



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
DOCTORADO EN CIENCIAS FÍSICAS
INSTITUTO DE CIENCIAS FÍSICAS UNAM

TRANSFORMACIONES UNITARIAS ENTRE PLANOS Y ESFERAS:
SISTEMA CUÁNTICO DE ZERNIKE Y DEFORMACIÓN
LORENTZIANA.

TESIS

PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTORADO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:
MA. CRISTINA SALTO ALEGRE

TUTOR PRINCIPAL
DR. KURT BERNARDO WOLF BOGNER
INSTITUTO DE CIENCIAS FÍSICAS UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR
DR. NATIG ATAKISHIYEV
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS UNAM
DR. JOSÉ F. RÉCAMIER ANGELINI
INSTITUTO DE CIENCIAS FÍSICAS UNAM

Cuernavaca, Morelos. Diciembre 2018



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Amateurs sit and wait for inspiration, the rest of us
just get up and go to work – **Stephen King**

Agradecimientos

Estudiar un doctorado es una decisión que no se debería tomar a la ligera. En mi caso, nunca pensé en las posibles implicaciones que tendría sobre mi vida. Podría decirse que estos últimos cuatro años fueron un periodo de vida complicado e interesante, ciertamente, nunca creí experimentar tantos sentimientos contradictorios hacia mi parte científica (bloques creativos, depresión, problemas de salud, negación y cuestionamientos de mi capacidad intelectual, etc). A pesar de todo esto, creo que este periodo me ha proporcionando una nueva forma de ver las cosas y hasta cierta madurez en la investigación. Dejando de lado el sentimentalismo, me siento obligada y agradecida por decir que he podido llegar al final de esta etapa por toda la ayuda, comprensión y compañerismo que me han brindado muchas personas, a las cuales quisiera agradecer por este medio.

Primeramente, deseo agradecer a mi asesor, Dr. Kurt Bernardo Wolf Bogner, por aceptar toda la responsabilidad que conlleva ser un buen tutor. Gracias Dr. Wolf, por ser uno de mis ejemplos a seguir como científico, ser una figura paterna y un amigo que admiro mucho.

Una parte fundamental para lograr sacar adelante mi proyecto de Doctorado han sido mis amigos: Manuel Sedano, Natalia Trujillo, Denhi Martínez, Luisana Claudio, Siomara López, César Martínez y Héctor Moreno, sin ellos hace mucho que me hubiera rendido. Deseo agradecer especialmente a tres personas ya mencionadas: a Naty por ayudarme y acompañarme durante mi depresión ‘doctoral’, a Luisana, por darme perspectiva y apoyarme durante mi doctorado y a Manuel, por ser mi apoyo incondicional y mejor amigo siempre siempre. A Manuel le agradezco también el interés, las discusiones constructivas y las recomendaciones bibliográficas que me hizo saber en el tema de la deformación Lorenziana.

Agradezco también a toda la comunidad del Instituto de Ciencias Físicas, –desde administrativos, técnicos, personal de intendencia, alumnos, investigadores etc.– por crear una comunidad tan unida y hacerme sentir en ‘Casa’, y al Posgrado de Ciencias Físicas, y a todos los que lo hacen funcionar, por haberme dado la oportunidad de estudiar en su posgrado y darme un reto intelectual por cumplir.

Por último, pero no por ello menos importante, deseo agradecer a los proyectos ‘Óptica Matemática’ apoyados por DGAPA-PAPIIT, UNAM, por los recursos brindados en el transcurso de mi Doctorado, y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por otorgarme la beca No. 269738, que ha sido la principal razón de que haya podido llevar a cabo mis

estudios profesionales, los cuales había soñado con concluir desde que era una niña. Gracias CONACyT, espero que sigas cumpliendo sueños a través de becas.

Resumen

En este trabajo se estudian dos sistemas físicos cuya descripción y solución se encuentra tanto en la variedad \mathbb{R}^2 , como de la superficie de la esfera \mathcal{S}^2 . Los sistemas que se estudian son el sistema cuántico de Zernike y el sistema de Helmholtz bajo la deformación Lorentziana. Ambos sistemas se resuelven en la variedad donde las simetrías son más evidentes, y después de encontrar las soluciones buscadas mediante las transformaciones unitarias dadas, se encuentran también las soluciones correspondientes en la otra variedad involucrada. Las transformaciones unitarias entre las dos variedades garantizan en ambos sistemas, encontrar y describir las funciones y dinámicas correspondientes entre \mathcal{S}^2 y \mathbb{R}^2 .

En el sistema cuántico de Zernike, la transformación unitaria entre la semiesfera superior y el disco unitario, es la llamada proyección vertical. El sistema cuántico de Zernike se caracteriza por una ecuación de tipo Schrödinger en la semiesfera, que corresponde a la ecuación diferencial de Zernike en el disco. El objetivo principal en este tema fue encontrar tres bases de funciones del hamiltoniano cuántico de Zernike, los operadores de simetría para los tres sistemas coordenados y el álgebra asociada.

La deformación Lorentziana en el espacio de Helmholtz, se inicia por dar una construcción matemática de los frentes de onda en la óptica de Helmholtz, luego se da una breve descripción de algunos aspectos importantes de la geometría del grupo de Lorentz que ayudan a introducir de forma natural a la deformación Lorentziana. Finalmente, se encuentra la deformación en los campos de onda de Helmholtz debida a un impulso relativista en la dirección de movimiento de la luz, usando dos enfoques: uno de transformadas integrales unitarias y otro de operadores diferencias de cuarto orden. En este caso, la transformada de onda describe una transformación unitaria que relaciona las funciones del espacio de frecuencias y las funciones que forman una imagen y su derivada normal en el espacio de posiciones sobre una pantalla plana.

Índice

Resumen	IV
Índice	VI
1. Introducción	1
2. Sistema cuántico de Zernike	5
2.1. Operador de Zernike	5
2.2. Condiciones a la frontera	6
2.3. Polinomios de Zernike en el disco	8
2.4. Del plano a la esfera: ecuación de Zernike tipo Schrödinger	13
2.5. Sistema cuántico superintegrable de Zernike	15
2.5.1. Sistema de coordenadas I	16
2.5.2. Sistema de coordenadas II	19
2.5.3. Sistema de coordenadas III	22
2.6. Transformación entre bases de Zernike	23
2.6.1. transformación entre bases I y II	24
2.6.2. transformación entre bases I y III	26
2.6.3. transformación entre bases II y III	27
2.7. Álgebra superintegrable de Zernike	30

2.8. Observaciones finales y trabajo futuro	31
Referencias	32
3. Deformación Lorentziana en el espacio de Helmholtz	35
3.1. Óptica Euclideana	35
3.1.1. Espacio de rayos en óptica geométrica	36
3.1.2. Espacio de frentes de onda	38
3.2. Óptica de Helmholtz	39
3.2.1. Transformada de Onda	40
3.3. Grupo de Lorentz en la esfera \mathcal{S}^2	42
3.4. Geometría de Lorentz en óptica de Helmholtz	43
3.5. Deformación Lorentziana en la esfera	46
3.5.1. Deformación en ángulos	46
3.5.2. Funciones de prueba en esfera y plano	47
3.5.3. Campos de onda deformados sobre la esfera	48
3.6. Deformación Lorentziana en el plano	49
3.6.1. Generadores de <i>boost</i> en el plano	49
3.6.2. Funciones de onda deformadas en la pantalla	52
3.7. Observaciones finales	53
Referencias	54

1. Introducción

En este trabajo se describen dos sistemas físicos en regiones de la esfera \mathcal{S}^2 y el plano \mathbb{R}^2 , los dos sistemas que se estudian son el sistema cuántico de Zernike y el sistema de Helmholtz bajo la deformación Lorentziana. Ambos sistemas se resuelven en el espacio donde las simetrías son más evidentes y después de encontrar las soluciones buscadas, mediante las transformaciones unitarias dadas, se encuentran también las soluciones correspondientes en el otro espacio involucrado. Las transformaciones unitarias entre las dos variedades garantizan, en ambos sistemas, encontrar y describir las funciones y dinámicas correspondientes entre \mathcal{S}^2 y \mathbb{R}^2 , de manera que el producto interno de las funciones se conserve. El operador óptico de Zernike, comunmente usado para describir pupilas circulares en óptica, se define en el disco $D \in \mathbb{R}^2$ y bajo la proyección ortogonal, que juega el papel de transformación unitaria entre espacios, se encuentra el operador de Zernike cuántico en la semiesfera superior. En el caso de la deformación Lorentziana, la transformada de onda relaciona, de manera única, funciones de onda en la pantalla plana con funciones sobre la esfera de direcciones, lo cual ayuda a establecer dos enfoques, en el plano y en la esfera, para obtener la deformación Lorentziana en los campos de onda de Helmholtz.

Cabe señalar que el tema que realicé durante mi maestría, ‘funciones de posición y momento en el ojo de pez de Maxwell monocromático’ [1], también es parte del tema general ‘transformaciones unitarias entre esferas y planos’. En el modelo monocromático del ojo de pez se utilizó como transformación unitaria a la proyección estereográfica entre la esfera unitaria y el plano \mathbb{R}^2 . Usando esta transformación se encontraron bases de posición y momento sobre la esfera y con su respectiva proyección al plano, se determinaron las bases correspondientes para el sistema del ojo de pez de Maxwell monocromático.

Los dos temas que se estudian en esta tesis se analizan por separado. El capítulo 2 corresponde al sistema cuántico de Zernike y el capítulo 3 a la deformación Lorentziana en el espacio de Helmholtz. La estructura de cada tema se describen a continuación.

Sistema cuántico de Zernike

En este trabajo se estudia el sistema cuántico de Zernike, el cual se encuentra a partir de una transformación unitaria entre la semiesfera superior y el disco unitario, llamada

proyección vertical. El sistema cuántico de Zernike se caracteriza por una ecuación de tipo Schrödinger en la semiesfera, que corresponde a la ecuación diferencial de Zernike en el disco. El objetivo principal en este tema fue encontrar tres bases de funciones del hamiltoniano cuántico de Zernike correspondientes a tres sistemas coordenados, los operadores de simetría para cada sistema y el álgebra asociada. La organización de este estudio se realizó a través de las siguientes secciones:

2.1. Operador de Zernike. Se define el operador de Zernike en el disco y las funciones en las que actúa.

2.2. Condiciones a la frontera. Se establecen las condiciones a la frontera que debe satisfacer el operador de Zernike para ser autoadjunto, las cuales llevan a una simplificación de la ecuación diferencial de Zernike.

2.3. Polinomios de Zernike en el disco. Se describe el proceso para obtener los polinomios de Zernike y algunas de sus propiedades.

2.3. Simetrías ocultas en el operador de Zernike. Se discute un poco sobre algunas simetrías del operador de Zernike que no aparecen en el disco pero que en la esfera se vuelven evidentes.

2.4. Del plano a la esfera: ecuación de Zernike tipo Schrödinger. Se encuentra el operador de tipo Schrödinger asociado al operador de Zernike en el disco. Esto se realiza de la siguiente manera: al operador en el disco se le aplica una transformación de similaridad que básicamente cambia la geometría euclideana, donde curvas que minimizan la energía son rectas, a la geometría hiperbólica, donde las curvas de mínima energía son arcos de círculo; el nuevo operador diferencial obtenido por la transformación de similaridad se proyecta verticalmente del disco unitario a la semiesfera superior, a través de un cambio de coordenadas, obteniendo así el operador cuántico que caracteriza al sistema cuántico de Zernike.

2.5. Sistema cuántico superintegrable de Zernike. En este apartado se reportan tres bases de soluciones para el operador cuántico de Zernike correspondientes a tres sistemas coordenados ortogonales. El primer sistema tiene como soluciones los polinomios de Zernike tradicionales dados en términos de coordenadas esféricas. En el segundo y tercer sistema se encuentran nuevos operadores de simetría y las soluciones encontradas se expresan en términos de polinomios de Legendre y Gegenbauer que proveen una nueva forma de expresar las funciones de Zernike.

2.6. Transformación entre bases de Zernike. En la sección 2.6 se encuentran los coeficientes de la transformación entre las tres distintas bases analizadas en la sección anterior. Este apartado está basado en el artículo [2] y se incluye en esta tesis sólo por ser un complemento importante.

2.7. Álgebra superintegrable de Zernike. En la última sección se describe el álgebra superintegrable de Zernike a través de sus generadores en la semiesfera y el disco. A esta álgebra se le llama ‘álgebra cúbica de Higgs’ [3].

De el material de este capítulo, las secciones 2.1 y 2.6 son revisión de material de [4] y [2] respectivamente, la sección 2.3 es revisión de los trabajos [15, 22]. El resto del material de este capítulo es aportación nueva encontrada durante el trabajo de esta tesis que aparece publicada en [18].

Deformación Lorentziana en el espacio de Helmholtz

El objetivo de este tema es encontrar la deformación en los campos de onda de Helmholtz debida a un impulso relativista en la dirección de movimiento de la luz, dirección z , usando dos enfoques: uno integral y otro de operadores diferenciales. Este tema se aborda como una aplicación de teoría de grupos de Lie al sistema óptico de Helmholtz.

Del material de este capítulo, las secciones 3.1 y 3.2 fueron presentadas en [5] y la sección 3.6 en los trabajos [10, 2]. En esta tesis, los dos primeros temas se reformularon para dar un tratamiento más sistemático e intuitivo desde el punto de vista de los grupos de Lie a estas secciones, mientras que en la sección 3.6 se utilizaron las funciones de Bessel como funciones de prueba para realizar una comparación con el método integral. El resto del contenido en este capítulo es propuesta original en esta tesis.

Este tema está dividido de la siguiente manera:

Se inicia con una construcción matemática, basada en espacios cocientes de los grupos de Lie $ISO(3)$ y $SO(3)$, de la óptica Euclideana para el modelo geométrico y luego se encuentra el espacio de frentes de onda para el espacio de Helmholtz.

Ya que se tiene una idea clara de como se construye el espacio de frentes de onda, la transformada de onda describe la transformación unitaria que relaciona el espacio de frecuencias y la pantalla plana, que constituyen el espacio fase óptico.

Para introducir de forma natural la deformación Lorentziana en el espacio de Helmholtz, se describen algunos aspectos importantes de la geometría del grupo de Lorentz que son de utilidad en la comprensión del tema.

Este capítulo está estructurado por las secciones que se describen a continuación.

3.1. Óptica Euclideana. En esta sección se describe la construcción matemática de la óptica Euclideana que consiste en encontrar el espacio de rayos y direcciones en el caso geométrico y el espacio de frentes de onda para el modelo ondulatorio. También se dan algunos ejemplos de espacios cocientes de grupos y una descripción geométrica del espacio de rayos ópticos.

3.2. Óptica de Helmholtz. Se encuentra el espacio de frentes de onda para la óptica de Helmholtz y se describe la transformada de onda que relacionará funciones sobre la esfera de direcciones con funciones sobre la pantalla plana.

3.3. Grupo de Lorentz en la esfera \mathcal{S}^2 . Se describe los vectores luz del grupo $SO(3,1)$, su métrica y el cono proyectivizado que permite describir las simetrías del grupo de Lorentz sobre una esfera, que es invariante por escalas temporales.

3.4. Geometría de Lorentz en óptica de Helmholtz. Se describe el procedimiento para aplicar las simetrías del grupo de Lorentz al espacio de Helmholtz. Para esto, se inicia con una representación matricial de los generadores del ‘boost’ aplicadas al cono de luz, luego se proyectiviza a la esfera, donde se aplica naturalmente a las funciones de onda de Helmholtz.

3.5. Deformación Lorentziana en la esfera. Se define la deformación Lorentziana como una aplicación del grupo de Lorentz a las coordenadas esféricas en \mathcal{S}^2 . Se encuentran las relaciones que definen la deformación en ángulos y las funciones de prueba sobre esfera y plano, relacionadas entre sí a través de la transformada de onda. Finalmente, se encuentran los campos de onda deformados usando el enfoque integral numérico dado, nuevamente, por la transformada de onda entre la esfera y la pantalla plana.

3.6. Deformación Lorentziana en el plano. Se encuentra el operador de la deformación relativista a través de una realización del álgebra de Lorentz. Los generadores de boost en el plano provienen de una deformación de álgebras reportada en los trabajos previos [1, 2]. Finalmente se encuentra el campo de onda deformado, junto con su derivada normal en términos de series de potencias de operadores diferenciales. Se muestran figuras de aproximaciones a varios órdenes en las series de potencias.

2. Sistema cuántico de Zernike

Las funciones de Zernike o mejor conocidas como los polinomios de Zernike son un conjunto completo de polinomios ortogonales en el interior del círculo, introducidos por primera vez por Frits Zernike en su trabajo sobre microscopía de contraste de fase [4], por el cual ganó el premio Nobel en 1953. Este trabajo impulsó a la investigación alrededor de los polinomios de Zernike haciéndolos de gran importancia en óptica por tener aplicaciones en diversas áreas, por ejemplo: aberraciones de pupilas circulares [5, 6, 7] (en particular, aberraciones en el ojo humano [8, 9, 10]), teoría de difracción [11], diseño de espejos poligonales [12], turbulencias atmosféricas [13] y óptica cuántica [14].

Además de todas sus aplicaciones anteriores, los polinomios circulares de Zernike son interesantes por sus propiedades matemáticas, por ejemplo: estos polinomios constituyen la única base completa en el interior del disco que es invariante de forma ante rotaciones [15]; las funciones base de Zernike se pueden extender a todo el plano \mathbb{C}^2 [16] y usando los polinomios generalizados de Zernike sobre \mathbb{C}^2 se encuentran operadores del algebra $\mathfrak{su}(2)$ [14, 16], que también representan al sistema del oscilador armónico.

El operador diferencial, cuyas soluciones son los polinomios circulares de Zernike, definido más adelante como el operador de Zernike, se puede expresar como un hamiltoniano para un modelo clásico o uno cuántico. En el caso clásico, que se reporta en [17], en ciertas regiones del espacio fase, las trayectorias son cerradas. En esta tesis se estudian tres bases de funciones, las simetrías y el álgebra asociada para el sistema cuántico de Zernike [18] iniciando por la definición del operador de Zernike.

2.1. Operador de Zernike

El operador de Zernike, descrito por primera vez por Zernike en 1934 [4], es el operador diferencial de segundo orden dado por:

$$\widehat{Z}^{(\alpha,\beta)} := \nabla^2 + \alpha(\mathbf{r} \cdot \nabla)^2 + \beta(\mathbf{r} \cdot \nabla), \quad (2.1)$$

donde α y β son parámetros reales y \widehat{Z} actúa en el espacio de Hilbert de funciones cuadrado integrables $f(\mathbf{r}) \in \mathcal{L}^2(\mathcal{D})$, $\mathcal{D} := \{|\mathbf{r}| \leq 1\}$ el disco unitario. El producto interno de $\mathcal{L}^2(\mathcal{D})$ se

define como

$$(f, g)_{\mathcal{D}} := \int_{\mathcal{D}} d^2\mathbf{r} f(\mathbf{r})^* g(\mathbf{r}) = \int_0^1 r dr \int_{-\pi}^{\pi} d\phi f(r, \phi)^* g(r, \phi), \quad (2.2)$$

donde * indica conjugación compleja.

Como sólo nos interesan las funciones solución de $\widehat{Z}(\alpha, \beta)\Psi(\mathbf{r}) = -E\Psi(\mathbf{r})$ que tengan asociados eigenvalores reales, nos concentraremos en los valores de α y β para los que el operador \widehat{Z} sea autoajunto. Los valores de estos parámetros se encuentran a continuación.

2.2. Condiciones a la frontera

El operador $\widehat{Z}(\alpha, \beta)$ será autoadjunto si cumple la propiedad

$$(f, \widehat{Z}(\alpha, \beta)g)_{\mathcal{D}} = (\widehat{Z}(\alpha, \beta)f, g)_{\mathcal{D}}. \quad (2.3)$$

para todas las funciones sobre el disco que sean de cuadrado integrable. En los trabajos [4, 20] se afirma que $\alpha = -1$ y $\beta = -2$ son las condiciones necesarias para que Z sea autoadjunto, pero la autora de esta tesis no encontró la demostración explícita de esta afirmación en ninguna referencia, por lo se incluye a continuación.

Usando coordenadas polares (r, ϕ) podemos separar al operador $\widehat{Z}(\alpha, \beta)$ (2.1) en tres términos

$$\widehat{Z}(\alpha, \beta) = \widehat{Z}_1 + \widehat{Z}_2^{(\alpha, \beta)} + \widehat{Z}_3^{(\alpha)}, \quad (2.4)$$

donde

$$\widehat{Z}_1 := \frac{1}{r^2} \partial_{\phi}^2, \quad \widehat{Z}_2^{(\alpha, \beta)} := \left(\frac{1}{r} + (\alpha + \beta)r \right) \partial_r, \quad \widehat{Z}_3^{(\alpha)} := (1 + \alpha r^2) \partial_r^2. \quad (2.5)$$

Observemos que si $\widehat{Z}(\alpha, \beta)$ es autoadjunto, la parte radial y angular del operador de Zernike deben serlo. De esta manera, aplicamos la condición (2.3) a cada término en (2.5).

La solución de la integral (2.2) correspondiente al operador \widehat{Z}_1 en (2.4) se encuentra al integrar por partes,

$$(f, \widehat{Z}_1 g)_{\mathcal{D}} = (\widehat{Z}_1 f, g)_{\mathcal{D}} + \left(f^* \partial_{\phi} g - \partial_{\phi} f^* \partial_{\phi} g \right) \Big|_{\phi=-\pi}^{\pi}. \quad (2.6)$$

El último término de (2.6) desaparece al considerar que la función f debe ser invariante de forma bajo rotaciones alrededor del origen $(0, 0)$, es decir, f es proporcional a una fase de ϕ sobre el disco,

$$\left(f^*(r, \phi) - \partial_{\phi} f^*(r, \phi) \right) \Big|_{\phi=-\pi}^{\pi} = 0 \implies f(r, \phi) = f_m(r) \frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}}, \quad (2.7)$$

con $m \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$. La ecuación (2.7) implica que la norma de las funciones en la frontera tienen valor constante, es decir, $|f(1, \phi)| = cte$. Como \widehat{Z}_1 es el único sumando que

depende de ϕ , se concluye que la parte angular del operador de Zernike es autoadjunta. Solo resta comprobar que la parte radial constituida por los sumandos \widehat{Z}_2 y \widehat{Z}_3 también lo es.

