



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA QUÍMICA - PROCESOS

DINÁMICA DE FLUIDOS EN SISTEMAS CON Y SIN
ELASTICIDAD. REDES Y MICROTUBOS.

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN INGENIERÍA

PRESENTA:
AIMEE MAGDALENA TORRES ROJAS

TUTOR PRINCIPAL
DRA. EUGENIA CORVERA POIRÉ
FACULTAD DE QUÍMICA, UNAM

COMITÉ TUTOR
DR. JESÚS ANTONIO DEL RÍO PORTILLA
INSTITUTO DE ENERGÍAS RENOVABLES, UNAM
DR. EDUARDO VIVALDO LIMA
FACULTAD DE QUÍMICA, UNAM

MÉXICO, CIUDAD DE MÉXICO, NOVIEMBRE 2018.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO

PROFESORES

Presidente: Dr. José Roberto Zenit Camacho
Secretario: Dr. Luis Fernando Olguín Contreras
1er. Vocal: Dr. Juan Pablo Aguayo Vallejo
2do. Vocal: Dr. Mariano López de Haro
3er. Vocal: Dra. Eugenia Corvera Poiré

Esta tesis fue realizada en:

Departamento de Física y Química Teórica
Cubículo F-210
Facultad de Química, Ciudad Universitaria
Universidad Nacional Autónoma de México

TUTOR DE TESIS:

Dra. Eugenia Corvera Poiré

FIRMA

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, quiero agradecer a la Dra. Eugenia Corvera por ser parte esencial en mi formación, por sus incontables enseñanzas y consejos. Agradezco su dedicación, su confianza y su cariño. Maestra, gracias por procurar siempre mi crecimiento personal y profesional. Es una persona muy valiosa en mi vida, cuenta con mi infinito cariño y agradecimiento.

Agradezco con cariño al Dr. Luis Olguín por sus enseñanzas y consejos. Por ser un excelente guía en mi aprendizaje del campo de la microfluídica.

Agradezco a los miembros de mi Comité Tutor, el Dr. Eduardo Vivaldo y el Dr. Jesús Antonio del Río, las valiosas observaciones y recomendaciones que me hicieron en las evaluaciones semestrales.

Agradezco también a los miembros del jurado por el tiempo que dedicaron a la revisión del primer manuscrito de esta tesis y por sus útiles observaciones para mejorarlo.

Agradezco al Dr. Ignacio Pagonabarraga por el apoyo que me brindó durante mis estancias en la Universidad de Barcelona y por las estimulantes discusiones para llevar a cabo los proyectos en los que colaboramos y que son parte de esta tesis.

Agradezco al Dr. Rui Travasso por sus múltiples enseñanzas y su amable disposición para llevar a cabo los proyectos en los que hemos colaborado y que forman parte de este trabajo.

Agradezco también a Pamela Vázquez por la colaboración que hemos empezado, que espero sea el comienzo de una carrera académica de muchos encuentros.

Agradezco a CONACyT la beca recibida para mis estudios de doctorado con número de becario 245675.

Agradezco al Sistema Nacional de Investigadores, el apoyo otorgado como ayudante de investigador nacional nivel III, con número de expediente 15899, a partir de enero de 2018.

Agradezco a la Comisión Europea el apoyo a través de una acción *Marie Curie* (FP7-PEOPLE-2011- IIF) para la realización de dos estancias de investigación durante enero y junio de 2014 en la Universidad de Barcelona.

Agradezco a CONACyT el apoyo proporcionado a través del proyecto 219584 para participar en el congreso:

- 27th International Conference on Science and Technology of Complex Fluids celebrada en San Luis Potosí, San Luis Potosí del 22 al 26 de junio de 2015.

Agradezco a CONACyT y a la Facultad de Química de la UNAM el apoyo para participar en los congresos:

- XLVI Winter Meeting on Statistical Physics celebrado en Taxco, Guerrero del 8 al 11 de enero de 2017.
- XLVII Winter Meeting on Statistical Physics celebrado en Puebla, Puebla del 7 al 10 de enero de 2018.

Agradezco a la Red Temática de la Materia Condensada Blanda de CONACyT por el apoyo proporcionado para participar en las reuniones:

- Tercera Reunión de la Red de Materia Condensada Blanda celebrada en San Luis Potosí, San Luis Potosí del 27 al 30 de noviembre de 2014.
- Cuarta Reunión de la Red de Materia Condensada Blanda celebrada en Zacatecas, Zacatecas del 12 al 15 de noviembre de 2015.
- Quinta Reunión de la Red de Materia Condensada Blanda celebrada en León, Guanajuato del 3 al 5 de agosto de 2017.

Eugenia Corvera Poiré declares that the research leading to these results has received funding from the European Union Seventh Framework Programme (FP7-PEOPLE-2011-IIF) under Grant Agreement No. 301214.

Finalmente, agradezco a las personas que quiero y estimo:

A ti Gerardo, gracias por ser la persona que eres, por ser diferente a mí y por todo lo que me enseñas. Te agradezco ser el equilibrio en mi vida y hacer que siempre aterrice en lo verdaderamente importante. Te amo hijo.

A ti mamá, gracias por ser una mujer fuerte, inteligente y tenaz. Gracias por mostrarme el valor del esfuerzo y por ser un ejemplo de metas alcanzadas. Tus enseñanzas me hicieron más fuerte y más valiente. Te agradezco tu cariño y tu apoyo. Te amo.

A ti Arturo, gracias por ser mi compañero. Gracias por amarme, cuidarme y apoyarme. Te amo.

A ti Luis, gracias por ser el mejor padre para Gerardo. Gracias por hacer equipo conmigo en el proyecto más importante de nuestras vidas. Te agradezco tu respaldo incondicional.

Familia y amigos, gracias por creer en mí. Gracias por su cariño y su apoyo. Los valoro y los quiero mucho.

A ti Joaquín, gracias por tu leal amistad, y por todo lo que hemos compartido y aprendido juntos. Te quiero mucho.

Amigos del cubo, gracias por haber hecho de estos años una etapa increíble. Gracias por las asesorías, los consejos y los momentos de diversión. Son grandes personas y me llevo mucho de ustedes. Los quiero y los valoro mucho.

DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD

Los resultados originales de este trabajo son:

- Adaptación del modelo de redes rígidas al estudio de una red de vasos cuyos radios siguen la ley de Murray en la que circula un fluido con las propiedades reológicas de la sangre, presentado en el capítulo 2.
- Adaptación del modelo de redes rígidas para estudiar redes redundantes obstruidas, todos los resultados y el análisis del capítulo 3. Respuesta dinámica de fluidos newtonianos y viscoelásticos en redes de tubos rígidos con redundancia y obstrucciones.
- Planteamiento del modelo, todos los resultados y el análisis del capítulo 4. Permeabilidad dinámica de fluidos newtonianos en tubos elásticos.
- Planteamiento del modelo, todos los resultados y el análisis del capítulo 5. Permeabilidad dinámica de fluidos viscoelásticos en tubos elásticos.
- Análisis de los datos experimentales reportados en el capítulo 6.

RESUMEN

Estudiamos la dinámica de dos sistemas fluido-medio confinante por medio de funciones respuesta. Para el estudio de un fluido que circula bajo un gradiente de presión pulsado en un tubo, usamos la permeabilidad dinámica, $\hat{K}(\omega)$, que relaciona el flujo con el gradiente de presión en el dominio de frecuencias. Para estudiar el flujo pulsado en redes, usamos la función respuesta de la red, $\hat{\chi}(\omega)$, que relaciona el flujo con la caída de presión en el dominio de frecuencias.

En la primera parte del trabajo, estudiamos dos tipos de redes que denominamos *redes equivalentes*, construidas *ex professo* para que tengan la misma respuesta en ausencia de obstrucciones. Éstas son: redes con redundancia integrada (a la que llamamos *intrínseca*) y redes no redundantes formadas por tubos más anchos que las anteriores. Estudiamos redes con relevancia fisiológica y redes potencialmente útiles en microfluídica. Encontramos que las redes equivalentes dejan de serlo en presencia de obstrucciones, que es cuando las ventajas de la redundancia intrínseca se manifiestan y son relevantes. Analizamos los lugares de la red en los que la redundancia intrínseca representa un mayor beneficio cuando se presentan obstrucciones. Proponemos un criterio para medir la tolerancia de las redes a las oclusiones. Mostramos que la redundancia intrínseca reduce los enormes gradientes en la rapidez de deformación causados por las oclusiones.

En la segunda parte del trabajo, estudiamos la dinámica de sistemas con elasticidad en el medio confinante. Encontramos una expresión analítica para la permeabilidad dinámica de fluidos newtonianos que fluyen a través de tubos elásticos y están sujetos a gradientes de presión pulsados. Mostramos que la interacción entre la viscosidad del fluido, la elasticidad de la pared y el tamaño característico del sistema confinante da lugar a una vasta fenomenología que incluye resonancias. Éstas son relevantes en geometrías confinantes pequeñas con módulos de Young bajos. Presentamos los resultados correspondientes al sistema aceite mineral en un microtubo de PDMS, potencialmente útil en microfluídica. Escribimos una ley de Darcy generalizada, en donde el flujo promediado en la dirección axial es proporcional a la caída de presión. También mostramos que cuando un fluido viscoelástico fluye a través de un tubo elástico existe una competencia entre ambas elasticidades, y que cambiando los valores de los parámetros del sistema podemos exaltar o mitigar uno u otro efecto, o hacer que ambos cooperen para dar una respuesta mayor a la que darían por separado.

Finalmente, describimos dos estudios experimentales en los que hicimos el análisis de datos.

ÍNDICE GENERAL

1. Introducción	10
2. Antecedentes	16
2.1. Permeabilidad dinámica en un tubo rígido	16
2.2. Permeabilidad dinámica en una red de tubos rígidos	19
2.3. Redes vasculares rígidas con anastomosis	23
2.3.1. Red de vasos iguales	24
2.4. Redes vasculares rígidas con obstrucciones	26
2.4.1. Red de vasos iguales	29
2.4.2. Red de vasos cuyos radios siguen la ley de Murray	33
3. Respuesta dinámica de fluidos newtonianos y viscoelásticos en redes de tubos rígidos con redundancia	38
3.1. Introducción	38
3.2. Modelo básico de anastomosis + obstrucción	41
3.3. Redes redundantes vs redes no redundantes	43
3.4. Medida de la tolerancia de redes redundantes ante obstrucciones	47
3.5. Gradientes de la rapidez de deformación en redes redundantes y no redundantes	50
3.6. Discusión	53
3.6.1. Movimiento del fluido por imposición de un flujo o por imposición de una caída de presión	53
3.6.2. ¿Hay un número óptimo de puentes anastomóticos?	55
3.7. Conclusiones	58
4. Permeabilidad dinámica de fluidos newtonianos en tubos elásticos	60
4.1. Introducción	60
4.2. Ecuaciones del modelo	62
4.3. Ecuaciones adimensionales	68
4.4. Frecuencias características del sistema	70

4.5.	Permeabilidad dinámica de fluidos newtonianos en tubos elásticos	70
4.6.	Permeabilidad dinámica en microfluídica de materiales elastoméricos	75
4.7.	Resonancia como función de los parámetros del fluido y de la pared del tubo	76
4.8.	Otras funciones respuesta del sistema	79
4.9.	Presión y gradiente de presión como función de la dirección axial	82
4.9.1.	Soluciones en el dominio de la frecuencia	82
4.9.2.	Condiciones de frontera para la presión en los extremos del tubo	83
4.9.3.	Soluciones en el dominio del tiempo	84
4.10.	Velocidades del fluido y desplazamientos de la pared del tubo como función de la dirección axial	87
4.10.1.	Soluciones en el dominio de la frecuencia y del tiempo	87
4.11.	Flujo como función de la dirección axial	92
4.11.1.	Soluciones en el dominio de la frecuencia y del tiempo	92
4.12.	Ley de Darcy generalizada para tubos elásticos	94
4.13.	Discusión	97
4.14.	Conclusiones	99
5.	Permeabilidad dinámica de fluidos viscoelásticos en tubos elásticos . .	101
5.1.	Ecuaciones del modelo	101
5.1.1.	Otras funciones respuesta del sistema	102
5.2.	Elasticidad en la pared y/o en el fluido	104
5.3.	Permeabilidad de la sangre en un microtubo elastomérico y en la aorta . .	110
5.4.	Conclusiones	111
6.	Dinámica experimental de fluidos pulsados	113
6.1.	Espectrómetro de flujo microfluídico	113
6.2.	Corriente de gotas como motor de flujos oscilatorios en microfluídica. <i>Ma-</i> <i>nuscrito en arbitraje.</i>	114
7.	Conclusiones	115
A.	Artículos derivados de esta tesis	119
B.	Simbología	125
C.	Ecuaciones de movimiento para la pared de un tubo elástico	130
D.	Solución de las ecuaciones de movimiento de un fluido newtoniano en un tubo elástico	137

E. Solución de las ecuaciones de movimiento de un fluido de Maxwell en un tubo elástico	142
Referencias	147

INTRODUCCIÓN

La dinámica de un sistema fluido-medio confinante se puede describir a partir de funciones respuesta del mismo. Se denomina función respuesta a aquella función que relaciona, a través de un cociente, la respuesta de un sistema (o señal de salida) con una señal de entrada o perturbación. En el estudio del movimiento de un fluido que circula en una geometría confinada rígida, hay una función respuesta conocida como permeabilidad, K . La permeabilidad es una medida de la resistencia a fluir de un fluido a través de un medio confinante, esto es, a mayor permeabilidad menor resistencia al flujo. En estado estacionario, la permeabilidad sólo es función de la geometría del medio. Por ejemplo, para un fluido sujeto a un gradiente de presión que no depende del tiempo y que circula a través de un tubo de radio a , la permeabilidad está determinada por el tamaño característico del sistema, esto es, $K = a^2/8$.

Para fluidos sujetos a forzamientos pulsados, es decir, gradientes de presión que cambian periódicamente en el tiempo, el movimiento del fluido se puede describir a través de una ley de Darcy generalizada, en la cual la permeabilidad dinámica, $\hat{K}(\omega)$, es una función respuesta del sistema y relaciona el flujo con el gradiente de presión. En situaciones dinámicas, la permeabilidad, además de depender de la geometría del medio circundante, también es función de la frecuencia y de las características del fluido, como la densidad, la viscosidad y el tiempo de relajación (en el caso de fluidos viscoelásticos) [1].

Matemáticamente, la permeabilidad es un factor de proporcionalidad entre el flujo y el gradiente de presión en el dominio de frecuencias. Físicamente, es una función respuesta

que mide la resistencia de un fluido a circular en la dirección de flujo, para cada uno de los modos involucrados en el gradiente de presión.

La permeabilidad dinámica de un fluido newtoniano que circula en un medio rígido decae monótonamente con la frecuencia [2, 3]. En cambio, en el caso de un fluido viscoelástico que se mueve en un medio rígido, el fluido viscoelástico presenta -como cualquier sistema elástico- resonancias a ciertas frecuencias. Estudios tanto teóricos como experimentales con fluidos viscoelásticos moviéndose en sistemas rígidos [4, 5] han mostrado que la permeabilidad dinámica puede incrementar en órdenes de magnitud cuando el sistema es forzado a ciertas frecuencias. Estas resonancias tienen su origen en la interacción entre la densidad, la viscosidad y el tiempo de relajación del fluido; y una escala de longitud característica de la geometría del confinamiento.

En la literatura, se han obtenido permeabilidades dinámicas para fluidos newtonianos [2, 3], de Maxwell [1, 4, 6, 7, 8] y viscoelásticos lineales generales [9], que circulan a través de estructuras rígidas de distintas geometrías y con diferentes condiciones de frontera entre el fluido y el medio confinante.

El estado del arte sobre la comprensión de la dinámica de fluidos newtonianos y viscoelásticos en medios rígidos, nos permite estudiar estos fluidos en geometrías complejas, como las redes tipo árbol. Para estudiar el flujo pulsado en redes rígidas, usamos la función respuesta de la red, $\hat{\chi}(\omega)$, como una extensión del concepto de permeabilidad dinámica, $\hat{K}(\omega)$. Esta función respuesta de la red se define como una permeabilidad efectiva por un área efectiva y relaciona el flujo con la caída de presión total en la red. A mayor respuesta de la red mayor flujo.

Por otra parte, para estudiar la dinámica de fluidos confinados en medios elásticos es ne-

cesaria investigación más fundamental, ya que el efecto de la interacción entre la pared elástica del medio y el fluido sobre la permeabilidad no ha sido estudiado para geometrías simples. Es por esto que para el estudio de estos sistemas, usamos una geometría de un solo tubo.

Este trabajo, por tanto, se conforma de dos partes principales.

La primera parte está dedicada a fluidos newtonianos y viscoelásticos en redes rígidas.

En el capítulo 3, abordamos el estudio de redes redundantes y no redundantes en presencia de obstrucciones. La redundancia constituye un aspecto fundamental e intrínseco de una gran variedad de sistemas naturales. Ésta provee caminos alternativos para que un proceso ocurra y tiene una función protectora en caso de falla de las partes o de los mecanismos frágiles del sistema. En general, la redundancia es costosa desde un punto de vista energético, sin embargo, los sistemas naturales presentan características redundantes cuando los beneficios superan a los «costos». En imitación de la naturaleza, los humanos han incorporado la redundancia a diversos sistemas manufacturados para garantizar la fiabilidad de los mismos cuando el costo de tener fallas es demasiado alto.

La redundancia en redes fluídicas ocurre en muchos sistemas naturales. Por ejemplo, está presente de manera intrínseca en las redes vasculares de mamíferos y juega un papel clave en la fisiología de la isquemia cerebral (falta de oxígeno), ya que hace a la red resistente a los eventuales bloqueos y permite la redistribución de la sangre.

Analizamos redes fluídicas genéricas, potencialmente útiles en microfluídica -en donde las obstrucciones pueden causar la falla del dispositivo-, y redes fisiológicas realistas -en las cuales las obstrucciones pueden comprometer la irrigación de un tejido-. Estudiamos redes

redundantes y no redundantes, que en ausencia de obstrucciones oponen la misma resistencia al flujo, y las denominamos redes equivalentes; para éstas, el costo energético para fluir y el flujo mismo -dado un gradiente de presión- son idénticos. Analizamos cómo se modifica el flujo en redes equivalentes cuando se presentan obstrucciones.

Nuestros resultados muestran que las ventajas de la redundancia intrínseca, se manifiestan y son relevantes en presencia de obstrucciones, mientras que para redes fluídicas no obstruidas, otro tipo de topologías serían igualmente eficientes para el transporte.

Estos resultados no sólo representan un paso más en la comprensión de la redundancia intrínseca, sino que proveen nuevos conocimientos sobre por qué, a pesar de un mismo costo energético asociado al flujo, la naturaleza ha elegido la redundancia para asegurar la irrigación de los tejidos en lugares clave del organismo.

Este análisis también nos da orientación en el diseño de redes robustas en microfluídica, en el que una elección adecuada de la cantidad y de los lugares en donde se encontrara la redundancia, podría evitar que la red fallara por bloqueo, debido a partículas o burbujas.

La segunda parte del trabajo se refiere al estudio de la dinámica de sistemas con elasticidad en el medio confinante.

En el capítulo 4, analizamos el comportamiento dinámico de fluidos newtonianos incompresibles, que fluyen a través de tubos elásticos y que están sujetos a gradientes de presión pulsados. A este estudio dedicamos la mayor parte de esta tesis. Desarrollamos conocimientos fundamentales para dilucidar el papel que juega la interacción entre la viscosidad del fluido, la elasticidad de la pared del tubo y el tamaño característico del medio confinante en la dinámica del sistema.

Conocer la permeabilidad dinámica de fluidos circulando en medios elásticos puede ser relevante en sistemas fisiológicos, ya que en éstos los fluidos están confinados por medios con paredes elásticas, como las arterias grandes o los bronquios; también puede ser relevante en microfluídica, ya que los microchips frecuentemente están hechos de polímeros muy elásticos, como el polidimetilsiloxano (PDMS), que confinan a los fluidos que circulan en ellos [10].

Encontramos una expresión analítica para la permeabilidad dinámica de fluidos newtonianos, sujetos a gradientes de presión pulsados, en tubos elásticos. Ésta, contiene información tanto del fluido como del medio que lo confina. Observamos un comportamiento resonante en la permeabilidad dinámica de fluidos newtonianos en tubos elásticos que no ha sido reportado previamente. Obtenemos resultados que indican que estas resonancias son relevantes en pequeñas geometrías confinantes y módulos de Young muy bajos. Por ejemplo, para aceite mineral moviéndose en un microcanal de 200 micras hecho de PDMS, encontramos una frecuencia de resonancia en el rango del ultrasonido.

Escribimos una ley de Darcy generalizada para fluidos newtonianos que circulan en tubos elásticos en donde el flujo promediado en la dirección axial es proporcional a la caída de presión en el tubo. Esta nueva ley de Darcy generalizada conserva la forma de la ley de Darcy para tubos rígidos, por lo que la permeabilidad dinámica en sistemas elásticos, tiene un significado muy parecido al que tiene en sistemas rígidos, *i.e.*, es una medida de la resistencia a fluir a lo largo de la dirección de flujo para cada uno de los modos involucrados en la caída de presión y sigue siendo útil para saber a qué frecuencias se maximiza la amplitud del flujo promedio.

En el capítulo 5 presentamos un estudio preliminar de la dinámica de un sistema con

elasticidad tanto en el fluido como en el medio confinante. Esto es, estudiamos un fluido viscoelástico en un tubo elástico. Encontramos una permeabilidad dinámica que presenta resonancias y hallamos que existe una competencia entre la elasticidad debida al tubo y la elasticidad debida al fluido. Cambiando los valores de los parámetros en el sistema, es posible exaltar uno u otro efecto y hacer que la permeabilidad presente resonancias más cercanas a las causadas por la pared, o más cercanas a las causadas por el fluido viscoelástico. Observamos también que la permeabilidad de sistemas con elasticidad (ya sea en la pared, en el fluido o en ambos) es mayor que la de un sistema sin elasticidad.

Finalmente, en el capítulo 6 mostramos un breve resumen de dos proyectos experimentales sobre dinámica de flujos pulsados en microfluídica en los que participé activamente y que forman parte del trabajo doctoral.

ANTECEDENTES

La permeabilidad, K , es una medida de la resistencia a fluir de un fluido en un medio confinado. A mayor permeabilidad, menor resistencia al flujo. En estado estacionario, la permeabilidad sólo es función de la geometría del medio. Por ejemplo, para un fluido que circula a través de un tubo, la permeabilidad es $K = \frac{a^2}{8}$, en donde a es el radio del tubo.

Cuando un fluido está sujeto a un gradiente de presión pulsado, su movimiento se puede describir a través de la permeabilidad dinámica, $\hat{K}(\omega)$. En situaciones dinámicas, la permeabilidad, además de depender de la geometría del sistema, también es función de la frecuencia de pulsamiento, ω , y de las características del fluido, como la densidad, ρ , la viscosidad, μ , y el tiempo de relajación, t_r (en el caso de fluidos viscoelásticos) [1].

2.1. Permeabilidad dinámica en un tubo rígido

La dinámica de un fluido que circula en una geometría confinante puede ser descrita a través de una ley de Darcy generalizada, en la cual la permeabilidad dinámica relaciona la velocidad con el gradiente de presión. Esta relación se obtiene a partir de la solución, en el dominio de las frecuencias, de la ecuación linealizada de conservación de momento y de la ecuación constitutiva del fluido.

Para un fluido de Maxwell que circula en un cilindro rígido de radio, a , y longitud, l , sujeto a un gradiente de presión independiente de la dirección axial con condiciones de frontera tales que la velocidad, u , se haga cero en las paredes, el promedio de la velocidad

en la sección transversal de flujo es

$$\langle \hat{u}(\omega) \rangle_r = -\frac{\hat{K}(\omega)}{\mu} \frac{d\hat{p}}{dx}(\omega), \quad (2.1)$$

en donde la permeabilidad dinámica está dada por

$$\hat{K}(\omega) = -\frac{\mu}{i\omega\rho} \left[1 - \frac{\langle J_0(\delta r) \rangle_r}{J_0(\delta a)} \right], \quad (2.2)$$

en la cual r es la coordenada radial,

$$\delta^2 = \frac{\rho}{\mu} (t_r \omega^2 + i\omega) \quad y \quad \langle J_0(\delta r) \rangle_r = \frac{2J_1(\delta a)}{\delta a}.$$

J_0 es la función de Bessel de orden cero y J_1 es la función de Bessel de primer orden. Para fluidos newtonianos $t_r = 0$. Los detalles para obtener la ecuación (2.2) se pueden ver en las referencias [4] y [11], los resultados fueron obtenidos originalmente en [1].

A partir de la velocidad promedio del fluido -ecuación (2.1)- se obtiene el flujo en el dominio de la frecuencia como

$$\hat{Q}(\omega) = -\frac{A \hat{K}(\omega)}{\mu} \frac{d\hat{p}}{dx}(\omega), \quad (2.3)$$

en donde A es el área de la sección transversal del tubo. La ecuación (2.3) es una ley de Darcy generalizada para fluidos de Maxwell y newtonianos ($t_r = 0$) en tubos rígidos.

Para un solo modo en el gradiente de presión dependiente del tiempo $\frac{\partial p}{\partial x}(t) = \frac{\Delta p_0 \cos(\omega_0 t)}{l}$, el flujo como función del tiempo está dado por [4]:

$$Q(t) = -\frac{A}{\mu} \{ \text{Re}[\hat{K}(\omega_0)] \cos(\omega_0 t) + \text{Im}[\hat{K}(\omega_0)] \text{sen}(\omega_0 t) \} \frac{\Delta p_0}{l}. \quad (2.4)$$

Por tanto, conocer la permeabilidad dinámica nos permite calcular el flujo dependiente

del tiempo. Las partes real e imaginaria de la permeabilidad dan las contribuciones al flujo en fase y fuera de fase con el gradiente de presión, respectivamente. $\hat{K}(\omega_0)$ es una cantidad compleja que puede ser escrita en términos de su magnitud, $|\hat{K}(\omega_0)|$, y su fase, φ , como $\hat{K}(\omega_0) = |\hat{K}(\omega_0)| e^{i\varphi}$. De modo que, la ecuación (2.4) se puede escribir como $Q(t) = -\frac{A}{\mu} |\hat{K}(\omega_0)| \frac{\Delta p_0}{l} \cos(\varphi - \omega_0 t)$. La amplitud del flujo está entonces dada por:

$$Q^{max} = \frac{A}{\mu} |\hat{K}(\omega_0)| \frac{\Delta p_0}{l}. \quad (2.5)$$

La ecuación anterior muestra que la magnitud de la permeabilidad es linealmente proporcional a la amplitud de flujo para sistemas forzados con un sólo modo en el gradiente de presión. Debido a la linealidad de las ecuaciones de movimiento del fluido, es posible expresar el flujo, a cualquier gradiente de presión dependiente del tiempo, como una superposición lineal de modos sinusoidales, cada uno ponderado por su correspondiente permeabilidad. Esto se puede ver con más detalle en [4].

Diversos estudios de fluidos viscoelásticos fluyendo en geometrías confinadas [1, 4, 5, 6, 11, 12] han mostrado que, a ciertas frecuencias, la permeabilidad dinámica aumenta varios órdenes de magnitud respecto a la permeabilidad de estado estacionario (frecuencia cero). Esto ha sido demostrado experimentalmente por Castrejón Pita y colaboradores [5].

En la figura 2.1 se muestra la magnitud de la permeabilidad dinámica como función de la frecuencia para un tubo con el radio típico de las arteriolas del sistema circulatorio humano [13, 14]. La línea sólida corresponde a la permeabilidad de un fluido viscoelástico de Maxwell. Los parámetros usados para el fluido son la densidad, la viscosidad y el tiempo de relajación de Maxwell de la sangre humana, los cuales fueron obtenidos experimentalmente por Thurston en un rango de rapidez de deformación en el que no hay adelgazamiento [15]. Como se puede observar, existen frecuencias en las que la magnitud de la permeabilidad presenta máximos. Estas frecuencias son conocidas como frecuencias de resonancia.

En esta figura también se muestra la permeabilidad de un fluido newtoniano ($t_r = 0$) en línea punteada, la cual decae monótonamente con la frecuencia.

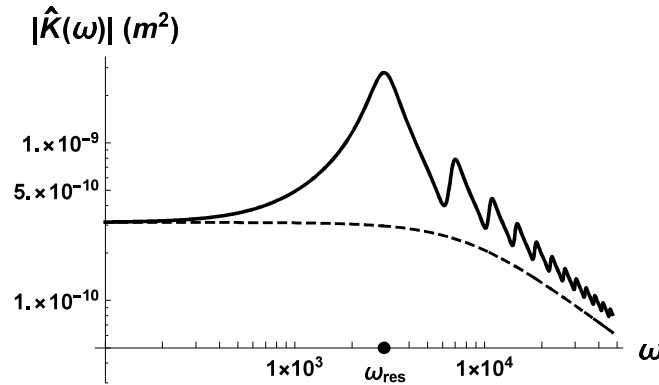


Figura 2.1- Magnitud de la permeabilidad dinámica para un fluido viscoelástico de Maxwell (línea sólida) y para un fluido newtoniano (línea punteada) circulando a través de un tubo rígido. Se usó un tubo de radio $a = 5 \times 10^{-5}$ m, que es el valor típico del radio de las arteriolas del humano. Se usaron los siguientes valores para la sangre: $\mu = 4 \times 10^{-3} \frac{Kg}{m \cdot s}$, $\rho = 1050 \frac{Kg}{m^3}$, $t_r = 1 \times 10^{-3}$ s (fluido de Maxwell) y $t_r = 0$ s (fluido newtoniano). En el eje de las abscisas, se indica la primera frecuencia de resonancia, ω_{res} .

La figura 2.2 muestra la dependencia de la permeabilidad dinámica con el tamaño del sistema, es decir, la dependencia con el radio del tubo. Cuando el radio disminuye, la permeabilidad de estado estacionario (a frecuencia cero) disminuye y la frecuencia de resonancia aumenta. Es importante destacar que, aún cuando la permeabilidad de estado estacionario disminuye cuando disminuye el radio, existen ciertos valores de frecuencia, en los cuales la permeabilidad dinámica del tubo de radio menor, alcanza valores comparables a los de la permeabilidad dinámica del tubo de radio mayor.

2.2. Permeabilidad dinámica en una red de tubos rígidos

En 2009, J. Flores y colaboradores propusieron un modelo de red con el fin de estudiar la dinámica de un fluido viscoelástico a través de una red de tubos rígidos [16, 17]. El modelo consiste en una red de árbol, en la cual los vasos se bifurcan en vasos idénticos, dando

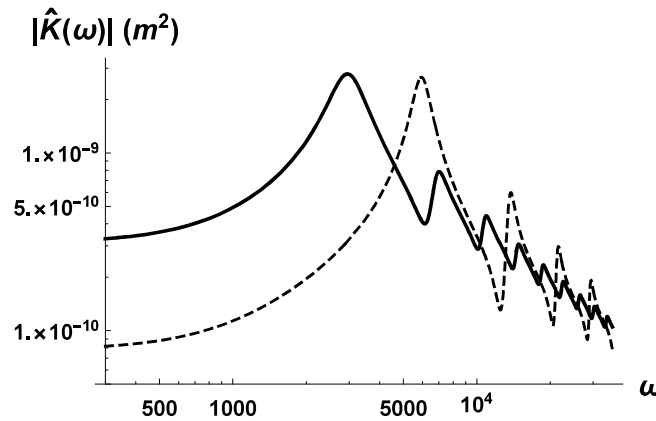


Figura 2.2- Magnitud de la permeabilidad dinámica para la sangre modelada como un fluido viscoelástico de Maxwell que circula a través de un tubo de radio $a = 5 \times 10^{-5}$ m (línea sólida), que es el valor típico del radio de las arteriolas del humano; y un tubo de radio $a = 2.5 \times 10^{-5}$ m (línea punteada), que se incluye para mostrar el efecto del tamaño del sistema sobre la permeabilidad. Se usaron los siguientes valores para la sangre: $\mu = 4 \times 10^{-3} \frac{Kg}{m \cdot s}$, $\rho = 1050 \frac{Kg}{m^3}$ y $t_r = 1 \times 10^{-3}$ s.

lugar a dos nuevas ramas de la red. En cada nivel de bifurcación de la red, i , se tiene la posibilidad de cambiar el radio y la longitud de los vasos. La red está caracterizada por su número de niveles, y por la longitud y el área de la sección transversal de los vasos en cada nivel. En este modelo se consideró una red simétrica para las partes arterial y venosa, dando lugar a una red cerrada. Los segmentos que se encuentran a la misma distancia de la rama principal pertenecen al mismo nivel. Se consideran como niveles externos de la red los que están más cerca de la rama principal, y como niveles internos los que resultan de varias bifurcaciones sucesivas de la rama principal. En la figura 2.3 se presenta un esquema del modelo para una red de 4 niveles. Se puede ver que la numeración de los niveles va de niveles externos a niveles internos en la red. Los nodos se indican con números dentro de círculos.

La red está conformada por cilindros rígidos, es decir, no se toman en cuenta efectos como la vasodilatación y la vasoconstricción de los vasos sanguíneos. Además, se consideró una red en la que sólo existe velocidad axial, esto es, por simplicidad se ignoran los efectos de las bifurcaciones y las juntas. Por último, se considera que la ley de Darcy generalizada

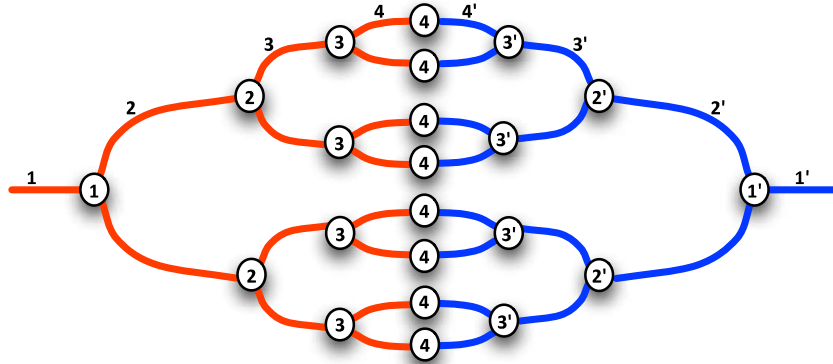


Figura 2.3- Esquema de una red de 4 niveles. Tomado de [17].

se cumple en cada vaso de la red, y por tanto $\hat{Q}_i(\omega) = -\frac{A_i \hat{K}_i}{\mu} \frac{d\hat{p}}{dx} \Big|_i$. El índice, i , indica el número de nivel de bifurcación en la red.

El flujo total en una red de longitud, L , en la que se tiene una caída de presión, ΔP , se puede escribir como una ley de Darcy, tal que:

$$\hat{Q}_{total} = -\frac{\hat{\chi}(\omega)}{\mu} \frac{\Delta \hat{P}}{L}, \quad (2.6)$$

en donde se ha definido la función respuesta de la red $\hat{\chi} = A_{eff} K_{eff}$ como el producto de un área efectiva, A_{eff} , y una permeabilidad efectiva, K_{eff} , para toda la red.

Por conservación de la masa, el flujo en cada vaso del nivel i es $Q_i = Q_{total}/2^{i-1}$, y se supone que la caída de presión total, ΔP , es la suma de las caídas de presión individuales, la respuesta dinámica de la red, $\hat{\chi}$, se escribió en términos de la permeabilidad dinámica de los vasos individuales como [17]:

$$\frac{1}{\hat{\chi}} = \frac{2}{L} \sum_{i=1}^{N_T} \frac{l_i}{2^{i-1} A_i \hat{K}_i}, \quad (2.7)$$

en donde N_T es el número total de niveles de la parte arterial de la red. En la figura 2.4 se muestra la respuesta de una red de 11 niveles de vasos iguales (con radios y longitudes iguales) como función de la frecuencia. La respuesta dinámica de la red como función de la frecuencia, hereda el comportamiento no monótono propio de la permeabilidad dinámica de los vasos individuales. Se puede ver que existen ciertas frecuencias que incrementan la respuesta y, en consecuencia, favorecen el flujo.

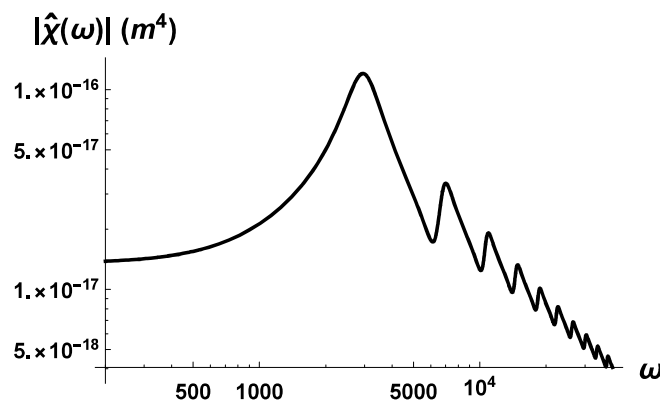


Figura 2.4- Magnitud de la función respuesta para una red de 11 niveles de vasos iguales. El radio de los vasos es $a = 5 \times 10^{-5}$ m, que es el valor típico del radio de las arteriolas del humano. Se usaron los siguientes valores para los parámetros de la sangre: $\mu = 4 \times 10^{-3} \frac{Kg}{m s}$, $\rho = 1050 \frac{Kg}{m^3}$ y $t_r = 1 \times 10^{-3}$ s.

En la ecuación (2.7), el término $\frac{l_i}{A_i K_i}$ se puede interpretar como una resistencia al flujo en cada tubo del nivel i en la red. En una analogía eléctrica, la resistencia de cada resistor está dada por $R_i = \frac{l_i}{A_i K_i}$.

Para un solo modo en la caída de presión total dependiente del tiempo $\Delta P(t) = \Delta P_0 \cos(\omega_0 t)$, el flujo total de la red como función del tiempo se escribe como:

$$Q(t) = -\frac{1}{\mu} \{Re[\hat{\chi}(\omega_0)] \cos(\omega_0 t) + Im[\hat{\chi}(\omega_0)] \sen(\omega_0 t)\} \frac{\Delta P_0}{L} \quad (2.8)$$

y su amplitud está dada por:

$$Q^{max} = \frac{1}{\mu} |\hat{\chi}(\omega_0)| \frac{\Delta P_0}{L}. \quad (2.9)$$

Las partes real e imaginaria de la función respuesta nos dan las contribuciones al flujo, en fase y fuera de fase, con la caída de presión. La ecuación (2.9) evidencia la importancia de la función respuesta. Esta función no sólo nos permite calcular el flujo como función del tiempo en la red (ecuación (2.8)), sino que también nos permite predecir el flujo máximo para cada modo en la caída de presión, ya que su magnitud es el factor de proporcionalidad entre la caída de presión y la amplitud del flujo. Por tanto, a una misma caída de presión, a mayor respuesta mayor amplitud de flujo. A bajas frecuencias, la respuesta de la red (y el flujo total) no se diferencian de los de estado estacionario, en donde las respuestas son reales y el segundo término de la ecuación (2.8) es despreciable. Sin embargo, se mantuvo el formalismo lo más general posible para hacerlo aplicable a cualquier rango de frecuencias.

2.3. Redes vasculares rígidas con anastomosis

La anastomosis en el contexto de la vasculatura sanguínea se refiere a los puentes entre vasos que permiten la formación de circuitos. Un modelo para estudiar anastomosis en una red de vasos fue propuesto por J. Flores y colaboradores [18, 19]; aquí mencionamos algunos de los resultados de ese estudio, que más adelante serán útiles para discutir el presente trabajo.

La anastomosis puede ocurrir entre cualesquiera dos niveles del árbol. En [18, 19] se definió la extensión del puente anastomótico, S (por la inicial de la palabra *span* en inglés) como la diferencia entre los niveles de los vasos que conecta el puente anastomótico. Por ejemplo, si la anastomosis conecta vasos del nivel n con vasos del nivel $n+1$, se dice que la extensión del puente anastomótico es uno ($S = 1$); si conecta vasos del nivel n con vasos del nivel $n+2$, se dice que la extensión del puente anastomótico es dos ($S = 2$), y así sucesivamente.

En la figura 2.5 se muestra un esquema del modelo. En este ejemplo, el vaso anastomótico crea un puente que une vasos del nivel 2 con vasos del nivel 4, por consiguiente la extensión del puente es $S = 2$. En este modelo, los radios y longitudes de los vasos anastomóticos se fijaron como aquellos de los vasos internos en la conexión, esto está indicado en la figura 2.5 con un número 4 que etiqueta al vaso anastomótico. Para mantener la simetría de la red, este modelo consideró anastomosis en la parte arterial y en la parte venosa.

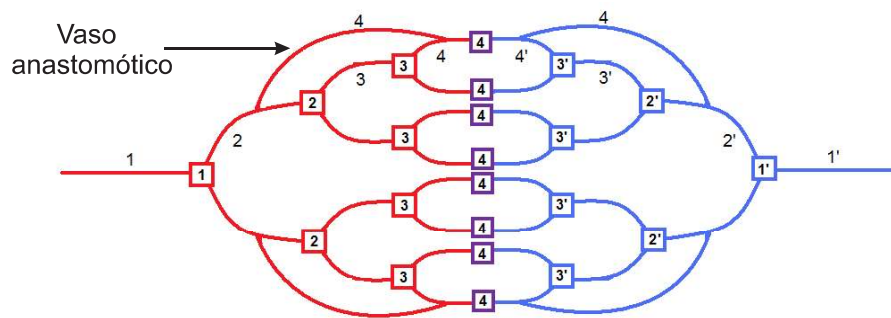


Figura 2.5- Esquema de una red de 4 niveles con puentes anastomóticos que saltan del nivel 2 al 4 ($S = 2$). Tomado de [18, 19].

Para estudiar el efecto que tiene la ubicación de la anastomosis en la red, es decir, el nivel en el que ocurre la anastomosis, se consideró que la anastomosis ocurría en todas las ramas correspondientes a dicho nivel. Se utilizó el índice n para indicar el nivel de bifurcación de la red en el que comienza el puente anastomótico.

