



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

RESPUESTA NO LINEAL DE
DEPOSITOS DE SUELO

TESIS PROFESIONAL

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

INGENIERO CIVIL

P R E S E N T A:

ARMANDO BARCENA VEGA

FALLA DE CRGEN

México D.F.

1989



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

CAPITULO I INTRODUCCION	1
I.1 OBJETIVO	1
I.2 GENERALIDADES	3
I.3 ESTUDIOS CORRELATIVOS AL TEMA	6
I.4 ALCANSES	8
CAPITULO II METODOS ANALITICOS Y PROCEDIMIENTOS NUMERICOS	9
II.1 GENERALIDADES	9
II.2 METODOS ANALITICOS	10
II.2.1 SISTEMA ELASTICO	10
II.2.1.1 Hipótesis	10
II.2.1.1 Ecuaciones de movimiento	10
II.2.1.3 Ecuaciones de onda	15
II.2.1.4 Observaciones al método	17
II.2.2 SISTEMA MASA-RESORTE-AMORTIGUADOR	18
II.2.2.1 Hipótesis	18
II.2.2.2 Idealización del medio	18
II.2.2.3 Ecuaciones de movimiento	19
II.2.2.4 Vibración libre amortiguada	20
II.2.2.5 Integral de Duhamel	23
II.2.2.6 Espectro de respuesta	24
II.2.2.7 Coeficiente de amortiguamiento	25
II.2.2.8 Coeficiente de rigidez del suelo	26
A) Desplazamientos verticales (planos horizontales)	28
B) Desplazamientos horizontales (planos horizontales)	29
C) Rotaciones de planos horizontales respecto a los ejes x, y, z	30
II.2.2.9 Masa equivalente	30
A) Masa equivalente (desplazamientos verticales)	30
B) Masa equivalente (rotaciones)	32

II.3	PROCEDIMIENTOS NUMERICOS	34
II.3.1	METODO LINEAL EQUIVALENTE	34
II.3.1.1	Hipótesis	34
II.3.1.2	Ecuación unidimensional de onda	34
II.3.1.3	Solución de la ecuación unidimensional de onda	36
II.3.1.4	Aplicación de la ecuación de onda al sistema físico	38
II.3.1.5	Transformada de Fourier	41
II.3.2	METODO NO LINEAL	43
II.3.2.1	Hipótesis	43
II.3.2.2	Ecuación de movimiento para el sistema discreto	43
II.3.2.3	Oscilador libre no amortiguado	46
II.3.2.4	Método de inercia cúbica	47
II.3.2.5	Aplicación del método de inercia cúbica al oscilador libre no amortiguado	48
II.3.2.6	Formulación implícita del método de inercia cúbica en el método del elemento finito para el problema del oscilador amortiguado en vibración forzada con múltiples grados de libertad	51
II.4	MODELOS DEL COMPORTAMIENTO DINAMICO DE LOS SUELOS	68
II.4.1	Criterio de Masing	68
II.4.2	Modelo empírico de Seed e Idriss	70
II.4.3	Modelo hiperbólico de Hardin-Drnevich	72
II.4.4	Modelo de Ramberg-Osgood	73
II.4.5	Modelo de Davidenkov	75
CAAPITULO III EFECTO DEL COMPORTAMIENTO NO LINEAL DEL SUELO EN LA RESPUESTA DE DEPOSITOS		78
III.1	CONCEPTO FISICO DEL ESPECTRO DE RESPUESTA	78
III.2	COMPORTAMIENTO NO LINEAL DEL SUELO	79
III.3	DISCUSION DEL MODELO DE LOS MATERIALES USADO EN LOS ANALISIS	82
III.4	ESTRATIGRAFIA DEL DEPOSITO ANALIZADO	84
III.5	RESULTADOS OBTENIDOS	90

CAPITULO IV COMPARACIONES CON EL METODO LINEAL EQUIVALENTE	101
IV.1 COMPARACIONES CON EL METODO LINEAL EQUIVALENTE	101
IV.2 EFECTO DEL INTERVALO DE DIGITIZACION DE ACELEROGRAMAS EN LA RESPUESTA	107
IV.3 EFECTO DE LA CANTIDAD DE ENERGIA DINAMICA APLICADA A UN DEPOSITO SOBRE SU RESPUESTA	108
CAPITULO V CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	132
ANEXO I: TEORIA DEL ELEMENTO FINITO	135
AI.1 Método de Ritz	137
AI.2 Método de Galerkin	138
AI.3 Interpolación lagrangiana	140
AI.4 Interpolación hermitiana	141
ANEXO II: UNA MEDIDA DE INTENSIDAD SISMICA	144
REFERENCIAS	150

CAPITULO I

INTRODUCCION

I.1 OBJETIVO

Los movimientos ocurridos el 19 y 20 de septiembre de 1985 en la ciudad de México, han mostrado la impotencia en que se encuentra la humanidad para prevenir y defenderse de los fenómenos naturales de un mundo en constante evolución. Ante tal impotencia, la inteligencia y recursos humanos no son suficientes para gobernar o modificar las leyes de la naturaleza, pero si es capaz de entenderlas ó en último de los casos adaptarse lo mejor posible para preveer sus consecuencias.

La evidencia de los hechos históricos sismológicos, muestran que México se encuentra en una zona de gran actividad sísmica [Esteva y Rascón, 1985] en la que los terremotos son frecuentes, pero en el presente siglo no había ocurrido un evento tan impactante como el de 1985, que ha sido calificado como excepcional.

A partir de 1957 se han intensificado los estudios tendientes a conocer las características del comportamiento del subsuelo de la ciudad de México [Rosenblueth y Elorduy, 1969 y Rosenblueth, 1957], especialmente en lo que se refiere a la resistencia de las capas que se utilizan para la cimentación de las construcciones, sin embargo a la fecha persisten muchas dudas y preguntas sobre la forma en que se mueve el terreno durante un sismo y la interacción entre el suelo y las estructuras, ya que una gran cantidad de hipótesis que se han planteado no ha sido posible comprobarlas concretamente.

El departamento del distrito federal, en las normas técnicas complementarias para diseño por sismo propone [DDF, 1987] un espectro de diseño generalizado en base a una zonificación del área metropolitana, puesto que los espectros de respuesta proporcionan directamente los valores numéricos máximos de las respuestas de sistemas elásticos lineales de un grado de libertad, lo que es la base para el análisis y diseño de estructuras idealizadas como sistemas de esa naturaleza. Con ésto, se hace la suposición de que cada modo natural de vibración de un sistema lineal de múltiples grados de libertad se comporta como un sistema de uno solo; por ésto los espectros de respuesta proporcionan también las respuestas modales de tales estructuras. Con estas hipótesis se idealizan a las estructuras reales como sistemas elásticos de múltiples grados de libertad en donde se acepta la superposición modal.

Seed y otros investigadores [1946], han promediado los espectros de varios sismos, agrupándolos de acuerdo con las condiciones del sitio y distancia focal. En la figura 1.1 se muestran espectros

típicos de respuesta para el movimiento horizontal en terreno firme, de donde se puede notar que la naturaleza del espectro de diseño para el D.F. es sólo la envolvente de respuestas máximas de un conjunto de espectros dados. Además, el inconveniente que presenta el espectro de diseño propuesto por el DDF, es que la zonificación en que se divide la zona metropolitana del D.F toma en cuenta las propiedades del subsuelo promedios en base a la zonificación del subsuelo de la ciudad (fig 1.2), por lo que no se prevén las condiciones estratigráficas particulares del sitio de interés. Para fines de diseño, tales espectros deben modificarse para tomar en cuenta diversas formas de interacción suelo-estructura [Rosenblueth y Reséndiz, 1988], comportamiento estructural y optimización en el diseño. Sin embargo, en las mismas normas se justifica la importancia de un estudio particular para diseño por sismo, ya que su objetivo es establecer criterios mínimos de seguridad en la infraestructura civil de la zona metropolitana.

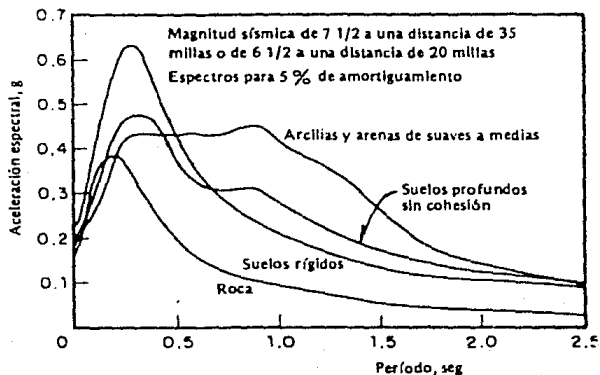


fig. 1.1 Espectros promedio en diferentes tipos de suelo (Seed et al, 1946)

El objetivo central del presente trabajo, es determinar características particulares de estudio sísmico del perfil estratigráfico local en que se desee desplantar alguna estructura con vistas al análisis y diseño sísmico de la misma, proponiendo los espectros de respuesta requeridos para tal tarea. Para llevar a cabo esto, se verifica la potencialidad de diferentes métodos para evaluar el comportamiento no lineal de los suelos en la respuesta de depósitos.

Aunque generalmente los fenómenos sísmicos son originados por diversas causas, tales como:

- colapso de cavernas
- explosiones
- vulcanismo
- erosión
- llenado de presas
- tectonismo

La última de estas es la que consideraremos en nuestro estudio, por ser la causa de mayores efectos en las construcciones de zonas metropolitanas.

1.2 GENERALIDADES

La cuenca del valle de México está conformada por una estructura geomorfológica con un parteaguas cerrado que la define como una cuenca endorreica rodeada por todos lados por cadenas montañosas: al norte por las sierras Nevada, Río Frío y Calpulalpan; al sur por la sierra de Chichinautzin; al suroeste por las sierras de las Cruces y al noroeste por la de Tepozotlan.

Según estudios [Morales, 1985], la cuenca se originó a partir de procesos endógenos por medio de los cuales primeramente se inició un levantamiento regional de los materiales depositados en cuencas oceánicas, y la posterior emisión de enormes volúmenes de materiales volcánicos. Posteriormente con la formación de la cuenca se propició el depósito de materiales sedimentarios y volcánicos en las zonas de pendientes abruptas en áreas lacustres, con lo que esencialmente la estructuración de la estratigrafía del subsuelo fue conformándose horizontalmente, condición muy importante que consideramos en nuestro estudio; aunque en realidad los movimientos tectónicos en la superficie libre son función de numerosos parámetros que dependen de la fuente del sismo, del medio de transmisión y de las condiciones locales del sitio de registro.

Por otra parte, debido a los grandes temblores que asuelan a nuestra capital [Figueroa y Martínez, 1970], la naturaleza sui generis de la arcilla muy deformable del valle de México se manifiesta principalmente, en la enorme amplificación de las ondas que llegan al valle, muy selectiva en función de los periodos dominantes de vibración de cada sitio. Los estudios realizados han relacionado el comportamiento del suelo con la presencia de una capa de arcilla de alta compresibilidad que superyace a un estrato de material limoarenoso compacto, en partes con gravillas y ocasionalmente con cantos rodados que se ha denominado primera capa dura. Esta capa de arcilla presenta grandes fluctuaciones en espesor y en contenido de agua; las arcillas están constituidas por silicatos en forma coloidal con óxidos de aluminio y fierro, y frecuentemente se encuentran asociados con otros materiales como arenas finas y carbonato de calcio en forma de caliche. Diversas investigaciones han establecido que las partículas de material coloidal no tienen una forma específica, pudiendo encontrarse en estado líquido o gelatinoso.

Algunos materiales gelatinosos al ser sometidos a vibraciones pierden su consistencia y se convierten en líquidos [Juárez, 1986], recuperando su estado inicial después de un periodo de reposo, considerando a las arcillas tixotrópicas como ejemplo de ello.

Las partículas de arcilla son susceptibles de atraer agua y conservarla en la gran mayoría de los casos, sin embargo, pueden ser consolidadas cuando son sometidas a compresión y el agua es expulsada de sus poros [Juárez, 1986]. La cantidad de agua que puede contener depende de su porosidad. En general, las arcillas presentan un comportamiento plástico en su estado natural, que aumenta con su contenido de líquidos. Las arcillas duras, que no es el caso de las de la ciudad de México, presentan comportamientos similares a los estratos de roca ígnea y pueden considerarse como cuerpos elásticos continuos.

Por su parte, las arenas tienen poca afinidad con el agua por tener una estructura rígida, por lo que su comportamiento durante la propagación de movimientos vibratorios dependerá básicamente del contenido de líquidos en sus poros [Martín, Finn y Seed, 1975].

Así también, las condiciones geológicas y topográficas tienen gran influencia sobre la trayectoria de las ondas sísmicas. Así por ejemplo en la parte superior de las colinas y montañas se presentan amplificaciones del movimiento en el terreno; así mismo ocurren fenómenos opuestos en las depresiones [Davis y West, 1973], pues en el primer caso la cantidad de ondas reflejadas es mayor que en el otro precisamente por las condiciones topográficas. Realmente una extensión de terreno para la cual los accidentes topográficos no tiene efectos en su movimiento, no se conoce. Sin embargo se ha detectado que los accidentes topográficos no tienen gran influencia cuando la longitud de onda sísmica es grande en relación a las dimensiones topográficas; para los casos en que la longitud de onda es corta (alta frecuencia en el movimiento), los efectos son notables.

No obstante, el nivel de frecuencias está supeditado al tipo de material del medio de transmisión (elástico, viscoso, etc). Así por ejemplo, al llegar una onda plana ascendente a la superficie libre de una formación rocosa, idealizada como un semiespacio homogéneo, la onda se refleja completamente sin cambio de forma. Si un manto blando descansa sobre la roca, sólo parte de las ondas se refleja hacia la roca y el resto se refracta hacia el manto blando, sufriendo una amplificación que depende de las propiedades de ambas formaciones. Esta parte sufre una reflexión completa en la superficie libre del manto blando. Cuando esta onda reflejada llega a la interface suelo-roca, parte de ella se refracta hacia la roca mientras que el resto nuevamente se refleja hacia el manto blando. Por tanto, parte de la onda sigue viajando hacia arriba y hacia abajo en el manto blando, perdiendo parte de su energía cada vez que llega a la interface con la roca y debido al fenómeno de atenuación como consecuencia del amortiguamiento interno del suelo. Esta situación origina movimientos semejantes a los armónicos con periodos predominantes grandes (2 a 2.5

en la zona de lago). Si alguna estructura se desplanta sobre el suelo, cuyas fronteras constituyen planos paralelos y horizontales, y si el periodo natural de la estructura es tal que cada arribo de la onda a la superficie le proporciona un impulso adicional de efectos máximos. Esta condición de casi resonancia explica la relación entre el tipo de estructuras dañadas en los sismos de septiembre de 1985 en la ciudad de México y la zonificación que se ha establecido para su subsuelo, el cual se ajusta en gran parte a las condiciones descritas en este párrafo [Marsal y Masari, 1965].

Generalmente, los mayores contrastes en propiedades del suelo se encuentran cerca de la superficie libre, especialmente bajo valles sobre los que se localizan la mayor parte de las ciudades. Cuando este contraste se define entre la roca y suelo y la estratificación es casi horizontal, resulta prácticamente exacto tratar el lecho de roca como infinitamente rígido, y remplazar el suelo suprayacente por masas discretas simplemente conectadas por medio de resortes y amortiguadores sin masa [Idriss y Seed, 1978]. El movimiento del lecho de roca se considera entonces idéntico al de los afloramientos. Sin embargo, el hecho de considerar el lecho de roca como infinitamente rígido no es del todo cierto, pues parte de la energía vibratoria se pierde en el amortiguamiento por radiación parcial de ondas que viajan hacia el lecho de roca que modifica el movimiento que ocurre en la superficie de contacto suelo-roca. El fenómeno puede tratarse de manera más precisa introduciendo un amortiguador en la superficie de contacto suelo-roca [Resenblueth y Elorduy, 1969]. Cuando sobre el lecho de roca descansa un conjunto de mantos blandos, en las interfaces de los diferentes estratos se producen reflexiones y refracciones múltiples de las ondas transmitidas debido a la heterogeneidad del medio y al ángulo de incidencia entre las fronteras de los estratos y la dirección de la onda. Para medios básicamente estratificados horizontalmente, uno de los modelos más simples para el estudio dinámico del sistema, es idealizado como uno unidimensional, suponiendo que las ondas son planas y paralelas a todas las interfaces, que la roca constituye un semiespacio homogéneo y que todos los mantos blandos del suelo están formados por materiales lineales viscoelásticos. Bajo estas condiciones es posible calcular las respuestas de estructuras, sujetas a cualquier tipo de movimientos preescritos. Sin embargo, las restricciones impuestas por estructuras desplantadas hacen que en general, los desplazamientos del suelo disminuyan, sobre todo cuando se considera el caso de estructuras muy rígidas que se apoyan en suelos muy blandos, como normalmente sucede en el valle de México [Esteva, Rascón y Gutiérrez, 1969]. Un tratamiento riguroso del problema de la interacción suelo-estructura es sumamente complejo. Se ha tratado de resolverlo mediante modelos en los que se ha incluido la presencia del suelo adicionando grados de libertad al modelo físico o modelando al sistema suelo-estructura como uno de masa-resorte-amortiguador; estos se estudian en el capítulo II. En fechas más recientes, el problema se ha estudiado mediante elementos finitos, lo que representa ventajas sobre los anteriores tratamientos. Este último método lo utilizaremos para nuestro estudio en las arcillas del valle de México.

Para los casos en que resulta inadecuada una representación estratigráfica horizontal, se puede usar el método de características [Papadakis, 1973], de elementos finitos (ver apéndice 1) tanto uni, bi o tridimensionales o masas discretas interconectadas por resortes y amortiguadores así como técnicas de linealización [Lysmer et al, 1974], el método de la integral de borde [Zienkiewicz, 1975] o análisis directo no lineal. Algunos de estos métodos se estudian en el capítulo dos, sin embargo, como ya quedo descrito, el problema que nos incumbe es para el caso unidimensional en el que modelaremos al suelo con elementos finitos y lo analizaremos por un método no lineal, y en otro caso, por masas discretas analizándolo por un método lineal equivalente

I.3 Estudios realizados correlativos al tema

El análisis de la respuesta dinámica de suelos estratificados horizontalmente ante movimientos sísmicos ha recibido significativa importancia durante los últimos años, en los que se han llevado a cabo extensos programas de pruebas de laboratorio y campo para determinar las características del comportamiento del suelo bajo condiciones de carga dinámica, así como también el desarrollo de métodos analíticos para calcular la respuesta dinámica de los depósitos.

Seed e Idriss [1969] introdujeron el concepto de la aproximación lineal equivalente para considerar las características no lineales esfuerzo-deformación de los suelos. Tal aproximación consiste básicamente, en usar las propiedades del suelo compatibles con el nivel de deformación asociada con la respuesta del sistema. Este método se desarrolló inicialmente [Seed e Idriss, 1968] para resolver el problema por la superposición modal para el modelo de masas concentradas.

En 1973, Lysmer definió el amortiguamiento en los suelos independiente de la frecuencia (ver sección II.3.1.3), de lo que resultó una amplitud en la respuesta, exacta al de un oscilador simple con amortiguamiento viscoso equivalente. El programa de computadora SHAKE [Schnabel, Lysmer y Seed, 1972] usa este modelo con un procedimiento iterativo para ajustar las propiedades del material, compatibles con el nivel de deformación de la respuesta del sistema.

Por otra parte, se han desarrollado métodos de integración directa de las ecuaciones de movimiento de un sistema, que permiten considerar al análisis no lineal de los suelos. El primero desarrollado por Streeter et al [1974], es el método de las características aplicado a la propagación de onda a través de suelos. Por éste método se soluciona la ecuación diferencial parcial hiperbólica (por ejemplo la ec. unidimensional de onda 2.28), transformandola en ecuaciones diferenciales ordinarias las que son resueltas por la técnica de diferencias finitas. Este método fue incorporado por sus autores [Streeter, Wylie y Richart, 1974] en el programa de computadora CARHL.

El segundo es el método de inercia cúbica desarrollado por Argyris et al [1973], en el cual se hace la suposición básica de que la variación de la aceleración dentro del intervalo de tiempo de integración, queda descrita por un polinomio de tercer orden con respecto al tiempo (ver también sección II.3.2.4). Este método se utiliza en el programa de computadora MASH [Martin y Seed, 1978], con el cual se obtiene la respuesta del depósito modelado como un sistema con masas concentradas de múltiples grados de libertad.

Los métodos hasta aquí citados fueron aplicados a seis sitios diferentes con el fin de observar la compatibilidad de los resultados obtenidos por estos. Aún cuando para cada caso los perfiles y materiales fueron diferentes, los resultados fueron satisfactorios [Martin y Seed, 1982].

Sin embargo, el mismo problema (de la obtención de la respuesta dinámica de depósitos estratificados horizontalmente) se ha tratado de resolver también dándole un enfoque probabilista [Christian, 1986]. Este enfoque se aplica al considerar el carácter aleatorio de los eventos sísmicos; una representación apropiada de ellos se logra definiendo la excitación como un proceso estocástico estacionario (independiente de la variación del tiempo), dado en términos de espectro de potencia medio, cuyas características se determinan en general de estudios de riesgo sísmico del sitio. Para esto se aplica la teoría de las vibraciones aleatorias donde se determinan las características estadísticas del movimiento de un sistema aleatoriamente excitado que depende a su vez de las propiedades dinámicas del medio.

Similarmente, las propiedades de los materiales (rigidez y amortiguamiento principalmente para casos dinámicos) dado que distan mucho de ser parámetros definidos, se incluyen en los análisis donde se observa su variación cuando estos están sujetos a fenómenos sísmicos; tales propiedades se expresan en términos del módulo de rigidez al corte y amortiguamiento como función del nivel de deformación angular [Hardin y Drnevitch, 1972b, Ramberg-Osgood, 1943]. Para cada material se especifican curvas media, superior e inferior (bandas de incertidumbre) para tomar en cuenta las diferentes incertidumbres involucradas en sus propiedades.

Empleando este enfoque, se realizó un estudio del comportamiento dinámico de los depósitos arcillosos de la ciudad de México ante los sismos de 1985 [Villegas, 1987], en el que se consideró el carácter aleatorio de las propiedades de los materiales (módulo de rigidez al cortante G , y relación de amortiguamiento β) utilizando un procedimiento basado en técnicas de perturbación [Romo y Carels, 1983], evaluándose en cada caso la respuesta sísmica para tres lugares de la ciudad (SCT, CAF y CAO). El evento sísmico considerado fue el del 19 de septiembre que se registró en materiales duros de la Ciudad Universitaria y Tacubaya, y en los depósitos lacustres de valle de México (SCT, CAF y CAO). Los registros en materiales duros se aplicaron para la determinación de la excitación sísmica del modelo

expresada en bandas de espectro de respuesta, bajo la suposición de que los depósitos profundos de la zona del lago estuvieron sujetos al mismo movimiento registrado en la zona de lomas.

Otro estudio siguiendo los mismos principios de análisis [Taboada, 1987], se hizo para la determinación de espectros de diseño (en suelos granulares) para la zona del puerto Lázaro Cárdenas, Michoacan. En éste, se proyecta construir la terminal de recibo y manejo de carbón, para abastecer a la planta termoeléctrica que se construirá en la población de Petlaco, Gro. Las propiedades de los materiales (granulares), se asignaron por medio de correlaciones semiempíricas [Tonouchi, Sakayama e Imai, 1983] con bandas de incertidumbre. Las arcillas presentes en el subsuelo de la zona, se modelaron con un criterio semiempírico propuesto por Wilson y Dietrich [1960].

El procedimiento de análisis se realizó varias veces cambiando en cada ocasión las propiedades de los materiales para observar finalmente la dispersión de las mismas. Al relacionar los resultados de los análisis y de las pruebas se pudo concluir que la prueba más confiable para la evaluación de los parámetros dinámicos en laboratorio y en campo son respectivamente, la de la columna resonante y la prueba de suspensión.

De éste estudio también se concluyó que para deformaciones pequeñas (del orden de $10^{-4}\%$) los suelos granulares del sitio se comportan esencialmente como materiales elásticos, lo cual produjo altas amplificaciones en la respuesta obtenida.

1.4 Alcances

El estudio se limita al análisis de la propagación vertical de ondas a través de depósitos de suelo homogéneo estratificados horizontalmente considerando su comportamiento no lineal. El depósito se modela como un sistema unidimensional en el que los movimientos solo ocurren en el plano perpendicular a la dirección de la onda; los análisis solo son de campo libre.

CAPITULO II

METODOS ANALITICOS Y PROCEDIMIENTOS NUMERICOS

II.1 GENERALIDADES

El estudio de la mecánica de suelos, es un factor determinante para comprender el comportamiento de sistemas suelo-estructura. En tal estudio se ha considerado la importancia del comportamiento dinámico que estos sistemas tienen ante excitaciones de tipo sísmico. Para analizar estos sistemas se requiere determinar variables de entrada y variables de salida; para evaluarlas cuantitativamente habrá que definir en general, el entorno del sistema y sus condiciones, y los factores que interfieren mediante una pregunta operacional específica [Magaña et al, 1986]. Como lo que se pretende, es conocer la respuesta dinámica en el cuerpo de la masa de suelo dada una excitación dinámica, habrá que determinar en general.

zona sísmica
tipo de materiales y sus propiedades
descripción de la zona por estudiar
estratigrafía
tipo de estructura a cimentar

La respuesta esperada depende básicamente del comportamiento de los estratos, lo cual influye en el espectro de respuesta el que a su vez se utiliza en el diseño de cimentaciones.

Para dar solución al problema planteado, se han desarrollado métodos alternativos (analíticos y numéricos) formulando hipótesis para la aplicación de principios físicos. El principio físico básico que se involucra en los conceptos manejados, es el de la conservación de la cantidad de movimiento, para cuya aplicación se han dado diferentes soluciones suponiendo que

- 1.-El suelo es un medio semi-infinito, elástico lineal, isótropo y homogéneo
- 2.-El sistema suelo estructura es equivalente a un sistema masa-resorte amortiguador
- 3.-Mediante la discretización del sistema considerar materiales elástico-lineales ó viscoelásticos por un proceso de linearización en cada elemento discretizado

4.-Introduciendo la teoría del elemento finito, considerar al suelo como un sistema continuo elástico-lineal ó viscoelástico

Los primeros dos métodos se clasifican como analíticos y los dos últimos como lo que hemos llamado procedimientos numéricos; precisamente por sus formas de solución.

Con las anteriores hipótesis, se puede formular un modelo analítico para cada caso, que describa el comportamiento dinámico del suelo bajo las condiciones y limitaciones que los mismos impliquen. dado que no hay una ley precisa que determine la variabilidad de los parámetros que definen el comportamiento real del suelo.

II.2 METODOS ANALITICOS

II.2.1 SISTEMA ELASTICO

II.2.1.1 Hipótesis

Para la delimitación del modelo [Salazar, 1969], será condición que el comportamiento del suelo se aproxime al de un material elástico-lineal, en un espacio semi-infinito, homogéneo e isotrópico, no estratificado, sin la presencia de estratos rocosos o se requerirá hipotéticamente que estén a una profundidad infinita; la superficie libre del sistema tendrá que ser lo suficientemente amplia en la dirección horizontal, evitando así la transmisión con fronteras laterales; en el caso de existir cimentaciones de estructuras aledañas, considerarlas integradas a la masa del suelo, a menos que estas sean tipo cajón a pantallas rigidizantes que alteren significativamente la homogeneidad e isotropía del medio; se considera la ausencia del nivel freático. Habrá que determinar también las propiedades del material en particular el cual ha de ser preferentemente arcillas o arenas compactas. El modelo limita el análisis sólo para campo libre.

II.2.1.2 Ecuaciones de movimiento

En el planteamiento del modelo analítico se emplea la teoría de la mecánica del medio continuo, por lo que el semiespacio queda definido principalmente por los siguientes parámetros

E módulo de elasticidad
G módulo de rigidez al esfuerzo cortante
 ν módulo de Poisson
 ρ densidad de la masa

Inicialmente se considera el equilibrio de un volumen elemental (fig 2.1) mediante las seis ecuaciones de la estática.

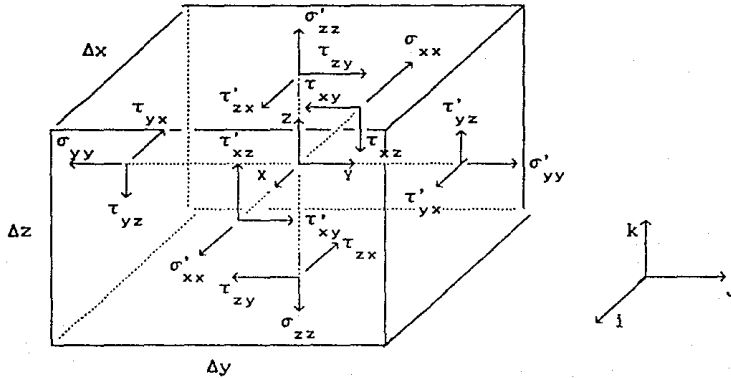


fig 2.1 Equilibrio del elemento diferencial

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum M_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad \dots (2.1)$$

$$\sum M_y = 0 \quad \dots (2.2)$$

$$\sum F_z = 0$$

$$\sum M_z = 0$$

Teniendo en cuenta que además de las componentes de esfuerzo en las caras del paralelepípedo existe una fuerza ρ de cuerpo que en general tiene una dirección cualquiera. Esta fuerza descompuesta en las tres direcciones paralelas a los ejes coordenados toma la siguiente forma

$$F = F_x i + F_y j + F_z k$$

de las ecuaciones 2.1

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} &= F_x \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} &= F_y \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= F_z \end{aligned} \quad \dots (2.3)$$

de las ecuaciones 2.2 se demuestra que

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \quad \sigma_{xz} = \sigma_{zx}, \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy}$$

Según la mecánica de los medios continuos, las deformaciones lineales y angulares infinitesimales, y rotaciones se pueden expresar en términos de los desplazamientos (relaciones cinemáticas)

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} & e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} & e_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ e_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} & e_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} & e_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ 2w_x &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} & 2w_y &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} & 2w_z &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \quad \dots (2.4)$$

donde

u, v y w son los desplazamientos en las direcciones x, y, z respectivamente

e_{xx}, e_{yy}, e_{zz} son las deformaciones lineales en las direcciones x, y, z respectivamente

e_{xy}, e_{xz}, e_{yz} son las deformaciones angulares entre los ejes xy, xz, yz respectivamente

w_x, w_y y w_z son las rotaciones alrededor de los ejes x, y y z respectivamente

La relación entre esfuerzos y deformaciones en una teoría lineal, queda establecida mediante la ley de Hooke

$$\sigma = 2Ge + \lambda\Delta \quad \dots(2.5)$$

en donde

- σ es el tensor esfuerzo
- e es la deformación lineal con dirección establecida según los ejes coordenados
- Δ es la dilatación cúbica del volumen elemental (primer invariante del tensor deformación)
- λ es la constante de lambe

$$\Delta = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Para obtener las ecuaciones de movimiento del medio elástico se sustituye (2.4) en (2.5), con lo que los esfuerzos quedan expresados en términos de las derivadas de los desplazamientos, y ésta expresión en la del equilibrio del volumen elemental (2.3).

En la formulación de problemas elastodinámicos [Mase, 1970], las ecuaciones de equilibrio estático 2.3 se igualan a las de equilibrio dinámico, esto es

$$F_{x,y,z} = \rho(\ddot{u}, \ddot{v}, \ddot{w})$$

o bien

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + G) \frac{\partial \Delta}{\partial x} + G\nabla^2 u$$

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (\lambda + G) \frac{\partial \Delta}{\partial y} + G\nabla^2 v \quad \dots (2.6)$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (\lambda + G) \frac{\partial \Delta}{\partial z} + G\nabla^2 w$$

donde

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

La ecuación del modelo es de tipo diferencial parcial, la que a partir de principios generales de la física se particularizó al caso específico, con lo que se le ha dado un enfoque formal.

Las ecuaciones de movimiento 2.6 aparecen en función del campo de desplazamientos u , v y w en la forma

$$u = u(x, t)$$

$$v = v(y, t)$$

$$w = w(z, t)$$

y tienen que satisfacer no solamente las condiciones iniciales de movimiento, frecuentemente expresadas como

$$u = u(x, t) \quad u = u(x, 0)$$

$$v = v(y, t) \quad v = v(y, 0)$$

$$w = w(z, t) \quad w = w(z, 0)$$

si no también las condiciones del contorno.

II.2.1.3 Ecuaciones de onda

Las ecuaciones de movimiento 2.6 corresponden a la propagación de dos tipos de ondas en el medio [Kolsky, 1970]. Si diferenciamos ambos lados de las ecuaciones 2.6 sucesivamente respecto a x , y y z , y las sumamos, obtenemos

$$\rho \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} = (\lambda + 2G) \nabla^2 \Delta \quad \dots(2.7)$$

Esta ecuación muestra que la dilatación Δ se propaga a través del medio con velocidad $C_p = (\lambda + 2G)^{1/2}$. En otro caso, si consideramos las ecuaciones 2.6 en las direcciones y y z por ejemplo, y las diferenciamos por ambos lados y luego las sustraemos para eliminar de entre ellas a la dilatación Δ , obtenemos

$$\rho \frac{\partial}{\partial t^2} \left[\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right] = G \nabla^2 \left[\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right]$$

o bien

$$\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = G \nabla^2 u_x \quad \dots(2.8)$$

donde u_x es la rotación al rededor del eje x ; similarmente se pueden obtener ecuaciones para las rotaciones al rededor de los ejes y y z respectivamente, de donde se podrá observar, como en la ecuación 2.8, que la rotación se propaga con velocidad $C_s = (G/\rho)^{1/2}$

Las ecuaciones 2.7 y 2.8 se denominan *ECUACIONES DE ONDA* y expresan la propagación de la perturbación a través del medio elástico con velocidades C_p y C_s . La velocidad C_p es la de las ondas planas longitudinales que producen cambios volumétricos sin distorsiones angulares. Las ondas con velocidad C_s denominadas distorsionales, de cortante, rotacionales o de igual volumen, son perturbaciones que producen exclusivamente distorsiones angulares sin cambios volumétricos.

Las ondas planas ya descritas pueden ocurrir sin mezclarse con otro tipo, en medios sin fronteras o no estratificados. En un medio en el que bruscamente se modifiquen sus características, se define una

frontera denominada interfáz en donde se presentan fenómenos de reflexión y refracción de ondas. Ocurre que si en una interfáz incide una onda longitudinal, las ondas reflejadas y refractadas serán una combinación de ondas longitudinales y de cortante. Lo mismo ocurre si la onda que incide es una onda transversal.

Las ondas longitudinales y transversales también denominadas de cuerpo, al llegar la superficie libre del medio originan otro tipo de ondas: Rayleigh y Love. Estos últimos tipos de ondas también llamadas superficiales, inducen exclusivamente el movimiento de las partículas cercanas a la superficie libre, y es una de las causas principales de la radiación de energía en la vibración de cimentaciones.

Si consideramos como condiciones de frontera para la solución de las ecuaciones 2.6 un plano límite el cual esté libre de esfuerzos, se llega a determinar que las ondas superficiales Rayleigh se propagan a una fracción k_1 de la velocidad de las ondas distorsionales C_s ; los valores de k_1 se pueden obtener de la ecuación cúbica en $(k_1)^2$ siguiente

$$k_1^6 - 8k_1^4 + (24 - 16\alpha_1^2)k_1^2 + 16\alpha_1^2 - 16 = 0$$

donde α es una constante elástica del material

$$\alpha_1 = [(1 - 2\nu)/(2 - 2\nu)]^{1/2}$$

El movimiento de las ondas Rayleigh se desarrolla en un plano perpendicular a la superficie a lo largo del cual las ondas se propagan, en dirección paralela al mismo. Se puede demostrar [Salazar,

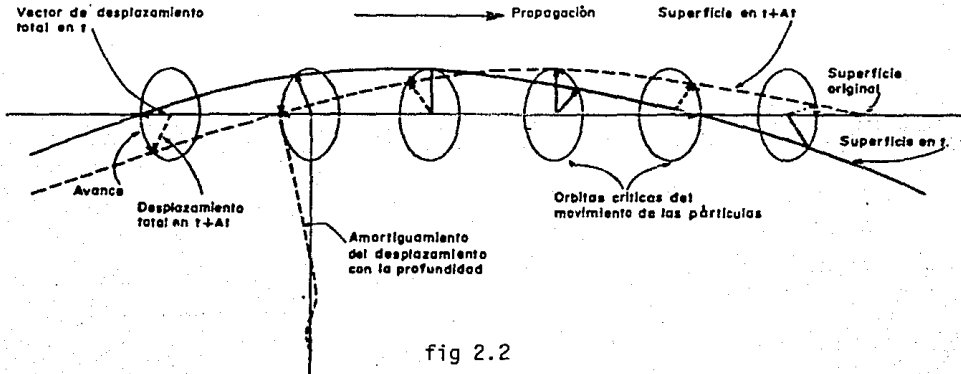


fig 2.2

1969] que las ondas se amortiguan con la profundidad z , y para un valor fijo de éste, las partículas describen orbitas elípticas con el avance (fig 2.2).

II.2.1.4 Observaciones al método

Finalmente se hacen los siguientes comentarios

a) Las velocidades de las ondas Rayleigh y las velocidades de las ondas longitudinales y distorsionales pueden relacionarse entre sí a través del coeficiente de poisson (fig 2.3).

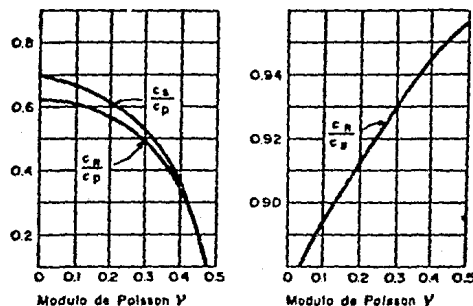


fig 2.3

b) El amortiguamiento de las amplitudes con la profundidad es fuertemente influenciado por otras perturbaciones en la vecindad de la acción excitadora. Las amplitudes de vibración se verán también afectadas por el tamaño y la forma de la cimentación en movimiento.

c) En las anteriores expresiones de movimiento no se incluye el amortiguamiento con la distancia al punto de excitación (además en la propagación de ondas en un suelo, existe un proceso de histéresis no considerado en la teoría lineal, el cual puede llegar a constituir una poderosa fuente de disipación de energía).

d) Si para las ondas superficiales Rayleigh el medio está estratificado, éstas pueden dar origen a ondas superficiales transversales (ondas Love). Estas perturbaciones podrán modificar apreciablemente las amplitudes, trayectorias y sobre todo la disipación de energía a través de las ondas superficiales.

En vista de lo anterior, es conveniente en las aplicaciones prácticas, hacer la determinación de amplitudes, amortiguamiento, etc., mediante mediciones directas en campo. Con tales mediciones y

utilizando las relaciones teóricas como guía, podrá determinarse la interacción dinámica entre las diversas cimentaciones de un sistema.

