UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN

La consistencia como una propiedad de los sistemas formales

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN FILOSOFÍA

PRESENTA

Cano Pérez Pedro

Asesor: Mtra. María Esperanza Rodríguez Zaragoza

Santa Cruz Acatlán, Naucalpan, Estado de México. Noviembre de 2018.

Agradecimientos

Primero, quiero dar gracias, si se puede, a Dios, pues sin Él nada de esto hubiera sido posible.

Luego, quiero dar gracias a dos de las personas más importantes en este trayecto: a mis padres. A mi padre porque, con el ejemplo, me enseñó lo que es el esfuerzo y a ver cómo se acomodan las cosas. A mi madre, porque me enseñó que la paciencia y el diálogo son virtudes que uno mismo debe crearse día con día. Y a ambos porque en todo momento me han acompañado y apoyado incondicionalmente.

También quiero agradecer a mis hermanos. A Pablo, porque, a pesar de que no se diga, ambos intuimos el cariño y apoyo que nos tenemos mutuamente. Y a Ángel, en donde quiera que esté, porque su recuerdo es uno de los pilares que me mantienen en pie.

A todos mis abuelos. A Julia y Jesús, porque sin ellos no conoceríamos las virtudes de mi padre. Y a mis otros abuelos, Francisca y Manuel, por todo el apoyo, la paciencia y el tiempo con los que me acompañaron durante la carrera y parte de la realización de esta tesis. También debo agradecer a mis tíos y primos, a todos, tanto paternos como maternos, porque de alguna u otra manera me enseñaron el camino que quiero seguir. En especial a Norma y a Ernesto, pues sin sus ayudas este momento sería un tanto distinto.

A mis amigos: Emi, Mazh, Yessi y Nat, pues a ellos les debo todas las risas, palabras de aliento, abrazos y música que se encuentran antes, durante (y espero después) de la realización de esta tesis. A mis otros amigos: Cirilo, Katia, Simón, Vero, Juan, Loan y Ale, por todas las risas, pláticas, abrazos y compañía en los momentos de dolor y dicha, y por el tiempo compartido en la carrera.

También quiero agradecer al Kevin por compartir todo lo que tenemos en común. Y a Ivanhoe, por todas esas pláticas matutinas en la explanada, pues gracias a ellas recordé, más de una vez, que no todo en filosofía se reduce a fórmulas y cálculos, sino que en ella también entran metáforas y versos.

También debo agradecer al *Seminario Permanente de Investigación en Filosofía de la Lógica y Filosofía de la Ciencia* por todas las herramientas que sus miembros me proporcionaron en sus sesiones. A Cristian Gutierrez por sus Cursos sobre Gödel, sus tesis y por ser una guía casi indirecta en la aventura Gödeliana. A *La Cantera* y a sus miembros, pues todo lo aprendido ahí me ayudó a escribir más de una página del presente escrito

Gracias a amigos de la FES: Erick, Axel, los dos Rafa's, Diego, Lalo, etc., por hacer más amena mi estancia en la misma, y también a la gente del INEA por todo el apoyo laboral y emocional.

Por último, quiero a agradecer en especial a Esperanza Rodríguez Zaragoza por todos los comentarios, observaciones, críticas y revisiones hechas a esta tesis, pues en gran medida ayudaron a

que se terminara. Además, por todos los consejos, regaños y el apoyo que me ha brindado durante el tiempo que he convivido con ella, pues fueron buena fuente de motivación para continuar este camino.

INTRODUCCIÓN

Las matemáticas han sido, durante siglos, una de las ramas del conocimiento más estudiadas y que ha ofrecido una cantidad considerable de problemas que merecen atención, no únicamente por parte de aquellos que se limitan a su estudio, sino también por algunos otros cuyos intereses se relacionan con éstas. En filosofía, las matemáticas interesan por su relación con la lógica y algunos aspectos relativos a ésta (como la naturaleza de los números, las propiedades de los sistemas, la relación de las matemáticas con el lenguaje, etc.), los cuales parecen estar relegados a la misma debido a su naturaleza y a que parecen ser objeto de estudio de la filosofía más que de las matemáticas.

En este sentido, aquí me ocuparé de hablar sobre uno de estos aspectos: la consistencia de los sistemas formales. El motivo de esto es el siguiente: los últimos años del Siglo XIX y la primera mitad del Siglo XX estuvieron marcados por el intento de fundamentar las matemáticas: se intentaba idear o encontrar un método seguro que permitiera dar cuenta de dónde y cómo se obtienen las afirmaciones hechas sobre figuras, números o conjuntos de estos.

Una de las personalidades más notables en esta empresa fue el matemático prusiano David Hilbert (*cfr*. Ladriere, 1969, Hilbert, 2011 y Piñeiro, 2012) pues él ideó un programa –basado en el método axiomático que Aristóteles presentó en los Analíticos Segundos (*Cfr*. Aristóteles, *Analíticos Segundos*, 71a – 89b) el cual se encarga de construir sistemas formales que, con ayuda de un lenguaje basado en símbolos, pretenden representar, a través de fórmulas, las estructuras de los objetos encontrados en las llamadas teorías matemáticas intuitivas o reales. Además de esta formalización, él propone la aceptación de un conjunto de fórmulas llamadas *axiomas*, a partir de las cuales es posible obtener las afirmaciones ya mencionadas llamadas *teoremas*. La *demostración* es el procedimiento mediante el cual se obtienen los teoremas: debe permitirnos observar, mediante un número finito de pasos, que cada una de las fórmulas involucradas en ésta procede de los axiomas con ayuda de *reglas de transformación* (las cuales proceden del cálculo lógico).

Para poder asegurar que todos estos elementos funcionan de manera correcta, Hilbert propone la creación de una *metamatemática* (a la cual también se le puede llamar *metateoría* o *metalenguaje*). Esta es un lenguaje con el cual se pueden expresar cuestiones relacionadas con el lenguaje del sistema en cuestión, principalmente se ocupa de hablar de las propiedades del sistema matemático y de sus fórmulas.

Entre las propiedades del sistema se encuentran: *consistencia*, *completud*, *corrección y decidibilidad*. De manera resumida, la *consistencia* de un sistema es la propiedad que hace que un sistema no demuestre contradicciones: una expresión que tiene la afirmación y la negación de una proposición del mismo tipo. En lógica clásica (usada por Hilbert), las contradicciones sólo se siguen de contradicciones. Por tanto, si de un conjunto de axiomas se sigue una contradicción, esto quiere decir que antes ya se encuentra una contradicción en éste, esto es, dicho conjunto (y también el sistema en el que se encuentra) es inconsistente. Además, el hecho de que haya contradicciones implica, por el principio de explosión, que se puede demostrar cualquier fórmula. Con ello también es posible demostrar la afirmación de un teorema, así como su negación. Esto no es conveniente porque, dado que un sistema de este tipo nos habla de una teoría formal, si es inconsistente, puede demostrar afirmaciones falsas sobre la teoría de la que habla. Por ello es necesaria la consistencia.

Por otro lado, existen dos tipos de *completud*. El primero nos dice que el sistema es capaz de demostrar las fórmulas universalmente válidas, es decir, aquellas que resultan verdaderas en todas sus posibles interpretaciones –en todas las situaciones en que se les asignan valores de verdad a los signos que las componen-. El segundo, también llamado *completud para la negación,* afirma que el sistema es capaz de demostrar todos los teoremas o sus negaciones, pero no ambos (por ejemplo, si tenemos dos teoremas, T_1 y $\neg T_1$, entonces únicamente será demostrable T_1 o $\neg T_1$, pero no ambos al mismo tiempo).

La *corrección* nos asegura que todos los axiomas y las fórmulas que son teoremas de un sistema formal también son verdaderos: sus valores de verdad se hacen verdaderos cuando se les pone en correspondencia con un determinado tipo de objetos.

Por último, la *decidibilidad* permite decir si existe o no un método mecanizable y efectivo para demostrar un teorema o su negación.

En este escrito me ocuparé de hablar de la consistencia por la siguiente razón: Hilbert proponía que se diera una demostración de la consistencia para así asegurar, entre otras cosas, que los sistemas axiomáticos libraran a las matemáticas de las paradojas y contradicciones que los recientes trabajos en teoría de conjuntos habían traído consigo. Sin embargo, en 1931, Kurt Gödel publicó *Sobre sentencias formalmente indecidibles de Principia Mathematica y sistemas afines* (Gödel, 2006, págs. 53 – 87), texto en el cual demuestra dos teoremas acerca de los sistemas formales: 1) En todo sistema que sea recursivamente axiomatizable y que formalice alguna parte de la aritmética, existen sentencias que son formalmente indecidibles; y 2) En todo sistema recursivamente axiomatizable que formalice una parte de la aritmética, la sentencia que afirma su consistencia es indemostrable.

De manera resumida, el trabajo de Gödel en el escrito mencionado es el siguiente: Gödel toma el lenguaje formal de los *Principia Mathematica* y los axiomas de la aritmética de Peano para formar un sistema que aquí llamaré *P*.

Hecho esto, Gödel decide formalizar el metalenguaje a través de los *números Gödel* y de los enunciados de *PA*. Los números Gödel son representaciones numéricas de los símbolos de P –todo símbolo, sucesión de símbolos, fórmula y sucesión de fórmulas posee un único número Gödel- y los enunciados de *PA* sirven para indicar que dichos números tienen ciertas propiedades como *ser una fórmula*, *ser una fórmula demostrable, ser una demostración*, etc. Así, es posible hablar de las expresiones de *P* a través de los objetos y expresiones de la aritmética. Dichas enunciados se componen de un predicado como $Form(x)$ y se definen con una fórmula aritmética, y estos, después pueden ser formalizados con fórmulas de *P*.

Por otro lado, Gödel usa el *método diagonal*, el cual consiste en hacer que expresiones del sistema hablen de sí mismas. Dicho de otra manera, el *método diagonal* es posible hacer que tales expresiones sean autorreferentes. Además, construye una fórmula que habla de sí misma mediante su número Gödel. Esta fórmula es G, su número Gödel es g, y ésta significa "x no es una fórmula demostrable". Mediante el *método diagonal*, es posible sustituir x por g con lo cual se obtiene la expresión "g no es una fórmula demostrable", así, G dice de sí misma mediante su número Gödel que no es demostrable.

Ahora bien, si suponemos que G es demostrable, entonces también estamos suponiendo que G es verdadera (esta cuestión se profundizará más adelante). Pero si G es verdadera, entonces lo que afirma de hecho es verdadero. Por tanto, es verdadero que tal fórmula no es demostrable. Así, llegamos a una contradicción porque se está demostrando algo que dice de sí mismo que no es demostrable. Esto no es posible porque P se supone como consistente. Por tanto, G no puede ser demostrable.

Podemos pensar que su negación sí es demostrable –para buscar que P sea completo-, por lo cual: si suponemos que $\neg G$ es demostrable, entonces suponemos, al mismo tiempo, que $\neg G$ es verdadera. Si $\neg G$ es verdadera, entonces G es falso. Con lo cual tenemos que G es demostrable. Ahora, cabe resaltar que bajo el supuesto de que $\neg G$ es demostrable, entonces G también lo es. Por tanto, tanto G como $\neg G$ son demostrables, lo cual nos lleva a otra contradicción. Por tanto, tampoco $\neg G$ es demostrable porque esto nos lleva a contradicciones.

En consecuencia, G ni su negación son demostrables. En términos de Gödel, G es una proposición indecidible porque ni G ni su negación se pueden demostrar con los axiomas de P. De esta manera Gödel demostró el primer teorema de incompletud.

En lo que respecta al segundo teorema de incompletud, Gödel se ocupa, primero, de construir una expresión de la aritmética que representa la consistencia de P. Segundo: se formaliza esta expresión mediante una fórmula: $Con(P)$. Dicha fórmula no es demostrable porque hacerlo también implicaría demostrar G, lo cual no es posible. Por tanto, la consistencia de *P* no es demostrable.

A raíz de este segundo teorema, y de todo el aparato formal propuesto por Gödel, surge la pregunta ¿es la consistencia un objeto de la teoría que formaliza *P*? dicho más específicamente ¿la consistencia tiene las mismas propiedades que los números naturales (o puede ser una propiedad de estos) estudiados por *P* y *PA*? A manera de respuesta, puedo decir que no, porque la consistencia de un sistema (y ésta es la hipótesis de este escrito), en este caso *P*, además de estar relacionada con la metateoría y la correspondencia entre este sistema y los números naturales, no es un objeto que podamos encontrar en el conjunto (ℕ) de los objetos con los que trabaja ésta teoría, tampoco es una propiedad de estos y sus propiedades no le son aplicables. La consistencia, según este punto de vista, es más bien una propiedad del sistema *P*[1].

Dicho esto, debo recalcar que el objetivo principal de este escrito es mostrar la tesis mencionada y los objetivos particulares se encontrarán a lo largo de los capítulos del mismo. Por tanto, la tesis tendrá la siguiente estructura:

El objetivo del **Capítulo I** es exponer qué es un sistema formal. Para realizar esto, me ocuparé de mencionar la noción de sistema y los componentes que lo conforman: 1) lenguaje formal; y 2) la parte axiomática (*axiomas*, *reglas de transformación* y *teoremas*).

Luego mencionaré qué es la demostración. Para esto tendré que decir qué son las interpretaciones y modelos de un sistema formal, hablar sobre la noción de consecuencia lógica y la diferencia entre deducción, derivación y demostración, para entender la relación que esto tiene con las teorías intuitivas. Por último, explicaré que el objetivo de los sistemas formales son las demostraciones. Para realizar este capítulo me basaré, principalmente, en las obras *Limitaciones internas de los formalismos* de Jean Ladriere, *Outlines of a Formalist Philosophy of Mathematics* de Haskell B. Curry, *El juego de los principios* de Alejandro Cassini y *Fundamentos de las matemáticas* de David Hilbert.

---

[1] Aquí también es conveniente señalar que la consistencia tampoco es una propiedad de las expresiones encontradas del sistema, sino una propiedad del sistema en su totalidad (esto se verá conforme el trabajo progrese).

El **Capítulo II** tiene como objetivo hablar sobre algunas propiedades de los sistemas formales, haciendo énfasis en la *consistencia*. Para ello, diré qué es la *metateoría* de un sistema formal. Así, haré las distinciones entre las nociones *lenguaje-objeto* y *metalenguaje*, *sintaxis* y *semántica*. Hacer esto me servirá para explicar las relaciones entre el *metalenguaje* y las propiedades de los sistemas formales. Luego mencionaré algunas de éstas, a saber: *consistencia, completud, decidibilidad, categoricidad*. Para realizar este apartado me basaré en *Limitaciones internas de los formalismos* de Jean Ladriere, *Outlines of a Formalist Philosophy of Mathematics* de Haskell B. Curry, *El juego de los principios* de Alejandro Cassini y *Fundamentos de las matemáticas* de David Hilbert.

Aquí debo hacer una pausa y mencionar lo siguiente: estos dos capítulos serán la base para entender varias nociones que mencionaré en los dos siguientes. Su utilidad es, pues, dar cuenta de las partes y propiedades de los sistemas formales para saber qué son y para qué sirven, de modo que el lector pueda ubicar estos aspectos en el momento en que se encuentre con la exposición de *P*. Así, por ejemplo, cuando mencione *axioma de P*, el lector sabrá que un axioma tiene tales y cuales propiedades y que se comporta de tal o cual manera. Si no hiciera esto, es decir, si dijera qué es cada uno de los elementos de *P* al momento de presentarlos, entonces la exposición se volvería confusa.

Dicho esto, el objetivo del **Capítulo III** es explicar qué es la numeración de Gödel y en qué consisten los Teoremas de Incompletud de Gödel. Para llevar a cabo este objetivo debo, en primer lugar, explicar cómo se constituye el sistema *P*, pues con su lenguaje y con su relación con *PA* (Aritmética de Peano), fue posible realizar la numeración de Gödel.

Hecho esto, explicaré algunas cuestiones relacionadas a la correspondencia entre *P* y la Aritmética[2]. Sobre esto, también mostraré las propiedades más básicas de los números que podemos encontrar en *PA*. Luego explicaré por qué *P* es capaz de formalizar estos aspectos encontrados en *PA*.

El siguiente paso es explicar la *numeración de Gödel*. En este apartado, explicaré cómo se asigna un número Gödel a cada símbolo del sistema *P*, luego a cada expresión, y por último a cada fórmula de *P*. Con esto me será posible decir que estos números sirven para realizar las expresiones metamatemáticas de *P* y que los números Gödel son también números naturales.

El siguiente paso es explicar los dos Teoremas de Incompletud de Gödel. Explicar estos teoremas me sirven para dar cuenta de cómo se construye la expresión de la consistencia en la aritmética y su posterior formalización en *P*. Para realizar este capítulo me basaré, principalmente en *Sobre sentencias formalmente indecidibles de Principia Mathematica y sistemas afines* de Kurt Gödel, *Cómo*

[2] Aritmética y *PA* se refieren a una misma teoría.

argumentar a favor de una proposición indecidible de Cristian Gutiérrez Ramírez, la tesis de doctorado de Carlos Torres Alcaraz *Elementos para una crítica de la razón filosófica: La filosofía matemática de David Hilbert y Kurt Gödel* y *Gödel's Incompleteness Theorems* de Raymond M. Smullyan.

En el **Capítulo IV** me ocuparé de mostrar cómo es que la consistencia de *P* (y posiblemente la consistencia en general) no se encuentra en el conjunto ℕ: no es un número natural, una propiedad de los números y tampoco puede tener alguna de estas propiedades. Para lograr este objetivo me ocuparé de profundizar en el aspecto de los números Gödel como números naturales. Esto me servirá para decir que, si los números Gödel son números naturales, entonces la consistencia tampoco es una de sus propiedades.

También retomaré algunos aspectos de la consistencia para recordar que esta es una propiedad de sistemas formales. Luego mostraré tres razones por las que no pertenece a ℕ: 1) es una propiedad de sistemas; 2) no puede ser una propiedad de números naturales; 3) no es posible que tenga propiedades de números naturales por ser una propiedad de sistemas (y junto a esto también diré que las propiedades de los números Gödel tampoco pertenecen a la consistencia). Con esto puedo afirmar que la consistencia no es uno de los objetos tratados por *P* y *PA*.

Por último, trataré de manera breve tres preguntas que, además de lo anterior, me permiten suponer que la consistencia no debe ser tratada como un número en tanto que no es un número. Para realizar este apartado me basaré en lo dicho en los capítulos anteriores.

Por otra parte, la relevancia del escrito aquí presente es la siguiente: es un hecho que hasta nuestros días gran parte del trabajo matemático se desarrolla de una manera muy similar a aquella propuesta por Hilbert: en áreas como la aritmética, el álgebra, la geometría, la teoría de conjuntos e incluso en aspectos relacionados con la computación, como la programación, se nos da un conjunto de principios (axiomas), así como una serie de reglas que nos indican los pasos y operaciones que podemos o no aplicar a dichos principios para así obtener nuevos resultados que nos hablan de un determinado tipo de objetos. Tenemos, pues, que una buena porción del edificio matemático aún se basa en un método que da cuenta de sus avances de manera algorítmica, esto es, el trabajo matemático se lleva a cabo mediante una serie de pasos y herramientas que no deben dejar duda alguna de la procedencia de sus avances.

Al mismo tiempo, es un hecho que las teorías matemáticas que trabajen de la manera mencionada, y que además axiomaticen parte de la aritmética, serán afectadas por los teoremas desarrollados por Kurt Gödel: tendrán proposiciones que no podrán ser demostradas y serán incapaces de demostrar su propia consistencia.

Hablar sobre la indemostrabilidad de la consistencia da cuenta de las limitaciones que implica que las instancias que usan el método axiomático en sistemas formales intenten hablar de sí mismas con este mismo método. De igual manera, hablar de que la consistencia es una propiedad de los sistemas axiomáticos-formales y no un objeto estudiado por estos, además de contribuir al señalamiento de tales limitaciones, puede mostrar que el método ideado por Hilbert no puede tratar de la misma manera a todos sus componentes. También podría mostrar que todo lo permeado por el método hilbertiano, como lo son las matemáticas, la lógica, la computación, y cualquier otra área en la que se intente usar sistemas construidos bajo los postulados del método axiomático, lleva consigo la imposibilidad de tratar todos los aspectos relacionados consigo de la misma manera y de resolver todos los problemas que surjan en estos.

Por último, aunque haré aclaraciones sobre varias nociones relacionadas con toda la simbología y las nociones aquí encontradas, es conveniente que el lector tenga conocimientos básicos de lógica de primer orden y teoría de conjuntos.

CAPÍTULO I: SOBRE LOS SISTEMAS FORMALES.

Introducción

En este capítulo daré una definición general de sistema formal. El objetivo de esto es dar cuenta de la estructura básica de dicho tipo de sistemas, pues esta parte del trabajo es necesaria para identificar tal estructura en el sistema *P* ideado por Gödel en el que se llevaron a cabo sus pruebas de incompletitud.

Para realizar esta empresa, primero enunciaré la noción general de sistema. Posteriormente, mencionaré los elementos de un sistema formal.: 1) lenguaje formal (donde enunciaré las definiciones de los términos primitivos); 2) parte axiomática (donde diré qué son los axiomas, reglas de formación y teoremas). Respecto a estas dos partes, mencionaré, primero, las partes de un lenguaje formal y después cómo se usan para construir las expresiones fundamentales del sistema.

Una vez hecho lo anterior me ocuparé de explicar cómo los dos elementos anteriores se relacionan para dar paso a la demostración. En el apartado referente a este proceso diré qué es una teoría intuitiva y cómo se diferencia el sistema formal. Además mencionaré qué son las interpretaciones, modelos y campos de interpretación. En relación con esto, también haré mención del concepto de consecuencia lógica para ver la relación entre fórmulas que se siguen de otras. Por último, explicaré la diferencia entre deducción, derivación y demostración.

1. Definición de sistema formal.

1.1. Sobre la noción de sistema.

Antes de decir qué es un *sistema formal*, primero debemos tener en cuenta que un *sistema* en general puede ser entendido como un conjunto de partes o elementos relacionados entre sí. Cada uno de estos elementos tiene una función en específico y la conjunción de todas ayuda a que el objetivo de todo el sistema pueda llevarse a cabo. Para esclarecer este aspecto, pensemos en la gran variedad de sistemas que usamos y en los que vivimos de manera cotidiana: automóviles, teléfonos celulares, refrigeradores, bicicletas, computadoras, sistemas de consulta de datos por internet, sistemas políticos, judiciales, etc. En cada uno podemos identificar sus partes para ver cómo se relacionan, las funciones que tienen y cómo todo esto cumple un objetivo general.

En una computadora, por ejemplo, podemos identificar una parte física: teclado, pantalla, bocinas y mouse (cursor, ratón, como queramos llamarle). También encontramos la parte virtual, compuesta por un sistema operativo, el cual consta de procesadores de texto, navegadores de internet, reproductores de música y demás. La parte física permite que nos comuniquemos con la virtual. Con estas dos en conjunto, podemos escribir documentos (cartas, tareas, ensayos, etc.), hacer cálculos, ver videos, escuchar música, crear imágenes, buscar información, hacer programas con funciones diferentes a las que ya tenemos, etc. Y todas estas funciones en conjunto tienen, en última instancia, el objetivo de hacernos la vida más fácil (si queremos negar esto, pensemos en lo tardado y difícil que hubiera sido escribir estas palabras a mano).

De manera similar podemos pensar en un *sistema formal*: un conjunto de componentes formales que, a grandes rasgos, nos ayudan a hacer cálculos y ver cómo ciertas cosas se siguen de otras ya dadas o que en un principio adoptamos como hipótesis.

1.2. Elementos de un sistema formal.

1.2.1. Lenguaje formal.

El primer elemento del sistema formal es el *lenguaje formal*, éste es, básicamente, el conjunto de símbolos encontrados en el sistema. La función de dicho lenguaje es simbolizar los elementos con los que dicho sistema debe tratar. El tipo y la manera en que se usen dichos símbolos estarán determinados por el tipo de objetos que trate el sistema formal al que pertenecen, por ejemplo, si un sistema formal se ocupa de trabajar con las oraciones del lenguaje natural, entonces los símbolos usados y el orden que les da sentido serán diferentes a los de un sistema que se ocupe de formalizar la aritmética elemental y se ocuparán de representar las estructuras encontradas en la lengua.

Asimismo, el lenguaje formal se compone de tres partes. La primera es un conjunto de *términos primitivos*, el cual es una lista, posiblemente infinita[3], de los términos que se usarán en el sistema (Curry, 1951, págs. 11 - 12) para formar las expresiones con las que trabajará. Los términos primitivos en la mayoría de los sistemas pueden ser *constantes*, *variables*, *letras predicativas*, *letras enunciativas* (o *proposicionales*), *letras de función* y *cuantificadores*.

Las *constantes* son los términos encargados de designar objetos determinados (como un número entero o un individuo encontrado en un conjunto). Debo mencionar que, en un sistema totalmente formal, las constantes deben ser consideradas como objetos que no tienen significado y cuyo sentido está determinado por el sistema en el que se encuentra (Ladriere, 1969, pág. 450). Por ejemplo, si nos encontramos ante un sistema que trabaja con números enteros y en éste encontramos una constante a (que simboliza un número entero), entonces debemos considerarla como si no representara un objeto en

[3]El hecho de que la lista de símbolos pueda ser infinita no es problemático, sino conveniente en ciertos casos, pues en algunos sistemas formales es necesario que tal lista sea infinita porque los objetivos de los mismos exigen formar combinaciones que necesitan tal cantidad de símbolos. Un ejemplo de esto se verá en páginas posteriores.

específico (como 3), pero sí como si cumpliera con las cualidades de los números enteros, es decir, en el contexto de dicho sistema no podemos asegurar que $a = 3$, pero sí que dicho símbolo puede usarse en las operaciones de suma y resta. A estos símbolos también se les llama *constantes* porque no cambian en cuanto a sus propiedades.

Las *variables*, por otro lado, son aquellos términos que pueden ser reemplazados por constantes pertenecientes a su misma categoría (constantes que representen números, individuos o predicados). Estas, pues, indican que existe un lugar vacío que puede ser ocupado por una constante. Las variables, al igual que las constantes, pueden ser encontradas en las fórmulas (más adelante explicaré qué es una fórmula) de los sistemas en cuestión. En $\forall x\ (Px\ \rightarrow Qx)$ la letra x es un símbolo al que se le asignan dos predicados (P y Q). En dicha fórmula x indica que hay un lugar vacío que puede ser sustituido con una constante que cumpla con las dos propiedades, cualquieras que estas sean. Así, se puede obtener la siguiente expresión: $(Pa\ \rightarrow Qa)$ donde a puede ser un número o un individuo, según el sistema en el que se encuentre. De igual manera, las variables carecen de significado y su sentido (así como su comportamiento con las operaciones) están determinados por el sistema en el que se encuentren.

Las *letras predicativas*, como ya se pudo observar, son los términos usados para dar cuenta de las propiedades de las constantes y variables. De igual manera, dichas letras pueden indicar relaciones entre estos dos o más elementos y pueden funcionar como variables (Garrido, 1974, pág. 54). Las letras pueden ser: monádicas, cuando competen sólo a una variable o a una constante, como la propiedad de ser un número, la cual es simbolizada por Hilbert con $\mathbb{Z}$ (Hilbert, 2011, pág. 104); diádicas, cuando indican una propiedad que se da mediante una relación de dos constantes o dos variables mediante constantes predicativas como $=, \leq, \neq,$[4] etc. (aquí una de las propiedades puede ser la igualdad entre dos constantes) o con predicados como Rx, y, donde se indica que x tiene una relación con y; triádicas, si la propiedad en cuestión es una relación entre tres objetos como $aRbc$ (la cual puede simbolizar una relación cualquiera R que a tiene con b y c). El número de términos que pueden estar en relación mediante estas letras puede ser superior a tres y para escribir expresiones más abstractas que $aRbc$, se pueden usar expresiones como $R_1^1, \ldots,\ R_m^n$, donde n puede ser sustituido por el número de términos que se encuentran relacionados con R y m es lugar que ocupa en la sucesión de símbolos predicativos. Es aquí donde podemos ver el carácter variable de estas expresiones, pues un símbolo del tipo R_m^n nos dice

[4] Los símbolos indicados también predicados, la diferencia con las letras es, según entiendo, que éstas dan cuenta de que hay un predicado asignado a los elementos en cuestión, pero no se indica cuál es, mientras que los símbolos de constantes indican, por ejemplo, que dos constantes o dos variables son iguales, desiguales, o menores que otro entre sí ($a = b$, $a \leq b, a \neq b$). *Cfr.* Ladriere, 1969 y Garrido, 19.

que existe una relación entre determinado número de objetos, pero no nos indica de qué relación se trata ni qué objetos están involucrados en dicha relación.

Las *letras enunciativas* o *proposicionales* son los términos que simbolizan las proposiciones encontradas en el sistema formal. “Una proposición es algo que puede ser entendido como una afirmación –de decir algo- con un significado intuitivo constante”[5] (Curry, 1951, pág. 8) es decir, una proposición es un enunciado que afirma algo sobre algún objeto y eso que dice sobre el objeto comúnmente se entiende sin mayor explicación y se mantiene constante. Así, por ejemplo, la oración “2 es un número par” afirma que el número 2 es par porque cumple con las condiciones para serlo. Ahora bien, las letras proposicionales (representadas comúnmente con *p*, *q*, *r*, etc.) también tienen un carácter variable porque no nos dicen a qué proposición representan, pero sí podemos tener la seguridad de que se refieren a afirmaciones sobre los objetos del sistema y que son susceptibles de ser verdaderas o falsas.

Las *letras de función*, como su nombre lo dice, son los símbolos utilizados para representar los objetos con los que trabajan las funciones encontradas en los sistemas. Dichas letras, normalmente, pueden ser las mismas que se usan en las variables, constantes y proposiciones mencionadas arriba. También existen otros signos que pueden usarse para representar funciones que relacionan conjuntos de números, funciones que relacionan funciones, funciones que relacionan dos objetos (como $\vee$ o +, los cuales pueden ser considerados como funciones, y relacionan dos letras proposicionales o dos constantes o variables matemáticas), etc.

Los términos faltantes son los *cuantificadores*, los cuales son usados para hablar de objetos específicos o de conjuntos de objetos. Existen dos: existencial y universal. Ambos se usan junto con las letras predicativas, las variables y las constantes. Así, con el cuantificador existencial se puede decir que existe un objeto que tiene una propiedad cualquiera, mientras que con el cuantificador universal se pueden asignar una propiedad a la totalidad de objetos de un conjunto cualquiera (se puede decir, por ejemplo, que en un conjunto de números, todos son enteros y por lo menos uno es un número primo). Los símbolos más usuales de cuantificadores son $\forall$, para el universal y $\exists$ para el existencial.

Ahora bien, debo mencionar que los símbolos usados para representar todos los términos mencionados dependerán del objetivo y corriente de pensamiento, (y en algunos casos del autor) responsables de hacer el sistema formal. A manera de ejemplo, tenemos las diferentes maneras en que se representa el cuantificador universal: $\forall$, (),$\bigwedge$. El primero se usa en los cursos convencionales de lógica

[5] “A proposition is something which is capable of being understood as an assertion, -of saying something- with a constant intuitive meaning.” Debo aclarar, además, que no profundizaré en este asunto, sino que únicamente lo menciono para decir cuál es la función de los símbolos en cuestión.

proposicional y cuantificacional, el segundo es usado por Hilbert en sus textos relacionados a los fundamentos de las matemáticas y por Russell y Whitehead en sus *Principia Mathematica* (Russell y Whitehead, 1981), mientras que el último es usado por Garrido (cfr. Garrido, 1974). Lo mismo pasa con los términos para representar las operaciones (explicadas a continuación): $\wedge$ y $\cdot$ son usados para representar la conjunción de la lógica proposicional ($p \wedge q$, $p \cdot q$), mientras que $\times$ y $\cdot$ se usan para representar la multiplicación en algunos sistemas que contienen nociones de aritmética ($a \times b$, $a \cdot b$).

La segunda parte del lenguaje formal son las *operaciones* (también conocidas como *operadores*), las cuales son los modos en que los términos mencionados pueden ser combinados para formar términos más complejos o fórmulas, es decir, los operadores son objetos que, en conjunción con los términos primitivos, forman términos más grandes y complejos, que tienen forma de sucesión. En cada sistema formal se debe especificar una lista con todos los operadores, así como el número y tipo de argumentos[6] que usará cada uno (Curry, 1951, pág. 12). A manera de ejemplo tenemos los operadores proposicionales $\wedge, \vee, \rightarrow$ los cuales se usan con dos argumentos para obtener términos del tipo $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \rightarrow q$. También se encuentran las operaciones de la aritmética $+, \times, -$ con las cuales se pueden formar fórmulas del tipo $a + b, a \times b, a - b$. Cabe mencionar que cada sistema formal usará las operaciones que le permitan llevar a cabo sus objetivos. Así, habrá sistemas formales que usen únicamente operaciones proposicionales, mientras que otras pueden usar estas y además operaciones matemáticas. Todo depende del objetivo del sistema formal y sus objetivos.

La tercera y última parte del lenguaje son las *reglas de formación*, las cuales son las oraciones que nos indican cómo deben ser construidas las expresiones aceptadas en el sistema: nos indican el orden en que las operaciones y los términos primitivos deben ser escritos para formar suseciones admitidas en un sistema determinado. Las reglas, además, nos dicen que todo lo que no se construya bajo lo que dictan, no será una expresión permitida en el sistema. Cada sistema formal tiene su propio conjunto de reglas de formación, por tanto, una suseción válida en un sistema puede no serlo en otro (Hunter, 1981, pág. 18; Curry, 1951, págs. 12, 17 – 27). Cada expresión que se construya con estas reglas se llamará *fórmula* o *fórmula bien formada* (*fbf*).

Un ejemplo de reglas de formación de fórmulas son las reglas de formación de la lógica proposicional. Se presentan a continuación:

[6] Véase apéndice II para una explicación más detallada de estos términos. De momento, diré que los argumentos son cada uno de los elementos que ubican a los lados de cada uno de los símbolos de operador. Estos, además, tienen un valor que ayuda a complementar el valor de la conectiva.

- Teniendo en cuenta los signos para operadores para la lógica proposicional: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ y las letras para variables proposicionales p, q, r.

1. Toda letra proposicional p, q, r es una *fórmula bien formada* (*fbf*).
2. Si p es una *fbf*, entonces $\neg p$ también es una *fbf*.
3. Si p y q son *fbf's*, entonces $p \wedge q, p \vee q, p \rightarrow q, p \leftrightarrow q$.
4. Nada más es fórmula.

Estas cuatro reglas de formación indican qué sucesiones de símbolos serán fórmulas en la lógica proposicional. Así, toda expresión que tenga una estructura similar a las presentadas en ellas será una fórmula bien formada. La última regla indica que sólo serán fórmulas aquellas sucesiones de signos que se formen con las tres reglas anteriores.

Por otro lado, en este contexto (Curry, 1951, págs. 34 - 35), una fórmula es una cosa abstracta, es decir, si bien debido a las reglas de formación tiene un sentido que nos indica qué tipo de fómula es y cómo se comporta en el sistema, esta carece, en un primer instante, de significado (Hunter, 1981, pág. 18). Retomando el ejemplo de las letras proposicionales, variables y constantes, una fórmula puede ser $p \wedge q$ o $a \times b$. En el primer caso sabemos que la operación y el tipo de argumentos encontrados nos hablan de una fórmula que puede hacer referencia a proposiciones, pero no sabemos a qué proposiciones específicamente se refiere. En el segundo caso, podemos encontrarnos ante una fórmula de la aritmética, por lo que el comportamiento de las constantes debe obedecer al de los números usados en dicho sistema, pero no nos da cuenta de números en específico. En ambos casos, pues, tenemos términos que tienen un sentido determinado, pero que no hacen referencia a significados concretos.

En general, existen dos tipos de fórmulas en los sistemas formales de carácter lógico: *atómicas* y *moleculares*. Las fórmulas atómicas son aquellas formadas por una única letra predicativa (con uno o más argumentos) o con una letra enunciativa. Algunos ejemplos de dichas fórmulas son las siguientes:

$$P^1a \quad Q^2ab \quad Q^3aaa \quad p \quad q$$

Por otro lado, las fórmulas moleculares son aquellas que no son atómicas, esto es, aquellas que además de letras enunciativas o predicativas, también está compuestas por operaciones proposicionales. Algunos ejemplos de dichas fórmulas son las siguientes:

$$\neg p \quad p \wedge q \quad p \vee q$$

Hasta este momento he presentado los componentes de un *lenguaje formal*, el cual es, al mismo tiempo una parte de un *sistema formal*. Para completar el objetivo de presentar la estructura de un *sistema formal*, en el siguiente apartado me ocuparé de exponer la parte restante: la axiomática (la cual se compone de *axiomas* y *reglas de trasformación*).

1.2.2. Sobre la parte axiomática: axiomas y reglas de transformación.

El segundo elemento del sistema formal está compuesto, como mencioné, por una parte axiomática, la cual, a su vez, de divide en dos partes más: *axiomas* y *reglas de transformación*. Estos dos componentes, son tomados convencionalmente como las proposiciones fundamentales de los sistemas formales.

1.2.2.1. Sobre los axiomas

Los axiomas son definidos, de manera muy general, como las proposiciones o fórmulas básicas en las que se fundamenta una gran cantidad de sistemas formales (aunque puede haber sistemas formales que no requieran de estos, como algunas versiones de la lógica de proposiciones). Los axiomas serán matemáticos o lógicos según el sistema en el que se encuentren, pero lo que tiene en común es que estos son las expresiones de las que se parte para llevar a cabo las *demostraciones* o *derivaciones* (términos que serán explicados más adelante).

Ahora bien, los axiomas pueden ser definidos de varias maneras. La manera más convencional de hacerlo es diciendo que son enunciados, proposiciones (o incluso fórmulas) que se aceptan porque su verdad es evidente. Tal es el el caso de los postulados encontrados en los *Elementos* de Euclídes (Euclídes, 1991, pág. 197). A manera de ejemplo, se encuentra los siguientes postulados:

1. Postúlece trazar una línea recta desde un punto cualquiera hasta un punto cualquiera.
2. Y el prolongar continuamente una recta finita en línea recta.

De manera más explícita, el primer postulado nos dice que podemos trazar una línea recta de un punto *A* a un punto *B* de la siguiente manera:

El segundo postulado nos dice que dicha recta puede se extendida en cualquiera de las dos direcciones. El caso es que ambos postulados son evidentes porque si trazamos las líneas como lo indican, entonces obtenemos figuras que podemos entender de manera inmediata. No necesitamos, pues, de una demostración compleja para poder entender estos enunciados. Además, debido a que no hay algo que niegue que podemos hacerlo así, entonces los aceptamos como verdaderos.

Sin embargo, en los sistemas formales no ocurre así porque, como mencionamos, los términos de los sistemas formales deben carecer de significado, esto es, en un principio no deben hacer referencia a ningún tipo de objetos (aunque estén destinados a trabajar con un tipo determinado de estos). Ahora bien, como los axiomas están formados con los términos primitivos del sistema, tampoco harán referencia a algún significado (Cassini, 2006, págs. 60 - 61). Son, pues, cosas abstractas que tienen un sentido gracias a las reglas de formación de fórmulas.

Dicho esto, los axiomas en este contexto deben definirse como subconjunto de fórmulas bien formadas de un sistema formal-axiomático. Éstas también se aceptan sin prueba, pero no debido a su evidencia (pues al carecer de significado, también carecen de ésta), sino que se eligen por convención, esto es, el creador del sistema axiomático es quien decide qué fórmulas serán o no axiomas de su sistema. Sin embargo, la elección de estas fórmulas no debe hacerse sin más, sino que debe hacerse pensando en que deben ser suficientes para poder demostrar todas las fórmulas verdaderas encontradas en el sistema y que hablen sobre aspectos relativos a las propiedades, relaciones y operaciones de los objetos que el sistema formaliza.

El conjunto de axiomas de un sistema puede o no ser finito. Si un sistema puede ser axiomatizado mediante un conjunto finito de fórmulas, entonces puede hacerse una lista explícita con todas y cada una de éstas. Por el contrario, cuando el sistema requiere de un número infinito de estos, es claro que no podemos dar una lista ordenada de todo el conjunto. En consecuencia, el sistema necesita un medio con el cual pueda representar este número infinito de axiomas: *esquemas de axiomas* (los cuales están formulados con metavariables[7]). Cada esquema es una representación de la forma que debe tener una fórmula para ser considerada axioma. Así, si suponemos un conjunto infinito de fórmulas y estas tienen la forma de tales esquemas, entonces serán axiomas del sistema. Por ejemplo, si nuestro esquema de axioma es $A \rightarrow A$, podemos sustituir A por $p \wedge q$ o $p \vee q$, o por un número infinito de fórmulas de este tipo para obtener un número infinito de axiomas de la forma $p \wedge q \rightarrow p \wedge q$, $p \vee q \rightarrow p \vee q$, etc. Cabe mencionar que el número de estos esquemas debe ser finito.

Por otro lado, no todos los conjuntos de axiomas son útiles para cualquier sistema formal, pues no permiten deducir todas las fórmulas verdaderas en cada uno de éstos. Dicho de otra manera, cada sistema formal necesita de su propio conjunto de axiomas porque cada uno se ocupa de demostrar fórmulas diferentes, y porque no todos los sistemas formales se ocupan del mismo tipo de objetos. Por

[7] Las *metavariables* son símbolos de un *metalenguaje* usados para abreviar y hablar sobre expresiones del *lenguaje objeto* (aspectos que serán tratados más adelante). Por ejemplo, una expresión del lenguaje objeto es la fórmula $p \wedge q$ y ésta puede ser abreviada con el símbolo metalingüístico A. A tiene el mismo valor de verdad que $p \wedge q$, la diferencia es que A es aún más abstracto (Garrido, 1974, págs. 54 - 55). Todos los símbolos del tipo de A son variables porque pueden representar cualquier fórmula o un conjunto de fórmulas del lenguaje objeto al que se refieren.

ejemplo, podemos ver que los axiomas de los números reales, usados en álgebra, no sirven para demostrar los teoremas de la lógica de proposiciones. E incluso dichos axiomas pueden no servir para fundamentar a la aritmética básica, porque, si bien hay ciertos axiomas semejantes, puede que algunos del álgebra no sirvan para demostrar teoremas de la aritmética y viceversa (aunque ambos sistemas se ocupen de objetos matemáticos). Como consecuencia de esto, existe la posibilidad de elegir y postular axiomas según el objetivo de los sistemas formales.

Sin embargo, puede existir equivalencia entre dos sistemas formales cuando ambos tienen el mismo conjunto de teoremas y cuando sus lenguajes resultan equivalentes, es decir, cuando sus teoremas son fórmulas que dicen lo mismo sobre un tipo de objetos y el lenguaje con el que forman todas sus expresiones tiene signos destinados a formalizar el mismo tipo de objetos.

Una característica más de los axiomas es la *independencia*. Existen dos tipos de independencia, el primero consiste en que un axioma es independiente de un conjunto de fórmulas del mismo tipo si no es consecuencia lógica de éste (Torres, 1999, pág. 16). En otras palabras, un axioma será independiente de un conjunto cuando sea imposible obtenerlo a partir de los otros axiomas pertenecientes a éste con la ayuda de las reglas de transformación (todos los aspectos relacionados con *reglas de transformación* y *consecuencia lógica*, serán explicados en los apartados siguientes).

Por otro lado, el segundo tipo consiste en que un conjunto de axiomas será independiente si cada uno de sus elementos es independiente de los otros axiomas que se encuentran en éste. Dicho en otros términos, un conjunto de axiomas será independiente si ninguno de sus axiomas puede obtenerse de los otros a partir de las reglas de transformación del sistema en el que se encuentra.

1.2.2.2. Sobre las reglas de transformación.

Las *reglas de transformación*, como mencioné, pertenecen a la parte axiomática y también son proposiciones elementales del sistema. Por tal razón, podemos entender que dichas reglas, al igual que los axiomas, deben ser aceptadas por convención y tienen el objetivo de hacer demostraciones y derivaciones. Estas reglas pueden representarse como expresiones formales, en el caso de la lógica proposicional, o como estructuras formales. Son, además, las proposiciones que nos indican los pasos que deben seguirse para que, con ayuda de los axiomas, las fórmulas verdaderas del sistema sean demostradas para convertirse en teoremas (Cassini, 2006, pág. 60). Es necesaria la existencia de por lo menos una regla de transformación en todo sistema formal, pero el número de la lista en la que son enumeradas puede no tener límite siempre y cuando sea finito –según entiendo, puede haber un gran número de reglas de transformación sii todas pueden ser explicitadas en la lista que les corresponde.

Cabe mencionar, además, que tales reglas forman parte del sistema, pues ellas nos indican cómo han de manipularse las fórmulas y, en este sentido, son una herramienta necesaria para la demostración[8].

Dichas reglas deben tener la característica de *corrección*, la cual hace que las premisas a las que son aplicadas conserven la verdad. Esto quiere decir que para que las reglas de trasformación sean correctas, deben hacer que fórmulas verdaderas se sigan de fórmulas verdaderas. Así, la corrección de las reglas nos asegura que si los axiomas son verdaderos, entonces las fórmulas verdaderas demostradas con estos también lo serán.

Una de las propiedades de los sistemas axiomáticos también es la corrección (y de hecho, esta se deriva de la corrección de las reglas de derivación): un sistema axiomático es correcto cuando las fórmulas deducidas de los axiomas son al mismo tiempo consecuencias lógicas de los mismos[9]. Es decir, un sistema será correcto cuando todas las fórmulas que son deducidas mediante las reglas de inferencia a partir de los axiomas, también son verdaderas bajo las interpretaciones que hacen verdaderos a dichos axiomas. Por tanto, de igual manera se puede decir que un sistemas es correcto si todos sus teoremas son verdaderos (esto, claro está, teniendo en cuenta que los teoremas son fórmulas que se siguen de los axiomas).

