



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA**  
**INGENIERÍA CIVIL – ESTRUCTURAS**

**FUNCIONES DE VULNERABILIDAD PARA EQUIPOS  
ELÉCTRICOS CON FINES DE RIESGO SÍSMICO**

**TESIS:**  
**QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:**  
**MAESTRO EN INGENIERÍA**

**PRESENTA:**

**PEDRO SALVADOR RAMOS GÓMEZ**

**TUTOR PRINCIPAL:**

**DR. EDUARDO REINOSO ANGULO**  
**INSTITUTO DE INGENIERÍA, UNAM.**

**COTUTOR:**

**DR. CÉSAR AUGUSTO ARREDONDO VÉLEZ**  
**E.R.N. EVALUACIÓN DE RIESGOS NATURALES S.A. DE C.V.**

**CIUDAD DE MÉXICO, NOVIEMBRE 2018.**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

**PRESIDENTE:** DR. LUIS ESTEVA MARABOTO  
**SECRETARIO:** DRA. SONIA ELDA RUIZ GÓMEZ  
**1<sup>ER</sup>. VOCAL:** DR. EDUARDO REINOSO ANGULO  
**2<sup>DO</sup>. VOCAL:** DR. FRANCISCO LEONEL SILVA GONZÁLEZ  
**3<sup>ER</sup>. VOCAL:** DR. MARCO A. TORRES PÉREZ NEGRÓN.

Lugar donde se realizó la tesis: Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM).

TUTOR DE TESIS:

**NOMBRE**

DR. EDUARDO REINOSO ANGULO

-----  
FIRMA

COTUTOR DE TESIS:

**NOMBRE**

DR. CÉSAR AUGUSTO ARREDONDO VÉLEZ

-----  
FIRMA

## CONTENIDO

<b>INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>I</b>
<b>JUSTIFICACIÓN Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....</b>	<b>III</b>
<b>1. ESTADO DEL ARTE .....</b>	<b>1</b>
<b>2. COMPORTAMIENTO DINÁMICO DE EQUIPOS ELÉCTRICOS SIMPLEMENTE APOYADOS Y ANCLADOS A SU BASE.....</b>	<b>8</b>
2.1    CONSIDERACIONES GENERALES DURANTE LA MODELACIÓN .....	9
2.2    CUERPOS SIMPLEMENTE APOYADOS .....	9
2.1.1    MODELO EQUIVALENTE PARA CUERPOS DE FORMAS ARBITRARIAS Y MASA NO UNIFORME.....	11
2.3    CUERPOS RÍGIDOS ANCLADOS A SU BASE.....	12
2.3.1    TIPOS Y MODOS DE FALLA COMÚNES EN ANCLAJES.....	13
2.3.2    COMPORTAMIENTO DÚCTIL DEL ANCLAJE .....	17
2.3.3    REVISIÓN DE LA FALLA TENSIÓN PURA .....	20
2.3.4    REVISIÓN DE LA FALLA COMBINADA TENSIÓN – CORTANTE.....	20
2.3.5    DEFINICION DE EXCENTRICIDAD EN EL CUERPO .....	21
2.3.6    INSTANTES DE RUPTURA: TENSIÓN PURA Y TENSIÓN-CORTANTE.....	22
2.3.7    RESPUESTA EN CUERPOS SIMPLEMENTE APOYADOS Y ANCLADOS A LA BASE ANTE SISMOS MEXICANOS .....	30
2.4    ACELERACIÓN MÍNIMA DE VOLCAMIENTO EN CUERPOS SIMPLEMENTE APOYADOS Y ANCLADOS A LA BASE .....	44
<b>3. FRAGILIDAD Y VULNERABILIDAD PARA EQUIPOS ELÉCTRICOS .....</b>	<b>50</b>
3.1    FRAGILIDAD EN EQUIPOS ELÉCTRICOS .....	54
3.1.1    MATRICES DE PROBABILIDAD DE DAÑO .....	54
3.1.2    ESTIMACIÓN DE FUNCIONES DE FRAGILIDAD.....	55
3.1.3    ESTADOS LÍMITE POR BALANCEO .....	56
3.2    ESTIMACIÓN DE FUNCIONES DE VULNERABILIDAD PARA EQUIPOS ELÉCTRICOS.....	58
3.2.1    MEDIDAS DE INTESIDAD .....	60
3.2.2    ESPERANZA DE DAÑO PARA EQUIPOS ELÉCTRICOS ANTE SEÑALES ARMÓNICAS.....	65
3.2.3    ESPERANZA DE DAÑO PARA EQUIPOS ELÉCTRICOS POR SISMO .....	74
<b>4. CONCLUSIONES, RECOMENDACIONES Y TRABAJOS FUTUROS.....</b>	<b>84</b>
<b>REFERENCIAS .....</b>	<b>87</b>

<b>ANEXO.AI VALOR ESPERADO DEL DAÑO CONSIDERANDO AL COEFICIENTE DE RESTITUCIÓN COMO UNA VARIABLE ALEATORIA .....</b>	<b>92</b>
<b>ANEXO.AII DEDUCCIÓN DE ECUACIONES GOBERNANTES PARA EL COMPORTAMIENTO DINÁMICO DE CUERPOS RÍGIDOS SIMPLEMENTES APOYADOS Y ANCLADOS A LA BASE .....</b>	<b>101</b>

## NOTACIÓN

$A$ : Zona que caracteriza el comportamiento elástico lineal del anclaje.

$a0_{fs}$ : Aceleración mínima de volcamiento para un cuerpo simplemente apoyado [cm/s/s].

$a0_{an}$ : Aceleración mínima de volcamiento para un cuerpo anclado a la base [cm/s/s].

$B$ : Zona que caracteriza el comportamiento inelástico del anclaje.

$B_M$ : Semi-base del cuerpo modelado [cm].

$B_L$ : Semi-base del cuerpo equivalente cuando gira en sentido antihorario para un cuerpo irregular [cm].

$B_R$ : Semi-base del cuerpo equivalente cuando gira en sentido horario para un cuerpo irregular [cm].

$D$ : Demanda inducida sobre el cuerpo en análisis.

$E$ : Módulo de elasticidad [kg/cm<sup>2</sup>].

$E[\beta | IM]$ : Esperanza de daño dada una medida de intensidad.

$ex$ : Excentricidad en el eje de las abcisas [%].

$ey$ : Excentricidad en el eje de las ordenadas [%].

$F_u$ : Fuerza de ruptura del anclaje [kg].

$FS$ : Cuerpo simplemente apoyado.

$F_{uta}$ : Esfuerzo de ruptura del anclaje [kg/cm<sup>2</sup>].

$f_y$ : Esfuerzo de fluencia del anclaje [kg/cm<sup>2</sup>].

$g$ : Aceleración de la gravedad [cm/s/s].

$H$ : Semi-altura del cuerpo modelado para un cuerpo regular [cm].

$H_L$ : Semi-altura del cuerpo equivalente cuando gira en sentido antihorario para un cuerpo irregular [cm].

$H_R$ : Semi-altura del cuerpo equivalente cuando gira en sentido horario para un cuerpo irregular [cm].

$IM$ : Medida de intensidad.

$J_0$ : Inercial rotacional [cm<sup>4</sup>].

$J_n$ : Inercial rotacional normalizada a la masa.

$K$ : Rigidez del anclaje.

$L_A$ : Longitud libre del anclaje [cm].

$Ln$ : Logaritmo natural.

$m$ : Masa [kgs<sup>2</sup>/cm].

$M_0$ : Momento sísmico [dina/cm].

$M_w$ : Magnitud momento.

$N_n$ : Resistencia nominal a tensión del ancla [kg].

$N_{ua}$ : Fuerza axial en cada instante de tiempo sobre el anclaje [kg].

$p$ : Frecuencia del cuerpo [rad/s].

$PGA$ : Aceleración máxima del suelo [cm/s/s].

$PGV$ : Velocidad máxima del suelo [cm/s].

$PAE$ : Pérdida a anual esperada.

$P(t)$ : Historia de fuerza axial en el anclaje en cada instante de tiempo [kg].

$R$ : Distancia desde alguno de los vértices de rotación al centro de masa para un cuerpo regular [cm].

$R_L$ : Distancia desde alguno de los vértices de rotación al centro de masa para un cuerpo irregular cuando gira en sentido antihorario [cm].

$R_R$  : Distancia desde alguno de los vértices de rotación al centro de masa para un cuerpo irregular cuando gira en sentido horario [cm].

$R$  : Resistencia al volcamiento del cuerpo.

$r$  : Coeficiente de restitución.

$RK6$  : Método numérico de la familia Runge-Kutta en seis etapas.

$R^2$  : Coeficiente de determinación.

$TC$  : Revisión interacción tensión-cortante.

$TP$  : Revisión tensión pura.

$u_y$  : Elongación de fluencia del anclaje [cm].

$u(t)$  : Historia de desplazamiento del anclaje en cada instante de tiempo [cm].

$\dot{u}(t)$  : Historia de velocidades del anclaje en cada instante de tiempo [cm/s].

$\ddot{u}_y$  : Aceleración vertical del suelo [cm/s/s].

$\ddot{u}_x$  : Aceleración horizontal del suelo [cm/s/s].

$t$  : Tiempo [s].

$V_{ua}$  : Fuerza cortante actuante en cada instante de tiempo sobre el anclaje [kg].

$V_n$  : Resistencia nominal a tensión del ancla [kg].

$v(p)$  : Tasa de excedencia.

$W$  : Peso del equipo [kg].

$x_c$  : Distancia en el eje de las abscisas del centro masa del cuerpo en reposo al cuerpo equivalente una vez que inicia el balanceo [cm].

$y_c$  : Distancia en el eje de las ordenadas del centro masa del cuerpo en reposo al cuerpo equivalente una vez que inicia el balanceo [cm].

$z(t)$  : Cantidad adimensional histerética.

$\alpha$  : Ángulo de esbeltez del cuerpo rígido.

$\alpha_L$  : Ángulo de esbeltez del cuerpo equivalente cuando gira en sentido antihorario [rad].

$\alpha_R$  : Ángulo de esbeltez del cuerpo equivalente cuando gira en sentido horario [rad].

$\beta$  : Cantidad adimensional que controla la forma histerética.

$\gamma$  : Cantidad adimensional que controla la forma histerética.

$\varepsilon$  : Relación de fluencia y post-fluencia en el modelo Bouc y Wen.

$\delta_y$  : Deformación de fluencia del anclaje.

$\phi$  : Diámetro nominal del ancla utilizada [cm].

$\lambda$  : Tasa anual de excedencia.

$\theta$  : Rotación del cuerpo [rad].

$\ddot{\theta}$  : Aceleración del cuerpo [rad/s/s].

$\theta_y$  : Rotación de fluencia del anclaje [rad].

$\frac{\theta}{\alpha}$  = Parámetro de daño.

$\mu$  : Ductilidad.

$\sigma_\beta^2(\beta | \gamma_i)$  ; Varianza de las pérdidas.

$\Delta\sigma$  : Caída de esfuerzos.

$\omega$  : Frecuencia angular [rad/s].

$\omega_p$  : Frecuencia angular característica para la señal de frecuencia y amplitud controlada [rad/s].

$\xi$  : Parámetro de forma del diagrama de interacción tensión-cortante.

## ÍNDICE DE FIGURAS

<b>Figura 1.1.</b> Imágenes de fallas y/o colapsos en equipos eléctricos o infraestructura eléctrica por terremoto (Pacific Earthquake Engineering Research Center, 2017).....	1
<b>Figura 2.1.</b> Representación esquemática del procedimiento empleado para obtener la respuesta dinámica de cuerpos simplemente apoyados y anclados a su base. ....	8
<b>Figura 2.2.</b> Representación esquemática de las fuerzas y variables actuantes en el modo de respuesta por balanceo puro.....	10
<b>Figura 2.3.</b> Esquema representativo de un cuerpo irregular con masa no uniforme. ....	11
<b>Figura 2.4.</b> Esquema representativo de las fuerzas actuantes en cada uno de los vértices de rotación cada vez que es aplicado el coeficiente de restitución en función de un plano de referencia. ....	12
<b>Figura 2.5.</b> Representación esquemática de las fuerzas y variables actuantes en el modo de respuesta por balanceo puro anclado a la base para un cuerpo asimétrico y masa no uniformemente distribuida. ....	13
<b>Figura 2.6.</b> Anclas típicas realizadas <i>in situ</i> : a) anclas con pernos hexagonales; b y c) enganchados en forma de L y J y d) anclajes soldados (Lundin, 2012). ....	14
<b>Figura 2.7.</b> Anclas típicas post-instalación: a) anclajes adhesivos; b) anclajes de auto-excavado y c) y d) anclajes de expansión contralados por torque (Lundin, 2012).....	15
<b>Figura 2.8.</b> Ejemplos ilustrativos de los mecanismos de falla por tensión: a) fractura del anclaje; b) y c) desprendimiento del cono; d) y e) influencia del borde máximo; f) falla mixta por arrancamiento; g), h) e i) falla por fisuración radial del concreto.....	17
<b>Figura 2.9.</b> Ejemplos ilustrativos de las fallas por cortante. ....	17
<b>Figura 2.10.</b> Esquema representativo de los diagramas momento rotación para: a) cuerpo simplemente apoyado, b) comportamiento elasto-plástico y c) combinación de ambos mecanismos. ....	19
<b>Figura 2.11.</b> Esquema representativo de las excentricidades propuestas en este trabajo. ....	22
<b>Figura 2.12.</b> Respuestas obtenidas para el cuerpo en análisis para el sismo de Kobe al 100%: a), b), c), d) $F_u/W=0.48$ y e), f), g), h) $F_u/W=0.24$ .....	23
<b>Figura 2.13.</b> Respuestas obtenidas para el cuerpo en análisis para el sismo de Loma Prieta al 100%: a, b), c), d) $F_u/W=0.48$ y e), f), g), h) $F_u/W=0.24$ . ....	24
<b>Figura 2.14.</b> Respuestas obtenidas para el cuerpo en análisis para el sismo de Kobe al 200%: a), b), c), d) $F_u/W=0.48$ , y e), f), g), h) $F_u/W=0.24$ . ....	25
<b>Figura 2.15.</b> Respuestas obtenidas para el cuerpo en análisis para el sismo de Loma Prieta al 200%: a, b), c), d) $F_u/W=0.48$ y e), f), g), h) $F_u/W=0.24$ . ....	26
<b>Figura 2.16.</b> Compendio de resultados para las revisiones por tensión pura y tensión cortante: a) y b) comparativa de los instantes de ruptura de las anclas analizadas en los vértices de rotación $O$ y $O'$ ; c) daño absoluto máximo para tensión pura y d) daño absoluto máximo para la interacción tensión-cortante.....	30
<b>Figura 2.17.</b> Distribución espacial de los epicentros y estaciones evaluadas en el presente análisis. ....	32
<b>Figura 2.18.</b> Resultados para el evento ocurrido el pasado 08/09/2017 sin escalar en la estación NILT con $\mu$ igual a 1, 5 y 10 una relación $F_u/W=0.48$ . ....	34
<b>Figura 2.19.</b> Resultados para el evento ocurrido el pasado 08/09/2017 escalado linealmente con un factor igual a 2 en la estación NILT con $\mu$ igual a 1, 5 y 10 una relación $F_u/W=0.48$ . ....	35



<b>Figura 2.20.</b> Resultados para el evento ocurrido el pasado 14/06/2004 sin escalar en la estación PNTP con $\mu$ igual a 1, 5 y 10 una relación $F_u/W=0.48$ .	36
<b>Figura 2.21.</b> Resultados para el evento ocurrido el pasado 14/06/2004 escalados linealmente con un factor igual a 2 en la estación PNTP con $\mu$ igual a 1, 5 y 10 una relación $F_u/W=0.48$ .	37
<b>Figura 2.22.</b> Resultados para el evento ocurrido el pasado 21/08/2013 sin escalar en la estación ACAZ con $\mu$ igual a 1, 5 y 10 una relación $F_u/W=0.48$ .	38
<b>Figura 2.23.</b> Resultados para el evento ocurrido el pasado 21/08/2013 escalado linealmente con un factor igual a 2 en la estación ACAZ con $\mu$ igual a 1, 5 y 10 una relación $F_u/W=0.48$ .	39
<b>Figura 2.24.</b> Resultados para el evento ocurrido el pasado 19/09/2017 sin escalar en la estación CUP05 con $\mu$ igual a 1, 5 y 10 una relación $F_u/W=0.48$ .	40
<b>Figura 2.25.</b> Resultados para el evento ocurrido el pasado 19/09/2017 escalado linealmente con un factor igual a 2 en la estación CUP05 con $\mu$ igual a 1, 5 y 10 una relación $F_u/W=0.48$ .	41
<b>Figura 2.26.</b> Resultados para el evento ocurrido el pasado 19/09/1985 sin escalar en la estación SCT1 con $\mu$ igual a 1, 5 y 10 una relación $F_u/W=0.48$ .	42
<b>Figura 2.27.</b> Resultados para el evento ocurrido el pasado 19/09/1985 escalados linealmente con un factor igual a 2 en la estación SCT1 con $\mu$ igual a 1, 5 y 10 una relación $F_u/W=0.48$ .	43
<b>Figura 2.28.</b> Identificación de la aceleración mínima de volcamiento: a) señal analizada; b) intensidad de arias normalizada y c) respuesta del cuerpo, identificando los puntos de aceleración mínima de volcamiento y colapso del cuerpo.	45
<b>Figura 2.29.</b> Ejemplos ilustrativos correspondientes a la aceleración mínima de volcamiento para las excentricidades $ex:0.20 ey:0.00$ y $ex:0.20 ey:0.20$ . En gris, el cuerpo equivalente $B_L$ y $2H$ y en azul cuerpo equivalente $B_R$ y $2H$ .	46
<b>Figura 2.30.</b> Curvas resultantes del cociente de la aceleración mínima de volcamiento entre los regímenes simplemente apoyado y anclado a la base para los tres pulsos considerados: a) Ricker; b) Senoide y c) Huerta.	48
<b>Figura 3.1.</b> Diagrama de flujo esquemático de la metodología propuesta para estimar funciones de fragilidad y vulnerabilidad respectivamente para equipos eléctricos.	51
<b>Figura 3.2.</b> Diagrama de flujo esquemático para obtener las respuestas máximas para equipos eléctricos simplemente apoyados.	52
<b>Figura 3.3.</b> Diagrama de flujo esquemático para obtener las respuestas máximas para equipos eléctricos anclados a la base.	52
<b>Figura 3.4.</b> Diagrama de flujo esquemático del proceso estadístico para obtener una función de fragilidad y vulnerabilidad respectivamente.	53
<b>Figura 3.5.</b> Funciones de fragilidad calculadas para los estados límite considerados en el presente trabajo.	57
<b>Figura 3.6.</b> Regresión lineal para las medidas de intensidad propuestas en función del daño utilizando el pulso de Ricker: $FS$ ) simplemente apoyado; $TC$ ) cuerpo anclado a la base a través de la revisión tensión-cortante ( $\phi:2''$ ; $\mu: 5, F_u/W = 1.08$ ); $TP$ ) cuerpo anclado a la base a través de la revisión tensión pura ( $\phi:2''$ ; $\mu: 5, F_u/W = 1.08$ ).	62
<b>Figura 3.7.</b> Regresión lineal para las medidas de intensidad propuestas en función del daño utilizando un Senoide: $FS$ ) simplemente apoyado; $TC$ ) cuerpo anclado a la base a través de la revisión tensión-cortante ( $\phi:2''$ ; $\mu: 5, F_u/W = 1.08$ ); $TP$ ) cuerpo anclado a la base a través de la revisión tensión pura ( $\phi:2''$ ; $\mu: 5, F_u/W = 1.08$ ).	63

<b>Figura 3.8.</b> Regresión lineal para las medidas de intensidad propuestas en función del daño utilizando para el pulso de Huerta: <i>FS</i> ) simplemente apoyado; <i>TC</i> ) cuerpo anclado a la base a través de la revisión tensión-cortante ( $\phi:2''$ ; $\mu: 5, F_u/W= 1.08$ ); <i>TP</i> ) cuerpo anclado a la base a través de la revisión tensión pura ( $\phi:2''$ ; $\mu: 5, F_u/W= 1.08$ ).....	64
<b>Figura 3.9.</b> Esperanza de daño para el pulso de Ricker considerando el cuerpo simplemente apoyado y anclado a la base con las siguientes características: $\phi: 3.81, F_u/W:1.08, \mu:1,5,10$ . ....	67
<b>Figura 3.10.</b> Esperanza de daño para un Senoide considerando el cuerpo simplemente apoyado y anclado a la base con las siguientes características: $\phi: 3.81, F_u/W:1.08, \mu:1,5,10$ . ....	68
<b>Figura 3.11.</b> Esperanza de daño para el pulso de Huerta considerando el cuerpo simplemente apoyado y anclado a la base con las siguientes características: $\phi: 3.81, F_u/W:1.08, \mu:1,5,10$ . ....	69
<b>Figura 3.12.</b> Esperanza de daño para el pulso de Ricker considerando el cuerpo simplemente apoyado y anclado a la base con las siguientes características: $\phi: 5.08, F_u/W:1.93, \mu:1,5,10$ . ....	70
<b>Figura 3.13.</b> Esperanza de daño para un Senoide considerando el cuerpo simplemente apoyado y anclado a la base con las siguientes características: $\phi: 5.08, F_u/W:1.93, \mu:1,5,10$ . ....	71
<b>Figura 3.14.</b> Esperanza de daño para el pulso de Huerta considerando el cuerpo simplemente apoyado y anclado a la base con las siguientes características: $\phi: 5.08, F_u/W:1.93, \mu:1,5,10$ . ....	72
<b>Figura 3.15.</b> Comparativa de la esperanza de daño para los tres pulsos considerados (negro-Ricker; azul-senoide; rojo-Huerta) simplemente apoyado y anclado a la base con las siguientes características: $\phi: 3.81, F_u/W:1.08, \mu:5$ y $10$ . ....	73
<b>Figura 3.16.</b> Localización espacial de los lugares seleccionados para la simulación de acelerogramas sintéticos.....	74
<b>Figura 3.17.</b> Curvas de peligro sísmico para las zonas de estudio: a) Secretaria de Comunicaciones y Transportes y b) Ciudad Universitaria. ....	75
<b>Figura 3.18.</b> Colección de intensidades objetivo generadas a través de una distribución probabilidad uniforme. ....	76
<b>Figura 3.19.</b> Desagregación sísmica en Ciudad Universitaria (CU) y la Secretaria de Comunicaciones y Transportes (SCT) para las intensidades 228, 461, 770 y 981 gal. ....	77
<b>Figura 3.20.</b> Esperanza de daño para la Secretaría de Comunicaciones y Transportes (SCT) considerando el cuerpo simplemente apoyado y anclado a la base con las siguientes características: $\phi: 3.81, F_u/W:1.08, \mu:1,5,10$ . ....	79
<b>Figura 3.21.</b> Esperanza de daño para Ciudad Universitaria (CU) considerando el cuerpo simplemente apoyado y anclado a la base con las siguientes características: $\phi: 3.81, F_u/W:1.08, \mu:1,5,10$ .....	80
<b>Figura 3.22.</b> Esperanza de daño para la Secretaria de Comunicaciones y Transportes (SCT) considerando el cuerpo simplemente apoyado y anclado a la base con las siguientes características: $\phi: 5.08, F_u/W:1.93, \mu:1,5,10$ . ....	81
<b>Figura 3.23.</b> Esperanza de daño para Ciudad Universitaria (CU) considerando el cuerpo simplemente apoyado y anclado a la base con las siguientes características: $\phi: 5.08, F_u/W:1.93, \mu:1,5,10$ .....	82
<b>Figura 3.24.</b> Comparativa de la esperanza de daño para los dos lugares elegidos para la simulación (negro-Secretaría de Comunicaciones y Transportes y azul-Ciudad Universitaria) simplemente apoyado y anclado a la base con las siguientes características: $\phi: 3.81, F_u/W:1.08, \mu:5$ y $10$ .....	83
<b>Figura I.1.</b> Representación esquemática del procedimiento de Monte Carlo utilizando el método de la distribución de probabilidad inversa. ....	93
<b>Figura I.2.</b> Instante de tiempo de ocurrencia del coeficiente de restitución ( $r$ ).....	94

<b>Figura I.3.</b> Papel de probabilidad para la distribución de Weibull.....	95
<b>Figura I.4.</b> Distribución, densidad e histograma obtenidos para las simulaciones realizadas con base en la distribución de Weibull. ....	96
<b>Figura I.5.</b> Esperanza de daño para la Secretaría de Comunicaciones y Transportes (SCT) en las excentricidades $ex:0.20 ey:0.00$ y $ex:0.20 ey:0.20$ considerando el cuerpo simplemente apoyado y anclado a la base con las siguientes características: $\phi: 3.81, F_u/W:1.08, \mu:5,10$ . ....	97
<b>Figura I.6.</b> Esperanza de daño para la Secretaría de Comunicaciones y Transportes (SCT) en las excentricidades $ex:0.20 ey:0.00$ y $ex:0.20 ey:0.20$ considerando el cuerpo simplemente apoyado y anclado a la base con las siguientes características: $\phi: 5.08, F_u/W:1.93, \mu:5,10$ . ....	98
<b>Figura I.7.</b> Esperanza de daño para Ciudad Universitaria (CU) en las excentricidades $ex:0.20 ey:0.00$ y $ex:0.20 ey:0.20$ considerando el cuerpo simplemente apoyado y anclado a la base con las siguientes características: $\phi: 3.81, F_u/W:1.08, \mu:5,10$ . ....	99
<b>Figura I.8.</b> Esperanza de daño para Ciudad Universitaria (CU) en las excentricidades $ex:0.20 ey:0.00$ y $ex:0.20 ey:0.20$ considerando el cuerpo simplemente apoyado y anclado a la base con las siguientes características: $\phi: 5.08, F_u/W:1.93, \mu:5,10$ . ....	100
<b>Figura II.1.</b> Representación esquemática del modo de respuesta por balanceo ( <i>rock mode</i> ). ....	101
<b>Figura II.2.</b> Diagramas de cuerpo libre (D.C.L.) para el modo de respuesta por balanceo partiendo del reposo ( <i>rock mode</i> ). ....	102
<b>Figura II.3.</b> D.C.L. una vez iniciado el modo de respuesta por balanceo ( <i>rock mode</i> ). ....	103
<b>Figura II.4.</b> Esquema representativo para obtener la inercia rotacional de un rectángulo con longitudes $2H$ y $2B$ respectivamente. ....	106
<b>Figura II.5.</b> Esquema representativo de un cuerpo irregular con masa no uniforme. ....	107
<b>Figura II.6.</b> Esquema representativo de un bloque equivalente de un cuerpo asimétrico con masa no uniforme con dimensiones totales $2B_L$ y $2H$ . ....	107
<b>Figura II.7.</b> Esquema representativo de un bloque equivalente de un cuerpo asimétrico con masa no uniforme con dimensiones totales $2B_R$ y $2H$ . ....	108
<b>Figura II.8.</b> Representación esquemática del modo de respuesta por balanceo puro para un cuerpo anclado a la base. ....	110
<b>Figura II.9.</b> Esquema representativo de un bloque equivalente de un cuerpo asimétrico con masa no uniforme con dimensiones totales $2B_L$ y $2H$ anclado a la base. ....	113
<b>Figura II.10.</b> Esquema representativo de un bloque equivalente de un cuerpo asimétrico con masa no uniforme con dimensiones totales $2B_R$ y $2H$ anclado a la base. ....	113

## ÍNDICE DE TABLAS

<b>Tabla 1.</b> Colores para anclajes <i>in situ</i> .....	14
<b>Tabla 2.</b> Propiedades relevantes utilizadas para la modelación del cuerpo.....	22
<b>Tabla 3.</b> Propiedades relevantes para la modelación del ancla.....	22
<b>Tabla 4.</b> Resumen de resultados obtenidos para el mecanismo de falla: Tensión Pura.....	28
<b>Tabla 5.</b> Resumen de resultados obtenidos para el mecanismo de falla: Tensión-Cortante.....	29
<b>Tabla 6.</b> Descripción de las estaciones utilizadas para el análisis.....	31
<b>Tabla 7.</b> Descripción de los eventos utilizados en el análisis.....	31
<b>Tabla 8.</b> Propiedades relevantes para la modelación del ancla.....	31
<b>Tabla 9.</b> Propiedades geométricas relevantes para la modelación del cuerpo incluyendo las excentricidades propuestas.....	32
<b>Tabla 10.</b> Parámetros de calibración en función de la excentricidad propuesta.....	47
<b>Tabla 11.</b> Definición de anchos de banda $\omega_p/p$ donde ocurre la inestabilidad del anclaje para los diferentes pulsos considerados con una relación $F_u/W = 1.08$ .....	47
<b>Tabla 12.</b> Definición de anchos de banda $\omega_p/p$ donde ocurre la inestabilidad del anclaje para los diferentes pulsos considerados con una relación $F_u/W = 0.54$ .....	47
<b>Tabla 13.</b> Definición de anchos de banda $\omega_p/p$ donde ocurre la inestabilidad del anclaje para los diferentes pulsos considerados con una relación $F_u/W = 0.36$ .....	49
<b>Tabla 14.</b> Matrices de probabilidad de daño.....	54
<b>Tabla 15.</b> Estados límite propuestos para el cálculo de probabilidad de excedencia.....	57
<b>Tabla 16.</b> Resumen del coeficiente de determinación ( $R^2$ ) para las señales propuestas en función de regímenes de evaluación simplemente apoyado y anclado a la base.....	61
<b>Tabla 17.</b> Resumen de parámetros utilizados para la modelación del equipo eléctrico.....	66
<b>Tabla 18.</b> Propiedades relevantes para la modelación del ancla.....	66
<b>Tabla 19.</b> Resumen de los eventos semilla utilizados en el presente análisis.....	76

## AGRADECIMIENTOS

*El presente documento es un esfuerzo en el cual, directa o indirectamente participaron varias personas opinando, corrigiendo, teniéndome paciencia, dándome ánimo, acompañándome en los momentos más complicados y en los momentos de felicidad.*

*Agradezco al Dr. Eduardo Reinoso Angulo por haber confiado en mi persona y por la dirección de este trabajo. Al Dr. César Augusto Arredondo Vélez y el Dr. Marco Antonio Pérez Negrón por los consejos, apoyo, ánimo y gran disponibilidad en todo momento. A los M.I. Miguel Leonardo Suarez, Andrés Felipe Hernández Estrada, Pablo Quinde Martínez por su paciencia ante mi inconsistencia al igual de su gran disponibilidad en todo momento, consejos y ánimo para este trabajo y, por último, pero no menos importante a la planta docente de la Universidad Nacional Autónoma de México por haberme brindado sus conocimientos.*

*Gracias también a mis queridos amigos que me apoyaron y me permitieron entrar en su vida durante estos dos años dentro y fuera del salón de clase en especial a Giovanni, Luis, Noé, Emmanuel, Erick y Nina.*

*Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el patrocinio a mis estudios de Posgrado reflejado en el presente trabajo.*

*De forma especial, le doy las gracias a mis hermanos, Giovanni, Patricia y Yuri por su apoyo incondicional durante esta etapa formativa de mi vida profesional.*

*Pero sobre todas las cosas, con todo mi cariño y mi amor para las personas que hicieron todo en la vida para que yo lograra mis sueños, por motivarme y darme la mano cuando sentía que el camino se terminaba, a ustedes por siempre mi corazón y mi agradecimiento, gracias papá y mamá.*

## RESUMEN

Este trabajo analiza la respuesta dinámica de equipos eléctricos bajo la suposición de que su comportamiento se puede describir a través de un oscilador de un grado de libertad con las ecuaciones constitutivas de un cuerpo rígido. El modelo propuesto considera modificaciones por formas geométricas arbitrarias y la posible variación en la distribución de la masa.

Con base en las condiciones *in situ* de los equipos eléctricos se evaluaron dos condiciones de comportamiento fundamentales: 1) cuerpos simplemente apoyados y 2) anclados a la base; en este último, se examinaron dos posibles modos de falla en el ancla: tensión pura e interacción tensión-cortante. Considerando el peligro sísmico en las ciudades de Oaxaca, Guerrero y Ciudad de México, se revisó de manera determinista el daño ante sismos de subducción de fuente cercana y lejana, así como sismos de falla normal de profundidad intermedia. Se encontró para los equipos anclados a la base que, la revisión interacción tensión-cortante tiene una mayor predisposición al volcamiento y en función de la distancia a los vértices de rotación del cuerpo puede aumentar o disminuir el daño.

Asimismo, se obtuvo el cociente de la aceleración mínima de volcamiento para las condiciones de respuesta considerando movimientos armónicos bajo la suposición de que ciertos sismos se pueden modelar con señales de amplitud y frecuencia controlada. Con base en los resultados obtenidos, se definió un rango de frecuencias donde el sistema de anclajes es nocivo para el equipo.

Se ha propuesto una metodología para estimar la función de pérdidas para equipos eléctricos descrita a través de sus dos primeros momentos estadísticos con base en una colección de sismos simulados en dos lugares de la Ciudad de México. Se encontró que el contenido de frecuencias, condiciones iniciales debido al instante de ruptura del anclaje, duración de la fase intensa, coeficiente de restitución, entre otros, juegan un papel fundamental durante la respuesta dinámica de los equipos eléctricos.

En busca de incluir la aleatoriedad en los parámetros de frontera, se modela como variable aleatoria el coeficiente de restitución. Sin desconocer que los resultados son aproximados, se propone como una primera estimación en incluir la incertidumbre epistémica en la esperanza del daño de equipos eléctricos, donde se encontró que existen cambios significativos por esta variable.

## ABSTRACT

This work analyzes electrical equipment dynamic response under the assumption that its dynamic behavior can be described as single degree of freedom (SDOF) with the constitutive equations of a rigid body. The model proposed considers arbitrary geometric shapes and the possible variation of mass distribution.

Based on in situ conditions of electrical equipment, two cases of study are proposed: 1) free-standing and 2) anchored to the base bodies; in the latter, two possible modes of anchor failure were evaluated: pure traction and traction-shear interaction. Considering seismic hazard on Oaxaca, Guerrero and Mexico City, the damage trend under earthquakes of near and far subduction source, as well as the intermediate depth with normal failure, were reviewed. It was founded that for the equipment anchored to the base, the tension-shear interaction condition promotes greater predisposition to its overturning and depending on the distance to the vertex rotation can increase or decrease the damage.

Also, the ratio of the minimum acceleration for equipment overturning was obtained considering the two studied conditions under harmonic signals and assuming that some earthquakes can be modeled with amplitude and controlled frequency signals. Based on the results, a range of frequencies where the anchoring system is harmful for the equipment was defined.

A methodology has been proposed to estimate the loss function described through its first two statistical moments and based on a collection of simulated earthquakes in two referent sites in Mexico City. It was found that the content of frequencies, the failure anchorage time, intense phase, coefficient of restitution, among others, play a fundamental role during the dynamic response of electrical equipment.

In order to include randomness in the boundary parameters, the coefficient of restitution is modeled as a random variable. Without ignoring that the results are not conclusive, it is proposed as a first estimation to include epistemic uncertainty on the proposed damage function of electrical equipment, where it was found that there are significant changes associated to this variable.

## INTRODUCCIÓN

El estudio analítico de cuerpos rígidos esbeltos sometidos ante acciones sísmicas fue presentado por primera vez alrededor de 1885 por Milne, en un esfuerzo de estimar los niveles de excitación sísmica para lograr el volcamiento; sin embargo, no fue sino hasta 1963 cuando se realizó el primer estudio formal para cuerpos esbeltos, donde Housner propuso un modelo de péndulo invertido que responde al balanceo al ser sometido a una aceleración tipo senoidal. A través de este modelo, diferentes investigadores (Housner,1963; Ishiyama,1982; Yim *et al.*, 1980; Shenton III, 1990; Makris y Roussos, 1999; Zhang y Makris, 2001; DeJong, 2012; Taniguchi, 2002; Makris, 2014a; Makris., 2014b, entre otros) han realizado aportaciones adicionales y analizado las diferentes variables que se involucran durante la respuesta dinámica de cuerpos rígidos enfocados desde un punto de vista determinista y probabilista.

En definitiva, recientes eventos sísmicos muestran que plantas de energía eléctrica o estructuras afines son altamente vulnerables ante la interrupción de servicios resultado de la falla de equipos eléctricos tales como: estaciones de control, transformadores, entre otros. Diferentes evidencias de fallas muestran que, el colapso de equipos eléctricos no sólo causa pérdidas económicas directas debido a la reparación y/o reemplazo del equipo, sino también impactos socioeconómicos indirectos como consecuencia de un corte de energía. En este sentido, diferentes medidas de mitigación se han propuesto para evitar la falla en equipos eléctricos; sin embargo, la normativa mexicana actual no contiene un enfoque o ayudas de diseño específicas para evitar el balanceo y un eventual volcamiento en equipos eléctricos.

Por lo que, el presente trabajo analiza el comportamiento dinámico de equipos eléctricos como un oscilador de un grado de libertad a través de las ecuaciones constitutivas de un cuerpo rígido, considerando la geometría y configuración *in situ*. Dentro de la modelación es necesario valorar que, en la mayoría de los casos los equipos se desplantan sobre cimentaciones de concreto reforzado con dimensiones en planta superiores a la huella de éste; comúnmente las extensiones de las salientes en la cimentación son mayores para que pueda soportar equipos en diferentes configuraciones. Adicionalmente, se considera como medida de mitigación ante las acciones sísmicas, fijadores a la base que regularmente exhiben dos diferentes modos de comportamiento: a) las anclas son lo suficientemente rígidas y resistentes para transmitir las fuerzas en la interfaz cimentación – equipo y b) las anclas llegaron a la fractura y el equipo eléctrico se comporta como un cuerpo rígido simplemente apoyado sobre la huella de la cimentación. En algunos casos específicos, las aceleraciones sísmicas son lo suficientemente grandes para llevar a la falla el anclaje, como es el caso del sismo de California, Estados Unidos en 1971 o recientemente en 2017 en la ciudad de Oaxaca, México.

A pesar de la gran cantidad de variables en el problema y con miras de estimación del riesgo sísmico, el presente análisis tiene como finalidad obtener la función de pérdidas descrita mediante de sus dos primeros momentos estadísticos (esperanza y varianza) considerando dos regímenes de comportamiento para equipos eléctricos: 1) simplemente apoyado y 2) anclado a la base; en este último, se revisará ante dos posibles modos de falla: tensión pura e interacción tensión- cortante.



Con base en lo anteriormente descrito, el presente documento se divide en cuatro capítulos y dos anexos:

En el capítulo 1, se hace la revisión bibliográfica y se presenta la recapitulación de los trabajos más relevantes asociados al comportamiento y respuesta dinámica de cuerpos rígidos.

Por su parte, el capítulo 2 se enfoca en ilustrar el modelo utilizado y las modificaciones respecto a otros. En este contexto, para el caso específico de cuerpos anclados a la base, se hace una revisión de los instantes de ruptura del anclaje en los modos de falla considerados. Posteriormente, se estima el cociente de las aceleraciones mínimas de volcamiento para los dos modos fundamentales con la finalidad de obtener el rango de frecuencias donde el sistema de anclajes es nocivo para un equipo eléctrico.

En el capítulo 3 se propone y ejemplifica la metodología propuesta para realizar el análisis de fragilidad y vulnerabilidad en equipos eléctricos. Asimismo, se evalúan medidas de intensidad asociadas a la frecuencia y ángulo de esbeltez del cuerpo con la finalidad de encontrar la intensidad que minimice la dispersión existente referente a la variable de daño considerada. Finalmente, se muestran ejemplos del valor esperado del daño para equipos eléctricos considerando un caso regular, cinco excentricidades propuestas y tres ductilidades objetivo ante señales armónicas, pulsos y sismos.

En el capítulo 4 se muestran las conclusiones y recomendaciones obtenidas a través del presente documento y los trabajos futuros que se desprenden a partir de esta investigación.

Para finalizar se presentan dos anexos. En el primero de ellos y con fines ilustrativos se modela el coeficiente de restitución como una variable aleatoria y se muestran las posibles variaciones existentes en la esperanza del daño para el caso de terremoto. En el anexo dos se realiza la deducción de las ecuaciones gobernantes del comportamiento de cuerpos rígidos simplemente apoyados y anclados a la base, considerando cuerpos regulares e irregulares y la posible variación en la distribución de la masa.

## JUSTIFICACIÓN Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En las últimas décadas se ha incrementado de manera importante las pérdidas físicas y económicas debidas a fenómenos naturales; una de las amenazas naturales que mayores registros presenta se asocia a los movimientos telúricos. En general, existen varias razones para el incremento de pérdidas por terremoto, por ejemplo, el crecimiento exponencial de la población o bien el desarrollo de grandes ciudades localizadas en zonas de alto peligro sísmico. En el caso específico de instalaciones eléctricas, se han presentado daños importantes alrededor del mundo en países como Japón, Turquía, Taiwán, Estados Unidos y México.

En nuestro país, el sismo ocurrido el pasado 4 de abril del 2010 en Mexicali (Baja California) con una magnitud  $M_w$  7.2, mostró la vulnerabilidad de las estructuras existentes en las instalaciones del sector energético, lo que provocó grandes pérdidas económicas por varias razones: 1) reposición de infraestructura dañada; 2) reposición de equipos eléctricos colapsados y 3) interrupción de suministro eléctrico. Daños y/o efectos similares se presentaron en otras regiones del país, por ejemplo, en el estado de Colima por el terremoto de Tecomán en 2003 y Manzanillo en 1995.

Los daños más relevantes asociados a infraestructura eléctrica en el sismo ocurrido en Mexicali fueron desplazamientos en varios transformadores de potencia y colapso de diversos interruptores; lo que trajo como consecuencia, costos importantes por el uso de equipamiento especializado o reparaciones adicionales como el reemplazo de boquillas dañadas. Por su parte, la falla de equipos menores de las subestaciones parece ser un fenómeno recurrente en sismos importantes, donde es posible observar que en situaciones específicas se requieren maniobras especiales, dejando sin funcionamiento las subestaciones durante un tiempo considerable. Estos equipos menores regularmente son: transformadores de corriente, transformadores de potencia, interruptores de corriente, entre otros; donde debido a condiciones geométricas y por restricciones eléctricas son vulnerables ante acciones dinámicas, por ejemplo, el caso de terremoto.

Por lo anterior, los equipos eléctricos son instalaciones críticas y de primera necesidad cuyo funcionamiento se debe garantizar después de un sismo de magnitud moderada o alta. Los estudios de casos de falla de equipos eléctricos en sismos recientes demuestran que, el colapso de equipos eléctricos genera no sólo pérdidas económicas directas debido a los costos de reparación y/o reposición de los equipos dañados, sino también pérdidas indirectas que implica un corte total o parcial del suministro eléctrico sin considerar el impacto social y económico que puede causar la falta de energía.

Con base en lo antes descrito, el propósito de la presente investigación es avanzar en el conocimiento del comportamiento dinámico de equipos anclados y simplemente apoyados con el fin de generar funciones de vulnerabilidad de tal forma que sea posible estimar las pérdidas y cuantificarlas en función de la amenaza y su ubicación espacial. De esta manera, el modelo aquí presentado es útil en la práctica profesional para ser aplicado en un análisis exhaustivo del comportamiento crítico de contenidos específicos.

## **Planteamiento del problema:**

Se realizará el análisis del comportamiento dinámico de equipos eléctricos, modelado como un oscilador de un grado de libertad con las ecuaciones constitutivas de un cuerpo rígido a través de un modelo rectangular equivalente modificado, en el cual se incluye la excentricidad existente por la geometría irregular y la variación en la distribución de la masa. A través de las respuestas máximas observadas, se calculará la probabilidad de excedencia en los estados límites propuestos y con base en ellos, se generarán funciones de fragilidad y vulnerabilidad para terremoto considerando los parámetros más relevantes.

## **Objetivo general**

- Generar funciones de vulnerabilidad sísmica para equipos eléctricos.

## **Objetivos específicos**

- Modificar el modelo de cuerpos rígidos anclados a la base para incluir la irregularidad geométrica y la variación de la distribución en la masa.
- Analizar las revisiones en el anclaje por tensión pura y la interacción tensión – cortante.
- Análisis bidimensional (2D) del comportamiento dinámico de cuerpos rígidos para dos modos fundamentales de comportamiento: simplemente apoyados y anclados a la base.
- Incorporar incertidumbre en el coeficiente de restitución.
- Calcular de la probabilidad de falla con base en los estados límites propuestos.
- Medidas de intensidad para minimizar la dispersión con la variable de daño propuesta.
- Crear de curvas de fragilidad y vulnerabilidad ante excitaciones armónicas y sismos sintéticos.

## **Limitaciones**

- Carencia de información experimental para la comparación de resultados obtenidos de forma analítica.
- El modelo es aplicable a condiciones de frontera que no varían en función del daño/desgaste de la superficie de apoyo o punto de contacto de los equipos analizados.

## 1. ESTADO DEL ARTE

La respuesta sísmica de elementos no estructurales (mobiliario, tanques, equipos eléctricos, entre otros) es en general mayor que el movimiento en su base, por lo que puede decirse que en la mayoría de los casos se encuentran más comprometidos que la estructura misma. A pesar de lo antes descrito, en el diseño sismorresistente de estructuras se concede generalmente poca importancia a estos elementos al punto de que en muchos códigos no incluyen normas o reglamentaciones de diseño al respecto; sin embargo, la normativa mexicana, en la última versión publicada en 2017 se incluye un apartado simplificado en la sección 2.7 de las Normas Técnicas Complementarias para la CDMX (NTCC) considerando solamente la aceleración absoluta como parámetro de daño. En el caso específico de equipos eléctricos o infraestructura del mismo rubro, se han identificado fallas y/o colapsos por la demanda sísmica actuante sobre ellos. En la Figura 1.1 se presentan algunos de los daños identificados en la literatura por sismo.

En general, en la respuesta de cuerpos rígidos se ha identificado al menos tres condiciones de respuesta: deslizamiento puro, balanceo puro o la combinación de ambos. En este sentido, el presente tópico resume los principales trabajos asociados al cálculo de la respuesta dinámica de cuerpos simplemente apoyados y anclados a su base.



**Figura 1.1.** Imágenes de fallas y/o colapsos en equipos eléctricos o infraestructura eléctrica por terremoto (Pacific Earthquake Engineering Research Center, 2017).

El estudio analítico de cuerpos rígidos esbeltos sometidos por acciones sísmicas fue presentado por primera vez alrededor de 1885 por Milne en un esfuerzo de estimar los niveles de excitación sísmica para lograr el volcamiento. El comportamiento se asocia a un modelo estático equivalente,

considerando que si la aceleración sísmica ( $\ddot{u}_x$ ) excede la resistencia estática, el bloque sufre volcamiento.

No fue sino hasta Housner (1963) cuando se realizó el primer estudio formal para cuerpos rígidos esbeltos, propone un modelo de péndulo invertido que responde al balanceo al ser sometido a una aceleración senoidal. Para la caracterización del modelo equivalente utilizó propiedades geométricas como: semi-altura, semi-base y la relación de esbeltez. Dentro de las principales consideraciones en la modelación fueron: el cuerpo es infinitamente rígido e indeformable, el coeficiente de fricción es lo suficientemente grande para que no ocurra deslizamiento y finalmente la disipación o pérdida de energía (amortiguamiento) se encuentra dada por el coeficiente de restitución.

Posteriormente Yim *et al.*, (1980), estudiaron la respuesta por balanceo puro de cuerpos rígidos ante una excitación sísmica. Durante su investigación, solucionaron de forma numérica la ecuación diferencial que controla el comportamiento dinámico para el modo de respuesta por balanceo, buscando incluir la no linealidad de la ecuación. Dentro de los resultados obtenidos en este análisis se observó que: 1) los cuerpos son altamente sensibles a pequeños cambios en su geometría; 2) la estabilidad del bloque sujeto a un tipo de sismo en particular no crece necesariamente de forma monótona al incrementar o decrecer la relación de esbeltez. Por otro lado, realizaron el análisis desde un punto de vista probabilista; en contraste con el análisis determinista, la probabilidad de volcamiento crece a medida que aumenta la amplitud del movimiento, o que incrementa o disminuya la relación de esbeltez.

Por otro lado, Shenton III (1990), analizó cuatro posibles modos de respuesta partiendo del reposo: deslizamiento puro, balanceo puro, deslizamiento-balanceo y levantamiento del cuerpo. Dentro de sus aportes más relevantes, estableció criterios de iniciación de los diferentes modos de respuesta previamente descritos y dentro de las salvedades más relevantes durante la deducción de las formulaciones y criterios establecidos a partir de su investigación, se asocia a que sólo se considera la aceleración en su componente horizontal.

Shao y Tung (1999), estudiaron la respuesta dinámica de cuerpos rígidos simplemente apoyados sujetos a excitaciones dinámicas en su base. Dentro de la metodología empleada, utilizaron formulaciones analíticas y numéricas donde lograron establecer: 1) criterios de iniciación para diferentes modos de respuesta partiendo del reposo; 2) desviación estándar de la distancia producto de deslizamiento relativo de la base y 3) probabilidad de volteo de un cuerpo durante el modo de respuesta por balanceo. Es necesario recalcar que, la modelación empleada se basa en la formulación descrita por Shenton III (1996).

Con base en la formulación de la respuesta dinámica de cuerpos formados por varias piezas, Andreaus y Casini (1999) analizaron el comportamiento de una estructura de tres bloques de roca (trilítica) colocadas como un marco. Las excitaciones empleadas fueron un pulso de la mitad de un ciclo senoidal y un movimiento armónico horizontal con la finalidad de tomar en cuenta los efectos del deslizamiento y el balanceo del cuerpo contra la base del soporte. Durante el análisis, se enfatizaron los siguientes puntos: 1) la influencia de la intensidad pico y frecuencia de la excitación; 2) la fricción existente entre el dintel y las columnas y 3) la esbeltez del sistema. Con base en los resultados

obtenidos, concluyeron que el modelo analizado puede tener tres modos de respuesta: reposo, vibración estable y colapso.

Aydin y Tung (2001) revisaron y analizaron de forma estadística, la validez de la ecuación de balance energético con base en una muestra de 200 sismos simulados, aplicados a un grupo de cuerpos simplemente apoyados. La respuesta dinámica del cuerpo fue obtenida de forma numérica a través de la ecuación que gobierna el comportamiento dinámico por balanceo puro. La validación estadística realizada responde a las siguientes hipótesis: 1) la excitación en la base sólo considera su componente horizontal; 2) el cuerpo experimenta sólo balanceo y 3) el coeficiente de restitución permanece constante.

Taniguchi (2001) realizó un análisis paramétrico buscando caracterizar la respuesta no lineal de cuerpos rígidos rectangulares simplemente apoyados sobre una superficie de soporte, considerando aceleraciones en las componentes horizontal y vertical respectivamente. Dentro de los resultados más relevantes en la respuesta dinámica, se observó la sensibilidad a pequeños cambios en la relación de esbeltez y el coeficiente de fricción. Respecto a las tendencias observadas fue posible establecer lo siguiente: los cuerpos con poca fricción evitan el volteo permitiendo entonces que el modo de respuesta predominante sea el deslizamiento; para sismos con periodos dominantes largos, la tendencia es que el cuerpo sufra volcamiento y deslice ampliamente. Sin embargo, es necesario enfatizar que el considerar o no aceleraciones en la componente vertical puede provocar que la respuesta dinámica del cuerpo llegue a ser caótica.

En una primera aproximación para contemplar que bloques rígidos pueden estar anclados, Makris y Zhang (2001) examinaron la transición en la respuesta de balanceo de bloques anclados excitados con señales armónicas de amplitud y frecuencia controlada. En este análisis se consideran anclajes con un comportamiento elastoplástico perfecto y señales con el impulso de un solo seno. Los autores encontraron que los bloques anclados pueden volcarse a través de dos maneras distintas: 1) exhibiendo impactos y 2) volcamiento de forma súbita. Dentro de las conclusiones más relevantes se encuentra que, los anclajes son más eficientes en la prevención del volcamiento de pequeños bloques delgados sometidos a pulsos de baja frecuencia. Este estudio revela que, aunque para la mayoría de los bloques anclados dentro de un determinado rango de frecuencias sobreviven a aceleraciones más altas que los bloques independientes (simplemente apoyados), existe un rango de frecuencias finito donde sucede lo opuesto. En este contexto, el documento explica el efecto que tienen el incremento de la fuerza y de la ductilidad de los anclajes en el balanceo y la estabilidad de estructuras rígidas cuando se excita bajo ciertos movimientos del suelo.

En el caso específico de equipos eléctricos, Makris y Black (2002) analizaron la influencia del balanceo y el volcamiento en la respuesta dinámica de equipos eléctricos anclados a su base, tomando sólo como referencia transformadores. Este estudio considera los estados límite de servicio y de colapso, propios de la filosofía del análisis estructural vigente. Aplicando conceptualmente lo antes descrito, en una primera evaluación, el equipo forma un sistema global con la cimentación, ya que el anclaje es lo suficientemente rígido para mantener acoplado el sistema equipo – cimentación; sin embargo, cuando el anclaje llega a la falla, el cuerpo se separa y comienza el análisis como un equipo simplemente apoyado. Las señales de entrada utilizadas en esta investigación fueron las registradas

en las estaciones de Rinaldi en California y Takatori en Japón para el estado de servicio mientras que, para el estado límite de colapso se empleó el registro de Cape Mendocino en California. Finalmente, se concluyó que, los esfuerzos considerados para los elementos de anclaje a la cimentación son suficientes para mantener el sistema unido durante el balanceo de la estructura. Sin embargo, es posible que para sistemas con mayor relación de esbeltez se requieran anclajes con mayores capacidades mecánicas para evitar la fractura.

Makris y Konstantinidis (2003) llevaron a cabo un estudio comparativo entre la respuesta dinámica de un oscilador de un grado de libertad (modelado como péndulo invertido) y la respuesta en balanceo de un cuerpo rígido esbelto. Los esfuerzos de este estudio se enfocan en determinar las similitudes superficiales y las diferencias fundamentales entre ambos modelos. Dentro de las conclusiones más relevantes se encuentran que, un cuerpo simplemente apoyado no puede ser considerado como un oscilador de un grado de libertad ya que existen diferencias importantes como: 1) el mecanismo de restitución del oscilador se encuentra definido por la elasticidad de la estructura, mientras que en el cuerpo rígido se restituye mediante la fuerza de gravedad; 2) la rigidez considerada para un oscilador de un grado de libertad se encuentra en un rango definido, mientras que para el cuerpo rectangular equivalente se considera infinita; 3) el amortiguamiento para un oscilador de un grado de libertad es considerado de tipo viscoso dependiente de la masa y frecuencia natural del sistema, mientras que para el cuerpo rígido se toma un valor dependiendo de la relación de esbeltez. En este estudio se concluye que un oscilador de un grado de libertad y un cuerpo en balanceo, son dos sistemas dinámicamente distintos y que la respuesta mostrada por cada uno de ellos no puede ser inferida como respuesta del otro.

Prieto *et al.*, (2003), revisaron la formulación de la teoría clásica del balanceo de cuerpos rígidos. Plantearon como posible mecanismo de impacto en el modelo tradicional una delta de Dirac. En esta investigación, se sostiene que la naturaleza discontinua de las ecuaciones diferenciales que describen el fenómeno y la inclusión del coeficiente de restitución complica la generalización de la formulación, sin embargo, la delta de Dirac propuesta resultó correcta tanto al aplicar la teoría clásica como en pruebas experimentales para cuerpos esbeltos bajo la condición que se presenten desplazamientos pequeños.

Por otro lado, Arredondo (2005) estudió numéricamente la respuesta dinámica de cuerpos rígidos al estar sometidos a excitaciones analíticas moduladas en frecuencia y amplitud. Los contenidos empleados presentan geometrías arbitrarias, variaciones en la distribución de la masa manteniendo simetría respecto al eje vertical.

