



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

APLICACIONES LÚDICAS DE LA TEORÍA
DE GRÁFICAS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

Isaac Vergara Salgado

TUTOR:

Mat. Laura Pastrana Ramírez

Ciudad Universitaria, CDMX, 2018





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno.

Vergara

Salgado

Isaac

5511344395

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Matemáticas

309327215

1. Datos del Tutor.

Mat.

Pastrana

Ramírez

Laura

2. Datos del sinodal 1.

Dra.

Galeana

Sánchez

Hortensia

3. Datos del sinodal 2.

Dra.

Sánchez

López

María del Rocío

4. Datos del sinodal 3.

M. en C.

Benítez

Bobadilla

Germán

5. Datos del sinodal 4.

Mat.

Hunedy

López

Gasde Augusto

7. Datos de la tesis.

Aplicaciones lúdicas de la teoría de gráficas.

208 p.

2018

A mi queridos padres Concepción y Teodardo quienes con su amor y educación me han permitido cumplir mi sueño.

A mis hermanos Erik y Demián por su apoyo incondicional.

A la profesora Laura Pastrana por sus enseñanzas y su paciencia.

A mis sinodales por enriquecer el trabajo con sus comentarios y sugerencias.

A mis incontables amigos por su apoyo y cariño.

Índice general

Introducción	7
1. Acertijos	11
1.1. Primer acertijo: Los siete puentes de Königsberg	12
1.1.1. El modelo matemático del acertijo	12
1.2. Segundo acertijo: Descubre el mensaje	14
1.3. Tercer acertijo: Buscando rutas	19
1.4. Cuarto acertijo: Rutas en el metro	25
1.5. Quinto acertijo: El nuevo local de pizzas	31
1.6. Definiciones	33
1.6.1. Resumen de los conceptos básicos sobre gráficas	33
1.6.2. Resumen de los conceptos básicos sobre digráficas	43
2. Juegos sobre la historia de Atila	49
2.1. Primer juego: Atila el cazador	50
2.1.1. Modelando el juego con teoría de gráficas	55
2.2. Segundo juego: Una carrera hacia Honoria	65
2.2.1. Algoritmo de Dijkstra	75
3. Juegos de Núcleos	83
3.1. El juego del glotón	84
3.1.1. Modelando el juego con teoría de digráficas (tablero 2×5)	93
3.1.2. Tableros de $n \times n$	105
3.2. Suma 31	110
3.2.1. Modelando el juego con teoría de digráficas	111
3.3. Llega a la Meta	116
3.3.1. Modelando el juego con teoría de digráficas	119
4. Juegos de divisibilidad	125
4.1. La digráfica de divisibilidad 7	126
4.1.1. Criterio de divisibilidad	129
4.1.2. Multidigráfica de divisibilidad k	130
4.2. Primer juego: Construyendo un número	131
4.2.1. Análisis del juego	135

4.3.	Segundo juego: El escape de Robin Hood	136
4.4.	Tercer juego: Una competencia de divisibilidad	143
4.5.	Cuarto juego: Carrera con múltiples actividades	144
5.	Juegos de Mesa	147
5.1.	Memoramas	148
5.1.1.	Memorama con gráficas	148
5.1.2.	Memorama sobre isomorfismo de gráficas	157
5.1.3.	Memorama con digráficas	165
5.2.	Lotería con gráficas	173
6.	Banco de acertijos y juegos	181
6.1.	El juego de los cerillos	182
6.2.	El acertijo de las luces que se apagan	183
6.3.	Suma 59	187
6.4.	El recorrido del caballo	188
6.5.	Cadena	189
6.6.	El recorrido del caracol	189
6.7.	El recorrido del dodecaedro	190
6.8.	¿Es euleriana?	191
6.9.	Construyendo una gráfica 1	191
6.10.	Construyendo una gráfica 2	192
6.11.	Descubre el mensaje	193
6.12.	Toma de decisiones	194
6.13.	Radars en operación	195
6.14.	El recorrido del pueblo	196
6.15.	¿Es divisible?	197
	Apéndice	203
	Conclusiones	205
	Bibliografía	207

Introducción

Es bien sabido que las matemáticas se dividen en diferentes áreas o ramas, las más conocidas son: el álgebra, la geometría y el análisis matemático. Sus orígenes se remontan muchos años atrás, por ejemplo, el álgebra surge gracias a los escritos del matemático Muhammad ibn Musa al-Jwarizmi en el año 820 d.C. El análisis se remonta a la época de la Antigua Grecia gracias a los estudios de matemáticos como Arquímedes para calcular áreas y volúmenes de regiones y sólidos. La geometría es considerada como la rama más antigua, se presume que los primeros en desarrollarla y trabajarla fueron los egipcios. Los matemáticos Heródoto, Estrabón y Diodoro incluso admitían que los egipcios habían sido los que inventaron la geometría y los griegos la habían aprendido de ellos. Otra rama de las matemáticas, que quizá no sea tan conocida, es la teoría de gráficas. El primer resultado relacionado con esta teoría, fue publicado en el año de 1736 por Leonhard Euler en su trabajo “*Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*” (La solución de un problema relativo a la geometría de la posición)[20].

“Me pusieron un problema sobre una isla en la ciudad de Königsberg, que se encuentra rodeada por un río al que cruzan 7 puentes: me preguntaron si alguien podría dar un paseo que cruzara por todos los puentes pasando por cada uno sólo una vez. Fui informado que hasta ahora nadie había mostrado que esto fuera posible, ni demostrado que no lo fuera. La pregunta es banal, pero me pareció digna de atención porque ni la geometría, ni el álgebra, ni aún el arte de contar fueron suficientes para resolverla. En vista de esto, se me ocurrió preguntarme si pertenecería a la geometría de la posición tan buscada alguna vez por Leibnitz. Así que después de alguna deliberación, obtuve una regla, simple pero firme, con cuya ayuda uno puede decidir inmediatamente para todos los ejemplos de este tipo, con cualquier número de puentes arreglados de cualquier modo, si tal paseo es posible o no.” Leonard Euler, 1736 [16].

Otros grandes problemas relacionados con la teoría de gráficas surgieron con el paso de los años, por ejemplo el problema de los cuatro colores y el de seis grados de separación. El problema de los cuatro colores fue propuesto por Francis Guthrie en 1852 y consiste en que un mapa se puede colorear con 4 colores o menos, de modo que dos países con frontera común tengan colores distintos.

La figura 1 representa un ejemplo de un mapa coloreado con cuatro colores.

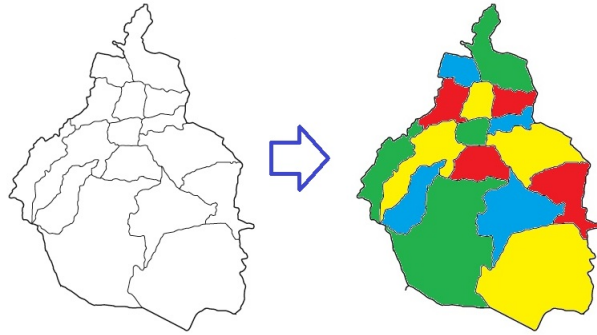


figura 1. Mapa de CDMX coloreado con 4 colores.

El problema de los seis grados de separación establece que en el mundo dos personas están conectadas por una cadena de conocidos con sólo seis enlaces (véase figura 2). El tema ha sido estudiado por muchos sociólogos, psicólogos y matemáticos desde el año de 1950 [23].

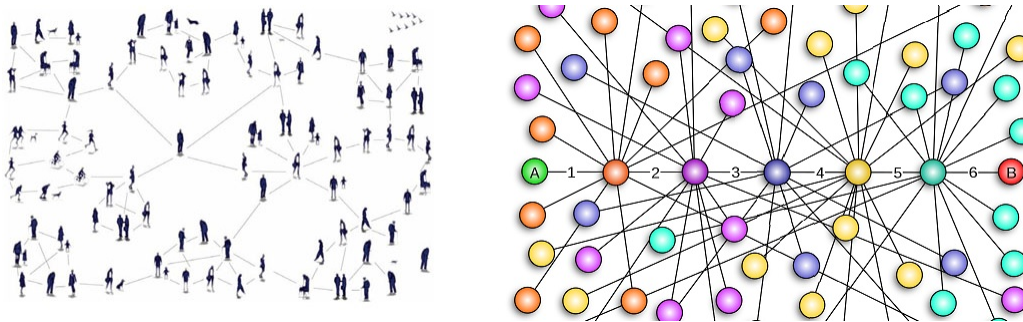


figura 2. Modelo del problema de los 6 grados.

En general es común encontrar acertijos en el estudio de la teoría de gráficas. La tesis tiene como objetivo presentar una colección de juegos y acertijos que se puedan modelar y resolver mediante la teoría de gráficas. Algunos capítulos sirven como introducción a la teoría para cualquier persona interesada en el área, en especial para estudiantes de nivel medio superior y estudiantes de licenciatura.

Al igual que muchos educadores, pedagogos y profesores, consideramos que los juegos y acertijos mejoran el nivel de abstracción y elevan las capacidades de atención y razonamiento. Las personas que los practican se enfrentan a retos que los obligan a pensar y reflexionar de una manera muy eficaz.

“Muchas personas nos hemos preocupado por aprender a resolver problemas y, más allá de esto, por aprender a aprender. Los acertijos son una muy buena ocasión de abordar con propiedad e

interés estos retos, toda vez que tienen la cualidad de ser problemas de índole cognitiva que, cuando son relevantes, producen cosquillas mentales y generan desequilibrios que mueven a la acción pensante. La solución de acertijos exige tener creatividad, toda vez que se acude a nuestras capacidades para hallar soluciones no triviales a retos que son relevantes para nosotros; son entornos excitantes en los que debemos crecer, si queremos hallar una solución válida.” Álvaro Galvis Panqueva, Doctor en Educación [17].

La tesis también está hecha para entretener al lector con retos que disfrute y que lo hagan razonar más.

En el primer capítulo se presentarán algunos acertijos relacionados con la teoría de gráficas, con ayuda de ellos se definirán los conceptos básicos que se usarán en toda la tesis. Para resolver los acertijos tan sólo se hará uso de las definiciones.

En el segundo capítulo se trabajarán dos juegos relacionados con la conexidad de una gráfica. El primero es llamado “Atila el cazador” el cual es un juego unipersonal. El segundo juego es una variante que creamos a partir del anterior, al cual llamamos “Una carrera hacia Honoria”.

En el tercero se verán tres juegos relacionados con la teoría de núcleos. El primero es conocido como “El juego del glotón”, el segundo como “Suma 31” y finalmente el tercero como “Llega a la meta”. Veremos que encontrar un núcleo en la digráfica asociada nos ayudará a encontrar una estrategia ganadora del juego para el jugador que empiece.

En el cuarto capítulo abordaremos varios juegos que construimos inspirados en una digráfica que nos ayuda a saber si un número es divisible entre 7.

Los juegos vistos en estos cuatro capítulos serán trabajados detalladamente y tendrán el siguiente formato: primero tendremos la presentación del juego en una introducción, posteriormente las reglas, luego una simulación del juego y finalmente la teoría.

El quinto capítulo está enfocado en dos juegos de mesa muy populares: lotería y memoria. Las cartas con las que se jugarán estos juegos estarán relacionadas con los conceptos de los otros capítulos.

El último capítulo está dedicado a presentar una lista de juegos y acertijos que serán resueltos con los temas que se han visto en los otros capítulos. A esta colección le llamaremos “banco de juegos y acertijos”.

La tesis está hecha para que el contenido de matemáticas sea comprensible para cualquier persona con conocimientos básicos de conjuntos, es por ello que al final encontraremos dos apéndices: uno sobre teoría de conjuntos y el otro sobre divisibilidad.

Capítulo 1

Acertijos

Un acertijo se define como un enigma que es posible resolver mediante el razonamiento y la intuición, de acuerdo a la Real Academia Española, proviene de la palabra “acertar”. Los acertijos, rompecabezas y adivinanzas juegan un papel muy importante en la vida de ser humano, ya que han servido como un pasatiempo en todas las culturas a lo largo de su historia. La teoría de gráficas incluso surge de uno.

En este capítulo presentaremos una pequeña recopilación de acertijos que serán resueltos con ayuda de conceptos básicos de gráficas y digráficas. El primer acertijo está relacionado con **los siete puentes de Königsberg**. Comentaremos un poco de la historia detrás de él así como el modo en que se le dio solución, ya que ésta es considerada como el inicio de la teoría de gráficas. El segundo acertijo tiene como fin retar al lector a descifrar un mensaje oculto en una gráfica, el concepto de **trayectoria hamiltoniana** será definido, pues es la clave para resolverlo. El tercero está enfocado en encontrar el número total de rutas que hay entre dos lugares de un zoológico que no quiere congestionar sus pasillos, a partir de este acertijo se definirá y trabajará con digráficas. El cuarto acertijo es una variante del anterior, y tiene como fin hacer notar las diferentes alternativas que hay para trasladarse en el metro cuando se tenga problemas en las estaciones. Finalmente, el quinto acertijo involucra ayudar a una pizzería a repartir muestras gratis por su vecindario. Al final del capítulo, se hará un resumen de los conceptos que se usaron.

En la sección de “Conjuntos” del Apéndice se encuentran las definiciones básicas que se usarán en este capítulo .

1.1. Primer acertijo: Los siete puentes de Königsberg

Königsberg fue una ciudad fundada por la Orden Teutónica en el año de 1255. Fue capital de Prusia Oriental hasta que fue tomada por los soviéticos en el año de 1945 y rebautizada como Kaliningrado. Königsberg fue el lugar de nacimiento de grandes matemáticos como David Hilbert y Christian Goldbach. Sin duda, una de las grandes características de esta ciudad medieval fue que el río Pregel la divide en cuatro zonas. Para mantener la comunicación en la ciudad y facilitar el traslado entre las zonas, fueron hechos siete puentes (véase figura 1.1). Era común entre los habitantes escuchar un acertijo que involucraba los puentes. El acertijo consistía en encontrar un camino que pasará por los siete puentes sin repetir ninguno y volver al punto de inicio.

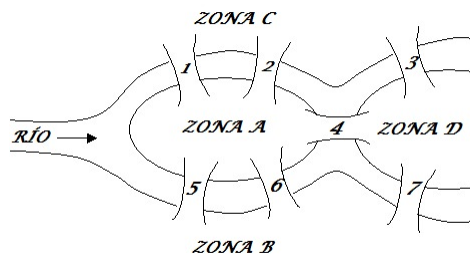


figura 1.1 Königsberg y los siete puentes.

1.1.1. El modelo matemático del acertijo

Fue en el año de 1736 cuando el matemático de 29 años, Leonhard Euler, resolvió el acertijo anterior. Euler lo modeló usando un dibujo compuesto por puntos y líneas (véase figura 1.2).

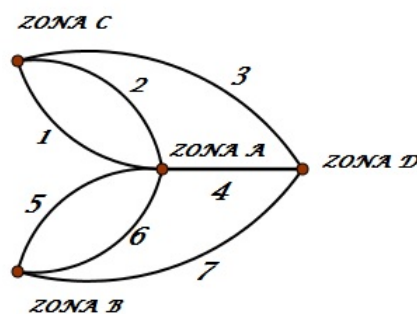


figura 1.2 Modelo de Euler.

Los puntos representaban las zonas, y las líneas a los puentes. Euler notó en su modelo matemático que si empezabas un camino que cumpliera las condiciones del acertijo en una

zona que tuviera tres puentes, utilizarías uno de ellos para salir de la zona, otro para entrar, y el último para volver a salir de la zona, por lo que se necesitaría otro puente diferente para regresar. Lo mismo notó para la *Zona A* que tiene 5 puentes (véase figura 1.3).

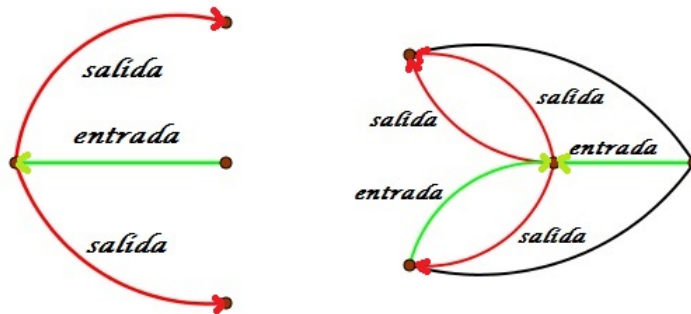


figura 1.3 Observaciones de Euler.

Así, Euler concluyó que no existía ningún camino que diera solución al acertijo. Lejos de ser una decepción, el resultado marcó el inicio de una nueva teoría matemática que actualmente tiene diversas aplicaciones, al peculiar modelo de Euler se le llamó **gráfica**. A los puntos, que en este caso representaban a las zonas, se le llamó **vértices**, y a las líneas **aristas**. Veamos que las aristas representan una relación entre los vértices, en este caso la relación entre las zonas está determinada si dos zonas estaban conectadas por un puente, por ejemplo el puente 2 es una relación de los vértices *Zona A* y *Zona B*, y se denota como: $2=(Zona A, Zona B)$.

Definición 1.1.1 Una **gráfica** G es una pareja ordenada $(V(G), A(G))$, donde $V(G)$ es un conjunto finito y no vacío de objetos, llamados vértices, junto con un conjunto de pares no ordenados de elementos distintos de $V(G)$ llamados aristas de G y denotado por $A(G)$.

Con base en la definición anterior, tenemos que la gráfica que modelo Euler está constituida por el conjunto de vértices $V(G)=\{Zona A, Zona B, Zona C, Zona D\}$ y por el conjunto de aristas $A(G)=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. A la figura 1.2 se le llama la **representación geométrica** de una gráfica.

A partir de estas definiciones se siguieron introduciendo nuevos conceptos. Dada una arista, por ejemplo $2=(Zona A, Zona B)$, a los vértices *Zona A* y *Zona B* se le llama **vértices extremos** de la arista 2. Consideremos ahora dos vértices, si existe una arista entre ellos, se dice que son **adyacentes**. Como vimos en el modelo de Euler, la *Zona B* y la *Zona D* son vértices adyacentes pues hay una arista entre ellos, que es el puente 7. Otra palabra que empezaron a manejar en el inicio de esta teoría fue la de **incidencia**. Dada una arista y un vértice, se dice que la arista incide en dicho vértice, si el vértice es un extremo de la arista. Más tarde surgiría el término **grado de un vértice** x , que se define como el número de vértices adyacentes a x . Por ejemplo el vértice *Zona A*, tiene grado 3 ya que es adyacente a

los vértices: *Zona B*, *Zona C* y *Zona D*.

Lo que se buscaba en el acertijo es un camino, definamos ahora lo que es en gráficas. Un **camino**, se define como una sucesión de vértices que cumple que cualquier par de vértices consecutivos del camino son adyacentes. De la figura 1.2 podemos definir el camino $C = (Zona A, Zona D, Zona C, Zona A, Zona B, Zona A, Zona C)$.

Para finalizar este acertijo, se dejará al lector un ejercicio. Consideremos la gráfica de la figura 1.4. ¿Puedes encontrar un camino que pase por todas las aristas de modo que el vértice inicial y el final sea el mismo?

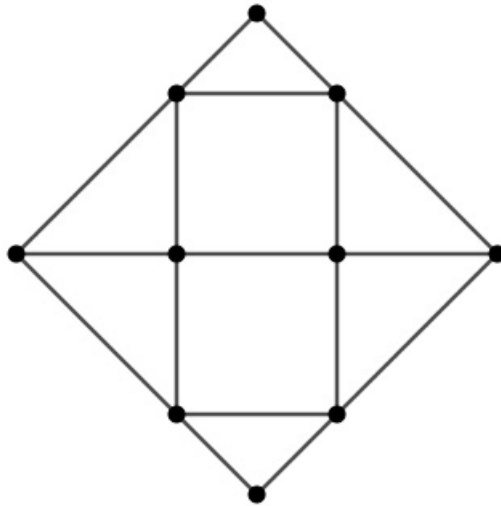


figura 1.4 Ejercicio abierto.

1.2. Segundo acertijo: Descubre el mensaje

Sin duda, la seguridad en las comunicaciones resulta hoy en día de gran importancia, un ejemplo claro de ésto se puede ver en las transacciones que se realizan a través de la red, ya que pueden ser interceptadas. La criptografía es la ciencia encargada de resguardar datos y documentos a través de un cifrado o un codificado, y tiene como objetivo garantizar la confidencialidad e integridad de cierta información.

El siguiente acertijo fue diseñado para ocultar un mensaje en la figura 1.5:

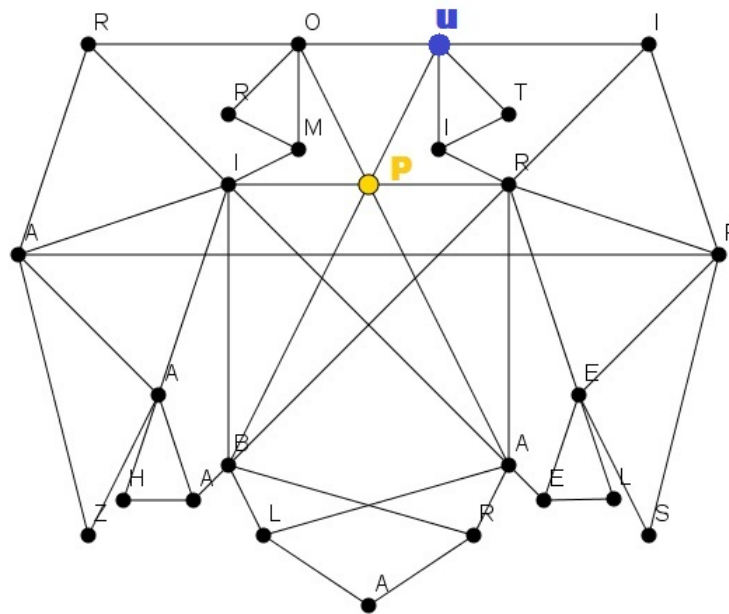


figura 1.5 Gráfica que tiene un mensaje oculto.

El encriptador mencionó que la clave es encontrar un camino que empiece por el vértice marcado con **P**, termine en **U** y utilice todos los vértices una sola vez. Es importante mencionar que sólo existe una frase correcta, de la cual cada una de sus palabras tiene sentido. ¿Puedes resolverlo?

En una gráfica G los caminos que no repiten vértices reciben el nombre de **trayectorias** y las trayectorias T que cumplen que $V(T) = V(G)$ se llaman **trayectorias hamiltonianas**. Observemos que el problema se traduce a encontrar en la gráfica una trayectoria hamiltoniana que empiece en el vértice marcado con la letra **P**. Notemos también que las aristas incidentes a los vértices de grado dos tienen que estar en la trayectoria, ya que todo vértice de la trayectoria distinto del vértice inicial y final, tiene grado dos en ésta. Por ejemplo, en la figura 1.6, las aristas incidentes al vértice **A** tienen que estar en la trayectoria.



figura 1.6 Vértices de grado dos en trayectorias hamiltonianas.

Así, los vértices de grado dos pintados de rojo, junto con sus aristas incidentes, ya están en el camino que buscamos (véase en la figura 1.7).

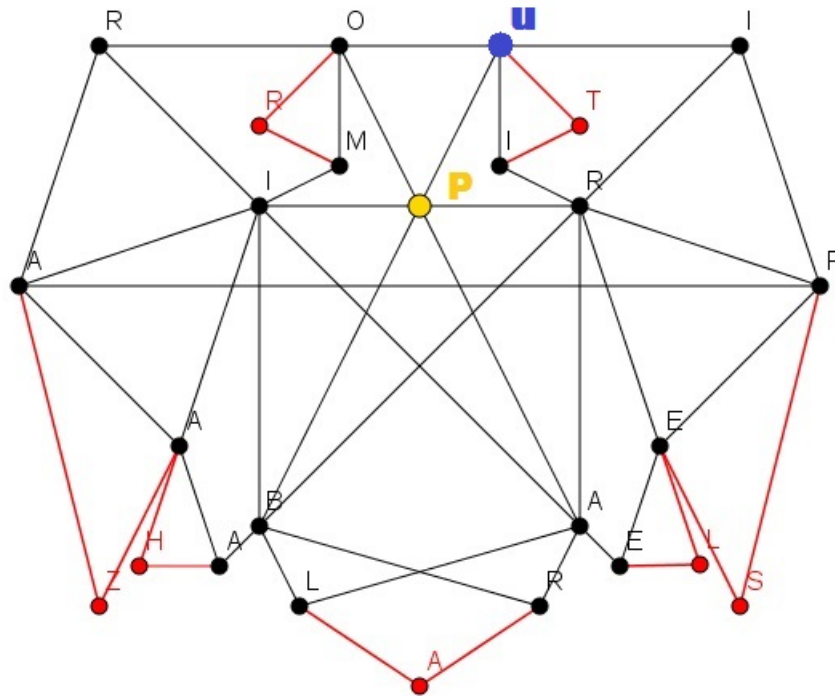


figura 1.7 Aristas y vértices que están en la trayectoria.

Esto nos da una pista de como tendría que ir el camino. Como sabemos que empezamos en el vértice \mathbf{P} , busquemos algunos caminos que incluyan los vértices y aristas pintados de rojo que formen una frase o palabra coherente, veamos primero los vértices adyacentes a \mathbf{P} . Notemos que es posible hallar el camino $C_0=(P, O, R, M, I)$ que forma la frase “Por mi”. Continuemos buscando caminos con frases coherentes en los demás vértices y aristas pintados de rojo, observemos que podemos encontrar un camino $C_1=(H, A, B, L, A, R, A)$ que forma la palabra “Hablará”. Otro camino que puede localizarse es $C_2=(E, S, P, I, R, I, T, U)$ que tiene la palabra “Espíritu”. También podemos hallar el camino $C_3=(R, A, Z, A)$. Ahora, tomemos el camino $C_0=(P, O, R, M, I)$, la idea es construir una trayectoria hamiltoniana con base en este camino y a las palabras en C_1 , C_2 y C_3 . La forma en que lo haremos será ir agregando a C_0 las letras restantes junto con las palabras encontradas. Así, podemos definir $T=(P, O, R, M, I, R, A, Z, A, H, A, B, L, A, R, A, E, L, E, S, P, I, R, I, T, U)$ que forma la frase “Por mi raza hablará el espíritu” (véase en la figura 1.8).

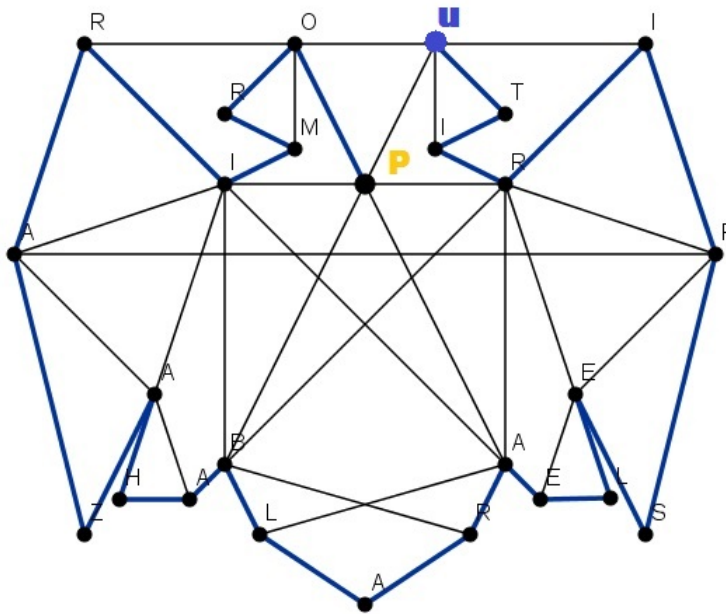


figura 1.8 Trayectoria hamiltoniana que revela el mensaje.

Notemos que este es un procedimiento hecho por prueba y error, por lo que encontrar los caminos con frases o palabras coherentes puede tardar mucho.

La figura 1.9 tiene otro mensaje oculto, de igual forma se tiene que encontrar una trayectoria hamiltoniana que empiece con letra **L**, marcada de color amarillo, y termine en **O**, que esta marcado de color azul, ¿puedes descifrarlo? El acertijo quedará abierto al lector.

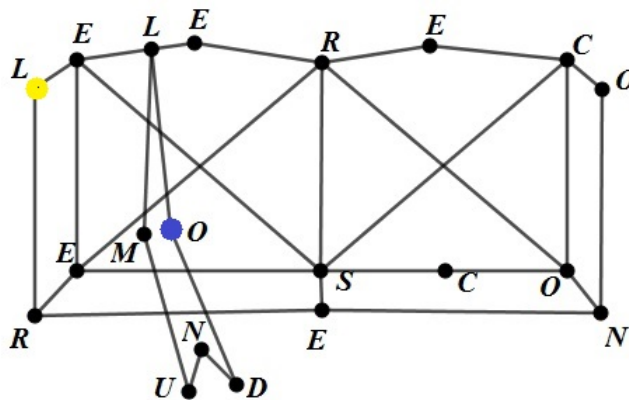


figura 1.9 Segundo mensaje oculto.

En gráficas existen más definiciones relacionadas con los caminos. Por ejemplo, un **camino cerrado** se define como un camino que tiene el mismo vértice en el primer y último término de la sucesión. Un **paseo** se define como un camino que no repite aristas. Como notamos en el acertijo de los puentes de Königsberg, lo que se pedía en términos de gráficas, era un paseo cerrado que pasará por todas las aristas (puentes).

Continuando con las definiciones relacionadas con los caminos, tenemos la de **ciclo**, que es un camino cerrado que sólo repite el vértice inicial y final, además de tener al menos tres aristas. El propósito de conocer estas definiciones es introducir otras muy importantes: **gráficas hamiltonianas**. Una gráfica es hamiltoniana si existe un ciclo C tal que $V(C) = V(G)$. La gráfica del acertijo es una gráfica hamiltoniana ya que el ciclo $C=(P,O,R,M,I,R,A,Z,A,H,A,B,L,A,R,A,E,L,E,S,P,I,R,I,T,U,P)$ tiene los mismos vértices que la gráfica (véase figura 1.10).

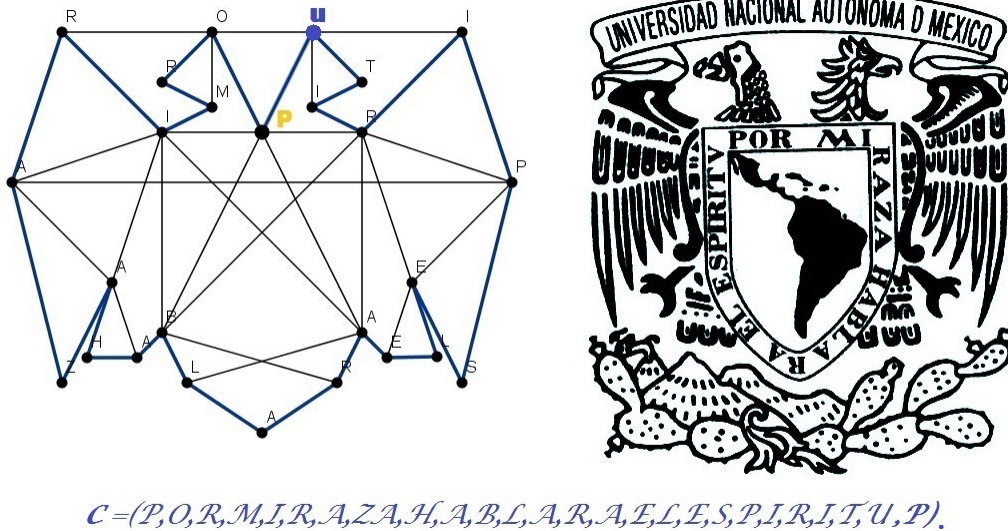


figura 1.10 Ejemplo de una gráfica hamiltoniana.

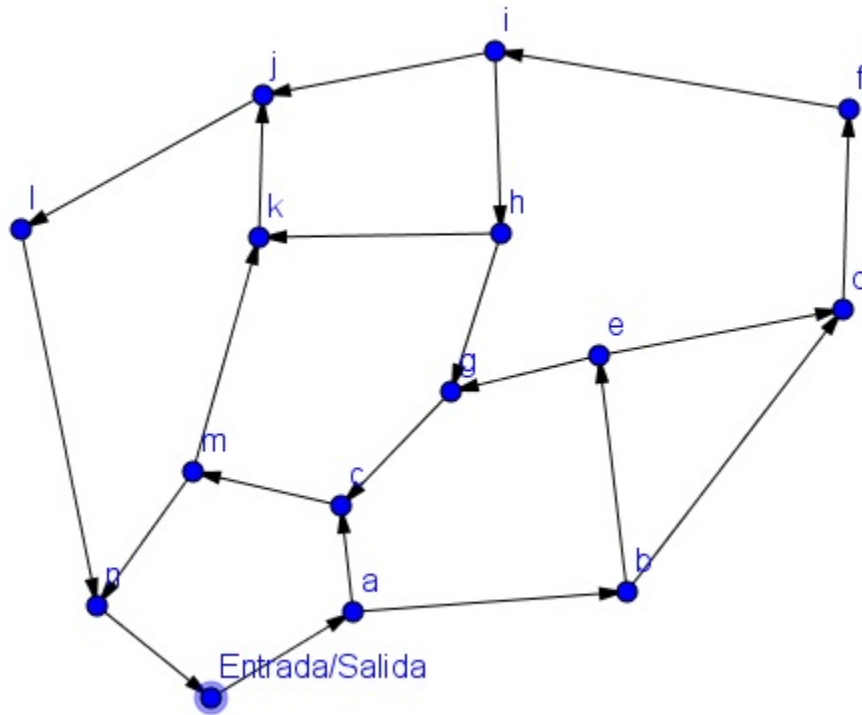


figura 1.12 Modelo matemático asociado al mapa del zoológico.

En este caso, el modelo matemático compuesto por vértices y flechas se llama **digráfica**.

Definición 1.3.1.1 Una digráfica D es una pareja ordenada $(V(D), F(D))$, donde $V(D)$ es un conjunto finito y no vacío de objetos, llamados vértices, y $F(D)$ es un conjunto de pares ordenados de distintos elementos de $V(D)$, llamados flechas.

En este caso, el conjunto de vértices es $V(D) = \{Entrada, a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n\}$ y el conjunto de flechas es $F(D) = \{(Entrada, a), (a, c), (a, b), (b, e), (b, d), (c, m), (d, f), (e, d), (e, g), (f, i), (g, c), (h, g), (h, k), (i, j), (i, h), (j, l), (k, j), (l, n), (m, k), (m, n), (n, Entrada)\}$. A la figura 1.12 se le llama la **representación geométrica** de una digráfica.

Prosigamos con la solución del acertijo. Veamos que uno de los caminos desde el vértice *Entrada* a la esquina *m* es ir hacia *a*, luego hacia *c*, para finalmente llegar a *m*. Puesto que respetaremos la dirección de los pasillos para los caminos, es necesario definir el concepto de camino en digráficas. Un **camino dirigido** $C = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ es una sucesión de vértices que cumple que el orden de los vértices determine la dirección de las flechas; es decir, $a_i = (x_{i-1}, x_i) \in F(D)$, con $i \in \{1, \dots, n\}$. Por ejemplo el camino que se dio anteriormente es $C = (Entrada, a, c, m)$.

Lo que haremos ahora será asociarle a los vértices un número (etiqueta), que representará

el total de caminos dirigidos que hay desde el vértice entrada.

Veamos que el único camino dirigido desde el vértice *entrada* hacia *a* está determinado por la flecha (*Entrada, a*), por lo que *a* lleva etiqueta 1. Observemos que para llegar al vértice *b* desde *Entrada*, solo puede hacerse por el vértice *a*, del cual ya sabemos que únicamente hay un camino dirigido desde *Entrada*, por lo que *b* tiene también etiqueta 1 y es (*Entrada, a, b*). De igual forma para llegar al vértice *e* desde el vértice *Entrada* solamente es posible por *b*, por lo que *e* también tiene etiqueta 1 y el camino dirigido es (*Entrada, a, b, e*). Ahora notemos que para llegar al vértice *d* desde el vértice *Entrada* podemos hacerlo por los vértices *b* y *e*, y como cada uno tiene un solo camino dirigido para llegar a ellos desde el vértice *Entrada* (etiqueta 1), tenemos que *d* lleva etiqueta 2 y los caminos dirigidos respectivos son (*Entrada, a, b, e, d*) y (*Entrada, a, b, d*) (véase figura 1.13).

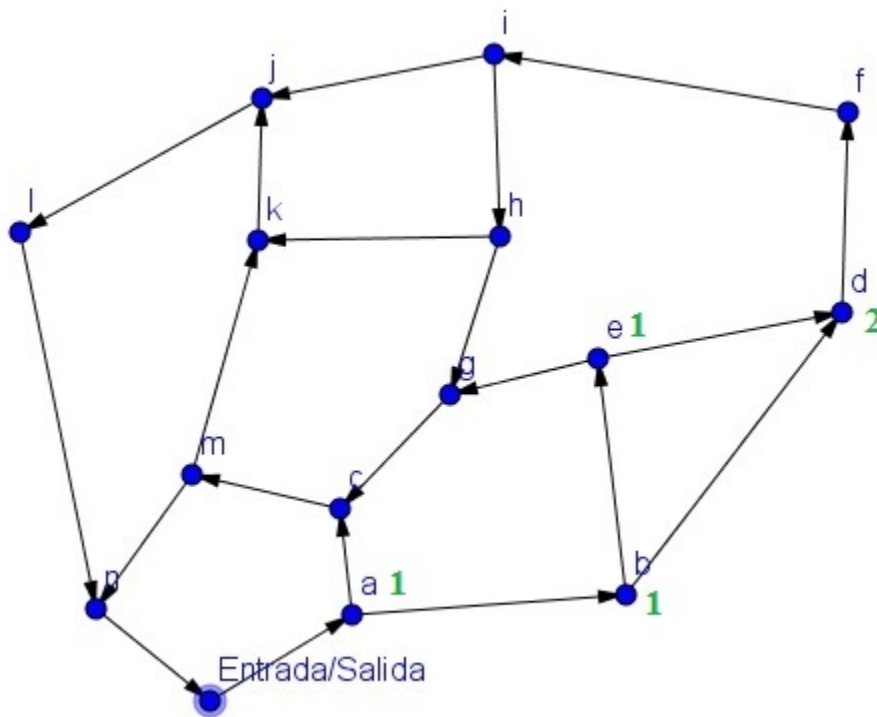


figura 1.13 Primeras cuatro etiquetas.

Continuando con el vértice *f*, la única manera de llegar a él es por el vértice *d*, que ya tiene etiqueta 2 por lo que el vértice *f* también tiene etiqueta 2 y los caminos dirigidos son (*Entrada, a, b, e, d, f*) y (*Entrada, a, b, d, f*). De igual forma para llegar al vértice *i* únicamente es por el vértice *f*, por lo que también lleva etiqueta 2 y los caminos dirigidos son (*Entrada, a, b, e, d, f, i*) y (*Entrada, a, b, d, f, i*). Para el vértice *h* tenemos los dos caminos dirigidos (*Entrada, a, b, e, d, f, i, h*) y (*Entrada, a, b, d, f, i, h*), por lo que *h* también tiene etiqueta 2 (véase figura 1.14).

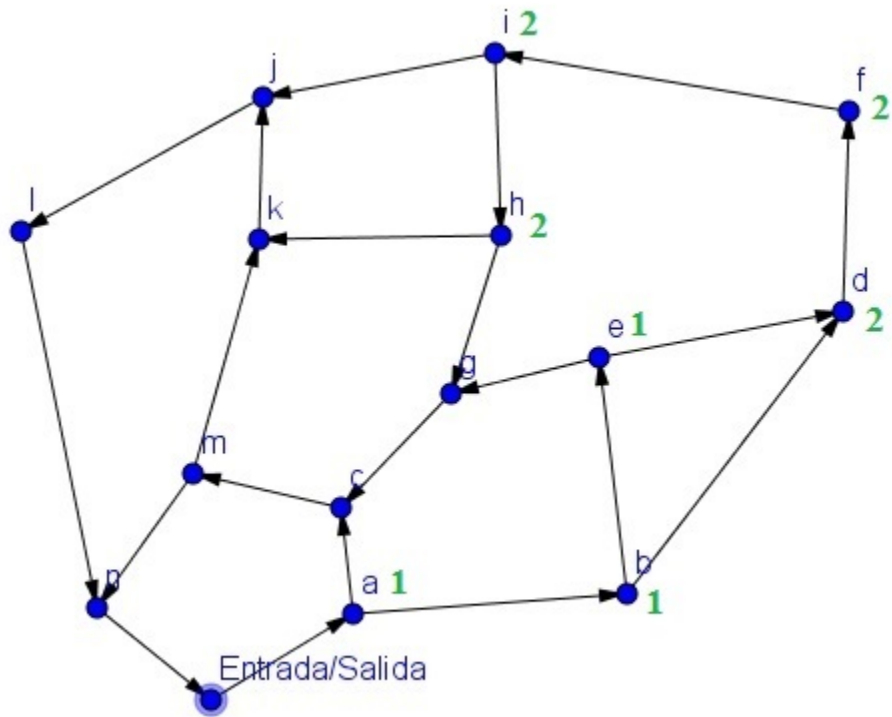


figura 1.14 Etiquetas para los vértice f , i y h .

Para el vértice g , tenemos que hay dos formas de llegar a él, y es por los vértices h y por e , como el vértice h ya tiene etiqueta 2 tenemos que los caminos dirigidos desde *Entrada* hasta g que pasan por h son: $(Entrada, a, b, e, d, f, i, h, g)$ y $(Entrada, a, b, d, f, i, h, g)$, y el que va desde *Entrada* hasta g que pasa por e es: $(Entrada, a, b, e, g)$. Por lo que tenemos tres caminos dirigidos desde *Entrada* a g y así lleva etiqueta 3.

Ahora para el vértice c hay dos formas de llegar a él, y es por los vértices g y por a , como el vértice g tiene etiqueta 3 tenemos que los caminos dirigidos desde *Entrada* hasta c que pasan por g son los siguientes: $(Entrada, a, b, e, d, f, i, h, g, c)$, $(Entrada, a, b, d, f, i, h, g, c)$, $(Entrada, a, b, e, g, c)$, y el que va desde *Entrada* hasta c que pasa por a es: $(Entrada, a, c)$. Por lo que tenemos cuatro caminos dirigidos desde *Entrada* a c y en consecuencia tiene etiqueta 4.

Finalmente para el vértice m , sólo hay una forma de llegar a él, y es por el vértice c , y como este tiene etiqueta 4, tenemos que los caminos dirigidos desde *Entrada* hasta m son: $(Entrada, a, b, e, d, f, i, h, g, c, m)$, $(Entrada, a, b, d, f, i, h, g, c, m)$, $(Entrada, a, b, e, g, c, m)$, $(Entrada, a, c, m)$. Por lo que m también lleva etiqueta 4 (figura 1.15).

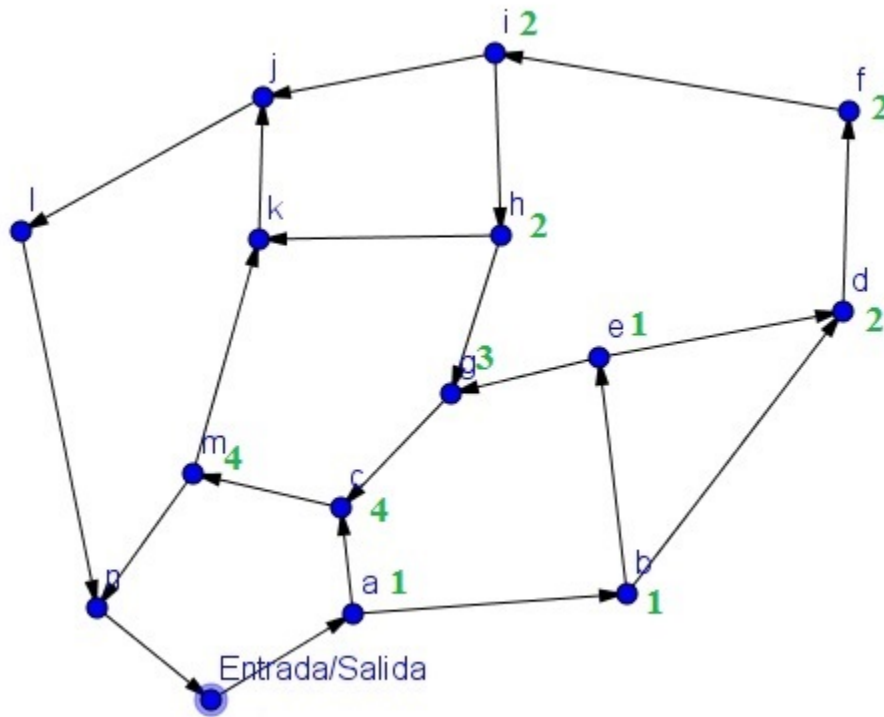


figura 1.15 Etiquetas para los vértice g , c y m .

Notemos que el procedimiento que se hizo no solo determina el número de caminos, si no que nos da una forma de encontrarlos. Observemos que la clave para colocar una etiqueta a un determinado vértice x , radica en tener etiquetas en los vértices que tuvieran una flecha hacia él, pues se sumaban los números. En digráficas ese conjunto de vértices se llama **vecinos interiores** de x , que se denota como $\Gamma^-(x)$, y se define como $\Gamma^-(x) = \{y \in V(D) : (y, x) \in F(D)\}$.

Relacionemos la forma en la que se etiquetó a los vértices con la formalidad de la definición anterior. Consideremos el vértice k , la única forma de llegar a este vértice es por sus vecinos interiores, que son $\Gamma^-(k) = \{h, m\}$. Como h, m tiene etiquetas 2 y 4 respectivamente, la etiqueta de k es igual a la suma de $2+4=6$.

También podemos definir los **vecinos exteriores** de x , que se denota como $\Gamma^+(x)$, y se define como $\Gamma^+(x) = \{z \in V(D) : (x, z) \in F(D)\}$. A la cardinalidad del conjunto de los vecinos interiores de x se le conoce como **ingrado**, y a la del conjunto de los vecinos exteriores como **exgrado**, se denotan respectivamente como $\delta^-(x)$ y $\delta^+(x)$.

Veamos un ejemplo, consideremos al vértice h en la digráfica de la figura 1.15. Sus vecinos interiores y exteriores son $\Gamma^-(h) = \{i\}$ y $\Gamma^+(h) = \{g, k\}$ respectivamente, por lo que $\delta^-(h) = 1$ y $\delta^+(h) = 2$.

Ahora, ¿cuántos caminos hay desde el vértice *Entrada* a los demás vértices? y, ¿cuántos hay desde la *Entrada* al vértice *Salida* de modo que se recorra al menos un pasillo?

La siguiente digráfica muestra las etiquetas correspondientes:

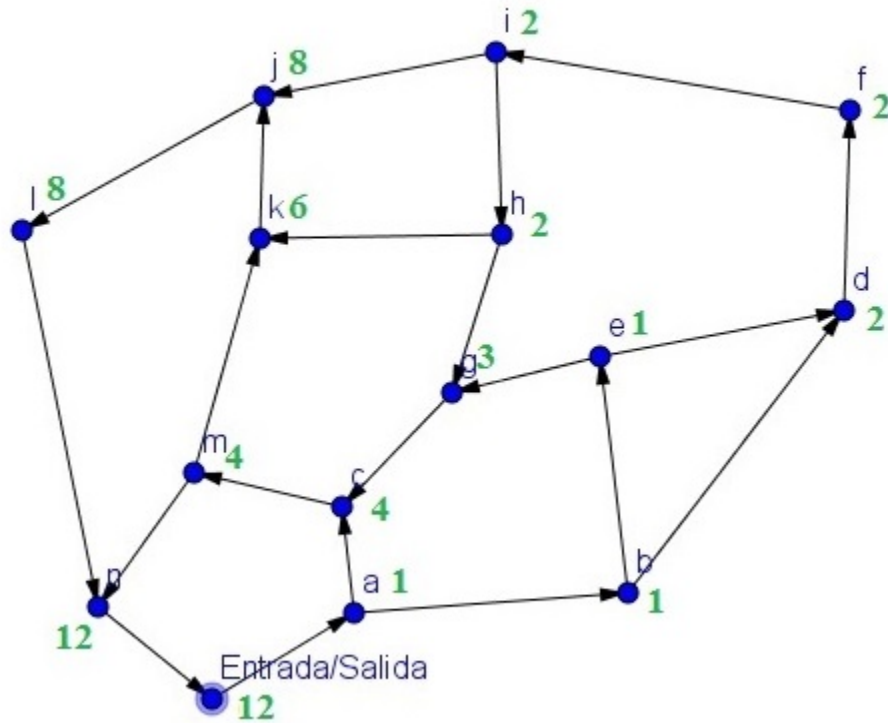


figura 1.16 Etiquetas para todos los vértices.

Por lo tanto existen 12 caminos desde el vértice *Entrada* al vértice *Salida* recorriendo al menos un pasillo.

El diseño de Beck se convirtió en el primer mapa del metro con una imagen esquemática (figura 1.18).



figura 1.18 Diseño de Harry Beck.

Notemos que el plano que modela las líneas del metro, visto desde el punto de vista matemático, esta constituido por vértices (estaciones) y aristas, que representan el traslado entre dos estaciones, en términos de relaciones, dos estaciones están relacionadas si podemos pasar de una a otra realizando una sola parada, por lo que concluimos que los planos de los metros son gráficas [1].

El siguiente acertijo está enfocado en la red de metro de la Ciudad de México. Es bien sabido que los pasajeros suelen sufrir de ciertos imprevistos que afectan su traslado, como el exceso de personas en los vagones, la marcha lenta o el cierre de estaciones. El objetivo es encontrar todas las variantes de rutas que hay entre dos estaciones con base en las preferencias de una persona cuando surgen estos imprevistos.

Jorge es un abogado que trabaja como asesor en un empresa, todos los días se traslada de la estación del metro Tacubaya a Morelos (véase figura 1.19).



figura 1.19 Líneas y estaciones que usa Jorge.

Jorge, como muchas otras personas, tiene preferencia sobre las diferentes líneas del metro para evitar estar en vagones saturados. Por ejemplo, prefiere viajar en la línea 9 de Tacubaya a Pantitlán, en la 7 de Tacubaya a Tacuba y en la número 3 de Centro Médico a Guerrero. Con base en esto, a las aristas de la gráfica anterior (figura 1.19) se les ha asignado una orientación convirtiendo la gráfica en una digráfica. La figura 1.20 muestra la digráfica del metro con todas las preferencias de Jorge:

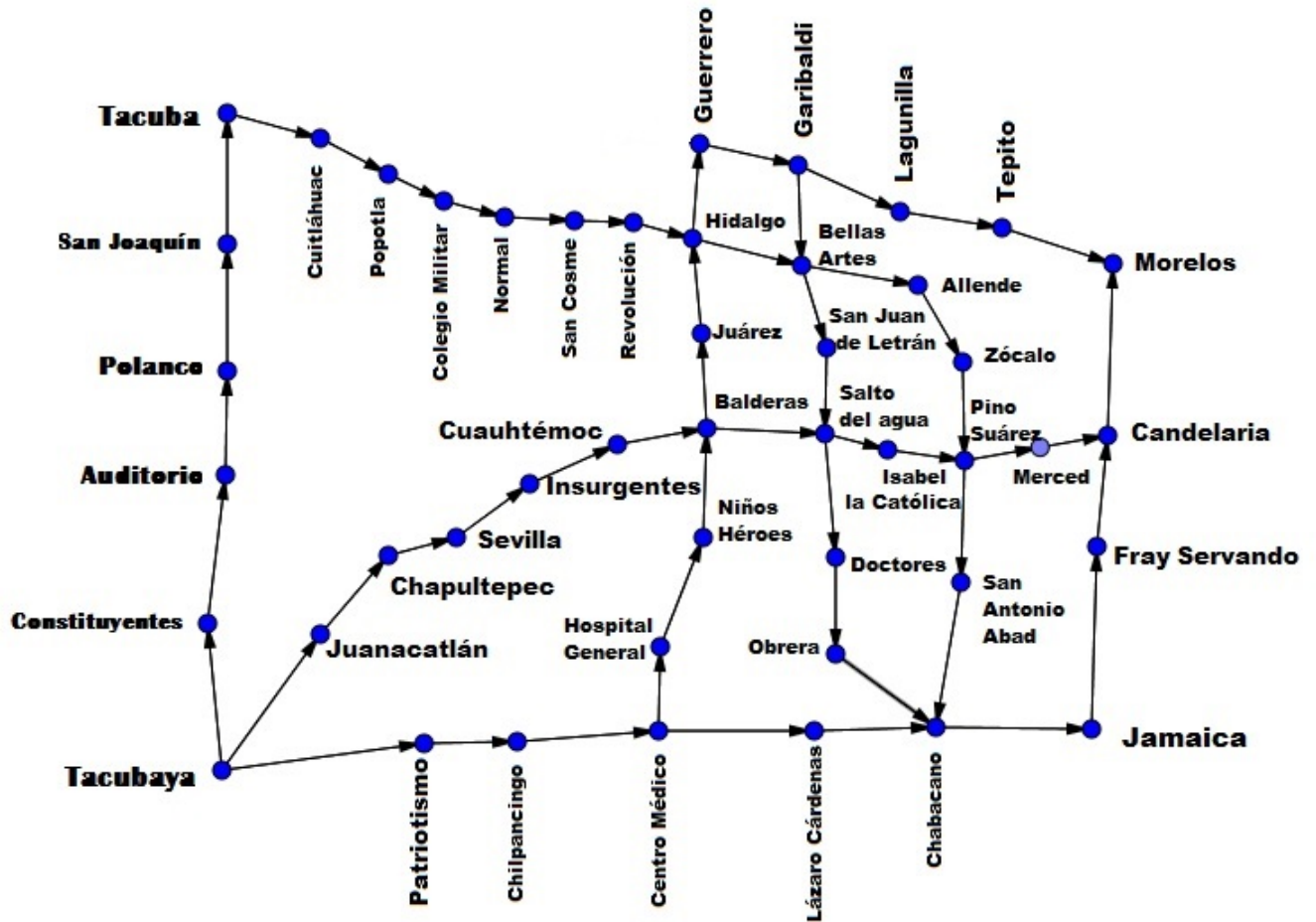


figura 1.20 Digráfica asociada las preferencias de Jorge.