II.2.2 SISTEMA MASA-RESORTE-AMORTIGUADOR

II.2.2.1 Hipótesis

Para este caso, el sistema suelo-estructura se modela conforme a uno equivalente masa-resorte-amortiguador [Pauw, 1953] (figura 2.6). Para la aplicación de los principios físicos se consideran las siguientes hipótesis simplificadoras: la masa del modelo estará compuesta por la cimentación de la estructura más la porción de suelo influenciada por la misma estructura (bulbo de presiones). El suelo estará constituido por materiales elásticos, viscosos o visco-elásticos; las cimentaciones de estructuras aledañas no afectarán a menos que estén dentro del bulbo de presiones; en el caso en que éste estuviera entre paredes rigidaz no es aplicable el método; no existe el nivel freático; la presencia de materiales estratificados no es determinante, pues el medio se idealiza como un bloque rígido en movimiento; en el caso de existir estratos rocosos, estos serán profundos o muy profundos a modo que no queden incluidos en el sistema.

La aplicación de la excitación sísmica se simulará con una fuerza equivalente en dirección del sismo en el centro de masas del sistema. Los resultados arrojados por el análisis, solamente son válidos al nivel del centro de masas del sistema.

II.2.2.2 Idealización del medio

La consideración básica para la construcción del modelo, es que el cuerpo de cimentación, puede idealizarse como un bloque rígido en movimiento con seis grados de libertad: q_1 , q_2 , q_3 (son desplazamientos lineales a lo largo de un sistema de ejes coordenados, fig 2.4), y q_4 , q_5 , q_6 (son rotaciones respecto a los ejes de referencia, fig 2.5).

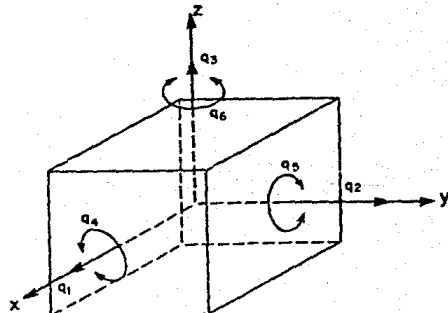


fig 2.4

II.2.2.3 Ecuaciones de movimiento

Para la deducción del modelo analítico, se considera que los grados de libertad que definen en conjunto el movimiento del sistema, son independientes uno del otro (desacoplados), con lo que se establece así una ecuación de movimiento por cada grado de libertad, suponiéndose en cada una de ellas que el sistema posea un grado de libertad.

Así por ejemplo, para los desplazamientos lineales el sistema se ha modelado como se muestra en al figura 2.6, en donde la base está sujeta a una fuerza $F(t)$.

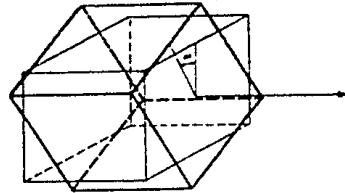


fig 2.5

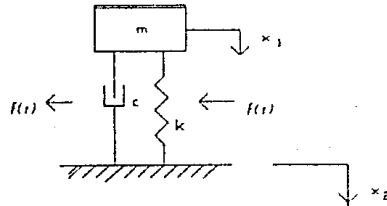


fig 2.6

Supongase que $x_1 > x_2$, entonces el desplazamiento relativo es $x = x_1 - x_2$, que es la deformación del resorte. Por la suma de fuerzas en x , la ecuación de movimiento del sistema es

$$m\ddot{x} + c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k(x_1 - x_2) = 0$$

o bien

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{x}_2 = -F(t) \quad \dots(2.9)$$

en donde x es el desplazamiento relativo entre la estructura y su base; $m\ddot{x}$ representa la fuerza de inercia aplicada a la masa m , la cual está soportada por columnas con una rigidez equivalente k . La disipación de la energía se supone de naturaleza viscosa (esto es, la fuerza de amortiguamiento es proporcional a la velocidad relativa entre la masa y su base) y c es la constante de amortiguamiento.

11.2.2.4 Vibración libre amortiguada

Consideremos primero la ecuación diferencial homogénea de la 2.9

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad \dots(2.10)$$

cuya solución general es

$$x = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t} \quad \dots(2.11)$$

donde A y B son constantes que se determinan a partir de las condiciones iniciales del sistema, y r_1, r_2 son las raíces de la ecuación auxiliar

$$mr^2 + cr + k = 0$$

o bien

$$r^2 + \frac{c}{m} r + \frac{k}{m} = 0 \quad \dots(2.12)$$

Si hacemos

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} \quad \dots(2.13)$$

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n} \quad \dots(2.14)$$

donde ω_n es la frecuencia natural del sistema y ζ es el la relación de amortiguamiento. Con las ecuaciones 2.13 y 2.14, la 2.12 se puede expresar como

$$r^2 + 2\zeta\omega_n r + \omega_n^2 = 0$$

cuyas raíces son

$$r_1 = \omega_n \left[-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right] \quad \dots(2.15)$$

$$r_1 = \omega_n \left[-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right] \quad \dots (2.16)$$

Se distinguen tres casos para las ecuaciones 2.15 y 2.16

a) Si $\zeta > 1$, las raíces r_1 y r_2 son reales y negativas, y por tanto se tiene un movimiento no oscilatorio independiente de las condiciones iniciales del sistema. El movimiento es sobre amortiguado y la ecuación 2.11 se puede escribir como

$$x = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t}$$

b) Si $\zeta = 1$ el movimiento es no oscilatorio, pero representa la transición entre los movimientos oscilatorio y no oscilatorio, y por lo tanto se le llama condición crítica. Las raíces r_1 y r_2 son reales e iguales y la solución puede escribirse como

$$x = (A + B) e^{-\omega_n t}$$

El valor del amortiguamiento que corresponde al caso $\zeta = 1$, se denomina amortiguamiento crítico C_{cr} . Si hacemos $\zeta = 1$ en la ecuación 2.14 se tiene $C_{cr} = 2m\omega_n$ o bien, con la ecuación 2.13

$$C_{cr} = 2 \sqrt{km}$$

con esto el factor de amortiguamiento se puede expresar como $\zeta = C/C_{cr}$.

c) Si $\zeta < 1$, las raíces r_1 y r_2 son complejas y conjugadas de la forma

$$r_1 = \omega_n \left[-\zeta + i \sqrt{1 - \zeta^2} \right]$$

$$r_2 = \omega_n \left[-\zeta - i \sqrt{1 - \zeta^2} \right]$$

con las que se obtiene un movimiento oscilatorio y la solución general de la ecuación 2.11 se puede escribir como

$$x = e^{-\zeta\omega_n t} \left[A \cos \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t + B \sin \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t \right] \quad \dots(2.17)$$

Si hacemos

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

la ecuación 2.17 se expresa como

$$x = e^{-\zeta\omega_n t} \left[A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t \right]$$

o también

$$x = C e^{-\zeta\omega_n t} \sin (\omega_d t + \phi) \quad \dots(2.18)$$

en donde

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}$$

y $\phi = \arctg A/B$.

La ecuación 2.18 representa un movimiento armónico simple de frecuencia circular ω_d y de amplitud $Ce^{-\zeta\omega_n t}$ que decrece exponencialmente con el tiempo (fig 2.7). Por lo tanto, el movimiento representado por la ecuación 2.18 no es periódico en el sentido estricto de la palabra porque las amplitudes de ciclos sucesivos son diferentes, sin embargo, sus periodos sí son iguales con lo que se tiene un movimiento periódico en el tiempo y de periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{2\pi}{\omega_d}$$

Si para $t = 0$ se tiene $x = x_0$ y $\dot{x} = v_0$, se demuestra que

$$A = x_0$$

$$B = \frac{v_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{v_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d}$$

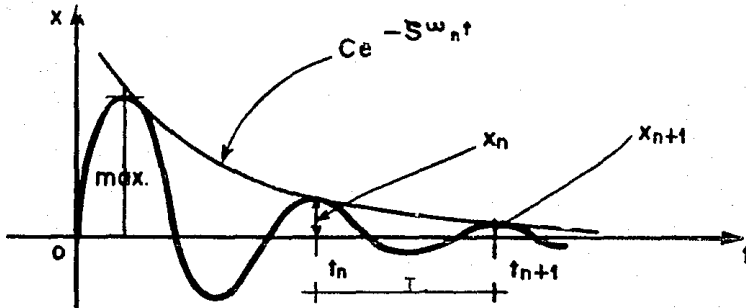


fig 2.7

II.2.2.5 Integral de Duhamel

Se considera un sistema inicialmente en reposo sujeto a una fuerza excitadora cualquiera como la que se muestra en la figura 2.8 (que puede ser la representación de un acelerograma). En el tiempo $t = t'$ se considera un impulso $F(t')dt'$, que es igual a la masa por el cambio de velocidad en dt' .

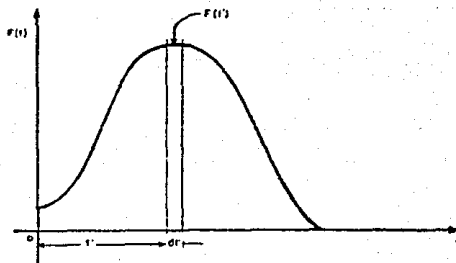


fig 2.8

Por el principio de la cantidad de movimiento, el cambio de velocidad es

$$dv = \frac{F(t')}{m} dt' \quad \dots (2.19)$$

Si se produce un desplazamiento dx , por la ecuación 2.18 se tiene

$$dx = e^{-\zeta\omega_n(t-t')} \frac{d\omega}{\omega_d} \text{sen} [\omega_d(t-t')] \quad \dots (2.20)$$

sustituyendo 2.19 en 2.20

$$dx = e^{-\zeta\omega_n t} \frac{F(t')}{m\omega_d} e^{\zeta\omega_n t'} \text{sen} [\omega_d(t-t')] dt'$$

en donde t' es el tiempo del origen al instante en que se aplica el impulso, y t indica el tiempo en que se calcula el desplazamiento.

Para una fuerza excitadora continua y como el sistema se supone elástico, se aplica el principio de superposición por lo que

$$x = e^{-\zeta\omega_n t} \int_0^t \frac{F(t')}{m\omega_d} e^{\zeta\omega_n t'} \text{sen} [\omega_d(t-t')] dt' \quad \dots (2.20')$$

que es la respuesta relativa del sistema.

Las expresiones de movimiento desacoplado para otros desplazamientos lineales y para rotaciones alrededor de los ejes de referencia son análogas a la obtenida

II.2.2.6 Espectro de respuesta

La ecuación 2.20' es función de la frecuencia natural (ó periodo natural) ω_n , amortiguamiento ζ y movimiento de la base $F(t')$.

Derivando la ecuación 2.20' con respecto al tiempo, se obtiene la velocidad relativa \dot{x} . La aceleración absoluta \dot{x}'_2 de la masa m se obtiene derivando nuevamente con respecto al tiempo la ecuación obtenida para \dot{x} y tomando en cuenta que $\dot{x}'_2 = \dot{x}' + F(t)$.

La aceleración absoluta es la variable más sencilla de medir

durante los movimientos sísmicos; los acelerografos miden sensiblemente aceleraciones absolutas, las cuales permiten determinar la fuerza sísmica actuante en la masa.

En ingeniería son importantes los valores máximos absolutos de x , \dot{x} y \ddot{x} . Estas cantidades se definen como

$$SD = |x|_{\text{máx}}$$

$$SV = |\dot{x}|_{\text{máx}}$$

$$SA = |\ddot{x}|_{\text{máx}}$$

Si se aplica un mismo movimiento sísmico a estructuras de comportamiento lineal con diferentes periodos naturales (o frecuencias naturales) e iguales amortiguamientos y siguiendo el procedimiento descrito, se obtienen las envolventes de respuestas máximas de ellas. De ésta manera, se determina el espectro de respuesta del sistema o de un sismo dado. Estos espectros pueden ser de desplazamientos SD, de velocidad SV, o de aceleración SA.

Ahora bien, para emplear el modelo de la ecuación 2.9 es necesario evaluar sus parámetros, que es lo que veremos en lo que sigue.

II.2.2.7 Coeficiente de amortiguamiento

El amortiguamiento puede determinarse sometiendo al sistema a vibración libre o a vibración forzada [Shamsher, 1981]; aquí sólo citaremos el primer método. Considerese la grafica de la ecuación 2.18 mostrada en la figura 2.7. En la misma, se hace la gráfica de la

función $Ce^{-\zeta\omega_d t} \sin(\omega_d t + \phi)$; se supone que las curvas son tangentes cada vez que $\sin(\omega_d t + \phi) = 1$, aunque en realidad estos puntos de tangencia aparecen un poco defazados hacia la derecha de los máximos relativos de la curva senoidal, pero para fines prácticos se acepta como válida la suposición anterior.

Se define como decremento logarítmico y se representa con δ al logaritmo natural del coeficiente de dos amplitudes consecutivas, es decir

$$\delta = \frac{x_n}{x_{n+1}} \quad \dots (2.21)$$

El periodo para este movimiento es

$$T = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

y para dos periodos sucesivos se tiene que

$$x_n = C e^{-\zeta \omega_n t_n} \quad \dots (2.22)$$

$$x_{n+1} = C e^{-\zeta \omega_n t_{n+1}} \quad \dots (2.23)$$

y además $t_{n+1} = t_n + T \dots (2.24)$.

Con las expresiones 2.22, 2.23 y 2.24 se puede expresar a la 2.21 como

$$\delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

Para pequeños valores de ζ , $\zeta = \delta / 2\pi$; además el periodo del sistema amortiguado puede aproximarse con el del no amortiguado, esto es $T = 2\pi/\omega_n$. Si el amortiguamiento es elevado, este coeficiente puede calcularse con la gráfica de la figura 2.7.

11.2.2.8 Coeficiente de rigidez del suelo

Para determinar los valores de la rigidez del suelo, habrá que determinar la distribución de presiones y la variación del módulo de elasticidad del medio (fig 2.9), ambas de acuerdo a la profundidad.

Bajo condiciones de carga q vertical, actuando en un rectángulo de dimensiones a , b , la distribución de presiones verticales incidentes en un plano horizontal puede valarse de la aproximación introducida en la figura 2.10. Se supone que las presiones verticales uniformes, se dividen en áreas $(a + \alpha z)(b + \alpha z)$, en donde $\alpha/2$ es el talud de los

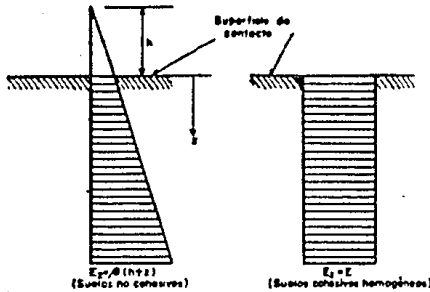


fig 2.9

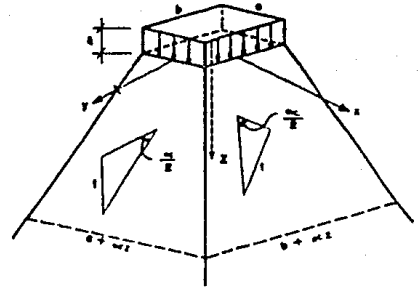


fig 2.10

El módulo de elasticidad dependerá del suelo que soporta la cimentación, y se supone que varía linealmente con la profundidad.

$$E_z = \beta(h + z)$$

en donde

β es la variación unitaria del módulo de elasticidad E con la profundidad

h es la altura del suelo equivalente a la carga de confinamiento en la superficie, la cual puede deberse exclusivamente a una sobre carga q

$$h = \frac{q}{\gamma} \quad (\gamma \text{ es el peso volumétrico del suelo})$$

En el caso de un suelo de arcilla pura y homogénea, $E_z = E$ es constante. Para mezclas de arcilla y arena

$$h = \frac{E_0}{\beta} + \frac{q}{\gamma}$$

en donde E_0 y β se estimarán de pruebas cuidadosas de laboratorio. En la siguiente tabla se indican valores aproximados de E_0 y β

	E_0 (kg/cm ²)	β (kg/cm ² /m)
Mezcla densa de arena y grava	0	700-1200
Arena densa	0	400-600
Arena suelta	0	70-140
Arena limosa suelta	7	60-120
Arena limosa densa	20	250-500
Arcilla semisólida	60-100	10-20
Arcilla plástica dura	30-60	10-20
Arcilla plástica sucia	15-30	10-20

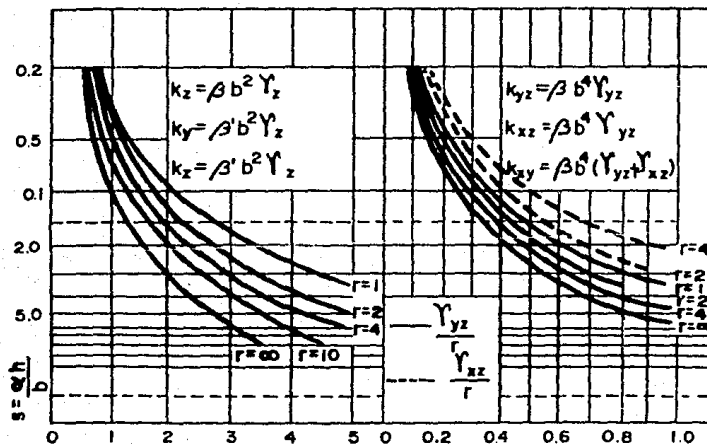
A) Desplazamientos verticales (planos horizontales)

Las constantes del resorte del suelo para desplazamientos verticales son

$$k_z = \beta b^2 \gamma_z \quad \text{para suelos no cohesivos}$$

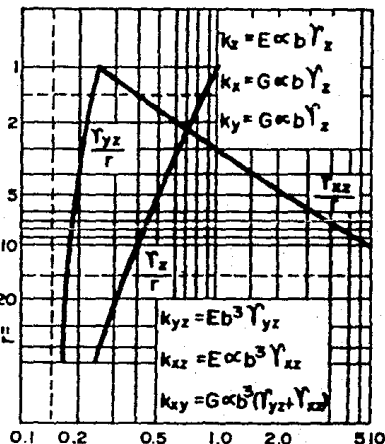
$$k_z = Eab\gamma_z \quad \text{para suelos cohesivos}$$

suelos no cohesivos



$$\frac{\gamma_z}{r} \quad (a)$$

suelos cohesivos



$$\frac{\gamma_z}{r} \quad (c)$$

fig 2.11

Los coeficientes a y b son las dimensiones de una cimentación rectangular. Valores de γ_z aparecen en la figura 2.11 en la que $r = a/b$ ($a \geq b$), $s = ah/b$, $w = az/b$.

B) Desplazamientos horizontales (planos horizontales)

Para desplazamientos horizontales

$$k_x = k_y = \gamma_z \beta' b^2 \quad \text{para suelos no cohesivos}$$

$$k_x = k_y = G \alpha b \gamma_z \quad \text{para suelos cohesivos}$$

donde

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad ; \quad \beta' = \frac{\beta}{2(1 + \nu)}$$

Valores de E y de ν para diferentes materiales se dan en la siguiente tabla

	$E(\text{kg/cm}^2)$	ν
Granito sano	2.3 a 5.8($\times 10^5$)	0.15 a 0.24
Granito parcialmente descompuesto	2.7 a 1.4($\times 10^5$)	
Caliza	2.1 a 4.9($\times 10^5$)	0.16 a 0.23
Arenisca	1.4 a 2.8($\times 10^5$)	0.17
Mezcla de arena y grava	1 a 2($\times 10^3$)	
Arena densa	0.5 a 0.8($\times 10^3$)	0.30 a 0.36
Arena suelta	100 a 200	
Arcilla semisólida	70 a 140	
Arcilla plástica dura	40 a 80	0.40 a 0.45
Arcilla plástica suave	14 a 40	
Turba	5 a 35	

Valores de γ_z se obtienen de la figura 2.11.

C) Rotaciones de planos horizontales respecto a los ejes x, y, z

Para rotaciones de planos horizontales alrededor de los ejes según la figura 2.12,...

k_{yz} para rotaciones alrededor del eje x

k_{xz} para rotaciones alrededor del eje y

k_{xy} para rotaciones alrededor del eje z

los cuales para suelos no cohesivos son

$$k_{yz} = \beta b^4 \gamma_{yz}$$

$$k_{xz} = \beta b^4 \gamma_{xz}$$

$$k_{xy} = \beta' b^4 (\gamma_{xz} + \gamma_{yz})$$

Para suelos cohesivos

$$k_{yz} = Eab^3 \gamma_{yz}$$

$$k_{xz} = Eab^3 \gamma_{xz}$$

$$k_{xy} = Gab^3 (\gamma_{xz} + \gamma_{yz})$$

donde γ_{xz} y γ_{yz} se obtienen de la figura 2.11.

II.2.2.9 Masa equivalente

En este método se supone que la masa de la cimentación m se incrementa por una masa m' de suelo (fig 2.13.). El centro de masas del sistema suelo-cimentación se supone localizado a una distancia z de la superficie de contacto.

A) Masa equivalente (desplazamientos verticales)

Para la determinación de la masa equivalente, se ha aplicado el principio de la conservación de la energía. Igualando la energía cinética de la masa de suelo que compone al sistema a la energía

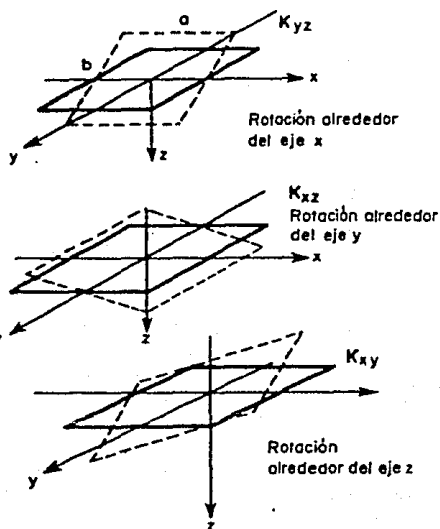


fig 2.12

cinética de una masa equivalente m' concentrada en el centro de masas del sistema; esto es

$$EC_m = \frac{m v_o^2}{2} = \frac{m' \omega \delta_o^2}{2}$$

ya que para un movimiento circular $v_o = \omega \delta_o$, además v_o es la velocidad tangencial; δ_o la velocidad angular y ω es un ángulo dado en radianes.

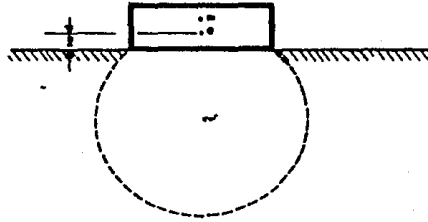


fig 2.13

Para la zona efectiva de suelo limitada por los planos de difusión de presiones

$$EC_s = \frac{\gamma}{2g} \int_0^{\infty} (\alpha + \alpha z)(b + \alpha z) v_z^2 dz$$

o bien

$$EC_s = \frac{\gamma \omega^2}{2g} \int_0^{\infty} (\alpha + \alpha z)(b + \alpha z) \delta_z^2 dz$$

igualando las dos energías cinéticas y despejando m'

$$m' = \frac{\gamma}{g \delta_o^2} \int_0^{\infty} (\alpha + \alpha z)(b + \alpha z) \delta_z^2 dz$$

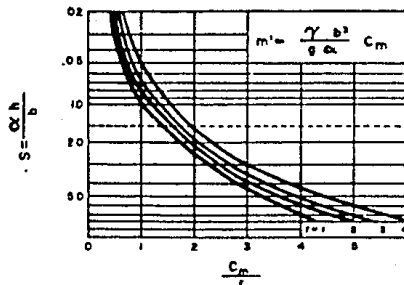
donde $\alpha/2$ es el talud del bloque influenciado. Para suelos no cohesivos se puede expresar

$$m' = \frac{\gamma b^3}{\alpha g} C_m$$

donde C_m está dado para diferentes suelos en la figura 2.14; γ es el peso específico del material; g es el coeficiente de la gravedad y b la dimensión mayor de una cimentación rectangular.

Con este valor de m' y los valores del coeficiente k , puede calcularse la frecuencia natural del sistema

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m + m'}}$$



B) Masa equivalente (rotaciones)

Para el cálculo de las frecuencias de vibración rotacionales puede establecerse que

$$f_n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{J + J'}}$$

en donde

J es el momento polar de inercia de la masa del sistema respecto al eje de referencia

J' es el momento polar de inercia equivalente del suelo

Se han establecido las siguientes expresiones para la rotación alrededor de los ejes x , y , z

$$J'_x = \frac{\gamma b^5}{12\alpha g} C_1^x$$

$$J'_y = \frac{\gamma b^5}{12\alpha g} C_2^y$$

$$J'_z = \frac{\gamma b^5}{12\alpha g} C_3^z$$

en donde C_1^x , C_2^y y C_3^z se pueden determinar de las gráficas de la figura 2.15.

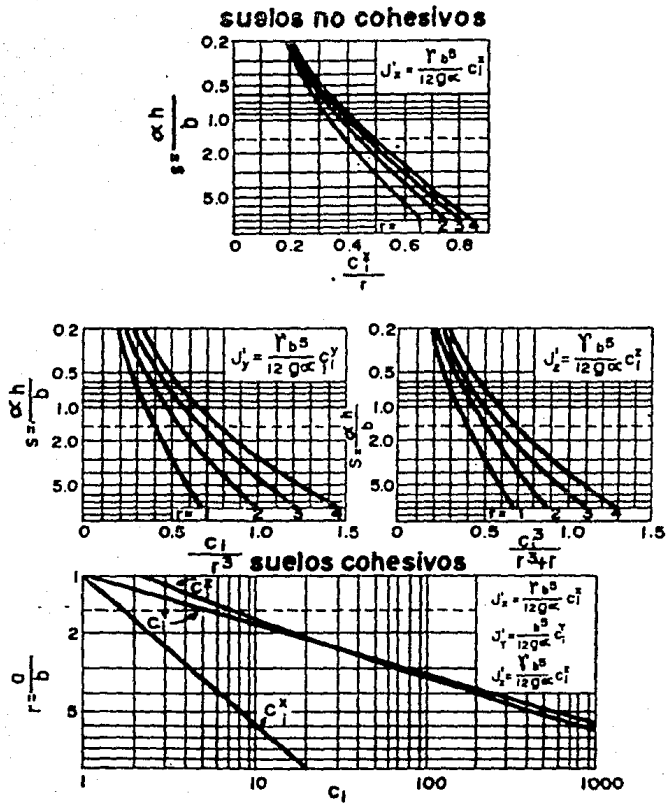


fig 2.15

II.3 PROCEDIMIENTOS NUMERICOS

II.3.1 METODO LINEAL EQUIVALENTE EQUIVALENTE

II.3.1.1 Hipótesis

Este método está basado en la suposición de que la respuesta en el suelo debido a un evento sísmico, está gobernada principalmente por la propagación vertical [Penzien y Scheffey, 1964] en dirección a la superficie libre, de las ondas de cortante procedentes de una formación rocosa subyacente al depósito de suelo, en el cual pueden incorporarse materiales cuyo comportamiento sea no-lineal y con amortiguamiento variable [Rosenblueth y Elorduy, 1969].

El análisis fundamentalmente se basa en la solución continua de la ecuación unidimensional de onda, por lo que esencialmente la estructura debe estar extendida ampliamente en el sentido horizontal para evitar la interferencia de fronteras laterales, pudiéndose con esto incorporar la estratigrafía del depósito con su nivel de aguas freáticas en el caso de que existiera. La frontera inferior la constituye un estrato rocoso y duro que deberá existir y es donde se aplica la excitación dinámica; la superior será la superficie libre del mismo sistema. Para depósitos más irregulares, por su estructura o por la presencia de elementos artificiales (cajones de cimentación, pantallas rigidizantes, etc.) que la alteren significativamente, el análisis requerirá el empleo del elemento finito bi o tridimensional y no es aplicable este método.

II.3.1.2 Ecuación unidimensional de onda

Para la formulación del modelo analítico [Schnabel et al, 1971] que gobierne la respuesta del sistema, se considera, asociado con la propagación vertical de las ondas de corte a través de sistemas viscoelásticos (fig. 2.16). Este sistema consiste de N estratos horizontales hipotéticamente extendidos infinitamente en la dirección horizontal y un semiespacio como estrato base. Cada estrato es homogéneo e isótropo y está caracterizado por un espesor h , densidad de masa ρ , módulo al esfuerzo cortante G y por un coeficiente de amortiguamiento β .

La propagación de ondas de cortante a través del sistema, causa únicamente desplazamientos horizontales que son función de la profundidad y del tiempo.

$$u = u(x,t)$$

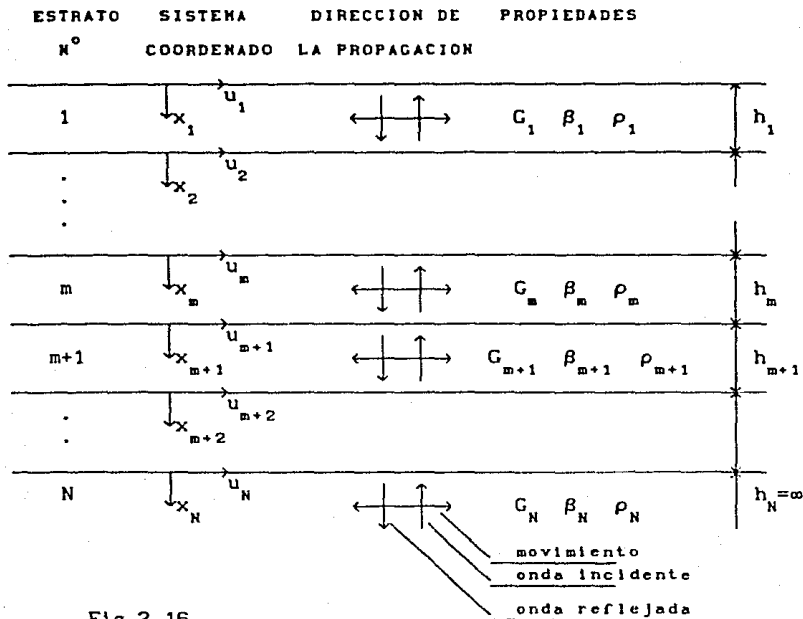


Fig 2.16

Si consideramos un elemento infinitesimal con dimensión unitaria perpendicular al plano (fig 2.17), entonces la ecuación de movimiento para el elemento según el principio de la cantidad de movimiento es

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau}{\partial x} \quad \dots (2.25)$$

en donde τ es el esfuerzo cortante. La ley de deformación [Mase, 1970] para materiales viscoelásticos (modelo de Kelvin) es

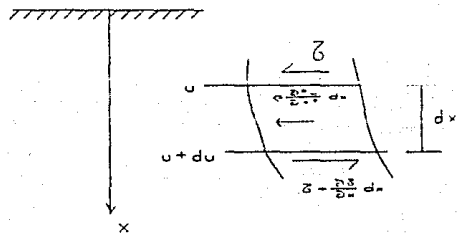


fig 2.17

$$\tau = G \frac{\partial u}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \quad \dots (2.26)$$

ecuación en la que η es el coeficiente de viscosidad. La primera derivada con respecto al tiempo de la ecuación 2.26 es

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} - G \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \eta \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} = 0 \quad \dots (2.27)$$

La ecuación 2.27 expresa la relación esfuerzo-deformación dinámica para un suelo lineal cuando $G = \text{ctte}$, $\eta = 0$; para un suelo viscoelástico cuando $G = \text{ctte}$ y $\eta \neq 0$; para un suelo no lineal cuando $G \neq \text{ctte}$ y $\eta = 0$; ó para un suelo no lineal viscoelástico cuando $G \neq \text{ctte}$ y $\eta \neq 0$.

Si sustituimos la ecuación 2.26 en la 2.25 obtenemos

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = G \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \eta \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \quad \dots (2.28)$$

que es la llamada ecuación unidimensional de onda para medios viscoelásticos.

II.3.1.3 Solución de la ecuación unidimensional de onda

Los desplazamientos armónicos con frecuencia ω pueden expresarse como

$$u(x, t) = U(x)e^{i\omega t} \quad \dots (2.29)$$

Sustituyendo la ecuación 2.29 en 2.28, resulta una ecuación diferencial ordinaria

$$(G + i\omega\eta) \frac{d^2 U}{dx^2} = \rho\omega^2 U \quad \dots (2.30)$$

cuya solución general es

$$U(x) = E e^{ikx} + F e^{-ikx} \quad \dots \quad (2.31)$$

en donde k es el número de onda de corte complejo y se expresa como

$$k^2 = \frac{\rho\omega^2}{G + i\omega\eta} = \frac{\rho\omega^2}{G^*}$$

siendo G^* el módulo cortante complejo; E y F las amplitudes complejas de onda

La relación de amortiguamiento crítico β , está relacionado a la viscosidad η por

$$\omega\eta = 2G\beta$$

Resultados experimentales indican que G y β son aproximadamente constantes en un amplio rango de frecuencias, por lo que es conveniente expresar el módulo cortante complejo en términos de la relación de amortiguamiento crítico en lugar de la viscosidad

$$G^* = G + i\omega\eta = G(1 + 2i\beta) \quad \dots \quad (2.32)$$

donde G^* puede suponerse independiente de la frecuencia.

Por ejemplo, si una probeta de ensayo linealmente viscoelástica se somete a un esfuerzo cortante dinámico unidimensional $\tau = \tau_0 \sin \omega t$, el estado de deformación resultante será $\epsilon = \epsilon_0 \sin(\omega t - \delta)$, que es una respuesta sinusoidal de la misma frecuencia ω pero defasada con el esfuerzo en un ángulo de retraso δ . Una generalización de la descripción anterior del comportamiento viscoelástico, se consigue expresando el esfuerzo en forma compleja según

$$\tau^* = \tau_0 e^{i\omega t}$$

y también la deformación resultante como

$$c^* = c_0 e^{i(\omega t - \delta)}$$

de donde se define el modulo complejo

$$\frac{\tau}{c} = G^*(i\omega)$$

Así por ejemplo, en la ecuación 2.32 la parte real del módulo complejo se ha llamado módulo de acumulación, y la imaginaria módulo de disipación.

Las ecuaciones (2.28) y (2.29) dan la solución de la ecuación de onda para el movimiento armónico de frecuencia ω

$$u(x,t) = E e^{i(kx + \omega t)} + F e^{-i(kx + \omega t)} \quad \dots \quad (2.33)$$

donde el primer término del segundo miembro representa la onda incidente viajando en la dirección x negativa (hacia arriba) y el segundo término, la onda reflejada viajando en la dirección x positiva (hacia abajo).

II.3.1.4 Aplicación de la ecuación de onda al sistema físico

La ecuación 2.33 es válida para cada estrato de la figura 2.16. Introduciendo un sistema de coordenadas locales x para cada estrato, el desplazamiento en la superficie y base del estrato m son

$$u_m(x=0) = (E_m + F_m) e^{i\omega t} \quad \dots \quad (2.34)$$

$$u_m(x=h_m) = (E_m e^{ik h_m} + F_m e^{-ik h_m}) e^{i\omega t} \quad \dots \quad (2.35)$$

el esfuerzo cortante en un plano horizontal es

$$\tau(x,t) = G \frac{\partial u}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = G^* \frac{\partial u}{\partial t} \quad \dots \quad (2.36)$$

o por la ecuación 2.33

$$\tau(x, t) = ikG^* (E e^{ikx} + F e^{-ikx}) e^{i\omega t} \quad \dots (2.37)$$

y el esfuerzo cortante en la superficie y base del estrato m son respectivamente

$$\tau_m(x = 0) = ikG_m^* (E_m - F_m) e^{i\omega t} \quad \dots (2.38)$$

$$\tau_m(x = h_m) = ikG_m^* (E_m e^{ikh_m} + F_m e^{-ikh_m}) e^{i\omega t} \quad \dots (2.39)$$

puesto que los desplazamientos y esfuerzos deben ser continuos en las interfaces del estrato m y m+1, entonces

$$u_m(x, t) = u_{m+1}(x, t) \quad \dots (2.40)$$

$$\tau_m(x, t) = \tau_{m+1}(x, t) \quad \dots (2.41)$$

De la condición 2.40 y con las ecuaciones 2.34 y 2.35 se obtiene

$$E_{m+1} + F_{m+1} = E_m e^{ikh_m} + F_m e^{-ikh_m} \quad \dots (2.42)$$

y, de la condición 2.41 y con las ecuaciones 2.38 y 2.39 se obtiene

$$E_{m+1} - F_{m+1} = \frac{k_m G_m^*}{k_{m+1} G_{m+1}^*} \left(E_m e^{ikh_m} - F_m e^{-ikh_m} \right) \quad \dots (2.43)$$

por sustracción y adición de las ecuaciones 2.42 y 2.43, se obtienen fórmulas recursivas para las amplitudes E_{m+1} y F_{m+1} de las ondas incidente y reflejada respectivamente en el estrato m + 1, expresadas en términos de las amplitudes del estrato m, esto es

$$E_{m+1} = \frac{1}{2} E_m (1 + \alpha_m) e^{ik_m h_m} + \frac{1}{2} F_m (1 - \alpha_m) e^{-ik_m h_m} \quad \dots \quad (2.44)$$

$$F_{m+1} = \frac{1}{2} E_m (1 - \alpha_m) e^{ik_m h_m} + \frac{1}{2} F_m (1 + \alpha_m) e^{-ik_m h_m} \quad \dots \quad (2.45)$$

donde α_m es la relación compleja de impedancia

$$\alpha_m = \frac{k_m G_m^*}{k_{m+1} G_{m+1}^*} = \left(\frac{\rho_m G_m^*}{\rho_{m+1} G_{m+1}^*} \right)^{1/2} \quad \dots \quad (2.46)$$

la que es independiente de la frecuencia. De aquí que si en la superficie libre de un depósito de suelo se desarrolla un desplazamiento armónico, el movimiento de la roca por el cual se infiere el de la superficie libre, puede ser calculado; para movimientos transitorios se considera la transformada de Fourier como se verá más adelante.

Como en la superficie libre el esfuerzo cortante debe ser cero, sustituyendo en 2.37 $\tau = 0$ y $x = 0$ se obtiene $E_1 = F_1$; por lo que las ondas incidente y reflejada son iguales en la superficie libre.

Por las ecuaciones 2.44 y 2.45 usadas iterativamente para cada estrato, se obtienen las relaciones entre las amplitudes del estrato m y las de la superficie libre

$$E_m = e_m(\omega) E_1 \quad \dots \quad (2.47)$$

$$F_m = f_m(\omega) E_1 \quad \dots \quad (2.48)$$

Las funciones de transferencia e_m y f_m son simplemente las amplitudes para el caso en que $E_1 = F_1 = 1$, que pueden ser obtenidas sustituyendo estas condiciones en las anteriores fórmulas recursivas.

