



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA  
ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

ALGEBROIDE DE LIE ASOCIADO A UNA VARIEDAD DE  
POISSON

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:

MIGUEL ANGEL CADENA NEGRETE

DIRECTOR DE TESIS:

DR. PABLO SUÁREZ SERRATO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

CIUDAD UNIVERSITARIA, Cd. MX., SEPTIEMBRE, 2018



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



# Índice

Resumen	1
<b>1 Geometría de Poisson</b>	<b>3</b>
1.1 Variedades de Poisson . . . . .	4
1.2 Ejemplos de variedades y estructuras de Poisson . . . . .	9
<b>2 Algebroides y Grupoides de Lie</b>	<b>19</b>
2.1 Algebroides de Lie . . . . .	19
2.2 Ejemplos de algebroides de Lie . . . . .	21
2.3 Grupoides de Lie . . . . .	23
2.4 Ejemplos de grupoides de Lie . . . . .	26
2.5 El algebroide de Lie inducido por un grupoide de Lie . . . . .	28
2.6 Integrabilidad (o los teoremas de Lie) . . . . .	32
2.7 Grupoides de Lie simpléticos . . . . .	33
<b>3 Estructura de Algebroide de Lie en <math>T^*M</math></b>	<b>39</b>
3.1 Algebroide cotangente y grupoides simpléticos . . . . .	44
3.2 Algebroide cotangente asociado a una BLF . . . . .	46
<b>A Aspectos básicos de fibrados vectoriales</b>	<b>53</b>



# Índice de figuras

2.1	Aplicaciones source y target. . . . .	23
2.2	Esquema de la multiplicación en un grupoide. . . . .	24
2.3	Esquema de la inversión en un grupoide. . . . .	24
2.4	Representación de s-fibras y t-fibras. . . . .	25
2.5	Grupoide par. . . . .	27
A.1	Esquema del fibrado tangente. . . . .	54



# Resumen

En este trabajo se pretende realizar un estudio de las relaciones que hay entre la geometría de Poisson y la teoría de algebroides y grupoides de Lie. Se espera contribuir a la comprensión de las variedades de Poisson desde un punto de vista más algebraico. Por consiguiente, esta tesis se redactó de tal manera que al final se tengan las herramientas necesarias para continuar, por ejemplo, con la línea de investigación planteada por Crainic y Fernandes en [CL11], o por Cattaneo en [Cat04].

El objetivo principal de esta tesis fue probar el siguiente resultado:

**TEOREMA 0.1.** *Sea  $(M, \Pi)$  una estructura de Poisson. El fibrado cotangente  $T^*M$  tiene una estructura de algebroides de Lie.*

A continuación se describe de forma panorámica el contenido y estructura de esta tesis.

El **capítulo 1** trata exclusivamente de geometría de Poisson. En la sección 1.1 se exponen los fundamentos teóricos de las estructuras de Poisson. Y posteriormente, en la sección 1.2, se dan ejemplos importantes y concretos de variedades y estructuras de Poisson, dedicando especial atención en las variedades simplécticas y las variedades de Lie–Poisson.

El propósito del **capítulo 2** es dar una breve exposición de algebroides de Lie y de grupoides de Lie, así como de la relación que hay entre ambos conceptos. Se inicia dando la definición del concepto de algebroides de Lie en la sección 2.1. A continuación, en la sección 2.2, se discuten algunos ejemplos fundamentales de algebroides de Lie. En la sección 2.3 se expone la definición de grupoide de Lie, para luego dar ejemplos concretos en la sección 2.4. La sección 2.5 trata acerca de la construcción de un algebroides de Lie a partir de un grupoide de Lie dado. El problema opuesto, mejor conocido como integrabilidad algebroides de Lie, no es sencillo de resolver, y los aspectos más básicos se tratan en la sección 2.6. La

intención de incluir esta sección no es la de dar ningún resultado relevante, sino de dar al lector una introducción al concepto de integrabilidad que permita comprender mejor la relación entre grupoides de Lie, algebroides de Lie y geometría de Poisson. El capítulo finaliza con la sección 2.7, donde se estudian los grupoides simplécticos, que son un tipo particular de grupoides de Lie, equipados con una forma simpléctica compatible con la estructura del grupoide.

El **capítulo 3** tiene por objeto presentar el resultado principal de esta tesis, es decir, que el fibrado cotangente de una variedad de Poisson tiene una estructura de algebroides de Lie. En la sección 3.1 se muestra que los grupoides simplécticos están relacionados de forma muy cercana con las variedades de Poisson y sus algebroides cotangentes. Se concluye este trabajo en la sección 3.2, donde se calcula de manera explícita el algebroides cotangente de una estructura de Poisson particularmente interesante. Se trata de la estructura de Poisson asociada a una fibración de Lefschetz quebrada (BLF), se utiliza la expresión en coordenadas del bivector de Poisson alrededor de círculos singulares. Aquí no se pretende hacer un estudio de fibraciones de Lefschetz, sino ejemplificar los temas discutidos en esta tesis, y quizá abrir el camino a investigar las BLF's desde el punto de vista de algebroides y grupoides de Lie.

El concepto de fibrado vectorial es fundamental tanto en la comprensión de la definición de algebroides de Lie, así como de otros conceptos de geometría diferencial utilizados frecuentemente en este trabajo. Por esta razón se incluye el **apéndice A**, en el cual se pueden consultar los aspectos básicos de fibrados vectoriales.

# Capítulo 1

## Geometría de Poisson

Existen diversos textos que cubren ampliamente la teoría de la geometría de Poisson, según el enfoque que se quiera tener. Este capítulo está basado principalmente en la referencia [DZ05]. Se recomienda también complementar las discusiones de variedades simplécticas y variedades de Lie–Poisson con la referencia [MR91].

En sus investigaciones relacionadas con la teoría de la mecánica, desarrollada por Joseph–Louis Lagrange y Pierre–Simon Laplace, Siméon Denis Poisson introdujo en su trabajo seminal de 1809, la siguiente cantidad (escrita aquí en notación moderna):

$$(a, b) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial a}{\partial q_i} \frac{\partial b}{\partial p_i} - \frac{\partial a}{\partial p_i} \frac{\partial b}{\partial q_i} \right)$$

donde  $a$  y  $b$  son dos funciones de las coordenadas  $q_i$  y sus cantidades conjugadas  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ , para un sistema mecánico con función Lagrangiana  $L$  [DZ05].

Poisson mostró que si  $a$  y  $b$  son integrales primeras del sistema, entonces  $(a, b)$  también es una integral primera. La cantidad  $(a, b)$  se denota actualmente por  $\{a, b\}$ , y se le conoce como el corchete de Poisson de  $a$  y  $b$ .

Ya desde el siglo XIX se reconocía la importancia de este corchete. Las variedades de Poisson juegan un papel fundamental en dinámica Hamiltoniana, donde sirve como espacio fase. En particular, William Hamilton la usó para expresar sus ecuaciones en un ensayo de 1835, en lo que ahora se conoce como Dinámica Hamiltoniana. En 1842 Carl Jacobi mostró

que el corchete de Poisson satisface la identidad

$$\{\{a, b\}, c\} + \{\{b, c\}, a\} + \{\{c, a\}, b\} = 0$$

que ahora lleva su nombre. Esta misma identidad la cumple el corchete de un álgebra de Lie, que es la versión infinitesimal de un grupo de Lie. Los grupos de Lie fueron estudiados por Sophus Lie y sus colaboradores a finales del siglo XIX.

En lenguaje moderno, una estructura de Poisson en una variedad  $M$  es un bivector  $\Pi$  (tensor de Poisson) en  $M$ , de tal manera que el corchete correspondiente (el corchete de Poisson) en el espacio de funciones en  $M$ , definido por

$$\{f, g\} = \langle df \wedge dg, \Pi \rangle$$

satisface la identidad de Jacobi. A  $(M, \Pi)$  se le llama una variedad de Poisson. Esta noción de variedades de Poisson es una generalización tanto de las variedades simplécticas como de las álgebras de Lie. El tensor de Poisson del corchete original de Poisson es

$$\Pi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial p_i} \wedge \frac{\partial}{\partial q_i},$$

que es no degenerado y corresponde a la 2-forma simpléctica

$$\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i.$$

Por otro lado, toda álgebra de Lie de dimensión finita da origen a un tensor de Poisson lineal en su espacio dual, y viceversa.

## 1.1. Variedades de Poisson

**Definición 1.1.** Sea  $M$  una variedad lisa. Decimos que

$$\{\cdot, \cdot\}: C^\infty(M) \times C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

es un **corchete de Poisson** si:

1.  $\{f, g\} = -\{g, f\}$ ;
2.  $\{c_1 f + c_2 g, h\} = c_1 \{f, g\} + c_2 \{g, h\}$ ;
3.  $\{\{f, g\}, h\} + \{\{h, f\}, g\} + \{\{g, h\}, f\} = 0$ ;
4.  $\{fg, h\} = f\{g, h\} + g\{f, h\}$ .

donde  $f, g, h, \in C^\infty(M)$  y  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Las primeras tres propiedades se resumen diciendo que:  $(C^\infty, \{\cdot, \cdot\})$  es una álgebra de Lie. La cuarta propiedad quiere decir que  $\{\cdot, \cdot\}$  es una derivación en cada factor.

**Notación.** A una variedad lisa  $M$  equipada con un corchete de Poisson se le llama una **variedad de Poisson**, y se denota por  $(M, \{\cdot, \cdot\})$ .

Dado que  $\{\cdot, \cdot\}$  satisface la regla de Leibniz,  $\{f, g\}(m)$  únicamente depende de  $df(m)$  y de  $dg(m)$ . En consecuencia podemos interpretar a  $\{\cdot, \cdot\}(m)$  como una forma bilineal antisimétrica  $\Pi$  en  $M$  tal que

$$\{f, g\} = \Pi(df, dg).$$

**Observación.**  $\Pi$  es una sección de  $\Lambda^2 TM$ , i.e.  $\Pi \in \Gamma(\Lambda^2 TM)$ .

Si  $(x_1, \dots, x_n)$  son coordenadas locales, entonces dicha forma bilineal se escribe de manera única como

$$\Pi = \sum_{i < j} \Pi_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Entonces usando esta expresión se tiene que el corchete de Poisson se escribe como:

$$\{f, g\}(x) = \sum_{i, j=1}^n \Pi_{ij}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \wedge \frac{\partial g}{\partial x_j}(x).$$

Además,  $\Pi_{ij}(x)$  son funciones que satisfacen:

$$\Pi_{ij}(x) = -\Pi_{ji}(x), \quad (1.1)$$

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_l} \Pi_{lk} + \frac{\partial \Pi_{jk}}{\partial x_l} \Pi_{li} + \frac{\partial \Pi_{ki}}{\partial x_l} \Pi_{lj} \right) = 0. \quad (1.2)$$

con  $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ .

El objeto así construido se llama **bivector** o **tensor de Poisson**. Es un tensor tipo  $(2,0)$ , i.e. contravariante. En contraste una  $k$ -forma diferencial es un tensor tipo  $(0, k)$ , i.e. covariante.

**Notación.** En lo subsecuente diremos que el bivector de Poisson  $\Pi$  es la **estructura de Poisson** en la variedad  $M$ .

Dada una estructura de Poisson  $\Pi$  en una variedad  $M$ , podemos asociarle un homomorfismo natural

$$\Pi^\#: T^*M \longrightarrow TM,$$

que mapea cada covector  $\alpha \in T_x^*M$ , sobre un punto  $x \in M$ , a un único vector  $\Pi^\#(\alpha) \in T_xM$ , de tal manera que

$$\langle \alpha \wedge \beta, \Pi \rangle = \langle \beta, \Pi^\#(\alpha) \rangle,$$

para todo covector  $\beta \in T_x^*M$ .

**Notación.** A  $\Pi^\#$  se le conoce como el **ancla** de  $\Pi$ .

Usaremos también la notación  $\Pi^\#$  para denotar al operador que asocia a cada 1-forma diferencial  $\alpha$  el campo vectorial  $\Pi^\#(\alpha)$ , definido por  $(\Pi^\#(\alpha))(x) = \Pi^\#(\alpha(x))$ . Por ejemplo, si  $f$  es una función entonces  $\Pi^\#(df) = X_f$  es el campo vectorial Hamiltoniano de  $f$ .

La restricción de  $\Pi^\#$  al espacio cotangente  $T_x^*M$  la vamos a denotar como  $\Pi_x^\#$ . En coordenadas locales  $(x_1, \dots, x_n)$  tenemos que

$$\Pi^\# \left( \sum_{i=1}^n a_i dx_i \right) = \sum_{ij} \{x_i, x_j\} a_i \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{ij} \Pi_{ij} a_i \frac{\partial}{\partial x_j}. \quad (1.3)$$

Definido de esta manera,  $\Pi_x^\sharp$  es un operador lineal, dado por la matriz  $(\Pi_{ij}(x))$  en las bases lineales  $\{dx_1, \dots, dx_n\}$  y  $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ .

**Definición 1.2.** Sean  $(M_1, \{\cdot, \cdot\}_1)$  y  $(M_2, \{\cdot, \cdot\}_2)$  variedades de Poisson, y  $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$ . Se dice que  $\varphi$  es un **mapeo de Poisson** si

$$\{f \circ \varphi, g \circ \varphi\}_1 = \{f, g\}_2 \circ \varphi$$

O dicho de otra manera:

$$\{\varphi^* f, \varphi^* g\}_1 = \varphi^* \{f, g\}_2$$

Para definir el campo Hamiltoniano de una función se necesita previamente de una estructura de Poisson. La identidad de Leibniz implica que para una función  $f$  en una variedad de Poisson  $M$ , el mapeo  $g \mapsto \{f, g\}$  es una derivación. Así, existe un único campo vectorial  $X_H$  en  $M$ , llamado el **campo Hamiltoniano** de  $H$ , tal que

$$X_h(f) = \{f, h\}, \quad (1.4)$$

para toda  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ .

**Definición 1.3.** Si  $(M, \{\cdot, \cdot\})$  es una variedad de Poisson y  $h \in \mathcal{C}^\infty(M)$ , definimos el **campo Hamiltoniano** de  $h$ , denotado por  $X_h$  a través de la derivación  $X_h(f) = \{f, h\}$ .

Una función  $g$  se llama una **integral primera** de un campo vectorial  $X$  si  $g$  es constante con respecto a  $X$ ; es decir, si  $X(g) = 0$ . Encontrar integrales primeras es una parte importante en el estudio de sistemas dinámicos. La ecuación (1.4) significa que una función  $g$  es una integral primera de un campo Hamiltoniano  $X_f$  si y solo si  $\{g, f\} = 0$ . En particular, toda función  $h$  es integral primera de su propio campo vectorial Hamiltoniano; es decir,  $X_h(h) = \{h, h\} = 0$ , esto se debe a la anti-simetría del corchete de Poisson.

**Observación.** Este hecho es conocido en física como el **principio de conservación de la energía**. Habiendo denotado la función energía por  $h$ .