Para las siguientes integrales se considera únicamente la parte radial de las funciones $f(r, \phi)$, $g(r, \phi)$ indicadas como $f(r)$, $g(r)$ sin incluir el índice m que aparece en (2.7). Por simplicidad, la integral en ϕ en (2.2) no se incluye. Haciendo uso nuevamente de la integración por partes, se integra el operador diferencial de primer orden $\widehat{Z}_2^{(\alpha, \beta)}$ (2.5), dando como resultado,

$$(f, \widehat{Z}_2 g)_r = -(\widehat{Z}_2 f, g)_r - 2(\alpha + \beta) \int_0^1 r dr (f^* g) + \left(1 + (\alpha + \beta)r^2\right) f^* g \Big|_0^1. \quad (2.8)$$

De manera análoga, integramos la parte radial del operador diferencial de segundo orden $\widehat{Z}_3^{(\alpha)}$, obteniendo

$$(f, \widehat{Z}_3 g)_r = (\widehat{Z}_3 f, g)_r + \int_0^1 dr \left(2(1 + 3\alpha r^2)(\partial_r f^*)g + 6\alpha r f^* g\right) + \left(r(1 + \alpha r^2)(f^* \partial_r g - (\partial_r f^*)g) - (1 + 3\alpha r^2)f^* g\right) \Big|_0^1. \quad (2.9)$$

Por último, sumamos los términos correspondientes en (2.8) y (2.9) para encontrar las condiciones de frontera correspondientes a la parte radial

$$\begin{aligned} (f, (\widehat{Z}_3 + \widehat{Z}_2)g)_r &= ((\widehat{Z}_3 - \widehat{Z}_2)f, g)_r \\ &+ 2 \int_0^1 r dr \left((2\alpha - \beta)f^* g + (1/r + 3\alpha r)(\partial_r f^*)g\right) \\ &+ \left(r(1 + \alpha r^2)(f^* \partial_r g - (\partial_r f^*)g) + r^2(\beta - 2\alpha)f^* g\right) \Big|_0^1. \end{aligned} \quad (2.10)$$

En principio, las funciones f y g son arbitrarias, por lo que las condiciones para que el último término de frontera en (2.10) se anule radica únicamente en los valores de α y β . De esta manera, en el primer sumando de la condición de frontera debe ocurrir que $1 + \alpha = 0$, lo que implica que $\alpha = -1$. Para el segundo sumando, $\beta - 2\alpha = 0$, que determina el valor de $\beta = 2\alpha = -2$. Sustituyendo los valores de α y β en (2.10),

$$\begin{aligned} (f, (\widehat{Z}_3 + \widehat{Z}_2)g)_r &= ((\widehat{Z}_3 - \widehat{Z}_2)f, g)_r + 2 \int_0^1 r dr \left((1/r - 3r)(\partial_r f^*)g\right) \\ &= ((\widehat{Z}_3 - \widehat{Z}_2)f, g)_r + 2(\widehat{Z}_2 f, g)_r, \end{aligned}$$

donde se usa que $2 \int_0^1 r dr (1/r - 3r)(\partial_r f^*)g = 2(\widehat{Z}_2 f, g)_r$, como se puede ver en (2.5); así,

$$(f, (\widehat{Z}_3 + \widehat{Z}_2)g)_r = ((\widehat{Z}_3 - \widehat{Z}_2)f, g)_r + 2((\widehat{Z}_2)f, g)_r = ((\widehat{Z}_3 + \widehat{Z}_2)f, g)_r.$$

Con esto se demuestra que la parte radial del operador de Zernike $\widehat{Z}(\alpha, \beta)$ cumple también con la condición (2.3). Por tanto, el operador de Zernike $\widehat{Z}(\alpha, \beta)$ es un operador autoadjunto.

Además, por (2.7) se sabe que la solución de la parte angular del operador de Zernike es proporcional a $e^{im\phi}$, con $m \in \mathbb{Z}$, por lo que se concluye que las soluciones $\Psi(\mathbf{r})$ del operador de Zernike (2.1) tienen la siguiente forma

$$\Psi(r, \phi) := R(r) e^{im\phi}. \quad (2.11)$$

Sustituyendo (2.11) en el operador (2.1), se obtiene una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden para la función radial $R(r)$,

$$r^2(1-r^2)\frac{d^2R(r)}{dr^2} + r(1-3r^2)\frac{dR(r)}{dr} - m^2R(r) = -Er^2R(r). \quad (2.12)$$

Así, el operador de Zernike además de ser autoadjunto tiene funciones solución que se pueden separar en parte radial y angular. La parte radial $R(r)$ dependerá de los índices n y m como se verá en la siguiente sección.

2.3. Polinomios de Zernike en el disco

En [15], Bathia y Wolf fueron los primeros en fundamentar matemáticamente que los polinomios de Zernike forman una base de polinomios ortogonales en el interior del círculo, caracterizados por las siguientes propiedades:

- son invariantes en forma respecto a rotaciones alrededor del origen $x = y = 0$, es decir, para cualquier rotación sólo se multiplica por una fase,

$$Z_n^m(x, y) = Z_n^m(r \cos \theta, r \sin \theta) = R(r) e^{im\theta},$$

donde $R(r)$ es un polinomio en r de grado n ($n \geq 0$) y m es tal que $n - |m|$ es un entero positivo par. Además, $R(r)$ tiene la misma paridad que m , es decir, $R(-r) = (-1)^m R(r)$;

- dados valores fijos en los índices n y m , el polinomio de Zernike $Z_n^m(r, \theta)$ es único.

La parte radial $R(r)$ de los polinomios de Zernike se puede encontrar aplicando el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt a la secuencia $r^{|m|}, r^{|m|+2}, r^{|m|+4}, \dots, r^{|m|+2k}, \dots$ en el intervalo $[0, 1]$ con función de peso $w(r) = r$. Como resultado de aplicar este proceso de ortogonalización se obtienen los ya conocidos polinomios de Jacobi. De esta manera, $R(r)$ se puede expresar como

$$R_n^m(r) = r^{|m|} P_{n_r}^{(0, |m|)}(2r^2 - 1) = (-1)^{n_r} r^{|m|} P_{n_r}^{(0, |m|)}(1 - 2r^2),$$

donde $n_r := \frac{1}{2}(n - |m|)$.

Otra manera de encontrar la parte radial $R_n^m(r)$ de los polinomios de Zernike es a través de la ecuación diferencial (2.12). Escribiendo $R(r) = r^m F(r^2)$, (2.12) se convierte en la ecuación hipergeométrica [21, Eq. 9.151],

$$z(1-z)F'' + \left((m+1) - (m+2)z\right)F' - \frac{1}{4}\left(m(m+2) - E\right)F = 0. \quad (2.13)$$

Por simplicidad se introduce el término $z = r^2$ y $F(z)$ se toma únicamente como F . Dentro del círculo, la ecuación (2.13) tiene como solución a la función cuadrado integrable ${}_2F_1(a, b; c; z)$ con parámetros:

$$a_{\pm} = \frac{1}{2}\left((m+1) \pm \sqrt{E+1}\right), \quad b_{\pm} = \frac{1}{2}\left((m+1) \mp \sqrt{E+1}\right), \quad c = m + 1 = a_{\pm} + b_{\pm}. \quad (2.14)$$

Dado que c debe ser un número entero positivo, m debe ser siempre positivo o cero, razón por la cual en (2.12) se considerará $|m|$ ($\sqrt{m^2}$) en lugar de m . La solución ${}_2F_1(a, b; c; z)$ es una serie infinita a menos que a o b sean enteros negativos, cosa que sucede cuando $E := n(n+2)$ y $n - |m| = 2k \in \mathbb{Z}^+$, lo que hace que la serie se trunque y se convierta en un polinomio. De esta manera la energía E (2.12) queda definida a través del número cuántico *principal* n , como

$$E = n(n+2), \quad n \in \mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, \dots\}, \quad (2.15)$$

y al mismo tiempo, el número cuántico *radial* n_r también es dado en términos de n por

$$n_r := \frac{1}{2}(n - |m|) \in \mathbb{Z}^+. \quad (2.16)$$

Eligiendo la función ${}_2F_1(a, b; c; z)$ con parámetros a_+ y b_+ descritos en (2.14), las soluciones de la ecuación radial de Zernike (2.12) en el interior del círculo $r \in [0, 1]$ son

$$R_n^m(r) := A_{n,m} \binom{n_r + |m|}{|m|} r^{|m|} {}_2F_1(-n_r, n_r + |m| + 1; |m| + 1; r^2) \quad (2.17)$$

$$= A_{n,m} r^{|m|} P_{n_r}^{(|m|, 0)}(1-2r^2), \quad (2.18)$$

donde (2.18) proviene de la identidad que relaciona polinomios de Jacobi con la funciones hipergeométricas [21, Eq. 8.962.1] y $A_{n,m}$ es una constante.

Para la parte radial se establecen las siguientes **relaciones de recurrencia**, descritas en [22, p. 551]:

$$(n+1) \left(R_n^m(r) + R_n^{m+2}(r) \right) - \frac{d}{dr} \left(R_{n+1}^{m+1}(r) - R_{n-1}^{m+1}(r) \right) = 0, \quad (2.19)$$

$$2(n+1)r R_n^m(r) - (n+|m|+2) R_{n+1}^{m+1}(r) - R_{n-1}^{m+1}(r) = 0, \quad (2.20)$$

$$R_n^m(r) + R_{n-2}^m(r) - r \left(R_{n-1}^{m-1}(r) + R_{n-1}^{m+1}(r) \right) = 0, \quad (2.21)$$

$$(|m|+n) R_n^m(r) + (n-|m|) R_{n-2}^m(r) - 2nr R_{n-1}^{m-1}(r) = 0, \quad (2.22)$$

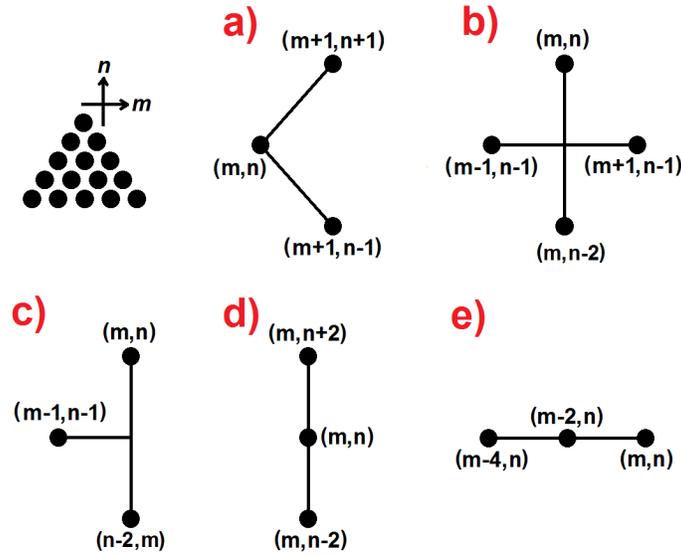


Figura 2.1: Relaciones de recurrencia entre los polinomios radiales circulares de Zernike. A a) corresponde (2.20), a b) corresponde (2.21), a c) corresponde (2.22), a d) corresponde (2.23) y a e) corresponde (2.24). Estas relaciones de recurrencia visualmente conectan puntos dentro de la pirámide que se muestra en la figura.

$$A_1 R_{n-2}^m(r) + (A_3 - A_2 r^2) R_n^m(r) - A_4 R_{n+2}^m(r) = 0, \quad (2.23)$$

$$B_1 R_n^{m-4}(r) - B_2 R_n^m(r) - \left(B_3 + \frac{B_4}{r^2} \right) R_n^{m-2}(r) = 0, \quad (2.24)$$

donde las constantes están dadas por

$$A_1 = \frac{(n+2)(n^2 - |m|^2)}{2n},$$

$$A_2 = 2(n+1)(n+2),$$

$$A_3 = \frac{|m|^2}{n}(n+1) + n(n+3) + 2,$$

$$A_4 = |m|^2 - (n+2)^2,$$

$$B_1 = (|m| - 1)(n + |m| - 2)(n - |m| + 4),$$

$$B_2 = (|m| - 3) \left(|m|(|m| - 2) - n(n+2) \right),$$

$$B_3 = 2(|m| - 2) \left((|m| - 2)^2 + n(n+2) \right),$$

$$B_4 = \frac{4(|m| - 1)(|m| - 2)(|m| - 3)(|m| - n - 4)}{(n - |m| + 4)}.$$

Las funciones de Zernike se distribuyen en forma piramidal, mostradas en la figura 2.2, y se encuentran relacionadas entre sí como se muestra en la figura 2.1. Aunque la forma

piramidal de las funciones de Zernike parece idéntica a la que cumplen las funciones del oscilador armónico bidimensional, hay que recalcar que es muy distinta, ya que las relaciones de recurrencia en la figura 2.1 son entre 3 términos, mientras que en el oscilador 2D, los operadores de ascenso y descenso (en las dos direcciones involucradas) producen relaciones de 3 términos que son diagonales, y las relaciones con derivadas son diagonales entre 2 términos.

Las funciones de onda (2.18) no están normalizadas. $A_{n,m}$ es la constante de normalización que se puede obtener de dos maneras.

La primera es tomando la condición de frontera $R_n^m(1) = 1$ impuesta por Zernike en [4, Eq. (22)], donde la constante en (2.17)–(2.18) será $A_{n,m}^{\text{Zernike}} := (-1)^{n_r}$. Esto define la base de funciones solución a la ecuación de Zernike en el interior del círculo, llamadas simplemente *polinomios de Zernike circulares* [22, p. 546], como

$$\mathcal{V}_n^m(r, \phi) := r^{|m|} P_{n_r}^{(|m|,0)}(2r^2-1) \begin{cases} \cos m\phi, & \text{si } m \geq 0, \\ \sin m\phi, & \text{si } m < 0. \end{cases}$$

El comportamiento de estas funciones se muestra en la figura 2.2.

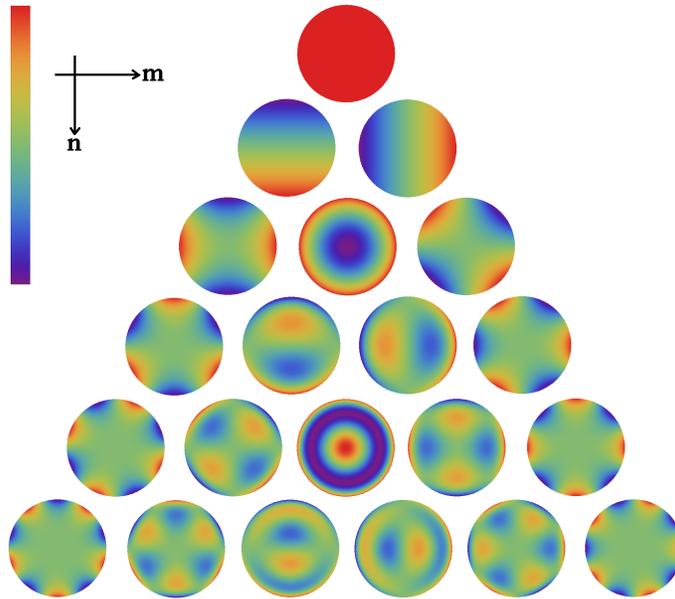


Figura 2.2: Parte real de las funciones circulares de Zernike para $n = 0, 1, \dots, 5$. m toma valores $\{-n, -n+2, \dots, n-2, n\}$, por ejemplo: para $n = 5$, $m \in \{-5, -3, -1, 1, 3, 5\}$.

La segunda manera de normalizar las funciones de Zernike, las cuales llamaremos $\Psi(r, \phi)$, se encuentran a través de la ortogonalidad de los polinomios de Jacobi sobre $r \in [0, 1]$ [21, Eq. 7.391],

$$\int_0^1 r \, dr \left| r^{|m|} P_{n_r}^{(|m|,0)}(1-2r^2) \right|^2 = \frac{1}{2(n+1)}. \quad (2.25)$$

Como $\int_{-\pi}^{\pi} d\phi = 2\pi$, la constante de normalización es $A_{n,m} = \sqrt{2(n+1)/2\pi}$ para las funciones $\Psi(r, \phi)$ que son solución de la ecuación Hamiltoniana de Zernike,

$$-\widehat{Z} \Psi_n^m(\mathbf{r}) := \left(-\nabla^2 + (\mathbf{r} \cdot \nabla)^2 + 2\mathbf{r} \cdot \nabla \right) \Psi_n^m(\mathbf{r}) = n(n+2) \Psi_n^m(\mathbf{r}). \quad (2.26)$$

Las funciones de onda $\Psi(r, \phi)$ toman la forma

$$\Psi_n^m(r, \phi) := (-1)^{n_r} \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} r^{|m|} P_{n_r}^{(|m|,0)}(1-2r^2) e^{im\phi}, \quad (2.27)$$

de acuerdo con (2.25) y $n = 2n_r + |m|$. Además, las funciones $\Psi_n^m(r, \phi)$ cumplen la condición de ortogonalidad

$$(\Psi_n^m, \Psi_{n'}^{m'})_{\mathcal{D}} = \int_{\mathcal{D}} d^2\mathbf{r} \Psi_n^m(\mathbf{r})^* \Psi_{n'}^{m'}(\mathbf{r}) = \delta_{n,n'} \delta_{m,m'}. \quad (2.28)$$

Algunos valores interesantes de las funciones $\Psi(r, \phi)$ (2.27) son: $\Psi_0^0(r, \phi) = 1/\sqrt{\pi}$ cuando $n = m = 0$; en el centro del disco $r = 0$,

$$\begin{aligned} \Psi_n^m(0, \phi) &= 0, \quad \text{si } m \neq 0, \\ \Psi_n^0(0, \phi) &= \sqrt{(n+1)/\pi}, \quad \text{si } m = 0 \text{ y } n \text{ es par;} \end{aligned}$$

y en la frontera $r = 1$,

$$\Psi_n^m(1, \phi) = \frac{1}{8}(n+|m|)(n+|m|-2) \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} e^{im\phi},$$

por lo que, la norma de las funciones de Zernike $\Psi_n^m(1, \phi)$ en la frontera tienen valor constante.

Simetrías ocultas en el operador de Zernike

Los números, cuántico radial n_r , azimutal m y principal n , que se encuentran definidos en (2.15) y (2.16), provienen de la degeneración de $\pm m$ relacionada con energía E (2.15). Esta degeneración se puede ver claramente en la expresión $n = 2n_r + |m|$, donde se deduce que para un valor fijo de n hay un rango de valores que toman los números cuánticos radial n_r y azimutal m . El origen de la degeneración en el número cuántico azimutal m se debe a simetrías ocultas que se pueden evidenciar al considerar restricciones adicionales asociadas a los números cuánticos de las funciones de onda $\Psi_n^m(r, \phi)$ dadas por los ‘multipletes’, que se definen a través de los valores $m \in \{n, n-2, \dots, -n\}$, que preservan la paridad del número $n-m$. El proceso para encontrar las simetrías ocultas y el por qué asociar la palabra cuántico al operador de Zernike (2.1) se explica en el siguiente apartado. Para esto, el operador (2.1) definido sobre el disco se lleva, a través de una proyección ortogonal, a la semiesfera superior. Este último espacio es donde el sistema cuántico de Zernike se define de manera natural y la separación de variables en varios sistemas de coordenadas se vuelve evidente.

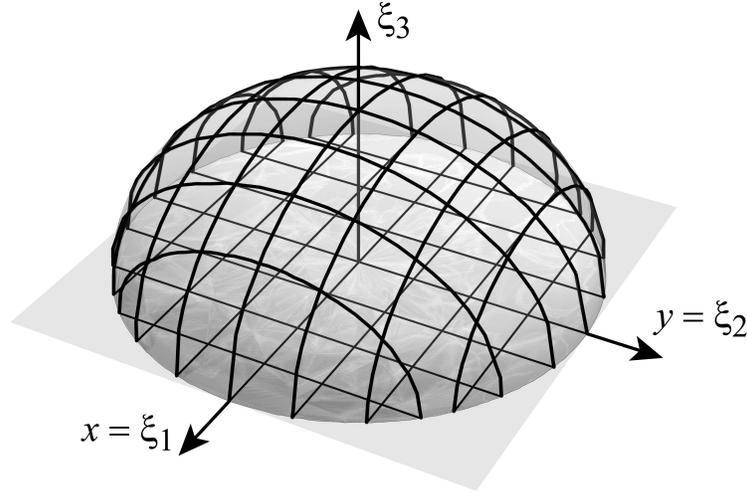


Figura 2.3: Mapeo del disco unitario \mathcal{D} a la semiesfera superior unitaria \mathcal{H}_+ en coordenadas cartesianas $\{\xi_i\}_{i=1}^3$.

2.4. Del plano a la esfera: ecuación de Zernike tipo Schrödinger

El operador diferencial de Zernike (2.1) se reescribe en términos de coordenadas cartesianas como,

$$\widehat{Z} := (1 - x^2)\partial_{xx} - 2xy\partial_{xy} + (1 - y^2)\partial_{yy} - 3(x\partial_x + y\partial_y), \quad (2.29)$$

donde el operador (2.29) es autoadjunto sobre el disco \mathcal{D} .

Antes de mapear el disco a la semiesfera superior, se realiza una *transformación de similitud* [23, p. 37] al operador de Zernike (2.29),

$$\widehat{W} := A\widehat{Z}A^{-1}, \quad A(r) := (1 - x^2 - y^2)^{1/4} = (1 - r^2)^{1/4}, \quad (2.30)$$

que proporciona un medio para transformar la ecuación hamiltoniana de Zernike (2.26) sobre el disco \mathcal{D} , escrita en términos de \widehat{W} , en una ecuación cuántica de Schrödinger sobre la semiesfera unitaria superior \mathcal{H}_+ . El nuevo operador \widehat{W} , que sigue actuando sobre el disco unitario \mathcal{D} , se puede escribir como

$$\begin{aligned} \widehat{W} = & (1 - x^2)\partial_{xx} - 2xy\partial_{xy} + (1 - y^2)\partial_{yy} - 2(x\partial_x + y\partial_y) \\ & + \frac{1}{4}(1 - x^2 - y^2)^{-1} + \frac{3}{4}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Esencialmente, el operador \widehat{W} es como \widehat{Z} , con la diferencia de que \widehat{Z} es simétrico y actúa en las funciones $\Psi_n^m(r, \phi)$ mientras que \widehat{W} ya no es simétrico y actúa en $(1 - r^2)^{-1/4} \Psi_n^m(r, \phi)$.