Esto puede explicarse de manera esquemática de la siguiente manera: "$\vdash$" es el símbolo que usamos cuando queremos indicar que una fórmula se obtiene de otra mediante reglas de trasformación (consecuencia sintáctica) y "$\vDash$" es símbolo que usamos para decir que las interpretaciones de un conjunto de fórmulas hacen verdadera a otra fórmula que es su consecuencia (consecuencia semántica). Γ es una metavariable usada para representar un conjunto de axiomas, A es la metavariable usada para representar las fórmulas cualquiera que pueden ser consecuencias o conclusiones de ese conjunto, y S es la letra con la que designamos a un sistema axiomático-formal. Por lo tanto, si para toda A ocurre que $\Gamma \vdash A$ y $\Gamma \vDash A$, entonces S es correcto.

---

[8] Un ejemplo de regla de transformación es el *Modus Ponendo Ponens* de la Lógica Proposicional, la cual se representa con el siguiente esquema: $(P \to Q), P, \therefore Q$, en el que *P* y *Q* representan letras de variable en la Lógica Proposicional y $\to$ es el símbolo del operador lógico de implicación. Una lectura de dicha regla puede ser esta: si tenemos que *P* implica *Q*, y además tenemos la afirmación de *P*, entonces podemos concluir *Q*. En otras palabras, esta regla nos indica que en todos los casos parecidos a los del ejemplo se puede hacer la misma inferencia. Además, dicha regla es correcta, pues si hacemos verdaderas a las fórmulas $(P \to Q), P$, entonces la conclusión *Q*, también será verdadera. *Cfr.* Garrido, 1974, para revisar las maneras en que se pueden asignar interpretaciones de valores de verdad a las fórmulas ejemplicadas. Cabe mencionar que esta regla sólo funciona en la lógica clásica.

[9] Una fórmula es consecuencia lógica del conjunto de axiomas de un sistema, si toda interpretación que haga verdaderas a las fórmulas de ese conjunto, también hacer verdadera a esa fórmula (Garrido, 1974, pág. 230). Todos los aspectos sobre *consecuencia lógica*, *interpretación*, *modelo*, *semántica* y *sintaxis* de un sistema, serán explicados en secciones posteriores.

1.2.2.3. Sobre los teoremas.

Hasta ahora, he mencionado las dos partes principales en la composición de un sistema formal-axiomático. Como hemos podido ver, el lenguaje sirve, básicamente, para enlistar todos los elementos que se usarán en un sistema formal y para indicar cómo estos elementos deben ser combinados para obtener nuevos términos llamados fórmulas. Una vez que se establece esto, es posible establecer axiomas, los cuales serán el fundamento de los sistemas. Los axiomas son el fundamento porque con estos y las reglas de transformación es posible llevar a cabo el objetivo de los sistemas formales: hacer demostraciones para obtener teoremas (Cassini, 2006, pág. 62).

Un teorema es una fórmula que afirma cuestiones acerca de los objetos con los que trabajan los sistemas formales. Comúnmente, estas cuestiones tienen que ver con sus propiedades, relaciones y operaciones. Dichas fórmulas se consideran como verdaderas por la relación existente entre el sistema y la teoría de dichos objetos, por lo cual son suscetibles de ser demostrables. Sin embargo, tales fórmulas sólo serán teoremas si existe una demostración. Cuando una fórmula se puede derivar de esta manera, esto es, cuando existe una demostración para ésta, se le llama *teorema derivable* o *demostrable*. Si tenemos un sistema formal que usa la operación de negación, entonces podemos definir un *teorema refutable*, esto es, una fórmula cuya negación es demostrada. Dicho de otra manera, si la negación de una fórmula A $(\neg A)$ tiene una demostración y A no la tiene, entonces A es refutable.

Debido a la corrección de las reglas de transformación, las interpretaciones que hagan verdaderos a los axiomas, también harán verdaderos a los teoremas. De igual manera, por esta misma propiedad, todas las características de los axiomas serán poseídas por los teoremas.

A propósito de los teoremas, Cassini dice lo siguiente (Cassini, 2006, pág. 62):

> "Los axiomas se consideran *fbf* deducibles de sí mismas (pues la reflexividad es una propiedad esencial de la relación de deducibilidad: toda fórmula se deduce de sí misma). Luego, todo axioma es también teorema. Así, el conjunto de los axiomas de un sistema está incluido en el de los teoremas; y a su vez el conjunto de los teoremas está incluido en el conjunto de las *fbf* de ese sistema. Casi siempre el conjunto de los teoremas de un sistema axiomático es infinito."

Con esto vemos, además, que los axiomas y teoremas parecen pertenecer al mismo tipo de fórmulas. Sin embargo, una diferencia que puedo señalar es que los teoremas, si bien se deducen de sí mismos al igual que los axiomas, también deben ser deducidos de otras fórmulas, que no son estos, mediante las reglas de derivación.

Por otro lado, podemos identificar dos tipos comunes de teoremas: a) aquellos que están compuestos únicamente por los términos primitivos de los sistemas en los que se encuentran (como los encontrados en algunos sistemas de lógica proposicional); y b) aquellos que se presentan como enunciados que dan cuenta de las propiedades de los elementos con los que trabaja el sistema formal en el que se encuentran. Ejemplos de los dos tipos de teoremas son los siguientes:

a) $\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$
b) Para todo número real a se da que $a = -(-a)$.

El primer teorema establece que de una fórmula negada, se sigue otra fórmula de implicación en la que el antecedente es la afirmación de la misma y el consecuente es una fórmula cualquiera. Además, podemos notar que la fórmula está constituida con metavariables, con lo cual podemos deducir que también existen esquemas de teoremas (como los esquemas de axiomas) y que existe la posibilidad de tener infinitos teoremas con esa forma. El segundo nos dice que todos los números reales son iguales al inverso aditivo de su inverso aditivo. En este caso, el teorema es construido con constantes, pues el objetivo es mostrar el comportamiento de los números reales.

Una vez dicho qué son los teoremas, es momento de decir cómo se relacionan con las *derivaciones* y *demostraciones*, pues dichos procesos se llevan a cabo con los axiomas y reglas de derivación.

1.3. Sobre la demostración.

En el apartado anterior, mencioné los componentes más básicos de un sistema formal-axiomático y algunas de las expresiones que fundamentan a los mismos de los mismos. Por tanto, en este apartado se mencionarán los elementos necesarios para llevar a cabo el objetivo de los sistemas axiomáticos: demostraciones. Cabe mencionar que dichos elementos tienen que ver con la parte semántica de los sistemas, esto es, con las interpretaciones, modelos y el concepto de consecuencia lógica, pues, como se verá más adelante, estos tienen un papel imprescindible en el objetivo de dichos sistemas, así como en el tema de los fundamentos de las matemáticas en general.

1.3.1. Sobre las interpretaciones y modelos de un sistema formal

1.3.1.1. Diferencia entre teoría intuitiva y sistema formal

Existen sistemas axiomáticos que no son formales (dichos sistemas también son llamados teorías), es decir, son sistemas que también enuncian sus elementos de manera similar a los sistemas formales, pero la diferencia es que sus términos y proposiciones elementales sí tienen contenido y de hecho éste puede resultar intuitivo –recordemos el ejemplo de la geometría euclideana mencionado en el apartado anterior- (Ladriere, 1969, págs. 55 - 61).

En tales teorías pueden formarse enunciados, de todos estos algunos son verdaderos o falsos. Los verdaderos son los axiomas y los teoremas. Al igual que en los sistemas formales, un teorema es un enunciado que puede deducirse de los axiomas o teoremas ya demostrados por medio de demostraciones.

Cuando se dice que estos elementos se dan de manera intuitiva, se quiere decir que apelan a objetos dados, es decir, los axiomas y los teoremas de las teorías intuitivas tienen un significado, en apariencia evidente, porque pretenden hacer referencia directa a objetos matemáticos concretos: números, conjuntos de números, figuras geométricas y las relaciones que puedan existir entre estos. La diferencia con los sistemas formales es que los elementos de éstos no tienen, en un inicio, significado, y cuando llegan a tenerlo éste es determinado por las reglas del sistema o porque se les pone en relación con los objetos de las teorías en cuestión (esto se explicará más adelante) y no porque dichos elementos sean objetos evidentes por sí solos.

Sin embargo, existen objetos análogos en ambos tipos de sistemas. Así, las nociones de *proposición* de los sistemas formales es análoga a la de *enunciado* de las teorías intuitivas, la *derivación* a la *demostración*[10], la *proposición derivable* a *enunciado cierto* y la *proposición refutable* a la de *enunciado falso*. La noción de *teorema*, como hemos visto, es la misma en ambos tipos de sistemas. Esto se debe a que, como se verá, los sistemas axiomáticos formales retoman la estructura de los objetos encontrados en tales teorías.

A partir de esto, deben hacerse específicas las nociones de *presentación*, *representación* e *interpretación* de un sistema. Esto, además de sentar las bases para explicar la demostración, nos ayudará a hacer más explícita la noción de sistema formal.

La *presentación* se refiere a la elección de símbolos con los que un sistema formará sus expresiones. Mediante esta elección, debe hacerse específico el sentido que estos tendrán. Normalmente tienen un sentido designativo, el cual les hace representar los términos primitivos y las operaciones del sistema. Es decir, cuando elegimos los símbolos con los que trabajará un sistema, entonces debemos especificar si estos representarán un operador o un término primitivo (y en este caso debemos especificar qué tipo de término es el que designarán). De igual manera, un símbolo puede considerarse como un objeto y no como una designación de éste. Sin embargo, esto ocurre sólo en las teorías intuitivas anteriormente mencionadas, no en los sistemas formales, pues en estos, como mencioné, los

[10] En este contexto usaremos otra distinción entre derivación y demostración.

símbolos sólo tienen el objetivo de designar la estructura de un objeto o un tipo determinado de objetos, pero no pueden considerarse objetos en específico[11].

Por otro lado, la *representación* de un sistema consiste en que se atribuya un sentido determinado a los símbolos de los términos primitivos del mismo. Esto significa que dichos términos se ponen en correspondencia con objetos perfectamente definidos. Tales objetos suelen ser aquellos que se utilizan en las teorías matemáticas intuitivas o los objetos lógicos que no han sido formalizados. Retomando el ejemplo de los teoremas mencionados en páginas anteriores, el símbolo A está determinado a representar términos proposicionales (como $p, q, r.$), los cuales, a su vez, están determinados a designar proposiciones, esto es, objetos definidos fuera del sistema que no han sido formalizados (como la proposición "los números son objetos" que puede representarse con p).

Como consecuencia de lo anterior, los teoremas, como son fórmulas armadas con estos símbolos, también cumplen con la correspondencia a una determinada clase de objetos. En el teorema "Para todo número real a se da que $a = -(-a)$" vemos que los símbolos involucrados hacen referencia a una determinada clase de objetos (los números reales) y aunque los símbolos no sean un número en específico, estos deben comportarse como tal, esto es, las operaciones y propiedades de los números reales también pertenecen a a. En suma, la representación de un sistema es una correspondencia biunívoca entre los símbolos de un sistema y una clase determinada de objetos.

En relación con lo anterior se encuentra la noción de *interpretación*, la cual se refiere a la correspondencia (no necesariamente isomórfica[12]) de las proposiciones elementales de un sistema con una determinada clase de objetos. Esto quiere decir que los axiomas de un sistema formal (fórmulas bien formadas sin contenido) pasan a ser representaciones de objetos que no pertenecen a ese sistema, sino

---

[11] Esto se debe a que uno de los objetivos de los sistemas formales es representar, a través de símbolos, las relaciones y las propiedades que pueden tener los objetos de una teoría intuitiva, pero sin referirse, específicamente, a los objetos que ésta estudia.

[12] El isomorfismo se explica de la siguiente manera: supongamos que A y B son conjuntos de objetos, R y S son relaciones entre los objetos de dichos conjuntos, respectivamente, y h representa el isomorfismo entre estos dos conjuntos. Por lo tanto, si h es un isomorfismo entre los pares $\langle A, R\rangle$ y $\langle A, R\rangle$, entonces h establece una correspondencia entre los elementos de A y B, de manera que los elementos de A se relacionan por R del mismo modo que los elementos correspondientes en B se relacionan por S. Por lo tanto, si $\langle A, R\rangle$ y $\langle A, R\rangle$ resultan ser isomorfos entre sí, R se comporta del mismo modo en A que S en B (Badesa, Jané y Jansana, 2007, pág. 113).

En el contexto en cuestión, lo anterior querría decir que si los sistemas formales y las teorías intuitivas fueran conjuntos de proposiciones isomorfas en entre sí, encontraríamos relaciones en ambos de manera que los elementos en uno se comportarían de misma manera que lo hacen en el otro. Sin embargo, esto puede no ocurrir, con lo cual podemos entender que puede haber relaciones en las teorías intuitivas que no se encuentran en los sistemas formales axiomáticos. Que un sistema sea isomorfo con los objetos que pretende formalizar, depende de si el lenguaje de dicho sistema es suficiente para este fin.

que pertecen a otros sistemas o teorías en los que dichos objetos hacen verdaderas a sus expresiones. Lo mismo pasa con los símbolos usados para las operaciones: estos son operaciones encontradas en las estructuras de los objetos de las teorías intuitivas.

Como consecuencia de lo anterior, los axiomas pueden representar propiedades y elementos encontrados entre números, conjuntos de números, objetos geométricos y demás que ya son aceptados como verdaderos, y los símbolos de operadores tendrán el mismo significado y comportamiento en el sistema formal que en las teorías intuitivas que representan.

Debido a la corrección de las reglas de transformación, podemos pensar que al hacer derivaciones, esto es, al aplicar dichas reglas a los axiomas con el objetivo de obtener fórmulas, estas *fbf* heredarán la verdad de los axiomas y también nos hablarán de los objetos representados por estos. Así, por ejemplo, si un axioma nos habla sobre los números reales o sobre los objetos de la aritmética, sus teoremas también lo harán siempre y cuando las reglas aplicadas a éste, y el sistema en general, cumplan con tener la corrección. Sin embargo, debido a la falta de isomorfismo entre sistemas formales y teorías intuitivas, esto puede no ser así: puede pasar que un enunciado demostrado en una teoría intuitiva no lo sea en el sistema formal.

Por otro lado, la falta de isomorfismo puede darse en otros aspectos como las reglas de transformación (que también son proposiciones elementales) y las operaciones, de modo que en una teoría intuitiva haya operaciones y reglas de transformación que no sean expresables en los sistemas formales.

De manera esquemática, esto se da de la siguiente manera: supongamos que S es un sistema formal, Γ es el conjunto de sus axiomas, tal que $\Gamma = \{P_1, P_2, P_3\}$. Por otro lado, tenemos una teoría intuitiva T, en la que Δ es el conjunto de enunciados verdaderos acerca de sus objetos, de manera que $\Delta = \{E_1, E_2, E_3\}$. Supongamos además que las operaciones y las reglas de transformación son las mismas en ambos sistemas. Así, si existe una interpreación para S en la que se le haga corresponder con los objetos de T, entonces P_1, P_2, P_3 serán análogos a E_1, E_2, E_3, porque ambos conjuntos de expresiones se refieren a los mismos objetos. Ahora, supongamos que mediante las operaciones y las reglas aplicadas a los enunciados de T obtenemos E_4 (un teorema de T). Análogamente, podemos podemos formar en S la proposición P_1, esto es, el teorema análogo de T en S. Sin embargo, debido a la falta de isomorfismo entre los objetos de ambos sistemas –debido a que los objetos de S pueden no comportarse igual que los de T-, es posible que P_4no sea derivable en S.

Hay otra noción que debo mencionar porque es similar a la de sistema formal, a saber, la noción de cálculo. El cálculo es parecido al sistema formal, la diferencia es que este último resulta ser más abstracto. El cálculo tiene elementos similares a los de este tipo de sistemas: 1) una lista de símbolos; 2) un conjunto de reglas de formación encargadas de especificar las hileras que serán fórmulas bien formadas; y 3) un conjunto de reglas de transformación que especifican qué *fbf's* se consideran válidas. Estas suponen una lista de fórmulas bien definidas –los axiomas- y reglas formuladas de manera recurrente que nos dicen cómo obtener fórmulas bien formadas a partir de los axiomas.

Como podemos observar, es difícil hacer una diferencia clara entre la noción de cálculo y la noción de sistema. Sin embargo, puedo decir que el cálculo parece hablarnos sólo de estructuras, es decir, cuando se necesita que se especifiquen únicamente los símbolos y fórmulas válidas, no es necesario que se les ponga en relación con cierto tipo de objetos (como se hace con el sistema formal). El cálculo, pues, parece centrarse únicamente en la manera en la que unas fórmulas se siguen de otras y no en la relación de sus expresiones con los objetos de las teorías matemáticas intuitivas.

La última noción relativa a la teoría intuitiva y a los sistemas formales es la noción de *modelo*. Esta noción está ligada con la de *interpretación*, pues se trata de un conjunto T de elementos (posiblemente pertenecientes a una clase de objetos o teoría intuitiva) que se encuentran en correspondencia con los elementos de un sistema formal S. Para realizar esta correspondencia se necesita lo siguiente:

1) Hacer corresponder los enunciados construidos con los componentes de *T* con las proposiciones del sistema *S*.
2) Debe ser posible determinar si un enunciado específico es verdadero o falso independientemente del sistema *S*.
3) A toda proposición derivable de *S* debe corresponder un enunciado verdadero de *T*.

Para emparejar un sistema formal con un modelo son necesarios los siguientes elementos:

I. Una familia de campos. Cada miembro de esta familia tienen el objetivo de corresponder una de las categorías de los símbolos del sistema. Existen dos tipos de campos: a) *individuos*, cuyos elementos son los objetos considerados como individuos; y b) *campos funcionales*, los cuales tienen como elementos a las funciones.
II. Una función (metateórica) de correspondencia, encargada de asociar todos los componentes del sistema con los elementos del modelo.

III. Una regla de interpretación, la cual hace posible determinar el valor de verdad de cada enunciado formado con los elementos del modelo.

Un *campo de interpretación* puede ser definido como una familia de dominios, de modo que se pueda hacer corresponer a toda proposición de S un enunciado formado con los elementos de tales dominios. Respecto de los operadores proposicionales, puede existir un dominio funcional que les corresponda o una regla que indiquen cómo deben interepretarse. Dicho en otros términos, los campos pueden ser entendidos como grupos de objetos de diferente tipo, pueden, por ejemplo ser el conjunto de los números naturales, el conjunto de operaciones llevadas a cabo con estos, operaciones de otro tipo de objetos, etc. Es suficiente con el campo comprenda dichos objetos sin que estos se encuentren en una teoría intuitiva.

En lo que respecta a los tipos de campos a) es el campo de los individuos, estos pueden ser representados con constantes y pueden ser sutituidos en el lugar de las variables encontradas en las expresiones construidas con predicados. Por ejemplo, en la fórmula $\forall x P$, P es un predicado mientras que x es una variable. Cuando sustituimos la variable por una constante cualquiera y eliminamos el cuantificador obtenemos Pa. a representa un individuo y la expresión completa nos dice que dicho individuo tiene la propiedad designada por el predicado (Garrido, 1974, págs. 129 - 131). En general, los individuos de un sistema formal, visto desde esta perspectiva, son aquellos objetos a los que se pueden asignar los predicados. Así, el campo en cuestión comprende a todos los individuos que se puedan relacionar de la misma manera con los predicados.

Por otro lado b) se refiere a las operaciones y algunos otros predicados encontrados en el sistema. Asimismo, no debe incluir necesariamente a las operaciones proposicionales. Lo que será interpretado en este caso como verdadero o falso son las operaciones involucradas en los sistemas formales.

La función metateórica se refiere a la manera en que se asignarán los valores de verdad a cada uno de los operadores proposicionales. Es decir, cada operador proposicional será verdadero o falso según los valores de verdad de cada una de las proposiciones que se relacionen con éste.

La regla de interpretación indica la manera en que deben interpretarse los operadores proposicionales. Esto puede hacerse según su significado intuitivo. Sin embargo, se puede hacer que los operadores proposicionales correspondan a un campo constituido por funciones definidas de manera adecuada. Estas funciones son leyes encargadas de asociar proposiciones o parejas de proposiciones con cualquiera de los valores de verdad *verdadero* o *falso*[13].

Un ejemplo de esto puede ser la interpretación de la operación de *disyunción* de la lógica proposicional. Dicha conectiva se encuentra en correspondencia con la siguiente ley:

- Dos proposiciones verdaderas involucradas en una disyunción harán verdadera a esta conectiva.
- Dos proposiciones falsas harán falsa a la disyunción.
- Una proposición falsa y otra verdadera harán verdadera a la disyunción.

Para completar el ejemplo tenemos la siguiente tabla de verdad:

p	$\vee$	***q***
1	1	1
1	1	0
0	1	1
0	0	0

De manera similar, se hará la asignación de los valores de verdad a las conectivas restantes de dicha lógica. Y la asignación de valores de verdad a los operadores proposicionales de los demás sistemas también obedecerá a leyes similares.

El último aspecto en relación con lo dicho es el *isomorfismo* de los modelos. Lo modelos son isomorfos si existe una correspondencia biunívoca entre sus respectivos campos, esto es, a cada elemento de un modelo le corresponde un único elemento del otro. Así, si en uno de los modelos existen enunciados verdaderos formados con sus elementos, entonces, como el otro modelo es análogo al primero, los enunciados del segundo también serán verdaderos (y esta relación se da de manera recíproca).

Como pudimos ver, el objetivo de todos los elementos mencionados es poner en correspondencia a los sistemas formales con los objetos objetos encontrados en estas teorías matemáticas. Debo aclarar que lo que se formaliza en este contexto son las extructuras de los objetos de las teorías matemáticas, pero no éstas. Puede, sin embargo, existir ciertas similitudes entre las teorías y los sistemas que servirán

[13] Existe otra manera de dar una interpretación (y con esto un modelo) a los operadores proposicionales, la cual consiste únicamente en asignar los símbolos de los valores de verdad (en este caso 1 y 0) a los símbolos proposicionales relacionados por los operadores. El objetivo de esto es obedecer las funciones y las reglas de interpretación para observar el valor de verdad de los operadores sin la necesidad relacionar estos elementos con una teoría o con una clase de objetos. Esto, además, sirve para ver si una fórmula se sigue de otra.

para que los sistemas formalicen las estructuras y tengan una correspondencia con los objetos en cuestión, pero esto no implica que los sistemas formalicen las teorías.

En consecuencia, si decimos que los axiomas y teoremas de un sistema formal nos hablan de objetos de teorías intuitivas, entonces los procesos aplicados a tales objetos formales también nos hablarán de los objetos intuitivos. Así, las derivaciones y demostraciones hechas con las fórmulas de los sistemas también hablarán de los objetos de las teorías matemáticas.

Con esto, de manera un tanto general, podemos observar que las demostraciones y derivaciones sirven para ver cómo los teoremas se siguen de los axiomas, lo cual, teniendo en cuenta que existen ciertas analogías entre teorías intuitivas y los sistemas formales –debido a todo lo dicho acerca de modelos e interpretaciones-, también nos permite saber cómo se siguen los teoremas de los axiomas de dichas teorías.

1.3.2. Sobre la noción de consecuencia lógica.

Ya he hablado sobre la noción de consecuencia lógica, pero ahora debo retomarla para ponerla en relación con lo dicho acerca de las interpretaciones, axiomas y teoremas, y, posteriormente, con el tema de las demostraciones y derivaciones.

La consecuencia lógica se define de la siguiente manera: supongamos que Γ es un conjunto de axiomas de un sistema formal-axiomático y A representa una fórmula que suponemos como consecuencia de dicho conjunto. Si decimos que efectivamente A es consecuencia de Γ, entonces estamos afirmando que toda interpretación que haga verdaderas a las fórmulas de Γ, también hará verdadera a A (Garrido, 1974, págs. 230 - 232).

En relación con lo mencionado anteriormente, si decimos que existe una correspondencia entre un determinado tipo de objetos y un sistema, es decir, si hay una correspondencia entre los axiomas contenidos en un conjunto Γ con la estructura de los objetos de una teoría, y esta correspondencia hace verdadero al conjunto completo de axiomas en cuestión, entonces toda fórmula que se siga de este conjunto también será verdadera. Por lo tanto, si A es un teorema obtenido de Γ, entonces los valores de verdad obtenidos con la correspondencia de los axiomas de ese conjunto, también harán verdadero a A.

A este tipo de consecuencia lógica, como ya mencioné, se le representa con el símbolo "$\vDash$" y se le llama comúnmente *consecuencia semántica* porque se refiere a los significados –o valores de verdad- asignados a las fórmulas mediante las correspondencias mencionadas.

Existe otro tipo de consecuencia, que también mencioné, llamado *consecuencia sintática* o *consecuencia formal* y se representa con el símbolo "$\vdash$". Recibe ese nombre porque se refiere a cuando una fórmula es deducible o derivable a partir de un conjunto inicial de fórmulas mediante la aplicación de reglas de transformación. Si llevamos esto al caso aquí presente, entonces tenemos que decir que A es sintáctica o formalmente deducible de Γ si podemos obtener tal resultado mediante la aplicación de las reglas de transformación del sistema axiomático en el que se encuentran.

Ahora bien, debido a la corrección de las reglas de transformación, la cual hace que la verdad de las fórmulas se herede desde las fórmulas iniciales a la conclusión, es posible que la verdad que obtienen los axiomas cuando se les asigna un modelo se conserve en los teoremas que se obtengan de estos mediante la aplicación de las reglas.

Asimismo, existen fórmulas que no se deducen de otras (más que de sí mismas) porque representan leyes lógicas. Tales fórmulas se representan de la siguiente manera: $\vdash A$. Las verdades lógicas, las fórmulas que son verdaderas bajo toda interpretación se representan así: $\vDash A$.

Si relacionamos lo anterior con los axiomas y teoremas, podemos ver que los axiomas y las reglas pueden ser leyes lógicas porque no necesitan ser deducidos de otras fórmulas pues, como son aceptados como los fundamentos de los sistemas por convención, no hay algo anterior a estos de donde puedan seguirse. Esto no pasa con los teoremas porque estos son deducidos a partir de los axiomas. Sin embargo, tanto teoremas como axiomas pueden ser verdades lógicas si pensamos que todas las interpretaciones que se obtienen con una correspondencia hacen verdaderos a los axiomas y los teoremas se siguen de estos.

Hasta aquí, es posible pensar que existe una relación estrecha entre ambos tipos de consecuencia, a tal grado que podríamos afirmar que una fórmula que es consecuencia semántica de un grupo de fórmulas también es consecuencia sintáctica de las mismas. Sin embargo, debo aclarar que esto no es así sino únicamente en los lenguajes de primer orden, por ejemplo, en la lógica proposicional y en la lógica cuantificacional que no cuantifica los predicados (Ladriere, 1969), pues en éstas, una fórmula que es sintácticamente derivable de otras, también es verdadera bajo toda interpretación de las mismas. No ocurre lo mismo en los lenguajes de orden superior, pues puede haber sistemas armados con esos lenguajes en los que una fórmula sea consecuencia semántica de un conjunto de fórmulas, pero puede que no sea formalmente deducible. Así, puede haber fórmulas cuyos valores de verdad correspondan a los de los axiomas, pero puede que éstas no sean deducibles mediante las reglas de transformación.

Dicho todo lo anterior, es momento de mencionar cuáles son las diferencias entre deducción, derivación y demostración.

1.3.3. Sobre la diferencia entre deducción, derivación y demostración.

En primer lugar, debo mencionar que la distinción entre *deducción* y *derivación* resulta ser un tanto trivial debido a que en la mayoría de las fuentes consultadas dichos términos se usan sin distinción. Por tanto, aquí las usaré de la misma manera. Sin embargo, la distinción entre *derivación* y *demostración* parece estar bien definida. Anteriormente, mencioné que dicha distinción reside en que la deducción pertenece a los sistemas formales, mientras que la demostración se encuentra en el campo de las teorías intuitivas. Empero, dicha distinción también resulta problemática porque el término "demostración" también es usado con frecuencia en el terreno de los sistemas formales. Por lo tanto, he decido tomar otra distinción en la que la *deducción* es el nombre que se le da al proceso por el cual se obtienen unas fórmulas a partir de otras mediante el cálculo (dentro de esta categoría se encuentra la *deducción formal* o *derivación*). Ésta es una definición general, mientras que, por otro lado, la *demostración* se refiere a una versión más específica de este último proceso, es decir, con ésta también se obtienen unas fórmulas a partir de otras, la diferencia es que esta última usa axiomas mientras que la *deducción formal* puede o no usarlos. Para hacer esto más claro, primero debo explicar qué es la *deducción formal* y después qué es la *demostración*.

La *deducción formal* (Garrido, 1974, págs. 61 - 74) es una secuencia finita de fórmulas en cuyo desarrollo se debe formar una columna, en la que una fórmula se encuentra debajo de otra. Con la *deducción formal* primero se encuentran fórmulas supuestas de las cuales se obtienen supuestos provisionales mediante inferencias inmediatas[14] o mediante introducción (suposición). La obtención de todas estas fórmulas se hacen para establecer una última fórmula llamada *conclusión*. Las fórmulas encontradas en las derivaciones pueden ser: a) un supuesto inicial; b) un supuesto provisional; o c) supuestos o subsidiarios.

Los a) supuestos iniciales son fórmulas consideradas de manera hipotética como dadas desde el principio de la derivación. Existen ocasiones en que el conjunto de fórmulas iniciales puede reducirse a

[14] Existe *inferencia inmediata* cuando se obtiene una fórmula a partir de otra u otras mediante la aplicación de reglas de inferencia.

una sola fórmula. Estas fórmulas son las primeras que se encuentran en una derivación y se aceptan como los supuestos de los que se partirá para obtener otras fórmulas.

En lo que respecta a b) los supuestos provisionales, tenemos que estas son líneas[15] que proceden de líneas anteriores por obra de una regla de transformación. Estas líneas, pues, son fórmulas obtenidas de lo que ya tenemos dado en la derivación, esto es, fórmulas que pueden obtenerse de las anteriores.

El tipo c) se refiere a una fórmula que se deriva lógicamente de fórmulas anteriores por medio de inferencia inmediata. Estas líneas deberán cancelarse antes del establecimiento de la conclusión. De manera más específica, puedo decir que estas fórmulas son supuestos hechos durante la derivación para poder obtener otras fórmulas necesarias para continuar con este procedimiento. Al ser supuestos, tales fórmulas se aceptan sin más, esto es, se aceptan sin necesidad de ser obtenidas de otras.

Existen convenciones sobre estos tres tipos de líneas. La primera nos dice que cada una de las fórmulas encontradas en la columna de derivación debe ir numerada por la izquierda para darles un orden.

Las fórmulas del tipo a) deben llevar un guión largo a la izquierda para indicar que se trata de un supuesto inicial. Por ejemplo, si A es un supuesto inicial, entonces deberá encontrarse en la columna de la siguiente manera: —1 A. El significado de la expresión anterior es que A es supuesta como fórmula.

Para las líneas del tipo b) debe hacerse un comentario a su derecha, en el cual se indica de manera abreviada la regla (o reglas) de inferencia mediante la cual se obtuvo y el número de las líneas a las que dicha regla fue aplicada. Por ejemplo, si tenemos una columna de la siguiente forma:

1. $A \rightarrow B$
2. A

y de esas dos fórmulas obtenemos *B*, entonces deberemos indicar la línea en la que se encuentra esta fórmula –así como las fórmulas y la regla que intervinieron en su aparición- de la siguiente manera:

—1. $A \rightarrow B$
—2. A
3. B MPP, 1 y 2.

Las líneas del tipo c) se marcarán con el siguiente símbolo $\ulcorner A$. El símbolo $\ulcorner$ indica que se abre una deducción subsidiaria de la deducción principal y se le llama símbolo de descarga. Asimismo, existe otro símbolo:

[15] A los lugares donde se encuentran fórmulas obtenidas a partir de otras también se les llama *líneas de derivación*.

que indica la cancelación de dicha deducción. El objetivo de esta deducción es que, con ayuda del supuesto, se pueda obtener una fórmula necesaria para la deducción principal. Esta deducción puede o no encontrarse dentro de la columna principal y, en este sentido, debe tener su propia numeración. Los símbolos mencionados se usan para indicar los bordes de un paréntesis, los cuales indican, como mencioné, la apertura (o descarga) y la cerradura (o cancelación) de este proceso. Por ejemplo, podemos pensar en un escenario en que existe una regla de inferencia que nos dice que si de un supuesto se sigue una contradicción, entonces se puede obtener la negación de ese supuesto. Esto se puede esquematizar de la siguiente manera:

•
•
•
n A
•
•
•
$n + m$ $B \wedge \neg B$
$n + m + 1$ $\neg A$

Las letras n y m simbolizan números naturales y la suma de ambos indica el número del lugar que ocupan las fórmulas en la sucesión. $n + m + 1$ marca otra línea de la sucesión. Lo encontrado dentro del paréntesis es la deducción supuesta (su descarga y cancelación), y la nueva línea de sucesión nos indica la fórmula obtenida con la cual debe finalizarse esta deducción provisional.

Un ejemplo de deducción formal en la lógica proposicional es el siguiente:

—1. $q \to \neg r$

—2. $p \wedge r$

—3. $q \vee t$

4. p } Simp., 2
5. r }

6. $\neg q$ MTT., 5 y 1

7. t MTP., 6 y 3

Dicho esto, debo mencionar qué es la *demostración*. Esta puede ser definida (Cassini, 2006, pág. 62) como una secuencia finita de fórmulas bien formadas hecha con los elementos de un sistema axiomático, en la cual cada una de estas es un axioma, un teorema ya demostrado o una *fbf* deducible de las fórmulas anteriores en la sucesión. Todas las fórmulas obtenidas de los axiomas deben seguirse de la aplicación de las reglas de transformación a estos. La última fórmula obtenida mediante este proceso, esto es, la conclusión, se llama *teorema* (es por esto que sólo las fórmulas demostrables se llaman teoremas).

Enunciaré las demostraciones de los axiomas mencionados a manera de ejemplo. Primero se encuentra la demostración del teorema del sistema axiomático de lógica proposicional: $\vdash \neg A \to (A \to B)$. Para llevar esto a cabo, debemos suponer el siguiente conjunto de axiomas:

A1 $\vdash A \to (B \to A)$

A2 $\vdash \big(A \to (B \to C)\big) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

A3 $\vdash (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$

A4 $\vdash (A \to Pa) \to (A \to \forall x Px)$

A5 $\vdash \forall x Px \to Pa$

Hecho esto, la demostración es la siguiente:

Basta con deducir

$$\neg A \vdash A \to B$$

1. $\neg A$ Suposición
2. $\neg A \to (\neg B \to \neg A)$ A1
3. $\neg B \to \neg A$ MP 2, 1
4. $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$ A3
5. $A \to B$ MP 4,3

Por el teorema de deducción[16] se sigue que $\vdash \neg A \to (A \to B)$.

Ahora es momento de enunciar la demostración para el teorema sobre números reales: Para todo número real a se que $a = -(-a)$. Primero, igual que el caso anterior, debemos suponer un conjunto de axiomas (http://www.matem.unam.mx/quico/axiomascampo.pdf, sin autor, revisado en Enero de 2017):

[16] El *teorema* o *regla* de *deducción* dice que si tenemos la negación de una fórmula, entonces podemos deducir que la afirmación de esa fórmula implica otra.

Axiomas de las operaciones de números reales

	Suma o adición	Producto o implicación
Cerradura	Para cualesquiera *a* y *b* números reales *a* + *b* está en $\mathbb{R}$	Para cualesquiera *a* y *b* números reales $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ está en $\mathbb{R}$
Asociatividad	Para cualesquiera *a*, *b* y *c* números reales (*a* + *b*) + *c* = *a* + (*b* + *c*)	Para cualesquiera *a*, *b* y *c* números reales $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})$
Conmutatividad	Para cualesquiera *a* y *b* números reales *a* + *b* = *b* + *a*	Para cualesquiera *a* y *b* números reales $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$
Existencia de elemento neutro	Existe 0 número real tal que para cualquier *a* número real *a* + 0 = a	Existe 1 número real ($1 \neq 0$) tal que para cualquier *a* número real $\boldsymbol{a} \cdot \mathbf{1} = \boldsymbol{a}$
Existencia de elemento inverso	Para cualquier *a* número real existe (-*a*) número real tal que *a* + (-*a*) = 0	Para cualquier *a* número real distinto de cero existe $\boldsymbol{a}^{-\mathbf{1}}$ número real tal que $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}^{-\mathbf{1}} = \mathbf{1}$
Distribitividad	Para cualesquiera *a*, *b* y *c* números reales se tiene que $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$	

La demostración es la siguiente:

1. A partir del axioma del elemento inverso sucede que existe un número real –*a*, de modo que a + (-*a*) = 0.
2. Ya que $-a$ es un número real, una vez más por el axioma de existencia del inverso aditivo, existe $-(-a)$ número real, de modo que $(-a) + (-(-a)) = 0$.
3. En consecuencia, resulta que $a + (-a) = 0 = (-a) + (-(-a))$.
4. Por el axioma de la conmutatividad para la adición resulta $(-a) + a = (-a) + (-(-a))$.
5. Sumando a en ambos lados de la igualdad obtenemos: $a + ((-a) + a) = a + ((-a) + (-(-a)))$.
6. Por axioma de asociatividad para la suma: $((-a) + a) + a = (a + (-a)) + (-(-a))$.
7. Por axioma de existencia del inverso aditivo se tiene que: $0 + a = 0 + (-(-a))$.
8. Por el axioma del neutro aditivo: $a = -(-a)$.

Hecho esto, cabe mencionar que la mayoría de las demostraciones de la lógica y las matemáticas son hechas de este modo. Sin embargo, puede haber otras en las que, como ya mencioné, también se usen teoremas ya demostrados. Esto, al mismo tiempo, no descarta que haya demostraciones en otros sistemas que difieran de éstas.

Ahora bien, podemos observar que en ambas demostraciones se hace uso de expresiones bien formadas con los elementos de los respectivos sistemas, las cuales carecen de significado y obedecen los sentidos que les son asignados por los sistemas en los que se encuentran. En los pasos número 1 de cada demostración vemos que, al igual que en la deducción formal, se supone una fórmula inicial para comenzar con dicho proceso[17]. En la demostración del teorema de la lógica proposicional, podemos observar la presencia de las reglas de transformación de dicho sistema, mientras que en el teorema de números reales además de la aplicación de los axiomas también encontramos la intervención de operaciones matemáticas (como la suma). Podemos ver en ambos casos que si bien los axiomas no son reglas de transformación, sí nos ayudan a obtener fórmulas necesarias para seguir con las respectivas demostraciones –la diferencia entre axiomas y reglas es que los axiomas son fórmulas bien formadas del sistema y las reglas son una especie de órdenes o leyes que nos dicen qué hacer con las fórmulas encontradas en la línea de derivación.

Con todo esto podemos observar, primero, que la demostración es una especie de deducción formal porque, de la misma manera, usa supuestos iniciales y requiere de una columna de derivación que tiene líneas de fórmulas a las que se aplican reglas de transformación o inferencia. En segundo lugar, podemos ver que la diferencia entre demostración y deducción reside en el hecho de que la primera trabaja con axiomas y la segunda no. Además, la demostración se ocupa de mostrar los pasos mediante los cuales un teorema se sigue o se deriva de un conjunto de axiomas mientras que la deducción se ocupa de mostrar cómo fórmulas cualquiera se siguen de otras fórmulas supuestas que no son axiomas, es decir, son fórmulas bien formadas con un lenguaje formal que no son aceptadas como axiomas en un sistema. Debo mencionar, además, que la deducción formal se encuentra más comúnmente en sistemas formales no-axiomáticos, como es el caso de la lógica proposicional usada en los cursos comúnes de lógica (cfr. Hunter, 1981).

Asimismo, se pretende que tanto la deducción como la demostración obedezcan el concepto de consecuencia lógica tanto semántica como sintácticamente. Por ejemplo si en

—1. $q \rightarrow \neg r$
—2. $p \wedge r$
—3. $q \vee t$
4. p } Simp., 2
5. r }
6. $\neg q$ MTT., 5 y 1
7. t MTP., 6 y 3

[17] Además, en lugar del guión largo que se usa para indicar las suposiciones de las deducciones, en las demostraciones indicamos explícitamente con una palabra las fórmulas supuestas.

damos una interpretación de modo que las fórmulas 1 – 3 sean verdaderas, entonces la conclusión t también lo será debido a la corrección de las reglas de inferencia. Lo mismo pasa con los axiomas, pues si se hace una correspondencia entre éstos y un determinado tipo de objetos, entonces estos serán verdaderos y por la corrección de las reglas de transformación del sistema en el que se encuentran, los teoremas demostrados a partir de los axiomas también serán verdaderos.

Por último, cabe mencionar que tanto las deducciones formales como las demostraciones tienen la forma $P \rightarrow Q$, en donde P representa el conjunto de supuestos iniciales o el conjunto de axiomas a usar en la demostración (que también pueden ser llamados hipótesis), y Q representa la conclusión obtenida mediante el cálculo.

También pueden encontrarse estructuras como $P \rightarrow Q_1, Q_1 \rightarrow Q_2, Q_2 \rightarrow Q_3, Q_3 \rightarrow Q_n, \ldots Q_n \rightarrow Q$ donde P vuelve a representar un conjunto de fórmulas bien formadas iniciales y Q_n representa un número finito de conclusiones diferentes de Q, pero que son necesarias para obtenerla. En el caso de la deducción formal, se trata de fórmulas obtenidas de P mediante inferencia inmediata que se usan para llegar a Q. En cuanto a la demostración, Q_n representa un número finito de teoremas ya demostrados necesarios para llegar a Q que es el teorema final o demostrado[18].

1.3.4. Sobre el objetivo del sistema formal.

Al principio mencioné que un sistema de cualquier tipo es un conjunto de partes en el que cada una desempeña un objetivo secundario con miras a lograr el objetivo general del sistema. Un sistema formal con axiomas parece construirse con la misma idea. En este caso, la parte lingüística se encarga de formar las expresiones básicas con las cuales trabajará el sistema.

La parte de las interpretaciones nos ayuda a poner los sistemas formales en relación con objetos de las teorías matemáticas con el objetivo de que estos puedan ser representados en los sistemas formales. Al mismo tiempo, esta correspondencia ayuda a las expresiones construidas con el lenguaje a tener valores de verdad.

La parte axiomática, como vimos, interviene en la demostración, esto es, una vez que se construyeron las proposiciones fundamentales del sistema mediante el lenguaje y se les ha dado un significado, es posible derivar fórmulas verdaderas de los axiomas para ver si los primeros se siguen de los segundos, esto es, para ver si tales fórmulas son consecuencia sintática y semántica de los axiomas y

[18] Básicamente, este esquema hecho con metavariables nos dice que las demostraciones y deducciones tienen forma de *Modus Ponens*.

se convierten, de este modo, en teoremas. Esto, además, funciona para observar los pasos y fórmulas involucradas en esta obtención.

Así, el objetivo de los sistemas formales es, entonces, dar cuenta de la manera en que fórmulas verdaderas se siguen de los axiomas. Dicho de otra manera, dado que en un sistema formal axiomático se hacen explícitos los elementos, relaciones y procesos llevados a cabo con sus componentes, cuando hacemos que objetos matemáticos correspondan a estos elementos, también es posible hacer explícito si los si las fórmulas que representan la estructura de estos objetos se siguen de los axiomas y son, por lo tanto, teoremas.

Por otro lado, para que este objetivo pueda ser llevado a cabo, se necesita de una *metateoría*. Esta establece ciertas características que a los sistemas formales les permiten funcionar de manera correcta. Es, pues, una especie de lenguaje ocupado de hablar de los componentes de un sistema formal. Este aspecto se explicará en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO II: SOBRE LAS PROPIEDADES DE LOS SISTEMAS FORMALES

Introducción

Una vez mencionados los componentes de un sistema formal, es momento de mencionar el medio que nos hará posible hablar sobre las propiedades de dicho sistema, a saber, la *metateoría*. Por tanto, en este capítulo mencionaré la distinción entre *lenguaje-objeto* y *metalenguaje*, para mostrar cómo con el *metalenguaje* es posible hablar de las propiedades del *lenguaje-objeto*. Posteriormente, mencionaré las nociones de *sintaxis* y *semántica*, así como la relación que existe entre éstas y la metateoría. Por último, mencionaré las siguientes características de los sistemas formales: 1) *consistencia*; 2) *completud*; 3) *decidibilidad*; y 4) *categoricidad*. El objetivo de mencionar estas características es mostrar, de manera un tanto general, que la metateoría es la que nos permite hablar de los sistemas y sus propiedades, y que, en cierto sentido, es quien otorga dichas cualidades al sistema.

El objetivo principal de este capítulo es hablar de las propiedades de los sistemas formales y de la *metateoría* para mostrar cómo podemos encontrarlos en el sistema ideado por Gödel en su artículo de 1933. Además, cabe mencionar que haré énfasis en la consistencia, pues es el aspecto sobre el que los teoremas de Gödel fueron hechos y porque el objetivo principal de esta tesis es mostrar que la consistencia es una propiedad metateórica y no un objeto matemático.

2. Sobre la *metateoría* de un sistema formal.

2.1. Sobre Lenguaje-objeto y metalenguaje

La primera distinción que debe hacerse para hablar sobre la *metateoría* es la de *lenguaje-objeto* y *metalenguaje*. El *lenguaje-objeto* (Garrido, 1974, págs. 54 - 55) es el lenguaje u objeto estudiado durante una investigación. El lenguaje en el cual se desarrolla la investigación es llamado *metalenguaje*. Por ejemplo, si nosotros deseamos estudiar las estructuras lingüísticas de una lengua viva, entonces tal lengua será el objeto de estudio, mientras que el metalenguaje, el medio en el que se presenta dicha investigación, será nuestra lengua natal.

Si transportamos lo dicho a los sistemas formales, podemos suponer el lenguaje formal de un sistema S como un lenguaje objeto y nuestro metalenguaje será el español de México. Además, a dicho metalenguaje debemos agregar algunos signos auxiliares para poder hablar sobre el lenguaje-objeto en cuestión.