2.3.1. Red de vasos iguales

En el análisis de redes de vasos iguales, se encontró que mientras más grande es la extensión del puente anastomótico, mayor es la respuesta de la red, como se muestra en la figura 2.6. En términos físicos, esto significa que cuando el puente o vaso anastomótico conecta regiones lejanas del árbol, el flujo total de la red aumenta. Se encontró también que la respuesta dinámica es mayor mientras más externo es el nivel en donde ocurre la anastomosis. La

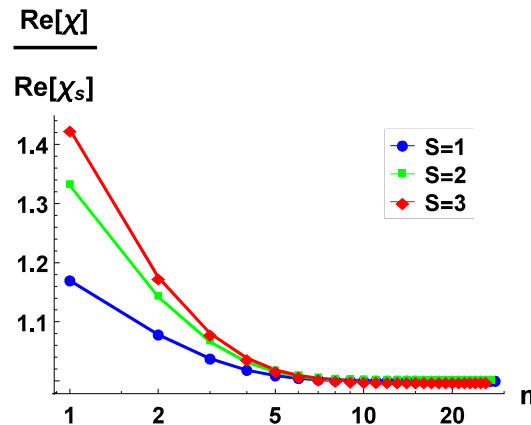


Figura 2.6- Respuesta dinámica de redes de vasos iguales como función del nivel n en el que ocurre la anastomosis. Se usaron extensiones del puente anastomótico de uno, dos y tres, esto es, $S = 1$, $S = 2$ y $S = 3$, en azul, verde y rojo, respectivamente. La respuesta está normalizada respecto a la respuesta de la red sin anastomosis χ_s . La respuesta es mayor cuando la anastomosis ocurre en los niveles externos del árbol ramificado (cercanos a la rama principal) y cuando la extensión del puente anastomótico es mayor. Es importante hacer notar que cada punto en esta figura representa una red distinta, cada una con su determinada extensión del puente anastomótico en el nivel n . Las dimensiones de los vasos de la red son las típicas de las arteriolas en el humano [13]. Tomado de [18, 19].

respuesta de la red decae monótonamente con el número de nivel, n , en donde ocurre la anastomosis, como se muestra en la figura 2.6. Físicamente, esto implica, que los circuitos creados por anastomosis aumentan el flujo sanguíneo cuando se encuentran en los vasos externos de la red. El resultado más notable en [18, 19], fue un aumento de hasta 42.5% en la amplitud del flujo, para una red de vasos iguales, relativo al flujo sin anastomosis.

Cabe mencionar que, al igual que sucede con la permeabilidad a bajas frecuencias, la parte real de la respuesta es mucho mayor que su correspondiente parte imaginaria. Es por esto que, los resultados de la figura 2.6, obtenidos a la frecuencia cardiaca del humano, se muestran para la parte real de la respuesta.

Como parte del análisis matemático presentado en [18, 19], se definió $\mathbf{a}_i = \frac{R_i}{R_{i-1}}$ como el cociente de resistencias de los vasos de dos niveles secuenciales en la red sin anastomosis

(red subyacente), en donde $R_i = \frac{l_i}{A_i K_i}$ (como se vio en la sección 2.2). Debido a que las resistencias contienen a las permeabilidades dinámicas de los vasos individuales, en general son complejas. Sin embargo, hay situaciones en las cuales la parte imaginaria de la permeabilidad es despreciable comparada con la parte real. Por esta razón, el análisis matemático fue hecho para α real.

Para una red de vasos iguales, en donde las resistencias también son iguales para todos los vasos, esto es, $\alpha_i = 1$; se encontró que el logaritmo de la parte real de la diferencia de la respuesta con y sin anastomosis sigue la relación

$$\ln(\operatorname{Re}[\chi - \chi_s]) \approx \ln\left(\frac{1}{2}\right) n + C. \quad (2.10)$$

La cantidad $\ln(\operatorname{Re}[\chi - \chi_s])$ se puede aproximar a una línea recta como función del nivel n en el cual ocurre la anastomosis. Esta función decae con una pendiente igual a $\ln(\frac{1}{2})$, esto significa que, entre más externo sea el nivel en el que ocurre la anastomosis, mayor será la respuesta. El término C es independiente de n , pero dependiente de las características geométricas de la red subyacente (red sin anastomosis).

La ecuación (2.10) establece una relación analítica entre la estructura geométrica de la red subyacente (red de vasos iguales) y el efecto que produce la anastomosis en el flujo. En este caso, se encontró que la anastomosis tiene un efecto mayor sobre el flujo cuando se encuentra en los vasos externos de la red. La conclusión más importante de [18, 19] es que la respuesta de la red con anastomosis está fuertemente determinada por la red subyacente.

2.4. Redes vasculares rígidas con obstrucciones

En el contexto de la vasculatura sanguínea, una obstrucción implica la reducción del área disponible de flujo en un vaso, producido por ejemplo, por el depósito de grasa en la pared

interna del mismo.

En [20], propusimos un modelo que relaciona las características geométricas de una red arterial con el flujo que pasa a través de ella cuando se presentan obstrucciones. Este modelo está basado en [21], pero fue modificado para contemplar exclusivamente la parte arterial de la red.

El modelo más simple para simular una obstrucción consiste en la reducción del área de la sección transversal del vaso. Consideramos además, que las obstrucciones ocurren en la mitad de las ramas del árbol correspondientes a un mismo nivel n de la red, como se muestra en la figura 2.7 a). Tal patrón de obstrucción, no representa condiciones fisiológicas realistas, pero es útil para resaltar el papel del lugar en donde ocurren las obstrucciones.

En este trabajo usamos una analogía eléctrica para resolver el problema de una red vascular obstruida. Como se vio en la sección 2.2, la resistencia de un vaso se calcula como $R_i = \frac{l_i}{A_i K_i}$. En esta expresión, se puede ver que los vasos correspondientes a un mismo nivel en la red (con radios y longitudes iguales) oponen la misma resistencia al flujo. Cuando un vaso se obstruye, su resistencia es mayor que la del vaso sin obstruir, como consecuencia de la reducción del área de flujo. Una obstrucción del 0% se refiere a un vaso sin obstrucción y una obstrucción del 100% se refiere a un vaso totalmente obstruido, con resistencia infinita.

La figura 2.7 b) muestra un esquema de la analogía eléctrica utilizada para resolver estas ecuaciones. Las resistencias mostradas en la figura están dadas por:

$$R_{n-2} = \frac{l_{n-2}}{A_{n-2} K_{n-2}}, \quad R_{n-1} = \frac{l_{n-1}}{A_{n-1} K_{n-1}}, \quad R_n = \frac{l_n}{A_n K_n},$$

$$R_n^{obs} = \frac{l_n}{(1-f) A_n K_n^{obs}}, \quad R_{int} = \sum_{i=n+1}^{N_T} \frac{R_i}{2^{i-n}}.$$

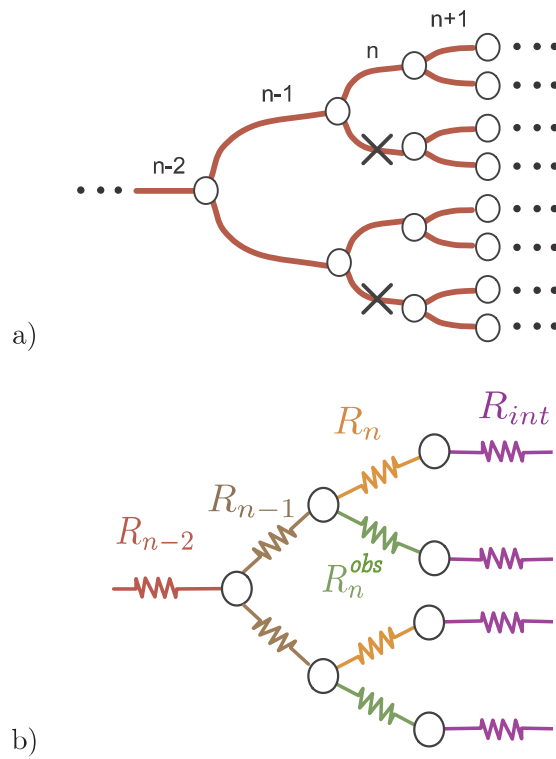


Figura 2.7- Analogía eléctrica para una red con obstrucciones en la mitad de los vasos del nivel n . R_{n-2} representa cada resistencia en color rojo, R_{n-1} se refiere a cada resistencia en café, R_n corresponde a cada resistencia en naranja, R_n^{obs} representa cada resistencia en verde y R_{int} se refiere a la resistencia de cada parte de la red interna en morado.

En donde f es la fracción del área de la sección transversal obstruida, por ejemplo $f = 0.3$ significa una obstrucción del 30 %, y K_n^{obs} es la permeabilidad de este vaso.

La resistencia total de una red de N_T niveles, obstruida en el nivel n está dada por:

$$\frac{L}{\chi} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{R_i}{2^{i-1}} + \frac{1}{2^{n-2}} \frac{R_{int}^2 + R_{int}(R_n^{obs} + R_n) + R_n^{obs} R_n}{2R_{int} + R_n^{obs} + R_n} \quad (2.11)$$

Con la analogía eléctrica, las ecuaciones de conservación de flujo y de caída de presión se convierten en las ecuaciones clásicas de conservación de corriente y diferencia de potencial. La respuesta dinámica de una red, χ , se puede determinar, a partir de su longitud y de su resistencia total, R_T , como $\frac{1}{\chi} = \frac{1}{L} R_T$. A una caída de presión dada, esta respuesta

determina el flujo a través de la red mediante la ecuación (2.6).

2.4.1. Red de vasos iguales

Para estudiar los principales efectos de tener obstrucciones en la red, en [21], empezamos por analizar una red de vasos con radios y longitudes iguales, que es el caso de varias redes a nivel de arteriolas. Se usó una red de 11 niveles conformada por vasos con las dimensiones típicas de las arteriolas del perro ($a = 10\mu\text{m}$ y $l = 0.2\text{cm}$) [22]. Se obstruyeron la mitad de los vasos del nivel n , siguiendo el modelo de obstrucción detallado anteriormente. La figura 2.8 muestra las funciones respuesta de varias redes cuando se obstruyen en el nivel n con diferentes grados de obstrucción. En esta gráfica se reporta la respuesta de la red obstruida, χ , normalizada por la respuesta de la red sin obstruir (red subyacente), χ_s . Este cociente es una medida del efecto de la obstrucción en la red.

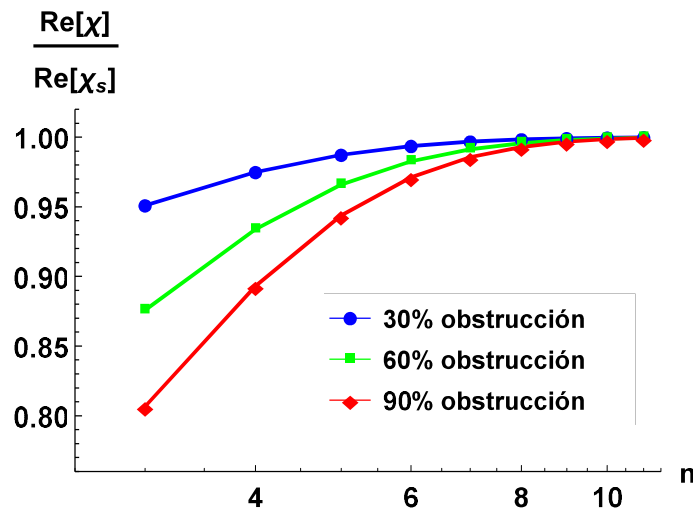


Figura 2.8- Respuesta dinámica de redes de vasos iguales como función del nivel n en el que se encuentran los vasos obstruidos. La respuesta está normalizada respecto a la respuesta de la red sin obstrucciones, χ_s . La respuesta es menor cuando las obstrucciones se encuentran en los niveles externos del árbol (cercanos a la rama principal) y cuando el grado de obstrucción es mayor. Es importante hacer notar que cada punto en esta figura representa una red distinta, cada una con un determinado grado de obstrucción en el nivel n . Se usó una red de 11 niveles con las características geométricas de las arteriolas del perro ($a = 10\mu\text{m}$ y $l = 0.2\text{cm}$).

Como es de esperarse, cuando se tienen obstrucciones en una red, la respuesta total disminuye respecto a la respuesta de la red sin obstruir. Además, mientras mayor es el grado de obstrucción, menor es la función respuesta de la red. También se puede observar que el efecto causado por las obstrucciones es relativamente pequeño cuando éstas suceden en los vasos internos, y relativamente grande cuando éstas suceden en los vasos externos, a pesar de que en todos los casos se obstruye el mismo porcentaje de la sección transversal de la red a determinado nivel. La respuesta de la red aumenta monótonamente con el número de nivel n en el cual ocurre la obstrucción. Esto sucede para cualquier grado de obstrucción. Físicamente, esto implica que para un tejido sano, irrigado por una red similar a un árbol, las oclusiones son más peligrosas cuando ocurren en vasos de generaciones tempranas, ya que el suministro de sangre disminuye drásticamente.

Es importante hacer notar que en este estudio de obstrucciones en una red de vasos iguales se obtuvo un resultado opuesto al obtenido por J. Flores y colaboradores en [18, 19] para una red de vasos iguales con anastomosis. Esto es, en [18, 19] se encontró que tanto la respuesta como el flujo en una red con anastomosis son mayores que en la red subyacente. Lo contrario sucede en una red obstruida, en donde la respuesta y el flujo son siempre menores que en la red subyacente. En ambos trabajos se observa que cuando se tienen alteraciones anatómicas de la red subyacente -ya sea en forma de obstrucciones o de anastomosis- el efecto es mayor tanto en la respuesta como en el flujo si las alteraciones ocurren en los niveles externos. Esto se ve claramente en las figuras 2.6 y 2.8.

A continuación, se explica brevemente una parte del análisis matemático presentado en [18, 19] que es útil para entender estos resultados. La ecuación (2.7) para la red subyacente, se puede reescribir en términos de la resistencia, R_i , de cada vaso del nivel i , esto es:

$$\frac{1}{\chi} = \frac{2}{L} \sum_{i=1}^{N_T} \frac{R_i}{2^{i-1}}. \quad (2.12)$$

Si se define una progresión de resistencias, en la que el cociente de las resistencias de los vasos de cualesquiera dos niveles secuenciales es el mismo, la resistencia de los vasos del nivel i se puede escribir como $R_i = \mathbf{a}^{i-1}R_1$, en donde \mathbf{a} es el cociente de las resistencias de los vasos de dos niveles secuenciales de la red subyacente. Por tanto, la ecuación anterior se puede escribir como:

$$\frac{1}{\chi} = \frac{2}{L} \sum_{i=1}^{N_T} \left(\frac{\mathbf{a}}{2}\right)^{i-1} R_1. \quad (2.13)$$

De esta expresión es claro que la contribución de cada término de la suma a la respuesta de la red, dependerá del valor de \mathbf{a} . Consideramos \mathbf{a} real tal como se explicó en la sección 2.3. Para $\mathbf{a} < 2$ tenemos $\frac{\mathbf{a}}{2} < 1$, y $\frac{\mathbf{a}}{2}$ elevado a una potencia positiva es menor mientras mayor sea el exponente, por lo que los niveles que más contribuyen a la respuesta de la red son los niveles externos. Físicamente, esto significa que, para valores de $\mathbf{a} < 2$, las obstrucciones son más peligrosas cuando ocurren en vasos de los primeros niveles de bifurcación debido a que la respuesta de la red (y en consecuencia, el flujo) decrece dramáticamente. Por otro lado, cuando $\mathbf{a} > 2$, las obstrucciones son más peligrosas cuando se encuentran en vasos muy internos, resultantes de varias bifurcaciones de la red, debido a que conllevan a una disminución del flujo sanguíneo. El caso $\mathbf{a} = 2$, es el caso en el que la contribución de las resistencias de cada nivel a la suma en la ecuación (2.13) es independiente del número de nivel. La respuesta en este caso se vuelve $\chi = \frac{L}{N_T R_1}$, y las obstrucciones afectan igualmente al flujo independientemente de donde se encuentren. Para una red de vasos iguales, en donde las resistencias de los vasos también son iguales, $\mathbf{a} = 1$. Por lo tanto, los niveles que más contribuyen a la respuesta de la red son los niveles externos.

Como vimos, para redes de vasos iguales en presencia de obstrucciones, la afectación en la respuesta de la red es mayor cuando las obstrucciones se encuentran en los niveles externos (figura 2.8). Esto indica, que el resultado obtenido para la red subyacente en la discusión anterior, es robusto en presencia de alteraciones anatómicas como las obstrucciones.

En [20, 21] se hizo un análisis matemático similar al reportado en [18, 19], mediante el cual se obtuvo la siguiente expresión analítica aproximada para la respuesta dinámica de una red de vasos iguales obstruida por una fracción del área f en el nivel n ,

$$\ln(\chi_s - \chi) \approx \ln\left(4\frac{R_1\chi_s^2}{L}\right) + \ln\left(\frac{2f - f^2}{4 - 6f + 3f^2}\right) + n \ln\left(\frac{1}{2}\right), \quad (2.14)$$

en donde R_1 es la resistencia de cada vaso de la red y χ_s es la respuesta de la red sin obstrucciones (red subyacente). Esta relación indica que la cantidad $\ln(Re[\chi_s - \chi])$ es una línea recta como función del nivel obstruido. El último término de la ecuación está relacionado con el lugar geométrico n en donde ocurre la obstrucción y con la estructura de bifurcación de la red de árbol, a través de $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$. Los demás términos de la ecuación son independientes de n , pero dependientes de las características de la red subyacente y de la fracción de área obstruida f . Esta expresión analítica muestra explícitamente el papel que juegan la estructura de la red, el grado de obstrucción y el lugar geométrico en el que ocurren las obstrucciones en la función respuesta de la red obstruida.

En la figura 2.9 se muestran los resultados exactos para la cantidad $\ln(Re[\chi_s - \chi])$, obtenidos a partir de la resistencia total de la red obstruida en el nivel n (ecuación (2.11)), y los resultados calculados mediante la aproximación analítica (ecuación (2.14)) para una red de 20 niveles. La aproximación concuerda muy bien con los resultados exactos, independientemente del nivel n en el que se presente la obstrucción.

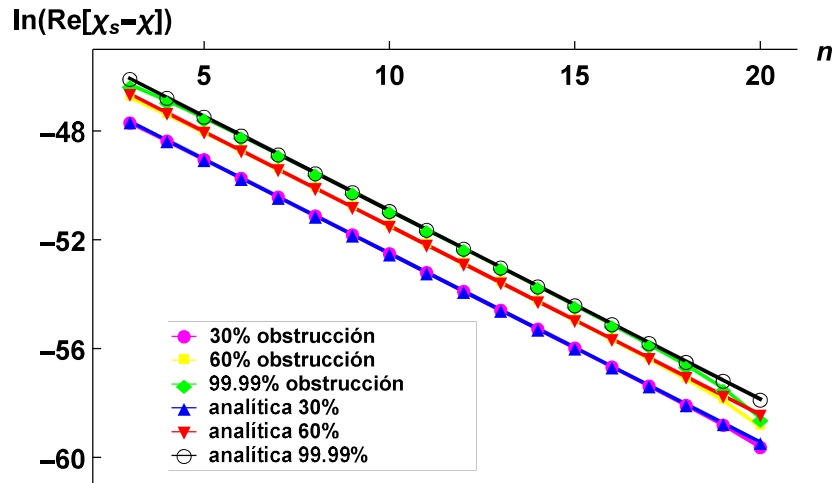


Figura 2.9- Logaritmo de la parte real de la diferencia de la respuesta con obstrucción y sin obstrucción, como función del nivel n en donde se encuentran las obstrucciones. Se usó una red de 20 niveles con las características geométricas de las arteriolas del perro.

2.4.2. Red de vasos cuyos radios siguen la ley de Murray

Aunque los resultados de esta sección forman parte del trabajo de mi tesis doctoral, los incluyo en los antecedentes por congruencia con la presentación de la tesis.

En [20] estudiamos no sólo redes de vasos iguales sino también redes más complejas. Las redes vasculares reales están formadas por vasos de diferentes radios y longitudes, por lo que presentan cambios en resistencia de un nivel de bifurcación a otro. En vasculaturas de tipo árbol, esto normalmente implica un incremento en las resistencias de los vasos de un nivel a otro, ya que los vasos internos tienen menor radio.

Suponiendo que el sistema vascular está optimizado con el fin de minimizar la potencia requerida para mantener y hacer circular la sangre [23], Murray derivó en 1926, la relación conocida como Ley de Murray, la cual establece que cuando el flujo es proporcional al cubo del radio ($Q \propto a^3$) se cumple la condición de mínima energía. Esta ley también relaciona el

radio de un vaso, a_p , con los radios de los vasos que le siguen después de una bifurcación, a_{d1} y a_{d2} , como sigue:

$$a_p^3 = a_{d1}^3 + a_{d2}^3. \quad (2.15)$$

De acuerdo con un trabajo extenso sobre la validez de la Ley de Murray [24] y una revisión sobre el flujo vascular de la referencia [25], hay estudios fisiológicos que muestran que una gran parte de las vasculaturas de mamíferos concuerdan razonablemente con la ecuación (2.15). De acuerdo con [25], existen también diversos trabajos de estudios fisiológicos en animales distintos de los mamíferos [26] e incluso en plantas [27, 28, 29], que muestran un buen acuerdo con la Ley de Murray.

Por lo anterior, consideramos un sistema que sigue la Ley de Murray como un ejemplo de relevancia fisiológica para el estudio de alteraciones anatómicas en redes vasculares. En dicho estudio consideramos bifurcaciones simétricas, en las cuales los radios de niveles subsecuentes en la red están dados por:

$$a_i = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} a_{i-1}, \quad (2.16)$$

en donde el valor del radio del primer nivel es el de la aorta del perro ($a_1 = 0.5\text{cm}$). Por otra parte, para las longitudes de los vasos consideramos una ley de potencia que decae como función del nivel de bifurcación, i , con los parámetros necesarios para ir desde la longitud de la aorta en el primer nivel ($l_1 = 40\text{cm}$) hasta la longitud de los capilares en el último ($l_{29} = 0.1\text{cm}$).

Usamos una red de vasos de 29 niveles con radios que siguen la Ley de Murray y longitudes que decaen con la ley de potencias descrita anteriormente. Usamos la densidad de la sangre $\rho = 1050 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$, un tiempo de relajación de 0.001 s, la viscosidad de la sangre del

perro $\mu = 15 \times 10^{-3} \frac{Kg}{m\ s}$ y su frecuencia cardiaca $\nu = 1.5Hz$.

Las figuras 2.10 a) y 2.10 b) muestran las partes real e imaginaria del cociente de dos resistencias secuenciales de la red subyacente, $\mathbf{a}_i = \frac{R_i}{R_{i-1}}$, en donde $R_i = \frac{l_i}{A_i K_i}$. El carácter complejo de \mathbf{a}_i se debe a que el sistema no está en estado estacionario, sino que está forzado a la frecuencia cardiaca del perro. Como sucede en cualquier vasculatura real, el valor de \mathbf{a} cambia a lo largo de la red conforme lo hacen los radios y las longitudes de los vasos que la conforman. Una disminución del radio entre los vasos de dos niveles subsecuentes produce un aumento en la resistencia, por otra parte una disminución de la longitud entre los vasos de dos niveles subsecuentes conlleva a una disminución en la resistencia. La interacción de estas dos cantidades determina el valor de \mathbf{a} .

Las figuras 2.10 c) y 2.10 d) muestran la parte real e imaginaria de la respuesta como función del nivel n en donde se encuentran las obstrucciones. Como se puede ver en las figuras 2.10 a) y 2.10 c), la parte real de \mathbf{a} es menor que 2 en el mismo rango (niveles externos) en que la parte real de la respuesta aumenta como función del nivel n en donde ocurren las obstrucciones. Asimismo, la parte real de \mathbf{a} es mayor que 2 en el mismo rango (de niveles internos) en que la parte real de la respuesta disminuye como función del nivel, n , en el que ocurren las obstrucciones. Esto está en acuerdo con el análisis presentado en [18, 19] y discutido en las secciones 2.3.1 y 2.4.1.

Obtuvimos aproximaciones analíticas para la respuesta de una red con obstrucciones, en las cuales el cociente de resistencias es mayor que dos o menor que dos. Estas aproximaciones concuerdan con los resultados numéricos cuando la parte real de \mathbf{a} es considerablemente mayor que su parte imaginaria. Éstas están dadas por:

$$\ln(\text{Re}[\chi_s - \chi]) \approx \ln\left(4\frac{R_1\chi_s^2}{L}\right) + \ln\left(\frac{2f - f^2}{\mathbf{a}[4 + (2 + \mathbf{a})(f^2 - 2f)]}\right) + n \ln\left(\frac{\mathbf{a}}{2}\right) \quad (2.17)$$

para $a < 2$, y

$$\ln(\operatorname{Re}[\chi_s - \chi]) \approx \ln\left(4\frac{R_1\chi_s^2}{L}\right) + \ln\left(\frac{2f - f^2}{4a(1-f)^2}\right) + n \ln\left(\frac{a}{2}\right) \quad (2.18)$$

para $a > 2$.

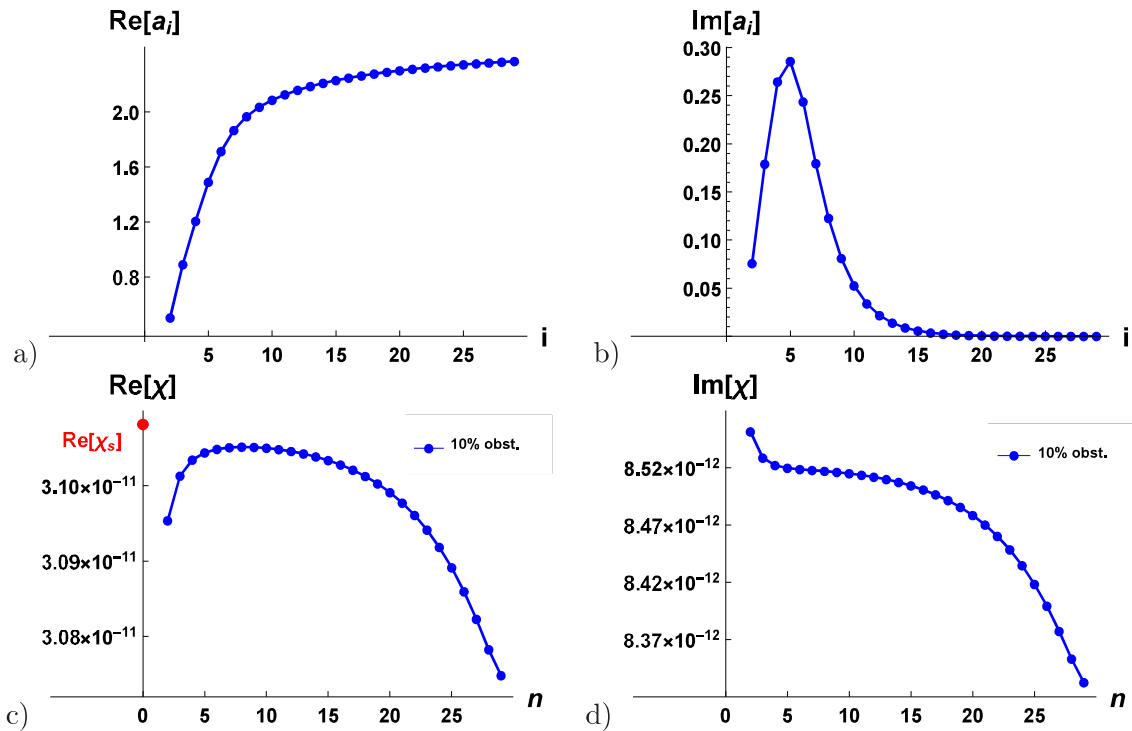


Figura 2.10- a) y b) Partes real e imaginaria del cociente de resistencias de vasos de niveles secuenciales, $a_i = \frac{R_i}{R_{i-1}}$, como función del nivel i de la red subyacente. c) y d) Partes real e imaginaria de la respuesta (en m^4) como función del nivel n en el que ocurren las obstrucciones. El punto rojo en c) indica como referencia la parte real de la respuesta de la red subyacente (red de tipo árbol sin obstrucciones). Cuando hay obstrucciones en el nivel n (puntos azules) la respuesta es menor que la de la red subyacente. Cabe hacer notar que el subíndice i se usa para hacer referencia a una propiedad de la red subyacente, y el subíndice n para hacer referencia al nivel en el que se encuentran las obstrucciones.

En las ecuaciones (2.17) y (2.18), R_1 es la resistencia del vaso del primer nivel de la red y χ_s es la respuesta de la red subyacente. En estas expresiones se ve claramente el papel que juegan la estructura de la red ($\ln\left(\frac{a}{2}\right)$), la posición de la obstrucción (n), y el grado de

obstrucción (f), en la respuesta de la red obstruida.

En las aproximaciones analíticas (ecuaciones (2.17) y (2.18)), el término $n \ln \left(\frac{a}{2} \right)$ contiene la información de la estructura de la red subyacente y determina las diferentes tendencias de la respuesta de la red obstruida para $a < 2$ y para $a > 2$.

RESPUESTA DINÁMICA DE FLUIDOS NEWTONIANOS Y VISCOELÁSTICOS EN REDES DE TUBOS RÍGIDOS CON REDUNDANCIA

En este trabajo [30], estudiamos redes redundantes y no redundantes, que en ausencia de obstrucciones oponen la misma resistencia al flujo, y las denominamos redes equivalentes. Para éstas, el costo energético para fluir y el flujo mismo -dado un gradiente de presión- son idénticos. Analizamos cómo se modifica el flujo en redes equivalentes cuando se presentan obstrucciones.

Se estudiaron redes fluídicas de tubos iguales, potencialmente útiles en microfluídica -en donde las obstrucciones pueden causar la falla de algún dispositivo-, y redes fisiológicas realistas -en las cuales las obstrucciones pueden comprometer la irrigación de un tejido-.

3.1. Introducción

La redundancia constituye un aspecto fundamental e intrínseco de gran variedad de sistemas naturales, está presente en ecosistemas, y en procesos metabólicos y genéticos [31, 32, 33, 34], provee caminos alternativos para que un proceso ocurra y tiene una función protectora en caso de falla de las partes o mecanismos frágiles de los sistemas. En general, la redundancia es cara desde un punto de vista energético, sin embargo, los sistemas naturales presentan características redundantes cuando los beneficios superan a los «costos». En imitación de la naturaleza, se ha incorporado la redundancia a diversos sistemas manufacturados para garantizar la fiabilidad de los mismos cuando el costo de fallos es demasiado

alto. La redundancia, por ejemplo, es usada en la industria de los semiconductores para tener microchips confiables [35, 36]. También está presente en el hardware de computadoras y en el software de sistemas operativos [37, 38, 39].

La redundancia en redes fluídicas ocurre en muchos sistemas naturales, por ejemplo, en el xilema de los árboles que transporta la sabia, o en la red de vasos linfáticos de los humanos. En mamíferos, el grado de redundancia naturalmente integrada (que denominamos intrínseca) en redes de vasos sanguíneos es particularmente relevante en padecimientos vasculares [40, 41, 42, 43]. Los puentes anastomóticos naturales que se encuentran en las arterias coronarias e irrigan el corazón de las personas que tienen la fortuna de tenerlos, pueden salvarles la vida en caso de sufrir un ataque cardíaco [40]. La redundancia intrínseca también es importante en la circulación cerebrovascular de personas sanas. Ésta juega un papel clave en la fisiología de la isquemia cerebral (falta de oxígeno), ya que hace a la red resistente a los eventuales bloqueos y permite la redistribución de la sangre. Su presencia es fundamental para asegurar la preservación del flujo sanguíneo y para mantener el abastecimiento de nutrientes a un tejido, proveyendo a la red de caminos alternativos en caso de obstrucciones.

Se han reportado simulaciones detalladas de flujo, alrededor de obstrucciones vasculares parciales, en estructuras redundantes [44, 45, 46, 47, 48]. Éstas describen la velocidad, la existencia de vórtices y el valor de los esfuerzos en la pared en distintos puntos de los vasos.

En este trabajo, nos enfocamos en estudiar los efectos globales sobre el flujo cuando se tienen obstrucciones en redes redundantes y no redundantes tipo árbol. Las redes tipo árbol son omnipresentes en sistemas naturales [24, 25, 27, 49, 50, 51]. Éstas representan modelos matemáticos ideales para estudiar redes [23, 49, 50, 51] y se han utilizado también en el estudio de dispositivos microfluídicos [52]. Es por ello que usamos este tipo de redes como

sistemas modelo cuyos resultados podrían ser aplicados en diferentes campos. Para contar con un sistema genérico, útil por ejemplo en el diseño de dispositivos microfluídicos -en donde las obstrucciones pueden causar la falla del dispositivo-, estudiamos redes de tubos iguales. Por otra parte, con el propósito de estudiar redes fisiológicas realistas, como el sistema circulatorio -en el cual las obstrucciones pueden comprometer la irrigación de un tejido-, consideramos redes en las que los radios de los vasos siguen la ley de Murray [23]. Además existe en la literatura un interés por construir dispositivos biomiméticos micro y nanofluídicos que sigan los principios de optimización que conducen a la ley de Murray en redes biológicas [52]. En las vasculaturas animales existe otro tipo de redundancia, en la que los organismos crean vasos como respuesta a una condición de enfermedad. Esta redundancia es diferente a la del presente trabajo, a la que denominamos *intrínseca*, por estar presente en vasculaturas sanas.

Aún cuando resulta intuitivo pensar que la redundancia intrínseca hace que las redes sean robustas, uno podría imaginar otras topologías de red con idéntica resistencia al flujo, como redes con tubos más anchos. Surge por consiguiente la pregunta de por qué y en qué situaciones es mejor tener redes redundantes. En este trabajo, explicamos bajo qué circunstancias el flujo que proporciona la redundancia intrínseca es más efectivo que el suministrado por redes no redundantes de tubos más anchos. Exploramos también el problema de en qué lugar de la red, la redundancia tiene un mayor beneficio cuando hay obstrucciones. Además, proponemos un criterio para medir la tolerancia de las redes a las oclusiones. Estudiamos también el impacto que la redundancia tiene en la rapidez de deformación a lo largo de la red, ya que la rapidez de deformación es un factor crucial asociado a la falla de materiales y es fundamental en la remodelación de las vasculaturas arteriales [53, 54]. Mostramos además que la redundancia evita los enormes gradientes en la rapidez de deformación que provocan las obstrucciones cuando no está presente. Estos resultados no sólo representan un paso más en la comprensión de la circulación colateral

intrínseca, sino que proveen nuevos conocimientos sobre por qué, a pesar de un mismo costo energético asociado al flujo, la naturaleza ha elegido la redundancia intrínseca sobre redes no redundantes hemodinámicamente equivalentes para asegurar el suministro de sangre necesario para la irrigación de los tejidos en lugares clave del organismo. Este análisis también brinda orientación en el diseño de redes robustas en microfluídica, en las que, una elección adecuada de la cantidad y de los lugares en donde se encuentre la redundancia, puede evitar que la red falle debido al bloqueo causado por partículas o burbujas.

3.2. Modelo básico de anastomosis + obstrucción

Para estudiar conjuntamente anastomosis y obstrucciones en una red consideramos redes tipo árbol. Una red redundante consiste en una red de árbol no redundante más la redundancia introducida en forma de puentes anastomóticos, como en [18, 19]. Estos puentes tienen una extensión igual a dos, esto es, los puentes conectan vasos del nivel n con vasos del nivel $n + 2$. El inicio y el final de estos puentes se encuentran a la mitad de la longitud de los vasos que conectan, como se ilustra en la figura 3.1 a). Las dimensiones de los vasos anastomóticos se fijan iguales a las de los vasos que éstos saltan, es decir, corresponden a las dimensiones de los vasos del nivel $n + 1$. La cantidad de vasos anastomóticos en la red es igual a la mitad de los vasos del nivel $n + 1$. Por su parte, las obstrucciones se incluyen reduciendo el área de la sección transversal de los vasos evitados por la anastomosis, que son la mitad de los vasos del nivel $n + 1$. Esta forma de obstruir la red, que no representa la forma natural en que se ocluyen las redes, se ha elegido con el fin de resaltar el papel del lugar topológico, n , en el cual ocurren las oclusiones.

Como se ilustra en la figura 3.1 a), esta manera de incluir la mancuerna anastomosis-obstrucción en la red, siempre duplica la mitad de los vasos del nivel $n + 1$ de la red no redundante y también obstruye la mitad de los vasos de dicho nivel. Estudiamos el efecto en la dinámica del sistema de tener la mancuerna anastomosis-obstrucción en cierto nivel

n de la red. Es importante recordar que, para esta mancuerna, el índice n corresponde al nivel de bifurcación de la red del cual parten los vasos anastomóticos y $n + 1$ al nivel en el que se obstruyen la mitad de los vasos.

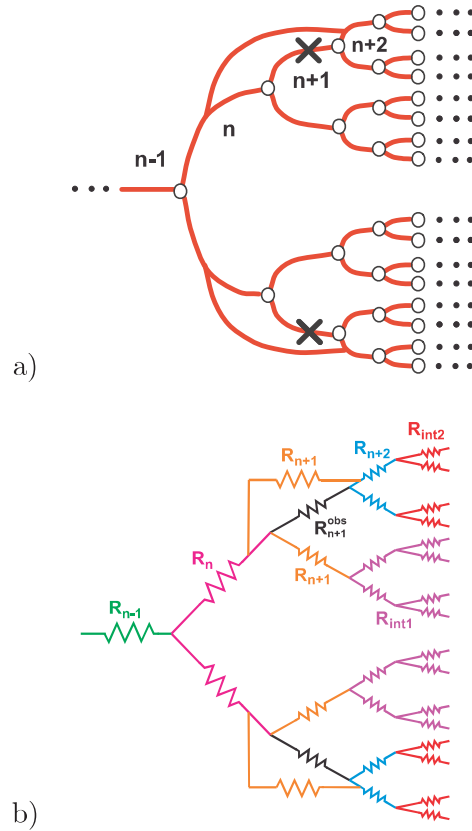


Figura 3.1- Analogía eléctrica para una red con anastomosis que comienza en el nivel n y con obstrucción en el nivel $n + 1$. R_{n-1} representa cada resistencia en color verde, R_n se refiere a cada resistencia en rosa, R_{n+1} corresponde a cada resistencia en naranja, R_{n+1}^{obs} representa cada resistencia en negro, R_{n+2} se refiere a cada resistencia en azul, R_{int1} corresponde a la resistencia de cada parte de la red en morado y R_{int2} corresponde a la resistencia de cada parte de la red en rojo.

Se utilizó una analogía eléctrica para resolver el problema de una red vascular con obstrucciones y anastomosis. Como se vio en la sección 2.2, la resistencia de un vaso se calcula como $R_i = \frac{l_i}{A_i K_i}$. La figura 3.1 b) muestra un esquema de la analogía eléctrica, en donde las resistencias mostradas están dadas por:

$$R_{n-1} = \frac{l_{n-1}}{A_{n-1} K_{n-1}}, \quad R_n = \frac{l_n}{A_n K_n}, \quad R_{n+1} = \frac{l_{n+1}}{A_{n+1} K_{n+1}}, \quad R_{n+1}^{obs} = \frac{l_{n+1}}{(1-f)A_{n+1} K_{n+1}^{obs}},$$

$$R_{n+2} = \frac{l_{n+2}}{A_{n+2} K_{n+2}}, \quad R_{int1} = \sum_{i=n+2}^{NT} \frac{R_i}{2^{i-(n+1)}}, \quad R_{int2} = \sum_{i=n+3}^{NT} \frac{R_i}{2^{i-(n+2)}}.$$

En donde f es la fracción del área de la sección transversal que ocupa la obstrucción, como se definió en la sección 2.4.

Con la analogía eléctrica, las ecuaciones de conservación de flujo y de caída de presión se convierten en las ecuaciones clásicas de conservación de corriente y diferencia de potencial. La respuesta dinámica de una red se puede determinar, a partir de su longitud y de su resistencia total, como $\frac{1}{\chi} = \frac{1}{L} R_{TOTAL}$. A un gradiente de presión dado, esta respuesta determina el flujo a través de la red mediante la ecuación (2.6), presentada en los antecedentes.

3.3. Redes redundantes vs redes no redundantes

Comparamos redes redundantes y no redundantes, que en ausencia de obstrucciones suministran el mismo flujo, ya que oponen una misma resistencia y el flujo que pasa a través de ellas tiene exactamente el mismo costo energético por unidad de tiempo, a una caída de presión dada. Denominamos estas redes como *redes equivalentes*. Para construirlas, elegimos una red no redundante, calculamos su respuesta y definimos la red redundante equivalente, ajustando sus radios a radios más pequeños, de tal manera que las respuestas y magnitudes de flujo en ambas redes sean iguales, a una frecuencia particular dada.

Las figuras 3.2 a) y 3.2 b) ilustran estas redes equivalentes. Debido a que en microfluídica, el flujo generalmente es estacionario, elegimos trabajar a frecuencia cero para las redes de tubos iguales. En cambio, en sistemas naturales los flujos son generalmente pulsados

a frecuencias características que dependen de las especies y de los procesos, tales como el movimiento de moco en el árbol bronquial o el flujo de sangre en una red arterial. Por lo tanto, para las redes cuyos radios siguen la ley de Murray, trabajamos a una frecuencia finita (para la figura 3.2 c), elegimos la frecuencia cardíaca en reposo del perro).

Las figuras 3.2 c) y 3.2 d) indican el comportamiento de las funciones respuesta de las redes como función del índice topológico, n , en el cual ocurren las alteraciones anatómicas (obstrucciones, anastomosis o ambas). En cada una de las figuras, los círculos negros indican la respuesta de las parejas de redes equivalentes (cuya respuesta es idéntica por construcción) y que escogimos como factor de normalización para todas las curvas. Se estudió cómo responden las redes redundantes y las no redundantes a la presencia de obstrucciones. Cada una de las figuras muestra que la equivalencia se pierde cuando las redes se obstruyen: la respuesta de las redes no redundantes -en rombos azules- decrece aproximadamente 17% tanto en redes que siguen la ley de Murray -figura 3.2 c)- como en redes de tubos iguales -figura 3.2 d)-. En contraste, la respuesta de las redes redundantes en presencia de obstrucciones -en cuadros rojos- es prácticamente la misma de las redes equivalentes no obstruidas, mostrando una disminución máxima del 2% en ambos tipos de redes.

La forma particular en la que la respuesta de las redes obstruidas decrece: en forma no monótona como función del nivel n (las obstrucciones ocurren en el nivel $n + 1$) para redes que siguen la ley de Murray -figura 3.2 c)-; y monótonamente para redes de tubos iguales -figura 3.2 d)-, se debe al valor específico de las resistencias de los vasos entre niveles subsecuentes de la red. Esto no es tema de estudio en el presente capítulo y ha sido reportado en [20] para redes no redundantes.