Para mapear las funciones sobre el disco \mathcal{D} a funciones sobre la semiesfera superior \mathcal{H}_+ , al igual que en el caso clásico [17], se usan las coordenadas cartesianas $\{\xi_i\}_{i=1}^3$ que conforman la proyección ortogonal (o ‘vertical’),

$$\xi_1 = x, \quad \xi_2 = y, \quad \xi_3 = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \geq 0, \quad (2.32)$$

mostrada en la figura 2.3. La proyección (2.32) mapea el disco unitario bidimensional \mathcal{D} ($\xi_1^2 + \xi_2^2 = r^2$) a la semiesfera \mathcal{H}_+ ($\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1$, $\xi_3 \geq 0$), que es una superficie bidimensional inmersa en un espacio tridimensional. Además, las derivadas en el plano se proyectan sobre $\partial_i := \partial/\partial\xi_i$ de la siguiente manera,

$$\partial_x = \partial_1 - \frac{\xi_1}{\xi_3}\partial_3, \quad \partial_y = \partial_2 - \frac{\xi_2}{\xi_3}\partial_3.$$

Por ser una superficie curva, la semiesfera \mathcal{H}_+ tiene una matriz métrica dada por \mathbf{g} ,

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 1 + \xi_1^2/\xi_3^2 & \xi_1\xi_2/\xi_3^2 \\ \xi_1\xi_2/\xi_3^2 & 1 + \xi_2^2/\xi_3^2 \end{pmatrix} \quad g := \det \mathbf{g} = \frac{1}{\xi_3^2} = \frac{1}{1 - (\xi_1^2 + \xi_2^2)},$$

$ds^2 = \sum_{i,j=1}^2 g_{i,j} d\xi_i d\xi_j$ es la métrica y los elementos de superficie d^2V sobre \mathcal{H}_+ y \mathcal{D} son

$$d^2V(\vec{\xi}) = \sqrt{g} d\xi_1 d\xi_2 = \frac{d\xi_1 d\xi_2}{\xi_3} = \frac{dx dy}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}} = \frac{d^2\mathbf{r}}{\sqrt{1 - r^2}}. \quad (2.33)$$

Nótese que cuando $\xi_3 \rightarrow 0$ ($r \rightarrow 1$), la medida sobre \mathcal{H}_+ crece debido al factor $(\sqrt{1 - r^2})^{-1}$ proveniente de la transformación (2.30), por lo que las soluciones del operador que corresponda en la esfera al definido en (2.31) deben contrarrestar el crecimiento de ξ_3 .

Por tanto, bajo la proyección vertical, el operador \widehat{W} (2.31) se convierte en

$$\begin{aligned} \widehat{W} &= (\xi_2^2 + \xi_3^2)\partial_{11} + (\xi_1^2 + \xi_3^2)\partial_{22} + (\xi_1^2 + \xi_2^2)\partial_{33} \\ &\quad - 2\xi_1\xi_2\partial_{12} - 2\xi_1\xi_3\partial_{13} - 2\xi_2\xi_3\partial_{23} - 2\xi_1\partial_1 - 2\xi_2\partial_2 - 2\xi_3\partial_3, \\ &\quad + \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{4\xi_3^2} + 1 \\ \widehat{W} &= \Delta_{\text{LB}} + \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{4\xi_3^2} + 1, \end{aligned} \quad (2.34)$$

donde las derivadas cruzadas están dadas por $\partial_{ij} = \partial_i\partial_j$ y Δ_{LB} es el operador Laplace-Beltrami de la esfera,

$$\Delta_{\text{LB}} := \widehat{L}_1^2 + \widehat{L}_2^2 + \widehat{L}_3^2, \quad (2.35)$$

correspondiente al álgebra de Lie $\text{SO}(3)$, que tiene como generadores de rotación al conjunto $\{L_i\}_{i=1}^3$, $\widehat{L}_1 := \xi_3\partial_2 - \xi_2\partial_3$, $\widehat{L}_2 := \xi_1\partial_3 - \xi_3\partial_1$, $\widehat{L}_3 := \xi_2\partial_1 - \xi_1\partial_2$.

De la ecuación (2.34) se concluye que el operador \widehat{W} sobre la semiesfera \mathcal{H}_+ es el hamiltoniano de la ecuación de Schrödinger,

$$\left(-\frac{1}{2}\Delta_{\text{LB}} - \frac{1}{2}\omega^2 \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{\xi_3^2}\right) \Upsilon_n^m(\vec{\xi}) = \frac{1}{2}(E + 1)\Upsilon_n^m(\vec{\xi}), \quad (2.36)$$

con $\omega^2 = \frac{1}{4}$ y eigenfunciones $\Upsilon_n^m(\vec{\xi})$,

$$\Upsilon_n^m(\vec{\xi}) := A(r) \Psi_n^m(\mathbf{r}) = (1 - r^2)^{1/4} \Psi_n^m(r, \phi), \quad \widehat{W} := (1 - |\mathbf{r}|)^{1/4} \widehat{Z}(1 - |\mathbf{r}|)^{-1/4}, \quad (2.37)$$

donde \mathbf{r} es (ξ_1, ξ_2) o (r, ϕ) dependiendo de las coordenadas que se consideren y los valores propios de energía son

$$\mathcal{E} := \frac{1}{2}(E + 1) = \frac{1}{2}(n + 1)^2, \quad n \in \mathbb{Z}^+. \quad (2.38)$$

La relación de ortogonalidad de las funciones $\Upsilon_n^m(\vec{\xi})$ sobre \mathcal{H}_+ proviene del producto interno en el disco $(\circ, \circ)_{\mathcal{D}}$ (2.28),

$$(\Upsilon_n^m, \Upsilon_{n'}^{m'})_{\mathcal{H}_+} := \int_{\mathcal{H}_+} d^2V(\vec{\xi}) \Upsilon_n^m(\vec{\xi})^* \Upsilon_{n'}^{m'}(\vec{\xi}) = (\Psi_n^m, \Psi_{n'}^{m'})_{\mathcal{D}} = \delta_{n,n'} \delta_{m,m'}, \quad (2.39)$$

Además, una condición de frontera es establecida por el factor $A(r)$, pues las funciones de onda $\Upsilon_n^m(\vec{\xi})$ (2.37) desaparecen en $r = 1$ ya que $A(1) = 0$, así,

$$\Upsilon_n^m(\vec{\xi}) \Big|_{r=\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}=1} = \left(1 - (\xi_1^2 + \xi_2^2)\right)^{1/4} \Psi_n^m(\vec{\xi}) \Big|_{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}=1} = (1 - r^2)^{1/4} \Psi_n^m(\vec{\xi}) \Big|_{r=1} = 0. \quad (2.40)$$

Con todo esto, se concluye que el operador de Zernike en \mathcal{D} se proyecta a la semiesfera \mathcal{H}_+ en la ecuación tipo Schrödinger (2.36) cuyo potencial es un potencial armónico *repulsivo* (2.36), con constante *negativa* de acoplamiento $-\frac{1}{2}w^2 = -\frac{1}{8}$,

$$V_{\mathbb{R}}(\vec{\xi}) := -\frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{8\xi_3^2} = -\frac{r^2}{8(1-r^2)}, \quad (2.41)$$

que generaliza al oscilador atractivo superintegrable de Higgs [3, 24, 25].

2.5. Sistema cuántico superintegrable de Zernike

El oscilador repulsivo de Higgs (2.36) constituye un sistema cuántico en la semiesfera \mathcal{H}_+ que puede ser analizado de diferentes maneras dependiendo del sistema coordenado que se considere. Los sistemas coordenados permiten observar al sistema de diferentes ángulos, lo que ayuda a encontrar diferentes constantes de movimiento y simetrías. En este trabajo se analizan los 3 sistemas de coordenadas ortogonales sobre la esfera (pero no sobre el disco) [26],

$$\text{Sistema I:} \quad (2.42)$$

$$\xi_1 = \sin \vartheta \cos \varphi, \quad \xi_2 = \sin \vartheta \sin \varphi, \quad \xi_3 = \cos \vartheta, \quad \vartheta|_0^{\pi/2}, \quad \varphi|_0^{2\pi},$$

$$\text{Sistema II:} \quad (2.43)$$

$$\xi_1 = \cos \vartheta', \quad \xi_2 = \sin \vartheta' \cos \varphi', \quad \xi_3 = \sin \vartheta' \sin \varphi', \quad \vartheta'|_0^{\pi}, \quad \varphi'|_0^{\pi},$$

$$\text{Sistema III:} \quad (2.44)$$

$$\xi_1 = \sin \vartheta'' \sin \varphi'', \quad \xi_2 = \cos \vartheta'', \quad \xi_3 = \sin \vartheta'' \cos \varphi''. \quad \vartheta''|_0^{\pi}, \quad \varphi''|_{-\pi/2}^{\pi/2},$$

Además de los sistemas (2.42), (2.43) y (2.44) en la esfera, existe el sistema de coordenadas *elípticas* que es la generalización de estos tres sistemas coordenados y ha sido estudiado

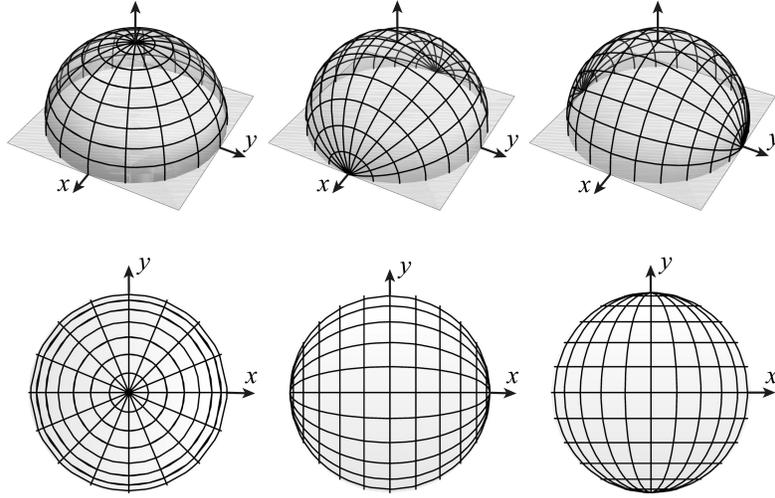


Figura 2.4: De izquierda a derecha: Sistema coordenado I (2.42), II (2.43) y III (2.42), respectivamente. Las imágenes superiores corresponden a los sistemas de coordenadas en la semiesfera \mathcal{H}_+ , y las inferiores a los mismos sistemas sobre el disco \mathcal{D} .

en [27]. La medida sobre \mathcal{H}_+ descrita en (2.33) es similar en los tres sistemas coordenados (2.42)–(2.44),

$$d^2S(\vec{\xi}) = \frac{d\xi_1 d\xi_2}{\xi_3} = \frac{d^2\mathbf{r}}{\sqrt{1-|\mathbf{r}|^2}} = \sin\vartheta^\circ d\vartheta^\circ d\varphi^\circ,$$

donde $\vartheta^\circ, \varphi^\circ$ representan cualquiera de las coordenadas en (2.42)–(2.44).

A continuación se encuentran las soluciones para los tres sistemas (2.42)–(2.44) sobre la semiesfera \mathcal{H}_+ y el disco \mathcal{D} usando separación de variables. En la figura 2.4 se observa que únicamente el sistema coordenado I (2.42) es ortogonal tanto en \mathcal{H}_+ como en \mathcal{D} , mientras que los sistemas II (2.43) y III (2.44) sólo son ortogonales en la semiesfera \mathcal{H}_+ .

2.5.1. Sistema de coordenadas I

La ecuación de Schrödinger (2.36) se escribe en términos del sistema de coordenadas (ϑ, φ) (2.42) como

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \Upsilon^I(\vartheta, \varphi) &= - \left[\frac{1}{2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{2 \sin^2 \vartheta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \right] \Upsilon^I(\vartheta, \varphi) \\ &\quad - \frac{1}{8} \tan^2 \vartheta \Upsilon^I(\vartheta, \varphi) \end{aligned} \quad (2.45)$$

donde el potencial ‘repulsivo’ de Higgs (2.41) se convierte en

$$V_R(\vartheta) = -\frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{8 \xi_3^2} = -\frac{1}{8} \tan^2 \vartheta.$$

Usando separación de variables en (ϑ, φ) , las funciones de onda Υ^I se escriben como

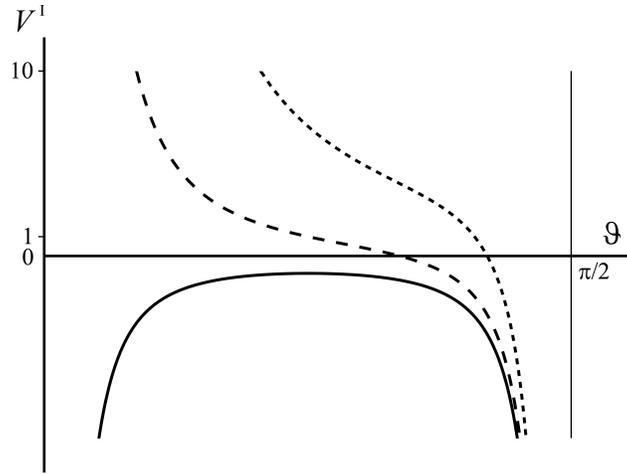


Figura 2.5: Potencial efectivo $V_{\text{eff}}^I(\vartheta) = (m^2 - 1/4)/\sin^2 \vartheta - 1/4 \cos^2 \vartheta$ (2.47) en el intervalo $\vartheta \in (0, \pi/2)$ evaluado en $m = 0$ (línea continua), $m = 1$ (línea discontinua), y $m = 2$ (línea punteada).

$$\Upsilon^I(\vartheta, \varphi) = \frac{Z^I(\vartheta)}{\sqrt{\sin \vartheta}} \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}, \quad m \in \mathbb{Z},$$

y el operador de Zernike en \mathcal{H}_+ toma forma de una ecuación ‘singular’ de Pöschl-Teller,

$$-\frac{d^2 Z^I(\vartheta)}{d\vartheta^2} + \left(\frac{m^2 - \frac{1}{4}}{\sin^2 \vartheta} - \frac{1}{4 \cos^2 \vartheta} \right) Z^I(\vartheta) = 2\mathcal{E} Z^I(\vartheta). \quad (2.46)$$

con potencial efectivo unidimensional,

$$V_{\text{eff}}^I(\vartheta) = \frac{m^2 - \frac{1}{4}}{\sin^2 \vartheta} - \frac{1}{4 \cos^2 \vartheta}, \quad (2.47)$$

mostrado en la figura 2.5. El potencial (2.47) tiene dos singularidades en $\vartheta = 0$ y $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ [28, p. 151] que pueden causar problemas al buscar soluciones bien comportadas. Una manera de evitar este problema en el potencial es elegir soluciones que ‘anulen’ estas singularidades, para esto se considera una extensión autoadjunta del operador (2.46) que siga conservando el espectro positivo de energías (2.38), $\mathcal{E} = \frac{1}{2}(n+1)^2$, $n \in \mathbb{Z}^+$ y que ‘maten’ las singularidades en $\vartheta = 0$ y $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ de (2.47):

$$Z^I(0) = 0, \quad Z^I(\frac{1}{2}\pi) = 0.$$

La condición de frontera (2.40) se traduce en este sistema coordenado a que la función Z^I se anule cuando $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ ($r = \sin \vartheta = 1$), es decir, $Z^I(\frac{1}{2}\pi) = 0$. Además se pide la condición extra,

$$Z^I(\vartheta)/\sqrt{\cos \vartheta} \Big|_{\vartheta=\pi/2} = \text{constante} \neq 0, \quad (2.48)$$

que está relacionada con el factor $A(r) = (1 - r^2)^{1/4} = (1 - (\xi_1^2 + \xi_2^2))^{1/4} = \sqrt{\cos \vartheta}$. La condición (2.48) es necesaria para que cuando se regresen al disco, la norma de las funciones correspondientes siga siendo una constante finita.

Al usar el cambio de variable

$$Z^I(\vartheta) = s^{(|m|+\frac{1}{2})/2}(1-s)^{1/4}f(s),$$

donde $s := \sin^2 \vartheta$. La ecuación (2.46) se transforma en la ecuación hipergeométrica,

$$s(1-s)f'' + \left((|m|+1) - s(|m|+2)\right)f' - \frac{1}{4}\left((|m|+1)^2 - 2\mathcal{E}\right)f = 0. \quad (2.49)$$

que tiene dos soluciones: la primera solución es una función hipergeométrica que diverge logarítmicamente en $s = 0$, es decir, para $\vartheta = 0$ (centro del disco $r = 0$), por lo que es descartada. La segunda solución de (2.49) es regular en $s = 0$,

$$f(s) = C {}_2F_1\left(\frac{1}{2}(|m|+1 + \sqrt{2\mathcal{E}}), \frac{1}{2}(|m|+1 - \sqrt{2\mathcal{E}}); |m|+1; s\right), \quad (2.50)$$

donde C es una constante a determinar. Análogamente a lo ocurrido en (2.14), si uno de los dos primeros términos en (2.50) es un entero negativo o cero, la serie se trunca, convirtiéndose en un polinomio. Esto ocurre pues $n \geq |m|$, lo que implica que el segundo término sea negativo,

$$|m|+1 - \sqrt{2\mathcal{E}} \leq 0. \quad (2.51)$$

El parámetro (2.51) define nuevamente el número cuántico radial (2.16)

$$n_r := -\frac{1}{2}(|m|+1 - \sqrt{2\mathcal{E}}) = \frac{1}{2}(n - |m|) \in \mathbb{Z}^+,$$

al igual que en la sección (2.3), se llama número cuántico principal a $n = 2n_r + |m|$ y momento angular a $|m| = \sqrt{m^2}$.

La constante C en (2.50) se determina a partir de la condición de frontera (2.48), dando como resultado que las funciones solución de (2.46) sean

$$\begin{aligned} Z_{n_r, m}^I(\vartheta) &= (-1)^{n_r} \sqrt{2(n+1)} \frac{n_r! |m|!}{(n_r + |m|)!} (\sin \vartheta)^{|m|+1/2} (\cos \vartheta)^{1/2} \\ &\quad \times {}_2F_1(n_r + 2(|m|+1), -n_r; |m|+1; \sin^2 \vartheta) \\ &= (-1)^{n_r} \sqrt{2(n+1)} (\sin \vartheta)^{|m|+1/2} (\cos \vartheta)^{1/2} P_{n_r}^{(|m|, 0)}(\cos 2\vartheta), \end{aligned} \quad (2.52)$$

$P_n^{(\alpha, \beta)}(u)$ son nuevamente los polinomios de Jacobi, como en (2.17). Las funciones de onda (2.52) están normalizadas en el intervalo $\vartheta \in [0, \frac{1}{2}\pi]$ de \mathcal{H}_+ ,

$$\int_0^{\pi/2} d\vartheta Z_{n_r, m}^I(\vartheta)^* Z_{n'_r, m}^I(\vartheta) = \delta_{n_r, n'_r},$$

haciendo que las eigenfunciones $\Upsilon_n^m(\vartheta, \varphi)$, de (2.39), esten ortonormalizadas.

Por tanto, las funciones de onda que son solución al sistema coordinado I (2.45) son:

$$\begin{aligned} \Upsilon^I(\vartheta, \varphi) &= \frac{Z^I(\vartheta)}{\sqrt{\sin \vartheta}} \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \\ &= (-1)^{n_r} \sqrt{\frac{(n+1)}{\pi}} (\sin \vartheta)^{|m|} (\cos \vartheta)^{1/2} P_{n_r}^{(|m|, 0)}(\cos 2\vartheta) e^{im\varphi}, \end{aligned} \quad (2.53)$$

donde $\sqrt{\cos\vartheta} = A(r)$ es el factor proveniente de la transformación de similaridad (2.30). Así que si queremos comparar la solución (2.53) con la solución (2.27) en el disco debemos omitir este término y tomar el cambio de coordenadas como $r = \sin\vartheta$ y $\phi = \varphi$, como se muestra en la figura izquierda de 2.4.

2.5.2. Sistema de coordenadas II

Para el segundo sistema de coordenadas (ϑ', φ') (2.43), la ecuación de Schrödinger se transforma en

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \Upsilon^{\text{II}}(\vartheta', \varphi') &= -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sin\vartheta'} \frac{\partial}{\partial\vartheta'} \left(\sin\vartheta' \frac{\partial}{\partial\vartheta'} \right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta'} \left(\frac{\partial^2}{\partial\varphi'^2} \right) \right] \Upsilon^{\text{II}}(\vartheta', \varphi') \\ &\quad - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{\sin^2\vartheta' \sin^2\varphi'} - 1 \right) \Upsilon^{\text{II}}(\vartheta', \varphi') \end{aligned} \quad (2.54)$$

donde el operador Laplaciano Δ_{LB} (2.35) no cambia por ser invariante ante rotaciones en la esfera y el potencial efectivo (2.41), está dado por

$$V_{\text{eff}}^{\text{II}} = -\frac{1}{8} \left(\frac{1}{\sin^2\vartheta' \sin^2\varphi'} - 1 \right). \quad (2.55)$$

Al igual que en el caso anterior, el potencial (2.55) tiene singularidades cuando $r = \sqrt{\xi_1^2 + \xi^2} = \sin^2\vartheta' \sin^2\varphi' = 0$. Así que se procede de manera análoga: se usan separación de variables y luego se eligen soluciones que anulen las singularidades cuando $\vartheta' = \varphi' = 0$.

En (2.55) podemos proponer la separación de variables,

$$\Upsilon^{\text{II}}(\vartheta', \varphi') = \frac{1}{\sqrt{\sin\vartheta'}} S(\vartheta') T(\varphi'). \quad (2.56)$$

Gracias a (2.56), la ecuación diferencial (2.54) se separa en dos ecuaciones diferenciales de primer orden con constante de separación k ,

$$\frac{d^2 S}{d\vartheta'^2} + \left(2\mathcal{E} - \frac{k^2 - \frac{1}{4}}{\sin^2\vartheta'} \right) S = 0, \quad \frac{d^2 T}{d\varphi'^2} + \left(k^2 + \frac{1}{4\sin^2\varphi'} \right) T = 0. \quad (2.57)$$

Considerando nuevas variables $\mu = \frac{1}{2}\varphi'$ y $\nu = \frac{1}{2}\vartheta'$, las ecuaciones (2.57) se transforman en ecuaciones unidimensionales de Pöschl-Teller,

$$\frac{d^2 T(\mu)}{d\mu^2} + \left(4k^2 + \frac{1}{4\sin^2\mu} + \frac{1}{4\cos^2\mu} \right) T(\mu) = 0, \quad (2.58)$$

$$\frac{d^2 S(\nu)}{d\nu^2} + \left(4\mathcal{E}^2 + \frac{1 - 4k^2}{4\sin^2\nu} + \frac{1 - 4k^2}{4\cos^2\nu} \right) S(\nu) = 0. \quad (2.59)$$

Para encontrar funciones que solucionen las ecuaciones (2.58) y (2.59) se procede similarmente al Sistema I (ver discusión de ecuación (2.46)). La condición a la frontera (2.48) aquí es

$$T(\mu)/\sqrt{\cos \mu} \Big|_{\mu=\pi/2} = \text{constante} \neq 0.$$

Las soluciones están dadas por

$$T(\varphi') = \sqrt{\sin \varphi'} P_{n_1}(\cos \varphi') \text{ y } S(\vartheta') = (\sin \vartheta')^{n_1+1} C_{n_2}^{n_1+1}(\cos \vartheta').$$

donde $C_n^\gamma(z)$ y $P_n(z)$ son polinomios de Gegenbauer y Legendre de grado n en z , respectivamente. Se introducen dos números enteros $n_1 \in \mathbb{Z}^+$ y $n_2 \in \mathbb{Z}^+$, con $n = n_1 + n_2$, que conservan la energía \mathcal{E} definida en (2.38),

$$k = n_1 + \frac{1}{2}, \quad \mathcal{E} = \frac{1}{2}(k + n_2 + \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}(n_1 + n_2 + 1)^2 = \frac{1}{2}(n + 1)^2.$$

Esto recuerda el problema desacoplado de dos partículas, donde n sería el número cuántico principal total.

