



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

## FACULTAD DE CIENCIAS

Regularización por Variación Total y Sensado  
Compresivo en Tomografía

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

PRESENTA:

Oscar Hurtado González

Director de Tesis:

Dr. Arnulfo Martínez Dávalos

Ciudad Universitaria, Cd. de México, 2018





Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del Alumno:  
Hurtado  
González  
Oscar  
55 19 44 43  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Física  
309011848
2. Datos del tutor:  
Dr.  
Arnulfo  
Martínez  
Dávalos
3. Datos del Sinodal 1:  
PhD.  
Mercedes  
Rodríguez  
Villafuerte
4. Datos del Sinodal 2:  
Dr.  
Rodrigo  
Alfonso  
Martín  
Salas
5. Datos del Sinodal 3:  
Dr.  
Iván  
Miguel  
Rosado  
Méndez
6. Datos del Sinodal 4:  
M. en C.  
Edgar  
Calva  
Coraza
7. Datos del trabajo escrito:  
Regularización por Variación Total y Sensado Compresivo en Tomografía  
124 p.  
2018

# Agradecimientos

Agradezco inicialmente a la Universidad Nacional Autónoma de México que me abrió sus puertas como la máxima casa de estudios para poder recibir mi educación universitaria.

En segundo lugar agradezco a todos los profesores que impartieron su conocimiento en las distintas aulas de la Facultad de Ciencias e hicieron de mi carrera un camino emocionante y desafiante.

Quiero agradecer también al Dr. Arnulfo Martínez Dávalos por haberme permitido realizar mi tesis bajo su tutela y por su infinita paciencia y enseñanza en estos últimos años. Asimismo, a mis sinodales, la Dra. Mercedes Rodríguez Villafuerte, el Dr. Rodrigo Alfonso Matín Salas, al Dr. Iván Miguel Rosado Méndez, y al M. en C. Edgar Calva Coraza, por su tiempo y disposición para leer y revisar mi tesis, aportando valiosas observaciones y correcciones para terminar de pulir este trabajo.

Agradezco también al IFUNAM por haberme brindado el espacio necesario para desarrollar mi proyecto de tesis.

Asimismo, agradezco a los proyectos de la UNAM PAPIIT IN108615, PAPIIT IN110616, y al proyecto CONACYT Problemas Nacionales 2015-01-612 por los apoyos otorgados al Laboratorio de Imágenes Biomédicas del IFUNAM que hicieron posible la realización de esta tesis.

# Dedicatoria

A papá y mamá, a quienes amo con todo mi ser. Gracias por todo su amor, apoyo y cuidado durante toda mi vida y en particular por la paciencia y consejos que me dieron durante mi carrera universitaria. Gracias papá por ser mi héroe ejemplo para mí de siempre salir adelante y no rendirme nunca. Gracias mamá por mi heroína y ser increíblemente diligente al cuidarme y siempre estar pendiente de la familia.

A mis abuelos, Mami y Tito, por siempre estar ahí para mí y consentirme sin medida. Los amo también. Gracias tío Luis por tu ayuda y cuidado siempre.

Agradezco a mis tíos Victor, Ruth, Rosina, Elsa y a mi abuelo Armando por sus buenos deseos y cariño. Gracias por los buenos momentos y la comida en todas las reuniones familiares que durante los periodos de clase, hacían los fines de semana tiempos de recarga.

A mis mejores amigos, Tony, Isaac Cordova, Edgar, Isaac Barrientos, David y Sergio. Fueron fundamentales cada uno en distintas etapas de mi vida en los últimos 6 años. Altos y bajos, risas y estrés, desveladas y finales de semestre, comidas, juegos, domingos de NFL, gimnasio, entrenamientos, béisbol; tantas historias que recordaré por siempre. Los amo.

A mis modelos a seguir por su ética profesional y su corazón en el deporte, Tom Brady y Roger Federer; gracias por ser una inspiración y motivación cada temporada y torneo.

A Dios, gracias.

# Índice general

<b>1. El problema tomográfico</b>	<b>9</b>
1.1. Introducción . . . . .	9
1.2. Transformada de Radon. . . . .	11
1.3. Tomografía discreta . . . . .	14
<b>2. Reconstrucción Tomográfica, Sensado Compresivo y Variación Total</b>	<b>19</b>
2.1. Introducción . . . . .	19
2.2. Reconstrucción iterativa . . . . .	19
2.2.1. Algoritmo ART . . . . .	20
2.2.2. Algoritmos SIRT . . . . .	21
2.2.3. Algoritmo MLEM . . . . .	22
2.2.4. Convergencia de los algoritmos . . . . .	23
2.3. Métodos de regularización . . . . .	25
2.3.1. Regularización en tomografía . . . . .	28
2.4. Sensado compresivo . . . . .	29
2.4.1. Incoherencia y sensado de señales escasas . . . . .	30
2.4.2. Fortaleza del sensado compresivo . . . . .	33
2.5. Regularización por Variación Total. . . . .	34
<b>3. Desarrollo e implementación de algoritmos</b>	<b>38</b>
3.1. Introducción . . . . .	38
3.2. Ruido en maniqués y perfiles de intensidad. . . . .	39
3.3. Matriz de proyección y sinogramas generados . . . . .	40
3.4. Reconstrucciones con SIRT y MLEM . . . . .	42

3.4.1.	Breve análisis de SIRT y MLEM . . . . .	44
3.5.	Algoritmos implementados: SIRT+TV, MLEM+TV . . . . .	48
3.5.1.	Minimización de la variación total: planteamiento del problema	48
3.5.2.	Algoritmo SIRT+TV . . . . .	50
3.5.3.	Algoritmo MLEM+TV . . . . .	51
3.5.4.	Variación Total Anisotrópica. . . . .	52
3.6.	Elección de parámetros . . . . .	61
3.6.1.	Metodología para elección de parámetros . . . . .	62
3.6.2.	Discusión . . . . .	65
3.6.3.	Parámetros elegidos . . . . .	69
3.7.	Reconstrucciones SIRT+TV . . . . .	70
3.8.	Reconstrucciones MLEM+TV . . . . .	73
<b>4.</b>	<b>Aplicación a datos experimentales</b>	<b>76</b>
4.1.	Introducción . . . . .	76
4.2.	Tomografía óptica de luminiscencia estimulada por rayos X . . . . .	76
4.2.1.	Simulación numérica. . . . .	77
4.2.2.	Descripción de los maniqués utilizados . . . . .	79
4.2.3.	Datos utilizados, imágenes de referencia y elección de parámetros	81
4.2.4.	Resultados . . . . .	82
4.2.5.	Discusión . . . . .	107
4.3.	Tomografía computarizada: Nueces y raíces . . . . .	112
4.3.1.	Raíz de Loto . . . . .	112
4.3.2.	Nueces . . . . .	113
<b>5.</b>	<b>Conclusiones y perspectivas</b>	<b>116</b>

# Resumen

Las técnicas de reconstrucción tomográfica que se usan comúnmente, se basan en el concepto de la transformada de Radon (Filtered Back Projection, FBP) ó en la solución de un sistema lineal de ecuaciones que se plantea a partir de la discretización del problema tomográfico. En ambos casos se tienen limitaciones debido a varios factores. El factor más común es la presencia de ruido durante el proceso de adquisición de datos. Otra limitante es la cantidad de ángulos de proyección que se utilizan para irradiar el cuerpo o el intervalo angular a través del cual se posiciona el haz de radiación. Cuando se tiene uno o una combinación de estos factores limitantes, la calidad de las imágenes reconstruidas disminuye drásticamente en comparación a la calidad que se obtiene en la ausencia de éstos.

Las técnicas de regularización son utilizadas para resolver problemas que están “mal planteados” como en estos casos. Por ejemplo en presencia de ruido, estas técnicas se encargan de disminuir la propagación del ruido durante el proceso de reconstrucción. Cuando se tienen pocas proyecciones o intervalos angulares restringidos, las técnicas de regularización pretenden evitar o disminuir la aparición de “artefactos” en las imágenes.

El objetivo de esta tesis fue estudiar y aplicar la técnica de regularización por Variación Total (TV) bajo el contexto de la teoría de sensado compresivo a problemas de reconstrucción tomográfica en presencia de ruido y con pocas proyecciones.

Para esto, la tesis fue estructurada y dividida en 5 capítulos. El primer capítulo introduce los conceptos básicos del problema tomográfico, la transformada de Radon y el planteamiento algebraico del problema. El capítulo dos introduce los métodos iterativos para reconstrucción tomográfica con énfasis en SIRT y MLEM (Simultaneous Iterative Reconstruction Techniques y Maximum Likelihood Expectation Maximization, respectivamente); se abordan las técnicas de reconstrucción en el contexto de las condiciones de Hadamard para problemas “bien y mal planteados”; la teoría básica del sensado compresivo y los resultados más relevantes de tal teoría para esta tesis; y finalmente el capítulo concluye con la técnica de regularización por Variación Total en el contexto de la teoría del sensado compresivo y su aplicación a la reconstrucción tomográfica.

El tercer capítulo muestra el efecto del ruido y las pocas proyecciones en reconstrucciones hechas con SIRT y MLEM y se introducen los criterios que se utilizarán en el resto de la tesis para evaluar la calidad de las imágenes reconstruidas; después se llega al corazón de la tesis introduciendo los dos algoritmos implementados que son versiones de SIRT y MLEM pero usando la regularización por variación

total: “SIRT+TV” y “MLEM+TV”. Al haber introducido estos algoritmos, el capítulo continúa con la discusión de los parámetros que utilizan estos algoritmos y la metodología que se implementó para poder elegir el conjunto de parámetros que logra reconstruir las imágenes de mejor calidad. Las últimas partes de este capítulo muestran las reconstrucciones hechas de los maniqués sintéticos Shepp-Logan y el maniqué Forbild con ruido añadido y utilizando distintos números de proyecciones empleando la metodología para la elección de parámetros discutida previamente. Los resultados de estas secciones mostraron que introducir la regularización por variación total logra controlar de manera evidente la propagación del ruido y la aparición de artefactos y superan claramente la calidad de las reconstrucciones hechas solo con SIRT o MLEM.

El capítulo cuatro, muestra la aplicación de los dos algoritmos con regularización por variación total implementados a dos técnicas experimentales diferentes: tomografía computarizada (CT) y tomografía óptica de luminiscencia estimulada por rayos X (TORX). Para la TORX los datos utilizados fueron obtenidos a partir de una simulación numérica de un arreglo experimental. Se detalla el algoritmo que simula tal arreglo, se discute brevemente la estructura del maniqué utilizado y las resoluciones de muestreo utilizadas. Después se muestran todos los resultados obtenidos para las distintas resoluciones; se muestran las imágenes reconstruidas, tablas y gráficas que comparan la calidad de las reconstrucciones y se observó nuevamente que añadir la regularización por variación total logra mejorar visiblemente la calidad respecto a los algoritmos SIRT y MLEM sin regularización. El capítulo termina mostrando las reconstrucciones de imágenes tomográficas de un tomógrafo de rayos X de la FIPS (Finnish Inverse Problems Society); los datos son de libre distribución en su sitio web y son tomografías de una nuez y una raíz de loto. En este caso también se mostró que la regularización mejora la calidad de las reconstrucciones.

El último capítulo presenta las conclusiones y las perspectivas a futuro que pueden ayudar a continuar el estudio abarcado en esta tesis.

# Capítulo 1

## El problema tomográfico

### 1.1. Introducción

Una de las principales aportaciones de la Física a la Medicina en último siglo es la obtención de imágenes tomográficas. La palabra tomografía proviene del vocablo griego *tomos* que significa rebanada, y del griego *graphein* que significa escribir [Suetens, 2009].

Una imagen tomográfica es una representación gráfica de la sección transversal de un objeto reconstruida a partir de sus proyecciones. Una proyección se refiere a la información que se obtiene a partir de la energía transmitida de un haz de rayos X incidente en una dirección particular. Los rayos X que pasan a través del objeto se atenúan principalmente mediante cuatro mecanismos que son absorción fotoeléctrica, dispersión Compton, dispersión de Rayleigh y producción de pares. La presencia de estos fenómenos atenuantes depende de las propiedades materiales del objeto. Las propiedades atenuantes del objeto se describen con el *coeficiente lineal de atenuación* que se representa por medio de una función

$$\mu = \mu(\vec{r}, E)$$

en donde  $\vec{r}$  es el vector de posición de un elemento material del objeto y  $E$  es la energía del rayo incidente.

Si el haz incidente es monoenergético entonces el coeficiente de atenuación se reduce a  $\mu = \mu(\vec{r})$ , y debido a que las imágenes tomográficas son secciones transversales del objeto, se puede expresar como una función de dos variables  $\mu = \mu(x, y)$  en un sistema de referencia  $XY$  como se muestra en la figura 1.1

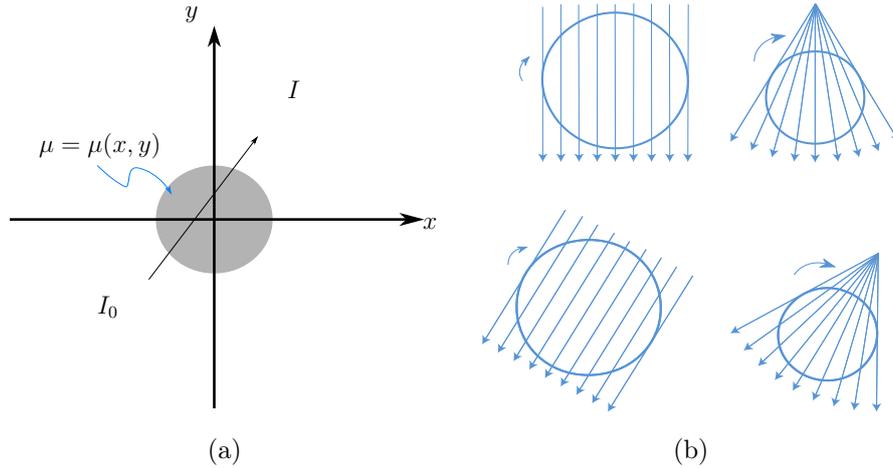


Figura 1.1: (a) Sección transversal de un objeto representada por el coeficiente lineal de atenuación, también se muestra un haz colimado y la línea de trayectoria. (b) Distintas geometrías de haz de rayos X en CT, haz en paralelo (izquierda) y haz en abanico (derecha).

En la figura 1.1 también puede observarse un haz colimado de rayos X monoenergético con intensidad incidente  $I_0$  que al atravesar el objeto se atenúa y sale con una intensidad  $I$ . La relación entre estas dos intensidades está dada por la ley de Beer-Lambert expresada como la integral de línea

$$I = I_0 \exp\left(-\int_{\ell} \mu(x, y) dl\right) \quad (1.1)$$

en donde  $\ell$  es el segmento de línea a lo largo del objeto, que representa la trayectoria del rayo transmitido.

Dicha integral de línea corresponde a una proyección a lo largo de la línea  $\ell$ . Cuando se tiene un haz de rayos X se tienen varias proyecciones determinadas por el conjunto de trayectorias de los rayos del haz que cubren el campo de vista (FOV, del inglés *field of view*). En tomografía computarizada (CT, del inglés *computed tomography*) se usan principalmente dos tipos de geometrías para los haces utilizados, el haz de rayos paralelos y haz de rayos en abanico (fan-beam) como se observa en la figura 1.1(b). El haz de rayos X se rota al rededor del objeto para medir proyecciones a muchos ángulos. Para obtener las proyecciones del haz de rayos X se utiliza un sistema de adquisición de datos que incluye el uso de fotodiodos o contadores de fotones para medir la intensidad de los rayos X transmitidos.

Las bases matemáticas para reconstruir una sección transversal o de manera más precisa, la obtención de la función  $\mu(x, y)$  a partir de sus proyecciones, fueron desarrolladas por Johann Radon en 1917. Sin embargo el primer escáner para reconstruir imágenes tomográficas fue desarrollado por Godfrey N. Hounsfield en 1972 y se basó en algunos algoritmos desarrollados por Allan Cormack. Ambos recibieron el premio Nobel en medicina en 1979.

## 1.2. Transformada de Radon.

Para estudiar la teoría matemática desarrollada por Radon en 1917 [Radon, 1986], considérese la geometría de haz de rayos paralelos mostrada en la figura 1.2.

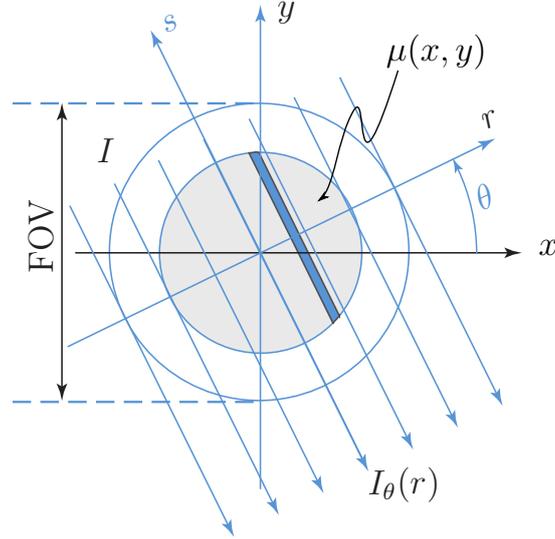


Figura 1.2: Geometría de rayos paralelos (Imagen tomada de [Suetens, 2009]).

Los rayos X forman un ángulo  $\theta$  respecto al eje  $y$  y con este ángulo se define una rotación de coordenadas. El sistema de coordenadas  $RS$  permite calcular las integrales para cada rayo del haz. Los rayos son paralelos al eje  $s$  y se supone que están equiespaciados respecto a la coordenada  $r$ . La intensidad de los rayos incidentes es  $I$  y se puede calcular la atenuación de cada uno en función de la coordenada  $r$  usando la integral de línea dada por la ecuación (1.1). Para ello se utilizan las matrices de rotación dadas por (1.2).

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Así para un ángulo fijo  $\theta$ , se puede calcular la intensidad atenuada de cada uno de los rayos del haz en función de su posición en la coordenada  $r$ . Utilizando (1.1) se obtiene el *perfil de intensidad* como función de  $r$ ,  $I_\theta(r)$

$$I_\theta(r) = I \exp \left( \int_{\ell_{r,\theta}} \mu(r \cdot \cos \theta - s \cdot \sin \theta, r \cdot \sin \theta + s \cdot \cos \theta) ds \right) \quad (1.3)$$

En donde la recta  $\ell_{r,\theta}$  es la recta que representa la trayectoria del haz a distancia  $r$  del origen del sistema de coordenadas incidente a un ángulo  $\theta$ . Tomando el logaritmo

se define lo que es el *perfil de atenuación*,  $p_\theta(r)$

$$p_\theta(r) = -\ln \frac{I_\theta(r)}{I} = \left( \int_{\ell_{r,\theta}} \mu(r \cdot \cos \theta - s \cdot \sin \theta, r \cdot \sin \theta + s \cdot \cos \theta) ds \right) \quad (1.4)$$

Así, el perfil de atenuación corresponde a la proyección del coeficiente de atenuación a lo largo de  $\ell_{r,\theta}$ .

Se pueden tomar distintos ángulos  $\theta$  en el intervalo  $[0, 2\pi]$  para obtener más proyecciones y construir una función  $P(r, \theta)$ , llamada *sinograma*. La figura (1.3) muestra el maniquí Shepp-Logan, el cual es una imagen de prueba estandarizada creada por Larry Shepp y Benjamin Logan [Shepp and Logan, 1974], y sirve como modelo de una cabeza humana en el desarrollo y prueba de algoritmos de reconstrucción de imágenes. La transformación de la función  $\mu(x, y)$  a su sinograma corresponde a la *transformada de Radon*.

$$\mathcal{R}\{\mu\}(r, \theta) \equiv P(r, \theta) = \left( \int_{\ell_{r,\theta}} \mu(r \cdot \cos \theta - s \cdot \sin \theta, r \cdot \sin \theta + s \cdot \cos \theta) ds \right) \quad (1.5)$$

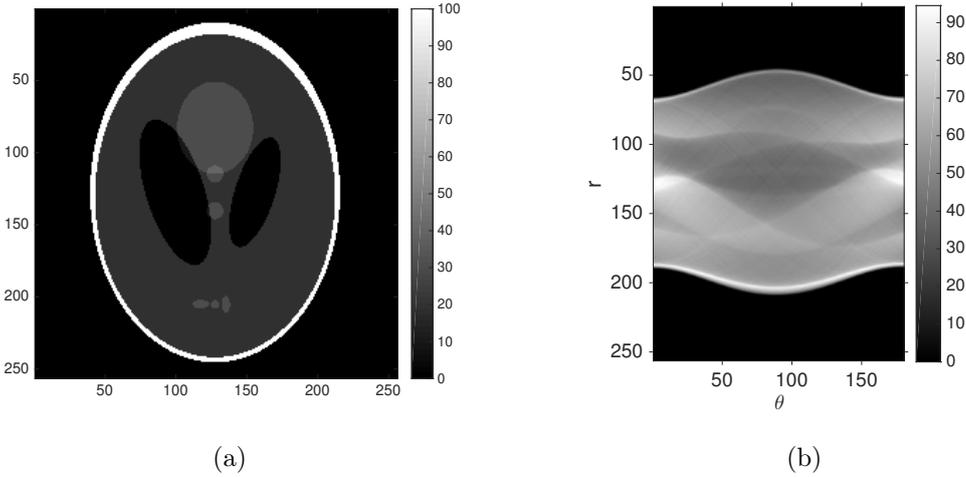


Figura 1.3: (a) Maniquí Shepp-Logan; se muestran las dimensiones en pixeles en los ejes y la escala de grises correspondiente. (b) Transformada de Radon o sinograma del maniquí Shepp-Logan.

Obtener proyecciones de manera experimental es medir las intensidades atenuadas del haz de rayos X a distintos ángulos y a diferentes posiciones, es decir, experimentalmente se mide el *sinograma* o transformada de Radon. Así la reconstrucción de una imagen tomográfica es obtener el coeficiente de atenuación  $\mu(x, y)$  a partir de su sinograma  $\mathcal{R}\{\mu\}(r, \theta)$ , es decir que reconstruir la sección transversal del objeto equivale a resolver el problema inverso a la transformada de Radon. Por lo tanto, resolver el problema tomográfico consiste en encontrar (si es que existe) la “*transformada inversa de Radon*”.

$$\mu(x, y) = \mathcal{R}^{-1}(P(r, \theta))$$

La aproximación más simple a la transformada inversa de Radon consiste integrar con respecto a  $\theta$  el sinograma  $P(r, \theta)$  y asignar los valores a las coordenadas  $(x, y)$  en función de la coordenada  $r$  utilizando el cambio de variable  $r = x \cos \theta + y \sin \theta$  dada por (1.2)

$$B_P(x, y) = \int_0^\pi P(r, \theta) d\theta = \int_0^\pi P(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta \quad (1.6)$$

La ecuación (1.6) se conoce como **retroproyección** (*Backprojection*). La retroproyección es una primera aproximación que no sirve bien pues con ella se obtienen imágenes borrosas como se observa en la figura 1.4(a).

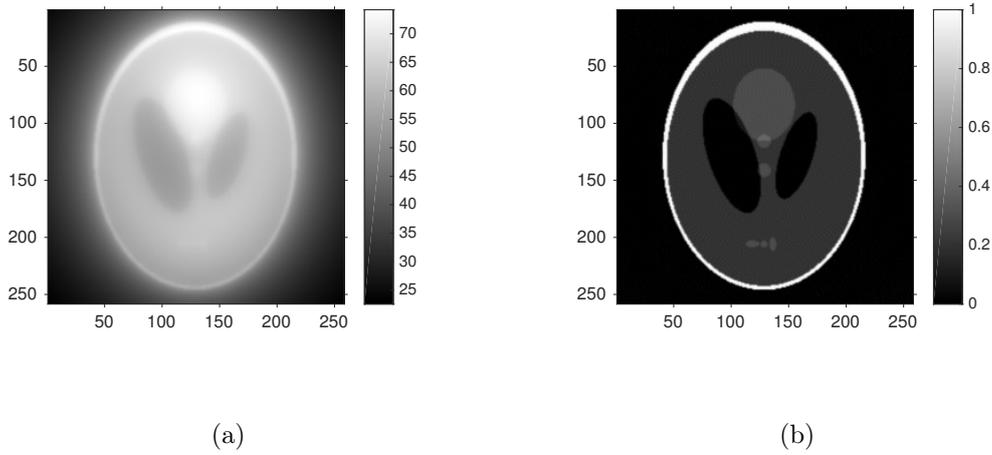


Figura 1.4: (a) Retroproyección. Implementada con la función iradon de MATLAB usando el filtro 'none', es decir la ec. (1.6) sin filtro. (b) Filtered Back Projection (FBP), implementada con la función iradon de MATLAB.

La transformada inversa  $\mathcal{R}^{-1}$  se obtiene por medio del **teorema de la rebanada central**. Este teorema relaciona la transformada de Radon de la función  $\mu(x, y)$  con las transformadas de Fourier. El teorema establece las siguientes ecuaciones y una demostración puede verse en [Suetens, 2009].

Sea  $\mathcal{F}\{\mu\}(k_x, k_y)$  la transformada en 2D de la función  $\mu(x, y)$ .

$$\mathcal{F}\{\mu\}(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(x, y) e^{-2\pi i(k_x x + k_y y)} dx dy$$

y sea  $\mathcal{P}_\theta(k)$  la transformada de Fourier de  $p_\theta(r)$ .

$$\mathcal{P}_\theta(k) = \int_{-\infty}^{\infty} p_\theta(r) e^{-2\pi i k r} dr$$

Haciendo  $\theta$  variable, el teorema afirma la siguiente igualdad:

$$\mathcal{P}(k, \theta) = \mathcal{F}\{\mu\}(k_x, k_y); \therefore \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{P}(r, \theta)\} = \mu(x, y) \quad (1.7)$$

en donde

$$\begin{aligned} k_x &= k \cos \theta \\ k_y &= k \sin \theta \\ k &= \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Entonces si se mide el sinograma  $P(r, \theta)$  y se calcula su transformada de Fourier en 1D en la variable  $r$  utilizando el cambio de variable dado por (1.8) y la igualdad dada por (1.7), se puede calcular la transformada inversa de Fourier en 2D y así obtener  $\mu(x, y)$

$$\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{P}(r, \theta)\} = \mu(x, y)$$

Para calcular la transformada inversa de Fourier de la ecuación (1.7) se necesita usar la versión polar de la transformada inversa de Fourier en 2D dada por

$$\mu(x, y) = \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty \mathcal{P}(k, \theta) |k| e^{i2\pi kr} dk d\theta, \quad (1.9)$$

con  $r = x \cos \theta + y \sin \theta$ . Definiendo

$$\mathcal{P}^*(k, \theta) = \mathcal{P}(k, \theta) |k|$$

y

$$P^*(k, \theta) = \int_{-\infty}^\infty \mathcal{P}^*(k, \theta) e^{i2\pi kr} dk$$

la ecuación (1.9) se convierte en

$$\mu(x, y) = \int_0^\pi P^*(k, \theta) d\theta. \quad (1.10)$$

A la ecuación (1.10) se le llama **retroproyección filtrada** (**FBP** del inglés *filtered back projection*). Esta ecuación es como la retroproyección dada por 1.6 pero se introduce un filtro en el dominio de frecuencias (es decir, se multiplica la función a retroproyectar por el filtro “ramp”  $|k|$ , en el dominio de Fourier).

La retroproyección filtrada satisface el teorema de la rebanada central y por ende puede ser identificada como la transformada inversa de Radón. Un ejemplo de FBP puede observarse en la figura 1.4 (b).

### 1.3. Tomografía discreta

Todo lo discutido en la sección anterior ha supuesto implícitamente el uso de variables continuas para el uso de las transformadas integrales presentadas. Sin embargo en la práctica debido a la precisión finita de los números, la aritmética de las computadoras, y a que tampoco se mide un sinograma continuo sino un conjunto finito de puntos  $P(r_n, \theta_m)$  (con  $n$  y  $m$  en un conjunto de índices), se necesita discretizar el sinograma por una malla de  $n \times m$  puntos. Tal discretización puede ser definida por la geometría de la instrumentación utilizada para obtener las mediciones. La geometría de la instrumentación incluye el tipo de haz (paralelo o de abanico), la cantidad de ángulos  $\theta_m$  en los que se hacen incidir el haz de rayos X, el número de detectores utilizados en el arreglo que mide la intensidad de los rayos transmitidos (esto define el número de rayos que tiene el haz y por tanto define las coordenadas  $r_n$ ) y la resolución de la imagen que se desea reconstruir (número de píxeles que tendrá el tamaño de las imágenes). Si tal discretización es lo suficientemente fina, con una cantidad grande de rayos y muchas proyecciones entonces comúnmente se

integran tales mediciones con la versión discreta de la FBP (1.10). Por simplicidad, la siguiente deducción ilustra el planteamiento del problema para un haz paralelo de rayos X.

Definir la resolución de la imagen o el número de pixeles equivale a discretizar el coeficiente de atenuación  $\mu(x, y)$  en una malla de  $N \times N$  elementos pero enumerándolos con un solo índice  $j = 1, 2, \dots, N^2$ ,  $(\mu_j)$  como se muestra en la figura 1.5(a). Esta discretización está definida por los  $N$  detectores utilizados en la instrumentación y denotados por las letras  $b_1, b_2, \dots, b_N$ . Estos detectores también definen el número de rayos que forman el haz, que de ahora en adelante se denotará con  $N_{rays}$ , es decir se tiene que  $N_{rays} = N$ , por lo que estas letras se utilizarán de manera indistinta en lo siguiente. Esta figura corresponde al ángulo  $\theta_1 = 0$ . Así, las intensidades medidas por los detectores son  $I_1, I_2, \dots, I_N$  para el ángulo  $\theta_1$ . La intensidad de los rayos incidentes es  $I_0$  para todo rayo en el haz.

Al tener un conjunto discreto de coeficientes de atenuación las integrales de línea pasan a ser sumas y la transformada de Radon se puede ver como un sistema de ecuaciones lineales como se muestra a continuación [Kak and Slaney, 2001].

Para el rayo con intensidad atenuada  $I_l$  con  $l = 1, 2, \dots, N$  se tiene que

$$I_l = I_0 \exp \left( - \sum_{i=[(l-1) \cdot N]+1}^{l \cdot N} d \cdot \mu_i \right).$$

en donde  $d$  es la longitud de un pixel como se observa en la figura 1.5(a). Debido a que se conocen las intensidades  $I_0$  e  $I_1$ , se puede denotar a la suma con la misma etiqueta con la que se denotó a los detectores del arreglo. Despejando la suma se puede hacer

$$b_l \equiv -\ln \left( \frac{I_l}{I_0} \right) = \sum_{i=(l-1) \cdot N+1}^{l \cdot N} d \cdot \mu_i \quad (1.11)$$

Para obtener más proyecciones se necesita hacer un barrido a distintos ángulos en el intervalo  $[0, \pi]$ , pues por simetría los valores de las sumas obtenidas para proyecciones con ángulos en  $[\pi, 2\pi]$  son iguales a las sumas en el intervalo anterior. Así, tomando un conjunto finito de  $N_\theta$  ángulos en el intervalo  $[0, \pi]$ , se pueden medir más proyecciones como se muestra en la figura 1.5(b).

Por la simetría mencionada ( $\theta_1 = \theta_{N_\theta}$ , para los ángulos  $\theta_k$  con  $k = 1, \dots, N_\theta - 1$ , se pueden medir más proyecciones y obtener más sumas como las de la ecuación (1.11). Sin embargo hay que hacer algunas modificaciones pues al cambiar el ángulo, la distancia que recorre un rayo ya no es igual a  $d$ . Por ejemplo, como se puede observar en la figura para el último rayo con intensidad atenuada  $I_{N(k+1)}$ , la distancia que recorre al atravesar el primer pixel que toca es  $d_{i,j}$ . Las nuevas sumas  $b_{kN+l}$  se enumeran de forma consecutiva a las sumas correspondientes al ángulo anterior. Por ejemplo la última suma para  $\theta_1$  corresponde a  $b_N$ , por lo que las sumas para  $\theta_2$  se enumerarán de la forma  $b_{N+1}, b_{N+2}, \dots, b_{2N}$ .

La suma  $b_{kN+l}$  esta dada por la siguiente ecuación. Haciendo  $i = kN + l$

$$b_i = \sum_{j \in \mathcal{IN}} d_{i,j} \cdot \mu_j, \quad (1.12)$$

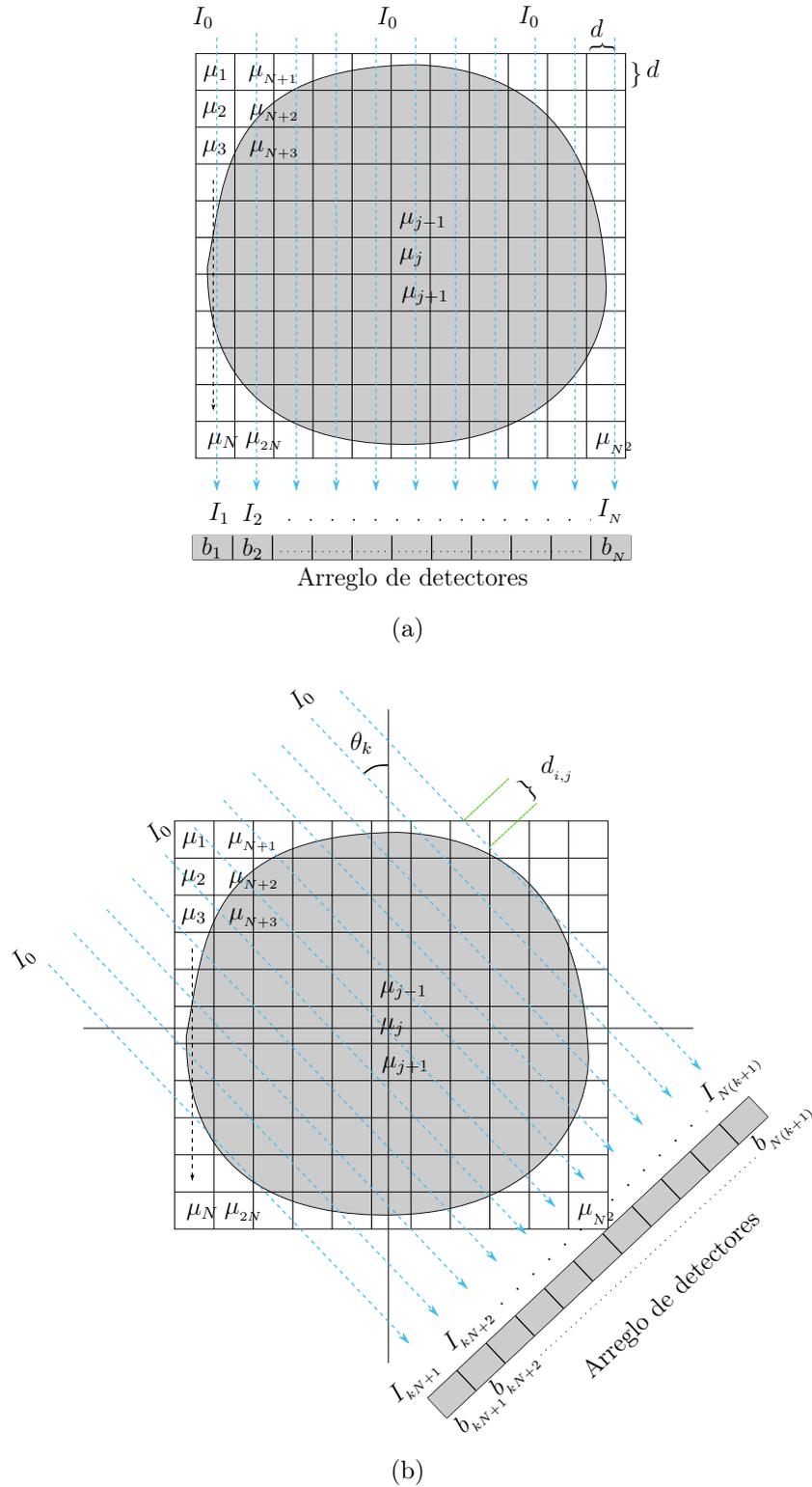


Figura 1.5: (a)Discretización de la función  $\mu(x, y)$ . Las proyecciones se miden con el arreglo de detectores  $b_l$ . (b)Rotación a un ángulo  $\theta_k$  de el haz de rayos paralelos. Las proyecciones se miden con el arreglo de detectores en la nueva posición definida por ángulo dado.

en donde  $\mathcal{IN}$  es un conjunto de índices que corresponde a los subíndices de los pixeles que atraviesa el rayo que llega al el  $i$ -ésimo detector. Entonces teniendo  $N_{rays}$  y  $N_\theta$  ángulos se tienen en total  $\mathcal{M} = N_{rays} \times N_\theta$  proyecciones. Es decir podemos escribir

$$\vec{b} \equiv (b_1, b_2, \dots, b_{\mathcal{M}}),$$

de igual forma

$$\vec{x} \equiv (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{N^2}).$$

Viendo a estos vectores como vectores columna, podemos expresar todas las sumas como un sistema de ecuaciones de la forma

$$A\vec{x} = \vec{b}, \tag{1.13}$$

en donde las entradas de la matriz  $A \in \mathbb{M}_{\mathcal{M} \times N^2}$  corresponden a las distancias que atraviesan los rayos para contribuir a alguna proyección. Anteriormente se utilizo la letra  $d_{i,j}$  para denotar a tales distancias pero de ahora en adelante a los coeficientes de la matriz  $A$  simplemente se denotarán por  $a_{i,j}$ . A la matriz  $A$  se le llama **matriz de proyección** o simplemente *matriz del sistema*. Los coeficientes  $a_{i,j}$  también se pueden interpretar como la contribución del  $j$ -ésimo pixel  $\mu_j$  a la  $i$ -ésima medida  $b_i$ . Si se normalizan las distancias entonces estos coeficientes pueden tomar valores entre 0 y 1 y también se puede interpretar como la probabilidad de que el  $j$ -ésimo pixel contribuya a la  $i$ -ésima proyección (interpretación que es útil, por ejemplo, para las imágenes obtenidas con técnicas PET y SPECT).

De la figura 1.5(b) se puede apreciar que calcular los coeficientes  $a_{i,j}$  es un asunto geométrico que tiene que tomar en cuenta las dimensiones de los pixeles, la distancia de separación de los rayos y los ángulos para los cuales se miden las proyecciones. Calcular tales coeficientes puede ser muy complicado y largo de resolver y existen distintos algoritmos que permiten calcular la matriz de proyección. Uno de los algoritmos más utilizados es el algoritmo de Siddon [Siddon, 1985].

La idea básica de tal algoritmo es considerar a los pixeles como las áreas de intersección entre conjuntos ortogonales de líneas paralelas equiespaciadas. Se parametrizan cada una de las líneas que representan las trayectorias de los rayos proyectados con una ecuación de la forma  $\vec{L}(\alpha) = \vec{p}_1 + \alpha(\vec{p}_2 - \vec{p}_1)$ , con  $\vec{p}_1$  y  $\vec{p}_2$  siendo dos puntos que definen cada una de las trayectorias y  $\alpha \in [0, 1]$ . Entonces se calculan los puntos de intersección con cada una de las líneas que definen el conjunto de pixeles para cada rayo. El algoritmo trabaja de forma inicial para cada trayectoria calculando solo la intersección de “entrada” del rayo con la primera línea del conjunto y la intersección de “salida” con la última línea del conjunto y, utilizando la geometría ortogonal y equiespaciada, calcula las demás intersecciones intermedias de forma recursiva. La longitud  $a_{i,j}$  buscada está dada en términos del parámetro  $\alpha$  con el que se parametrizan las trayectorias. Para una explicación detallada del algoritmo veáse [Siddon, 1985]. Mejoras al algoritmo para hacer el calculo más rápido se han propuesto por ejemplo en [Jacobs et al., 1998]. En esta tesis se utilizaron los algoritmos implementados en [Hansen and Saxild-Hansen, 2012] incluidos en el paquete AIR TOOLS para MATLAB.

Así, el problema tomográfico se traduce a resolver el sistema lineal de ecuaciones (1.13) para encontrar los valores de los coeficientes lineales de atenuación que

corresponden a las entradas del vector  $\vec{x}$ . Es decir, dadas las proyecciones  $\vec{b}$  (sinograma) medidas con el arreglo de detectores que rodean el objeto y la geometría de la instrumentación que define la matriz de proyección  $A$ . En el capítulo 2, se describen los métodos numéricos que se emplean para resolver el sistema planteado en la ecuación 1.13.

## Capítulo 2

# Reconstrucción Tomográfica, Sensado Compresivo y Variación Total

### 2.1. Introducción

En este capítulo se introducen los métodos iterativos para la reconstrucción tomográfica, los métodos de regularización, la teoría básica del Sensado Compresivo y finalmente la Regularización por Variación Total. En la primera sección de este capítulo se detallan los métodos iterativos de reconstrucción tomográfica y algunas de sus características principales. En la segunda sección, se detallan los métodos de regularización en el contexto de las condiciones de Hadamard para sistemas de ecuaciones lineales. Después, en la tercera sección, se introduce de manera condensada la teoría de Sensado Compresivo resumiendo los resultados más relevantes para el objetivo de esta tesis. Finalmente en la cuarta sección se habla de la Regularización por Variación Total, su relación con la teoría del sensado compresivo y su aplicación a la reconstrucción tomográfica.

### 2.2. Reconstrucción iterativa

Si se decide resolver el sistema de ecuaciones en vez de integrar el sinograma con la FBP, se tienen que tomar en cuenta varias propiedades de los sistemas de ecuaciones lineales para elegir un método de solución. Por ejemplo, encontrar las soluciones a (1.13) resulta ser computacionalmente difícil si las dimensiones de la matriz  $A$  son muy grandes y por ello los métodos típicos de solución como eliminación Gaussiana o encontrar la matriz inversa  $A^{-1}$  suelen ser muy costosos en cuanto a tiempo de cómputo. También se puede tener que el sistema esté subdeterminado, es decir tener menos ecuaciones que incógnitas ( $N^2 > \mathcal{M}$ ), en cuyo caso la matriz inversa no existe y por tanto tener un subespacio solución de donde se puede elegir alguna solución  $\vec{x}$ , por lo que no se llega a una solución única. Una alternativa para resolver estos sistemas lineales de ecuaciones son los métodos iterativos.

Los *métodos iterativos* son algoritmos que, a partir de una estimación inicial

$\vec{x}_0$ , aplican una fórmula recursiva de la forma  $\vec{x}_{k+1} = f(\vec{x}_k)$  para generar una sucesión de vectores  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k, \dots$  que son soluciones aproximadas que convergen a la solución buscada  $\vec{x}$ . Es decir  $\vec{x}_k \rightarrow \vec{x}$  cuando  $k \rightarrow \infty$  [Loehr, 2014a].

La ventaja de los algoritmos iterativos es que con las computadoras actuales se pueden escribir rutinas en diferentes lenguajes de programación de manera relativamente sencilla y debido a la velocidad de procesamiento, estos algoritmos resultan ser muy rápidos en cuanto a tiempo de cómputo en comparación con los métodos de eliminación Gaussiana o descomposición de matrices como se menciona en [Beister et al., 2012].

Existen varios tipos de algoritmos iterativos que suelen aparecer en los libros de álgebra lineal numérica (véase [Loehr, 2014b] capítulo 10) como el algoritmo de *Richardson*, el algoritmo de *Jacobi* y uno de los más conocidos es el algoritmo *Gauss-Seidel*. Las condiciones de convergencia de estos métodos han sido estudiadas de manera detallada y en esa misma referencia pueden verse las condiciones para la convergencia del algoritmo Gauss-Seidel.

Por ejemplo, el algoritmo de Richardson está dado por la ecuación

$$\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k + (\vec{b} - A\vec{x}_k) \quad (2.1)$$

Los algoritmos de interés en el desarrollo de esta tesis que se implementan comúnmente en la reconstrucción de tomografías se describen brevemente a continuación.

### 2.2.1. Algoritmo ART

En el caso de tomografía computarizada, el primer algoritmo que se implementó para resolver el sistema (1.13), es el algoritmo ART (del inglés *Algebraic reconstruction techniques*). El algoritmo ART fue introducido en [Gordon et al., 1970] y se basa esencialmente en el algoritmo de Kaczmarz [Kaczmarz, 1937].

El algoritmo se puede escribir de la siguiente forma:

$$\vec{x} + \lambda_k (b_i - \langle a_i, \vec{x} \rangle) \frac{a_i}{\|a_i\|_2^2} \rightarrow \vec{x}, \quad (2.2)$$

en donde a  $\lambda_k$  se le conoce como **parámetro de relajación**,  $\|\cdot\|$  representa la norma  $\ell_2$  y  $a_i$  es el  $i$ -ésimo renglón de la matriz  $A$  (que es un vector de la misma dimensión de  $\vec{x}$ ). En este algoritmo la  $k$ -ésima iteración  $\vec{x}_k$  consiste en un “barrido” a través de las columnas de  $A$ , es decir que para obtener cada iteración  $\vec{x}_k$ , se debe seguir la regla dada por la ecuación (2.2) variando  $i$  desde 1 a  $\mathcal{M}$ .

En pseudocódigo se vería de la siguiente forma

```
x_0=aproximacion inicial
for k=1,2,...,iterNUM
-->for i=1,2,...M
-->x_k=x_{k-1}+Lam_k (b_i- a_i*x_{k-1})/(a_i||a_i||^2)
-->return x_k
-->end
```

```
end
x_final=x_iterNUM
```

El número  $M$  corresponde a  $\mathcal{M}$  y el `iterNUM` es el número de veces que se aplicará de forma recursiva la ecuación (2.2) para obtener la secuencia  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{\text{iterNUM}}$ .  $\mathbf{x}^*$  es la solución aproximada a (1.13) ya que en la práctica no se puede hacer  $k \rightarrow \infty$ . también es común dejar el parámetro de relajación fijo para toda iteración, es decir se hace  $\lambda_k = k$  y Kaczmarz utiliza  $\lambda = 1$ . Una interpretación geométrica de la convergencia del algoritmo puede estudiarse en [Kak and Slaney, 2001] capítulo 7.

## 2.2.2. Algoritmos SIRT

Los algoritmos SIRT (del inglés *Simultaneous Iterative Reconstruction Techniques*) son mejoras al algoritmo ART, pues como se discute en [Gilbert, 1972] y en [Andersen and Kak, 1984], el algoritmo ART presenta algunas limitaciones dadas por la naturaleza de las hipótesis que se utilizan en [Gordon et al., 1970]. Los algoritmos SIRT llevan el nombre de “simultáneos” porque a diferencia de ART, en donde se tiene que iterar renglón por renglón de la matriz  $A$ , todas las ecuaciones son utilizadas al mismo tiempo en una sola iteración por medio de operaciones entre matrices y vectores. La forma general de estos algoritmos es

$$\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k + \lambda_k T A^T M (\vec{b} - A \vec{x}_k), \quad (2.3)$$

en donde  $\lambda_k$  es nuevamente el parámetro de relajación,  $M$  y  $T$  son matrices que determinan el algoritmo en particular que se utiliza. La característica principal de las matrices  $M$  y  $T$  es que son matrices simétricas positivas definidas. En [Hansen and Saxild-Hansen, 2012] se mencionan algunos tipos de algoritmos SIRT como son el **método de Landweber**, el **método de Cimmino** y **SART** (del inglés *Simultaneous Algebraic Reconstruction Technique*).

Para el interés de esta tesis en particular, se utilizó el algoritmo SART (se eligió tal algoritmo debido a que es el más comúnmente implementado en las referencias consultadas durante el desarrollo de este trabajo) que está dado por

$$\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k + \lambda_k C A^T R (\vec{b} - A \vec{x}_k), \quad (2.4)$$

en donde las matrices  $C \in \mathbb{M}_{N^2 \times N^2}$  y  $R \in \mathbb{M}_{\mathcal{M} \times \mathcal{M}}$  son matrices diagonales cuyos elementos están dados por

$$c_{j,j} = \frac{1}{\sum_i a_{i,j}} ; \quad r_{i,i} = \frac{1}{\sum_j a_{i,j}}$$

En diversa literatura se intercambian de manera indistinta los términos SIRT y SART para denotar al algoritmo SART. De aquí en adelante para el desarrollo de esta tesis se utilizará solo el término SIRT para denotar a la ecuación (2.4) a menos que se quiera hacer una distinción explícita entre algoritmos.

