UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

Caracterizaciones de los Espacios G-ANR para Acciones Propias

T E S I S
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:
M.C. Enrique Vargas Betancourt

TUTOR:
Dr. Sergey Antonyan
Facultad de Ciencias de la UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:
Dr. Armando Mata Romero
Facultad de Ciencias Exactas de la UJED

Dr. Hugo Alberto Rincón Mejía
Facultad de Ciencias de la UNAM

Ciudad Universitaria, Cd. Mx. 2018

Índice general

Introducción

El presente trabajo de investigación esta enmarcado dentro de la Teoría Equivariante de Retractos. Esta teoría surge como intersección de dos ramas de la topología. Por un lado, la teoría de los grupos topológicos de transformaciones que tiene sus fundamentos en los trabajos de Sofus Lie a finales del siglo XIX, y que va enfocada a estudiar los grupos de simetrías de objetos topológicos tales como variedades diferenciables, poliedros, variedades riemannianas, entre otros. Así, podemos considerar a la topología como la teoría de los Grupos Topológicos de Transformaciones con un grupo trivial actuando, y buscar generalizar esta teoría al caso donde el grupo actuante es un grupo topológico no trivial.

Por otro lado, el problema de extender una función continua $f : A \to Y$ de un subconjunto cerrado A de un espacio X a todo X, o al menos a alguna vecindad U de A en X es muy común encontrarlo en topología. Karol Borsuk observa que el caso particular, cuando $Y = X$ y $f = i$ es la función inclusión, merece especial atención. En este caso, cualquier extensión de i es llamada *retracción* (*retracción de vecindad*). Si tal retracción existe A es llamado *retracto* (*retracto de vecindad*) de X. En su tesis doctoral "O retrakcjach i zbiorach zwiazanych"("Sobre retracciones y conjuntos relacionados") defendida en 1930, Borsuk introduce y estudia las nociones básicas sobre los retractos absolutos, estableciendo así los fundamentos de la teoría de retractos.

En la actualidad la Teoría Equivariante de Retractos ha tenido un desarrollo vertiginoso con aportaciones de matemáticos como S. Antonyan [7], [8], [11] y [15], A. Feregan [31], J. Jaworoski [39], [40] y [41], R. Lashof [45], Y. Smirnov [50], entre muchos otros.

La idea principal de esta teoría, es extender resultados ya existentes en la teoría de retractos pero considerando que los espacios topológicos poseen una acción de un grupo topológico no trivial (G-espacios) y que las funciones continuas entre estos espacios conmutan con la acción del grupo (funciones equivariantes). En general, el camino para establecer una versión equivariante de un resultado correspondiente a topología general no es sencillo, pues depende de las propiedades topológicas del grupo y del espacio, así como de la definición de la acción.

Una manera que ha dado muy buenos resultados es considerar las acciones de grupos compactos (ver por ejemplo [7], [8], [41]). Sin embargo, si la compacidad del grupo es debilitada a compacidad local surgen algunos problemas que no permiten que sea sencilla la "equivariantización ". Este hecho propició que en 1961 R. Palais introdujera la noción de G-espacio propio con el propósito de extender la teoría de acciones de grupos compactos al caso de acciones de grupos localmente compactos. De hecho, si G es un grupo compacto entonces cualquier G-espacio es propio.

A lo largo de este trabajo estaremos adoptando la siguiente caracterización como la definición de un espacio G-ANR: un G espacio propio metrizable Y es un G-ANR para la clase de todos los G-espacios propios metrizables por métrica G-invariante (G-$\mathcal{M}$), si $Y \in G$-$\mathcal{M}$ y cada vez que Y se encaja equivariantemente como un cerrado de un G-espacio $X \in G$-$\mathcal{M}$, entonces existe una retracción equivariante $r : U \to Y$, donde U es una vecindad invariante de Y en X.

En nuestro caso, estableceremos algunos resultados dentro de la teoría equivariante de retractos, más en particular, estableceremos caracterizaciones de los espacios G-ANR, generalizando resultados de la teoría de retractos clásica y algunas caracterizaciones establecidas por J. Jaworoski para el caso de grupos compactos, llevándolos todos al caso de acciones propias de grupos de Lie (no necesariamente compactos).

En primer lugar, nos interesaremos en determinar qué propiedades basadas en el concepto de homotopía equivariante permiten caracterizar a los espacios G-ANR, para el caso en que G es un grupo de Lie. En este sentido, dos propiedades completamente relacionadas con el concepto de G-ANR son la de G-contraibilidad local y la de extensión de homotopía equivariante, recordemos estas definciones:

Un G-espacio X se dice que es localmente G-contraíble si para cada punto $x \in X$ y para cada G_x-vecindad U de x existe una vecindad G_x-invariante V de x tal que V es G_x contraíble en U a un punto por medio de una homotopía G_x equivariante, donde G_x denota el estabilizador del punto x.

Por otro lado, se dice que un G-par (X, A), tiene la propiedad de extensión de homotopía equivariante (abreviado G-PEH) con respecto a un G-espacio Y si y sólo si cualquier G-homotopía parcial $f_t : A \to Y, t \in I$ de una función equivariante arbitraria $h : X \to Y$ tiene una extensión equivarainte

$$h_t : X \to Y, t \in I \text{ tal que } h_0 = h.$$

Un hecho conocido desde hace varios años, es que todo espacio G-ANR es localmente G-contraíble. En 1978, Jaworowski (ver [40]) probó que si G es un grupo compacto de Lie, entonces para G-espacios de dimensión finita la G-contraibilidad local es equivalente a la propiedad de ser un G-ANR. Sin embargo, sin la propiedad de ser de dimensión finita, la G-contraibilidad local por sí sola no basta para caracterizar a los espacios G-ANR (ver [21, Capítulo V] para un contraejemplo).

Para el caso de la G-PEH con respecto a cualquier G-par (X, A), el *Teorema de extensión de homotopía equivariante de Borsuk* (ver [7, Teorema 5] para el caso de acciones de grupos compactos) establece que esta propiedad es necesaria para que un G-espacio metrizable sea un espacio G-ANR, pero nuevamente, por sí sola no basta para caracterizar a estos espacios, aún en el caso en que G es el grupo trivial (ver [33] para un ejemplo).

Dentro de los principales resultados originales de la tesis se demuestra el Teorema 2.2.14, el cual establece que la propiedad de que un G-espacio Y sea localmente G-contraíble, junto con la propiedad de que cualquier G-par $(X, A) \in G$-$\mathcal{M}$ tenga la G-PEH respecto a Y, es equivalente a que Y sea un espacio G-ANR para el caso en que G es un grupo de Lie arbitrario. Es importante mencionar que este teorema es una generalización de un teorema importante de la teoría de retractos clásica (ver [37, Capítulo IV, Teorema 2.4]) al caso equivariante. Dos de los principales resultados para lograr dicha caracterización son el Teorema 2.1.2 que presenta una caracterización local de los espacios G-ANR, y permite reducir el análisis de las propiedades de retracción globales a propiedades de retracción locales, y el otro resultado es precisamente el teorema de extensión de homotopía equivariante de Borsuk (ver 2.2.10). Ambos teoremas (2.1.2 y 2.2.10), también son generalizaciones originales de este trabajo, para el caso de acciones de grupos de Lie arbitarios.

Un resultado más de este trabajo que permite caracterizar a los espacios G-ANR desde el punto de vista homotópico es el Teorema 2.2.8, en este caso, se establece la definición de la propiedad $\mathcal{P}(G, \mathcal{V})$, y se demuestra que dicha propiedad por sí sola caracteriza completamente a los espacios G-ANR. Esta propiedad es similar a la G-PEH, sin embargo, en este caso las homotopías equivariantes que participan son controladas con una cubierta abierta $\mathcal{V}$. Nuevamente, esta caracterización es una generalización de un teorema importante de la teoría de retractos clásica (ver [37, Capítulo IV, Teorema 1.3]) .

Por otro lado, otro de los problemas clave en la teoría equivariante de retractos, es el de caracterizar a los espacios G-ANR por medio de conjuntos de puntos H-fijos, en donde H es un subgrupo compacto del grupo actuante G.

Es un hecho conocido, que una condición necesaria para que un G-espacio metrizable X sea un G-ANR es que el conjunto de puntos H-fijos $X^H = \{x \in X \mid hx = x, \forall h \in H\}$ sea un ANR ordinario para cualquier subgrupo cerrado H de G. En este sentido, en la década de los 70's J. Jaworowski se interesa en el estudio del siguiente problema:

Sea G un grupo compacto de Lie y X un G-espacio metrizable el cual tienen una cantidad finita de tipos de órbita. Supóngase que para cada subgrupo compacto de $H \subset G$, el conjunto de puntos H-fijos X^H es un ANR en el sentido ordinario de la teoría de retractos clásica. ¿Es entonces X bajo estas condiciones un espacio G-ANR?.

Algunos años después, el mismo Jaworowski [39] logra dar respuesta parcial positiva a su pregunta, pues para lograr la respuesta afirmativa agrega una gran cantidad de condiciones al espacio en cuestión, obteniendo el siguiente resultado:

Sea G un grupo compacto de Lie y X un G-espacio localmente compacto separable metrizable de dimensión finita y con un número finito de tipos de órbita. Entonces X es un G-ANR si y sólo si para cada subgrupo cerrado $H \subset G$ el conjunto de puntos H-fijos X^H es un ANR.

Posteriormente, Lashof [45] mediante una demostración bastante elegante demuestra que se puede prescindir de la compacidad local. Y por último, usando la demostración de Lashof, nuevamente Jaworowski en [41] logra debilitar la condición de que el espacio sea de dimensión finita a que sólo sea un espacio con una estructura finita.

Basándonos en los trabajos de Jaworowski y Lashof, en el capítulo III presentamos el Teorema 3.1.6, el cual establece una nueva versión de la caracterización de Jaworowski, pero omitiendo en este caso la condición de separabilidad del espacio, y pidiendo únicamente que el espacio sea metrizable y con una estructura finita, de esta manera se da un paso más en la búsqueda de la respuesta al problema de Jaworowski.

Con la intensión de seguir generalizando la teoría equivariante de retractos con acciones de grupos compactos, al caso de acciones de grupos de Lie (no necesariamente compactos), en la última parte del trabajo nos interesamos en extender el Teorema 3.1.6 al caso de acciones propias de grupos de matrices de Lie. De esta manera, otra de las caracterizaciones principales de los espacios G-ANR que se presentan en este trabajo es el Teorema 3.4.5. En él se establece que para el caso en que G es un grupo de matrices y X un G espacio propio metrizable con una estructura finita, entonces X es un G-ANR si y sólo si para cada subgrupo compacto H de G, X^H es un ANR.

Como un resultado extra de la investigación, se presenta en 3.3.5 un nuevo teorema de encaje para G-espacios propios con una estructura finita, dentro del producto de un espacio lineal normado con un espacio que se forma como producto de conos de espacios cociente.

La estructura general de la tesis está dividida en tres capítulos. El primero corresponde a los preliminares, y en él se establecen todas las definiciones y conceptos básicos de la teoría equivariante de retractos que serán utilizado en los capítulos posteriores.

En el segundo capítulo nos enfocamos en el estudio de las propiedades homotópicas de los espacios G-ANR, y se demuestran todas las caracterizaciones homotópicas que presentamos en el trabajo.

Finalmente, en el último capítulo se demuestran los resultados concernientes a las caracterizaciones por conjuntos de puntos H-fijos mencionados anteriormente, tanto para el caso de acciones de grupos compactos como para el caso de acciones propias de grupos de matrices.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo nos centraremos en el estudio de la categoría de los G-espacios, principalmente en las herramientas necesarias para obtener los resultados que presentamos en los capítulos posteriores; por ello, nos introducimos en la teoría equivariante recordando los conceptos y resultados básicos sobre grupos topológicos, grupos de Lie, grupos de matrices y G-espacios. Además se introduce el concepto de G-espacio propio (en el sentido de R. Palais), noción cuya importancia radica en el hecho de que permite extender algunos resultados fundamentales de acciones de grupos compactos a acciones de grupos localmente compactos. Los resultados principales de este trabajo están enmarcados dentro de las acciones propias, es por eso que recordamos las definiciones, conceptos y hechos fundamentales de este tipo de acciones, tratando de resaltar únicamente lo que necesitaremos en los siguientes dos capítulos. Si el lector está interesado en profundizar en estos temas se pueden recomendar algunas obras como, por ejemplo, para la teoría equivariante G. Bredon [22], T. tom Dieck [25] ó K. Kawakubo [43]. Para el estudio de G-espacios propios R. Palais [49], H. Abels [2] y los artículos [4–16]. Y para las ideas y hechos básicos sobre espacios con una estructura finita se recomiendan los artículos de J. Jaworowski [41] y [42].

1.1. Grupos topológicos

Cuando se fusionan la estructura de grupo (abstracto) con la de espacio topológico se obtienen los grupos topológicos, éstos relacionan las dos estructuras mediante la continuidad de las operaciones del grupo, obteniéndose así una gran cantidad de propiedades topológicas. Si además, agregamos otras condiciones como estructuras diferenciables o representaciones de grupos en otros grupos más accesibles, las propiedades son aún mayores.

En esta primera sección estudiaremos los grupos topológicos, presentando sólo los hechos que utilizaremos más adelante. Cabe mencionar que los resultados presentados aquí, en general no serán demostrados, pues además de ser en algunos casos laboriosos y complicados, no son el principal interés del trabajo. Sin embargo, en todos los casos se hacen las respectivas referencias para que el lector interesado pueda consultarlas.

Definición 1.1.1. *Un **grupo topológico** es una terna $(G, *, \tau)$, donde $(G, *)$ es un grupo, (G, τ) es un espacio topológico y $(G, *, \tau)$ satisface que las funciones $\mu : G \times G \to G$ y $\iota : G \to G$ definidas por $\mu(g, h) = g * h$ y $\iota(g) = g^{-1}$ son continuas, donde g^{-1} representa el inverso de g.*

Por comodidad en lo siguiente estaremos denotando la operación de grupo $g * h$ simplemente por gh y todos los grupos topológicos que se considerarán en este trabajo serán espacios de Hausdorff.

Ejemplo 1.1.2. *Sea G un grupo arbitrario con la topología discreta, entonces G es un grupo topológico.*

Ejemplo 1.1.3. *El conjunto $\mathbb{R}$ con la topología usual y la operación de suma usual es un grupo topológico.*

Ejemplo 1.1.4. *La circunferencia $\mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{C} \mid \|x\| = 1\}$ con la multiplicación de números complejos es un grupo topológico.*

Denotemos por $\mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ el conjunto de las matrices cuadradas $n \times n$ con entradas reales, existe una identificación natural de $\mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ con el espacio $\mathbb{R}^{n^2}$ dada por:

$$A = (a_{ij}) \mapsto (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}, a_{21}, ..., a_{2n}, ..., a_{n1}, ...a_{nn}).$$

Entonces, el subconjunto $GL(n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ de todas las matrices cuadradas $n \times n$ invertibles, puede ser considerado como un subespacio de $\mathbb{R}^{n^2}$. En base a ésto tenemos dos ejemplos más.

Ejemplo 1.1.5. *El grupo general lineal $GL(n, \mathbb{R})$ con la topología heredada por ser un subespacio de $\mathbb{R}^{n^2}$ es un grupo topológico.*

Ejemplo 1.1.6. *El grupo ortogonal $O(n, \mathbb{R})$ consistente de todas las matrices cuadradas $n \times n$ ortogonales con entradas reales y visto con la topología de subespacio de $GL(n, \mathbb{R})$ es un subgrupo topológico de $GL(n, \mathbb{R})$.*

Si consideramos la función determinante $det : \mathbb{M}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, es un hecho conocido que esta función es continua, notemos que podemos ver a $GL(n, \mathbb{R})$ como la preimagen bajo la función determinante del conjunto de todos los números reales distintos de cero, por lo que, $GL(n, \mathbb{R})$ es no compacto (es un subconjunto abierto de $\mathbb{M}(n, \mathbb{R})$), y no conexo (las matrices con determinante positivo y las matrices con determinante negativo forman una partición de $GL(n, \mathbb{R})$ en conjuntos abiertos disjuntos). Sin embargo, en el siguiente teorema se muestra que $O(n, \mathbb{R})$ si es compacto.

Teorema 1.1.7. *El grupo ortogonal $O(n, \mathbb{R})$ de dimensión n es compacto*

Demostración. Ver [20, Teorema 4.13] □

Quiza una de las propiedades más importantes que tienen los grupos topológicos es que son espacios homogéneos, es decir, para cualesquiera par de puntos g_1, g_2 en un grupo topológico G, existe un homeomorfismo $\varphi : G \to G$ tal que $\varphi(g_1) = g_2$, a saber, φ es la traslación izquierda por $g_2 g_1^{-1}$. En virtud de esta homogeneidad, para probar que G satisface cierta propiedad local bastará probarlo para un punto, en particular para el elemento identidad e de G, en base a ésto las vecindades de la identidad juegan un papel primordial en el estudio de los grupos topológicos.

Proposición 1.1.8. *Sea G un grupo topológico y $\mathcal{B}$ una base de vecindades de e en G. Entonces para cualquier vecindad N de e existen U, V y W en $\mathcal{B}$ tales que*

$$U^2 \subset N \qquad V^{-1} \subset N \qquad y \qquad WW^{-1} \subset N.$$

Las vecindades abiertas simétricas de e forman una base local en e.

Demostración. Ver [23, Proposición 3.1] □

Si a un grupo topológico le agregamos una estructura diferenciable y pedimos diferenciablidad en sus operaciones obtenemos más riqueza en sus propiedades. Los principales resultados de este trabajo se enmarcan dentro de las acciones de este tipo de grupos.

Definición 1.1.9. *Un **grupo de Lie** es un grupo topológico segundo numerable con estructura de n-variedad diferenciable, tal que las operaciones del grupo son funciones diferenciables.*

Se puede observar directamente de la definición que todo grupo de Lie es localmente compacto, metrizable y separable.

Los ejemplos de 1.1.3 a 1.1.6 son todos grupos de Lie, pero sólo los ejemplos 1.1.4 y 1.1.6 son grupos de Lie compactos. Aunque la mayoría de los resultados de este trabajo son válidos para grupos de Lie no necesariamente compactos, en algunas ocasiones sí será necesario pedir compacidad en el grupo.

Dos hechos fundamentales sobre los grupos de Lie, los cuales no serán demostrados en este trabajo son los siguientes.

Teorema 1.1.10. *Los subgrupos cerrados de grupos de Lie son también grupos de Lie.*

Demostración. Ver [36, Capítulo 7, Teorema 1.1] □

Teorema 1.1.11. *Un grupo compacto es un grupo de Lie si y sólo si es isomorfo a un subgrupo cerrado de $O(n,\mathbb{R})$ para algún n.*

Demostración. Var [22, Capítulo 0, Teorema 5.1] □

En el teorema anterior por isomorfismo se entiende un isomorfismo de grupos que además es un homeomorfismo de espacios.

En la teoría de grupos topológicos una técnica que resulta muy eficiente, es poder estudiar los grupos por medio de homomorfismos continuos dentro de otra clase de objetos más elementales, en este sentido tenemos la siguiente definición.

Definición 1.1.12. *Dado un grupo topológico G, por una* ***representación real*** *de G entenderemos un monomorfismo continuo de G en $GL(n,\mathbb{R})$. Si G es un grupo de Lie y existe una representación real de G diremos que G es un* ***grupo de matrices de Lie****.*

Para cerrar esta sección, aclaramos que en lo siguiente estaremos usando indistintamente la palabra "grupo" y las palabras "grupo topológico" refiriéndonos en ambos casos a un grupo topológico arbitrario, de la misma manera usaremos solo "grupo de matrices" para hacer referencia a un grupo de matrices de Lie.

1.2. G-espacios

La categoría G-TOP está formada por espacios topológicos que poseen una acción continua de un grupo topológico y funciones continuas entre ellos que conmutan con las acciones. Esta categoría es en cierto sentido "paralela"a la categoría TOP de espacios topológicos y funciones continuas. De esta manera podemos tratar de "trasladar"muchos conceptos de la categoría TOP a la categoría G-TOP. Así, nociones de la categoría TOP como: espacios, funciones, retractos, espacios *ANR'* y *ANE*, homotopías entre otras, pueden ser llevadas a la categoría G-TOP con nombres como: G-espacios, funciones equivariantes, retractos equivariantes, espacios *G-ANR* y *G-ANE* y G-homotopías, respectivamente.

Definimos a continuación lo que es un G-espacio recordando que todos los grupos topológicos considerados son de Hausdorff.

Definición 1.2.1. *Por un **grupo topológico de transformaciones** o un G-**espacio** se entenderá una terna* (G, X, θ) *donde* G *es un grupo topológico,* X *es un espacio topológico y* $\theta : G \times X \to X$ *una función continua que satisface:*

1. $\theta(e, x) = x$, *para todo* $x \in X$, *donde* e *es la identidad de* G.

2. $\theta(h, \theta(g, x)) = \theta(hg, x)$, *para todo* $x \in X$, $g, h \in G$.

A la función θ *se le conoce como la **acción** y por comodidad denotaremos* $\theta(g, x)$ *por* gx.

Algunos ejemplos de G-espacios son:

Ejemplo 1.2.2. *Cualquier grupo topológico* G *actúa en si mismo mediante la multiplicación izquierda.*

Ejemplo 1.2.3. *Para cada* $g \in G$ *y* $x \in X$ *se define* $\theta(g, x) = x$, *de esta manera cualquier grupo topológico* G *actúa sobre cualquier espacio topológico* X, *ésta es conocida como la **acción trivial** .*

Ejemplo 1.2.4. *Si* H *es un subgrupo de un grupo topológico* G. *Entonces el espacio cociente de clases laterales izquierdas de* H, *denotado por* G/H, *es un* G*-espacio con la acción por translación izquierda* $\theta : G \times G/H \to G/H$ *dada por* $\theta(g', gH) = g'gH$.

Ejemplo 1.2.5. *El grupo* $\mathbb{S}^1$ *actúa sobre el plano complejo* $\mathbb{C}$ *por* $\theta(e^{it}, re^{ix}) = re^{i(t+x)}$.

Ejemplo 1.2.6. *El grupo aditivo $\mathbb{R}$ actúa sobre el espacio $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ por $\theta(t,(x,y)) = (e^t x, e^t y)$.*

Es sencillo verificar que para cada $g \in G$, la acción θ determina un homeomorfismo $\theta_g : X \to X$, donde $\theta_g(x) = gx$ para todo $x \in X$. Cada uno de estos homeomorfismos θ_g es llamada una **transición**. Así podemos definir una función $\Phi : G \to Homeo(X)$, donde $Homeo(X)$ es el grupo de homeomorfismos de X en X dada por $\Phi(g) = \theta_g$. De esta manera Φ es un homomorfismo de grupos.

A continuación, presentamos las definiciones de algunos subconjuntos importantes dentro de la teoría equivariante.

Definición 1.2.7. *Sea (G, X, θ) un grupo topológico de transformaciones. Sean H un subgrupo de G, A un subconjunto de X y $x \in X$, se definen los siguientes conjuntos:*

1. *$G_x = \{g \in G |\ gx = x\}$, llamado el* ***estabilizador*** *de x o* ***subgrupo de isotropía*** *de x.*

2. *$H(A) = \{ha |\ h \in H, a \in A\} \subset X$ llamado la H-**saturación** de A. En el caso en que $A = \{x\}$ consta de un solo punto, diremos que $H(A)$ es la H-**órbita** de x y se denota por $H(x)$. Si $H = G$ diremos simplemente que $G(x)$ es la **órbita** de x .*

En el caso en que $G_x = G$ diremos que x es un punto G-**fijo** y denotaremos por X^G el conjunto de todos los puntos de X que son fijados por G. Además si $H \subset G$ es un subgrupo de G definimos el **conjunto de puntos H-fijos** X^H, como $X^H = \{x \in X \mid hx = x, \text{ para todo } h \in H\}$. Si $H(A) = A$, diremos que A es un conjunto H-**invariante** y en el caso en que $H = G$ se dirá únicamente que A es un conjunto **invariante** .

Podemos clasificar también los tipos de acciones de acuerdo a la siguiente definición:

Definición 1.2.8. *Sea X un G-espacio, diremos que una acción de G en X es:*

1. ***trivial*** *si $G_x = G$ para todo $x \in X$ (ver Ejemplo 1.2.3).*

2. ***libre*** *si $G_x = \{e\}$ para todo $x \in X$.*

3. ***efectiva o fiel*** *si $\bigcap_{x \in X} G_x = \{e\}$.*

4. ***transitiva*** *si tiene una sóla órbita.*

Si X es un G-espacio y $x, y \in X$, entonces $G(x) = G(y)$ o $G(x) \cap G(y) = \emptyset$, es decir, dos órbitas o son iguales o no se intersectan, esto genera una descomposición de X en las órbitas de cada uno de sus puntos. De esta manera la relación: $x \sim y$ si y sólo si $G(x) = G(y)$ es una relación de equivalencia en X y al conjunto de clases de equivalencia lo denotamos por X/G.

Definición 1.2.9. *Sea G un grupo y X un G-espacio, definimos la **proyección orbital** como la función:*

$$\pi : X \to X/G$$

donde $\pi(x) = G(x)$ vista como elemento de X/G.

Definición 1.2.10. *El **espacio orbital** o **espacio de órbitas** de un G-espacio X, es el conjunto X/G dotado con la topología cociente respecto a la proyección orbital. Esto es, un conjunto $U \subset X/G$ es abierto si y sólo si la image inversa $\pi^{-1}(U)$ es abierta en X.*

Algunos ejemplos interesantes de espacios de órbitas son los siguientes.

Ejemplo 1.2.11. *Sean $X = \mathbb{R} \times [0, 1] \subset \mathbb{C}$, $G = \mathbb{Z}$ y definimos la función $\phi(z) : X \to X$ por*

$$\phi(z) = \overline{z} + 1 + i,$$

donde $\overline{z}$ representa el conjugado de z. Con este espacio y esta función definimos la acción

$$\theta : G \times X \to X$$

por $\theta(n, z) = \phi^n(z)$. Entonces, el espacio orbital X/G es homeomorfo a la banda de Möbius $\mathbb{M}^2$.

Ejemplo 1.2.12. *Sean $X = \mathbb{R}^2$ y $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, definimos la acción de G sobre X por:*

$$\theta((n, m), (x, y)) = (n + x, m + y),$$

en este caso se puede verificar que el espacio de órbitas X/G es homeomorfo al toro $\mathbb{T}$.

