de matemáticas, trabajo en casa. Otras situaciones pueden servir para que los estudiantes experimenten el sentido del "descubrimiento". La historia puede hacer más que presentar problemas e ideas estimulantes. También puede ayudar al estudiante a percibir relaciones y estructura en lo que aparenta ser un enredo de geometría, álgebra, trigonometría, funciones, series infinitas y fórmulas.

El punto de vista histórico puede ayudar al profesor a determinar cómo deberían ser las "matemáticas modernas". La historia nos muestra que las matemáticas contemporáneas son una combinación de lo antiguo – por ejemplo contar, el teorema de Pitágoras – con conceptos más recientes, como conjuntos, modelos, estructuras. No es descabellado pensar que en ocasiones las "matemáticas modernas" son sólo una percepción moderna de temas antiguos. Lo importante es no desechar todo lo que es viejo y abrazar lo que es nuevo, más bien desarrollar y compartir con los alumnos recapitulaciones nuevas de ideas antiguas, así como introducir en el salón nuevos conceptos y sistemas que sean apropiados. Una perspectiva del desarrollo (historia) de las ideas puede ayudar al profesor a mejorar su poder de comunicar conocimientos y estimular el interés en sus alumnos.

Lo que las matemáticas necesitan son personas que exuden matemáticas, que sientan la necesidad de comunicarle sus matemáticas a otras personas. Pero, ¿en dónde entra la historia de las matemáticas? En la misma manera en la que la historia está involucrada con todo lo demás. El hombre es una criatura histórica; es lo que marca la diferencia entre el ser humano y las demás criaturas sobre la Tierra. Cada hombre y mujer tenemos una historia, así como una historia familiar. Una nación lo es como producto de su pasado – cosas buenas y malas, actos buenos y malos llevados a cabo en nombre de la nación; y de la misma manera la humanidad tiene una historia – es sólo otra manera de llamarle a la memoria. Por supuesto que existen especialistas que se hacen cargo de esta memoria: los historiadores que la buscan, piensan, discuten, escriben, sin embargo es nuestro deber estar atentos al pasado, todos – de lo contrario deja de existir, tal vez llevado al extremo se podría decir que una criatura histórica no está viva si su pasado no vive en él o ella.

Todo lo que el hombre toca tiene una historia – un árbol, una casa, la arquitectura, el arte, las creencias, cada asignatura (incluyendo a la historia), y por lo tanto las matemáticas también. Si se enseñan matemáticas, debe enseñarse la historia de las matemáticas, ya que la historia de una disciplina es parte de dicha disciplina. Evidentemente no es cuestión de enseñar historia de las matemáticas para hacerlas más divertidas, o más fáciles, o más humanas. Al enseñar matemáticas como parte esencial de ellas mismas, todo esto sucederá.

Otro aspecto que permea la historia de las matemáticas es el espíritu del tiempo. Todos ejecutamos nuestra muy personal danza al compás de la música del tiempo en que vivimos, en ocasiones en armonía y en otras en desacuerdo. Así son las matemáticas, han absorbido la esencia del momento histórico en el que fueron desarrolladas, y por lo tanto tienen mucho que decirnos en filosofía, política, las ciencias, literatura.

CONCLUSIONES

La forma en la que se enseña matemáticas en las escuelas por lo general no tiene relación con el origen de las matemáticas. El papel del profesor de matemáticas se ha convertido en ser la fuente de todo lo que el alumno debe aprender de la materia y su labor es transmitir dichos conocimientos a los estudiantes. En este proceso se ha perdido la riqueza de la creación matemática y de las vicisitudes del ser humano por resolver los problemas con los que se ha enfrentado. Para la mayoría de los alumnos las matemáticas son una materia "terminada", sin nada nuevo que se le pueda aportar, y está en el profesor decidir si las respuestas son o no correctas.

Por su naturaleza, las matemáticas son una asignatura acumulativa; gran parte de lo que fue creado hace milenios – tanto en el contenido como en los procesos – es aún válido hoy en día. Exponer a los estudiantes a algunos aspectos de dicho desarrollo puede lograr darle vida a la materia así como hacerlos partícipes de su creación. Para lograr esta transformación lo mejor que los profesores pueden hacer es enriquecer su propia experiencia empapándose del desarrollo histórico de los temas que quiere (o debe) enseñar. Por ejemplo, uno puede comprender mejor la revolución en las matemáticas cuando se aceptó la validez de la geometría no euclideana si uno está consciente de la larga lucha histórica por probar el quinto postulado de Euclides.