Sea  $(M, \{\cdot, \cdot\})$  una variedad de Poisson.  $c \in \mathcal{C}^\infty(M)$  se llama **función Casimir** si cumple que  $\{f, c\} = 0$  para toda  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ . Esto implica que  $X_f(c) = \{c, f\} = 0$ ; es decir,  $c$  es una integral primera de todos los campos Hamiltonianos en  $M$ .

**Observación.** Los campos Hamiltonianos son tangentes a las curvas de nivel de las funciones Casimir.

**TEOREMA 1.4** (Poisson). *Si  $g$  y  $h$  son integrales primeras de un campo vectorial Hamiltoniano  $X_f$  en una variedad de Poisson  $M$ , entonces  $\{g, h\}$  también es una integral primera.*

*Demostración.* Que  $g$  y  $h$  sean primeras integrales del campo  $X_f$  significa que  $\{g, f\} = 0$  y que  $\{h, f\} = 0$ . La identidad de Jacobi implica que  $\{\{g, h\}, f\} = 0$ .  $\square$

Tenemos que  $(\mathcal{C}^\infty(M), \{\cdot, \cdot\})$  forma ahora una álgebra de Lie de funciones lisas bajo el corchete de Poisson. Y que  $(\mathfrak{X}(M), [\cdot, \cdot])$  es el álgebra de Lie de los campos vectoriales bajo el corchete usual. Una consecuencia inmediata de la definición del corchete de Poisson es la siguiente

**Proposición 1.5.** *Sea  $(M, \{\cdot, \cdot\})$  una variedad de Poisson lisa. El mapeo*

$$\begin{aligned} (\mathcal{C}^\infty(M), \{\cdot, \cdot\}) &\longrightarrow (\mathfrak{X}(M), [\cdot, \cdot]) \\ f &\longmapsto X_f \end{aligned}$$

*es un anti-homomorfismo de álgebras de Lie. En otras palabras*

$$[X_f, X_g] = -X_{\{f, g\}}.$$

*Demostración.* Para toda  $f, g, h \in \mathcal{C}^\infty(M)$  tenemos que

$$\begin{aligned} [X_f, X_g](h) &= X_f(X_g(h)) - X_g(X_f(h)) \\ &= \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\} \\ &= \{\{f, g\}, h\} \\ &= -\{h, \{f, g\}\} \\ &= -X_{\{f, g\}}(h). \end{aligned}$$

Como  $h$  es arbitraria, entonces

$$[X_f, X_g] = -X_{\{f, g\}}.$$

□

## 1.2. Ejemplos de variedades y estructuras de Poisson

**Ejemplo 1.6.** Cualquier variedad lisa  $M$  es una variedad de Poisson, si la equipamos con el corchete  $\{f, g\} = 0, \forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ .

**Ejemplo 1.7.** Sea  $M = \mathbb{R}^2$  con coordenadas  $(x, y)$ , y sea  $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función lisa arbitraria. Podemos hacer de  $\mathbb{R}^2$  una variedad de Poisson, si la equipamos con el corchete

$$\{f, g\} = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} \right) p.$$

**Ejemplo 1.8.** Sean  $(M, \{\cdot, \cdot\}_M)$  y  $(N, \{\cdot, \cdot\}_N)$  dos variedades de Poisson. El producto directo  $M_1 \times M_2$  es una variedad de Poisson si es equipado con el corchete

$$\{f, g\}_{M \times N}(x, y) = \{f(\cdot, y), g(\cdot, y)\}_M(x) + \{f(x, \cdot), g(x, \cdot)\}_N(y).$$

**Ejemplo 1.9** (Estructuras de Poisson constantes).

Si las funciones  $\Pi_{ij}(x)$  son constantes, entonces la ecuación en 1.2 se cumple de manera trivial, y la condición para que determinen una estructura de Poisson se reduce a que la matriz  $(\Pi_{ij})$  cumpla 1.1, es decir, que sea antisimétrica.

**Ejemplo 1.10** (Estructuras de Poisson lineales).

Dadas funciones lineales

$$\Pi_{ij}(x) = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k x_k, \quad (1.5)$$

las ecuaciones 1.1 y 1.2 se reducen a

$$c_{ij}^k = -c_{ji}^k,$$

$$\sum_{l=1}^n \left( c_{ij}^l c_{lk}^m + c_{jk}^l c_{li}^m + c_{ki}^l c_{lj}^m \right),$$

con  $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ .

### 1.2.1. Variedades Simpléticas

**Definición 1.11.** Una **variedad simpléctica**  $(M, \omega)$  es una variedad  $M$  equipada con una 2-forma diferencial cerrada y no-degenerada  $\omega$ , llamada forma simpléctica.

Que  $\omega \in \Omega^2(M)$  sea cerrada quiere decir que  $d\omega = 0$ . Y que la 2-forma  $\omega$  sea no-degenerada significa que el mapeo

$$\begin{aligned} \omega^\flat: TM &\longrightarrow T^*M \\ X &\longmapsto \iota_X \omega, \end{aligned}$$

que asocia a cada vector  $X$  el covector  $\iota_X \omega$ , sea un isomorfismo de fibrados vectoriales.

**Notación.** Usamos la notación  $\iota_X \omega$  para la contracción de  $\omega$  con  $X$ , y esta definida por  $\iota_X \omega := \omega(X, Y)$ .

**Definición 1.12.** Si  $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$  es una función en una variedad simpléctica  $(M, \omega)$ , entonces podemos definir su **campo vectorial Hamiltoniano**, denotado por  $X_f$ , de la siguiente manera:

$$\iota_{X_f} \omega = -df.$$

**Definición 1.13.** Sea  $(M, \omega)$  una variedad lisa simpléctica. Podemos definir un corchete de la siguiente manera:

$$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g) = df(X_g) = X_g(f) = -X_f(g),$$

donde  $f, g \in C^\infty(M)$ .

**Proposición 1.14.** Si  $(M, \omega)$  es una variedad simpléctica lisa, entonces el corchete  $\{f, g\} = \omega(X_f, X_g)$  es un corchete de Poisson en  $(M, \omega)$ .

*Demostración.* Cumple las siguientes propiedades:

1. Es antisimétrico;  $\{f, g\} = -\{g, f\}$ .

2. Es  $\mathbb{R}$ -lineal;

$$\begin{aligned}\{c_1 f_1 + c_2 f_2, g\} &= d(c_1 f_1 + c_2 f_2)(X_g) \\ &= c_1 df_1(X_g) + c_2 df_2(X_g) \\ &= c_1 \{f_1, g\} + c_2 \{f_2, g\}.\end{aligned}$$

3. Satisface la regla de Leibniz;

$$\begin{aligned}\{f_1 f_2, g\} &= d(f_1 f_2)(X_g) \\ &= f_1 df_2(X_g) + f_2 df_1(X_g) = f_1 \{f_2, g\} + f_2 \{f_1, g\},\end{aligned}$$

donde  $f_1, f_2, g \in C^\infty$ , y  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

4. Cumple con la identidad de Jacobi. Recordemos la **fórmula de Cartan** para la diferencial de una  $k$ -forma  $\eta$

$$\begin{aligned}d\eta(X_1, \dots, X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} X_i(\eta(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{k+1})) \\ &+ \sum_{1 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j} \eta([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{k+1}),\end{aligned}$$

donde  $X_1, \dots, X_{k+1}$  son campos vectoriales, y el «gorro» significa que la entrada correspondiente se omite. Aplicando la fórmula de Cartan a  $\omega$  y  $X_f, X_g, X_h$  obtenemos

$$\begin{aligned}0 &= d\omega(X_f, X_g, X_h) \\ &= X_f(\omega(X_g, X_h)) + X_g(\omega(X_h, X_f)) + X_h(\omega(X_f, X_g)) \\ &\quad - \omega([X_f, X_g], X_h) - \omega([X_g, X_h], X_f) - \omega([X_h, X_f], X_g) \\ &= X_f\{g, h\} + X_g\{h, f\} + X_h\{f, g\} \\ &\quad + [X_f, X_g](h) + [X_g, X_h](f) + [X_h, X_f](g) \\ &= \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} + X_f(X_g(h)) - X_g(X_f(h)) \\ &\quad + X_g(X_h(f)) - X_h(X_g(f)) + X_h(X_f(g)) - X_f(X_h(g)) \\ &= 3(\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\}).\end{aligned}$$

□

**Observación.** Con esta proposición podemos concluir que toda variedad simpléctica es una variedad de Poisson; el resultado inverso no es cierto.

Un resultado muy importante en geometría simpléctica, conocido como el teorema de Darboux, nos dice que todas las variedades simplécticas de la misma dimensión son localmente isomorfas; en otras palabras en geometría simpléctica no hay invariantes locales.

**TEOREMA 1.15** (Darboux). *Sea  $(M, \omega)$  una variedad simpléctica, con  $\dim M = 2n$ . Para todo punto  $x \in M$ , existe una vecindad  $U$  con coordenadas locales  $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$  tal que*

$$\omega = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i.$$

**Notación.** A dicho sistema de coordenadas locales se le conoce como coordenadas de Darboux, o coordenadas canónicas.

La demostración del teorema de Darboux se puede encontrar en diversas fuentes, por ejemplo en [MDS98].

En un sistema de coordenadas de Darboux se tienen la siguiente expresión para los campos vectoriales Hamiltonianos:

$$X_h = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i};$$

y para el corchete de Poisson:

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right).$$

Las ecuaciones de Hamilton de  $h$  (también llamadas el sistema Hamiltoniano de  $h$ ), es decir, las ecuaciones diferenciales ordinarias para las curvas integrales de  $X_h$ , tienen la siguiente forma<sup>1</sup>:

<sup>1</sup>Esta forma de las ecuaciones de Hamilton puede encontrarse en cualquier texto de mecánica analítica.

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= \frac{\partial h}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial h}{\partial q_i}.\end{aligned}$$

**Proposición 1.16.** Sean  $(M_1, \omega_1)$  y  $(M_2, \omega_2)$  variedades simplécticas.  $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$  es un simplectomorfismo si y solo si  $\forall f, g \in C^\infty(M_2)$  se cumple que

$$\{\varphi^* f, \varphi^* g\}_{M_1} = \varphi^* \{f, g\}_{M_2} \quad (1.6)$$

*Demostración.* Usemos que

$$\varphi^*(\mathcal{L}_X f) = \mathcal{L}_{\varphi^* X}(\varphi^* f),$$

donde  $X \in \mathfrak{X}(M_2)$ , y  $f \in C^\infty(M_2)$ . Ahora

$$\begin{aligned}\varphi^* \{f, g\}_{M_2} &= \varphi^*(df(X_g)) \\ &= \varphi^*(X_g(f)) \\ &= \varphi^*(\mathcal{L}_{X_g} f) \\ &= \mathcal{L}_{\varphi^* X_g}(\varphi^* f)\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\{\varphi^* f, \varphi^* g\}_{M_1} &= d(\varphi^* f)(X_{\varphi^* g}) \\ &= \mathcal{L}_{X_{g \circ \varphi}}(\varphi^* f).\end{aligned}$$

Por lo tanto (1.6) se cumple si y solo si  $\varphi^* X_g = X_{g \circ \varphi}$ ,  $\forall g \in C^\infty(M)$ . Es decir, (1.6) se cumple si y solo si  $\varphi$  es un simplectomorfismo.  $\square$

**Definición 1.17.** Sea  $V \subset T_x M$  un subespacio vectorial del espacio tangente  $T_x M$  de una variedad simpléctica  $(M, \omega)$ . Definimos al **espacio ortogonal simpléctico** de  $V$  como:

$$V^\perp = \{X \in T_x M : \omega(X, Y) = 0, \forall Y \in V\}.$$

A continuación definimos unas clases importantes de subespacios de  $T_x M$ .

**Definición 1.18.** Sea  $V \subset T_x M$  un subespacio vectorial de  $T_x M$ .

1. Si  $V \cap V^\perp = \{0\}$ , se dice que  $V$  es un subespacio **simpléctico**.
2. Si  $V = V^\perp$ , se dice que  $V$  es un subespacio **Lagrangiano**.
3. Si  $V \subset V^\perp$ , se dice que  $V$  es un subespacio **isotrópico**.
4. Si  $V^\perp \subset V$ , se dice que  $V$  es un subespacio **coisotrópico**.

**Definición 1.19.** Sea  $N \subset M$  una subvariedad de una variedad simpléctica  $(M, \omega)$ . Se dice que  $N$  es una subvariedad **simpléctica** (resp. **Lagrangiana**, **isotrópico**, **coisotrópico**) si  $T_x N$  es un subespacio **simpléctico** (resp. **Lagrangiano**, **isotrópico**, **coisotrópico**), para todo  $x \in N$ .

### 1.2.2. Corchete de Lie–Poisson

Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie de dimensión finita, es decir, un espacio vectorial con un corchete de Lie  $[\cdot, \cdot]$ . A continuación vamos a definir un corchete en funciones lisas en el espacio dual  $\mathfrak{g}^*$ . Recordemos que las funciones lineales en  $\mathfrak{g}^*$  forman el espacio  $(\mathfrak{g}^*)^* = \mathfrak{g}$ .

**Definición 1.20.** Sean  $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$  funciones en  $\mathfrak{g}^*$ , definimos el **corchete de Lie–Poisson** como la función

$$\begin{aligned} \{\xi, \eta\}_\pm(\mu) &= \pm[\xi, \eta](\mu) \\ &= \pm\langle \mu, [\xi, \eta] \rangle, \end{aligned}$$

donde  $\mu \in \mathfrak{g}^*$ .

Si  $f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ ,  $df(\mu) \in T_\mu^* \mathfrak{g}^* \cong \mathfrak{g}$  (de la misma manera  $dg(\mu) \in \mathfrak{g}$ ), entonces

$$\{f, g\}_\pm(\mu) = \pm\langle \mu, [df(\mu), dg(\mu)] \rangle. \quad (1.7)$$

**Proposición 1.21.** *El corchete de Lie–Poisson es un corchete de Poisson en  $\mathfrak{g}^*$ .*

*Demostración.* La ecuación (1.7) satisface la identidad de Leibniz:

$$\begin{aligned}
\{f_1 f_2, g\}(\mu) &= \pm \langle \mu, [d(f_1 f_2)(\mu), dg(\mu)] \rangle \\
&= \pm \langle \mu, [f_1(\mu)df_2(\mu) + f_2(\mu)df_1(\mu), dg(\mu)] \rangle \\
&= \pm \langle \mu, [f_1(\mu)df_2(\mu), dg(\mu)] \rangle + \pm \langle \mu, [f_2(\mu)df_1(\mu), dg(\mu)] \rangle \\
&= \pm \langle \mu, f_1(\mu)[df_2(\mu), dg(\mu)] \rangle + \pm \langle \mu, f_2(\mu)[df_1(\mu), dg(\mu)] \rangle \\
&= \pm f_1(\mu) \langle \mu, [df_2(\mu), dg(\mu)] \rangle + \pm f_2(\mu) \langle \mu, [df_1(\mu), dg(\mu)] \rangle \\
&= \pm f_1(\mu) \{f_2, g\}_\pm + \pm f_2(\mu) \{f_1, g\}_\pm
\end{aligned}$$

La ecuación (1.7) también satisface la identidad de Jacobi:

Sea  $\xi \in \mathfrak{g}$ , definimos

$$\begin{aligned}
ad_\xi: \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\
\eta &\longmapsto ad_\xi \eta = [\xi, \eta],
\end{aligned}$$

y al operador dual  $ad_\xi^*: \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*$  de la siguiente manera:

Si  $\mu \in \mathfrak{g}^*$  y  $\eta \in \mathfrak{g}$ , entonces

$$\langle ad_\xi^* \mu, \eta \rangle = \langle \mu, ad_\xi \eta \rangle = \langle \mu, [\xi, \eta] \rangle.$$

Si  $\mu, \nu \in \mathfrak{g}^*$ , y  $f \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ , entonces

$$\langle df, \nu \rangle = \frac{d}{dt} f(\mu + t\nu),$$

donde  $df \in (\mathfrak{g}^*)^*$ . Fijamos  $\nu$ ;  $df(\mu + t\nu)$  es una curva en  $\mathfrak{g}$ . Entonces  $\frac{d}{dt} df(\mu + t\nu) \in \mathfrak{g}$ .