Otras funciones de transferencia se pueden obtener fácilmente a partir de las funciones e_m y f_m . La función de transferencia $A_{n,m}$, entre el desplazamiento en el plano n y m , está determinada por

$$A_{n,m}(\omega) = u_m / u_n$$

y por sustitución de las ecuaciones 2.34, 2.35, 2.47 y 2.48

$$A_{n,m} = \frac{e_m(\omega) + f_m(\omega)}{e_n(\omega) + f_n(\omega)} \quad \dots (2.49)$$

En base a la ecuación 2.49 la función de transferencia $A(\omega)$ se puede encontrar entre dos estratos cualesquiera en el sistema; de aquí que si el movimiento es conocido en cualquier estrato, puede ser calculado en cualquier otro. Las aceleraciones y deformaciones se pueden derivar a partir de la función de desplazamiento

$$\ddot{u}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2 \left[E e^{i(kx + \omega t)} + F e^{-i(kx + \omega t)} \right]$$

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial x} = ik \left[E e^{i(kx + \omega t)} - F e^{-i(kx + \omega t)} \right]$$

11.3.1.5 Transformada de Fourier

Las expresiones hasta aquí desarrolladas son válidas sólo para un movimiento armónico, sin embargo esta teoría puede ser extendida a movimientos transitorios [Schnabel et al, 1971] por medio de la transformada de Fourier [Cooley y Tukey, 1965] al considerar tales movimientos formados de movimientos simples o por una combinación de movimientos armónicos simples de diferentes amplitudes y frecuencias. Para esto el acelerograma es discretizado en n valores de aceleración equidistantes, $\ddot{u}_j(j \Delta t)$, $j = 0, \dots, n-1$; que se puede representar por una sumatoria finita de movimientos armónicos

$$\ddot{u}(t) = \sum_{s=0}^{n/2} \left[\alpha_s e^{i\omega_s t} + b_s e^{-i\omega_s t} \right] \quad \dots (2.50)$$

donde ω_s , $s = 0, \dots, n/2$ son las frecuencias equidistantes

$$\omega_s = \frac{2\pi}{n \Delta t} S = \frac{2\pi}{T} S$$

a_s y b_s son los coeficientes de la transformada compleja de Fourier los cuales se determinan por el análisis armónico de la función que describa el acelerograma (ver figura 2.18)

$$a_s = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \ddot{u}(t) e^{-i\omega_s t}, \quad b_s = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \ddot{u}(t) e^{i\omega_s t}$$

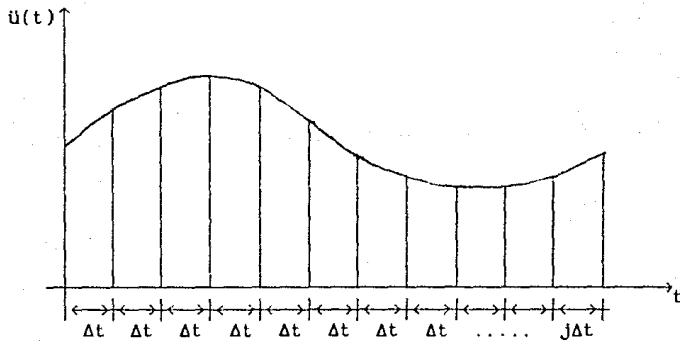


fig. 2.18 Representación esquemática de un acelerograma

y cada término en la ecuación 2.50 es un movimiento armónico oscilatorio con frecuencia ω_s ; si ésta ecuación representa el movimiento en el estrato m , una nueva serie que represente el movimiento en cualquier otro estrato n , es obtenida por la aplicación apropiada del factor de amplificación de la ecuación 2.49 a cada término de la serie

$$\ddot{u}_n(t) = \sum_{s=0}^{n/2} A_{m,n}(\omega_s) \left[a_{m,s} e^{i\omega_s t} + b_{m,s} e^{-i\omega_s t} \right]$$

La representación del movimiento discretizado con la transformada de Fourier da una exacta representación del movimiento en los puntos discretos $t = j\Delta t$.

II.3.2 METODO NO LINEAL

II.3.2.1 Hipótesis

Con los métodos anteriores se han hecho hipótesis muy idealizadas ante la dificultad de establecer un patrón determinista, que describa el comportamiento del suelo ante cargas dinámicas. Con los alcances logrados en la ciencia y en la tecnología en las últimas fechas, es posible analizar sistemas estructurales tan complejos como los no lineales y continuos, cuyas ecuaciones de movimiento deben ser resueltas usando la técnica de integración paso a paso, que es posible, gracias a los beneficios aportados por la teoría del elemento finito y a los sistemas computacionales, con lo que propiamente se constituye un método numérico.

Se puede trabajar con sistemas continuos visco-elásticos o elástico-lineales, con la suposición de que los materiales pueden estar estratificados incluyendo la variabilidad en sus propiedades mecánicas de cada uno, se permite la existencia del nivel freático y una línea de saturación; no se aceptan las condiciones que impongan en el medio las cimentaciones alledañas o pantallas rigidizantes que alteren la continuidad o estructura del suelo.

El estudio se limita al análisis no lineal de depósitos estratificados horizontalmente durante la propagación vertical de ondas de cortante, por lo que el uso del elemento finito es unidimensional. Se supondrá que existe un estrato rocoso a cierta profundidad; a partir de este estrato duro que se considerará como placa rígida, aplicaremos la excitación dinámica la que se transmitirá al medio por la propagación de ondas de cortante en dirección vertical, tomando como fronteras al estrato duro y la superficie del depósito.

II.3.2.2 Ecuaciones de movimiento para un sistema discreto

La naturaleza de las ecuaciones que gobiernan la respuesta dinámica del sistema físico, depende de la representación matemática de tal sistema. En una primera aproximación, el suelo se modela como un sistema con material visco-elástico (modelo de Kelvin) cuya ecuación es la de onda para el problema unidimensional ya citada en la sección II.3.1.2; sin embargo, también puede modelarse discretizando el sistema en uno equivalente de varios grados de libertad con masas concentradas, tratando paralelamente de resolver con esto el problema de la ecuación unidimensional de onda para el depósito. Para tal representación, la ecuación de movimiento es

$$M \ddot{u} + C \dot{u} + K u = R \quad \dots (2.51)$$

donde

- M es la matriz de masas
- C es la matriz de amortiguamiento
- K es la matriz de rigideces
- \ddot{u} , \dot{u} , y u representan a los vectores de aceleración, velocidad y desplazamiento respectivamente
- R es el vector de cargas

En el caso del comportamiento no lineal es conveniente expresar la ecuación 2.51 en el tiempo $t+\Delta t$ como

$$(F_t^i + \Delta F_t^i) + (F_t^d + \Delta F_t^d) + (F_t^r + \Delta F_t^r) = R_{t+\Delta t}$$

donde

- F_t^i es el vector fuerza de inercia
- F_t^d es el vector fuerza disipadora
- F_t^r es el vector fuerza restauradora

en donde además, el subíndice t denota el tiempo en el cual se inicia el incremento de tiempo Δt . Los vectores fuerza F_t^i , F_t^d y F_t^r , necesitan evaluarse usando los desplazamientos, velocidades y aceleraciones en el tiempo t ; los cambios de estas fuerzas en el intervalo de tiempo Δt se suponen estar dadas por

$$\Delta F_t^i = M_t \Delta \ddot{u}_t, \quad \Delta F_t^d = C_t \Delta \dot{u}_t, \quad \Delta F_t^r = K_t \Delta u_t$$

donde M_t , C_t y K_t son las matrices de masa, amortiguamiento y de rigidez en el tiempo t ; $\Delta \ddot{u}$, $\Delta \dot{u}$ y Δu son los cambios en la aceleración, velocidad y desplazamiento durante el incremento de tiempo. De aquí que el cambio de R en el incremento Δt queda expresado como

$$M_t \Delta \ddot{u}_t + C_t \Delta \dot{u}_t + K_t \Delta u_t = R_{t+\Delta t}^*$$

donde

$$R_{t+\Delta t}^* = R_{t+\Delta t} - F_t^i - F_t^d - F_t^r$$

El método de integración numérica debe relacionar a Δu_t y $\Delta \dot{u}_t$ con Δu_t , de modo que obtenido éste último se obtengan los anteriores. Para llevar a cabo el proceso analítico del movimiento, la más simple representación discreta del sistema continuo es por el oscilador amortiguado con un sólo grado de libertad, con la suposición de considerar al sistema de varios grados de libertad como una superposición de los anteriores (ver figura 2.19); con esto la nueva ecuación de movimiento es

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = p(t) \quad \dots (2.52)$$

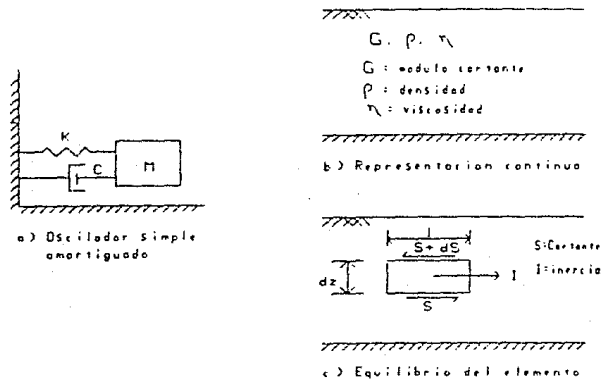


fig 2.19

El uso de un algoritmo de integración paso a paso para resolver la ecuación 2.52, es equivalente a la aplicación de un operador lineal sobre las cantidades desconocidas del sistema, esto es; las propiedades mecánicas del sistema se suponen lineales en cada paso de la integración numérica y la no linealidad se cumple por la selección de diferentes pendientes de la curva esfuerzo-deformación en cada paso. Por medio de esto, las conclusiones derivadas de los análisis hechos con operadores lineales pueden ser extendidas para el estudio de sistemas no lineales.

Dado que la ecuación 2.52 es de segundo orden, el problema queda completamente descrito por dos condiciones iniciales, velocidad y desplazamiento. Una integración lineal consiste en formar en el dominio del tiempo un operador lineal $[L]$, tal que

$$\{\psi\}_1 = [L]\{\psi\}_0 \quad \dots (2.53)$$

donde

$$\{\psi\}_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ \dot{u}_1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} u_1 \text{ y } \dot{u}_1 \text{ son el desplazamiento y velocidad} \\ \text{respectivamente en el fin del intervalo de} \\ \text{tiempo} \end{array}$$

$$\{\psi\}_0 = \begin{bmatrix} u_0 \\ \dot{u}_0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} u_0 \text{ y } \dot{u}_0 \text{ son el desplazamiento y velocidad} \\ \text{respectivamente en el inicio del intervalo} \\ \text{de tiempo} \end{array}$$

Un método de integración paso a paso en el dominio del tiempo aplicable a éste caso, es el de Argyris de inercia cúbica [Argyris et al, 1973], y para la simulación no lineal de los materiales, el modelo de Davidenkov [Martín, 1975] el que se describe en la sección II.4.5.

En general, todo método de integración numérica debe ser estable con cierto grado de aproximación tolerable a la solución esperada [Luthe, 1970]. Así por ejemplo, si la función $f(n)$ representa el error en la salida de un algoritmo después de haber realizado n operaciones y $f(n)$ aumenta linealmente conforme lo hace n , entonces se dice que el método es estable; en el caso en que $f(n)$ aumente exponencialmente, se considera que el método es inestable. Para observar la convergencia de un método numérico, se suele producir n soluciones aproximadas las cuales habrán de tender a una solución única. En nuestro estudio la estabilidad del método está directamente relacionada con la magnitud de los eigenvalores (llamado también radio espectral) de la matriz característica asociada a la ecuación 2.53 [Goudreau y Taylor, 1973], y ésta, es asegurada únicamente si tal magnitud es menor a la unidad.

Para comprobar el orden de aproximación del método dado, muchos autores son de la opinión que cualquier algoritmo utilizado en la práctica debe satisfacer la condición que cuando se aplique a un simple oscilador no amortiguado en vibración libre no conduzca a la divergencia, cuando el intervalo de integración es grande comparado con el periodo del oscilador. Esto asegura la convergencia para sistemas con múltiples grados de libertad, aún cuando sus periodos naturales pueden abarcar diferentes ordenes de magnitud. Sin embargo, se ha observado que el método de integración numérica que se aplique, introduce frecuentemente dos tipos de errores [Bathe y Wilson, 1973], tales como un cierto amortiguamiento artificial que lleva a la extinción de la respuesta ó, el incremento del periodo de oscilación de la misma.

II.3.2.3 Oscilador libre no amortiguado

La ecuación de movimiento del oscilador simple en vibración libre no amortiguada es

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0 \quad \dots \quad (2.54)$$

donde $\omega^2 = k/m$; si el desplazamiento $u_1 = u$ ocurre en $t_1 = t_0 + \Delta t$ y, u_0 en t_0 , se puede demostrar fácilmente resolviendo la ecuación diferencial 2.54, que el desplazamiento y velocidad en el tiempo t_1 están relacionadas a las mismas en el tiempo t_0 por la ecuación

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ \dot{u}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega \Delta t & \frac{1}{\omega} \operatorname{sen} \omega \Delta t \\ -\omega \operatorname{sen} \omega \Delta t & \cos \omega \Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ \dot{u}_0 \end{bmatrix} \quad \dots \quad (2.55)$$

Si definimos $\theta = \omega \Delta t$, expresión que sustituimos en 2.55 obtenemos el operador lineal exacto de la ecuación 2.53

$$[L_0] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \frac{1}{\omega} \operatorname{sen} \theta \\ -\omega \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad \dots \quad (2.56)$$

Del polinomio característico de la ecuación 2.56 se demuestra que los eigenvalores de $[L_0]$ son $\lambda = e^{-i\theta}$; de aquí que el radio espectral es exactamente $|\lambda| = 1$, lo que implica que el libre movimiento del oscilador es estable, y además que los eigenvalores tienen una parte imaginaria, por lo que el movimiento es oscilatorio (ver sección II.2.2.4) con frecuencia de oscilación $\omega = \theta/\Delta t$.

II.3.2.4 Método de inercia cúbica

La suposición básica es que la fuerza de inercia

$$R = M \ddot{u} \quad \dots \quad (2.57)$$

se considera que varía en función de una expresión cúbica dentro de los intervalos de tiempo de integración la cual queda determinada por cuatro constantes [Argyris et al, 1973]. Se usan valores de R en el inicio y en el fin de cada intervalo de integración, como también los valores de su primera derivada con respecto al tiempo, con lo que definimos

$$R = H_{00} R_0 + H_{10} \dot{R}_0 + H_{01} R_1 + H_{11} \dot{R}_1$$

donde H_{00} , H_{10} , H_{01} y H_{11} son polinomios hermitianos (ver apéndice I) de tercer orden

$$H_{00} = 1 - 3s^2 + 2s^3 \quad ; \quad H_{10} = (s - 2s^2 + s^3) \Delta t$$

$$H_{01} = 3s^2 - 2s^3 \quad ; \quad H_{11} = (-s^2 + s^3) \Delta t$$

y $t = s\Delta t$, $0 \leq s \leq 1$.

Por integraciones sucesivas de 2.57, es posible resolverla para incrementos relativos de velocidad y desplazamiento dentro de cada intervalo de tiempo.

$$M\Delta\dot{u} = \frac{\Delta t}{12} (6R_0 + \Delta t \dot{R}_0 + 6R_1 - \Delta t \dot{R}_1) \quad \dots \quad (2.58)$$

$$M\Delta u = M\dot{u}_0 \Delta t + \frac{\Delta t^2}{60} (21R_0 + 3\Delta t R_0 + 9R_1 - 2\Delta t R_1) \quad \dots \quad (2.59)$$

Las ecuaciones 2.58 y 2.59 definen el método de integración de inercia cúbica.

II.3.2.5 Aplicación del método de inercia cúbica al oscilador libre no amortiguado

Si consideramos a la ecuación 2.54 para expresar a R y \dot{R} en los extremos de un intervalo de tiempo, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{R_0}{M} &= -\omega^2 u_0 & \frac{R_1}{M} &= -\omega^2 u_1 \\ & & & \dots \quad (2.60) \\ \frac{\dot{R}_0}{M} &= -\omega^2 \dot{u}_0 & \frac{\dot{R}_1}{M} &= -\omega^2 \dot{u}_1 \end{aligned}$$

Por sustitución de las ecuaciones 2.60 en 2.58 y 2.59 obtenemos

$$\begin{bmatrix} 1 + \frac{3}{20} \theta^2 & -\frac{1}{30} \frac{\theta^3}{\omega} \\ \frac{1}{2} \omega \theta & 1 - \frac{1}{12} \theta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \dot{u}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{20} \theta^2 & \frac{\theta}{\omega} - \frac{\theta^3}{20 \omega} \\ -\frac{1}{2} \omega \theta & 1 - \frac{\theta^2}{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ \dot{u}_0 \end{bmatrix} \quad \dots \quad (2.61)$$

donde $\theta = \omega \Delta t$

Notese que la ecuación 2.61 es de la forma $[A]\{\psi\}_1 = [B]\{\psi\}_0$ ó $\{\psi\}_1 = [L]\{\psi\}_0$, ecuación análoga a la 2.53 para un oscilador forzado amortiguado. Según esto

$$[L] = \frac{1}{1 + \frac{1}{15} \theta^2 + \frac{1}{240} \theta^4} \begin{bmatrix} 1 - \frac{13}{30} \theta^2 + \frac{1}{80} \theta^4 & \frac{\theta}{\omega} \left(1 - \frac{1}{10} \theta^2 + \frac{1}{720} \theta^4 \right) \\ -\omega \theta \left(1 - \frac{1}{16} \theta^4 \right) & 1 - \frac{13}{30} \theta^2 + \frac{1}{80} \theta^4 \end{bmatrix} \quad \dots \quad (2.62)$$

Los eigenvalores de $[L]$ son raíces de su ecuación característica asociada y de la cual se puede demostrar que

$$\det[L] = 1 \quad \dots \quad (2.63)$$

Una condición necesaria y suficiente para que las raíces tomen la forma

$$\lambda = R e^{\pm i\theta} \quad \dots \quad (2.64)$$

de la ecuación 2.62 se deduce que

$$\left(1 - \frac{1}{10} \theta^2 \right) \left(1 - \frac{1}{10} \theta^2 + \frac{1}{720} \theta^4 \right) > 0$$

condición que se cumple si

$$\theta^2 < 10 \quad \dots \quad (2.65)$$

inecuación que deberá satisfacerse para que el método sea estable, y con la que además se implica que las raíces λ , tienen una parte imaginaria y por lo tanto el movimiento es oscilatorio. Entonces por la ecuación 2.63, $R \approx 1$ de la ecuación 2.64; además se demuestra con esto que ningún amortiguamiento artificial es introducido por el método de inercia cúbica de Argyris.

El periodo de oscilación está dado por

$$PE = \left[\frac{\theta}{\phi} - 1 \right] \times 100 \quad \text{en } (\%)$$

donde

$$\text{tg } \theta = \frac{\theta \sqrt{(1 - 1/10\theta^2)(1 - 1/100\theta^2 + 1/720\theta^4)}}{1 - \frac{13}{30}\theta^2 + \frac{1}{80}\theta^4}$$

El método es estable únicamente para intervalos de tiempo los cuales satisfacen la inecuación 2.65, esto es; ya que $\Delta t/T = \theta/2\pi$, esto implica que

$$\frac{\omega \Delta t}{2\pi} < 0.50 \quad \dots \quad (2.66)$$

condición para que el método sea estable. Por esto, aún para grandes valores relativos de Δt , si se cumple la condición 2.66, el periodo asociado a $[L]$ es conservado a un mínimo con lo que se minimiza el error.

Para pequeños valores de θ , se puede demostrar que el operador $[L]$ definido por la ecuación 2.62, se aproxima al operador lineal exacto $[L]_0$ definido por la ecuación 2.56. Dividiendo la ecuación 2.62 por el polinomio

$$1 + \frac{1}{15}\theta^2 + \frac{1}{240}\theta^4$$

se demuestra que

$$[L] \approx \begin{bmatrix} 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24} - \frac{\theta^6}{1440} & \frac{1}{\omega} \left[\theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120} - \frac{\theta^7}{7200} \right] \\ -\omega \left[\theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{144} \right] & 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24} - \frac{\theta^6}{1440} \end{bmatrix}$$

Similarmente para pequeños valores de θ , el operador lineal exacto del oscilador simple no amortiguado puede escribirse como

$$[L]_0 = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24} - \frac{\theta^6}{720} & \frac{1}{\omega} \left[\theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120} - \frac{\theta^7}{5040} \right] \\ -\omega \left[\theta - \frac{\theta^2}{6} + \frac{\theta^5}{120} \right] & 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24} - \frac{\theta^6}{720} \end{bmatrix}$$

El operador error se define como $[L]_E = [L] - [L]_0$, donde

$$[L]_E = \begin{bmatrix} \frac{\theta^6}{1440} & \frac{1}{\omega} \frac{17}{50400} \theta^7 \\ \omega \frac{\theta^5}{720} & \frac{\theta^6}{1400} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, al definirse parámetros que minimizen satisfactoriamente los errores introducidos por el método numérico de inercia cúbica, éste ha sido seleccionado para el estudio de la respuesta dinámica de sistemas discretos no lineales, que representen estratos horizontales de suelo. Cabe hacer notar que, para el método de inercia cúbica se considera la no linealidad de los elementos discretos del sistema, en tanto que en el método lineal definido por la ecuación 2.53, los elementos discretos son precisamente lineales.

II.3.2.6 Formulación implícita del método de inercia cúbica en el método del elemento finito para el problema del oscilador amortiguado en vibración forzada con múltiples grados de libertad

La modelación del depósito de suelo con elementos finitos, es con una malla unidimensional en donde precisamente se consideran los elementos unidimensionales con masa concentrada en los nudos (ver

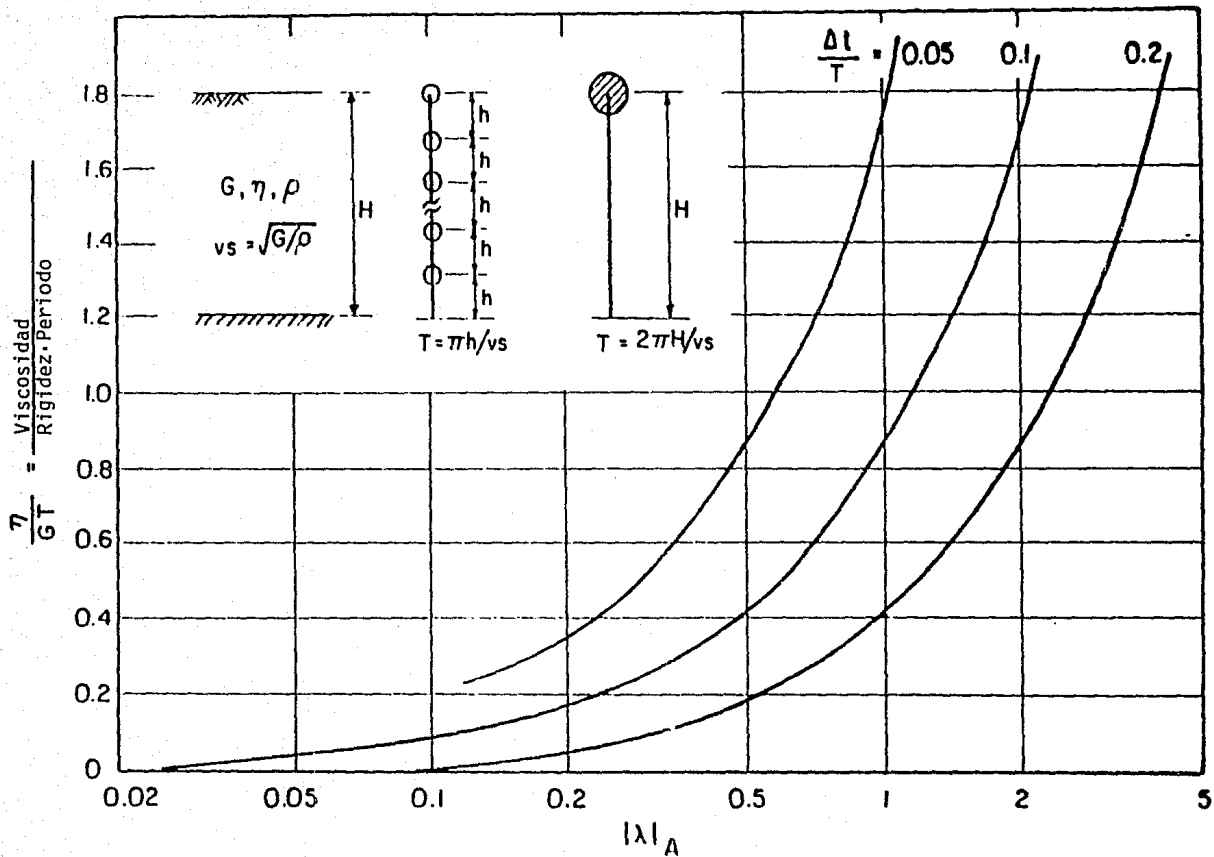


fig 2.20 Radio de la matriz iteración en el método de inercia cúbica

figura 2.20). En la teoría del elemento finito los elementos son interpolados por los polinomios hermitianos ya citados (apendice I). Argyris ha demostrado [1973] que existe convergencia rápida del proceso iterativo, y que se obtiene como función del intervalo de tiempo, del periodo de los elementos y también por la viscosidad de los materiales del depósito. Para determinar valores de la relación $\Delta t/T$ óptimos para ser usados en la práctica se llevaron a cabo dos estudios de

- A) La matriz iteración asociada con un oscilador forzado amortiguado de múltiples grados de libertad
- B) La proximidad de la respuesta calculada de un depósito de material visco-lineal con frecuencia natural de 2.5 cps para una excitación armónica con frecuencia entre 1 y 10 cp

A) Para sistemas de multiples grados de libertad la ecuación de movimiento (de la ecuación 2.51) es

$$M\ddot{u} = R = - R_s - C\dot{u} + P(t)$$

donde R_s es la fuerza elástica interna en los nudos

Segun las ecuaciones 2.58 y 2.59

$$\dot{u}_1 = \dot{u}_0 + \frac{1}{12} \Delta t M^{-1} (6R_0 + \Delta t \dot{R}_0 + 6R_1 - \Delta t \dot{R}_1) \dots (2.67)$$

$$u_1 = u_0 + \Delta t \dot{u}_0 + \frac{1}{60} \Delta t^2 M^{-1} (21R_0 + 3\Delta t \dot{R}_0 + 9R_1 - 2\Delta t \dot{R}_1) \dots (2.68)$$

y la aceleración está dada por

$$\ddot{u}_1 = M^{-1} R_1 \dots (2.69)$$

Diferenciando las expresiones 2.67 y 2.68 se obtienen los incrementos de velocidad y desplazamiento respectivamente

$$d\dot{u}_1 = \frac{1}{12} \Delta t M^{-1} (6R_0 + \Delta t \dot{R}_0 + 6R_1 - \Delta t \dot{R}_1) \dots (2.70)$$

$$du_1 = \Delta t \dot{u}_0 + \frac{1}{60} \Delta t^2 M^{-1} (21R_0 + 3\Delta t \dot{R}_0 + 9R_1 - 2\Delta t \dot{R}_1) \dots (2.71)$$

expresiones en las cuales desconocemos R_1 y \dot{R}_1 . Por otro lado, u_1 , \dot{u}_1 y \ddot{u}_1 deben satisfacer las ecuaciones para la fuerza de inercia y su primera derivada en el fin del intervalo de tiempo

$$R_1 = -R_0 - K_0 \dot{u}_1 - C u_1 + P(t_1) \quad \dots (2.72)$$

$$\dot{R}_1 = -K_0 \ddot{u}_1 - C \dot{u}_1 + \dot{P}(t_1) \quad \dots (2.73)$$

Así, dentro del intervalo de tiempo Δt se puede determinar con las ecuaciones 2.70 a 2.73, un procedimiento iterativo para calcular u_1 , \dot{u}_1 , \ddot{u}_1 , R_1 y \dot{R}_1 , cuya estimación inicial está dada por

$$R_1 = R_0 + \Delta t R_0 \quad y$$

$$\dot{R}_1 = \dot{R}_0$$

Cuando R_s es una función lineal de u las ecuaciones 2.68 forman un sistema de ecuaciones lineales simultaneas.

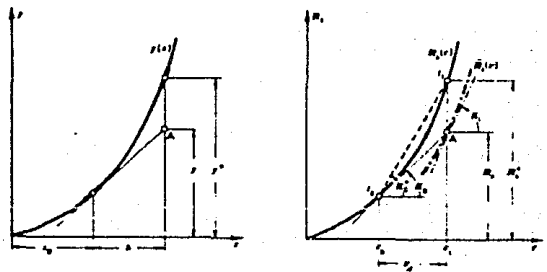
Se procede ahora a linearizar el problema escribiendo

$$R_{s1} = R_{s0} + K_0 (u_1 - u_0)$$

$$R_{s1} = K_0 u_1$$

... (2.74)

cada paso puede entonces calcularse como un caso lineal, pero reemplazando en iteraciones subsiguientes K_0 por $K_0 = 1/2(K_0 + K_1)$; donde K_1 es el modulo tangente correspondiente a la segunda o tercera iteración de u_1 obtenida por las ecuaciones 2.74 no modificadas. Las relaciones entre las variaciones del modulo se muestran en las figuras 2.21.



$$x = f(x_0) + \Delta f(x_0) \quad \Rightarrow \quad x_{11} = x_{10} + K_0 \Delta x_0$$

$$x^* = f(x_0) + \frac{1}{2}(\Delta f(x_0) + \Delta f(x_1)) \quad \Rightarrow \quad x_{10}^* = x_{10} + \frac{1}{2}\{K_0 + K_1\} \Delta x_0$$

problema matemático problema mecánico

fig 2.21

Para la convergencia del método, se ha tomado el concepto de la matriz iteración el cual indica la condición necesaria y suficiente para que el radio espectral de ésta matriz sea menor que la unidad. Sustituyendo las ecuaciones 2.67, 2.68 y 2.69 en las 2.72 y 2.73 obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{R}_1 &= -K_0 \dot{u}_1 - C \dot{u}_1 + P(t_1) \\ &= -K_0 \left(\dot{u}_0 + \frac{1}{12} \Delta t M^{-1} (6R_0 + \Delta t \dot{R}_0 + 6R_1 - \Delta t \dot{R}_1) \right) - CM^{-1} R_1 + P(t_1) \\ \dot{R}_1 &= \dot{F}_0 + \frac{\Delta t^2}{12} K_0 M^{-1} \dot{R}_1 - \left[\frac{6\Delta t}{12} K_0 M^{-1} + CM^{-1} \right] R_1 \quad \dots (2.75) \end{aligned}$$

donde

$$\dot{F}_0 = -K_0 \left[\dot{u}_0 + \frac{\Delta t}{12} M^{-1} (6R_0 + \Delta t \dot{R}_0) \right] + P(t_1) \quad \dots (2.76)$$

similarmente para la fuerza de inercia

$$\begin{aligned} R_1 &= -R_{s_0} - K_0 \dot{u}_1 - C \dot{u}_1 + P(t_1) \\ &= -R_{s_0} - K_0 \left[\Delta t \dot{u}_0 + \frac{1}{60} \Delta t^2 M^{-1} (21R_0 + 3\Delta t \dot{R}_0 + 9R_1 - 2\Delta t \dot{R}_1) \right] \\ &\quad - C \left[\dot{u}_0 + \frac{1}{12} \Delta t M^{-1} (6R_0 + \Delta t \dot{R}_0 + 6R_1 - \Delta t \dot{R}_1) \right] + P(t_1) \\ R_1 &= F_0 + \left[\frac{2\Delta t^3}{60} K_0 M^{-1} + \frac{\Delta t^2}{12} CM^{-1} \right] \dot{R}_1 - \left[\frac{9\Delta t^2}{60} K_0 M^{-1} + \frac{6\Delta t}{12} CM^{-1} \right] R_1 \\ &\quad \dots (2.77) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} F_0 &= -R_{s_0} - K_0 \left[\Delta t \dot{u}_0 + \frac{\Delta t^2}{60} M^{-1} (21R_0 + 3\Delta t \dot{R}_0) \right] \\ &\quad - C \left[\dot{u}_0 + \frac{\Delta t}{12} M^{-1} (6R_0 + \Delta t \dot{R}_0) \right] + P(t_1) \quad \dots (2.78) \end{aligned}$$

$$\omega_{\max}^2 = \lambda_{\max}(M^{-1}K_0) \quad \dots (2.80)$$

$$T_{0\min} = \frac{2\pi}{\omega_{\max}}$$

la longitud del intervalo de integración es convenientemente expresado como

$$\Delta t = \frac{1}{N} \frac{T_{0\min}}{4} = \frac{\pi}{2N \sqrt{\lambda_{\max}(M^{-1}K_0)}} \quad \dots (2.81)$$

donde N es el número de divisiones ($N = \Delta t/T_{\min}$) de un cuarto del periodo mínimo.

Si ahora expresamos la matriz iteración de la ecuación 2.79 sin el amortiguamiento

$$[A] = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^2}{12} I_n & -\frac{6\Delta t}{12} I_n \\ \frac{2\Delta t^3}{60} I_n & -\frac{9\Delta t^2}{60} I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_0 M^{-1} & 0 \\ 0 & K_0 M^{-1} \end{bmatrix}$$

donde I_n representa la matriz identidad de orden n; ésta ecuación la podemos expresar también como

$$[A] = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^2}{12} & -\frac{6\Delta t}{12} \\ \frac{2\Delta t^3}{60} & -\frac{9\Delta t^2}{60} \end{bmatrix} K_0 M^{-1} = [T][B]$$

o bien

$$[A] = \begin{bmatrix} T_{11} B & T_{12} B \\ T_{12} B & T_{22} B \end{bmatrix}$$

El máximo eigenvalor de la matriz [A] se puede calcular de la siguiente expresión

$$\lambda_k\{[T][B]\} = \nu_i \mu_j$$

donde ν_i es el eigenvalor de [T] y μ_j es el de [B] o bien

$$\lambda_{\max}[A] = \lambda_{\max}[T] \lambda_{\max}[K_0 M^{-1}]$$

El máximo eigenvalor de [T] puede obtenerse de su polinomio característico como

$$\lambda^2 + (\delta - \alpha)\lambda + \beta\gamma - \alpha\delta = 0$$

donde

$$\alpha = \frac{\Delta t^2}{12} ; \quad \beta = \frac{6\Delta t}{12} ; \quad \gamma = \frac{2\Delta t^3}{60} ; \quad \delta = \frac{9\Delta t^2}{60} \quad \dots (2.82)$$

de donde se obtiene finalmente

$$|\lambda_{\max}[T]| = 0.6455 \Delta t^2$$

de aquí que

$$\lambda_{\max}[A] = 0.6455 \Delta t^2 \lambda_{\max}[K_0 M^{-1}] \quad \dots (2.83)$$

Sustituyendo la ecuación 2.81 en la 2.83 se obtiene

$$\lambda_{\max}[A] = 0.6455 \frac{\pi^2}{4N^2 \lambda_{\max}(M^{-1} K_0)} \lambda_{\max}(K_0 M^{-1}) \quad \dots (2.84)$$

Como $\lambda(M^{-1}K_0) = \lambda(K_0M^{-1})$, entonces

$$\lambda_{\max}[A] = 0.159 \frac{1}{N^2}$$

Así por ejemplo para $\Delta t/T_{\min} = N \geq 1/2$, la solución iterativa de la ecuación 2.78 con $C = 0$ converge. Resolviendo la ecuación 2.84 para Δt , para estimar la longitud del intervalo de integración en términos de $\lambda_{\max}[A]$, obtenemos

$$\Delta t = \left[\frac{\lambda_{\max}[A]}{0.6455 \lambda_{\max}[M^{-1}K_0]} \right]^{1/2}$$

Se considera ahora el efecto del amortiguamiento sobre la convergencia. Según la ecuación 2.79

$$[A] = [T][B] + [S][G] \quad \dots (2.85)$$

donde

$$[S][G] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \eta & \phi \end{bmatrix} CM^{-1}$$

donde $G = CM^{-1}$, y

$$\eta = \frac{\Delta t^2}{12} \quad ; \quad \phi = \frac{-6\Delta t}{12} \quad \dots (2.86)$$

Debido a que no es posible derivar directamente los eigenvalores de la ecuación 2.85, estos pueden obtenerse aproximadamente según la siguiente ecuación

$$\|[A]\| \leq \|[T][B]\| + \|[S][G]\|$$

o bien

$$\{\lambda_{\max} [A^t A]\}^{1/2} \leq \{\lambda_{\max} [T B]^t [T B]\}^{1/2} + \{\lambda_{\max} [S G]^t [S G]\}^{1/2} \dots (2.87)$$

Según el algebra de matrices, si L, G, H y D son matrices cuadradas

$$[L D]^t = [L]^t [D]^t$$

$$[G H][L D] = [G L][H D]$$

con lo que la ecuación 2.87 se expresa como

$$\lambda_{\max} [A] \leq \{\lambda_{\max} [(T^t T)[B^t B]]^{1/2}\} + \{\lambda_{\max} [(S^t S)[G^t G]]^{1/2}\} \dots (2.88)$$

Las matrices 2x2 son expresadas como

$$T^t T = \begin{bmatrix} \alpha^2 + \beta^2 & \alpha\beta + \gamma\delta \\ \alpha\beta + \gamma\delta & \gamma^2 + \delta^2 \end{bmatrix}$$

donde α , β , γ y δ se han dado en la ecuaciones 2.82, y

$$S^t S = \begin{bmatrix} \eta^2 & \eta\vartheta \\ \eta\vartheta & 1 + \vartheta^2 \end{bmatrix}$$

donde ϑ y η se han dado en las ecuaciones 2.86. Con la ecuación 2.88 puede estimarse el efecto del amortiguamiento sobre la convergencia.

La convergencia del proceso iterativo se observó (sección IV.1) para el caso en que K_0 permanece constante. En el caso no lineal K_0

es reemplazada por la matriz de rigideces modificada K_0^* , y es obvio que el máximo eigenvalor de la matriz $M^{-1}K_0^*$ variará durante la integración. Sin embargo, esto no será generalizado necesariamente para recalcular el eigenvalor desde el intervalo de tiempo originalmente seleccionado y dejará un amplio margen para un incremento en sus valores sin pérdida de la convergencia.

Por otro lado, según la figura 2.20, se muestra que la introducción de la viscosidad en el oscilador incrementa el radio espectral de la matriz iteración. Según experiencias se ha llegado a establecer que para la relación $\Delta t/T = 0.2$, el algoritmo que se implica de las ecuaciones 2.58 y 2.59 converge únicamente si la viscosidad satisface la relación $\eta/CT < 0.4$.

Se han aplicado satisfactoriamente así curvas de la figura 2.20 [Martín, 1975] a sistemas de varios grados de libertad, en donde el periodo T es reemplazado por el periodo mínimo natural para sistemas discretos cuya expresión es

$$T_{\min} = \frac{Mh}{V_s} \quad \dots \quad (2.89)$$

donde V_s es la velocidad de la onda cortante dentro de cada elemento y h la altura del mismo.