Proposición 1.2.13. *Sea X un G-espacio con proyección orbital π. Entonces π es abierta.*

Demostración. Sea U un abierto de X, $\pi^{-1}\pi(U) = G(U) = \bigcup_{g\in G} gU$ es unión de abiertos de X por lo tanto $\pi(U)$ es abierto en X/G. $\square$

Definición 1.2.14. *Una función continua $f : X \to Y$ entre dos G-espacios se llama G-**función** o una **función equivariante** si satisface $f(gx) = gf(x)$, para cada $g \in G$ y cada $x \in X$.*

Se demuestra de manera sencilla que la composición de funciones equivariantes es nuevamente una función equivariante. En el caso en que Y sea un G-espacio trivial (ver Ejemplo 1.2.3), la función equivariante será llamada **invariante**, esto es, $f(gx) = f(x)$ para todo $x \in X$ y para todo $g \in G$.

Si $f : X \to Y$ es una función equivariante entre G-espacios, podemos verificar facilmente que $G_x \subset G_{f(x)}$. Si además, sucede que $G_x = G_{f(x)}$ diremos que f es una función **isovariante**

Definición 1.2.15. *Dados dos G-espacio X y Y, una función equivariante $i : X \to Y$ se dirá que es un G-**encaje** o un **encaje equivariante** de X en Y, si i es un encaje de espacios topológicos.*

Cuando un grupo G actúa sobre un espacio lineal topológico sobre el campo $\mathbb{R}$, y la acción "respeta"las operaciones del espacio, diremos que éste es un G-espacio lineal, de esta manera también relacionamos la estructura de espacio lineal con las acciones de grupos, obteniendo como es de esperarse, propiedades muy interesantes. Veamos esta definición a detalle.

Definición 1.2.16. *Diremos que X es un G-**espacio lineal**, si es un espacio lineal topológico dotado con una acción de G, la cual es lineal, es decir, $g(\lambda x + \mu y) = \lambda(gx) + \mu(gy)$ para todo $g \in G$, $x, y \in X$ y donde λ y μ son números reales.*

Definición 1.2.17. *Sean (X, d) y (Y, ρ) dos espacios métricos. Una función $f : X \to Y$ es llamada una **isometría** si para cualesquiera $x, y \in X$ se satisface:*

$$d(x, y) = \rho(f(x), f(y))$$

Si cada transición $\theta_g : X \to X$ en un G-espacio metrizable X es una isometría, diremos que la acción de G en X es **isométrica**. Llamaremos **G-espacio lineal normado** (**G-espacio de Banach**), a un espacio lineal normado (espacio de Banach) dotado de una acción lineal e isométrica del grupo G.

1.3. G-espacios propios y métricas pequeñas

En la teoría de los grupos topológicos de transformaciones, cuando se presenta el caso de que el grupo que actúa es compacto se han logrado establecer ya una gran cantidad de resultados que extienden los respectivos conceptos y teoremas de la topología general. Sin embargo, para el caso de las acciones de los grupos localmente compacto, la riqueza de resultados es mucho menor. En este sentido R. Palais [49] introduce la noción de G-espacio propio con el propósito de extender la teoría de acciones de grupos compactos al caso de acciones de grupos localmente compacto sobre espacios de Tichonoff. A lo largo de esta sección recordaremos los principales hechos y propiedades de estos espacios, iniciamos con la noción de conjunto pequeño, definición base para establecer las acciones propias.

Definición 1.3.1. *Sea G un grupo y X un G-espacio. Un subconjunto $V \subset X$ es llamado conjunto* ***pequeño*** *si para cada punto de X existe una vecindad U con la propiedad de que el conjunto* ***transportador****, definido por*

$$\langle U, V\rangle = \{g \in G |\, gU \cap V \neq \emptyset\}$$

tiene cerradura compacta en G.

Algunas de las propiedades que tiene los conjuntos pequeños se enlistan en la siguientes proposición y su demostración puede consultarse en [2, Proposición 1.2].

Proposición 1.3.2. *Sea X un G-espacio.*

1. *Si V es un conjunto pequeño de X entonces cualquier subconjunto de V es pequeño.*

2. *Si V es un conjunto pequeño, la cerradura $\overline{V}$ es un conjunto pequeño.*

3. *La unión finita de conjuntos pequeños es un conjunto pequeño.*

4. *Si V es un subconjunto pequeño de X y K es un subconjunto de G que tiene cerradura compacta, entonces $K(V)$ es pequeño.*

5. *Sea $\{V_i\}_{i\in I}$ una familia de subconjuntos pequeños de X, tal que $\{\pi(V_i)\}_{i\in I}$ es una familia localmente finita en X/G. Entonces $V = \bigcup_{i\in I} V_i$ es un conjunto pequeño. Si además cada V_i es cerrados entonces V es cerrado.*

Definición 1.3.3. *Un G-espacio X es llamado* ***propio*** *(en el sentido de R. Palais), si tiene una cubierta abierta formada de conjuntos pequeños.*

Algunos ejemplos de G-espacios propios son los siguientes:

Ejemplo 1.3.4. *Si G es compacto entonces claramente cada G-espacio es propio.*

Ejemplo 1.3.5. *Consideramos el espacio $\mathbb{R}^2$ con la acción del grupo aditivo $\mathbb{R}$ dada de la siguiente manera:*

$$\theta(t,(x,y)) = (x, t+y)$$

Ejemplo 1.3.6. *Si H es un subgrupo compacto de un grupo localmente compacto G, entonces el espacio de clases laterales izquierdas G/H es un G-espacio propio.*

Dentro de las propiedades más importantes que conservan los G-espacios propios, y que precisamente sirven de base para construir muchos otros resultados para esta clase de espacios es que cada órbita es cerrada y cada estabilizador es compacto.

Proposición 1.3.7. *Sea X un G-espacio propio. Entonces, cada órbita en X es cerrada y cada estabilizador es compacto.*

Demostración. Sean x en X y V una vecindad pequeña de x, entonces existe una vecindad V_x de x tal que el transportador $\langle V_x, V\rangle$ tiene cerradura compacta en G. Mostremos primero que G_x es cerrado en G. Sea $\{g_\alpha\}$ una red en G_x la cual converge a $g \in G$. Entonces $\{g_\alpha x\}$ es convergente a gx. Por otra parte $g_\alpha x = x$, para todo α. Entonces, $\{g_\alpha x\}$ es convergente también a x. Como G es de Hausdorff tenemos que $gx = x$ y, por lo tanto, $g \in G_x$. Así, G_x es cerrado en G. Es sencillo verificar que $G_x \subset \langle V_x, V\rangle$, lo que implica que G_x es compacto.

Veamos ahora que $G(x)$ es cerrada en X. Sean $y \in \overline{G(x)}$ y U una vecindad pequeña de y. Sea $g_\alpha x$ una red en $G(x)$ convergente a y. Tomamos α_0 tal que $g_{\alpha_0} x \in U$. Se tiene entonces $(g_\alpha g_{\alpha_0}^{-1})(g_{\alpha_0} x) = g_\alpha x$; así que $g_\alpha g_{\alpha_0}^{-1} \in \langle U, U\rangle \subset \overline{\langle U, U\rangle}$. Luego se tiene una subred de $g_\alpha g_{\alpha_0}^{-1}$ convergente a $h \in G$. Sin perdida de generalidad podemos suponer que la subred es la misma. De aquí que $\{g_\alpha\}$ converge a $hg_{\alpha_0} = g$. Entonces por un lado $\{g_\alpha x\}$ converge a y y por otro converge a gx, por lo que $gx = y$ y, por tanto, $y \in G(x)$. Se concluye que $G(x)$ es cerrado. $\square$

Es sencillo verificar que el producto de dos G-espacios es propio siempre que uno de ellos lo sea y que la imagen inversa de un G-espacio propio bajo una función equivariante también es un G-espacio propio.

Como ya lo habíamos mencionado, existen muchos resultados que dependen de la compacidad del grupo y que cuando el grupo ya no es compacto se pierden esas propiedades. No obstante, en los G-espacio propios se pueden rescatar algunos de ellos.

Proposición 1.3.8. *Sean X un G-espacio propio y $x \in X$. Entonces la función continua $\phi : G \to G(x)$ definida por $\phi(g) = gx$, para todo $g \in G$, es abierta.*

Demostración. Denotemos por e el elemento identidad de G. Sea U cualquier vecindad de $e \in G$. De acuerdo a la homogeneidad de G basta probar que $U(x)$ es una vecindad de x en $G(X)$. Para esto supongamos lo contrario, es decir, $U(x)$ no es abierto en $G(x)$. Entonces existe una red $\{g_\alpha\}$ tal que $g_\alpha x \notin U(x)$, para todo α, pero $\{g_\alpha x\}$ converge a x.
Ahora bien, si $g_\alpha x = hx$ para $h \in U$ entonces $g_\alpha x = hgx$ donde $g \in G_x$. Es decir, $g_\alpha \in UG_x$ e inversamente. Esto es, $g_\alpha x \in U(x)$ si y sólo si $g_\alpha \in UG(x)$. Por lo tanto, en nuestro caso se tiene que $g_\alpha \notin UG_x$ y puesto que UG_x es una vecindad de G_x no existe ninguna subred de g_α que converja a un elemento de G_x. Sea V una vecindad pequeña de x. Como a partir de cierto α_0 se tiene que $g_\alpha x \in V$ para $\alpha \geq \alpha_0$, podemos tomar una subred $\{g_{\alpha_i} x\}$ de manera que $g_{\alpha_i} \in \langle V, V\rangle$. Ahora bien, como $\langle V, V\rangle$ tiene cerradura compacta, tomemos otra vez una subred $g_{\alpha_{i_j}}$ que converja a un punto k. Entonces se tiene que $kx = x$, es decir $k \in G_x$, lo cual es una contradicción. Por tanto $U(x)$ debe ser una vecindad de x en G_x. □

Usando la proposición anterior obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.3.9. *Sea X un G-espacio propio y $x \in X$. Entonces la función $\theta_x : G/G_x \to G(x)$ definida por $\theta_x(gG_x) = gx$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Es fácil verificar que θ_x es biyectiva. La continuidad de ella y de su inversa se sigue del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} G/G_x \arrow[rr, "\theta_x"] & & G(x) \\ & G \arrow[ul, "\pi"] \arrow[ur, "\phi"'] & \end{tikzcd}$$

Aquí ϕ es la función de la Proposición 1.3.8 y π es la proyección orbital de la acción de G_x sobre G, la cual es continua y abierta. $\square$

Proposición 1.3.10. *Sean X un G-espacio propio y $V \subset X$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *V es pequeño.*

2. *La restricción de la acción $\theta : G \times \overline{V} \to X$, es perfecta.*

3. *La proyección orbital restringida a $\overline{V}$, $\pi|_{\overline{V}} : \overline{V} \to X/G$ es una función perfecta.*

4. *Dada una vecindad W de un punto $x \in X$, existe una vecindad $U \subset W$ de x y un subconjunto compacto K de G tal que $V \cap G(U) \subset K(U)$.*

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 4). Se sigue inmediatamente de la definición 1.3.1.
4) $\Rightarrow$ 1). Para un punto $x \in X$ sea U la vecindad pequeña de x con la propiedad: $V \cap G(U) \subset K(U)$ para algún subconjunto compacto $K \subset G$. Sea $O \subset U$ una vecindad de x tal que $\langle O, U\rangle$ tiene cerradura compacta en G. Entonces

$$\langle O, V\rangle = \langle O, V \cap GU\rangle \subset \langle O, KU\rangle = K\langle O, U\rangle$$

tiene cerradura compacta en G.
Para demostrar la equivalencia de las otras proposiciones podemos suponer que el conjunto V es cerrado.

1) $\Rightarrow$ 2). El hecho de que la preimagen de $x \in X$ bajo $\theta|_V$ es un conjunto compacto se sigue directamente de la definición 1.3.1. Para ver que $\theta|_V$ es cerrada, sea B un subconjunto cerrado de $G \times V$ y sea $\{g_\alpha v_\alpha\}$ una red en B, tal que converge a un punto $x \in X$. Debemos ver que $x \in \theta(B)$. Como V es pequeño existe una vecindad U de x tal que el transportador $\langle U, V\rangle$ tiene cerradura compacta. Podemos suponer que $g_\alpha \in \langle V, U\rangle = \langle U, V\rangle^{-1}$ y converge a algún $g \in G$. Pero entonces la red $v_\alpha = g_\alpha^{-1} g_\alpha v_\alpha$ converge a $g^{-1}x$ al cual llamaremos v. Así que $(g, v) \in B$ y $\theta(g, v) = gv = x \in B$.

2) $\Rightarrow$ 3). Veamos que $\pi|_V$ es perfecta. Sea B un subconjunto cerrado de V. Entonces, de acuerdo a (2), tenemos que $\theta(G \times B) = G(B)$ es cerrado en X, y $\pi(B)$ es cerrado en X/G, así pues, $\pi|_V$ es una función cerrada. Sea $\pi(x) \in X/G$ un punto en el espacio de órbitas, entonces

$$\pi^{-1}\pi(x) \cap V = G(x) \cap V = \langle\{x\}, V\rangle x.$$

Pero $\langle V, \{x\}\rangle = \langle \{x\}, V\rangle^{-1}$ es la primer proyección del subconjunto compacto $(\theta|_V)^{-1}(x)$ de $G \times V$.

3) $\Rightarrow$ 1). Sea $x \in X$. Debemos demostrar que x tiene una vecindad U tal que el transportador $\langle U, V\rangle$ tiene cerradura compacta en G. Sea $\phi = \pi|_V$. Por hipótesis ϕ es una función perfecta. Asi pues, $\phi^{-1}(\pi(x)) = G(x) \cap V$ es compacto. Como X es un G-espacio propio tenemos por el Corolario 1.3.9 que G/G_x es homeomorfo a $G(x)$, como además G_x es compacto, $\theta|_{\{x\}} : G \to G(x)$ es perfecta. Así pues, la preimagen del conjunto compacto $(G(x) \cap V)$,

$$(\theta|_{\{x\}})^{-1}(G(x) \cap V) = \{g \in G | gx \in V\} = \langle \{x\}, V\rangle$$

es también compacta. Hacemos $K = \langle \{x\}, V\rangle$, y sea U una vecindad abierta de x. Entonces $B = V \setminus K(U)$ es cerrado en V, así pues, $\phi(B) = \pi(B)$ es cerrado en X/G y no contiene a $\pi(x)$. Existe una vecindad O de x tal que $\pi(O) \cap \pi(B) = \emptyset$, esto es, $\langle O, B\rangle = \emptyset$. Así,

$$\langle O, V\rangle = \langle O, B\rangle \cup \langle O, K(U)\rangle = K\langle O, U\rangle.$$

Podemos asumir que U es pequeña y $\langle O, U\rangle$ tiene cerradura compacta en G. Entonces, $\langle O, V\rangle$ tiene cerradura compacta en G. $\square$

Definición 1.3.11. *Un subconjunto S de un G-espacio propio es llamado **fundamental** si S es un conjunto pequeño y su saturación $G(S)$ coincide con todo el espacio.*

Veamos a continuación un ejemplo de un conjunto fundamental

Ejemplo 1.3.12. *Consideramos el $\mathbb{S}^1$-espacio $\mathbb{C}$ del ejemplo 1.2.5. Como $\mathbb{S}^1$ es compacto, tenemos que la acción es propia. Además, el conjunto S definido por, $S = \{re^{i\alpha} \in \mathbb{C} \mid r \in [0, \infty) \ \ y \ \ \alpha = 0\}$ es un conjunto fundamental.*

Proposición 1.3.13. *Sea X un G-espacio propio con espacio de órbitas X/G paracompacto. Entonces la cerradura de cualquier conjunto pequeño V está contenida en un conjunto abierto fundamental.*

Demostración. Podemos asumir que V es cerrado. Entonces $\pi(V)$ es cerrado (ver 1.3.10 (3)). Afirmamos que cada punto $x \in X$ tiene una vecindad abierta pequeña U_x tal que $V \cap G(U_x) \subset U_x$. En efecto, x tiene una vecindad abierta pequeña U_1 tal que el transportador de U_1 a V, $\langle U_1, V\rangle$ tiene cerradura compacta en G. Denotemos por $K = \langle U_1, V\rangle$. Entonces, si hacemos $U_x = K(U_1)$

por (4) de la Proposición 1.3.2 tenemos que U_x es pequeño y cumple con la propiedad deseada.

Consideramos la cubierta abierta $\{\pi(U_x) \mid x \in X\}$ del espacio de órbitas X/G, como X/G es paracompacto existe un refinamiento abierto localmente finito $\{V_i \mid i \in I, V_i \subset \pi(U_{x_i})\}$. Sea $W_i = U_{x_i} \cap \pi^{-1}(V_i)$. Entonces los subconjuntos W_i son pequeños, en virtud de la Proposición 1.3.2 inciso (5) tenemos que el conjunto: $S = \bigcup_{i \in I} W_i$ es pequeño. Veamos que S cumple con las propiedades deseadas, como $\pi(S) = \bigcup_{i \in I} \pi(W_i) = X/G$ entonces S es abierto. Finalmente, sea $x \in V$, $\pi(x) \in V_i$ para algun $i \in I$, entonces

$$\begin{aligned} x \in \pi^{-1}(V_i) \cap V &\subset \pi^{-1}(V_i) \cap \pi^{-1}(\pi(U_x)) \cap V \\ &= \pi^{-1}(V_i) \cap G(U_{x_i}) \cap V \\ &\subset \pi^{-1}(V_i) \cap U_{x_i} \\ &= W_i \subset S. \end{aligned}$$

□

Para el caso de acciones propias y G-espacios de órbitas paracompactos la proposición anterior implica la existencia de conjuntos fundamentales.

Corolario 1.3.14. *Sea X un G-espacio propio con X/G paracompacto. Entonces existe un conjunto fundamental en X.*

Ejemplo 1.3.15. *Si $G = \mathbb{R}$ es el grupo aditivo de los reales y $X = \mathbb{R}^2$ el G-espacio propio con la acción*

$$\theta(t, (x, y)) = (x, y + t),$$

entonces es fácil verificar que la órbita de un punto $(x, y) \in X$ es la recta vertical que pasa por (x, y), de esta manera el espacio de órbitas X/G es homeomorfo a $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}$ es paracompacto el corolario anterior garantiza la existencia un conjunto fundamental en X.

Uno de los principales problemas en la teoría equivariante es establecer bajo qué condiciones existen métricas en los G-espacios tal que cada transición sea una isometría.

Definición 1.3.16. *Una métrica ρ para un G-espacio metrizable X, compatible con su topología, es una* ***métrica invariante*** *o G-**invariante** si $\rho(gx, gy) = \rho(x, y)$ para todo $g \in G$, y para todos $x, y \in X$, esto es, si la transición θ_g es una isometría respecto a ρ, para cada $g \in G$.*

Estaremos denotando por G-$\mathcal{M}$ la clase de todos los G-espacios propios que son metrizables por una métrica G-invariante. En general no siempre existe una métrica invariante en un G-espacio metrizable (ver el $\mathbb{Z}$-espacio $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ con la acción mostrada en [44] pag. 2). Palais prueba en [49] que G-$\mathcal{M}$ incluye a todos los G-espacios propios metrizables separables. En [12, Corolario 1] se demuestra que si X es un G-espacio propio metrizable localmente separable, entonces $X \in G$-$\mathcal{M}$ para cualquier grupo G localmente compacto. Sin embargo, sigue siendo un problema abierto si G-$\mathcal{M}$ coincide con la clase de todos los G-espacios propios metrizables (incluso para $G = \mathbb{R}$ y $G = \mathbb{Z}$). Referimos al lector a [12] para una discusión más profunda sobre este problema.

Teorema 1.3.17. *Sea X un G-espacio metrizable que admite una métrica invariante. Si el espacio orbital X/G es T_1 entonces es metrizable.*

Demostración. Sea ρ una métrica invariante de X. Para p y q puntos del espacio orbital X/G definimos

$$\rho^*(p, q) = inf\{\rho(x, y) \mid x \in \pi^{-1}(p), y \in \pi^{-1}(q)\}.$$

Es claro que $\rho^*(p, q) \geq 0$ y $\rho^*(p, q) = \rho^*(q, p)$. Ahora bien, debido a que la métrica ρ es invariante $\rho(g_1x, g_2y) = \rho(x, g_1^{-1}g_2y)$, luego para los puntos arbitrarios $x \in \pi^{-1}(p)$ y $y \in \pi^{-1}(q)$,

$$\rho^*(p, q) = in\{\rho(x, gy) \mid g \in G\} = \rho(x, G(y)).$$

Si $p \neq q$ entonces $x \notin G(y)$, pero como la órbita $G(y)$ es cerrada pues X/G es T_1, $\rho^*(p, q) = \rho(x, G(y)) > 0$.

Mostraremos ahora que ρ^* satisface la desigualdad del triángulo, para ello sea $r = G(z)$ un punto arbitrario de X/G. Tenemos

$$\begin{aligned} \rho^*(p, q) &= inf\{\rho(x, gy) \mid g \in G\} \\ &\leq inf\{\rho(x, g'z) + \rho(g'z, gy) \mid g, g' \in G\} \\ &\leq inf\{\rho(x, g'z) \mid g' \in G\} + inf\{\rho(z, g''y) \mid g'' \in G\} \\ &= \rho^*(p, r) + \rho^*(r, q). \end{aligned}$$

Finalmente demostraremos la compatibilidad de ρ^* con la topología del espacio orbital X/G, esto es, la topología de la métrica ρ^* es la topología cociente del espacio orbital.

Consideramos las vecindades básicas $V = \{y \in X \mid \rho(x,y) < \varepsilon\}$ de x en (X,ρ) y $V^* = \{q \in X/G \mid \rho^*(\pi(x),q) < \varepsilon\}$ de $\pi(x)$ en $(X/G,\rho^*)$. Si $y \in V$, la desigualdad $\rho^*(\pi(x),\pi(y)) \leq \rho(x,y)$ implica que $\pi(y) \in V^*$, luego $\pi(V) \subset V^*$. Ahora si $q \in V^*$, $\rho(x,\pi^{-1}(q)) = \rho^*(\pi(x),q) < \varepsilon$ por lo tanto algún $y \in \pi^{-1}(q)$ satisface $\rho(x,y) < \varepsilon$, luego $q = \pi(y) \in \pi(V)$. Hemos probado que $V^* \subset \pi(V)$ y de aquí se sigue la igualdad $V^* = \pi(V)$. Por lo anterior, la proyección orbital $\pi : X \to X/G$ es continua y abierta, en consecuencia la topología de la métrica ρ^* coincide con la topología cociente de X/G. □

El trabajar en la clase G-$\mathcal{M}$ nos permite, entre otras cosas, que los espacios de órbitas sean espacios metrizables y, por tanto, paracompactos.

Proposición 1.3.18. *Sea $X \in G$-$\mathcal{M}$, entonces X/G es metrizable.*

Demostración. Dado que X es un G-espacio propio, se tiene que para cada $x \in X$ la órbita $G(x)$ es cerrada en X. Esto implica que X/G es un espacio T_1. Entonces, de acuerdo al Teorema 1.3.17 se sigue que X/G es metrizable. □

Observemos un par de ejemplos interesantes en donde se aplica la proposición anterior.

Ejemplo 1.3.19. *Recordando el ejemplo 1.3.5 podemos observar que el $\mathbb{R}$-espacio considerado ahí es metrizable y la acción es propia, por lo tanto el espacio cociente es un espacio metrizable, de hecho, el espacio cociente es homeomorfo a $\mathbb{R}$.*

Ejemplo 1.3.20. *Si consideramos el G-espacio del ejemplo 1.2.12, se verifica fácilmente que se cumplen las condiciones de la proposición 1.3.18. Por lo tanto, tenemos una manera sencilla de ver que el toro $\mathbb{T}$ es un espacio metrizable.*

Dentro de la teoría equivariante siempre es importante poder trabajar con espacio metrizables que admiten métricas invariantes. En nuestro caso requerimos de una condición más sobre este tipo de métricas. Para un espacio metrizable (X,ρ) usaremos la notación $B_\rho(x,r)$ para la bola de centro x y radio r, es decir,

$$B_\rho(x,r) = \{y \in X \mid \rho(x,y) < r\}.$$

Tenemos la siguiente definición.

Definición 1.3.21. *Una métrica invariante ρ sobre un G-espacio propio X es llamada* ***pequeña****, si cualquier bola cerrada unitaria $\overline{B}_\rho(x,1)$ es un subconjunto pequeño de X.*

Los ejemplos 1.3.5 y 1.2.12 muestran G-espacios propios cuyas métricas son pequeñas.

Lema 1.3.22. *Sean X un espacio metrizable, $C \subset X$ un subconjunto cerrado y U una vecindad de C. Entonces existe una métrica compatible d sobre X tal que $d(x,y) > 1$ siempre que $x \in C$ y $y \in X \setminus U$*

Demostración. Como X es un espacio normal, existe un subconjunto abierto $V \subset X$ tal que

$$C \subset V \subset \overline{V} \subset U.$$

Sea $\phi : X \to [0,1]$, una función continua tal que $\overline{V} \subset \phi^{-1}(1)$ y $U \subset \phi^{-1}(0)$. Si ρ es una métrica compatible sobre X, entonces es sencillo verificar que la fórmula

$$d(x,y) = \rho(x,y) + |\phi(x) - \phi(y)|, \quad x, y \in X$$

define una métrica compatible sobre X.
Se sigue de la definición de d que $d(x,y) = \rho(x,y) + 1 > 1$ para $x \in C$ y $y \in X \setminus U$. □

El siguiente resultado es válido para grupos localmente compactos, no necesariamente de Lie.

