



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA CIVIL – ESTRUCTURAS

**AJUSTE AL COEFICIENTE DE RESTITUCIÓN DE CUERPOS RÍGIDOS EN
BALANCEO CONSIDERANDO MATERIALES DE INTERFAZ**

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
JESÚS IVÁN GONZÁLEZ VÁZQUEZ

TUTORES PRINCIPALES

DR. EDUARDO REINOSO ANGULO
Instituto de Ingeniería

DR. CÉSAR AUGUSTO ARREDONDO VÉLEZ
E.R.N. y Antropogénicos, S.A. de CV

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX. DICIEMBRE, 2018



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Esteva Maraboto Luis
Secretario: Dra. Ruiz Gómez Sonia Elda
Vocal: Dr. Reinoso Angulo Eduardo
1^{er}. Suplente: Dr. Niño Lázaro Mauro Pompeyo
2^{do}. Suplente: Dr. Arredondo Vélez César Augusto

Lugar donde se realizó la tesis:

Instituto de Ingeniería UNAM. Ciudad Universitaria. Ciudad de México.

TUTORES DE TESIS:

Dr. Eduardo Reinoso Angulo

Dr. César Augusto Arredondo Vélez

FIRMA

FIRMA

DEDICATORIA

A mis padres, pues gracias a ellos he logrado llegar tan lejos y siempre me han brindado su incondicional apoyo. Mi madre que con su esfuerzo, sudor y desvelos me cargó hasta delante sin pausas y mi padre que siempre supo dar su oportuno y sabio consejo sin prejuicios ni temor.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a todos mis amigos y familiares, por siempre brindar un pilar sobre el cual apoyarme.

A la Universidad de Guadalajara (UdG), por brindarme los recursos humanos y económicos para completar mi carrera.

A la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), por abrirme las puertas a este posgrado y darme la oportunidad de expandir mis horizontes profesionales y personales.

Al Dr. Zamora Palacios, por haberme dado la confianza y paciencia durante toda la carrera, y por promover en mí el deseo de un posgrado.

Al Dr. Reinoso, por permitirme formar parte de su equipo y haberme asesorado con paciencia y prudencia en cada paso.

Al Dr. Arredondo (ERN), por siempre abrirme un espacio a pesar de la complicada agenda. Por otorgarme un tema tan interesante que al paso de unos meses se convirtió en una pasión.

Al equipo de ERN por su disposición y disponibilidad para ayudarme con un espacio, equipo y dudas.

A CONACYT por haber apoyado con los recursos económicos que fueron indispensables para poder cumplir este proyecto.

RESUMEN

En este trabajo se presenta el efecto que tienen quince diferentes combinaciones de materiales de interfaz en el coeficiente de restitución (CR) de cinco diferentes cuerpos rígidos sometidos a balanceo libre y balanceo forzado. Para esto, se extraerán las historias de rotaciones de alrededor de 500 pruebas realizadas en una mesa vibradora (Arredondo 2006). Estas historias se analizarán para extraer los valores reales de coeficiente de restitución. Posteriormente, se buscarán ajustes a diferentes ecuaciones del CR que ofrezcan los valores más aproximados a los medidos en la mesa vibradora. De forma paralela, en esta investigación se muestra una metodología simplificada y precisa para la medición del CR que permite conocer este parámetro sin la necesidad de equipo de medición costoso ni personal técnico demasiado capacitado. Por último, los resultados y metodologías propuestas serán puestos a prueba al comparar con simulaciones numéricas, las historias de rotaciones obtenidas previamente contra las historias de rotaciones obtenidas de la mesa vibradora.

ABSTRACT

In this research, it is shown the effect of fifteen different interface materials combinations over the coefficient of restitution (CR) of five different rigid bodies subjected to free rocking and forced rocking behavior. Using the rotation time histories of over 500 tests developed on a shaking table (Arredondo 2006). These time histories will be subjected to study so a real value of the CR can be known. After that, different fits will be tried into different equations so they can offer the most approximate result compared to those obtained on the shaking table. At the same time, this research offers an alternative simplified and precise method for the measurement of the CR that allows the user to know this parameter without any need of expensive equipment or technical personnel. Both, equation fits and alternative measurement method will be tested by comparing numerical simulations of time histories with the rotation time stories measured on the shaking table.

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	1
1.1 ESTADO DEL ARTE.....	3
1.2. MARCO TEÓRICO.....	5
1.2.1 Modelo de balanceo de cuerpos rígidos	5
1.2.2 Coeficiente de restitución clásico para cuerpos regulares e irregulares	6
1.2.3 Análisis de la energía potencial y cinética del balanceo libre de cuerpos rígidos regulares	8
2. CONFIGURACIÓN DE PRUEBAS EXPERIMENTALES	10
2.1 ESPECIFICACIONES DE LOS CUERPOS RÍGIDOS ENSAYADOS Y SUPERFICIES PORTANTES	10
2.2 CARACTERÍSTICAS DE LA MESA VIBRADORA.....	14
2.3 CARACTERÍSTICAS DE LAS SEÑALES ANALÍTICAS	15
2.4 EQUIPO DE CAPTURA DE SEÑALES DE MOVIMIENTO	17
2.4.1 Sensor óptico.....	17
2.4.2 Inclínómetro	17
3. PROCESAMIENTO DE SEÑALES CAPTURADAS.....	19
3.1 SELECCIÓN DE SEÑALES	19
3.2 FILTRADO DE SEÑALES.....	21
3.3 DETECCIÓN DE IMPACTOS	27
3.4 ESTIMACIÓN DE COEFICIENTE DE RESTITUCIÓN DE CADA PRUEBA.....	28
4. ANÁLISIS DE RESULTADOS.....	30
4.1 ANÁLISIS ENERGÉTICO DE LOS RESULTADOS DE LAS PRUEBAS DE LA MESA VIBRADORA.....	30
4.2 ECUACIÓN ALTERNATIVA PARA MEDICIÓN DE COEFICIENTE DE RESTITUCIÓN	32
4.3 ANÁLISIS DEL NÚMERO DE IMPACTOS	37
4.4 ANÁLISIS DEL EFECTO DE LOS MATERIALES DE INTERFAZ EN EL COEFICIENTE DE RESTITUCIÓN Y AJUSTE A LA ECUACIÓN CLÁSICA.....	41
4.5 RESULTADOS DE CUERPOS CON EXCENTRICIDADES	45
5. VALIDACIÓN DE RESULTADOS CON MODELOS NUMÉRICOS.....	46
5.1 COMPARACIÓN DE RESULTADOS DE LABORATORIO CONTRA SIMULACIONES UTILIZANDO EL VALOR DEL CR CLÁSICO	46