Si  $\tau \in \mathfrak{g}^*$ , entonces

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{d}{dt} df(\mu + t\nu), \tau \right\rangle &= \frac{d}{dt} \langle df(\mu + t\nu), \tau \rangle \\
&= \frac{d}{dt} \frac{d}{ds} f(\mu + t\nu + s\tau) \\
&= D^2 f(\mu)(\nu, \tau),
\end{aligned}$$

que es una forma bilineal simétrica en  $\nu$  y en  $\tau$ . En coordenadas  $D^2 f(\mu)$  es la **matriz Hes-**

**siana.**  $D^2 f(\mu)(\cdot, \cdot)$  es una forma bilineal simétrica en  $\mathfrak{g}^*$ .

Escribimos

$$\frac{d}{dt} df(\mu + tv) = D^2 f(\mu)(v, \cdot),$$

por lo que,

$$\begin{aligned} \langle d\{f, g\}(\mu), v \rangle &= \frac{d}{dt} \langle \mu + tv, [df(\mu + tv), dg(\mu + tv)] \rangle \\ &= \langle v, [df(\mu), dg(\mu)] \rangle + \langle \mu, [D^2 f(\mu)(v, \cdot), dg(\mu)] \rangle \\ &\quad + \langle \mu, [df(\mu), D^2 g(\mu)(v, \cdot)] \rangle. \end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned} \langle \mu, [df(\mu), D^2 g(\mu)(v, \cdot)] \rangle &= \langle \mu, ad_{df(\mu)}(D^2 g(\mu)(v, \cdot)) \rangle \\ &= \langle ad_{df(\mu)}^*(\mu), D^2 g(\mu)(v, \cdot) \rangle \\ &= D^2 g(\mu)(v, ad_{df(\mu)}^*(\mu)). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\langle d\{f, g\}(\mu), v \rangle = \langle v, [df(\mu), dg(\mu)] \rangle - D^2 f(\mu)(v, ad_{dg(\mu)}^*(\mu)) + D^2 g(\mu)(v, ad_{df(\mu)}^*(\mu)).$$

En conclusión, usando la simetría

$$d\{f, g\}(\mu) = [df(\mu), dg(\mu)] - D^2 f(\mu)(ad_{dg(\mu)}^*(\mu), \cdot) + D^2 g(\mu)(ad_{df(\mu)}^*(\mu), \cdot)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \{h, \{f, g\}\}(\mu) &= \langle \mu, [dh(\mu), d\{f, g\}(\mu)] \rangle \\ &= \langle \mu, [dh(\mu), [df(\mu), dg(\mu)]] \rangle \\ &= D^2 f(\mu)[ad_{dg(\mu)}^*(\mu), ad_{dh(\mu)}^*(\mu)] + D^2 g(\mu)[ad_{df(\mu)}^*(\mu), ad_{dh(\mu)}^*(\mu)] \end{aligned}$$

Tomando en cuenta que

$$\begin{aligned} \langle \mu, [dh(\mu), D^2 f(\mu)(ad_{dg(\mu)}^*(\mu), \cdot)] \rangle &= \langle ad_{dh(\mu)}^*, D^2 f(\mu)(ad_{dg(\mu)}^*(\mu), \cdot) \rangle \\ &= D^2 f(\mu)[ad_{dg(\mu)}^*(\mu), ad_{dh(\mu)}^*(\mu)]. \end{aligned}$$

Vamos a tener expresiones similares para  $\{g, \{h, f\}\}(\mu)$  y para  $\{f, \{g, h\}\}(\mu)$ .

La identidad de Jacobi es consecuencia de la identidad de Jacobi en  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$  y de la simetría de  $D^2 f(\mu)$ ,  $D^2 g(\mu)$  y  $D^2 h(\mu)$ .  $\square$

En conclusión, hemos definido una estructura de Poisson en el espacio dual  $\mathfrak{g}^*$ , equipando a este espacio con el corchete de Lie–Poisson.



# Capítulo 2

## Algebroides y Grupos de Lie

En este capítulo se da un breve introducción a la teoría de los algebroides y grupos de Lie. Para un tratamiento más extenso de estos temas se pueden consultar las referencias [NTV06], [CdSW99]. El tema de integrabilidad de algebroides de Lie se discute de forma muy breve y básica en este capítulo, por lo que se recomienda leer las referencias [CF03], [CF04] y [CL11]. Empezaremos a entender la relación entre los grupos de Lie y las variedades de Poisson después de la discusión de grupos simplécticos. Una amplia discusión acerca de los grupos simplécticos se puede encontrar en [CDW87] y en [Wei87].

### 2.1. Algebroides de Lie

Un algebroid de Lie es un haz vectorial real, equipado con un corchete de Lie en su espacio de secciones; además, dicho corchete satisface la identidad de Leibniz. Dicho de manera más precisa:

**Definición 2.1.** Sea  $B$  una variedad lisa y  $TB$  su fibrado tangente. Un **algebroid de Lie** sobre  $B$ , o con base  $B$ , es un fibrado vectorial  $\mathcal{A} = (A, p, B)$  junto con un  $B$ -morfismo de fibrados vectoriales<sup>1</sup>  $q: A \rightarrow TB$ , denominado el **ancla** del algebroid de Lie, y un corchete  $[\cdot, \cdot]: \Gamma(A) \times \Gamma(A) \rightarrow \Gamma(A)$ , siendo  $\Gamma(A)$  el espacio de las secciones globales de  $A$ , que cumple con las siguientes condiciones:

---

<sup>1</sup>Ver la Definición A.6 en el Apéndice.

- (a)  $[\cdot, \cdot]$  es  $\mathbb{R}$ -bilineal, alternante y satisface Jacobi;
- (b)  $[\alpha, f\beta] = f[\alpha, \beta] + q(\alpha)(f)\beta$ ,  $\forall \alpha, \beta \in \Gamma(A)$  y  $\forall f \in \mathcal{C}^\infty(B)$ , donde  $q(\alpha)(f)$  es la **derivada de Lie** de  $f$  con respecto al campo de vectores tangentes  $q(\alpha)$ .

**Notación.** Vamos a denotar al algebroide de Lie por la terna  $(\mathcal{A}, [\cdot, \cdot], q)$ ; o simplemente por  $\mathcal{A}$ , cuando el contexto no de lugar a confusión.

**Proposición 2.2.** Si  $(\mathcal{A}, [\cdot, \cdot], q)$  es un algebroide de Lie entonces el ancla  $q$  es un homomorfismo de álgebras de Lie. Esto significa que

$$q([\alpha, \beta]) = [q(\alpha), q(\beta)], \forall \alpha, \beta \in \Gamma(A)$$

*Demostración.* Por la identidad de Jacobi y la regla de Leibniz, tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= [[\alpha, \beta], f\gamma] + [[\beta, f\gamma], \alpha] + [[f\gamma, \alpha], \beta] \\ &= f[[\alpha, \beta], \gamma] + q([\alpha, \beta])(f)\gamma \\ &\quad + f[[\beta, \gamma], \alpha] - q(\alpha)(f)[\beta, \gamma] + q(\beta)(f)[\gamma, \alpha] - q(\alpha)q(\beta)(f)\gamma \\ &\quad + f[[\gamma, \alpha], \beta] - q(\beta)(f)[\gamma, \alpha] - q(\alpha)(f)[\gamma, \beta] + q(\beta)q(\alpha)(f)\gamma \\ &= ((q[\alpha, \beta] - [q(\alpha), q(\beta)])(f))\gamma \end{aligned}$$

Por lo tanto, como lo anterior es válido para toda  $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma(A)$ , y para toda  $f \in \mathcal{C}^\infty$ , se cumple que  $q([\alpha, \beta]) = [q(\alpha), q(\beta)]$ .  $\square$

Si fijamos coordenadas locales  $(x^1, \dots, x^m)$  en una vecindad  $U$  de un punto de  $M$ , donde  $A$  admita una base local de secciones  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ , se tiene que

$$\begin{aligned} q(\alpha_s) &= \sum_{i=1}^m q_s^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad s = 1, \dots, r \\ [\alpha_s, \alpha_t] &= \sum_{u=1}^r c_{st}^\mu \alpha_\mu, \quad s, t = 1, \dots, r \end{aligned}$$

donde  $q_s^i, c_{st}^\mu \in \mathcal{C}^\infty(U)$  son las constantes de estructura locales.

## 2.2. Ejemplos de algebroides de Lie

A continuación se dan algunos ejemplos de algebroides de Lie. Más adelante se estudiará como una variedad de Poisson se puede definir en términos de algebroides de Lie.

**Ejemplo 2.3.** Los algebroides de Lie sobre una base formada por un conjunto de un solo punto son las álgebras de Lie. Sea  $A$  un algebroides de Lie sobre una base  $B$  formada por un único punto  $x_0$ . Entonces las secciones de  $A$  están en biyección con los elementos de  $A$ , pues toda sección  $\sigma$  está determinada por  $\sigma(x_0) \in A$ , y cada elemento  $a \in A$  determina la sección  $\sigma: B \rightarrow A$  definida como  $\sigma(x_0) = a$ . El ancla  $q: A \rightarrow TB$  queda determinada de manera única, pues  $TB = \{0\}$ .

**Ejemplo 2.4.** Sea  $M$  una variedad lisa. Las secciones de  $TM$  son campos vectoriales. El haz tangente  $TM \rightarrow M$ , equipado con el corchete usual de campos vectoriales, y con el mapeo identidad  $TM \rightarrow TM$  como ancla, es un algebroides de Lie. Y se le conoce como el **algebroides par**.

**Ejemplo 2.5.** Sea  $M$  una variedad lisa y  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie actuando en  $M$ ; en otras palabras tenemos un morfismo de álgebras de Lie

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &\longrightarrow \Gamma(TM) \\ \xi &\longmapsto v_\xi. \end{aligned}$$

Consideramos un haz trivial  $A = \mathfrak{g} \times M$  sobre  $M$ . Identificamos las secciones de  $M$  con las aplicaciones  $M \rightarrow \mathfrak{g}$ . Definimos un corchete en  $\Gamma(A)$  mediante

$$[\alpha, \beta](p) = [\alpha(p)] + v_{\beta(p)} \cdot \alpha - v_{\alpha(p)} \cdot \beta,$$

y un morfismo de haces (el ancla)

$$\begin{aligned} q: A &\longrightarrow TM \\ (\xi, p) &\longmapsto v_\xi(p). \end{aligned}$$

De esta manera se define un algebroides de Lie llamado **algebroides acción**.

**Ejemplo 2.6.** Se denomina **haz de álgebras de Lie** a un fibrado vectorial  $(L, p, B)$  junto con un campo de corchetes  $[\cdot, \cdot]: \Gamma(L) \times \Gamma(L) \longrightarrow \Gamma(L)$  y la aplicación nula como ancla, de modo que dicho fibrado vectorial admita una representación coordinada  $\{(U_i, \Psi_i)\}$  con  $\Psi_i: p^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times \mathfrak{g}$ , donde  $\mathfrak{g}$  es un álgebra de Lie y se verifica que  $\Psi_{i,x}$  es un isomorfismo de álgebras de Lie, para cada  $x \in B$ .

**Ejemplo 2.7.** Sea  $\pi: Q \longrightarrow M$  un fibrado principal con grupo de estructura  $G$ . Considerando la acción lisa de  $G$  sobre  $Q$ ,

$$\begin{aligned} \Phi: G \times Q &\longrightarrow Q \\ (g, q) &\longmapsto \Phi_g(q). \end{aligned}$$

Podemos hacer un levantamiento tangente de esta acción:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}: G \times TQ &\longrightarrow TQ \\ (g, v) &\longmapsto T_q \Phi_g(v) \in T_{\Phi_g(q)} Q, \end{aligned}$$

donde  $v \in T_q Q$ .

Se tiene que el cociente  $TQ/G$  es un fibrado vectorial sobre  $M = Q/G$ . El espacio de secciones  $\Gamma(TQ/G)$  puede ser identificado con el álgebra de Lie de campos vectoriales  $G$ -invariantes en  $Q$ , por lo que se tiene un corchete canónico de Lie  $[\cdot, \cdot]: \Gamma(TQ/G) \times \Gamma(TQ/G) \longrightarrow \Gamma(TQ/G)$ , y que cumple con la regla de Leibniz.

También podemos considerar como mapeo ancla a  $q: TQ/G \longrightarrow TM$ , tal que

$$q([v]) = T_q \pi(v),$$

para  $q \in Q$  y  $[v] \in TQ/G$ .

Al algebroides de Lie obtenido a partir de esta construcción se le conoce como **algebroides de Atiyah** de un fibrado principal.

## 2.3. Grupos de Lie

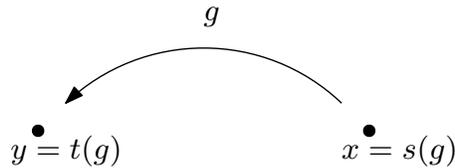
Los algebroides de Lie aparecieron por primera vez como los objetos infinitesimales asociados a los grupos de Lie. Estos son una generalización de los grupos de Lie. En el lenguaje de categorías un grupoide es una categoría pequeña en la que todos los morfismos son invertibles. Un grupoide de Lie es un grupoide con estructura lisa. Siendo más explícitos, podemos dar la siguiente:

**Definición 2.8.** Sean  $G$  y  $B$  dos conjuntos, llamados respectivamente el conjunto de morfismos o flechas y el conjunto de objetos o puntos. Decimos que  $G$  es un **grupoide** sobre  $B$  si se tienen las siguientes **aplicaciones de estructura**:

1. Las aplicaciones suprayectivas **fuelle** (en inglés source) y **blanco** (en inglés target)

$$s, t: G \rightarrow B,$$

que asocian a cada flecha  $g \in G$  su objeto fuente  $s(g)$  y su objeto blanco  $t(g)$  respectivamente. Se puede pensar a un elemento  $g \in G$  como una flecha que inicia en  $x = s(g)$  y que termina en  $y = t(g)$ , donde  $x, y \in B$ .