Por tanto, la solución ortonormal a (2.54) se escribe como

$$\Upsilon_{n_1, n_2}^{\text{II}}(\vartheta', \varphi') = N_{n_1, n_2} \sin^{n_1+\frac{1}{2}} \vartheta' \sin^{\frac{1}{2}} \varphi' C_{n_2}^{n_1+1}(\cos \vartheta') P_{n_1}(\cos \varphi'),$$

donde la constante de normalización N_{n_1, n_2} es

$$N_{n_1, n_2} := 2^{n_1+\frac{1}{2}} n_1! \sqrt{\frac{(2n_1+1)(n_1+n_2+1)n_2!}{2\pi(2n_1+n_2+1)!}}.$$

Es importante señalar que la constante de separación k es el valor propio del operador \widehat{J}_1 , que involucra al operador \widehat{L}_1 de (2.52),

$$\begin{aligned} \widehat{J}_1 \Upsilon_{n_1, n_2}^{\text{II}}(\vartheta', \varphi') &:= \left(\frac{\partial^2}{\partial \varphi'^2} + \frac{1}{4 \sin^2 \varphi'} \right) \Upsilon_{n_1, n_2}^{\text{II}}(\vartheta', \varphi') \\ &= \left(\widehat{L}_1^2 + \frac{\xi_2^2 + \xi_3^2}{4\xi_3^2} \right) \Upsilon_{n_1, n_2}^{\text{II}}(\vartheta', \varphi') = -k^2 \Upsilon_{n_1, n_2}^{\text{II}}(\vartheta', \varphi'), \end{aligned} \tag{2.60}$$

con $k = n_1 + \frac{1}{2}$.

Finalmente, a través de $\cos \vartheta' = x$ y $\cos \varphi' = y/\sqrt{1-x^2}$ se regresa a las coordenadas (x, y) en el disco \mathcal{D} , lo que permite escribir las eigenfunciones de Zernike en el disco en términos de otros polinomios, mostradas en la figura 2.6, como

$$\begin{aligned} \Psi_{n_1, n_2}^{\text{II}}(x, y) &= 2^{n_1+\frac{1}{2}} n_1! \sqrt{\frac{(2n_1+1)(n_1+n_2+1)n_2!}{2\pi(2n_1+n_2+1)!}} \\ &\quad \times (1-x^2)^{n_1/2} C_{n_2}^{n_1+1}(x) P_{n_1}\left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}\right). \end{aligned} \tag{2.61}$$

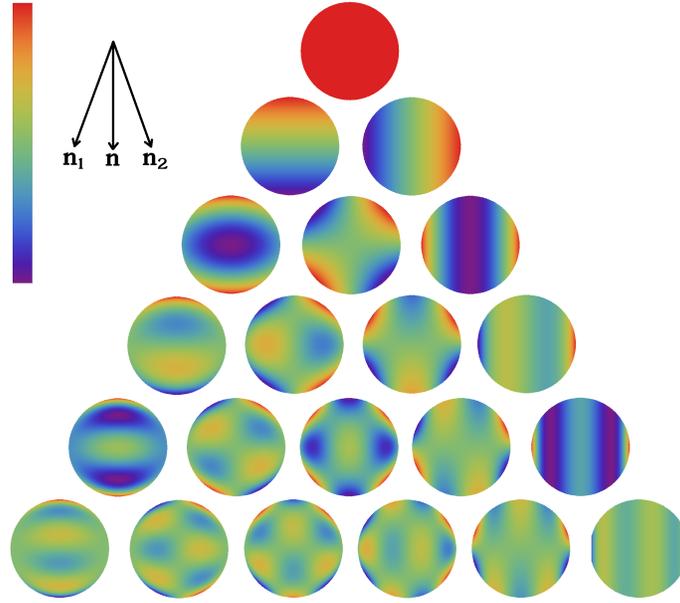


Figura 2.6: Soluciones polinomiales $\Psi_{n_1, n_2}^{\text{II}}(x, y)$ (2.62) sobre el disco \mathcal{D} , con número cuántico principal $n = n_1 + n_2$.

La nueva solución (2.61) establece una relación entre los polinomios de Jacobi y polinomios de Gegenbauer y Legendre.

En coordenadas polares sobre el disco, las funciones $\Psi_{n_1, n_2}^{\text{II}}(x, y)$ se convierten en

$$\begin{aligned} \Psi_{n_1, n_2}^{\text{II}}(r, \theta) &= 2^{n_1 + \frac{1}{2}} n_1! \sqrt{\frac{(2n_1 + 1)(n_1 + n_2 + 1) n_2!}{2\pi (2n_1 + n_2 + 1)!}} \\ &\times (1 - r^2 \cos^2 \theta)^{n_1/2} C_{n_2}^{n_1+1}(r \cos \theta) P_{n_1}\left(\frac{r \sin \theta}{\sqrt{1 - r^2 \cos^2 \theta}}\right). \end{aligned} \quad (2.62)$$

Nótese que las funciones (2.61) siguen siendo ortogonales en \mathcal{D} por cumplir con la relación de ortogonalidad (2.28), pero las coordenadas $(u, v) := (x, y/\sqrt{1-x^2})$ no lo son. Las coordenadas (u, v) mapean el disco \mathcal{D} , con coordenadas (x, y) , sobre un cuadrado $|u| \leq 1$, $|v| \leq 1$, donde las coordenadas (u, v) son ortogonales. Usando las soluciones $\Psi_{n_1, n_2}(x, y) = U_{n_1, n_2}(u) V_{n_1}(v)$ en (2.61), la ecuación diferencial de Zernike (2.1) se puede escribir como

$$(u^2 - 1)^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^2} + 3u(u^2 - 1) \frac{\partial \Psi}{\partial u} + (1 - v^2) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial v^2} - 2v \frac{\partial \Psi}{\partial v} = E(u^2 - 1)\Psi,$$

la cual muestra la separación de soluciones en u y v .

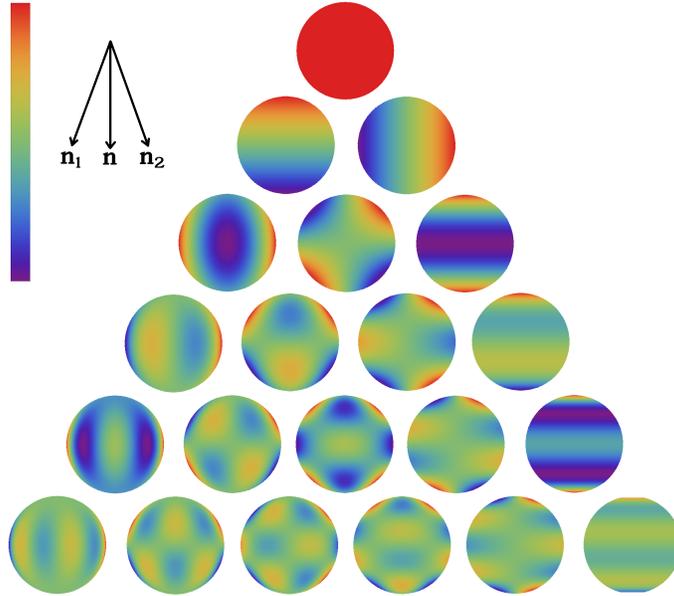


Figura 2.7: Soluciones polinomiales $\Psi_{l_1, l_2}^{\text{III}}(x, y)$ (2.65), en términos de polinomios de Gegenbauer y Legendre, sobre el disco \mathcal{D} , con número cuántico principal $n = l_1 + l_2$. Se relacionan con $\Psi_{l_1, l_2}^{\text{II}}(x, y)$ haciendo los cambios $x \rightarrow y$ y $y \rightarrow -x$.

2.5.3. Sistema de coordenadas III

Al igual que en los Sistemas I (2.5.1) y II (2.5.2), el operador de Laplace-Beltrami queda invariante ante el cambio de coordenadas. El potencial efectivo (2.41) en términos de las coordenadas (ϑ'', φ'') es

$$V_{\text{eff}}^{\text{III}} = -\frac{1}{8} \left(\frac{1}{\sin^2 \vartheta'' \cos^2 \varphi''} - 1 \right).$$

Este potencial de tipo Pöschl-Teller se reduce al potencial descrito en el Sistema II (2.55) si tomamos $\vartheta' \rightarrow \vartheta''$ y $\varphi' \rightarrow \varphi'' + \frac{1}{2}\pi$. Debido a esta relación, las funciones solución $\Upsilon_{l_1, l_2}^{\text{III}}(\vartheta'', \varphi'')$, en el sistema coordenado III, se pueden escribir como

$$\Upsilon_{l_1, l_2}^{\text{III}}(\vartheta'', \varphi'') = N_{l_1, l_2} \sin^{l_1 + \frac{1}{2}} \vartheta'' \cos^{\frac{1}{2}} \varphi'' C_{l_2}^{l_1 + 1}(\vartheta'') P_{l_1}(\sin \varphi''), (\vartheta''), \quad (2.63)$$

$$N_{l_1, l_2} := 2^{l_1 + \frac{1}{2}} l_1! \sqrt{\frac{(2l_1 + 1)(l_1 + l_2 + 1) l_2!}{2\pi (2l_1 + l_2 + 1)!}},$$

donde $n = l_1 + l_2$, $l_1, l_2 \in \mathbb{Z}^+$ y el espectro de energía sigue siendo $\mathcal{E} = \frac{1}{2}(n + 1)^2$ (2.38).

El operador que describe la separación de variables en (ϑ'', φ'') , en este caso, es

$$\begin{aligned} \widehat{J}_2 \Upsilon_{l_1, l_2}^{\text{III}}(\vartheta'', \varphi'') &:= \left(\frac{\partial^2}{\partial \varphi''^2} + \frac{1}{4 \cos^2 \varphi''} \right) \Upsilon_{l_1, l_2}^{\text{III}}(\vartheta'', \varphi'') \\ &= \left(\widehat{L}_2^2 + \frac{\xi_1^2 + \xi_3^2}{4\xi_3^2} \right) \Upsilon_{l_1, l_2}^{\text{III}}(\vartheta'', \varphi'') = -l^2 \Upsilon_{l_1, l_2}^{\text{III}}(\vartheta'', \varphi'') \end{aligned} \quad (2.64)$$

donde $l := l_1 + \frac{1}{2}$.

Al regresar a las coordenadas (x, y) sobre el disco \mathcal{D} , con los cambios de variable $\cos \vartheta'' = y$ y $\cos \varphi'' = x/\sqrt{1-y^2}$, las funciones de onda (2.63) se pueden expresar como

$$\begin{aligned} \Psi_{l_1, l_2}^{\text{III}}(x, y) &= 2^{l_1 + \frac{1}{2}} l_1! \sqrt{\frac{(2l_1 + 1)(l_1 + l_2 + 1) l_2!}{2\pi (2l_1 + l_2 + 1)!}} \\ &\times (1 - y^2)^{l_1/2} P_{l_1}\left(\frac{x}{\sqrt{1 - y^2}}\right) C_{l_2}^{l_1 + 1}(y). \end{aligned} \quad (2.65)$$

En coordenadas polares sobre el disco \mathcal{D} , las funciones $\Psi_{l_1, l_2}^{\text{III}}(x, y)$ se transforman en

$$\begin{aligned} \Psi_{l_1, l_2}^{\text{III}}(r, \theta) &= 2^{l_1 + \frac{1}{2}} l_1! \sqrt{\frac{(2l_1 + 1)(l_1 + l_2 + 1) l_2!}{2\pi (2l_1 + l_2 + 1)!}} \\ &\times (1 - r^2 \sin^2 \theta)^{l_1/2} P_{l_1}\left(\frac{r \cos \theta}{\sqrt{1 - r^2 \sin^2 \theta}}\right) C_{l_2}^{l_1 + 1}(r \sin \theta). \end{aligned}$$

Las funciones $\Psi_{l_1, l_2}^{\text{III}}(x, y)$ coinciden con las funciones Ψ^{II} (2.61) bajo la rotación $x \rightarrow y$ y $y \rightarrow -x$ que conecta a los sistemas II y III. El comportamiento de las funciones (2.65) se muestra en la figura 2.7.

2.6. Transformación entre bases de Zernike

La relación entre las funciones de las distintas bases de Zernike se encuentran a través de los coeficientes de transformación que permiten poner las funciones de una base en términos de otra. Los coeficientes correspondientes a las bases estudiadas en esta tesis (2.42)–(2.44) se encuentran en el artículo [2] y se reportan en esta tesis como complemento. Para cada sistema coordinado (2.42)–(2.44) existen $n+1$ funciones linealmente independientes, respectivamente, que constituyen la base completa. Las distintas bases de Zernike encontradas anteriormente se describen a continuación.

La base de funciones para el sistema original de Zernike I, mostradas en la figura 2.2, esta dada por

$$\begin{aligned} \Upsilon_{n, m}^{\text{I}}(\vartheta, \varphi) &= \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} (\sin \vartheta)^{|m|} (\cos \vartheta)^{1/2} P_{n_r}^{(|m|, 0)}(\cos 2\vartheta) e^{im\varphi}, \\ \Psi_{n, m}^{\text{I}}(r, \phi) &= (-1)^{n_r} \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} r^{|m|} P_{n_r}^{(|m|, 0)}(1-r^2) e^{im\phi}, \end{aligned} \quad (2.66)$$

donde $n_r = \frac{1}{2}(n - |m|)$ es el número cuántico radial y (ϑ, φ) son coordenadas en la esfera \mathcal{H}_+ y (r, ϕ) en el disco \mathcal{D} . El parámetro $m \in \{-n, -(n-2), \dots, n+2, n\}$ tiene $n+1$ valores diferentes.

Para el sistema II (2.43), orientado en la dirección del eje $\xi_1 \in \mathcal{H}_+$, las funciones base mostradas en la figura 2.6 son

$$\begin{aligned}\Upsilon_{n_1, n_2}^{\text{II}}(\vartheta', \varphi') &= N_{n_1, n_2} (\sin \vartheta')^{n_1 + \frac{1}{2}} C_{n_2}^{n_1 + 1}(\cos \vartheta') \sqrt{\sin \varphi'} P_{n_1}(\cos \varphi'), \\ \Psi_{n_1, n_2}^{\text{II}}(x, y) &= N_{n_1, n_2} (1-x^2)^{\frac{1}{2}n_1} C_{n_2}^{n_1 + 1}(x) P_{n_1}\left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}\right); \end{aligned} \quad (2.67)$$

Finalmente, las funciones base del sistema III (2.44), que se encuentra orientado en el eje $\xi_2 \in \mathcal{H}_+$, son

$$\begin{aligned}\Upsilon_{l_1, l_2}^{\text{III}}(\vartheta'', \varphi'') &= N_{l_1, l_2} (\sin \vartheta'')^{l_1 + \frac{1}{2}} C_{l_2}^{l_1 + 1}(\cos \vartheta'') \sqrt{\cos \varphi''} P_{l_1}(\sin \varphi''), \\ \Psi_{l_1, l_2}^{\text{III}}(x, y) &= N_{l_1, l_2} P_{l_1}\left(\frac{x}{\sqrt{1-y^2}}\right) (1-y^2)^{\frac{1}{2}l_1} C_{l_2}^{l_1 + 1}(y), \end{aligned} \quad (2.68)$$

donde $n_1 + n_2 = n = l = l_1 + l_2$ es el número cuántico principal, $J_\nu^{(\alpha, \beta)}$, C_ν^α y P_ν son polinomios de Jacobi, Gegenbauer y Legendre de grado ν , respectivamente. Las funciones (2.68) son mostradas en la figura 2.7.

La constante de normalización en las ecuaciones (2.67)–(2.68) es

$$N_{k_1, k_2} := 2^{k_1} k_1! \sqrt{\frac{(2k_1 + 1)(k_1 + k_2 + 1) k_2!}{\pi(2k_1 + k_2 + 1)!}},$$

$k_i \in \mathbb{Z}^+$ que toma valores n_i or l_i , $i = 1, 2$. La relación que guardan las tres bases estudiadas en términos de los coeficientes de cambio de base, se resume en la Fig. (2.8) y se describirá en las siguientes secciones.

2.6.1. transformación entre bases I y II

La relación entre las coordenadas de los sistemas I (2.42) y II (2.43) está dada por

$$\cos \vartheta' = \sin \vartheta \cos \varphi, \quad \cos \varphi' = \frac{\sin \vartheta \sin \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi}}.$$

Además, las funciones en la base II (2.67) se puede poner en términos de la base I (2.66) usando una combinación lineal de sus funciones base,

$$\Upsilon_{n_1, n_2}^{\text{II}}(\vartheta', \varphi') = \sum_{m=-n(2)}^n W_{n_1, n_2}^{n, m} \Upsilon_{n, m}^{\text{I}}(\vartheta, \varphi), \quad (2.69)$$

donde $\sum_{m=-n(2)}^n$ indica que $m \in \mathbb{Z}$ toma valores desde $-n$ a n en pasos de 2.

Usando la ortogonalidad de las funciones de Legendre y Jacobi en ambas bases y $P_{n_1}(1) = 1$, $P_{n_r}^{(|m|, 0)}(-1) = (-1)^{n_r}$ en (2.69), se llega a que los coeficientes de transformación

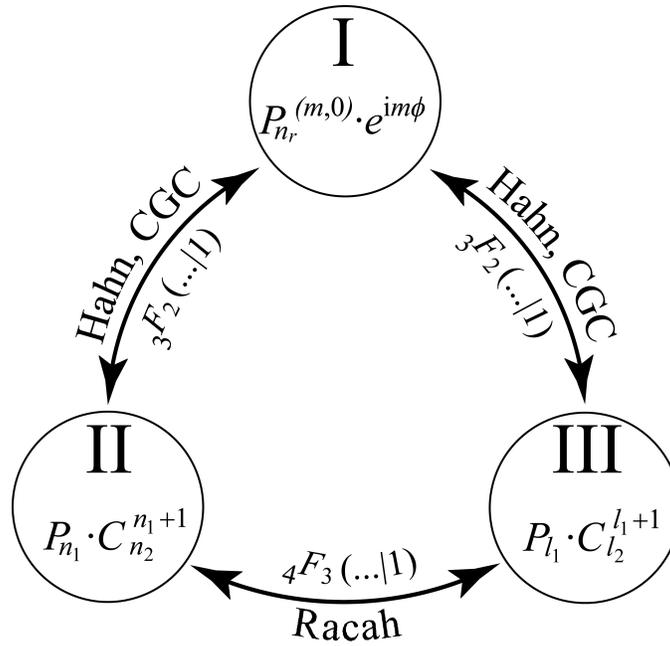


Figura 2.8: Tres bases y sus coeficientes de transformación. El esquema muestra la relación del cambio de base para cada base estudiada. De esta manera, la base original de Zernike [4], se indica por I, la cual se puede expresar usando una expansión con coeficientes dados por polinomios hipergeométricos ${}_3F_2(\dots|1)$, polinomios de Hahn o coeficientes de Clebsch-Gordan en las bases II and III [2]. Los coeficientes de transformación entre las bases II y III se dan a través de polinomios hipergeométricos ${}_4F_3(\dots|1)$ y polinomios de Racah.

$W_{n_1, n_2}^{n, m}$ están dados en términos de las funciones hipergeométricas ${}_3F_2(\dots|1)$,

$$W_{n_1, n_2}^{n, m} = \frac{i^{n_1} (-1)^{\frac{1}{2}(m+|m|)} n!}{\left(\frac{1}{2}(n_1 - n_2 - m)\right)! \left(\frac{1}{2}(n + m)\right)!} \sqrt{\frac{2n_1 + 1}{n_2! (n + n_1 + 1)!}} \\ \times {}_3F_2\left(\begin{matrix} -n_2, & n_1 + 1, & -\frac{1}{2}(n + m) \\ -n, & \frac{1}{2}(n_1 - n_2 - m) + 1 \end{matrix} \middle| 1\right).$$

Además, las funciones hipergeométricas ${}_3F_2(\dots|1)$ pueden ser relacionadas en términos de N polinomios de Hahn de grado p y variable discreta x [31] por

$$Q_p(x; \alpha, \beta, N) := {}_3F_2\left(\begin{matrix} -p, & -x, & p + \alpha + \beta + 1 \\ -N, & \alpha + 1 \end{matrix} \middle| 1\right),$$

donde $x, p \in \{0, 1, \dots, N\}$, con lo que los coeficientes de transformación $W_{n_1, n_2}^{n, m}$ se pueden escribir como

$$W_{n_1, n_2}^{n, m} = \frac{i^{n_1} (-1)^{\frac{1}{2}(m+|m|)} (n!)^2}{\left(\frac{1}{2}(n - m)\right)! \left(\frac{1}{2}(n + m)\right)!} \sqrt{\frac{2n_1 + 1}{n_2! (n + n_1 + 1)!}} \\ \times Q_{n_2}\left(\frac{1}{2}(n + m); -n - 1, -n - 1, n\right).$$

Para encontrar los coeficientes de transformación que van de la base II (2.67) a la I (2.66), se procede análogamente.

La base de funciones I (2.66) se escribe en términos de las funciones de la base II (2.67) como,

$$\Upsilon_{n,m}^I(\vartheta, \varphi) = \sum_{n_1=0}^n \widetilde{W}_{n,m}^{n_1, n_2} \Upsilon_{n_1, n_2}^{II}(\vartheta', \varphi'), \quad (2.70)$$

donde $0 \leq n_1 \leq n = n_1 + n_2$ y considerando la propiedad $\Upsilon_{n,m}^I = \Upsilon_{n,-m}^{I*}$. De esta manera, la suma se puede escribir de 0 a n . Los coeficientes de transformación $\widetilde{W}_{n,m}^{n_1, n_2}$ para este caso, resultan ser los coeficientes de Clebsch-Gordan del grupo $\mathfrak{su}(2)$,

$$\widetilde{W}_{n,m}^{n_1, n_2} = (-i)^{n_1} (-1)^{\frac{1}{2}(m+|m|)} C_{\frac{1}{2}n, -\frac{1}{2}m; \frac{1}{2}n, \frac{1}{2}m}^{n_1, 0},$$

ya han sido estudiados para potenciales de Pöschl-Teller en [29]. Los coeficientes de Clebsch-Gordan $C_{a,\alpha;b,\beta}^{c,\gamma}$ se relacionan con las funciones hipergeométricas ${}_3F_2(\dots | 1)$ [30] a través de

$$C_{a,\alpha;b,\beta}^{c,\gamma} = \sqrt{\frac{(2c+1)(b+c-a)!(b-\beta)!(c+\gamma)!(c-\gamma)!}{(a+b-c)!(a-b+c)!(a+b+c+1)!(a+\alpha)!(a-\alpha)!(b+\beta)!}} \\ \times \frac{\delta_{\gamma, \alpha+\beta} (2a)! (c-b+\alpha)!}{(c-b+\alpha)! (c-a-\beta)!} {}_3F_2\left(\begin{matrix} -a-b+c, -a+\alpha, b-a+c+1 \\ -2a, c-a-\beta+1 \end{matrix} \middle| 1 \right),$$

por lo que los coeficientes $W_{n_1, n_2}^{n, m}$ también se pueden escribir en términos de coeficientes de Clebsch-Gordan como

$$W_{n_1, n_2}^{n, m} = i^{n_1} (-1)^{\frac{1}{2}(m+|m|)} C_{\frac{1}{2}n, -\frac{1}{2}m; \frac{1}{2}n, \frac{1}{2}m}^{n_1, 0},$$

con $a = b = \frac{1}{2}n$, $\alpha = -\beta = -\frac{1}{2}m$, y $\gamma = 0$. Esto implica la relación entre los coeficientes de transformación,

$$\widetilde{W}_{n,m}^{n_1, n_2} = (-1)^{n_1} W_{n_1, n_2}^{n, m}, \quad (2.71)$$

que permite pasar de una base a otra fácilmente.