Adicionalmente, en la historia de las matemáticas encontramos múltiples ejemplos de conceptos que tardaron en ser aceptados por los matemáticos mismos, como son el uso de los números irracionales, de los números negativos, de la notación simbólica, por mencionar algunos. No es descabellado pensar que los alumnos puedan presentar similares dificultades para comprender y utilizar con fluidez dichos conceptos. El hecho de que el profesor esté consciente de las dificultades históricas por lograr la aceptación de los conceptos matemáticos puede contribuir a comprender las dificultades que los alumnos presentan en esta materia.

Una buena estrategia para incorporar la historia en la enseñanza de las matemáticas consiste en presentar un problema histórico que está relacionado con el tema que se está trabajando, orientar a los alumnos para que encuentren el origen de dicho problema, encauzarlos para que elaboren preguntas, organizar una discusión grupal, pedirles que resuelvan el problema colaborativamente para que al final compartan sus hallazgos, comparen estrategias y se llegue a una puesta en común.

El lenguaje y las matemáticas se desarrollaron paralelamente. El lenguaje se refuerza diariamente y por lo tanto forma parte integral de la vida del ser humano. Las matemáticas no tienen la suerte de ese refuerzo diario y cotidiano, por lo que es necesario implementar una educación matemática más formal. Es nuestra labor como profesores organizar dicha educación de tal forma que comunique a las nuevas generaciones los atributos básicos de las matemáticas como parte de la cultura de la humanidad. Se puede lograr esta meta al relacionar a su contexto y desarrollo histórico los temas que enseñamos. Al promover la creación de un clima de investigación e indagación dentro del salón de clases y no sólo de transmisión de información. Al enseñar a nuestros alumnos que ellos pueden hacer matemáticas. Al mostrar el lado humano de las matemáticas. Al presentar las matemáticas como son... ¡como ideas que han surgido del pensamiento de los seres humanos!

FUENTES DE CONSULTA

Baumgart, J. (Ed) (1969). Historical Topics for the Mathematics Classroom. 31st Yearbook NCTM Washington D.C.

BBC (2013). History of Indian Mathematics Part-2 of 2 *[Video]*. Sitio web: https://www.youtube.com/watch?v=DeJbR_FdvFM

Bogomolny, A. (2013). Sine, Cosine, and Ptolemy's Theorem. Julio 10, 2017, de *Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles*. Sitio web: *http://www.cut-the-knot.org/proofs/sine_cosine.shtml*

Boyer, C. (1968). *A History of Mathematics*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Branford, B. (1908) *A Study of Mathematical Education*. Oxford: Clarendon Press.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics* (Edited and translated by N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, and V. Warfield). Dordrecht: Kluwer.

Brown, T. (1994). *Towards a hermeneutical understanding of mathematics and mathematical learning*. In P. Ernest (Ed.), Constructing Mathematical Knowledge: Epistemology and Mathematics Education. Washington, DC: Falmer.

Burton, D. M. (2003). *The History of Mathematics: An Introduction* (5th ed.). New York, NY: McGraw-Hill.

Cortázar, J. (1995). *Confieso que he vivido y otras entrevistas*. Antonio Crespo (Comp.) Argentina: LC Editor.

D'Ambrosio, B. S. (1995). *Implementing the professional standards for teaching mathematics: Highlighting the humanistic dimensions of mathematics activity through classroom discourse*. Mathematics Teacher, 88(9), 770-772.

Davis, P. J., & Hersh, R. (1980). *The Mathematical Experience*. Harmondsworth: Penguin.

Dorner, B. Chord Tables of Hipparchus and Ptolemy. Sitio web: https://community.plu.edu/~dornerbc/teaching/math203/chordtable.pdf

Ernest, P. (1994a). *History, mathematics and education*. In P. Ernest (Ed.), Constructing Mathematical Knowledge: Epistemology and Mathematics Education. Washington, DC: Falmer.

Ernest, P. (1994b). *The human face of mathematics*. In P. Ernest (Ed.), Mathematics, Education and Philosophy: An International Perspective. London: Falmer.