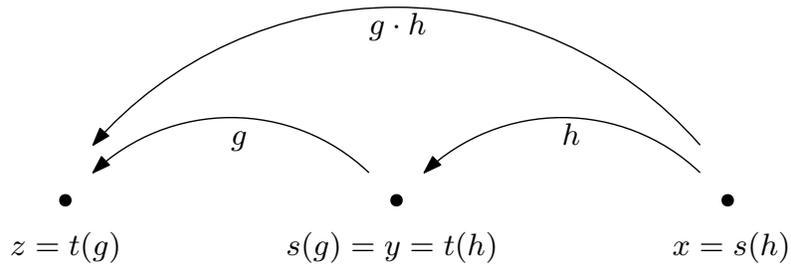
**Figura 2.1:** Aplicaciones source y target.

2. Una **multiplicación**

$$m: G^{(2)} \rightarrow G$$

$$(g, h) \mapsto g \cdot h,$$

donde  $G^{(2)} := G_s \times_t G = \{(g, h) \in G \times G : s(g) = t(h)\}$ . Si  $h$  es una flecha de  $x = s(h)$  a  $y = t(h)$ , y  $g$  es una flecha de  $y = s(g)$  a  $z = t(g)$ , entonces  $g \cdot h$  se puede interpretar como una flecha de  $x$  a  $z$ .



**Figura 2.2:** Esquema de la multiplicación en un grupoide.

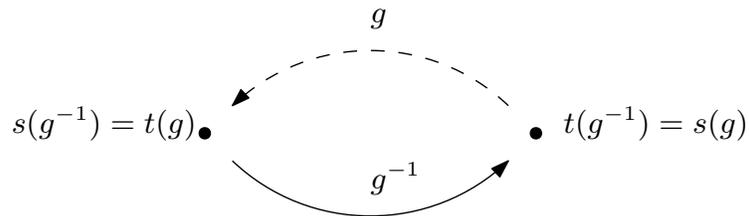
### 3. Un encaje llamado el **mapeo de identidades**

$$\begin{aligned} \varepsilon: B &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto 1_x, \end{aligned}$$

donde  $1_x \in G$  es la flecha identidad en  $x \in G$ .

### 4. Un **mapeo inversión**

$$\begin{aligned} i: G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto g^{-1} \end{aligned}$$



**Figura 2.3:** Esquema de la inversión en un grupoide.

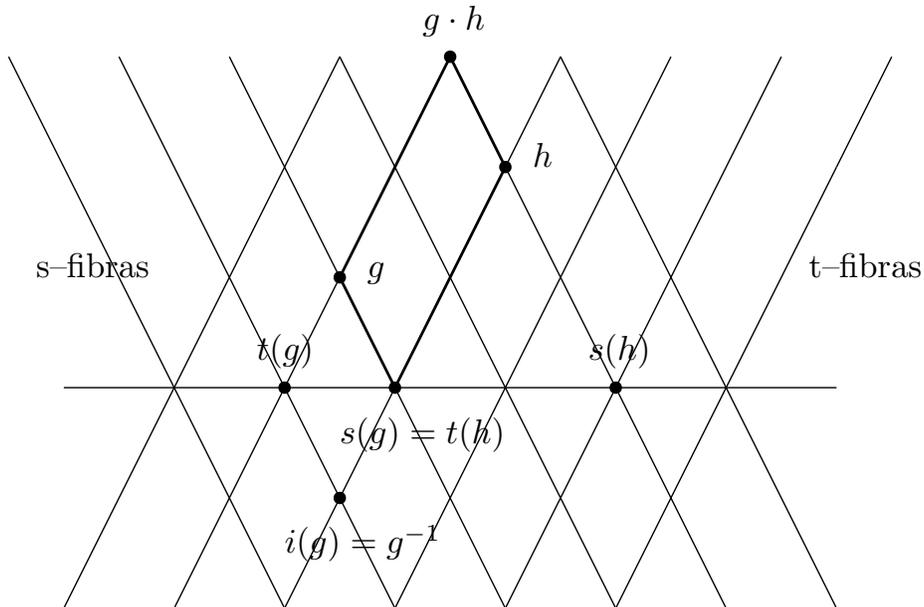
Además, se cumplen los siguientes axiomas

1.  $s(g \cdot h) = s(h); t(g \cdot h) = t(g)$
2.  $g \cdot (h \cdot k) = (g \cdot h) \cdot k$
3.  $\varepsilon$  es una sección de  $s$  y de  $t$ .

4.  $\varepsilon(t(g)) \cdot g = g = g \cdot \varepsilon(s(g))$
5.  $s(g^{-1}) = t(g); t(g^{-1}) = s(g)$
6.  $g \cdot g^{-1} = \varepsilon(t(g)); g^{-1} \cdot g = \varepsilon(s(g)).$

**Notación.** A partir de ahora vamos a denotar a un grupoide  $G$  sobre  $B$  como  $G \rightrightarrows B$ .

En las siguientes secciones va a tener importancia fijarnos en los conjuntos  $s^{-1}(x)$  y  $t^{-1}(x)$ , para  $x \in B$ , a los que nos referiremos en adelante como la  **$s$ -fibra en  $x$**  y la  **$t$ -fibra en  $x$**  respectivamente.



**Figura 2.4:** Representación de  $s$ -fibras y  $t$ -fibras.

Para poder estudiar su relación con las variedades de Poisson, nos interesa también añadir una estructura topológica y diferencial a los grupoides.

**Definición 2.9.** Un **grupoide topológico** es un grupoide  $G \rightrightarrows B$  en donde  $G$  y  $B$  son espacios topológicos. Además se pide que las aplicaciones de estructura  $s, t, m, \varepsilon, i$  sean todas continuas, y que  $s, t$  sean aplicaciones abiertas.

Y ahora podemos agregar estructura lisa al grupoide.

**Definición 2.10.** Un **grupoide de Lie** es un grupoide topológico  $G \rightrightarrows B$  en donde  $G$  y  $B$  son variedades lisas. Además se pide que las aplicaciones de estructura  $s, t, m, \varepsilon, i$  sean aplicaciones lisas, y que  $s, t$  sean sumersiones (suprayectivas).

*Observación.* Como  $s$  y  $t$  son sumersiones suprayectivas para toda  $g \in G$ , esto implica que  $s^{-1}(s(g))$  y  $t^{-1}(t(g))$  son subvariedades lisas de  $G$ ; ambas de dimension  $(\dim G - \dim B)$ . Como además  $m$  es lisa, esto implica que  $G^{(2)}$  es una subvariedad lisa de  $G \times G$ ; de dimensión  $(2 \dim G - \dim B)$ .

*Notación.* Vamos a identificar a  $B$  con su imagen en  $G$  usando  $\varepsilon$ ; de esta manera si  $p \in B$  entonces también  $p \in G$ .

## 2.4. Ejemplos de grupos de Lie

Los grupos de Lie son tan numerosos como los algebroides de Lie; a continuación se dan unos ejemplos.

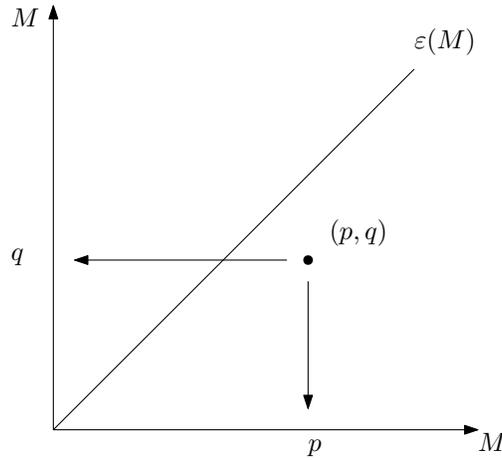
**Ejemplo 2.11.** Un grupo de Lie es un grupoide de Lie en el que  $B$  contiene solo un elemento.

**Ejemplo 2.12.** Sea  $B := M$  una variedad lisa. Sea  $G = M \times M$ , definimos

$$\begin{aligned} s(p, q) &= q \\ t(p, q) &= p \\ (p, q) \cdot (q, r) &= (p, r) \\ i(p, q) &= (q, p) \\ \varepsilon(p) &= (p, p). \end{aligned}$$

Lo anterior define un grupoide de Lie conocido como el **grupoide par**<sup>2</sup>.

<sup>2</sup>Se le da el adjetivo «par» porque a cada pareja de objetos de  $M$  se le asocia una única flecha.



**Figura 2.5:** Grupoide par.

**Ejemplo 2.13.** Sea  $M$  una variedad y  $K$  un grupo de Lie actuando por la izquierda en esta variedad. Sea  $G = K \times M$ , definimos

$$\begin{aligned}
 s(k, p) &= k^{-1} \cdot p \\
 t(k, p) &= p \\
 (k, p) \cdot (h, k^{-1} \cdot p) &= (kh, p) \\
 i(k, p) &= (k^{-1}, k^{-1} \cdot p) \\
 \varepsilon(p) &= (e, p)
 \end{aligned}$$

donde  $e$  es el elemento identidad en  $K$ . Lo anterior define un grupoide de Lie llamado el **grupoide acción**.

**Ejemplo 2.14.** Un caso particular (e importante) del ejemplo anterior es cuando  $M = \mathfrak{g}^*$ , es decir, cuando  $M$  es el espacio dual de un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , y  $K$  (un grupo de Lie que integra a  $\mathfrak{g}$ ) actúa en  $\mathfrak{g}^*$  a través de la acción coadjunta. El espacio total del grupoide acción en este caso es  $K \times \mathfrak{g}^*$ , y se puede identificar con  $T^*K$  mediante la aplicación

$$\begin{aligned}
 K \times \mathfrak{g}^* &\longrightarrow T^*K \\
 (k, \alpha) &\longmapsto \alpha \circ R_{k^{-1}},
 \end{aligned}$$

donde  $R_k$  es la aplicación tangente  $\mathfrak{g} = T_e K \longrightarrow T_k K$  al mapeo inducido por la multiplicación a la derecha por  $k$ .

## 2.5. El algebroide de Lie inducido por un grupoide de Lie

Recordemos brevemente como construir un álgebra de Lie a partir de un grupo de Lie. Sea  $G$  un grupo de Lie. Su álgebra de Lie, denotada por  $\text{Lie}(G)$  consiste de:

- Un espacio vectorial, que es justo el espacio tangente a  $G$  en el elemento identidad del grupo.
- Un corchete de Lie en  $\text{Lie}(G)$ , que surge de identificar a  $\text{Lie}(G)$  con  $\mathfrak{X}_{\text{inv}}(G)$ , donde  $\mathfrak{X}_{\text{inv}}(G)$  es el espacio de campos vectoriales invariantes a la derecha. Junto con el hecho de que el espacio  $\mathfrak{X}_{\text{inv}}(G)$  es cerrado bajo el corchete usual de campos vectoriales, es decir,  $[\mathfrak{X}_{\text{inv}}(G), \mathfrak{X}_{\text{inv}}(G)] \subset \mathfrak{X}_{\text{inv}}(G)$ .

En el caso general de grupoides de Lie, notamos dos diferencias con el caso de grupos de Lie:

1. Hay más de un elemento identidad; de hecho, hay una identidad para cada punto en  $M$ . Por lo que es natural trabajar ahora con un fibrado vectorial sobre  $B$ , en lugar de solamente un espacio vectorial.
2. La multiplicación a la derecha por elementos de  $G$  solamente está definida en las  $s$ -fibras, por lo que, para hablar de campos vectoriales invariantes a la derecha en  $G$ , debemos restringir nuestra atención a aquellos campos vectoriales tangentes a las  $s$ -fibras, es decir, debemos considerar secciones del subfibrado<sup>3</sup>  $T^s G := \ker(Ts) \subseteq TG$ .

Formalicemos las consideraciones anteriores para construir el algebroide de Lie de un grupoide de lie.

<sup>3</sup>En general si  $s: G \longrightarrow B$  es una aplicación lisa arbitraria  $\ker(Ts)$  no necesariamente es un fibrado vectorial. En este caso sí es un subfibrado, ya que  $s$  es sumersión

**Definición 2.15.** Sea  $G \rightrightarrows B$  un grupoide de Lie. Definimos el fibrado vectorial  $A \rightarrow B$ , cuya fibra en  $x \in B$  coincide con el espacio tangente en la identidad  $1_x$  de la  $s$ -fibra en  $X$ . Dicho de otro modo,  $A$  queda definido por  $A := T^s G|_B$ .

La idea es darle una estructura de algebroide de Lie a  $A$ , así que primero necesitamos dar un corchete de Lie en  $A$ .

**Definición 2.16.** Sean  $G \rightrightarrows B$  un grupoide de Lie y  $g \in G$ , tal que  $s(g) = y$  y  $t(g) = x$ . La **multiplicación a la derecha** por  $g$  esta dada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} R_g: s^{-1}(x) &\longrightarrow s^{-1}(y) \\ h &\longmapsto h \cdot g. \end{aligned}$$

Como  $s$  es una sumersión suprayectiva, se tiene que  $s^{-1}(x)$  es subvariedad lisa de  $G$ .

**Observación.** La multiplicación a la derecha no está definida globalmente, sino que se restringe a  $s$ -fibras. Y además la diferencial de  $R_g$  induce el mapeo

$$TR_g: T_h^s G \longrightarrow T_{h \cdot g}^s G.$$

Definimos ahora campos invariantes a la derecha de la siguiente manera.

**Definición 2.17.** Sea  $X$  un campo vectorial en un grupoide  $G \rightrightarrows B$ . Se dice que  $X$  es un **campo vectorial invariante a la derecha** si es tangente a las  $s$ -fibras y cumple que:

$$X_{h \cdot g} = TR_g(X_h),$$

para  $(h, g) \in G^{(2)}$ .

**Notación.** Podemos denotar al conjunto de campos vectoriales invariantes a la derecha en  $G$  como

$$\mathfrak{X}_{\text{inv}}^s(G) = \{X \in \Gamma(T^s G) : X_{h \cdot g} = TR_g(X_h), \forall (h, g) \in G^{(2)}\}.$$

**Proposición 2.18.** Si  $\alpha \in \Gamma(A)$ , entonces existe un isomorfismo entre  $\Gamma(A)$  y  $\mathfrak{X}_{\text{inv}}^s(G)$ .

*Demostración.* Sea  $\alpha \in \Gamma(A)$ , la expresión

$$\tilde{\alpha}_g = TR_g(\alpha_{t(g)})$$

define un campo vectorial invariante a la derecha.

Recíprocamente, cualquier campo vectorial  $X \in \mathfrak{X}_{\text{inv}}^s(G)$  surge de la siguiente manera: la invariancia de  $X$  muestra que  $X$  está determinado por los valores que toma en cada punto de  $B$ , es decir,  $X_g = TR_g(X_y)$  para toda  $g: x \rightarrow y$ . Se sigue que  $X = \tilde{\alpha}$ , donde  $\alpha := X|_M \in \Gamma(A)$ .