5.2 COMPARACIÓN DEL CR CON CURVAS AJUSTADAS CONTRA EL CR CLÁSICO.....	49
CONCLUSIONES Y TRABAJOS POSIBLES A FUTURO	51
APÉNDICE A	52
APÉNDICE B.....	63
APÉNDICE C.....	82
REFERENCIAS	94

Figura 1.1 Mapa de sitios con daños a contenidos debido a algunos sismos con magnitudes mayores de 5. Trabajo realizado en conjunto con Bourguett (2018).....	1
Figura 1.2 Ejemplos de contenidos dañados por volteo. (a) Estantería, sismo Mw 6.3, 22 febrero 2011, Nueva Zelanda (b) Estantería, sismo Mw 7.1, 23 octubre 2011, Turquía (c) Equipo eléctrico/mecánico, sismo Mw 8.8, 27 febrero 2010, Chile (d) Equipo eléctrico/mecánico, sismo Mw 8.8, 27 febrero 2010, Chile (e) Sismo Mw 5.8, 23 agosto 2011, Estados Unidos (f) Sismo Mw 8.2, 19 septiembre 2017, México.....	2
Figura 1. 3 Modelo simplificado de cuerpo rígido irregular en balanceo	6
Figura 2.1 Diagrama de prototipos construidos.	10
Figura 2.2 Configuración de cuerpos con excentricidades (Arredondo y col. 2017).....	11
Figura 2.3 Configuración de algunas superficies portantes.	12
Figura 2.4 Mesa vibradora con prototipo P5 instalado.	14
Figura 2.5 Ejemplos de excitación tipo MSAV y pulso de Ricker.	16
Figura 2.6 Datos técnicos de inclinómetro CXTA02. (MEMSIC Inc.)	18
Figura 3.1 Historia de rotaciones original capturada con sensor óptico.	21
Figura 3.2 Historia de rotaciones original capturada con inclinómetro.	22
Figura 3.3 Señal de prueba 31 filtrada con filtro pasa-baja y con wavelets de la familia symlet.	22
Figura 3.4 Historia de rotaciones de la prueba 78 de balanceo de vibración libre.....	23
Figura 3.5 Historia de velocidades rotaciones de la prueba 78 de balanceo libre.....	24
Figura 3. 6 Retrato de fase de la prueba 187 de balanceo libre.	25
Figura 3. 7 Comparación de duración de intervalos medidos y teóricos de los semi-ciclos para la prueba 187 de balanceo libre.	26
Figura 3.8 Instante t de impactos detectados vs rotación medida para diferentes tipos de filtros.	27
Figura 3.9 (a) Coeficientes de restitución de prueba 58 de vibración forzada comparados contra la media y una desviación estándar. (b) Coeficientes de restitución de prueba 51 de vibración forzada comparados contra la media y una desviación estándar.....	28
Figura 4.1 Historia de energía potencial, cinética y total de la prueba 188 de balanceo libre.	30
Figura 4.2 Historia de energía potencial de la prueba 187 de balanceo libre.	32
Figura 4.3 Regresión lineal de máximos de energía para la combinación B1/M5 del cuerpo P3.....	33
Figura 4.4 Regresión lineal de máximos de energía para la combinación B1/M5 del cuerpo P3.....	35
Figura 4.5 Historias de energía potencial de la combinación P3 B1/M1 para balanceo libre.....	35
Figura 4.6 Historias de energía total y energía potencial para diferentes pruebas de balanceo libre.....	36
Figura 4.7 Número de impactos en función del tiempo.	37
Figura 4.8 Conjunto de resultados de Número de impactos vs tiempo de balanceo de cada cuerpo.....	38
Figura 4.9 Ajuste de curva de Número de impactos vs duración de balanceo.....	39
Figura 4.10 Número de impactos Vs Duración del balanceo para la interfaz B1/M1.	40
Figura 4.11 Coeficientes de restitución medidos de la interfaz B1/M1 (Caucho/Concreto).	41
Figura 4.12 Ajustes empíricos a la expresión clásica de Housner para la interfaz B1/M1.	43
Figura 4.13 Ajustes empíricos a la expresión clásica de Housner para la interfaz B3/M1.	44
Figura 4.14 Historia de rotaciones de la prueba 265 de balanceo forzado.....	45
Figura 5.1 Comparación de la simulación numérica contra la señal medida de balanceo forzado.....	47
Figura 5.2 Comparación de la simulación numérica contra la señal medida.....	47
Figura 5.3 Comparación de simulación numérica contra señal medida.....	48
Figura 5.4 Comparación de simulación de prueba 78 con diferentes ajustes del CR.	49
Figura 5.5 Comparación de simulación de prueba 157 con diferentes ajustes del CR.	50

1. INTRODUCCIÓN Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En los tiempos recientes, los contenidos de las estructuras han cobrado bastante importancia y las pérdidas en caso de que estos fallen pueden rebasar con creces el costo del edificio que los contiene (figura 1.1). Es por ello que los estudios de riesgo sísmico deben contemplar no sólo la pérdida de una estructura sino también la de los contenidos.