Fauvel, J. & Van Maanen, J. (Eds.). (2002). *History in Mathematics Education*. Netherlands: Springer Netherlands.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: The China lectures*. Dordrecht: Kluwer.

Furinghetti, F. (2007). *Teacher education through the history of mathematics*. The History of Mathematics Education: Theory and Practice, 66(2), 131-143.

Grattan-Guiness, I. (1973). *Not from nowhere. History and philosophy behind mathematical education*. Mathematical. Education in Science and Technology, 4, 421-453.

Gulikers, I., & Blom, K. (2001). *'A historical angle', a survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education*. Educational Studies in Mathematics, 47(2), 223-258.

Heath, T. (1921). *A History of Greek Mathematics. Volume I From Thales to Euclid*. London: Oxford University Press.

Heath, T. (1921). *A History of Greek Mathematics Volume II*. New York: Dover Publications Inc.

Heppel, G. (1893). *The use of history in teaching mathematics*. General Report (Association for the Improvement of Geometrical Teaching) Vol. 19 pp. 19-33 Published by: The Mathematical Association.

ICME 11 Mexico, 2008. 11th Interantional Congress for Mathematics Education. Sitio web: http://tsg.icme11.org/tsg/show/24

Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. Educational studies in Mathematics, 71(3), 235-261.

Katz, V. (1986). *Using History in Teaching Mathematics*. *For the Learning of Mathematics* Vol. 6, No. 3 pp. 13-19 Published by: FLM Publishing Association.

Kline, M. (1990). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. 3 vols. New York: Oxford University Press.

Kline, M., & Martínez, M. (1999). El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días. Sitio web: https://www.scribd.com/doc/147071130/Morris-Kline-El-pensamiento-matematico-de-la-antiguedad-a-nuestros-dias

Krathwohl, D. R., Bloom, B. S., & Masia, B. B. (1973). *Taxonomy of Educational Objectives, the Classification of Educational Goals*. Handbook II: Affective Domain. New York: David McKay Co., Inc.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutation*. London: Cambridge University Press.

Laubenbacher, R., Pengelley, D. (1996*) Mathematical Masterpieces: Teaching with Original Sources*. Vita Mathematica: Historical Research and Integration with Teaching, R. Calinger (ed.), MAA, Washington, pp. 257—260.

Lingard, D. (2001). *The history of mathematics: An essential component of the mathematics curriculum at all levels*. Australian Mathematics Teacher, 56(1), 40-44.

Liu, P. (2003). *Do teachers need to incorporate the history of mathematics in their teaching?* Mathematics Teacher, 96, 370-377.

Maor, E. (1988).*Trigonometric Delights*. Princeton and Oxford: Princeton University Press.

Moore, K. (2009). "An Investigation into Precalculus Students' Conceptions of Angle Measure." In Proceedings for the Twelfth Special Interest Group of the Mathematical Association of America on Research in Undergraduate Mathematics Education Conference. Raleigh, NC: North Carolina State University.

Moritz, R.E. (1958) *Memorabilia Mathematica: The Philomath's Quotation Book*, Mathematical Association of America, Washington, D.C; original edition in 1914; reprinted by Dover, New York.

Moru, E. K., Persens, J., Breiteig, T., & Ndalichako, J. (2008). *Epistemological obstacles in understanding the limit of a sequence: A case of undergraduate students at the National University of Lesotho*. In L. Holtman, C. Julie, Mikalsen. Ø., D. Mtetwa & M. Ogunniyi (Eds.), Some Developments in Research in Science and Mathematics in Sub-Saharan Africa (pp. 47-42). South Africa: Africa Minds.

Neugebauer. O. (1983). *Astronomy and History*. New York: Springer-Verlag.

Neugebauer. O. (1975). *A History of Ancient Mathematical Astronomy*. *Part Two*. New York: Springer-Verlag.

O'Connor, J., Robertson, E. (2000). An overview of Indian mathematics. Julio 10, 2017, de MacTutor History of Mathematics Sitio web: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Indian_mathematics.html

Panasuk, R. & Bolinger-Horton, R. (2013). *Integrating History of Mathematics into the Classroom: Was Aristotle Wrong?* December 27, 2016, de Journal of Curriculum and Teaching. Sitio web: http://dx.doi.org/10.5430/jct.v2n2p37

Peet, T. E. (Ed.). (1923). The Rhind mathematical papyrus: British museum 10057 and 10058. University Press of Liverpool Limited.