Teorema 1.3.23. *Sea G un grupo localmente compacto. Entonces todo G-espacio $X \in G\text{-}\mathcal{M}$ admite una métrica invariante pequeña compatible.*

Demostración. En virtud de la Proposición 1.3.18 tenemos que X/G es metrizable y por tanto, paracompacto. Por el Corolario 1.3.14 sabemos que existe un conjunto fundamental $S \subset X$ y por 1.3.2 (2) deducimos que la cerradura de un conjunto fundamental es también fundamental. Entonces podemos suponer que S es cerrado.
Escogemos vecindades V, W de la identidad $e \in G$ con las siguientes propiedades $V \subset W \subset G$, $V = V^{-1}$, $V \cdot V \subset W$ y $\overline{W}$ es un conjunto compacto (ver Proposición 1.1.8). Bajo estas condiciones, si hacemos $K = \overline{V}$ tenemos que K es un conjunto compacto simétrico y $K \subset W$. Las proposiciones 1.3.10 (3) y 1.3.2 (4) nos garantizan que $K(S)$ es cerrado y $W(S)$ es un conjunto pequeño respectivamente y además tenemos que $K(S) \subset W(S)$. Debido a la paracompacidad del espacio orbital X/G podemos encontrar un conjunto

pequeño fundamental U en X tal que $K(S) \subset W(S) \subset U$ (ver Proposición 1.3.13).
De acuerdo al Lema 1.3.22 podemos escoger una métrica compatible d sobre X que satisface la siguiente propiedad:

$$d(x,y) > 1 \text{ siempre que } x \in K(S) \text{ y } y \in X \setminus U \tag{1.1}$$

Definimos:

$$r(x) = d(x, X \setminus U) \quad x \in X.$$

Tenemos que para $x, y \in X$, $r(x) - r(y) \leq d(x,y)$, y entonces si $x, y, z \in X$ se cumple que:

$$r(x) + r(z) \leq d(x,y) + r(y) + r(z).$$

Definimos μ como:

$$\mu(x,y) = min\{d(x,y), r(x), r(y)\}, \quad x, y \in X.$$

Es claro que μ es una pseudométrica sobre X y entonces definimos la función:

$$\rho(x,y) = sup\{\mu(gx, gy) | g \in G\}, \quad x, y \in X$$

De la definición se puede verificar directamente que ρ es una pseudométrica invariante. Veamos que, de hecho, es una métrica. Tomamos dos puntos $x \neq y \in X$. Como U es fundamental tenemos que $X = G(U)$, entonces existe $g_0 \in G$ tal que $g_0 x \in U$, por lo tanto $r(g_0 x) > 0$. Como los puntos $g_0 x$ y $g_0 y$ también son diferentes, tenemos que $d(g_0 x, g_0 y) > 0$. En consecuencia, $\mu(g_0 x, g_0 y) > 0$ lo cual implica que $\rho(x,y) > 0$. Es decir, ρ es una métrica invariante sobre X.
Afirmamos que ρ es compatible con la topología de X. Sea (x_n) una sucesión en X tal que $\rho(x_n, x_0) \rightsquigarrow 0$ para algún punto $x_0 \in X$. Sea $\epsilon > 0$ y sea $B_d(x_0, \epsilon)$ la bola abierta centrada en x_0 de radio ϵ respecto a la métrica d. Como $X = G(U)$, existe un $g_0 \in G$ tal que $g_0 x_0 \in U$. Como la transición $\theta_{g_0^{-1}} : X \to X$ es continua y U es abierto, entonces existe un $\delta > 0$ tal que $B_d(g_0 x_0, \delta) \subset U$ y $\theta_{g_0^{-1}}(B_d(g_0 x_0, \delta)) \subset B_d(x_0, \epsilon)$.
La inclusión $B_d(g_0 x_0, \delta) \subset U$ implica que $r(g_0 x_0) \geq \delta > 0$. Como $\rho(x_n, x_0) \rightsquigarrow 0$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(x_n, x_0) < \delta/2$ para todo $n \geq n_0$. Por la definición de ρ tenemos que $\mu(g_0 x_n, g_0 x_0) \leq \rho(x_n, x_0)$ y entonces $\mu(g_0 x_n, g_0 x_0) < \delta/2$. Ahora, como $r(g_0 x_n) + r(g_0 x_0) \geq r(g_0 x_0) \geq \delta$, concluimos que $\mu(g_0 x_n, g_0 x_0) = d(g_0 x_n, g_0 x_0) < \delta/2$, esto es, $g_0 x_n \in B_d(g_0 x_0, \delta/2)$. Entonces, $x_n = g_0^{-1}(g_0 x_n) \in \theta_{g_0^{-1}}(B_d(g_0 x_0, \delta/2)) \subset B_d(x_0, \epsilon)$ para todo $n \geq n_0$, lo que demuestra que (x_n) converge a x_0 con la topología original de X.

Supongamos ahora que $d(x_n, x_0) \rightsquigarrow 0$ para una sucesión (x_n) en X y un punto $x_0 \in X$. Si la sucesión (x_n) no converge a x_0 con la métrica ρ, entonces, existe un $\epsilon_0 > 0$ y una subsucesión $(y_k) \subset (x_n)$ tal que $\rho(y_k, x_0) \geq \epsilon_0$ para todo índice k. Por lo tanto, $\mu(g_k y_k, g_k x_0) \geq \epsilon_0/2$ para una sucesión adecuada $(g_k) \subset G$. Por lo que

$$r(g_k y_k) + r(g_k x_0) \geq \epsilon_0/2. \tag{1.2}$$

Como U es un conjunto pequeño, podemos escoger una vecindad V del punto x_0 tal que el transportador $\langle V, U \rangle$ tiene cerradura compacta en G. Como (y_k) es una subsucesión de (x_n) tenemos que $d(y_k, x_0) \rightsquigarrow 0$ y podemos suponer que $y_k \in A, k \geq 1$.

Ahora, tenemos que el conjunto $\{x_0\} \cup (y_k)$ está contenido en A, la desigualdad (1.2) implica que $(g_k) \subset \langle V, U \rangle$. Pero el transportador $\langle V, U \rangle$ tiene cerradura compacta en G, y entonces, la sucesión (g_k) tiene un punto de acumulación $g \in G$ (ver [30, Teorema 3.1.23]). En virtud de la continuidad de la acción de G sobre X, el punto gx_0 es un punto de acumulación de ambas sucesiones $(g_k x_0)$ y $(g_k y_k)$ en X. Como X es metrizable las sucesiones $(g_k x_0)$ y $(g_k y_k)$ deben contener subsucesiones que convergen al punto gx_0. Sin perdida de generalidad, podemos suponer que las sucesiones mismas $(g_k x_0)$ y $(g_k y_k)$ convergen a gx_0, y entonces, existe un índice k_0 tal que $d(g_k y_k, g_k x_0) < \epsilon_0/2$ para todo $k \geq k_0$. Sin embargo, esto contradice la condición

$$d(g_k y_k, g_k x_0) \geq \mu(g_k y_k, g_k x_0) \geq \epsilon_0/2.$$

Por lo tanto, la sucesión (x_n) también converge a x_0 con la métrica ρ.

Solo falta demostrar que toda bola cerrada unitaria $\overline{B}_\rho(x, 1)$ es un subconjunto pequeño de X. Como S es un subconjunto fundamental y ρ es G-invariante, podemos asumir, sin perdida de generalidad, que $x \in S$. Afirmamos que $\overline{B}_\rho(x, 1)$ está contenida en $K(U)$. En efecto, si $y \in X \setminus K(U)$ y $g \in K$, entonces $gy \in X \setminus U$ pues $K = K^{-1}$. También tenemos que $gx \in K(S)$. En consecuencia, en virtud de la propiedad (1.1), se tiene que $d(gx, gy) > 1$. Por la misma razón, $r(gx) > 1$. Entonces, $\mu(gx, gy) > 1$ siempre que $y \in X \setminus K(U)$ y $g \in K$. Esto implica que

$$\rho(x, y) \geq sup\{\mu(gx, gy) \mid g \in K\} > 1.$$

para todo $y \in X \setminus K(U)$, es decir, $\overline{B}_\rho(x, 1) \subset K(U)$. Pero como $K(U)$ es pequeño (ver 1.3.2 (4)) se tiene que $B_\rho(x, 1)$ es un conjunto pequeño, y la demostración está completa. □

1.4. G-encajes dentro de G-espacios propios convexos

Dado un G-espacio X, denotaremos por $\mathcal{B}(X)$ el conjunto de todas las funciones reales acotadas de X, es un hecho conocido que si $\mathcal{B}(X)$ se dota de la norma del supremo es un espacio de Banach. En esta sección, estaremos considerando un subespacio especial del espacio $\mathcal{B}(X)$, para ello, es necesaria la siguiente definición.

Definición 1.4.1. *Una función continua $f : X \to \mathbb{R}$ definida sobre un G-espacio X es llamada* ***G-uniforme****, si para cada $\varepsilon > 0$ existe una vecindad U de la identidad e de G tal que $|f(gx) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in X$ y $g \in U$.*

Denotaremos por $\mathcal{A}(X)$ el subespacio lineal de $\mathcal{B}(X)$ conformado por todas las funciones acotadas G-uniformes. El siguiente teorema es válido inclusive para el caso en que X es un G-conjunto cualquiera (no necesariamente un espacio topológico), si embargo, por conveniencia tomaremos a X como un G-espacio.

Teorema 1.4.2. *Sea G un grupo y X un G-espacio. Entonces:*

a) $\mathcal{A}(X)$ es un subespacio lineal cerrado de $\mathcal{B}(X)$.

b) La función $(g, f) \mapsto gf$, de $G \times \mathcal{A}(X) \to \mathcal{A}(X)$ definida por:

$$(gf)(x) = f(g^{-1}x),\ x \in X$$

es una acción isométrica y lineal de G en X.

Demostración. a) Es sencillo verificar que $\mathcal{A}(X)$ es un subespacio lineal de $\mathcal{B}(X)$, sólo probaremos que es cerrado. Supongamos que una sucesión (f_n) en $\mathcal{A}(X)$ converge a un elemento f de $\mathcal{B}(X)$. Debemos mostrar que f es G-uniforme. Dado $\varepsilon > 0$, fijamos un índice k tal que

$$|f(x) - f_k(x)| < \varepsilon/3 \text{ para todo } x \in X.$$

Como $f_k \in \mathcal{A}(X)$, podemos seleccionar una vecindad U de la identidad de G tal que

$$|f_k(gx) - f_k(x)| < \varepsilon/3 \text{ para todo } g \in U,\ x \in X.$$

En consecuencia, tenemos

$$|f(gx) - f(x)| \leq |f(gx) - f_k(gx)| + |f_k(gx) - f_k(x)| + |f_k(x) - f(x)|$$
$$< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon,$$

para todo $g \in U$ y $x \in X$. Luego, $f \in \mathcal{A}(X)$.

b) Sea $f \in \mathcal{A}(X)$ y $g \in G$. Veremos primeramente que $gf \in \mathcal{A}(X)$. Como gf es acotada, sólo necesitamos probar que gf es una función G-uniforme. Dado $\varepsilon > 0$, seleccionamos una vecindad V de la identidad en G tal que $|f(hy) - f(y)| < \varepsilon$ para todo $h \in V$ y $y \in X$.
Definimos un subconjunto $U \subset G$ por

$$U = gV^{-1}g^{-1} = \{gv^{-1}g^{-1} \mid v \in V\}.$$

Claramente, U es también una vecindad de la identidad en G. Afirmamos que

$$|(gf)(tx) - (gf)(x)| < \varepsilon \text{ para todo } t \in U, x \in X.$$

En efecto, ponemos $y = g^{-1}tx$ y $h = g^{-1}t^{-1}g$. Entonces $g^{-1}x = hy$ y $h \in V$, siempre y cuando $t \in U$. En consecuencia,

$$|(gf)(tx) - (gf)(x)| = |f(g^{-1}tx) - f(g^{-1}x)| = |f(y) - f(hy)| < \varepsilon$$

siempre y cuando $t \in U$.
Luego, gf es G-uniforme, y de ahí $gf \in \mathcal{A}(X)$. En seguida observamos que la función $(g, f) \mapsto gf$ es una acción de G en $\mathcal{A}(X)$, es decir, $g(hf) = (gh)f$ y $ef = f$, donde $f \in \mathcal{A}(X)$, $g, h \in G$ y e es la identidad de G. Esta acción es lineal e isométrica. Solo falta mostrar que la acción gf es continua. Probaremos que gf es continua en cada punto $(g_0, f_0) \in G \times \mathcal{A}(X)$. Dado $\varepsilon > 0$, podemos seleccionar una vecindad V de la identidad de G tal que

$$|f_0(hx) - f_0(x)| < \varepsilon/2 \text{ para todo } h \in V, x \in X.$$

Definimos un subconjunto U de G por

$$U = g_0V^{-1} = \{g_0v^{-1} | v \in V\}.$$

Claramente U es una vecindad de $g_0 \in G$. Afirmamos que $\|gf - g_0f_0\| < \varepsilon$ siempre y cuando $g \in U$, $f \in \mathcal{A}(X)$ y

$$\|f - f_0\| < \varepsilon/2.$$

En efecto, tenemos

$$\|gf_0 - g_0f_0\| = sup\{|(gf_0)(x) - (g_0f_0)(x)| \ ; \ x \in X\} \tag{1.3}$$
$$sup\{|f_0(g^{-1}x) - f_0(g_0^{-1}x)| \ ; \ x \in X\}.$$

Siendo $z = g_0^{-1}x$, $x \in X$ y $h = g^{-1}g_0$, $g \in G$ y usando el hecho de que g_0 puede ser considerado como una biyección de X concluimos que

$$sup\{|f_0(g^{-1}x) - f_0(g_0^{-1}x)| \ ; \ x \in X\} = \tag{1.4}$$
$$sup\{|f_0(hg_0^{-1}x) - f_0(g_0^{-1}x)| \ ; \ x \in X\} =$$
$$sup\{|f_0(hz) - f_0(z)| \ ; \ z \in X\}.$$

Como $h \in V$ siempre y cuando $g \in U$, usando (1.3) y (1.4), obtenemos

$$\|gf_0 - g_0f_0\| \leq \varepsilon/2$$

para toda $g \in U$. Finalmente, $\|gf - gf_0\| = \|f - f_0\|$, ya que G actúa isométricamente en $\mathcal{A}(X)$. Por lo tanto,

$$\|gf - g_0f_0\| \leq \|gf - gf_0\| + \|gf_0 - g_0f_0\| = \|f - f_0\| + \|gf_0 - g_0f_0\|$$
$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

siempre y cuando $\|f - f_0\| < \varepsilon/2$, $f \in \mathcal{A}(X)$ y $g \in U$. Esto establece la continuidad de la acción gf en (g_0, f_0).

□

Corolario 1.4.3. *Sean G un grupo y X un G-espacio. Entonces $\mathcal{A}(X)$ es un G-espacio de Banach.*

En general el G-espacio $\mathcal{A}(X)$ carece de algunas propiedades, por ejemplo no siempre es un G-espacio propio, inclusive aunque X los sea. En este sentido, para un G-espacio propio X definimos un subespacio especial de $\mathcal{A}(X)$ que conserva más riqueza en cuestión de propiedades. Denotamos por $\mathcal{Q}(X)$ el subconjunto de todas las funciones f en $\mathcal{A}(X)$ tales que, para todo $\varepsilon > 0$, existe un subconjunto abierto pequeño $U \subset X$ tal que $|f(x)| \leq \varepsilon$ para toda $x \in X \setminus U$. Resulta que $\mathcal{Q}(X)$ es un subespacio lineal cerrado invariante de $\mathcal{A}(X)$, como lo demuestra la siguiente proposición.

Proposición 1.4.4. *Sean G un grupo localmente compacto y X un G-espacio propio. Entonces $\mathcal{Q}(X)$ es un subespacio lineal cerrado invariante de $\mathcal{A}(X)$, y por lo tanto, un G-espacio de Banach.*

Demostración. El hecho de que $\mathcal{Q}(X)$ es un subespacio lineal de $\mathcal{A}(X)$ es evidente, demostremos sólo las otras dos propiedades.
Veamos que $\mathcal{Q}(X)$ es cerrado en $\mathcal{A}(X)$. Sea (f_n) una sucesión en $\mathcal{Q}(X)$ que converge a $f \in \mathcal{A}(X)$. Tomamos $\varepsilon > 0$ y escogemos un índice n tal que $\|f - f_n\| < \varepsilon/2$. Entonces $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon/2$ para toda $x \in X$. Como $f_n \in \mathcal{Q}(X)$, existe un subconjunto abierto pequeño $U \subset X$ tal que $|f_n(x)| \leq \varepsilon$ para todo $x \in X \setminus U$. Por lo tanto, para todo $x \in X \setminus U$ tenemos que

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Entonces, $f \in \mathcal{Q}(X)$ y $\mathcal{Q}(X)$ es cerrado en $\mathcal{A}(X)$.
Para verificar que es invariante, tomamos $g \in G$ y $f \in \mathcal{Q}(X)$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe un abierto pequeño U tal que $|f(x)| \leq \varepsilon$ para todo $x \in X \setminus U$. Consideramos el conjunto abierto pequeño $V = gU$ (ver Proposición 1.3.2 (4)), ahora si $x \in X \setminus V$ tenemos que $g^{-1}x \in X \setminus U$ por lo tanto

$$|gf(x)| = |f(g^{-1}x)| \leq \varepsilon$$

lo que implica que gf pertenece a $\mathcal{Q}(X)$ y $\mathcal{Q}(X)$ es invariante. $\square$

En general no podemos garantizar que $\mathcal{Q}(X)$ sea un G-espacio propio, pero veamos que el complemento del origen en $\mathcal{Q}(X)$ es un subespacio propio.

Proposición 1.4.5. *Sean G un grupo localmente compacto y X cualquier G-espacio propio. Entonces para toda $f \in \mathcal{Q}_0(X) = \mathcal{Q}(X) \setminus \{0\}$, la bola abierta $B(f, \frac{\|f\|}{2})$ es un conjunto pequeño en $\mathcal{Q}_0(X)$. En particular, $\mathcal{Q}_0(X)$ es un G-espacio propio.*

Demostración. Sea $h \in \mathcal{Q}_0(X)$. Mostraremos que el transportador de los conjuntos $B(f, \frac{\|f\|}{2})$ y $B(h, \frac{\|f\|}{4})$ tiene cerradura compacta en G, es decir, $B(f, \frac{\|f\|}{2})$ es un conjunto pequeño.
Consideramos el conjunto pequeño U de X tal que $|h(x)| \leq \frac{\|f\|}{20}$ para todo $x \in X \setminus U$. Escogemos $x_0 \in X$ tal que $|f(x_0)| > \frac{4\|f\|}{5}$. Como el transportador $\langle \{x_0\}, U \rangle$ tiene cerradura compacta en G, es suficiente mostrar que

$$\left\langle B\left(f, \frac{\|f\|}{2}\right), B\left(h, \frac{\|f\|}{4}\right)\right\rangle \subset \langle \{x_0\}, U \rangle.$$

Sea $g \in \langle B(f, \frac{\|f\|}{2}), B(h, \frac{\|f\|}{4})\rangle$. Entonces existe $h' \in B(h, \frac{\|f\|}{4})$ tal que $g^{-1}h' \in B(f, \frac{\|f\|}{2})$. Esto implica que

$$|h'(gx_0)| \geq |f(x_0)| - \frac{\|f\|}{2} \quad \text{y} \quad |h(gx_0)| \geq |h'(gx_0)| - \frac{\|f\|}{4}.$$

En consecuencia,

$$|h(gx_0)| \geq |f(x_0)| - \frac{\|f\|}{2} - \frac{\|f\|}{4} > \frac{4\|f\|}{5} - \frac{\|f\|}{2} - \frac{\|f\|}{4} = \frac{\|f\|}{20}.$$

de donde se sigue que $gx_0 \in U$, es decir, $g \in \langle \{x_0\}, U \rangle$. $\square$

Definición 1.4.6. *Para $f \in \mathcal{Q}(X)$ definimos el **soporte** de f como:*

$$\mathit{sop}\, f = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}.$$

Denotaremos por $\mathcal{P}(X)$ el subespacio lineal de $\mathcal{Q}(X)$ consistente de todas las funciones $f \in \mathcal{Q}(X)$ tales que $\mathit{sop}\, f$ es un subconjunto pequeño de X. Es fácil ver que $\mathcal{P}(X)$ es un subconjunto invariante de $\mathcal{Q}(X)$. Usaremos también la notación $\mathcal{P}_0(X)$ para el conjunto $\mathcal{P}(X) \setminus \{0\}$. Debido a que los conjuntos pequeños abiertos constituyen una base para la topología de X si X es propio, podemos asegurar que $\mathcal{P}_0(X) \neq \emptyset$ y considerar los siguientes conjuntos:

$$\mathcal{P}_+(X) = \{f \in \mathcal{P}_0(X) \,|\, f(x) \geq 0, \, \forall x \in X\}.$$

$$\mathcal{Q}_+(X) = \{f \in \mathcal{Q}_0(X) \,|\, f(x) \geq 0, \, \forall x \in X\}.$$

Se verifica de manera sencilla que los conjuntos $\mathcal{P}_+(X)$ y $\mathcal{Q}_+(X)$ son conjuntos invariantes convexos de $\mathcal{Q}_0(X)$ y por tanto G-espacio propios.

Dado un subconjunto C de un espacio lineal X, llamaremos **envoltura convexa** de C a la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a C, la cual claramente es un conjunto convexo y lo denotaremos por $\mathit{conv}(C)$. Una de las herramientas más importantes que se utilizarán en el capítulo siguiente, es la de poder encajar equivariantemente un G-espacio propio de manera cerrada dentro de un G-espacio propio convexo, en este sentido, el siguiente teorema nos marca la base para la construcción de dicho encaje.

Teorema 1.4.7. *Sea G un grupo arbitrario y $X \in G$-$\mathcal{M}$. Entonces toda métrica invariante pequeña ρ sobre X define un G-encaje $i : X \hookrightarrow \mathcal{P}_+(X)$ tal que:*

1. *$\|i(x)\| = 1$ para cada $x \in X$.*
2. *$\|i(x) - i(y)\| \leq \rho(x, y)$ para todo $x, y \in X$.*
3. *$\rho(x, y) = \|i(x) - i(y)\|$ siempre que $\rho(x, y) \leq 1$.*
4. *$\|i(x) - i(y)\| \geq 1$ siempre que $\rho(x, y) > 1$.*

5. *la imagen $i(X)$ es cerrada en su envoltura convexa.*

Demostración. Para cada $x \in X$, consideramos la función $f^x \in \mathcal{P}_0$ de la siguiente manera:

$$f^x(y) = \begin{cases} 1 - \rho(x,y), & \text{si } \rho(x,y) \leq 1, \\ 0, & \text{si } \rho(x,y) \geq 1. \end{cases}$$

Definimos la función: $i : X \hookrightarrow \mathcal{P}_0(X)$ por $i(x) = f^x$, $x \in X$. Para ver que i es realmente la función requerida veamos primero que $f^x \in \mathcal{P}_0(X)$ para cada $x \in X$. Claramente $f^x : X \to [0,1]$ es una función continua. Ahora, sea $\varepsilon > 0$. Escogemos una vecindad W de la identidad en G tal que

$$\rho(hx, x) < \varepsilon \text{ para todo } h \in W. \tag{1.5}$$

Afirmamos que (1.5) implica que

$$|f^x(hy) - f^x(y)| < \varepsilon$$

para cada $h \in W$ y $y \in X$, que a su vez implica que $f^x \in \mathcal{A}(X)$.
Consideremos todos los casos posibles.

Si $\rho(x, hy) \leq 1$ y $\rho(x,y) \leq 1$, entonces

$$|f^x(hy) - f^x(y)| = |1 - \rho(x,hy) - 1 + \rho(x,y)| = |\rho(x,y) - \rho(h^{-1}x, y)|$$

$$\leq \rho(x, h^{-1}x) = \rho(hx, x) < \varepsilon.$$

Si $\rho(x, hy) \leq 1$ y $\rho(x,y) \geq 1$, entonces

$$|f^x(hy) - f^x(y)| = 1 - \rho(x,hy) \leq \rho(x,y) - \rho(x,hy) = \rho(x,y) - \rho(h^{-1}x, y)$$

$$\leq \rho(x, h^{-1}x) = \rho(hx, x) < \varepsilon.$$

El caso $\rho(x, hy) \geq 1$ y $\rho(x,y) \leq 1$ se reduce al anterior.
Por último, si $\rho(x, hy) \geq 1$ y $\rho(x,y) \geq 1$, entonces

$$|f^x(hy) - f^x(y)| = 0 < \varepsilon.$$

Así, $f^x \in \mathcal{A}(X)$. Como ρ es una métrica pequeña y $sop\, f^x \subset B_\rho(x, 1)$, se concluye que $sop\, f^x$ es un conjunto pequeño. De esta manera, $f^x \in \mathcal{P}_0(X)$,

mostrando que la función $i : X \hookrightarrow \mathcal{P}_0(X)$ está bien definida.
Ahora, afirmamos que la siguiente desigualdad es verdadera

$$\|f^{x_1} - f^{x_2}\| \leq \rho(x_1, x_2) \text{ para todo } x_1, x_2 \in X. \tag{1.6}$$

Esto implica que i es continua. Para probar que también (1.6) es verdadera, consideremos los siguientes casos. Sea $y \in X$ arbitrario.

Si $\rho(x_1, y) \leq 1$ y $\rho(x_2, y) \leq 1$, entonces

$$|f^{x_1}(y) - f^{x_2}(y)| = |\rho(x_1, y) - \rho(x_2, y)| \leq \rho(x_1, x_2).$$

Si $\rho(x_1, y) \leq 1$ y $\rho(x_2, y) \geq 1$, entonces

$$|f^{x_1}(y) - f^{x_2}(y)| = |1 - \rho(x_1, y)| \leq \rho(x_2, y) - \rho(x_1, y) \leq \rho(x_2, x_1).$$

El caso $\rho(x_1, y) \geq 1$ y $\rho(x_2, y) \leq 1$ se reduce al anterior.

Finalmente, si $\rho(x_1, y) \geq 1$ y $\rho(x_2, y) \geq 1$, entonces

$$|f^{x_1}(y) - f^{x_2}(y)| = 0 \leq \rho(x_1, x_2).$$

Queda demostrada (1.6).

Como $f^x(x) = 1$, se sigue de (1.6) que $\|f^x\| = 1$, es decir, $\|i(x)\| = 1$.

Por otro lado, para demostrar que i es un encaje topológico, observamos lo siguiente.

Si $\rho(x_1, x_2) \leq 1$, entonces

$$\|f^{x_1} - f^{x_2}\| \geq |f^{x_1}(x_1) - f^{x_2}(x_1)| = \rho(x_1, x_2)$$

lo cual implica junto con (1.6), que

$$\|f^{x_1} - f^{x_2}\| = \rho(x_1, x_2).$$

Y si $\rho(x_1, x_2) > 1$ entonces

$$\|f^{x_1} - f^{x_2}\| \geq |f^{x_1}(x_1) - f^{x_2}(x_1)| = 1.$$

Se sigue de estas observaciones que i es inyectiva y su inversa es continua. La equivarianza de i es inmediata de la G-invarianza de la métrica ρ.
Resta sólo demostrar que $i(X)$ es cerrado en su envoltura convexa. Para esto, sea (f_n) una sucesión en $i(X)$ que converge a $f \in conv(i(X))$. Entonces f

es de la forma $\Sigma_{i=1}^{m} t_i f^{z_i}$ con $\Sigma_{i=1}^{m} t_i = 1,\ t_i \geq 0$ y $z_i \in X$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $t_1 > 0$. Y observemos que:

$$\|f^{x_n} - f\| \geq |f^{x_n}(x_n) - f(x_n)| = |1 - f(x_n)| = \left| \sum_{i=1}^{m} t_i - \sum_{i=1}^{m} t_i f^{z_i}(x_n) \right|$$

$$= \sum_{i=1}^{m} t_i(1 - f^{z_i}(x_n)) \geq t_1(1 - f^{z_1}(x_n)).$$

Ahora, $t_1(1-f^{z_1}(x_n))$ es igual a $t_1\rho(z_1, x_n)$ ó igual a t_1. Como $\|f^{x_n} - f\| \rightsquigarrow 0$, la desigualdad anterior implica que $t_1(1-f^{z_1}(x_n)) = t_1\rho(z_1, x_n)$ para todo los índices n excepto para una cantidad finita. Así, inferimos que $\rho(z_1, x_n) \rightsquigarrow 0$ cuando $n \rightsquigarrow \infty$, es decir, $x_n \rightsquigarrow z_1$. En virtud de la continuidad de i, obtenemos que $f = lim\, i(x_n) = i(z_1)$ como se requería. $\square$

Como todo G-espacio propio en G-$\mathcal{M}$ admite una métrica invariante pequeña (Teorema 1.3.23) y $\mathcal{P}_+(X) \subset \mathcal{A}(X)$, se sigue inmediatamente del Teorema 1.4.7 el siguiente resultado que se puede ver como la versión análoga equivariante del clásico teorema de encaje de Kuratowski-Wojdyslawski.