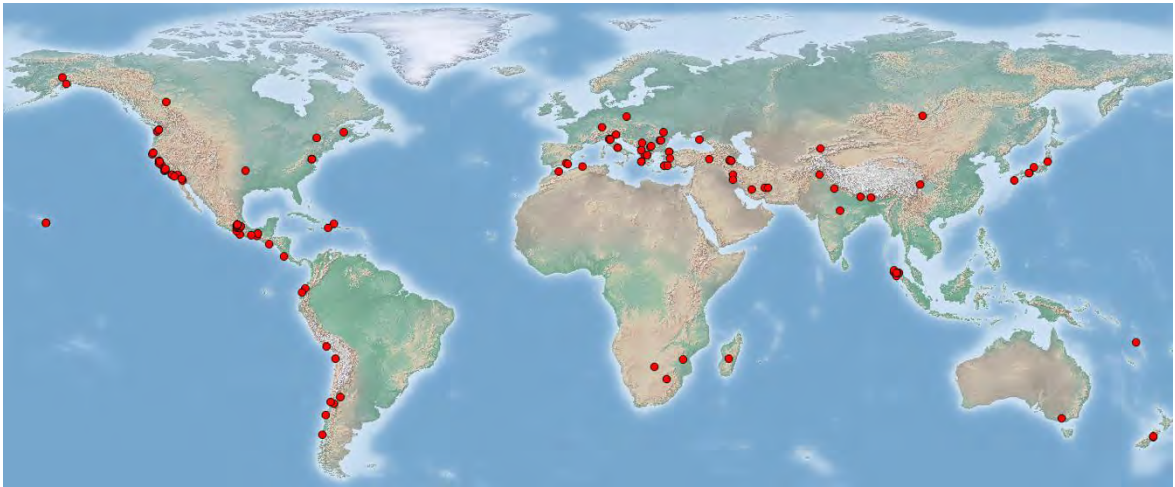


Figura 1.1 Mapa de sitios con daños a contenidos debido a algunos sismos con magnitudes mayores de 5. Trabajo realizado en conjunto con Bourguett (2018).

Uno de los modos de respuesta de los contenidos ante excitaciones externas es el balanceo y una falla que se puede presentar a consecuencia de este, es el volteo (figura 1.2). El balanceo se ve altamente afectado por el coeficiente de restitución (CR) que está relacionado con la cantidad de energía disipada en cada impacto, y al tratarse de un comportamiento quasi-caótico, pequeñas variaciones en las condiciones iniciales o valores de parámetros pueden implicar grandes incertidumbres en la respuesta del cuerpo. Entonces, un conocimiento más apropiado del coeficiente de restitución conlleva a una reducción considerable de la incertidumbre, lo que facilita realizar estudios de vulnerabilidad de contenidos más precisos. Esto se puede traducir en diseños más eficientes y seguros no sólo del contenido, sino también del edificio en el que este se encuentre.