Como consecuencia de esto se debe hacer la distinción entre expresiones del lenguaje-objeto, y esquemas y nombres del metalenguaje. Las expresiones del lenguaje-objeto son aquellas formadas con los símbolos de los lenguajes formales: $p \rightarrow q$ es un ejemplo de una expresión del lenguaje-objeto de un sistema formal. Por otro lado, una expresión de un metalenguaje se usa para abreviar fórmulas de ese tipo cuando se necesita hablar repetidamente de una fórmula o cuando se intenta hablar de su estructura. Dichas expresiones se llaman *esquemas de fórmula* y, por ejemplo, las fórmulas $p \rightarrow q$, $p \rightarrow (q \wedge r)$ y $(p \vee r) \rightarrow (q \wedge t)$ pueden ser representadas mediante el siguiente esquema: $A \rightarrow B$, donde A y B son metavariables de fórmulas –y en este caso, simbolizan las expresiones encontradas en los antecedentes y consecuentes de las fórmulas de implicación mostradas.

Otro aspecto que debe mencionarse sobre este tópico, es el de la diferencia entre *uso* y *mención*. Se hace *uso* de una palabra cuando se le utiliza teniendo en cuenta su significado. Cuando una palabra es *usada* se escribe sin comillas. Por ejemplo, en la oración *Pedro no escribirá una palabra más*, la palabra "Pedro" está siendo usada porque se da a entender que en algún mundo posible existe un sujeto con ese nombre que, por alguna razón que no comprendemos, desea detener el proceso de escritura de algún texto.

Por otro lado, se hace *mención* cuando se le escribe para hablar sobre sus características. Cuando se menciona una palabra, debe escribirse entre comillas. Por ejemplo, cuando encontramos la oración *"Pedro" es una palabra que está compuesta por cinco letras*, estamos frente a una mención que se usa para dar una propiedad de la palabra "Pedro".

La manera de aplicar estas nociones de uso y mención a las fórmulas es la siguiente: cuando una fórmula se encuentre dentro de un texto, está siendo usada, y si se encuentra separada o fuera del mismo, o representada con metavariables, entonces está siendo mencionada. El poner una fórmula fuera de un texto o representarla a través de metavariables es una analogía de poner una palabra entre comillas: cuando ponemos una palabra entre comillas indicamos que ésta está siendo estudiada por nosotros y por eso debemos señalar que es una parte diferente del discurso que está siendo analizada. Así, separar la fórmula del texto y representarla con metavariables sirve para indicar que es nuestro objeto de estudio.

Ahora bien, esto, como mencioné, nos ayuda a estudiar las propiedades de los sistemas. Por ejemplo, cuando usamos los esquemas de fórmula podemos hablar sobre las características que tienen las fórmulas representadas por dichos esquemas, como ser axiomas, teoremas, estar construidas con cuantificadores, etc. También podemos hablar sobre los posibles valores de verdad o comportamientos que tienen dichas estructuras (tanto por sí mismas, como cuando están en relación con otras fórmulas o los objetos de las teorías matemáticas).

En este escrito hemos usado letras –metavariables- para representar sistemas, conjuntos y esquemas de fórmulas con el objetivo de hablar sobre algunas de sus respectivas propiedades. Además de estos símbolos y abreviaciones, podemos observar que todo está escrito en español de México. Tenemos, pues, un ejemplo de metalenguaje.

Por otro lado, el metalenguaje puede ser formalizado (Ladriere, 1969, págs. 64 - 67) mediante los símbolos del sistema formal del que habla. Dicho de otra manera, podemos tomar los símbolos usados en la parte lingüística de un sistema formal para crear expresiones que hablen sobre el mismo sistema. El grado en que un sistema pueda hablar de sí mismo dependerá de si tiene los medios de expresión y deducción suficientes para que describa sus propiedades mediante teoremas, llamados *metateoremas*[19].

La formalización puede hacerse de la siguiente manera: supongamos un sistema formal S_1. Con el objetivo de estudiar las propiedades de este sistema debemos agregar a la lengua utilizada como metalenguaje un cierto número de expresiones que nos permitan realizar tal objetivo. El resultado de esto es una *lengua base* representada por LB. Por lo tanto, LB es una metalengua respecto de S_1.

La parte de la lengua que utilizamos para realizar este estudio es limitada y será llamada LB_0. Es posible construir un sistema formal con LB_0, al que se le llamará S_2 con el cual se puedan obtener derivaciones sobre los razonamientos de LB_0. Debe haber una correspondencia entre LB_0 y S_2 de modo que a cada enunciado verdadero de LB_0 corresponda una fórmula derivable de S_2. Con esto podemos ver que el objetivo es crear otro sistema formal para estudiar el primero que ya teníamos y, en lugar de asignarle una propiedad al primer sistema sólo mediante palabras, habrá teoremas que representen dicha propiedad y ésta, en tanto teorema, deberá ser derivable del nuevo sistema formal. Además, es posible estudiar las propiedades de S_2 con la creación de una nueva metalengua, LB_1, y la formalización de ésta mediante la creación de un nuevo sistema S_3. Esto puede hacerse de manera sucesiva.

Sin embargo, esta formalización es sólo parcial, pues sólo se pueden estudiar algunas de sus propiedades, por lo cual, hay otras que no pueden ser estudiadas porque dicha formalización no es suficiente para ello. Sería posible formalizar la totalidad de una metalengua con los símbolos del sistema formal que estudia, sólo si la metalengua es reducida.

Asimismo, existen *demostraciones metateóricas*, las cuales se dividen en *constructivas* y *no-constructivas*. Un procedimiento de carácter constructivo de demostración es el que permite comprobar el resultado demostrado en cada caso particular, esto es, una demostración metateórica será constructiva

[19] Estos *metateoremas* enuncian resultados válidos para clases de proposiciones y para la totalidad de un sistema. De igual manera, pueden encontrarse en forma de reglas derivadas, propiedades generales de los predicados del sistema, clases de teoremas del sistema, propiedades de conjunto y relaciones del sistema con otros sistemas.

si el resultado obtenido al realizarla respecto de un determinado conjunto de objetos, puede obtenerse respecto de objetos que sean del mismo tipo que los del conjunto o de objetos derivados de estos. Las demostraciones no constructivas son lo contrario a las primeras demostraciones. Cuando se formaliza una metateoría, es conveniente usar la teoría recursiva de los números y el principio de inducción (que deberá extenderse a lo transfinito)[20].

A manera de ejemplo, se encuentra el razonamiento por *inducción estructural*. Este es aplicado a la construcción de proposiciones y a la derivación de una proposición (o *teorema*). En el primer caso se establece una propiedad para las proposiciones elementales y se demuestra que ésta se conserva a través de las reglas formación. En el segundo, se establece una propiedad para los axiomas y se demuestra que tal propiedad se conserva aunque se apliquen reglas de derivación diferentes. En ambos escenarios se traslada una propiedad de los casos particulares a los casos generales. Esto funciona únicamente cuando las reglas son formuladas de manera correcta.

Esquemáticamente, lo anterior se puede representar con lo siguiente para establecer la proposición metateórica "todas las proposiciones de un sistema formal *S* tienen la propiedad *P*" necesitamos demostrar que:

1. Las variables proposicionales de S tienen la propiedad P.
2. Si las variables proposicionales A y B tienen la propiedad P, entonces las proposiciones armadas con éstas y todos los operadores lógicos también tienen a P como propiedad.

Las demostraciones metateóricas, pues, sirven para evaluar si los teoremas encontrados en los sistemas axiomáticos son demostrados de manera correcta y para observar si heredan las cualidades de los axiomas. Al mismo tiempo, sirven para ver si las reglas de transformación y formación funcionan de manera correcta.

2.2. Sobre la sintaxis y la semántica.

La distinción entre las nociones de *sintaxis* y *semántica* debe hacerse debido a que una metateoría puede tener cualquiera de estos caracteres. Por un lado, si la metateoría se toma como un estudio sintáctico (Ladriere, 1969, págs. 66 - 67), entonces se dedicará a analizar las propiedades del sistema referentes a sus posibilidades deductivas. La sintaxis, pues, se dedica a analizar el proceso y las relaciones que los

[20] La teoría recursiva de los números es el estudio de los números naturales en el que sólo es posible construir relaciones y funciones recursivas. Estas funciones y relaciones son aquellas en las que sus valores pueden ser calculados de manera efectiva mediante un procedimiento que se da paso a paso a partir de valores previamente dados para obtener un resultado (Lercher, 1958, pág. 326; y Ladriere, 1969, pág. 84).

elementos tienen al momento de ser formadas y cuando son usadas para llevar a cabo las demostraciones.

Por otro lado, la metateoría vista como *semántica* se ocupa de estudiar las relaciones establecidas entre los sistemas y las clases de objetos usados para interpretarlos. Los problemas abordados por este tipo de metateoría se pueden clasificar en dos tipos: 1) problemas sobre la noción de verdad; y 2) problemas sobre las posibilidades de expresión de un sistema. Cuando se trata de problemas del tipo 1) la semántica se ocupa de ver la manera en que los sistemas formales se relacionan con los hechos, esto es, se ocupa de analizar las reglas, objetos, campos y modos de correspondencia para establecer los aspectos de la interpretación que expliqué en las secciones anteriores. Para llevar esto a cabo, la semántica debe tener una lógica adecuada a estos fines y símbolos para designar los elementos de un sistema, elementos de un campo de interpretación y relaciones existentes entre dos categorías de elementos.

Cuando se trata de problemas del tipo 2) se ocupa de analizar hasta qué punto los sistemas formales son capaces de representar objetos de teorías intuitivas, es decir, intenta dar cuenta de si los componentes de dichos sistemas son suficientes para formalizar las teorías intuitivas con las que pretenden entablar una correspondencia.

Una vez mencionados el objetivo y las características de la metateoría, es momento de enunciar las propiedades que posibilitan a los sistemas formales-axiomáticos llevar a cabo las demostraciones. Ya he mencionado una: *corrección*. Pero faltan algunas más, también analizadas por la metateoría[21], que tienen relación con las reglas de deducción y las interpretaciones. Estas propiedades son: *consistencia*, *completud*, *decidibilidad* y *categoricidad*. Todas serán explicadas en la siguiente sección.

2.3. Sobre las propiedades de los sistemas formales.

2.3.1. Sobre la consistencia.

Para hablar de la *consistencia* debemos tener en cuenta lo explicado en secciones anteriores sobre la relación entre los objetos de una teoría intuitiva con los axiomas y los teoremas, así como la relación de estos cuando se encuentran en una demostración. Además, antes de dar una definición de *consistencia*, primero debemos revisar qué es el principio de explosión.

[21] Aquí debo mencionar que la metateoría ayuda a observar estas propiedades, es decir, como se verá, estas surgen a partir de las relaciones que las expresiones de los sistemas tienen entre sí y de la relación de estos con las teorías intuitivas. Pero es la metateoría (el estudio que hacemos de los sistemas con nuestro lenguaje) lo que nos permitirá observar si el sistema tiene tal o cual propiedad.

2.3.1.1. Sobre el principio de explosión.

El principio de explosión nos dice que de una *contradicción* se sigue lo que sea (http://research.omicsgroup.org/index.php/Principle_of_explosion). Una *contradicción* es una declaración en la que se encuentran términos contrarios (http://planetmath.org/contradictorystatement). Por ejemplo, la oración "estoy aburrido y no estoy aburrido" es una contradicción porque primero se afirma algo e inmediatamente después se afirma lo contrario de ese algo. Cabe recalcar que las contradicciones son expresiones compuestas por un elemento y su negación. En el ejemplo anterior la negación de "estoy aburrido" es "no estoy aburrido". Si tuviéramos una oración en la que se encuentran términos opuestos como "aburrido" y "divertido", estos no implicarían una contradicción porque ninguno de los dos términos es la negación del otro, aunque en el habla cotidiana parezca que sí lo son.

En lógica y matemáticas clásicas, una contradicción también es considerada como falsa a pesar de los valores de verdad de las declaraciones secundarias que la componen –es decir, aunque uno de sus componentes sea verdadero, la totalidad de esta expresión será falsa. Se trata, pues, de una proposición molecular compuesta por una conectiva (conjunción) junto con una proposición y su negación. Debido a esto, dicha proposición resulta falsa en todos los casos. La forma básica de esta expresión es $A \wedge \neg A$ y su tabla de verdad es la siguiente[22]:

$\boldsymbol{A}$	$\wedge$	$\neg$	$\boldsymbol{A}$
1	0	0	1
1	0	0	1
0	0	1	0
0	0	1	0

Ahora bien, había mencionado que el principio de explosión establece que de una contradicción se sigue lo que sea. En el contexto de la lógica y las matemáticas quiere decir que de una fórmula contradictoria es posible deducir cualquier otra fórmula. El esquema de este principio en la lógica de proposiciones es el siguiente (Priest, 2008, pág. 76):

[22] Debo aclarar que no toda fórmula falsa es una contradicción. Puede haber fórmulas que sean falsas en sus interpretaciones, pero esto no implica que tenga la forma $A \wedge \neg A$. Por ejemplo, si tenemos una fórmula como $P \wedge Q$ y tanto P como Q tienen valor de verdad falso, entonces toda la conjunción resulta ser falsa. Sin embargo, esta fórmula no tiene la forma de una contradicción. Por tanto, no todas las fórmulas falsas son contradicciones.

$$\begin{aligned} &1.\quad A \wedge \neg A \\ &\left.\begin{aligned}&2.\quad A\\ &3.\quad \neg A\end{aligned}\right\}\ \text{Simp., 1.} \\ &4.\quad A \vee B \qquad \text{Adic., 2.}\\ &5.\quad B \qquad\qquad \text{MTP., 3 y 4.}\end{aligned}$$

Mediante este proceso de deducción es posible obtener cualquier fórmula bien formada, esto es, pueden obtenerse fórmulas atómicas, moleculares, tautológicas, contingentes, consistentes y contradictorias. Cabe señalar que las contradicciones sólo se siguen de contradicciones, es decir, una contradicción se encuentra en un conjunto de fórmulas sii antes ya había una contradicción.

2.3.1.2. Consistencia.

Una vez aclarado el principio anterior, puedo enunciar dos nociones de *consistencia*, una sintáctica y una semántica. La *consistencia sintáctica* es la propiedad por la que un sistema no tiene ni demuestra contradicciones con las expresiones formadas con su lenguaje. Esta propiedad, a su vez, se divide en dos definiciones (Ladriere, 1969, págs. 67 - 68). La primera, la consistencia en sentido débil, nos dice que un sistema es consistente cuando no toda proposición es derivable de éste, es decir, cuando existe por lo menos una proposición que no es demostrable en éste. La segunda, la consistencia en sentido fuerte, nos dice que un sistema es consistente si es imposible derivar de éste una proposición así como su negación.

Lo primero que debemos tener en cuenta con estas dos definiciones es que, cuando nos hablan de una proposición *derivable* o *demostrable* están hablando de un teorema. Ahora bien, como expliqué anteriormente, un teorema demostrable o derivable es una fórmula que se puede obtener del conjunto de axiomas de un sistema mediante el uso de éstos y la aplicación de reglas de inferencia. Con esto, podemos entender que un sistema axiomático-formal es consistente cuando existe por lo menos una fórmula que no puede ser demostrada –una fórmula que no es teorema- con las herramientas mencionadas y cuando es imposible derivar una fórmula junto con su negación[23] (una contradicción).

[23] Debo aclarar que esta segunda noción de consecuencia sintáctica sólo es aplicable a los sistemas que cuentan con el operador de negación (¬). Todos los sistemas de tipo similar serán susceptibles de recibir dicha propiedad metateórica, así como la de la primera noción. Sin embargo, los sistemas que no tengan negación sólo pueden tener la primer noción como propiedad. De igual manera, en este escrito me referiré a sistemas que cuentan con el operador de negación, pues los teoremas de Gödel implican el uso del mismo.

Debemos retomar dos aspectos mencionados acerca de las contradicciones para ponerlos en relación con las dos nociones de *consistencia sintáctica*: 1) de una fórmula contradictoria se sigue cualquier otra; y 2) las contradicciones sólo se siguen de contradicciones o de dos fórmulas que no son contradicciones por sí mismas, pero que sí se contradicen entre sí. Debido a esto podemos observar que –en general y sin importar de qué noción de consistencia estemos hablando- un sistema es consistente cuando entre sus fórmulas que son axiomas no se encuentra una contradicción.

Ahora bien, si suponemos que en el conjunto de axiomas de un sistema formal no existe contradicción alguna, entonces el principio de explosión no es aplicable en éste. Por tanto, tenemos que en dicho sistema es imposible demostrar todas las fórmulas que pueden formarse con el lenguaje del sistema (es consistente en el sentido débil). Seré más específico: un sistema formal tiene un lenguaje con el que pueden formarse fórmulas. Pueden, por ejemplo, formarse $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ así como $\neg A_1, \neg A_2, \neg A_3, \dots, \neg A_n$ (sus negaciones), esto es, puede formarse una cantidad considerable de fórmulas. Si este sistema cuenta con reglas de transformación, entonces puede demostrarlas. Si es, además, consistente, entonces no existen contradicciones en éste. Por tanto, no se pueden demostrar todas las fórmulas que pueden construirse con su lenguaje porque, al no existir expresiones contradictorias, el principio de explosión no aplica a este sistema: no pueden demostrarse todas las fórmulas construidas con su lenguaje, es decir, existe por lo menos una fórmula (o algunas fórmulas) no demostrable en dicho sistema porque no existe una contradicción. Esta fórmula puede ser alguna de las negaciones de las fórmulas que sí pueden demostrarse en este sistema: si este sistema es consistente, no existen contradicciones en éste, no se demuestran contradicciones en el mismo y, en consecuencia, no son demostrables las fórmulas que representan las negaciones de aquellas que sí son derivables, esto es, existen algunas fórmulas que no son demostrables. Por tanto, no todas las fórmulas son demostrables en este sistema[24].

Para entender el sentido fuerte de la consistencia sintáctica, debemos usar el segundo aspecto que mencionamos sobre las contradicciones. Por tanto, si suponemos una vez más que en el conjunto de axiomas de un sistema formal cualquiera no existen contradicciones, entonces no es posible obtener más contradicciones. En consecuencia, es imposible obtener una fórmula y su negación al mismo tiempo, pues el demostrar estas dos fórmulas contradictorias al mismo tiempo, implicaría la existencia de una contradicción previa. Lo cual no es el caso.

[24] Debo aclarar: si dichas negaciones también fueran demostrables, esto implicaría que el sistema es contradictorio y, por tanto, inconsistente.

Para hacer esto más claro, haré uso de las metavariables. Si decimos que existe un sistema formal S sintácticamente consistente en sentido fuerte, entonces estamos diciendo que en el conjunto de axiomas Γ de dicho sistema no existe una expresión de la forma $A \wedge \neg A$. Por lo tanto, existe por lo menos una fórmula que no es demostrable con dichos axiomas y que tampoco es teorema de S.

Por otra parte, si suponemos que existe un sistema formal R sintácticamente consistente en el sentido fuerte, entonces en el conjunto de axiomas Δ de dicho sistema no hay una contradicción. En consecuencia, no podemos obtener expresiones de la forma $B \wedge \neg B$. Debido a esto, es imposible que en dicho sistema se demuestren las fórmulas T_n y $\neg T_n$, al mismo tiempo, porque se trata de una contradicción[25].

Cabe recalcar que la *consistencia sintáctica*, como su nombre lo dice, se encuentra relacionada con aquello que podemos hacer con los axiomas y las reglas de transformación de los sistemas formales: un sistema será sintácticamente consistente si es imposible demostrar contradicciones haciendo uso de sus axiomas y de sus reglas de transformación, esto es, mediante el cálculo. En este nivel de consistencia podemos considerar a las expresiones del sistema en abstracto[26], esto es, podemos considerarlas sin la necesidad de que se encuentren en relación con objetos que las haga verdaderas, pues lo relevante es que formalmente no haya una contradicción, para que, formalmente, no se demuestre lo que sea[27].

Aclarado lo anterior, debo mencionar qué es la *consistencia semántica*. Como su nombre lo dice, dicho tipo de consistencia se refiere al significado. Y, por tal razón y por todo lo que he venido mencionado a lo largo de este escrito, podemos inferir que el significado del que estoy hablando es de aquel que obtienen las fórmulas de un sistema cuando se les pone en relación con los objetos de una teoría matemática. En otras palabras, para que un sistema sea semánticamente consistente, primero debe haber una correspondencia entre sus axiomas y teoremas con una clase de objetos determinada.

---

[25] Existe, además, cierta relación de equivalencia entre estos tipos de consistencia: si un sistema es inconsistente en el sentido débil, entonces se sigue cualquier fórmula, esto incluye a $A \wedge \neg A$. Lo cual también lo hace inconsistente en sentido fuerte. Si un sistema es inconsistente en sentido fuerte, entonces tiene una expresión como $A \wedge \neg A$, de la cual se sigue cualquier fórmula, por tanto, dicho sistema también es inconsistente en sentido débil.

[26] La utilidad y función de los sistemas formales no comprende la totalidad de lo tratado aquí, pero debo hacer esta aclaración para evitar confusiones: cuando digo que las expresiones de un sistema formal pueden ser vistas en abstracto sin la necesidad de ponerlas en relación con los objetos de una teoría matemática intuitiva, no estoy afirmando en ningún momento que los sistemas sean constructos que se construyen de manera independiente de las teorías mencionadas y después se busque con cuál de todas estas se puede poner en relación. Más bien, los sistemas formales se construyen siguiendo las estructuras de los objetos con los que se han de poner en relación. A pesar de esto, es posible verlos separados de éstas, valga la expresión, para poder analizar sus componentes y propiedades. (Cfr. Hilbert, 2011, págs. 89 – 122.)

[27] Dicho de otra manera, lo que nos interesa en este nivel de consistencia es que entre las fórmulas que componen el conjunto de axiomas de un sistema formal no haya una fórmula contradictoria.

Anteriormente mencioné que una correspondencia de este tipo de objetos hace verdaderos a los axiomas del sistema formal con el que se relaciona. Por lo tanto, y gracias a la corrección del sistema, los enunciados derivados de los axiomas también serán verdaderos. La *consistencia semántica* es, pues, la propiedad por la que las expresiones axiomáticas de un sistema formal –así como las demostradas con estas- son verdaderas y la propiedad por la cual el sistema no contiene ni demuestra contradicciones cuando se le pone en correspondencia con teorías matemáticas intuitivas o reales. Ahora bien, debemos hacer la siguiente observación: la *consistencia semántica* de un sistema formal depende de la verdad que los axiomas obtienen cuando se les pone en relación con los objetos de una teoría intuitiva.

Supongamos qué pasaría si una teoría intuitiva fuera inconsistente, entonces sería complicado decidir cuáles de sus enunciados demostrados nos hablan de las características y relaciones de los objetos que estudian y cuáles no, porque ambos tipos de enunciados serían igualmente demostrables. Por ejemplo, supongamos que tenemos una teoría *Th* que nos habla sobre los números naturales y que ésta tiene a los enunciados E_1, E_2, E_3, E_4 como el conjunto Γ de sus enunciados elementales. Supongamos además que dicho conjunto es inconsistente, por lo tanto, cualquier expresión bien formada con el lenguaje de tal teoría puede ser demostrada. Y, por la misma razón, si suponemos un teorema T_1 que nos afirme que todos los números naturales tienen la propiedad *P*, entonces éste será demostrable por la inconsistencia de Γ. Pero, por el mismo motivo, también lo será su negación, esto es, el teorema $(\neg T_1)$ que nos afirma que dichos números no tienen esa propiedad. Así, resulta complicado decidir cuál de los dos teoremas sí nos habla sobre las propiedades de los números, porque, como dije, ambos son demostrables debido a la inconsistencia[28].

Teniendo en cuenta lo anterior, y el que los sistemas formales quieren emular las mismas estructuras que las teorías intuitivas, puede suceder algo similar cuando los sistemas formales son contradictorios: se demuestran fórmulas contradictorias que pueden ser teoremas sobre los objetos que formalizan porque se demuestran bajo los estatutos que indican qué es una demostración y un teorema, y sería problemático decidir cuál de los dos es verdaderos porque ambos se derivan de los mismos axiomas, pero son contradictorios.

Antes de pasar a otros asuntos debemos mencionar un aspecto que parece poner en relación los dos tipos de consistencia aquí mencionados: en lógica, cuando tenemos un conjunto de fórmulas inconsistente, resulta que ninguna interpretación que le asignemos hará verdadero a dicho conjunto. En

[28] Podríamos revisar número por número para observar cuál de los dos teoremas es verdadero. Sin embargo, en tanto que los números naturales parecen ser infinitos, esto podría resultar un tanto complicado

lógica de proposiciones dicha afirmación puede ser representada formalmente de la siguiente manera: $\Lambda = \{p \wedge q \wedge \neg q\}$. Si asignamos valores a las fórmulas encontradas en dicho conjunto, entonces las conjunciones que las unen serán siempre falsas por la existencia de q y $\neg q$, lo cual hace falso a la totalidad del conjunto.

Siguiendo el razonamiento anterior, si pensamos en un sistema con un conjunto de axiomas inconsistente, entonces podemos inferir que ninguna interpretación que le asignemos lo hará verdadero. Así, aunque pongamos en correspondencia dicho sistema con los objetos de una teoría para que sus axiomas sean verdaderos, dicho sistema seguirá siendo inconsistente por las contradicciones existentes.

Podemos ver esto de manera esquemática. Tenemos el conjunto Δ de un sistema formal S. Dicho conjunto es inconsistente porque entre sus fórmulas se encuentra una contradicción $\{A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_2 \wedge A_3\}$. Por otro lado, tenemos una teoría intuitiva con el conjunto Γ de enunciados elementales $\{E_1 \wedge E_2 \wedge E_3\}$. Si hacemos una correspondencia, de modo que a cada axioma le correspondan los mismos objetos que a un enunciado verdadero de la teoría (y que estos sean equivalentes), tenemos que:

Valor de Verdad del Enunciado	Correspondencia	Valor de Verdad del Axioma
$\boldsymbol{E_1 = V}$	$\boldsymbol{E_1 \equiv A_1}$	$\boldsymbol{A_1 = V}$
$\boldsymbol{E_2 = V}$	$\boldsymbol{E_2 \not\equiv \neg A_2}$	$\boldsymbol{\neg A_2 = F}$
$\boldsymbol{E_2 = V}$	$\boldsymbol{E_2 \equiv A_2}$	$\boldsymbol{A_2 = V}$
$\boldsymbol{E_3 = V}$	$\boldsymbol{E_3 \equiv A_3}$	$\boldsymbol{A_3 = V}$

Entonces podemos ver que uno de estos es falso, lo cual hace falsa a la totalidad del conjunto por el hecho de estar unidos mediante conjunciones. Cualquier interpretación que asignemos a dicho conjunto, como mencionamos, lo hará falso, lo cual, al mismo tiempo, seguirá haciendo inconsistente al sistema.

Menciono esto por la siguiente razón: cuando pensamos en la consistencia semántica de un sistema, queda claro que los objetos con los que se pone en correspondencia hacen verdaderas a sus fórmulas (axiomas y teoremas), pero, al mismo tiempo, el sistema debe ser sintácticamente consistente, para que siga manteniendo la verdad que le otorgan estos objetos.

En suma, la relación entre los dos tipos de consistencia puede darse de la siguiente manera: primero, debe haber *consistencia sintáctica* para evitar que entre los axiomas haya una contradicción, y evitar así que estos demuestren cualquier fórmula[29]. Después, se puede dar una correspondencia entre las expresiones del sistema para que estos sean verdaderos a partir del significado que obtienen de los objetos, de modo que el sistema formal tenga *consistencia semántica*. Así, teniendo ambos tipos de consistencia en un sistema formal, se puede evitar que en éste se deriven fórmulas contradictorias.[30]

Antes de hablar sobre las demás propiedades de un sistema formal, primero debemos hablar sobre un tipo de consistencia semántica llamada ω-consistencia (Ladriere, 1969, págs. 68 - 69), la cual sólo es aplicable a sistemas que tienen una formalización de los objetos de la Aritmética: los números naturales. Uso este tipo de consistencia para ejemplificar que hay diferentes tipos de tal propiedad y para hacer notar como unos dependen de otros.

Ahora bien, debo mencionar que este tipo de consistencia es de tipo semántico, es decir, se refiere al significado que obtienen los sistemas al ponerse en relación con los objetos de una teoría. En este caso la teoría intuitiva en cuestión será la aritmética y sus objetos serán los números naturales. Para que un sistema tenga ω-consistencia debe cumplir con algunos otros requisitos: 1) debe tener el operador de negación ($\neg$); 2) debe usar el cuantificador universal ($\forall$); y 3) debe contener una formalización de la aritmética[31].

Para explicar mejor este tipo de consistencia, haré uso del ejemplo expuesto por Ladriere, pero usaré la simbología lógica convencional para hacer la explicación menos complicada: primero debemos considerar un sistema formal S que cumpla las condiciones mencionadas. Luego, debemos suponer que dicho sistema contiene constantes individuales correspondientes a los naturales: $N_0, N_1, N_2 \dots N_n$; variables individuales: $x_0, x_1, x_2 \dots x_n$; el operador negación $\neg$ y el cuantificador universal $\forall$.

También se debe considerar una teoría intuitiva Th -que simboliza las estructuras de los naturales- y una correspondencia entre sus enunciados y las expresiones de S.

Si S es ω-consistente, entonces las proposiciones o teoremas demostrables en éste corresponderán a enunciados verdaderos de Th. En otras palabras, la ω-consistencia depende de que

[29] Había mencionado que los sistemas se pueden ver separados de las teorías para analizar sus componentes y propiedades, a pesar de que estos hayan sido construidos siguiendo su estructura. Este caso es un ejemplo de ello: se puede observar un sistema sin necesidad de ponerlo en relación con su respectiva teoría para poder determinar si éste es consistente o no. Y esto se hace para que no haya errores en su funcionamiento al momento de ponerlo en relación con los objetos de la teoría.

[30] Aquí debo aclarar que no estoy mencionado que ambos tipos de consistencia son equivalentes, sino que sólo hay una relación entre estos y que dicha relación es necesaria si se pretende tener sistemas axiomáticos que sean consistentes al darles una interpretación a sus axiomas. Pero esto no implica que ambas nociones sean equivalentes, pues puede existir sistemas axiomáticos que sean consistentes en sentido sintáctico, pero no en sentido semántico (*Cfr*. Ladriere, 1969).

[31] Un sistema tiene una formalización de la aritmética si se puede establecer una correspondencia entre sus expresiones axiomáticas y las estructuras encontradas en los números naturales con los que trabaja la aritmética.

haya una correspondencia entre S y los objetos de Th, en la que una expresión demostrable en el sistema en cuestión represente a un enunciado verdadero encontrado en la teoría intuitiva[32]

Por el contrario, si S no es ω-consistente, entonces no habrá una correspondencia entre éste y Th, por lo cual habrá expresiones de S que corresponderán a enunciados falsos de la teoría en cuestión. Por ejemplo, supongamos que Th es una teoría compuesta únicamente por enunciados verdaderos, y que en el conjunto de todos estos encontramos uno que nos afirma lo siguiente: todos los números naturales tienen un único sucesor –llamaremos a este enunciado E. Supongamos, además, que intentamos hacer una correspondencia entre S y Th (de modo que E podamos representarlo con T), pero no podemos hacerla porque en S encontramos la expresión $\neg T$ –hay un número natural que no tiene un único sucesor-, que corresponde a un enunciado falso de Th por la negación que representa a un enunciado verdadero. Por tal razón, S no es ω-consistente.

Sobre lo anterior, Ladriere afirma que un sistema ω-consistente, también es consistente, pero no a la inversa, con lo cual podemos entender que del hecho de que un sistema sea consistente, no implica necesariamente que también sea ω-consistente: no implica de manera necesaria que haya una correspondencia entre las expresiones del sistema y los enunciados de la teoría. En otras palabras, pueden existir sistemas formales de los que no se siga contradicción alguna, pero puede que estos no sean ω-consistentes porque algunos de sus teoremas demostrables corresponden a enunciados falsos de la teoría aritmética con que se relaciona o porque sus lenguajes son insuficientes para formalizar dicha teoría (esto se explicará más adelante).

Tal relación puede darse de la siguiente manera: podemos suponer un sistema formal I. I está construido de forma que es consistente y se pone en correspondencia con la aritmética intuitiva. Pero, de esta correspondencia resulta que algunos de sus teoremas corresponden a enunciados aritméticos falsos, es decir, hay teoremas demostrables de I que son negaciones de los enunciados aritméticos verdaderos. Específicamente, dice Ladriere, si se elige un enunciado aritmético como “todos los números enteros tienen la propiedad P”, entonces se pueden demostrar en I enunciados falsos como “existe por lo menos un número entero que no tiene la propiedad P”. Por esta razón I no es ω-consistente.

[32] Este tipo de consistencia también implica que de las teorías y sistemas formales involucrados en la correspondencia no se siga cualquier fórmula, es decir, se requiere que en esas teorías y sistemas no haya contradicciones. Con esto podemos mencionar lo siguiente: la ω-consistencia, al ser un tipo de *consistencia semántica*, también requiere de la *consistencia sintáctica* del sistema, pues de nada servirá que la teoría esté compuesta por enunciados verdaderos si entre las expresiones del sistema encontramos contradicciones.

Como hemos mencionado, dos expresiones contradictorias no pueden ser simultáneamente verdaderas ni demostrables. Por tal razón, la consistencia nos exige que de un sistema se siga una u otra de manera exclusiva. Del mismo modo, la ω-consistencia nos exige que o bien una fórmula o bien su negación sean demostrables y que, al mismo tiempo, sólo una de esas dos expresiones represente a uno de los enunciados verdaderos que hablan de los objetos de la teoría intuitiva.

Antes de continuar con esta empresa, debo mencionar algunos aspectos acerca de la ω-consistencia. El primero de estos tiene que ver con la *consistencia semántica*, pues, al igual que esta última, la ω-consistencia depende de que el sistema que se pondrá en correspondencia con una teoría aritmética sea consistente sintácticamente, esto es, otro requisito para que un sistema tenga ω-consistencia es que éste mismo sea sintácticamente consistente. Necesitamos de la *consistencia sintáctica* para que los sistemas no demuestren afirmaciones falsas acerca de las teorías –por todo lo mencionado anteriormente, es claro que si existen contradicciones, entonces se puede demostrar cualquier expresión bien formada de un sistema, así, se podría demostrar la negación de una expresión que formalice un enunciado verdadero de una teoría aritmética, esto es, la expresión que represente un enunciado falso de una teoría.

El segundo aspecto tiene que ver con la maquinaria formal de los sistemas que pretende formalizar la aritmética. Para hacer cualquier correspondencia entre un sistema formal y una teoría intuitiva, el sistema debe tener las herramientas suficientes para poder representar en éste todas las expresiones de la teoría, es decir, debe tener todos los símbolos de variables, constantes, operadores, cuantificadores y símbolos auxiliares que le permitan representar todos los enunciados encontrados en la teoría. Si un sistema no tiene los elementos suficientes para formalizar una teoría, entonces puede haber elementos de ésta que queden fuera del sistema. Por ejemplo, si en una teoría que estudia parte de la aritmética existen enunciados que necesitan de expresiones como $a > b$ o $a < b$ e intentamos poner en correspondencia dicha teoría con un sistema que no cuenta con los elementos suficientes para formalizar $>$ y $<$, entonces habrá cuestiones de la teoría que no podrán ser formalizadas en el sistema.

Este aspecto parece tener más relación con cuestiones de demostrabilidad o de completud (explicada más adelante), pero su relación con la ω-consistencia (y con la *consistencia semántica*) se encuentra en lo siguiente: para que haya una correspondencia como la que nos exige dicho tipo de consistencia, el sistema que formalice la aritmética debe ser capaz de poder representar todos los componentes de la teoría aritmética en cuestión. De lo contrario, puede haber cosas que en la teoría sean verdaderas y que en el sistema no sean si quiera formalizables debido a la insuficiencia de su lenguaje.

Por ejemplo, podemos suponer una teoría aritmética Th en la que existe un enunciado que nos afirma que todo número natural es menor que su sucesor. Ahora, también podemos suponer un sistema formal R, el cual no cuenta con los elementos suficientes para formalizar dicho enunciado mediante una expresión como $\forall n(n < sn)$[33], es decir, entre su simbología no encontramos, por ejemplo, el símbolo que represente al cuantificador universal u otros símbolos que nos permitan simbolizar su equivalencia ($\forall x \equiv \neg\exists x \neg$)[34]. Así, no se puede representar la expresión de la teoría intuitiva. Esto nos pone frente a un teorema que no sería demostrable en el sistema formal porque éste no cuenta con los elementos suficientes para formalizar un enunciado verdadero. Así, no hay una correspondencia total entre sistema y teoría, lo cual no permite que el sistema sea ω-consistente. Esto implica que el sistema R no es capaz de demostrar todos los teoremas que se refieren a enunciados verdaderos de Th. Sin embargo, esto no implica que R sea inconsistente: mencioné que un sistema puede ser consistente, pero no ω-consistente. Así, R puede ser consistente (y no ω-consistente) aunque no sea capaz de formalizar y demostrar las cuestiones relacionadas con Th.[35]

Por último, debo mencionar que no profundizaré más en la cuestión de cómo se generan todos los tipos de consistencia que un sistema puede poseer, pues esto requiere recursos y métodos formales que rebasan los objetivos de esta tesis, los cuales no necesitan tratar la consistencia con dichas herramientas formales, sino únicamente como una propiedad de sistemas formales.

2.3.1.3. Algunas consideraciones acerca de la consistencia

Para representar la relación de un sistema formal con los tipos de consistencia mencionados -sintáctica y semántica [y dentro de ésta la ω-consistencia]- y con los objetos de las teorías matemáticas reales

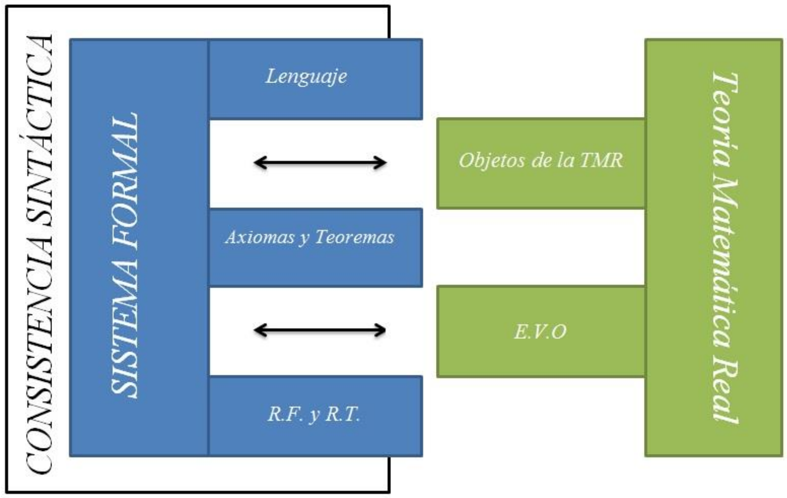
---

[33] En dicha expresión, n es un número natural, $\forall$ es un cuantificador universal que indica la totalidad de un conjunto y $n + 1$ es la operación de la función s (función sucesor); la expresión que representa al sucesor de n es sn. Así, dicha expresión nos dice que todos los números naturales son menores que su sucesor.

[34] La expresión ($\forall x \equiv \neg\exists x \neg$) indica que el cuantificador universal es equivalente a un cuantificador existencial con dos negaciones en cada uno de sus lados. Dicho de otro modo, afirmar que "para todo x es el caso que x cumple con tal propiedad" es lo mismo que afirmar que "es falso que existe un x que no cumple con tal propiedad": afirmar que todo un conjunto cumple con una propiedad es exactamente lo mismo que afirmar que es falso que hay por lo menos un objeto que no cumple con ella.

[35] A lo largo de esta explicación, use expresiones como "poner en correspondencia los axiomas del sistema con los enunciados verdaderos de la teoría". Esto se debe porque la explicación de Ladriere sobre ω −consistencia se maneja en estos términos. Sin embargo, debo recalcar que lo que se pone en correspondencia son los objetos de la teoría y las expresiones del sistema; tanto los axiomas del sistema como los enunciados de la teoría representan la estructura de los naturales. Por eso, si se habla de una correspondencia entre enunciados y axiomas podemos entender que también es una correspondencia entre axiomas y números naturales. Pero también puede ocurrir que se entienda que el sistema formaliza la teoría, cuando en realidad, lo que se quiere dar a entender con estas expresiones es que el sistema se pone en correspondencia con los objetos.

cuando se lleva a cabo una correspondencia, haré uso de cuatro esquemas. El objetivo de usar estos recursos es mostrar, de una manera más gráfica, todo lo explicado acerca de la consistencia de los sistemas formales. El primer esquema es el siguiente:

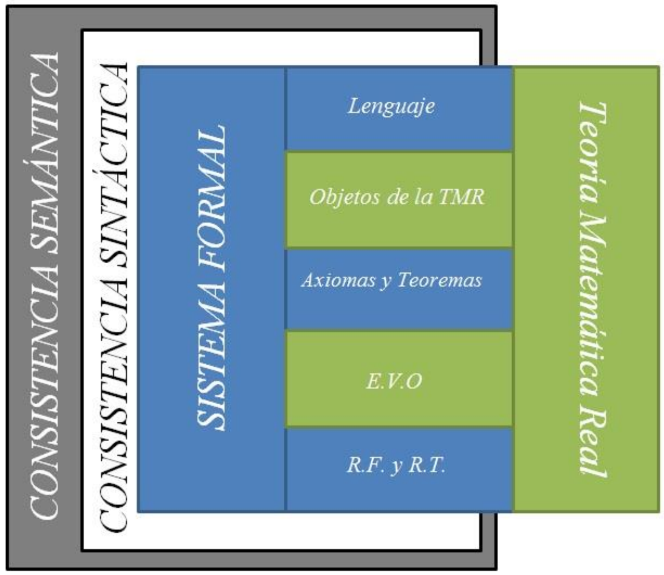


Esquema 1

De lado derecho tenemos al sistema formal con sus componentes: 1) el lenguaje –símbolos para variables, constantes y operaciones-; 2) Las reglas de formación y transformación –*R.F.* y *R.T.*-, que son las reglas que nos dicen cómo posicionar los elementos del lenguaje para formar expresiones bien formadas –fórmulas-, y luego cómo éstas se relacionan entre sí para dar lugar a otras más; y 3) Axiomas y teoremas, los cuales son las fórmulas bien formadas con los elementos anteriores –y también serán las fórmulas demostrables, en el caso de los teoremas-. El cuadro que parece envolver al sistema formal es la consistencia sintáctica, esto es, la propiedad que hace que en el sistema no existan ni puedan demostrarse contradicciones a partir de sus expresiones.

De lado izquierdo tenemos una teoría matemática real, la cual, como mencionamos, es una teoría formada por una serie de expresiones que nos hablan sobre objetos matemáticos y sus propiedades –que en este caso son números. Ahora bien, de manera resumida, en el rectángulo posterior se encuentran los objetos con los que trabaja la teoría, y en el rectángulo inferior están los enunciados verdaderos sobre esos objetos de dicha teoría, los cuales pretender ser emulados por las expresiones del sistema.

Las flechas ubicadas en los espacios vacíos indican que se puede llevar a cabo una correspondencia entre los componentes del sistema y los objetos de la teoría. Tal correspondencia puede representarse así:

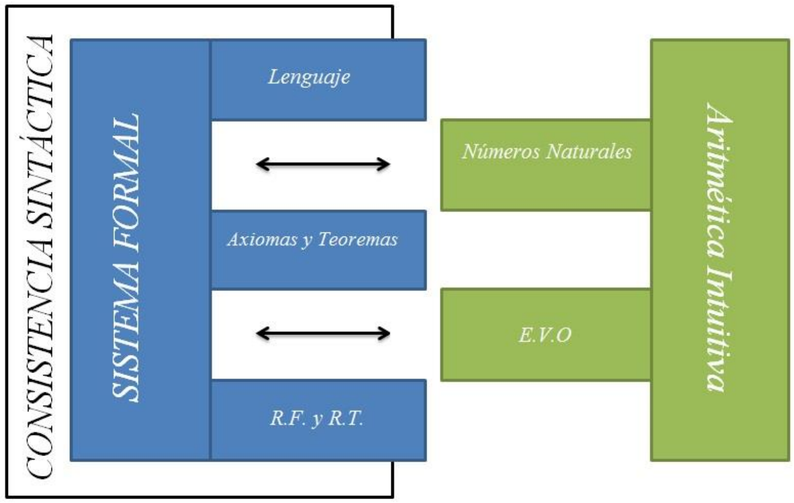


Esquema 2

La correspondencia entre el sistema y la teoría puede entenderse, pues, como la correspondencia entre las expresiones de los sistemas y los objetos cuya estructura representan las teorías. En dicha unión, usamos el lenguaje del sistema para representar a los objetos de la teoría. Las reglas de formación nos ayudan a formar los axiomas y los teoremas que serán análogos a los enunciados verdaderos de la teoría. Las reglas de transformación nos ayudarán a demostrar fórmulas –que deben a la estructura de los objetos con los que trabajan las teorías- a partir de los axiomas. Dichas fórmulas, como mencioné, serán teoremas al ser demostradas.

De dicha unión surge la *consistencia semántica*: la propiedad por la que las expresiones del sistema son verdaderas a partir de la correspondencia con los objetos representados por la teoría, y también por la cual el sistema no contiene ni demuestra contradicciones a partir del significado de sus fórmulas.