### 2.2.3. Algoritmo MLEM

El algoritmo MLEM (del inglés *Maximum Likelihood Expectation Maximization*) es aplicado para tomografía por transmisión y para tomografía por emisión en [Lange and Carson, 1984], y es un algoritmo que se basa en la naturaleza estadística de los fotones que son emitidos y detectados en la medición de las proyecciones. Debido a que la estadística de los fotones es distinta en ambas modalidades (emisión ó transmisión), la deducción de este algoritmo cambia un poco entre las dos modalidades pero suele usarse en primera aproximación para ambas, la deducción que considera la estadística de emisión. La breve discusión que aquí se presenta es una simplificación del artículo de Lange y Carson como la presenta [Bruyant, 2002].

Para la estadística de emisión de fotones (como en el caso de Tomografía por Emisión de Positrones, PET), el vector  $\vec{x}$  que aparece en 1.13 representa las desintegraciones radiactivas (PET) o emisiones que ocurren en el cuerpo que está emitiendo los fotones, así el elemento  $x_i$  representa las desintegraciones que ocurren en el pixel  $j$ -ésimo de la imagen. Los elementos de matriz  $a_{i,j}$  representan la probabilidad de que el  $i$ -ésimo detector mida un fotón emitido por el pixel  $j$  y  $\vec{b}$  es el sinograma medido. El objetivo del algoritmo MLEM es encontrar una solución “general” como el mejor candidato estimado a  $\vec{x}$ : el número promedio de emisiones o desintegraciones radiactivas  $\vec{x}$  en la imagen que pueden producir el sinograma dado con la mayor probabilidad. Esto se logra utilizando la ley de Poisson que permite predecir la probabilidad de un número determinado de conteo de fotones a partir del número promedio de desintegraciones. Cada paso del algoritmo consiste en dos pasos básicos: el paso de expectación (paso E), en donde se calcula la probabilidad de que cualquier imagen sea reconstruida en función a las mediciones, y en el paso de maximización (paso M), la imagen que tiene la mayor probabilidad de dar los datos medidos es encontrada. El algoritmo se reduce en aplicar la fórmula recursiva dada por 2.5.

$$x_j^{(k+1)} = \frac{x_j^{(k)}}{\sum_{i=1}^{\mathcal{M}} A_{i,j}} \sum_{i=1}^{\mathcal{M}} \frac{b_i}{\sum_{j'=1}^{N^2} A_{i,j'} x_{j'}^{(k)}} A_{i,j} \quad (2.5)$$

Para deducir esta ecuación considérese el número promedio de desintegraciones en el pixel  $j$ ,  $\bar{x}_j$ . El número promedio de fotones emitidos del pixel  $j$  y detectados por el detector  $i$ , es  $a_{i,j} \bar{x}_j$ . El número promedio de fotones detectados por el detector  $i$  es la suma de los números promedios de fotones emitidos por cada pixel:

$$\bar{b}_i = \sum_{j=i}^m a_{i,j} \bar{x}_j.$$

El número de fotones emitidos de los  $m$  pixeles y detectados por el  $i$ -ésimo detector es una variable de Poisson. Así, la probabilidad de detectar  $b_i$  fotones está dada por

$$P(b_i) = \frac{e^{-\bar{b}_i} \bar{b}_i^{b_i}}{b_i!}$$

Todas las variables de Poisson se consideran estadísticamente independientes y la probabilidad condicional  $P(\vec{b}|\vec{x})$  de observar el vector  $\vec{x}$  cuando el mapa de emisión

es  $\vec{x}$  es el producto de las probabilidades individuales  $P(b_i)$ . Esto da la función de probabilidad  $L(\vec{x})$ :

$$L(\vec{x}) = P(\vec{b}|\vec{x}) = \prod_{i=1}^n P(b_i) = \prod_{i=1}^n \frac{e^{-\bar{b}_i} \bar{b}_i^{b_i}}{b_i!}.$$

Para hallar el máximo valor para la probabilidad  $L(\vec{x})$  se utiliza la derivada. Para maximizar la expectación (paso E), usualmente se considera  $l(\vec{x}) = \ln(L(\vec{x}))$ . Y utilizando las propiedades del logaritmo natural, la ecuación anterior se convierte en

$$l(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n (-\bar{b}_i + b_i \ln(\bar{b}_i) - \ln(b_i!)), \quad (2.6)$$

sustituyendo:

$$l(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n \left( -\sum_{j=i}^m a_{i,j} \bar{x}_j + b_i \ln\left(\sum_{j=i}^m a_{i,j} \bar{x}_j\right) - \ln(b_i!) \right). \quad (2.7)$$

Esta ecuación conocida como función de probabilidad, es fundamental para el algoritmo MLEM pues permite calcular la probabilidad de observar un conjunto de datos de proyecciones a partir de cualquier imagen  $\vec{x}$ . Y el paso de maximización (paso M) es para encontrar la imagen con mayor probabilidad que es considerada la solución óptima. Se ha demostrado en trabajos posteriores a [Lange and Carson, 1984], que  $l(\vec{x})$  tiene uno y solo un máximo el cual se obtiene al derivar e igualar a cero:

$$\frac{\partial l(\vec{x})}{\partial \vec{x}} = -\sum_{i=1}^n a_{i,j} + \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{\sum_{j'=1}^m a_{i,j'} \bar{x}_{j'}} a_{i,j} = 0. \quad (2.8)$$

Multiplicando por  $\bar{x}_j$  y despejando se llega a la ecuación que da el esquema iterativo de la ecuación 2.5:

$$\bar{x}_j = \frac{\bar{x}_j}{\sum_{i=1}^n a_{i,j}} \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{\sum_{j'=1}^m a_{i,j'} \bar{x}_{j'}} a_{i,j}. \quad (2.9)$$

## 2.2.4. Convergencia de los algoritmos

Una de las preguntas que surge naturalmente al trabajar con métodos iterativos es cuántas iteraciones se deben hacer para que la solución k-ésima sea una “buena” aproximación a la solución exacta  $\vec{x}$ . Un criterio comúnmente utilizado es utilizar niveles de tolerancia tales como

$$\|\vec{x}_{k+1} - \vec{x}_k\|_2 < \epsilon_x,$$

en donde  $\epsilon_x$  define un nivel de tolerancia para la norma de la diferencia entre iteraciones consecutivas o bien definiendo el **término de fidelidad** como  $\|A\vec{x}_k - \vec{b}\|_2$ , entonces

$$\|A\vec{x}_k - \vec{b}\|_2 < \epsilon_f, \quad (2.10)$$

siendo  $\epsilon_f$  la tolerancia para el término de fidelidad.

Otro criterio utilizado involucra a alguna imagen de referencia para comparar la imagen reconstruida. Si  $\vec{x}_{ref}$  representa la imagen de referencia vectorizada, se puede definir el **error cuadrático medio** (MSE, del inglés mean squared error) como:

$$MSE_k = \frac{1}{MN} \|\vec{x}_{ref} - \vec{x}_k\|_2^2, \quad (2.11)$$

en donde  $MN$  es la dimension de la imagen ( $M \times N$  pixles) y el subíndice  $k$  denota el error cuadrático medio de la  $k$ -ésima iteración. Luego, puede usarse esta medida y así automatizar el número de iteraciones hasta que se satisfaga algún nivel de tolerancia dado.

$$MSE_k < \epsilon_{mse} \quad (2.12)$$

Existen teoremas que demuestran que el algoritmo ART converge a la solución buscada  $\vec{x}$  (véase [Eggermont et al., 1981]); una de las condiciones de convergencia es que  $\lambda_k \in (0, 2)$ . También diversos autores han estudiado la convergencia de los algoritmos SIRT ([Censor and Elfving, 2002], [Censor et al., 2008], [Jiang and Wang, 2003a], [Jiang and Wang, 2003b], [Qu et al., 2009], [Van der Sluis and Van der Vorst, 1990]); y en [Hansen and Saxild-Hansen, 2012] se hace referencia a un teorema que resume los resultados de estos autores y que es muy práctico para los intereses de esta tesis.

[**Teorema 1:** Los iterados  $\vec{x}_k$  de (2.3) convergen a una solución  $\vec{x}^*$  de

$$\operatorname{argmin}_x \|A\vec{x} - \vec{b}\|_M^2$$

si y sólo si

$$0 < \epsilon \leq \lambda_k \leq \frac{2}{\rho_s(TA^TMA)} - \epsilon, \quad (2.13)$$

en donde  $\|A\vec{x} - \vec{b}\|_M^2 = (A\vec{x} - \vec{b})^T M (A\vec{x} - \vec{b})$ , y  $\epsilon$  es una constante fija pequeña y arbitraria. Si además  $\vec{x}_0$  está en el rango (o imagen) de  $TA^T$  entonces la solución  $\vec{x}^*$  es única con norma  $\|\cdot\|_T^{-1}$ . (Aquí  $\rho_s(Q)$  representa el radio espectral de una matriz  $Q$  definido como el eigenvalor positivo más grande).]

Así, los algoritmos SIRT resuelven el problema de optimización conocido como **mínimos cuadrados ponderados** (en inglés *weighted least squares*). En el caso particular de SART,  $T = C$  y  $M = R$  resulta ser que  $\rho_s(CA^TRA) = 1$  y así, tomando  $\epsilon = 0$  la convergencia está garantizada siempre y cuando el parámetro de relajación satisfaga

$$0 < \lambda_k \leq 2. \quad (2.14)$$

Esta condición de convergencia es importante y fue explotada fuertemente en la implementación de algoritmos y en el análisis de resultados de esta tesis como se explicará en capítulos siguientes.

Por otro lado la convergencia de MLEM es estudiada por [Kaufman, 1993]. En su artículo Kaufman establece que MLEM es equivalente a aplicar el proceso de expectación y maximización (EM) a un problema de mínimos cuadrados ponderados parecido al de la ecuación del teorema 1. Así que MLEM también minimiza la distancia entre  $A\vec{x}$  y  $\vec{b}$ .

## 2.3. Métodos de regularización

Los algoritmos algebraicos presentados en la sección anterior resuelven el sistema (1.13) logrando reconstruir imágenes tomográficas de buena calidad bajo ciertas condiciones. Una característica importante que se debe mencionar acerca de los sistemas de ecuaciones lineales como éste, es la de si el problema está o no “bien planteado” (en inglés *well-posed problem*). Por **definición**, un sistema está “bien planteado” si satisface las **condiciones de Hadamard** [Bakushinskiy and Goncharsky, 1994] dadas por:

1. La solución existe.
2. La solución es única.
3. La solución es estable con respecto a pequeñas perturbaciones en  $\vec{b}$ , en el sentido de que si  $A\vec{x}_0 = \vec{b}_0$  y  $A\vec{x} = \vec{b}$ , entonces  $\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0$  cuando  $\vec{b} \rightarrow \vec{b}_0$ .

Equivalentemente el sistema (1.13) está “bien planteado” si la matriz del sistema  $A$  es biyectiva (invertible) y el operador inverso  $A^{-1}$  es estable en el sentido del punto 3. Si una de las condiciones de Hadamard no se satisface se dice que el sistema está “mal planteado” (en inglés *ill-posed problem*).

La primera condición puede no satisfacerse si, por ejemplo, los datos medidos en  $\vec{b}$  contienen algún tipo de ruido. La unicidad de la solución para la segunda condición, depende del número de ecuaciones e incógnitas y en los problemas tomográficos generalmente el sistema está subdeterminado. La tercera condición casi siempre se viola en la presencia de ruido pues éste se propaga rápidamente dando una solución alejada de la deseada [Wang et al., 2011].

Cuando se tiene un problema “mal planteado” se sigue una técnica conocida como **regularización** que consiste en imponer condiciones adicionales para restringir al problema y de alguna manera estabilizarlo.

Una manera no tan rigurosa de ver cómo la tercera condición de Hadamard produce problemas mal planteados ante la presencia de ruido y lo que son las técnicas de regularización, es estudiar más a detalle el sistema (1.13) con la teoría espectral de matrices simétricas.

Dado que  $A \in \mathbb{M}_{\mathcal{M} \times \mathcal{N}^2}$  no es necesariamente una matriz cuadrada entonces podemos extender el sistema con la matriz  $A^T$

$$A^T A \vec{x} = A^T \vec{b}.$$

Definiendo  $A_s \equiv A^T A$  y  $\vec{y} \equiv A^T \vec{b}$ , reescribimos el sistema como

$$A_s \vec{x} = \vec{y}.$$

$A_s \in \mathbb{M}_{\mathcal{N}^2 \times \mathcal{N}^2}$  es una matriz positiva definida (es decir,  $\vec{r} \cdot (A_s \vec{r}) > 0$  para todo vector  $\vec{r} \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}^2}$ ) y por tanto existen  $\mathcal{N}^2$  eigenvalores  $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{\mathcal{N}^2}$

y los correspondientes eigenvectores  $\mathbf{u}_i$  que forman una base ortonormal en la cual  $A_s$  tiene una representación diagonal de la forma [Doicu et al., 2010]:

$$A_s = \sum_{i=1}^{N^2} \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T.$$

El *número de condición* está definido por el cociente entre los eigenvalores con mayor y menor valor. Suponiendo  $\lambda_1 \neq 0$ , el número de condición de  $A_s$  está dado por  $\kappa \equiv \frac{\lambda_{N^2}}{\lambda_1}$ . Para simplificar la notación se suele suponer que los eigenvalores están escalados y que  $\lambda_{N^2} = 1$ . Así, el número de condición está dado por el eigenvalor mas pequeño  $\kappa = \frac{1}{\lambda_1}$ .

El número de condición es una medida de la estabilidad del sistema ante pequeñas variaciones en los datos. Supongamos que  $\vec{y}_\delta$  representa un conjunto de datos con ruido que satisface

$$\|\vec{y}_\delta - \vec{y}\|_2 < \delta \quad (2.15)$$

Sea  $\vec{x}_\delta$  la solución que satisface  $A_s \vec{x}_\delta = \vec{y}_\delta$ . Entonces utilizando la representación espectral se puede escribir

$$\vec{x}_\delta - \vec{x} = \sum_{i=1}^{N^2} \frac{1}{\lambda_i} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T \cdot (\vec{y}_\delta - \vec{y}).$$

Luego, utilizando la ortogonalidad de la base se puede medir la norma de la expresión anterior

$$\|\vec{x}_\delta - \vec{x}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{N^2} \frac{1}{\lambda_i^2} [\mathbf{u}_i^T \cdot (\vec{y}_\delta - \vec{y})]^2 \leq \sum_{i=1}^{N^2} \frac{1}{\lambda_1^2} [\mathbf{u}_i^T \cdot (\vec{y}_\delta - \vec{y})]^2 = \frac{1}{\lambda_1^2} \sum_{i=1}^{N^2} [\mathbf{u}_i^T \cdot (\vec{y}_\delta - \vec{y})]^2 = \frac{1}{\lambda_1^2} \|\vec{y}_\delta - \vec{y}\|_2^2,$$

en donde la desigualdad se cumple ya que,  $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{N^2}$  implica que  $\lambda_1^{-2} \geq \lambda_2^{-2} \geq \dots \geq \lambda_{N^2}^{-2}$

$$\|\vec{x}_\delta - \vec{x}\|_2^2 \leq \frac{1}{\lambda_1^2} \|\vec{y}_\delta - \vec{y}\|_2^2 = \kappa^2 \|\vec{y}_\delta - \vec{y}\|_2^2 \leq (\kappa \delta)^2,$$

o bien

$$\|\vec{x}_\delta - \vec{x}\|_2 \leq \kappa \delta. \quad (2.16)$$

El término  $\|\vec{x}_\delta - \vec{x}\|_2$  se puede pensar como la “amplificación” del ruido o simplemente como qué tanto se alejan dos soluciones cuando existen cambios pequeños en las mediciones (ecuación (2.15)). Entonces para sistemas de ecuaciones con números de condición grandes no necesariamente se satisface la tercera condición de Hadamard en el sentido de  $\vec{x}_\delta \rightarrow \vec{x}$  cuando  $\vec{y}_\delta \rightarrow \vec{y}$ , pues la cota superior dada por (2.16) da lugar a posibles grandes diferencias en las soluciones.

Los números de condición grandes corresponden a eigenvalores pequeños y es aquí donde entra la idea fundamental de los *métodos de regularización*. De manera intuitiva se podría pensar en modificar o aproximar  $A_s$  por una familia de matrices cuyos **eigenvalores** más pequeños **sean alejados del cero**. Otra manera de entender los métodos de regularización es pensarlos como la aproximación de un problema “mal planteado” por una familia adyacente de problemas “bien planteados”.

Un ejemplo sencillo es hacer el cambio a la matriz  $A_s$  dado por

$$A_\alpha = A_s + \alpha I_d \quad ; \quad \alpha > 0. \quad (2.17)$$

Se puede demostrar que los eigenvalores  $\vec{L}_i$  de la matriz  $A_\alpha$  están dados por  $\lambda_i + \alpha$ , con  $i = 1, \dots, N^2$  y los eigenvectores son los mismos de  $A_s$ . Si tenemos  $\vec{x} = A_s^{-1} \vec{y}$  y  $\vec{x}_\alpha = A_\alpha^{-1} \vec{y}$ , entonces usando la representación espectral de  $A_s$  y de  $A_\alpha$  se puede seguir un análisis como el anterior y obtener

$$\vec{x} - \vec{x}_\alpha = \sum_{i=1}^{N^2} \left( \frac{1}{\lambda_i} - \frac{1}{\lambda_i + \alpha} \right) \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^{N^2} \frac{\alpha}{\lambda_i(\lambda_i + \alpha)} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T \cdot \vec{y}.$$

De la expresión anterior se puede estimar el **error de aproximación** de esta *técnica de regularización* como

$$E(\alpha) = \|\vec{x} - \vec{x}_\alpha\|_2 \leq \frac{\alpha}{\lambda_1(\lambda_1 + \alpha)} \|\vec{y}\|_2. \quad (2.18)$$

Utilizando un conjunto de datos ruidoso  $\vec{y}_\delta$  y siguiendo un análisis análogo se puede observar lo siguiente.

$$\vec{x}_\alpha^\delta - \vec{x}_\alpha = \sum_{i=1}^{N^2} \frac{1}{\lambda_i + \alpha} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T \cdot (\vec{y}_\delta - \vec{y}).$$

de donde el **error** se estima como

$$E(\alpha, \delta) = \|\vec{x}_\alpha^\delta - \vec{x}_\alpha\|_2 \leq \frac{\delta}{\lambda_1 + \alpha}. \quad (2.19)$$

Luego, utilizando la desigualdad del triángulo se llega al **error total**

$$\|\vec{x} - \vec{x}_\alpha^\delta\|_2 \leq E(\alpha) + E(\alpha, \delta) = \frac{\alpha}{\lambda_1(\lambda_1 + \alpha)} \|\vec{y}\|_2 + \frac{\delta}{\lambda_1 + \alpha}. \quad (2.20)$$

Sin embargo como en la práctica no podemos conocer  $\|\vec{y}\|_2$  se puede estimar  $\|\vec{y}\|_2 \leq \|\vec{y}_\delta\|_2 + \delta$  y así

$$\|x - \vec{x}_\alpha^\delta\|_2 \leq E(\alpha) + E(\alpha, \delta) = \frac{\alpha}{\lambda_1(\lambda_1 + \alpha)} (\|\vec{y}_\delta\|_2 + \delta) + \frac{\delta}{\lambda_1 + \alpha}. \quad (2.21)$$

Al parámetro “ $\alpha$ ” se le conoce como **parámetro de regularización** y como puede observarse en la ecuación (2.21) la idea de introducir el parámetro de regularización es acotar el error entre las soluciones correspondientes a mediciones muy cercanas. Se puede ver que para un  $\delta$  fijo y cuando  $\alpha \rightarrow 0$ , se regresa a la condición dada por (2.16), es decir el primer término es decreciente y el segundo término crece. Entonces debe existir algún  $\alpha^*$  que minimice el error total. La elección del parámetro de regularización dependerá del nivel de ruido expresado en términos de  $\delta$  y de los eigenvalores de  $A_s$ . Las *reglas de elección de parámetros* son reglas que buscan escoger los mejores parámetros de regularización en función del nivel de ruido  $\delta$  y de los datos ruidosos  $\vec{y}_\delta$  y estas reglas tienen que ver con la definición formal de lo que son los métodos de regularización. Una discusión precisa y detallada de la definición de los métodos de regularización puede verse en [Engl et al., 1996] y en [Burger, 2007].

### 2.3.1. Regularización en tomografía

Existen varios casos prácticos bajo los cuales la *matriz de proyección en el problema tomográfico* está “mal condicionada”. Un caso es cuando se tienen pocas proyecciones, esto es, cuando se hacen incidir los rayos X pero con pocos ángulos; otro caso es cuando se presentan las llamadas *proyecciones incompletas*, que es cuando se toman las proyecciones en intervalos de ángulos restringidos por ejemplo un conjunto finito de ángulos  $\theta_m$  en el intervalo  $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$  en vez de el intervalo completo  $[0, \pi]$  (en estos dos casos se tiene que la matriz está subdeterminada y típicamente se tienen muchas menos ecuaciones que incógnitas). La presencia de ruido como se mencionó anteriormente es una fuente inmediata de problemas “mal planteados” y si esto se combina con los casos de pocas proyecciones y proyecciones incompletas se tiene una receta directa para “plantear mal” la matriz de proyección.

Es útil, como se verá más adelante, definir un parámetro  $\alpha_A$  que mida el cociente entre el número de renglones y de columnas de la matriz  $A$ .

$$\alpha_A = \frac{M}{N^2} \quad (2.22)$$

Con este parámetro es fácil ver que si  $\alpha_A = 1$  entonces se tiene la misma cantidad de ecuaciones que incógnitas por lo que en principio se puede calcular la inversa de la matriz  $A$  pero en vez de eso en estos casos se utiliza comúnmente la FBP para integrar el sinograma y obtener la reconstrucción debido a que es menos costoso en cuanto a tiempo de cómputo. Si  $\alpha_A \leq 1$  entonces hay más ecuaciones que incógnitas y es en este caso en donde se puede empezar a preguntar qué tanto se “mal condiciona” el problema por estos casos y cómo se podría implementar alguna técnica de regularización para mejorar las reconstrucciones obtenidas.

Lo anterior motiva fuertemente el interés particular de esta tesis en los métodos de regularización debido a que los problemas de pocas proyecciones y proyecciones incompletas (o tomografías de ángulo limitado) surgen de manera natural en algunas aplicaciones prácticas.

Por ejemplo, la *tomosíntesis digital de seno*, utiliza un tomógrafo que por su diseño geométrico y la necesidad del estudio, está forzado a tener un conjunto de proyecciones incompletas (ángulo limitado). También, en una tomografía convencional de rayos X, se pueden obtener pocas proyecciones cambiando diferentes parámetros en la instrumentación como son la cantidad de detectores o hacer un barrido con menos ángulos, esto supondría una cantidad de radiación menor suministrada al paciente reduciendo los riesgos de la exposición a tal radiación. También existe una modalidad de tomografía que se parece mucho a las modalidades de PET y SPECT llamada **tomografía óptica de luminiscencia estimulada por rayos X**, en donde un material luminiscente (es decir que emite radiación debido a la excitación y relajación de sus estados energéticos después de ser radiado por un haz de rayos X), es la fuente que emite la radiación medida en las proyecciones. En este caso la función  $\mu$  no corresponde a los coeficientes de atenuación sino a la distribución del material luminiscente. Este tipo de tomografía resulta ser tardado, pues se necesita radiar el material de manera muy precisa y fina con haces colimados de rayos X que aproximen a un solo rayo e ir midiendo con los detectores correspondientes, cada una de las proyecciones producidas por estos rayos. Si se quieren reducir los tiempos

de adquisición de datos se podría optar por utilizar menos rayos y menos ángulos de proyección, obteniendo en total muy pocas proyecciones.

La técnica de regularización que se utilizó en este trabajo fue la **regularización por variación total**. Se eligió esta técnica debido a que es una técnica que ayuda a reducir el ruido y su amplificación, y además ayuda mucho a obtener imágenes de buena calidad cuando se tienen pocas proyecciones debido a la naturaleza matemática de esta regularización como quedará claro más adelante cuando se introduzca la teoría del *sensado compresivo*. En las siguientes dos secciones se introducen los conceptos de sensado compresivo y regularización por variación total, respectivamente.

## 2.4. Sensado compresivo

La adquisición, almacenamiento y procesamiento de señales suele lidiar con el problema del “muestreo” o *sampling*. Dada la naturaleza discreta del proceso de adquisición de datos, surge la pregunta de cuántas muestras de la señal se necesitan medir para obtener suficiente información que identifique la señal y pueda utilizarse para su almacenamiento y procesamiento. Intuitivamente se puede pensar que entre más muestras se tomen de una señal, más completa es la información que se puede llegar a obtener y procesar de tal señal.

Por ejemplo, en el problema tomográfico a mayor cantidad de píxeles, detectores, y proyecciones (número de rayos y de ángulos), mayor es la cantidad de información con la que se puede reconstruir la sección transversal de un objeto y obtener una imagen de muy alta calidad. Otro ejemplo es en la adquisición de fotografías digitales en donde es común escuchar que mientras más “Megapíxeles” (mayor resolución) tenga una cámara, mayor es la calidad de la fotografía adquirida. Sin embargo en estos dos ejemplos surgen inconvenientes cuando se tienen muchas muestras de la señal (sinograma y fotografía, respectivamente). En el caso de la tomografía como ya se mencionó, existen casos prácticos en donde un muestreo completo no es posible o se necesitan tomar menos muestras para reducir los tiempos de adquisición. Para las fotografías digitales, entre más “Megapíxeles”, se requiere mayor capacidad de almacenamiento de información y ésta suele estar limitada por el tamaño de la memoria de almacenamiento del dispositivo. Por ello, existen algoritmos de compresión de datos que consisten en aplicar una transformación a la señal, expresándola en una base conveniente en donde se seleccionen sólo los coeficientes necesarios de su expansión, se conserve información de la base original y la cantidad de bits necesarios para su almacenamiento se logre reducir.

La cantidad mínima de muestras necesarias para adquirir una señal está dada por el teorema **Nyquist-Shannon** que establece un criterio entre las frecuencias de muestreo y las frecuencias del espectro de Fourier de la señal adquirida. Por ejemplo si se tiene una señal en 1D dependiente del tiempo  $f(t)$  entonces un muestreo es un conjunto finito de mediciones  $f_i = f(t_i)$  con  $i = 1, \dots, n$  en donde  $\Delta t = t_{i+1} - t_i$  es constante para todo  $i$ . Aquí la frecuencia de muestreo esta dada por

$$F_s = \frac{1}{\Delta t}.$$

El teorema para este tipo de señales afirma que, si las frecuencias de la transformada de Fourier son de banda limitada (esto es que las frecuencias están dentro de un intervalo acotado) y si la frecuencia de muestreo satisface  $F_s \geq 2k_{max}$ , entonces el muestreo  $f_i$  define de manera *única* la señal continua  $f(t)$  (con  $k_{max}$  la frecuencia del espectro de Fourier más grande). Este teorema se puede generalizar para señales de varias variables como imágenes y aplicarse también a el muestreo de proyecciones en el caso de tomografía.

La idea intuitiva del *sensado compresivo* puede entenderse de manera introductoria pensando en los algoritmos de compresión de imágenes en el sentido de muestrear la imagen de manera comprimida, es decir, comprimir la información directamente en el proceso de adquisición; o bien utilizando el teorema de Nyquist-Shannon, la teoría de sensado compresivo logra reconstruir de manera única la señal muestreada aunque la frecuencia de muestreo no cumpla  $F_s \geq 2k_{max}$ . La teoría del sensado compresivo se introdujo recientemente en los artículos de Donoho [Donoho, 2006], y en los trabajos de Romberg y Candès [Candes and Tao, 2005], [Candes et al., 2006]. Para una revisión breve e introductoria a la teoría pueden consultarse los artículos [Candès and Wakin, 2008] y [Romberg, 2008].

### 2.4.1. Incoherencia y sensado de señales escasas

El sensado compresivo se basa en dos principios: la *escasez* (en inglés **sparsity**) de la señal, y la *incoherencia* que tiene que ver con la modalidad de sensado.

Para revisar de manera introductoria la teoría del sensado compresivo de aquí en adelante se trabajará con señales discretas  $\vec{f} \in \mathbb{R}^N$ .

Sea una señal  $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$  y sea una base ortonormal  $\Psi$  con elementos  $\vec{\psi}_i$  con  $i = 1, 2, \dots, N$ . Entonces la representación de  $\vec{x}$  en  $\Psi$  está dada por

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^N x_i \vec{\psi}_i,$$

en donde  $x_i = \langle \vec{x}, \vec{\psi}_i \rangle$ .

Se dice que  $\vec{x}$  es una señal **escasa** si la mayoría de los coeficientes  $x_i$  en la base  $\Psi$  son cero; de manera más precisa, si a lo más  $S$  coeficientes  $x_i$  con  $S \ll N$  son distintos de cero, se dice entonces que  $\vec{x}$  es **S-pare** en la representación de la base  $\Psi$ .

Este es el principio que permite comprimir la información guardando sólo los coeficientes que son distintos de cero, sin embargo la compresión de datos requiere que se conozcan los  $N$  coeficientes y las posiciones de los  $S$  coeficientes distintos de cero. La idea del sensado compresivo es explotar esta propiedad de escasez en el proceso de adquisición de datos.

Para hablar de **incoherencia** se necesita expresar en términos matemáticos lo que es el sensado de la señal  $\vec{x}$ . El sensado de la señal (ó mediciones de la señal  $\vec{x}$ ) es el vector  $\vec{y}$  cuyas componentes están dadas por los productos interiores

$$y_k = \langle \vec{x}, \vec{\phi}_k \rangle, k = 1, \dots, m$$

en donde  $\vec{\phi}_k \in \mathbb{R}^N$  es un funcional que representa la modalidad de sensado. Estos valores se ordenan como entradas de un vector  $\vec{y}$  y éste representa las mediciones de la señal  $\vec{x}$ . Por ejemplo si son deltas de Dirac, el vector de mediciones  $\vec{y}$ , es un vector que representa los valores de  $\vec{x}$  en el dominio temporal o en el dominio espacial; si son funcionales indicadores de pixeles entonces  $\vec{y}$ , son los datos típicamente obtenidos por una cámara digital; si son sinusoides el vector de mediciones representa los coeficientes de Fourier (como es el caso de la resonancia magnética); en el caso tomográfico discutido anteriormente el vector de mediciones corresponde a  $\vec{b}$  (proyecciones) y  $\vec{x}$  es la imagen tomográfica (señal) que se desea reconstruir.

La idea importante para el sensado compresivo es cómo reconstruir la señal  $\vec{x}$  a partir de  $m$  mediciones cuando  $m \ll N$ , ¿qué tan pequeño puede ser  $m$  para obtener una buena reconstrucción de la señal?

Se pueden organizar los funcionales  $\vec{\phi}_k$  de tal forma que formen una base ortonormal  $\Phi$  y si cada vector se arregla como un reglón de una matriz  $\Phi \in \mathbb{M}_{m \times N}$ , el problema de sensado se puede escribir como

$$\vec{y} = \Phi \vec{x}.$$

Con esta terminología se puede introducir la **coherencia** entre la base de sensado  $\Phi$  y la base en donde la señal es escasa,  $\Psi$ , como el número dado por

$$\mu(\Phi, \Psi) = \sqrt{N} \max_{1 \leq k, j \leq m, N} |\langle \phi_k, \psi_j \rangle|. \quad (2.23)$$

Esto significa que la coherencia mide la más grande correlación entre cualesquiera dos elementos de las  $\Phi$  y  $\Psi$ , además  $\mu(\Phi, \Psi) \in [1, \sqrt{N}]$ . Entre más pequeño sea el número  $\mu(\Phi, \Psi)$ , las bases son más incoherentes; a mayores  $\mu(\Phi, \Psi)$  más coherencia entre las bases. El sensado compresivo está interesado en pares de bases con baja coherencia. Sensar una señal de manera incoherente es construir una base con funcionales  $\vec{\phi}_k$  que sea incoherente con la base en la señal tiene una representación escasa.

Una modalidad de sensado comúnmente utilizada por esta teoría, es emplear matrices de sensado aleatorio  $\Phi_{rand}$ . Se ha demostrado que las matrices aleatorias son incoherentes con cualquier base fija  $\Psi$ . La coherencia entre matrices aleatorias y bases fijas es aproximadamente  $\sqrt{2 \log N}$ . Es por esto que comúnmente el sensado compresivo se asocia con un sensado aleatorio pero esto no es una condición completamente necesaria para la teoría. Basta con encontrar bases en las que la matriz de sensado sea incoherente con alguna base en la que la señal es escasa.

Cuando se tienen  $m$  mediciones de tal forma que al menos  $m < N$  entonces se tiene un submuestreo y tal como se discute en [Candes et al., 2006], utilizando un planteamiento basado en algoritmos de optimización convexa, se puede reconstruir la señal escasa  $\vec{x}$  resolviendo el problema

$$\vec{x} = \underset{\vec{x}^*}{\operatorname{argmin}} \|\vec{x}^*\|_{\ell_1} \quad \text{sujeto a} \quad \vec{y} = \Phi \vec{x}^*, \quad (2.24)$$

en donde  $\|\cdot\|$  representa la norma  $\ell_1$  dada por  $\sum_{i=1}^N |x_i|$ . La elección de la norma  $\ell_1$  sobre otras normas tiene que ver con argumentos geométricos cuya discusión puede verse de manera introductoria en [Romberg, 2008].

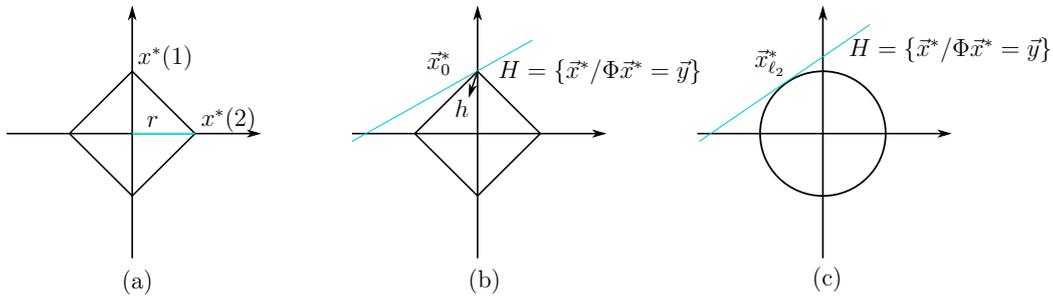


Figura 2.1: (a) Bola de radio  $r$  en la norma  $\ell_1$ :  $\vec{x} \in \mathbf{R}^2$  tal que  $|x(1)| + |x(2)| \leq r$  (b) Optimización de (2.24) (c) Mínimos cuadrados

Intuitivamente, puede entenderse por qué la norma  $\ell_1$  es mejor candidata para el problema de optimización observando la figura 2.1. La figura 2.1(a) ilustra la bola de radio  $r$  definido con la norma  $\ell_1$  en  $\mathbf{R}^2$ . Esta bola es anisotrópica, es decir no es invariante ante rotaciones. La figura (b) es el diagrama del programa que optimiza usando la norma  $\ell_1$ : el vector etiquetado  $\vec{x}_0^*$  es un vector *escaso* (solo una de sus dos componentes es distinta de cero) del cual se toma una sola medición. La línea  $H$  es el conjunto de todos los vectores  $\vec{x}^*$  que comparten la misma medición.

La tarea del problema planteado en la ecuación (2.24) es elegir el vector que satisface esas mediciones con la norma  $\ell_1$  más pequeña. Para visualizar como funciona eso, es útil imaginar una bola en la norma  $\ell_1$  de radio muy pequeño y gradualmente expandirla hasta que intersekte con  $H$ . El primer punto de intersección es por definición, el vector que resuelve (2.24). La combinación de la anisotropía de la bola en la norma  $\ell_1$  y la dimensión de la recta  $H$  resulta en la intersección de uno solo de sus puntos, precisamente en donde las señales escasas son reconstruidas.

Si en comparación se utiliza la norma  $\ell_2$  (lo que sería un problema de mínimos cuadrados), la bola en la norma  $\ell_2$  es isotrópica y usando la idea de expansión de una bola diminuta, se ve que el punto de intersección con el conjunto  $H$  no es necesariamente escaso (figura 2.1 (c)). En  $\mathbf{R}^N$  la diferencia se vuelve mucho mayor.

En el artículo [Candès and Romberg, 2007] se puede encontrar uno de los teoremas fuertes de mayor importancia para la teoría de sensado compresivo. El teorema afirma lo siguiente.

[**Teorema 2:** Sea una señal  $\vec{x} \in \mathbf{R}^N$   $S$ -sparse en alguna base  $\Psi$ . Si se tienen  $m$  muestreos con la base  $\Phi$  y además  $m$  satisface la desigualdad

$$m \geq C\mu^2(\Phi, \Psi) \cdot S \cdot \log(N), \quad (2.25)$$

entonces la solución dada por el problema de optimización convexa (2.24) es exacta con una probabilidad muy cercana a uno ( $C$  es una constante positiva). ]

Aquí, se ve el papel que juega la coherencia de las matrices de las bases en las que se representan las señales. Este resultado es muy importante ya que cuando se

tiene un sistema mal planteado, como se comentó en la sección anterior, es difícil encontrar una solución única al problema de reconstruir la señal a partir de las mediciones  $\vec{y}$ . También dicha desigualdad muestra por qué comúnmente el sensado compresivo busca utilizar bases de sensado que sean incoherentes con la base escasa para que la cantidad de muestreos  $m$  satisfaga la desigualdad sin tener que ser tan grande.

Con este resultado, se puede pensar que el algoritmo de minimización convexa que resuelve (2.24) juega el papel de descompresor de datos.

## 2.4.2. Fortaleza del sensado compresivo

En la práctica es común que no se tengan señales escasas como se definió anteriormente sino *aproximadamente escasas* y siempre con la presencia de ruido en el proceso de adquisición de datos. Es decir, en la práctica se presentan casos no ideales. La teoría del sensado compresivo busca ser capaz de reconstruir este tipo de señales no ideales. Diremos entonces que la teoría es **robusta** si logra reconstruir señales *aproximadamente escasas* y regularizar el ruido presente en los datos. Si no es posible reconstruir este tipo de señales ni regularizar el ruido, diremos que la teoría no es robusta.

Una manera de estudiar la robustez de la teoría es con un concepto que es la **propiedad de isometría restringida** (RIP); véase [Candes and Tao, 2005].

**Definición:** Para cada entero  $S=1,2,\dots$  se define la **constante de isometría**  $\delta_s$  de una matriz  $A$  como el número más pequeño tal que

$$(1 - \delta_s)\|\vec{x}\|_{\ell_2}^2 \leq \|A\vec{x}\|_{\ell_2}^2 \leq (1 + \delta_s)\|\vec{x}\|_{\ell_2}^2 \quad (2.26)$$

se satisface para todo vector  $S$ -sparse  $\vec{x}$ .

Esta propiedad es importante ya que si se satisface, entonces  $A$  aproximadamente preserva longitudes de vectores  $S$ -sparse. Esto ayuda a demostrar que dos distintos vectores escasos  $\vec{x}_1 \neq \vec{x}_2$  no pueden dar las mismas mediciones  $\vec{y}$ . Supongamos que en efecto  $\vec{x}_1 \neq \vec{x}_2$  pero  $A\vec{x}_1 = A\vec{x}_2 = \vec{y}$  y que  $A$  satisface el criterio RIP con alguna constante suficientemente pequeña para que  $1 - \delta_s > 0$ . Entonces se tiene que

$$0 < (1 - \delta_s)\|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|_{\ell_2}^2 \leq \|A(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)\|_{\ell_2}^2 = 0 \leq (1 + \delta_s)\|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|_{\ell_2}^2,$$

lo cual es una contradicción, por lo tanto es falso suponer que dos vectores distintos  $S$ -sparse pueden dar las mismas mediciones  $\vec{y}$ . Así, la reconstrucción que da la optimización dada por (2.24) es **única**.

### Señales aproximadamente escasas.

Para atacar el problema de un vector *aproximadamente escaso* el siguiente teorema ayuda a la robustez del Sensado Compresivo.

[**Teorema 3:** Sea la constante de isometría de la matriz  $A$  para vectores  $2S$ -sparse  $\delta_{2s}$  tal que satisfaga  $\delta_{2s} < \sqrt{2} - 1$ ; sea también  $\vec{x}^*$  la solución de (2.24).

Entonces  $\vec{x}^*$  satisface

$$\|\vec{x}^* - \vec{x}\|_{\ell_2} \leq C_0 \|\vec{x} - \vec{x}_s\|_{\ell_1} / \sqrt{S} \quad \text{y} \quad \|\vec{x}^* - \vec{x}\|_{\ell_1} \leq C_0 \|\vec{x} - \vec{x}_s\|_{\ell_1}, \quad (2.27)$$

en donde  $C_0$  es una constante, y  $\vec{x}_s$  es el vector  $\vec{x}$  con todas excepto las  $S$  componentes más grandes forzadas a ser cero (esto es,  $\vec{x}_s$  es un vector aproximadamente escaso), veáse [Candès et al., 2006]. ]

Este teorema ayuda a la robustez de la teoría en el sentido que dado un vector aproximadamente escaso, es posible acotar la diferencia entre la señal verdadera  $\vec{x}$  y la señal reconstruida  $\vec{x}^*$  y además, si la señal original  $\vec{x} = \vec{x}_s$  (es decir la señal es exactamente S-sparse), entonces la reconstrucción dada por (2.24) es **única** y **exacta**. Además a diferencia del teorema 2, este resultado es determinista y no habla de alguna probabilidad, lo cual lo hace más fuerte.

## Señales con ruido

Para el caso de las señales con ruido se hace una pequeña modificación al problema de optimización de la siguiente forma:

$$\vec{x} = \underset{\vec{x}^*}{\operatorname{argmin}} \|\vec{x}^*\|_{\ell_1} \quad \text{sujeto a} \quad \|A\vec{x}^* - \vec{y}\|_{\ell_2} \leq \epsilon, \quad (2.28)$$

en donde  $\epsilon$  es una cota para la cantidad de ruido en los datos. El siguiente teorema da una cota para la precisión de la reconstrucción dada por la solución a (2.28)

[**Teorema 4**: Sea la constante de isometría de la matriz  $A$  para vectores 2S-sparse  $\delta_{2s}$  tal que satisfaga  $\delta_{2s} < \sqrt{2} - 1$ ; sea también  $\vec{x}^*$  la solución de (2.28). Entonces  $\vec{x}^*$  satisface

$$\|\vec{x}^* - \vec{x}\|_{\ell_2} \leq C_0 \|\vec{x} - \vec{x}_s\|_{\ell_1} / \sqrt{S} + C_1 \epsilon$$

en donde  $C_0$  y  $C_1$  son algunas constantes, y nuevamente  $\vec{x}_s$  es el vector  $\vec{x}$  con todas excepto las  $S$  componentes más grandes forzadas a ser cero. ]

Este teorema muestra que el error de la reconstrucción está acotado por dos términos, el primer término es el error que se tendría si no se tuviera una señal ruidosa y el segundo es un término proporcional a la cota del ruido. Además, si fuera una señal exactamente escasa  $\vec{x} = \vec{x}_s$ , entonces se tendría que el error de la solución estaría únicamente dado por  $\vec{x}^* - \vec{x}_s \leq C_1 \epsilon$  [Romberg, 2008].

Por tanto, la teoría de sensado compresivo es robusta frente a estas dos situaciones no ideales y por ello se ha intentado aplicar a distintas áreas siendo una de ellas la reconstrucción de imágenes tomográficas.

## 2.5. Regularización por Variación Total.

Como se mencionó en la sección métodos de regularización, existen algunas situaciones en las cuales se tienen proyecciones medidas a pocos ángulos y proyecciones

en intervalos restringidos, ambos casos con la presencia de ruido debido al proceso de adquisición de los datos. Recordando el problema tomográfico dado por (1.13) y el parámetro  $\alpha_A$  (2.22), en estos casos se tiene que  $\mathcal{M} < N^2$  y es necesario un método de regularización para reconstruir con mejor calidad la imagen. Al tener  $\mathcal{M}$  mediciones se puede pensar en relacionar esta situación con las situaciones descritas por la teoría de sensado compresivo para señales en  $\mathbb{R}^{N^2}$ . Debido a que las imágenes son más bien matrices de  $N \times N$  entonces se necesita plantear un poco diferente la teoría del sensado compresivo. Como se discute en [Candes et al., 2006] la manera de aplicar la teoría a imágenes es con la seminorma conocida como **Variación Total** (TV). De manera intuitiva la variación total está relacionada con la norma  $\ell_1$  del gradiente de la imagen, el cual es importante y es el vínculo más fuerte con el sensado compresivo pues como se mostrará gráficamente más adelante, los gradientes de la mayoría de las imágenes tomográficas son escasos.

Para señales en una dimensión  $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$  la **variación total** se define como

$$TV(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{N-1} |x_{i+1} - x_i| \quad (2.29)$$

Si se define el gradiente de la señal  $\vec{x}$  como

$$\nabla \vec{x} = (\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_{N-1})$$

en donde  $\partial_k = x_{k+1} - x_k$ , entonces la variación total se puede escribir como

$$TV(\vec{x}) = \|\nabla \vec{x}\|_{\ell_1} \quad (2.30)$$

Dos definiciones para la variación total de una señal en dos dimensiones como es el caso de una imagen, fueron utilizadas en esta tesis (veánse [Goldstein and Osher, 2009], [Yan and Lu, 2015], [Chambolle, 2004], [Chambolle, 2005]). La diferencia entre ambas definiciones tiene que ver con la invariancia ante rotaciones de la imagen.

Para definir la **variación total isotrópica** de una imagen  $u \in \mathbb{M}_{N \times N}$ , sea

$$\nabla_{i,j} u = (\partial_x u_{i,j}, \partial_y u_{i,j}),$$

el gradiente (en primera aproximación) de la imagen en el pixel  $i, j$ , en donde

$$\partial_x u_{i,j} = u_{i+1,j} - u_{i,j} \quad \text{y} \quad \partial_y u_{i,j} = u_{i,j+1} - u_{i,j},$$

luego, la variación total isotrópica es

$$TV^{(I)}(x) = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \sqrt{(\partial_x u_{i,j})^2 + (\partial_y u_{i,j})^2}. \quad (2.31)$$

Utilizando la misma notación, la **variación total anisotrópica** está dada por

$$TV^{(A)}(x) = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} |\partial_x u_{i,j}| + |\partial_y u_{i,j}| \quad (2.32)$$

Utilizando la variación total se han propuesto técnicas de regularización como problemas de optimización convexa que son parte de la teoría de sensado compresivo.

A este tipo de regularización de le conoce como **regularización por variación total** y cae dentro de las técnicas de **regularización por escasez** como se discute en [Jørgensen and Sidky, 2015].

El problema de regularización por variación total es el más importante para el problema tomográfico en el que se centra esta tesis pues la mayoría de estas imágenes tienen gradientes escasos (por ejemplo el maniquí Shepp-Logan, figura 2.2). Debido que la variación total se relaciona con el gradiente de la imagen, entonces se puede ver que la variación total hereda las propiedades de escasez del gradiente y por lo tanto se puede intentar aplicar la teoría de sensado compresivo utilizando la regularización por variación total. Distinguiendo de casos ideales y no ideales en cuanto a presencia de ruido se refiere, los dos problemas principales que se resolvieron en esta tesis son ([Candes et al., 2006]):

$$x = \underset{x^*}{\operatorname{argmin}} TV^\alpha(x^*) \quad \text{sujeto a} \quad \|A\vec{x}^* - \vec{y}\|_{\ell_2} \leq \epsilon, \quad (2.33)$$

en donde  $\alpha = I, A$ ;  $\vec{x}^* \in \mathbb{R}^{N^2}$  es el vector que resulta de ordenar la imagen  $x \in \mathbb{M}_{N \times N}$  de acuerdo a la geometría dada por el problema tomográfico y a la matriz de proyección  $A$  y  $\epsilon$  es una cota dada por la cantidad y tipo de ruido presente en las proyecciones. Para el caso ideal en ausencia de ruido el problema se simplifica a

$$x = \underset{x^*}{\operatorname{argmin}} TV^\alpha(x^*) \quad \text{sujeto a} \quad A\vec{x}^* = \vec{y}, \quad (2.34)$$

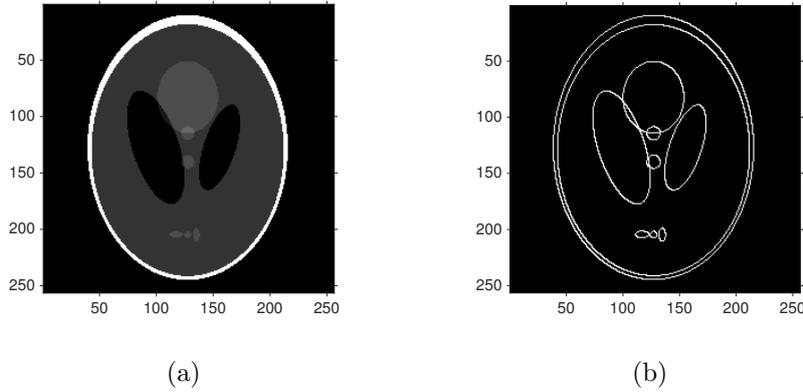


Figura 2.2: (a) Maniquí Shepp-Logan. (b) Gradiente del maniquí Shepp-Logan.