Si el metro cierra por mantenimiento las estaciones Sevilla, Insurgentes, Cuauhtémoc y Lázaro Cárdenas, con base en sus preferencias ¿existirá alguna forma de que Jorge llegue a su destino?, ¿cuántos caminos distintos tiene como alternativas?

El problema puede resolverse del mismo modo que en la sección anterior, para ello trabajaremos con la digráfica que resulte de quitar las flechas que involucren a las estaciones en mantenimiento. La figura 1.21 muestra dicha digráfica D .

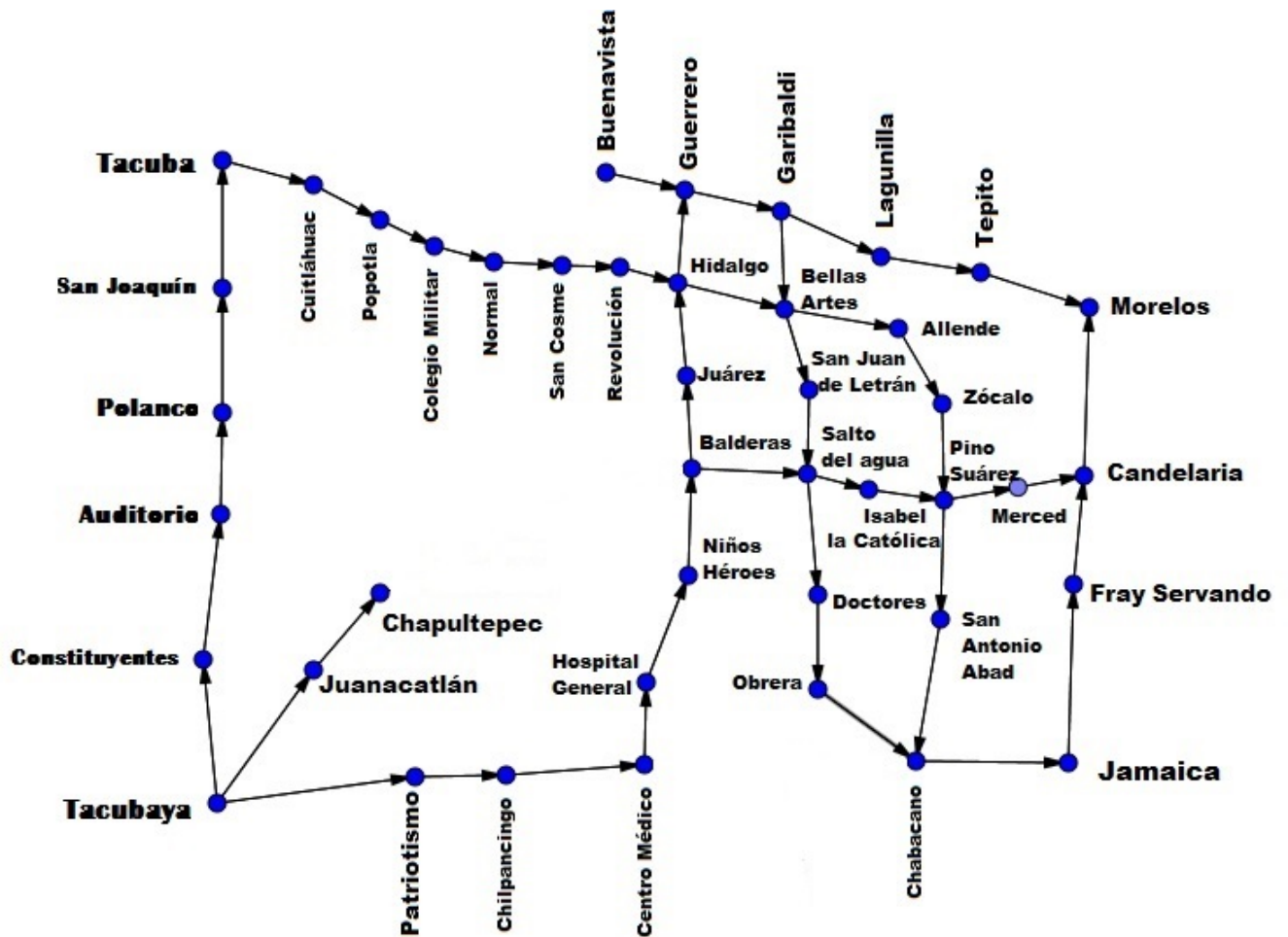


figura 1.21 Digráfica sin las estaciones cerradas.

Dicha digráfica recibe el nombre de **subdigráfica** de D .

Continuando con la resolución, repetiremos el proceso de etiquetar a cada vértice como en el acertijo anterior. La figura 1.22 nos muestra la digráfica con las etiquetas correspondientes:

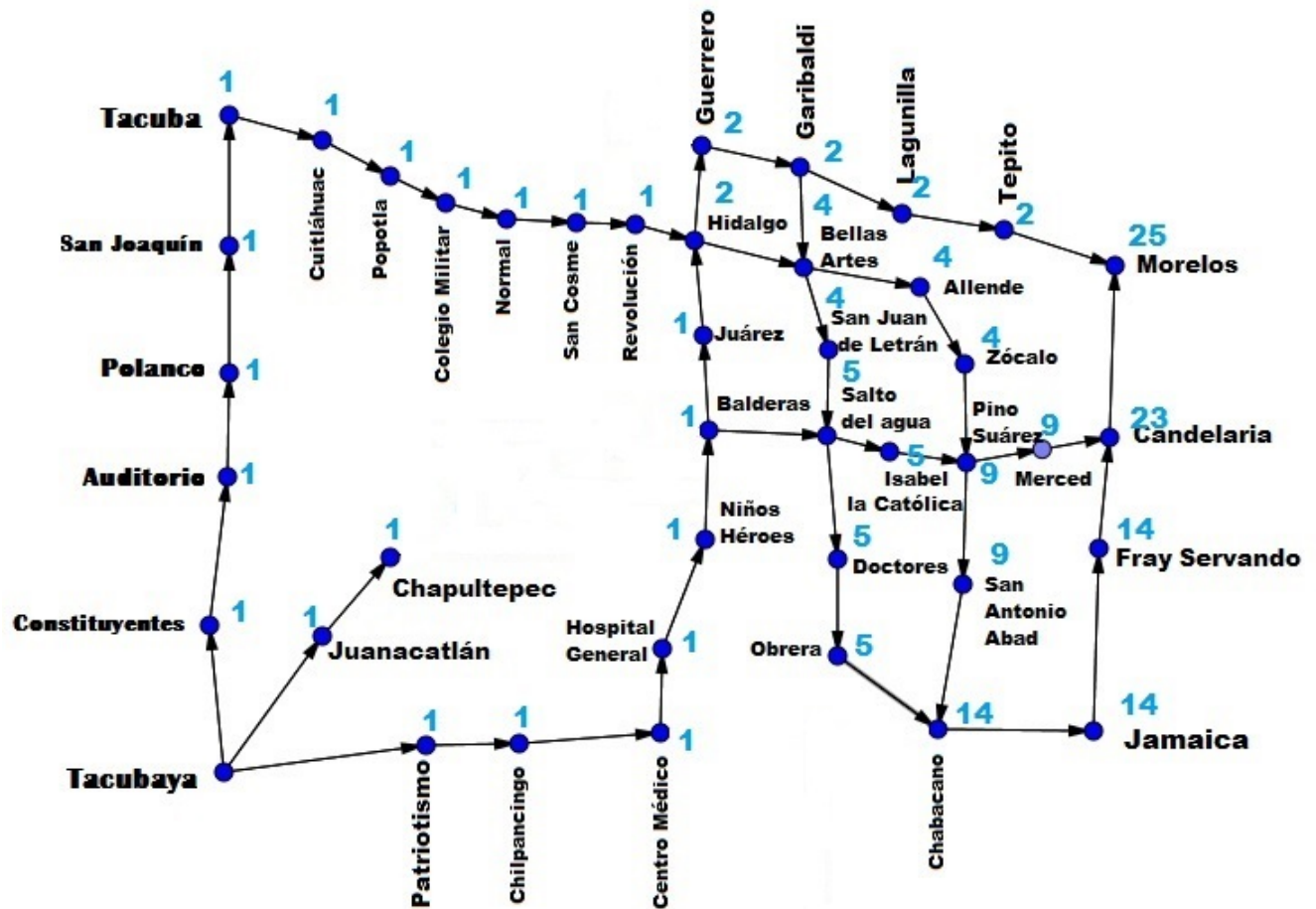


figura 1.22 Etiquetas de la digráfica.

Por lo que tenemos 25 caminos dirigidos diferentes de *Tacubaya* a *Morelos*.

1.5. Quinto acertijo: El nuevo local de pizzas

Una nueva pizzería abrirá sus puertas en un vecindario de Xochimilco. El gerente del establecimiento le pidió a su empleado Pablo que lo ayudará a repartir muestras gratis para hacer propaganda del lugar, por lo que Pablo tiene la misión de manejar la motocicleta de entregas para repartir las muestras por las esquinas cercanas, pero evitando pasar por las esquinas de las competencias. La figura 1.23 muestra el mapa de calles cercanas así como la ubicación de la nueva pizzería y las de la competencia:

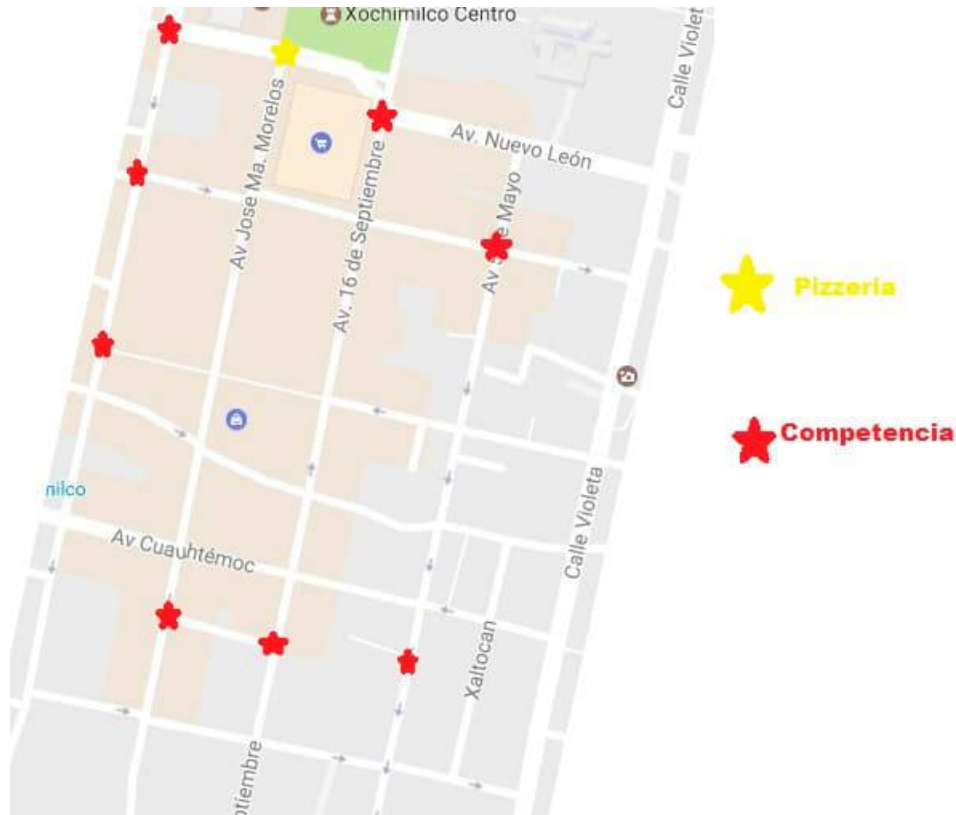


figura 1.23 Vecindario de Xochimilco.

¿Existirá algún camino que le permita a Pablo recorrer todas las esquinas del mapa en la motocicleta (a excepción de las marcadas de rojo) de tal modo que no repita ninguna?

Para resolver el acertijo, lo primero que haremos será modelarlo con una digráfica D . Notemos que como nos trasladaremos de esquina a esquina, la digráfica asociada puede pensarse como la del tercer acertijo. La intersección de al menos dos calles será representada por un vértice. Veamos que tenemos direcciones en las calles, pues es por donde circulan los vehículos, por lo que una flecha entre dos vértices representará la dirección sobre esa calle.

La figura 1.24 muestra la digráfica D asociada al mapa:

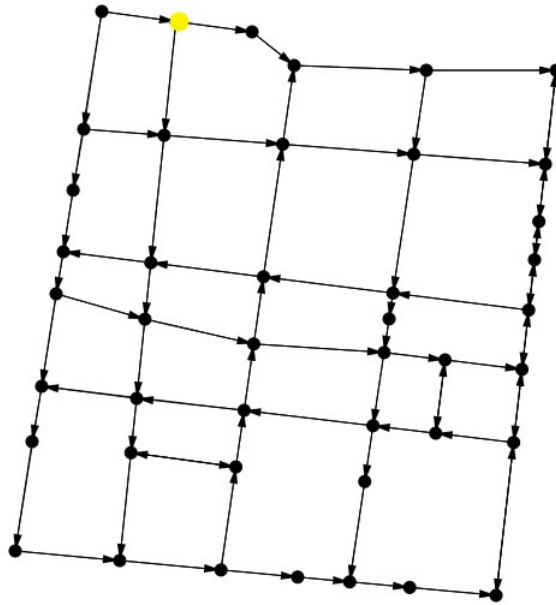


figura 1.24 Digráfica asociada al mapa.

Como hay esquinas que deseamos evitar, podemos trabajar con la subdigráfica que resulta de quitar los vértices donde se localiza la competencia:

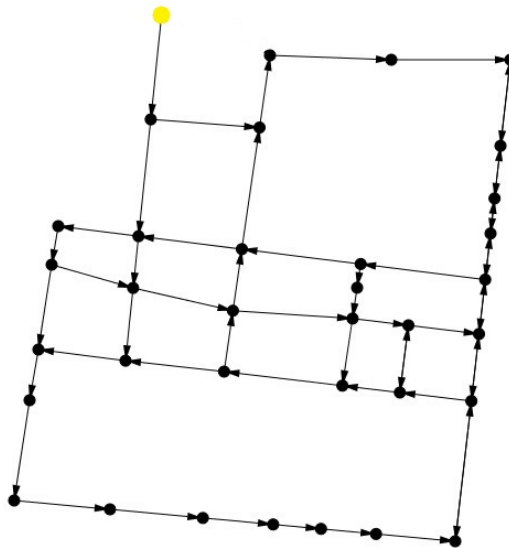


figura 1.25 Subdigráfica de D .

El problema se reduce a encontrar un camino dirigido que empiece en la ubicación de la nueva pizzería y recorra todas las esquinas sin repetir ninguna. En digráficas este término también es conocido como **trayectoria hamiltoniana**.

Una solución sería la siguiente:

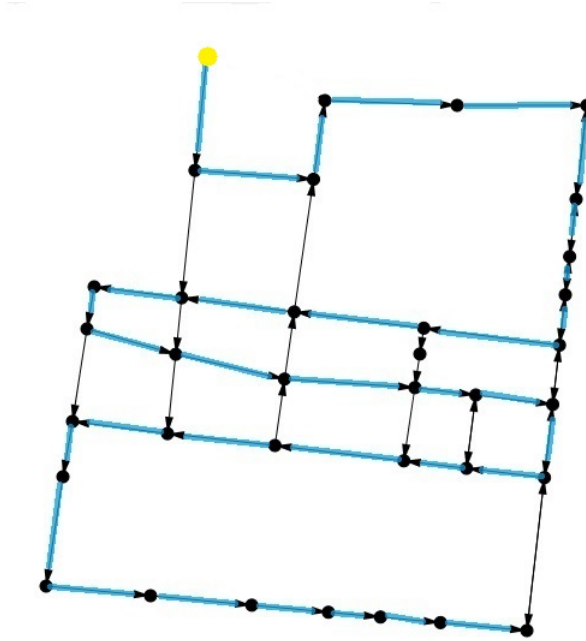


figura 1.26 Trayectoria hamiltoniana que da solución.

1.6. Definiciones

Para terminar este capítulo resumiremos todos los conceptos que se vieron en los acertijos y los pondremos en una lista junto con otras definiciones que usaremos a lo largo del trabajo.

1.6.1. Resumen de los conceptos básicos sobre gráficas

Definición 1.6.1.1 Una **gráfica** G es una pareja ordenada $(V(G), A(G))$, donde $V(G)$ es un conjunto finito y no vacío de objetos, llamados **vértices**, junto con un conjunto de parejas no ordenadas de elementos distintos de $V(G)$ llamados **aristas** de G y denotado por $A(G)$. Si entre dos vértices a y b hay una arista, la representaremos de la forma (a, b) . Diremos que una gráfica G es de orden m y tamaño n si $|V(G)|=m$ y $|A(G)|=n$.

La figura 1.27 muestra la representación geométrica de una gráfica G_1 que tiene como conjunto de vértices $V(G_1)=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ y al conjunto de aristas $A(G_1)=\{(a, b), (a, c), (a, f), (b, d), (b, e), (b, f), (c, f), (c, h), (d, e), (d, g), (e, f), (e, g), (f, h), (g, h)\}$.

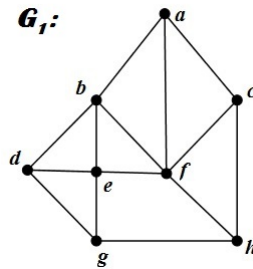


figura 1.27 Ejemplo de una gráfica.

La gráfica G_1 servirá para dar ejemplos de las demás definiciones.

Definición 1.6.1.2 Dos vértices u y v son **adyacentes** si $(u, v) \in A(G)$.
Por ejemplo los vértices b y e en G_1 son adyacentes pues $(b, e) \in A(G_1)$.

Definición 1.6.1.3 Si $a=(x, y) \in A(G)$, entonces x y y son llamados **vértices extremos** de a .

Por ejemplo, b y e son vértices extremos de la arista (b, e) .

Definición 1.6.1.4 Una arista a **incide** en un vértice x , si x es un extremo de a .
Por ejemplo, la arista (c, h) incide en el vértice c .

Definición 1.6.1.5 Sea G una gráfica y v un elemento de $V(G)$, definimos el conjunto **vecinos** de v , denotado por $N(v)$, $\{x \in V(G) : (x, v) \in A(G)\}$.

En nuestro ejemplo el conjunto de los vecinos del vértice e son $N(e)=\{b, d, f, g\}$.

Definición 1.6.1.6 Sean G una gráfica y $v \in V(G)$. Definimos el **grado** de v , denotado por $\delta(v)$, como la cardinalidad de $N(v)$.

Definición 1.6.1.7 Una **subgráfica** H de una gráfica G es una gráfica tal que $V(H) \subseteq V(G)$ y $A(H) \subseteq A(G)$.

Veamos un ejemplo, consideremos la siguiente gráfica H :

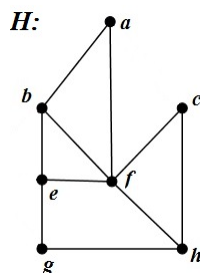


figura 1.28 Ejemplo de una subgráfica.

H es un subgráfica de G_1 ya que $V(H)=\{a, b, c, e, f, g, h\} \subseteq V(G_1)$ y $A(H)=\{(a, b), (a, f), (b, e), (b, f), (c, f), (c, h), (e, f), (e, g), (f, h), (g, h)\} \subseteq A(G_1)$.

Definición 1.6.1.8 Un **camino**, denotado por C , es una sucesión de vértices: $C = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$, tal que $(x_{i-1}, x_i) \in A(G)$, con $i = 1, \dots, n$. También decimos que es un x_0x_n -camino.

Por ejemplo podemos definir $C = (g, d, e, b, f, e, b, f, a, c)$ como un gc -camino.

Definición 1.6.1.9 Un x_0x_n -camino es **cerrado** si $x_0 = x_n$.

Por ejemplo $C_1 = (g, d, e, b, f, a, c, h, g)$.

Definición 1.6.1.10 Un **ciclo** C es un camino cerrado que tiene al menos tres aristas distintas, y sólo repite el vértice inicial y el final.

Por ejemplo $C_2 = (f, a, c, h, f)$.

La siguiente definición no fue vista en los acertijos, sin embargo está relacionada con el concepto de camino.

Definición 1.6.1.11 Una gráfica G es **conexa** si para todo subconjunto $\{x, y\}$ de $V(G)$ existe un xy -camino.

Definición 1.6.1.12 Sean $C_1=(x_1, \dots, x_n)$ y $C_2=(y_1, y_2, \dots, y_m)$ dos caminos. Si $x_n = y_1$ definimos la unión de C_1 con C_2 , denotado por $C_1 \cup C_2$, como el camino tal que $C_1 \cup C_2 = (x_1, \dots, x_n = y_1, y_2, \dots, y_m)$.

Definición 1.6.1.13 Un **paseo** es un camino que no repite aristas.

Definición 1.6.1.14 Una **trayectoria** es un camino que no repite vértices.

Por ejemplo $C_0 = (g, d, e, b, f, a, c)$.

Definición 1.6.1.15 Sea $T=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ una trayectoria. Definimos una $x_i x_j$ - **subtrayectoria** T_1 de T , con $\{i, j\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ tal que $i < j$, como una trayectoria que se obtiene de T ; es decir, que $T_1=(x_i, x_{i+1}, \dots, x_j)$. La denotaremos por $T_1=(x_i, T, x_j)$.

Definición 1.6.1.16 Sean G una gráfica y T una trayectoria en G . Decimos que T es una **trayectoria hamiltoniana** si $V(T) = V(G)$.

Por ejemplo $T_3 = (g, d, e, b, f, a, c, h)$.

Definición 1.6.1.17 Sea G una gráfica. Decimos que G es una **gráfica hamiltoniana** si existe un ciclo C en G tal que $V(C) = V(G)$.

La gráfica G_1 es una gráfica hamiltoniana pues el ciclo $C_4 = (g, d, e, b, f, a, c, h, g)$ cumple con $V(G) = V(C_4)$.

Veamos otro ejemplo: la gráfica de la figura 1.29 es llamada **gráfica de Petersen**, en honor a Julius Peter Christian Petersen, y tiene la propiedad de que al quitarle cualquier vértice se obtiene una gráfica hamiltoniana.

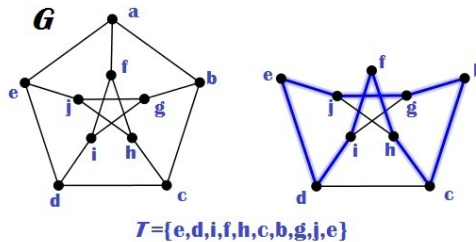


figura 1.29 Gráfica de Petersen.

La siguiente definición fue hecha en honor a Euler.

Definición 1.6.1.18 Sea G una gráfica. Decimos que G es una **gráfica euleriana** si existe un paseo cerrado C en G tal que $A(C) = A(G)$.

Por ejemplo, la siguiente gráfica es euleriana (figura 1.30).

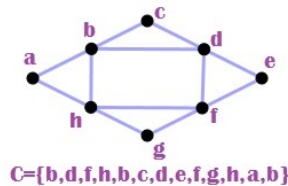


figura 1.30 Ejemplo de una gráfica euleriana.

Ahora que ya es conocido el concepto de camino gracias a los acertijos, es natural que pensemos en la longitud de un camino.

Definición 1.6.1.19 Sea $C = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ un camino. La **longitud** de C , denotado por $\ell(C)$, es n .

Por ejemplo la longitud de C_4 es 8.

Definición 1.6.1.20 Sea $\{u, v\} \subseteq V(G)$. La **distancia** de u a v , denotada por $d(u, v)$, se define como:

$$d(u, v) = \min\{\ell(T) : T \text{ es una } uv\text{-trayectoria}\}.$$

De no existir ningún camino entre u y v definiremos $d(u, v) = \infty$.

Por ejemplo la distancia del vértice b al vértice c en la gráfica de la figura 1.29 es $d(b, c) = 2$.

Los siguientes conceptos no fueron definidos en ningún acertijo, sin embargo se harán uso de ellos en el capítulo 6, por lo que es importante enlistarlos.

Definición 1.6.1.21 Un **árbol** es una gráfica conexa sin ciclos. La figura 1.31 nos muestra un ejemplo de un árbol.

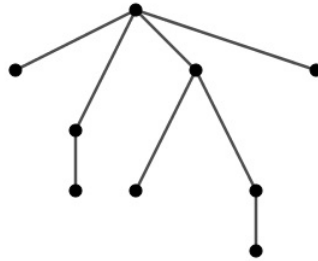


figura 1.31 Ejemplo de un árbol.

Definición 1.6.1.22 Sean G una gráfica conexa y H una subgráfica de G . Decimos que H es un **árbol generador** de G si H es un árbol tal que $V(H)=V(G)$ (véase figura 1.32).

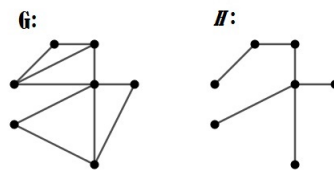


figura 1.32 Ejemplo de un árbol generador H de G .

Definición 1.6.1.23 Sean G una gráfica y $M \subseteq A(G)$. Decimos que M es un **apareamiento** de G si para todo subconjunto $\{a, b\}$ de M , a y b no tienen vértices extremos en común. Por ejemplo, $M=\{1, 3, 5, 9\}$ es un apareamiento de la gráfica de la figura 1.33.

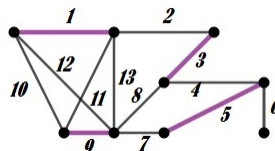


figura 1.33 Ejemplo de un apareamiento.

Definición 1.6.1.24 Sea G una gráfica. A G le asociamos una matriz $M_{n \times n}$, donde n es el número de vértices de G , tal que:

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ es adyacente a } v_j \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

A dicha matriz se le llama **matriz de adyacencia** de G (ver figura 1.34).

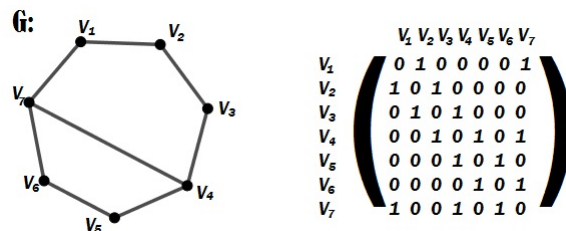


figura 1.34 Ejemplo de una matriz de adyacencia.

Definición 1.6.1.25 Una gráfica G de orden n es **completa** si $\delta(v) = n - 1$ para todo $v \in V(G)$. La denotaremos por K_n .

Definición 1.6.1.26 Una gráfica G es **bipartita** si existe una partición de $V(G)$ en dos conjuntos V_1 y V_2 tal que toda arista de G tiene un extremo en V_1 y otro en V_2 (figura 1.35), a dicha partición se le llamará bipartición.

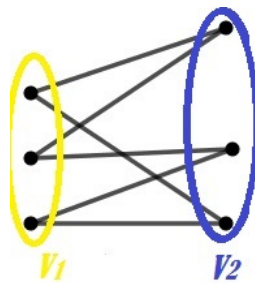


figura 1.35 Ejemplo de gráfica bipartita.

Definición 1.6.1.27 Sea G una gráfica bipartita con bipartición V_1 y V_2 . Si los vértices de V_1 son adyacentes a todos los elementos de V_2 entonces la gráfica es llamada **bipartita completa**, y se denota por $K_{n,m}$, donde n es el número de vértices de V_1 y m el número de vértices de V_2 . La figura 1.36 nos muestra a $K_{4,3}$.

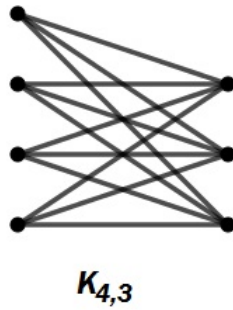


figura 1.36 Ejemplo de una gráfica bipartita completa.

En particular las gráficas $K_{1,m}$ reciben el nombre de **estrellas**.

Definición 1.6.1.28 Sea G una gráfica. Definimos el complemento de G , denotado por \bar{G} , como la gráfica tal que:

1. $V(\bar{G}) = V(G)$,
2. x es adyacente a y en \bar{G} si y sólo si x no es adyacente a y en G .

La figura 1.37 nos muestra un ejemplo del complemento de una gráfica.

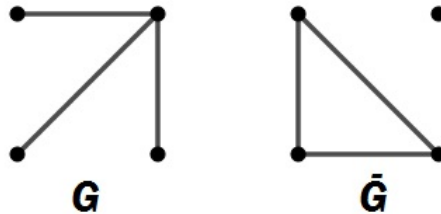


figura 1.37 Ejemplo del complemento de una gráfica.

Definición 1.6.1.29 Sean G_1 y G_2 dos gráficas tal que $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$. Definimos la **suma** de G_1 con G_2 , que se denota por $G_1 + G_2$, como la gráfica tal que:

1. $V(G_1 + G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$;
2. $A(G_1 + G_2) = A(G_1) \cup A(G_2) \cup \{(x, y) : x \in V(G_1) \text{ y } y \in V(G_2)\}$.

Por ejemplo, la suma de \bar{K}_2 con \bar{K}_4 (véase figura 1.38) es:

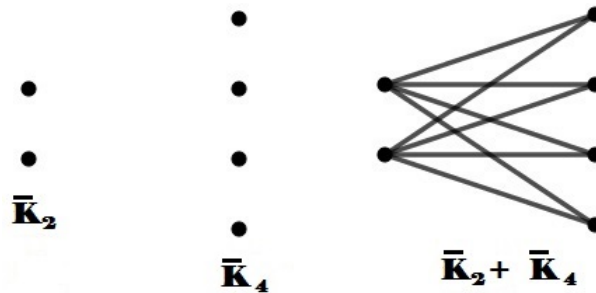


figura 1.38 Suma de \bar{K}_2 con \bar{K}_4 .

Definición 1.6.1.30 Sean G_1 y G_2 dos gráficas tal que $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$. Definimos el **producto** de G_1 con G_2 , denotado por $G_1 \times G_2$, como la gráfica tal que:

1. $V(G_1 \times G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$ (producto cartesiano).
2. (x_1, x_2) es adyacente a (y_1, y_2) en $G_1 \times G_2$ si y sólo si $x_1 = y_1$ y x_2 es adyacente a y_2 en G_2 o $x_2 = y_2$ y x_1 es adyacente a y_1 en G_1 (ver figura 1.39).

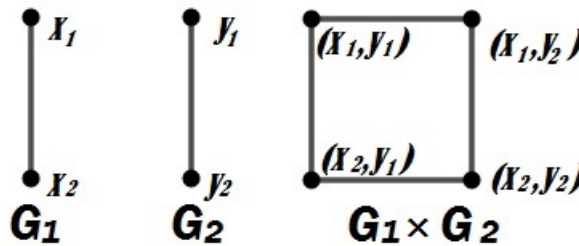


figura 1.39 Ejemplo del producto de dos gráficas.

Definición 1.6.1.31 Sea G una gráfica. A G le asociamos una nueva gráfica llamada **gráfica de líneas**, denotada por $L(G)$ tal que:

1. $V(L(G)) = A(G)$;
2. a es adyacente a b en $L(G)$ si y sólo si a y b tienen un vértice extremo en común en G .

La figura 1.40 nos muestra un ejemplo de una gráfica G y su gráfica de líneas $L(G)$.

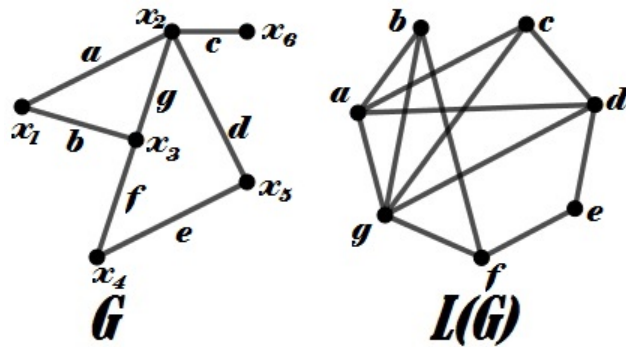


figura 1.40 G y su gráfica de líneas.

Así como la gráfica de Petersen, existen otras gráficas famosas. A continuación se presentan en la figura 1.41 los cinco sólidos platónicos vistos como gráficas, que serán usados en la tesis.

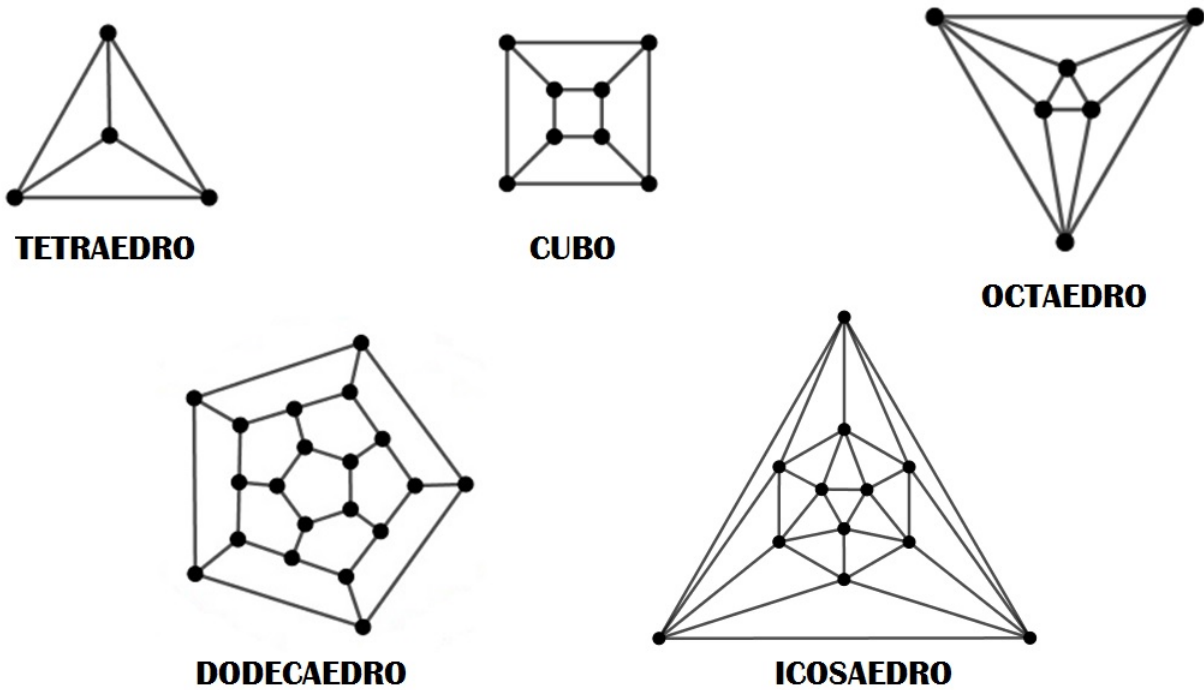


figura 1.41 Sólidos platónicos.

Definición 1.6.1.32 Sean G una gráfica y S un subconjunto de $V(G)$. Definimos $G \setminus S$ como la subgráfica de G que se obtiene al quitar los elementos de S .

Por ejemplo, la figura 1.42 nos muestra $G \setminus \{a, b\}$.

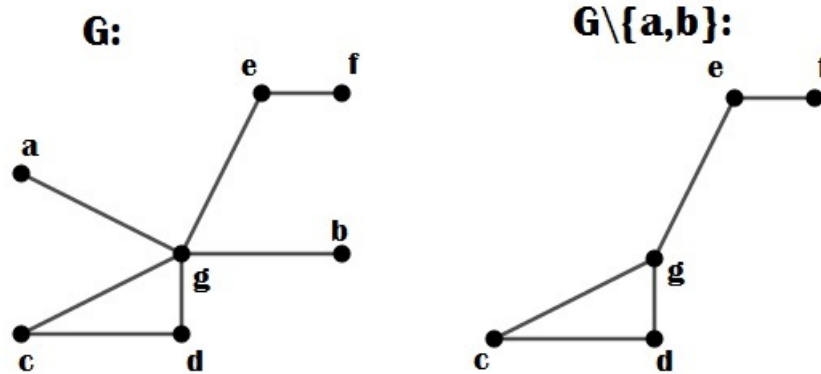


figura 1.42 Ejemplo de como quitar vértices.

Definición 1.6.1.33 Sean G una gráfica y B un subconjunto de $A(G)$. Definimos $G \setminus B$ como la subgráfica de G que se obtiene al quitar los elementos de B .

Por ejemplo, $G \setminus \{a, d, c\}$ (figura 1.43).

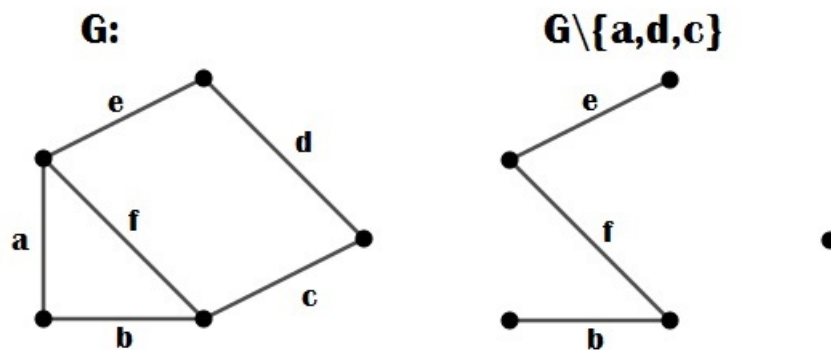


figura 1.43 Ejemplo de como quitar aristas.

Así como resumimos los conceptos más importantes de la teoría de gráficas para este trabajo, ahora presentaremos los conceptos más importantes de la teoría de digráficas.

1.6.2. Resumen de los conceptos básicos sobre digráficas

Definición 1.6.2.1 Una **digráfica** D es una pareja ordenada $(V(D), F(D))$ donde $V(D)$ es un conjunto de objetos finito y no vacío, llamados **vértices**, y $F(D)$ es un conjunto de pares ordenados de distintos elementos de $V(D)$, llamados **flechas**. A una flecha la representaremos de la forma (a, b) , donde a es llamado **vértice inicial** y b **vértice final**. Diremos que una digráfica D es de orden m y tamaño n si $|V(D)|=m$ y $|F(D)|=n$.

La figura 1.44 muestra la representación geométrica de la digráfica D_1 que tiene como conjunto de vértices $V(D_1)=\{a, b, c, d, e, f, h, i, j, k\}$ y al conjunto de flechas $F(D_1)=\{(a, d), (b, a), (f, a), (c, b), (b, j), (e, c), (i, c), (d, i), (h, d), (f, e), (h, e), (k, f), (j, h), (j, k), (i, k)\}$.

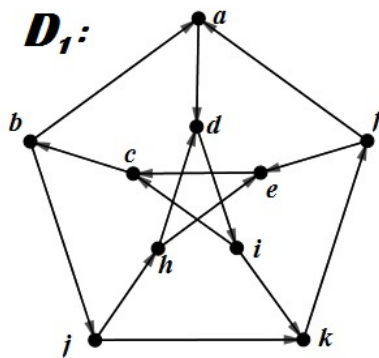


figura 1.44 Ejemplo de una digráfica.

Definición 1.6.2.2 Dos vértices u y v son **adyacentes** si $(u, v) \in F(D)$ o $(v, u) \in F(D)$. Por ejemplo los vértices h y e son adyacentes en D_1 .

Definición 1.6.2.3 Sea D una digráfica, y $v \in V(D)$, definimos el conjunto de los **vecinos exteriores** de v , denotado $\Gamma^+(v)$, $\{x \in V(D) : (v, x) \in F(D)\}$.

Definición 1.6.2.4 Sea $x \in V(D)$ el **grado exterior** de x (exgrado), denotado por $\delta^+(x)$, se define como $\delta^+(x)=|\Gamma^+(x)|$.

Definición 1.6.2.5 Sea D una digráfica, y $v \in V(D)$, definimos el conjunto de los **vecinos interiores** de v , denotado $\Gamma^-(v)$, $\{x \in V(D) : (x, v) \in F(D)\}$.

Definición 1.6.2.6 Sea $x \in V(D)$ el **grado interior** de x (ingrado), denotado por $\delta^-(x)$, se define como $\delta^-(x)=|\Gamma^-(x)|$.

Si $A \subseteq V(D)$, podemos definir:

1. $\Gamma^+(A)=\{x \in V(D) : (v, x) \in F(D) \text{ para todo } v \in A\}$.
2. $\Gamma^-(A)=\{x \in V(D) : (x, v) \in F(D) \text{ para todo } v \in A\}$.

Definición 1.6.2.7 Sea $x \in V(D)$, el grado de x , denotado por $\delta(x)$, se define como:

$$\delta(x) = \delta^+(x) + \delta^-(x).$$

Por ejemplo, para el vértice d en D_1 , su conjunto de vecinos exteriores es $\Gamma^+(d) = \{i\}$ y su conjunto de vecinos interiores es $\Gamma^-(d) = \{a, h\}$, así $\delta^+(d)=1$, $\delta^-(d)=2$ y $\delta(d)=3$.

Definición 1.6.2.8 Una **subdigráfica** H de una digráfica D , es una digráfica tal que $V(H) \subseteq V(D)$ y $F(H) \subseteq F(D)$.

Consideremos la siguiente digráfica:

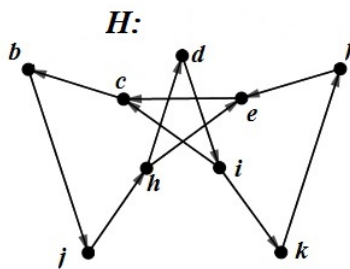


figura 1.45 Ejemplo de una subdigráfica.

H es una subdigráfica de la digráfica D_1 pues $V(H) = \{b, c, d, e, f, h, i, j, k\} \subseteq V(D_1)$ y $F(H) = \{(c, b), (b, j), (e, c), (i, c), (d, i), (h, d), (f, e), (h, e), (k, f), (j, h), (j, k), (i, k)\} \subseteq F(D_1)$.

Definición 1.6.2.9 Un **camino dirigido** $C = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ es una sucesión de vértices tal que $a_i = (x_{i-1}, x_i) \in F(D)$, con $i = 1, \dots, n$.

Por ejemplo $C = (a, d, i, k, f)$ es un camino dirigido en la figura 1.44.

Definición 1.6.2.10 Un **camino no dirigido** $C = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ es una sucesión de vértices tal que $a_i = (x_{i-1}, x_i) \in F(D)$ o $a_i = (x_i, x_{i-1}) \in F(D)$, con $i \in \{1, \dots, n\}$.

Por ejemplo $C_2 = (a, d, h, j, k, f)$ es un camino no dirigido en la figura 1.44.

Definición 1.6.2.11 Un camino dirigido $C = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ es **cerrado** si $x_0 = x_n$.

Definición 1.6.2.12 Una **trayectoria dirigida** es un camino dirigido que no repite vértices.

Definición 1.6.2.13 Un **ciclo dirigido** C es un camino dirigido cerrado que tiene al menos dos flechas distintas, y sólo repite el vértice inicial y el final.

Al igual que en gráficas, podemos pensar que a un camino dirigido le corresponde una longitud.

Definición 1.6.2.14 Sea $C=(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ un camino dirigido. La longitud de C , que se denota por $\ell(C)$, es n .

Por ejemplo la longitud de $C = (a, d, i, k, f)$ es 4.

Definición 1.6.2.15 Sean D una digráfica y $\{u, v\}$ un subconjunto de $V(D)$. La distancia de u a v , denotada por $d(u, v)$, se define como:

$$d(u, v) = \text{mín}\{\ell(T) : T \text{ es una } uv\text{-trayectoria dirigida en } D \}.$$

Si no existiera un camino dirigido entre u y v definiríamos $d(u, v) = \infty$.

Veamos que la distancia en digráficas no siempre cumple con ser simétrica; es decir, $d(x, y) = d(y, x)$ para dos vértices x y y (véase figura 1.46).

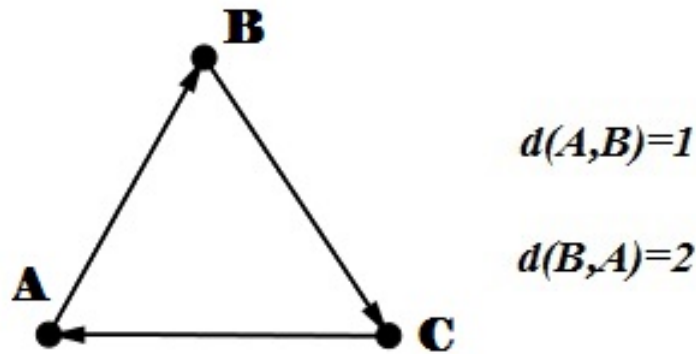


figura 1.46 Digráfica que nos muestra que distancia no es simétrica.

Los siguientes conceptos no fueron introducidos en ningún acertijo, sin embargo se harán uso de ellos en el capítulo 3, por lo que es importante enlistarlos.

Definición 1.6.2.16 Sea D una digráfica, D es una **digráfica completa** si para todo subconjunto $\{x, y\}$ de $V(D)$, (x, y) y (y, x) pertenecen a $F(D)$.

Definición 1.6.2.17 Sea D una digráfica, D es una **digráfica semicompleta** si para todo subconjunto $\{x, y\}$ de $V(D)$, (x, y) o (y, x) pertenece a $F(D)$.

Definición 1.6.2.18 Sea D una digráfica, D es una **torneo** si D es una digráfica semicompleta tal que si $(x, y) \in F(D)$, entonces $(y, x) \notin F(D)$.

La figura 1.47 nos muestra un ejemplo de los conceptos anteriores.

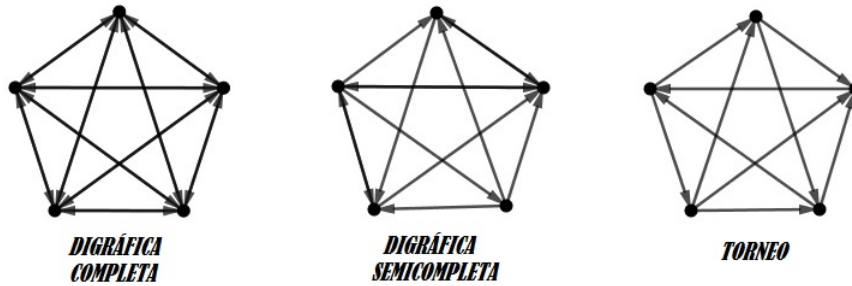


figura 1.47 Ejemplos de digráfica completa, semicompleta y torneo.

Definición 1.6.2.19 Sean D una digráfica y $v \in V(D)$. Decimos que v es un **pozo** si $\delta^+(v)=0$.

Definición 1.6.2.20 Sean D una digráfica y $v \in V(D)$. Decimos que v es **fuelle** si $\delta^-(v)=0$.

Por ejemplo, v_1 es pozo y el vértice v_5 es fuente en la digráfica de la siguiente figura.

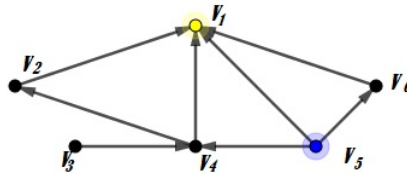


figura 1.48 Ejemplo de un pozo y una fuente.

Definición 1.6.2.21 Sea D una digráfica. D es **transitiva** si para tres vértices distintos x, y y z tales que si $(x, y) \in F(D)$ y $(y, z) \in F(D)$ entonces $(x, z) \in F(D)$. Por ejemplo, la digráfica de la figura 1.49 es transitiva.

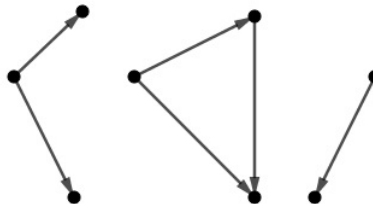


figura 1.49 Ejemplo de una digráfica transitiva.

Definición 1.6.2.22 Una digráfica D es **bipartita** si existe una partición de $V(D)$ en dos conjuntos V_1 y V_2 tal que toda flecha (x, y) de D , $x \in V_1$ y $y \in V_2$ o $x \in V_2$ y $y \in V_1$ (ver figura 1.50).

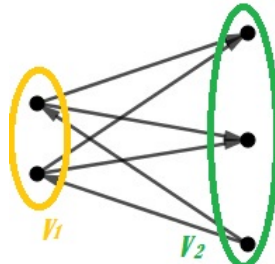


figura 1.50 Ejemplo de una digráfica bipartita.

Definición 1.6.2.23 Sea D una gráfica. A D le asociamos una nueva digráfica llamada **digráfica de líneas**, denotada por $L(D)$ tal que:

1. $V(L(D)) = F(D)$;
2. (a, b) esta en $F(L(D))$ si y sólo si el vértice final de a es el vértice inicial en b en D .

La figura 1.51 nos muestra un ejemplo de una digráfica D y su digráfica de líneas $L(D)$.

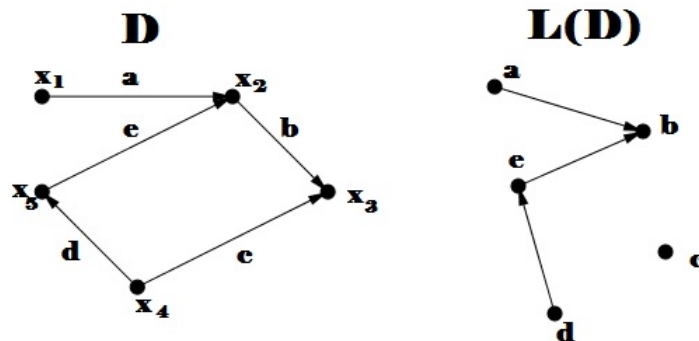


figura 1.51 D y su digráfica de líneas.

Capítulo 2

Juegos sobre la historia de Atila

A principios del siglo V el Imperio huno, comandado por el rey Ruga, se consolidó como uno de lo más fuertes y extensos de Europa. Después de su muerte, sus sobrinos Atila y Bleda toman en conjunto el poder como jefes de los hunos. Años más tarde Bleda muere en una cacería en la cual salió acompañado de su hermano. Se cree por muchos historiadores que Atila asesinó a su hermano para tener el poder absoluto.

Los hunos se caracterizaban por sus caras anchas, por ser crueles, desleales y por tener una obsesión por el oro. Todo esto provocaba que el ejército de Atila sólo tuviera un objetivo: la destrucción.

El ejército huno era tan temido que incluso el imperio Romano se veía en la necesidad de pagar las exigencias de Atila para preservar la paz. Al principio los hunos fueron contratados por los romanos como mercenarios para reprimir las revueltas internas, pero con el paso de los años, los hunos obtuvieron más influencia en Roma. Tanta fue que muchos de ellos llegaron a tener importantes cargos en la corte romana.

En el año 451 Atila recibe una carta de Honoria, hermana del emperador romano, en dicha carta solicita su protección, ya que es controlada por su hermano y es obligada a casarse con un viejo senador de Constantinopla llamado Bassus Herculanus. Atila malinterpreta el mensaje y cree que rescatando a Honoria podrá casarse con ella. En consecuencia emprende un viaje hacia Roma. En su paso, va dejando pueblos saqueados y destruidos. Según el historiador Procopio, fue el papa León I quien consiguió disuadir a Atila de sus intenciones convenciéndolo de que Honoria había muerto. Además, le ofreció un gran botín por retirarse. Dos años más tarde Atila muere en la noche de celebración de su última boda, por una misteriosa hemorragia nasal [15].

