



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**ESTADOS SUPERFICIALES EN SUPERREDES DE
BASE COMPLEJA.
ANALOGÍAS ENTRE CASOS CUÁNTICO,
ELECTROMAGNÉTICO Y ACÚSTICO**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A:

ÁNGEL DÁMASO LÓPEZ



**DIRECTOR DE TESIS:
DR. GERARDO JORGE VÁZQUEZ FONSECA**

CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX 2018



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1.Datos del alumno

Dámaso
López
Ángel
55 90 15 26
Universidad Nacional Autónoma de
México
Facultad de Ciencias
Física
098501683

2.Datos del tutor

Dr
Gerardo Jorge
Vázquez
Fonseca

3.Datos del sinodal 1

Dr
Pablo
de la Mora
y Palomar Askinasy

4.Datos del sinodal 2

Dr
Carlos Ignacio
Mendoza
Ruiz

5.Datos del sinodal 3

Dr
Juan Adrián
Reyes
cervantes

6.Datos del sinodal 4

Dr
Gerardo
Ruiz
Chavarría

7.Datos del trabajo escrito

Estados superficiales en superredes
de base compleja. Analogías entre casos
cuántico, electromagnético y acústico
60 p
2018

Agradecimientos

A mi madre Mercedes, por haber creído siempre en mí y por mostrar su apoyo incondicional en todo momento. Por ser mi motivación cada vez que pensaba en ella. Por defenderme y cuidar de mí cuando era niño.

Al Dr. Gerardo J. Vázquez Fonseca por su paciencia y comprensión en la realización de este trabajo. También por haberme dado la oportunidad mediante este trabajo de asomarme un poco al mundo de la investigación; pero sobre todo por haberme escuchado y ayudado en asuntos personales que me impedían avanzar en la culminación de esta tesis.

A JJDH, por observarme y sentir tu presencia, aunque ya no estés con vida.

A mis hermanos.

A mí, por no dejarme vencer por las frustraciones y carencias. Por no permitir defraudarme a mí mismo. Y por hacer mucho con tan poco.

Y finalmente a la UNAM, por todo lo que me ha dado en términos de educación.

Contenido

1.RESUMEN.....	4
2.INTRODUCCIÓN.....	4
3.CAPÍTULO 1.....	5
Marco teórico	
4.CAPÍTULO 2.....	37
Metodología de trabajo	
5.CAPÍTULO 3.....	38
Resultados	
6.CAPÍTULO 4.....	47
Conclusiones	
7.BIBLIOGRAFÍA.....	48
8.APÉNDICES.....	49

1. Resumen

La finalidad de este trabajo es mostrar las analogías que se presentan en la propagación de ondas transversales y la existencia de estados superficiales en un sistema físico particular; como lo es, un medio isotrópico semi-infinito unido a un arreglo periódico semi-infinito; en este caso la base compleja consistente de 2-capas por periodo. Esto se hará mediante una ecuación general que reproduzca las relaciones de dispersión y describa los estados superficiales que se generan en el sistema físico bajo las perspectivas acústica, electromagnética y cuántica. Este trabajo no sólo requirió de hacer un análisis matemático para la obtención de los estados superficiales en los diferentes enfoques de forma analítica, sino también de simulaciones numéricas que posteriormente nos permitieron visualizar gráficamente a partir de qué valor (ancho de la capa) de uno de los materiales de la heteroestructura, se empiezan a formar estos estados superficiales.

2. Introducción

El ser humano a través del tiempo ha utilizado muchos mecanismos para aprender de fenómenos que no podía explicar. Un recurso muy utilizado por el hombre es la comparación de fenómenos. Otro de gran relevancia es la búsqueda de analogías. En la ciencia, muchos fenómenos naturales presentan analogías en diferentes ramas de la ciencia. En particular, las ondas se presentan en fenómenos acústicos, electromagnéticos y de mecánica clásica.

En un sentido más especializado artículos científicos estudian analogías de fenómenos físicos. Como, por ejemplo, la existencia de analogías en el fenómeno de difracción, desde el punto de vista acústico y electromagnético, como el llevado a cabo en una guía de onda semi-infinita [1].

En el pasado, en los fenómenos de reflexión y refracción también se han estudiado buscando analogías [2], estudiando estos dos fenómenos desde dos perspectivas distintas; como son el caso acústico y electromagnético.

Este trabajo también buscará analogías para un fenómeno muy interesante en el estado sólido como lo es la existencia de estados superficiales.

En el campo de la física y muy particularmente en la rama del estado sólido se han hecho varios estudios en la creación de nuevos materiales. Un tipo de sistema que se ha estudiado mucho ha sido la llamada heteroestructura que es la unión de diferentes materiales en capas muy delgadas. Esta heteroestructura resulta ser

muy interesante de analizar para predecir comportamientos del sistema incluso sin haber sido sintetizado aún. En particular en estas heteroestructuras se pueden presentar los estados superficiales que como su nombre lo indica se forman “casi” en la superficie lo cual puede tener muchas aplicaciones interesantes. Por ejemplo, estos sistemas pueden funcionar como dispositivos de detección al presentarse el estado superficial o como filtros. También, se pueden hacer otros planteamientos de aplicaciones para el caso de ondas sísmicas. Una aplicación que podría tener en este rubro sería como filtro ya que al llegar la onda sísmica al dispositivo (grande en dimensión) parte de su energía podría quedar atrapada en el dispositivo (heteroestructura) y dejar pasar sólo una pequeña cantidad de energía lo cual ayudaría a reducir la magnitud de su impacto.

A continuación, se dará una breve descripción de lo que se encontrará en cada capítulo de la tesis.

El Capítulo 1, describe las bases teóricas que son fundamentales para la comprensión de dicho trabajo.

El Capítulo 2, da una descripción detallada de la metodología que se utilizó para la obtención de los estados superficiales.

El Capítulo 3, presenta los resultados obtenidos.

En el Capítulo 4 se presenta un informe de las conclusiones obtenidas del presente trabajo y se comentan los problemas que quedan por resolver en trabajos posteriores.

3. Capítulo 1

Marco teórico

En el campo de la ciencia y muy en particular en la física podemos encontrar planteamientos generales de un fenómeno atendiendo solo sus rasgos fundamentales. Tal es el caso de electrones atraídos por un potencial. Este potencial puede ser modelado por un pozo de potencial rectangular. Esta situación de cambiar un potencial real por otro más simple, pero que conserva las propiedades básicas nos permite estudiar el fenómeno de una forma más simplificada; llegando muchas veces a una comprensión más profunda del fenómeno, que de otra forma no se lograría si se trabajara con el fenómeno real y todas las implicaciones que conlleva.

Para la comprensión de nuestro problema a tratar es básico tener en cuenta algunos fenómenos ya modelados por la física cuántica. Hagamos un repaso muy breve por los diferentes fenómenos que ocuparemos en este trabajo de investigación.

Un problema muy popular en física cuántica es el pozo infinito (ver Figura1) cuya ecuación que rige los estados permitidos de energía para los electrones, y está dada por

$$E_n = \frac{h^2 n^2}{4mL^2} \quad (1.1)$$

donde $n=1,2,3,\dots$

Precisamente de construir un pozo infinito se generan niveles discretos de energía que puede adquirir el electrón y que hacen que éste se encuentre confinado en esa región.

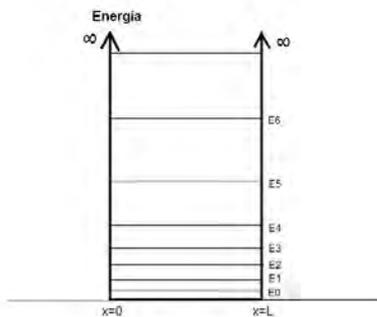


Figura 1. Pozo de potencial infinito

El pozo finito también nos proporciona información sobre la dispersión de la partícula dentro y fuera de un pozo. En la Figura2 podemos observar que si un electrón es afectado por un potencial menor a la energía que él posee sólo será dispersado de su trayectoria. Sin embargo, si su energía es menor a la del pozo aparecerán un número finito de niveles de energía permitidos.

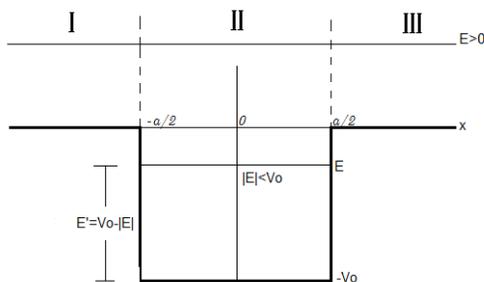


Figura 2. Pozo de potencial finito

La ecuación a resolver para encontrar el comportamiento de un electrón frente a este sistema es

$$y \tan y = \sqrt{y_0^2 - y^2} \quad (1.2)$$

donde

$$y_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{8\pi^2 m a^2 V_0}{h^2}} \quad (1.3)$$

La y es una variable adimensional

$$y = \frac{1}{2} a q \quad (1.4)$$

Tomando a q como

$$q^2 = \frac{8\pi^2 m}{h^2} E \quad (1.5)$$

Como se muestra en la Figura 3 el punto de intersección es la solución a la ecuación transcendental (ec. 1.2). Desde luego que, existirán soluciones pares e impares lo cual conformarán una solución general dependiendo del caso que se trate.

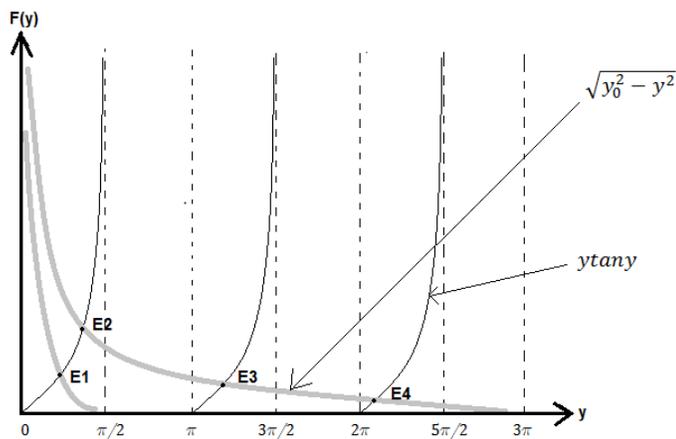


Figura 3. Intersección ecuación transcendental

Para una barrera de potencial como la mostrada en la Figura 4, si la energía E del electrón es menor que el potencial V_0 de la barrera, la partícula es repelida, pero puede existir tunelaje. En cambio, si la energía E es mayor al potencial V_0 , la partícula es dispersada.

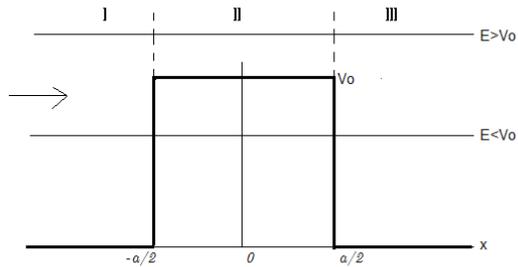


Figura 4. Barrera de potencial finita

También podemos hacer combinaciones de pozos y barreras de potencial (Figura 5) para estudiar los estados electrónicos que se pueden presentar en el sistema, para lo cual se tienen que hacer un análisis detallado para saber el comportamiento del electrón.

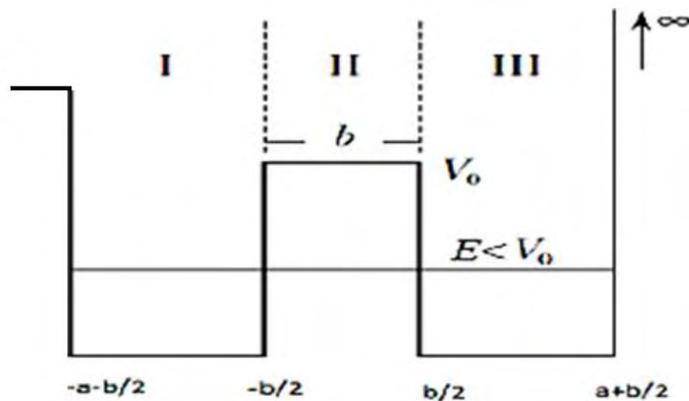


Figura 5. Combinación de pozos y barreras de potencial finitas

Modelo Kronig-Penney

Analicemos la situación en la cual electrones se propagan en una red cristalina periódica. Al darse la interacción electrón-ión aparecen una serie de fenómenos importantes que nos permiten establecer la diferencia entre un conductor y un aislante.

Desde el punto de vista cuántico y para fines de una visualización más sencilla del problema, el modelo de Kronig-Penney [3] resulta ser un modelo “simple” para entender algunas propiedades físicas de los electrones en un sólido cristalino. A través de este trabajo, también se utilizará este modelo para estudiar la propagación de electrones en superredes. En este modelo se considera un sólido cristalino en el que los iones se encuentran en los vértices de la red y los electrones se mueven por todo el sólido. Se toma un electrón como muestra representativa de todos los electrones del cristal. Este electrón que está inmerso en un potencial aproximadamente periódico es afectado por la distribución de carga asociada a los iones de la red, además de un potencial promedio aportado por el resto de los electrones; es decir, esta aproximación toma en cuenta la interacción promedio de un sólo electrón con todos los demás. Es por eso que comúnmente se trabaja no con la masa del electrón, sino con su masa efectiva. A este potencial periódico se le puede modelar en términos de pozos y barreras(Figura7) y desde luego siempre hay que considerar que ésta es una aproximación al modelo real como se muestra en la Figura6 pero nos da mucha información acerca de cómo se comporta el sistema físico.

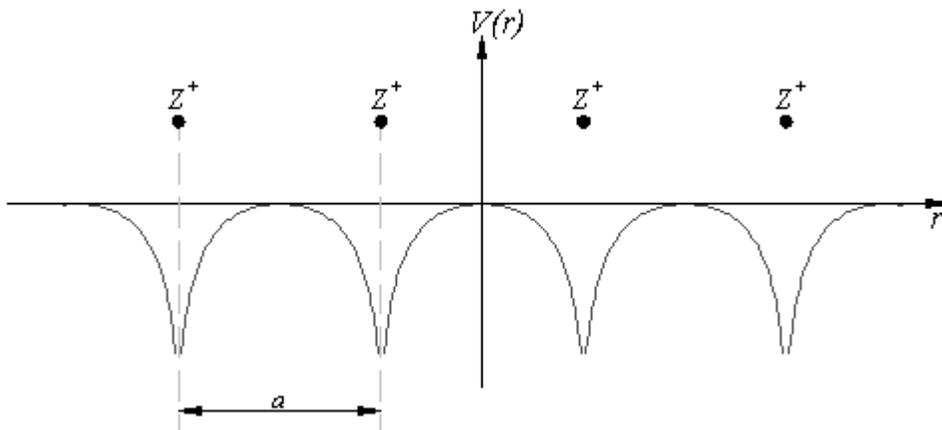


Figura 6. Potencial real en una red cristalina

Kronig-Penney realizaron estudios sobre una estructura cristalina asociada a dos capas que se repiten periódicamente [3]. Este análisis lo efectuaron al proponer un perfil de potenciales en cada capa de la estructura (ver Figura7). Ellos concluyen que se forman bandas de energía donde existen niveles permitidos de energía y fuera de ellas se tienen niveles prohibidos. Este desarrollo es reproducido en muchos libros de texto[10].