Como puede verse a simple vista en el gradiente del maniquí Shepp-Logan, en donde todos los pixeles en color negro corresponden a ceros y los que son distintos de cero se muestran en color blanco, la gran mayoría de los pixeles son cero por lo que se puede pensar en que el gradiente tiene una representación escasa y por tanto se puede aplicar las ideas del sensado compresivo para la reconstrucción de las imágenes tomográficas. El maniquí tiene  $256 \times 256$  pixeles (65,536) de los cuales 27,409 son distintos de cero mientras que el gradiente solo tiene 2,184 elementos distintos de cero.

Resulta ser que resolver el problema (2.33) tal y como predice la teoría de sensado compresivo logra reconstruir buenas imágenes tomográficas en presencia de

ruido y para pocas proyecciones. Existen estrategias para resolver dicho problema de optimización convexa, siendo los métodos de gradientes conjugados y gradientes conjugados preconditionados los más utilizados para ello. En esta tesis se implementaron dos algoritmos principales para la solución de este problema. El desarrollo de estos algoritmos, así como su aplicación a datos sintéticos se detalla en el siguiente capítulo y su aplicación a datos experimentales se muestra en el capítulo 4. Una estrategia similar fue utilizada en [Sidky et al., 2006].

# Capítulo 3

## Desarrollo e implementación de algoritmos

### 3.1. Introducción

Como se vio en el capítulo anterior, uno de los problemas que intenta atacar esta tesis es el de reconstruir imágenes tomográficas cuando el sistema (1.13) está mal planteado. También se discutió que existen varias maneras de mal plantear el sistema y en particular, esta tesis se enfocó específicamente en el caso de **pocas proyecciones** con presencia de **ruido**, dejando como perspectiva a futuro la aplicación de una estrategia similar para el problema de proyecciones incompletas en intervalos angulares restringidos.

Recordando el sistema de ecuaciones que representa el problema inverso tomográfico  $A\vec{x} = \vec{b}$ , se tiene que  $A \in \mathbb{M}_{\mathcal{M} \times N^2}$  con  $\mathcal{M} = N_{\text{rays}} \times N_{\theta}$ , siendo  $N_{\text{rays}}$  la cantidad de rayos del haz definida por la cantidad de detectores y  $N_{\theta}$  la cantidad de ángulos en las que se miden las proyecciones como se explicó en el capítulo introductorio.

Con esto se puede ver que se tienen dos maneras de reducir la cantidad de proyecciones: reduciendo el número de ángulos de proyección o reduciendo la cantidad de rayos que se utilizan para radiar el objeto. Para reducir la cantidad de rayos del haz, se debe reducir la cantidad de detectores utilizados en la instrumentación como se observa en la figura 1.5, o por ejemplo en el caso de la tomografía óptica de luminiscencia estimulada por rayos X (en el que se tiene un haz colimado que se va “barriendo” o desplazando en distintas posiciones para cada ángulo de proyección utilizado), reducir la cantidad de posiciones de barrido.

Utilizando los conceptos de sensado compresivo y con los algoritmos implementados que se describen en las siguientes secciones, la **imagen tomográfica reconstruida** que es solución a (1.13)  $x_r$ , está dada por

$$\boxed{x_r = \underset{x}{\operatorname{argmin}} TV^{\alpha}(x) \quad \text{sujeto a} \quad \|A\vec{x} - \vec{b}\|_{\ell_2} \leq \epsilon \quad \text{y} \quad x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, N^2} \quad (3.1)$$

en donde  $\alpha = I, A$  (indicando si se utiliza la definición isotrópica o anisotrópica de la variación total, respectivamente),  $\vec{x} \in \mathbb{R}^{N^2}$  es el vector que resulta de ordenar la

imagen  $x \in \mathbb{M}_{N \times N}$ ,  $\epsilon$  es una cota dada por el nivel de ruido en los datos y la última restricción es una condición de positividad que se introduce para asegurar que todos los *coeficientes de atenuación* representados en el vector  $\vec{x}$  sean mayores o iguales a cero, ya que un coeficiente negativo, indicaría que en lugar de atenuarse, el rayo X que atraviesa esa zona estaría aumentando de intensidad, cosa que físicamente no tiene sentido.

En las siguientes secciones se describen los algoritmos implementados y su aplicación a datos sintéticos dados por maniqués. Los maniqués utilizados fueron el ya mostrado Shepp-Logan y el Forbild Head phantom que trata de representar de manera simple una sección transversal de un cerebro (véase [Yu et al., 2012]). El maniqué Shepp-Logan se ha mostrado anteriormente y en la figura 3.1 se muestra el Forbild Head phantom junto con su gradiente para mostrar su escasez. Estos maniqués

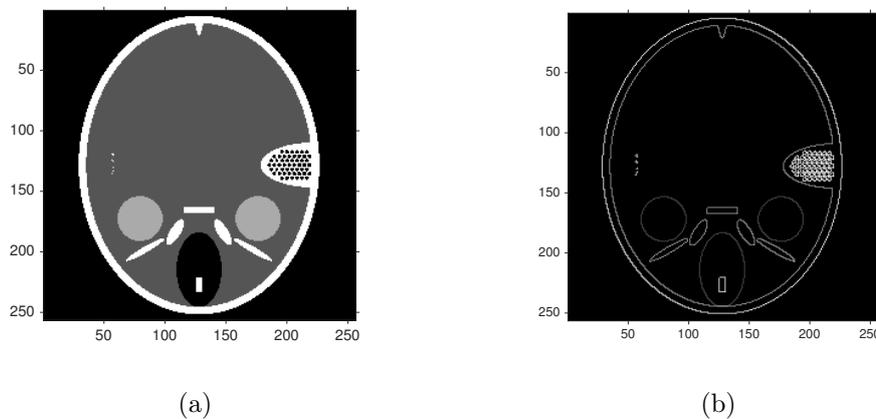


Figura 3.1: (a) Maniqué Forbild Head . (b) Gradiende del maniqué Forbild.

se tomaron como imágenes de referencia para calcular el error cuadrático medio introducido previamente en la ecuación 2.11:

$$MSE = \frac{1}{N^2} \|\vec{x}_{ref} - \vec{x}\|_2^2.$$

## 3.2. Ruido en maniqués y perfiles de intensidad.

A los maniqués se les añadió ruido sintético blanco (es decir ruido con distribución Gaussiana) de manera aditiva. Se tomó el valor máximo de pixel de las imágenes (valor aproximado a 100 en la escala de grises mostrada en las figuras) y el 5% de este valor se definió como la semianchura de la distribución del ruido (tal porcentaje de ruido se eligió a modo de ensayo y error de tal forma que cualitativamente fuera un nivel de ruido apreciable pero no demasiado para que se arruinara la imagen por completo); se generó una matriz de ruido de  $256 \times 256$  con la distribución descrita y se sumó a la matriz que representa al maniqué.

Las figuras 3.2 y 3.3 muestran los perfiles de intensidad (gráficas de los valores de pixel a lo largo de una línea) de ambos maniqués a lo largo del renglón 128 que aparece señalado con la línea amarilla en las figuras. Se muestra una superposición de

los perfiles con y sin ruido. Como puede observarse, el ruido se distingue claramente en los perfiles de intensidad y esta técnica se utilizó como guía junto con el MSE para evaluar la calidad de las reconstrucciones obtenidas con los algoritmos. Para las pruebas realizadas se analizaron los perfiles de intensidad a lo largo de varias líneas pero para mostrar los resultados en las siguientes secciones siempre se hace referencia al renglón 128. Se denotará por  $x_{s_n}$  al maniquí Shepp-Logan ruidoso y a  $\vec{x}_{s_n}$  a su versión vectorizada  $\in \mathbb{R}^{N^2}$  para operar en la forma  $A\vec{x}$ ; de igual manera  $x_{f_n}$  y a  $\vec{x}_{f_n}$  para el maniquí Forbild (los sub-subíndices  $n$  indican que se hace referencia a los maniqués ruidosos. Para denotar a los maniqués originales sin ruido solo se escribe  $x_s$  y  $x_f$ ).

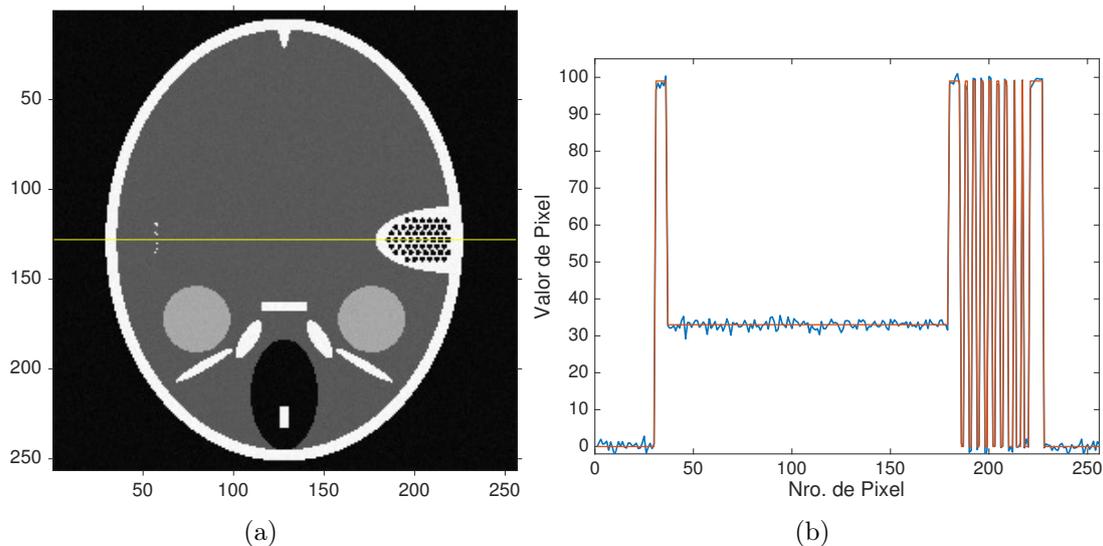


Figura 3.2: (a) Maniquí Forbild con ruido Gaussiano añadido. La línea amarilla representa el renglón 128 en el cual se midieron los perfiles de intensidad (b) Perfiles de intensidad. La línea naranja corresponde al perfil de la línea del phantom sin ruido. La línea azul representa el perfil de la misma línea después de añadir el ruido.

### 3.3. Matriz de proyección y sinogramas generados

Para generar la matriz del sistema  $A$ , se utilizó la función `parallel_tomo(N, theta, p, d)` del paquete AIR Tools para MATLAB ([Hansen and Saxild-Hansen, 2012]). Tal función genera la matriz de proyección  $A$  con una geometría de haz de rayos paralelos siendo los parámetros  $N$  la dimensión de la imagen de  $N \times N$  pixeles a reconstruir,  $\theta$  un arreglo donde se especifican los ángulos de proyección,  $p$  la cantidad de rayos del haz simulado (o bien el número de detectores) y  $d$  la distancia que hay entre el primer y último rayo en unidades de pixel. A lo largo de todas las pruebas realizadas con estos maniqués se fijaron los parámetros  $N=256$ ,  $p=256$  (es decir  $N_{rays} = 256$ ), y  $d=256$ .

Para terminar de establecer el problema inverso de manera “artificial” se necesita el sinograma o las proyecciones. La idea de trabajar con datos sintéticos es generar la matriz de proyección  $A$ , el sinograma  $b_n$  correspondiente a los datos ruidosos  $x_{s_n}$

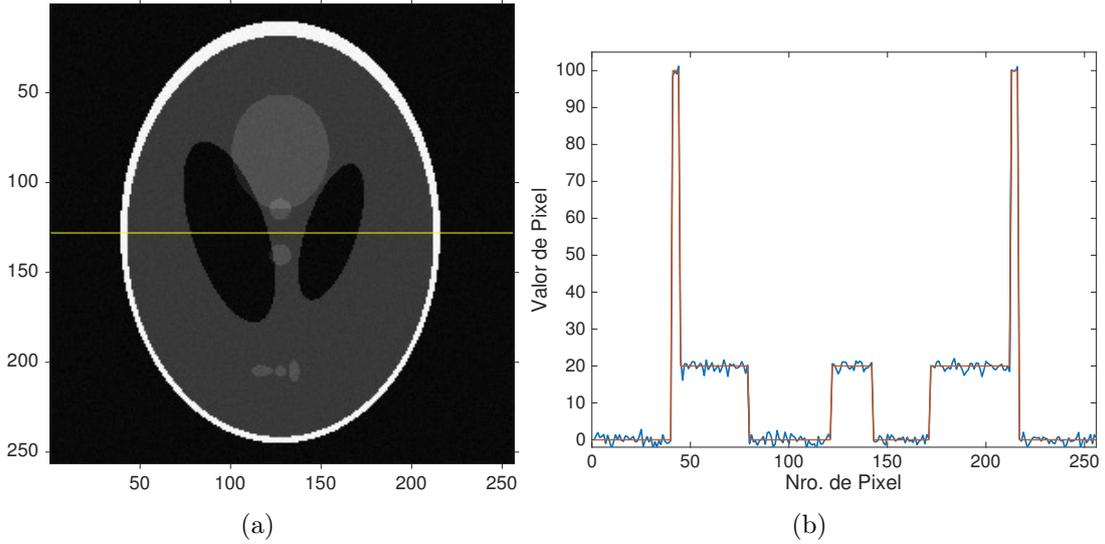


Figura 3.3: (a) Maniquí Shepp-Logan con ruido Gaussiano añadido. La línea amarilla representa el renglón 128 en el cual se midieron los perfiles de intensidad (b) Perfiles de intensidad. Nuevamente la línea naranja corresponde al perfil sin ruido. La línea azul es el perfil ruidoso.

o a  $x_{f_n}$  y entonces plantear el problema inverso

$$A\vec{x} = b_n,$$

en donde  $\vec{x}$  es la imagen vectorizada original sin ruido  $x_s$  o  $x_f$  que se desea reconstruir a partir únicamente de  $b_n$  y de  $A$ , simulando la situación en la que en las tomografías reales solo se mide el sinograma, y con la geometría de la instrumentación usada se construye la matriz de proyección. Para obtener los sinogramas correspondientes a los datos ruidosos (figura 3.4) primero se genera la matriz  $A$  utilizando algún arreglo  $\theta$  de  $N_\theta$  ángulos de proyección equiespaciados con la función `parallel_tomo` y los parámetros dados anteriormente, y después los sinogramas se obtienen haciendo

$$b_{n_f} = A\vec{x}_{f_n} \quad \text{y} \quad b_{n_s} = A\vec{x}_{s_n} \quad (3.2)$$

### Respecto a la reproducibilidad de los resultados.

Una observación importante para los resultados mostrados en esta tesis es respecto a la reproducibilidad de los valores mostrados de MSE, parámetros de regularización, gráficas y perfiles de intensidad. En el caso de los maniqués sintéticos utilizados en este capítulo, a pesar de que se añade ruido con una distribución estadística Gaussiana, no es necesario hacer estadística de las mediciones extraídas de las reconstrucciones obtenidas. Esto es posible gracias a que los algoritmos siempre dan los mismos resultados dado un sinograma inicial fijo. Es decir que, una vez generado un sinograma, si se asegura que siempre se trabaja con el mismo sinograma y bajo las mismas condiciones de hardware y precisión numérica de las variables, entonces las reconstrucciones, y por ende las mediciones hechas sobre éstas, son mediciones repetibles. Por lo tanto, se omite el uso de incertidumbres y barras de error en donde correspondiere.

NOTA: Todos los cálculos en esta tesis se hicieron en una MacBook Pro 2015 con un procesador Intel Core i5 a 2.7GHz y 8 GB en RAM. La versión de MATLAB

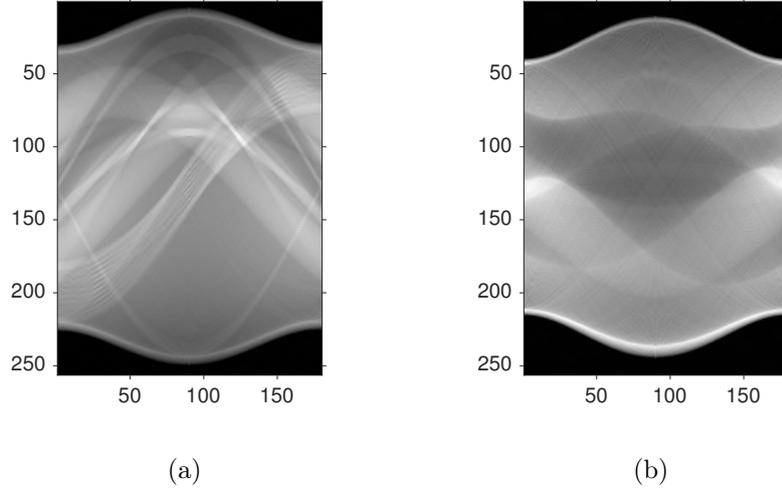


Figura 3.4: (a) Sinograma del maniquí ruidoso Forbild utilizando  $N_\theta = 180$  proyecciones (b) Sinograma del maniquí ruidoso Shepp-Logan con  $N_\theta = 180$  proyecciones.

utilizada fue la R2015b, y el tipo de variables utilizadas fueron números de punto flotante de doble precisión.

### 3.4. Reconstrucciones con SIRT y MLEM

Para empezar a mostrar los problemas que surgen con los algoritmos algebraicos SIRT (ec. 2.4) y MLEM (ec. 2.5) cuando se tienen pocas proyecciones y ruido al resolver (3.2), se desarrollaron funciones en MATLAB con los algoritmos dados por el algoritmo 1 y el algoritmo 2, respectivamente. Los algoritmos utilizan la matriz  $A$  dada por `paralleltomo` con los parámetros descritos anteriormente.

---

#### Algorithm 1 SIRT

---

- 1:  $R = 0 \in \mathbb{M}_{\mathcal{M} \times \mathcal{M}}$  ▷ Generación de las matrices  $C$  y  $R$
  - 2:  $C = 0 \in \mathbb{M}_{N^2 \times N^2}$
  - 3:  $r_{i,i} = \frac{1}{\sum_j a_{i,j}}$
  - 4:  $c_{j,j} = \frac{1}{\sum_i a_{i,j}}$
  - 5:  $\lambda \leftarrow$  Parámetro de relajación asignado
  - 6:  $\vec{x}_1 \leftarrow$  Aproximación inicial
  - 7: **for**  $k = 1$  to  $IterSIRT$  **do** ▷ IterSIRT es el número de iteraciones
  - 8:  $\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k + \lambda C A^T R (\vec{b} - A \vec{x}_k)$  ▷ Ec. recursiva SIRT
  - 9:  $\vec{x}_k(\vec{x}_k \leq 0) = 0$  ▷ Positividad usando indexado lógico
  - 10: **end**
  - 11: Return  $\vec{x}_{iterSIRT}$
- 

Para ver cómo la cantidad de proyecciones afecta las reconstrucciones utilizando las técnicas algebraicas SIRT y MLEM, a continuación se muestran algunos resultados importantes de las pruebas realizadas con  $N_\theta = 180, 90, 60, 45, 36, 30, 26, 23, 20, 18, 9$

---

**Algorithm 2** MLEM
 

---

- 1:  $\vec{x}^{(1)} \leftarrow$  Aproximación inicial
  - 2: **for**  $k = 1$  to  $Iter_{MLEM}^{(k)}$  **do** ▷  $Iter_{MLEM}$  es el número de iteraciones
  - 3:  $x_j^{(k+1)} = \frac{x_j^{(k)}}{\sum_{i=1}^M A_{i,j}} \sum_{i=1}^M \frac{b_i}{\sum_{j'=1}^{N^2} A_{i,j'} x_{j'}^{(k)}} A_{i,j}$  ▷ Ec. recursiva MLEM
  - 4:  $\vec{x}^{(k)} (\vec{x}^{(k)} \leq 0) = 0$  ▷ Positividad usando indexado lógico
  - 5: **end**
  - 6: Return  $\vec{x}_{iter_{MLEM}}$
- 

ángulos de proyección. Recordando al parámetro

$$\alpha_A = \frac{\mathcal{M}}{N^2} = \frac{N_\theta \times N_{rays}}{N^2} = \frac{N_\theta}{N},$$

(pues en este caso  $N_{rays} = N = 256$ ), se pueden calcular los valores de este parámetro para los  $N_\theta$  dados y utilizarse como referencia para ver el comportamiento de los algoritmos y las reconstrucciones.

La figura 3.5 muestra las reconstrucciones para 8 de los  $N_\theta$  dados anteriormente con el algoritmo SIRT utilizando 50 iteraciones y  $\lambda = 1$ , y en la figura 3.6 las reconstrucciones con MLEM usando 50 iteraciones. Como se aprecia en la figura, a medida que se disminuye el número de proyecciones la calidad de las imágenes reconstruidas cambia drásticamente apareciendo rápidamente figuras en forma de líneas y patrones extraños a los cuales se les llaman **artefactos**. Las reconstrucciones para 180 y 90 proyecciones conservan casi todos los detalles de los maniqués originales, pero sí hay presencia de algunos artefactos. A partir de 45 proyecciones se nota claramente la presencia de los artefactos y para 9 proyecciones la reconstrucción es prácticamente un conjunto de manchas que se alejan demasiado del fantasma original.

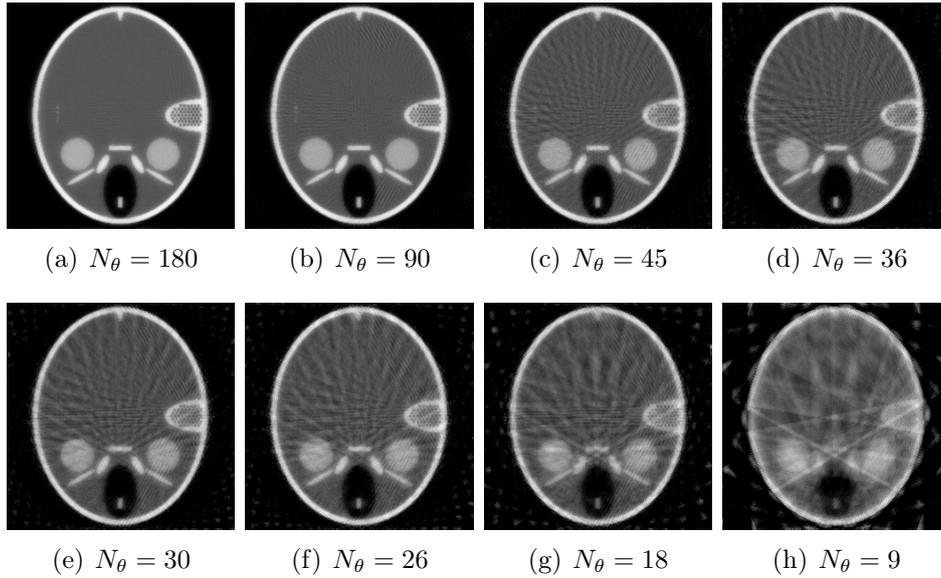


Figura 3.5: Reconstrucciones con el algoritmo SIRT utilizando 50 iteraciones y  $\lambda = 1$

Para ambos maniqués, se comparó el desempeño frente a la reconstrucción con FBP con 180 y 90 proyecciones utilizando los perfiles de intensidad sobre la línea

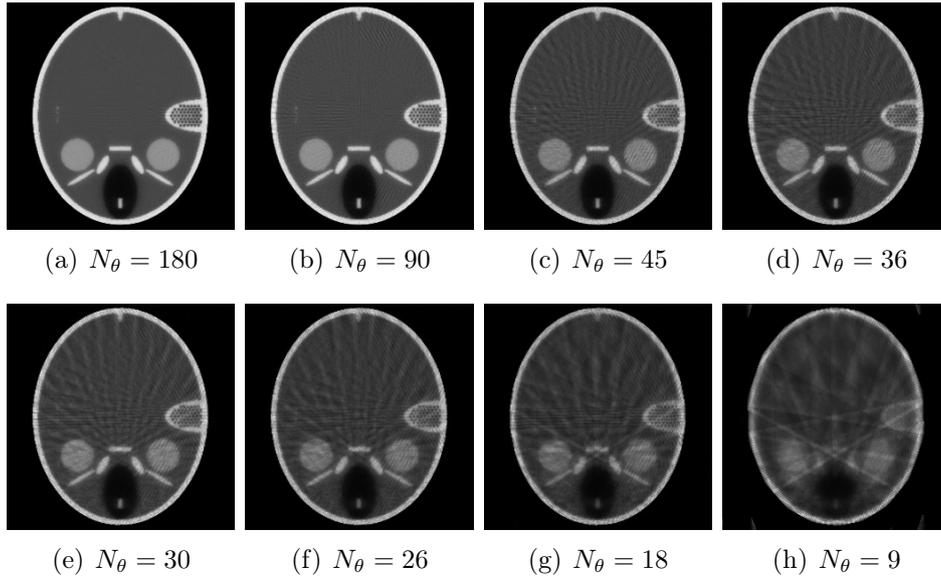


Figura 3.6: Reconstrucciones con el algoritmo MLEM utilizando 50 iteraciones.

amarilla de la figura 3.2 y el MSE. Para esta comparación entre ambos algoritmos, se utilizaron 150 iteraciones y  $\lambda = 1$  para el parámetro de relajación de SIRT. De acuerdo a lo observado en los perfiles y a los MSE calculados, la mejor reconstrucción está dada por MLEM para 180 proyecciones y la calidad entre FBP y SIRT es casi la misma como se muestra en la figura 3.7. Para el caso de 90 proyecciones se obtuvo que la FBP presenta demasiados artefactos, el perfil de intensidad se ve completamente diferente al original y se obtuvo un MSE de 56.442. Los perfiles de SIRT y MLEM (MSE de 47.440 y 32.171, respectivamente) se mantienen cercanos pero aprecia cómo el ruido se propagó, pues las variaciones en el perfil de intensidad mostrado se hacen más grandes (figura 3.8). En el caso del maniquí Shepp-Logan se observó un comportamiento cualitativamente similar.

### 3.4.1. Breve análisis de SIRT y MLEM

Debido a que cualitativamente se observó que, a partir de 45 proyecciones aparecen demasiados artefactos y la calidad entre reconstrucciones dadas por FBP y SIRT o MLEM no es tan diferente para 180 proyecciones, se tomaron 90 proyecciones para hacer un breve análisis de este par de algoritmos en los párrafos que siguen con el maniquí Forbild (el maniquí Shepp-Logan se analizó de manera similar).

Hay dos parámetros importantes para el algoritmo SIRT: el número de iteraciones  $Iter_{SIRT}$  y el **parámetro de relajación**  $\lambda$ . Para encontrar cuántas iteraciones son necesarias para obtener buenas reconstrucciones en esta tesis se decidió graficar el MSE vs. el número de iteraciones. Las gráficas de la figura 3.9 son las construidas utilizando tres parámetros de relajación distintos  $\lambda = 0.5, 1, 1.5$ . Los resultados muestran que las reconstrucciones obtenidas para parámetros de relajación mayores convergen más rápido y además se obtienen MSE mínimos menores.

Para mostrar que se obtienen MSE menores con parámetros de relajación cerca-

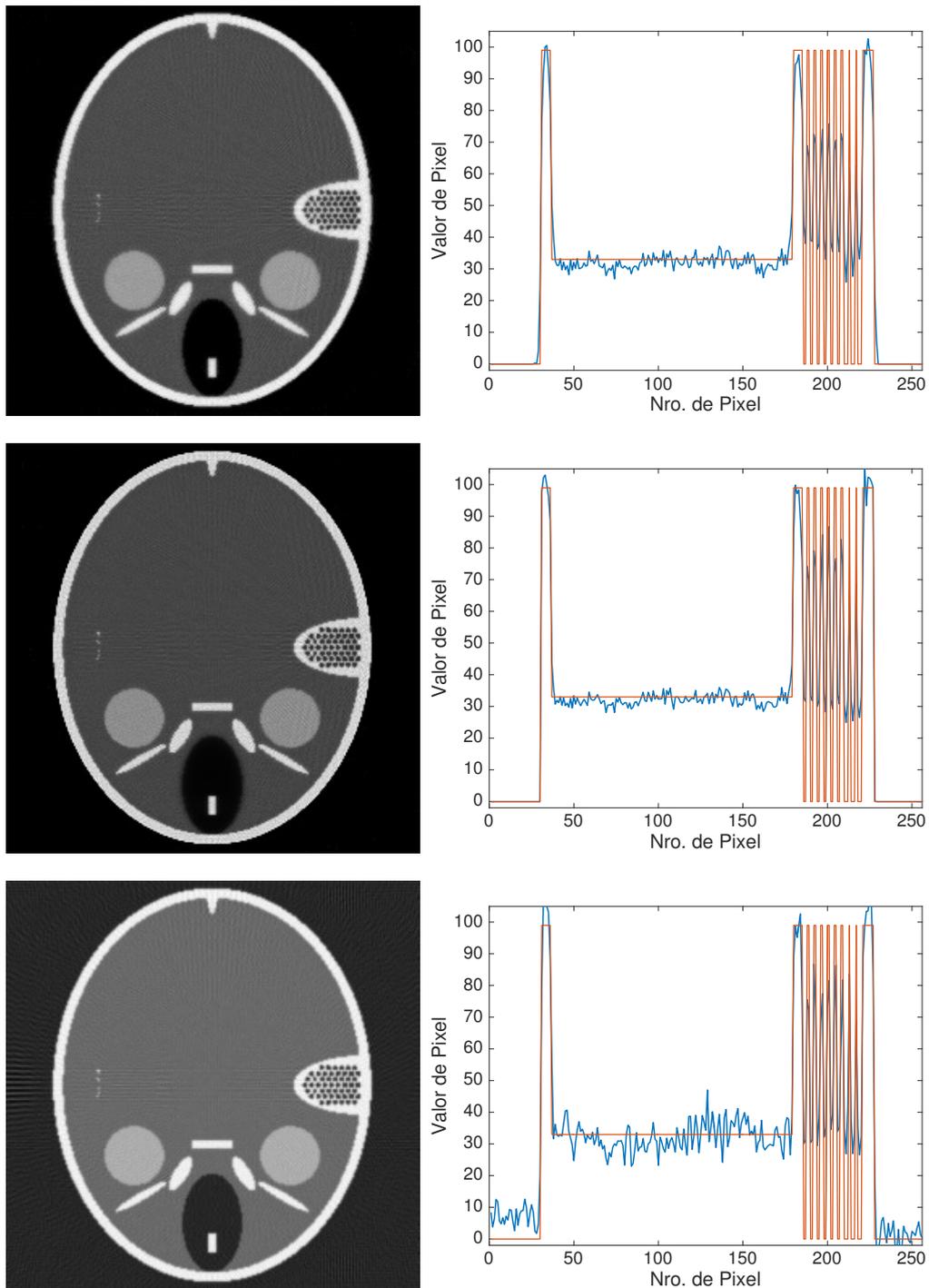


Figura 3.7: Comparación entre SIRT (primer renglón, 150 iteraciones,  $\lambda = 1$ ), MLEM (segundo renglón, 150 iteraciones) y FBP (tercer renglón) para 180 proyecciones. Se obtuvieron también los valores de MSE para estas tres reconstrucciones de 36.820 para SIRT, 21.421 para MLEM y 33.290 para FBP.

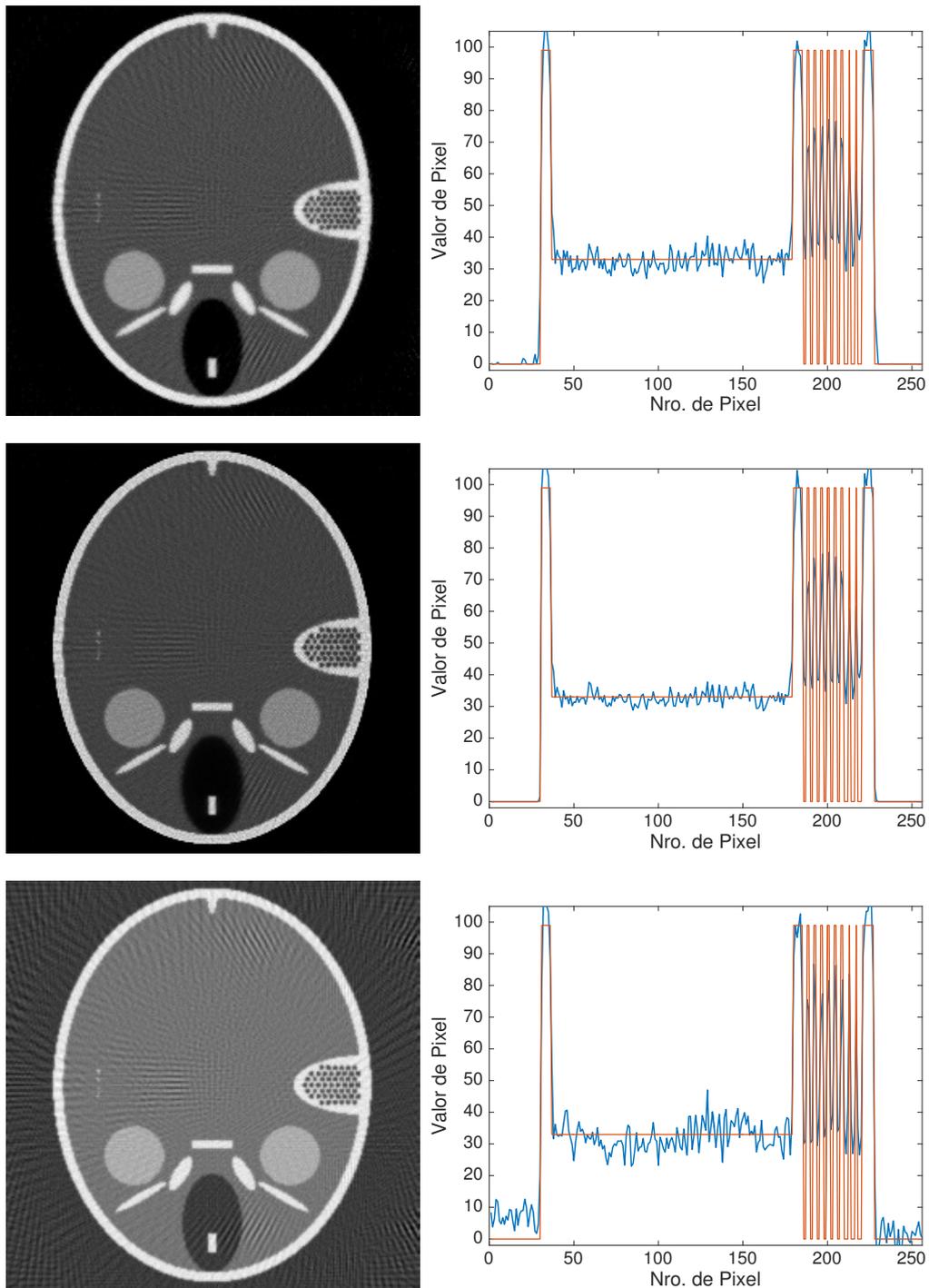


Figura 3.8: Comparación entre SIRT (primer renglón, 150 iteraciones,  $\lambda = 1$ ), MLEM (segundo renglón, 150 iteraciones) y FBP (tercer renglón) para 90 proyecciones. Aquí los valores de MSE para estas reconstrucciones fueron 47.440 para SIRT, 32.171 para MLEM y 56.442 para FBP.

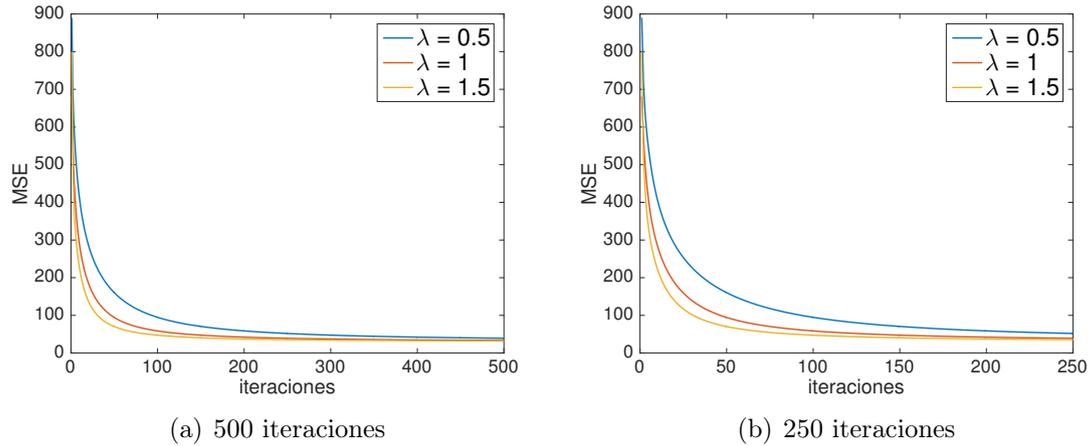


Figura 3.9: SIRT. Comportamiento del MSE en función del número de iteraciones para el maniquí Forbild y 90 proyecciones. Con 500 iteraciones los MSE mínimos alcanzados son 39.240, 33.660, 31.880 para  $\lambda = 0.5, 1, 1.5$ , respectivamente. Con 250 iteraciones se alcanzaron los MSE mínimos de 51.891, 39.210, 35.421 para  $\lambda = 0.5, 1, 1.5$ , respectivamente..

nos a 2, se construyó la gráfica de la figura 3.10, la cual presenta los valores MSE mínimos obtenidos al reconstruir la imagen con 250 iteraciones utilizando distintos parámetros de relajación en el intervalo de convergencia de SIRT  $(0, 2]$ .

Para MLEM el análisis se vuelve más simple pues el único parámetro es la cantidad de iteraciones que se utilizan. La figura 3.11 muestra la imagen reconstruida para 1500 iteraciones, la gráfica del MSE vs. número de iteraciones y el perfil de intensidades de la línea 128 mostrada anteriormente. Se utilizó esta cantidad de iteraciones debido a que en las pruebas realizadas para una mayor cantidad de iteraciones, el valor de MSE se acercaba a una cota inferior, se estabilizaba cerca de tal cota y por tanto no se obtenían valores menores para el MSE.

Finalmente, una característica importante para las siguientes secciones debido al problema 3.1, es que ambos algoritmos minimizan el error o también llamado *fidelidad* dado por

$$\|A\vec{x} - \vec{b}\| \tag{3.3}$$

como se aprecia en la figura 3.12.

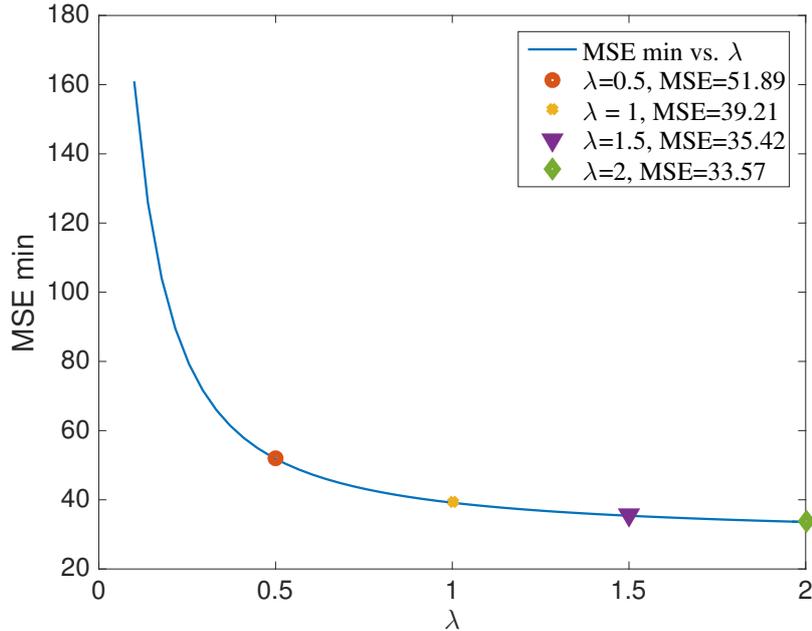


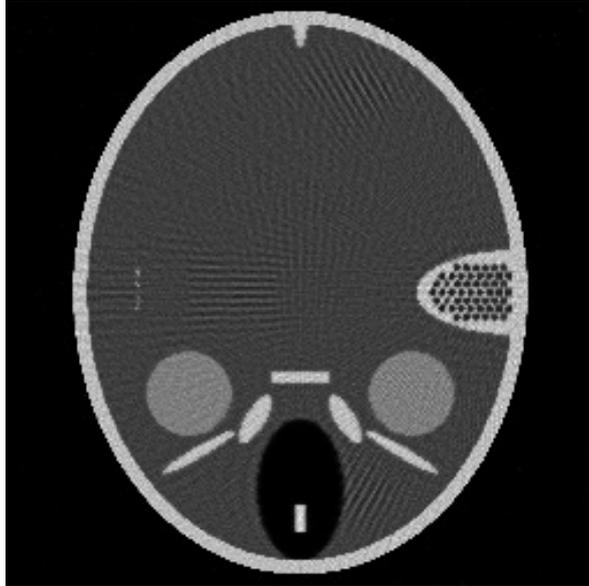
Figura 3.10: SIRT. Comportamiento del MSE mínimo en función del parámetro de relajación  $\lambda$ . Para cada parámetro de relajación utilizado se utilizaron 250 iteraciones. Se muestran las tres parejas de valores  $(\lambda, MSE_{min})$  encontradas en la figura 3.9 (b):  $(0.5, 51.891)$ ,  $(1, 39.210)$ ,  $(1.5, 35.421)$  y el mínimo global encontrado  $(2, 33.570)$

### 3.5. Algoritmos implementados: SIRT+TV, MLEM+TV

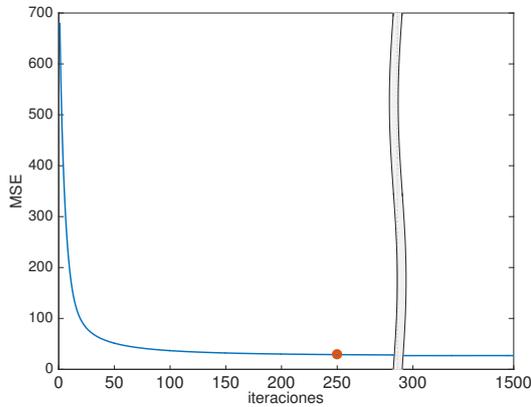
Como se puede observar en todos los perfiles de intensidad mostrados en las figuras de las reconstrucciones hechas con SIRT y MLEM ningún algoritmo logra reducir el ruido presente. Por ello se necesita un método de regularización y a continuación se presentan los algoritmos implementados SIRT+TV y MLEM+TV que logran resolver el problema 3.1. La idea básica es realizar dos tareas en ciertos k-ésimos pasos de iteración: aplicar la ecuación recursiva de SIRT o de MLEM y minimizar la variación total de la imagen k-ésima.

#### 3.5.1. Minimización de la variación total: planteamiento del problema

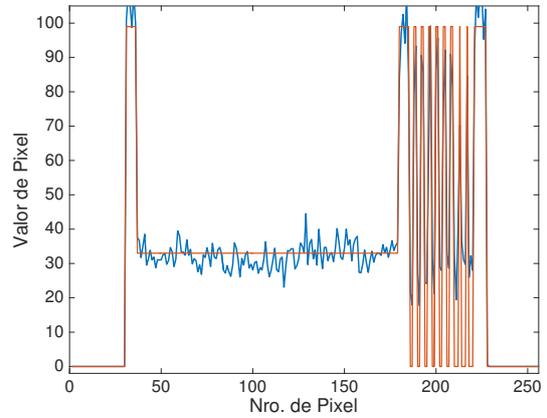
Resulta ser que minimizar la variación total de una imagen logra reducir el ruido presente en ella como se ha mostrado en artículos como [Beck and Teboulle, 2009], [Yan and Lu, 2015], [Goldstein and Osher, 2009], etc. Para minimizar la variación total de la imagen  $x_k$  en los algoritmos implementados se utilizó el método iterativo Split Bregman, el cual fue desarrollado originalmente para resolver problemas de optimización convexa que involucran funcionales con normas  $\ell_1$ , debido a que los métodos convencionales de gradientes conjugados tienen ciertas dificultades con funcionales de esta naturaleza. Para más detalles del método, se puede consultar el artículo [Goldstein and Osher, 2009].



(a) Imagen reconstruida.



(b) MSE vs número de iteraciones.



(c) Perfil de intensidades.

Figura 3.11: Resultados para MLEM con 1500 iteraciones para el maniquí Forbild y 90 proyecciones. (a) Reconstrucción. (b) MSE vs iteraciones. El MSE mínimo obtenido después de 1500 iteraciones fue de 26.74. Se muestra también, el punto rojo correspondiente a 250 iteraciones con un MSE de 28.901 (En el caso de SIRT para 250 iteraciones y  $\lambda = 2$  el MSE mínimo encontrado fue de 33.570). (c) Perfil de intensidades de la reconstrucción obtenida.

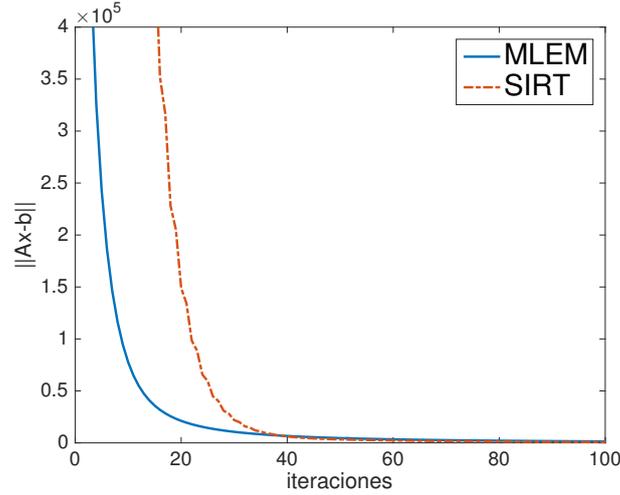


Figura 3.12: Minimización de la fidelidad con ambos algoritmos usando 100 iteraciones para el maniquí Forbild y 90 proyecciones. El parámetro de relajación utilizado para SIRT fue de 1.99.

El problema de minimizar la variación total de una imagen ruidosa  $x^*$  (por ejemplo la  $k$ -ésima iteración  $x_k$ ), se puede plantear como un problema de optimización convexa sin restricciones dado por

$$x = \underset{x}{\operatorname{argmin}} TV^\alpha(x) + \frac{\mu}{2} \|\vec{x} - \vec{x}^*\|_{\ell_2}^2, \quad (3.4)$$

en donde  $\alpha = I, A$  denotando la definición isotrópica o anisotrópica que se desee utilizar para minimizar la variación total. El parámetro  $\mu$  es muy importante y se le conoce como **parámetro de regularización** de la variación total. Para resolver este problema, en esta tesis se utilizaron las funciones incluidas en las rutinas “Split Bregman Method for Total Variation Denoising” escritas por Benjamin Tremouheac cuyo código puede descargarse de su página web <http://agsp.org/bt/>. Las dos principales funciones de estas rutinas son `u=SB_ATV(u*, mu, iterTV)`, que utiliza la definición anisotrópica de la variación total y `u=SB_ITV(u*, mu, iterTV)` para la definición isotrópica. En ambos casos `u` es la imagen que regresa la función,  $\mu$  es el parámetro de regularización e `iterTV` el número de iteraciones del método Split Bregman realizadas.

Así, con los algoritmos iterativos SIRT y MLEM, y con la minimización de la variación total se logra resolver el problema principal (3.1). Las funciones que minimizan la variación total se encargan del primer término de tal problema y los algoritmos iterativos se encargan de que se cumpla la restricción de fidelidad. Finalmente se impone en los algoritmos la restricción de positividad satisfaciendo así ambas restricciones.

### 3.5.2. Algoritmo SIRT+TV

El algoritmo implementado para minimizar la variación total junto a SIRT está dado por el algoritmo 3.