Si M es el número de elementos en el perfil que se muestra en la figura 2.19 y β la fracción de amortiguamiento crítico (ver sección II.2.2.4) en el mismo perfil, el criterio de convergencia está dado por

$$\frac{\Delta t}{T_{\min}} < \frac{0.2}{\beta M} \quad \dots \quad (2.90)$$

para sistemas amortiguados

Se ha determinado un criterio para delimitar el número de iteraciones, junto con los errores correspondientes a la aceleración, velocidad y desplazamiento. Así entonces, después de ν iteraciones se puede expresar la solución exacta de la ecuación 2.78 en ausencia del amortiguamiento como

$$R = F + A(R^\nu + \epsilon^\nu)$$

en donde ϵ^ν es el vector error definido por

$$R - R^v = \langle \varepsilon_1^v \quad \varepsilon_1^v \rangle$$

Considerando $C = 0$ en la ecuación 2.78 y además el vector error, se obtiene

$$\begin{bmatrix} \dot{R}_1 \\ R_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{F}_0 \\ F_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^2}{12} K_0 M^{-1} & -\frac{6\Delta t}{12} K_0 M^{-1} \\ \frac{2\Delta t^3}{60} K_0 M^{-1} & -\frac{9\Delta t^2}{60} K_0 M^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{R}_1 + \varepsilon_1^v \\ R_1 + \varepsilon_1 \end{bmatrix}^v$$

o bien

$$\begin{aligned} R_1 &= \left[F_0 + \frac{\Delta t^2}{12} K_0 M^{-1} \dot{R}_1^v - \frac{6\Delta t}{12} K_0 M^{-1} R_1^v \right] \\ &+ \left[\frac{\Delta t^2}{12} K_0 M^{-1} \varepsilon_1^v - \frac{6\Delta t}{12} K_0 M^{-1} \varepsilon_1 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_1 &= \left[F_0 + \frac{2\Delta t^3}{60} K_0 M^{-1} \dot{R}_1^v - \frac{9\Delta t^2}{60} K_0 M^{-1} R_1^v \right] \\ &+ \left[\frac{2\Delta t^3}{60} K_0 M^{-1} \varepsilon_1^v - \frac{9\Delta t^2}{60} K_0 M^{-1} \varepsilon_1 \right] \end{aligned}$$

Igualando los errores de R_1 y R_1

$$\left| \frac{\Delta t^2}{12} K_0 M^{-1} \varepsilon_1^v - \frac{6\Delta t}{12} K_0 M^{-1} \varepsilon_1 \right| = \left| \frac{2\Delta t^3}{60} K_0 M^{-1} \varepsilon_1^v - \frac{9\Delta t^2}{60} K_0 M^{-1} \varepsilon_1 \right|$$

o bien

$$\left| \frac{\Delta t^2}{12} \varepsilon_1^v - \frac{6\Delta t}{12} \varepsilon_1 \right| = \left| \frac{2\Delta t^3}{60} \varepsilon_1^v - \frac{9\Delta t^2}{60} \varepsilon_1 \right|$$

despreciando términos de orden superior obtenemos aproximadamente

$$|\varepsilon_1^v| = \frac{\Delta t}{6} |\dot{c}_1^v|$$

o bien

$$\|\varepsilon_1^v\| = \frac{\Delta t}{6} \|\dot{c}_1^v\| \quad \dots (2.91)$$

Así entonces el vector error entre sucesiones sucesivas puede expresarse como

$$\left[(R_1^{v+1} - R_1^v)^t (R_1^{v+1} - R_1^v) \right]^{1/2} = \frac{\Delta t}{6} \left[(\dot{R}_1^{v+1} - \dot{R}_1^v)^t (\dot{R}_1^{v+1} - \dot{R}_1^v) \right]^{1/2} \quad \dots (2.92)$$

Se puede ahora estimar la exactitud del vector \ddot{u}_1 con respecto a R_1 con la relación

$$\ddot{u}_1 = M^{-1} R_1$$

el error en el vector aceleración satisface las condiciones

$$\ddot{u}_1 = \ddot{u}_1^v + \ddot{u}_e = M^{-1} R_1^v + M^{-1} c_1^v$$

donde

$$\ddot{u}_e = M^{-1} c_1^v$$

o bien, con la ecuación 2.91

$$\|\ddot{u}_e\| \leq \|M^{-1}\| \|\varepsilon_1^v\| = \frac{\Delta t}{6} \|M^{-1}\| \|\dot{c}_1^v\|$$

Para la velocidad, con la ecuación 2.70 se obtiene

$$\dot{d}u = \dot{d}u^v + d_{ue} = \frac{\Delta t}{12} M^{-1} [6R_0 + \Delta t R_0 + 6(R_1^v + \varepsilon_1^v) - \Delta t(\dot{R}_1^v + \dot{\varepsilon}_1^v)]$$

en la cual el vector error está dado por

$$d_{ue} \leq \frac{\Delta t^2}{12} M^{-1} (6\varepsilon_1^v - \Delta t \dot{\varepsilon}_1^v) \quad \dots (2.93)$$

sustituyendo la ecuación 2.91 en la 2.93

$$d_{ue} = \frac{\Delta t^2}{6} M^{-1} |\dot{\varepsilon}_1^v|$$

o bien

$$\|d_{ue}\| \leq \frac{\Delta t^2}{6} \|M^{-1}\| \|\dot{\varepsilon}_1^v\|$$

Finalmente, de la ecuación 2.71 el error para los desplazamientos

$$du = du^v + d_{ue} = \Delta t u_0 + \frac{\Delta t^2}{60} M^{-1} [21R_0 + 3\Delta t R_0 + 9(R_1^v + \varepsilon_1^v) - 2\Delta t(\dot{R}_1^v + \dot{\varepsilon}_1^v)]$$

en la cual el vector error está dado por

$$d_{ue} = \frac{\Delta t^2}{60} M^{-1} (9\varepsilon_1^v - 2\Delta t \dot{\varepsilon}_1^v) \leq \frac{7}{120} \Delta t^3 M^{-1} |\dot{\varepsilon}_1^v|$$

o bien

$$\|d_{ue}\| \leq \frac{7\Delta t^3}{120} \|M^{-1}\| \|\dot{\varepsilon}_1^v\|$$

Para delimitar el proceso iterativo, de la ecuación 2.92 se obtiene

$$\|R_c\| = \left[(R_1^{v+1} - R_1^v)(R_1^{v+1} - R_1^v) \right]^{1/2} \leq \epsilon_1$$

En la figura 2.23 se muestra el diagrama de flujo para analizar sistemas no lineales con la matriz de rigideces modificada

B) La discretización espacial de un depósito de suelo en una serie de elementos afecta la transmisibilidad de propiedades del sistema. El factor que controla este fenómeno experimentalmente se ha encontrado que es la relación de la longitud de onda λ , a la altura del elemento h . Resultados de un estudio hecho por Martin [1975] de la transmisibilidad de un depósito de cuatro elementos con 2.5 cps de frecuencia natural y 7.8% de amortiguamiento se muestran en las tablas 2.1 y 2.2. Según la tabla 2.1, la respuesta calculada fué muy aproximada a la exacta, con errores menores del 3% para valores de la relación λ/h mayores que ocho. La respuesta también fué obtenida para una excitación armónica de 20 cps para depósitos de 8 y 20 elementos. Según la tabla 2.2 únicamente para grandes valores de la relación λ/h ($\lambda/h = 20$) pudo reducirse el error de la amplificación calculada a menos del 4%. De la misma tabla 2.2 se observa que el efecto de la viscosidad sobre la convergencia de la matriz iteración (ver figura 2.20) fué confirmada por este análisis. El periodo T_{min} de los elementos se calculó con la ecuación 2.89, y la convergencia del método se logró únicamente para intervalos de tiempo Δt , los cuales satisfacen los requerimientos de la figura 2.20, y la ecuación 2.90.

Δt (segs)	λ/h	EXITACION FRECUENCIA (cps)	AMPLIFICACION EXACTA	INTERVALO FRECUENCIA (cps)	AMPLIFICACION CALCULADA	ERROR (%)
.0156	40	1	1.235	.250	1.234	0.1
.0156	20	2	3.072	.250	3.048	0.8
.0125	8	5	.905	.3125	.874	3.4
.0125	4	10	.401	.3125	.229	43

Tabla 2.1

Δt (segs)	NUMERO DE ELEMENTOS	λ/h	(segs)	$\frac{\Delta t}{T_{min}}$	$\frac{\eta}{GT_{min}}$	CONVERGENCIA	ERROR (%)
.015625	4	4	.08	.20	.13	si	42
.015625	4	4	--	--	--	si	42
.015625	8	8	.04	.40	.25	no	
.007812	8	8	.04	.20	.25	si	12
.007812	8	8	.04	.20	.25	si	10
.003906	20	20	.02	.25	.64	no	
.001953	20	20	.02	.12	.64	variable	9
.000976	20	20	.02	.06	.64	si	3.5

Tabla 2.2

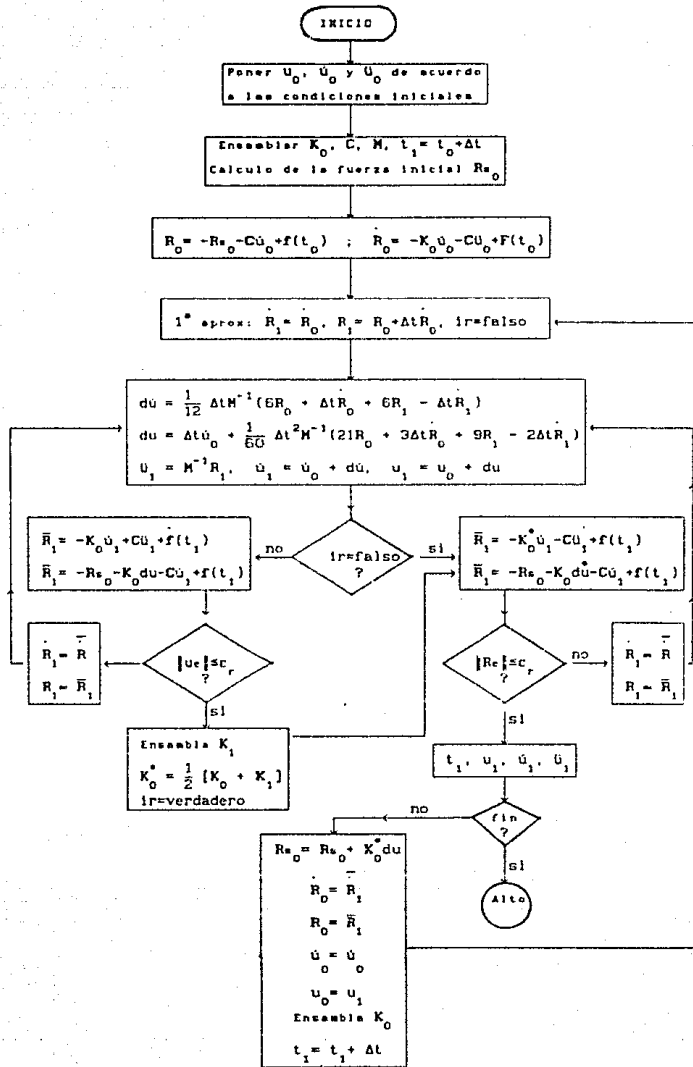


fig 2.23 Diagrama de flujo para la integración numérica de la ecuación no-lineal de movimiento usando la matriz de rigideces modificada.

II.4 MODELOS DEL COMPORTAMIENTO DINAMICO DE LOS SUELOS

Para la aplicación de los procedimientos hasta aquí citados, es necesaria la incorporación representativa de las propiedades dinámicas de los suelos en los análisis. Para esto, se han propuesto varios modelos no lineales para simular el comportamiento del suelo ante cargas dinámicas. Entre los más empleados están la correlación empírica de Seed e Idriss [1970], el modelo hiperbólico de Hardin y Drnevich [1972b], el de Ramberg-Osgood [1943, citado por Pyke, 1979] y el de Davidenkov [Martín, 1975].

II.4.1 Criterio de Masing

Los modelos citados en la sección anterior están gobernados por las siguientes condiciones conocidas como criterios de Masing

- a) El amortiguamiento del material es independiente de la deformación, y por lo tanto es de naturaleza histérica.
- b) El comportamiento no lineal de los materiales es de naturaleza plástica. La rigideces máxima y mínima alcanzadas en cada ciclo de carga son las mismas.
- c) Bajo cargas armónicas de amplitud constante, la respuesta en los materiales se estabiliza, con lo que las curvas esfuerzo-deformación resultan cerradas.

Puede establecerse entonces de los anteriores principios que la curva esfuerzo-deformación inicial (o virgen) del suelo se puede expresar como

$$\tau = f(\gamma) \quad \dots (2.94)$$

donde τ es el esfuerzo cortante, γ es la deformación angular.

Las ramas de carga y descarga están dadas por

$$\frac{\tau + \tau_c}{2} = f\left[\frac{\gamma + \gamma_c}{2}\right] \quad \dots (2.95)$$

donde τ_c es el esfuerzo cortante de los puntos extremos de la curva de histeresis (fig 2.24) y γ_c es la deformación angular correspondiente.

Las curvas definidas por la ecuación 2.95 tienen la misma forma de la curva de la ecuación 2.94 pero están afectadas por un factor de 2; sus puntos iniciales son en los que ocurre la inversión en el sentido de aplicación del esfuerzo (puntos A y B, fig 2.24). La rama

de descarga se inicia en el punto A y encuentra en la rama virgen en el B. El encuentro entre las curvas es suave con una pendiente en el punto A igual en ambas. En el caso en que la carga continúe más allá del B, la rama de descarga sigue a la rama virgen. A su vez, la rama de recarga se inicia en B y termina en A.

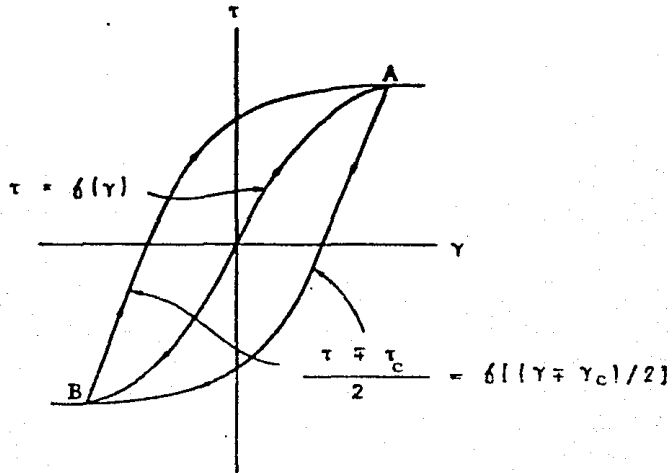


fig 2.24

Por otra parte, si se considera que las propiedades del suelo no se modifican en función del número de ciclos de carga y descarga (de amplitud constante), entonces el módulo de cortante del suelo se acepta que sea el módulo secante definido por

$$G^* = \frac{\tau_c}{\gamma_c} = \frac{f(\gamma_c)}{\gamma_c}$$

y en general

$$G^* = \frac{\tau}{\gamma} = \frac{f(\gamma)}{\gamma} \quad \dots (2.96)$$

Las características de amortiguamiento del suelo se representan por medio de la relación

$$\beta = \frac{1}{4\pi} \frac{\Delta W}{W}$$

o bien según la figura 2.25

$$\beta = \frac{1}{4\pi} \frac{ACDEA}{ABOA} \quad \dots (2.97)$$

Es decir, ΔW es el área del ciclo histórico (energía de amortiguamiento) y W es la energía de deformación equivalente.

Las ecuaciones 2.96 y 2.97 quedan determinadas una vez que $f(\gamma)$ de la ecuación 2.94 se especifica y se aplica el criterio de Masing

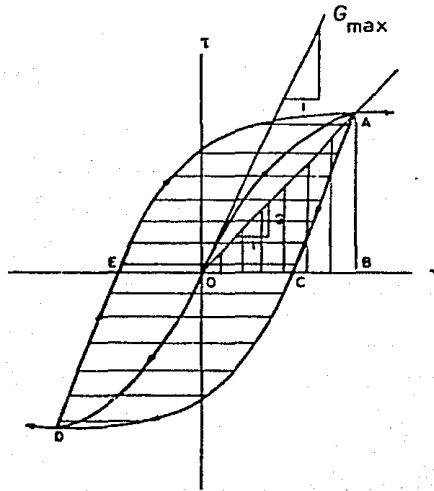


fig 2.25

II.4.2 Modelo empírico de Seed e Idriss

Seed e Idriss [1970], con base en resultados de laboratorio obtenidos por ellos y otros publicados en la literatura, proponen la correlación empírica de la figura 2.26 par determinar la variación de G/G_{max} y de la relación de amortiguamiento vs la deformación angular γ , figura 2.27.

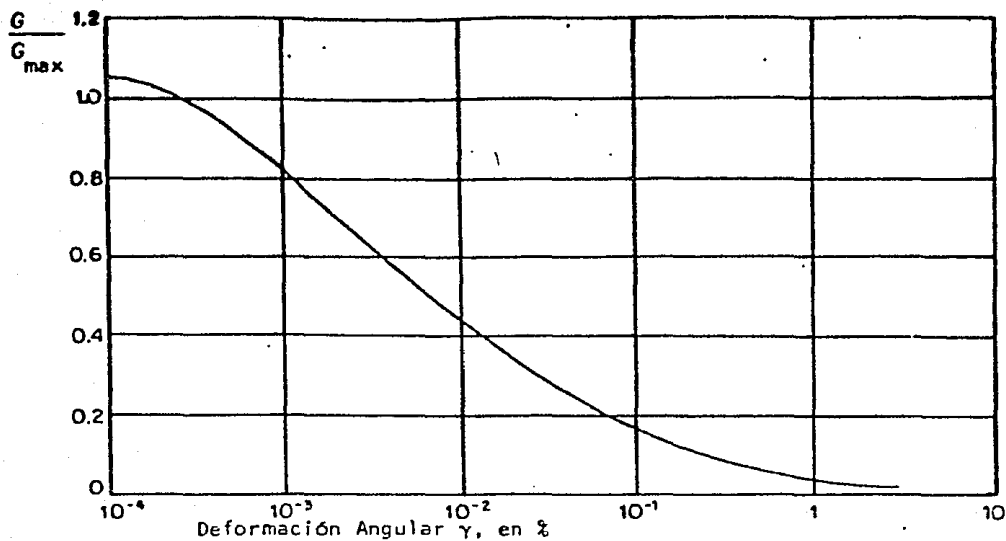


fig 2.26

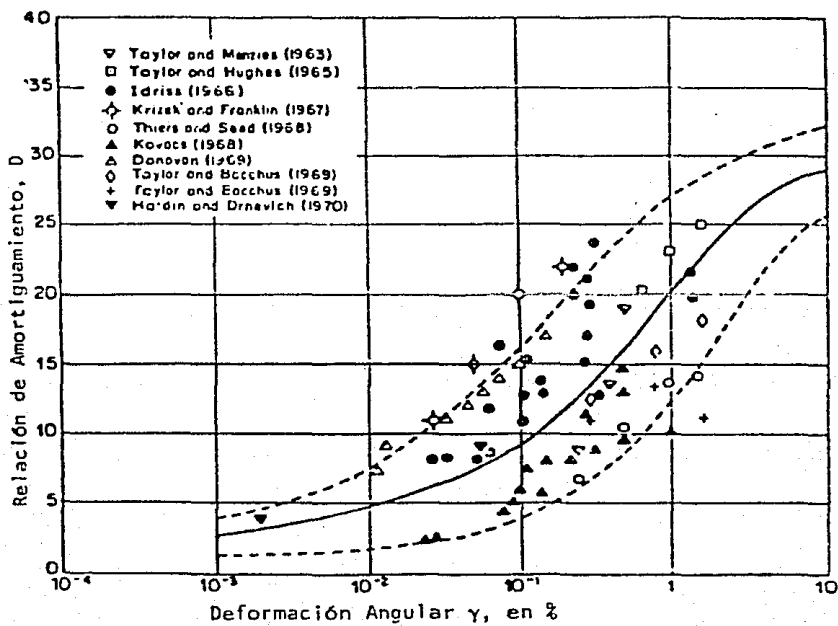


fig 2.27

Estos autores indican que la relación de la figura 2.26 es aproximada y que los resultados analizados presentan dispersión. La relación de la figura 2.27 también es aproximada y los datos revisados exhiben mayor dispersión que para el caso anterior.

Para emplear la relación G/G_{max} vs γ , basta determinar G_{max} con alguna técnica de laboratorio o de campo. El valor de G a una deformación cualquiera se puede entonces estimar usando directamente la curva de la figura 2.26.

La relación de amortiguamiento para un valor de γ , se obtiene directamente de la figura 2.27. Para usarla no se requiere ningún dato experimental, lo cual es un gran defecto.

Las relaciones empíricas de Seed e Idriss aceptan de manera implícita, que el comportamiento dinámico del suelo es el idealizado de la figura 2.24.

II.4.3 Modelo hiperbolico de Hardin-Drnevich

Hardin y Drnevich [1972b] proponen que la rama virgen de la curva esfuerzo-deformación del suelo (ec 2.94) sea representada por una ecuación hiperbólica (fig 2.28) la cual la han definido como

$$\tau = \frac{G_{max} \gamma}{1 + \frac{G_{max} \gamma}{\tau_{max}}} \quad \dots (2.98)$$

en la que

G_{max} es el modulo tangente inicial

τ_{max} es la resistencia del suelo al corte

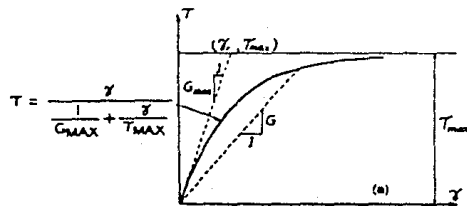


fig 2.28

Definiendo también una deformación angular de referencia (fig 2.28) como

$$\gamma_y = \frac{\tau_{max}}{G_{max}} \quad \dots (2.99)$$

Sustituyendo ésta ecuación en la 2.98 y ésta a su vez en la 2.96, se obtiene la expresión del modulo de cortante secante para cualquier deformación angular

$$\frac{G}{G_{\max}} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma}{\gamma_y}} \quad \dots (2.100)$$

Definida la ecuación 2.98 se supone obtener la expresión de la relación de amortiguamiento

$$\beta = \frac{4}{\pi} \left[1 + \frac{1}{\gamma/\gamma_y} \right] \left[1 - \frac{1}{\gamma/\gamma_y} \ln \left[1 + \frac{\gamma}{\gamma_y} \right] \right] - \frac{2}{\pi}$$

o en términos de G/G_{\max}

$$\beta = \frac{4}{\pi} \frac{1}{1 - \frac{G}{G_{\max}}} \left[1 - \frac{\frac{G}{G_{\max}}}{1 - \frac{G}{G_{\max}}} \ln \left[\frac{1}{\frac{G}{G_{\max}}} \right] \right] - \frac{2}{\pi} \quad \dots (2.101)$$

En la practica se ha observado que la ecuación 2.101 no se ajusta adecuadamente a los valores obtenidos en laboratorio, razon por la cual los autores proponen usar en lugar de ésta ecuación, la relación empirica siguiente

$$\beta = \beta_{\max} \left[1 - \frac{G}{G_{\max}} \right] \quad \dots (2.102)$$

en la que β_{\max} es la relación de amortiguamiento obtenida a gran deformación angular (cuando G/G_{\max} tiende a cero). La expresión 2.102 no es compatible con el criterio de Masing, no obstante, introduce un nuevo parámetro (β_{\max}) que permite lograr un mejor ajuste con los datos experimentales [Hardin y Drnevich, 1972a].

Para emplear el modelo de Hardin y Drnevich basta conocer G_{\max} y τ_{\max} y sustituir estos valores en las ecuaciones 2.99 y 2.100. Adicionalmente, para emplear la relación 2.102 se debe determinar β_{\max} .

II.4.4 Modelo de Ramberg-Osgood

En este modelo la rama virgen de la curva esfuerzo-deformación del suelo (ec 2.94, fig 2.24) está representada por

$$\tau = \frac{G_y \gamma}{1 + \alpha \left[\frac{G \gamma}{G_y \gamma_y} \right]^{r-1}} \quad \dots (2.103)$$

en la cual

$$G = \frac{\tau_y}{\gamma_y}$$

Siendo τ_y y γ_y el esfuerzo cortante y deformación angular respectivamente, de un punto característico de la curva virgen. α y r son constantes que permiten ajustar la forma y la posición de la curva. Si consideramos por ejemplo $\tau_y = \tau_{max}$ y $\gamma_y = \gamma_{max}$, los que sustituimos en la ecuación 2.103, la expresión que se obtiene para la relación G/G_{max} es

$$\frac{G}{G_{max}} = \frac{1}{1 + \alpha \left[\frac{G \gamma}{G_{max} \gamma_{max}} \right]^{r-1}} \quad \dots (2.104)$$

Una vez definida la ecuación 2.103 y aplicando el criterio de Masing se obtiene que la relación de amortiguamiento es

$$\beta = \frac{2}{\pi} \frac{r-1}{r+1} \alpha \frac{\left[\frac{G \gamma}{G_{max} \gamma_{max}} \right]^{r-1}}{1 + \alpha \left[\frac{G \gamma}{G_{max} \gamma_{max}} \right]^{r-1}} \quad \dots (2.105)$$

Combinando las ecuaciones 2.104 y 2.105 se obtiene la expresión

$$\beta = \frac{2}{\pi} \frac{r-1}{r+1} \left[1 - \frac{G}{G_{max}} \right]$$

En resumen, en el modelo de Ramberg-Osgood se emplean cuatro parámetros para representar las propiedades dinámicas del suelo. Estos son τ_{max} , G_{max} , α y r .

II.4.5 Modelo de Davidenkov

En este modelo, básicamente los esfuerzos son expresados en función de las deformaciones. Hay dos ecuaciones básicas, una para carga y otra para descarga

$$\text{carga} \quad \frac{d\tau}{d\gamma} = G [1 - F(\gamma - \gamma_{\min})] \quad \dots (2.106)$$

$$\text{descarga} \quad \frac{d\tau}{d\gamma} = G [1 - F(\gamma_{\max} - \gamma)]$$

donde F está definida en el intervalo positivo incluyendo el cero; G es el módulo al esfuerzo cortante bajo deformación para carga y descarga. El módulo secante G definido en la figura 2.29 correspondiente a la amplitud de deformación γ_a , se expresa como

$$G^*(\gamma_c) = G [1 - H(\gamma_c)] \quad \dots (2.107)$$

con

$$H(\gamma_c) = \frac{1}{\gamma} \int_0^{\gamma} F(2\eta) d\eta \quad \dots (2.108)$$

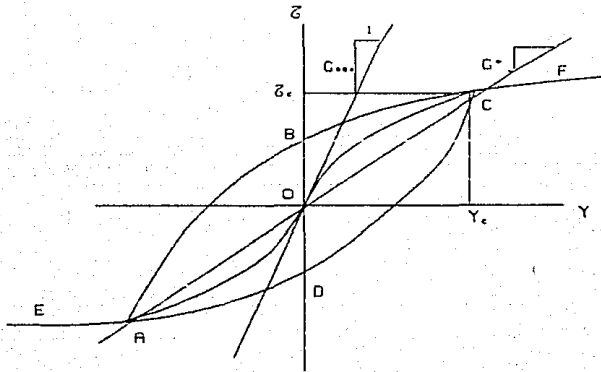


fig 2.29

El módulo secante puede determinarse por pruebas de laboratorio, de donde se puede derivar por la ecuación 2.107 la función $H(\gamma)$; una vez conocida esta función, la función F es obtenida por diferenciación de la ecuación 2.108, esto es

$$F(2\gamma) = H(\gamma) + \gamma \frac{d H(\gamma)}{d\gamma} \quad \dots (2.109)$$

Por integración de las ecuaciones 2.106, las relaciones esfuerzo-deformación para carga y descarga son obtenidas como

$$\text{carga} \quad \tau - \tau_{\min} = G [\gamma - \gamma_{\min}] \left[1 - \left(\frac{\gamma - \gamma_{\min}}{2} \right) \right] \quad \dots (2.110)$$

$$\text{descarga} \quad \tau - \tau_{\max} = G [\gamma_{\max} - \gamma] \left[1 - \left(\frac{\gamma_{\max} - \gamma}{2} \right) \right]$$

La pérdida de amortiguamiento se expresa como

$$\beta = \frac{1}{4\pi} \frac{\Delta W}{W}$$

donde ΔW es la energía de amortiguamiento representada por el área encerrada por la curva de histeresis de la figura 2.29, y W es la energía de deformación equivalente definida como

$$W = \frac{1}{2} G^*(\gamma_a) \gamma_a^2$$

La energía de amortiguamiento en la amplitud de deformación γ_c , se calcula con las ecuaciones 2.110 como

$$\Delta W = 8 \int_0^{\gamma_a} [G^*(\eta) - G^*(\gamma_c)] \eta d\eta$$

y la pérdida de amortiguamiento con la amplitud de deformaciones se puede expresar como

$$\beta(\gamma_c) = \frac{2}{\pi} \frac{\int_0^{\gamma_c} 2 [G^*(\eta) - G^*(\gamma_c)] \eta d\eta}{G^*(\gamma_c) (\gamma_c)} \quad \dots (2.111)$$

Seed e Idriss [1970] proponen la siguiente relación para evaluar el módulo tangente de rigidez (G) en arenas

$$G = (K)_{\max} \sqrt{\sigma'_m}$$

en donde G está en kips/ft², σ'_m es el esfuerzo efectivo en lb/ft² y $(k)_{\max}$ es un coeficiente expresado en función de la densidad relativa D_r

$$(K)_{\max} = 61 \left[1 + \frac{D_r - 75}{100} \right]$$

Para suelos cohesivos, los mismos autores proponen la siguiente relación empírica

$$G/S_u = 2500$$

en donde S_u es la resistencia al esfuerzo cortante no drenado. Para los análisis presentados en ésta tesis ésta relación fue de 97.852.

CAPITULO III

EFEECTO DEL COMPORTAMIENTO NO LINEAL DEL SUELO EN LA RESPUESTA DE DEPOSITOS

III.1 CONCEPTO FISICO DEL ESPECTRO DE RESPUESTA

La intensidad de un temblor y los daños causados durante éste, están relacionados generalmente con las condiciones locales del suelo. A partir de datos registrados y de estudios analíticos, se han sentado las bases para el entendimiento de este fenómeno considerando principalmente al comportamiento no lineal que tiene el suelo ante cargas dinámicas. Es importante puntualizar sin embargo, que la máxima aceleración registrada en un evento sísmico no solamente determina la intensidad de los efectos del temblor; si no que éstos dependen también de las características frecuenciales del movimiento y de su duración. Así por ejemplo, una aceleración muy grande desarrollada durante un corto intervalo de tiempo, causará poco daño para muchos tipos de estructuras. Por otro lado, un movimiento con pequeñas amplificaciones pero con una frecuencia más o menos uniforme y con una duración relativamente grande [Ohsaki, 1969], puede causar grandes aceleraciones acompañadas de daños muy marcados en cierto tipo de estructuras.

La influencia combinada de la amplitud de las aceleraciones registradas en un sismo, su contenido de frecuencias, así como su duración sobre diferentes estructuras, es convenientemente representado por medio del espectro de respuesta (cuyo concepto matemático se expuso en la sección II.2.2.6) cuya representación gráfica muestra la máxima respuesta inducida por el sismo en un oscilador con un grado de libertad para un rango de diferentes periodos fundamentales pero con un mismo amortiguamiento. De aquí que se pueden hacer cálculos similares para estructuras con un mismo rango de periodos fundamentales, pero para diferentes grados de amortiguamiento. Asimismo, se pueden hacer cálculos similares para determinar la máxima velocidad espectral inducida o el máximo desplazamiento espectral inducido.

Para cualquier movimiento dado, los valores de la velocidad espectral, S_v , y la aceleración espectral, S_a , para una estructura de un grado de libertad con un periodo fundamental T , están relacionadas aproximadamente por la ecuación

$$S_v \approx \frac{T}{2\pi} S_a$$

de donde se puede convertir un espectro de velocidad a un espectro de aceleración o vice-versa.

De la discusión anterior, se desprende que la historia de aceleración de un movimiento dado está caracterizado por su correspondiente espectro de respuesta. Así, para diferentes historias de aceleración pueden ser convenientemente evaluadas por comparación de sus espectros de respuesta. Es de particular importancia en Ingeniería Civil la máxima ordenada del espectro de respuesta de aceleración y el periodo fundamental en el cual ocurre, pues constituye un medio para evaluar las máximas fuerzas laterales desarrolladas en estructuras sujetas a movimientos sísmicos.

III.2 COMPORTAMIENTO NO LINEAL DEL SUELO

La relación esfuerzo-deformación en suelos, en general es muy compleja, debido a que un gran número de parámetros afectan su comportamiento. Más aún, ante cargas cíclicas el suelo exhibe un comportamiento altamente no lineal e histérico.

Este comportamiento queda caracterizado en dinámica de suelos -como ya se mencionó- principalmente por dos propiedades: el módulo de rigidez al cortante (G), y el coeficiente de amortiguamiento (β). En la tabla 3.1 se listan los parámetros [Hardin y Drenevich, 1972a] que afectan al módulo y amortiguamiento en suelos de acuerdo a su grado de importancia. En ésta tabla se observa que los parámetros que tienen gran influencia en todos los suelos son

- Amplitud de deformación
- Esfuerzo principal medio efectivo
- Número de ciclos de carga
- Relación de vacíos
- Grado de saturación para suelos cohesivos

Sin embargo, para muchos problemas en la dinámica de suelos la relación esfuerzo cortante-amplitud de la deformación angular es más importante (la vibración de depósitos de suelo estratificados horizontalmente al ser excitados por un movimiento horizontal durante un sismo es un buen ejemplo de campo en donde es válida la suposición de esfuerzos cortantes puros).

En general, el ciclo de esfuerzo cortante contra deformación queda caracterizado por la amplitud y frecuencia de la deformación. En la figura 2.29 se muestra una curva típica esfuerzo-deformación obtenida para un espécimen sujeto a carga cíclica simétrica a lo largo de un plano inicialmente libre de esfuerzos cortantes; de esta figura, la curva ABCDA es asociada con un máximo valor de deformación angular cíclica γ_c , y un máximo esfuerzo cortante cíclico τ_c . Los puntos A y C definen los extremos de la curva. El trazo de los puntos EAOCF, de toda la curva de histéresis, asociada con diferentes valores de γ_c , es definida como la curva de respaldo. Esta curva constituye la base para

Parámetro	Importancia ^a			
	Modulo		Amortiguamiento	
	arena limpia	suelo cohesivo	arena limpia	suelo cohesivo
Amplitud de deformación	M	M	M	M
Esfuerzo principal medio efectivo	M	M	M	M
Relación de vacíos	M	M	M	M
Número de ciclos de carga	P ^b	P	M	M
Grado de saturación	P	M	I	R
Relación de sobreconsolidación	P	I	P	I
Esfuerzo cortante octaédrico	I	I	I	I
Frecuencia de carga	P	P	P	I
Efectos del tiempo (tixotropía)	P	I	P	I
Características granulares, tamaño, forma, gradación, mineralogía	P	P	P	P
Estructura del suelo	P	P	P	P
Cambios de volumen debido a deformación angular (menor de 5%)	R	P	R	P

^aM muy importante; I importante; P poco importante; R relativamente importante pues a la fecha no es claramente conocido su efecto

^bExcepto para arenas limpias saturadas donde el número de ciclos de carga es un parámetro sin importancia

Tabla 3.1

caracterizar el comportamiento esfuerzo-deformación de suelos para análisis no lineales. La curva de respaldo tiene su máxima pendiente en el origen (punto O) con la que se define el máximo módulo de rigidez al cortante G_{max} . El módulo cortante secante G^* en la deformación γ_c , es la pendiente de la línea que va del origen al punto del extremo de la curva asociada con la deformación γ_c (línea OC). Así pues

$$G^* = \frac{\tau_c}{\gamma_c}$$

Esta definición de G^* es consistente con la forma usual para el cálculo del módulo lineal equivalente de resultados de pruebas cíclicas [Idriss y Seed, 1968]. La figura 3.1a muestra la variación de G^* con la deformación, de donde para muy pequeños valores de γ_c

($0.25 \times 10^{-4} \%$), el módulo secante viene siendo igual al módulo máximo G_{max} . La curva de la figura 3.1b (ó su curva normalizada equivalente de G/G_{max} trazada en función de la deformación angular γ_c) es comúnmente llamada curva reducción del módulo. La curva de respaldo y la curva reducción del módulo nos dan la misma información, y una vez que una de ellas se especifica, la otra se deriva a partir de la anterior.

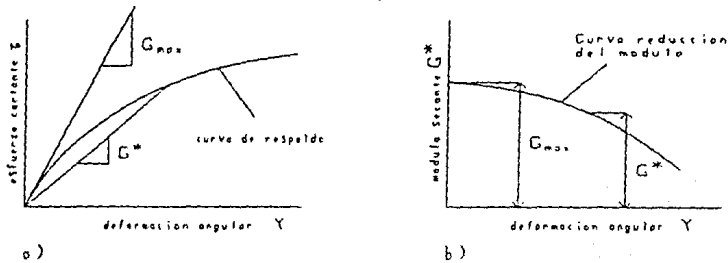


fig 3.1 Relación entre la curva de respaldo y el módulo secante

La misma curva de respaldo es trazada en la figura 3.2a junto con la correspondiente curva de histéresis para el ciclo de deformación γ_c . Una relación de amortiguamiento equivalente puede estar

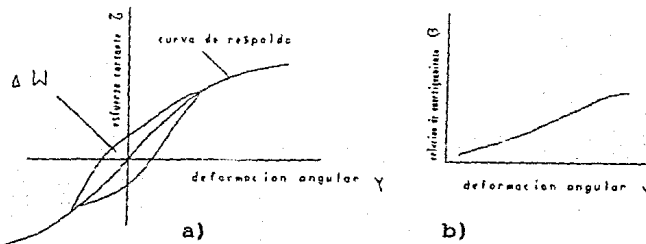


fig 3.2 Cálculo de la relación de amortiguamiento a partir de la curva de histéresis

relacionada al área encerrada por el bucle y usando el procedimiento originalmente sugerido por Jacobsen:

$$\beta = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta W}{G_s \gamma_c^2}$$

en la cual ΔW es el área encerrada por el bucle la cual representa la pérdida de energía durante el ciclo. El valor de β así calculado es trazado en la figura 3.2b, en la que se muestra la variación de β con la deformación angular. La curva de amortiguamiento no puede ser determinada únicamente de la curva de respaldo porque es necesario el bucle de histéresis. Las hipótesis aceptadas para generar el bucle de histéresis a partir de la curva de respaldo es suponer que el comportamiento del suelo satisface el criterio de Masing, ya enunciado en la sección II.4.1.

III.3 DISCUSION DEL MODELO DE LOS MATERIALES USADO EN LOS ANALISIS

Para observar el efecto del comportamiento no lineal del suelo en la respuesta de depósitos, es conveniente someter el sistema a un proceso en el cual por alguna técnica (numérica) sea posible simular el comportamiento no lineal del suelo. Para esto, es necesario un modelo simplificado del suelo. En el capítulo II se expuso el concepto de algunos de estos modelos, sin embargo, haremos énfasis en el modelo que se utilizó para los análisis presentados en ésta tesis. Tal modelo es el de Davidenkov, el cual describe satisfactoriamente las características no lineales del suelo.