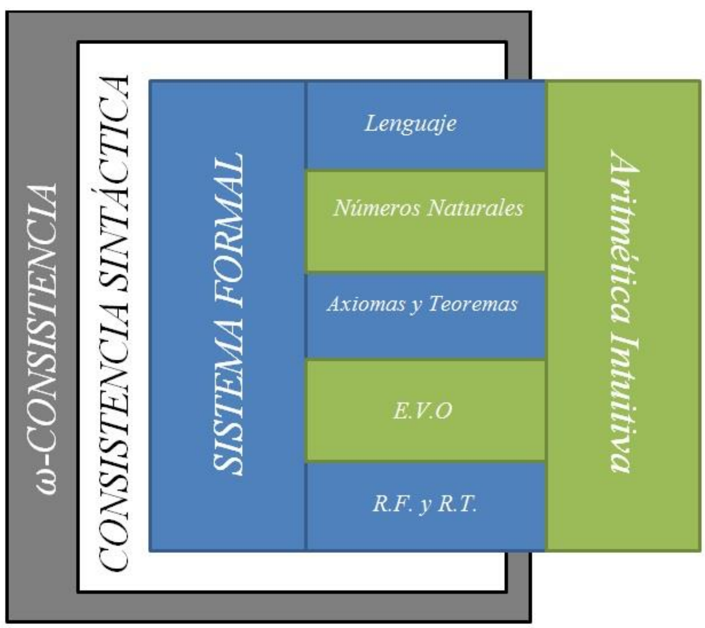
Podemos hacer una representación parecida para el caso de la ω-consistencia. Veamos el siguiente esquema:



Esquema 3

Únicamente sustituimos la teoría matemática real por la aritmética intuitiva. Así, los objetos con los que trabajará dicha teoría son los números naturales y los enunciados verdaderos de la misma nos hablarán de las propiedades y relaciones de estos. Por lo demás, el sistema con el que se puede poner en correspondencia tiene los mismos elementos y propiedades que en el primer esquema.

Ahora bien, la correspondencia entre el sistema formal y la aritmética intuitiva puede representarse de la siguiente manera:



Esquema 4.

En este caso, la unión antes mencionada hace que los elementos del lenguaje del sistema formal correspondan a los objetos de los que hablan los enunciados de números naturales de la aritmética intuitiva. Al igual que en el ejemplo anterior, las reglas de formación indican cómo deben ser posicionados los elementos del lenguaje para formar las expresiones que representen en el sistema la estructura de los números naturales. Las reglas de transformación sirven para demostrar fórmulas verdaderas que hablan sobre propiedades y relaciones encontradas entre los números naturales.

De la unión en cuestión, surge un rectángulo más que representa la ω-consistencia: la propiedad que obtiene un sistema que cuenta con una formalización para la aritmética cuando se le pone en correspondencia con una teoría de este tipo. Dicha propiedad hace que las expresiones bien formadas del sistema correspondan a los números naturales y no se obtenga una contradicción de este hecho.

Ahora, la idea de representar la consistencia como un rectángulo que envuelve al sistema formal es mostrarla como una propiedad. De manera cotidiana, podemos observar que las propiedades son atributos o cualidades que poseen las cosas. Podemos observarlas en ellas cuando las miramos fijamente –como los colores o las formas- o cuando observamos el funcionamiento de sus partes –como la eficiencia o la velocidad con la que una computadora realiza cualquier actividad para la que esté programada.

Estableciendo un símil, en teoría se puede observar algo parecido en un sistema formal: realizando las pruebas indicadas, se puede determinar si un sistema formal tiene o no *consistencia* de los tipos aquí mencionados. La consistencia, pues, resulta ser una propiedad que podemos observar mediante el funcionamiento del sistema formal y las relaciones que tiene con aquello que formaliza. Además, si pensamos en los esquemas mostrados aquí, en la relación que los componentes de los sistemas llevan a cabo para darle lugar en el plano sintáctico y en la correspondencia que éstos establecen con las estructuras de los objetos matemáticos para obtenerla de manera semántica, entonces podemos pensar que la consistencia parece ser más una propiedad que es consecuencia de todas estas relaciones, que algo que podamos encontrar entre los objetos de las teorías y los componentes de los sistemas es decir, no podemos encontrarla entre los elementos del lenguaje del sistema ni entre los objetos y enunciados de la teoría así como encontramos fórmulas bien formadas o expresiones que nos hablen de los números.

Antes de continuar, debo decir que la importancia de la consistencia recae en que ella hace posible que no se demuestren fórmulas que puedan contradecir a aquellas que formalizan a las estructura de los objetos matemáticos con los que están relación. Si un sistema es inconsistente, entonces puede demostrar contradicciones. Si dicho sistema demuestra una fórmula A que habla sobre las propiedades de los objetos de una teoría, también puede demostrar a $\neg A$, que es la fórmula que lo contradice. La inconsistencia, pues, permite que se demuestren expresiones contradictorias que pueden ser consideradas teoremas por el hecho de ser obtenidas mediante una sucesión de fórmulas, lo cual, como mencioné, es problemático porque si suponemos que fórmulas demostrables son verdaderas debido a la verdad que obtienen de los axiomas, entonces las dos tendrían la misma posibilidad de ser verdaderas, pero no se podría decidir cuál dado que son contradictorias. Si decidimos otorgar la verdad a una de ellas, entonces la otra es falsa, pero esto implica que el sistema demuestra expresiones falsas. Esto no es deseable porque si pensamos que los sistemas nos hablan los objetos de las teorías matemáticas, entonces las expresiones que contradicen a las fórmulas que formalizan enunciados verdaderos nos dirán cosas falsas sobre tales objetos. Esto puede no parecer importante si se piensa que el hecho de que los sistemas sean contradictorios no afecta en la constitución de tales objetos, pero si pensamos que estos sistemas parecen ser la manera más adecuada para acceder a ellos, entonces podemos concluir que sistemas contradictorios nos llevarán a concluir cuestiones erróneas sobre los objetos en cuestión.

Para terminar, debo decir que las propiedades que se presentarán en las páginas siguientes tienen un carácter parecido al de la consistencia, en el sentido de que son cualidades o atributos que pertenecen a los sistemas y no objetos con los que estos o las teorías trabajen.

2.3.2. Completud.

La *completud* es la propiedad que hace que un sistema formal demuestre todas las fórmulas verdaderas que hablan sobre objetos matemáticos. Al igual que en la consistencia, existen dos tipos de *completud* (Ladriere, 1969, págs. 69 - 70): sintáctica y semántica. La *completud sintáctica*, a su vez se divide en dos clases: 1) *completud sintáctica en sentido fuerte*; y 2) *completud sintáctica en sentido débil*. La primer clase de completud sintáctica, también conocida como *completud para la negación* (*Cfr*. Gutiérrez, 2014, págs. 141 - 142) es la propiedad encargada de hacer que toda proposición de un sistema sea demostrable o refutable –una vez más, esta propiedad sólo compete a los sistemas en los que se usa el operador de negación-. Lo que esto quiere decir es que toda fórmula perteneciente a un sistema formal se puede demostrar a partir de los axiomas de éste, o bien se puede demostrar su negación. Cualquiera de las dos fórmulas que se demuestre será, como he mencionado, un teorema.

Debo aclarar que cuando digo “toda fórmula verdadera es demostrable” no lo digo en el sentido del principio de explosión porque, de ser así, serían demostrables todos las fórmulas junto con sus negaciones. De igual manera, estoy suponiendo que los sistemas hipotéticos de los que hablo aquí son consistentes. Lo que quiero decir aquí es que, cuando un sistema es completo, éste debe demostrar todos los posibles teoremas –fórmulas que pueden llegar a ser teoremas mediante la demostración- encontrados en éste o sus respectivas negaciones, pero no ambas al mismo tiempo (de lo contrario sería inconsistente).

De manera esquemática, la completud sintáctica en sentido fuerte se puede explicar de la siguiente manera: supongamos un sistema formal axiomático S, un conjunto de axiomas Γ y dos esquemas de fórmulas T_n y $\neg T_n$[36]. Si S es completo, entonces T_n es demostrable a partir de Γ o bien lo es $\neg T_n$. Si $\neg T_n$ es demostrable, entonces queda cancelada la posibilidad de demostrar T_n, y lo mismo pasa a la inversa. Esto en el supuesto de que S también es consistente.

Con esto último, además, es posible ver que existe una relación entre la consistencia y la completud, pues es necesario que un sistema sea consistente para que pueda demostrar a sus fórmulas que pueden ser teoremas o a sus negaciones, pero no ambas así sería completo para la negación o en el sentido fuerte. Si el sistema fuera inconsistente, también sería completo, pero surgiría el problema de que con la inconsistencia podríamos demostrar todas las fórmulas así como como sus negaciones. Esto no afecta cuando demostramos todo en un sistema que se compone únicamente de formas y no hace referencia a algo. En cambio, cuando tenemos en cuenta sistemas formales que hacen referencia a objetos matemáticos, demostraríamos fórmulas contradictorias que negarían y afirmarían un mismo aspecto sobre éstos. Evidentemente, ambos tipos de fórmulas serían demostrables, por lo cual ambos tendrían la misma posibilidad de ser teoremas, pero esto es problemático porque, como dije, ambos tienen la posibilidad de ser verdaderos debido a lo que establece la corrección del sistema, pero son contradictorias, lo cual hace difícil decidir cuáles son los verdaderos.

Hablaríamos, pues, de una completud que nos permitiría demostrar todas las fórmulas que se refieren a enunciados verdaderos de una teoría, pero que, al mismo tiempo, nos causaría problemas porque también demostraría sus negaciones.

Por otro lado, la *completud sintáctica en sentido débil*, dice Ladriere, es la propiedad por la que un sistema se hace inconsistente cuando a su conjunto de axiomas se le agrega una expresión no demostrable en éste. Ahora, para que un sistema sea inconsistente, es necesario que dentro del conjunto de sus fórmulas haya contradicciones. De modo que, para obtener la inconsistencia, la fórmula no demostrada por el sistema que debe agregarse, es la negación de una de las fórmulas que ya se encuentran en éste. Teniendo una contradicción, es posible demostrar todas las fórmulas del sistema, como expliqué arriba.

[36] Con T_n y $\neg T_n$intento representar un número finito de fórmulas.

Para ejemplificar esto, supongamos que tenemos el siguiente conjunto de axiomas de un sistema formal: $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$. Con este conjunto podemos demostrar las fórmulas $\{T_1, T_2, T_3, T_4\}$, pero no T_5. Además, podemos suponer que dichos conjuntos son consistentes, por lo cual ninguna de sus negaciones es demostrable, de la misma manera que T_5. Ahora bien, si agregamos la expresión $\neg A_1$, entonces el sistema en cuestión tendrá una contradicción entre sus axiomas de manera que dicho sistema es inconsistente. En consecuencia, dicho sistema es capaz de demostrar todos sus posibles teoremas, incluido T_5, así como sus negaciones debido a la contradicción existente. Por tanto, es completo en sentido débil.

Puedo decir que la idea detrás de la completud en sentido débil es la siguiente: si un sistema debe hacerse inconsistente para demostrar todos sus posibles teoremas, como afirma Ladriere, entonces quiere decir que con el conjunto de axiomas y las reglas de transformación con los que cuenta antes de la inconsistencia no es capaz de demostrar todas las expresiones con carácter demostrable. Así, pues, este tipo de completud es débil porque necesita de un recurso adicional de los que tiene el sistema para poder estar presente.

Por otro lado, la *completud semántica* también tiene dos tipos: 1) *absoluta*; y 2) *relativa a una interpretación*. La completud semántica en sentido absoluto hace que toda proposición válida (en este contexto verdadera) de un sistema axiomático también sea demostrable, y a la inversa. Esto quiere decir, que existe una correspondencia biunívoca entre las fórmulas demostrables y los objetos matemáticos que les corresponden en las distintas interpretaciones del sistema, de modo que todo lo demostrado en un sistema formal será verdadero por su relación con los objetos –y será análogo a los enunciados de las teorías matemáticas intuitivas.

La completud semántica relativa a una interpretación establece que todas las proposiciones o fórmulas verdaderas correspondientes a un determinado tipo de objetos en una interpretación son demostrables en el sistema. Esto quiere decir, que un sistema representa una formalización de un tipo determinado de objetos, y las proposiciones del sistema representan cuestiones relacionadas con estos. Si estas proposiciones son demostrables en el sistema, entonces éste será completo en este sentido.

Esta última noción también puede ponerse en relación con los campos de interpretación: un sistema es completo en relación con un campo de interpretación si todas sus proposiciones válidas o enunciados verdaderos en relación con dicho campo son demostrables y a la inversa –toda fórmula válida es demostrable y toda fórmula demostrable es válida-.

2.3.3. Decidibilidad.

Al igual que las dos propiedades anteriores, la *decidibilidad* también es de tipo sintáctico y semántico. La *decidibilidad sintáctica* hace que un sistema pueda dar un procedimiento que permita decidir, para todo teorema del sistema si éste es decidible o no. Un sistema será decidible en este sentido si éste mismo es capaz de dar una serie de pasos para decir si un problema tiene una solución o no[37], esto es, para decir si una fórmula verdadera puede ser o no demostrada con los axiomas del sistema en el que se encuentra. Este proceso, además, debe ser efectivo y mecanizable como las tablas de verdad de la lógica proposicional o, en el contexto de los sistemas axiomáticos orientados a las matemáticas, el proceso del que se habla es la demostración.

La *decidibilidad semántica* establece que un sistema es decidible cuando puede haber un procedimiento que permita decidir si toda proposición de éste es verdadera o no con respecto a un campo de interpretación –es decir, si hay un procedimiento capaz de dar cuenta de que los elementos de un sistema son verdaderos cuando se les pone en correspondencia con un campo de interpretación, entonces éste será decidible semánticamente-. Los componentes capaces de dar cuenta de esta propiedad son las reglas de correspondencia y de interpretación.

2.3.4. Categoricidad.

La *categoricidad* puede ser *absoluta* o *relativa*. Un sistema es categórico en sentido absoluto si todos sus modelos son isomorfos entre sí. Es decir, si todos los elementos de sus modelos se comportan de la misma manera cuando están en una relación determinada con otros elementos del modelo en que se encuentran.

Un sistema es *categórico en sentido relativo* o *categórico respecto a una clase de objetos* (*CL*) pertenecientes a éste si cada modelo de dicho sistema en los que *CL* recibe una interpretación son isomorfos. Ahora bien, según entiendo, la clase de objetos *CL* comprende a aun tipo de las fórmulas construidas con los términos primitivos. Este tipo de fórmulas pueden ser los axiomas, por ejemplo. A los axiomas se les pueden asignar varios modelos –estructuras de objetos matemáticos- y si estos modelos son isomorfos, entonces el sistema es categórico.

[37] *Decidible* y *resoluble* en este contexto pueden ser usados como sinónimos de *derivable* o *demostrable* (Torres, 1999, pág. 25).

Una vez expuestas la estructura general y las propiedades de un sistema formal me ocuparé de hablar, de manera general, de la numeración de Gödel y de los Teoremas de Incompletud de la Aritmética.

CAPITULO III: LA NUMERACIÓN DE GÖDEL Y SUS DOS TEOREMAS

Introducción

El objetivo de este capítulo es, principalmente, mostrar cómo es tratada la consistencia por Gödel con los componentes formales del sistema. Siendo así, puede parecer innecesario que se mencionen los dos Teoremas de Incompletud. Empero, considero que sí se necesitan porque a partir de toda la maquinaria usada para demostrarlos (los números Gödel –y con estos los naturales-, el método diagonal y la autorreferencia), fue posible formalizarla y así llevar a cabo las pruebas que muestran su indemostrabilidad.

Ahora bien, la relación de los capítulos anteriores con el presente es que el primero de estos me ayudará a indicar cuáles son los diferentes componentes del sistema en el que Gödel llevó a cabo la demostración de sus teoremas: diré cuáles son las *variables*, *constantes*, *reglas de formación* y *transformación* encontrados en tal sistema –es decir, su lenguaje. A dicho sistema, lo llamaré *P* (también es llamado así por Gödel). Además, mencionaré cómo este se relaciona con la aritmética para formalizarla junto con los elementos con los que estudia. Además, mencionaré algunas de las propiedades de los números naturales que se pueden expresar en tal teoría.

Sobre las propiedades del sistema sólo me centraré en *completud* y en *consistencia*. En este contexto ambas tienen la misma definición que la mencionada líneas arriba. No daré sus pruebas puesto que Gödel mostró que hay proposiciones relacionadas con tales propiedades que nos indican que los sistemas parecidos a *P* no son completos y no pueden demostrar su consistencia.

Para mostrar esto último, primero diré qué es la numeración de Gödel: indicaré qué son los números Gödel y cómo con estos se pueden representar los diferentes símbolos del sistema, así como las expresiones formadas con estos símbolos y las demostraciones llevadas a cabo con estos. Esto me servirá porque los números Gödel son uno de los aspectos necesarios para la demostración de los dos teoremas, pues con su ayuda se puede construir una fórmula que habla de sí misma: *G*. Además, son algunos de los elementos que me servirán para hablar sobre la consistencia como propiedad del sistema.

Hecho esto, me ocuparé de hablar sobre los Teoremas de Incompletud. Para ello, primero diré cómo se construye la fórmula G que habla de sí misma mediante el método de diagonalización y también mencionaré en qué consiste la autorreferencia, pues, básicamente, para que G pueda referirse a sí misma –y decir de sí misma que es indemostrable-, es necesario que dicha fórmula sea autorreferente y esto se consigue mediante la diagonalización.

Con esto, podré mencionar cómo se demuestran los dos teoremas. Las demostraciones aquí presentadas no serán mostradas de una manera puramente formal, porque los objetivos de este escrito no lo requieren. Sin embargo, sí haré uso de algunas fórmulas, así como de varias nociones de lógica de primer y segundo orden, teoría de conjuntos y teoría de clases –las cuales sí serán necesarias para entender algunos conceptos y razonamientos encontrados aquí. Ahora, el primer teorema dice que en todo sistema que sea capaz de formalizar una parte de la aritmética, y que además sea consistente y recursivamente axiomatizable[38], existirán proposiciones indecidibles, esto es, proposiciones que no son demostrables y cuyas negaciones tampoco pueden ser demostradas en los sistemas mencionados. P es capaz de formalizar una parte de la aritmética y la fórmula indecidible encontrada en tal sistema es G, pues tanto G como $\neg G$ son indemostrables.

El segundo teorema dice que todo sistema consistente, recursivamente axiomatizable y capaz de formalizar una parte de la aritmética no puede demostrar su propia consistencia. Para realizar esta parte del escrito, primero diré cómo se formaliza la *consistencia*, es decir, cómo con el lenguaje de P es posible representarla mediante la fórmula $Con(P)$. Hecho esto, mencionaré cuál es la relación entre G y $Con(P)$ y finalmente, diré cómo la fórmula $Con(P)$ no es demostrable, con lo cual se demuestra el segundo teorema.

Antes de continuar, debo mencionar que la explicación de los teoremas no será detallada porque el objetivo aquí es hablar de la consistencia.

Algunas consideraciones sobre los Teoremas de Gödel

En la parte final del Siglo XIX y en la primera mitad del Siglo XX, se buscó fundamentar las matemáticas para intentar resolver varios de los problemas ya existentes en este campo. Como mencioné, David Hilbert (Gutiérrez, 2014) propuso realizar esta fundamentación mediante la presentación de sistemas axiomáticos en lenguaje formal para deshacerse de todas las posibles confusiones y lograr una mayor precisión en los trabajos relacionados con las teorías matemáticas. La idea de Hilbert, pues, era representar en un lenguaje formal aquellas pocas proposiciones a partir de las cuales podrían resolverse los problemas en cuestión. Además del formalismo, el matemático alemán

[38] Que un sistema sea recursivamente axiomatizable quiere decir que existe un método que permite decir qué expresiones formadas con su lenguaje serán fórmulas que representan axiomas. Dicho método debe ser mecánico y debe basarse en una serie de reglas que sirvan para el fin mencionado. Comúnmente, dichas reglas se presentan a través de esquemas de axiomas: expresiones construidas con metavariables que indican la estructura que deberán tener aquellas fórmulas que serán teoremas. Por ejemplo, una regla de este tipo puede decir algo como lo siguiente: toda expresión que tenga la forma $A \rightarrow A$ será un axioma.

proponía que todos estos problemas se resolvieran de manera algorítmica y finita (Piñeiro, 2012), esto es, mediante un procedimiento con un número finito de pasos y en el que se hicieran explícitos las reglas aplicadas y las fórmulas obtenidas con ayuda de estas: demostraciones. Los problemas, pues, eran fórmulas que debían demostrarse, o bien se debía demostrar su negación.

La propuesta hilbertiana tuvo tal impacto que comenzaron a desarrollarse sistemas con dicha estructura y con los mismos objetivos. Sobre esto, Gödel menciona el sistema de los *Principia Mathematica* y que la teoría axiomática de conjuntos de Zermelo-Fraenkel son los sistemas más desarrollados en lo que se refiere a sistemas formales-axiomáticos hasta 1931 (Gödel, 1931, págs. 53 - 57). Todos los métodos usados en matemáticas hasta ese momento podían ser formalizados en cualquiera de esos dos sistemas, por lo cual, dice el matemático austríaco, resultaría natural pensar que todas las cuestiones que se pudieran formalizar en el lenguaje de dichos sistemas serían demostrables. Sin embargo, ello no es verdadero, pues Gödel afirma que existen proposiciones indecidibles en ambos sistemas que se refieren a la teoría de los números naturales.

Antes de continuar, debo mencionar que *una proposición indecidible* es una "proposición tal que el sistema no puede demostrarla a ella ni a su negación" (Gutiérrez, 2014, pág. 138). Dado que estamos en el terreno de los sistemas formales, podemos entender que una proposición de este tipo es una expresión bien formada con el lenguaje de un sistema. Tal expresión no es demostrable con los axiomas y las reglas de transformación del sistema en el que se encuentra y tampoco lo es su negación. La indecidibilidad, pues, se encuentra en que ninguna de las dos fórmulas se puede demostrar.

Ahora bien, estas proposiciones no son indecidibles en todos los sistemas existentes en matemáticas, sino que son relativas a sistemas en específico. Una proposición α puede ser indecidible en un sistema S, pero no en un sistema R. Esto puede ser así porque ambos sistemas se ocupan de diferentes tipos de objetos, o porque S se ocupa de objetos y R únicamente de relaciones, por ejemplo. En consecuencia, si α versa sobre los objetos con los que trabaja S y es indecidible, entonces α será indemostrable en S, pero no en R porque a ser un sistema formal con un objetivo diferente, puede que ni siquiera se pueda formalizar en su lenguaje.

Esto no quiere decir que las proposiciones indecidibles sean tales en un único sistema. Los Teoremas de Incompletud se desarrollaron en un sistema encargado de formalizar la aritmética, pero se ha demostrado que se pueden obtener los mismos resultados en sistemas que no se ocupen exclusivamente del campo de los naturales, pero que sí formalicen algunas nociones de la aritmética. Así, pueden existir en un sistema cualquiera.

Hechas estas consideraciones, es momento de hablar del sistema en el que se realizaron los Teoremas de Incompletud.

3. Sistema *P*

El sistema en que se desarrollaron los Teoremas de Incompletud se compone del lenguaje de los *Principia Mathematica* (*PM*), los axiomas de la *Aritmética de Peano* (*PA*) y algunas modificaciones que el mismo Gödel hizo a dicha maquinaria formal para simplificar la demostración en cuestión. Con eso construyó un sistema al que llamó P (Gödel, 1931, págs. 58 - 60). Este sistema, como he mencionado, se ocupa de formalizar la aritmética –específicamente la de Peano-, es decir, cada expresión formal de P se ocupa de aspectos relacionados con los objetos trabajados por PA.

A continuación, enunciaré los elementos que componen a dicho sistema tal y como se encuentran en el texto de Gödel de 1931. En primer lugar, presentaré el lenguaje, pues con sus elementos es posible formar las expresiones de P.

3.1. Lenguaje.

El lenguaje del sistema P se compone de los siguientes signos primitivos:

I. Constantes[39]:
   a. $\sim$ (negación)
   b. $\vee$ (disyunción)
   c. Π (generalización)
   d. 0 (cero)
   e. s (el siguiente de)
   f. (,) (paréntesis)

[39] Gödel llama "constantes" por igual a los símbolos lógicos ($\vee, \sim$) y a los no-lógicos ($0, \mathrm{s}, \Pi$ y los paréntesis) encontrados en este sistema. En otros contextos serán llamados de diferente manera dependiendo del autor y/o la corriente en que se estén usando. Sin embargo, lo relevante en este contexto es que los símbolos en cuestión tienen el funcionamiento convencional que conocemos, esto es: $\sim$ sirve para negar las expresiones que se encuentran a su lado y obtiene el valor de verdad contrario al que poseen tales expresiones; $\vee$ se usa para construir fórmulas con dos disyuntos y es verdadera cuando cualquiera de estos es verdadero; Π es el cuantificador $\forall$ con el que se designa la totalidad de objetos de un conjunto; 0 sirve para designar el primer elemento del conjunto de los números naturales; s tiene la función de indicar el elemento que se encuentra después de aquel que se encuentra entre sus paréntesis –por ejemplo, el sucesor de s(0) es el elemento que se encuentra después del 0: 1; y (,) sirve para indicar los límites de una expresión bien formada.

II. Variables[40]

a. Tipo 1 (sirven para representar números naturales incluyendo el 0): x_1, y_1, z_1 ...

b. Tipo 2 (representan clases de individuos)[41]: x_2, y_2, z_2 ...

c. Tipo 3 (se ocupan de representar clases de clase de individuos)[42]: x_3, y_3, z_3 ...

Además estos signos, Gödel usa algunos otros símbolos para formar expresiones en el sistema que no son mencionados por él como parte del lenguaje. Esto se debe, según entiendo, a que son símbolos matemáticos de uso común. El primer tipo de símbolos son: $\wedge, \supset, \equiv, \Sigma, =$ y son llamados "abreviaciones" por Gödel. Esto se debe a lo siguiente: son símbolos que sirven para construir expresiones equivalentes a fórmulas formadas con los signos primitivos del sistema P. La equivalencia se encuentra en que tanto las abreviaturas como las expresiones formadas con los signos primitivos tienen el mismo valor de verdad. Dichas fórmulas están formadas con la ayuda de paréntesis y los símbolos: $\sim, \vee, \Pi$, así, por ejemplo, el símbolo $\wedge$ sirve para formar fórmulas como $\mathrm{X} \wedge \mathrm{Y}$, la cual es equivalente a $\sim (\sim \mathrm{X} \vee \sim \mathrm{Y})$. Podemos ver la equivalencia mediante una tabla de verdad:

X	∧	**Y**	≡	∼	(∼	**X**	∨	∼	**Y**)
1	1	1	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1	1	1	0
0	0	1	1	0	1	0	1	0	1
0	0	0	1	0	1	0	1	1	0

Ambas fórmulas tienen el mismo valor de verdad. Sin embargo, $\mathrm{X} \wedge \mathrm{Y}$ tiene menos símbolos y es, en este sentido, más simple que $\sim (\sim \mathrm{X} \vee \sim \mathrm{Y})$. Por ello es la abreviación de esta última. Un proceso similar

[40] Gödel sólo llama variables a estos símbolos. Sin embargo, es conveniente recordar que en otros contextos, específicamente en aquellos que se ocupan de los lenguajes de primer y segundo orden, las variables –así como las constantes- son llamadas "términos".

[41] En este contexto, las clases de números son algo parecido a lo que se conoce como "conjunto" en la Teoría de Conjuntos usual, en el sentido de que algunas de las operaciones encontradas en los conjuntos también pueden llevarse a cabo entre las clases. Sin embargo, las clases se distinguen de los conjuntos porque estas se componen de objetos que tienen un rasgo en específico, mientras que los conjuntos se definen por los objetos que los componen y no por las propiedades de estos (*Cfr*. http://www.filosofia.org/enc/ros/clase.htm y Badesa, Jané y Jansana, 2007, pág. 30). En este apartado usaré la terminología de Gödel para exponer el sistema tal y como se presenta en su obra. Sin embargo, en los demás usaré la teoría de conjuntos por ser más usual.

[42] Existe *n* tipos de variables.

es llevado a cabo para $\supset, \equiv, \Sigma$. = es el símbolo que representa la igualdad y es usado con el mismo sentido que tiene en las matemáticas usuales.

El otro tipo de símbolos son las metavariables $\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}$, etc. Estos, como se verá más adelante, son usados para representar esquemas de axiomas. El objetivo de esto es, como mencioné, mostrar únicamente las estructuras básicas de los axiomas que se pueden formar en el sistema –este es uno de los requerimientos para que el sistema sea recursivamente axiomatizable.

Dado que ya se expusieron todos los símbolos involucrados en *P*, es momento de mencionar cómo se forman las expresiones válidas en el sistema.

3.2. Reglas de formación.

Las reglas de formación de *P* no son presentadas por Gödel de una manera convencional, esto es, como una lista que enumera qué expresiones son las reglas aceptadas en *P*, sino que son presentadas de manera textual (Gödel, 1931, págs. 58 - 59). En consecuencia, en este apartado me dedicaré a enumerar dichas cualidades únicamente para tener una forma que permita distinguirlas unas de otras, pero son exactamente las mismas que se encuentran en el escrito y el orden en que aparecen es el mismo:

1. Entre los signos primitivos, no se requieren variables para representar relaciones binarias –o relaciones que involucren un número de elementos mayor a 2- entre las variables de los tipos mencionados, pues éstas pueden definirse como clases de pares ordenados y estos como clases de clases. Por ejemplo: el par ordenado $\langle a, b\rangle$ se define como $\{\{a\},\{a, b\}\}$, en éste $\{a, b\}$ denota la clase cuyos elementos son a y b, y $\{a\}$ la clase cuyo único elemento es a.[43]
2. En *P* existen los *signos del primer tipo*, los cuales son una combinación de signos con las formas siguientes:

   $$\mathrm{a}, \mathrm{sa}, \mathrm{ssa}, \mathrm{sssa} \ldots, \text{etc.},$$

   en dichas expresiones a representa 0 o una variable de tipo 1. También existen los *signos de tipo* n, que son los signos que usan variables de tipos diferentes a 1[44].
3. Son *fórmulas elementales* las combinaciones de signos de la forma $\mathrm{a}(\mathrm{b})$, donde b es un signo de tipo n, y a un signo de tipo $n+1$.
4. Se define la clase de las *fórmulas* como la mínima clase que abarca todas las fórmulas elementales y que, siempre que contiene α y β, contiene a $\sim(\alpha)$, $(\alpha) \vee (\beta)$ y $\Pi \mathrm{x}(\alpha)$[45] –donde x es una variable cualquiera.

[43] Gödel usa las letras *a* y *b* para representar variables de cualquier tipo.
[44] Esto implica que así como hay variables de tipo 1,2 y 3, también hay signos de tipo 1, 2 y 3.

5. La *sentencia* es una fórmula sin variables libres, es decir, sin variables que no se encuentren ligadas a Π[46].
6. Una fórmula que contiene n variables libres (y ninguna otra variable) se llamará *signo relacional n-ario* –esto quiere decir que indica n número de elementos. Cuando $n = 1$, se llama *signo de clase*.
7. En la expresión $\mathrm{S}^{b}_{\mathrm{v}}\alpha$[47], α representa una fórmula, v una variable y b un signo del mismo tipo que v, y ésta resulta de reemplazar en α cada aparición libre de v por b.
8. Una fórmula α es una *elevación de tipo*[48] de una fórmula β si α se obtiene a partir de β mediante la elevación por el mismo número de cada variable que aparece en β.
9. Gödel no es explícito en esto, pero por lo encontrado en el texto de 1931, puedo decir que nada más es fórmula.

Esta serie de reglas indican qué expresiones serán consideradas fórmulas bien formadas en *P* y también indican cómo se pueden formar algunas otras a partir de la interacción de sus variables y demás componentes.

Hay otro aspecto importante sobre la formación de fórmulas que es conveniente mencionar, a saber, el hecho de que estas reglas de formación son *reglas de formación recursivas*, las cuales son

> "un conjunto de reglas que determinan en primer lugar un conjunto de fórmulas básicas y en segundo lugar un conjunto de reglas que permiten construir más fórmulas a partir de las fórmulas ya dadas, de tal forma que estas reglas de construcción se puedan aplicar de nueva cuenta a las fórmulas que se obtienen a través de ellas." (Gutiérrez, 2014, pág. 140, nota 7)

Con esto podemos observar que las reglas de *P* cumplen con los elementos restantes para ser recursivas: cada una indica las formas básicas que deben tener las expresiones para ser consideradas fórmulas bien formadas dentro del sistema. Además, estas reglas pueden ser aplicadas de manera repetida para formar nuevas fórmulas con las reglas ya establecidas. Por ejemplo, la regla 4 nos dice que $(\alpha) \vee (\beta)$ es una fórmula elemental y, al estar construida con metavariables, nos indica la estructura que

[45] Según el matemático austríaco, $\Pi\mathrm{x}(\alpha)$ también es una fórmula cuando x no aparece o no está libre en α. En tal caso $\Pi\mathrm{x}(\alpha)$ significa lo mismo que α.

[46] Una variable es *ligada* cuando es la misma que se encuentra a lado del cuantificador. Cuando una variable no se encuentra ligada, se llama *variable libre*. En $\Pi\mathrm{x}_1(\mathrm{x}_2(\mathrm{x}_1) \equiv \mathrm{y}_2(\mathrm{x}_1))$ x_1 es una variable ligada; x_2 no lo es porque es una variable diferente a la que se encuentra a lado del cuantificador.

[47] Si v no aparece libre en α, entonces $\mathrm{S}^{b}_{\mathrm{v}}\alpha = \alpha$

[48] Elevar un tipo en una expresión de este tipo consiste en, por ejemplo, cambiar las variables de tipo 1 en la fórmula β por variables de tipo 2 para obtener la fórmula α. (Cfr. Torreti, 1998, p. 329)

deben tener todas las fórmulas formadas con la conectiva $\vee$. Además, las metavariables pueden ser sustituidas por variables de cualquier tipo, de modo que cualquier expresión formada con la misma estructura y los símbolos de dichas variables puede ser considerada una fórmula válida en P, por tanto, $x_1 \vee x_1$, $x_2 \vee x_2$, $x_3 \vee x_3$,…, etc., son fórmulas. Lo mismo ocurre con el resto de reglas de formación.

Anteriormente mencioné que, además del *lenguaje* y las *reglas de formación*, los sistemas axiomáticos formales también cuentan con una parte axiomática en la que se presentan los *axiomas* del sistema y las *reglas de inferencia* del mismo. Esta parte será mostrada a continuación.

3.3. Axiomas y reglas de inferencia.

Los axiomas del sistema *P* son de cinco tipos. Los del primer tipo son fórmulas que usan en las demostraciones tal y como Gödel los enuncia y los otros cuatro son esquemas de axioma, es decir, son expresiones construidas con metavariables, las cuales se pueden sustituir por cualquier fórmula bien formada del sistema. Son los siguientes:

I.
   1. $\sim(\mathrm{sx}_1 = 0)$
   2. $\mathrm{sx}_1 = \mathrm{sy}_1 \supset \mathrm{x}_1 = \mathrm{y}_1$
   3. $\mathrm{x}_2(0) \wedge \Pi\mathrm{x}_1\big(\mathrm{x}_2(\mathrm{x}_1) \supset \mathrm{x}_2(\mathrm{sx}_1)\big) \supset \Pi\mathrm{x}_1\big(\mathrm{x}_2(\mathrm{x}_1)\big)$

II. Todas las expresiones que resulten de sustituir X, Y y Z por cualquier fórmula bien formada del sistema en los esquemas siguientes:
   1. $\mathrm{X} \vee \mathrm{X} \supset \mathrm{X}$.
   2. $\mathrm{X} \supset \mathrm{X} \vee \mathrm{Y}$.
   3. $\mathrm{X} \vee \mathrm{Y} \supset \mathrm{Y} \vee \mathrm{X}$.
   4. $(\mathrm{X} \supset \mathrm{Y}) \supset (\mathrm{Z} \vee \mathrm{X} \supset \mathrm{Z} \vee \mathrm{Y})$.

III. Toda fórmula que resulte de estos dos esquemas:
   1. $\Pi\mathrm{v}\alpha \supset \mathrm{S}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{v}}\alpha$.
   2. $\Pi\mathrm{v}(\beta \vee \alpha) \supset \beta \vee \Pi\mathrm{v}(\alpha)$.

IV. Toda expresión que resulte de:
   1. $\Sigma\mathrm{u}\Pi\mathrm{v}(\mathrm{u}(\mathrm{v}) = \alpha)$

V. Toda expresión que resulte de:
   1. $\Pi\mathrm{x}_1(\mathrm{x}_2(\mathrm{x}_1) \equiv \mathrm{y}_2(\mathrm{x}_1)) \supset \mathrm{x}_2 \equiv \mathrm{y}_2$

Los axiomas de la sección I son tres axiomas tomados del sistema de Peano. En lenguaje natural se pueden expresar de la siguiente manera (Garrido, 1974, pág. 302):

1. Cero no es un sucesor de ningún número.
2. Si dos números tienen el mismo sucesor, es que son iguales.
3. Toda propiedad que convenga a cero y al sucesor de cualquier número, supuesto que convenga también a ese cualquier número, conviene a todo número.

También pueden expresarse en lenguaje formal de segundo orden. Para esto, las nociones de *cero*, *número* y *sucesor* deben ser representadas por los símbolos $0, N, '$, respectivamente (Garrido, 1974, pág. 303):

1. $\forall x(Nx \rightarrow \neg(x' = 0))$
2. $\forall x \forall y((Nx \wedge Ny \wedge (x' = y')) \rightarrow (x = y))$
3. $\forall P([P0 \wedge \forall x\{Nx \wedge (Px \rightarrow Px')\}] \rightarrow \forall y(Ny \rightarrow Py))$

Con esto, tenemos otra manera de entender tales axiomas. Además, sirve para tener una mejor comprensión el axioma 3: en la notación de Gödel las variables de tipo 2 –como x_2- tienen la misma función que P en el lenguaje formal recién presentado, esto es, ambas sirven para representar propiedades[49].

Los axiomas de la sección II son expresiones usuales de la lógica de proposiciones y, en algunos contextos, pueden ser encontradas como reglas de inferencia de la misma (*Cfr*. Garrido, 1974, págs. 64 67).

Sobre los axiomas de la sección III, Gödel afirma que, α puede ser sustituida por una fórmula en la que no aparezca una variable (v) libre y que c[50] puede ser sustituido por un signo del mismo tipo que la variable v. Esto puede hacerse sólo si c no contiene alguna variable que esté ligada (a un cuantificador) en un lugar de α donde v se encuentre libre. La diferencia entre 1. y 2. es que en 1. debe realizarse la operación indicada por S.

Respecto del axioma de la sección IV, Gödel dice que v puede ser sustituida por una variable de cualquier tipo, u por una variable de tipo superior y α por una fórmula en la que u se encuentre ligada a un cuantificador.

[49] Anteriormente mencioné que las variables de tipo dos sirven para representar clases de individuos y que las clases están formadas por objetos que tienen una propiedad en común. Por dicha razón, las variables de tipo 2 pueden tener una función similar a la de los predicados de la lógica cuantificacional. De manera simplificada, podemos decir que si un objeto pertenece a una clase, entonces ese objeto cuenta con la propiedad que define a la clase.

[50] c puede ser una variable, el 0 o un sigo de la forma s … su, donde u es 0 o una variable de tipo 1.

El axioma de la sección V afirma que si todos los elementos de una clase x_2 son los mismos elementos que los de una clase y_2, entonces x_2 y y_2 son la misma clase.

Todas estas fórmulas son las que representan los axiomas de P y, como hemos mencionado y dado que son axiomas, sirven para demostrar los teoremas de P.

Para llevar a cabo estas demostraciones también se necesitan *reglas de inferencia*, esto es, una serie de principios que nos indiquen cómo se pueden obtener fórmulas a partir de otras. Gödel sólo menciona dos reglas y lo hace del siguiente modo (Gödel, 1931, pág. 61): "una fórmula γ se llama una *inferencia inmediata* de α y β, si α es la fórmula $\sim \beta \vee \gamma$ (y γ se llama una *inferencia inmediata* de α, si γ es la fórmula $\Pi \mathrm{v} \alpha$, donde v designa una variable cualquiera)."

La primera regla nos dice que γ se obtiene o se sigue de β y α si esta última es la fórmula $\sim \beta \vee \gamma$: esta primera regla es una especie de *silogismo disyuntivo* de la lógica formal, pues nos indica que γ se sigue de $\sim \beta \vee \gamma$ debido a que se tiene β, la cual ayuda a eliminar $\sim \beta$ y a obtener γ. La segunda regla nos indica que γ debe ser $\Pi \mathrm{v} \alpha$, esto es, una fórmula con un cuantificador universal y una variable cualquiera. α se refiere a la parte de la fórmula cuyas variables pueden estar ligadas al cuantificador. Así, si γ se sigue de α, entonces es el resultado de cuantificar universalmente las variables de α[51].

Con todos los elementos presentados hasta ahora, según Gödel, P es capaz de formalizar la aritmética y demostrar aspectos relacionados con tal teoría. Por tanto, en los siguientes apartados, me ocuparé de decir qué es la aritmética, qué son los números naturales, cuál es la relación de estos con P y cómo se pueden expresar algunas de sus propiedades con el lenguaje de la aritmética (específicamente las propiedades de los números Gödel).[52]

[51] Hacer esto puede parecer inválido, pero puede hacerse por lo siguiente: α puede ser una expresión como $x_2(x_1)$ –que nos indica que x_1 es una variable que tiene una propiedad cualquiera [representada con x_2]-. En lógica formal, una expresión como $x_2(x_1)$, que no se encuentra ligada a un cuantificador, no puede ser cuantificada universalmente, a menos que no haya sido inferida de una expresión que nos indique tal propiedad pertenezca a un único individuo y que no esté sujeta a ninguna otra condición. Es decir, si no se indica que dicha expresión denota una propiedad que le pertenece a un único individuo y no exista una condición que indique que la generalización no se puede llevar a cabo, entonces es posible obtener $\Pi x_1[x_2(x_1)]$ de $x_2(x_1)$. Para más información sobre este aspecto, se puede revisar *Lógica Formal* de Manuel Garrido (Garrido, 1976, págs. 132 – 137).

[52] Como mostraré más adelante, es necesario usar el lenguaje de la aritmética para expresar algunas de las propiedades de los números, porque estos recursos son los que le permitieron a Gödel expresar propiedades de los números Gödel.

3.4. Correspondencia entre *P* y la Aritmética.

En este apartado me dedicaré hablar sobre la correspondencia entre la Aritmética y el sistema *P* de manera general, porque lo importante de esto es mencionar cuál es la teoría de la que proceden los objetos que *P* pretende formalizar. No profundizaré en los aspectos de la Aritmética, sino en aquellos que me serán útiles para realizar este apartado, pues, de lo contrario, explicar a fondo esta teoría desviaría esta tesis de su objetivo principal: hablar de la consistencia como una propiedad perteneciente a los sistemas.

Dicho esto debo retomar algunos aspectos relacionados con las interpretaciones de los sistemas formales, esto es, aspectos sobre las correspondencias que se establecen entre estos y los objetos de la teoría en cuestión. Como mencioné, los sistemas formales están hechos para realizar demostraciones sobre sobre los objetos que estudian las *teorías matemáticas reales* o *teorías intuitivas*. Estas teorías se ocupan de objetos geométricos, números, conjuntos de números, las relaciones, operaciones, propiedades que se pueden dar entre estos, etc. Estas hablan de dichos objetos a través de enunciados –que pueden ser teoremas o axiomas-.

Dichos enunciados, así como ciertas relaciones dadas entre estos, pueden ser representados de manera similar en los sistemas axiomáticos formales para realizar demostraciones acerca de estos, esto es, los sistemas formales representan las estructuras de dichos objetos con sus expresiones al igual que las teorías lo hacen mediante sus enunciados. Así es como, de manera resumida, se logra una interpretación –o correspondencia- entre un sistema formal y los objetos que trabaja una teoría intuitiva. Ahora, en este contexto, la interpretación o correspondencia entre un sistema y dichos objetos se dará entre *P*, el sistema que describí en páginas anteriores, y los objetos de la Aritmética: los números naturales.

3.4.1. Aritmética en *P*

La Aritmética, como mencioné, es una de las ramas de las matemáticas más elementales. Se ocupa de las propiedades del conteo de números y fracciones y de las operaciones básicas aplicadas a estos (Bogomolny, 2005). Los números de los que se ocupa la Aritmética, comúnmente, son los enteros y los naturales. En este sentido, existe una diversidad algo extensa de las maneras en que se pueden expresar las propiedades de estos. Aquí, debido a la constitución de *P* y de la numeración de Gödel –que emplea números naturales- me ocuparé de la Aritmética que estudia números naturales y, específicamente, de la Aritmética de Peano, pues con base en esta se hicieron los Teoremas de Incompletud de Gödel.

Antes de explicar qué son los números naturales y algunas de sus propiedades, debo explicar algunos aspectos relacionados con *P* y la aritmética. El primero es que, como dije, la Aritmética es una rama de las matemáticas: una *teoría intuitiva* cuyos objetos pueden servir como modelo de un sistema. Aquí, la Aritmética de Peano –que de ahora en adelante la enunciaré como *PA* o simplemente como Aritmética- será el medio por el cual se observarán la estructura de los números naturales ya que estos son el modelo de ésta. Así, y dado que *P* y *PA* tienen el mismo conjunto de axiomas y formalizan los mismos objetos, entonces los números naturales serán su modelo.

El segundo aspecto tiene que ver con la manera en que formalizan los números naturales, pues *P* cuenta con herramientas para formalizarlos: tiene variables de *n* tipos para representar números, clases de números, clases de clases, etc. Esto quiere decir que en *P* podemos construir expresiones que se refieran a los objetos con los que trabaja *PA*.

Por otro lado, podemos encontrar los símbolos $\Pi, 0, s$ que se ocupan de expresar propiedades de los números en *P*. s se refiere al *sucesor* de un número: una relación encontrada entre los números naturales. Π es un cuantificador y sirve para hablar sobre clases de números, esto es, sobre las propiedades que estos pueden tener cuando se les considera en conjunto. 0 denota el primer elemento del conjunto de los naturales. Con todos estos elementos es posible construir expresiones que se refieren a números. Por ejemplo, los axiomas de la sección I, como mencioné, expresan algunas propiedades de los naturales encontradas en los axiomas de Peano –los cuales expondré más adelante.