Por lo tanto, se tiene el isomorfismo

$$\begin{aligned} \Gamma(A) &\longrightarrow \mathfrak{X}_{\text{inv}}^s(G) \\ \alpha &\longrightarrow \tilde{\alpha}. \end{aligned}$$

□

**Observación.** La proposición anterior nos permite hacer una identificación entre los campos vectoriales invariantes por la izquierda en  $G$  y las secciones de  $A$ .

Teniendo en cuenta que el conjunto de campos vectoriales en  $G$ , denotado por  $\mathfrak{X}(G)$ , es una álgebra de Lie con respecto al corchete de Lie usual de campos vectoriales, tenemos que  $\mathfrak{X}_{\text{inv}}^s(G)$  es una subálgebra de Lie de  $\mathfrak{X}(G)$ , respecto a ese mismo corchete de Lie.

Gracias al isomorfismo anterior podemos definir, de manera única, un corchete de Lie en las secciones de  $A$ ,  $[\cdot, \cdot]_A: \Gamma(A) \times \Gamma(A) \rightarrow \Gamma(A)$ , por medio de la fórmula:

$$[\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}]_A := [\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}].$$

Para terminar de dar la estructura de algebroides de Lie al fibrado  $A \rightarrow B$  aún necesitamos el ancla.

**Definición 2.19.** La aplicación ancla de  $A$  es el morfismo de fibrados  $q: A \rightarrow B$  dado por la restricción de  $Tt: TG \rightarrow TB$  a  $A \subset TG$ .

Y en efecto, el ancla definida de esta manera cumple la regla de Leibniz, el último ingrediente que hace falta para tener la estructura de algebroides de Lie.

**Proposición 2.20.** *Dados  $\alpha, \beta \in \Gamma(A)$  y  $f \in \mathcal{C}^\infty(B)$ , entonces*

$$[\alpha, f\beta]_A = f[\alpha, \beta]_A + \mathcal{L}_{q(\alpha)}(f)\beta.$$

*Demostración.* A partir de la definición del corchete  $[\cdot, \cdot]_A$  dada arriba y de la regla de Leibniz para campos vectoriales, tenemos que

$$\begin{aligned} \widetilde{[\alpha, f\beta]}_A &= [\widetilde{\alpha}, \widetilde{f\beta}] \\ &= [\widetilde{\alpha}, (f \circ t)\widetilde{\beta}] \\ &= (f \circ t)[\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}] + \mathcal{L}_{\widetilde{\alpha}}(f \circ t)\widetilde{\beta}, \end{aligned}$$

donde usamos que  $\widetilde{f\beta} = (f \circ t)\widetilde{\beta}$ .

Ahora, dado un punto del grupoide  $g: x \rightarrow y$ , se cumple que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\widetilde{\alpha}}(f \circ t)(g) &= T_g(f \circ t)(\widetilde{\alpha}(g)) \\ &= T_{t(g)}f \circ T_{1_{t(g)}}t(\alpha(t(g))) \\ &= T_{t(g)}f \circ T_g t(\widetilde{\alpha}(g)) \\ &= \mathcal{L}_{q(\alpha)}(f)(t(g)). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\widetilde{[\alpha, f\beta]}_A = \widetilde{f[\alpha, \beta]}_A + \widetilde{\mathcal{L}_{q(\alpha)}(f)\beta}.$$

Recordando que  $\Gamma(A) \cong \mathfrak{X}_{\text{inv}}^s(G)$  podemos concluir la proposición.  $\square$

A partir de la discusión anterior podemos decir que:

**Definición 2.21.** El algebroide de Lie de un grupoide de Lie  $G$  es el fibrado vectorial  $A = T^s G|_M$ , junto con el ancla  $(Tt)|_A: TG \rightarrow TB$ , y el corchete de Lie  $[\cdot, \cdot]_A$  en  $\Gamma(A)$ .

**Ejemplo 2.22.** Un grupo de Lie es un grupoide de Lie sobre un punto (ver ejemplo 2.11), y su algebroide de Lie es el álgebra de Lie del grupo (ver ejemplo 2.3), vista como un algebroide de Lie sobre un punto.

**Ejemplo 2.23.** El algebroide de Lie del grupoide par  $M \times M \rightrightarrows M$  (ver ejemplo 2.12) es el algebroide par  $TM \rightarrow M$  (ver ejemplo 2.4).

**Ejemplo 2.24.** El algebroides de Lie de un grupoide de acción  $K \times M \rightrightarrows M$  (ver ejemplo 2.13) es el algebroides de acción  $\mathfrak{g} \times M \longrightarrow M$  (ver ejemplo 2.5).

**Ejemplo 2.25.** Un caso particular del último ejemplo es cuando  $M$  es el dual,  $\mathfrak{g}^*$ , del álgebra de Lie ( $\mathfrak{g}$ ) de un grupo de Lie ( $K$ ), y además  $K$  actúa en  $\mathfrak{g}^*$  por medio de la acción coadjunta<sup>4</sup>. Su algebroides de Lie es el algebroides de acción  $\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ .

## 2.6. Integrabilidad (o los teoremas de Lie)

Hemos visto que se puede construir un algebroides de Lie a partir de un grupoide de Lie arbitrario. Es natural preguntarse si un algebroides de Lie arbitrario puede «integrarse» a un grupoide de Lie. Es un resultado conocido (como el tercer teorema de Lie) que dada una álgebra de Lie de dimensión finita, existe un grupo de Lie cuya álgebra de Lie es isomorfa a la álgebra de Lie dada [MR91].

Esta propiedad no es válida para grupoides y algebroides de Lie. El problema de encontrar condiciones suficientes y necesarias para que un algebroides de Lie sea isomorfo, en el sentido de fibrados vectoriales, al algebroides de Lie de un grupoide de Lie permaneció abierto por treinta años aproximadamente [Mar06]. Este es un problema bastante complicado, y es discutido de manera amplia y satisfactoria por Crainic y Fernandes en [CL11]. En resumen, la respuesta es que, en general, un algebroides de Lie no se puede integrar a un grupoide de Lie. Más aún, una teoría satisfactoria debería permitir que el espacio total de un grupoide de Lie fuera una variedad no-Hausdorff. Sin embargo, hay un teorema importante al respecto, el cuál se cita a continuación (sin dar una demostración).

A continuación introducimos la terminología básica para entender el concepto de integrabilidad, si el lector desea profundizar en el tema se sugiere leer el trabajo de Crainic y Fernandes [CL11].

**Definición 2.26.** Se dice que un algebroides de Lie  $A \longrightarrow B$  es **integrable** si existe un grupoide de Lie  $G$  que induce a  $A$ . Diremos que  $G$  integra a  $A$ .

<sup>4</sup>Este ejemplo es de particular importancia en la teoría de espacios Hamiltonianos, con aplicaciones momento equivariantes.

**Definición 2.27.** Se dice que un grupoide de Lie es de **fuerza simplemente conexa** si las fibras de la aplicación fuente son simplemente conexas.

**TEOREMA 2.28** (Lie I). *Sea  $A \rightarrow B$  un algebroides de Lie. Supongamos que existe un grupoide de Lie  $G \rightrightarrows B$  que integra a  $A \rightarrow B$ . Entonces existe un único grupoide de Lie cuya fuerza es simplemente conexa (con espacio total  $G$  no necesariamente Hausdorff) que integra a  $A \rightarrow B$ .*

El grupoide de Lie en el Teorema 2.28 es conocido como el **grupoide de monodromía de  $A$** , y denotado comúnmente por  $\text{Mon}(A)$  [CF03].

**Observación.** En este caso las fibras de la aplicación blanco también son simplemente conexas.

Igual que en el caso de las álgebras de Lie, teniendo las condiciones apropiadas, podemos integrar morfismos de algebroides de Lie. Como nos dice el siguiente teorema, dicha integración va a ser un morfismo de grupoides de Lie.

**TEOREMA 2.29** (Lie II). *Sea  $F: A_1 \rightarrow A_2$  un morfismo de algebroides de Lie integrables. Sean  $G_1$  y  $G_2$  grupoides de Lie que integran a  $A_1$  y  $A_2$  respectivamente. Si  $G_2$  es de fuerza simplemente conexa, entonces existe un (único) morfismo de grupoides de Lie  $\mathcal{F}: G \rightarrow H$  que integra a  $F$ .*

Todos los ejemplos vistos en la Sección 2.2 son algebroides de Lie integrables. Y cada grupoide de Lie visto en la Sección 2.4 integra a uno de estos algebroides. Como se puede ver en los ejemplos 2.22, 2.23, 2.24, 2.25.

Ejemplos de algebroides de Lie no integrables pueden encontrarse en [CF03] o en [CL11], y no están incluidos en este trabajo ya que su estudio necesita de herramientas y resultados desarrollados por M. Crainic y R. L. Fernandes en las referencias ya mencionadas.

## 2.7. Grupoides de Lie simplécticos

En esta sección estudiaremos un tipo particular de grupoides de Lie, equipados con una 2-forma simpléctica  $\omega \in \Omega^2(G)$  compatible con la estructura del grupoide. Estos grupoides

fueron introducidos de manera independiente por Karasev [Kar87], Weinstein [Wei87], y Zakrzewski [Zak90].

**Definición 2.30.** Sean  $G \rightrightarrows B$  un grupoide de Lie y  $\omega$  una 2-forma simpléctica en  $G$ . Se dice que  $(G \rightrightarrows B, \omega)$  es un **grupoide simpléctico** si la gráfica de la multiplicación en  $G$ :  $\Lambda = \{(g, h, g \cdot h) \in G \times G \times G : (g, h) \in G^{(2)}\}$ , equipada con la 2-forma  $\omega \oplus \omega \oplus -\omega$  en  $G \times G \times G$ , es una subvariedad Lagrangiana de  $G \times G \times G$ .

**Observación.** El hecho de que  $\Lambda \subset G \times G \times G$  sea Lagrangiana significa que

$$\dim \Lambda = \frac{1}{2} \dim G \times G \times G = \frac{3}{2} \dim G.$$

**Proposición 2.31.** Sea  $(G \rightrightarrows B, \omega)$  un grupoide simpléctico. Entonces se cumple lo siguiente

1.  $\dim G = 2 \dim B$ .
2. Identificando a  $B$  con la imagen  $\varepsilon(B)$  del mapeo de identidades,  $B$  es una subvariedad Lagrangiana de  $G$ .
3.  $T_g s^{-1}(s(g)) = (T_g t^{-1}(t(g)))^\perp$ , Para toda  $g \in G$ .
4. La aplicación inversión  $i: G \rightarrow G$  es un anti-simplectomorfismo, es decir,

$$i^* \omega = -\omega.$$

5.  $\{s^* \varphi, t^* \psi\} = 0$ , para cualesquiera dos funciones  $\varphi, \psi \in C^\infty(B)$ .

**Demostración.** 1. El conjunto  $\Lambda$  tiene dimensión  $\dim \Lambda = 2 \dim G - \dim B$ . Como además  $\Lambda$  es una subvariedad Lagrangiana en  $G \times G \times G$ , entonces se debe cumplir que  $\dim \Lambda = \frac{3}{2} \dim G$ . Lo que implica que  $\dim B = \frac{1}{2} \dim G$ .

2. Sean  $X, Y \in T_x B$ , entonces  $(X, X, X)$  y  $(Y, Y, Y)$  son campos vectoriales tangentes a

$\Lambda$  en el punto  $(x, x, x) \in \Lambda$ . Como  $\Lambda$  es Lagrangiana, tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= (\omega \oplus \omega \oplus -\omega)((X, X, X), (Y, Y, Y)) \\ &= \omega(X, Y) + \omega(X, Y) - \omega(X, Y) \\ &= \omega(X, Y). \end{aligned}$$

Esto significa que  $B$  es una subvariedad isotrópica. Pero como  $\dim B = \frac{1}{2}G$ , entonces  $B$  es una subvariedad Lagrangiana.

3. Sean  $X \in T_g s^{-1}(s(g))$  y  $Y \in T_g t^{-1}(t(g))$ , donde  $g \in G$ .

Considerando la multiplicación a la izquierda por  $g^{-1} L_{g^{-1}}: t^{-1}(t(g)) \rightarrow t^{-1}(s(g))$ . Tenemos que  $(X, Ti(X), 0)$  y  $(Y, 0, TL_{g^{-1}}(Y))$  son dos campos vectoriales tangentes a  $\Lambda$  en el punto  $(g, g^{-1}, g \cdot g^{-1}) \in \Lambda$ .

Como ya vimos que  $\Lambda$  Lagrangiana, se cumple que  $0 = \omega(X, Y) + \omega(Ti(X), 0) - \omega(0, TL_{g^{-1}}(Y)) = \omega(X, Y)$ .

Como  $\dim T_g s^{-1}(s(g)) = \dim T_g t^{-1}(t(g)) = \frac{1}{2} \dim G$ , entonces son simplécticamente duales.

4. Sean  $X, Y \in T_g G$  arbitrarios. Entonces  $(X, Ti(X), Ts(X))$  y  $(Y, Ti(Y), Ts(Y))$  son tangentes a  $\Lambda$  en el punto  $(g, g^{-1}, s(g))$ , donde  $Ts(X), Ts(Y) \in T_{s(g)} B$ .

Como  $\Lambda$  es variedad Lagrangiana, tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= (\omega \oplus \omega \oplus -\omega)((X, Ti(X), Ts(X)), (Y, Ti(Y), Ts(Y))) \\ &= \omega(X, Y) + \omega(Ti(X), Ti(Y)) - \omega(Ts(X), Ts(Y)). \end{aligned}$$

Y como  $B$  también es Lagrangiana (ver inciso 2), se sigue que

$$\omega(Ts(X), Ts(Y)) = 0.$$

Por lo tanto

$$i^* \omega(X, Y) = -\omega(X, Y).$$

5. Sea  $g \in G$  Recordando que una 2–forma simpléctica define un corchete de Poisson, tenemos que

$$\{s^*\varphi, t^*\psi\}(g) = \omega(X_{s^*\varphi}, X_{t^*\psi})(g),$$

donde  $X_{s^*\varphi}(g) \in T_g s^{-1}(s(g))$  y  $X_{t^*\psi}(g) \in T_g t^{-1}(t(g))$ .

Pero el inciso 3 implica que

$$\omega(X_{s^*\varphi}, X_{t^*\psi})(g) = 0.$$

Por lo tanto,

$$\{s^*\varphi, t^*\psi\}(g) = 0$$

□

Concluiremos esta sección con un teorema que nos permite establecer una relación entre grupoides simplécticos y estructuras de Poisson, y es que la variedad base de un grupoide simpléctico está equipada, de forma canónica, con un corchete de Poisson.