2.6.2. transformación entre bases I y III

Los coeficientes de transformación entre las bases I (2.66) y III (2.67), que se llamarán $\widehat{W}_{l_1, l_2}^{n, m}$, se encuentran fácilmente al notar que las coordenadas (ϑ', φ') en (2.43) están relacionadas con las coordenadas del sistema III (2.44) a través del cambio de variable $\vartheta' \mapsto \vartheta''$ y $\varphi' \mapsto \varphi'' + \frac{1}{2}\pi$ y una fase $(-1)^{l_1}$, así

$$\begin{aligned} \widehat{W}_{l_1, l_2}^{n, m} &= (-1)^{l_1} \exp(-i\frac{1}{2}\pi m) W_{l_1, l_2}^{n, m}, \\ &= \exp(-i\frac{1}{2}\pi m) \widetilde{W}_{n, m}^{n_1, n_2}, \end{aligned} \quad (2.72)$$

donde $W_{l_1, l_2}^{n, m}$ corresponden a (2.69), con (n_1, n_2) reemplazando a (l_1, l_2) . De tal manera que $\widehat{W}_{l_1, l_2}^{n, m}$ se escribe explícitamente como

$$\begin{aligned} \widehat{W}_{l_1, l_2}^{n, m} &= \frac{(-i)^{l_1} (-1)^{\frac{1}{2}(m+|m|)} n! \exp(-i\frac{1}{2}\pi m)}{\left(\frac{1}{2}(l_1 - l_2 - m)\right)! \left(\frac{1}{2}(n + m)\right)!} \sqrt{\frac{2l_1 + 1}{l_2! (n + l_1 + 1)!}} \\ &\quad \times {}_3F_2\left(\begin{matrix} -l_2, & l_1 + 1 & -\frac{1}{2}(n + m) \\ -n, & \frac{1}{2}(l_1 - l_2 - m) + 1 \end{matrix} \middle| 1\right) \\ &= \frac{(-i)^{l_1} (-1)^{\frac{1}{2}(m+|m|)} (n!)^2}{\left(\frac{1}{2}(n - m)\right)! \left(\frac{1}{2}(n + m)\right)!} \sqrt{\frac{2l_1 + 1}{l_2! (n + l_1 + 1)!}} \\ &\quad \times \exp(-i\frac{1}{2}\pi m) Q_{l_2}\left(\frac{1}{2}(n + m); -n - 1, -n - 1, n\right) \\ &= (-i)^{l_1} (-1)^{\frac{1}{2}(m+|m|)} \exp(-i\frac{1}{2}\pi m) C_{\frac{1}{2}n, -\frac{1}{2}m; \frac{1}{2}n, \frac{1}{2}m}^{l_1, 0}. \end{aligned}$$

2.6.3. transformación entre bases II y III

En [2] se estudian dos maneras de encontrar los coeficientes de transformación entre las funciones de las bases II (2.67) y III (2.68) que pone una base de funciones en término de la otra, a través de

$$\Upsilon_{l_1, l_2}^{\text{III}}(\vartheta'', \varphi'') = \sum_{n_2=0}^n U_{l_1, l_2}^{n_1, n_2} \Upsilon_{n_1, n_2}^{\text{II}}(\vartheta', \varphi'), \quad (2.73)$$

La primera forma de obtener los coeficientes $U_{l_1, l_2}^{n_1, n_2}$ es poniendo ambas bases, II y III, en términos de las $n + 1$ funciones de la base I (2.70), a través de los coeficientes $\widehat{W}_{l_1, l_2}^{n, m}$ y $W_{n_1, n_2}^{n, m}$,

$$\Upsilon_{l_1, l_2}^{\text{III}}(\vartheta'', \varphi'') = \sum_{m=-n}^n \widehat{W}_{l_1, l_2}^{n, m} \sum_{n_1=0}^n \widetilde{W}_{n, m}^{n_1, n_2} \Upsilon_{n_1, n_2}^{\text{II}}(\vartheta', \varphi').$$

Así, $U_{l_1, l_2}^{n_1, n_2}$ puede ser escrito en términos de coeficientes de Clebsch-Gordan,

$$U_{l_1, l_2}^{n_1, n_2} = i^{l_1 + n_2} \sum_{k=0}^n (-1)^{l_1 + k} C_{\frac{1}{2}n, \frac{1}{2}n - k; \frac{1}{2}n, -\frac{1}{2}n + k}^{l_1, 0} C_{\frac{1}{2}n, \frac{1}{2}n - k; \frac{1}{2}n, -\frac{1}{2}n + k}^{n_1, 0}$$

donde $U_{l_1, l_2}^{n_1, n_2} \in \mathbb{R}$ y $U_{l_1, l_2}^{n_1, n_2} = 0$ si $l_1 + n_2$ o $l_2 + n_1$ son números impares. La segunda manera radica en usar las paridades de los polinomios de Legendre y Gegenbauer en las funciones de la base II (2.67) y III (2.68) que nos lleva a separar la suma (2.73) según la paridad,

$$(-1)^{l_1} \Upsilon_{l_1, l_2}^{\text{III}}(\vartheta'', \varphi'') = \sum_{n_2 \text{ par}} U_{l_1, l_2}^{n_1, n_2} \Upsilon_{n_1, n_2}^{\text{II}}(\vartheta', \varphi') - \sum_{n_2 \text{ impar}} U_{l_1, l_2}^{n_1, n_2} \Upsilon_{n_1, n_2}^{\text{II}}(\vartheta', \varphi'), \quad (2.74)$$

$$(-1)^{l_2} \Upsilon_{l_1, l_2}^{\text{III}}(\vartheta'', \varphi'') = \sum_{n_1 \text{ par}} U_{l_1, l_2}^{n_1, n_2} \Upsilon_{n_1, n_2}^{\text{II}}(\vartheta', \varphi') - \sum_{n_1 \text{ impar}} U_{l_1, l_2}^{n_1, n_2} \Upsilon_{n_1, n_2}^{\text{II}}(\vartheta', \varphi'). \quad (2.75)$$

Comparando (2.74) y (2.75) con (2.73) se deduce que cuando $l_1 = 2q_1$ es par o $l_1 = 2q_1 + 1$ es impar, las sumas sobre $n_2 = 2p_2$ par o $n_2 = 2p_2 + 1$ impar, $q_1, p_2 \in \mathbb{Z}$, en (2.74) dan cero, ya que

$$U_{2q_1+1, \ell_2}^{n_1, 2p_2} = 0, \quad U_{2q_1, \ell_2}^{n_1, 2p_2+1} = 0.$$

Algo similar ocurre cuando se suma sobre $n_1 = 2p_1$ par o $n_1 = 2p_1 + 1$ impar en (2.75), pues los coeficientes $U_{l_1, l_2}^{n_1, n_2}$ son cero cuando $l_2 = 2q_2$ es par o $l_2 = 2q_2 + 1$ es impar

$$U_{\ell_1, 2q_2+1}^{2p_1, n_2} = 0, \quad U_{\ell_1, 2q_2}^{2p_1+1, n_2} = 0,$$

para $p_1, q_2 \in \mathbb{Z}$.

Considerando el hecho de que el número cuántico principal sea $n = n_1 + n_2 = l_1 + l_2$, hay cuatro casos de estudio: si n es entero par (n_1 y n_2 pares o n_1 y n_2 impares) y si n es entero impar (n_1 par y n_2 impar, o n_1 impar y n_2 par). Para que sea más sencilla la notación, se introducen cinco índices adicionales (N, q_1, q_2, p_1 y p_2) tales que $N := p_1 + p_2 = q_1 + q_2$. Además, los coeficientes de transformación encontrados se escriben en términos de polinomios hipergeométricos ${}_4F_3$ y polinomios de Racah $R_n(x(x + \gamma + \delta + 1); \alpha, \beta, \gamma, \delta)$, $x \in \{0, 1, \dots, N\}$ de grado $n \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$.

Estados pares de n

Las funciones para estados (2.74) donde n es par se dividen dos casos. En el primer caso, $N = \frac{1}{2}n$,

$$\Upsilon_{2q_1, 2q_2}^{\text{III}}(\vartheta'', \varphi'') = \sum_{p_1, p_2} U_{2q_1, 2q_2}^{2p_1, 2p_2} \Upsilon_{2p_1, 2p_2}^{\text{II}}(\vartheta', \varphi'), \quad (2.76)$$

$$\begin{aligned} U_{2q_1, 2q_2}^{2p_1, 2p_2} &= \Lambda_{q_1, q_2}^{p_1, p_2} {}_4F_3 \left(\begin{matrix} -p_1, & p_1 + \frac{1}{2}, & q_1 + \frac{1}{2}, & -q_1 \\ N + 1, & 1, & -N \end{matrix} \middle| 1 \right) \\ &= \Lambda_{q_1, q_2}^{p_1, p_2} R_{q_1} \left(p_1(p_1 + \frac{1}{2}); N, -(N + \frac{1}{2}), -(N + 1), (N + \frac{1}{2}) \right) \\ &= \bar{\Lambda}_{q_1, q_2}^{p_1, p_2} R_{p_1} \left(q_1(q_1 + \frac{1}{2}); N, -(N + \frac{1}{2}), -(N + 1), (N + \frac{1}{2}) \right). \end{aligned}$$

En el segundo caso ocurre cuando $N = \frac{1}{2}n - 1$,

$$\Upsilon_{2q_1+1, 2q_2+1}^{\text{III}}(\vartheta'', \varphi'') = \sum_{p_1, p_2} U_{2q_1+1, 2q_2+1}^{2p_1+1, 2p_2+1} \Upsilon_{2p_1+1, 2p_2+1}^{\text{II}}(\vartheta', \varphi'), \quad (2.77)$$

$$\begin{aligned} U_{2q_1+1, 2q_2+1}^{2p_1+1, 2p_2+1} &= \bar{\Lambda}_{q_1, q_2}^{p_1, p_2} {}_4F_3 \left(\begin{matrix} -p_1, & p_1 + \frac{3}{2}, & q_1 + \frac{3}{2}, & -q_1 \\ N + 3, & 1, & -N \end{matrix} \middle| 1 \right) \\ &= \Lambda_{q_1, q_2}^{p_1, p_2} R_{q_1} \left(p_1(p_1 + \frac{3}{2}); N + 2, -(N + \frac{3}{2}), -(N + 1), N + \frac{3}{2} \right) \\ &= \bar{\Lambda}_{q_1, q_2}^{p_1, p_2} R_{p_1} \left(q_1(q_1 + \frac{3}{2}); N + 2, -(N + \frac{3}{2}), -(N + 1), N + \frac{3}{2} \right), \end{aligned}$$

con constantes $\Lambda_{q_1, q_2}^{p_1, p_2}$ y $\bar{\Lambda}_{q_1, q_2}^{p_1, p_2}$ dadas por

$$\begin{aligned}\Lambda_{q_1, q_2}^{p_1, p_2} &= (-1)^{p_1+q_2} 4^{q_1+p_1} \frac{(q_1+N)!(p_1+N)!}{q_2! p_2!} \\ &\quad \times \sqrt{\frac{(4q_1+1)(4p_1+1)(2q_2)!(2p_2)!}{(2q_1+2N+1)!(2p_1+2N+1)!}}, \\ \bar{\Lambda}_{q_1, q_2}^{p_1, p_2} &= (-1)^{q_2+p_1} 2^{2q_1+2p_1+2} \frac{(N+q_1+2)!(N+p_1+2)!}{(N+1)(N+2) q_2! p_2!} \\ &\quad \times \sqrt{\frac{(4p_1+3)(4q_1+3)(2p_2+1)!(2q_2+1)!}{(2N+2p_1+4)!(2N+2q_1+4)!}}.\end{aligned}$$

Estados impares de n

Para n impares, correspondiente a la suma (2.75), las funciones de onda Υ^{III} , para $N = \frac{1}{2}(n-1)$, se escriben de dos maneras. La primera está dada por la suma

$$\Upsilon_{2q_1+1, 2q_2}^{\text{III}}(\vartheta'', \varphi'') = \sum_{p_1, p_2} U_{2q_1+1, 2q_2}^{2p_1, 2p_2+1} \Upsilon_{2p_1, 2p_2+1}^{\text{II}}(\vartheta', \varphi'), \quad (2.78)$$

$$\begin{aligned}U_{2q_1+1, 2q_2}^{2p_1, 2p_2+1} &= A_{q_1, q_2}^{p_1, p_2} {}_4F_3 \left(\begin{matrix} -p_1, & p_1 + \frac{1}{2}, & q_1 + \frac{3}{2}, & -q_1 \\ & N+2, & 1, & -N \end{matrix} \middle| 1 \right) \\ &= A_{q_1, q_2}^{p_1, p_2} R_{q_1} \left(p_1(p_1 + \frac{1}{2}); N+1, -(N+\frac{1}{2}), -(N+1), N+\frac{1}{2} \right) \\ &= \bar{A}_{q_1, q_2}^{p_1, p_2} R_{p_1} \left(q_1(q_1 + \frac{3}{2}); N+1, -N-\frac{3}{2}, -(N+1), N+\frac{3}{2} \right),\end{aligned}$$

y la segunda por

$$\Upsilon_{2q_1, 2q_2+1}^{\text{III}}(\vartheta'', \varphi'') = \sum_{p_1, p_2} U_{2q_1, 2q_2+1}^{2p_1+1, 2p_2} \Upsilon_{2p_1+1, 2p_2}^{\text{II}}(\vartheta', \varphi'), \quad (2.79)$$

$$\begin{aligned}U_{2q_1, 2q_2+1}^{2p_1+1, 2p_2} &= \bar{A}_{q_1, q_2}^{p_1, p_2} \times {}_4F_3 \left(\begin{matrix} -p_1, & p_1 + \frac{3}{2}, & q_1 + \frac{1}{2}, & -q_1 \\ & N+2, & 1, & -N \end{matrix} \middle| 1 \right) \\ &= A_{q_1, q_2}^{p_1, p_2} R_{p_1} \left(q_1(q_1 + \frac{1}{2}); N+1, -(N+\frac{1}{2}), -(N+1), N+\frac{1}{2} \right) \\ &= \bar{A}_{q_1, q_2}^{p_1, p_2} R_{q_1} \left(p_1(p_1 + \frac{3}{2}); N+1, -N-\frac{3}{2}, -(N+1), N+\frac{3}{2} \right),\end{aligned}$$

con constantes $A_{q_1, q_2}^{p_1, p_2}$ y $\bar{A}_{q_1, q_2}^{p_1, p_2}$,

$$\begin{aligned} A_{q_1, q_2}^{p_1, p_2} &= (-1)^{q_2+p_1} 2^{2q_1+2p_1+1} \frac{(N+q_1+1)!(N+p_1+1)!}{(N+1)q_2!p_2!} \\ &\quad \times \sqrt{\frac{(4p_1+1)(4q_1+3)(2p_2+1)!(2q_2)!}{(2N+2p_1+2)!(2N+2q_1+3)!}}, \\ \bar{A}_{q_1, q_2}^{p_1, p_2} &= (-1)^{p_1+q_2} 2^{2q_1+2p_1+1} \frac{(q_1+N+1)!(p_1+N+1)!}{(N+1)q_2!p_2!} \\ &\quad \times \sqrt{\frac{(4q_1+1)(4p_1+3)(2q_2+1)!(2p_2)!}{(2q_1+2N+2)!(2p_1+2N+3)!}}. \end{aligned}$$

Además de los coeficientes de transformación también es importante saber a qué tipo de álgebra pertenece el operador de Zernike pues con esto se identifican las simetrías del sistema, lo cual es descrito a continuación.

2.7. Álgebra superintegrable de Zernike

Usando los tres sistemas coordenados analizados (2.42)–(2.44), se encuentra que el operador \widehat{W} en (2.34) se puede escribir en términos del operador de momento angular $\widehat{J}_3 = \widehat{L}_3$ y los dos operadores \widehat{J}_1 (2.60) y \widehat{J}_2 (2.64), que determinan las constantes de movimiento k y l , respectivamente, como

$$\widehat{W} = \widehat{J}_1 + \widehat{J}_2 + \widehat{J}_3^2 + \frac{1}{2}. \quad (2.80)$$

con

$$\widehat{J}_1 = \widehat{L}_1^2 + \frac{\xi_2^2 + \xi_3^2}{4\xi_3^2}, \quad \widehat{J}_2 = \widehat{L}_2^2 + \frac{\xi_1^2 + \xi_3^2}{4\xi_3^2}, \quad \widehat{J}_3 = \widehat{L}_3,$$

donde \widehat{L}_i son los operadores de momento angular (2.52) del álgebra $\mathfrak{so}(3)$.

En la esfera, se puede construir una álgebra superintegrable a través de los operadores

$$\widehat{S}_1 = \widehat{J}_3, \quad \widehat{S}_2 = \widehat{J}_1 - \widehat{J}_2, \quad \widehat{S}_3 = [\widehat{S}_1, \widehat{S}_2] \quad (2.81)$$

que generan un álgebra no lineal, llamada ‘álgebra cúbica de Higgs’ [3] y satisfacen la relaciones

$$\widehat{S}_3 = 2\{\widehat{L}_1, \widehat{L}_2\}_+ - \frac{\xi_1\xi_2}{\xi_3^2}, \quad [\widehat{S}_3, \widehat{S}_1] = 4\widehat{S}_2, \quad [\widehat{S}_3, \widehat{S}_2] = 8\widehat{S}_1^3 - 8\widehat{W}\widehat{S}_1,$$

donde $\{, \}_+$ es el anticonmutador. Para el disco \mathcal{D} , los tres operadores que conmutan con el operador de Zernike \widehat{Z} están relacionados con los de la esfera a través de la transformación de similitud, $\widehat{K}_i = A^{-1}\widehat{S}_iA$, inversa a la realizada en (2.30). Estos operadores están dados por

$$\begin{aligned} \widehat{K}_1 &= y\partial_x - x\partial_y, \\ \widehat{K}_2 &= -(1-x^2-y^2)(\partial_{xx} - \partial_{yy}) + 2x\partial_x - 2y\partial_y, \\ \widehat{K}_3 &= -4(1-x^2-y^2)\partial_{xy} + 4y\partial_x + 4x\partial_y, \end{aligned}$$

que cierran el álgebra en el disco \mathcal{D} a través de las relaciones de conmutación

$$[\widehat{K}_1, \widehat{K}_2] = \widehat{K}_3, \quad [\widehat{K}_3, \widehat{K}_1] = 4\widehat{K}_2, \quad [\widehat{K}_3, \widehat{K}_2] = 8(\widehat{K}_1^3 - \widehat{Z}\widehat{K}_1). \quad (2.82)$$

Por tanto, el sistema de Zernike tiene asociada un álgebra que NO es de Lie, por lo que sus operadores de simetría en la esfera (2.81) y en el disco (2.82) no son lineales y pertenecen a un sistema superintegrable.

2.8. Observaciones finales y trabajo futuro

Inicialmente, el tema de Zernike nos llamó la atención debido a que las funciones de Zernike (2.27) tienen una organización piramidal semejante a la estructura que comparten las eigenfunciones del oscilador armónico. Aunque tuvimos que renunciar a esta relación, la idea principal siempre fue encontrar una relación del sistema de Zernike con otro sistema físico usando transformaciones unitarias.

Luego, descubrimos, gracias a pláticas con el Dr. Pogosyan, que el sistema cumplía varios requisitos para ser un sistema superintegrable y podía relacionarse con un sistema cuántico (estudiado en esta tesis). En el sistema cuántico se logró encontrar operadores de simetría, usando la esfera, que en el disco no eran evidentes, además de que las funciones de Zernike fueron relacionadas con los polinomios de Legendre y Gegenbauer. De este modo las funciones de Zernike, utilizadas generalmente para describir pupilas circulares, se relacionaron con un sistema cuántico donde aparece el potencial de Pöschl-Teller. Además se encontró otra forma de escribir los polinomios de Zernike en el disco en términos de polinomios de Gegenbauer y Legendre.

Quedan muchas cosas por investigar en este tema, en particular hay dos cosas inmediatas que me quedan pendientes: encontrar los operadores de ascenso y descenso explícitamente y construir estados cuasi coherentes bidimensionales para el operador cuántico en la esfera y ver que interpretación tienen en el disco.

Referencias

- [1] Cristina Salto-Alegre and K. B. Wolf, Position and momentum bases for the monochromatic Maxwell fish-eye and the sphere, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **48**, 1–17 (2015).
- [2] N. M. Atakishiyev, G. S. Pogosyan, K. B. Wolf, and A. Yakhno, Interbasis expansions in the Zernike system, *J. Math. Phys.* **58**, 103505-1–103505-20 (2017).
- [3] P. W. Higgs, Dynamical symmetries in a spherical geometry, *J. Phys. A* **12**, 309–323 (1979).
- [4] F. Zernike, Diffraction theory of cutting procedure and its improved form, the phase contrast method, *L. Foucault, Ann. Obs. Paris*, **5**, 700 (1934).
- [5] Virendra N. Mahajan, Zernike Circle Polynomials and Optical Aberrations of Systems with Circular Pupils, *Eng. Lab Notes in Applied Optics*, **33**, 8121–8124 (1994).
- [6] Virendra N. Mahajan, Zernike Polynomials and Optical Aberrations, *Eng. Lab Notes in Optics and Photonics News* **34**, 8060–8062 (1995).
- [7] William J. Tango, The Circle Polynomials of Zernike and Their Application in Optics, *Applied physics*, **13**, 327–332 (1977).
- [8] Larry N. Thibos *et al.*, Standards for Reporting the Optical Aberrations of Eyes, *Journal of Refractive Surgery*, **18**, S652–S660 (2002).
- [9] Silvia A. Comastri *et al.*, Zernike expansion coefficients: rescaling and decentring for different pupils and evaluation of corneal aberrations, *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.*, **9**, 209–221 (2007).
- [10] D. Gonzalez-Utrera *et al.*, Ophthalmic Applications of Freeform Optics, *Imaging and Applied Optics*, **FW4B.1**, OSA (2015).
- [11] A. J. E. M. Janssen, New analytic results for the Zernike circle polynomials from a basic result in the Nijboer-Zernike diffraction theory, *Journal of the European Optical Society - Rapid publications*, **6**, 1–32 (2011).
- [12] C. Ferreira *et al.*, Zernike-like systems in polygons and polygonal facets, *Applied Optics*, **54**, 6575–6583 (2015).