---

**Algorithm 3** SIRT+TV

---

```
1:  $R = 0 \in \mathbb{M}_{\mathcal{M} \times \mathcal{M}}$ 
2:  $C = 0 \in \mathbb{M}_{N^2 \times N^2}$ 
3:  $r_{i,i} = \frac{1}{\sum_j a_{i,j}}$ 
4:  $c_{j,j} = \frac{1}{\sum_i a_{i,j}}$ 
5:  $\lambda \leftarrow$  Parámetro de relajación
6:  $\vec{x}_1 \leftarrow$  Aproximación inicial
7:  $\mu \leftarrow$  Asignación del parámetro de regularización
8:  $d \leftarrow$  Divisor utilizado para introducir el algoritmo que minimiza TV
9: for  $k = 1$  to  $IterSIRT$  do
10:   if  $\text{mod}(k,d)=0$  then
11:     for  $i = 1$  to  $iterTV$  do ▷ Minimización de la variación total
12:        $x_{k+1} = \min_x TV^\alpha(x) + \frac{\mu}{2} \|\vec{x} - \vec{x}_{k+1}\|_{\ell_2}^2$ 
13:     end
14:   else continue
15:    $\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k + \lambda C A^T R (\vec{b} - A \vec{x}_k)$ 
16:    $\vec{x}_k(\vec{x}_k \leq 0) = 0$  ▷ Positividad
17: end
18: Return  $\vec{x}_{iterSIRT}$ 
```

---

El divisor  $d$  utilizado es para indicar cada cuántas iteraciones de SIRT se usa la función asignada a minimizar la variación total, indicado por la condición  $\text{mod}(k, d)=0$ . Por ejemplo, si se se realizan 100 iteraciones de SIRT y  $d = 50$  entonces  $\text{mod}(k, d)=0$ , se cumple solamente cuando  $k = 50, 100$  y por tanto la función que minimiza la variación total se usaría solo dos veces; si  $d = 5$  la minimización se aplica cuando  $k$  es un múltiplo de 5 y si  $d = 1$  entonces en cada iteración de SIRT se minimiza la variación total.

Mientras en SIRT los únicos parámetros que importaban para reconstruir las imágenes eran el número de iteraciones y el parámetro de relajación, aquí se tienen **5 parámetros** que afectan las reconstrucciones: el número de iteraciones de SIRT, las iteraciones de Split-Bregman, el parámetro de relajación  $\lambda$ , el parámetro de regularización  $\mu$  y el divisor  $d$ . Cabe mencionar que el divisor resultó muy importante pues dependiendo de cuantas iteraciones de SIRT se hagan antes de minimizar la variación total, se deben cambiar los parámetros de relajación y de regularización para obtener buenas reconstrucciones. El caso de los parámetros que controlan los números de iteraciones mostraron poca influencia en la elección de  $\lambda$  y  $\mu$ . Esta discusión se detalla más adelante y se muestran resultados de la variación de parámetros.

### 3.5.3. Algoritmo MLEM+TV

Al igual que para SIRT, se utilizó el algoritmo 2 para modificarlo y añadir la minimización de la variación total.

Aquí también se introdujo el divisor que tiene la misma utilidad que ya se mencionó. Tal divisor tiene la misma importancia en cuanto a la elección del parámetro

---

**Algorithm 4** MLEM+TV

---

```
1:  $\vec{x}_1 \leftarrow$  Aproximación inicial
2:  $\mu \leftarrow$  Asignación del parámetro de regularización
3:  $d \leftarrow$  Divisor utilizado para introducir el algoritmo que minimiza TV
4: for  $k = 1$  to  $IterMLEM$  do
5:   if  $\text{mod}(k,d)=0$  then
6:     for  $i = 1$  to  $iterTV$  do ▷ Minimización de la variación total
7:        $x_{k+1} = \min_x TV^\alpha(x) + \frac{\mu}{2} \|\vec{x} - \vec{x}_{k+1}\|_{\ell_2}^2$ 
8:     end
9:     else continue
10:     $x_j^{(k+1)} = \frac{x_j^{(k)}}{\sum_{i=1}^M A_{i,j}} \sum_{i=1}^M \frac{b_i}{\sum_{j'=1}^{N^2} A_{i,j'} x_{j'}^{(k)}} A_{i,j}$ 
11:     $\vec{x}_k(\vec{x}_k \leq 0) = 0$  ▷ Positividad
12: end
13: Return  $\vec{x}_{iterMLEM}$ 
```

---

de regularización utilizado pero es menos crítico que en el caso de SIRT+TV debido a que no se tiene un parámetro de relajación. Así, en este caso se tienen solo cuatro parámetros que son los dos distintos números de iteraciones para MLEM y de Split Bregman, el parámetro de regularización  $\mu$  y el divisor  $d$ .

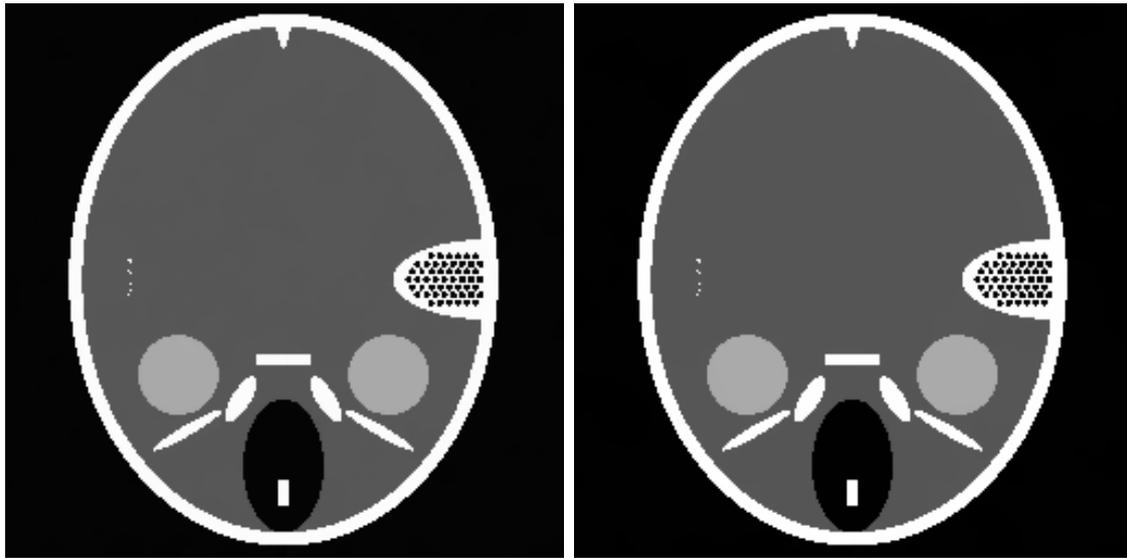
Existen versiones del algoritmo MLEM (veáse por ejemplo [Panin et al., 1998]), en donde se introduce la regularización por variación total en las hipótesis iniciales para derivar la ecuación de recurrencia 2.5. El resultado es que tal ecuación se ve modificada y no es necesario introducir otro paso dentro del ciclo de iteraciones y en ese caso, las líneas de la 5 a la 9 en el algoritmo 4 no son necesarias. A diferencia de ese trabajo, esta tesis exploró la estrategia de utilizar el algoritmo MLEM simple como minimizador del término de fidelidad en las constricciones de la ecuación (3.1) y usar las rutinas basadas en el método Split Bregman para encargarse de la minimización de la variación total.

### 3.5.4. Variación Total Anisotrópica.

Al realizar diversas pruebas con estos dos algoritmos, se optó por utilizar únicamente la definición de la variación total anisotrópica debido a dos razones principales como se discute a continuación.

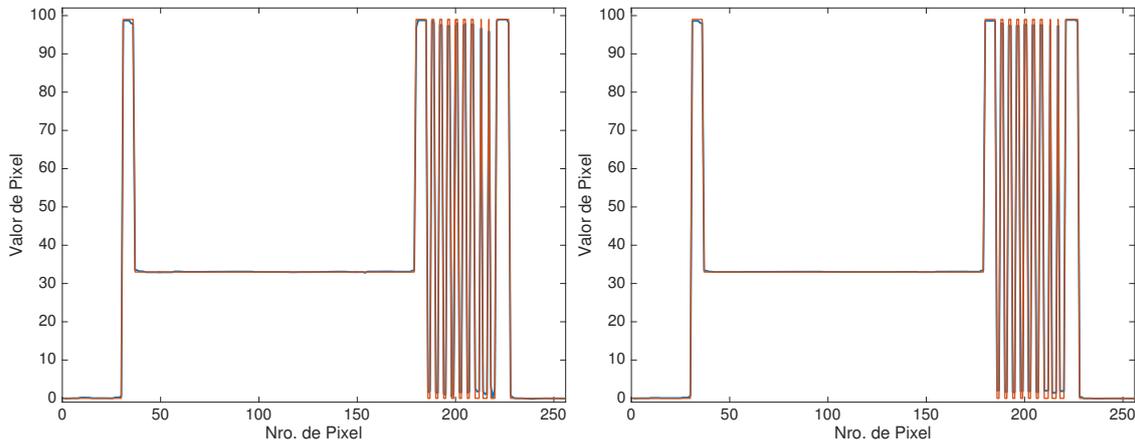
La **primera razón** es que al resolver el problema (3.4) como una simple aplicación para quitar ruido a una imagen, se obtuvieron mejores resultados para los maniquís con ruido añadido como se muestra en las figuras 3.13 y 3.14 y en la tabla 3.1. Se puede apreciar en los perfiles de intensidad que el filtrado de ruido es de muy alta calidad en el sentido de que están muy cerca a los perfiles originales e incluso en el maniquí Forbild, en la zona que tiene muchas manchas pequeñas de color blanco correspondiente a la zona de variaciones de alta frecuencia en la gráfica del perfil, se logran preservar estas variaciones casi de manera exacta.

También se hicieron pruebas con diferentes niveles de ruido en ambos maniquís



(a) Filtrado isotrópico.  $MSE = 0.102$ .

(b) Filtrado anisotrópico  $MSE = 0.076$ .



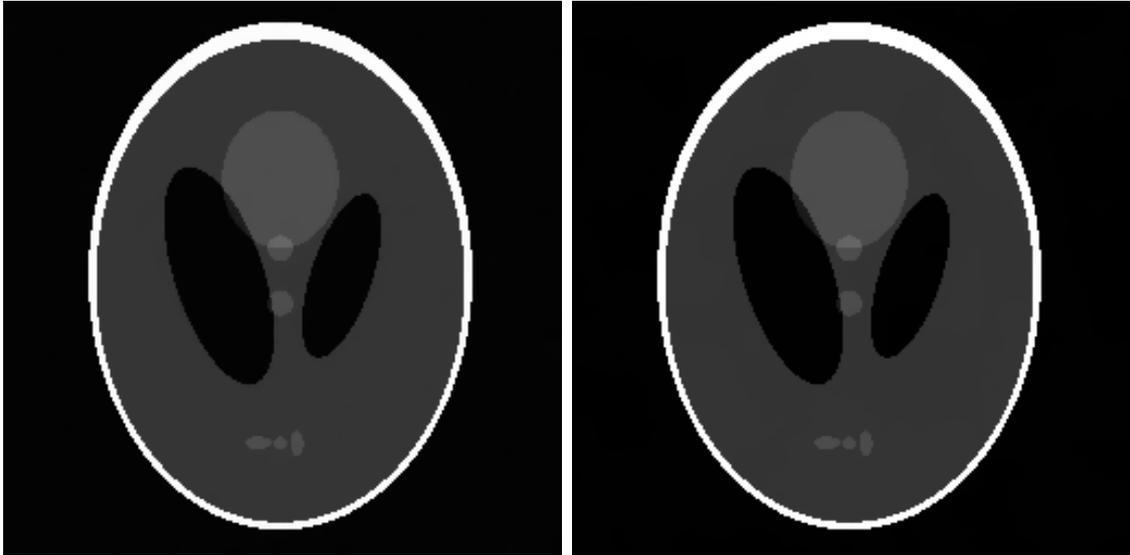
(c) Perfil isotrópico.

(d) Perfil anisotrópico.

Figura 3.13: Filtrado del maniquí Forbild con ruido añadido. Los parámetros de regularización utilizados en estos dos casos fueron  $\mu = 1$  y el número de iteraciones de Split Bregman fue de 100. Se muestran también los perfiles de intensidad obtenidos después del filtrado vía minimización de TV; la línea azul corresponde al perfil filtrado y la naranja al maniquí original.

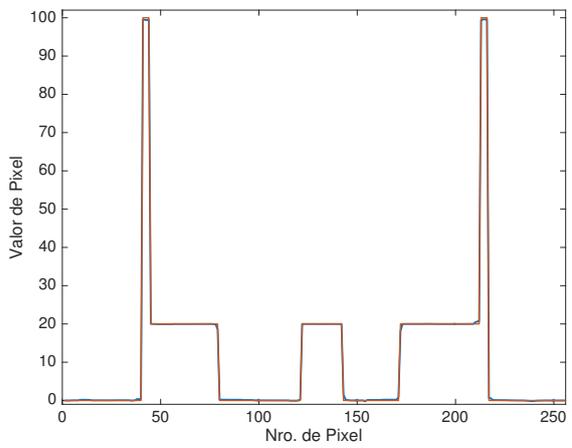
Maniquí	$\mu$	MSE anisotrópico	MSE isotrópico
Forbild	1	0.076	0.102
Shepp-Logan	1	0.044	0.065

Tabla 3.1: Resultados iniciales para el filtrado de ruido vía minimización por variación total con 100 iteraciones Split Bregman.

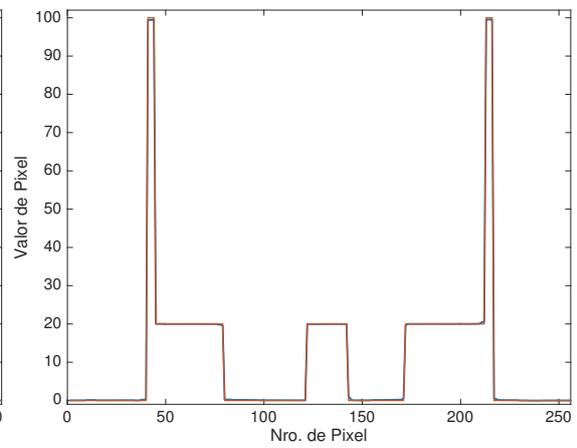


(a) Filtrado isotrópico.  $MSE = 0.065$ .

(b) Filtrado anisotrópico  $MSE = 0.044$ .



(c) Perfil isotrópico.



(d) Perfil anisotrópico.

Figura 3.14: Filtrado del maniquí Shep-Logan con ruido añadido. Los parámetros de regularización utilizados en estos dos casos fueron  $\mu = 1$  y el número de iteraciones de Split Bregman fue de 100. Se muestran también los perfiles de intensidad obtenidos después del filtrado vía minimización de TV; la línea azul corresponde al perfil filtrado y la naranja al maniquí original.

para determinar la cantidad de iteraciones necesarias para quitar tal nivel de ruido, así como los parámetros de regularización a utilizar.

La figura 3.15 muestra el  $MSE$  vs el número de iteraciones para el nivel de ruido original con semianchura del 5% del valor máximo de pixel de cada maniquí, minimizando la variación total anisotrópica y utilizando un parámetro de regularización  $\mu = 1$ . En esa gráfica y en otras no mostradas en este texto, se observó que aproximadamente 100 iteraciones son suficientes para obtener un filtrado de muy buena calidad (valores de MSE muy pequeños) y para más iteraciones la calidad de los filtrados mejora muy poco. Para la variación total isotrópica se observó el mismo comportamiento y también 100 iteraciones fueron suficientes para obtener filtrados de buena calidad.

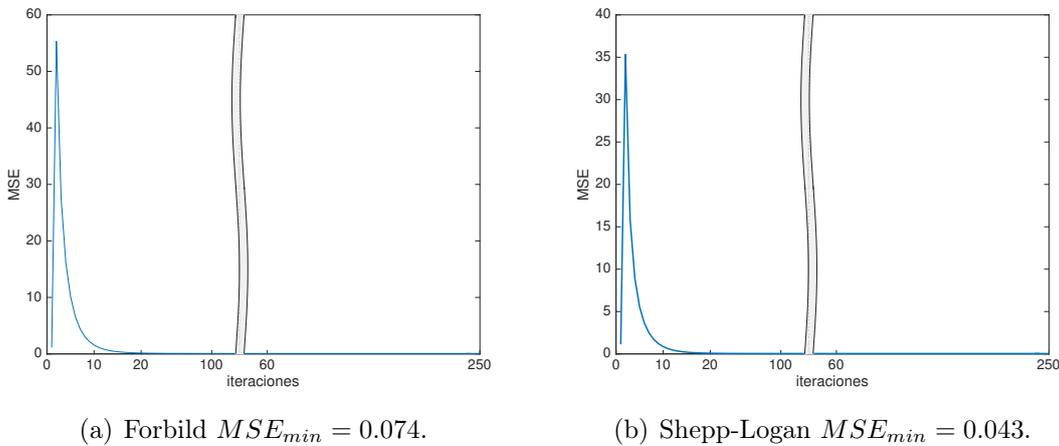


Figura 3.15: MSE vs número de iteraciones Split Bregman para el filtrado de ruido. Se muestran los niveles mínimos de MSE alcanzados para ambos maniqués después de 250 iteraciones.

También fue conveniente encontrar los mejores parámetros de regularización para filtrar el ruido de las imágenes. Para ello se construyeron gráficas de  $MSE$  vs.  $\mu$  variando el parámetro  $\mu$  en algún intervalo por ejemplo  $[0, 12]$ , y aplicar la minimización de TV para distintos niveles de ruido utilizando 100 iteraciones de Split Bregman. Las figuras 3.17 y 3.18 muestran los resultados para distintos niveles de ruido añadido a los maniqués Forbild y Shepp-Logan respectivamente. La tabla 3.2 muestra nuevamente que los valores de MSE fueron menores al utilizar la versión anisotrópica de la variación total. En la última columna de esa tabla aparece el parámetro de regularización “*crítico*”, el cual corresponde al parámetro  $\mu_c \in [0, 12]$  con el cuál se obtuvo el valor MSE mínimo mostrado en las columnas de  $MSE_{min}$ .

Como puede verse de la tabla 3.2 y de las figuras 3.17 y 3.18, minimizar la variación total anisotrópica dio mejores resultados en cuanto a la calidad evaluada con el MSE de las imágenes filtradas.

Se presentan dos características interesantes e importantes de todas estas gráficas que van a influir implícitamente en todo lo que resta de las pruebas realizadas en esta tesis: La primera es que el parámetro  $\mu_c$  depende del nivel de ruido y la segunda es que también depende de la estructura individual de la imagen pero la dependencia

Maniquí + NL	$MSE_{min}$ anisotrópico	$MSE_{min}$ isotrópico	$\mu_c$ aniso	$\mu_c$ iso
Forbild +5 %	0.068	0.101	0.8201	0.8201
Shepp-Logan +5 %	0.041	0.064	0.9822	0.9822
Forbild +15 %	0.641	0.901	2.4404	2.6024
Shepp-Logan +15 %	0.361	0.525	2.7645	3.0885
Forbild +30 %	2.404	3.280	4.7088	5.3569
Shepp-Logan +30 %	1.473	1.962	5.5189	6.1670

Tabla 3.2: MSE mínimos para el filtrado de ruido usando 100 iteraciones Split Bregman. El porcentaje de nivel de ruido (NL) es la fracción del valor de pixel máximo del maniquí original y ese valor se asignó a la semianchura de la distribución de ruido gaussiano añadido para los distintos valores de ruido.

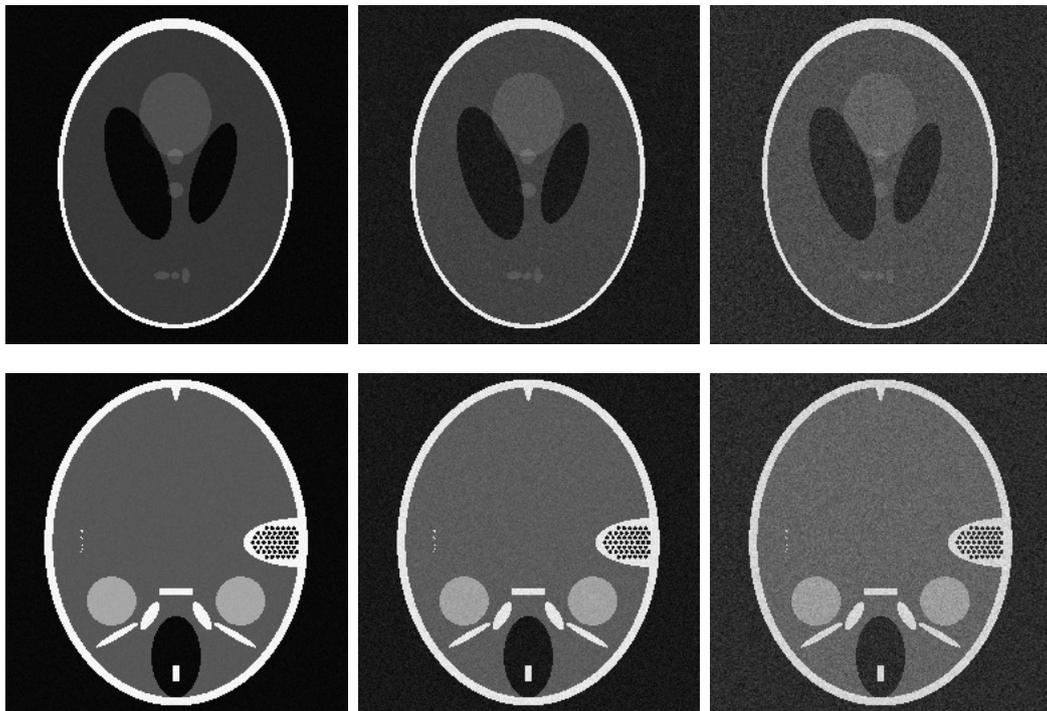


Figura 3.16: Distintos niveles de ruido para los maniqués. De izquierda a derecha las semianchuras de la distribución del ruido añadido corresponden al 5 %, 15 % y al 30 % del valor máximo de pixel de la imagen

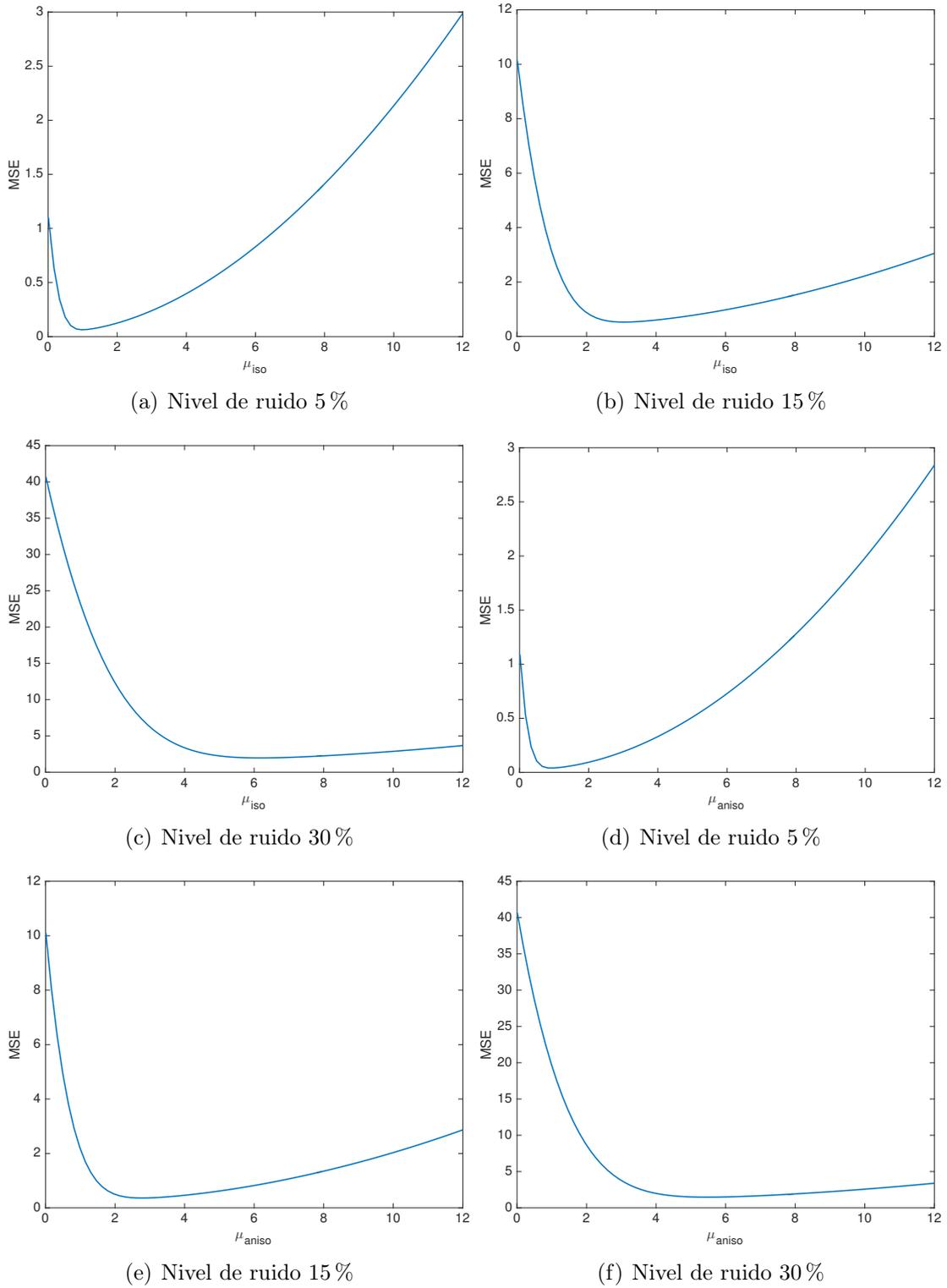


Figura 3.17: Gráficas de MSE vs.  $\mu$  para el maniquí Shepp-Logan. Las gráficas (a), (b), (c) corresponden a la TV isotrópica y las (d), (e) y (f) a la variación total anisotrópica.

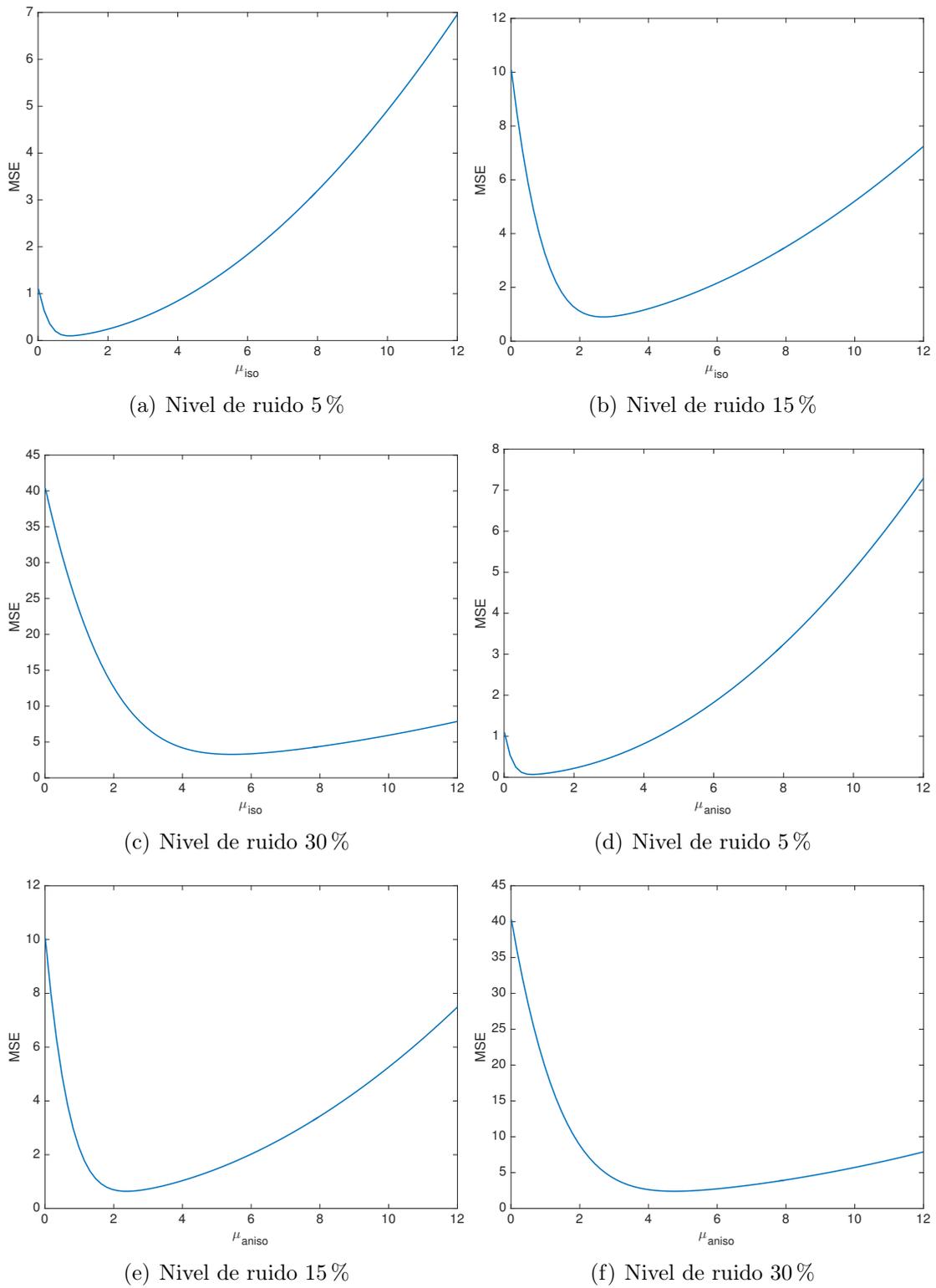


Figura 3.18: Gráficas de MSE vs.  $\mu$  para el maniquí Forbild. Las gráficas (a), (b), (c) corresponden a la TV isotrópica y las (d), (e) y (f) a la variación total anisotrópica.

es menos importante. Se puede observar en la tabla 3.2 que los parámetros críticos son distintos en cada imagen (dependencia en estructura de la imagen) pero están muy cerca a diferencia de lo que pasó con el nivel de ruido pues los mínimos de las gráficas se desplazan hacia la derecha siempre que se aumenta el nivel de ruido, esto es, a niveles mayores de ruido se necesitan parámetros de regularización mas grandes para obtener filtrados de buena calidad minimizando el MSE. La figura 3.19 muestra los filtrados anisotrópicos para los 2 maniquís con los niveles de ruido dados utilizando los parámetros críticos encontrados.

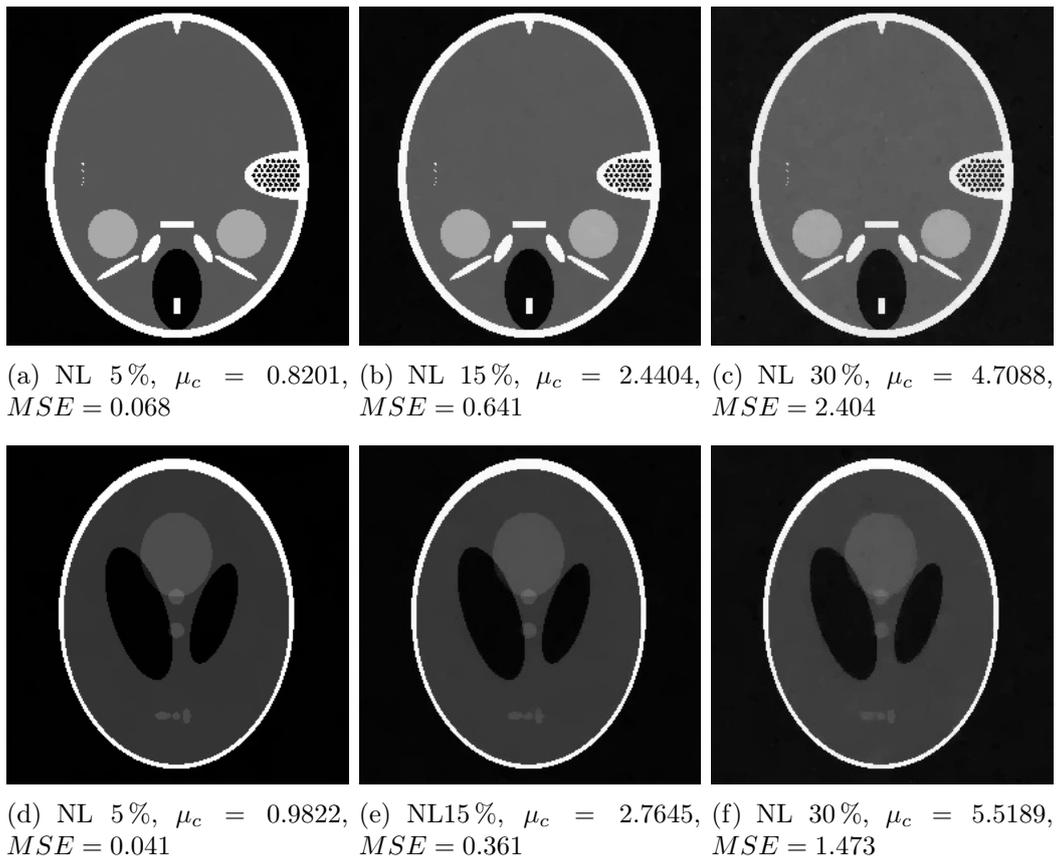
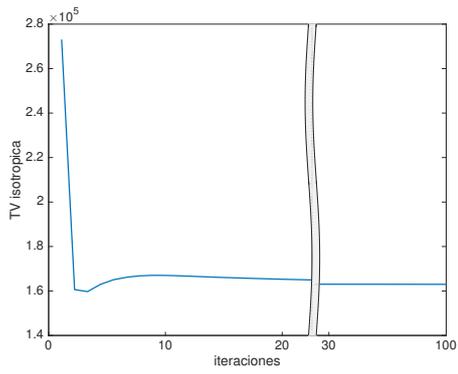


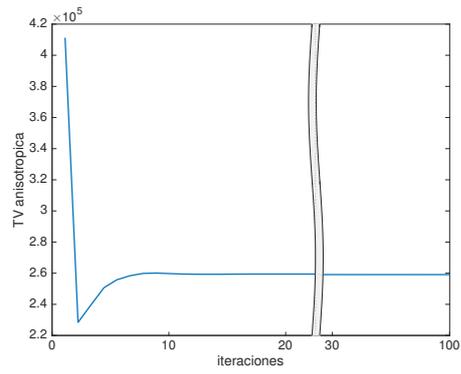
Figura 3.19: Filtrados anisotrópicos para los distintos niveles de ruido en ambos maniquís usando 100 iteraciones Split Bregman. Se muestran los parámetros críticos encontrados para cada caso.

Para terminar con esta discusión se presentan un par de gráficas que muestran cómo se reduce la variación total anisotrópica en función del número de iteraciones utilizadas (fig. 3.20) para ruido de 5% con ambos maniquís.

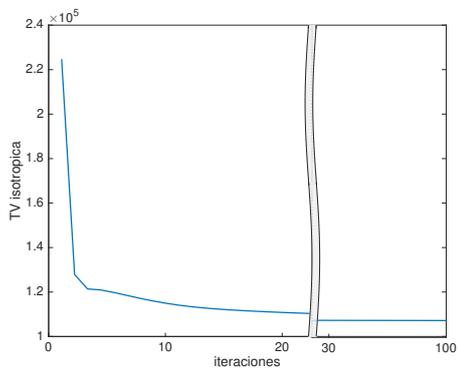
La **segunda razón** para utilizar solamente la definición anisotrópica tiene que ver con la convergencia de una parte del algoritmo Split Bregman utilizado en las funciones SB\_ITV y SB\_ATV. Esa parte consiste en minimizar un funcional y las rutinas utilizadas se basan en el algoritmo de **gradientes conjugados cuadrados** (*conjugate gradients squared (cgs.)*). Se sabe que el método cgs. es altamente sensible a pequeños cambios en las condiciones iniciales y resultó que algunos de los iterados que se obtenían con SIRT o MLEM eran condiciones iniciales que causaban divergencias en la parte de la iteración Split Bregman que utiliza el cgs. La definición de la variación total anisotrópica no presentó este tipo de problemas en



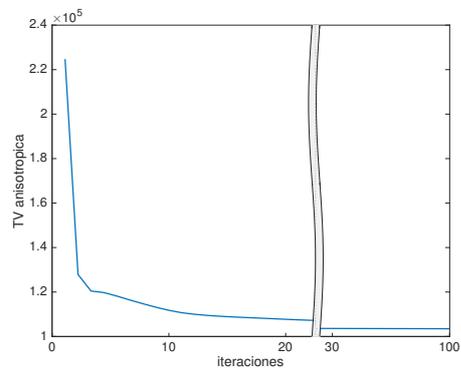
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 3.20: Minimización de la variación total para ambos maniqués. (a) y (b) corresponden al maniqué Forbil y (c) y (d) al Shepp-Logan

la convergencia y debido a esto y a los resultados de los filtrados de ruido discutidos anteriormente, se utilizó en vez de la definición isotrópica para los algoritmos SIRT+TV y MLEM+TV.

### 3.6. Elección de parámetros

Para obtener las mejores reconstrucciones con estos algoritmos y lograr resolver el problema dado por (3.1), se necesitan escoger con cuidado los parámetros a utilizar. Esto corresponde a la parte más importante del desarrollo de esta tesis en cuanto a la aplicación de los algoritmos propuestos pues como se podrá observar, la calidad de los resultados está completamente determinada por los parámetros que se eligen, 5 parámetros para el caso SIRT+TV y 4 para MLEM+TV.

Para empezar a estudiar la interdependencia de parámetros se comenzó explorando a modo de prueba y error para obtener una idea de cómo se comportaba el algoritmo. Como se mencionó anteriormente se utilizó solo la definición de la variación total anisotrópica, y para empezar a ver las ventajas de estos algoritmos se trabajó inicialmente con 45 proyecciones ( $N_\theta = 45$ ).

Primeramente se intentó aplicar sólo una vez la minimización de la variación total para ver cuál era el efecto que se obtenía sobre las imágenes dadas por SIRT y MLEM. Este caso corresponde a que el divisor fuera igual al número de iteraciones de SIRT o MLEM ( $d = iter$ ). Usando las reconstrucciones hechas con SIRT y MLEM se definió inicialmente  $iterSIRT = iterMLEM = 250$  como una buena cantidad de iteraciones para reconstruir las imágenes; para la cantidad de iteraciones Split Bregman se utilizaron inicialmente 100 iteraciones. La figura 3.21 muestra las reconstrucciones y los perfiles de intensidad obtenidos con ambos algoritmos para 45 proyecciones utilizando  $d = 250$ ,  $\mu = 1$  y para SIRT  $\lambda = 1.9$ .

Como se puede observar en las reconstrucciones de la figura 3.21, los artefactos no desaparecen después de aplicar solo una vez la regularización por variación total con  $d = 250$ . En la siguiente sección se discute la “mejor” metodología implementada para la elección de parámetros durante el desarrollo de esta tesis que permitió obtener las mejores reconstrucciones posibles. Por simplicidad, para presentar la metodología implementada, se eligió de manera arbitraria el algoritmo SIRT+TV y el maniquí Forbild con 45 proyecciones (con ruido añadido usando la distribución con semianchura de 5%). Los mismos pasos y análisis se pueden seguir al usar el algoritmo MLEM+TV con cualquier maniquí.

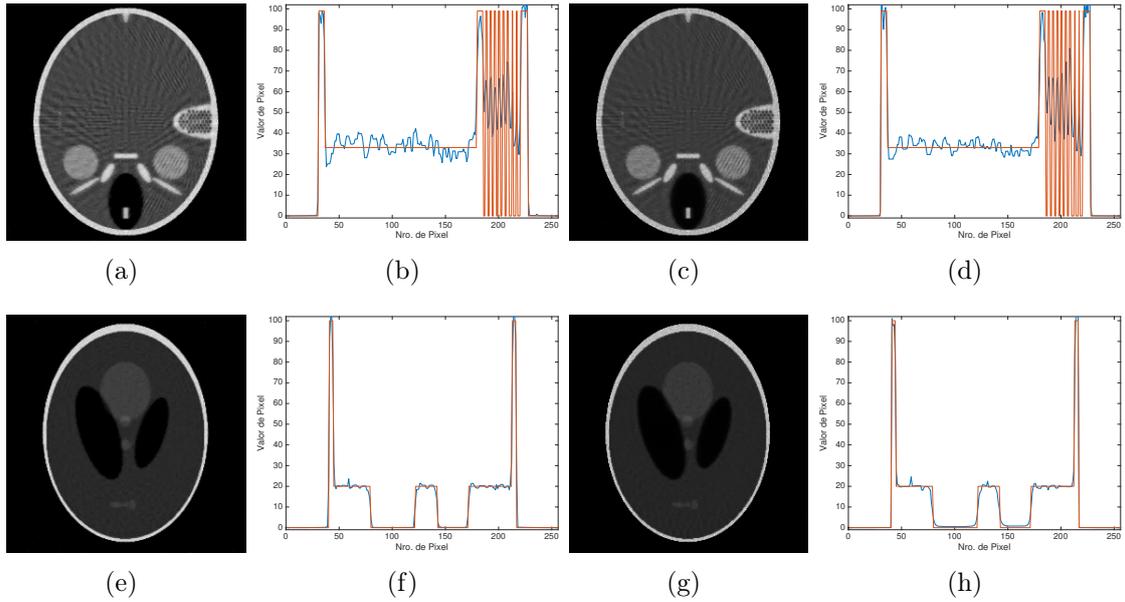


Figura 3.21: Reconstrucciones y perfiles de ambos maniqués utilizando 250 iteraciones de SIRT y MLEM, 100 iteraciones Split Bregman,  $\mu = 1$ ,  $\lambda = 1.9$  y  $d = 250$ . (a) y (b) SIRT+TV,  $MSE = 50.510$ . (c) y (d) MLEM+TV,  $MSE = 44.680$ . (e) y (f) SIRT+TV,  $MSE = 15.390$ . (g) y (h) MLEM+TV,  $MSE = 10.640$ .

### 3.6.1. Metodología para elección de parámetros

#### Paso uno: elegir el divisor $d$ .

Para ver cómo el divisor domina sobre la elección de los parámetros de relajación y de regularización, se fijaron inicialmente los ambos parámetros en  $\lambda = 1.9$  y  $\mu = 1$ . Se utilizaron 250 iteraciones de SIRT y 100 de Split Bregman. La figura 3.22 muestra las reconstrucciones obtenidas para los divisores de 250,  $d = 1, 2, 5, 10, 25, 50, 125, 250$ . Después se cambió el parámetro de regularización a  $\mu = 0.25$  pero se utilizaron el mismo número de iteraciones y el mismo parámetro  $\lambda$ . Las reconstrucciones con estos parámetros aparecen en las figuras 3.22 y 3.23, respectivamente.

Para estudiar el comportamiento del MSE en función de  $d$  se construyeron las gráficas de la figura 3.24. Con esa gráfica y con los valores de MSE que aparecen en las figuras 3.22 y 3.23, se aprecia que los valores obtenidos cambian en función de la pareja de parámetros  $(\lambda, \mu)$ . Una característica de ambas gráficas es que los valores de MSE menores aparecen con divisores pequeños (relativo a la cantidad de iteraciones de SIRT), lo que corresponde a realizar pocas iteraciones de SIRT por cada vez que se minimiza la variación total. Para la pareja  $(\lambda = 1.9, \mu = 1)$  la mejor reconstrucción en términos del MSE es cuando  $d = 10$  y para la pareja de parámetros  $(\lambda = 1.9, \mu = 0.25)$  la reconstrucción con el MSE menor fue cuando  $d = 5$ .

Realizando más pruebas con distintas parejas de parámetros para 45 proyecciones, se observaron las mismas formas de gráficas de MSE vs  $d$ . En casi todas las parejas resultó que cuando  $d = 1$  no se obtienen las mejores reconstrucciones. Si se

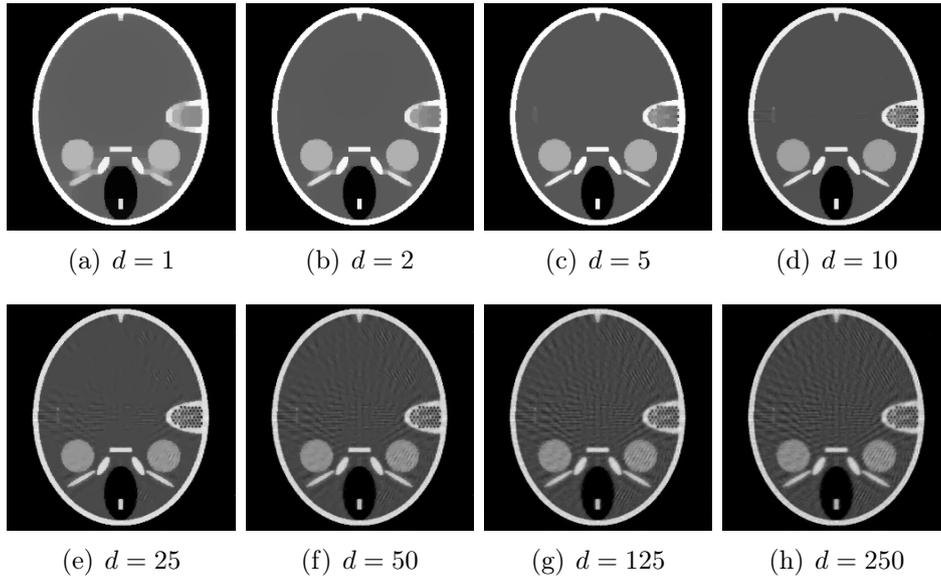


Figura 3.22: Reconstrucciones utilizando 250 iteraciones de SIRT, 100 iteraciones Split Bregman,  $\mu = 1$ , y  $\lambda = 1.9$ . (a)  $MSE = 61.200$ . (b)  $MSE = 43.710$ . (c)  $MSE = 36.160$ . (d)  $MSE = 28.710$ . (e)  $MSE = 29.90$ . (f)  $MSE = 37.230$ . (g)  $MSE = 46.160$ . (h)  $MSE = 50.680$ .

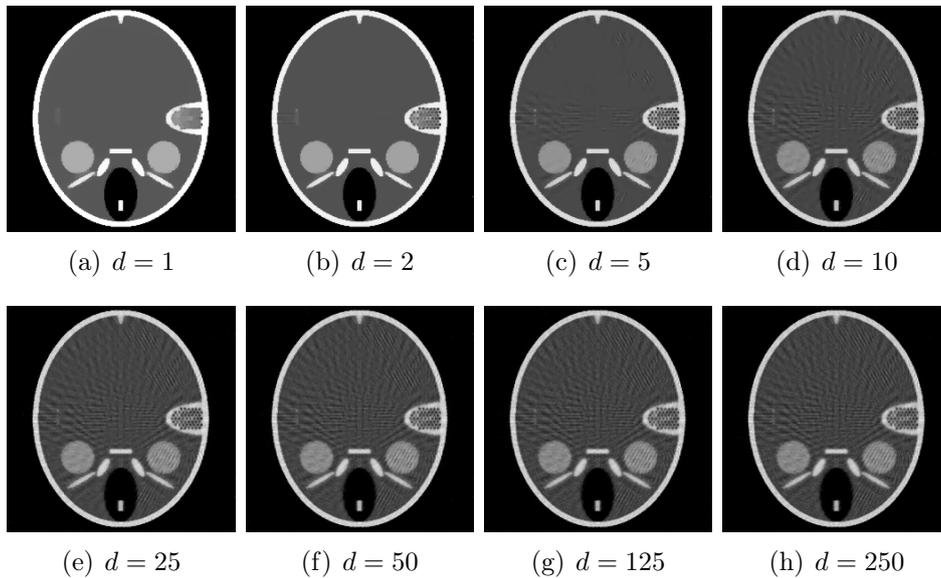


Figura 3.23: Reconstrucciones utilizando 250 iteraciones de SIRT, 100 iteraciones Split Bregman,  $\mu = 0.25$ , y  $\lambda = 1.9$ . (a)  $MSE = 36.850$ . (b)  $MSE = 28.900$ . (c)  $MSE = 26.070$ . (d)  $MSE = 33.100$ . (e)  $MSE = 43.120$ . (f)  $MSE = 48.340$ . (g)  $MSE = 52.340$ . (h)  $MSE = 53.930$ .

cambia el número de iteraciones entonces se pueden elegir distintos divisores y lo que ahí se notó es que, suele ser conveniente utilizar divisores entre 5 y 10 debido a los valores de MSE obtenidos y al tiempo en que tarda el algoritmo en reconstruir las imágenes. Aunque para algunos casos los divisores  $d = 2, 3, 4$  resultaron en las reconstrucciones con menores MSE, el tiempo de cómputo resulta ser mucho mayor para estos casos y se piensa que la calidad de las imágenes no justifica tal tiempo de cómputo. Es mejor optimizar los parámetros de relajación y de regularización manteniendo un divisor apropiado. Los casos con menor número de proyecciones son los que se ven beneficiados de elegir divisores pequeños como se mostrará mas adelante.