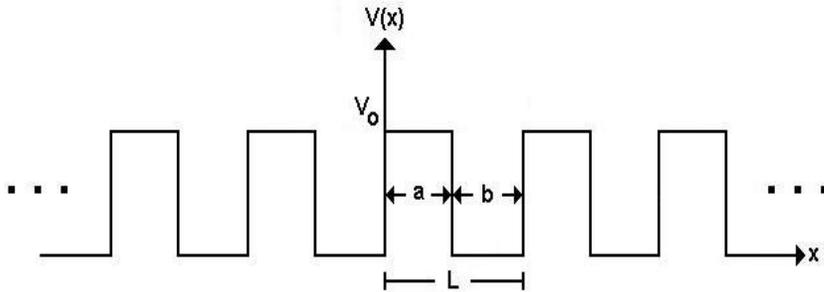


Figura 7. Potenciales propuestos por Kronig-Penney

Dado este sistema periódico mostrado en la Figura7, utilizando las condiciones de Bloch, así como las condiciones de frontera se llega a la siguiente ecuación que representa los estados permitidos

$$\cos ka = \cos x + A \frac{\sin x}{x} \quad (1.6)$$

donde

$$x = aD \quad (1.7)$$

$$D^2 = \frac{8\pi^2 mE}{h^2} \quad (1.8)$$

Y A está dada por

$$A = mV_0 \frac{4\pi^2 ab}{h^2} \quad (1.9)$$

La ecuación (1.6), es una ecuación trascendente que se resuelve por métodos numéricos y de la cual se obtienen las bandas permitidas y prohibidas para un cristal, tal como lo muestra la siguiente Figura8.

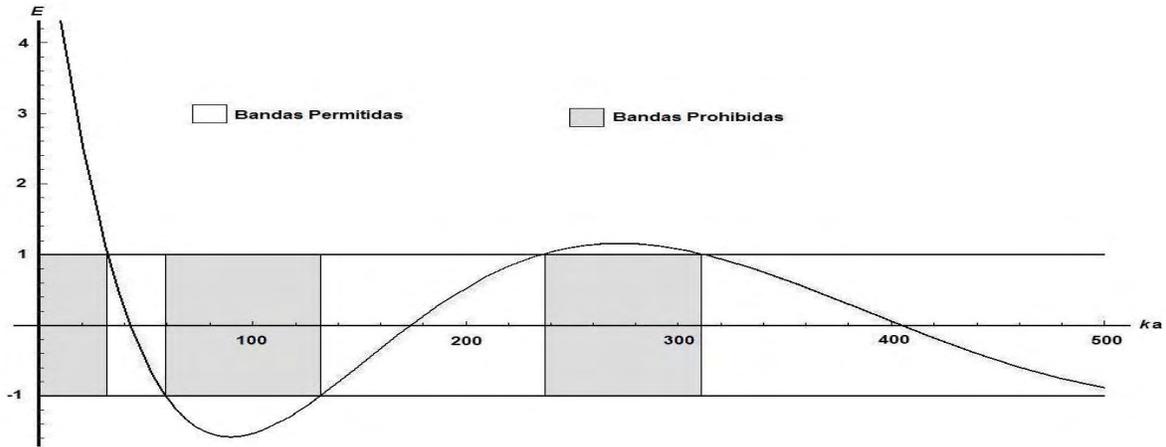


Figura 8: Bandas de energía permitidas y prohibidas

Heteroestructuras

Se le llama heteroestructura a la unión de dos materiales diferentes en capas muy delgadas. Estos materiales por lo regular son semiconductores y a la cohesión entre ellos se le llama heterounión. La mayoría de los dispositivos están formados por diferentes combinaciones de heterouniones por lo cual a estos se les llama heteroestructuras (ver Figura9)

Desde el punto de vista de la Física Cuántica, al producirse una heterounión se da una reconfiguración electrónica del material lo produce una estructura de bandas. Estas discontinuidades formadas las podemos interpretar como pozos que mantienen a los electrones y pozos confinados de una forma cuántica en una región activa. Lo importante de estas estructuras es que la concentración de huecos y electrones es mayor que las que se presentan cuando dopamos de impurezas a un solo semiconductor.

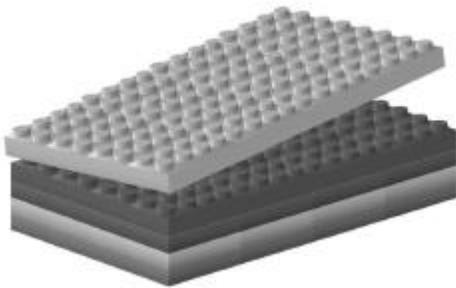


Figura 9. Heteroestructura

Enfoque cuántico

La heteroestructura, es representada por una serie de capas apiladas alternadas. Cada una de ellas tiene un potencial definido que modela la interacción del electrón con cada capa.

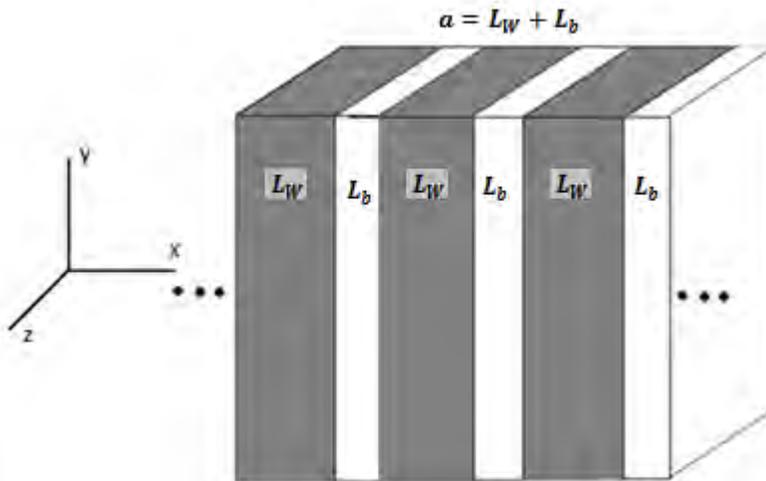


Figura 10. Serie de capas apiladas y alternadas

Para un mejor análisis se muestra la heteroestructura vista desde el eje "y"

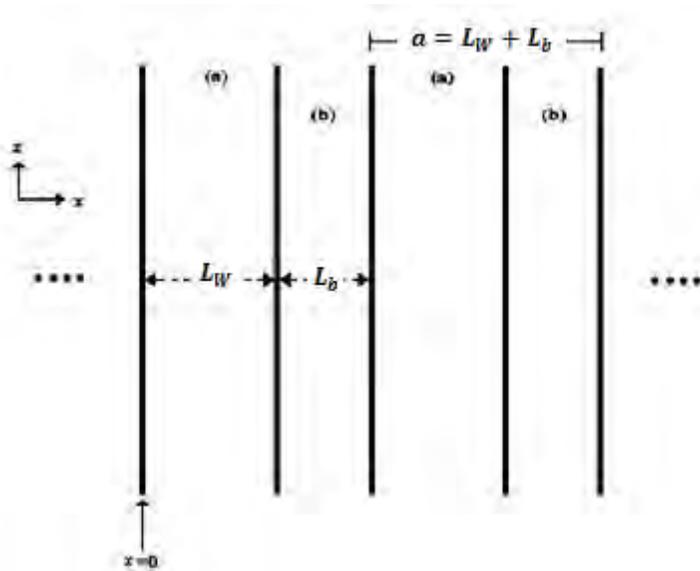


Figura 11. Estructura vista desde el eje "y"

Si siguiendo esta interpretación, tendremos un sistema periódico representado por un perfil de pozos y barreras de potencial.

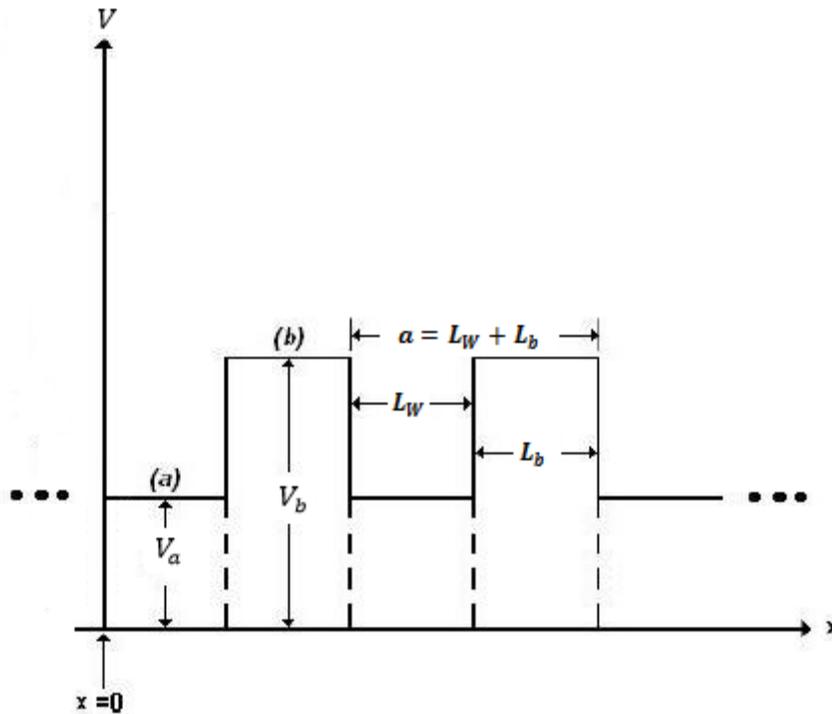


Figura 12. Perfil de potenciales cuántico

Dada la estructura de capas se proponen los siguientes potenciales.

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 < x < L_w \\ V_0 & \text{para } L_w < x < a \end{cases} \quad (1.2.1)$$

Usando la ecuación de Schrödinger para un sólo electrón de masa m en una celda del potencial periódico unidimensional

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \Psi(x) = \varepsilon \Psi(x) \quad (1.2.2)$$

Dado el sistema de la Figura 12 planteamos las “funciones de onda” resultantes para los diferentes medios

$$\Psi_n(x) = \begin{cases} J_n e^{ikx} + L_n e^{-ikx}; & 0 < x < L_w \\ M_n e^{Kx} + N_n e^{-Kx}; & L_w < x < a \end{cases} \quad (1.2.3)$$

con $a = L_w + L_b$

y donde las k 's cumplen con las siguientes expresiones

$$k = \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{1/2} \sqrt{\varepsilon}$$

$$K = \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{1/2} \sqrt{V_0 - \varepsilon} \quad (1.2.4)$$

Aplicando las condiciones de frontera $\Psi_n(x)$ y $\frac{d\Psi_n(x)}{dx}$ continuas
Para $x = a$ para la celda n se tiene.

$$J_n + L_n = M_{n-1} e^{Ka} + N_{n-1} e^{-Ka}$$

$$ikJ_n - ikL_n = KM_{n-1} e^{Ka} - KN_{n-1} e^{-Ka} \quad (1.2.5)$$

y para $x = L_w$ tendremos:

$$J_n e^{ikL_w} + L_n e^{-ikL_w} = M_n e^{KL_w} + N_n e^{-KL_w}$$

$$ikJ_n e^{ikL_w} - ikL_n e^{-ikL_w} = KM_n e^{KL_w} - KN_n e^{-KL_w} \quad (1.2.6)$$

Debido a la periodicidad del sistema las funciones propias se pueden escribir en términos de funciones de Bloch

$$\Psi_n(x) = e^{in\kappa a} \Psi_0(x) \quad (1.2.7)$$

donde k es el vector unidimensional de Bloch y $u(x)$ es una función que contiene la periodicidad del sistema.

Aplicando la condición de Bloch se tienen las igualdades

$$J_n = e^{in\kappa a} J_0, L_n = e^{in\kappa a} L_0$$

$$\begin{aligned}
 M_n &= e^{in\kappa a} M_0, N_n = e^{in\kappa a} N_0 \\
 M_{n-1} &= e^{i(n-1)\kappa a} M_0, N_{n-1} = e^{i(n-1)\kappa a} N_0
 \end{aligned}
 \tag{1.2.8}$$

Con lo anterior hemos descrito la dinámica del sistema físico. Se desea llegar a una ecuación que describa totalmente al sistema. Después de un desarrollo extenso de operaciones algebraicas y sustituciones llegamos a la siguiente expresión

$$\cos(\kappa a) = \frac{1}{2} \sin(kL_w) \sinh(KL_b) \left[\frac{K}{k} - \frac{k}{K} \right] + \cos(kL_w) \cosh(KL_b)
 \tag{1.2.9}$$

La ecuación (1.2.9) es la relación de dispersión que satisface el electrón para el sistema de Kronig-Penney sin fronteras.

Ahora, si ponemos una capa de un tercer material con diferente potencial y además agregamos que a partir de él ya no haya periodicidad por la izquierda, sólo por el lado derecho que es donde aparecen los otros materiales (ver Figura 13 y 14); es decir, agregamos una frontera. Al hacer esto se rompe la periodicidad y veremos a partir de cierto ancho de la capa b, los estados superficiales o de Tamm.[4]

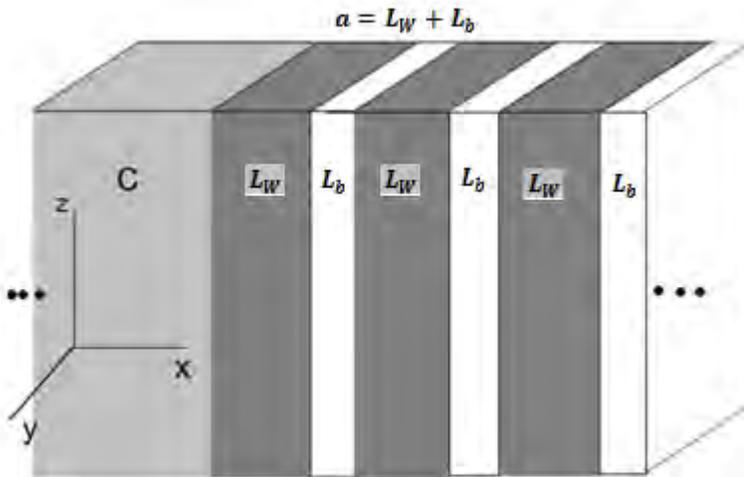


Figura 13. Estructura a la cual se le agregó una tercer capa como frontera

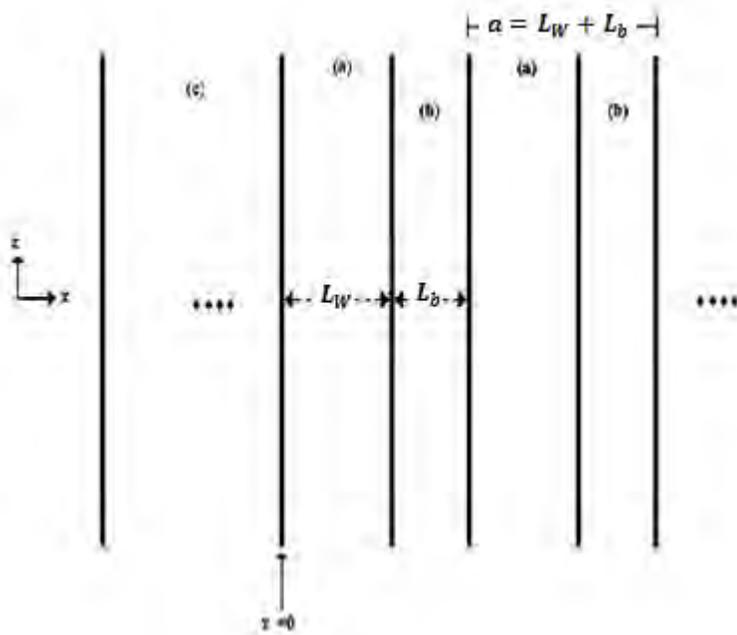


Figura 14. Estructura vista desde arriba

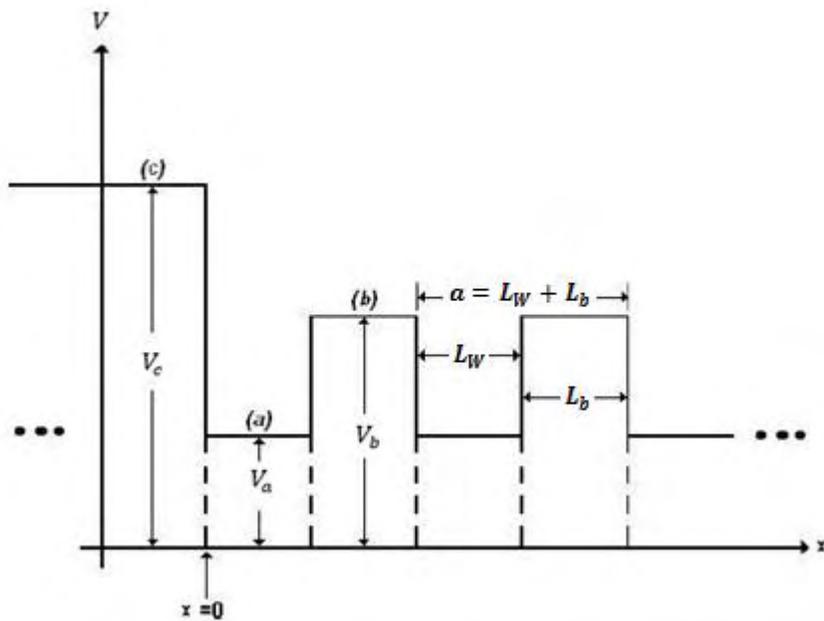


Figura 15. Perfil de potenciales cuántico

Dadas las condiciones del sistema vistas con anterioridad (ver conjunto de ecuaciones (1.2.3), (1.2.4) y si además agregamos otras más correspondientes a un material c

$$K' = \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{1/2} \sqrt{V_0' - \varepsilon} \quad (1.2.10)$$

Partiendo de las mismas condiciones que en la ec.(1.2.3) y aplicando condiciones de frontera en $x = 0$ se tiene:

$$\begin{aligned} F &= J_0 + L_0 \\ K'F &= ik(J_0 - L_0) \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

si se toma $L_0 = cJ_0$

$$\begin{aligned} F &= J_0(1 + c) \\ K'F &= ikJ_0(1 - c) \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

Se llega a

$$\frac{K[k^2 + Kp^2] - Kp[K^2 + k^2] \tanh(Kb)}{[K^2 - Kp^2] \tan(Kb)} = k \cot(ka) \quad (1.2.13)$$

Esta última ecuación es la que nos permite obtener los estados superficiales del sistema.[5]

Ahora haremos un desarrollo equivalente bajo el punto de vista electromagnético.