Ahora bien, la Aritmética usa su propio lenguaje para construir sus propios enunciados sobre los números naturales. Estos enunciados son repetidos en *P*, con su lenguaje, claro está, y con ellos es posible hacer demostraciones con ayuda de los axiomas y las reglas de transformación. Por ejemplo, si *A* es un enunciado, específicamente un teorema de *PA*, entonces es posible encontrar su contraparte mediante la fórmula α del lenguaje del sistema *P*, que también será un teorema –pues mencioné que los teoremas tanto en las teorías como en los sistemas, tienen la misma definición. Así, con los axiomas y las reglas de inferencia de *P* es posible determinar si α es demostrable.

3.4.2. Números naturales como objetos de la Aritmética.

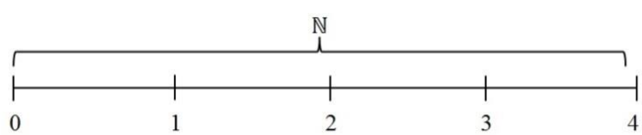
En este apartado no me ocuparé de si los números a los que apela *PA* se encuentran en el mundo que experimentamos con los sentidos o si con construcciones mentales que usamos para explicarnos el mundo. Me limitaré a mencionar algunas de las propiedades que se pueden denotar en el terreno sistemático de las matemáticas. Esto se debe, además, a que si bien Gödel sí era realista y sí consideraba que los números existían (*Cfr*. Gutiérrez, 2014 págs. 147 - 148), yo sólo hablaré de algunas de sus propiedades, relaciones y operaciones.

Ahora bien, en matemáticas se trabaja con diversos conjuntos de números. Todos estos comparten algunas cualidades, pero existen algunas otras que los hacen ser diferentes entre sí. El conjunto más básico es el de los *números naturales*. Estos son los números que aprendemos en las primeras etapas de nuestra vida y los usamos, comúnmente, para contar las cosas que nos encontramos en nuestro hacer diario. Personas, perros, árboles y libros son algunas de las cosas que podemos contar con estos números.

Contar consiste en asignar un símbolo que representa un número a un conjunto de cosas (Gómez, 2014, pág. 129). De esta manera, el símbolo “1” representa al conjunto al que pertenece una cosa, “2” el conjunto al que pertenecen dos cosas, “3” al que pertenecen tres y así sucesivamente. También tiene el objetivo de indicar orden, esto es, de decir en qué lugar o posición se encuentra algún objeto en una sucesión: decir si es el primero, segundo, tercero, etc. Aquí no trataré a los números en relación con las cosas, sino como un conjunto de objetos.

Los conjuntos de números se representan con letras. La letra que se usa para representar al conjunto de los naturales es $\mathbb{N}$. Según el contexto (cfr. NCTM, 1972, pág. 13) el conjunto de los naturales puede ser entendido como $\mathbb{N} = \{1,2,3,4 \ldots\}$ o $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4 \ldots\}$. Aquí, el conjunto que usaré es $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4 \ldots\}$ porque 0, como lo he venido mencionando, para Peano es un número y es el primer elemento de $\mathbb{N}$.

Antes de hablar sobre cómo los axiomas de Peano pueden dar una definición de estos números y de cómo otorgan ciertas propiedades a los mismos, debo mencionar un aspecto: estos números pueden representarse mediante una recta.



El objetivo de esta recta es tener una representación de la manera en la que se ordenan los números: el primer elemento es el 0; luego se encuentra el sucesor del 0: el 1; después el sucesor del sucesor del 1, el 2; y así sucesivamente. Además, todos estos se encuentran ordenados del mayor a menor.

3.4.2.1. Los axiomas de Peano.

Entre 1887 y 1908, Giuseppe Peano se dedicó a construir un sistema axiomático para la Aritmética de números naturales. Este sistema contiene axiomas que denotan algunas de las propiedades de tales números. Ya mencioné tres de estos axiomas porque son retomados por Gödel para construir *P*. Ahora me ocuparé de mencionar algunos otros para dar cuenta de algunas otras propiedades, relaciones y operaciones que se pueden encontrar entre los números naturales.

En *Lógica Simbólica* (Garrido, 1974, pág. 302 – 305), Manuel Garrido dice que Peano toma como base tres símbolos para operaciones –así como funciones y relaciones-, tres nociones primitivas y cinco axiomas.

Los símbolos usados en el sistema de Peano son:

1) $=$ igualdad.
2) $'$ sucesor
3) 0 representación simbólica de *cero*.

Así como los paréntesis y cuantificadores usados en los lenguajes de primer y segundo orden.

Las nociones son:

a) *cero*
b) *número*
c) *sucesor*

Los axiomas en lenguaje natural son los siguientes:

1. *Cero* es un *número*
2. El *sucesor* de un número es un *número*.
3. Si dos *números* tienen un mismo *sucesor*, entonces son iguales.
4. *Cero* no es *sucesor* de ningún *número*.
5. Toda propiedad que convenga a *cero* y al *sucesor* de cualquier *número*, en el supuesto de que tal número también la tenga, conviene a todo *número*.

Dichos axiomas también pueden ser representados en el lenguaje formal de segundo orden[53].

---

[53] Anteriormente, mencioné tres de estos axiomas retomados por Gödel para construir *P*. A saber:

1. $\sim(\mathrm{sx}_1 = 0)$
2. $\mathrm{sx}_1 = \mathrm{sy}_1 \supset \mathrm{x}_1 = \mathrm{y}_1$
3. $\mathrm{x}_2(0) \wedge \Pi\mathrm{x}_1\big(\mathrm{x}_2(\mathrm{x}_1) \supset \mathrm{x}_2(\mathrm{sx}_1)\big) \supset \Pi\mathrm{x}_1\big(\mathrm{x}_2(\mathrm{x}_1)\big)$

La única diferencia entre estos y los mostrados en este apartado es que no se encuentran formalizados los axiomas que indican que 0 es un número y que el sucesor de todo número es un número. Gödel no da una explicación de por qué hace esto, pero una razón puede ser que, en primer lugar, para él es obvio que 0 sea un número y, en segundo lugar, que las variables que usa en dichas expresiones son designadas como expresiones que representan números desde que presenta

1) $N0$
2) $\forall x(Nx \rightarrow Nx')$
3) $\forall x \forall y((Nx \wedge Ny \wedge (x' = y')) \rightarrow (x = y))$
4) $\forall x(Nx \rightarrow \neg(x' = 0))$
5) $\forall P([P0 \wedge \forall x\{Nx \wedge (Px \rightarrow Px')\}] \rightarrow \forall y(Ny \rightarrow Py))$

El axioma 1) indica que 0 es un número, mientras que el 2) nos indica que el sucesor de un número también será un número.

El axioma 4) indica que 0 no es sucesor de ningún número. Con esto se puede inferir que, en PA y en el campo de los naturales, no hay ningún número antes del cero. Por lo tanto, como mencioné anteriormente, 0 es el primer elemento de ℕ. Y debido a 1), 0 es el primer número de ℕ.

Para obtener los demás números, se puede recurrir a la noción *sucesor* y a la función que la describe, la cual nos permite saber qué número sigue después de otro en el conjunto de los naturales. $'$ -os en el lenguaje de *P*- representa dicha función y describe el siguiente proceso: $x' = x + 1$, esto es, el sucesor de x es la suma de x más uno. Así, el sucesor de 0 se puede encontrar si sustituimos 0 en todas las apariciones de x para obtener el siguiente resultado: $0' = 0 + 1 = 1$. Este mismo procedimiento se puede aplicar al sucesor del 0, 1, y también al sucesor del sucesor del 0. El objetivo de esto es aplicar dicho procedimiento a cada número para obtener su sucesor y así obtener el conjunto ℕ. Cabe mencionar que cada sucesor es mayor al número que le antecede.

Por otro lado, el axioma 3) indica que dos números que tengan el mismo sucesor, serán iguales. Por ejemplo, si hay dos números que tienen como sucesor al número 4, entonces estos serán el 3 y no otro.

Esto también es otra manera de decir que no es posible que dos números diferentes tengan el mismo sucesor. Por ejemplo, si consideramos el 1 y el 2, y aplicamos la función descrita arriba, es claro que el 2 es el sucesor de 1 y el 3 será el sucesor del 2. Ninguno de los respectivos sucesores es igual al otro, de la misma manera que ninguno de los dos números considerados son iguales entre sí.

Lo anterior también implica que todo número tiene un único sucesor. Si aplicamos la función sucesor a 1, el resultado será 2 y no otro; no importa cuántas veces se realice la operación $1' = 1 + 1 = 2$, el resultado será siempre el mismo. Y algo similar pasa cuando aplicamos dicha función a 1, 2, 3,…,

los elementos del lenguaje de *P*. Otra diferencia que merece ser resaltada es que se necesita el uso del segundo orden en este contexto para poder cuantificar las propiedades de los números, poder explicar algunos axiomas y para ser más específico en que tales axiomas y propiedades son aplicables a todos los elementos de ℕ.

etc.: el resultado será el sucesor de cada uno de estos y nunca será un número igual o menor al que se aplica la función, o al número que de hecho es el sucesor de tal número.

El axioma 5) dice que toda propiedad que pueda ser asignada al 0 y al sucesor de cualquier número, también podrá ser asignada a cualquier otro número de $\mathbb{N}$. Esto quiere decir que hay propiedades que todos los elementos de $\mathbb{N}$ comparten por el hecho de ser números y de estar en dicho conjunto. Así, por ejemplo, si 0 cumple con la propiedad de tener un único sucesor, y 1 también cumple con ésta, entonces todos los números posteriores también cumplirán con dicha propiedad.

Garrido sugiere que se pueden hacer ciertas modificaciones para que los axiomas 1) y 3) sean reglas gramaticales de *PA*, con el fin de que indiquen cómo deben formarse fórmulas y términos. Además, sugiere que se agreguen los símbolos: + de suma o adición, y · de multiplicación o producto. Esto tiene el fin de presentar otros dos axiomas que resultan aplicables a los números naturales. Son los siguientes[54]:

Axiomas de adición

1) $\forall x(x + 0 = x)$
2) $\forall x \forall y(x + y' = (x + y)')$

Axiomas de producto

1) $\forall x(x \cdot 0 = 0)$
2) $\forall x \forall y(x \cdot y' = x \cdot y + x)$

El axioma de adición 1) indica que la suma de cualquier número con cero tendrá como resultado ese mismo número. Por otro lado, el axioma 2) dice que la suma de cualquier número x con el sucesor de cualquier y tiene como resultado el sucesor de la suma de x más el antecesor de y.

Los axiomas de producto dicen lo siguiente: 1) afirma que cualquier número multiplicado por 0 da como resultado 0; y 2) dice que multiplicar cualquier número x por el sucesor de cualquier otro y es lo mismo que multiplicar x por y y sumar x al resultado de esa operación.

Estos cuatro axiomas son aplicables a todos los elementos de $\mathbb{N}$ y, además, dan cuenta de las dos operaciones básicas que se pueden realizar con los elementos de dicho conjunto de números (NCTM, 1972, pág. 14). Además, también sirven como las definiciones recursivas de dichas operaciones.

[54] Estos axiomas se encuentran expresados en lenguaje de segundo orden. Sin embargo, pueden ser expresados mediante fórmulas como $n + 0 = n$, que dicen exactamente lo mismo. El objetivo de usar el segundo orden en este contexto es, como mencioné, ser específico en el hecho de que estos pueden ser aplicados a todos los elementos de $\mathbb{N}$. Si se quiere encontrar una versión puramente matemática de estos axiomas, así como otras demostraciones relacionadas con estos se puede consultar *Álgebra superior. Curso completo* de Carmen Gómez Laveaga (cfr. Gómez, 2014, págs. 203 – 211)

Ahora bien, todos los axiomas de Peano presentados en este apartado nos muestran las propiedades y las operaciones más básicas que se pueden encontrar en el conjunto de los números naturales. A continuación, presentaré algunas otras propiedades que pertenecen a los números naturales y otras cuantas que se encuentran entre sus operaciones para profundizar un poco más en cómo pueden usarse los números.

3.4.2.2. Algunas otras propiedades relacionadas con los números naturales.

La primer propiedad que debo mencionar puede tener relación con los primeros cinco axiomas de Peano. Esta propiedad dice que $\mathbb{N}$ es un conjunto de números ordenado (NCTM, 1972, pág. 14). Esto implica que dados dos números diferentes, uno de estos es menor que otro. Por ejemplo, si se consideran los números 2 y 3, resulta que 2 es menor que 3. Para representar esta relación de orden se usa el símbolo $<$, de modo que en lugar de escribir "2 es menor que 3" podemos escribir la expresión $2 < 3$. Se puede invertir el sentido de $<$ para obtener el símbolo $>$, el cual representa la propiedad "ser mayor que" de modo que también se puede representar la relación dada entre 4 y 3 con la expresión $4 > 3$.

Ahora la relación con los primeros cuatro axiomas de *PA* se encuentra si consideramos los aspectos mencionados de la función *sucesor* y del 0 como primer elemento de $\mathbb{N}$: dado que antes de 0 no hay ningún otro número, éste es el primer elemento de $\mathbb{N}$. La función sucesor permite saber qué número será el siguiente a 0, y el siguiente al sucesor de 0 y así sucesivamente. Dado que esto implica hacer una adición al número anterior, el resultado (el *sucesor*) será un número mayor y esta relación puede ser representada con los símbolos $<, >$.

Por ejemplo, si a 0 aplicamos la función *sucesor* -$(0)' = 0 + 1$- sabemos que su sucesor es 1. Como 1 es mayor que 0, entonces dicha relación se puede representar con $0 < 1$. Si aplicamos esta función a 1 -$(1)' = 1 + 1$-, sabemos que su sucesor es 2. Dado que 2 es mayor que 1, podemos representar esto con $1 < 2$. Se puede llevar a cabo dicho proceso con todos los elementos de $\mathbb{N}$. Todos sus elementos son diferentes y, cuando se consideran dos de estos, uno es mayor y el otro menor. El *sucesor* siempre es mayor que el antecesor.

Por otra parte, mencioné que las operaciones básicas de dichos números son la *suma* o *adición* y la *multiplicación* o *producto*, y mencioné algunas de las propiedades básicas de los mismos, las cuales son expresadas mediante axiomas presentes en el sistema de Peano. Además de estas propiedades, existen algunas otras que mencionaré a continuación, para mostrar la manera en que pueden comportarse los números naturales.

El primer conjunto de propiedades pertenece a la *suma* o *adición* (Gómez, 2014, pág. 206)[55]:

1) $(m+n)+r=m+(n+r)$ (propiedad asociativa)
2) $m+n=n+m$ (propiedad conmutativa)
3) $m+0=m$ (existencia del elemento neutro)
4) Si $n+m=r+m$, entonces $n=r$ (ley de cancelación)
5) Si $n \neq 0$, entonces $n+m \neq 0$ para toda $m \in \mathbb{N}$.

La propiedad 1) dice que en una suma de tres números, estos pueden ser asociados de diferente manera sin afectar el resultado de tal operación. La propiedad 2) afirma que el cambiar el orden de los elementos involucrados en una suma no afecta el resultado. 3) establece que la suma de cualquier número y 0 es igual a ese número –esta propiedad también puede ser presentada como axioma. 4) afirma que si el resultado de sumar m más n es el mismo que sumar m más r, entonces n y r son el mismo número. La última propiedad, 5), afirma que si un número es diferente de 0 y se realiza una suma con otro número, entonces el resultado también será diferente de 0.

El segundo conjunto de propiedades pertenece a la *multiplicación* o *producto*:

1) $(m \cdot n) \cdot r=m \cdot (n \cdot r)$ (propiedad asociativa)
2) $m \cdot n=n \cdot m$ (propiedad conmutativa)
3) $m \cdot 1=m$ (existencia del neutro multiplicativo: 1)
4) $r \cdot (m+n)=r \cdot m+r \cdot n$ (distributividad del producto respecto a la suma)
5) Si $n \neq 0$ y $n \cdot m=n \cdot r$, entonces $m=r$ (ley de cancelación)
6) Si $n \neq 0$ y $m \neq 0$, entonces $n \cdot m \neq 0$

Las propiedades 1) y 2) son similares a las encontradas en la *suma*: la propiedad asociativa indica que en una multiplicación de tres números, estos pueden ser asociados de distinta manera sin afectar el resultado de la operación, y la propiedad conmutativa implica que cambiar el orden de los componentes de la multiplicación no altera el resultado de la misma.

[55] Aquí no uso el lenguaje de segundo orden porque lo que pretendo es presentar las propiedades de las operaciones tal como se pueden encontrar en un sistema de Peano y no como una expresión que indique que tales propiedades pertenecen a las operaciones. Dicho de otra manera, usaría el segundo orden si quisiera indicar, mediante una fórmula, que todas las propiedades de la *suma* son aplicables a las expresiones construidas con los símbolos $+, =, n, m$, pero dado que el objetivo es mostrar cómo se dan estas propiedades en tales operaciones, he decidido usar el lenguaje de los números naturales. Además, se puede usar el segundo orden para especificar que estas son aplicables a todos los números naturales, pero por ahora es suficiente con tener este hecho en cuenta.

La propiedad 3) indica que la multiplicación de cualquier número con 1 dará como resultado ese mismo número. 4) afirma que el producto de r por la suma de m y n, tiene el mismo resultado que multiplicar r por m y r por n, y luego sumar los resultados. 5) nos dice que si un número n es diferente de 0, y el resultado de multiplicar éste por m es el mismo que el de multiplicar n por r, entonces m y r son el mismo número. Por último, 6) indica que si dos números son diferentes de 0 y son multiplicados, el resultado también será diferente de 0.

Todas estas propiedades de las operaciones de *suma* y *producto* pueden ser aplicadas a todos los números naturales: los procedimientos que describen pueden ser llevados a cabo con todos los elementos de $\mathbb{N}$ y los resultados de realizar esto serán similares a los comportamientos descritos renglones arriba. Para comprobar esto, es suficiente sustituir las variables con los símbolos de los números y realizar las operaciones pertinentes. Por ejemplo:

$$[\{(1+2)+3=1+(2+3)\} \rightarrow \{(3)+3=1+(5)\}] \rightarrow 6=6$$

Lo mismo puede realizar con las demás fórmulas que representan estas propiedades; como mencioné, basta con sustituir las variables por números.

Antes de continuar con el siguiente apartado, debo mencionar lo siguiente: tradicionalmente se nos enseña que en aritmética existen cuatro operaciones básicas, a saber, *suma*, *resta*, *multiplicación* y *división*. En algunos otros contextos también se considera a la *exponenciación* como parte de las operaciones de la aritmética. Aquí sólo he mencionado la *suma* y la *multiplicación* porque en *PA* son las únicas operaciones que se requieren. Gödel también considera a la *exponenciación* como una noción básica de la Aritmética. Sin embargo, si consideramos los números naturales fuera de lo dicho sobre *PA*, la *resta* y la *división* sí pueden encontrarse, pero éstas deben cumplir algunas condiciones dadas a partir de las operaciones de *suma*, *multiplicación* y la relación de *orden*.

La *resta* –también llamada *diferencia*- se representa como $n-m=r$, donde m, n son números naturales y r es la *resta* o *diferencia* de dicha operación. Dicha operación se define a partir de las siguientes condiciones: 1) se debe cumplir que $m \leq n$[56]; y 2) r debe satisfacer $m+r=n$. Como se puede observar, esta operación se define a partir de condiciones establecidas con ayuda de la suma y la *relación* de *orden*.

[56] Este símbolo significa "menor o igual a"

La *división* se representa con la fórmula $\frac{n}{m} = r$, que indica que dividir un número n entre un número m da como resultado un tercer número r. Se define a partir de las siguientes condiciones: 1) $m \neq 0$; y 2) $n = r \cdot m$.

La *potenciación* o *exponenciación* se representa con la fórmula n^m, ésta nos indica que n se debe multiplicar m veces por sí misma. n puede ser cualquier número natural al igual que m, la diferencia es que m indica el número de veces que n debe multiplicarse por sí misma. Así, por ejemplo, la expresión 2^3 es lo mismo que tres veces 2, de modo que $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$. Se define a partir de las siguientes condiciones: 1) $m \neq 0$; y 2) $n^m = n^1 \cdot n^2 \cdot n^3 \ldots n^m$ (para una definición más detallada *Cfr*. Ayres, 1969, pág. 33).

Hecho esto, es momento de mencionar cómo se pueden representar los números naturales en *P*.

3.4.3. Números naturales en *P*.

Anteriormente mencioné que los números naturales pueden ser formalizados en *P* porque este sistema cuenta con las herramientas necesarias para llevar a cabo esta formalización: tiene variables de diferentes tipos para representar a los números y a sus propiedades. Además de esto, tres de los cinco axiomas de Peano se encuentran enunciados de manera explícita en éste, con lo cual es posible expresar las propiedades más básicas de los números (ya mencionadas), esto es, se puede expresar que el cero no es sucesor de ningún número, que los números que tienen un mismo sucesor son iguales y que las propiedades que le convengan al cero y al sucesor de un número[57], serán convenientes a todo número.

Por otra parte, las operaciones y sus propiedades mostradas en el apartado anterior, también son formalizables en *P*. Sin embargo, dado que estas operaciones están supuestas en el campo de los naturales, es decir, se supone su existencia porque se trata de nociones básicas en este tipo de números, no son mencionadas de manera explícita en la lista de símbolos enunciada por Gödel. Hago esta suposición a partir del hecho de que en la nota 4 del artículo de 1931 (Cfr. Gödel, 1931, pág. 54, nota 4), Gödel menciona que hay sentencias indecidibles relativas a la teoría de los números naturales en los que aparecen los símbolos $\neg, \forall, \vee, =$ (que aparecen en *P* con otras grafías) y $+, \cdot$, que representan a la adición y la multiplicación.

Ahora, en páginas anteriores mencioné que las teorías intuitivas, tienen enunciados que hablan sobre las relaciones y propiedades de sus objetos, y que pueden tener expresiones análogas en los

[57] Aquí es importante mencionar que el número anterior a éste también debe tener dicha propiedad.

lenguajes de sistemas formales. Así, la aritmética también tiene enunciados que se refieren a los números naturales y, de un modo similar, P puede tener fórmulas que sirvan para los mismos fines. Podemos pensar en un ejemplo: todos los números naturales son menores a su sucesor[58]. Este enunciado puede ser expresado en el lenguaje de segundo orden –que también es el lenguaje de la aritmética a la que Gödel se refiere- mostrado arriba: $\forall x[(Nx \wedge Nx') \rightarrow x < x']$. Una expresión similar puede ser construida con el lenguaje de P para cumplir con los fines de Gödel –formalizar a los naturales: $\Pi \mathrm{x}_1((\mathrm{x}_2(\mathrm{x}_1)) \supset \mathrm{x}_1 < \mathrm{sx}_1)$.

En resumen, cada enunciado E_n de *PA* que sea relativo a los números naturales, también tiene una expresión análoga formada con el lenguaje de P: α_n. Y ambos formalizan los mismos objetos, pero con diferentes lenguajes.

Esta relación dada entre el sistema, la teoría y los números se puede representar con el siguiente esquema:

$$\boxed{\mathbb{N}} \longrightarrow \boxed{PA} \longrightarrow \boxed{P}$$

Esquema 5

En éste podemos observar que se encuentra el conjunto ℕ de los números naturales, en el cual se encuentran los objetos de los que he estado hablando aquí. Después se encuentra la Aritmética, en este caso *PA*, que es la teoría en la que se encuentran las expresiones que hablan sobre las propiedades, relaciones y operaciones encontradas en los objetos de dicho conjunto de números. Por último se encuentra *P* que es el sistema que formaliza la estructura de los naturales, con ayuda de los axiomas de *PA*, a través de fórmulas construidas con su lenguaje. De esta manera podemos ver que primero se encuentra el conjunto de los naturales, después la teoría matemática que habla de estos a través de su lenguaje (*PA*) y luego el sistema formal (*P*) que retoma los axiomas de dicha teoría para también formalizar la estructura de los naturales.

Como mencioné, las fórmulas del sistema formal que representan objetos de una teoría intuitiva son teoremas o axiomas y sirven para realizar demostraciones. Así, las fórmulas de *P* que representan

[58] No estoy afirmando que este enunciado sea un teorema de la aritmética. Sólo lo estoy usando como ejemplo de lo que hace *P* con la estructura de los números. Además, usaré algunos símbolos extras en las expresiones para mostrar de qué manera se lleva a cabo la formalización.

números naturales también serán teoremas y axiomas y sirven para hacer demostraciones sobre los mismos. Gödel no usa para esto el sistema, en un principio, sino que antes de usar *P* para hablar de los números naturales, enuncia las características de dicho sistema y, posteriormente, usa *la numeración de Gödel* para representar los componentes de *P* a través de números naturales –este aspecto será explicado más adelante. Aquí haré algo parecido. Sin embargo, antes de mostrar la numeración de Gödel, me ocuparé de mencionar algunos aspectos acerca de la expresión de propiedades y operaciones de números naturales con el lenguaje de la aritmética.

3.4.4. Expresión aritmética de propiedades de los números naturales.

Para llevar a cabo la demostración de su primer teorema, uno de los pasos realizados por Gödel fue la definición de funciones en el lenguaje aritmético que expresan propiedades y relaciones de los números naturales. Hizo esto para mostrar que varias de las relaciones y propiedades encontradas entre los números naturales[59] pueden ser expresadas con los símbolos $\forall, \exists, =, \neg, \wedge, \vee, +, \cdot, \leq$. Se trata de 46 funciones destinadas a tal objetivo y tienen, en general, la siguiente forma (Gödel, 1931, págs. 65 – 70):

$$\mathrm{Prim}\, x \leftrightarrow \neg\exists z(z \leq x \wedge z \neq 1 \wedge z \neq x \wedge x/z) \wedge x > 1 \quad \alpha)$$

Lo primero que debo resaltar de dicha fórmula es lo siguiente: las funciones de este tipo se encuentran compuestas por el símbolo de equivalencia $\leftrightarrow$ -que nos indica que los símbolos encontrados a sus lados son equivalentes-, un predicado y una fórmula construida con el lenguaje de la aritmética mencionada por Gödel. En el ejemplo, $\mathrm{Prim}\, x$ es el predicado y $\neg\exists z(z \leq x \wedge z \neq 1 \wedge z \neq x \wedge x/z) \wedge x > 1$ es la fórmula que lo define.

El predicado tiene el objetivo de representar dicha fórmula y quiere decir "x es un número primo" y la fórmula se lee como "es falso que existe un número z tal que z es menor o igual que x, z es diferente de 1, z es diferente que x y x es divisible por z. Además, x es mayor que 1", en otras palabras, nos indica las condiciones que un número natural debe cumplir para ser un número primo. Lo que hace este tipo de fórmulas es, pues, indicarnos las condiciones que deben cumplir los números naturales para poder poseer el predicado.

También existen otro tipo de funciones como

[59] Este método fue ideado para tratar, principalmente, a los números Gödel, pero menciono primero algunas consideraciones sobre éste porque servirán para la explicación del primer teorema.

$x/y \leftrightarrow \exists z(z \leq x \wedge x = y \cdot z)$ –x es divisible por y- β)

En la cual podemos encontrar $y \cdot z$, la cual representa la operación *multiplicación*, anteriormente mencionada. Gödel no ofrece una función de este tipo para esta operación y tampoco lo hace respecto de la *suma* y la *exponenciación*, sino que las supone por ser nociones básicas de la Aritmética. Lo mismo pasa con las nociones *igual a* ($x = y$) y la de orden (o menor que $x < y$).

Este tipo de fórmulas deben ser *satisfacibles*. Una fórmula es satisfacible si existe una interpretación en la que sea verdadera[60]. En lógica proposicional, podemos decir que $p \vee q$ es satisfacible si y sólo si la conectiva adquiere el valor de verdad verdadero cuando alguno de sus componentes es verdadero. En este contexto, no son valores de verdad sino números naturales los encargados de satisfacer las fórmulas. El que un número –o una clase de números- sea capaz de satisfacer una de estas fórmulas quiere decir que ese número cumple con la propiedad o la relación que esta representa y que, por tanto, en cierto sentido la hace verdadera. Una fórmula es *satisfacible* si hay una secuencia de números que cumplen con la propiedad que indica. En el caso contrario, es decir, cuando no hay alguna secuencia que pueda satisfacerla, se llama *insatisfacible*.

Por ejemplo, $\exists z(z \leq x \wedge x = y \cdot z)$ es satisfacible por aquellos números que cumplan las condiciones que establece, esto es, un número x y un número y van a satisfacer esta fórmula siempre y cuando exista un número z menor o igual a x y que el resultado de multiplicar ese número por y sea igual a x. Podemos pensar en la secuencia $\{1,2,3,4,5,6\}$ y elegir tres números para sustituirlos en la fórmula, realizar las operaciones y observar si la satisfacen. Pensemos en los números 2 y 3. Podemos suponer que 2 es divisor de 3 y que, por tanto, estos, y el resultado de esta división, satisfacen a $\exists z(z \leq x \wedge x = y \cdot z)$ porque cumplen con la propiedad que enuncia. Para comprobar esta suposición, sustituimos de la siguiente manera: 1) $x = 3$; 2) $y = 2$; y 3) $z = 1.5$. Por tanto: $1.5 \leq 3 \wedge 3 = 2 \cdot 1.5$. Con esto podemos ver que dichos números no satisfacen –o, en términos de lógica formal, no hacen verdadera- a la fórmula en cuestión, pues, 1.5 sí es menor a 3, y el resultado de multiplicar 2 por 1.5 es igual a 3, pero 1.5 no es un número natural, y estas fórmulas deben ser satisfechas por números naturales. Por tanto, 2 no puede ser divisor de 3 en este contexto.

[60]En vez de usar el término “verdadero”, se usa el término “satisfacible”, debido a ciertas cuestiones de la representabilidad de la verdad en estos sistemas que no serán tratadas a fondo en este escrito. Sin embargo, dado que no es el tema, debo aclarar que en el contexto de estas fórmulas cuando use el término “verdad” me estaré refiriendo al término “satisfacibilidad”. Para más información sobre este aspecto, se puede consultar *Lógica Simbólica* de Manuel Garrido (Garrido, 1976, págs. 226 – 227).

Sin embargo, lo anterior no implica que dicha fórmula sea insatisfacible, pues hay más números que nos permiten evaluarla. Consideremos 6 y 3, de modo que 3 sea el divisor de 6. Siendo así, y sabiendo que el resultado de dividir 6 por 3 es igual a 2, la sustitución se da de la manera siguiente: 1) $x = 6$; 2) $y = 2$; y 3) $z = 2$. En consecuencia: $2 \leq 6 \wedge 6 = 3 \cdot 2$. Estos números sí satisfacen a la fórmula porque 2 es menor que 6 y multiplicar 3 por 2 es igual a 6, y además 2 es un número natural. De este modo es como se satisfacen las demás fórmulas encontradas en las definiciones.

Otra característica de estas fórmulas es que tienen al menos una variable libre. Las variables libres se llaman así porque, como dije, son variables que no están ligadas al cuantificador que aparece en la fórmula en que se encuentran. En α, x es una variable libre. En este contexto, este tipo de variables se encuentran en estas fórmulas para evitar la presencia de proposiciones incorrectas –siendo más específico, es para evitar las expresiones insatisfacibles. Según Smullyan (*Cfr.* Smullyan, 1992, pág. 18) las fórmulas correctas deben ser parecidas a $\exists v_2(v_2 \neq v_1)$, pues si tuvieran una forma como $\exists v_2(v_2 \neq v_2)$, en la que ambas variables estuvieran ligadas al cuantificador, entonces cabría la posibilidad de que hubiera expresiones insatisfacibles. Por ejemplo, si consideramos una fórmula como $\exists x_2(x_2 = \mathrm{ss}(0) \times x_2)$, podemos observar que es insatisfacible pues cada posible interpretación que asignemos a las variables hará falsa a la fórmula: si en el lugar de x_2 ponemos el número 1, entonces, al efectuar todas las operaciones, tendríamos una expresión como $1 = 2$, lo cual es falso en este contexto porque 1 no es la misma cantidad que 2.

Existe otro aspecto que debo mencionar sobre este tipo de fórmulas: estas expresan los conjuntos (o clases) de números que las satisfacen (*cfr*. Torres, 2001, págs. 203 – 204 y Smullyan, 1992, págs. 19 – 20). Por ejemplo, α) expresa el conjunto de los números naturales que son números primos. Todos los números encontrados en ese conjunto satisfacen (o hacen verdadera) a la fórmula que define el predicado de la manera que mencioné (cuando sustituimos variables por números). Y, para que esta fórmula sea verdadera, también se debe cumplir que dichos números pertenezcan al conjunto que esta designa.

En otras palabras, un número satisface a una fórmula de este tipo si y sólo si tal número pertenece al conjunto de números que poseen la propiedad que dicha fórmula designa.

Esto es importante porque los números Gödel, al ser números naturales, también cumplen propiedades y relaciones. Y estas relaciones y los conjuntos (o clases) son expresados mediante las fórmulas mencionadas. Además, esto ayudará a entender una parte de las explicaciones posteriores de este trabajo.

Una vez explicada la expresión aritmética de los números naturales, es conveniente hacer algunas aclaraciones sobre la expresión de las operaciones que se pueden realizar con estos.

3.4.5. Expresión aritmética de operaciones de los números naturales.

En los apartados 3.4.2.1. y 3.4.2.2. mencioné las operaciones más básicas que se pueden llevar a cabo entre los números naturales: *suma*, *multiplicación*, *resta*, *exponenciación* y *división* –estas últimas tres son definidas a partir de las dos primeras. También mencioné las relaciones de orden más básicas que se pueden dar entre estos y algunas de las propiedades de la *suma* y la *multiplicación*.

Ahora bien, en el apartado anterior mostré cómo a través de fórmulas de la aritmética, Gödel es capaz de expresar ciertas relaciones y propiedades de los números naturales a través de funciones expresadas en fórmulas del lenguaje de la aritmética. También mencioné que entre estas fórmulas no se encuentran expresiones que representen las operaciones de *suma*, *multiplicación* y *exponenciación* porque son consideradas nociones básicas de tal teoría matemática y, en tanto tal, se suponen y no necesitan ser definidas de dicha manera.

Teniendo en cuenta esto, no voy a representar tales operaciones por no ser necesario para poder explicar los teoremas en cuestión. Sólo las supondré por la siguiente razón: los números Gödel (explicados a continuación) son números naturales y, por tanto, con estos se pueden llevar a cabo todas las operaciones explicadas anteriormente. Esto me servirá para llevar a cabo el objetivo de esta tesis.

3.5. Numeración de Gödel.

La *numeración de Gödel* es un método ideado por Gödel para representar las consideraciones metamatemáticas del sistema P (*cfr*. Gödel, 1931, págs. 54 – 55). Este método se basa en una función que va de las expresiones a los números naturales -$f: E \rightarrow \mathbb{N}$- y consiste en asignar un número natural a cada símbolo del sistema, es decir, a cada uno de los símbolos que mencioné cuando expliqué el sistema se le asigna un único número natural. Estos números serán llamados *números Gödel*. Así, dado que una fórmula es una sucesión de símbolos, el número Gödel de una fórmula cualquiera del sistema P será un sucesión de números naturales[61].

[61] El que este método funcione depende del Teorema Fundamental de la Aritmética: todo número natural tiene una factorización única como multiplicación de potencias de primos. La *Numeración de Gödel* depende de este teorema porque, como mostraré más adelante, el número Gödel de cada expresión se obtiene al asignar a cada uno de sus símbolos un único

Esto permitió a Gödel convertir los conceptos metamatemáticos en conceptos o predicados sobre los números naturales, por lo cual, pueden ser expresados con los del lenguaje de la aritmética usado por Gödel para construir sus 46 funciones. Así, según Gödel, se puede mostrar que los conceptos de *fórmula*, *deducción* y *fórmula deducible* son definibles en el interior del sistema *P* a través de las fórmulas mencionadas, es decir, a partir de este proceso, las propiedades y relaciones de las fórmulas del sistema *P* encontrados en la metamatemática, se pueden expresar como relaciones y propiedades de números. Una vez que se ha hecho esto, es posible construir fórmulas del sistema *P* que representen estos enunciados, para hacer demostraciones (Torres, 2001, págs. 201 – 205).

Ahora es momento de mostrar cómo se asignan los números Gödel a los símbolos del sistema *P*.

3.5.1. Asignación de un número Gödel del sistema *P*.

Cuando digo que a cada símbolo del sistema *P* se le asigna un único número natural, me refiero a que cada símbolo se representa con un único número natural. Existen varias maneras de hacer esta representación. En este apartado mencionaré dos, pues ambas sirven para hacer más explícito el método de la numeración. La primera es la Gödel (Gödel, 1931, pág. 61):

Símbolo del sistema	Número natural que le corresponde
0	1
s	3
~	5
∨	7
Π	9
(	11
)	13

Esta tabla representa qué número le corresponde a cada símbolo con los que se pueden formar las fórmulas del sistema *P*. Para las variables de tipo n (de cualquier tipo de los mencionados en apartados anteriores) la manera de asignar los números es la siguiente: a cada una de estos se les asignan números de la forma ρ^n, donde ρ es un número primo mayor que 13 y n es el número del tipo de variable en

número natural, y después usar éste como la potencia de un primo que multiplica a la potencia del siguiente primo, cuyo exponente es, a su vez, el número Gödel del símbolo que está a lado del primero.

cuestión. Dicho de otro modo, si tenemos una variable de tipo 1 como x_1 entonces su número Gödel puede ser 17^1, donde 17 es un número primo mayor que 13 y 1 es el número del tipo de la variable en cuestión. La expresión 17^1 indica que 17 se debe elevar a la potencia 1, esto es, se debe multiplicar 1 veces para obtener el número Gödel de x_1. El número Gödel de una variable como x_2 puede ser 17^2. De una manera similar se obtienen los números Gödel de variables de tipo superior.

Esta numeración de Gödel sólo asigna números a los signos que Gödel usa para las expresiones más básicas del sistema *P*. No asigna números a los símbolos $\supset, \equiv, =, \wedge, \Sigma$. En el caso de $\wedge$ se debe a que es una abreviación para representar fórmulas compuestas con los conectivos $\neg \vee$ (como $\neg(\neg X \vee \neg Y)$, por lo cual, el número Gödel de $\wedge$ puede ser el mismo que el de $\neg \vee$. En el caso de $\supset, \equiv, =, \wedge, \Sigma$ puede ocurrir lo mismo, pues Gödel dice que estos símbolos también son abreviaturas de otros conectivos.

Existen otras versiones de numeración en la que sí existe un número para cada símbolo del sistema *P*. La idea de estas versiones es hacer explícito que cada símbolo debe tener su propio número natural. Un ejemplo de esto puede ser:

Símbolo del sistema	Número natural que le corresponde
$\forall$	1
$\rightarrow$	3
$\vee$	5
$\equiv$	7
$+$	9
$\leq$	11
S	13
(	15
x_1	17
x_3	19

Símbolo del sistema	Número natural que le corresponde
$\exists$	2
$\sim$	4
&	6
0	8
$\times$	10
E	12
$=$	14
)	16
x_2	18
...	...

Esta versión de la numeración especifica qué número le corresponde a cada símbolo del sistema. Se encuentran aquellos enunciados por Gödel (pero con otra grafía) y otros más que también son usados en las expresiones P. A pesar de que se asignen números diferentes a los mencionados anteriormente, el método sigue similar: a cada símbolo se le asigna un único número natural, a las variables de cada tipo se les asigna un número diferente (pero en este caso no deben ser primos).

Así es como se asigna un número Gödel a cada símbolo involucrado en el sistema. Es momento de mencionar cómo se asigna a las expresiones del mismo.

3.5.2. Asignación de un número Gödel a cada expresión del sistema.

En este contexto las expresiones pueden ser entendidas como sucesiones de signos o símbolos encontrados en el sistema. Una expresión no debe ser necesariamente una fórmula bien formada, pero sí debe ser cualquier sucesión finita de signos entre los cuales no debe existir un espacio. (cfr. Smullyan, 1992, pág. 2). Por ejemplo: $0{\sim}\Pi\vee$ es una expresión compuesta con los símbolos de P pero no es una fórmula bien formada del mismo.

El objetivo de mencionar qué es una expresión es el siguiente: una fórmula bien formada también es una sucesión de símbolos del sistema P, por tanto también es una expresión[62] y la manera en que se asigne un número Gödel a las expresiones también servirá para asignar un número a cada fórmula. Así, debo mencionar primero qué es una expresión de dicho sistema y cómo se le asigna un número Gödel porque, de la misma forma, es como se asigna a las fórmulas.

Ahora bien, la manera en que se asigna un número Gödel a una expresión de P es la siguiente (cfr. Gutierrez, 2014, pág. 150 y Gödel, 1931, pág. 61: 1) se asigna el número Gödel que corresponde a cada signo encontrado en la expresión –si un símbolo se repite, entonces su número Gödel también debe hacerlo; 2) se consideran los números primos, de modo que el primer número primo se eleva a una potencia, la cual es el número Gödel del primer símbolo encontrado en la expresión (lo mismo se hace con el segundo, el tercero y así sucesivamente); 3) el número elevado al número Gödel del primer símbolo, se multiplica con el segundo, el tercero y los demás, con el fin de realizar dichas operaciones y calcular el número Gödel de toda la expresión.

Esquemáticamente, este procedimiento puede ser representado de la siguiente manera: en la sucesión $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$, n representa un número Gödel de los símbolos de la expresión, mientras k se refiere al orden en que estos aparecen en la misma. En la fórmula $\rho_k^{n_k}$, ρ_k es el orden de los números primos y n_k la potencia del mismo –el número Gödel del símbolo encontrado en el lugar k-.

[62] En este sentido, toda fórmula es una expresión por ser una sucesión de símbolos sin espacios entre los mismos, pero no toda expresión es una fórmula del sistema pues no todas están construidas con las reglas de formación.

Para ejemplificar esto, consideremos la sucesión: $0\sim\Pi\vee$. La correspondencia entre los símbolos y los números Gödel es la siguiente:

Símbolo	Número Gödel
0	1
$\sim$	5
Π	9
$\vee$	7

Una vez que se ha realizado la asignación, es momento de señalar el orden en que los símbolos aparecen en la expresión: 0 es el primero, $\sim$ el segundo, Π el tercero y $\vee$ el cuarto. Además, debo señalar que estos números serán las potencias de los primeros cuatro números primos de modo que: $2^1, 3^5, 5^9, 7^7$. El siguiente paso es multiplicar estos números, de modo que $2^1 \cdot 3^5 \cdot 5^9 \cdot 7^7$. El resultado de esta multiplicación es 781722457031250.

Con esto puedo hacer varias observaciones: 1) los números Gödel de cualquier expresión resultan ser muy grandes a pesar de que los signos encontrados en éstas no sean numerosos; 2) cada expresión, al igual que cada símbolo del sistema, tiene su propio número Gödel; 3) las fórmulas tendrán números igual o más grandes dependiendo de los símbolos de los que esté compuesta.

De esta manera también se asignan los números Gödel a las fórmula de *P*. En el siguiente apartado haré énfasis en este aspecto y otras cuestiones.

3.5.3. Asignación de un número Gödel a cada fórmula del sistema

En el apartado anterior mencioné que las fórmulas del sistema *P* también son expresiones porque son sucesiones de símbolos sin espacios entre cada uno de estos. Asimismo, mencioné que la forma de asignar un número Gödel a una fórmula de *P* conlleva el mismo procedimiento que asignar un número Gödel a una expresión que no es una fórmula. Consideremos la siguiente fórmula:

$$\Pi \mathrm{x}_1\big(\sim(\mathrm{x}_2(\mathrm{x}_1)) \vee \mathrm{x}_2(\mathrm{sx}_1)\big).$$

La asignación a cada símbolo es la siguiente:

Símbolo del sistema	Número Gödel
$\mathbf{\Pi}$	9
$\sim$	5
(	11
$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{17^1 = 17}$
$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{17^2 = 289}$
)	13
∨	7
$\mathbf{s}$	3

Hecho esto, es momento de elevar los números primos a la potencia de los números Gödel de cada símbolo en orden de aparición de la siguiente manera:

$$2^9 \cdot 3^{17} \cdot 5^{11} \cdot 7^5 \cdot 11^{11} \cdot 13^{289} \cdot 17^{11} \cdot 19^{17} \cdot 23^{13} \cdot 29^{13} \cdot 31^7 \cdot 37^{289} \cdot 41^{11} \cdot 43^3 \cdot 47^{17} \cdot 53^{13} \cdot 59^{13}$$

Como se puede observar, esta expresión es muy grande, al igual que sería su resultado. Calcular los números Gödel de cada fórmula tiene resultados similares. Por esta razón, para representar las cantidades, en lugar de usar estos números tan extensos, se usarán constantes como $m, n, r, \ldots,$ etc. Además, habrá que especificar a qué fórmula pertenece cada constante. Haré esto para evitar posibles confusiones al momento de referirme a una fórmula a través de su número Gödel[63].

Este procedimiento también puede ser aplicado a las fórmulas de una demostración, de modo que, a partir de la sucesión de los números Gödel que la componen, se obtiene el número Gödel de la demostración. Y como los resultados son aún más grandes en cantidad que el de las fórmulas, también usaré constantes para representarlos[64].

Por último, cabe mencionar que, como Gödel y varios autores citados aquí lo hacen ver, lo importante de la numeración de Gödel es recordar que se representa a los símbolos de P con números.

---

[63] Debo mencionar otro aspecto: es claro que entre más signos tenga una expresión, más números primos se ocuparán para calcular su número Gödel y, por lo tanto, el resultado será mayor. De la misma manera, si una fórmula está compuesta por menos signos que otra, entonces se requerirán menos números primos y el resultado de esto será menor. Además, parece haber una correspondencia uno a uno entre los signos de una fórmula y los números primos usados para calcular su número Gödel, a saber, el número de números primos es igual al número de signos encontrados en la expresión. Así, si una fórmula está formada por seis signos, entonces se requerirán los primeros seis números primos para calcular su número Gödel.

[64] Las demostraciones, al ser sucesiones de fórmulas, en última instancia también son sucesiones de símbolos. Por lo cual, para obtener su número Gödel, el procedimiento es exactamente el mismo que el de las fórmulas.

En este sentido, y debido a las diversas versiones de la numeración que existen, no importan qué números se usen siempre y cuando se sepa que son números naturales.

Dicho esto, es momento de hablar sobre la utilidad de los números Gödel y otras cuestiones.