Teorema 1.4.8. *Sean G un grupo localmente compacto y $Y \in G$-$\mathcal{M}$. Entonces, existe un G-espacio lineal normado L y un subconjunto invariante convexo $Z \subset L$ tal que la acción G sobre Z es propia y Y puede encajarse equivariantemente en Z como un subconjunto cerrado invariante.*

1.5. Retractos equivariantes

En esta sección introducimos los principales conceptos y resultados referentes a la teoría de retractos absolutos (de vecindad) equivariantes y de extensores absolutos (de vecindad) equivariantes en la clase G-$\mathcal{M}$.
Por un ***G-par*** (X, A), estaremos entendiendo un G-espacio $X \in G$-$\mathcal{M}$ y un subconjunto cerrado invariante $A \subset X$.

Definición 1.5.1. *Un G-espacio Y es llamado un* ***G-extensor absoluto de vecindad*** *para la clase G-$\mathcal{M}$ o un* ***G-ANE****, si para cualquier G-par (X, A) con $X \in G$-$\mathcal{M}$, cualquier función equivariante $f : A \to Y$ puede ser extendida a una función equivariante $F : U \to Y$, donde U es una vecindad invariante de A en X.*

Si además, siempre se puede escoger $U = X$, entonces decimos que Y es un G-**extensor absoluto** o un ***G-AE*** .

Definición 1.5.2. *Dado un G-par (X, A), una* ***retracción equivariante*** *de U sobre A es una función equivariante $r : U \to A$ tal que $r(a) = a$ para cada $a \in A$, donde U es una vecindad abierta invariante de A en X. En este caso decimos que A es un* ***retracto equivariante de vecindad*** *de X, o un G-**retracto de vecindad** de X.*

En el caso en que $U = X$ diremos que A es un **retracto equivariante** de X o un G-**retracto de** X

Definición 1.5.3. *Un G-espacio Y es llamado un G-**retracto absoluto de vecindad** para la clase G-$\mathcal{M}$ o un **G-ANR**, si $Y \in G$-$\mathcal{M}$ y cada vez que Y se encaja equivariantemente como un cerrado de un G-espacio $X \in G$-$\mathcal{M}$, entonces existe una retracción equivariante $r : U \to Y$, donde U es una vecindad invariante de Y en X.*

Si además, siempre se puede escoger $U = X$, entonces decimos que Y es un G-**retracto absoluto** o un ***G-AR*** .

En general, un *G-ANE* metrizable no necesariamente es un *G-ANR*. Sin embargo, en [6, Corolario 6.3] se demuestra que estas propiedades son equivalentes en la clase G-$\mathcal{M}$, como lo establece el siguiente teorema.

Teorema 1.5.4. *Sea $X \in G$-$\mathcal{M}$. Entonces X es un G-ANE (respectivamente G-AE) si y sólo si X es un G-ANR (respectivamente G-AR)*

Observación 1.5.5. *Estaremos haciendo uso de esta equivalencia a lo largo de todo el trabajo sin hacer referencias adicionales.*

A continuación, mostramos algunas propiedades que tienen los espacios *G-ANE* y *G-ANR* y que serán de utilidad para demostrar algunos resultados que se obtendrán posteriormente. La primera de ellas muestra como la propiedad de ser un *G-ANE* se hereda a los retractos equivariantes de vecindad, y la segunda, como se hereda a los subconjuntos abiertos invariantes. Ésta última corresponde a la versión equivariante del primer teorema de Hanner (ver [21, pág. 96]). Por lo pronto sólo mostraremos estas propiedades, sin embargo, a lo largo del trabajo se estarán presentando muchos más resultados interesantes sobre los *G-ANE* y los *G-ANR*, sobre todo algunas caracterizaciones.

Lema 1.5.6. *Sea X un retracto equivariante de vecindad de un espacio $Y \in$ G-ANE, entonces X es un G-ANE*

Demostración. Sea (Z, A) un G-par y $f : A \to X$ una función equivariante. Como $Y \in G\text{-}ANE$, existe $g : U \to Y$, una función equivariante, donde U es una vecindad invariante de A en Z y $g|_A = f$.
Sea $r : V \to X$ la retracción equivariante de una vecindad invariante V de X en Y. Definimos $W = g^{-1}(V)$ y $F = r \circ g|_W$. Es claro entonces, que F es una función equivariante de W en X. Además, $F|_A = f$. Por lo tanto X es un *G-ANE*. □

Teorema 1.5.7. *Cualquier subconjunto abierto invariante de un G-ANE es un G-ANE*

Demostración. Sean $Y \in$ *G-ANE* y W un subconjunto abierto invariante de Y. Sea $f : A \to W$ una función equivariante, donde A es un cerrado invariante de un G-espacio $X \in G\text{-}\mathcal{M}$, veamos que f tiene una extensión equivariante de vecindad. En efecto, sea $i : W \to Y$ la función inclusión. Como $Y \in$ *G-ANE*, la composición $\phi = i \circ f : A \to Y$ tiene una extensión equivariante $\psi : V \to Y$, donde V es una vecindad invariante de A. Consideramos la preimagen $U = f^{-1}(W)$ en V. Como U es abierto en V y V es abierto en X, entonces U es un abierto en X que contiene a A. Además, U es invariante ya que W lo es y f es equivariante. Entonces la función $g : U \to W$, definida por $g(x) = \psi(x)$, para $x \in U$, es una extensión equivariante de vecindad de f. □

1.6. Producto torcido y rebanadas

En esta sección veremos una nueva forma de construir G-espacios, y cómo estos espacios son elementos base para poder estudiar la estructura de los grupos toplógicos de transformaciones. Comenzamos definiendo el producto torcido.

Definición 1.6.1. *Sean G un grupo y K un subgrupo cerrado de G. Si X es un K-espacio, entonces K actúa en $G \times X$ mediante*

$$k(g, x) = (gk^{-1}, kx).$$

Al espacio de órbitas respectivo $(G \times X)/K$ se le conoce como el ***producto torcido****, y se denota por $G \times_K X$. La K-órbita del punto (g, x) es denotada por $[g, x]$.*

Por definición $[g,x] = [g',x']$ si y sólo si existe un $k \in K$ tal que $g' = gk^{-1}$ y $x' = kx$, así que

$$[gk,x] = [g,kx]$$

para todo $k \in K$.

Como ya mencionamos, el producto torcido también puede ser considerado como un G-espacio definiendo una acción adecuada, y más aún, si tanto el grupo actuante como el espacio son metrizables, resulta que el producto torcido también lo es. Veamos ésto en los siguientes resultados.

Proposición 1.6.2. *Sean K un subgrupo cerrado de un grupo G y X un K-espacio. Entonces el producto torcido $G \times_K X$ es un G-espacio con la acción dada por la fórmula:*

$$g'[g,x] = [g'g,x]$$

donde $g' \in G$ y $[g,x] \in G \times_K X$.

Demostración. Tenemos que si $[g_1,x_1] = [g,x]$:

$$g'[g_1,x_1] = g'[gk^{-1},kx] = [g'gk^{-1},kx] = [g'g,x] = g'[g,x]$$

por lo tanto, la acción está bien definida.
Sean $\varphi : G \times (G \times X) \to G \times X$ y $\pi : G \times X \to G \times_K X$ las funciones continuas dadas por

$$\varphi(g',(g,x)) = (g'g,x) \;\text{ y }\; \pi(g,x) = [g,x].$$

Sea $\theta : G \times (G \times_K X) \to G \times_K X$ la acción definida anteriormente. Entonces el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
G \times (G \times X) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "Id_G \times \pi"'] \arrow[dr, "\pi\varphi"] & G \times X \arrow[d, "\pi"] \\
G \times (G \times_K X) \arrow[r, "\theta"] & G \times_K X
\end{tikzcd}$$

Como π es abierta y sobreyectiva, $Id_G \times \pi$ también lo es, en particular, es una identificación. Como $\theta(Id_G \times \pi) = \pi\varphi$ es continua, aplicando la propiedad universal del cociente (ver [23, pág. 14]), θ es continua.
Además $e[g,x] = [g,x]$ para cada $[g,x] \in G \times_K X$ y como

$$g_1[g_2g,x] = g_1g_2[g,x] \text{ para cada } g_1,g_2 \in G \text{ y } [g,x] \in G \times_K X,$$

se concluye que θ es una acción. $\square$

Lema 1.6.3. *Sea G un grupo metrizable, H un subgrupo cerrado de G y X un G-espacio metrizable, entonces el producto torcido $G \times_H X$ es un G-espacio metrizable.*

Demostración. Dado que G es metrizable, el producto $G \times X$ es metrizable y de acuerdo a la Proposición 1.3.18 el espacio de orbital $(G \times X)/H = G \times_H X$ también es metrizable. □

Proposición 1.6.4. *Sean G un grupo y K un subgrupo cerrado de G. Sea S un K-espacio. Para cualquier G-espacio Y, la correspondencia*

$$\Phi : \{f : S \to Y \mid f \text{ es } K\text{-función}\} \to \{f' : G \times_K S \to Y \mid f' \text{ es } K\text{-función}\}$$

dada por

$$\Phi(f) = f' \text{ donde } f'([g, s]) = gf(s),$$

es biyectiva con inversa $\Phi^{-1}(f')(s) = f'([e, s])$.

Demostración. Dada $f : S \to Y$ una función K-equivariante, entonces $f' : [g, s] \mapsto gf(s)$ está bien definida. En efecto, observamos primero que por la Proposición 1.6.2, el producto torcido $G \times_K S$ es un G-espacio. Si $[g, s] = [g_1, s_1]$, entonces para algún $k \in K$ se tiene que $g_1 = gk^{-1}$ y $s_1 = ks$. Luego,

$$f'([g_1, s_1]) = g_1 f(s_1) = gk^{-1} f(ks) = gk^{-1}kf(s) = gf(s) = f'([g, s]).$$

La proyección orbital $\pi : G \times S \to G \times_K S$ seguida de f' es igual a la composición $(g, s) \mapsto [g, s] \mapsto g(fs)$ que es continua, y tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
G \times S \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "f'\pi"'] & & G \times_K S \arrow[dl, "f'"] \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

por la propiedad universal del cociente (ver [23, pág. 14]), f' es continua.
Además,

$$f'(g'[g, s]) = g'gf(s) = g'f'([g, s])$$

para todo $g' \in G$, lo cual significa que $f' : G \times_K S \to Y$ es G-equivariante.
Ahora, si $\Phi(f) = \Phi(h)$, entonces para todo $s \in S$ obviamente sus valores en $[e, s]$ coinciden, y entonces

$$f(s) = ef(s) = \Phi(f)[e, s] = \Phi(h)[e, s] = eh(s) = h(s).$$

Por lo tanto Φ es inyectiva. Mostraremos que es sobreyectiva. Dada una G-función

$$f' : G \times_K S \to Y,$$

la función continua $f_{f'}(s) \mapsto f([e,s])$ cumple que

$$f_{f'}(ks) = f'([e,ks]) = f'([ek,s]) = kf'([e,s]) = kf_{f'}(s)$$

para todo $k \in K$, entonces $f_{f'} : S \to Y$ es K-equivariante.
Finalmente, comprobemos que $\Phi(f_{f'}) = f'$ calculando

$$\Phi(f_{f'})([g,s]) = gf_{f'}(s) = gf'([e,s]) = f'([g,s]).$$

Hemos demostrado que Φ es biyectiva con inversa

$$\Phi^{-1}(f') = f_{f'} : s \mapsto f'([e,s]).$$

□

La proposición anterior nos garantiza que si S es un K-espacio, entonces toda K-función f de S en un G-espacio Y, induce una G-función del producto torcido $G \times_K S$ en Y. Veamos ahora le definición de H-rebanada y su relación con el producto torcido.

Definición 1.6.5. *Sea X un G-espacio y H un subgrupo cerrado de G. Un subconjunto H-invariante $S \subset X$ es llamado una H-**rebanada**, en X si $G(S)$ es abierto en X y existe una función equivariante $f : G(S) \longrightarrow G/H$ tal que $S = f^{-1}(eH)$. La saturación $G(S)$ es llamado **conjunto tubular**.*
*Si $G(S) = X$, entonces decimos que S es una H-**rebanada global** de X.*

El siguiente lema se utilizará para demostrar algunos resultados posteriores, pues establece bajo qué condiciones un G-espacio X es G-homeomorfo a un producto torcido, su demostración puede consultarse en [16, Lema 2.3].

Lema 1.6.6. *Sea H un subgrupo compacto de G, X un G-espacio propio y $f : X \longrightarrow G/H$ una función equivariante. Sea $S = f^{-1}(eH)$. Entonces la función $\xi : G \times_H S \longrightarrow X$ definida por $\xi([g,s]) = gs$ es un G-homeomorfismo, y $f \circ \xi = p$, donde la función $p : G \times_H S \longrightarrow G/H$ está dada por $p([g,s]) = gH$ para cada $[g,s] \in G \times_H S$.*

Quizá uno de los resultados más importantes dentro de la teoría de grupos topológicos de transformaciones es el teorema de la rebanada establecido por Palais en [48, Proposición 2.3.1].

Teorema 1.6.7 (**Teorema de la Rebanada**). *Sea X un G-espacio propio, $x \in X$ y U una vecindad de x. Entonces, existe una G_x-rebanada $S_x \subset X$ tal que $x \in S_x \subset U$.*

La siguiente definición se presenta para el caso en que G es un grupo localmente compacto arbitrario (no necesariamente de Lie). En base a ésto, aclaramos que en los cuatro resultados que siguen de la definición se estará considerando a G como un grupo localmente compacto.

Definición 1.6.8. *Sea G un grupo localmente compacto y $H \subset G$ un subgrupo de G, diremos que H es un subgrupo* ***grande****, si existe un subgrupo normal cerrado $N \subset G$ tal que $N \subset H$ y G/N es un grupo de Lie.*

Notemos que en el caso en que G sea un grupo de Lie, entonces cualquier subgrupo de él es un subgrupo grande. La siguiente proposición muestra dos caracterizaciones de los subgrupos grandes, las cuales serán de utilidad para demostrar algunos resultados referentes a las rebandas. Su demostración puede consultarse en [14, Proposición 3.2].

Proposición 1.6.9. *Para un subgrupo cerrado $H \subset G$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) *H es un subgrupo grande.*

b) *G/H es un G-ANE metrizable.*

c) *G/H es localmente contraible.*

Lema 1.6.10. *Sea H un subgrupo grande de G. Supongamos que A es un subconjunto cerrado invariante de un G-espacio $X \in G$-$\mathcal{M}$, y S una H-rebanada de A. Entonces existe una H-rebanada $\tilde{S}$ en X tal que $\tilde{S} \cap A = S$.*

Demostración. Sea $f : A \to G/H$ una función equivariante tal que $f^{-1}(eH) = S$. Por la Proposición 1.6.9, existe una extensión equivariante $F : U \to G/H$ sobre una vecindad invariante U de A en X. Se verifica fácilmente que la preimagen $\tilde{S} = F^{-1}(eH)$ es la H-rebanada deseada. $\square$

Una propiedad importante del producto torcido, es que, además de poder ser considerado como un G-espacio, bajo ciertas condiciones resulta ser también un G-extensor absoluto de vecindad.

Proposición 1.6.11. *Sea H un subgrupo grande de G, y X un H-espacio. Si X es un H-ANE, entonces el producto torcido $G \times_H X$ es un G-ANE.*

Demostración. Sea (Y, C) un G-par en G-$\mathcal{M}$ y $f : C \to G \times_H X$ una función equivariante. Un resultado conocido y sencillo de verificar es que la preimagen $f^{-1}(X)$ es una H-rebanada global en C (ver [48, Corolario 1.7.8]). Por el Lema 1.6.10, existe una H-rebanada S en Y tal que $S \cap C = f^{-1}(X)$. En consecuencia, $f^{-1}(X)$ es un subconjunto cerrado H-invariante del H-espacio metrizable S. Como X es un *H-ANE*, existe una vecindad H-invariante V de $f^{-1}(X)$ en S, y una H-extensión $f' : V \to X$ de la función equivariante $f'|_{f^{-1}(X)} \to X$. Entonces f' induce una función equivariante $F : G(V) \to G \times_H X$ bajo la regla $F(gv) = gf'(v)$, donde $g \in G$ y $v \in V$ (ver [25, Capítulo I, Proposición 4.3]). Como $C = G(f^{-1}(X))$ y $f^{-1}(X) \subset V$, concluimos que $C \subset G(V)$. Como V es abierto en S, tenemos que $G(V)$ es abierto en $G(S)$, y entonces, en Y. Si $c \in C$, se tiene que $c = gb$ para algún $g \in G$ y $b \in f^{-1}(X)$, y entonces, $F(c) = F(gb) = gf'(b) = gf(b) = f(gb) = f(c)$, es decir, F extiende a f. □

Proposición 1.6.12. *Sea K un subgrupo compacto grande de G, y X un G-ANE. Entonces X es un K-ANE.*

Demostración. Sea (Y, B) un K-par y $f : B \to X$ una función K-equivariante. Entonces f induce una función G-equivariante $F : G \times_K B \to X$ dada por $F([g, b]) = gf(b)$, donde $[g, b] \in G \times_K B$ (ver Proposición 1.6.4). Como G/K es metrizable (ver Porposición 1.6.9), de acuerdo a [9, Proposición 3], $G \times_K Y$ es metrizable también. Más aún, $G \times_K Y$ es un G-espacio propio (ver [1]), y $(G \times_K Y)/G = Y/K$ (ver [9, Proposición 2]). Como Y es metrizable y K es compacto, concluimos que Y/K es metrizable (ver [48, Proposición 1.1.12]). Entonces, $(G \times_K Y)/G$ es también metrizable. Ahora, por [12, Lema] tenemos que $G \times_K Y \in G$-$\mathcal{M}$.
Claramente, $G \times_K B$ es un subconjunto cerrado G-invariante del G-espacio $G \times_K Y$. Como X es un *G-ANE*, existe una vecindad G-invariante U de $G \times_K B$ en $G \times_K Y$ y una G-extensión $F' : U \to X$ de F. Evidentemente, $V = U \cap Y$ es una vecindad K-invariante de B en Y, y la restricción $f' = F'|_V$ es la K-extensión de f requerida, (podemos ver a Y como subconjunto K-invariante de $G \times_K Y$ simplemente identificando K con el subconjunto $\{[e, y] \mid y \in Y\}$ de $G \times_K Y$).

□

Proposición 1.6.13. *Sean G un grupo de Lie y K un subgrupo compacto de G. Si S es un K-espacio, entonces S es un K-retracto de vecindad del producto torcido $G \times_K S$.*

Demostración. Consideramos la siguiente acción continua del grupo $H = K \times K$ sobre el espacio G:

$$(k_1, k_2)g \mapsto k_1 g k_2 \quad \text{para todo } (k_1, k_2) \in H \quad \text{y } g \in G.$$

Claramente, K es un subconjunto H-invariante del H-espacio G, y esta acción sobre K es transitiva. Entonces, K es H-homeomorfo a H/H_e, donde $H_e = \{(k,k) \,|\, k \in K\}$ es el estabilizador de la identidad $e \in K$. Como H es un grupo compacto de Lie, H/H_e es un H-*ANE* (ver Proposición 1.6.9 (2)), y entonces, K es un H-*ANE*. Esto garantiza la existencia de una H-retracción $r : U \to K$, donde U es una vecindad H-invariante de K en el H-espacio G. Entonces $U \times_K S$ es una vecindad K-invariante del conjunto S en $G \times_K S$ (recordemos que identificamos a S, como un K-espacio con el subconjunto K-invariante $\{[e,s] \,|\, s \in S\}$ de $G \times_K S$).
Definimos $R : U \times_K S \to S$ por $R([u,s]) = r(u)s$. Entonces R está bien definida. En efecto, como $r(u) \in K$ y S es K-invariante, vemos que $r(u)s \in S$. Si $k \in K$, entonces $R([uk^{-1}, ks]) = r(uk^{-1})ks$ y, r es H-invariante, $r(uk^{-1}) = r(u)k^{-1}$. En consecuencia, $R([uk^{-1}, ks]) = r(u)k^{-1}ks = r(u)s = R([u,s])$. La continuidad de R se sigue de la continuidad de la función $U \times S \to S$ que envía (u,s) en $r(u)s$, y de que la K-proyección orbital $U \times S \to U \times_K S$ es abierta. Más aún, R es K-equivariante. En efecto, para cualquier $k \in K$, tenemos que $R(k[u,s]) = R([ku,s]) = r(ku)s$. Pero, la H-equivarianza de r implica que $r(ku) = kr(u)$, y entonces, $R([ku,s]) = kr(u)s = kR([u,s])$. Finalmente, veamos que R es una retracción sobre S, $R([e,s]) = r(e)s = es = s$ para toda $s \in S$. □

1.7. Conos y uniones de espacios *G-ANE*

En topología general es muy usado el cono de un espacio topológico X debido a la gran cantidad de propiedades que conserva del espacio base. En nuestro caso, veremos que también es posible considerarlo como un G-espacio. Más aún, en el caso en que X es un G-*ANE*, resulta que su cono es un G-*AE*. Ésto permitirá posteriormente trabajar con los conos de los espacios cocientes de clases laterales de un subgrupo compacto H de un grupo G, los cuales resultarán ser espacios G-*AE*. Por otro lado, apoyándonos de esta propiedad de los conos, mostraremos también un resultado sobre la preservación de la propiedad de ser un *G-ANE* bajo uniones arbitrarias.

Definición 1.7.1. *Sea X un espacio topológico, definimos el* **cono de** *X como el conjunto cociente $[0,1] \times X/\{0\} \times X$ dotado de la topología débil. El cono de un espacio X será denotado por $con(X)$.*

La imagen de un punto $(t,x) \in [0,1] \times X$ sobre la proyección canónica $p : [0,1] \times X \to con(X)$ se denotará por tx, y para el caso de $0x$ (el vértice del cono) simplemente escribiremos $*$. Análogamente para cualesquiera subconjuntos $A \subset [0,1]$ y $B \subset X$ escribiremos $A \cdot B$ para representar el conjunto $\{ab \,|\, a \in A, b \in B\}$.

Recordamos que un subconjunto $U \subset con(X)$ que contiene a $*$ está en la topología débil si y sólo si $p^{-1}(U)$ es abierto en $[0,1] \times X$ y existe un $\varepsilon > 0$ con $[0,\varepsilon) \times X \subset p^{-1}(U)$. Si U no contiene al vértice, entonces está en la topología débil si y sólo si $p^{-1}(U)$ es abierto en $[0,1] \times X$.

La importancia del cono de un espacio X fue establecida por Dydak en [28]. Él mismo mostró que la topología débil sobre el cono de X es metrizable si X también lo es [28, pág. 230]. Sin embargo, para nosotros será necesario precisar más en este resultado.

Proposición 1.7.2. *Sea d una métrica compatible sobre X tal que $d(x_1,x_2) \leq 1$ para $x_1, x_2 \in X$. Entonces:*

a) la fórmula

$$d'(t_1x_1, t_2x_2) = \sqrt{t_1^2 + t_2^2 - 2t_1t_2cos(d(x_1,x_2))}$$

define una métrica sobre $con(X)$

b) Para cualesquiera $t_1x_1, t_2x_2 \in con(X)$ las siguientes desigualdades se cumplen:

$$|t_1-t_2|^2+\frac{t_1t_2}{2}(d(x_1,x_2))^2 \leq (d'(t_1x_1,t_2x_2))^2 \leq |t_1-t_2|^2+t_1t_2(d(x_1,x_2))^2.$$

c) d' genera la topología débil sobre $con(X)$.

d) d' es completa si y sólo si d lo es.

Demostración. a) Sólo la desigualdad triangular requiere una demostración, las otras propiedades son evidentes. Sean tres puntos $t_i x_i \in con(X)$, para $i = 1, 2, 3$. Consideramos un triángulo esférico $\triangle ABC$ (posiblemente degenerado) sobre la esfera unitaria de $\mathbb{R}^3$, tal que los arcos (las aristas de $\triangle ABC$) $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BC}$ y $\overset{\frown}{CA}$ tengan longitudes $d(x_1, x_2), d(x_2, x_3)$ y $d(x_1, x_3)$ respectivamente. Como $d \leq 1$, dicho triángulo existe. Sea O el centro de la esfera unitaria. Escogemos los puntos $E \in OA$, $F \in OB$ y $L \in OC$ tales que $|OE| = t_1, |OF| = t_2$ y $|OL| = t_3$. Entonces en el triángulo ordinario $\triangle EFL$ tenemos: $|EF| = d'(t_1x_1, t_2x_2), |FL| = d'(t_2x_2, t_3x_3)$ y $|EL| = d'(t_1, x_1, t_3x_3)$. Y se obtiene el resultado deseado.

b) Se sigue inmediatamente de las desigualdades

$$1 - \frac{1}{2}\alpha^2 \leq cos\,\alpha \leq 1 - \frac{1}{4}\alpha^2 \text{ para } 0 \leq \alpha \leq 1.$$

c) Se sigue de *b*).

d) Se sigue de *b*).

□

Ahora, si X es un G-espacio con G cualquier grupo topológico, entonces $con(X)$ también es un G-espacio con la acción definida de la siguiente manera: $g(tx) = t(gx)$, $g \in G, tx \in con(X)$. Además, si X es metrizable por una métrica G-invariante d con $d \leq 1$, entonces es sencillo ver que la métrica d' sobre $con(X)$ también es G-invariante y $d' \leq \sqrt{2}$.
La Proposición 1.7.3 y el Teorema 1.7.5 son las versiones equivariantes de los teoremas [47, Teorema 5.4.2] y [29, Teorema 1.2] respectivamente. Las demostraciones presentadas aquí son sencillas equivariantizaciones de las demostraciones originales del caso no equivariante.