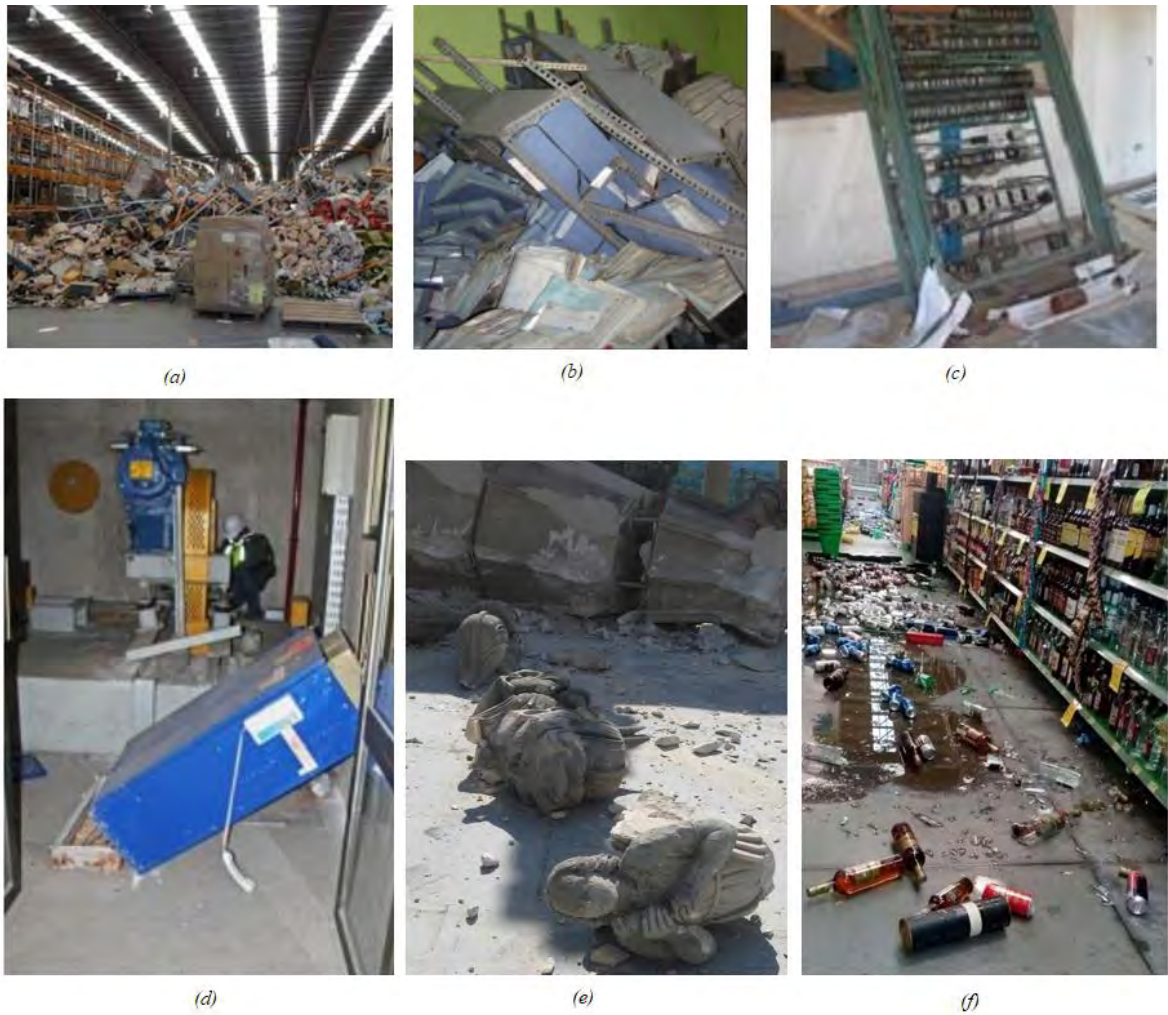


Figura 1.2 Ejemplos de contenidos dañados por volteo. (a) Estantería, sismo Mw 6.3, 22 febrero 2011, Nueva Zelanda (b) Estantería, sismo Mw 7.1, 23 octubre 2011, Turquía (c) Equipo eléctrico/mecánico, sismo Mw 8.8, 27 febrero 2010, Chile (d) Equipo eléctrico/mecánico, sismo Mw 8.8, 27 febrero 2010, Chile (e) Sismo Mw 5.8, 23 agosto 2011, Estados Unidos (f) Sismo Mw 8.2, 19 septiembre 2017, México.

En esta investigación se busca conocer el comportamiento del coeficiente de restitución de cuerpos rígidos en balanceo con características similares a las de contenidos comunes de diferentes tipos de usos de estructuras, al colocarles sobre superficies que suelen encontrarse dentro de edificios para así obtener valores empíricos del CR que podrían ser utilizados en análisis futuros.

De forma paralela, se hace uso de tendencias encontradas en el análisis de las energías cinética y potencial en balanceo libre de los cuerpos para de esta forma presentar una metodología simple y útil para conocer el coeficiente de restitución de cualquier cuerpo, a partir de conocer algunas propiedades del mismo, condiciones iniciales y características del balanceo.

1.1 ESTADO DEL ARTE

Diversos trabajos se han realizado para poder conocer el comportamiento de cuerpos en balanceo, por ejemplo Makris y col. (1998) estimó la respuesta de cuerpos ante excitaciones de pulsos, Arredondo y col. (2008) revisaron el efecto del contenido de frecuencias e intensidades pico de las excitaciones sobre cuerpos rígidos, Berto y col (2012) realizó un estudio de vulnerabilidad de contenidos de museos, Arredondo y col. (2017) revisaron el comportamiento de cuerpos irregulares con la respuesta combinada de balanceo y deslizamiento, Jaimes y col. (2017) mostraron los efectos de la interacción suelo-estructura sobre elementos rígidos irregulares. Sin embargo, la mayoría de los trabajos realizados con anterioridad hacen uso de un CR que no siempre resulta adecuado para replicar el comportamiento real de un cuerpo en balanceo, por lo que corregir este parámetro podría implicar una mejora significativa a los resultados de diversas investigaciones.

Se sabe que el CR es principalmente dependiente de una relación que existe entre la semi-base y la semi-altura de un cuerpo, llamada esbeltez (Housner 1963), es decir, de propiedades exclusivamente geométricas. Sin embargo, a través de diversos experimentos se ha mostrado que esta expresión clásica propuesta no logra para todos los casos replicar de forma adecuada el comportamiento real de los cuerpos (Muto y col. 1960; Ogawa 1977; Priestley y col. 1978; Aslam 1980; Lipscombe 1990; Fielder 1997; Arredondo 2006; Peña y col. 2007, Elgawady y Ma 2011; Kalliontzis 2016). Ante esto, se ha observado que una de las principales razones de estas inconsistencias es la diferencia en combinaciones de los materiales de interfaz, esto es, el material de la base del cuerpo y el de la superficie portante.