3.5.4. Sobre la utilidad de los números Gödel.

En apartados anteriores mencioné que Gödel construyó una serie de 46 funciones de números naturales, las cuales tienen el objetivo de asignar una propiedad o una relación a los mismos. También mencioné que estas funciones serán satisfechas por aquellos números que cumplan las propiedades que éstas designan. Por otra parte, mencioné que los números Gödel sirven para hablar de las cuestiones metamatemáticas del sistema *P*. Dichos números pueden satisfacer las fórmulas de estas funciones y, en consecuencia, dichas funciones sirven para hablar de las consideraciones metamatemáticas del sistema *P*. Dicho de otra manera, con este método, en vez de tener un metalenguaje construido en el lenguaje natural y algunos símbolos de *P*, se tiene un metalenguaje expresado enteramente en el lenguaje de la aritmética (la utilidad de esto será explicada más adelante).

Ahora bien, he mencionado que cada signo y cada expresión tienen su propio número Gödel. Con las funciones es posible indicar si un número Gödel es una *variable*, una *fórmula*, una *secuencia de fórmulas*, una *demostración* o una *fórmula demostrable*. Por ejemplo, la fórmula

$$n \text{ Var } x \leftrightarrow \exists z(13 < z \leq x \wedge \text{Prim}(z) \wedge x = z^n) \wedge n \neq 0$$

Nos indica que x es una variable de tipo n. Consideremos la variable x_1 sabemos que es una variable de tipo 1 –porque su índice lo indica- y que su número Gödel es 17 –debido a la expresión 17^1. Ahora, la manera de sustituir los números es la siguiente: en n se escribe el tipo de variable y en x el número Gödel de la variable. De modo que obtenemos la expresión $1 \text{ Var } 17$. Este predicado dice lo mismo que el enunciado metamatemático "17 es una variable de tipo 1" o "el símbolo con número Gödel 17 es una variable de tipo 1"

Anteriormente mencioné que para que los números puedan poseer estos predicados, es necesario que sean capaces de satisfacer las fórmulas que los describen, y para ello deben ser sustituidos en las variables de las mismas para observar si cumplen las condiciones. Por tanto, la sustitución es la siguiente: $n = 1, x = 17, z^n = 17^1, z = 17$. z y x son el mismo número porque elevar cualquier número a la potencia 1 da como resultado ese mismo número. Sin embargo, z es un número primo mayor que 13, lo cual es la condición que Gödel establece para asignar un número natural a las variables de tipo n

$$1 \text{ Var } 17 \leftrightarrow (13 < 17 \leq 17 \wedge \text{Prim}(17) \wedge 17 = 17^1) \wedge 1 \neq 0$$

En tal expresión podemos ver que z cumple con la condición de ser mayor que 13 e igual o menor que x. Además, z (17) es un número primo y x es el resultado de elevar z al número del tipo de la variable. Por último, el número del tipo de la variable (1) es diferente de 0. Por tanto, 17 es una variable de tipo 1.

De esta manera funcionan las otras 45 funciones construidas por Gödel. Ahora, a través de estas fórmulas y de los números Gödel, es posible hablar de las cuestiones metamatemáticas de los símbolos de P, es decir, este método nos permite referirnos a los elementos de P con otro lenguaje: el lenguaje matemático de la Aritmética. Así, las expresiones de la Aritmética se convierte en una especie de metalenguaje para P gracias a los números Gödel.

Una consecuencia de lo anterior es que, debido a los enunciados mencionados, los números Gödel también pertenecerán a conjuntos (o clases) de números que posean cierta propiedad o entre los que haya cierta relación. Así, habrá un conjunto de números que sean los números Gödel que representan variables, otra para las que representan fórmulas, deducciones, fórmulas deducibles, etc.

Antes de continuar, debo mencionar el orden de los pasos en los que se realiza este procedimiento para evitar posibles confusiones. Primero: se construye el sistema P, el cual tiene signos y expresiones que permitan hacer formalizaciones y demostraciones sobre los objetos que también representan los enunciados de PA. Segundo: a cada símbolo de P se le asigna un único número natural, de modo que dicho número haga referencia a tal símbolo. Tercero: se le asigna un único número Gödel a cada *fbf* de P. Cuarto: con los números Gödel y con las funciones construidas en el lenguaje de la Aritmética, se hablan sobre las cuestiones metamatemáticas de P.

El quinto paso es formalizar las fórmulas de las funciones en P. Esto se da de la siguiente manera: como las funciones están construidas en el lenguaje de la Aritmética y P formaliza los objetos de dicha teoría con su lenguaje, entonces es posible construir fórmulas de P que formalicen dichos tales objetos para hacer demostraciones. Por ejemplo, las fórmulas $x\, B\, y \leftrightarrow Bw\, x \wedge \big(l(x)\big)Gl\, x = y$ y Bew $x \leftrightarrow \exists y\, yBx$ dicen que x es una deducción de la fórmula y, y que x es una fórmula demostrable, respectivamente. Dado que las fórmulas que definen a los predicados $x\, B\, y$ y Bew x están construidas en el lenguaje de la Aritmética, se pueden hacer expresiones similares con fórmulas de P. El objetivo es que dichas fórmulas expresen lo que dicen las funciones y, de este modo, que P pueda hablar de los componentes de su lenguaje a través de su lenguaje mismo y de los números de Gödel. Dicho esto, es momento de hablar sobre los números Gödel como números naturales.

3.5.5. Sobre los números Gödel como números naturales.

En este breve apartado mencionaré algunas cuestiones sobre los números Gödel como números naturales. Seré breve porque, en el Capítulo IV retomaré esta cuestión.

Los números Gödel, en tanto que son números naturales, comparten las mismas propiedades. Siendo así, los números Gödel también pueden sumarse, multiplicarse, ser mayores o menores entre sí, tener un sucesor y demás cualidades. El hecho de que sean usados para hablar metamatemáticamente de los elementos de P no impide que puedan tener y realizar las operaciones mencionadas anteriormente y poseer las propiedades que enuncié.

Para ser más claro, no estoy afirmando que, por ejemplo, una fórmula α y una fórmula β puedan ser usadas en la operación de suma, porque no son números y esta operación sólo es aplicable a números. Lo que estoy diciendo es que los números que representan a tales fórmulas sí pueden ser usados en dicha operación.

Hecho esto, es momento de explicar los dos teoremas.

3.6. Los dos teoremas de incompletud

En este apartado explicaré los dos Teoremas de Incompletud. El objetivo de hacer esto es mostrar cómo Gödel formaliza la consistencia. Esta formalización procede de la demostración del segundo teorema y ésta, a su vez, depende de la demostración del primero. Por tanto, haré una explicación sobre ambos. Para realizar esta empresa, utilizaré, principalmente, *Cómo argumentar a favor de una proposición indecidible* de Cristian Gutiérrez y *Elementos para una crítica matemática de la razón filosófica*: *La filosofía matemática de David Hilbert y Kurt Gödel* de Carlos Torres Alcaraz. Usaré la simbología de ambos para hacer más simple la explicación (si se quiere observar la versión original de la prueba, se puede consultar el texto de Gödel de 1931). Por la misma razón, en lugar de clases, usaré conjuntos, pues la notación conjuntista es más usual (aunque debo recalcar que la notación de ambas teorías es muy similar).

Ahora bien, el primer teorema dice que en todo sistema matemático consistente, capaz de definir las nociones básicas de la aritmética y recursivamente axiomatizable, existen proposiciones indecidibles. Por todo lo ya explicado, P es capaz de definir las nociones básicas de la aritmética y es recursivamente axiomatizable. Por otra parte, como mencioné anteriormente, las proposiciones indecidibles son aquellas que no son demostrables, al igual que sus negaciones son demostrables. La proposición en este caso, será G.

Sobre la consistencia de P debo decir lo siguiente: debo suponer que P es consistente porque, de no serlo, no habría proposiciones indecidibles –y el primer teorema no sería aplicable a este caso. Es decir, si P fuera inconsistente, entonces habría contradicciones entre sus axiomas y cualquier fórmula o proposición serían demostrables, incluso G –para esto debemos recordar todo lo que dije acerca del principio de explosión. Además, este supuesto nos puede ayudar a entender la existencia de proposiciones indecidibles: si P es consistente, entonces no hay contradicciones entre sus axiomas y es falso que cualquier proposición o fórmula es demostrable a partir de estos, y también es falso que de estos se siguen contradicciones. Así, existe por lo menos una fórmula que no es demostrable. Esa fórmula puede ser G, pues al no poder ser demostrada por los axiomas de P, nos puede hacer entender que entre estos no hay contradicciones[65]. Y, como tampoco es demostrable su negación ($\neg G$), se puede observar que tampoco se siguen contradicciones.

Por otro lado, el segundo teorema nos dice que todo sistema con las características de P es incapaz de demostrar su propia consistencia. Es decir, los sistemas formales recursivamente axiomatizables, consistentes, capaces de formalizar las nociones básicas de la aritmética son incapaces de demostrar la consistencia.

Ahora es momento de explicar ambos teoremas.

3.6.1. *G* la sentencia que habla sobre sí misma.

3.6.1.1. Diagonalización.

Para demostrar el primer teorema, primero se debe tratar lo relacionado con G. En tanto que G es una sentencia, proposición, o fórmula como todas las encontradas en P, afirma algo, a saber, afirma de sí misma que no es demostrable, es decir, a través de los lenguajes aquí involucrados (y a través de un método explicado a continuación) y de su número Gödel, G es capaz de afirmar sobre sí misma que no es una fórmula que se pueda demostrar con los axiomas y las reglas de transformación encontrados en P. Demostrarla, como se verá, implicaría una contradicción, lo cual pone en duda la consistencia de P. Por este motivo no puede demostrarse.

Como mencioné, lo anterior se logra con un método llamado *diagonalización*, el cual contribuye a que una fórmula se refiera a sí misma (Gutiérrez, 2014, págs. 152 - 154). Para llevar a cabo dicho

[65] En cierto sentido, este teorema nos hace ver que las proposiciones indecidibles son necesarias si suponemos la consistencia de un sistema

proceso, primero se elige una fórmula bien formada del sistema P. Dicha fórmula puede ser α. Dado que es una fórmula bien formada, se puede determinar su número Gödel. Este se puede representar con la constante n.[66] A la par se puede construir la siguiente expresión: $\forall x(x = 0^n \supset \alpha)$, la cual es la diagonal de α. Esta dice que para todos los objetos x que sean iguales al número de Gödel de α, n, entonces se sigue α. Dicha diagonal, además, cuenta con su propio número de Gödel: m.

Ahora bien, la relación "ser diagonal de una fórmula" o " la fórmula con número de Gödel y es la diagonal de la fórmula con número Gödel x" se puede representar con la siguiente expresión: $Diag(x,y)$, tal que esta fórmula dice que y es la diagonal de x. Si sustituimos los números de Gödel de las respectivas expresiones en la fórmula que indica la relación diagonal, entonces obtenemos $Diag(n,m)$, la cual nos dice que m es el número de Gödel de la fórmula que es la diagonal de la fórmula con número de Gödel n.

Dicho esto, debo mencionar otros elementos necesarios para lograr la autorreferencia a través del método diagonal. Primero está el predicado $Dem(x)$ el cual dice "la fórmula con número de Gödel x es una fórmula demostrable". En segundo lugar, se debe construir la siguiente fórmula:

$$\exists y(Diag(x,y) \wedge \neg Dem(y))\ (a)$$

Esta se lee como "existe una fórmula con número de Gödel y, tal que ésta es diagonal de la fórmula con número de Gödel x y dicha fórmula no es demostrable". El número de Gödel de esta expresión puede ser k. Ahora bien, con todos estos recursos se puede construir la siguiente fórmula –que es su diagonal-:

$$\forall x(x = 0^k \supset \exists y(Diag(x,y) \wedge \neg Dem(y)))\ (b)$$

Esta expresión nos dice que para todo objeto x que sea igual al número de Gödel k, entonces se cumple que la diagonal de x no es una fórmula demostrable, en otras palabras, dice que la diagonal de la fórmula con número de Gödel k no es demostrable, pero dicha fórmula es ella misma. Seré más específico: el antecedente indica que para todo número natural que sea igual al número de Gödel de a, esto es k, entonces se cumple que se sigue a, la cual dice que la diagonal de x no es demostrable. Ahora,

[66] A partir de este punto el uso de metavariables y constantes será importante porque me ayudará a hacer menos confusas las explicaciones y porque los números Gödel de las expresiones son cantidades muy grandes. También se notará que los símbolos usados para los cuantificadores y otros aspectos no son los mismos, sin embargo, tienen el mismo significado que los ya mostrados.

podemos suponer que $x = k$ porque existe un objeto, k mismo, que es igual número de Gödel de a. También podemos suponer que $y = j$ porque existe una fórmula tal que es la diagonal de a, la cual es b y su número de Gödel es j.

Como consecuencia de lo anterior, se cumple el antecedente de b porque $k = 0^k$. Por tanto, se sigue el consecuente de b, que es a. A la par de esto y teniendo en cuenta las igualdades indicadas, la existencia de estas fórmulas y sus números de Gödel, hay elementos suficientes para decir que existe una diagonal de a, que es b, de modo que se puede obtener $Diag(a, b) \wedge \neg Dem(b)$ [67]. El que existan todos estos elementos es lo que nos permite demostrar b, pero demostrar b es contradictorio porque si se cumple su antecedente, entonces al obtener el consecuente también se obtiene la afirmación de que no se puede demostrar. Por tanto, b dice de sí misma que no es demostrable y no se puede demostrar por este hecho.

Ahora, existe otra manera en que se puede representar b, es la siguiente: G, la cual tiene como número Gödel a g. Ahora, el significado de G –siguiendo las explicaciones formales dadas arriba- es: "la fórmula con número Gödel g –esto es, G misma- no es demostrable". Evidentemente, G no tiene todos los elementos de $\forall x(x = 0^k \supset \exists y(Diag(x, y) \wedge \neg Dem(y)))$, pero el significado es similar en ambas, por lo cual usaré G para mencionar a la fórmula que no se puede demostrar.

Ahora es momento de mencionar algunas cuestiones sobre la autorreferencia.

3.6.1.2. Autorreferencia.

Como podemos observar, la autorreferencia se logra a través del método diagonal: se construye una fórmula que hable de sí misma a través de su número Gödel. La autorreferencia, pues, se da a través de

[67] Existe una explicación más que ayuda a entender este argumento y tiene que ver con la lógica cuantificacional. Las fórmulas del tipo $\forall x(Px \rightarrow Qx)$ se leen como "para todo x, si x tiene la propiedad P, entonces tiene la propiedad Q". Esto quiere decir, de otra manera, que si un objeto de un conjunto cumple con tener la propiedad P, entonces tendrá la propiedad Q. Se necesita la existencia de objetos con la propiedad P para que el antecedente sea verdadero y así obtener el consecuente y, además, se necesita que los objetos que cumplen el antecedente cumplan con las condiciones que establece el consecuente para que toda la fórmula sea verdadera y, en este contexto, también sea demostrable: si tanto su antecedente como su consecuente son verdaderos, entonces la fórmula es verdadera y demostrable. Un razonamiento parecido puede ser aplicado a la fórmula $\forall x(x = 0^k \supset \exists y(Diag(x, y) \wedge \neg Dem(y)))$: si alguno de los objetos del conjunto de los números naturales cumple con ser igual al número Gödel k, entonces el antecedente es verdadero. Si esto sucede, entonces se sigue $\exists y(Diag(x, y) \wedge \neg Dem(y))$, la cual también se cumple porque existen todos los números de Gödel que se quieren para que el consecuente sea verdadero. Así, dicha fórmula es verdadera y demostrable, pero no se puede demostrar por las condiciones que ella misma enuncia. Por tanto dicha fórmula no es demostrable.

expresiones y sus números Gödel. Aquí, específicamente G habla de sí misma a través de su número Gödel (g) y dice que no puede ser demostrada.

A partir de lo anterior debo mencionar lo siguiente: a lo largo de este escrito he dicho que los sistemas formales se ponen en correspondencia con las estructuras de objetos matemáticos para demostrar fórmulas. Esta correspondencia, a su vez, hace que los axiomas de los sistemas sean verdaderos. Si las reglas de transformación de un sistema son correctas, entonces todo lo que se demuestre con éstas y con los axiomas también lo será y los teoremas así obtenidos serán verdaderos y también serán representaciones de los enunciados de las teorías.

En relación con esto, también mencioné que no es conveniente que los sistemas formales demuestren o trabajen con expresiones falsas porque, de hacerlo, tales expresiones hablarían de aspectos falsos de los objetos de las teorías matemáticas, y no estarían funcionando para llevar a cabo su objetivo. Por tanto, aunque G diga de sí misma que no es demostrable, dicha expresión debe considerarse como verdadera, pues, de lo contrario, habría consecuencias relacionadas con la suposición de que el sistema es correcto: el sistema no sería correcto porque existe una fórmula falsa en su conjunto de expresiones bien formadas.

Ahora bien, G, como he mencionado habla de sí misma a través de su número Gödel. Obviamente g es un número natural que comparte propiedades y relaciones con los demás números que se encuentran en su respectivo conjunto. Sin embargo, en tanto que los números Gödel no son sino representaciones de los símbolos del sistema, cuando hablo de g y digo que tiene tal y cual propiedad, o esta o aquella relación, también digo que estas relaciones y propiedades son representaciones de las relaciones y propiedades de G.

Ahora bien, el que G diga de sí misma que no es demostrable implica que no puede ser demostrada a partir de los axiomas y reglas de inferencia del sistema P. Sin embargo, con esto no estoy diciendo si dicha fórmula es demostrable o no en otros sistemas. Aquí sólo me dedicaré de hablar de la indecidibilidad de G con respecto a P.

Dicho esto, es momento de explicar la demostración del primer teorema.

3.6.2. Primer teorema.

3.6.2.1. G no puede ser demostrada

Para explicar el primer teorema debo retomar algunas cuestiones. La primera es que anteriormente mencioné que pueden definirse conjuntos de números a partir de las fórmulas que representan relaciones entre números para expresar predicados metamatemáticos acerca del sistema P. Así, a partir del predicado $Dem(x)$ –x es una fórmula demostrable- se puede obtener un conjunto F al que pertenecen los números naturales que son números Gödel que representan fórmulas demostrables. Por tanto:

$$Dem(x) \leftrightarrow x \in F$$

Esta fórmula dice que x es demostrable –y a su vez satisface la fórmula que representa el predicado $Dem(x)$[68]- si y sólo si x pertenece al conjunto de los números Gödel de las fórmulas demostrables. Del mismo modo, se puede definir el conjunto de las fórmulas no demostrables. Así:

$$\neg Dem(x) \leftrightarrow x \in E$$

dice que x no es demostrable si y sólo si x pertenece al conjunto E. Estas fórmulas serán verdaderas o falsas si los números Gödel de las fórmulas del sistema satisfacen o no los predicados y si pertenecen o no a los conjuntos.

Ahora, las fórmulas construidas con el lenguaje de P deben pertenecer a uno u otro conjunto, es decir, deben ser demostrables o no. Debemos analizar si G pertenece o no a alguno de estos teniendo en cuenta que dice de sí misma que no es demostrable, esto es, debemos analizar si G es demostrable para mostrar que no lo es. Esto se hace de la siguiente manera (Torres, 2001, págs. 205):

a) Si suponemos que G es demostrable, entonces también estamos suponiendo que G es verdadera –porque habíamos mencionado que, en este contexto, si un sistema formal es correcto, entonces las oraciones acerca de los naturales deben considerarse verdaderas. Pero si G es verdadera, entonces lo que afirma de hecho es verdadero. Por tanto, es verdadero que no es demostrable. Así, llegamos a una contradicción –porque se está demostrando algo que dice de sí mismo que no es demostrable, lo cual va en contra del supuesto de que P es consistente. Por tanto, G no puede ser demostrable.

También podemos hacer suposiciones con el número Gödel de G (g) y la fórmula

$$Dem(x) \leftrightarrow x \in F \text{ (I)}$$

de la siguiente manera: si suponemos que $g \in F$, entonces $Dem(g)$. Pero si $Dem(g)$, entonces G es falsa porque dice de sí mima que es demostrable y, asimismo, una vez más llegamos a la contradicción mencionada: se demuestra algo que no se puede demostrar. Así tenemos una contradicción y una

[68] Aquí uso el predicado en lugar de la fórmula que representa a la función del predicado porque ambos son equivalentes. Como mencioné, si un número Gödel satisface al predicado, significa que cumple las condiciones que establece la función. Así, si la función es satisfacible, entonces los números cumplen con el predicado, y este último también sirve para definir una clase de números.

fórmula falsa en P, lo cual pone en duda su consistencia y su corrección. Podemos observar, además, que llegamos a esta contradicción gracias a su número Gödel y las condiciones que establece (I).

Vimos que G no es demostrable, pero aún queda analizar si su negación $\neg G$ se puede demostrar. $\neg G$, al ser la negación de G, dice lo contrario a ésta: "es falso que G no es una fórmula demostrable" o "es falso que la fórmula con número Gödel g no es demostrable"; en otras palabras: G es demostrable. En este paso debemos recordar que debido a la consistencia supuesta al principio de esta explicación, no puede haber contradicciones, por lo cual no se pueden demostrar una fórmula y su negación al mismo tiempo. Esto se hace de la siguiente manera (Torres, 2001, págs. 205 – 206):

b) Si suponemos que $\neg G$ es demostrable, entonces suponemos, al mismo tiempo, que $\neg G$ es verdadera. Si $\neg G$ es verdadera, entonces G es falso. Con lo cual tenemos que G es demostrable. Dicho de otra manera: dado que G dice de sí misma que no es demostrable y es falsa, entonces es verdadero que G es demostrable –porque es verdadero que $\neg G$. Ahora, cabe resaltar que bajo el supuesto de que $\neg G$ es demostrable, entonces G también lo es. Por tanto, tanto G como $\neg G$ son demostrables, lo cual nos lleva a una contradicción y a poner en duda el supuesto de que los axiomas de P son consistentes. Por tanto, tampoco $\neg G$ es demostrable porque esto nos lleva a contradicciones.

Podemos hacer la siguiente suposición apelando a las fórmulas:

$$Dem(x) \leftrightarrow x \in F \text{ (I)}$$

$$\neg Dem(x) \leftrightarrow x \in E \text{ (II)}$$

Si suponemos que el número Gödel de $\neg G$ (sea h) representa una fórmula demostrable, entonces $Dem(h)$. En consecuencia, $h \in F$ y debería suceder que $\neg Dem(g) \leftrightarrow g \in E$. Sin embargo, por lo dicho arriba acerca del significado de $\neg G$ y G, tanto $\neg G$ como G son demostrables. De modo que $Dem(h)$ y $Dem(g)$, por lo cual se da que $h \in F$ y $g \in F$. Así, los números Gödel de dos fórmulas contradictorias se encuentran en el conjunto de las fórmulas demostrables, pero esto es imposible porque dos fórmulas contradictorias no pueden ser demostrables al mismo tiempo si suponemos que el sistema en que se encuentra es correcto y consistente.

De todo lo anterior se sigue que ni G ni $\neg G$ son demostrables. Por tanto G es una fórmula indecidible. Y como G es una fórmula de P, y P es consistente, formaliza las nociones básicas de la aritmética, entonces así queda explicado el primer teorema.

Une vez explicado el primer teorema, es momento de explicar el segundo.

3.6.3. $Con(P)$ o de cómo P no puede demostrar su propia consistencia.

En este apartado hablaré del segundo teorema de incompletud de Gödel. Haré esto de manera general porque, específicamente, debo hablar más de aspectos relacionados con la formalización de la consistencia de P que de la demostración del segundo teorema. Ahora, al demostrar el primer teorema (Gutiérrez, 2014, pág. 154), Gödel se percató de que si P es consistente, entonces no es posible demostrar la fórmula que representa la consistencia de P. El que P no pueda demostrar su propia consistencia es lo que se conoce como el Segundo Teorema de Incompletud de Gödel, y éste se llevó a cabo gracias a que el matemático en cuestión encontró una manera de formalizar la consistencia, es decir, halló una forma de construir una fórmula como $Con(P)$ –consistencia de P-. En suma, $Con(P)$ no es demostrable a partir de los axiomas y reglas de inferencia de P.

Cabe mencionar que la demostración de este segundo teorema difiere un tanto de la demostración que mencioné del primero porque prescinde de la noción de *verdad* de la que he venido hablando aquí –esto será explicado en su momento. Sin embargo, se siguen usando varios de los elementos usados para desarrollar el primer teorema, con lo cual ninguna de las dos pruebas se aleja de lo ya visto hasta ahora.

3.6.3.1. Formalización de la consistencia

En apartados anteriores mencioné que la formalización es un procedimiento mediante el cual nos es posible representar las estructuras de los objetos de una teoría matemática en el lenguaje de un sistema formal determinado. En este contexto, he mencionado que P es capaz de formalizar los números naturales, esto es, las propiedades y relaciones encontradas entre los números de naturales. Incluso con éste es posible formalizar algunas de las propiedades y relaciones encontradas entre sus expresiones a través de sus números Gödel. Ahora, para llevar a cabo la formalización de la consistencia, Gödel también tuvo que hacer uso de la aritmética, es decir, primero construyó un enunciado con los símbolos de la aritmética y, dado que P tiene la capacidad de formalizar sus objetos, fue posible expresar en P la fórmula de su propia consistencia.

Antes de dar cuenta de todas las fórmulas mencionadas, primero debo retomar algunos aspectos relacionados con la *consistencia*. Mencioné que, ya sea sintáctica o semántica, es una propiedad que tienen los sistemas en los cuales no hay contradicciones entre sus fórmulas básicas y en los que no se puede demostrar contradicción alguna. En el caso de la *consistencia semántica* (y también en el caso de la *ω-consistencia*) mencioné que se encuentra como propiedad de un sistema formal cuando se le pone en relación con los objetos de alguna teoría.

Teniendo lo anterior en cuenta, puedo mencionar que el supuesto de que P es consistente implica que P no tiene contradicciones entre sus axiomas y teoremas, que no demuestra expresiones contradictorias a partir de estas fórmulas y que el ponérsele en correspondencia con la estructura de los naturales éste sigue siendo consistente, pues de este hecho no se deriva contradicción alguna. Debo señalar que esto no cuenta como una demostración de la consistencia de P porque sólo estoy retomando lo que ya mencioné sobre el supuesto que se debió establecer para la demostración que Gödel dio del primer teorema.

Ahora bien, el que entre las expresiones de P no se encuentren contradicciones y el que con éstas no se demuestren contradicciones, también implica lo siguiente: con los teoremas ya demostrados y los axiomas de P no se demuestran todas las fórmulas. Hay que recordar que, según el principio de explosión, si una contradicción se encuentra en un sistema, entonces dicho sistema es capaz de demostrar todas las expresiones bien formadas del mismo. Si P fuera inconsistente, entonces éste sería capaz de demostrar todas y cada una de las fórmulas que se pudieran formar con su lenguaje, incluyendo a G. Pero esto no es el caso porque suponemos que éste es consistente. Por tanto, como P no puede demostrar todas las fórmulas y como no sabemos el número exacto de estas fórmulas, entonces debemos suponer que por lo menos existe una que no puede ser demostrada[69].

Como consecuencia de lo anterior, puedo decir que otra manera de definir la *consistencia* es la siguiente: un sistema es consistente si y sólo si existe por lo menos una fórmula que no es demostrable en éste. En este contexto, P es consistente porque existe por lo menos una fórmula que no puede ser demostrada con sus axiomas. Esto es importante porque con base en esta definición se puede construir un enunciado con el que se expresa la consistencia de P. El enunciado es el siguiente (cfr. Torres, 2001, pág. 207, para observar la versión original):

$$Con(P) \leftrightarrow \exists x(form(x) \land \neg Dem(x))$$[70]

[69] El hecho de que no podamos demostrar todas las fórmulas posibles de un sistema, no implica que haya un número determinado de fórmulas, es decir, no implica que sea sólo una, o dos, o tres, etc. No sabemos exactamente cuántas fórmulas son indemostrables. Pero, sí podemos suponer que existe por lo menos una que no se demuestra, porque suponer sólo una implica que no todas se demuestran y no incurrimos en la falacia de afirmar que hay un número determinado de fórmulas.

[70] De momento sólo mencionaré este predicado para hablar sobre la formalización de la consistencia. En el siguiente apartado hablaré sobre su relación con el primer teorema. De este modo explicaré de dónde proceden todos los elementos que lo componen.

La expresión $Con(P)$ da cuenta de la consistencia de P. $form(x)$ indica que x es una fórmula compuesta con el lenguaje de P y $Dem(x)$ dice que x es un teorema o una fórmula demostrable en P. El enunciado completo dice que P es consistente si y sólo si existe una fórmula x de P y esa fórmula no es teorema de dicho sistema. Debo señalar que esta fórmula expresa simbólicamente la definición que mencioné anteriormente, por lo cual, sólo quiere decir que hay una fórmula que no se demuestra en P.

Sobre esta misma línea, he mencionado que el sistema en cuestión es capaz de expresar cuestiones relacionadas con los números naturales, y como $Con(P) \leftrightarrow \exists x(form(x) \wedge \neg Dem(x))$ es un enunciado aritmético, entonces también puede ser expresado mediante una fórmula construida con el lenguaje de P. Tal fórmula puede ser $Con(P)$ misma.

Antes de pasar a hablar sobre la relación entre la oración G y $Con(P)$, debo hacer unos señalamientos sobre la formalización de la consistencia. El primero de estos tiene que ver con la formalización en general: he dicho en varias ocasiones que un sistema formal se encarga de expresar con su lenguaje fórmulas verdaderas sobre los objetos de una teoría matemática y dichas fórmulas se refieren a las propiedades y relaciones encontrados entre los objetos mencionados. Esto sucede con P. Del mismo modo, la formalización nos permite tener expresiones de P que se refieren a las relaciones entre los números Gödel que representan a las expresiones –y a sus relaciones- de P.

Teniendo lo anterior en cuenta, debo mencionar lo siguiente: la consistencia es una propiedad del sistema. En este sentido, cuando es expresada en términos aritméticos, debería hacer referencia a P mediante los números Gödel. Sin embargo, esto se hace mediante la referencia a objetos de P a través de sus números. Es decir, el enunciado $Con(P) \leftrightarrow \exists x(form(x) \wedge \neg Dem(x))$ define la consistencia del sistema en cuestión a través de predicados que expresan propiedades de los números Gödel de expresiones de P; no asigna la propiedad de "ser consistente" al número Gödel del conjunto de axiomas de P o a P mismo. Así, la diferencia se encuentra en que el enunciado que afirma la consistencia de P involucra números naturales que se refieren a objetos de P y no a P[71].

El segundo aspecto se deriva del anterior: la fórmula $Con(P)$ tiene un carácter diferente a las demás fórmulas del sistema debido a $Con(P) \equiv \exists x(form_P(x)$ y $\neg Dem_P(x))$. Mencioné en apartados anteriores que las fórmulas de P hacen referencia a los objetos de la aritmética, los cuales hablan de

[71] No profundizaré sobre la cuestión de si P tiene o no número Gödel. Respecto de ello sólo diré lo siguiente: he mencionado en varias ocasiones que los números Gödel se encargan de representar las sucesiones de símbolos de este sistema. Hay expresiones que nos hablan acerca de números naturales y expresiones que nos hablan de propiedades y relaciones entre números Gödel en P. Sin embargo, esto no nos permite asegurar que P sea expresable mediante un número Gödel o mediante la suma de los números Gödel de todos sus signos y fórmulas bien formadas con los mismos.

números naturales (ya sean los números naturales comunes o los de Gödel). Sin embargo, como $Con(P) \equiv \exists x(form_P(x)$ y $\neg Dem_P(x))$ nos habla de números naturales y hace referencia a una propiedad que no pertenece a las expresiones de P.

Dicho lo anterior, cabe señalar que no estoy diciendo que sea incorrecto o inválido formalizar las propiedades y relaciones de los números porque de hecho Gödel y los otros autores aquí citados demostraron que esto es posible. Lo único que quiero resaltar con estos dos señalamientos es que la consistencia no es una propiedad parecida a las otras que se le asignan a los números porque no pertenece a un número o a una expresión del sistema aquí involucrado. Es decir, es una propiedad que pertenece a un sistema formal con axiomas –a lo mucho al conjunto de axiomas que forma el sistema-.

Siendo así, hablaré de la relación entre *G* y $Con(P)$.

3.6.3.2. Relación entre G y $Con(P)$.

La relación entre los dos teoremas, o entre la imposibilidad de demostrar *G* y la imposibilidad de demostrar $Con(P)$, reside en que Gödel usó algunas modificaciones al trabajo aquí presentado, es decir, el debió presentar la demostración el primer teorema con ciertas modificaciones alrededor de las nociones de *demostrabilidad* y *verdad* (Torres, 2001, págs. 206 – 207)[72].

Anteriormente mencioné que cuando un sistema se le pone en correspondencia con una teoría matemática todas sus expresiones también son verdaderas, siempre y cuando el sistema sea consistente y de esa correspondencia no resulten expresiones contradictorias. Más aún, para llevar a cabo la prueba del primer teorema se usó la suposición de que todo enunciado verdadero es demostrable. Ahora, la modificación es la siguiente: como la noción *ser una fórmula verdadera* no es definible en el lenguaje de *P*[73], Gödel decidió reemplazarla por la noción de *ser una fórmula demostrable*, la cual sí es definible en el sistema.

Existe una explicación de por qué *ser una fórmula demostrable* es definible en el lenguaje de *P*: si se supone una sucesión finita de fórmulas Σ y una fórmula de A, se puede determinar si Σ es una

[72] En todo este trabajo he venido usando la noción de verdad y una prueba del primer teorema relacionada con esta porque el objetivo no es hablar a profundidad de la demostración de los dos teoremas tal y como Gödel los desarrolló, sino de la consistencia como una propiedad del sistema *P* (y de los sistemas formales en general). Menciono los dos teoremas porque sus demostraciones me permiten hablar de cómo se formaliza la consistencia, pero, reitero, profundizar en estos no es el objetivo porque podría entorpecer el objetivo de este escrito. Además, como el mismo Carlos Torres explica, deshacernos de dicha noción complica el argumento.

[73] En este contexto, el que una noción sea definible quiere decir que es representable mediante una fórmula del lenguaje de la aritmética.

demostración de A[74]. Una vez establecido que esto puede realizarse, deben codificarse los números Gödel de Σ y A. Supondremos que dichos números son m (este es el número de Σ) y n (el número de A). Teniendo estos elementos, se puede construir una función f tal que, cuando se aplica a los números mencionados, obtiene el valor de 1 -$f(m,n) = 1$- si y sólo si efectivamente m es el número de la demostración Σ y n es el número de la fórmula A que se demuestra con este procedimiento. Torres dice que se puede tomar como base la función f para definir la noción de *ser una fórmula demostrable* (en P) para construir el siguiente enunciado:

$$Dem(z) \leftrightarrow \exists x(f(x,z) = 1)\ (\delta)$$

Dicho enunciado puede leerse como: z es el número Gödel de una fórmula demostrable de P si y sólo si existe un número Gödel x que represente a la demostración de z. Como P es capaz de formalizar los números naturales, entonces es posible construir con su lenguaje una fórmula similar a $Dem_P(z) \equiv \exists x(f(x,z) = 1)$. De esta manera es como se muestra que la noción de *ser una fórmula demostrable* sí es definible en P.

Por otra parte, la noción de *ser una fórmula verdadera* no es definible mediante el mismo tipo de enunciados por lo siguiente: si bien se trata de una propiedad que se puede atribuir a las fórmulas de un sistema formal y a enunciados de teorías matemáticas, no es una propiedad que pueda expresarse mediante relaciones de números. Casi todas las propiedades que se pueden expresar en la aritmética implican una relación entre dos o más números; ya sea una propiedad de los números naturales o una propiedad de los números Gödel, se necesita de más de uno para poder expresarlas.

La *verdad*, en cambio, no es una propiedad que necesite de dos objetos para poder asignarse a uno de estos. Por ejemplo, en δ se expresa que z es el número de una fórmula demostrable porque existe otro número, x, que es el número de una secuencia de fórmulas que funge como su demostración, pero cuando una fórmula β es verdadera no necesita estar relacionada con otros objetos del mismo tipo, sino que se requieren de otros aspectos como la correspondencia entre sistemas y objetos, interpretaciones bajo las que se evalúe la verdad de dicha fórmula, etc., que no necesariamente implican la relación entre dos o más números.

Además de lo anterior, el determinar que una fórmula es verdadera no se hace de la misma manera en que se determina si una sucesión es una demostración, es decir, para determinar que una

[74] Para determinar esto, según Torres Alcaraz, es suficiente con observar dicha sucesión para verificar si cumple con los requisitos que requiere una demostración, a saber, que sea una sucesión de fórmulas en la cual cada una sea un axioma, un teorema ya demostrado con esos axiomas y que se siga la fórmula A.

fórmula es verdadera no basta con observar las fórmulas encontradas en una sucesión para decidir si se puede o no atribuir dicha propiedad a una fórmula. En resumen, con las herramientas presentadas hasta ahora no es posible decir que z es verdadera como sí lo es el decir que es demostrable. Esto también se relaciona con las exigencias del programa hilbertiano: la verdad, a diferencia de la demostración, no se puede determinar en un número finito de pasos.

Aclarado esto, debo mencionar que de los aspectos anteriores se pueden obtener resultados sobre consistencia. Como afirma Torres, con ayuda de los predicados $form_P(x)$ y $Dem_P(x)$, Gödel logró, en cierto sentido, transcribir expresar en lenguaje aritmético la consistencia de P. Dicho predicado es la expresión $Con(P) \leftrightarrow \exists x(form(x) \wedge \neg Dem(x))$ que ya había mencionado. Como los predicados mencionados corresponden a la propiedad de x de ser una fórmula y a la propiedad de x de ser demostrable, entonces se pueden tomar para representar la definición de consistencia porque ésta implica que si un sistema es consistente (en este caso P), entonces existe una fórmula que no puede ser demostrada, como mencioné anteriormente. Así, con la expresión $Con(P)$ es posible hacer demostraciones y demás procesos, como con las otras fórmulas de P.

Hecho esto, en el siguiente apartado me ocuparé de explicar cómo es que el segundo teorema no es demostrable.

3.6.3.3. Segundo Teorema: $\boldsymbol{Con(P)}$ es indemostrable.

Una vez que he mencionado cómo se formaliza la consistencia, debo explicar brevemente el segundo teorema de Gödel. Como mencioné, dicho teorema dice que si un sistema formal recursivamente axiomatizable (en este caso P) es capaz de formalizar la aritmética y además es consistente –o establecemos el supuesto de que es consistente-, entonces éste es incapaz de demostrar su propia consistencia (*Cfr*. Smith, 2013 y Piñeiro. 2012).

Aclarado lo anterior, debo mencionar que la versión de la demostración del segundo teorema que usaré aquí necesita de la fórmula G del primer teorema por lo siguiente: decir que P es consistente es lo mismo que afirmar que si P es consistente, entonces existe al menos una fórmula de éste que no es demostrable. G, como expliqué, no es demostrable porque afirma de sí misma que no lo es. En consecuencia, dicha fórmula puede ser considerada como aquella para la que no existe una sucesión de fórmulas que funja como su demostración.

Siendo así, y teniendo en cuenta el supuesto de que P es consistente, entonces podemos pensar en el siguiente enunciado: si P es consistente, entonces existe una fórmula que no es demostrable, esto es, G. Podemos representar este enunciado con las fórmulas de las que hemos estado hablando aquí: $Con(P)$ y G. Así, la representación formal del enunciado en cuestión es $Con(P) \rightarrow G$. Como estamos suponiendo que de hecho P es consistente porque existe una fórmula G que no se puede demostrar, tenemos el antecedente $Con(P)$.

Al respecto de lo anterior, Smith dice que "**Con** [en la notación aquí presentada $Con(P)$] está construida de una manera que la hace verdadera si y sólo si **PA** [P] es consistente. De modo que, […], podríamos decir que **Con** *dice indirectamente* que **PA** es consistente"[75](Smith, 2013, pág. 234). Con esto podemos entender que dado el supuesto de que el sistema en cuestión es consistente, se obtiene el antecedente $Con(P)$, porque dicho supuesto permite afirmar que tal fórmula es verdadera. Sin embargo, como mencionamos que la noción de verdad no puede estar involucrada en este contexto, tendremos que considerar que el supuesto implica que $Con(P)$ es demostrable.

Siendo así, y debido a que tenemos el antecedente de la fórmula $Con(P) \rightarrow G$, por *modus ponens*, obtenemos G. Esto cuenta como una demostración de G, pues se obtiene a partir de otras fórmulas y mediante la aplicación de una regla de transformación. Sin embargo, como G dice de sí misma que no es demostrable, esto nos lleva a una contradicción, con lo cual se anula el supuesto de que P es consistente. Por tanto, demostrar que P es consistente es imposible porque nos lleva a contradicciones.

Ahora bien, lo que implica una contradicción es el hecho de demostrar el supuesto de que P es consistente, mas no suponer que P es consistente. En otras palabras, bastaría con suponer que G no es demostrable para tener la seguridad de que P es consistente. Sin embargo, esto no se adapta a las exigencias del programa hilbertiano, pues es algo que suponemos sobre P mismo y las condiciones en las que se encuentra, pero, desde el punto de vista de Hilbert, no sería aceptable porque no es explicado paso a paso con los métodos de deducción y de construcción de fórmulas establecidos en el sistema.

En lo que sigue, me ocuparé de hablar sobre algunas cuestiones relativas a la *consistencia* y a los números naturales para abrir el cuestionamiento de si la consistencia puede o no ser tratada como se trata a los números con las herramientas aquí mostradas.

[75] "**Con** is constructed in such a way as to make it true if and only if **PA** is consistent. So, […], we might comment that **Con** *indirectly says* that **PA** is consistent." (Smith,, pág. 234).

CAPITULO IV: CONSISTENCIA FUERA DE $\mathbb{N}$

Introducción

En este capítulo me ocuparé de tratar el problema de si la consistencia puede ser considerada como uno de los objetos estudiados por P. Esto se debe a lo siguiente: a lo largo de este escrito he explicado que los sistemas formales se ocupa de formalizar las estructuras de objetos matemáticos. P se encarga de formalizar las propiedades y relaciones de los números naturales. P es capaz de hacer demostraciones de los enunciados que resultan de esta formalización con ayuda de sus axiomas. También existe de la posibilidad de representar los símbolos de P mediante números naturales, para después formalizar las propiedades de estos con el lenguaje de P y luego hacer demostraciones. Todos estos procesos, en mayor o menor medida, hacen referencia a números naturales.

Con todas estas herramientas Gödel fue capaz de demostrar sus dos teoremas. Aquí pondré atención sobre la formalización de la *consistencia* para la demostración del Teorema II: mencioné que la *consistencia* es representada mediante un enunciado aritmético acerca de los números Gödel de las fórmulas de P y luego representada mediante $Con(P)$, pero la consistencia es una propiedad de P, es decir, es una propiedad de un sistema formal. Y, en este sentido, parece no ser una propiedad de los números naturales y tampoco parece ser un objeto de este tipo –del mismo modo, tampoco es una propiedad de las expresiones de P como ser una *fórmula*, *fórmula demostrable*, etc.

Para ser más explícito con lo anterior, debo decir que en tanto que la consistencia es una propiedad de los sistemas formales y hace que aquellos que la poseen no demuestren contradicciones con los elementos que constituyen su lenguaje (así como sus conjuntos de fórmulas), no puede ser una propiedad de los números naturales porque estos no se constituyen igual que los sistemas (un número no se compone de lenguaje y fórmulas) y porque estos tampoco tienen la finalidad de construir fórmulas para hacer demostraciones. Tampoco puede ser una propiedad como *ser fórmula* porque este tipo de propiedades son poseídas por expresiones de un sistema y no por la totalidad de éste: se necesita de todos los componentes del sistema para observar del sistema. Por último, la consistencia no puede tener las propiedades de los números naturales y tampoco puede usarse en las operaciones básicas en las que estos se usan. Por lo tanto, no puede ser tratada como tal. Mostraré todo esto a lo largo de este capítulo.

Entonces, el objetivo de este capítulo es mencionar ciertos aspectos que muestran que la consistencia no es una propiedad de los números naturales y que tampoco es un número natural. Para llevar a cabo esta empresa retomaré varios aspectos mencionados en este escrito para ponerlos en relación y profundizar acerca de la cuestión mencionada.

Lo primero que haré es hablar de los números Gödel como números naturales y como meras representaciones de las expresiones de P. En segundo lugar volveré a tratar el asunto de la consistencia como una propiedad de sistemas formales, pero esta vez poniéndola en relación con lo dicho acerca de los números naturales y los números Gödel. Por tanto, aquí mostraré cómo la consistencia no es un número natural y, en consecuencia, no se encuentra en $\mathbb{N}$. Con esto me será posible decir que la *consistencia* no es una propiedad de los números de este conjunto y que no es un número. Además, esto también servirá para indicar que, posiblemente, la consistencia no puede ser tratada como estos números y sus propiedades.

Esto resulta relevante porque puede mostrar que si la consistencia no puede ser tratada como un número natural, entonces las herramientas y los métodos que se usan para trabajar con estos objetos no pueden ser usados para tratar la consistencia. Esto, a su vez, posiblemente permitiría entender que la consistencia debe ser tratada con otro tipo de herramientas o métodos diferentes a los propuestos por Hilbert.

Por último, debo mencionar que todo lo desarrollado en este capítulo se basará en las obras citadas a lo largo de este escrito.

4. La consistencia de *P* no se encuentra entre de los objetos formalizados por *P*

4.1. Números Gödel de las fórmulas de *P* como un subconjunto de $\mathbb{N}$.

Primero debo mencionar la noción de *subconjunto*. El símbolo $\mathbb{N}$ se usa para denotar el conjunto que contiene a todos los números naturales. Todos estos comparten propiedades y relaciones. En teoría de conjuntos (Badesa, Jané y Jansana, 2007, págs. 32-33.) existen los símbolos $\subset$ y $\subseteq$, los cuales sirven, en general, para indicar cuándo un conjunto está contenido en otro. Específicamente, $\subset$ se usa en expresiones como $A \subset B$ y se lee como "A está incluido propiamente en B" o "A es subconjunto propio de B" y denota que el conjunto A tiene cierto número de elementos, que este número es menor al que podemos encontrar en B –por lo cual B tiene otros elementos que no se encuentran en A-, y que los elementos de A se encuentran dentro de B.