Poincaré, Henri. (1899). *La Logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement*. Enseignement Mathématique 1.

Pólya, George. (1945). *How to Solve It*. Princeton, N.J.: Princeton University Press.

Sarton, G. (1936). *The Study of the History of Mathematics*. Cambridge, MA.: Harvard University Press.

Sarton, G.. (1959). *Hellenistic Science and Culture in the Last Three Centuries BC.* New York: Dover Publications, Inc.

Selden, A., & Selden, J. (2001). *Tertiary mathematics education research and its future*. In D. Holton (Ed.), The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study (pp. 201-214). Dordrecht: Kluwer.

Siegel, M., & Borasi, R. (1994). *Demystifying mathematics education through inquiry*. In P. Ernest (Ed.), Constructing Mathematical Knowledge: Epistemology and Mathematics Education (pp. 201-214). Washington, DC: Falmer.

Sierpinska, A. (1996). *The diachronic dimension in research of understanding in mathematics – usefulness and limitations of the concept of epistemological obstacle*. In H. Jahnke, N, Knoche, & M. Otte (Eds.), History of mathematics and education: Ideas and experiences (pp. 289 – 318). Gottingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Silva, C. M. & Araújo, C. A. (2001). *Conhecendo e usando a história da matemática* [Conociendo y usando la historia de la matemática]. Educação e Matemática, 61(1), 19 – 21.

Simonson, S. (2000). *The mathematics of Levi ben Gershon*. Mathematics Teacher, 93(8), 659 – 663.

Siu, M.K., (1997/2000). *The ABCD of using history of mathematics in the (undergraduate) classroom*. Bulletin of the Hong Kong Mathematical Society, 1, 143-154; reprinted in V. Katz (ed.) Using History To Teach Mathematics: An International Perspective, Washington D.C.: Mathematical Association of America, pp. 3-9.

Smith, D.E. (1921). *Religio Mathematici, Presidential Address Delivered Before the Mathematical Association of America*. The American Mathematical Monthly. Vol. 28, No. 10, pp. 339-349. Published by: Taylor &Francis, Ltd.on behalf of the Mathematical Association of America.

Sullivan, K. (2016). Surya Siddhanta: The Startlingly Accurate Astronomy Book of the 1st Millennium BC. Julio 10, 2017, de Ancient Origins Sitio web: http://www.ancient-origins.net/artifacts-ancient-writings/surya-siddhanta-startlingly-accurate-astronomy-book-1st-millennium-bc-020969?nopaging=1

Swets, F., Fauvel, J., Bekken, O., Johansson, B., Katz, V. (Eds.). (1995). *Learn from the Masters*. USA: MAA Press.

Tall, D. (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). *Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity*. Journal Educational Studies in Mathematics, 12(2), 151-169.

Toeplitz, O. (1963).*The Calculus: A Genetic Approach*. Translated by Luise Lange. Chicago, Ill.: University of Chicago Press.

Toomer, G. J. (1974). The chord table of Hipparchus and the early history of Greek trigonometry. Centaurus, 18(1), 6-28.

Toomer, G. (1984). *Ptolemy's Almagest*. Springer-Verlag, New York.

Tymoczko, T. (1993) *Humanistic and Utilitarian Aspects of Mathematics*. In Essays in Humanistic Mathematics, edited by Alvin M. White, pp. 11–14. Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

Tzanakis, C. & Arcavi, A. (2000). *Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey*. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), History in mathematics education: An ICMI book, (pp. 201 – 240). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Tzanakis, C. & Thomaidis, Y. (2000). *Integrating the close historical development of mathematics and physics in mathematics education: Some methodological and epistemological remarks*. For the Learning of Mathematics, 20(1), p. 44 – 55.

Vafea, F. (2002). The Mathematics of Pyramid Construction in Egypt. Julio 16, 2017, de Mediterranean Archaeology and Archaeometry. Sitio web: http://maajournal.com/Issues/2002/Vol02-1/Full8.pdf

Weber, K. (2005). "Students' Understanding of Trigonometric Functions." Mathematics Education Research Journal 17, no. , p. 91–112.

Wilder, R.L. (1968) *Evolution of mathematical concepts; an elementary study*. New York: Wiley Publications.

Wheeler, D. (1980). *Humanizing Mathematical Education*. In Mathematics Concepts No. 55, p.7-14.