Consecuentemente, se han realizado algunos ingeniosos intentos para corregir las deficiencias de la formulación clásica del coeficiente de restitución, como una aproximación desde el análisis de la energía cinética y potencial de cuerpos en balanceo libre (Elgawady y Ma 2011). Así mismo, se han buscado realizar modificaciones empíricas a algún parámetro de la expresión clásica, como una expresión con una semi-base equivalente universal para todas las combinaciones de materiales de interfaz (Kalliontzis y col. 2016). Sin embargo, a pesar de que estas investigaciones logran una mejora aceptable a los valores del CR, la primera está más bien orientada a usos como lo son muros de mampostería o concreto y no a contenidos de edificios, y la segunda realiza una corrección generalizada que falla al intentar aplicarse a algunos tipos de combinación común de materiales de interfaz.

Arredondo (2006) realizó pruebas de balanceo libre y balanceo ante vibración forzada en una mesa vibradora, donde se utilizaron 15 combinaciones de materiales de interfaz en 5 tipos de cuerpos rígidos, cada uno con diferentes dimensiones y propiedades conocidas. La finalidad de dicha investigación fue revisar las formas de respuesta y modos de falla de cuerpos rígidos con características similares a las de contenidos de edificios de usos diversos, tomando en cuenta materiales de interfaz y excentricidades en los cuerpos, para posteriormente proponer un modelo numérico de balanceo y deslizamiento de cuerpos regulares e irregulares.

1.2. MARCO TEÓRICO

1.2.1 Modelo de balanceo de cuerpos rígidos

Siguiendo la metodología de Makris y Roussos (1998) y Arredondo y col.(2017) considérese el modelo de la figura 1.3, donde se muestra un cuerpo rígido en balanceo con posibles excentricidades en la ubicación en el plano del centro de gravedad (CG) sometido a una excitación en su base. Se asume que el coeficiente de fricción μ es lo suficientemente grande como para evitar el deslizamiento del cuerpo, esto es $\mu > b/h$ (Aslam y col. 1980) donde b y h representan la semi base y semi altura del cuerpo. Esto permitirá entonces, que el cuerpo gire sobre los extremos 0_L y 0_R de la base (llamados “pivotes”). Las propiedades de interés del cuerpo son h , que es la altura al CG; las semi-bases b_L y b_R que representan las distancias horizontales desde 0_L y 0_R respectivamente, hasta CG, cuando el cuerpo está en reposo; las distancias R_L y R_R representan las distancias absolutas desde 0_L y 0_R hasta CG. Por último, otra propiedad de interés del cuerpo es el ángulo de esbeltez α_L y α_R que es el ángulo formado por la vertical desde CG del cuerpo en reposo y los radios R_L y R_R .

Dada una aceleración \ddot{x}_g en el suelo, el cuerpo comenzará a rotar en el sentido opuesto de la aceleración siempre que se cumpla con la condición $\ddot{x}_g > \frac{b}{h}g$ (Zhang y Makris 2001). Considerando un cuerpo simétrico la ecuación de movimiento entonces queda definida como:

$$I_0\ddot{\theta} + mgR \sin(-\alpha - \theta) = -m\ddot{x}_g \cos(-\alpha - \theta) \text{ para } \theta < 0 \quad (1.1)$$

y

$$I_0\ddot{\theta} + mgR \sin(\alpha - \theta) = -m\ddot{x}_g \cos(\alpha - \theta) \text{ para } \theta > 0 \quad (1.2)$$

Donde θ representa la rotación del cuerpo, m es la masa del cuerpo y I_0 es la inercia rotacional del cuerpo equivalente a $\frac{4}{3}mR^2$ para cuerpos rectangulares. Las ecuaciones (1.1) y (1.2) pueden ser expresadas con la forma generalizada, y resolviendo para $\ddot{\theta}$:

$$\ddot{\theta}(t) = -p^2 \left\{ \sin(\alpha S[\theta(t)] - \theta(t)) + \frac{\ddot{x}_g}{g} \cos(\alpha S[\theta(t)] - \theta(t)) \right\} \quad (1.3)$$

Donde $S[\cdot]$ representa la función *signo* y p es un parámetro del cuerpo equivalente a $\sqrt{\frac{mgR}{I_0}}$ que sirve como indicador de características dinámicas del cuerpo.

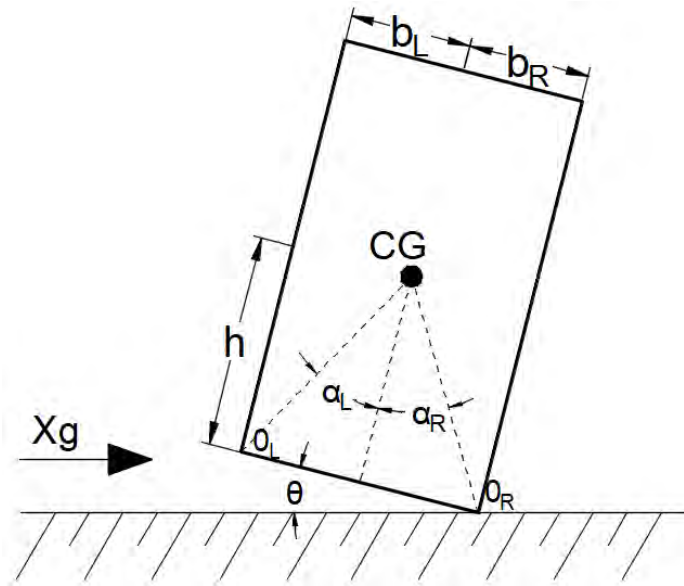


Figura 1. 3 Modelo simplificado de cuerpo rígido irregular en balanceo

En el caso de que se considere un cuerpo irregular, basta con sustituir los valores de b , h , R , I_0 y α por los valores correspondientes al sentido del giro. Los parámetros de la ecuación (1.3) de movimiento serán dependientes de la dirección de las rotaciones.