Respecto a las condiciones necesarias que permiten que un cuerpo rígido inicie su comportamiento dinámico considerando excitaciones en su base como el caso de terremoto, Tung (2005) realizó una investigación donde estableció la importancia de dos casos específicos: 1) la variación del coeficiente de fricción debido a la interacción de la superficie de contacto del cuerpo y la interfaz del plano horizontal que lo contiene y 2) la aceleración pico en la base. En esta investigación se realizó un estudio detallado de la probabilidad de ocurrencia de los siguientes modos de respuesta: reposo, deslizamiento puro, balanceo puro y deslizamiento-balanceo en función de la relación de esbeltez.

Entre las conclusiones se enfatizó la importancia de no despreciar la aleatoriedad de los parámetros del coeficiente de fricción y la aceleración pico, debido principalmente a la incertidumbre existente.

En cuanto al comportamiento de contenidos simplemente apoyados y que se encuentren dentro de edificaciones, en Arredondo (2005) *et al.*, modelaron y evaluaron la respuesta dinámica de cuerpos rígidos ubicados en distintos entrepisos de edificios localizados tanto en el valle de México como en el puerto de Acapulco. Las excitaciones a las que fueron sometidas las edificaciones corresponden a eventos de fuentes cercanas y lejanas donde es posible asociarlos a sismos de subducción y falla normal, respectivamente. Con este modelo estimaron escenarios de riesgo que llevarían al volcamiento a los contenidos en función de la amplificación del movimiento de entrada en cada entrepiso. Dentro de las principales salvedades durante la modelación se consideró un coeficiente de fricción lo suficientemente alto para evitar el deslizamiento del cuerpo.

Konstantinidis y Makris (2005) desarrollaron una investigación numérica de la respuesta sísmica de columnas formadas por varios bloques de roca, con la intención de conocer las máximas intensidades que podrían resistir. En caso de que la respuesta tendiera al volcamiento, se consideró la conveniencia de reforzar o no mediante cinturones metálicos. Durante el análisis, se emplearon sismos registrados en diversas partes del mundo. Se modelaron como casos más desfavorables las respuestas en deslizamiento puro y balanceo puro, ya que para estos modos podría presentarse el colapso de la estructura. La conclusión más importante de este estudio es que, el deslizamiento relativo entre bloques de roca cuando las aceleraciones pico se presentan resulta menor que el coeficiente de fricción generado por las interfaces.

Purvance (2006) realizó una investigación desde un punto de vista determinista y probabilista donde buscó cuantificar y caracterizar el volcamiento de cuerpos rígidos a través de sus parámetros geométricos como: forma, semi-base, semi-altura, amplitud del movimiento, entre otros. En esta investigación comparó los resultados obtenidos con pruebas experimentales para validar su modelo. La metodología fue aplicada en el estado de California en Estados Unidos y básicamente para formaciones rocosas. En este sentido, realizó un modelo de amenaza en función de las variables de interés para poder cuantificar pérdidas con base en un análisis PSHA (Probabilistic Seismic Hazard Analysis).

Boroschek e Iruretagoyena (2006) presentaron un análisis para calcular el volteo de cuerpos rígidos de forma controlada, buscando predecir el sentido del volcamiento del cuerpo mediante la inclusión de una determinada superficie con cierta inclinación. En este contexto, se realizaron modificaciones en la ecuación que gobierna el comportamiento dinámico del cuerpo rígido bajo el modo de respuesta por balanceo puro. En general, se utilizaron 314 registros sísmicos, dando un total de 7500 casos analizados. Es necesario recalcar que, en cada una de las respuestas estimadas no fue considerado el coeficiente de restitución. De los resultados obtenidos concluyeron que, para cuerpos de dimensiones importantes, es posible controlar de mejor manera el volcamiento del cuerpo ya que se necesitan menores ángulos de inclinación en el plano de soporte para controlar su respuesta.

Arredondo (2006) presentó un modelo rectangular equivalente modificado, el cual se implementa en el estudio de la respuesta dinámica de cuerpos rígidos con formas arbitrarias, buscando incluir la



excentricidad existente por la geometría irregular y la variación de la masa. Lo anterior, se implementa en un modelo rectangular equivalente para cada instante de tiempo en función de la variación de las condiciones iniciales de cada ciclo de vibración. Este modelo mantiene la simplificación de tomar en cuenta la disipación de energía provocada por el impacto del vértice en rotación al chocar con la superficie portante y solo considera la componente de la aceleración horizontal.

Arredondo *et al.*, (2006) estimaron la respuesta dinámica de cuerpos con formas arbitrarias, con o sin ejes de simetría y distribución de masa no uniforme sujetos a movimientos sísmicos registrados y simulados. En este estudio, modelaron analíticamente los modos de respuesta (reposo, deslizamiento, balanceo y deslizamiento-balanceo) más probables y determinaron curvas de volteo para cada excitación utilizada. Finalmente, calcularon la respuesta dinámica de cada cuerpo localizado en diferentes entrepisos de un edificio en particular para conocer la influencia que la amplificación en el movimiento de entrada tiene sobre el modo de respuesta en contenidos.

Arredondo y Reinoso (2006) presentaron un estudio sobre la influencia del contenido de frecuencias, las intensidades pico, las velocidades pico y la duración del evento en el balanceo de cuerpos rígidos. Para ello, utilizaron una colección de cuerpos regulares, simétricos en distribución de masa y geometría. Dentro de las salvedades, consideraron un coeficiente de fricción lo suficientemente alto para analizar únicamente el modo de respuesta por balanceo y evitar el deslizamiento del cuerpo. La aportación de este trabajo se asocia a la ecuación propuesta para predecir la aceleración mínima de volcamiento de cuerpos en términos de parámetros geométricos del cuerpo. Esta expresión tiene la ventaja de no requerir un proceso iterativo, lo que puede proveer una estimación directa de los requisitos mínimos de seguridad para elementos no estructurales. La limitante de esta ecuación es que, no se considera la aceleración en su componente vertical, lo que para ciertos casos podría influir en la respuesta del cuerpo.

Peña (2015) propone un modelo simplificado de elementos rígidos y resortes (MEER) para el estudio de balanceo asimétrico de cuerpos rígidos, donde considera pequeñas rotaciones menores que  $20^\circ$  lo que permite en algunos casos simplificar la formulación matemática. Dentro de las conclusiones más importantes se encuentra que, la respuesta máxima del bloque depende del tipo de asimetría, y también de la dirección de la carga actuante. La validación del modelo propuesto se realizó con base en las pruebas experimentales realizadas en cuerpos rígidos en la mesa sísmica del Laboratorio Nacional de Ingeniería Civil (LNEC) de Portugal, las cuales se realizaron en bloques de piedra de granito azul sometidas a diferentes tipos de aceleración en la base. Las consideraciones más relevantes durante la modelación son: el modelo se basa en la ecuación de equilibrio dinámico para cuerpos flexibles, considerando que el bloque se apoya en resortes axiales y de cortante y el amortiguamiento por impacto se simplifica al considerarlo de tipo Rayleigh proporcional a la rigidez.

Para el estudio de contenidos en edificios considerando los posibles efectos de interacción suelo-estructura en Arredondo *et. al* (2017) proponen un modelo dinámico para la estimación de la respuesta por balanceo puro de un bloque rígido no simétrico considerando la excitación rotacional y horizontal. Los bloques analizados se encuentran distribuidos en diferentes niveles de un edificio con una base flexible sujeta a sismos. En lo resultados, se presenta ejemplos ilustrativos del modelo

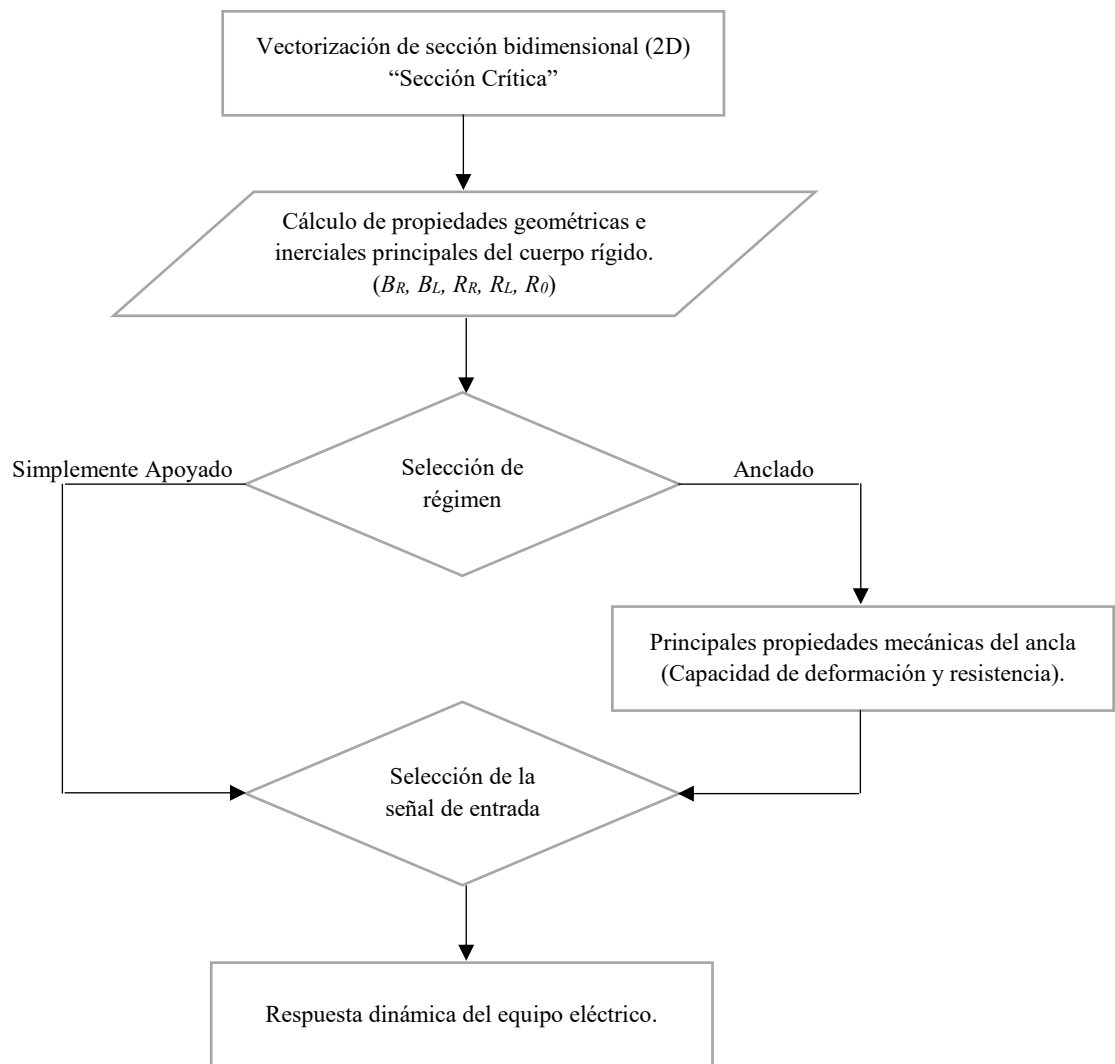
propuesto para bloques rígidos no simétricos en edificios de 5, 10 y 15 niveles ubicados en suelos blandos. Los resultados muestran que es importante considerar los efectos cinemáticos, así como los efectos inerciales de la interacción dinámica suelo estructura en la respuesta dinámica de los contenidos.

Arredondo *et al.*, (2017) proponen un modelo simplificado para evaluar el comportamiento dinámico independiente para cuerpos rígidos irregulares bajo fuerzas inducidas por terremotos. El modelo analiza la respuesta de un cuerpo tridimensional irregular como cuerpo rígido utilizando un enfoque numérico que considera una sección crítica y dos bloques rígidos rectangulares equivalentes. El modelo fue calibrado a través de pruebas experimentales en mesa vibradora con prototipos que permitieron la réplica de distribuciones de masa representativas, tamaños y/o relaciones de esbeltez para objetos típicos. Dentro de las conclusiones más importantes, se encontró que el comportamiento dinámico en condiciones irregulares (asimétrico en forma y/o distribución masiva no uniforme) se puede estimar considerando las propiedades geométricas y de densidad apropiadas.

Candia y Jaimes (2018) presentan una formulación para tres tipos de condiciones: 1) equipos simplemente apoyados; 2) equipos anclados a la base; y 3) equipos sobre aisladores sísmicos. En el análisis se propone como ejemplo equipo comúnmente utilizado en centrales eléctricas de México y Estados Unidos, con alturas entre 3m y 5 m, cubriendo un amplio rango de parámetros de frecuencia y dimensiones. Por otra parte, se estudian los efectos de la distancia entre sitios ubicados en suelos firmes. Como conclusiones importantes, el estudio muestra: a) el índice de confiabilidad es mayor al aumentar la relación de aspecto de bloque y tamaño para los nueve equipos y las tres condiciones de soporte estudiadas; b) la confiabilidad de los equipos en sismos cercanos a la fuente es ligeramente más alto que el de los equipos anclados o el equipo aislado de base. Por el contrario, para sismos lejanos, la confiabilidad para equipos anclados es ligeramente más alta que la de equipos simplemente apoyados o con aisladores en la base.

## 2. COMPORTAMIENTO DINÁMICO DE EQUIPOS ELÉCTRICOS SIMPLEMENTE APOYADOS Y ANCLADOS A SU BASE

En la presente sección se estudia la modelación de equipos eléctricos como cuerpo rígido y su respuesta dinámica considerando formas arbitrarias con o sin ejes de simetría y distribución de masa no uniforme. En el caso específico de la irregularidad respecto a la distribución de masa, se asocia a que un objeto puede estar compuesto de varios materiales o presentar huecos y, por lo tanto, su densidad de masa por unidad de volumen es variable en diferentes áreas. En la Figura 2.1, se representa de forma esquemática el diagrama de flujo para obtener la respuesta en los regímenes de cuerpos simplemente apoyados y anclados a su base. A continuación, se mostrarán las consideraciones realizadas durante la modelación, posteriormente las ecuaciones gobernantes para cada uno de los casos en análisis y finalmente ejemplos ilustrativos para cada uno de los casos previamente mencionados.



**Figura 2.1.** Representación esquemática del procedimiento empleado para obtener la respuesta dinámica de cuerpos simplemente apoyados y anclados a su base.

## 2.1 CONSIDERACIONES GENERALES DURANTE LA MODELACIÓN

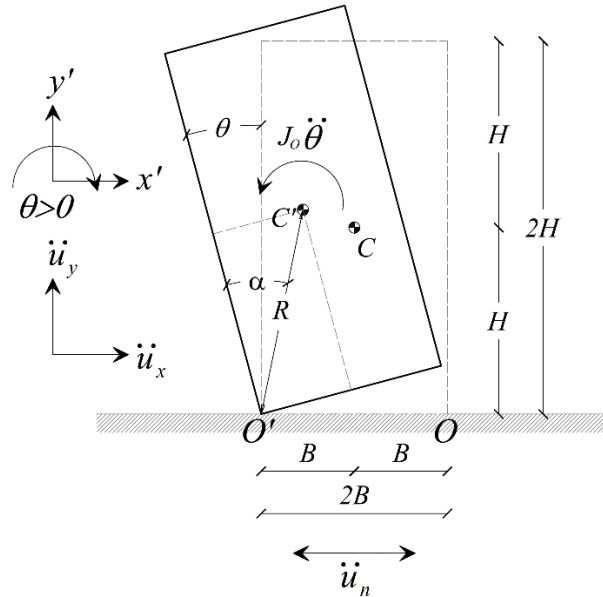
A continuación, se muestran las hipótesis más relevantes que se hicieron durante el desarrollo de la metodología, modelación del cuerpo y solución de las ecuaciones diferenciales mostradas para cada uno de los modos fundamentales considerados en este análisis (cuerpos simplemente apoyados y anclados a su base):

1. El equipo se ha idealizado como un cuerpo rígido.
2. El coeficiente de fricción es lo suficientemente alto para evitar deslizamiento.
3. No existe pérdida de rigidez ni cambio de geometría durante el impacto.
4. No existe aporte en la componente vertical de la aceleración.
5. La pérdida de energía será dada por impacto a través del coeficiente de restitución.
6. El anclaje ha sido idealizado a través de un resorte con rigidez ( $K$ ), Fuerza ruptura ( $F_u$ ) y módulo elasticidad ( $E$ ).
7. Mientras el ancla no llegue a la falla, el cuerpo se moverá en conjunto con la base como un sistema global.
8. La cimentación se ha considerado infinitamente rígida.
9. Si el ancla llega a la ruptura, el cuerpo pasará de un sistema global (cimentación-equipos) a ser un cuerpo simplemente apoyado sobre la huella de la cimentación.
10. Una vez que el sistema de anclajes llega a la falla, no existe balanceo en la cimentación ya que se convierte en un cuerpo no esbelto; lo que ocasiona que normalmente regirá el comportamiento por deslizamiento.
11. Para la revisión por la interacción tensión-cortante se consideró el procedimiento propuesto por el ACI 318-14.
12. Para la solución de las ecuaciones diferenciales, se ha considerado un problema de valor inicial y se ha resuelto a través del método numérico RK6.
13. Se ha utilizado un diezmado en las señales  $\Delta = 0.001$ , buscando una mejor precisión y estabilidad en la solución numérica (Yim *et al.*, 1980; Lin, 1990; Cunha *et al.*, 2014; Lacerda *et al.*, 2016; Diamantopoulos, 2017; Thomaidis *et al.*, 2018).

## 2.2 CUERPOS SIMPLEMENTE APOYADOS

En este apartado se muestran las ecuaciones gobernantes que controlan el comportamiento de un cuerpo ante el modo de respuesta por balanceo puro (*pure rock mode*) dado por una excitación dinámica. Durante el planteamiento se ha considerado que el cuerpo y la base portante son infinitamente rígidos e indeformables y que el coeficiente de fricción es lo suficientemente alto para que no exista deslizamiento. De la misma manera, la pérdida de energía es considerada a través del coeficiente de restitución del cuerpo. En la Figura 2.2 se representan de forma esquemática las fuerzas actuantes y las variables representativas en el modo de respuesta antes mencionado; la deducción de cada una de las ecuaciones presentadas, se encuentran de forma explícita en el anexo A.II de este documento.

Realizando suma de momentos en alguno de los vértices de rotación del cuerpo  $O$  u  $O'$  es posible encontrar la aceleración rotacional del cuerpo, la cual se encuentra dada por las ecuaciones 1 y 2 en función del plano de referencia:



**Figura 2.2.** Representación esquemática de las fuerzas y variables actuantes en el modo de respuesta por balanceo puro.

$$J_0 \ddot{\theta}(t) + mgR \text{sen}(-\alpha - \theta) = -m \ddot{u}_x(t) gR \cos(-\alpha - \theta); \text{ si } \theta < 0 \quad (\text{Ec. 1})$$

$$J_0 \ddot{\theta}(t) + mgR \text{sen}(\alpha - \theta) = -m \ddot{u}_x(t) gR \cos(\alpha - \theta); \text{ si } \theta > 0 \quad (\text{Ec. 2})$$

Despejando la aceleración rotacional del cuerpo  $\ddot{\theta}(t)$  de las ecuaciones 1 y 2, es posible expresarlo de forma compacta a través de la siguiente forma funcional (Housner, 1963; Ishiyama, 1982; Yim *et al.*, 1980; Shenton III, 1990; Makris y Roussos, 1999; Zhang y Makris, 2001; DeJong, 2012; Taniguchi, 2002; Makris, 2014a; Makris, 2014b)

$$\ddot{\theta}(t) = -p^2 \left\{ \text{sen}(\alpha \text{sgn}[\theta(t)] - \theta(t)) + \frac{\ddot{u}_x}{g} \cos(\alpha \text{sgn}[\theta(t)] - \theta) \right\} \quad (\text{Ec. 3})$$

donde  $p$  es la frecuencia característica, la cual para un bloque rectangular simétrico se encuentra dada por  $\sqrt{\frac{3g}{4R}}$ ; es decir, al tener un cuerpo más esbelto (mayor distancia del centro de masa hacia algún punto de referencia  $O$  u  $O'$ ) la frecuencia  $p$  será menor.

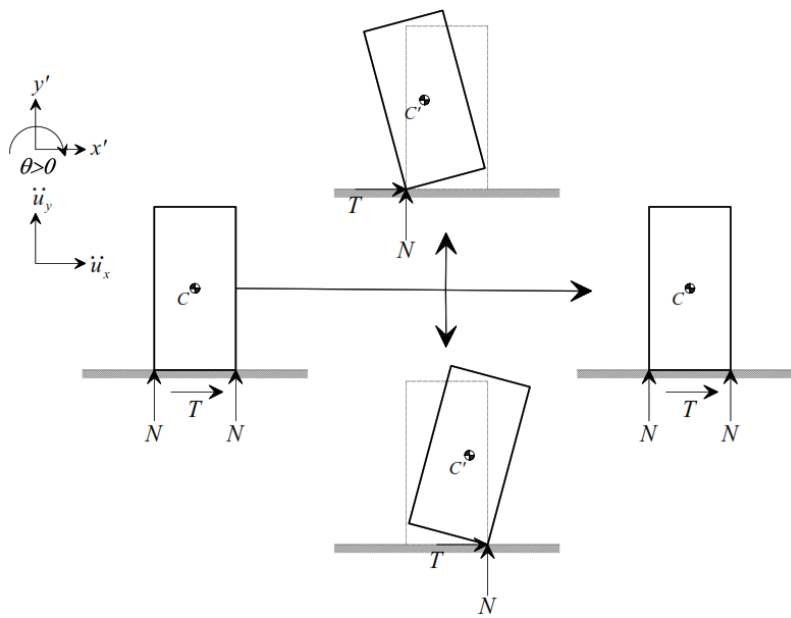
Por su parte,  $\text{sgn}(\theta(t))$  representa la función signo y considera la dirección del cuerpo en función del plano de referencia global, es decir:



reducción de la velocidad del cuerpo. Suponiendo que el cuerpo es infinitamente rígido, que existe impacto inelástico y conservación del momento angular, es posible obtener la siguiente forma funcional (Kimura e Iidia, 1934; Housner, 1963; Purvance, 2005; Arredondo *et al.*, 2017)

$$r_i = \frac{1}{J_{oi}} \left[ I_j - mR_j \sin(\alpha_j) (R_i \sin(\alpha_i) + R_j \sin(\alpha_j)) \right] \quad (\text{Ec. 5})$$

donde  $i=1$  y  $j=2$  cuando el cuerpo gira alrededor del punto de referencia  $O(B_R)$  y,  $i=2$  y  $j=1$  cuando el cuerpo gira alrededor del punto de referencia  $O'(B_L)$ . En la Figura 2.4 se representa de forma esquemática las fuerzas actuantes en función del plano de referencia en donde es aplicado el coeficiente de restitución, donde  $N$  representa la fuerza normal y  $T$  representa la fuerza horizontal en cada uno de los vértices de rotación.

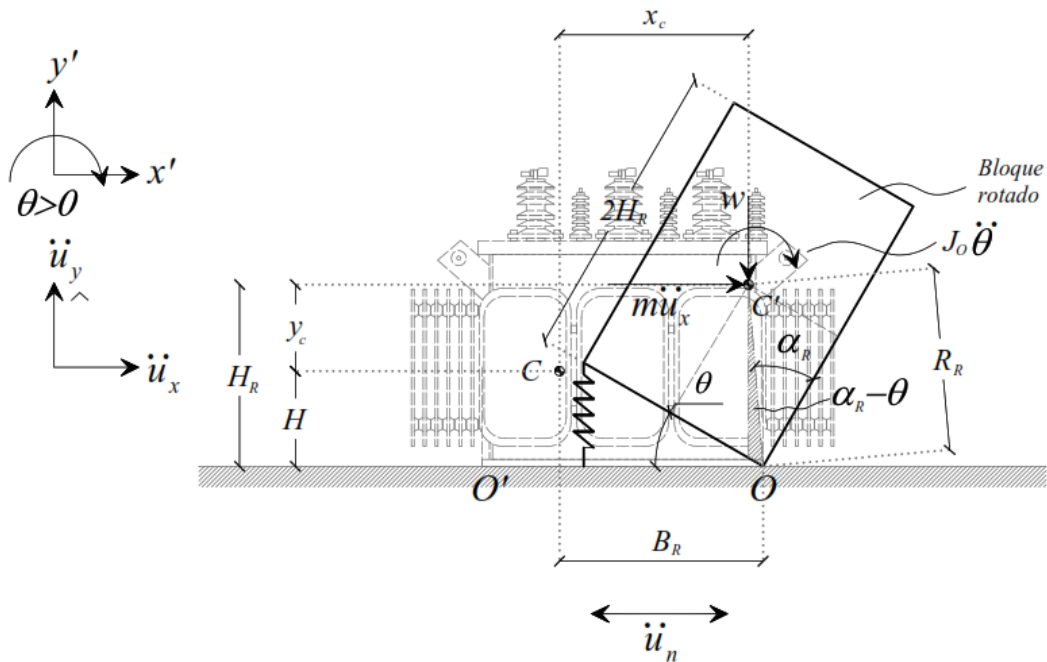


**Figura 2.4.** Esquema representativo de las fuerzas actuantes en cada uno de los vértices de rotación cada vez que es aplicado el coeficiente de restitución en función de un plano de referencia.

### 2.3 CUERPOS RÍGIDOS ANCLADOS A SU BASE

En este apartado se muestran las ecuaciones gobernantes que controlan el comportamiento de un cuerpo ante el modo de respuesta por balanceo puro cuando se encuentra anclado a la base ante una excitación dinámica. Durante el planteamiento se ha considerado que el cuerpo y la base portante son infinitamente rígidos e indeformables y que el coeficiente de fricción es lo suficientemente alto para que no exista deslizamiento. Se asume que los anclajes tienen una fuerza de ruptura finita ( $F_u$ ), la cimentación es rígida y que las fuerzas se transfieren completamente al sistema de anclaje utilizado. Respecto a la disipación o pérdida de energía será considerada a través del coeficiente de restitución del cuerpo. Posteriormente, en la Figura 2.5 se representan de forma esquemática las fuerzas actuantes y las variables representativas en el modo de respuesta antes mencionado. Es necesario

mencionar que la deducción de cada una de las ecuaciones presentadas en este apartado, se encuentran de forma explícita en el anexo A.II de este documento.



**Figura 2.5.** Representación esquemática de las fuerzas y variables actuantes en el modo de respuesta por balanceo puro anclado a la base para un cuerpo asimétrico y masa no uniformemente distribuida.

Con base en lo antes descrito y considerando cuerpos de formas arbitrarias y de masa distribuida no uniformemente, el comportamiento de un cuerpo anclado a la base se puede describir a través de dos puntos:

- Mientras el ancla no llegue a la falla, el cuerpo se moverá en conjunto con la cimentación como un sistema global.
- Si el ancla supera la fuerza de ruptura, el cuerpo pasará de un sistema global (cimentación-equip) a ser un cuerpo simplemente apoyado la cimentación.

### 2.3.1 TIPOS Y MODOS DE FALLA COMÚNES EN ANCLAJES

Los anclajes tienen como propósito en el diseño estructural y sismorresistente, transmitir y resistir las fuerzas axiales, cortantes y momentos entre diferentes componentes estructurales; por ejemplo, una placa de acero y cimentación de concreto. Dentro de los usos más comunes se encuentran: columnas de acero o postes de luz a cimentaciones de concreto, colgadores, placas horizontales incrustadas, entre otros. De la misma manera, los anclajes pueden ser ocupados individualmente o en grupo dependiendo de la aplicación y la carga. En el mercado existe una gran gama de formas y propiedades mecánicas usados comúnmente en la práctica e información referente a la falla que puede llegar a ocurrir en éstas; por lo que, en este apartado se hace una recopilación de los principales tipos de anclas, mecanismos de falla y finalmente se presentan las consideraciones realizadas en este trabajo.

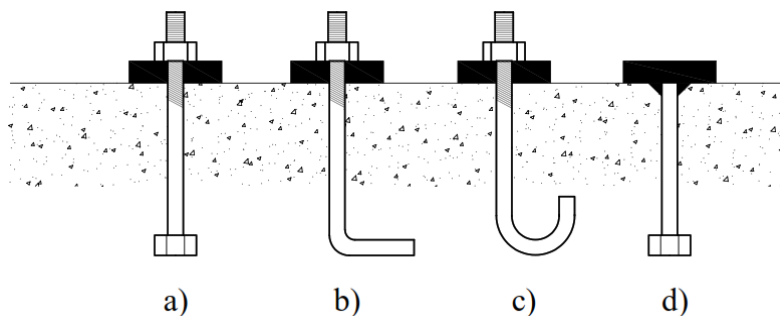


## TIPOS Y MATERIALES DE ANCLAJES

Los anclajes se dividen en dos grupos principalmente: instalaciones ejecutadas *in situ* y post-instalación. Las realizadas *in situ*, son tradicionalmente la elección de los ingenieros estructurales para grandes y pequeños proyectos. Sin embargo, los posteriores a la instalación se han vuelto populares en la industria de la construcción por su fácil instalación (Lundin, 2012).

### ANCLAJES *IN SITU* PARA LOSAS DE CONCRETO

Los anclajes realizados en sitio para losas de concreto son un producto no patentado que se instalan en conjunto con acero de refuerzo antes de la colocación de concreto. Los grupos de anclaje se pueden configurar con una plantilla de acero o madera para asegurar su geometría y ubicación adecuada. Los anclajes realizados en sitio tienen varias formas y tamaños como, por ejemplo: a) ancla con pernos hexagonales, b) enganchados en forma de L, c) enganchados en forma de J y d) varillas soldadas con tamaños que van desde  $\frac{1}{4}$ " hasta de 4" de diámetro. Estos tipos de anclajes se muestran la Figura 2.6. Dentro de las recomendaciones más relevantes del Instituto Americano de Construcción de Acero (AISC por sus siglas en inglés) se encuentra una varilla recta con cabeza hexagonal o tuerca roscada con un diámetro mínimo de varilla de  $\frac{3}{4}$ " (AISC DG1, 2010).



**Figura 2.6.** Anclas típicas realizadas *in situ*: a) anclas con pernos hexagonales; b y, c) enganchados en forma de L y, J y d) anclajes soldados (Lundin, 2012).

Al igual que con otros productos de acero, los anclajes *in situ* para losas de concreto tienen una gran variedad de materiales y de acuerdo con el ASTM F1544 se describen tres grados: Gr. 36, Gr. 55, Gr. 105. El material de anclaje más común es Gr. 36, ya que es el material más económico y de fácil disponibilidad en comparación con los aceros de mayor resistencia (AISC, 2010). Comúnmente en la práctica, el grado de acero se mantiene constante durante todo el proyecto variando únicamente el diámetro del anclaje y con fines de diferenciar el grado del material, los anclajes se encuentran pintados de colores específicos (ver Tabla 1).

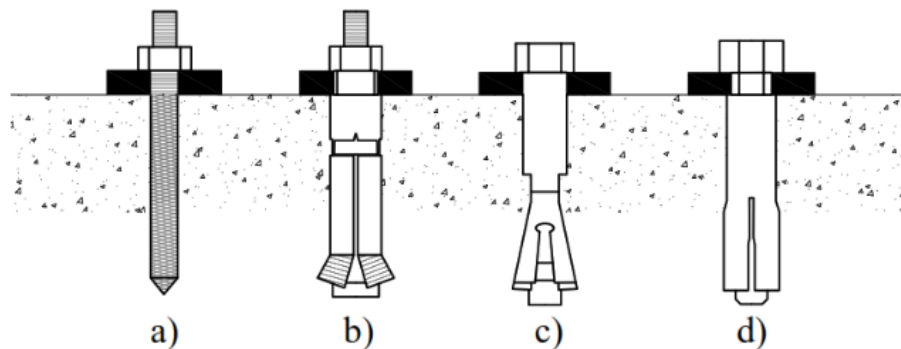
**Tabla 1.** Colores para anclajes *in situ*.

Grado	Color	F <sub>y</sub> (kg/cm <sup>2</sup> )
36	Azul o Blanco.	2530
55	Amarillo	3515
105	Rojo	4220

Los anclajes *in situ* para losas de concreto se pueden usar en gran variedad de aplicaciones, una vez embebido en el concreto, forman un mecanismo fuerte y confiable en conjunto con el concreto. Los anclajes *in situ* son recomendados para anclajes con grandes longitudes de desarrollo y alta resistencia a tensión. Situaciones comunes son, por ejemplo: columnas pesadas, puentes, postes de luz, entre otros.

## ANCLAJES POST-INSTALACIÓN

Los anclajes post-instalación son un producto patentado, fabricados por varias compañías tales como como: Hilti, Simpson Strong-Tie o Read Head. Los anclajes están disponibles a través de un funcionamiento mecánico o adhesivo; estos anclajes se instalan en orificios pretaladrados una vez que el concreto se ha curado. En la Figura 2.7 se pueden ver los anclajes tipo para esta categoría. Al existir muchos tipos y fabricantes de los anclajes post-instalación, el ACI 355 cuenta con una guía, validación e instalación de este tipo de anclajes. Es necesario mencionar que, una de las ventajas de los anclajes post-instalación, se puede encontrar en la construcción; es decir, muchos proyectos ante la rapidez y corto tiempo, el concreto es vertido a la losa antes de que se complete el diseño de la superestructura de acero y esto no es posible realizarlo a través de los anclajes *in situ*. Sin embargo, con los anclajes post-instalación, podría ser colocado una vez que el diseño de la superestructura de acero esté terminado. La decisión de utilizar un anclaje post-instalación o *in situ* deberá ser tomada en cuenta tanto por el ingeniero estructurista y el contratista, con la finalidad de buscar el mejor rendimiento, comportamiento y al menor costo posible.



**Figura 2.7.** Anclas típicas post-instalación: a) anclajes adhesivos; b) anclajes de auto-excavado y c) y d) anclajes de expansión controlados por torque (Lundin, 2012).

## MODOS DE FALLA COMÚN EN ANCLAJES

A continuación, se muestran los modos de falla representativos en anclajes a tensión, cortante y la combinación de ambos mecanismos.

*Anclajes sometidos a tensión:*

- 1) **Falla del acero:** Para que ocurra la falla en el acero del anclaje adherido, la resistencia de la resina y el material base, en este caso el concreto, deberán alcanzar un valor lo suficiente alto

para que se fracture la sección de acero de la barra. La falla ocurre normalmente cerca de la superficie de concreto.

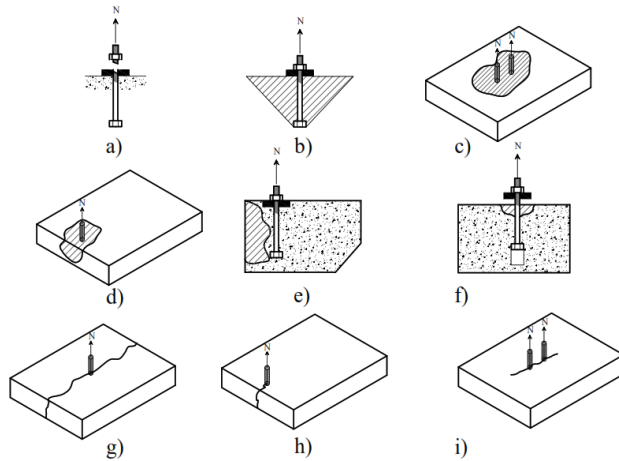
- 2) Falla con cono parcial de concreto: El resultado de este tipo de falla es el clásico cono parcial adherido a la parte superior a la varilla de anclaje. Autores como Doeer y Klinger (1989) documentaron que este mecanismo de falla por cono parcial se presentaba a una profundidad alrededor de 0.2 a 0.4 veces la profundidad efectiva de empotramiento.
- 3) Falla por arrancamiento: La falla por arrancamiento se produce si la resistencia de la varilla del anclaje y del concreto son superiores a la capacidad de adherencia del anclaje. Bajo estas circunstancias, la adherencia falla y la barra se desliza y sale del agujero.
- 4) Falla por fisuración radial: La falla por fisuración radial puede ocurrir si los anclajes están colocados muy cerca uno de otros o muy próximos a un borde de la losa. De acuerdo con los resultados expuestos por Rehm (1985), los valores críticos para la distancia a anclajes próximos y distancia a borde son considerablemente inferiores, alcanzando una media del 40% menor para los anclajes adheridos, que para otro tipo de anclajes cuya forma de trabajo es por fricción o forma. Es importante mencionar, que este tipo de falla se encuentra menos avanzando que el análisis del resto de los mecanismos de falla y en muchos de los casos se trata de expresiones basadas en una serie de ensayos que ofrecen resultados conjuntos para la falla del material base.

En las Figuras 2.8 y 2.9, se muestran ejemplos ilustrativos de las fallas por tensión y cortante respectivamente. A continuación, se presentan los mecanismos de falla para cortante.

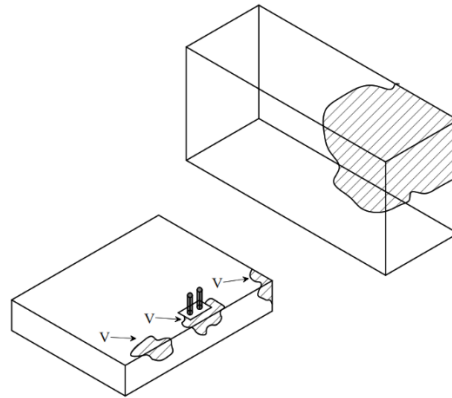
#### *Anclajes sometidos a cortante:*

- 1) Falla del acero: En los anclajes profundos, la falla se produce generalmente por flexión de la barra de anclaje. En la parte frontal de la barra se localiza una importante presión produciéndose fisuras en la cimentación de concreto en el momento de alcanzarse la carga máxima. En el caso que se incrementara la carga, la barra de acero se deforma o se fractura. Dependiendo de la resistencia del concreto, las dimensiones del anclaje, características del acero, es posible que se presenten importantes deformaciones.
- 2) Fisuración del concreto: Para diversos autores, este tipo de falla consiste en una fisuración tipo radial del material y se encuentra relacionado a las condiciones de uso. En el caso de anclajes profundos, la carga máxima puede ser alcanzada con grandes desplazamientos y deformaciones del anclaje.
- 3) Ruptura del cono lateral de concreto: Para pequeñas profundidades de empotramiento, el cono se puede producir en la parte superior del anclaje; en el caso de profundidades mayores, el cono comienza en la superficie del concreto.

Con base en los tipos de anclas y modos de falla mencionados anteriormente, el presente trabajo considera: 1) las anclas modeladas se asocian a las instaladas *in situ* y 2) las revisiones en el sistema de anclajes consideran dos fallas recurrentes, tensión pura y la falla combinada: interacción tensión – cortante. En un apartado posterior, se muestran las consideraciones durante análisis de cada una de ellas.



**Figura 2.8.** Ejemplos ilustrativos de los mecanismos de falla por tensión: a) fractura del anclaje; b) y c) desprendimiento del cono; d) y e) influencia del borde máximo; f) falla mixta por arrancamiento; g), h) e i) falla por fisuración radial del concreto.



**Figura 2.9.** Ejemplos ilustrativos de las fallas por cortante.

### 2.3.2 COMPORTAMIENTO DÚCTIL DEL ANCLAJE

En general, los anclajes exhiben una rigidez post-fluencia manteniendo su resistencia inclusive una vez llegando a un desplazamiento posible de fractura, donde una medida de la ductilidad que desarrolla el anclaje se encuentra dado por  $\mu = u_f / u_y$ , donde  $u_y$  representa el desplazamiento de fluencia y  $u_f$  el desplazamiento último. Una forma aproximada para considerar el comportamiento histerético no lineal en la fijación en términos de fuerza, se encuentra dado por la siguiente expresión Makris y Zhang (2001):

$$P(t) = \varepsilon K u(t) + (1 - \varepsilon) K u_y Z(t) \quad (\text{Ec. 6})$$

donde  $u_y$  es la extensión de fluencia del ancla;  $K$  es la rigidez del sistema;  $\varepsilon$  es la relación entre la rama de fluencia y post-fluencia y finalmente  $Z(t)$  es la cantidad adimensional histerética que se encuentra gobernada a través de la siguiente forma funcional:

$$u_y \dot{Z}(t) + \gamma |\dot{u}(t)| Z(t) |Z(t)|^{n-1} + \beta \dot{u}(t) |Z(t)|^n - \dot{u}(t) = 0 \quad (\text{Ec. 7})$$

En la ecuación anterior  $\gamma$  y  $\beta$  son cantidades que controlan la forma de histerética. Es necesario mencionar que, la expresión 7 en una primera instancia fue propuesta por Bouc (1971) y posteriormente a través de vibración aleatoria para sistemas inelásticos fue modificada por Wen (1975,1976). Considerando los diagramas esquemáticos de la Figura 2.10, en el primero de ellos (Figura 2.10a) se muestra el diagrama momento-rotación de un cuerpo simplemente apoyado, seguido (Figura 2.10b) del diagrama que resulta de incluir anclajes con un comportamiento elastoplástico y finalmente (Figura 2.10c) se representa la combinación de ambos mecanismos. A través de los diagramas previamente descritos y realizando la suma de momentos en alguno de los vértices de rotación del cuerpo  $O$  y  $O'$ , es posible distinguir dos casos dependiendo en específico de un sistema de referencia. Lo anterior se muestra en las ecuaciones 8 y 9 respectivamente.

$$J_0 \ddot{\theta}(t) + mgR \cos(-\alpha - \theta) \ddot{u}_x = -mgR \sin(-\alpha - \theta) - P(t) 2b \cos\left(\frac{\theta(t)}{2}\right); \text{ si } \theta < 0 \quad (\text{Ec. 8})$$

$$J_0 \ddot{\theta}(t) + mgR \cos(\alpha - \theta) \ddot{u}_x = -mgR \sin(\alpha - \theta) - P(t) 2b \cos\left(\frac{\theta(t)}{2}\right); \text{ si } \theta > 0 \quad (\text{Ec. 9})$$

A diferencia de investigaciones previas como las de Makris y Zhang (1999); Makris y Zhang (2000); Makris y Zhang (2001); Makris y Black (2001); Makris y Black (2002) y Candia y Jaimes (2018), la formulación propuesta en este trabajo obtiene las fuerzas en el anclaje considerando de forma explícita la no linealidad del material en el anclaje y la respuesta del cuerpo es obtenida a través de un modelo equivalente que toma las propiedades geométricas y rotacionales en función de cada ciclo de vibración incluyendo la posible irregularidad geométrica por formas arbitrarias y su variación en la distribución de la masa. Con base en lo anteriormente descrito y considerando ambos sistemas de referencia es posible expresarlo de forma compacta como sigue:

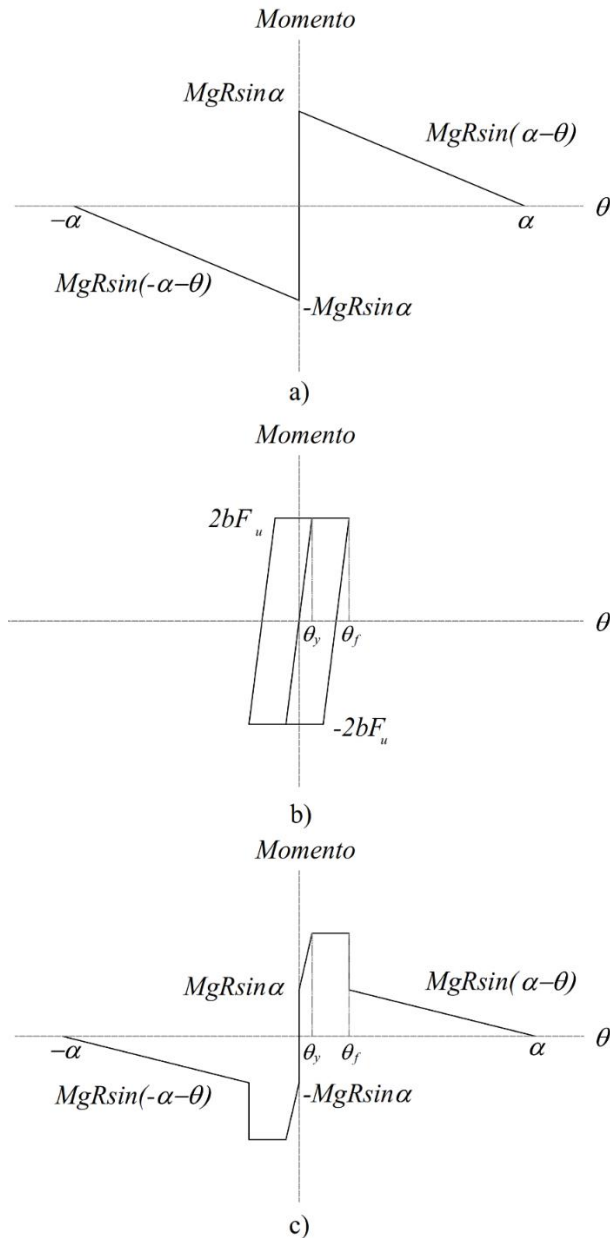
$$\theta(t) = -p^2 \left\{ \frac{\ddot{u}_x}{g} \cos(\alpha \operatorname{sgn}[\theta(t)] - \theta(t)) + \sin(\alpha \operatorname{sgn}[\theta(t)] - \theta(t)) + A + B \right\} \quad (\text{Ec. 10})$$

donde A caracteriza el comportamiento elástico lineal del ancla, el cual se encuentra dado por:

$$A = \frac{4(1-\varepsilon) \sin^2(\alpha) F_u \theta_y \cos\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) Z(t)}{\delta_y M \left(\frac{J_n}{R^2} + 1\right) p^2} \quad (\text{Ec. 11})$$

mientras que B caracteriza el comportamiento no lineal del ancla a través la expresión 12:

$$B = \frac{4\varepsilon F_u \sin^2(\alpha) \cos\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) \sin(\theta(t))}{\delta_y M \left(\frac{J_n}{R^2} + 1\right) p^2} \quad (\text{Ec. 12})$$



**Figura 2.10.** Esquema representativo de los diagramas momento rotación para: a) cuerpo simplemente apoyado, b) comportamiento elastoplástico y c) combinación de ambos mecanismos.

De la ecuación 10, es posible observar que es válida siempre y cuando el sistema de anclas no falle; sin embargo, una vez que alcancen su capacidad última y lleguen a la fractura no proveerán mayor resistencia y la ecuación 10 se reducirá a la ecuación de un cuerpo simplemente apoyado mostrada

en la expresión 3. A través del diagrama mostrado en la Figura 2.10b, se puede ver que durante el balanceo, una vez que alcance el punto de fluencia del ancla, la disipación de energía será dada por el área delimitada por cada ciclo de histéresis provocada por la carga dinámica. Una vez que se alcance la falla del ancla, los diagramas momento-rotación mostrados en las Figuras 2.10b y 2.10c se reducirán al diagrama momento-rotación de un cuerpo simplemente apoyado mostrado en la Figura 2.10a. La transición entre la ecuación 10 (anclado a la base) y la ecuación 3 (simplemente apoyado) será considerada en el presente trabajo a través de la función fractura, la cual está definida por las siguientes condicionantes:

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 1 \text{ cuando } R \geq D \\ f(\theta) &= 0 \text{ cuando } R \leq D \end{aligned} \quad (\text{Ec. 13})$$

donde  $R$  es la resistencia y  $D$  es la demanda actuante sobre el anclaje. En el planteamiento inicial del modelo propuesto por Makris y Black (2002) se realiza la simplificación de que al llegar a la ruptura alguno de los resortes en los vértices de rotación  $O$  u  $O'$ , el sistema completo de anclajes también lo hace. Sin embargo, en el presente análisis se revisa la falla individual de cada uno de los fijadores y sólo ocurre la transición a un cuerpo simplemente apoyado hasta que el sistema completo llegue a la falla. Considerando la función fractura y las ecuaciones previamente descritas, el sistema de ecuaciones diferenciales a resolver para encontrar la respuesta dinámica por balanceo puro para cuerpos anclados a su base, se encuentra dado por:

$$\{f(t)\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta} \\ -p^2 \left\{ \frac{\ddot{u}_x}{g} \cos(\alpha \operatorname{sgn}[\theta(t)] - \theta(t)) + \sin(\alpha \operatorname{sgn}[\theta(t)] - \theta(t)) + (A+B)f(\theta) \right\} \\ \frac{1}{\theta_y} \left[ \theta(t) - \gamma |\dot{\theta}(t)| Z(t) |Z(t)|^{n-1} - \beta \dot{\theta}(t) |Z(t)|^n \right] \end{array} \right\} \quad (\text{Ec. 14})$$

### 2.3.3 REVISIÓN DE LA FALLA TENSIÓN PURA

Para evaluar la resistencia del anclaje ( $R$ ) para el mecanismo de falla por tensión pura, la función ruptura tomará las siguientes condicionantes mostradas en la expresión 15, donde  $\theta_y = \frac{F_u}{(2Kb)}$  y  $\theta_f = \mu \theta_y$ .

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 1 \text{ cuando } |\theta(t)| \leq \theta_f \\ f(\theta) &= 0 \text{ cuando } |\theta(t)| > \theta_f \end{aligned} \quad (\text{Ec. 15})$$

### 2.3.4 REVISIÓN DE LA FALLA COMBINADA TENSIÓN – CORTANTE

Para evaluar el mecanismo de falla por la interacción tensión - cortante, el presente documento toma como base el procedimiento propuesto por la normativa ACI 318-14, donde la revisión se encuentra definida como:

$$\left(\frac{N_{ua}}{N_n}\right)^\xi + \left(\frac{V_{ua}}{V_n}\right)^\xi < 1 \quad (\text{Ec. 16})$$

donde  $N_{ua}$  = Fuerza axial en cada instante tiempo;  $N_n$  = Resistencia nominal a tensión del ancla;  $V_{ua}$  = Fuerza cortante actuante en cada instante de tiempo;  $V_n$  = Resistencia nominal a cortante del ancla y  $\xi$  es el parámetro de forma del diagrama de interacción, que para fines de este documento se ha considerado igual a  $5/3$ .

### RESISTENCIA NOMINAL A CORTANTE

Para anclajes preinstalados de tornillos con cabeza o con gancho y para anclajes post-instalados donde las camisas no se extiendan a través del plano de cortante, la resistencia se encuentra definida como:

$$V_{sa} = 0.6A_{se,v}F_{uta} \quad (\text{Ec. 17})$$

donde  $V_{sa}$  = Cortante resistente del ancla;  $A_{se,v}$  = Área transversal efectiva del anclaje a cortante y  $F_{uta}$  = Esfuerzo de ruptura del anclaje.

### RESISTENCIA NOMINAL A TENSIÓN

La resistencia nominal de un anclaje a tensión controlada por el acero,  $N_{sa}$ , debe ser evaluado mediante cálculos basados en las propiedades del material y en las dimensiones físicas del anclaje; la resistencia nominal de una sola ancla a tensión se encuentra dada por:

$$N_{sa} = A_{se,N}F_{uta} \quad (\text{Ec. 18})$$

donde  $N_{sa}$  = Tensión resistente del ancla y  $F_{uta}$  = Esfuerzo de ruptura del anclaje. Con base en las resistencias nominales expresadas en las ecuaciones 17 y 18 y la revisión asociada al mecanismo de falla tensión-cortante de la expresión 16, la función de ruptura tomará las siguientes condicionantes mostradas en expresión 19.

$$f(\theta) = 1 \text{ cuando } \left(\frac{N_{ua}}{N_n}\right)^\xi + \left(\frac{V_{ua}}{V_n}\right)^\xi < 1$$

$$f(\theta) = 0 \text{ cuando } \left(\frac{N_{ua}}{N_n}\right)^\xi + \left(\frac{V_{ua}}{V_n}\right)^\xi > 1 \quad (\text{Ec. 19})$$

#### 2.3.5 DEFINICION DE EXCENTRICIDAD EN EL CUERPO

Existen diferentes tipos de irregularidades en la modelación de un cuerpo rígido, por ejemplo, la geometría o la distribución en la masa. Con fines de evaluar lo antes descrito, el presente trabajo



propone analizar cinco excentricidades medidas como un porcentaje a partir de las coordenadas del centro de masa de un cuerpo regular. A manera de ejemplo y considerando el esquema representativo de la Figura 2.11 la excentricidad se denotaría como  $e_x:0.20|e_y:-0.20$ , por lo que, en los resultados de secciones posteriores se denotarán a través de esta nomenclatura.

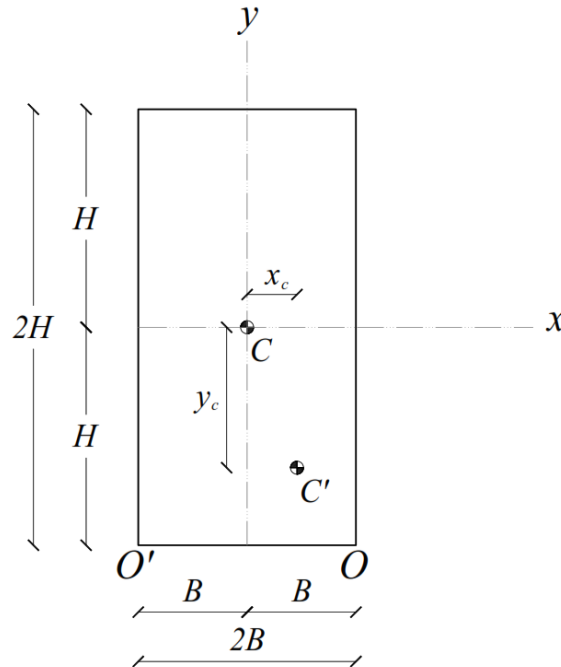


Figura 2.11. Esquema representativo de las excentricidades propuestas en este trabajo.

### 2.3.6 INSTANTES DE RUPTURA: TENSIÓN PURA Y TENSIÓN-CORTANTE

A continuación, se muestra un análisis comparativo de la respuesta de un cuerpo anclado a la base realizando las revisiones asociadas a los mecanismos de falla: tensión pura e interacción tensión-cortante. Estas revisiones fueron realizadas considerando los sismos de Kobe y Loma Prieta sin escalar y con un factor de escalamiento lineal al 2. En las Tablas 2 y 3 se muestran las principales propiedades del ancla y del cuerpo utilizados durante la modelación. Es necesario enfatizar que, los sismos mencionados anteriormente fueron elegidos con base en un análisis de sensibilidad que, para fines ilustrativos de esta comparativa muestran los posibles cambios en el comportamiento de los equipos eléctricos y, además son ampliamente referenciados en la literatura porque han producido pérdidas económicas y daños importantes en contenidos.