Enfoque electromagnético

Se considera un sistema periódico de capas alternadas de dos diferentes materiales (metálicos o semiconductores altamente dopados) apilados a lo largo del eje z (ver Figuras 16,17 quitando la capa con subíndice c que es el sustrato). Cada capa tiene una densidad electrónica n_j función de un conjunto parámetros $\epsilon_j, \mu_j, \nu_j, \sigma_j$, $j=\{a,b\}$ depende del tipo de capa en la superred.

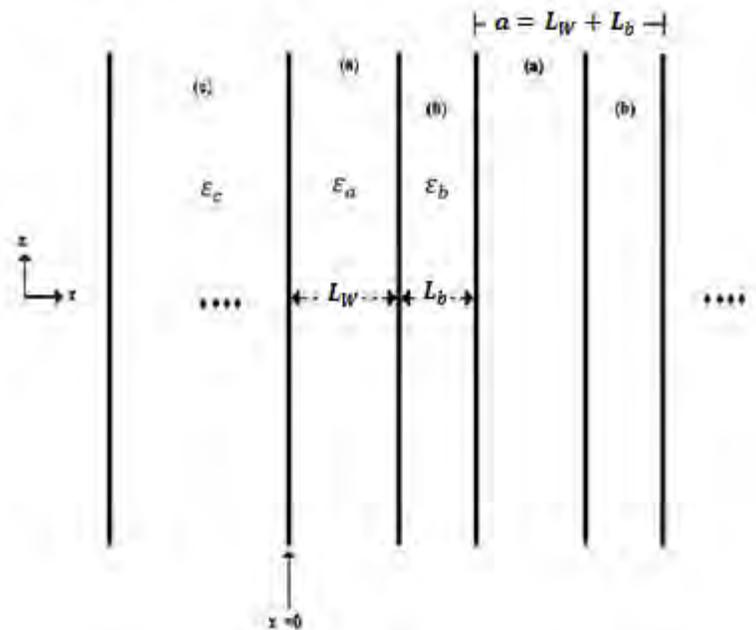


Figura 16. Estructura vista desde el eje "y"

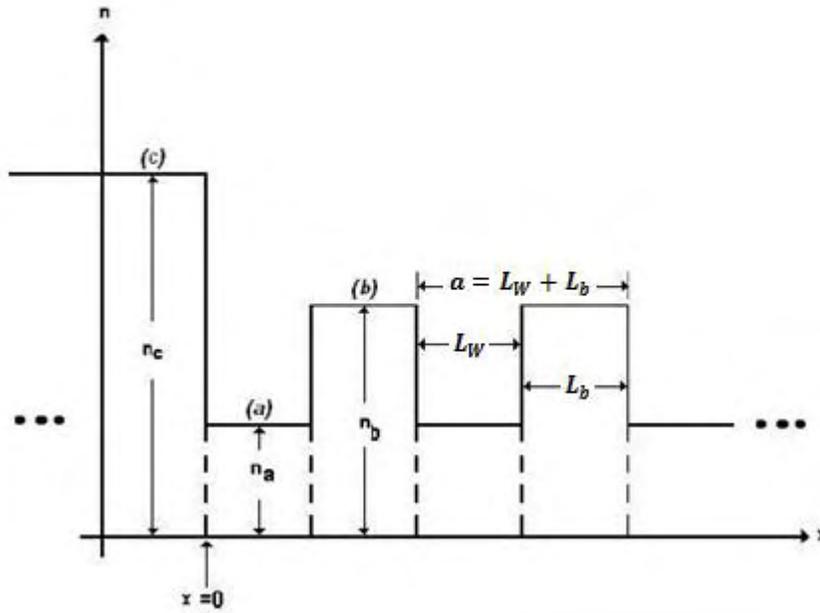


Figura 17. Perfil electromagnético

En la aproximación hidrodinámica, el vector de onda asociado a la propagación transversal está dado por

$$q^t = k = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2} \quad (1.3.1)$$

y el vector de onda asociado a la propagación longitudinal está dado por

$$q^l = k = \frac{1}{\beta} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2} \quad (1.3.2)$$

Para este trabajo estamos interesados en estudiar la propagación transversal. Se propone que la densidad electrónica tenga la forma:

$$\begin{aligned} \rho(z, t) &= \rho_n(z) e^{-i\omega t} \\ J(z) &= j_z(z) e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

$$n(x) = \begin{cases} n_a & \text{para } 0 < x < L_w \\ n_b & \text{para } L_w < x < a \\ n_c & \text{para } -\infty < x < 0 \end{cases} \quad (1.3.4)$$

$$j_z(z) = \begin{cases} A_{n+} e^{iq_a^l z} + A_{n-} e^{-iq_a^l z}; & 0 < z < a \\ B_{n+} e^{iq_b^l z} + B_{n-} e^{-iq_b^l z}; & a < z < L \end{cases} \quad (1.3.5)$$

y para $\rho_n(z)$ se tendrá

$$\rho_n(z) = \begin{cases} \frac{q_a^l}{\omega} [A_{n+} e^{iq_a^l z} - A_{n-} e^{-iq_a^l z}] & 0 < z < a \\ \frac{q_b^l}{\omega} [B_{n+} e^{iq_b^l z} - B_{n-} e^{-iq_b^l z}] & a < z < L \end{cases} \quad (1.3.6)$$

con $L = a + b$

Vectores de onda para la propagación transversal

$$q_a^l = k = \frac{1}{\beta_a} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^{a2}}$$

$$\frac{q_b^l}{i} = K = \frac{1}{\beta_b} \sqrt{\omega_p^{b2} - \omega^2} \quad (1.3.7)$$

Se tomarán como condiciones a la frontera a $\mu j_z(z)$ y $v\rho_n(z)$ como expresiones continuas, además de que la expresión

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho(z,t)}{\partial t} = i\omega \rho(z,t) \quad (1.3.8)$$

también debe ser continua

Aplicando condiciones de frontera de continuidad ($\mu J_z = \mu j_z(z) e^{-i\omega t}$ y $v\rho = v\rho_n(z) e^{-i\omega t}$ y sus derivadas también continuas)

en $z = L$ para la celda n se tiene

$$\mu_a A_{n+} + \mu_a A_{n-} = \mu_b B_{(n-1)+} e^{iq_b^l L} + \mu_b B_{(n-1)-} e^{-iq_b^l L}$$

$$\frac{v_a q_a^l}{\omega} A_{n+} - \frac{v_a q_a^l}{\omega} A_{n-} = \frac{v_b q_b^l}{\omega} B_{(n-1)+} e^{iq_b^l L} - \frac{v_b q_b^l}{\omega} B_{(n-1)-} e^{-iq_b^l L} \quad (1.3.9)$$

y para $z = a$ tendremos:

$$\begin{aligned} \mu_a A_{n+} e^{iq_a^l a} + \mu_a A_{n-} e^{-iq_a^l a} &= \mu_b B_{n+} e^{iq_b^l a} + \mu_b B_{n-} e^{-iq_b^l a} \\ \frac{v_a q_a^l}{\omega} A_{n+} e^{iq_a^l a} - \frac{v_a q_a^l}{\omega} A_{n-} e^{-iq_a^l a} &= \frac{v_b q_b^l}{\omega} B_{n+} e^{iq_b^l a} - \frac{v_b q_b^l}{\omega} B_{n-} e^{-iq_b^l a} \end{aligned} \quad (1.3.10)$$

aplicando la condición de Bloch

$$\Psi_n(z) = e^{in\kappa L} \Psi_0(z) \quad (1.3.11)$$

se tienen las igualdades

$$\begin{aligned} A_{n+} &= e^{in\kappa L} A_{0+} \quad A_{n-} = e^{in\kappa L} A_{0-} \\ B_{n+} &= e^{in\kappa L} B_{0+} \quad B_{n-} = e^{in\kappa L} B_{0-} \\ B_{(n-1)+} &= e^{i(n-1)\kappa L} B_{0+} \quad B_{(n-1)-} = e^{i(n-1)\kappa L} B_{0-} \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

sustituyendo los valores de las ecs. (1.3.12) en las ecs. (1.3.9), (1.3.10) tendremos

$$\begin{aligned} \mu_a e^{in\kappa L} A_{0+} + \mu_a e^{in\kappa L} A_{0-} &= \mu_b e^{i(n-1)\kappa L} B_{0+} e^{iq_b^l L} + \mu_b e^{i(n-1)\kappa L} B_{0-} e^{-iq_b^l L} \\ \frac{v_a q_a^l}{\omega} e^{in\kappa L} A_{0+} - \frac{v_a q_a^l}{\omega} e^{in\kappa L} A_{0-} &= \frac{v_b q_b^l}{\omega} e^{i(n-1)\kappa L} B_{0+} e^{iq_b^l L} - \frac{v_b q_b^l}{\omega} e^{i(n-1)\kappa L} B_{0-} e^{-iq_b^l L} \\ \mu_a e^{in\kappa L} A_{0+} e^{iq_a^l a} + \mu_a e^{in\kappa L} A_{0-} e^{-iq_a^l a} &= \mu_b e^{in\kappa L} B_{0+} e^{iq_b^l a} + \mu_b e^{in\kappa L} B_{0-} e^{-iq_b^l a} \\ \frac{v_a q_a^l}{\omega} e^{in\kappa L} A_{0+} e^{iq_a^l a} - \frac{v_a q_a^l}{\omega} e^{in\kappa L} A_{0-} e^{-iq_a^l a} &= \frac{v_b q_b^l}{\omega} e^{in\kappa L} B_{0+} e^{iq_b^l a} - \frac{v_b q_b^l}{\omega} e^{in\kappa L} B_{0-} e^{-iq_b^l a} \end{aligned} \quad (1.3.13)$$

Eliminando $e^{i\kappa L}$ de las ecs. anteriores se llega a:

$$\mu_a A_{0+} + \mu_a A_{0-} = \mu_b e^{-i\kappa L} B_{0+} e^{iq_b^l L} + \mu_b e^{-i\kappa L} B_{0-} e^{-iq_b^l L}$$

$$v_a q_a^l A_{0+} - v_a q_a^l A_{0-} = v_b q_b^l e^{-i\kappa L} B_{0+} e^{iq_b^l L} - v_b q_b^l e^{-i\kappa L} B_{0-} e^{-iq_b^l L}$$

$$\mu_a A_{0+} e^{iq_a^l a} + \mu_a A_{0-} e^{-iq_a^l a} = \mu_b B_{0+} e^{iq_b^l a} + \mu_b B_{0-} e^{-iq_b^l a}$$

$$v_a q_a^l A_{0+} e^{iq_a^l a} - v_a q_a^l A_{0-} e^{-iq_a^l a} = v_b q_b^l B_{0+} e^{iq_b^l a} - v_b q_b^l B_{0-} e^{-iq_b^l a} \quad (1.3.14)$$

Que será nuestro sistema a resolver. Después de un desarrollo matemático que implica resolver un determinante llegamos a la siguiente expresión.

$$\cos(\kappa L) = \cos(q_a^l a) \cos(q_b^l b) - \frac{1}{2} \left[\frac{v_a \mu_b q_a^l}{v_b \mu_a q_b^l} + \frac{\mu_a v_b q_b^l}{\mu_b v_a q_a^l} \right] \sin(q_a^l a) \sin(q_b^l b) \quad (1.3.15)$$

Esta ecuación es el equivalente a la dispersión de Kronig Penney sin frontera visto anteriormente para el caso cuántico (ver ec. (1.2.9))

Ahora obtengamos los estados superficiales. Para romper la periodicidad se usa una interface de otro material semiconductor en $z = 0$ con parámetros $\epsilon_c \mu_c v_c \sigma_c$ y densidad electrónica n_c , como se muestra en la Figura 17.

Con las mismas condiciones vistas anteriormente (ecs. (1.3.4) y (1.3.5)) y solo agregando la condición

$$\frac{q_c^l}{i} = K' = \frac{1}{\beta_c} \sqrt{\omega_p^{c2} - \omega^2} \quad (1.3.16)$$

Entonces aplicando condiciones de continuidad de la frontera en $x = 0$ se tiene:

$$\mu_c F = \mu_a (J_0 + L_0)$$

$$\frac{v_c}{i\omega} K' F = \frac{v_a}{i\omega} ik (J_0 - L_0) \quad (1.3.17)$$

Y consideremos

$$L_0 = cJ_0$$

$$\mu_c F = \mu_a J_0 (1 + c)$$

$$\frac{v_c}{i\omega} K' F = \frac{v_a}{i\omega} ik J_0 (1 + c) \quad (1.3.18)$$

La ecuación que rige los estados superficiales es la siguiente

$$\frac{\frac{v_a \mu_b}{v_b \mu_a} K \left[k^2 + \frac{v_c^2 \mu_a^2}{v_a^2 \mu_c^2} K'^2 \right] - \frac{v_c \mu_a}{v_a \mu_c} K' \left[K^2 + \frac{v_a^2 \mu_b^2}{v_b^2 \mu_a^2} k^2 \right] \tanh(KL_b)}{\left[K^2 - \frac{v_c^2 \mu_b^2}{v_b^2 \mu_c^2} K'^2 \right] \tanh(KL_b)} = k \cot(kL_w) \quad (1.3.19)$$

Observamos que es equivalente a la obtenida para los estados superficiales en el caso cuántico (ver ec.(1.2.13)).

Enfoque acústico

En éste otro caso la heteroestructura la modelaremos por una serie de capas apiladas y alternadas como ya se ha hecho en los casos anteriores. Cada sección está caracterizada por una velocidad del sonido, así como su densidad. Con esto se modela la interacción de la onda con cada capa.