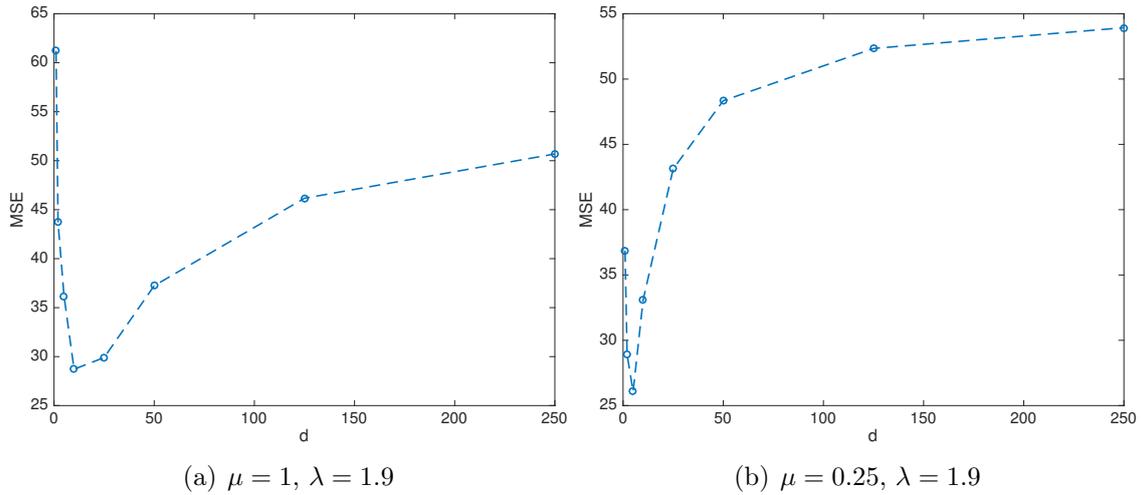


Figura 3.24: Gráficas de MSE vs  $d$  para dos distintas parejas de parámetros  $(\lambda, \mu)$ . (a) MSE mín. en  $d = 10$ , (b) MSE mín. en  $d = 5$

Con esto, se determinó que el **primer paso** para elegir los parámetros a utilizar es **escoger un divisor** para el algoritmo que *considere* el número de iteraciones de SIRT (o MLEM) y la cantidad de proyecciones con las que se está trabajando.

### Paso dos: Elección de parámetros $\lambda$ y $\mu$ .

Una vez determinado el divisor  $d$  con el cuál se ejecutará el algoritmo, el siguiente paso es elegir los parámetros de relajación y de regularización a utilizar. Para comenzar con el análisis de las reconstrucciones en función de tales parámetros se fijo el número de iteraciones de SIRT en 250, las iteraciones Split Bregman en 100 y se tomó el divisor  $d = 5$ . Habiendo fijado estos tres valores, el algoritmo SIRT reduce su dependencia a únicamente los parámetros  $\lambda$  y  $\mu$  (para el caso de MLEM, de igual forma se fijan esos tres parámetros y la dependencia se reduce a solamente el parámetro de regularización  $\mu$ ).

Con esto, se puede medir la calidad de las reconstrucciones con el MSE en función de ambos parámetros, es decir se puede construir una función  $MSE = MSE(\lambda, \mu)$  y ver su comportamiento al variar los parámetros en una **mallá discreta** en el plano  $\lambda \times \mu$ . De manera complementaria se puede seguir recurriendo a la técnica de perfiles de intensidad para evaluar la calidad de las reconstrucciones. La figura 3.25 muestra

la superficie generada con los parámetros fijos dados y una malla de  $20 \times 20$  puntos en el plano  $\lambda \times \mu$  utilizando los intervalos  $\lambda \in [0, 2]$  y  $\mu \in [0, 8]$ .

Como se puede observar en las superficies, los valores de MSE menores corresponden a las zonas de color azul marino, es decir las regiones en la vecindad con  $(\lambda, \mu) \in [1.5, 2] \times [0, 1]$  logran reconstruir las imágenes de mayor calidad en cuanto a MSE. Haciendo un análisis de los datos de esta superficie y los puntos en la malla construida de  $20 \times 20$  se observa que el valor mínimo de MSE se obtuvo fue

$$MSE_{min} = MSE(\lambda_{min}, \mu_{min}) = 26.206 \quad \text{con} \quad \lambda_{min} = 2, \mu_{min} = 0.5157,$$

Utilizando estos dos parámetros se reconstruyó el maniquí a partir de las 45 proyecciones pero utilizando 10,000 iteraciones de SIRT para lograr reducir aun más el MSE obtenido. La reconstrucción y el perfil de intensidades de esta reconstrucción aparecen en la figura 3.26. El MSE mínimo fue  $MSE_{min} = 14.8080$ .

Utilizando los mismos parámetros se reconstruyó el maniquí Shepp-Logan con 45 proyecciones. Los resultados aparecen en la figura 3.27.

Más adelante se mostrarán más resultados para datos con menor número de proyecciones y se verá cualitativamente la superioridad del algoritmo frente a los resultados obtenidos utilizando solamente el algoritmo SIRT sin la minimización de la variación total.

En el caso del algoritmo MLEM+TV, este paso de elección de parámetro de regularización consistió solo en construir la gráfica de la función  $MSE = MSE(\mu)$ . Para ello se define un intervalo y una partición discreta de éste. Para las 45 proyecciones utilizadas y para los parámetros fijos  $d = 5$ , 100 iteraciones de Split Bregman y 250 iteraciones de MLEM, se obtuvo la gráfica mostrada en la figura 3.28 variando el intervalo  $\mu \in [0, 1.5]$  con 35 puntos en la partición. Se muestra también la reconstrucción obtenida para el parámetro  $\mu$  que permite obtener el MSE mínimo así como el perfil de intensidades.

Así, la construcción de las superficies de  $MSE(\lambda, \mu)$  para el caso SIRT+TV o de la gráfica de la función  $MSE(\mu)$  para MLEM+TV, es el **segundo paso** para elegir los parámetros óptimos a utilizar en las reconstrucciones.

### 3.6.2. Discusión

Existen algunas observaciones importantes sobre los dos pasos a seguir para determinar los parámetros a utilizar para reconstruir las imágenes tomográficas.

La primer observación consiste en que ambos pasos dependen directamente de contar con una imagen de referencia tanto para calcular los valores de errores cuadráticos medios (eq. 2.11), como para la visualización de los perfiles de intensidad. Esto representa un inconveniente a la hora de elegir los parámetros de los algoritmos cuando se reconstruyen imágenes a partir de *datos experimentales*, en donde no se tiene ninguna imagen de referencia con la cual calcular el MSE o para comparar los perfiles de intensidad.

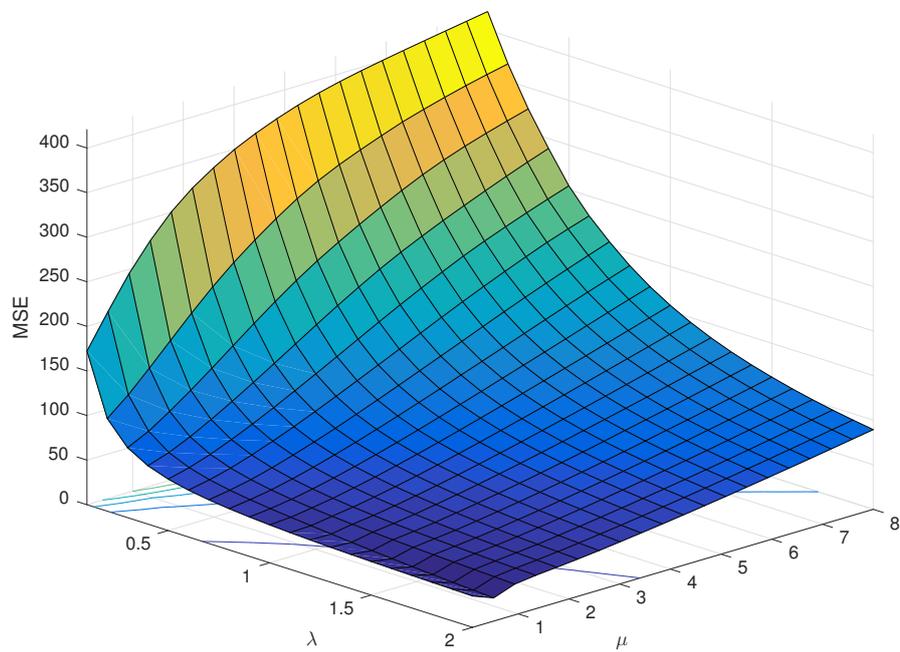
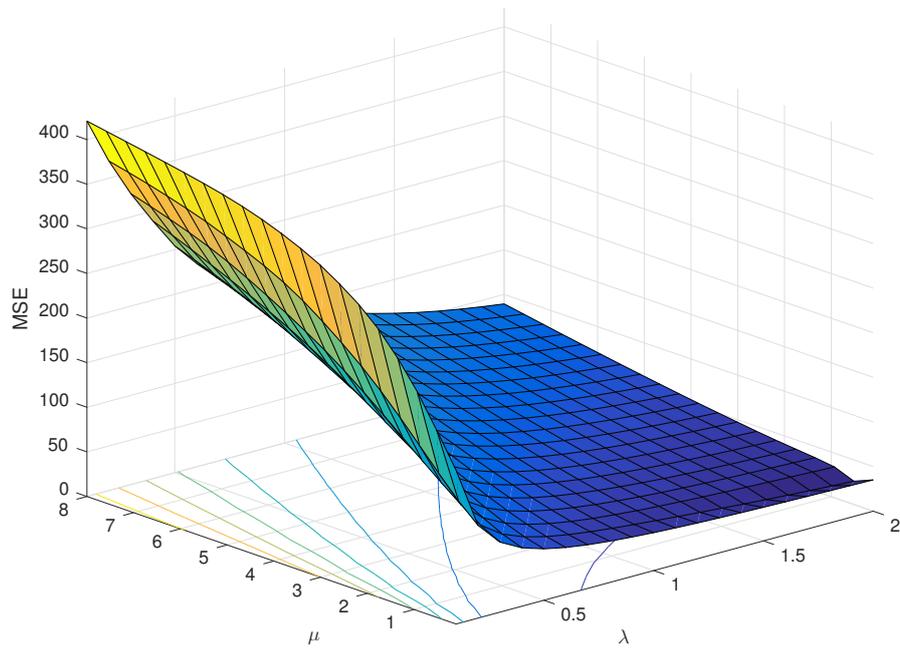


Figura 3.25: Superficie generada con la función  $MSE(\lambda, \mu)$ , se muestran dos ángulos de visualización de la superficie. iterSIRT=250, iteraciones de Split Bregman=100,  $d = 5$

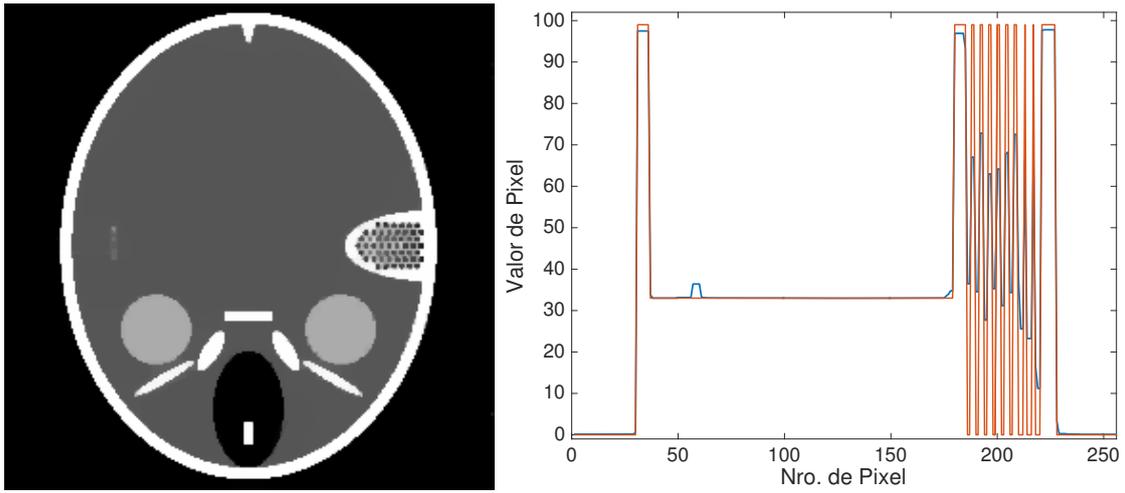


Figura 3.26: Reconstrucción obtenida a partir de 45 proyecciones con la pareja de parámetros  $(\lambda, \mu) = (2, 0.5157)$  pero con 10,000 iteraciones de SIRT y 100 iteraciones Split Bregman usando el divisor  $d = 5$ . El MSE mínimo fue igual a 14.808.

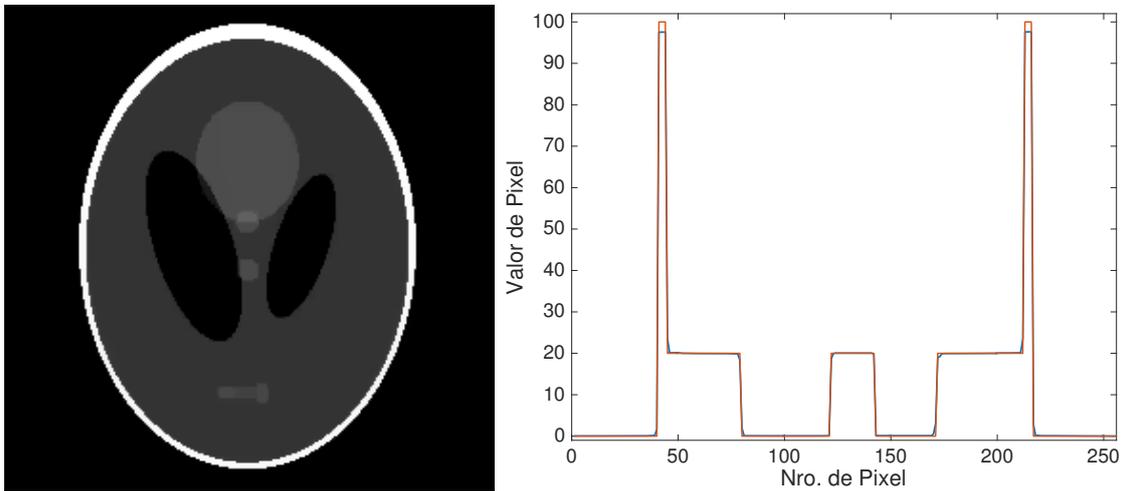


Figura 3.27: Reconstrucción del maniquí Shepp-Logan a partir de 45 proyecciones con la pareja de parámetros  $(\lambda, \mu) = (2, 0.5157)$  con 10,000 iteraciones de SIRT y 100 iteraciones Split Bregman usando el divisor  $d = 5$ . El MSE mínimo alcanzado fue de 0.828.

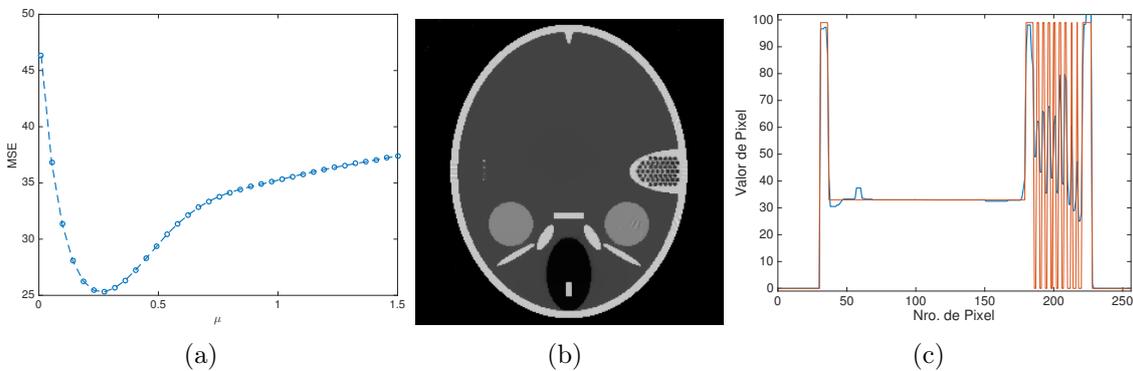


Figura 3.28: Reconstrucción del maniquí Forbild con 45 proyecciones usando MLEM+TV con 250 iteraciones de MLEM, 100 de Split Bregman y  $d = 5$ . (a) Gráfica de MSE vs  $\mu$ . (b) Reconstrucción con el parámetro  $\mu = 0.2500$  y  $MSE_{min} = 25.314$ . (c) Perfil de intensidades de la reconstrucción mostrada.

La segunda observación es que la elección del parámetro  $d$  debe considerar la cantidad de proyecciones a utilizar por dos razones: **(1)**, la propagación de ruido y la aparición de artefactos en los iterados  $x_k$  es mayor a menor número de proyecciones, y por ello se deben regularizar con mayor frecuencia vía variación total (es decir, no pueden realizarse demasiadas iteraciones de SIRT o MLEM sin que se aplique la regularización por TV para evitar que el ruido y los artefactos se propaguen demasiado); y **(2)**, a menor número de proyecciones la matriz de proyección es más pequeña y las operaciones con variables más pequeñas son procesadas con mayor velocidad a la hora de ejecutar los algoritmos. Si bien, hasta ahora no se ha hablado del desempeño de los algoritmos en cuanto a tiempo de cómputo, la elección del parámetro  $d$  determina por completo la rapidez de ejecución del algoritmo. Resulta ser que determinar los parámetros óptimos con los cuales se obtienen las reconstrucciones de mayor calidad es un proceso demasiado lento. Por ejemplo, el código que generó la superficie mostrada en la figura 3.25 tardó aproximadamente 65,000 segundos (casi 18 horas de cómputo con las características de hardware descritas anteriormente). Esto está directamente relacionado con la cantidad de iteraciones SIRT o MLEM, las iteraciones de Split Bregman y el parámetro  $d$ .

Algo que se pudo observar en el caso de SIRT+TV al generar otras superficies (no mostradas en este texto) para distintas cantidades de proyecciones ( $N_\theta$ ), utilizando distintos parámetros  $d$  y diferentes números de iteraciones, fue que los mejores resultados se obtenían para parámetros de relajación  $\lambda$  aproximadamente en el intervalo  $[1.9, 2]$ . Esto puede aprovecharse para “simplificar” la elección de los parámetros, **fijar** un parámetro de relajación aproximado  $\lambda_a \approx 1.95$  y reducir el proceso a solamente generar una gráfica como en el caso de MLEM+TV buscando solamente el parámetro de regularización óptimo  $\mu$ .

Una tercera observación es que la búsqueda del parámetro de regularización óptimo  $\mu_o$  depende inicialmente del intervalo de  $\mu$ 's que se elija así como también de la cantidad de puntos en la partición del intervalo. Si se elige un intervalo en donde  $\mu_o$  no satisfaga  $\mu_o \in [a, b]$  entonces se tendrá que cambiar la elección del intervalo y reiniciar la búsqueda. Esto puede ser muy tardado si inicialmente se utilizan demasiados puntos en la partición. Una estrategia útil es utilizar una partición con muy pocos puntos, construir bosquejos de las gráficas en los intervalos elegidos y observar en que región puede estar el  $\mu_o$  posteriormente se puede elegir un intervalo de parámetros apropiado con una partición muy fina para obtener el mejor resultado.

La elección del parámetro de regularización es en sí un tema complicado debido a que no hay teoría matemática sólida que brinde una serie de reglas para escoger los parámetros a utilizar. La mayoría de las publicaciones que se consultaron durante el trabajo de esta tesis también utilizan imágenes de referencia y herramientas similares al MSE para evaluar la calidad de sus reconstrucciones.

Una publicación que esta tesis considera como una fuente principal de consulta para las perspectivas a futuro de este trabajo, es el artículo titulado “Multi-resolution Parameter Choice Method for Total Variation Regularized Tomography” ([Niinimäki et al., 2016]). En este artículo los autores proponen una estrategia para escoger el parámetro de regularización que no necesita de ninguna imagen de referencia y por tanto se puede aplicar a datos experimentales. De manera breve y resumida, lo que los autores proponen es reconstruir una imagen en distintas resoluciones ( $N \times N$  pi-

xeles) haciendo un barrido de parámetros  $\mu$  en algún intervalo para cada una de estas resoluciones. Lo siguiente es medir la TV anisotrópica de cada una de estas reconstrucciones y lo que ellos muestran de manera numérica es que **existe un parámetro crítico**  $\mu_c$  para el cual los valores de TV se estabilizan en un valor independiente de las distintas resoluciones utilizadas. En otras palabras, existe un parámetro crítico para el cual la TV de la imagen reconstruida es invariante ante cambios en su resolución. Esta publicación establece este criterio como una regla para la elección del parámetro de regularización y podría utilizarse con los algoritmos SIRT+TV y MLEM+TV.

### 3.6.3. Parámetros elegidos

Siguiendo la metodología descrita anteriormente para elegir los parámetros se trabajó con distinto número de proyecciones  $N_\theta = 45, 36, 30, 26, 23, 20, 18, 9$ , para el maniquí Forbild; en todos los casos se utilizaron 250 iteraciones del respectivo algoritmo y 100 de Split Bregman. A partir de esos parámetros se agilizó la búsqueda de parámetros para el maniquí Shepp-Logan y para las pruebas con datos experimentales que aparecen en el próximo capítulo. **Los resultados aparecen** en la tabla 3.3, en donde el parámetro óptimo se denota por  $\mu_o$  y éste corresponde al parámetro para el cual se obtiene el  $MSE_{min}$ .

		SIRT+TV				MLEM+TV			
		Forbild		Shepp-Logan		Forbild		Shepp-Logan	
$N_\theta$	$d$	$\mu_o$	$MSE_{min}$	$\mu_o$	$MSE_{min}$	$\mu_o$	$MSE_{min}$	$\mu_o$	$MSE_{min}$
45	5	0.5157	26.206	0.4167	5.698	0.2500	25.314	0.5417	2.629
36	2	0.1667	27.710	0.2083	5.629	0.1250	29.557	0.2633	3.005
30	2	0.2083	33.440	0.2083	8.383	0.1667	34.118	0.3166	3.913
26	2	0.3750	43.332	0.2083	9.802	0.3333	41.900	0.4210	4.299
23	2	0.5000	47.022	0.2633	11.455	0.4580	45.238	0.4740	5.182
20	2	0.5833	50.370	0.2633	10.450	0.5000	47.135	0.5260	5.545
18	2	0.7500	52.625	0.2633	14.020	0.7917	51.175	0.5260	6.011
9	2	0.5833	126.082	0.2083	70.036	0.6667	117.46	0.5260	54.272

Tabla 3.3: Parámetros óptimos  $\mu_o$  encontrados. En todos los casos se utilizaron 250 iteraciones de SIRT y 100 iteraciones Split Bregman. Se fijó el parámetro de relajación en  $\lambda = 1.99$

Se puede apreciar de la tabla que a medida que el número de proyecciones disminuye, el parámetro  $\mu_o$  aumenta hasta llegar a 18 proyecciones. Esto puede entenderse desde la perspectiva de que a menor número de proyecciones el sistema algebraico se “mal condiciona” cada vez más y entonces se necesita una regularización con más peso para poder quitar el ruido propagado y los artefactos que se generan en la reconstrucción. Cuando se tienen 9 proyecciones el valor del MSE aumenta drásticamente y el valor del parámetro de regularización óptimo disminuye. Como se observa en la reconstrucción para esta cantidad de proyecciones en la siguiente sección, se pierde totalmente el detalle de la imagen y prácticamente los detalles del maniquí desaparecen tras una capa densa de artefactos. Esto implica también que

existe una cantidad mínima de proyecciones para las cuales los algoritmos introducidos dados SIRT+TV y MLEM+TV logran reconstruir imágenes de calidad. En términos del parámetro  $\alpha_A = N_\theta/N$  se puede apreciar que hay una relación inversa entre el  $MSE_{min}$  y dicho parámetro.

También es evidente que el algoritmo MLEM+TV arroja mejores resultados para el maniquí Shepp-Logan, pero para el maniquí Forbild los valores de MSE entre ambos algoritmos no son muy distintos. Por ello, la complejidad y escasez de cada maniquí aparece aquí de manera implícita como una variable importante a la hora de escoger el algoritmo con el cual reconstruir y también en la elección del parámetro de regularización, pues si bien para el maniquí Forbild se ve una tendencia clara a cambiar el parámetro de regularización en función del número de proyecciones, para el maniquí Shepp-Logan resulta que no se necesita variar el parámetro en un intervalo tan amplio. Esta afirmación está limitada debido al número de puntos que se utilizaron en el arreglo discreto de parámetros de regularización sobre el cual se hizo el barrido para construir las gráficas de MSE vs  $\mu$ , sin embargo a pesar de esta restricción numérica, se puede inferir que a menor escasez la dependencia de los parámetros de regularización en el número de proyecciones es menos fuerte.

### 3.7. Reconstrucciones SIRT+TV

En esta sección se muestran los resultados para las reconstrucciones utilizando los parámetros de la tabla 3.3. Las reconstrucciones de las figuras 3.29 y 3.30 se obtuvieron utilizando 1000 iteraciones de SIRT y 100 de Split Bregman para poder obtener MSE más pequeños que los que aparecen en esa tabla, excepto para el caso de 9 proyecciones debido a que con 1000 iteraciones el método Split Bregman no convergía y por tanto se siguieron utilizando solamente 250 proyecciones.

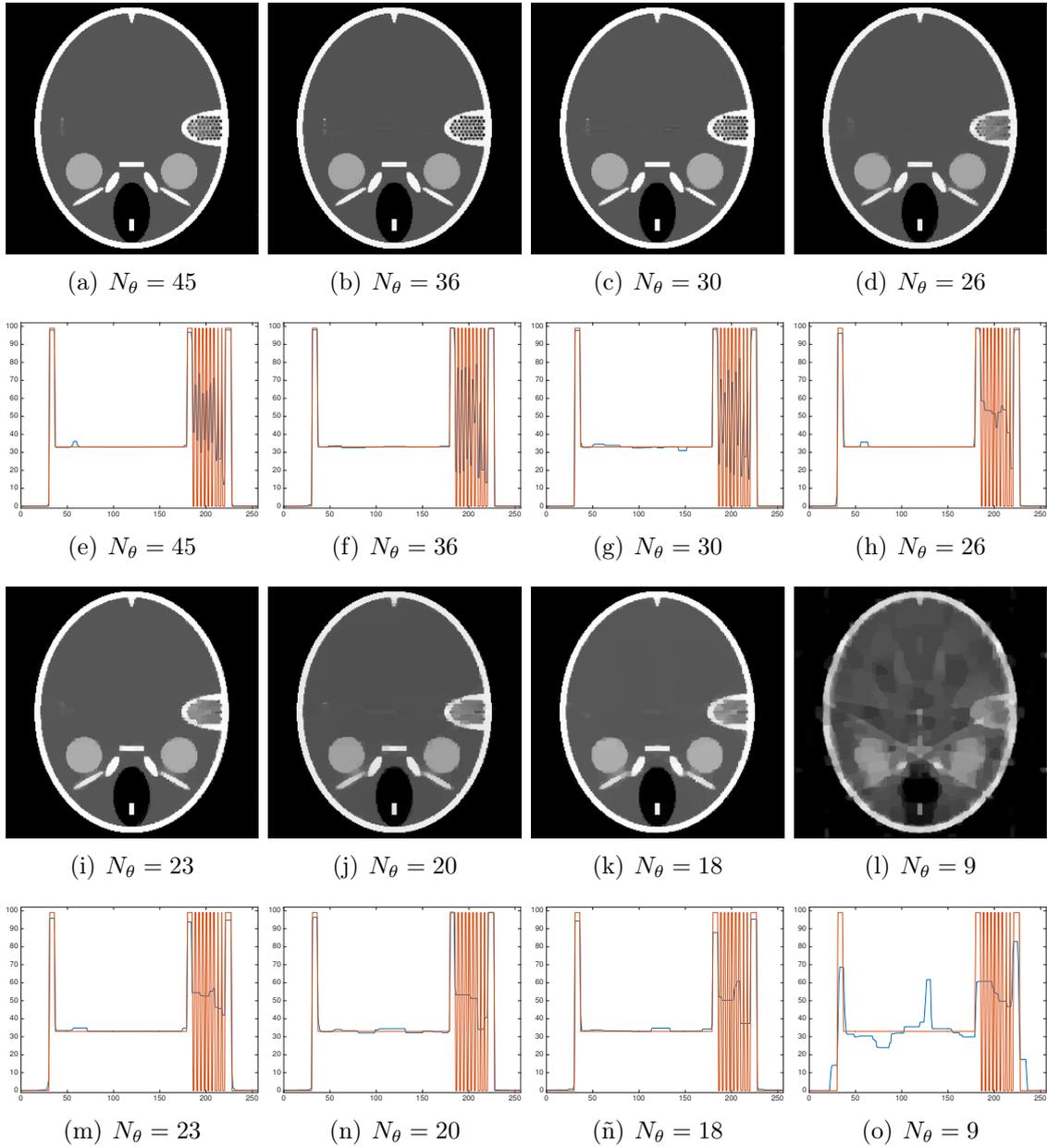


Figura 3.29: Reconstrucciones del maniquí Forbild utilizando 1000 iteraciones SIRT, 100 Split Bregman y los parámetros que aparecen en la tabla 3.3. Para el caso de 9 proyecciones solamente se usaron 250 iteraciones de SIRT

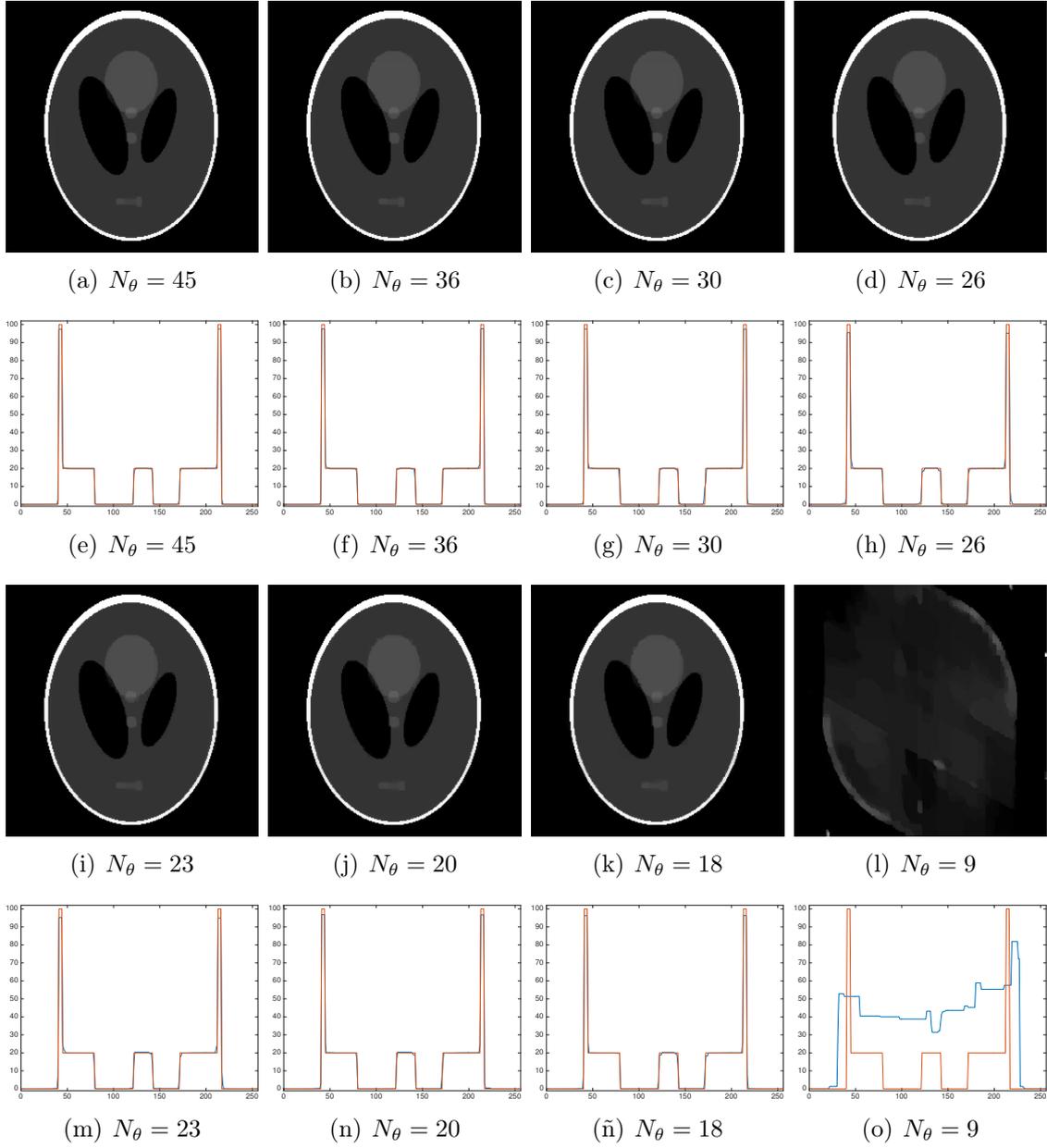


Figura 3.30: Reconstrucciones del maniqué Shepp Logan utilizando 1000 iteraciones SIRT, 100 Split Bregman y los parámetros que aparecen en la tabla 3.3. Para 9 proyecciones solamente se utilizaron 250 iteraciones de SIRT.

### 3.8. Reconstrucciones MLEM+TV

En las figuras 3.31 y 3.32 se muestran las reconstrucciones con el algoritmo MLEM+TV con los parámetros óptimos de la tabla 3.3 y usando 1000 iteraciones MLEM, 100 de Split Bregman (para 9 proyecciones se usaron 250 iteraciones MLEM).

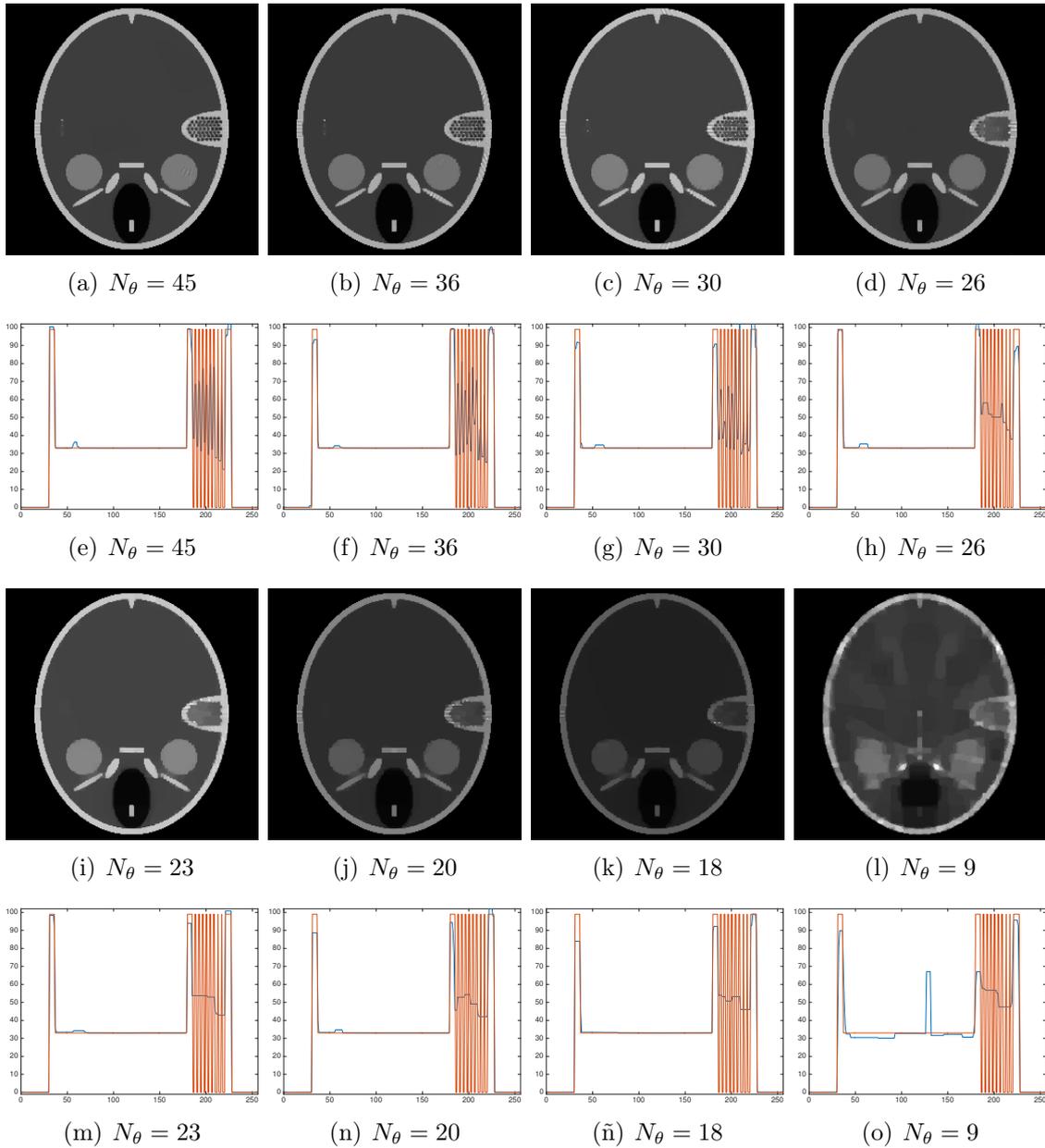


Figura 3.31: Reconstrucciones del maniquí Forbild utilizando 1000 iteraciones MLEM, 100 Split Bregman y los parámetros que aparecen en la tabla 3.3. Para el caso de 9 proyecciones solamente se utilizaron 250 iteraciones de MLEM.

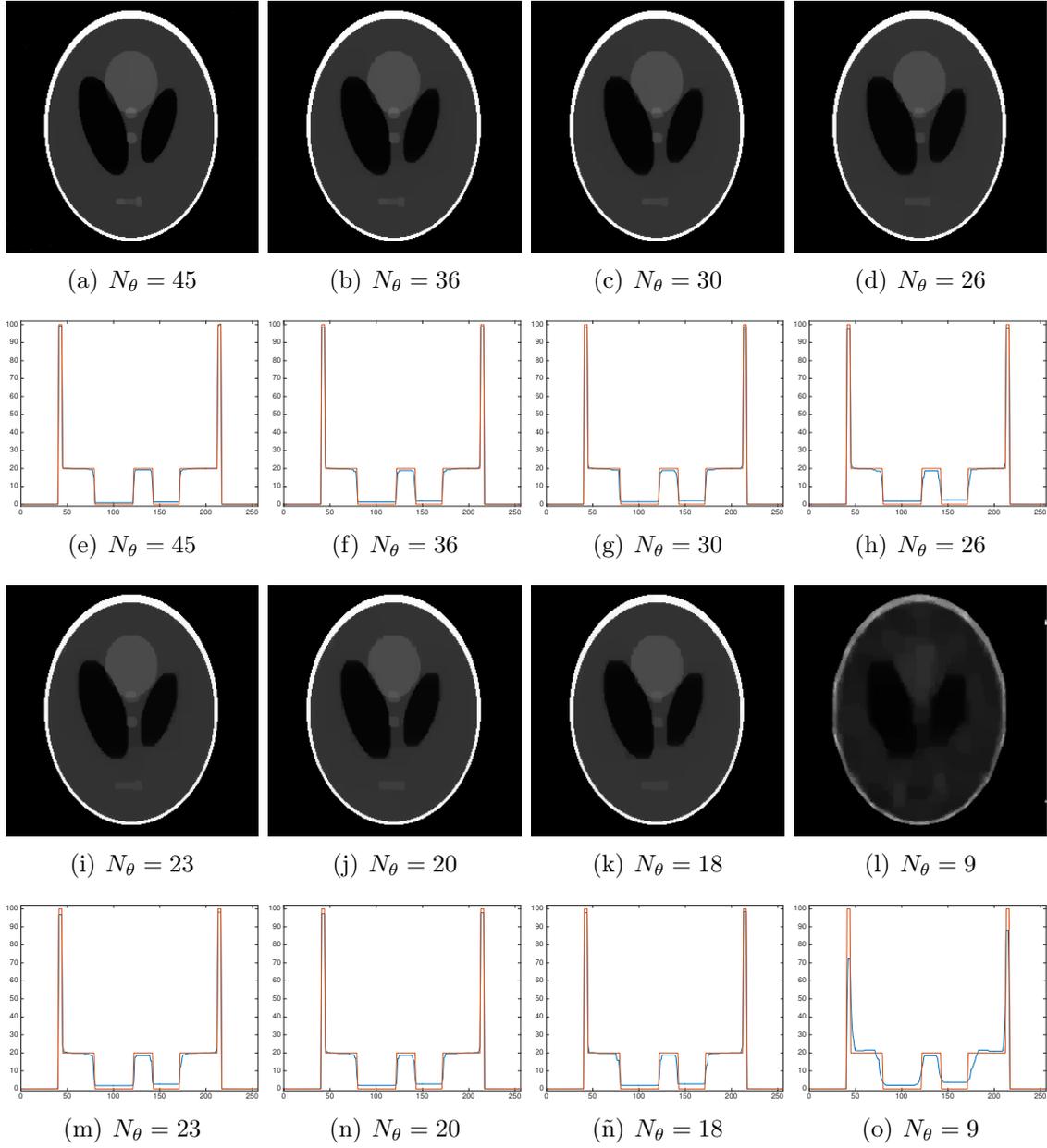


Figura 3.32: Reconstrucciones del maniquí Shepp Logan utilizando 1000 iteraciones MLEM, 100 Split Bregman y los parámetros que aparecen en la tabla 3.3. Para las 9 proyecciones solamente se utilizaron 250 iteraciones MLEM

La tabla 3.4 muestra los resultados finales de todas las reconstrucciones anteriores.

		<b>Forbild</b>		<b>Shepp-Logan</b>	
$N_\theta$	$d$	MSE SIRT+TV	MSE MLEM+TV	MSE SIRT+TV	MSE MLEM+TV
45	5	15.412	14.575	0.928	0.715
36	2	11.071	17.888	1.011	1.195
30	2	15.953	23.109	1.403	1.547
26	2	32.677	34.981	1.600	2.050
23	2	38.174	38.128	2.426	2.362
20	2	40.764	41.130	2.556	2.730
18	2	43.080	45.091	3.946	3.030
9	2	126.082	117.46	70.036	54.272

Tabla 3.4: Valores de los MSE obtenidos de las reconstrucciones mostradas con 1000 iteraciones de SIRT y 100 de Split Bregman utilizando los parámetros óptimos encontrados previamente (En el caso de 9 proyecciones solamente se utilizaron 250 iteraciones).

# Capítulo 4

## Aplicación a datos experimentales

### 4.1. Introducción

Este capítulo comienza con una breve descripción de lo que es la tomografía óptica de luminiscencia estimulada por rayos X y luego se detalla la simulación numérica que se utilizó para generar los datos correspondientes a ciertos arreglos experimentales. Después se muestran los resultados obtenidos de la aplicación de los algoritmos SIRT+TV y MLEM+TV a tales datos experimentales así como la optimización de parámetros realizada. Finalmente se aplican los algoritmos a datos de CT reales.

### 4.2. Tomografía óptica de luminiscencia estimulada por rayos X

Como se ha comentado en los capítulos anteriores, la tomografía computarizada (CT) permite obtener imágenes estructurales a partir de las proyecciones de rayos X que atraviesan la sección transversal de un cuerpo. Existen otras modalidades de adquisición de imágenes médicas cuyo objetivo es más bien proporcionar información funcional de un tejido como en el caso de la tomografía por emisión de positrones (PET). Estas técnicas han sido combinadas para obtener imágenes que brinden información estructural y funcional de un determinado tejido, y se han denominado por el nombre de *sistemas duales*. Sin embargo, la combinación de estas técnicas es solo una superposición de dos tipos de imágenes obtenidas por dos tipos de instrumentación que actúan de manera simultánea.

Los sistemas **híbridos** han sido propuestos como modalidades que permiten obtener información estructural e información funcional pero presentan un enfoque diferente al de los sistemas duales. Estos sistemas combinan dos técnicas complementarias que dependen una de la otra, de tal forma que lo que se utiliza para obtener la imagen estructural y la información ahí generada, sirva para obtener la información funcional que desea conocerse. En estos sistemas híbridos se encuentran por ejemplo la Tomografía de Fluorescencia de Rayos X (TR-FX) y la **Tomografía**

**Óptica de Luminiscencia Estimulada por Rayos X (TORX).** ([Pratx et al., 2010], [Li et al., 2014]). En estos sistemas, la fluorescencia y luminiscencia detectadas, provienen de átomos y partículas centelladoras que se colocan en la trayectoria de haces de rayos X colimados cuya energía produce las excitaciones y desexcitaciones en los niveles energéticos correspondientes. Las partículas fluorescentes absorben parte de los rayos X y después éstos los re-emiten como rayos X de fluorescencia mientras que las partículas luminiscentes absorben la energía de los rayos incidentes y su energía es re-emitida en forma de luz visible.

La TORX es una técnica que se encuentra en desarrollo para su uso clínico pero se ha mostrado que se pueden introducir partículas luminiscentes en tejidos y así poder marcar procesos biológicos *in vivo* de manera específica; tales partículas luminiscentes son potenciales marcadores moleculares a nivel metabólico, anatómico y funcional.

La figura 4.1 muestra un prototipo para la instrumentación de una TORX en donde las partículas luminiscentes corresponden a nanopartículas de  $Gd_2O_2S : EU^{3+}$ . Con el detector de rayos X se obtiene un sinograma correspondiente a la parte estructural y el fotodetector permite obtener el sinograma de la señal luminiscente.

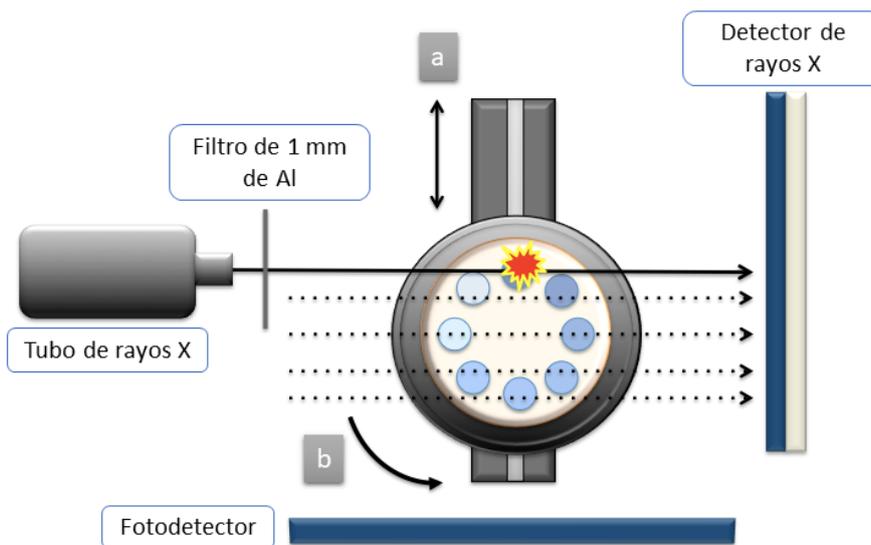


Figura 4.1: Instrumentación de un prototipo para TORX. Las letras “a” y “b” indican las platinas de traslación y rotación, respectivamente.

#### 4.2.1. Simulación numérica.

Una de las ventajas de la TORX es que ésta puede ser modelada numéricamente de manera muy precisa por medio de simulaciones Monte Carlo como se detalla en [Li et al., 2014] y en [González, 2015]. Las simulaciones pretenden modelar un sistema cuya instrumentación es la que aparece en la figura 4.1.