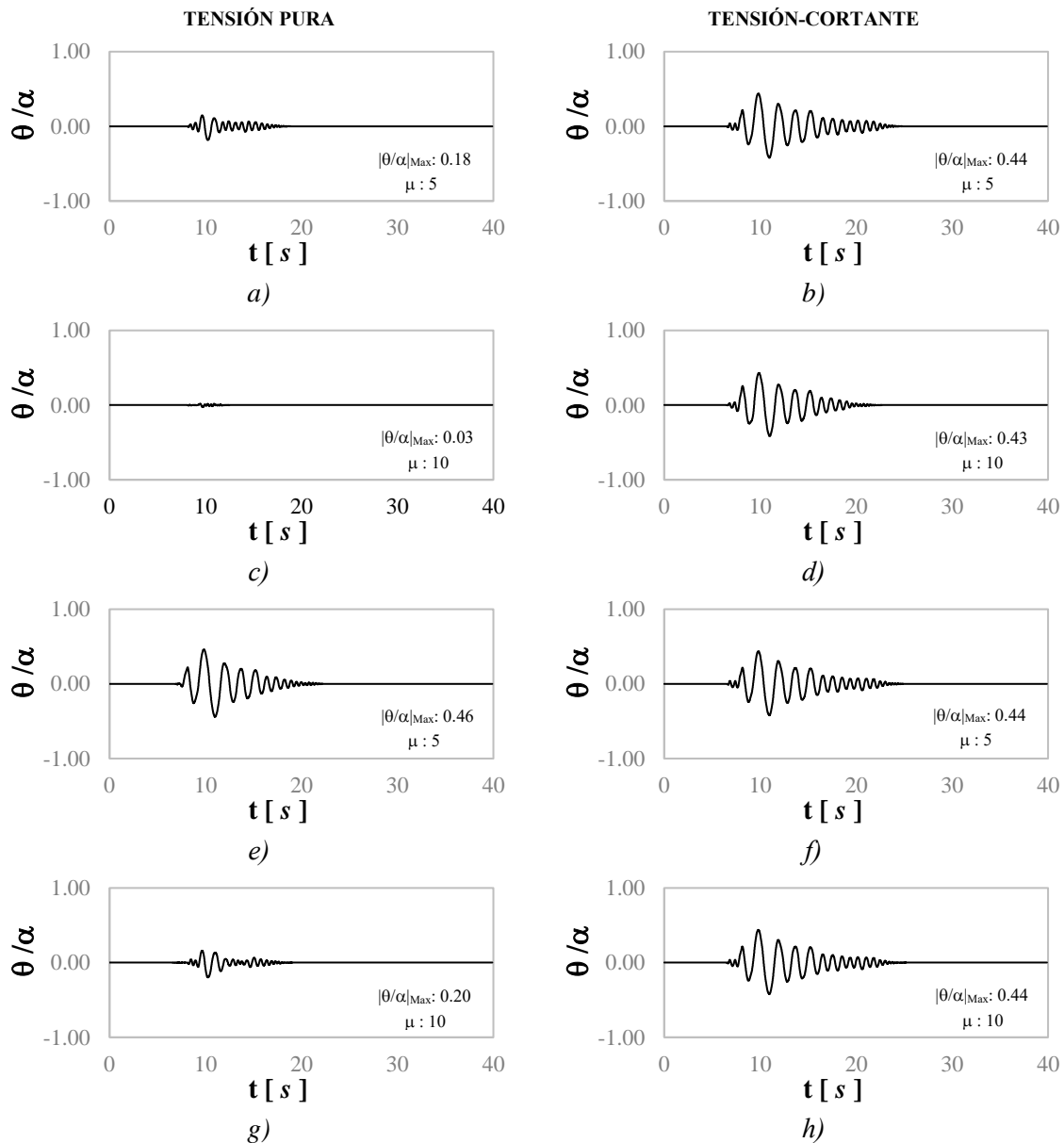
Tabla 2. Propiedades relevantes utilizadas para la modelación del cuerpo.

$b$ (m)	$h$ (m)	$J_0$ (m <sup>4</sup> )	$R$ (m)	$p$ (rad/s)	$M$ (kgf s <sup>2</sup> /cm)		
.50	2.00	1.41	2.06	1.9	30.58	61.16	91.71

Tabla 3. Propiedades relevantes para la modelación del ancla

$K$ (kg/cm)	$f_y$ (kg/cm)	$\phi$ (cm)	$\theta_y$	$u_y$ (cm)	$\mu$		
2,066,353	3800	2.54	6.99E-05	0.00699	1	5	10

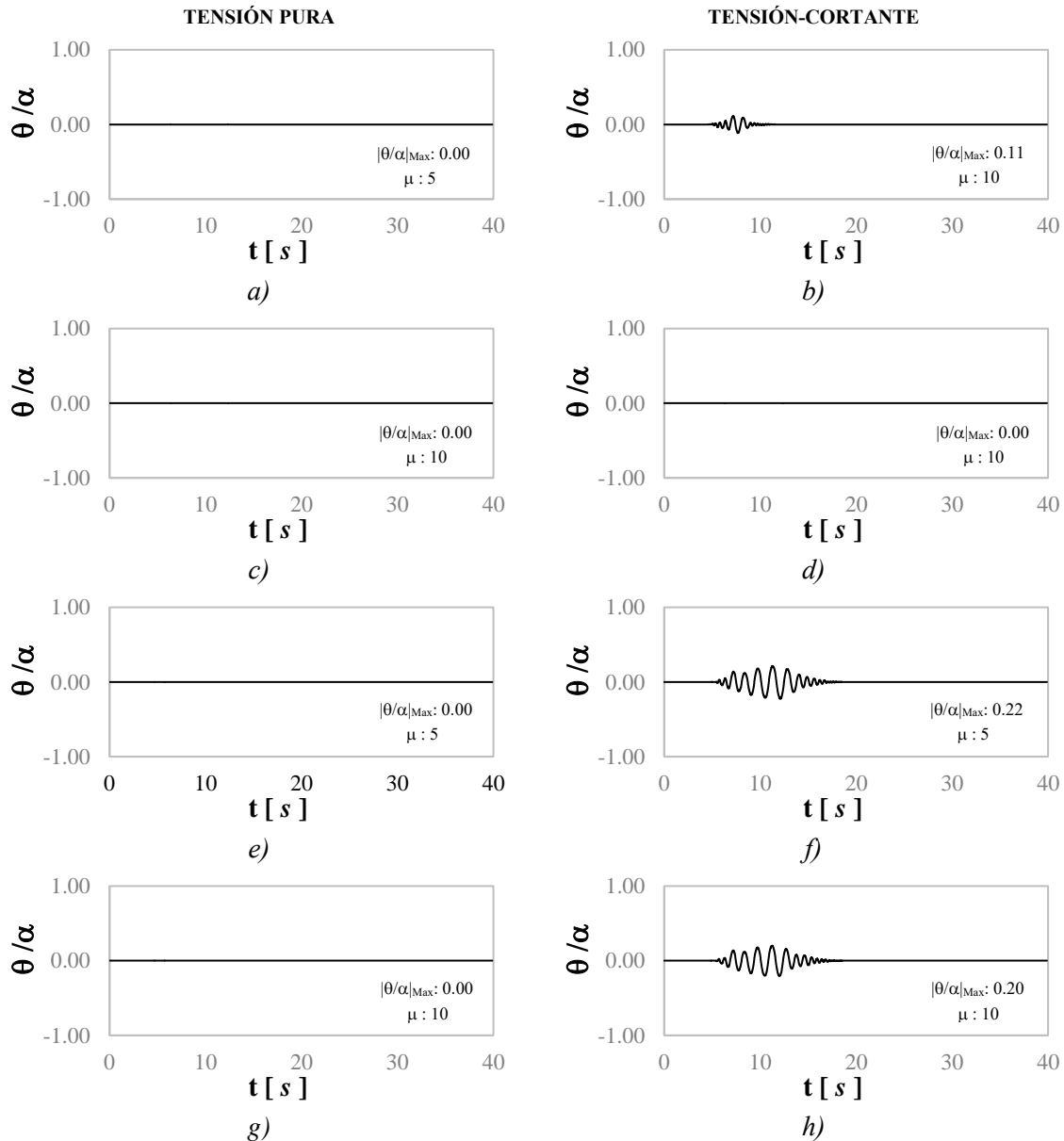
En la Figura 2.12 se muestran los resultados asociados al sismo de Kobe sin escalar para ambas revisiones con las propiedades  $F_u/W = 0.48$  y  $F_u/W = 0.24$ , con ductilidades ( $\mu$ ) iguales a 5 y 10, respectivamente. Se puede observar que, en el caso específico de la falla por tensión pura, una vez que la ductilidad incrementa se reduce la amplitud de la respuesta en el cuerpo de manera considerable, mientras que, en la revisión tensión-cortante, no necesariamente se encuentra una reducción en el daño al incrementar la ductilidad en el ancla; por lo que sugiere que, en la revisión del mecanismo tensión-cortante existe una mayor tendencia al volcamiento en el cuerpo.



**Figura 2.12.** Respuestas obtenidas para el cuerpo en análisis para el sismo de Kobe al 100%: a), b), c), d)  $F_u/W=0.48$  y e), f), g), h)  $F_u/W=0.24$ .

Lo anterior sugiere un caso de condición inicial donde la respuesta final del cuerpo dependerá del instante de ruptura del ancla. Por otro lado, en la Figura 2.13 y de la misma forma que el caso anterior,

se muestran los resultados asociados al sismo de Loma Prieta sin escalar para ambas revisiones con las propiedades  $F_u/W=0.48$  y  $F_u/W=24$ , con ductilidades ( $\mu$ ) iguales a 5 y 10, respectivamente.

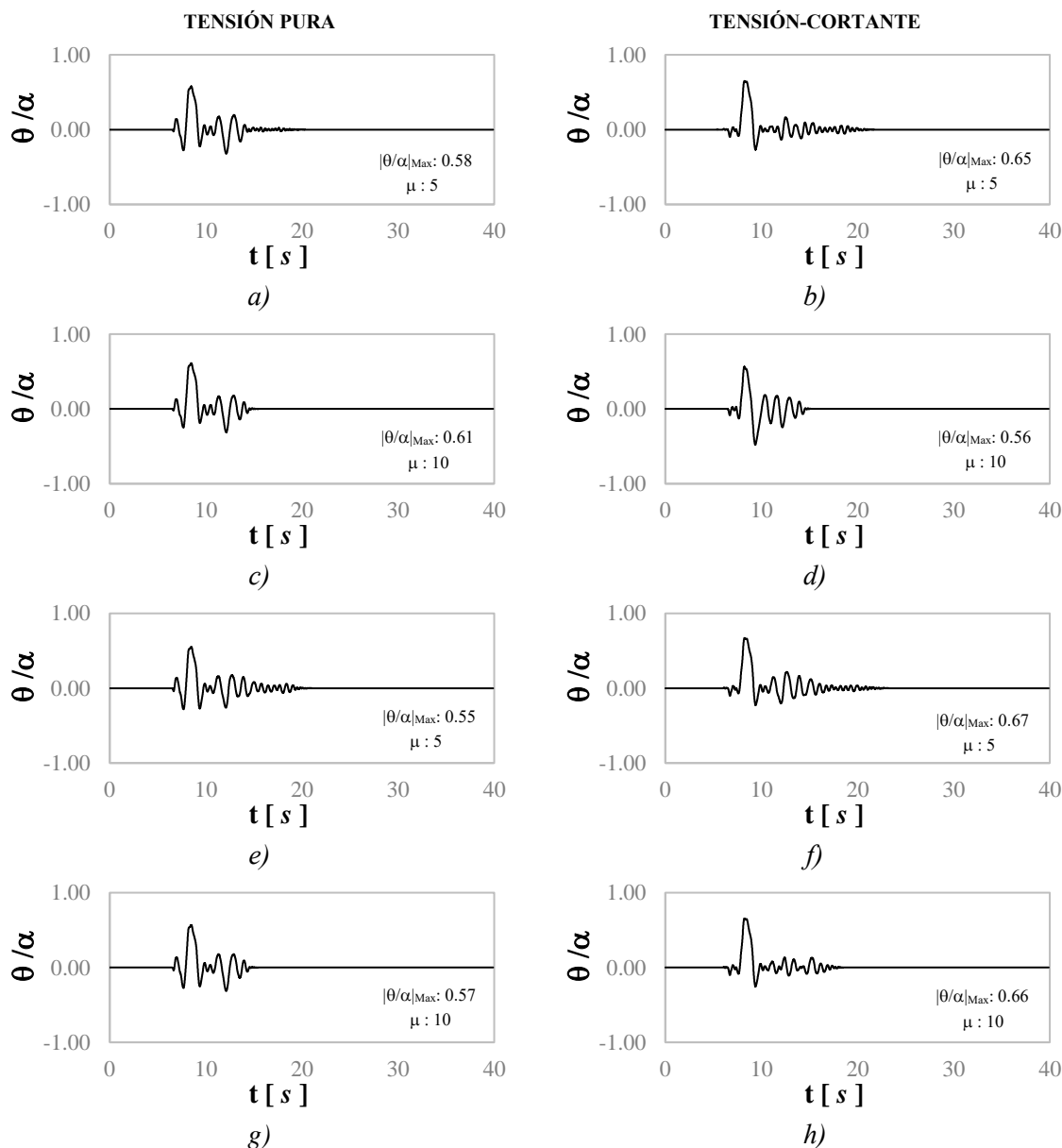


**Figura 2.13.** Respuestas obtenidas para el cuerpo en análisis para el sismo de Loma Prieta al 100%: a, b), c), d)  $F_u/W=0.48$  y e), f), g), h)  $F_u/W=0.24$ .

En este caso, se puede observar que para la falla por tensión pura en ninguno de los casos se tuvo algún daño relevante, mientras que para el caso de la revisión por tensión- cortante se puede deducir lo siguiente: 1) dada la relación  $F_u/W=0.48$  con  $\mu$  igual a 5, existe un daño relativamente bajo, mientras que en el caso de la ductilidad igual a 10 no existe daño alguno; 2) para el caso  $F_u/W=0.24$  en ambos casos de ductilidad se alcanza un daño apreciable; sin embargo, es de interés observar que en  $\mu$  igual a 10 existe un daño ligeramente mayor que en la ductilidad igual a 5. Una vez más, como en el caso anterior del sismo de Kobe, se puede observar un problema de valor inicial y donde la

respuesta global dependerá en gran medida del instante de ruptura del ancla y la duración de la fase intensa del movimiento al que se encuentre demandado el cuerpo.

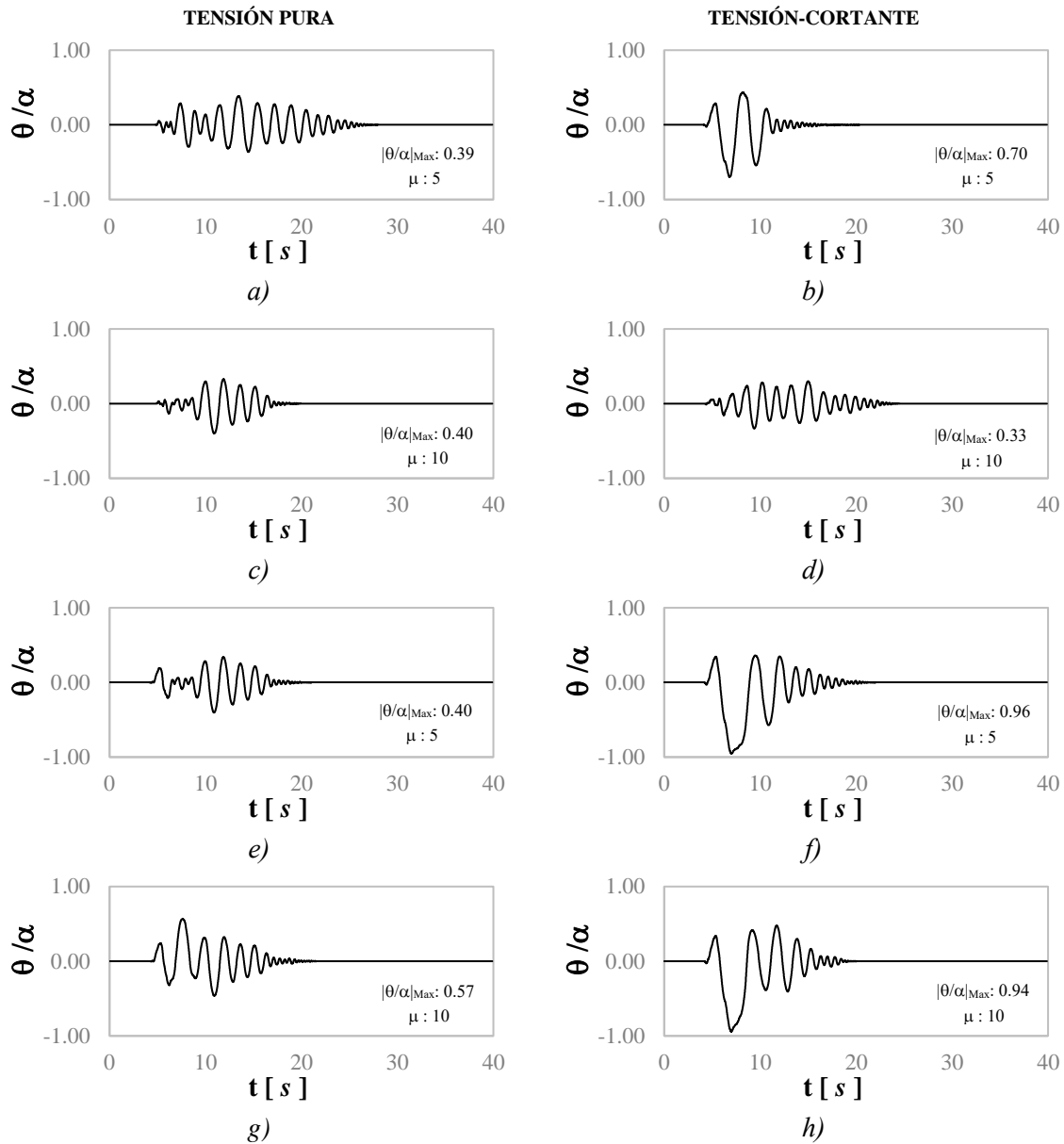
Por su parte, en la Figura 2.14 y 2.15 se muestran los mismos resultados que en los casos anteriores tanto en las relaciones  $F_u/W$  como en las ductilidades ( $\mu$ ) objetivo; sin embargo, las señales utilizadas tanto de Kobe como Loma Prieta se encuentran escaladas linealmente con un factor igual a 2.



**Figura 2.14.** Respuestas obtenidas para el cuerpo en análisis para el sismo de Kobe al 200%: a), b), c), d)  $F_u/W=0.48$ , y e), f), g), h)  $F_u/W=0.24$ .

Se puede observar de manera general que la tendencia en ambas comparaciones tanto en Kobe y Loma Prieta con un factor de escala igual a 2, la ductilidad igual a 5 es propensa a ocasionar más daño en el cuerpo, mientras que la ductilidad igual a 10 ocasiona una reducción en éste.

Al realizar el análisis en la tendencia de daño para los sismos de Kobe, se puede observar que en la revisión tensión-cortante para el caso de  $\mu$  igual a 10, el sismo de Kobe escalado linealmente ocurre una disminución en el daño; sin embargo, en la evaluación de Kobe sin escalar ocurre lo contrario. Es importante recalcar que, los resultados sugieren una vez más, que los instantes de ruptura del ancla y las condiciones iniciales del cuerpo son ampliamente importantes para la respuesta final del mismo.



**Figura 2.15.** Respuestas obtenidas para el cuerpo en análisis para el sismo de Loma Prieta al 200%: a, b), c), d)  $F_u/W=0.48$  y e), f), g), h)  $F_u/W=0.24$ .

Por otro lado, en el caso específico de los resultados para la señal de Loma Prieta escalados linealmente se puede ver que existe mayor daño en la revisión tensión-cortante. De forma análoga, es posible observar que, a diferencia de las comparaciones iniciales en la tendencia del daño, cuando Loma Prieta se escala linealmente presenta mayor daño respecto al de Kobe.

En resumen, dadas las comparaciones realizadas a través de los sismos considerados, se muestra que: 1) la respuesta pico del cuerpo se encuentra ampliamente influenciada por el mecanismo de falla en el ancla: a) tensión pura o b) tensión-cortante; 2) comparando los resultados obtenidos en ambas revisiones, es posible observar que existe una tendencia donde la ductilidad igual a 5 presenta un mayor daño respecto a la ductilidad igual a 10, sin embargo, existen casos donde ocurre lo contrario; 3) el contenido de frecuencias, intensidades pico y duración de la fase intensa del movimiento, son relevantes durante el cálculo de la respuesta y 4) considerando las propiedades mecánicas y, modo de falla del ancla, instante de ruptura y las condiciones iniciales asociadas a éste, se afectará de manera importante la respuesta global del cuerpo donde pudiera o no, pasar de un posible balanceo a un eventual volcamiento.

Por otro lado, en las Tablas 4 y 5 se muestra el compendio de resultados obtenidos para cada una de las fallas evaluadas. El resumen de los resultados antes descritos se muestra en las Figuras 2.16a) y 2.16b) representadas a través de un gráfico de dispersión, donde se observa la comparativa de los instantes de ruptura de las anclas analizadas en los vértices de rotación  $O$  y  $O'$ . La ductilidad objetivo ( $\mu$ ) corresponde al eje de las abscisas y el instante de ruptura ( $T$ ) corresponde al eje de las ordenadas. En estas comparativas se puede observar que, para el caso de la falla por tensión pura, los instantes de ruptura son muy similares y tienen una pequeña variación en función de la ductilidad. Para la falla por tensión-cortante se puede ver que los tiempos de ruptura son crecientes en función de la ductilidad objetivo ( $\mu$ ), siendo la ductilidad igual a 10 la que presenta mayor tiempo de supervivencia. Con base en lo antes descrito, los instantes de ruptura del anclaje en ambas revisiones son diferentes y, por lo tanto, la respuesta final en el cuerpo.

Finalmente, en las Figuras 2.16c) (revisión tensión pura) y 2.16d) (revisión tensión cortante) se representa nuevamente a través de un gráfico de dispersión, el daño absoluto máximo que puede alcanzar el equipo en función de la ductilidad objetivo, representado a través del parámetro  $|\theta|/\alpha$  (en un apartado posterior se discutirá en detalle) para cada una de las señales y revisiones de interés. En estas Figuras, los rombos en azul describen la relación  $F_w/W=0.48$ , seguido de los triángulos de color rojo que representan la relación  $F_w/W=0.24$  y finalmente, los círculos en gris la relación  $F_w/W=0.16$ . En el caso específico de la Figura 2.15c) (revisión tensión pura) se puede observar que existe una tendencia marcada; a medida que la relación  $F_w/W$  aumenta, la amplitud en la respuesta disminuye y al superponer todos los máximos de las respuestas analizadas en ningún caso fue posible alcanzar el colapso del cuerpo. Por su parte, para la comparativa mostrada en la Figura 2.15d) se puede ver que existe una variabilidad importante en el daño alcanzado y no necesariamente en función de la relación  $F_w/W$  aumenta o decrece; sin embargo, se alcanza una mayor amplitud en la respuesta que la revisión por tensión pura.

En general, se ha podido observar que el análisis dinámico de cuerpos rígidos anclados a la base tiene incertidumbres importantes que causan gran variabilidad en el comportamiento y conllevan a un proceso caótico. Entre las incertidumbres se encuentran: pequeños cambios de geometría, intensidad pico, instante de ruptura del anclaje, contenido de frecuencias, revisión de interés, no linealidad en la respuesta, no linealidad en el material, entre otros.

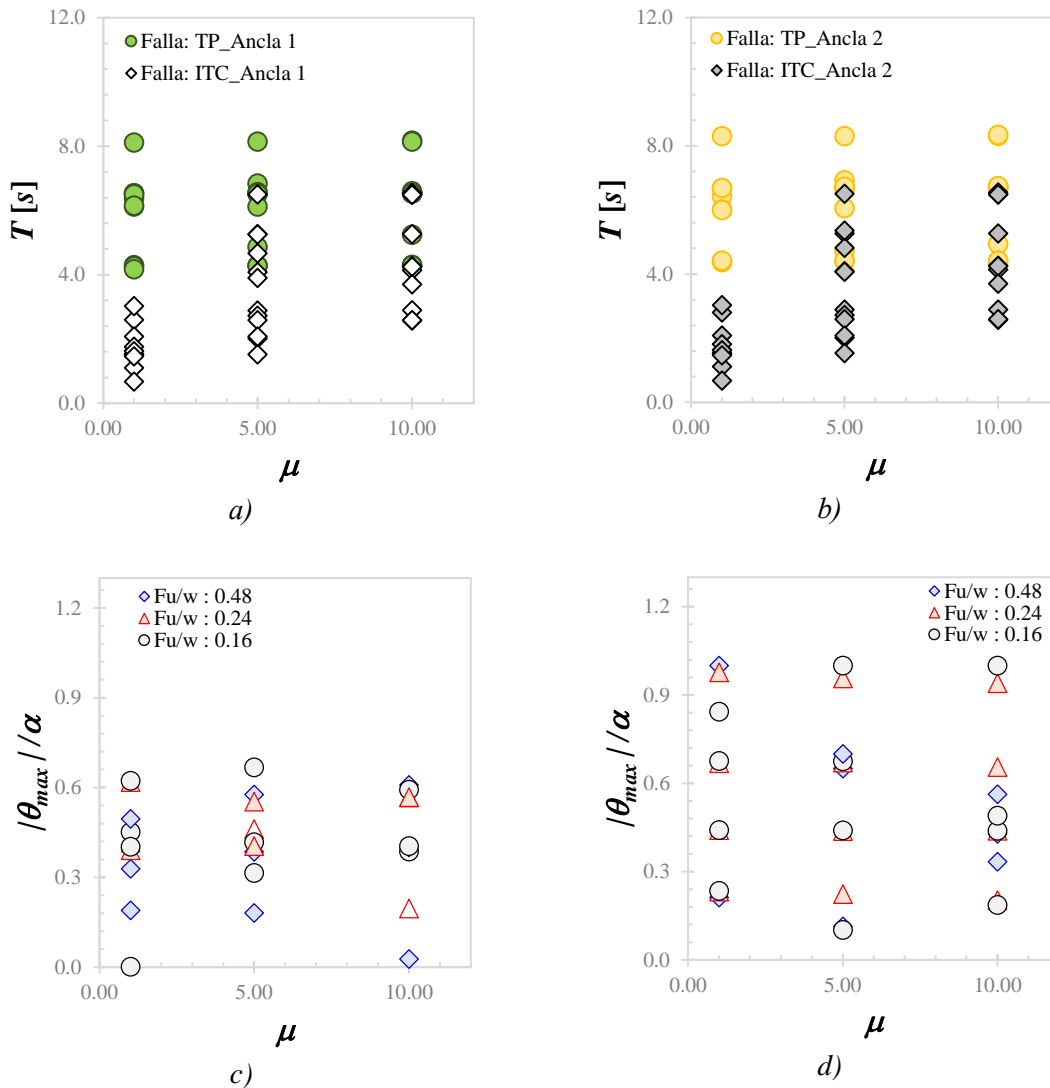
**Tabla 4.** Resumen de resultados obtenidos para el mecanismo de falla: Tensión Pura.

<i>Descripción</i>			<i>Falla: Tensión pura</i>						
			<i>Falla TP: Ancla 1</i>			<i>Falla TP: Ancla 2</i>			
<i>Sismo</i>	<i>F<sub>u</sub>/W</i>	<i>μ</i>	<i>t (s)</i>	<i>P(t)<sub>A</sub>/N<sub>n</sub></i>	<i>V(t)<sub>A</sub>/V<sub>sa</sub></i>	<i>t (s)</i>	<i>P(t)<sub>A</sub>/N<sub>n</sub></i>	<i>V(t)<sub>A</sub>/V<sub>sa</sub></i>	<i> θ<sub>max</sub> /α</i>
<b>Kobe: 100%</b>	<i>F<sub>u</sub>/W</i> 0.48	1	8.112	1.00	0.93	8.296	1.01	0.35	0.19
		5	8.142	1.00	0.86	8.300	1.00	0.34	0.18
		10	8.172	1.00	0.61	8.307	1.00	0.36	0.03
	<i>F<sub>u</sub>/W</i> 0.24	1	6.539	1.00	1.39	6.659	1.01	1.14	0.42
		5	6.833	1.00	1.11	6.918	1.00	0.39	0.46
		10	8.142	1.01	1.52	8.335	1.01	0.92	0.20
	<i>F<sub>u</sub>/W</i> 0.16	1	6.528	1.00	2.02	6.674	1.02	2.23	0.45
		5	6.562	1.00	1.75	6.667	1.01	1.77	0.42
		10	6.593	1.00	0.77	6.671	1.01	1.67	0.39
<b>Loma Prieta: 100%</b>	<i>F<sub>u</sub>/W</i> 0.48	1	----	-----	-----	----	-----	-----	----
		5	----	-----	-----	----	-----	-----	----
		10	----	-----	-----	----	-----	-----	----
	<i>F<sub>u</sub>/W</i> 0.24	1	----	-----	-----	----	-----	-----	----
		5	----	-----	-----	----	-----	-----	----
		10	----	-----	-----	----	-----	-----	----
	<i>F<sub>u</sub>/W</i> 0.16	1	6.371	1.00	1.81	6.425	1.00	0.02	0.00
		5	----	-----	-----	----	-----	-----	----
		10	----	-----	-----	----	-----	-----	----
<b>Kobe: 200%</b>	<i>F<sub>u</sub>/W</i> 0.48	1	6.500	1.00	1.01	6.685	1.04	1.74	0.50
		5	6.526	1.01	1.19	6.687	1.03	1.60	0.58
		10	6.539	1.00	1.10	6.688	1.01	1.43	0.61
	<i>F<sub>u</sub>/W</i> 0.24	1	6.122	1.01	0.72	6.011	1.00	1.24	0.62
		5	6.514	1.00	2.19	6.718	1.07	3.82	0.55
		10	6.526	1.01	2.09	6.718	1.01	3.37	0.57
	<i>F<sub>u</sub>/W</i> 0.16	1	6.149	1.02	0.15	5.991	1.00	1.87	0.62
		5	6.122	1.00	0.96	6.054	1.00	1.12	0.67
		10	6.523	1.01	3.08	6.737	1.04	4.49	0.59
<b>Loa Prieta: 200%</b>	<i>F<sub>u</sub>/W</i> 0.48	1	4.294	1.00	0.75	4.364	1.00	0.38	0.33
		5	4.867	1.00	0.65	4.718	1.00	0.66	0.39
		10	5.237	1.01	0.84	4.935	1.01	0.52	0.40
	<i>F<sub>u</sub>/W</i> 0.24	1	4.258	1.00	1.47	4.405	1.00	0.85	0.39
		5	4.287	1.01	1.43	4.399	1.01	1.03	0.40
		10	4.309	1.00	0.89	4.398	1.00	0.93	0.57
	<i>F<sub>u</sub>/W</i> 0.16	1	4.163	1.00	1.86	4.420	1.02	0.30	0.40
		5	4.272	1.01	2.18	4.419	1.00	0.32	0.32
		10	4.288	1.01	1.88	4.420	1.01	0.24	0.40

**Tabla 5.** Resumen de resultados obtenidos para el mecanismo de falla: Tensión-Cortante.

Descripción			Falla: Tensión - Cortante						
			Falla ITC: Ancla 1			Falla ITC: Ancla 2			
Sismo	FU/W	$\mu$	$t$ (s)	$P(t)_A/N_n$	$V(t)_A/V_{sa}$	$t$ (s)	$P(t)_A/N_n$	$V(t)_A/V_{sa}$	$ \theta_{max} /\alpha$
Kobe: 100%	$F_{u/w}$ 0.48	1	2.590	0.98	0.15	2.799	0.96	0.23	0.44
		5	6.492	0.88	0.38	6.506	0.00	1.00	0.44
		10	6.539	0.76	0.55	6.540	0.37	1.10	0.43
	$F_{u/w}$ 0.24	1	1.524	0.97	0.18	1.528	0.90	0.39	0.44
		5	5.256	0.86	0.41	5.267	0.85	0.89	0.44
		10	6.484	0.77	0.54	6.485	0.00	1.12	0.44
	$F_{u/w}$ 0.16	1	1.512	0.96	0.21	1.520	0.93	0.50	0.44
		5	2.877	0.86	0.42	2.885	0.85	0.92	0.44
		10	5.264	0.75	0.57	5.265	0.00	1.15	0.44
Loma Prieta: 100%	$F_{u/w}$ 0.48	1	3.020	0.97	0.17	3.027	0.94	0.24	0.21
		5	4.661	0.86	0.41	4.810	0.96	0.20	0.11
		10	----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
	$F_{u/w}$ 0.24	1	2.077	0.97	0.17	2.084	0.93	0.29	0.23
		5	4.079	0.87	0.40	4.088	0.82	0.83	0.22
		10	4.254	0.76	0.56	4.255	0.00	1.12	0.20
	$F_{u/w}$ 0.16	1	1.620	0.96	0.20	1.627	0.95	0.23	0.24
		5	2.718	0.86	0.40	2.722	0.84	0.77	0.10
		10	4.133	0.76	0.56	4.134	0.70	1.15	0.19
Kobe: 200%	$F_{u/w}$ 0.48	1	1.513	0.98	0.14	1.524	0.92	0.36	0.67
		5	5.249	0.88	0.38	5.351	0.83	0.45	0.65
		10	6.484	0.77	0.54	6.485	0.00	1.12	0.56
	$F_{u/w}$ 0.24	1	1.100	0.96	0.19	1.107	0.93	0.42	0.67
		5	2.010	0.87	0.40	2.014	0.72	0.75	0.67
		10	2.889	0.76	0.56	2.890	0.00	1.13	0.66
	$F_{u/w}$ 0.16	1	0.666	0.96	0.19	0.669	0.95	0.39	0.68
		5	1.517	0.86	0.42	1.526	0.84	1.00	0.67
		10	2.569	0.76	0.55	2.570	0.00	1.14	0.49
Loma Prieta: 200%	$F_{u/w}$ 0.48	1	1.752	0.98	0.12	1.806	0.97	0.19	1.00
		5	3.900	0.88	0.37	4.070	0.82	0.51	0.70
		10	4.249	0.78	0.52	4.250	0.00	1.06	0.33
	$F_{u/w}$ 0.24	1	1.613	0.96	0.23	1.618	0.91	0.51	0.98
		5	2.586	0.83	0.47	2.588	0.00	1.04	0.96
		10	3.695	0.75	0.57	3.696	0.00	1.13	0.94
	$F_{u/w}$ 0.16	1	1.451	0.96	0.21	1.460	0.93	0.35	0.84
		5	2.076	0.85	0.43	2.080	0.80	1.01	1.00
		10	2.585	0.75	0.58	2.586	0.00	1.24	1.00





**Figura 2.16.** Compendio de resultados para las revisiones por tensión pura y tensión cortante: a) y b) comparativa de los instantes de ruptura de las anclas analizadas en los vértices de rotación  $O$  y  $O'$ ; c) daño absoluto máximo para tensión pura y d) daño absoluto máximo para la interacción tensión-cortante.

### 2.3.7 RESPUESTA EN CUERPOS SIMPLEMENTE APOYADOS Y ANCLADOS A LA BASE ANTE SISMOS MEXICANOS

En esta sección, se muestran los resultados de la respuesta dinámica de cuerpos simplemente apoyados y anclados a la base para las revisiones tensión pura y la interacción tensión-cortante. En este análisis se han utilizado sismos representativos del peligro sísmico mexicano que han tenido la mayor intensidad en aceleración máxima del suelo (PGA) para 10 estaciones distribuidas geográficamente en los estados de: Guerrero, Oaxaca y Ciudad de México; las estaciones se encuentran en terreno firme y suelo blando buscando representar el contenido de frecuencias característicos de cada una de las zonas evaluadas. En la Tabla 6, se muestra la descripción y las

coordenadas latitud y longitud de ellas, mientras que en Tabla 7 se encuentran los epicentros de los 12 eventos utilizados. Es necesario mencionar que, los eventos aquí mostrados representan sismos de subducción de fuente cercana y lejana y además de sismos de falla normal de profundidad intermedia. Por su parte, en la Figura 2.17, se representa la distribución espacial de las estaciones y eventos utilizados.

Por otro lado, en las Tablas 8 y 9 se muestran las características generales del tipo de ancla y el equipo evaluado, donde de manera general tiene una relación de esbeltez  $h/b = 2.6$  comúnmente utilizada en la práctica y, además con cinco diferentes excentricidades propuestas y una relación  $F_w/W = 0.48$ .

**Tabla 6.** Descripción de las estaciones utilizadas para el análisis.

Clave	Nombre	Estado	Latitud	Longitud
ACAZ	Acapulco La Zanja	Guerrero	16.7885	-99.7902
ACP2	Acapulco Preparatoria	Guerrero	16.8743	-99.8865
COYC	Coyuca	Guerrero	16.9978	-100.0900
PNTP	Pinotepa Nacional	Oaxaca	16.3405	-98.0537
SCRU	Salina Cruz	Oaxaca	16.1875	-95.2092
NILT	Niltepec	Oaxaca	16.5652	-94.6169
CUP5	Idei Patio 5	Ciudad de México	19.3302	-99.1811
SCT1	SCT B-1	Ciudad de México	19.3947	-99.1487
SCT2	SCT B-2	Ciudad de México	19.39469	-99.14868

**Tabla 7.** Descripción de los eventos utilizados en el análisis.

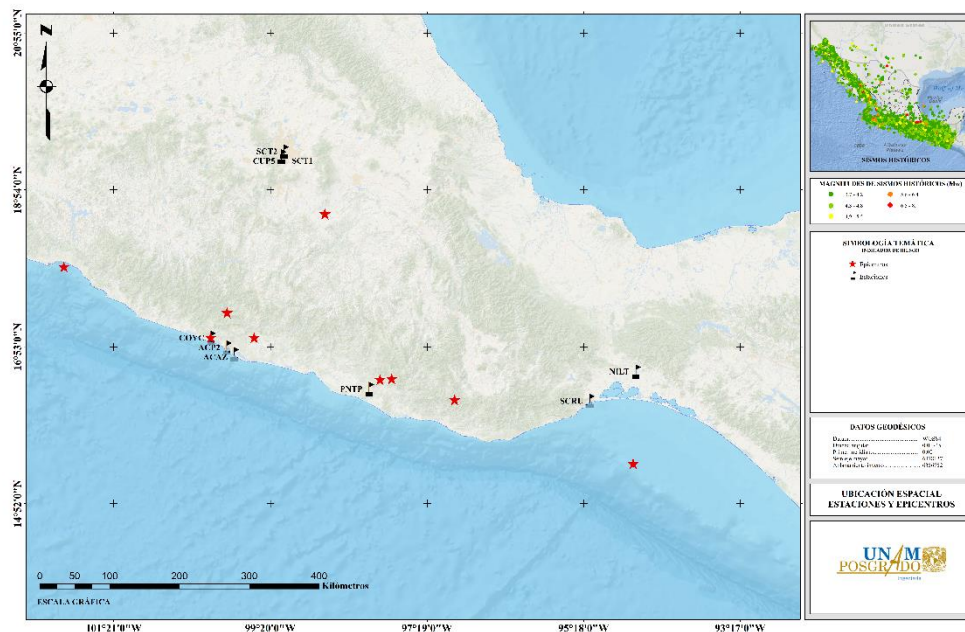
ID	Epicentro						
	Fecha	Clave	Latitud	Longitud	$M_w$	$M_0$	PGA (cm/s <sup>2</sup> )
1	19/09/1985	SCT1	17.91	-101.99	8	1.10E+28	161.63
2	30/09/1999	PNTP	16.2	-96.96	7.4	1.72E+27	304.83
3	08/10/2001	COYC	17.32	-99.89	5.8	7.41E+24	319.25
4	14/06/2004	PNTP	16.46	-97.92	5.9	8.66E+24	436.73
5	30/06/2010	PNTP	16.47	-97.77	6.3	3.06E+25	353.43
6	23/09/2011	COYC	17	-100.1	4.8	1.95E+23	201.97
7	21/08/2013	ACP2	17	-99.54	6.2	2.24E+25	250.65
8	21/08/2013	ACAZ	17	-99.54	6.2	2.24E+25	331.63
9	08/09/2017	NILT	15.38	-94.66	8.2	2.82E+28	488.63
10	08/09/2017	SCRU	15.38	-94.66	8.2	2.82E+28	293.29
11	19/09/2017	CUP5	18.59	-98.63	7.1	6.51E+26	58.83
12	19/09/2017	SCT2	18.59	-98.63	7.1	6.51E+26	91.68

**Tabla 8.** Propiedades relevantes para la modelación del ancla.

$K$ (kg/cm)	$f_y$ (kg/cm)	$\phi$ (cm)	$\theta_y$	$u_y$ (cm)	$\mu$		
2,066,353	3800	2.54	6.99E-05	0.00699	1	5	10

**Tabla 9.** Propiedades geométricas relevantes para la modelación del cuerpo incluyendo las excentricidades propuestas.

$b(m)$	$h(m)$	$e_x$	$e_y$	$R_R(m)$	$R_L(m)$	$B_R(m)$	$B_L(m)$	$p_R(rad/s)$	$p_L(rad/s)$
0.5	1.3	0	0	1.39	1.39	0.5	0.5	2.30	2.30
0.5	1.3	0.2	0	1.33	1.48	0.3	0.7	2.34	2.28
0.5	1.3	0	0.2	1.64	1.64	0.5	0.5	2.49	2.49
0.5	1.3	0	-0.2	1.15	1.15	0.5	0.5	2.09	2.09
0.5	1.3	0.2	0.2	1.59	1.71	0.3	0.7	2.56	2.45
0.5	1.3	-0.2	-0.2	1.25	1.08	0.7	0.3	2.10	2.11



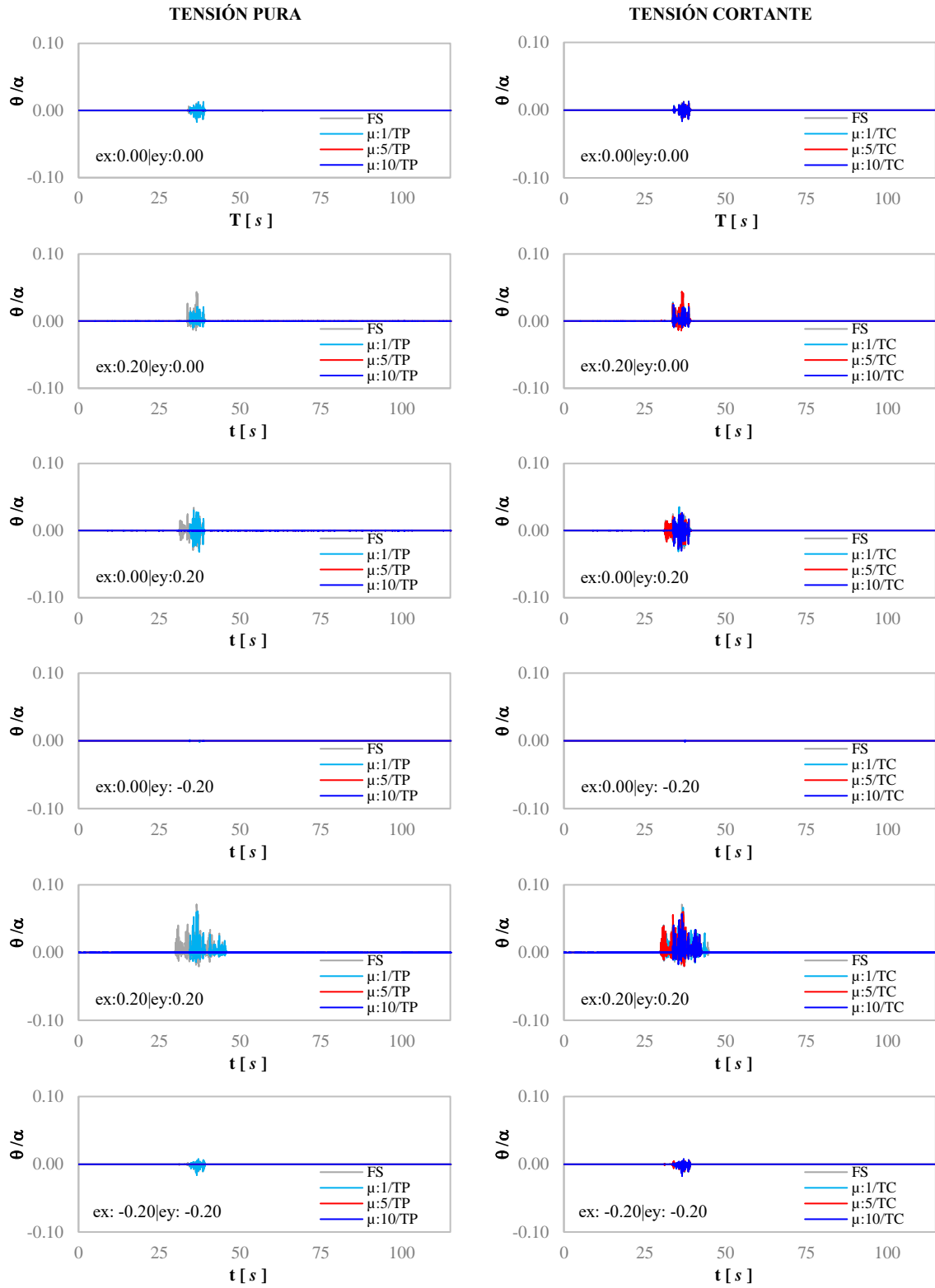
**Figura 2.17.** Distribución espacial de los epicentros y estaciones evaluadas en el presente análisis.

En las Figuras 2.18 a 2.27 se muestran las respuestas del cuerpo que ilustran el comportamiento dinámico de cuerpos rígidos en sus dos modos fundamentales para las tres ductilidades ( $\mu$ ) objetivo consideradas en el presente trabajo, donde *FS* representa un cuerpo simplemente apoyado, *TC* la falla combinada tensión-cortante y *TP* el mecanismo de falla por tensión pura.

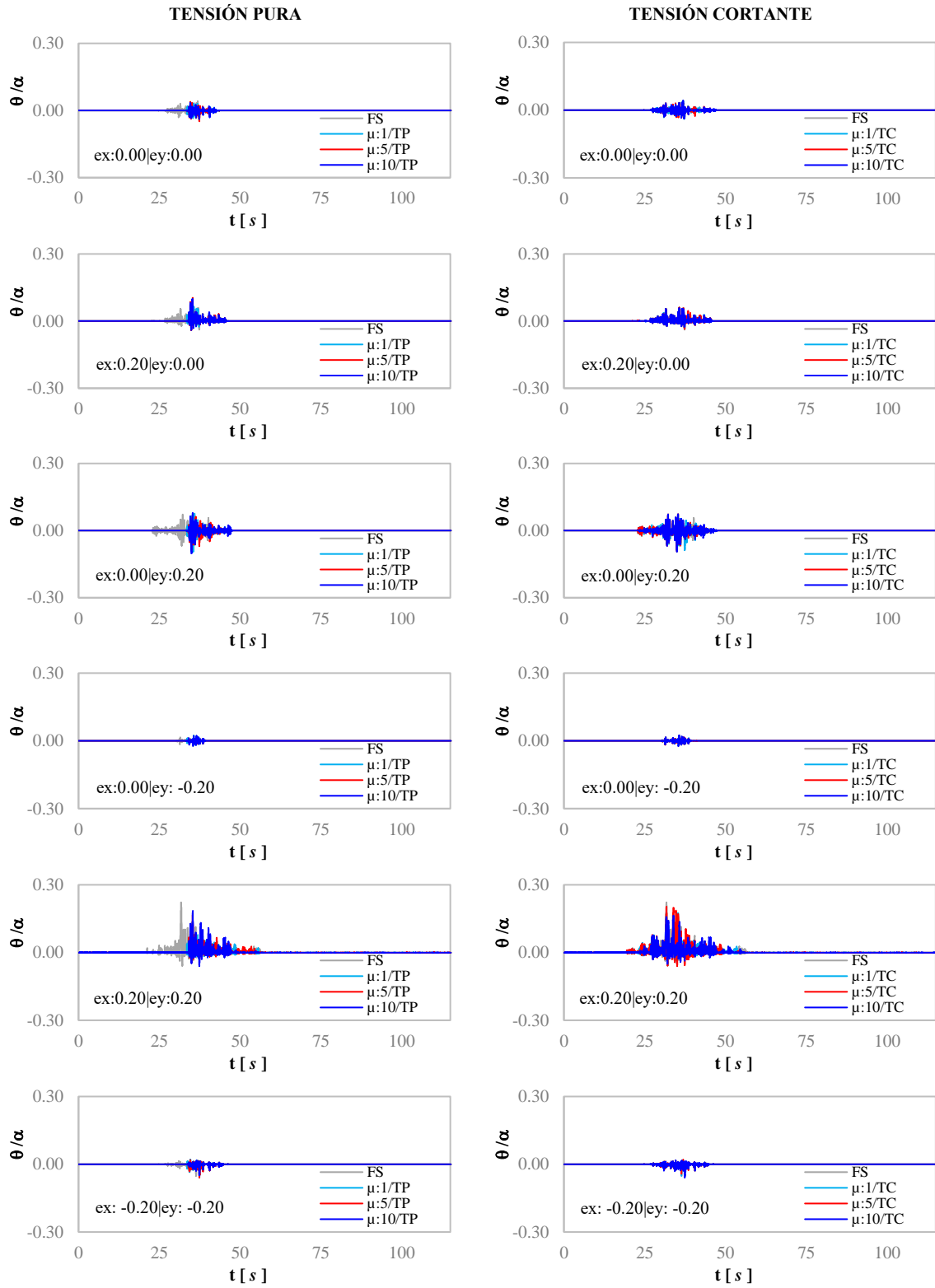
Por otro lado, en las Figuras 2.18 y 2.19 se muestran los resultados para el evento ocurrido el 08/09/2017 sin escalar y con un factor de escalamiento lineal igual 2 en la estación NILT ubicada muy cerca de la costa en el estado de Oaxaca. En estos resultados es posible apreciar que, en ambas revisiones y para todos los casos considerados; a medida que la ductilidad incrementa, el daño tiende a ser menor. De acuerdo con las excentricidades utilizadas para ejemplificar la irregularidad en masa y geometría, se puede ver que, existe un mayor daño en las excentricidades dadas por  $e_x:0.20|e_y:0.00$  y  $e_x:0.20|e_y:0.20$ . Lo anterior, asociado principalmente a la distancia medida desde de los puntos de rotación del cuerpo  $O$  u  $O'$  al centro de masas que se genera por las irregularidades, lo que conlleva a un mayor momento y por consecuencia interactuar de un posible balanceo a un eventual volcamiento. Por su parte, en las Figuras 2.20 y 2.21, se muestran las respuestas independientes

realizadas para el evento del 14/06/2004 para la estación PNTP ubicada cerca de la costa en el estado de Oaxaca. En estas figuras se puede observar que: 1) para el caso del evento evaluado al 100% y adoptando la revisión por tensión pura cuando el equipo se encuentra anclado, no existe daño relevante en ningún caso; 2) en la revisión dada por la interacción tensión-cortante para el caso de la excentricidad  $ex:0.20|ey:0.20$  con una ductilidad ( $\mu$ ) objetivo igual a 10, presenta mayor amplitud en su movimiento; 3) cuando el equipo se encuentra simplemente apoyado, la excentricidad que mayor daño presenta se encuentra asociada a  $ex:0.20|ey:0.20$ ; 4) en el caso específico del evento evaluado con un factor de escalamiento lineal igual a 2, es posible observar que existe daño considerable en la mayoría de los casos evaluados, sin embargo, es posible deducir que a medida que crece la distancia desde los puntos de rotación del cuerpo  $O$  u  $O'$  al centro de masas considerando los efectos inducidos por la excentricidad, el daño en el cuerpo tiene un efecto similar, por lo que se puede decir que, la distancia al centro de masa se encuentra relacionado con la transición de balanceo a un eventual volcamiento del cuerpo; 5) finalmente, en la evaluación de este evento escalado linealmente, la tendencia indica que una vez anclando el cuerpo, las amplitudes de rotación disminuyen, siendo el caso elástico el que mayores amplitudes provoca. En las Figuras 2.22 y 2.23 se muestran las respuestas independientes para el evento del 21/08/2013 en la estación ACAZ ubicada en el estado de Guerrero, donde es posible observar que para este evento sin escalar no se presenta un daño relevante en ninguno de los casos de interés. Por otro lado, y para este evento escalado linealmente con un factor igual a 2 se observa que: 1) existe daño importante para las excentricidades  $ex:0.20|ey:0.00$ ,  $ex:0.00|ey:0.20$  y  $ex:0.20|ey:0.20$  en los regímenes simplemente apoyado y anclado a la base para la revisión por la interacción tensión-cortante; 2) en el caso específico de la excentricidad  $ex:0.20|ey:0.00$  considerando la revisión tensión-cortante, es de interés recalcar que en la ductilidad objetivo igual a 10 provoca una mayor amplificación en su movimiento, sin embargo, en la comparativa de respuestas con el régimen simplemente apoyado y a pesar que el cuerpo anclado exhibe una respuesta pico mayor, el número de impactos en el caso simplemente apoyado es considerable, por lo que sugiere que, a pesar de las diferencias importantes en la respuesta pico, el cuerpo puede presentar daño por vibraciones permisibles en el caso simplemente apoyado; 3) por su parte, para el caso de la excentricidad  $ex:0.20|ey:0.20$  para un cuerpo anclado considerando la revisión tensión-cortante, se puede observar que existe un daño mayor que en un cuerpo simplemente apoyado, por lo que sugiere que, existe un contenido de frecuencias, propiedades geométricas y, rotacionales y ubicación del centro de masa donde el anclaje ocasiona un mayor predisposición de daño en el cuerpo.

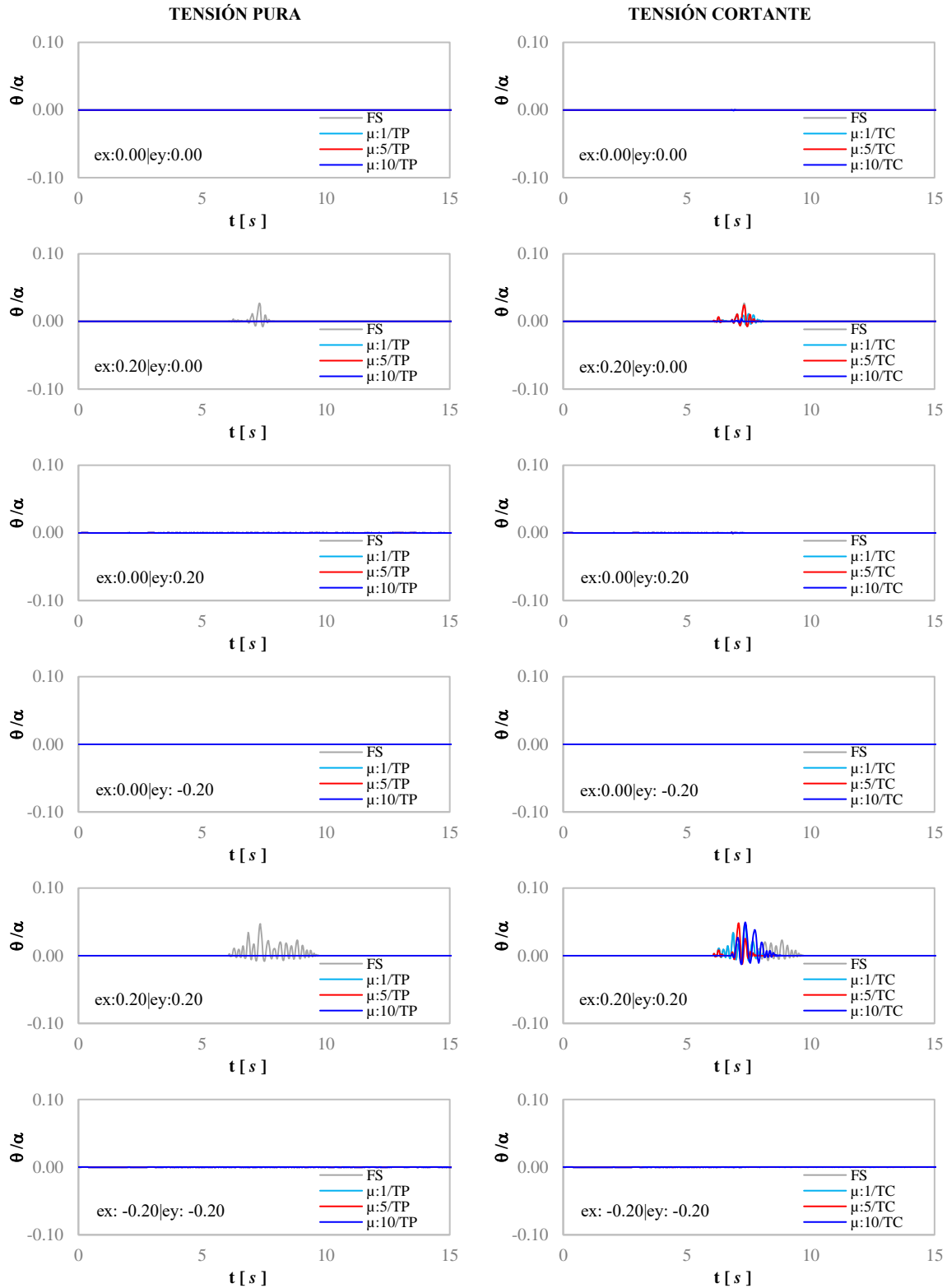
En las Figuras 2.24 y 2.25 se analizan las respuestas para el evento ocurrido el pasado 19/09/2017 en la Ciudad de México para la estación CUP5. En estas respuestas, se puede ver que a pesar de ser el sismo con las intensidades más importante en PGA registradas en esa estación, en ningún caso se produce un daño relevante. Finalmente, en las Figuras 2.26 y 2.27 se muestran las comparativas para el sismo del 19/09/1985 asociado a la estación SCT-1 ubicada en la Ciudad de México. Éstas comparativas revelan que, a pesar de ser el sismo con mayores daños en el territorio mexicano, para el cuerpo aquí considerado y a través de las excentricidades propuestas, no se genera un daño importante, sin embargo, una vez escalado linealmente al 200% con la finalidad de obtener intensidades superiores y observar su comportamiento, sólo para las excentricidades asociadas a  $ex:0.20|ey:0.00$  y  $ex:0.20|ey:0.20$ , existe colapso en el régimen simplemente apoyado y para el caso anclado sólo en la revisión dada por la interacción tensión-cortante para las ductilidades objetivo 5 y 10 respectivamente.