1.2.2 Coeficiente de restitución clásico para cuerpos regulares e irregulares

Si se desprecia la disipación de energía por fricción con el viento, por fricción en el pivote de rotación y por efectos histeréticos por deformaciones internas del cuerpo, se tiene entonces que el principal medio por el que el cuerpo disipa su energía cinética, es a través de impactos elásticos en el final de cada uno de sus medios ciclos de balanceo.

Debido a que se parte de la hipótesis de que al instante del impacto la transición del giro desde un pivote al otro es continua (Housner 1963), se puede estimar entonces por conservación de cantidad de movimiento antes y después del impacto, la siguiente expresión:

$$I_0 \dot{\theta}^+ - m \dot{\theta}_1 2bR \sin(\alpha) = I_0 \dot{\theta}^- \quad (1.4)$$

Donde $\dot{\theta}^+$ y $\dot{\theta}^-$ son las velocidades rotacionales antes y después del impacto, respectivamente. El segundo término de la ecuación (1.4) representa la energía que fue disipada y transferida al suelo o superficie portante. De aquí entonces se puede obtener una relación entre la energía cinética antes y después del impacto:

$$e = \left(\frac{\dot{\theta}^+}{\dot{\theta}^-} \right)^2 = CR^2 \quad (1.5)$$

De aquí, haciendo las sustituciones necesarias se llega a que:

$$CR = 1 - \frac{3}{2} \sin^2(\alpha) \quad (1.6)$$

Sin embargo, esta formulación es válida sólo para cuerpos regulares, ya que sólo en ese caso I_{0L} y I_{0R} son equivalentes. Si existieran excentricidades horizontales en el CG, entonces se partiría de la siguiente relación de energía cinética:

$$e_L = \left(\frac{R_R \dot{\theta}^+}{R_L \dot{\theta}^-} \right)^2 = CR_L^2 \quad \text{Cuando la transición es de } 0_L \text{ a } 0_R \quad (1.7)$$

y

$$e_R = \left(\frac{R_L \dot{\theta}^+}{R_R \dot{\theta}^-} \right)^2 = CR_R^2 \quad \text{Cuando la transición es de } 0_R \text{ a } 0_L \quad (1.8)$$

Con esto, se podría utilizar un valor de coeficiente de restitución diferente dependiendo del sentido del giro antes y después del impacto. Sin embargo, se puede realizar la aproximación:

$$e_L = \left(\frac{R_R \dot{\theta}^+}{R_L \dot{\theta}^-} \right)^2 \approx \left(\frac{\dot{\theta}^+}{\dot{\theta}^-} \right)^2 \approx CR_L^2 \quad (1.9)$$

y

$$e_R = \left(\frac{R_L \dot{\theta}^+}{R_R \dot{\theta}^-} \right)^2 \approx \left(\frac{\dot{\theta}^+}{\dot{\theta}^-} \right)^2 \approx CR_R^2 \quad (1.10)$$

Si se obtiene el momento con respecto al pivote 0_R cuando las rotaciones son positivas, se tiene:

$$I_L \dot{\theta}^- - m R_L \dot{\theta}^- [R_L \sin(\alpha_L) + R_R \sin(\alpha_R)] \sin(\alpha_R) = I_L \dot{\theta}^+ \quad (1.11)$$

Dividiendo entre $\dot{\theta}^-$ y si se define a r_R como la relación de velocidad inmediatamente antes del impacto con el pivote 0_R y se sustituye en la ecuación (10):

$$I_L - m R_L [R_L \sin(\alpha_L) + R_R \sin(\alpha_R)] \sin(\alpha_L) = I_L r_L \quad (1.12)$$

Despejando r_L se tiene finalmente:

$$CR_L = \frac{\{I_L - m R_L \sin(\alpha_L) [R_R \sin(\alpha_R) + R_L \sin(\alpha_L)]\}}{I_R} \quad (1.13)$$

De forma análoga, el coeficiente de restitución cuando el impacto se genera desde el otro sentido, quedaría definido por la expresión:

$$CR_R = \frac{\{I_R - m R_R \sin(\alpha_R) [R_L \sin(\alpha_L) + R_R \sin(\alpha_R)]\}}{I_L} \quad (1.14)$$

Arredondo, Jaimes y Reinoso (2017) proponen una forma generalizada de las ecuaciones (1.13) y (1.14) donde i y j pueden tomar sólo los valores alternados 1 o 2 (que representan izquierda y derecha), definida como:

$$CR_i = \frac{\{I_i - mR_i \sin(\alpha_i)[R_j \sin(\alpha_j) + R_i \sin(\alpha_i)]\}}{I_j} \quad (15)$$

El valor de CR ya sea para cuerpos regulares o irregulares, representa un límite superior, puesto que sólo considera la energía disipada por las características geométricas e inerciales del cuerpo en balanceo, si se añade el efecto por los materiales de la interfaz entre el cuerpo y la superficie portante una mayor cantidad de energía será propagada hacia la superficie, lo que implicará una restitución menor (Makris y Roussos 1998).