En este capítulo se abordarán dos juegos sobre el tablero de ajedrez con base en la historia anterior. En el primer juego Atila, que será representado por la pieza del caballo, emprenderá su viaje por el tablero de ajedrez para rescatar a Honoria, que será representada por la pieza de la reina, y regresará al lugar donde partió. El juego es atribuido al matemático Claude Berge. El segundo es una variante del anterior, ahora Bassus Herculanus y Atila se enfrentan

en una carrera en el tablero para rescatar a Honoria. En ambos juegos la conexidad de la gráfica asociada jugará un papel fundamental para saber cuando podemos encontrar una solución.

2.1. Primer juego: Atila el cazador

El siguiente juego es unipersonal. Se recomienda tener como material un tablero de ajedrez, 64 cuadros rojos del mismo tamaño que los del tablero, la reina negra y el caballo blanco. En caso de no tener estos materiales, se puede desarrollar el juego en un tablero dibujado de 8×8 . Se colocan algunos cuadros rojos o se pintan algunos cuadros de color rojo sobre el tablero de ajedrez o el tablero dibujado, respectivamente. Posteriormente se ponen en cualquier casilla que no es de color rojo, la pieza del caballo blanco, que representa a Atila, y en otra la reina negra, que representa a Honoria. El objetivo del juego es que el caballo blanco rescate a la reina negra desplazándose sobre los cuadros del tablero para que llegue a ella y regrese al campamento de donde partió.

Reglas del juego

1. Pintar arbitrariamente de rojo algunos cuadros del tablero (max.62), a dichos cuadros les llamaremos “cuadros quemados”. Posteriormente colocar en dos cuadros que no fueron quemados, el caballo blanco y la reina negra.

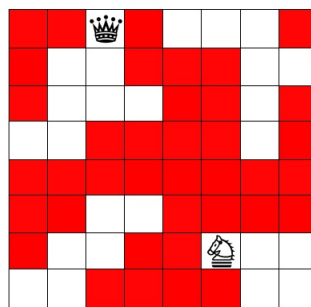


figura 2.1 Ejemplos de cuadros quemados y colocación de las piezas.

2. El jugador sólo puede manipular a Atila; es decir, a la pieza del caballo, y sus movimientos serán los mismos que tiene en el ajedrez: describiendo una L (véase figura 2.2):

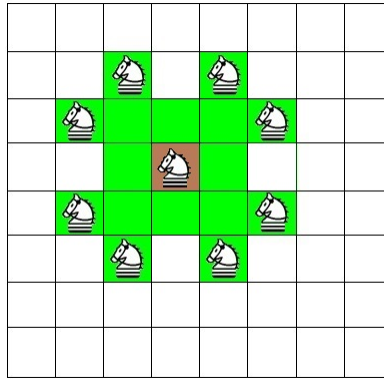
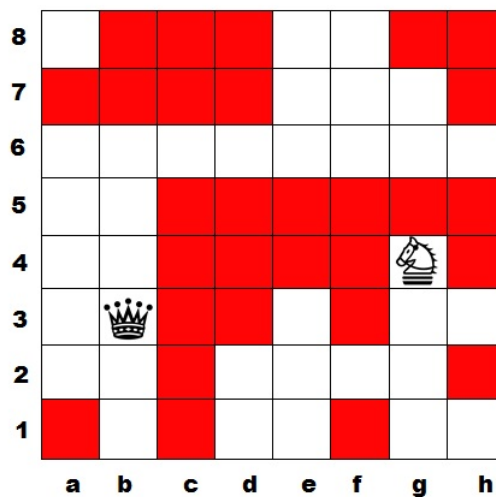


figura 2.2 Movimientos del caballo.

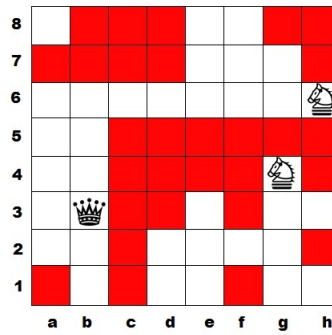
3. Atila no puede usar los cuadros quemados ni los cuadros por los que ya ha pasado, pues de acuerdo a la historia, él destruía todo a su paso.
4. El jugador gana si logra que Atila rescate a Honoria y la lleve a su campamento; es decir, si encuentra un recorrido con el caballo hacia la reina y otro de vuelta hacia donde originalmente partió.

Ejemplo del Juego:

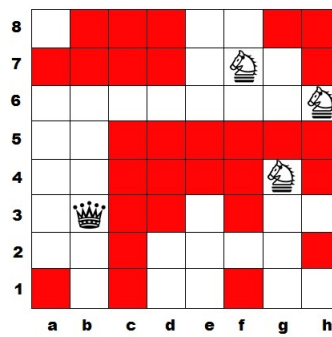
Consideremos el tablero con la siguiente coloración de cuadros quemados y la reina ubicada en *b3* y el caballo en *g4*:



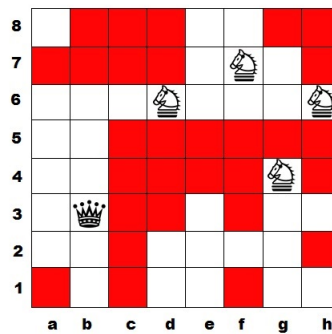
Como primer paso movemos el caballo hacia $h6$.



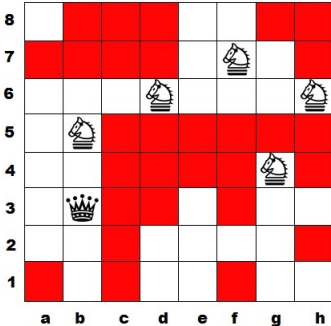
Ahora movemos el caballo hacia $f7$.



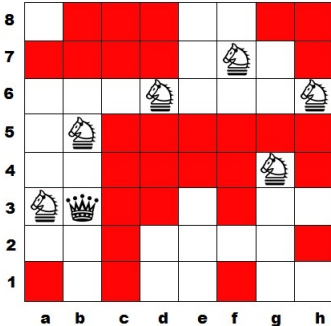
Luego hacia $d6$.



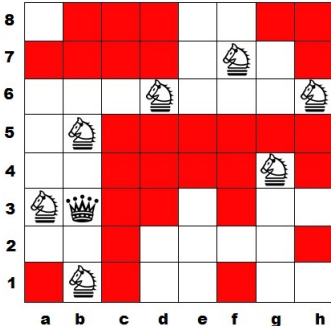
Ahora movemos el caballo hacia *b5*.



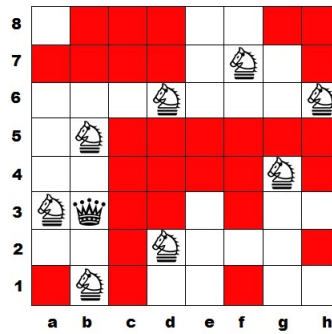
Movemos el caballo hacia *a3*.



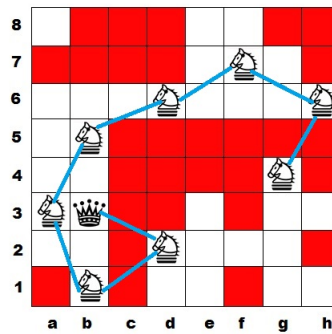
Posteriormente hacia *b1*.



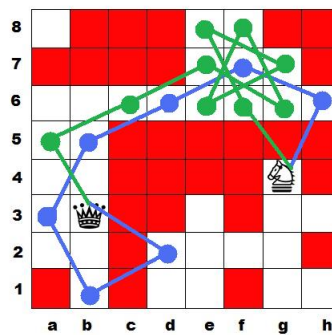
Nos movemos hacia $d2$.



Así, con el siguiente movimiento llegaríamos hacia $b3$. Por lo que tendríamos el siguiente camino hacia Honoria:



A continuación se ilustra de color verde el camino de regreso:



En el ejemplo anterior se ilustran tanto el camino de ida y el de vuelta. Sin embargo, puede darse el caso donde los cuadros quemados tengan bloqueado el paso del caballo, por ejemplo en la figura 2.3 el camino se encuentra bloqueado desde el primer movimiento, por lo que Atila no tendría por donde moverse, y así no habría solución.

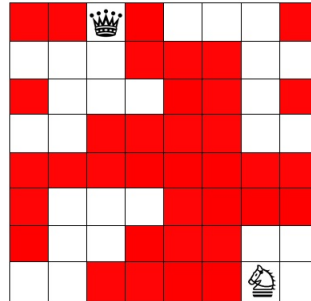


figura 2.3 Ejemplo de un tablero coloreado que no tiene solución.

En general, ¿cómo podríamos saber si hay solución? Comencemos con asociarle al juego una gráfica para posteriormente definir los conceptos necesarios que nos ayudarán a resolver el problema.

2.1.1. Modelando el juego con teoría de gráficas

Veamos que el juego se desarrolla sobre los cuadros del tablero que no fueron quemados, naturalmente podemos pensar que los vértices de la gráfica que modela el juego son dichos cuadros. Dado que los vértices deben tener algún nombre o etiqueta, lo más sencillo será enumerar todos los cuadros del tablero:

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

figura 2.4 Enumeración de los cuadros del tablero de ajedrez.

Las reglas nos obligan a movernos sobre los cuadros que no fueron pintados de rojo, por lo que los vértices de la gráfica asociada serán de la siguiente forma:

$$V(G)=\{x : x \text{ no es un cuadro quemado y } x \text{ es un número entero entre } 1 \leq x \leq 64 \}.$$

Así, $(x, y) \in A(G)$, con x y y dos vértices de G , si podemos pasar del cuadro x al y con el movimiento del caballo. Notemos que la relación esta bien definida ya que si pasamos de x a y , también implica, por el movimiento en L que se describió, que de y vayamos a x .

Veamos un ejemplo, consideremos los cuadros quemados que fueron tachados en el tablero de la figura 2.5.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

figura 2.5 Cuadros quemados.

Así tendríamos que $V(G)=\{1, 5, 6, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 33, 34, 39, 41, 42, 45, 47, 48, 49, 50, 52, 53, 54, 55, 58, 60, 61, 63, 64\}$, respetando todas las adyacencias la gráfica asociada sería la siguiente:

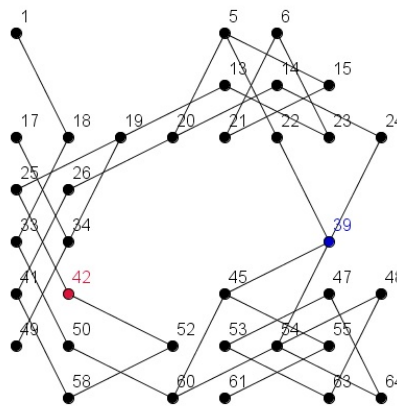


figura 2.6 Grafica asociada al ejemplo.

La solución en la gráfica asociada quedó determinada por los siguientes caminos (véase figura 2.7).

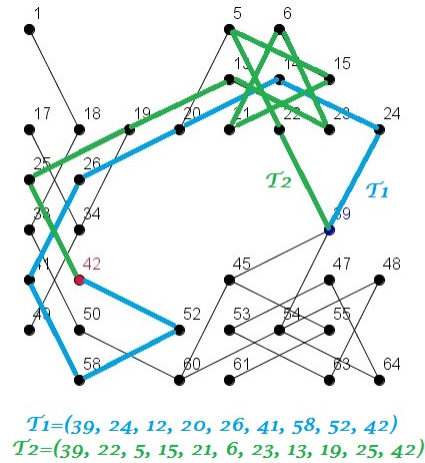


figura 2.7 Caminos que dan solución.

Veamos que los caminos que se buscan son dos trayectorias, y tienen la peculiar característica de que sólo tienen en común el vértice inicial y el vértice final en la sucesión. Cuando dos trayectorias cumplen esto se llaman **trayectorias internamente ajenas**.

Definición 2.1.1.1 Sean G una gráfica y $\{x, y\} \subseteq V(G)$. Si existen T_1 y T_2 dos xy -trayectorias tal que $V(T_1) \cap V(T_2) = \{x, y\}$, entonces decimos que T_1 y T_2 son dos xy -trayectorias internamente ajenas.

Ahora analicemos las características debe tener la gráfica asociada para que tenga dichas trayectorias. Primero que nada observemos que la reina y el caballo deben estar conectados por un camino (véase figura 2.8).

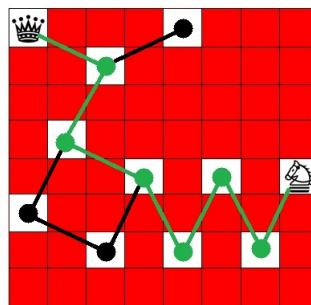


figura 2.8 Camino entre la reina y el caballo.

Esta idea nos permite dar un concepto muy importante sobre el cual se basa este capítulo: la conexidad. Si para cualquier par de vértices en una gráfica, tenemos que existe un camino entre ellos, entonces la gráfica es llamada **gráfica conexa**.

Definición 2.1.1.2 Una gráfica G es **conexa** si para todo subconjunto $\{x, y\}$ de $V(G)$ existe un xy -camino. La gráfica de la figura 2.9 es un ejemplo de una gráfica conexa.

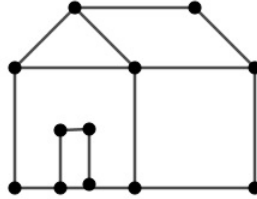


figura 2.9 Ejemplo de una gráfica conexa.

Con base en lo anterior podemos definir lo que es una **gráfica inconexa**.

Definición 2.1.1.3 Una gráfica G es **inconexa** si existe un subconjunto $\{x, y\}$ de $V(G)$ tal que no existe un xy -camino.

La siguiente figura nos muestra un ejemplo de una gráfica inconexa asociada al tablero de la figura 2.10.

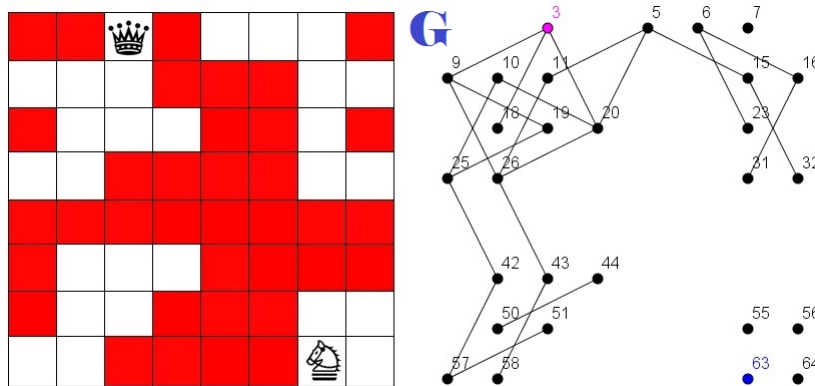


figura 2.10 Ejemplo de una gráfica inconexa.

Veamos que hay vértices y aristas en algunas gráficas conexas que al eliminarlos obtenemos una gráfica inconexa. Con base en esto podemos dar otros conceptos importantes:

1. Si una gráfica G es conexa y tiene un vértice v tal que $G \setminus \{v\}$ es una gráfica inconexa, entonces v es llamado **vértice de corte**.

2. Si una gráfica G es conexa y tiene una arista a tal que $G \setminus \{a\}$ es una gráfica inconexa entonces a es llamada **punto**.

En la gráfica de la figura 2.11 tenemos que el vértice 18 y la arista (1,18) son ejemplos de vértice de corte y de puente, respectivamente.

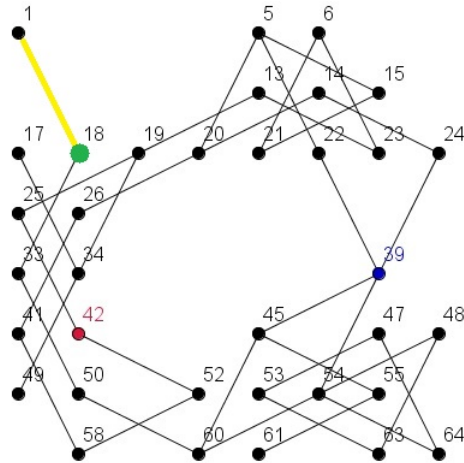


figura 2.11 Ejemplos de vértice de corte y puente.

Observación: Sean K_n la gráfica completa de n vértices y S un suconjunto de $V(K_n)$. Notemos que $K_n \setminus S$ es una gráfica conexa para todo subconjunto S de $V(K_n)$, ya que al quitar este conjunto de vértices obtenemos una gráfica completa.

Por otro lado, si quitar un vértice no fuera suficiente para que de una gráfica no completa y conexa se obtenga una gráfica inconexa, podríamos buscar el mínimo número de vértices que son necesarios para obtenerla.

Definición 2.1.1.4 Sea G una gráfica. **La conexidad puntual** de G , denotada por $k(G)$, se define como el mínimo número de vértices que al quitarlos se obtiene una gráfica inconexa o K_1 .

Cuando la conexidad puntual de una gráfica es mayor o igual a dos, es decir, $k(G) \geq 2$, las gráficas reciben el nombre de **gráficas 2-conexas**.

La figura 2.12 nos muestra un ejemplo de una gráfica 2-conexa, ya que G no tiene vértices de corte y $G \setminus \{a, b\}$ es inconexa tenemos que $k(G)=2$.

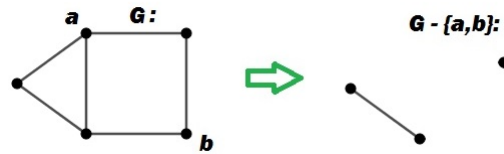


figura 2.12 Ejemplo de una gráfica 2-conexa.

Los conceptos mencionados anteriormente nos han servido para dos cosas: la primera es saber que lo que necesitamos encontrar en la gráfica asociada al juego son dos trayectorias internamente ajenas, la segunda es conocer la definición de gráficas 2-conexas, ya que una caracterización de éstas será lo que nos determinará si existen las dos trayectorias. Antes de trabajar con este resultado veamos algunos lemas y teoremas importantes.

Lema 2.1.1.1 Sean G una gráfica y $\{x, y\}$ un subconjunto de $V(G)$. Si existe un xy -camino de longitud l en G entonces existe una xy -trayectoria de longitud l a lo más en G .

Demostración: Consideremos todos los xy -caminos en G . Sea $T=(x = x_0, x_1, \dots, x_k = y)$ el xy -camino de menor longitud. Tenemos que $k \leq l$.

Afirmación: Aseguramos que T es una xy -trayectoria.

Supongamos que T no es una xy -trayectoria, entonces eso implica que se repite al menos un vértice en T . Supongamos sin pérdida de generalidad que $x_i = x_j$ para algún i y j tal que $0 \leq i < j \leq k$. Si quitamos los vértices $\{x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_j\}$ de T podemos definir a T_1 como un xy -camino:

$$T_1 = (x, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i = x_j, x_{j+1}, \dots, x_k = y).$$

Por construcción la longitud de T_1 es menor que k , lo cual es imposible pues T era el xy -camino de menor longitud. Por lo tanto T es una xy -trayectoria. ■

Con base en lo anterior, ahora podemos hacer la siguiente observación.

Observación: Si G es una gráfica conexa, entonces para todo subconjunto $\{x, y\}$ de $V(G)$, existe una xy -trayectoria.

Lema 2.1.1.2 Sean G una gráfica conexa y $a \in A(G)$. Si a está en un ciclo entonces $G \setminus \{a\}$ es conexa.

Demostración: Sean G una gráfica conexa y $a \in A(G)$ tal que $a \in A(C)$ donde C es un ciclo.

Por demostrar que $G \setminus \{a\}$ es conexa; es decir, que para todo subconjunto $\{x, y\}$ de $V(G \setminus \{a\})$ existe un xy -camino.

Sea $\{x, y\}$ un subconjunto de $V(G \setminus \{a\})$, como $V(G \setminus \{a\}) = V(G)$ tenemos que $\{x, y\} \subseteq V(G)$. Puesto que G es conexa existe una xy -trayectoria $T=(x = x_0, x_1, \dots, x_n = y)$.

Caso (i): a no está en $A(T)$.

Si a no está en $A(T)$, entonces T es una xy -trayectoria en $G \setminus \{a\}$.

Caso (ii): a está en $A(T)$.

Si a está en $A(T)$, entonces podemos suponer que $a = (x_j, x_{j+1})$ con $j \in \{0, \dots, n - 1\}$. Sabemos que $a \in A(C)$. Consideremos $T_1=(x, T, x_j) \cup (x_j, C - a, x_{j+1}) \cup (x_{j+1}, T, x_n = y)$. Así, T_1 es una xy -camino en $G \setminus \{a\}$ (véase figura 2.13).

Por lo tanto $G \setminus \{a\}$ es conexa. ■

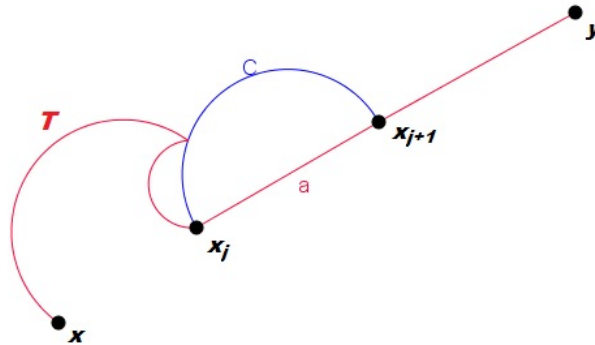


figura 2.13 Camino T_1 .

Observación: Del lema 2.1.1.2 concluimos que si a es puente entonces a no está en un ciclo de G .

Lema 2.1.1.3 Sean G una gráfica conexa con al menos tres vértices y $a \in A(G)$. Si a es puente de G , entonces G tiene al menos un vértice de corte.

Demostración: Sean G una gráfica conexa con al menos tres vértices y $a = (x, y) \in A(G)$ tal que a es puente. Como G tiene al menos tres vértices y es conexa entonces existe $w \in V(G)$, con $w \neq x, w \neq y$ tal que w es adyacente a x o w es adyacente a y . Sin pérdida de generalidad supongamos que w es adyacente a x .

Por demostrar que x es un vértice de corte.

Supongamos que no lo es, entonces $G \setminus \{x\}$ es conexa, esto implica que existe una wy -trayectoria que no pasa por x . Definamos a T como dicha trayectoria. Ahora consideremos el camino cerrado $C=(w, T, y) \cup (y, x) \cup (x, w)$. Por construcción C es un ciclo que contiene a a , lo cual es una contradicción a la observación anterior. La contradicción vino de suponer que x no era vértice de corte (véase en la figura 2.14).

Por lo tanto x es un vértice de corte. ■

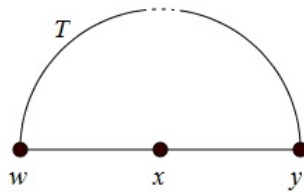


figura 2.14 x vértice de corte.

Lema 2.1.1.4 Sean G una gráfica conexa y v un vértice de G . Si v es un vértice de corte, entonces existen x y y dos vértices de G tal que toda xy -trayectoria en G pasa por v .

Demostración: Sea G una gráfica conexa. Consideremos a $v \in V(G)$ tal que v es vértice de corte. Como $G \setminus \{v\}$ es inconexa, tenemos que existen al menos dos vértices x y y tales que no hay xy -trayectoria en $G \setminus \{v\}$, pero como G es conexa tenemos que existen xy -trayectorias en G .

Por lo tanto toda xy -trayectoria pasa por v . ■

El siguiente teorema nos dará una caracterización de las gráficas 2-conexas.

Teorema 2.1.1.1 Sea G una gráfica con al menos tres vértices. G es 2-conexa si y sólo si para todo subconjunto $\{x, y\}$ de $V(G)$ existen al menos dos xy -trayectorias T_1 y T_2 internamente ajenas.

Demostración:

(i) Sea G una gráfica con al menos tres vértices. Supongamos que G es 2-conexa.

Por demostrar que para todo subconjunto $\{x, y\}$ de $V(G)$ existen al menos dos xy -trayectorias T_1 y T_2 internamente ajenas.

La demostración se hará por inducción matemática sobre la distancia de x a y : $d(x, y)$.

Base: $d(x, y)=1$. Puesto que $d(x, y) = 1$ tenemos que $a=(x, y)$ pertenece a $A(G)$.

Afirmación: $a=(x, y)$ no es puente.

Supongamos que (x, y) es puente. Como la gráfica tiene al menos tres vértices, esto implicaría por el teorema 2.1.1.3 que tiene al menos un vértice de corte. Lo cual es una contradicción pues G es 2-conexa.

Como (x, y) no es puente, por el lema 2.1.1.2 (x, y) pertenece a un ciclo $C=(x_0=x, x_1, \dots, x_{n-1}=y, x_n=x)$. Por lo tanto podemos definir a $T_1=(x, y)$ y a $T_2=(x_0=x, x_1, \dots, x_{n-1}=y)$, las cuales son dos xy -trayectorias internamente ajenas.

Hipótesis de Inducción: Sean G una gráfica con al menos tres vértices y $\{x', y'\} \subseteq V(G)$. Si la distancia $d(x', y') < k$, entonces existen al menos dos $x'y'$ -trayectorias T_1 y T_2 internamente ajenas.

Paso Inductivo: Sean x y y en $V(G)$ tales que $d(x, y) = k$.

Por demostrar que existen al menos dos xy -trayectorias S_1 y S_2 internamente ajenas:

Sea $T_1=(x, y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, y_k = y)$ la trayectoria cuya longitud es igual a k . Consideremos y_{k-1} . Tenemos que $d(x, y_{k-1}) \leq k - 1$, por hipótesis de inducción existen T_1 y T_2 dos xy_{k-1} -trayectorias internamente ajenas (véase figura 2.15). Si $y \in V(T_1) \cup V(T_2)$, entonces fácilmente se pueden encontrar dos xy -trayectorias internamente ajenas. Supongamos que y no está en $V(T_1) \cup V(T_2)$. Como G es 2-conexa tenemos que $G \setminus \{y_{k-1}\}$ es conexa. Por lo tanto existe T_3 una xy -trayectoria que no pasa por y_{k-1} . Sea u el último vértice de T_3 que interseca a $T_1 \cup T_2$, que sabemos que existe pues al menos x pertenece a $V(T_3) \cap (V(T_1) \cup V(T_2))$. Supongamos sin pérdida de generalidad que u está en T_1 . Entonces definimos:

$$S_1=(x, T_1, u) \cup (u, T_3, y)$$

$$S_2=(x, T_2, y_{k-1}) \cup (y_{k-1}, y)$$

Por construcción S_1 y S_2 son dos xy -trayectorias internamente ajenas.

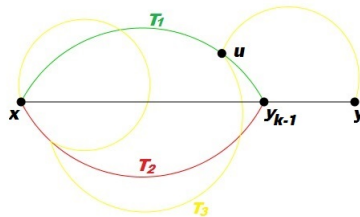


figura 2.15 S_1 y S_2 dos xy -trayectorias internamente ajenas.

(ii) Sea G una gráfica con al menos tres vértices. Supongamos que para todo subconjunto $\{x, y\}$ de $V(G)$ existen al menos dos xy -trayectorias T_1 y T_2 internamente ajenas.

Por demostrar que G es 2-conexa.

Como entre todo par de vértices existe una trayectoria tenemos que G es conexa, por lo que $k(G) \geq 1$.

Si demostramos que G no tiene vértices de corte entonces $k(G) \geq 2$, y en consecuencia G sería 2-conexa. Por demostrar que G no tiene vértices de corte.

Supongamos que G tiene al menos un vértice v de corte, por el lema 2.1.1.4 existen dos vértices x y y tales que toda xy -trayectoria en G pasa por v . Esto es una contradicción pues por hipótesis existen al menos T_1 y T_2 dos xy -trayectorias internamente ajenas.

Por lo tanto G no tiene vértices de corte, por lo que G es 2-conexa. ■

Gracias al teorema 2.1.1.1 ahora sabemos que las gráficas 2-conexas son las que nos garantizan tener al menos dos trayectorias internamente ajenas para cualquier par de vértices. Así, el juego “Atila el cazador” tiene solución si la gráfica asociada es 2-conexa.

Notemos que si no fuera 2-conexa la gráfica asociada al juego, nos basta que la reina y el caballo estén en una subgráfica de G que si sea 2-conexa. La figura 2.16 nos muestra la subgráfica 2-conexa de la gráfica de la figura 2.6 que tiene al vértice 42 (la reina) y al vértice 39 (el caballo).

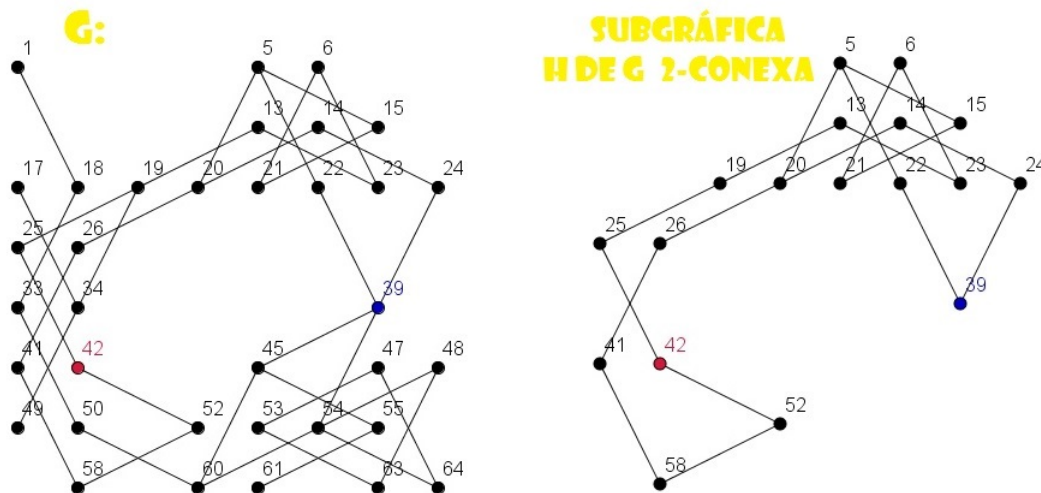


figura 2.16 Subgráfica 2-conexa.

En conclusión podemos afirmar que existirá solución si pasa alguna de las siguientes condiciones:

1. Si la gráfica que modela el problema es 2-conexa, entonces existen al menos dos trayectorias internamente ajenas entre los dos vértices donde se ubican la reina y el caballo.
2. Si la gráfica G que modela el juego no es 2-conexa pero los vértices donde se ubican la reina y el caballo pertenecen a una subgráfica 2-conexa de dicha gráfica entonces existen al menos dos trayectorias internamente ajenas entre los dos vértices.

2.2. Segundo juego: Una carrera hacia Honoria

Este juego es una variante del anterior. De igual forma se recomienda tener como material de apoyo un tablero de ajedrez, cuadros rojos del mismo tamaño que los del tablero, la reina negra y los dos caballos o en su defecto un tablero dibujado. El juego se desarrollará para dos jugadores: Atila y Bassus Herculanus, quienes parten de la misma casilla con el objetivo de llegar a donde se encuentra Honoria.

Reglas del juego

1. Pintar arbitrariamente de rojo algunos cuadros del tablero, a dichos cuadros les llamaremos “cuadros quemados”. Posteriormente colocar en dos cuadros que no fueron quemados la reina negra (Honoria), y en otra casilla el caballo blanco (Atila) junto con el caballo negro (Bassus Herculanus), figura 2.17.

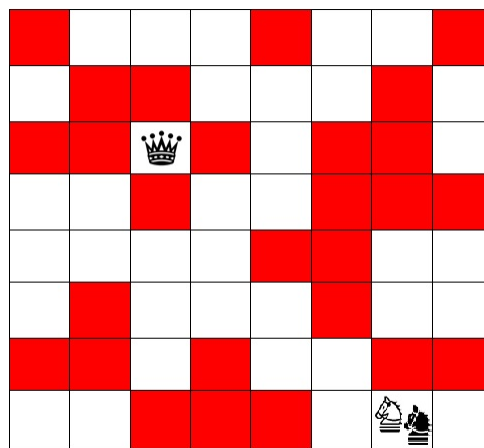


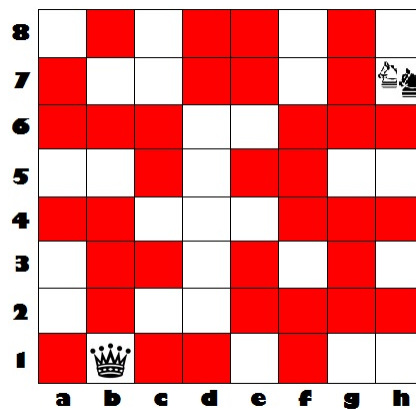
figura 2.17 Ejemplo de un tablero del juego.

2. El jugador que comience será Atila y el segundo será Bassus Herculanus. El movimiento de los caballos seguirá restringido por el que se tiene en el ajedrez; es decir, describiendo una L.

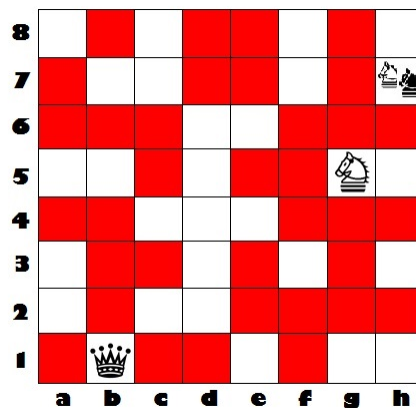
3. Ambos jugadores tomarán turnos alternadamente moviendo sólo una vez su caballo por turno.
4. Los caballos no pueden usar las casillas pintadas de rojo.
5. El primer caballo en llegar a la casilla donde se ubica la reina gana el juego.

Ejemplo del Juego:

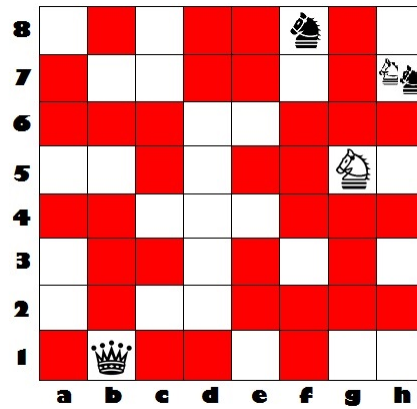
Consideremos el tablero con la siguiente coloración de cuadros quemados y la reina ubicada en $b1$ y los caballos en $h7$:



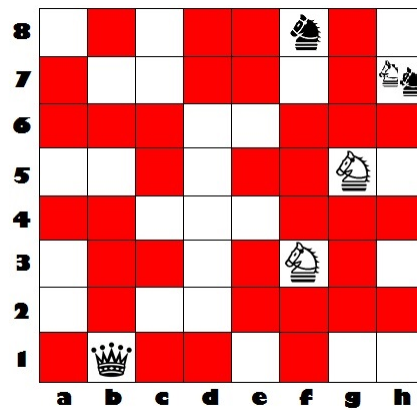
El jugador **A** toma el primer turno y mueve su caballo blanco hacia $g5$.



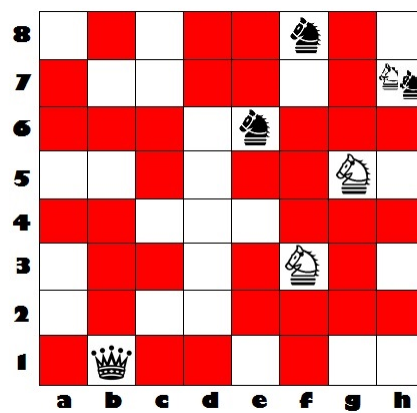
Ahora el jugador **B** mueve su caballo hacia *f8*.



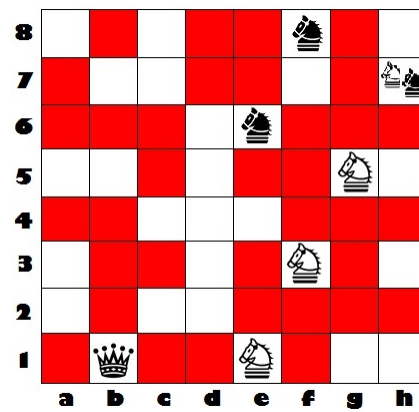
Posteriormente el jugador **A** va hacia *f3*.



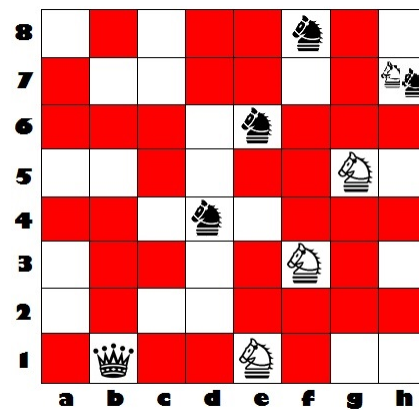
Luego **B** se mueve a la casilla *e6*.



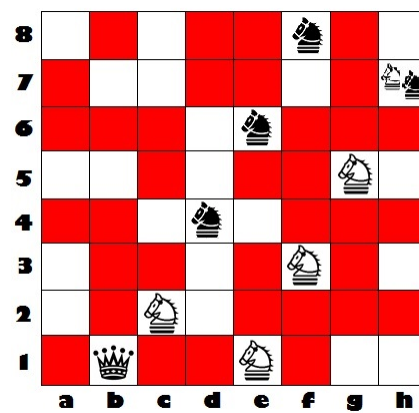
A se mueve al cuadro $e1$.



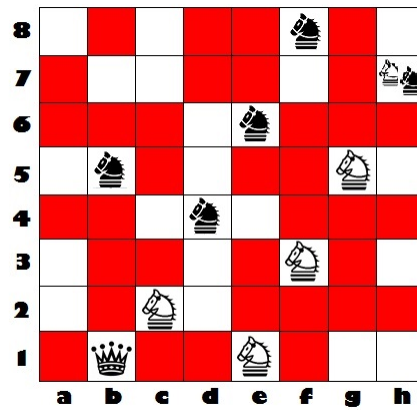
B se mueve hacia $d4$.



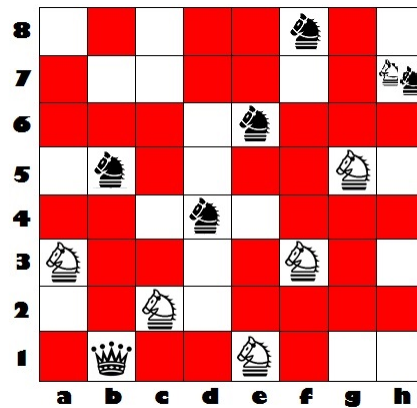
Luego A se mueve hacia $c2$.



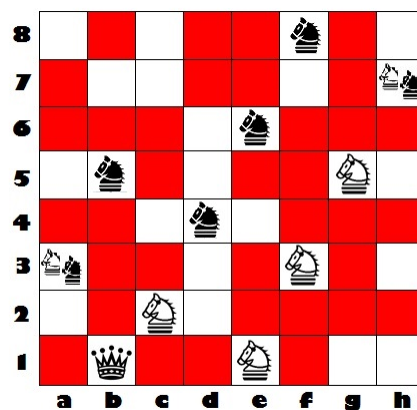
B se mueve a la casilla *b5*.



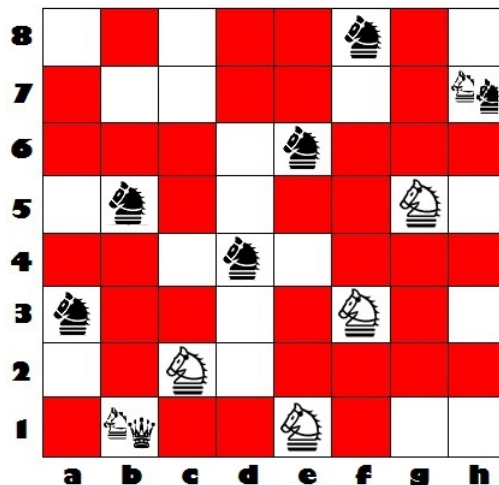
Ahora **A** se mueve al cuadro *a3*.



B decide moverse a la casilla donde está **A**, es decir, también se va a *a3*.



Finalmente **A** gana al llegar a la casilla de la reina.



Notemos que al igual que el juego de “Atila el cazador”, no siempre existirá solución, ya que los cuadros quemados pueden bloquear el paso de los caballos.

Observemos también que la gráfica asociada es la misma, por lo que los vértices son:

$$V(G) = \{x : x \text{ no es un cuadro quemado y } x \text{ es un número entero entre } 1 \leq x \leq 64 \}.$$

Así, $(x, y) \in A(G)$, con x y y dos vértices de G , si podemos pasar del cuadro x al y , o viceversa, con el movimiento del caballo.

Es importante mencionar que con base en los conceptos de conexidad que manejamos en la sección anterior, nos basta con encontrar una subgráfica conexa que contenga a los dos vértices que representan la ubicación de la reina y los dos caballos, pues aseguraríamos que al menos existe un camino. En caso de existir más, nos conviene encontrar la trayectoria de menor longitud para llegar primero a la casilla donde este la reina. A continuación presentaremos una herramienta con la cual podemos encontrar dicha trayectoria, que incluso determinará una estrategia ganadora para el jugador que empieza. Primero conozcamos los siguientes conceptos que se relacionan con dicha herramienta.

Definición 2.2.1.1: Una **gráfica ponderada** es una gráfica G a la que cada elemento de $A(G)$ se le ha asignado un número que puede representar una longitud, tiempo o incluso un costo. La gráfica de la figura 2.18 es un ejemplo de una gráfica ponderada. Al valor de la arista $a=(x, y)$ le llamaremos el **peso** de a , y lo denotaremos como $w(a)$.

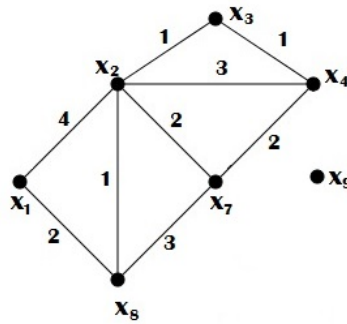


figura 2.18 Ejemplo de gráfica ponderada.

Definición 2.2.1.2: Sean G una gráfica ponderada y C un xy -camino en G . Definimos el **peso del camino** C , denotado por $w(C)$, como $w(C) = \sum_{a_i \in A(C)} w(a_i)$.

Definición 2.2.1.3: Sean G una gráfica ponderada y C_1 un xy -camino en G . Decimos que C_1 es un **camino de costo mínimo** entre x y y , si $w(C_1) = \min\{w(C) : C \text{ es un } xy\text{-camino}\}$.

La herramienta que usaremos es el **algoritmo de Dijkstra**, el cual nos permite encontrar en una gráfica ponderada, dado v un vértice fijo, el camino de costo mínimo de v a y , para todo $y \in V(G)$ distinto de v . Antes de presentarlo y de analizar para que lo necesitaremos, veamos un ejemplo de como funciona. Consideremos nuevamente la gráfica ponderada de la figura 2.18.

Sea x_1 el vértice fijo. El objetivo es encontrar el peso de un x_1x_i -camino, para todo $x_i \in V(G)$ con $i \in \{2, 3, 4, 7, 8, 9\}$. Para ello usaremos en cada vértice x_j de la gráfica G , la etiqueta temporal $(p(x_j), P(x_j))$ y la etiqueta permanente $(p(x_j), P(x_j))^*$, donde $P(x_j)$ representa el peso del x_1x_j -camino, y $p(x_j)$ es el vértice predecesor a x_j en dicho camino. Al conjunto de vecinos del vértice x_j con etiqueta temporal se lo denotará como $N_t(x_j)$. En la primera iteración etiquetaremos de forma permanente con $(-, 0)^*$ al vértice fijo ya que no hay ninguna arista en el x_1x_1 -camino, a los vértices a los cuales no haya un camino de x_1 a ellos tendrán la etiqueta permanente $(x_1, \infty)^*$ mientras que los vértices que si tienen un camino les colocaremos etiqueta temporal (x_1, ∞) . Al final de la iteracion 1, el vecino de x_1 que tenga la arista con menor peso también tendrá etiqueta permanente. Al inicio de las demás iteraciones actualizaremos las etiquetas temporales de los vecinos del último vértice s que se marco con etiqueta permanente, posteriormente al vértice x^* con etiqueta temporal mínima le cambiaremos la etiqueta a permanente.

Iteración 1. Ponemos la etiqueta permanente $(-, 0)^*$ a x_1 . Luego colocamos la etiqueta permanente $(x_1, \infty)^*$ a x_9 , ahora ponemos etiquetas temporales (x_1, ∞) a todos los vértices distintos de x_1 . Sea $s = x_1$.

Actualización de etiquetas: $N_t(x_1)=\{x_2, x_8\}$.

$$P(x_2) = \min\{\infty, 4\} = 4 \text{ y } p(x_2) = x_1.$$

$$P(x_8) = \min\{\infty, 2\} = 2 \text{ y } p(x_8) = x_1.$$

De donde $x^*=x_8$ (vértice con mínima etiqueta temporal). Marcamos $(x_1, P(x_8) = 2)$ como etiqueta permanente. Sea $s = x_8$ (figura 2.19).

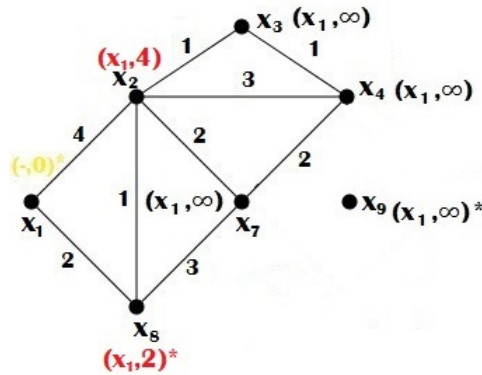


figura 2.19 Iteración 1.

Iteración 2. Actualización de etiquetas: $N_t(x_8)=\{x_2, x_7\}$.

$$P(x_2) = \min\{4, 3\} = 3 \text{ y } p(x_2) = x_8.$$

$$P(x_7) = \min\{\infty, 2 + 3\} = 5 \text{ y } p(x_7) = x_8.$$

De donde $x^*=x_2$ (vértice con mínima etiqueta temporal). Marcamos $(x_8, P(x_2) = 3)$ como etiqueta permanente. Sea $s = x_2$ (figura 2.20).

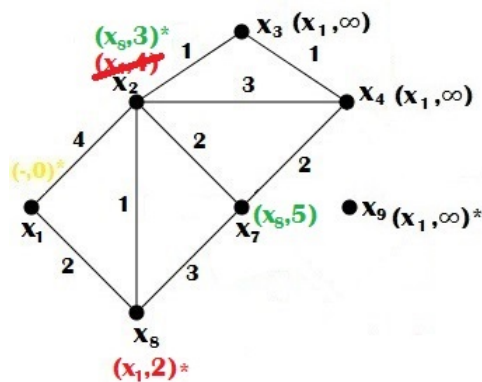


figura 2.20 Iteración 2.

Iteración 3. Actualización de etiquetas: $N_t(x_2)=\{x_3, x_4, x_7\}$.

$$P(x_3) = \text{mín}\{\infty, 3 + 1\}=4 \text{ y } p(x_3)=x_2.$$

$$P(x_4) = \text{mín}\{\infty, 3 + 3\}=6 \text{ y } p(x_4)=x_2.$$

$$P(x_7) = \text{mín}\{5, 3 + 2\}=5 \text{ y } p(x_7)=x_8 \text{ (no cambia)}.$$

De donde $x^*=x_3$ (vértice con mínima etiqueta temporal). Marcamos $(x_2, P(x_3) = 4)$ como etiqueta permanente. Sea $s = x_3$ (figura 2.21).

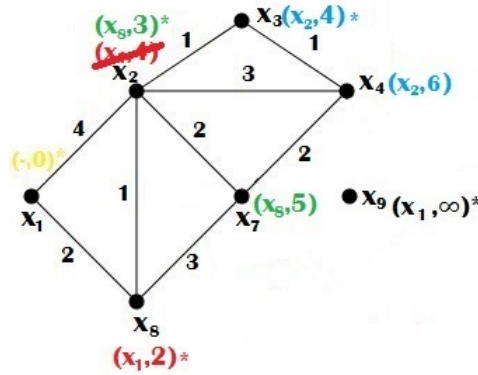


figura 2.21 Iteración 3.

Iteración 4. Actualización de etiquetas: $N_t(x_3)=\{x_4\}$.

$$P(x_4) = \text{mín}\{6, 4 + 1\}=5 \text{ y } p(x_4)=x_3.$$

De donde $x^*=x_7$ (vértice con mínima etiqueta temporal). Marcamos $(x_8, P(x_7) = 5)$ como etiqueta permanente. Sea $s = x_7$ (figura 2.22).

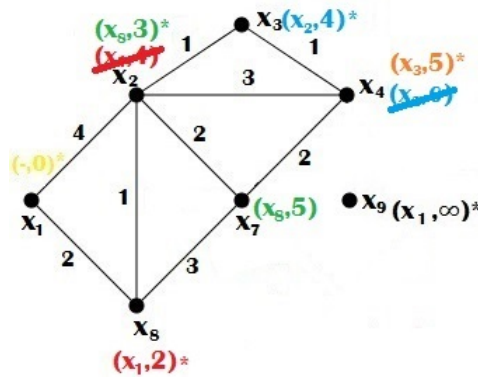


figura 2.22 Iteración 4.

Iteración 5. Actualización de etiquetas: $N_t(x_7)=\{x_4\}$.

$$P(x_4) = \min\{5, 5 + 2\} = 5 \text{ y } p(x_4) = x_3 \text{ (no cambia).}$$

De donde $x^* = x_4$ (vértice con mínima etiqueta temporal). Marcamos $(x_3, P(x_4) = 5)$ como etiqueta permanente. Como todos los vértices tiene etiqueta permanente terminamos (figura 2.23).

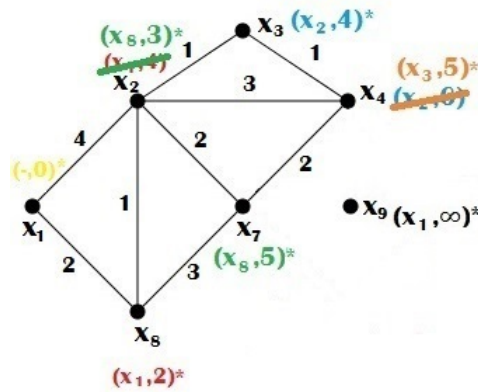


figura 2.23 Iteración 5.

Ahora, con ayuda de las etiquetas permanentes podemos construir la sucesión de vértices de un camino entre dos vértices fijos, por ejemplo, veamos el x_1x_4 -camino. Tomemos el último vértice que es x_4 , su etiqueta permanente nos dice que su predecesor en el camino es x_3 , por otro lado la etiqueta permanente de x_3 nos dice que su predecesor es x_2 , el predecesor de él es x_8 y finalmente el predecesor de x_8 es x_1 , por lo que el camino que se obtiene es $C=(x_1, x_8, x_2, x_3, x_4)$ (figura 2.24).

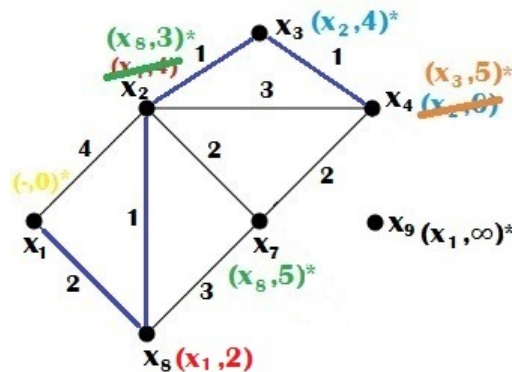


figura 2.24 Camino entre x_1 y x_4 .

Veamos ahora la descripción formal del algoritmo.

2.2.1. Algoritmo de Dijkstra

Sean G una gráfica ponderada con pesos no negativos y $v \in V(G)$. El objetivo es encontrar el peso de cada vy -camino de costo mínimo, para todo $y \in V(G)$ distinto de v .

Descripción:

1. (Iniciación de etiquetas).

Poner la etiqueta permanente $(-, 0)^*$ a v . Luego colocar las etiquetas (v, ∞) a todos los vértices distintos de v . A los vértices z tales que no exista un vz -camino en G ponerles etiquetas permanentes $(v, \infty)^*$. Si todos los vértices de G tienen etiqueta permanente, fin, en caso contrario las demás etiquetas serán temporales. Sea $s=v$.

2. (Actualización de etiquetas).

Para todo vecino x de s que tenga etiqueta temporal, actualizar etiquetas de acuerdo a:

$$P(x) = \min\{P(x), P(s) + w(s, x)\}.$$

Si $P(x)$ se modificó, hacer $p(x)=s$. Sea x^* tal que $P(x^*) = \min\{P(x) : P(x) \text{ es temporal}\}$. Si existen más de dos vértices con mínima etiqueta temporal, escoger aleatoriamente uno. Marcar la etiqueta $(p(x^*), P(x^*))$ como permanente. Sea $s=x^*$.

3. (i) (Si sólo se desea el camino de costo mínimo de v a t). Si $s = t$, terminar: $P(t)$ es el peso del st -camino de costo mínimo. Si s es distinto de t ir al paso 2.
 - (ii) (Si desea el peso de todos los sx -caminos de costo mínimo, con x distinto de s). Si todos los vértices tienen etiqueta permanente, terminar. En cualquier otro caso ir al paso 2.