Proposición 1.7.3. *Sean G un grupo arbitrario y $X \in G$-$\mathcal{M}$. Si $X \in$G-ANE entonces $con(X) \in$G-AE.*

Demostración. Sea (Y, B) un G-par en G-$\mathcal{M}$ y $f : B \to con(X)$ una función equivariante. Sea f_1 la composición de f y la proyección $\pi_1 : con(X) \to [0, 1]$. Usando la normalidad de Y/G y de acuerdo al Teorema de Extensión de Tietze-Urysohn, podemos extender f_1 a una función invariante $\varphi : Y \to [0, 1]$. Definimos $U = \varphi^{-1}((0, 1])$. Es fácil ver que $U \in G$-$\mathcal{M}$.

Sea $f_2 = \pi_2 f|_{U\cap B}$ donde $\pi_2 : (0, 1] \cdot X \to X$ es la proyección. Como $U \cap B$ es un subconjunto cerrado invariante de U y $X \in G$-ANE, la función f_2

tiene una extensión equivariante $F_2 : V \to X$ definida sobre una vecindad invariante V de $U \cap B$ en U.

Dado que $f_1(y) = 0$ para cada $y \in (Y \setminus V) \cap B$, la función $\mu : (Y \setminus V) \cup B \to [0,1]$ definida por $\mu|_{Y\setminus V} = 0$ y $\mu|_B = f_1$, es continua e invariante. Ahora, usando la normalidad del espacio de órbitas Y/G y el Teorema de extensión de Tietze-Urysohn, podemos extender μ a una función continua invariante $\lambda : Y \to [0,1]$.

Entonces la función equivariante $F : Y \to Con(X)$ definida por:

$$F(y) = \begin{cases} \lambda(y)F_2(y), & \text{si } y \in V, \\ *, & \text{si } y \in Y \setminus V \end{cases}$$

es la extensión deseada de f. El hecho de que el cono de X este dotado de la topología débil garantiza la continuidad de F. $\square$

Un resultado inmediato que se obtiene de las Proposiciones 1.6.9 y 1.7.3 es el siguiente corolario.

Corolario 1.7.4. *Sea H un subgrupo compacto de un grupo de Lie G. Entonces $con(G/H)$ es un G-AE metrizable.*

Teorema 1.7.5. *Sea $X \in G\text{-}\mathcal{M}$ supongamos que un G-espacio Y es la unión de una familia $\{Y_s\}_{s\in S}$ de subespacios invariantes con las siguientes propiedades:*

a) cada Y_s es un G-AE; y

b) para cualesquiera dos elementos s y $t \in S$, existe un $u \in S$ tal que $Y_s \cup Y_t \subset Y_u$.

Si además, (X, A) es un G-par, $f : A \to Y$ una función equivariante y $A = \bigcup_{s\in S} int(f^{-1}(Y_s))$, entonces f tiene una extensión equivariante sobre X.

Demostración. Definimos $U_s = (X \setminus A) \cup int(f^{-1}(Y_s))$ para cada $s \in S$. Entonces la familia $\{U_s\}_{s\in S}$ constituye una cubierta abierta de X. Como el espacio de órbitas X/G es metrizable y por tanto paracompacto, existe una partición localmente finita de unidad $\{\varphi_s\}_{s\in S}$ sobre X tal que $\varphi_s^{-1}(0,1] \subset U_s$ para cada $s \in S$ (ver [30, Teorema 5.1.9]). Para cada subconjunto finito T de S definimos $B_T = \cap_{s\in S\setminus T}\varphi_s^{-1}(0)$. Como $\{\varphi_s\}_{s\in S}$ es una partición localmente finita de unidad, concluimos que $\{B_T\}$ constituye una cubierta cerrada invariante de X.

Pretendemos crear, para cada subconjunto finito T de S, elementos $\alpha(T)$ de S y funciones equivariantes $f_T : B_T \to Y_{\alpha(T)}$ tales que las siguientes condiciones se satisfagan:

a) $Y_{\alpha(F)} \subset Y_{\alpha(T)}$ para cada $F \subset T$,

b) $f_T|_{B_F}$ para cada $F \subset T$,

c) $f_T|_{A\cap B_T} = f|_{A\cap B_T}$.

Con este fin, aplicamos inducción sobre el número de elementos de T. Para los conjuntos unipuntuales $T = \{s\}$ simplificamos la notación a $T = s$. Notemos que $B_s = \varphi^{-1}(1)$ para cada $s \in S$. $\{B_s\}_{s\in S}$ es una familia discreta y $f(A \cap B_s) \subset Y_s$ para cada $s \in S$. Por lo tanto, cada función parcial $f|_{A\cap B_s}$ se extiende a una función equivariante $f_s : B_s \to Y_s$, y hacemos $\alpha(T) = s$.

Ahora, supongamos que f_T y $\alpha(T)$ existen para toda T con cardinalidad a lo más n. Dado un subconjunto finito $T \subset S$ que contiene exactamente $n+1$ elementos, escogemos un elemento $\alpha(T)$ tal que $Y_{\alpha(T)}$ contenga todos los $Y_{\alpha(F)}$ con F un subconjunto propio de T. Sea B la unión de $A \cap B_T$ y de todos los B_F, con F un subconjunto propio de T. Entonces B es un subconjunto cerrado invariante de B_T. Ahora definimos la función equivariante $h : B \to Y_{\alpha(T)}$ de la siguiente manera:

$$h(x) = \begin{cases} f_F(x), & \text{si } x \in B_F, \\ f(x), & \text{si } x \in A \cap B_T. \end{cases}$$

Entonces h es una función bien definida (continua) equivariante y es fácil verificar que los valores de h están en $Y_{\alpha(T)}$. Por lo tanto, h extiende a la función equivariante sobre B_T y produce $f_T : B_T \to Y_{\alpha(T)}$ con las propiedades necesarias.

Como $B_T \cap B_F = B_{T\cap F}$, todas las f_T pueden ser pegadas para producir una función equivariante $f' : X \to Y$ que sea una extensión de f. Cada punto $x \in X$ tiene una vecindad U que intersecta solo una cantidad finita de las $\varphi_t^{-1}(0,1]$; esto significa que existe un conjunto finito T tal que $U \subset B_T$. Como $f'|_{B_T}$ es continua, $f'|_U$ también lo es. □

En el teorema anterior vimos como bajo ciertas condiciones, la unión de espacios que son *G-AE* es nuevamente un *G-AE*. Como un corolario de este teorema y haciendo uso de las propiedades de los conos tenemos el resultado análogo para el caso *G-ANE*.

Corolario 1.7.6. *Sea $X \in G$-$\mathcal{M}$. Supóngase que un G-espacio Y es la unión de una familia $\{Y_s\}_{s\in S}$ de sus subespacios invariantes con las propiedades siguientes:*

a) cada Y_s es un G-ANE; y

b) para cada dos elementos s y t de S existe un elemento $u \in S$ $Y_s \cup Y_t \subset Y_u$.

Si además, (X, A) es un G-par con $A = \bigcup_{s\in S} int(f^{-1}(Y_s))$ y $f : A \to Y$ una función equivariante, entonces f tiene una extensión equivariante sobre una vecindad de A en X.

Demostración. Sea $Z = con(X)$ con vértice $*$, y sea $Z_s = con(Y_s)$ para cada $s \in S$. Entonces Z es cubierto por los conjuntos invariantes $Z_s, s \in S$. Por la Proposición 1.7.3, cada Z_s es un *G-AE*. Ahora, f considerada como una función equivariante de A en Z, satisface las hipótesis del Teorema 1.7.5. Y entonces, se extiende a una función equivariante $f' : X \to Z$. Sea $U = f'^{-1}(Z\setminus \{*\})$. Luego, existe una retracción equivariante $r : Z \setminus \{*\} \to Y$, haciendo $F = rf'|_U : U \to Y$ tenemos la extensión equivariante que deseábamos. □

Como resultado final de esta sección, tenemos el siguiente corolario que nos establece que si un G-espacio es unión de subconjuntos abiertos invariantes, cada uno de los cuales es un *G-ANE*, entonces el espacio también es un *G-ANE*.

Corolario 1.7.7. *Sea $X \in G$-$\mathcal{M}$. Si un G-espacio Y es la unión de subconjuntos abiertos invariantes $Y_\lambda, \lambda \in \Lambda$, cada uno de los cuales es un G-estensor absoluto de vecindad de X. Entonces también Y es un G-extensor absoluto de vecindad de X.*

Demostración. Para la demostración consideraremos primero el caso particular en que Λ tiene solo dos elementos, es decir, Y es unión de dos subconjuntos abiertos invariantes Y_1, Y_2, cada uno de los cuales es un G-extensor absoluto de vecindad de X.

Sea A un subconjunto cerrado invariante de X y $f : A \to Y$ una función equivariante. Los conjuntos

$$V_1 = f^{-1}(Y_1) \cup (X \setminus A) \text{ y } V_2 = f^{-1}(Y_2) \cup (X \setminus A)$$

constituyen una cubierta abierta invariante de X. Como X/G es un espacio normal podemos encontrar subconjuntos cerrados invariantes X_1 y X_2 tales que $X_1 \subset V_1$, $X_2 \subset V_2$ y $X_1 \cup X_2 = X$. Como $Y_1 \cap Y_2$ es un subconjunto abierto invariante de Y_1 y $Y_2 \in G\text{-}ANE$, concluimos que $Y_1 \cap Y_2 \in G\text{-}ANE$ (ver Proposición 1.5.7). En virtud de la Proposición 1.7.3, tenemos que $con(Y_1 \cap Y_2)$ es un $G\text{-}AE$, y entonces, existe una extensión equivariante $f_0 : X_1 \cap X_2 \to con(Y_1 \cap Y_2)$ de la función equivariante $f|_{A \cap (X_1 \cap X_2)}$. Ahora, pegando f_0 y la función equivariante $f|_{A \cap X_1}$, obtenemos la función equivariante

$$h : (A \cap X_1) \cup (X_1 \cap X_2) \to con(Y_1).$$

Nuevamente, aplicando la Proposición 1.7.3 tenemos que $con(Y_1) \in G\text{-}AE$, entonces existe una extensión equivariante $h_1 : X_1 \to con(Y_1)$ de h. De manera completamente análoga obtenemos una extensión equivariante $h_2 : X_2 \to con(Y_2)$. Por último, pegamos h_1 y h_2 para obtener una función equivariante $H : X \to con(Y)$. Como $H|_A = f$ y $A \cap H^{-1}(*) = \emptyset$, concluimos que el conjunto $U = X \setminus H^{-1}(*)$ es una vecindad invariante de A en X, y la restricción $H|_U$ es la extensión equivariante que deseábamos para f.

Veamos ahora el caso en que $Y = \bigcup\{Y_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$, donde cada Y_λ es un subconjunto abierto invariante de Y y un $G\text{-}ANE$. Sea $\mathcal{T}$ el conjunto de todos los subconjuntos finitos de Λ. Para cada $T \in \mathcal{T}$, definimos $Z_T = \bigcup_{\lambda \in T} Y_T$. Entonces, se sigue del caso particular probado anteriormente, que cada Z_T es un subconjunto abierto de Y y un $G\text{-}ANE$. Además, $Y = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} Z_T$ y $Z_T \cup Z_S = Z_{T \cup S}$ para toda $T, S \in \mathcal{T}$. En consecuencia, aplicando el Corolario 1.7.6 tenemos que Y es un $G\text{-}ANE$. □

1.8. G-espacios con una estructura finita

Dado un grupo G, estaremos denotando por (H) la familia de todos los subgrupos de G que son conjugados con H, es decir, $(H) = \{gHg^{-1} \mid g \in G\}$. Como los grupos de isotropía de puntos en la misma órbita son conjugados, esto es, $G_{gx} = gG_xg^{-1}$ para cualquier $x \in X$ y $g \in G$, entonces

$$(G_x) = \{G_y \mid y \in G(x)\}.$$

Además $G(x)$ es G-equivalente a G/G_y para cada $y \in G(X)$, en particular, $G(x)$ es homeomorfo a G/H. Esto motiva a la siguiente definición.

Definición 1.8.1. *Para un punto $x \in X$ la clase de conjugación de su estabilizador $(G_x) = \{G_{gx} \mid g \in G\}$, será llamado el **tipo de órbita** de la órbita $G(x)$.*

Es claro que órbitas diferentes pueden tener el mismo tipo de órbita. Si (H) es el tipo de órbita de una órbita $G(x) \subset X$, entonces (H) es llamado un tipo de órbita de X. Para cualquier subgrupo cerrado $H \subset G$, denotamos por $X_{(H)}$ la unión de todas las órbitas de X que son del mismo tipo de órbita (H). Es sencillo verificar que $X_{(H)}$ es un subconjunto invariante de X y la familia $\{X_{(H)}\}$ es una partición de X formada por conjuntos invariantes indizados por los tipos de órbita de X.

Definición 1.8.2. *La partición $\{X_{(H)}\}$ mencionada anteriormente es llamada la **estructura de órbita** de X. Decimos que un G-espacio X es del tipo de órbita (H), o simplemente del tipo (H), si $X = X_{(H)}$.*

Una consecuencia importante del Teorema de la Rebanada es que si X es un G-espacio con todas las órbitas del mismo tipo, por decir (H), entonces la función orbital $\pi : X \to X/G$ es una **G-fibración localmente trivial** con fibra G/H, es decir, cada punto $G(x) \in X/G$ tiene una vecindad U tal que $\pi^{-1}(U)$ es G-equivalente a $G/H \times U$, esto es, existe un G-homeomorfismo $f : \pi^{-1}(U) \to G/H \times U$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & G/H \times U \arrow[dl, "p"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

donde p es la segunda proyección y G actúa sobre $G/H \times U$ de acuerdo a la regla: $g * (g'H, u) = (gg'H, u)$. En estas condiciones decimos también que π es *trivial sobre U*.

Ya que hemos definido fibración localmente trivial, mencionamos un resultado que se utilizará en la sección 3.1. Este teorema fue publicado en 1960 por Fort en [32] y habla precisamente de las condiciones que se requieren para poder extender secciones cruzadas de fibraciones localmente triviales. En este trabajo no se profundizará en dicho tema, por lo que no presentamos su demostración, sin embargo, si al lector le interesa conocer más sobre el tema se recomienda consultar [51].

Teorema 1.8.3. *Sea $p : E \to B$ una fibración localmente trivial con fibra $Y \in ANR$ (respectivamente AR). Supongamos que el espacio base B es metrizable y $s : A \to E$ es una **sección cruzada** de p definida sobre un subconjunto cerrado $A \subset B$ (es decir, $(p \circ s) : A \to B$ cumple que $(p \circ s)(x) = x$ para cada $x \in A$). Entonces s puede ser extendida a una sección sobre una vecindad de A (respectivamente sobre B).*

Demostración. Ver [32, Teorema 1]. □

La siguiente definición fue establecida por Jaworowski en [41] con la intención de extender resultados sobre G-espacios de dimensión finita a una clase más general.

Definición 1.8.4. *Sea G un grupo de Lie. Un G-espacio propio X se dice que tiene* ***una estructura finita*** *si tiene un número finito de tipos de órbita y para cada tipo de órbita (H), la función orbital $\pi : X_{(H)} \to X_{(H)}/G$ tiene una* ***cubierta finita trivializante****, esto es, existe una cubierta abierta finita $U_1, ..., U_m$ de $X_{(H)}/G$ tal que π es trivial sobre cada U_i.*

Es evidente de esta definición que cualquier subespacio invariante de un G-espacio con una estructura finita es también un G-espacio con una estructura finita. Presentamos a continuación algunos ejemplos de esta clase de G-espacios.

Ejemplo 1.8.5. *Si X es un G-espacio compacto con un solo tipo de órbita, entonces X tiene una estructura finita*

Ejemplo 1.8.6. *Si G es un grupo compacto de Lie y X un G-espacio paracompacto de dimensión finita con un número finito de tipos de órbita, entonces X tiene una estructura finita. En particular un G-espacio euclideano tiene una estructura finita (ver [41]).*

El lema que se establece a continuación fue presentado por Jaworowski con el proposito de demostrar un teorema de encaje para los G-espacios con una estructura finita (ver 1.8.10). En nuestro caso, será utilizado también para demostrar un teorema de caracterización para esta misma clase de espacios. La demostración requiere de algunos resultados previos que no hemos considerado en este trabajo, por lo tanto, si el lector esta interesado en analizarla puede consultar [42, Lema 2.3]. Aclaramos que tanto en este lema como en la Proposicón 1.8.8 y el Teorema 1.8.9 estaremos considerando a G como un grupo compacto de Lie.

Lema 1.8.7. *Sea $X \in G$-$\mathcal{M}$ con una estructura finita. Entonces existe una función acotada isovariante de X sobre un G-espacio euclideano.*

Proposición 1.8.8. *Sea G un grupo compacto de Lie actuando sobre un espacio compacto de Hausdorff de dimensión finita X. Entonces*

$$dimX/G \leq dimX$$

Demostración. Ver [24, Proposición 3.7] □

Teorema 1.8.9. *Sea G un grupo compacto de Lie. Entonces para cualquier G-espacio metrizable X los siguientes puntos son equivalentes:*

1. *X tiene una estructura finita.*
2. *Existe una función isovariante de X en un G-espacio de dimensión finita, compacto y metrizable.*
3. *Existe una función isovariante de X en un G-espacio de dimensión finita, metrizable con una cantidad finita de tipos de órbita.*

Demostración. (1) implica (2). Por el lema anterior, existe una función isovariante f de X en un G-espacio euclideano E, luego, consideramos la retracción estandar $r : E \to \mathbb{B}^n$ sobre la bola unitaria de E definida por:

$$r(x) = \begin{cases} \frac{x}{\|x\|}, & \text{si } \|x\| \geq 1 \\ x, & \text{si } \|x\| \leq 1 \end{cases}$$

es claro que r es una función isovariante y $h = r \circ f$ es la función buscada.

(2) $\Longrightarrow$ (3) es evidente.

(3) $\Longrightarrow$ (1). Sea $f : X \to Y$ una función isovariante, donde Y es un G-espacio metrizable de dimensión finita con una cantidad finita de tipos de órbita. Entonces tenemos un G-encaje $i : X \to Y \times (X/G)$ definido por $i(x) = (f(x), \pi(x))$, donde $x \in X$, $\pi : X \to X/G$ es la función orbital y X/G tiene la G-acción trivial. Por lo tanto, es suficiente probar que Y tiene una estructura finita. Además, sin pérdida de generalidad podemos asumir que Y tiene sólo un tipo de órbita, digamos (H). Supongamos que $dim\, Y = n$.

Se sigue de [22, Cap.II, p. 106, Teorema 9.5] que existe un G-espacio Z metrizable y compacto de tipo de órbita (H), el cual es n-universal para los G-espacios metrizables Y de tipo de órbita (H) y con $dim\, Y/G \leq n$ (ver Proposición 1.8.8). En particular, existe una función isovariante $\varphi : Y \to Z$. Entonces obtenemos un G-encaje $j : Y \to Z \times (Y/G)$ definido por $j(y) = (\varphi(y), \rho(y))$, donde $y \in Y$, $\rho : Y \to Y/G$ es la función orbital y Y/G tiene la G-acción trivial.

Ahora, debido a la compacidad de Z, la función orbital $p : Z \to Z/G$ tiene una cubierta finita trivializante, y entonces, Z tiene una estructura finita. Esto implica que $Z \times (Y/G)$, y entonces, $j(Y)$ también tengan una estructura finita. Por lo tanto, Y tiene una estructura finita, como se requería □

Veamos ahora el teorema de encaje de Jaworowski para espacios con una estructura finita.

Teorema 1.8.10. *Sean G un grupo compacto de Lie y X un G-espacio con una estructura finita. Entonces existe un G-encaje cerrado de X en $E \times C$, donde E es un G-espacio euclideano y C un subconjunto convexo de un espacio de Banach sobre el cual G actúa trivialmente.*

Demostración. En virtud del Lema 1.8.7, podemos encontrar una función isovariante $f : X \to E$ donde E es un G-espacio euclideano. Aplicando el teorema de encaje de Wojdyslawski (ver [53]), el espacio de órbitas admite un encaje $h : X/G \to C$, donde C es un subconjunto convexo de un espacio de Banach, de modo que $h(X/G)$ es cerrado en C. Así, la función $i : X \to E \times C$ dada por $i(x) = (f(x), (h \circ \pi)(x))$ es un encaje equivariante (π es la proyección orbital). Resta ver que $i(X)$ es cerrado en $E \times C$.

Sea $y = (u, c) \in E \times C$, con $u \in E,\ c \in C$ tal que $y \notin i(X)$. Si $c \notin h(X/G)$ entonces, como h es un encaje cerrado, existe una vecindad N de $c \in C$ tal que $N \cap h(X/G) = \emptyset$ y por lo tanto $E \times \pi^{-1}(N)$ es una vecindad de y que no intersecta a $i(X)$.

Suponemos ahora que $c \in h(X/G)$, entonces existe $x \in X$ tal que $c = (h \circ \pi)(x)$, como $y \notin i(X)$ las órbitas $G(u)$ de u y $G(f(x))$ de $f(x)$ en E son disjuntas; entonces existe una vecindad invariante U de la órbita $G(u)$ y una vecindad invariante V de la órbita $G(f(x))$ en E tales que $U \cap V = \emptyset$.

Como f es continua y equivariante, existe una vecindad invariante W de la órbita $G(x)$ en X tal que $f(W) \subset V$. Usando el hecho que π es abierta y h es un encaje, existe una vecindad M de $(h \circ \pi)(x)$ en C tal que $M \cap (h(X/G)) = h(W/G)$. Por lo tanto, $U \times M$ es una vecindad de y en $E \times C$ que no intersecta a $i(X)$. $\square$

Capítulo 2

Caracterizaciones homotópicas

A partir de ahora estaremos considerando grupos de Lie (no necesariamente compactos) a menos que en su momento se especifique otra cosa. Veremos en este capítulo los primeros resultados originales del trabajo. El primero de ellos es una caracterización local para los G-espacios en G-$\mathcal{M}$ que son G-ANR, es decir, la propiedad de ser un G-ANR es una propiedad local, y corresponde a la generalización al caso equivariante del Teorema [37, Capítulo III, Teorema 8.1], hecho conocido en la teoría de retractos desde hace varios años. Las otras dos caracterizaciones también son generalizaciones al caso equivariante de resultados conocidos de la teoría de retractos (ver [37, Capítulo IV, Teoremas 1.3 y 2.4]).

Cabe mencionar que resultados fundamentales para poder obtener estas caracterizaciones son; el Teorema de la Rebanada y el Teorema de extensión de homotopía equivariante de Borsuk, del cual también presentamos una demostración original para el caso de acciones propias de grupos de Lie (ver [7, Teorema 5] para el caso de acciones de grupos compactos).

Recordando la observación 1.5.5, en este, y en el siguiente capítulo estaremos haciendo uso de los términos G-ANR y G-ANE de manera indistinta, sin necesidad de mencionar el Teorema 1.5.4.

2.1. Caracterización local.

Dentro de la topología, en muchas ocasiones se analizan propiedades locales de los espacios para poder inferir propiedades globales. En este caso, la primer caracterizacion de los G-$ANR's$ que presentamos es una caracterización mediante propiedades locales de los G-espacios. Precisamente, esta propiedad local es la que sirve como base para construir las caracterizaciones de la siguiente sección. Iniciamos dando la definición de G-ANE local.

Definición 2.1.1. *Sea X un G-espacio propio. Decimos que X es un G-ANE* ***local****, si cada punto $x \in X$ admite una vecindad G_x-invariante U la cual es un G_x-ANE.*

Como se mencionó anteriormente, el siguiente teorema de caracterización juega un papel primordial en todo el desarrollo posterior de este trabajo, pues establece que la propiedad de ser un G-ANR en el caso de acciones propias de grupos de Lie es en realidad una propiedad local.

Teorema 2.1.2 (Caracterización local). *Sea G un grupo de Lie y X un G-espacio propio. Entonces X es un G-ANE si y sólo si X es un G-ANE local.*

Demostración. Primero, asumimos que X es un G-ANE local. Sea $x \in X$, y supóngase que U es una vecindad G_x-invariante de X la cual es G_x-ANE. Debido a que X es un G-espacio propio, por el Teorema 1.6.7, podemos encontrar una G_x-rebanada S_x tal que $x \in S_x \subset U$. Como un resultado de que la saturación $G(S_x)$ es G-homeomorfa al producto torcido $G \times_{G_x} S_x$ (ver Lema 1.6.6) y de acuerdo a la Proposición 1.6.13, S_x es un G_x-retracto de alguna vecindades G_x-invariante W de S_x en $G(S_x)$. Como U es G_x-invariante podemos suponer, sin perdida de generalidad que $W \subset U$. Entonces, debido a que W es un subconjunto abierto G_x-invariante del G_x-espacio U, W también es un G_x-ANE. Esto garantiza que también S_x es un G_x-ANE. Se sigue como resultado de la Proposición 1.6.11 que $G(S_x)$ es un G-ANE. Así, el G-espacio propio X es la unión de subconjuntos abiertos invariantes $G(S_x), x \in X$, cada uno de los cuales es un G-ANE. Por lo tanto, el Corolario 1.7.7 garantiza que X es un G-ANE

Supóngamos ahora que X es un G-ANE. Así X es también un K-ANE para cualquier subgrupo compacto K de G (ver 1.6.12). Particularmente, X es un G_x-ANE para todo $x \in X$, por lo que X es un G-ANE local.

□

2.2. Dos caracterizaciones homotópicas

En esta sección presentaremos dos caracterizaciones homotópicas para los G-espacios propios metrizables por métrica invariante. Iniciamos probando dos lemas auxiliares que utilzaremos en varios de los resultados posteriores. Cabe mencionar que en lo siguiente estaremos denotando por I el intervalo unitario $[0, 1]$, y se considerará como un G-espacio con la acción trivial de G, es decir, $gt = t$ para cada $g \in G$ y $t \in I$.

Lema 2.2.1. *Sea G un grupo topológico, (X, A) un G-par y N una vecindad invariante de $A \times I$ en $X \times I$. Entonces existe una vecindad invariante U de A en X tal que $U \times I \subset N$.*

Demostración. Para todo punto $a \in A$, consideramos el conjunto $\{a\} \times I \subset N$. Como N es abierto, para cada $t \in I$ existen vecindades V_t y W_t de a y t, respectivamente, tal que $V_t \times W_t \subset N$. Por la compacidad del intervalo I, existen un número finito de conjuntos $W_{t_1}, W_{t_2}, ..., W_{t_n}$ tales que $I = \bigcup_{i=1}^{n} W_{t_i}$, hacemos $V_a = \bigcap_{i=1}^{n} V_{t_i}$ por lo que $a \in V_a$ y $\{a\} \times I \subset V_a \times I$. Afirmamos que $V_a \times I \subset N$. En efecto, sea $(v, t) \in V_a \times I$. Entonces $v \in V_{t_i}$ para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Por otro lado, existe un índice $j \in \{1, 2, ..., n\}$ tal que $t \in W_{t_j}$, y entonces, $(v, t) \in V_{t_j} \times W_{t_j} \subset N$, como se requería. Así, $V_a \times I \subset N$.