**TEOREMA 2.32.** *Sea  $(G \rightrightarrows B, \omega)$  un grupoide simpléctico. Entonces existe una única estructura de Poisson  $\Pi$  en  $B$ , de tal manera que  $s$  es Poisson y  $t$  es anti–Poisson.*

*Demostración.* Sean  $\varphi, \psi \in C^\infty(B)$ . Usando la identidad de Jacobi (en el corchete de Poisson inducido por la 2–forma simpléctica), se sigue del inciso 5 de la proposición anterior que

$$\begin{aligned} \{\{s^*\varphi, s^*\psi\}, t^*\xi\} &= -\{\{t^*\xi, s^*\varphi\}, s^*\psi\} - \{\{s^*\psi, t^*\xi\}, s^*\varphi\} \\ &= \{\{s^*\varphi, t^*\xi\}, s^*\psi\} - \{\{s^*\psi, t^*\xi\}, s^*\varphi\} \\ &= 0, \end{aligned}$$

para toda  $\xi \in C^\infty(B)$ .

Traduciendo el resultado anterior en términos de la forma simpléctica  $\omega$ :

$$\omega(X_{\{s^*\varphi, s^*\psi\}}, X_{t^*\xi})(g) = 0,$$

para cualquier  $g \in G$ .

Usando la antisimetría de la forma simpléctica y la definición 1.13 tenemos que

$$\omega(X_{t^*\xi}, X_{\{s^*\varphi, s^*\psi\}})(g) = d(t^*\xi)(X_{\{s^*\varphi, s^*\psi\}})(g) = 0.$$

Esto nos dice que  $X_{\{s^*\varphi, s^*\psi\}}(g) \in \ker(d(t^*\xi)(g))$ , para toda  $\xi \in C^\infty(B)$ . Pero  $d(t^*\xi) = d(\xi \circ t) = d\xi \circ dt$ , para toda  $\xi \in C^\infty(B)$ , por la regla de la cadena; entonces

$$\begin{aligned} \ker d(t^*\xi)(g) &= \ker(d\xi \circ T_g t(g)) \\ &= \{v \in T_g t^{-1}(t(g)) : d\xi(T_g t(v)) = 0\}, \end{aligned}$$

para toda  $\xi \in C^\infty(B)$ ; de esto se sigue que

$$X_{\{s^*\varphi, s^*\psi\}}(g) \in T_g t^{-1}(t(g)).$$

Pero el inciso 3 de la proposición anterior nos dice que  $X_{\{s^*\varphi, s^*\psi\}} \in (T_g s^{-1}(s(g)))^\perp$ . Tomando  $u \in T_g s^{-1}(s(g))$  arbitraria se debe cumplir que

$$\omega(X_{\{s^*\varphi, s^*\psi\}}, X_u) = d\{s^*\varphi, s^*\psi\}(X_u) = 0,$$

por lo tanto  $\{s^*\varphi, s^*\psi\}$  es constante en  $s$ -fibras; esto significa que existe una única función  $\Psi \in C^\infty(B)$  tal que  $\{s^*\varphi, s^*\psi\} = s^*\Psi$ . Esta función define una única estructura de Poisson en  $B$ , que podemos denotar por  $\{\varphi, \psi\}_B := \Psi$ . Se sigue inmediatamente (de como queda definida esta estructura de Poisson) que  $s$  es Poisson. Además, usando el hecho de que  $t = s \circ i$ , vemos que

$$\begin{aligned} \{t^*\varphi, t^*\psi\} &= \{(s \circ i)^*\varphi, (s \circ i)^*\psi\} \\ &= \{i^*(s^*\varphi), i^*(s^*\psi)\} \\ &= -i^*\{s^*\varphi, s^*\psi\} \\ &= -i^*s^*\{\varphi, \psi\}_B \\ &= -(s \circ i)^*\{\varphi, \psi\}_B \\ &= -t^*\{\varphi, \psi\}_B, \end{aligned}$$

es decir, que  $t$  es anti-Poisson. □

El teorema anterior nos dice que una propiedad importante de los grupoides simplécticos es que su espacio de objetos es una variedad de Poisson (de manera natural).

Debido a que no todo algebroides de Lie puede integrarse a un grupoide de Lie, el recíproco del Teorema [2.32](#) no es cierto. Al final del siguiente capítulo veremos que necesitamos suponer que la estructura de Poisson viene de un grupoide de Lie integrable.

## Capítulo 3

# Estructura de Algebroides de Lie en $T^*M$

En este capítulo se reúne toda la teoría y ejemplos vistos anteriormente, estableciendo algunas de las relaciones fundamentales que hay entre la teoría de grupoides y algebroides de Lie y la geometría de Poisson. Empezaremos por demostrar el resultado principal que motivó la realización de esta tesis:

**TEOREMA 3.1.** *Sea  $(M, \Pi)$  una estructura de Poisson. El haz cotangente  $T^*M$  tiene una estructura de algebroides de Lie.*

*Demostración.* Para darle estructura de algebroides de Lie  $T^*M$ , lo primero que hay que hacer es considerar el fibrado vectorial  $(T^*M, \Pi^\sharp, M)$ , donde  $\Pi^\sharp: T^*M \rightarrow TM$  es el mapeo ancla, que está definido por

$$\langle \Pi^\sharp(\alpha), \beta \rangle = \Pi(\alpha, \beta),$$

para toda  $\alpha, \beta \in \Gamma(T^*M) = \Omega^1(M)$ . O lo que es lo mismo

$$\beta(\Pi^\sharp(\alpha)) = \Pi(\alpha, \beta),$$

este fibrado vectorial será el ancla del algebroides de Lie.

Luego consideramos el siguiente corchete  $[\cdot, \cdot]_K: \Gamma(T^*M) \times \Gamma(T^*M) \rightarrow \Gamma(T^*M)$  dado por

$$[\alpha, \beta]_K = \mathcal{L}_{\Pi^\#(\alpha)}\beta - \mathcal{L}_{\Pi^\#(\beta)}\alpha - d(\Pi(\alpha, \beta)),$$

este mapeo es conocido con el nombre de **corchete de Koszul**; y vamos a demostrar que cumple con todas las propiedades que debe cumplir el corchete de un algebroide de Lie.

*Observación.* En 1-formas  $\iota_X\alpha = \alpha(X) = \langle \alpha, X \rangle$ .

*Observación.* En el caso de Poisson:  $\iota_{\Pi^\#(\alpha)}\beta = \beta(\Pi^\#(\alpha)) = \langle \beta, \Pi^\#(\alpha) \rangle$ . Esto tiene sentido, pues  $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$  y  $\Pi^\#(\alpha) \in \mathfrak{X}(M) = \Gamma(TM)$ .

Se puede reescribir de manera conveniente la expresión del corchete de Koszul, usando la fórmula mágica de Cartan<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} [\alpha, \beta]_K &= \mathcal{L}_{\Pi^\#(\alpha)}\beta - \mathcal{L}_{\Pi^\#(\beta)}\alpha - d(\Pi(\alpha, \beta)) \\ &= \iota_{\Pi^\#(\alpha)}d\beta + d(\iota_{\Pi^\#(\alpha)}\beta) - \iota_{\Pi^\#(\beta)}d\alpha - d(\iota_{\Pi^\#(\beta)}\alpha) - d(\Pi(\alpha, \beta)) \\ &= \iota_{\Pi^\#(\alpha)}d\beta + d(\Pi(\alpha, \beta)) - \iota_{\Pi^\#(\beta)}d\alpha - d(\Pi(\beta, \alpha)) - d(\Pi(\alpha, \beta)) \\ &= d(\Pi(\alpha, \beta)) + \iota_{\Pi^\#(\alpha)}d\beta - \iota_{\Pi^\#(\beta)}d\alpha \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene que

$$[\alpha, \beta]_K = d(\Pi(\alpha, \beta)) + \iota_{\Pi^\#(\alpha)}d\beta - \iota_{\Pi^\#(\beta)}d\alpha, \quad (3.1)$$

la cual es una versión más útil del corchete de Koszul, sobre todo para realizar los cálculos, como se podrá apreciar en las páginas siguientes.

Para ver que en efecto así se tiene una estructura de algebroide de Lie en  $T^*M$  hay que probar lo siguiente:

1.  $[\cdot, \cdot]_K$  es  $\mathbb{R}$ -lineal.
2.  $[\cdot, \cdot]_K$  es antisimétrico.
3.  $[\cdot, \cdot]_K$  cumple la propiedad:  $[df, dg]_K = d\{f, g\}$ .

<sup>1</sup>Recordemos que la fórmula mágica de Cartan está dada por:  $\mathcal{L}_X\eta = \iota_X d\eta + d(\iota_X\eta)$ .

4.  $[\cdot, \cdot]_K$  satisface la identidad de Leibniz.
5.  $[\cdot, \cdot]_K$  satisface la identidad de Jacobi.

Es sencillo probar el inciso 1, que se refiere a la linealidad del corchete de Koszul. Se utiliza el hecho de que el operador derivada exterior es lineal, que  $\Pi$  es lineal, que la contracción de 1-formas es lineal y que  $\Pi^\#$  es lineal.

Ahora probemos el inciso 2, es decir, que el corchete de Koszul es antisimétrico:

$$\begin{aligned}
 -[\beta, \alpha]_K &= -(\mathcal{L}_{\Pi^\#(\beta)}(\alpha) - \mathcal{L}_{\Pi^\#(\alpha)}(\beta) - d(\Pi(\beta, \alpha))) \\
 &= \mathcal{L}_{\Pi^\#(\alpha)}(\beta) - \mathcal{L}_{\Pi^\#(\beta)}(\alpha) - d(\Pi(\alpha, \beta)) \\
 &= [\alpha, \beta]_K
 \end{aligned}$$

Veamos que se cumple la propiedad 3:

$$\begin{aligned}
 [df, dg]_K &= \mathcal{L}_{\Pi^\#(df)}dg - \mathcal{L}_{\Pi^\#(dg)}df - d(\Pi(df, dg)) \\
 &= d(\Pi(df, dg)) + \iota_{\Pi^\#(df)}d(dg) - \iota_{\Pi^\#(dg)}d(df) \\
 &= d(\Pi(df, dg)) \\
 &= d(\{f, g\}),
 \end{aligned}$$

donde en el último paso usamos el hecho de que el bivector de Poisson  $\Pi$  está relacionado al corchete de Poisson por

$$\{f, g\} = \Pi(df, dg), \quad \forall f, g \in C^\infty(M).$$

Ahora verificamos que  $[\alpha, \beta]_K$  satisface la regla de Leibniz, mencionada en 4:

$$\begin{aligned}
 [\alpha, f\beta]_K &= d(\Pi(\alpha, f\beta)) + \iota_{\Pi^\#(\alpha)}d(f\beta) - \iota_{\Pi^\#(f\beta)}d\alpha \\
 &= d(f\Pi(\alpha, \beta)) + \iota_{\Pi^\#(\alpha)}d(f\beta) - f\iota_{\Pi^\#(\beta)}d\alpha \\
 &= fd(\Pi(\alpha, \beta)) + \Pi(\alpha, \beta)df + \iota_{\Pi^\#(\alpha)}(df \wedge \beta + fd\beta) - f\iota_{\Pi^\#(\beta)}d\alpha \\
 &= f(d(\Pi(\alpha, \beta)) + \iota_{\Pi^\#(\alpha)}d\beta - \iota_{\Pi^\#(\beta)}d\alpha) + \Pi(\alpha, \beta)df + \iota_{\Pi^\#(\alpha)}(df \wedge \beta) \\
 &= f[\alpha, \beta]_K + \Pi(\alpha, \beta)df + \iota_{\Pi^\#(\alpha)}(df \wedge \beta)
 \end{aligned}$$

**Afirmación 3.2.**  $\Pi(\alpha, \beta)df + \iota_{\Pi^\#(\alpha)}(df \wedge \beta) = ((\Pi^\#(\alpha))(f))\beta$

*Demostración.* Tenemos que

$$\begin{aligned}\iota_{\Pi^\#(\alpha)}(df \wedge \beta) &= (\iota_{\Pi^\#(\alpha)}df) \wedge \beta + (-1)^1 df \wedge (\iota_{\Pi^\#(\alpha)}\beta) \\ &= (\iota_{\Pi^\#(\alpha)}df)\beta - (\iota_{\Pi^\#(\alpha)}\beta)df\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\Pi(\alpha, \beta)df + \iota_{\Pi^\#(\alpha)}(df \wedge \beta) &= (\iota_{\Pi^\#(\alpha)}\beta)df + (\iota_{\Pi^\#(\alpha)}df)\beta - (\iota_{\Pi^\#(\alpha)}\beta)df \\ &= (\iota_{\Pi^\#(\alpha)}df)\beta\end{aligned}$$

Pero recordemos que

$$\mathcal{L}_X f = \iota_X df$$

Por lo que

$$\Pi(\alpha, \beta)df + \iota_{\Pi^\#(\alpha)}(df \wedge \beta) = \mathcal{L}_{\Pi^\#(\alpha)}(f)\beta = \Pi^\#(\alpha)(f)\beta$$

□

Por lo tanto la proposición anterior nos da la regla de Leibniz para el corchete de Koszul:

$$[\alpha, f\beta]_K = f[\alpha, \beta]_K + \Pi^\#(\alpha)(f)\beta.$$

Por último, veamos que el corchete de Koszul satisface 5, la identidad de Jacobi. Primero consideremos el caso en que  $\alpha, \beta, \gamma$  son 1-formas exactas, es decir, que  $\alpha = df$ ,  $\beta = dg$ , y  $\gamma = dh$ . En el siguiente cálculo se omite el subíndice en el corchete de Koszul, es decir, se cambia la notación  $[\cdot, \cdot]_K$  por  $[\cdot, \cdot]$ , que es más cómoda visualmente. De esta manera, para 1-formas exactas tenemos que:

$$\begin{aligned}[[df, dg], dh] + [[dh, df], dg] + [[dg, dh], df] &= [d\{f, g\}, dh] + [d\{h, f\}, dg] + [d\{g, h\}, df] \\ &= d\{\{f, g\}, h\} + d\{\{h, f\}, g\} + d\{\{g, h\}, f\} \\ &= d(\{\{f, g\}, h\} + \{\{h, f\}, g\} + \{\{g, h\}, f\}) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Como toda  $\alpha \in \Gamma(T^*M)$  se puede escribir en una base coordenada como

$$\alpha = \sum u_i df_i,$$

podemos usar la identidad de Leibniz para extender la identidad de Jacobi a 1–formas arbitrarias.

□

En conclusión, el corchete de Koszul en 1–formas hace de  $T^*M$  un algebroide de Lie cuya ancla es  $\Pi^\sharp$ . A éste se le conoce como el **algebroide cotangente** de una variedad de Poisson.

Por último, notemos que  $\Pi^\sharp$  define un anti–homomorfismo de álgebras de Lie de  $\Gamma(T^*M)$  a  $\Gamma(TM)$ . Esto se logra viendo que  $\Pi^\sharp$  es un anti–homomorfismo en 1–formas exactas, usando la identidad de Leibniz.