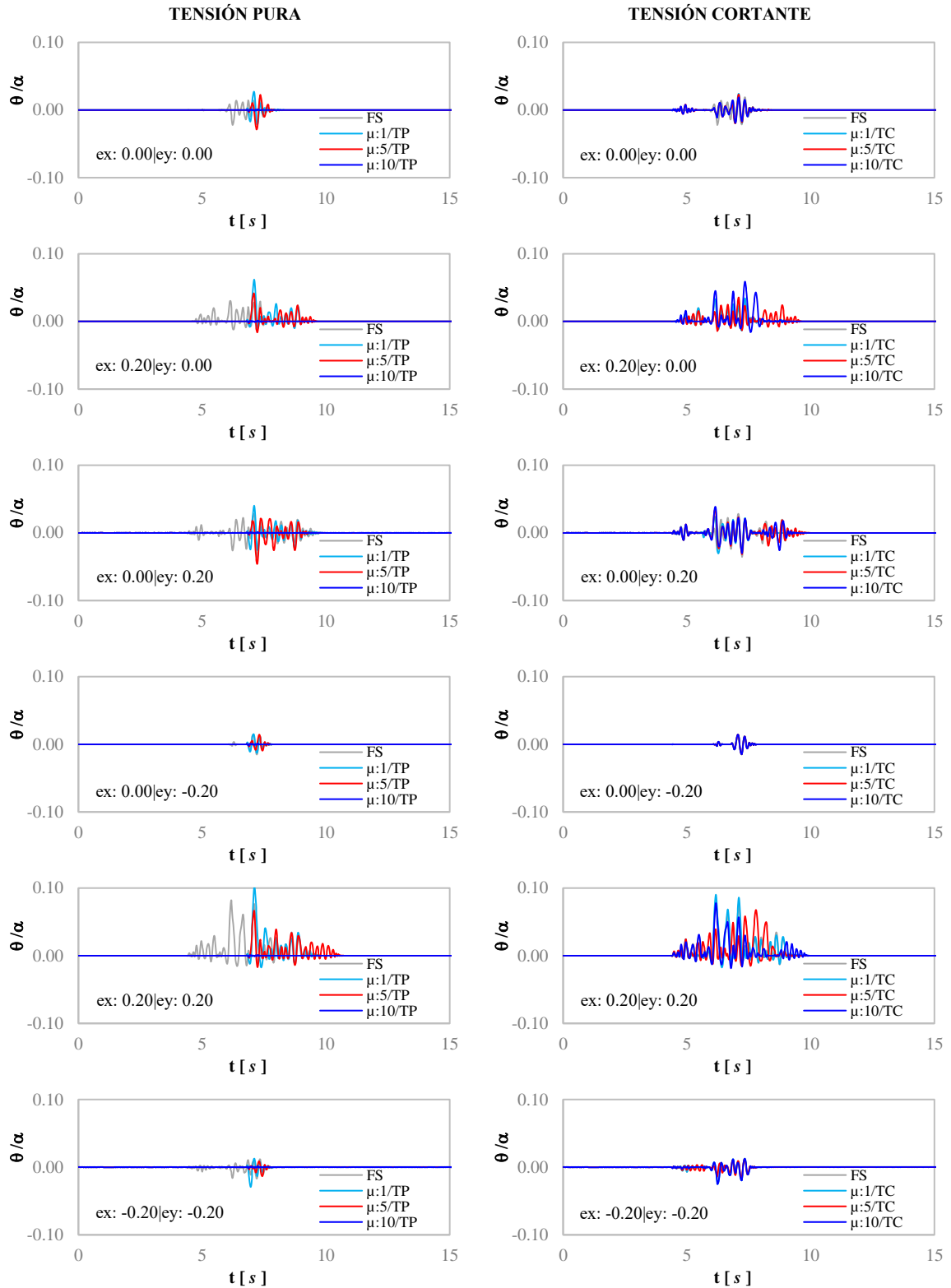
**Figura 2.18.** Resultados para el evento ocurrido el pasado 08/09/2017 sin escalar en la estación NILT con  $\mu$  igual a 1, 5 y 10 una relación  $F_{\mu}/W=0.48$ .



**Figura 2.19.** Resultados para el evento ocurrido el pasado 08/09/2017 escalado linealmente con un factor igual a 2 en la estación NILT con  $\mu$  igual a 1, 5 y 10 una relación  $F_u/W=0.48$ .

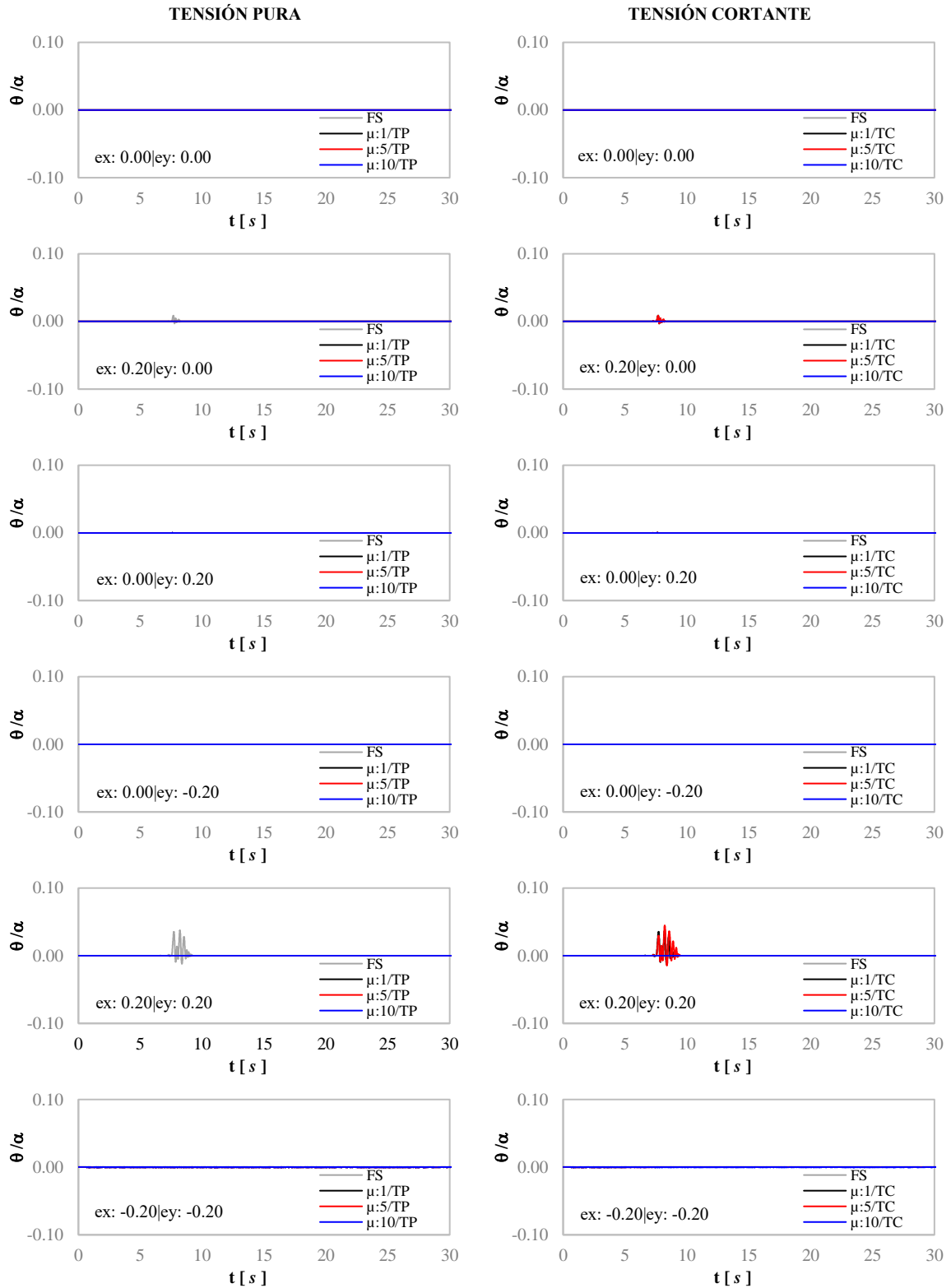


**Figura 2.20.** Resultados para el evento ocurrido el pasado 14/06/2004 sin escalar en la estación PNTP con  $\mu$  igual a 1, 5 y 10 una relación  $F_H/W=0.48$ .

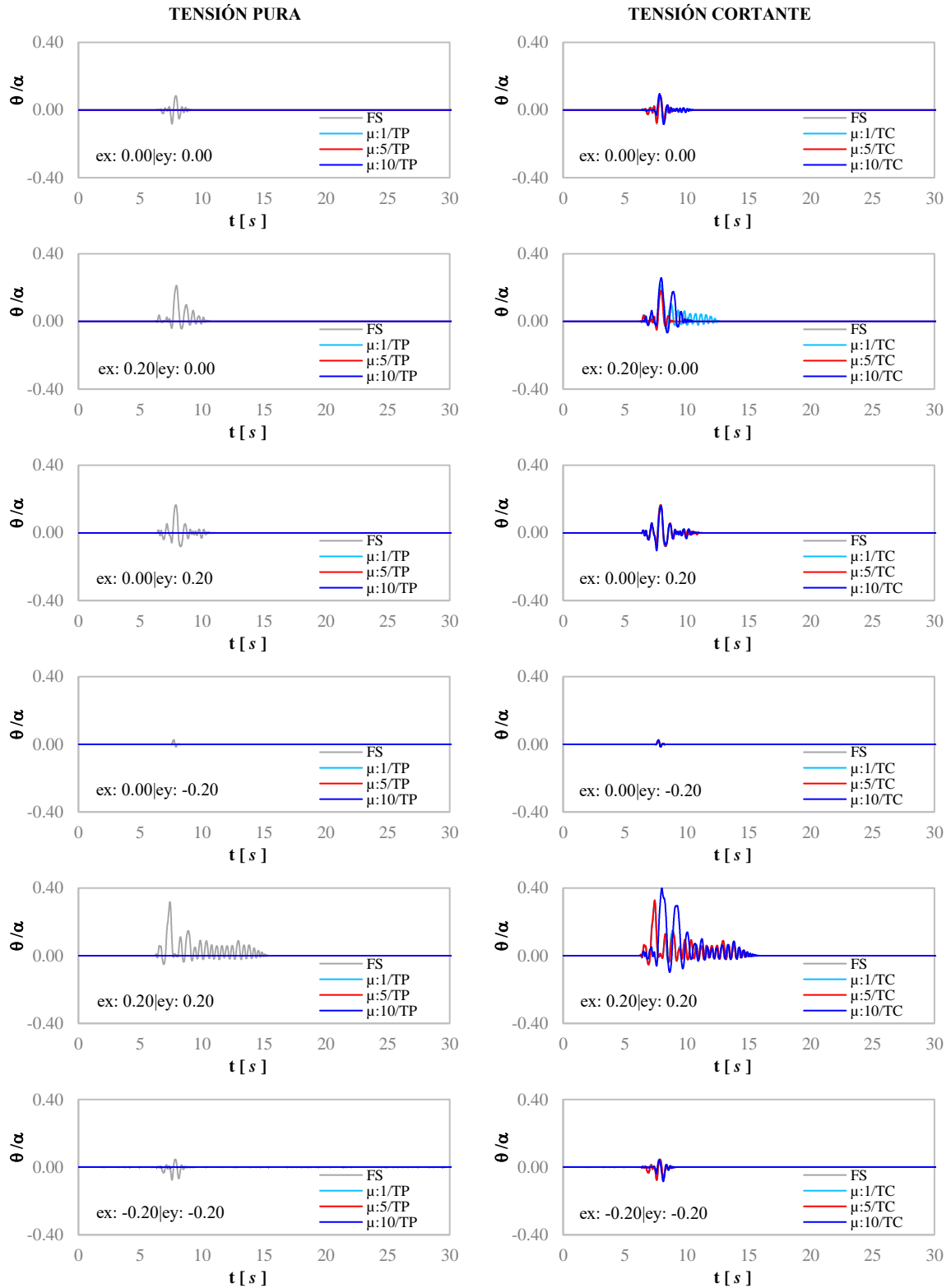


**Figura 2.21.** Resultados para el evento ocurrido el pasado 14/06/2004 escalados linealmente con un factor igual a 2 en la estación PNTTP con  $\mu$  igual a 1, 5 y 10 una relación  $F_u/W=0.48$ .

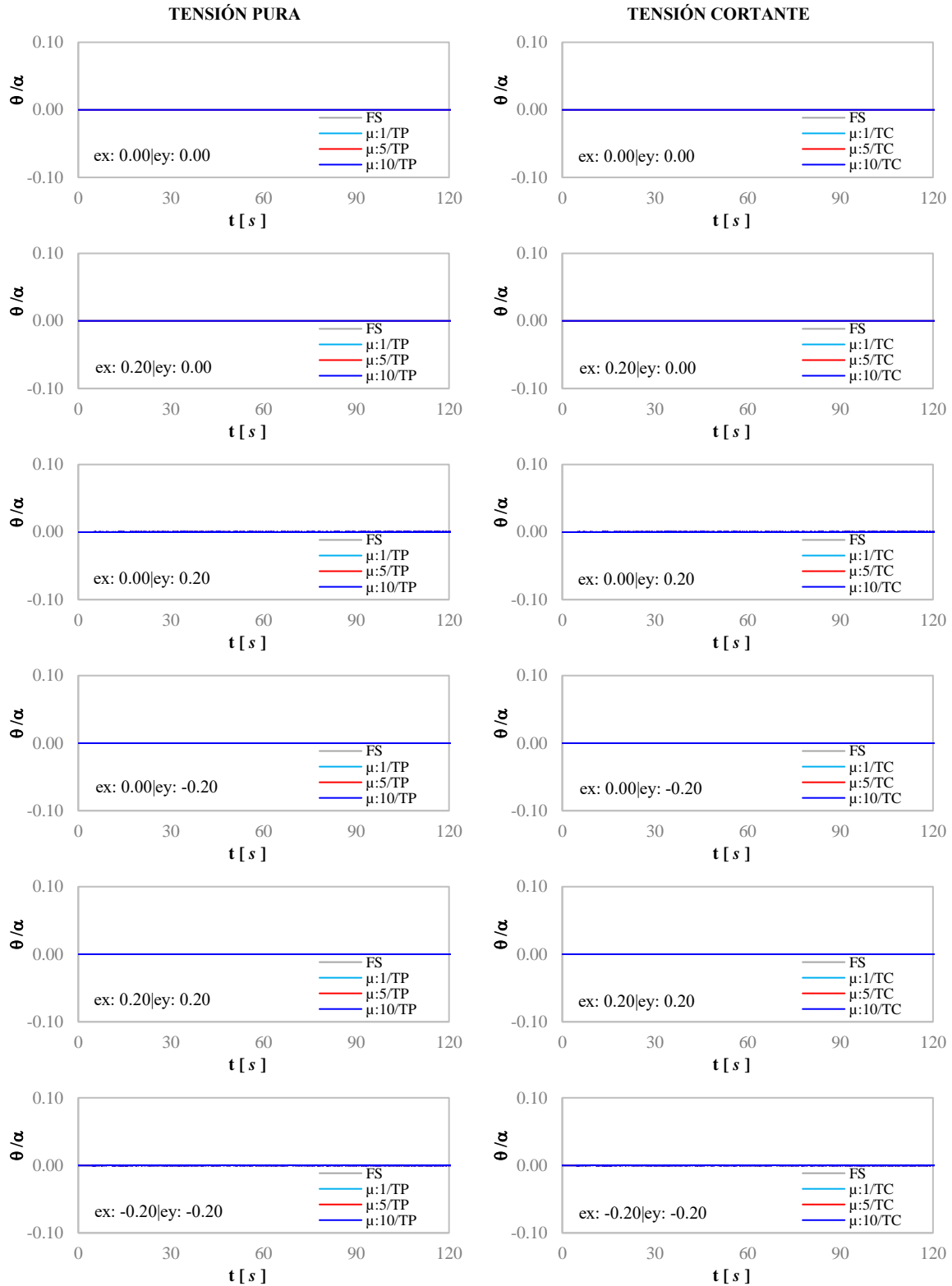




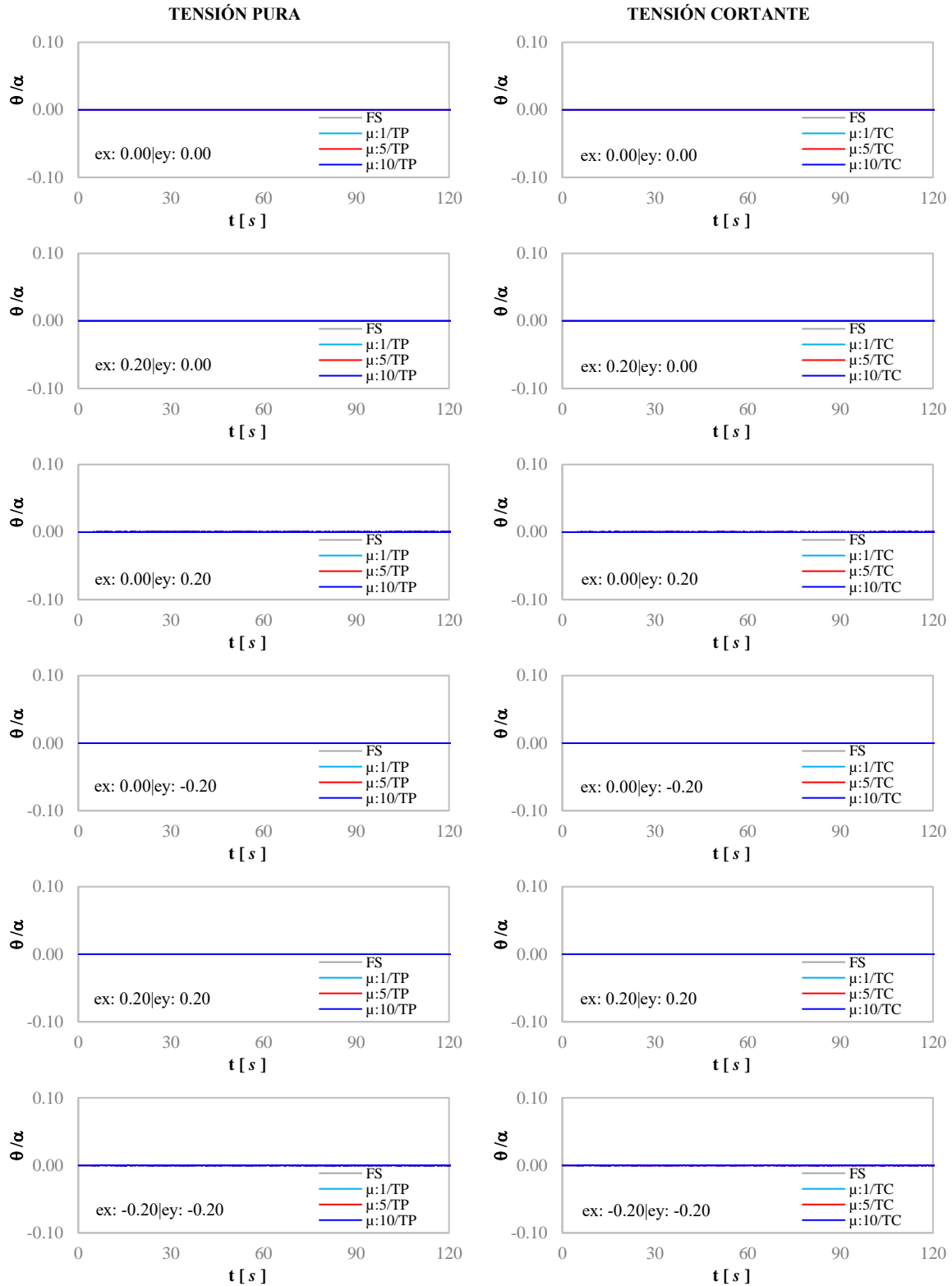
**Figura 2.22.** Resultados para el evento ocurrido el pasado 21/08/2013 sin escalar en la estación ACAZ con  $\mu$  igual a 1, 5 y 10 una relación  $F_H/W=0.48$ .



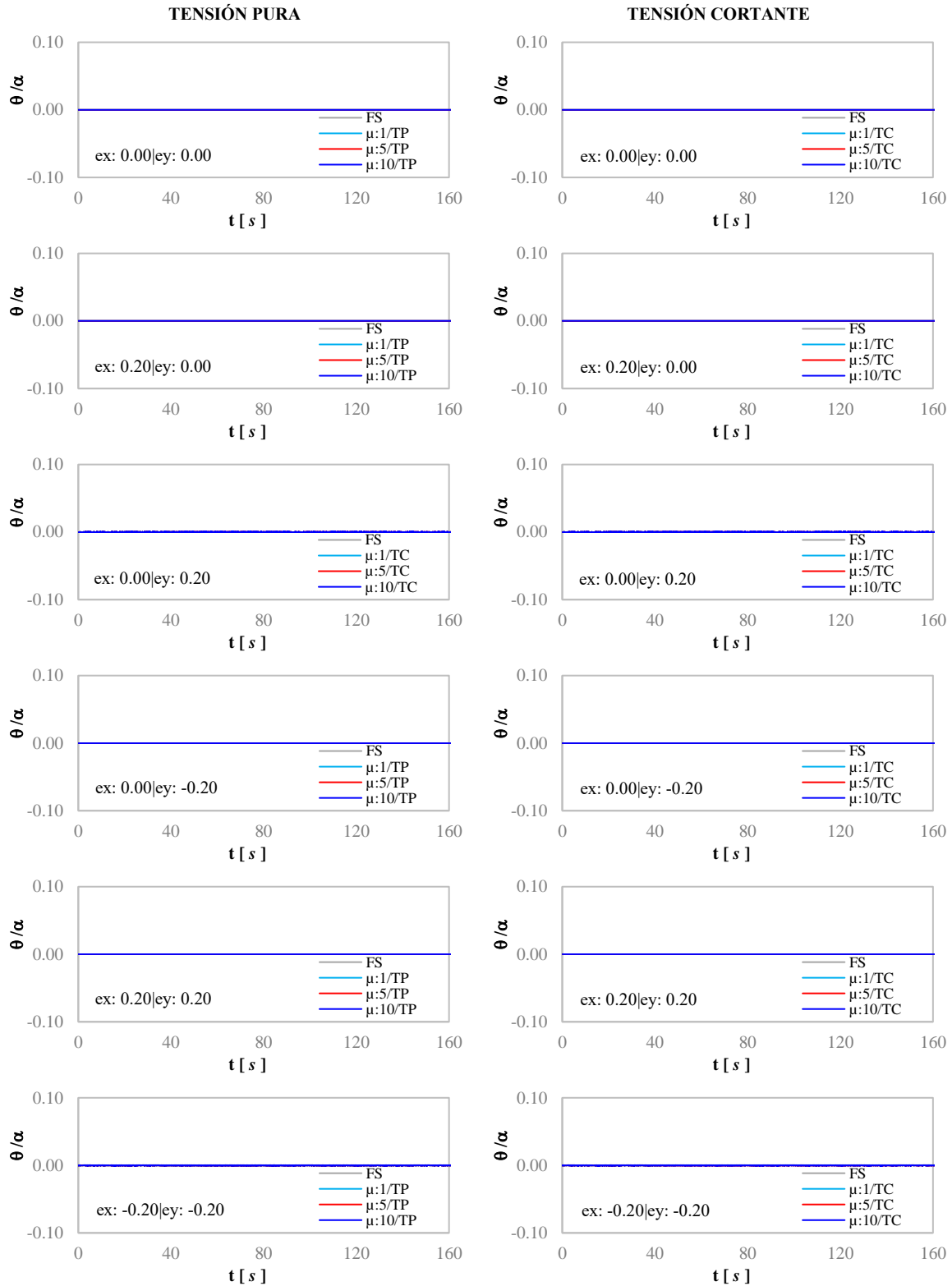
**Figura 2.23.** Resultados para el evento ocurrido el pasado 21/08/2013 escalado linealmente con un factor igual a 2 en la estación ACAZ con  $\mu$  igual a 1, 5 y 10 una relación  $F_u/W=0.48$ .



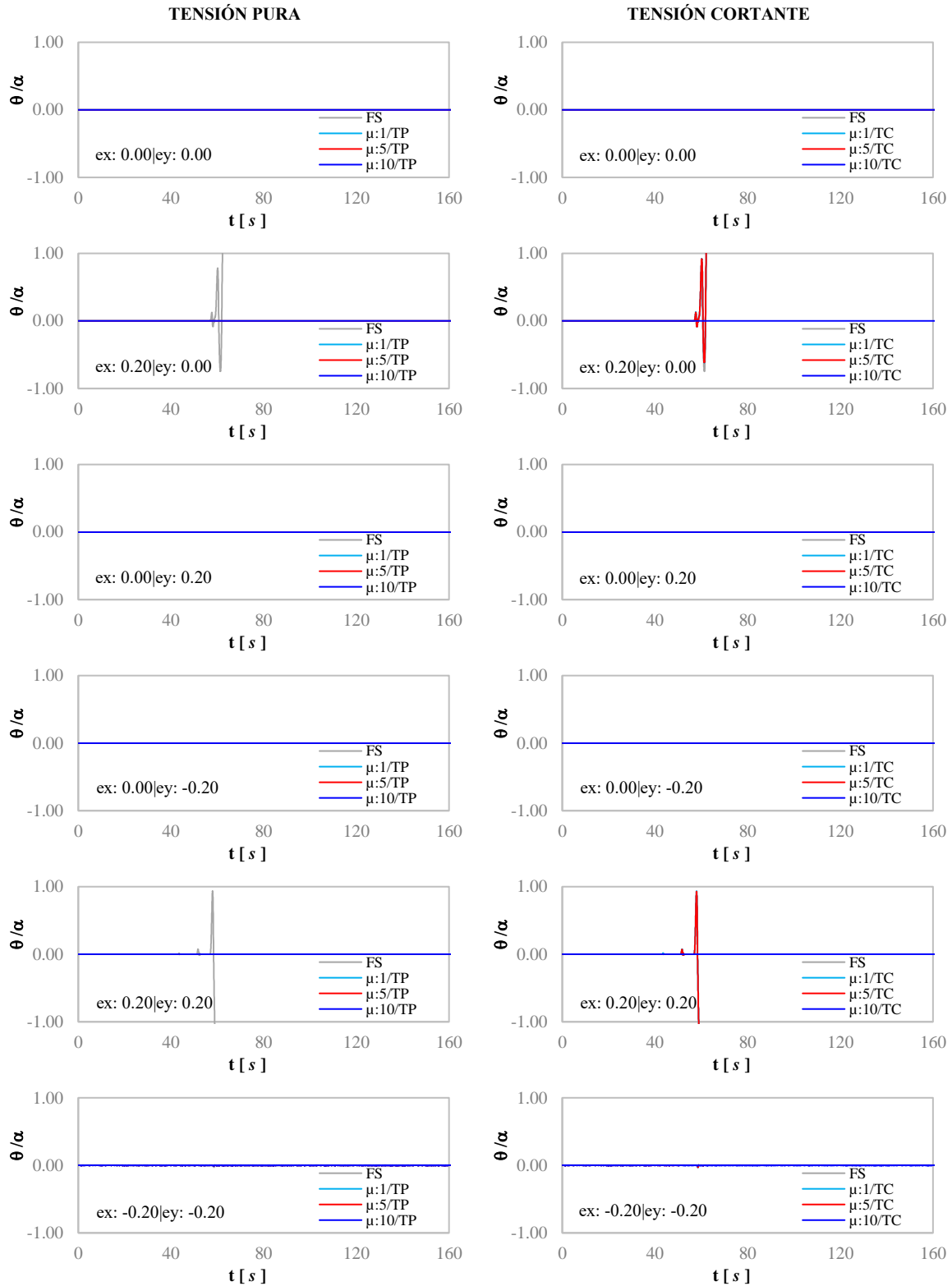
**Figura 2.24.** Resultados para el evento ocurrido el pasado 19/09/2017 sin escalar en la estación CUP05 con  $\mu$  igual a 1, 5 y 10 una relación  $F_H/W=0.48$ .



**Figura 2.25.** Resultados para el evento ocurrido el pasado 19/09/2017 escalado linealmente con un factor igual a 2 en la estación CUP05 con  $\mu$  igual a 1, 5 y 10 una relación  $F_u/W=0.48$ .



**Figura 2.26.** Resultados para el evento ocurrido el pasado 19/09/1985 sin escalar en la estación SCT1 con  $\mu$  igual a 1, 5 y 10 una relación  $F_H/W=0.48$ .



**Figura 2.27.** Resultados para el evento ocurrido el pasado 19/09/1985 escalados linealmente con un factor igual a 2 en la estación SCT1 con  $\mu$  igual a 1, 5 y 10 una relación  $F_u/W=0.48$ .

## 2.4 ACELERACIÓN MÍNIMA DE VOLCAMIENTO EN CUERPOS SIMPLEMENTE APOYADOS Y ANCLADOS A LA BASE

La respuesta dinámica de cuerpos simplemente apoyados y anclados a la base depende en gran medida de: geometría, propiedades inerciales, interfaz, superficie portante, coeficiente de restitución, contenido de frecuencias, intensidades pico, duración de la fase intensa del movimiento, instante de ruptura del ancla, no linealidad de la respuesta, no linealidad del material, entre otros. En este contexto, fue posible distinguir que existe un rango finito de frecuencias donde dada ciertas combinaciones entre las propiedades cinéticas y cinemáticas, la respuesta en un cuerpo anclado a la base tiene una mayor predisposición al volcamiento que si estuvieran en régimen simplemente apoyado. En este apartado, se describe la metodología y resultados ilustrativos para encontrar la aceleración mínima de volcamiento en ambos regímenes, con fines de caracterizar los posibles rangos donde el efecto del anclaje sea destructivo en el equipo eléctrico. El procedimiento es el siguiente:

- 1) Encontrar la aceleración mínima de volcamiento en cada uno de los regímenes evaluados, la cual se define como la combinación entre el instante de tiempo y la aceleración donde el cuerpo no puede recuperarse más y pase de un balanceo a un eventual volcamiento (Ver Figura 2.28).
- 2) Se ha supuesto que ciertos sismos se pueden modelar mediante señales armónicas de amplitud y frecuencia controlada (Makris y Roussos, 1999; Makris y Zhang 2001; Arredondo y Reinoso, 2008; Dimitrakopoulos y Win, 2016): un sismo de subducción cercano a la fuente corresponde a un pulso de Ricker, un sismo de falla normal de profundidad intermedia a un Senoide y finalmente un sismo de subducción de fuente lejana es posible representarlo a través del pulso propuesto por Huerta (2001). Las formas funcionales de estos pulsos y funciones armónicas se encuentran en las expresiones 20 a 22 respectivamente.

$$\ddot{u}_x = A(2a-1)e^{-a}; a = \left| \frac{\omega(t-T_s)}{2} \right|^2 \quad (\text{Ec. 20})$$

donde  $A$  es la amplitud del movimiento,  $t$  es el instante de tiempo,  $T_s$  es el instante de ocurrencia de la amplitud pico y  $\omega$  es la frecuencia angular en rad/s.

$$\ddot{u}_x = A \sin(\omega t) \quad (\text{Ec. 21})$$

donde  $A$  es la amplitud del movimiento;  $t$  el instante de tiempo y  $\omega$  es la frecuencia angular en rad/s.

$$\ddot{u}_x = A \frac{90t^2(t-T_d)^6}{T_d^8} \cos\left[\frac{2\pi(t-t_d)}{T_s}\right] \quad (\text{Ec. 22})$$

donde  $A$  es la amplitud del movimiento,  $t$  es el instante de tiempo,  $T_s$  el periodo dominante del movimiento y  $T_d$  la duración de la fase intensa del movimiento.

- 3) Con base en las ecuaciones planteadas por Makris y Zhang (2001) y Milne (1885) mostradas en las expresiones 23 y 24, se han realizado calibraciones de sus parámetros acuerdo con cada uno de los pulsos utilizados y las cinco excentricidades propuestas.

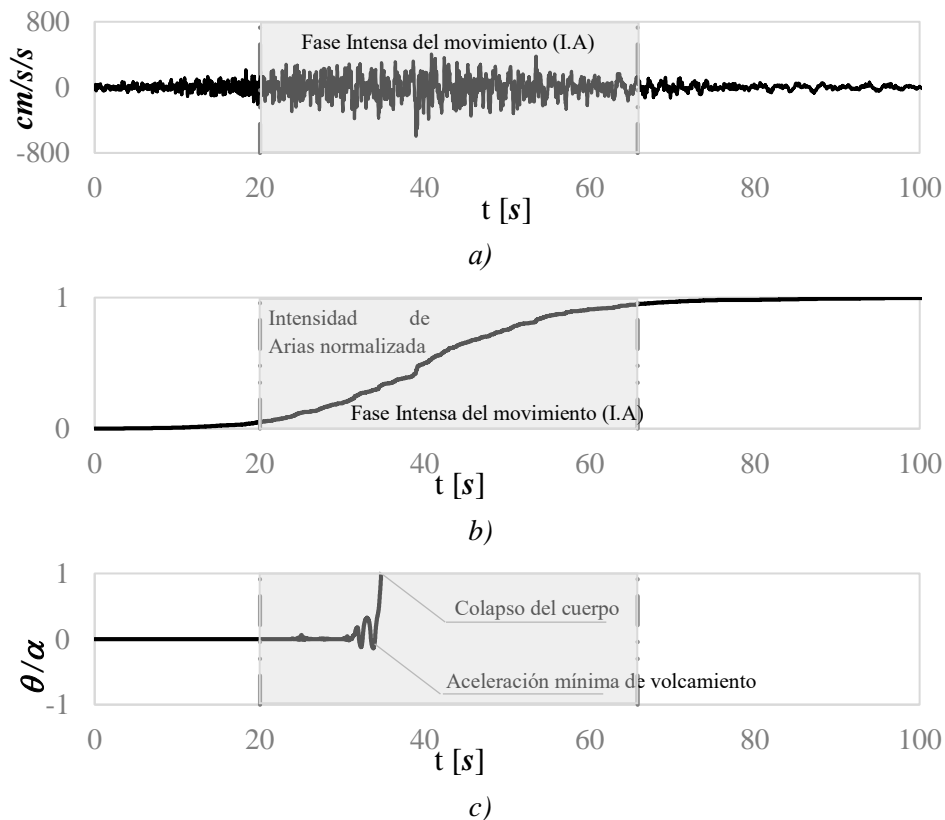
- 4) Cálculo del cociente entre las aceleraciones mínimas de volcamiento en ambos modos de respuesta (simplemente apoyados y anclados a la base) buscando encontrar el rango finito de frecuencias donde se presenta mayor daño en un cuerpo anclado. Es necesario enfatizar que si el cociente resultante  $a_{fs}^0/a_{an}^0 > 1$ , un cuerpo anclado tiende a presentar menor daño, mientras que si  $a_{fs}^0/a_{an}^0 < 1$ , la medida de mitigación tendrá un efecto dañino sobre el cuerpo.

$$a_{fs}^0 = \alpha g \left( 1 + \zeta \frac{\omega_p}{p} \right) \quad (\text{Ec. 23})$$

donde  $\alpha$  es el ángulo de esbeltez,  $g$  es la aceleración de la gravedad (cm/s/s),  $p$  es la frecuencia característica del cuerpo evaluado y  $\zeta$  es un factor de calibración que depende del tipo de señal utilizada.

$$a_{an}^0 = g \tan(\alpha) + 2 \frac{F_u}{W} g \tan(\alpha) \frac{1}{\cos(\alpha)} \quad (\text{Ec. 24})$$

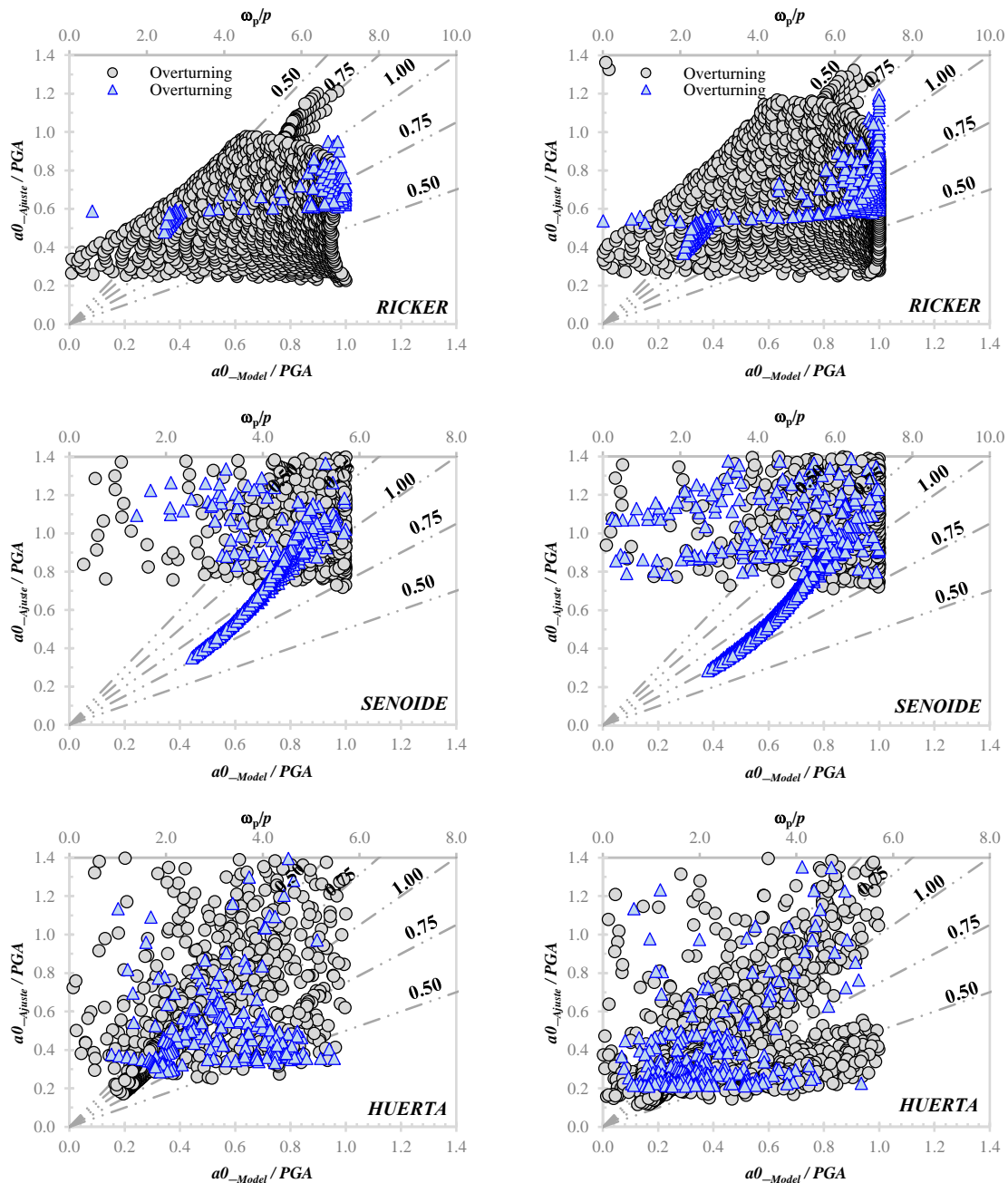
donde  $\alpha$  es el ángulo de esbeltez,  $g$  es la aceleración de la gravedad (cm/s/s),  $F_u$  es la fuerza de ruptura del ancla y  $W$  es el peso del equipo.



**Figura 2.28.** Identificación de la aceleración mínima de volcamiento: a) señal analizada; b) intensidad de arias normalizada y c) respuesta del cuerpo, identificando los puntos de aceleración mínima de volcamiento y colapso del cuerpo.



Con base en la metodología antes descrita, en la Figura 2.29 se muestran algunos ejemplos ilustrativos asociados a los puntos donde fue detectada la aceleración mínima de volcamiento; donde a través de un gráfico de dispersión, se representa en el eje de las ordenadas la aceleración que se obtiene por la forma funcional propuesta en la expresión 23 y en el eje de las abscisas la aceleración mínima de volcamiento obtenida a través del modelo planteado en el presente trabajo. Desde un esquema por mínimos cuadrados se realizó la calibración del parámetro  $\zeta$ ; el resumen de los resultados de la calibración se muestra en la Tabla 10.



**Figura 2.29.** Ejemplos ilustrativos correspondientes a la aceleración mínima de volcamiento para las excentricidades  $e_x:0.20|e_y:0.00$  y  $e_x:0.20|e_y:0.20$ . En gris, el cuerpo equivalente  $B_L$  y  $2H$  y en azul cuerpo equivalente  $B_R$  y  $2H$ .

**Tabla 10.** Parámetros de calibración en función de la excentricidad propuesta.

<b>b(m)</b>	<b>h(m)</b>	<b>e<sub>x</sub></b>	<b>e<sub>y</sub></b>	<b>ζ<sub>Ricker</sub></b>	<b>ζ<sub>Senoide</sub></b>	<b>ζ<sub>Huerta</sub></b>
0.5	1.3	0	0	81/100	17/25	29/100
0.5	1.3	0.2	0	91/100	3/2	4/5
0.5	1.3	0	0.2	17/20	71/100	33/100
0.5	1.3	0	-0.2	19/25	33/50	7/25
0.5	1.3	0.2	0.2	19/20	3/2	39/100
0.5	1.3	-0.2	-0.2	18/25	79/100	11/20

Con base en los resultados de calibración obtenidos en la Tabla 10 y a través de las formas funcionales expresadas en las Ecuaciones 23 y 24, en la Figura 2.29 se muestra el cociente entre las aceleraciones mínimas de volcamiento entre los regímenes simplemente apoyado ( $a0_{fs}$ ) y anclado ( $a0_{an}$ ). En estas Figuras, es posible observar lo siguiente: 1) a medida que la relación  $F_u/W$  decrece, el ancho de la banda  $\omega_p/p$  donde un cuerpo anclado tiene mayor predisposición al daño es mayor; 2) como se mostró en los resultados para terremoto en ejemplos anteriores, a medida que crece la distancia desde los puntos de rotación del cuerpo  $O$  u  $O'$  al centro de masas considerando los efectos inducidos por la excentricidad, la inestabilidad producida por el ancla tiene un efecto similar, por lo que se puede decir que, la distancia al centro de masa se encuentra relacionado con la predisposición en la inestabilidad del ancla y el ancho de banda  $\omega_p/p$  de la misma. En las Tablas 11 a 13, se define el ancho de banda  $\omega_p/p$  para cada una de las relaciones consideradas en el presente trabajo.

**Tabla 11.** Definición de anchos de banda  $\omega_p/p$  donde ocurre la inestabilidad del anclaje para los diferentes pulsos considerados con una relación  $F_u/W = 1.08$ .

<b>Descripción</b>				<b>Ricker</b>		<b>Senoide</b>		<b>Huerta</b>	
<b>b(m)</b>	<b>h(m)</b>	<b>e<sub>x</sub></b>	<b>e<sub>y</sub></b>	$\omega_p/p_{inf}$	$\omega_p/p_{sup}$	$\omega_p/p_{inf}$	$\omega_p/p_{sup}$	$\omega_p/p_{inf}$	$\omega_p/p_{sup}$
0.5	1.3	0	0	3.00	5.00	3.52	5.00	-----	-----
0.5	1.3	0.2	0	2.37	5.00	1.45	5.00	2.76	5.00
0.5	1.3	0	0.2	2.77	5.00	3.25	5.00	-----	-----
0.5	1.3	0	-0.2	3.44	5.00	3.87	5.00	-----	-----
0.5	1.3	0.2	0.2	2.32	5.00	1.47	5.00	-----	-----
0.5	1.3	-0.2	-0.2	-----	-----	2.86	5.00	4.14	5.00

**Tabla 12.** Definición de anchos de banda  $\omega_p/p$  donde ocurre la inestabilidad del anclaje para los diferentes pulsos considerados con una relación  $F_u/W = 0.54$ .

<b>Descripción</b>				<b>Ricker</b>		<b>Senoide</b>		<b>Huerta</b>	
<b>b(m)</b>	<b>h(m)</b>	<b>e<sub>x</sub></b>	<b>e<sub>y</sub></b>	$\omega_p/p_{inf}$	$\omega_p/p_{sup}$	$\omega_p/p_{inf}$	$\omega_p/p_{sup}$	$\omega_p/p_{inf}$	$\omega_p/p_{sup}$
0.5	1.3	0	0	1.44	5.00	1.83	5.00	-----	-----
0.5	1.3	0.2	0	1.18	5.00	0.66	5.00	1.32	5.00
0.5	1.3	0	0.2	1.32	5.00	1.69	5.00	3.61	5.00
0.5	1.3	0	-0.2	1.72	5.00	2.01	5.00	-----	-----
0.5	1.3	0.2	0.2	1.10	5.00	0.73	5.00	2.81	5.00
0.5	1.3	-0.2	-0.2	1.57	5.00	1.43	5.00	2.14	5.00

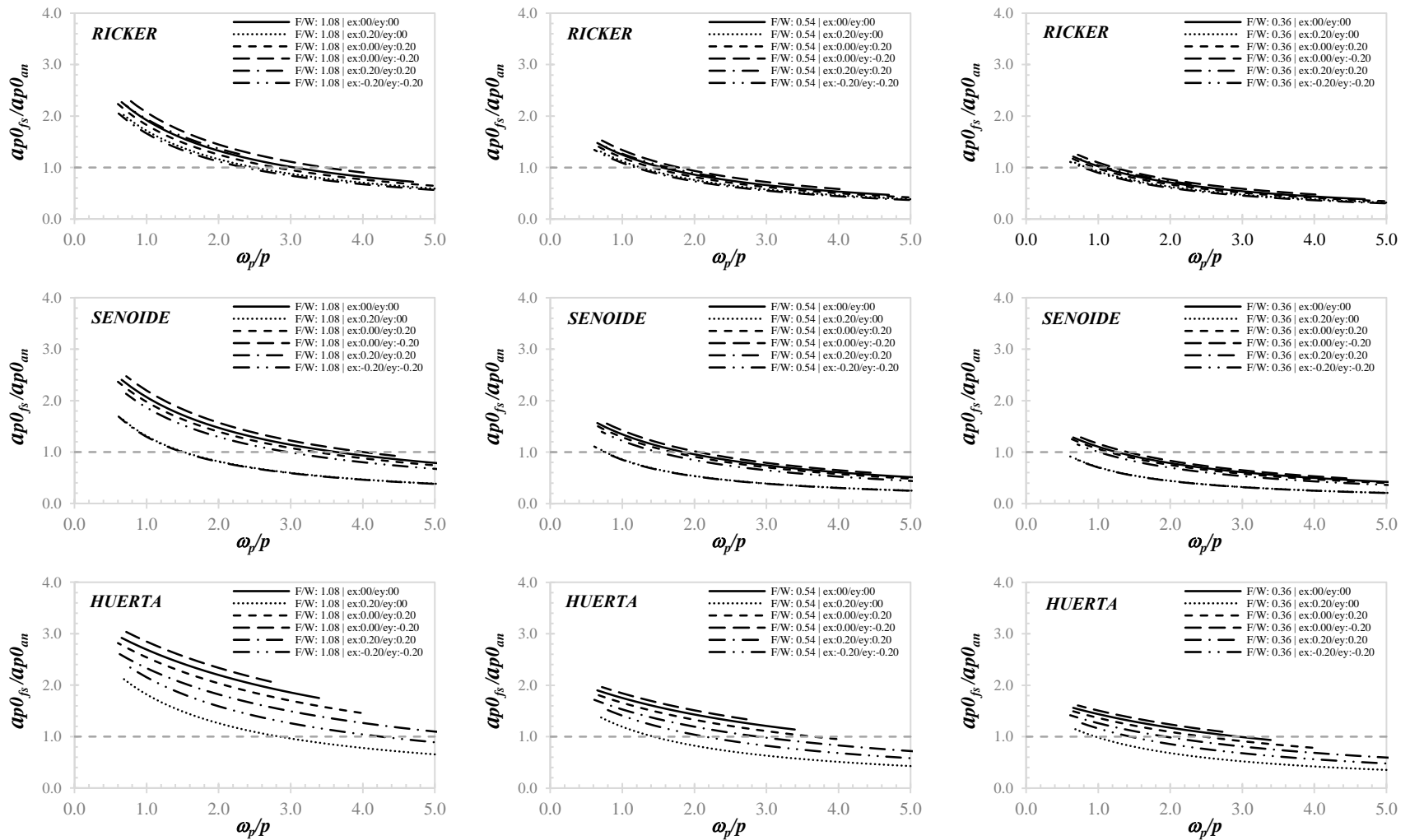


Figura 2.30. Curvas resultantes del cociente de la aceleración mínima de volcamiento entre los regímenes simplemente apoyado y anclado a la base para los tres pulsos considerados: a) Ricker; b) Senoide y c) Huerta.

**Tabla 13.** Definición de anchos de banda  $\omega_p/p$  donde ocurre la inestabilidad del anclaje para los diferentes pulsos considerados con una relación  $F_u/W=0.36$ .

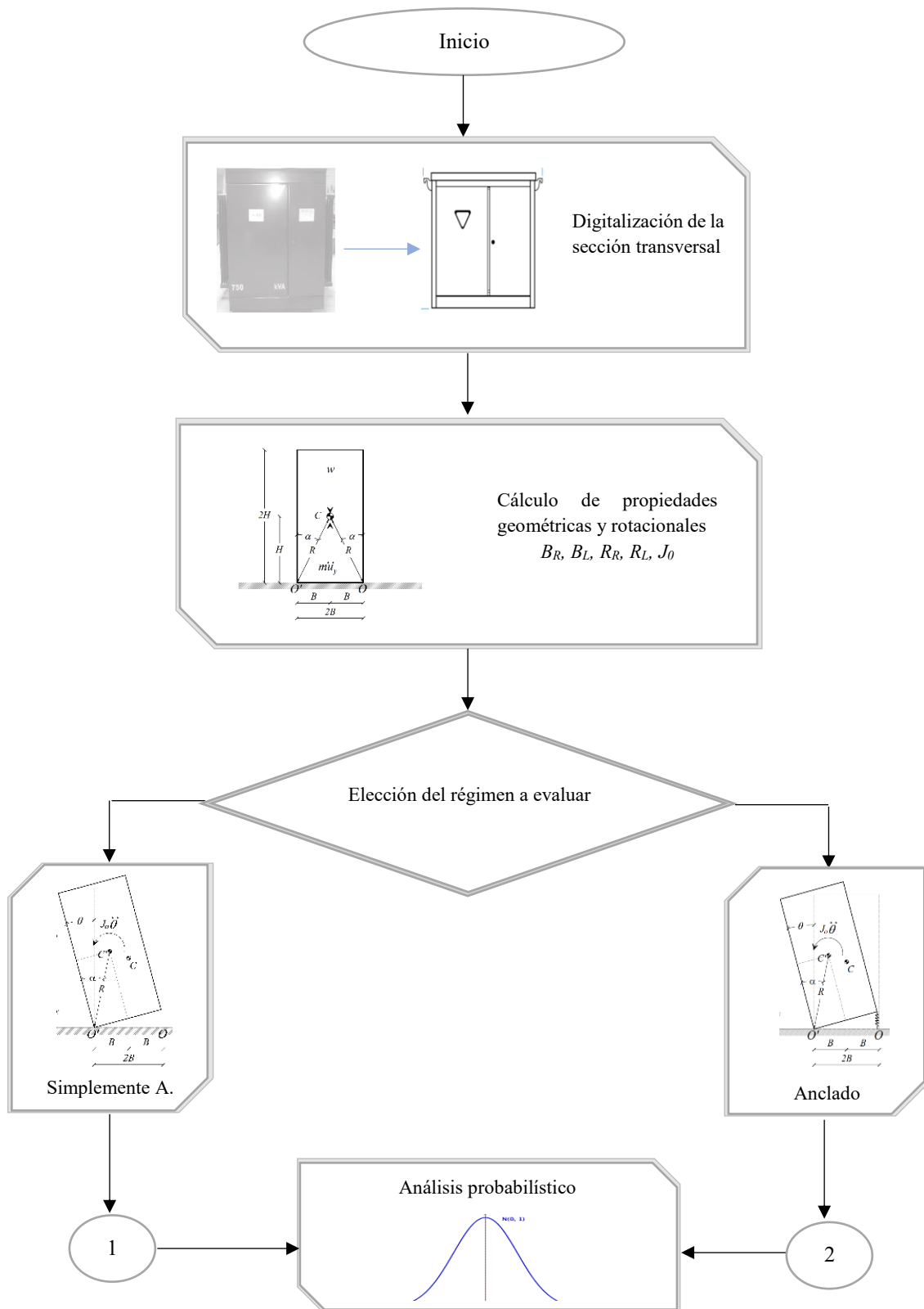
<b>Descripción</b>				<b>Ricker</b>		<b>Senoide</b>		<b>Huerta</b>	
<b>b(m)</b>	<b>h(m)</b>	<b>e<sub>x</sub></b>	<b>e<sub>y</sub></b>	$\omega_p/p_{inf}$	$\omega_p/p_{sup}$	$\omega_p/p_{inf}$	$\omega_p/p_{sup}$	$\omega_p/p_{inf}$	$\omega_p/p_{sup}$
0.5	1.3	0	0	1.04	5.00	1.17	5.00	2.87	5.00
0.5	1.3	0.2	0	0.79	5.00	0.86	5.00	0.92	5.00
0.5	1.3	0	0.2	0.84	5.00	1.08	5.00	2.41	5.00
0.5	1.3	0	-0.2	1.15	5.00	1.29	5.00	-----	-----
0.5	1.3	0.2	0.2	0.73	5.00	0.73	5.00	1.83	5.00
0.5	1.3	-0.2	-0.2	1.00	5.00	1.00	5.00	1.43	5.00

### 3. FRAGILIDAD Y VULNERABILIDAD PARA EQUIPOS ELÉCTRICOS

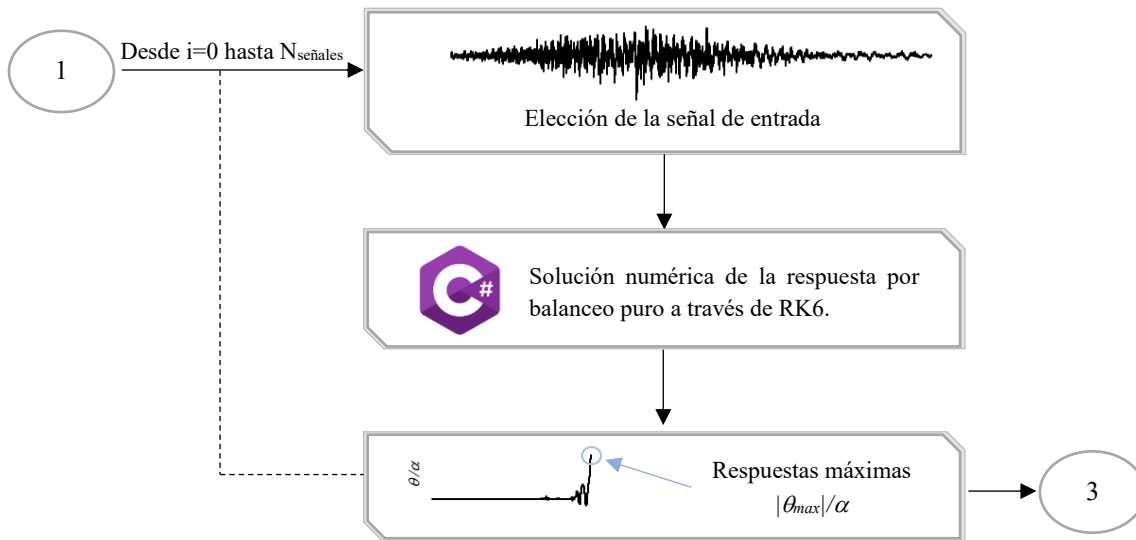
Recientes eventos sísmicos muestran que las plantas de energía eléctrica o estructuras a fines son altamente vulnerables ante la interrupción de servicios resultado de la falla en equipos eléctricos, tales como, estaciones de control, UPS (por sus siglas en inglés), transformadores, entre otros. Diferentes evidencias de fallas muestran que, el colapso de equipos eléctricos no solo causa pérdidas económicas directas debido a la reparación y/o reemplazo del equipo, sino también impactos socioeconómicos indirectos como consecuencia de un corte de energía. Por ejemplo, en Turquía en el sismo en Izmit en 1999 se reportaron pérdidas directas de alrededor de \$ 70 millones USD (Tang, 2000), por su parte en el terremoto de Loma Prieta en 1989, se reportaron pérdidas alrededor de \$4.9 millones USD (Eguchi y Seligson, 1994) y recientemente en México, el terremoto más grande su historia ocurrido el 7 de septiembre de 2017, un sismo de magnitud 8.2 en escala  $M_w$ , sacudió el Golfo de Tehuantepec, Oaxaca, presentado fallas importantes en: casas habitación, plantas de energía eléctrica, puentes, hospitales, entre otros. Es importante mencionar que, garantizar el servicio continuo de este tipo de infraestructura es fundamental después de un evento natural y se deberá mantener en operación continua para dar soporte a los planes de emergencia y necesidades de la población.