La idea básica de la simulación es que el transporte de radiación tanto ionizante como de luz, puede ser modelado como la historia de fotones que siguen una se-

cuencia aleatoria de vuelos libres interactuando con la materia por medio de varios mecanismos como dispersión Compton, producción de pares, efecto fotoeléctrico, etc. Estos eventos de interacción, así como las trayectorias de los fotones, se pueden conocer de manera muy precisa con métodos de Monte Carlo. Así, es posible simular lo que pasa con un haz infinitamente colimado de rayos X en su paso a través de un medio cualquiera.

Las simulaciones del sistema de Tomografía Óptica de Luminiscencia Estimulada por Rayos X se realizan en *dos etapas*: la **primer etapa** modela el transporte de la radiación ionizante dentro de un tejido (en este caso se utilizaron varios maniquís), brindando información de cómo se depositó y distribuyó la energía de los haces de rayos X y la **segunda etapa** modela el transporte de la luz que es generada por las partículas luminiscentes. Así, ambas etapas permiten obtener un sinograma de la atenuación de rayos X y de la actividad luminiscente, respectivamente. A continuación se describe brevemente cada una de ellas.

La **etapa de transporte de radiación** simula las trayectorias e interacciones de los fotones de los haces de rayos X que pasan a través de un determinado cuerpo o maniquí. Las simulaciones utilizan el código PENELOPE 2008 ([Salvat et al., 2009]) que permite simular el transporte de radiación en materiales arbitrarios y en un amplio rango de energía. El programa principal que utiliza las rutinas y subrutinas de PENELOPE fue desarrollado en [Rodríguez-Villafuerte and Martínez-Dávalos, 2011] y calcula lo siguiente

1. La distribución de la energía depositada por fotones y sus interacciones en los diferentes maniquís utilizados.
2. La contribución de la dosis total de radiación primaria y la radiación dispersada.
3. Los rayos X transmitidos incidentes en el detector de rayos X (sinograma estructural).

Estos cálculos son hechos en función de una serie de parámetros de entrada con los que las rutinas hacen las simulaciones correspondientes. Los parámetros deben incluir lo siguiente:

1. Espectros de energía del tubo de rayos X que se utiliza para irradiar el maniquí.
2. La geometría, forma, dimensiones y materiales del maniquí, incluyendo la distribución espacial de las partículas luminiscentes del maniquí.
3. Coeficientes de atenuación de los materiales del maniquí y secciones eficaces de interacción.
4. Parámetros de la instrumentación del CT, como la energía máxima de rayos X, el tamaño de los pixeles, la geometría de haz, ángulos y posiciones de proyección etc.

La **etapa del transporte de luz** consiste en obtener el sinograma óptico correspondiente a la señal luminiscente. En función de la distribución espacial de las

partículas luminiscentes y de la distribución de energía obtenida en la primera etapa, esta parte de la simulación calcula en dónde se produce la luz luminiscente y posteriormente integra la luz a lo largo de todas las posiciones y ángulos correspondientes para obtener el sinograma óptico.

Cabe mencionar que la validez de este tipo de simulaciones ha sido evaluada haciendo comparaciones con datos reales obtenidos a partir de experimentos realizados con instrumentaciones como las de la figura 4.1 ([Rodríguez-Villafuerte and Martínez-Dávalos, 2011], [González, 2015]).

#### 4.2.2. Descripción de los maniquís utilizados

La Asociación Nacional de Manufacturas Eléctricas (NEMA), es la asociación líder en la estandarización de equipos eléctricos e imagenología médica. El estándar NEMA NU 4-2008 es un maniquí desarrollado para evaluar el desempeño de micro sistemas clínicos PET [NEMA, 2008]. El maniquí está hecho de polimetilmetacrilato (PMMA). Este maniquí permite también hacer pruebas en la modalidad TORX pues su diseño permite que se introduzca material luminiscente como se aprecia en las siguientes figuras. En la simulación numérica de estos maniquís se utilizó una concentración uniforme de material luminiscente.

La figura 4.2 muestra un par de fotografías del maniquí y la figura 4.3 muestra las especificaciones y dimensiones del maniquí. Las 3 secciones transversales que se aparecen en la figura 4.3 se tomarán como maniquís individuales para la aplicación de las ideas desarrolladas en esta tesis y se denominarán NEMA HC para la sección transversal A-A, NEMA IQ para la sección transversal B-B y NEMA UN para la sección transversal C-C (figura 4.5).

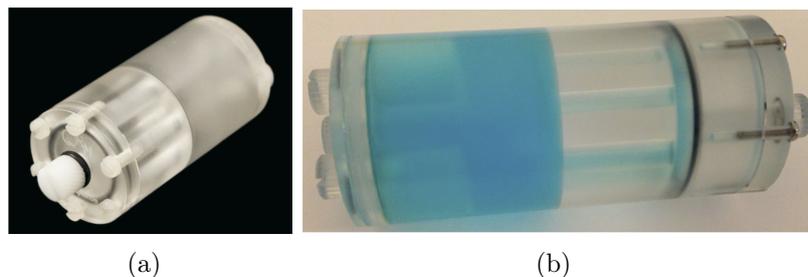


Figura 4.2: Fotografías del maniquí NEMA NU 4-2008. Como se muestra en la fotografía (b), el maniquí se puede rellenar con una sustancia líquida que puede ser el material luminiscente empleado en TORX.

También se trabajó con el maniquí micro Derenzo [Derenzo et al., 1977], [Cox et al., 2016]. Este maniquí también puede ser llenado de material luminiscente y en las simulaciones hechas, se utilizó una concentración uniforme en los cilindros pequeños cuyos diámetros y dimensiones aparecen en la figura 4.4 y al igual que el maniquí NEMA NU 4-2008 está hecho de PMMA.

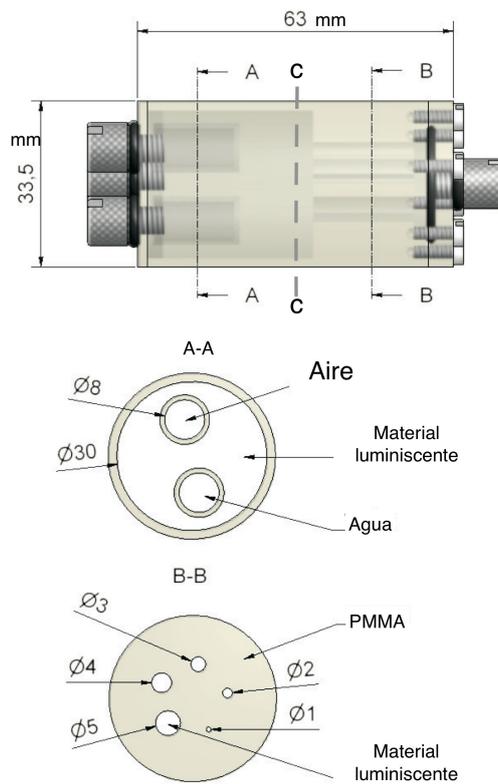


Figura 4.3: Las unidades de los diámetros de las cavidades circulares que aparecen en las secciones transversales A-A y B-B están en mm. La sección transversal C-C corresponde a una región de uniformidad (disco uniforme de material luminiscente) con diámetro de 30 mm.

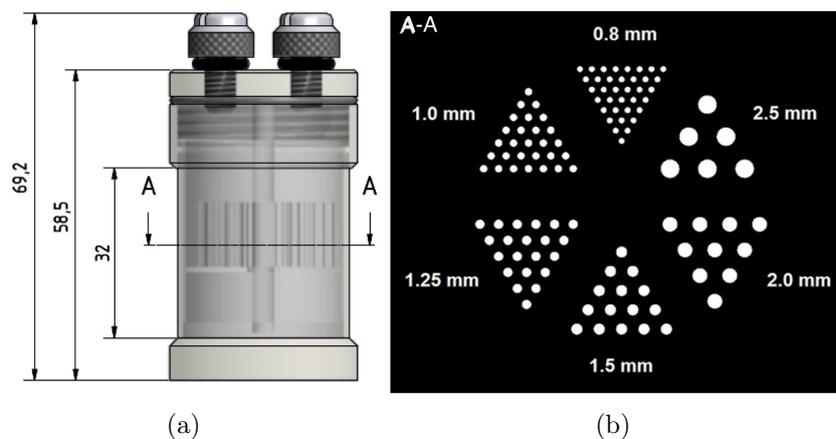


Figura 4.4: (a) Diagrama del maniquí Derenzo. Los diámetros mostrados están en mm. (b) Sección transversal A-A. Los círculos pequeños se rellenan de material luminiscente y la zona negra es PMMA.

### 4.2.3. Datos utilizados, imágenes de referencia y elección de parámetros

Las simulaciones que produjeron los sinogramas ópticos utilizados se hicieron con dos distintas **resoluciones de muestreo**. La resolución de muestreo corresponde a la distancia recorrida entre desplazamientos del haz colimado de rayos X (esto corresponde en la figura 4.1, a los desplazamientos en la dirección vertical del tubo de rayos X). La primera resolución utilizada fue la de una separación de 1 mm entre cada posición del haz con 35 posiciones (o equivalentemente 35 rayos utilizados) en total. La segunda resolución corresponde a un haz de 69 posiciones (o equivalentemente 69 rayos utilizados) separadas 0.5 mm.

#### Resolución de muestreo de 1 mm.

Para la resolución de muestreo de 1 mm, se utilizaron 36 ángulos de proyección equiespaciados en el intervalo angular  $[0, 2\pi]$ . Las reconstrucciones obtenidas corresponden a imágenes tomográficas de  $35 \times 35$  píxeles. En este caso solamente se trabajó con los maniquís NEMA HC y NEMA IQ. Se utilizó únicamente una imagen de referencia para el caso de NEMA HC para elegir los parámetros de los algoritmos siguiendo la metodología descrita en el capítulo 3. Debido a que para el caso de NEMA IQ no se contaba con una imagen de referencia, los parámetros óptimos encontrados para NEMA HC fueron los que se utilizaron para reconstruir la imagen NEMA IQ.

#### Resolución de muestreo de 0.5 mm.

Cuando la distancia entre rayos correspondió a 0.5 mm, se trabajó con dos conjuntos de ángulos de proyección. Ambos en el intervalo  $[0, 2\pi]$ . El primer conjunto fue el mismo que en el caso de 1 mm, 36 ángulos equiespaciados mientras que el segundo fue de 18 ángulos equiespaciados (más adelante se discutirá la razón de por qué se trabajó con ambos conjuntos de proyecciones). Esta separación entre rayos corresponde a imágenes reconstruidas de  $69 \times 69$  píxeles.

Para esta resolución se contaba con tres imágenes de referencia, una para cada maniquí (NEMA HC, NEMA IQ y NEMA UN). Con ellas se siguió la metodología propuesta en el capítulo 3 para la optimización de parámetros para ambos conjuntos de ángulos de proyección. Para el maniquí Derenzo no se contó con imagen de referencia.

Debido que en ambas resoluciones de muestreo (1 mm y 0.5 mm) las imágenes reconstruidas son muy pequeñas, para poder mostrar los resultados obtenidos se utilizaron herramientas del programa ImageJ para reescalar las imágenes a una resolución espacial de  $256 \times 256$  píxeles utilizando una interpolación bilinear y también se cambió el LUT (Lookup table, que es la asignación de colores o escalas de gris a los valores de pixel también llamado color map) de “Gray” a “Fire”; ambas escalas están incluidas en las herramientas de ImageJ. En la figura 4.5 se muestran las 4 imágenes de referencia utilizadas.

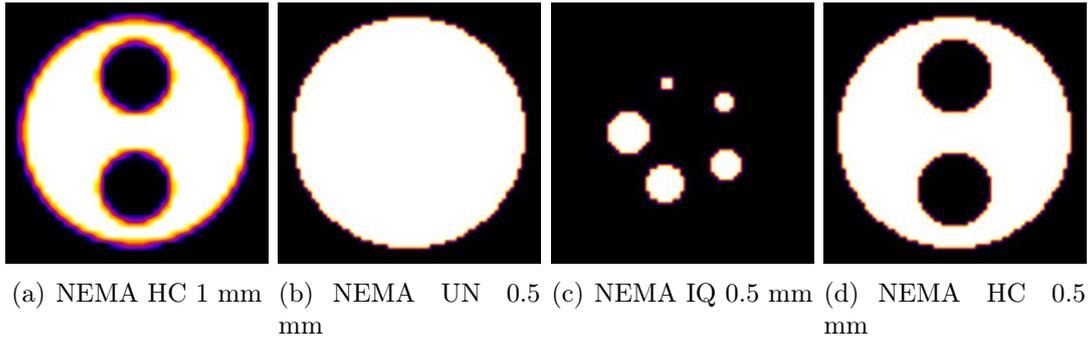


Figura 4.5: Imágenes de referencia

#### 4.2.4. Resultados

En todos los casos que siguen, para reconstruir las imágenes luminiscentes a partir de los sinogramas ópticos, se utilizaron 30 iteraciones SIRT/MLEM y 100 iteraciones Split Bregman y también se fijó el parámetro de relajación para SIRT en  $\lambda = 1.99$ . Esto fue debido a que la convergencia a valores pequeños de MSE se daba mucho más rápido en términos del número de iteraciones porque son imágenes mucho más pequeñas que en los casos de las imágenes de  $256 \times 256$  píxeles.

##### Respecto a la reproducibilidad de los resultados.

Al igual que con los maniqués sintéticos, y a pesar de que los sinogramas ópticos son generados a partir de simulaciones Monte Carlo, en los resultados mostrados en este capítulo se omite el uso de incertidumbres y barras de error. Esto es debido a que las mediciones extraídas de las reconstrucciones, son medidas repetibles si se trabaja con un sinograma inicial fijo y bajo las mismas condiciones de hardware (descritos previamente) y precisión numérica de las variables.

#### Resolución de muestreo de 1 mm

##### NEMA HC 1 mm

El primer paso para la optimización de parámetros fue determinar el divisor  $d$  a utilizar. Las gráficas de la figura 4.6 muestran los resultados obtenidos para los algoritmos SIRT+TV y MLEM+TV. En ambos casos se determinó que el divisor que arrojaba las mejores reconstrucciones fue  $d = 1$ .

Después de determinar que el divisor a utilizar sería  $d$ , lo siguiente fue hacer un barrido de parámetros de regularización  $\mu$ . Las gráficas de la figura 4.7 muestran los resultados obtenidos. Las gráficas (b) y (d) son las mismas gráficas que las que aparecen en (a) y (c) pero en un intervalo restringido para localizar con mejor precisión los parámetros de regularización debido a que el barrido tuvo que hacerse en intervalos con valores muy grandes del orden de  $10^5$ . Esta fue una de las principales diferencias con las imágenes de tomografía convencional de rayos X. Los parámetros de regularización óptimos encontrados con este análisis fueron

$$\mu_{SIRT} = 4.7374 \times 10^5 ; \mu_{MLEM} = 1.0160 \times 10^5$$

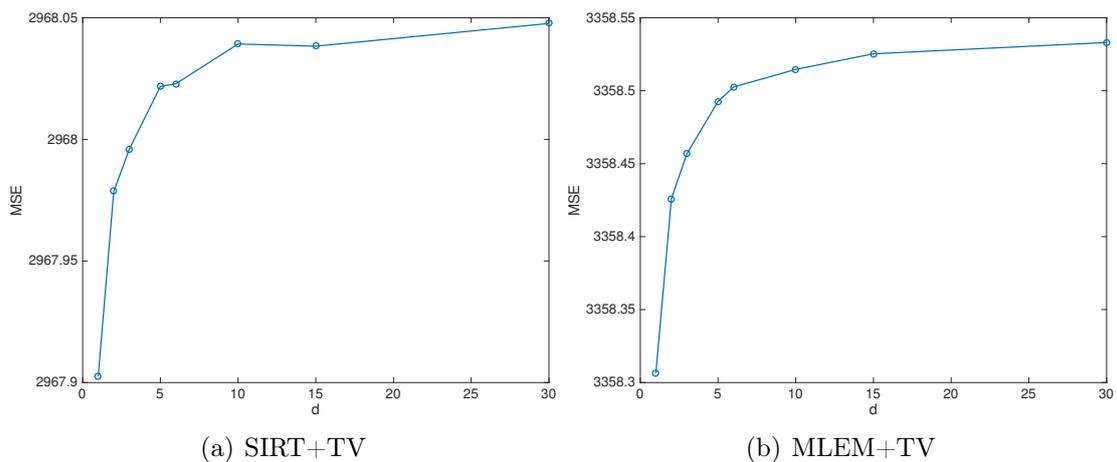


Figura 4.6: Elección de parámetro  $d$  para NEMA HC 1 mm.

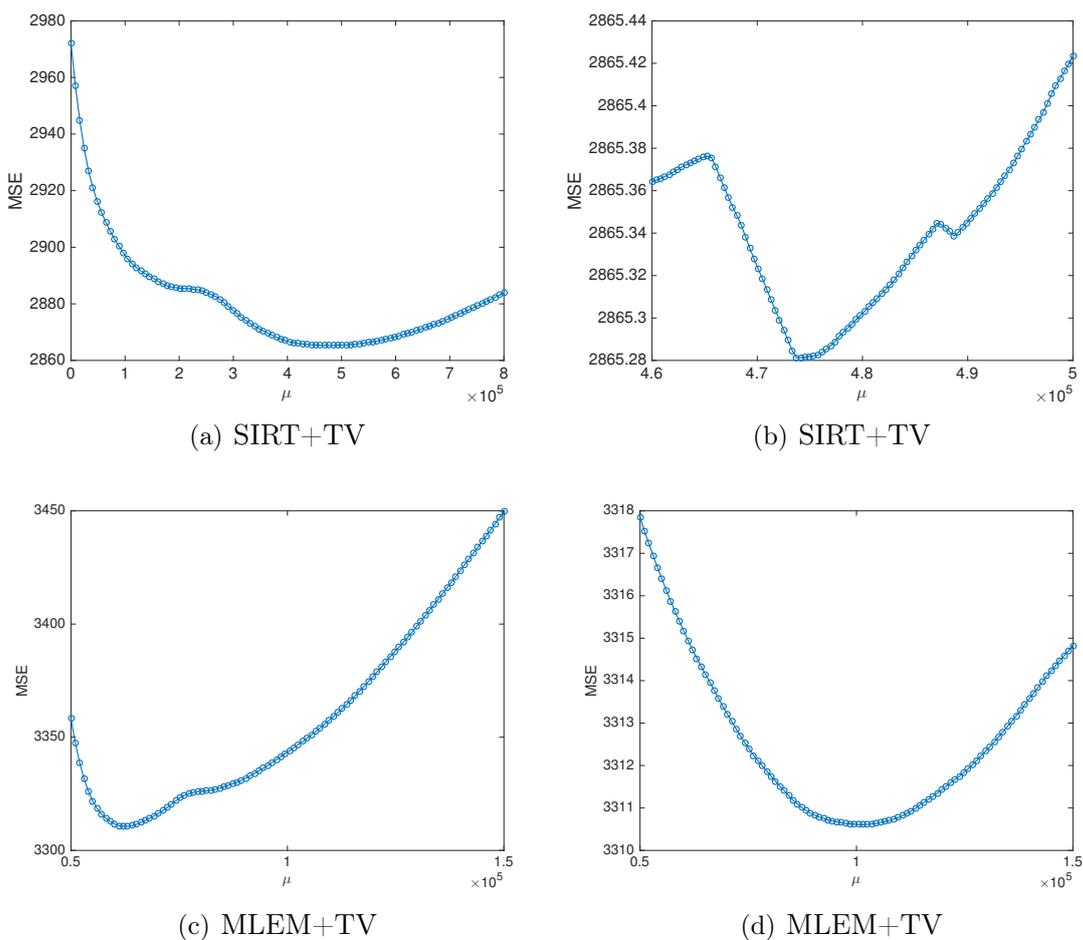


Figura 4.7: Elección de parámetro de regularización  $\mu$  para nema HC 1mm. La gráfica de la figura (b) es un aumento de la figura (a) en un intervalo restringido de valores para los parámetros de regularización. De igual forma la figura (d) es un aumento de la figura (c).

obteniendo con ellos unos valores de MSE mínimos de

$$MSE_{SIRT} = 2.8652 \times 10^3 ; MSE_{MLEM} = 3.3106 \times 10^3$$

Las reconstrucciones obtenidas con estos parámetros de regularización para SIRT y MLEM aparecen en la figura 4.8. Para evaluar la calidad de las reconstrucciones, se recurre nuevamente a la herramienta de ver los perfiles de intensidad a lo largo de líneas así como se hizo con los maniqués del capítulo 3. En este caso se compararon las líneas verticales y horizontales de los maniqués a lo largo de los perfiles del renglón 128 y de la columna 128 una vez reescalada la imagen a  $256 \times 256$  píxeles, usando ImageJ. Estos perfiles de intensidad aparecen en la figura 4.9. También se muestran los perfiles obtenidos con los algoritmos SIRT y MLEM sin regularización por variación total.

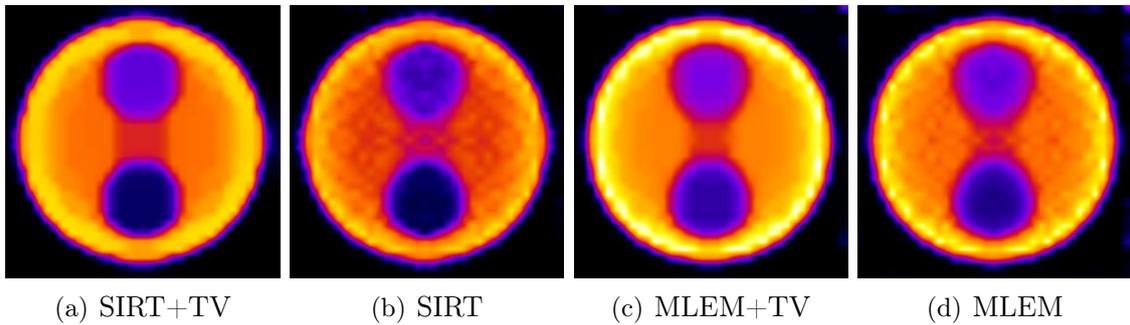


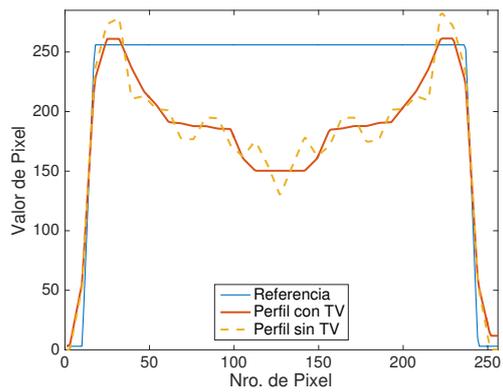
Figura 4.8: Reconstrucciones obtenidas para el maniqué NEMA HC con 1 mm de resolución de muestreo. (a) Reconstrucción con SIRT utilizando la regularización por TV con  $\mu = 4.7374 \times 10^5$ . (b) Reconstrucción utilizando SIRT sin regularización. (c) Reconstrucción con MLEM utilizando la regularización por TV con  $\mu = 1.0160 \times 10^5$ . (d) MLEM sin regularización.

Se puede apreciar en los perfiles de intensidad, que la calidad de la reconstrucción aumenta al aplicar la regularización por variación total. Si bien los perfiles mostrados en las líneas de color rojo no se acercan mucho al perfil azul (imagen de referencia), sí se logran suavizar las fluctuaciones (ruido) que se ven en las líneas doradas correspondientes a los perfiles que no tienen la regularización por variación total. Al observar también las imágenes reconstruidas y compararlas con la imagen de referencia, sí se distingue una mejor calidad en la reconstrucción en la imagen regularizada. También en la imagen regularizada se alcanza a distinguir mayor uniformidad en las zonas circulares que no contienen material luminiscente y se aprecia de mejor forma que éstas zonas corresponden a dos materiales distintos que atenúan la luz con distinta intensidad.

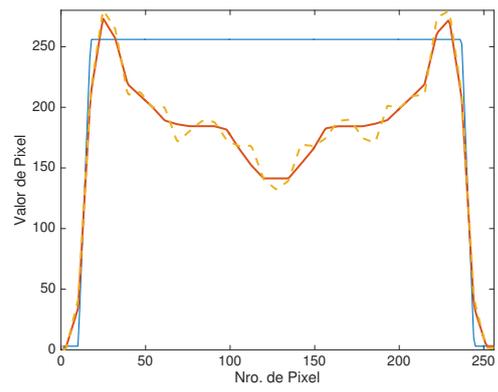
### NEMA IQ 1 mm

En este caso no se contaba con una imagen de referencia para este maniqué, pero sí con el sinograma para esta resolución utilizando 36 ángulos de proyección. Debido a la falta de imagen de referencia no se pudo encontrar un parámetro de regularización específico para este maniqué ni evaluar el MSE; por ello se utilizaron los parámetros de regularización óptimos que se obtuvieron para NEMA HC de 1 mm. Las reconstrucciones usando SIRT y MLEM aparecen en la figura 4.10.

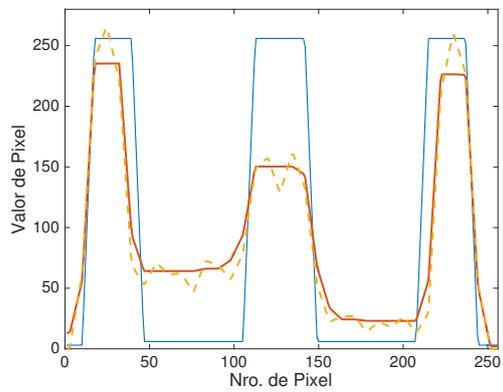
Para el caso del maniqué NEMA IQ, se observaron los perfiles de intensidad a lo largo de la línea amarilla que aparece en la figura 4.11(a). Esto fue debido a que



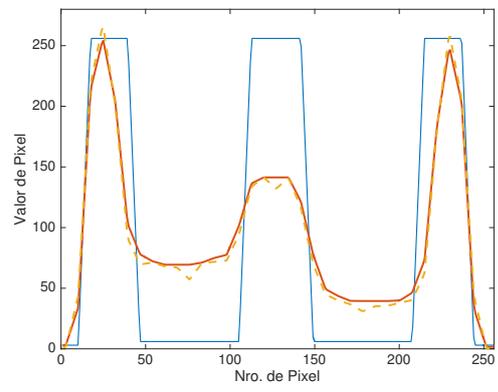
(a) SIRT



(b) MLEM



(c) SIRT



(d) MLEM

Figura 4.9: Perfiles de intensidad maniquí NEMA HC con 1 mm de resolución de muestreo. (a) y (b) Perfiles horizontales. (c) y (d) perfiles verticales. La descripción de las líneas en el recuadro de la figura (a) es la misma para el resto de los perfiles.

esa línea intersecta más píxeles en donde hay material luminiscente que las líneas usadas para el maniquí NEMA HC y NEMA UN.

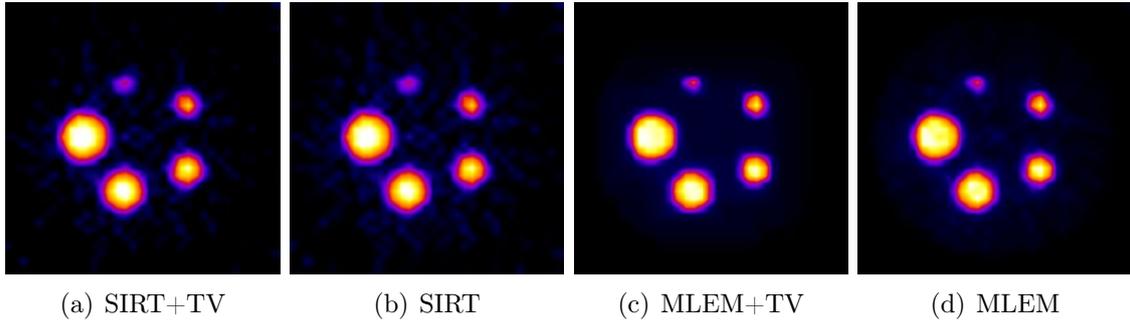
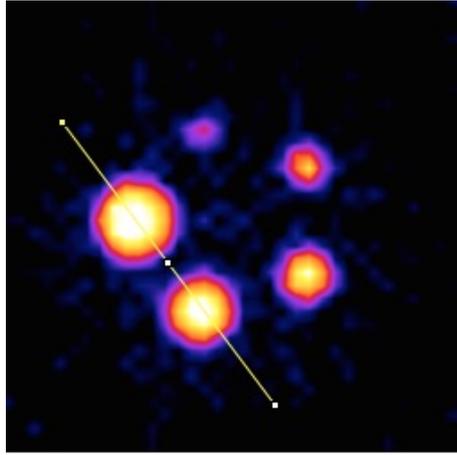
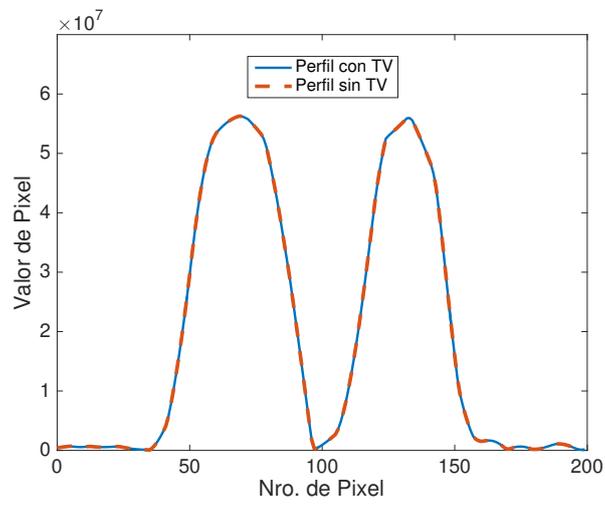


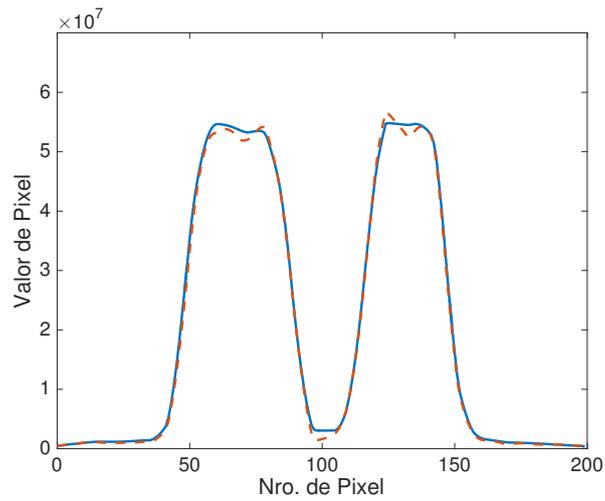
Figura 4.10: Reconstrucciones para el maniquí NEMA IQ con 1 mm de resolución de muestreo.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.11: Perfiles de intensidad. (a) La línea amarilla es la línea sobre la cual se midieron los perfiles de intensidad. (b) SIRT. (c) MLEM. La descripción de las líneas del recuadro en (b) es la misma para (c)

Se puede hacer un análisis en particular de este maniquí similar al que se lleva a cabo para obtener los coeficientes de recuperación (CR) en sistemas de tomografía por emisión de positrones (PET). La gráfica de los coeficientes de recuperación es una técnica que estima el coeficiente de la actividad medida en el sistema de imagen y la actividad real como función del tamaño de los objetos. Los coeficientes de recuperación muestran la intensidad promedio de radiación emitida normalizada al valor máximo en función del diámetro de la referencia. Idealmente, al ser homogéneas las zonas en las que hay material luminescente, todos los coeficientes de recuperación deberían ser iguales a 1. Sin embargo como las reconstrucciones muestran que las zonas circulares del maniquí NEMA IQ no son homogéneas, se espera que los coeficientes de recuperación sean menores a 1 (a esto se le conoce como efecto parcial del volumen), y un criterio de evaluación de la reconstrucción, sería el obtener una curva que tenga los coeficientes más cercanos a 1 posibles. Este criterio de evaluación es útil ya que no depende de una imagen de referencia para comparar la calidad de la reconstrucción.

La manera de medir los coeficientes de recuperación que se utilizó en esta tesis fue tomar 5 regiones de interés correspondientes a las zonas de irradiación del maniquí NEMA IQ. Luego se mide el valor promedio de la intensidad de cada una de estas regiones y se normaliza respecto al valor promedio de la zona de mayor diámetro. Posteriormente se grafican estos coeficientes en función del diámetro. Para ilustrar el concepto, las regiones de interés (ROI, del inglés *region of interest*) se muestran sobre la imagen de referencia para la resolución de muestreo de 0.5 mm en la figura 4.12, así como su respectiva curva de CR.

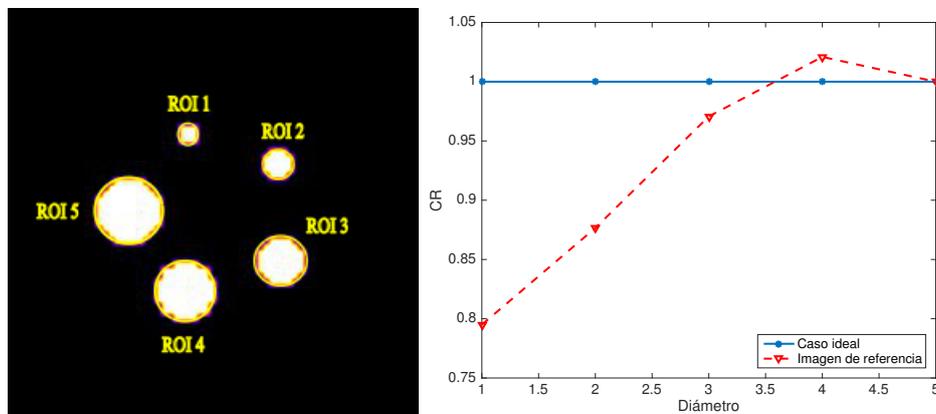


Figura 4.12: (a) Regiones de interés para calcular los coeficientes de recuperación sobre la imagen de referencia para la resolución de muestreo de 0.5 mm del maniquí NEMA IQ. (b) Coeficientes de recuperación para la imagen de referencia y el caso ideal

Para el caso de las reconstrucciones del maniquí NEMA IQ en esta resolución de muestreo de 1 mm, las curvas de los coeficientes de recuperación se muestran en la figura 4.13.

Si bien las curvas que se obtuvieron para el caso regularizado no cambian mucho respecto a los casos sin regularizar, sí se nota una ligera tendencia a que la regularización ayuda a que los CR aumenten. Esto es lo que se esperaba que hiciera la regularización para poder decir que la calidad de las reconstrucciones mejora al regularizarse. Para comparar entre SIRT y MLEM se puede observar las mismas curvas

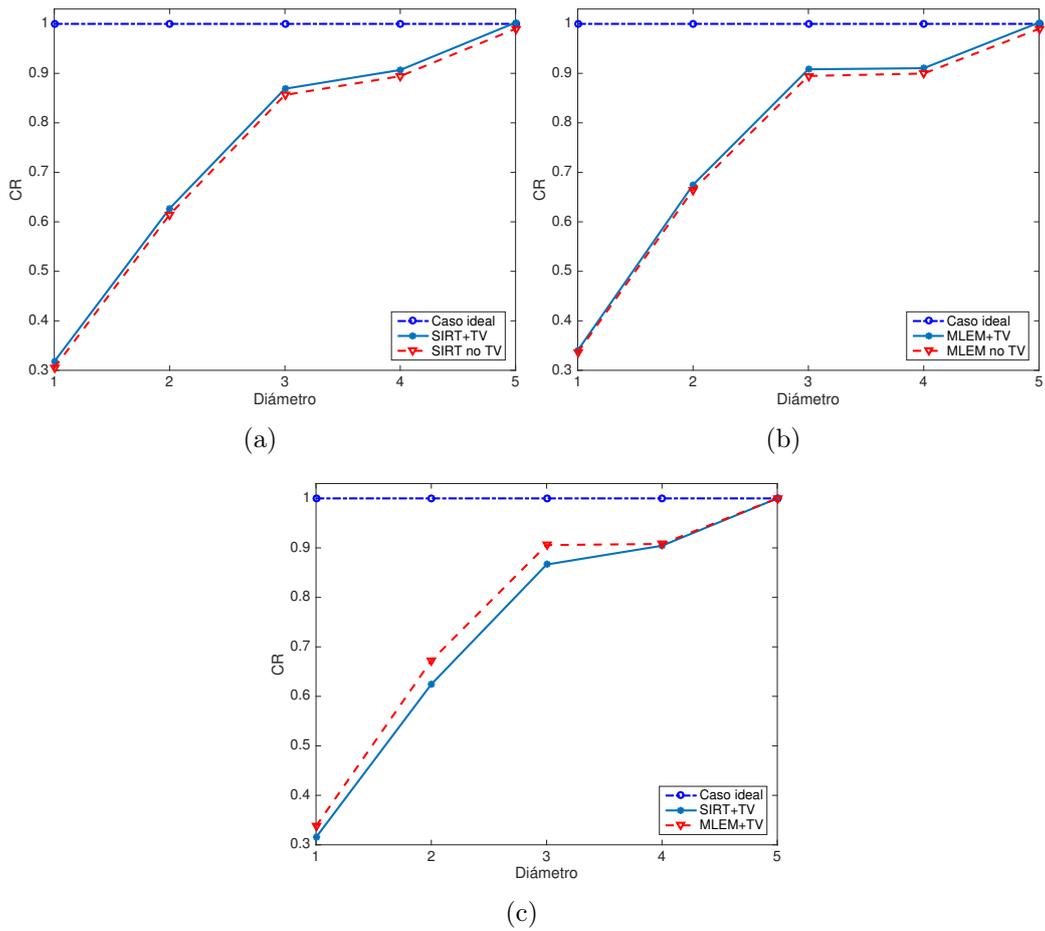


Figura 4.13: Coeficientes de recuperación para el maniquí NEMA IQ con resolución de muestreo de 1 mm. (a) SIRT (b) MLEM. (c) Comparación entre MLEM y SIRT.

en la figura 4.13(c). Los coeficientes de recuperación en el caso de MLEM están un poco más cerca del caso ideal pero se cree que no es una mejora lo suficientemente evidente como para poder concluir que MLEM se desempeña mejor en este caso. Esto es debido a que las mediciones de las intensidades luminosas en las ROI son muy sensibles a los tamaños de las imágenes reconstruidas y sus respectivos cambios de escala espacial.

## Resolución de muestreo de 0.5 mm

Utilizando las imágenes de referencia (b), (c), y (d) de la figura 4.5 se implementaron los dos pasos principales para la elección de parámetros ( $d$  y  $\mu$ ) para estos tres maniquís. En cuanto a la elección del parámetro de regularización, se hizo un barrido en intervalos grandes y posteriormente se acotaron los intervalos en los cuales se buscaban los parámetros óptimos. Las gráficas que se muestran a continuación corresponden a los intervalos acotados y no se muestran los intervalos grandes en los cuales se buscó inicialmente el parámetro de regularización.

También es importante recalcar que el parámetro  $d$  óptimo que se encontró para estos tres maniquís fue  $d = 1$ . Se omite la presentación de estas gráficas debido a que en todos los casos la forma de estas gráficas fue la misma que la que aparece en la figura 4.6.

### NEMA HC 0.5 mm

Los parámetros óptimos ( $\mu_{op}$ ) encontrados utilizando el análisis de las gráficas de la figura 4.14 fueron

$$\mu_{SIRT} = 1.2322 \times 10^6; \quad \mu_{MLEM} = 5.0000 \times 10^5,$$

mientras que los MSE mínimos obtenidos fueron

$$MSE_{SIRT} = 0.02856; \quad MSE_{MLEM} = 0.03940.$$

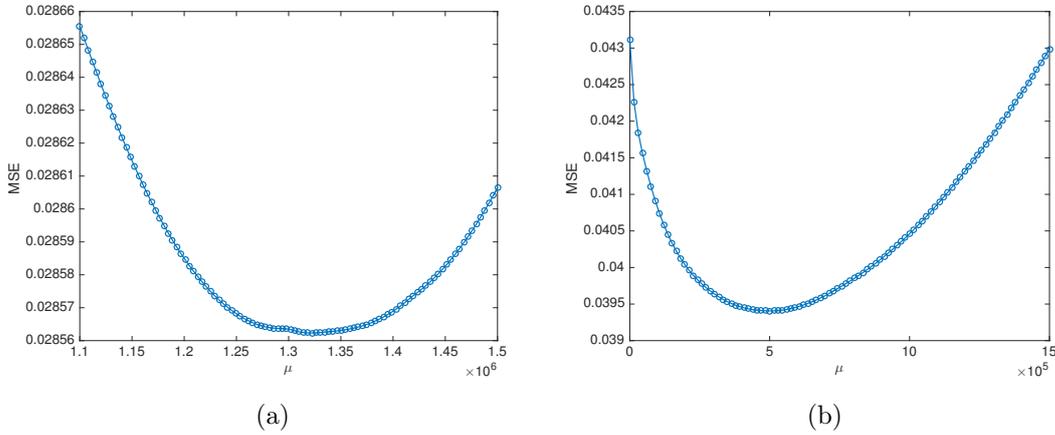


Figura 4.14: Elección de parámetro de regularización para el maniquí NEMA HC con resolución de muestreo de 0.5 mm. (a) SIRT:  $\mu_{op} = 1.2322 \times 10^6$ ,  $MSE_{min} = 0.02856$ . (b) MLEM:  $\mu_{op} = 5.0000 \times 10^5$ ,  $MSE_{min} = 0.03940$ .

Las reconstrucciones con estos parámetros de regularización así como las imágenes reconstruidas sin utilizar la regularización por variación total se muestran en la figura 4.15. Los perfiles de intensidad medidos sobre el renglón 128 y la columna 128 correspondientes, aparecen en la figura 4.16.

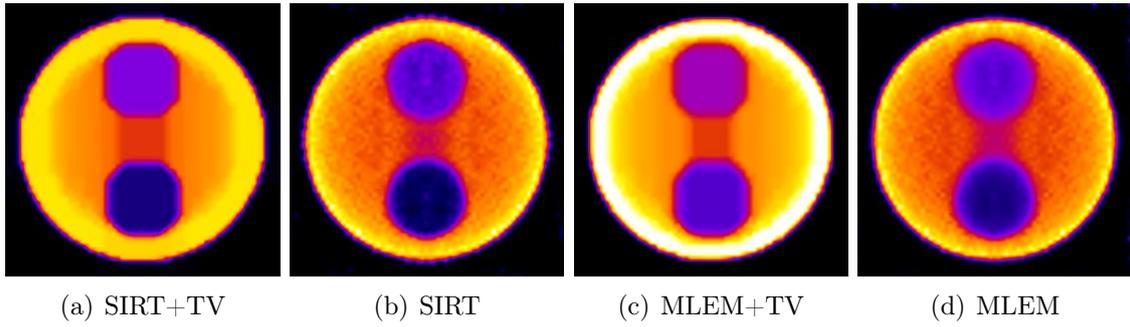


Figura 4.15: Reconstrucciones para el maniquí NEMA HC con resolución de muestreo de 0.5 mm.

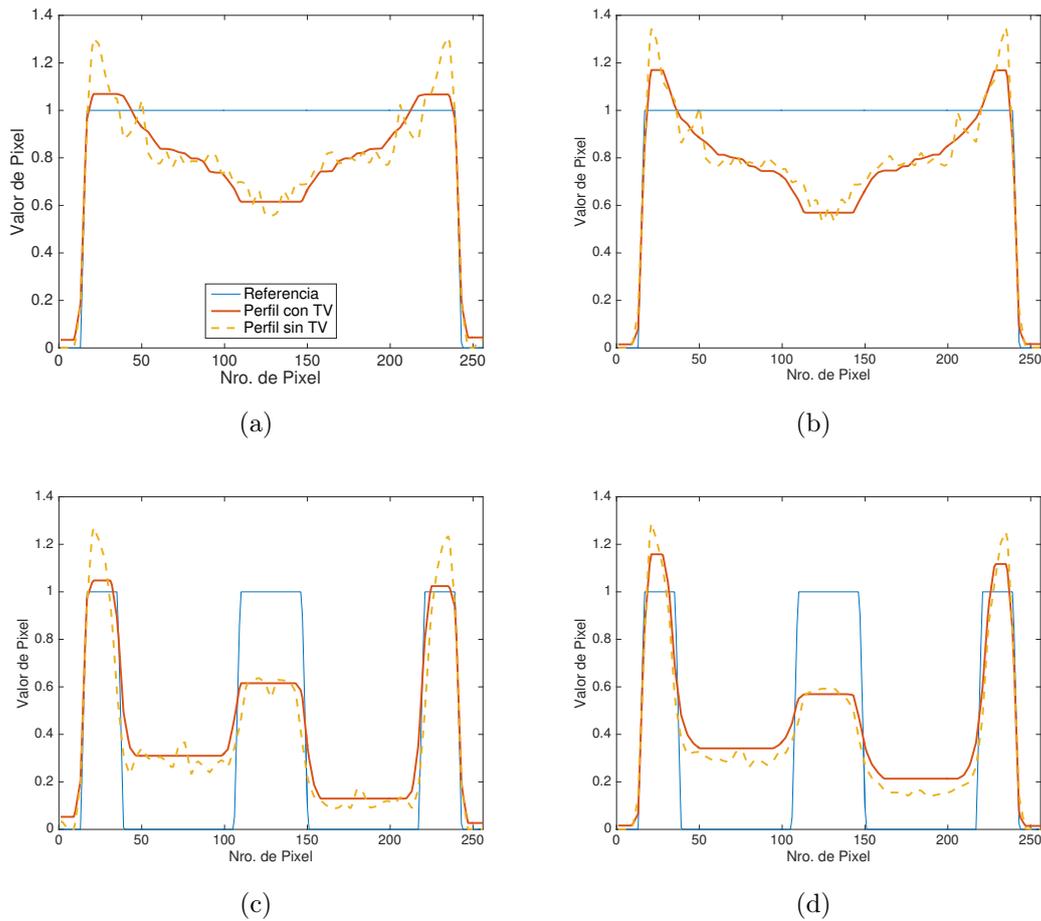


Figura 4.16: Perfiles de intensidad para el maniquí NEMA HC con resolución de muestreo de 0.5 mm. (a) y (b) perfiles horizontales. (c) y (d) perfiles verticales. La descripción de las líneas en el recuadro de la figura (a) es la misma para el resto de los perfiles.

## NEMA IQ 0.5 mm

Para el maniquí NEMA IQ los parámetros óptimos encontrados utilizando el análisis de las gráficas de la figura 4.17 fueron

$$\mu_{SIRT} = 7.9545 \times 10^4; \quad \mu_{MLEM} = 1.2424 \times 10^5,$$

mientras que los MSE mínimos obtenidos fueron

$$MSE_{SIRT} = 0.00836; \quad MSE_{MLEM} = 0.00781.$$

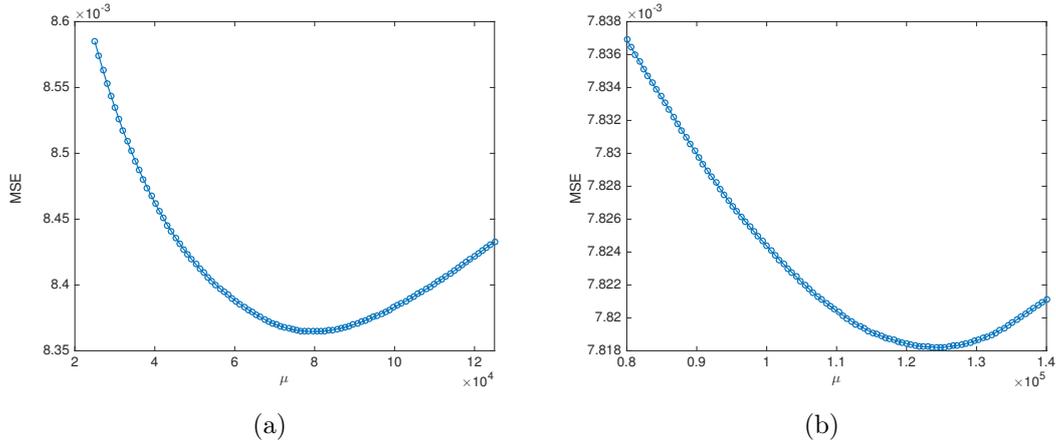


Figura 4.17: Elección de parámetro de regularización para el maniquí NEMA IQ con resolución de muestreo de 0.5 mm. (a) SIRT:  $\mu_{op} = 7.9545 \times 10^4$ ,  $MSE_{min} = 0.00836$ . (b) MLEM:  $\mu_{op} = 1.2424 \times 10^5$ ,  $MSE_{min} = 0.00781$ .