La curva respaldo de este modelo está definida por la siguiente ecuación

$$\tau = G^*(\gamma)\gamma \quad 3.1$$

donde

- τ es el esfuerzo cortante
- G^* es el módulo secante de rigidez al esfuerzo cortante
- γ es la deformación angular

Con la ecuación 3.1 y los movimientos laterales del suelo obtenidos por algún procedimiento, las deformaciones son obtenidas por el algoritmo de inercia cúbica (sección II.3.2.4). Con ésta deformación y el modelo de Davidenkov se obtiene el esfuerzo correspondiente. La expresión general del módulo cortante secante G^* es

$$G^* = G_{\max} [1 - H(\gamma)] \quad 3.2$$

Un ejemplo clásico del modelo hiperbólico, para la función $H(\gamma)$ es

$$H(\gamma) = \frac{\frac{|\gamma|}{\gamma_y}}{1 + \frac{|\gamma|}{\gamma_y}} \quad 3.3$$

sin embargo, para tener más flexibilidad al tratar de reproducir las curvas del módulo y de amortiguamiento para varios suelos, la función $H(\gamma)$ fué definida como

$$H(\gamma) = \frac{\left[\frac{|\gamma|}{\gamma_y} \right]^{2B}}{1 + \left[\frac{|\gamma|}{\gamma_y} \right]^{2B}} \quad 3.4$$

en la cual γ_y , A y B son parámetros a determinar experimentalmente. El modelo definido por las ecuaciones 3.1, 3.2, 3.4 y 2.111 son utilizadas por el programa MASH con el cual se realizaron los análisis.

El parámetro γ_y es llamado deformación de referencia. Los parámetros para definir la relación hiperbólica esfuerzo-deformación son mostrados en la figura 2.28; de donde se observa que la curva hiperbólica es asintótica a la línea horizontal definida por $\tau = \tau_{\max}$, en la cual τ es el esfuerzo cortante y τ_{\max} es el esfuerzo cortante de falla. La pendiente inicial de la curva hiperbólica (en el origen) es G_{\max} y es igual al máximo valor de G. Si la línea a través del origen con pendiente G_{\max} es extendida para intersectarse con la línea $\tau = \tau_{\max}$, la intersección define una deformación como

$$\gamma_y = \frac{\tau_{\max}}{G_{\max}}$$

la cual es usada como la deformación de referencia, que también puede evaluarse [Seed e Idriss, 1970] por la siguiente ecuación

$$\tau_{\max} = \left\{ \left[\frac{1 + k_0}{2} \tau'_v \operatorname{sen}\phi' + c' \cos\phi' \right]^2 - \left[\frac{1 - k_0}{2} \tau'_v \right]^2 \right\}^{1/2}$$

donde

- k_0 es el coeficiente de presión lateral en reposo
- τ'_v es el esfuerzo vertical efectivo, y
- c', ϕ' son los parámetros de la ley de resistencia (Mohr-Coulomb) estática del suelo

Los parámetros A y B de la ecuación 3.4 son de ajuste. En la figura 3.3 se han trazado curvas G/G_{\max} vs γ con el modelo de Davidenkov dado por las ecuaciones 3.2 y 3.4 para diferentes valores de los parámetros A y B; el valor del parámetro γ se consideró igual a 0.30%, el cual de obtuvo de los ajustes del modelo hiperbólico general a los resultados de laboratorio obtenidos por Jaime [1987] para la zona del lago de Texcoco preconsolidado, los cuales se muestran en la gráfica de la figura 3.4. Con las tres curvas trazadas en la figura 3.3, se trata de cubrir la faja de los resultados de los ensayos. Como puede notarse, en la figura 3.3, el parámetro A desplaza la curva (G/G_{\max} , γ) hacia la derecha a medida que crece, (de 0.4 a 1.6) por lo que éste parámetro describe la rigidez del material; por su parte, el parámetro B aumenta la pendiente de la curva a medida que su valor aumenta (fig 3.5), por lo que este parámetro define las características de ductilidad o fragilidad del material. Las curvas de la figura 3.3 se consideraron como dato de los materiales utilizados en los análisis no lineales, cuyos parámetros del modelo ajustado a los resultados experimentales resultaron ser

	A	B	γ (%)
curva inferior (LINE)	0.4	0.45	0.3
curva media (LMNE)	1.0	0.46	0.3
curva superior (LSNE)	1.6	0.40	0.3

El amortiguamiento utilizado fué el definido por la curva de la figura 3.6.

III.4 ESTRATIGRAFIA DEL DEPOSITO ANALIZADO

Para observar el efecto de la no linealidad del suelo en la respuesta de depósitos se analizó el del sitio de la Secretaría de Comunicaciones y Transportes (SCT) el cual se localiza en la zona del lago (fig 1.2). Para la excitación del sistema se consideró el sismo registrado en el sitio de Tacubaya el cual se localiza en estratos duros (zona de lomas).

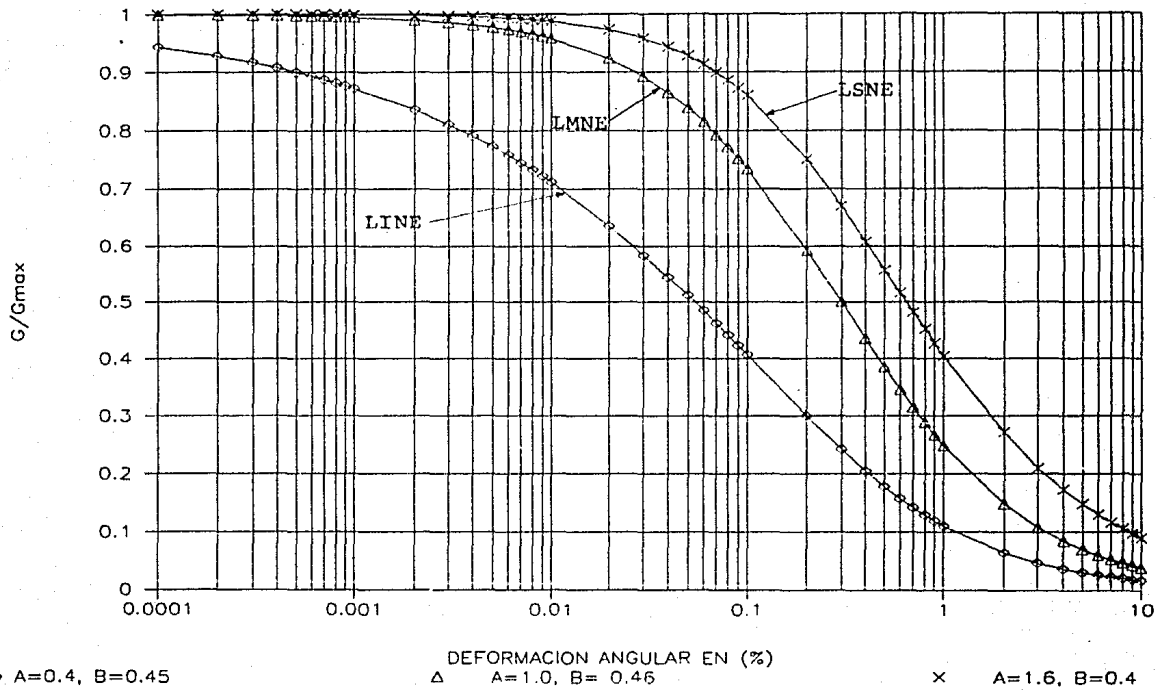
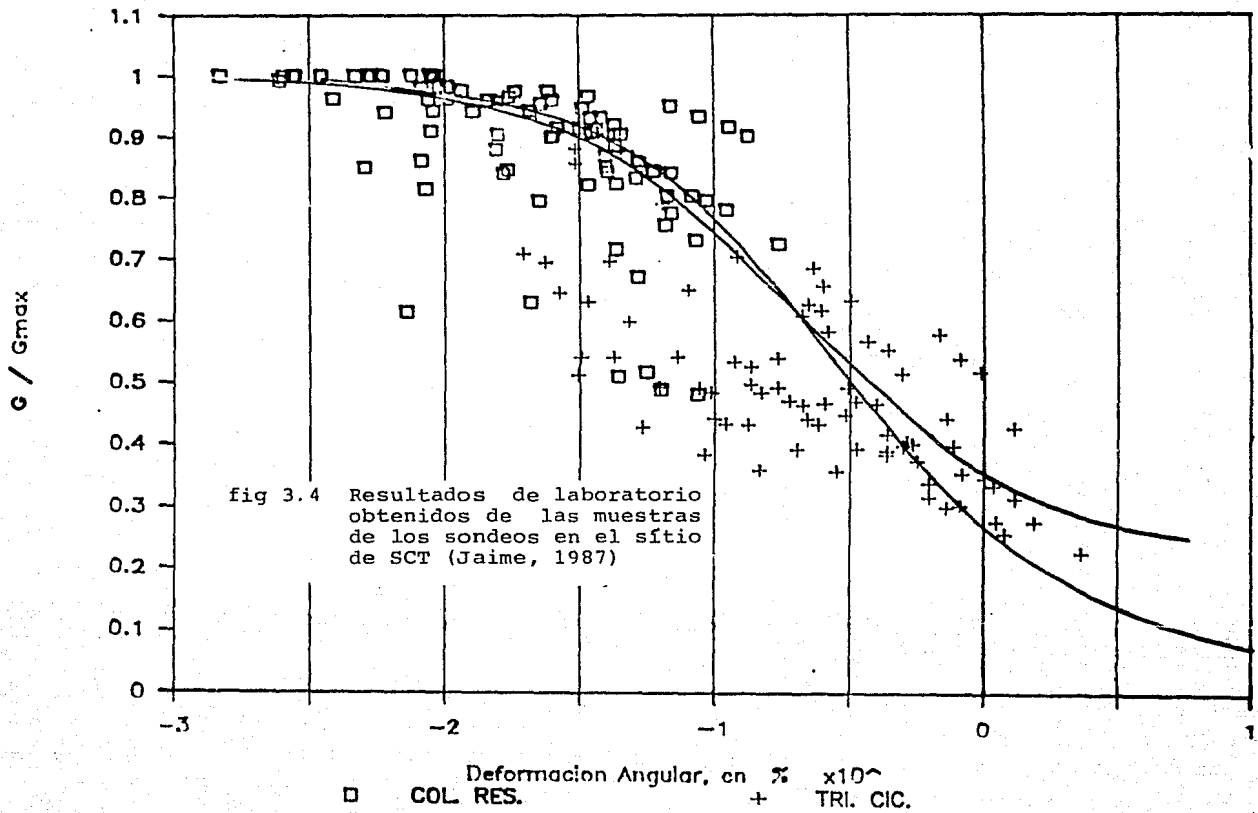


fig 3.3 Módulo de rigidez para tres tipos de material segun las curvas LINE, LMNE y LSNE



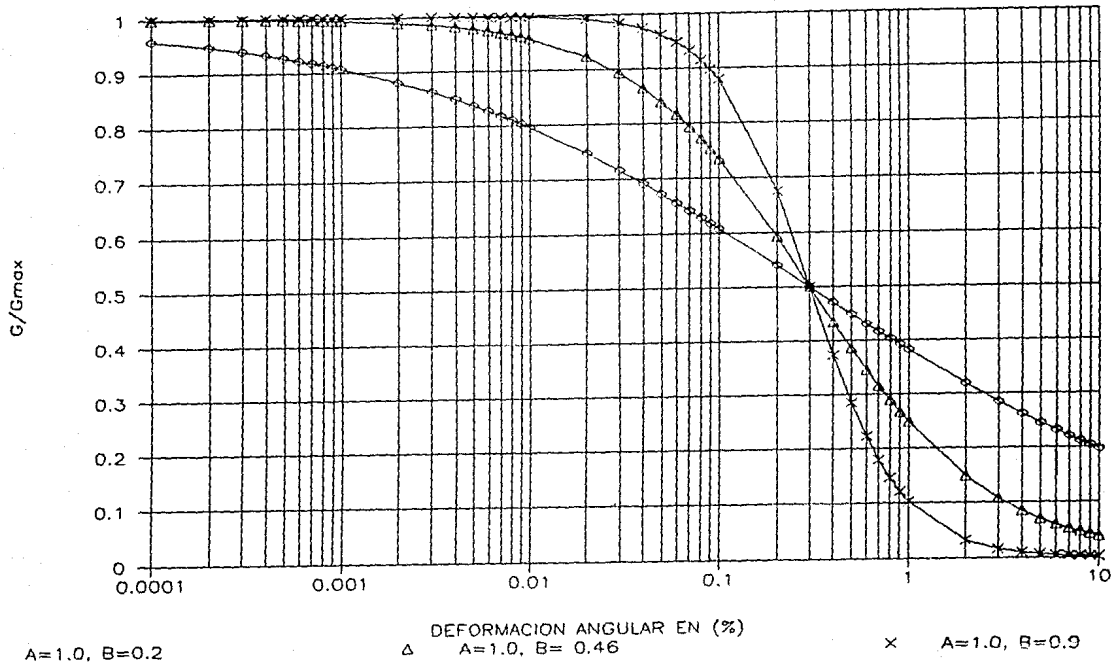


fig 3.5 Curvas para observar la influencia del parámetro B del modelo de Davidenkov sobre el módulo de rigidez al cortante

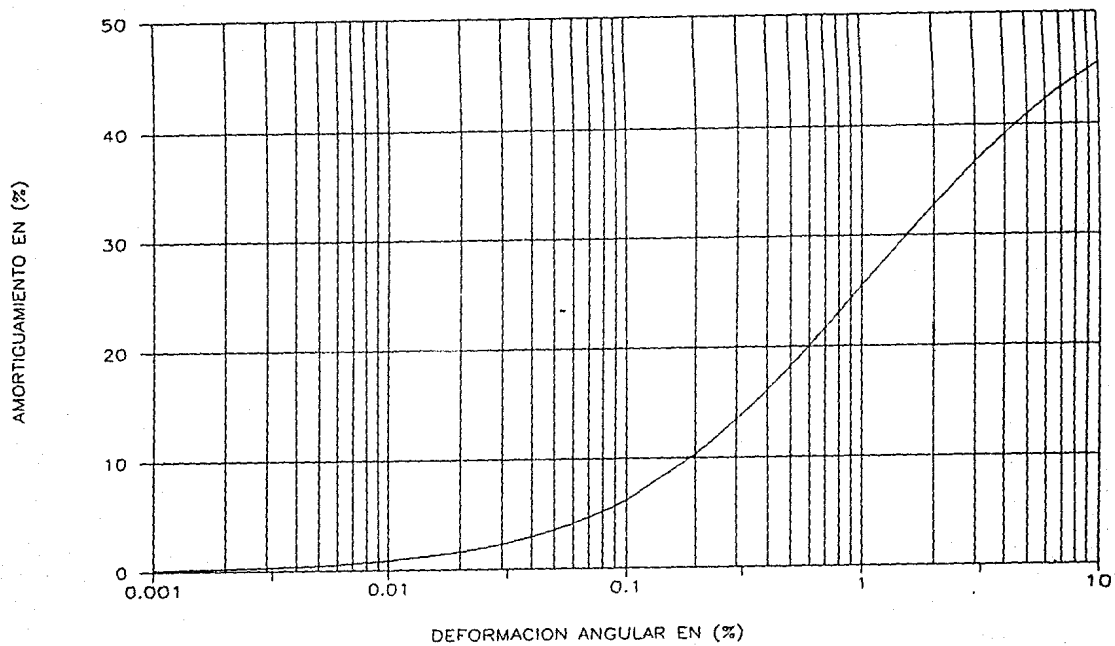


fig 3.6 Curva de la relación de amortiguamiento vs deformación angular determinada con el modelo de Davidenkov con los parámetros $A = 1$ y $B = 0.46$

Ya que el propósito de esta tesis es observar el efecto de la no linealidad del suelo en la respuesta se han considerado datos promedio de la estratigrafía real del sitio, sin embargo, describiremos brevemente las condiciones geológicas reales del sitio de las cuales se partió:

Las condiciones del subsuelo en el sitio de SCT consisten de un estrato de 4 metros de espesor compuesto de arenas y arcillas compactas, seguido de un estrato de arcilla de 27 metros de espesor con algunos intermedios de arena, vidrios y cenizas volcánicas, con contenidos de agua en los materiales arcillosos con rangos de 100 a 450%, y la resistencia al esfuerzo cortante no drenado varia de 0.25 a 0.8 kg/cm². Posteriormente continua un estrato arenoso muy compacto ligeramente cementado, siguiéndole un estrato de arcillas duras de 4 metros de espesor; el estrato duro consiste de arenas muy cementadas el cual ha sido considerado como la base del sistema de suelo.

Con base en el periodo natural del sitio, el valor promedio de la velocidad de onda cortante del estrato de arcilla fue de 75 m/seg aproximadamente. Con lo anterior se define el perfil mostrado en la figura 3.7.

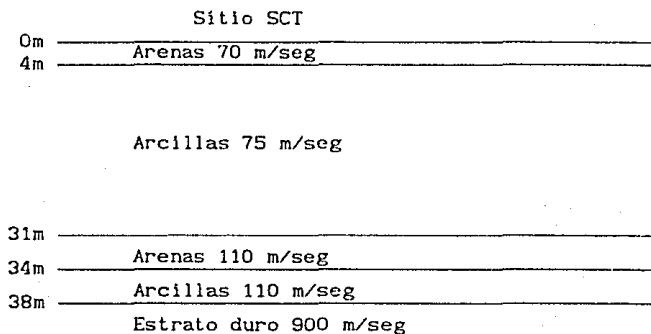


Figura 3.7

Así entonces, los datos promedio del perfil en estudio son los que se muestran en el perfil de la figura 3.8 y que son los que se utilizan en los análisis optando por tratar al depósito, compuesto de material homogéneo con amortiguamiento constante y variando la energía aplicada al depósito, así como la variación de la rigidez al esfuerzo cortante de los materiales. Como ha de notarse, el depósito se ha caracterizado como de suelos blandos, limitándose los resultados a este tipo de suelos.

$$\begin{aligned}V_s &= 80 \text{ m/seg} \\ \lambda &= 5\% \\ H &= 40 \text{ m} \\ \xi &= 1.2 \text{ T/m}^2\end{aligned}$$

$$V_s = 900 \text{ m/seg}$$

Figura 3.8

En lo que toca a la excitación del sistema, como ya se mencionó, se consideró solamente la componente E-W del registro de Tacubaya del 19 de septiembre del 85. Para un primer estudio se tomó la parte más intensa del registro, la cual se muestra en la figura 3.9.

III.5 RESULTADOS OBTENIDOS

La excitación dinámica a la que fué sometido el sistema se presenta en la figura 3.9, así también en la figura 3.10 se muestra su espectro de Fourier del que se observa su contenido de frecuencias.

Como ya quedo señalado, un procedimiento para considerar el contenido de frecuencias, la intensidad y la duración de la excitación dinámica en la respuesta de un sistema dado, es por medio del espectro de respuesta; por esto, en los análisis básicamente nos concretaremos a la descripción de los espectros de respuesta de aceleraciones; en lo que sigue, las descripciones, comparaciones y conclusiones se harán cualitativamente, observando las tendencias de los resultados de los análisis.

Para los espectros de respuesta de la figura 3.11 se han tomado tres tipos de materiales cuyas características dinámicas se muestran en las figuras 3.3 y 3.6 aplicando al sistema la excitación mostrada en la figura 3.9. En la figura 3.10 podemos notar que el rango de periodos críticos se presenta alrededor de $T = 2$ seg, para las curvas LSNE y LMNE; en cambio para la curva LINE se encuentra alrededor de $T = 0.86$ seg. Podemos observar que a medida que el material es más dúctil el periodo crítico tiende a desplazarse de 2 a 0.7 - 0.8 seg, pues los picos al rededor de éste último intervalo tienden a crecer haciéndose críticos para materiales dúctiles. De modo que para materiales más rígidos se tiene el predominio de altas frecuencias. Además, mientras el material es más rígido se observa que las respuestas tienden a ser mayores pues en éste caso, el sistema disipa menos energía.

En la figura 3.12 los mismos tipos de materiales del depósito en cada caso, fueron sometidos al sismo de la figura 3.9, solamente que ahora afectado por un factor de escala de 2. Los resultados de este

análisis se muestra en la figura mencionada; en ella podemos observar que los espectros se desplazan a mayores magnitudes en comparación a los de la figura 3.11 poniendo en evidencia la gran influencia que tiene la intensidad del sismo en la respuesta; además, se nota que el rango de periodos críticos se extiende aproximadamente de 0.8 a 2.7 seg (casi el mismo rango que en la figura 3.11) aún para los tres casos de materiales, no obstante, para el espectro LSNE todavía existe la tendencia a concentrarse los periodos críticos alrededor de 2 seg. La respuesta sigue siendo mayor a mayor rigidez del material. Podemos notar también que la forma general de los espectros es con dos montículos, cosa que para fines prácticos lleva a la necesidad de tomar el intervalo que encierra ambos montículos observados; esto pone en evidencia la influencia que tienen los suelos blandos en la respuesta.

En lo que toca a la figura 3.13, se muestra en ella la respuesta del depósito con los mismos materiales que hemos venido manejando (fig 3.3), sólo que ahora se ha aplicado el sismo de la figura 3.9 escalada por un factor de 4. Con la figura 3.13 se confirma el hecho de que la mayor intensidad del sismo tiende a plastificar a los materiales (el comportamiento de material entra en el rango inelástico), reflejándose esto, en la amplificación del rango de periodos crítico. La diferencia observada en la magnitud de los montículos principales de las figuras 3.11 y 3.12, en la figura 3.13 podemos notar que estos tienden a igualarse, de donde la respuesta crítica se mantiene para un amplio rango de frecuencias. De la misma figura 3.13 se observa que en general las curvas de los espectros de respuesta para cada material, mantienen más o menos la misma forma, y que a mayor intensidad del sismo y mayor rigidez del material las altas frecuencias tienden a predominar, pues el montículo izquierdo observado en las figuras 3.11, 3.12 y 3.13, tiende a crecer en la medida que también lo hacen los factores antes mencionados.

En la figura 3.14 se muestran los espectros de respuesta del depósito con un mismo material (LINE), aplicando el mismo sismo, además de escalarlo por factores de 2 y 4; de esta figura se observa que para los tres casos la forma de los espectros más o menos se mantiene, sin embargo, para bajas intensidades las frecuencias altas tienden a predominar y hacerse críticas, en cambio, para mayores intensidades las bajas frecuencias (periodos grandes) tienden a predominar y hacerse críticas. También se nota que a medida que crece la intensidad del sismo la forma de los espectros tiende a agudizarse, es decir; para bajas intensidades, el rango de periodos crítico es mayor que cuando se aplica al depósito mayor energía. De esto, se ve que la tendencia es el predominio de los altos periodos de donde se puede suponer cualitativamente que a mayor cantidad de energía aplicada al depósito, los materiales tienden a disipar la mayor parte de ésta.

En la figura 3.15 se muestran los resultados de los análisis para el depósito con materiales caracterizados por la curva media de la figura 3.3 (LMNE), para el cual se han aplicado diferentes intensidades de excitación afectando el de la figura 3.9 por factores

de 2 y 4. En general la forma de los espectros se mantiene, sin embargo, a medida que la energía sísmica aumenta la respuesta del depósito tiende a ampliar el intervalo de periodos crítico, y de alguna manera a definirse más claramente. Podemos notar también que en los espectros para factores de 1 y 2 se distinguen dos montículos, en cambio, en el espectro para el factor 4 aparece uno a la izquierda para bajos periodos; se puede apreciar también que éste tercer montículo ya empieza a aparecer desde el espectro para el factor 2, e incluso, de alguna forma desde que el factor es 1, por lo que podemos suponer que existe la tendencia a aparecer rangos críticos para bajos periodos a medida que la energía dinámica transmitida el depósito es mayor.

En la figura 3.16 se muestran los resultados de los análisis utilizando el material más rígido de los que aparecen en la figura 3.3 (LSNE) para el depósito, aplicándole diferentes intensidades de energía a partir del sismo que se grafica en la figura 3.9 afectado además por factores de 2 y 4. En la figura 3.16 podemos cualitativamente apreciar, que los espectros en general, cambian un poco su forma y que para bajas intensidades de energía predominan los altos periodos de la respuesta, e incluso, hace suponer que el montículo para $T = 2$ seg muestra un fenómeno de resonancia, esto, por la tendencia que se observa a concentrarse exclusivamente la respuesta en torno a este periodo. A medida que la intensidad de la energía aumenta, se observa según la figura 3.16, que los bajos periodos tienden a equipararse con los mayores dando con esto un rango mayor de periodos crítico.

Comparado las figuras 3.14, 3.15 y 3.16 podemos notar que para materiales más suaves las curvas de los espectros tienden a mantener su forma aún para altas intensidades de energía; ahora, con relación a materiales más rígidos, se observa también tal tendencia, y a menores intensidades de energía la respuesta espectral se concentra en torno al periodo $T = 2$ seg. Con esto, podemos decir que ha mayor rigidez del suelo y menores intensidades de energía, la respuesta tiende a presentar un fenómeno de resonancia, pues la forma de la curva para el factor 1 de la figura 3.16 tiende a concentrar las mayores aceleraciones espectrales en torno a $T=2$ seg y que a mayor energía aplicada al depósito sucede un fenómeno de ablandamiento del material, pues de la curva para el factor 4 de la figura 3.16 se observa un mayor intervalo de periodos crítico, con lo que se supone que el material disipa mayor energía.

El fenómeno de resonancia, como se explicó en el capítulo II, sucede cuando el periodo de vibración del cuerpo excitado se iguala con el de la excitación. Esto puede explicar el hecho que se expuso en el párrafo inmediato anterior, pues tomemos en cuenta que la excitación aplicada fué obtenida en suelos duros tendiendo a igualarse su periodo de vibración al caso del material más rígido en el depósito.

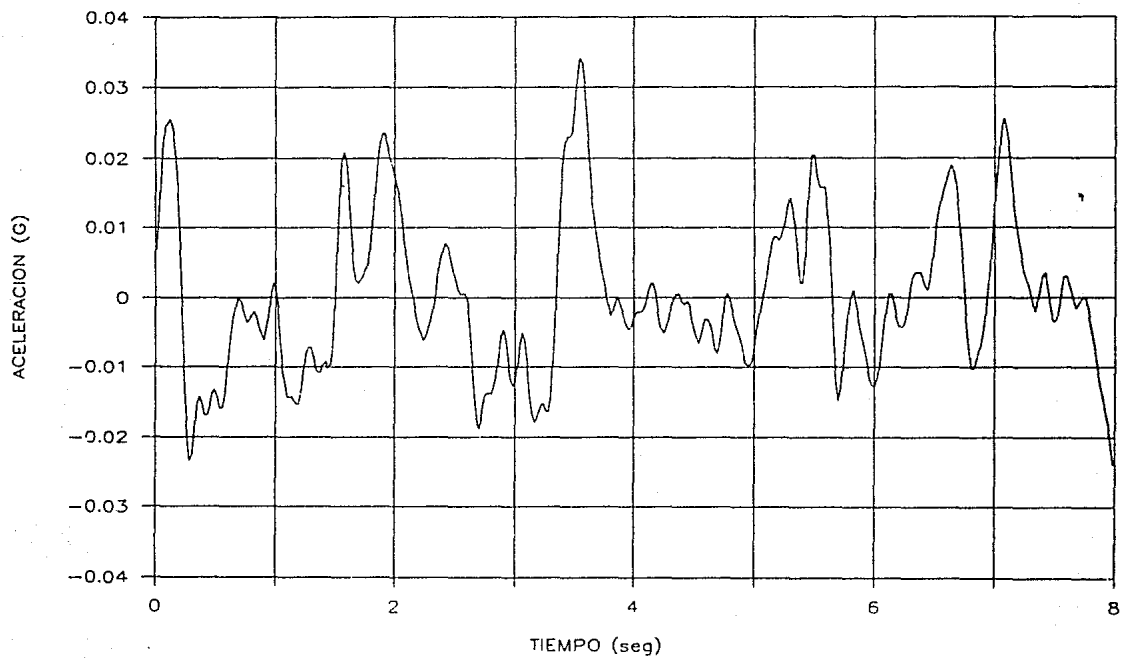


fig 3.9 Registro en el sitio de SCT del sismo de septiembre de 1985 com-
ponente E-W

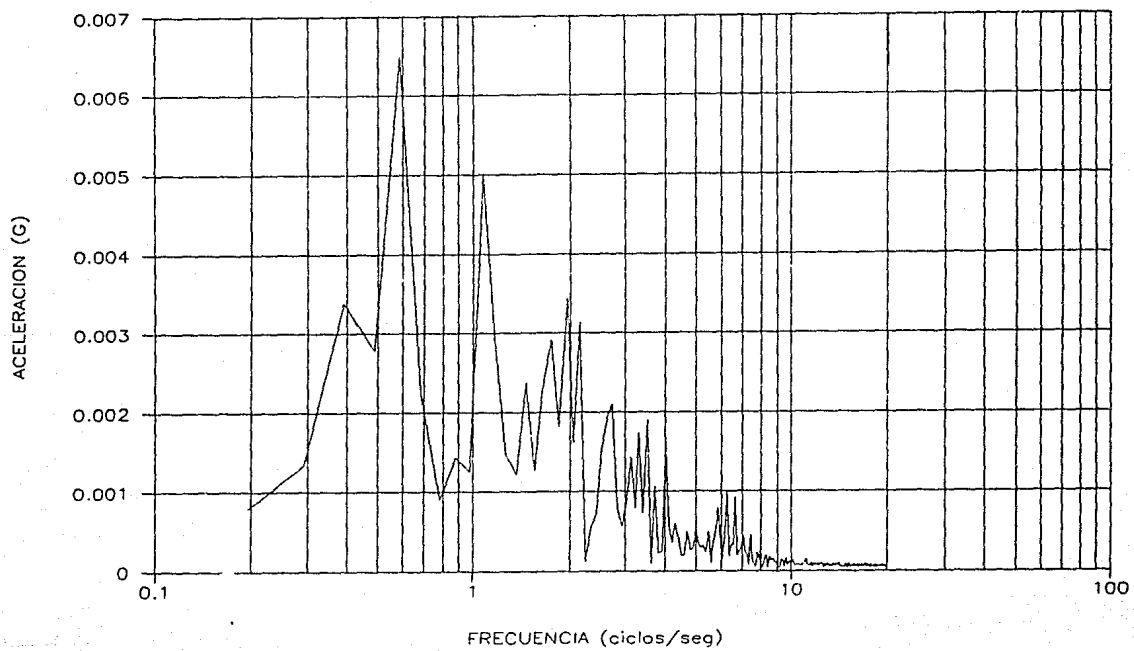


fig 3.10 Espectro de Fourier del sismo de septiembre de 1985 componente E-W

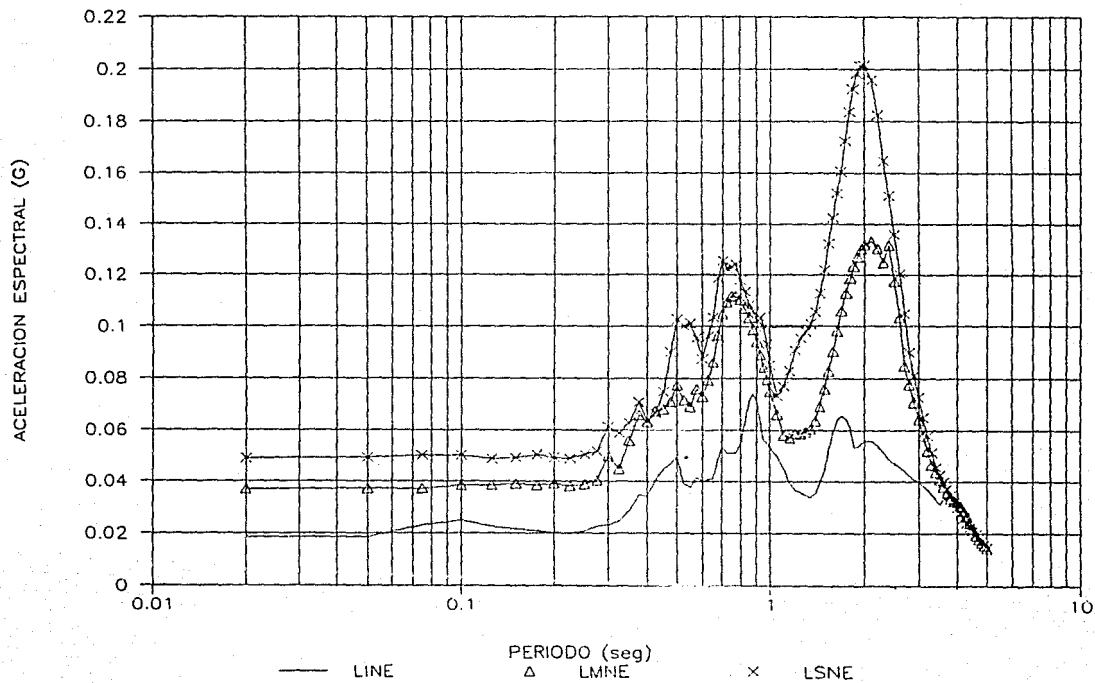


fig 3.11 Espectros de respuesta en el depósito con diferentes materiales según las curvas de la figura 3.3; factor del sismo 1

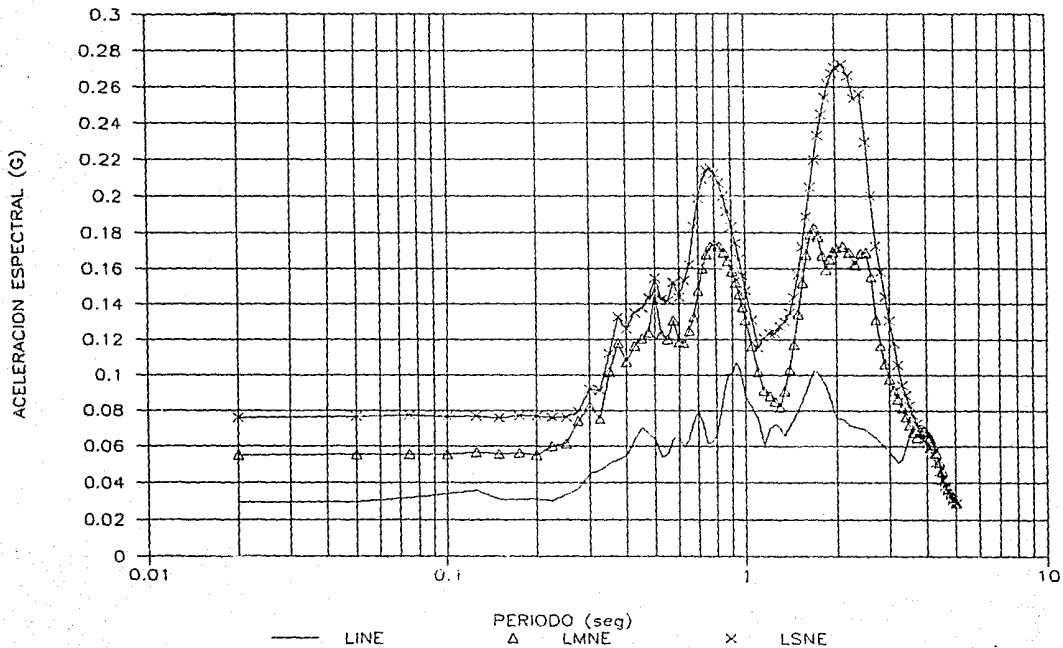


fig 3.12 Espectros de respuesta en el depósito con diferentes materiales según las curvas de la figura 3.3; el factor del sismo es 2

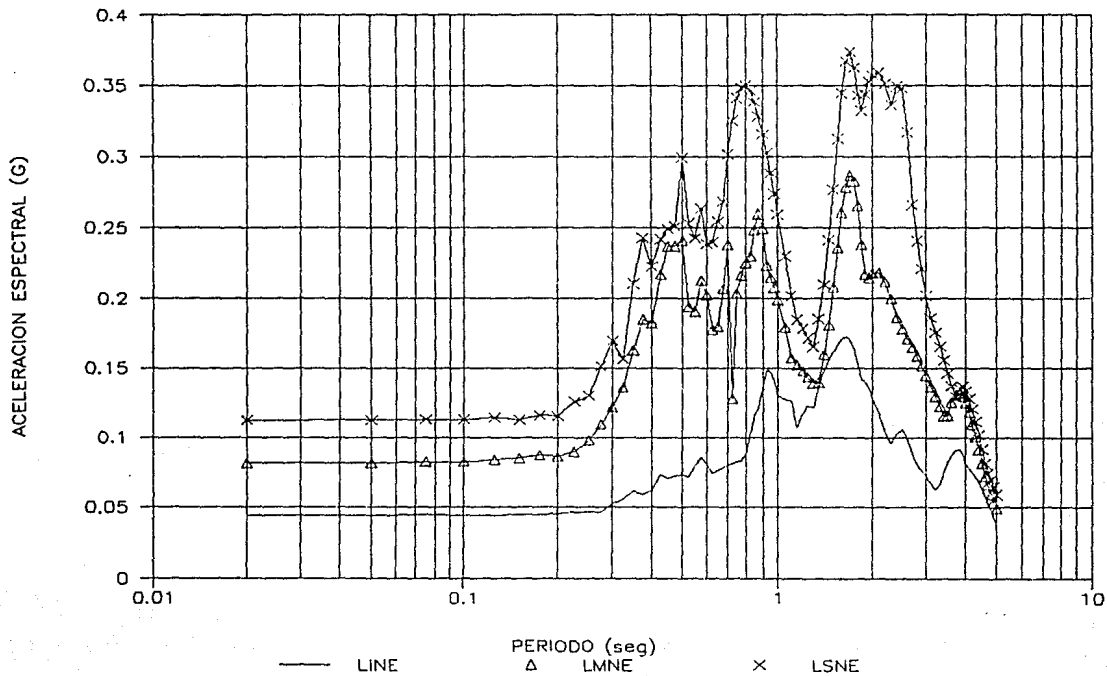


fig 3.13 Espectros de respuesta en el depósito con diferentes materiales según las curvas de la figura 3.3; el factor del sismo es 4