Para establecer y cuantificar las posibles pérdidas que se tienen en equipos eléctricos, el presente capítulo muestra una metodología y resultados ilustrativos para estimar la fragilidad y vulnerabilidad de equipos eléctricos con fines de riesgo sísmico. Lo anterior, se realizará para equipos en los regímenes simplemente apoyados y anclados a la base; en este último, se evaluarán las revisiones por tensión pura e interacción tensión-cortante. En las Figuras 3.1 a 3.4 se representa a través de un diagrama de flujo esquemático el procedimiento implementado. A continuación, se describe la metodología propuesta:

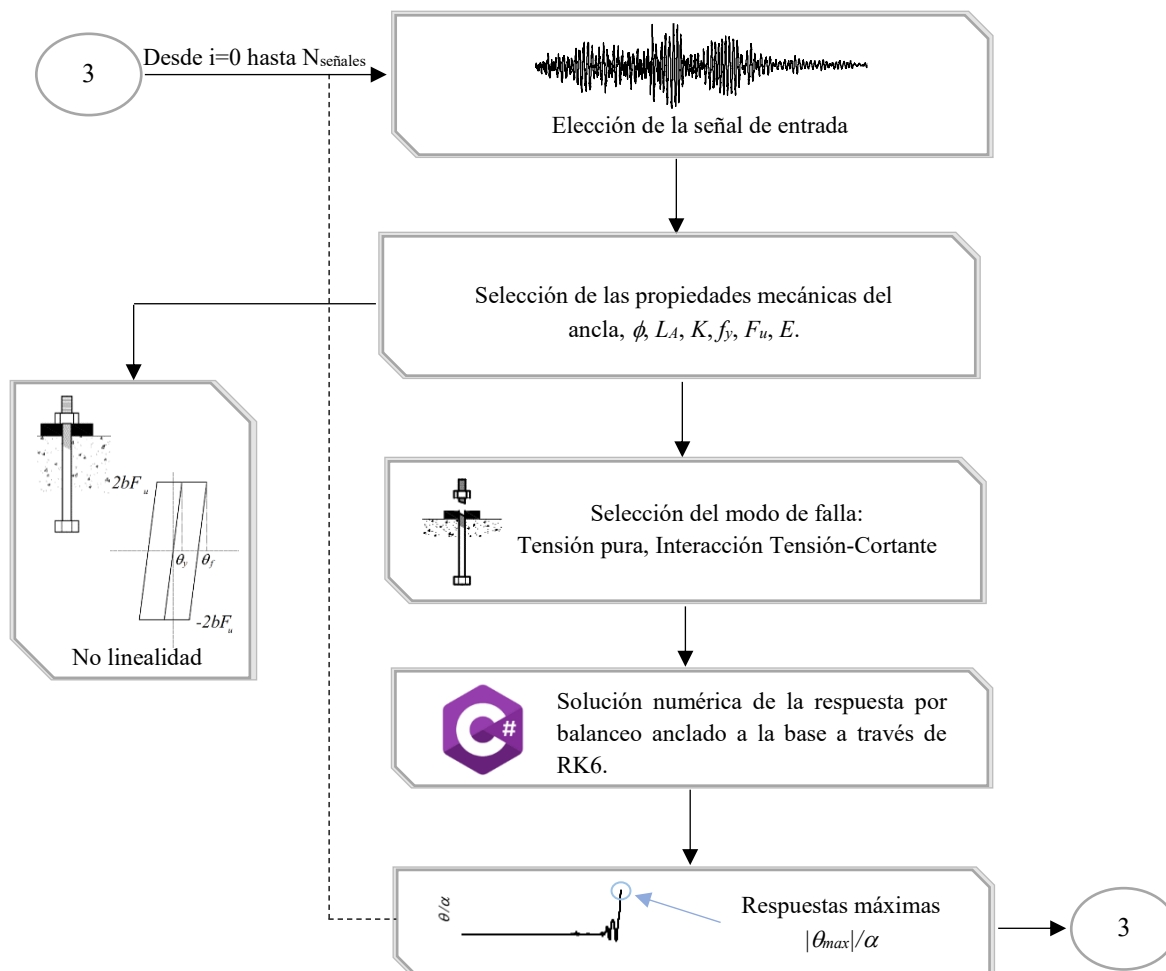
- Digitalización de la sección crítica transversal del equipo eléctrico a evaluar.
- Cálculo de las propiedades geométricas y rotacionales del cuerpo en análisis utilizadas durante la solución.
- Elección del régimen a evaluar: simplemente apoyado o anclado a la base.
- Elección de la señal de entrada: armónicas o terremoto.
- En el caso específico del régimen anclado a la base, se deberán elegir las propiedades mecánicas del anclaje y el modo de falla a ser evaluado (tensión pura o la interacción tensión-cortante).
- Solución numérica de la respuesta por balanceo puro para el régimen elegido a través del método numérico RK6.
- Localización de la respuesta máxima del régimen en análisis.
- Revisión de los estados límite e inicio de conteo en caso de ser excedidos.
- Una vez finalizado el número de cuerpos y señales a evaluar, se calcularán las probabilidades de excedencia asociadas a cada estado límite.
- Con base en las probabilidades de excedencias del punto anterior, se realizará la regresión a través del procedimiento de máxima verosimilitud propuesto por Baker (2015), para la obtención de curvas de fragilidad.
- Estimación de la esperanza (primer momento) y varianza de las pérdidas (segundo momento).



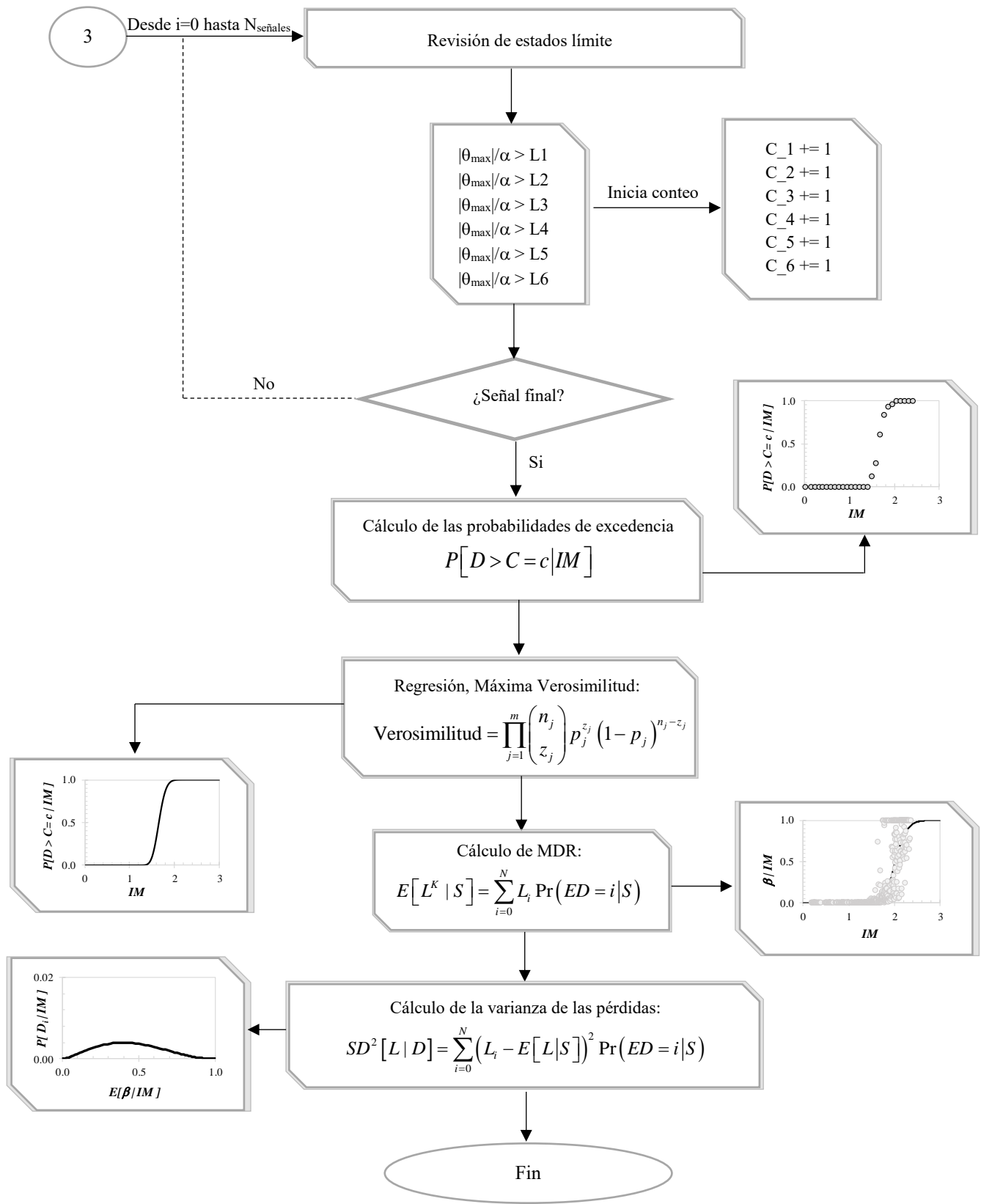
**Figura 3.1.** Diagrama de flujo esquemático de la metodología propuesta para estimar funciones de fragilidad y vulnerabilidad respectivamente para equipos eléctricos.



**Figura 3.2.** Diagrama de flujo esquemático para obtener las respuestas máximas para equipos eléctricos simplemente apoyados.



**Figura 3.3.** Diagrama de flujo esquemático para obtener las respuestas máximas para equipos eléctricos anclados a la base.



**Figura 3.4.** Diagrama de flujo esquemático del proceso estadístico para obtener una función de fragilidad y vulnerabilidad respectivamente.



### 3.1 FRAGILIDAD EN EQUIPOS ELÉCTRICOS

En términos generales, las curvas de fragilidad estipulan cuánto vale la probabilidad de alcanzar o exceder un estado de daño como función de cierto parámetro de demanda ( $IM$ ). Suponiendo que existen  $N$  estados de daño ( $ED, i = 0 \dots N$ ), entonces las curvas de fragilidad estipulan que la probabilidad de que se alcance o exceda el  $i$ -ésimo estado de daño, dado que se presentó una demanda puede ser calculada con la ayuda de una función de fragilidad de la siguiente manera:

$$P[D > C = c | IM] = f_i(s; \theta_i) \quad (\text{Ec. (25)})$$

Donde  $\theta_i$  es un vector de parámetros de la función de fragilidad  $f_i$ . Puesto que se trata de estados de daño discretos, es posible calcular la probabilidad de estar exactamente en el daño  $i$  con la siguiente relación:

$$P[\text{estar en el estado } i | IM] = f_{i+1}(s; \theta_{i+1}) - f_i(s; \theta_i) \quad (\text{Ec. (26)})$$

Por convención, se admite que el estado de daño 0 corresponda a total ausencia de daño y que la probabilidad de alcanzarlo o excederlo, dado cualquier valor de intensidad, es igual a 1. Se admite también que el  $N$ -ésimo estado de daño corresponda al colapso y que la probabilidad de estar en un estado superior es nula (Ordaz, 2008). Para fines específicos de este documento, la probabilidad de excedencia de cierto estado límite establecido dada una demanda sísmica, será calculado a través de:

$$P[D > C = c | IM] = \frac{N_{\text{excedencias} | ED}}{N_{\text{total simulaciones}}} \quad (\text{Ec. (27)})$$

#### 3.1.1 MATRICES DE PROBABILIDAD DE DAÑO

A partir de la expresión 26, es posible calcular las llamadas matrices de probabilidad de daño, que establecen cuál es la probabilidad de que, dado que se presentó una demanda en el equipo y/o edificio, se encuentre exactamente en el estado de daño  $ED_i$ . Estas matrices tienen la forma mostrada en la Tabla 14.

**Tabla 14.** Matrices de probabilidad de daño.

Descripción		Demanda			
		S1	S2	S3	S4
Estado de daño	0	$Pr [ED=0]   S1$	$Pr [ED=0]   S2$	$Pr [ED=0]   S3$	$Pr [ED=0]   S4$
	1	$Pr [ED=1]   S1$	$Pr [ED=1]   S2$	$Pr [ED=1]   S3$	$Pr [ED=1]   S4$
	2	$Pr [ED=2]   S1$	$Pr [ED=2]   S2$	$Pr [ED=2]   S3$	$Pr [ED=2]   S4$
	3	$Pr [ED=3]   S1$	$Pr [ED=3]   S2$	$Pr [ED=3]   S3$	$Pr [ED=3]   S4$
	...	...	...	...	...
	N	$Pr [ED=N]   S$	$Pr [ED=N]   S2$	$Pr [ED=N]   S3$	$Pr [ED=N]   S4$

### 3.1.2 ESTIMACIÓN DE FUNCIONES DE FRAGILIDAD

En las últimas décadas se han propuesto diferentes metodologías para la creación de funciones de fragilidad, ejemplos de estos se encuentran dadas por: Kennedy y Ravindra (1984); Swan y Kassawar (1998); Kim y Shinozuka (2004); Calvi *et. al* (2006); Badillo *et. al* (2006), Villaverde (2007); Porter *et. al* (2007); Reinoso *et. al*, (2013), entre otros. Sin embargo, procedimientos recientes muestran que es posible obtener un buen ajuste considerando un número razonable de análisis dinámicos, por lo que, el presente análisis se basa en la metodología propuesta por Baker (2015), la cual se describe de forma general a continuación:

En cada uno de los niveles de intensidad  $IM = x_j$ , el análisis dinámico produce un número finito de excedencias en el total de las excitaciones utilizadas. Suponiendo que las observaciones (respuesta dinámica del equipo eléctrico) son independientes de los análisis para otras excitaciones, la probabilidad de observaciones de colapso  $z_j$  en  $n_j$  excitaciones utilizadas con un  $IM = x_j$ , se pueden representar a través de la distribuciones binomial de la siguiente forma:

$$P(z_j \text{ colapsos en } n_j \text{ excitaciones}) = \binom{n_j}{z_j} p_j^{z_j} (1-p_j)^{n_j-z_j} \quad (\text{Ec. 28})$$

donde  $p_j$  es la probabilidad de que una acción dinámica con  $IM = x_j$  cause colapso en el equipo eléctrico. El principal objetivo de la metodología propuesta por Baker (2015) es identificar la función de fragilidad que mejor valore  $p_j$ , a través de estimadores de máxima verosimilitud que ofrezca la mayor probabilidad de las observaciones obtenidas a través de los análisis dinámicos. Cuando la colección de observaciones es obtenida en múltiples niveles de  $IM$ , es posible obtener el estimador de máxima verosimilitud a través del producto de las probabilidades binomiales de la ecuación 28, donde el estimador de máxima verosimilitud para la colección de observaciones se encuentra dado por:

$$\text{Verosimilitud} = \prod_{j=1}^m \binom{n_j}{z_j} p_j^{z_j} (1-p_j)^{n_j-z_j} \quad (\text{Ec. 29})$$

donde  $m$  es el número total de niveles  $IM$  considerados y  $\prod$  es el producto de todo el conjunto de niveles. Para fines específicos de este trabajo, se ha considerado que la probabilidad  $p_j$  puede ser representada a través de la distribución Log-normal, por lo que, sustituyendo su forma funcional en la ecuación 29, la función de verosimilitud se encuentra dada por:

$$\text{Verosimilitud} = \prod_{j=1}^m \binom{n_j}{z_j} \Phi\left(\frac{\ln(x_j / \theta)}{\sigma}\right)^{z_j} \left(1 - \Phi\left(\frac{\ln(x_j / \theta)}{\sigma}\right)\right)^{n_j-z_j} \quad (\text{Ec. 30})$$

Uno de los procedimientos para obtener los parámetros de la función de fragilidad es maximizando la función de verosimilitud mostrada en la ecuación 30; sin embargo, un procedimiento equivalente es maximizando el logaritmo natural de esta forma funcional, por lo que es posible definirla de la siguiente forma:

$$\{\hat{\theta}, \hat{\sigma}\} = \arg \max_{\theta, \sigma} \sum_{j=1}^m \left\{ \ln \binom{n_j}{z_j} + z_j \ln \Phi \left( \frac{\ln(x_j / \theta)}{\sigma} \right) + (n_j - z_j) \ln \left[ 1 - \Phi \left( \frac{\ln(x_j / \theta)}{\sigma} \right) \right] \right\} \quad (\text{Ec. 31})$$

En la ecuación 31 se ha utilizado la distribución log-normal para el ajuste de los datos observados, sin embargo, es posible variar  $p_j$  con alguna otra distribución adecuada.

### 3.1.3 ESTADOS LÍMITE POR BALANCEO

Para efectos del cálculo de la fragilidad en equipos eléctricos, es necesario tener parámetros apropiados de demanda desde un punto de vista ingenieril (*EDPS* por sus siglas en inglés). Bajo la suposición que cuando el cuerpo no sufre volcamiento regresa a su configuración original sin deformación permanente o daño; el presente análisis adopta como parámetro de daño, el valor absoluto de la rotación máxima de las oscilaciones en la respuesta del cuerpo ( $\theta_{max}$ ) normalizada respecto a la esbeltez del cuerpo ( $\alpha$ ).

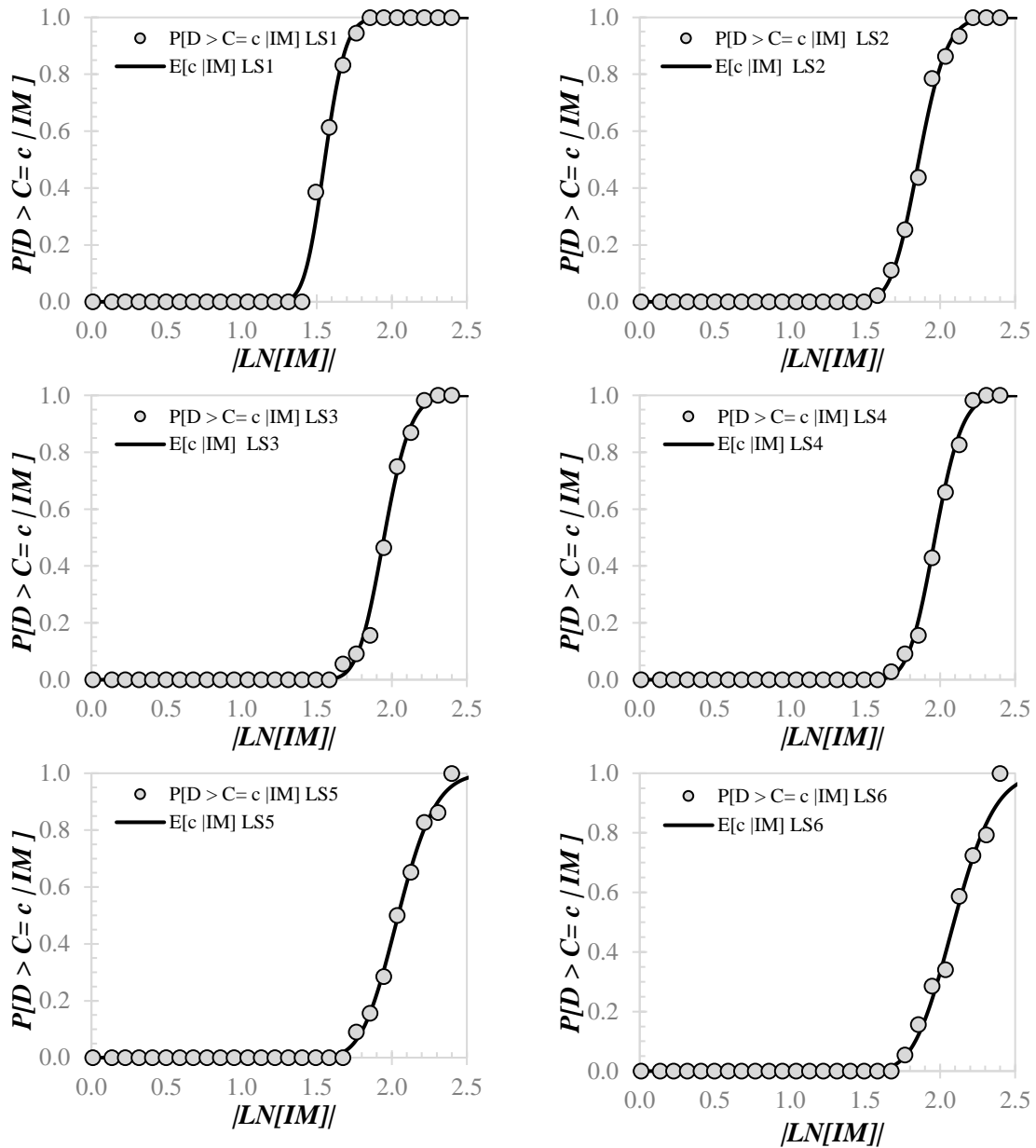
$$EDP = \frac{|\theta_{max}|}{\alpha} \quad (\text{Ec. 32})$$

El significado físico del *EDP* mostrado en la ecuación 32 es claro: valores más grandes que cero implica que el equipo eléctrico comienza a oscilar, mientras que valores más altos (por ejemplo,  $EDP > 1$ ) indican el volcamiento debido al balanceo. En consecuencia, al menos dos estados límites pertinentes evalúan la susceptibilidad del equipo eléctrico: LS1 marca el inicio de balanceo y LS3 corresponde al volcamiento. Además, un estado límite intermedio LS2, indica un balanceo importante durante la respuesta ante una acción sísmica, donde el valor del umbral de LS2 aquí mostrado se basa en juicios ingenieriles para expresar un nivel de acción que generalmente se enfoca en aplicaciones de balanceo. En general, el *EDP* limitado a un orden de magnitud menor que la esbeltez, parece ser un parámetro prometedor y beneficioso con fines de cuantificar el balanceo o eventual volcamiento de un cuerpo rígido (Dimitrakopoulos, 2015 y 2018).

A través de lo antes descrito, en la Tabla 15 se muestra la descripción cuantitativa y cualitativa de los estados límites propuestos. Considerando que el procedimiento aquí presentado se enfoca al cálculo del riesgo, se han asignado tres umbrales adicionales que permitirán cuantificar el segundo momento estadístico. Finalmente, y a través de las expresiones 27 y 31 en la Figura 3.5 se muestra ejemplos de las funciones de fragilidad para cada uno de los estados límite propuestos.

**Tabla 15.** Estados límite propuestos para el cálculo de probabilidad de excedencia.

ID	EDP( $ \theta_{\max} /\alpha$ )	Capacidad de LS	Descripción
LS1	0.00	Inicio de balanceo	Balanceo
LS2	0.10	Límite de servicio	Daño menor o local por balanceo
LS3	0.30	-----	-----
LS4	0.50	-----	-----
LS5	0.70	-----	-----
LS6	>1	Límite de colapso	Colapso



**Figura 3.5.** Funciones de fragilidad calculadas para los estados límite considerados en el presente trabajo.

### 3.2 ESTIMACIÓN DE FUNCIONES DE VULNERABILIDAD PARA EQUIPOS ELÉCTRICOS

Con base en las matrices de probabilidad, es posible calcular lo que se conoce como “estado de daño medio”, el cuál resultaría de efectuar la siguiente operación:

$$EDM | IM = \sum_{i=0}^N ED \cdot \Pr(ED = i | IM) \quad (\text{Ec. 33})$$

En términos generales, la operación descrita en la expresión anterior no tiene sentido. Los estados de daño, en principio, no están asociados a ninguna métrica susceptible de ser ponderada.

Es necesario recalcar que, hasta este momento, las curvas de fragilidad y las matrices de probabilidad de daño no permiten calcular las pérdidas económicas. En efecto, aunque se sabe cuál es la probabilidad de alcanzar cierto estado de daño que la demanda ocasiona, no se sabe cuál será el costo monetario de haber alcanzado tal estado de daño. Sin embargo, es posible asociar un valor monetario (o como se verá más adelante, un rango de valores monetarios) a un estado de daño, calculando, por ejemplo, cuánto costaría restituir al equipo y/o estructura a sus condiciones originales después de que alcanzó cierto estado de daño. A partir de ahora, se denominará pérdida al valor monetario y se asociará al estado de daño ( $ED$ ), la pérdida  $L$ . En otras palabras, cada vez que el equipo y/o estructura entre al estado de daño  $i$ , su dueño tendrá que pagar la cantidad  $L_i$ . En estas condiciones, es posible calcular a partir de las matrices de probabilidad, momentos estadísticos de la pérdida para valores de demanda conocido de la siguiente forma:

$$E[L^k | IM] = \sum_{i=0}^N L_i^k \Pr(ED = i | IM) \quad (\text{Ec. 34})$$

Con los primeros dos momentos ( $k=1$  y  $k=2$ ) será posible calcular el valor esperado y la varianza de las pérdidas dado un valor de demanda. Recapitulando, hasta este momento, se ha demostrado que (Ordaz, 2008):

- Las funciones de fragilidad, junto con las relaciones entre el estado de daño y la pérdida económica, permiten derivar funciones de vulnerabilidad.
- Las curvas de fragilidad por sí solas no son suficientes para hacer estimaciones de daño económico.

Conceptualmente, las funciones de vulnerabilidad describen la variación de los momentos estadísticos de la pérdida (media y varianza en este caso) como función de la demanda sísmica. En un principio, en vista de que con la ecuación 34 se podrían calcular tantos momentos estadísticos de la pérdida como sea necesario, la distribución de probabilidad completa de la pérdida quedaría totalmente definida (es conveniente recordar que conocer todos los momentos estadísticos de una variable aleatoria, equivale a conocer su distribución de probabilidad completa).

Una vez calculado el primer momento estadístico a través de la forma funcional presentada en la expresión 34, para fines de estimación de pérdidas económicas, será necesario pasar de una distribución discreta a una distribución continua, por lo que, en el presente análisis se consideran dos expresiones, la primera (ecuación 35) para el valor esperado partiendo de señales armónicas o pulsos y finalmente la expresión 36 para el caso de señales por terremoto:

$$E[\beta | IM] = (1 - \exp(-\eta Sa))^\tau \quad (\text{Ec. 35})$$

$$E[\beta | IM] = 1 - (0.5)^\theta \quad (\text{Ec. 36})$$

donde  $\eta$  y  $\tau$  son parámetros de forma adimensionales que serán calibrados en función del caso en análisis y  $\theta = \left( \frac{IM_i}{\gamma_{50}} \right)^\rho$ .

Cuando se utilizan funciones de vulnerabilidad, es usual especificar solamente los dos primeros momentos de la pérdida y asumir que la distribución de probabilidad es tipo Beta; bajo esta suposición, la parametrización de la densidad de probabilidades se define como:

$$p_{\beta|\gamma_i} = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \beta^{a-1} (1-\beta)^{b-1} \quad (\text{Ec. 37})$$

donde  $a$  y  $b$  son parámetros que pueden calcularse a partir de la media y el coeficiente de la variación del daño de la siguiente manera:

$$a = \frac{1 - E(\beta | \gamma_i) - E(\beta | \gamma_i) C^2(\beta)}{C^2(\beta)} \quad (\text{Ec. 38})$$

$$b = a \left[ \frac{1 - E(\beta | \gamma_i)}{E(\beta | \gamma_i)} \right] \quad (\text{Ec. 39})$$

$$C^2(\beta) = \frac{\sigma_\beta^2(\beta | \gamma_i)}{E(\beta | \gamma_i)} \quad (\text{Ec. 40})$$

donde  $\sigma_\beta^2(\beta | \gamma_i)$  es la varianza de las pérdidas.

En general, existe poca información para determinar la varianza del daño; sin embargo, se sabe que cuando el valor esperado de la pérdida es nulo la dispersión también lo es. De igual forma, cuando el valor esperado de la pérdida es total, la dispersión también es nula. Para fijar la variación de la pérdida, en este documento se ha utilizado la expresión de la distribución de probabilidad asignada en el estudio clásico del informe ATC-13 (1985) cuya varianza tiene la siguiente forma funcional:

$$\sigma^2_{\beta}(\beta | \gamma_i) = Q(E(\beta | \gamma_i))^{r-1} (1 - E(\beta | \gamma_i))^{s-1} \quad (\text{Ec. 41})$$

donde

$$Q = \frac{V_{\max}}{D_0^{r-1} (1 - D_0)^{s-1}} \quad (\text{Ec. 42})$$

$$s = \frac{r-1}{D_0} - r + 2 \quad (\text{Ec. 43})$$

Donde  $V_{\max}$  es la varianza máxima,  $D_0$  es el nivel de daño para que ocurra esta varianza máxima y  $r$  ha sido calibrada a través de mínimos cuadrados en función del caso en estudio.

Con base en lo antes descrito, se ha demostrado que: 1) Las funciones de vulnerabilidad por si solas, son suficientes para hacer estimaciones de daño económica y 2) Las funciones de vulnerabilidad, adicionadas con una definición cuantitativa de los estados de daño, permiten estimar probabilidades de encontrarse en un estado de daño determinado (Ordaz, 2008).

### 3.2.1 MEDIDAS DE INTESIDAD

Un reto importante a lo largo de muchas investigaciones y lejos de ser trivial, es identificar las medidas de intensidad (*IM* por sus siglas en inglés) apropiadas para estructuras o cuerpos donde el régimen dominante se encuentre dado por el balanceo. Una aproximación racional para seleccionar medidas de intensidad se encuentra en elegir variables que expliquen el comportamiento del cuerpo con las propiedades cinemáticas de la demanda, en este caso, señales de amplitud y frecuencia controlada o sismos. En general, existen medidas de intensidad que se pueden asociar a: energía, tiempo de duración de la señal, duración de la fase intensa, intensidad de Arias, intensidad de Housner, entre otras; sin embargo, para fines específicos de este documento, se examinan medidas de intensidad asociadas a la frecuencia y el ángulo de esbeltez del cuerpo a través de la siguiente expresión:

$$IM_1 = \frac{PGA}{pPGV}; IM_2 = \frac{PGA}{g \tan \alpha}; IM_3 = \frac{pPGV}{g \tan \alpha}; IM_4 = LN(PGA) \quad (\text{Ec. 44})$$

donde  $PGA$  es la aceleración máxima del suelo (amplitud para pulsos y señales armónicas);  $PGV$  es la velocidad máxima del suelo ( $V_p$  para pulsos o señales armónicas),  $g$  es la aceleración de la gravedad;  $\alpha$  es el ángulo de esbeltez del cuerpo y  $p$  es la frecuencia del cuerpo.

El  $IM_1$  relaciona la frecuencia del cuerpo  $p$  con las amplitudes máximas del movimiento, mientras que los  $IM_2$  y  $IM_3$  se relacionan con el ángulo de esbeltez del cuerpo y el  $IM_4$  con la intensidad pico del movimiento del terreno. Con base en cada una de las medidas de intensidad propuestas en la expresión 44, se han evaluado los dos modos de respuesta de un equipo eléctrico: simplemente apoyado y anclado a la base. El equipo tiene como características principales: relación de esbeltez

$h/b=2.6$ , un ángulo  $\alpha=0.36 \text{ rad}$  y una frecuencia  $p = 2.30 \text{ rad/s}$ ; por su parte, las características mecánicas del ancla se encuentran en la Tabla 9. Considerando que las señales armónicas se crearon bajo la suposición que éstas representan un tipo de sismo en particular como se mencionó anteriormente (ecuaciones 20 a 22) se analizó una banda de frecuencias entre 0.1 y 5 segundos, escalados a una amplitud máxima de  $2g$ . En la Tabla 16 se muestra el resumen del coeficiente de determinación ( $R^2$ ) que muestra la bondad de ajuste entre los parámetros de intensidad y daño respectivamente. En las Figuras 3.6 a 3.8 se representa a través de un gráfico de dispersión lo antes descrito.

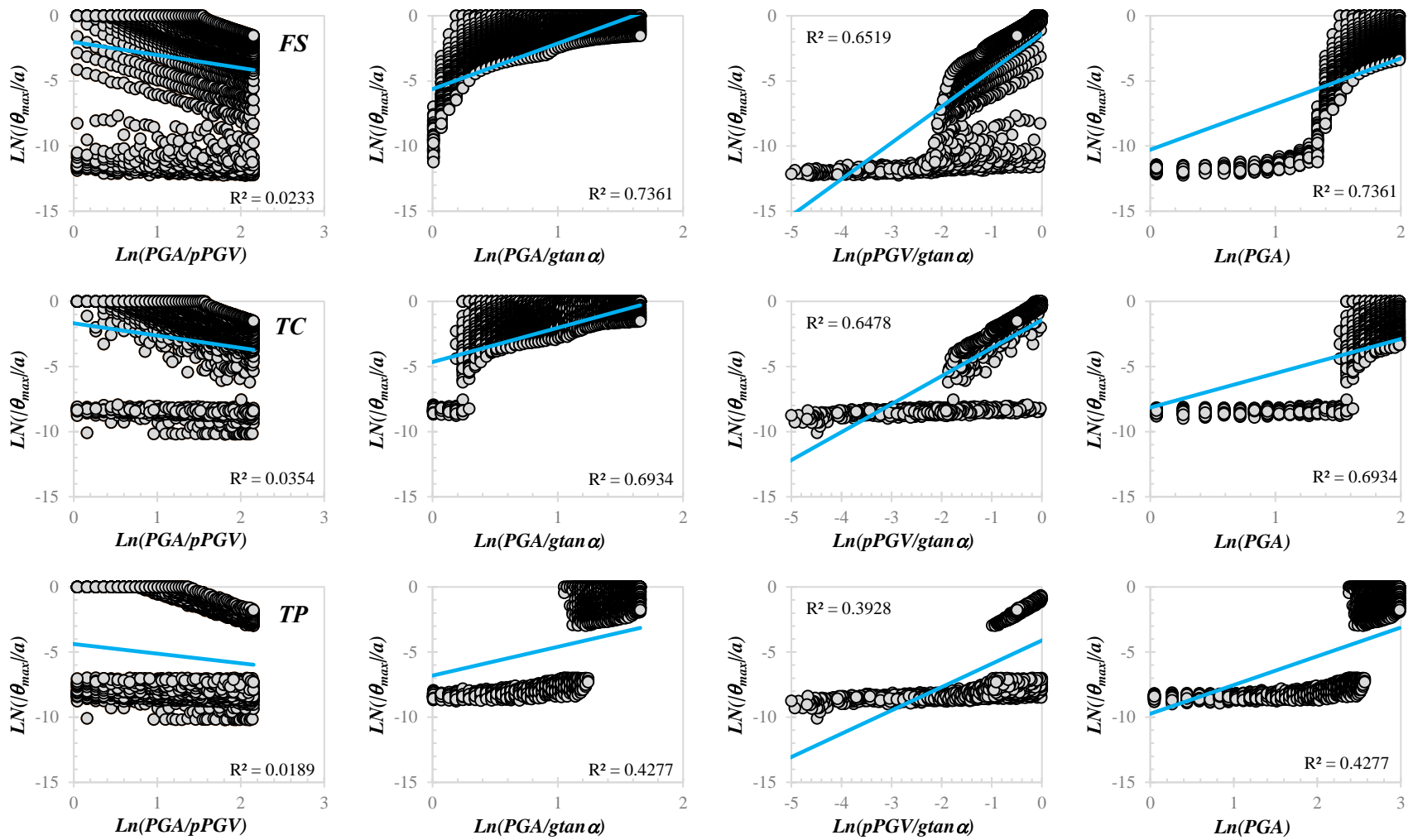
**Tabla 16.** Resumen del coeficiente de determinación ( $R^2$ ) para las señales propuestas en función de regímenes de evaluación simplemente apoyado y anclado a la base.

IM	Ricker			Senoide			Huerta		
	FS	TC	TP	FS	TC	TP	FS	TC	TP
<i>PGA/pPGV</i>	0.023	0.035	0.019	0.080	0.099	0.093	0.113	0.158	0.118
<i>PGA/gtana</i>	0.736	0.693	0.428	0.489	0.470	0.269	0.454	0.387	0.222
<i>pPGV/gtana</i>	0.652	0.648	0.393	0.618	0.634	0.420	0.642	0.640	0.403
<i>PGA</i>	0.736	0.693	0.428	0.217	0.183	0.058	0.171	0.126	0.035

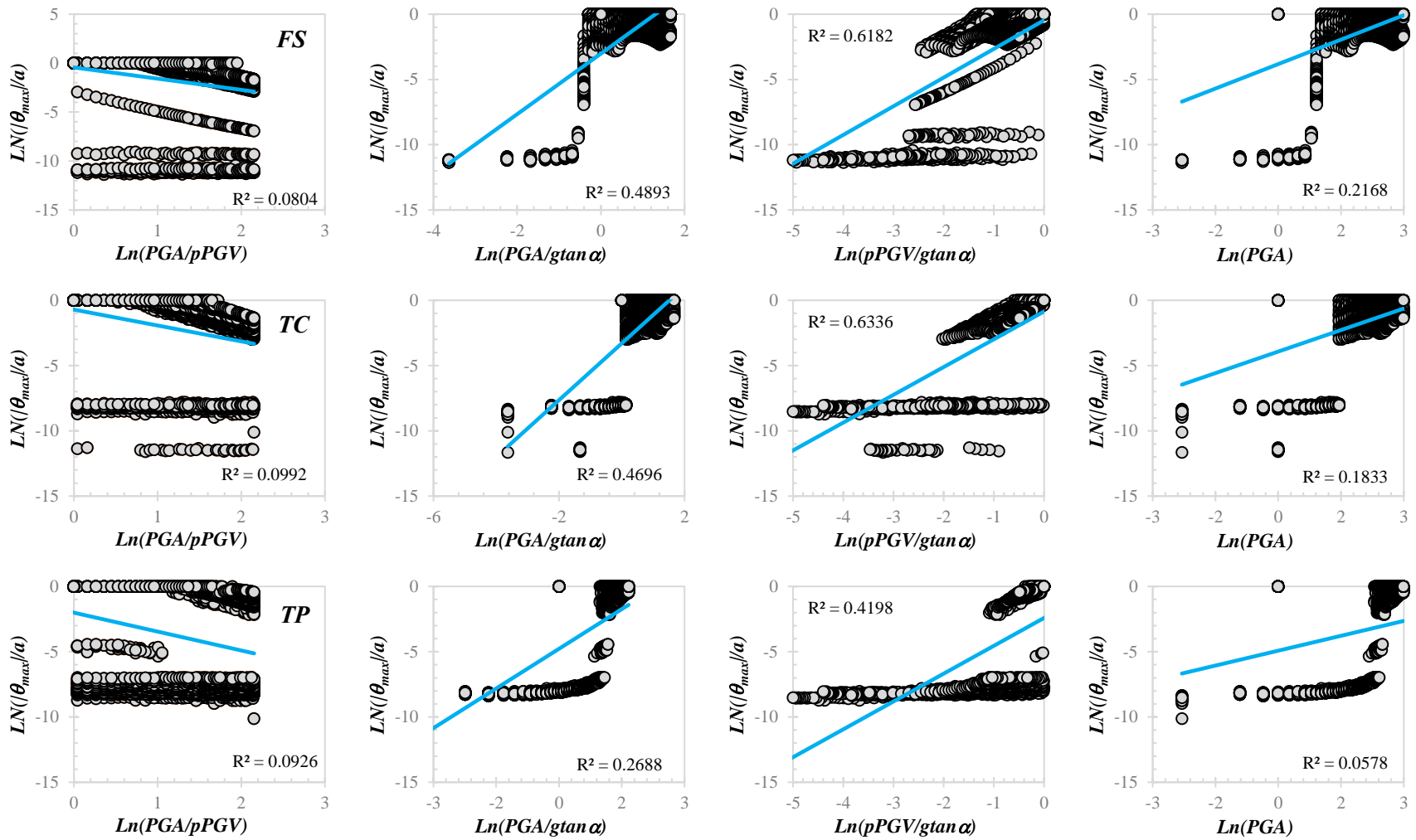
FS: simplemente apoyado; TC: revisión tensión cortante; TP: revisión tensión pura.

La finalidad de obtener el coeficiente de determinación es encontrar la medida de intensidad con la cual se reduzca al máximo la dispersión existente, por lo que, a través del resumen mostrado en la Tabla 16 y de las Figuras 3.6 a 3.8, es posible deducir lo siguiente: a) la medida de intensidad que mejor reduce la dispersión depende en gran medida del tipo de señal; para el pulso de Ricker se asocia a  $IM_2 = PGA/gtana$  y para el senoide y la señal de Huerta se asocia a  $IM_3 = pPGV/gtana$ ; b) la medida de intensidad que tiene un menor coeficiente de determinación para todos los casos, se asocia a  $IM_1 = PGA/pPGV$ , donde ésta relaciona las amplitudes máximas del movimiento de entrada con la frecuencia del cuerpo. En general, esta medida de intensidad es usada en la literatura; sin embargo, para el caso específico de cuerpos o estructuras donde el régimen principal se asocia al balanceo, no es posible capturar de manera adecuada el mecanismo de falla o el espacio de frecuencias constantes para lograr un balanceo a un eventual volcamiento; c) en general, todos los ajustes realizados son pobres, por lo que es posible deducir que un ajuste lineal no necesariamente es conveniente para las medidas de intensidad propuestas, es decir, sugiere un problema de no linealidad o como muestran otros autores, regresiones híbridas o bivariadas; d) a pesar que el coeficiente de determinación ( $R^2$ ) es una idea aproximada de la dispersión existente, este valor no muestra los cambios drásticos que existen en el comportamiento del cuerpo ante pequeños cambios en la señal de entrada y e) considerando los modelos de atenuación existentes en la literatura para el cálculo del peligro sísmico y por consecuente en la estimación del riesgo, la medida de intensidad  $IM_4$  es una elección frecuente, sin embargo, es posible observar que en general no muestra una bondad de ajuste importante, por lo que, sin desconocer que existen otras medidas de intensidad en la creación de funciones de vulnerabilidad y a pesar de observar una menor dispersión en algunos ejemplos mostrados, el valor esperado de la pérdida mostrado en secciones posteriores serán referidos a la aceleración máxima del suelo (amplitud para pulsos o funciones armónicas) como medida de intensidad.

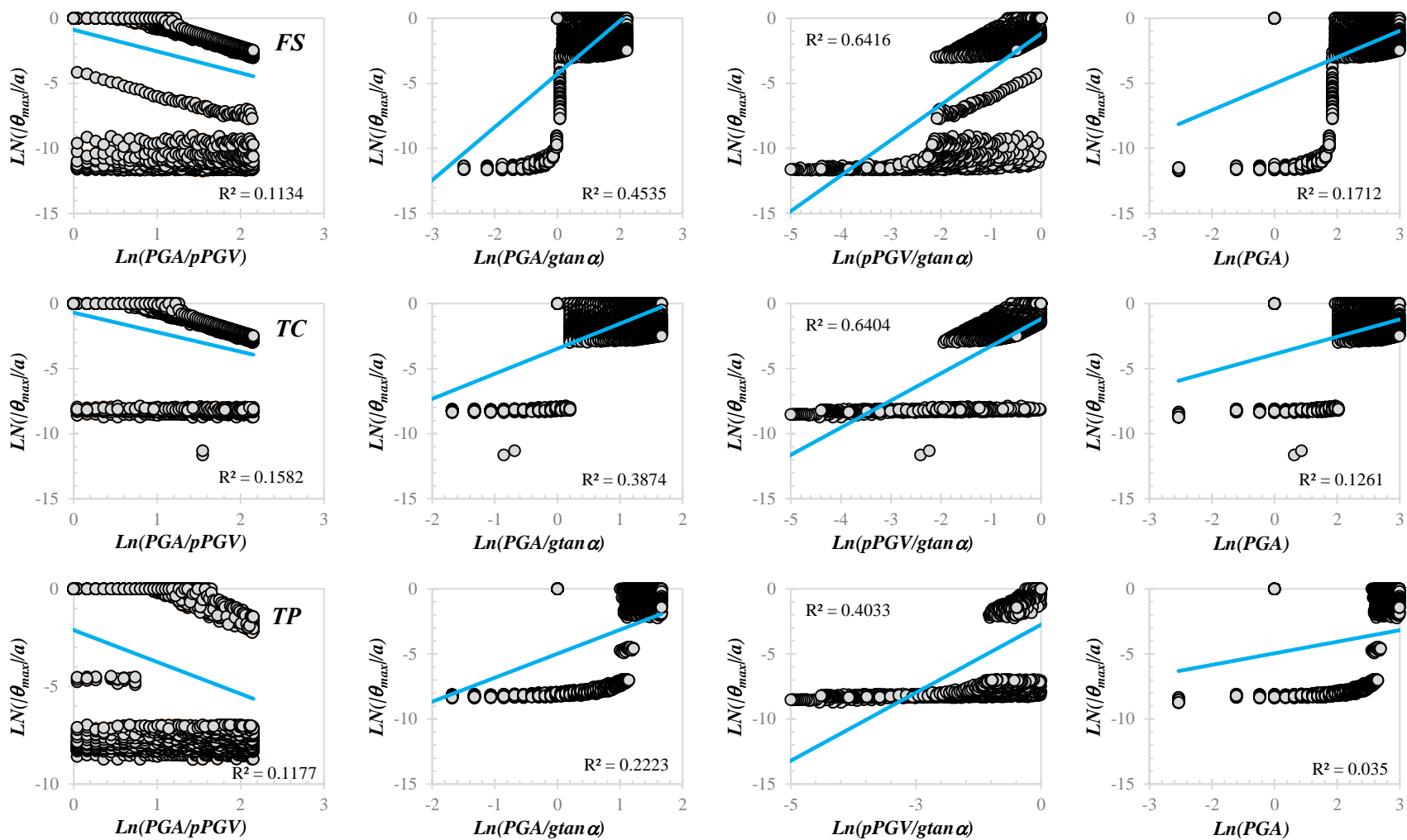




**Figura 3.6.** Regresión lineal para las medidas de intensidad propuestas en función del daño utilizando el pulso de Ricker: *FS*) simplemente apoyado; *TC*) cuerpo anclado a la base a través de la revisión tensión-cortante ( $\phi:2''$ ;  $\mu: 5$ ,  $F_u/W = 1.08$ ); *TP*) cuerpo anclado a la base a través de la revisión tensión pura ( $\phi:2''$ ;  $\mu: 5$ ,  $F_u/W = 1.08$ ).



**Figura 3.7.** Regresión lineal para las medidas de intensidad propuestas en función del daño utilizando un Senoide: *FS*) simplemente apoyado; *TC*) cuerpo anclado a la base a través de la revisión tensión-cortante ( $\phi:2''$ ;  $\mu: 5$ ,  $F_u/W = 1.08$ ); *TP*) cuerpo anclado a la base a través de la revisión tensión pura ( $\phi:2''$ ;  $\mu: 5$ ,  $F_u/W = 1.08$ ).



**Figura 3.8.** Regresión lineal para las medidas de intensidad propuestas en función del daño utilizando para el pulso de Huerta: *FS*) simplemente apoyado; *TC*) cuerpo anclado a la base a través de la revisión tensión-cortante ( $\phi:2''$ ;  $\mu: 5$ ,  $F_u/W = 1.08$ ); *TP*) cuerpo anclado a la base a través de la revisión tensión pura ( $\phi:2''$ ;  $\mu: 5$ ,  $F_u/W = 1.08$ ).

### 3.2.2 ESPERANZA DE DAÑO PARA EQUIPOS ELÉCTRICOS ANTE SEÑALES ARMÓNICAS

En la presente sección se muestra el valor esperado de la pérdida para equipos eléctricos ante una variedad de pulsos, bajo la suposición que ciertos sismos se pueden modelar a través de señales armónicas de amplitud y frecuencia controlada (Makris y Roussos (1998), Makris y Zhang (2001); Arredondo y Reinoso 2008; Dimitrakopoulos y Win 2016). Un sismo de subducción cercano a la fuente corresponde a un pulso de Ricker, un sismo de falla normal de profundidad intermedia a un Senoide y finalmente un sismo de subducción de fuente lejana es posible representarlo a través del pulso propuesto por Huerta (2001). Las señales fueron creadas para una banda de frecuencias entre 0.1 y, 5 segundos y escalados a una amplitud máxima de 2g. Las formas funcionales de estos pulsos se encuentran en las expresiones 45 a 47, respectivamente.

$$\ddot{u}_x = A(2a-1)e^{-a}; a = \left| \frac{\omega(t-T_s)}{2} \right|^2 \quad (\text{Ec. 45})$$

$$\ddot{u}_x = A \sin(\omega t) \quad (\text{Ec. 46})$$

$$\ddot{u}_x = A \frac{90t^2(t-T_d)^6}{T_d^8} \sin(\omega(t-T_d)) \quad (\text{Ec. 47})$$

En general, las características de los cuerpos y propiedades mecánicas del ancla evaluadas se encuentran resumidas en las Tablas 17 y 18. Por su parte, el procedimiento empleado se resume a continuación:

- Digitalización de la sección crítica y cálculo de las propiedades geométricas y rotacionales del equipo eléctrico.
- Elección de la señal de entrada: se analizarán los tres pulsos antes descritos con un diezmo en las señales  $\Delta = 0.001$ , buscando una mejor precisión y estabilidad en la solución numérica (Yim *et al.*, 1980; Lin, 1990; Cunha *et al.*, 2014; Lacerda *et al.*, 2016; Diamantopoulos, 2017; Thomaidis *et al.*, 2018).
- En el caso específico del régimen anclado a la base, se deberán elegir las propiedades mecánicas del anclaje y se evaluarán ambos modos de falla presentados en tópicos anteriores.
- Solución numérica de la respuesta por balanceo puro a través del método numérico RK6 para los regímenes simplemente apoyado y anclado a la base.
- Localización de la respuesta máxima y revisión de los estados límite e inicio de conteo en caso de ser excedidos.
- Una vez finalizado el punto anterior, se calcularán las probabilidades de excedencia asociadas a cada estado límite y se realizará la regresión a través del procedimiento de máxima verosimilitud propuesto por Baker (2015), para la estimación de la curva de fragilidad.
- Estimación de la esperanza (primer momento) y varianza de las pérdidas (segundo momento).

**Tabla 17.** Resumen de parámetros utilizados para la modelación del equipo eléctrico.

<b>b(m)</b>	<b>h(m)</b>	<b>e<sub>x</sub></b>	<b>e<sub>y</sub></b>	<b>x<sub>c</sub>(m)</b>	<b>y<sub>c</sub>(m)</b>	<b>R<sub>R</sub>(m)</b>	<b>R<sub>L</sub>(m)</b>	<b>B<sub>R</sub>(m)</b>	<b>B<sub>L</sub>(m)</b>	<b>p<sub>R</sub>(rad/s)</b>	<b>p<sub>L</sub>(rad/s)</b>
0.5	1.3	0	0	0	1.30	1.39	1.39	0.5	0.5	2.300	2.300
0.5	1.3	0.2	0	0.2	1.30	1.33	1.48	0.3	0.7	2.340	2.280
0.5	1.3	0	0.2	0	1.56	1.64	1.64	0.5	0.5	2.490	2.490
0.5	1.3	0	-0.2	0	1.04	1.15	1.15	0.5	0.5	2.090	2.090
0.5	1.3	0.2	0.2	0.2	1.56	1.59	1.71	0.3	0.7	2.560	2.450
0.5	1.3	-0.2	-0.2	-0.2	1.04	1.25	1.08	0.7	0.3	2.100	2.110

**Tabla 18.** Propiedades relevantes para la modelación del ancla.

<b>K<sub>1</sub> (kg/cm)</b>	<b>K<sub>2</sub> (kg/cm)</b>	<b>f<sub>y</sub> (kg/cm)</b>	<b>φ<sub>1</sub>(cm)</b>	<b>φ<sub>2</sub>(cm)</b>	<b>θ<sub>y</sub></b>	<b>u<sub>y</sub> (cm)</b>	<b>μ</b>		
4,649,294	8,265,412	3800	3.81	5.08	6.99E-05	0.00699	1	5	10

A través de las Figuras 3.9 a 3.15 se representa el primer momento estadístico de la función de pérdidas para los equipos eléctricos evaluados, donde es posible deducir lo siguiente: 1) el valor esperado de las pérdidas cambia en función del tipo de señal utilizada y para el caso de cuerpos anclados a la base, según la revisión de interés (tensión pura o interacción tensión cortante); 2) la predisposición del balanceo a un eventual volcamiento se reduce una vez anclado el cuerpo, sin embargo, es de interés observar que, en la mayoría de los casos y para los pulsos tipo senoide y la señal propuesta por Huerta, a intensidades mayores de 1 g ocurre lo opuesto, es decir, los cuerpos anclados se vuelven más vulnerables. Lo anterior, se asocia principalmente a: condiciones iniciales en la ruptura del anclaje e intensidades pico; 3) de manera general, para cuerpos anclados a la base, la revisión que mayor predisposición al daño tiene es la interacción tensión-cortante; 4) el valor esperado de la pérdida es una métrica ponderada por la probabilidad de ocurrencia, por lo que no es posible deducir a partir de éstas, los cambios importantes que podrían llegar a existir en el comportamiento, sin embargo, dada la tendencia de los resultados obtenidos y como se vio en secciones anteriores, a medida que crece la distancia desde los puntos de rotación del cuerpo  $O$  u  $O'$  al centro de masas considerando los efectos inducidos por la excentricidad, el daño también lo hace, por lo que se puede decir que, la distancia al centro de masa se encuentra relacionado con el daño en el cuerpo; 5) en la mayor parte de los casos evaluados no es posible alcanzar el 100% en el daño asociado al colapso y 6) el tipo de señal que mayor daño presenta se asocia al pulso de Ricker, seguido del tipo Senoide y finalmente el pulso propuesto por Huerta.