Con las etiquetas permanentes que se obtuvieron del algoritmo, se puede dar la sucesión de vértices del camino C de costo mínimo entre el vértice fijo v y otro vértice y de la gráfica usando al predecesor de cada etiqueta permanente. Así $C = \{v = y_0, y_1, y_2, \dots, y_k = y\}$, donde $y_i = p(y_{i+1})$ para $i \in \{0, \dots, k-1\}$.

Justificación del algoritmo.

Primero veamos que el algoritmo termina en un número finito de iteraciones, ya que el número de vértices de la gráfica ponderada es finito. Ahora, lo que falta por demostrar es que para la iteración k , las etiquetas permanentes $(p(x), P(x))^*$, con s vértice fijo de G , cumple que el peso del camino de costo mínimo de s a x es $P(x)$.

Teorema 2.2.1.1 Sean G una gráfica ponderada y s un vértice fijo de G . Para la iteración k del algoritmo, las etiquetas permanentes $(p(x), P(x))^*$, cumple que el peso del camino de costo mínimo de s a x es $P(x)$.

Procedamos a hacer la demostración por inducción matemática sobre k .

Demostración:

Base: Sean G una gráfica ponderada y $v \in V(G)$. Al realizar la primera iteración del algoritmo pusimos la etiqueta permanente $(-, 0)^*$ a v . El peso del camino de costo mínimo de v a v es cero ya que no hay aristas en dicho camino, así el número de la etiqueta es correcto. Posteriormente tenemos a los vértices z que tienen etiqueta permanente $(v, \infty)^*$. Ya que no hay un camino de v a z la etiqueta es correcta.

Sea x^* el vecino de v que tiene la etiqueta mínima. Al final del paso 2 marcamos esa etiqueta, que es $(x^*, P(x^*) = P(v) + w(v, x^*)) = (x^*, P(x^*) = 0 + w(v, x^*)) = (x^*, P(x^*) = w(v, x^*))$, como permanente.

Tenemos que el peso del camino de costo mínimo de v a x^* es $w(v, x^*)$, pues v es adyacente a x^* , la etiqueta es correcta.

Hipótesis de Inducción: Sean G una gráfica ponderada y $s \in V(G)$. Para la iteración k los vértices t con etiquetas permanentes $(p(t), P(t))^*$ cumplen que el peso del camino de costo mínimo de s a t es $P(t)$.

Sean S el conjunto de vértices con etiquetas permanentes y S_1 el conjunto de vértices con etiquetas temporales en la iteración k .

Paso Inductivo: Por demostrar que para la iteración $k + 1$ los vértices x con etiquetas permanentes $(p(x), P(x))^*$ cumplen que el peso del camino de costo mínimo de s a x es $P(x)$.

Sea $x^* \in S_1$ el vértice con etiqueta mínima. En la iteración $k + 1$ la etiqueta de ese vértice se vuelve permanente.

Observemos que a partir de la segunda iteración vamos agregando una sola etiqueta permanente, por lo que basta demostrar que si $(p(x^*), P(x^*))^*$ es la etiqueta de x^* , el peso del camino de costo mínimo de s a x^* es $P(x^*)$.

Notemos también que x^* es adyacente al menos a algún elemento de S , ya que x^* es el vértice con etiqueta mínima en S_1 , por lo que su etiqueta debió actualizarse anteriormente.

Sea $t_2 \in S$ tal que t_2 es adyacente a x^* . Consideremos el camino C_1 de v a t_2 que se obtiene con el algoritmo, por hipótesis de inducción $P(t_2)$ representa el peso del camino C_1 de costo mínimo. Definimos a $C_2 = C_1 \cup \{x^*\}$, por construcción tenemos que C_2 contiene sólo vértices con etiqueta permanente, además por la elección de x^* concluimos que C_2 es un camino de costo mínimo cuyo peso es $P(x^*)$. ■

Observación: Si todas las aristas de la gráfica ponderada tienen el mismo peso, el camino de costo mínimo entre dos vértices coincide con ser la trayectoria de menor longitud entre los dos vértices, por lo que si realizamos el algoritmo en estas gráficas obtenemos una trayectoria de longitud mínima.

La gráfica asociada al juego “Una carrera hacia Honoria” no es una gráfica ponderada; sin embargo, si a todas las aristas les ponemos peso uno podremos aplicar el algoritmo de Dijkstra.

Veamos un ejemplo del algoritmo en el juego. Consideremos el siguiente tablero:

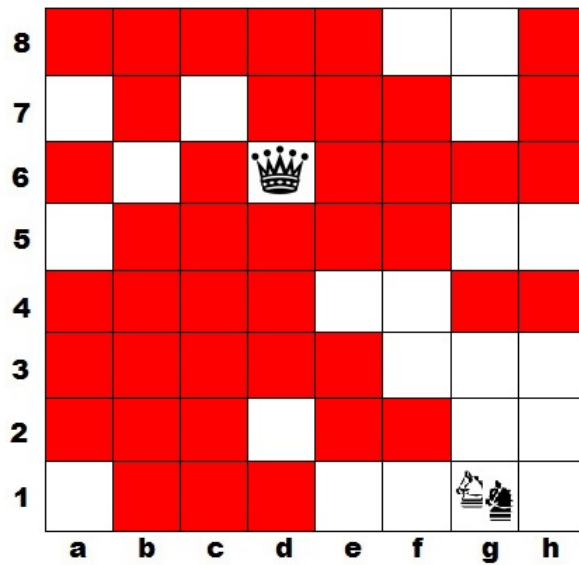


figura 2.25 Tablero que se usará para desarrollar el algoritmo.

Primero dibujemos la gráfica asociada. Enumeremos las casillas y tachemos los cuadros de rojo:

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

figura 2.26 Cuadros enumerados y tachados.

Ahora respetando las adyacencias con las casillas que no fueron tachadas tenemos la siguiente gráfica:

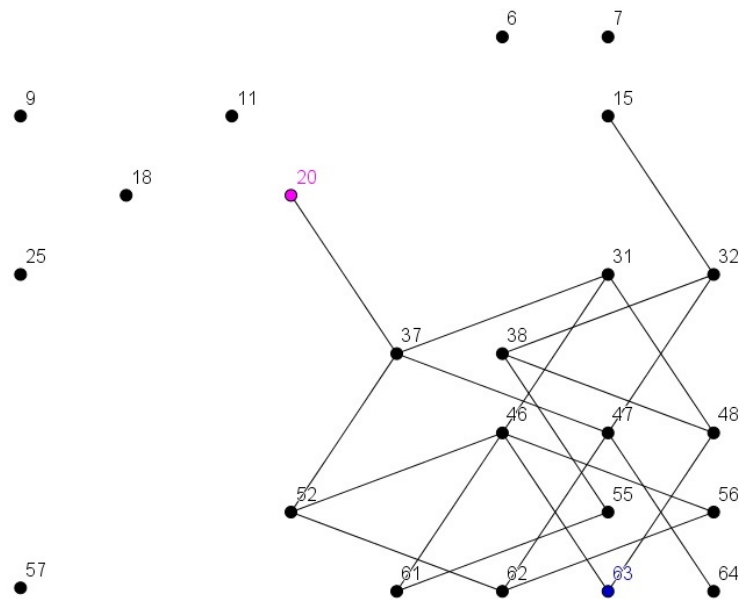


figura 2.27 Gráfica asociada al tablero.

Continuemos poniendo a todas las aristas peso 1.

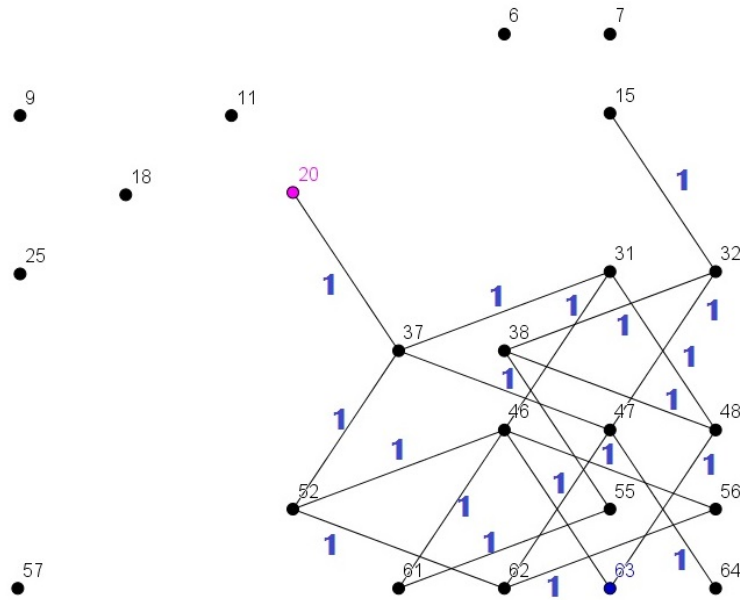


figura 2.28 Gráfica con peso 1 en todas las aristas.

Sea 63 el vértice fijo. Buscamos el camino de menor longitud entre el vértice 63 y el 20.

Iteración 1. Ponemos la etiqueta permanente $(-, 0)$ a 63. Luego colocamos la etiqueta permanente $(63, \infty)^*$ a los vértices 6, 7, 9, 11, 18, 25 y 57. Ponemos etiquetas temporales $(63, \infty)$ a todos los vértices distintos de 63. Sea $s=63$.

Actualización de etiquetas: $N_t(63)=\{46, 48\}$.

$$P(46) = \min\{\infty, 1\}=1 \text{ y } p(46)=63.$$

$$P(48) = \min\{\infty, 1\}=1 \text{ y } p(48)=63.$$

De donde $x*=48$ (vértice con mínima etiqueta temporal). Marcamos $(63, P(48) = 1)$ como etiqueta permanente. Sea $s = 48$.

Iteración 2. Actualización de etiquetas: $N_t(48)=\{31, 38\}$.

$$P(31) = \min\{\infty, 2\}=2 \text{ y } p(31)=48.$$

$$P(38) = \min\{\infty, 2\}=2 \text{ y } p(38)=48.$$

De donde $x*=46$ (vértice con mínima etiqueta temporal). Marcamos $(63, P(46) = 1)$ como etiqueta permanente. Sea $s = 46$.

Iteración 3. Actualización de etiquetas: $N_t(46)=\{31, 52, 56, 61\}$.

$$\begin{aligned} P(31) &= \text{mín}\{2, 1 + 1\}=2 \text{ y } p(31)=48 \text{ (no cambia).} \\ P(52) &= \text{mín}\{\infty, 2\}=2 \text{ y } p(52)=46. \\ P(56) &= \text{mín}\{\infty, 2\}=2 \text{ y } p(56)=46. \\ P(61) &= \text{mín}\{\infty, 2\}=2 \text{ y } p(61)=46. \end{aligned}$$

De donde $x^*=56$ (vértice con mínima etiqueta temporal). Marcamos $(46, P(56) = 2)$ como etiqueta permanente. Sea $s = 56$.

Iteración 4. Actualización de etiquetas: $N_t(56)=\{62\}$.

$$P(62) = \text{mín}\{\infty, 2 + 1\}=3 \text{ y } p(62)=56.$$

De donde $x^*=52$ (vértice con mínima etiqueta temporal). Marcamos $(46, P(52) = 2)$ como etiqueta permanente. Sea $s = 52$.

Iteración 5. Actualización de etiquetas: $N_t(52)=\{37, 62\}$.

$$\begin{aligned} P(37) &= \text{mín}\{\infty, 2 + 1\}=3 \text{ y } p(37)=52. \\ P(62) &= \text{mín}\{3, 2 + 1\}=3 \text{ y } p(62)=56. \end{aligned}$$

De donde $x^*=61$ (vértice con mínima etiqueta temporal). Marcamos $(46, P(61) = 2)$ como etiqueta permanente. Sea $s = 61$.

Iteración 6. Actualización de etiquetas: $N_t(61)=\{55\}$.

$$P(55) = \text{mín}\{\infty, 2 + 1\}=3 \text{ y } p(55)=61.$$

De donde $x^*=38$ (vértice con mínima etiqueta temporal). Marcamos $(48, P(38) = 2)$ como etiqueta permanente. Sea $s = 38$.

Iteración 7. Actualización de etiquetas: $N_t(38)=\{32, 55\}$.

$$\begin{aligned} P(32) &= \text{mín}\{\infty, 2 + 1\}=3 \text{ y } p(32)=38. \\ P(55) &= \text{mín}\{3, 2 + 1\}=3 \text{ y } p(55)=61 \text{ (no cambia).} \end{aligned}$$

De donde $x^*=31$ (vértice con mínima etiqueta temporal). Marcamos $(48, P(31) = 2)$ como etiqueta permanente. Sea $s = 31$.

Iteración 8. Actualización de etiquetas: $N_t(31)=\{37\}$.

$$P(37) = \text{mín}\{3, 2 + 1\}=3 \text{ y } p(37)=52 \text{ (no cambia).}$$

De donde $x^*=55$ (vértice con mínima etiqueta temporal). Marcamos $(61, P(55) = 3)$ como etiqueta permanente. Sea $s = 55$.

Iteración 9. Actualización de etiquetas: $N_t(55)=\emptyset$.

De donde $x^*=62$ (vértice con mínima etiqueta temporal). Marcamos $(56, P(62) = 3)$ como etiqueta permanente. Sea $s = 62$.

Iteración 10. Actualización de etiquetas: $N_t(62)=\{47\}$.

$$P(47) = \text{mín}\{\infty, 3 + 1\}=4 \text{ y } p(47)=62.$$

De donde $x^*=32$ (vértice con mínima etiqueta temporal). Marcamos $(38, P(32) = 3)$ como etiqueta permanente. Sea $s = 32$.

Iteración 11. Actualización de etiquetas: $N_t(32)=\{15, 47\}$.

$$P(15) = \text{mín}\{\infty, 3 + 1\}=4 \text{ y } p(15)=32.$$

$$P(47) = \text{mín}\{4, 3 + 1\}=4 \text{ y } p(47)=62 \text{ (no cambia).}$$

De donde $x^*=37$ (vértice con mínima etiqueta temporal). Marcamos $(52, P(37) = 3)$ como etiqueta permanente. Sea $s = 37$.

Iteración 12. Actualización de etiquetas: $N_t(37)=\{20, 47\}$.

$$P(20) = \text{mín}\{\infty, 3 + 1\}=4 \text{ y } p(20)=37.$$

$$P(47) = \text{mín}\{4, 3 + 1\}=4 \text{ y } p(47)=62 \text{ (no cambia).}$$

De donde $x^*=20$ (vértice con mínima etiqueta temporal). Marcamos $(37, P(20) = 4)$ como etiqueta permanente. Sea $s = 20$. Como éste es el vértice al cual queríamos llegar terminamos.

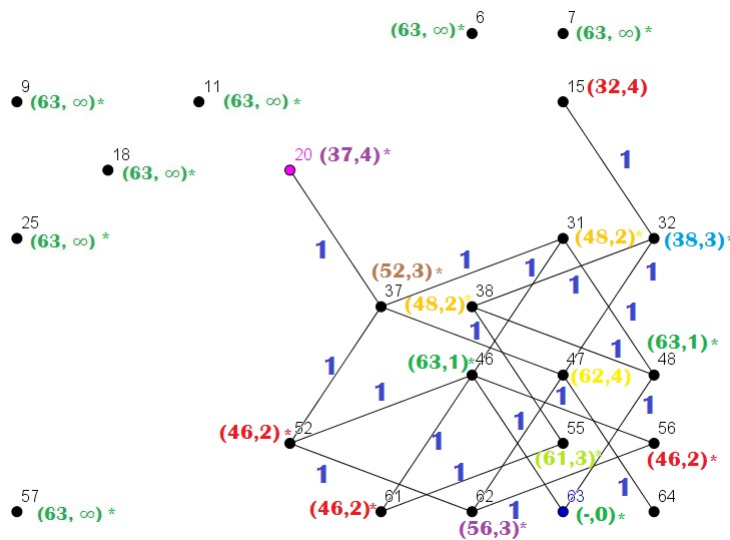


figura 2.29 Gráfica con todas las etiquetas del algoritmo.

Así obtendríamos $C=(63, 46, 52, 37, 20)$, que es la trayectoria de menor longitud y una estrategia ganadora para el jugador **A**. El jugador **B** sólo puede ganar si conoce la estrategia y si **A** no juega sobre los vértices de las trayectorias de menor longitud.

Capítulo 3

Juegos de Núcleos

La teoría de núcleos es un área de estudio en digráficas que surge a mediados del siglo XX gracias a las contribuciones del matemático húngaro John von Neumann [10]. En este capítulo se abordarán tres juegos bipersonales relacionados con ella. El primer juego es conocido como el Juego del Glotón y es inspirado en comer alternadamente una porción de una barra de chocolate. El segundo lleva por nombre Suma 31, y consiste en ir sumando pequeñas cantidades que se acumulan hasta que alguno de los jugadores llegue al número 31. El tercero se llama Llega a la Meta, al igual que el Juego del Glotón, se desarrolla en un tablero donde los jugadores disputan una carrera que va de una esquina opuesta a otra. Cada juego será explicado con detenimiento y se simulará un ejemplo de como jugarlo. El objetivo es encontrar una estrategia ganadora para el jugador que empiece cada uno de ellos. Usando las herramientas matemáticas de la teoría de gráficas los modelaremos y veremos que el núcleo de la digráfica asociada a los juegos resulta ser la estrategia ganadora.

3.1. El juego del glotón

Como se mencionó en la introducción, el juego está inspirado en comer una barra de chocolate de dimensión 2×5 , la cual tiene una esquina con un sabor muy amargo. Dos personas juegan tomando alternadamente una porción del chocolate evitando llevarse consigo la parte amarga, pues quien tenga que comerla se considera el perdedor del juego.

El Juego del Glotón, atribuido al matemático David Gale [4], se lleva a cabo en un tablero de dimensión $m \times n$, donde m es el número de renglones y n el número de columnas, por cuestiones prácticas sólo lo llamaremos un tablero $m \times n$. El juego se desarrolla alternando turnos de tal modo que cada jugador “come” cuadros del tablero, simulando la barra de chocolate, con base en determinadas reglas. El objetivo del juego es ir eliminando cuadros evitando que se quite el que está ubicado en la esquina inferior izquierda (ya que es el cuadro que se considera amargo).

Antes de conocer las reglas básicas definiremos lo que es un **subtablero**, ya que se hará uso de este concepto.

Diremos que t es un subtablero de un tablero $m \times n$ si ocurre alguna de las siguientes condiciones:

- (1) t es el tablero $m \times n$.
- (2) t es una figura compuesta por cuadros que pertenecen al tablero, y que es posible obtener mediante la eliminación de uno o más cuadros del tablero.

La siguiente figura 3.1 muestra algunos ejemplos de subtableros del tablero 5×5 :

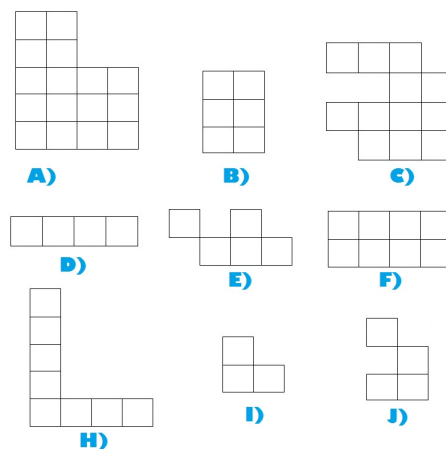


figura 3.1 Ejemplos de subtableros.

Prestemos sobre todo atención a los ejemplos **(A)**, **(B)**, **(D)**, **(F)**, **(H)** e **(I)** de la figura 3.1 pues ese tipo de subtableros aparecerán en el juego.

Reglas del juego

El juego se desarrollará en un tablero $m \times n$ por dos jugadores: **A** y **B**.

1. Elegir el tablero donde se llevará a cabo el juego y en seguida marcar el cuadro de la esquina inferior izquierda. Dicho cuadro será llamado cuadro **envenenado** (véase figura 3.2).

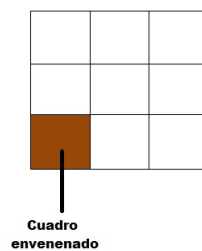
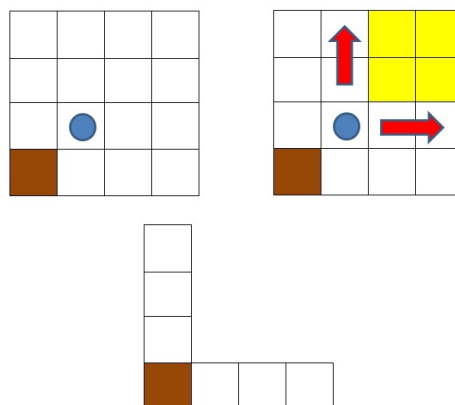


figura 3.2 Cuadro envenenado.

Los demás serán llamados cuadros **sanos**.

2. El jugador **A** (el jugador que empieza) seleccionará un cuadro en el tablero y lo eliminará junto con todos los cuadros que estén al norte y al este de él, incluyendo el subtablero formado por ellos.

Veamos algunos ejemplos de como eliminar cuadros correctamente (véase figura 3.3 y 3.4).



Eliminación correcta de cuadros 1. figura 3.3

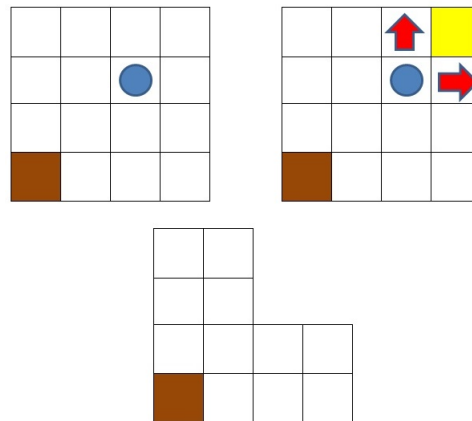


figura 3.4 Eliminación correcta de cuadros 2.

Casos especiales:

- (i) Si al seleccionar un cuadro en el tablero no hay cuadros hacia el norte, pero si al este de él, se eliminan esos cuadros (véase figura 3.5).

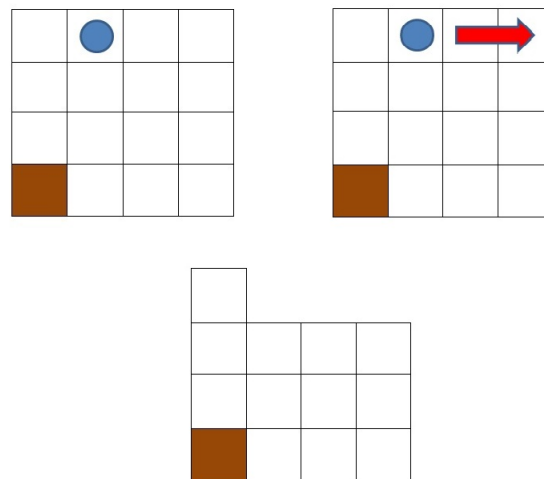


figura 3.5 Caso especial 1.

- (ii) Si al seleccionar un cuadro en el tablero no hay cuadros hacia el este, pero si al norte de él, se eliminan esos cuadros (véase figura 3.6).

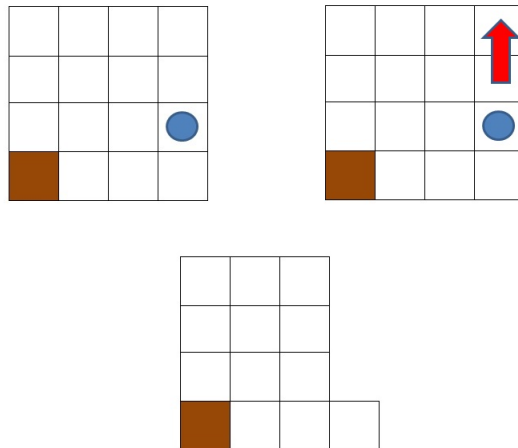


figura 3.6 Caso especial 2.

- (iii) Si al seleccionar un cuadro en el tablero no hay cuadros hacia el norte ni al este, se elimina solamente ese cuadro (véase figura 3.7).

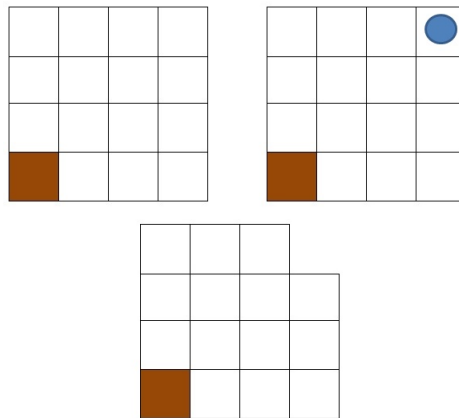
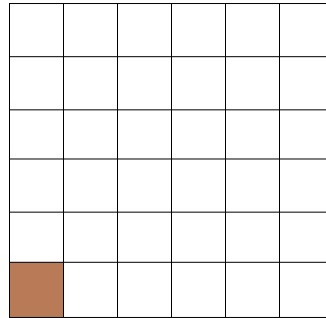


figura 3.7 Caso especial 3.

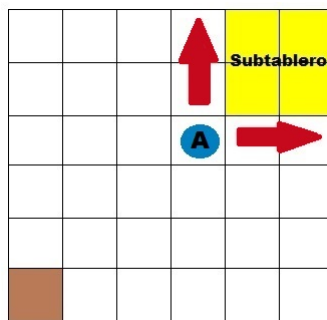
3. El jugador **B** seleccionará y eliminará cuadros de la misma forma que lo hizo el jugador **A** sobre el subtablero que quedó.
4. El juego continuará de la misma forma alternando turnos. El perdedor será quien seleccione el cuadro envenenado.

Ejemplo del juego

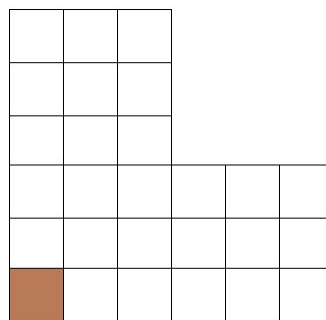
Consideremos un tablero de 6×6 y dos jugadores **A** y **B**.



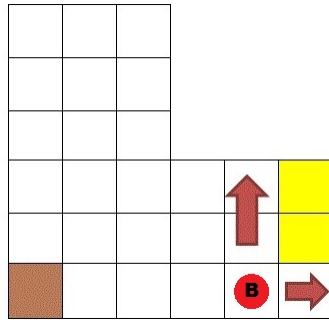
El jugador **A** selecciona el cuadro marcado de azul (**A**).



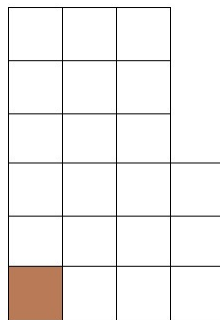
Por la regla 2 eliminamos los cuadros que estén hacia el norte y al este de él, incluyendo el subtablero formado por ellos:



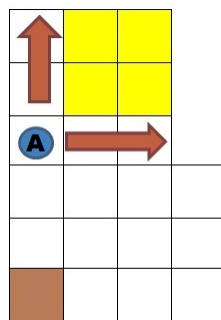
Ahora el jugador **B** selecciona el cuadro de rojo (**B**):



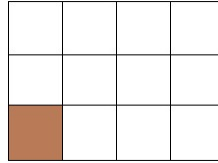
Por la regla 2 también quitamos el subtablero que formaron los cuadros hacia el norte y hacia el este:



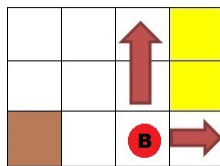
Ahora el jugador **A** selecciona el cuadro marcado de azul (**A**):



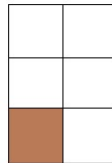
Por la regla 2 quitamos todos los cuadros hacia el norte y al este, incluyendo el subtablero formado por ellos:



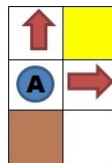
El jugador **B** selecciona el cuadro marcado de rojo (**B**):



Por la regla 2 quitamos todos los cuadros hacia el norte y al este, incluyendo el subtablero formado por ellos:



El jugador **A** selecciona el cuadro marcado de azul (**A**).



Por la regla 2 quitamos todos los cuadros hacia el norte y al este, incluyendo el subtablero formado por ellos:



El jugador **B** selecciona el cuadro marcado de rojo (**B**).



Por la regla 2.(iii) sólo quitamos ese cuadro.



Finalmente el jugador **A** pierde pues su única opción es escoger el cuadro envenenado.

Ahora que ya es conocido el juego, nos podemos preguntar ¿habrá alguna estrategia para que gane alguno de los jugadores?

Veamos un ejemplo para determinar si existe una estrategia ganadora para **A** o para **B**. Analicemos un caso sencillo, cuando el tablero es de 2×5 (figura 3.8):

					Renglón 1
					Renglón 2

figura 3.8 Tablero 2×5 .

¿Qué pasa si quitamos un cuadro sano del primero o el segundo renglón?, ¿cómo se desarrollaría el juego en los primeros turnos? Para contestar estas preguntas y hacer un mejor análisis de este caso utilizaremos la siguiente notación:

(i, j) denotará un subtablero, donde:
 i = Número de cuadros que hay en el primer renglón.
 j = Número de cuadros que hay en el segundo renglón.

Notemos que bajo esta notación se empieza a jugar en el subtablero $(5,5)$.

Exhibamos en una tabla todos los subtableros que se pueden formar con esta notación (figura 3.9):

Número de cuadros en el Renglón 1	5	(5,0)	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)
	4	(4,0)	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)
	3	(3,0)	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)
	2	(2,0)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)
	1	(1,0)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)
	0	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(0,4)	(0,5)
			0	1	2	3	4
		Número de cuadros en el Renglón 2					

figura 3.9 Subtableros que se pueden formar.

Es importante notar que ningún jugador elegirá el cuadro envenenado, a menos que sea el único disponible en el tablero. Por lo tanto, cuando se obtenga el subtablero (0,1), después de la correspondiente eliminación de cuadros sanos, sabremos quién es el ganador del juego.

La figura 3.10 muestra las alternativas de subtableros que podemos obtener si quitamos un cuadro sano en el primer turno, así como algunas alternativas en el segundo y tercer turno:

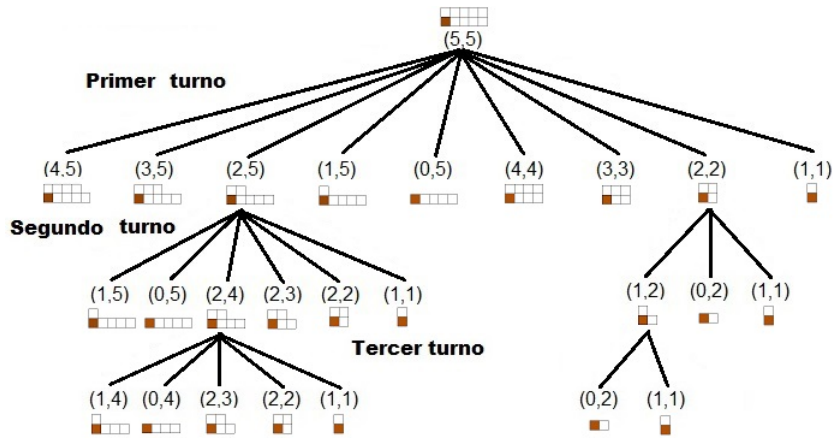


figura 3.10 Posibles movimientos en los tres primeros turnos.

De la figura 3.9 notamos que hay tableros que no son posibles obtener mediante las reglas establecidas, por ejemplo, el subtablero (2,0), pues para obtenerlo tendríamos que haber quitado el cuadro envenenado, que por la regla 1, nos haría eliminar todo el tablero. Esto nos lleva a hacer una distinción entre los subtableros. Diremos que (i, j) es un subtablero **válido** si puede obtenerse quitando uno o más cuadros sanos respetando la regla 2. También diremos que un subtablero (i, j) **no es válido** si no puede obtenerse quitando uno o más

cuadros sanos respetando la regla 2.

A continuación se presentan todos los subtableros de la tabla figura 3.9 marcados con una línea roja, que no son válidos:



figura 3.11 Subtableros que no son válidos.

Observemos que los subtableros válidos, los que no fueron marcados, son todos los subtableros que podemos formar en el Juego del Glotón con este tablero.

En la siguiente sección usaremos estos subtableros, con su correspondiente notación, para modelar el juego con una digráfica.

3.1.1. Modelando el juego con teoría de digráficas (tablero 2×5)

Encontremos la estrategia ganadora para el primer jugador, para ello modelemos el juego con una digráfica. Recordemos que una digráfica D es una pareja ordenada $(V(D), F(D))$, donde $V(D)$ es un conjunto finito y no vacío de objetos, llamados vértices, y $F(D)$ es un conjunto de pares ordenados de distintos elementos de $V(D)$, llamados flechas. Puesto que en el juego nos movemos entre los subtableros válidos (al quitar cuadros sanos), nuestro conjunto de vértices serán los subtableros válidos:

$$V(D) = \{(i, j) : (i, j) \text{ es un subtablero válido}\}.$$

Así $((i, j), (s, t)) \in F(D)$, con (i, j) y (s, t) vértices de D , si y sólo si podemos pasar del subtablero (i, j) a (s, t) eligiendo un cuadrado sano del tablero y quitando los cuadros correspondientes. Veamos un ejemplo con algunos vértices (figura 3.12):

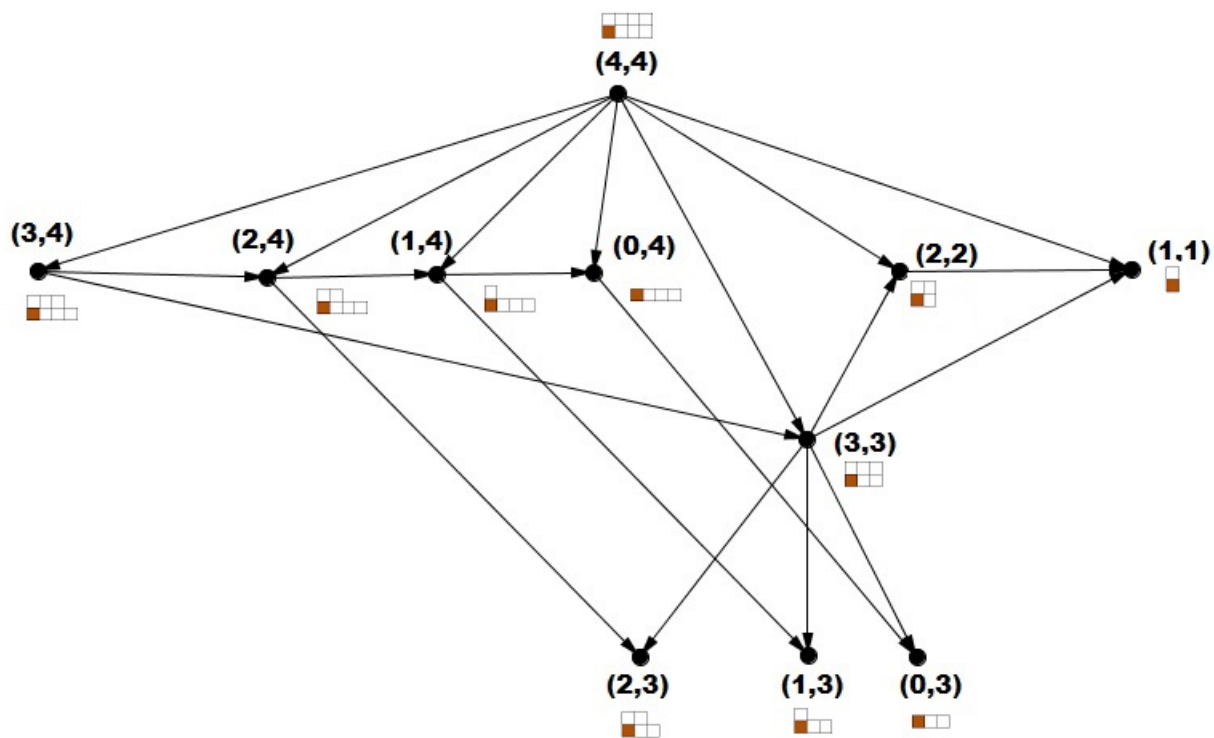


figura 3.12 Ejemplo de adyacencias para algunos vértices.

Si observamos con detenimiento la digráfica de la figura 3.12 podemos ver que no hay forma de volver al subtablero $(4,4)$ si quitamos uno o más cuadros sanos en cualquier renglón, pues la regla 2 es la que nos obliga a eliminar cuadros sanos. En general, desde el inicio del juego no podemos volver a obtener subtableros sobre los cuales ya se haya jugado en los anteriores turnos, así la digráfica D que modela el Juego del Glotón es una digráfica sin ciclos dirigidos (definición 1.6.2.11) sin importar el tamaño de tablero.

La figura 3.13 representa la digráfica asociada al juego para este tablero, en ella podemos apreciar todos los posibles movimientos entre los subtableros si quitamos un cuadro sano:

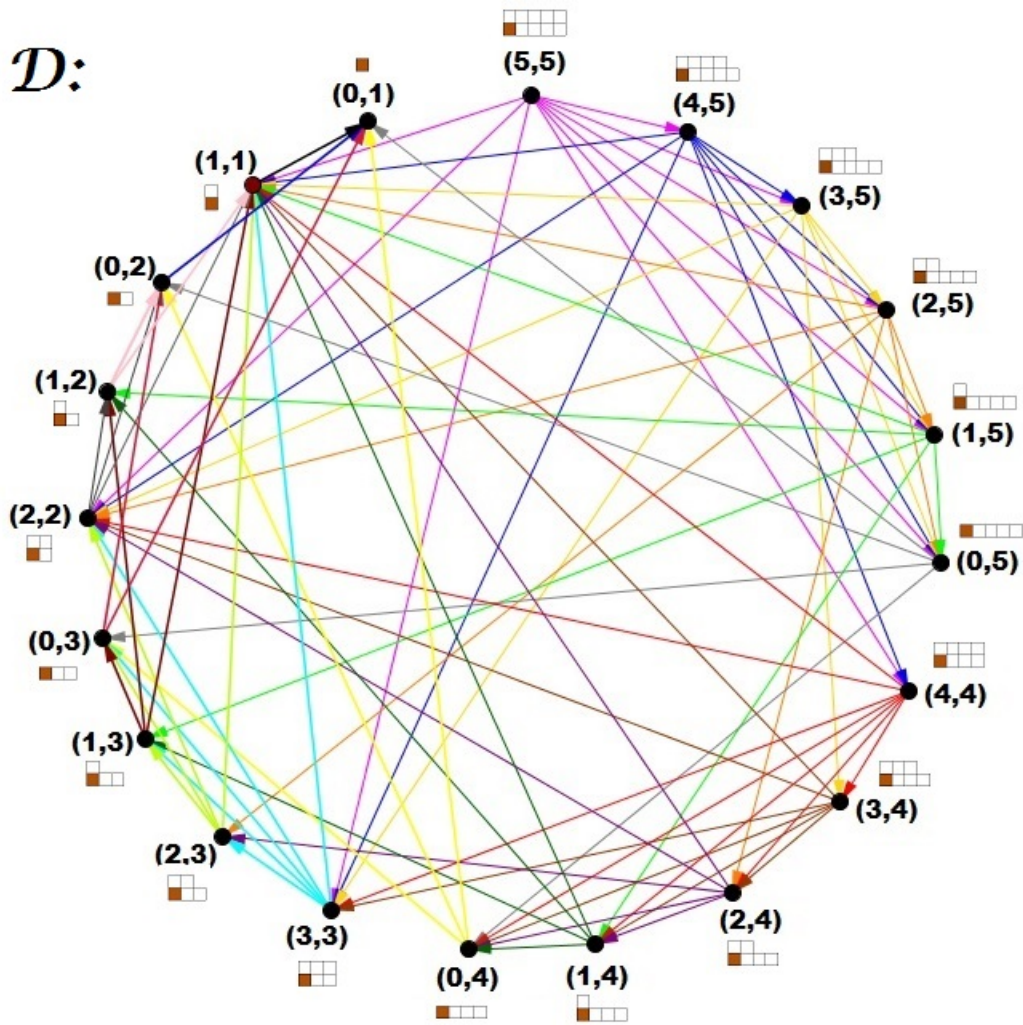


figura 3.13 Digráfica asociada al tablero 2×5 .

Recordemos que sabemos quien ganará el juego cuando obtenemos el subtablero $(0,1)$. Notemos que los vecinos interiores (definición 1.6.2.5) de $(0,1)$; es decir, elementos del conjunto $\Gamma_D^-(0,1) = \{(1,1), (0,2), (0,3), (0,4), (0,5)\}$, son subtableros que llevarían al jugador en turno a la victoria (pues al quitar un cuadro sano podemos pasar al vértice $(0,1)$). En vista de eso consideremos la digráfica $D_1 = D \setminus [\{(0,1)\} \cup \Gamma_D^-(0,1)]$ (figura 3.14):

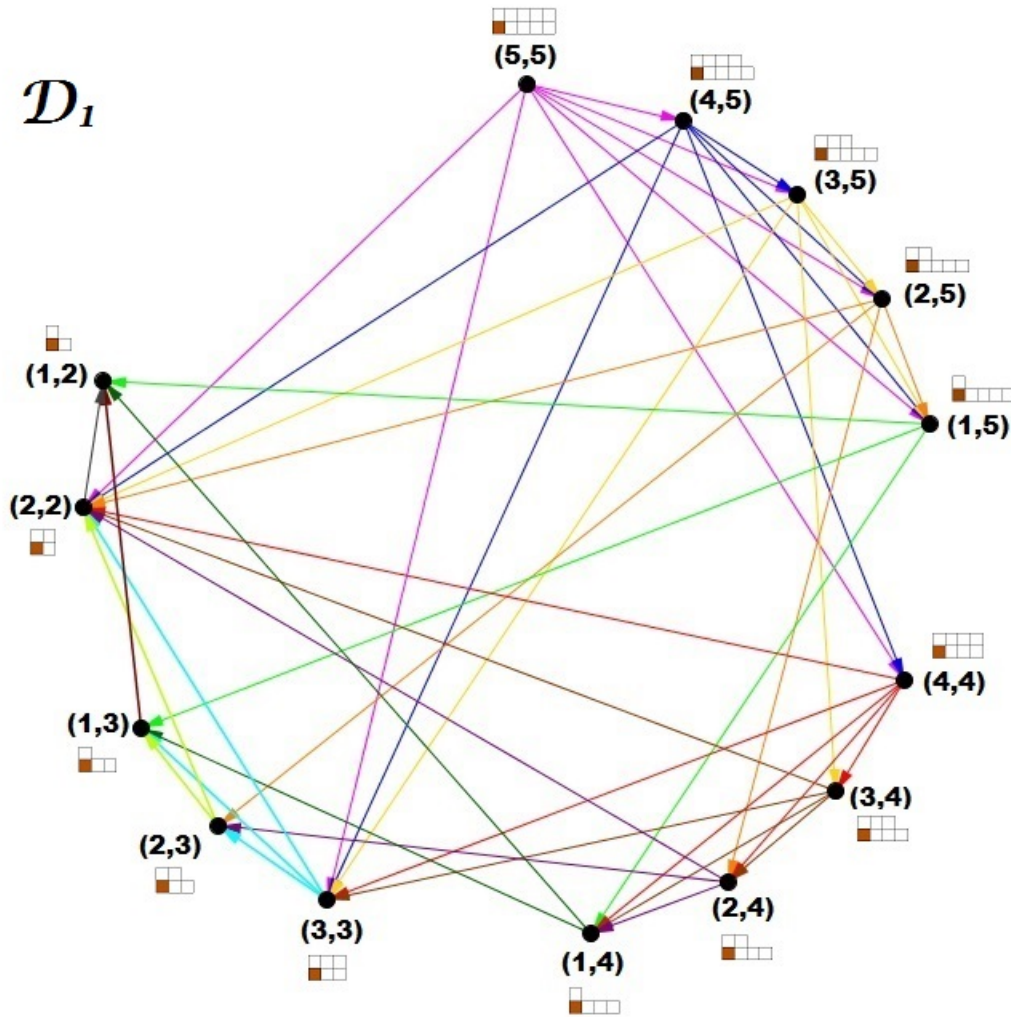
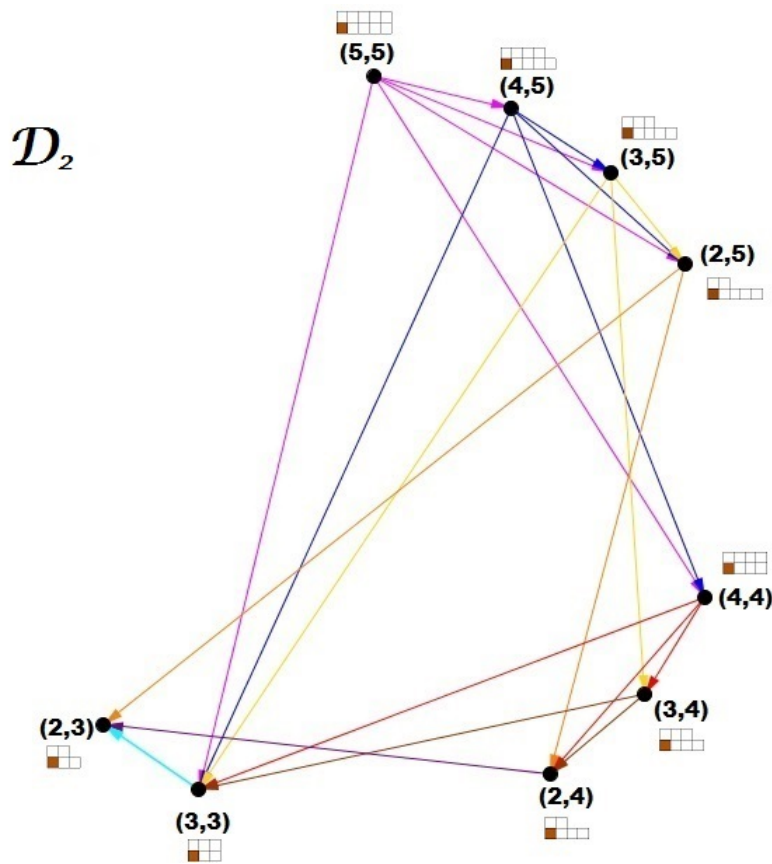


figura 3.14 Subdigráfica D_1 de D .

Observemos que el vértice $(1,2)$ no tiene vecinos exteriores (definición 1.6.2.7) en D_1 , ya que $\Gamma_D^+(1,2) = \{(1,1), (0,2)\} \subseteq \Gamma_D^-(0,1)$. Esto es importante saberlo porque en términos del juego, estamos viendo sobre cual subtablero se tuvo que haber jugado para que posteriormente se dejará el subtablero $(0,1)$, de modo que podemos considerar ahora al vértice $(1,2)$ como el subtablero donde sabremos quien gana el juego (como lo fue el $(0,1)$ anteriormente). Veamos ahora que los vecinos interiores de $(1,2)$, $\Gamma_D^-(1,2) = \{(2,2), (1,3), (1,4), (1,5)\}$, son los que llevarían al jugador en turno a ganar. Consideremos $D_2 = D_1 \setminus [\{(1,2)\} \cup \Gamma_D^-(1,2)]$ (figura 3.15):

figura 3.15 Subdigráfica D_2 de D_1 .

Siguiendo con este razonamiento tenemos que el vértice $(2,3)$ es ahora el subtablero donde sabremos quien gana, pues no tiene vecinos exteriores en D_2 , ya que $\Gamma_D^+((2,3)) = \{(1,3), (0,3), (2,2), (1,1)\} \subseteq (\Gamma_D^-((0,1)) \cup \Gamma_D^-((1,2)))$. Ahora los vecinos interiores del vértice $(2,3)$ son los que llevarían al jugador en turno a ganar. Consideremos $D_3 = D_2 \setminus [\{(2,3)\} \cup \Gamma^-((2,3))]$ (figura 3.16):

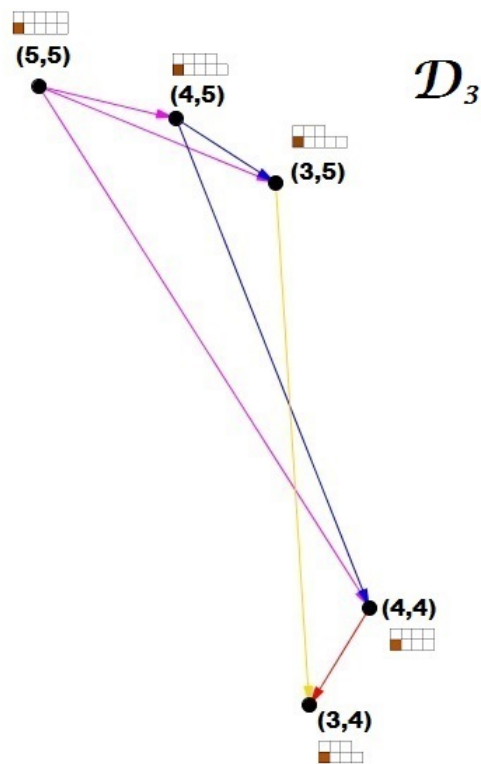


figura 3.16 Subdigráfica D_3 de D_2 .

Análogamente podemos observar en D_3 que el vértice $(3,4)$ es el subtablero donde sabemos quien gana, y sus vecinos interiores son los que llevarían al jugador en turno a ganar. Consideremos $D_4 = D_3 \setminus [\{(3,4)\} \cup \Gamma^-((3,4))]$ (figura 3.17):

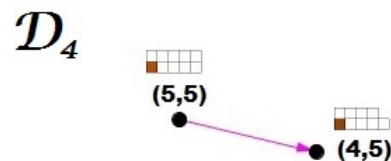


figura 3.17 Subdigráfica D_4 de D_3 .

Finalmente el juego en D_4 terminaría en $(4,5)$.

Por lo anterior podemos concluir que los elementos del conjunto $\{(0,1), (1,2), (2,3), (3,4), (4,5)\}$ son vértices claves para ganar el juego.

Si observamos con detenimiento nuestro conjunto de vértices, notaremos que no hay forma de pasar de un vértice del conjunto a otro vértice del mismo conjunto con base en las reglas del juego (véase figura 3.13), en términos de digráficas, no hay una flecha entre ellos. Otra característica de nuestro conjunto $\{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$, es que cualquier otro elemento fuera de él tiene una flecha hacia algún vértice clave. Estas propiedades no las cumple cualquier conjunto, conozcamos el nombre que reciben.

Definición 3.1.1.1: Sean D una digráfica y $A \subseteq V(D)$. A es **absorbente** si para todo $x \in V(D) \setminus A$ existe $(x, y) \in F(D)$ con $y \in A$.

Definición 3.1.1.2: Sean D una digráfica e I un subconjunto de $V(D)$. I es un **conjunto independiente** si para todo subconjunto $\{x, y\}$ de I implica que (x, y) no esta en $F(D)$ y (y, x) no esta en $F(D)$.

En la figura 3.18, el conjunto **A** es un ejemplo de un conjunto absorbente, mientras que **I** es un conjunto independiente.

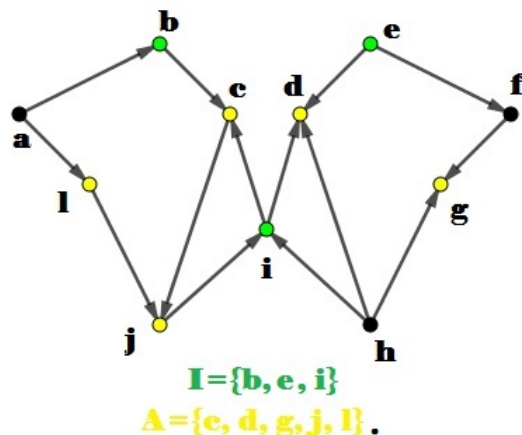


figura 3.18 Ejemplos de un conjunto absorbente y un conjunto independiente.

Definición 3.1.1.3: Sean D una digráfica y $N \subseteq V(D)$, N es **núcleo** de D si N cumple:

1. N es independiente y
2. N es absorbente.

Denotemos al conjunto de vértices claves como $N = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$. Notemos que N tiene la propiedad de ser un núcleo.

Afirmación: Los cuadros marcados de azul en la tabla (figura 3.19), que obtuvimos en el análisis anterior, son un núcleo.



figura 3.19 Vértices clave.

Para comprobar que es independiente basta que veamos que para dos vértices arbitrarios, no hay una flecha entre ellos. Consideremos el vértice $(0,1)$, veamos que no hay una flecha hacia otro vértice del conjunto, ya que $\Gamma_D^+(0,1)=\emptyset$ y $\Gamma_D^-(0,1)=\{(1,1), (0,2), (0,3), (0,4), (0,5)\}$.

Para el vértice $(1,2)$, tampoco hay flechas entre él y cualquier otro vértice del conjunto, pues tenemos que $\Gamma_D^+(1,2)=\{(0,2), (1,1)\}$ y $\Gamma_D^-(1,2)=\{(2,2), (1,3), (1,4), (1,5)\}$.