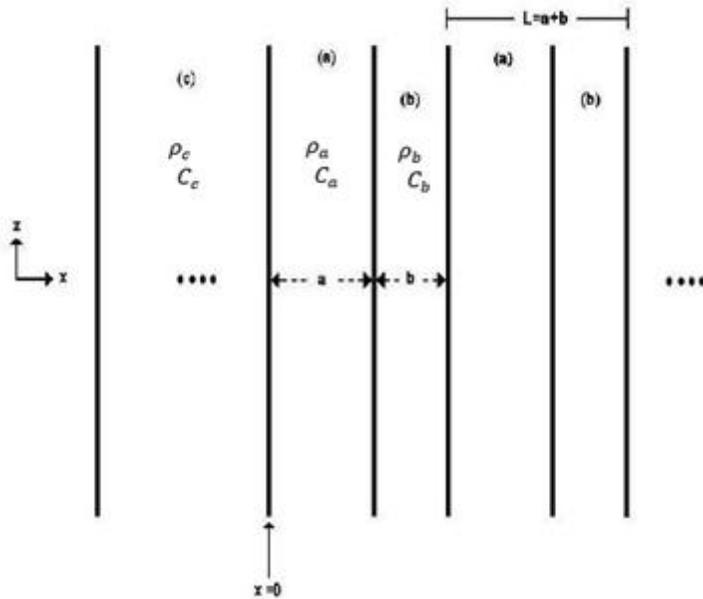


Figura 18. Estructura vista desde el eje "y"

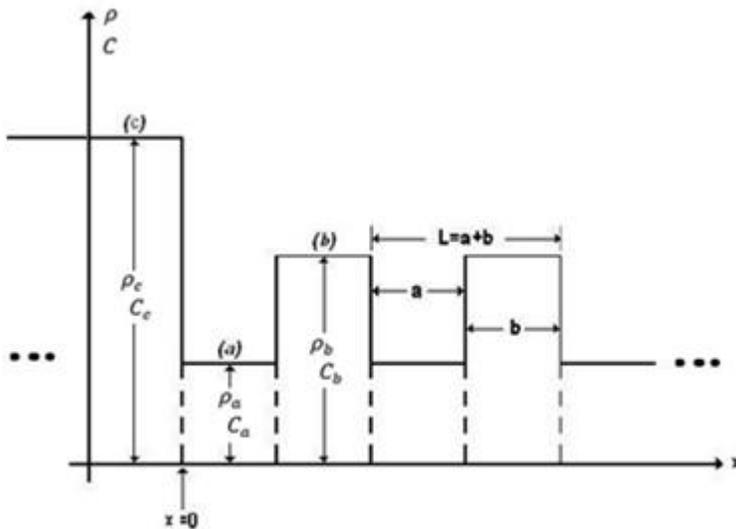


Figura 19. Perfil acústico

Consideraremos una onda transversal cuyo desplazamiento sea en la dirección y paralela al plano de las láminas. La propagación de la onda será en el plano xz . Con estas consideraciones la ecuación de movimiento está dada por

$$\frac{\partial^2 u_y(x, z, t)}{\partial t^2} = c_i^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u_y(x, z, t) \quad (1.4.1)$$

Para el primer medio a se propone que la solución de la ecuación sea de la forma de onda plana con propagación a lo largo de z . Así tendremos

$$u_y(x, z, t) = u_y(x) e^{i(k_z z - \omega t)} \quad (1.4.2)$$

Al sustituir la ec. (1.4.2) en la ec. (1.4.1) obtenemos

$$(c_i^2 k_z^2 - \omega^2) u_y(x) = c_i^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_y(x) \quad (1.4.3)$$

La solución general para la ec. (1.4.3) es

$$u_y(x) = A_+ e^{k_a x} + A_- e^{-k_a x} \quad (1.4.4)$$

donde

$$k_a = \sqrt{k_z^2 - \frac{\omega^2}{c_{ia}^2}} \quad (1.4.5)$$

$$k_b = \sqrt{k_z^2 - \frac{\omega^2}{c_{ib}^2}} \quad (1.4.6)$$

$$L = a + b$$

Debido a la periodicidad de la estructura laminada queremos que la solución $u_x(x)$ esté en la forma de onda de Bloch, así $u_x(x)$ debe tomar la forma

$$u_y(x) = e^{iqx} u_y(q, x) \quad (1.4.7)$$

donde

$$u_y(q, x) = u_y(q, x + L) \quad (1.4.8)$$

con $L = a + b$ siendo el periodo de la estructura en la dirección x . De las ecs. (1.4.4) y (1.4.7) tenemos

$$u_y(q, x) = e^{-iqx} [A_+ e^{k_a x} + A_- e^{-k_a x}] \quad (1.4.9)$$

Debemos tener que $u_x(q, x)$ sea una función periódica de periodo L . Podemos lograr esto al reemplazar x con $x - nL$ con x perteneciente a la capa n -ésima. Así tendremos

$$u_y(q, x) = e^{-iq(x-nL)} [A_+ e^{k_a(x-nL)} + A_- e^{-k_a(x-nL)}] \quad (1.4.10)$$

con $nL < x < nL + a$. De las Ecs. (1.4.7) y (1.4.10) tenemos

$$u_y(x) = e^{iqnL} [A_+ e^{k_a(x-nL)} + A_- e^{-k_a(x-nL)}] \quad (1.4.11)$$

con $nL < x < nL + a$. Para el medio b podemos obtener una expresión similar, es decir

$$u_y(x) = e^{iqnL} [B_+ e^{k_b(x-nL-a)} + B_- e^{-k_b(x-nL-a)}] \quad (1.4.12)$$

ahora $nL + a < x < (n + 1)L$. Y

Tenemos entonces cuatro constantes a determinar A_+, A_-, B_+, B_- . Para ello necesitamos las condiciones de continuidad, en el desplazamiento u y la componente normal de tensión, en las interfaces. La tensión T_{xy} está dada por la expresión

$$T_{xy} = \rho c_t^2 \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \quad (1.4.13)$$

Las ecuaciones para el desplazamiento $u_y(x)$ y para el estrés $T_{xy}(x)$ serán

$$u_y(x) = \begin{cases} e^{iqnL} [A_+ e^{k_a(x-nL)} + A_- e^{-k_a(x-nL)}] & nL < x < nL + a \\ e^{iqnL} [B_+ e^{k_b(x-nL-a)} + B_- e^{-k_b(x-nL-a)}] & nL + a < x < (n + 1)L \end{cases} \quad (1.4.14)$$

$$T_{xy}(x) = \begin{cases} e^{iqnL} k_a \rho_a c_{ta}^2 (A_+ e^{k_a(x-nL)} - A_- e^{-k_a(x-nL)}) & nL < x < nL + a \\ e^{iqnL} k_b \rho_b c_{tb}^2 (B_+ e^{k_b(x-nL-a)} - B_- e^{-k_b(x-nL-a)}) & nL + a < x < (n + 1)L \end{cases} \quad (1.4.15)$$

Si se aplican condiciones de frontera continuas en $x = nL + a$

$$A_+ e^{k_a a} + A_- e^{-k_a a} = B_+ + B_-$$

$$k_a \rho_a c_{ta}^2 A_+ e^{k_a a} - k_a \rho_a c_{ta}^2 A_- e^{-k_a a} = k_b \rho_b c_{tb}^2 B_+ - k_b \rho_b c_{tb}^2 B_- \quad (1.4.16)$$

en $x = nL$

$$A_+ + A_- = e^{-iqL} [B_+ e^{k_b b} + B_- e^{-k_b b}]$$

$$k_a \rho_a c_{ia}^2 A_+ - k_a \rho_a c_{ia}^2 A_- = e^{-iqL} k_b \rho_b c_{ib}^2 [B_+ e^{k_b b} - B_- e^{-k_b b}] \quad (1.4.17)$$

nota: al aplicar las condiciones a la frontera en $x = nL$, la ecuaciones para el desplazamiento y el estrés que se toman son:

$$u_y(x) = \begin{cases} e^{iqnL} [A_+ e^{k_a(x-nL)} + A_- e^{-k_a(x-nL)}] & nL < x < nL + a \\ e^{iq(n-1)L} [B_+ e^{k_b[x-(n-1)L-a]} + B_- e^{-k_b[x-(n-1)L-a]}] & (n-1)L + a < x < nL \end{cases} \quad (1.4.18)$$

$$T_{xy}(x) = \begin{cases} e^{iqnL} k_a \rho_a c_{ia}^2 (A_+ e^{k_a(x-nL)} - A_- e^{-k_a(x-nL)}) & nL < x < nL + a \\ e^{iq(n-1)L} k_b \rho_b c_{ib}^2 (B_+ e^{k_b[x-(n-1)L-a]} - B_- e^{-k_b[x-(n-1)L-a]}) & (n-1)L + a < x < nL \end{cases} \quad (1.4.19)$$

pues tomamos la frontera "izquierda" de a .

De las ecs. (1.4.16)- (1.4.17) se tiene

$$A_+ e^{k_a a} + A_- e^{-k_a a} = B_+ + B_-$$

$$R_a [A_+ e^{k_a a} - A_- e^{-k_a a}] = R_b [B_+ - B_-] \quad (1.4.20)$$

Al aplicar el ansatz de una función que decae fuera de la superficie en $x = 0$ dentro de la super-red

$$u_y(x) = e^{-pnL} u_0(x)$$

se tiene

$$u_y(x) = \begin{cases} e^{-pnL} [A_+ e^{k_a(x-nL)} + A_- e^{-k_a(x-nL)}] & nL < x < nL + a \\ e^{-pnL} [B_+ e^{k_b(x-nL-a)} + B_- e^{-k_b(x-nL-a)}] & nL + a < x < (n+1)L \\ e^{-pnL} C e^{k_c x} & x < 0 \end{cases} \quad (1.4.21)$$

$$T_{xy}(x) = \begin{cases} e^{-pnL} k_a \rho_a c_{ta}^2 (A_+ e^{k_a(x-nL)} - A_- e^{-k_a(x-nL)}) & nL < x < nL + a \\ e^{-pnL} k_b \rho_b c_{tb}^2 (B_+ e^{k_b(x-nL-a)} - B_- e^{-k_b(x-nL-a)}) & nL + a < x < (n+1)L \\ e^{-pnL} k_c \rho_c c_{tc}^2 (C e^{k_c x}) & x < 0 \end{cases} \quad (1.4.22)$$

Si se aplican las condiciones de frontera en $x = 0$ obtenemos las ecuaciones siguientes

$$\begin{aligned} A_+ + A_- &= C \\ k_a \rho_a c_{ta}^2 (A_+ - A_-) &= k_c \rho_c c_{tc}^2 C \end{aligned} \quad (1.4.23)$$

considerando $A_- = cA_+$, las condiciones de frontera se expresan como

$$\begin{aligned} A_+(1 + c) &= C \\ k_a \rho_a c_{ta}^2 A_+(1 - c) &= k_c \rho_c c_{tc}^2 C \end{aligned} \quad (1.4.24)$$

Trabajando con las ecs. (1.4.10) y despejando k_c se tiene

$$k_c = \frac{\rho_a c_{ta}^2}{\rho_c c_{tc}^2} k_a \frac{1 - c}{1 + c} \quad (1.4.25)$$

Si se aplican condiciones de continuidad de la frontera en $x = nL + a$

$$\begin{aligned} A_+ e^{k_a a} + A_- e^{-k_a a} &= B_+ + B_- \\ k_a \rho_a c_{ta}^2 [A_+ e^{k_a a} - A_- e^{-k_a a}] &= k_b \rho_b c_{tb}^2 [B_+ - B_-] \end{aligned} \quad (1.4.26)$$

en $x = nL$

$$A_+ + A_- = e^{pnL} [B_+ e^{k_b b} + B_- e^{-k_b b}]$$

$$k_a \rho_a c_{ta}^2 [A_+ - A_-] = e^{pL} k_b \rho_b c_{tb}^2 [B_+ e^{k_b b} - B_- e^{-k_b b}] \quad (1.4.27)$$

Al aplicar las condiciones a la frontera en $x = nL$, la ecuaciones para el desplazamiento y el estrés que se toman son:

$$u_n(x) = \begin{cases} e^{-pnL} [A_+ e^{k_a(x-nL)} + A_- e^{-k_a(x-nL)}] & nL < x < nL + a \\ e^{-p(n-1)L} [B_+ e^{k_b[x-(n-1)L-a]} + B_- e^{-k_b[x-(n-1)L-a]}] & (n-1)L + a < x < nL \end{cases} \quad (1.4.28)$$

$$T(x) = \begin{cases} e^{-pnL} k_a \rho_a c_{ta}^2 (A_+ e^{k_a(x-nL)} - A_- e^{-k_a(x-nL)}) & nL < x < nL + a \\ e^{-p(n-1)L} k_b \rho_b c_{tb}^2 (B_+ e^{k_b[x-(n-1)L-a]} - B_- e^{-k_b[x-(n-1)L-a]}) & (n-1)L + a < x < nL \end{cases} \quad (1.4.29)$$

Después de un procedimiento matemático extenso y tomando a

$$F = \frac{R_a}{R_b} = \frac{k_a \rho_a c_{ta}^2}{k_b \rho_b c_{tb}^2} \quad (1.4.30)$$

Llegamos finalmente a

$$\cosh(pL) = \cosh(k_a a) \cosh(k_b b) + \frac{1}{2} \sinh(k_a a) \left(F + \frac{1}{F} \right) \sinh(k_b b) \quad (1.4.31)$$

La ecuación (1.4.17) rige la dispersión de la función de onda acústica para un sistema como el de Kronig-Penney sin frontera. Como se puede ver esta ecuación es equivalente a las vistas para los casos cuántico y electromagnético (ver ecs. (1.2.9), (1.3.15)).

Como se ha hecho en los otros enfoques agregaremos un material c que cumpla como frontera. Con esto rompemos la periodicidad del sistema con lo cual se generarán estados superficiales (ver Figura 18 y 19).

Con este nuevo material también agregamos una condición adicional.

$$k_c = \sqrt{k_z^2 - \frac{\omega^2}{c_{ic}^2}} \quad (1.4.32)$$

Consideremos las siguientes expresiones matemáticas

$$\begin{aligned} L &= a + b \\ R_a &= k_a \rho_a c_{ia}^2 \quad ; \quad R_b = k_b \rho_b c_{ib}^2 \quad ; \quad R_c = k_c \rho_c c_{ic}^2 \\ k_a &= \sqrt{k_z^2 - \frac{\omega^2}{c_{ia}^2}} \quad ; \quad k_b = \sqrt{k_z^2 - \frac{\omega^2}{c_{ib}^2}} \quad ; \quad k_c = \sqrt{k_z^2 - \frac{\omega^2}{c_{ic}^2}} \end{aligned} \quad (1.4.33)$$

De las Ecs. (1.4.12), (1.4.13) , (1.4.19) y tomando $A_- = cA_+$ obtenemos

$$A_+ e^{k_a a} \left(1 + \frac{R_a}{R_b}\right) + cA_+ e^{-k_a a} \left(1 - \frac{R_a}{R_b}\right) = A_+ e^{-pL} e^{-k_b b} \left(1 + \frac{R_a}{R_b}\right) + cA_+ e^{-pL} e^{-k_b b} \left(1 - \frac{R_a}{R_b}\right)$$

$$A_+ e^{k_a a} \left(1 - \frac{R_a}{R_b}\right) + cA_+ e^{-k_a a} \left(1 + \frac{R_a}{R_b}\right) = A_+ e^{-pL} e^{k_b b} \left(1 - \frac{R_a}{R_b}\right) + cA_+ e^{-pL} e^{k_b b} \left(1 + \frac{R_a}{R_b}\right) \quad (1.4.34)$$

Finalmente, después de un poco de álgebra llegamos a la expresión matemática para los estados superficiales en el caso acústico

$$\frac{k_b \rho_b c_{ib}^2 [-k_a^2 \rho_a^2 c_{ia}^4 + k_c^2 \rho_c^2 c_{ic}^4] - k_c \rho_c c_{ic}^2 [k_b^2 \rho_b^2 c_{ib}^4 - k_a^2 \rho_a^2 c_{ia}^4] \tanh(k_b b)}{[k_b^2 \rho_b^2 c_{ib}^4 - k_c^2 \rho_c^2 c_{ic}^4] \tanh(k_b b)} = k_a \rho_a c_{ia}^2 \coth(k_a a) \quad (1.4.35)$$

Vemos que también es similar a las ecuaciones vistas anteriormente (ecs (1.2.13), (1.3.19)) para los casos cuántico y electromagnético.