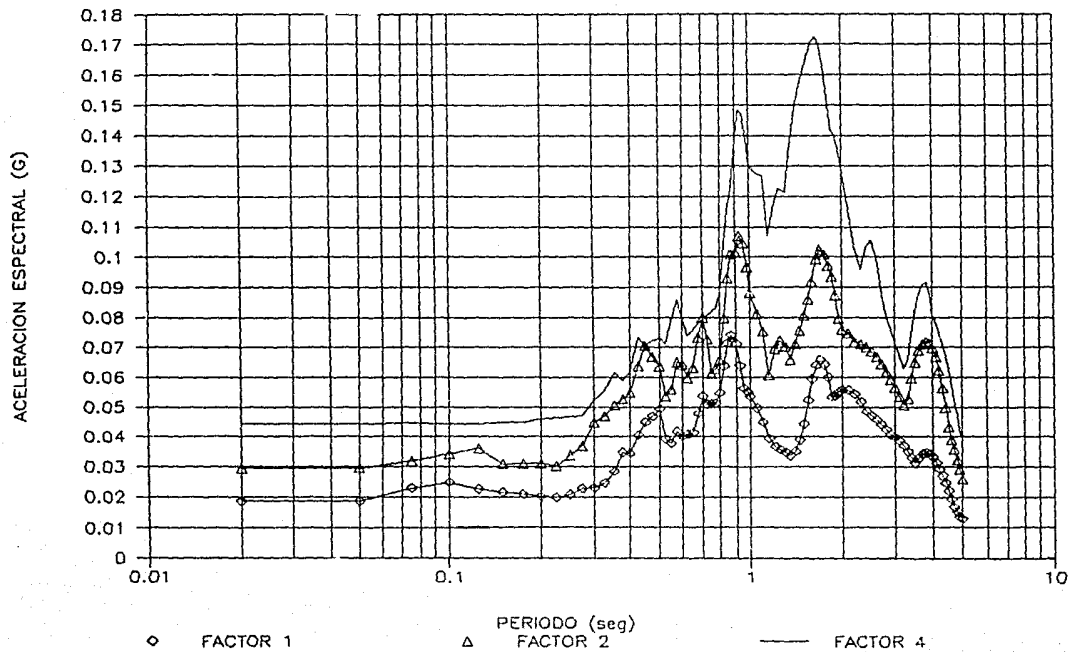


fig 3.14 Espectros de respuesta con la excitación escalada y misma curva de rigidez (LINE)

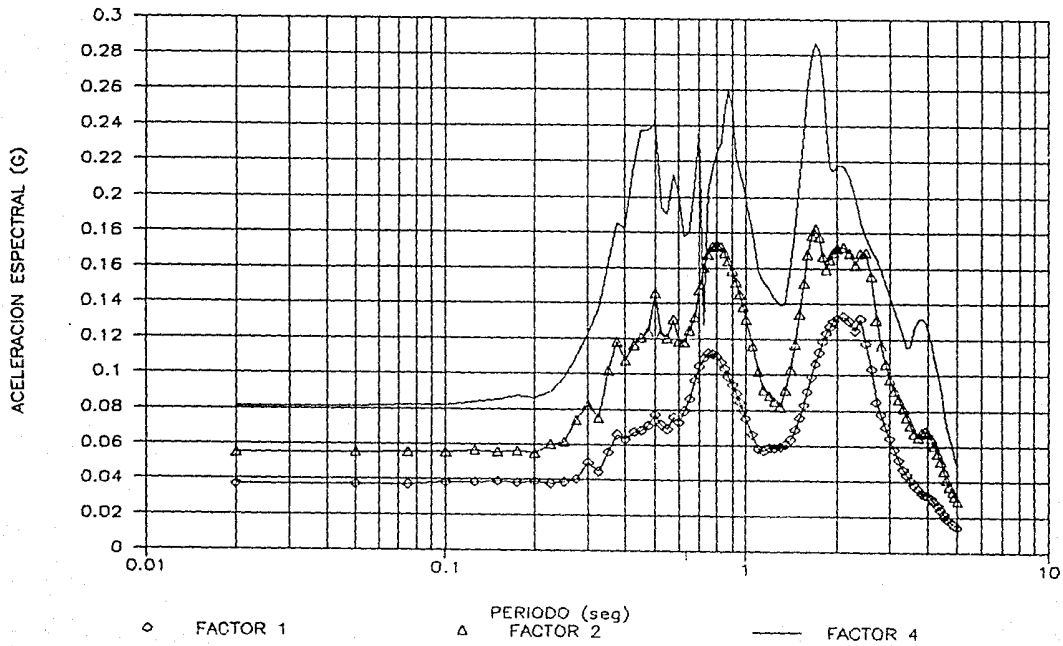


fig 3.15 Espectros de respuesta en el depósito con la excitación escalada y misma curva de rigidez (LMNE)

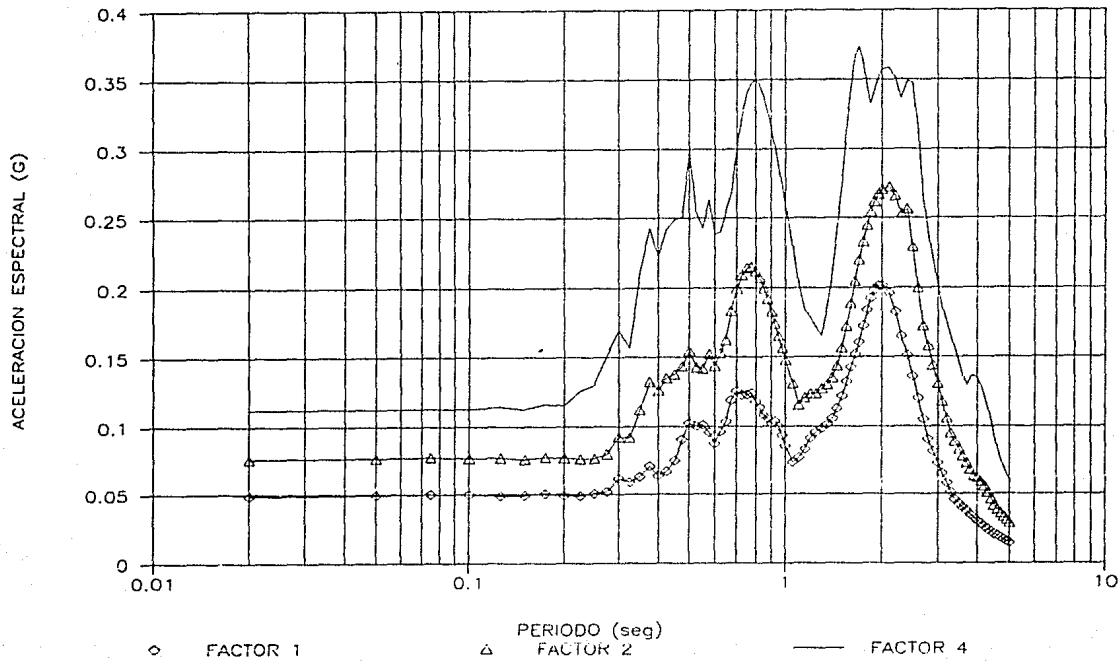


fig 3.16 Espectros de respuesta en el depósito con la excitación escalada y misma curva de rigidez (LSNE)

CAPITULO IV

COMPARACIONES CON EL METODO LINEAL EQUIVALENTE

IV.1 COMPARACIONES CON EL METODO LINEAL EQUIVALENTE

Los resultados de los análisis hechos en el capítulo anterior por el método no lineal, en éste capítulo, son comparados con los obtenidos por el método lineal equivalente, cuyos conceptos teóricos generales se exponen en el capítulo II; y cuyo procedimiento de solución se establece en el programa de computadora SHAKE, el cual mediante iteraciones ajusta las propiedades del material hasta hacerlas compatibles según el nivel de deformación inducido por la respuesta del sistema.

El modelo de los materiales para el uso del programa SHAKE queda definido por las curvas dibujadas en la figura 3.3 en la que se presenta la variación de la relación entre el módulo secante y su valor máximo inicial G/G_{max} , según el nivel de deformación; así mismo la figura 3.6 muestra la variación de la relación de amortiguamiento β con el nivel de deformación; estas curvas fueron derivadas del modelo de Davidenkov ajustado a las arcillas del sitio de SCT.

Cabe señalar, que los análisis hechos con los dos métodos se consideran en esfuerzos totales. Los aspectos de la respuesta en los que nos apoyamos son los espectros de respuesta, los esfuerzos máximos alcanzados a diferentes profundidades del depósito y también la distribución de las máximas deformaciones según la profundidad del perfil. Los espectros de respuesta fueron calculados con el 5% de amortiguamiento crítico.

Uno de los propósitos de esta tesis es observar la compatibilidad de ambos métodos, y determinar las condiciones en las cuales su discrepancia se acentúa. Así entonces, se analizaron tres casos con un estrato homogéneo en los que se varió el material empleado. Estos materiales quedan descritos por las curvas de la figura 3.3, y con el mismo amortiguamiento de la figura 3.6. Además, se sometió a tres tipos de excitación considerando la dada por la figura 3.9 y ésta misma escalada dos veces por factores de 2 y 4.

En la figura 4.2 se muestran los espectros de respuesta obtenidos con los métodos lineal equivalente y no lineal utilizando la curva LINE (para la variación del módulo de rigidez al esfuerzo cortante con la deformación angular de la figura 3.3, y el amortiguamiento de la figura 3.6); el depósito fue excitado con el acelerograma de la figura 3.9. Estos espectros muestran que el método lineal equivalente tiende

a sobreestimar la respuesta respecto a la obtenida por el método no lineal, esto aún más para periodos menores de 0.8 seg (altas frecuencias). Esto último se supone como producto de las características inherentes al método lineal equivalente.

En la figura 4.3 se muestran los espectros de respuesta para el mismo material del depósito, pero con la excitación escalada dos veces; en ésta se observa que la aproximación es buena para periodos mayores de 0.9 seg, y para periodos menores el método lineal equivalente tiende a conservar aceleraciones espectrales mayores, más aún, la máxima respuesta se obtiene a bajos periodos del espectro ($T = 0.5$ seg) la cual alcanza hasta el 90% más que por el método no lineal; en cambio, para el periodo $T = 1.7$ seg se obtiene casi exactamente la misma respuesta.

En la figura 4.4 se muestra la respuesta del depósito con las mismas condiciones, pero con la excitación escalada por un factor de 4. En ésta última se observa que el método lineal equivalente tiende a sobreestimar todavía la respuesta respecto al no lineal, sin embargo, la respuesta a altos periodos tiende relativamente a aproximarse al espectro del método no lineal; en el caso de la respuesta para periodos mayores de 1.8 seg, la aproximación de los dos métodos es buena.

De las figuras 4.2, 4.3 y 4.4 podemos decir entonces que el método lineal equivalente sobreestima la respuesta para frecuencias altas (periodos bajos), más aún para los casos en que se tiene menor intensidad de energía dinámica transmitida al depósito. En la figura 3.14 notamos que para las mismas condiciones del depósito con diferentes intensidades de energía, los espectros tienden a amplificarse más o menos proporcionalmente según la energía transmitida el depósito, lo cual parece ser razonable, ya que además existe la tendencia a aparecer la máxima respuesta a altos periodos del espectro, lo que supone que al haber mayores deformaciones el módulo G disminuye, y el depósito vibra más lentamente (periodos fundamentales altos); además la respuesta a bajos periodos casi no existe; en cambio, por el método lineal equivalente si existe, más aún para el caso en que la energía aplicada es menor. El que la respuesta se sobreestime a bajos periodos por el método lineal equivalente, se ha atribuido a sus características inherentes de linealización.

En las figuras 4.11, 4.12 y 4.13 se muestra la distribución de los máximos esfuerzos en el perfil, para el sismo de la figura 3.9 escalada 1, 2 y 4 veces respectivamente usando la curva LINE de la figura 3.3. Así también en las figuras 4.20, 4.21 y 4.22 se muestran las correspondientes distribuciones de las máximas deformaciones en el perfil. Los esfuerzos y deformaciones graficados, obtenidos por el método no lineal son los que se obtienen después de remover las frecuencias mayores a 15 cps del movimiento calculado. De estas se puede observar, en caso de esfuerzos, que los obtenidos por el método lineal equivalente tienden a aproximarse más (a medida que aumente la intensidad del sismo) a los obtenidos por el método no lineal. Así por ejemplo, en la figura 4.13 la aproximación es excelente hasta la

profundidad de 24 m, a partir de donde el módulo permanece más o menos constante según el método lineal equivalente; esta tendencia se observa también en la figura 4.12. Las máximas deformaciones según las figuras 4.20, 4.21 y 4.22 obtenidas por ambos métodos se aproximan muy bien, hasta determinada profundidad.

En la figura 4.5 se muestran los espectros de respuesta para el depósito con material cuya relación G/G_{max} contra γ_0 se muestra con la curva LMNE de la figura 3.3, obtenidas por los métodos que hemos estado manejando aplicando la excitación de la figura 3.9. En general, la forma de los espectros es más o menos la misma, solamente que el obtenido por el método lineal equivalente sobreestima la respuesta, apareciendo adicionalmente también, un rango para bajos periodos del espectro (altas frecuencias), no obstante, para periodos mayores de 0.65 seg la aproximación resulta ser buena. En la figura 4.6 se muestran los espectros obtenidos por los dos métodos, para las mismas condiciones del depósito como para los de la figura 4.5, excepto la excitación que en este caso está escalada por un factor de 2; se observa que los espectros se aproximan más que en el caso inmediato anterior, sin embargo la respuesta obtenida por el método lineal equivalente sigue siendo mayor. Se puede notar también que la respuesta obtenida por el método lineal equivalente, en este caso, se atenúa más que en el caso anterior para bajos periodos, manifestándose con esto que al alcanzarse mayores deformaciones debido a la mayor cantidad de energía dinámica, se tiene mayor sensibilidad al incrementarse el amortiguamiento en el método lineal equivalente, y esto, se supone ser inherente al mismo método. Así también habrá que tomar en cuenta que al tenerse mayores deformaciones el módulo G tiende a reducirse como podrá notarse en las curvas de la figura 3.3, con lo que el depósito disipará mayor cantidad de energía a medida que G disminuye. Como el método lineal equivalente usa un proceso iterativo en el que se determina el G final, correspondiente a las deformaciones producidas por la excitación y que a veces en cada iteración se oscila en rangos considerables, y es por lo que este modelo es más sensible a los cambios del módulo de G y amortiguamiento β según los niveles de deformación alcanzados, y de esto, a la forma de sus respectivas curvas, así pues, si se tienen curvas G/G_{max} contra γ_0 con mucha pendiente (materiales frágiles) el intervalo de oscilación es mayor, tanto, que a veces las deformaciones determinadas en una cierta iteración se salen del rango en que se encuentra especificada la curva con lo que en estas ocasiones el método diverge. En cambio, en el método no lineal se usa un método de integración paso a paso (ya explicado en el capítulo II) con lo que se elimina el problema de la divergencia.

En la figura 4.7 se muestran los espectros obtenidos para el depósito con las mismas condiciones de los dos casos inmediatos anteriores, pero con la excitación de la figura 3.9 afectada por un factor de 4; podemos notar de la figura 4.7 que la aproximación de los espectros es satisfactoria para todo el rango de periodos de la respuesta. La respuesta a bajos periodos por el método lineal equivalente que se ha venido observando y que se supone debida al mismo método, se ha atenuado, haciéndose más o menos compatible con

la obtenida por el método no lineal; sin embargo, con las condiciones dadas del depósito y de la excitación, el método lineal equivalente tiende a sobreestimar la respuesta para periodos bajos del espectro, en cambio, en el método no lineal la respuesta es mayor para periodos altos del espectro.

De las figuras 4.5, 4.6 y 4.7 observamos entonces que a medida que la intensidad de la energía disminuye los espectros obtenidos por el método lineal equivalente tienden a ser mayores que los obtenidos por el no lineal.

En las figuras 4.14, 4.15 y 4.16 se muestran las distribuciones de los máximos esfuerzos en el perfil, aplicando la excitación de la figura 3.9 afectada por factores de 1, 2 y 4 respectivamente; así mismo en las figuras 4.23, 4.24 y 4.25 se muestran las distribuciones de las máximas deformaciones según la profundidad del perfil, bajo las mismas condiciones de los esfuerzos de las tres figuras de esfuerzos anteriores. Así entonces, se observa que los esfuerzos obtenidos por el método lineal equivalente, tienden a ser compatibles con los obtenidos por el no lineal a medida que la intensidad de la energía aumenta. En lo que toca a las deformaciones se observa que a mayores intensidades de la energía de excitación, estas se aproximan de manera muy satisfactoria. De lo obtenido con espectros, esfuerzos y deformaciones se observa entonces, que con la mayor intensidad de la excitación los resultados obtenidos por ambos métodos se aproximan entre sí. Lo anterior remite nuevamente a las consideraciones sobre el tratamiento del módulo G y el coeficiente de amortiguamiento β por ambos métodos, más los procesos de integración de las ecuaciones de movimiento.

En la figura 4.8 se muestran los espectros obtenidos por ambos métodos considerando al depósito con material cuya relación G/G_{max} contra γ_0 aparece en la curva LSNE de la figura 3.3 con la misma relación de amortiguamiento que hemos estado considerando en todos los análisis, aplicando sistemáticamente la excitación de la figura 3.9 que para el presente caso está afectada por un factor de 1. Así pues, en la figura 4.8 la concordancia de los espectros es excelente en todo el rango de periodos en que se expresa, excepto algunas pequeñas variaciones entre el rango de periodos 0.13 a 0.6 seg en donde existe una respuesta ligeramente mayor de parte del método lineal equivalente, pero sin embargo, es la mejor aproximación en relación a los espectros antes discutidos. Se puede notar también incluso, que la mayor ordenada espectral es la obtenida por el método no lineal en un 7%, caso que no se había dado en los espectros hasta ahora discutidos.

En la figura 4.9 se tienen los espectros bajo las mismas condiciones que los obtenidos en la figura 4.8, excepto la excitación la cual está afectada por un factor de 2; así observamos en la figura 4.9 que la aproximación entre ambos espectros es excelente para periodos mayores de 0.6 seg; para periodos menores a éste, el método lineal equivalente muestra una respuesta mayor, como se ha venido observando en los casos anteriores, se puede notar también que la ordenada máxima de los espectros es prácticamente la misma, si no es que igual.

También se obtuvieron los espectros bajo las mismas condiciones de los casos citados en éste párrafo, excepto la excitación para la cual le hemos aplicado un factor de 4 respecto a la de la figura 3.9; tales espectros se dibujan en la figura 4.10 en donde podemos notar que su aproximación es muy satisfactoria en todo el rango de periodos en que se expresa, excepto donde aparece la ordenada espectral máxima, que parece estar truncada la obtenida por el método no lineal, cosa que a mi punto de vista de acuerdo con los espectros de las figuras 4.8, 4.9 (ver también figura 3.16), parece ser que influyen otros factores; podría pensarse en primera instancia en el amortiguamiento matemático que introduce la solución de la respuesta dinámica en materiales no lineales por el método no lineal.

En las figuras 4.17, 4.18 y 4.19 aparecen dibujadas las distribuciones de los esfuerzos máximos en el perfil alcanzados por los ambos métodos, respectivamente, para los casos en que se aplicó la excitación escalada por factores de 1, 2 y 4 para la curva LSNE de la figura 3.3. Así entonces, de estas tres figuras los resultados más satisfactorios son los de la figura 4.17; en la figura 4.18 los esfuerzos son más o menos aproximados hasta la profundidad de 15 m. Así también en las figuras 4.26, 4.27 y 4.28 se muestran las diferentes distribuciones de deformaciones en el perfil correspondientes a las mismas condiciones en que se obtuvieron los esfuerzos de las figuras 4.17, 4.18 y 4.19 respectivamente; de estas observamos que en la figura 4.26 se obtiene la mejor aproximación y para la figura 4.28 también se observa muy buena aproximación hasta los 23 m de profundidad.

Como puede notarse, en las comparaciones anteriores, nos limitamos a juzgar el efecto que se tiene en la respuesta de un depósito homogéneo de material arcilloso saturado obtenida por medio del método lineal equivalente y el no lineal, variando la intensidad del sismo, permaneciendo constantes las propiedades del material para los tres casos de la figura 3.3. En lo que sigue juzgaremos la influencia en la respuesta obtenida por ambos métodos, sólo que ahora variando la rigidez del material permaneciendo constante la intensidad de la energía. Posteriormente con esto se podrá tomar un criterio más justificado sobre las discrepancias de ambos métodos.

En la obtención de los espectros de las figuras 4.2, 4.5 y 4.8, se ha variado la rigidez del material según las curvas LINE, LMNE Y LSNE respectivamente de la figura 3.3 aplicando la excitación de la figura 3.9; de estas tres figuras notamos que a medida que aumenta la rigidez del material, el espectro obtenido por el método lineal equivalente tiende a aproximarse al obtenido por el no lineal; también la atenuación de la respuesta a bajos periodos (altas frecuencias) según el aumento de la rigidez del material. La mejor concordancia se obtuvo para cuando las propiedades del material se describen por la curva LSNE de la figura 3.3 aplicando la excitación de la figura 3.9 (figura 4.8). En lo que toca a esfuerzos según las figuras 4.11, 4.14 y 4.17, la última de estas la cual corresponde a la 4.8, presenta la mejor aproximación. Lo mismo sucede con las deformaciones según las figuras 4.20, 4.23 y 4.26.

En las figuras 4.3, 4.6 y 4.9 figuran los espectros para los que se ha variado la rigidez del material progresivamente de acuerdo a la figura 3.3 y escalando la excitación de la figura 3.9 por un factor de 2; así podemos notar que a medida que disminuye la rigidez del material, el espectro obtenido por el método lineal equivalente tiende a separarse del obtenido por el no lineal, manifestándose también la mayor respuesta a bajos periodos de parte del método lineal equivalente, cosa que se atribuye a las características inherentes del método. Así la figura 4.9 muestra la mejor aproximación entre las tres últimas citadas. En lo que corresponde a esfuerzos según las figuras 4.12, 4.15 y 4.18, la primera de estas es donde se observa la mejor aproximación, y para deformaciones según las figuras 4.21, 4.24 y 4.27 las cuales corresponden al caso de éste párrafo, notamos que en la segunda de éstas se obtuvo la mejor aproximación para la cual se usó la curva LMNE de la figura 3.3.

En las figuras 4.4, 4.7 y 4.10 se muestran los espectros para las condiciones en que se han usado las curvas LINE, LMNE y LSNE de la figura 3.3 respectivamente, excitando al sistema con la señal de la figura 3.9 escalada por un factor de 4. Nuevamente podemos notar que para menor rigidez del material el espectro obtenido con el método lineal equivalente tiende a separarse del obtenido por el no lineal, cosa que se manifiesta en mayor grado en la figura 4.4, aún sin embargo, se observa en las figuras 4.7 y 4.10 que la aproximación entre ambos métodos es buena; esto último, debido a que como se ha venido observando, a mayor intensidad de la excitación se aproximan los métodos, cosa que también se logra con la mayor rigidez del material. En cuanto a los esfuerzos obtenidos, según las figuras 4.13, 4.16 y 4.19 correspondientes a las curvas LINE, LMNE y LSNE de la figura 3.9 respectivamente se observa en general, más o menos buena aproximación cosa que justificamos con las mismas razones expuestas para espectros.

Con lo observado podemos concluir que la aproximación entre ambos métodos manejados también depende de las propiedades dinámicas del material. Para corroborar lo anterior se procedió a realizar un análisis en el que se consideraron las propiedades elásticas del material con amortiguamiento uniforme, cuyos resultados espectrales se muestran el figura 4.29 en la cual se hace patente que al no degradarse la rigidez del material por el efecto de la excitación dinámica, se manifiesta en mayor grado grandes respuestas en un rango considerable (de 0.005 a 0.8 seg) de periodos o altas frecuencias, cosa que no sucede con el método no lineal; así también, en todo el rango en que se expresan los espectros, se observa que el obtenido por el método lineal equivalente es mayor en todo momento al obtenido por el no lineal. En bajos periodos se obtiene una diferencia de hasta un 380% más por el método lineal equivalente y en la ordenada espectral máxima hasta un 7%.

IV.2 EFECTO DEL INTERVALO DE DIGITIZACION DE ACELEROGRAMAS EN LA RESPUESTA

Para observar el efecto que se tiene al digitizar los acelerogramas a diferente intervalo de tiempo sobre la respuesta, se procedió a realizar análisis para las condiciones del depósito con el material cuyas propiedades dinámicas están dadas por la curva LSNE de la figura 3.3 y la 3.6 a partir de la excitación definida en la figura 3.9 la cual fue digitizada a 0.02, 0.04, 0.08 y 0.32 seg, y que fue aplicada al depósito sistemáticamente.

En la figura 4.30 se muestran los espectros de aceleración para el 5% de amortiguamiento a partir del acelerograma digitizado a 0.02, 0.04 y 0.08 seg; se puede observar que la concordancia de tales espectros es excelente; el espectro para la digitización de 0.08 seg da una respuesta ligeramente menor al calculado para 0.02 seg (que es el que originalmente fué registrado del sismo).

Ya que la longitud de los términos de la transformada de Fourier debe cubrir la duración del movimiento, tal longitud está en función precisamente del número de puntos del movimiento y a su vez, el tiempo de computo depende básicamente de la longitud de la transformada de Fourier. Esto significa que al cambiar el intervalo de digitización de 0.02 a 0.04 seg el número de puntos se reduce a la mitad y el tiempo de computo también se reduce en la misma proporción; así mismo, al reducir de 0.02 a 0.08 seg el intervalo de digitización, el tiempo de computo se reduce a la cuarta parte.

De alguna manera, al digitizar a intervalos más grandes el acelerograma se suaviza y pierde energía, sin embargo, según la figura 4.30 el espectro obtenido para el intervalo de 0.08 seg refleja una aproximación aceptable respecto al obtenido para 0.02 seg, lo cual implica un considerable ahorro de tiempo de computo.

Para seguir observando la tendencia de los espectros al aumentar el intervalo de digitización, éste se llevo hasta 0.32 seg, lo que implica reducir el número de puntos del acelerograma 16 veces del digitizado a 0.02 seg y en la misma proporción el tiempo de computo, cubriendo sin embargo su duración total; el espectro obtenido aparece en la figura 4.31 (comparado con el obtenido para 0.02 seg), se observa, que el espectro todavía guarda su forma y que en cierto intervalo es muy aproximado al obtenido para 0.02 seg de digitización (de 1.1 a 1.6 seg).

Podemos notar también que el intervalo de digitización tiene influencia en la atenuación de la respuesta a altas frecuencias por los movimientos también filtrados a alta frecuencia.

IV.3 EFECTO DE LA CANTIDAD DE ENERGIA DINAMICA APLICADA A UN DEPOSITO SOBRE SU RESPUESTA

Para observar el efecto que se tiene sobre la respuesta de un depósito al disminuir la cantidad de energía (número de puntos considerados del acelerograma) (ver anexo 11) de la excitación aplicada, se realizaron análisis considerando al depósito con un material cuyas propiedades dinámicas se dan por la curva ISNE del la figura 3.3 y la 3.6; se aplicó la excitación de la figura 3.9 la que se consideró como el 100% (digitizada a 0.02 seg), y a partir de la cual se consideraron el 90, 80, 70, y 40% (segmentos del acelerograma cada vez más chicos) para aplicar tales porcentajes de energía sistemáticamente al depósito. En la figura 4.32 se muestran los espectros obtenidos para el 100, 90, 80 y 70% de energía de la excitación de la figura 3.9, las cuales muestran una concordancia excelente en todo el rango de periodos que se presenta. Con ésta reducción de la excitación en porcentajes, se eliminaron puntos permaneciendo el mismo intervalo de digitización (0.02 seg) y reduciendo su duración total; esto reduce a la vez el tiempo de computo solamente en los casos en que el número de puntos así obtenidos sea menor a una potencia de 2 menor a la anterior antes de hacer la reducción, pues la longitud del número de terminos del la transformada de Fourier esta en función de una potencia de 2.

Con la finalidad de seguir observando el comportamiento del espectro al reducir la cantidad de energía, se consideró un 40%; el espectro así obtenido aparece en la figura 4.33 (en la que con fines de comparación también aparece el obtenido con el 100%), puede verse que todavía guarda su forma respecto al obtenido para el 100%. En éste caso la reducción de la respuesta para altas frecuencias es mínima, y la ordenada espectral máxima se reduce en un 40%.

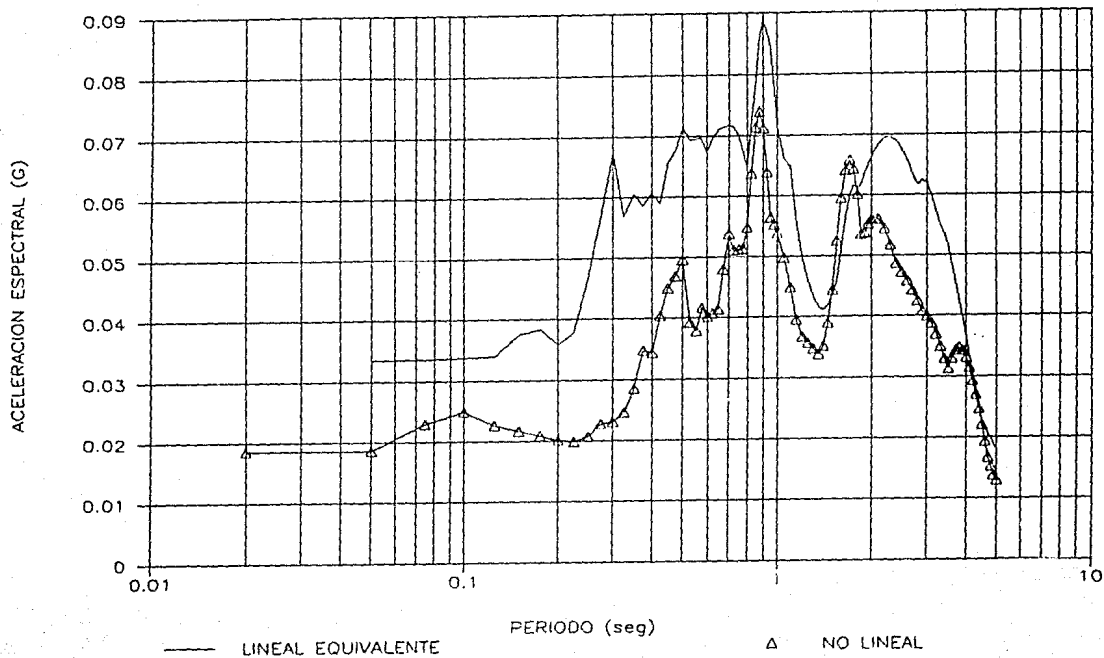


fig 4.2 Espectros de respuesta del depósito con el material según la curva LINE; el factor del sismo es 1

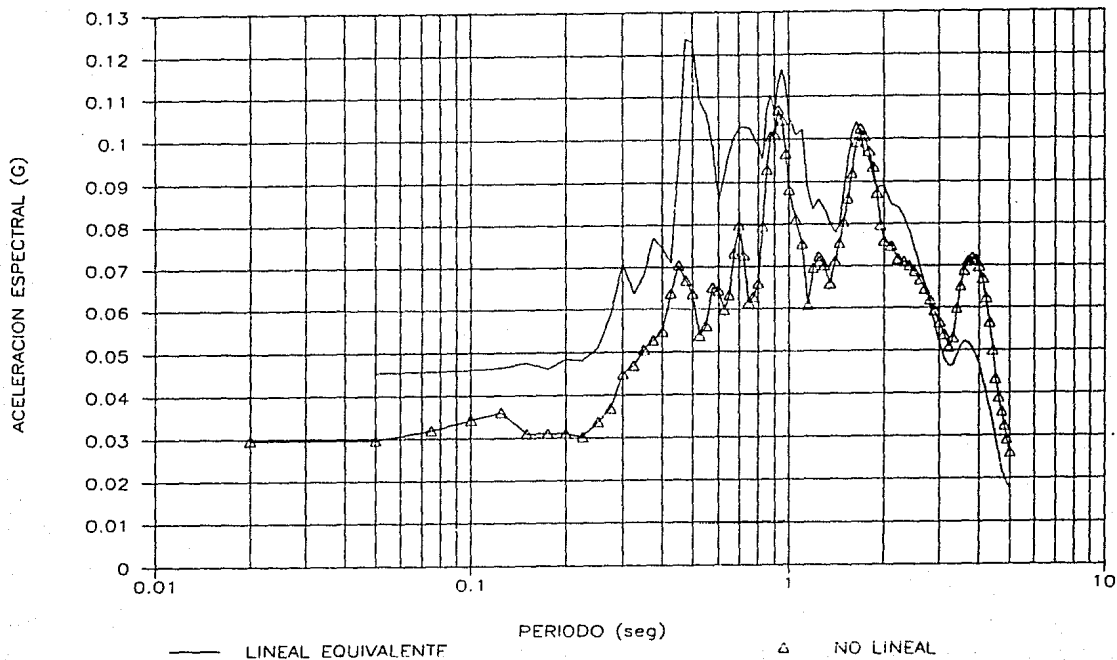


fig 4.3 Espectros de respuesta del depósito con el material según la curva LINE; el factor del sismo es 2

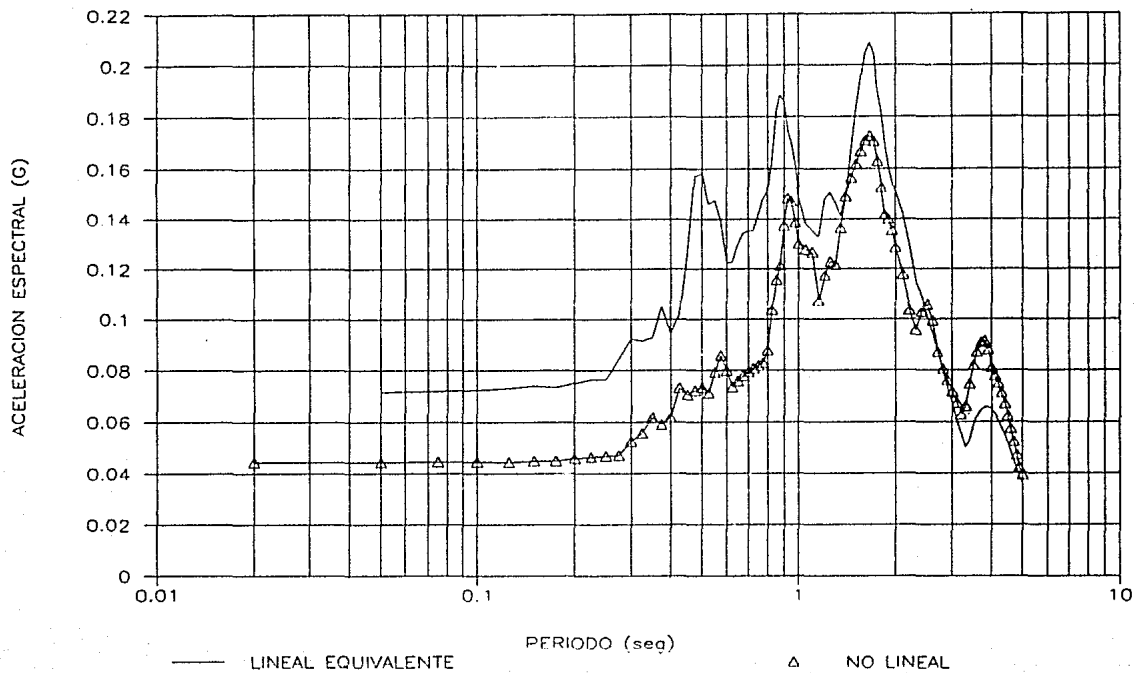


fig 4.4 Espectros de respuesta del depósito con material según la curva LINE; el factor del sismo es 2

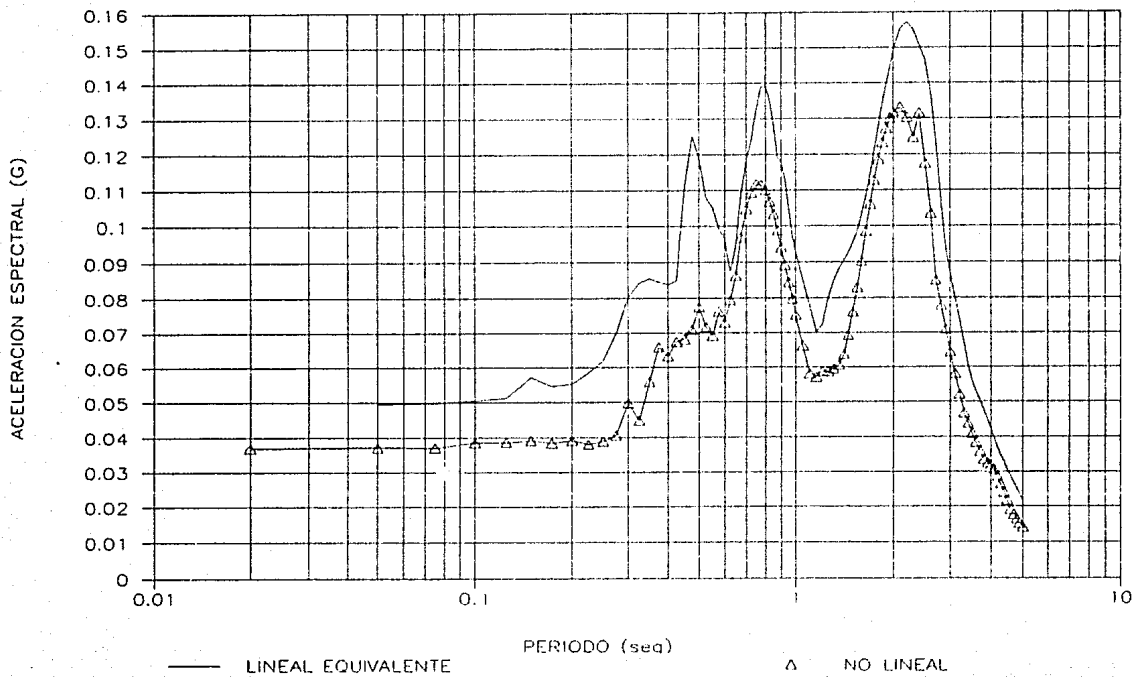


fig 4.5 Espectros de respuesta del depósito con material según la curva LMNE; el factor del sismo es 1

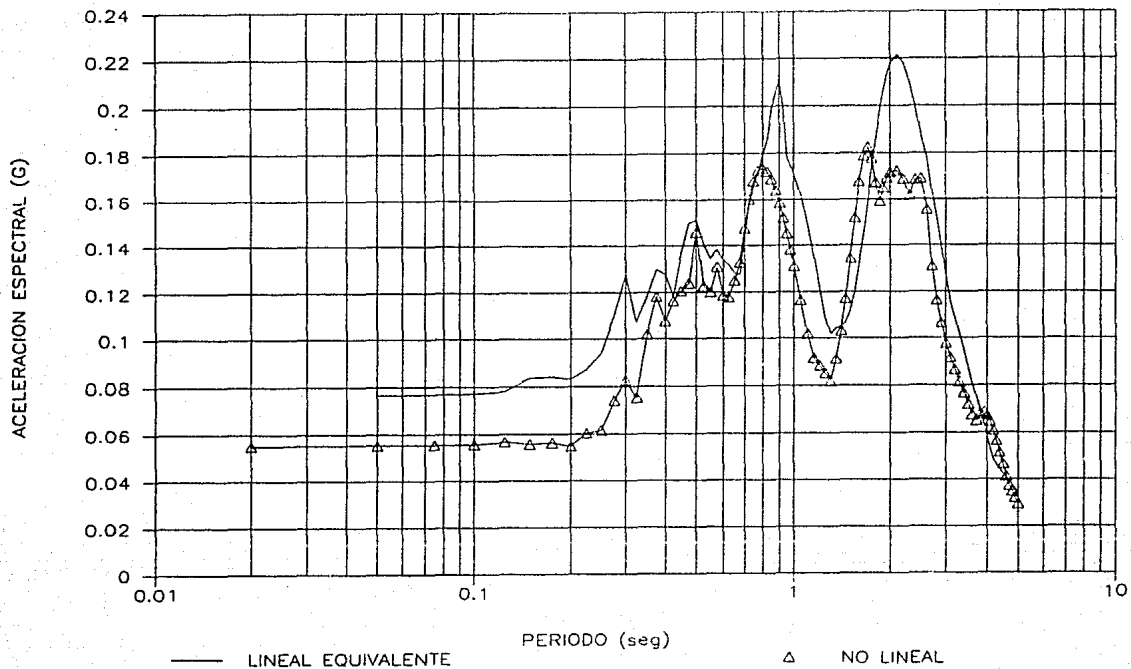


fig 4.6 Espectros de respuesta del depósito con material según la curva LMNE; el factor del sismo es 2