De igual forma para el vértice $(2,3)$ no hay flechas hacia otro vértice del conjunto, ya que $\Gamma_D^+(2,3)=\{(1,3), (0,3), (2,2), (1,1)\}$ y $\Gamma_D^-(2,3)=\{(3,3), (2,4), (2,5), (1,5)\}$.

Para el vértice $(3,4)$, tampoco tenemos flechas hacia otro vértice del conjunto pues $\Gamma_D^+(3,4)=\{(2,4), (1,4), (0,4), (3,3), (2,2), (1,1)\}$ y $\Gamma_D^-(3,4)=\{(4,4), (3,5)\}$.

Finalmente para el vértice $(4,5)$ no hay flechas con algún otro vértice del conjunto ya que $\Gamma_D^+(4,5)=\{(3,5), (2,5), (1,5), (0,5), (4,4), (3,3), (2,2), (1,1)\}$ y $\Gamma_D^-(4,5)=\{(5,5)\}$.

Por lo que tenemos que el conjunto de vértices clave es independiente.

Veamos ahora que N es un conjunto absorbente, para ello observemos los vecinos interiores de los vértices del conjunto N . El vértice $(4,5)$ absorbe al vértice $(5,5)$. El vértice $(3,4)$ absorbe a los vértices $(3,5)$ y $(4,4)$, $(2,3)$ absorbe a los vértices $(3,3)$, $(2,5)$, y $(2,4)$, $(1,2)$ absorbe a los vértices $(2,2)$, $(1,3)$, $(1,4)$ y $(1,5)$. Finalmente $(0,1)$ absorbe a los vértices $(0,2)$, $(0,3)$, $(0,4)$, $(0,5)$, y al $(1,1)$. Por lo que para todo vértice $(i, j) \in V(D) \setminus N$, existe un vértice $(s, j) \in N$ tal que $((i, j), (s, j)) \in F(D)$.

Por lo tanto el conjunto N es un núcleo.

Por todo lo anterior, el jugador que obtenga primero algún elemento del núcleo tiene asegurada la victoria. En vista de que el jugador que inicia puede dejar el subtablero (4,5) desde el primer turno quitando el respectivo cuadro sano, concluimos que la **estrategia ganadora** es para el jugador **A**. La tabla de la figura 3.20 explica a detalle la estrategia, donde las flechas indican el renglón a seguir.

Jugador A	Jugador B	Jugador A	Jugador B	Jugador A	Jugador B	Jugador A
(4,5)	(1,1)	(0,1)				
	(2,2)	(1,2)	(1,1)	(0,1)		
			(0,2)	(0,1)		
	(3,3)	(2,3)	(1,3)	(1,2)	(1,1)	(0,1)
					(0,2)	(0,1)
			(0,3)	(0,1)		
			(2,2)	(1,2)	(1,1)	(0,1)
					(0,2)	(0,1)
			(1,1)	(0,1)		
	(4,4)	(3,4)	(2,4)	(2,3)		
			(1,4)	(1,2)		
				(0,1)		
			(0,4)	(2,3)		
			(3,3)	(1,2)		
			(2,2)	(1,2)		
			(1,1)	(0,1)		
	(3,5)	(3,4)				
	(2,5)	(2,3)				
	(1,5)	(1,2)				
	(0,5)	(0,1)				

figura 3.20 Estrategia ganadora de A.

En resumen, el núcleo de la digráfica asociada nos ayudo a encontrar la estrategia ganadora para el jugador **A** en el tablero 2×5 . El jugador **B** sólo podrá hacer uso de esta estrategia, si **A** no la conoce y si **A** no juega en los vértices clave.

Es importante mencionar también que no todas las digráficas tienen núcleo. La figura 3.21 nos muestra un ejemplo de una digráfica que no tiene núcleo.

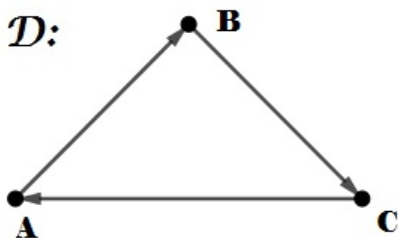


figura 3.21 Ejemplo de una digráfica que no tiene núcleo.

Observemos que los únicos conjuntos independientes de la digráfica D están constituidos por un elemento: $\{A\}$, $\{B\}$, $\{C\}$. El vértice A sólo absorbe a C , mientras que el vértice B solamente absorbe a A y el vértice C únicamente absorbe a B . Por lo que D no tiene núcleo.

En consecuencia de lo anterior es natural hacernos las siguientes preguntas: ¿todas las digráficas que modelen el Juego del Glotón tendrán núcleo? y si tienen núcleo, ¿el núcleo de la digráfica es siempre una estrategia ganadora para el jugador **A**? Los siguientes resultados nos darán las respuestas.

Lema 3.1.1.1 *Sea D una digráfica. Si para todo vértice v en D , $\delta^+(v) \geq 1$, entonces D tiene un ciclo dirigido.*

Demostración: Sea $T=(x_0, x_1, \dots, x_n)$ una trayectoria dirigida de longitud máxima en D . Sabemos que para todo vértice v en D , $\delta^+(v) \geq 1$, por lo tanto existe un vértice $w \in V(D)$ tal que $(x_n, w) \in F(D)$.

Afirmación: $w=x_i$ para algún $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Si w fuera distinto de x_i , para todo $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, entonces podemos construir una trayectoria dirigida $T_1=(x_0, T, x_n) \cup (x_n, w)$ que tiene mayor longitud que T . Lo cual sería una contradicción pues T es de longitud máxima.

Por lo tanto $w=x_i$ para algún $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Así, podemos construir un ciclo dirigido $C=(x_i, T, x_n) \cup (x_n, x_i)$. ■

Observación: Del Lema 3.1.1.1 concluimos que si D no tiene ciclos dirigidos entonces existe un vértice x tal que $\delta^+(x)=0$.

Teorema 3.1.1.1 *Sea D una digráfica. Si D no tiene ciclos dirigidos, entonces D tiene solamente un núcleo.*

Demostración: Sea D una digráfica sin ciclos dirigidos. Consideremos $N_0 = \{ x \in V(D) : \delta^+(x) = 0 \}$. Tenemos que $N_0 \neq \emptyset$ por el lema 3.1.1.1.

Sea $D_1 = D \setminus (N_0 \cup \Gamma^-(N_0))$.

Caso (a): $D_1 = \emptyset$.

Si $D_1 = \emptyset$ entonces N_0 es núcleo de D .

(i) Por demostrar que N_0 es un conjunto independiente. Como N_0 es el conjunto que tiene a todos los vértices de exgrado cero, podemos concluir que no hay flechas entre ellos.

Por lo tanto N_0 es independiente.

(ii) Por demostrar que N_0 es un conjunto absorbente. Como $D_1 = \emptyset$, tenemos que:

$$V(D) = V(N_0 \cup \Gamma^-(N_0)),$$

por lo tanto para todo vértice $y \in V(D) \setminus N_0$, $y \in \Gamma^-(N_0)$ por lo que existe $(y, v) \in F(D)$ tal que v pertenece a N_0 .

Por lo tanto N_0 es absorbente.

Caso (b): $D_1 \neq \emptyset$.

Consideremos ahora el conjunto $N_1 = \{ x \in V(D_1) : \delta_{D_1}^+(x) = 0 \}$. Como $D_1 \subseteq D$, D_1 no tiene ciclos dirigidos entonces por el lema 3.1.1.1 $N_1 \neq \emptyset$.

Sea $D_2 = D_1 \setminus (N_1 \cup \Gamma^-(N_1))$.

Veamos que al igual que en D_1 tenemos nuevamente dos casos.

Caso (a): $D_2 = \emptyset$.

Si $D_2 = \emptyset$ entonces $N_0 \cup N_1$ es núcleo de D .

(i) Por demostrar que $N_0 \cup N_1$ es un conjunto independiente. Tenemos que N_0 y N_1 son conjuntos independientes. Ahora, sean $v_1 \in N_0$ y $v_2 \in N_1$. Observemos que (v_1, v_2) no puede estar en $F(D)$ pues $\delta_D^+(v_1) = 0$. De igual forma (v_2, v_1) no puede estar en $F(D)$ pues v_2 no está en $\Gamma^-(N_0)$.

Por lo tanto $N_0 \cup N_1$ es independiente.

(ii) Por demostrar que $N_0 \cup N_1$ es un conjunto absorbente. Como $D_2 = \emptyset$ tenemos que $V(D) = V(N_0 \cup \Gamma^-(N_0) \cup N_1 \cup \Gamma^-(N_1))$, por lo tanto para todo vértice $y \in V(D) \setminus (N_0 \cup N_1)$, $y \in \Gamma^-(N_0)$ o $y \in \Gamma^-(N_1)$; es decir, existe $(y, v) \in F(D)$ tal que v pertenece a $N_0 \cup N_1$.

Por lo tanto $N_0 \cup N_1$ es absorbente.

Caso (b): $D_2 \neq \emptyset$.

Consideremos ahora el conjunto $N_2 = \{x \in V(D_1) : \delta_{D_2}^+(x) = 0\}$. Como D_2 es una subdigráfica de D , D_2 no tiene ciclos dirigidos entonces por el lema 3.1.1.1 $N_2 \neq \emptyset$.

Afirmación 1: Para algún k en los naturales, $D_{k+1} = D_k / (N_k \cup \Gamma^-(N_k)) = \emptyset$, donde $N_k = \{x \in V(D_k) : \delta_{D_k}^+(x) = 0\}$.

Esto se debe a que la digráfica D es finita y a que en nuestro procedimiento D_{i+1} tiene menos vértices que D_i .

Afirmación 2: $N = N_0 \cup \dots \cup N_k$ es un núcleo de D (véase figura 3.22).

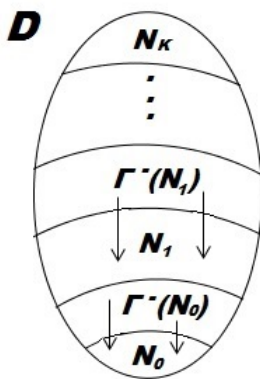


figura 3.22 $N = N_0 \cup \dots \cup N_k$.

(i) Por demostrar que N es un conjunto independiente.

Tenemos que cada N_i ($i \in \{0, 1, \dots, k\}$) es independiente pues el exgrado de sus vértices es igual a cero en D_i . Sean N_i y N_j , veamos que no hay flechas de N_i a N_j ni flechas de N_j a N_i para alguna i, j en los naturales, con $i \neq j$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $i < j$. Sean $x \in N_i$ y $y \in N_j$. La flecha (x, y) no puede estar en $F(D)$ pues en la iteración i , $N_j \subseteq D_i$ y $\delta_{D_i}^+(x) = 0$. Tampoco pasa que (y, x) este en $F(D)$, pues $\Gamma^-(N_i) \not\subseteq D_j$.

Por lo tanto N es un conjunto independiente.

(i) Por demostrar que N es un conjunto absorbente.

Sea $v \in V(D) \setminus N$, por definición de N , $v \in (\Gamma^-(N_1) \cup \Gamma^-(N_2) \dots \cup \Gamma^-(N_k))$, por lo tanto existe un vértice $w \in N_i$, para alguna $i \in \{0, 1, \dots, k\}$, tal que $(y, w) \in F(D)$.

Así, N es un conjunto absorbente y en consecuencia N es núcleo de D . La unicidad de N se debe a su construcción. ■

Notemos que la digráfica asociada al juego, para cualquier tablero, no tiene ciclos dirigidos ya que quitamos al menos un cuadro en cada turno, por el teorema 3.1.1.1 nuestra digráfica tiene un núcleo; es decir, existe una estrategia ganadora. Después de analizar el caso 2×5 podemos generalizar de manera análoga que el núcleo para tableros $2 \times n$ es el conjunto: $N = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), \dots, (n-1, n)\}$.

3.1.2. Tableros de $n \times n$

Como hemos notado en el tablero $2 \times n$, el jugador **A** gana al llevar el juego al subtablero (1,2) ya que el subtablero (1,2) es un elemento del núcleo de la digráfica asociada. Es natural que ahora nos preguntemos lo siguiente: ¿el subtablero (1,2) seguirá siendo elemento del núcleo de la digráfica asociada al Juego del Glotón para el tablero $n \times n$? La siguiente observación nos dará la respuesta:

Observación: Sea D la digráfica asociada al Juego del Glotón para el tablero $n \times n$. Si N es núcleo de D entonces el subtablero (1,2) es un elemento de N .

Notemos que $\Gamma_D^+((1, 2)) = \{(0, 2), (1, 1)\}$ (véase figura 2.23) es un subconjunto de $\Gamma_D^-((0, 1))$. Por lo que en $D_1 = D \setminus [\{(0, 1)\} \cup \Gamma_D^-((0, 1))]$ tenemos que $\delta_{D_1}^+((1, 2)) = 0$ y así por la construcción que se hizo en el teorema 3.1.1.1 concluimos que (1,2) pertenece a N .

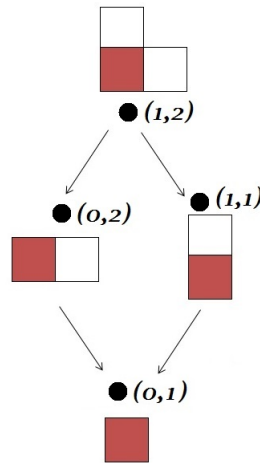


figura 3.23 (1,2) es elemento de N .

Por lo anterior, el jugador **A** tiene asegurada la victoria en tableros $n \times n$ si en algún punto del juego obtiene el subtablero (1,2). Hemos visto que la estrategia de **A** para llegar a ese vértice, es ir dejando en cada uno de sus turnos los subtableros que sean vértices del núcleo. Propondremos otra estrategia para **A**, que le asegure llegar al vértice (1,2).

Para un mejor análisis utilizaremos la siguiente notación:

$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ representará el subtablero obtenido en algún punto del juego respetando la regla 2, donde $a_i =$ Número de cuadros en el renglón i .

También tendremos una notación para facilitar la selección de los cuadros:

$C_{j,k} =$ El cuadro ubicado en el renglón j y en la columna k del tablero original.

Observaciones:

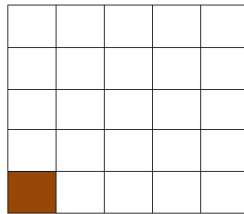
1. El subtablero (1,2) obtenido de un juego en el tablero $2 \times n$, es equivalente al subtablero $(0,0,\dots,0,1,2)$ del tablero $n \times n$.
2. Si el jugador **A** escoge el cuadro sano $C_{n-1,2}$ se obtiene el subtablero $(1,1,\dots,1,n)$.
3. Notemos que del subtablero $(1,1,\dots,1,n)$ es posible pasar al subtablero $(0,0,0,\dots,0,1,2)$ en un número finito de pasos respetando la regla 2.

Usando estas ideas veamos que debe jugar **A** para ganar. Supongamos que el jugador **A** escoge el cuadro $C_{n-1,2}$ en su primer turno.

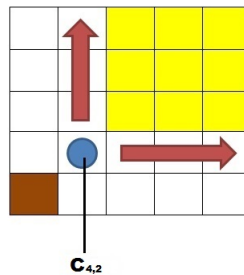
Caso(1) Si el jugador **B** selecciona el cuadro sano $C_{n-1,1}$, el jugador **A** debe escoger el cuadro sano $C_{n,2}$ para ganar el juego.

Caso(2) Si el jugador **B** selecciona el cuadro sano $C_{n,2}$, el jugador **A** debe elegir el cuadro sano $C_{n-1,1}$ para ganar el juego.

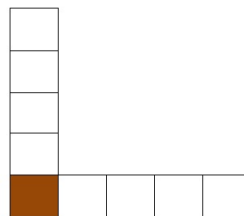
Caso(3) Si el jugador **B** selecciona un cuadro sano $C_{i,1}$ (con $i \in \{1, 2, 3, \dots, n - 2\}$) o un cuadro $C_{n,j}$ (con $j \in \{3, 4, \dots, n\}$), al jugador **A** le basta con equilibrar el juego para seguir teniendo el dominio del juego, es decir, quitar el mismo número de cuadros que el jugador **B** eliminó (ya sea en la columna 1 o en el renglón n). Haciendo esto el jugador **A** puede controlar el juego para que siempre se llegue al subtablero $(0,0,0,\dots,0,1,2)$. Veamos un ejemplo de esta idea en el tablero 5×5 :



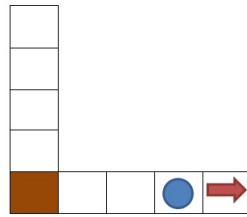
El jugador **A** toma el primer turno y escoge el cuadro sano $C_{n-1,2}$, que en este caso es $C_{4,2}$, pues $n = 5$.



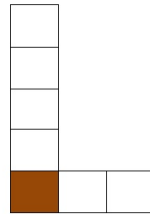
Respetando la regla 2, eliminamos los cuadros que estén al norte y al este, incluyendo el subtablero formado por ellos:



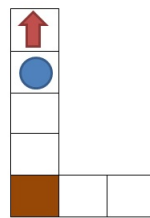
Ahora el jugador **B** selecciona el cuadro $C_{5,4}$:



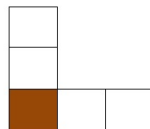
Respetamos la regla 2 (i) eliminamos sólo los cuadros que estén al este:



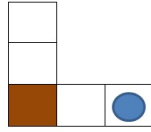
Ahora el jugador **A** debe equilibrar el juego. Como el jugador **B** quitó dos cuadros del renglón 4, el jugador **A** a escoge el cuadro $C_{2,1}$.



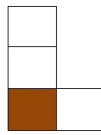
Respetando la regla 2 (ii) quitando los dos cuadros que están al norte:



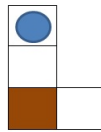
El jugador **B** selecciona el cuadro $C_{5,3}$:



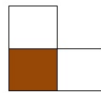
Por la regla 2 (iii) sólo quitamos ese cuadro:



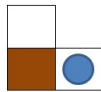
El jugador **A** selecciona el cuadro $C_{3,1}$



Por la regla 2 (iii) quitamos sólo ese cuadro:



Ahora el jugador **B** selecciona el cuadro $C_{5,2}$



Por la regla 2 (iii) quitamos sólo ese cuadro:



Finalmente el jugador **A** selecciona el último cuadro sano, el $C_{5,1}$:



El jugador **B** pierde pues tiene tener que escoger el cuadro envenenado:



Ya sabíamos que encontrar el núcleo de la digráfica asociada es equivalente a encontrar una estrategia ganadora para el jugador **A**, lo interesante es que proporcionamos una estrategia ganadora para **A** en tableros $n \times n$ donde usamos un elemento del núcleo.

3.2. Suma 31

Suma 31 es un juego bipersonal, en el que ambos jugadores toman turnos alternadamente. El objetivo es ir sumando números pequeños hasta que alguno de los jugadores sume 31.

Reglas del Juego

El juego se desarrolla por dos jugadores: **A** y **B**.

1. El jugador **A** (el jugador que empieza) selecciona mentalmente un número dentro del conjunto $E=\{1, 2, 3\}$ y se lo dice a su contrincante.
2. El jugador **B** también elige mentalmente un número dentro del conjunto $E=\{1, 2, 3\}$. El número seleccionado se suma al que se escogió en el primer turno. Es ahí cuando el jugador dice el número que resultado de la suma. Por ejemplo:

Si el jugador **A** toma primer turno y dice 2, el jugador **B** dice 5 de inmediato notamos que el número que seleccionó fue el número 3.

3. El juego continua alternando turnos repitiendo el mismo procedimiento. El ganador será el jugador que sume 31.

Ejemplo del juego:

Consideremos dos jugadores: **A** y **B**. Supongamos que **A** toma el primer turno.

Turno	Jugador A	Jugador B
1.	2	-
2.	-	5=2+3
3.	6=5+1	-
4.	-	9=6+3
5.	11=9+2	-
6.	-	14=11+3
7.	16=14+2	-
8.	-	19=16+3
9.	20=19+1	-
10.	-	23=20+3
11.	25=23+2	-
12.	-	27=25+2
13.	28=27+1	-
14.	-	31=28+3

El jugador **B** gana el juego al sumar 31.

3.2.1. Modelando el juego con teoría de digráficas

Veamos que a lo largo del juego nos movemos entre números que van del 1 al 31. Es natural que pensemos que ahora nuestro conjunto de vértices sean todos estos números:

$$V(D) = \{x : x \text{ es un entero positivo y } 1 \leq x \leq 31\}.$$

Puesto que la regla es que sólo vayamos sumando con números dentro del conjunto $E=\{1, 2, 3\}$, $(v_i, v_j) \in F(D)$, con v_i y v_j dos vértices de la digráfica D , si y sólo si existe un número x dentro del conjunto E tal que $v_i + x = v_j$.

Por ejemplo, consideremos la digráfica asociada a los vértices 1, 4, 6:

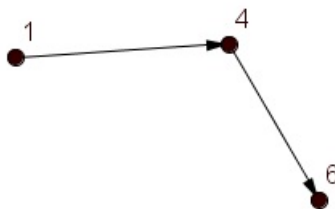


figura 3.24 Ejemplo de adyacencias con algunos vértices.

Veamos que tenemos las flechas $(1,4)$ y $(4,6)$ pues 3 y 2 pertenecen a E y además se cumple que $1+3=4$ y $4+2=6$. Por otro lado no tenemos la $(1,6)$ flecha pues 5 no está en E .

La siguiente figura 3.25 muestra la digráfica D asociada al juego con todos los vértices:

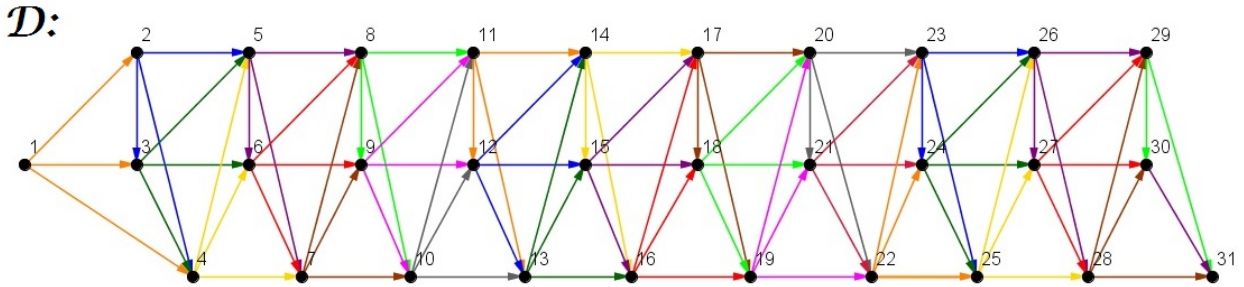


figura 3.25 Digráfica asociada al juego.

Observación: La digráfica D asociada no tiene ciclos dirigidos, puesto que la cantidad más pequeña a sumar en cada turno es 1. Por el teorema 3.1.1.1, la digráfica asociada tiene núcleo.

Busquemos el núcleo de forma similar al teorema 3.1.1.1, tenemos que $N_0 = \{x \in V(D) : \delta^+(x) = 0\} = \{31\}$. Así $D_1 = D \setminus (N_0 \cup \Gamma^-(N_0))$ (véase figura 3.26):

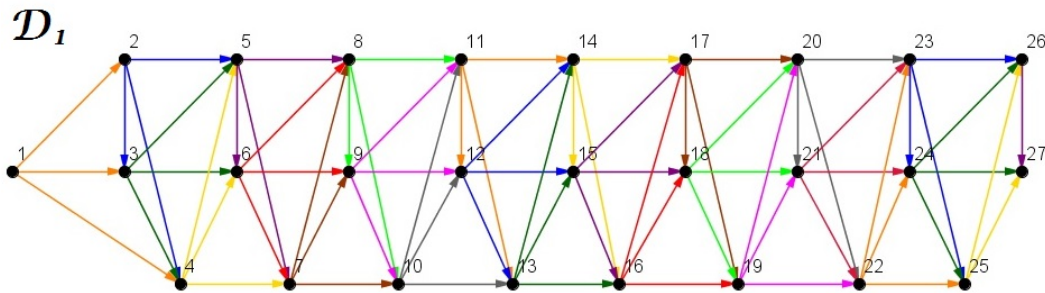


figura 3.26 Subdigráfica D_1 de D .

$$N_1 = \{x \in V(D_1) : \delta_{D_1}^+(x) = 0\} = \{27\} \text{ y } D_2 = D_1 \setminus (N_1 \cup \Gamma^-(N_1)):$$

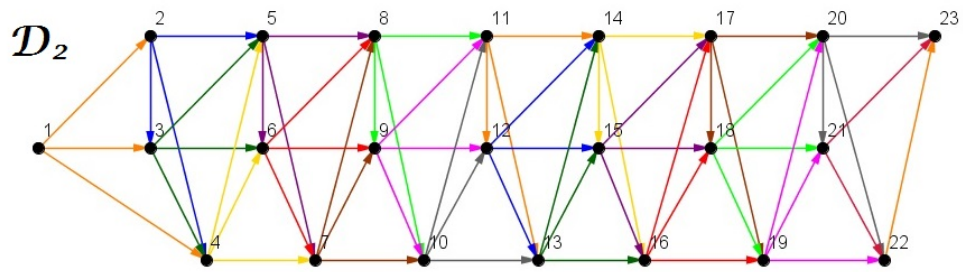


figura 3.27 Subdigráfica D_2 de D_1 .

$$N_2 = \{x \in V(D_2) : \delta_{D_2}^+(x) = 0\} = \{23\} \text{ y } D_3 = D_2 \setminus (N_2 \cup \Gamma^-(N_2)):$$

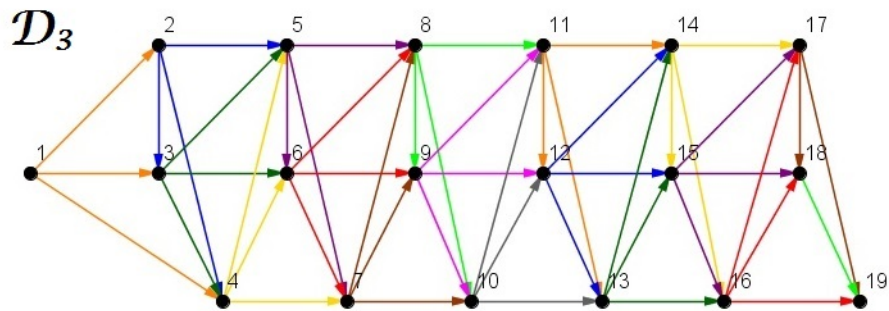


figura 3.28 Subdigráfica D_3 de D_2 .

$$N_3 = \{x \in V(D_3) : \delta_{D_3}^+(x) = 0\} = \{19\} \text{ y } D_4 = D_3 \setminus (N_3 \cup \Gamma^-(N_3)):$$

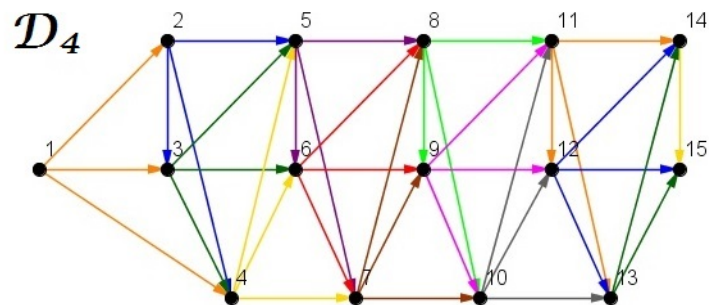


figura 3.29 Subdigráfica D_4 de D_3 .

$$N_4 = \{x \in V(D_4) : \delta_{D_4}^+(x) = 0\} = \{15\} \text{ y } D_5 = D_4 \setminus (N_4 \cup \Gamma^-(N_4)):$$

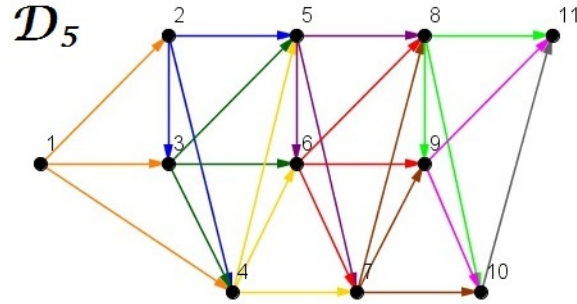


figura 3.30 Subdigráfica D_5 de D_4 .

$$N_5 = \{x \in V(D_5) : \delta_{D_5}^+(x) = 0\} = \{11\} \text{ y } D_6 = D_5 \setminus (N_5 \cup \Gamma^-(N_5)):$$

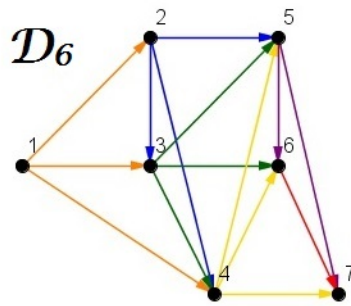


figura 3.31 Subdigráfica D_6 de D_5 .

$$N_6 = \{x \in V(D_6) : \delta_{D_6}^+(x) = 0\} = \{7\} \text{ y } D_7 = D_6 \setminus (N_6 \cup \Gamma^-(N_6)):$$

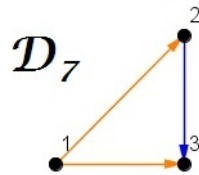


figura 3.32 Subdigráfica D_7 de D_6 .

Finalmente $N_7 = \{x \in V(D_7) : \delta_{D_7}^+(x) = 0\} = \{3\}$ y $D_8 = D_7 \setminus (N_7 \cup \Gamma^-(N_7)) = \emptyset$.

Por el teorema 3.1.1.1 podemos concluir que $\{3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31\}$ es el núcleo de la digráfica asociada y una estrategia ganadora para el jugador que empieza. Veamos a detalle la estrategia en la siguiente tabla, donde la segunda columna nos muestra los números que tiene que dar el jugador **A** y en la tercera columna tenemos los posibles números que tiene **B** después del turno de **A**.

Turno	Jugador A	Jugador B
1.	3	-
2.	-	4, 5 o 6
3.	7	-
4.	-	8, 9 o 10
5.	11	-
6.	-	12, 13 o 14
7.	15	-
8.	-	16, 17 o 18
9.	19	-
10.	-	20, 21 o 22
11.	23	-
12.	-	24, 25 o 26
13.	27	-
14.	-	28, 29 o 30
15.	31	-

Si el objetivo del juego es llegar al número 35, con las mismas reglas, la estrategia ganadora para el jugador **A** se obtiene de manera similar. En general **A** podrá ganar para cualquier número de la forma $35+4(n)$, con n en el conjunto de los números naturales.

3.3. Llega a la Meta

Llega a la Meta es un juego biperonal, que se lleva a cabo en tableros de $n \times n$. El objetivo del juego es moverse entre las casillas del tablero mediante reglas establecidas con el fin de llegar al cuadro de la esquina inferior derecha. Se sugiere tener como material algunas estrellas o monedas para marcar el camino que sigue cada jugador.

Reglas del juego

El juego se desarrolla por dos jugadores: **A** y **B**.

1. Elegir el tablero donde se llevará acabo el juego. Posteriormente iluminar el cuadro de la esquina superior izquierda y el cuadro de la esquina inferior derecha. Dichos cuadros serán considerados como *Inicio* y *Meta*, respectivamente (véase figura 3.33).

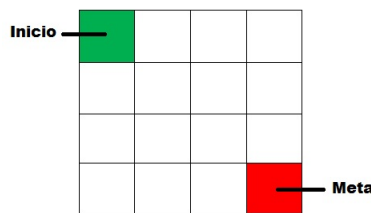


figura 3.33 Cuadro Inicio y cuadro Meta.

2. El jugador **A** empieza marcando el cuadro de inicio.
3. El jugador en turno seleccionará un cuadro, ya sea el que este justo a la derecha, justo hacia abajo o en diagonal al que marcó el otro jugador en el turno anterior, y lo marcará (véase figura 3.34).

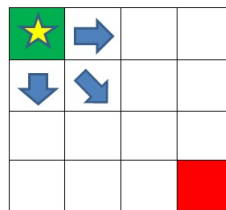
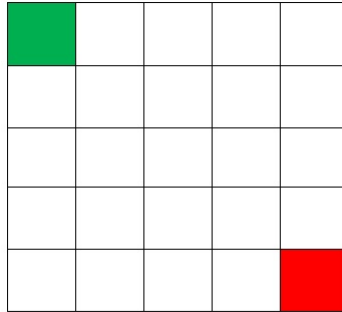


figura 3.34 Movimientos del juego.

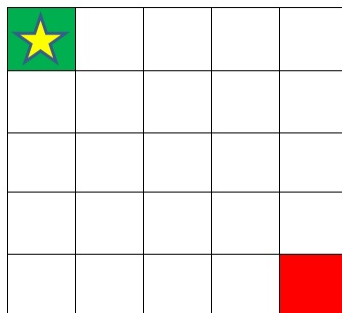
4. El ganador del juego será quien marque el cuadro meta.

Ejemplo del juego

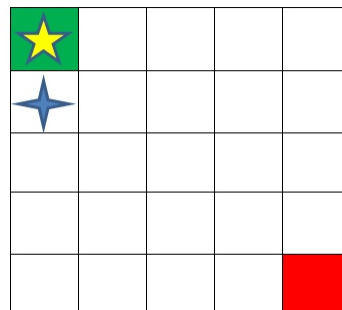
Consideremos un tablero de 5×5 .



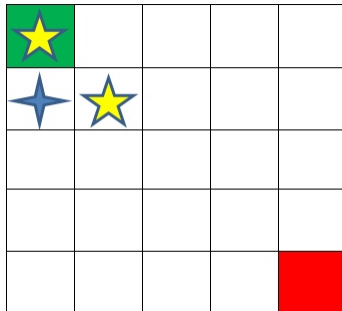
El jugador **A** inicia marcando el cuadro de inicio (estrella de cinco puntas).



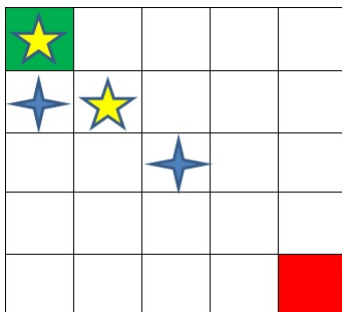
El jugador **B** marca el cuadro que está justo por debajo del marcado anteriormente (estrella de cuatro puntas):



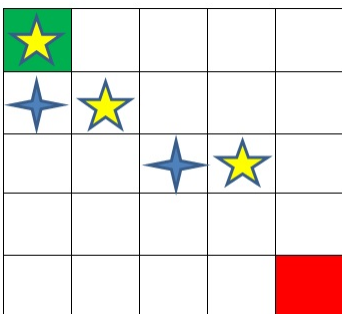
El jugador **A** marca el cuadro que está justo a la derecha del último marcado con la estrella azul:



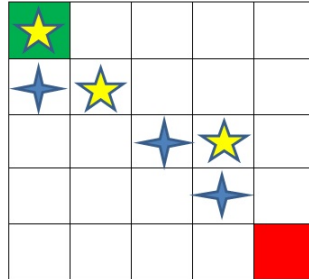
El jugador **B** marca el cuadro que está en diagonal al último marcado con la estrella amarilla:



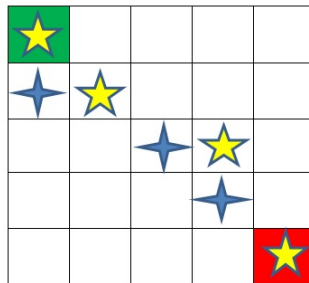
El jugador **A** marca el cuadro que está justo a la derecha del último marcado con la estrella azul:



El jugador **B** marca el cuadro que está justo por debajo del último marcado con la estrella amarilla:



Finalmente el jugador **A** gana al marcar el cuadro que está en diagonal al marcado con la estrella amarilla:



3.3.1. Modelando el juego con teoría de digráficas

Puesto que el objetivo del juego es moverse entre los cuadros de un tablero $n \times n$ respetando las reglas, naturalmente tenemos que nuestro conjunto de vértices son todos los cuadros del tablero, para una notación más sencilla enumeraremos por renglones de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo los cuadros, por lo que el conjunto de vértices sería de la siguiente forma:

$$V(D) = \{x : x \text{ es número entero positivo y } 1 \leq x \leq n^2\}.$$

Así $(x, y) \in F(D)$, con x y y vértices de D , si y sólo si podemos pasar del cuadro x al y respetando la regla 3.

Veamos un ejemplo, consideremos nuevamente el tablero de 5×5 . Lo primero que haremos será enumerar los cuadros de izquierda a derecha empezando por el primer renglón (véase figura 3.35).

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

figura 3.35 Tablero 5×5 .

La siguiente digráfica modela el juego con todos los vértices (figura 3.36):

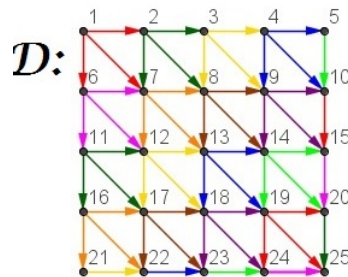
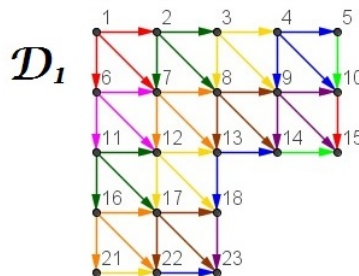


figura 3.36 Digráfica asociada al tablero del juego.

Observación: Observemos que por la regla 3 no podemos regresar a un cuadro marcado, lo cual nos indica que no hay ciclos dirigidos en la digráfica asociada. Por el teorema 3.1.1.1, la digráfica asociada tiene núcleo.

Obtengamos el núcleo de la digráfica asociada mediante la construcción del teorema 3.1.1.1. Tenemos que $N_0 = \{x \in V(D) : \delta^+(x) = 0\} = \{25\}$. Así $D_1 = D \setminus (N_0 \cup \Gamma^-(N_0))$ (véase figura 3.37):

figura 3.37 Subdigráfica D_1 de D .

$$N_1 = \{x \in V(D_1) : \delta_{D_1}^+(x) = 0\} = \{15, 23\} \text{ y } D_2 = D_1 \setminus (N_1 \cup \Gamma^-(N_1)):$$

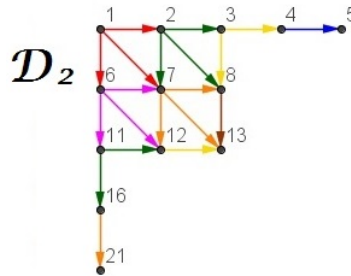


figura 3.38 Subdigráfica D_2 de D_1 .

$$N_2 = \{x \in V(D_2) : \delta_{D_2}^+(x) = 0\} = \{5, 13, 21\} \text{ y } D_3 = D_2 \setminus (N_2 \cup \Gamma^-(N_2)):$$

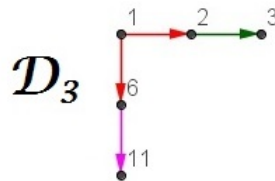


figura 3.39 Subdigráfica D_3 de D_2 .

$$N_3 = \{x \in V(D_3) : \delta_{D_3}^+(x) = 0\} = \{3, 11\} \text{ y } D_4 = D_3 \setminus (N_3 \cup \Gamma^-(N_3)):$$

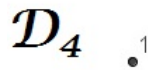


figura 3.40 Subdigráfica D_4 de D_3 .

$$\text{Finalmente } N_4 = \{x \in V(D_4) : \delta_{D_3}^+(x) = 0\} = \{1\} \text{ y } D_5 = D_3 \setminus (N_3 \cup \Gamma^-(N_3)) = \emptyset.$$

Así, por el teorema 3.1.1.1 el conjunto $\{1, 3, 5, 11, 13, 15, 21, 23, 25\}$ es un núcleo de D y una estrategia ganadora para el jugador **A** en este caso particular. Veamos a detalle la estrategia en la figura 3.40, donde los renglones del jugador **A** nos muestran los cuadros que tiene que marcar y los renglones del jugador **B** tienen los cuadros posibles que tiene para jugar con base en el turno de **A**. La punta de la flecha “▲” nos indica que se procede de la misma forma cuando el jugador **A** elige ir al cuadro 13.

2. Para tableros con n impar la estrategia ganadora será para el jugador **A**. Esto se debe a que en cada reglón impar los cuadros (amarillos) que representan los elementos del núcleo pueden distribuirse en las esquinas, véase algunos ejemplos en la figura 3.43:

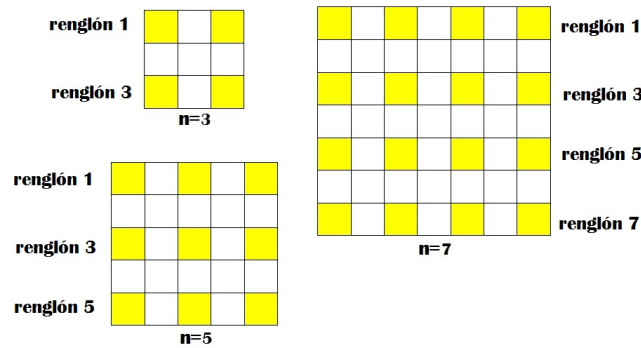


figura 3.43 Tableros con n impar.

Por lo que en el primer reglón el cuadro *Inicio* es parte de los elementos del núcleo. Como el jugador **A** inicia en ese cuadro puede controlar el juego con los otros elementos del núcleo.

3. Para tableros con n par la estrategia ganadora será para el jugador **B**. Por lo anterior tenemos que $n - 1$ es impar, así que podemos considerar un tablero de $(n - 1) \times (n - 1)$ contenido en el $n \times n$, donde los cuadros que representan los elementos del núcleo quedarían distribuidos de la siguiente forma:

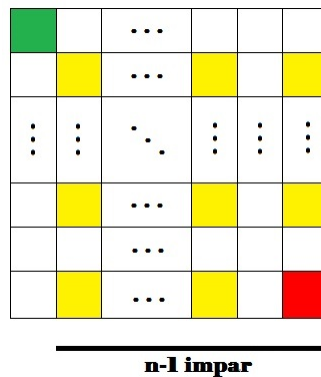


figura 3.43 Tableros con n par.

Como el jugador **A** inicia en el cuadro *Inicio*, el jugador **B** es el que puede tomar un elemento del núcleo (cuadros amarillos).

Capítulo 4

Juegos de divisibilidad

Desde los inicios de nuestra formación académica, fueron introducidos en nuestras clases de matemáticas los criterios de divisibilidad para los diferentes números. El criterio de divisibilidad para el número 3 por ejemplo nos dice que, un número es divisible entre 3 si y sólo si la suma de sus dígitos es divisible entre tres. Un criterio, que seguramente no olvidaremos por su sencillez es el del número 5, pues menciona que un número es divisible entre 5 si su último dígito es 0 o 5. Otros criterios, por ejemplo el del número 7, son desconocidos por muchas personas. En el año 2009 se publicó quizá uno de los métodos más interesantes para saber si un número es divisible entre 7 pues utiliza una digráfica en la cual se recorren sus flechas con base en los dígitos del número en cuestión. Si al final se llega a cierto vértice sabremos si el número es divisible entre 7. Comúnmente la digráfica es llamada “la digráfica de divisibilidad 7” [24].

El objetivo de este capítulo es presentar cuatro juegos que creamos inspirados en la digráfica de divisibilidad 7.

En la sección de “Divisibilidad” del Apéndice se encuentran las definiciones básicas de álgebra necesarias para este capítulo.

4.1. La digráfica de divisibilidad 7

La digráfica de divisibilidad 7 es atribuida al estadounidense David Wilson (figura 4.1).

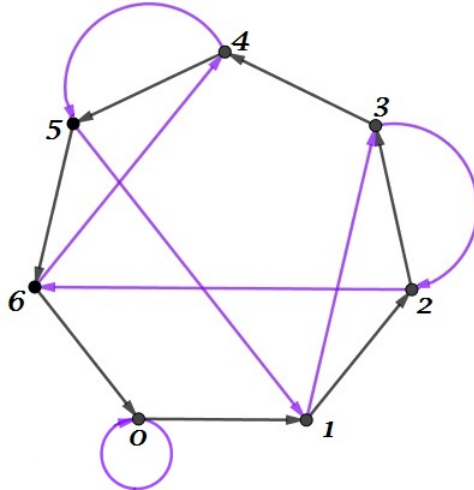


figura 4.1 Digráfica de divisibilidad 7.

Analicemos los elementos de la digráfica. Su conjunto de vértices está formado por todos los residuos que puede tener un número al dividirse entre 7; es decir, el 0, 1, 2, 3, 4, 5 y el 6. Notemos que tenemos dos tipos de flechas, las que son de color morado y las que son de color negro. Observemos también que a cada vértice le llega una flecha morada y una negra, de igual forma le sale una flecha negra y una morada.

Las flechas negras se construyen de la siguiente forma:

$$(x, y) \in F_n(D) \text{ si y sólo si } x + 1 = y \pmod{7}.$$

Las flechas moradas por otro lado se construyen:

$$(x, y) \in F_m(D) \text{ si y sólo si } 10x = y \pmod{7}.$$

En términos de la notación que hemos estado usando la digráfica D de divisibilidad 7 está constituida por $V(D) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $F(D) = F_n(D) \cup F_m(D) = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 0)\} \cup \{(0, 0), (1, 3), (2, 6), (3, 2), (4, 5), (5, 1), (6, 4)\}$.

Observación: El vértice 0 es adyacente a él. En general si $(a, a) \in F(D)$, entonces (a, a) es llamada lazo.

Para ver si un número es divisible entre 7 lo que se hace es recorrer los vértices de la digráfica, primero sobre las flechas negras y luego sobre las moradas con base en cada dígito del número. Si después de los recorridos llegamos al vértice 0 entonces el número será divisible entre 7.

Veamos un ejemplo antes de presentar formalmente el criterio. Consideremos al número 3486.

Tomamos el primer dígito de izquierda a derecha del número, que en nuestro caso es 3, y desde el vértice 0 nos movemos 3 flechas negras respetando su dirección, de este modo llegamos al vértice 3, después tomamos la flecha morada que le sale y llegamos al vértice 2 (véase figura 4.2).

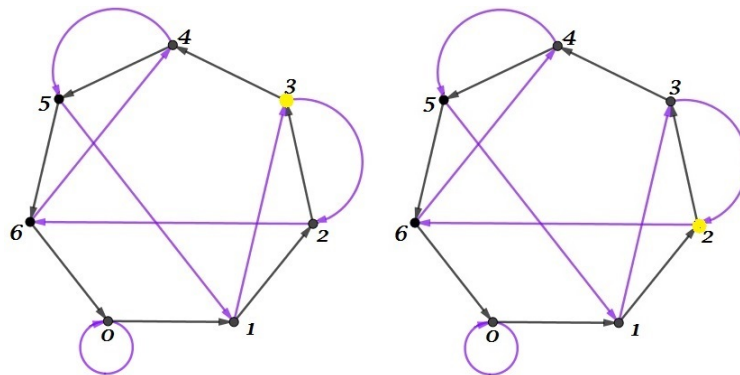


figura 4.2 Recorrido en la digráfica usando el primer dígito.

Ahora tomamos el segundo dígito que es 4, de igual forma nos movemos 4 flechas negras a partir del vértice 2, por lo que llegamos al vértice 6, luego tomamos la flecha morada que le sale para llegar al vértice 4 (véase figura 4.3).

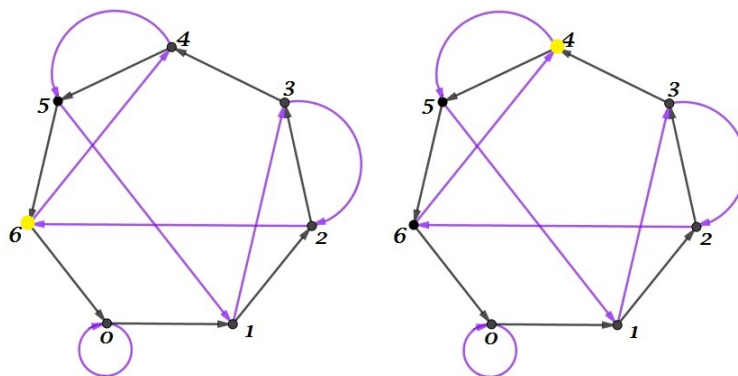


figura 4.3 Recorrido en la digráfica usando el segundo dígito.

Tomamos ahora el tercer dígito del número que es 8, y nos movemos 8 flechas negras a partir del vértice 4 para así llegar al vértice 5, luego tomamos la flecha morada que le sale para llegar al vértice 1 (véase figura 4.4).

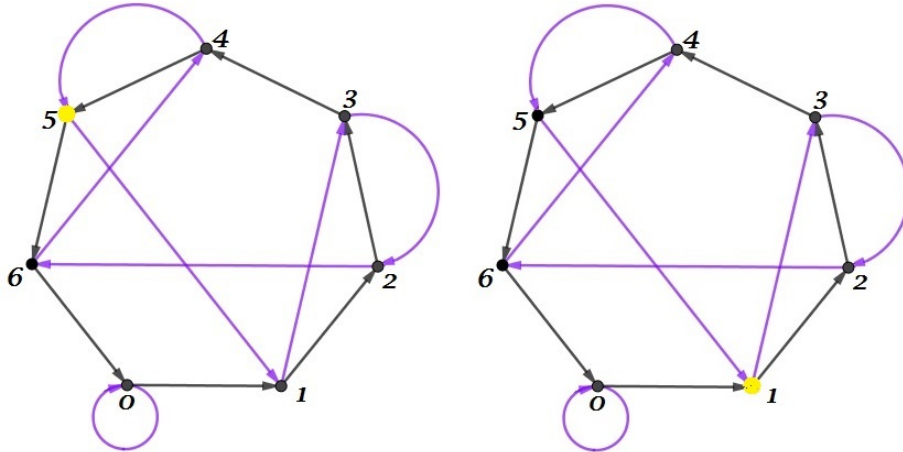


figura 4.4 Recorrido en la digráfica usando el tercer dígito.

Finalmente para el último dígito nos movemos 6 flechas negras a partir del vértice 1, por lo que llegamos al vértice 0 (ver figura 4.5), en este caso ya no tomamos la flecha morada que le sale.

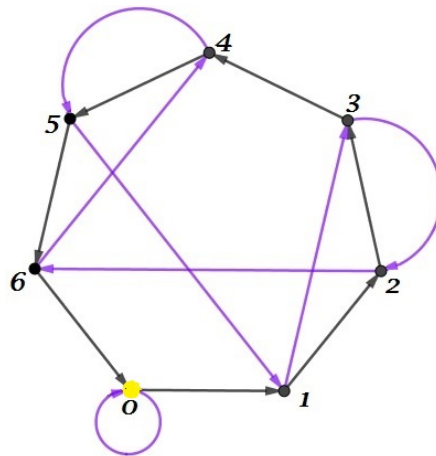


figura 4.5 Recorrido en la digráfica usando el cuarto dígito.

Como llegamos al vértice 0, el criterio nos dice que el número 3486 es divisible entre 7.

4.1.1. Criterio de divisibilidad

De manera general veamos cuando un número es divisible entre 7 usando la digráfica. Supongamos que tenemos un número a con n dígitos; es decir, $a=x_1x_2\dots x_n$.

En la digráfica de divisibilidad 7 tomamos el 0 como origen y nos movemos a los otros vértices solamente sobre las flechas negras. El número de flechas negras que recorremos es igual al número x_1 (primer dígito). Al llegar al vértice correspondiente, tomamos la flecha morada que le sale, el vértice al cual lleguemos lo consideramos como nuevo origen. Nos movemos ahora hacia los otros vértices nuevamente sólo por las flechas negras, el número de flechas que recorremos es igual al número x_2 (segundo dígito). Al llegar al vértice correspondiente nuevamente tomamos la flecha morada y al vértice al cual lleguemos lo consideramos como origen. El proceso se repite de la misma forma hasta el dígito x_{n-1} . Para el último dígito x_n nos movemos de la misma forma con las flechas negras pero ya no usamos la flecha morada que le sale al vértice.

Si llegamos al vértice 0 después de todo el recorrido, el número a es divisible entre 7.

Por otro lado, si llegamos a cualquier otro número diferente de 0, entonces ese número es el residuo que resulta de dividir a entre 7.

Ahora que conocemos la digráfica de divisibilidad 7, lo más natural es preguntarse lo siguiente: ¿por qué funciona? La respuesta se debe a una factorización muy peculiar que podemos hacerle al número que queremos aplicarle el criterio. Veamos un ejemplo en concreto.