Ahora, por la invarianza de N se tiene que $G(V_a) \times I = G(V_a \times I) \subset N$.

Por último, hacemos $U_a = G(V_a)$ y $U = \bigcup_{a \in A} U_a$. Claramente U es una vecindad invariante de A y $U \times I = \bigcup_{a \in A}(U_a \times I) = \bigcup_{a \in A}(G(V_a) \times I) \subset N$, como se requería. $\square$

Lema 2.2.2 (Lema Equivariante de Urysohn)**.** *Sea G un grupo localmente compacto y $X \in G$-$\mathcal{M}$. Supongamos que A y B son dos subconjuntos cerrados invariantes disjuntos de X. Entonces existe una función invariante $f : X \to I$ tal que $A \subset f^{-1}(0)$ y $B \subset f^{-1}(1)$.*

Demostración. Si $\pi : X \to X/G$ denota la proyección orbital. Como A y B son cerrados e invariantes, inferimos que las imágenes $\pi(A)$ y $\pi(B)$ son subconjuntos cerrados de X/G. Además, son disjuntos pues A y B lo son.

Como el espacio de órbitas X/G es metrizable, existe una función continua $\lambda : X/G \to I$ tal que $\pi(A) \subset \lambda^{-1}(0)$ y $\pi(B) \subset \lambda^{-1}(1)$. Entonces, claramente, la composición $f = \lambda \circ \pi$ es la función invariante deseada $f : X \to I$. $\square$

Como ya se había mencionado anteriormente, la teoría equivariante trata de extender conceptos y resultados de la topología general tratando de que en cierto sentido se respete las acciones de los grupos. Así, podemos también extender el concepto de cubierta.

Definición 2.2.3. *Una G-**cubierta** de un G-espacio Y es una cubierta $\mathcal{U}$ de Y, tal que $gU \in \mathcal{U}$ para cualquier $U \in \mathcal{U}$ y $g \in G$.*

Si X y Y son dos G-espacios, entonces dada una G-cubierta $\mathcal{U}$ de Y diremos que las funciones equivariantes $f, h : X \to Y$ son **$\mathcal{U}$-cercanas** si para cada $x \in X$ existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $\{f(x), h(x)\} \subset U$. En el mismo sentido, definimos $\mathcal{U}$-G-homotopía.

Definición 2.2.4. *Sea $\mathcal{U}$ una cubierta de un G-espacio Y. Una homotopía equivariante $H_t : X \to Y$, $t \in I$, se dice que es **$\mathcal{U}$-limitada** o bien una **$\mathcal{U}$-homotopía equivariante** (abreviado $\mathcal{U}$-G-homotopía) si para cada $x \in X$, existe un $U \in \mathcal{U}$ tal que $H_t(x) \in U$ para todo $t \in I$. Dos funciones equivariantes $f, h : X \to Y$ se dice que son **$\mathcal{U}$-homotópicas equivariantemente** (abreviado $\mathcal{U}$-G-homotópicas) si y sólo si existe una $\mathcal{U}$-G-homotopía $H_t : X \to Y$, $t \in I$, tal que $H_0 = f$ y $H_1 = h$.*

La definición que se presenta a continuación nos permitirá establecer una caracterización de los espacios *G-ANE* y por tanto de los *G-ANR*. Cabe señalar que los resultados presentados en el teorema 2.2.6 y la proposición 2.2.7 son válidos inclusive para acciones de grupos que no son de Lie. Sin embargo, para el teorema de caracterización 2.2.8 sí es necesario considerar acciones de grupos de Lie, ya que en su demostración se requiere el teorema de caracterización local, el cual a su vez utiliza el teorema de la rebanada que no es válido para grupos que no son de Lie.

Definición 2.2.5. *Sea Y un G-espacio y sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ G-cubiertas abiertas de Y tales que $\mathcal{V}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$. Diremos que Y satisface la propiedad $\mathcal{P}(G,\mathcal{U},\mathcal{V})$ si para cualesquiera dos funciones equivariantes $\mathcal{V}$-cercanas $h, \phi : X \to Y$ definidas sobre un G-espacio metrizable X y cualquier $\mathcal{V}$-G-homotopía $\delta_t : A \to Y$, $t \in I$, definida en un subconjunto invariante cerrado A de X con $\delta_0 = h|_A$ y $\delta_1 = \phi|_A$, existe una $\mathcal{U}$-G-homotopía $\Delta_t : X \to Y$, $t \in I$, con $\Delta_0 = h$, $\Delta_1 = \phi$ y $\Delta_t|_A = \delta_t$ para cada $t \in I$. Si $\mathcal{U} = \{Y\}$ la cubierta formada por un elemento, entonces escribimos $\mathcal{P}(G,\mathcal{V})$ en vez de $\mathcal{P}(G,\mathcal{U},\mathcal{V})$.*

Teorema 2.2.6. *Sea Y un G-ANR con $Y \in G$-$\mathcal{M}$ y $\mathcal{U}$ una G-cubierta abierta de Y, entonces existe una G-cubierta abierta $\mathcal{V}$ de Y tal que $\mathcal{V}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$ y Y satisface la propiedad $\mathcal{P}(G,\mathcal{U},\mathcal{V})$.*

Demostración. Sea $Y \in G$-$\mathcal{M}$. Por el Teorema 1.4.8, existe un G-espacio lineal normado Z y un subconjunto convexo invariante $N \subset Z$ tal que la acción de G en N es propia, y Y puede encajarse equivariantemente en N como un subconjunto cerrado invariante.

Ahora, debido a que $Y \in G$-ANR, existe una vecindad invariante M de Y en N y una retracción equivariante $\gamma : M \to Y$. Consideramos la cubierta abierta $\gamma^{-1}(\mathcal{U}) = \{\gamma^{-1}(U)|U \in \mathcal{U}\}$ de M, si definimos a $\mathcal{W}$ como el conjunto de todos los subconjuntos convexos de N cada uno de las cuales está contenido en un elemento de $\gamma^{-1}(\mathcal{U})$, tenemos que $\mathcal{W}$ es una G-cubierta abierta de M que refína a $\gamma^{-1}(\mathcal{U})$. Sea $\mathcal{V} = \{W \cap Y|W \in \mathcal{W}\}$. Afirmamos que $\mathcal{V}$ es la G-cubierta abierta de Y que estamos buscando.

Efectivamente, sea (X, A) un G-par en G-$\mathcal{M}$ y $h, \phi : X \to Y$ dos funciones equivariantes $\mathcal{V}$-cercanas definidas sobre X y $\delta_t : A \to Y,\ t \in I$ una $\mathcal{V}$-G-homotopía definida sobre A con $\delta_0 = h|_A$ y $\delta_1 = \phi|_A$.
Definimos la $\mathcal{W}$-G-homotopía $\lambda_t : X \to M,\ t \in I$ por:

$$\lambda_t(x) = (1 - t)h(x) + t\phi(x),$$

para todo $x \in X$ y odo $t \in I$.
Notemos que para cada $x \in X$ y $t \in I$, $\lambda_t(x)$ pertenece a un elemento $W \in \mathcal{W}$. Esto es consecuencia del hecho de que $h(x)$ y $\phi(x)$ pertenecen a un elemento $W \cap Y \in \mathcal{V}$. Como W es un subconjunto convexo de M, afirmamos que $\lambda_t(x)$ también pertenece a W para toda $t \in I$, y por lo tanto, a M, como se requería. Entonces, $\lambda_t(x)$ está bien definida y λ_t es una $\mathcal{W}$-homotopía. El que cada λ_t sea una función equivariante es consecuencia de la equivarianza de h y ϕ, y de la linealidad de la acción de G sobre N.

Consideramos el subconjunto cerrado invariante

$$T = (X \times \{0\}) \cup (A \times I) \cup (X \times \{1\})$$

del G-espacio $X \times I$ provisto de la siguiente acción de G: $g(x, t) = (gx, t)$.
Definimos la función equivariante $\Gamma : T \to Y$ por:

$$\Gamma(x,t) = \begin{cases} h(x), & \text{si } x \in X \text{ y } \ t = 0, \\ \delta_t(x), & \text{si } x \in A \text{ y } \ t \in I, \\ \phi(x), & \text{si } x \in X \text{ y } \ t = 1. \end{cases}$$

Como Y es un G-ANE, se sigue que Γ tiene una extensión equivariante $\Omega : O \to Y$ sobre una vecindad invariante O de T en $X \times I$.

Para cada punto $\alpha \in A$, consideramos el conjunto $\{\alpha\} \times I \subset O$. Como $\delta_t : A \to Y, t \in I$, es una $\mathcal{V}$-G-homotopía, existe $R_\alpha \in \mathcal{V}$ que continene a $\delta(t, \alpha) = \delta_t(\alpha)$ para toda $t \in I$. Debido a la continuidad de Ω existen vecindades V_t y W_t de α y t, respectivamente, tales que $V_t \times W_t \subset \Omega^{-1}(R_\alpha)$.

Como resultado de la compacidad del intervalo I, existe un número finito de conjuntos:

$$W_{t_1}, W_{t_2}, ..., W_{t_n},$$

tales que $I = \bigcup_{i=1}^{n} W_{t_i}$.

Sea $V_\alpha = \bigcap_{i=1}^{n} V_{t_i}$. Entonces V_α es una vecindad de α, con $V_\alpha \times I \subset O$, y $\Omega(V_\alpha \times I) \subset R_\alpha$. En efecto, sea $(v,t) \in V_\alpha \times I$. Entonces $v \in V_{t_i}$ para todo $i \in \{1,2,...,n\}$. Más aún, existe un índice $j \in \{1,2,...,n\}$ tal que $t \in W_{t_j}$, y entonces, $(v,t) \in V_{t_j} \times W_{t_j} \subset \Omega^{-1}(R_\alpha) \subset O$. Entonces $(v,t) \in O$ y $\Omega(v,t) \in R_\alpha$, como se requería.

En consecuencia, debido a la invarianza de O, se garantiza que $G(V_\alpha)\times I = G(V_\alpha \times I) \subset O$.

Ahora, hacemos $U_\alpha = G(V_\alpha)$ y $U = \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$. Evidentemente U es una vecindad invariante de A y $U \times I = \bigcup_{\alpha\in A}(U_\alpha \times I) = \bigcup_{\alpha\in A}(G(V_\alpha) \times I) \subset O$.

Afirmamos que la restricción $\Omega_{U\times I}$ es una $\mathcal{V}$-homotopía. En efecto, sea $u \in U$ y $t \in I$ arbitrarios. Entonces existe $\alpha \in A$, $v \in V_\alpha$ y $g \in G$ tales que $u = gv$.

Como $\Omega(v,t) \in R_\alpha$ tenemos que

$$\Omega(u,t) = \Omega(gv,t) = g\Omega(v,t) \in gR_\alpha,$$

para todo $t \in I$. Como $\mathcal{V}$ es una G-cubierta y $R_\alpha \in \mathcal{V}$, se sigue que $gR_\alpha \in \mathcal{V}$. Esto muestra que $\Omega|_{U\times I}$ es una $\mathcal{V}$-homotopía. Por conveniencia, introducimos la notación

$$\omega_t(x) = \Omega(x,t), \quad x \in U, \ t \in I.$$

Entonces, $\omega_t, t \in I$, es una $\mathcal{V}$-G-homotopía.

Además, como el espacio de órbitas X/G es metrizable, podemos escoger un conjunto abierto invariante B en X tal que

$$A \subset B \subset \overline{B} \subset U.$$

Entonces, por el lema equivariante de Urysohn (ver Lema 2.2.2), existe una función invariante $\sigma : X \to I$ tal que

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in X \setminus B, \\ 1, & \text{si } x \in A. \end{cases}$$

En base a lo anterior, definimos la G-homotopía $\eta_t : X \to M, \ t \in I$, por:

$$\eta_t(x) = \begin{cases} (1-\sigma(x))\lambda_t(x) + \sigma(x)\omega_t(x), & \text{si } x \in U, \\ \lambda_t(x), & \text{si } x \in X \setminus B. \end{cases}$$

Como G actua linealmente sobre N y tanto λ_t como ω_t son funciones equivariantes se tiene que también η_t es una función equivariante para cada $t \in I$.

Ahora, probemos que η_t es una $\mathcal{W}$-homotopía, para esto, sea x un punto arbitrario en X. Debemos mostrar la existencia de un $W_\rho \in \mathcal{W}$ tal que

$$\eta_t(x) \in W_\rho \quad \text{para todo } t \in I.$$

Consideramos los dos casos siguientes:

Caso I: Si $\sigma(x) > 0$. En este caso, tenemos que $x \in B \subset U$. Debido a que $\omega_t(x)$ es una $\mathcal{V}$-homotopía, existe $W_\rho \in \mathcal{W}$ tal que $\omega_t(x) \in W_\rho$ para cada $t \in I$. En particular, W_ρ contiene a los puntos

$$\omega_0(x) = h(x) \quad \text{y} \quad \omega_1(x) = \phi(x).$$

Como W_ρ es un conjunto convexo, se sigue que $\lambda_t(x) \in W_\rho$ para cada $t \in I$. Por otro lado, el conjunto convexo W_ρ también contiene a los puntos $\lambda_t(x)$ y $\omega_t(x)$, y entonces debe de contener a $\eta_t(x)$ para todo $t \in I$. Por lo tanto, tenemos demostrado que $\eta_t(x) \in M$ para todo $x \in X$ y $t \in I$ y la G-homotopía

$$\eta_t : X \to M, \;\; t \in I$$

es una $\mathcal{W}$-homotopía.

Caso II: Si $\sigma(x) = 0$ tenemos que $\eta_t(x) = \lambda_t(x)$ para cada $t \in I$. Como λ_t es una $\mathcal{W}$-homotopía, existe $W_\rho \in \mathcal{W}$ tal que $\eta_t(x) = \lambda_t(x) \in W_\rho$ para todo $t \in I$, y tenemos demostrado que η_t es una $\mathcal{W}$-homotopía.

Por último definimos la G-homotopía $\Delta_t : X \to Y, \;\; t \in I$ por

$$\Delta_t(x) = \gamma(\eta_t(x)), \;\; x \in X \text{ y } t \in I.$$

Debido a que η_t es una $\mathcal{W}$-homotopía y que $\mathcal{W}$ es un refinamiento de $\gamma^{-1}(\mathcal{U})$, se sigue que Δ_t es una $\mathcal{U}$-homotopía, y como γ es retracción, se verifica fácilmente que $\Delta_0 = h$, $\Delta_1 = \phi$ y $\Delta_t|_A = \delta_t$ para cualquier $t \in I$.

$\square$

Proposición 2.2.7. *Sea Y un G-espacio y $\mathcal{V}$ una G-cubierta abierta de Y. Si Y satisface la propiedad $\mathcal{P}(G, \mathcal{V})$ entonces satisface la propiedad $\mathcal{P}(C, \mathcal{V})$ para todo subgrupo compacto $C \subset G$.*

Demostración. Sea X un C-espacio metrizable y $A \subset X$ un subconjunto cerrado C-invariante de X. Supongamos que h, $\phi : X \to Y$ son dos C-funciones $\mathcal{V}$-cercanas y $\delta_t : A \to Y$, $t \in I$ una $\mathcal{V}$-C-homotopía con $\delta_0 = h|_A$ y $\delta_1 = \phi_A$. Entonces el producto torcido $X' = G \times_C X$ es un G-espacio metrizable (ver Lema 1.6.3) y $A' = G \times_C A$ es un subconjunto cerrado invariante de X'.

Ahora, en virtud de la Proposición 1.6.4, las C-funciones h, ϕ y la C-homotopía $\delta_t : A \to Y$ inducen las G-funciones h', $\phi' : X' \to Y$ y la G-homotopía $\delta_t' : A' \to Y$, respectivamente.

Vamos a verificar primero que h' y ϕ' son $\mathcal{V}$-cercanas. Efectivamente, $h'([g,x]) = gh(x)$ y $\phi'([g,x]) = gx$ para todo $[g,x] \in G \times_C X$. Debido a que h y ϕ son $\mathcal{V}$-cercanas, existe un elemento $V \in \mathcal{V}$ que contiene a ambos puntos $h(x)$ y $\phi(x)$. Por lo tanto, $gh(x), g\phi(x) \in gV$, y como $gV \in \mathcal{V}$ (recordemos que $\mathcal{V}$ es una G-cubierta), inferimos que las funciones h' y ϕ' son $\mathcal{V}$-cercanas.

Además, comprobaremos que $\delta_t'; A' \to Y$, $t \in I$ es una $\mathcal{V}$-homotopía. En efecto, $\delta_t'([g,\alpha]) = g\delta_t(\alpha)$ para cualquier $[g,\alpha] \in G \times_C A$ y $t \in I$. En vista de que $\delta_t : A \to Y$, $t \in I$, es una $\mathcal{V}$-homotopía, entonces existe un elemento $W \in \mathcal{V}$ tal que $\delta_t(\alpha) \in W$ para todo $t \in I$. Entonces, $\delta_t'([g,\alpha]) = g\delta_\alpha \in gW$ para toda $t \in I$, y como $gW \in \mathcal{V}$, se conlcuye lo que deseabamos.

Ahora, como el G-espacio Y satisface la propiedad $\mathcal{P}(G,\mathcal{V})$, debería existir una G-homotopía $\Delta_t' : X' \to Y$, $t \in I$, con $\Delta_0' = h'$, $\Delta_1' = \phi'$ y $\Delta_t'|_{A'} = \delta_t'$ para toda $t \in I$. Indudablemente la restricción $\Delta_t = \Delta_t'|_X : X \to Y$, $t \in I$ es una homotopía C-equivariante con $\Delta_0 = h$, $\Delta_1 = \phi$ y $\Delta_t|_A = \delta$ para todo $t \in I$ como se requería. Esto concluye la demostración. □

El siguiente teorema muestra cómo se pueden caracterizar los espacios G-ANR mediante la propiedad $\mathcal{P}(G,\mathcal{V})$.

Teorema 2.2.8 (Primer caracterización homotópica). *Sea $Y \in G$-$\mathcal{M}$. Una condición necesaria y suficiente para que Y sea un G-ANR es la existencia de una G-cubierta abierta $\mathcal{V}$ de Y tal que Y satisface la propiedad $\mathcal{P}(G,\mathcal{V})$.*

Demostración. La condición de necesidad se sigue del Teorema 2.2.6 tomando $\mathcal{U} = \{Y\}$ la cubierta consistente de un solo conjunto abierto Y.

Para probar la suficiencia de la propiedad $\mathcal{P}(G,\mathcal{V})$, como resultado del Teorema 2.1.2, basta con mostrar que Y es un G-ANE local.

Para esto, sea $y \in Y$ y $V \in \mathcal{V}$ un elemento que contiene a y. Por la compacidad de grupo G_y podemos elegir una vecindad R, G_y-invariante de y

tal que $R \subset V$. Definimos dos funciones G_y-equivariantes $\zeta, \lambda : R \to Y$ y una G_y-homotopía $\eta_t : \{y\} \to Y\ t \in I$, definidas por:

$$\begin{cases} \zeta(s) = y, & \text{if } s \in R \\ \lambda(s) = s, & \text{if } s \in R \\ \eta_t(y) = y, & \text{if } t \in I. \end{cases}$$

Es fácil verificar que ζ y λ son $\mathcal{V}$-cercanas y η_t, $t \in I$ es una $\mathcal{V}$-G_y-homotopía con $\eta_0(y) = \zeta(y)$ y $\eta_1(y) = \lambda(y)$. Como se indica en la Proposición 2.2.7, Y puede ser considerado como un G_y-espacio, que satisface la condición $\mathcal{P}(G, \mathcal{V})$. Ahora, como R es un G_y-espacio metrizable y $\{y\}$ es un subconjunto cerrado G_y-invariante de R, concluimos que por $\mathcal{P}(G, \mathcal{V})$ existe una G_y-homotopía $\delta_t : R \to Y$, $t \in I$, con $\delta_0 = \zeta$, $\delta_1 = \lambda$, y $\delta_t(y) = y$ para toda $t \in I$.

Dado que I es compacto y como $\delta(y) = y \in V$ para toda $t \in I$ entonces existe una vecindad G_y-invariante U de y tal que $U \subset R$ y $\delta_t(U) \subset V$ para todo $t \in I$. Debemos demostrar que U es un G_y-ANE.

Sea (X, A) un G_y-par y $h : A \to U$ cualquier función G_y-equivariante. Definimos dos funciones G_y-equivariantes ω, $\mu : X \to Y$ y una G_y-homotopía $\Delta_t : A \to Y$, $t \in I$, tomando

$$\omega(x) = y = \eta(x); \ , x \in X$$

y

$$\Delta_t(x) = \begin{cases} \delta_{2t}\big(h(x)\big), & \text{si } \ x \in A, \ 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \delta_{2-2t}\big(h(x)\big), & \text{si } \ x \in A, \ \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Evidentemente, ω, μ son funciones equivariantes $\mathcal{V}$-cercanas y Δ_t es una $\mathcal{V}$-G_y-homotopía tal que $\Delta_0 = \omega|_A$ y $\Delta_1|_A$. Por lo tanto, por la condición $\mathcal{P}(G_y, \mathcal{V})$, existe una G_y-homotopía $\Gamma_t : X \to Y$, $t \in I$, con $\Gamma_0 = \omega$, $\Gamma_1 = \mu$ y $\Gamma_t|_A = \Delta_t$ para cada $t \in I$.

Consideramos la función G_y-equivariante $\gamma = \Gamma_{\frac{1}{2}} : X \to Y$. Por la construcción de γ, podemos claramente ver que $\gamma|_A = h$. Sea $W = \gamma^{-1}(U)$. Entonces, W es una vecindad G_y-invariante de A en X y la restricción $\gamma|_W : W \to U$ es una G_y-extensión de h sobre W. Esto prueba que U es un G_y-ANE, y en consecuencia, Y es un G-ANE local, como se requería □

Veamos ahora los ingredientes necesarios para establecer la segunda caracterización homotópica, para ello, definamos la propiedad de extensión de homotopía equivariante.

Definición 2.2.9. *Se dice que un G-par (X, A) con $X \in G$-$\mathcal{M}$ tiene la* ***Propiedad de Extensión de Homotopía Equivariante*** *(denotado por G-PEH) con respecto a un G-espacio Y si y sólo si cualquier G-homotopía parcial*

$$f_t : A \to Y,\ t \in I$$

de una función equivariante $h : X \to Y$ tiene una extensión equivariante.

$$h_t : X \to Y,\ t \in I \quad \text{tal que } h_0 = h.$$

Diremos que el G-par (X, A) tiene la **propiedad de extensión de homotopía equivariante absoluta** que denotaremos por G-$PEHA$ si y sólo si tiene la propiedad de extensión de homotopía equivariante con respecto a todo G-espacio $Y \in G$-$\mathcal{M}$. En este caso también decimos que la inclusión $A \hookrightarrow X$ es una G-cofibración (ver [25, pág. 96])

Una consecuencia inmediata de la G-PEH de (X, A) con respecto a Y es que el problema de extensión equivariante de una función equivariante $h : A \to Y$ sobre X depende únicamente de las clases de G-homotopía de h. Esto es, si $h, \phi : A \to Y$ son dos funciones equivariantes G-homotópicas y si h se extiende equivariantemente sobre X, entonces también ϕ lo hace.

Para el caso de los grupos compactos, una de las herramientas de mayor fuerza para lograr resultados de extensión de homotopías, es el uso del *Teorema de Extensión de Homotopía equivariante de Borsuk* [7, Teorema 5]. Para el caso de grupos localmente compactos presentamos un resultado análogo en el siguiente teorema.

Teorema 2.2.10 (**Teorema de extensión de homotopía equivariante de Borsuk**). *Supóngase que G es un grupo localmente compacto y Y un G-ANE. Entonces cualquier G-par tiene la G-PEH con respecto a Y.*

Demostración. Sea $X \in G$-$\mathcal{M}$ y A un subconjunto cerrado invariante de X. Supongamos que $f : A \times I \to Y$ es una homotopía equivariante entre las funciones $h_0, h_1 : A \to Y$ y $\Psi : X \to Y$ una extensión equivariante de h_0. Debemos mostrar que existe una extensión equivariante $\Phi : X \to Y$ de la homotopía f tal que $\Phi(x, 0) = \Psi(x)$ para todo $x \in X$.

El conjunto $Z = X \times \{0\} \cup A \times I$ es un subconjunto cerrado invariante de $X \times I$, además la función $h : Z \to Y$ definida por $h(x, 0) = \Psi(x)$ para $x \in X$, $h(x, t) = f(x, t)$ para cada $x \in A$ y $t \in I$ es equivariante y continua.

Debido a que $X \times I \in G$-$\mathcal{M}$ y Y es un G-ANE existe una G-extensión $\phi : V \to Y$ de h sobre una vecindad invariante V de Z en $X \times I$. En virtud del Lema 2.2.1, existe una vecindad invariante U del conjunto A en X tal que $U \times I \subset V$. Ahora, de acuerdo al Lema 2.2.2, existe una función invariante $\lambda : X \to [0,1]$ que cumple $\lambda(x) = 0$ para $x \in X \setminus U$ y $\lambda(x) = 1$ para $x \in A$.

Hacemos

$$\Phi(x,t) = \phi(x, \lambda(x)t), \quad x \in X, t \in I,$$

esta es la homotopía buscada.

En efecto, Φ es continua gracias a la continuidad de ϕ y de λ. La equivarianza de Φ se debe al hecho de que ϕ es equivariante y λ es invariante.

Si $\alpha \in A$ entonces $\lambda(\alpha) = 1$, y por lo tanto, para cada $t \in I$ tenemos

$$\Phi(\alpha,t) = \phi(\alpha, \lambda(\alpha)t) = \phi(\alpha,t) = h(\alpha,t) = f(\alpha,t)$$

probando que Φ es una extensión de f.

Además, para todo $x \in X$, tenemos

$$\Phi(x,0) = \phi(x, \lambda(x)\dot{0}) = \phi(x,0) = h(x,0) = \Psi(x).$$

Entonces, Φ es la homotopía equivariante que buscábamos. □

El siguiente teorema se puede entender como una versión controlada del teorema de extensión de homotopía equivariante de Borsuk.