**Ejemplo 3.3.** La estructura simpléctica en una variedad simpléctica  $(M, \omega)$  induce un isomorfismo

$$\Pi^\sharp = (\omega^\flat)^{-1}: T^*M \longrightarrow TM,$$

donde  $\omega^\flat(v) = \omega(v, \cdot)$ . Efectuando el pull–back del corchete usual en  $\mathfrak{X}(M)$  por  $\Pi^\sharp$ , definimos un corchete  $\{, \}$  en las 1–formas diferenciales  $\Omega^1(M) = \Gamma(T^*M)$ . De esta manera  $T^*M$  es un algebroide de Lie, con ancla  $\rho = -\Pi^\sharp$ , y se le llama el *algebroide de Lie de la variedad simpléctica*.

Además, el corchete en 1–formas se relaciona con el corchete de Poisson en funciones, esta relación se queda clara si recordamos que el corchete de campos vectoriales Hamiltonianos  $X_f = \Pi^\sharp(df)$  y  $X_g = \Pi^\sharp(dg)$  satisface

$$[X_f, X_g] = -X_{\{f, g\}}.$$

Podemos «jalar» el corchete al espacio  $\Gamma(T^*M)$  por medio de  $-\Pi^\sharp$ , y denotaremos por

$[\cdot, \cdot]$  al corchete en 1-formas. A partir del siguiente cálculo

$$\begin{aligned} -\Pi^\# [df, dg] &= [-\Pi^\#(df), -\Pi^\#(dg)] \\ &= [X_f, X_g] \\ &= -X_{\{f, g\}} \\ &= -\Pi^\#(d\{f, g\}), \end{aligned}$$

concluimos que, para 1-formas exactas,

$$[df, dg] = d\{f, g\}.$$

### 3.1. Algebroides cotangente y grupoides simplécticos

En el Teorema 2.32 vimos que la subvariedad de identidades  $B$  tiene una única estructura de Poisson  $\Pi$ , para la que  $s$  es una aplicación de Poisson. Y en el Teorema 3.1 demostramos que el fibrado cotangente  $T^*B \rightarrow B$  de la variedad de Poisson  $(B, \Pi)$  tiene una estructura de algebroides de Lie, con el corchete de 1-formas dado por el corchete de Koszul.

**TEOREMA 3.4.** *Sea  $(G \rightrightarrows B, \omega)$  un grupoide simpléctico. Entonces el algebroides de Lie inducido por  $G$  es canónicamente isomorfo al algebroides de Lie de  $T^*B$ .*

*Demostración.* Sea  $(G \rightrightarrows B, \omega)$  un grupoide simpléctico. Como hemos visto anteriormente en la sección 2.5, su algebroides de Lie es el fibrado vectorial  $A \rightarrow B$  cuya fibra es  $\ker(Ts)$ , sobre cada punto  $x \in B$ . Definamos una aplicación lineal de la siguiente manera:

$$\omega_x^b: \ker(Ts) \rightarrow T_x^*B$$

tal que para todo  $X \in \ker(Ts)$  y  $Y \in T_xB$  se cumple que:

$$\langle \omega_x^b(X), Y \rangle = \omega_x(Y, X).$$

Como  $T_xB$  es una variedad Lagrangiana y  $\ker(Ts)$  es complemento ortogonal a  $T_xB$  en el espacio vectorial simpléctico  $(T_xG, \omega(g))$ , la aplicación  $\omega_x^b$  es un isomorfismo entre  $\ker(Ts)$  y  $T_xB$ .

Usando este isomorfismo para cada  $x \in B$ , obtenemos un isomorfismo de fibrados vectoriales, que va del algebroides de Lie  $A \rightarrow B$  en el fibrado cotangente  $T^*B \rightarrow B$ :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\omega^b} & T^*B \\ p \downarrow & & \downarrow \bar{p} \\ B & \xrightarrow{id} & B \end{array}$$

Esta estructura es la misma que se obtiene como imagen directa de la estructura de algebroides de Lie de por el isomorfismo definido arriba en.

Por lo tanto el algebroides de Lie de un grupoide simpléctico se puede identificar con el algebroides de Lie  $T^*B \rightarrow B$  del fibrado cotangente de la variedad de Poisson  $(B, \Pi)$ .

□

El algebroides de Lie  $T^*M$  no siempre es integrable a un grupoide de Lie. Sin embargo, cuando es integrable, al menos uno de sus grupoides de Lie asociados está equipado con una estructura simpléctica «natural» compatible con la estructura de grupoide. El siguiente teorema nos dice que cuando el algebroides de Lie de una variedad de Poisson puede ser integrado a un grupoide de Lie, este grupoide deberá ser un grupoide simpléctico.

**TEOREMA 3.5.** *Sea  $M$  una variedad de Poisson. Supongamos que el algebroides de Lie  $T^*M \rightarrow M$  con aplicación ancla  $\Pi^\#: T^*M \rightarrow TM$  se integra a un grupoide de Lie cuya fuente es simplemente conexa  $G \rightrightarrows M$ . Entonces existe a lo más una forma simpléctica  $\omega$  en  $G$ , tal que  $(G \rightrightarrows M, \omega)$  es un grupoide simpléctico y tal que la aplicación fuente es de Poisson.*

Una demostración de este resultado se puede encontrar en el trabajo de Crainic y Fernandes [CL11]; sin embargo, en los siguientes ejemplos se puede apreciar como se aplica el teorema.

**Ejemplo 3.6.** Supongamos que  $M$  tiene la estructura de Poisson cero (la aplicación ancla  $T^*M \rightarrow TM$  es la aplicación cero). El algebroides de Lie  $T^*M \rightarrow M$  puede ser integrado a un grupoide de Lie  $T^*M \rightrightarrows M$  donde las aplicaciones source y target son iguales a la proyección natural, y donde la multiplicación está dada por la adición en las fibras. La forma

simpléctica en  $T^*M$  es la forma simpléctica canónica en el haz cotangente de una variedad (esto es,  $\omega = d\theta$ , donde  $\theta$  es la 1-forma en  $T^*M$  caracterizada por  $\alpha^*\theta = \alpha$  para toda 1-forma  $\alpha$  en  $M$ ).

**Ejemplo 3.7.** Supongamos que la estructura de Poisson en  $M$  viene de una forma simpléctica  $\omega$ . Entonces la forma simpléctica induce un isomorfismo de algebroides de Lie entre  $T^*M \rightarrow M$  y  $TM \rightarrow M$ . Este algebroides de Lie integra al grupoide par  $G \times G$ . Se convierte entonces en un grupoide simpléctico con forma simpléctica  $\omega \oplus -\omega$ .

**Ejemplo 3.8.** Tomemos  $M = \mathfrak{g}^*$ , el dual de un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de un grupo de Lie  $K$ . El algebroides de Lie  $T^*\mathfrak{g}^*$  integra al grupoide de acción  $K \times \mathfrak{g}^* \rightrightarrows \mathfrak{g}^*$  para la acción co-adjunta. Se convierte en un grupoide simpléctico con la forma simpléctica usual en el haz cotangente  $T^*K \rightarrow K$ .

## 3.2. Algebroides cotangente asociado a una BLF

A continuación vamos a desarrollar un ejemplo específico del Teorema 3.1 para la estructura de Poisson alrededor de un círculo singular de una fibración de Lefschetz quebrada, o BLF por sus iniciales en inglés. Pero antes se mencionarán los conceptos fundamentales para entender el lenguaje de las fibraciones quebradas de Lefschetz; empezando por definir el concepto de fibración de Lefschetz. Para un tratamiento más profundo del tema se puede consultar la referencia [GNSSV15].

**Definición 3.9.** Sea  $X$  una 4-variedad lisa simplemente conexa. Una **fibración de Lefschetz** en  $X$  es una aplicación lisa  $f: X \rightarrow S^2$  cuya fibra genérica es una superficie. La aplicación  $f$  puede tener puntos críticos aislados, conocidos como **singularidades de Lefschetz**. Éstos son modelados en coordenadas locales complejas por  $f: (z_1, z_2) \rightarrow z_1^2 + z_2^2$ .

**Observación.** Las fibras que vienen de puntos regulares son superficies lisas, mientras que las fibras que vienen de singularidades de Lefschetz son superficies que tienen una singularidad nodal aislada.

Auroux, Donaldson y Katzarkov consideraron otro tipo de singularidades en las fibraciones de Lefschetz; lo que dio origen al concepto de fibración quebrada de Lefschetz, que fueron introducidas por Perutz.

**Definición 3.10.** Sea  $X$  una 4-variedad lisa cerrada. Una **fibración de Lefschetz quebrada**, o BLF, es una aplicación lisa  $f: X \rightarrow S^2$  que sea una sumersión fuera del conjunto de singularidades. Más aún, las singularidades permitidas son del siguiente tipo:

1. Las singularidades de Lefschetz: que tienen un número finito de puntos,

$$C_L = \{p_1, \dots, p_k\} \subset X,$$

y que están modeladas por las cartas complejas

$$\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}, \quad (z_1, z_2) \mapsto z_1^2 + z_2^2.$$

2. Las singularidades quebradas: que están contenidas en una subvariedad encajada lisa 1-dimensional  $\Gamma \subset (X - C_L)$ , y que están modeladas por las cartas coordenadas reales

$$\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (t, x_1, x_2, x_3) \mapsto (t, -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2).$$

**Notación.** Se denota por  $C = C_L \cup \Gamma$  al conjunto de puntos singulares de  $f$ .

**Observación.** Como  $X$  es cerrada,  $\Gamma$  es una subvariedad homeomorfa a una colección ajena de círculos. Es por esto que a  $\Gamma$  se le llama el conjunto de círculos singulares de la BLF.

Para ejemplificar el cálculo del algebroides cotangente asociado a una BLF, consideremos el caso en el que se tenga solamente un círculo singular  $\Gamma \subset X$ . Como se describe en [GNSSV15], se puede dar una expresión para el bivector de Poisson  $\Pi$  no solamente en una vecindad de un punto de  $\Gamma$ , sino en todo el fibrado normal del círculo singular. Veamos el caso en que el fibrado normal del círculo singular es orientable, es decir, el caso en que  $S^1 \times B^3$ . Se tiene que  $F = (F_1, F_2): S^1 \times B^3 \rightarrow B^2$  está dada por

$$\begin{aligned} F_1(\theta, x_1, x_2, x_3) &= \theta, \\ F_2(\theta, x_1, x_2, x_3) &= -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2. \end{aligned}$$

Se sabe que la expresión del bivector de Poisson en el haz normal (orientable) de un círculo singular está dada por:

$$\Pi = k(\theta, x_1, x_2, x_3) \left( x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \wedge \frac{\partial}{\partial x_3} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \quad (3.2)$$

donde  $k(\theta, x_1, x_2, x_3)$  es una función que no se anula. En lo subsecuente denotaremos esta función como  $k := k(\theta, x_1, x_2, x_3)$  comodidad al escribir las expresiones.

A continuación vamos a escribir explícitamente al algebroide cotangente de esta estructura de Poisson calculando el ancla  $\Pi^\#$  y el corchete de Koszul. Por conveniencia primero escribamos el bivector de Poisson (3.2) en forma matricial:

$$\Pi = k \begin{pmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} & \Pi_{23} \\ \Pi_{31} & \Pi_{32} & \Pi_{33} \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & x_1 \\ -x_2 & -x_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

En coordenadas  $(\theta, x_1, x_2, x_3)$ , consideramos una 1-forma  $\alpha = a_\theta d\theta + a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3$ , entonces, de acuerdo a la expresión (1.3), calculamos el ancla  $\Pi^\#$ :

$$\begin{aligned} \Pi^\#(\alpha) &= \Pi^\# \left( \sum_{i=1}^3 a_i dx_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^3 \left( \sum_{j=1}^3 \Pi_{ij} a_i \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\ &= \sum_{i=1}^3 \left( \Pi_{i1} a_i \frac{\partial}{\partial x_1} + \Pi_{i2} a_i \frac{\partial}{\partial x_2} + \Pi_{i3} a_i \frac{\partial}{\partial x_3} \right). \end{aligned}$$

Expandiendo la suma sobre  $i$  y sustituyendo los coeficientes  $\Pi_{ij}$  de la matriz (3.3), obtenemos el ancla del algebroide cotangente:

$$\Pi^\#(\alpha) = k \left[ (x_3 a_2 - x_2 a_3) \frac{\partial}{\partial x_1} + (-x_3 a_1 - x_1 a_3) \frac{\partial}{\partial x_2} + (x_2 a_1 + x_1 a_2) \frac{\partial}{\partial x_3} \right].$$

Para el corchete de Koszul usaremos la expresión (3.1). Es decir, hay que calcular los términos:  $\iota_{\Pi^\#(\alpha)} d\beta$ ,  $\iota_{\Pi^\#(\beta)} d\alpha$  y  $d(\Pi(\alpha, \beta))$ . Tenemos que

$$\begin{aligned}
\iota_{\Pi^\#(\alpha)}d\beta = &k \left\{ \left[ - \left( \frac{\partial b_2}{\partial x_1} - \frac{\partial b_1}{\partial x_2} \right) (-x_3a_1 - x_1a_3) - \left( \frac{\partial b_2}{\partial x_1} - \frac{\partial b_1}{\partial x_2} \right) (x_2a_1 + x_1a_2) \right] dx_1 \right. \\
&+ \left[ \left( \frac{\partial b_2}{\partial x_1} - \frac{\partial b_1}{\partial x_2} \right) (x_3a_2 - x_2a_3) - \left( \frac{\partial b_3}{\partial x_2} - \frac{\partial b_2}{\partial x_3} \right) (x_2a_1 + x_1a_2) \right] dx_2 \\
&+ \left. \left[ - \left( \frac{\partial b_3}{\partial x_1} - \frac{\partial b_1}{\partial x_3} \right) (x_3a_2 - x_2a_3) + \left( \frac{\partial b_3}{\partial x_2} - \frac{\partial b_2}{\partial x_3} \right) (-x_3a_1 + x_1a_3) \right] dx_3 \right\}, \tag{3.4}
\end{aligned}$$

análogamente

$$\begin{aligned}
\iota_{\Pi^\#(\beta)}d\alpha = &k \left\{ \left[ - \left( \frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \right) (-x_3b_1 - x_1b_3) - \left( \frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \right) (x_2b_1 + x_1b_2) \right] dx_1 \right. \\
&+ \left[ \left( \frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \right) (x_3b_2 - x_2b_3) - \left( \frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \right) (x_2b_1 + x_1b_2) \right] dx_2 \\
&+ \left. \left[ - \left( \frac{\partial a_3}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_3} \right) (x_3b_2 - x_2b_3) + \left( \frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \right) (-x_3b_1 + x_1b_3) \right] dx_3 \right\}. \tag{3.5}
\end{aligned}$$

Para calcular  $d(\Pi(\alpha, \beta))$  primero hay que calcular  $\Pi(\alpha, \beta)$ :

$$\Pi(\alpha, \beta) = k [(a_2b_3 - a_3b_2)x_1 + (a_1b_3 - a_3b_1)x_2 + (a_2b_1 - a_1b_2)x_3].$$

Se sigue entonces que

$$\begin{aligned}
d(\Pi(\alpha, \beta)) = & k \left\{ \left[ (a_2b_3 - a_3b_2) + (b_3x_1 + b_1x_3) \frac{\partial a_2}{\partial x_1} + (a_2x_1 + a_1x_2) \frac{\partial b_3}{\partial x_1} \right. \right. \\
& + (b_3x_2 - b_2x_3) \frac{\partial a_1}{\partial x_1} - (b_2x_1 + b_1x_2) \frac{\partial a_3}{\partial x_1} + (a_2x_3 - a_3x_2) \frac{\partial b_1}{\partial x_1} \\
& \left. \left. - (a_1x_3 + a_3x_1) \frac{\partial b_2}{\partial x_1} \right] dx_1 \right. \\
& + \left[ (a_1b_3 - a_3b_1) + (b_1x_3 + b_3x_1) \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + (a_2x_1 + a_1x_2) \frac{\partial b_3}{\partial x_2} \right. \\
& + (b_3x_2 - b_2x_3) \frac{\partial a_1}{\partial x_2} - (b_2x_1 + b_1x_2) \frac{\partial a_3}{\partial x_2} + (a_2x_3 - a_3x_2) \frac{\partial b_1}{\partial x_2} \\
& \left. \left. - (a_1x_3 - a_3x_1) \frac{\partial b_2}{\partial x_2} \right] dx_2 \right. \\
& + \left[ (a_2b_1 - a_1b_2) + (b_1x_3 + b_3x_1) \frac{\partial a_2}{\partial x_3} + (a_2x_1 + a_1x_2) \frac{\partial b_3}{\partial x_3} \right. \\
& + (b_3x_2 - b_2x_3) \frac{\partial a_1}{\partial x_3} - (b_2x_1 + b_1x_2) \frac{\partial a_3}{\partial x_3} + (a_2x_3 - a_3x_2) \frac{\partial b_1}{\partial x_3} \\
& \left. \left. - (a_1x_3 + a_3x_1) \frac{\partial b_2}{\partial x_3} \right] dx_3 \right\}. \tag{3.6}
\end{aligned}$$

La suma de las expresiones (3.4), (3.5) y (3.6) nos da el corchete de Koszul del algebroide cotangente.