Al observar las ecs. (1.2.9), (1.2.13), (1.4.17), (1.2.13), (1.3.19), (1.4.21) las diferentes analogías llegamos a la conclusión que si cumplen una ecuación general dada por las siguientes expresiones

$$\cos(qL) = \cosh(k_a a) \cosh(k_b b) + \frac{1}{2} \left[\frac{k}{K} + \frac{K}{k} \right] \sinh(k_a a) \sinh(k_b b) \quad (1.4.36)$$

$$\frac{K[k^2 + K_p^2] - K_p[K^2 + k^2] \tanh(k_b b)}{[K^2 - K_p^2] \tanh(k_b b)} = k \cot(k_a a) \quad (1.4.37)$$

Donde $k = f(k_a)$; $K = f(k_b)$; $K_p = f(k_s)$

Heteroestructuras con diferentes anchos de la barrera de potencial.

Los primeros estudios en superredes se basaban usualmente en la periodicidad de una doble capa; es decir, una estructura pozo barrera. Sin embargo, se han estudiado sistemas más complicados que exhiben nuevas propiedades y dan como resultados nuevos fenómenos físicos. Estos sistemas más complicados son superredes con bases complejas que consisten en un número N de capas más complicada que la más simple superred de pozo-barrera. Un aspecto importante de estas superredes con base de multicapas es el poder hacer cierta ingeniería de propiedades electrónicas de las superredes para poder construir dispositivos con diversas aplicaciones.

En este sentido el anterior desarrollo visto en los apartados anteriores fue para cuando las anchuras de las barreras de potencial de las dos capas periódicas son iguales (ver Figura20).

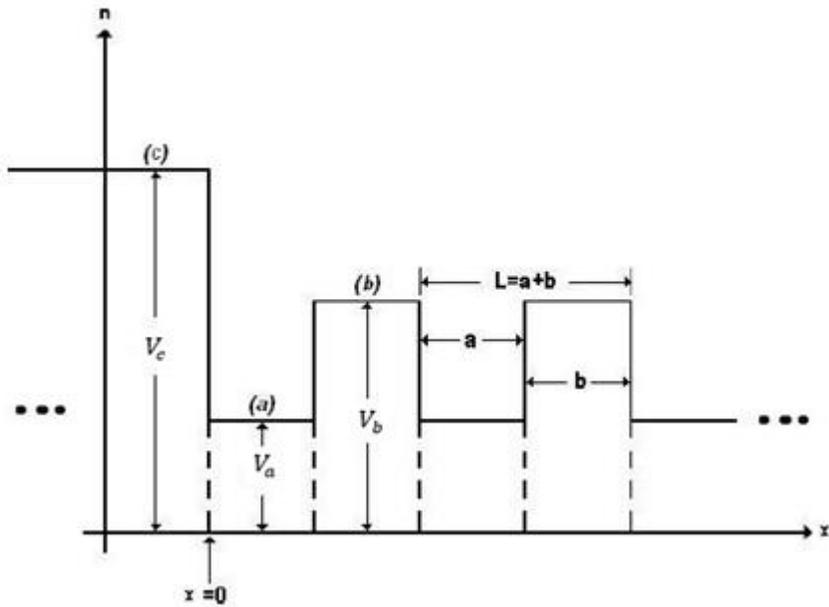


Figura 20. Perfil de barreras de potencial donde el ancho de las capas a y b son iguales

Estudiaremos ahora el caso en el que los anchos de las barreras de potencial de las capas son diferentes (ver Figura 21 considerando que ahora las anchuras de “ a ” y “ b ” son diferentes)

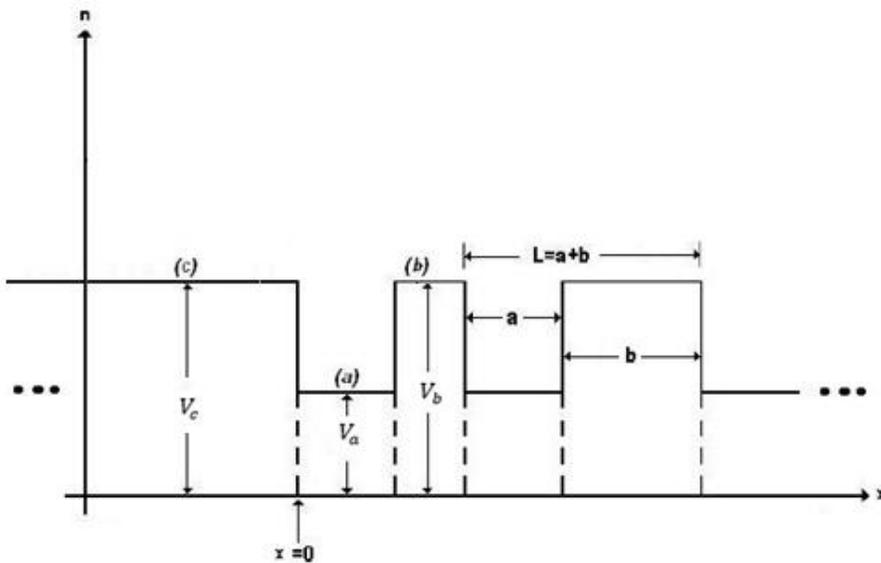


Figura 21. Perfil de barreras de potencial donde el ancho de las capas es diferente

Con un procedimiento algebraico equivalente pero aún más extenso podemos obtener las expresiones siguientes:

La relación de dispersión que obtenemos es

$$\text{Cos}(KD) = 2B_2(\epsilon)B_4(\epsilon) - \text{Cosh}(k_b(b_4 - b_2)) \quad (1.5.1)$$

$$\text{Cos}(KD) = 2B_2(\epsilon)B_4(\epsilon) - \text{Cosh}(k_b(b_4 - b_2)) - 1$$

$$\text{Cos}(KD) = 2B_2(\epsilon)B_4(\epsilon) - \text{Cosh}(k_b(b_4 - b_2)) + 1 \quad (1.5.2)$$

Donde

$$\text{Cos}(K_{a+b_2}D_{a+b_2}) = \text{Cosh}(k_a a)\text{Cosh}(k_b b_2) + \frac{1}{2}\left(\frac{F_a}{F_b} + \frac{F_b}{F_a}\right)\text{Senh}(k_a a)\text{Senh}(k_b b_2) = B_2(\epsilon)$$

$$\text{Cos}(K_{a+b_4}D_{a+b_4}) = \text{Cosh}(k_a a)\text{Cosh}(k_b b_4) + \frac{1}{2}\left(\frac{F_a}{F_b} + \frac{F_b}{F_a}\right)\text{Senh}(k_a a)\text{Senh}(k_b b_4) = B_4(\epsilon)$$

$$(1.5.3)$$

En las superredes simples (pozo-barrera), para que exista un estado superficial debe incluirse un medio semi-infinito que represente una barrera de potencial suficientemente alta o suficientemente baja con respecto al potencial de las otras capas que componen la estructura. Usando estas bases complejas la aparición de estados superficiales no depende de la altura de la barrera semi-infinita que se incluyó.

La expresión para los estados superficiales es

$$M(\epsilon) = 2B_2\left[\left(\frac{F_s}{F_2} - \frac{F_2}{F_s}\right)\text{Senh}(k_a a)\text{Cosh}(k_b b_4) + \left(\frac{F_s}{F_2} - \frac{F_2}{F_s}\right)\text{Cosh}(k_a a)\text{Senh}(k_b b_4) + \left(\frac{F_a}{F_b} - \frac{F_b}{F_a}\right)\text{Senh}(k_a a)\text{Senh}(k_b b_4)\right] + \left(\frac{F_s}{F_b} - \frac{F_b}{F_s}\right)\text{Senh}(k_b(b_2 - b_4))$$

$$(1.5.4)$$

Condición de validez para los estados superficiales

$$|L(\epsilon)| > 1 \quad (1.5.5)$$

Donde

$$\begin{aligned}
 L(\epsilon) = & \frac{F_s}{F_a} \left[\left(\frac{F_a}{F_b} \text{Senh}(k_a a) \text{Senh}(k_b b_2) + \text{Cosh}(k_a a) \text{Cosh}(k_b b_2) \right) \text{Senh}(k_a a) \text{Cosh}(k_b b_2) + \right. \\
 & + \text{Cosh}(b_2 - b_4) \text{Cosh}(k_a a) \text{Senh}(k_a a) \left. \right] + \frac{F_s}{F_b} \left[\left(\frac{F_a}{F_b} \text{Cosh}(k_a a) \text{Senh}(k_b b_2) + \right. \right. \\
 & + \left. \left. \text{Senh}(k_a a) \text{Cosh}(k_b b_2) \right) \text{Senh}(k_a a) \text{Cosh}(k_b b_2) + \text{Senh}(b_2 - b_4) \text{Cosh}^2(k_a a) \right] - \\
 & - 2B_2(\epsilon) \left(\frac{F_b}{F_a} \text{Senh}(k_a a) \text{Senh}(k_b b_4) + \text{Cosh}(k_a a) \text{Cosh}(k_b b_4) \right) + \text{Cosh}(k_b (b_2 - b_4))
 \end{aligned}
 \tag{1.5.6}$$

Las ecs. (1.5.3), (1.5.4) y (1.5.4) son las mismas para los tres casos o puntos de vista que anteriormente se estudiaron; es decir, caso cuántico, electromagnético y acústico. Lo único que cambia para cada caso son los valores de las K 's (ver tabla 1 2 páginas adelante) y las F 's.

En resumen, los factores que cambiarán en las ecs. (1.5.3), (1.5.4), (1.5.5), (1.5.6) para cada enfoque serán:

Caso cuántico

$$\begin{aligned}
 k_a[\epsilon] &= \sqrt{\frac{2m_a}{\hbar^2} (V_a - \epsilon)} \\
 k_b[\epsilon] &= \sqrt{\frac{2m_b}{\hbar^2} (V_b - \epsilon)} \\
 k_s[\epsilon] &= \sqrt{\frac{2m_s}{\hbar^2} (V_s - \epsilon)} \\
 F_a &= \frac{k_a}{m_a} \\
 F_b &= \frac{k_b}{m_b} \\
 F_s &= \frac{k_s}{m_s}
 \end{aligned}$$

(1.5.7)

Caso electromagnético

$$q_a[\omega] = \sqrt{\frac{1}{\beta_a} \omega_{\rho}^{a2} - \omega^2}$$

$$q_b[\omega] = \sqrt{\frac{1}{\beta_b} \omega_{\rho}^{b2} - \omega^2}$$

$$q_s[\omega] = \sqrt{\frac{1}{\beta_s} \omega_{\rho}^{s2} - \omega^2}$$

$$F_a = \frac{\gamma_a q_a}{\mu_a}$$

$$F_b = \frac{\gamma_b q_b}{\mu_b}$$

$$F_s = \frac{\gamma_s q_s}{\mu_s}$$

(1.5.8)

Caso acústico

$$k_a[\omega] = \sqrt{k_x^2 - \frac{\omega^2}{C_a^2}}$$

$$k_b[\omega] = \sqrt{k_x^2 - \frac{\omega^2}{C_b^2}}$$

$$k_s[\omega] = \sqrt{k_x^2 - \frac{\omega^2}{C_s^2}}$$

$$F_a = k_a \rho_a C_a^2$$

$$F_b = k_b \rho_b C_b^2$$

$$F_s = k_s \rho_s C_s^2$$

(1.5.9)

Hagamos una comparación entre las tres perspectivas y si observamos ciertas similitudes podemos ver que las perspectivas tienen un patrón en común

Cuántico	Electromagnético	Acústico
$k_x[\epsilon] = \sqrt{\frac{2m_x}{\hbar^2} (V_x - \epsilon)}$	$q_x[\omega] = \sqrt{\frac{1}{\beta_x} \omega_p^{x2} - \omega^2}$	$k_x[\omega] = \sqrt{k_x^2 - \frac{\omega^2}{C_x^2}}$
$F_x = \frac{k_x}{m_x}$	$F_x = \frac{Y_x q_x}{\mu_x}$	$F_x = k_x \rho_x C_x^2$

Tabla 1

Hasta aquí se ha mostrado el marco teórico sobre el cual se apoya esta tesis. Para realizar los cálculos numéricos con el que obtendremos las gráficas que se presentarán, vamos a adimensionalizar las ecs. (1.5.3), (1.5.4) y (1.5.4) así como cada uno de los elementos de la tabla1 para que puedan ser procesadas. Para todos los casos planteados (cuántico,acústico y electromagnético) este desarrollo se presenta en los apéndices A,B y C.

4. Capítulo 2

Metodología de trabajo

En este capítulo se explica detalladamente la metodología utilizada para conseguir el objetivo de la tesis.

Se desarrolló un trabajo desde la perspectiva cuántica para poder llegar a las expresiones obtenidas por Bloss[5].

Se propuso un modelo para el caso electromagnético y se siguió un planteamiento equivalente obtuvimos una relación de dispersión similar. Después se procedió a desarrollar la expresión que nos diera en forma analítica los modos superficiales. Deducimos que si se acomodaban de cierta forma los factores que aparecen en la ec. (1.3.19) se parecía mucho a las obtenidas en la literatura [5]. En este sentido la propuesta era obtener una ecuación general que reprodujera los dos puntos de vista (cuántico y electromagnético). Cuando logramos esto al obtener los factores $F's$, procedimos a aplicarlo a un sistema acústico. Esa fue la dirección que tomó el trabajo.

Apoyándonos en las ecuaciones generales obtenidas en el capítulo 1 se encontraron los parámetros F_a, F_b, F_s (ver tabla1) que correspondieran a los fenómenos acústico y electromagnético.

Después de haber obtenido estos factores $F's$ se procedió a obtener los estados superficiales a partir de datos propuestos en cuanto al tipo de material y las anchuras de las barreras de potencial. Con ésto se buscó reproducir algunas gráficas que se reportaban en la literatura [6],[7] para el caso cuántico.

El programa Mathematica fue el software que se empleó para la obtención de gráficas y cálculos necesarios.

Finalmente, el sistema tenía que cumplir con la condición $|L(\epsilon)| > 1$ para la interpretación de los resultados. Esta condición indica si un estado obtenido es posible o no.

5. Capítulo 3

Resultados

Caso Cuántico

Las raíces para la ecuación (1.5.3) que reproduce las bandas de Kronig-Penney las podemos observar en la figura 22.

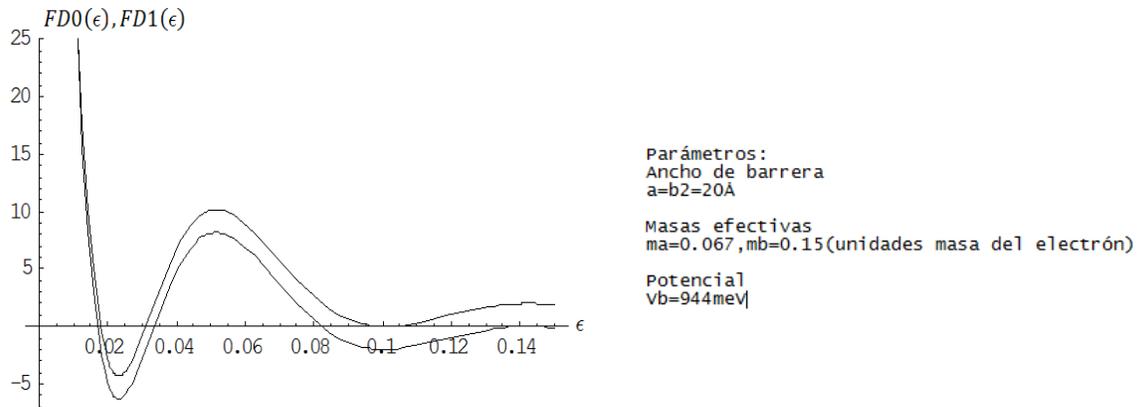


Figura 22. Raíces de F_0, F_1 .

Con las raíces obtenidas de forma aproximada de la figura 22 podemos establecer una vecindad donde es posible que existan estados superficiales. En donde aparezcan las raíces de la curva de la figura 23 será donde se cumple la ecuación (1.5.4) que es la que reproduce los estados superficiales.