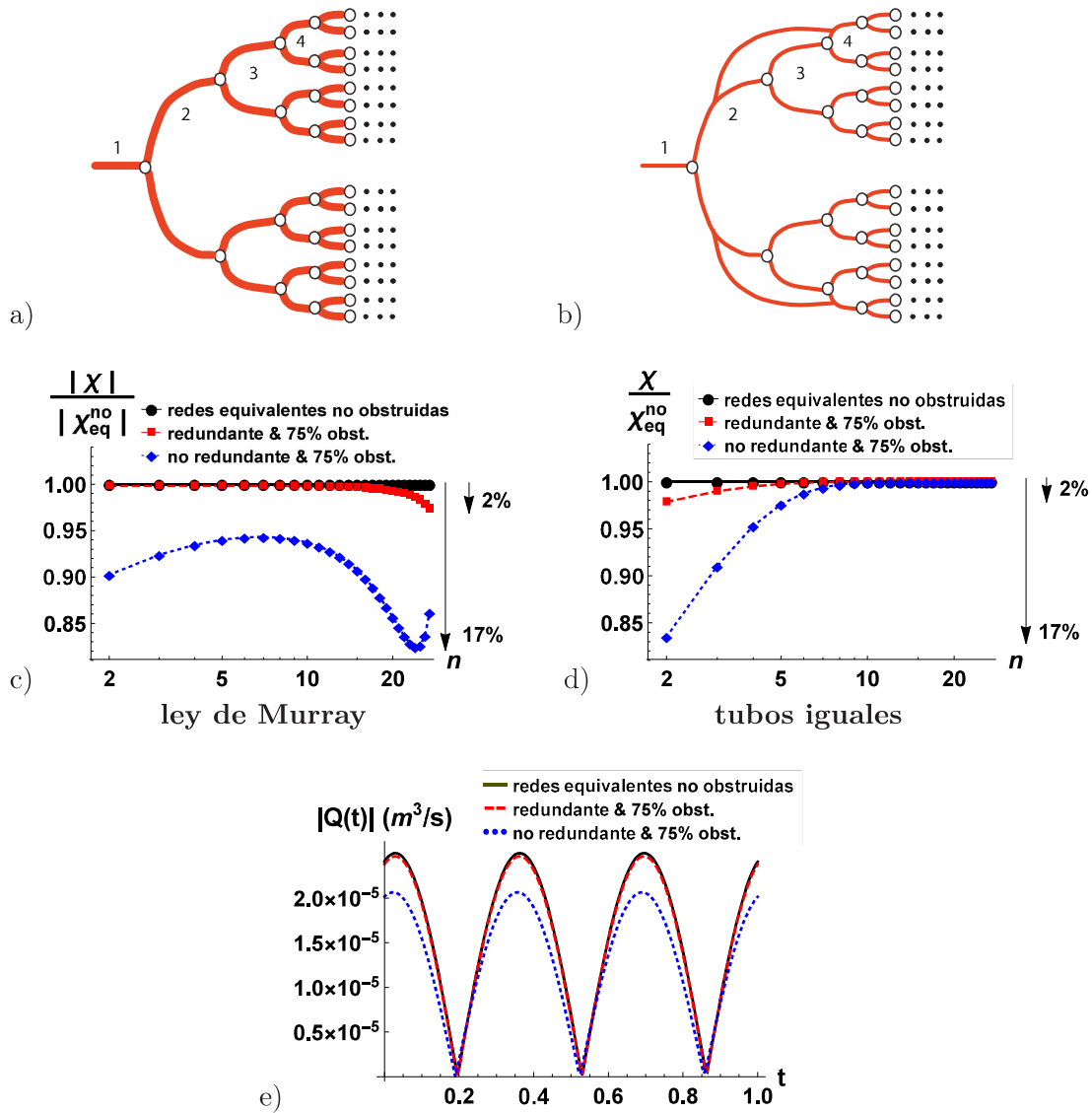


Figura 3.2- Ilustración de las redes equivalentes a) no redundante y b) redundante que, a una frecuencia dada, transportan el mismo flujo en ausencia de obstrucciones. Funciones respuesta de c) sangre en redes que siguen la ley de Murray y d) agua en redes de tubos iguales, como función del nivel n en el que ocurren las alteraciones anatómicas (obstrucciones, anastomosis o ambas). En ambas figuras, se muestra como referencia la respuesta de las redes equivalentes (círculos negros), y se usa como factor de normalización. Las respuestas de las redes no redundantes -rombos azules- decrecen aproximadamente 17% en ambos casos; c) en redes cuyos radios siguen la ley de Murray y d) en redes de tubos iguales. En contraste, las respuestas de las redes redundantes en presencia de obstrucciones -cuadros rojos- tienen aproximadamente el mismo valor que las de las redes equivalentes no obstruidas en c) y en d). e) Flujo de sangre dependiente del tiempo en una red redundante (rayas rojas) y una no redundante (puntos azules) que siguen la ley de Murray y tienen obstrucciones en el nivel 25 ($n = 24$). El flujo en las redes equivalentes no obstruidas se muestra como referencia en línea sólida. Se usó un valor fisiológicamente realista para la caída de presión, 8.5kPa. En c) y e) el radio del primer vaso de la red no redundante corresponde al de la aorta del perro. Las longitudes de los vasos siguen una ley de potencia que se ajusta a los datos del sistema circulatorio del perro. Se usó una frecuencia de 1.5Hz, valor de la frecuencia cardiaca en reposo del perro. Los parámetros usados para la sangre fueron: $\rho = 1050\text{kg/m}^3$, $\mu = 15 \times 10^{-3}\text{Pa s}$ y $t_r = 1 \times 10^{-3}\text{s}$. Para d) se usaron tubos iguales de radio $a = 10\mu\text{m}$ y longitud $l = 2.0\text{mm}$, y se trabajó a frecuencia cero. Los parámetros usados para el agua fueron: $\rho = 1000\text{kg/m}^3$ y $\mu = 1 \times 10^{-3}\text{Pa s}$.

La figura 3.2 e) ilustra el impacto que las diferencias en las respuestas de la red (en un cierto nivel, n) tienen sobre el flujo total que pasa a través de la red, y muestra que la disminución del flujo sigue la tendencia de la respuesta.

Encontramos que la redundancia es más eficiente cuando los puentes anastomóticos saltan los sitios obstruidos (como lo consideramos en este trabajo). Sin embargo, verificamos que ésta repercute positivamente sobre el flujo total sin importar su posición en la red.

Cabe mencionar que una disminución del flujo total en la red redundante, debida a las obstrucciones, no impide -como es de esperarse- la existencia de sitios localizados en donde de hecho el flujo aumente. Por ejemplo, la figura 3.3 ilustra cómo el flujo en el puente anastomótico, Q_{PA} , incrementa conforme aumenta el porcentaje de área obstruida ($F = 100 f$) del tubo evitado por el puente. Esta gráfica muestra que el desvío de fluido por los puentes anastomóticos tiene lugar en las redes redundantes sin importar el tamaño de las oclusiones.

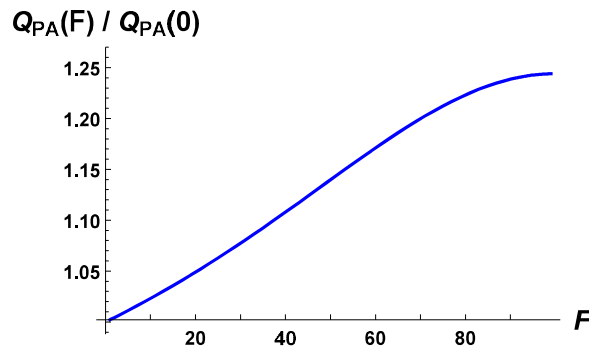


Figura 3.3- Flujo a través del puente anastomótico, Q_{PA} , como función del porcentaje de área obstruida ($F = 100 f$) del tubo evitado por el puente. La curva está normalizada con el valor del flujo cuando $F = 0$.

Estos resultados cuantifican cómo, en presencia de obstrucciones, las redes redundantes proporcionan más flujo que las redes equivalentes no redundantes de tubos más anchos, a un gradiente de presión dado. Los resultados están de acuerdo con el conocimiento común

y la intuición sobre cómo funciona la redundancia intrínseca, pero enfatizan que su ventaja se manifiesta y es relevante cuando hay obstrucciones, mientras que para sistemas no obstruidos, otro tipo de topologías podrían ser igualmente eficientes para transportar el flujo.

3.4. Medida de la tolerancia de redes redundantes ante obstrucciones

La figura 3.4 a) muestra la curva de la respuesta de la red no redundante χ_{nr} como función del porcentaje de área obstruida ($F = 100 f$) en la mitad de los vasos de un nivel de bifurcación dado -nivel 3 ($n = 2$)-. En el eje de las ordenadas están indicadas con puntos: la respuesta de ambas redes equivalentes χ_{eq}^{no} (usada como factor de normalización) y la respuesta de la red redundante con obstrucciones del 100 % en área en los tubos saltados por la anastomosis, χ_r^{total} . A porcentajes de área obstruida, F_{eq} , relativamente pequeños -17 % para el ejemplo de redes de tubos iguales en la figura 3.4 a)-, la respuesta de la red no redundante es igual a la respuesta de la red redundante con obstrucciones del 100 % en área. En términos de flujo esto significa que redes no redundantes, con áreas obstruidas por más de F_{eq} , proporcionan flujos menores a los que aportan redes redundantes con obstrucciones totales. La figura 3.4 b) muestra el ejemplo correspondiente a redes cuyos vasos siguen la ley de Murray, en el cual se tiene un valor de $F_{eq} = 22$ cuando se obstruyen la mitad de los vasos del nivel 25 ($n = 24$). Proponemos F_{eq} como criterio para cuantificar cuán robusta es una red con redundancia intrínseca, ya que este parámetro proporciona una medida relativa de la tolerancia de las redes a las obstrucciones. Cuando el porcentaje de área obstruida está por encima del umbral F_{eq} , tener redundancia es más conveniente, en términos de flujo, que tener vasos más anchos. A una n dada, cuanto menor es F_{eq} , mayor es la ventaja de tener redundancia y menor es la tolerancia a obstrucciones de la red equivalente no redundante. Este porcentaje ha sido escogido en *el peor escenario posible* para las redes redundantes, en el cual, las oclusiones en los tubos que salta la anastomosis son del 100 % en área.

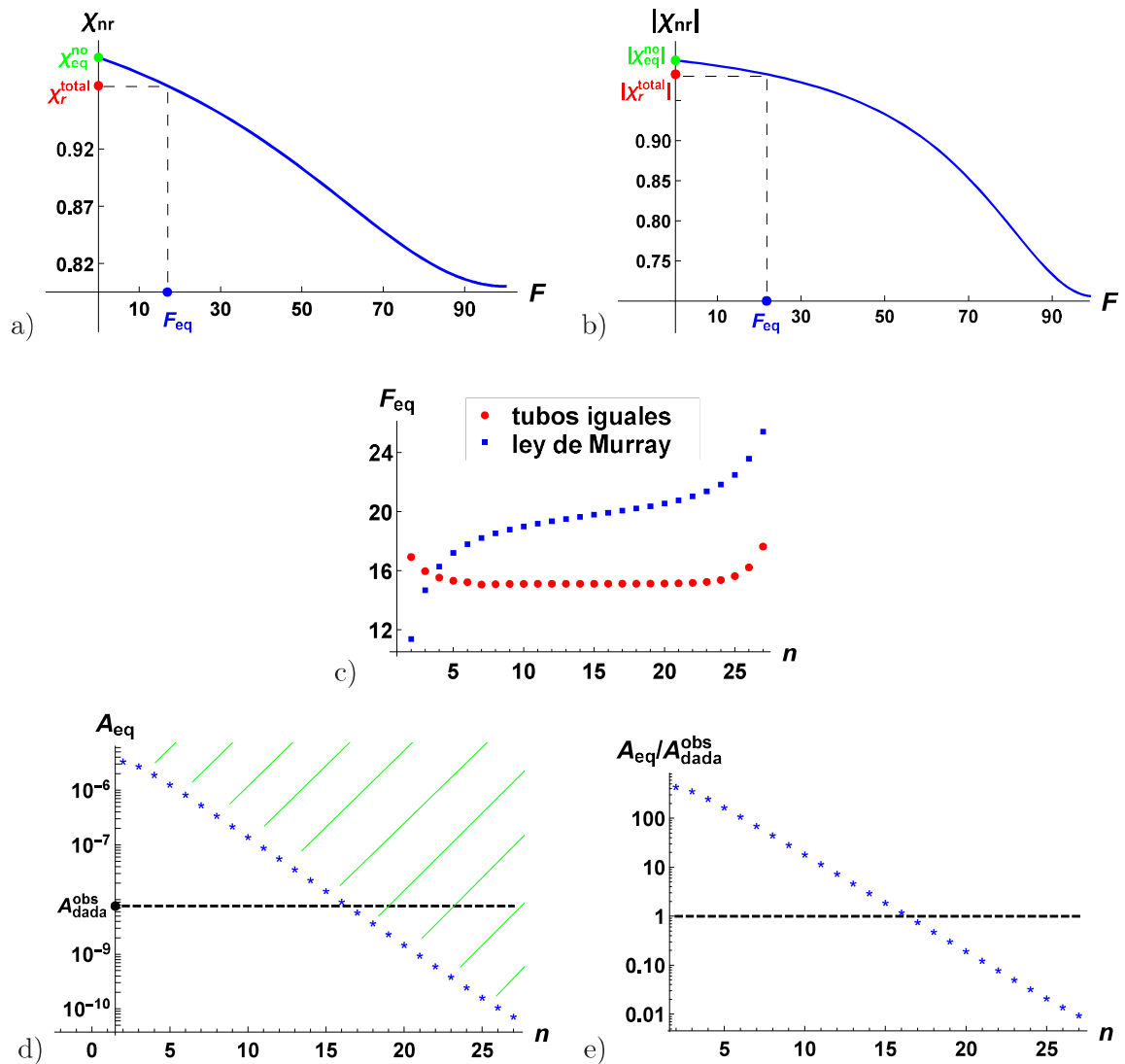


Figura 3.4- a) Respuesta de la red no redundante obstruida, χ_{nr} , como función del porcentaje de obstrucción, F . Para este ejemplo de redes de tubos iguales, $F_{eq} = 17$. En el eje de las ordenadas, se indica la respuesta de las redes equivalentes no obstruidas, χ_{eq}^{no} (usada como factor de normalización). Se indica también, como referencia, la respuesta de la red redundante con oclusiones del 100% en área -en los tubos evitados por los puentes anastomóticos- χ_r^{total} . b) Ejemplo correspondiente a redes cuyos vasos siguen la ley de Murray, en el cual, se tiene un valor de $F_{eq} = 22$ cuando se obstruyen la mitad de los vasos del nivel 25 ($n = 24$). c) F_{eq} para diferentes valores del índice topológico n , en redes cuyos radios siguen la ley de Murray y en redes de tubos iguales. d) A_{eq} para cada lugar topológico n de la red, en redes que siguen la ley de Murray. Las obstrucciones se encuentran en el nivel $n + 1$. Con líneas verdes se indica la región correspondiente a los valores de área obstruida para los cuales la redundancia proporciona un flujo mayor al de tener vasos más anchos. Frente a un área obstruida dada, A_{dada}^{obs} , la redundancia es preferible sobre vasos más anchos, en los niveles para los cuales $A_{dada}^{obs} > A_{eq}$. e) A_{eq}/A_{dada}^{obs} para cada valor de n , en redes que siguen la ley de Murray. Cuando la cantidad $A_{eq}/A_{dada}^{obs} < 1$, las redes redundantes superan a las no redundantes. Para este ejemplo, el factor de normalización A_{dada}^{obs} se escogió como el área de los vasos del nivel $i = 21$, lo que resultó en que la redundancia fuera preferible para todos los niveles mayores a $n = 16$. Los parámetros usados en esta figura son iguales a los utilizados en la figura 3.2.

F_{eq} tiene un valor diferente para cada lugar topológico n de la red en donde se encuentran las obstrucciones y su valor depende de la estructura de la red subyacente. Esto se muestra en la figura 3.4 c) para una red cuyos radios siguen la ley de Murray y para una red de tubos iguales. F_{eq} proporciona el porcentaje de área obstruida (de la mitad de los vasos del nivel $n+1$) por arriba del cual, es mejor tener redundancia que tener una red de vasos más anchos. Para redes de tubos iguales, la ventaja de la redundancia es relativamente independiente del lugar en el cual ocurren las obstrucciones. Para redes más complejas, en las que el área de la sección transversal de los vasos cambia con n -como en las redes cuyos radios siguen la ley de Murray- la figura 3.4 c) debe interpretarse con cuidado. Ésta sólo es útil cuando se considera un valor de n a la vez. Con el fin de interpretar, $F_{eq} = 100f_{eq}$, a través de diferentes valores de n , construimos el área equivalente, $A_{eq} = f_{eq}A_n$, en donde A_n es el área de la sección transversal de los tubos del nivel n . A_{eq} se puede interpretar -análogamente a F_{eq} - como el área obstruida por arriba de la cual tener redundancia es más conveniente, en términos de flujo, que tener vasos más anchos. La figura 3.4 d) muestra el valor de A_{eq} para cada lugar topológico n de la red en donde se encuentran las obstrucciones en redes cuyos vasos siguen la ley de Murray. Con líneas verdes se indica la región correspondiente a los valores de área obstruida para los cuales la redundancia proporciona un flujo mayor al que proporciona tener vasos más anchos. Frente a un área obstruida dada, A_{dada}^{obs} , la redundancia es preferible sobre vasos más anchos, en los niveles para los cuales $A_{dada}^{obs} > A_{eq}$. En este ejemplo, A_{dada}^{obs} fue escogida como el área transversal de los vasos en un nivel dado ($i = 21$) y se indica en el eje de las ordenadas. La figura 3.4 e) muestra A_{eq}/A_{dada}^{obs} . Frente a obstáculos del tamaño de A_{dada}^{obs} , en el área de la sección transversal, la redundancia es preferible en los niveles en los cuales A_{eq}/A_{dada}^{obs} es menor que uno. Esta figura muestra que para redes cuyos vasos siguen la ley de Murray, es mejor tener redundancia en niveles internos (con un alto grado de bifurcación). Estos resultados revelan los sitios específicos en los que es mejor tener redundancia y nos dicen cuándo las redes redundantes superan a las no redundantes en cuanto al flujo que éstas aportan.

3.5. Gradientes de la rapidez de deformación en redes redundantes y no redundantes

La presencia de gradientes de la rapidez de deformación, es decir, cambios en el valor de esta cantidad a lo largo de las redes de vasos sanguíneos puede causar un mal funcionamiento vascular. Estos han sido relacionados con el depósito de plaquetas en arterias [55] y varios estudios sugieren que variaciones importantes de los esfuerzos en la pared causan severas alteraciones en la vasculatura [53, 54].

Para un fluido newtoniano circulando en un tubo rígido, el esfuerzo de cizalla ejercido por el fluido sobre la pared del tubo, τ_w , está dado por la componente, τ_{rx} , del tensor de esfuerzos del fluido evaluado en la pared, esto es, $\tau_w = -\tau_{rx}|_a$. El subíndice rx indica que la dirección del esfuerzo es x y que éste actúa sobre planos perpendiculares a r . Por su parte, $\tau_{rx} = -\mu \dot{\gamma}$, en donde $\dot{\gamma}$ es la rapidez de deformación del fluido y se define como la derivada de la velocidad respecto a r , es decir, $\dot{\gamma} = \frac{du}{dr}$. Por lo tanto, $\dot{\gamma}|_a$ es una medida del esfuerzo que ejerce el fluido sobre la pared.

En estado estacionario, un fluido newtoniano que circula a través de un tubo rígido desarrolla un perfil de velocidades parabólico (perfil de Poiseuille), en donde $\dot{\gamma}|_a = -\frac{4Q}{\pi a^3}$. Usualmente, $\dot{\gamma}|_a$ se aproxima como el cociente de una velocidad típica y una dimensión típica del sistema, por ejemplo, la velocidad del fluido promediada en la sección transversal entre el radio del tubo, esto es, $\dot{\gamma}|_a \approx \frac{\langle u \rangle_r}{a} = \frac{Q}{\pi a^3}$.

En esta sección, estudiamos la rapidez de deformación de la sangre a lo largo de redes rígidas de vasos sanguíneos sujetas a gradientes de presión oscilatorios. En ellas, el flujo de sangre es oscilatorio, lo cual implica una rapidez de deformación también oscilatoria. Los resultados reportados a continuación fueron obtenidos para la rapidez de deformación máxima, aproximada como $\dot{\gamma}|_a \approx \frac{Q^{max}}{\pi a^3}$. Esto se debe a que, a frecuencias bajas (como la

frecuencia cardiaca del perro, utilizada en este estudio), los perfiles de velocidad que desarrolla el fluido de Maxwell son prácticamente iguales a un perfil de Poiseuille que oscila en el tiempo.

Analizamos el efecto que tiene la redundancia sobre el valor de la rapidez de deformación, $\dot{\gamma}$, a lo largo de los cuatro caminos posibles en la red. En la figura 3.5 a) se muestran estos caminos: uno que pasa a través del vaso anastomótico (P1, en azul); dos que pasan a través del vaso obstruido (P2, en negro y P3, en verde), que son diferentes entre sí porque uno de ellos, P2, intersecta al vaso anastomótico después de la obstrucción; y uno que no pasa por el vaso obstruido ni por el vaso anastomótico (P4, en rojo). Para redes no redundantes, P1 no existe, y los caminos P2 y P3 son equivalentes. Por lo tanto, para redes no redundantes P2 va a través del vaso obstruido y P4 no.

Por construcción, para redes que siguen la ley de Murray -en donde $Q \propto a^3$ (como se vio en la sección 2.4.2)- la rapidez de deformación es constante en todos los vasos. Sin embargo, la redundancia introduce gradientes de la rapidez de deformación en los cuatro caminos de flujo, disminuyendo el valor de la rapidez de deformación alrededor del punto en donde se encuentra el vaso anastomótico. La figura 3.5 b) muestra este cambio en la rapidez de deformación a lo largo del camino P2 de hasta el 80%. Aunque esto representa una desventaja de la redundancia, en presencia de obstrucciones el panorama cambia completamente, ya que en redes no redundantes las oclusiones causan gradientes enormes en la rapidez de deformación. La figura 3.5 c) muestra el efecto que las obstrucciones tienen a lo largo del camino P2 en una red no redundante. Por ejemplo, obstrucciones del 80% del área de la sección transversal del vaso en el nivel $n = 3$ causan un incremento de casi 700% en la rapidez de deformación. En contraste, el mismo porcentaje de obstrucción en la red redundante conlleva a un incremento de aproximadamente 100% en la rapidez de deformación en “la dirección correcta”, esto es, aquella que hace uniforme el esfuerzo cortante

a lo largo de la red. Esto se ilustra en la figura 3.5 d). Nuestros resultados muestran que la redundancia reduce el impacto que las obstrucciones tienen sobre los gradientes de la rapidez de deformación, haciendo a la red menos sensible a la presencia de obstrucciones. Un comportamiento equivalente se obtiene en el camino P3. Los caminos P1 y P4 presentan cambios menos dramáticos que los caminos P2 y P3.

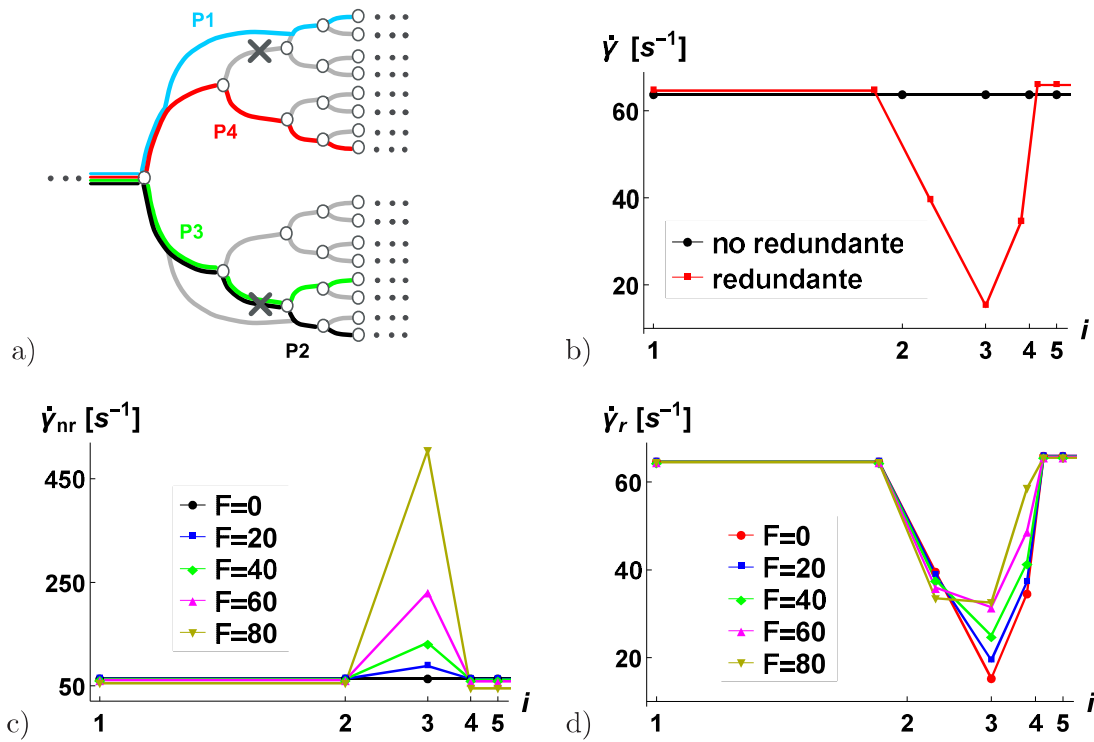


Figura 3.5- a) Esquema de los cuatro caminos posibles de flujo. b) Rapidez de deformación a lo largo del camino P2 en una red no redundante (línea con círculos) y para una red redundante (línea con cuadrados). c) Rapidez de deformación a lo largo del camino P2 en una red no redundante, $\dot{\gamma}_{nr}$, con diferentes grados de obstrucción. d) Rapidez de deformación a lo largo del camino P2 en una red redundante, $\dot{\gamma}_r$, con diferentes grados de obstrucción. En las figuras c) y d), F es el porcentaje de obstrucción del área de la sección transversal del vaso.

Al parecer, la naturaleza ha optado por la redundancia intrínseca con el fin de tener una ventaja de supervivencia en presencia de obstrucciones, a pesar de la pequeña desventaja que representan los gradientes de rapidez de deformación provocados por la redundancia.

Esta pequeña desventaja es parte del costo a pagar, en redes fluídicas, para contar con las ventajas de tener redundancia intrínseca.

En redes de tubos iguales, el impacto que las obstrucciones tienen sobre redes no redundantes es menor. Sin embargo, también en este caso, la redundancia reduce dicho impacto, haciendo a la red menos sensible a la presencia de obstrucciones.

3.6. Discusión

En esta sección, examinamos la validez de nuestros resultados para el caso en el que el movimiento del fluido en la red fuera impuesto por un flujo y no por una caída de presión. Además, analizamos si existe una cantidad óptima de puentes anastomóticos paralelos en las redes redundantes.

3.6.1. Movimiento del fluido por imposición de un flujo o por imposición de una caída de presión

Es importante destacar que nuestro modelo también es útil para estudiar la dinámica de fluidos que se mueven por la imposición de un flujo y no mediante una diferencia de presión. Para este tipo de flujos, la caída de presión es proporcional al flujo impuesto, esto es, $\Delta P_0 = \mu L \frac{1}{|\hat{\chi}(\omega_0)|} Q^{max}$ -ecuación (2.9)-. En este caso, la caída de presión es inversamente proporcional a la magnitud de la respuesta, $|\hat{\chi}(\omega_0)|$.

La ventaja de trabajar con la función respuesta, que es un factor de proporcionalidad entre el flujo y la diferencia de presión, es que ésta es independiente de si el fluido se mueve por una diferencia de presión o por la imposición de un flujo. El impacto de las alteraciones anatómicas (redundancia y obstrucciones) reside completamente en la respuesta de la red. Si una diferencia de presión mueve al fluido, el flujo en la red está afectado por la

redundancia y las obstrucciones sólo a través de la función respuesta; si la imposición de un flujo mueve al fluido, la caída de presión en la red está afectada por dichas alteraciones anatómicas sólo a través de la función respuesta. Por lo tanto, todos los resultados de este trabajo sobre cómo las obstrucciones y la redundancia alteran la función respuesta, siguen siendo válidos y son independientes de cómo se induce el movimiento del fluido en la red.

En cuanto a la interpretación de la función respuesta, para un fluido que se mueve por una diferencia de presión, podemos decir que cuanto mayor sea la respuesta, mayor será el flujo (como lo hemos dicho hasta este momento a lo largo de la tesis). Ahora bien, si el fluido se moviera por la imposición de un flujo, cuanto mayor fuera la respuesta, menor sería la caída de presión a través de la red, es decir, menor sería el trabajo requerido para mantener dicho flujo en contra de las fuerzas de fricción.

La parte del trabajo en la que uno podría preguntarse si los resultados cambiarían, es en el estudio del efecto que tienen las obstrucciones sobre la rapidez de deformación en redes redundantes y no redundantes (sección 3.5), en la que las figuras 3.5 c) y 3.5 d) muestran los cambios de la rapidez de deformación, para diferentes grados de obstrucción, a lo largo de redes no redundantes y redundantes, respectivamente. El porcentaje de obstrucción, $F = 0$, corresponde a las redes equivalentes no obstruidas. Estos cálculos se realizaron, manteniendo una misma diferencia de presión en todas las redes.

Rehicimos el estudio de la rapidez de deformación, manteniendo un valor de flujo fijo. Escogimos el valor del flujo fijo, como el que se obtiene de las redes equivalentes no obstruidas ($F = 0$) y lo mantuvimos constante al variar el grado de obstrucción, F . Los resultados mostrados en las figuras 3.6 a) y 3.6 b) indican que las conclusiones son las mismas que para las redes en las que se mantiene fija la caída de presión. Esto es, la redundancia reduce el impacto que las obstrucciones tienen sobre los gradientes de la rapidez de deformación,

haciendo a la red menos sensible a la presencia de obstrucciones. En redes no redundantes, las obstrucciones causan gradientes enormes de la rapidez de deformación, en cambio, en redes redundantes, las obstrucciones causan gradientes de rapidez de deformación mucho menores, y lo hace en “la dirección correcta”, esto es, aquella que hace uniforme el esfuerzo cortante a lo largo de la red.

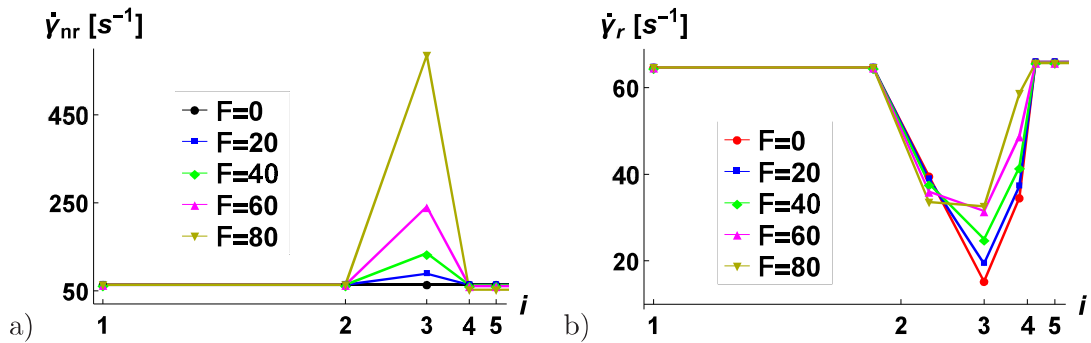


Figura 3.6- Rapidez de deformación a lo largo del camino P2 a) en una red no redundante, $\dot{\gamma}_{nr}$, y b) en una red redundante, $\dot{\gamma}_r$, con diferentes grados de obstrucción y manteniendo el flujo constante.

3.6.2. ¿Hay un número óptimo de puentes anastomóticos?

Los resultados de este trabajo ponen de manifiesto los beneficios que tiene la redundancia intrínseca cuando se presentan obstrucciones en una red. Por lo que uno podría pensar que mientras más puentes anastomóticos tuviera una red, mayor sería el beneficio. Pero incrementar el número de puentes anastomóticos de la red redundante (a un valor fijo de resistencia) implicaría tener vasos de radios cada vez menores, y si las secciones de estos vasos se redujeran demasiado, esto podría no ser siempre benéfico en caso de eventuales obstrucciones. Surge por consiguiente la duda de si existe un número óptimo de vasos redundantes para una resistencia al flujo dada.

Encontramos que incrementar el número de puentes anastomóticos -a una resistencia constante en ausencia de obstrucciones- es siempre benéfico desde el punto de vista de la

respuesta cuando hay obstrucciones. Esto se puede observar en las figuras 3.7 a) y 3.7 b).

La figura 3.7 a) muestra que a medida que aumenta el número de puentes anastomóticos en paralelo, la respuesta cuando los vasos saltados por los puentes están totalmente obstruidos - χ_{1PA}^{total} , χ_{2PA}^{total} y χ_{3PA}^{total} para uno, dos y tres puentes anastomóticos en paralelo, respectivamente- se acerca al valor de la respuesta cuando no se tienen obstrucciones, χ_{eq}^{no} , (ver el eje de las ordenadas). Pero, esto sucede de tal forma que la ganancia relativa después de añadir algunos puentes anastomóticos es pequeña, ya que el valor de la respuesta se satura. Esto se puede ver más claramente en la figura 3.7 b), en la que se grafica la respuesta de la red cuando los vasos saltados por los puentes están totalmente obstruidos, χ_r^{total} , como función del número de puentes anastomóticos en paralelo, NPA . Además, se indica como referencia la respuesta cuando no se tienen obstrucciones, χ_{eq}^{no} .

También analizamos F_{eq} , que se propuso como una medida de cuán robusta es la red redundante y nos dice el porcentaje de área obstruida, por arriba del cual, tener redundancia es más conveniente, en términos de la respuesta, que tener vasos más anchos. La figura 3.7 c) muestra como decrece F_{eq} con el número de puentes anastomóticos. Es claro que después de la adición de unos pocos puentes anastomóticos la ganancia relativa es pequeña debido a que la curva se satura.

Además, verificamos que al incrementar el número de puentes anastomóticos, el radio de los vasos en estas redes (a_r) decrece, pero también se satura, como se puede ver en la figura 3.7 d). La curva está normalizada respecto al radio fijo de la red no redundante (a_{nr}).

En cuanto a la rapidez de deformación a lo largo de la red, la adición de más tubos anastomóticos causa gradientes ligeramente mayores, lo que representa una pequeña desventaja.

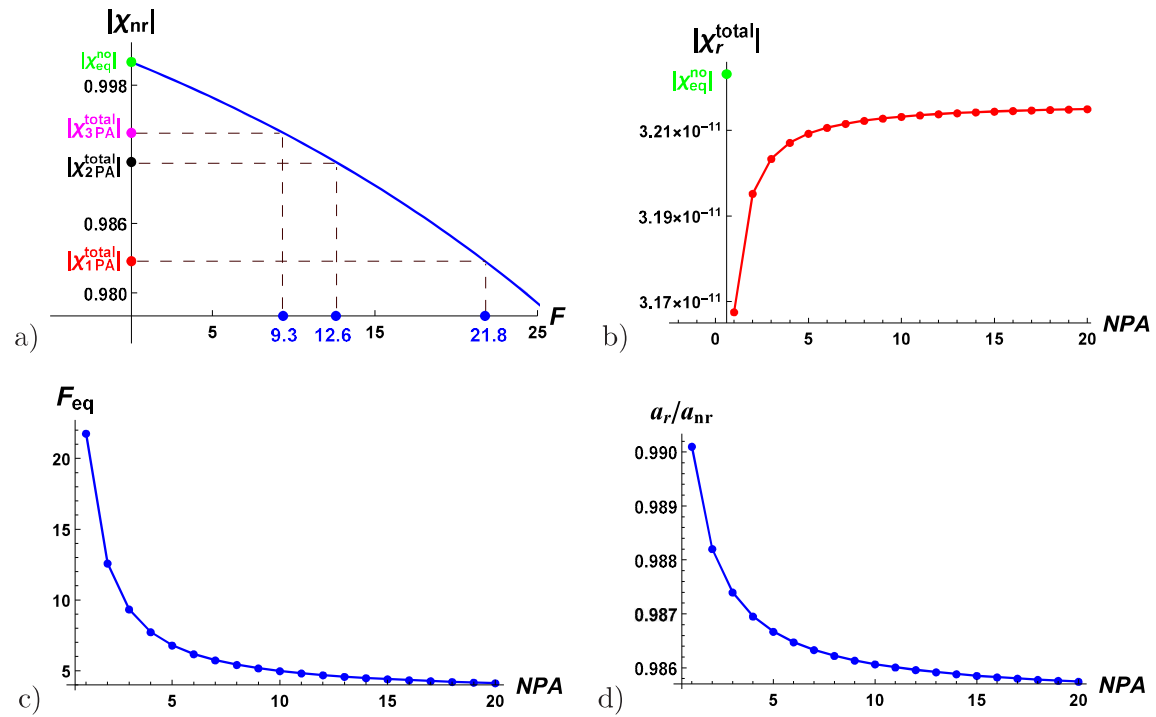


Figura 3.7- a) y b) Saturación de la respuesta de la red, c) de F_{eq} , y d) del radio de los vasos, al incrementar el número de puentes anastomóticos, NPA .

Es de suponer que existe un número óptimo de puentes anastomóticos en la redundancia intrínseca, y que la ganancia relativamente pequeña que se tiene -en términos de flujo- después de la adición de unos pocos vasos anastomóticos (figura 3.7 b), no compensa el costo metabólico que conlleva el mantenimiento de los mismos. El mantenimiento de los vasos implica el suministro de oxígeno para mantener las células vivas y el suministro de oxígeno para asegurar la reproducción celular. Este costo de mantenimiento siempre aumenta con el número de vasos. Un modelo para estudiar el costo del mantenimiento de los vasos está fuera del alcance de este estudio, sin embargo, dado que las cantidades que implican una ganancia, se saturan con el número de puentes anastomóticos, y que el costo de mantenimiento de los vasos siempre aumenta con el número de puentes anastomóticos, podemos pensar que debe existir un número óptimo de estos puentes anastomóticos, y que este número debe de ser relativamente pequeño.

3.7. Conclusiones

Nuestros resultados muestran que las ventajas de la redundancia intrínseca, se manifiestan y son relevantes en presencia de obstrucciones, mientras que para redes fluídicas no obstruidas, otro tipo de topologías serían igual de eficientes para el transporte. Las redes redundantes, con obstrucciones del 100% en la mitad de los vasos de un cierto nivel, superan a las redes no redundantes, cuando el porcentaje del área obstruida en éstas últimas está por encima de un umbral relativamente pequeño. Estudiamos cómo depende este umbral, del lugar topológico en el que se encuentran las obstrucciones, y cómo se comporta en dos tipos de redes comunes. En redes vasculares, la redundancia asegura el suministro de sangre a un tejido, incluso cuando las obstrucciones -tan grandes como el área de la sección transversal- ocluyen una gran proporción de los vasos; mientras que en redes microfluídicas, la redundancia podría asegurar el funcionamiento de los dispositivos frente a burbujas tan anchas como los microcanales que forman la red.

La redundancia protege a las redes de los enormes gradientes de rapidez de deformación que las oclusiones causan en redes no redundantes. Sin embargo, la redundancia a su vez, introduce gradientes relativamente pequeños que constituyen una pequeña desventaja cuando las redes no están obstruidas. Ésta pequeña desventaja, es parte del costo a pagar por las enormes ventajas, referentes al flujo y a la uniformidad de la rapidez de deformación, cuando se presentan obstrucciones.

Nuestro estudio ofrece una posible explicación del por qué la naturaleza ha optado por la redundancia intrínseca, sobre vasos más anchos, para asegurar el suministro de sangre para la irrigación de los tejidos en lugares clave del organismo (como en la vasculatura cerebral) y cómo la redundancia intrínseca puede salvar vidas cuando está presente en el corazón [40]. Nuestro estudio también explica por qué no todas las redes vasculares son redundantes, ya que la redundancia conlleva un costo, que incluye el mantenimiento de los vasos y la falta

de uniformidad en la rapidez de deformación. Pagar ese costo podría valer la pena, sólo cuando el buen desempeño de una red particular es crucial para la supervivencia. Nuestros estudios también proporcionan una orientación en el diseño de dispositivos microfluídicos robustos para los cuales, la inclusión cuidadosa de la redundancia intrínseca podría prevenir una falla por obstrucción, debida a partículas o burbujas.

PERMEABILIDAD DINÁMICA DE FLUIDOS NEWTONIANOS EN TUBOS ELÁSTICOS

En este trabajo [56], encontramos una expresión analítica para la permeabilidad dinámica de fluidos newtonianos incompresibles, que fluyen a través de tubos elásticos y que están sujetos a gradientes de presión pulsados, esto es, gradientes de presión que cambian periódicamente en el tiempo con al menos una frecuencia. Mostramos que la interacción entre la viscosidad del fluido, la elasticidad de la pared y el tamaño característico del sistema confinante da lugar a una vasta fenomenología que incluye resonancias. El surgimiento de un comportamiento resonante en la permeabilidad dinámica de fluidos newtonianos no ha sido reportado previamente. Obtuvimos resultados que indican que estas resonancias son relevantes en pequeñas geometrías confinantes con módulos de Young bajos. Por ejemplo, encontramos una frecuencia de resonancia, en el rango del ultrasonido, para un fluido newtoniano (aceite mineral) sujeto a un gradiente de presión pulsado que circula a través de un microcanal de 200 micras hecho de PDMS (polidimetilsiloxano).

4.1. Introducción

La caracterización de la respuesta de un fluido a un gradiente de presión pulsado se describe adecuadamente mediante la permeabilidad dinámica, la cual constituye la respuesta de un fluido a un gradiente de presión dinámico, esto es, dependiente del tiempo. Matemáticamente, es una constante de proporcionalidad entre el flujo y el gradiente de presión en el dominio de la frecuencia. Físicamente, es una función de respuesta que mide la resistencia de un fluido a circular en la dirección de flujo, para cada uno de los modos involucrados en el

gradiente de presión. Ésta contiene información tanto del fluido como del medio confinante.

Se han obtenido permeabilidades dinámicas para fluidos newtonianos [2, 3], de Maxwell [1, 4, 6, 7, 8] y viscoelásticos lineales generales [9], que circulan a través de estructuras rígidas de distintas geometrías y con diferentes condiciones de frontera entre el fluido y el medio confinante. Una característica intrínseca de la permeabilidad dinámica de fluidos viscoelásticos es que su magnitud presenta resonancias a ciertas frecuencias. Las resonancias tienen su origen en la interacción entre la densidad, la viscosidad, el tiempo de relajación del fluido, y una escala de longitud característica de la geometría de confinamiento. Para fluidos newtonianos -en los cuales el tiempo de relajación es cero- que circulan en medios rígidos, la magnitud de la permeabilidad dinámica decrece monótonamente con la frecuencia.

El conocimiento de la permeabilidad dinámica de fluidos circulando en medios elásticos puede ser relevante en sistemas fisiológicos, ya que en estos, los fluidos están confinados por medios con paredes elásticas, como las arterias grandes o los bronquios; también podría ser relevante en microfluídica, ya que los microchips están hechos frecuentemente de polímeros, como el PDMS, que confinan a los fluidos que circulan dentro de ellos [10]. El efecto de la elasticidad del medio confinante sobre la permeabilidad dinámica ha sido considerado cuando solamente se tienen oscilaciones longitudinales en un tubo por el que circula un fluido de Maxwell [57]. Otros estudios, que no consideran la permeabilidad dinámica, han estudiado el flujo inducido por una onda viajera en la pared del tubo, cuando se tienen fluidos compresibles newtonianos y de Maxwell [58, 59]. También ha sido considerado el efecto de la velocidad de resbalamiento en la pared, sobre la dinámica de fluidos newtonianos incompresibles, cuando las soluciones son ondas viajeras [60]. Un estudio sobre el impacto que tienen las deformaciones elásticas de las paredes confinantes acopladas a la dinámica de un fluido, en la permeabilidad dinámica de fluidos newtonianos sujetos a gradientes de

presión pulsados, no ha sido abordado en la literatura.