- [13] Robert J. Noll, Zernike polynomials and atmospheric turbulence, *J. Opt. Soc. Am.*, **Vol. 66**, 207–211 (1976).
- [14] A. Torre, Generalized Zernike or disc polynomials: An application in quantum optics, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **222**, 622–644 (2008).
- [15] A. B. Bathia and E. Wolf, On the circle polynomials of Zernike and related orthogonal sets, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **50**, 40–48 (1989).
- [16] A. Wünsche, Generalized Zernike or disc polynomials, *J. Comp. App. Math.* **174**, 135–163 (2005).
- [17] G. S. Pogosyan, K. B. Wolf, and A. Yakhno, Superintegrable classical Zernike system, *J. Math. Phys.* **58**, 072901-1–072901-14 (2017).
- [18] G. S. Pogosyan, Cristina Salto-Alegre, K. B. Wolf, and A. Yakhno, Quantum superintegrable Zernike system, *J. Math. Phys.* **58**, 072101-1–072101-13 (2017).
- [19] Joo Pedro Morais, Los polinomios de Zernike en el contexto del análisis cuaterniónico, *Miscelánea Matemática SMM* **63**, 45–76 (2016).
- [20] B. R. Andries Nijboer, The diffraction Theory of Aberrations (PHD Tesis), Rijks University of Groningen (1942).
- [21] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, 7th Ed. (Elsevier, 2007), ISBN-13: 978-0-12-373637-6.
- [22] V. Lakshminarayanan and A. Fleck, Zernike polynomials: a guide, *Journal of Modern Optics*, **58**, 545–561 (2011).
- [23] J. J. Sakurai, J. Napolitano *Modern Quantum Mechanics, 2ed*, , 2011 (Addison-Wesley, 2 ed, 2011).
- [24] C. Grosche, G. S. Pogosyan, and A. N. Sissakian, Path integral discussion for Smorodinsky-Winternitz potentials II. Two- and three-dimensional sphere, *Fortschr. Phys.* **43**, 453–521 (1995).
- [25] E. G. Kalnins, W. Miller Jr., and G. S. Pogosyan, Superintegrability and associated polynomial solutions. Euclidean space and sphere in two-dimensions space and sphere, *J. Math. Phys.* **37**, 6439–6467 (1996).
- [26] G. S. Pogosyan, A. N. Sissakian and P. Winternitz, Separation of variables and Lie algebra contractions. Applications to special functions, *Phys. Part. Nuclei* **33**, Suppl. 1, S123–S144 (2002).
- [27] N. M. Atakishiyev, G. S. Pogosyan, K. B. Wolf, and A. Yakhno, Elliptic basis for the Zernike system: Heun function solutions, *J. Math. Phys.*, accepted (2018).

-
- [28] I. Rachůnková *et al.*, *Solvability of Nonlinear Singular Problems for Ordinary Differential Equations*, Contemporary Mathematics and Its Applications, Vol. 5 (Hindawi Publishing Corporation, 2008).
- [29] D. Basu and K. B. Wolf, The Clebsch-Gordan coefficients of the three-dimensional Lorentz algebra in the parabolic basis, *J. Math. Phys.* **24**, 478–500 (1983).
- [30] D.A. Varshalovich, A.N. Moskalev and V.K. Khersonskii, *Quantum Theory of Angular Momentum* (World Scientific, Singapore, 1988).
- [31] R. Koekoek, P.A. Lesky, and R.F. Swarttouw, *Hypergeometric Orthogonal Polynomials and Their q -Analogues* (Springer, 2010) p. 204.

3. Deformación Lorentziana en el espacio de Helmholtz

En este trabajo se construye una manera de aplicar las simetrías del grupo de Lorentz al modelo monocromático de ondas de Helmholtz. Esto se realiza a partir de una fundamentación matemática, basada en la teoría de representaciones matriciales de álgebras y grupos de Lie, y análisis armónico, aplicada a un modelo de óptica ondulatoria. Se encuentra el espacio de frentes de onda a través de espacios cocientes de los grupos implicados.

Esta manera de construir el espacio de frentes de ondas de la óptica de Helmholtz deja ver de manera natural como se pueden importar las simetrías del grupo de Lorentz y las deformaciones que induce en los campos de onda.

Además, se hace uso de una transformación unitaria entre la esfera de direcciones o frecuencias a la pantalla plana óptica, llamada *transformada de onda*, que garantiza una relación entre las variedades, esfera y plano, que constituyen el espacio fase óptico de Helmholtz. Todo esto se inicia con el modelo de la óptica Euclideana que se describe a continuación.

3.1. Óptica Euclideana

La óptica euclideana consiste en modelar rayos de luz y frentes de onda como variedades obtenidas por espacios cocientes del grupo Euclideano y consiste en heredar todas las propiedades geométricas y las simetrías del grupo Euclideano al espacio de rayos de luz o de ondas en óptica. Se fundamenta en la teoría de grupos de Lie [3] $SO(3)$ e $ISO(3)$ y sus espacios cocientes [4].

Aunque en su mayoría, el contenido de esta sección se basa en el trabajo [5], también, se fundamenta de manera muy intuitiva, la construcción de espacios cocientes, incluyendo algunos ejemplos sencillos y se da un enfoque geométrico de la construcción del espacio de rayos en la óptica geométrica que pretenden simplificar la comprensión de este modelo matemático.

3.1.1. Espacio de rayos en óptica geométrica

En óptica geométrica un rayo de luz es modelado a través de líneas en un espacio tridimensional, orientadas en cualquier dirección. El espacio de todas las líneas o rayos de luz en \mathbb{R}^3 es equivalente, excepto un conjunto de medida cero, a la esfera \mathcal{S}^2 y una pantalla $P = \{(x, y, 0)\} = \mathbb{R}^2$, es decir, si \wp es la variedad de todos los rayos de luz en \mathbb{R}^3 , entonces, $\wp \cong \mathcal{S}^2 \times \mathbb{R}^2$. Esta equivalencia se puede explicar de dos maneras: desde un enfoque algebraico y desde uno geométrico.

Enfoque algebraico

El espacio de rayos de luz se puede encontrar a través de los grupos de simetría asociados a los rayos de luz. Algunos enunciados útiles que simplificarán esta descripción son los siguientes:

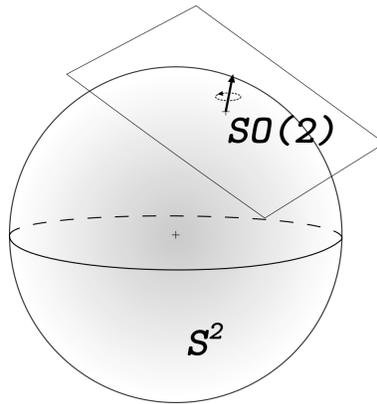


Figura 3.1: El grupo $SO(3)$ se puede visualizar como el campo vectorial de todos los puntos \vec{p} en la superficie de la esfera \mathcal{S}^2 más sus rotaciones alrededor del vector normal en cada punto, por lo que $SO(3) \cong \mathcal{S}^2 \times SO(2)$.

1. El grupo euclideo $ISO(3)$ es el grupo de simetrías de \mathbb{R}^3 .
2. El grupo de simetrías que dejan fijo al punto origen es el grupo $SO(3)$.
3. Usando las dos afirmaciones anteriores, se puede afirmar que $ISO(3) = SO(3) \ltimes \mathbb{R}^3$, lo cual, también lleva a que \mathbb{R}^3 se puede ver como un *espacio cociente*, es decir, $\mathbb{R}^3 = SO(3) \backslash ISO(3)$.
4. Otros ejemplos de *espacios cocientes* son $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R} \backslash \mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{R}^3$.
5. Un último ejemplo de *espacio cociente* que se confunde a menudo con el grupo $SO(3)$ es la *esfera* \mathcal{S}^2 . La identificación $SO(2) \backslash SO(3) \cong \mathcal{S}^2$ se demuestra de la siguiente manera:

Tómese un elemento R del grupo $\text{SO}(3)$. Usando ángulos de Euler, esta rotación en \mathbb{R}^3 siempre se puede escribir como $R = R(\psi, \theta, \phi) = R_z(\psi)R_y(\theta)R_z(\phi)$.

La aplicación del grupo de Rotaciones $\text{SO}(3)$ al polo norte $P_N = (0, 0, 1) \in \mathcal{S}^2$ da las coordenadas esféricas, es decir, $P_N \cdot R(\psi, \theta, \phi) = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$, pero como no aparece el ángulo ψ en esta parametrización, existen diferentes rotaciones que van a un mismo punto en la esfera, por lo que se puede decir que para cada punto se repiten rotaciones. Una forma sencilla de ver qué grupo forman estas rotaciones repetidas es ver cuáles rotaciones dejan fijo el polo norte en la esfera, es decir, $P_N \cdot R(\psi, \theta, \phi) = P_N = (0, 0, 1)$ si y sólo si $\theta = 0 = \phi$, por lo que

$$R(\psi) = R(\psi, 0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix},$$

y $R(\psi)$ es una rotación en \mathbb{R}^2 . De esta manera se puede afirmar que el grupo de las rotaciones que dejan fijo el polo norte en \mathcal{S}^2 es el grupo $\text{SO}(2)$.

Por tanto $\text{SO}(2) \backslash \text{SO}(3) \cong \mathcal{S}^2$.

En óptica euclideana, el grupo de simetrías de los rayos es el $\text{ISO}(3)$, pues manda líneas de \mathbb{R}^3 en líneas de \mathbb{R}^3 . Para encontrar el espacio de todas las líneas mediante un espacio cociente de grupos falta encontrar el grupo de simetrías que dejan fija una línea, para ello se considera la línea asociada al eje z en \mathbb{R}^3 , el grupo de rotaciones alrededor de este eje es el $\text{SO}(2)$ y el grupo asociado a las translaciones a lo largo de la línea es \mathbb{R} , es decir, el grupo de simetrías que dejan fija a la línea que pasa por el origen orientada en el eje z es $\text{SO}(2) \times \mathbb{R}$.

Usando las afirmaciones anteriores se puede expresar el espacio de todas las líneas tridimensionales en términos de espacios cocientes como:

$$\wp = (\text{SO}(2) \times \mathbb{R}) \backslash \text{ISO}(3) = (\text{SO}(2) \times \mathbb{R}) \backslash (\text{SO}(3) \times \mathbb{R}^3) \cong \mathcal{S}^2 \times \mathbb{R}^2. \quad (3.1)$$

donde \cong significa que la igualdad se cumple casi en todas partes (coinciden salvo un conjunto de medida cero, véase la siguiente sección).

Por tanto, el espacio de rayos de luz en \mathbb{R}^3 está dado por $\wp \cong \mathcal{S}^2 \times \mathbb{R}^2$.

Enfoque geométrico

Otra manera de determinar el espacio de rayos ópticos es a través de la definición de los rayos (o líneas) en \mathbb{R}^3 .

Conjunto de líneas en \mathbb{R}^3 .

Sea $\vec{p} \in \mathcal{S}^2$ y $\vec{q} \in \mathbb{R}^2$, entonces *el conjunto de líneas en \mathbb{R}^3* queda definido como $\ell = \{t\vec{p} + \vec{q} : t \in \mathbb{R}\}$. Es decir, un punto \vec{p} en la superficie de la esfera define de manera única la línea ℓ

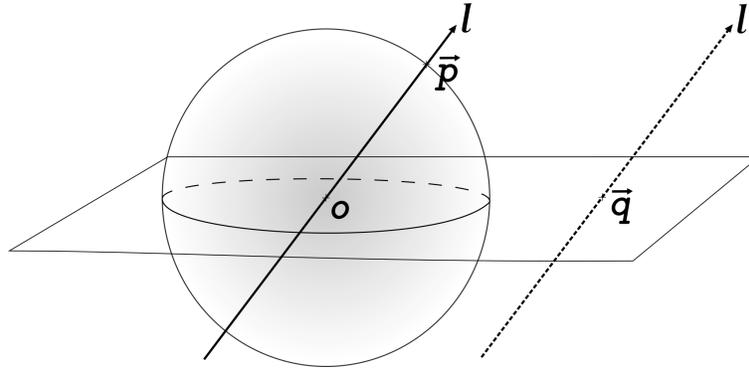


Figura 3.2: Una línea l' en \mathbb{R}^3 que no sea paralela al plano $P = \{z = 0\}$ queda definida de manera única por el punto \vec{q} de intersección en el plano y un punto de intersección \vec{p} en la esfera, de la línea l obtenida por trasladar l' al origen 0 .

que pasa por el origen de la esfera. Si se considera la pantalla como $P = \{(x, y, 0)\} = \mathbb{R}^2$, un punto $\vec{q} \in P$ trasladará la línea l al punto \vec{q} .

El método anterior reproduce todas las líneas, excepto las líneas horizontales que forman un conjunto de medida cero.

Observación 1: Si se tiene un espacio de trabajo X y Q un subespacio de medida cero ($Vol(Q) = 0$) y $U = X \setminus Q$. Los espacios de Hilbert correspondientes a X y U son iguales, es decir, $\mathcal{L}^2(X) = \mathcal{L}^2(U)$.

Usando la equivalencia $\varphi \cong \mathcal{S}^2 \times \mathbb{R}^2$ y la observación 1, se puede afirmar que los espacios de Hilbert correspondientes son equivalentes, es decir, $\mathcal{L}^2(\varphi) = \mathcal{L}^2(\mathcal{S}^2) \otimes \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$.

3.1.2. Espacio de frentes de onda

En óptica ondulatoria, se considera a la luz como una onda, si además se considera un modelo de óptica euclideana, una onda de luz estará caracterizada por su frente de onda plano y su dirección dada por el vector normal al plano \vec{n} .

Para encontrar el espacio de trabajo adecuado de la óptica ondulatoria se procede de manera análoga al caso de los rayos de luz en óptica geométrica: se determina el espacio de frentes de onda planos a través de espacios cocientes. Para esto, se debe conocer el grupo de simetrías que mandan planos a planos en \mathbb{R}^3 y el grupo que dejan fijo a un plano.

Al igual que en el caso de los rayos de luz, el grupo Euclideano $ISO(3)$ es el grupo de simetrías que manda planos de \mathbb{R}^3 en planos de \mathbb{R}^3 . Además, las simetrías que dejan fijo un plano son las rotaciones alrededor del plano y las translaciones del plano, por lo que el grupo de simetrías que fijan un plano es $SO(2) \times \mathbb{R}^2$. Usando el mismo procedimiento algebraico que en 3.1.1, el espacio de los frentes de onda de Helmholtz, llamado \mathcal{W} , se determina a través

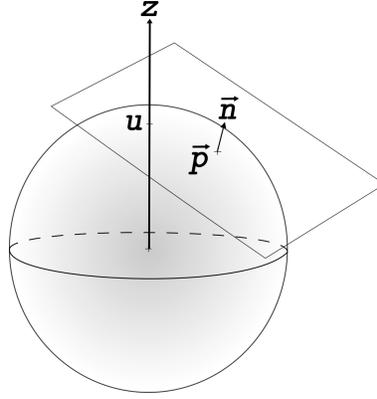


Figura 3.3: Un plano en \mathbb{R}^3 que no sea paralelo al plano $z = 0$ queda definido de manera única por el punto de inclinación $\vec{p} \in \mathcal{S}^2$ y la intersección u del plano en el eje z .

de espacios cocientes:

$$\mathcal{W} = (\text{SO}(2) \times \mathbb{R}^2) \backslash \text{ISO}(3) = (\text{SO}(2) \times \mathbb{R}^2) \backslash (\text{SO}(3) \times \mathbb{R}^3) \cong \mathcal{S}^2 \times \mathbb{R}. \quad (3.2)$$

Por tanto, el espacio de Hilbert de frentes de onda en el modelo de óptica ondulatoria esta dado por $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\mathcal{W}) \cong \mathcal{L}^2(\mathcal{S}^2) \otimes \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

3.2. Óptica de Helmholtz

Para ver las simetrías del grupo euclideo en el espacio de frentes de ondas \mathcal{W} se aplica una representación del álgebra euclidea al espacio \mathcal{W} . Los generadores del álgebra euclidea $\text{iso}(3)$ sobre \mathcal{W} son seis: tres de translación, llamados \widehat{T}_i con $i = 1, 2, 3$, y tres de rotación, \widehat{R}_i con $i = 1, 2, 3$. Existen dos invariantes del álgebra $\widehat{T} \cdot \widehat{R}$ y \widehat{T}^2 , el primero de ellos se anula en \mathcal{W} , mientras que el segundo toma la siguiente forma:

$$\widehat{T}^2 = \widehat{T}_x^2 + \widehat{T}_y^2 + \widehat{T}_z^2 = \frac{1}{p_z^2} \frac{\partial^2}{\partial u^2}, \quad (p_x, p_y, p_z) \in \mathcal{S}^2, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Para ver la aplicación del invariante \widehat{T}^2 sobre \mathcal{W} , basta entender el comportamiento del laplaciano $\partial^2 / \partial u^2$. Para esto, se tiene en cuenta la formula de Plancherel [6] para el caso de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$,

$$g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}), \quad g(u) = \int_{\mathbb{R}} G(k) e^{iuk} dk,$$

donde $G(k)$ es la transformada de Fourier de $g(u)$ y $e_k(u) = e^{iuk}$ genera el espectro de \widehat{T}^2 en $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$,

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} e^{iuk} = -k^2 e^{iuk}.$$

Con esto, el espacio de Hilbert correspondiente a los frentes de onda se puede ver como [7],

$$\mathcal{L}^2(\mathcal{W}) = \int_{\mathbb{R}}^{\otimes} \mathcal{L}^2(\mathcal{S}^2) \otimes e_k dk = \int_{\mathbb{R}}^{\otimes} \mathcal{H}_k dk, \quad \mathcal{H}_k = \mathcal{L}^2(\mathcal{S}^2) \otimes e_k.$$

Las translaciones en el grupo euclideo actúan como una fase e^{ik} en \mathcal{H}_k . Al fijar un parámetro k , se fija un espacio $\mathcal{H}_k = \mathcal{L}^2(\mathcal{S}^2)$, donde las funciones $f \in \mathcal{H}_k$, tienen la la forma,

$$f(\vec{p}) = \Phi(\vec{p}) e^{ik(\vec{p}\cdot\vec{r})}; \quad \vec{p} \in \mathcal{S}^2, \quad \vec{r} \in \mathbb{R}^3. \quad (3.3)$$

Nótese que al considerar un espacio fijo $\mathcal{H}_k = \mathcal{L}^2(\mathcal{S}^2)$ se esta trabajando en el espacio de Helmholtz, donde k es un número de onda fijo, se considera un índice de refracción $n = 1$ y las funciones en este espacio satisfacen la ecuación de Helmholtz. Además, el producto $\vec{p}\cdot\vec{r}$ resalta el uso de la transformada de Fourier entre la esfera unitaria \mathcal{S}^2 y la pantalla óptica \mathbb{R}^2 que se definirá a continuación como la *transformada de onda*.

3.2.1. Transformada de Onda

En óptica ondulatoria, el espacio fase se compone por el espacio de frecuencias o esfera de direcciones \mathcal{S}^2 y el espacio de posiciones dado por una pantalla plana \mathbb{R}^2 . La transformada de Fourier es una transformación unitaria que relaciona de manera única las funciones en estos dos espacios. Por tal razón, aunque el espacio de Hilbert en óptica de Helmholtz está dado como $\mathcal{H}_k = \mathcal{L}^2(\mathcal{S}^2)$, usando la transformada de Fourier, se puede usar funciones de onda en la pantalla plana \mathbb{R}^2 sin mayor problema.

En esta sección se encontrará explícitamente la transformada de Fourier entre la esfera \mathcal{S}^2 y el plano \mathbb{R}^2 que se denominará *transformada de onda*. Se inicia considerando superposiciones arbitrarias de onda planas $f(\vec{r})$ con vector de onda de magnitud constante k . Éstas satisfacen la ecuación de Helmholtz:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f(\vec{r}) = -k^2 f(\vec{r}), \quad (3.4)$$

y se relacionan con funciones $\mathcal{F}(\vec{p}) \in \mathcal{L}^2(\mathcal{S}^2)$ a través de la transformada de Fourier,

$$f(\vec{r}) = \frac{k}{2\pi} \int_{\mathcal{S}^2} d\mu(\vec{p}) \mathcal{F}(\vec{p}) e^{ik(\vec{p}\cdot\vec{r})} \quad (3.5)$$

donde x, y, z son coordenadas cartesianas en \mathbb{R}^3 , con vector de posición dado por $\vec{r} = (x, y, z)$ y $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$ es un vector sobre la superficie de la esfera \mathcal{S}^2 con coordenadas dadas por

$$\begin{aligned} p_x &= \sin \theta \sin \phi \\ p_y &= \sin \theta \cos \phi \\ p_z &= \sqrt{1 - p_x^2 - p_y^2} = \cos \theta, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad -\pi \leq \phi \leq \pi,$$

y $d\mu(\vec{p})$ es la medida sobre la esfera que se puede escribir como

$$d\mu(\vec{p}) = \frac{1}{p_z} dp_x dp_y = -\sin \theta d\theta d\phi = d \cos \theta d\phi.$$

Luego se divide la esfera unitaria en la semiesfera superior e inferior para reducir nuestras coordenadas a dos dimensiones (p_x, p_y) y corresponderlas a través de la transformación (3.5) a una pantalla óptica dada por un plano en \mathbb{R}^2 . La esfera unitaria \mathcal{S}^2 es dividida en dos hemisferios usando el signo de la coordenada p_z ,

$$\begin{aligned} H_+ &: p_z > 0; & 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \\ H_- &: p_z < 0; & \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi. \end{aligned}$$

De esta manera, una función sobre la superficie de la esfera $\mathcal{F}(\vec{p}) \in \mathcal{L}^2(\mathcal{S}^2)$ se descompone como

$$\mathcal{F}(\vec{p}) = \mathcal{F}_+(\mathbf{p}) + \mathcal{F}_-(\mathbf{p}) \quad \begin{cases} \mathcal{F}_+ & \text{para } p_z > 0, \\ \mathcal{F}_- & \text{para } p_z < 0, \end{cases}$$

con $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$, es decir, $\mathcal{F}(\vec{p})$ está determinada por sus valores sobre los hemisferios superior H_+ e inferior H_- y se puede traducir como una pareja de funciones $(\mathcal{F}_+, \mathcal{F}_-)$ definidas sobre un disco plano que se denotará como δ .