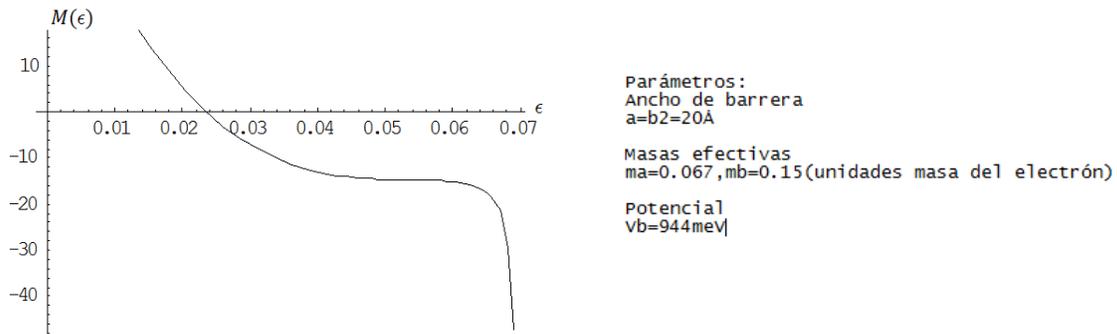


Figura 23. Raíces de la ec. de los Estados superficiales

De la figura 24 observamos que la expresión L cumple la condición de validez dada por la ecs. (1.5.5) y (1.5.6) en el punto donde la ecuación de los estados superficiales se cumple. En este caso se da que $L > 1$

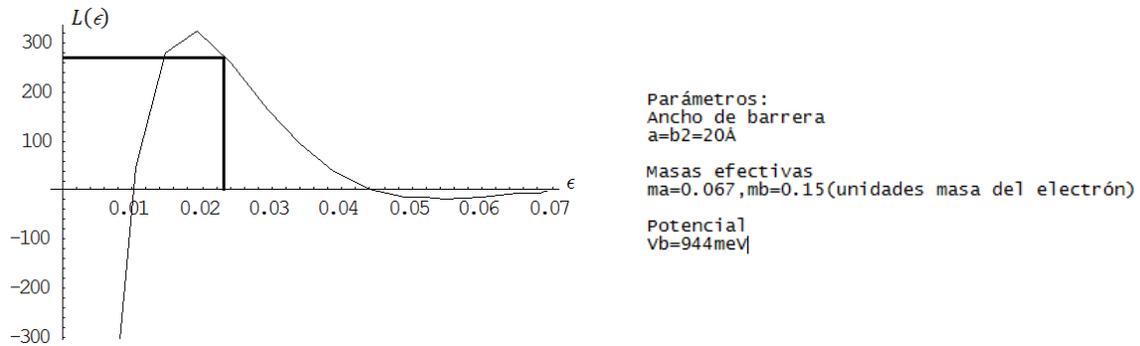
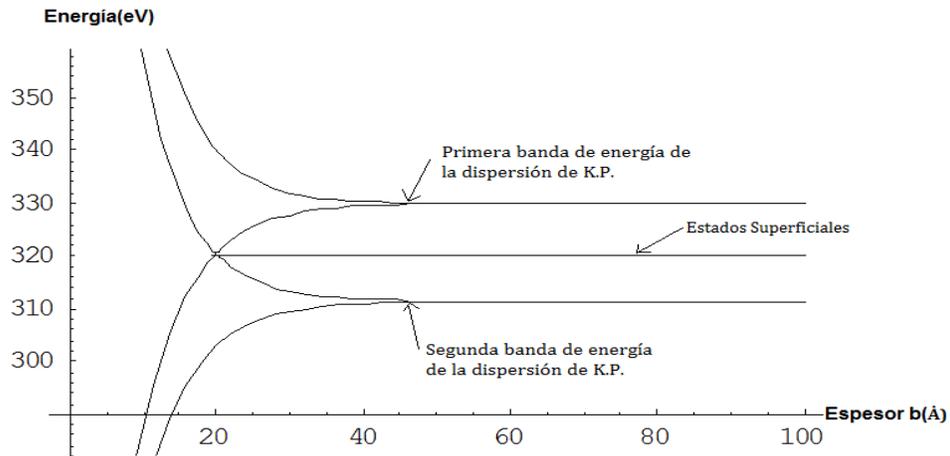


Figura 24. Intervalo de validez

Se muestran los estados superficiales en la figura 25. Se graficaron las dos primeras bandas de energía tal y como están reportadas en la literatura[6]



Parámetros:
 Ancho de barrera
 $a=b=20\text{Å}$
 Masas efectivas
 $m_a=0.067, m_b=0.15$ (unidades masa del electrón)
 Potencial
 $v_b=944\text{meV}$

Figura 25. Estados superficiales

Caso electromagnético

Siguiendo el mismo procedimiento antes visto, en la figura 26 se graficaron las raíces que cumplan la relación de dispersión (ver ec(1.5.3)). Se observa que las dos curvas están muy pegadas por lo cual sólo se aprecia una curva correspondiente a la primera banda de energía.

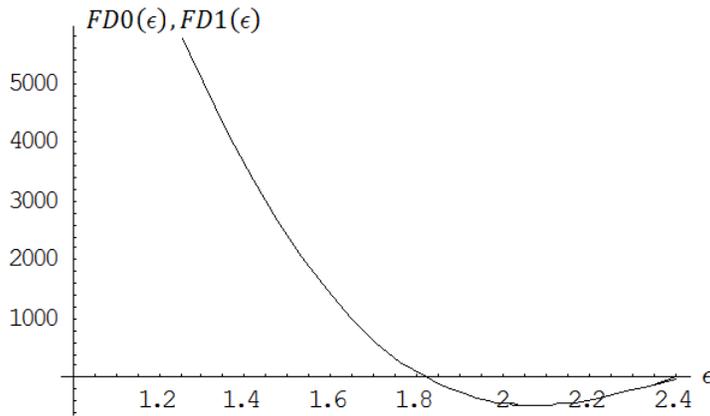


Figura 26. Raíces de $FD0, FD1$

Procedemos a graficar la expresión (1.5.4) para encontrar el momento en que la ecuación antes citada sea igual a cero. Así podremos saber a partir de qué valor tendremos estados superficiales (figura 27).

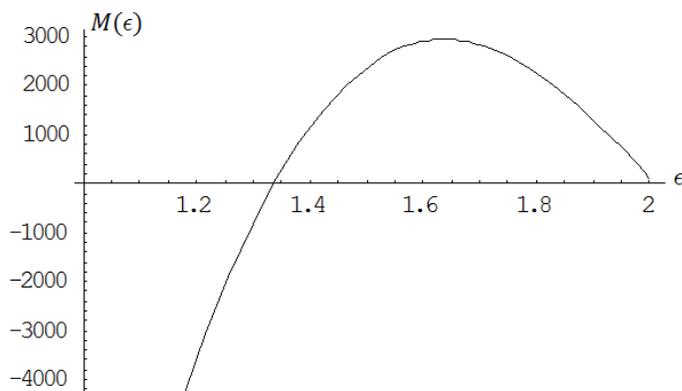


Figura 27. Raíces de la ec de los Estados superficiales

Se presenta la gráfica (figura 28) de L que corresponde a las ecs. (1.5.5) y (1.5.6), que es la condición para la existencia de los estados superficiales. Aquí vemos que cerca de la vecindad donde empiezan a aparecer los estados superficiales se cumple la condición ya que $L < -1$ por lo cual los estados superficiales hallados son válidos.

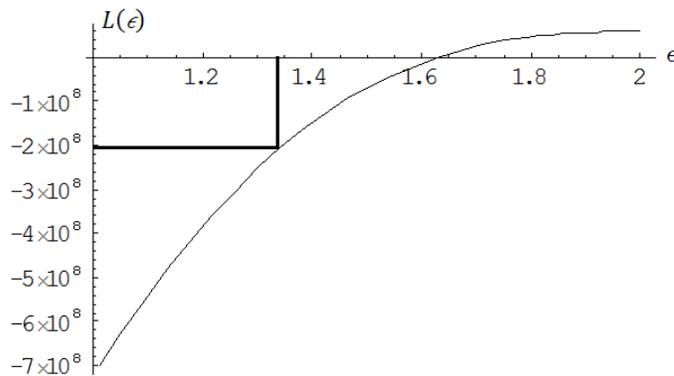


Figura 28. Intervalo de validez

La gráfica de la figura 29 está dispuesta de tal forma que la relación entre las variables es adimensional de tal forma que evitemos trabajar con cantidades pequeñas que dificulten algún tipo de cálculo.

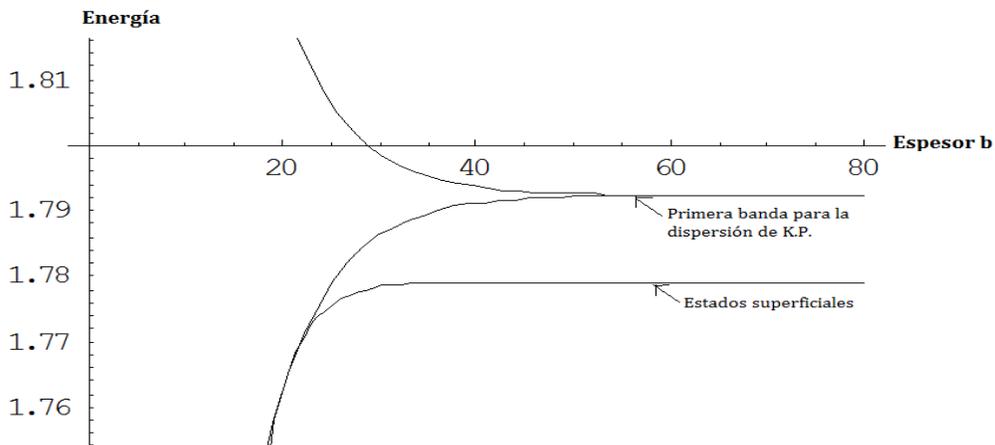


Figura 29. Estados superficiales

Caso acústico

Por último se obtuvieron las raíces de la relación de dispersión (ec (1.5.3)), la cual nos es útil para ubicar la vecindad de los estados superficiales y así saber por dónde están (Figura 30). En este caso estoy considerando el material Oro como el material de mi tercera capa. Trabajo con este material ya que existe en la literatura reporte de obtención de los estados superficiales[7].

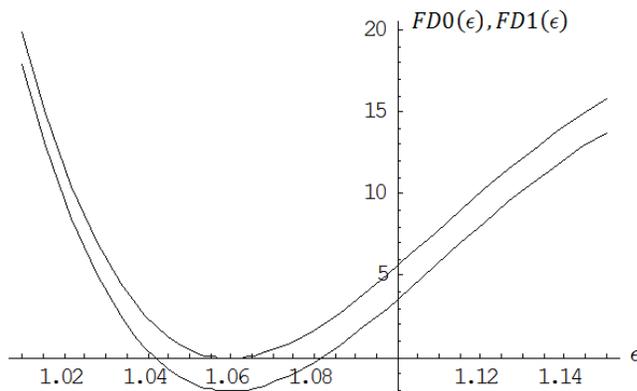


Figura 30. Raíces de $FD0, FD1$

Graficamos la ecuación (1.5.4) en la figura 31. El lugar donde es igual a cero la ecuación es el valor de ϵ que cumple la igualdad, por lo cual nos interesamos en esos puntos. Aquí no sólo hay uno sino varios, pero nos interesa el primero ya que corresponde a la primera banda de energía.

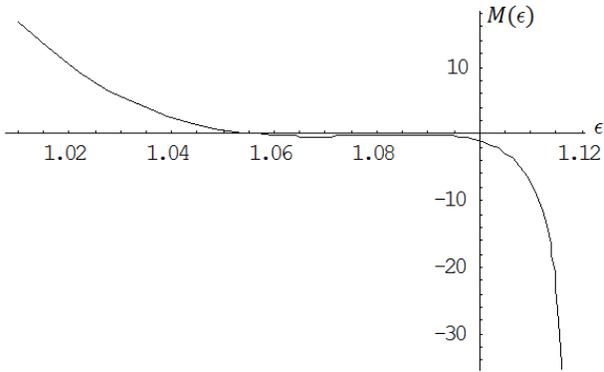


Figura 31. Raíces de la ec de los Estados superficiales

Como ya hemos mencionado se debe cumplir la condición de validez (ecs. (1.5.5) y (1.5.6)) .Para la figura 32 se cumple ,ya que en la vecindad de la raíz donde existen los estados superficiales $L > 1$

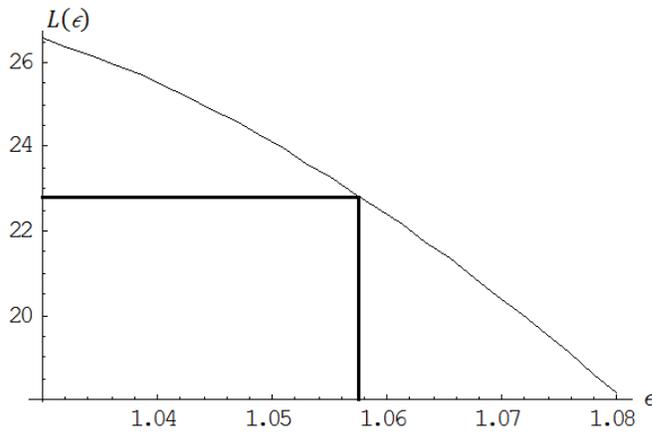


Figura 32. Intervalo de validez

Estos son los resultados para otro material como es el Platino. Es el mismo tipo de análisis. Aquí solo mostraré las gráficas que más nos interesan.

Estados superficiales

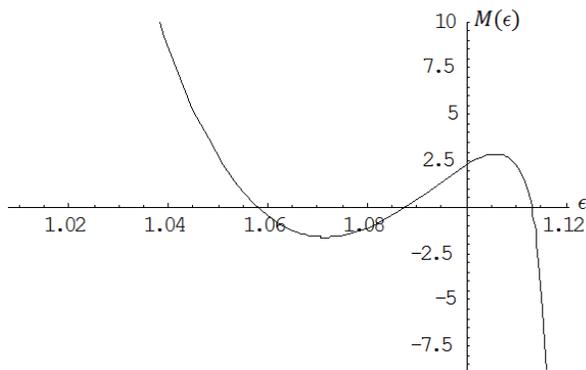


Figura 33. Raíces de la ec de los Estados superficiales

Gráfica para el valor de L. Aquí $L > 1$

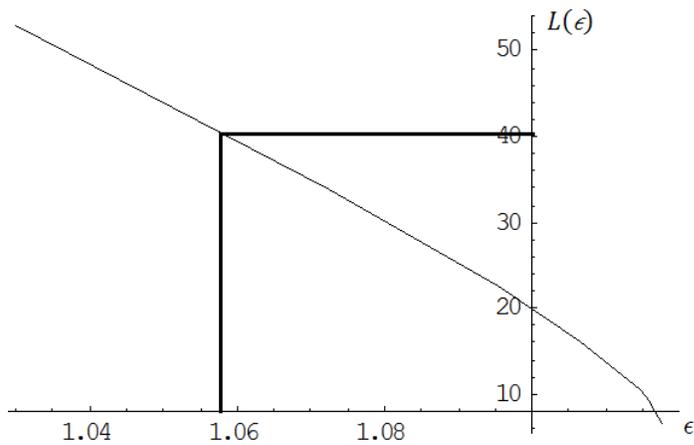


Figura 34. Intervalo de validez

La siguiente gráfica es la correspondiente a los estados superficiales. La gráfica está dispuesta de tal forma que la relación entre las variables es adimensional.