4.2. Ecuaciones del modelo

Consideramos el flujo de un fluido newtoniano en un microtubo elástico. La pared del tubo está caracterizada por un espesor pequeño, h , una densidad de la pared, ρ_w , un módulo de Young, E , y un coeficiente de Poisson, ν . Estudiamos regímenes en los cuales el número de Reynolds es lo suficientemente bajo como para despreciar los términos no lineales de las ecuaciones de conservación de momento. Esta aproximación es válida para un amplio rango de los parámetros del sistema. Por ejemplo, en el árbol circulatorio, es válida en todos los vasos excepto en la aorta.

Definimos, x , como la dirección de flujo a lo largo del tubo y, r , como la dirección radial. Consideramos que, en un punto dado de la dirección de flujo, la presión se ajusta instantáneamente en la dirección radial, esto es, $\frac{\partial p}{\partial r} = 0$. Esta aproximación es válida cuando el radio del tubo es mucho menor que su longitud [61, 62], y cuando la velocidad de propagación de la onda es mucho mayor que la velocidad promedio de flujo [60, 62]. Por lo tanto, el sistema está sujeto a un gradiente de presión no estacionario, $\nabla p(x, t) = \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} \hat{i}$, que es función de la dirección de flujo y del tiempo. Con estas consideraciones, las ecuaciones de continuidad y de conservación de momento para las velocidades axial y radial de un fluido con densidad, ρ , y viscosidad, μ , son:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} = 0 \quad (4.1)$$

y

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad (4.2)$$

en donde $u(x, r, t)$ y $v(x, r, t)$ son las velocidades axial y radial, respectivamente.

Consideramos ecuaciones de movimiento para un tubo elástico de radio, a , que relacionan desplazamientos radiales y axiales, $\eta(x, t)$ y $\xi(x, t)$, con los esfuerzos σ_{rr} y σ_{rx} en la pared [61, 62],

$$\rho_w h \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \sigma_{rr} - \frac{E h}{1 - \nu^2} \left(\frac{\eta}{a^2} + \frac{\nu}{a} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \quad (4.3)$$

y

$$\rho_w h \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\sigma_{rx} + \frac{E h}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\nu}{a} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right), \quad (4.4)$$

la deducción de estas ecuaciones se encuentra en el apéndice C.

Se necesitan condiciones de frontera en la interfase fluido-sólido. Éstas incluyen el balance de esfuerzos entre el fluido y la pared, que conduce a las siguientes expresiones para los esfuerzos en la pared:

$$\sigma_{rr} = p \text{ y } \sigma_{rx} = \mu \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_w; \quad (4.5)$$

y la continuidad de las velocidades entre el fluido y la pared, tanto en la dirección radial como en la axial.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = v \Big|_w \text{ y } \frac{\partial \xi}{\partial t} = u \Big|_w. \quad (4.6)$$

La condición para la velocidad en la dirección radial asegura que no existan agujeros entre el fluido y la pared. Mientras que en la dirección axial, suponemos una condición de no resbalamiento del fluido en la pared. Estas condiciones de frontera constituyen un problema de fronteras libres, ya que se requiere conocer la solución para determinarlas. Con el fin de obtener una solución analítica, aproximamos estas condiciones a condiciones equivalentes evaluadas en el radio promedio del tubo, en donde éste no está expandido ni comprimido,

esto es, en $r = a$. Ésta es una aproximación clásica en problemas de fronteras libres en los que la forma de la frontera oscila alrededor de una forma estable (en este caso, la forma cilíndrica de un tubo). En [60], [61] y [62] se pueden encontrar ejemplos de esta aproximación, que es válida siempre que la deformación radial del tubo, η , sea más pequeña que su radio promedio. Por lo tanto, imponemos:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = v|_a \quad (4.7)$$

y

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = u|_a. \quad (4.8)$$

Podríamos resolver las ecuaciones (4.1)–(4.4) -con σ_{rr} y σ_{rx} dadas por (4.5)- y sustituir las soluciones en las ecuaciones (4.7) y (4.8). Sin embargo, por conveniencia matemática, resolvemos en dominio de Fourier, las ecuaciones (4.1), (4.2), (4.7) y (4.8) para u , v , η y ξ , y sustituimos estas soluciones en las ecuaciones de movimiento del tubo -ecuaciones (4.3) y (4.4)-.

Para las soluciones de u , v , η , ξ y $\frac{\partial p}{\partial x}$ consideramos la forma general de ondas estacionarias, esto es, ondas que se pueden factorizar en un término dependiente de la posición en la dirección de propagación, por un término dependiente del tiempo, $\Psi(x, t) = f(x)F(t)$ [63, 64]. Una onda estacionaria se caracteriza por tener una dinámica con valores fijos en ciertos puntos del espacio llamados nodos. Para un sistema experimental en particular, las condiciones de frontera en la dirección de flujo imponen restricciones que conducen a una solución de este tipo. De esta manera es posible, por ejemplo, imponer un valor fijo para la presión al final de un tubo finito (que es una condición de frontera experimental usada comúnmente en microfluídica).

Hacemos una separación de variables en las ecuaciones (4.1), (4.2), (4.7) y (4.8) para en-

contrar las soluciones de u , v , η y ξ , tomando en cuenta por una parte la dependencia espacial en la dirección de flujo, y por la otra, la dependencia espacial en la dirección radial y el tiempo. Esto es, $\frac{\partial p}{\partial x} = g(x)G(t)$, $u = u(x)U(r, t)$, $v = v(x)V(r, t)$, $\eta = n(x)H(t)$ y $\xi = c(x)\Xi(t)$. Los detalles de la separación de variables se pueden ver en el apéndice D.

Las soluciones obtenidas, en dominio de Fourier, para las velocidades del fluido \hat{u} y \hat{v} , y para los desplazamientos de la pared del tubo $\hat{\eta}$ y $\hat{\xi}$, son:

$$\hat{u}(x, r, \omega) = u(x)\hat{U}(r, \omega) = - \left[A(\omega) J_0(\beta r) - \frac{1}{\mu \beta^2} \right] g(x) \hat{G}(\omega), \quad (4.9)$$

$$\hat{v}(x, r, \omega) = v(x)\hat{V}(r, \omega) = - \left[\frac{r}{2\mu\beta^2} - \frac{1}{\beta} A(\omega) J_1(\beta r) \right] g'(x) \hat{G}(\omega), \quad (4.10)$$

$$\hat{\xi}(x, \omega) = c(x) \hat{\Xi}(\omega) = \frac{1}{i\omega} \left[A(\omega) J_0(\beta a) - \frac{1}{\mu \beta^2} \right] g(x) \hat{G}(\omega) \quad (4.11)$$

y

$$\hat{\eta}(x, \omega) = n(x) \hat{H}(\omega) = \frac{1}{i\omega} \left[\frac{a}{2\mu\beta^2} - \frac{1}{\beta} A(\omega) J_1(\beta a) \right] g'(x) \hat{G}(\omega). \quad (4.12)$$

En donde J_0 y J_1 son las funciones de Bessel de orden cero y de orden uno, respectivamente, y $\beta = \sqrt{\frac{i\omega\rho}{\mu}}$. Estas soluciones quedan en términos de la constante de integración $A(\omega)$ -proveniente de la ecuación para $\hat{U}(r, \omega)$ -ecuación (D.9)- y cuya expresión se muestra en el apéndice D-, así como del gradiente de presión dependiente de la frecuencia, $\hat{G}(\omega)$.

La solución para la velocidad local en la dirección de flujo, \hat{u} , dada por la ecuación (4.9), se puede escribir como:

$$\hat{u}(x, r, \omega) = -\frac{1}{\mu} \hat{K}^L(r, \omega) g(x) \hat{G}(\omega), \quad (4.13)$$

en donde

$$\hat{K}^L(r, \omega) = \left[\mu A(\omega) J_0(\beta r) - \frac{1}{\beta^2} \right] \quad (4.14)$$

es una permeabilidad local (función de r).

Al promediar la ecuación (4.13) en el área de la sección transversal de flujo, obtenemos

$$\langle \hat{u}(x, \omega) \rangle_r = -\frac{1}{\mu} \hat{K}(\omega) g(x) \hat{G}(\omega), \quad (4.15)$$

en donde $\hat{K}(\omega)$ es una permeabilidad dinámica de la forma

$$\hat{K}(\omega) = \left[\mu A(\omega) \frac{2 J_1(\beta a)}{\beta a} - \frac{1}{\beta^2} \right]. \quad (4.16)$$

La ecuación (4.15) representa una ley de Darcy generalizada local (para cada punto, x , de la dirección de flujo) para fluidos newtonianos que circulan en tubos elásticos. Ésta relaciona linealmente la velocidad axial promediada en r con el gradiente de presión (que es función de x) en el dominio de la frecuencia. La permeabilidad dinámica contiene información tanto del fluido como del medio que lo confina¹. En el límite de tubos rígidos, la ecuación (4.16) se reduce a la permeabilidad dinámica de fluidos newtonianos reportada por primera vez en [2].

A partir de las expresiones analíticas para \hat{v} , $\hat{\eta}$ y $\hat{\xi}$ -ecuaciones (4.10)–(4.12)-, se pueden definir otras funciones respuesta, en el dominio de la frecuencia, para la velocidad local radial y su promedio, así como para los desplazamientos de la pared del tubo, en términos de $A(\omega)$ y del gradiente de presión, $g(x)\hat{G}(\omega)$, o su primera derivada espacial, $g'(x)\hat{G}(\omega)$. Sin embargo, es importante hacer notar que esas cantidades no son independientes de la velocidad axial, \hat{u} . Es por esto que enfocamos nuestro análisis en la respuesta dinámica

¹Si en lugar de un tubo, se considerara un microcanal, se obtendría una función similar a la de la ecuación 4.16, pero con funciones trigonométricas en lugar de funciones Bessel.

de la velocidad axial, aunque en la sección 4.8 incluimos el comportamiento de las otras funciones respuesta.

Al sustituir las soluciones obtenidas para \hat{u} , \hat{v} , $\hat{\eta}$ y $\hat{\xi}$ en las ecuaciones (4.3) y (4.4) reescritas en el dominio de la frecuencia, obtenemos una ecuación para la presión y para el gradiente de presión, que son ecuaciones armónicas de la forma:

$$\frac{\partial^2 \hat{p}(x, \omega)}{\partial x^2} = -\kappa_1^2(A(\omega), \omega) \hat{p}(x, \omega) \quad (4.17)$$

y

$$\frac{\partial^3 \hat{p}(x, \omega)}{\partial x^3} = -\kappa_2^2(A(\omega), \omega) \frac{\partial \hat{p}(x, \omega)}{\partial x}, \quad (4.18)$$

en donde

$$\kappa_1^2 = -\frac{2 a^2 \omega^2 \rho (\nu^2 - 1)}{2 \mu h A \beta [a \nu \beta E J_0(\beta a) - (a^2 \omega^2 \rho_w (\nu^2 - 1) + E) J_1(\beta a)] + a h [a^2 \omega^2 \rho_w (\nu^2 - 1) + E(1 - 2\nu)]} \quad (4.19)$$

y

$$\kappa_2^2 = \frac{2 a \omega^2 (\nu^2 - 1) [h \rho_w (1 - \mu A \beta^2 J_0(\beta a)) - \mu \rho A \beta J_1(\beta a)]}{E h [2 \mu A \beta (a \beta J_0(\beta a) - \nu J_1(\beta a)) + a(\nu - 2)]}. \quad (4.20)$$

Los coeficientes, $\kappa_1^2(A(\omega), \omega)$ y $\kappa_2^2(A(\omega), \omega)$, proporcionan una relación de dispersión que relaciona el número de onda de los modos de propagación, κ , con la frecuencia del gradiente de presión aplicado, ω . Dado que κ_1^2 es independiente de x , por consistencia, pedimos que $\kappa_1^2 = \kappa_2^2$, lo cual nos da una ecuación cuadrática para $A(\omega)$ (cuyas soluciones se muestran en el apéndice D).

Una vez determinada $A(\omega)$, se pueden conocer las velocidades del fluido y los desplazamientos de la pared del tubo en el dominio de la frecuencia -ecuaciones (4.9)-(4.12)- como función del gradiente de presión o su primera derivada espacial.

Las dos soluciones para $A(\omega)$ implican dos soluciones para todas las variables del sistema. Una de estas soluciones no es física debido a que su parte imaginaria diverge a frecuencia cero. Una parte imaginaria de $A(\omega)$ que diverge, implica una permeabilidad y una velocidad que también divergen, a un gradiente de presión finito -ver ecuaciones (4.15)- y (4.16). Es por esto que escogemos la solución física de A como aquella que nos da una permeabilidad dinámica finita a frecuencia cero.

4.3. Ecuaciones adimensionales

Con el fin de identificar las frecuencias características del sistema, escribimos las ecuaciones (4.1)–(4.4), (4.7) y (4.8) en una forma adimensional, usando las siguientes cantidades adimensionales:

$$\bar{x} = \frac{x}{a}, \quad \bar{r} = \frac{r}{a}, \quad \bar{t} = \omega_\mu t, \quad \bar{u} = \frac{u}{a\omega_\mu}, \quad \bar{v} = \frac{v}{a\omega_\mu}, \quad \bar{p} = \frac{p}{\mu\omega_\mu}, \quad \bar{\eta} = \frac{\eta}{a}, \quad \text{y} \quad \bar{\xi} = \frac{\xi}{a}.$$

en donde $\omega_\mu = \frac{\mu}{\rho a^2}$ es la frecuencia viscosa, característica del fluido.

Para la ecuación de continuidad, tenemos:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial(\bar{r}\bar{v})}{\partial \bar{r}} = 0. \quad (4.21)$$

La ecuación de conservación de momento está dada por:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} \right). \quad (4.22)$$

Para los desplazamientos axiales y radiales de la pared del tubo tenemos:

$$\frac{\omega_\mu^2}{\omega_e^2} \frac{\partial^2 \bar{\eta}}{\partial \bar{t}^2} = \frac{\omega_w \omega_\mu}{\omega_e^2} \bar{p} - \left(\bar{\eta} + \nu \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial \bar{x}} \right) \quad (4.23)$$

y

$$\frac{\omega_\mu^2}{\omega_e^2} \frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial \bar{t}^2} = -\frac{\omega_w \omega_\mu}{\omega_e^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} \Big|_a + \left(\frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial \bar{x}^2} + \nu \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{x}} \right). \quad (4.24)$$

En donde $\omega_e = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{E}{(1-\nu^2)\rho_w}}$ y $\omega_w = \frac{\mu}{\rho_w h a}$ son otras dos frecuencias características del sistema: una frecuencia característica de la pared elástica, ω_e , y una frecuencia viscosa acoplada a la geometría del tubo, ω_w , a través de su espesor, h , y su densidad, ρ_w .

Las condiciones de frontera adimensionales están dadas por:

$$\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial \bar{t}} = \bar{u} \Big|_a \quad (4.25)$$

y

$$\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{t}} = \bar{v} \Big|_a. \quad (4.26)$$

Resolvemos las ecuaciones (4.21)–(4.26) en el dominio de la frecuencia, siguiendo la misma metodología descrita en la sección 4.2 y en el apéndice D.

Podemos obtener una ley de Darcy generalizada en el dominio de la frecuencia, para el promedio de la velocidad axial adimensional sobre el área de la sección transversal del tubo, $\langle \hat{u}(\bar{x}, \bar{\omega}) \rangle_r$, en términos del gradiente de presión adimensional $\hat{g}'(\bar{x}) \hat{G}$, esto es:

$$\langle \hat{u}(\bar{x}, \bar{\omega}) \rangle_r = -\hat{K}(\bar{\omega}) \hat{g}'(\bar{x}) \hat{G}. \quad (4.27)$$

en donde $\bar{\omega} = \frac{\omega}{\omega_\mu}$.

Así, podemos definir una permeabilidad dinámica adimensional, $\hat{K}(\bar{\omega})$,

$$\hat{K}(\bar{\omega}) = \left[\bar{A}(\omega) \frac{2 J_1(\bar{\beta})}{\bar{\beta}} - \frac{1}{\bar{\beta}^2} \right] \quad (4.28)$$

en donde $\bar{\beta} = \sqrt{i\bar{\omega}}$.

4.4. Frecuencias características del sistema

Encontramos que las ecuaciones adimensionales pueden ser escritas en términos de tres frecuencias características.

La frecuencia viscosa, ω_μ , que es característica del fluido y está dada por:

$$\omega_\mu = \frac{\mu}{\rho a^2}; \quad (4.29)$$

una frecuencia característica de la pared elástica del tubo, ω_e , dada por:

$$\omega_e = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{E}{(1-\nu^2)\rho_w}}; \quad (4.30)$$

y una frecuencia viscosa acoplada a la geometría del tubo a través del espesor y de la densidad de su pared, esto es:

$$\omega_w = \frac{\mu}{\rho_w h a}. \quad (4.31)$$

Para el caso en el que las densidades de la pared y del fluido son similares, es decir, $\rho_w \approx \rho$, ω_w es proporcional a ω_μ , y sólo se tienen dos frecuencias características relevantes e independientes en el sistema. Es por esto que esperamos dos regímenes dinámicos diferentes, uno para $\omega_\mu < \omega_e$, y otro para $\omega_\mu > \omega_e$. Cuando estas dos frecuencias son iguales, podemos definir una frecuencia de cruce, ω^* . Esto sucede a un valor particular del radio, $a^* = \frac{\mu}{\rho} \sqrt{\frac{(1-\nu^2)\rho_w}{E}}$, que es una escala de longitud característica del sistema.

4.5. Permeabilidad dinámica de fluidos newtonianos en tubos elásticos

Estudiamos la permeabilidad dinámica $K(\omega)$ -ecuación (4.16)- como función de la frecuencia, así como su comportamiento con los diferentes parámetros del sistema. Para presentar nuestros resultados, usamos como factores de normalización, la frecuencia de cruce, ω^* y

su correspondiente radio, a^* , definidos en la sección anterior.

Encontramos que, en general, la magnitud de la permeabilidad dinámica es una función no monótona de la frecuencia, como se ilustra en la figura 4.1. Ésta presenta una frecuencia de resonancia, ω_{res} , para la cual la magnitud de la permeabilidad es máxima. La figura también muestra (como referencia y en línea punteada) que la magnitud de la permeabilidad dinámica de un fluido newtoniano circulando a través de un tubo rígido, decae monótonamente con la frecuencia.

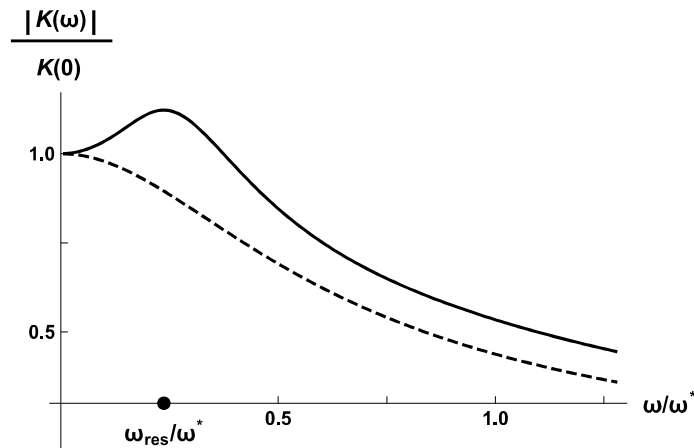


Figura 4.1- Magnitud de la permeabilidad dinámica de un fluido newtoniano en un tubo elástico (línea continua). La línea punteada corresponde al límite de tubo rígido que se muestra como referencia.

La frecuencia de resonancia, ω_{res} , depende del radio de confinamiento, de los parámetros del fluido y de los parámetros elásticos de la pared del tubo. En la figura 4.2 a) se muestra la dependencia de la frecuencia de resonancia con el radio del tubo. Los puntos azules corresponden a los resultados de nuestro modelo. Las líneas roja y verde muestran como referencia a ω_μ y ω_e como función del radio, respectivamente. Claramente, hay un régimen a radios bajos en el cual el comportamiento de ω_{res} está dominado por ω_e , esto es, dominado por la elasticidad. Una regresión lineal del logaritmo de los datos en este régimen confirma

una dependencia de $\omega_{res} \sim a^{-1}$, tal como la dependencia de ω_e con el radio, mostrada en la ecuación 4.30. En la misma figura 4.2 a) se puede ver que existe otro régimen a radios grandes, en el cual el comportamiento de ω_{res} está dominado por ω_μ , esto es, dominado por la viscosidad. Para este régimen viscoso, una regresión lineal del logaritmo de los datos confirma una dependencia de $\omega_{res} \sim a^{-2}$, tal como la dependencia de ω_μ con el radio, mostrada en la ecuación 4.29. Este régimen no debe confundirse con el régimen viscoso para un fluido newtoniano en un tubo rígido, para el cual no hay resonancia. Para los dos regímenes observados, ω_{res} está dominada por el modo de frecuencia característica más bajo del sistema, es decir, por la frecuencia menor entre ω_e y ω_μ .

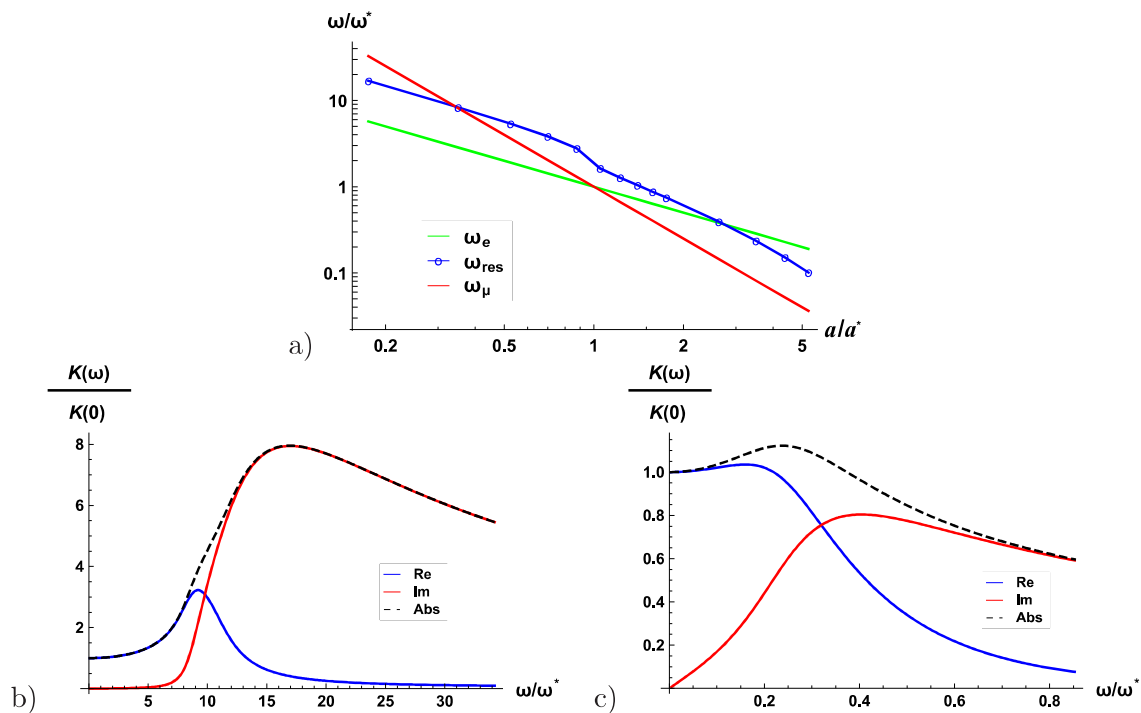


Figura 4.2- a) Frecuencia de resonancia de un fluido newtoniano en un tubo elástico como función del radio del tubo, a , (en azul). Las frecuencias características viscosa y elástica se muestran como referencia en rojo y verde, respectivamente. b) Permeabilidad dinámica en el régimen elástico. c) Permeabilidad dinámica en el régimen viscoso. Los parámetros fueron escogidos con el fin de mostrar los dos diferentes regímenes.

Existe también una región de transición entre los regímenes elástico y viscoso alrededor de la frecuencia de cruce. En esta región, las dos escalas características compiten.

Las figuras 4.2 b) y 4.2 c) muestran la parte real, la parte imaginaria y la magnitud de la permeabilidad dinámica en el régimen elástico y en el régimen viscoso, respectivamente. En el régimen elástico, cerca de la frecuencia de resonancia, la parte imaginaria de la permeabilidad domina el comportamiento de la magnitud. Mientras que para el régimen viscoso, tanto la parte real como la parte imaginaria de la permeabilidad, contribuyen al comportamiento de la magnitud alrededor de la resonancia.

El rango de valores de los radios en la figura 4.2 a), que fue hecha usando un espesor de la pared del tubo, h , constante, está limitado a la izquierda por la suposición del modelo $h/a \ll 1$, implícita en las ecuaciones de movimiento de la pared del tubo (como se describe en el apéndice C). A la derecha, este rango de valores para el radio está limitado por la desaparición de la frecuencia de resonancia. Esto se ilustra en la figura 4.3 a), en la que se puede observar que cuando el radio aumenta, la frecuencia de resonancia se desplaza hacia la izquierda, y la permeabilidad de estado estacionario (a $\omega = 0$) aumenta hasta el punto de impedir la resonancia. Esto se ilustra cuantitativamente en la figura 4.3 b) presentada en escala log-log, en la que se muestran la permeabilidad a la frecuencia de resonancia, $|K(\omega_{res}, a)|$, con puntos azules; y la permeabilidad de estado estacionario, $K(0, a)$, con línea punteada, como función del radio del tubo, a . En el recuadro se ilustra que $|K(\omega_{res}, a)|$ aumenta con un exponente menor a 2, para todos los valores de a , por lo que $K(0, a) = \frac{a^2}{8}$, que crece con un exponente igual a 2, supera eventualmente a $|K(\omega_{res}, a)|$. En este punto, la resonancia deja de existir. Esta característica hace que esta resonancia sea típica de sistemas elásticos pequeños.

El comportamiento de la permeabilidad dinámica como función de todos los parámetros del

sistema se puede resumir en términos de una frecuencia adimensional única $\bar{\omega}_e = \omega_e/\omega_\mu = \frac{\rho a}{\mu} \sqrt{\frac{E}{(1-\nu^2)\rho_w}}$. En la figura 4.4 se muestran los diagramas universales para la frecuencia de resonancia adimensional, $\bar{\omega}_{res}$, (figura 4.4 a)) y para la magnitud de la permeabilidad adimensional a la frecuencia de resonancia adimensional, $|\bar{K}(\bar{\omega}_{res})|$, (figura 4.4 b)) como función de $\bar{\omega}_e$. En la figura 4.4 a) se pueden identificar los regímenes elástico y viscoso, así como la región de transición. La figura 4.4 b) muestra que la resonancia no puede existir más allá de un valor máximo de $\bar{\omega}_e$, en el que $|\bar{K}(\bar{\omega}_{res})|$ disminuye hasta el valor de estado estacionario. Como se puede concluir de la inspección visual de $\bar{\omega}_e = \frac{\rho a}{\mu} \sqrt{\frac{E}{(1-\nu^2)\rho_w}}$, este comportamiento evidencia que la resonancia desaparece por encima de un cierto valor del radio del tubo, un cierto valor del módulo de Young y por debajo de un cierto valor de la viscosidad del fluido.

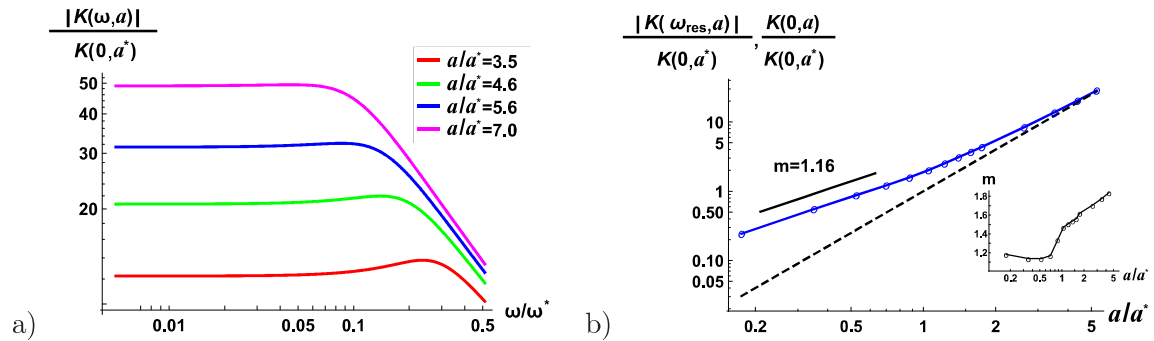


Figura 4.3- a) Magnitud de la permeabilidad dinámica de un fluido newtoniano en un tubo elástico como función de la frecuencia, para diferentes valores del radio del tubo, a . b) Magnitud de la permeabilidad a la frecuencia de resonancia $|K(\omega_{res}, a)|$ -en puntos azules-, y permeabilidad de estado estacionario $K(0, a)$ -en línea punteada-, como función del radio del tubo, a . En el recuadro, se indica el exponente de $|K(\omega_{res}, a)|$ como función del radio del tubo, a .

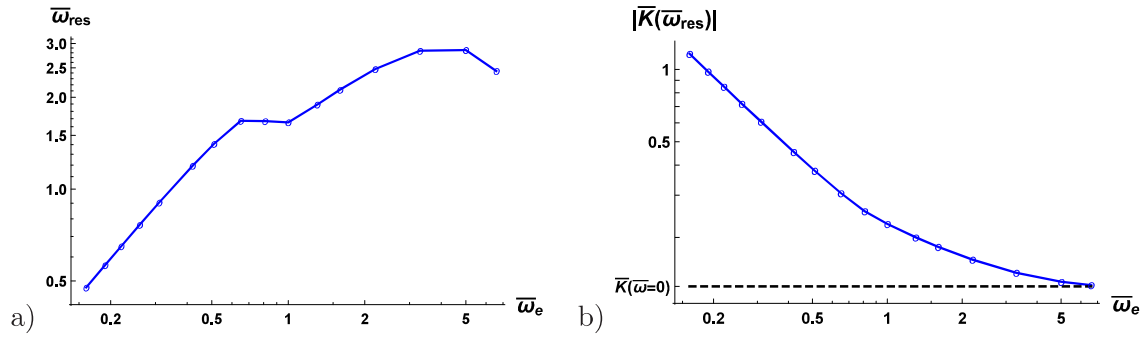


Figura 4.4- a) Frecuencia de resonancia adimensional de un fluido newtoniano en un tubo elástico, $\bar{\omega}_{res}$, como función de la frecuencia elástica adimensional, $\bar{\omega}_e$. b) Magnitud de la permeabilidad adimensional, a la frecuencia de resonancia adimensional, de un fluido newtoniano en un tubo elástico. Para las frecuencias características usamos los valores: $\omega_\mu = 1000$, $\omega_w = 10000$ y $\omega_e = 160 - 6600$. Los parámetros fueron escogidos con el fin de mostrar los dos diferentes regímenes.

4.6. Permeabilidad dinámica en microfluídica de materiales elastoméricos

Nuestro análisis muestra que la resonancia surge sólo en un rango finito de frecuencias. Para evaluar la relevancia de estas predicciones, presentamos resultados para aceite mineral fluyendo a través de un microtubo hecho de un material elastomérico, como PDMS (polidimetilsiloxano) [65, 66], y encontramos una resonancia a una frecuencia del orden de decenas de kHz.

En la figura 4.5, se presenta la magnitud de la permeabilidad dinámica del aceite mineral fluyendo en un microtubo de PDMS, ésta muestra una resonancia en el régimen viscoso a una frecuencia de 43.6 kHz que corresponde a una $\omega_{res} = 2.737 \times 10^5 \frac{rad}{s}$. En este ejemplo, el valor de la permeabilidad dinámica a la frecuencia de resonancia es aproximadamente 40 % mayor que su correspondiente valor de estado estacionario. Esto significa, que imponer al fluido una caída de presión a la frecuencia de resonancia, puede incrementar en un 40 % la amplitud de flujo. Las resonancias en este rango son accesibles experimentalmente y nuestros resultados podrían tener aplicaciones prácticas importantes.

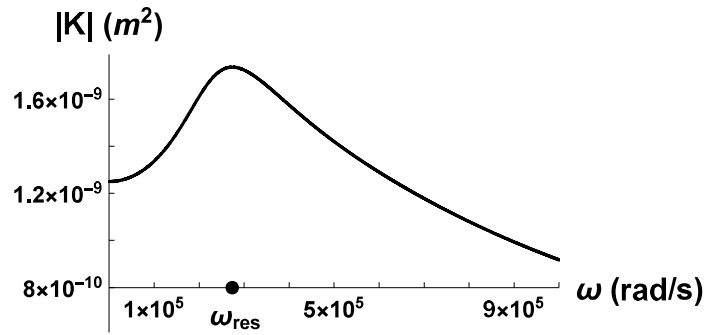


Figura 4.5- Magnitud de la permeabilidad dinámica de un fluido newtoniano (aceite mineral con $\rho = 818 \text{ kg/m}^3$ y $\mu = 1 \text{ kg/m s}$) en un tubo elástico con los parámetros típicos de materiales elastoméricos en microfluídica: $a = 1 \times 10^{-4} \text{ m}$, $h = 1 \times 10^{-5} \text{ m}$, $\rho_w = 987 \text{ kg/m}^3$, $E = 3.6 \times 10^5 \text{ Pa}$ y $\nu = 0.5$. Se encontró una frecuencia de resonancia a $2.737 \times 10^5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, equivalente a 43.6 kHz .

4.7. Resonancia como función de los parámetros del fluido y de la pared del tubo

En la figura 4.6 se muestra la dependencia de la frecuencia de resonancia y de la magnitud de la permeabilidad a la frecuencia de resonancia con los parámetros del fluido. A un radio promedio y parámetros elásticos de la pared dados, las frecuencias elástica y viscosa características del sistema son iguales a ciertos valores de viscosidad y densidad, μ^* y ρ^* , que utilizamos como factores de normalización. La transición entre ambos regímenes sucede aproximadamente a estos valores. Como se puede ver en las figuras 4.6 a) y 4.6 c), el régimen dominado por la viscosidad (en el cual $\omega_\mu < \omega_e$) corresponde a $\frac{\mu}{\mu^*} < 1$ y $\frac{\rho}{\rho^*} > 1$. Una regresión lineal del logaritmo de los datos confirma una dependencia de $\omega_{res} \sim \mu^1$ y $\omega_{res} \sim \rho^{-1}$, tal como la dependencia de ω_μ con la viscosidad y la densidad, mostrada en la ecuación (4.29). Para el régimen dominado por la elasticidad ($\frac{\mu}{\mu^*} > 1$ y $\frac{\rho}{\rho^*} < 1$), ω_{res} es casi independiente de los parámetros del fluido. En las figuras 4.6 b) y 4.6 d) se muestra la magnitud de la permeabilidad a la frecuencia de resonancia como función de los parámetros del fluido. En ellas también es clara la presencia de ambos regímenes.

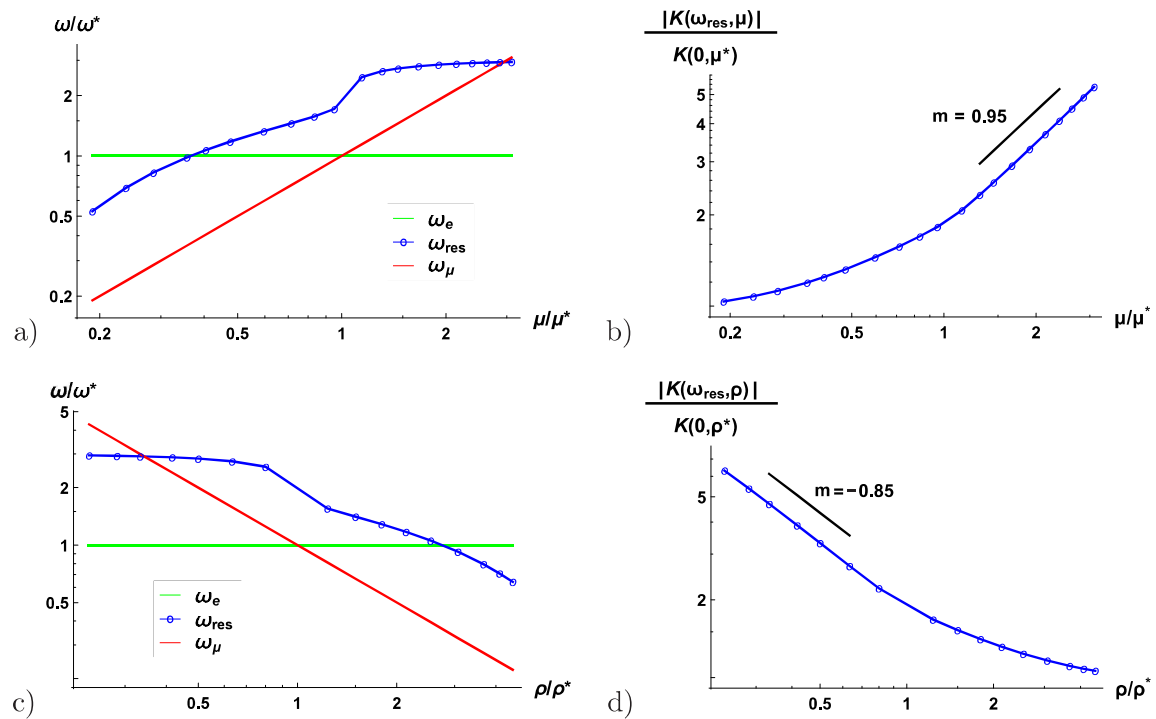


Figura 4.6- Frecuencia de resonancia de un fluido newtoniano en un tubo elástico como función de los parámetros del fluido $-\mu$ (a) y ρ (c)-. Los puntos azules corresponden a los resultados de nuestro modelo. Las frecuencias viscosa y elástica como función de los parámetros del fluido se muestran como referencia en rojo y verde, respectivamente. Magnitud de la permeabilidad a la frecuencia de resonancia como función de μ (b) y ρ (d). En b) y d) se muestran los valores de las pendientes como referencia. Los parámetros fueron escogidos con el fin de mostrar los dos diferentes regímenes.

En la figura 4.7 se muestra la dependencia de la frecuencia de resonancia y de la magnitud de la permeabilidad a la frecuencia de resonancia con los parámetros elásticos de la pared del tubo (E y ρ_w). A un radio promedio y parámetros del fluido dados, las frecuencias elástica y viscosa características del sistema son iguales a ciertos valores del módulo de Young y densidad de la pared, E^* y ρ_w^* , que utilizamos como factores de normalización. La transición entre ambos regímenes sucede aproximadamente a estos valores. Como se puede observar en las figuras 4.7 (a) y 4.7 (c), el régimen dominado por la elasticidad (en el cual $\omega_e < \omega_\mu$) corresponde a $\frac{E}{E^*} < 1$ y $\frac{\rho_w}{\rho_w^*} > 1$. Una regresión lineal del logaritmo de los datos en este régimen confirma una dependencia de $\omega_{res} \sim E^{1/2}$ y $\omega_{res} \sim \rho_w^{-1/2}$, tal como la dependencia de ω_e con el módulo de Young y la densidad de la pared, mostrada

en la ecuación (4.30). Para el régimen dominado por la viscosidad ($\frac{E}{E^*} > 1$ y $\frac{\rho_w}{\rho_w^*} < 1$), ω_{res} es una función no monótona de los parámetros elásticos de la pared del tubo con una dependencia que varía poco comparada con el régimen dominado por la elasticidad. En las figuras 4.7 (b) y 4.7 (d) se muestra la magnitud de la permeabilidad a la frecuencia de resonancia como función de los parámetros elásticos de la pared del tubo. En ellas también se pueden observar diferentes comportamientos en uno y otro régimen.

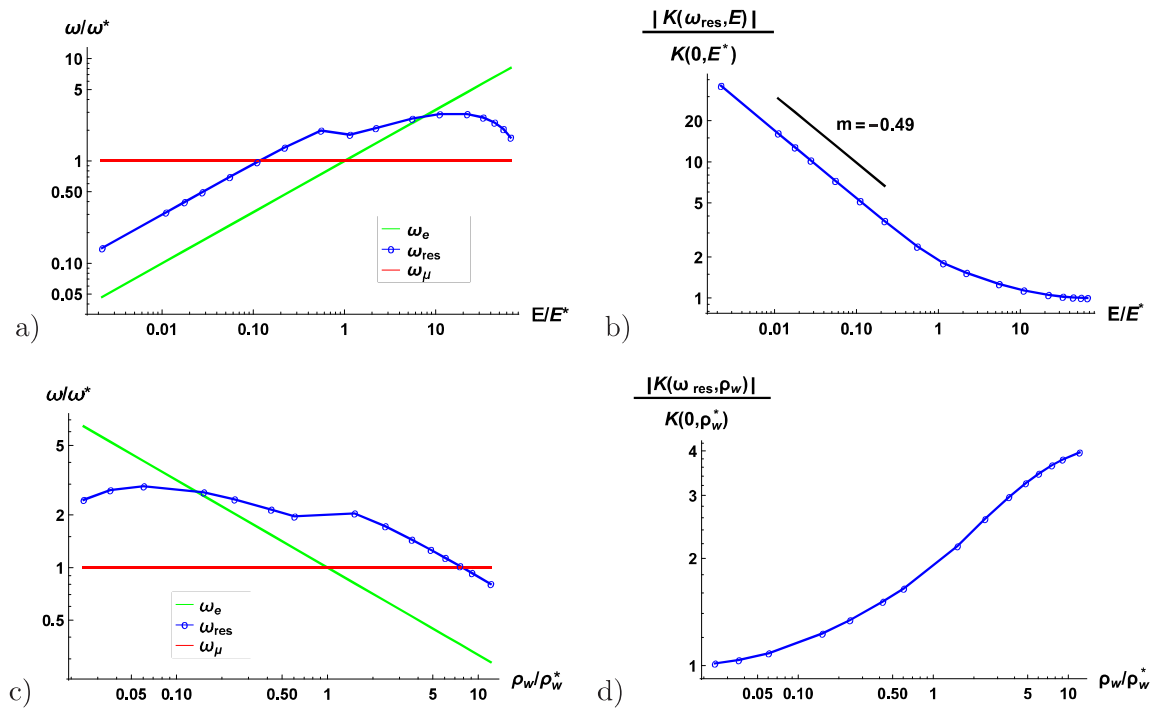


Figura 4.7- Frecuencia de resonancia de un fluido newtoniano en un tubo elástico como función de los parámetros elásticos de la pared del tubo $-E$ (a) y ρ_w (c)-. Los puntos azules corresponden a los resultados de nuestro modelo. Las frecuencias viscosa y la elástica como función de los parámetros elásticos de la pared del tubo se muestran como referencia en rojo y verde, respectivamente. Magnitud de la permeabilidad a la frecuencia de resonancia como función de E (b) y ρ_w (d). En b) se muestra el valor de la pendiente como referencia. Los parámetros fueron escogidos con el fin de mostrar los dos diferentes regímenes.