Además, se sabe que las soluciones $f(\vec{r})$ de la ecuación de Helmholtz quedan totalmente determinadas por sus valores sobre una pantalla plana $z = 0$ y la derivada normal a la pantalla $f'(\vec{r})|_{z=0}$. Por lo que la ecuación de Helmholtz junto con la derivada normal al plano se pueden escribir juntas usando el *operador de evolución* \mathbf{H} [8]:

$$\mathbf{H}\mathbf{f} = \partial_z \mathbf{f}, \quad \mathbf{H} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\Delta_k & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

$$\mathbf{f} := \begin{pmatrix} f(\mathbf{r}, z) \\ f_z(\mathbf{r}, z) \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

donde \mathbf{H} actúa sobre el espacio de las soluciones de Helmholtz, $\mathbf{r} = (x, y)$ es la posición sobre la pantalla plana \mathbb{R}^2 , $\Delta_k := \partial_x^2 + \partial_y^2 + k^2$, y $f_z(\mathbf{r}, z) = \partial_z f(\mathbf{r}, z)$. Usando toda esta información, se puede escribir la transformada de Fourier (3.5) restringida a la pantalla $z = 0$, como

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}) &= f(\vec{r})|_{z=0} \\ &= \frac{k}{2\pi} \int_{\delta} \frac{dp_x dp_y}{\sqrt{1 - \mathbf{p}^2}} (\mathcal{F}_+(\mathbf{p}) + \mathcal{F}_-(\mathbf{p})) e^{ik(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

así $f(\mathbf{r})$ es la función de onda en la pantalla óptica \mathbb{R}^2 . La derivada normal al plano $z = 0$ queda dada por

$$\begin{aligned} f'(\mathbf{r}) &= \frac{\partial f(\vec{r})}{\partial z} \Big|_{z=0} \\ &= \frac{ik^2}{2\pi} \int_{\delta} dp_x dp_y (\mathcal{F}_+(\mathbf{p}) - \mathcal{F}_-(\mathbf{p})) e^{ik(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Aplicando la transformada inversa se tiene que las funciones $\mathcal{F}(\mathbf{p})$ sobre los hemisferios H_{\pm} toman la forma

$$\mathcal{F}(\mathbf{p})_{\pm} = \frac{k}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^2} dx dy \left(\sqrt{1 - \mathbf{p}^2} f(\mathbf{r}) \pm \frac{1}{ik} f'(\mathbf{r}) \right) e^{-ik(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}. \quad (3.11)$$

Si en lugar de considerar coordenadas (p_x, p_y) se toman coordenadas esféricas (θ, ϕ) , $\mathcal{F} \in \mathcal{L}^2(\mathcal{S}^2)$, lo que lleva a obtener transformadas análogas a (3.9) y (3.11) de forma unificada, que definen la llamada *transformada de onda* dada por

$$f(x, y) = \frac{k}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\cos\theta \mathcal{F}(\theta, \phi) e^{ik \sin\theta(x \sin\phi + y \cos\phi)}, \quad (3.12)$$

y

$$f'(x, y) = \frac{ik^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \left[\int_0^{\pi/2} d\cos\theta d\phi \cos\theta \mathcal{F}(\theta, \phi) e^{ik \sin\theta(x \sin\phi + y \cos\phi)} - \int_{\pi/2}^{\pi} d\cos\theta d\phi \cos\theta \mathcal{F}(\theta, \phi) e^{ik \sin\theta(x \sin\phi + y \cos\phi)} \right]. \quad (3.13)$$

La *transformada de onda inversa* queda como

$$\mathcal{F}(\theta, \phi) = \frac{k}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^2} dx dy f(x, y) \cos\theta e^{-ik \sin\theta(x \cos\phi + y \sin\phi)}, \quad (3.14)$$

donde $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z) = (\sin\theta \sin\phi, \sin\theta \cos\phi, \cos\theta)$ es un punto sobre la superficie de la esfera y $\mathbf{r} = (x, y)$ un vector posición sobre el plano.

Por tanto, la transformada de onda establece una relación única entre las funciones de la esfera y el plano, esto es de gran importancia en óptica, ya que el análisis óptico se realiza sobre la pantalla plana, por esta razón, aunque las siguientes secciones se dividen en el ‘plano’ y la ‘esfera’, los resultados siempre se muestran sobre la pantalla plana.

3.3. Grupo de Lorentz en la esfera \mathcal{S}^2

Las simetrías de transformaciones relativistas son representadas en un espacio tiempo $\mathbb{R}^{3,1}$, tres dimensiones espaciales y una temporal, por el grupo de Lorentz $\text{SO}(3,1)$. La métrica del espacio tiempo preservada por el grupo de Lorentz está dada por

$$|\vec{v}|^2 = x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = \mathbf{v} \cdot \Omega \cdot \mathbf{v}^* = \begin{pmatrix} x & y & z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix},$$

donde Ω es la matriz métrica, $\vec{v} = (x, y, z, t)$ es un vector en el espacio tiempo, x, y, z corresponden a las coordenadas espaciales y t a la coordenada temporal. Esto implica que una representación matricial del grupo de Lorentz es

$$A \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R}), \quad A\Omega A^\dagger = \Omega \quad \text{y} \quad \det(A) = 1.$$

Además, en el espacio tiempo $\mathbb{R}^{3,1}$, el cono de luz positivo se puede escribir como

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z, t) : x^2 + y^2 + z^2 = t^2, t > 0\}$$

y puede ser totalmente descrito, módulo rescalamientos, por un espacio de dimensión menor a través de la aplicación

$$\begin{aligned} (x, y, z, t) &\longleftrightarrow (x', y', z') = \left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}\right), \\ x^2 + y^2 + z^2 = t^2 &\longleftrightarrow \left(\frac{x}{t}\right)^2 + \left(\frac{y}{t}\right)^2 + \left(\frac{z}{t}\right)^2 = 1, \end{aligned}$$

que es invariante de escala y que cumple que $(x, y, z, t) \in \mathcal{C}$ si y sólo si $(x', y', z') \in S^2$, donde x', y', z' son llamadas coordenadas homogéneas. Además, también se cumple que toda línea que pasa por el origen en \mathcal{C} intersecta a un único punto en la esfera S^2 , al conjunto de tales líneas se le conoce como *cono proyectivizado* y se denota por $\mathbb{P}(\mathcal{C})$. Con esto se hace la identificación $\mathbb{P}(\mathcal{C}) \cong S^2$.

Por tanto, se concluye que las simetrías del grupo de Lorentz se pueden aplicar naturalmente a la esfera unitaria, por tal motivo, es interesante preguntarse qué pasa si se aplican las simetrías Lorentzianas a las funciones de onda en el espacio de Helmholtz \mathcal{H}_k , pregunta que se trata de resolver en los siguientes apartados.

3.4. Geometría de Lorentz en óptica de Helmholtz

Ya que en ambos casos, óptica de Helmholtz y cono de luz proyectivizado, tienen como espacio de trabajo a la esfera, es natural pensar en que las simetrías del grupo de Lorentz pueden aplicarse al espacio de ondas de Helmholtz. El proceso para aplicar las simetrías del grupo de Lorentz a las funciones de onda de Helmholtz es el siguiente:

1. Identificar las simetrías que se desea aplicar. En esta tesis se desea estudiar deformaciones en los campos de onda debido a la aceleración relativista (o *boost*) en la dirección z , por lo que se elige el subgrupo uniparamétrico del *boost* en la dirección z , que se denominará por \mathcal{B}_z .
2. Identificar la acción del subgrupo \mathcal{B}_z en el cono de luz \mathcal{C} y finalmente en la esfera $S^2 \cong \mathbb{P}(\mathcal{C})$, esto se realizará directamente en las coordenadas.
3. Determinar la acción del subgrupo \mathcal{B}_z sobre las funciones, $\mathcal{F} \in \mathcal{L}^2(S^2)$.

4. Encontrar el generador infinitesimal generado por la aplicación, dada en el punto anterior, que se denotará por \hat{a}_z .
5. Convertir al operador infinitesimal \hat{a}_z en autoadjunto mediante simetrización.

Cada uno de los pasos anteriores se describe detalladamente a continuación. Primeramente, se describen los generadores de *boost* del álgebra de Lorentz $\mathfrak{so}(3,1)$ y los grupos uniparamétricos que se originan a partir de los generadores, para después aplicarse a un vector luz en el cono proyectivo o esfera.

Los generadores de *boost* del álgebra de Lorentz $\mathfrak{so}(3,1)$ son:

$$B_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Estos generadores se aplican a vectores en $\mathbb{R}^{3,1}$ y al ser exponenciados, $\mathcal{B}_i = \exp(i\gamma B_i)$, $i = x, y, z$, dan elementos en el grupo de Lorentz $\text{SO}(3,1)$, que individualmente se pueden ver como subgrupos uniparamétricos, pues dependen únicamente del parámetro γ . Los subgrupos uniparamétricos que llevan todas las simetrías del *boost* en las direcciones x , y y z son:

$$\mathcal{B}_x = \begin{pmatrix} \cosh \gamma & 0 & 0 & \sinh \gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh \gamma & 0 & 0 & \cosh \gamma \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \gamma & 0 & \sinh \gamma \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sinh \gamma & 0 & \cosh \gamma \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh \gamma & \sinh \gamma \\ 0 & 0 & \sinh \gamma & \cosh \gamma \end{pmatrix}.$$

Para considerar únicamente simetrías de *boost* en la dirección z se elige el subgrupo \mathcal{B}_z y se aplica a un vector $\vec{v} = (x, y, z, 1) \in \mathcal{C}$,

$$\begin{pmatrix} x_\gamma \\ y_\gamma \\ z_\gamma \\ t_\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh \gamma & \sinh \gamma \\ 0 & 0 & \sinh \gamma & \cosh \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde $\vec{v}_\gamma = (x_\gamma, y_\gamma, z_\gamma, t_\gamma) = (x, y, z \cosh \gamma + \sinh \gamma, z \sinh \gamma + \cosh \gamma)$. Al proyectivizar \vec{v}_γ , resulta el vector $\vec{p}_\gamma = (p_x^\gamma, p_y^\gamma, p_z^\gamma)$, cuyas componentes son

$$\begin{aligned} p_x^\gamma &= \frac{x_\gamma}{t_\gamma} = \frac{x}{z \sinh \gamma + \cosh \gamma}, \\ p_y^\gamma &= \frac{y_\gamma}{t_\gamma} = \frac{y}{z \sinh \gamma + \cosh \gamma}, \\ p_z^\gamma &= \frac{z_\gamma}{t_\gamma} = \frac{z \cosh \gamma + \sinh \gamma}{z \sinh \gamma + \cosh \gamma}, \end{aligned} \tag{3.15}$$

y se escribe como $\vec{p}_\gamma = \mathcal{B}_z \cdot \vec{p}$, por definir la acción del subgrupo \mathcal{B}_z sobre un vector $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z) \in \mathcal{S}^2$. Con esto, la acción de \mathcal{B}_z sobre las funciones $\mathcal{F} \in \mathcal{L}^2(\mathcal{S}^2)$ queda definida sobre las coordenadas como $\mathcal{F}(\mathcal{B}_z \cdot \vec{p}) = \mathcal{F}(\vec{p}_\gamma)$. El generador infinitesimal correspondiente a la acción de \mathcal{B}_z sobre las funciones se encuentra al derivar la función $\mathcal{F}(\vec{p}_\gamma)$ respecto al parámetro γ y evaluarla en $\gamma = 0$,

$$\left. \frac{d}{d\gamma} \mathcal{F}(\vec{p}_\gamma) \right|_{\gamma=0} = -|p_z| \left(p_x \frac{\partial}{\partial p_x} + p_y \frac{\partial}{\partial p_y} \right) \mathcal{F}(\vec{p}) = \hat{a}_z \mathcal{F}(\vec{p}),$$

El operador \hat{a}_z está definido sobre la esfera pero no es autoadjunto, lo cual se corrige al simetrizarlo, esto se puede ver artificial y que no captura la esencia del sistema físico, pero en la siguiente sección veremos la conexión con grupos uniparamétricos y se verá de manera más clara la naturalidad de dicha operación. Al efectuar la simetrización, se obtiene el operador autoadjunto,

$$\hat{\mathbf{b}}_z^{\mathcal{S}^2} = -|p_z| \left(p_x \frac{\partial}{\partial p_x} + p_y \frac{\partial}{\partial p_y} + 1 \right), \quad (3.16)$$

que satisface la condición $(F, \hat{\mathbf{b}}_z G)_{\mathcal{S}^2} = (\hat{\mathbf{b}}_z F, G)_{\mathcal{S}^2}$ con producto interno de la esfera dado en coordenadas (p_x, p_y, p_z) como

$$(F, G)_{\mathcal{S}^2} = \int_{\mathcal{S}^2} \frac{dp_x dp_y}{|p_z|} F(\vec{p}) G^*(\vec{p}).$$

Además, el operador $\hat{\mathbf{b}}_z^{\mathcal{S}^2}$ aplicado en la transformada de onda, definida por (3.12) y (3.13), se convierte en el generador diferencial autoadjunto, que se aplica a la pareja de funciones $f(\mathbf{r})$ y su derivada normal $f'(\mathbf{r})$, dadas en (3.9) y (3.10) respectivamente, dado por

$$\hat{\mathbf{b}}_z = \begin{pmatrix} 0 & -D \\ (D+1)\Delta_k - k^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

donde $D := \frac{1}{2}(\mathbf{r} \cdot \partial_{\mathbf{r}} + \partial_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r})$ se denomina el generador de *dilatación* y $\Delta_k := \partial_x^2 + \partial_y^2 + k^2$ se aplican a funciones sobre la pantalla \mathbb{R}^2 con coordenadas $\mathbf{r} = (x, y)$. El operador $\hat{\mathbf{b}}_z$ también puede obtenerse a través de una *deformación de álgebras* que se explicará después.

En esta tesis se estudian dos formas de heredar las simetrías del grupo de Lorentz a las funciones de onda de Helmholtz: La primera es usando una acción del subgrupo \mathcal{B}_z en las funciones sobre la esfera que sea unitaria y la segunda es a través de generadores de *boost* aplicados al plano \mathbb{R}^2 mediante una *deformación de álgebras*. En los dos casos se elige una función de prueba, la cual se *deforma* por la acción relativista y se visualiza en la pantalla plana. En el caso de la esfera, esta visualización en el plano se realiza por medio de la *transformada de onda*.

3.5. Deformación Lorentziana en la esfera

La *deformación Lorentziana* sobre funciones en la esfera se define a través del mapeo \mathcal{G}_γ dado por

$$\mathcal{G}_\gamma \mathcal{F}(p_x, p_y, p_z) = \mu(p_z, \gamma) F(p_x^\gamma, p_y^\gamma, p_z^\gamma) = \frac{1}{\cosh \gamma + p_z \sinh \gamma} F(p_x^\gamma, p_y^\gamma, p_z^\gamma), \quad (3.18)$$

y se le llama de esta manera por que *deforma* a los ángulos de las funciones que se definen sobre la superficie de la esfera. El factor pre-multiplicativo $\mu(p_z, \gamma)$, llamado ‘multiplicador’ de Bargmann [9], hace que la aplicación \mathcal{G}_γ sea unitaria al cumplir que $(F, G)_{\mathcal{S}^2} = (\mathcal{G}_\gamma F, \mathcal{G}_\gamma G)_{\mathcal{S}^2}$,

$$\int_{\mathcal{S}^2} d \cos \theta d \phi F(\theta, \phi) G^*(\theta, \phi) = \int_{\mathcal{S}^2} d \cos \tau d \varepsilon \mathcal{G}_\gamma F(\tau, \varepsilon) \mathcal{G}_\gamma G^*(\tau, \varepsilon),$$

donde $*$ denota la función conjugada. El ‘multiplicador’ de Bargmann garantiza que el producto interno sobre la esfera sea el mismo después de la aplicación, ya que el Jacobiano del cambio de coordenadas (θ, ϕ) a (τ, ε) es justo el cuadrado del multiplicador $\mu(p_z, \gamma)$. Además, la aplicación \mathcal{G}_γ tiene como generador infinitesimal autoadjunto a (3.16) ya que

$$\frac{d}{d\gamma} \mathcal{G}_\gamma \mathcal{F}(p_x, p_y, p_z) \Big|_{\gamma=0} = -|p_z| \left(p_x \frac{\partial}{\partial p_x} + p_y \frac{\partial}{\partial p_y} + 1 \right) \mathcal{F}(p_x, p_y, p_z).$$

Ésta última relación brinda la relación entre las operaciones realizadas con el álgebra (3.16) y el grupo (3.18) de manera más intuitiva al garantizar que la aplicación \mathcal{G}_γ sea unitaria.

3.5.1. Deformación en ángulos

La deformación en los ángulos (θ, ϕ) está dada por la acción de la transformación relativista \mathcal{G}_γ en las componentes (3.15) de un vector $\vec{p} \in \mathcal{S}^2$, es decir, para coordenadas esféricas ocurre que

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_\gamma \mathcal{F}(\sin \theta \sin \phi, \sin \theta \cos \phi, \cos \theta) &= \frac{F(\sin \tau \sin \varepsilon, \sin \tau \cos \varepsilon, \cos \tau)}{\cosh \gamma + \sinh \gamma \cos \theta} \\ &\Downarrow \\ \mathcal{G}_\gamma \mathcal{F}(\theta, \phi) &= \frac{F(\tau(\theta, \phi), \varepsilon(\theta, \phi))}{\cosh \gamma + \sinh \gamma \cos \theta}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Este mapeo es simétrico alrededor de dirección z , por lo que solo cambia el ángulo θ mientras que el ángulo $\phi = \varepsilon$ queda invariante. A partir de (3.19) se encuentran las fórmulas que relacionan los ángulos deformados τ y ε con los ángulos θ y ϕ , dadas por

$$\cos \tau = \frac{\cosh \gamma \cos \theta + \sinh \gamma}{\cosh \gamma + \sinh \gamma \cos \theta}, \quad \sin \tau = \frac{\sin \theta}{\cosh \gamma + \sinh \gamma \cos \theta}.$$

Esta relación entre ángulos se puede resumir en la transformación $\tan \frac{1}{2} \tau = e^{-\gamma} \tan \frac{1}{2} \theta$.

Las fórmulas inversas para $\cos \theta$ y $\sin \theta$ son

$$\cos \theta = \frac{\cosh \gamma \cos \tau - \sinh \gamma}{\cosh \gamma - \sinh \gamma \cos \tau}, \quad \sin \theta = \frac{\sin \tau}{\cosh \gamma - \sinh \gamma \cos \tau}.$$

Además, el cambio de medida, debido a la transformación \mathcal{G}_γ , está dado por el factor

$$\mu(\theta, \gamma)^2 = \frac{d \cos \tau}{d \cos \theta} = \frac{1}{(\cosh \gamma + \sinh \gamma \cos \theta)^2},$$

que corresponde al dado en (3.19).

Ya que se tiene claro como se hereda la simetría del *boost* relativista a las funciones en el espacio de Helmholtz, se debe elegir una función de prueba para analizar el comportamiento de los ángulos deformados. Para esto se elige la función de onda más *localizada* en la pantalla plana o espacio de posiciones.

3.5.2. Funciones de prueba en esfera y plano

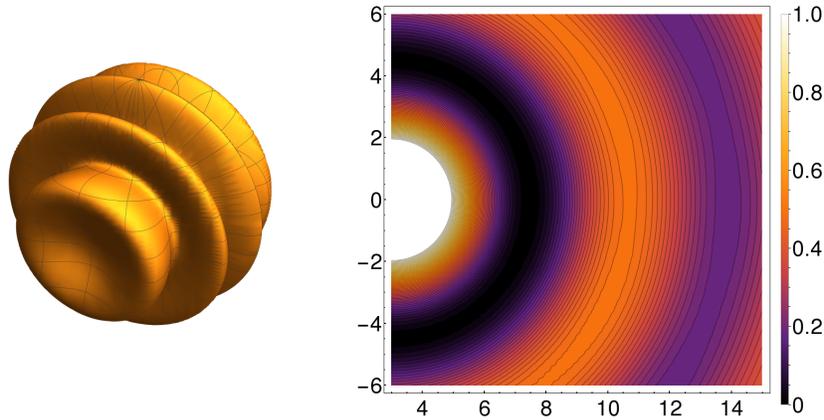


Figura 3.4: Función de prueba $\psi_{\mathbf{r}_0}^\circ(\theta, \phi)$ en la esfera y el plano, aquí $r_0 = (3, 0)$ y $k = 1$.

La función de prueba elegida en la esfera es la distribución normalizada más ancha, pues ocupa toda la esfera, dada por la fase

$$\psi_{\mathbf{r}_0}^\circ(\theta, \phi) = \frac{-e^{-ik(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_0)}}{\sqrt{4\pi}} = \frac{-1}{\sqrt{4\pi}} e^{-ik \sin \theta (x_0 \sin \phi + y_0 \cos \phi)}, \quad (3.20)$$

que corresponde, bajo la transformada de onda (3.12), a la distribución más localizada en el

plano,

$$\begin{aligned}
\psi_0(x, y) &= \frac{k}{2\pi} \int_{\mathcal{S}^2} d\cos\theta d\phi \psi_{\mathbf{r}_0}^\circ(\theta, \phi) e^{ik\sin\theta(x\sin\phi+y\cos\phi)} \\
&= \frac{k}{4\pi\sqrt{\pi}} \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_{-\pi}^\pi d\phi e^{ik\sin\theta((x-x_0)\sin\phi+(y-y_0)\cos\phi)} \\
&= \frac{k}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\pi \sin\theta d\theta J_0(k\sin\theta\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}) \\
&= \frac{k}{\sqrt{\pi}} \frac{\sin\left(k\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)}{k\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = \frac{k}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sinc}(k|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|),
\end{aligned} \tag{3.21}$$

donde $|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ y la función $\operatorname{sinc}\chi \equiv \sin\chi/\chi = j_0(\chi)$ es la función esférica de Bessel de orden cero. La derivada en z en el plano (3.13) tiene un $\cos\theta$ extra en la integral, el cual tiene signos opuestos en los dos hemisferios de la esfera y por lo tanto se anula, así que $\partial_z\psi_0(x, y)|_{z=0} = 0$. Debido a esto, la función de prueba y su derivada sobre la pantalla plana se pueden escribir juntas usando

$$\psi_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{r}) \equiv \psi_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) = \frac{k}{\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} \operatorname{sinc}(k|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|) \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.22}$$

que está centrada en $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{R}^2$.