Volvamos a considerar el número 3486. Observemos que $3486 = 3(1000) + 4(100) + 8(10) + 6 = 3(10^3) + 4(10^2) + 8(10) + 6$. Factorizando un 10 en los primeros tres términos tenemos lo siguiente:

$$3486 = [3(10^2) + 4(10) + 8]10 + 6$$

Finalmente factorizando un 10 en los primeros dos términos dentro del paréntesis tenemos:

$$3486 = [[3(10) + 4]10 + 8]10 + 6$$

Analicemos esta factorización, que llamaremos “factorización Wilson”. En general si $a=x_1x_2\dots x_n$, la factorización Wilson de dicho número es:

$$[\dots[[x_1(10) + x_2]10 + x_3]10 + \dots + x_{n-1}]10 + x_n$$

Veamos que hay dos tipos de operaciones: suma y multiplicación. Si realizamos las operaciones módulo 7, los resultados que se van obteniendo serán los mismos que se tienen al movernos sobre los vértices de la digráfica con su criterio de divisibilidad, por ejemplo en la primera operación de $[[3(10) + 4]10 + 8]10 + 6$:

$3(10)=30=2$ módulo 7 que es lo mismo que ir al vértice 3 desde 0 y tomar la flecha morada que le sale para llegar a 2.

en la segunda y tercera operación tenemos:

$[2+4]10=6(10)=60=4$ módulo 7 que resulta lo mismo al moverse 4 unidades desde 2 hasta el 6, y tomar la flecha morada que le sale para llegar al vértice 4.

Esto se debe a la forma en la que se construyeron las flechas, las negras nos ayudan a resolver la suma para dos números módulo 7 y las moradas la multiplicación módulo 7. Es por eso que el criterio nos hace tomar los dígitos del número de izquierda a derecha, y también que en el último dígito no se toma la flecha morada.

4.1.2. Multidigráfica de divisibilidad k

En general para un número entero k distinto de 7 también podemos obtener una digráfica D que nos ayude a desarrollar las operaciones que se hacen módulo k en la factorización Wilson. Así $V(D)$ es el conjunto de todos los residuos de k .

Las flechas negras se construyen de la siguiente forma:

$$(x, y) \in F_n(D) \text{ si y sólo si } x + 1 = y \pmod{k}.$$

Las flechas moradas por otro lado se construyen:

$$(x, y) \in F_m(D) \text{ si y sólo si } x(10) = y \pmod{k}.$$

Al dibujar la digráfica puede que encontremos en ella lazos, flechas negras (x, y) y flechas moradas (x, y) . A estas digráficas les llamaremos **multidigráficas**. La figura 4.6 nos muestra las multidigráficas de divisibilidad 4 y de divisibilidad 19.

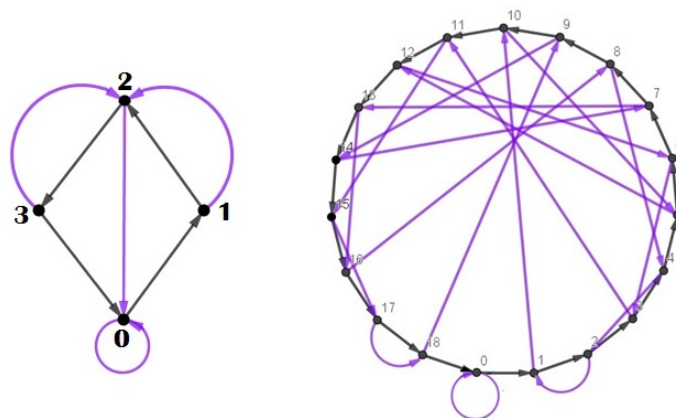


figura 4.6 Multidigráficas de divisibilidad 4 y de divisibilidad 19.

Veamos también que la forma en que se recorren los vértices es similar a la digráfica de divisibilidad 7; es decir, primero se recorren las flechas negras para llegar a un vértice y luego se usa la flecha morada que le sale.

Prosigamos a conocer los juegos que creamos inspirados en la digráfica de divisibilidad 7.

4.2. Primer juego: Construyendo un número

El siguiente juego se lleva a cabo en la digráfica de divisibilidad 7 y es bipersonal. El objetivo es construir el número más grande, con diferentes dígitos, que sea divisible entre 7.

Reglas del juego

El juego se desarrolla por dos jugadores: **A** y **B**.

1. El jugador **A** selecciona un dígito de la figura 4.7, lo tacha y avanza en la digráfica de divisibilidad 7 desde el vértice 0, usando únicamente las flechas negras, igual al número previamente seleccionado. Al llegar al vértice correspondiente, **A** toma la flecha morada para ir a otro vértice.

0	1	2	3	4
5	6	7	8	9

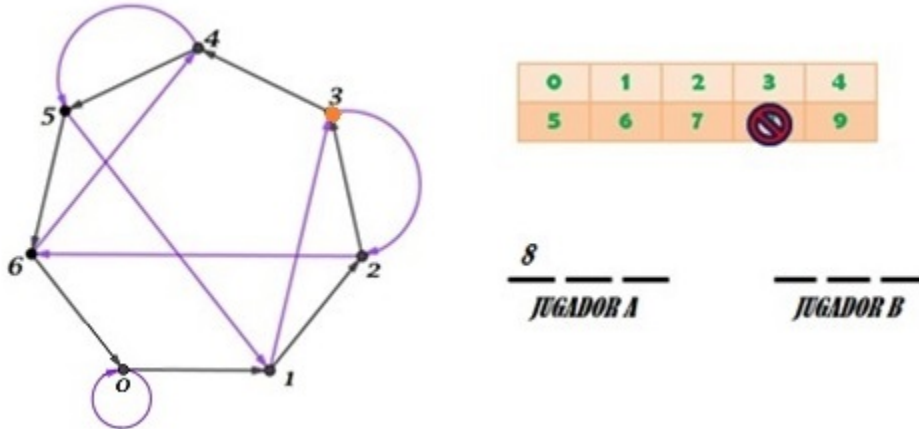
figura 4.7 Tabla con 10 dígitos.

2. El jugador **B** hace lo mismo en su turno, pero él selecciona un número que no haya sido tachado.
3. Para el segundo turno de cada jugador se procede de la misma forma tomando como origen el vértice al cual se llegó anteriormente. En el tercer y último turno lo único que cambia es que los jugadores no toman como paso final la flecha morada.
4. El ganador del juego será el jugador que construya el número más grande divisible entre 7 o el que sea divisible por 7.

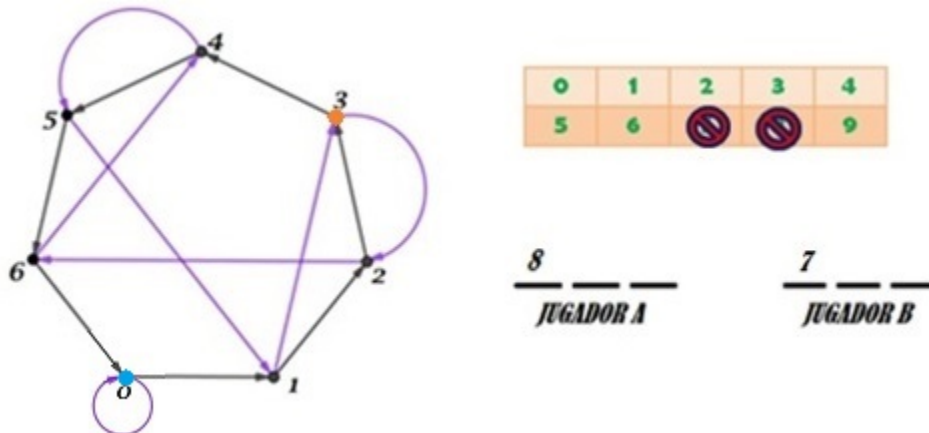
Observación: Seleccionar el número 0 nos permite movernos solamente sobre la flecha morada que le sale al vértice que tenemos de origen sin usar previamente las flechas negras.

Ejemplo del juego

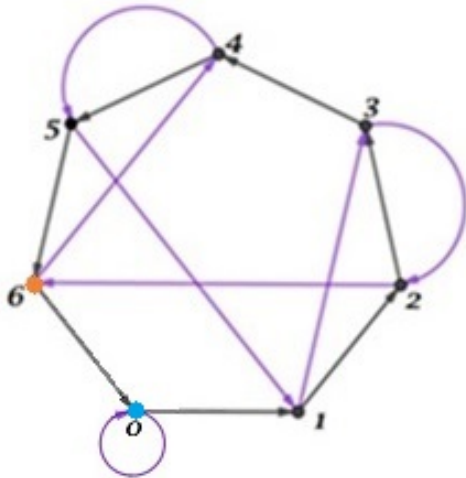
El jugador **A** empieza seleccionando el número 8, por lo que se mueve 8 flechas negras hasta llegar al vértice 1, luego toma la flecha morada para llegar al vértice 3.



El jugador **B** toma su primer turno y selecciona el número 7. Al moverse 7 flechas negras llega nuevamente al vértice 0, como la flecha morada que le sale es un lazo, nos quedamos ahí.



El jugador **A** toma su segundo turno y selecciona el número 6, por lo que al desplazarse sobre las flechas tomando como inicio el vértice 3 llega al vértice 2, posteriormente toma la flecha morada para llegar al vértice 6.

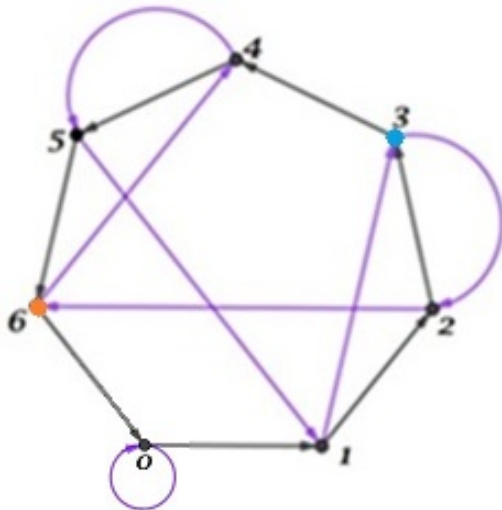


0	1	2	3	4
5				9

8 6
JUGADOR A

7
JUGADOR B

Ahora el jugador **B** escoge el número 1, por lo que únicamente se mueve al vértice 1, luego se mueve al vértice 3 por la flecha morada.

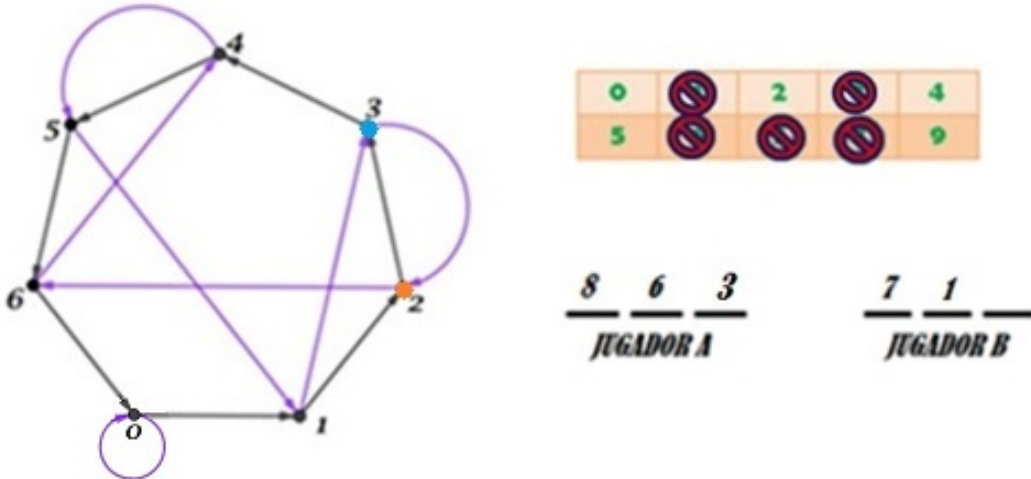


0		2	3	4
5				9

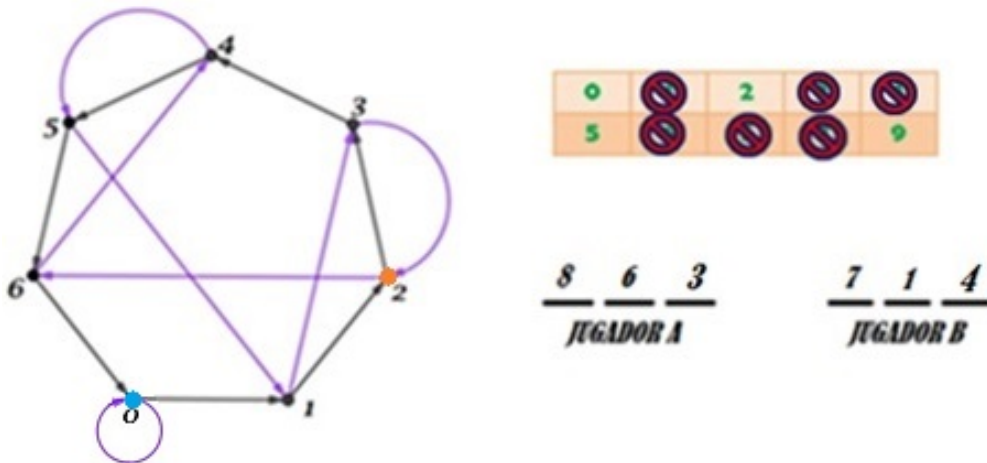
8 6
JUGADOR A

7 1
JUGADOR B

Para su turno final, el jugador **A** selecciona el número 3, por lo que avanza 3 flechas hasta llegar al vértice 2 (ya no considera la flecha morada por la regla 3).



Finalmente el jugador **B** selecciona el número 4, por lo que avanza 4 flechas hasta el vértice 0.



El número que formó el jugador **A** fue 863, mientras que **B** construyó el número 714. Por el criterio de divisibilidad el número de **A** no es divisible entre 7, pero el de **B** si lo es. Por lo que el ganador del juego es **B**.

Por lo anterior, de la lista 903, 910, 917, 924, 931, 938, 945, 952, 973, 980, 987 nos quedaremos con los pares de números que repiten los primeros dos dígitos (de izquierda a derecha): **910 y 917, 931 y 938, 980 y 987**, pues construir alguno de ellos le garantiza al jugador **A** la victoria. Esto se debe a lo siguiente: como habíamos mencionado antes el jugador **A** toma en su primer turno el dígito 9, la elección del segundo dígito depende de lo que haya jugado **B** en su primero turno. Si selecciona **B** un número diferente de 0, 1, 3, 7 u 8 (los dígitos de los pares 910 y 917, 931 y 938, 980 y 987), **A** puede escoger en su siguiente turno el segundo dígito de cualquier par, como tiene dos opciones en su turno final debe elegir el número que le convenga para ganar.

Por otro lado si selecciona **B** en su primer turno el 0, 1, 3, 7 o el 8, **A** tendría que elegir el segundo dígito del par que no tenga ningún número en común con el que **B** uso. Por ejemplo: **A** juega el 9 en su primer turno, luego **B** juega el 8, el par que no tiene al 8 es 910 y 917, por lo que **A** debe seleccionar el número 1 en su segundo turno y así garantiza su victoria al tener dos opciones para ganar: 910 y 917. En la figura 4.9 se muestran los números que debe jugar **A** para ganar dependiendo de lo que escoja **B**.

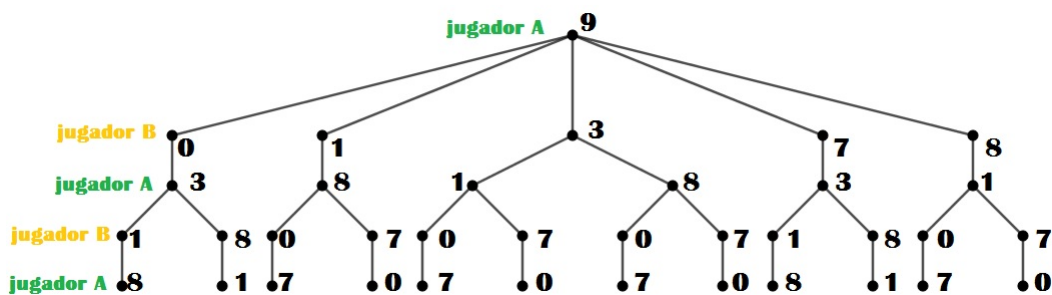


figura 4.9 Estrategia ganadora de A.

4.3. Segundo juego: El escape de Robin Hood

El siguiente juego se basa en la historia de Robin Hood y en la digráfica de divisibilidad. A diferencia de los otros juegos que se han presentado no se dará una estrategia ganadora o una solución debido a que depende del azar.

Robin Hood fue un astuto y valiente héroe, considerado como una leyenda de la Inglaterra medieval, que se caracterizó por ser un ladrón que le quitaba dinero a los ricos para dárselo a los pobres. Vestido de verde y armado con una espada y un arco, el famoso forajido luchaba en contra del sheriff de Nottingham y el príncipe “Juan sin tierra”. Gracias a su astucia, Robin Hood siempre tenía un plan de escape de los guardias del rey. Se dice que el escondite de Robin Hood se encontraba en los bosques de Sherwood y de Barnsdale [22].

De acuerdo al relato nuestro juego se desarrollará en 7 regiones, que representan los lugares donde Robin Hood aparecía, las regiones se enumerarán del 0 al 6 con base en el nivel de seguridad de los guardias que el rey puso en dichos lugares, la primera región es su escondite, y en ella era seguro estar, la región 6 es el castillo del rey. Los grupos de guardias en las regiones se muestra en la siguiente tabla.

Región	Grupos de Guardias
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6

Las 7 regiones se presentan con números blancos en el tablero de la figura 4.10.

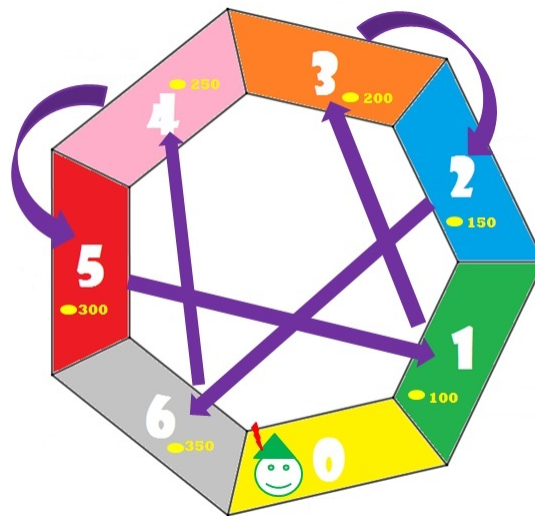


figura 4.10 Tablero del juego.

Los números amarillos en cada casilla simbolizan el número de doblones de oro que obtiene Robin Hood al llegar a robar a una región.

El plan de robo de Robin Hood en el juego consiste en partir de una casilla a otra para tomar el número de doblones correspondiente y huir por las flechas moradas a otra casilla para estar a salvo. El objetivo del juego es que Robin Hood regresé a su escondite para acumular los doblones de oro.

Antes de dar las reglas definamos lo que es un recorrido pues se hará uso de este concepto. Un **recorrido** en el juego es un viaje de una región a otra. Como material extra se necesitan

dos dados con 12 caras cada uno. Diez caras del dado tienen números del 0 al 9. La onceava cara es un comodín y la última cara nos permite lanzar ese dado nuevamente.

Reglas del juego

1. El juego se puede desarrollar por dos o más jugadores. Todos los jugadores empiezan desde la región 0 con una cuenta personal de doblones de oro igual a cero. El orden de juego se decide al azar.
2. Las casillas se recorren en orden numérico y en sentido contrario de la manecillas del reloj. El número de casillas que se mueve resulta igual a la selección de uno de dos dados que se arrojan al mismo tiempo por el mismo jugador.
3. Cada jugador tiene siete tiradas de dados y en ellas se efectuará el plan de robo de Robin Hood; es decir, robará los doblones de oro de la región a la que se desplace, posteriormente con ayuda de la flecha morada que le sale a esa región escapará a otra. Las siete tiradas se hacen continuamente.

Observaciones:

- a) En las primeras 6 tiradas se realizan dos recorridos: uno para llegar a robar a una región y el otro para escapar, en la última sólo se realiza un recorrido, por lo que en total tenemos 13 recorridos.
 - b) Moverse cero casillas será la única forma de quedarse en alguna región para robar y escapar por la flecha morada, pero también cuentan como 2 recorridos.
4. Al llegar a una región a robar, el jugador en turno suma a su cuenta personal los doblones de oro de la casilla, y en el escape no se suman a la cuenta personal los doblones de oro de la última casilla.

Nota: Al robar cada casilla y huir, los doblones de oro son reembolsados por el rey, por lo que se vuelve a poner la cantidad de oro que originalmente tenía.

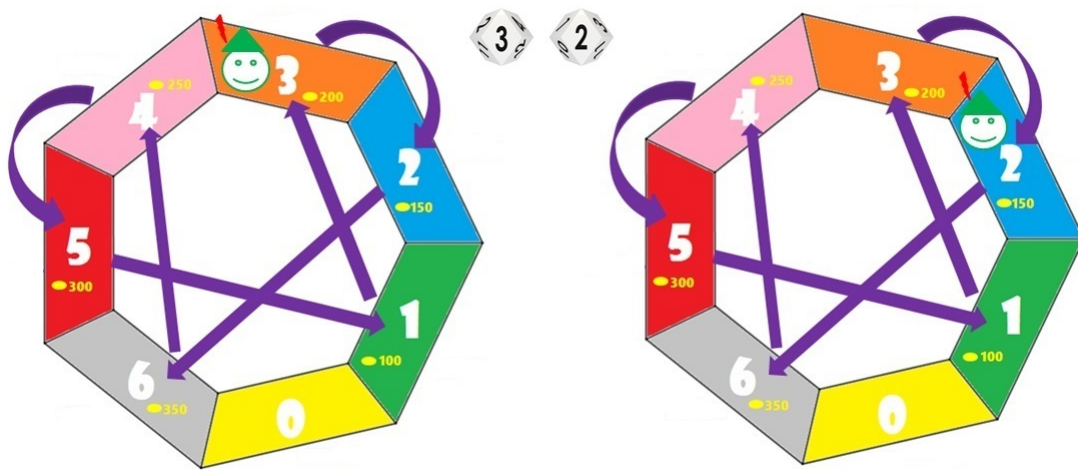
6. Al llegar a la región 0, se acumulan todos los doblones de oro que se tenían y la cuenta personal vuelve a empezar en 0.
7. El jugador con más doblones de oro acumulados gana el juego.

Observación: La digráfica de divisibilidad 7 fue adaptada al tablero del juego. A cada casilla del tablero le corresponde un vértice de la digráfica, que coincide con ser el número de guardias de esa región. Movernos sobre el tablero en dirección contraria a las manecillas del reloj es equivalente a movernos sobre las flechas negras. Finalmente las flechas moradas no cambian en ambos casos.

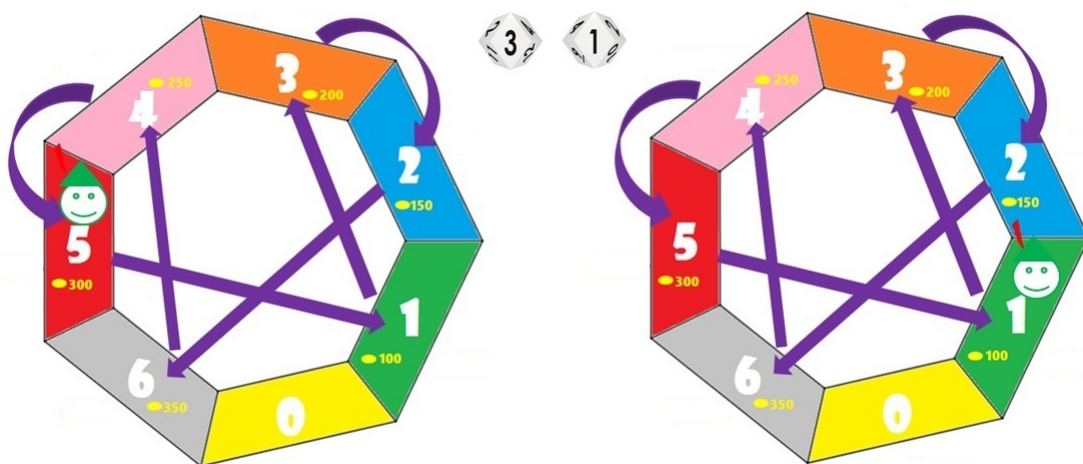
Ejemplo del juego

En este ejemplo solo participarán dos jugadores: **A** y **B**. A continuación se mostrarán a detalle los movimientos de **A**.

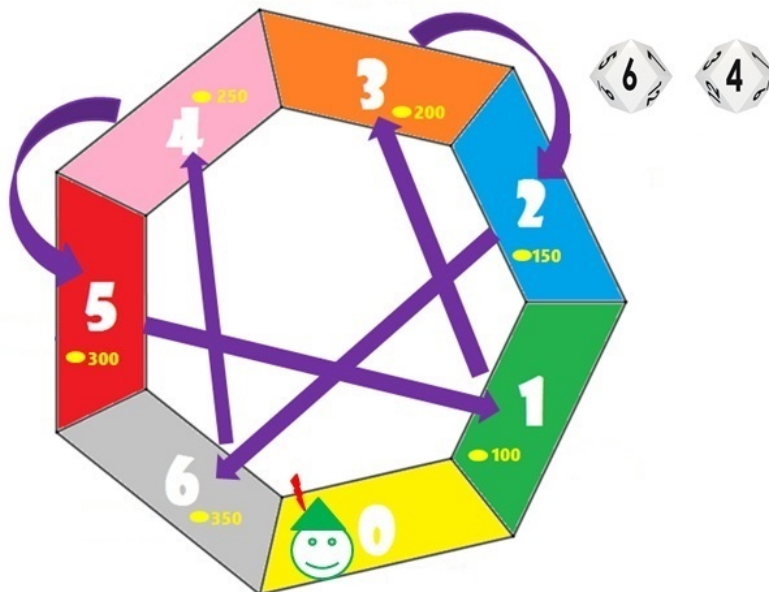
El jugador **A** toma sus 13 recorridos primero. Empieza lanzando sus dos dados y elige avanzar a la región tres, por lo que toma 200 doblones de oro y escapa a la región 2.



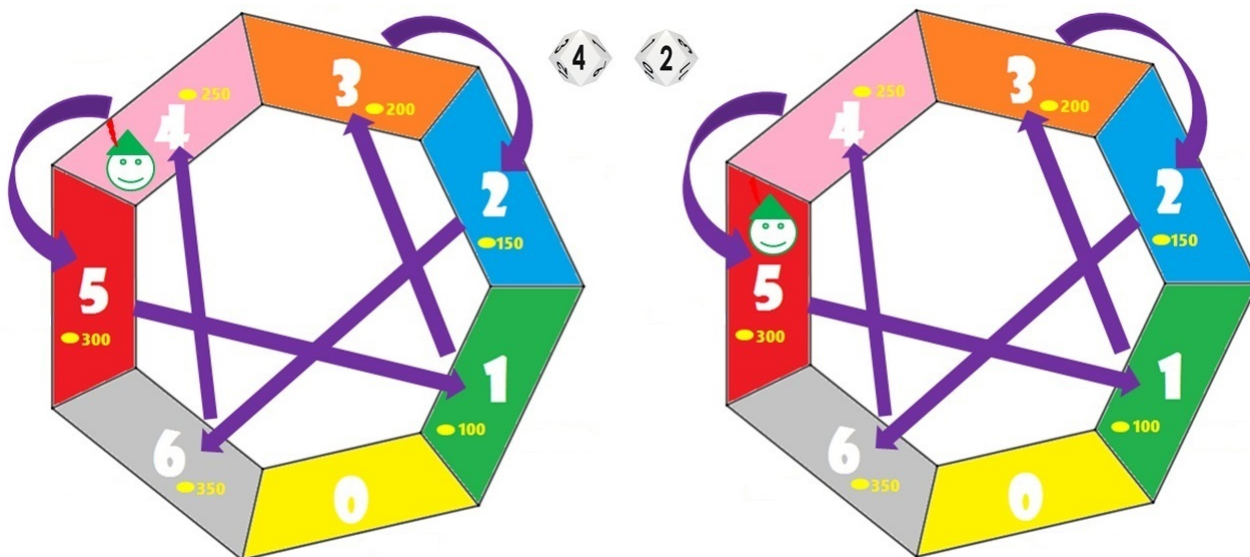
El jugador **A** vuelve a lanzar los dados y nuevamente escoge avanzar tres casillas, por lo que llega a la región 5 y suma a su cuenta personal 500 doblones de oro. Posteriormente escapa a la región 1.



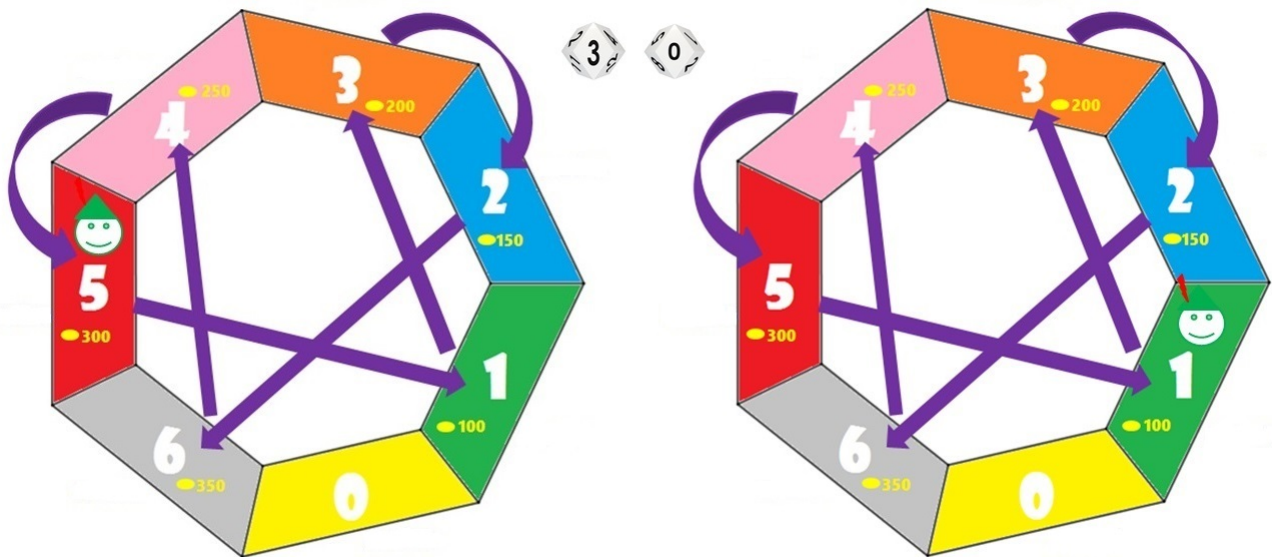
El jugador **A** vuelve a lanzar los dados y ahora decide avanzar 6 casillas, así llega a la región 0 y acumula 500 doblones de oro.



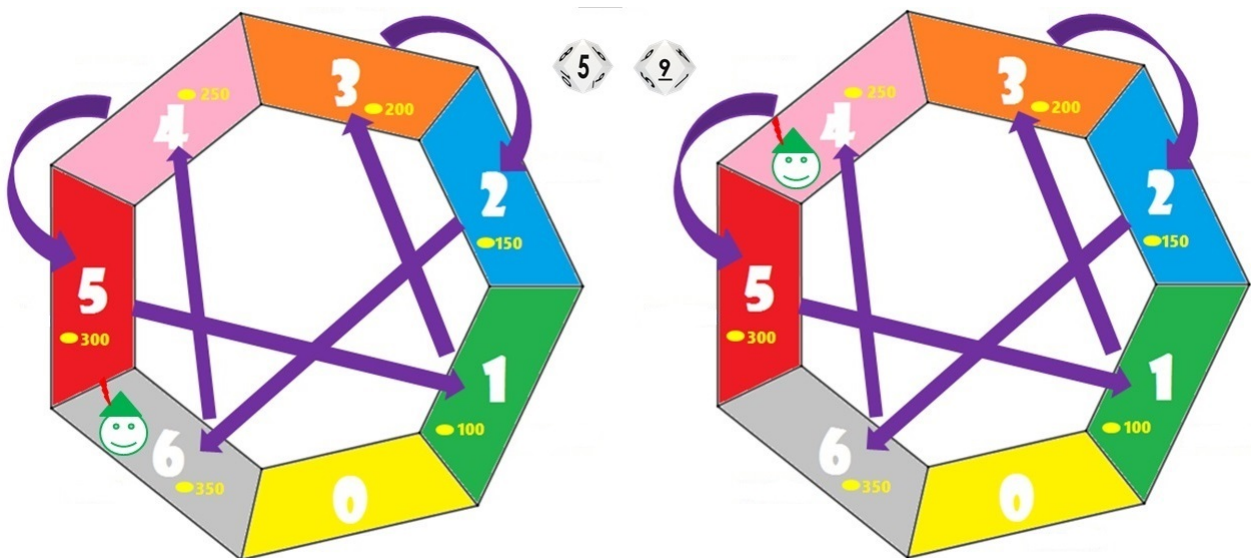
Nuevamente **A** lanza los dados y esta vez escoge avanzar a la región 4 y suma a su cuenta personal 250, luego escapa a la región 5.



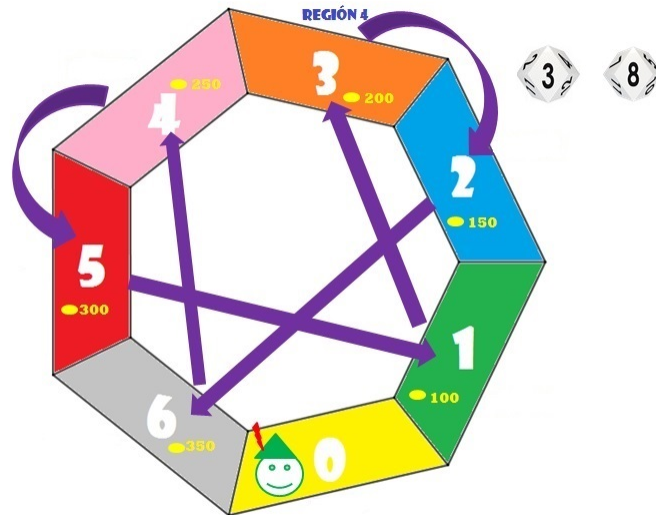
A lanza los dados y escoge el 0, por lo que suma los 300 doblones de oro de la región 5, de manera que lleva 550 en su cuenta personal. Posteriormente escapa a la región 1.



En su penúltima tirada A lanza los dados y decide avanzar hasta la región 6 sumando a su cuenta personal 900 doblones de oro, luego escapa a la región 4.



Finalmente **A** lanza los dados y avanza 3 casillas para llegar a la región 0 donde acumula sus 900 doblones de oro.



Así el jugador **A** logra acumular un total de 1400 doblones de oro.

Por otro lado el jugador **B** obtuvo 1250 doblones de oro. Por lo que el jugador **A** gana al acumular más.

4.4. Tercer juego: Una competencia de divisibilidad

Este juego se desarrolla por dos o más jugadores y cuenta con límite de tiempo. El objetivo es encontrar en la tabla de la figura 4.11 la mayor cantidad de números divisibles entre 7, para ello nos auxiliaremos de la digráfica de divisibilidad 7.

126	6972	690	497	203
6846	931	189	1953	869
357	8401	567	2807	851
1218	784	672	2534	327
1050	204	1230	402	3165
508	4683	854	2001	609
380	2597	910	322	4704
259	7125	814	4011	988

figura 4.11 Tabla del juego.

Reglas del juego

1. Cada jugador contará con la lista de la figura 4.11.
2. Los jugadores usarán la digráfica de divisibilidad 7 para comprobar si los números de las casillas son divisibles entre 7. Si un número lo es, se marca con una X .
3. Todos los jugadores empiezan al mismo tiempo. Él que encuentre la mayor cantidad de números divisibles entre 7 en 2 minutos será el ganador.

4.5. Cuarto juego: Carrera con múltiples actividades

El siguiente juego es bipersonal, y se lleva a cabo en una variante del tablero de Robin Hood (véase figura 4.12). En cada casilla distinta de la del cero se han puesto 6 actividades. El objetivo es encontrar la mayor cantidad de números divisibles entre 7 que se encuentran en un buzón usando el criterio de la digráfica de divisibilidad 7 en el tablero. Los jugadores realizarán las actividades de las respectivas casillas por las que pasen.

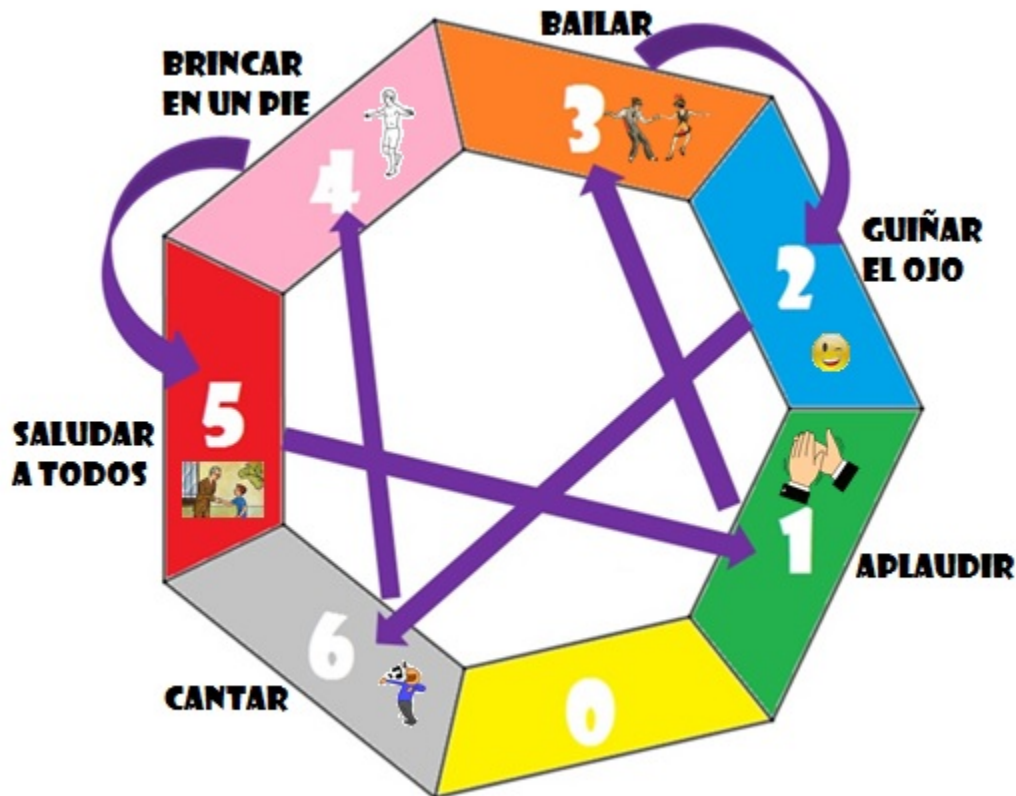


figura 4.12 Tablero del juego.

Reglas del juego

1. Se decide el orden de los turnos para los jugadores al azar. Posteriormente una persona ajena y neutra al juego escribirá en 10 rectángulos de papel del mismo tamaño, un número de al menos tres cifras en cada uno de ellos, luego se doblarán a la mitad y se introducirán en un buzón.
2. Los turnos se toman alternadamente. El jugador en turno deberá tomar un papel del buzón y se moverá sobre el tablero de la misma forma que el criterio de la digráfica de divisibilidad 7 con el número de su hoja. En su recorrido debe realizar las actividades de las casillas a las que llegue.

3. El ganador del juego será el jugador que haya sacado más números divisibles entre 7. Un empate se dará solamente si ambos jugadores sacaron la misma cantidad de números divisibles entre 7.

Capítulo 5

Juegos de Mesa

Un juego de mesa es la clasificación que se le da a los juegos que consisten de fichas, tableros o figuras. Normalmente se desarrollan por un grupo de personas que buscan divertirse o entretenerse, ya que los juegos están desarrollados para realizar un razonamiento táctico y estratégico. Otros dependen del azar.

En este capítulo presentaremos dos juegos de mesa muy populares: el memorama y la lotería. Ambos han servido para mejorar la concentración, aumentar la atención, entrenar la memoria visual, desarrollar el lenguaje y mejorar la coordinación. Los juegos se combinarán con la teoría de gráficas para repasar los conceptos que se han manejado en este trabajo. Todo este material está enfocado a estudiantes de carreras afines a Matemáticas.

5.1. Memoramas

El memorama es un juego de mesa en el cual se usan cartas, de modo que los jugadores buscan el duplicado de cada naipe dentro de un montón de cartas revueltas y ocultas. Inicialmente fue una herramienta de los psicólogos y pedagogos usada para practicar la memoria, de ahí proviene el nombre “memorama”. El objetivo del juego es encontrar el mayor número de pares.

5.1.1. Memorama con gráficas

La primera versión de memorama que trabajaremos está enfocada en conceptos sobre la teoría de gráficas para dos o más jugadores. Es importante mencionar que habrá dos tipos de cartas, unas tendrán una definición y las otras tendrán un ejemplo que corresponda al término (véase figura 5.1).

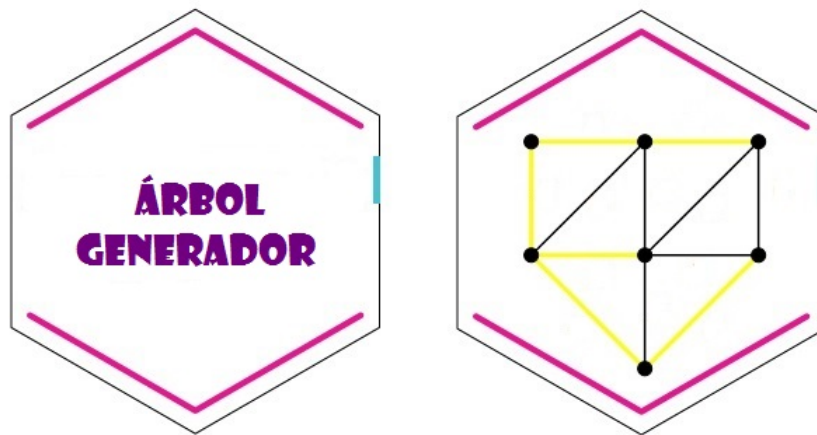


figura 5.1 Ejemplo de los dos tipos de cartas.

Diremos que dos cartas son un **par correspondiente** si una de las cartas contiene una definición y la otra carta tiene el dibujo que corresponde al término. La figura 5.1 es un ejemplo de un par correspondiente.

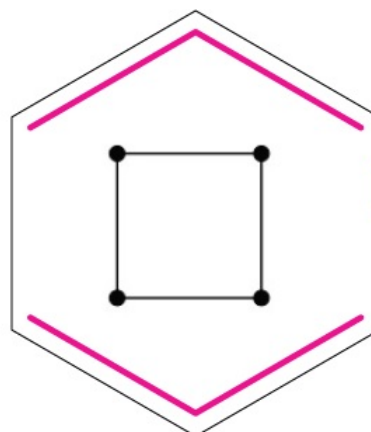
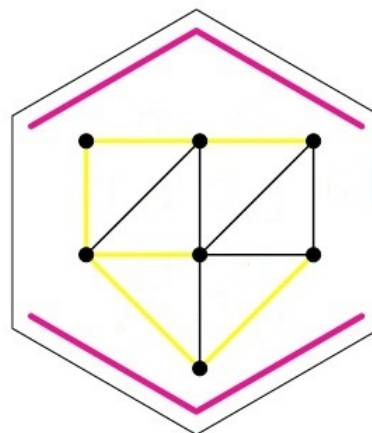
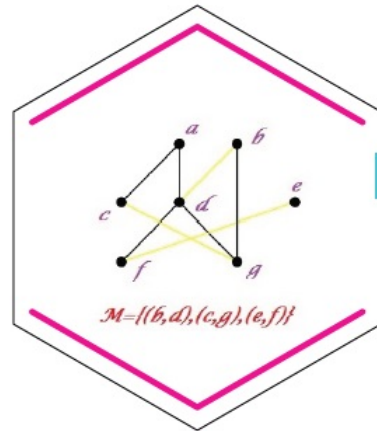
Continuemos con las reglas del juego.

Reglas del juego

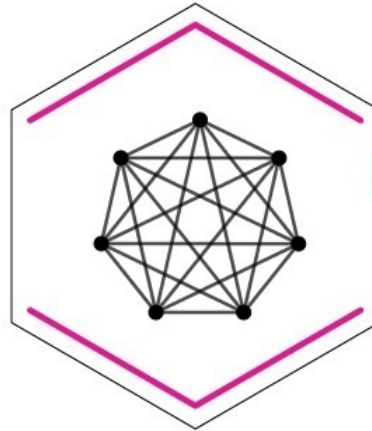
1. Las cartas se ponen boca a abajo en dos bloques: el de definiciones y el del dibujo de la gráfica correspondiente. Posteriormente se revuelven por bloques.
2. Los turnos entre los jugadores son alternados y en cada turno se puede escoger dos cartas, si las cartas escogidas son un par correspondiente se toman y se puede buscar otro par, en caso de no encontrar el par, se vuelven a poner boca abajo.
3. El jugador con más pares correspondientes obtenidos gana.

Cartas

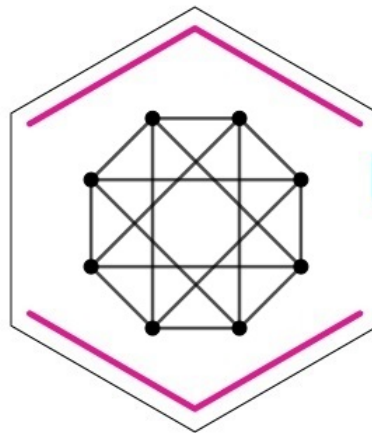




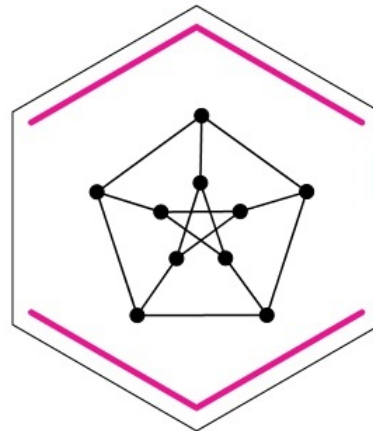
**GRÁFICA
COMPLETA
 K_7**

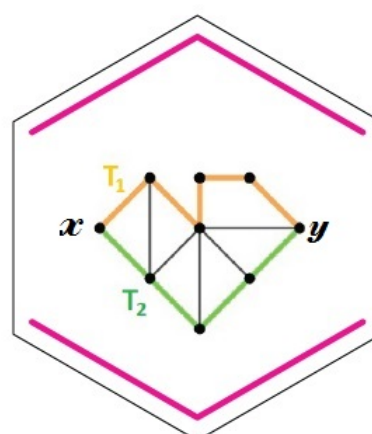
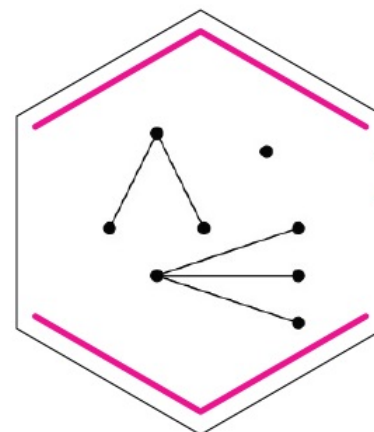
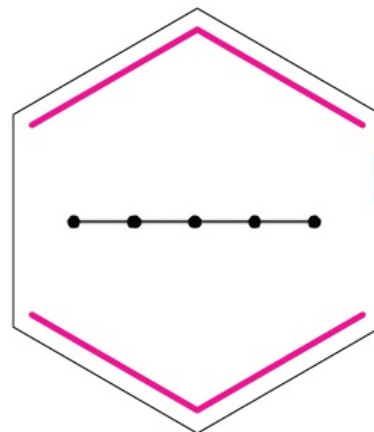


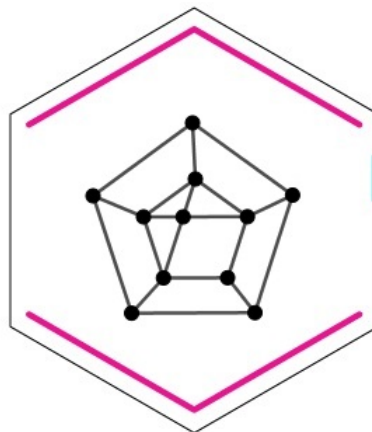
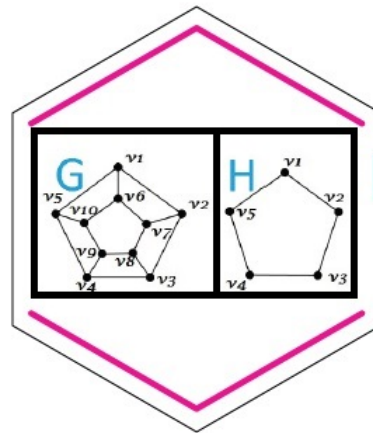
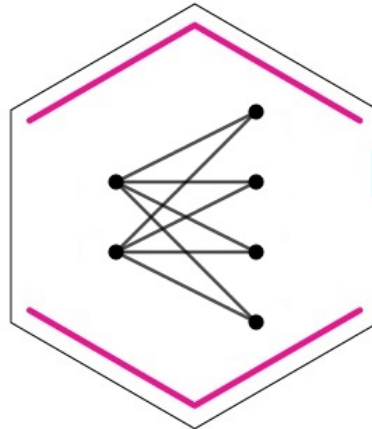
**GRÁFICA
4-REGULAR**

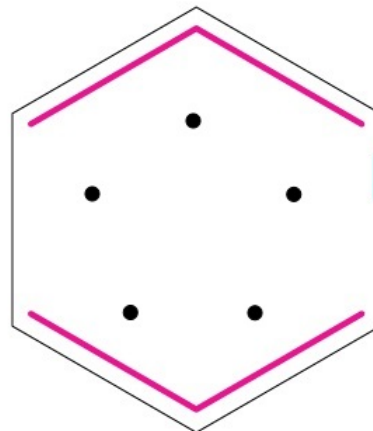
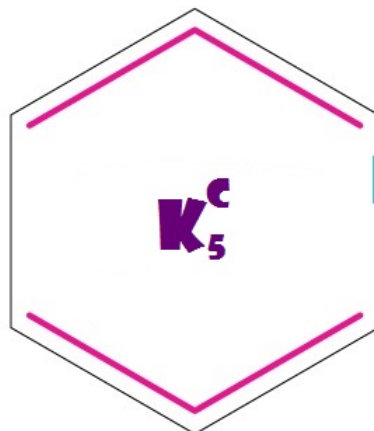
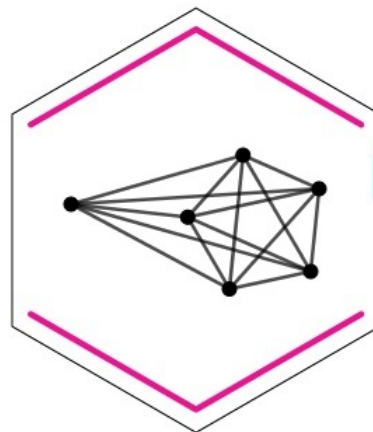
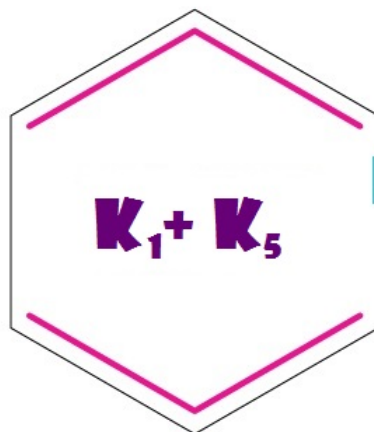
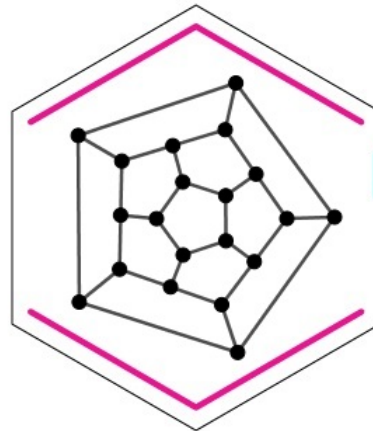


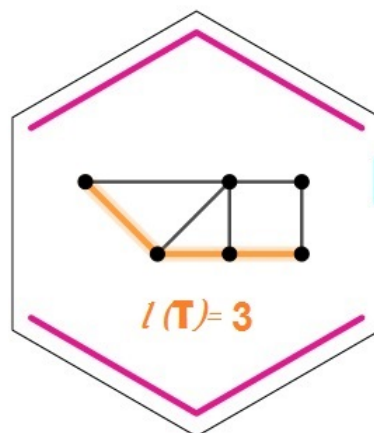
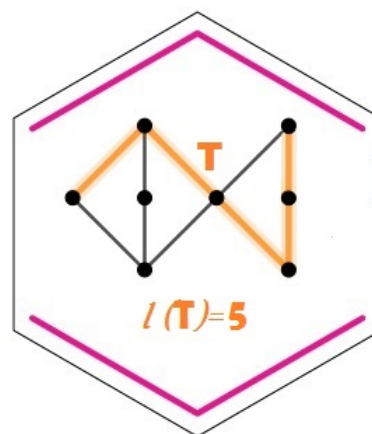
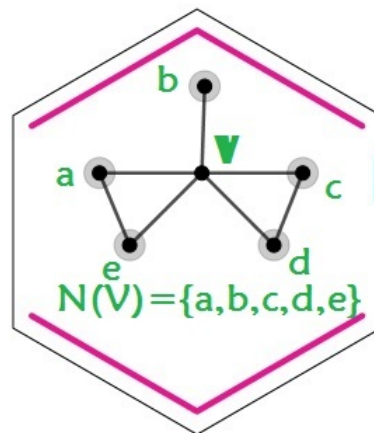
**GRÁFICA
DE
PETERSEN**

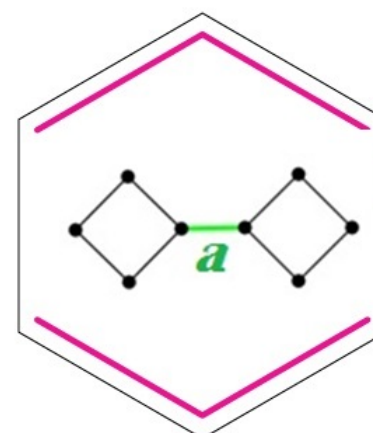
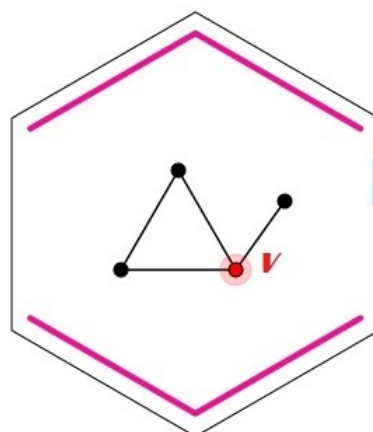
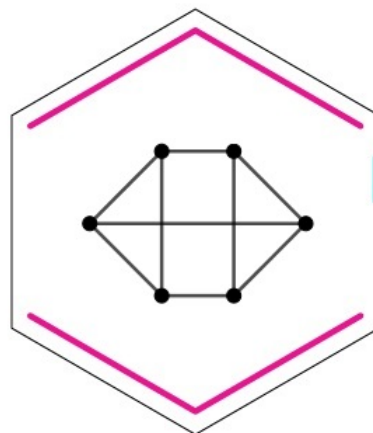


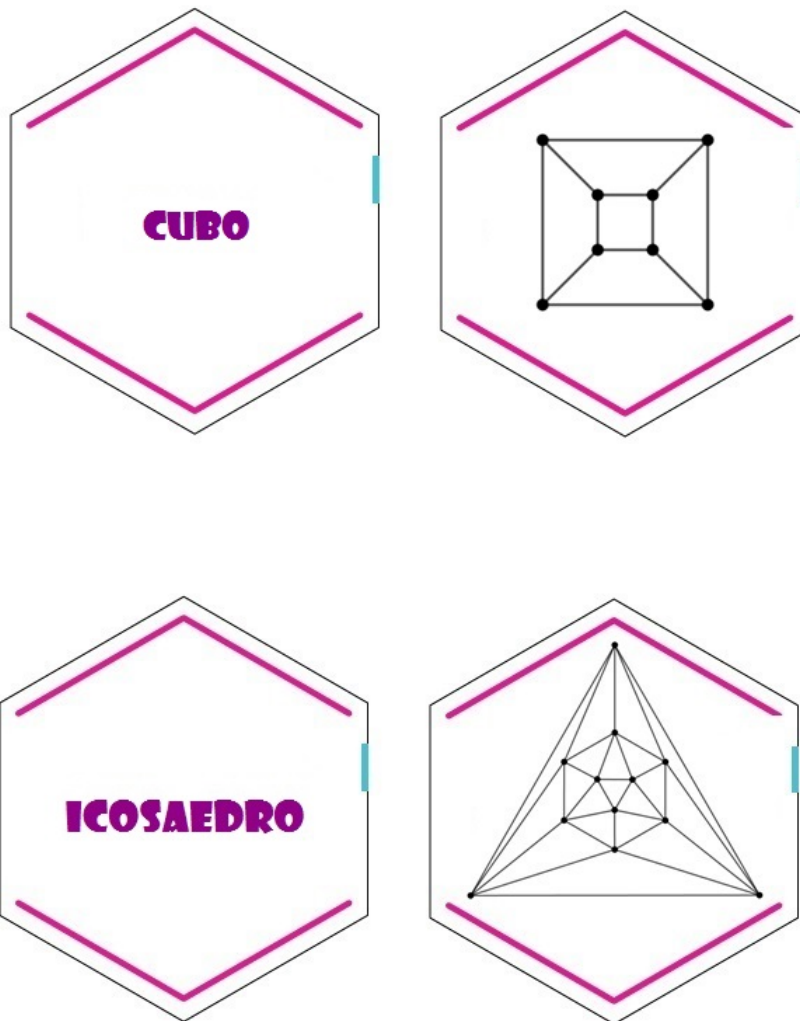












5.1.2. Memorama sobre isomorfismo de gráficas

La segunda versión de memorama es una variante de la anterior, y tiene como objetivo encontrar pares de gráficas isomorfas. A continuación se dará el concepto.