A partir de las ecuaciones (4.29) y (4.30) se pueden obtener relaciones entre los diferentes parámetros del sistema para que éste se encuentre en uno u otro régimen. Por ejemplo,

para que el sistema tenga un comportamiento elástico, ω_e debe de ser menor que ω_μ , esto nos lleva a las siguientes relaciones:

$$a < \frac{\mu}{\rho} \sqrt{\frac{(1-\nu^2)\rho_w}{E}}; \quad \mu > \rho a \sqrt{\frac{E}{(1-\nu^2)\rho_w}}; \quad \rho < \frac{\mu}{a} \sqrt{\frac{(1-\nu^2)\rho_w}{E}};$$

$$E < (1-\nu^2) \left(\frac{\mu}{\rho a}\right)^2 \rho_w \quad \text{y} \quad \rho_w > \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\rho a}{\mu}\right)^2.$$

Con esta información, podríamos controlar el comportamiento de nuestro sistema en un determinado experimento.

4.8. Otras funciones respuesta del sistema

Función respuesta para la velocidad radial.

La solución para la velocidad radial local, \hat{v} , dada por la ecuación (4.10), se puede escribir como:

$$\hat{v}(x, r, \omega) = -\frac{1}{\mu} \hat{K}_r^L(r, \omega) a g'(x) \hat{G}(\omega), \quad (4.32)$$

en donde la permeabilidad radial local, $\hat{K}_r^L(r, \omega)$, es una función respuesta local (depende de r) y tiene la forma

$$\hat{K}_r^L(r, \omega) = \left[\frac{r}{2a\beta^2} - \frac{\mu}{a\beta} A(\omega) J_1(\beta r) \right]. \quad (4.33)$$

El promedio de \hat{v} en el área de la sección transversal está dado por

$$\langle \hat{v}(x, \omega) \rangle_r = -\frac{1}{\mu} \hat{K}_r(\omega) a g'(x) \hat{G}(\omega), \quad (4.34)$$

en donde la permeabilidad radial, $\hat{K}_r(\omega)$, es una función respuesta promediada, dada por

$$\hat{K}_r(\omega) = \left[\frac{1}{3\beta^2} - \frac{2\mu}{a^3\beta^3} A(\omega) \int_0^{\beta a} \beta r J_1(\beta r) d(\beta r) \right]. \quad (4.35)$$

Función respuesta para el desplazamiento axial.

Definimos la función respuesta para el desplazamiento axial, de tal forma que ésta coincida con la función respuesta definida para la velocidad axial local del fluido evaluada en la pared del tubo. Esto es, como $\frac{\partial \xi}{\partial t} = u|_a$ podemos escribir (usando la ecuación (4.13)):

$$\hat{\xi}(\omega) = -\frac{1}{i\omega} \hat{u}|_a = \frac{1}{i\omega\mu} \hat{K}^L(a, \omega) g(x) \hat{G}(\omega), \quad (4.36)$$

en donde $\hat{K}^L(a, \omega)$ está dada por la ecuación (4.14) evaluada en $r = a$.

Función respuesta para el desplazamiento radial.

Definimos la función respuesta para el desplazamiento radial, de tal forma que ésta coincida con la función respuesta definida para la velocidad radial local del fluido evaluada en la pared del tubo. Esto es, como $\frac{\partial \eta}{\partial t} = v|_a$ podemos escribir (usando la ecuación (4.32)):

$$\hat{\eta}(\omega) = -\frac{1}{i\omega} \hat{v}|_a = -\frac{1}{i\omega\mu} \hat{K}_r^L(r, \omega) a g'(x) \hat{G}(\omega), \quad (4.37)$$

en donde $\hat{K}_r^L(a, \omega)$ está dada por la ecuación (4.33) evaluada en $r = a$.

Las figuras 4.8 a)–4.8 c) (columna izquierda) muestran, para los regímenes elástico, transitorio y viscoso, la magnitud de la función respuesta de la velocidad axial local, $|\hat{K}^L(r, \omega)|$ -ecuación (4.14)-, a diferentes valores de la coordenada radial: de $r = 0$ a $r = a$ (líneas rosa, azul y verde). Esta función es máxima en el centro del tubo y su valor disminuye al aproximarse a la pared del mismo. La magnitud de la función respuesta del desplazamiento axial coincide, por construcción, con la función respuesta de la velocidad axial local evaluada en

la pared del tubo, $|\hat{K}^L(a, \omega)|$, (línea verde). La magnitud de la permeabilidad dinámica, $|\hat{K}(\omega)|$ -ecuación (4.16)-, se muestra en negro.

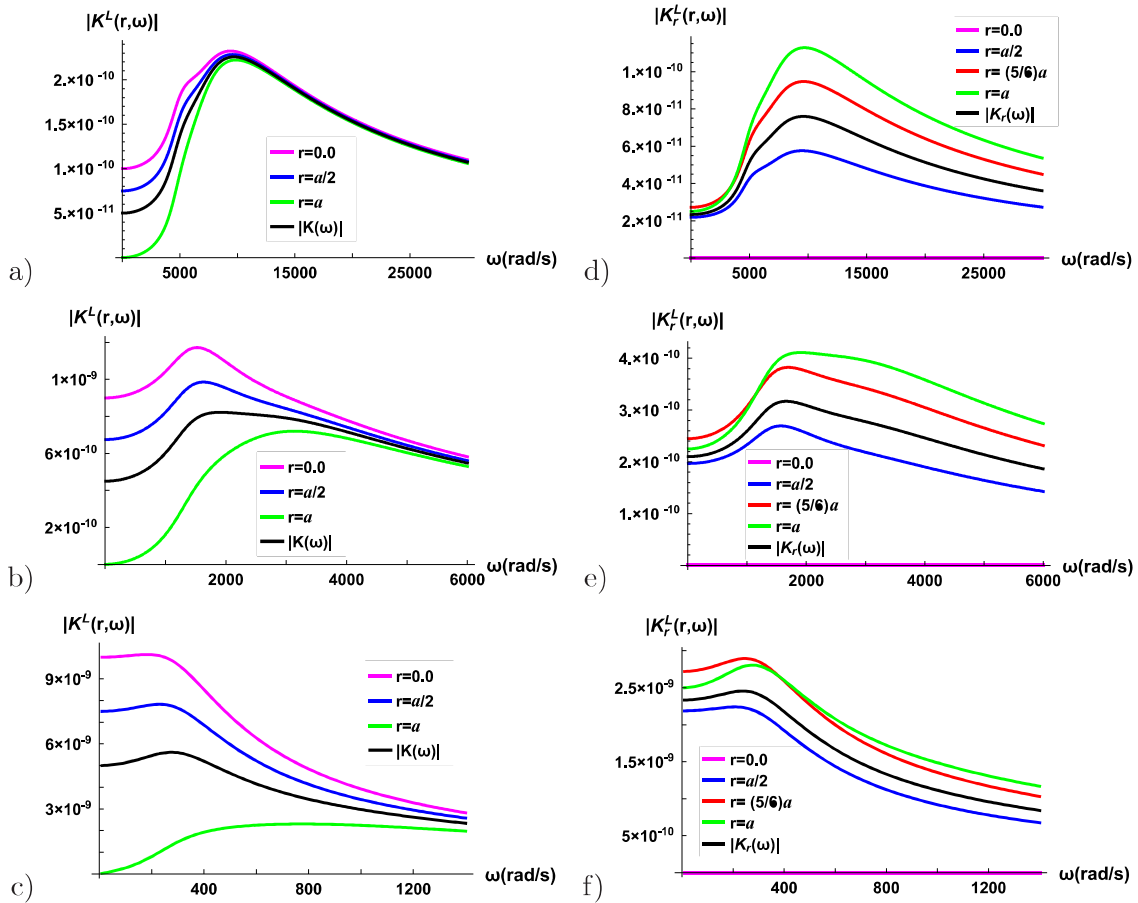


Figura 4.8- Funciones respuesta para los regímenes elástico, transitorio y viscoso, respectivamente, en la dirección axial -(a), (b) y (c)- y en la radial -(d), (e) y (f)-. Los parámetros fueron escogidos con el fin de mostrar los diferentes regímenes.

Las figuras 4.8 d)–4.8 f) (columna derecha) muestran, para los regímenes elástico, transitorio y viscoso, la magnitud de la función respuesta de la velocidad radial local, $|\hat{K}_r^L(r, \omega)|$ -ecuación (4.33)-, a diferentes valores de la coordenada radial: de $r = 0$ a $r = a$ (líneas rosa, azul, roja y verde). Esta función se hace cero en el centro del tubo. La magnitud de la función respuesta del desplazamiento radial coincide, por construcción, con la función res-

puesta de la velocidad radial local evaluada en la pared del tubo, $|\hat{K}_r^L(a, \omega)|$, (línea verde). La magnitud de la permeabilidad dinámica radial, $|\hat{K}_r(\omega)|$ -ecuación (4.35)-, se muestra en negro.

4.9. Presión y gradiente de presión como función de la dirección axial

En esta sección, mostramos cómo se resuelven las ecuaciones para la presión y el gradiente de presión en la dirección de flujo (ecuaciones (4.17) y (4.18)). Primero, escribimos las soluciones armónicas en el dominio de la frecuencia, y luego, usamos condiciones de frontera particulares para la presión que nos permiten llegar a soluciones analíticas en el dominio del tiempo.

4.9.1. Soluciones en el dominio de la frecuencia

Las ecuaciones para la presión y el gradiente de presión como función de la dirección de flujo, x , -ecuaciones (4.17) y (4.18)- tienen soluciones de tipo oscilador armónico, esto es

$$\hat{p}(x, \omega) = \alpha_1 \cos(\kappa x) + \alpha_2 \operatorname{sen}(\kappa x) \quad (4.38)$$

y

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial x}(x, \omega) = \alpha'_1 \cos(\kappa x) + \alpha'_2 \operatorname{sen}(\kappa x), \quad (4.39)$$

en donde α_1 , α_2 , α'_1 y α'_2 son constantes. Para determinar estas constantes, consideramos la presión y el gradiente de presión en la entrada y en la salida de un tubo de longitud, l , esto es, $\hat{p}(x = 0, \omega) = \hat{p}|_e$, $\hat{p}(x = l, \omega) = \hat{p}|_s$, $\frac{\partial \hat{p}}{\partial x}(x = 0, \omega) = \frac{\partial \hat{p}}{\partial x}|_e$ y $\frac{\partial \hat{p}}{\partial x}(x = l, \omega) = \frac{\partial \hat{p}}{\partial x}|_s$. Así, las soluciones para la presión y el gradiente de presión son

$$\hat{p}(x, \omega) = \hat{p}|_e \cos(\kappa x) + \left[\frac{\hat{p}|_s - \hat{p}|_e \cos(\kappa l)}{\operatorname{sen}(\kappa l)} \right] \operatorname{sen}(\kappa x) \quad (4.40)$$

y

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial x}(x, \omega) = \frac{\partial \hat{p}}{\partial x}|_e \cos(\kappa x) + \left[\frac{\frac{\partial \hat{p}}{\partial x}|_s - \frac{\partial \hat{p}}{\partial x}|_e \cos(\kappa l)}{\text{sen}(\kappa l)} \right] \text{sen}(\kappa x). \quad (4.41)$$

Estas ecuaciones se relacionan entre sí, mediante las expresiones

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial x}|_e = \left[\frac{\hat{p}|_s - \hat{p}|_e \cos(\kappa l)}{\text{sen}(\kappa l)} \right] \kappa$$

y

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial x}|_s = \frac{\partial \hat{p}}{\partial x}|_e \cos(\kappa l) - \hat{p}|_e \kappa \text{sen}(\kappa l).$$

4.9.2. Condiciones de frontera para la presión en los extremos del tubo

Las condiciones de frontera en la dirección de flujo imponen las restricciones específicas de un sistema de estudio en particular. Por ejemplo, imponer un valor fijo para la presión al final de un tubo finito es una condición de frontera experimental usada comúnmente en microfluídica.

Puesto que queremos analizar la dinámica pulsada de nuestro sistema, estudiamos el caso particular con condiciones de frontera de una presión oscilatoria de un solo modo en la entrada del tubo (en $x = 0$) y una presión fija -igual a cero- en la salida del mismo (en $x = l$), *i. e.*,

$$p(t)|_e = p_0 \cos(\omega_0 t) \quad (4.42)$$

y

$$p(t)|_s = 0. \quad (4.43)$$

En dominio de Fourier, estas condiciones están dadas por

$$\hat{p}|_e = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \hat{p}_0 [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \quad (4.44)$$

y

$$\hat{p}|_s = 0. \quad (4.45)$$

4.9.3. Soluciones en el dominio del tiempo

Sustituimos las condiciones de frontera propuestas para la presión en dominio de Fourier -ecuaciones (4.44) y (4.45)-, en la ecuación (4.40), y obtenemos

$$\hat{p}(x, \omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \hat{p}_0 [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \hat{f}_p(x, \omega), \quad (4.46)$$

en donde:

$$\hat{f}_p(x, \omega) \equiv \left[\cos(\kappa x) - \frac{\cos(\kappa l)}{\text{sen}(\kappa l)} \text{sen}(\kappa x) \right] = \frac{\text{sen}(\kappa(l-x))}{\text{sen}(\kappa l)}. \quad (4.47)$$

Para obtener una expresión para la presión como función del tiempo, $p(x, t)$, hacemos la antitransformada de Fourier de la ecuación (4.46), dada por $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$ para cualquier función $\hat{f}(\omega)$, y usamos $\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \delta(\omega - \omega_0) d\omega = f(\omega_0)$. Esto es,

$$p(x, t) = \frac{p_0}{2} \left[\hat{f}_p(x, \omega_0) e^{-i\omega_0 t} + \hat{f}_p(x, -\omega_0) e^{i\omega_0 t} \right].$$

Para que $p(x, t)$ sea real, se debe cumplir que

$$\text{Re}[\hat{f}_p(x, \omega_0)] = \text{Re}[\hat{f}_p(x, -\omega_0)]$$

y

$$\text{Im}[\hat{f}_p(x, -\omega_0)] = -\text{Im}[\hat{f}_p(x, \omega_0)].$$

Por lo tanto, la solución para la presión como función del tiempo es

$$p(x, t) = p_0 \{ \text{Re}[\hat{f}_p(x, \omega_0)] \cos(\omega_0 t) + \text{Im}[\hat{f}_p(x, \omega_0)] \text{sen}(\omega_0 t) \}. \quad (4.48)$$

En las figuras 4.9 y 4.10 se muestran -para los regímenes viscoso y elástico, respectivamente- algunas curvas de presión como función del tiempo y de la dirección axial para las condiciones de frontera que imponemos en nuestro sistema -ecuaciones (4.42) y (4.43)-. En el régimen viscoso, la amplitud de la presión decae más rápidamente en la dirección axial que en el régimen elástico.

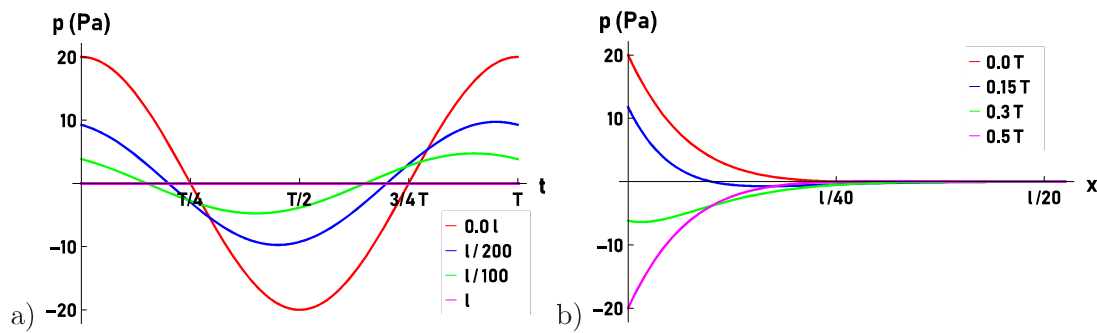


Figura 4.9- a) Presión como función del tiempo para diferentes puntos a lo largo del tubo. b) Presión como función de la dirección axial para diferentes tiempos del ciclo. Usamos un tubo elástico de radio $a = 1 \times 10^{-4} \text{ m}$, longitud $l = 19 a$ y espesor $h = 0.1 a$. Usamos valores típicos de los parámetros de materiales elastoméricos y aceite mineral: $\rho_w = 987 \text{ kg/m}^3$, $E = 3.6 \times 10^5 \text{ Pa}$ y $\nu = 0.5$ para el PDMS, y $\rho = 818 \text{ kg/m}^3$ y $\mu = 1 \text{ kg/m s}$ para el aceite mineral. Las condiciones de frontera para la presión son $p(t)|_e = p_0 \cos(\omega_0 t)$ en la entrada del tubo y $p(t)|_s = 0$ en la salida. En donde $p_0 = 20 \text{ Pa}$ y la frecuencia impuesta, ω_0 , es la frecuencia de resonancia del sistema ($\omega_0 = \omega_{res} = 2.737 \times 10^5 \text{ rad/s}$). Esta resonancia se puede ver en la figura 4.5 y corresponde al régimen viscoso.

A partir de la ecuación (4.46), obtenemos el gradiente de presión en el dominio de la frecuencia, esto es

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial x}(x, \omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \hat{p}_0 [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \frac{d\hat{f}_p(x, \omega)}{dx}, \quad (4.49)$$

en donde definimos

$$\hat{f}_{dp}(x, \omega) \equiv \frac{d\hat{f}_p(x, \omega)}{dx} = -\kappa \frac{\cos(\kappa(l-x))}{\text{sen}(\kappa l)}. \quad (4.50)$$

Para tener una expresión para el gradiente de presión como función del tiempo, hacemos la antitransformada de Fourier de la ecuación (4.49) y obtenemos

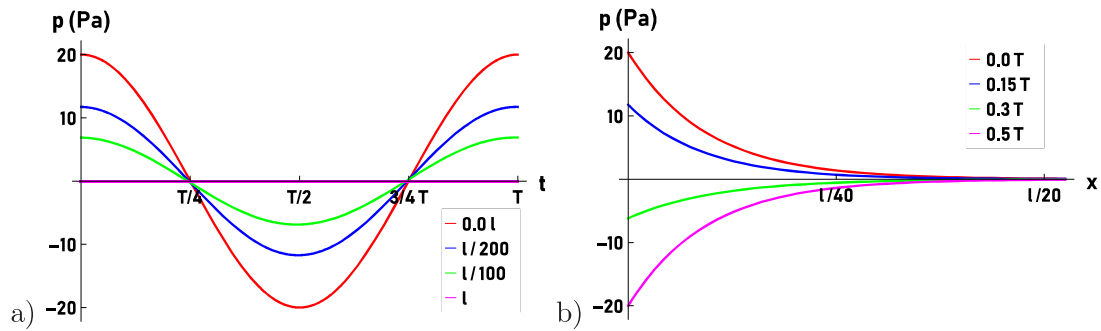


Figura 4.10- a) Presión como función del tiempo para diferentes puntos a lo largo del tubo. b) Presión como función de la dirección axial para diferentes tiempos del ciclo. Usamos un tubo elástico de radio $a = 1 \times 10^{-4} \text{m}$, longitud $l = 19.1 a$ y espesor $h = 0.1 a$. Usamos los siguientes valores de los parámetros: $\rho_w = 987 \text{ kg/m}^3$, $E = 1.0 \times 10^4 \text{ Pa}$ y $\nu = 0.5$, $\rho = 818 \text{ kg/m}^3$ y $\mu = 1 \text{ kg/m s}$. Las condiciones de frontera para la presión son $p(t)|_e = p_0 \cos(\omega_0 t)$ en la entrada del tubo y $p(t)|_s = 0$ en la salida, en donde $p_0 = 20 \text{ Pa}$ y la frecuencia impuesta, ω_0 , es la frecuencia de resonancia del sistema, esto es, $\omega_0 = \omega_{res} = 1.07 \times 10^5 \text{ rad/s}$. Esta resonancia corresponde al régimen elástico.

$$\frac{\partial p}{\partial x}(x, t) = p_0 \{ \text{Re}[\hat{f}_{dp}(x, \omega_0)] \cos(\omega_0 t) + \text{Im}[\hat{f}_{dp}(x, \omega_0)] \text{sen}(\omega_0 t) \}. \quad (4.51)$$

A partir de la ecuación (4.49), obtenemos la derivada del gradiente de presión o segunda derivada de la presión, esto es

$$\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial x^2}(x, \omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \hat{p}_0 [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \frac{d\hat{f}_{dp}(x, \omega)}{dx}, \quad (4.52)$$

en donde definimos

$$\hat{f}_{dg}(x, \omega) \equiv \frac{d\hat{f}_{dp}(x, \omega)}{dx} = -\kappa^2 \frac{\text{sen}(\kappa(l-x))}{\text{sen}(\kappa l)}. \quad (4.53)$$

La derivada del gradiente de presión es necesaria para determinar algunas de las soluciones de las variables del sistema, como la velocidad del fluido y el desplazamiento del tubo en la dirección radial.

4.10. Velocidades del fluido y desplazamientos de la pared del tubo como función de la dirección axial

En esta sección, escribimos las soluciones para las velocidades del fluido y para los desplazamientos de la pared del tubo en la dirección de flujo, tanto en el dominio de la frecuencia como en el dominio del tiempo. Estas soluciones corresponden a las condiciones de frontera particulares para la presión que estudiamos en este trabajo (ecuaciones (4.42) y (4.43)).

4.10.1. Soluciones en el dominio de la frecuencia y del tiempo

Las velocidades del fluido y los desplazamientos de la pared del tubo están escritos en términos del gradiente de presión, $\frac{\partial \hat{p}}{\partial x}(x, \omega) = g(x)\hat{G}(\omega)$, o su derivada espacial, $\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial x^2}(x, \omega) = g'(x)\hat{G}(\omega)$, como se puede ver en las ecuaciones (4.13), (4.15), (4.32), (4.34), (4.36) y (4.37).

Escribimos las soluciones para las velocidades del fluido y los desplazamientos de la pared del tubo en dominio de Fourier, usando el gradiente de presión y la derivada espacial del gradiente de presión particulares -ecuaciones (4.49) y (4.52)-, propuestos en la sección 4.9.3:

$$\hat{u}(x, r, \omega) = -\frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \hat{p}_0 [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \hat{K}^L(r, \omega) \hat{f}_{dp}(x, \omega), \quad (4.54)$$

$$\langle \hat{u}(x, \omega) \rangle_r = -\frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \hat{p}_0 [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \hat{K}(\omega) \hat{f}_{dp}(x, \omega), \quad (4.55)$$

$$\hat{v}(x, r, \omega) = -\frac{1}{\mu} a \sqrt{\frac{\pi}{2}} \hat{p}_0 [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \hat{K}_r^L(r, \omega) \hat{f}_{dg}(x, \omega), \quad (4.56)$$

$$\langle \hat{v}(x, \omega) \rangle_r = -\frac{1}{\mu} a \sqrt{\frac{\pi}{2}} \hat{p}_0 [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \hat{K}_r(r, \omega) \hat{f}_{dg}(x, \omega), \quad (4.57)$$

$$\hat{\xi}(x, \omega) = \frac{1}{i \omega \mu} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \hat{p}_0 [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \hat{K}^L(a, \omega) \hat{f}_{dp}(x, \omega) \quad (4.58)$$

y

$$\hat{\eta}(x, \omega) = \frac{1}{i \omega \mu} a \sqrt{\frac{\pi}{2}} \hat{p}_0 [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \hat{K}_r^L(a, \omega) \hat{f}_{dg}(x, \omega). \quad (4.59)$$

En donde $\hat{K}^L(r, \omega)$, $\hat{K}(\omega)$, $\hat{K}_r^L(r, \omega)$ y $\hat{K}_r(r, \omega)$ son las funciones respuesta locales y promediadas en las direcciones axial y radial, y están dadas por las ecuaciones (4.14), (4.16), (4.33) y (4.35). $\hat{f}_{dp}(x, \omega)$ y $\hat{f}_{dg}(x, \omega)$ son los factores espaciales del gradiente de presión y de la derivada del gradiente de presión, respectivamente, y están dados por las ecuaciones (4.50) y (4.53).

Hacemos la antitransformada de Fourier de las ecuaciones (4.54)–(4.59) para obtener las velocidades del fluido y los desplazamientos de la pared del tubo como función del tiempo.

Éstos son:

$$u(x, r, t) = -\frac{1}{\mu} p_0 \{ \text{Re}[\hat{K}^L(r, \omega_0) \hat{f}_{dp}(x, \omega_0)] \cos(\omega_0 t) + \text{Im}[\hat{K}^L(r, \omega_0) \hat{f}_{dp}(x, \omega_0)] \text{sen}(\omega_0 t) \}, \quad (4.60)$$

$$\langle u(x, t) \rangle_r = -\frac{1}{\mu} p_0 \{ \text{Re}[\hat{K}(\omega_0) \hat{f}_{dp}(x, \omega_0)] \cos(\omega_0 t) + \text{Im}[\hat{K}(\omega_0) \hat{f}_{dp}(x, \omega_0)] \text{sen}(\omega_0 t) \}, \quad (4.61)$$

$$v(x, r, t) = -\frac{1}{\mu} a p_0 \{ \text{Re}[\hat{K}_r^L(r, \omega_0) \hat{f}_{dg}(x, \omega_0)] \cos(\omega_0 t) + \text{Im}[\hat{K}_r^L(r, \omega_0) \hat{f}_{dg}(x, \omega_0)] \text{sen}(\omega_0 t) \}, \quad (4.62)$$

$$\langle v(x, t) \rangle_r = -\frac{1}{\mu} a p_0 \{ \text{Re}[\hat{K}_r(\omega_0) \hat{f}_{dg}(x, \omega_0)] \cos(\omega_0 t) + \text{Im}[\hat{K}_r(\omega_0) \hat{f}_{dg}(x, \omega_0)] \text{sen}(\omega_0 t) \}, \quad (4.63)$$

$$\xi(x, t) = \frac{1}{i \omega \mu} p_0 \{ \text{Re}[\hat{K}^L(a, \omega_0) \hat{f}_{dp}(x, \omega_0)] \cos(\omega_0 t) + \text{Im}[\hat{K}^L(a, \omega_0) \hat{f}_{dp}(x, \omega_0)] \text{sen}(\omega_0 t) \} \quad (4.64)$$

y

$$\eta(x, t) = \frac{1}{i \omega \mu} a p_0 \{ \text{Re}[\hat{K}_r^L(a, \omega_0) \hat{f}_{dg}(x, \omega_0)] \cos(\omega_0 t) + \text{Im}[\hat{K}_r^L(a, \omega_0) \hat{f}_{dg}(x, \omega_0)] \text{sen}(\omega_0 t) \}. \quad (4.65)$$

En las figuras 4.11 y 4.12 se muestran algunas curvas de las velocidades promedio del fluido y los desplazamientos de la pared del tubo como función del tiempo y de la dirección axial (para el régimen viscoso y elástico, respectivamente) obtenidas con las condiciones de frontera particulares presentadas en la sección 4.9.2 -ecuaciones (4.42) y (4.43)-. En el régimen viscoso, las amplitudes de las velocidades promedio del fluido y de los desplazamientos de la pared del tubo decaen más rápidamente en la dirección axial que en el régimen elástico.

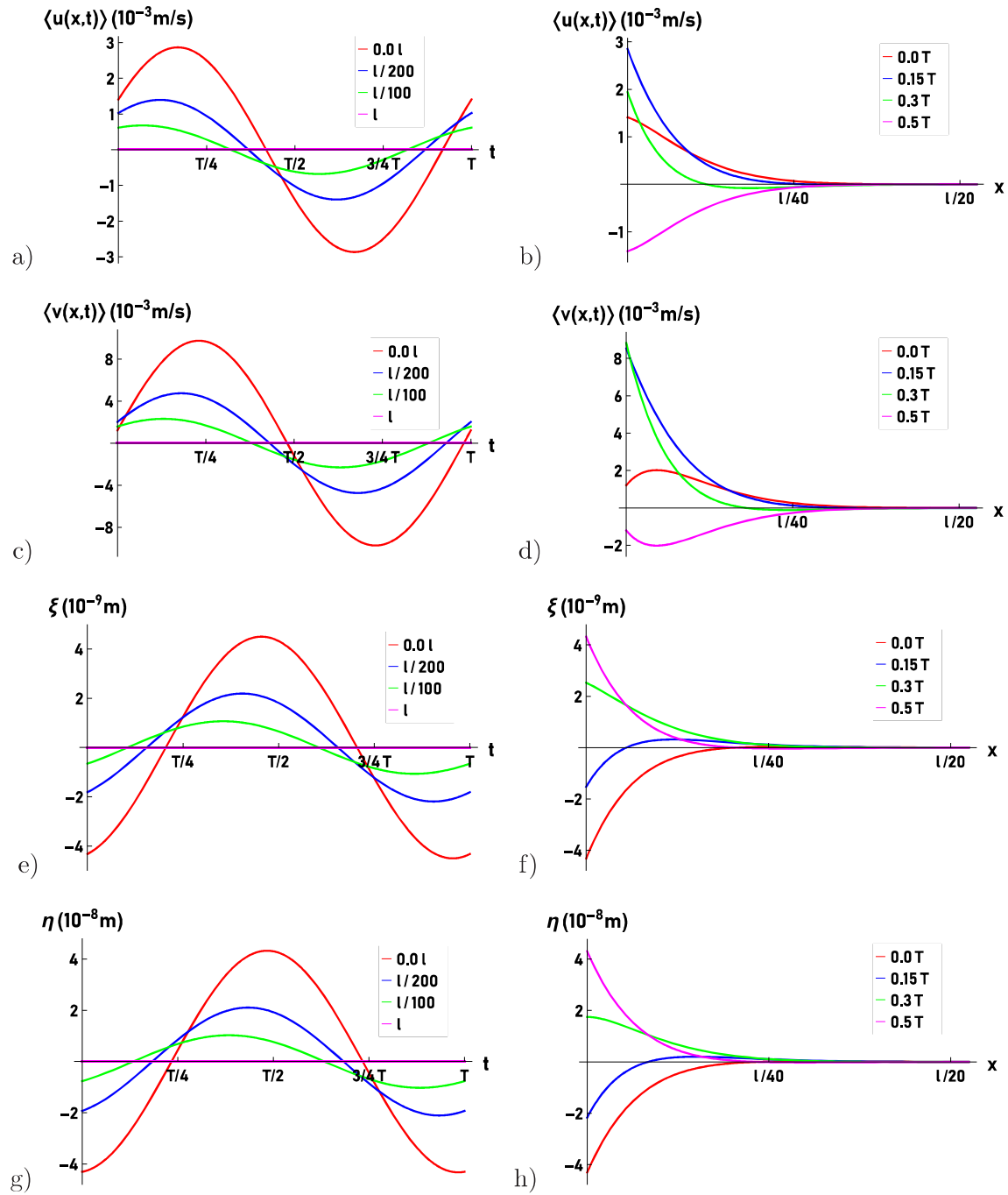


Figura 4.11- Velocidades promedio del fluido -a) en la dirección axial y c) en la dirección radial- como función del tiempo para diferentes posiciones a lo largo del tubo. Velocidades promedio del fluido -b) en la dirección axial y d) en la dirección radial- como función de la dirección axial para diferentes tiempos del ciclo. Desplazamientos de la pared del tubo -e) en la dirección axial y g) en la dirección radial- como función del tiempo para diferentes posiciones a lo largo del tubo. Desplazamientos de la pared del tubo -f) en la dirección axial y h) en la dirección radial- como función de la dirección axial para diferentes tiempos del ciclo. Las dimensiones del tubo elástico, y los valores de los parámetros para el fluido y la pared son los mismos utilizados en la figura 4.9, estos corresponden al régimen viscoso. Las condiciones de frontera para la presión son $p(t)|_e = p_0 \cos(\omega_0 t)$ en la entrada del tubo y $p(t)|_s = 0$ en la salida. En donde $p_0 = 20$ Pa y la frecuencia impuesta, ω_0 , es la frecuencia de resonancia del sistema ($\omega_0 = \omega_{res} = 2.737 \times 10^5$ rad/s). Esta resonancia se puede ver en la figura 4.5.

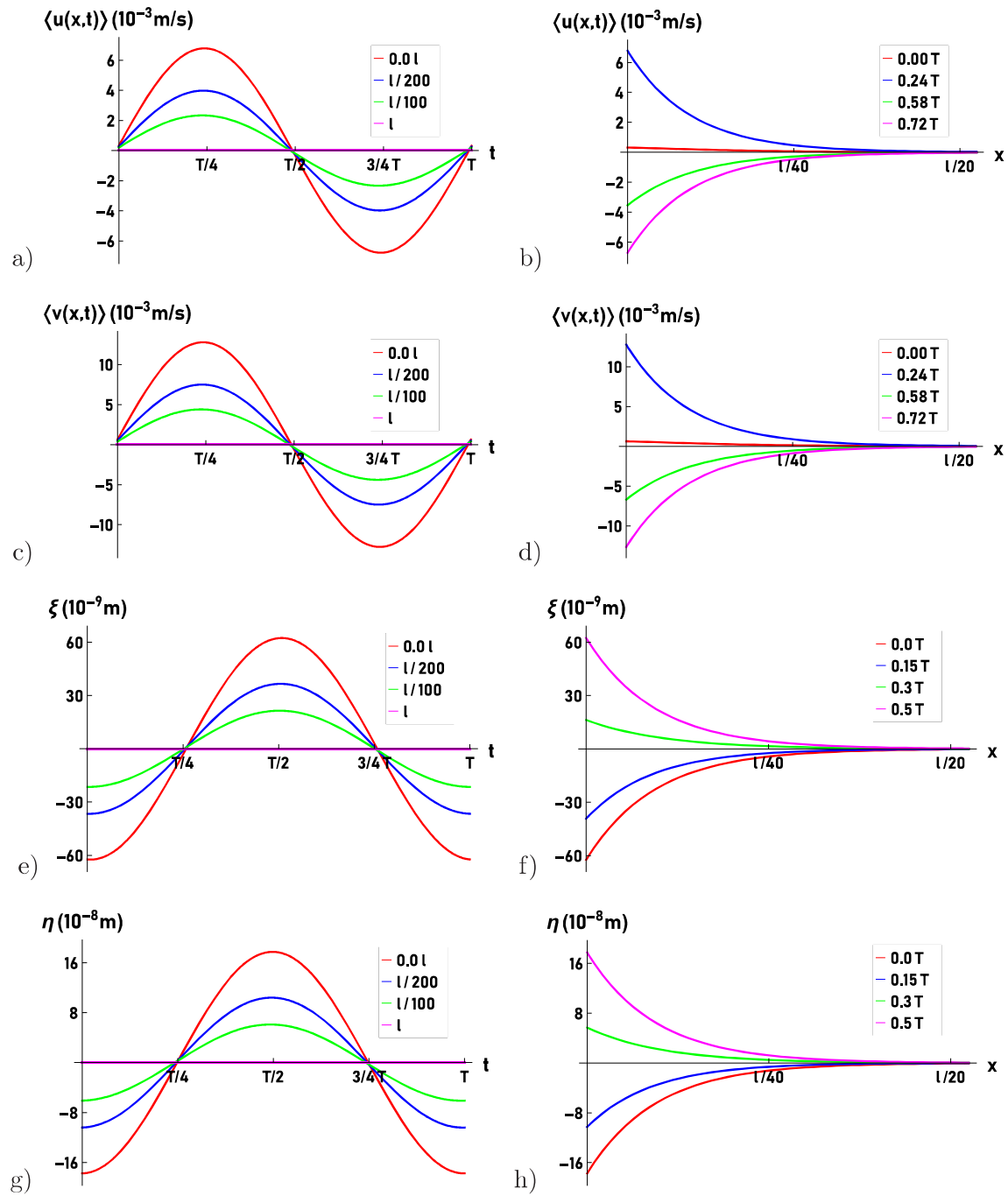


Figura 4.12- Velocidades promedio del fluido -a) en la dirección axial y c) en la dirección radial- como función del tiempo para diferentes posiciones a lo largo del tubo. Velocidades promedio del fluido -b) en la dirección axial y d) en la dirección radial- como función de la dirección axial para diferentes tiempos del ciclo. Desplazamientos de la pared del tubo -e) en la dirección axial y g) en la dirección radial- como función del tiempo para diferentes posiciones a lo largo del tubo. Desplazamientos de la pared del tubo -f) en la dirección axial y h) en la dirección radial- como función de la dirección axial para diferentes tiempos del ciclo. Las dimensiones del tubo elástico, y los valores de los parámetros para el fluido y la pared son los mismos utilizados en la figura 4.10, estos corresponden al régimen elástico. Las condiciones de frontera para la presión son $p(t)|_e = p_0 \cos(\omega_0 t)$ en la entrada del tubo y $p(t)|_s = 0$ en la salida, en donde $p_0 = 20$ Pa y la frecuencia impuesta, ω_0 , es la frecuencia de resonancia del sistema, esto es, $\omega_0 = \omega_{res} = 1.07 \times 10^5$ rad/s.

4.11. Flujo como función de la dirección axial

En esta sección, escribimos una ley de Darcy generalizada local, que relaciona el flujo y el gradiente de presión dependientes de la dirección axial y de la frecuencia. También mostramos las expresiones particulares para el flujo, en el dominio de la frecuencia y del tiempo, válidas para las condiciones de frontera para la presión que estudiamos en este trabajo (ecuaciones (4.42) y (4.43)).

4.11.1. Soluciones en el dominio de la frecuencia y del tiempo

Para fluidos newtonianos que circulan en tubos elásticos, definimos el flujo como función de la dirección axial, como el área de la sección transversal promedio del tubo (cuando éste no está expandido ni comprimido), $A = \pi a^2$, por la velocidad axial promediada en r , *i. e.*, $Q(x, t) \equiv A \langle u(x, t) \rangle_r$. En dominio de Fourier, utilizando la ecuación (4.15), podemos escribir

$$\hat{Q}(x, \omega) \equiv A \langle \hat{u}(x, \omega) \rangle_r = -\frac{A \hat{K}(\omega)}{\mu} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x}(x, \omega). \quad (4.66)$$

La ecuación (4.66) es una ley de Darcy generalizada, ésta relaciona linealmente el flujo con el gradiente de presión en el dominio de la frecuencia. Esta ley de Darcy es local, ya que, debido a la elasticidad de la pared del tubo, el gradiente de presión dinámico no sólo es función de la frecuencia -como en el caso del tubo rígido (ecuación (2.3))- sino que ahora también es función de la dirección axial, x , esto es, cambia punto a punto a lo largo del tubo.

Para las condiciones de frontera para la presión que hemos estudiado -ecuaciones (4.42) y (4.43)-, $\langle \hat{u}(x, \omega) \rangle_r$ está dada por la ecuación (4.55). Con ésta obtenemos

$$\hat{Q}(x, \omega) = -\frac{A}{\mu} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \hat{p}_0 [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \hat{K}(\omega) \hat{f}_{dp}(x, \omega) \quad (4.67)$$

que en el dominio del tiempo es

$$Q(x, t) = -\frac{A}{\mu} p_0 \{ \text{Re}[\hat{K}(\omega_0) \hat{f}_{dp}(x, \omega_0)] \cos(\omega_0 t) + \text{Im}[\hat{K}(\omega_0) \hat{f}_{dp}(x, \omega_0)] \text{sen}(\omega_0 t) \}, \quad (4.68)$$

en donde $\hat{f}_{dp}(x, \omega)$ está dada por la ecuación (4.50).

En las figuras 4.13 y 4.14 se muestran algunas curvas de flujo como función del tiempo y de la dirección axial (para el régimen viscoso y elástico, respectivamente) obtenidas con las condiciones de frontera para la presión presentadas en la sección 4.9.2 -ecuaciones (4.42) y (4.43)-. En el régimen viscoso, la amplitud del flujo decae más rápidamente en la dirección axial que en el régimen elástico.

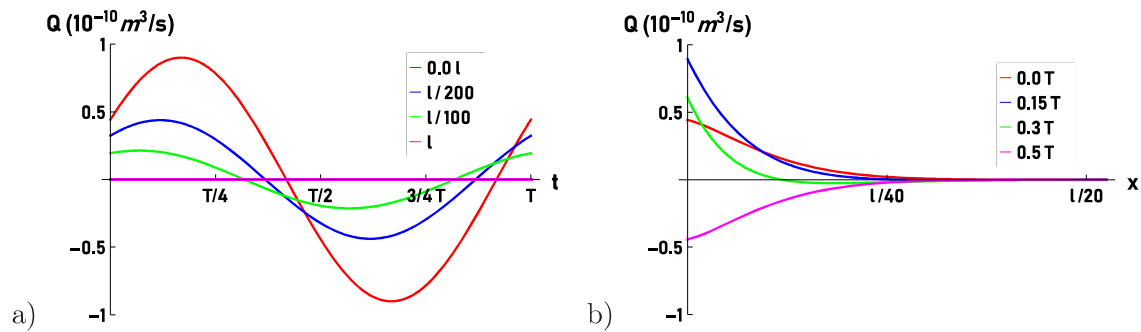


Figura 4.13- Régimen viscoso. a) Flujo como función del tiempo para diferentes posiciones a lo largo del tubo. b) Flujo como función de la dirección axial para diferentes tiempos del ciclo. Las dimensiones del tubo elástico, y los valores de los parámetros para el fluido y la pared, son los mismos que los utilizados en la figura 4.9. Las condiciones de frontera para la presión son $p(t)|_e = p_0 \cos(\omega_0 t)$ en la entrada del tubo y $p(t)|_s = 0$ en la salida. En donde $p_0 = 20 \text{ Pa}$ y la frecuencia impuesta, ω_0 , es la frecuencia de resonancia del sistema ($\omega_0 = \omega_{res} = 2.737 \times 10^5 \text{ rad/s}$). Esta resonancia se puede ver en la figura 4.5.

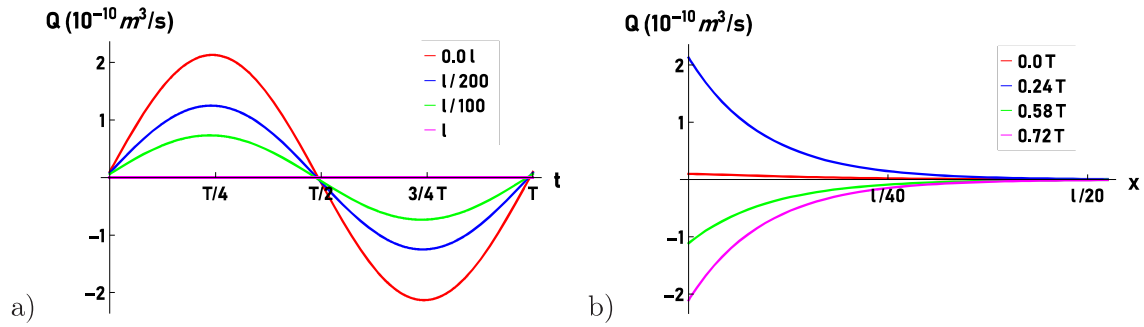


Figura 4.14- Régimen elástico. a) Flujo como función del tiempo para diferentes posiciones a lo largo del tubo. b) Flujo como función de la dirección axial para diferentes tiempos del ciclo. Las dimensiones del tubo elástico, y los valores de los parámetros para el fluido y la pared, son los mismos que los utilizados en la figura 4.10. Las condiciones de frontera para la presión son $p(t)|_e = p_0 \cos(\omega_0 t)$ en la entrada del tubo y $p(t)|_s = 0$ en la salida, en donde $p_0 = 20 \text{ Pa}$ y la frecuencia impuesta, ω_0 , es la frecuencia de resonancia del sistema, esto es, $\omega_0 = \omega_{res} = 1.07 \times 10^5 \text{ rad/s}$.