En general, para los equipos anclados a la base, se observa que la tendencia en el daño es menor a medida que la ductilidad aumenta, sin embargo, se puede apreciar en algunos casos como el de la Figura 3.9 para la revisión tensión-cortante en la excentricidad  $e_x: -0.20$  |  $e_y: -0.20$  que, el daño tiende a ser mayor en la ductilidad igual a 5, inclusive superior a la de un cuerpo simplemente apoyado. De forma análoga para el caso en la revisión tensión-cortante para un cuerpo regular (ver Figura 3.10) la tendencia del daño indica una vez más que la ductilidad igual a 5 puede ser destructiva. Finalmente, para la Figura 3.11 correspondiente al pulso de Huerta, es de interés observar que la ductilidad igual a 10 a intensidades mayores a 1g y para todos los casos evaluados asociados a una excentricidad objetivo, la tendencia indica mayor vulnerabilidad en cuerpos anclados.

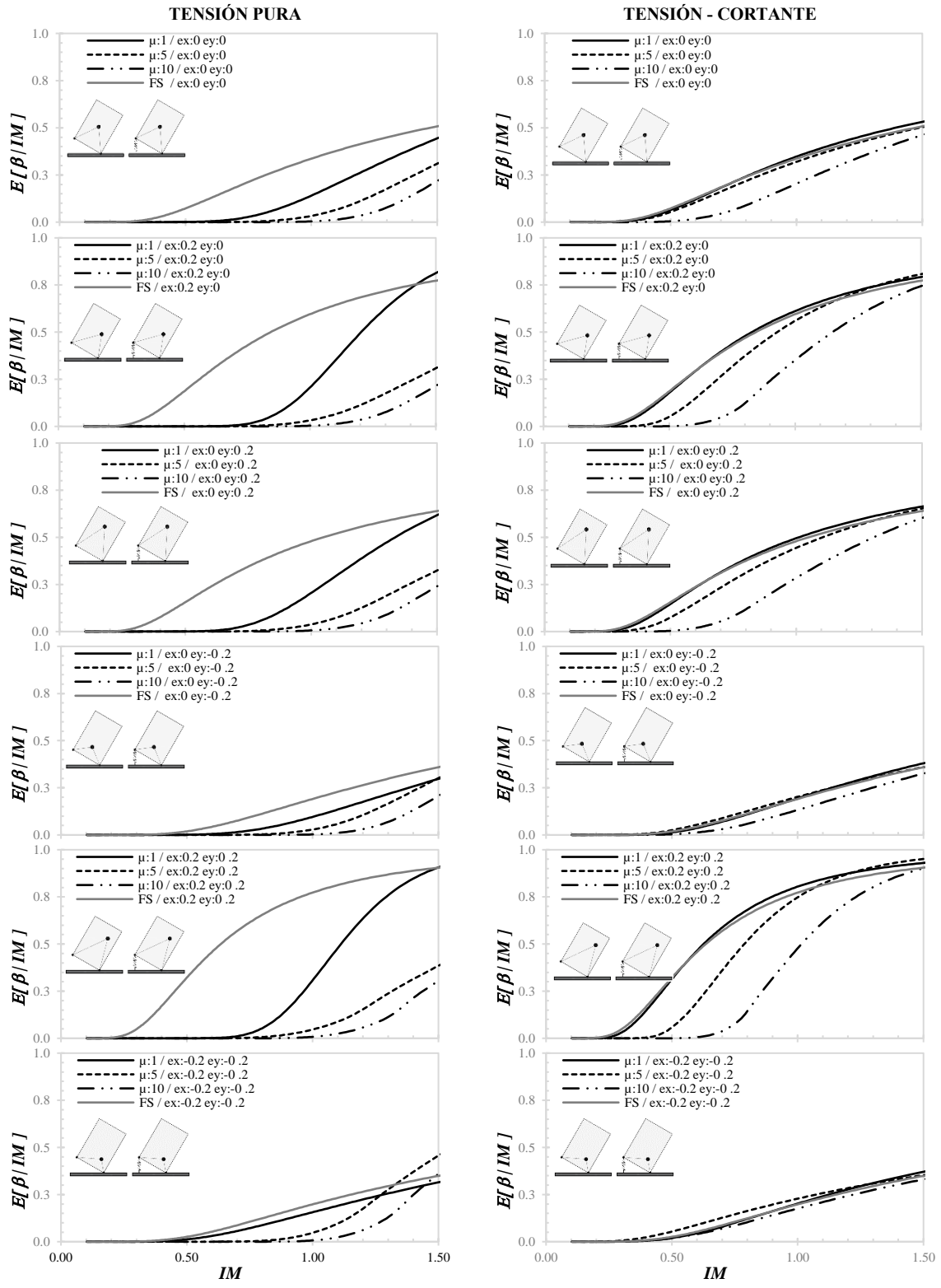


Figura 3.9. Esperanza de daño para el pulso de Ricker considerando el cuerpo simplemente apoyado y anclado a la base con las siguientes características:  $\phi: 3.81, F_u/W: 1.08, \mu: 1, 5, 10$ .

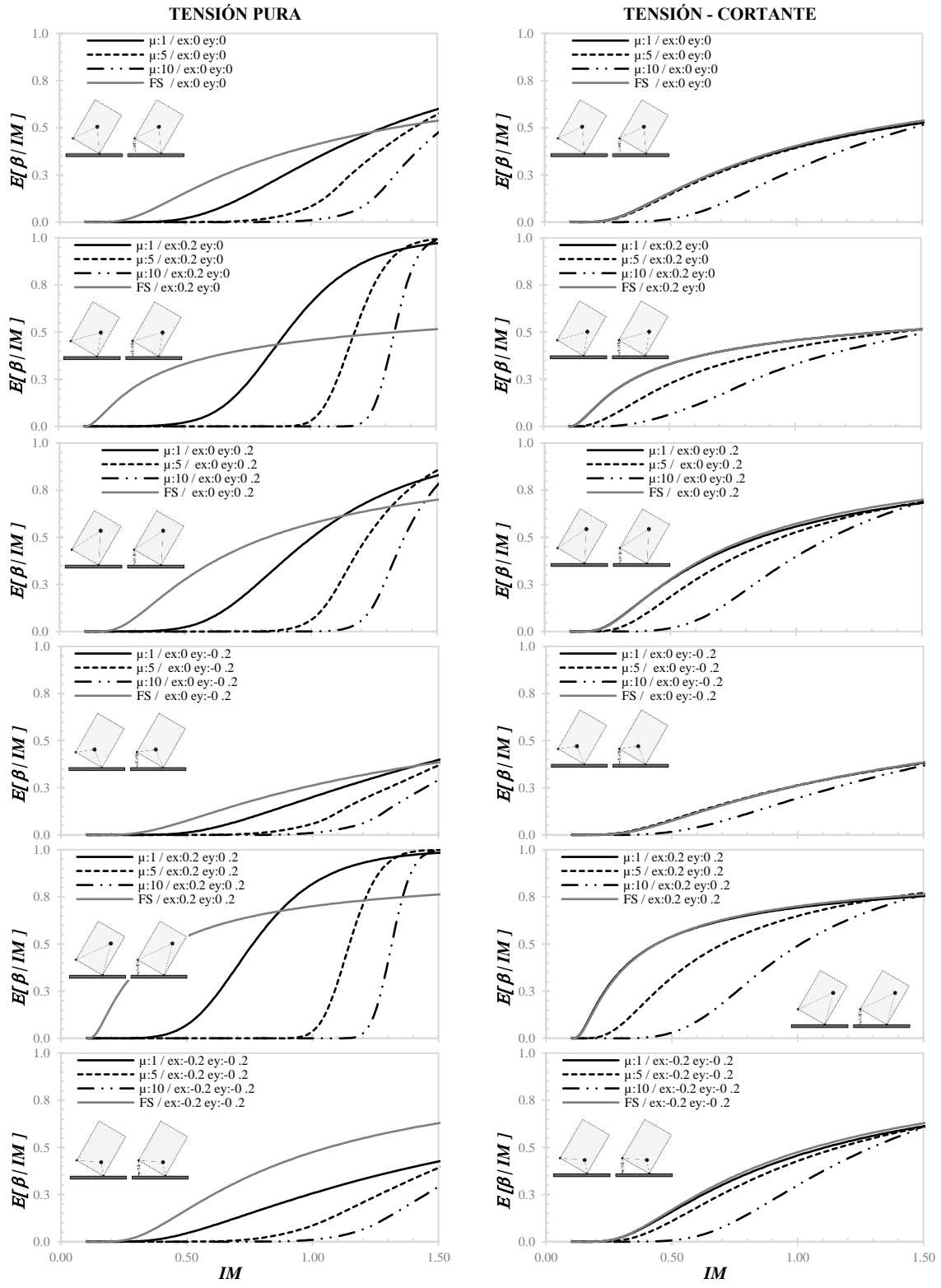


Figura 3.10. Esperanza de daño para un Senoide considerando el cuerpo simplemente apoyado y anclado a la base con las siguientes características:  $\phi: 3.81, F_u/W: 1.08, \mu: 1,5,10$ .

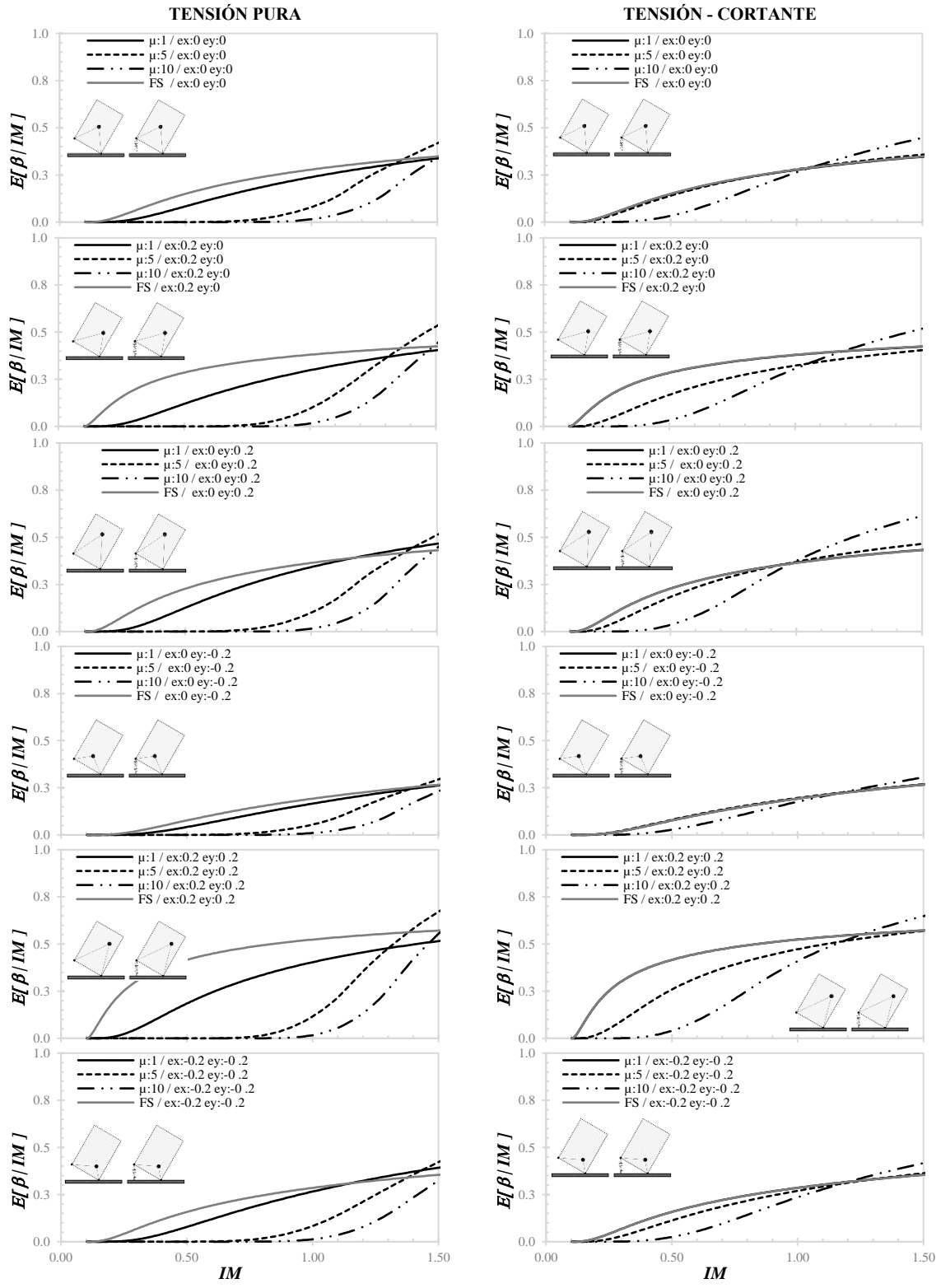


Figura 3.11. Esperanza de daño para el pulso de Huerta considerando el cuerpo simplemente apoyado y anclado a la base con las siguientes características:  $\phi: 3.81, F_u/W: 1.08, \mu: 1, 5, 10$ .



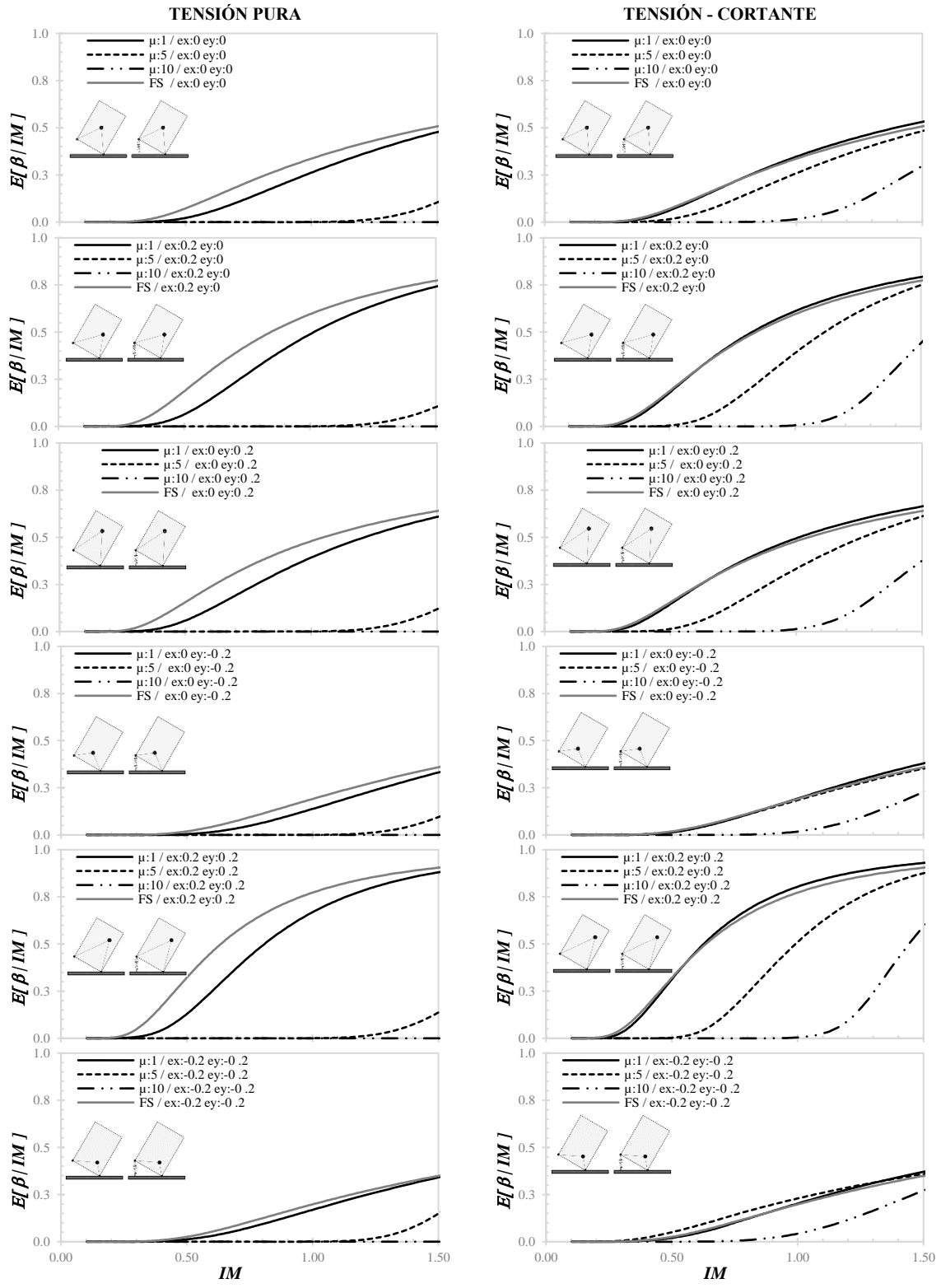


Figura 3.12. Esperanza de daño para el pulso de Ricker considerando el cuerpo simplemente apoyado y anclado a la base con las siguientes características:  $\phi: 5.08, F_u/W: 1.93, \mu: 1, 5, 10$ .

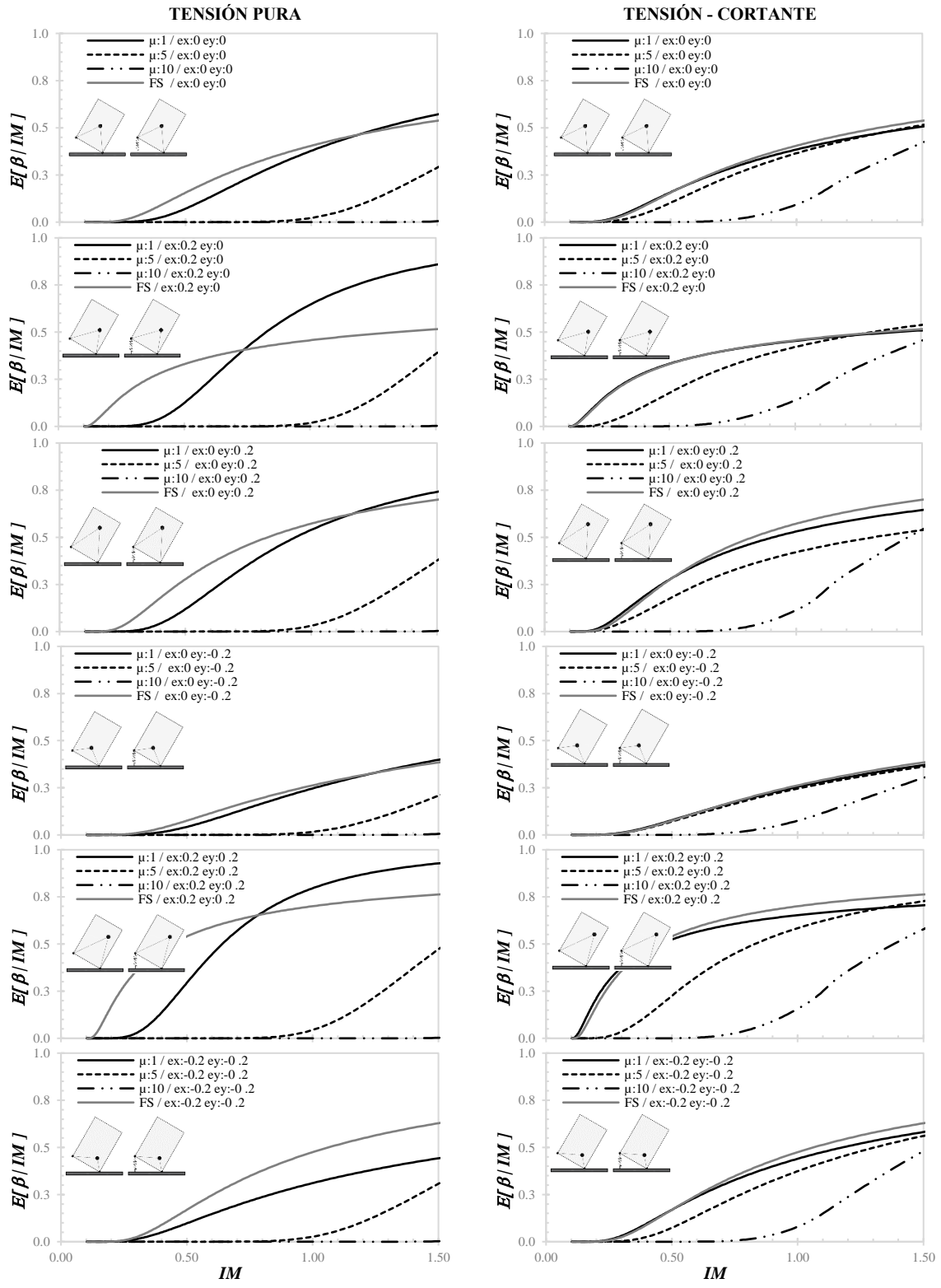


Figura 3.13. Esperanza de daño para un Senoide considerando el cuerpo simplemente apoyado y anclado a la base con las siguientes características:  $\phi: 5.08, F_u/W: 1.93, \mu: 1, 5, 10$ .

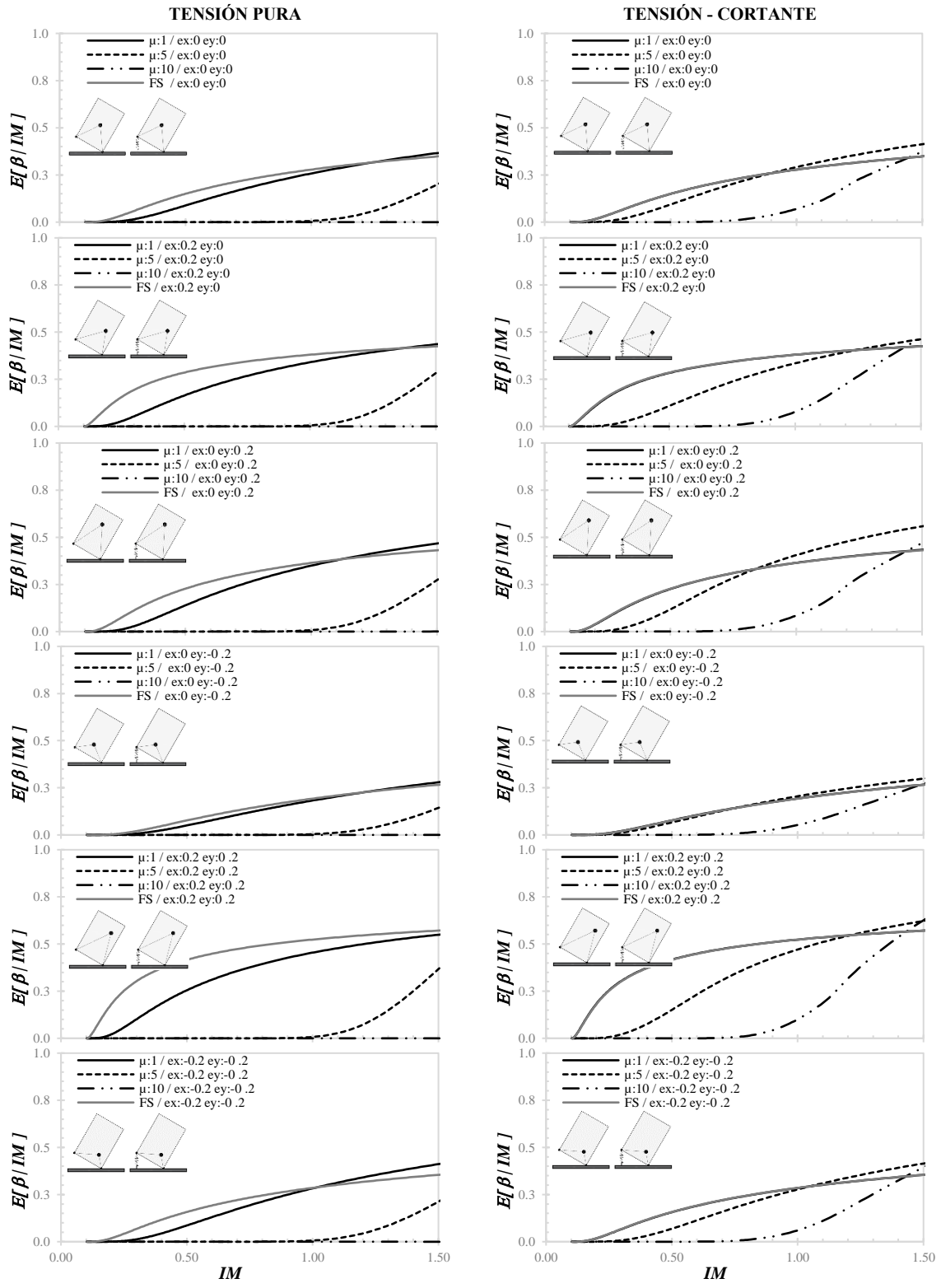
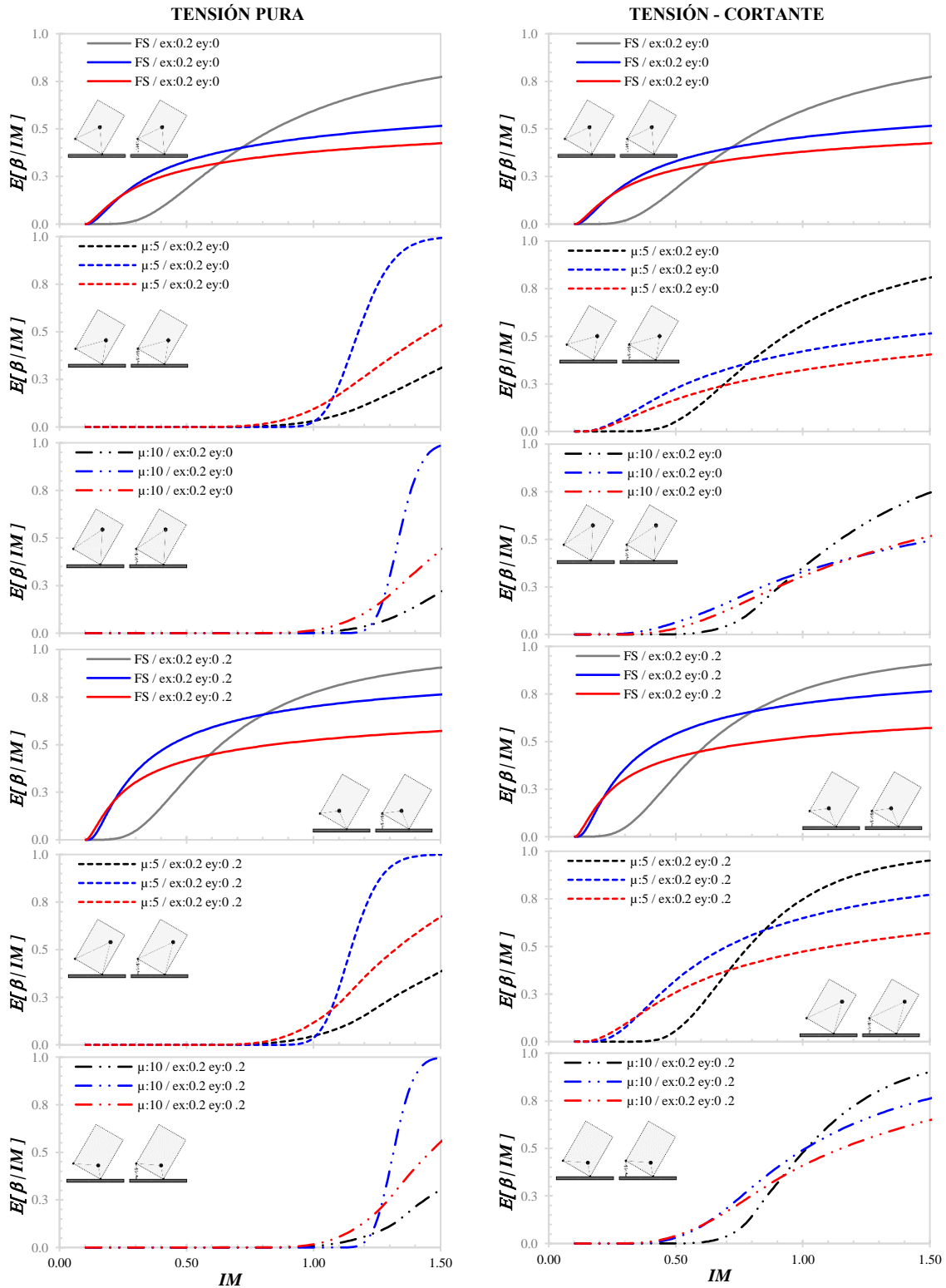


Figura 3.14. Esperanza de daño para el pulso de Huerta considerando el cuerpo simplemente apoyado y anclado a la base con las siguientes características:  $\phi: 5.08, F_u/W: 1.93, \mu: 1, 5, 10$ .



**Figura 3.15.** Comparativa de la esperanza de daño para los tres pulsos considerados (negro-Ricker; azul-senoide; rojo-Huerta) simplemente apoyado y anclado a la base con las siguientes características:  $\phi$ : 3.81,  $F_u/W$ :1.08,  $\mu$ :5 y 10.

### 3.2.3 ESPERANZA DE DAÑO PARA EQUIPOS ELÉCTRICOS POR SISMO

Con base en las incertidumbres existentes dentro del análisis de cuerpos rígidos, existen argumentos para creer que la respuesta es caótica y que la mayoría de los modelos existentes son incapaces de predecirla desde un punto de vista determinista a través de sólo un evento sísmico (Bachmann *et al.*, 2018). Sin embargo, para fines del presente análisis y obtener el primer momento estadístico de la función de pérdidas, se analizan equipos eléctricos a través de una familia de sismos simulados con las características específicas de los lugares de estudio; por lo que, desde un punto de vista estadístico será posible predecir la respuesta de los regímenes aquí evaluados.

Recapitulando, existen diferentes medidas de intensidad para obtener la esperanza de daño, sin embargo, en este documento se optará como medida de intensidad la aceleración máxima del suelo (*PGA*). Es importante aclarar y recalcar que, ante la limitante de eventos con intensidades importantes dentro de la base de datos de sismos fuertes, se ha optado por realizar simulación de acelerogramas sintéticos a través de la metodología propuesta por Kohrs-Sansorny (2005). De manera general, es un método en dos etapas que sirve para simular acelerogramas sintéticos y se basa en terremotos de pequeña magnitud y que son multiplicados por un factor de escala y sumados en conjunto con retrasos de tiempo distribuidos aleatoriamente. El esquema de suma tiene como parámetros fundamentales: la suma de pequeños eventos, el factor de escala y la densidad de probabilidades para representar los tiempos de retraso en cada una de las etapas. Es importante mencionar que, este método es ampliamente utilizado en la literatura por los pocos parámetros de entrada del modelo: el momento sísmico ( $M_0$ ) y la caída de esfuerzos ( $\Delta\sigma$ ).

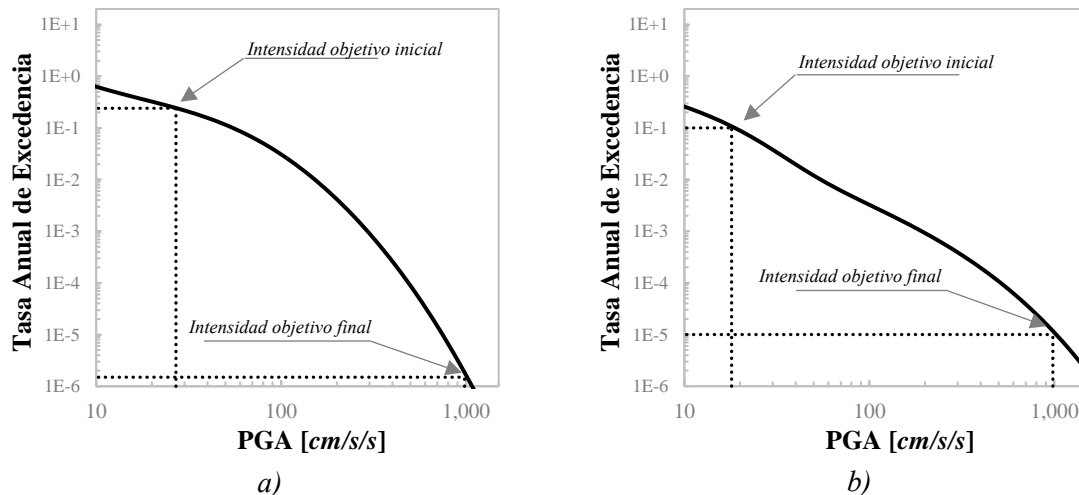
Los lugares fueron seleccionados estratégicamente en la Ciudad de México, el primero corresponde a Ciudad Universitaria (CU), seguido de la Secretaria de Comunicaciones y Transportes (SCT). En estas zonas, es posible observar los efectos de terreno firme y suelo blando, donde es característico el contenido de frecuencias para cada sitio en particular y juega un papel fundamental durante la respuesta del cuerpo. En la Figura 3.16 se representa la distribución espacial de los puntos antes mencionados.



**Figura 3.16.** Localización espacial de los lugares seleccionados para la simulación de acelerogramas sintéticos.

El procedimiento empleado se divide en dos partes, la primera se asocia a la generación de acelerogramas sintéticos y la segunda a la evaluación del cuerpo en sus diferentes regímenes. A continuación, se presenta el procedimiento para la generación de acelerogramas sintéticos:

- Elección de la zona de estudio: para fines de este documento, se ha elegido Ciudad Universitaria y la Secretaría de Comunicaciones y Transportes (ver Figura 3.16).
- Cálculo de las curvas de peligro sísmico para los lugares seleccionados: las curvas de tasa de excedencia para cada sitio de estudio se estimaron a través del modelo de peligro sísmico del Manual de Obras Civiles (MOC) por sismo 2015 de la Comisión Federal de Electricidad, las cuales se muestran en la Figura 3.17.
- Elección de inicio y final de intensidades objetivo: se ha seleccionado una banda entre valores cercanos a 0.1 g y 1 g. Es importante aclarar y recalcar que los periodos de retorno para intensidades superiores de 0.5 g son muy altos y no necesariamente se aplican en el diseño sismorresistente, sin embargo, para fines de este análisis la banda se ha seleccionado con fines de alcanzar daño en el equipo evaluado.

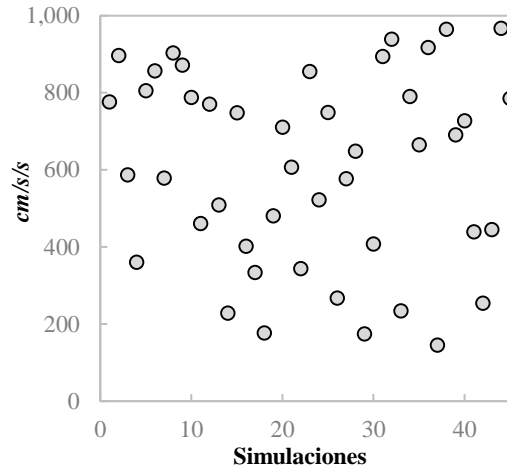


**Figura 3.17.** Curvas de peligro sísmico para las zonas de estudio: a) Secretaria de Comunicaciones y Transportes y b) Ciudad Universitaria.

- Una vez definida la banda objetivo, se creará una colección de intensidades a través de una distribución de probabilidad uniforme: los puntos generados se muestran en la Figura 3.18.
- Con base en el modelo de peligro sísmico de la Comisión Federal de Electricidad 2015, se realizará la desagregación sísmica (Bazurro *et.al.*, 1999) para la colección de intensidades generada en el punto anterior: en la Figura 3.19, se muestran ejemplos para las intensidades 228, 461, 770 y 981 gal en Ciudad Universitaria (CU) y la Secretaría de Comunicaciones y Transportes (SCT). En esta Figura es posible observar la contribución de las fuentes e identificar la magnitud y distancia más probable para generar dicha intensidad.
- A través del par magnitud-distancia obtenidos para cada una de las intensidades objetivo, se buscará el evento semilla o función de Green que servirá para la simulación de acelerogramas sintéticos, la cual deberá tener las características sismo tectónicas del lugar en estudio; los eventos seleccionados como función de Green en este análisis se encuentran en la Tabla 19.

**Tabla 19.** Resumen de los eventos semilla utilizados en el presente análisis.

Evento	M <sub>w</sub>	M <sub>0</sub>	Δσ
25/04/1989	6.9	2.39E+26	150
19/09/2017	7.1	6.51E+26	350

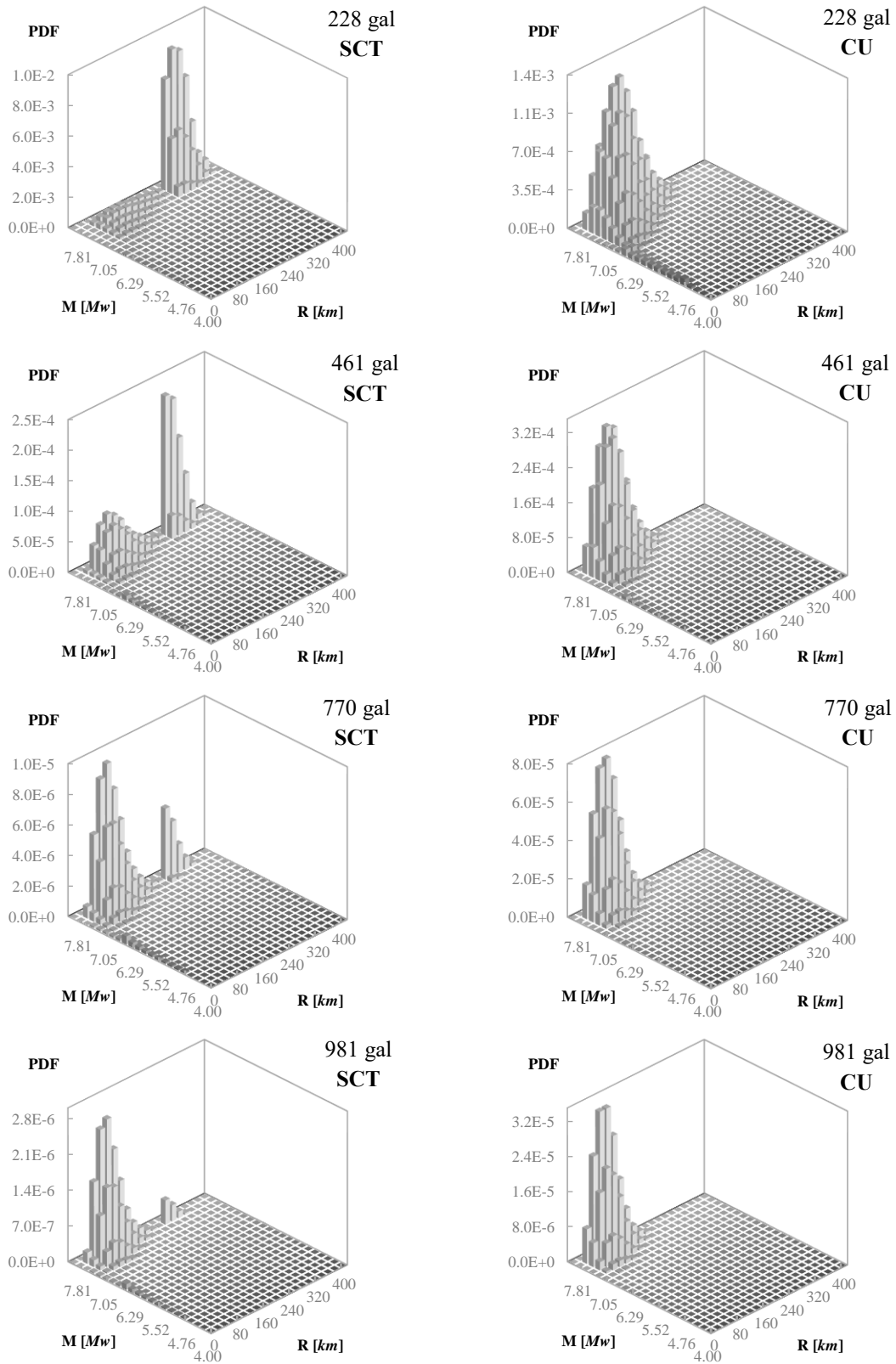


**Figura 3.18.** Colección de intensidades generadas a través de una distribución probabilidad uniforme.

- Cálculo del momento sísmico para las intensidades objetivo: para fines del presente análisis se ha considerado la siguiente relación:

$$M_w = \left( \frac{\log M_0}{1.5} \right) - 10.73 \quad (\text{Ec. 48})$$

- Generación de 50 acelerogramas sintéticos con base en la metodología propuesta por Kohrs-Sansorny (2005), donde se ha establecido un umbral del ±10% de la intensidad objetivo.
- Digitalización de la sección crítica y cálculo de las propiedades geométricas y rotacionales del equipo eléctrico. En la Tabla 17 se muestra el resumen de las propiedades más relevantes durante el cálculo de los equipos evaluados para las cinco excentricidades propuestas.
- Elección de la señal de entrada: se analizarán las señales sintéticas obtenidas en el punto anterior con un diezmo  $\Delta = 0.001$ , buscando una mejor precisión y estabilidad en la solución numérica (Yim *et al.*, 1980; Lin, 1990; Cunha *et al.*, 2014; Lacerda *et al.*, 2016; Diamantopoulos, 2017; Thomaidis *et al.*, 2018).
- En el caso específico del régimen anclado a la base, se deberán elegir las propiedades mecánicas del anclaje y se evaluarán ambos modos de falla presentados en tópicos anteriores: las características mecánicas de las anclas aquí analizadas se resumen en la Tabla 18.
- Solución numérica de la respuesta por balanceo puro a través del método numérico RK6 para los regímenes simplemente apoyado y anclado a la base.
- Localización de la respuesta máxima, revisión de los estados límite e inicio de conteo en caso de ser excedidos.



**Figura 3.19.** Desagregación sísmica en Ciudad Universitaria (CU) y la Secretaría de Comunicaciones y Transportes (SCT) para las intensidades 228, 461, 770 y 981 gal.



- Una vez finalizado el punto anterior, se calcularán las probabilidades de excedencia asociadas a cada estado límite y se realizará la regresión a través del procedimiento de máxima verosimilitud propuesto por Baker (2015), lo que se denominará curva de fragilidad.
- Estimación del valor esperado de la pérdida (primer momento) y varianza de las pérdidas (segundo momento).

A través de las Figuras 3.20 a 3.24 se representa el primer momento estadístico de la función de pérdidas para los equipos eléctricos evaluados, donde es posible deducir lo siguiente: 1) la esperanza de daño cambia en función del lugar de simulación (CU O SCT) atribuido principalmente al contenido de frecuencias típico de cada lugar, el cual juega un rol importante en la respuesta del cuerpo y para el caso de cuerpo anclados a la base una variable adicional es la revisión de interés (tensión pura o interacción tensión cortante); 2) la predisposición del balanceo a un eventual volcamiento se reduce una vez anclado el cuerpo, sin embargo, el análisis aquí presentado se encuentra acotado a dos lugares de estudio, por lo que no se desconoce que es posible ocasionar una inestabilidad en el anclaje; 3) de manera general, para cuerpos anclados a la base la revisión que mayor predisposición al volcamiento tiene es la interacción tensión-cortante; 4) es necesario aclarar que, el primer momento estadístico son valores ponderados por la probabilidad de ocurrencia, por lo que no es posible deducir a partir de éstas, los cambios importantes que podrían llegar a existir en el comportamiento ante cambios pequeños en las intensidades pico, sin embargo, dada la tendencia de los resultados obtenidos y como se vio en tópicos anteriores, a medida que crece la distancia desde los puntos de rotación del cuerpo  $O$  u  $O'$  al centro de masas considerando los efectos inducidos por la excentricidad, el daño también lo hace, por lo que se puede decir que, la distancia al centro de masa se encuentra relacionado con la predisposición al daño en el cuerpo; 5) el lugar con mayor predisposición al volcamiento en el cuerpo se asocia la Secretaría de Comunicaciones y Transportes (SCT).

En general, para los equipos anclados a la base, se observa que la tendencia en el daño es menor a medida que la ductilidad aumenta; sin embargo, se puede apreciar en algunos casos como el de la Figura 3.20 que para ambas revisiones en la excentricidad  $ex: 0.00|ey: -0.20$ , el daño tiende a ser mayor en la ductilidad igual a 5, inclusive superior a la de un cuerpo simplemente apoyado. De forma análoga para la revisión tensión-cortante en la excentricidad  $ex: 0.00|ey: -0.20$  (ver Figura 3.21) la tendencia del daño indica una vez más que la ductilidad igual a 5 puede ser destructiva. Por su parte, en la Figura 3.22 correspondiente a la evaluación en la Secretaría de Comunicaciones y Transportes (SCT) en la excentricidad  $ex: 0.00|ey: -0.20$ , es de interés observar que a intensidades superiores de  $0.7 g$  ocurre inestabilidad en el anclaje con una ductilidad ( $\mu$ ) igual a 5, es decir, un cuerpo anclado es más vulnerable que un cuerpo simplemente apoyado. Por su parte, en la Figura 3.22 para la revisión interacción tensión-cortante en la excentricidad  $ex: 0.20|ey: 0.20$  es posible observar que, la ductilidad ( $\mu$ ) igual a 10 tiene mayor susceptibilidad al daño, superior a la ductilidad igual a 5, lo que sugiere que el instante de ruptura del ancla es importante durante la respuesta del cuerpo. Con base en lo antes descrito y sin desconocer que la esperanza del daño sólo recupera la media ponderada de la respuesta, la tendencia de los datos sugiere que las variables como: contenido de frecuencias característicos del sitio, intensidades pico, duración de la fase intensa, tipo de revisión, instante de ruptura del anclaje, excentricidad en el cuerpo, coeficiente de restitución, entre otros, son clave para la respuesta final del cuerpo.

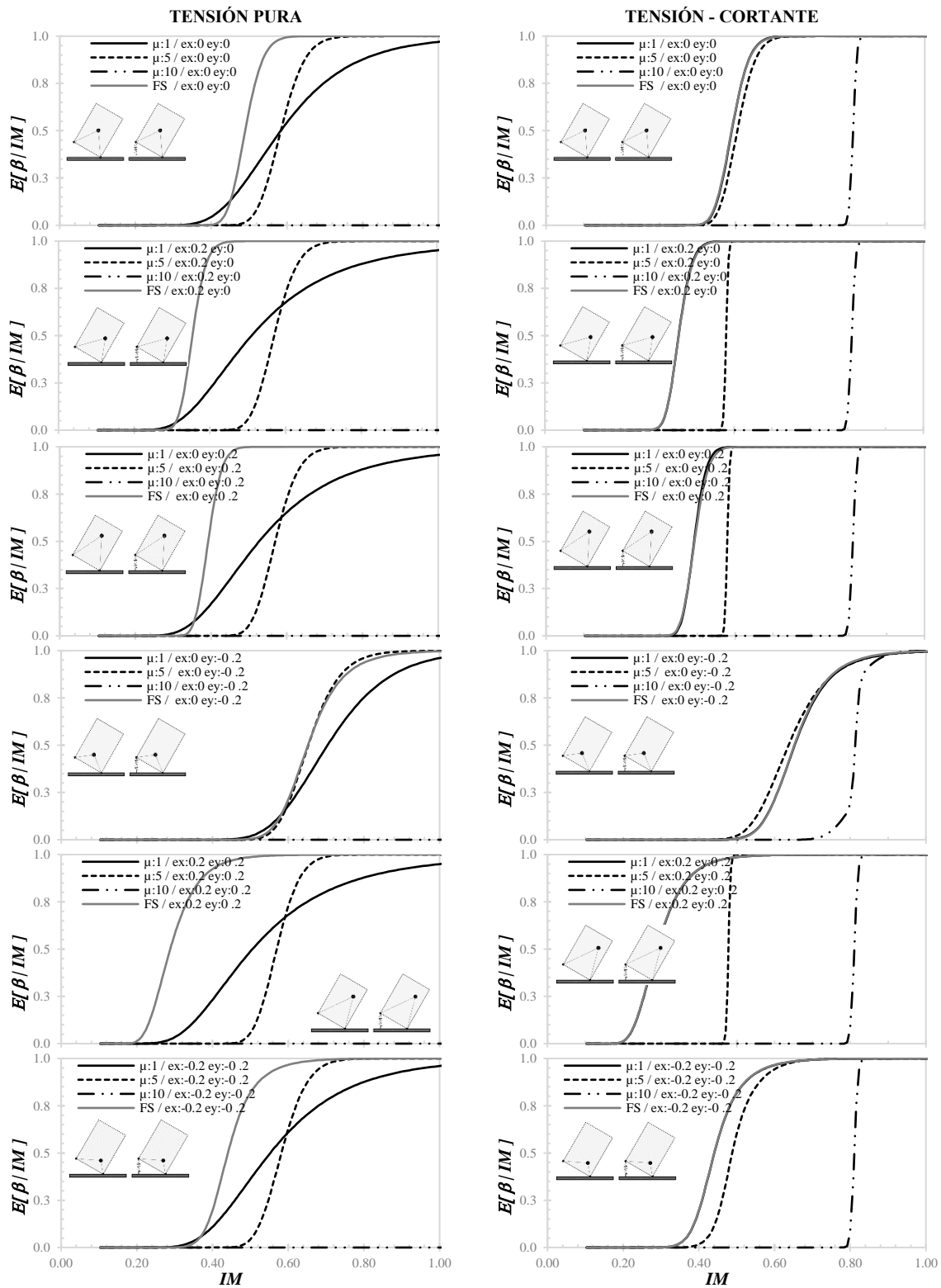


Figura 3.20. Esperanza de daño para la Secretaría de Comunicaciones y Transportes (SCT) considerando el cuerpo simplemente apoyado y anclado a la base con las siguientes características:  $\phi$ : 3.81,  $F_u/W$ :1.08,  $\mu$ : 1,5,10.

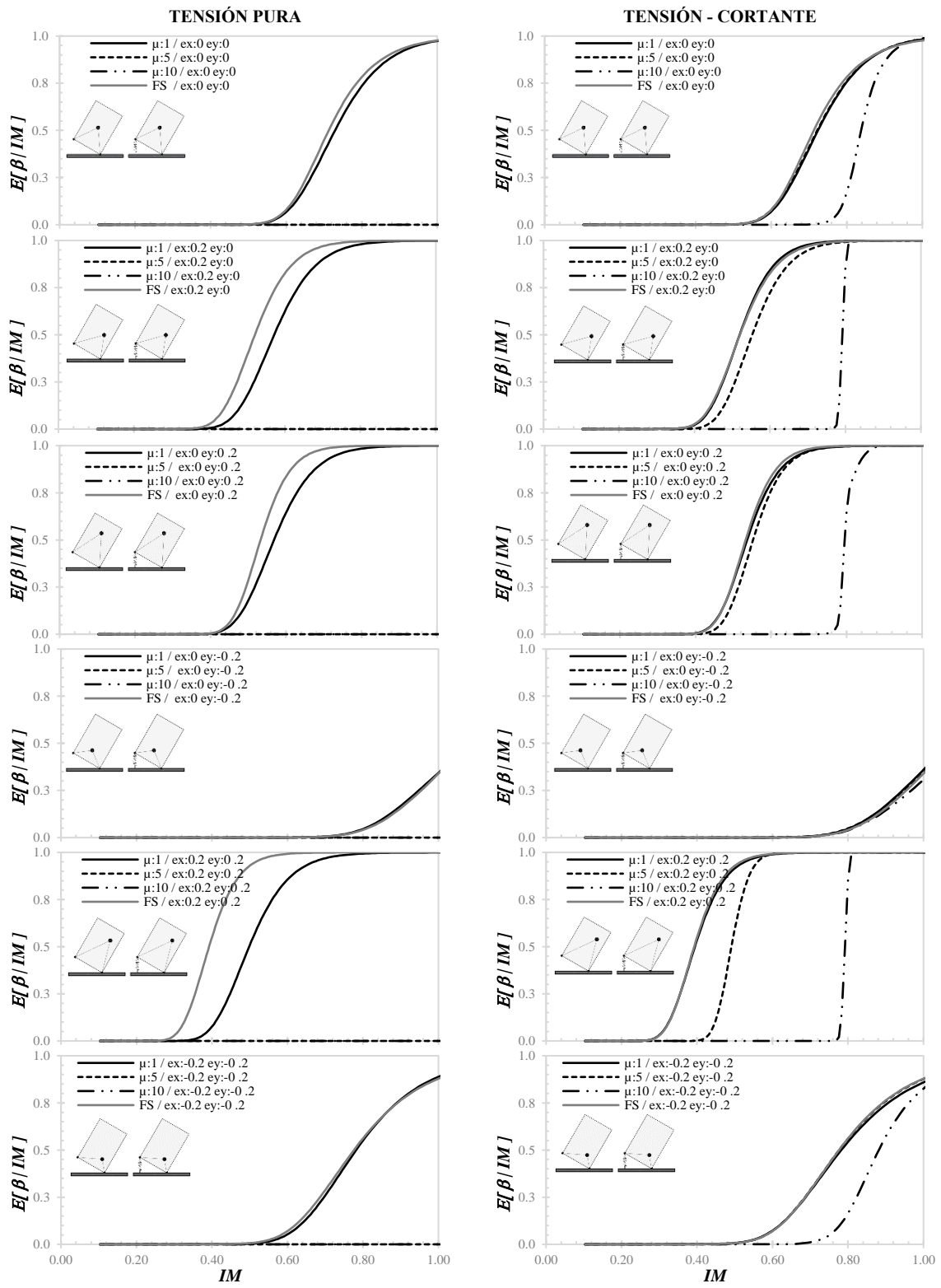


Figura 3.21. Esperanza de daño para Ciudad Universitaria (CU) considerando el cuerpo simplemente apoyado y anclado a la base con las siguientes características:  $\phi: 3.81, F_u/W: 1.08, \mu: 1, 5, 10$ .