Teorema 2.2.11. *Sean Y un G-ANR y $\mathcal{U}$ una G-cubierta de Y. Supongamos que A es un subconjunto cerrado invariante de un G-espacio metrizable X y $\delta_t : A \to Y$, $t \in I$, una $\mathcal{U}$-G-homotopía parcial. Si δ_0 puede extenderse a una función equivariante $h : X \to Y$, entonces existe una $\mathcal{U}$-G-homotopía $\Delta_t : X \to Y$ tal que $\Delta_0 = h$ y $\Delta_t|_A = \delta_t$ para todo $t \in I$.*

Demostración. De acuerdo al teorema 2.2.10 existe una homotopía equivariante $\Psi_t : X \to Y$; $t \in I$ tal que $\Psi_0 = h$ y $\Psi_t|_A = \delta_t$. Para cada $\alpha \in A$ podemos escoger un $U_\alpha \in \mathcal{U}$ que contenga a $\Psi_t(\alpha)$ para todo $t \in I$. Debido a la compacidad de I, existe una vecindad W_α de $\alpha \in X$ tal que

$$\Psi_t(W_\alpha) \subset U_\alpha \quad \text{para cada } t \in I. \tag{2.1}$$

Definimos $W = \bigcup_{\alpha \in A} W_\alpha$. Entonces W es una vecindad de A en X. No obstante, W no es una vecindad invariante, y viendo que el grupo actuante puede no ser compacto, no podemos asegurar la existencia de una vecindad invariante de A contenida en W. Alternativamente, tomamos una nueva vecindad $V = G(W) = \bigcup_{\alpha \in A} G(W_\alpha)$.

Ahora tomamos una función invariante de Urysohn $\tau : X \to I$ tal que $\tau|_A = 1$ y $\tau|_{X\setminus V} = 0$ (ver Lema 2.2.2). Definimos $\Delta_t : X \to Y$, $t \in I$, por la siguiente regla:

$$\Delta_t(x) = \Psi_{\tau(x)\cdot t}(x), \quad x \in X.$$

Entonces, evidentemente, $\Delta_t(x)$ es continua debido a la continuidad de Ψ y de τ. El hecho de que Δ_t sea equivariante se verifica fácilmente pues si $g \in G$ y $x \in X$, la invarianza de A y de $X \setminus V$ y la equivarianza de F garantizan que:

$$\Delta_t(gx) = \Psi_{\tau(gx)t}(gx) = \Psi_{\tau(x)t}(gx) = g\Psi_{\tau(x)t}(x) = g\Delta_t(x).$$

Por otro lado, $\Delta_t|_A = \delta_t$ para cada $t \in I$, más aún,

$$\Delta_0(x) = \Psi_0(x) = h(x),$$

para cada $x \in X$, así que $\Delta_0 = h$. Sólo resta probar que la G-homotopía $\Delta_t,\ t \in I$, es limitada por $\mathcal{U}$.

Efectivamente, tomamos $x \in X$ arbitrario.

Si $x \in V$, entonces existen $\alpha \in A, w \in W_a$ y $g \in G$ tales que $x = gw$. Por lo tanto, por (2.1), tenemos

$$\Delta_t(x) = \Delta_t(gw) = \Psi_{\tau(gw)\cdot t}(gw) \in U_\alpha$$

$$\Psi_{\tau(gw)\cdot t}(gw) = g\Psi_{\tau(w)\cdot t}(w) \in gU_\alpha$$

para toda $t \in I$. Como $\mathcal{U}$ es una G-cubierta y $U_\alpha \in \mathcal{U}$ concluimos que $gU_\alpha \in \mathcal{U}$.

Si $x \notin V$, entonces $\tau(x) = 0$, de lo cual obtenemos que

$$\Delta_t(x) = \Psi_0(x) = h(x) \ \text{ para cada } t \in I.$$

Como $\mathcal{U}$ es una G-cubierta de Y, existe un elemento $U \in \mathcal{U}$ que contiene a $h(x)$, así, $\Delta_t(x)$ está contenida en U para cada $t \in I$. Por lo tanto, Δ_t es la $\mathcal{U}$-G-homotopía deseada. □

Proposición 2.2.12. *Sea Y un G-espacio tal que todo G-par tiene la G-PEH con respecto a Y. Entonces para cada subgrupo compacto $C \subset G$, todo C-par (X, A) tiene la C-PEH respecto a Y considerado como un C-espacio.*

Demostración. La demostración es prácticamente idéntica a la de la Proposición 2.2.7.

□

Definición 2.2.13. *Un subconjunto invariante A de un G-espacio X es llamado G-**contraíble** en X si la función inclusión $A \hookrightarrow X$ es G-homotópica a la función constante de $A \to \{x_0\}$, donde x_0 es un punto G-fijo de X*

De manera similar, X es llamado **localmente G-contraíble en el punto** $x \in X$, si para cualquier vecindad G_x-invariante U de x, existe una vecindad G_x-invariante V de x tal que V es G_x-contraíble en U. Un G-espacio X es llamado **localmente G-contraíble** si es localmente G_x-contraíble en cada uno de sus puntos.

Estamos ahora en posibilidad de presentar la segunda caracterización para los *G-ANR's*. En este caso es necesario que el espacio sea localmente G-contraíble y que cualquier G-par tenga la *G-PEH*. Cabe aclarar que cada una de estas condiciones son necesarias para caracterizar a los *G-ANR's*, sin embargo, tomadas por separado, cada una de ellas no es suficiente, es decir, se requieren las dos juntas para poder tener la caracterización.

Teorema 2.2.14 (**Segunda caracterización homotópica**). *Sea Y en G-$\mathcal{M}$. Dos condiciones necesarias y suficientes para que Y sea un G-ANR son que Y sea localmente G-contraíble y todo G-par (X, A) tenga la G-PEH respecto a Y.*

Antes de demostrar este teorema presentaremos dos lemas auxiliares que nos ayudarán en la demostración.

Lema 2.2.15. *Sea Y un G-espacio propio con $Y \in G$-$\mathcal{M}$. Si Y es localmente G-contraíble y todo G-par (X, A) tiene la G-PEH respecto a Y, entonces todo punto $y \in Y$ tiene una vecindad G_y-invariante V tal que cualquier G_y-función $h : A \to V$ definida en un G_y-subconjunto cerrado A de un G_y-espacio metrizable X tiene una G_y-extensión $\varphi : X \to Y$.*

Demostración. Tomamos $y \in Y$ arbitrario. Sabemos que Y es localmente G-contraíble, entonces existe una vecindad G_y-invariante V de y la cual es G_y-contraíble en Y a un punto G_y-fijo $z \in Y$ (en general z puede ser diferente de y).

Para ver que V satisface las condiciones deseadas tomamos $h : A \to V$ una G_y-función definida en un G_y-subconjunto cerrado A de un G_y-espacio metrizable X. Como V es G_y-contraíble al punto G_y-fijo z, podemos concluir que h, considerada como una G_y-función en Y, es G_y-homotópica a la G_y-función constante $c : A \to Y$ dada por $c(a) = z$ para cualquier $a \in A$.
Ahora, notemos que por la Proposición 2.2.12, (X, A) satisface la G_y-PEH

con respecto a Y. Entonces, como c puede extenderse sobre X, se sigue que h tiene una G_y-extensión $\varphi : X \to Y$.

$\square$

Lema 2.2.16. *Sea Y un G-espacio con $Y \in G$-$\mathcal{M}$, si todo punto $y \in Y$ tiene una vecindad G_y-invariante V tal que cualquier G_y-función $h : A \to V$ definida sobre cualquier G_y-par (X, A) tiene una G_y-extensión $\varphi : X \to Y$. Entonces Y es un G-ANR.*

Demostración. En virtud del Teorema 2.1.2, es suficiente ver que Y es un G-ANE local.

Sea $y \in Y$ arbritario y sea V la vecindad G_y-invariante que satistace las hipótesis del lema. Debemos mostrar que V es un G_y-ANR. Para lograr ésto, tomamos $h : A \to V$ cualquier G_y-función definida sobre un G_y-subconjunto cerrado A de un G_y-espacio metrizable X. Por hipótesis sabemos que h tiene una G_y-extensión $\varphi : X \to Y$. Tomamos $U = \varphi^{-1}(V)$ el cual es un conjunto abierto G_y-invariante de X que contiene a A y la restricción $\varphi\,|_U : U \to V$ es la G_y-extensión de $h : A \to V$ deseada. $\square$

Estamos ahora preparados para demostrar el teorema 2.2.14, el cual representa la segunda caracterización homotópica para los espacios G-ANR.

Demostración del Teorema 2.2.14. La G-PEH es resultado directo del Teorema 2.2.11, tomando $\mathcal{U} = \{Y\}$ la cubierta de un elemento. Entonces, falta ver que Y es localmente G-contraíble.

En vista de que $Y \in G$-$\mathcal{M}$, por el Teorema 1.4.8, existe un G-espacio lineal normado N y un subconjunto convexo invariante $Z \subset N$ tal que la acción es propia y Y puede encajarse equivariantemente como un subconjunto cerrado invariante de Z

Ahora, como $Y \in G$-ANR, debe existir un subconjunto abierto invariante $U \subset Z$ y una G-retracción $\gamma : U \to Y$. Tomamos $y \in Y$ y W una vecindad G_y-invariante de $y \in Y$. Debido a que $\gamma^{-1}(W)$ es un subconjunto abierto de Z, podemos esoger un subconjunto abierto G_y-invariante y convexo $M(y)$ tal que $M(y) \subset \gamma^{-1}(W)$. Es fácil ver que el conjunto $V = M(y) \cap Y$ es un subconjunto abierto G_y-invariante de Y. Definimos la G_y-homotopía $h_t : V \to W\, t \in I$ como sigue:

$$h_t(v) = \gamma(ty + (1-t)v), \quad v \in V.$$

Evidentemente $h_t,\ t \in I$, es una G_y-contracción de V en W. Por lo tanto, Y es localmente G-contraible.

Para la suficiencia del teorema podemos ver que es sólo una combinación sencilla de los Lemas 2.2.15 y 2.2.16. $\square$

Capítulo 3

Caracterización por conjuntos H-fijos

En la década de los 70's Jan Jaworowski se dedica a estudiar el siguiente problema: *Sea G un grupo compacto de Lie y X es un G-espacio con un número finito de tipos de órbita tal que para cada subgrupo compacto $H \subset G$, el conjunto de puntos H-fijos, X^H es un ANR, ¿ podemos asegurar bajo estas condiciones que X es un G-ANR?.*

Este problema hasta la fecha permanece abierto, sin embargo, se han logrado algunos avances considerables. Por ejemplo, veremos en este capítulo que una condición necesaria para que un G-espacio X sea un G-*ANR*, es precisamente que el conjunto de puntos H-fijos, X^H sea un *ANR* para cualquier subgrupo compacto H de G (ver Teorema 3.1.6).

La condición de suficiencia es, como era de esperarse, la parte complicada de este problema, en este sentido, mismo Jaworowski prueba en [39] que para el caso de G-espacios metrizables, separables, localmente compactos, de dimensión finita y con un número finito de tipos de órbita la respuesta a su pregunta es afirmativa.

Para lograr este resultado Jaworowski utiliza un teorema de extensión equivariante que él mismo demuestra (ver [39, Teorema de Extensión]), pidiendo como hipótesis todas las condiciones mencionadas anteriormente sobre el G-espacio X. Algunos años más tarde, Lashof demuestra en [45] que la compacidad local puede ser omitida y posteriormente Jawowroski en [41] muestra que la condición de la dimensión finita puede ser debilitada a espacios con una estructura finita.

En este capítulo mostraremos que la condición de separabilidad también puede ser omitida. Además, tratando de extender los resultados a una clase más *grande* de G-espacios, demostramos en la última sección un resultado análogo para acciones propias de grupos de matrices.

3.1. Espacios G-ANR para grupos compactos de Lie.

En esta sección estaremos considerando siempre a G como un grupo compacto de Lie y presentaremos una versión más general de la caracterización de *G-ANR's* dada por Jaworowski en [41], omitiendo en nuestro caso la condición de separabilidad del G-espacio X. Para lograr esta caracterización, seguiremos argumentos similares a los realizados por Jaworoski y para ello es necesario mencionar dos lemas (ver [45, Lema 2 y Lema 3]) que utilizaremos para demostrar algunos resultados sobre extensiones equivariantes.

Lema 3.1.1. *Sean G un grupo compacto de Lie , X un G-espacio libre y Y un G-espacio arbitrario. Las funciones equivariantes de X en Y se encuentran en correspondencia biyectiva con las secciones cruzadas del haz asociado $\phi : X \times_G Y \to X/G$ con fibra Y del G-haz principal $q : X \to X/G$.*

Lema 3.1.2. *Sean A un subespacio cerrado de un espacio X, Y un espacio metrizable y Z un espacio compacto. Sean $f : A \to Y$ y $g : X \setminus A \to Z$ dos funciones continuas. Si $\varphi : X \times Z \to Y$ es una extensión continua de $f \circ \pi_1$ donde $\pi_1 : A \times Z \to A$ es la proyección sobre la primer coordenada, entonces la función $F : X \to Y$, $F|_A = f$, $F|_{X \setminus A} = \varphi \circ (i, g)$ con $i : X \setminus A \to X$ la inclusión, es una extensión continua de f.*

Proposición 3.1.3. *Sean G un grupo compacto de Lie, X un G-espacio metrizable y A un subespacio cerrado invariante de X tal que $X \setminus A$ es un G-espacio libre con una estructura finita. Supongamos que $f : A \to Y$ es una función equivariante sobre un G-espacio metrizable. Si Y es un ANR (respectivamente un AR), entonces f se extiende a una función sobre una vecindad de A (respectivamente sobre X).*

Demostración. Como $X \setminus A$ es un G-espacio libre con una estructura finita, por el Teorema 1.8.9, existe una función equivariante $\phi : X \setminus A \to Z$ dentro de un G-espacio libre compacto Z.

Sean $P = X \times Z$, $Q = A \times Z$. Como P, con la acción diagonal de G es un G-espacio libre, la función orbital $\pi_P : P \to P/G$ es un G-haz principal. Las funciones equivariantes de P en el G-espacio Y están en una correspondencia biyectiva con secciones de la fibración localmente trivial $(Y \times P)/G \to P/G$ asociado a $P \to P/G$ con fibra Y (ver Lema 3.1.1). Así, extender una función equivariante $Q \to Y$ es equivalente a extender la sección asociada $Q/G \to (Y \times Q)/G$ sobre una vecindad de Q/G en P/G (respectivamente sobre P/G). Como P es metrizable y Y es un ANR entonces por el Teorema 1.8.3 cualquier sección sobre Q/G tiene una extensión de vecindad (respectivamente una extensión sobre P/G).

Por lo tanto, la función $f \circ p : A \times Z \to Y$, donde $p : A \times Z \to A$ es la proyección, tiene una G-extensión $\psi : V \to Y$ sobre una vecindad invariante V de $A \times Z$ en $X \times Z$ (respectivamente sobre $X \times Z$); como Z es compacto, podemos asumir que $V = U \times Z$, donde U es una vecindad A de X (respectivamante $U = X$). Por el Lema 3.1.2 , se tiene una G-extensión $F : U \to Y$ (respectivamante $F : X \to Y$) de f definida por $F(x) = \psi(x, \phi(x))$ para $x \in U \setminus A$ y $F(a) = f(a)$ para $a \in A$. □

Proposición 3.1.4. *Sean G un grupo compacto de Lie, X un G-espacio metrizable y sea $A \subset X$ un subespacio cerrado invariante tal que $X \setminus A$ tiene una estructura finita con un sólo tipo de órbita (H). Supóngase que $f : A \to Y$ es una función equivariante con $Y \in G$-$\mathcal{M}$. Si Y^H es un ANR (AR), entonces f se extiende a una función equivariante sobre una vecindad de A (sobre X).*

Demostración. Sea $X_{(H)}$ la unión de las órbitas del tipo de órbita (H) y sea $X_H = X_{(H)} \cap X^H$. Entonces $X_{(H)} = G \times_{N(H)} X_H = G/H \times_K X_H$, donde $N(H)$ es el normalizador de H en G y $K = N(H)/H$ (ver [22, Capítulo II, Corolario 5.11]). Entonces la G-función de $X_{(H)}$ sobre Y esta completamente determinada por una K-función de X_H sobre Y^H (ver [22, Capítulo II, Corolario 5.12]). Como $X^H \setminus A^H$ es un K-espacio libre, con una estructura finita, se sigue de la Proposición 3.1.3 que la K-función $f^H : A^H \to Y^H$ se extiende a una K-función $F^H : U \to Y^H$, donde U es una vecindad K-invariante de A^H en X^H (respectivamante $U = X^H$). Ahora, la función $F : G(U) \to Y$ (respectivamente $F : G(X^H) \to Y$) definida por $F(gx) = gF^H(x)$ es una función equivariante continua. Más aún, $G(U)$ es una vecindad G-invariante de $G(A^H)$ en $G(X^H)$. Esto lleva a que $A \cup G(U)$ es una vecindad de A en $A \cup G(X^H) = X$. Como F coincide con f en $A \cap G(U)$ inferimos que f se extiende a la G-vecindad $A \cup G(U)$ de A en X (respectivamente a X). □

Teorema 3.1.5. *Sean G un grupo compacto de Lie, X un G-espacio metrizable y A un conjunto cerrado invariante de X tal que $X \setminus A$ tiene una* *estructura finita. Sea $f : A \to Y$ una función equivariante de A sobre un G-espacio propio metrizable. Si para cada tipo de órbita (H) en $X \backslash A$, el conjunto de puntos H-fijos Y^H es un ANR (respectivamente un AR) entonces f tiene una extensión equivariante sobre una vecindad de A (respectivamente sobre X).*

Demostración. Existe una relación de orden parcial en el conjunto de tipos de órbita en X: $(H) \leq (K)$ si H es conjugado a un subgrupo de K. Ordenamos el tipo de órbitas $(H_1), ..., (H_m)$ de $X \setminus A$ tal que $(H_i) \leq (H_j)$ implica que $j \leq i$. Hacemos

$$X_i = A \cup \{x \in X \mid (G_x) = (G_j) \text{ para algún } j \leq i\}.$$

Entonces $X_1 \subset X_2 \subset ... \subset X_m$ es una fibración cerrada de X y $X_i \setminus X_{i-1}$ es de un sólo tipo de órbita (H_i), y tiene una estructura finita. Así la Proposición 3.1.3 puede aplicarse para extender la función f por inducción sobre i. $\square$

Teorema 3.1.6. *Sea G un grupo compacto de Lie y X un G-espacio metrizable con una estructura finita. Entonces X es un G-ANR (respectivamente un G-AR) si y sólo si para cada subgrupo compacto H de G, X^H es un ANR (respectivamente un AR).*

Demostración. Por el Teorema 1.8.10, podemos asumir que X es un subconjunto cerrado invariante de un producto $Z = E \times C$, donde E es un G-espacio Euclideano y C un subconjunto convexo de un espacio de Banach. Por el Teorema 1.8.9 (2), Z tiene una estructura finita. Además, Z es un G-AR; esto es consecuencia del Teorema de extensión de Dugundgi [26], C es un AR y, por el teorema de extensión de Tietze-Gleason [48], E es un G-AR.

“La parte sólo si ”. Supóngase que X es un G-ANR (respectivamente un G-AR). Entonces, existe una G-retracción $r : U \to X$, donde U es una vecindad invariante de X en Z (respectivamente $U = Z$). Para cada subgrupo H de G, la restricción $r^H = r \mid_{U^H}$ es una retracción $r^H : U^H \to X^H$. Observe que U^H es un subconjunto abierto de Z^H y Z^H es una subconjunto convexo de Z. Por el Teorema de extensión de Dugundgi [26], Z^H es un AR. Así, X^H, es un retracto de vecindad (respectivamente un retracto) de Z^H y por lo tanto es un ANR (respectivamente un AR).

“La parte si ”. Si X^H es un ANR (respectivamente un AR) para cualquier subgrupo compacto $H \subset G$, entonces, por el Teorema 3.1.5 la función identidad $1_X : X \to X$ tiene una G-extensión $f : U \to X$ definida sobre una G-vecindad U de X en Z (respectivamente $U = Z$). Como $Z \in G$-AR, se tiene que $X \in G$-ANR (respectivamente $X \in G$-AR). $\square$

3.2. Un teorema de extensión equivariante

Como resultado extra, demostraremos un nuevo teorema de extensión equivariante el cual es una generalización del Teorema [41, Teorema 3.4], esto se logra debilitando la condición de que el espacio $X \setminus A$ tenga una estructura finita, a pedir que sólo tenga una estructura localmente finita, en el siguiente sentido.

Definición 3.2.1. *Sea A un subconjunto invariante de un G-espacio X. Entonces se dice que X tiene una **estructura localmente finita** mod A si cada punto $x \in X$ tiene una vecindad invariante U tal que $U \setminus A$ tiene una estructura finita.*

Teorema 3.2.2. *Sea G un grupo compacto de Lie, X un G-espacio metrizable y sea A un subconjunto cerrado invariante de X, tal que X tiene una estructura localmente finita mod A. Sea $f : A \to Y$ una función equivariante de A en un G-espacio metrizable Y. Si para cada tipo de órbita (H) de $X \setminus A$, el conjunto de puntos H-fijos Y^H es un ANR (respectivamente un AR) entonces f tiene una extensión equivariante sobre una vecindad de A (respectivamente sobre X).*

Demostración. Por hipótesis, cada punto $a \in A$ admite una vecindad abierta invariante U_a (en X), tal que $U_a \setminus A$ es de una estructura finita. Debido a la paracompacidad de X, la cubierta abierta $\{X \setminus A, U_a | \ a \in A\}$ admite un refinamiento localmente finito $\{C_j\}_{j \in \mathcal{J}}$ por subconjuntos cerrados de X. Sea $\mathcal{I} = \{j \in \mathcal{J} | \ A \cap C_j \neq \emptyset\}$.

Entonces, claramente $A \subset \bigcup_{i \in \mathcal{I}} C_i$.

Para el conjunto de índices bien-ordenado $\mathcal{I}$, y para cada $i \in \mathcal{I}$, hacemos:

$$A_i = A \cup \bigcup_{j<i} C_j.$$

el cual es cerrado en X debido a que la familia $\{C_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ es localmente finita.

Una extensión para f puede construirse por inducción sobre $i \in \mathcal{I}$ usando el teorema 3.1.5 en el paso inductivo.

Primero vamos a construir inductivamente, para $i \in \mathcal{I}$, una vecindad invariante cerrada W_i del conjunto $A \cap (\bigcup_{k<i} C_k)$ en A_i y una función equivariante $\phi : W_i \to Y$ de tal manera que $\phi_i|_{A \cap W_i} = f$, $W_j \subset W_i$ y $\phi_i|_{W_j} = \phi_j$ siempre que $j < i$.

Para esto, asumimos que $i \in \mathcal{I}$ y que las funciones $\phi_j : W_j \to Y$ están bien definidas para todo $j < i$ de tal manera que $\phi_j|_{A \cap W_j} = f$, $W_k \subset W_j$ y $\phi_j|_{W_k} = \phi_k$ siempre que $k < j$.

Definimos $\phi : W_i \to Y$ como sigue. Si i es un elemento límite, entonces

$$A_i = \bigcup_{j<i} A_j.$$

Hacemos $W_i = \bigcap_{j<i} W_j$. Claramente, W_i es una vecindad invariante del conjunto $A \cap (\bigcup_{j<i} C_j)$ en A_i.

Además, debido a que la familia $\{W_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ es localmente finita, el conjunto W_i es cerrado en X.

Haciendo $\phi_i|_{W_j} = \phi_j$ para $j < i$ obtenemos la buena definición de $\phi_i : W_i \to Y$. La continuidad de ϕ_i se sigue del hecho de que la familia $\{W_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ es localmente finita y de la continuidad de todas las funciones ϕ_j, $j < i$.

Si i es el sucesor de j, entonces

$$A_i = A_j \cup C_j$$

y la función $\phi_j : W_j \to Y$ están bien definidas, donde W_j es una vecindad cerrada invariante del conjunto $A \cap (\bigcup_{k<j} C_k)$ en A_j. Podemos pegar las funciones $f : A \cap C_j \to Y$ y $\phi_j : W_j \cap C_j \to Y$ para obtener la función equivariante $\psi_j : (C_j \cap A) \cup (W_j \cap C_j) \to Y$; esto es posible ya que $\phi_j|_{W_j \cap A} = f$.

Observe que $(W_j \cup A) \cap C_j$ es un subconjunto cerrado invariante de C_j y $C_j \setminus (A \cup W_j) \subset C_j \setminus A$, y entonces, $C_j \setminus (A \cup W_j)$ es de una estructura finita.

Entonces, podemos aplicar el Teorema 3.1.5 para obtener una extensión equivariante $\xi_j : V_j \to Y$ de la función ψ_j, donde V_j es una vecindad cerrada invariante de $C_j \cap (A \cup W_j)$ en C_j.

Haciendo $W_i = W_j \cup V_j$ obtenemos una vecindad cerrada invariante del conjunto $A \cap (\bigcup_{k \leq j} C_k)$ en A_i. Pegamos ahora las funciones equivariantes $\phi_j : W_j \to Y$ y $\xi_j : V_j \to Y$ para obtener la función deseada $\phi_i : W_i \to Y$.

Esto es posible dado que ϕ_j y ξ_j coinciden en la intersección $W_j \cap V_j$.

Finalmente, definimos la función equivariante $F : \bigcup_{i \in \mathcal{I}} W_i \to Y$ por $F|_{W_i} = \phi_i$ para cualquier $i \in \mathcal{I}$. Claramente, $\bigcap_{i \in \mathcal{I}} W_i$, es una vecindad cerrada invariante de $A \cap (\bigcup_{i \in \mathcal{I}} C_i) = A$ en X. La continuidad de F se debe a que la familia $\{W_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ es localmente finita y a la continuidad de todas las funciones ϕ_i, $i \in \mathcal{I}$. Esto completa la demostración. □

Teorema 3.2.3. *Sea G un grupo compacto de Lie, X un G-espacio metrizable y sea A un subconjunto cerrado invariante de X tal que para cualquier tipo* *de órbita* (H)*, la proyección orbital* $(X \setminus A)_{(H)} \to (X \setminus A)_{(H)}/G$ *tiene una cubierta finita trivializante.*

Sea $f : A \to Y$ *una función equivariante en un* G*-espacio propio metrizable* Y*. Si para cada tipo de órbita* (H) *de* $X \setminus A$*, el conjunto de puntos* H*-fijos* Y^H *es un* ANR *(respectivamente un AR) entonces* f *tiene una extensión equivariante sobre una vecindad de* A *(respectivamente sobre* X*).*

Demostración. Denotamos por $n = dim\, G$. Para cada $0 \leq k \leq n$, sea $X_k = \{x \in X |\ dim\, G_x = k\}$ y $T_k = X_k \cup \cdots \cup X_n$. Claramente, cada X_k, y por tanto, cada T_k es un subconjunto cerrado invariante de X y $T_n \subset T_{n-1} \subset \cdots \subset T_0 = X$. Observe que cada X_k localmente tiene una cantidad finita de tipos de órbita. En efecto, se sigue del Teorema de la Rebanada que para cada $x \in X_k$ existe una vecindad invariante U tal que $(G_z) \leq (G_x)$. Pero los grupo no compactos de Lie contienen más de una cantidad finita de subgrupos cerrados con la misma dimensión que ellos mismos. Como G_x es grupo compacto de Lie se sigue lo deseado.