Aquí, las reconstrucciones con estos parámetros de regularización así como las imágenes reconstruidas sin utilizar la regularización por variación total se muestran en la figura 4.18.

Al igual que en el caso de la resolución de muestreo de 1 mm, los perfiles de intensidad se midieron sobre la línea amarilla que aparece en la figura 4.19(a).

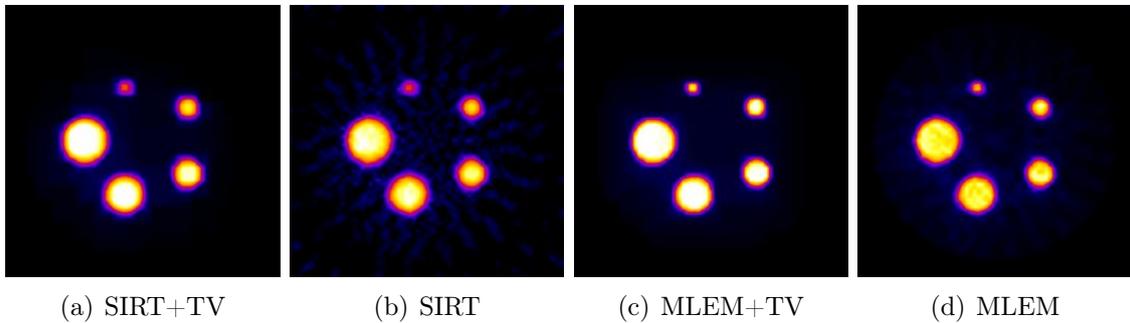
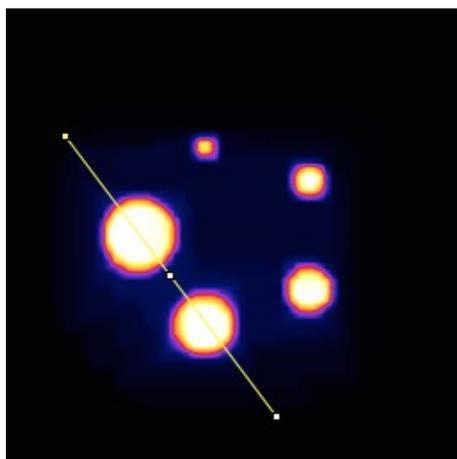
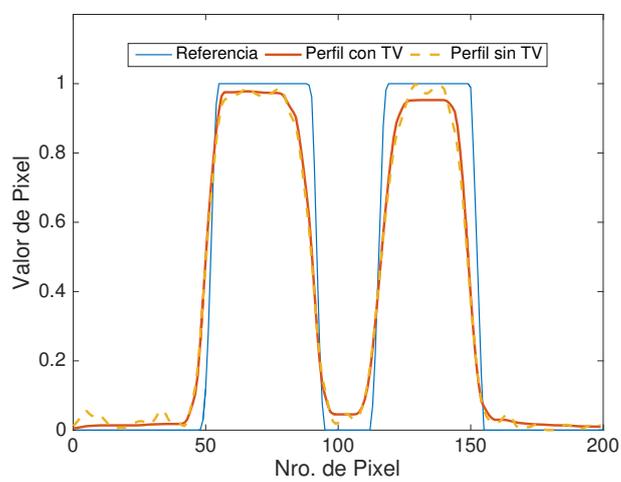


Figura 4.18: Reconstrucciones para el maniquí NEMA IQ con resolución de muestreo de 0.5 mm.

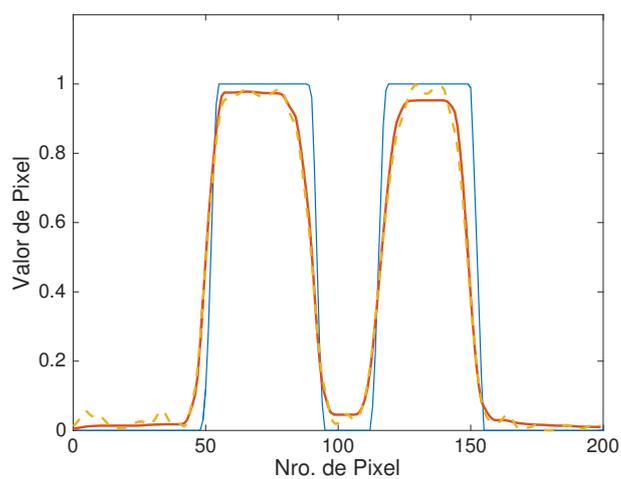
Por otro lado, las curvas de coeficientes de recuperación pueden observarse en la figura 4.20.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.19: Perfiles de intensidad. (a) La línea amarilla es la línea sobre la cual se midieron los perfiles de intensidad. (b) SIRT. (c) MLEM. La descripción de las líneas del recuadro en (b) es la misma para (c)

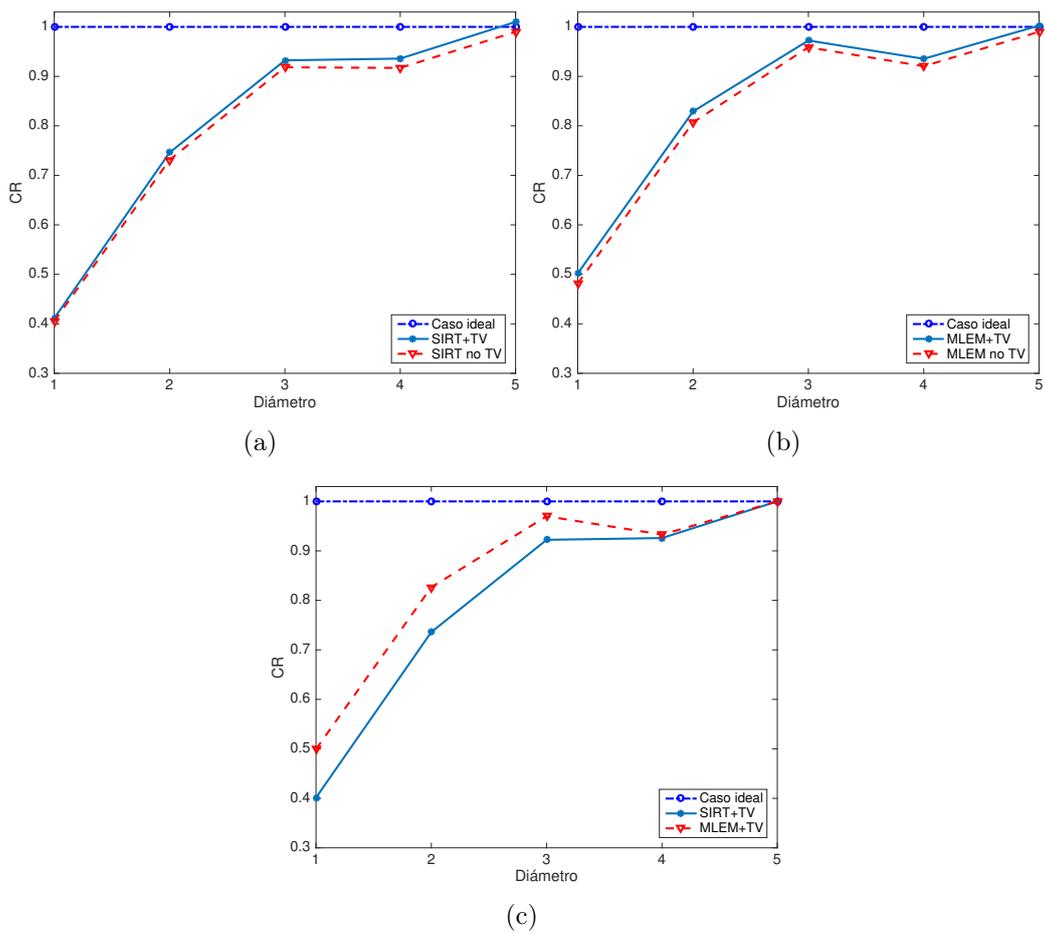


Figura 4.20: Coeficientes de recuperación para el maniquí NEMA IQ con resolución de muestreo de 0.5 mm (a) SIRT (b) MLEM. (c) Comparación entre MLEM y SIRT.

### NEMA UN 0.5 mm

Finalmente los parámetros óptimos encontrados para el maniquí NEMA UN utilizando el análisis de las gráficas de la figura 4.21 fueron

$$\mu_{SIRT} = 4.5606 \times 10^6; \quad \mu_{MLEM} = 2.9696 \times 10^6,$$

mientras que los MSE mínimos obtenidos fueron

$$MSE_{SIRT} = 0.01065; \quad MSE_{MLEM} = 0.01246.$$

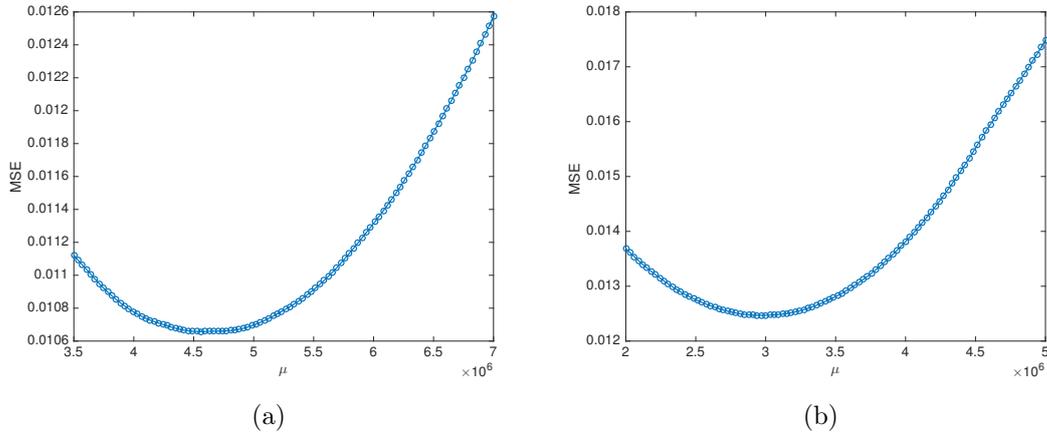


Figura 4.21: Elección de parámetro de regularización para el maniquí NEMA UN con resolución de muestreo de 0.5 mm (a) SIRT:  $\mu_{op} = 4.5606 \times 10^6$ ,  $MSE_{min} = 0.01065$ . (b) MLEM:  $\mu_{op} = 2.9696 \times 10^6$ ,  $MSE_{min} = 0.01246$ .

Las reconstrucciones con estos parámetros de regularización así como las imágenes reconstruidas sin utilizar la regularización por variación total se muestran en la figura 4.22. Los perfiles de intensidad correspondientes aparecen en la figura 4.23.

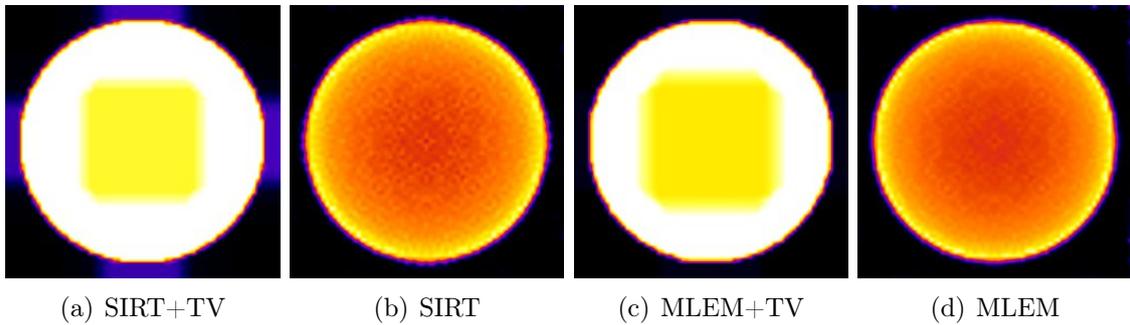
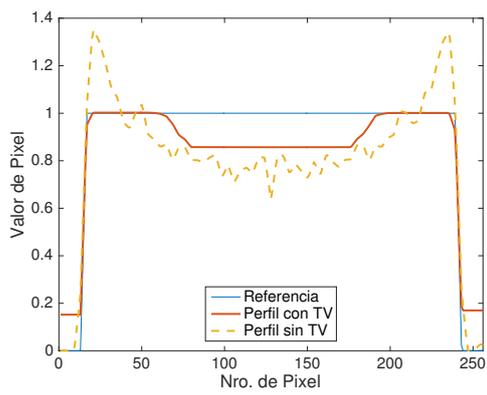
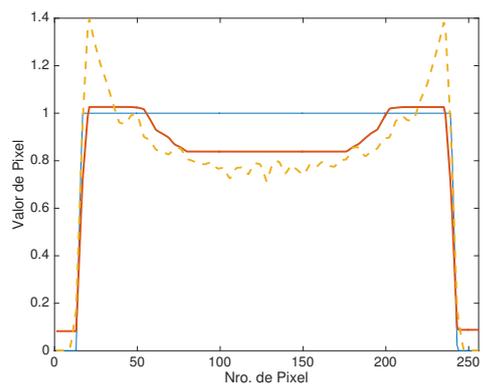


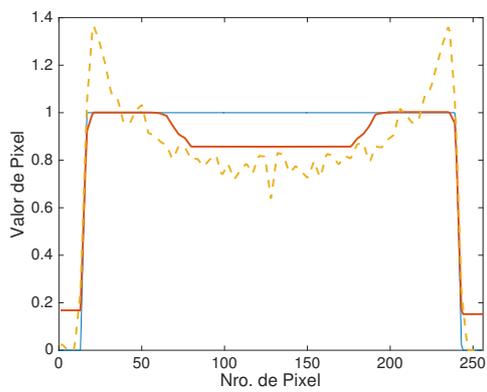
Figura 4.22: Reconstrucciones para el maniquí NEMA UN con resolución de muestreo de 0.5 mm.



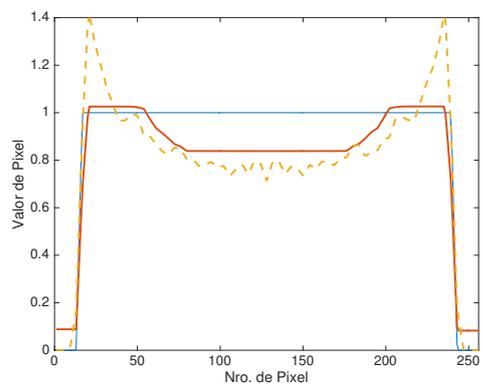
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 4.23: Perfiles de intensidad para el maniquí NEMA UN con resolución de muestreo de 0.5 mm. (a) y (b) perfiles horizontales. (c) y (d) perfiles verticales. La descripción de las líneas en el recuadro de la figura (a) es la misma para el resto de los perfiles.

## Resolución de muestreo de 0.5mm con la mitad de ángulos de proyección.

El propósito de reducir a la mitad la cantidad de ángulos de proyección, es reducir el tiempo de la adquisición de datos. Esto es deseable debido a lo tardado que es el barrido del haz de rayos X a lo largo de todas las proyecciones y posiciones angulares, ya sea de manera física o en la simulación numérica con la que se generaron los sinogramas utilizados en esta tesis.

En la resolución de muestreo de 0.5 mm se tienen el doble de proyecciones que en el caso de la resolución de muestreo de 1 mm pero esto significa que el tiempo de adquisición de datos es el doble (suponiendo que el tiempo de adquisición de datos aumenta linealmente con la cantidad de proyecciones medidas). Si con la resolución de muestreo de 0.5 mm se reducen a la mitad los ángulos de proyección, entonces se tendría la misma cantidad de proyecciones que en el caso de la resolución de muestreo de 1 mm y por tanto el tiempo de adquisición sería el mismo pero con la ventaja de que la resolución de muestreo de 0.5 mm permite reconstruir imágenes de  $69 \times 69$  pixeles en lugar de las imágenes de  $35 \times 35$  pixeles obtenidas con la resolución de muestreo de 1 mm. Al ser imágenes más grandes, las reconstrucciones con la resolución de muestreo de 0.5 mm permiten obtener detalles más finos y por tanto ser de mejor calidad.

Como se ha comentado anteriormente, una de las aportaciones que pretende hacer esta tesis es la de disminuir *los tiempos de adquisición de datos*, es decir, medir menos proyecciones manteniendo o mejorando la calidad de las reconstrucciones que se obtendrían con más datos .

Si se observan las reconstrucciones y los perfiles de intensidad de los maniqués NEMA HC y NEMA IQ con ambas resoluciones de muestreo (figuras 4.8, 4.9, 4.10, 4.11, 4.15, 4.16, 4.18 y 4.19), se puede apreciar claramente que las imágenes de mayor calidad son las correspondientes a la resolución de muestreo de 0.5 mm. Además, los valores de MSE obtenidos para NEMA HC son mucho menores que los de la resolución de muestreo de 1 mm. Esto confirma que usar una resolución más pequeña, ayuda a recuperar más detalles finos de las imágenes.

Así, en esta sección se mostrarán las reconstrucciones correspondientes a la resolución de muestreo de 0.5 mm pero con la condición de que se utilicen la mitad de los ángulos de proyección (ie,  $N_\theta = 18$ ) para ver si en efecto, se logra superar la calidad de las imágenes de de la resolución de muestreo de 1 mm y se mantiene cerca de la calidad de las de 0.5 mm con  $N_\theta = 36$  ángulos de proyección. Posteriormente se presenta una tabla con los todos los resultados obtenidos en estas secciones y se hace una breve discusión que sintetiza todos los resultados mostrados.

**NEMA HC,  $N_\theta = 18$ .**

Se presentan los resultados en el mismo formato en que se presentaron los resultados de las dos secciones anteriores comenzando con las reconstrucciones en la figura 4.25 y después los perfiles de intensidad en la figura 4.26.

Los valores óptimos para los parámetros de regularización después de hacer la búsqueda correspondiente usando las gráficas de la figura 4.24 fueron

$$\mu_{SIRT} = 1.2181 \times 10^6; \quad \mu_{MLEM} = 6.0909 \times 10^5,$$

con los valores de MSE correspondientes:

$$MSE_{SIRT} = 0.03082; \quad MSE_{MLEM} = 0.04169$$

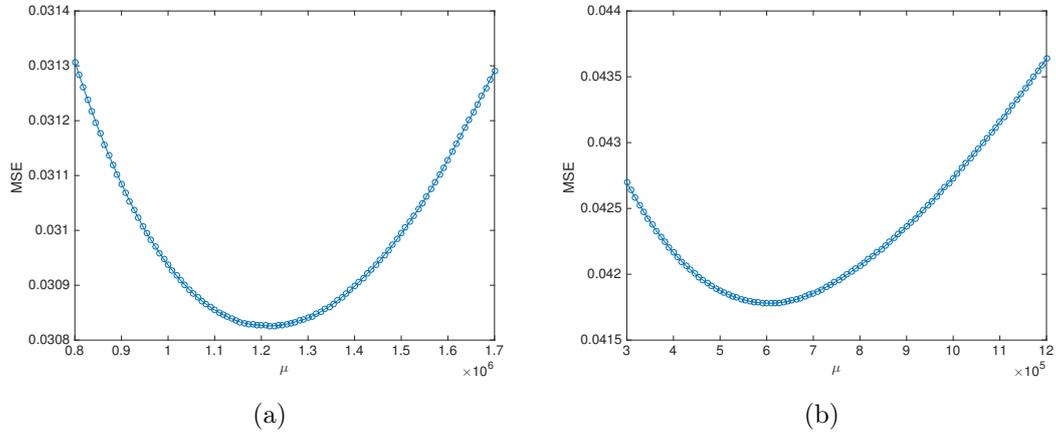


Figura 4.24: Elección de parámetro de regularización para el maniquí NEMA HC con resolución de muestreo de 0.5 mm y  $N_\theta = 18$  (a) SIRT:  $\mu_{op} = 1.2181 \times 10^6$ ,  $MSE_{min} = 0.03082$ . (b) MLEM:  $\mu_{op} = 6.0909 \times 10^5$ ,  $MSE_{min} = 0.04169$ .

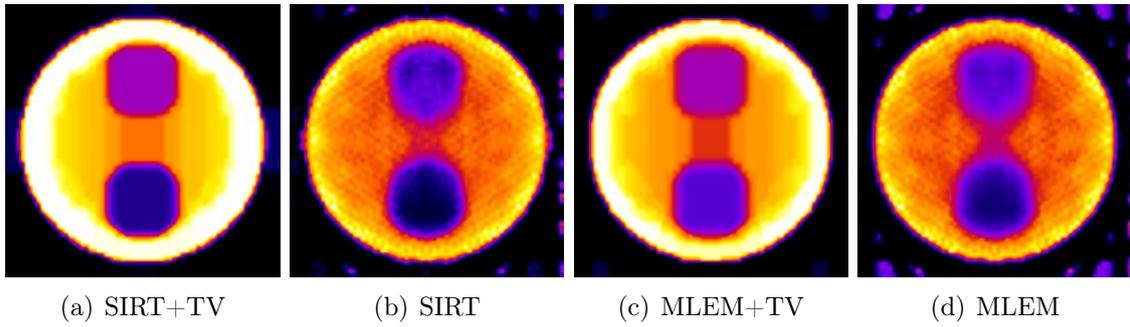
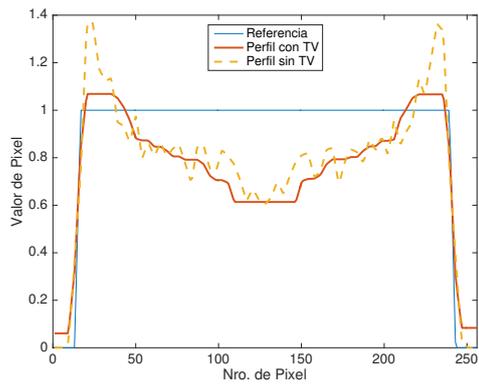
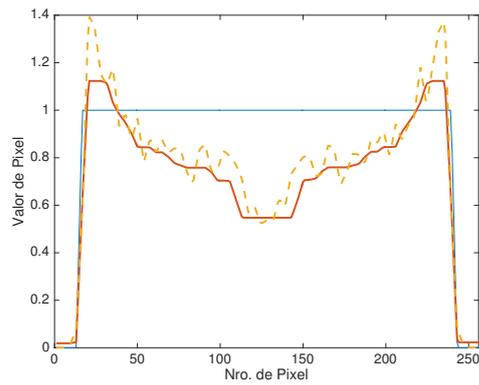


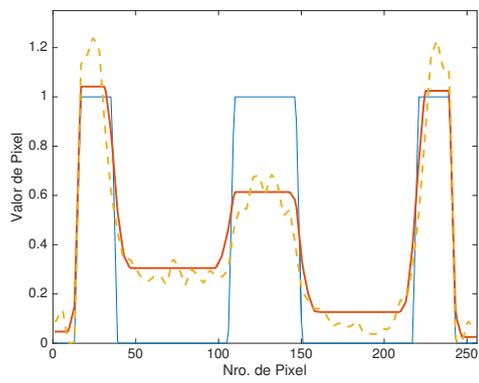
Figura 4.25: Reconstrucciones para el maniquí NEMA HC con resolución de muestreo de 0.5 mm y  $N_\theta = 18$ .



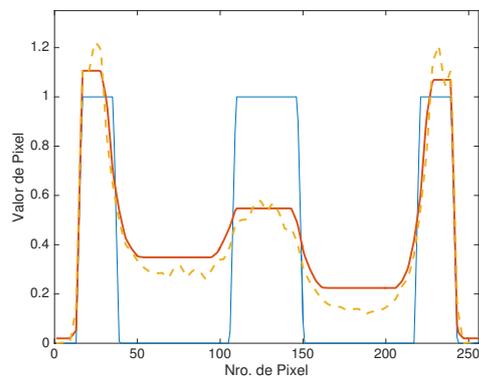
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 4.26: Perfiles de intensidad para el maniquí NEMA HC con resolución de muestreo de 0.5 mm y  $N_\theta = 18$ . (a) y (b) perfiles horizontales. (c) y (d) perfiles verticales. La descripción de las líneas en el recuadro de la figura (a) es la misma para el resto de los perfiles.

**NEMA IQ**,  $N_\theta = 18$ .

Se muestran los resultados de este maniquí, comenzando con las reconstrucciones en la figura 4.28 y después los perfiles de intensidad de la figura 4.29.

Los valores óptimos para los parámetros de regularización después de hacer la búsqueda usando las gráficas de la figura 4.27 fueron

$$\mu_{SIRT} = 1.5454 \times 10^5; \quad \mu_{MLEM} = 1.6641 \times 10^5,$$

con los valores de MSE correspondientes:

$$MSE_{SIRT} = 0.00993; \quad MSE_{MLEM} = 0.00821$$

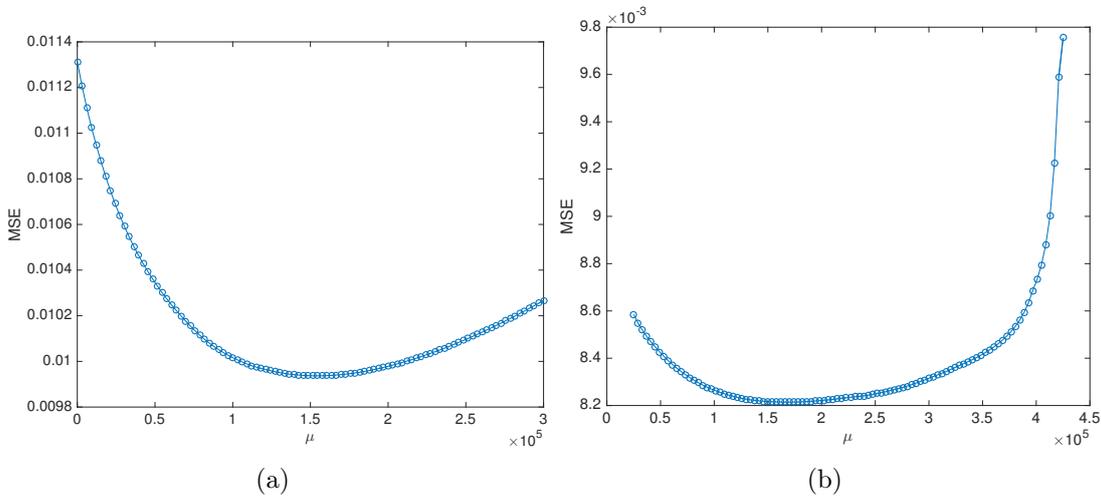


Figura 4.27: Elección de parámetro de regularización para el maniquí NEMA IQ con resolución de muestreo de 0.5 mm y  $N_\theta = 18$  (a) SIRT:  $\mu_{op} = 1.5454 \times 10^5$ ,  $MSE_{min} = 0.00993$ . (b) MLEM:  $\mu_{op} = 1.6641 \times 10^5$ ,  $MSE_{min} = 0.00821$ .

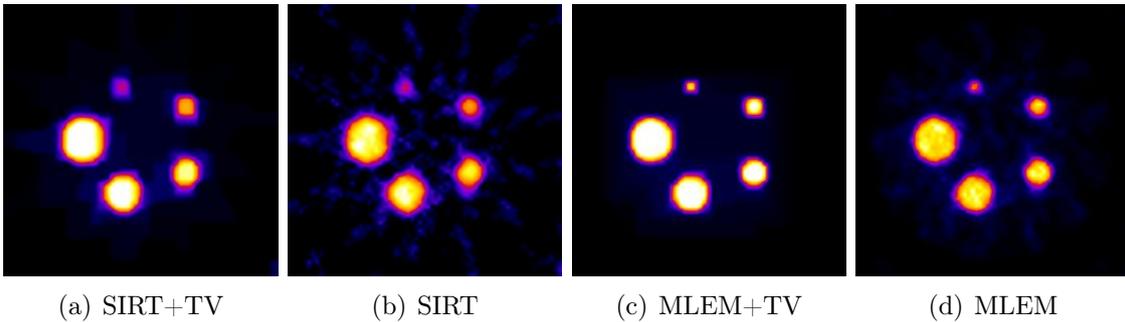
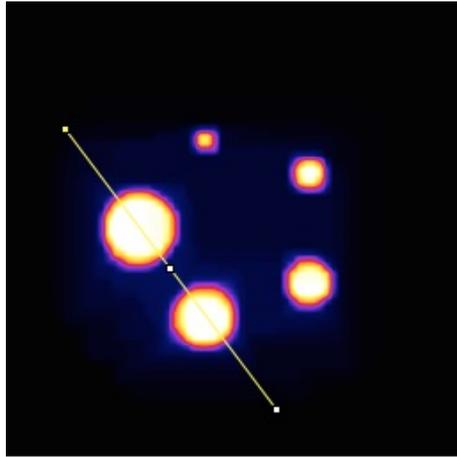
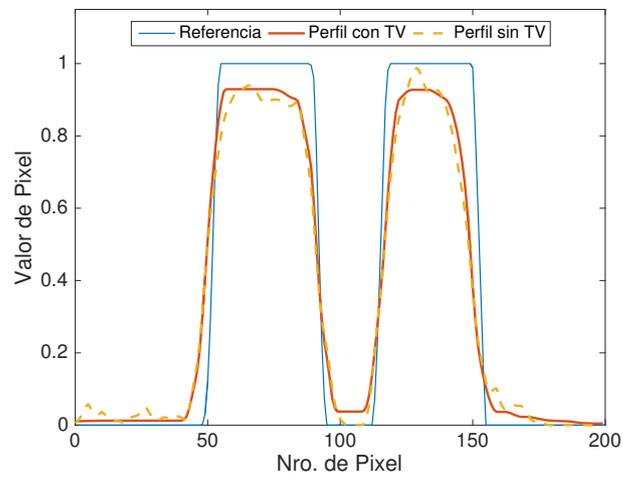


Figura 4.28: Reconstrucciones para el maniquí NEMA IQ con resolución de muestreo de 0.5 mm y  $N_\theta = 18$ .

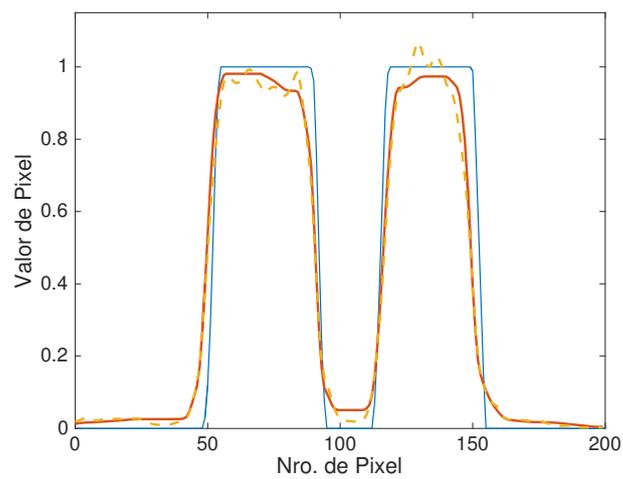
En este caso, las curvas de los coeficientes de recuperación son las de la figura 4.30.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.29: Perfiles de intensidad. (a) La línea amarilla es la línea sobre la cual se midieron los perfiles de intensidad. (b) SIRT. (c) MLEM. La descripción de las líneas del recuadro en (b) es la misma para (c)

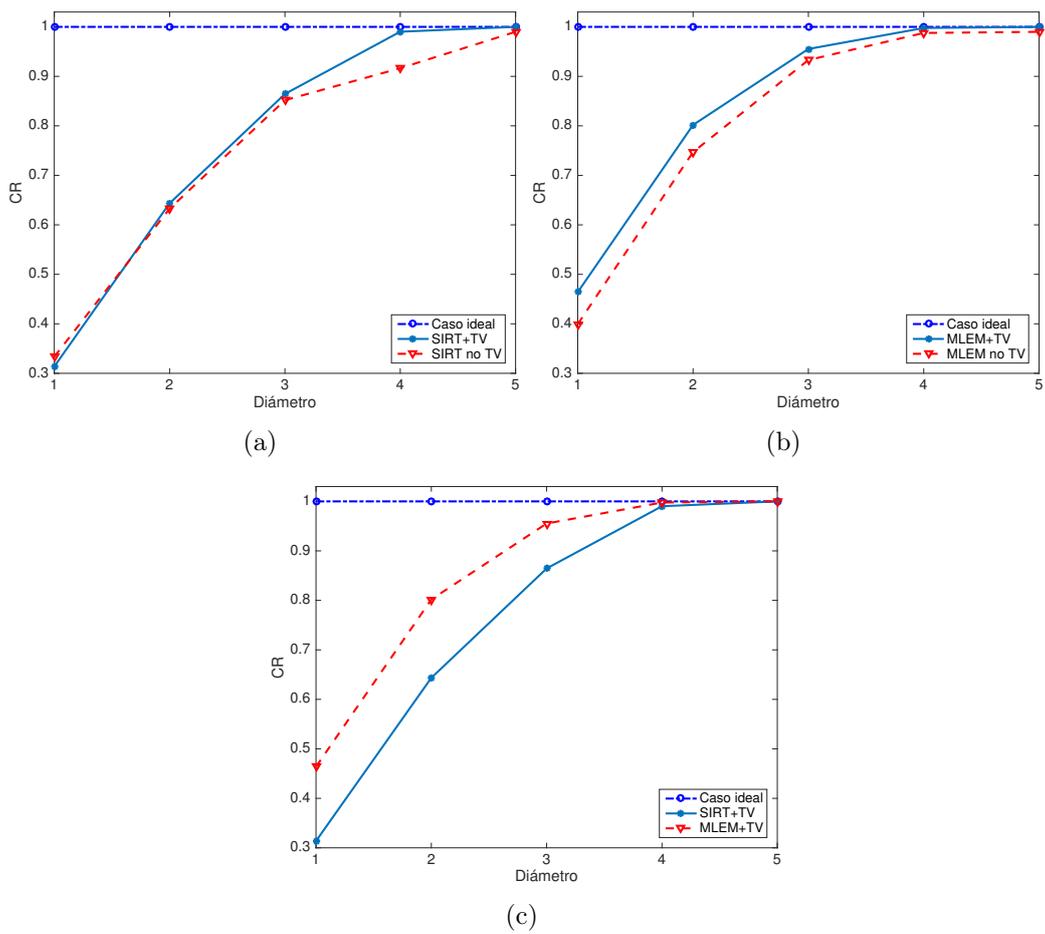


Figura 4.30: Coeficientes de recuperación para el maniquí NEMA IQ con resolución de muestreo de 0.5 mm y  $N_\theta = 18$  (a) SIRT (b) MLEM. (c) Comparación entre MLEM y SIRT.

NEMA UN,  $N_\theta = 18$ .

En este caso las reconstrucciones se muestran en la figura 4.32 y después los perfiles de intensidad en la figura 4.33.

Los valores óptimos para los parámetros de regularización después de hacer la búsqueda usando las gráficas de la figura 4.31 en este caso fueron

$$\mu_{SIRT} = 4.3838 \times 10^6; \quad \mu_{MLEM} = 2.8888 \times 10^6,$$

con los valores de MSE correspondientes:

$$MSE_{SIRT} = 0.01263; \quad MSE_{MLEM} = 0.01438$$

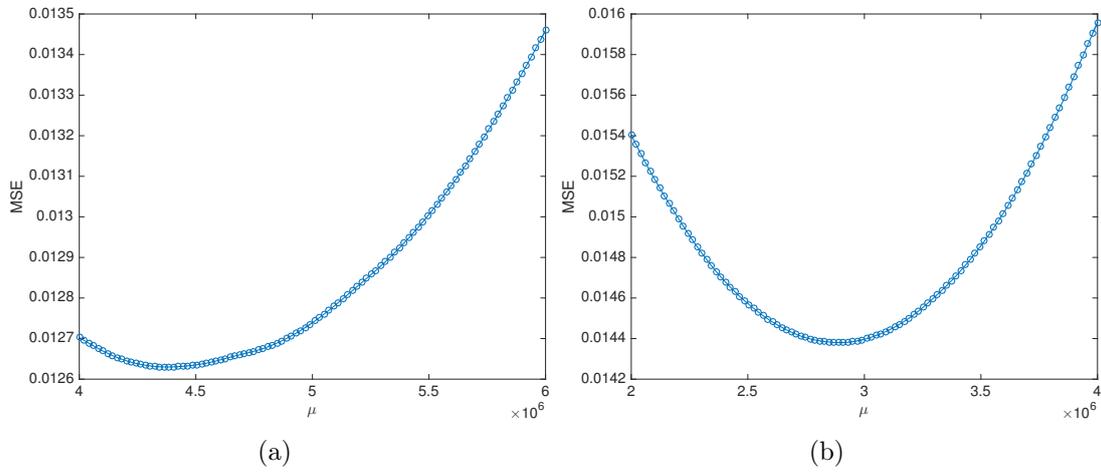


Figura 4.31: Elección de parámetro de regularización para el maniquí NEMA UN con resolución de muestreo de 0.5 mm y  $N_\theta = 18$  (a) SIRT:  $\mu_{op} = 4.3838 \times 10^6$ ,  $MSE_{min} = 0.01263$ . (b) MLEM:  $\mu_{op} = 2.8888 \times 10^6$ ,  $MSE_{min} = 0.01438$ .

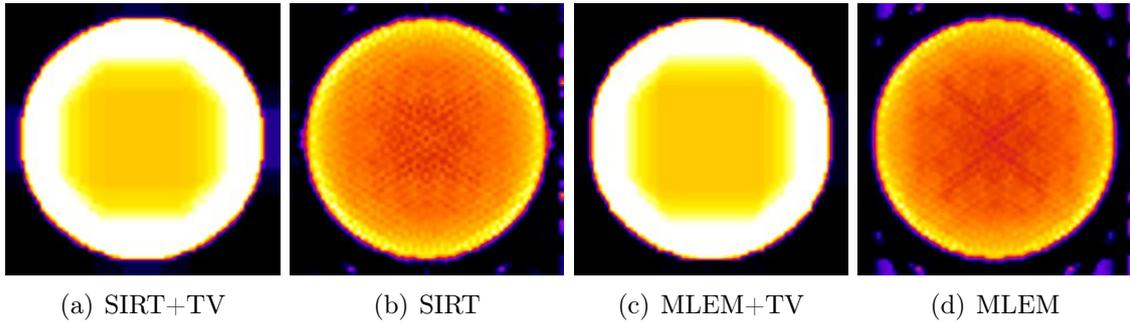
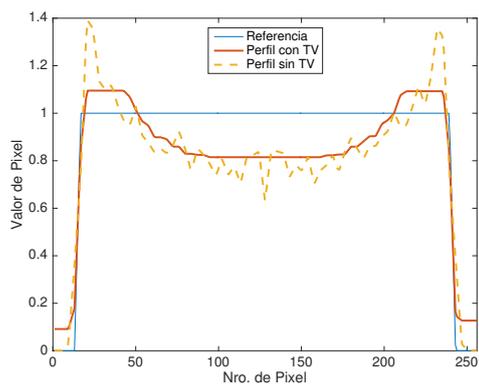
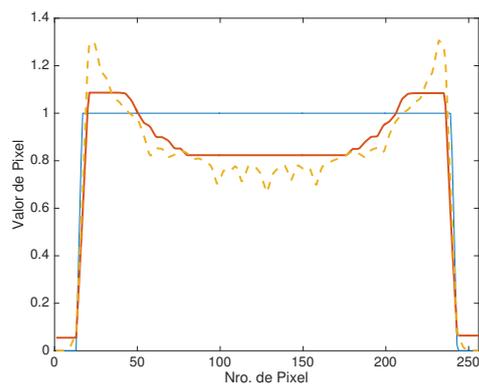


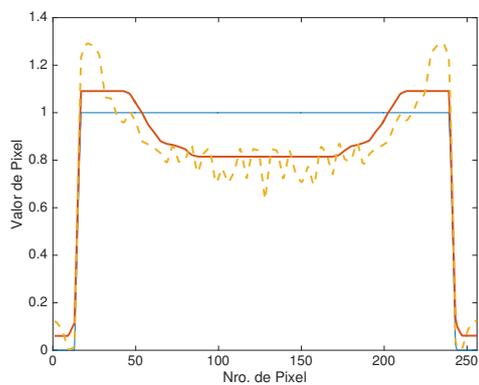
Figura 4.32: Reconstrucciones para el maniquí NEMA UN con resolución de muestreo de 0.5 mm y  $N_\theta = 18$ .



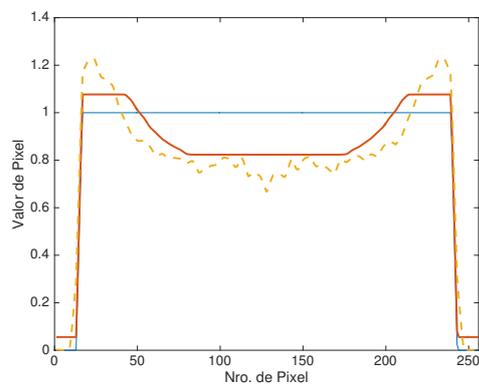
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 4.33: Perfiles de intensidad para el maniquí NEMA UN con resolución de muestreo de 0.5 mm y  $N_\theta = 18$ . (a) y (b) perfiles horizontales. (c) y (d) perfiles verticales. La descripción de las líneas en el recuadro de la figura (a) es la misma para el resto de los perfiles.

## Maniquí Derenzo.

Debido a que en este caso no se contó con ninguna imagen de referencia para hacer un análisis cuantitativo, aquí se presentan solamente lo que se consideró fueron las mejores reconstrucciones posibles. La elección de parámetros fue hecha a modo de ensayo y error utilizando la experiencia obtenida de todos los casos anteriores. Estos fueron  $\text{iterSIRT/MLEM}=30$ , 30 iteraciones de Split Bregman y  $\lambda = 1.99$ .

Para encontrar los parámetros de regularización en el caso de 36 proyecciones se hizo un barrido en el intervalo  $\mu \in [1 \times 10^2, 2.5 \times 10^4]$ , y para el caso de 18 proyecciones, el intervalo de búsqueda fue  $[10, 1 \times 10^5]$ . Ambos utilizaron 100 puntos equiespaciados en la partición y se escogieron a “ojo” las mejores reconstrucciones debido a la falta de imagen de referencia para evaluar el MSE. La resolución de muestreo utilizada para obtener estos sinogramas fue de 0.5 mm.

La figura 4.35 muestra las reconstrucciones regularizadas y la figura 4.36 muestra las reconstrucciones hechas con SIRT y MLEM sin utilizar la regularización por TV. Aparecen también los parámetros de regularización ( $\mu_o$ ) utilizados en cada caso.

La figura 4.37 muestra algunos perfiles de intensidad medidos sobre la línea amarilla señalada en la figura 4.34.

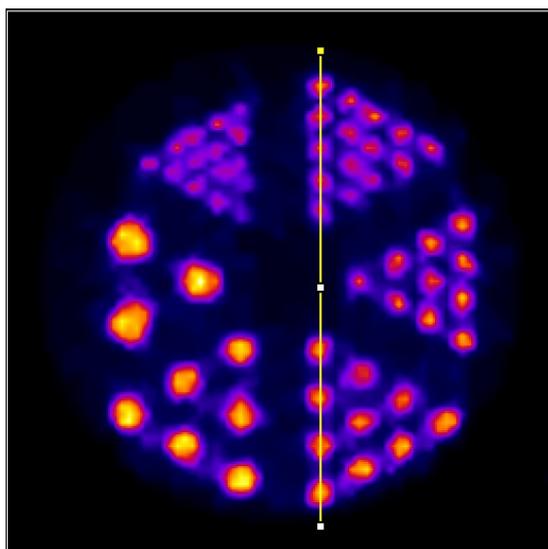
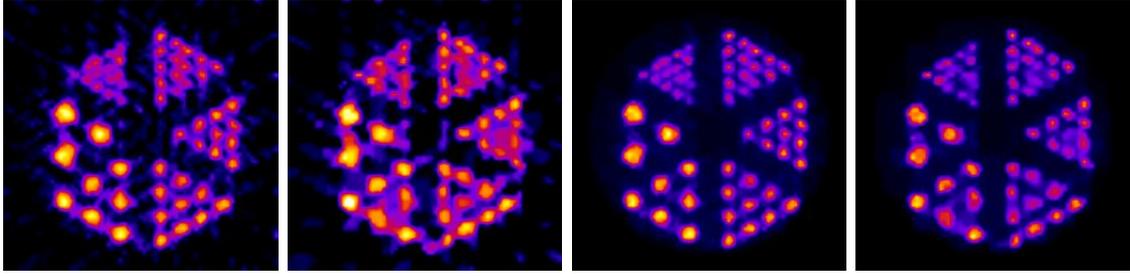
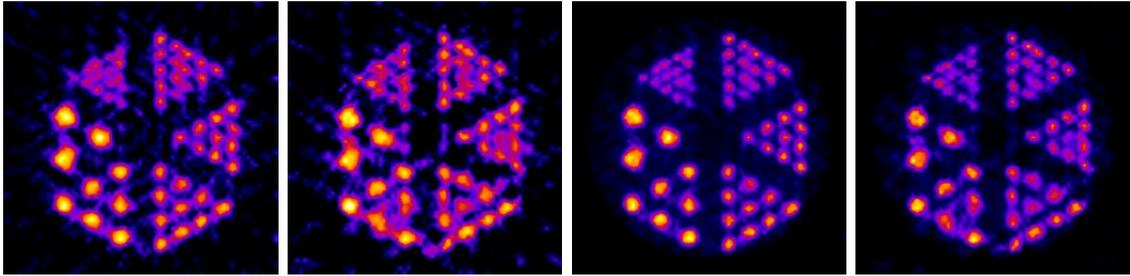


Figura 4.34: Línea sobre la cual se midieron los perfiles de intensidad.



(a)  $N_\theta = 36, \mu_o = 8.6 \times 10^3$  (b)  $N_\theta = 18, \mu_o = 4.9 \times 10^4$  (c)  $N_\theta = 36, \mu_o = 1.2 \times 10^4$  (d)  $N_\theta = 18, \mu_o = 4.4 \times 10^4$

Figura 4.35: Reconstrucciones para maniquí Derenzo. (a) y (b) SIRT+TV. (c) y (d) MLEM+TV



(a)  $N_\theta = 36$  (b)  $N_\theta = 18$  (c)  $N_\theta = 36$  (d)  $N_\theta = 18$

Figura 4.36: Reconstrucciones para maniquí Derenzo sin regularización por TV. (a) y (b) SIRT. (c) y (d) MLEM

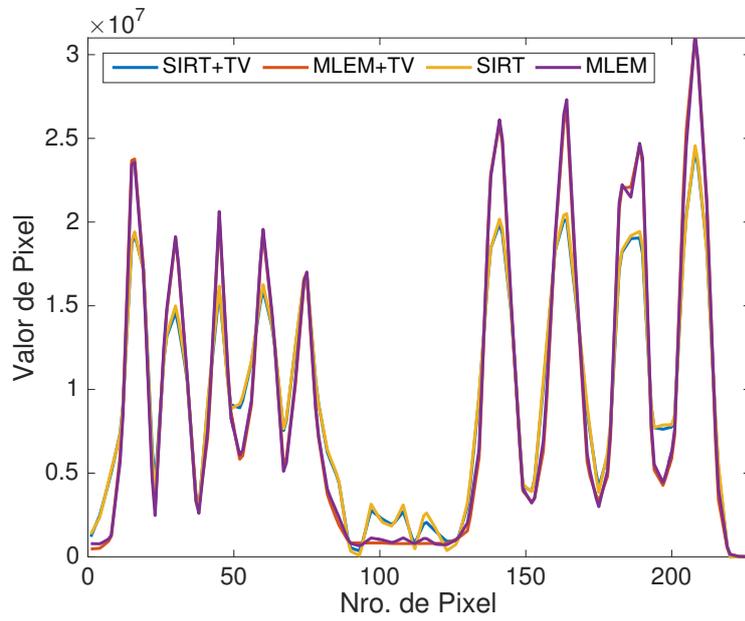
## 4.2.5. Discusión

La tabla 4.1, muestra todos los resultados de MSE para todas las reconstrucciones y también los parámetros de regularización óptimos utilizados para cada reconstrucción (en todas las reconstrucciones se utilizaron  $d = 1$  y  $\lambda_{SIRT} = 1.99$ ).