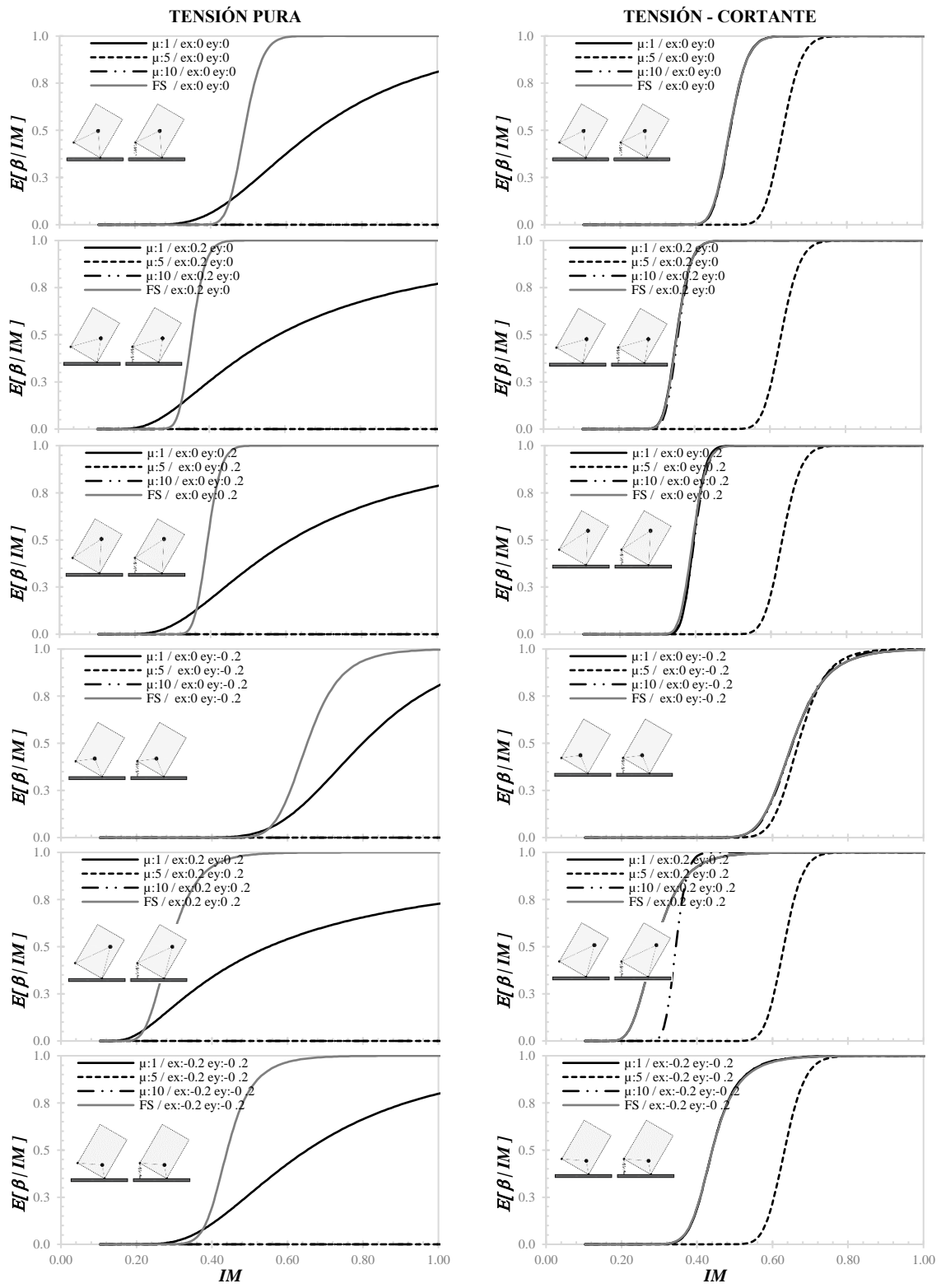


Figura 3.22. Esperanza de daño para la Secretaria de Comunicaciones y Transportes (SCT) considerando el cuerpo simplemente apoyado y anclado a la base con las siguientes características:  $\phi: 5.08$ ,  $F_u/W: 1.93$ ,  $\mu: 1,5,10$ .

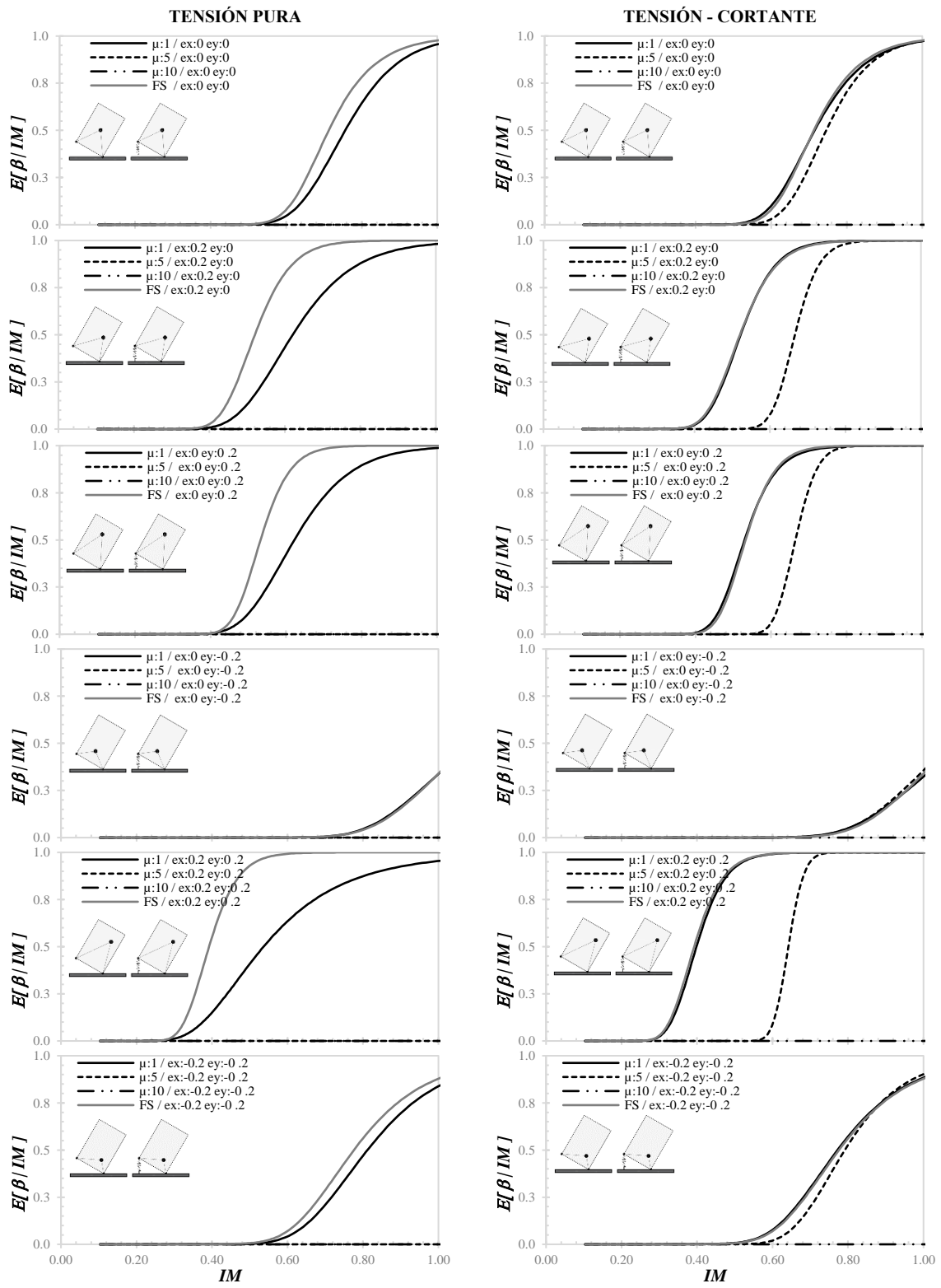
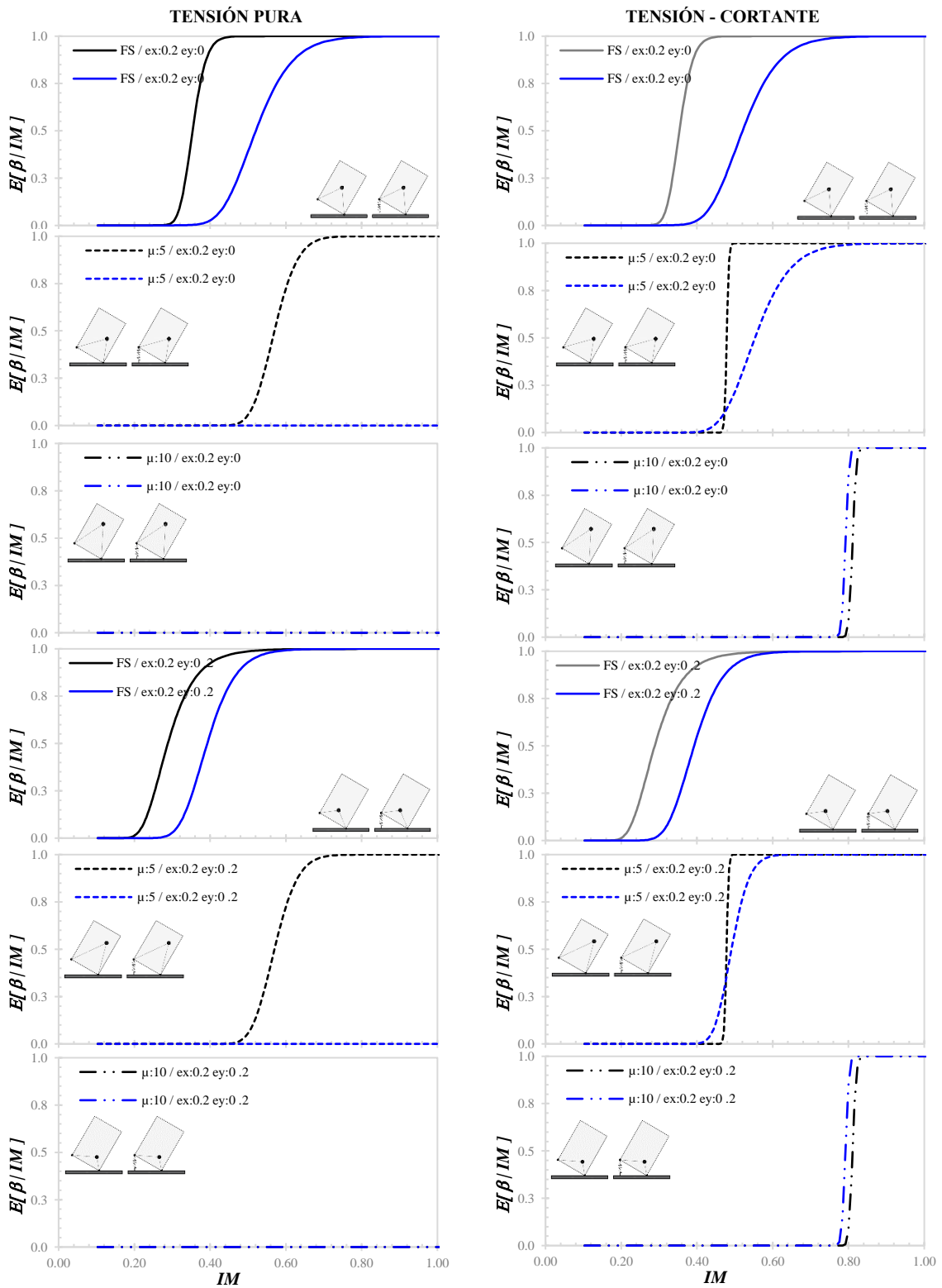


Figura 3.23. Esperanza de daño para Ciudad Universitaria (CU) considerando el cuerpo simplemente apoyado y anclado a la base con las siguientes características:  $\phi$ : 5.08,  $F_u/W$ : 1.93,  $\mu$ : 1,5,10.



**Figura 3.24.** Comparativa de la esperanza de daño para los dos lugares elegidos para la simulación (negro-Secretaría de Comunicaciones y Transportes y azul-Ciudad Universitaria) simplemente apoyado y anclado a la base con las siguientes características:  $\phi: 3.81$ ,  $F_w/W: 1.08$ ,  $\mu: 5$  y  $10$ .

#### 4. CONCLUSIONES, RECOMENDACIONES Y TRABAJOS FUTUROS

En la presente tesis se han analizado equipos eléctricos ante dos modos fundamentales de comportamiento: 1) simplemente apoyado y 2) anclado a la base; en este último se han realizado dos revisiones específicas, tensión pura y la falla combinada tensión-cortante. En este contexto, se ha estimado la función de pérdidas descrita a través de sus dos primeros momentos estadísticos con señales de amplitud y frecuencia controlada y una colección de sismos simulados.

A la luz de los resultados obtenidos, se han encontrado las siguientes conclusiones y/o recomendaciones:

- En el modelo propuesto para un cuerpo anclado a la base, se ha incluido la irregularidad geométrica por formas arbitrarias y la posible variación en la distribución de la masa. Lo anterior, a través de un modelo rectangular equivalente que adquiere propiedades geométricas e inerciales en función de las condiciones iniciales de cada ciclo de vibración ante una acción dinámica.
- De manera general y al comparar las revisiones para un cuerpo anclado a la base, se encontró que las condiciones iniciales dadas en la falla combinada tensión-cortante tiene una mayor predisposición a ocasionar una respuesta pico. De la misma manera, se ha podido observar en la tendencia del daño que, no necesariamente al aumentar la ductilidad, éste disminuye; lo anterior se asocia a que parámetros como el instante de ruptura y la duración de la fase intensa del movimiento.
- Para el caso específico de la revisión por tensión pura, se ha podido observar que existe una tendencia marcada en el daño, donde a medida que la ductilidad crece y la relación de capacidad definida por el cociente  $F_u/W$  es mayor, el daño en el cuerpo disminuye.
- De acuerdo con las comparaciones deterministas realizadas para sismos en el territorio mexicano, se ha podido ver que, para sismos de subducción de fuente cercana existe mayor daño en el equipo analizado, seguido de sismos de falla normal de profundidad intermedia y finalmente subducción de fuente lejana. Con base en las excentricidades propuestas en este trabajo, se observó que las asociadas a  $ex:0.20|ey:00$  y  $ex:0.20|ey:0.20$  tienen una mayor predisposición al daño.
- Con base en el cociente entre las aceleraciones mínimas de volcamiento para los modos de respuesta analizados, fue posible encontrar un rango de frecuencias donde el anclaje es nocivo para el equipo, que en general se encuentran en 1 y 3 veces la frecuencia del cuerpo. Lo anterior, se representa gráficamente en función de parámetros geométricos y de frecuencia del sitio de interés, por lo que, este tipo de herramientas servirán para la práctica diaria en el diseño sismorresistente considerando las condiciones *in situ* de equipos eléctricos.
- A través de la revisión del coeficiente de determinación  $R^2$  en las medidas de intensidad propuestas en este trabajo, se ha podido observar que es posible relacionar parámetros cinéticos y cinemáticos en busca de reducir la dispersión entre la medida de intensidad y la variable de daño. A pesar de lo antes descrito y con fines de riesgo sísmico, no existen modelos de atenuación que relacionen las medidas de intensidad analizadas, por lo que, se ha considerado la aceleración máxima del suelo (amplitud para pulsos y funciones armónicas) como medida de intensidad para la creación de funciones de fragilidad y vulnerabilidad.

- En la función de pérdidas para equipos eléctricos a través de pulsos o funciones armónicas, se ha podido observar que el pulso de Ricker ocasiona una mayor predisposición al daño, seguido de la función tipo senoide y finalmente el pulso propuesto por Huerta.
- Por su parte, para la función de pérdidas de equipos eléctricos a través de sismos simulados, el lugar donde los equipos tiene mayor predisposición al volcamiento se asocia a la Secretaría de Comunicaciones y Transportes (SCT), seguido de Ciudad Universitaria (CU).
- Al revisar ambas funciones de pérdidas tanto para sismos simulados como pulsos armónicos se ha podido observar que, a grandes intensidades, la ductilidad ( $\mu$ ) igual a 5 en ambas revisiones ocasiona un efecto destructivo en el equipo, inclusive superior a la de un cuerpo simplemente apoyado.
- Desde un punto de vista de diseño sismorresistente, es posible ver que, para intensidades recurrentes, es decir, intensidades que no superen el sismo de diseño, el anclaje es una medida de mitigación efectiva; sin embargo, es posible deducir que, a intensidades importantes, anclar un equipo a la base no necesariamente es la mejor opción, ya que si en anclaje llegará a la falla y dada una combinación de condiciones iniciales provocaría una caída súbita del equipo eléctrico.
- Con base en los resultados del primer momento estadístico de la función de pérdidas (esperanza del daño) obtenida a través de pulsos, funciones armónicas y sismos simulados, es posible deducir que: el contenido de frecuencias en la respuesta dinámica del equipo eléctrico juega un rol fundamental por lo que, señales de amplitud controlada y frecuencia constante no recupera en su totalidad este efecto, además en la mayoría de los casos, las señales de amplitud y frecuencia controlada sobreestiman la capacidad del equipo por lo que, no necesariamente es comparable, sin embargo, es posible considerar la evaluación a través de pulsos o funciones armónicas como una primera estimación en el comportamiento.
- La respuesta determinista en el comportamiento dinámico de equipos eléctricos, indica que no necesariamente al crecer la intensidad pico la respuesta global se inclina a un mayor daño; sin embargo, cuando se realiza el análisis estadístico ocurre lo opuesto, es decir, a medida que la intensidad crece, el daño también lo hace.
- Con base en las comparaciones realizadas en este documento se deduce que la respuesta dinámica de equipos eléctricos simplemente apoyados y anclados a la base depende en gran medida de: geometría, propiedades inerciales, interfaz, superficie portante, coeficiente de restitución, contenido de frecuencias, intensidades pico, duración de la fase intensa del movimiento, instante de ruptura del ancla, no linealidad de la respuesta, no linealidad del material, entre otros.
- Existen rangos donde la medida de mitigación propuesta en este documento cumple su funcionalidad, sin embargo, se recomienda evaluar múltiples señales buscando encontrar la media estadística y por consecuencia considerar las posibles incertidumbres que se tienen el comportamiento dinámico de cuerpos rígidos.
- Utilizando criterios ingenieriles basados en un análisis dinámico y considerando una métrica susceptible a ser ponderada como una función de vulnerabilidad, es posible pensar que las pérdidas económicas y consecuenciales para equipos eléctricos por efectos de cargas inducidas por terremoto se pueden evitar, ya que es posible analizar escenarios hipotéticos y con base en ellos generar planes de mitigación y resiliencia.



Por otra parte, y sin desconocer que los resultados aquí presentados son aproximados, existen puntos específicos donde es posible ampliar el panorama general y tener un mayor estado del conocimiento, por lo que, a partir del presente trabajo se desprenden los siguientes tópicos de investigación o análisis:

- Estimación de funciones de vulnerabilidad con fines de riesgo sísmico para terremotos de subducción cercanos a la fuente considerando criterios de escalamiento sismológico.
- Estimación de funciones vulnerabilidad para cuerpos simplemente apoyados y anclados a la base en edificios altos para sistemas estructurales comunes en zonas específicas de suelo como: terreno firme, transición y suelo blando.
- Estimación de funciones vulnerabilidad para cuerpos simplemente apoyados y anclados a la base en edificios considerando efectos de interacción suelo-estructural.
- Estimación de funciones vulnerabilidad para cuerpos simplemente apoyados y anclados a la base en edificios considerando sistemas de protección sísmica y la posible repercusión en el comportamiento dinámico de cuerpos rígidos.
- Análisis del comportamiento dinámico de cuerpos rígidos simplemente apoyado y anclados a la base considerando efectos de directividad en la onda en Ciudad de México, Oaxaca y Acapulco.
- Análisis de sensibilidad considerando como variable aleatoria los parámetros de frontera y su repercusión en la esperanza de daño definiendo bandas de confiabilidad.
- Creación de modelo dinámico de cuerpos rígidos simplemente apoyado y anclado a la base considerando fluidos newtonianos dentro del mismo.
- Creación de forma funcional para el cálculo de la aceleración mínima de volcamiento considerando múltiples formas de falla en el anclaje y variables como: ductilidad, contenido de frecuencias y características geométricas del cuerpo de interés.
- Mapeo de zonas críticas en ciudades que cuenten con una red de instrumentación sísmica buscando el rango finito de frecuencias donde optimice el uso de anclajes en el equipo.
- Realizar análisis costo-beneficio considerando múltiples formas de falla del anclaje y su posible propagación en el tiempo.
- Extrapolar la presente metodología con fines de riesgo sísmico para equipos eléctricos a otras medidas de mitigación como: aisladores sísmicos de base y masa solidas resonantes.
- Evaluación de diferentes medidas de mitigación y la posible propagación en el tiempo.
- Caracterizar y definir medidas de intensidad que minimicen la dispersión con una variable de daño de interés.
- Generar modelos de atenuación con fines de peligro sísmico probabilista considerando medidas de intensidades apropiadas para cuerpos rígidos y en específico para equipos eléctricos.
- Estimación del riesgo sísmico en zonas donde predominen sismos de subducción cercanos a la fuente o sismos de falla normal de profundidad intermedia.

## REFERENCIAS

1. ACI (American Concrete Institute). (2014). *“Building code requirements for reinforced concrete”*. ACI 318-14.
2. Aguilar A. (2001) *“CRISIS 99.1 Sistema de cómputo para el cálculo del peligro sísmico”*. Tesis de Maestría, Programa de Maestría y Doctorado, Ingeniería, UNAM.
3. AISC, A. (2010). AISC 341-10. *“Seismic provisions for structural steel buildings”*. Chicago (IL): American Institute of Steel Construction.
4. Arredondo Velez, C. A. (2006). *“Comportamiento sísmico de contenidos de edificios”*. Universidad Nacional Autónoma de México.
5. Arredondo Velez, C. A., Reinoso Angulo R., y Zenteno Mauricio. (2006). *“Comportamiento de cuerpos rígidos de formas arbitrarias y distribución de masa no necesariamente uniforme”*. Sociedad Mexicana de Ingeniería Estructural Sociedad Mexicana de Ingeniería Estructural.
6. Arredondo, C. and Reinoso, E. (2008) *“Influence of frequency content and peak intensities in the non-linear seismic response of rigid bodies”* Journal of Earthquake Engineering 12(4), 517–533.
7. Arredondo, C., Jaimes, M. A., y Reinoso, E. (2017). *“A simplified model to evaluate the dynamic rocking behavior of irregular free-standing rigid bodies calibrated with experimental shaking-table tests”*. Journal of Earthquake Engineering, 1-26.
8. ATC-13, (1985) *“Earthquake damage evaluation for California”*, FEMA.
9. Bachmann, Jonas, Strand, Matthias, Vassiliou, Michalis, Broccardo, Marco y Stojadinovic, Milos. (2018). *“Rocking motion: chaotic or not chaotic, does it matter for seismic design”*.
10. Badillo, A, Whittaker A, Reinhorn, A, y Cimellaro G (2006), *“Seismic fragility of suspended ceiling systems, technical report MCEER-06-0001 State University of New York”*, NY.
11. Baker, J. W. (2015). *“Efficient analytical fragility function fitting using dynamic structural analysis”*. Earthquake Spectra, 31(1), 579-599.
12. Bouc, R. (1971). *“Modele mathematique d’hysteresis.”* Acustica, 24, 16–25 (in French).
13. CFE. (2008). *“Manual de diseño de obras civiles: Diseño por sismo”*.
14. Crespo, J. (2016). *“Estudio del comportamiento de los anclajes metálicos adheridos en granito”* (Doctoral dissertation, Universidad de Vigo).

15. Cunha, A., Caetano, E., Ribeiro, P., y Müller, G. (2014). *“Numerical analysis of rocking of unanchored bodies subjected to seismic load using Finite Element analyses”*.
16. DeJong, M. J. (2012). *“Amplification of rocking due to horizontal ground motion”*. Earthquake Spectra, 28(4), 1405-1421.
17. Diamantopoulos, S. (2017). *“Seismic Response Assessment of Rigid and Flexible Rocking Bodies using Simple Finite Element Models”*.
18. Doerr, G. T. y Klingner, R.E. (1989), *“Adhesion anchors: behavior and spacing requirements”*, Center of Transportation Research, Austin, University of Texas, USA.
19. Eguchi, R., y Seligson, H. (1994). *“Lifeline Perspective. Practical Lessons from the Loma Prieta Earthquake”*, Symposium Held in Conjunction with the Earthquake Engineering Research Institute, 135-163.
20. Giouvanidis, A., y Dimitrakopoulos, E. G. (2017). *“Nonsmooth modelling of impacts in rocking structures with poisson’s law”*, Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering, 1-17.
21. Huerta, B., and E. Reinoso, 2001. Microzonificación y curvas de igual energía en el valle de México. M. E. Thesis, UNAM, Mexico City.
22. Housner, G. W. (1963). *“The behavior of inverted pendulum structures during earthquakes”*. Bulletin of the seismological society of America, 53(2), 403-417.
23. Ishiyama, Y. (1982). *“Motions of rigid bodies and criteria for overturning by earthquake excitations”*. Earthquake Engineering y Structural Dynamics, 10(5), 635-650.
24. Jaimes, M. A., y Candia, G. (2018), *“Toppling of rigid electric equipment during earthquakes”*. Engineering Structures, 168, 229-242.
25. Jaimes, Miguel y Reinoso, Eduardo. (2013). *“Estimación de pérdidas por sismo de contenidos de edificios”*. Serie Investigación y Desarrollo, Instituto de Ingeniería UNAM. SID/683. 105.
26. Kennedy, R P, y Ravidra, M K (1984), *“Seismic fragilities for nuclear power plant risk studies”*, Nuclear Engineering and Design 79, 47-68.
27. Kimura, T. R., y Iida, K. (1934). *“On the rocking of rectangular columns (I)”*. Zisin, 6(3), 125-149.
28. Kohrs-Sansorny, C., Courboux, F., Bour, M., y Deschamps, A. (2005). *“A two-stage method for ground-motion simulation using stochastic summation of small earthquakes”*. Bulletin of the Seismological Society of America, 95(4), 1387-1400.

29. Kramer, S. L. (1996). "*Geotechnical Earthquake Engineering*", 653 pp., Prentice Hall, New Jersey.
30. Lacerda Junior, Wilson Martins, Samir y Nepomuceno, Erivelton. (2016). "*Influence of Sampling Rate and Discretization Methods in the Parameter Identification of Systems with Hysteresis*". Journal of Applied Nonlinear Dynamics.
31. Lin, H. (1990). "*Chaotic response and stability of offshore equipment*", Ocean Engineering, 18, 225-250.
32. Lundin, R. (2012). "*Introduction to concrete anchor rods*". M.S., Thesis, Kansas State University, Manhattan.
33. Makris, N. (2014a). "*A half-century of rocking isolation*". Earthquakes and Structures, 7(6), 1187-1221.
34. Makris, N. (2014b). "*The role of the rotational inertia on the seismic resistance of free-standing rocking columns and articulated frames*". Bulletin of the Seismological Society of America, 104(5), 2226-2239.
35. Makris, N. y Roussos, Y. (1999). "*Rocking response of rigid blocks under near-source ground motions*". Geotechnique, 50, 243-262.
36. Makris, N., y Black, C. J. (2002). "*Rocking response of equipment anchored to a base foundation*". Pacific Earthquake Engineering Research Center.
37. Makris, N., y Black, C. J. (2002). "*Uplifting and overturning of equipment anchored to a base foundation*". Earthquake spectra, 18(4), 631-661.
38. Makris, N., y Zhang, J. (2001). "*Rocking response of anchored blocks under pulse-type motions*". Journal of engineering mechanics, 127(5), 484-493.
39. Makris, N., Zhang, J., y Pi, N. M. (1999). "*Rocking response and overturning of anchored equipment under seismic excitations*"
40. Makris, Nicos y Zhang, Jian. (2000). "*Rocking response of free-standing and anchored blocks under pulse-type motions*", Pacific Earthquake Engineering Research Center.
41. Makris, Nicos. (2000). "*Rocking Response and Overturning of Anchored Blocks under Pulse-Type Motion*" 14th Engineering Mechanics Conferences, 1-5.
42. Milne, J. (1885). "Seismic experiments." Trans. Seism. Soc. Japan, 8, 1-82.

43. Ordaz, M. (2008). “*Relaciones entre curvas de fragilidad, matrices de probabilidad y funciones de vulnerabilidad*”. Nota técnica ERN Ingenieros Consultores SC.
44. Ordaz, M. (2008). “*CRISIS 2008 USER’S MANUAL*”. Instituto de Ingeniería, UNAM, México.
45. Ordaz, M., Miranda, E., y Avilés, J. (2003). “*Propuesta de espectros de diseño por sismo para el DF*”. Revista Internacional de Ingeniería de Estructuras, 8(2), 189-207.
46. Ordaz, M. (2016). “*Normas de Diseño por Sismo en México DF: algunas novedades interesantes*”. Alternativas, 17(3), 106-115.
47. Bazzurro, P., y Allin Cornell, C. (1999). “*Disaggregation of seismic Hazard*”. Bulletin of the Seismological Society of America, 89(2), 501-520.
48. Porter, K, y Kiremidjian, A (2001), “*Assembly-based vulnerability of buildings and its uses in seismic performance evaluation and risk management decision-making, reporte 309, John A, Blume Earthquake Engineering Center*”, Stanford University, Stanford, CA, 196.
49. Purvance, M. D. (2005). “*Overturning of slender blocks: Numerical investigation and application to precariously balanced rocks in Southern California*”, PhD Dissertation 2005, University of Nevada, Reno.
50. Rehm, G. (1985), “*On the problem of suitability of HIT adhesive anchors on EP-acrylatresins for load-bearing structures*”, Gutachtliche Stellungnahme, Munich, Germany.
51. Shenton III, H. (1990) “*Response of rigid blocks to base excitation*”, Thesis presented to the Johns Hopkins University, Baltimore, Maryland.
52. Swan, S W, y Kassawara, R (1998), “*The use of earthquake experience data for estimates of the seismic fragility of standard industrial equipment, ATC 29-1, Proc of Seminar on Seismic Design, Retrofit, and Performance of Nonstructural Components, Applied Technology Council*”, Redwood City, CA, 313-322.
53. Tang, A. K. (Ed.). (2000). Izmit (Kocaeli), “*Turkey, Earthquake of August 17, 1999 Including Duzce Earthquake of November 12, 1999: Lifeline Performance (Vol. 17)*”. ASCE Publications.
54. Taniguchi, T. (2002). “*Non-linear response analyses of rectangular rigid bodies subjected to horizontal and vertical ground motion*”. Earthquake engineering y structural dynamics, 31(8), 1481-1500.
55. Thomaidis, I. M., Camara, A., y Kappos, A. J (2018). “*Simulating the rocking response of rigid bodies using general-purpose finite element software*”.

56. Villaverde, R (2006), "*Simple method to estimate the seismic nonlinear response of nonstructural components in buildings*", Engineering Structures, 28(8), 1209-21.
57. Yim, C. S., Chopra, A. K., y Penzien, J. (1980). "*Rocking response of rigid blocks to earthquakes*". Earthquake Engineering y Structural Dynamics, 8(6), 565-587.
58. Zhang, J., y Makris, N. (2001). "*Rocking response of free-standing blocks under cycloidal pulses*". Journal of Engineering Mechanics, 127(5), 473-483.

## ANEXO.A1 VALOR ESPERADO DEL DAÑO CONSIDERANDO AL COEFICIENTE DE RESTITUCIÓN COMO UNA VARIABLE ALEATORIA

El método de Monte Carlo es una técnica de análisis numérico que se basa en el uso de secuencias de números aleatorios para obtener muestras representativas de las variables de probabilidad de un problema determinado. Los valores representativos se obtienen a partir de las distribuciones de probabilidad de cada variable y la solución al problema planteado se estima analizando los valores de la muestra a través de métodos estadísticos. Para fines específicos del presente tópico, dentro de las diferentes variaciones al método de Monte Carlo se utilizará la distribución de probabilidad inversa, el cual se describe de forma general a continuación.

### DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD INVERSA

Sea  $x$  una variable aleatoria continua en un intervalo  $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$ . Para medir la probabilidad obtener  $x$  en un intervalo  $(a, b)$ , se utilizará una probabilidad  $p[x|a < x < b]$ , de esta manera, la probabilidad de obtener  $x$  en un intervalo  $d_x$  entre  $x_i$  se puede expresar como:

$$p[x|x_1 < x < x_1 + d_x] = p(x)dx \quad (\text{Ec.I.1})$$

donde  $p(x)$  es la función de densidad probabilidad (FDP) y  $x$  debe ser positiva, normalizada y debe satisfacer que:

$$p(x) \geq 0 \quad \text{y} \quad \int_{\min}^{\max} p(x)dx = 1 \quad (\text{Ec.I.2})$$

Sea  $P(x)$  la función de distribución acumulada de  $p(x)$  definida por:

$$P(x) = \int_{x_{\min}}^x p(x)dx \quad (\text{Ec.I.3})$$

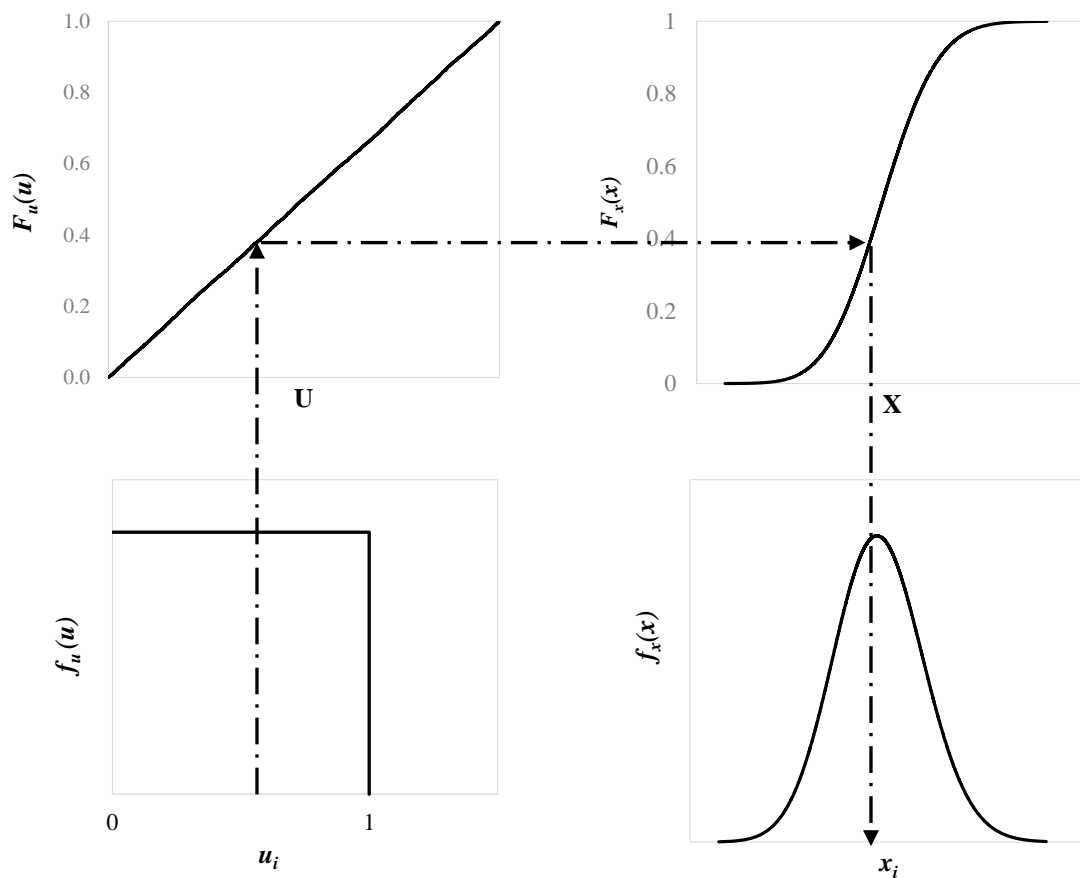
La expresión anterior es una función no decreciente de  $x$  y varía desde  $P(x_{\min}) = 0$  hasta  $P(x_{\max}) = 1$ . La de distribución acumulada de  $p(x)$  tiene una función inversa  $p^{-1}(\xi)$ . La transformación  $\xi = P(x)$  se define como una nueva variable estocástica que asume los valores en el intervalo  $[0,1]$ . Debido a la correspondencia entre los valores de  $x$  y  $\xi$ , la función de densidad de probabilidades de  $\xi$ ,  $P_{\xi}(\xi)$  es una de  $x$ ,  $p(x)$ . Estas densidades de probabilidad se encuentran relacionadas por  $P_{\xi}(\xi)d\xi = p(x)dx$  y:

$$P_{\xi}(\xi) = p(x) \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^{-1} = P(x) \left( \frac{P(x)}{dx} \right)^{-1} = p(x) [p(x)]^{-1} = 1 \quad (\text{Ec.I.4})$$

Es decir,  $\xi$  se encuentra distribuida uniformemente entre un intervalo  $[0,1]$ . Entonces  $\xi$ , es un número aleatorio,  $x$  es una variable definida por  $p^{-1}(\xi)$  y es aleatoriamente distribuida en el intervalo  $[x_{\min}]$  y  $[x_{\max}]$  con una función de distribución de probabilidades (FDP)  $p(x)$ . Lo anterior, fortalece el método práctico para la obtención de valores aleatorios de  $x$  usando un generador de números aleatorios distribuidos en el intervalo  $[0,1]$ . La aleatoriedad de  $x$  es asegurada por la  $\xi$  de la siguiente manera:

$$\xi = \int_{\min}^x P(x)dx \quad (\text{Ec.I.5})$$

La formulación anterior es denominada ecuación de interpolación de muestras de la variable  $x$ . Este método es particularmente adecuado para FDP  $p(x)$  dadas por expresiones analíticas de tal manera que, esta ecuación puede ser resuelta analíticamente. Con base en lo antes descrito, en la Figura I.1 se representa de forma esquemática la metodología a emplearse.



**Figura I.1.** Representación esquemática del procedimiento de Monte Carlo utilizando el método de la distribución de probabilidad inversa.



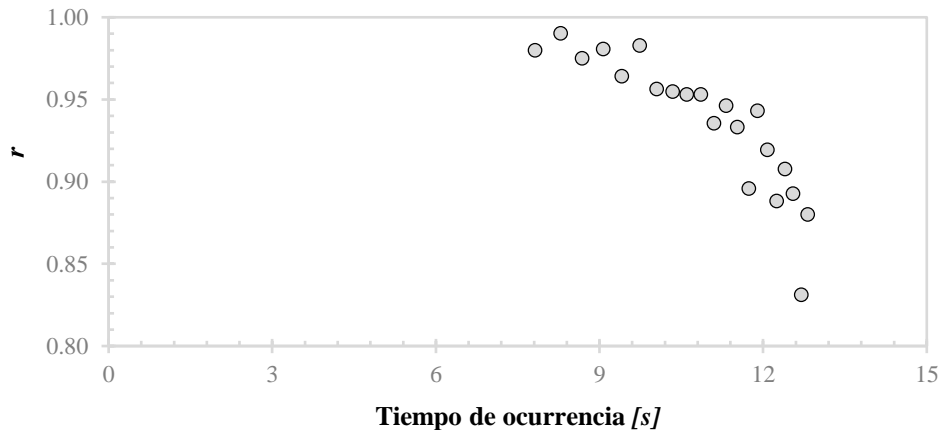
## COEFICIENTE DE RESTITUCIÓN COMO VARIABLE ALEATORIA

Durante el desarrollo del presente trabajo, se ha considerado que la pérdida de energía durante el impacto será a través del coeficiente de restitución ( $r_i$ ), es decir, el factor de reducción de la velocidad del cuerpo. Existen diferentes hipótesis que el cuerpo es infinitamente rígido, que existe impacto inelástico y conservación del momento angular, que no necesariamente son válidas durante la deducción de las diferentes ecuaciones que se han formulado a lo largo de diferentes investigaciones (Kimura y Iidia, 1934; Housner, 1963; Purvance, 2005; Arredondo *et al.*, 2017).

En general, se puede decir, que el coeficiente de restitución representa una variable fundamental durante el cálculo de la respuesta de cuerpos rígidos, por lo que, el presente análisis enfoca sus esfuerzos en ilustrar a través de ejemplos clave, la posible incidencia del coeficiente de restitución considerándolo como una variable aleatoria. Es necesario aclarar y recalcar que, la información para la modelación del coeficiente de restitución se base en las pruebas experimentales realizadas en mesa vibradora por Arredondo (2006) y un análisis posterior por González (2018). En total se realizaron 275 pruebas de vibración forzada y 215 en vibración libre para diferentes interfaces como: acero-alfombra, madera-madera, caucho-concreto, acero-concreto, entre otras; asimismo, se analizaron más de 5 prototipos en las diferentes interfaces mostradas anteriormente. Para fines específicos de este trabajo, en la Tabla AI.1, se muestran las propiedades más relevantes del cuerpo utilizadas durante la prueba experimental, de ella fueron obtenidos los valores del coeficiente de restitución mostrados en la Figura AI.I.

**Tabla AI.1.** Resumen de propiedades utilizadas durante la prueba experimental en la interfaz acero-concreto.

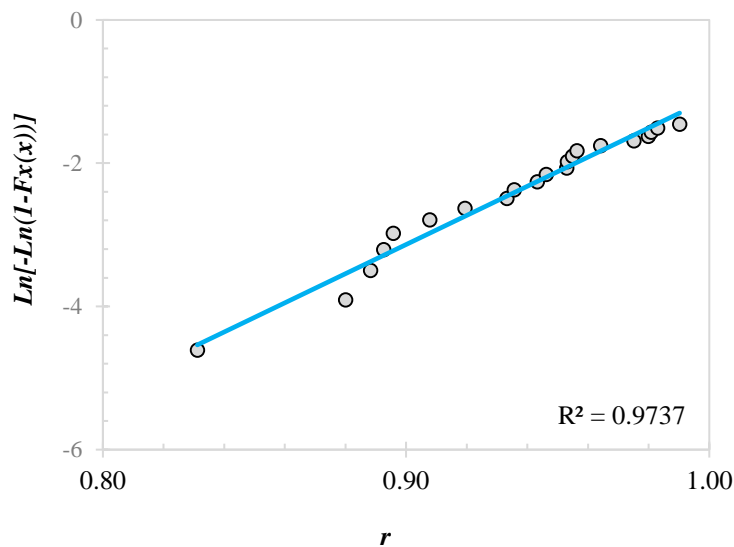
$p$ (rad/s)	$W$ (kgf)	$J_0$ ( $m^4$ )	$R$ (m)	$M$ (kgf s <sup>2</sup> /cm)
0.3	598	6.63	0.34	61.05



**Figura I.2.** Instante de tiempo de ocurrencia del coeficiente de restitución ( $r$ ).

El procedimiento utilizado para la idealización como variable aleatoria  $x_i$  del coeficiente de restitución, es el siguiente:

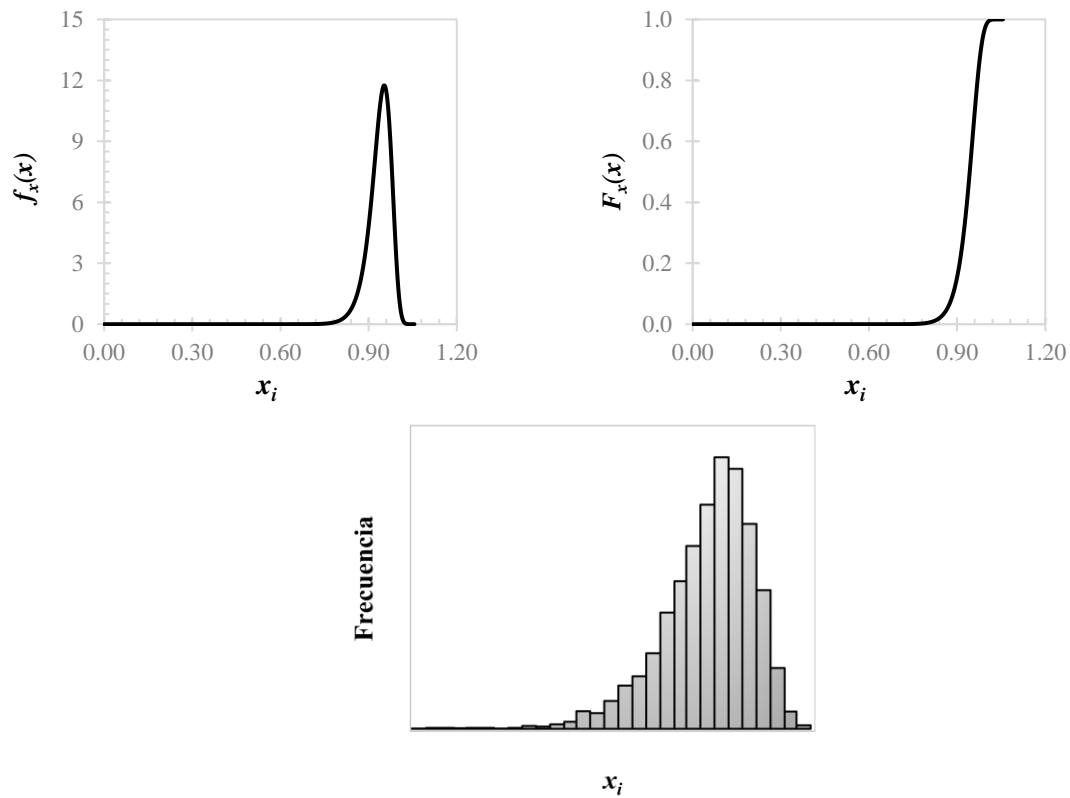
- Elección de la prueba experimental, interfaz y superficie portante: para el presente análisis se ha utilizado la interfaz acero-concreto, intentando idealizar la interacción que sucede entre el equipo y la cimentación.
- Identificación del coeficiente de restitución en función de las propiedades geométricas y rotacionales del cuerpo: los valores identificados se encuentran en la Figura I.2 y las propiedades más relevantes del cuerpo se encuentran en la Tabla AI.1.
- Cálculo de papeles de probabilidad buscando identificar el mejor ajuste a los datos obtenidos en el punto anterior.
- Caracterización de la variable aleatoria a través de una distribución de probabilidades: con base en los papeles de probabilidad considerados en el punto anterior, se ha obtenido que la distribución de Weibull es el mejor ajuste posible a los datos. En la Figura I.3 se muestra el papel de probabilidad asociado a esta distribución.



**Figura I.3.** Papel de probabilidad para la distribución de Weibull.

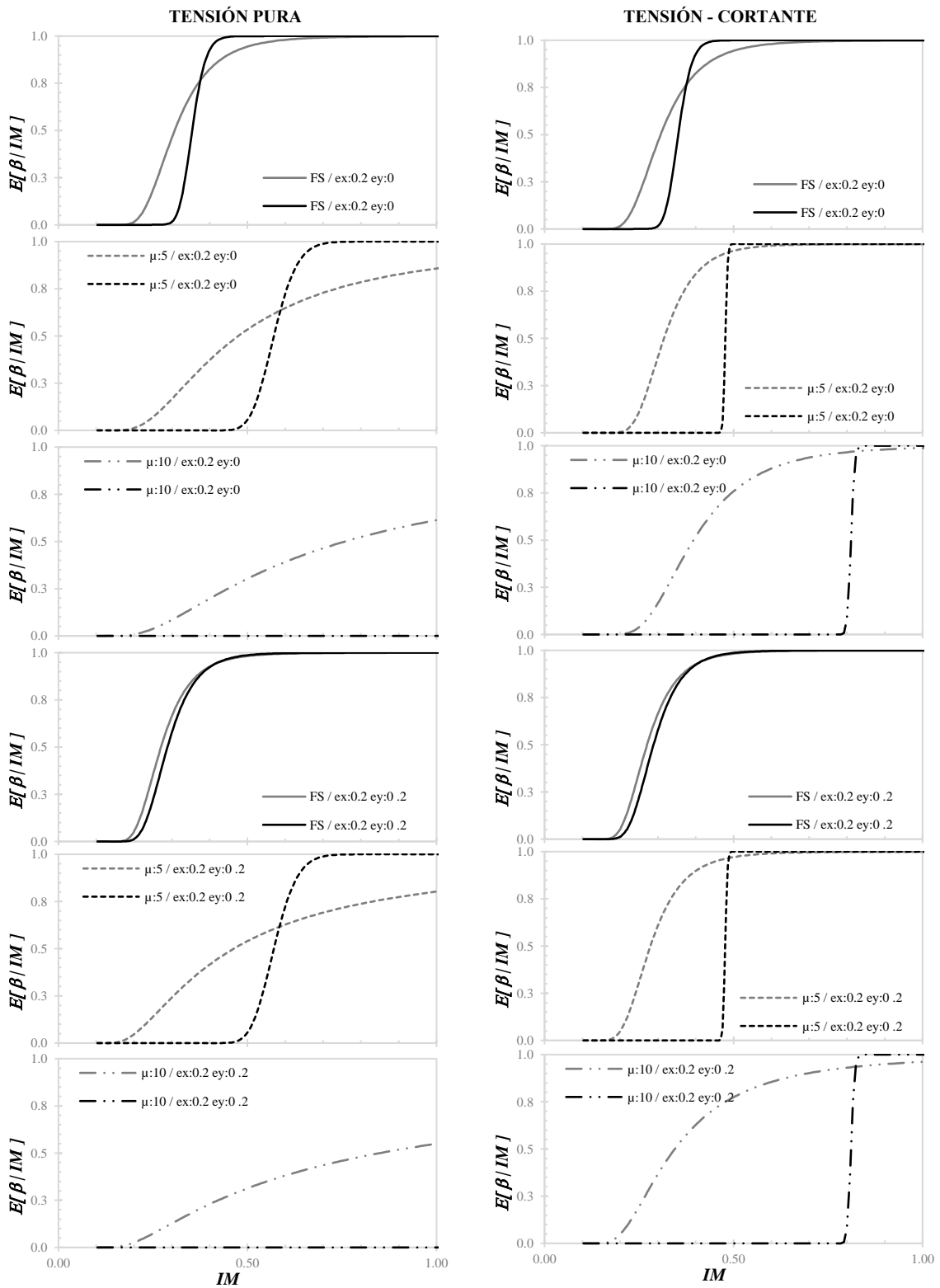
- Simulación de valores del coeficiente de restitución en función de la distribución de probabilidades seleccionada en el punto anterior: para fines específicos de este ejemplo, se han utilizado un total de 5000 simulaciones realizadas a través del método de la distribución inversa mostrado previamente: la distribución, densidad e histograma obtenidos se muestran en la Figura I.4.
- Digitalización de la sección crítica y cálculo de las propiedades geométricas y rotacionales del equipo eléctrico: en la Tabla 17 se muestra el resumen de las propiedades más relevantes durante el cálculo de los equipos evaluados para las cinco excentricidades propuestas.
- Elección de la señal de entrada: se analizarán las señales sintéticas obtenidas en los capítulos anteriores con un diezmado  $\Delta = 0.001$ , buscando una mejor precisión y estabilidad en la solución numérica (Yim *et al.*, 1980; Lin, 1990; Cunha *et al.*, 2014; Lacerda *et al.*, 2016; Diamantopoulos, 2017; Thomaidis *et al.*, 2018).
- En el caso específico del régimen anclado a la base, se deberán elegir las propiedades mecánicas del anclaje y se evaluarán ambos modos de falla presentados en tópicos anteriores: las características mecánicas de las anclas aquí analizadas, se resume en la Tabla 18.

- Selección aleatoria del coeficiente de restitución para cada análisis dinámico con base en las 5000 simulaciones realizadas a través de Monte Carlo.
- Solución numérica de la respuesta por balanceo puro a través del método numérico RK6 para los regímenes simplemente apoyado y anclado a la base.
- Localización de la respuesta máxima y revisión de los estados límite e inicio de conteo en caso de ser excedidos.
- Una vez finalizado el punto anterior, se calcularán las probabilidades de excedencia asociadas a cada estado límite y se realizará la regresión a través del procedimiento de máxima verosimilitud propuesto por Baker (2015), lo que se denominará curva de fragilidad.
- Estimación de la esperanza (primer momento) y varianza de las pérdidas (segundo momento).

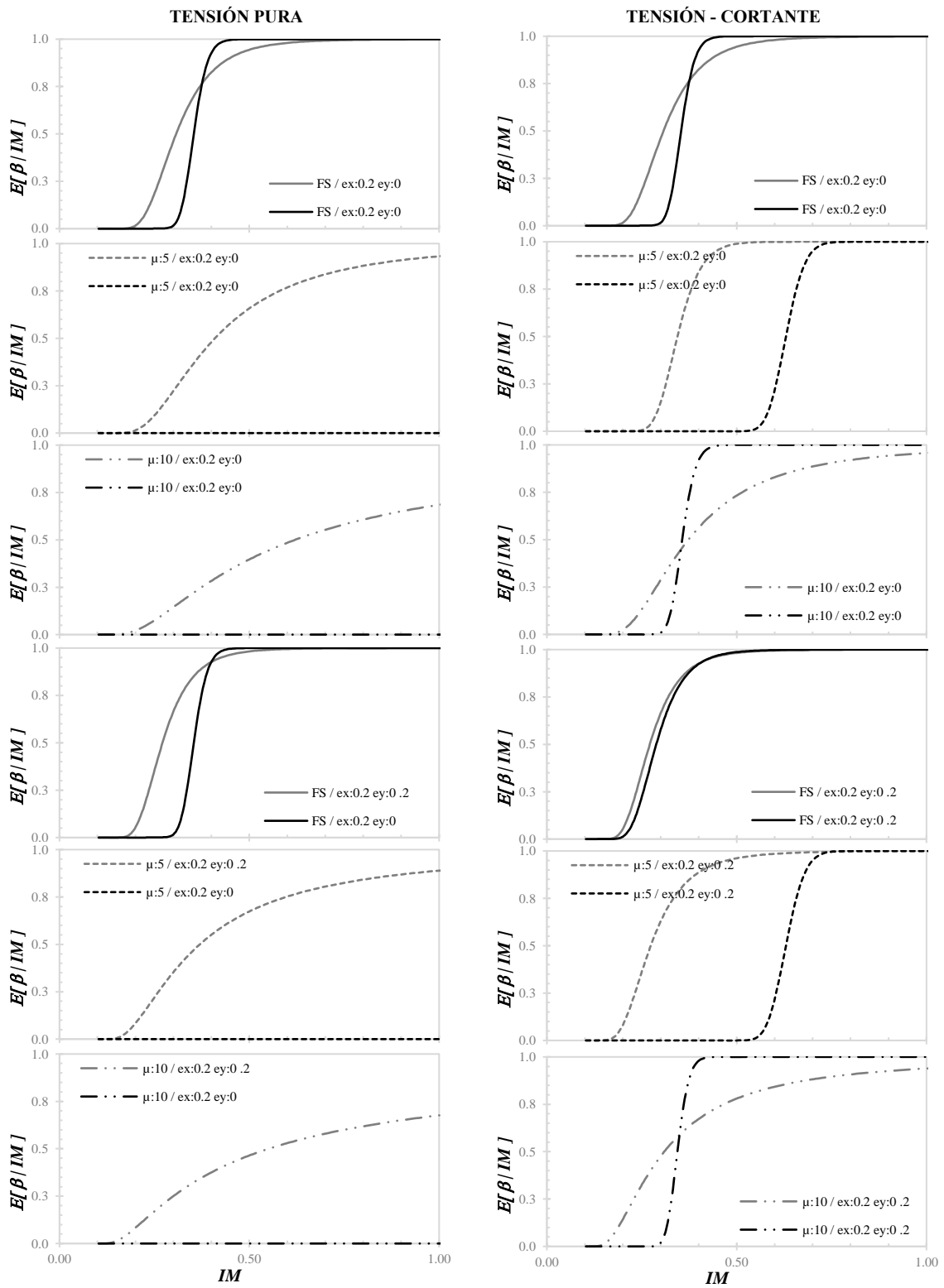


**Figura I.4.** Distribución, densidad e histograma obtenidos para las simulaciones realizadas con base en la distribución de Weibull.