La extensión requerida de f puede construirse por inducción sobre k usando el Teorema 3.2.2 en el paso inductivo. Suponga que ya tenemos construida una función equivariante $F_k : W_k \to Y$, donde W_k es una vecindad cerrada invariante de $A \cap T_k$ en T_k tal que $F_k|_{A \cap T_k} = f$. Entonces las funciones $F_k|_{A\cap T_k}$ y $f|_{A \cap T_{k-1}}$ pueden ser pegadas para obtener una función equivariante $\varphi_k : W_k \cup (T_{k-1} \cap A) \to Y$. Vamos a aplicar el Teorema 3.2.2 al par $(T_{k-1}, W_k \cup (T_{k-1} \cap A))$ y a la función φ_k. Este es válido ya que el complemento $T_{k-1} \setminus (W_k \cup (T_{k-1} \cap A))$ se encuentra en X_{k-1} el cual tiene una estructura localmente finita. Entonces, obtenemos una G-extensión $F_{k-1} : W_{k-1} \to Y$ de la función φ_k. Al final, de esta manera obtendremos una función equivariante $F_0 : W_0 \to Y$, donde W_0 es una vecindad cerrada invariante de A en $T_0 = X$. Esto completa la demostración. □

3.3. G-encajes de G-espacios con estructura finita.

El objetivo principal de esta sección es el Lema 3.3.3, el cual servirá como base para el teorema principal del capítulo, sin embargo, también se presenta un teorema de encaje para los G-espacios con una estructura finita, en ambos resultados se utilizan como bloques fundamentales los conos sobre espacios cocientes del grupo actuante.

Lema 3.3.1. *Sea G un grupo de Lie, $X \in G$-$\mathcal{M}$ y supongamos que X tiene estructura finita con un solo tipo de órbita (H). Entonces existe una función isovariante $f : X \to (Con(G/H))^k$ para algún $k \geq 1$.*

Demostración. Es conocido que sobre las condiciones del lema la función orbital $\pi : X \to (X/G)$ es una G-fibración localmente trivial (ver [22, Ch. 2, Teorema 5.8]) para acciones de grupos compactos; para el caso de acciones propias de grupos de Lie arbitrarios es completamente similar.

Sea $\{U_1, U_2, \cdots, U_k\}$ una cubierta abierta finita del espacio X/G tal que, para cada $1 \leq n \leq k$, $\pi^{-1}(U_n)$ es equivariantemente homeomorfo al producto $G/H \times U_n$ donde el grupo G actúa por la izquierda sobre G/H y actúa trivialmente sobre U_n.

Además, para cada $n \geq 1$, la proyección del producto $\pi^{-1}(U_n) = G/H \times U_n$ induce una función isovariante $\varphi_n : \pi^{-1}(U_n) \to G/H$.

Como el espacio de órbitas X/G es normal, entonces existe una familia de subconjuntos cerrados $\{F_1, \cdots, F_k\}$ de X/G tal que, $F_n \subset U_n$ para todo $1 \leq n \leq k$ y $\bigcup_{n=1}^k F_n = X$ (ver [30, Teorema 1.5.18])

Sea $\psi_n : X/G \to [0,1]$ una función continua tal que $F_n \subset \psi_n^{-1}(1)$ y $(X/G) \setminus U_n \subset \psi_n^{-1}(0)$. Ahora, definimos la función $f_n : X \to Con(G/H)$ por la fórmula.

$$f_n(x) = \begin{cases} \theta, & \text{si } x \notin \pi^{-1}(U_n) \\ \psi_n(\pi(x))\varphi_n(x), & \text{si } x \in \pi^{-1}(U_n) \end{cases}$$

Es claro que f_n es una función equivariante, y que la restricción $\pi^{-1}(F_n)$ coincide con φ_n, y entonces, es isovariante. Cosideramos el producto diagonal

$$f = \triangle_{n=1}^k f_n : X \to (Con(G/H))^k.$$

Entonces f es una función equivariante. Si $x \in X$ y $x \notin \pi^{-1}(F_n)$, tenemos

$$G_{f(x)} = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_{f_k(x)} \subset G_{f_n(x)} = G_x.$$

Por otro lado, $G_x \subset G_{f(x)}$, como f es equivariante. Concluimos que, $G_x = G_{f(x)}$, esto es, f es una función isovariante. □

Lema 3.3.2. *Sea G un grupo de Lie, $X \in G$-$\mathcal{M}$, y H un subgrupo compacto de G. Entonces existe una función equivariante $f : X \to (Con(G/H))^k$ para algún $k \geq 1$ tal que la restricción $f|_{X_{(H)}} : X_{(H)} \to (Con(G/H))^k$ es isovariante.*

Demostración. Sea $X_1 = \{x \in X \mid (G_x) > (H)\}$ y $X_2 = \{x \in X \mid (G_x) \geq (H)\}$. Se sigue del Teorema 1.6.7 que X_1 y X_2 son subconjuntos cerrados invariantes de X. Claramente $X_{(H)} = X_2 \setminus X_1$. Conforme al Lema 3.3.1, existe una función isovariante $\varphi : X_2 \setminus X_1 \to (Con(G/H))^k$ para algún $k \geq 1$.

Como $X_2 \setminus X_1$ es un cerrado en $X \setminus X_1$, y $Con(G/H)$ es un G-AE (ver Corolario 1.7.4), entonces existe una extensión equivariante $\varphi^* : X \setminus X_1 \to (Con(G/H))^k$ de la G-función φ.

Sea ρ una métrica invariante sobre X. Haciendo:

$$\psi(x) = \rho(x, X_1)/(1 + \rho(x, X_1)),$$

obtenemos la función continua invariante $\psi : X \to [0,1]$ tal que $X_1 = \psi^{-1}(0)$. Ahora definimos la función $f : X \to (Con(G/H))^k$ por la fórmula.

$$f(x) = \begin{cases} \psi(x)\varphi^*(x), & \text{si } x \in X \setminus X_1, \\ 0, & \text{si } x \in X_1. \end{cases}$$

Claramente f es la función deseada, y el lema queda demostrado. $\square$

Lema 3.3.3. *Sea G un grupo de Lie, $X \in G$-$\mathcal{M}$ y X con una estructura finita. Entonces existe una función isovariante*

$$f : X \to ((Con(G/H_1))^{k_1} \times \cdots \times (Con(G/H_p))^{k_p})$$

donde $(H_1), (H_2), \cdots, (H_p)$ es una sucesión finita de tipos de órbita en X.

Demostración. Conforme al Lema 3.3.2, para cada tipo de órbita (H_n), existe una función equivariante $f_n : X \to (Con(G/H_n))^{k_n}$, $k_n \geq 1$, tal que la restricción $f_n|_{X_{(H_n)}}$ es isovariante. Consideramos el producto diagonal

$$f = \triangle_{n=1}^{p} f_n : X \to (Con(G/H_1))^{k_1} \times \cdots \times (Con(G/H_p))^{k_p}.$$

Claramente f es equivariante. Entonces $G_x \subset G_{f(x)}$. Inversamente, si $x \in X$ y $x \in X_{(H_n)}$, entonces

$$G_{f(x)} = \bigcap_{k=1}^{p} G_{f_k(x)} \subset G_{f_n(x)} = G_x$$

debido a que la restricción de f_n a $X_{(H_n)}$ es isovariante. Entonces $G_x = G_{f(x)}$ para todo $x \in X$, y f es la función que deseábamos. $\square$

Lema 3.3.4. *Sea G cualquier grupo localmente compacto, $f : X \to M$ una función isovariante entre G-espacios propios y $\pi : X \to X/G$ la proyección orbital. Si M es paracompacto, entonces la función diagonal $\varphi : X \to M \times (X/G)$, definida por $\varphi(x) = (f(x), \pi(x))$ es un encaje cerrado dentro del producto $M \times (X/G)$ provisto de la G-acción diagonal, donde X/G está dotado de la acción trivial de G.*

Demostración. Es claro de la definición que φ es equivariante, veamos que φ es una función inyectiva. En efecto, sean $x, y \in X$ con $\varphi(x) = \varphi(y)$. Entonces $\pi(x) = \pi(y)$, esto es, las órbitas $G(x)$ y $G(y)$ coinciden. Por lo que, $y = gx$ para algún $g \in G$. Como $f(x) = f(y)$ obtenemos que $g(f(x)) = f(x)$, por lo que, $g \in G_{f(x)}$. Pero $G_{f(x)} = G_x$ pues f es isovariante. Por lo tanto, $g \in G_x$, y entonces, $gx = x$ y $x = y$ lo que garantiza que φ es inyectiva. Falta mostrar que φ es una función cerrada.

Debido a la paracompacidad de M, existe una cubierta localmente finita $\{A_i\}_{i \in I}$ de M de subconjuntos cerrados pequeños $A_i \subset M$. Entonces $\{f^{-1}(A_i)\}_{i \in I}$ es una cubierta localmente finita de X y cada conjunto $B_i = f^{-1}(A_i)$ es un subconjunto cerrado pequeño de X. Ahora, sabemos que la restricción $\pi|_{B_i} : B_i \to X/G$ es una función perfecta (ver 1.3.10(3)). Entonces aplicando [30, Teorema 3.7.9] tenemos que el producto diagonal $\varphi|_{B_i} = \pi|_{B_i} \triangle f|_{B_i}$ es también una función perfecta. Esto implica que φ sea una función cerrada. En efecto, sea $F \subset X$ un conjunto cerrado. Entonces $\varphi(F \cap B_i)$ es cerrado en $A_i \times (X/G)$ y $\{A_i \times (X/G)\}_{i \in I}$ es una cubierta localmente finita cerrada del producto $M \times (X/G)$. Entonces $\{\varphi(F \cap B_i)\}_{i \in I}$ es una familia localmente finita de subconjuntos cerrados de $M \times (X/G)$. Como $\varphi(F) = \bigcup_{i \in I} \varphi(F \cap B_i)$ concluimos que $\varphi(F)$ es cerrado en $M \times (X/G)$. En consecuencia, φ es el encaje cerrado equivariante deseado. □

Teorema 3.3.5. *Sea G un grupo de Lie, Entonces cada G-espacio $X \in G$-$\mathcal{M}$ con una estructura finita puede ser encajado como un subconjunto cerrado invariante dentro de un producto $P \times N$, donde N es un espacio lineal normado y*

$$P = (Con(G/H_1))^{k_1} \times \cdots \times (Con(G/H_p))^{k_p}$$

con $(H_1), (H_2), \cdots, (H_p)$ una sucesión finita de tipos de órbita de X y $k_1 \geq 1, \cdots, k_p \geq 1$.

Demostración. Con una simple combinación de los Lemas 3.3.3 y 3.3.4 obtenemos un encaje cerrado equivariante $\varphi : X \hookrightarrow P \times (X/G)$, donde P es como en el teorema. Como el espacio orbital X/G es metrizable, de acuerdo al teorema de encaje de Arens-Eells (ver [19]), podemos encajar X/G dentro de un espacio lineal normado N como un subconjunto cerrado. Como resultado obtenemos el encaje cerrado equivariante deseado $\varphi : X \hookrightarrow P \times N$. $\square$

3.4. Espacios G-ANR con una estructura finita

El resultado principal de está sección es una generalización del Teorema 3.1.6 a la clase de grupos de matrices. La idea de la demostración del teorema 3.4.5 es reducirlo al caso compacto. Para lograr esta reducción son primordiales los resultados que se presentan en los Lemas 3.3.3, 3.4.3.

Por otro lado, el Teorema 3.4.1 es un resultado de Abels [2, Teorema 4.4] que tiene importantes consecuencias en la teoría equivariante de retractos, pues reduce el problema de extensión en G-espacios con acciones de grupos localmente compactos al caso de acciones de grupos compactos. De hecho, sólo el caso G-AE es mencionado por Abels en su artículo, sin embargo su prueba puede ser modificada fácilmente para el caso G-ANE (ver [9, Teorema 5 y Comentario 5]).

Teorema 3.4.1. *Sea G un grupo localmente compacto y Y un G-espacio.*

(1) Si $Y \in K$-AE para cualquier subgrupo compacto $K \subset G$, entonces $Y \in G$-AE.

(2) Si $Y \in K$-ANE para cualquier subgrupo compacto $K \subset G$, entonces $Y \in G$-ANE.

El Lema 3.4.3 nos permitirá construir un K-espacio que tiene sólo una cantidad finita de tipos de órbita (K un grupo compacto), lo cual implica que este espacio tiene una estructura finita. Para ello es necesario mencionar el siguiente Teorema de caracterización de los grupos de matrices de Lie, su demostración puede encontrarse en [49, Teorema 3.2.1].

Teorema 3.4.2 (Caracterización de grupos de matrices de Lie). *Una condición necesaria y suficiente para que un grupo de Lie sea un grupo de matrices es que: dado un subgrupo compacto H de G exista un G-espacio lineal E y un punto $x \in E$ tal que $G_x = H$.*

Lema 3.4.3. *Sea G un grupo de matrices y $H_1, H_2, ..., H_p$ subgrupos compactos de G. Entonces para cualquier subgrupo compacto $K \subset G$, el producto*

$P = Con(G/H_1) \times \cdots \times Con(G/H_p)$ considerado como un K-espacio por restricción, tiene sólo una cantidad finita de tipos de K-órbita.

Demostración. De acuerdo al Teorema 3.4.2, podemos encontrar G-espacios lineales reales de dimensión finita $E_1, E_2, ..., E_p$ tales que para cualquier $1 \leq i \leq p$ el subgrupo H_i ocurre como el grupo de isotropía de un punto $x_i \in E_i$. Sea $E = E_1 \oplus E_2 \oplus ... \oplus E_p$ la suma directa dotada con la G-acción diagonal, la cual claramente, es una acción lineal. Ahora, vemos a E como un K-espacio lineal por restricción y recordamos un resultado de Yang (ver [48, Proposición 1.7.26]) que afirma que si K es un grupo compacto de Lie, entonces sólo un número finito de tipos de órbita ocurren en cada K-espacio lineal de dimensión finita. Así, E tiene sólo un número finito de tipos de K-órbita. Sólo queda observar que cada tipo de K-órbita que ocurre en P también ocurre en E. □

Lema 3.4.4. *Sea G un grupo de matrices de Lie y suponga que $X \in G$-$\mathcal{M}$ tiene una estructura finita. Entonces para cada subgrupo compacto $K \subset G$, X considerado como un K-espacio tiene una estructura finita.*

Demostración. Sean $(H_1), ..., (H_p)$ todos los tipos de G-orbita que ocurren en X. Entonces por el Lema 3.3.3 existe una función isovariante.

$$f : X \to P = (Con(G/H_1))^{k_1} \times \cdots \times (Con(G/H_p))^{k_p}$$

donde $k_1, k_2, ..., k_p$ son enteros positivos. Ahora, si vemos a f como una K-función. Claramente, f es K-isovariante. Por el Lema 3.4.3, P tiene sólo una cantidad finita de tipos de K-órbita. Como P es un K-espacio metrizable de dimensión finita, se sigue del Teorema 1.8.9 (4) que X tiene una estructura finita cuando se considera como un K-espacio. □

Por último presentamos el teorema principal de este capítulo, con el cual tenemos una nueva caracterización de los espacios *G-ANR's* logrando extender de cierta manera la teoría desarrollada por Jaworowski en los años 70's y 80's a la clase de acciones propias de grupos de matrices.

Teorema 3.4.5 (Caracterización por conjuntos de puntos H-fijos). *Sea G un grupo de matrices, $X \in G$-$\mathcal{M}$ un G-espacio con una estructura finita. Una condición necesaria y suficiente para que X sea un G-ANR (respectivamente un G-AR) es que para cada subgrupo compacto H de G, X^H sea un ANR (respectivamente AR).*

Demostración. "La necesidad". Supóngase que X es un G-ANR (respectivamente un G-AR). En virtud del Teorema 1.4.8 podemos asumir que X es un subconjunto cerrado invariante de un subconjunto convexo invariante V de algún G-espacio de Banach tal que $V \in G$-$\mathcal{M}$. Entonces existe una G-retracción $r : U \to X$, donde U es una G-vecindad de X en V (respectivamente $U = V$). Para cada subgrupo $H \subset G$, la restricción $r^H = r|_{U^H}$ es una retracción $r^H : U^H \to X^H$. Observe que U^H es un subconjunto abierto de V^H, mientras que V^H es un subconjunto convexo de V. Por el teorema de extensión de Dugundji [26], V^H es un AR. Así, X^H es un retracto de vecindad (respectivamente un retracto) de V^H, entonces es un ANR (respectivamente un AR).

"La suficiencia". De acuerdo al Teorema 3.4.1 es suficiente con mostrar que X es un K-ANR para cualquier subgrupo compacto $K \subset G$. Ahora, nuestro objetivo es aplicar el Teorema 3.1.6 para el K-espacio X. Como por hipótesis X^H es un ANR para cualquier subgrupo compacto de $H \subset K$, sólo resta verificar que X tiene una estructura finita visto como un K-espacio. Pero esto se tiene del Lema 3.4.4. □

Como una aplicación del teorema anterior podemos analizar el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.4.6. *Consideramos el grupo aditivo $G = \mathbb{R}$ y sea $X = susp(G)$ la suspensión de G, es decir, X es el espacio cociente*

$$X = [-1, 1] \times G/(\{-1\} \times G) \cup (\{1\} \times G).$$

Ahora, de manera similar a como lo hicimos en 1.7.1, consideramos la siguiente notación para los elementos de X. La clase $[t, x]$, $t \in [-1, 1]$, $x \in X$ la denotamos simplemente por tx, el caso particular de los vértices los denotaremos también por $[-1, x] = a$ y $[1, x] = b$.

En la la sección 1.7 se vio que el cono de un espacio metrizable también es metrizable, utilizando la misma idea se puede verificar que la función ρ definida por:

$$\rho(tx, sy) = \begin{cases} d'(tx, sy), & si\ t, s \in [0, 1]\ \acute{o}\ t, s \in [-1, 0] \\ (1 - t) + d(x, y) + (s + 1), & si\ t \in [0, 1]\ y\ s \in [-1, 0], \end{cases}$$

es una métrica para $susp(G)$, donde d y d' se definen como en 1.7.2.

Se define también una acción natural de G sobre $susp(G)$ por:

$$\theta(g, tx) = t\, gx,$$

es decir, una acción por niveles, donde en cada nivel solamente se realiza la operación del grupo. De esta manera, podemos ver a X como un G-espacio metrizable (se puede verificar fácilmente que ρ es una métrica invariante sobre X).

En base a lo anterior, tenemos que X tiene una estructura finita (existen sólo dos tipos de órbitas) y además $X \in G$-$\mathcal{M}$. Para poder aplicar el teorema 3.4.5 es claro que si H es un subgrupo de G y $H \neq \{e\}$, entonces $X^H = \{a, b\}$ (los vértices son los únicos puntos H-fijos), y si $H = \{e\}$ entonces $X^H = X$. En ambos casos resulta que X^H es un espacio ANR y en virtud del teorema 3.4.5 tenemos que X es un G-ANR.

Cabe mencionar que el ejemplo anterior se puede generalizar para el caso en que G es cualquier grupo de matrices, y entonces la suspensión de G dotada de la acción natural de G resulta ser un G-ANR.

Para finalizar con el trabajo, consideramos importante dejar a consideración del lector el análisis de la siguiente pregunta:

¿Será válido el Teorema 3.4.5 para el caso de grupos de Lie (no necesariamente grupos de matrices)?

Bibliografía

[1] H. Abels, *Parallelizability of proper actions, global K-slices and maximal compact subgroups*, Math. Annalen **212** (1974) 1-19.

[2] H. Abels, *A universal proper G-space*, Math. Z. **159** (1978), 143-158.

[3] N. Antonyan, S. A. Antonyan and A. Soria, *Homotopy characterization of G-$ANR's$*, Glasnik Matematicki vol. 42(62) (2007) 69-82.

[4] N. Antonyan, S. Antonyan and L. Rodriguez-Medina, *Linearization of proper group actions*, Topology Appl. **156** (2009) 1946-1956.

[5] N. Antonyan, S. A. Antonyan and Ruben Daniel Varela Velasco, *Universal G-spaces for proper actions of locally compact groups*, Topology Appl. **159** (2012) 1159-1168.

[6] N. Antonyan, S. A. Antonyan and E. Martn-Peinador, *Equivariant embeddings of metrizable proper G-espaces*, Topology and its Aplications 163 (2014) 11-24.

[7] S. A. Antonyan, *Retracts in categories of G-spaces*, Izvestiya Akad. Nauk Arm. SSR. Ser. Matem. **15** (1980), 365–378; English transl. in: Soviet J. Contemp. Math. Anal. **15** (1980), 30-43.

[8] S. A. Antonyan, *Equivariant embeddings into G-$AR's$*, Glasnik Matematički **22 (42)** (1987), 503–533.

[9] S. A. Antonyan, *Extensorial properties of orbit spaces of proper group actions*, Topology Appl. **98** (1999) 35-46

[10] S. A. Antonyan, E. Elfving and A. Mata, *Adjuntion Spaces and unions of G-$ANE's$*, Topology Proc. **26, No. 1** (2001-2002), 1-28.

[11] S. A. Antonyan, *Universal proper G-spaces*, Topology App. **117** (2002) 23-43.

[12] S. A. Antonyan and S. de Neymet, *Invariant pseudometrics on Palais proper G-spaces*, Acta Math. Hung. **98 (1-2)** (2003), 41-51.

[13] S. A. Antonyan, *A characterization of equivariant absolute extensors and the equivariant Dugundji theorem*, Houston Jouer. Math. **31**, No. 2 (2005) 451-462.

[14] S. A. Antonyan, *Orbit spaces and unions of equivariant absolute neighborhood extensors*, Topolgy Appl. **146-147** (2005) 289-315.

[15] S. A. Antonyan, *Orbit spaces of proper equivariant absolute extensors*, Topolgy Appl. **153** (2005) 698-709.

[16] S. A. Antonyan, *Proper actions of locally compact groups on equivariant absolute extensors*, Fundamenta Mathematicae **205** (2009) 117-145.

[17] S. A. Antonyan, *Characterizing maximal compact subgroups*, Arch. Math. **98** (2012) 555-560.

[18] S. A. Antonyan, *Uniformly proper actions*, Topol. Appl. **160** (2013) 1261-1270.

[19] R. Arens and J. Eells, *On embedding uniform and topological spaces*, Pacific J. Math. **6** (1956) 397-403.

[20] M.A. Armstrong, *Basic Topology*, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo (1979).

[21] K. Borsouk, *Theory of Retracts*, PWN-Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1967.

[22] G. Bredon, *Introduction to compact transformation groups*, Academic Press, New York-London (1972).

[23] S. De Neymet, R. Jiménez, *Introducción a los grupos topológicos de transformaciones*, Sociedad Matemática Mexicana e Instituto de Matemáticas UNAM, Serie Aportaciones Matemáticas nivel Avanzado 23, MÃ©xico 2005.

[24] S. Deo and S. Tripathi, *Compact Lie group actions on finitistic spaces*, Topology, **21**, no.4 (1982) 393-399.

[25] T. tom Dieck, *Transformation groups*, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1987.

[26] J. Dugundji, *An extension of Tietze's theorem*, Pacific J. Math. **1** (1951), 353-367.

[27] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, (1966).

[28] J. Dydak, *Extension theory: the interface between set-theoretic and algebraic topology*, Topology Appl. **74** (1996) 225-258.

[29] J. Dydak, *Extension dimension for paracompact spaces*, Topology Appl. **140** (2004) 227-243.

[30] R. Engelking, *General Topology*, PWN-Pol. Sci. Publ., Warsaw, (1977).

[31] A. Feragen, *Characterization of equivariant $ANE's$*, Licentiate Thesis, Department of Mathematics and Statistics, Helsinki University, (2006).

[32] M. K. Fort Jr., *Neighborhood extensions of continuos selections*, Proc. AMS. **11(5)** (1960) 682-685.

[33] O. Hanner, *Some theorems on absolute neighborhood retracts*, Arkiv Mat., **1** (1951) 389-408.

[34] K. H. Hofmann and C. Terp, *Compact subgroups of Lie groups and locally compact groups*, Proc. AMS **120 No.2** (1994)

[35] K. H. Hofmann and S. A. Morris, *The structure of compact groups*, 2nd rev. ed., Walter de Gruyter, Berlin-New York, (2006).

[36] G. Hochschild, *The structure of Lie groups*, Holden-Day Inc., San Francisco (1965).

[37] S.T. Hu, *Theory of Retracts*, Wayne State University Press, Detroit, (1965).

[38] J. Jaworowski, *Equivariant extension of maps*, Pacific Jour. Math. **45:1** (1973), 229-244.

[39] J. Jaworowski, *Extension of G-maps and Euclidean G-retracts*, Math. Z. **146** (1976), 143-148.

[40] J. Jaworowski, *Extension properties of G-maps*, in: Proc. Intern. Conf. Geom. Topology, pp. 209-213, PWN-Polish Sci. Publ., Warszawa, (1980).

[41] J. Jaworowski, *An equivariant extension theorem and G-retracts with finite structure*, Manuscripta math. **35**, 323-329 (1981).

[42] J. Jaworowski, *G-spaces of a finite Structure and Their Embedding in G-Vector Spaces*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **39(1-3)** (1982) 175-177.

[43] K. Kawakubo, *The theory of transformations groups*, Oxford Un iversity Press, Oxford-New York-Tokyo (1991)

[44] J. L. Koszul, *Lectures on groups of transformations*, Notes by R. R. Simha and R. Sridharan. Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics, No. 32. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, (1965).

[45] R. Lashof, *The equivariant extension theorem*, Proc. AMS, **83**, No. 1 (1981), 138-140.

[46] M. Madirimov, *Dimension and retractions in the theory of topological transformation groups*, (in Russian), "FAN", Tashkent, (1986).

[47] J. van Mill, *Infinite-dimensional topology. Prerequisites and Introduction*, North Holland, Amsterdam-New York-Oxford-Tokyo, (1989).

[48] R. Palais, *The classification of G-spaces*, Mem. Amer. Math. Soc. **36**, Providence,1960.

[49] R. Palais, *On the existence of slices for actions of non-compact Lie groups*, Ann. Math. **73** (1961) 295-323.

[50] Yu. Smirnov, *Sets of H-fixed points are absolute extensors*, Math. USSR Sbornik **27(1)** (1975), 85-92.

[51] N. Steenrod, *The topology of fibre bundles*, Princeton Math. Series, vol. **14**, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., (1951).

[52] J. de Vries, *Topics in the theory of topological transformation groups*, in: Topological structure II. Math. Centre tracts **116**, Math. Centrum, Amsterdam, (1979), pp. 291-304.

[53] M. Wojdyslawaski, *Retractes absolus et hyperspace des continus*, Fund. Math. **32** (1939), 184-192

Índice alfabético