1.2.3 Análisis de la energía potencial y cinética del balanceo libre de cuerpos rígidos regulares

Debido a que se están despreciando los efectos de la fricción en el pivote, fricción con el viento y de procesos histeréticos, se puede hacer la suposición de que en el balanceo libre la energía potencial (E_p) y la energía cinética (E_c) del cuerpo componen la energía total del sistema (ecuación 1.16) y se intercambian de forma perfecta en cada semi-ciclo del balanceo (Elgawady y Ma, 2011), solo disipando energía de forma discreta en cada impacto,

$$E_{total} = E_p + E_c \quad (1.16)$$

La energía potencial está directamente relacionada al peso del cuerpo, la distancia R , el ángulo α y de la rotación θ del cuerpo en cada instante. De forma análoga, la energía cinética del cuerpo en balanceo libre, es dependiente de la inercia rotacional y de la velocidad rotacional del cuerpo en cada instante. Entonces, las energías potencial y cinética se representan, respectivamente, de la siguiente manera:

$$E_p = WR[\cos(\alpha - |\theta|) - \cos(\alpha)] \quad (1.17)$$

y

$$E_c = \frac{1}{2}I_0\dot{\theta}^2 \quad (1.18)$$

De tal manera que si se sustituyen las ecuaciones (1.17) y (1.18) en la ecuación (1.16), se tiene finalmente que la energía total del cuerpo es:

$$E_{total} = WR[\cos(\alpha - |\theta|) - \cos(\alpha)] + \frac{1}{2}I_0\dot{\theta}^2 \quad (1.19)$$

La energía potencial máxima de cada semi-ciclo n se da cuando el cuerpo llega a su rotación máxima, esto es, a la mitad del semi-ciclo, y es en ese instante que la velocidad rotacional es

cero, por lo que también la energía cinética es cero. De la misma manera, justo antes del impacto del semi-ciclo n se tiene la velocidad rotacional máxima y una rotación de cero, por lo que la energía cinética será máxima y equivalente a la energía total, y la energía potencial será cero.

2. CONFIGURACIÓN DE PRUEBAS EXPERIMENTALES

2.1 ESPECIFICACIONES DE LOS CUERPOS RÍGIDOS ENSAYADOS Y SUPERFICIES PORTANTES

Debido a que se busca proponer una corrección empírica al CR, para esta investigación se partirá de los experimentos realizados en la mesa vibradora por Arredondo (2006). En este capítulo, con fines prácticos, se repiten los principales datos de dicha investigación.

Se utilizaron cuerpos prismáticos compuestos de perfiles de acero configurados de tal forma que se pueda garantizar que las deformaciones internas del cuerpo al momento de la excitación sean despreciables. En total se construyeron cinco cuerpos con una profundidad de 80cm, y con bases y alturas diferentes, con esto se buscó que las rotaciones se den en el eje perpendicular al plano (ver figura 2.1). Los prototipos se diseñaron de manera que resultó posible reemplazar la cara inferior por placas de otros materiales, en este caso por láminas de caucho (B1), madera (B2) y acero (B3), con lo que, sumado a una variación de tipos de superficie portante se pueden realizar diferentes combinaciones de materiales de interfaz.

Los prototipos no fueron restringidos en ninguno de sus grados de libertad, por lo que los modos de respuesta y falla posibles son el reposo, balanceo, deslizamiento, balanceo-deslizamiento y volteo en cualquiera de los ejes. Sin embargo, a fin de evitar daños y deformaciones permanentes que provocasen cambios en sus propiedades, los prototipos contaron con camas de espuma que permitían amortiguar los impactos al momento del volteo así como con argollas que permitían sujetarlos.

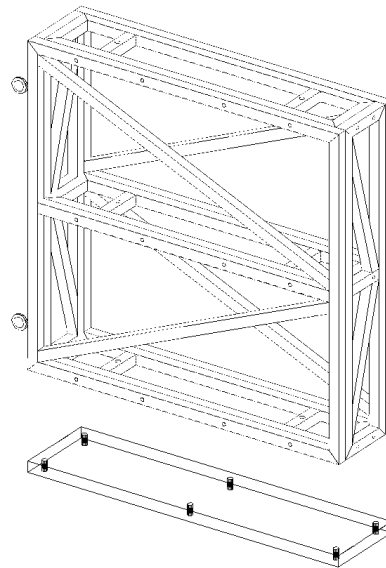


Figura 2.1 Diagrama de prototipos construidos.

Con el fin de poder aportar excentricidades en ambos ejes del plano, los prototipos se construyeron con travesaños ubicados en diferentes alturas sobre los que se pueden colocar masas de pesos variados. Al hacer esto se pudo tener un control sobre el desplazamiento del centro de masas de cada prototipo. En la tabla 2.1 se muestran las propiedades geométricas e inerciales de los cinco prototipos con una base de madera y en la figura 2.2 se muestran las diferentes configuraciones de las masas para provocar excentricidades (Arredondo y col., 2017). De esta figura se puede notar que los cuerpos en los que se añadieron excentricidades fueron los prototipos P2 y P5, a los que se colocaron pesos que sumasen 100kg y 200kg y solo los casos P5f y P5g generan un desplazamiento horizontal de centro de gravedad del prototipo, mientras que los demás casos generan excentricidades cuyos cuerpos equivalentes serían regulares.

Tabla 2.1 Propiedades geométricas e inerciales de los prototipos con base de madera.