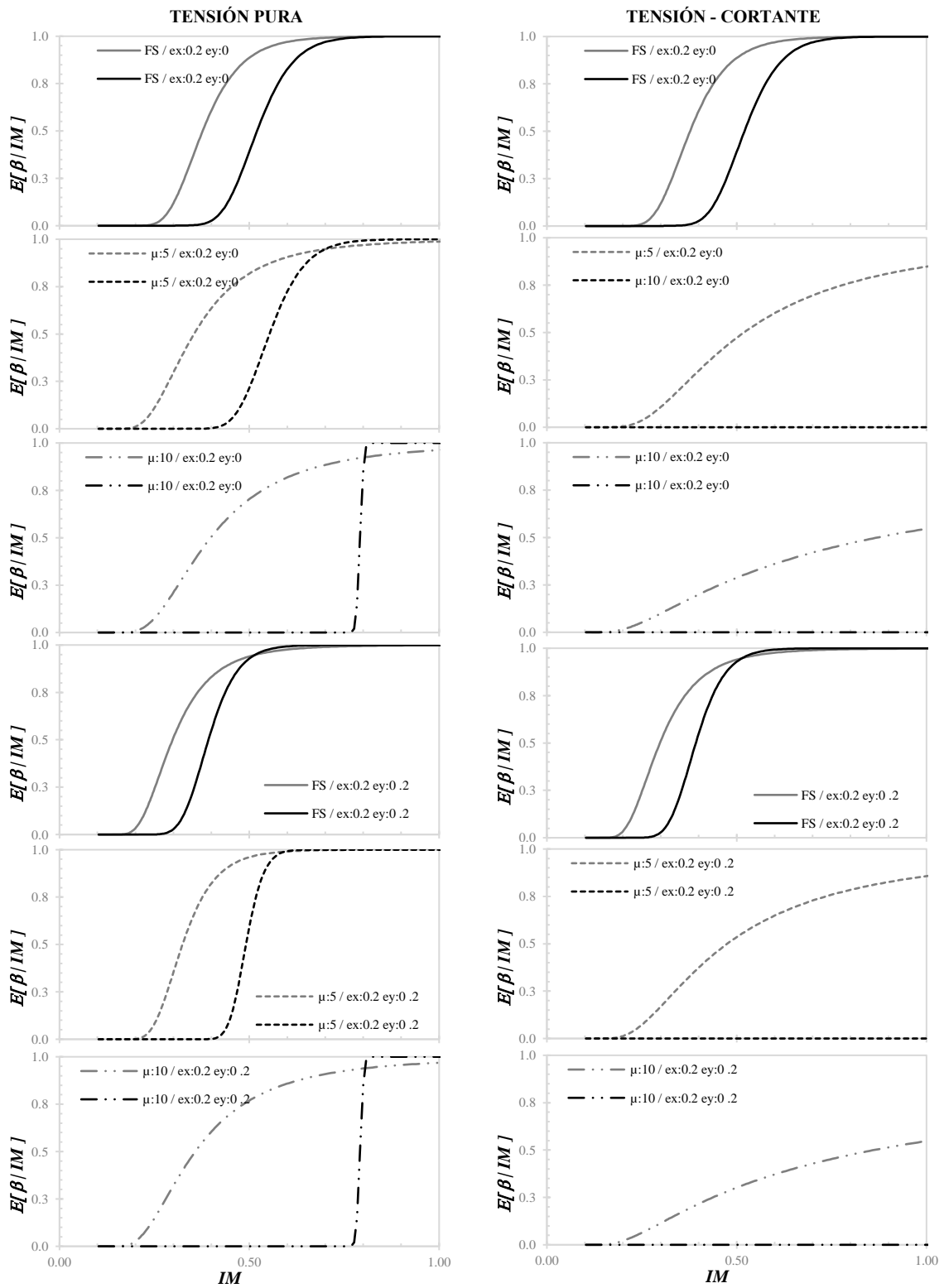
A través del procedimiento antes mencionado, en las Figuras I.5 a I.8, se muestran ejemplos ilustrativos de la posible variación en el primer momento estadístico de la función de pérdidas para las excentricidades  $e_x:0.20|e_y:0.00$  y  $e_x:0.20|e_y:0.20$  considerando el cuerpo simplemente apoyado y anclado a la base con las ductilidades objetivo  $\mu$  igual a 5 y 10 respectivamente. Es necesario recalcar que, en la mayoría de los casos se obtuvieron diferencias importantes, por lo que sugiere la variabilidad en la respuesta por la disipación de energía. Sin desconocer que los resultados aquí presentados no son suficientes para obtener conclusiones definitivas, se muestra una primera aproximación a la esperanza de daño considerando como variable aleatoria al coeficiente de restitución.



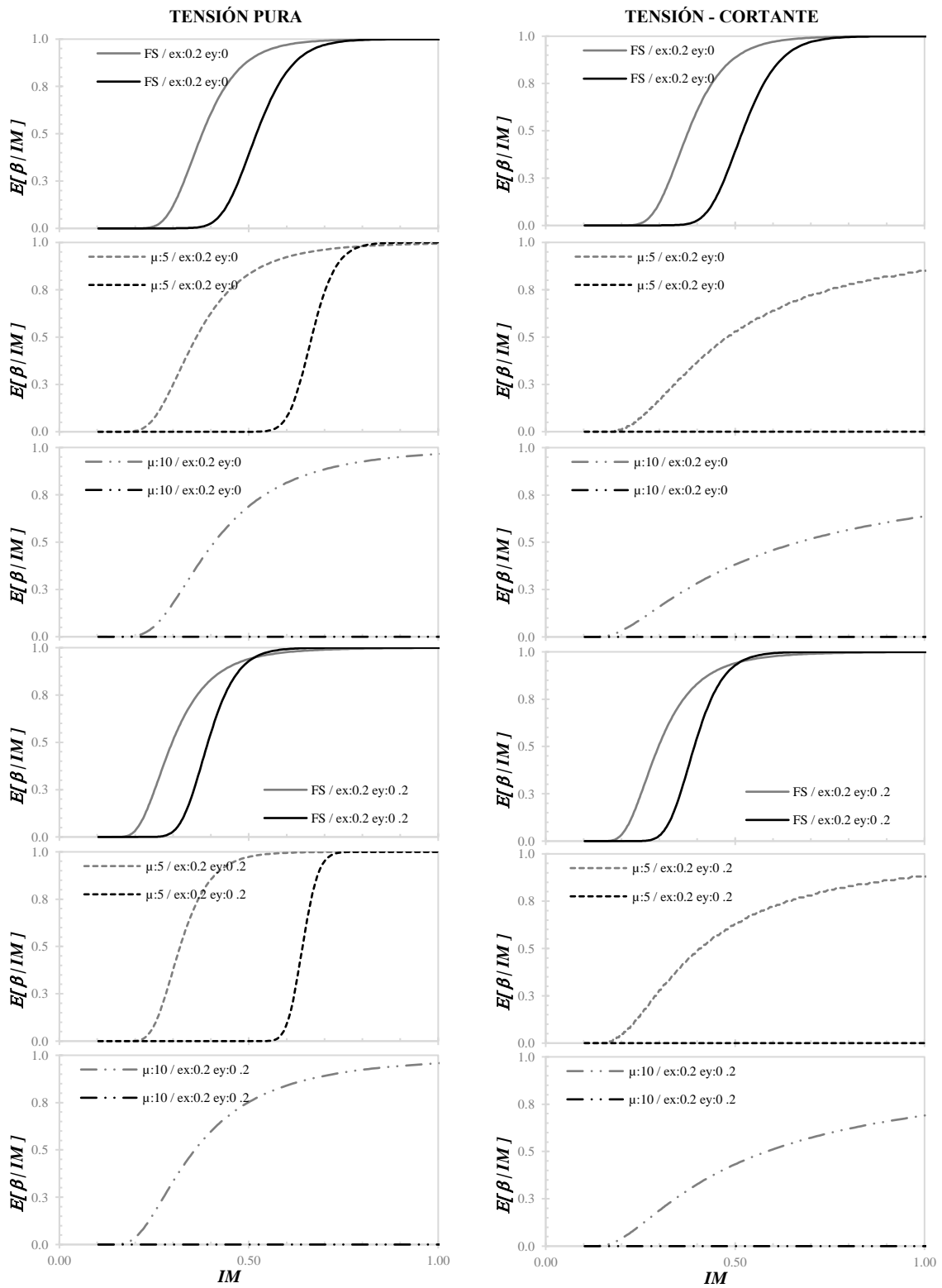
**Figura I.5.** Esperanza de daño para la Secretaría de Comunicaciones y Transportes (SCT) en las excentricidades  $e_x:0.20|e_y:0.00$  y  $e_x:0.20|e_y:0.20$  considerando el cuerpo simplemente apoyado y anclado a la base con las siguientes características:  $\phi: 3.81$ ,  $F_u/W:1.08$ ,  $\mu:5,10$ .



**Figura I.6.** Esperanza de daño para la Secretaría de Comunicaciones y Transportes (SCT) en las excentricidades  $ex:0.20|ey:0.00$  y  $ex:0.20|ey:0.20$  considerando el cuerpo simplemente apoyado y anclado a la base con las siguientes características:  $\phi: 5.08, F_u/W:1.93, \mu:5,10$ .



**Figura I.7.** Esperanza de daño para Ciudad Universitaria (CU) en las excentricidades  $ex:0.20|ey:0.00$  y  $ex:0.20|ey:0.20$  considerando el cuerpo simplemente apoyado y anclado a la base con las siguientes características:  $\phi: 3.81$ ,  $F_u/W:1.08$ ,  $\mu:5,10$ .

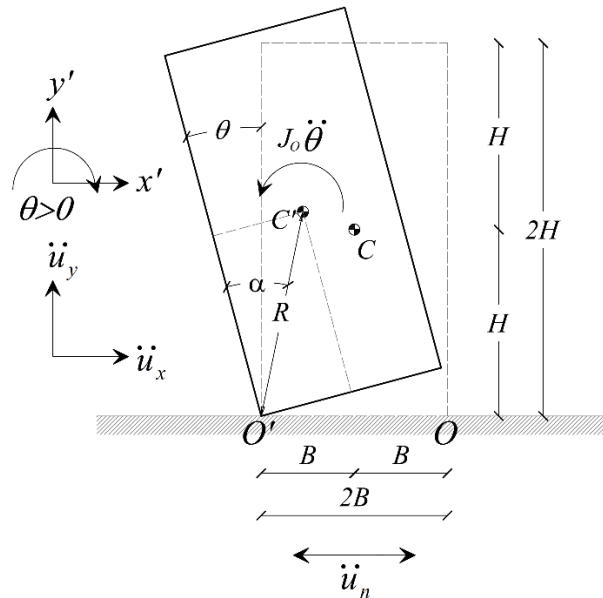


**Figura I.8.** Esperanza de daño para Ciudad Universitaria (CU) en las excentricidades  $ex:0.20|ey:0.00$  y  $ex:0.20|ey:0.20$  considerando el cuerpo simplemente apoyado y anclado a la base con las siguientes características:  $\phi: 5.08$ ,  $F_u/W:1.93$ ,  $\mu:5,10$ .

## ANEXO.AII DEDUCCIÓN DE ECUACIONES GOBERNANTES PARA EL COMPORTAMIENTO DINÁMICO DE CUERPOS RÍGIDOS SIMPLEMENTES APOYADOS Y ANCLADOS A LA BASE

### CUERPOS SIMPLEMENTE APOYADOS

En el presente tópic, se realiza la deducción de las ecuaciones gobernantes que controlan el comportamiento de un cuerpo ante el modo de respuesta por balanceo puro (*pure rock mode*) dado por una excitación dinámica para cuerpos regulares. Es importante mencionar que durante el análisis se ha considerado que el cuerpo es infinitamente rígido e indeformable y que el coeficiente de fricción es lo suficientemente alto para que no exista deslizamiento. En este contexto, la pérdida de energía es considerada a través del coeficiente de restitución del cuerpo. A continuación, en la Figura II.1 se representa de forma esquemática el modo de respuesta antes mencionado.



**Figura II.1.** Representación esquemática del modo de respuesta por balanceo (*rock mode*).

Para la caracterización de la respuesta por balanceo puro se han considerado dos condiciones de respuesta. La primera de ellas se asocia al cuerpo cuando se encuentra en reposo (estático), seguido de la respuesta de este durante una excitación dinámica en cada instante de interés (dinámico). Con base en lo antes descrito y para el equilibrio de un cuerpo en reposo, se han identificado casos relevantes representados de forma esquemática a través de los diagramas de cuerpo libre (D.C.L) en la en la Figura II.2. Cabe señalar que en el presente documento se ha considerado que los momentos son positivos en sentido horario.

#### Caso 1 – Equilibrio estático (estado en reposo).

A través del diagrama de cuerpo libre (D.C.L) mostrado en la Figura II.2 a), el equilibrio estático se encuentra definido realizando la sumatoria de momentos alrededor de los puntos de referencia  $O$  u  $O'$ , donde es posible obtener la siguiente expresión:



$$\sum M = 0$$

$$-mR \operatorname{sen}(\alpha)(\ddot{u}_y - g) = mR \cos(\alpha)\ddot{u}_x \quad (\text{Ec.II.1})$$

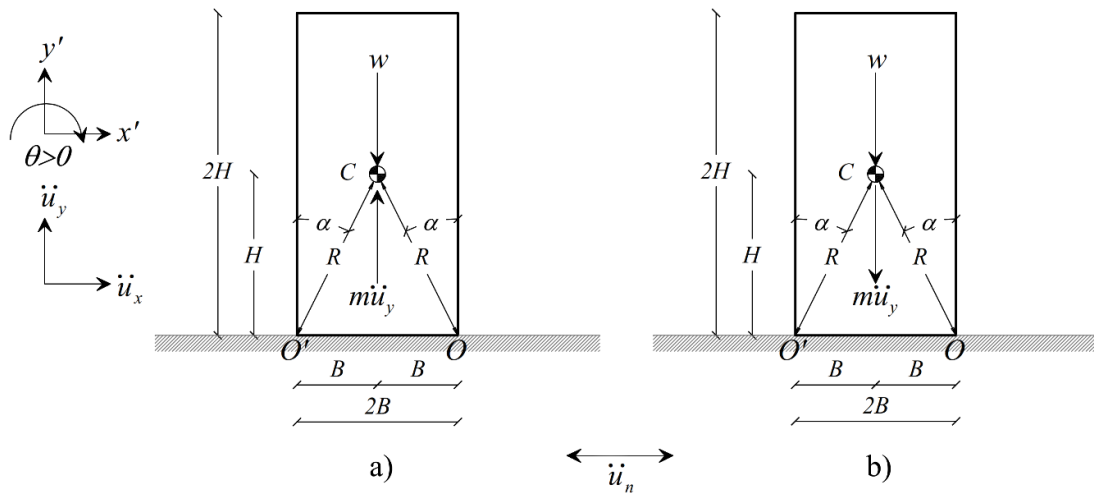
Por su parte y de forma análoga al caso anterior para el diagrama de cuerpo libre (D.C.L) mostrado en la Figura II.2 b), el equilibrio estático se encuentra definido como:

$$\sum M = 0$$

$$mR \operatorname{sen}(\alpha)(\ddot{u}_y + g) = -mR \cos(\alpha)\ddot{u}_x \quad (\text{Ec.II.2})$$

Con base en las expresiones anteriores, se puede observar que la dirección de los momentos será dada por cada punto en la excitación de interés, por lo que es posible condensar los posibles casos a través de la siguiente expresión algebraica:

$$mR \operatorname{sen}(\alpha)(\ddot{u}_y + g) = mR \cos(\alpha)\ddot{u}_x \quad (\text{Ec.II.3})$$



**Figura II.2.** Diagramas de cuerpo libre (D.C.L.) para el modo de respuesta por balanceo partiendo del reposo (*rock mode*).

Por otra parte, en la expresión II.3 es posible identificar del lado izquierdo el momento que se opone al balanceo o volcamiento (resistencia), mientras que del lado derecho se encuentra el momento inducido por la excitación (demanda). Por lo que, se puede deducir que la condición para que el cuerpo no permanezca en reposo es que, el momento ocasionado por la aceleración sobre él debe ser mayor al momento generado por el peso y la aceleración vertical, es decir, la demanda debe ser mayor a la resistencia; lo anterior se encuentra representado en la ecuación II.4.

$$|mR \cos(\alpha)\ddot{u}_x| > mR \operatorname{sen}(\alpha)(\ddot{u}_y + g) \quad (\text{Ec.II.4})$$

Multiplicando ambos términos en la ecuación II.4 por el cociente  $\frac{1}{m}$ , la expresión se puede simplificar como sigue:

$$|R \cos(\alpha) \ddot{u}_x| > R \operatorname{sen}(\alpha) (\ddot{u}_y + g) \quad (\text{Ec.II.5})$$

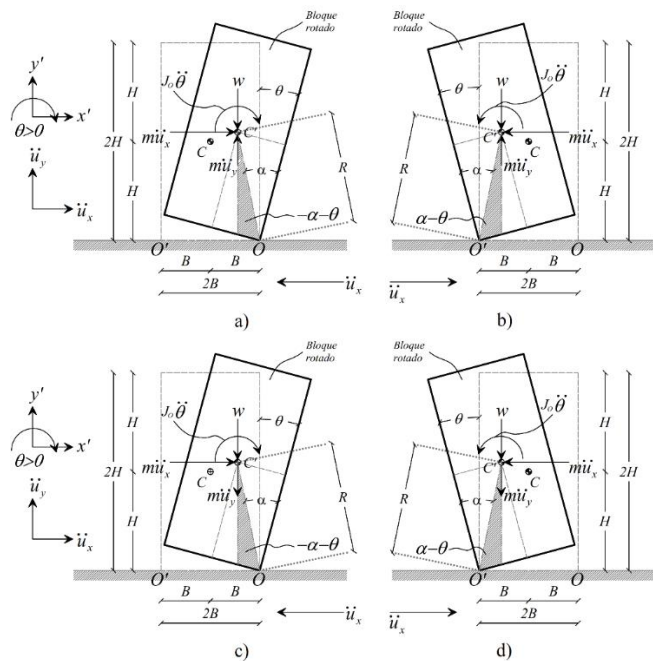
Utilizando la identidad trigonométrica  $\tan(\alpha) = \operatorname{sen}(\alpha) / \cos(\alpha)$  la ecuación anterior se puede expresar de la siguiente forma:

$$|\ddot{u}_x| > \tan(\alpha) (\ddot{u}_y + g) \quad (\text{Ec.II.6})$$

Es importante mencionar que una de las salvedades consideradas en este trabajo, es que el movimiento en dirección vertical es igual a cero ( $\ddot{u}_y = 0$ ), por lo que la expresión II.6 se puede reescribir de la siguiente forma:

$$|\ddot{u}_x| > g \tan(\alpha) \quad (\text{Ec.AII.7})$$

Por su parte, para el equilibrio de fuerzas del cuerpo una vez iniciado el modo de respuesta por balanceo puro, se han identificado casos relevantes representados de forma esquemática a través de diagramas de cuerpo libre (D.C.L) en la en la Figura II.3. En el siguiente apartado se realizará el equilibrio dinámico en los dos casos fundamentales (Figuras II.3 a y d) con fines de obtener las ecuaciones gobernantes en el régimen antes mencionado. Cabe señalar que durante la obtención de cada una de las expresiones fue utilizado el principio de *D'Alembert*.



**Figura II.3.** D.C.L. una vez iniciado el modo de respuesta por balanceo (*rock mode*).

Caso 2 – Equilibrio dinámico.

Con base en el principio de *D'Alembert* y el diagrama de cuerpo libre (D.C.L) mostrado en la Figura II.3a), es posible realizar la sumatoria de momentos alrededor del punto de referencia  $O$ , donde para fines específicos de este documento se ha considerado que los momentos positivos son en sentido horario, por lo que el equilibrio dinámico se encuentra expresado como:

$$\begin{aligned} \sum M &= 0 \\ J_0 \ddot{\theta}(t) + mR \operatorname{sen}(\alpha - \theta)(\ddot{u}_y - g) &= -mR \cos(\alpha - \theta) \ddot{u}_x \end{aligned} \quad (\text{Ec.II.8})$$

De forma análoga al caso anterior y para el diagrama de cuerpo libre (D.C.L) mostrado en la Figura II.3d) es posible obtener la sumatoria de momentos alrededor del punto de referencia  $O'$  mostrado en la expresión II.9.

$$\begin{aligned} \sum M &= 0 \\ J_0 \ddot{\theta}(t) - mR \operatorname{sen}(-\alpha - \theta)(\ddot{u}_y + g) &= -mR \cos(\alpha - \theta) \ddot{u}_x \end{aligned} \quad (\text{Ec.II.9})$$

A través de las expresiones II.8, II.9 y de los diagramas de cuerpo libre (D.C.L) mostrados en la Figura II.3 se puede observar que la dirección de los momentos será dada por cada punto durante la excitación de interés y deberá ser necesario considerar un plano de referencia global con fines específicos de la correcta medición de los ángulos  $\alpha, \theta$  respectivamente. En este contexto, es posible distinguir los siguientes casos dependiendo en específico del giro del cuerpo:

$$J_0 \ddot{\theta}(t) + mgR \operatorname{sen}(-\alpha - \theta) \left( \frac{\ddot{u}_y(t)}{g} + 1 \right) = -mgR \cos(-\alpha - \theta) \ddot{u}_x; \text{ si } \theta < 0 \quad (\text{Ec.II.10})$$

$$J_0 \ddot{\theta}(t) + mgR \operatorname{sen}(\alpha - \theta) \left( \frac{\ddot{u}_y(t)}{g} + 1 \right) = -mgR \cos(\alpha - \theta) \ddot{u}_x; \text{ si } \theta > 0 \quad (\text{Ec.II.11})$$

Con base en las expresiones II.10 y II.11, es posible agrupar cada uno de los casos a través de la siguiente forma funcional:

$$J_0 \ddot{\theta}(t) = -mgR \operatorname{sen}(\alpha \operatorname{sgn}[\theta(t)] - \theta(t)) \left( \frac{\ddot{u}_y(t)}{g} + 1 \right) - mgR \cos(\alpha \operatorname{sgn}[\theta(t)] - \theta) \ddot{u}_x \quad (\text{Ec.II.12})$$

donde  $\operatorname{sgn}(\theta(t))$  representa la función signo, la cual considera la dirección del cuerpo en función del plano de referencia global, es decir:

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(\theta(t)) &= 1 \text{ alrededor de } O \\ \operatorname{sgn}(\theta(t)) &= -1 \text{ alrededor de } O' \end{aligned} \quad (\text{Ec.II.13})$$

Por otro lado, la variable  $J_0$  se define como la inercia rotacional del cuerpo en análisis. Considerando el esquema de la Figura II.4 se obtendrá la inercia antes mencionada a través de la siguiente forma funcional:

$$J_0 = I_{xx} + I_{yy} \quad (\text{Ec.II.14})$$

donde  $I_{xx} + I_{yy}$  representan las inercias en las direcciones X y Y respectivamente.

Los momentos de inercia en el eje de las ordenadas y las abscisas se encuentran definidos como:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \frac{4}{3} BH^3 \\ I_{yy} &= \frac{4}{3} HB^3 \end{aligned} \quad (\text{Ec.II.15})$$

Sustituyendo los valores de la expresión II.15 en II.14, es posible llegar a la siguiente expresión:

$$J_0 = \frac{4}{3} HB(H^2 + B^2) \quad (\text{Ec.II.16})$$

Es necesario mencionar que el momento de inercia rotacional considerando un medio continuo, se define como el producto de la masa ( $m$ ) por el cuadrado de la distancia ( $r^2$ ). Con base en lo antes descrito, es posible realizar las siguientes equivalencias:

$$m = H \cdot B \quad (\text{Ec.II.17})$$

$$R^2 = H^2 \cdot B^2 \quad (\text{Ec.II.18})$$

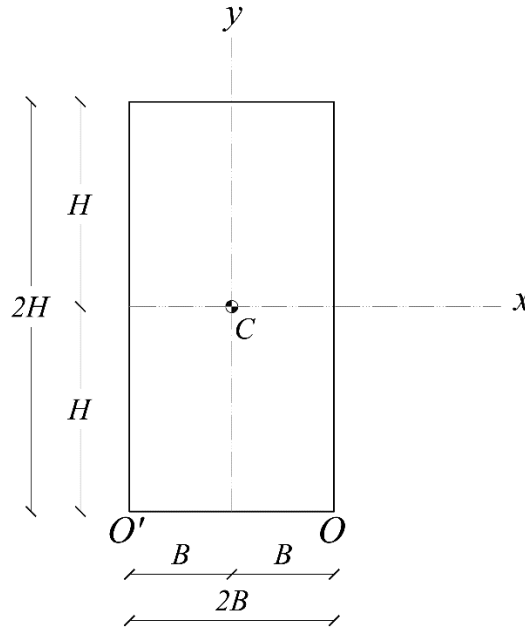
Sustituyendo II.18 y II.19 en II.16, se tiene:

$$J_0 = \frac{4}{3} mR^2 \quad (\text{Ec.II.19})$$

A la luz de la inercial rotacional  $J_0$  encontrada en la expresión II.19 y despejando la aceleración del cuerpo  $\ddot{\theta}(t)$  de la ecuación II.12, es posible expresarlo de forma compacta a través de la siguiente forma funcional (Housner, 1963; Ishiyama, 1982; Yim *et al.*, 1980; Shenton III, 1990; Makris y Roussos, 1999; Zhang y Makris, 2001; DeJong, 2012; Taniguchi, 2002; Makris, 2014a; Makris, 2014b)

$$\ddot{\theta}(t) = -p^2 \left\{ \sin(\alpha \operatorname{sgn}[\theta(t)] - \theta(t)) \left( \frac{\ddot{u}_y(t)}{g} + 1 \right) + \frac{\ddot{u}_x}{g} \cos(\alpha \operatorname{sgn}[\theta(t)] - \theta) \right\} \quad (\text{Ec.II.20})$$

Donde  $p$  es la frecuencia característica del bloque dada por  $\sqrt{\frac{3g}{4R}}$  es decir, al tener un cuerpo más esbelto (mayor distancia del centro de masa hacia algún punto de referencia  $O$  u  $O'$  la frecuencia  $p$  será menor.



**Figura II.4.** Esquema representativo para obtener la inercia rotacional de un rectángulo con longitudes  $2H$  y  $2B$  respectivamente.

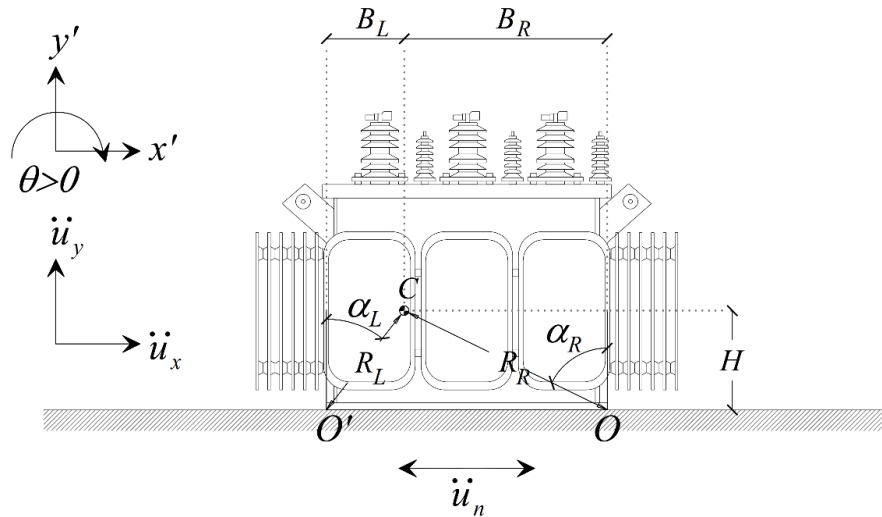
Por otro lado, durante la deducción de las ecuaciones mostradas anteriormente se han realizado dos consideraciones relevantes en específico: 1) el cuerpo en análisis es simétrico y 2) la masa tiene una distribución uniforme. En este sentido, en el siguiente apartado se muestra un modelo equivalente considerando cuerpos de formas arbitrarias y de masa no uniforme con fines específicos de representar de forma más realista los cuerpos en análisis.

*Modelo equivalente para cuerpos de formas arbitrarias y masa no uniforme.*

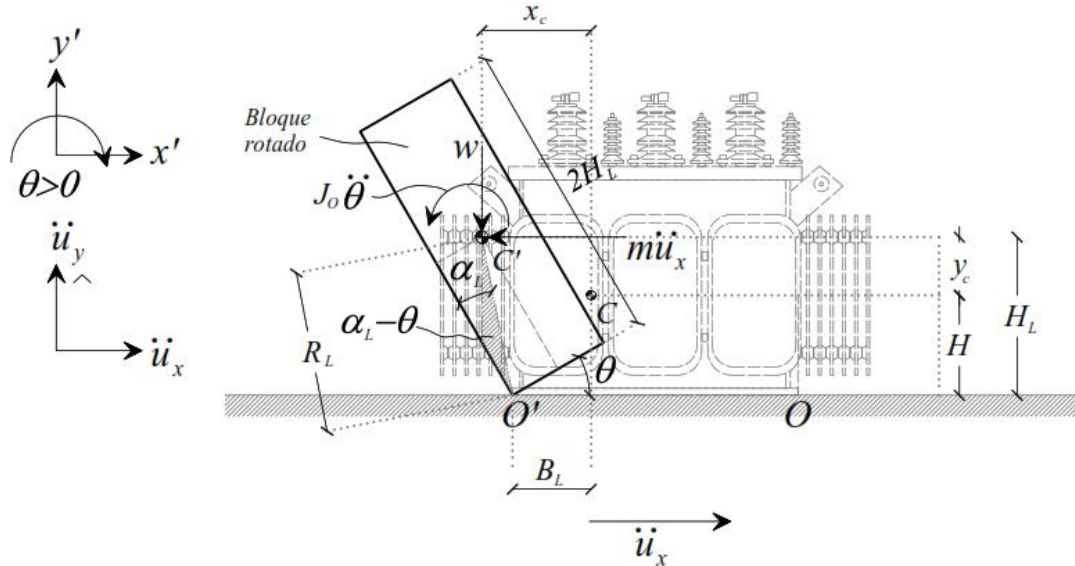
Considerando el esquema representativo de la Figura II.5 para cuerpos de formas arbitrarias y respecto a dos ejes ortogonales que pasan por el centro de masa, puede suceder una de tres cosas: 1) existe simetría sólo respecto al eje vertical, 2) existe simetría sólo respecto al eje horizontal o 3) el cuerpo es asimétrico respecto a cualquiera de los dos ejes.

En el primer caso el comportamiento dinámico para un modo de respuesta que implique balanceo corresponderá a la de un cuerpo rectangular con un ancho total  $B_L + B_R$  y una altura total de  $2H$ . En el segundo y tercer caso el comportamiento global del cuerpo se obtiene como la combinación de respuestas tiempo a tiempo de dos bloques dependiendo del sentido en que rote el cuerpo rígido en

un plano de referencia dado: cuando rota en sentido antihorario, la respuesta se asocia a la de un bloque rectangular de dimensiones totales  $2B_L$  y  $2H$  (ver Figura II.6), mientras que cuando rota en sentido horario la respuesta se obtiene a través de un bloque rectangular equivalente con dimensiones  $2B_R$  y  $2H$  (ver Figura II.7) (Arredondo, 2006; Arredondo *et al.*, 2006; Arredondo *et al.*, 2017).



**Figura II.5.** Esquema representativo de un cuerpo irregular con masa no uniforme.



**Figura II.6.** Esquema representativo de un bloque equivalente de un cuerpo asimétrico con masa no uniforme con dimensiones totales  $2B_L$  y  $2H$ .

A través de alguno de los esquemas representativos de las Figuras II.6 u II.7 la inercia rotacional considerando una distribución arbitraria se define como:

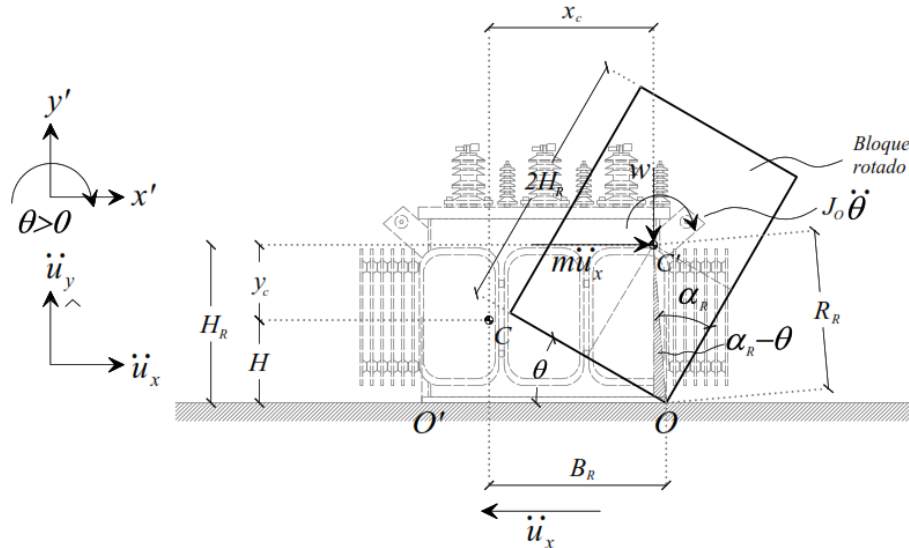
$$J_o = I_o + mR^2 \quad (\text{Ec.II.21})$$

Considerando el equilibrio dinámico para un vértice de rotación  $O$  u  $O'$  y sustituyendo la ecuación II.21 en II.12; la aceleración rotacional se puede expresar como:

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{-mgR \sin(\alpha - \theta) - \ddot{u}_x m R \cos(\alpha - \theta)}{m \left( \frac{J_0}{m} + R^2 \right)} \quad (\text{Ec.II.22})$$

Haciendo  $\frac{J_0}{m} = J_n$  y simplificando la expresión anterior, se tiene que:

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{-gR \sin(\alpha - \theta) - \ddot{u}_x R \cos(\alpha - \theta)}{J_n + R^2} \quad (\text{Ec.II.23})$$



**Figura II.7.** Esquema representativo de un bloque equivalente de un cuerpo asimétrico con masa no uniforme con dimensiones totales  $2B_R$  y  $2H$ .

Agrupando términos y expresado de forma compacta se tiene que, para un cuerpo con forma arbitraria y distribución de masa no uniforme, la forma funcional que controla el comportamiento por balanceo puro se encuentra expresado como:

$$\ddot{\theta}(t) = -p^2 \left\{ \sin(\alpha \operatorname{sgn}[\theta(t)] - \theta(t)) + \frac{\ddot{u}_x}{g} \cos(\alpha \operatorname{sgn}[\theta(t)] - \theta(t)) \right\} \quad (\text{Ec.II.24})$$

En un inicio, la forma funcional presentada en la Ecuación II.24 es similar a la ecuación II.20, sin embargo, dadas las condiciones de geometría y masa irregular,  $p$  se encuentra definida como:

$$p = \sqrt{\frac{Rg}{J_n + R^2}} \quad (\text{Ec.II.25})$$

donde  $R$  es la distancia al centro de masa dependiendo del punto de rotación del cuerpo  $O$  u  $O'$ ;  $g$  es la gravedad que dependerá de las unidades a considerar y  $J_n$  la inercial rotacional normalizada a la masa. Es importante mencionar y recalcar que las ecuaciones que se han obtenido regirán el comportamiento dinámico considerando un cuerpo de forma arbitraria y masa no uniforme, sin embargo, es necesario aclarar que, en función del instante de rotación, las propiedades geométricas y dimensiones del cuerpo cambiarán a través de un bloque equivalente.

*Coefficiente de restitución.*

Por otro lado, es necesario considerar la pérdida de energía durante el impacto que para fines específicos de este trabajo será a través del coeficiente de restitución ( $r_i$ ), es decir, el factor de reducción de la velocidad del cuerpo. Asumiendo rigidez, impacto inelástico y conservación del momento angular, es posible obtener la siguiente forma funcional (Kimura y Iidia., 1934; Housner., 1963; Purvance., 2005; Arredondo *et al.*, 2017)

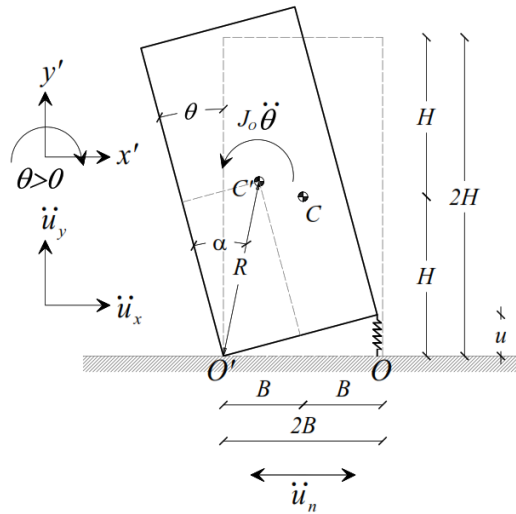
$$r_i = \frac{1}{J_{O_i}} \left[ I_j - mR_j \sin(\alpha_j) (R_i \sin(\alpha_i) + R_j \sin(\alpha_j)) \right] \quad (\text{Ec.II.26})$$

donde  $i=1$  y  $j=2$  cuando el cuerpo gira alrededor del punto de referencia  $O(B_R)$  y,  $i=2$  y  $j=1$  cuando el cuerpo gira alrededor del punto de referencia  $O'(B_L)$ .



CUERPOS ANCLADOS A LA BASE

A continuación, se realiza la deducción de las ecuaciones gobernantes que controlan el comportamiento de un cuerpo ante el modo de respuesta por balanceo puro (*pure rock mode*) cuando éste se encuentra anclado a la base. Es importante mencionar que durante el análisis se ha considerado que el cuerpo es infinitamente rígido e indeformable y que el coeficiente de fricción es lo suficientemente alto para que no exista deslizamiento. De la misma manera, la pérdida de energía es considerada a través del coeficiente de restitución del cuerpo y anclaje ha sido idealizado a través de un resorte con rigidez ( $K$ ), Fuerza ruptura ( $F_u$ ) y módulo elasticidad ( $E$ ). En la Figura II.8 se representa de forma esquemática el modo de respuesta antes mencionado.



**Figura II.8.** Representación esquemática del modo de respuesta por balanceo puro para un cuerpo anclado a la base.

Considerando el diagrama esquemático de la Figura II.8 y que el cuerpo tiene una masa ( $M$ ), se puede deducir que la dirección de los momentos será por cada punto durante la excitación de interés y deberá ser necesario considerar un plano de referencia global con fines específicos de la correcta medición de los ángulos  $\alpha, \theta$  respectivamente. En este contexto, es posible distinguir los siguientes casos dependiendo en específico del giro del cuerpo:

$$J_0 \ddot{\theta}(t) + m \ddot{u}_x R \cos(-\alpha - \theta) = -mgR \sin(-\alpha - \theta) - P(t) 2b \cos\left(\frac{\theta(t)}{2}\right); \text{ si } \theta < 0 \quad (\text{Ec.II.27})$$

$$J_0 \ddot{\theta}(t) + m \ddot{u}_x R \cos(\alpha - \theta) = -mgR \sin(\alpha - \theta) - P(t) 2b \cos\left(\frac{\theta(t)}{2}\right); \text{ si } \theta > 0 \quad (\text{Ec.II.28})$$

De las ecuaciones anteriores, es posible observar que es necesario estimar la variación de la fuerza en el anclaje en el tiempo  $P(t)$ , por lo que, para fines específicos de este documento, se ha considerado un comportamiento dúctil del ancla. En general, los anclajes exhiben una rigidez de post-fluencia manteniendo su resistencia inclusive una vez llegando a un desplazamiento posible de fractura, donde

una medida de la ductilidad que desarrolla en anclaje se encuentra dado por  $\mu = u_f / u_y$ . Una forma aproximada para considerar el comportamiento no lineal histerético en la fijación, se encuentra dado por la siguiente expresión:

$$P(t) = \varepsilon K u(t) + (1 - \varepsilon) K u_y Z(t) \quad (\text{Ec.II.29})$$

donde  $u_y$  es la extensión de fluencia del ancla;  $K$  es la rigidez;  $\varepsilon$  es la relación entre la fluencia y post-fluencia y finalmente  $Z(t)$  es la cantidad adimensional histerética que se encuentra gobernada a través de la siguiente forma funcional:

$$u_y \dot{Z}(t) + \gamma |\dot{u}(t)| Z(t) |Z(t)|^{n-1} + \beta \dot{u}(t) |Z(t)|^n - \dot{u}(t) = 0 \quad (\text{Ec.II.30})$$

En la ecuación anterior  $\gamma$  y  $\beta$  son cantidades que controlan la forma de histerética. Es necesario mencionar que, la expresión II.30 en una primera instancia fue propuesta por Bouc (1971) y posteriormente a través de vibración aleatoria para sistemas inelásticos fue modificada por Wen (1975,1976). Sustituyendo la expresión II.29 en II.27 y II.28, se tiene que:

$$J_0 \ddot{\theta}(t) + m \ddot{u}_x R \cos(-\alpha - \theta) = -mgR \sin(-\alpha - \theta) - a - b; \text{ si } \theta < 0 \quad (\text{Ec.II.31})$$

$$J_0 \ddot{\theta}(t) + m \ddot{u}_x R \cos(\alpha - \theta) = -mgR \sin(\alpha - \theta) - a - b; \text{ si } \theta > 0 \quad (\text{Ec.II.32})$$

donde a y b se define como:

$$a = 4K \varepsilon b^2 \sin(\theta[t]) \cos\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) \quad (\text{Ec.II.33})$$

$$b = 4kb^2 \theta_y Z(t) \cos\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) \quad (\text{Ec.II.34})$$

Existen casos específicos donde las expresiones pueden simplificarse y dadas ciertas características en la modelación se pueden tener resultados aproximados. El caso aquí presentado, se basa en un comportamiento elastoplástico, es decir,  $\varepsilon=0$ , por lo que, las ecuaciones 31 y 32 se pueden simplificar como:

$$J_0 \ddot{\theta}(t) + m \ddot{u}_x R \cos(-\alpha - \theta) = -mgR \sin(-\alpha - \theta) - 4Kb^2 \theta_y Z(t) \cos\left(\frac{\theta(t)}{2}\right); \text{ si } \theta < 0 \quad (\text{Ec.II.35})$$

$$J_0 \ddot{\theta}(t) + m \ddot{u}_x R \cos(\alpha - \theta) = -mgR \sin(\alpha - \theta) - 4Kb^2 \theta_y Z(t) \cos\left(\frac{\theta(t)}{2}\right); \text{ si } \theta > 0 \quad (\text{Ec.II.36})$$

Con base en las expresiones II.35 y II.36, es posible agrupar cada uno de los casos a través de la siguiente forma funcional:

$$J_0 \ddot{\theta}(t) = -m \ddot{u}_x R \cos(\alpha \operatorname{sgn}[\theta(t)] - \theta(t)) - mgR \sin(\alpha \operatorname{sgn}[\theta(t)] - \theta(t)) - c \quad (\text{Ec.II.36})$$

donde  $c$  es igual a:

$$c = 4kb^2 \theta_y Z(t) \cos\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) \quad (\text{Ec.II.37})$$

Considerando que la inercia rotacional  $J_0 = \frac{4}{3} mR^2$  para un cuerpo regular con masa uniformemente distribuida, la expresión 36 se puede expresar como (Makris y Zhang 1999; Makris y Zhang 2000; Makris y Zhang 2001; Makris y Black 2001; Makris y Black 2002 y Candia y Jaimes 2018):

$$\ddot{\theta}(t) = -p^2 \left\{ -\frac{\ddot{u}_x}{g} R \cos(\alpha \operatorname{sgn}[\theta(t)] - \theta(t)) - \sin(\alpha \operatorname{sgn}[\theta(t)] - \theta(t)) - c \right\} \quad (\text{Ec.II.38})$$

donde  $c$  es igual a:

$$c = \frac{3F_u \sin^2(\alpha) \theta_y}{M \delta_y p^2} Z(t) \cos\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) \quad (\text{Ec.II.39})$$

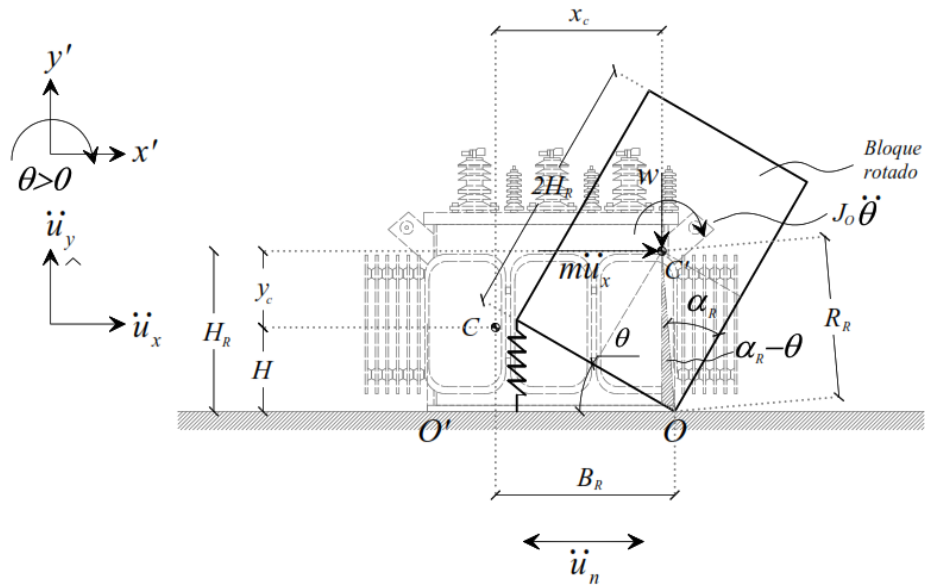
donde  $p$  es la frecuencia característica del bloque dada por  $\sqrt{\frac{3g}{4R}}$  es decir, al tener un cuerpo más esbelto (mayor distancia del centro de masa hacia algún punto de referencia  $O$  u  $O'$ ) la frecuencia  $p$  será menor.

*Modelo equivalente para cuerpos de formas arbitrarias y masa no uniforme.*

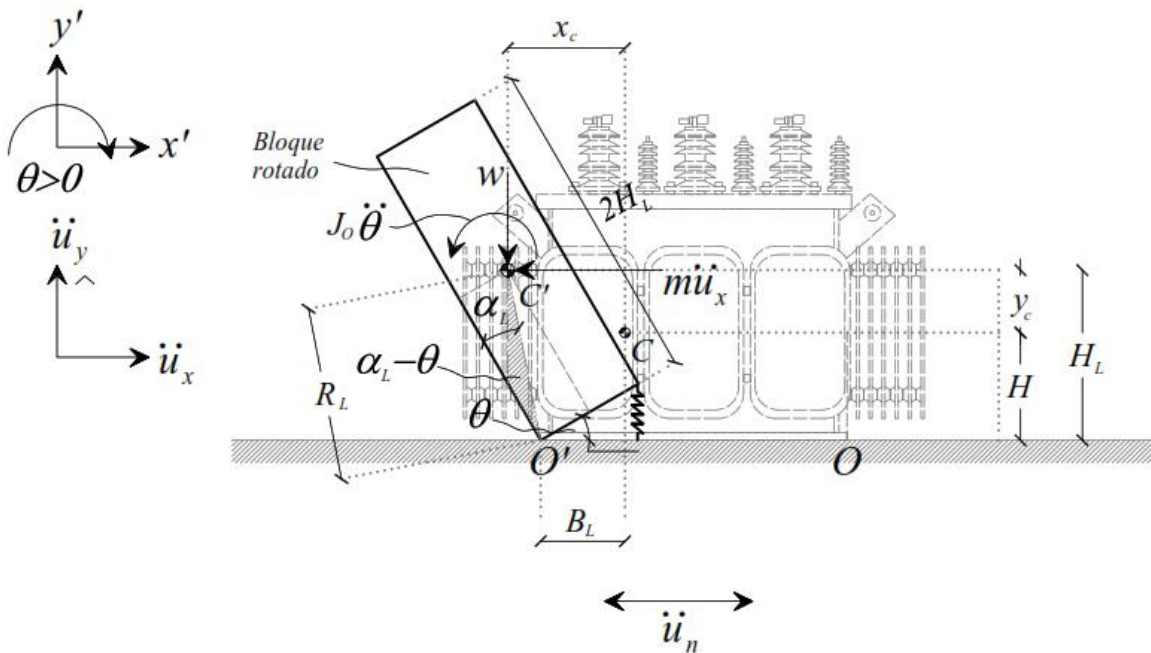
En el presente tópico se propone considerar durante la modelación de cuerpos anclados a la base: la irregularidad por geometría, masa no uniforme y la no linealidad explícita en el anclaje. Lo anterior, se implementa para cada instante de tiempo en función de la variación de las condiciones iniciales de cada ciclo de vibración, a través de un cuerpo equivalente como se puede ver en las Figuras II.9 y II.10.

A través de alguno los esquemas representativos mencionados anteriormente, la inercia rotacional considerando una distribución arbitraria se define como:

$$J_0 = I_0 + mR^2 \quad (\text{Ec.II.40})$$



**Figura II.9.** Esquema representativo de un bloque equivalente de un cuerpo asimétrico con masa no uniforme con dimensiones totales  $2B_L$  y  $2H$  anclado a la base.



**Figura II.10.** Esquema representativo de un bloque equivalente de un cuerpo asimétrico con masa no uniforme con dimensiones totales  $2B_R$  y  $2H$  anclado a la base.

Considerando el equilibrio dinámico para un vértice de rotación  $O$  u  $O'$  y sustituyendo la ecuación II.40 en II.36; la aceleración rotacional se puede expresar como:

$$\theta(t) = -\frac{\ddot{u}_x \cos(\alpha - \theta)}{J_n + R^2} - \frac{gR \sin(\alpha - \theta)}{J_n + R^2} + a + b \quad (\text{Ec.II.41})$$

donde  $a$  se define como:

$$a = \frac{4(1-\varepsilon)\sin^2(\alpha)F_u\theta_y \cos\left(\frac{\theta(t)}{2}\right)Z(t)}{\delta_y M \left(\frac{J_n}{R^2} + 1\right)} \quad (\text{Ec.II.42})$$

mientras que  $b$  se define como:

$$b = \frac{4\varepsilon F_u \sin^2(\alpha) \cos\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) \sin(\theta(t))}{\delta_y M \left(\frac{J_n}{R^2} + 1\right)} \quad (\text{Ec.II.43})$$

Agrupando términos y expresado de forma compacta para un cuerpo con forma arbitraria y distribución de masa no uniforme, la forma funcional que controla el comportamiento por balanceo puro cuando éste se encuentra anclado a la base es:

$$\theta(t) = -p^2 \left\{ \frac{\ddot{u}_x}{g} \cos(\alpha \operatorname{sgn}[\theta(t)] - \theta(t)) + \sin(\alpha \operatorname{sgn}[\theta(t)] - \theta(t)) + A + B \right\} \quad (\text{Ec.II.44})$$

donde  $A$  caracteriza el comportamiento elástico lineal del ancla:

$$A = \frac{4(1-\varepsilon)\sin^2(\alpha)F_u\theta_y \cos\left(\frac{\theta(t)}{2}\right)Z(t)}{\delta_y M \left(\frac{J_n}{R^2} + 1\right) p^2} \quad (\text{Ec.II.45})$$

mientras que  $B$  caracteriza el comportamiento no lineal del ancla:

$$B = \frac{4\varepsilon F_u \sin^2(\alpha) \cos\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) \sin(\theta(t))}{\delta_y M \left(\frac{J_n}{R^2} + 1\right) p^2} \quad (\text{Ec.II.46})$$

donde  $p$  se encuentra definida como:

$$p = \sqrt{\frac{Rg}{J_n + R^2}} \quad (\text{Ec.II.47})$$

### Cálculo de las propiedades geométricas

Para el caso específico del cálculo de las propiedades geométricas e inerciales, la masa y la rigidez asociadas al cuerpo se encuentran implícitas en el cálculo, es decir, una vez elegida la sección bidimensional (2D) a digitalizar, la densidad y forma arbitraria son consideradas a través de un script que ha sido programado en el lenguaje de programación C#.Net que añade o extrae subáreas con fines del cálculo de las dimensiones del cuerpo rectangular equivalente y sus propiedades rotacionales.

Durante el proceso es necesario definir el material principal del cuerpo que es utilizado como referencia y a las subáreas adicionales se le asignan densidades proporcionales a ella (Arredondo *et al.*, 2017). A continuación, se muestran las expresiones más relevantes utilizadas para el cálculo de las diferentes propiedades geométricas necesarias durante el cálculo de la respuesta dinámica de cuerpos rígidos.

Área de la sección transversal:

$$A = \sum \left\{ \frac{(y_i - y_{i+1})(x_i + x_{i+1})}{2} \right\} * d_{ref} \quad (\text{Ec.II.48})$$

Localización del centroide en el eje de las abcisas con respecto a un origen de referencia:

$$x_c = \sum \left\{ \left[ \frac{(y_i - y_{i+1})}{8} * \left( (x_i + x_{i+1})^2 + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{3} \right) \right] * \frac{1}{A} \right\} * d_{ref} \quad (\text{Ec.II.49})$$

Localización del centroide en el eje de las ordenadas con respecto a un origen de referencia:

$$y_c = \sum \left\{ \left[ \frac{(x_i - x_{i+1})}{8} * \left( (y_i + y_{i+1})^2 + \frac{(y_{i+1} - y_i)^2}{3} \right) \right] * \frac{1}{A} \right\} * d_{ref} \quad (\text{Ec.II.50})$$

Momento de inercia en el eje X sobre los ejes centroidales.

$$I_x = \sum \left\{ \frac{(x_{i+1} - x_i)(y_i + y_{i+1})}{24} * (y_{i+1} + y_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2 \right\} * d_{ref} \quad (\text{Ec.II.51})$$

Momento de inercia en Y sobre los ejes centroidales.

$$I_y = -\sum \left\{ \frac{(y_{i+1} - y_i)(x_i + x_{i+1})}{24} * (x_{i+1} + x_i)^2 + (x_{i+1} - x_i)^2 \right\} * d_{ref} \quad (\text{Ec.II.52})$$

$$I_{xy1} = \frac{(y_{i+1} - y_i)^2 (x_{i+1} + x_i)(x_{i+1}^2 + x_i^2)}{8} \quad (\text{Ec.II.53})$$

$$I_{xy2} = \frac{(y_{i+1} - y_i)(x_{i+1}y_i - x_iy_{i+1})(x_{i+1}^2 + x_{i+1} * x_i + x_i^2)}{3} \quad (\text{Ec.II.54})$$

$$I_{xy3} = \frac{(x_{i+1}y_i - x_iy_{i+1})^2 (x_{i+1} + x_i)}{4} \quad (\text{Ec.II.55})$$

Producto de inercias:

$$I_{xy} = \left\{ \sum (I_{xy1} + I_{xy2} + I_{xy3}) * Si \left( x_{i+1} = x_i, 0, \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \right) \right\} * d_{ref} \quad (\text{Ec.II.56})$$

Inercia rotacional:

$$J_0 = \frac{I_x + I_y}{A} \quad (\text{Ec.II.60})$$

Longitud del punto rotación  $O$  hacia el centro de masas considerado:

$$R_R = \sqrt{y_{cg}^2 + (x_{cg} - x_{\max})^2} \quad (\text{Ec.II.61})$$

Longitud del punto rotación  $O'$  hacia el centro de masas considerado:

$$R_L = \sqrt{y_{cg}^2 + (x_{cg} - x_{\min})^2} \quad (\text{Ec.II.62})$$

Longitud de la semi-base del cuerpo al rotar en sentido antihorario:

$$B_R = x_{\max} - x_{cg} \quad (\text{Ec.II.63})$$

Longitud de la semi-base del cuerpo al rotar en sentido horario:

$$B_L = x_{\min} - x_{cg} \quad (\text{Ec.II.64})$$