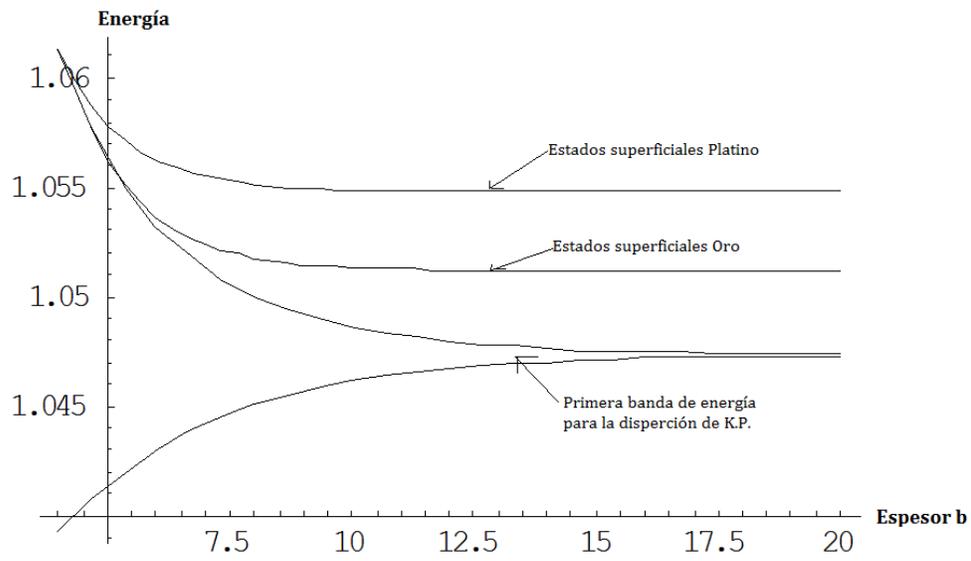


Figura 35 Estados superficiales

6. Capítulo 4

Conclusiones

La relevancia de esta propuesta está en el hecho de mostrar una equivalencia entre tres sistemas físicos en principio muy diferentes pero que siguen un comportamiento similar ante ciertos fenómenos muy particulares

La propuesta es aún más ambiciosa, ya que si se nos presenta un fenómeno en una estructura por más compleja que sea dicha estructura, si logramos obtener algunos resultados bajo una perspectiva (ya sea cuántica, electromagnética o acústica) que nos parezca la más fácil de abordar para su análisis, entonces estaremos en la disposición de trasladar este mismo problema a otra perspectiva con el sólo hecho de saber los valores de la F's. de cada sistema en particular. Esto trae consecuencias muy importantes, ya que esto daría lugar a buscar el comportamiento de un fenómeno en una diversidad de estructuras de base compleja bajo una perspectiva y así predecir el mismo fenómeno bajo otra perspectiva diferente. Incluso abordar otro tipo de fenómenos físicos con sólo darle la "forma" a las ecuaciones que rigen la física en términos de ecuaciones de continuidad y vectores de onda.

Se quiso aterrizar este trabajo mediante un caso particular como es el de los estados localizados y más en particular aún, los estados superficiales.

Se pudo corroborar que las expresiones obtenidas muestran una equivalencia ya que al graficar las soluciones de las ecuaciones para las diferentes perspectivas correspondían con lo esperado; es decir, la existencia de estados superficiales.

Con esto podemos predecir a partir de qué ancho de uno de los materiales que componen la heteroestructura podemos encontrar estados superficiales

Posteriores trabajos podrían realizar experimentos físicos en donde se puedan comprobar las predicciones hechas. A partir de esto se pueden buscar las aplicaciones que se pudieran tener.

7. Bibliografía

- [1] A.Snakowska, Acousto-electromagnetic analogies in diffraction phenomena occurring in the semi-infinite cylindrical waveguide, *Acta Phys. Pol. A* 116(2009) 410-413
- [2] Carcione, J.M. & Robinson, E.A. *Studia Geophysica et Geodaetica* (2002) 46: 321.
- [3] R.de L.Kronig, W.G. Penney, Quantum mechanics of electrons in crystal lattices, *Proc. Roy. Soc. London Series. A* 130(1931) 499-513.
- [4] I. Tamm, *Phys. Z. Sowjet Union* 1, 733, (1932)
- [5] W. L. Bloss, *Phys. Rev. B*, 44-15, 8035, (1991)
- [6] R.Kucharczyk, M.Steslicka. Electronic surface states in superlattice with complex basis.
- [7] G.J.Vázquez Fonseca, S.Tejada, F.Roa *Surface Elastic Waves of Semi-infinite Superlattice.*
- [8] F. Fortsmann and H. Stenschke, *Phys. Rev. Lett.* 38, 1365, (1977); *Phys. Rev. B* 17, 1489, (1978)

Otras obras consultadas

- [9] John P. McKelvey, *Física del Estado Sólido y de Semiconductores*, Editorial Limusa, México, 1996.
- [10] Neil W. Ashcroft, N. David Mermin, *Solid State Physics*, Saunders College, Philadelphia, 1976. p. 29, 35, 133, 16.
- [11] Charles Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, John Willey & Sons, New York, 1996, p. 180, 185, 177, 174.
- [12] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, Second Edition, John Wiley & Sons, New York, 1975.

8. Apéndices

Apéndice A

Fórmulas para el cálculo numérico caso Cuántico.

Para el caso cuántico las expresiones las dividimos entre 2 rydberg lo cual hace que la constante de Planck y las anchuras de las capas dadas en angstroms no aparezcan en la ecuación.

Sabemos que la energía de 2 Rydberg está dada por

$$E_h = \frac{\hbar^2}{m_e a_0^2} = 2R_y \quad (5.2.1)$$

Las ecs. (1.2.9),(1.2.10) las podemos normalizar de la siguiente forma

$$\frac{(a_0 k)^2}{m} = \frac{\epsilon}{\frac{\hbar^2}{2m_e a_0^2}} = \frac{2\epsilon}{\frac{\hbar^2}{m_e a_0^2}} = 2 \epsilon'' \quad (5.2.2)$$

Con lo anterior podemos ver que coincide con la normalización de Hartree que es muy utilizada en este tipo de análisis

$$\epsilon'' = \frac{\epsilon}{\frac{\hbar^2}{m_e a_0^2}} \quad (5.2.3)$$

Trabajando los siguientes valores de k's

$$K_a = \sqrt{m_a} \sqrt{\epsilon}$$

$$K_b = \sqrt{m_b} \sqrt{(V_b - \epsilon)}$$

$$K_s = \sqrt{m_s} \sqrt{(V_s - \epsilon)} \quad (5.2.4)$$

Obtenemos las F 's que utilizaremos en nuestra ecuación general serán:

$$\begin{aligned} F_a &= \frac{K_a}{m_a} \\ F_b &= \frac{K_b}{m_b} \\ F_s &= \frac{K_s}{m_s} \end{aligned} \tag{5.2.5}$$

Apéndice B

Fórmulas para el cálculo numérico caso electromagnético.

Tomando para éste problema el modelo de Forstmann [8] que propone una

$$\begin{aligned} \mu &= 1 \\ \nu &= \beta^2 / \omega_p^2 \end{aligned} \tag{5.2.6}$$

para el caso electromagnético, donde

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi n e^2}{m} \tag{5.2.7}$$

y

$$\beta^2 = \frac{2\gamma}{5m} E_F = \frac{\gamma}{5} v_F^2 = \frac{\gamma}{5} \left(\frac{\hbar k_F}{m} \right)^2 = \frac{\gamma}{5} \frac{\hbar^2}{m^2} k_F^2 = \frac{\gamma}{5} \frac{\hbar^2}{m^2} (3\pi^2 n)^{2/3} \tag{5.2.8}$$

siendo “ m ” la masa efectiva de un electrón y “ n ” la densidad de portadores libres en la región a considerar. “ E_F ”, “ v_F ” y “ k_F ” son la energía, la velocidad y el vector de onda de Fermi. “ \hbar ” es la constante de Planck dividida entre 2π y

$$\gamma = \frac{h+2}{h} \tag{5.2.9}$$

donde “h” es la dimensionalidad, es decir; para 1-Dimensión vale 1, 2-

Dimensiones vale 2 y 3-Dimensiones vale 3

Sustituyendo estos valores en la ecs. (1.3.15), (1.3.19) y considerando los siguientes valores de las k’s

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\omega^2 - 1} & K_a &= Tr \\ f_i &= \sqrt{\omega^2 - F^2} & K_b &= \frac{Tf_i}{F^{2/3}} \\ g_i &= \sqrt{\omega^2 - G^2} & K_s &= \frac{Tg_i}{G^{2/3}} \end{aligned} \tag{5.2.10}$$

Con esto tenemos que la F’s quedan de la forma:

$$\begin{aligned} F_a &= K_a = rT \\ F_b &= \frac{K_b}{F^{2/3}} = \frac{Tf_i}{F^{4/3}} \\ F_s &= \frac{K_s}{G^{2/3}} = \frac{Tg_i}{G^{4/3}} \end{aligned} \tag{5.2.11}$$

Apéndice C

Fórmulas para el cálculo numérico caso acústico

Aquí la forma más sencilla de hacer adimensional las dos ecuaciones (1.4.31) y (1.4.35), es dividir las densidades por la densidad del medio α y las velocidades por la velocidad del sonido del medio α .

Si empleamos

$$\omega' = \frac{\omega \alpha}{c_{\alpha}} \tag{5.3.1}$$

$$\begin{aligned}
K'_a &= \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{KC_a^2}} & a' &= K_x a & C'_a &= \frac{C_a}{C_a} = 1 & \rho'_a &= \frac{\rho_a}{\rho_a} = 1 \\
K'_b &= \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{K_x^2 C_b'^2}} & b' &= K_x b & C'_b &= \frac{C_b}{C_a} & \rho'_b &= \frac{\rho_b}{\rho_a} \\
K'_c &= \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{K_x^2 C_c'^2}} & c' &= K_x c & C'_c &= \frac{C_c}{C_a} & \rho'_c &= \frac{\rho_c}{\rho_a}
\end{aligned} \tag{5.3.2}$$

Así, las F 's que pondremos en la ecuación general quedan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
F_a &= K'_a \\
F_b &= K'_b \rho'_b C'_b \\
F_c &= K'_c \rho'_c C'_c
\end{aligned} \tag{5.3.3}$$

Apéndice D

Modelo Hidrodinámico

El modelo hidrodinámico ha sido utilizado frecuentemente para estudiar diversas propiedades físicas de los sistemas conductores, tales como la no-localidad de la respuesta electromagnética de un gas de electrones y el acoplamiento de los plasmones con las ondas transversales en sistemas no homogéneos. Este modelo no toma en cuenta las excitaciones electrón-hueco, pero describe adecuadamente la excitación de ondas electromagnéticas longitudinales.

Funciones dieléctricas y relaciones de dispersión

El modelo hidrodinámico es una manera simple de incluir la dispersión espacial en la función dieléctrica. De la misma manera que en el modelo de Drude no se toma en cuenta la interacción entre iones y electrones. En la ecuación de movimiento de los electrones se considera un término de presión

$$m \frac{d}{dt} \mathbf{v} = e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) - \frac{m}{\tau} \mathbf{v} - \frac{\nabla \mathbf{p}}{n} \quad (5.5.1)$$

donde τ es el tiempo promedio entre colisiones o tiempo de relajación, $\nabla \mathbf{p}/n$ es la fuerza sobre la partícula y n es la densidad de partículas.

Se puede expresar a $\nabla \mathbf{p}$ como

$$\nabla \mathbf{p} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial n} \nabla n. \quad (5.5.2)$$

Se define

$$\beta^2 = \frac{1}{m} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial n} \quad (5.5.3)$$

como la velocidad característica relacionada a la velocidad aleatoria de la partícula, por lo que

$$\nabla \mathbf{p} = m \beta^2 \nabla n. \quad (5.5.4)$$

Si se usa la ecuación de continuidad en la forma de conservación del número de partículas

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{v}) = 0 \quad (5.5.5)$$

y definimos n_0 como la densidad de partículas en equilibrio, entonces en el término $\nabla \mathbf{p}/n$ de la ec. (5.5.1) hacemos que $n = n_0$ para poder linealizarla. Por otro lado, si consideramos en el término $\nabla \cdot (n\mathbf{v})$ de la ec. (5.5.5) que

$$n = n_0 + n' e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}$$
(5.5.6)

se tendría

$$-i\omega n' e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} + in_0 \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_0 e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} = 0,$$

$$-i\omega n' + in_0 \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_0 = 0,$$

$$in_0 \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_0 = i\omega n',$$

$$n' = \frac{n_0 \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_0}{\omega}.$$
(5.5.7)

Entonces, la ec. (5.5.1) se puede escribir como

$$m \frac{d}{dt} \mathbf{v} = e\mathbf{E} + e \left(\frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) - \frac{m}{\tau} \mathbf{v} - \frac{m\beta^2}{n_0} \nabla \frac{n_0 \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}}{\omega}$$
(5.5.8)

despreciando el término magnético

$$-im\omega \mathbf{v} = e\mathbf{E} - \frac{m}{\tau} \mathbf{v} - \frac{im\beta^2 \mathbf{q}(\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})}{\omega},$$

$$\frac{m}{\tau} \mathbf{v} + \frac{im\beta^2 \mathbf{q}(\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})}{\omega} - im\omega \mathbf{v} = e\mathbf{E}.$$
(5.5.9)

Como \mathbf{v} y \mathbf{E} son vectores se escriben en términos de sus componentes transversales y longitudinales, $\mathbf{v} = \mathbf{v}^t + \mathbf{v}^l$ y $\mathbf{E} = \mathbf{E}^t + \mathbf{E}^l$. Por lo que

$$\frac{m}{\tau}(\mathbf{v}^t + \mathbf{v}^l) + \frac{im\beta^2 \mathbf{q}(\mathbf{q} \cdot (\mathbf{v}^t + \mathbf{v}^l))}{\omega} - im\omega(\mathbf{v}^t + \mathbf{v}^l) = e(\mathbf{E}^t + \mathbf{E}^l). \quad (5.5.10)$$

Separando explícitamente las componentes transversal y longitudinal se tiene que

$$\frac{m}{\tau} \mathbf{v}^t + \frac{im\beta^2 \mathbf{q}(\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}^t)}{\omega} - im\omega \mathbf{v}^t = e\mathbf{E}^t, \quad (5.5.11)$$

$$\frac{m}{\tau} \mathbf{v}^l + \frac{im\beta^2 \mathbf{q}(\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}^l)}{\omega} - im\omega \mathbf{v}^l = e\mathbf{E}^l. \quad (5.5.12)$$

Por definición

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}^t = 0, \quad \mathbf{q} \times \mathbf{v}^l = 0 \quad (5.5.13)$$

Para la componente transversal se usa la ec. (5.5.13) en la ec. (5.5.11) y se obtiene

$$\frac{m}{\tau} \mathbf{v}^t - im\omega \mathbf{v}^t = e\mathbf{E}^t,$$

$$m\mathbf{v}^t \left(\frac{1}{\tau} - i\omega \right) = e\mathbf{E}^t. \quad (5.5.14)$$

Por lo que la velocidad transversal es

$$\mathbf{v}^t = \frac{e}{m\left(\frac{1}{\tau} - i\omega\right)} \mathbf{E}^t. \quad (5.5.15)$$

Si se usa la ec. (5.5.13) en la ec. (5.5.12) la componente longitudinal queda

$$m\left(\frac{1}{\tau} \mathbf{v}^l + \frac{i\beta^2 \mathbf{v}^l}{\omega} \mathbf{q}^2 - i\omega \mathbf{v}^l\right) = e\mathbf{E}^l,$$

$$m\mathbf{v}^l\left(\frac{1}{\tau} + \frac{i\beta^2}{\omega} \mathbf{q}^2 - i\omega\right) = e\mathbf{E}^l, \quad (5.5.16)$$

por lo que la velocidad longitudinal es

$$\mathbf{v}^l = \frac{e}{m\left(\frac{1}{\tau} + \frac{i\beta^2}{\omega} \mathbf{q}^2 - i\omega\right)} \mathbf{E}^l. \quad (5.5.17)$$