4.12. Ley de Darcy generalizada para tubos elásticos

A partir de la ecuación (4.66), escribimos una ley de Darcy generalizada para fluidos newtonianos que circulan en tubos elásticos en donde el flujo promediado en la dirección axial es proporcional al gradiente de presión promediado en la dirección axial. Dicha relación se tiene en el dominio de Fourier, esto es,

$$\left\langle \hat{Q}(\omega) \right\rangle_x \equiv -\frac{A \hat{K}(\omega)}{\mu} \left\langle \frac{\partial \hat{p}}{\partial x}(\omega) \right\rangle_x = -\frac{A \hat{K}(\omega)}{\mu} \frac{\Delta \hat{p}}{l}. \quad (4.69)$$

Esta nueva ley de Darcy generalizada conserva la forma de la ley de Darcy para tubos rígidos, por lo que la permeabilidad dinámica, $\hat{K}(\omega)$, tiene el mismo significado -es una medida de la resistencia a fluir a lo largo de la dirección de flujo para cada uno de los modos involucrados en la caída de presión- y sigue siendo útil para saber a qué frecuencia se maximiza la amplitud del flujo promediado a lo largo del tubo.

Para una caída de presión de un solo modo, $\Delta p(t) = \Delta p_0 \cos(\omega_0 t)$, obtenemos un flujo promediado a lo largo del tubo, como función del tiempo, de la forma

$$\langle Q(t) \rangle_x = -\frac{A}{\mu} \{ \text{Re}[\hat{K}(\omega_0)] \cos(\omega_0 t) + \text{Im}[\hat{K}(\omega_0)] \text{sen}(\omega_0 t) \} \frac{\Delta p_0}{l}. \quad (4.70)$$

Las partes real e imaginaria de la permeabilidad dan las contribuciones al flujo promediado a lo largo del tubo como función del tiempo, $\langle Q(t) \rangle_x$, en fase y fuera de fase con la caída de presión. La amplitud del flujo promediado a lo largo del tubo está dada por:

$$\langle Q(t) \rangle_x^{max} = \frac{A}{\mu} |\hat{K}(\omega_0)| \frac{\Delta p_0}{l}. \quad (4.71)$$

La ecuación anterior muestra que la magnitud de la permeabilidad es linealmente proporcional a la amplitud del flujo promediado a lo largo del tubo para sistemas forzados con un solo modo en la caída de presión. Debido a la linealidad de las ecuaciones de movimiento del fluido, es posible expresar el flujo promediado a lo largo del tubo, a cualquier caída de presión dependiente del tiempo, como una superposición lineal de modos sinusoidales, cada uno ponderado por su correspondiente permeabilidad.

Las ecuaciones (4.70) y (4.71) son idénticas en forma a las ecuaciones (2.4) y (2.5) para un tubo rígido, excepto porque en el caso rígido el flujo es el mismo a lo largo de la dirección axial, y en este caso, las ecuaciones son para el flujo promediado en la dirección axial.

Las condiciones de frontera que hemos estudiado para la presión, una presión oscilatoria a la entrada del tubo y una presión fija -igual a cero- a la salida del mismo (ecuaciones (4.42) y (4.43)), son un ejemplo de una caída de presión de un solo modo dada por $\Delta p(t) = -p_0 \cos(\omega_0 t)$. Por lo tanto, $\Delta p_0 = -p_0$ en las ecuaciones (4.70) y (4.71).

En las figuras 4.15 y 4.16 se muestran (para el régimen viscoso y elástico, respectivamente) las curvas para la permeabilidad y para el flujo promediado a lo largo del tubo como función del tiempo para tres diferentes frecuencias: $\frac{1}{3}\omega_{res}$, ω_{res} y $3\omega_{res}$ obtenidas

con las condiciones de frontera particulares para la presión presentadas en la sección 4.9.2 -ecuaciones (4.42) y (4.43)-. Estas curvas ilustran que la amplitud del flujo promediado a lo largo del tubo sigue la tendencia de la magnitud de la permeabilidad dinámica -ecuación (4.71)-. Podemos observar que imponer una presión en la entrada del tubo, a la frecuencia de resonancia del sistema, incrementa la amplitud del flujo promediado a lo largo del tubo. Esto último es una particularidad de las condiciones de frontera elegidas para la presión.

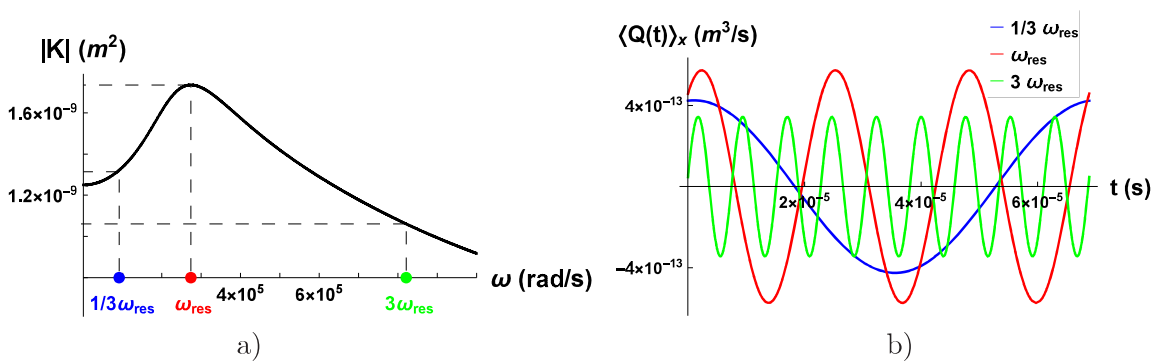


Figura 4.15- Régimen viscoso. a) Magnitud de la permeabilidad dinámica como función de la frecuencia. En el eje de las abscisas, se indican con puntos azul, rojo y verde, $\frac{1}{3}\omega_{res}$, ω_{res} y $3\omega_{res}$, respectivamente. b) Flujo promediado a lo largo del tubo como función del tiempo para tres diferentes frecuencias: $\frac{1}{3}\omega_{res}$, ω_{res} y $3\omega_{res}$. Usamos un tubo elástico de radio $a = 1 \times 10^{-4}m$, espesor $h = 0.1a$ y longitud $l = 19.5a$ (para $\frac{1}{3}\omega_{res}$), $l = 19.0a$ (para ω_{res}) y $l = 19.4a$ (para $3\omega_{res}$). Los parámetros del fluido y de la pared del tubo son los mismos utilizados para la figura 4.9. La frecuencia de resonancia del sistema es $\omega_{res} = 2.737 \times 10^5$ rad/s.

Como vimos en la sección 4.5 (figuras 4.2 b) y 4.2 c)), en el régimen elástico, cerca de la frecuencia de resonancia, la parte imaginaria de la permeabilidad domina el comportamiento de su magnitud. Mientras que para el régimen viscoso, tanto la parte real como la parte imaginaria de la permeabilidad, contribuyen al comportamiento de su magnitud alrededor de la resonancia. Es por esto que el flujo promediado a lo largo del tubo a la frecuencia de resonancia en el régimen elástico (curva roja de la figura 4.16 b)) *va como un seno*, esto es, está fuera de fase con el gradiente de presión (ver ecuación (4.70)). Por su parte, el flujo promediado a lo largo del tubo a la frecuencia de resonancia en el régimen viscoso (curva roja de la figura 4.15 b)) tiene contribuciones semejantes que van en fase y fuera de fase

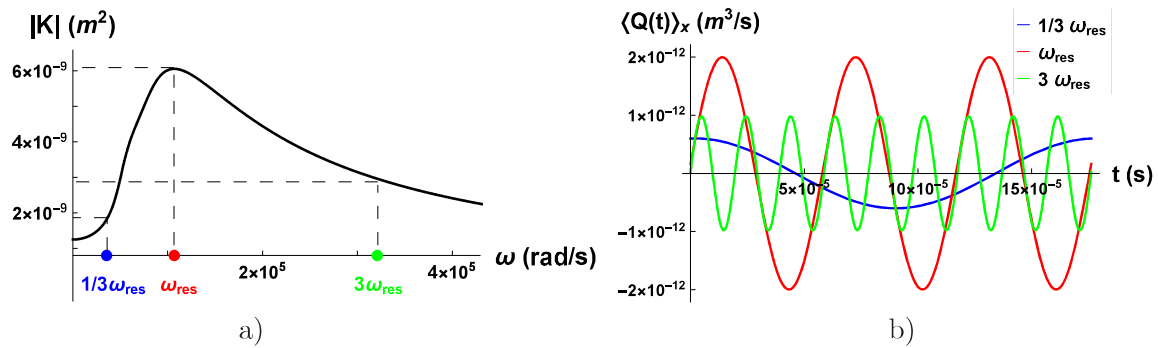


Figura 4.16- Régimen elástico. a) Magnitud de la permeabilidad dinámica como función de la frecuencia. En el eje de las abscisas, se indican con puntos azul, rojo y verde, $\frac{1}{3}\omega_{res}$, ω_{res} y $3\omega_{res}$, respectivamente. b) Flujo promediado a lo largo del tubo como función del tiempo para tres diferentes frecuencias: $\frac{1}{3}\omega_{res}$, ω_{res} y $3\omega_{res}$. Usamos un tubo elástico de radio $a = 1 \times 10^{-4}m$, espesor $h = 0.1 a$ y longitud $l = 19.0 a$ (para $\frac{1}{3}\omega_{res}$), $l = 19.1 a$ (para ω_{res}) y $l = 19.1 a$ (para $3\omega_{res}$). Los parámetros del fluido y de la pared del tubo son los mismos utilizados para la figura 4.10. La frecuencia de resonancia del sistema es $\omega_{res} = 1.07 \times 10^5$ rad/s.

con el gradiente de presión.

La razón de que, en las figuras 4.15 b) y 4.16 b), las longitudes del tubo l sean levemente distintas, es que estamos imponiendo un número entero de longitudes de onda para la presión. Esto implica que l dependa del número de onda κ -coeficiente de la ecuación armónica (4.17)- que a su vez depende de ω . Sin embargo, hemos presentado casos en los que la longitud del tubo es muy similar, lo que permite comparar los respectivos flujos.

4.13. Discusión

Como mencionamos en la introducción de este capítulo, anteriormente se han hecho estudios sobre la dinámica de fluidos newtonianos incompresibles en tubos elásticos ([60], [61] y [62]). En estos trabajos, se usaron las mismas ecuaciones de movimiento para la pared del tubo elástico que presentamos en este trabajo -ecuaciones (4.3) y (4.4)- y se tomaron en cuenta las mismas aproximaciones para resolver estas ecuaciones. En estas aproximaciones se consideró que el radio del tubo era mucho menor que su longitud, que la velocidad de propagación de la onda era mucho mayor que la velocidad promedio de flujo, que el espesor

de la pared era mucho menor que el radio del tubo y que las deformaciones radiales de la pared eran pequeñas.

La principal diferencia entre estos trabajos y el nuestro, es que nosotros consideramos un tubo finito. Por tanto, el tipo de soluciones propuesto en tratamientos anteriores y en el nuestro es distinto.

En [60], [61] y [62] se proponen soluciones de ondas viajeras para la presión, el gradiente de presión, las velocidades del fluido y los desplazamientos de la pared del tubo. Este tipo de soluciones constituye un tratamiento clásico en el estudio de la dinámica de un fluido newtoniano que circula a través de un tubo elástico infinitamente largo, bajo un gradiente de presión oscilatorio. Estas ondas viajeras se propagan a lo largo del tubo elástico con un decaimiento en su amplitud si el fluido es viscoso y con una amplitud constante si el fluido es invíscido. Además, a diferencia de lo que sucede en el caso invíscido, la velocidad de propagación de la onda en un fluido viscoso no sólo depende de los parámetros del fluido y de la pared del tubo, sino también de la frecuencia de oscilación. En estos estudios, se compara la amplitud del flujo oscilatorio en un tubo elástico con la amplitud del flujo oscilatorio en un tubo rígido, a un mismo gradiente de presión. Se obtiene que cuando el fluido es invíscido, la amplitud del flujo oscilatorio en un tubo elástico decae con la frecuencia y es mayor que la amplitud del flujo oscilatorio en un tubo rígido, que también decae con la frecuencia. Además, a ciertas frecuencias de pulsado, la diferencia entre estas amplitudes presenta un máximo, pero esto no implica una resonancia en el sentido de que existan frecuencias a las que la amplitud del flujo oscilatorio tenga un máximo.

En el presente trabajo, tratamos con tubos finitos y proponemos soluciones de ondas estacionarias para la presión, el gradiente de presión, las velocidades del fluido y los desplazamientos de la pared del tubo. Este tipo de ondas permite dinámicas con valores fijos en

ciertos puntos del espacio, llamados nodos. De esta forma podemos establecer condiciones de frontera. Por ejemplo, podemos fijar el valor de la presión a la salida del tubo, que es una condición experimental usada comúnmente en microfluídica.

Caracterizamos la respuesta entre una caída de presión y el flujo promediado a lo largo de la dirección axial -ecuación (4.69)-, a través de la permeabilidad dinámica, que es una función respuesta de los fluidos newtonianos confinados en tubos elásticos bajo gradientes de presión oscilatorios. Conocer la permeabilidad dinámica como función de la frecuencia, para un tubo elástico y un fluido newtoniano en particular, significa contar con un método de control de flujo. Esto adquiere aún más relevancia cuando los parámetros del fluido y de la pared del tubo elástico llevan a una resonancia en la permeabilidad, esto es, a un máximo de la permeabilidad como función de la frecuencia. La frecuencia de forzamiento a la que esto sucede, llamada frecuencia de resonancia en esta tesis, implica que para una caída de presión constituida por un modo de esta frecuencia supondría un incremento máximo en la amplitud del flujo promediado en la longitud del tubo (ver figuras 4.15 y 4.16).

4.14. Conclusiones

Escribimos una expresión analítica para la permeabilidad dinámica de fluidos newtonianos sujetos a gradientes de presión pulsados que circulan a través de tubos elásticos. La permeabilidad dinámica es una función respuesta del sistema y contiene información tanto del fluido como del medio que lo confina. Observamos una vasta fenomenología para la permeabilidad dinámica. Encontramos que, para microtubos con un coeficiente de Poisson igual a 0.5, la permeabilidad es siempre mayor que aquella para un tubo rígido, esto concuerda con estudios sobre el flujo a través de tubos elásticos² [61]. También encontramos que, para ciertos rangos de los parámetros del sistema, la permeabilidad dinámica es una

²Para coeficientes de Poisson menores a 0.5, de hecho encontramos que la permeabilidad de estado estacionario es menor que la de un tubo rígido, esto implica que hay un rango pequeño, a frecuencias bajas, para el cual la elasticidad induce una permeabilidad dinámica menor.

función no monótona de la frecuencia y presenta resonancias. Estas resonancias aparecen por la competencia de los tiempos característicos de la viscosidad del fluido y de la elasticidad del tubo. Encontramos tres frecuencias características en el sistema: una frecuencia viscosa -que es característica del fluido-, una frecuencia elástica -que es característica de la pared del tubo- y una frecuencia viscosa acoplada a la geometría del tubo a través del espesor y la densidad de su pared. Cuando las densidades del fluido y de la pared del tubo son equiparables, sólo se tienen dos frecuencias características relevantes e independientes en el sistema: la frecuencia viscosa y la frecuencia elástica. Al variar los valores de los parámetros del sistema, la frecuencia de resonancia sigue el comportamiento dado por la frecuencia característica más baja, esto es, ambas frecuencias varían con los diferentes parámetros del sistema siguiendo aproximadamente el mismo exponente. La resonancia desaparece por encima de un cierto valor del radio del tubo, un cierto valor del módulo de Young y por debajo de un cierto valor de la viscosidad del fluido. Este comportamiento hace que esta resonancia sea característica de fluidos de relativa alta viscosidad fluyendo en microdispositivos de materiales elastoméricos. Creemos que estos resultados son accesibles experimentalmente, y a fin de orientar potenciales experimentos, presentamos resultados para aceite mineral fluyendo a través de microtubos de PDMS y encontramos resonancias del orden de algunas decenas de kHz .

Escribimos una ley de Darcy generalizada para fluidos newtonianos que circulan en tubos elásticos en donde el flujo promediado en la dirección axial es proporcional a la caída de presión. Dicha relación se tiene en el dominio de Fourier. Esta nueva ley de Darcy generalizada conserva la forma de la ley de Darcy para tubos rígidos, por lo que la permeabilidad dinámica, $\hat{K}(\omega)$, tiene el mismo significado -es una medida de la resistencia a fluir a lo largo de la dirección de flujo para cada uno de los modos involucrados en la caída de presión- y sigue siendo útil para saber a qué frecuencia se maximiza la amplitud del flujo promediado a lo largo del tubo.

PERMEABILIDAD DINÁMICA DE FLUIDOS VISCOELÁSTICOS EN TUBOS ELÁSTICOS

En este capítulo, presentamos los avances del estudio de un sistema con elasticidad tanto en el fluido como en el medio confinante. Estudiamos la dinámica de un fluido viscoelástico lineal -un fluido de Maxwell- que fluye a través de un microtubo elástico y que está sujeto a un gradiente de presión oscilatorio que es función de la dirección de flujo y del tiempo, esto es, $\nabla p(x, t) = \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} \hat{i}$, en donde $\frac{\partial p(x, t)}{\partial x} = g(x) G(t)$.

5.1. Ecuaciones del modelo

En el capítulo 4 presentamos la ecuación de continuidad para las velocidades del fluido en la dirección axial y radial -ecuación (4.1)-, así como las ecuaciones de movimiento para la pared de un tubo elástico -ecuaciones (4.3) y (4.4)-. En el caso de un fluido de Maxwell con densidad, ρ , viscosidad, μ , y tiempo de relajación, t_r , la ecuación de conservación de momento está dada por

$$t_r \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho \frac{\partial u}{\partial t} = -t_r \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right). \quad (5.1)$$

Cuando $t_r = 0$, la ecuación (5.1) se reduce a la ecuación de Navier-Stokes presentada en el capítulo anterior -ecuación (4.2)- que es válida para fluidos newtonianos.

Usamos las mismas condiciones de frontera en la interfase fluido-sólido descritas en la sección 4.2 -ecuaciones (4.5), (4.8 y (4.7)-, pero con la expresión para el esfuerzo en la pared

del tubo, σ_{rx} , correspondiente a un fluido de Maxwell, dada por $t_r \frac{\partial \sigma_{rx}}{\partial t} + \sigma_{rx} = \mu \frac{\partial u}{\partial r} |_a$.

Siguiendo la misma metodología descrita en la sección 4.2 y en el apéndice D, para el caso de un fluido newtoniano, resolvemos las ecuaciones de movimiento en el dominio de la frecuencia para un fluido de Maxwell que circula a través de un tubo elástico. Los detalles para llegar a estas soluciones se incluyen en el apéndice E.

La solución para la velocidad local en la dirección de flujo, \hat{u} , se puede escribir como:

$$\hat{u}(x, r, \omega) = -\frac{1}{\mu} \hat{K}^L(r, \omega) g(x) \hat{G}(\omega), \quad (5.2)$$

en donde $\hat{K}^L(r, \omega)$ es una permeabilidad local, dada por

$$\hat{K}^L(r, \omega) = \left[\mu A(\omega) J_0(\delta r) - \frac{1}{\beta^2} \right] \quad (5.3)$$

en donde $\delta = \sqrt{\frac{\rho}{\mu} (t_r \omega^2 + i \omega)}$, $\beta = \sqrt{\frac{i \omega \rho}{\mu}}$ y $A(\omega)$ es la constante de integración de la ecuación (E.9), cuya expresión se muestra en el apéndice E.

Al promediar la ecuación (5.2) en el área de la sección transversal de flujo, obtenemos

$$\langle \hat{u}(x, \omega) \rangle = -\frac{1}{\mu} \hat{K}(\omega) g(x) \hat{G}(\omega), \quad (5.4)$$

en donde $\hat{K}(\omega)$ es una permeabilidad dinámica de la forma

$$\hat{K}(\omega) = \left[\mu A(\omega) \frac{2 J_1(\delta a)}{\delta a} - \frac{1}{\beta^2} \right]. \quad (5.5)$$

5.1.1. Otras funciones respuesta del sistema

Función respuesta para la velocidad radial.

La solución para la velocidad radial local, \hat{v} , está dada por

$$\hat{v}(x, r, \omega) = -\frac{1}{\mu} \hat{K}_r^L(r, \omega) a g'(x) \hat{G}(\omega), \quad (5.6)$$

en donde la permeabilidad radial local, $\hat{K}_r^L(r, \omega)$, es una función respuesta local y tiene la forma

$$\hat{K}_r^L(r, \omega) = \left[\frac{r}{2a\beta^2} - \frac{\mu}{a\delta} A(\omega) J_1(\delta r) \right]. \quad (5.7)$$

El promedio de \hat{v} en el área de la sección transversal está dado por

$$\langle \hat{v}(x, \omega) \rangle = -\frac{1}{\mu} \hat{K}_r(\omega) a g'(x) \hat{G}(\omega), \quad (5.8)$$

en donde la permeabilidad radial, $\hat{K}_r(\omega)$, es una función respuesta promediada en el área de la sección transversal, cuya expresión es

$$\hat{K}_r(\omega) = \left[\frac{1}{3\beta^2} - \frac{2\mu}{a^3\delta^3} A(\omega) \int_0^{\delta a} \delta r J_1(\delta r) d(\delta r) \right]. \quad (5.9)$$

Función respuesta para el desplazamiento axial.

Definimos la función respuesta para el desplazamiento axial, de tal forma que ésta coincida con la función respuesta definida para la velocidad axial local del fluido evaluada en la pared del tubo. Esto es, como $\frac{\partial \xi}{\partial t} = u|_a$, podemos escribir (usando la ecuación (5.2)):

$$\hat{\xi}(\omega) = -\frac{1}{i\omega} \hat{u}|_a = \frac{1}{i\omega\mu} \hat{K}^L(a, \omega) g(x) \hat{G}(\omega), \quad (5.10)$$

en donde $\hat{K}^L(a, \omega)$ está dada por la ecuación (5.3) evaluada en $r = a$.

Función respuesta para el desplazamiento radial.

Definimos la función respuesta para el desplazamiento radial, de tal forma que ésta coincida con la función respuesta definida para la velocidad radial local del fluido evaluada en la

pared del tubo. Esto es, como $\frac{\partial \eta}{\partial t} = v|_a$, podemos escribir (usando la ecuación (5.6)):

$$\hat{\eta}(\omega) = -\frac{1}{i\omega} \hat{v}|_a = -\frac{1}{i\omega\mu} \hat{K}_r^L(r, \omega) a g'(x) \hat{G}(\omega), \quad (5.11)$$

en donde $\hat{K}_r^L(a, \omega)$ está dada por la ecuación (5.7) evaluada en $r = a$.

Para fluidos newtonianos, $\delta = \beta$ y las ecuaciones de este capítulo se reducen a las de la dinámica de fluidos newtonianos en tubos elásticos presentadas en el capítulo 4.

5.2. Elasticidad en la pared y/o en el fluido

Cuando un fluido viscoelástico fluye a través de un tubo elástico existe una competencia entre la elasticidad debida al tubo y la elasticidad debida al fluido.

En la figura 5.1 se muestra la permeabilidad dinámica como función de la frecuencia para un sistema con elasticidad tanto en el fluido como en el tubo -fluido de Maxwell en tubo elástico (línea azul)-. También se muestra como referencia la permeabilidad para un sistema con elasticidad sólo en el tubo -fluido newtoniano en tubo elástico (línea rosa)- y la permeabilidad para un sistema con elasticidad sólo en el fluido -fluido de Maxwell en tubo rígido (línea verde)-. Esta última curva corresponde a un fluido viscoelástico y por tanto tiene varios máximos -tal y como vimos en los antecedentes (figuras 2.1 y 2.2)-, pero sólo graficamos el primero porque es el que corresponde al valor más alto de la permeabilidad y el que nos servirá de referencia para el sistema con elasticidad tanto en el fluido como en el tubo. Como podemos observar en esta figura, a ciertos valores de los parámetros, la permeabilidad para el fluido de Maxwell en tubo elástico tiene dos máximos: uno que asociamos a la elasticidad de la pared y otro que asociamos a la elasticidad del fluido.

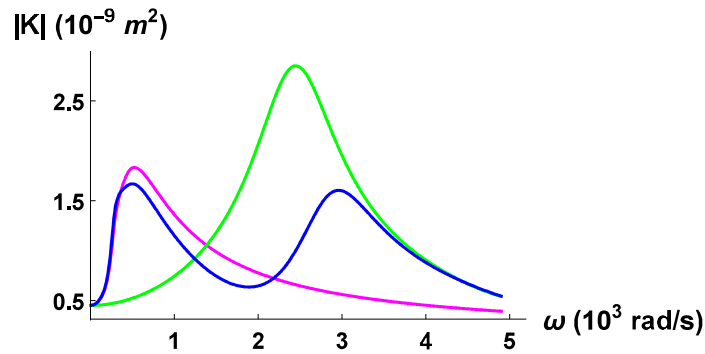


Figura 5.1- Magnitud de la permeabilidad dinámica como función de la frecuencia para tres diferentes sistemas: fluido de Maxwell en tubo elástico (línea azul), fluido newtoniano en tubo elástico (línea rosa) y fluido de Maxwell en tubo rígido (línea verde). Los parámetros fueron escogidos con el fin de mostrar los máximos de los tres sistemas en una misma gráfica.

En la figura 5.2 presentamos la evolución de las curvas de permeabilidad como función de la frecuencia al incrementar el valor de la densidad de la pared del tubo, ρ_w . En esta figura resulta claro que para densidades altas el primer máximo coincide con el del sistema con elasticidad sólo en la pared (línea rosa); y el segundo máximo con el del sistema con elasticidad sólo en el fluido (línea verde). En el límite en que la densidad de la pared tiende a infinito (que no corresponde a ningún material realista), la permeabilidad de un fluido de Maxwell en un tubo elástico se aproxima a la de un fluido de Maxwell en un tubo rígido.

En la figura 5.3 se muestra la magnitud de la permeabilidad dinámica como función de la frecuencia para distintos radios y para cuatro diferentes sistemas: fluido de Maxwell en tubo elástico (línea azul), fluido newtoniano en tubo elástico (línea rosa punteada), fluido de Maxwell en tubo rígido (línea verde) y fluido newtoniano en tubo rígido (línea negra punteada). Como podemos observar, incrementar el radio del tubo exalta la elasticidad debida a la pared. Además, para radios grandes, las resonancias debidas a la elasticidad de la pared, del fluido o de ambos desaparecen (ver figura 5.3 f)). Para el sistema con elasticidad tanto en la pared como en el fluido, al incrementar el tamaño del sistema, la resonancia debida a la elasticidad del fluido desaparece a radios más bajos que la resonancia debida a

la elasticidad de la pared.

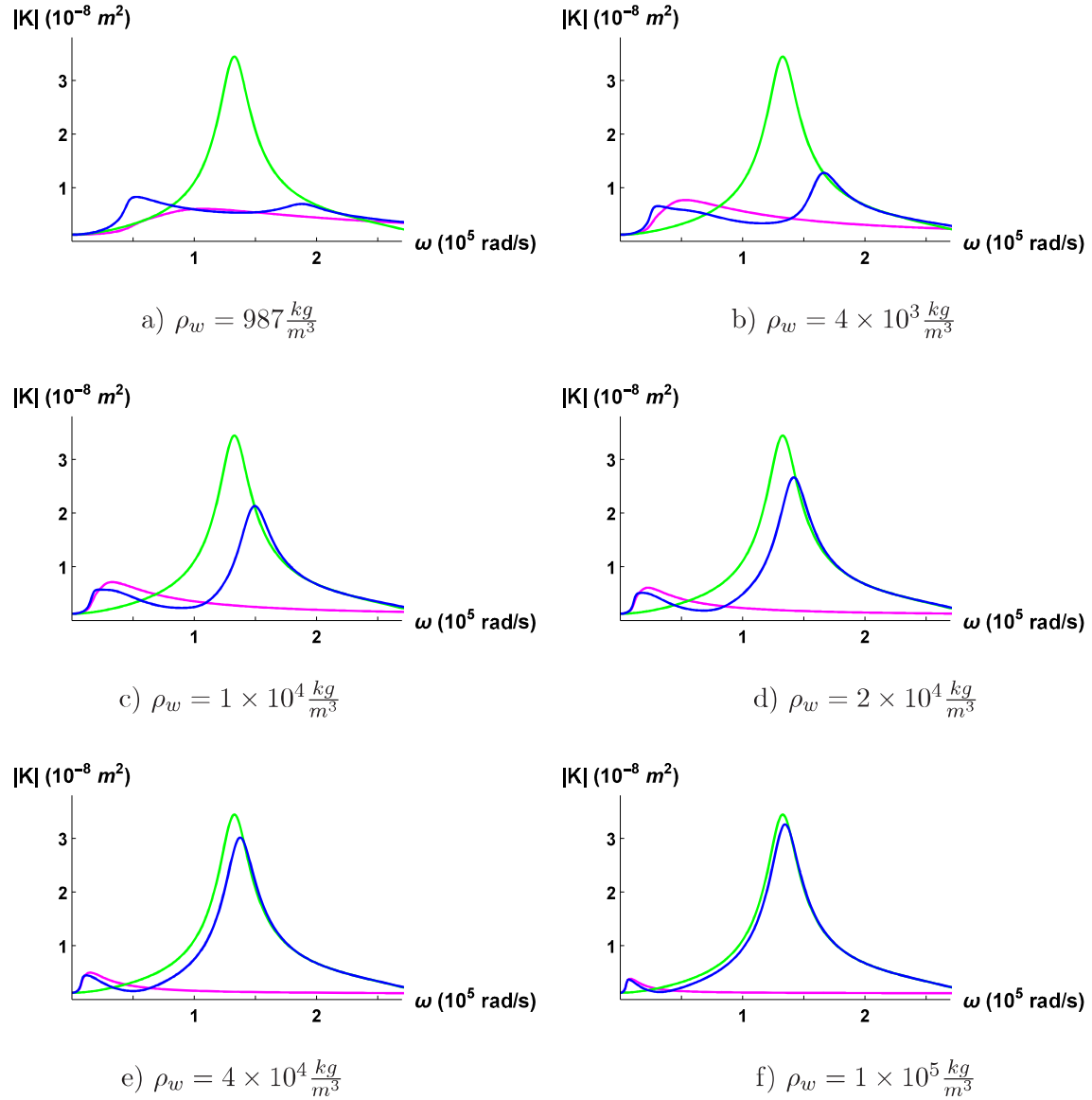


Figura 5.2- Magnitud de la permeabilidad dinámica como función de la frecuencia para diferentes densidades de la pared y para tres diferentes sistemas: fluido de Maxwell en tubo elástico (línea azul), fluido newtoniano en tubo elástico (línea rosa) y fluido de Maxwell en tubo rígido (línea verde). Para el tubo elástico usamos: $a = 1 \times 10^{-4}m$, $E = 1.0 \times 10^4 Pa$, $\nu = 0.5$ y $h = 10\mu m$. Para el fluido usamos: $\rho = 818 kg/m^3$, $\mu = 1 kg/m s$, $t_r = 4 \times 10^{-5}s$ (para el fluido de Maxwell) y $t_r = 0s$ (para el fluido newtoniano).

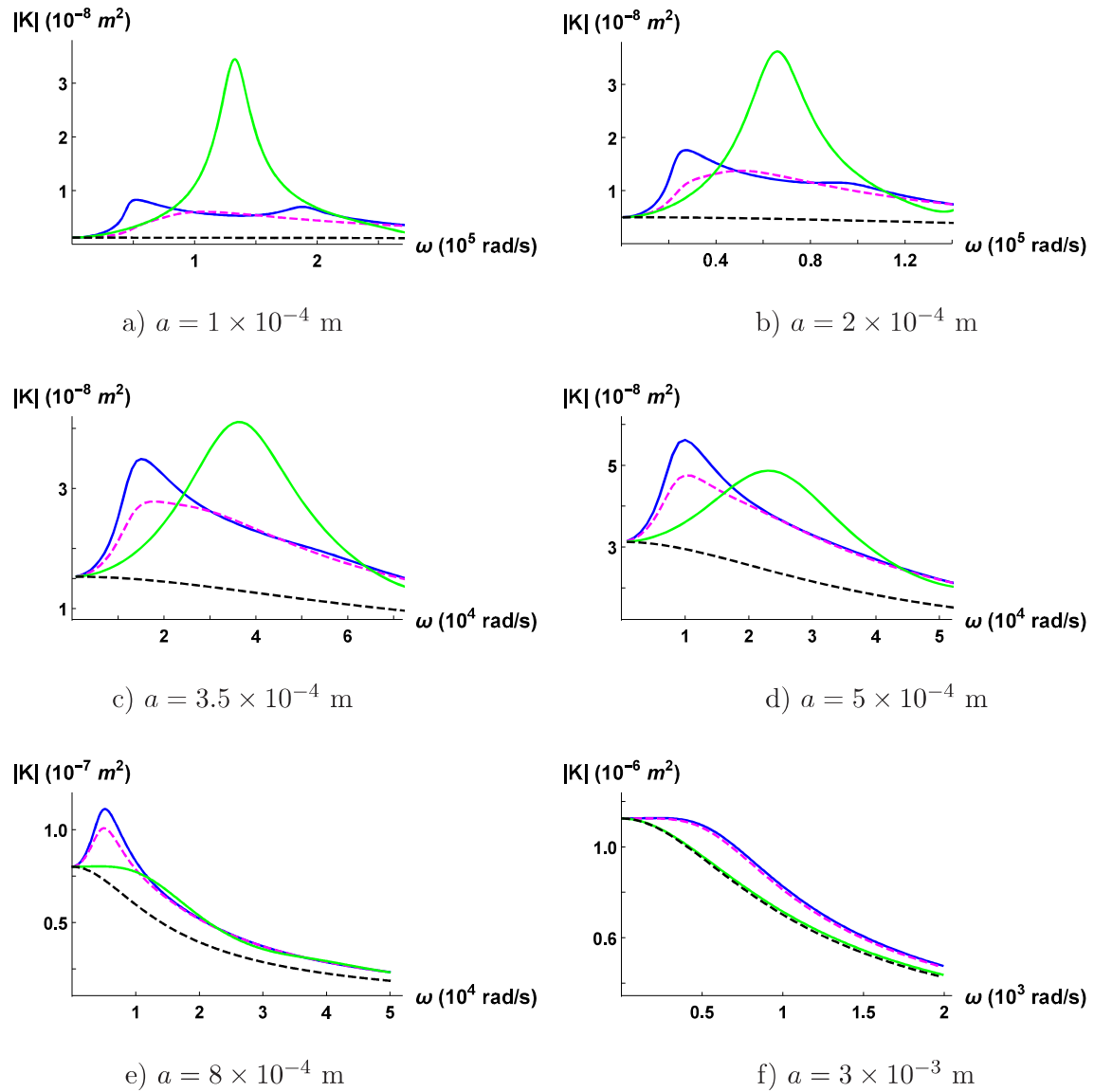


Figura 5.3- Magnitud de la permeabilidad dinámica como función de la frecuencia para diferentes radios y para cuatro diferentes sistemas: fluido de Maxwell en tubo elástico (línea azul), fluido newtoniano en tubo elástico (línea rosa punteada), fluido de Maxwell en tubo rígido (línea verde) y fluido newtoniano en tubo rígido (línea negra punteada). Para el tubo elástico usamos: $\rho_w = 987 \text{ kg/m}^3$, $E = 1.0 \times 10^4 \text{ Pa}$, $\nu = 0.5$ y $h = 10 \mu\text{m}$. Para el fluido usamos: $\rho = 818 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 1 \text{ kg/m s}$, $t_r = 4 \times 10^{-5} \text{ s}$ (para el fluido de Maxwell) y $t_r = 0 \text{ s}$ (para el fluido newtoniano).

Como podemos ver en las figuras 5.3 c) y 5.3 d), a ciertas frecuencias, se tienen máximos de magnitudes semejantes en la permeabilidad de los diferentes sistemas con elasticidad. Esto significa que si se usan las frecuencias adecuadas en la caída de presión impuesta en estos sistemas, es posible obtener amplitudes máximas de flujo equiparables.

En la figura 5.3 c), se puede observar que el hecho de asociar un máximo a la elasticidad de la pared y otro a la elasticidad del fluido es sólo una manera conveniente de estudiarlos *a grosso modo*. En esta figura resulta claro que el máximo que asociamos a la elasticidad del fluido ha desaparecido y sin embargo podemos ver que la magnitud del primer máximo es mucho mayor que en el caso de un fluido newtoniano. Podemos decir por tanto que hay regímenes en que una de las dos elasticidades domina el comportamiento del sistema y otros en que ambas cooperan para dar una respuesta mayor que la que darían por separado, como se puede ver claramente en el rango de 0 a 2.4×10^4 rad/s de la figura 5.3 c). Esto se ilustra en la figura 5.4 en la que se muestran las curvas del flujo promediado a lo largo del tubo como función del tiempo -para un fluido de Maxwell en un tubo elástico (línea azul), un fluido newtoniano en un tubo elástico (línea rosa) y un fluido de Maxwell en un tubo rígido (línea verde)- correspondientes a las permeabilidades de la figura 5.3 c) a una misma frecuencia de forzamiento (1.51×10^4 rad/s), que es la frecuencia de resonancia para el fluido de Maxwell en un tubo elástico. Se usaron las condiciones de frontera estudiadas para la presión presentadas en la sección 4.9.2 -ecuaciones (4.42) y (4.43)-. En la figura se puede ver que el flujo de mayor amplitud en este ejemplo sucede para el sistema con elasticidad tanto en el fluido como en la pared.

Es importante destacar que un sistema con elasticidad -ya sea en el fluido, en el tubo o en ambos (curvas verde, rosa y azul, respectivamente)- tiene una permeabilidad mayor que un sistema sin elasticidad (línea negra punteada). También es importante notar que, aún a radios en los que han desaparecido todos los máximos, la permeabilidad en tubos

elásticos (tanto para fluidos newtonianos como para fluidos de Maxwell) es mayor que la permeabilidad en tubos rígidos.

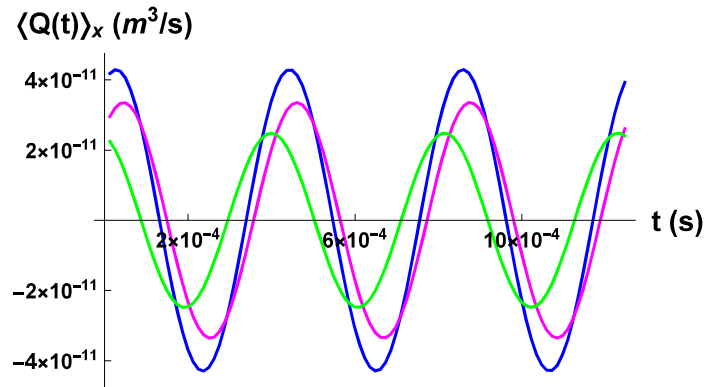


Figura 5.4- Flujo promediado a lo largo del tubo como función del tiempo para un fluido de Maxwell en tubo elástico (línea azul), un fluido newtoniano en tubo elástico (línea rosa) y un fluido de Maxwell en tubo rígido (línea verde), usando los mismos parámetros de la figura 5.3 c) para los fluidos y la pared del tubo. Las condiciones de frontera para la presión son $p(t)|_e = p_0 \cos(\omega_0 t)$ en la entrada del tubo y $p(t)|_s = 0$ en la salida, en donde $p_0 = 20$ Pa y la frecuencia impuesta, ω_0 , es la frecuencia de resonancia para el fluido de Maxwell en tubo elástico, esto es, $\omega_0 = 1.51 \times 10^4$ rad/s. La longitud de los tubos es $l = 17.9 a$.

Para el sistema con elasticidad tanto en el fluido como en la pared del tubo, la funcionalidad de la respuesta, $\hat{K}(\omega)$, en ambos parámetros elásticos -el tiempo de relajación, t_r , y el módulo de Young, E - es no lineal (ver ecuación (5.5) y $A(\omega)$, mostrada al final del apéndice E). Sin embargo, el hecho de asociar un máximo a la elasticidad de la pared y otro a la elasticidad del fluido en la permeabilidad dinámica de este sistema, nos permite estudiar ambos efectos de forma cualitativa. Así, podemos decir que:

- Aumentar la densidad de la pared, mitiga el efecto de la elasticidad del tubo y exalta la del fluido, como se ve en la figura 5.2.
- Aumentar el radio del tubo, mitiga el efecto de la elasticidad del fluido y exalta la del tubo, como se observa en la figura 5.3.
- De manera general, el efecto de cooperación de las dos elasticidades (la del fluido y

la de la pared del tubo) parece darse a bajas frecuencias, como se puede observar en este rango de las curvas de permeabilidad de las figuras 5.3 a) - 5.3 e), en donde la curva azul es mayor que la verde y la rosa. Esto se ejemplifica en la figura 5.4.

5.3. Permeabilidad de la sangre en un microtubo elastomérico y en la aorta

Con el fin de presentar sistemas realistas, mostramos resultados para la sangre fluyendo a través de un microtubo elastomérico y a través de la aorta.

En la figura 5.5, se muestra la magnitud de la permeabilidad dinámica de la sangre en un microtubo de PDMS como función de la frecuencia. El primer máximo de la línea azul, que corresponde al valor más alto de la permeabilidad, se encuentra a una frecuencia de $1820 \frac{rad}{s}$ (290 Hz). El valor de este máximo es aproximadamente 62% mayor que el del caso rígido (línea verde). Las resonancias en este rango son accesibles experimentalmente y nuestros resultados podrían tener aplicaciones prácticas importantes.

En la figura 5.6, se muestra la magnitud de la permeabilidad dinámica de la sangre, considerada como un fluido de Maxwell, en un tubo elástico con las dimensiones y características de la aorta. Aún cuando la aorta tiene paredes con un grado de elasticidad similar al de los materiales elastoméricos (ya que tiene un módulo de Young semejante al de estos), podemos ver que la permeabilidad dinámica de este sistema es prácticamente igual que la del caso rígido. Esto se debe al tamaño de la aorta, que tiene un radio tan grande que no permite resonancias.