Definición 4.1.1.1: Dos gráficas G_1 y G_2 son **isomorfas** si existe una función f *biyectiva*:

$$\begin{aligned} f: V(G_1) &\rightarrow V(G_2) \\ x &\rightarrow f(x) \end{aligned}$$

que cumpla que f preserve adyacencias, es decir, u y v son vértices adyacentes en G_1 , si y sólo si $f(u)$ y $f(v)$ son adyacentes en G_2 .

Observación: De la definición tenemos que si dos gráficas son isomorfas podemos concluir lo siguiente:

1. $|V(G_1)|=|V(G_2)|$.
2. $|A(G_1)|=|A(G_2)|$.
3. $\delta_{G_1}(u) = \delta_{G_2}(f(u))$.

Ahora trabajemos un ejemplo con dos tarjetas del juego (véase figura 5.2).

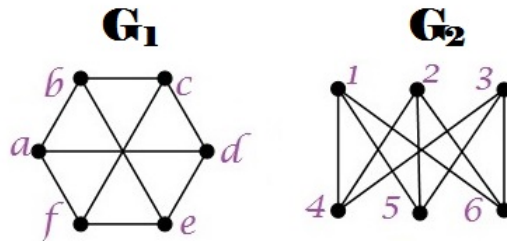


figura 5.2

La función $f: V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ para el isomorfismo es la siguiente: $f(a)=1$, $f(b)=4$, $f(c)=3$, $f(d)=6$, $f(e)=2$, $f(f)=5$. Observemos que f es biyectiva. Veamos ahora que f preserva adyacencias.

Tenemos que el vértice a es adyacente a los vértices b , d y f , y $f(a)=1$ es adyacente a $f(b)=4$, $f(d)=6$ y a $f(f)=5$.

El vértice b es adyacente a los vértices a , e y c si y sólo si $f(b)=4$ es adyacente a los vértices $f(a)=1$, $f(e)=2$ y a $f(c)=3$.

El vértice c es adyacente a los vértices b , f y d si y sólo si $f(c)=3$ es adyacente a los vértices $f(b)=4$, $f(f)=5$ y a $f(d)=6$.

El vértice d es adyacente a los vértices a , c y e si y sólo si $f(d)=6$ es adyacente a los vértices $f(a)=1$, $f(c)=3$ y a $f(e)=2$.

El vértice e es adyacente a los vértices b , d y f si y sólo si $f(e)=2$ es adyacente a los vértices $f(b)=4$, $f(d)=6$ y a $f(f)=5$.

El vértice f es adyacente a los vértices a , c y e si y sólo si $f(f)=5$ es adyacente a los vértices $f(a)=1$, $f(c)=3$ y a $f(e)=2$.

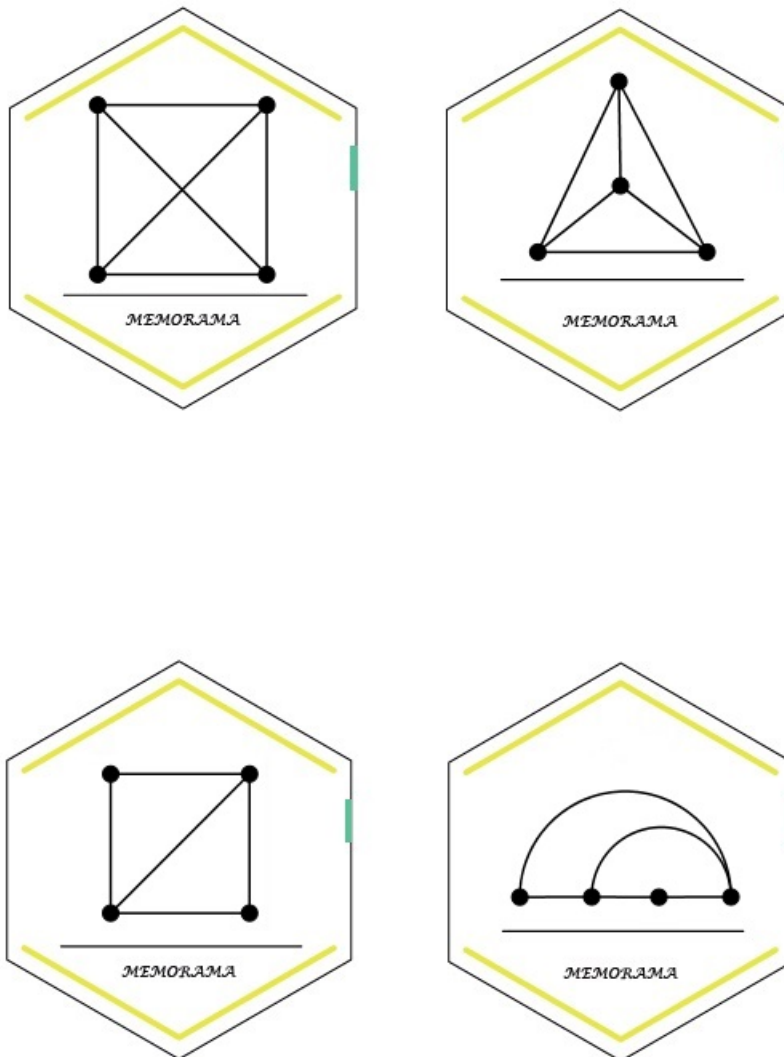
Como la función preserva adyacencias tenemos que las gráficas son isomorfas.

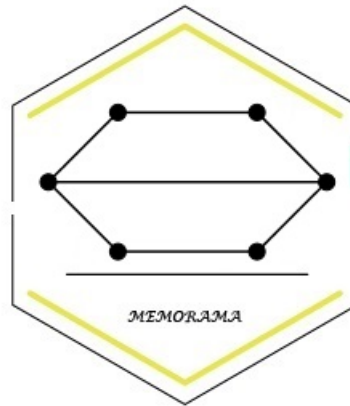
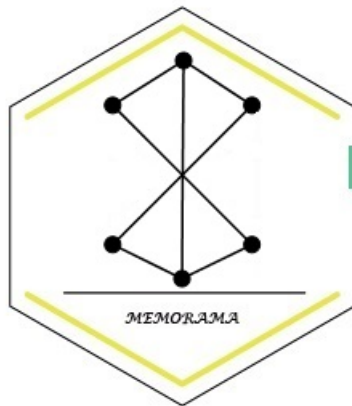
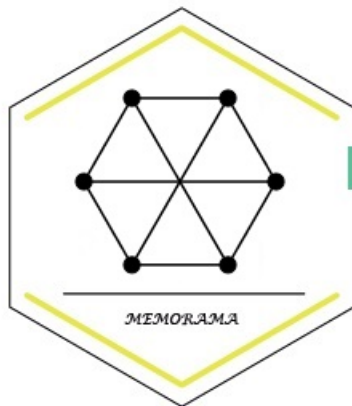
Al igual que la anterior versión, el juego se desarrollará por dos o más jugadores, y el objetivo seguirá siendo encontrar el mayor número de pares.

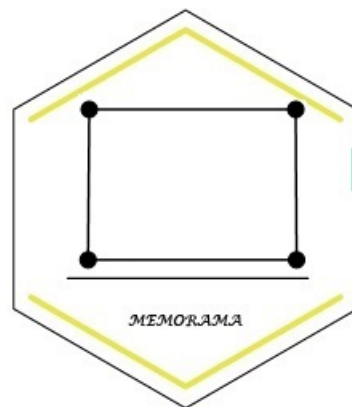
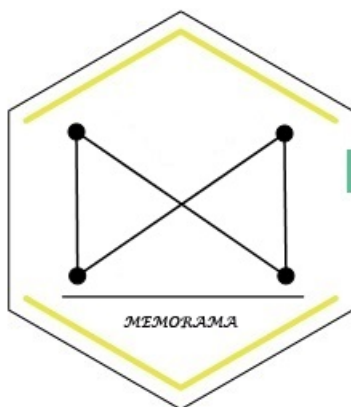
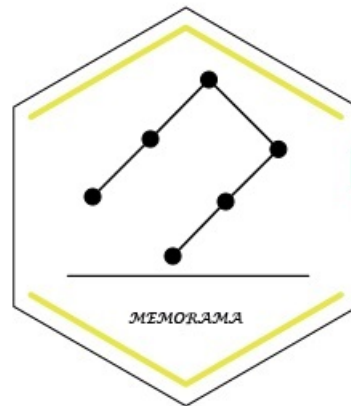
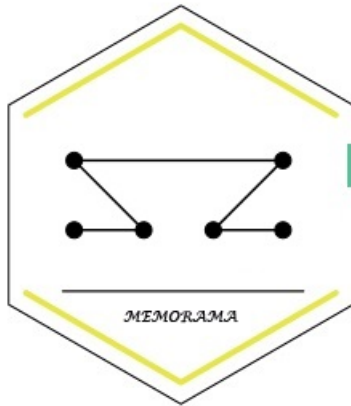
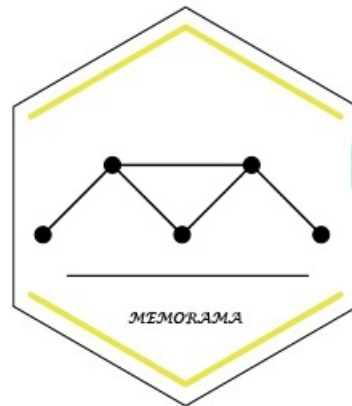
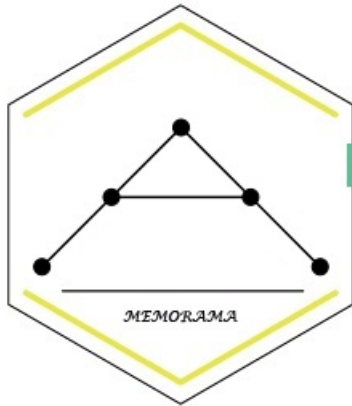
Reglas del juego

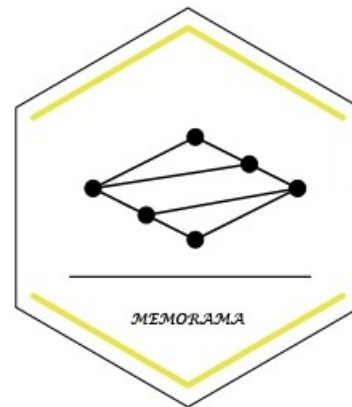
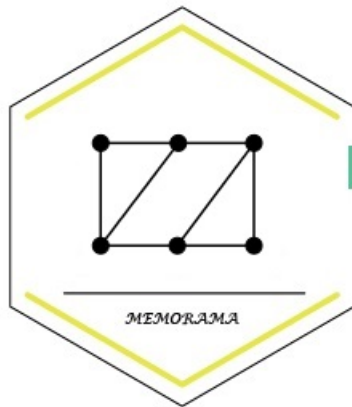
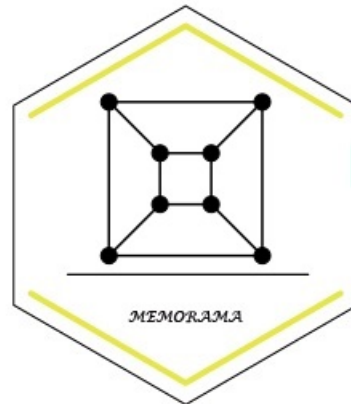
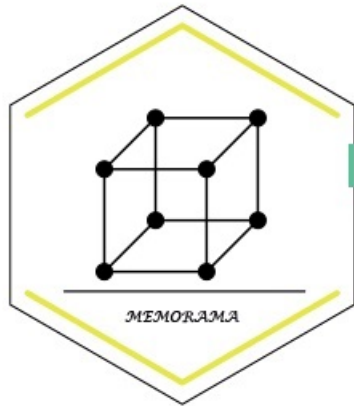
1. Las cartas se colocan boca a abajo y se revuelven.
2. Los turnos entre los jugadores son alternados y en cada turno se puede escoger dos cartas, si las cartas escogidas son las cartas con gráficas isomorfas se toma el par, y se puede buscar otro par, en caso de no encontrar el par, se vuelven a poner boca abajo.
3. El jugador con más pares obtenidos gana.

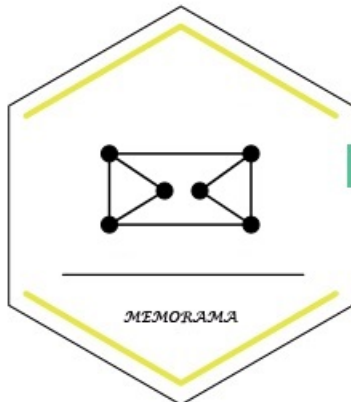
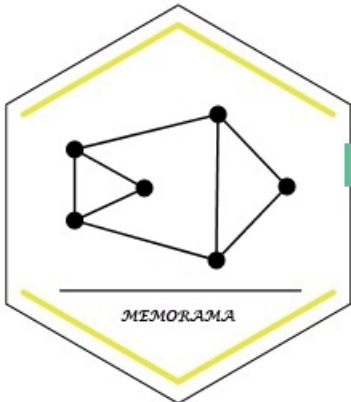
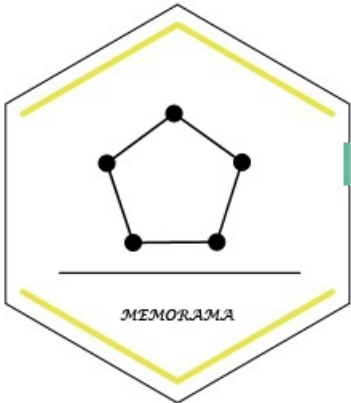
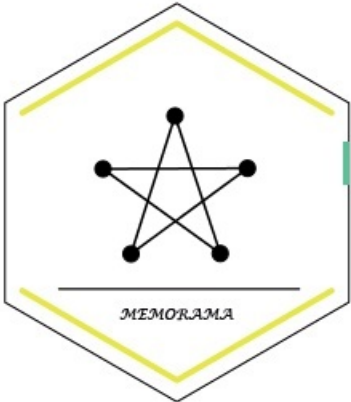
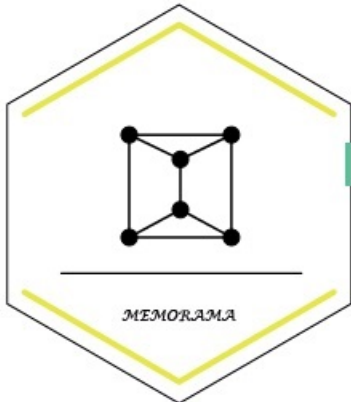
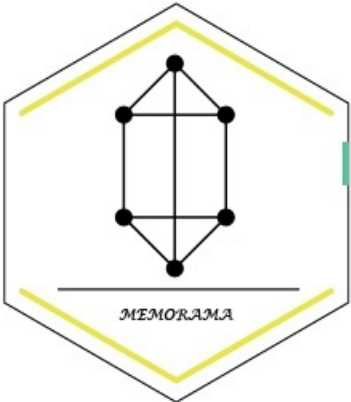
Cartas

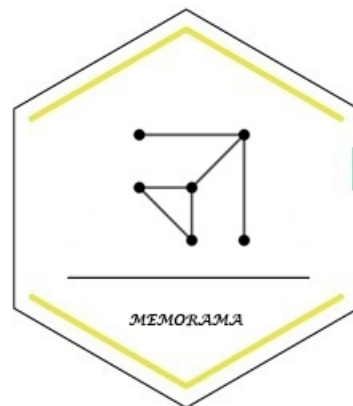
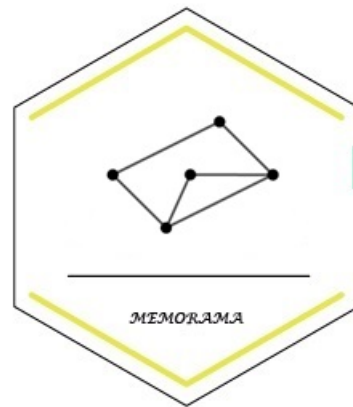
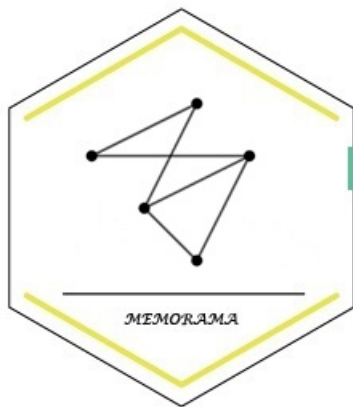
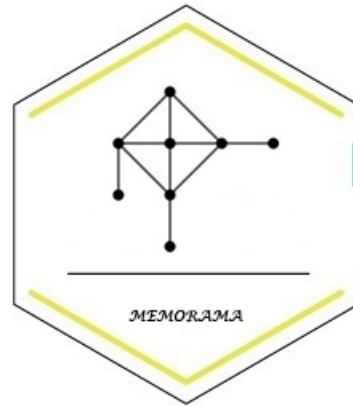
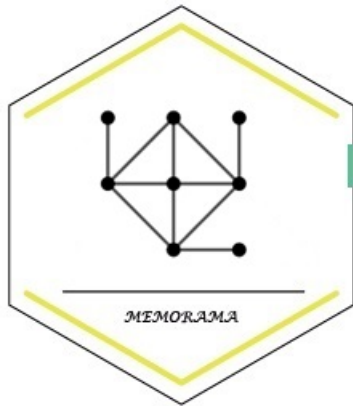


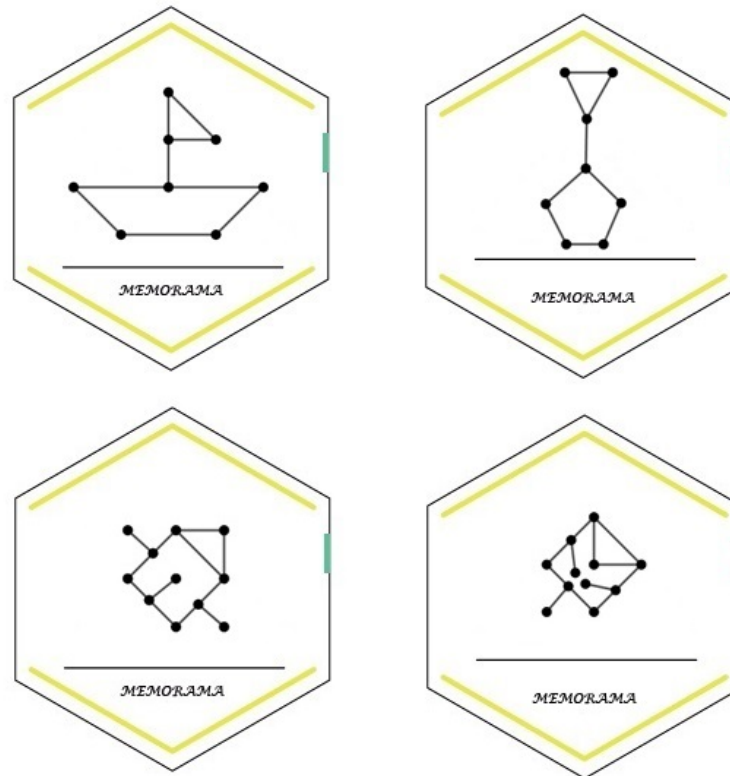












5.1.3. Memorama con digráficas

Finalmente esta versión se enfoca en definiciones de la teoría de digráficas, algunas de ellas relativas a los conceptos del capítulo 3. Habrá dos tipos de cartas, unas tendrán alguna definición de la teoría y las otras una digráfica que haga referencia a alguna de las definiciones (véase figura 5.3).

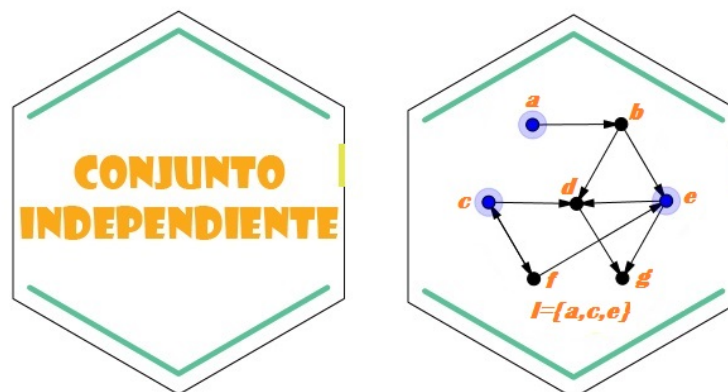


figura 5.3 Ejemplo de los dos tipos de cartas.

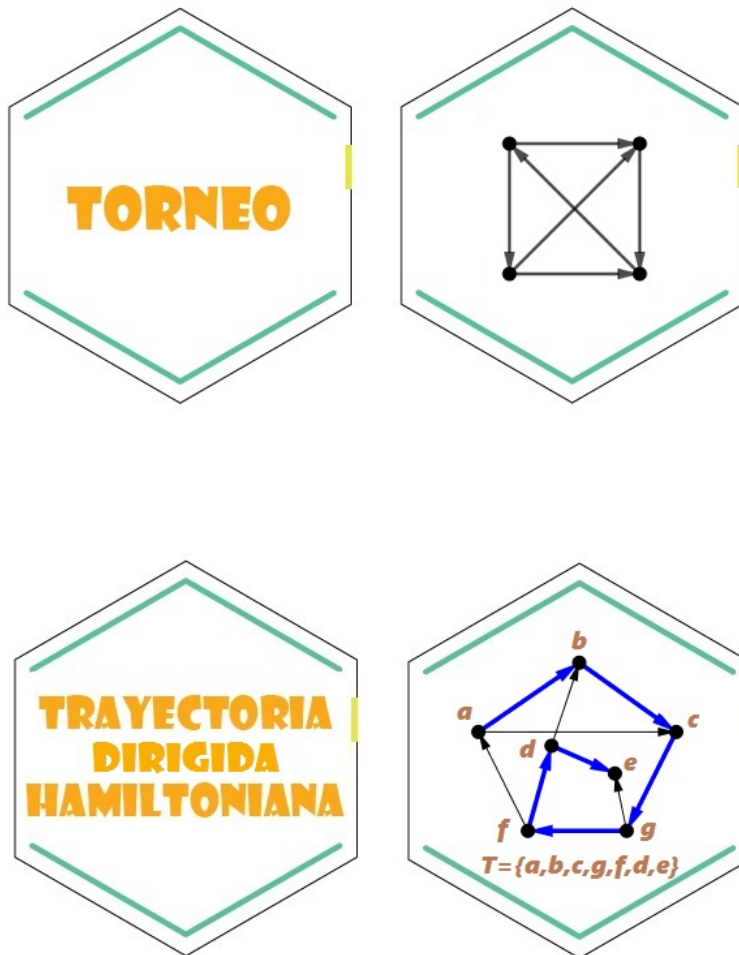
Diremos que dos cartas son un **par correspondiente** si una de las cartas tiene una definición y la otra tiene un ejemplo que corresponde al término.

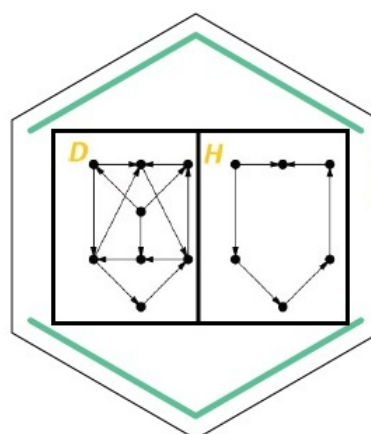
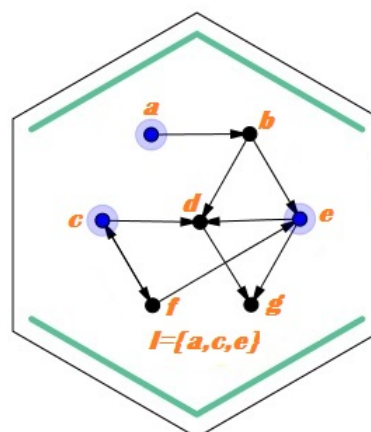
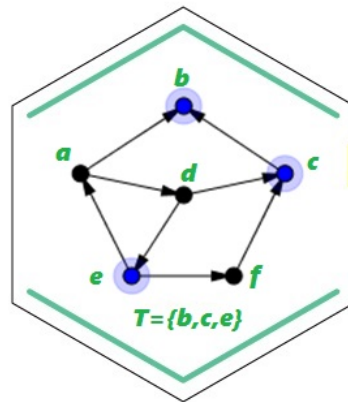
Ahora que ya conocemos el material con el cual se desarrollará el memorama, continuemos con las reglas del juego. El memorama se jugará con dos o más jugadores y el objetivo será simplemente encontrar el mayor número de pares correspondientes.

Reglas del juego

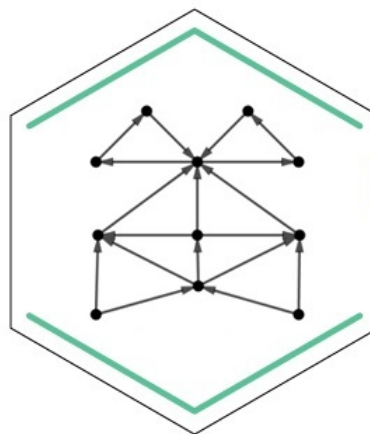
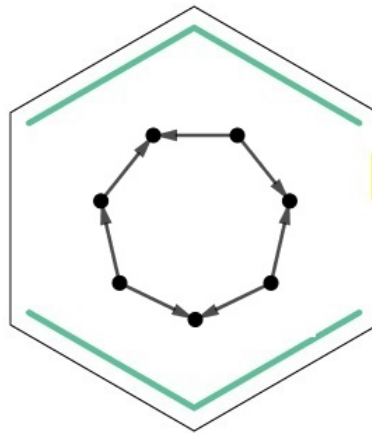
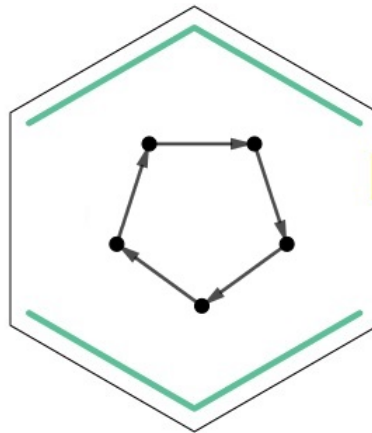
1. Las cartas se ponen boca a abajo en dos bloques: el de definiciones y el del dibujo de la digráfica correspondiente. Posteriormente se revuelven por bloques.
2. Los turnos entre los jugadores son alternados y en cada uno de ellos se puede escoger dos cartas, si las cartas escogidas son un par correspondiente se toman y se puede buscar otro par, en caso de no encontrar el par, se vuelven a poner boca abajo.
3. El jugador con más pares correspondientes obtenidos gana.

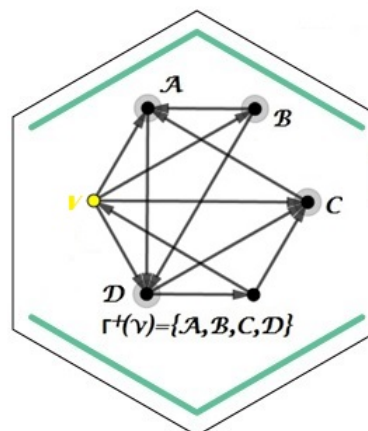
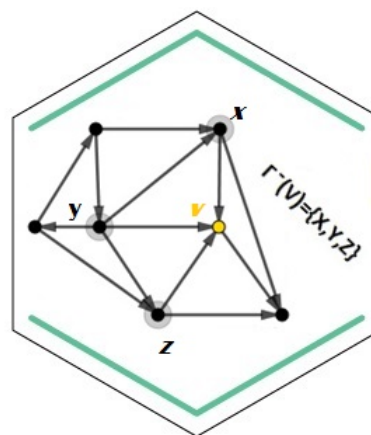
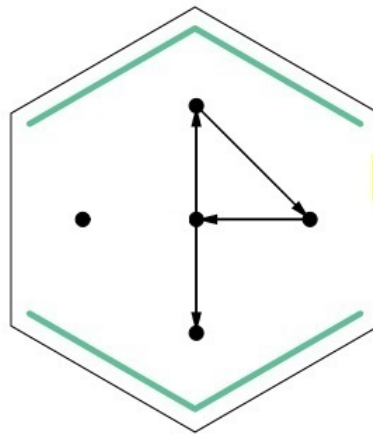
Cartas



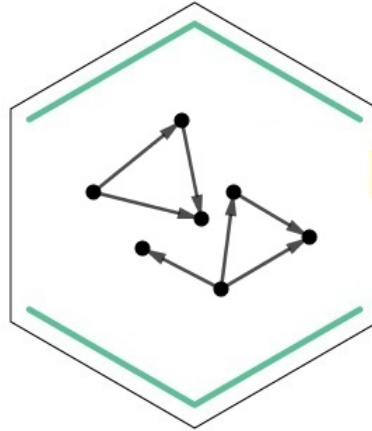




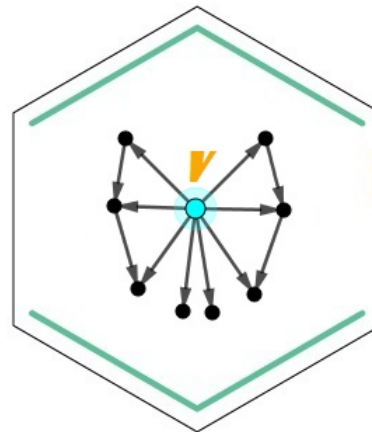




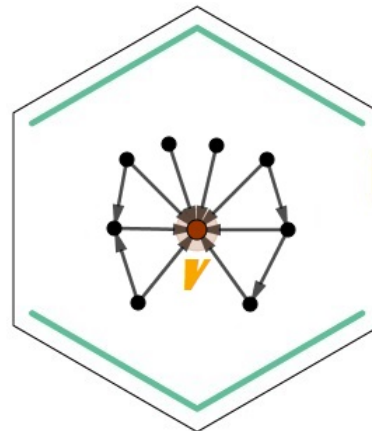
**DIGRÁFICA
TRANSITIVA**

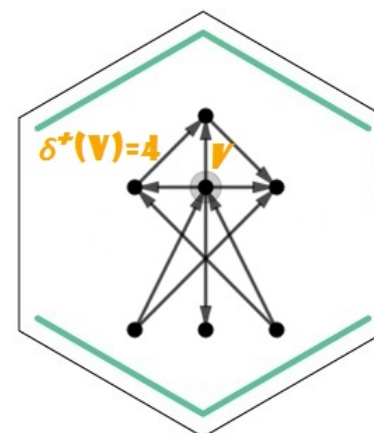
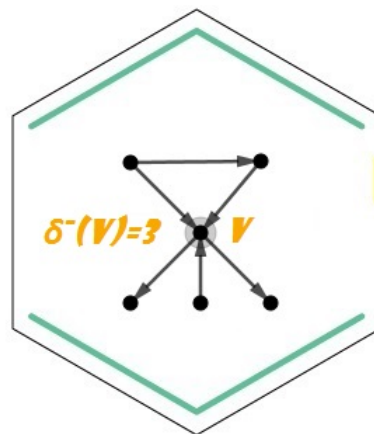
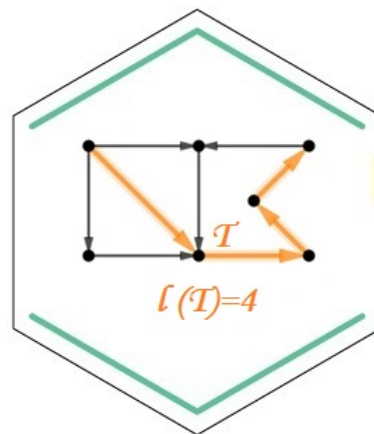


FUENTE v



POZO v





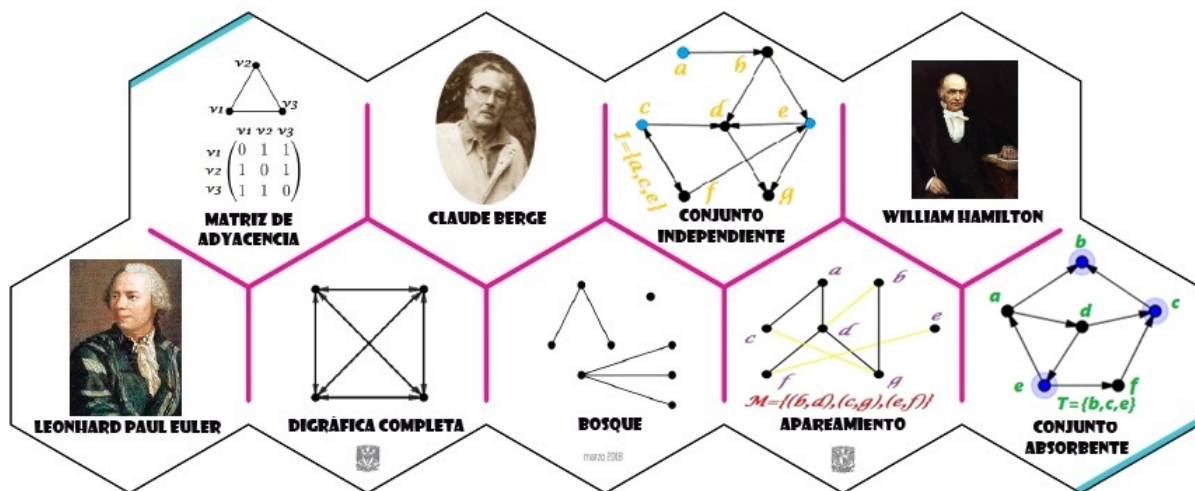


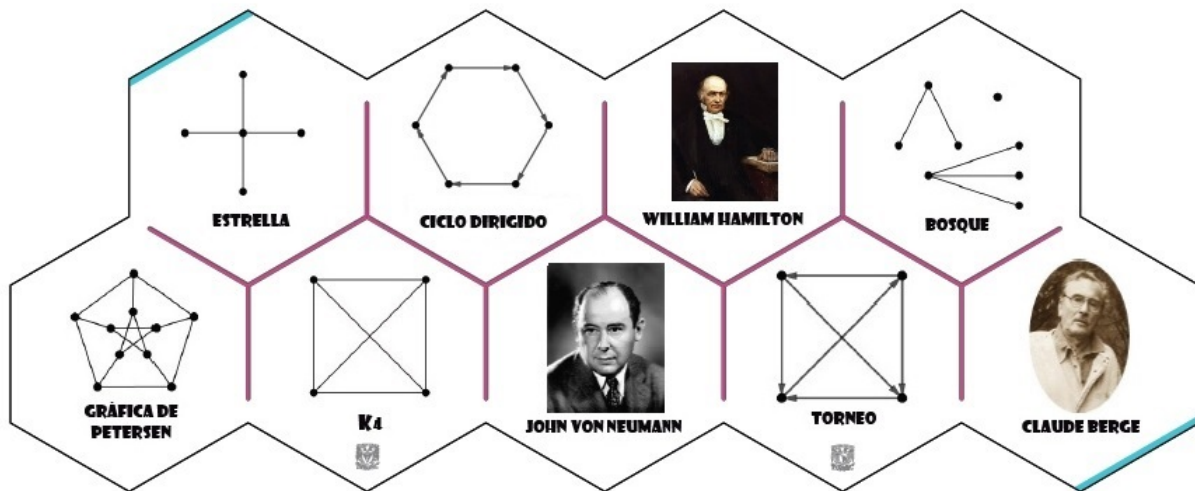
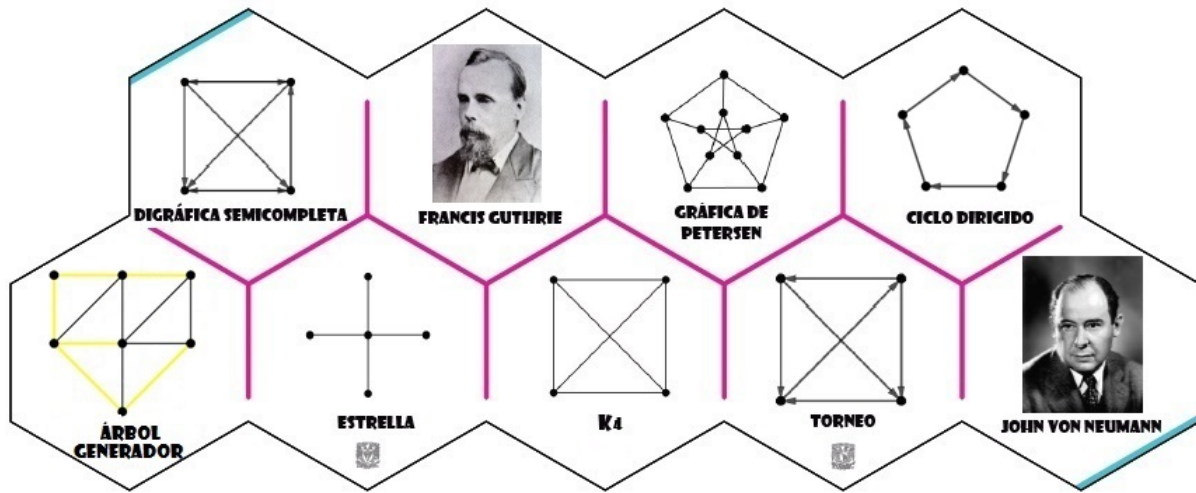
5.2. Lotería con gráficas

La lotería es un famoso juego de azar cuyos orígenes se remontan a Italia en la Edad Media. Se cree que llegó a México aproximadamente en el año de 1769. El juego consta de 54 cartas que tienen diferentes iconos de la cultura, en este caso la mexicana. El juego puede desarrollarse con dos o más jugadores. Una persona distinta maneja las 54 cartas, mientras los jugadores toman un tablero que tiene 16 de las 54 cartas. El jugador a cargo de las 54 cartas saca una tras otra leyendo el nombre de cada carta. Si el jugador escucha el nombre de alguna carta en su tablero la marca. En México es común que se coloque un pequeño frijol sobre el dibujo. El ganador es quien marque todas las imágenes de su tablero.

En esta sección se presentan una lotería que se basará en la teoría de gráficas y digráficas.

Tableros de Lotería





CUBO

CICLO NO DIRIGIDO

$T=(a,f,j,i,b,c,g,h,e,d,a)$
GRÁFICA HAMILTONIANA

VÉRTICE DE CORTE

PUENTE

$P=(d,c,g,d,a,b,e,f,h,e,j,i,d)$
GRÁFICA EULERIANA

CLAUDE BERCE

K₂

MATRIZ DE ADYACENCIA

	v1	v2	v3
v1	0	1	1
v2	1	0	1
v3	1	1	0

LEONHARD PAUL EULER

$M=\{(b,d),(c,g),(e,f)\}$
APAREAMIENTO

$T=(a,f,j,i,b,c,g,h,e,d,a)$
GRÁFICA HAMILTONIANA

ESTRELLA

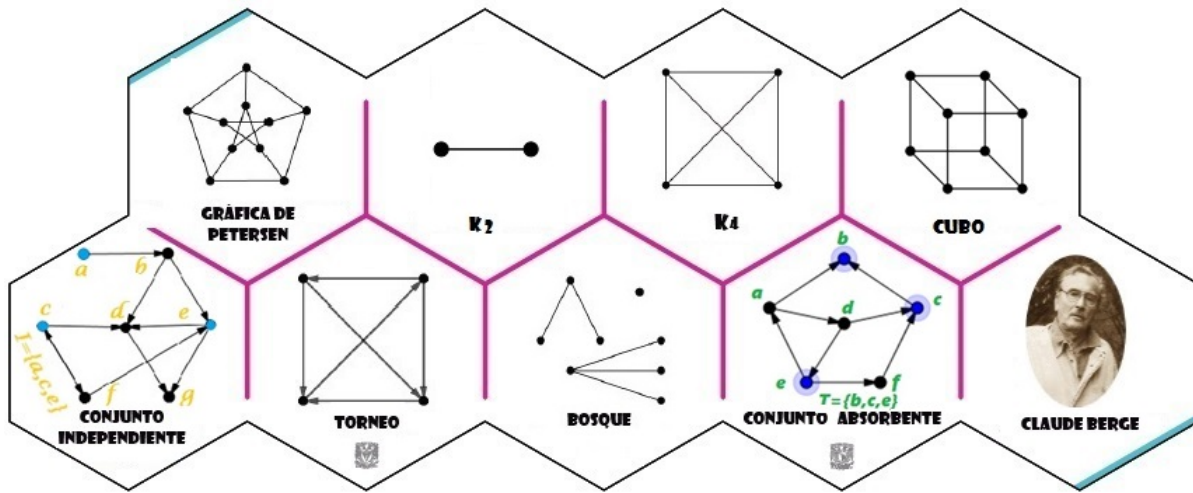
ÁRBOL GENERADOR

DIGRÁFICA COMPLETA

PUENTE

VÉRTICE DE CORTE

FRANCIS GUTHRIE



Cartas

Gráficas bipartitas completas que tienen sólo un vértice en una de sus partes.

ESTRELLAS

A una gráfica G le asociamos una matriz M de $n \times n$ (n el número de vértices de G) tal que:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ y } j \text{ es adyacente a } j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

MATRIZ DE ADYACENCIA

Subconjunto M de $A(G)$ que cumple que para cualquier $\{c, d\} \in M$, c y d no tienen vértices extremos en común.

APAREAMIENTO

Subgráfica H de G , que cumple con ser un árbol y que $V(H) = V(G)$.

ÁRBOL GENERADOR

Matemático suizo que dio solución al problema de los siete puentes de Königsberg.

LEONHARD EULER

Matemático estadounidense que propuso un famoso algoritmo para encontrar árboles generadores.

JOSEPH KRUSKAL

Es la gráfica que resulta de la operación:

$$K_2 \times K_2 \times K_2$$

CUBO

La gráfica de líneas de la estrella $K_{1,4}$ es:

K_4

Famosa gráfica inventada por Julius Petersen en 1898 que se caracteriza por ser 3-regular, por no ser bipartita, y por ser de orden 10.

GRÁFICA DE PETERSEN

Matemático y botánico sudafricano famoso por ser quien postulo el "Teorema de los cuatro colores".

FRANCIS CUTHRIE

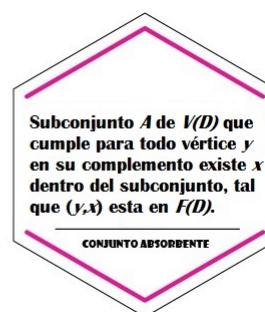
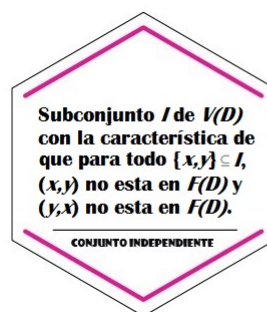
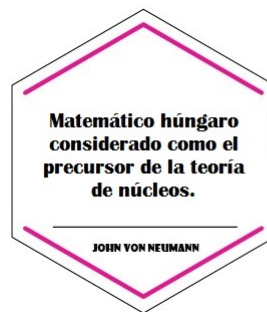
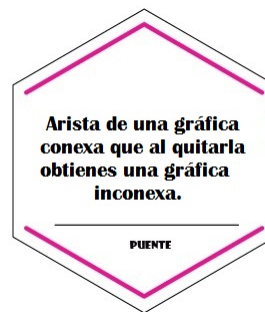
Gráfica que se caracteriza porque sus componentes conexas son árboles.

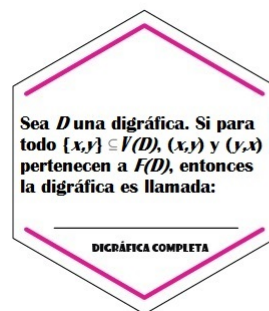
BOSQUE

Es la gráfica que resulta de la operación:

$$K_1 + K_1$$

K_2





Capítulo 6

Banco de acertijos y juegos

En este capítulo presentamos varios acertijos y juegos relacionados con los conceptos y los temas que se vieron a lo largo de la tesis, principalmente enfocados en núcleos y recorridos. El objetivo es trabajar más aplicaciones. Para resolverlos usaremos los teoremas y las definiciones de los anteriores capítulos.

6.1. El juego de los cerillos

Este juego es bipersonal. Consideremos 12 cerillos como se ilustra en la figura 6.1.

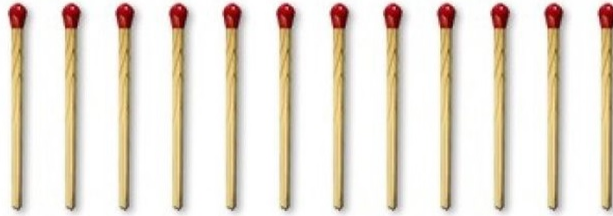


figura 6.1 12 cerillos.

Reglas del juego

1. Los turnos se toman alternadamente y en cada uno de ellos el jugador toma 1 o 2 cerillos.
2. El ganador del juego será el que tome el último cerillo o los dos últimos.

¿Puedes encontrar una estrategia ganadora?

Primero modelemos el juego con una digráfica D . Como el juego se desarrolla sobre el número de cerillos que van cambiando con el paso de los turnos, tenemos entonces que $V(D) = \{12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0\}$, y así $(x, y) \in F(D)$ si podemos pasar de x a y quitando uno a dos cerillos.

La figura 6.2 nos muestra la digráfica asociada al juego.

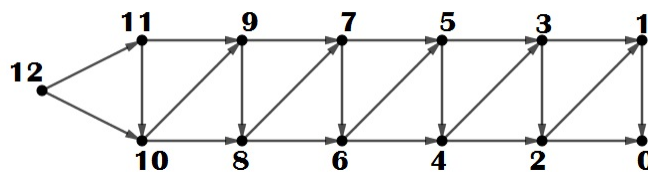


figura 6.2 Digráfica asociada al juego de los 12 cerillos.

Siguiendo el mismo análisis que se hizo en el capítulo 3 tenemos que la digráfica D no tiene ciclos dirigidos, por lo que tiene núcleo, el cual es $N = \{12, 9, 6, 3, 0\}$, que es una estrategia ganadora para el jugador **B** (el jugador que toma el segundo turno) ya que es él que tiene la oportunidad de jugar sobre estos vértices.

La siguiente tabla muestra la estrategia que debe seguir el jugador **B** para ganar.

Turno	Número de cerillos que deja el jugador A	Número de cerillos que deja el jugador B
1	11 o 10	9
2	8 o 7	6
3	5 o 4	3
4	2 o 1	0

Si el juego se desarrolla con 15 cerillos la estrategia ganadora para el jugador **B** se obtiene de manera similar. En general podemos jugar con cualquier número de cerillos que sea múltiplo de 3.

6.2. El acertijo de las luces que se apagan

En un edificio se tienen tres despachos de contaduría como se ilustra en la figura 6.3.

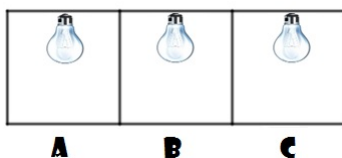


figura 6.3 Despachos de contaduría.

Las tres habitaciones tienen un corto circuito, y es que cada vez que se prende o se apaga un foco, se afecta también a las habitaciones adyacentes, cambiando los focos prendidos a apagados o viceversa.

Consideremos la siguiente notación para los focos: (x_1, x_2, x_3) , donde la entrada x_1 representa al foco de **A**, x_2 al de **B** y x_3 a **C**, además:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si el foco está prendido} \\ 0 & \text{si el foco está apagado.} \end{cases}$$

$$\text{con } i \in \{1, 2, 3\}.$$

Con base en la notación anterior podemos modelar una gráfica G en la que se aprecien todas los posibles ternas al apagar o prender un foco. Así $V(G) = \{x : x = (x_1, x_2, x_3)\}$ y $(x, y) \in A(G)$ si podemos pasar de x a y prendiendo o apagando un foco.