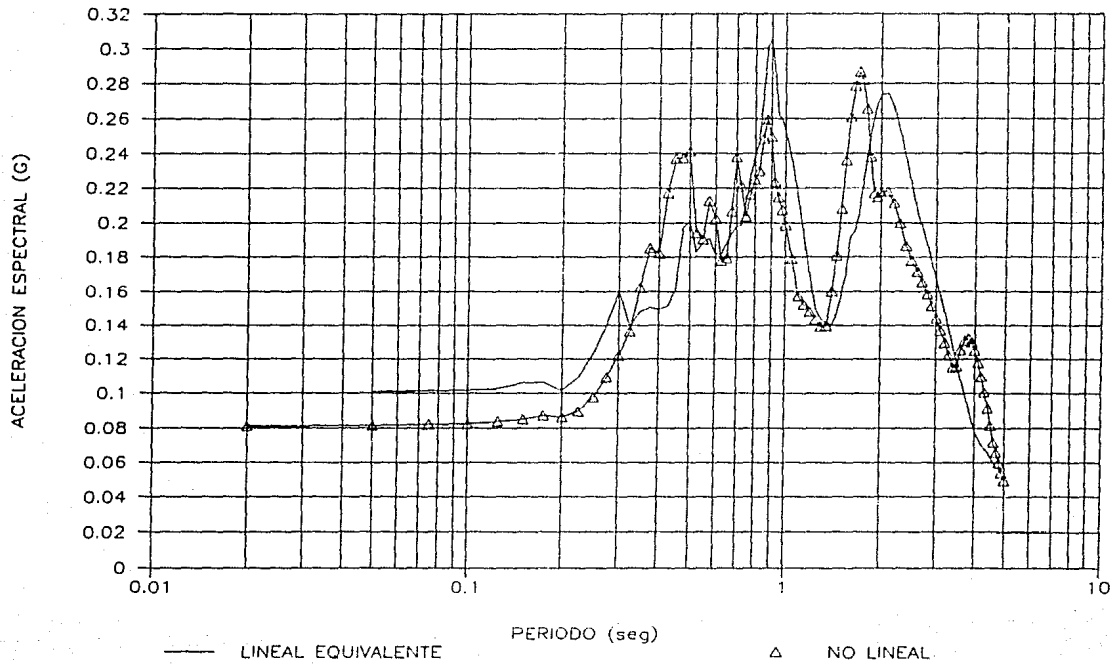


fig 4.7 Espectros de respuesta del depósito con material según la curva LMNE; el factor del sismo es 4

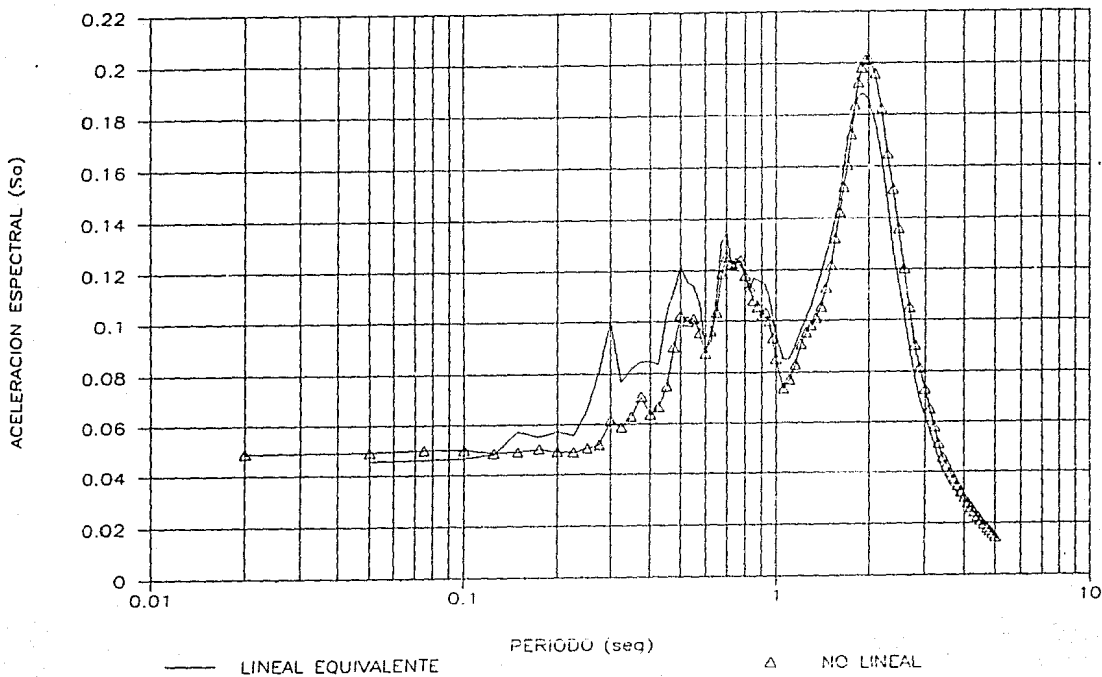


fig 4.8 Espectros de respuesta del depósito con material según la curva LSNE; el factor del sismo es 1

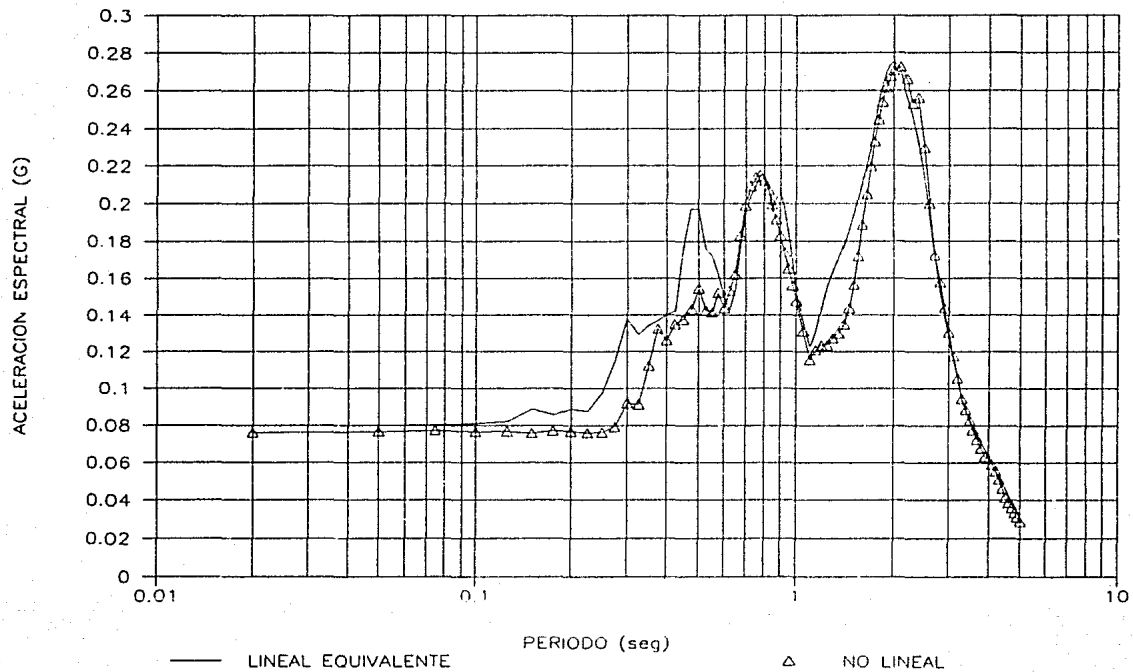


fig 4.2 Espectros de respuesta del depósito con material según la curva LSNE; el factor del sismo es 2

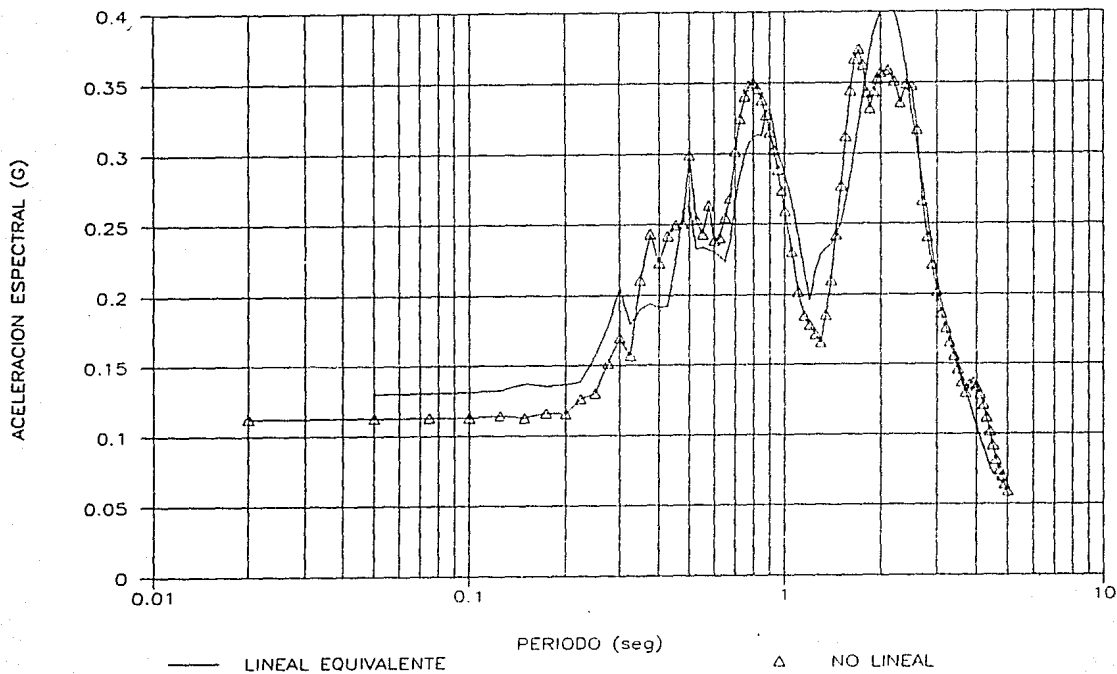


fig 4.10 Espectros de respuesta del depósito con material según la curva LSNE; el factor del sismo es 4

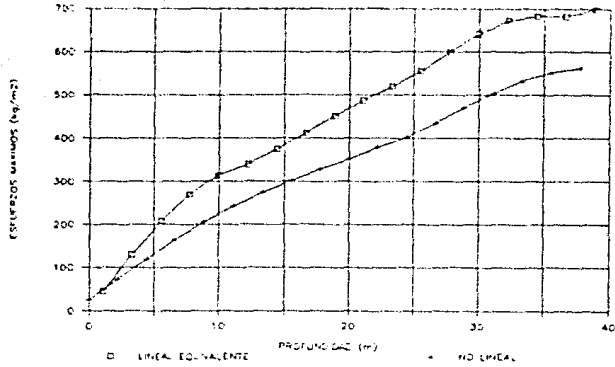


fig 4.11 Máximos esfuerzos en el depósito con material según la curva LINE; el factor del sismo es 1

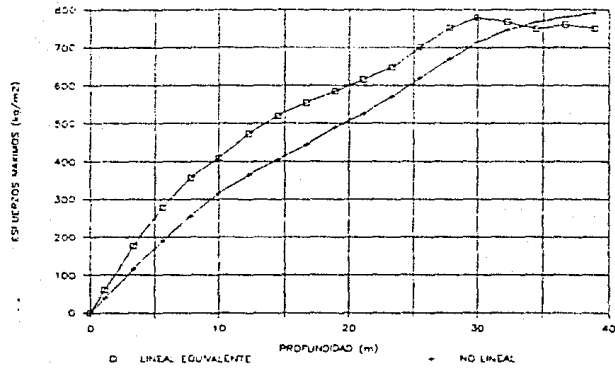


fig 4.12 Esfuerzos máximos en el depósito con material según la curva LINE; el factor del sismo es 2

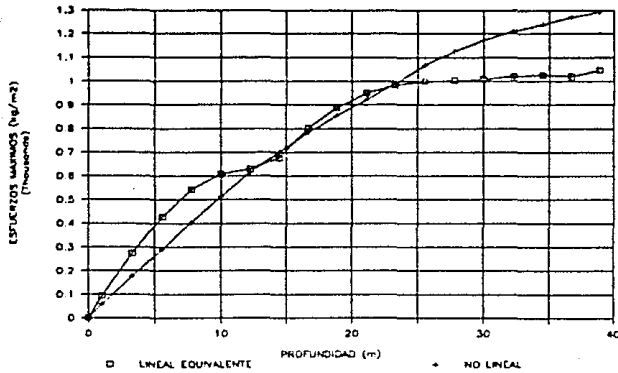


fig 4.13 Esfuerzos máximos en el depósito con material según la curva LINE; el factor del sismo es 4

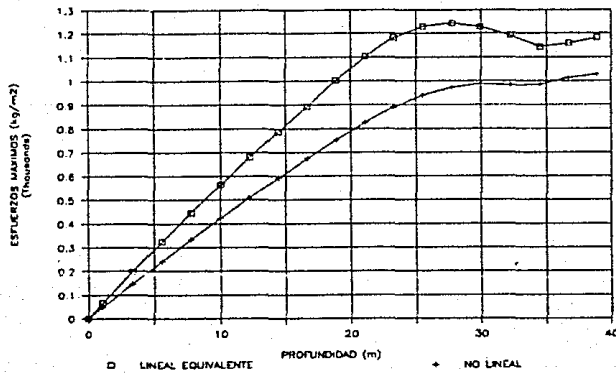


fig 4.14 Esfuerzos máximos en el depósito con material según la curva LMNE; el factor del sismo es 1

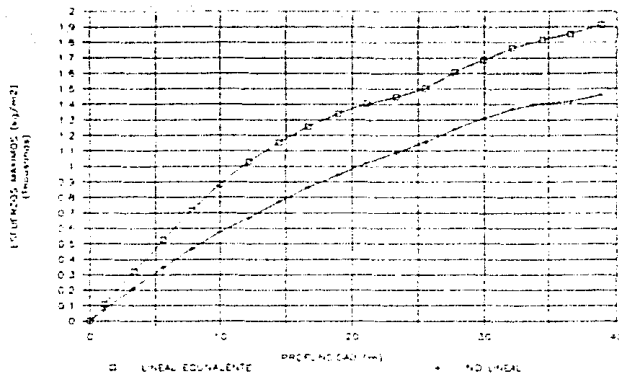


fig 4.15 Esfuerzos máximos en el depósito con material según la curva LMNE; el factor del sismo es 2

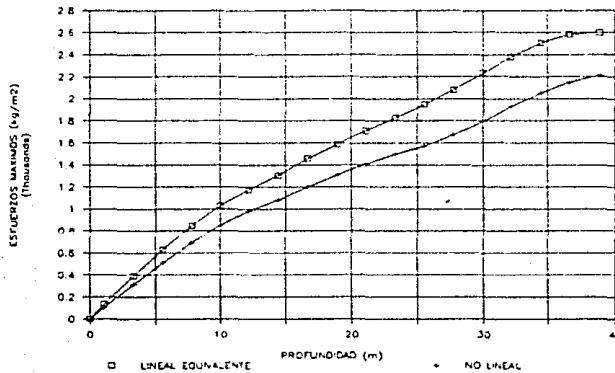


fig 4.16 Esfuerzos máximos en el depósito con material según la curva LMNE; el factor del sismo es 4

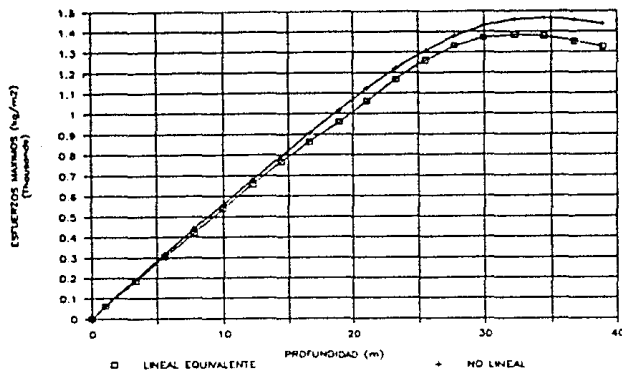


fig 4.17 Esfuerzos máximos en el depósito con material descrito por la curva LSNE; el factor del sismo es 1

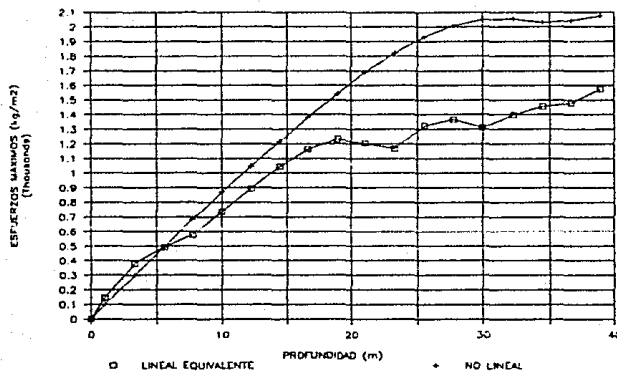


fig 4.18 Esfuerzos máximos en el depósito con material según la curva LSNE; el factor del sismo es 2

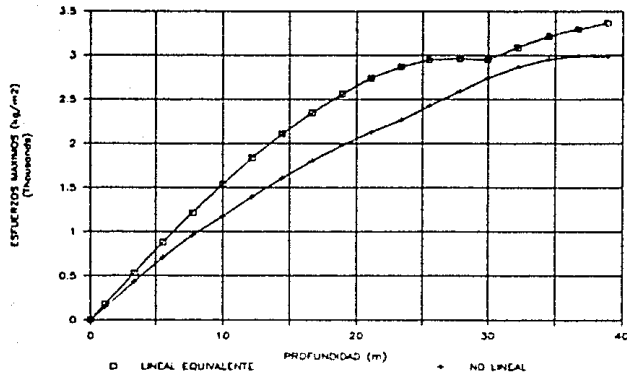


fig 4.19 Esfuerzos máximos en el depósito con material descrito por la curva LSNE; el factor del sismo es 4

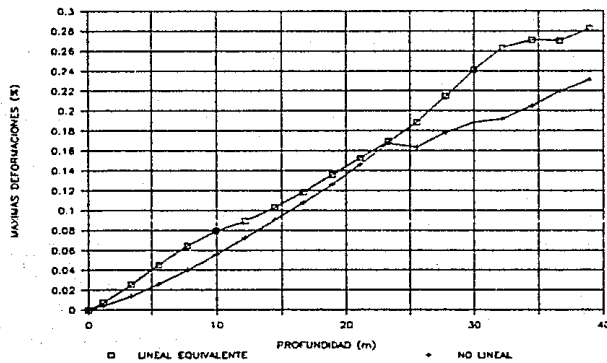


fig 4.20 Deformaciones máximas en el depósito con material según la curva LINE; el factor del sismo es 1

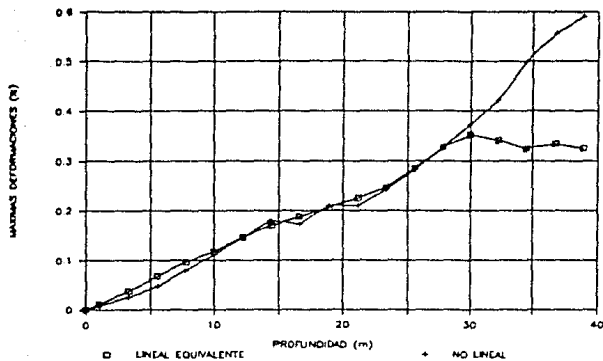


fig 4.21 Deformaciones máximas en el depósito con material según la curva LINE; el factor del sismo es 2

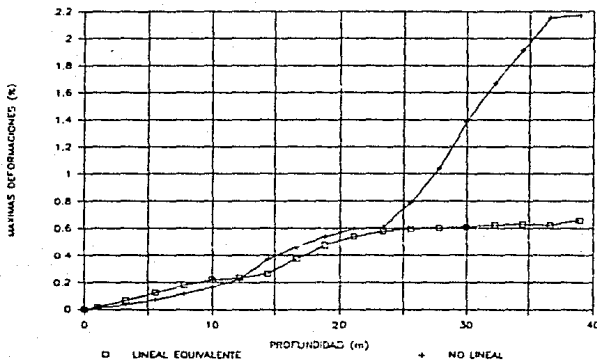


fig 4.22 Deformaciones máximas en el depósito con material según la curva LINE; el factor del sismo es 4

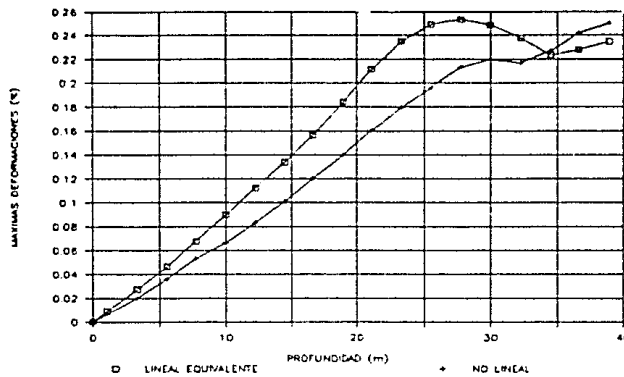


fig 4.23 Deformaciones máximas en el depósito con material según la curva LMNE; el factor del sismo es 1

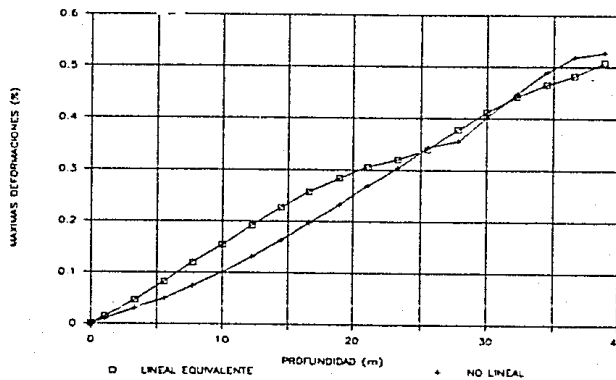


fig 4.24 Deformaciones máximas en el depósito con material según la curva LMNE; el factor del sismo es 2

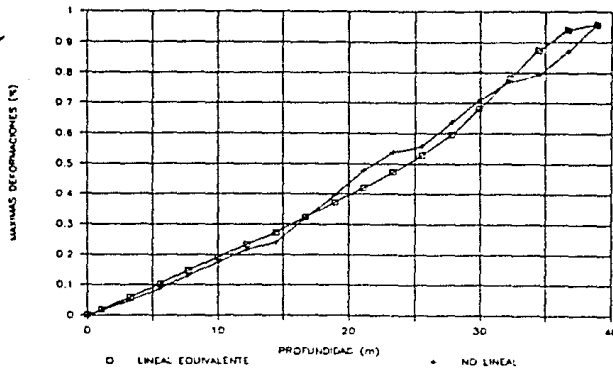


fig 4.25 Deformaciones máximas en el depósito con material según la curva LMNE; el factor del sismo es 4

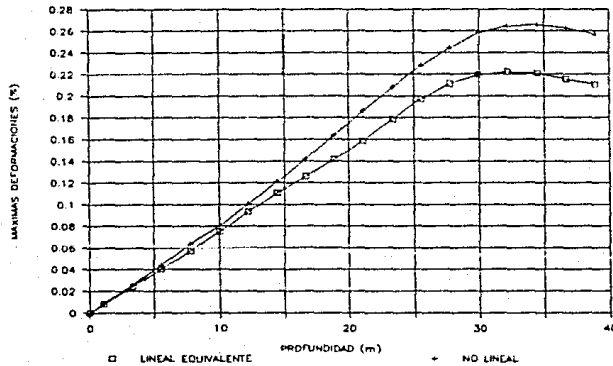


fig 4.26 Deformaciones máximas en el depósito con material según la curva LSNE; el factor del sismo es 1

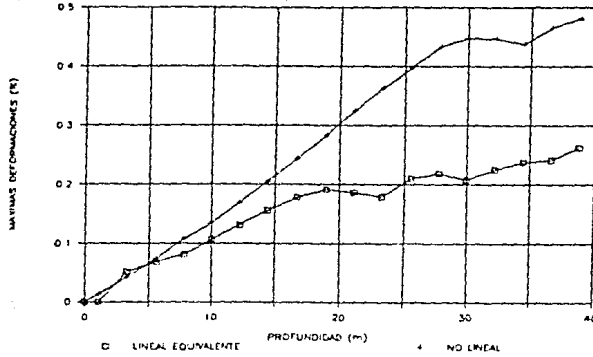


fig 4.27 Deformaciones máximas en el depósito con material según la curva LSNE; el factor del sismo es 2

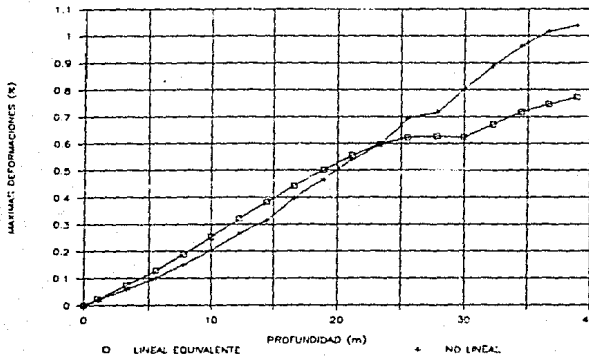


fig 4.28 Deformaciones máximas en el depósito con material según la curva LSNE; el factor del sismo es 4

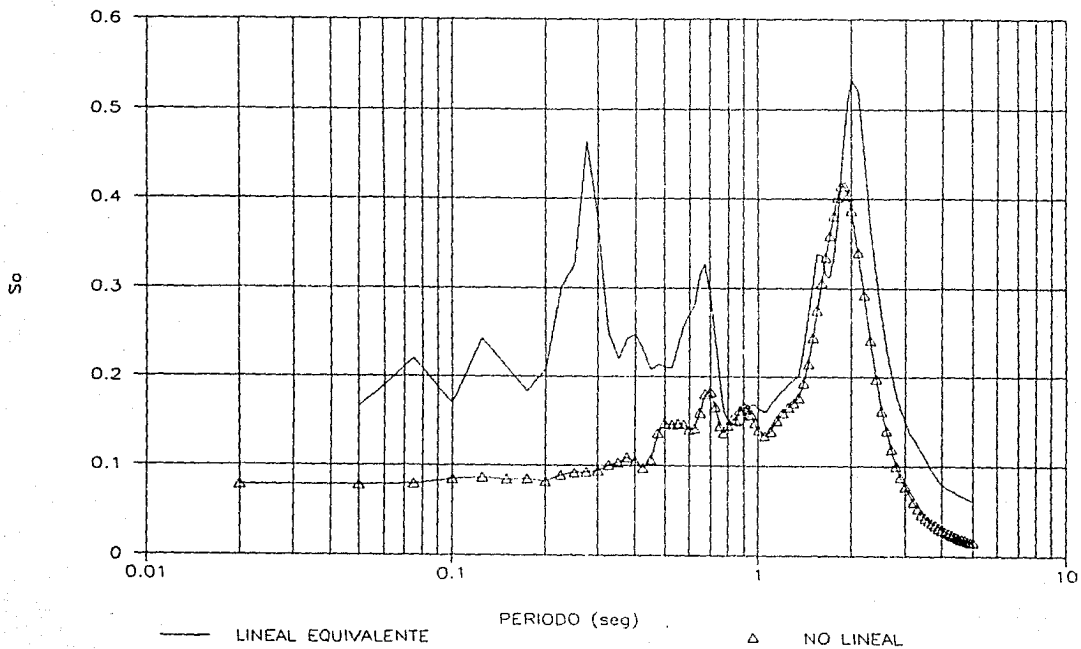


fig 4.29 Espectros de respuesta del depósito con material elástico lineal

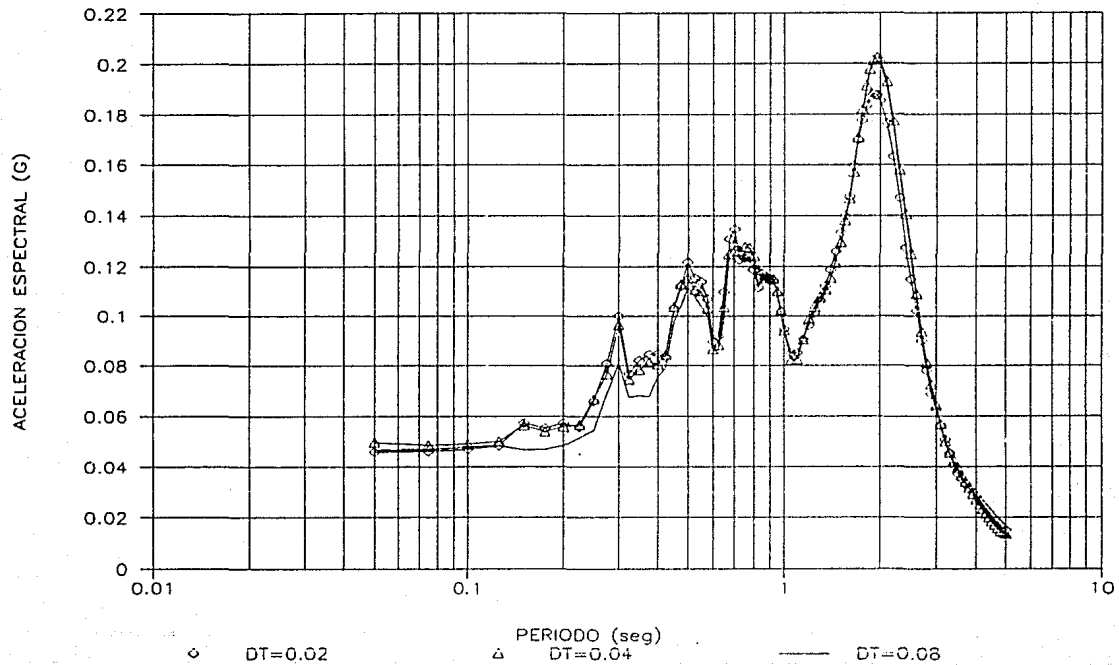


fig 4.30 Espectros de respuesta del depósito para el acelerograma digitizado a diferentes intervalos de tiempo (en seg)

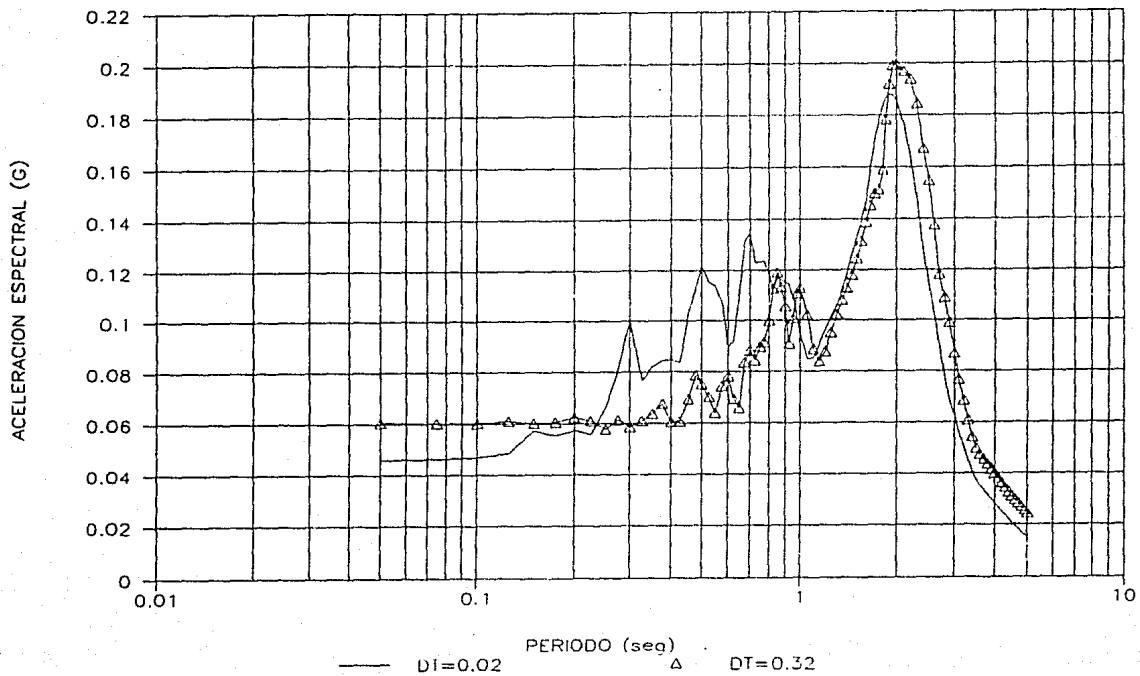


fig 4.31. Espectros de respuesta del depósito para el acelerograma digitizado a diferentes intervalos de tiempo (en segundos)

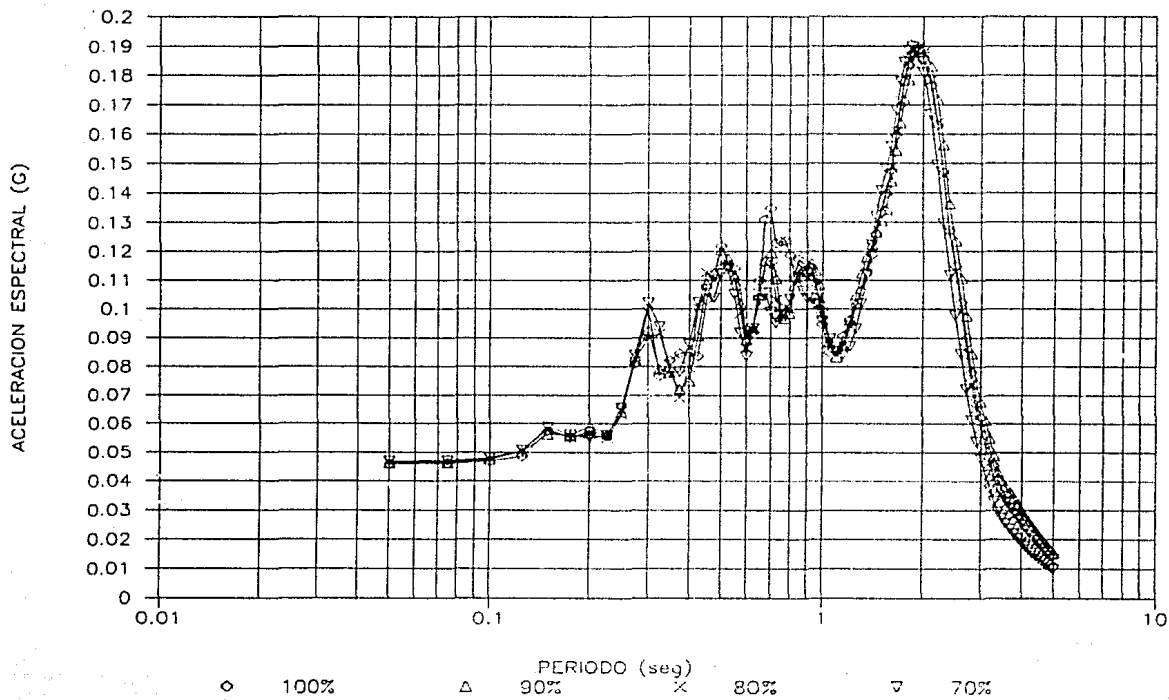


fig 4.32 Espectros de respuesta para diferentes intensidades de energía aplicada al depósito

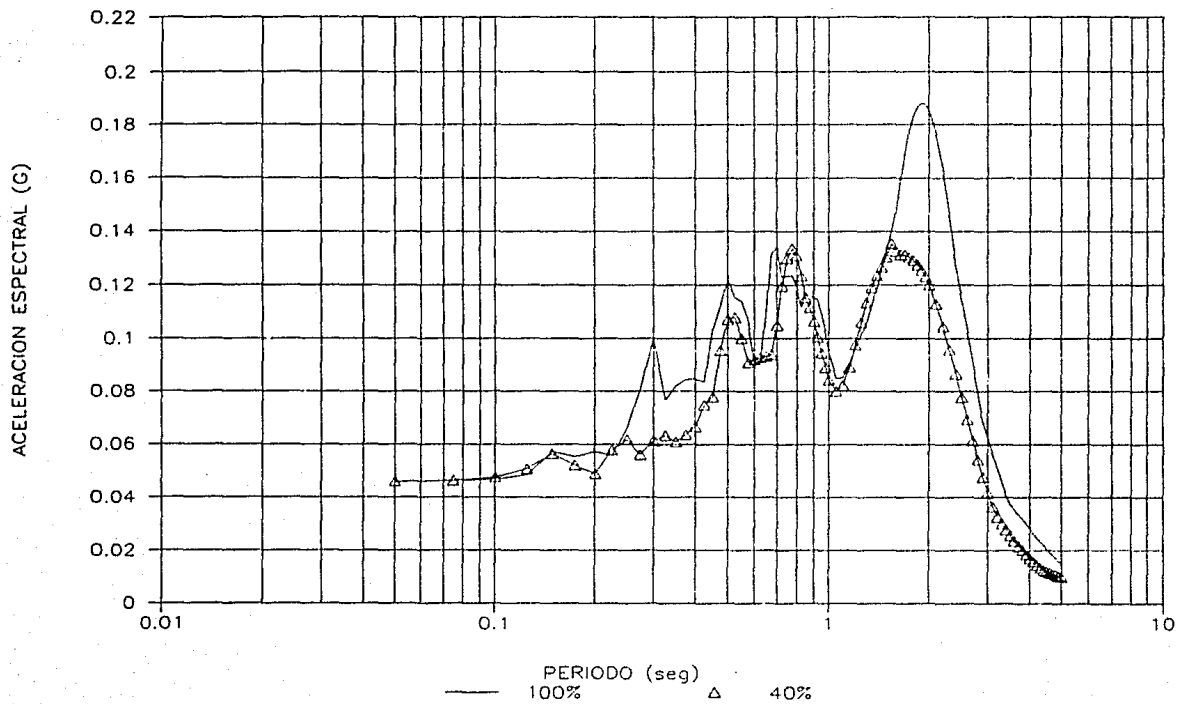


fig 4.33 Espectros de respuesta para diferentes intensidades de energía aplicada al depósito

CAPITULO V

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este capítulo se presentan las conclusiones que se deducen de los análisis de respuesta presentados en el capítulo III, además de anotar los aspectos más relevantes acerca de la compatibilidad o discrepancia de los métodos lineal equivalente con el programa de computadora SHAKE y el del elemento finito para el análisis no lineal incluido en el programa MASH; ambos para la evaluación de la respuesta de depósitos ante la propagación vertical de ondas de cortante, modelando al depósito como un sistema estratificado horizontalmente.