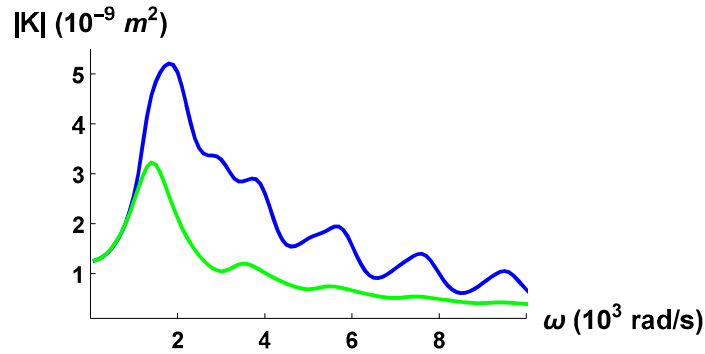


Figura 5.5- Magnitud de la permeabilidad dinámica de la sangre en un microtubo elástico de PDMS como función de la frecuencia -línea azul-. Se muestra también como referencia la curva correspondiente a la permeabilidad de la sangre en un tubo rígido -línea verde-. El radio y el espesor del tubo son $a = 1 \times 10^{-4}$ m y $h = 1 \times 10^{-5}$ m, respectivamente. Los parámetros usados para la sangre son $\rho = 1050 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 4 \times 10^{-3} \text{ kg/m s}$ y $t_r = 1 \times 10^{-3}$ s. Los parámetros utilizados para el PDMS son $\rho_w = 987 \text{ kg/m}^3$, $E = 3.6 \times 10^5 \text{ Pa}$ y $\nu = 0.5$. Para la sangre en un tubo elástico, la primera frecuencia de resonancia es de $1820 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ (290 Hz), y para la sangre en un tubo rígido es de $1415 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ (225 Hz).

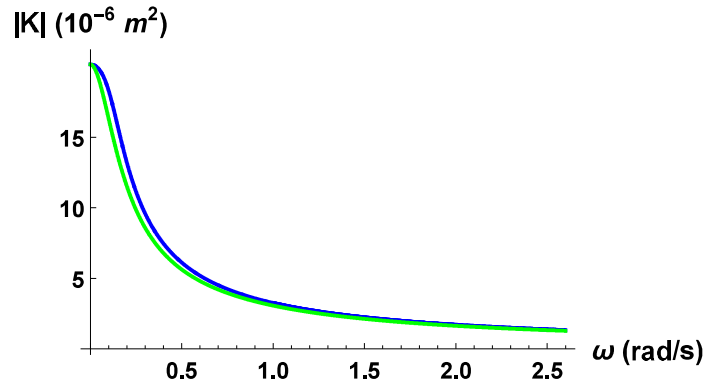


Figura 5.6- Magnitud de la permeabilidad dinámica de la sangre en la aorta como función de la frecuencia -línea azul-. Se muestra también como referencia la curva correspondiente a la permeabilidad de la sangre en un tubo rígido -línea verde-. El radio y el espesor de la aorta son $a = 1.27 \times 10^{-2}$ m y $h = 1.2 \times 10^{-3}$ m, respectivamente. Los parámetros de la sangre son $\rho = 1050 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 4 \times 10^{-3} \text{ kg/m s}$ y $t_r = 1 \times 10^{-3}$ s. Los parámetros para la aorta son $\rho_w = 1500 \text{ kg/m}^3$, $E = 4 \times 10^5 \text{ Pa}$ y $\nu = 0.5$.

5.4. Conclusiones

Cuando un fluido viscoelástico fluye a través de un tubo elástico existe una competencia entre la elasticidad debida al tubo y la elasticidad debida al fluido. El efecto que tienen la

elasticidad del fluido y la elasticidad de la pared del tubo sobre la respuesta del sistema con ambas elasticidades no es simple, pero podemos explorarlo cualitativamente cambiando los valores de los parámetros en este sistema. Así, podemos exaltar uno u otro efecto, mitigarlos, o hacer que ambos cooperen para dar una respuesta mayor a la que darían por separado. Por ejemplo, encontramos que incrementar el valor de la densidad de la pared exalta la elasticidad debida al fluido, mientras que aumentar el valor del radio del tubo exalta la elasticidad debida a la pared, y que a radios muy grandes se pierden las resonancias. Además, vimos que el efecto de cooperación de ambas elasticidades parece darse a bajas frecuencias, en donde se tiene una respuesta mayor que la que cada elasticidad daría por separado.

Observamos también que la permeabilidad de sistemas con elasticidad (ya sea en la pared, en el fluido o en ambos) es mayor que la de un sistema sin elasticidad.

Además, al estudiar sistemas realistas, como la sangre fluyendo en la aorta o en un microtubo de PDMS, sólo encontramos resonancias cuando la sangre fluye en un microtubo elastomérico, ya que la aorta tiene un radio tan grande que no permite resonancias.

DINÁMICA EXPERIMENTAL DE FLUIDOS

PULSADOS

Originalmente se tenía contemplado un estudio experimental de fluidos pulsados en microfluídica como parte del trabajo doctoral. Finalmente, la gran mayoría de los resultados obtenidos provienen de estudios teóricos, sin embargo, colaboré activamente en dos proyectos experimentales, particularmente en el análisis de los datos. En estos trabajos soy segunda autora. El primero de ellos fue publicado en *Journal of Micromechanics and Microengineering* en 2017, y el segundo, es un manuscrito en arbitraje.

6.1. Espectrómetro de flujo microfluídico

En [67], se presentó un dispositivo microfluídico que nos permitió estudiar la dinámica de flujos oscilatorios en un rango de frecuencias de 1 a 300 Hz. El fluido de estudio puede ser newtoniano, viscoelástico e incluso un biofluido, ya que el dispositivo está hecho de PMMA (polimetilmetacrilato) que lo hace biocompatible. El dispositivo se pone en contacto con un piezoeléctrico a través de un cilindro de acoplamiento. El piezoeléctrico permite imponer un movimiento periódico con flujo neto cero y amplitudes de hasta 20 micras sobre el fluido contenido en los microcanales. Por medio de una cámara rápida, acoplada a un microscopio, se puede obtener la dinámica de una partícula traza (de una micra) con una rapidez de adquisición de hasta 5000 cuadros por segundo. La fabricación de este dispositivo microfluídico es sencilla y de bajo costo, ya que se basa en el uso de una microfresadora. Como una prueba de factibilidad, se realizó un estudio de la dinámica de un fluido newtoniano sujeto a un gradiente de presión pulsado. Estudiamos la amplitud de la velocidad como

función de la frecuencia de pulsado, la distribución de velocidades y la distribución de las fluctuaciones de la velocidad.

6.2. Corriente de gotas como motor de flujos oscilatorios en microfluídica. *Manuscrito en arbitraje.*

En este trabajo [68], se describe un dispositivo microfluídico que se basa en la generación y flujo de una corriente de microgotas de agua en aceite. El paso de las gotas en uno de los microcanales crea una caída de presión pulsada que puede ser percibida, por ejemplo, por una interfase fluido-fluido en un canal perpendicular. De esta forma, la corriente de microgotas actúa como motor de pulsado sobre la interfase, imponiendo sobre ella una caída de presión periódica. La frecuencia de pulsamiento es fácilmente ajustable mediante los flujos de entrada del agua y del aceite que generan las microgotas. Este dispositivo nos permite prescindir del uso de equipos externos para generar un movimiento pulsátil de los fluidos dentro de los microcanales. Se realizó el estudio de la dinámica de una interfase agua-aceite mineral a diferentes frecuencias de forzamiento.

CONCLUSIONES

En este trabajo, estudiamos la dinámica de sistemas fluido-medio confinante con y sin elasticidad a través de funciones respuesta de los mismos. Particularmente, analizamos el comportamiento de fluidos newtonianos y viscoelásticos de Maxwell, sujetos a forzamientos pulsados, circulando a través de redes rígidas y tubos elásticos.

Para el estudio de la dinámica de fluidos en redes rígidas, usamos una función respuesta de la red. Para el análisis del movimiento de fluidos a través de tubos elásticos, usamos una permeabilidad dinámica. Ambas funciones respuesta, son una medida de la resistencia a fluir de un fluido a través del medio confinante; a mayor magnitud de la función respuesta, menor resistencia al flujo.

Estudiamos el comportamiento de redes redundantes y no redundantes en presencia de obstrucciones. Analizamos redes fisiológicas realistas en la sucesión de radios que las conforman, en las cuales las obstrucciones pueden comprometer la irrigación de un tejido, y redes fluidicas genéricas -potencialmente útiles en microfluídica- en donde las obstrucciones pueden causar la falla de un dispositivo.

Nuestros resultados muestran que las ventajas de la redundancia intrínseca se manifiestan y son relevantes en presencia de obstrucciones.

Encontramos que, redes redundantes y no redundantes, construidas para tener una misma resistencia y un mismo flujo a una caída de presión dada, dejan de ser equivalentes en

presencia de obstrucciones. A porcentajes relativamente pequeños del área obstruida, F_{eq} , de la mitad de los vasos a un cierto nivel de bifurcación, el flujo en la red no redundante es igual al flujo en la red redundante con obstrucciones del 100%. F_{eq} es una medida relativa de la robustez de la red; nos da un valor del grado de obstrucción por arriba del cual tener redundancia es más conveniente, en términos de flujo, que tener vasos más anchos.

En redes no redundantes, las obstrucciones causan gradientes enormes de la rapidez de deformación. En cambio, en redes redundantes, las obstrucciones causan gradientes de la rapidez de deformación mucho menores. La redundancia reduce el impacto que las obstrucciones tienen sobre los gradientes de la rapidez de deformación, haciendo a la red menos sensible a la presencia de obstrucciones. Sin embargo, la redundancia en sí misma introduce gradientes de la rapidez de deformación en las redes, los cuales constituyen una cierta desventaja cuando no hay obstrucciones. Esta desventaja es parte del costo a pagar por las enormes ventajas, referentes al flujo y a la uniformidad de la rapidez de deformación, cuando se presentan obstrucciones.

Nuestro estudio ofrece una posible explicación del por qué la naturaleza ha optado por la redundancia intrínseca, sobre vasos más anchos, para asegurar el suministro de sangre en lugares clave del organismo (como en la red arterial que irriga el cerebro) y sugiere por qué no todas las redes vasculares son redundantes, ya que la redundancia conlleva un costo que incluye el mantenimiento de los vasos y la falta de uniformidad de la rapidez de deformación en los mismos. Pagar ese costo vale la pena, sólo cuando el buen desempeño de una red particular es crucial para la supervivencia.

Nuestros resultados también proporcionan una orientación en el diseño de dispositivos microfluídicos robustos para los cuales, la inclusión cuidadosa de la redundancia intrínseca podría prevenir una falla por obstrucción, debida a partículas o burbujas.

Para el estudio del comportamiento dinámico de fluidos newtonianos incompresibles, que fluyen a través de tubos elásticos y que están sujetos a gradientes de presión pulsados, desarrollamos conocimientos fundamentales para dilucidar el papel que juega la interacción entre la viscosidad del fluido, la elasticidad de la pared del tubo y el tamaño característico del medio confinante en la dinámica del sistema.

Desarrollamos una expresión analítica para la permeabilidad dinámica de fluidos newtonianos sujetos a gradientes de presión pulsados que circulan a través de tubos elásticos. La permeabilidad dinámica presenta una vasta fenomenología que incluye resonancias. Estas resonancias aparecen por la competencia de los tiempos característicos de la viscosidad del fluido y de la elasticidad del tubo. Encontramos tres frecuencias características propias del sistema: una frecuencia viscosa -característica del fluido-, una frecuencia elástica -característica de la pared del tubo- y una frecuencia viscosa acoplada a la geometría del tubo a través del espesor y la densidad de su pared. Cuando las densidades del fluido y de la pared del tubo son similares, sólo se tienen dos frecuencias características relevantes e independientes en el sistema: la frecuencia viscosa y la frecuencia elástica. Al variar los valores de los parámetros del sistema, la frecuencia de resonancia sigue el comportamiento dado por la frecuencia característica más baja, esto es, ambas frecuencias varían con los diferentes parámetros del sistema siguiendo aproximadamente el mismo exponente. Obtuvimos resultados que indican que estas resonancias son relevantes en pequeñas geometrías confinantes y módulos de Young muy bajos. Por ejemplo, para aceite mineral moviéndose en un microcanal de 200 micras hecho de PDMS, encontramos una frecuencia de resonancia en el rango del ultrasonido.

Escribimos una ley de Darcy generalizada para fluidos newtonianos que circulan en tubos elásticos en donde el flujo promediado en la dirección axial es proporcional a la caída de

presión en el tubo. Esta nueva ley de Darcy generalizada conserva la forma de la ley de Darcy para tubos rígidos, por lo que la permeabilidad dinámica en sistemas elásticos tiene un significado muy parecido al que tiene en sistemas rígidos, *i.e.*, es una medida de la resistencia a fluir a lo largo de la dirección de flujo para cada uno de los modos involucrados en la caída de presión y sigue siendo útil para saber a qué frecuencias se maximiza la amplitud del flujo promediado a lo largo del tubo.

Finalmente, en el estudio de fluidos viscoelásticos en tubos elásticos, encontramos una permeabilidad dinámica que presenta resonancias y hallamos que existe una competencia entre la elasticidad debida al tubo y la elasticidad debida al fluido. Cambiando los valores de los parámetros en el sistema, es posible exaltar uno u otro efecto, mitigarlos, o hacer que ambos cooperen para dar una respuesta mayor a la que darían por separado. Observamos también que la permeabilidad de sistemas con elasticidad (ya sea en la pared, en el fluido o en ambos) es mayor que la de un sistema sin elasticidad. Por último, en el estudio de sistemas realistas, encontramos que la sangre presenta resonancias cuando fluye en un microtubo elastomérico, pero no cuando fluye a través de la aorta. Esto se debe a que la aorta tiene un radio tan grande que no permite resonancias.

_____ A _____

ARTÍCULOS DERIVADOS DE ESTA TESIS

RESEARCH ARTICLE

Obstructions in Vascular Networks: Relation Between Network Morphology and Blood Supply

Aimee M. Torres Rojas¹, Alejandro Meza Romero¹, Ignacio Pagonabarraga², Rui D. M. Travasso³, Eugenia Corvera Poiré^{1,2*}

1 Departamento de Física y Química Teórica, Facultad de Química, Universidad Nacional Autónoma de México, México D.F., Mexico, **2** Departament de Física Fonamental, Universitat de Barcelona, Barcelona, Spain, **3** Centro de Física da Universidade de Coimbra, Departamento de Física, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade de Coimbra, Coimbra, Portugal

* eugenia.corvera@gmail.com



 OPEN ACCESS

Citation: Torres Rojas AM, Meza Romero A, Pagonabarraga I, Travasso RDM, Corvera Poiré E (2015) Obstructions in Vascular Networks: Relation Between Network Morphology and Blood Supply. PLoS ONE 10(6): e0128111. doi:10.1371/journal.pone.0128111

Academic Editor: Alan Stitt, Queen's University Belfast, UNITED KINGDOM

Received: October 2, 2014

Accepted: April 22, 2015

Published: June 18, 2015

Copyright: © 2015 Torres Rojas et al. This is an open access article distributed under the terms of the [Creative Commons Attribution License](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/), which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original author and source are credited.

Data Availability Statement: All relevant data are within the paper.

Funding: AMTR acknowledges financial support from Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) through fellowship 245675 (<http://www.conacyt.mx/>). IP acknowledges financial support from Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO) under Project No. FIS2011-22603 (<http://www.mineco.gob.es/portal/site/mineco/>). IP also acknowledges financial support from Departament d'Universitats Recerca i Societat de la Informació (DURSI) under Project No. 2009SGR-634 (<http://web.dursi.gub.es/>).

Abstract

We relate vascular network structure to hemodynamics after vessel obstructions. We consider tree-like networks with a viscoelastic fluid with the rheological characteristics of blood. We analyze the network hemodynamic response, which is a function of the frequencies involved in the driving, and a measurement of the resistance to flow. This response function allows the study of the hemodynamics of the system, without the knowledge of a particular pressure gradient. We find analytical expressions for the network response, which explicitly show the roles played by the network structure, the degree of obstruction, and the geometrical place in which obstructions occur. Notably, we find that the sequence of resistances of the network without occlusions strongly determines the tendencies that the response function has with the anatomical place where obstructions are located. We identify anatomical sites in a network that are critical for its overall capacity to supply blood to a tissue after obstructions. We demonstrate that relatively small obstructions in such critical sites are able to cause a much larger decrease on flow than larger obstructions placed in non-critical sites. Our results indicate that, to a large extent, the response of the network is determined locally. That is, it depends on the structure that the vasculature has around the place where occlusions are found. This result is manifest in a network that follows Murray's law, which is in reasonable agreement with several mammalian vasculatures. For this one, occlusions in early generation vessels have a radically different effect than occlusions in late generation vessels occluding the same percentage of area available to flow. This locality implies that whenever there is a tissue irrigated by a tree-like *in vivo* vasculature, our model is able to interpret how important obstructions are for the irrigation of such tissue.

When do redundant fluidic networks outperform non-redundant ones?

AIMEE M. TORRES ROJAS¹, R. D. M. TRAVASSO², I. PAGONABARRAGA^{3,4}
and EUGENIA CORVERA POIRÉ^{1,3(a)}

¹ *Departamento de Física y Química Teórica, Facultad de Química, Universidad Nacional Autónoma de México México D.F., Mexico*

² *Centro de Física da Universidade de Coimbra, Departamento de Física, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade de Coimbra - Coimbra, Portugal*

³ *Departament de Física de la Matèria Condensada, Universitat de Barcelona - Barcelona, Spain*

⁴ *Universitat de Barcelona Institute of Complex Systems (UBICS), Universitat de Barcelona - Barcelona, Spain*

received 9 December 2016; accepted in final form 25 April 2017
published online 12 May 2017

PACS 47.60.Dx – Flows in ducts and channels
PACS 47.63.-b – Biological fluid dynamics
PACS 89.20.-a – Interdisciplinary applications of physics

Abstract – Redundancy constitutes a fundamental and intrinsic aspect of healthy vasculatures. Built-in redundancy might also be a desirable feature in man-made microfluidic devices. We show that redundant and non-redundant networks, built to have identical resistances to flow when unobstructed, allow for very different flows when they are occluded; redundant ones—densely occluded at a certain bifurcation level—allowing for larger flows than non-redundant ones—obstructed above relatively small thresholds. We also show that redundancy protects vessels against the large shear-rate gradients that occlusions would cause if it were not present. Our study allows one to quantify a network tolerance against blockage, provides guidance in the tailoring of microfluidic devices, and offers novel insights into why nature has selected intrinsic redundancy over thicker vessels to assure blood supply at key places of the organisms.

Copyright © EPLA, 2017

Introduction. – Redundancy in natural processes is present in a wide variety of systems, ranging from metabolism, ecosystems and genetics [1–4]. Redundancy provides alternative ways for a process to occur. It has a protective function in case of failure of fragile parts or mechanisms. Redundancy is energetically expensive in general, however natural systems present redundant features whenever their benefits outweigh their costs. In imitation of nature, man-made systems have built-in redundancy to assure reliability when the cost of failure is too high. Redundancy for instance is used in the semiconductor industry to make reliable microchips [5,6]. It is present in the hardware of computers and in the software of operating systems [7–9].

Redundancy in fluidic networks occurs in many natural systems, for example in the xylem of trees, that transport the sap, or in the lymphatic vessel network of mammals. For mammals, the degree of intrinsic redundancy in blood vessel networks is particularly relevant in vascular

diseases [10–13]. Natural bypasses in the coronary arteries that irrigate the heart, can save lives in patients that are lucky to have enough of them [10]. Redundancy also constitutes an intrinsic aspect of healthy cerebrovascular circulation. Its role is clearly to assure the preservation of blood flow, that maintains the delivery of nutrients to a tissue, by providing alternative routes in the presence of obstructions. It plays a key role in the physiology of cerebral ischemia (lack of oxygen) [14–21].

Detailed simulations of flow around partial vascular obstructions in redundant structures have been reported [22–26]. These simulations describe the velocity, the existence of vortices and the value of the wall shear stress at different locations within the vessels.

In this paper we are interested in the global effects that built-in—or intrinsic—redundancy has on the total flow through a network. We study generic fluidic networks, potentially useful in microfluidics—where obstructions can cause the failure of a chip—and realistic animal vasculatures—where occlusions can compromise tissue irrigation. For animal vasculatures, there is another type of

^(a)E-mail: eugenia.corvera@gmail.com



Resonances of Newtonian fluids in elastomeric microtubes

Aimee M. Torres Rojas,¹ I. Pagonabarraga,^{2,3,4} and E. Corvera Poiré^{1,2,3}

¹*Departamento de Física y Química Teórica, Facultad de Química, Universidad Nacional Autónoma de México, Mexico City 04510, Mexico*

²*Departament de Física de la Matèria Condensada, Universitat de Barcelona, Barcelona 08028, Spain*

³*Universitat de Barcelona Institute of Complex Systems (UBICS), Universitat de Barcelona, Barcelona 08028, Spain*

⁴*CECAM Centre Européen de Calcul Atomique et Moléculaire, École Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL), Lausanne CH-1015, Switzerland*

(Received 21 August 2017; accepted 20 November 2017; published online 14 December 2017)

We analyze the dynamic behavior of Newtonian fluids in elastic tubes subject to pulsatile pressure gradients and show that the interplay between the viscosity of the fluid, the elasticity of the wall, and the characteristic size of the confining media gives rise to a rich phenomenology that includes resonances. We find that these resonances are relevant for small confining geometries with low Young's moduli, typical of elastomeric materials in microfluidics. These resonances disappear beyond a certain tube radius, a certain Young's modulus, and below a certain fluid viscosity. In order to guide potential experiments, we present results for mineral oil flowing through polydimethylsiloxane microtubes and find resonances of the order of few tens of kHz. *Published by AIP Publishing.* <https://doi.org/10.1063/1.5001061>

I. INTRODUCTION

The characterization of a fluid response to a pulsatile pressure gradient is adequately described by the dynamic permeability, which constitutes the frequency-dependent fluid response to a dynamic pressure gradient. Mathematically, it is a proportionality constant between the flow and pressure gradient in the frequency domain. Physically, it is a response function that measures the resistance to flow along the flow direction for each of the modes involved in the pressure gradient. It contains the information of both the fluid and the confining media.

Dynamic permeabilities have been obtained for Newtonian,^{1,2} Maxwellian,^{3–7} and general linear viscoelastic fluids⁸ flowing through rigid structures of different geometries and different boundary conditions between the fluid and the confining media. An intrinsic feature of the dynamic permeability of viscoelastic fluids is that its modulus presents resonances at certain frequencies which have its origin in the interplay between the density, viscosity, and relaxation time of the fluid and a characteristic length scale of the confining geometry. For Newtonian fluids, for which the relaxation time is zero, the modulus of the dynamic permeability decreases monotonically with frequency.

Knowledge of the dynamic permeability of fluids flowing in elastic media might be relevant for physiological flows, since they are generally confined by elastic media such as networks of blood vessels or bronchia, and might be relevant in microfluidics, since microchips are often built up from polymers, such as polydimethylsiloxane (PDMS), to confine the fluids circulating inside them.⁹ The effect on the dynamic permeability of the elasticity of the confining media has only been considered to include the effect of longitudinally oscillating tubes in Maxwell fluids.¹⁰ Other studies, that have not considered the dynamic permeability, have addressed the

problem of flow induced by a wave traveling on the tube's wall for Newtonian and Maxwellian compressible fluids,^{11,12} as well as the effect of slip when solutions are traveling waves in Newtonian fluids.¹³ A study of the impact that the elastic deformations of the confining walls coupled to the dynamics of the fluid have on the dynamic permeability of Newtonian fluids subject to pulsatile pressure gradients has not been addressed in the literature.

In this paper, we analyze the dynamic behavior of linear incompressible Newtonian fluids in elastic tubes subject to pulsatile pressure gradients, that is, pressure gradients that vary periodically in time with at least one characteristic frequency, and show that the interplay between the viscosity of the fluid, the elasticity of the wall, and the characteristic size of the confining media gives rise to a rich phenomenology that includes resonances. The emergence of a resonance behavior in the dynamic permeability of Newtonian fluids has not been previously reported. We obtain analytical expressions that indicate that these resonances are relevant for small confining geometries with low Young's moduli. For example, for a microchannel of 200 μm made of PDMS, in which a Newtonian fluid, such as mineral oil, is driven by a pulsatile pressure gradient; a resonance frequency on the ultrasound range is predicted.

II. MODEL EQUATIONS

We consider the flow of a Newtonian fluid in a cylindrical microtube. The walls of the tube are characterized by a thin thickness h , a wall density ρ_w , a Young's modulus E , and a Poisson ratio ν . We study regimes for which the Reynolds number is low enough to neglect nonlinear terms in the conservation of momentum equations. This approximation is valid for a wide range of parameters. For example, in the circulatory tree, it is valid in all vessels other than the aorta.

Technical Note

Microfluidic flow spectrometer

Pamela Vázquez-Vergara¹, Aimee M Torres Rojas²,
Pablo E Guevara-Pantoja¹, Eugenia Corvera Poiré²
and Gabriel A Caballero-Robledo¹

¹ CINVESTAV-Monterrey, PIIT, Nuevo León 66600, Mexico

² Departamento de Física y Química Teórica, Facultad de Química, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México 04510, Mexico

E-mail: eugenia.corvera@gmail.com and g.a.caballero.robledo@gmail.com

Received 16 February 2017, revised 23 April 2017

Accepted for publication 9 May 2017

Published 15 June 2017



CrossMark

Abstract

We present a microfluidic device which allows one to study the dynamics of oscillatory flows for a frequency range between 1 and 300 Hz. The fluid in the microdevice could be Newtonian, viscoelastic, or even a biofluid, since the device is made of PMMA, which makes it biocompatible and free of elastomeric elements. Coupling a piezoelectric to a micropiston allows one to impose periodic movement to the fluid, with zero mean flow and amplitudes of up to 20 μm , within the microchannels in which the dynamics is studied. The use of a fast camera coupled to a microscope allows one to study the dynamics of 1 μm tracer particles and interfaces at an image acquisition rate as fast as 5000 frames per second. The fabrication of the device is easy and cost-effective, since it is based on the use of a micromilling machine. The dynamics of a Newtonian fluid is studied as a proof of principle.

Keywords: PMMA microfluidic devices, pulsatile flow, interface dynamics, micromilling fabrication

(Some figures may appear in colour only in the online journal)

1. Introduction

Microfluidic devices are useful for countless applications in chemical and biochemical analysis, biomolecular separation and micromixing, to mention a few [1–7]. Microfluidics aims to integrate many functions on a single lab-on-a-chip device for technological applications in physics, material sciences, biology and medicine [8–12]. It does this by the integration of micro-scale pumps, filters, sievers, valves and sensors within the microfluidic channels. The study of pulsatile flows can be used to analyze optimal flow conditions, since the fluids' responses are different for different frequencies of the imposed pressure gradients [13–18], and to control and optimize existing processes. In microfluidics, pulsatile flows can lead to the conception of new devices for manipulation, separation, mixing, analysis and characterization of surface properties [19, 20].

Pulsatile flow in microfluidics has been extensively addressed in the context of valveless micropumps. A

vibrating diaphragm coupled with a nozzle–diffuser geometry is among the most popular configurations of such devices [21–27]. A piezoelectric actuator causing the vibration of a membrane is an excellent option to impose periodic movement to a fluid [28]. However, the coupling of a piezoelectric actuator to a vibrating membrane and to the micrometric channels is not straightforward, and a combination of different materials and complicated fabrication methods has usually been necessary.

In the present work we present a microfluidic device, which we refer to as a microfluidic flow spectrometer (MFS), made exclusively of PMMA, which can be easily coupled to a piezoelectric ceramic to create periodic flow with zero mean. We do this by means of micromilling, which is an easy and cost-effective fabrication method [29]. Our device has the advantage of being made of a single rigid material, in contrast with soft elastomeric materials used in microfluidics such as PDMS. The lack of elastic materials in our device is important

Microfluidics and Nanofluidics

Stream of droplets as an actuator for oscillatory flows in microfluidics

--Manuscript Draft--

Manuscript Number:	MANO-D-18-00427	
Full Title:	Stream of droplets as an actuator for oscillatory flows in microfluidics	
Article Type:	Original Article	
Corresponding Author:	Luis F. Olguin, PhD Universidad Nacional Autónoma de México Coyoacan, Cd MX MEXICO	
Corresponding Author Secondary Information:		
Corresponding Author's Institution:	Universidad Nacional Autónoma de México	
Corresponding Author's Secondary Institution:		
First Author:	Pedro Andrés Basilio, BSc.	
First Author Secondary Information:		
Order of Authors:	Pedro Andrés Basilio, BSc. Aimee M. Torres Rojas, PhD Eugenia Corvera Poiré, PhD Luis F. Olguin, PhD	
Order of Authors Secondary Information:		
Funding Information:	Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (245675)	Dr. Aimee M. Torres Rojas
	Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (219584)	Not applicable
	Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (153208)	Not applicable
	PAIP (5000-9011)	Prof. Eugenia Corvera Poiré
	PAIP (5000-9023)	Dr Luis F. Olguin
Abstract:	<p>Oscillatory or pulsatile flow in microfluidic devices is usually imposed and controlled by external electronic or mechanical actuators, limiting the chips' portability and increasing the complexity of their control. Here, we developed a microfluidic platform that generates an oscillatory motion in a fluid with zero mean flow, using a continuous stream of droplets as the pulsatile power source. The passage of each droplet produces an oscillatory flow in an orthogonal channel that we use to periodically force an interface between two non-miscible fluids. A detailed analysis of the dynamics of the pulsatile fluid interface revealed that its dynamics is dominated by a single oscillatory mode with precisely the same frequency of the passing droplets. As the droplets were formed by syringe-pump-driven flows of water and oil and because their frequency production can be easily controlled, it was possible to impose specific oscillatory frequencies to the fluid interface. This work represents a new way to produce pulsating flow employing only continuous flows and it is an example of a microfluidic functional device that requires minimal external equipment for functioning.</p>	
Suggested Reviewers:	<p>Charles Baroud, PhD Principal Investigator, Centre National de la Recherche Scientifique baroud@ladhyx.polytechnique.fr Microfluidics multi-disciplinary research ranging from physics and fluid mechanics to</p>	

SIMBOLOGÍA

Símbolo	Significado
$\hat{K}(\omega)$	Permeabilidad dinámica.
a	Radio de un tubo rígido o radio promedio de un tubo elástico.
ω	Frecuencia angular.
ρ	Densidad de un fluido.
μ	Viscosidad de un fluido.
t_r	Tiempo de relajación de un fluido de Maxwell.
l	Longitud de un tubo.
x	Coordenada axial (en la dirección de flujo).
r	Coordenada radial.
u	Velocidad axial (en la dirección de flujo).
p	Presión.
$\frac{d\hat{p}}{dx}(\omega)$	Gradiente de presión oscilatorio en el dominio de la frecuencia para un tubo rígido.
$\delta = \sqrt{\frac{\rho}{\mu}(t_r\omega^2 + i\omega)}$	
J_0 y J_1	Funciones de Bessel de orden cero y de orden uno, respectivamente.
Q	Flujo volumétrico.
A	Área de la sección transversal de un tubo rígido o área promedio de la sección transversal de un tubo elástico.
Δp_0	Amplitud de la caída de presión en el dominio del tiempo en un tubo rígido o elástico.
ω_0	Frecuencia del gradiente de presión impuesto.

Símbolo	Significado
Q^{max}	Amplitud del flujo como función del tiempo para un tubo rígido (ec. (2.5)).
i	Índice que hace referencia a los vasos de cierto nivel de bifurcación en una red.
L	Longitud total de una red.
$\hat{\chi}(\omega)$	Función respuesta de la red o respuesta dinámica.
A_{eff}	Área efectiva de la sección transversal de la red.
K_{eff}	Permeabilidad efectiva de la red.
N_T	Número total de niveles de una red.
ΔP_0	Amplitud de la caída de presión total en una red.
$R = \frac{l}{AK}$	Resistencia de un vaso o un tubo.
S	Extensión del puente anastomótico, definido como la diferencia entre los niveles de bifurcación de los dos vasos que conecta.
n	Índice que hace referencia al nivel de bifurcación de la red en el que comienzan los vasos anastomóticos. También hace referencia al nivel en el que se encuentran las obstrucciones en el capítulo 2. En el capítulo 3, las obstrucciones se encuentran en el nivel $n + 1$.
$a = \frac{R_i}{R_{i-1}}$	Cociente de resistencias de los vasos de dos niveles subsecuentes.
χ_s	Respuesta de la red subyacente (red de tipo árbol sin obstrucciones ni anastomosis).
f	Fración del área de la sección transversal obstruida.
$F = 100f$	Porcentaje del área de la sección transversal obstruida.
f_{eq}	Fración del área obstruida por arriba de la cual tener redundancia es más conveniente, en términos de flujo, que tener vasos más anchos.
F_{eq}	Porcentaje del área obstruida por arriba del cual tener redundancia es más conveniente, en términos de flujo, que tener vasos más anchos.

Símbolo	Significado
χ_{eq}^{no}	Respuesta de las redes equivalentes (son equivalentes cuando no están obstruidas).
χ_{nr}	Respuesta de una red no redundante.
χ_r^{total}	Respuesta de una red redundante con obstrucciones totales en los tubos saltados por la anastomosis.
A_n	Área de la sección transversal de los tubos del nivel n .
$A_{eq} = f_{eq} A_n$	Área obstruida por arriba de la cual tener redundancia es más conveniente, en términos de flujo, que tener vasos más anchos.
A_{dada}^{obs}	Área obstruida dada.
$P1, P2, P3$ y $P4$	Cuatro caminos de flujo posibles en una red redundante.
$\dot{\gamma}$	Rapidez de deformación.
$\dot{\gamma}_{nr}$	Rapidez de deformación en una red no redundante.
$\dot{\gamma}_r$	Rapidez de deformación en una red redundante.
$\chi_{1PA}^{total}, \chi_{2PA}^{total}$ y χ_{3PA}^{total}	Respuesta de la red con uno, dos y tres puentes anastomóticos en paralelo, en donde los vasos saltados por los puentes están totalmente obstruidos.
NPA	Número de puentes anastomóticos en paralelo.
h	Espesor de la pared de un tubo elástico.
ρ_w	Densidad de la pared de un tubo elástico.
E	Módulo de Young de la pared de un tubo elástico.
ν	Coefficiente de Poisson de la pared de un tubo elástico.
v	Velocidad del fluido en la dirección radial.
ξ	Desplazamiento de la pared del tubo elástico en la dirección axial.
η	Desplazamiento de la pared del tubo elástico en la dirección radial.
σ_{rr} y σ_{rx}	Esfuerzos en la pared del tubo.

Símbolo	Significado
$\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} = g(x) G(t)$	Gradiente de presión en el dominio del tiempo.
$\frac{\partial \hat{p}(x,\omega)}{\partial x} = g(x) \hat{G}(\omega)$	Gradiente de presión en el dominio de la frecuencia.
$g(x)$	Dependencia axial del gradiente de presión.
$g'(x)$	Derivada espacial de la dependencia axial del gradiente de presión.
$G(t) / \hat{G}(\omega)$	Dependencia temporal del gradiente de presión. En el dominio del tiempo/en el dominio de la frecuencia.
$u(x), v(x), c(x)$ y $n(x)$	Dependencia axial de la velocidad axial, de la velocidad radial, del desplazamiento axial y del desplazamiento radial, respectivamente.
$\hat{U}(r, \omega)$ y $\hat{V}(r, \omega)$	Dependencia temporal y radial, en el dominio de la frecuencia, de la velocidad axial y de la velocidad radial.
$\hat{\Xi}(\omega)$ y $\hat{H}(\omega)$	Dependencia temporal, en el dominio de la frecuencia, del desplazamiento axial y del desplazamiento radial.
$\beta = \sqrt{\frac{i\omega\rho}{\mu}}$	
$\hat{K}(\omega)$	Permeabilidad dinámica para fluidos newtonianos en tubos elásticos (ecuación (4.16)) y para fluidos viscoelásticos en tubos elásticos (ecuación (5.5)).
$\hat{K}^L(r, \omega)$	Permeabilidad dinámica local (función de r) para fluidos newtonianos en tubos elásticos (ecuación (4.14)) y para fluidos viscoelásticos en tubos elásticos (ecuación (5.3)).
$\hat{K}_r(\omega)$	Función respuesta para la velocidad radial de fluidos newtonianos en tubos elásticos (ecuación (4.35)) y de fluidos viscoelásticos en tubos elásticos (ecuación (5.9)).
$\hat{K}_r^L(r, \omega)$	Función respuesta local (función de r) para la velocidad radial de fluidos newtonianos en tubos elásticos (ecuación (4.33)) y de fluidos viscoelásticos en tubos elásticos (ecuación (5.7)).

Símbolo	Significado
$\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$	Coefficientes de las ecuaciones armónicas para la presión y el gradiente de presión. Son relaciones de dispersión (relacionan el número de onda con la frecuencia).
$A(\omega)$	Constante de integración de la ecuación (D.9) para el caso de fluidos newtonianos y de la ecuación (E.9) para el caso de fluidos viscoelásticos.
ω_μ	Frecuencia viscosa característica del fluido.
ω_e	Frecuencia elástica característica de la pared del tubo.
ω_w	Frecuencia viscosa acoplada a la geometría del tubo a través del espesor y de la densidad de su pared.
ω_{res}	Frecuencia de resonancia. Frecuencia a la cual se tiene un máximo en la magnitud de la permeabilidad dinámica.
ω^*	Frecuencia de cruce. Frecuencia a la cual se igualan las frecuencias características viscosa y elástica, ω_μ y ω_e , respectivamente.
a^*, μ^*, ρ^*, E^* y ρ_w^*	Valores de cruce de las variables. A estos valores, las frecuencias características viscosa y elástica se igualan.
p_0	Amplitud de la presión en la entrada del tubo.
$\hat{f}_p(x, \omega)$	Factor definido en la ecuación (4.47).
$\hat{f}_{dp}(x, \omega)$	Factor definido en la ecuación (4.50).
$\hat{f}_{dg}(x, \omega)$	Factor definido en la ecuación (4.53).
$\langle \hat{Q}(\omega) \rangle_x$	Flujo en el dominio de la frecuencia promediado en la dirección axial para un tubo elástico (ecuación 4.69).
$\langle Q(t) \rangle_x$	Flujo en el dominio del tiempo promediado en la dirección axial para un tubo elástico (ecuación 4.70).
$\langle Q(t) \rangle_x^{max}$	Amplitud del flujo como función del tiempo promediado en la dirección axial para un tubo elástico (ecuación 4.71).

ECUACIONES DE MOVIMIENTO PARA LA PARED DE UN TUBO ELÁSTICO

Las ecuaciones de movimiento que establecen la dinámica de la pared de un tubo elástico -ecuaciones (4.3) y (4.4) utilizadas en nuestro modelo- provienen de un análisis de las fuerzas que actúan sobre él. A continuación, presentamos este análisis que fue tomado de [61].

Se considera un elemento de la pared del tubo de espesor dr , longitud de arco $a d\theta$ (en donde a es el radio neutral del tubo), y longitud axial dx . Suponiendo que el espesor del tubo h es pequeño comparado con a , se toma $dr = h$, lo cual implica que los gradientes radiales dentro del espesor del tubo son despreciables.

El volumen y la masa de este elemento están dados por $dV \approx h a d\theta dx$ y $dm \approx \rho_w dV$, respectivamente.

Las fuerzas que actúan sobre este elemento de volumen resultan de cuatro esfuerzos mecánicos (figura C.1):

- Tensión axial dentro de la pared del tubo, S_{xx} . En general, esta tensión es función de x lo que conlleva a una fuerza en la dirección positiva del eje x debido a un cambio dS_{xx} sobre la longitud del elemento, dada por,

$$dS_{xx} (h a d\theta) = \frac{dS_{xx}}{dx} dx (h a d\theta)$$

- Esfuerzo radial, S_{rr} , originado por la tensión angular dentro de la pared del tubo. Este esfuerzo produce una fuerza que empuja a la pared del tubo hacia el centro del

mismo, dada por,

$$-S_{rr} (a d\theta dx)$$

En general, S_{rr} puede ser función de r y generar otra contribución a la fuerza radial debida a un cambio dS_{rr} sobre el espesor de la pared del tubo. Esta contribución es despreciable bajo la suposición de que la pared del tubo es delgada.

- Presión del fluido dentro del tubo. Es la diferencia de presiones que actúan dentro y fuera de la pared del tubo, denotada por p_w . Esto conlleva a una fuerza en la dirección positiva de r , dada por,

$$p_w (a d\theta dx)$$

- Esfuerzo cortante τ_w debido al movimiento del fluido sobre la pared del tubo. Este esfuerzo produce una fuerza en la dirección de flujo.

$$\tau_w (a d\theta dx)$$

La suma de fuerzas que actúan sobre el elemento de volumen, en cada una de las tres direcciones, debe ser igual a la masa por la aceleración del elemento en esa dirección.

Si ξ , η y ϕ son los desplazamientos del elemento de la pared del tubo en las direcciones x , r y θ , respectivamente, en la dirección x se tiene:

$$\rho_w (h a d\theta dx) \frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{dS_{xx}}{dx} dx (h a d\theta) + \tau_w (a d\theta dx) \quad (\text{C.1})$$

que se reduce a

$$\rho_w h \frac{d^2\xi}{dt^2} = h \frac{dS_{xx}}{dx} + \tau_w. \quad (\text{C.2})$$

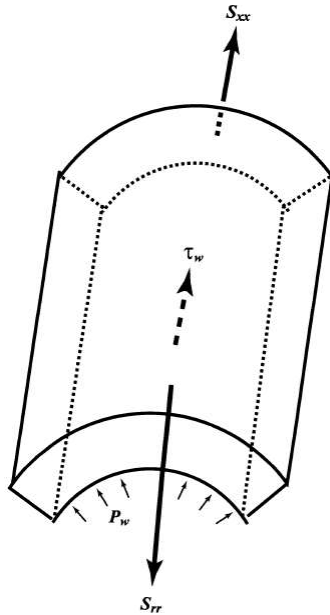


Figura C.1- Esquema de los cuatro esfuerzos mecánicos presentes en el elemento de la pared del tubo. Tomada de [61].

De manera análoga, en la dirección radial se tiene:

$$\rho_w (h a d\theta dx) \frac{d^2\eta}{dt^2} = p_w (a d\theta dx) - S_{rr} (a d\theta dx) \quad (\text{C.3})$$

que se reduce a

$$\rho_w h \frac{d^2\eta}{dt^2} = p_w - S_{rr}. \quad (\text{C.4})$$

En la dirección angular, la aceleración es cero, debido a la simetría axial y a la ausencia de fuerzas en esa dirección.

Como se dijo anteriormente, el esfuerzo radial S_{rr} se origina por la tensión (esfuerzo) angular $S_{\theta\theta}$ debida a la curvatura de la pared. La relación entre estos esfuerzos se puede obtener a partir de igualar las fuerzas que actúan en la dirección radial sobre un pequeño segmento de la pared en estado de equilibrio (figura C.2), esto es,

$$(a d\theta dx) S_{rr} = 2 (h dx) S_{\theta\theta} \operatorname{sen} \left(\frac{d\theta}{2} \right) \approx h S_{\theta\theta} d\theta$$

y se tiene que

$$S_{rr} = \frac{h}{a} S_{\theta\theta}. \quad (\text{C.5})$$

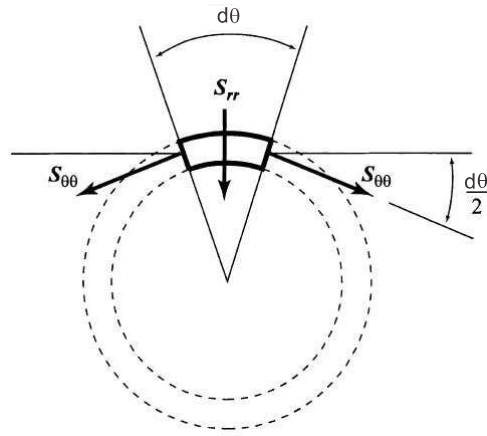


Figura C.2- Relación entre los esfuerzos radial y angular dentro de la pared del tubo. Tomada de [61].