Por otra parte, $\subseteq$ se usa en expresiones como $A \subseteq B$ y se lee como "A está incluido impropiamente en B" o "A es subconjunto impropio de B" y denota que A es subconjunto de B, y que el número de elementos del conjunto A es menor o igual al número de objetos del conjunto B.

Estos dos símbolos se pueden usar para denotar subconjuntos de $\mathbb{N}$. Por ejemplo, $A = \{2,4,6,8\}$ contiene los números pares del 2 al 8 y, dado que son números naturales, la expresión $A \subset \mathbb{N}$ es verdadera, pues dichos números también se encuentran en $\mathbb{N} = \{0,1,\mathbf{2},3,\mathbf{4},5,\mathbf{6},7,\mathbf{8},9 \ldots\}$. Puede haber más subconjuntos de $\mathbb{N}$, y estos estarán determinados por tener a elementos que se diferencian de los demás elementos de $\mathbb{N}$ por alguna u otra razón, como ser números naturales que son números primos o números naturales que son múltiplos de 2, o números naturales que son menores que 10, etc. Lo que cabe resaltar es esto: todos los números encontrados en dichos subconjuntos comparten las mismas propiedades y relaciones que todos los elementos de $\mathbb{N}$ por el hecho de ser números naturales.

Dicho esto, mencionaré cómo se relaciona esto con los números Gödel, pues estos a pesar de que se usan para representar toda la simbología del sistema *P*, siguen siendo números naturales. Esto implica que la numeración de Gödel tiene las mismas propiedades y funciona con las mismas operaciones que los elementos de $\mathbb{N}$, sin embargo, resulta ser un subconjunto de éste porque dicha numeración posee algunas propiedades que no comparte con todos los números naturales como, por ejemplo, ser el número Gödel que representa a algún símbolo de *P*.

4.1.1. Números Gödel como números naturales.

a) Números Gödel de los signos de *P*.

Cuando presenté la lista de los números Gödel de los signos del sistema *P*, mencioné que estos números son números naturales. Es decir, Gödel tomó algunos de los elementos de $\mathbb{N}$. Los cuales encontramos en la siguiente tabla:

Símbolo del sistema	Número natural que le corresponde
0	1
s	3
∼	5
∨	7
Π	9
(	11
)	13

Cada número, aunque funja como un símbolo para representar las propiedades de las expresiones de P, también es un número natural. Si observamos la secuencia de $\mathbb{N}$, podemos ver que estos se encuentran ahí: $\{0, \mathbf{1}, 2, \mathbf{3}, 4, \mathbf{5}, 6, \mathbf{7}, 8, \mathbf{9}, 10, \mathbf{11}, 12, \mathbf{13}, 14{,}15 \ldots\}$. Lo mismo pasa con los números de las variables de tipo n, pues estos se obtienen a partir de operaciones de números naturales que dan como resultado números naturales. Ahora, a partir de la tabla anterior, se puede formar el conjunto de los números naturales que son números Gödel de los signos de P. Dicho conjunto se puede representar con la letra S, y en lenguaje conjuntista se representa como $S = \{1{,}3{,}5{,}7{,}9{,}11{,}13 \ldots\}$[76]. Como dicho conjunto está compuesto por únicamente números naturales y estos se encuentran en $\mathbb{N}$, entonces es válido que $S \subset \mathbb{N}$.

Estos números también comparten otras propiedades con los demás elementos de $\mathbb{N}$. Por ejemplo, cada uno de estos tiene un sucesor o es sucesor de algún otro número, al igual que cada elemento encontrado en $\mathbb{N}$ (salvo el 0). 1 (que representa al símbolo "0") es sucesor de 0, y su sucesor es 2. 3 (que representa al símbolo "s") es sucesor de 2 y su sucesor es 4. Lo mismo ocurre con los otros números del conjunto que representan símbolos del sistema P. Por otra parte, en el conjunto S también existen números menores que otros, de modo que $1 < 3$, $3 < 5$, $5 < 7$, etc. Por tanto, la propiedad *ser menor que*, también es poseída por los números de este conjunto.[77]

También podemos observar que existen otras propiedades entre estos números, como la de *ser un número primo*: 3 es un número que sólo es divisible por sí mismo y por 1, y es mayor que 1, al igual que 5, 7, 9, 11, y 13. 1 no es un número primo, pero, al igual que los otros números encontrados en S, éste también es un número natural. Por otra parte, la relación *ser mayor que* también puede encontrarse entre estos números: $3 > 1{,}5 > 3{,}7 > 5{,}11 > 7$, etc.

Por otra parte, mencioné que en la aritmética en general, así como en la Aritmética de Peano, las operaciones más básicas son las de *suma* o *adición* y *multiplicación* o *producto*. También mencioné que las operaciones de *resta*, *división* y *exponenciación* son expresables o definibles a través de la *suma* y la *multiplicación*. Además, todas son aplicables a números naturales y tienen como resultado números naturales. Y como los elementos de S son todos números de este tipo, entonces también podemos aplicar a estos dichas operaciones. Por ejemplo, sumar 3 más 5 (los números que representan a s y a $\sim$) da como

[76] Los puntos suspensivos están ahí para representar que la sucesión sigue debido a los números Gödel de las variables de tipo n.
[77] *Ser menor que* y *ser sucesor* son dos propiedades que se relacionan por el hecho de que los sucesores siempre son menores que sus antecesores. Así, los números del conjunto *S* que sean antecesores de algún otro, también serán menores que sus sucesores.

resultado 8 $(3 + 5 = 8)$, el cual, si bien no es la representación de alguno de los signos de P, sí es un elemento encontrado en $\mathbb{N}$. Se obtienen resultados similares si sumamos 1 con 3, o 5 con 13, etc. También pueden hacerse multiplicaciones con los números de S: $3 \cdot 5 = 15$, $7 \cdot 11 = 77$, etc. y la aplicación de dicha operación a tales números también tiene como resultado los números naturales.

Asimismo, mencioné que la *suma* y la *multiplicación* tienen ciertas propiedades. Las propiedades que mencioné de la suma son las siguientes:

1) $(m + n) + r = m + (n + r)$ (propiedad asociativa)
2) $m + n = n + m$ (propiedad conmutativa)
3) $m + 0 = m$ (existencia del elemento neutro)
4) Si $n + m = r + m$, entonces $n = r$ (ley de cancelación)
5) Si $n \neq 0$, entonces $n + m \neq 0$ para toda $m \in \mathbb{N}$.

Todas estas son aplicables a los elementos de S. Podemos observar esto con las primeras dos propiedades y con los números 1 y 3, de modo que $m = 1, n = 3, r = 5$

1) *Propiedad asociativa*

$$(1 + 3) + 5 = 1 + (3 + 5)\ (a)$$

Para comprobar que la expresión anterior es correcta basta con realizar las sumas. Así:

I. $(4) + 5 = 1 + (8)$ a partir de (a)
II. $9 = 9$ a partir de I.

2) *Propiedad conmutativa*

$$1 + 3 = 3 + 1\ (b)$$

Comprobación:

I. $4 = 4$ al efectuar las suma en (b).

Como podemos observar, los números Gödel de los signos de P, al ser números naturales, también cumplen con las propiedades de la *suma*. Asimismo, cumplen con las de la *multiplicación*. Sobre esta última mencioné las siguientes propiedades:

1) $(m \cdot n) \cdot r = m \cdot (n \cdot r)$ (propiedad asociativa)
2) $m \cdot n = n \cdot m$ (propiedad conmutativa)
3) $m \cdot 1 = m$ (existencia del neutro multiplicativo: 1)
4) $r \cdot (m + n) = r \cdot m + r \cdot n$ (distributividad del producto respecto a la suma)

5) Si $n \neq 0$ y $n \cdot m = n \cdot r$, entonces $m = r$ (ley de cancelación)

6) Si $n \neq 0$ y $m \neq 0$, entonces $n \cdot m \neq 0$

Consideremos los números 1, 3, 5 para mostrar cómo se aplican a las primeras dos propiedades. De modo que: $n = 1$, $m = 3$ y $r = 5$.

1) *Propiedad asociativa*.

$$(3 \cdot 1) \cdot 5 = 3 \cdot (1 \cdot 5)\ (a)$$

Comprobación:

I. $(3) \cdot 5 = 3 \cdot (5)$ al efectuar las multiplicaciones en (a)

II. $15 = 15$ al efectuar las multiplicaciones en I.

2) *Propiedad conmutativa*.

$$3 \cdot 1 = 1 \cdot 3\ (b)$$

Comprobación:

I. $3 = 3$ al efectuar la multiplicación en (b)

Como podemos observar, los números Gödel de los signos de P son números naturales y con estos se pueden realizar las operaciones de *suma* y *multiplicación* y, además, también funcionan correctamente con sus respectivas propiedades.

De igual manera, con estos números se pueden realizar las operaciones de *exponenciación*, *resta* y *división*. En todos los casos se obtienen números naturales como resultado. En el caso de la *exponenciación* podemos considerar el número Gödel de s (3) y realizar dicha operación:

$$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$$

En el caso de la *resta*, podemos considerar los números 5 y 3, de modo que:

$$5 - 3 = 2$$

Respecto de la *división*, podemos observar que todos los números de S son divisibles por 1 y por sí mismos. Por ejemplo: $\frac{1}{1} = 1$, $\frac{3}{1} = 3$, $\frac{3}{3} = 1$, $\frac{5}{1} = 5$, $\frac{5}{5} = 1$, etc.

Con todo esto podemos observar que los elementos de S, esto es, los números Gödel de los signos del sistema P, también son números naturales y funcionan con las operaciones –así como las propiedades- de los mismos.

Este es el primer paso para tratar el objetivo de este capítulo. Ahora, el segundo paso, es analizar si esto mismo ocurre con los números Gödel de las fórmulas de P: queda analizar si los números Gödel de las expresiones bien formadas de P también cuentan con las propiedades aquí mencionadas, y si también pueden involucrarse en las operaciones básicas de los números naturales.

b) Números Gödel de las fórmulas de P.

Anteriormente dije que las fórmulas del sistema P son consideradas sucesiones de símbolos y que para obtener su número Gödel, existe un método que consiste en: 1) asignar un único número natural a cada signo de P; 2) considerar los números primos y elevar el primero de estos a una potencia, la cual se obtiene del número Gödel del primer signo encontrado en la sucesión de símbolos (fórmula), y lo mismo de manera sucesiva con los demás números primos y los signos; y 3) una vez realizada la operación indicada por las potencias de los números primos, multiplicar todos estos resultados entre sí. También mencioné dos aspectos que debo retomar ahora. El primero es que los resultados de aplicar este procedimiento a cada fórmula del sistema pueden ser cantidades muy grandes. Así, si se aplica este método a la fórmula $\Pi \mathrm{x}_1\big(\sim(\mathrm{x}_2(\mathrm{x}_1)) \vee \mathrm{x}_2(\mathrm{sx}_1)\big)$, se obtendría una expresión como:

$$2^9 \cdot 3^{17} \cdot 5^{11} \cdot 7^5 \cdot 11^{11} \cdot 13^{289} \cdot 17^{11} \cdot 19^{17} \cdot 23^{13} \cdot 29^{13} \cdot 31^7 \cdot 37^{289} \cdot 41^{11} \cdot 43^3 \cdot 47^{17} \cdot 53^{13} \cdot 59^{13}$$

Y el resultado de realizar todas estas operaciones sería una cantidad grande que entorpecería las explicaciones alrededor de dichas fórmulas, por tanto los números se pueden abreviar con las constantes n, m, r o, si se necesitan más, entonces se pueden usar símbolos como $n_1, n_2, n_3, \ldots n_m, n_{m+1}$, etc. En el caso de las sucesiones de fórmulas –como las demostraciones- también se usarán estas constantes.

El segundo aspecto es que como se puede observar, los resultados de aplicar este método siempre son números naturales, por lo tanto, estos números también cuentan con las propiedades mencionadas arriba. Supongamos dos fórmulas: 1) $\Pi \mathrm{x}_1\big(\sim(\mathrm{x}_2(\mathrm{x}_1)) \vee \mathrm{x}_2(\mathrm{sx}_1)\big)$; y 2) $\Pi \mathrm{x}_1\big((\mathrm{x}_2(\mathrm{x}_1)) \vee \mathrm{x}_2(\mathrm{sx}_1)\big)$. Ambas son *fbf*'s de P porque obedecen sus reglas de formación. Representaré estas fórmulas con metavariables, de manera que: 1) $\Pi \mathrm{x}_1\big(\sim(\mathrm{x}_2(\mathrm{x}_1)) \vee \mathrm{x}_2(\mathrm{sx}_1)\big) \equiv \alpha$; y 2) $\Pi \mathrm{x}_1\big((\mathrm{x}_2(\mathrm{x}_1)) \vee \mathrm{x}_2(\mathrm{sx}_1)\big) \equiv \beta$. Supongamos, además, que aplicamos el método de la numeración de Gödel para obtener sus respectivos números. Así, el número Gödel de α es m y el de β es n. Podemos, además, suponer que $n < m$ porque la fórmula que m representa tiene un signo de más: $\sim$ [78]. Con esto se cumple una de las propiedades que mencioné

[78] El signo $\sim$ hace que el número Gödel de α necesite de un número primo extra de los que necesita β. Esto, como mencioné, influye en el cálculo y hace que el resultado final sea una cantidad más grande.

sobre los números naturales (y que también comparten con los números Gödel de los signos que las componen): *ser menor que*.

El símbolo que representa la propiedad *ser menor que* ($<$), también sirve para dar cuenta del orden dentro ℕ, pues cada número natural es menor que su sucesor, de modo que: $n < sn$ y $m < sm$. A su vez, estos números son sucesores de otros y, por lo tanto, estos mayores que sus antecesores. Así $n > n - 1$ y $m > m - 1$[79].

Dado que n y m son números naturales, también es posible realizar con estos las operaciones de *suma* y *multiplicación*, pues tanto si los sumamos o multiplicamos entre sí, como si lo hacemos con otros números del mismo ℕ, el resultado de estas operaciones también será un número natural. De modo que $n + 1 = r$ y $m + 1 = o$ y $r \in \mathbb{N}$ y $o \in \mathbb{N}$. Del mismo modo, todas las propiedades de estas operaciones son aplicables a estos. Y, de la misma manera, las operaciones de *exponenciación*, *resta* y *división*.

Todo esto es posible porque los números Gödel de las fórmulas y sucesiones de fórmulas de P, al igual que los números que representan a sus signos, son números naturales y pertenecen al conjunto ℕ.

Sobre esta misma línea existe otro asunto que atañe a los números Gödel. En apartados anteriores dije que Gödel construyó una serie de funciones que nos expresan las propiedades y las relaciones de las expresiones de P a través de sus números Gödel. De modo que propiedades como *ser una variable*, *ser una fórmula*, *ser una sucesión de fórmulas, ser una demostración* y *ser una fórmula demostrable* (entre otras, porque recordemos que son 46 funciones) pueden ser expresadas mediante predicados aritméticos que se asignan a los números y que son definidos a través de fórmulas construidas en el lenguaje de esta teoría matemática –dichas fórmulas establecen las condiciones que debe cumplir un número para que le sea asignado dicho predicado-. Así, las propiedades recién mencionadas se pueden representar con predicados como los siguientes: $Var(x), Form(x), Suc(x), D(x, y)$ y $Dem(x)$. El predicado original de Gödel para x *es una fórmula demostrable* es Bew x y la fórmula que lo define es $\exists y\, yBx$. Esta se lee como "existe un número y tal que y es el número Gödel de una demostración de x". Los predicados mencionados arriba se definen de maneras similares.

De igual manera, mencioné que estas fórmulas definen conjuntos, es decir, a partir de estas expresiones es posible formar conjuntos de números Gödel según la expresión de P que representen y el predicado que les sea asignado. Por tanto, para cada uno de los predicados mencionados arriba, existe un

---

[79] El *antecesor*, el no ser una noción definida en *PA* sólo la representaré como $x - 1$, pues restar 1 a un número da como resultado el número que se encuentra antes de éste (lo cual es inverso a la función sucesor).

conjunto de números Gödel en los que se encuentran aquellos números que cumplen con la propiedad que estos expresan. Así, podemos suponer que:

Predicado	Conjunto de Números
$\boldsymbol{Var(x)}$	**Χ**
$\boldsymbol{Form(x)}$	**Φ**
$\boldsymbol{Suc(x)}$	**Σ**
$\boldsymbol{D(x,y)}$	**Δ**
$\boldsymbol{Dem(x)}$	**Ρ**

De esta manera, el número m pertenece al conjunto Φ porque es el número Gödel de una fórmula de P y cumple con las condiciones que establece la fórmula aritmética que define al predicado $Form(x)$. Lo mismo ocurre con los otros números Gödel que poseen las propiedades que denotan los predicados en cuestión. Y, como todos los números Gödel son números naturales, entonces todos los conjuntos mencionados arriba –así como aquellos que se puedan formar con las funciones restantes- son subconjuntos de $\mathbb{N}$. Así, las siguientes expresiones son válidas:

I. $\mathrm{X} \subset \mathbb{N}$
II. $\Phi \subset \mathbb{N}$
III. $\Sigma \subset \mathbb{N}$
IV. $\Delta \subset \mathbb{N}$
V. $\mathrm{P} \subset \mathbb{N}$

Además, todos los números de estos conjuntos pueden ser agrupados en un único conjunto en el que se encuentren todos los números naturales que son números Gödel de las expresiones de *P*. Supongamos que ese conjunto es Ω, de modo que $\Omega \subset \mathbb{N}$.

Con todo esto se puede observar que los números Gödel también pueden ser tratados como los números naturales que no son números Gödel de alguna expresión de *P*, es decir, los números Gödel pueden tratarse como los números naturales que no son representaciones de símbolos del sistema *P*. Hecho esto, es momento de tratar la cuestión de si la consistencia puede ser tratada como un número natural.

4.2. La consistencia como una propiedad de los sistemas.

A lo largo de este escrito se han mencionado varios aspectos acerca de la consistencia y los números naturales, en especial algunos que se encuentran relacionados con *P*. Como se ha podido observar, *P* es un sistema formal axiomático que se ocupa de formalizar los números naturales. Estos, al ser el objeto de estudio de *P* resultan ser la principal herramienta para la demostración de los teoremas de Gödel, de los cuales, el segundo, versa sobre la consistencia. Esta última es una propiedad de *P* que debe ser supuesta para que ambos teoremas sean demostrados y, en tanto que pertenece al sistema aquí tratado, resulta ser una propiedad metateórica o metalingüística, porque nos indica algo sobre el sistema y no sobre los objetos que éste trata.

Por esto, surge el cuestionamiento ¿puede la consistencia ser tratada como uno de los objetos que *P* estudia? O, en otras palabras ¿puede la consistencia ser tratada como un número natural (o, a lo mucho, como una de las expresiones encargadas de formalizar los números naturales y sus propiedades)? Para tratar esta cuestión señalaré algunos aspectos derivados de lo dicho acerca de la consistencia y de los números naturales (aquí también se encuentran los números Gödel) en los apartados recientes.

El primer paso para esto es recapitular qué es la consistencia.

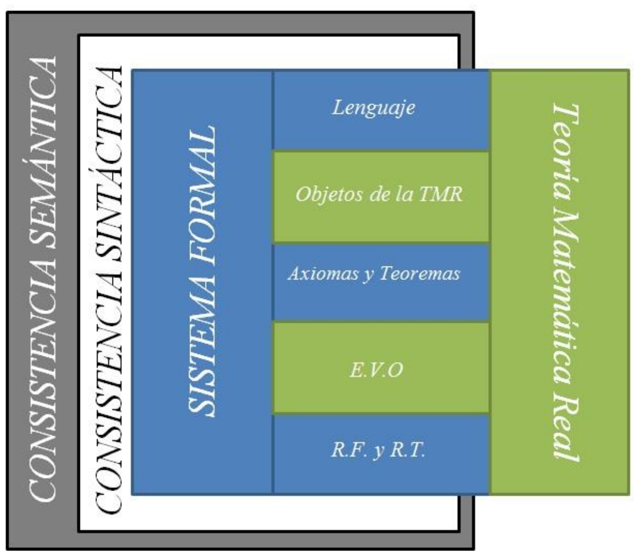
4.2.1. Una vez más: consistencia como una propiedad metateórica de los sistemas formales.

Anteriormente mencioné dos tipos de consistencia: *sintáctica* y *semántica*. La *consistencia sintáctica* es una propiedad de los sistemas formales que hace que estos no demuestren contradicciones con sus axiomas ni contengan expresiones de este tipo entre estos. Si observamos la lista de axiomas de *P* (que se encuentra en el apartado 3.3), podemos observar que en esta no se encuentra alguna expresión que contradiga a alguno de los axiomas. Por ejemplo, no existen fórmulas como$\sim[\Pi x_1(x_2(x_1) \equiv y_2(x_1)) \supset x_2 \equiv y_2]$, $\sim[X \vee X \supset X]$ o $[\Pi v(\beta \vee \alpha) \supset \beta \vee \Pi v(\alpha)]$ que puedan ponerse en conjunción con alguno de sus similares para obtener alguna contradicción. Y, dado que esto no ocurre, entonces de los axiomas no puede obtenerse una contradicción si se aplican las reglas de transformación a dichas fórmulas.

Por otra parte, mencioné que la *consistencia semántica* es un tipo de consistencia relacionada con el significado que adquieren las fórmulas de un sistema formal cuando éste se pone en relación o correspondencia con alguna teoría matemática intuitiva. De modo que, cuando se realiza esta correspondencia, el sistema no se hace inconsistente, es decir, al realizar dicha correspondencia, no es posible derivar o demostrar fórmulas contradictorias de los axiomas (ya con significado) y de las reglas de transformación del sistema en cuestión. Puedo decir que P es semánticamente consistente porque, primero, se tuvo que suponer su consistencia para poder hacer la demostración de los dos teoremas de incompletud y porque, segundo, el hecho de que Gödel haya supuesto su consistencia quiere decir que el momento en que P se puso en correspondencia con los números naturales no se generó contradicción alguna.

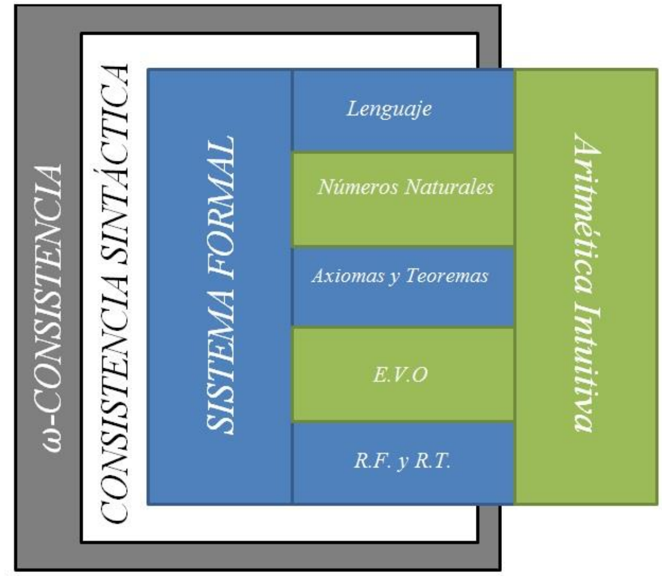
También mencioné un tipo de consistencia llamado ω-consistencia, la cual es una propiedad que tienen los sistemas encargados de formalizar los objetos de la aritmética. Mencioné además que la ω-consistencia implica *consistencia*, pero no a la inversa. Los requisitos para que un sistema formal axiomático sea ω-consistente son: 1) debe tener el operador de negación; 2) debe usar el cuantificador universal; y 3) debe contener una formalización de la aritmética. P cumple con todos estos requisitos, pues tiene un operador de negación ($\sim$), cuenta con un cuantificador universal (Π) y, además, cuenta con una formalización de la aritmética, pues con todo su lenguaje es capaz de expresar fórmulas similares a las de PA. Por tanto, también podemos suponer que P es ω-consistente.

Sobre esto, también presenté una serie de esquemas para ayudar a entender cómo se obtiene la consistencia a partir de la puesta en correspondencia de los sistemas con los objetos de las teorías intuitivas. El más importante es el siguiente:



Esquema 2

Con base en éste, y haciendo ciertas modificaciones, se puede construir el siguiente esquema:



Esquema 6

En éste encontramos el lenguaje de P, sus axiomas y teoremas, y las reglas de formación y transformación que permiten formalizar expresiones parecidas a los enunciados verdaderos sobre los números naturales de la Aritmética de Peano, y como P es sintácticamente consistente y se la correspondencia entre éste y los naturales, de la cual no se obtiene una contradicción, entonces P es semánticamente consistente (y también es ω-consistente).

Todo lo anterior lo hice para lo siguiente: mostrar que la consistencia es una propiedad de los sistemas formales. Esto no es un señalamiento hecho al azar, sino que, como hemos observado, los autores aquí citados tratan a la consistencia como una propiedad de sistemas. Puede ser que dichas definiciones (como la que presenta Torres Alcaraz [también aquí citada]) impliquen el uso de algunas fórmulas referentes a los objetos aquí mencionados, sin embargo, el objetivo de dichas fórmulas es denotar que la *consistencia* es una fórmula que pertenece a los sistemas. En este caso

$$Con(P) \leftrightarrow \exists x(form(x) \land \neg Dem(x))$$

sirve para indicar que P es consistente porque hay una fórmula bien formada del lenguaje de P que no es demostrable con sus axiomas y que, por lo tanto, éste es consistente.

Sin embargo, la consistencia, en tanto que es una propiedad (aparentemente exclusiva de los sistemas axiomáticos-formales) no es uno de elementos de $\mathbb{N}$, tampoco es una de las propiedades encontradas entre estos y tampoco es una propiedad como Prim x o $form(x)$ que pueda ser usada en los enunciados aritméticos que hablan sobre los números. Esto implica, como mencioné, que la consistencia no puede ser tratada con los mismos métodos y herramientas que se usan con los números naturales. Además, el hecho de que no sea una propiedad como Prim x o $form(x)$ implica que no puede pertenecer a las expresiones del sistema P: puede ser una propiedad del sistema y de sus conjuntos de fórmulas, pero no una propiedad de las expresiones de manera individual, es decir, por ejemplo, el conjunto de axiomas Γ puede ser consistente, pero el axioma A que pertenece a dicho conjunto no puede ser consistente de la misma manera que el conjunto Γ. Esto se explicará más en los siguientes apartados.

4.2.2. La consistencia no pertenece al conjunto de los números naturales.

Cuando digo que "la consistencia no pertenece a $\mathbb{N}$", me refiero a que no pertenece como objeto, y tampoco como propiedad. Primero me dedicaré a indicar que no pertenece a los elementos de $\mathbb{N}$ como si fuera una propiedad de éstos, y tampoco es una propiedad de $\mathbb{N}$. El hecho de que no pertenece a $\mathbb{N}$ como objeto se irá mostrando a lo largo de estos últimos apartados.

Ahora bien, anteriormente mencioné que un número natural es aquel objeto que pertenece a $\mathbb{N}$[80] y que cumple con las propiedades de los demás objetos que se encuentran en tal conjunto. Aquí di cuenta de algunas: *ser menor que*, *ser mayor que*, *ser un sucesor*, *ser un número primo*, etc. Además mencioné algunas propiedades que poseen las operaciones realizadas con estos objetos.

Con todo esto podemos ver que las propiedades hacen que los números sean de una u otra manera y que se comporten de una u otra manera (al igual que sus operaciones). Por ejemplo, nos dicen que estos son menores que sus sucesores o que cuando se encuentran en una multiplicación pueden cambiar de lugar sin afectar el resultado de dicha operación. La consistencia, por su parte, tiene una función similar: hace que un sistema axiomático no demuestre contradicciones. Pero no es una propiedad de los números naturales porque los números naturales no son sistemas, son representaciones de cantidades encontradas en un conjunto y, en tanto tal, estos no están compuestos por un lenguaje, ni por expresiones construidas con este lenguaje a las que puedan ser aplicadas reglas de formación y transformación.

Siendo más específico sobre lo anterior: he mencionado que los sistemas formales se componen, en general, de un lenguaje y un conjunto de reglas que nos dicen cómo formar expresiones con dicho

[80] En este contexto no hablaré sobre si los números naturales son objetos que existen en nuestro entendimiento o fuera de éste. Me limitaré a tratar las propiedades matemáticas mostradas en este escrito.

lenguaje y qué acciones se pueden aplicar a éstas. Los números naturales no tienen estas características: son representaciones de conjuntos de cosas. El 2, por ejemplo, es la representación de un conjunto compuesto de dos elementos: dos perros, dos personas, dos televisiones, etc. En este sentido, 2 no se compone de un lenguaje y reglas que indiquen cómo manipular este lenguaje. Sí usamos lenguajes y reglas para indicar que 2 es un sucesor o que puede sumarse, pero estas son las herramientas que usamos para observar sus propiedades o realizar las operaciones en las que puede involucrarse, no los componentes que lo constituyen para ser una representación de un conjunto de cosas.

Por las razones del párrafo anterior, los números naturales tampoco sirven para demostrar teoremas acerca de teorías matemáticas con ayuda de axiomas: dado que los números naturales no están constituidos por los mismos componentes que forman un sistema, entonces no pueden servir para los mismos fines. Ser algo que representa cantidades de cosas no es lo mismo que ser algo que se usa para demostrar teoremas acerca de las propiedades y relaciones de los objetos matemáticos. Los números naturales no pueden usarse para demostrar este tipo de expresiones porque ni si quiera tienen los medios para construirlas: carecen de reglas de formación que les permitan construir fórmulas y de reglas de transformación que les permitan demostrarlas. Es claro, por todo lo que he mencionado aquí, que sí pueden construirse expresiones que hablen sobre los diversos aspectos que rodean a los números naturales, y que estas pueden ser demostradas en los sistemas pertinentes, pero los números no se componen igual que estas expresiones y no tienen la misma finalidad. Por tanto, los números no pueden usarse para demostrar fórmulas.

Ahora bien, en tanto que la consistencia es una propiedad de sistemas y se relaciona con sus componentes, así como con la demostración (pues un sistema consistente no demuestra contradicciones), y en tanto que los números no se constituyen igual que los sistemas y tampoco tienen la misma finalidad que estos (por las razones mencionadas arriba), la consistencia no puede ser una propiedad de los mismos: es una propiedad que se obtiene a partir de las expresiones de los sistemas y de sus relaciones, y de que éstas no demuestren contradicciones. No se obtiene a partir de que los números representen x cantidad de objetos, ni hace que estos sean tales representaciones, o que sean sucesores o menores que otros.

Además, la consistencia de un sistema formal tampoco hace que los números tengan alguna propiedad, es decir, no es una condición para que los números sean *primos, mayores, menores*, *sucesores*, etc. Puede hacer que los teoremas tengan las condiciones necesarias para que nos hablen de aspectos relativos a los objetos matemáticos. Sin embargo, el que un sistema sea consistente no implica que los números tengan una u otra propiedad[81]. Por ejemplo, 3 es un número primo porque cumple con las condiciones de ser divisible únicamente entre 1 y entre sí mismo. Con el lenguaje de la aritmética se puede construir un enunciado que exprese la propiedad de *ser número primo*, en el cual se indiquen las condiciones que 3 y los demás números primos deben cumplir para ser tales. Lo mismo sucede con las expresiones que definen los predicados de la metateoría: *ser demostrable, ser fórmula, ser una demostración*. Como podemos observar, el que un número tenga estas propiedades depende de que cumpla con las condiciones enunciadas en el lenguaje de PA o P, pero en esto no influye que P sea consistente. La importancia de la consistencia de P se encuentra en el hecho de que éste debe ser consistente para que no demuestre afirmaciones falsas o contradictorias sobre los naturales.

Por otra parte, también mencioné a los números Gödel, los cuales son números naturales usados como expresiones que representan fórmulas y signos de P, y con los cuales se puede hablar de las propiedades de dichas fórmulas y signos a través de enunciados metamatemáticos construidos con el lenguaje de la aritmética. Dichos enunciados tienen la forma $Dem(x) \leftrightarrow \exists y\, D(y,x)$. Aunque estos enunciados den cuenta de relaciones entre números, su principal función es denotar, como dije, propiedades de las expresiones que los números se encargan de representar. Estas propiedades tienen la misma función que la que tienen las propiedades de los números: hacer que las fórmulas y los componentes del lenguaje de P sean de tal o cual manera y que tengan un cierto comportamiento en los procesos realizados en el sistema (como las demostraciones), es decir, las propiedades de las expresiones hacen que éstas sean fórmulas, fórmulas demostrables, o demostraciones de una fórmula determinada, así como las propiedades de los números hacen que estos sean primos, pares, menores que, etc. y también hacen que una fórmula sea, por ejemplo, un axioma y otra un teorema y esto determina la función que tendrán en las demostraciones. Así, aunque los enunciados designen propiedades a los números Gödel de estas expresiones, su principal función es denotar que las expresiones representadas por dichos números Gödel son de tal o cual manera y tienen esta y aquella función porque poseen la propiedad que denota el enunciado.

Establecido lo anterior, parece que la consistencia no puede ser asignada ni a los números Gödel ni a los componentes del lenguaje de P. Esto sucede por dos razones. La primera es que, como ya mencioné, la consistencia no es una propiedad de números del mismo tipo que *ser un número primo*, *ser*

[81] Aquí debo recalcar que no estoy hablando de la consistencia de las teorías matemáticas porque éste no es el tema de la tesis.

un sucesor, etc., sino una propiedad de sistemas[82]. Por lo tanto, no se puede asignar a los números Gödel porque estos también son números naturales y se encuentran incluidos en $\mathbb{N}$.

La segunda razón es la siguiente: la consistencia de P, una propiedad de sistemas, tampoco es una propiedad de las fórmulas. Podemos pensar que como la consistencia es una propiedad que tiene que ver con fórmulas –porque si un sistema es consistente, entonces existe por lo menos una que no es demostrable- dicha propiedad puede ser asignada a estas. Es verdadero que la consistencia se relaciona con dichas expresiones porque de su conjunto depende que P sea consistente o no. Sin embargo, las fórmulas y los signos de P no pueden ser consistentes de la misma manera en que lo es P, es decir, la consistencia de sistemas necesita de un conjunto de fórmulas, como un conjunto de axiomas, pues con éste es posible hacer las pruebas necesarias para determinar si un sistema es consistente, pero, por ejemplo, la fórmula

$$\mathrm{x}_2(0) \wedge \Pi\mathrm{x}_1\big(\mathrm{x}_2(\mathrm{x}_1) \supset \mathrm{x}_2(\mathrm{sx}_1)\big) \supset \Pi\mathrm{x}_1\big(\mathrm{x}_2(\mathrm{x}_1)\big)$$

Sólo es un elemento de todo el conjunto de axiomas que hace que P sea consistente: únicamente con ésta no se puede determinar que de P no se siguen contradicciones y que, por tanto, no se demuestran todas las fórmulas que se puedan construir con su lenguaje. Se necesita de las demás para observar si existe una fórmula que la niegue y exista una contradicción, o si existen expresiones contradictorias entre las fórmulas restantes del conjunto de axiomas. Por tanto, la consistencia de sistemas no pertenece a las fórmulas y no es una propiedad que pueda ser representada mediante enunciados aritméticos y números Gödel como $Dem(x) \leftrightarrow \exists y\, D(y,x)$ (algo parecido sucede con los signos de P).

Sobre esto debo resaltar otro aspecto: mencioné que las fórmulas como $Dem(x) \leftrightarrow \exists y\, D(y,x)$ las propiedades o relaciones que denotan los predicados como $Dem(x)$ se definen mediante relaciones y operaciones de números naturales, y estos números naturales representan fórmulas o secuencias de fórmulas, de modo que las relaciones que tienen pueden ser representadas con enunciados aritméticos a través de sus números Gödel. Además los predicados siempre involucran el número Gödel de la fórmula

[82] Aquí debo hacer otra anotación: la consistencia también resulta ser una especie de requisito que uno busca en el sistema, esto es, resulta ser una propiedad que uno busca en los componentes y las relaciones de un sistema formal. El sistema, por sí solo, no tiene el objetivo de demostrar su propia consistencia, porque su objetivo principal es demostrar enunciados relativos a números. El interés en que el sistema demuestre su propia consistencia procede de la necesidad de que éste trabaje sin error alguno y se realiza a través de un metalenguaje: una herramienta que, como mencioné, puede ser usada por alguien que quiere analizar los componentes y propiedades del sistema.

a la que se está haciendo referencia. Así, por ejemplo, si decimos que el número Gödel n representa una fórmula demostrable y m la secuencia de fórmulas que funciona como su demostración, entonces podemos sustituir sus respectivos números en el enunciado $Dem(x) \leftrightarrow \exists y\, D(y,x)$ de modo que:

$$Dem(n) \leftrightarrow \exists m\, D(m,n)$$

Ahora, supongamos que el número n representa la fórmula α y β es la fórmula que representa el número m. Así, el enunciado $Dem(n) \leftrightarrow \exists m\, D(m,n)$ nos dice, a través de n, que α es una fórmula demostrable porque existe una secuencia de fórmulas β, representada con m, que funge como su demostración. El enunciado, pues, involucra los números de las fórmulas a las que está haciendo referencia. Y la idea de este procedimiento es usar las herramientas que la aritmética usa con sus objetos para hablar de las relaciones que se dan entre las expresiones de P

La relación de lo anterior con la consistencia es la siguiente: la fórmula

$$Con(P) \leftrightarrow \exists x(form(x) \wedge \neg Dem(x))$$

no indica que el predicado $Con(P)$ exprese que un número Gödel de una expresión tenga la propiedad de ser consistente, sino que indica que un sistema (P) es consistente y, además, dicha propiedad no se expresa en una relación numérica entre el número que posee la propiedad de ser consistente y otros números que contribuyan a indicar que esto es así, sino que hace uso de los números Gödel de las expresiones del sistema al que hace referencia. Dicho de otra manera: no hay un número Gödel de P a través del cual podamos decir que éste es consistente –pero sí hay expresiones que pueden expresar la consistencia de P como relaciones entre conjuntos, sobre esto hablaré más adelante.

Lo razón de lo anterior es la siguiente: a pesar de que la consistencia es expresada como una relación numérica entre elementos de P, parece no ser una relación entre expresiones del sistema de P, es decir, a diferencia de la relación *demostración-fórmula demostrable* que se da entre α y β que se puede representar con el enunciado aritmético $Dem(n) \leftrightarrow \exists m\, D(m,n)$, la consistencia de P, no es una relación parecida a la demostración-fórmula demostrable: la consistencia es una propiedad que surge de la puesta en relación entre un sistema y los objetos de una teoría, pero esto no es un proceso parecido al que se lleva a cabo en las demostraciones o cálculos que involucran fórmulas del sistema, es decir, la consistencia surge a partir de un procedimiento en el que las expresiones de un sistema y las estructuras de los objetos una teoría matemática se ponen en correspondencia, para que los primeros puedan tener un significado y demostrar aspectos acerca de los segundos. Este procedimiento, como se ve, no puede reducirse a una serie de símbolos porque involucra otros aspectos que quedan afuera de la simbología. Por ejemplo, la acción de poner en correspondencia un sistema con una teoría o el significado de los enunciados y las fórmulas. Por otro lado, la demostración es un procedimiento que puede representarse con números Gödel porque está compuesta por símbolos: los axiomas y los teoremas que se obtienen de estos están compuestos únicamente de símbolos del sistema *P* representables por números Gödel, lo cual no puede ocurrir con los aspectos mencionados sobre la correspondencia. Por esta razón, la consistencia no puede representarse a través de un enunciado como una relación de números.

Para hacer esto más entendible, primero debo tratar el asunto sobre el número Gödel de P. Dije que los números Gödel sirven para representar los signos del lenguaje de P y las fórmulas formadas con estos. Sirven, pues, para representar sucesiones de símbolos. Sin embargo, P parece no tener número Gödel porque, al ser un sistema, existen cuestiones que no pueden ser reducidas a sucesiones de símbolos, por ejemplo, las reglas de formación y transformación, los procesos que se realizan cuando se pone el sistema en correspondencia con los objetos, las propiedades del sistema como *completud*, *consistencia*, *decidibilidad*, etc. Sin embargo, se podría objetar que existen enunciados como $Con(P) \leftrightarrow \exists x(form(x) \land \neg Dem(x))$ con los cuales se puede representar la *consistencia*, la *completud*, la *decidibilidad*, etc., y que las reglas de formación y transformación pueden ser expresadas en el lenguaje de P. Ahora, así como mencioné que el número Gödel de una demostración se obtiene a partir del supuesto de que una sucesión de fórmulas también es una sucesión de símbolos, se podría suponer que, como todo en P resulta ser una sucesión de símbolos, entonces éste puede tener un número Gödel. Supongamos, pues, que el número Gödel de P es r. De este modo, se puede construir un predicado aritmético como $cons(x)$ que nos indique que el número Gödel r representa una sucesión de símbolos que es consistente. Por tanto, $cons(r)$ indica que *P* es consistente.

Lo anterior no permite afirmar que la consistencia sea una propiedad expresable a través de números Gödel y enunciados aritméticos. La razón es la siguiente: mencioné que todas las propiedades y relaciones así definidas necesitan del número Gödel de la expresión a la que se quiere asignar la propiedad y otro (u otros) con el que se puedan realizar las operaciones y relaciones de números naturales. Esto no puede hacer con la *consistencia* de *P* porque parece que no existe otro objeto, diferente de *P* representable con números Gödel, que nos permita expresar las relaciones y operaciones de números naturales que dan lugar a la consistencia.

Podríamos pensar que esto puede lograrse si consideramos al conjunto de axiomas como una sucesión de símbolos y que la relación que tiene éste con la totalidad P puede servir para expresar su consistencia a través de un enunciado aritmético y números Gödel. Sin embargo, hay que considerar que estos axiomas son consistentes por la correspondencia existente entre estos y los enunciados de PA, y que esta correspondencia, como mencioné, implica más que sucesiones de símbolos: cuando un sistema se pone en relación con una teoría, es claro que se necesitan de los lenguajes de ambos, pero también se necesita de nociones semánticas como la *verdad* la cual obtienen los axiomas al poner en relación con los enunciados y la cual, como también mencioné, no es expresable en un lenguaje simbólico[83]. Además de razones de esto tipo, también se encuentra el hecho de que la consistencia, como dije, no se puede definir a través de una relación de números Gödel porque no es una propiedad parecida a *ser una fórmula demostrable*.

Profundizaré más en esto: la demostración es un proceso que necesita de una serie de fórmulas. En este procedimiento algunas son supuestas para aplicarles reglas de transformación y obtener otras hasta demostrar una fórmula de la cual se quiere saber si es teorema del sistema P. A través de los números Gödel y las 46 funciones aritméticas encontradas en el texto de 1931, Gödel mostró que este proceso es expresado a través de funciones que implican números y sus operaciones. Esto es posible porque cada relación y cada elemento encontrado en ésta pueden ser replicados en lenguaje aritmético, ya que estos se pueden representar con números Gödel y las relaciones de estas expresiones, al ser pertenecientes únicamente a aspectos formales, también pueden replicarse en enunciados del mismo tipo. Por ejemplo, $D(x, y)$ expresa una relación entre x y y (y, en cierto sentido, una propiedad de x, porque x es una demostración): x es una demostración de y. En ésta, x es el número Gödel de todos los símbolos involucrados en una línea de derivación, y es el número que representa a una fórmula que se demuestra con las fórmulas representadas con x y D es el predicado que indica que x demuestra a y: se trata de expresiones meramente formales y de una relación que se da entre expresiones del mismo tipo. Por estas razones sí pueden representarse con los enunciados aritméticos de Gödel.

Por otro lado, la consistencia de un conjunto de axiomas (y la de un sistema) conlleva elementos que no pueden ser expresados únicamente con símbolos y, por lo tanto, no pueden ser representados con

[83] Un axioma por sí mismo no puede ser consistente por una razón similar a la que impide que los números no puedan ser consistentes: un axioma no es un sistema. Si bien el axioma se supedita a las reglas de formación y de transformación del sistema, éste no es un sistema porque no es un lenguaje y un conjunto de reglas que sirven para formar fórmulas y hacer demostraciones con ellas. Un axioma es parte de éste y contribuye a observar si es consistente, pero él no puede ser consistente porque no se conforma por los mismos componentes que los de un sistema, sino que es una parte del sistema que ayuda a realizarlas.

sus números y sus relaciones: he mencionado que cuestiones semánticas como la *verdad*, y algunas otras que rodean a la correspondencia entre un sistema y los objetos de una teoría, y a la consistencia misma, no pueden ser representadas únicamente con símbolos, sino que necesitan de otros recursos que son diferentes de la simbología o que incluso no pueden ser formalizadas por ésta. Es por ello que no podrían representarse con números y tampoco se podría hablar de ellas con los enunciados aritméticos. Y por esta misma razón, la consistencia no es una propiedad expresable a través de números Gödel en el mismo sentido que sí lo es $D(x, y)$.

Por otra parte, aún se puede objetar que $Con(P)$ expresa la consistencia de P porque la fórmula $\exists x(form(x) \wedge \neg Dem(x))$ nos habla de una relación entre dos propiedades de números Gödel. Es cierto que $form(x)$ y $Dem(x)$ se definen de la manera indicada, pero cuando se encuentran en la fórmula en cuestión, expresan las relaciones de una fórmula que no es demostrable en P, pero en ningún momento se hace referencia al número Gödel de P (en caso de que este fuera posible). Seré más explícito: $\exists x(form(x) \wedge \neg Dem(x))$ expresa que existe en P una fórmula no demostrable. Este hecho da cuenta de que P es consistente, pero lo hace a través de la referencia a fórmulas de dicho sistema. Nosotros, a través de la lectura que hacemos de la fórmula entendemos que, dado que ésta nos dice que hay una fórmula no demostrable, entonces el sistema de las expresiones a las que hace referencia es consistente. En cierto sentido, sabemos de la consistencia de P gracias al supuesto que se hizo en un y a una observación metalingüística que relacionamos con la definición y el supuesto de la consistencia. Sin embargo, si bien esta fórmula expresa la consistencia de P, no lo hace refiriéndose a P, a través de un número, como los predicados $form(x)$ y $Dem(x)$ sí hacen referencia a la fórmula que es representada por el número x.