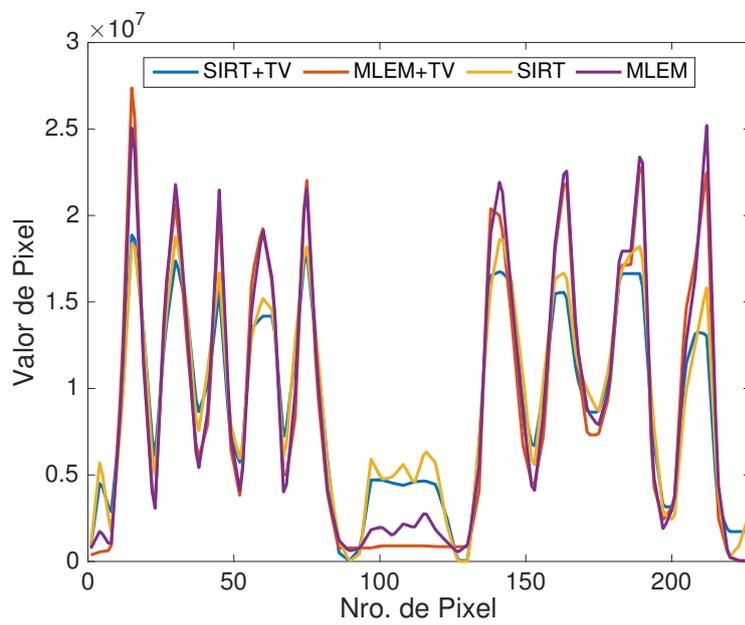
Junto a esta tabla, es útil presentar a manera de resumen visual, todas las reconstrucciones juntas para apreciar fácilmente las diferencias entre los maniqués reconstruidos. La figura 4.38 muestra las reconstrucciones con SIRT y la 4.39 con MLEM.

Se pueden hacer varias observaciones a partir de todos los resultados presentados hasta aquí. La observación mas importante para el trabajo presentado en esta tesis es que, **la regularización por Variación Total permite obtener imágenes de mayor calidad en absolutamente todos los casos** (de igual manera en la tomografía de transmisión con los maniqués del capítulo 3). En primer lugar a simple vista en las imágenes reconstruidas, se nota claramente cómo el ruido disminuye permitiendo obtener mayor uniformidad en las zonas en donde idealmente se tiene una distribución homogénea de material luminiscente. La regularización permite suavizar las reconstrucciones obtenidas como se puede apreciar de todos los perfiles de intensidad mostrados anteriormente. Incluso en algunos casos del maniquí NEMA UN, los bordes de la imagen reconstruida se ajustan de manera muy precisa al perfil de la imagen de referencia.

Otra observación que reafirma que la regularización permite obtener imágenes de



(a)  $N_\theta = 36$



(b)  $N_\theta = 36$

Figura 4.37: Perfiles de intensidad para maniquí Derenzo

Resolución de muestreo de 1mm.						
	SIRT+TV		MLEM+TV		SIRT	MLEM
Maniquí	MSE	$\mu_{op}$	MSE	$\mu_{op}$	MSE	MSE
NEMA HC	$2.8652 \times 10^3$	$4.7374 \times 10^5$	$3.3106 \times 10^3$	$1.0160 \times 10^5$	$3.0070 \times 10^3$	$3.3600 \times 10^3$
NEMA IQ	*	$4.7374 \times 10^5$	*	$1.0160 \times 10^5$	*	*
Resolución de muestreo de 0.5mm, $N_\theta = 36$ .						
	SIRT+TV		MLEM+TV		SIRT	MLEM
Maniquí	MSE	$\mu_{op}$	MSE	$\mu_{op}$	MSE	MSE
NEMA HC	0.02856	$1.2322 \times 10^6$	0.03940	$5.0000 \times 10^5$	0.03620	0.04311
NEMA IQ	0.00836	$7.9545 \times 10^4$	0.00781	$1.2424 \times 10^5$	0.00913	0.00825
NEMA UN	0.01065	$4.5606 \times 10^6$	0.01246	$2.9696 \times 10^6$	0.02808	0.02969
Resolución de muestreo de 0.5mm, $N_\theta = 18$ .						
	SIRT+TV		MLEM+TV		SIRT	MLEM
Maniquí	MSE	$\mu_{op}$	MSE	$\mu_{op}$	MSE	MSE
NEMA HC	0.03082	$1.2181 \times 10^6$	0.04169	$6.0909 \times 10^5$	0.04178	0.04928
NEMA IQ	0.00993	$1.5454 \times 10^5$	0.00821	$1.6641 \times 10^5$	0.01131	0.00923
NEMA UN	0.01263	$4.3838 \times 10^6$	0.01438	$2.8888 \times 10^6$	0.03036	0.03245

Tabla 4.1: Resultados finales. Los asteriscos en la fila del maniquí NEMA IQ para las reconstrucciones con la resolución de muestreo de 1 mm, indican que el criterio no aplica debido a que no se tenía imagen de referencia para calcular los valores de MSE.

mayor calidad es en particular, con el maniquí NEMA IQ y las gráficas de coeficientes de recuperación. Todas las gráficas de coeficientes de recuperación correspondientes a las reconstrucciones regularizadas, están por encima de las correspondientes a las reconstrucciones simples sin regularizar. Como se comentó anteriormente, entre más cercana esté la curva de CR a la curva ideal (constante igual a 1), mayor es la calidad de la reconstrucción. También se puede ver que en los tres casos, 1mm, 0.5mm y 0.5mm con la mitad de las proyecciones, el algoritmo MLEM+TV se desempeña un poco mejor que el SIRT+TV.

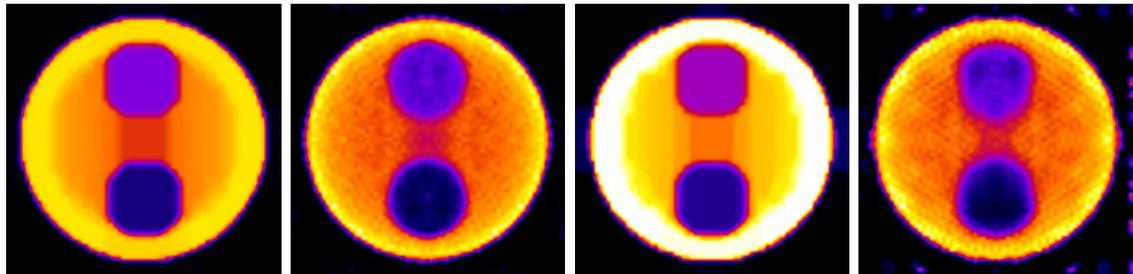
En cuanto a los datos de MSE, la tabla 4.1 pone en evidencia que en efecto, la calidad de las imágenes regularizadas aumenta considerablemente respecto a las no regularizadas. Respecto a estos datos no se puede decir si MLEM+TV es mejor que SIRT+TV.

Es evidente también, utilizando estos criterios, que las mejores reconstrucciones corresponden a la resolución de muestreo de 0.5mm y  $N_\theta = 36$ . Sin embargo, el interés particular de utilizar la mitad de ángulos de proyección era mejorar la calidad de las reconstrucciones respecto a las de la resolución de muestreo de 1mm utilizando el mismo tiempo de adquisición de datos.

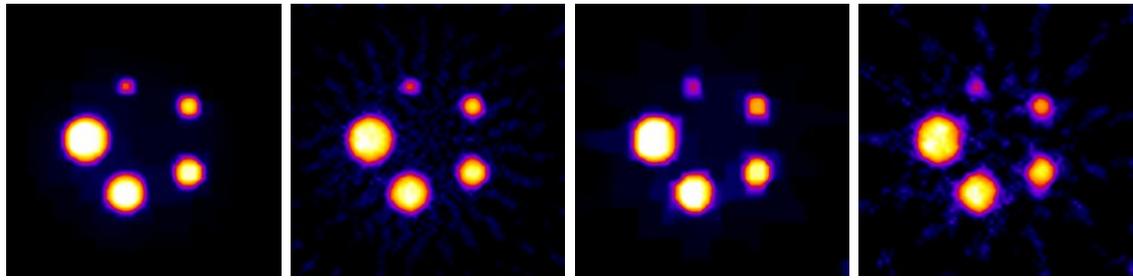
Como se puede observar en las reconstrucciones, en los perfiles de intensidad, en las curvas de coeficientes de recuperación y en los datos numéricos para el MSE, en efecto, la calidad de las reconstrucciones para la resolución de muestreo de 0.5mm con  $N_\theta = 18$  es **mayor** respecto a las reconstrucciones obtenidas con la resolución de muestreo de 1mm. Por lo tanto, **se cumple con uno de los objetivos de la tesis** en cuanto a reducir los tiempos de adquisición de datos (en particular en un sistema TORX) mejorando al mismo tiempo la calidad de las imágenes reconstruidas.

Finalmente se puede hacer una observación de la forma de los perfiles de intensidad de las reconstrucciones. Si se observa por ejemplo, los perfiles del maniquí

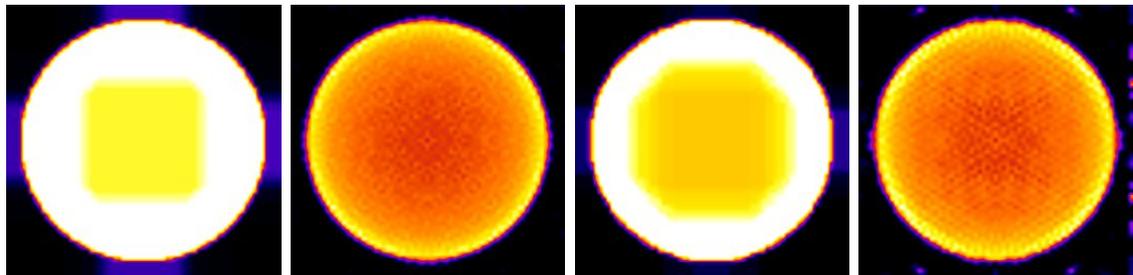
NEMA UN, puede apreciarse cómo aparece una zona de concavidad en la que aparece un mínimo en el centro del perfil. Esta curva cóncava aparece debido a que la matriz del sistema no contiene los efectos de atenuación que sufren los rayos X en su interacción con la materia en su trayectoria al pasar a través del maniquí. Si se incorporaran estos efectos en la matriz de proyección, se esperaría que se obtengan mejores reconstrucciones eliminando tales curvas cóncavas.



(a) 0.5mm, TV,  $N_\theta = 36$     (b) 0.5mm, sin TV,  $N_\theta = 36$     (c) 0.5mm, TV,  $N_\theta = 18$     (d) 0.5mm, sin TV,  $N_\theta = 18$



(e) 0.5mm, TV,  $N_\theta = 36$     (f) 0.5mm, sin TV,  $N_\theta = 36$     (g) 0.5mm, TV,  $N_\theta = 18$     (h) 0.5mm, sin TV,  $N_\theta = 18$



(i) 0.5mm, TV,  $N_\theta = 36$     (j) 0.5mm, sin TV,  $N_\theta = 36$     (k) 0.5mm, TV,  $N_\theta = 18$     (l) 0.5mm, sin TV,  $N_\theta = 18$

Figura 4.38: Reconstrucciones finales con SIRT.

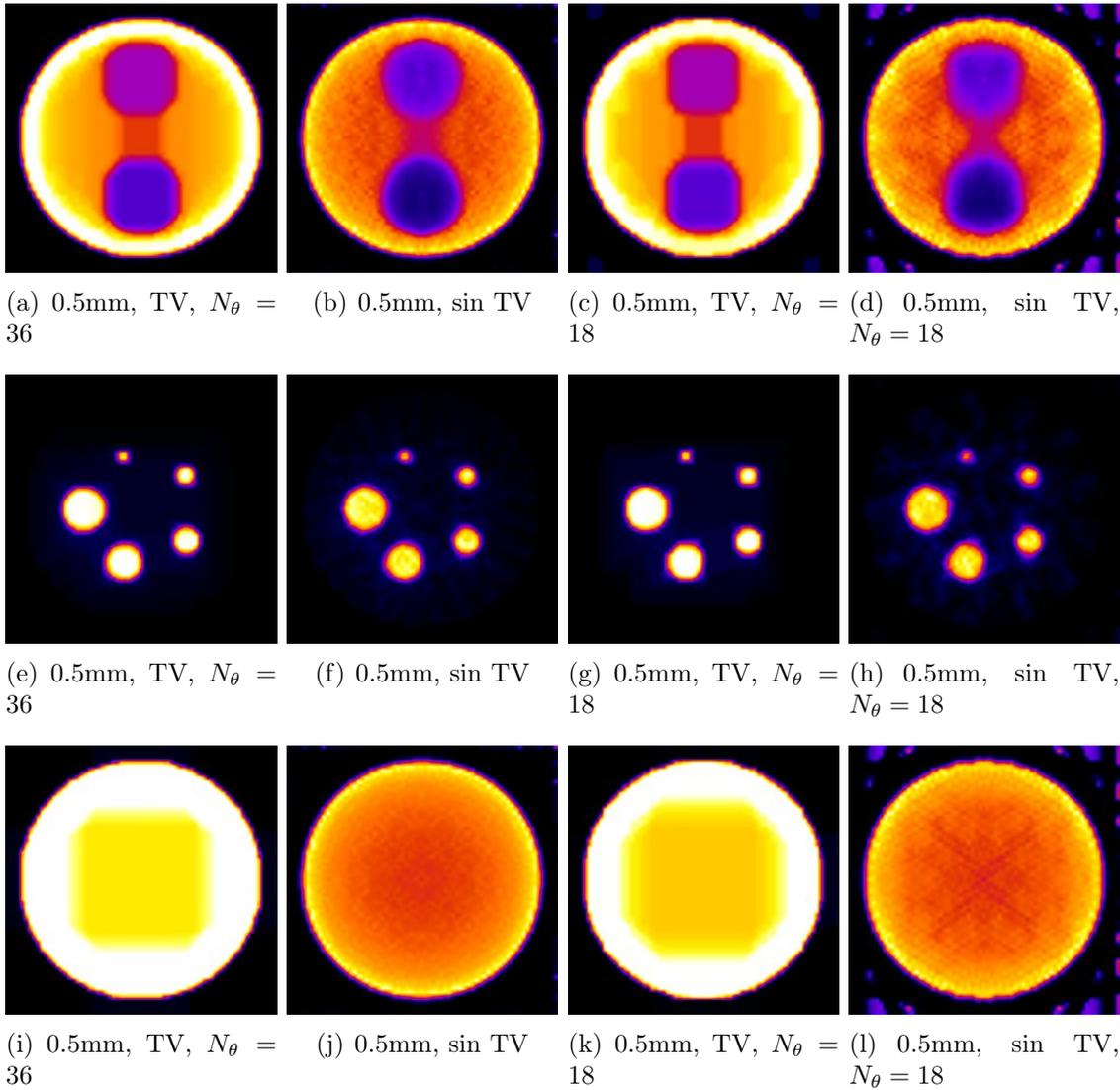


Figura 4.39: Reconstrucciones finales con MLEM.

### 4.3. Tomografía computarizada: Nueces y raíces

Finalmente, los métodos de regularización por Variación Total, fueron aplicados a datos experimentales reales correspondientes a tomografías de transmisión (CT) de tres distintos cuerpos: una raíz de Loto y una nuez.

Los datos fueron tomados de la página de internet de la FIPS (Finnish Inverse Problems Society), <https://www.fips.fi/dataset.php>. Esta sociedad provee los datos de sus experimentos para CT, así como el código ejecutable para reproducir sus reconstrucciones. También provee las publicaciones relacionadas con estos problemas y videos en donde detallan la instrumentación y métodos utilizados. Las reconstrucciones de este grupo de trabajo principalmente se enfocan en aplicar la técnica de regularización de Tikhonov, la cual es resolver el problema de optimización convexa:

$$\min_x \|Ax - b\|_2^2 + \lambda \|x\|_2^2 \quad (4.1)$$

Las rutinas que se incluyen en los archivos de descarga utilizan el método de gradientes preconjugados para resolver este problema de optimización. También incluyen reconstrucciones de altas resoluciones utilizando 360 proyecciones con Filtered Back Projection para utilizarlas como imágenes de referencia y evaluar las reconstrucciones con otros métodos y menores números de proyecciones.

Las reconstrucciones obtenidas por medio de los algoritmos SIRT+TV y MLEM+TV, utilizan los parametros fijos: 200 iteraciones SIRT/MLEM, 50 iteraciones de Split Bregman,  $d = 5$  y  $\lambda = 1.99$  para el parámetro de relajación de SIRT. Estos parámetros se eligieron a modo de ensayo y error con ayuda de la experiencia obtenida en las reconstrucciones de los maniquís Forbild y Shepp-Logan. Los parámetros de regularización utilizados en las reconstrucciones se obtuvieron utilizando como imágenes de referencia, las reconstrucciones con FBP provistas en los datos.

#### 4.3.1. Raíz de Loto

La documentación de este conjunto de datos está dada en [Bubba et al., 2016]. Los datos que se proveen para la reconstrucción de las imágenes tomográficas son el sinograma correspondiente a 360 ángulos de proyección y dos matrices de proyección para dos resoluciones diferentes de  $128 \times 128$  y  $256 \times 256$  pixeles. También se incluyen las rutinas que resuelven la regularización de Tikhonov utilizando 120 y 20 ángulos de proyección.

También se incluye una reconstrucción cuya resolución es de  $1500 \times 1500$  pixeles, con 360 proyecciones y utilizando la técnica Filtered Back Projection como guía para obtener la imagen que se debe reconstruir (figura 4.40). Para poder utilizarla como imagen de referencia, ésta reconstrucción se re-escaló a  $256 \times 256$  pixeles usando imageJ.

Utilizando los parámetros fijos mencionados anteriormente, y la reconstrucción con FBP como imagen de referencia, se aplicó la metodología de optimización del parámetro de regularización para SIRT+TV y MLEM+TV. La figura 4.41 muestra

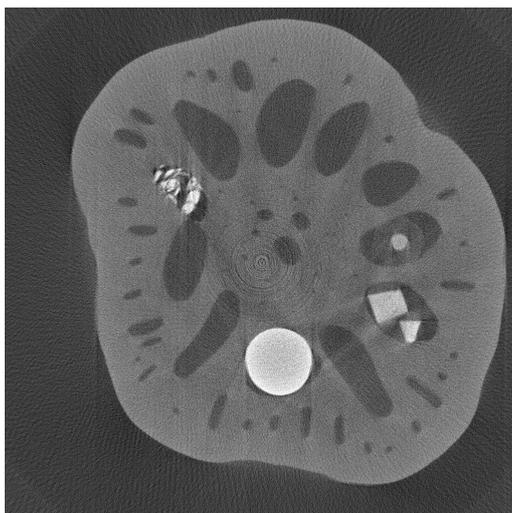


Figura 4.40: Reconstrucción de la raíz de Loto con FBP con 360 ángulos de proyección,  $1500 \times 1500$  píxeles.

las mejores reconstrucciones obtenidas únicamente para la resolución de  $256 \times 256$  píxeles, así como los parámetros de regularización utilizados y los MSE.

### 4.3.2. Nueces

La documentación de este conjunto de datos está dada en [Hämäläinen et al., 2015]. En este caso los datos experimentales son el sinograma correspondiente a 360 ángulos de proyección y dos matrices de proyección para las resoluciones de  $82 \times 82$ ,  $164 \times 164$  y  $328 \times 328$  píxeles. Nuevamente se incluyen las rutinas que resuelven la regularización de Tikhonov utilizando 120 y 20 ángulos de proyección.

Aquí también incluyen una reconstrucción cuya resolución es de  $1200 \times 100$  píxeles, con 360 proyecciones y utilizando la técnica Filtered Back Projection (figura 4.42). Para poder utilizarla como imagen de referencia, ésta reconstrucción se reescaló a  $328 \times 328$  píxeles usando image J.

Utilizando los parámetros fijos mencionados, y la reconstrucción con FBP como imagen de referencia, se aplicó la metodología de optimización del parámetro de regularización para SIRT+TV y MLEM+TV. Con los datos de la nuez también se trabajó con solo una resolución que fue de  $328 \times 328$ . La figura 4.43 muestra las mejores reconstrucciones obtenidas, así como los parámetros de regularización utilizados y los MSE.

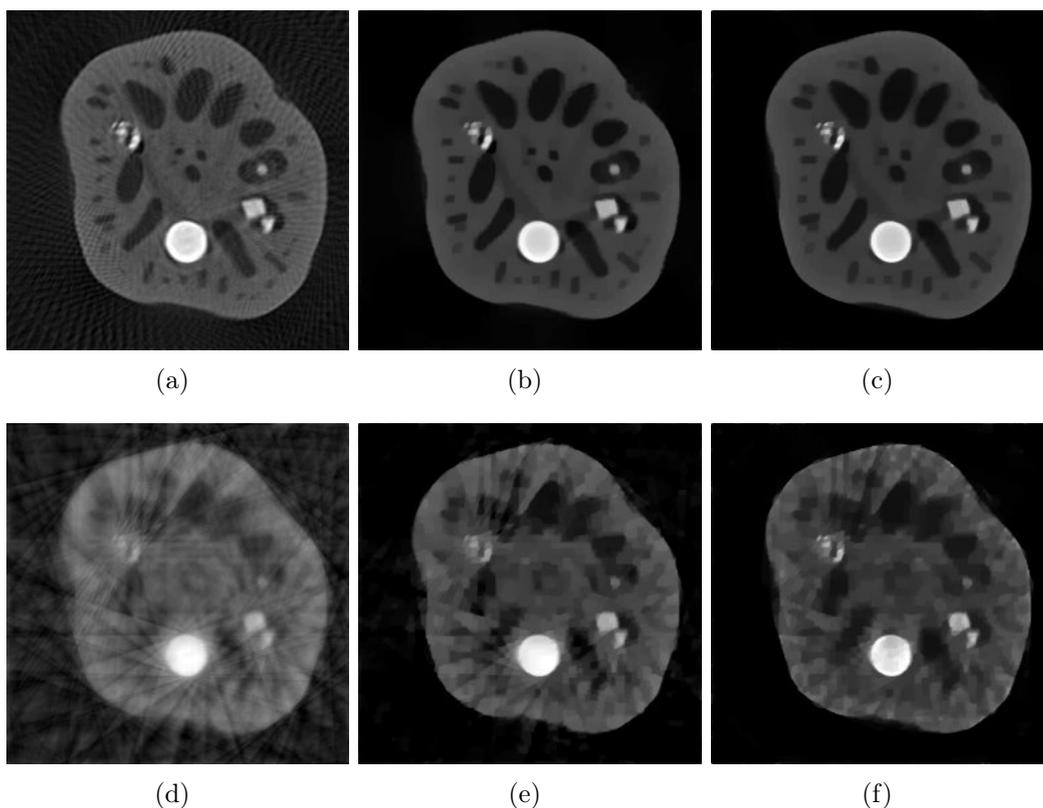


Figura 4.41: Reconstrucciones de raíz de Loto. (a) Reconstrucción por Tikhonov con 120 proyecciones. (b) 120 proyecciones SIRT+TV,  $\mu = 0.0013$ , MSE=5.33. (c) 120 proyecciones MLEM+TV,  $\mu = 0.006$ , MSE=4.89. (d) Reconstrucción por Tikhonov con 20 proyecciones. (e) 20 proyecciones SIRT+TV,  $\mu = 0.00027$ , MSE=54.33. (f) 20 proyecciones MLEM+TV,  $\mu = 0.0006$ , MSE=50.89.

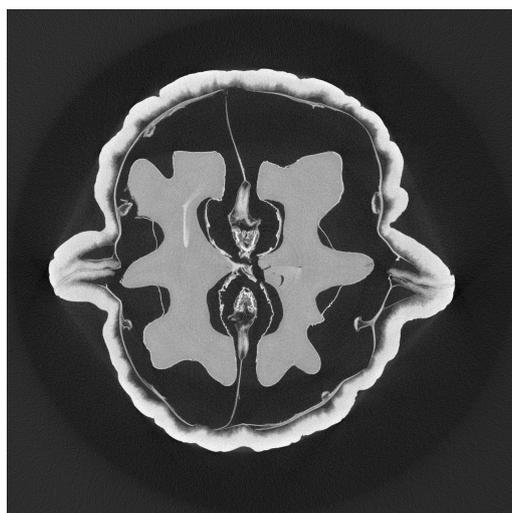


Figura 4.42: Reconstrucción de la nuez con FBP con 360 ángulos de proyección,  $1200 \times 1200$  píxeles.

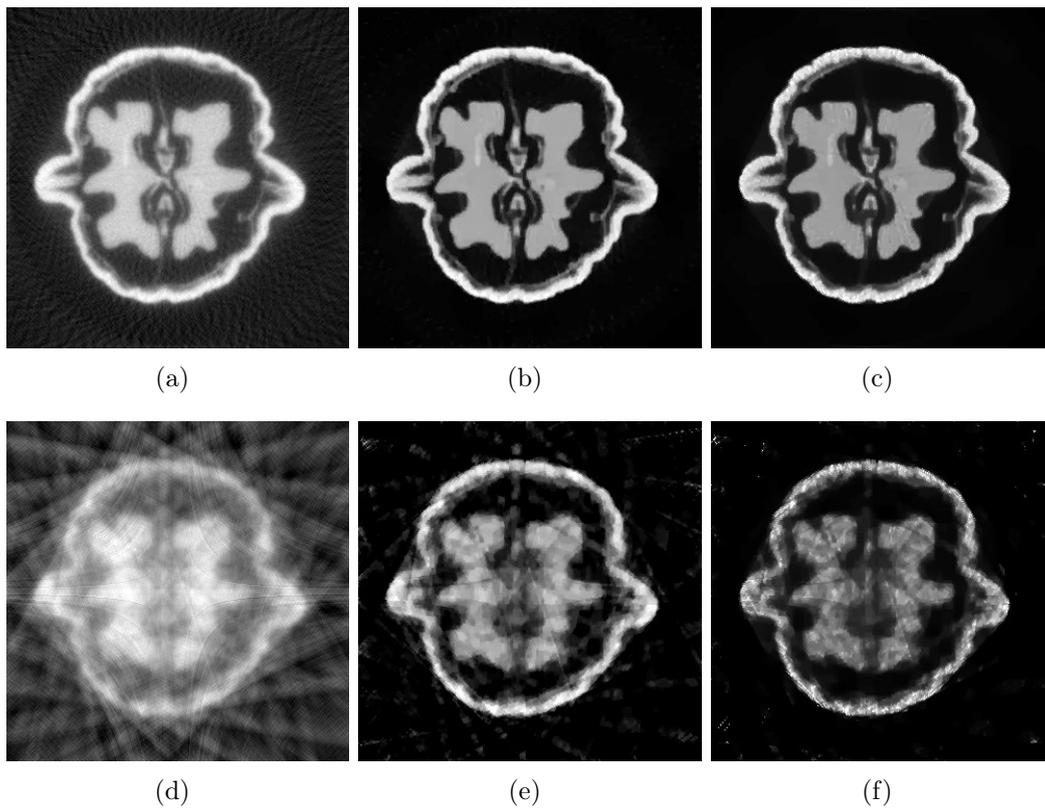


Figura 4.43: Reconstrucciones de la nuez. (a) Reconstrucción por Tikhonov con 120 proyecciones. (b) 120 proyecciones SIRT+TV,  $\mu = 0.0065$ , MSE=3.12. (c) 120 proyecciones MLEM+TV,  $\mu = 0.0027$ , MSE=2.89. (d) Reconstrucción por Tikhonov con 20 proyecciones. (e) 20 proyecciones SIRT+TV,  $\mu = 0.00017$ , MSE=25.33. (f) 20 proyecciones MLEM+TV,  $\mu = 0.00021$ , MSE=23.89.

# Capítulo 5

## Conclusiones y perspectivas

La presente tesis exploró la aplicación de la teoría de sensado compresivo y la regularización por Variación Total a la reconstrucción de dos modalidades distintas de tomografía: tomografía computarizada (CT) y tomografía óptica de luminiscencia estimulada por rayos X (TORX).

Los objetivos principales de la tesis eran obtener reconstrucciones de imágenes tomográficas de alta calidad cuando se tienen pocos datos. Tener pocos datos provoca que el sistema algebraico que representa el problema de reconstrucción tomográfica se “mal condicione” haciendo que el ruido se propague de manera abrupta y aparezcan artefactos en las imágenes reconstruidas. Así, mejorar la calidad de las imágenes reconstruidas en este caso, consiste en evitar que el ruido se propague y reducir la aparición de dichos artefactos.

Como se comentó en las secciones correspondientes al marco teórico, existen diversas razones por las que se desea trabajar con pocos datos y, debido a esto, es necesario explorar métodos que ayuden a tratar con los inconvenientes que surgen al tener pocos datos. Por ello, la primera parte del trabajo de esta tesis consistió en observar y cuantificar el comportamiento de los algoritmos algebraicos SIRT y MLEM frente a este problema. Esto se hizo utilizando los dos maniqués sintéticos, Shepp-Logan y el Forbild (ambos con ruido gaussiano sintético añadido), desarrollando las rutinas correspondientes en MATLAB. Claramente se observó que al disminuir la cantidad de proyecciones utilizadas para obtener el sinograma, la cantidad de artefactos y ruido propagado aumentaban drásticamente y además, el análisis cuantitativo corroboró que la calidad de las reconstrucciones era muy mala en este caso.

Las herramientas cuantitativas que se utilizaron para evaluar todas las reconstrucciones hechas en la tesis fueron las gráficas de perfiles de intensidad (gráficas de valores de pixel) a lo largo de renglones o columnas y el Mean Squared Error (MSE, equivalente a la distancia vectorial entre la imagen reconstruida y una imagen de referencia).

Después de observar la ineficacia de SIRT y MLEM al trabajar con pocas proyecciones, se presentaron los algoritmos SIRT+TV y MLEM+TV. Estos algoritmos resuelven el problema de optimización convexa dado por la ecuación 3.1 y son el

corazón de esta tesis. Dicho problema envuelve los conceptos relacionados con el sensado compresivo y la minimización de la variación total como técnica de regularización a problemas “mal condicionados”, como el caso de tener pocos datos y presencia de ruido en el sistema algebraico en tomografía.

Para el caso de ambos maniquís se trabajó con 45, 36, 30, 26, 23, 20, 18 y 9 ángulos de proyección y fue inmediatamente claro, tanto cualitativamente como cuantitativamente que, la calidad de las reconstrucciones usando los algoritmos SIRT+TV y MLEM+TV era mucho mayor que las reconstrucciones que no incluyen la técnica de regularización. Los valores de MSE presentados en las tablas del capítulo 3, así como las gráficas de los perfiles de intensidad en todos los casos ahí mostrados, son pruebas claras de que en efecto, la minimización de la Variación Total como técnica de regularización tiene el potencial de ser utilizado para reconstruir imágenes tomográficas que traten con el problema de pocas proyecciones y presencia de ruido.

Un aspecto muy importante de los algoritmos implementados es el conjunto de parámetros que éstos utilizan para reconstruir las imágenes. La parte del algoritmo encargada de la minimización de la Variación Total es resuelta por medio del algoritmo Split-Bregman (técnica de optimización convexa que involucra normas  $\ell_1$ ). El método Split-Bregman tiene dos parámetros principales: el número de iteraciones de Split-Bregman y el parámetro de regularización  $\mu$ . En el caso de SIRT se tiene el parámetro de relajación y el número de iteraciones de SIRT, mientras que en MLEM solo se tiene el número de iteraciones. En ambos algoritmos se necesita definir un divisor  $d$ , que indica cada cuántas iteraciones de SIRT o MLEM se minimizará la variación total.

Fue precisamente debido a la existencia de estos parámetros que una parte muy importante del trabajo de esta tesis y en una de las cosas en las que se invirtió más tiempo, fue en encontrar una metodología que ayude en la elección del conjunto de los parámetros a utilizar para obtener la reconstrucción con mayor calidad a partir de algún conjunto de datos en particular. La metodología implementada tiene su fundamento en la comparación entre una imagen reconstruida con alguna imagen de referencia usando como criterio de comparación el MSE (en el caso de los maniquís las imágenes de referencia eran los maniquís originales sintéticos sin el ruido gaussiano añadido). La imagen reconstruida debe usar algunos parámetros estimados inicialmente cuyo conocimiento a priori es desconocido, luego el resultado de comparar esta imagen con la de referencia usando el MSE indica la dirección en la que hay que cambiar los parámetros y volver a reconstruir la imagen con otro conjunto de parámetros, luego volver a comparar la imagen para evaluar el MSE y así sucesivamente hasta encontrar los parámetros que permitan los valores de MSE mas cercanos a cero.

La metodología descrita en el capítulo 3 para la elección de parámetros se implementó después de largas horas de ensayo, error y aprendizaje en cuanto a cómo se podían ir cambiando los parámetros y cómo la variación de algunos influían sobre la elección de otros. Se encontró que existe cierta jerarquía que ayuda a simplificar el proceso de elección de parámetros y en resumen la metodología puede describirse en 3 pasos: fijar la cantidad de iteraciones de SIRT/MLEM y de Split Bregman, elegir el divisor para determinar cada cuantas iteraciones del ciclo principal de SIRT/MLEM se minimizará la Variación total y finalmente explorar vía

MSE el espacio de soluciones que se obtienen al hacer un barrido de parámetros de relajación y de regularización.

La metodología de elección de parámetros permitió encontrar los mejores parámetros para optimizar la calidad de las reconstrucciones como se observa en los resultados presentados en esta tesis.

Sin embargo, esta metodología se basa en la existencia de una imagen de referencia con la cual evaluar el MSE y si se desea aplicar estos algoritmos a datos experimentales reales, no necesariamente se contará con una imagen de referencia y la elección de parámetros se vuelve muy complicada. Por ello, una de las perspectivas a futuro y que puede seguir con la línea de investigación de esta tesis, es buscar la implementación de una metodología eficiente para la elección de parámetros que no necesite de ninguna imagen de referencia. Como se comentó en el capítulo 3, el artículo [Niinimäki et al., 2016] es una excelente guía en esta dirección y se podrían aplicar los pasos ahí descritos con los algoritmos SIRT+TV y MLEM+TV de esta tesis para este propósito.

Después de trabajar con datos sintéticos, se pasó a la aplicación de los algoritmos para reconstruir imágenes a partir de datos de dos fuentes: a) simulaciones numéricas Monte Carlo de un sistema TORX provistas por el Dr. Arnulfo Martínez utilizando 4 maniqués distintos y b) datos experimentales de CT de nueces y raíces de loto provistos por la Sociedad Finlandesa de problemas inversos (FIPS).

En el caso de la TORX se contó con algunas imágenes de referencia y por lo tanto se pudo aplicar la metodología de elección de parámetros. Como se presentó en el capítulo 4, los algoritmos implementados nuevamente lograron mejorar la calidad de las reconstrucciones respecto a SIRT y MLEM. Los datos de MSE, los perfiles de intensidad y para el caso del maniquí nema IQ las gráficas de coeficientes de recuperación, muestran esta afirmación.

Se trabajó con dos resoluciones de muestreo (distancia entre rayos del haz de rayos X), 1 mm y 0.5 mm. En el caso de 1 mm se tenían 36 ángulos de proyección y para 0.5 mm se tenían dos conjuntos: 36 y 18 proyecciones respectivamente. El resultado obtenido más importante al trabajar con estos datos, fue que la calidad de las reconstrucciones con la resolución de muestreo de 0.5 mm y 18 ángulos de proyección es mayor que la de las mismas reconstrucciones con la resolución de muestreo de 1 mm. Fue el resultado más importante pues esto cumplió con uno de los objetivos de la aplicación de la regularización por Variación Total a tomografía: reducir los tiempos de adquisición de datos mejorando la calidad de las reconstrucciones.

Una de las perspectivas a futuro que surge en esta parte al trabajar con los datos del sistema TORX, es la de incorporar los efectos de atenuación de la radiación a la matriz del sistema como se comentó en el capítulo 4. Se espera que idealmente, los efectos de concavidad que se ven en los perfiles de intensidad de todas las reconstrucciones desaparezcan.

La aplicación a datos de CT reales produjo mejores resultados que la regularización por Tikhonov que implementó la Sociedad Finlandesa de problemas inversos en sus datos de distribución libre.

Otra perspectiva a futuro para el trabajo de esta tesis consiste en optimizar y depurar los algoritmos usados con el objetivo de que los tiempos de cómputo se reduzcan lo más posible. Este no fue un tema de enfoque en esta tesis pero sí se comentó que por ejemplo, la superficie de la figura 3.25 tardó casi 18 horas de cómputo en generarse. En general, los barridos hechos a la hora de explorar los parámetros de regularización óptimos a utilizar, fueron la parte más tardada en el desarrollo de este trabajo y si se desea seguir explorando formas y metodologías distintas para la elección de parámetros, sería de mucha ayuda lograr que los tiempos de cómputo disminuyan.

Así, finalmente pudo comprobarse cómo la teoría de sensado compresivo y la regularización por Variación Total aplicados a tomografía resultaron ser herramientas importantes y con buenas perspectivas a futuro para tratar con los problemas que esta tesis pretendía abordar.

# Bibliografía

- [Andersen and Kak, 1984] Andersen, A. H. and Kak, A. C. (1984). Simultaneous Algebraic Reconstruction Technique (SART): A superior implementation of the ART algorithm. *Ultrasonic Imaging*, 6(1):81–94.
- [Bakushinskiy and Goncharsky, 1994] Bakushinskiy, A. and Goncharsky, A. (1994). *Ill-Posed Problems: Theory and Applications*. Mathematics and Its Applications. Springer, Netherlands.
- [Beck and Teboulle, 2009] Beck, A. and Teboulle, M. (2009). Fast Gradient-Based Algorithms for Constrained Total Variation Image Denoising and Deblurring Problems. *IEEE Transactions on Image Processing*, 18(11):2419–2434.
- [Beister et al., 2012] Beister, M., Kolditz, D., and Kalender, W. A. (2012). Iterative reconstruction methods in X-ray CT. *Physica Medica*, 28(2):94–108.
- [Bruyant, 2002] Bruyant, P. P. (2002). Analytic and Iterative Reconstruction Algorithms in SPECT. *Journal of Nuclear Medicine*, 43(10):1343–1358.
- [Bubba et al., 2016] Bubba, T. A., Hauptmann, A., Huotari, S., Rimpeläinen, J., and Siltanen, S. (2016). Tomographic X-ray data of a lotus root filled with attenuating objects. *arXiv:1609.07299 [physics]*.
- [Burger, 2007] Burger, M. (2007). Inverse Problems, lecture notes. [https://www.uni-muenster.de/AMM/num/Vorlesungen/IP\\_WS07/skript.pdf](https://www.uni-muenster.de/AMM/num/Vorlesungen/IP_WS07/skript.pdf).
- [Candes et al., 2006] Candes, E. J., Romberg, J., and Tao, T. (2006). Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. *IEEE Transactions on Information Theory*, 52(2):489–509.
- [Candes and Tao, 2005] Candes, E. J. and Tao, T. (2005). Decoding by Linear Programming. *IEEE Trans. Inf. Theor.*, 51(12):4203–4215.
- [Candès and Romberg, 2007] Candès, E. and Romberg, J. (2007). Sparsity and incoherence in compressive sampling. *Inverse Problems*, 23(3):969.
- [Candès et al., 2006] Candès, E. J., Romberg, J. K., and Tao, T. (2006). Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 59(8):1207–1223.
- [Candès and Wakin, 2008] Candès, E. J. and Wakin, M. B. (2008). An Introduction To Compressive Sampling (A sensing/sampling paradigm that goes against the common knowledge in data acquisition). *IEEE Signal Processing Magazine*, 25(2):21–30.

- [Censor and Elfving, 2002] Censor, Y. and Elfving, T. (2002). Block-Iterative Algorithms with Diagonally Scaled Oblique Projections for the Linear Feasibility Problem. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 24(1):40–58.
- [Censor et al., 2008] Censor, Y., Elfving, T., Herman, G., and Nikazad, T. (2008). On Diagonally Relaxed Orthogonal Projection Methods. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 30(1):473–504.
- [Chambolle, 2004] Chambolle, A. (2004). An Algorithm for Total Variation Minimization and Applications. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 20(1-2):89–97.
- [Chambolle, 2005] Chambolle, A. (2005). Total Variation Minimization and a Class of Binary MRF Models. In *Proceedings of the 5th International Conference on Energy Minimization Methods in Computer Vision and Pattern Recognition, EMCCVPR'05*, pages 136–152, Berlin, Heidelberg. Springer-Verlag.
- [Cox et al., 2016] Cox, B. L., Graves, S. A., Farhoud, M., Barnhart, T. E., Jeffery, J. J., Eliceiri, K. W., and Nickles, R. J. (2016). Development of a novel linearly-filled Derenzo microPET phantom. *American Journal of Nuclear Medicine and Molecular Imaging*, 6(3):199–204.
- [Derenzo et al., 1977] Derenzo, S. E., Budinger, T. F., Cahoon, J. L., Huesman, R. H., and Jackson, H. G. (1977). High Resolution Computed Tomography of Positron Emitters. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 24(1):544–558.
- [Doicu et al., 2010] Doicu, A., Trautmann, T., and Schreier, F. (2010). *Numerical Regularization for Atmospheric Inverse Problems*. Environmental Sciences. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- [Donoho, 2006] Donoho, D. L. (2006). Compressed Sensing. *IEEE Trans. Inf. Theor.*, 52(4):1289–1306.
- [Eggermont et al., 1981] Eggermont, P. P. B., Herman, G. T., and Lent, A. (1981). Iterative algorithms for large partitioned linear systems, with applications to image reconstruction. *Linear Algebra and its Applications*, 40:37–67.
- [Engl et al., 1996] Engl, H. W., Hanke, M., and Neubauer, A. (1996). *Regularization of Inverse Problems*. Springer Science & Business Media. Google-Books-ID: 2bzhgmMv5EVcC.
- [Gilbert, 1972] Gilbert, P. (1972). Iterative methods for the three-dimensional reconstruction of an object from projections. *Journal of Theoretical Biology*, 36(1):105–117.
- [Goldstein and Osher, 2009] Goldstein, T. and Osher, S. (2009). The Split Bregman Method for L1-Regularized Problems. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2(2):323–343.
- [González, 2015] González, S. R. (2015). Simulación Monte Carlo en tomografía óptica de luminiscencia estimulada por rayos X / tesis para obtener el grado de Maestría en Ciencias (Física Médica), Posgrado en Ciencias Físicas, UNAM.

- [Gordon et al., 1970] Gordon, R., Bender, R., and Herman, G. T. (1970). Algebraic Reconstruction Techniques (ART) for three-dimensional electron microscopy and X-ray photography. *Journal of Theoretical Biology*, 29(3):471–481.
- [Hansen and Saxild-Hansen, 2012] Hansen, P. C. and Saxild-Hansen, M. (2012). AIR Tools — A MATLAB package of algebraic iterative reconstruction methods. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 236(8):2167–2178.
- [Hämäläinen et al., 2015] Hämäläinen, K., Harhanen, L., Kallonen, A., Kujanpää, A., Niemi, E., and Siltanen, S. (2015). Tomographic X-ray data of a walnut. *arXiv:1502.04064 [physics]*.
- [Jacobs et al., 1998] Jacobs, F., Sundermann, E., De Sutter, B., Christiaens, M., and Lemahieu, I. (1998). A Fast Algorithm to Calculate the Exact Radiological Path through a Pixel or Voxel Space. *Journal of computing and information technology*, 6(1):89–94.
- [Jiang and Wang, 2003a] Jiang, M. and Wang, G. (2003a). Convergence of the simultaneous algebraic reconstruction technique (SART). *IEEE Transactions on Image Processing*, 12(8):957–961.
- [Jiang and Wang, 2003b] Jiang, M. and Wang, G. (2003b). Convergence studies on iterative algorithms for image reconstruction. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 22(5):569–579.
- [Jørgensen and Sidky, 2015] Jørgensen, J. S. and Sidky, E. Y. (2015). How little data is enough? Phase-diagram analysis of sparsity-regularized X-ray computed tomography. *Philosophical Transactions. Series A, Mathematical, Physical, and Engineering Sciences*, 373(2043).
- [Kaczmarz, 1937] Kaczmarz, S. (1937). Angenäherte Auflösung von Systemen linearer Gleichungen. *Bulletin International de l’Académie Polonaise des Sciences et des Lettres*, 35:355–357.
- [Kak and Slaney, 2001] Kak, A. and Slaney, M. (2001). *Principles of Computerized Tomographic Imaging*. Classics in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [Kaufman, 1993] Kaufman, L. (1993). Maximum likelihood, least squares, and penalized least squares for PET. *IEEE transactions on medical imaging*, 12(2):200–214.
- [Lange and Carson, 1984] Lange, K. and Carson, R. (1984). EM reconstruction algorithms for emission and transmission tomography. *Journal of Computer Assisted Tomography*, 8(2):306–316.
- [Li et al., 2014] Li, C., Martínez-Dávalos, A., and Cherry, S. R. (2014). Numerical simulation of x-ray luminescence optical tomography for small-animal imaging. *Journal of Biomedical Optics*, 19(4):046002.
- [Loehr, 2014a] Loehr, N. (2014a). *Advanced Linear Algebra*. CRC Press.
- [Loehr, 2014b] Loehr, N. (2014b). *Advanced Linear Algebra*. CRC Press.

- [NEMA, 2008] NEMA (2008). Performance Measurements of Small Animal Positron Emission Tomographs (PETs). *NEMA Standards Publication NU 4*.
- [Niinimäki et al., 2016] Niinimäki, K., Lassas, M., Hämäläinen, K., Kallonen, A., Kolehmainen, V., Niemi, E., and Siltanen, S. (2016). Multiresolution Parameter Choice Method for Total Variation Regularized Tomography. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 9(3):938–974.
- [Panin et al., 1998] Panin, V. Y., Zeng, G. L., and Gullberg, G. T. (1998). Total variation regulated EM algorithm. In *1998 IEEE Nuclear Science Symposium Conference Record. 1998 IEEE Nuclear Science Symposium and Medical Imaging Conference (Cat. No.98CH36255)*, volume 3, pages 1562–1566.
- [Pratx et al., 2010] Pratx, G., Carpenter, C. M., Sun, C., Rao, R. P., and Xing, L. (2010). Tomographic molecular imaging of x-ray-excitable nanoparticles. *Optics Letters*, 35(20):3345–3347.
- [Qu et al., 2009] Qu, G., Wang, C., and Jiang, M. (2009). Necessary and sufficient convergence conditions for algebraic image reconstruction algorithms. *IEEE Transactions on Image Processing*, 18(2):435–440.
- [Radon, 1986] Radon, J. (1986). On the determination of functions from their integral values along certain manifolds. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 5(4):170–176.
- [Rodríguez-Villafuerte and Martínez-Dávalos, 2011] Rodríguez-Villafuerte, M. and Martínez-Dávalos, A. (2011). Monte Carlo dosimetry of iodine contrast objects in a small animal microCT. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 648:S306–S309.
- [Romberg, 2008] Romberg, J. (2008). Imaging via Compressive Sampling. *IEEE Signal Processing Magazine*, 25(2):14–20.
- [Salvat et al., 2009] Salvat, F., Fernández-Varea, J. M., and Sempau, J. (2009). PENELOPE-2008: A Code System for Monte Carlo Simulation of Electron and Photon Transport. *OECD Workshop Proceedings NEA No. 6416*, pages 223–271.
- [Shepp and Logan, 1974] Shepp, L. A. and Logan, B. F. (1974). The Fourier reconstruction of a head section. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 21(3):21–43.
- [Siddon, 1985] Siddon, R. L. (1985). Fast calculation of the exact radiological path for a three-dimensional CT array. *Medical Physics*, 12(2):252–255.
- [Sidky et al., 2006] Sidky, E. Y., Kao, C.-M., and Pan, X. (2006). Accurate image reconstruction from few-views and limited-angle data in divergent-beam CT. *Journal of X-Ray Science and Technology*, 14(2):119–139.
- [Suetens, 2009] Suetens, P. (2009). *Fundamentals of Medical Imaging*. Cambridge University Press.

- [Van der Sluis and Van der Vorst, 1990] Van der Sluis, A. and Van der Vorst, H. A. (1990). SIRT- and CG-type methods for the iterative solution of sparse linear least-squares problems. *Linear Algebra and its Applications*, 130:257–303.
- [Wang et al., 2011] Wang, Y., Yagola, A. G., and Yang, C., editors (2011). *Optimization and Regularization for Computational Inverse Problems and Applications*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- [Yan and Lu, 2015] Yan, J. and Lu, W.-S. (2015). Image denoising by generalized total variation regularization and least squares fidelity. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 26(1):243–266.
- [Yu et al., 2012] Yu, Z., Noo, F., Dennerlein, F., Wunderlich, A., Lauritsch, G., and Hornegger, J. (2012). Simulation tools for two-dimensional experiments in x-ray computed tomography using the FORBILD head phantom. *Physics in Medicine and Biology*, 57(13):N237–N252.