Como la densidad de corriente es $\mathbf{J} = nev$, con la ec. (5.5.15) y la ec. (5.5.17), las densidades de corriente transversal y longitudinal son

$$\mathbf{J}^t = \sigma^t \mathbf{E}^t = \frac{ne^2}{m\left(\frac{1}{\tau} - i\omega\right)} \mathbf{E}^t,$$

$$\mathbf{J}^l = \sigma^l \mathbf{E}^l = \frac{ne^2}{m\left(\frac{1}{\tau} + \frac{i\beta^2}{\omega} \mathbf{q}^2 - i\omega\right)} \mathbf{E}^l \quad (5.5.18)$$

y las conductividades transversal y longitudinal son

$$\sigma^t(\mathbf{q}, \omega) = \frac{inq^2}{m\left(\omega + \frac{i}{\tau}\right)}, \quad (5.5.19)$$

$$\sigma^l(\mathbf{q}, \omega) = \frac{i\omega ne^2}{m\left(\frac{i\omega}{\tau} - \beta^2 \mathbf{q}^2 + \omega^2\right)}. \quad (5.5.20)$$

Se puede expresar la función dieléctrica como $\epsilon(\mathbf{q}, \omega) = 1 + (4\pi i/\omega)\sigma(\mathbf{q}, \omega)$, que con la ec. (5.5.19) y la ec. (5.5.20), permite obtener

$$\epsilon^t(\mathbf{q}, \omega) = 1 - \frac{4\pi ne^2}{m\left(\frac{i\omega}{\tau} + \omega^2\right)},$$

$$\epsilon^l(\mathbf{q}, \omega) = 1 - \frac{4\pi ne^2}{m\left(\frac{i\omega}{\tau} - \beta^2 \mathbf{q}^2 + \omega^2\right)}. \quad (5.5.21)$$

Si $\omega_p^2 = 4\pi ne^2/m$ es la frecuencia de plasma, entonces

$$\epsilon^t(\mathbf{q}, \omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\frac{i\omega}{\tau} + \omega^2}, \quad (5.5.22)$$

$$\varepsilon^l(\mathbf{q}, \omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\frac{i\omega}{\tau} - \beta^2 \mathbf{q}^2 + \omega^2} \quad (5.5.23)$$

que es una función dieléctrica que depende de \mathbf{q} por lo que es una función no-local. Si se emplea la ec. (5.5.13) y la ec. (5.5.22) con $\tau \gg 1$, la relación de dispersión para la componente transversal del modelo hidrodinámico es

$$\omega^2 = c^2 \mathbf{q}^2 + \omega_p^2, \quad (5.5.24)$$

que es igual a la del modelo Drude, . Si se emplea la ec. (5.5.12) y la ec. (5.5.23) con $\tau \gg 1$, la relación de dispersión para ondas longitudinales es

$$\omega^2 = \beta^2 \mathbf{q}^2 + \omega_p^2. \quad (5.5.25)$$

Apéndice E

6.1 Simulación de los estados superficiales caso cuántico

a=37.7945375;

b2=37.7945375;

v_b=0.0693821;

v_s=0.0693821;

b4=1.889726b

$$\text{kap}[\epsilon_]:= \sqrt{0.067} \sqrt{\epsilon}$$

$$\text{kb}[\epsilon_]:= \sqrt{0.15} \sqrt{(v_b - \epsilon)}$$

$$\text{ks}[\epsilon_]:= \sqrt{0.15} \sqrt{(v_s - \epsilon)}$$

$$\text{Fa}[\epsilon_]:= \text{kap}[\epsilon]/0.067$$

$$\text{Fb}[\epsilon_]:= \text{kb}[\epsilon]/0.15$$

$$\text{Fs}[\epsilon_]:= \text{ks}[\epsilon]/0.15$$

(*+++++
+++++*)

$$(\text{B2}[\epsilon_]:= \text{Cos}[\text{kap}[\epsilon] a] \text{Cosh}[\text{kb}[\epsilon] b_2] + 0.5(1/\text{K}[\epsilon] - \text{K}[\epsilon]) \text{Sin}[\text{kap}[\epsilon] a] \text{Sinh}[\text{kb}[\epsilon] b_2]$$

$$\text{B4}[\epsilon_]:= \text{Cos}[\text{kap}[\epsilon] a] \text{Cosh}[\text{kb}[\epsilon] b_4] + 0.5(1/\text{K}[\epsilon] - \text{K}[\epsilon]) \text{Sin}[\text{kap}[\epsilon] a] \text{Sinh}[\text{kb}[\epsilon] b_4] *)$$

(*+++++
+++++*)

$$\text{B2}[\epsilon_]:= \text{Cos}[\text{kap}[\epsilon] a] \text{Cosh}[\text{kb}[\epsilon] b_2] + 0.5(\text{Fb}[\epsilon]/\text{Fa}[\epsilon] - \text{Fa}[\epsilon]/\text{Fb}[\epsilon]) \text{Sin}[\text{kap}[\epsilon] a] \text{Sinh}[\text{kb}[\epsilon] b_2]$$

$$\text{B4}[\epsilon_]:= \text{Cos}[\text{kap}[\epsilon] a] \text{Cosh}[\text{kb}[\epsilon] b_4] + 0.5(\text{Fb}[\epsilon]/\text{Fa}[\epsilon] - \text{Fa}[\epsilon]/\text{Fb}[\epsilon]) \text{Sin}[\text{kap}[\epsilon] a] \text{Sinh}[\text{kb}[\epsilon] b_4]$$

$$\text{FD0}[\epsilon_]:= 2 \text{B2}[\epsilon] \text{B4}[\epsilon] - \text{Cosh}[\text{kb}[\epsilon] (b_4 - b_2)] - 1$$

$$\text{FD1}[\epsilon_]:= 2 \text{B2}[\epsilon] \text{B4}[\epsilon] - \text{Cosh}[\text{kb}[\epsilon] (b_4 - b_2)] + 1$$

$$\begin{aligned} \text{M}[\epsilon_]:= & 2\text{B2}[\epsilon] ((\text{Fs}[\epsilon]/\text{Fa}[\epsilon] + \text{Fa}[\epsilon]/\text{Fs}[\epsilon]) \text{Sin}[\text{kap}[\epsilon] a] \text{Cosh}[\text{kb}[\epsilon] b_4] + (\text{Fs}[\epsilon]/\text{Fb}[\epsilon] - \text{Fb}[\epsilon]/\text{Fs}[\epsilon]) \text{Cos}[\text{kap}[\epsilon] a] \\ & \text{Sinh}[\text{kb}[\epsilon] b_4] - (\text{Fb}[\epsilon]/\text{Fa}[\epsilon] + \text{Fa}[\epsilon]/\text{Fb}[\epsilon]) \text{Sin}[\text{kap}[\epsilon] a] \text{Sinh}[\text{kb}[\epsilon] b_4]) + \\ & (\text{Fs}[\epsilon]/\text{Fb}[\epsilon] - \text{Fb}[\epsilon]/\text{Fs}[\epsilon]) \text{Sinh}[\text{kb}[\epsilon] (b_2 - b_4)] \end{aligned}$$

$$\text{m}[\epsilon_]:= \text{FindRoot}[\text{FD0}[\epsilon]==0, \{\epsilon, 0.011, 0.01, 0.025\}]$$

$$\text{n}[\epsilon_]:= \text{FindRoot}[\text{FD1}[\epsilon]==0, \{\epsilon, 0.011, 0.01, 0.025\}]$$

$$\text{z}[\epsilon_]:= \text{FindRoot}[\text{w}[\epsilon]==\text{y}[\epsilon], \{\epsilon, 0.0236, 0.0235, 0.03\}]$$

```

m1[ε_] := FindRoot[FD0[ε] == 0, {ε, 0.028, 0.020, 0.034}]
n1[ε_] := FindRoot[FD1[ε] == 0, {ε, 0.028, 0.020, 0.034}]
s[ε_] := FindRoot[M[ε] == 0, {ε, 0.021, 0.02, 0.03}]

tt = { 13606.8 ε /. N[m[ε]], 13606.8
ε /. N[n[ε]], 13606.8 ε /. N[s[ε]], 13606.8 ε /. N[m1[ε]], 13606.8
ε /. N[n1[ε]]};
pp = Plot[Evaluate[tt], {b, 1, 100}];
Clear[tt, pp];

```

6.2 Simulación de los estados superficiales caso electromagnético

na = 34.527 10⁻⁹;

F = 4;

G = 6.;

a = 3;

b2 = 5;

h = 3;

γ = (h + 2) / h;

$$T = \sqrt{\frac{20 (na)^{1/3}}{\gamma (9\pi)^{1/3}}};$$

$$r[\epsilon] := \sqrt{\epsilon^2 - 1}$$

$$fi[\epsilon] := \sqrt{F^2 - \epsilon^2}$$

$$gi[\epsilon] := \sqrt{G^2 - \epsilon^2}$$

$$Fa[\epsilon] := T r[\epsilon]$$

$$Fb[\epsilon] := 1/F^{4/3} T fi[\epsilon]$$

$$Fs[\epsilon] := 1/G^{4/3} T gi[\epsilon]$$

$$B2[\epsilon] := \cos[T r[\epsilon] a] \cosh[1/F^{2/3} T fi[\epsilon] b2] + 1/2 \sin[T r[\epsilon] a] \sinh[1/F^{2/3} T fi[\epsilon] b2] (Fb[\epsilon]/Fa[\epsilon] - Fa[\epsilon]/Fb[\epsilon])$$

$$B4[\epsilon] := \cos[T r[\epsilon] a] \cosh[1/F^{2/3} T fi[\epsilon] b4] + 1/2 \sin[T r[\epsilon] a] \sinh[1/F^{2/3} T fi[\epsilon] b4] (Fb[\epsilon]/Fa[\epsilon] - Fa[\epsilon]/Fb[\epsilon])$$

```
f0[ε_] := 2 B2[ε] B4[ε] - Cosh [ 1/F2/3 T fi[ε] (b4-b2) ]
```

```
M[ε_] := 2B2[ε] ((Fs[ε]/Fa[ε] + Fa[ε]/Fs[ε]) Sin[T r[ε]
a] Cosh[1/F2/3 T fi[ε] b4] + (Fs[ε]/Fb[ε] - Fb[ε]/Fs[ε]) Cos[T
r[ε] a] Sinh[1/F2/3 T fi[ε] b4] - (Fb[ε]/Fa[ε] +
Fa[ε]/Fb[ε]) Sin[T r[ε] a] Sinh[1/F2/3 T fi[ε] b4]) +
(Fs[ε]/Fb[ε] - Fb[ε]/Fs[ε]) Sinh[1/F2/3 T fi[ε] (b2-b4)]
```

```
m[ε_] := FindRoot[f0[ε] == 1, {ε, 1.011, 1.01, 2.4}]
c[ε_] := FindRoot[f0[ε] == -1, {ε, 1.011, 1.01, 2.4}]
z1[ε_] := FindRoot[M[ε] == 0, {ε, 1.011, 1.01, 2}]
Do[
  t = {ε/.N[m[ε]], ε/.N[c[ε]], ε/.N[z1[ε]]};
  pp = Plot[Evaluate[t], {b4, 5, 80}];
  Clear[t, pp];
  Print["-----"];
  , {k, 4}];
```

6.3 Simulación estados superficiales caso acústico

```
b2=4;
```

```
(*b4=b2*)
```

```
ρb=2.69/19.3;
```

```
cb=3.22/2.88;
```

```
ρpt=21.5/19.3;
```

```
ρau=19.5/19.3;
```

```
cpt=1.88/2.88;
```

```
cau=1.47/2.88;
```

```
kx=1;
```

```
(*kb[ε_] := Sqrt[ε^2/cb^2 - kx^2]
```

```
ka[ε_] := Sqrt[(ε^2) - (kx^2) ]
```

$$(*ka[\epsilon_] := Sqrt[kx^2 - \epsilon^2] *)$$

$$ks[\epsilon_] := Sqrt[\epsilon^2 / cpt^2 - kx^2]$$

$$kau[\omega_] := Sqrt[\omega^2 / cau^2 - kx^2] *)$$

$$kb[\epsilon_] := \sqrt{kx^2 - \frac{\epsilon^2}{cb^2}}$$

$$ka[\epsilon_] := \sqrt{\epsilon^2 - kx^2}$$

$$(*ka[\epsilon_] := Sqrt[kx^2 - \epsilon^2] *)$$

$$ks[\epsilon_] := \sqrt{kx^2 - \frac{\epsilon^2}{cpt^2}}$$

$$kau[\omega_] := \sqrt{kx^2 - \frac{\epsilon^2}{cau^2}}$$

$$Fa[\epsilon_] := ka[\epsilon]$$

$$Fb[\epsilon_] := kb[\epsilon] \rho b \ cb^2$$

$$Fs[\epsilon_] := kb[\epsilon] \rho pt \ cpt^2$$

$$Fsau[\epsilon_] := kb[\epsilon] \rho au \ cau^2$$

$$fce[\omega_] := Cos[ka[\omega]] Cosh[kb[\omega] \ b2] + 1/2 Sin[ka[\omega]] \\ Sinh[kb[\omega] \ b2] \ (- (ka[\omega] / (kb[\omega] \ \rho b \ cb^2)) + (kb[\omega] \ \rho b \\ cb^2) / ka[\omega])$$

$$B2[\epsilon_] := Cos[ka[\epsilon]] Cosh[kb[\epsilon] \ b2] + 1/2 Sin[ka[\epsilon]]$$

$$Sinh[kb[\epsilon] \ b2] \ (Fb[\epsilon] / Fa[\epsilon] - Fa[\epsilon] / Fb[\epsilon])$$

$$B4[\epsilon_] := Cos[ka[\epsilon]] Cosh[kb[\epsilon] \ b4] + 1/2 Sin[ka[\epsilon]]$$

$$Sinh[kb[\epsilon] \ b4] \ (Fb[\epsilon] / Fa[\epsilon] - Fa[\epsilon] / Fb[\epsilon])$$

$$f0[\epsilon_] := 2 \ B2[\epsilon] \ B4[\epsilon] - Cosh[kb[\epsilon] \ (b4 - b2)]$$

$$M[\epsilon_] := 2B2[\epsilon] \ ((Fs[\epsilon] / Fa[\epsilon] + Fa[\epsilon] / Fs[\epsilon]) Sin[ka[\epsilon]] \\) Cosh[kb[\epsilon] \ b4] + (Fs[\epsilon] / Fb[\epsilon] - Fb[\epsilon] / Fs[\epsilon]) Cos[ka[\epsilon]] \\ Sinh[kb[\epsilon] \ b4] - (Fb[\epsilon] / Fa[\epsilon] + Fa[\epsilon] / Fb[\epsilon]) Sin[ka[\epsilon]] \\) Sinh[kb[\epsilon] \ b4] +$$

```

(Fs[ε]/Fb[ε]-Fb[ε]/Fs[ε]) Sinh[kb[ε] (b2-b4)]

Mau[ε_] := 2B2[ε] ((Fsau[ε]/Fa[ε]+ Fa[ε]/Fsau[ε]) Sin[ka[ε]
] Cosh[kb[ε]b4]+ (Fsau[ε]/Fb[ε]-Fb[ε]/Fsau[ε]) Cos[ka[ε]
] Sinh[kb[ε]b4]- (Fb[ε]/Fa[ε]+ Fa[ε]/Fb[ε]) Sin[ka[ε]
] Sinh[kb[ε]b4]) +
(Fsau[ε]/Fb[ε]-Fb[ε]/Fsau[ε]) Sinh[kb[ε] (b2-b4)]

zau[ε_] := FindRoot[Mau[ε]==0, {ε, 1.021, 1.02, 1.08}]
zpt[ε_] := FindRoot[M[ε]==0, {ε, 1.021, 1.02, 1.08}]
kp1[ε_] := FindRoot[f0[ε]==-1, {ε, 1.021, 1.02, 1.08}]
kp2[ε_] := FindRoot[f0[ε]==1, {ε, 1.021, 1.02, 1.08}]

t1={ε/.N[zpt[ε]], ε/.N[zau[ε]], ε/.N[kp1[ε]], ε/.N[kp2[ε]]};
p1=Plot[Evaluate[t1], {b4, 4, 20}];

```