Para que la consistencia fuera una propiedad de números (o de números Gödel) debería haber un número Gödel de P. Empero, he mencionado que obtener un número de este tipo para P parece no ser posible porque, al ser un sistema formal, existen cuestiones que no pueden reducirse a una sucesión de símbolos, lo cual impide que pueda ser expresado como un número Gödel. Por tanto, la consistencia no puede ser una propiedad de números.

Existe otra razón que parece apoyar el hecho de que la consistencia no puede ser considerada una propiedad de los números Gödel (y por tanto de los números naturales): observamos que para cada propiedad de los números Gödel existe un conjunto en el que se encuentran dichos números. Esto no sucede con la consistencia, pues, como no hay números Gödel que representen expresiones o sucesiones de símbolos que cumplan con esta propiedad, entonces no hay un conjunto de los números Gödel que representen expresiones que sean consistentes.

Por último, tampoco es una propiedad del conjunto ℕ, es decir, el conjunto ℕ no puede tener la propiedad de ser consistente porque éste no es un sistema formal, sino un conjunto de números. Estos objetos no son sucesiones de símbolos que representen cuestiones relacionadas con teorías matemáticas y con las que se puedan realizar demostraciones a partir de axiomas, sino que son representaciones de cantidades con propiedades y a los que se pueden aplicar operaciones definidas en el conjunto en el que se encuentran. Podemos, pues, suponer que ℕ es ordenado debido a que sus elementos poseen la propiedad de ser ordenados entre sí, o podemos suponer que dicho conjunto es infinito porque la sucesión $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 \dots\}$ no termina. Sin embargo, no podemos suponer que tal conjunto es consistente porque no cuenta con los elementos ni las condiciones para ello, y porque esa no es su utilidad, como sí lo es la de un sistema formal axiomático como P.

Aquí debo hacer una aclaración que se deriva de lo anterior: el que la consistencia no pueda ser una propiedad de los números Gödel –y, en última instancia, de los números naturales- no es un problema de la matemática, de los objetos estudiados por la matemática o de los sistemas que estudian estas cuestiones, sino que es un problema que surge, como mencioné, por la necesidad que se tiene de que el sistema funcione de manera correcta y sin ningún error.

Por estas razones, parece ser que la consistencia tampoco es una propiedad que pueda ser asignada a los números Gödel ni a los números naturales. Ahora es momento de mencionar algunas razonas por las que la consistencia no es un número natural y por las que no puede ser tratada como tal.

Antes de continuar con el siguiente apartado, debo hacer algunas aclaraciones sobre la relación entre consistencia y ser una demostración. En primer lugar, puedo decir que ambas son propiedades, pero no son propiedades del mismo tipo. Por un lado, la demostración es un procedimiento que se da, como dije, entre una sucesión de símbolos a los que se les aplican reglas de transformación para obtener una fórmula o teorema. Este procedimiento puede ser representado con un predicado como $Dem(x)$ porque *ser una demostración* es una propiedad que le podemos conferir a x, si la expresión representada por x cumple con los requisitos para ser una demostración, los cuales, como he dicho, son simbólicos y pueden representar con números Gödel (todo esto, a partir de la metateoría). Por otro lado, la consistencia también es una propiedad, pero no es una propiedad relativa únicamente a símbolos de un lenguaje, sino que también se relaciona con otras cuestiones semánticas no reducibles a la simbología de un sistema (en este caso a la simbología de P). Por este motivo, ella no puede ser representada con un predicado como $Dem(x)$. Además, la consistencia también tiene que ver con la exigencia de que los sistemas trabajen de manera correcta y sin errores, pues las contradicciones (señal de que no hay consistencia) no permiten que los objetivos del programa hilbertiano se lleven a cabo. Con esto, pues, puedo decir que ambas son propiedades, pero no del mismo tipo porque una se relaciona con los sistemas, su constitución y sus relaciones, y la otra con los procesos formales de sus expresiones.

En segundo lugar, existe una dependencia entre la consistencia y la demostración, en el sentido de que la demostración es el procedimiento que nos permite determinar si un sistema es consistente o no. Dicho en otros términos: dado que la demostración es un procedimiento que se encarga de obtener fórmulas a partir de axiomas, ésta nos puede ayudar a observar qué se sigue y que no de esos axiomas. Y, cuando a partir de esos axiomas no se sigue una contradicción, entonces nosotros podemos determinar que el sistema es consistente. Sin embargo, debo aclarar que esto no implica que se pueda demostrar $Con(P)$: el que sepamos que un sistema es consistente porque no demuestra contradicciones, se debe, como he mencionado, a que hacemos una observación metalingüística del sistema: éste se convierte en un objeto de estudio, del cual hablamos con nuestro lenguaje y del que decimos "P [por ejemplo] es consistente porque con sus axiomas no demuestra contracciones". Pero este señalamiento no cuenta como una demostración porque no implica el uso de una sucesión fórmulas de la cual se derive $Con(P)$. Por tanto, existen una dependencia entre estas dos nociones porque una (la demostración) nos muestra la existencia de la otra (consistencia). Pero no hay una demostración de consistencia de por medio.

4.2.3. Las propiedades de los números naturales no pertenecen a la consistencia.

En el apartado anterior mencioné algunas razones por las que la consistencia no puede ser una propiedad de los números naturales ni de los números Gödel, y que además no puede ser una propiedad de las expresiones representas por estos números. En este me dedicaré a mencionar algunas otras razones por las que la consistencia no puede poseer propiedades de números naturales ni de números Gödel.

La razón por la que la consistencia no podría poseer las propiedades de los números naturales es porque, precisamente, no es un número. He mencionado que, en este contexto, los números naturales son aquellos que usamos para contar, es decir, son representaciones de cantidades encontradas en un conjunto. La consistencia, como también he mencionado, es una propiedad de sistemas formales: no es algo que usemos para representar alguna cantidad y tampoco pertenece al conjunto $\mathbb{N}$. Esta se obtiene a partir de la puesta en relación entre los objetos una teoría matemática y un sistema formal, depende, pues de los lenguajes de las teorías y de los sistemas, y de cómo estos expresen las cuestiones de los objetos con los que trabajan, es decir, la consistencia se obtiene de las relaciones que se dan entre los lenguajes de los sistemas y de los objetos, porque, a partir de estos –y de las expresiones simbólicas del sistema-, es como se puede observar si se demuestran o no contradicciones del sistema. Ahora, como ya mencioné, esta observación hecha desde la metateoría surge de una exigencia que procede de aquellos que analizan a los sistemas porque ellos necesitan que el sistema funcione de manera correcta y sin errores. Se trata, pues, de algo inherente a la constitución del sistema y sus relaciones y de las observaciones que los agentes que los estudian hagan de éstos. No es, por el contrario, algo que se relaciona con los números, sus propiedades y la manera en que estos se comportan, o sobre lo que se pueda decir sobre este comportamiento. Por tanto, la consistencia, no puede poseer propiedades de números: la consistencia se relaciona únicamente con los sistemas, no con los objetos que estudia.

Ahora bien, en tanto que la consistencia no es un número, entonces no pertenece a $\mathbb{N}$. Por lo cual no es sucesor ni antecesor de algún otro número. Por tanto, tampoco es mayor o menor que algún otro número, lo cual implica que las siguientes expresiones son erróneas: $cons < 1$ y $cons > 1$.

Esto implica que la consistencia tampoco puede estar involucrada en las operaciones básicas de la Aritmética de Peano: la consistencia no puede sumarse ni multiplicarse con algún otro número encontrado en el conjunto de los naturales. Por lo tanto, expresiones como $cons + 1$ o $cons \cdot 1$ no tienen ningún resultado, pues necesitan de dos números para poder funcionar de manera correcta. De la misma manera, es imposible que se encuentre en las operaciones de *exponenciación*, *resta* o *división*, porque estas, como mencioné, se definen con ayuda de las operaciones básicas de *PA*. Por esta razón, las expresiones $cons^2, 2^{cons}, 1/cons, cons/1{,}1 - cons, cons - 1$ también son incorrectas porque no están construidas con representaciones de objetos que sean válidos en la aritmética (a esto debo agregar que tampoco serán aplicables a la consistencia las propiedades de dichas operaciones).

Como consecuencia de lo anterior, también podemos observar que la consistencia no puede tener propiedades de los números como *ser un número primo*, *ser un número par*, *ser múltiplo de algún número*, porque no es capaz de cumplir con las condiciones que establecen las propiedades, ya que estas están construidas con las propiedades y operaciones mencionadas. Siendo más específico: 3 es un número primo porque es divisible entre 1 y entre sí mismo. Esto se puede comprobar si se llevan a cabo las operaciones mencionadas.

Una consecuencia de lo anterior es que la consistencia no pertenece a los subconjuntos de los números que se forman con todas estas propiedades, esto es, no pertenece al subconjunto de los números pares o al subconjunto de los números primos, pues no puede ser múltiplo de dos y tampoco es divisible entre 1 y entre sí misma. Por tanto, expresiones como, $cons \in M$, $const \in D$, e incluso $cons \in \mathbb{N}$, y cualquier otra que se refiera a subconjuntos, también es errónea: como la consistencia no es un número, entonces no puede pertenecer a algún conjunto.

La consistencia tampoco es un conjunto de números naturales: cada conjunto de números naturales del que se ha hablado aquí se caracteriza por contener en sí números naturales que cumplen con cierta propiedad. La consistencia no puede ser un conjunto de números porque no es un grupo de cosas en el que se encuentre determinado tipo de objetos, es una propiedad de un sistema (y tampoco puede ser una propiedad que defina un conjunto de números, como se mencionó anteriormente). La consistencia, pues, no puede ser un conjunto de números naturales porque, como he dicho, es una propiedad relativa a sistemas formales que surge a partir de la relación de sus expresiones y la que éstos tienen con los objetos de las teorías; ésta no surge de los objetos de los que hablan las teorías y tampoco se determina como conjunto porque, al ser una propiedad de sistemas formales, no puede contener en sí objetos de un tipo determinado. Por tanto, no puede ser un grupo de números en el que ciertas propiedades y operaciones estén definidos en éste y las cuales sean aplicables a tales números.

Hecho esto, podemos preguntarnos ¿qué importancia tiene que la consistencia no sea un número? La respuesta es la siguiente: si la consistencia no es un número natural y tampoco es un conjunto de números, entonces no se pueden hacer enunciados aritméticos con el lenguaje de PA acerca de esta propiedad, esto es, no se pueden usar las relaciones y operaciones de este lenguaje para hablar de sus propiedades o de sus relaciones: al no ser un número, no se pueden construir enunciados aritméticos para decir que la consistencia es una propiedad de P, o que se obtiene de la correspondencia entre P y los naturales, o que la consistencia es una propiedad que implica que no todas las fórmulas posibles de P son demostrables.

Existe otra consecuencia de esto: como no es posible hacer enunciados acerca de la consistencia con el lenguaje de la aritmética porque no es un número, entonces tampoco es posible que P pueda realizar formalizaciones referentes a ésta. Dicho de otra manera: si no hay un enunciado E_1 acerca de la consistencia, entonces no puede haber una fórmula $Con(P)$ con la que P pueda formalizar su propia consistencia.

Seré más claro con esto: en aritmética existen enunciados del tipo de E_1. E_1, al ser un enunciado de números, puede hablarnos sobre sus propiedades y relaciones, y hace esto a través de las operaciones y relaciones más básicas encontradas entre los números. P tiene el objetivo de construir expresiones análogas y determinar si son consecuencia o no de sus axiomas.

La consistencia, al no ser un número o un conjunto, no puede ser tratada de la misma manera, pues no puede haber enunciados como E_c que nos hablen de la consistencia. Esto también implica que no puede ser formalizada mediante una fórmula construida con el lenguaje de P como $Con(P)$: si la consistencia no es un número natural, entonces no hay enunciados aritméticos en los que se encuentre involucrada o enunciados en los que se nos diga algo sobre la consistencia. En consecuencia, no puede haber una fórmula (o fórmulas) como T_c que nos indique que la consistencia o algunas de las cuestiones relacionadas se siguen de los axiomas de P[84]. En otras palabras, como no se puede construir $Con(P)$, entonces P no puede demostrar su propia consistencia (aunque esto también ya es demostrado por Gödel).

Esto nos deja ver que la consistencia, al no ser un número natural, no puede ser tratada con las mismas herramientas con las que estos números son tratados. Dicho de otra forma: como la consistencia, una propiedad de sistemas, no es un número natural, no puede ser usada en enunciados de la aritmética para hablarnos de sus propiedades y relaciones, como sí se puede hacer con los elementos de $\mathbb{N}$. Al no existir esta posibilidad, P tampoco puede hablar de dicha propiedad como sí lo hace acerca de los enunciados de los objetos de PA: P no puede hablar de su propia consistencia de la misma manera en que habla de las propiedades y relaciones de los números naturales porque ésta no es número natural.

Esto parece tener cierta relación con los números Gödel, pues con estos tampoco se puede hablar de consistencia. La primera razón para esto es que la consistencia no es y no puede ser representada con una secuencia de símbolos del lenguaje P por las razones mencionadas en apartados anteriores, es decir, entre las fórmulas que se pueden formar con su lenguaje, no existe[85] una fórmula que denote su propia consistencia. Por lo tanto, no existe una sucesión de signos que pueda ser representada en el terreno de los naturales: además de que la consistencia no es un número natural, tampoco existe alguno de estos con los que se pueda hablar de ésta con el lenguaje de P.

Siendo más específico, en el supuesto de que la consistencia no es una sucesión de símbolos y que no puede ser representada porque su presencia en P requiere de otros elementos que quedan fuera de

[84] Esto nos permite observar otro aspecto: la consistencia tampoco puede ser un resultado que se obtenga a través de los métodos usados para realizar las demostraciones, lo cual también ayuda a mostrar que ésta no es un objeto como los estudiados por P, pues las demostraciones realizados con éste versan sobre los enunciados de los números naturales y sus propiedades.

[85] Antes de que la expresión $cons_P \leftrightarrow \exists x(form(x) \wedge \neg Dem(x))$ aparezca.

los símbolos del sistema, entonces no se puede representar con un número Gödel al igual que s o $\mathrm{x}_2(0) \wedge \Pi\mathrm{x}_1\big(\mathrm{x}_2(\mathrm{x}_1) \supset \mathrm{x}_2(\mathrm{s}\mathrm{x}_1)\big) \supset \Pi\mathrm{x}_1\big(\mathrm{x}_2(\mathrm{x}_1)\big)$. Esto también implica que, al no haber una representación numérica de la consistencia, no se puede construir un predicado como $cons(x)$ que indique que dicho número tiene la propiedad de *ser la consistencia de P* y como las relaciones que dan lugar a la consistencia no se pueden replicar de la misma manera que se hace con relaciones y propiedades como *ser una fórmula demostrable* y *ser una demostración de una fórmula*, entonces no se puede construir la fórmula que defina a dicho predicado.

Antes de continuar, cabe recalcar que, si esto es así, entonces tampoco hay un número Gödel que sea el número Gödel de la consistencia (o de la fórmula que expresa la consistencia) que pertenezca a algún conjunto definido por las propiedades que se puedan asignar a este número, como sí los hay para *ser una fórmula, ser una fórmula demostrable*, etc., es decir, anteriormente mencioné que para cada propiedad de los números Gödel existe un conjunto en el que se encuentran los números que poseen dichas propiedades. Poseer una propiedad, en este contexto, implica que los números satisfacen las fórmulas que denotan dichas propiedades, pero como no existe un número Gödel que represente a la fórmula de la consistencia, ni una fórmula que defina dicha propiedad, entonces no puede haber un conjunto de números naturales que sean números Gödel de fórmulas que formalizan la consistencia de P. Por tanto, la expresión en la que n es número y C la variable que representa el conjunto de los números naturales que representan consistencia ($n \in C$) es incorrecta, porque no hay números que representen expresiones que tengan esa propiedad. De igual manera, no es posible que $C \subset \mathbb{N}$.

Esto también ayuda a poner en evidencia que tratar a la consistencia como un número o algo representable con números es un tanto difícil porque no cumple con algunas de las condiciones que los números Gödel necesitan para ser tales.

Con todo lo anterior ocurre algo muy parecido a lo que pasa en el supuesto de que la consistencia no es un número: como no hay una secuencia de símbolos que expresen la consistencia y como no es una secuencia de símbolos, entonces no existe un número Gödel con el que se pueda representar. Si no existe el número Gödel, entonces no es posible construir el predicado y la fórmula que expresan que dicho número cumple con las condiciones para ser el número de la consistencia de P. Y, al no suceder esto, no es posible construir una fórmula en P que exprese este hecho.

Una vez más, bajo este supuesto resulta que la consistencia no es formalizable en P y que, en consecuencia, P no puede demostrar si su consistencia se sigue de sus axiomas.

Todas estas razones son las que me permiten decir que la consistencia no es una propiedad de los números naturales y tampoco es un número natural. Además, esto también parece indicar que por este motivo no puede ser tratada con los mismos lenguajes y métodos usados con estos.

4.2.4. La consistencia no es un número.

Una vez que he dado las razones por las que la consistencia no puede ser un número natural o una propiedad de los naturales, queda tratar algunas preguntas para ver la relación que tienen estas afirmaciones con los trabajos mencionados de Gödel.

4.2.4.1. ¿Puede la consistencia ser tratada como un número natural?

Desde el punto de vista recién tratado, no. Las razones, como ya mencioné, son que la consistencia no es un número o una propiedad que pueda ser tratada con los métodos y lenguajes formales aquí presentados. Además, como vimos la consistencia es una propiedad de sistemas formales que conlleva aspectos que no pueden reducirse a expresiones matemáticas y lógicas.

Si bien el método ideado por Gödel y las herramientas usadas para llevarlas a cabo resultan ser suficientes para tratar un número considerable de cuestiones relacionadas con la aritmética, estos parecen no ser adecuados para tratar a la consistencia, pues no es igual a los números, o a sus enunciados, en el sentido de que no tienen las mismas propiedades ni son usados para los mismos objetivos.

4.2.4.2. ¿Puede formalizarse la consistencia?

Por lo dicho, no. La formalización, como he mencionado a lo largo del trabajo, es un proceso relacionado directamente con expresiones matemáticas y con los objetos con los que trabaja. Cuando se formaliza algo en P, este algo se encuentra relacionado con los números naturales y sus estructuras: son expresiones que nos hablan de los números y sus propiedades, y como la consistencia parece no ser ninguno de estos dos, entonces no puede ser formalizada. Además, si formaliza con una expresión como $Con(P)$, entonces se obtienen los resultados del Segundo Teorema de Incompletud.

Sin embargo, debemos tener en cuenta que la formalización es imposible en los términos hilbertianos en los cuales se desarrollaron los teoremas aquí mencionados. No afirmo aquí que lo haya, pero puede suceder que exista un método diferente al axiomático en el que se encuentre una formalización (y posiblemente una demostración) de la consistencia.

También cabe aclarar que, si bien la consistencia no puede ser formalizada como los aspectos relacionados con los números, sí puede ser representada con expresiones como:

$$\exists x(Form(x) \land \neg Dem(x))$$

Las cuales dan cuenta de relaciones dadas entre conjuntos de números, las cuales, a su vez, dan cuenta de la consistencia misma, pero, no formalizan a la consistencia como tal.

4.2.4.3. ¿Cómo afectaría esto al Segundo Teorema de Gödel?

Cuando mencioné que la consistencia no puede ser tratada como una propiedad o como un número Gödel y que, por lo tanto, no puede ser formalizada en P, puede parecer que también se niega la posibilidad de que el Segundo Teorema Incompletud sea válido porque éste necesita de la fórmula $Cons(P)$ para poder ser demostrado.

A pesar de lo anterior, considero que los razones aquí mostradas pueden estar relacionadas con los objetivos de mostrar sus teoremas: Gödel llevó a cabo estas demostraciones para dar cuenta de que la idea de que los problemas de la matemática podían ser resueltos a través de demostraciones de sistemas axiomáticos-formales con un número finito de pasos era errónea. Uno de estos problemas era ofrecer una prueba de consistencia bajo estas condiciones. El matemático en cuestión, con su segundo teorema, demostró que dicha prueba era imposible con los métodos formales ideados hasta 1931. Dicho esto, la relación de la que hablo puede ser la siguiente: si la consistencia no es un número o una propiedad numérica, y no puede ser tratada con los mismos lenguajes y métodos que estos, entonces no puede ser formalizada igual que las cuestiones que rodean a estos objetos. Y si esto es así, entonces los métodos axiomáticos y formales tampoco sirven para expresar dicha propiedad. Dicho de otra manera: además de que dichos métodos son insuficientes para demostrar la consistencia, también resultan ser insuficientes para formalizarla.

En consecuencia, si lo dicho aquí es válido, no contradice a los resultados de Gödel, sino que, en cierto sentido, contribuye a mostrar que no todos los aspectos de la matemática pueden ser tratados de manera formal.

Además, lo anterior también puede dar cuenta de cómo se puede estar confundiendo el uso de ciertas herramientas en niveles en los que no pueden ser aplicadas, esto es, la demostración, como se ha mostrado, parece estar relegada a un nivel meramente simbólico, pues se trata de un proceso que implica expresiones formales y acciones aplicadas a estas, mientras que la consistencia se encuentra en un nivel en el que, si bien se involucran tales expresiones, también se necesitan de otros aspectos que no pueden reducirse a cuestiones formales. Así, el intentar usar recursos como la demostración en niveles parecidos a los de la consistencia, parece implicar los resultados de los teoremas aquí mostrados. Por lo cual, una vez más, parece que en la matemática no puede tratarse todo de manera formal.

CONCLUSIONES

Como se pudo observar, es posible que la consistencia no pueda ser tratada como una propiedad de los números naturales o como un número natural porque no es uno de estos, sino una propiedad de sistemas formales (en específico del sistema *P*). Además, se mostró que esto es posible debido a que no comparte las propiedades de estos objetos y porque tampoco puede ser una propiedad de los mismos. Esto contribuye a hacer claro que existe una diferencia entre los objetos con los que trabajan las teorías matemáticas y los sistemas que las formalizan, es decir, se trata de aspectos que son diferentes por el hecho de que no se usan en los mismos contextos y para los mismos fines: por un lado, la consistencia es una propiedad del sistema *P*, la cual es necesaria para que dicho sistema no demuestre teoremas que puedan hacer afirmaciones falsas o incorrectas sobre los objetos de *PA*. Si *P* fuera inconsistente, entonces podría demostrar un teorema así como su negación, lo cual es posible porque ambos serían fórmulas bien formadas y estarían demostrados bajos los estatutos de lo que es una demostración. Se necesita de ésta, pues, para que el sistema no haga este tipo de demostraciones. La consistencia, además, se obtiene, como he dicho, de la puesta en correspondencia entre *P* y los objetos de la aritmética. Es claro que *PA* es una teoría matemática que trabaja con números, y que sus expresiones contribuyen a que *P* sea consistente[86], pero esto no implica que los números contribuyan a que *P* tenga consistencia: el hecho de que 2 sea un número primo no implica que *P* sea consistente. Lo que influye en la consistencia es el hecho de que *P* y los naturales se puedan poner en correspondencia sin que surjan contradicciones.

Los números, por su parte, han sido tratados como representaciones de cantidades y objetos que son definidos por sus propiedades. Estas propiedades son expresadas con el lenguaje de *P*. Esto no implica que los números posean esta propiedad, sino que *P* es el medio lingüístico, por llamarlo de alguna manera, que nos permite saber que dichos objetos poseen tales propiedades. Así, necesitamos del lenguaje de *P* para saber estos aspectos. Esto es lo que hace que la consistencia no pueda ser un número y no se pueda comportar como tal, pues sí depende de la relación establecida entre el sistema y tales objetos[87].

[86] Esto ocurre, como mencioné, por obra de la correspondencia: cuando se ponen en relación las expresiones de una teoría y las fórmulas de un sistema, y no se genera contradicción, entonces el sistema es consistente. Debido al supuesto de la consistencia de *P* que Gödel hizo sobre la consistencia de éste, podemos suponer que cuando *P* y *PA* se ponen en correspondencia no se genera contradicción alguna. A esto debemos agregar que, por lo dicho por Gödel, la teoría *PA* también es consistente.

[87] Aquí debo aclarar que puede parecer que los números sí están relacionados con la consistencia o que incluso son consistentes. Sin embargo, esto parece ser así porque la teoría en la que se encuentran también parece ser consistente del mismo modo que *P*. Esto tiene una explicación: *PA* también es consistente, pues de lo contrario, al ponerla en correspondencia con *P*, éste también sería inconsistente y se anularía el supuesto de la consistencia que se requiere para

A la luz de esto, también se observó que parece ser imposible el tratar a dicha propiedad con los métodos formales aquí mencionados. Y esto es así por las diferencias señaladas que existen entre los números y la consistencia. En este sentido, parece conveniente dejar de usar las herramientas formales para tratar a la consistencia (y quizá también a las otras propiedades de los sistemas) porque, al hacer esto, suponemos que dos cuestiones que resultan ser diferentes (propiedades de un sistema y objetos que estudia) pueden tratarse de la misma manera, lo cual puede ser incorrecto porque, como he mencionado, la consistencia conlleva aspectos que no pueden reducirse a cuestiones meramente formales, y las herramientas con que intentó tratarse se reducen al formalismo. Una prueba de esto pueden ser todas las razones aquí mencionadas, pues muestran, en parte, que esta diferencia existe y que sería un impedimento para llevar empresas de este tipo.

Sobre esto, si bien mencioné que la consistencia no puede ser tratada como un número, debo aclarar que sí se puede expresar a través de una expresión que nos da cuenta de una relación entre conjuntos de números. Anteriormente, mencioné que la fórmula $\exists x(Form(x) \wedge \neg Dem(x))$ expresa la consistencia de P sin hacer referencia directa al mismo, sino a través de una relación existente entre los objetos que formaliza tal sistema. Esta fórmula, además, da cuenta de las siguientes relaciones entre conjuntos de números de Gödel:

1. Supongamos los siguientes conjuntos de números Gödel de expresiones de P:
   a. F: el conjunto de los números Gödel de las fórmulas.
   b. D: el conjunto de los números de las fórmulas demostrables.
2. Ahora veamos la siguiente expresión: $D \subset F$ ella nos dice, a través de $\subset$ que el conjunto D está incluido en el conjunto F, pero que tiene menos elementos de éste último, es decir, el número de fórmulas demostrables es menor al número de fórmulas formadas con el lenguaje de P. Esto quiere decir que existe al menos una fórmula que no es demostrable, es decir, $\exists x(Form(x) \wedge \neg Dem(x))$ es verdadera porque hay una fórmula que no se demuestra en P, lo cual quiere decir que P es consistente.

Con esto, como podemos observar, existe una manera de tratar a la consistencia como una relación entre conjuntos de números y esto no implica que la consistencia sea un número.[88]

demostrar los teoremas de Gödel. Ahora, en tanto que *PA* es consistente, entre sus expresiones no existen contradicciones y tampoco se deriva una contradicción de ellas. La consistencia, pues, se encuentra en el conjunto de las expresiones de *PA*, las cuales nos hablan de números. Pero éstas no son números. Por tanto, los números no son consistentes, pero el conjunto de expresiones que nos hablan de ellos sí lo son.

[88] Esta posibilidad se obtuvo de las observaciones que el Dr. Cristian Gutiérrez Ramírez hizo a este trabajo.

Ahora bien, posiblemente otra manera en que se debe tratar a la consistencia, además de la anterior, tenga que ver con el *metalenguaje*. Como sabemos, el *metalenguaje*, es el lenguaje con el que hablamos de las expresiones de un sistema, en este caso el de *P*. Con éste podemos hablar de las propiedades y relaciones de las fórmulas de *P*. El metalenguaje de *P* puede estar compuesto por el lenguaje natural y algunos símbolos del mismo, de modo que esto facilite su propósito. De la misma manera, el metalenguaje de un sistema puede estar construido con el mismo lenguaje del sistema en cuestión. Pero aquí, el metalenguaje está constituido por números naturales y el lenguaje de la aritmética para que *P* pueda hablar de sus propios elementos y de sus propiedades. Como observamos, el que *P* hable de sus expresiones a través de números Gödel y de sus enunciados parece no implicar problema alguno.

El problema surge cuando se usa este metalenguaje así construido para hablar de la consistencia, porque se usan métodos y herramientas formales que resulta insuficientes para expresar y demostrar todas las cuestiones relacionadas con ésta, y esta insuficiencia se debe a su diferencia con los números. Así, una posible solución sería usar otro metalenguaje que no se reduzca a cuestiones formales y que esté hecho específicamente para trabajar con las propiedades de los sistemas formales, es decir, debería ser un metalenguaje que no implique mezclar los objetos con los que trabajan los sistemas y sus propiedades.

Por otra parte, también debemos cuestionarnos si es necesario demostrar la consistencia. Lo digo por lo siguiente: cuando Gödel demostró sus teoremas, tuvo que suponer que *P* ya era consistente, esto es, supuso que *P* era consistente para demostrar que su consistencia no es demostrable. Además, por esta suposición se puede entender que entre sus axiomas no existen expresiones que nos lleven a contradicciones de manera sintáctica. Siendo así, parece si suponemos la consistencia, no es necesario hacer una demostración de la misma. Y si aún así se quiere hacer una, entonces se deben considerar los teoremas de Gödel, y tal vez las cuestiones aquí señaladas, para buscar otro medio de demostración o una manera de probar esto sin recurrir a los lineamientos hilbertianos.

Por otro lado, no estoy diciendo que el uso de los sistemas formales sea inútil, sino que posiblemente sea insuficiente para tratar todas las cuestiones relacionados con estos: a partir de todos los aspectos expuestos aquí sobre la Aritmética de Peano y el sistema ideado por Gödel es claro que hay herramientas suficientes para expresar y demostrar una cantidad considerable de cuestiones relacionadas con los números naturales y sus cualidades. Incluso, dichas herramientas sirven para expresar y demostrar algunas cuestiones relacionadas con el lenguaje de *P*. Sin embargo, también es claro que son insuficientes para tratar las cuestiones que no tienen que ver con demostraciones, como la consistencia. Siendo así, lo único que considero conveniente es señalar que los sistemas formales deberían usarse exclusivamente en los contextos en los que resultan ser suficientes.

Cabe mencionar: considero que el origen de la insuficiencia radica en que todas las herramientas aquí mencionadas fueron pensadas para trabajar únicamente con objetos matemáticos, con números en este caso. Ahora, en tanto que los números tienen ciertas propiedades y cierto comportamiento, dichas herramientas fueron pensadas, según entiendo, para poder describir, mediante símbolos, estos aspectos. De una manera similar se construyeron los sistemas formales: si observamos *P*, podemos darnos cuenta que este se construyó con miras a replicar las expresiones de *PA* con fórmulas para hacer demostraciones: *P* se construyó para trabajar sobre expresiones referentes a números, no para trabajar con cuestiones relacionadas consigo mismo (propiedades) que implican aspectos totalmente diferentes a las cuestiones numéricas. El origen de la insuficiencia de la formalización es, pues, usar tales herramientas para realizar empresas que no les competen.

Por último, como mencioné, el segundo teorema de Gödel muestra que la cuestión de la consistencia no es demostrable a partir de los recursos ideados en su tiempo y que las razones por las que la consistencia no es un objeto que pueda ser tratado con estos recursos, no entra en contradicción con dicho teorema, sino que contribuye a mostrar que posiblemente existan aún más limitaciones para pensar que esto puede ser así. Ahora bien, esto también puede ser un punto de partida para considerar que otras propiedades de los sistemas formales, como la *completud*, la *corrección*, la *decidibilidad*, y otras cuestiones como las reglas de formación y de transformación, también deben ser tratadas con métodos y herramientas diferentes a las formales, es decir, esto puede ser un punto de partida para pensar que existen varias cuestiones matemáticas y varias cuestiones relacionadas con la matemática que no pueden reducirse a axiomas y que deben ser tratadas con un metalenguaje diferente al lenguaje con que el que están escritas.

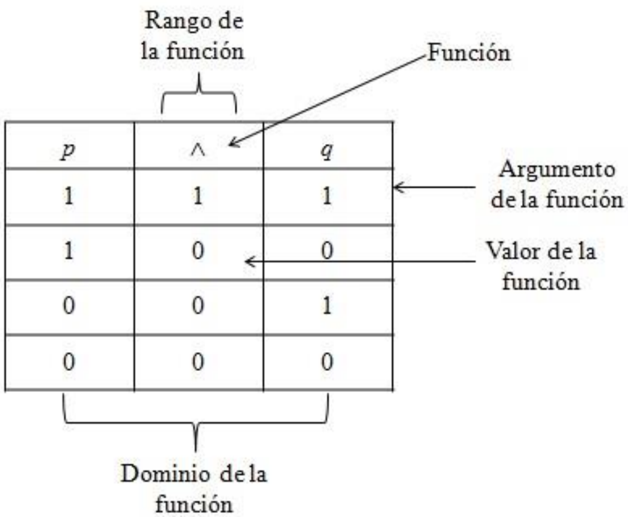
Por esta razón, es necesario idear un método adecuado para realizar esta empresa, pues de seguir con el que se mostró aquí, puede que se sigan cometiendo los mismos errores y que se sigan obteniendo resultados similares que pongan en duda la efectividad de las matemáticas para resolver sus propios problemas. Sin embargo, esta empresa rebasa los objetivos de esta tesis. Por tanto, debe ser desarrollada en otro espacio.

Apéndice I: Sobre la definición de función.

El objetivo de este Apéndice es explicar de manera un tanto más detallada lo relacionado con los términos *argumento* y *función*, pues la *función* es uno de los elementos con los que el sistema formal trabaja de manera constante y el *argumento* es uno de sus componentes. Además, este Apéndice se encuentra aquí porque los aspectos relacionados con las funciones no es el tema principal de este escrito y porque consideré necesario que tales asuntos se encontraran aparte para aquellos que pudieran desconocerlos en cualquier grado.

El término *argumento* tiene que ver con el término *función* en matemáticas. Una función puede ser definida como un conjunto de pares de números, que tiene la propiedad de que los primeros miembros de los pares son diferentes el uno del otro. Un ejemplo de una función es [{1, 1}, {2, 1}, {3, 2}], esta consta de tres pares y sus miembros son 1, 2 y 3. La notación convencional de una función es f(1) = 1, f(2) = 1, f(3) = 2. Los primeros miembros de los pares son llamados *argumentos* y la totalidad del conjunto se llama *dominio* de la función. Por tanto los, los argumentos de f son 1, 2 y 3 y su dominio es el del conjunto de estos tres números. Los otros miembros de los pares son los *valores* de la función, y el conjunto de estos es el *rango* de la función. Así, por ejemplo, el valor del argumento 1 es 1. Los argumentos del dominio deben ser todos diferentes porque a cada uno de estos le corresponde un único valor del rango (http://www-math.mit.edu/~djk/calculus_beginners/chapter03/section01.html).

En relación con los operadores, podemos ver que estos también pueden ser considerados como funciones (Ladriere, 1969, pág. 456; y Russell y Whitehead, 1981). Por lo tanto, los elementos que relacionan los operadores pueden ser considerados como argumentos a los cuales les corresponde un valor (el cual puede ser un valor de verdad en el caso de la lógica de proposiciones). Así, por ejemplo, si consideramos la expresión $p \wedge q$, entonces p y q serán sus argumentos, y el dominio de dicha función será el conjunto de valores de verdad que se pueden asignar a ambas letras proposicionales, mientras que los valores de la función serán aquellos que esta obtenga de la conjunción de cada uno de los valores asignados a las letras proposicionales, y el rango serán todos los valores de verdad de la conjunción. Para complementar este ejemplo, veamos la siguiente tabla de verdad:



p	$\wedge$	q
1	1	1
1	0	0
0	0	1
0	0	0

De igual manera, si consideramos la operación $\times$ de la fórmula $a \times b = c$ como una función, entonces podemos decir que a y b son argumentos de la función y c es el valor de la función. El dominio y el rango de esta quedarán determinados por los conjuntos de números que se usen con la función en cuestión.

Apéndice II: Versión sintáctica del primer teorema.

En este apartado me ocuparé de hablar de la versión sintáctica del primer teorema de incompletud de Gödel. Lo hago de esta manera porque presentar dicha versión en la explicación que di del segundo teorema en páginas anteriores habría desviado el objetivo que tenía en dicho apartado: hablar sobre la formalización de la consistencia y el segundo teorema. Y porque, en general, la demostración no difiere en lo esencial de la ya presentada.

Aclarado lo anterior, debo mencionar que esta versión del teorema es necesaria porque, como he mencionado, el programa de Hilbert (Piñeiro, 2012, pág. 107) exige que las demostraciones realizadas en los sistemas sean llevadas a cabo en un número finito de pasos. Además, también es necesario que existan sólo nociones sintácticas en tales demostraciones, pues las nociones semánticas pueden acarrear paradojas consigo.

Una formulación puramente sintáctica de tal teorema puede ser la siguiente:

> "Si un conjunto de axiomas aritméticos es consistente y permite demostrar todos los enunciados finitistas verdaderos, entonces es incompleto; es decir, existe un enunciado G tal que ni G, ni no-G, ninguno de los dos, es demostrable." (Piñeiro, 2012, pág. 107)

Esta manera de presentar el teorema está compuesta en su totalidad por nociones sintácticas: consistente, enunciado y demostrable. "Enunciados verdaderos" se refiere a enunciados que pueden ser comprobados en un número finito de pasos.

Existe una serie de pasos que permitieron a Gödel demostrar el primer teorema de manera sintáctica (Piñeiro, 2012, pág. 109 - 115):

1) Se supone un conjunto de axiomas aritméticos que permita demostrar todos los enunciados finitistas verdaderos y se retoma la numeración de Gödel para poder asignar números a cada fórmula involucrada en la demostración.
2) Se demuestra que la función proposicional "y es el número Gödel de la demostración de la fórmula con número x" puede traducirse a un enunciado aritmético que vincula a los números y e x –podemos pensar en el predicado $D(y, x)$ que nos indica que y es la demostración de x-. También demostró que para cualesquiera números n y r, el enunciado: "n es el número Gödel de la demostración de la fórmula con número r" se puede comprobar en un número finito de pasos[89]

[89] Aquí podemos recordar la afirmación de Torres: para comprobar que una sucesión de fórmulas Δ es demostración de una fórmula A, basta con observar que dicha sucesión cumpla con los requisitos que implica ser una demostración y que la fórmula A se obtenga de dicha sucesión. Es conveniente recordar esta noción porque es una manera de comprobar que las demostraciones se dan en un número finito de pasos.

3) Hay que plantear la siguiente función proposicional: "No existe un número *y* que sea el número Gödel de una demostración del enunciado *x*"
4) Es necesario definir la función diagonal: si n es el número Gödel de la función proposicional $P(x)$, entonces $d(n)$ –la diagonal- es el número Gödel de $P(n)$ –*P* habla de sí misma a través de su número Gödel-. De esta manera, dice Piñeiro, nos aseguramos que la función diagonal es sintáctica.
5) A partir de 3), 4) y el método de autorreferencia es posible construir una fórmula *G*. *G* dice "no existe un número Gödel *y* que corresponda a la demostración de la fórmula con número *m*" y *m* es el número Gödel de *G* misma.
6) Se prueba que *G* no es sintácticamente demostrable. Para esto, primero se debe suponer que *G* es demostrable. De ser así, existe una demostración de *G* a la cual le pertenece un número Gödel, sea *k*. En consecuencia se obtiene: "*k* es el número Gödel de la demostración de la fórmula con número *m*".

   Dicho enunciado sería verdadero porque ambos números pertenecen a la demostración (*k*) y a *G* (m). También es finitista porque es posible determinar su verdad en una cantidad finita de pasos (es posible confirmar que *k* es la demostración de *G*). Ahora, dado que se trata de un enunciado finitista y verdadero, entonces se puede suponer que es demostrable.

   De lo anterior se puede deducir el siguiente enunciado: "Existe *y* que es el código de una demostración del enunciado de código *m*"

   El último enunciado resulta ser ¬*G*. Bajo esta última afirmación y el razonamiento mencionado, *G* y ¬*G* son demostrables al mismo tiempo, lo cual contradice el supuesto de que el conjunto de axiomas de *P* es consistente. Por tanto, *G* no es demostrable porque implica contradicciones.
7) Ahora, se debe mostrar cómo ¬*G* tampoco es demostrable. Para esto, se debe suponer que ¬*G* es demostrable. Como *P* es consistente y ¬*G* es demostrable, entonces no se puede demostrar *G*, esto es, no existe una demostración para *G*. En consecuencia, no hay algún número que sea el número Gödel de una demostración de *G*. Así, 1,2, 3 no son números de demostraciones de *G*, al igual que cualquier otro número natural. Se pueden construir enunciados como "1 no es el código de una demostración del enunciado con número Gödel *m*", los cuales son finitistas y demostrables.

> Como consecuencia de lo anterior el enunciado “Existe un número *y* que es el código de una demostración del enunciado de código *m*” no es demostrable[90]. Sin embargo, este enunciado resulta ser ¬*G*. Por tanto, ¬*G* no es demostrable, y esto contradice la suposición de que sí lo era. Es decir, suponer que ¬*G* es demostrable implica que ¬*G* no es demostrable: una contradicción. Por lo cual, no es demostrable.

Con todos estos pasos se muestra que la demostración del primer teorema puede reducirse a nociones meramente sintácticas.

[90] No es demostrable porque, dado que ningún número representa la demostración de *m*, no puede haber alguno que sí lo sea.

BIBLIOGRAFÍA

- Ayres, Frank. (1969). *Teoría y problemas de álgebra moderna*. Colombia: McGraw-Hill, Serie de compendios Schaum.
- Badesa, C., Jané I., Jansana, R. (2007). *Elementos de lógica Formal*. (Segunda edición ed.). Barcelona: Ariel.
- Cassini, A. (2006). *El juego de los principios*. Buenos Aires: A-Z Editores.
- Curry, H. B. (1951). *Outlines of a Formalist Philosophy of Mathematics*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company.
- Euclídes. (1991). *Elementos*. Madrid: Gredos.
- Garrido, M. (1974). *Lógica Simbólica*. Madrid: Editorial Tecnos.
- Gödel, Kurt (1931). "Sobre proposiciones formalmente indecidibles de *Principia Mathematica* y sistemas afines". En Gödel (2006).
- __________(2006). *Obras completas*. Madrid: Alianza Editorial.
- Gómez Laveaga, Carmen (2014). *Álgebra superior. Curso completo.* México: UNAM – Facultad de Ciencias.
- Gutiérrez Ramírez, Cristian A. (2014). "Cómo argumentar a favor de una proposición indecidible." En Raúl Alcalá Campos (Coord.), *Ars Logicorum II* (pp. 137 – 157). México: UNAM – Facultad de Estudios Superiores Acatlán.
- Hilbert, D. (2011). *Fundamentos de las matemáticas*. México: UNAM - Facultad de Ciencias, Colección: Mathema.
- Hunter, G. (1981). *Metalógica: Introducción a la metateoría de la lógica clásica de primer orden*. Madrid: Paraninfo.
- Ladriere, J. (1969). *Limitaciones internas de los formalismos*. Madrid: Editorial Tecnos.
- Lercher, B. (1958). *The Mathematical Gazette, 42*(342), 326-328. doi:10.2307/3610485
- Piñeiro, Gustavo Ernesto. (2012). *Los teoremas de incompletitud. Gödel: La intuición tiene su lógica*. España: RBA.
- Priest, G. (2008). *An Introduction to Non-Classical Logic: From If to Is.* (Second Edition). New York: Cambridge University Press.
- Smith, Peter. (2013). *An Introduction to Gödel's Theorems*. (Second Edition). New York: Cambridge University Press.
- Smullyan, R. (1992). *Gödel's Incompleteness Theorems.* New York: Oxford University Press.

- Torres Alcaraz, C. (1999). *Los sistemas formales*. México: UNAM-Centro de Investigaciones Interdisciplinarias en Ciencias y Humanidades.
- ___________. (2001). *Elementos para una crítica matemática de la razón filosófica: la filosofía matemática de David Hilbert y Kurt Gödel*. México: UNAM-Facultad de Filosofía y Letras.
- Torreti, Roberto. (1998). *El paraíso de Cantor*: *la tradición conjuntista en la filosofía matemática*. Santiago de Chile: Universidad Andrés Bello, Editorial Universitaria, Colección: El mundo de las ciencias.
- Whitehead, A. N., Russell B. (1981). *Principia Mathematica*. Madrid: Paraninfo.
- _______________________. (1963). *Principia Mathematica*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Willerding, Margaret F. et. al. (1976). *Fundamentos de álgebra*. México: Editorial Limusa.

FUENTES ELECTRÓNICAS

- MIT Mathematics. *What are functions?* (s. f.). Recuperado de http://www-math.mit.edu/~djk/calculus_beginners/chapter03/section01.html.
- OMICS International. *Principle of explosion.* Recuperado de http://research.omicsgroup.org/index.php/Principle_of_explosion.
- Planemath.org. *Contradictory statement.* Recuperado de http://planetmath.org/contradictorystatement.
- Filosofía en Español. *Clase* (*en lógica*). Recuperado de http://www.filosofia.org/enc/ros/clase.htm.
- Bogomolny, Alexander (2005). *What Is Arithmetic?* de *Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles*. Recuperado de https://www.cut-the-knot.org/WhatIs/WhatIsArithmetic.shtml

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

- Gutiérrez Ramírez, Cristian A. (2015). *¿Es la Hipótesis del continuo una proposición absolutamente indecidible? Un estudio filosófico*. México: UNAM.
- ___________________________. (2011). *Estructuralismo, teoría de conjuntos y teoremas de categoricidad*. México: UNAM.
- Kripke, Saul. (1995). *Elementary recursion theory and its applications to formal systems*. Princeton: Princeton University.