Para finalizar este ejemplo vamos a mostrar una aplicación sencilla del teorema 3.5 en este ejemplo que involucra una BLF. Empecemos notando que el bivector (3.2) se puede interpretar como un múltiplo de una estructura de Poisson lineal en  $\mathbb{R}^3$  (recordemos que esta estructura de Poisson esta dada, en general, por la ecuación (1.5)). Y como vimos en la sección 1.2.2, la estructura de Poisson lineal  $\mathfrak{g}^*$  es dual a la estructura de álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de dimensión real 3, cuyas relaciones de conmutación entre los elementos de la base  $\{e_1, e_2, e_3\}$  están dadas por

$$[e_1, e_2] = -e_3, \quad [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_1, e_3] = e_2,$$

por lo que el corchete de Poisson de  $\Pi$  es el corchete de Lie–Poisson dado por la ecuación

ción (1.7).

Además esta álgebra de Lie es isomorfa a  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ . Por lo tanto, alrededor de un círculo singular cuyo haz normal es orientable,  $\Pi$  es proporcional a la estructura de Poisson producto de  $S^1$  equipada con la estructura de Poisson cero y  $B^3$  equipada con la estructura de Lie–Poisson de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})^*$ , con una base adecuada.

Es un hecho conocido que las estructuras de Poisson lineales siempre son integrables. A continuación damos la construcción de un grupoide simpléctico que integra a  $\Pi$ , que puede verse en la referencia [FM18].

Si consideramos el grupo de Lie  $G$  que integra a  $\mathfrak{g}$ , entonces el grupoide simpléctico que integra a  $(\mathfrak{g}^*, \Pi)$  es el grupoide de acción  $(G \times \mathfrak{g}^*, \omega_G) \rightrightarrows (\mathfrak{g}^*, \Pi)$  asociado a la acción coadjunta  $(g, \xi) \mapsto Ad_{g^{-1}}^* \xi$ . Donde  $\omega_G \in \Omega^2(G \times \mathfrak{g}^*)$  es la forma simpléctica dada por

$$\omega_G((x, \xi), (y, \eta)) = \xi(g^{-1}y) - \eta(g^{-1}x) + \xi_0([g^{-1}x, g^{-1}y]),$$

para toda  $(x, \xi), (y, \eta) \in T_{(g, \xi_0)}(G \times \mathfrak{g}^*) = T_g G \times \mathfrak{g}^*$ .



# Apéndice A

## Aspectos básicos de fibrados vectoriales

La referencia principal de este apéndice es [NTV06].

**Definición A.1.** Sean  $M$  y  $B$  dos variedades diferenciables y  $p: M \rightarrow B$  una aplicación diferenciable suprayectiva. Llamamos **fibrado vectorial  $k$ -dimensional** a una terna  $\xi = (M, p, B)$  que cumple con la siguiente condición de trivialidad local:

- Para cada punto  $b \in B$ , existe un abierto  $U$  en  $B$  que contiene a  $b$ , y un difeomorfismo

$$\begin{aligned}\varphi: p^{-1}(U) &\longrightarrow U \times \mathbb{R}^k \\ x &\longmapsto (p(x), F_U(x)),\end{aligned}$$

tal que para todo  $x \in U$  se tiene que

$$F_U^x = F_{U|p^{-1}(x)}: p^{-1}(x) \longrightarrow \mathbb{R}^k \tag{A.1}$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales reales.

A cada par  $(U, \varphi)$  se le denomina **trivialización local**.

**Definición A.2.** La variedad  $M$  se denomina **variedad total** del fibrado; la variedad  $B$  se denomina **variedad base**; la aplicación  $p$  se denomina **proyección**; y al conjunto  $M_x = p^{-1}(x)$  se le denomina **fibra** sobre  $x \in B$ . A  $k \in \mathbb{N}$  se le llama el **rango** del fibrado vectorial.

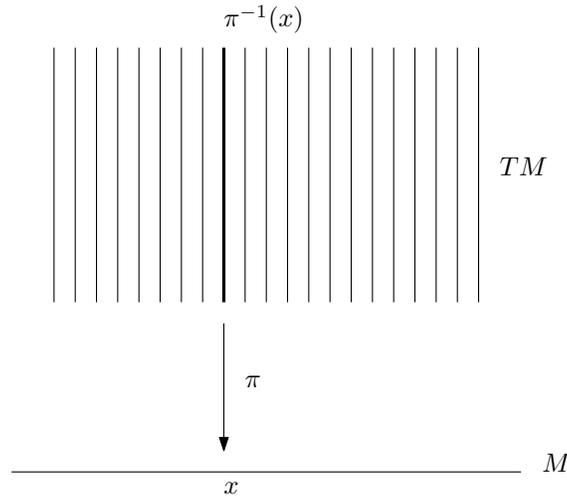
**Observación.** El isomorfismo (A.1) de la Definición A.1 le da a las fibras de  $\xi$  una estructura de espacio vectorial real.

**Observación.** En un fibrado vectorial, la dimensión de la variedad total es igual a la suma de la dimensión de la variedad base y del rango. Este hecho se obtiene directamente de la condición de trivialidad local.

**Ejemplo A.3.** Sea  $M$  una variedad  $n$ -dimensional y sea el conjunto

$$TM = \{(x, v) : v \in T_x M, x \in M\}.$$

Se define la aplicación  $\pi: TM \rightarrow M$  tal que  $\pi((x, v)) = x$ ; que es trivialmente suprayectiva. A la terna  $(TM, \pi, M)$  se le denomina el **fibrado tangente** de  $M$ .



**Figura A.1:** Esquema del fibrado tangente.

**Ejemplo A.4.** Se define el **fibrado cotangente** de la variedad  $M$  como

$$T^*M = \{(m, \alpha) : \alpha \in T_m^*M, m \in M\}.$$

Se define la aplicación  $\pi: T^*M \rightarrow M$  tal que  $\pi((m, \alpha)) = m$ .

En [NTV06] se muestra explícitamente que el fibrado tangente y el fibrado cotangente con fibrados vectoriales en el sentido de la Definición A.1.

**Definición A.5.** Sea  $\xi = (M, p, B)$  un fibrado vectorial. Sea  $M' \subset M$  tal que

$$p' := p|_{M'}: M' \longrightarrow B$$

hace que  $\xi' = (M', p', B)$  sea un fibrado vectorial. Además, para todo  $x \in M$ , la fibra  $M'_x := (p')^{-1}(x) = p|_{M'}^{-1}(x)$  es un subespacio vectorial de  $M_x = p^{-1}(x)$ . Decimos que  $\xi' = (M', p', B)$  es un **subfibrado vectorial** de  $\xi = (M, p, B)$ .

Sean  $\xi = (M, p, B)$  y  $\bar{\xi} = (\bar{M}, \bar{p}, \bar{B})$  dos fibrados vectoriales.

**Definición A.6.** Un **morfismo de fibrados vectoriales** de  $\xi$  en  $\bar{\xi}$  consiste en un par de aplicaciones diferenciables  $f_0: B \longrightarrow \bar{B}$  y  $f: M \longrightarrow \bar{M}$  que satisfacen las siguientes condiciones:

1. El siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & \bar{M} \\ p \downarrow & & \downarrow \bar{p} \\ B & \xrightarrow{f_0} & \bar{B} \end{array}$$

2. La aplicación inducida  $f_x: M_x \longrightarrow \bar{M}_{f_0(x)}$  es una aplicación lineal, para todo  $x \in B$ .

Dicho morfismo se denota por  $(f, f_0): \xi \longrightarrow \bar{\xi}$ . Si la aplicación  $f_0$  es la identidad en  $B$ , diremos que el morfismo de fibrados vectoriales es un  **$B$ -morfismo** o **morfismo que conserva  $B$** .

**Definición A.7.** Si  $f: M \longrightarrow \bar{M}$  es un difeomorfismo y  $f_x$  es un isomorfismo de espacios vectoriales. Se dice que, para todo  $x \in B$ , los dos fibrados vectoriales son **isomorfos** y que  $(f, f_0): \xi \longrightarrow \bar{\xi}$  es un **isomorfismo de fibrados vectoriales**.

**Notación.** Cuando dos fibrados vectoriales  $\xi = (M, p, B)$  y  $\bar{\xi} = (\bar{M}, \bar{p}, \bar{B})$  sean isomorfos, usaremos la notación:  $\xi \cong \bar{\xi}$

**Definición A.8.** Sea  $(M, p, B)$  un fibrado vectorial. Se le llama **sección global** del fibrado a toda aplicación  $\sigma: B \longrightarrow M$  diferenciable que satisface  $p \circ \sigma = \text{id}_B$ .

**Ejemplo A.9.** Sea  $(TM, \pi, M)$  el fibrado tangente. Una sección global  $\sigma: M \rightarrow TM$  de este fibrado da lugar a un vector  $\sigma(x) \in T_x M$  tangente a  $M$  en  $x$ . Por lo tanto,  $\sigma$  es un campo vectorial diferenciable tangente a  $M$ . En efecto, todo campo vectorial tangente a  $M$  es una sección global del fibrado. Por lo que se tiene que los campos vectoriales diferenciables tangentes a  $M$  coinciden con las secciones globales del fibrado tangente.

**Proposición A.10.** Sean  $\sigma$  y  $\tau$  dos secciones globales de un fibrado vectorial  $\xi = (M, p, B)$ , y sea  $f \in C^\infty(B)$ . Entonces existen dos secciones globales  $\sigma + \tau$  y  $f \cdot \sigma$  definidas según:

$$(\sigma + \tau)(x) = \sigma(x) + \tau(x), (f \cdot \sigma)(x) = f(x)\sigma(x), \forall x \in B.$$

Las operaciones  $+(\sigma, \tau) = \sigma + \tau$ , y  $\cdot(f, \sigma) = f \cdot \sigma$  permiten que el conjunto de las secciones globales del fibrado tenga estructura de  $C^\infty(B)$ -módulo, y que se denotará por  $\Gamma\xi$ .

**Ejemplo A.11.** Consideremos nuevamente el fibrado tangente  $(TM, \pi, M)$  de una variedad diferenciable  $M$ . En el Ejemplo A.9 mencionamos que las secciones globales del fibrado tangente de  $M$  coinciden con los campos vectoriales diferenciables tangentes a  $M$ ; es decir que  $\Gamma(TM) = \mathfrak{X}(M)$ .

# Bibliografía

- [Cat04] A. S. Cattaneo, *On the integration of Poisson manifolds, Lie algebroids, and coisotropic submanifolds*, Letters in Mathematical Physics **67** (2004), 33–48.
- [CdSW99] A. Cannas da Silva and A. Weinstein, *Geometric models for noncommutative algebras*, Berkley Math. Lecture Notes, vol. 10, Amer. Math. Soc., 1999.
- [CDW87] A. Coste, P. Dazord, and A. Weinstein, *Grupoïdes symplectiques*, Publications du Département de Mathématiques de Lyon (1987), no. 2 A, 1–62.
- [CF03] M. Crainic and R. L. Fernandes, *Integrability of Lie brackets*, Annals of Mathematics **157** (2003), 575–620.
- [CF04] ———, *Integrability of Poisson brackets*, J. Differential Geometry **66** (2004), 71–137.
- [CL11] M. Crainic and Fernandes R. L., *Lectures on integrability of Lie brackets*, Geometry and Topology Monographs **17** (2011), 1–107.
- [DZ05] J. P. Dufour and N. T. Zung, *Poisson structures and their normal forms*, Progress in Mathematics, vol. 242, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005.
- [FM18] M. Frejlich and I. Marcut, *Normal forms for Poisson maps and symplectic groupoids around Poisson transversals*, Letters in Mathematical Physics **108** (2018), 711–735.

- [GNSSV15] L. C. García-Naranjo, P. Suárez-Serrato, and R. Vera, *Poisson Structures on Smooth 4-Manifolds*, Letters in Mathematical Physics **105** (2015), no. 11, 1533–1550.
- [Kar87] M. V. Karasev, *Analogues of objects of Lie group theory for nonlinear Poisson brackets*, Math. USSR Izvestiya **28** (1987), 497–527.
- [Mar06] Charles-Michel Marle, *Lie, symplectic and Poisson groupoids and their Lie algebroids*, Elsevier Encyclopedia of Mathematical Physics (2006).
- [MDS98] D. Mc Duff and D. Salamon, *Introduction to Symplectic Topology*, Oxford mathematical monographs, 1998.
- [MR91] J. E. Marsden and T. S. Ratiu, *Introduction to Mechanics and Symmetry*, 2 ed., Texts in applied mathematics, Springer, New York, 1991.
- [NTV06] J. Núñez, A. F. Tenorio, and J. A. Vilches, *Elementos de la teoría de grupoides y algebroides*, Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz, Cádiz, 2006.
- [Wei87] A. Weinstein, *Symplectic groupoids and Poisson manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.) **16** (1987), no. 1, 101–104.
- [Zak90] S. Zakrzewski, *Quantum and classical pseudogroups, I and II*, Comm. Math. Phys. **134** (1990), 347–395.