De los análisis presentados en el capítulo III, podemos concluir que:

a) La magnitud de la respuesta espectral depende naturalmente de la intensidad del evento sísmico.

b) En depósitos con materiales arcillosos duros, la respuesta espectral es mayor que la obtenida para depósitos de arcilla blanda, aún cuando el evento sísmico sea el mismo.

c) La forma general del espectro de respuesta obtenido para depósitos de arcilla dura es más aguda y concentrada que el obtenido para arcillas blandas: en el primer caso el intervalo de periodos crítico es menor con mayores amplificaciones en relación al segundo, donde el intervalo de periodos crítico es mayor con menores amplificaciones.

d) Los depósitos de suelos blandos tienden a disipar mayor energía durante un evento sísmico, que los de suelos duros: en el primer caso predominan las altas frecuencias en relación al segundo donde predominan las bajas.

e) Para bajas intensidades sísmicas puede considerarse al depósito arcilloso como de material elástico-lineal; esto se supone por la forma muy semejante que guardan los espectros de materiales progresivamente más rígidos con la más baja excitación.

f) A mayor intensidad de energía sísmica aplicada a un depósito de arcilla blanda saturada existe la tendencia al predominio de los altos periodos en su respuesta espectral.

g) El fenómeno de resonancia en la respuesta de un depósito arcilloso depende de las propiedades dinámicas de los materiales que componen al mismo depósito y a los estratos que lo subyacen; además de

las características del contenido de frecuencias, de la duración y de la intensidad del evento sísmico.

Para sismos de gran magnitud, se infiere de los análisis, que los materiales entran en el intervalo de comportamiento inelástico, lo que aumenta su capacidad para disipar energía y como resultado las amplificaciones espectrales disminuyen (en particular los movimientos de alta frecuencia son filtrados) pero a su vez el intervalo de periodos crítico es mayor, cosa que resulta inconveniente para un mayor número de estructuras urbanas.

Entonces, la respuesta espectral de un depósito arcilloso está influenciada por las características dinámicas del material que lo componen, y a su vez de las características de la excitación que se le aplique. Así entonces, aún cuando las condiciones del depósito sean las mismas, al aplicar diferentes intensidades de un mismo sismo, se obtienen diferentes espectros de respuesta tanto cualitativa como cuantitativamente; de esto, se supone que el material del depósito se degrada en función de la magnitud de las cargas dinámicas y que el considerar a un material arcilloso como elástico-lineal para un análisis de respuesta riguroso ante cargas dinámicas de considerable magnitud, no es válido.

En lo que toca a los análisis presentados en el capítulo IV, se concluye lo siguiente:

a) La respuesta para bajas intensidades sísmicas (bajos niveles de deformación inducidos) es sobreestimada por el método lineal equivalente.

b) Para materiales blandos el método lineal equivalente sobreestima la respuesta a altas frecuencias, más aún para bajas intensidades de energía aplicada.

c) La respuesta a altas frecuencias obtenida por el método lineal equivalente se atenúa al alcanzarse mayores niveles de deformación inducida; se supone consecuentemente que la rigidez del material disminuye y su amortiguamiento aumenta de donde se implica que éste método es más sensible al cambio de estos parámetros.

d) La mejor aproximación entre ambos métodos se obtuvo para cuando el material del depósito está caracterizado por la curva $LSNE$ de la figura 3.3, y la respuesta obtenida por el método lineal equivalente a altas frecuencias se atenúa en la medida que aumenta la intensidad del sismo.

Se recomienda tener en cuenta que al tenerse mayores deformaciones, el módulo secante G tiende a reducirse como podrá notarse en las curvas de la figura 3.3, con lo que el depósito disipará mayor cantidad de energía a medida que G disminuye. Como el método lineal equivalente usa un proceso iterativo en el que se determina el G final, correspondiente a las deformaciones producidas

por la excitación y que a veces en cada iteración oscila en rangos considerables, es por lo que este modelo es más sensible a los cambios del modulo G y amortiguamiento β según los niveles de deformación alcanzados, así pues, para cuando la curva G/G_{max} vs γ_a tiene mucha pendiente (materiales frágiles) el intervalo de oscilación es mayor, tanto, que a veces la deformaciones determinadas en una cierta iteración se salen del rango en que se encuentra especificada la curva por lo que en estas ocasiones el método diverge. Lo anterior marca una limitante para el uso del programa de computadora SHAKE (versión 1985) al tratar de analizar depositos con materiales frágiles. Para resolver tal problema habrá que modificar el algoritmo en donde se ejecuta el proceso iterativo.

Finalmente, en lo que corresponde al tratamiento de los acelerogramas, se recomienda hacer lo indicado en las secciones IV.2 y IV.3, ya que resulta más económico en tiempo de computadora sin alterar la confiabilidad de los análisis, es decir; reducir el número de puntos de los acelerogramas en función del intervalo de digitización, en lugar de hacerlo con el contenido de energía del evento sísmico en consideración; además, se tiene la ventaja con esto, de que la respuesta a altas frecuencias introducida por el método lineal equivalente es atenuada

ANEXO I

TEORIA DEL ELEMENTO FINITO

Existe una variedad muy grande de sistemas mecánicos y estructurales cuya solución no es siempre trivial ni fácil de obtener. En tales casos se acostumbra hacer una clasificación de efectos relevantes u otros que por su naturaleza pueden considerarse insignificantes, de tal manera que en general siempre se habla de una solución aproximada a la solución real del sistema o de un modelo aproximado a un sistema real.

La formulación con elementos finitos, se apoya también en suposiciones lógicas en base a la naturaleza del sistema en cuestión, y para tal efecto se han de establecer elementos cuyas propiedades sean representativas del sistema específico.

En general, el método del elemento finito es un método numérico variacional que sirve para resolver problemas de maximización o de minimización de funcionales (éstos problemas son del dominio del cálculo variacional), el que a su vez se utiliza para la solución aproximada de problemas con valores límite surgidos de la teoría de ecuaciones diferenciales parciales, ya que estas pueden transformarse en funcionales; cabe aclarar en éste punto, que una funcional es una expresión cuyas variables son funciones y que estas operan en el espacio de Hilbert; en éste espacio los puntos se definen por medio de funciones, en analogía al espacio cartesiano donde los puntos se definen por escalares.

Desde el punto de vista matemático, el concepto fundamental del método consiste en que cualquier función continua en el dominio dado puede aproximarse mediante una sucesión de funciones, que se definen en una serie de subdominios (dentro de los cuales estas funciones son continuas) y los cuales se interconectan para aproximar así la función dada; desde el punto de vista físico, el concepto del método consiste en que para resolver una estructura física sujeta a ciertas condiciones, se puede utilizar un modelo aproximado compuesto de una serie de elementos que se interconectan en una serie de puntos llamados nodos cuyo comportamiento es conocido a través de ciertas ecuaciones preestablecidas y que corresponden a los tipos de elementos usados y al número de nodos en cada uno de ellos.

La solución de las ecuaciones del modelo pueden ser exactas, pero éste en sí es una aproximación discreta al sistema físico y la solución de dicho modelo se aproxima a la solución del sistema real.

La formulación matemática de problemas de ingeniería generalmente se puede efectuar de dos formas diferentes; la primera considera el comportamiento de un área o volumen infinitesimal del sistema y las

ecuaciones correspondientes se formulan en forma diferencial, y como el área o volumen considerado es representativa de toda la región, las mismas ecuaciones son válidas para todo el dominio de la región; en la segunda se postula un principio que englobe la región o dominio completo dado, y consecuentemente es una formulación en forma integral y su solución es generalmente dada por valores extremos de dicha integral. Este último método es conocido como el método variacional.

Por ejemplo si se establece un funcional, el cual es el valor de una integral y que tiene la forma

$$\Pi = \int F(x, y, y') dx$$

en donde

$$y = y(x), \quad y' = \frac{d y(x)}{dx}$$

del cual se procede a encontrar sus valores extremos, lo cual requiere que su primera variación sea igual a cero, es decir, que cumpla con la condición de estacionariedad de una integral mediante

$$\delta\Pi = 0$$

Cabe mencionar que encontrar el valor estacionario de una integral [Enzo, 1965] es similar a encontrar los valores mínimos o máximos de una función en cálculo diferencial, excepto que al minimizar una función, se obtiene un valor de variable independiente que nos dá un mínimo en la función, mientras que al minimizar un funcional se obtiene una función que al integrarse hace el valor de dicha integral mínimo.

Para llevar a cabo lo anterior se puede proceder a discretizar la integral mediante la siguiente ecuación

$$\Pi = \int_{x_a}^{x_b} F(x, y, y') dx = \int_{x_a}^{x_1} F(x, y, y') dx + \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx + \dots + \int_{x_n}^{x_b} F(x, y, y') dx$$

La integral total Π ahora consiste en varias integrales parciales, cada una extendiéndose en los subdominios (x_{i-1}, x_i) . El concepto de discretizar la integral de la ecuación puede tener una interpretación física al dividir el dominio de la función en una serie de elementos (finitos) a los cuales se asigna cada una de las integrales, con la

ventaja de que ahora es posible usar alguna aproximación polinomial (lineal, parabólica, etc) para $y(x)$ en cada integral (o en cada elemento). Los métodos más conocidos de aproximación son

- 1) Método de Ritz
- 2) Método de Galerkin

Supongamos que el problema a resolver está planteado en forma variacional, donde se busca una función U que minimice la expresión variacional.

La idea de Rayleigh-Ritz y Galerkin es, la de elegir un número finito de funciones $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$, y entre todas sus combinaciones lineales $\sum q_i \varphi_i$, encontrar cual sea la minimizante.

AI.1 Método de Ritz

En el caso particular del método de Ritz, se consideran todas las combinaciones lineales posibles

$$y_n(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i W_i(x)$$

con coeficientes α_i constantes, formadas por las n primeras funciones de cierta sucesión

$$W_1(x), W_2(x), \dots, W_n(x)$$

Las funciones $y_n(x)$ deben ser admisibles en el problema considerado, lo cual impone ciertas limitaciones a la elección de funciones $W_i(x)$. Con estas combinaciones lineales, la funcional $\psi[y(x)]$ se transforma en una función $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ de los coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Estos coeficientes se escogen de modo que la función $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ tenga un extremo (lo equivalente en cálculo diferencial a encontrar un máximo o un mínimo de una función); en consecuencia, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ deben ser determinados del sistema de ecuaciones

$$\frac{\delta \varphi}{\delta \alpha_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Pasando al límite para $n \rightarrow \infty$, la función $y(x)_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i W_i(x)$ que es (bajo ciertas limitaciones impuestas a la funcional $\varphi[y(x)]$ y a la sucesión $W_i(x)$) la solución exacta del problema variacional considerado. Si no efectuamos el paso al límite, si no que nos limitamos sólo a los n primeros términos $y_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i W_i(x)$, obtenemos una solución aproximada del problema variacional.

Para que las funciones $y_n(x)$ sean admisibles, ante todo es necesario satisfacer las condiciones de frontera (también limitaciones de continuidad o derivabilidad). Si por ejemplo las condiciones de frontera son lineales y homogéneas, lo más sencillo es escoger funciones coordenadas de modo que satisfagan tales condiciones.

AI.2 Método de Galerkin

En la formulación de este método no se requiere de un postulado variacional que se aplique al sistema de interés, pues parte de una manipulación directa sobre la ecuación diferencial que gobierne el problema físico

Una formulación diferencial (expresada en su forma compacta), resulta de una ecuación del tipo

$$L(\varphi) = 0 \quad \dots (1)$$

en donde L es el operador diferencial, con las condiciones de frontera

$$\varphi(0) = 0 \quad \text{y} \quad \varphi'(0) = 0 \quad \dots (2)$$

Una función de campo que puede satisfacer las condiciones anteriores se pueden definir como

$$\{\varphi\}_n = [N] \{\varphi_i\} \quad \dots (3)$$

en donde

- $[N]$ es una función de las coordenadas
- $\{\varphi_1\}$ es el vector de los valores nodales
- $\{\varphi\}_a$ es la función de prueba

entonces, si $\{\varphi\}_a$ es la verdadera función, al sustituirla en la ecuación (1) el resultado es

$$L(\{\varphi\}_a) = 0 \quad \dots(4)$$

Si $\{\varphi\}_a$ sólo es una aproximación a la solución verdadera

$$L(\{\varphi\}_a) = R \approx 0 \quad \dots(5)$$

en donde R es un residuo o error. R se puede evaluar en puntos discretos (nodos) e igualar su suma a cero para minimizar el error, o sea

$$\int_v R \, dv = 0 \quad \dots(6)$$

Pero una mejor solución sería la de distribuir R sobre una región de acuerdo a alguna función de peso W de las coordenadas (nodales) antes de la integración, es decir

$$\int_v WR \, dv = 0 \quad \dots(7)$$

sustituyendo la ecuación (3) en (5) y ésta en (7) se tiene

$$\int_v WL([N]\{\varphi_1\}) \, dv = 0 \quad \dots(8)$$

La función de peso W puede ser de cualquier forma en general, pero cuando se selecciona igual a las funciones de forma o de interpolación se tiene que W es igual a N y por lo tanto

$$\int_V [N]L([N](\psi_1)) dv = 0 \quad \dots (9)$$

La ecuación (9) es la formulación de Galerkin del elemento finito y se aplica a cada elemento en la región, se obtienen n ecuaciones simultáneas para n parámetros nodales. La solución del sistema de ecuaciones que resulta se desarrolla de igual manera que en otros casos, aunque una desventaja es que la ecuación (9) contiene derivadas de orden más alto que las de formulación variacional.

Finalmente, particularizaremos un tanto, en lo que hemos llamado funciones de forma o de interpolación. Por ejemplo en el plano bidimensional el triángulo es el más generalmente usado. Una razón para esto es que para una región arbitraria en dos dimensiones, ésta puede ser aproximada por polinomios, pues la región siempre pueden ser dividida en un número finito de triángulos.

Sea por ejemplo el polinomio de orden m -simo

$$\Pi_m(x, y) = \sum_{i+j=0}^m \alpha_{ij} x^i y^j$$

el cual se puede utilizar para interpolar la función $N(x, y)$.

AI.3 Interpolación lagrangiana

En éste caso las coordenadas de los nudos están dadas por

$$\left[\sum_{t=1}^3 \beta_t x_t / m, \sum_{t=1}^3 \beta_t y_t / m \right] \quad \dots (10)$$

donde β_1, β_2 y β_3 son números enteros que satisfacen $0 \leq \beta_t \leq m$, ($t = 1, 2, 3$) y $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = m$. Si N_r denota el valor de $N(x, y)$ en un nudo dado por (10), la interpolación lineal de grado m se puede expresar como

$$N(x, y) = \sum_{r=1}^{1/2(m+1)(m+2)} U_r P_r^{(m)}(x, y)$$

donde la sumatoria es sobre todos los nudos, y $P_r^{(m)}(x, y)$ es un polinomio función base de grado m , que toma el valor unitario en los nudos asociados con la triada $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ y cero en cada otro nudo. Los primeros tres casos de la familia de funciones base son:

$$(i) m=1, \quad P_r^{(2)} = (\tau_r + \eta_r x - \zeta_r y) / |A|, \quad (r = 1, 2, 3) \quad \dots (11)$$

con $\tau_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2$, $\zeta_1 = x_2 - x_3$, $\eta_1 = y_2 - y_3$, y τ_r, ζ_r, η_r definidos cíclicamente para $r = 2, 3$. La cantidad $|A|$ es dos veces el area de el triangulo considerado. En lo que sigue $p_1^{(1)}$, $p_2^{(1)}$ y $p_3^{(1)}$ serán reemplazados por p, q y r respectivamente donde $p + q + r = 1$.

$$(ii) m=2, \quad p_1^{(2)} = p(2p-1), \quad p_2^{(2)}, p_3^{(2)} \text{ cíclicamente}$$

$$p_4^{(2)} = 4pq, \quad p_5^{(2)}, p_6^{(2)} \text{ cíclicamente}$$

$$(iii) m=3, \quad p_1^{(3)} = \frac{1}{2} p(3p-1)(3p-2), \quad p_2^{(3)}, p_3^{(3)} \text{ cíclicamente}$$

$$\left. \begin{aligned} p_4^{(3)} &= \frac{9}{6} pq(3p-1) \\ p_5^{(3)} &= \frac{9}{6} pq(3p-1) \end{aligned} \right\} p_6^{(3)}, p_9^{(3)} \text{ cíclicamente}$$

$$p_{10}^{(3)} = 27pqr$$

AI.4 Interpolación hermitiana

Una forma alternativa para interpolar $N(x, y)$ en un gran número de puntos del triangulo, es interpolando la misma función con algunas de sus derivadas en un número reducido de nudos. Una clase de polinómios para esto son del tipo $p_v(x, y)$ de grado $2v + 1$ ($v = 1, 2, 3, \dots$), los cuales son determinados por los valores

$$D^j [p_v(P_j)], \quad |j| \leq v, \quad j = 1, 2, 3,$$

$$D^i [p_v(P_4)],$$

$$|i| \leq v - 1,$$

donde P_1, P_2, P_3 son los vértices del triángulo, P_4 es el centroide. $i = (i_1, i_2)$, donde i_1 e i_2 son enteros no negativos, $|i| = i_1 + i_2$, y

$$D^i p = \frac{\partial^{|i|} p}{\partial x^{i_1} \partial y^{i_2}}$$

En el caso en que $v = 1$, tenemos

$$\Pi_3(x, y) = \sum_{r=1}^4 N_r q_r^{(3)} + \sum_{r=1}^3 \left[\left[\frac{\partial N}{\partial x} \right]_r r_r^{(3)} + \left[\frac{\partial N}{\partial y} \right]_r S_r^{(3)} \right]$$

donde

$$q_1^{(3)} = p(3p - 2p^2) - 7pqr, \quad q_2^{(3)}, q_3^{(3)} \text{ cíclicamente}$$

$$q_4^{(3)} = 27pqr,$$

$$r_1^{(3)} = p[\zeta_3 q(r - p) + \zeta_2 r(p - q)], \quad r_2^{(3)}, r_3^{(3)} \text{ cíclicamente}$$

$$s_1^{(3)} = p[\eta_3 q(r - p) + \eta_2 r(p - q)], \quad s_2^{(3)}, s_3^{(3)} \text{ cíclicamente}$$

Cuando se trabaja con mallas de triángulos, el trabajo se puede simplificar considerablemente si se usa un triángulo estándar. Este es un triángulo con vértices $II_1(1, 0)$, $II_2(0, 1)$ y $II_3(0, 0)$ en el plano pq , que se obtiene del triángulo con vértices $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ y $P_3(x_3, y_3)$ en el plano xy , por uso de la transformación lineal (11). La transformada inversa del plano pq al plano xy está dada por la fórmula

$$\bar{x} = \bar{x}_1 p + \bar{x}_2 q$$

$$\bar{y} = \bar{y}_1 p + \bar{y}_2 q$$

donde

$$\bar{x} = x - x_3, \quad \bar{x}_1 = x_1 - x_3, \quad \bar{x}_2 = x_2 - x_3$$

$$\bar{y} = y - y_3, \quad \bar{y}_1 = y_1 - y_3, \quad \bar{y}_2 = y_2 - y_3$$

De aquí que todos los triángulos de la malla en el plano xy se pueden transformar en triángulos estandar, y luego en un punto apropiado transferir los resultados de nuevo a un triángulo particular en el plano xy .

Para el caso de mallas de elementos rectangulares la construcción de la función base no representa un gran problema. Por ejemplo si aplicamos el polinomio bicúbico

$$g(x, y) = \sum_{r=0}^3 \sum_{s=0}^3 \alpha_{r,s} x^r y^s$$

sobre el elemento rectangular, los coeficientes $\alpha_{r,s}$ ($0 \leq r, s \leq 3$) se pueden encontrar unicamente en términos de los valores de $\partial g/\partial x$, $\partial g/\partial y$, $\partial^2 g/\partial x \partial y$ en las cuatro esquinas de los elementos.

Para problemas tridimensionales, los elementos involucran al tetraedro o al hexaedro (incluyendo al paralelepípedo rectangular). Estos son obviamente extensiones generalmente del triángulo y del rectángulo.

ANEXO II

UNA MEDIDA DE INTENSIDAD SISMICA

En sismología y disciplinas afines se acostumbra hablar de intensidad de un temblor en un lugar dado para referirse al grado de severidad del movimiento del suelo en dicho sitio. Arias [1970] ha desarrollado una expresión que permite estimar los daños que potencialmente puede provocar un terremoto en áreas urbanas, independientemente de la calidad, naturaleza y distribución de las estructuras en cuanto a masa, frecuencia propia y amortiguamiento.

En el planteamiento de tal expresión se parte de la hipótesis de que la cuantía de los daños que sufre una estructura durante un sismo es proporcional a la energía disipada por la misma estructura por unidad de peso, durante todo el movimiento inducido por el temblor. Este es un criterio de daño acumulativo de la estructura.

Al considerar la energía disipada por unidad de peso, ésta se independiza de una de las características de la estructura: su peso. Se supone además, un conjunto de estructuras cuyas frecuencias varían uniformemente en el intervalo $(0, +\infty)$; todas orientadas de manera que el movimiento de la masa tiene lugar en una dirección dada.

Con las anteriores hipótesis, se ha llamado E a la energía disipada por unidad de peso por una estructura de un grado de libertad, cuya frecuencia circular para oscilaciones de pequeña amplitud, es ω , durante todo el movimiento inducido por el temblor, la estructura se supone inicialmente en reposo.

Se define la intensidad del temblor en la dirección considerada por la integral

$$I = \int_0^{\infty} E \, d\omega \quad \dots (1)$$

La anterior definición equivale a calcular el área bajo un espectro de energía (disipada por unidad de peso), expresado como función de la frecuencia circular (de las oscilaciones de pequeña amplitud) de un oscilador no amortiguado.

El cálculo de E depende del modelo mecánico que se elija para la estructura. En el caso de un oscilador lineal simple con amortiguamiento viscoso (ver sección II.2.2.3) la ecuación diferencial del movimiento es:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -ma(t) \quad \dots (2)$$

en la que $a(t) = \ddot{S}(t)$, es la historia de aceleraciones del suelo.

La ecuación diferencial (2) puede escribirse de la forma

$$\ddot{x} + 2\beta\omega\dot{x} + \omega^2x = -a(t) \quad \dots (3)$$

donde β es la relación de amortiguamiento.

La fuerza resistente desarrollada en el amortiguador es $-c\dot{x}$, y el trabajo realizado por dicha fuerza en la unidad de tiempo será entonces, $c\dot{x}^2$. La energía disipada por el oscilador, por unidad de peso, desde el instante $t = 0$ en que comienza el temblor hasta que el oscilador se detiene completamente vale

$$E = \frac{1}{mg} \int_0^{\infty} c\dot{x}^2 dt = \frac{2\beta\omega}{g} \int_0^{\infty} \dot{x}^2 dt \quad \dots (4)$$

donde g es el coeficiente de la gravedad.

Diferenciando la ecuación de movimiento (3) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{x}'\dot{x} + \omega^2x\dot{x} + 2\beta\omega\dot{x}^2 &= -a(t)\dot{x} \\ \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \omega^2 x^2 \right\} + 2\beta\omega\dot{x}^2 &= -a(t)\dot{x} \end{aligned}$$

e integrando entre $t = 0$ y $t = \infty$, teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 & \dot{x}(0) &= 0 \\ x(\infty) &= 0 & \dot{x}(\infty) &= 0 \end{aligned} \quad \dots (5)$$

resulta

$$2\beta\omega \int_0^{\infty} \dot{x}^2 dt = - \int_0^{\infty} a(t)\dot{x} dt \quad \dots (6)$$

relación que no expresa otra cosa que la igualdad entre la energía disipada y el trabajo de las fuerzas exteriores.

Sustituyendo la ecuación (6) en la (4) obtenemos

$$E = - \frac{1}{g} \int_0^{\infty} a(t) \dot{x} dt$$

en virtud de la ecuación (1) la intensidad en la dirección dada vale

$$I(\beta) = - \frac{1}{g} \int_0^{\infty} d\omega \int_0^{\infty} a(t) \dot{x} dt \quad \dots (7)$$

La solución de la ecuación (3) para las condiciones iniciales (5) está dada por la integral de Duhamel

$$x(t) = - \frac{1}{q} \int_0^t e^{-\beta\omega(t-t')} \text{sen } q(t-t') \text{sen } q(t-t') dt'$$

en donde $q^2 = (1 - \beta^2)\omega^2$; t' es el tiempo del origen al instante en que se aplica el impulso (ver fig 2.8), y t es el tiempo en que se calcula el desplazamiento. Si se toma en cuenta que $a(t) = 0$ para $t \leq 0$, se obtiene

$$x(t) = - \frac{1}{q} \int_{-\infty}^t e^{-\beta\omega(t-t')} \text{sen } q(t-t') a(t') dt'$$

Derivando esta expresión respecto a t , se obtiene la velocidad relativa

$$\dot{x}(t) = - \frac{1}{q} \int_{-\infty}^t e^{-\beta\omega(t-t')} \left[\cos q(t-t') - \frac{\beta\omega}{q} \text{sen } q(t-t') \right] a(t') dt'$$

que mediante la sustitución de $\theta = t - t'$, se transforma en

$$\dot{x}(t) = - \int_0^{\infty} e^{-\beta\omega\theta} \left[\cos q\theta - \frac{\beta\omega}{q} \text{sen } q\theta \right] a(t - \theta) d\theta$$

sustituyendo en la ecuación (7) queda

$$I(\beta) = - \frac{1}{g} \int_0^{\infty} d\omega \int_0^{\infty} a(t) dt \int_0^{\infty} e^{-\beta\omega\theta} \left[\cos q\theta - \frac{\beta\omega}{q} \text{sen } q\theta \right] a(t - \theta) d\theta$$

cambiando el orden de integración se obtiene

$$I(\beta) = \frac{1}{g} \int_0^{\infty} a(t) dt \int_0^{\infty} a(t-\theta) d\theta \int_0^{\infty} e^{-\beta\omega\theta} \left[\cos(\omega\theta\sqrt{1-\beta^2}) - \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \right. \\ \left. \cdot \text{sen}(\omega\theta\sqrt{1-\beta^2}) \right] d\omega$$

La integral

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta\omega\theta} \left[\cos(\omega\theta\sqrt{1-\beta^2}) - \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \text{sen}(\omega\theta\sqrt{1-\beta^2}) \right] d\omega$$

es nula para $\beta > 0$ y $\theta > 0$. Luego,

$$I(\beta) = \frac{1}{g} \lim_{t' \rightarrow +0} \int_0^{\infty} a(t) dt \int_0^{t'} a(t-\theta) d\theta \int_0^{\infty} e^{-\beta\omega\theta} \left[\cos(\omega\theta\sqrt{1-\beta^2}) - \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \right. \\ \left. \cdot \text{sen}(\omega\theta\sqrt{1-\beta^2}) \right] d\omega$$

o bien

$$I(\beta) = \frac{1}{g} \lim_{t' \rightarrow +0} \int_0^{\infty} a(t) dt \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\omega\sqrt{1-\beta^2}} \int_0^t a(t-\theta) \frac{d}{d\theta} \left[e^{-\beta\omega\theta} \text{sen}(\omega\theta\sqrt{1-\beta^2}) \right] d\theta \\ \dots (8)$$

La integral sobre θ que aparece en la ecuación (8) se puede evaluar, en virtud del valor medio del cálculo diferencial, en la siguiente forma

$$\int_0^{t'} a(t-\theta) \frac{d}{d\theta} \left[e^{-\beta\omega\theta} \text{sen}(\omega\theta\sqrt{1-\beta^2}) \right] d\theta = a(t-\xi t') e^{-\beta\omega\xi} \text{sen}(\omega\xi\sqrt{1-\beta^2})$$

en donde ξ es un número comprendido entre 1 y 0. Luego

$$I(\beta) = \frac{1}{g\sqrt{1-\beta^2}} \lim_{t' \rightarrow +0} \int_0^{\infty} a(t) a(t-\xi t') dt \int_0^{\infty} e^{-\beta\omega\xi} \text{sen}(\omega\xi\sqrt{1-\beta^2}) \frac{d\omega}{\omega}$$

Haciendo la sustitución $\omega\xi = u$, y pasando al límite queda

$$I(\beta) = \frac{1}{g \sqrt{1-\beta^2}} \int_0^{\infty} a^2(t) dt \int_0^{\infty} e^{-\beta u} \frac{\text{sen}(u\sqrt{1-\beta^2})}{u} du \quad \dots (9)$$

La última integral se puede evaluar como sigue: escribamos

$$J(\beta) = \int_0^{\infty} e^{-\beta u} \frac{\text{sen}(u\sqrt{1-\beta^2})}{u} du$$

derivando con respecto a β se obtiene

$$\frac{dJ(\beta)}{d\beta} = \int_0^{\infty} e^{-\beta u} \left\{ -\text{sen}(u\sqrt{1-\beta^2}) - \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \cos(u\sqrt{1-\beta^2}) \right\} du = -\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Luego, $J(\beta) = c + \text{arc cos } \beta$; pero

$$J(0) = \int_0^{\infty} \frac{\text{sen } u}{u} du = \frac{\pi}{2}$$

y $J(\beta)$ es continua para $\beta = 0$; por lo tanto

$$c = 0$$

y

$$J(\beta) = \text{arc cos } \beta \quad \dots (10)$$

Sustituyendo la ecuación (10) en la (9) se obtiene finalmente

$$I(\beta) = \frac{\text{arc cos } \beta}{g \sqrt{1-\beta^2}} \int_0^{\infty} a^2(t) dt$$

expresión de donde se observa que la intensidad resulta proporcional a la duración del temblor y al valor cuadrático de la aceleración del suelo en dicha dirección. Es además, función del grado del amortiguamiento β y, por consiguiente, si se quiere tener una medida normalizada de intensidad será necesario elegir un valor de β determinado.

Dentro del intervalo de los valores β que tienen interés práctico, la función I es prácticamente una constante. Si se

normaliza la intensidad eligiendo $\beta = 0$, se obtiene

$$I = \frac{\pi}{2g} \int_0^{t_0} a^2(t) dt$$

expresión con la que finalmente se define la intensidad como la suma de las energías disipadas por unidad de peso por un conjunto de osciladores lineales simples con amortiguamiento viscoso ($\beta = 0$) distribuidos uniformemente en cuanto a frecuencias en el intervalo $(0, +\infty)$.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- Argyris, J. H., Dunne, P. C and Angelopoulos, T., "*Non-linear Oscillations Using the Finite Element Techniques*", Journal of Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol 2, pp. 203-250, 1973.
- Arias, A., "*A Measure of Earthquake Intensity*", in Seismic Design for Nuclear Power Plants, R. J. Hansen, ed., Cambridge, Massachusetts Institute of Technology, Prees, 1970
- Cooley, J. W and Tukey, J. W., "*An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series*". Mathematics of Computation, Vol. 19, No 90, pp 297-301, 1965.
- Davis, L.L. and West, L. R., "*Observed Effects of Topography on Ground Motion*", Bull. seism. Soc. Am., 63, num. 1, 283-298, 1973.
- Elezgoldt, L., "*Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional*"., Ed Mier, Moscú, 1969.
- Enzo, L. L., "*Teorias y métodos de las matemáticas aplicadas*"., División de Estudios de Posgrado, Fac de Ing. UNAM.
- Esteva, L y Rascon, Ch. O., "*El sismo del 19 de septiembre de 1985*", Aspectos de ingeniería- Revista de ingeniería, Facultad de Ingeniería, UNAM, 1985.
- Esteva, L., Rascon, O. A., Gutierrez, A., "*Lessons from some recent earthquakes in Latin America*", IV conferencia mundial de Ingeniería sísmica, Santiago Chile, 1969.
- Figueroa J, Martínez A; "*Catálogo de sismos ocurridos en la Republica Mexicana de 1970 a 1982*". Intituto de Ingeniería, UNAM, 1970.
- Hardin, B. O and Drnevich, P. V., "*Shear Modulus and Damping in Soil: Measurement and Parameter Effects*". Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, Vol. 98, No sm6, June, 1972a.
- Hardin, B. O and Drnevich, P. V., "*Shear Modulus and Damping in Soil: Desing Equations and Curves*". Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, Vol. 98, No SM7, July, 1972b.
- Idriss, I. M., Dobry, R and Sing, R. P., "*Nonlinear Behavior of Soft Clays During Cyclic Loading*". Journal of the Geotechnical Engineering Division, No Gt12, pp 1427-1447, Dec, 1978.
- Idriss, I. M and Seed, H. B., "*Seismic Responce of Horizontal Soil Layers*", J. Soil Mech. Fdns Div. Am. Soc. civ Engrs, 94, núm SM4, 1003-1031, 1968.

- Jaime, A. P., "*Características Dinámicas de la arcilla del valle de México*"., tesis doctoral presentada a la División de Estudios de Posgrado de la Fac. de Ing., UNAM, Nov. 1987.
- Juarez, E. B y Rico, A. R., "*Mecánica de Suelos*". Tomo 1, Ed Trillas, 1986.
- Kolsky, H., "*Strees Waves in Soil*". Dover publications, Ine, 1970.
- Lysmer, J., Udaka, T., Seed, H. B and Hwang, R., "*LUSH: A Computer Program for Complex Response Analysis Of Soil Structure Systems*", Report EERC 74-4, Earthquake Research Center, Univ. California, Berkeley, Cal, 1974.
- Magaña, R del T., Padilla, R. V y Sanginez, H. G., "*Metodología de la Investigación*"., curso-taller, Facultad de Ingeniería, UNAM, Oct., 1986.
- Marsal, R. L., Mazari, M., "*El subsuelo de la ciudad de México*", Instituto de Ingeniería, UNAM, 1965.
- Martin, P. P., "*Non-linear Methods for Dinamic Analysis of Ground Responce*", thesis presented to the University of California at Berkeley, Calif, 1975.
- Martin, P. P and Seed, H. B., "*MASH: A Computer Program for the Non-linear Analysis of Vertically Propagating Shear Waves In Horizontally Layered Deposits*", Report No EERC 78-23, University of California, Berkeley, Calif, 1978.
- Martin, P. P and Seed, H. B., "*One-Dimensional Dinamic Ground Response Analyses*". Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, No Gt7, July, 1982.
- Morales E. R., "*Geología de la cuenca de México*". Tema escrito para curso de oposición, Facultad de Ingeniería, UNAM, 1985.
- Ohsaki, Y., "*The Effects of Local Soil Conditions Upon Earthquake Damage*". Proceedings of Specialty Session 2 Seventh International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Mex. 1969.
- Papadakis, C. N., "*Soil Transients by Characteristics Method*", tesis, Department of Civil Engineering, Univ. Michigan, Ann Arbor, Mich, 1973.
- Papadakis, C. N., Streeter, L. V., and Wyle, B., "*Bedrok Motions Computed from Surface Seismograms*", Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, Vol 100, October 1974.
- Pauw, A., "*A Dynamic Analogy for Foundation-Soil Systems*"., ASTM. Special Technical Publ, No 156, 1953.

- Penzien, J., Scheftey, C. F and Parmele, R. A., "Seismic Analysis of Bridges on Long Piles". Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 90, pp 223-254, June 1964.
- Proceeding of the Brunel University conference of the Institute of Mathematics and its applications held in April 1972., "The Mathematics of finite elements and applications"., Editado by J. R. Whiteman, 1973.
- Pyke, R., "Nonlinear Soil Models for Irregular Cyclic Loadings". Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, Vol. 105, No GT6, June 1979.
- Ramberg, W., and Osgood, W. T., "Description of Stress-Strain Curves by Three Parameters", Technical Note 902, National Advisory Committee for Aeronautics, 1943.
- Romo, M. P y Carels, P., "Influencia de la Dispersion de los Parámetros del Suelo en la Evaluacion del Comportamiento Dinámico de Presas de Tierra". Informe interno del Intituto de Ingeniería, UNAM, Oct, 1982.
- Rosenblueth, E y Elorduy, J., "Characteristics of Earthquakes on México City Clay"., in Nabor Carrillo. El hundimiento en la ciudad de México y proyecto Texcoco, 287-328, 1965.
- Rosenblueth, E y Resendiz, N. D., "Disposiciones Reglamentarias de 1987 para tener en cuenta la Interacción Dinámica Suelo-Estructura", series del Intituto de Ingeniería No 509, Enero 1988.
- Salazar, J. R., "Teoría de la Elasticidad en Cimentaciones Masivas".. en Análisis Dinámico de Cimentaciones, CFE, pp 39-71, 1969.
- Schnabel, P. B., Lysmer, J and Seed, H. B., "SHAKE: A Computer Program for Earthquake Response Analysis of Horizontally Layered Sites". Report No EERC 72-12, University of California, Berkeley, Calif, Earthquake Engineering Research Center, Dec, 1972.
- Schnabel, P. B., Seed, H. B and Lysmer, J., "Modification of Seismograph Records for Effects of Local Soil Conditions". Report No EERC 71-8, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, Dec, 1971.
- Seed, H. B., "The Influence of Local Soil Conditions on Earthquake Damage". Proceeding of Sepcialty Session 2 Seventh International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Mex. 1969.
- Seed, H. B., and Idriss, I. M., "Influence of Soil Conditions on Ground Motions During Earthquakes", Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, Vol 95, No SM1, Jan., 1969.
- Seed, H. B and Idriss, I. M., "Soil Moduli and Damping Factors for Dynamic Response Analyses". Report No. EERC 70-10, University of California, Berkeley, Dec, 1970.

- Seed, H. B., Romo, M. P., Sun, J and Lysmer, J., "*Relationships Between Soil Conditions and Earthquake Ground Motions in México City in the Earthquake of Sept. 19, 1985.*". Report No EERC 87-15, University of California, Berkeley, Calif, 1987.
- Streeter, V. L., Wylie, E. B., and Richart, F. E., "*CHARSOIL: Characteristic Method applied to Soil*". National Information Service for Earthquake Engineering, University of California, Berkeley, Calif, 1974.
- Streeter, V. L., Wylie, E. B., and Richart, F. E., "*Soil Motion Computations by Characteristics Method*". Journal Of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, Vol. 100, No GT3, Mar, 1974.
- Taboada, U. V., "*Respuesta sísmica de depositos de suelos granulares*", tesis de licenciatura, Fac de Ing, UNAM, 1987.
- Tonouchi, K., Sakayama, T and Imai, T., "*S wave velocity in ground and the damping Factor*", Bulletin of the International Association of Engineering Geology, No 26-27 Paris, 1983.
- Villegas, S. L., "*Método de perturbaciones aplicado al análisis dinámico estocástico de sistemas lineales*"., tesis de licenciatura, Fac de Ing, UNAM, 1987.
- Wilson, S. D and Dietrich, R. J., "*Effect of consolidation pressure on elastic and strenght propietis of clay*". Proceeding of the research conference on shear strenght of cohesives soils, ASCE, Boulder, Colorado, 1960.
- Zienkiewics, O. C., "*The Finite Element Method and Boundary Solution Procedures as General Approximation Methods for Field Problems*", Proc. World Congress on Finite Elements Methods in Structural Mechanics, Bournemouth, Dorset, Inglaterra, págs. S1-S31, 1976.