3.5.3. Campos de onda deformados sobre la esfera

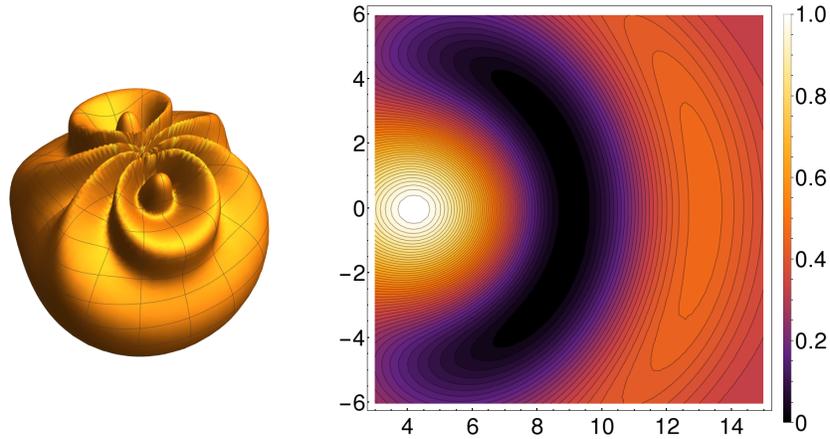


Figura 3.5: Función de prueba deformada $\Psi_{\mathbf{r}_0}^\circ(\theta, \phi)$ en la esfera y el plano, aquí $\mathbf{r}_0 = (3, 0)$, $k = 1$ y $\gamma = 2$.

Usando el mapeo relativista \mathcal{G}_γ sobre la función de prueba $\psi_{\mathbf{r}_0}^\circ(\theta, \phi)$, se obtiene el campo

de onda deformado

$$\begin{aligned}\Psi_{\mathbf{r}_0}^\gamma(\theta, \phi) &:= \mathcal{G}_\gamma \psi_{\mathbf{r}_0}^\circ(\theta, \phi) = \frac{\Phi^\gamma(\tau(\theta), \phi)}{\cosh \gamma + \sinh \gamma \cos \theta} \\ &= \frac{-\exp\left(-ik \frac{\sin \theta}{\cosh \gamma + \sinh \gamma \cos \theta} (x_0 \sin \phi + y_0 \cos \phi)\right)}{2\sqrt{\pi} (\cosh \gamma + \sinh \gamma \cos \theta)}.\end{aligned}\quad (3.23)$$

La función $\Psi_{\mathbf{r}_0}^\gamma(\theta, \phi)$, bajo la transformada de onda, da lugar a la distribución deformada más localizada $\psi_{\mathbf{r}_0}^{(\gamma)}(x, y)$, que está dada por la doble integral

$$\begin{aligned}\psi_{\mathbf{r}_0}^{(\gamma)}(x, y) &:= \frac{k}{2\pi} \int_{\mathcal{S}^2} d \cos \theta d\phi \Psi_{\mathbf{r}_0}^\gamma(\theta, \phi) \exp\left(ik \sin \theta (x \sin \phi + y \cos \phi)\right) \\ &= \frac{k}{4\pi\sqrt{\pi}} \int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi \frac{\sin \theta d\theta d\phi}{\cosh \gamma + \sinh \gamma \cos \theta} \exp\left(ik \sin \theta (x \sin \phi + y \cos \phi)\right) \\ &\quad \times \exp\left(-ik \frac{\sin \theta}{\cosh \gamma + \sinh \gamma \cos \theta} (x_0 \sin \phi + y_0 \cos \phi)\right).\end{aligned}\quad (3.24)$$

Nótese que para $\mathbf{r}_0 = (0, 0)$ no hay deformación. La función deformada $\psi_{\mathbf{r}_0}^{(\gamma)}(x, y)$ no se puede integrar analíticamente, por lo que sólo se puede resolver numéricamente. Por tanto, encontrar el campo de onda deformado se reduce a un problema numérico que se resuelve integrando numéricamente sobre una distribución equiespaciada de puntos sobre la superficie de la esfera. El campo deformado en la esfera y el plano se observa en la figura 3.5.

3.6. Deformación Lorentziana en el plano

En el caso de la pantalla plana \mathbb{R}^2 , la aplicación de las simetrías de los subgrupos del *boost* relativista \mathcal{B}_x , \mathcal{B}_y y \mathcal{B}_z a las funciones en el plano, no es tan inmediata como en el caso de la esfera. Una manera relativamente directa es pasar por todo el proceso que se describe en la sección 1.4 y finalmente utilizar la transformada de onda para encontrar los generadores del *boost* en el plano, análogos al encontrado en la dirección z (3.17).

Por otro lado, en los trabajos [10, 2] se reporta una descripción algebraica más rápida para encontrar los generadores de *boost* relativista dados por una realización del álgebra de Lorentz $\mathfrak{so}(3,1)$ en el plano. Esta realización es una deformación del álgebra Euclidea $\mathfrak{iso}(3)$ que *importa* las simetrías del álgebra Lorentziana a \mathbb{R}^2 [1], proceso que se describirá a continuación.

3.6.1. Generadores de *boost* en el plano

Se inicia dando una realización del álgebra Euclidea $\mathfrak{iso}(3)$, que proviene de la esfera \mathcal{S}^2 a través de la transformada de onda y luego se deforma para obtener los generadores de

boost.

La realización del álgebra $\mathfrak{iso}(3)$ se aplica a parejas de funciones \mathbf{f} (3.8) y está dada por los generadores infinitesimales de traslación,

$$\widehat{\mathbf{T}}_x = \frac{-i}{k} \begin{pmatrix} \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_x \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{T}}_y = \frac{-i}{k} \begin{pmatrix} \partial_y & 0 \\ 0 & \partial_y \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{T}}_z = \frac{-i}{k} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\Delta_k & 0 \end{pmatrix} = \frac{-i}{k} \widehat{\mathbf{H}}, \quad (3.25)$$

y los generadores de rotación,

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{R}}_x &= -i \begin{pmatrix} 0 & y \\ -y\Delta_k - \partial_y & 0 \end{pmatrix}, & \widehat{\mathbf{R}}_y &= -i \begin{pmatrix} 0 & -x \\ x\Delta_k + \partial_x & 0 \end{pmatrix}, \\ \widehat{\mathbf{R}}_z &= -i \begin{pmatrix} x\partial_y - y\partial_x & 0 \\ 0 & x\partial_y - y\partial_x \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

donde $\chi\Delta_k + \partial_\chi = \frac{1}{2}(\chi\Delta_k + \Delta_k\chi)$ y $\Delta_k := \partial_x^2 + \partial_y^2 + k^2$. Estos generadores cumplen con las relaciones de conmutación cíclicas $[\mathbf{T}_x, \mathbf{T}_y] = 0$, $[\mathbf{R}_x, \mathbf{T}_y] = i\mathbf{T}_z$, $[\mathbf{R}_x, \mathbf{R}_y] = i\mathbf{R}_z$. Además, los invariantes de Casimir de $\mathfrak{iso}(3)$ son

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{T}}^2 &= \widehat{\mathbf{T}}_x^2 + \widehat{\mathbf{T}}_y^2 + \widehat{\mathbf{T}}_z^2 = \mathbf{1}, & \widehat{\mathbf{T}} \cdot \widehat{\mathbf{R}} &= \mathbf{0}, \\ \widehat{\mathbf{R}}^2 &= \widehat{\mathbf{R}}_x^2 + \widehat{\mathbf{R}}_y^2 + \widehat{\mathbf{R}}_z^2 = \begin{pmatrix} D(D+1) + k^2|\mathbf{r}|^2 & 0 \\ 0 & (D+1)(D+2) + k^2|\mathbf{r}|^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

donde $D = \frac{1}{2}(\mathbf{r} \cdot \partial_{\mathbf{r}} + \partial_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}) = x\partial_x + y\partial_y$.

Los generadores de *boost* del álgebra de Lorentz $\mathfrak{so}(3,1)$ quedan determinados por,

$$\widehat{\mathbf{b}} = [\widehat{\mathbf{R}}^2, \widehat{\mathbf{T}}] + i\widehat{\mathbf{T}}. \quad (3.28)$$

donde las componentes de los vectores $\widehat{\mathbf{T}} = (\widehat{\mathbf{T}}_x, \widehat{\mathbf{T}}_y, \widehat{\mathbf{T}}_z)$ y $\widehat{\mathbf{R}} = (\widehat{\mathbf{R}}_x, \widehat{\mathbf{R}}_y, \widehat{\mathbf{R}}_z)$ son los generadores de traslación (3.25) y rotación (3.26) del álgebra $\mathfrak{iso}(3)$, respectivamente y $\widehat{\mathbf{R}}^2$ es el invariante de Casimir dado en (3.27). Finalmente, usando los operadores de (3.25)–(3.27) se llega a la realización matricial de 2×2 de los generadores del *boost*,

$$\widehat{\mathbf{b}}_x = \frac{1}{k} \begin{pmatrix} (D+1)\partial_x + k^2x & 0 \\ 0 & (D+2)\partial_x + k^2x \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

$$\widehat{\mathbf{b}}_y = \frac{1}{k} \begin{pmatrix} (D+1)\partial_y + k^2y & 0 \\ 0 & (D+2)\partial_y + k^2y \end{pmatrix}, \quad (3.30)$$

$$\widehat{\mathbf{b}}_z = \frac{1}{k} \begin{pmatrix} 0 & D+1 \\ k^2 - (D+2)\Delta_k & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.31)$$

$$\widehat{\mathbf{b}}^2 = \widehat{\mathbf{b}}_x^2 + \widehat{\mathbf{b}}_y^2 + \widehat{\mathbf{b}}_z^2,$$

otra vez, $D = x\partial_x + y\partial_y$ y $\Delta_k = \partial_x^2 + \partial_y^2 + k^2$. Los generadores (3.29)–(3.31) cierran el álgebra de Lorentz $\mathfrak{so}(3,1)$ con sus relaciones de conmutación cíclicas: $[\mathbf{R}_x, \mathbf{R}_y] = i\mathbf{R}_z$, $[\mathbf{R}_x, \widehat{\mathbf{b}}_y] =$

$i\widehat{\mathbf{b}}_z$, y $[\widehat{\mathbf{b}}_x, \widehat{\mathbf{b}}_y] = -i\widehat{\mathbf{R}}_z$ y los invariantes de Casimir que determinan esta representación son $\widehat{\mathbf{b}}^2 - \widehat{\mathbf{R}}^2 = \mathbf{1}$ y $\widehat{\mathbf{T}} \cdot \widehat{\mathbf{R}} = \mathbf{0}$.

Utilizando una combinación lineal de los generadores de *boost*, (3.29)–(3.31), se puede encontrar el generador de *boost* para cualquier dirección $\vec{a} = (\sin \alpha \sin \beta, \sin \alpha \cos \beta, \cos \alpha) \in \mathcal{S}^2$, $\alpha \in [0, \pi]$ y $\beta \in [-\pi, \pi]$,

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \widehat{\mathbf{b}} &= \sin \alpha \sin \beta \widehat{\mathbf{b}}_x + \sin \alpha \cos \beta \widehat{\mathbf{b}}_y + \cos \alpha \widehat{\mathbf{b}}_z \\ &= \frac{1}{k} \begin{pmatrix} (D+1)\mathbf{a} \cdot \partial_{\mathbf{r}} + k^2 \mathbf{a} \cdot \mathbf{r} & (D+1) \cos \alpha \\ (k^2 - (D+2)\Delta_k) \cos \alpha & (D+2)\mathbf{a} \cdot \partial_{\mathbf{r}} + k^2 \mathbf{a} \cdot \mathbf{r} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

con

$$\mathbf{a} = (\sin \alpha \sin \beta, \sin \alpha \cos \beta, \cos \alpha) \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{r} = \sin \alpha (x \sin \beta + y \cos \beta), \quad \mathbf{a} \cdot \partial_{\mathbf{r}} = \sin \alpha (\sin \beta \partial_x + \cos \beta \partial_y).$$

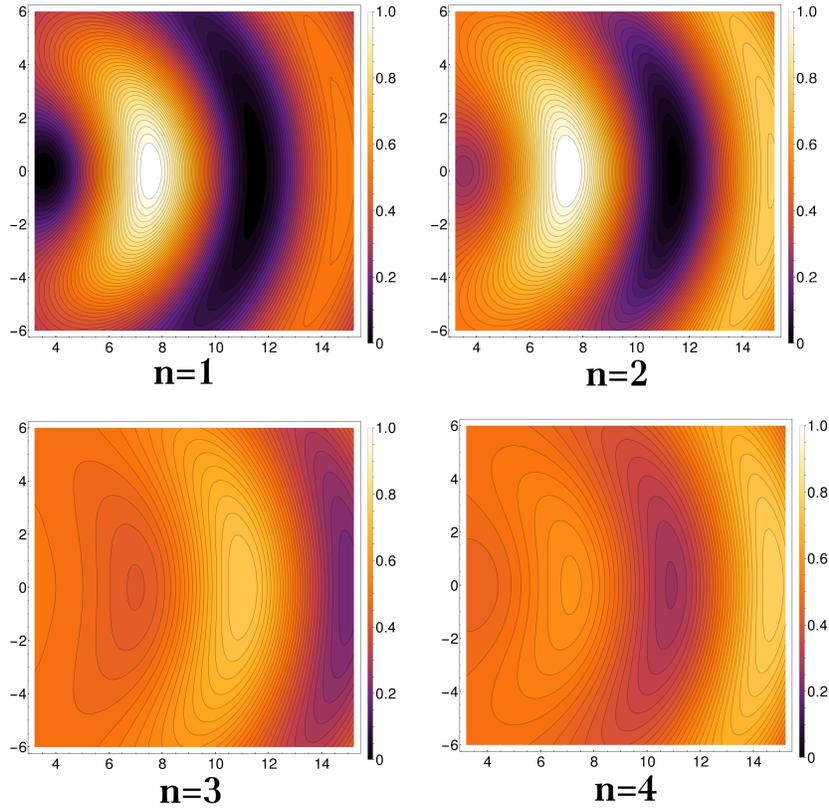


Figura 3.6: Función sinc deformada hasta el cuarto orden del operador $\mathcal{A} = DC$. Todas las gráficas están centradas en $(3, 0)$, $\gamma = 2$ y $k = 1$.

Al exponenciar la matriz (3.32), $\exp(i\gamma \vec{a} \cdot \widehat{\mathbf{b}})$, se encuentra un subgrupo uniparamétrico del grupo de Lorentz correspondiente a un *boost* en dirección \vec{a} .

3.6.2. Funciones de onda deformadas en la pantalla

Análogamente al caso en la esfera, se elige el generador de *boost* $\widehat{\mathbf{b}}_z$ (3.31), con $\alpha = 0$, y se exponentia para dar origen a un elemento del grupo $\text{SO}(3,1)$,

$$\mathcal{B}_z = \exp(i\gamma\widehat{\mathbf{b}}_z) = \begin{pmatrix} \cos\gamma\sqrt{\mathcal{A}} & i\gamma\mathcal{D}\text{sinc}(\gamma\sqrt{\mathcal{M}}) \\ i\gamma\mathcal{C}\text{sinc}(\gamma\sqrt{\mathcal{A}}) & \cos\gamma\sqrt{\mathcal{M}} \end{pmatrix}, \quad (3.33)$$

donde

$$\mathcal{A} := \mathcal{D}\mathcal{C} \quad \mathcal{M} := \mathcal{C}\mathcal{D} \quad \mathcal{D} := D + 1, \quad \mathcal{C} := k^2 - (D+2)\Delta_k.$$

Utilizar una serie de Taylor para exponentiar el generador $i\gamma\widehat{\mathbf{b}}_z$ reduce \mathcal{B}_z a una serie de los operadores diferenciales D y Δ_k que son relativamente más sencillos de aplicar, pagando el precio de que sólo se puede ver una aproximación del campo deformado.

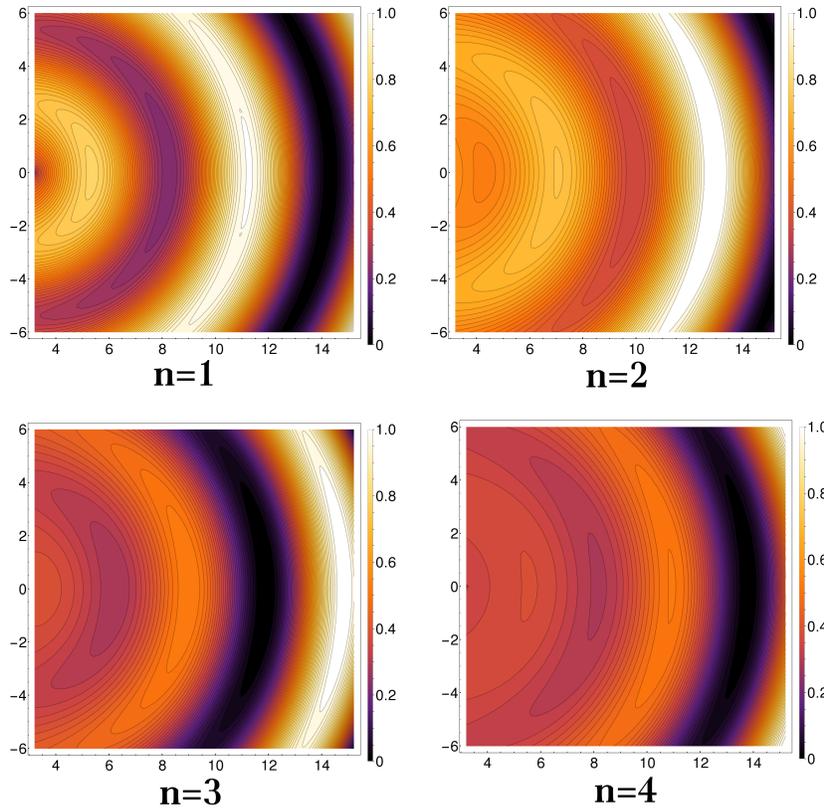


Figura 3.7: Derivada normal de la función sinc deformada centrada en $(3,0)$ hasta el cuarto orden del operador $\mathcal{M} = \mathcal{C}\mathcal{D}$, $\gamma = 2$ y $k = 1$.

Este estudio, de la deformación de campos de onda debida a una realización del álgebra de Lorentz $\mathfrak{so}(3,1)$ en el espacio de Helmholtz \mathcal{H}_k dado por la aplicación de una serie de operadores diferenciales, fue aplicando por primera vez a funciones Gaussianas en [2].

En este caso, el *operador de deformación* \mathcal{B}_z se aplica a la función de prueba y su función derivada (3.8) en la pantalla \mathbb{R}^2 , dadas por (3.22), que representa el campo de onda

más localizado $j_0(\mathbf{r}, z = 0) = j_0(\mathbf{r})$ y su derivada normal $j_1(\mathbf{r}, z = 0) = 0$,

$$\psi_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \frac{k}{\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} \text{sinc}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Posteriormente, el *operador de deformación* \mathcal{B}_z en su forma de serie de Taylor se aplica a $\psi_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ para obtener el campo de Helmholtz deformado, que resulta ser

$$\psi_0^{(\gamma)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \frac{k}{\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{\gamma}{k}\right)^{2n} \mathcal{A}^n \text{sinc}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|) \\ \frac{i\gamma}{k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\gamma}{k}\right)^{2n} \mathcal{M}^n \mathcal{C} \text{sinc}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|) \end{pmatrix}, \quad (3.34)$$

nuevamente, $\mathcal{A} = \mathcal{D}\mathcal{C}$, $\mathcal{M} = \mathcal{C}\mathcal{D}$ con $\mathcal{D} = x\partial_x + y\partial_y + 1$, $\mathcal{C} = k^2 - (\mathcal{D} + 1)\Delta_k$ y $\Delta_k = \partial_x^2 + \partial_y^2 + k^2$. Los operadores \mathcal{A} y \mathcal{M} son operadores diferenciales de cuarto orden en x y y . La primera entrada de $\psi_0^{(\gamma)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ corresponde al campo de Helmholtz deformado y la segunda entrada a su derivada normal. Las imagenes correspondientes a estos campos de onda se encuentran de manera recursiva al encontrar algebraicamente los operadores \mathcal{A} y \mathcal{M} hasta orden $n = 4$ en las series descritas en (3.34), lo cual involucra ordenes de γ^{18} y se muestran en las figuras 3.6 y 3.7.

3.7. Observaciones finales

Aunque el tema de la deformación Lorentziana aplicada a campos de onda de Helmholtz fue introducido por primera vez en [2, 5], en esta tesis se reformulan algunos temas para que se vea la naturalidad de introducir la deformación Lorentziana en el espacio de Helmholtz. Uno de los logros más importantes de está reformulación fue establecer la relación entre la geometría del grupo de Lorentz y la esfera de la óptica de Helmholtz, ya que con eso se encuentra el por qué se puede aplicar una deformación Lorentziana a los campos de onda.

Es importante mencionar que la investigación nueva en este tema se describe en las secciones 3.3–3.5 y radica en encontrar la deformación Lorentziana en los campos de onda de Helmholtz a través de la esfera \mathbb{S}^2 . El método integral, introducido en esta tesis, involucra un problema numérico que permite visualizar la deformación global en los campos de onda mientras que el método ya reportado [2] solo da una aproximación de la deformación.

Referencias

- [1] C.P. Boyer and K.B. Wolf, The algebra and group deformations $I^m[SO(n) \otimes SO(m)] \implies SO(n, m)$, $I^m[U(n) \otimes U(m)] \implies U(n, m)$, and $I^m[Sp(n) \otimes Sp(m)] \implies Sp(n, m)$, for $1 \leq m \leq n$, *J. Math. Phys.* **15**, 2096–2100 (1974).
- [2] N. M. Atakishiyev *et al.*, The relativistic coma aberration. II. Helmholtz wave optics, *Journal of Math. Phys.*, **Vol. 30, 11**, 2463–2468 (1989).
- [3] R. Gilmore, *Lie Groups, Lie Algebras and some of their Applications*, Wiley, 1974.
- [4] Frank W. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Graduate Texts in Mathematics Vol. 94, Springer Verlag, New York, 1983.
- [5] K. W. Wolf, *Lie Methods in Optics, II*. Lecture Notes in Physics Vol. 352, Springer Verlag, Heidelberg, 1989, pp. 115–162.
- [6] V. S. Varadarajan, *An introduction to harmonic analysis on semisimple Lie groups*. Cambridge studies in advanced mathematics Vol. 16, Cambridge University Press, 1989.
- [7] Leonard F. Richardson, *Measure and integration. A concise introduction to real analysis*, Wiley, 2009.
- [8] S. Steinberg and K.B. Wolf, Invariant inner products on spaces of solutions of the Klein–Gordon and Helmholtz equations, *J. Math. Phys.* **22**, 1660–1663 (1981).
- [9] V. Bargmann, Irreducible unitary representations of the Lorentz group, *Ann. Math.* **48**, 568–642 (1947).
- [10] N. M. Atakishiyev *et al.*, The relativistic coma aberration. I. Geometrical optics, *Journal of Math. Phys.*, **Vol. 30, 11**, 2457–2462 (1989).