Para poder resolver las ecuaciones de movimiento para la pared (ecuaciones C.2 y C.4), los esfuerzos (S_{xx} y S_{rr}) deben ser expresados en términos de los desplazamientos (ξ y η). Para esto se utilizan las siguientes relaciones esfuerzo-deformación que existen en un material elástico, éstas son [69]:

$$e_{xx} = \frac{1}{E} [S_{xx} - \nu (S_{rr} + S_{\theta\theta})]$$

$$e_{rr} = \frac{1}{E} [S_{rr} - \nu (S_{\theta\theta} + S_{xx})]$$

$$e_{\theta\theta} = \frac{1}{E} [S_{\theta\theta} - \nu (S_{rr} + S_{xx})]$$

en donde e_{xx} , e_{rr} y $e_{\theta\theta}$ son las deformaciones en las direcciones, axial, radial y angular, respectivamente. E y ν son el módulo de Young y el coeficiente de Poisson, respectivamente. Estas relaciones expresan una característica fundamental de los sistemas elásticos, ésta es, que la deformación en una dirección no sólo depende del esfuerzo en esa dirección, sino también de los esfuerzos en las otras dos direcciones.

Al usar la relación obtenida entre los esfuerzos radial y angular (ecuación C.5), sólo se requieren dos de las ecuaciones para las deformaciones, éstas son

$$e_{xx} = \frac{1}{E} \left[S_{xx} - \nu S_{rr} \left(1 + \frac{a}{h} \right) \right]$$

y

$$e_{\theta\theta} = \frac{1}{E} \left[S_{rr} \left(\frac{a}{h} - \nu \right) - \nu S_{xx} \right].$$

Suponiendo que $\frac{a}{h}$ es lo suficientemente grande comparado con la unidad o con ν , éstas se reducen a:

$$e_{xx} = \frac{1}{E} \left[S_{xx} - \frac{\nu a}{h} S_{rr} \right]$$

y

$$e_{\theta\theta} = \frac{1}{E} \left[\frac{a}{h} S_{rr} - \nu S_{xx} \right].$$

Resolviendo estas dos ecuaciones para los esfuerzos, se tiene:

$$S_{xx} = E\nu (e_{xx} + \nu e_{\theta\theta}) \tag{C.6}$$

y

$$S_{rr} = \frac{h E \nu}{a} (e_{\theta\theta} + \nu e_{xx}), \tag{C.7}$$

en donde $E_\nu = \frac{E}{1-\nu^2}$.

La elongación del tubo es causada por la variación del desplazamiento axial a lo largo del tubo; ξ es función de x . Un pequeño elemento de la pared cuya longitud original es dx tendrá una longitud $dx + d\xi = dx + \frac{d\xi}{dx} dx$.

La deformación axial se define como el cociente entre el cambio en la longitud y la longitud original (figura C.3), esto es,

$$e_{xx} = \frac{1}{dx} \left[\left(dx + \frac{d\xi}{dx} dx \right) - dx \right] = \frac{d\xi}{dx}.$$

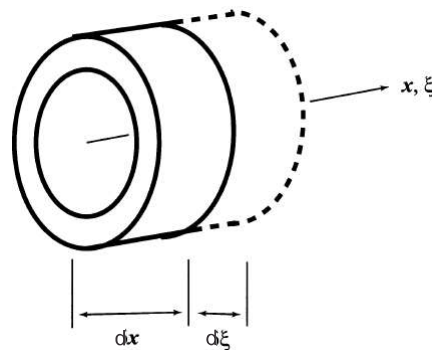


Figura C.3- Deformación axial de la pared del tubo. Tomada de [61].

Bajo la suposición de simetría axial, el desplazamiento angular ϕ es uniforme alrededor del tubo, esto es $d\phi = 0$, por lo que esta contribución a la deformación angular es cero. En nuestro sistema, la deformación angular se debe al cambio en el radio del tubo (de a a $a + \eta$), lo que conduce también a un cambio en la longitud de arco del segmento (de $a d\theta$ a $(a + \eta)d\theta$), ver figura C.4. La deformación angular se define como el cociente entre el cambio en la longitud y la longitud original, esto es,

$$e_{\theta\theta} = \frac{1}{a d\theta} [(a + \eta) d\theta - a d\theta] = \frac{\eta}{a}.$$

Sustituyendo estas expresiones en las ecuaciones para los esfuerzos axial y radial (ecuaciones C.6 y C.7), se tiene:

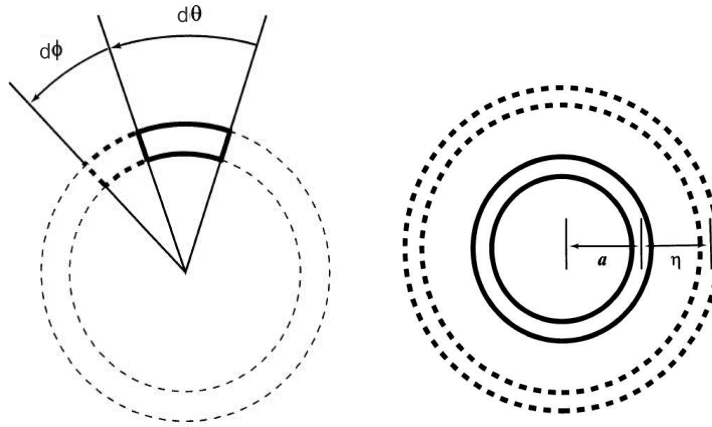


Figura C.4- Deformación angular de la pared del tubo. Tomada de [61].

$$S_{xx} = E\nu \left(\frac{d\xi}{dx} + \nu \frac{\eta}{a} \right)$$

$$S_{rr} = \frac{h E\nu}{a} \left(\frac{\eta}{a} + \nu \frac{d\xi}{dx} \right)$$

Finalmente, estas expresiones se sustituyen en las ecuaciones de movimiento para la pared del tubo (ecuaciones C.2 y C.4) y quedan en términos de los desplazamientos axial y radial, esto es,

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{E\nu}{\rho_w} \left(\frac{d^2\xi}{dx^2} + \frac{\nu}{a} \frac{d\eta}{dx} \right) + \frac{\tau_w}{\rho_w h} \quad (\text{C.8})$$

y

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{p_w}{\rho_w h} - \frac{E\nu}{\rho_w a} \left(\frac{\eta}{a} + \nu \frac{d\xi}{dx} \right). \quad (\text{C.9})$$

Las ecuaciones C.8 y C.9 son equivalentes a las ecuaciones 4.3 y 4.4.

SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO DE UN FLUIDO NEWTONIANO EN UN TUBO ELÁSTICO

Para el gradiente de presión, $\frac{\partial p}{\partial x}$, las velocidades del fluido (u y v), y los desplazamientos de la pared del tubo (η y ξ) consideramos la forma general de ondas estacionarias. Esto es, ondas que se pueden factorizar en un término dependiente de la posición en la dirección de propagación, por otro término dependiente del tiempo, esto es, $\Psi(x, t) = f(x)F(t)$ [63, 64]. Las ondas estacionarias se caracterizan por tener una dinámica con valores fijos en ciertos puntos del espacio llamados nodos. Para un sistema experimental particular, las condiciones de frontera en la dirección de flujo imponen restricciones que conducen a una solución de este tipo.

Para encontrar las soluciones de u , v , η y ξ , hacemos una separación de variables en las ecuaciones (4.1), (4.2), (4.7) y (4.8), en la que aislamos la dependencia espacial en la dirección de flujo de la dependencia espacial en la dirección radial y el tiempo. Esto es, $\frac{\partial p}{\partial x} = g(x)G(t)$, $u = u(x)U(r, t)$, $v = v(x)V(r, t)$, $\eta = n(x)H(t)$ y $\xi = c(x)\Xi(t)$.

En la dirección axial obtenemos las siguientes funciones:

$$u(x) = -\left(\frac{1}{K_1}\right)^2 g(x), \tag{D.1}$$

$$v(x) = \left(\frac{K_2}{K_1}\right)^2 g'(x), \tag{D.2}$$

$$c(x) = -\left(\frac{1}{K_1 K_3}\right)^2 g(x) \quad (\text{D.3})$$

y

$$n(x) = \left(\frac{K_2}{K_1 K_4}\right)^2 g'(x), \quad (\text{D.4})$$

en donde K_1 , K_2 , K_3 y K_4 son las constantes de la separación de variables.

Mientras que para la dependencia radial y temporal, obtenemos:

$$\rho \frac{\partial U(r, t)}{\partial t} - \mu \left(\frac{\partial^2 U(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U(r, t)}{\partial r} \right) = K_1^2 G(t), \quad (\text{D.5})$$

$$U(r, t) = K_2^2 \frac{1}{r} \frac{\partial(r V(r, t))}{\partial r}, \quad (\text{D.6})$$

$$\frac{\partial \Xi(t)}{\partial t} = K_3^2 U(a, t) \quad (\text{D.7})$$

y

$$\frac{\partial H(t)}{\partial t} = K_4^2 V(a, t). \quad (\text{D.8})$$

Reescribimos estas ecuaciones en el dominio de la frecuencia:

$$-i\omega\rho r^2 \hat{U}(r, \omega) - \mu \left(r^2 \frac{\partial^2 \hat{U}(r, \omega)}{\partial r^2} + r \frac{\partial \hat{U}(r, \omega)}{\partial r} \right) = K_1^2 \hat{G}(\omega) r^2, \quad (\text{D.9})$$

$$\hat{U}(r, \omega) = K_2^2 \frac{1}{r} \frac{\partial(r \hat{V}(r, \omega))}{\partial r}, \quad (\text{D.10})$$

$$-i\omega \hat{\Xi}(\omega) = K_3^2 \hat{U}(a, \omega) \quad (\text{D.11})$$

y

$$-i\omega \hat{H}(\omega) = K_4^2 \hat{V}(a, \omega). \quad (\text{D.12})$$

Resolvemos las últimas cuatro ecuaciones para las variables transformadas $\hat{U}(r, \omega)$, $\hat{V}(r, \omega)$, $\hat{\Xi}(\omega)$ y $\hat{H}(\omega)$. La ecuación (D.9) es una ecuación de Bessel para la velocidad en la dirección de flujo, $\hat{U}(r, \omega)$. Una vez conocida la solución para $\hat{U}(r, \omega)$, en términos de la constante de integración, $A(\omega)$, y del gradiente de presión dependiente de la frecuencia, $\hat{G}(\omega)$, las soluciones para $\hat{V}(r, \omega)$, $\hat{\Xi}(\omega)$ y $\hat{H}(\omega)$, se obtienen directamente:

$$\hat{U}(r, \omega) = \left[A(\omega) J_0(\beta r) - \frac{K_1^2}{\mu \beta^2} \right] \hat{G}(\omega), \quad (\text{D.13})$$

$$\hat{V}(r, \omega) = \left[\frac{A(\omega) J_1(\beta r)}{K_2^2 \beta} - \left(\frac{K_1}{K_2} \right)^2 \frac{1}{2 \mu \beta^2} r \right] \hat{G}(\omega), \quad (\text{D.14})$$

$$\hat{\Xi}(\omega) = \frac{i}{\omega} K_3^2 \left[A(\omega) J_0(\beta a) - \frac{K_1^2}{\mu \beta^2} \right] \hat{G}(\omega) \quad (\text{D.15})$$

y

$$\hat{H}(\omega) = \frac{i}{\omega} K_4^2 \left[\frac{A(\omega) J_1(\beta a)}{K_2^2 \beta} - \left(\frac{K_1}{K_2} \right)^2 \frac{a}{2 \mu \beta^2} \right] \hat{G}(\omega), \quad (\text{D.16})$$

en donde $\beta = \sqrt{\frac{i \omega \rho}{\mu}}$. J_0 y J_1 son las funciones de Bessel de orden cero y de orden uno, respectivamente.

Las soluciones para las velocidades del fluido, \hat{u} y \hat{v} , y para los desplazamientos de la pared del tubo, $\hat{\eta}$ y $\hat{\xi}$, en el dominio de la frecuencia, son:

$$\hat{u}(x, r, \omega) = u(x) \hat{U}(r, \omega) = - \left[\frac{A(\omega)}{K_1^2} J_0(\beta r) - \frac{1}{\mu \beta^2} \right] g(x) \hat{G}(\omega), \quad (\text{D.17})$$

$$\hat{v}(x, r, \omega) = v(x) \hat{V}(r, \omega) = - \left[\frac{r}{2 \mu \beta^2} - \frac{1}{\beta} \frac{A(\omega)}{K_1^2} J_1(\beta r) \right] g'(x) \hat{G}(\omega), \quad (\text{D.18})$$

$$\hat{\xi}(x, \omega) = c(x) \hat{\Xi}(\omega) = \frac{1}{i \omega} \left[\frac{A(\omega)}{K_1^2} J_0(\beta a) - \frac{1}{\mu \beta^2} \right] g(x) \hat{G}(\omega) \quad (\text{D.19})$$

y

$$\hat{\eta}(x, \omega) = n(x) \hat{H}(\omega) = \frac{1}{i\omega} \left[\frac{a}{2\mu\beta^2} - \frac{1}{\beta} \frac{A(\omega)}{K_1^2} J_1(\beta a) \right] g'(x) \hat{G}(\omega). \quad (\text{D.20})$$

Estas expresiones quedan en términos de la constante $A(\omega)$, que proviene de la integración de la ecuación (D.9), y $\hat{G}(\omega)$. En ellas desaparecen las constantes K_2 , K_3 y K_4 .

Al sustituir las soluciones para \hat{u} , \hat{v} , $\hat{\eta}$ y $\hat{\xi}$ -ecuaciones (D.17)–(D.20)- en las ecuaciones de movimiento de la pared del tubo, ecuaciones (4.3) y (4.4) reescritas en el dominio de la frecuencia, obtenemos las ecuaciones (D.21) y (D.22). Éstas, son expresiones para la presión y para el gradiente de presión, cuyos coeficientes, $\kappa_1^2(A(\omega), \omega)$ y $\kappa_2^2(A(\omega), \omega)$, proporcionan una relación de dispersión que relaciona el número de onda de los modos de propagación, κ , con la frecuencia del gradiente de presión aplicado, ω . Las ecuaciones que la presión y el gradiente de presión deben satisfacer en el dominio de la frecuencia, son ecuaciones armónicas de la forma:

$$\frac{\partial^2 \hat{p}(x, \omega)}{\partial x^2} = -\kappa_1^2(A(\omega), \omega) \hat{p}(x, \omega) \quad (\text{D.21})$$

y

$$\frac{\partial^3 \hat{p}(x, \omega)}{\partial x^3} = -\kappa_2^2(A(\omega), \omega) \frac{\partial \hat{p}(x, \omega)}{\partial x}, \quad (\text{D.22})$$

en donde

$$\kappa_1^2 = -\frac{2a^2\omega^2\rho(\nu^2-1)}{2\mu h A \beta [a\nu\beta E J_0(\beta a) - (a^2\omega^2\rho_w(\nu^2-1) + E) J_1(\beta a)] + ah K_1^2 [a^2\omega^2\rho_w(\nu^2-1) + E(1-2\nu)]} \quad (\text{D.23})$$

y

$$\kappa_2^2 = \frac{2a\omega^2(\nu^2-1) [h\rho_w(K_1^2 - \mu A\beta^2 J_0(\beta a)) - \mu\rho A\beta J_1(\beta a)]}{Eh [2\mu A\beta(a\beta J_0(\beta a) - \nu J_1(\beta a)) + aK_1^2(\nu-2)]}. \quad (\text{D.24})$$

Dado que κ_1^2 es independiente de x , por consistencia, pedimos que $\kappa_1^2 = \kappa_2^2$, con lo que obtenemos una ecuación cuadrática para $A(\omega)$.

Las dos soluciones para $A(\omega)$ son: $A(\omega) = \frac{-\mathbb{B} \pm \sqrt{\mathbb{B}^2 - 4\mathbb{A}\mathbb{C}}}{2\mathbb{A}}$. En donde,

$$\begin{aligned} \mathbb{A} = 2 \rho J_1(\beta a) [a^2 \omega^2 \rho_w (\nu^2 - 1) + E] [h \rho \omega^2 \rho_w J_0(\beta a) - \mu^2 \beta^3 J_1(\beta a)] \\ - 2 \nu a E \rho^2 \omega^2 J_0(\beta a) [\rho J_1(\beta a) + h \beta \rho_w J_0(\beta a)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{B} = \mu \beta^2 K_1^2 [a^2 \omega^2 \rho_w (\nu^2 - 1)] [(2 h \rho_w + a \rho) J_1(\beta a) + a \beta h \rho_w J_0(\beta a)] \\ + \mu \beta^2 K_1^2 E \{ [2 h \rho_w + a \rho] J_1(\beta a) + [a \beta h \rho_w (1 - 4 \nu) - 2 a^2 \beta \rho] J_0(\beta a) \} \end{aligned}$$

y

$$\mathbb{C} = -a \beta K_1^4 \{ a \rho E (\nu - 2) + h \rho_w [a^2 \omega^2 \rho_w (\nu^2 - 1) + E (1 - 2 \nu)] \}.$$

Las dos soluciones para $A(\omega)$ significan dos soluciones para $\kappa^2(\omega)$ -dadas por la ecuación (D.23) o (D.24)-.

Una vez determinada $A(\omega)$, se pueden conocer las velocidades del fluido y los desplazamientos de la pared del tubo en el dominio de la frecuencia -ecuaciones (D.17)-(D.20)-. Cabe señalar que, tanto en las soluciones para las velocidades y los desplazamientos, como en las soluciones para $\kappa^2(\omega)$, la constante K_1 -que proviene de la separación de variables- desaparece. Esto se debe a que, $A(\omega)$, es proporcional a K_1^2 .

Por claridad, en la sección 4.2, se muestran las soluciones de las ecuaciones, ya sin las constantes intermediarias (K_1 , K_2 , K_3 y K_4) que se cancelan en los diferentes pasos del método de solución.

**SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO
DE UN FLUIDO DE MAXWELL EN UN TUBO
ELÁSTICO**

Para conocer la dinámica de un fluido de Maxwell que circula a través de un tubo elástico, consideramos la forma general de ondas estacionarias para el gradiente de presión, las velocidades del fluido y los desplazamientos de la pared del tubo. Tal como hicimos para el caso de un fluido newtoniano (apéndice D).

Para encontrar las soluciones de u , v , η y ξ , hacemos una separación de variables en las ecuaciones (4.1), (5.1), (4.7) y (4.8), en la que aislamos la dependencia espacial en la dirección de flujo de la dependencia espacial en la dirección radial y el tiempo. Esto es, $\frac{\partial p}{\partial x} = g(x)G(t)$, $u = u(x)U(r, t)$, $v = v(x)V(r, t)$, $\eta = n(x)H(t)$ y $\xi = c(x)\Xi(t)$.

En la dirección axial obtenemos las siguientes funciones:

$$u(x) = -\left(\frac{1}{K_1}\right)^2 g(x), \quad (\text{E.1})$$

$$v(x) = \left(\frac{K_2}{K_1}\right)^2 g'(x), \quad (\text{E.2})$$

$$c(x) = -\left(\frac{1}{K_1 K_3}\right)^2 g(x) \quad (\text{E.3})$$

y

$$n(x) = \left(\frac{K_2}{K_1 K_4}\right)^2 g'(x), \quad (\text{E.4})$$

en donde K_1 , K_2 , K_3 y K_4 son las constantes de la separación de variables.

Mientras que para la dependencia radial y temporal, obtenemos:

$$t_r \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \rho \frac{\partial U}{\partial t} - \mu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right) = K_1^2 \left(G(t) + t_r \frac{\partial G(t)}{\partial t} \right), \quad (\text{E.5})$$

$$U(r, t) = K_2^2 \frac{1}{r} \frac{\partial(r V(r, t))}{\partial r}, \quad (\text{E.6})$$

$$\frac{\partial \Xi(t)}{\partial t} = K_3^2 U(a, t) \quad (\text{E.7})$$

y

$$\frac{\partial H(t)}{\partial t} = K_4^2 V(a, t). \quad (\text{E.8})$$

Reescribimos estas ecuaciones en el dominio de la frecuencia:

$$-(t_r \omega^2 + i\omega) \rho r^2 \hat{U}(r, \omega) - \mu \left(r^2 \frac{\partial^2 \hat{U}(r, \omega)}{\partial r^2} + r \frac{\partial \hat{U}(r, \omega)}{\partial r} \right) = K_1^2 \hat{G}(\omega) (1 - i\omega t_r) r^2, \quad (\text{E.9})$$

$$\hat{U}(r, \omega) = K_2^2 \frac{1}{r} \frac{\partial(r \hat{V}(r, \omega))}{\partial r}, \quad (\text{E.10})$$

$$-i\omega \hat{\Xi}(\omega) = K_3^2 \hat{U}(a, \omega) \quad (\text{E.11})$$

y

$$-i\omega \hat{H}(\omega) = K_4^2 \hat{V}(a, \omega). \quad (\text{E.12})$$

Resolvemos las últimas cuatro ecuaciones para las variables transformadas $\hat{U}(r, \omega)$, $\hat{V}(r, \omega)$, $\hat{\Xi}(\omega)$ y $\hat{H}(\omega)$. La ecuación (E.9) es una ecuación de Bessel para la velocidad en la dirección

de flujo, $\hat{U}(r, \omega)$. Una vez conocida la solución para $\hat{U}(r, \omega)$, en términos de la constante de integración, $A(\omega)$, y del gradiente de presión dependiente de la frecuencia, $\hat{G}(\omega)$, las soluciones para $\hat{V}(r, \omega)$, $\hat{\Xi}(\omega)$ y $\hat{H}(\omega)$, se obtienen directamente:

$$\hat{U}(r, \omega) = \left[A(\omega) J_0(\delta r) - \frac{K_1^2}{\mu \beta^2} \right] \hat{G}(\omega), \quad (\text{E.13})$$

$$\hat{V}(r, \omega) = \left[\frac{A(\omega) J_1(\delta r)}{K_2^2 \delta} - \left(\frac{K_1}{K_2} \right)^2 \frac{1}{2 \mu \beta^2} r \right] \hat{G}(\omega), \quad (\text{E.14})$$

$$\hat{\Xi}(\omega) = \frac{i}{\omega} K_3^2 \left[A(\omega) J_0(\delta a) - \frac{K_1^2}{\mu \beta^2} \right] \hat{G}(\omega) \quad (\text{E.15})$$

y

$$\hat{H}(\omega) = \frac{i}{\omega} K_4^2 \left[\frac{A(\omega) J_1(\delta a)}{K_2^2 \delta} - \left(\frac{K_1}{K_2} \right)^2 \frac{a}{2 \mu \beta^2} \right] \hat{G}(\omega), \quad (\text{E.16})$$

en donde $\delta = \sqrt{\frac{\rho}{\mu} (t_r \omega^2 + i \omega)}$, $\beta = \sqrt{\frac{i \omega \rho}{\mu}}$. J_0 y J_1 son las funciones de Bessel de orden cero y de orden uno, respectivamente.

Las soluciones para las velocidades del fluido, \hat{u} y \hat{v} , y los desplazamientos de la pared del tubo, $\hat{\eta}$ y $\hat{\xi}$, en el dominio de la frecuencia, son:

$$\hat{u}(x, r, \omega) = \mathbf{u}(x) \hat{U}(r, \omega) = - \left[\frac{A(\omega)}{K_1^2} J_0(\delta r) - \frac{1}{\mu \beta^2} \right] g(x) \hat{G}(\omega), \quad (\text{E.17})$$

$$\hat{v}(x, r, \omega) = \mathbf{v}(x) \hat{V}(r, \omega) = - \left[\frac{r}{2 \mu \beta^2} - \frac{1}{\delta} \frac{A(\omega)}{K_1^2} J_1(\delta r) \right] g'(x) \hat{G}(\omega), \quad (\text{E.18})$$

$$\hat{\xi}(x, \omega) = c(x) \hat{\Xi}(\omega) = \frac{1}{i \omega} \left[\frac{A(\omega)}{K_1^2} J_0(\delta a) - \frac{1}{\mu \beta^2} \right] g(x) \hat{G}(\omega) \quad (\text{E.19})$$

y

$$\hat{\eta}(x, \omega) = n(x) \hat{H}(\omega) = \frac{1}{i\omega} \left[\frac{a}{2\mu\beta^2} - \frac{1}{\delta} \frac{A(\omega)}{K_1^2} J_1(\delta a) \right] g'(x) \hat{G}(\omega). \quad (\text{E.20})$$

Estas expresiones quedan en términos de la constante $A(\omega)$, que proviene de la integración de la ecuación (E.9), y $\hat{G}(\omega)$. En ellas desaparecen las constantes K_2 , K_3 y K_4 .

Al sustituir las soluciones para \hat{u} , \hat{v} , $\hat{\eta}$ y $\hat{\xi}$ -ecuaciones (E.17)–(E.20)- en las ecuaciones de movimiento de la pared del tubo, ecuaciones (4.3) y (4.4) reescritas en el dominio de la frecuencia, obtenemos las ecuaciones (E.21) y (E.22). Éstas, son expresiones para la presión y para el gradiente de presión, cuyos coeficientes, $\kappa_1^2(A(\omega), \omega)$ y $\kappa_2^2(A(\omega), \omega)$, proporcionan una relación de dispersión que relaciona el número de onda de los modos de propagación, κ , con la frecuencia del gradiente de presión aplicado, ω . Las ecuaciones que la presión y el gradiente de presión deben satisfacer en el dominio de la frecuencia, son ecuaciones armónicas de la forma:

$$\frac{\partial^2 \hat{p}(x, \omega)}{\partial x^2} = -\kappa_1^2(A(\omega), \omega) \hat{p}(x, \omega) \quad (\text{E.21})$$

y

$$\frac{\partial^3 \hat{p}(x, \omega)}{\partial x^3} = -\kappa_2^2(A(\omega), \omega) \frac{\partial \hat{p}(x, \omega)}{\partial x}, \quad (\text{E.22})$$

en donde

$$\kappa_1^2 = -\frac{2a^2\omega^2\delta\rho K_1^2(\nu^2-1)}{ah\delta K_1^2[E-2E\nu+a^2\omega^2\rho_w(\nu^2-1)]+2iAh\omega\rho\{aE\delta\nu J_0(\delta a)-[E+a^2\omega^2\rho_w(\nu^2-1)]J_1(\delta a)\}} \quad (\text{E.23})$$

y

$$\kappa_2^2 = \frac{2a\omega^2\delta(\nu^2-1)[h\rho_w(\omega t_r+i)(K_1^2-iA\omega\rho J_0(\delta a))-iA\mu\delta\rho J_1(\delta a)]}{Eh(\omega t_r+i)\{a\delta K_1^2(\nu-2)+2iA\omega\rho[a\delta J_0(\delta a)-\nu J_1(\delta a)]\}}. \quad (\text{E.24})$$

Dado que κ_1^2 es independiente de x , por consistencia, pedimos que $\kappa_1^2 = \kappa_2^2$, con lo que

obtenemos una ecuación cuadrática para $A(\omega)$.

Las dos soluciones para $A(\omega)$ son: $A(\omega) = \frac{-\mathbb{B} \pm \sqrt{\mathbb{B}^2 - 4\mathbb{A}\mathbb{C}}}{2\mathbb{A}}$. En donde,

$$\mathbb{A} = 2h\rho^2\omega^2\rho_w J_0(\delta a) \{ [a^2\omega^2\rho_w(\nu^2 - 1) + E] J_1(\delta a) - E\nu\delta a J_0(\delta a) \} \\ + \frac{2\delta\mu\rho^2\omega J_1(\delta a) \{ [a^2\omega^2\rho_w(\nu^2 - 1) + E] J_1(\delta a) - E\nu\delta a J_0(\delta a) \}}{\omega t_r + i},$$

$$\mathbb{B} = ia\omega\rho K_1^2 \{ 2E\rho [\nu J_1(\delta a) - \delta a J_0(\delta a)] + h\delta\rho_w J_0(\delta a) [a^2\omega^2\rho_w(\nu^2 - 1) - 2E\nu + E] \} \\ + \frac{\rho K_1^2 J_1(\delta a) [ia\mu\delta^2 + 2\omega h\rho_w(i\omega t_r - 1)] [a^2\omega^2\rho_w(\nu^2 - 1) + E]}{\omega t_r + i} \\ - \frac{2E\nu a\delta\rho K_1^2 [i\delta\mu J_1(\delta a) + \omega h\rho_w J_0(\delta a)(i\omega t_r - 1)]}{\omega t_r + i},$$

y

$$\mathbb{C} = -Ea^2\delta K_1^4\rho(\nu - 2) + \frac{ia\delta h K_1^4\rho_w(i\omega t_r - 1) [a^2\omega^2\rho_w(\nu^2 - 1) - 2E\nu + E]}{\omega t_r + i}.$$

Las dos soluciones para $A(\omega)$ significan dos soluciones para $\kappa^2(\omega)$ -dadas por la ecuación (E.23) o (E.24)-.

Una vez determinada $A(\omega)$, se pueden conocer las velocidades del fluido y los desplazamientos de la pared del tubo en el dominio de la frecuencia -ecuaciones (E.17)-(E.20)-. Cabe señalar que, tanto en las soluciones para las velocidades y los desplazamientos, como en las soluciones para $\kappa^2(\omega)$, la constante K_1 -que proviene de la separación de variables- desaparece. Esto se debe a que, $A(\omega)$, es proporcional a K_1^2 .

Por claridad, en la sección 5.1, se muestran las soluciones de las ecuaciones, ya sin las constantes intermediarias (K_1 , K_2 , K_3 y K_4) que se cancelan en los diferentes pasos del

método de solución.

Para fluidos newtonianos, $\delta = \beta$ y las ecuaciones se reducen a las que gobiernan la dinámica de fluidos newtonianos en tubos elásticos presentadas en el apéndice D.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] del Río J. A., López de Haro M. y Whitaker S., *Enhancement in the dynamic response of a viscoelastic fluid flowing in a tube*. Phys. Rev. E **58**, 6323-6327, 1998.
- [2] Zhou M. Y. y Sheng P., *First-principles calculations of dynamic permeability in porous media*. Phys. Rev. B **39**, 12027-12039, 1989.
- [3] Castro M., Bravo-Gutiérrez M. E., Hernández-Machado A. y Corvera Poiré E., *Dynamic Characterization of Permeabilities and Flows in Microchannels*. Phys. Rev. Lett. **101**, 224501-1 - 224501-4, 2008.
- [4] Collepardo-Guevara R. y Corvera Poiré E., *Controlling viscoelastic flow by tuning frequency during occlusions*. Phys. Rev. E **76**, 026301-1 - 026301-7, 2007.
- [5] Castrejón Pita J. R., del Río J. A., Castrejón Pita A. A. y Huelsz G., *Experimental observation of dramatic differences in the dynamic response of Newtonian and Maxwellian fluids*. Phys. Rev. E **68**, 46301, 2003.
- [6] López de Haro M., del Río J. A. y Whitaker S., *Flow of Maxwell Fluids in Porous Media*. Transport Porous Med. **25**, 167-192, 1996.
- [7] del Río J. A., López de Haro M. y Whitaker S., *Erratum: Enhancement in the dynamic response of a viscoelastic fluid flowing in a tube*. Phys. Rev. E **64**, 039901, 2001.
- [8] Corvera Poiré E. y Hernández-Machado A., *Frequency-induced stratification in viscoelastic microfluidics*. Langmuir **26**(19), 15084-15086, 2010.

- [9] Bravo-Gutiérrez M. E., Castro M., Hernández-Machado A. y Corvera Poiré E., *Controlling viscoelastic flow in microchannels with slip*. *Langmuir* **27**, 2075–2079, 2011.
- [10] Tabeling P., *Introduction to microfluidics*. Oxford University Press, Oxford, 2006.
- [11] Collepardo-Guevara R., *Propuesta para aumentar el flujo sanguíneo en obstrucciones trombóticas y ateroscleróticas*. Tesis de licenciatura, Facultad de Química, UNAM. México, 2004.
- [12] Corvera Poiré E. y del Río J. A., *Viscoelastic fingering with a pulsed pressure signal*. *J. Phys.: Condens. Matter* **16**, S2055, 2004.
- [13] Mazumdar N. J., *Biofluid mechanics*. World scientific publishing Co. Pte. Ltd., EUA, 1992.
- [14] Thiriet M. y Parker K. H., *Physiology and pathology of the cardiovascular system: a physical perspective, in cardiovascular mathematics. Modeling and simulation of the circulatory system*. Eds. Formaggia L., Quarteroni A., Veneziani A. y Springer-Verlag, Milan, Italy, 2009.
- [15] Thurston G. B. y Henderson N. M., *Effects of flow geometry on blood viscoelasticity*. *Biorheology* **43**, 729-746, 2006.
- [16] Flores Gerónimo J., *Permeabilidad dinámica en redes de vasos sanguíneos*. Tesis de licenciatura, Facultad de Química, UNAM. México, 2009.
- [17] Flores Gerónimo J., Corvera Poiré E., del Río J. A. y López de Haro M., *A plausible explanation for heart rates in mammals*. *J. Theor. Biol.* **265**, 599-603, 2010.
- [18] Flores Gerónimo J., *Efecto de la anastomosis en la permeabilidad dinámica y el flujo en un modelo de vasos sanguíneos*. Tesis de maestría, Facultad de Química, UNAM. México, 2012.

- [19] Flores Gerónimo J., Meza Romero A., Travasso R. D. M. y Corvera Poiré E., *Flow and anastomosis in vascular networks*. J. Theor. Biol. **317**, 257-270, 2013.
- [20] Torres Rojas A. M., Meza Romero A., Pagonabarraga I., Travasso R. D. M. y Corvera Poiré E., *Obstructions in Vascular Networks. Relation Between Network Morphology and Blood Supply*. PLoS ONE **10**, e012811, 2015.
- [21] Torres Rojas A. M., *Flujo en redes vasculares obstruidas*. Tesis de maestría, Facultad de Química, UNAM. México, 2013.
- [22] Stuart I. F., *Fisiología humana*. Interamericana McGraw-Hill, 13^aed., México, 2014.
- [23] Murray C. D., *The physiological principle of minimum work. I. The vascular system and the cost of blood volume*. Proc. Natl. Acad. Sci. USA **12**, 207-214, 1926.
- [24] Sherman T. F., *On connecting large vessels to small. The meaning of Murray's law*. J. Gen. Physiol. **78**, 431-453, 1981.
- [25] Williams H. R., Trask R. S., Weaver P. M. y Bond I. P., *Minimum mass vascular networks in multifunctional materials*. J. R. Soc. Interface **5**, 55-65, 2008.
- [26] Taber L. A., Ng S., Quesnel A. M., Whatman J. y Carmen C. J., *Investigating Murray's law in the chick embryo*. J. Biomech. **34**, 121-124, 2001.
- [27] McCulloh K. A., Sperry J. S. y Adler F. R., *Water transport in plants obeys Murray's law*. Nature **421**, 939-942, 2003.
- [28] McCulloh K. A., Sperry J. S. y Adler F. R., *Murray's law and the hydraulic vs mechanical functioning of wood*. Funct. Ecol. **18**, 931-938, 2004.
- [29] McCulloh K. A. y Sperry J. S., *The evaluation of Murray's law in Psilotum Nudum (Psilotaceae) an analogue of ancestral vascular plants*. Am. J. Bot. **92**(6), 985-989, 2005.

- [30] Torres Rojas A. M., Travasso R. D. M., Pagonabarraga I. y Corvera Poiré E., *When do redundant fluidic networks outperform non-redundant ones?* Europhys. Lett. **117**, 64002, 2017.
- [31] Isbell F., Calcagno V., Hector A., Connolly J., Stanley W., Reich P. B., et al., *High plant diversity is needed to maintain ecosystem services.* Nature **477**, 199-203, 2011.
- [32] Hector A. y Bagchi R., *Biodiversity and ecosystem multifunctionality.* Nature **448**, 188-191, 2007.
- [33] Ganapathy U., Marrero J., Calhoun S., Eoh H., Sorio de Carvalho L. P., Rhee K., et al., *Two enzymes with redundant fructose bisphosphatase activity sustain gluconeogenesis and virulence in Mycobacterium tuberculosis.* Nat. Commun. **6**(7912), 1-12, 2015.
- [34] Nowak M. A., Boerlijst M. C., Cooke J. y Maynard J., *Biodiversity and ecosystem multifunctionality.* Nature **388**, 167-171, 1997.
- [35] Evanko D., *Microfluidics and a garden hose.* Nat. Methods **5**, 124, 2008.
- [36] Nagrath S., Sequist L. V., Maheswaran S., Bell D. W., Irimia D., Ulkus L., et al., *Isolation of rare circulating tumour cells in cancer patients by microchip technology.* Nature **450**, 1235-1241, 2007.
- [37] Heath J. R., Kuekes P. J., Snider G. S. y Williams R. S., *A defect-tolerant computer architecture: opportunities for nanotechnology.* Science **280**, 1716-1721, 1998.
- [38] Hogg T. y Huberman B. A., *Understanding biological computation: Reliable learning and recognition.* Proc. Natl. Acad. Sci. usa **81**, 6871-6875, 1984.
- [39] Winograd S. y Cowan J. D., *Reliable computation in the presence of noise.* The M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts, EUA, 1963.
- [40] Gloekler S. y Seiler C., *Natural bypasses can save lives.* Circulation **116**, e340-e341, 2007.

- [41] Pitt B., *Interarterial coronary anastomoses. Occurrence in normal hearts and in certain pathologic conditions*. *Circulation* **20**, 816-822, 1959.
- [42] Wustmann K., Zbinden S., Windecker S., Meier B. y Seiler C., *Is there functional collateral flow during vascular occlusion in angiographically normal coronary arteries?* *Circulation* **107**, 2213-2220, 2003.
- [43] Wilson R. F., *Coronary angiography*. Springer London, EUA, 2015.
- [44] Wellenhofer E., Osman J., Kertzscher U., Affeld K., Fleck E. y Goubergrits L., *Flow simulation studies in coronary arteries—Impact of side-branches*. *Atherosclerosis* **213**, 475-481, 2010.
- [45] Frauenfelder T., Boutsianis E., Schertler T., Husmann L., Leschka S., Poulikakos D. et al., *Flow and wall shear stress in end-to-side and side-to-side anastomosis of venous coronary artery bypass grafts*. *Biomed. Eng. Online* **6**, 35, 2007.
- [46] Varshney G. y Katiyar V. K., *Computational study of steady blood flow simulation in a complete coronary artery bypass anastomosis model*. *Can. J. Pure Appl. Sci.* **1**, 103-109, 2007.
- [47] Chua L. P., Zhang J. y Zhou T., *Numerical study of a complete anastomosis model for the coronary artery bypass*. *Int. J. Heat Mass Transf.* **32**, 473-482, 2005.
- [48] Razavi S. E., Zambouri R. y Arjmandi-Tash O., *Simulation of blood flow coronary artery with consecutive stenosis and coronary-coronary bypass*. *Bioimpacts* **1**, 99-104, 2011.
- [49] Wilson T. A., *Design of the bronchial tree*. *Nature* **213**, 668-669, 1967.
- [50] Horsfield K., Relea F. G. y Cumming G., *Diameter, length and branching ratios in the bronchial tree*. *Resp. Physiol.* **26**, 351-356, 1976.

- [51] Horsfield K. y Cumming G., *Angles of branching and diameters of branches in the human bronchial tree*. B. Math. Biophys. **29**, 245-259, 1967.
- [52] Stephenson D., Patronis A., Holland D. M. y Lockerby D. A., *Generalizing Murray's law: An optimization principle for fluidic networks of arbitrary shape and scale*. J. Appl. Phys. **118**, 174302, 2015.
- [53] Hove J. R., Köster R. W., Forouhar A. S., Acevedo-Bolton G., Fraser S. E. y Gharib M., *Intracardiac fluid forces are an essential epigenetic factor for embryonic cardiogenesis*. Nature **421**, 172-177, 2003.
- [54] Cheng C., Tempel D., van Haperen R., van der Baan A., Grosveld F., Daemen M. J. A. P., et al., *Atherosclerotic lesion size and vulnerability are determined by patterns of fluid shear stress*. Circulation **113**, 2744-2753, 2006.
- [55] Nesbitt W. S., Westein E., Tovar-Lopez F. J., Tolouei E., Mitchell A., Fu J., et al., *A shear gradient-dependent platelet aggregation mechanism drives thrombus formation*. Nat. Med. **15**, 665-673, 2009.
- [56] Torres Rojas A. M., Pagonabarraga I. y Corvera Poiré E., *Resonances of Newtonian fluids in elastomeric microtubes*. Phys. Fluids **29**, 122003-1-122003-7, 2017.
- [57] Tsiklauri D. y Beresnev I., *Enhancement in the dynamic response of a viscoelastic fluid flowing through a longitudinally vibrating tube*. Phys. Rev. E **63**, 046304-1 - 046304-4, 2001.
- [58] Aarts A. C. T. y Ooms G., *Net flow of compressible viscous liquids induced by travelling waves in porous media*. J. Eng. Math. **34**, 435-450, 1998.
- [59] Tsiklauri D. y Beresnev I., *Non-Newtonian effects in the peristaltic flow of a Maxwell fluid*. Phys. Rev. E **64**, 036303-1 - 036303-5, 2001.

- [60] San O. y Staples A. E., *Dynamics of pulsatile flows through elastic microtubes*. Int. J. Appl. Mech. **4**, 1250006, 2012.
- [61] Zamir M., *The Physics of Pulsatile Flow*. Springer Verlag, New York, 2000.
- [62] Mazumdar J., *An Introduction to Mathematical Physiology & Biology*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [63] Chaudhuri R. N., *Waves and Oscillations*. New Age International (P) Limited, Publishers, 2nded., New Dheli, 2010.
- [64] Gorri J. A., Albareda A. y Toribio E., *Oscilaciones y Ondas*. Edicions de la Universitat Politècnica de Catalunya, 2^{da}ed., España, 2008.
- [65] Armani D., Liu C. y Aluru N., *Re-Configurable Fluid Circuits by PDMS Elastomer Micromachining*. Twelfth IEEE International Conference on Micro Electro Mechanical Systems 222–227, 1999.
- [66] Pritchard R. H., Lava P., Debruyne D., y Terentjev E. M., *Precise determination of the Poisson ratio in soft materials with 2D digital image correlation*. Soft Matter **9**, 6037-6045, 2013.
- [67] Vázquez-Vergara P., Torres Rojas A. M., Guevara-Pantoja P. E., Corvera Poiré E. y Caballero-Robledo G. A., *Microfluidic flow spectrometer*. J. Micromech. Microeng. **27**(7), 1-10, 2017.
- [68] Basilio P. A., Torres Rojas A. M., Corvera Poiré E. y Olguín L. F., *Stream of droplets as an actuator for oscillatory flows in microfluidics*. Microfluid. Nanofluid. Manuscrito en arbitraje.
- [69] Lai M., Krempl E. y Ruben D., *Introduction to continuum mechanics*. Elsevier, EUA, 2010.