Por ejemplo $(0, 1, 0)$ es adyacente a $(1, 0, 1)$ pues podemos apagar el foco de **B** en la terna $(0, 1, 0)$ para obtener $(1, 0, 1)$.

A continuación se presenta la gráfica G con todas las adyacencias:

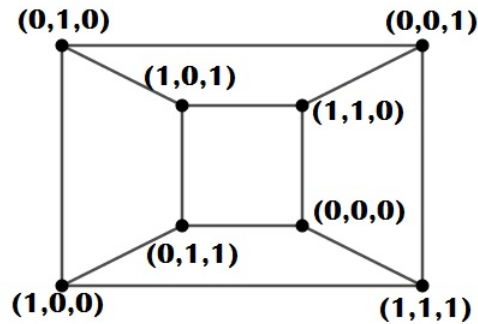


figura 6.4 Gráfica asociada.

Si tenemos solamente el foco de en medio prendido; es decir, $(0,1,0)$ ¿cuál es el menor número de ternas que se necesitan para obtener $(0,0,0)$? y sin repetir ternas, ¿cuál es el mayor número de vértices que se necesitan para obtener $(0,0,0)$?

Veamos que las trayectorias entre $(0,1,0)$ y $(0,0,0)$ nos ayudan a saber cuántos vértices se necesitan para responder el acertijo, una trayectoria de menor longitud entre dichos vértices, por ejemplo, nos servirá para encontrar el mínimo número de ternas, mientras que la de mayor longitud nos dará la respuesta a la segunda pregunta.

Usaremos el algoritmo de Dijkstra para encontrar el camino de menor longitud entre $(0,1,0)$ y $(0,0,0)$ y si logramos encontrar una trayectoria hamiltoniana podremos responder la segunda pregunta. Para usar el algoritmo de Dijkstra, el peso de todas las aristas de la gráfica G será de uno. Sea $x_1 = (0,1,0)$ el vértice fijo.

Iteración 1. Ponemos la etiqueta permanente $(-, 0)^*$ a $(0,1,0)$. Luego ponemos etiquetas temporales (x_1, ∞) a todos los vértices distintos de x_1 . Sea $s=x_1$.

Actualización de etiquetas: $N_t(x_1)=\{x_2, x_4, x_5\}$.

$$P(x_2) = \text{mín}\{\infty, 0 + 1\} = 1 \text{ y } p(x_2) = x_1.$$

$$P(x_4) = \text{mín}\{\infty, 0 + 1\} = 1 \text{ y } p(x_4) = x_1.$$

$$P(x_5) = \text{mín}\{\infty, 0 + 1\} = 1 \text{ y } p(x_5) = x_1.$$

De donde $x^*=x_4$ (vértice con mínima etiqueta temporal). Marcamos $(x_1, P(x_4) = 1)$ como etiqueta permanente. Sea $s = x_4$.

Iteración 2. Actualización de etiquetas: $N_t(x_4)=\{x_3, x_8\}$.

$$P(x_3) = \text{mín}\{\infty, 1 + 1\} = 2 \text{ y } p(x_3) = x_4.$$

$$P(x_8) = \text{mín}\{\infty, 1 + 1\} = 2 \text{ y } p(x_8) = x_4.$$

De donde $x^*=x_2$ (vértice con mínima etiqueta temporal). Marcamos $(x_1, P(x_2) = 1)$ como etiqueta permanente. Sea $s = x_2$.

Iteración 3. Actualización de etiquetas: $N_t(x_2)=\{x_3, x_6\}$.

$$P(x_3) = \text{mín}\{2, 1 + 1\}=2 \text{ y } p(x_3)=x_4 \text{ (no cambia).}$$

$$P(x_6) = \text{mín}\{\infty, 1 + 1\}=2 \text{ y } p(x_6)=x_2.$$

De donde $x^*=x_5$ (vértice con mínima etiqueta temporal). Marcamos $(x_1, P(x_5) = 1)$ como etiqueta permanente. Sea $s = x_5$.

Iteración 4. Actualización de etiquetas: $N_t(x_5)=\{x_6, x_8\}$.

$$P(x_6) = \text{mín}\{2, 1 + 1\}=2 \text{ y } p(x_6)=x_2 \text{ (no cambia).}$$

$$P(x_8) = \text{mín}\{2, 1 + 1\}=2 \text{ y } p(x_8)=x_4 \text{ (no cambia).}$$

De donde $x^*=x_8$ (vértice con mínima etiqueta temporal). Marcamos $(x_4, P(x_8) = 2)$ como etiqueta permanente. Sea $s = x_8$.

Iteración 5. Actualización de etiquetas: $N_t(x_8)=\{x_7\}$.

$$P(x_7) = \text{mín}\{\infty, 2 + 1\}=3 \text{ y } p(x_7)=x_8.$$

De donde $x^*=x_3$ (vértice con mínima etiqueta temporal). Marcamos $(x_4, P(x_3) = 2)$ como etiqueta permanente. Sea $s = x_3$.

Iteración 5. Actualización de etiquetas: $N_t(x_8)=\{x_7\}$.

$$P(x_7) = \text{mín}\{\infty, 2 + 1\}=3 \text{ y } p(x_7)=x_8.$$

De donde $x^*=x_3$ (vértice con mínima etiqueta temporal). Marcamos $(x_4, P(x_3) = 2)$ como etiqueta permanente. Sea $s = x_3$.

Iteración 6. Actualización de etiquetas: $N_t(x_3)=\{x_7\}$.

$$P(x_7) = \text{mín}\{3, 2 + 1\}=3 \text{ y } p(x_7)=x_8 \text{ (no cambia).}$$

De donde $x^*=x_6$ (vértice con mínima etiqueta temporal). Marcamos $(x_2, P(x_6) = 2)$ como etiqueta permanente. Sea $s = x_6$.

Iteración 7. Actualización de etiquetas: $N_t(x_6)=\{x_7\}$.

$$P(x_7) = \text{mín}\{3, 2 + 1\}=3 \text{ y } p(x_7)=x_8 \text{ (no cambia).}$$

De donde $x^*=x_7$ (vértice con mínima etiqueta temporal). Marcamos $(x_8, P(x_7) = 3)$ como etiqueta permanente. Como todos los vértices tienen etiqueta permanente, terminamos (figura 6.5).

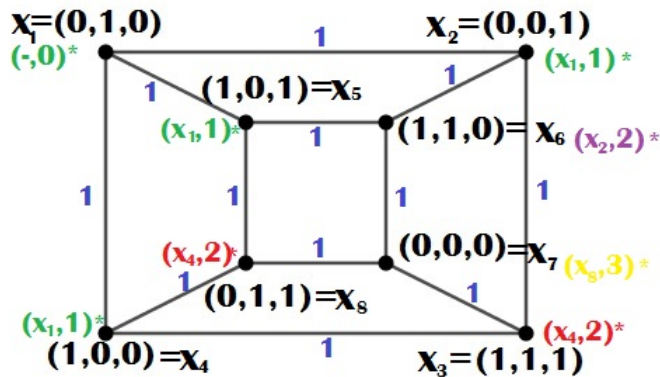


figura 6.5 Vértices de la gráfica con etiqueta permanente.

Ahora obtengamos la trayectoria de menor longitud con las etiquetas permanentes. Veamos que x_7 tiene como predecesor a x_8 , x_8 por otro lado tiene como predecesor a x_4 y finalmente el predecesor de x_4 es x_1 . En la figura 6.6 se aprecia la trayectoria $T_1 = \{(0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 0)\}$ de menor longitud que se obtiene del algoritmo de Dijkstra.

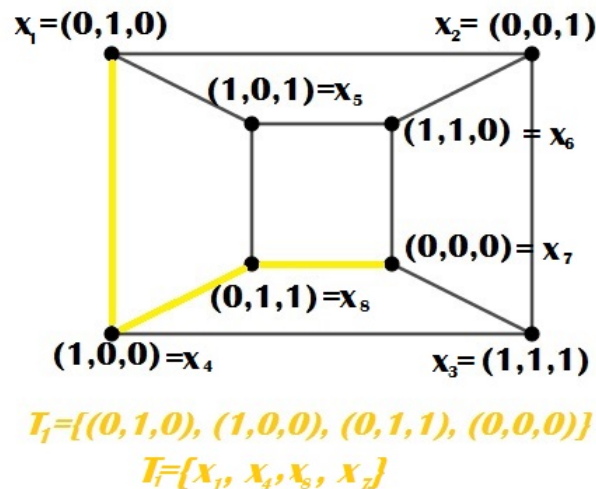


figura 6.6 Trayectoria de menor longitud.

Por otro lado, para responder la segunda pregunta, si existiera una trayectoria hamiltoniana entre los dos vértices fijos también dicha trayectoria sería la de mayor longitud. La siguiente figura nos muestra a $T_2 = \{(0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 1, 1), (0, 0, 0)\}$ como una solución.

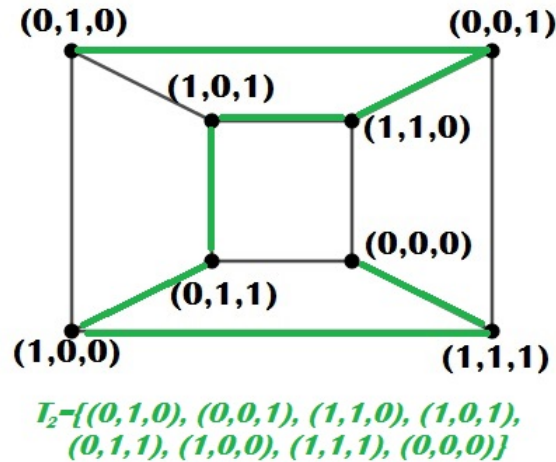


figura 6.7 Trayectoria hamiltoniana entre $(0,1,0)$ y $(0,0,0)$.

Si contamos los vértices que están entre $(0,1,0)$ a $(0,0,0)$ en T_1 y T_2 , tenemos que son 2 y 6, respectivamente.

6.3. Suma 59

Este juego es una variante del juego “Suma 31”. Ahora el objetivo del juego es sumar 1, 2 o 3 hasta que se llegue a 59.

1. El jugador **A** (el jugador que empieza) selecciona mentalmente un número dentro del conjunto $E = \{1, 2, 3\}$ y se lo dice a su contrincante.
2. El jugador **B** también elige mentalmente un número dentro del conjunto $E = \{1, 2, 3\}$. El número seleccionado se suma al que se escogió en el primer turno. Es ahí cuando el jugador dice el número que resultado de la suma. Por ejemplo:

Si el jugador **A** toma primer turno y dice 2, el jugador **B** dice 5 de inmediato notamos que el número que seleccionó fue el número 3.

3. El juego continua alternando turnos repitiendo el mismo procedimiento. El ganador será el jugador que sume 59.

Como vimos en el capítulo 3 el núcleo de la digráfica asociada es una estrategia ganadora para el jugador que inicia, de manera similar podemos encontrar el núcleo $N = \{59, 55, 51, 47, 43, 39, 35, 31, 27, 23, 19, 15, 11, 7, 3\}$.

6.4. El recorrido del caballo

¿Es posible encontrar un recorrido, con la pieza del caballo y su movimiento en el ajedrez, que pase por todos los cuadros del tablero de tal modo que no repita ninguna casilla y regrese al lugar de donde partió?

Si modelamos el acertijo con una gráfica G y utilizamos los conceptos de gráficas hamiltonianas que se vieron en los primeros capítulos, los vértices de G serían los cuadros del tablero y $(x, y) \in A(G)$ si podemos pasar de x a y con el movimiento del caballo, así nuestro problema se reduciría a encontrar un ciclo que pase por todos los vértices.

La figura 6.8 nos muestra el ciclo empezando en el vértice pintado de color verde.

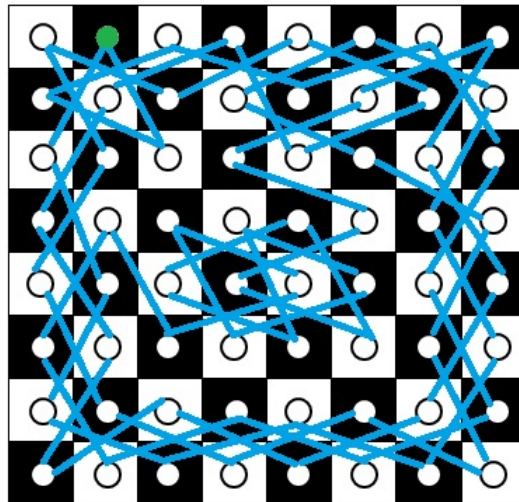


figura 6.8 Ciclo que pasa por todos los cuadros del tablero.

6.5. Cadena

Si tenemos 22 cuentas, ¿es posible unir las con un hilo para crear un árbol que no sea una trayectoria?

Naturalmente tenemos que las 22 cuentas representan los vértices de la gráfica. La figura 6.9 nos muestra un ejemplo de como podrían estar unidas.

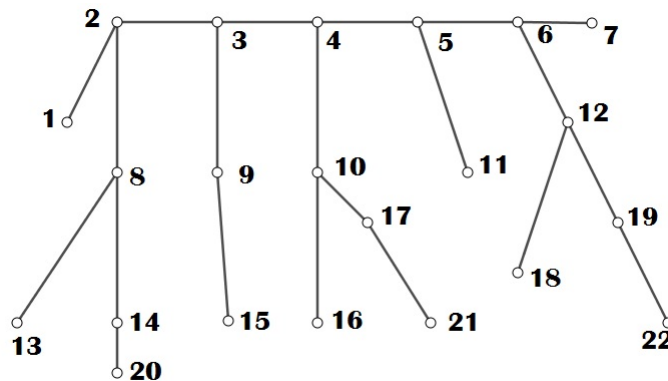


figura 6.9 Árbol con 22 cuentas.

6.6. El recorrido del caracol

Un caracol sólo se resbala por las aristas de un florero que tiene forma de prisma pentagonal. Cada lado del pentágono de la base tiene por longitud 5cm y la altura es de 18cm . Si al florero se le asocia una gráfica ponderada, donde los vértices del prisma son los vértices de la gráfica, las aristas del florero son las aristas de la gráfica y la longitud de las aristas del prisma representa el peso de las aristas (véase figura 6.10), ¿cuál es el camino con mayor peso que se puede recorrer sin repetir vértices?

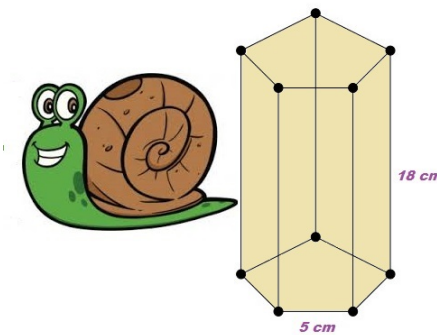


figura 6.10 Florero.

Observemos que si recorremos todas las aristas con peso 18 en un camino, garantizamos que dicho camino es el que tiene más peso, ya que esas aristas son las de mayor peso. Así el camino que da solución es: $(a, f, g, b, c, h, i, d, e, j)$, cuyo peso es de $110cm$ (figura 6.11).

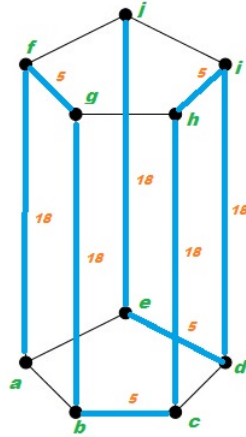


figura 6.11 Camino con mayor peso.

6.7. El recorrido del dodecaedro

En el año de 1859 William Hamilton presentó un acertijo sobre uno de los sólidos platónicos: el dodecaedro. Cada vértice del dodecaedro representaba una de las ciudades más famosas de Europa como Bruselas, París o Londres. El objetivo era encontrar un camino que pasará por todas las ciudades, de tal manera que se llegará al lugar donde se partió sin repetir otra ciudad.

A continuación se presenta un ciclo que pasa por todos los vértices de la gráfica del dodecaedro.

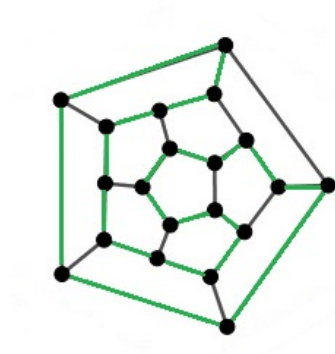


figura 6.12 Ciclo que pasa por todos los vértices.

6.8. ¿Es euleriana?

Simulando el problema de los siete puentes de Königsberg, ¿la siguiente gráfica es euleriana?

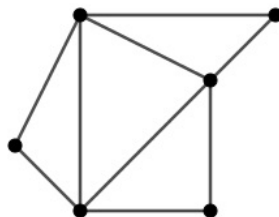


figura 6.13 Gráfica del problema.

La siguiente figura nos muestra un camino cerrado que no repite aristas que cumple que $A(C)=A(G)$.

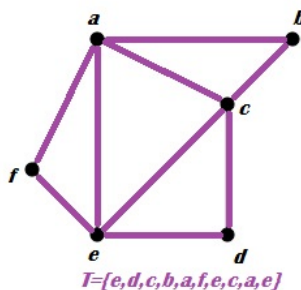
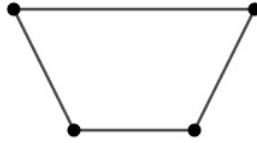


figura 6.14 Gráfica euleriana.

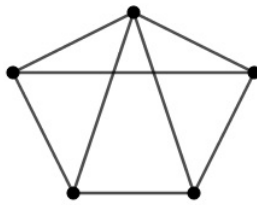
6.9. Construyendo una gráfica 1

¿Es posible construir una gráfica G con $V(G)=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ tal que $\delta(v_1)=4$, $\delta(v_2)=3$, $\delta(v_3)=3$, $\delta(v_4)=3$, $\delta(v_5)=3$?

Observemos que el grado de v_1 es 4, por lo que es adyacente a los demás vértices. Consideremos a $G \setminus \{v_1\}$. Por lo anterior al quitar v_1 de G se disminuyen en uno el grado de los otros vértices, por lo que $\delta_{G \setminus \{v_1\}}(v_2)=2$, $\delta_{G \setminus \{v_1\}}(v_3)=2$, $\delta_{G \setminus \{v_1\}}(v_4)=2$ y $\delta_{G \setminus \{v_1\}}(v_5)=2$. El único caso posible en el que pasa esto es que tengamos un ciclo con 4 vértices (ver figura 6.15).

figura 6.15 $G \setminus \{v_1\}$.

Ahora al poner las adyacencias de v_1 tendríamos la siguiente gráfica.

figura 6.16 Gráfica G .

6.10. Construyendo una gráfica 2

¿Es posible construir una gráfica G con $V(G)=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ tal que $\delta(v_1)=3$, $\delta(v_2)=3$, $\delta(v_3)=1$ y $\delta(v_4)=2$?

Como dos vértices tienen grado 3 y el número de vértices es 4, tenemos que v_1 es adyacente a v_2, v_3, v_4 y v_2 es adyacente a v_1, v_3, v_4 (ver figura 6.17). Por lo anterior este es el único caso posible en el que podemos dibujar las adyacencias de v_1 y v_2 . De esta manera tenemos que $\delta(v_3)=2$ y $\delta(v_4)=2$, pero dadas las condiciones del problema $\delta(v_3)=1$, por lo que concluimos que es imposible construir la gráfica.

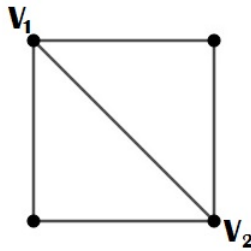


figura 6.17 Ejemplo de una gráfica que no es posible construir.

Daremos un breve recorrido a algunos resultados relacionados con lo anterior, uno de ellos se demostrará y el otro sólo se dará referencia.

Teorema 6.10.0.1 Para cualquier gráfica G de tamaño m ,
$$\sum_{v \in V(G)} \delta(v) = 2m.$$

Demostración: Al sumar el grado de cada vértice, cada arista de G es contada dos veces, una por cada vértice extremo. ■

Si los grados de los vértices de una gráfica G se escriben en una sucesión s , s es llamada **sucesión de grados** de G .

Sea s una sucesión de enteros positivos. Diremos que s es **graficable** si s es la sucesión de grados de una gráfica G .

Teorema 6.10.0.2 [7] Una sucesión decreciente $s : d_1, d_2, \dots, d_n$ de números enteros positivos, donde $d_1 \geq 1$, es graficable si y solo si la sucesión $s_1 : d_2 - 1, d_3 - 1, \dots, d_{d_1+1}, d_{d_1+2}, \dots, d_n$ es graficable.

Este teorema nos permite saber si una sucesión de enteros positivos es graficable o si no lo es. Si se desea saber más del tema consultar *A first course in graph theory* [7].

6.11. Descubre el mensaje

¿Puedes descifrar el mensaje oculto en la siguiente gráfica?

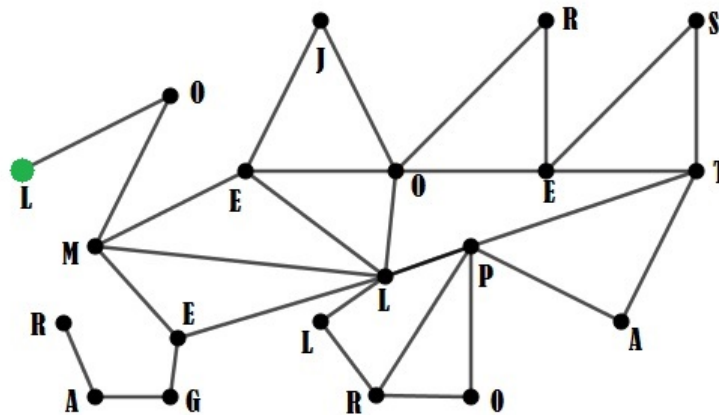


figura 6.18 Mensaje encriptado.

El encriptador dijo que la clave es encontrar una trayectoria hamiltoniana que empiece en el vértice **L** pintado de color verde.

De manera similar al tercer acertijo del capítulo 1 podemos encontrar la trayectoria que nos da la solución.

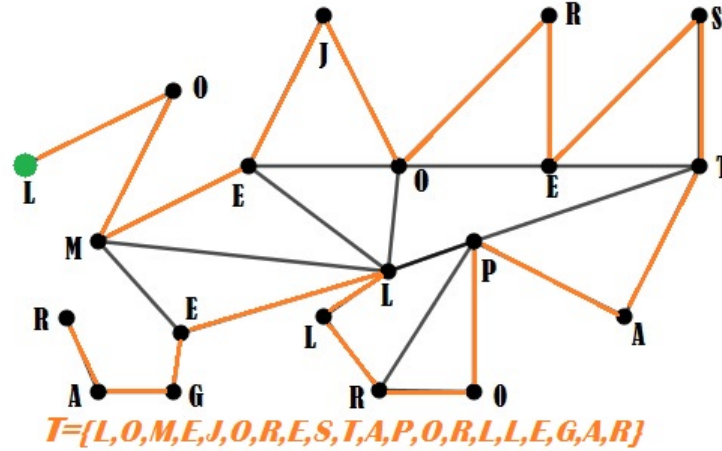


figura 6.19 Trayectoria hamiltoniana que da solución.

6.12. Toma de decisiones

Alberto tiene una lista de escuelas que tiene en mente para cursar su bachillerato: **A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M**.

Hizo una comparación entre ellas, para ello dibujo un vértice por cada escuela, y si prefería por ejemplo la escuela **B** sobre **A**, ponía la flecha (A,B) . La siguiente digráfica muestra las preferencias que tomó entre las escuelas.

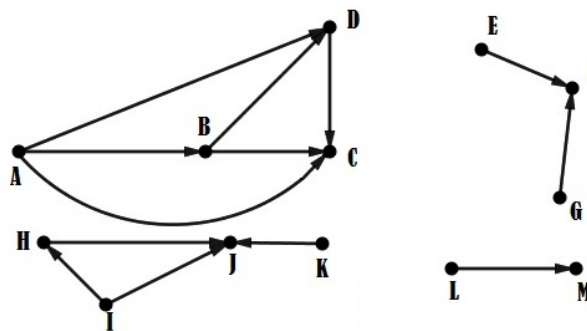


figura 6.20 Digráfica de preferencias de Alberto.

Con base en lo anterior, ¿cuáles son las mejores alternativas?

Hagamos un análisis de la digráfica para encontrar las escuelas que más le favorecen a Alberto, primero que nada observemos que la digráfica no tiene ciclos dirigidos. Por el teorema 3.1.1.1 la digráfica tiene núcleo $N = \{C, F, J, M\}$ (figura 2.21).

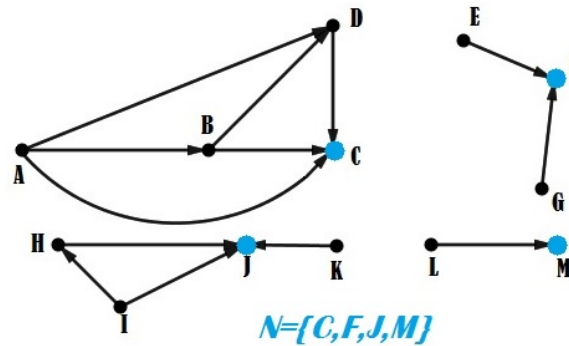


figura 6.21 Núcleo de la digráfica.

Como N es independiente tenemos que entre los elementos de N no hay preferencias. La propiedad de que N sea un conjunto absorbente en términos del problema nos dice que para cualquier escuela que este fuera de N siempre habrá un elemento dentro de N que sea una mejor opción para Alberto, por lo que N nos determina el conjunto de escuelas que más le conviene a Alberto.

6.13. Radares en operación

Un famoso museo de la ciudad instalará radares en las esquinas de los pasillos para vigilar el lugar. La siguiente figura nos muestra el mapa del museo junto con la digráfica que modela el alcance de los radares (ver figura 6.22).

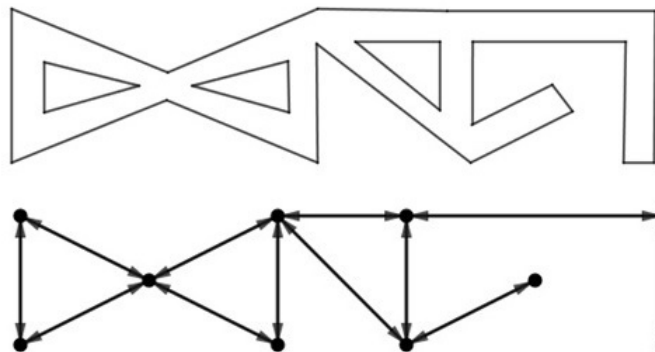


figura 6.22 Mapa del museo y su digráfica asociada.

¿Cuál es el menor número de radares necesarios para vigilar el museo?

Notemos que un núcleo de la digráfica nos determina un conjunto de radares que vigilarían adecuadamente el museo, pues entre ellos no se vigilarían y cuidarían cada esquina del museo por su propiedad de ser absorbente. Así, de todos los núcleos que pueda tener la digráfica, el de menor cardinalidad nos determinará el menor número de radares necesarios para la solución del acertijo.

El siguiente núcleo es el de menor cardinalidad (véase figura 6.23). Por lo que se necesitan como mínimo 3 radares.

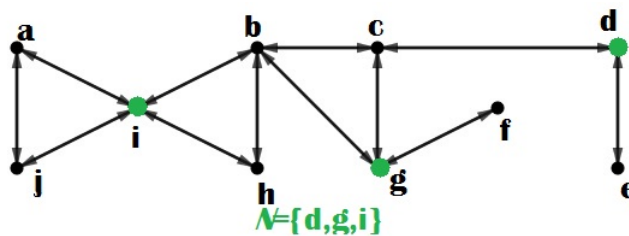


figura 6.23 Núcleo de la digráfica.

6.14. El recorrido del pueblo

Las calles principales del pueblo de Juan, junto con sus respectivas direcciones, se modelaron en la siguiente figura.

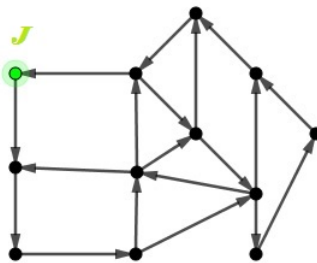


figura 6.24 Calles del pueblo.

Si Juan consiguió un empleo de cartero, ¿podemos ayudarlo a encontrar un camino dirigido que empiece en el vértice **J** y que pase por todos los vértices una sola vez de manera que regrese al lugar de donde empezó?

En términos de los conceptos del capítulo 1, lo que se busca cumple con la definición de ciclo hamiltoniano. La figura 6.25 nos muestra la solución al acertijo.

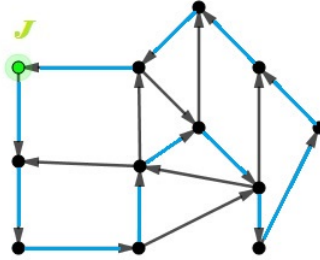


figura 6.25 Ciclo que da solución.

6.15. ¿Es divisible?

Sin usar el algoritmo de la división, ¿18,995,497 es divisible entre 19?

Usemos el criterio de la digráfica de divisibilidad 19.

Tomamos el primer dígito de izquierda a derecha, que es el 1 y nos movemos sobre las flechas negras para ir al vértice 1, luego tomamos la flecha morada que nos lleva al vértice 10 (figura 6.26).

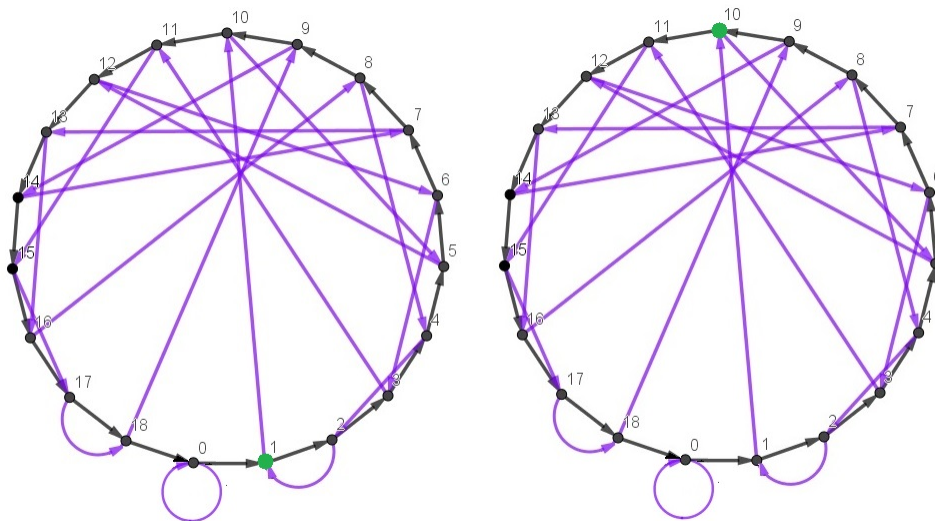


figura 6.26 Recorrido en la digráfica usando el primer dígito.

Ahora con el segundo dígito, que es 8, nos movemos sobre las flechas negras para llegar al vértice 18, luego tomamos la flecha morada y nos movemos al vértice 9 (figura 6.27).

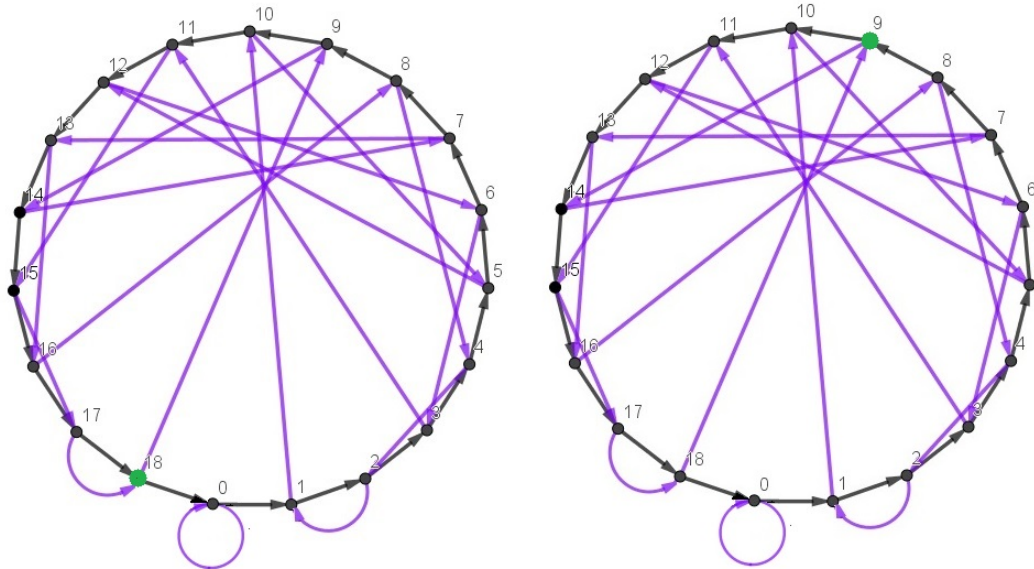


figura 6.27 Recorrido en la digráfica usando el segundo dígito.

Posteriormente con el tercer dígito, que es 9, nos movemos 9 flechas negras para ir al vértice 18 y con la flecha morada que nos permite ir nuevamente al vértice 9 (figura 6.28).

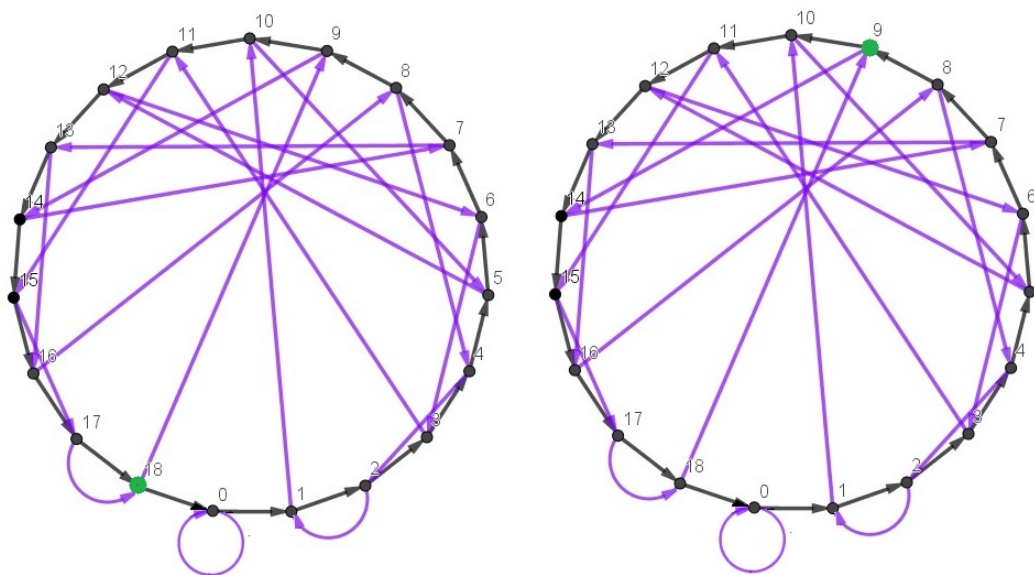


figura 6.28 Recorrido en la digráfica usando el tercer dígito.

Como el cuarto dígito es otro 9, nuevamente nos movemos 9 flechas negras para ir al vértice 18, luego con la flecha morada llegamos al vértice 9 (figura 6.29).

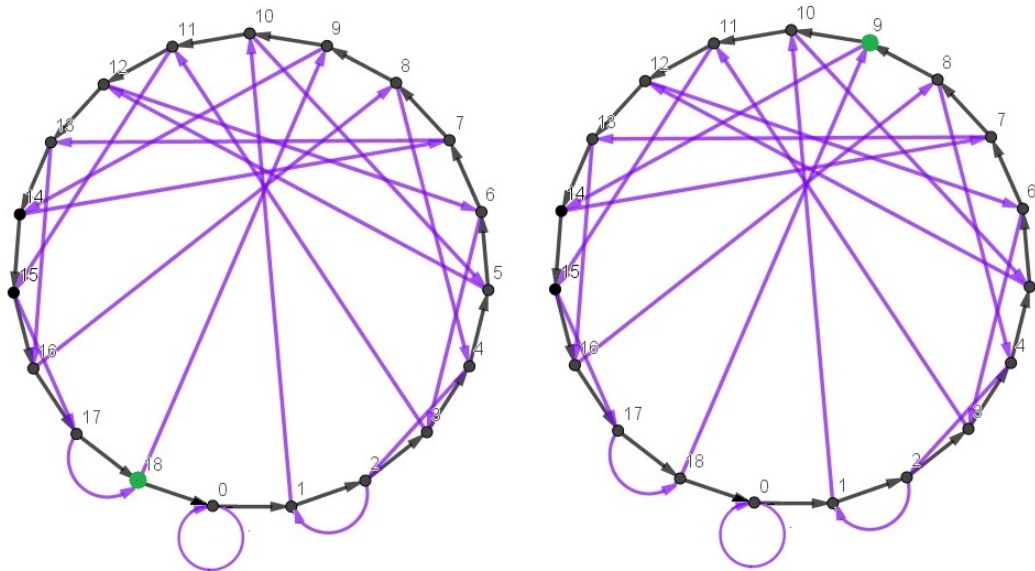


figura 6.29 Recorrido en la digráfica usando el cuarto dígito.

El quinto dígito es 5, por lo que nos movemos sobre las flechas negras para llegar al vértice 14, luego nos movemos por la flecha morada que le sale para llegar al vértice 7 (figura 6.30).

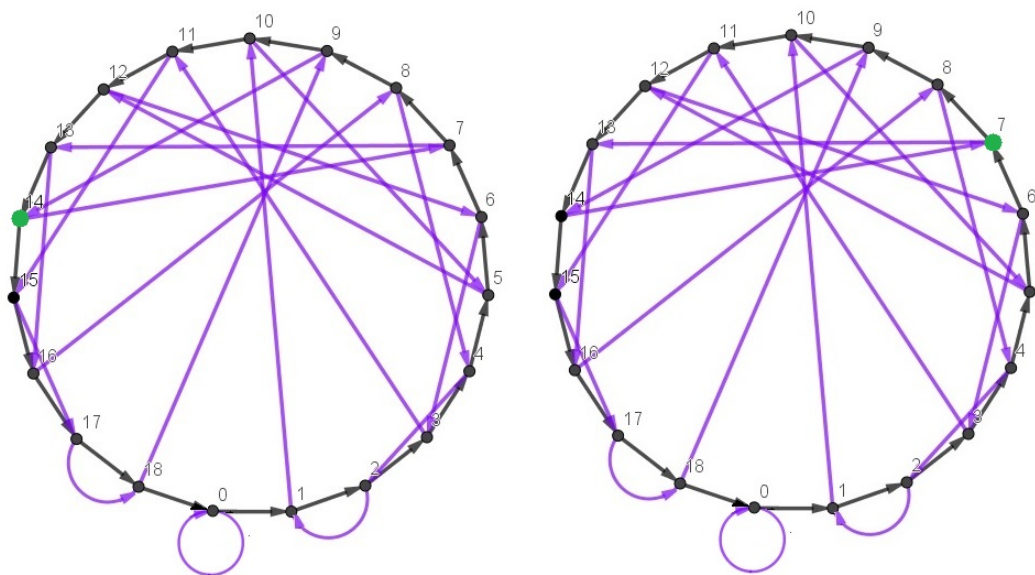


figura 6.30 Recorrido en la digráfica usando el quinto dígito.

El sexto dígito es 4, así que nos movemos sobre las flechas negras para ir al vértice 11, luego con la flecha morada llegamos al vértice 15 (figura 6.31).

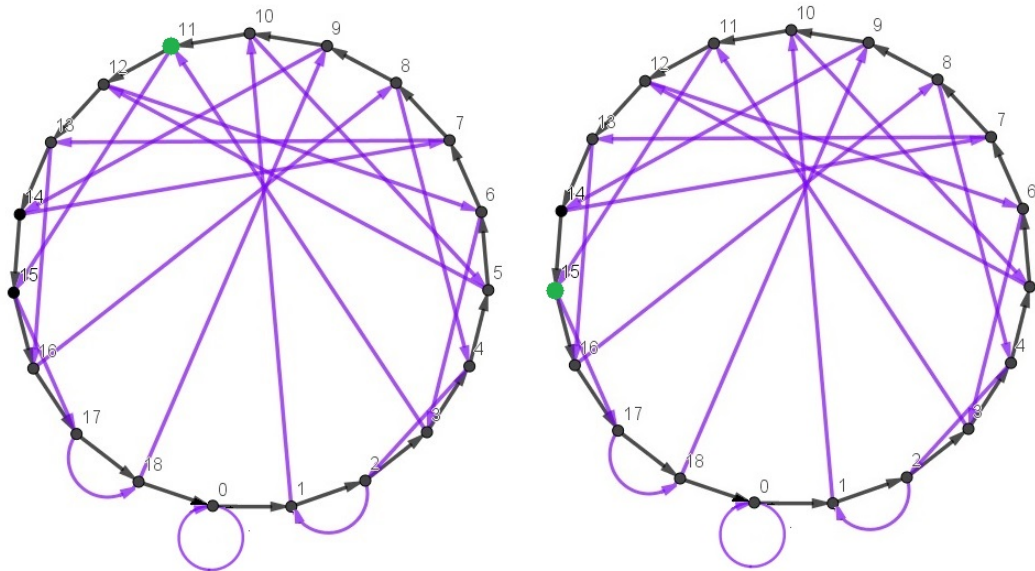


figura 6.31 Recorrido en la digráfica usando el sexto dígito.

Como el penúltimo dígito es 9 nos movemos sobre las flechas negras para llegar al vértice 5, luego nos movemos por la flecha morada para llegar al vértice 12 (figura 6.32).

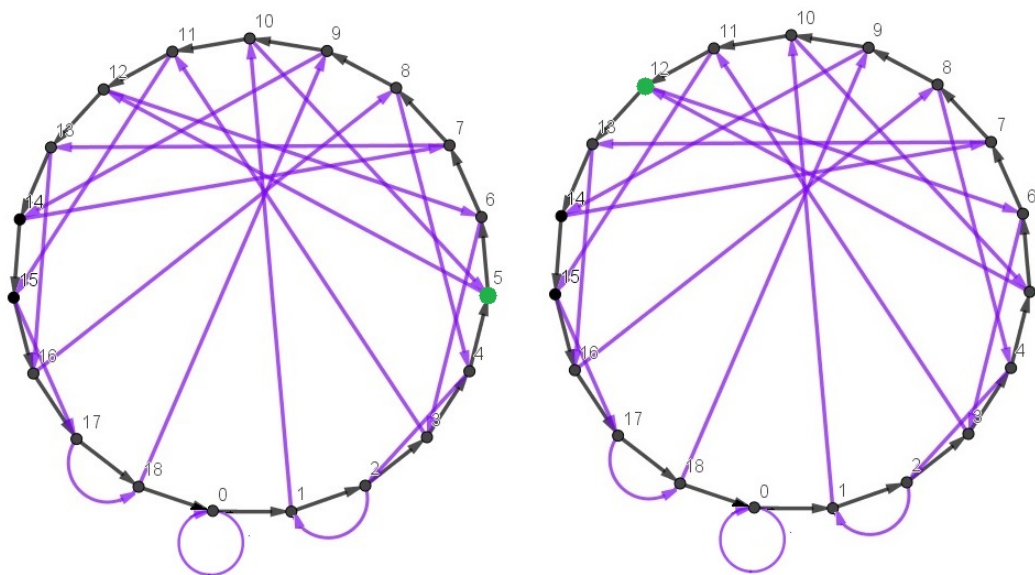


figura 6.32 Recorrido en la digráfica usando el séptimo dígito.

Finalmente el último dígito es 7, por lo que nos movemos sobre las flechas negras hasta llegar al vértice 0 (figura 6.33). Por el criterio tenemos que 18,995,497 es divisible entre 19.

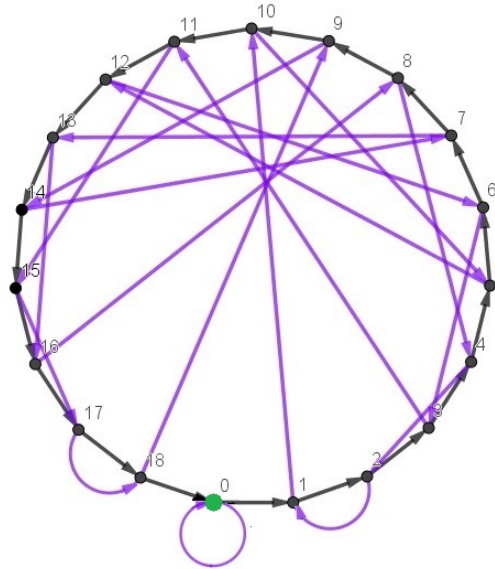


figura 6.33 Recorrido en la digráfica usando el octavo dígito.

Apéndice

Conjuntos

Definición 1. Un **conjunto** A está determinado por ciertos objetos a los que llamaremos sus elementos.

Por ejemplo $A=\{2,4,6,8\}$, $B=\{\text{plátano, manzana, piña, durazno}\}$ y $C=\{\text{cuadrado, hexágono, octágono, decágono}\}$.

Definición 2. Si b es un **elemento** de un conjunto A , decimos que b **pertenece** a A , y se denota como $b \in A$, si b no estuviera en A entonces se denota por $b \notin A$.

Del ejemplo anterior, $2 \in A$, $\text{piña} \in B$, $\text{hexágono} \in C$, $\text{durazno} \notin A$, $2 \notin B$ y $4 \notin C$.

Definición 3. Sean A y B dos conjuntos. Decimos que B es un **subconjunto** de A , denotado por $B \subseteq A$, si todos los elementos de B pertenecen a A .

Por ejemplo consideremos a los conjuntos $C=\{1,2,3,4,5,6\}$ y $D=\{1,3,5\}$, $D \subseteq C$.

Definición 4. Sean A y B conjuntos. Definimos la **unión** de A con B , denotado por $A \cup B$, como el conjunto $A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}$.

Definición 5. Sean A y B conjuntos. Definimos el conjunto **intersección** de A con B , denotado por $A \cap B$, como el conjunto $A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}$.

Por ejemplo, consideremos los conjuntos $A=\{1,3,5,7,9\}$ y $B=\{1,2,4,5,6,8\}$:

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}.$$

$$A \cap B = \{1,5\}.$$

Definición 6. Definimos el **conjunto vacío**, denotado por \emptyset , como el conjunto que no tiene elementos.

Definición 7. Sea A un conjunto. Definimos la **cardinalidad** de A , denotada por $|A|$, como el número de elementos que tiene A . Por ejemplo, para el conjunto $A=\{0,2,4,6\}$, su cardinalidad es $|A|=4$.

Definición 8. Sean A y B dos conjuntos. Definimos la **diferencia** de A con B , denotada por $A \setminus B$, como el conjunto $A \setminus B = \{x : x \in A \text{ y } x \notin B\}$.

Divisibilidad

Definición 1. Sean a y b dos números enteros. Decimos que b divide a a si y sólo si existe un número c en los enteros tal que $b \cdot c = a$. De igual forma diremos que b es divisible entre a si y sólo si existe un número c en los enteros tal que $b \cdot c = a$. Por ejemplo, 105 es divisible entre 7 ya que $7(15) = 105$.

Definición 2. Sean a , n y x números enteros. Decimos que x es congruente con a módulo n , denotado $x \equiv a \pmod{n}$, si y sólo si $x - a$ es divisible entre n . Por ejemplo $45 \equiv 3 \pmod{7}$ ya que $45 - 3 = 42$ es divisible entre 7. Para resumir un poco la notación simplemente diremos que 45 módulo 7 es 3.

Conclusiones

Los acertijos juegan un papel importante en el razonamiento de las personas y en la historia de las matemáticas, pues como vimos en el capítulo 1, podemos encontrarlos en nuestra vida cotidiana, el acertijo de “Buscando rutas” y el de “El nuevo local de pizzas” son un ejemplo de ello, incluso vimos que la teoría de gráficas surge de uno: los siete puentes de Königsberg. Con base en ellos también pudimos proporcionar algunos de los conceptos más importantes en teoría de gráficas.

Por otro lado, los juegos vistos en el capítulo 2 y 3 nos ayudaron a introducirnos a los temas de conexidad y núcleos. En el capítulo 5 trabajamos una lotería y tres versiones de memoramas que se hicieron con base en las definiciones y los temas de los capítulos anteriores. Los diseños de los tableros y las cartas se pueden imprimir para que las personas interesadas jueguen. Nosotros lo hemos hecho sobre papel couche mate.

De igual forma los juegos del “Glotón”, “Llega a la meta”, “Atila el cazador”, y una “Carrera hacia Honoria”, podemos desarrollarlos sobre un mismo tablero, el cual puede hacerse con diferentes clases de materiales. Hemos construido un tablero de 8×8 en el que se implementan estos juegos (figura 1).

La teoría de gráficas nos ayudó a encontrar estrategias ganadoras para algunos juegos, como en el caso de los juegos de núcleos, y a saber cuando un juego tiene solución: los juegos de Atila. De manera similar el análisis que se hizo puede hacerse con otros juegos que se modelen con la teoría de gráficas, por lo que podemos aumentar la colección investigando o inventando nuevos juegos.

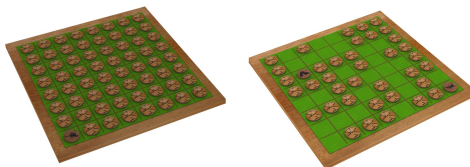


figura 1 Tablero 8×8 multijuegos.

Bibliografía

- [1] Alsina C. *Mapas del metro y redes neuronales*, RBA LIBROS S.A, 2011.
- [2] Berge C. *The theory of graphs*, Dover, 2001.
- [3] Berge C. *Les jeux combinatoires*, Cahiers Centre Études Rech. Opér., 24: 89–105, 1982.
- [4] Berge C. *Nouvelles extensions du noyau d'un graphe et ses applications en théorie des jeux*, Économétriques 6: 6–11, 1973.
- [5] Benjamin A., Chartrand G. *The fascinating world of graph theory*, Princeton University Press, 2015.
- [6] Chartrand G. *Introductory Graph Theory*, Dover, 1985.
- [7] Chartrand G, Zhang P. *A first course in graph theory*, Dover, 2012.
- [8] Foulds L. *Graph theory applications*, Springer, 1992.
- [9] Haynes T.W., Hedetniemi S. and Slater P. *Fundamentals of Domination in Graphs*, CRC Press, 1998.
- [10] Haynes T.W., Hedetniemi S.T., McCoy T.L. and Rodríguez T.K. *Bounds on cost effective domination numbers*. <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.2989/16073606.2016.1167133>, consultado el 1 de abril del 2018.
- [11] Hernández Ayuso M.C. *Introducción a la programación lineal*, UNAM, 2007.
- [12] Martín Novo E. y Méndez Alonso A. *Aplicaciones de la teoría de grafos en algunos juegos de estrategia*. <https://revistasuma.es/IMG/pdf/46/031-035.pdf>, consultado el 28 de marzo del 2018.
- [13] Moscovich I. *El gran libro de juegos para la mente*, Troquel, 2007.
- [14] National Geographic España. *Atila, el rey de los hunos, la pesadilla de Roma*. http://www.nationalgeographic.com.es/historia/grandes-reportajes/atila-la-pesadilla-de-roma_6288/7, consultado el 5 de agosto del 2017.
- [15] Neumann Coto M. *Euler y la geometría de la posición*. Miscelánea Matemática 45: 87-96, 2007.

- [16] Roncallo Salcedo A. *Los acertijos y el aprendizaje*. <http://angelaronallosalcedo.blogspot.mx/2011/06/los-acertijos-y-el-aprendizaje.html>, consultado el 5 de septiembre del 2017.
- [17] Wikipedia. John von Neumann. https://es.wikipedia.org/wiki/John_von_Neumann, consultado el 8 de julio del 2017.
- [18] Wikipedia. Königsberg. <https://es.wikipedia.org/wiki/Königsberg>, consultado el 5 de octubre del 2017.
- [19] Wikipedia. Leonhard Euler. https://es.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler, consultado el 2 de septiembre del 2017.
- [20] Wikipedia. Metro (sistema de transporte). [https://es.wikipedia.org/wiki/Metro_\(sistema_de_transporte\)](https://es.wikipedia.org/wiki/Metro_(sistema_de_transporte)), consultado el 8 de julio del 2017.
- [21] Wikipedia. Robin Hood. https://es.wikipedia.org/wiki/Robin_Hood, consultado el 15 de abril del 2018.
- [22] Wikipedia. Seis grados de separación. https://es.wikipedia.org/wiki/Seis_grados_de_separación, consultado el 4 de septiembre del 2017.
- [23] Wilson D. *Divisibility by 7 is a Walk on a Graph*. II. <https://blog.tanyakhovanova.com/2010/08/divisibility-by-7-is-a-walk-on-a-graph-ii-2/>, consultado el 3 de marzo del 2018.