Prototipo	P1	P2	P3	P4	P5
Masa (kg)	44.00	49.53	61.00	56.39	79.36
Profundidad (m)	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80
Base (m)	0.20	0.20	0.20	0.40	0.60
Altura (m)	0.40	0.80	1.20	0.80	1.20
Altura al C.G. (m)	0.21	0.40	0.60	0.39	0.58
Semi base izquierda (m)	0.10	0.10	0.10	0.20	0.30
Semi base derecha (m)	0.10	0.10	0.10	0.20	0.30
α_L (rad)	0.44	0.24	0.16	0.47	0.48
α_R (rad)	0.44	0.24	0.16	0.47	0.48
I_{oL} (kg-m ²)	3.06	9.72	20.83	10.87	33.14
I_{oR} (kg-m ²)	3.06	9.72	20.83	10.87	33.14

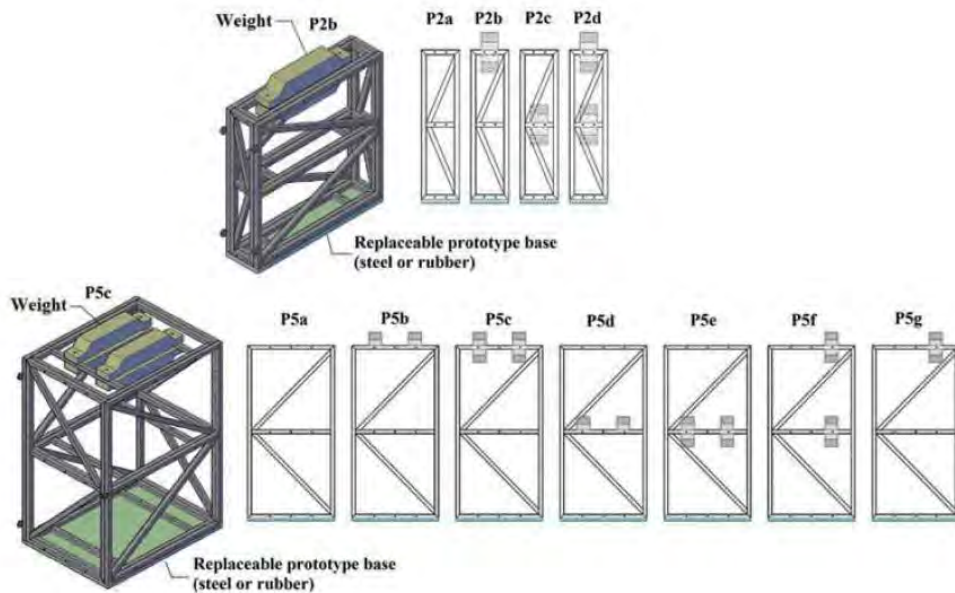


Figura 2.2 Configuración de cuerpos con excentricidades (Arredondo y col. 2017).

Para las superficies portantes de los prototipos, se utilizaron cinco materiales diferentes: concreto (M1), alfombra (M2), loseta (M3), madera (M4) y vinil (M5) como se muestra en la figura 2.3; estos fueron seleccionados tomando en cuenta materiales comunes en pisos de edificios de diversos usos. Así, se tendrán un total de 15 configuraciones de interfaz (cinco por cada base del prototipo).

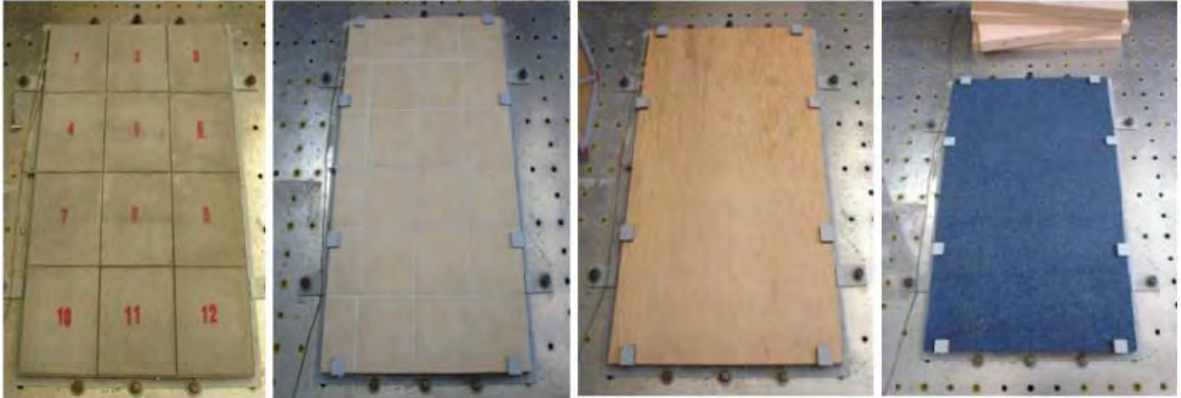


Figura 2.3 Configuración de algunas superficies portantes.

Tanto las dimensiones de los prototipos como los materiales de interfaz utilizados se eligieron tomando en cuenta los tipos de contenidos más comunes para los usos de vivienda, oficinas, comercio, hospitales, laboratorios e industria. En la tabla 2.2 se muestran algunos ejemplos de contenidos con características similares a los cuerpos ensayados en la mesa vibradora.

Tabla 2.2 Ejemplos de contenidos de edificios (Arredondo 2006).

b	h/b	Uso			
		Vivienda, oficinas, tiendas departamentales.	Hospitales	Laboratorios	Industria
0.1	1	Objetos en alacenas y estantes, cristalería, porcelana, televisores, UPS.	Vaporizadores de anestesia	Balones de destilación, matraces, vasos de precipitado, mecheros, esterilizante.	----
	2	Equipos de sonido, monitores, CPU, UPS, televisores, electrodomésticos, cristalería.	Esterilizadores, torniquetes	Microscopios, balanzas, agitadores, autoclaves, hornos, fuentes de poder.	Extractores, equipo de cafetería.
	3	Televisores, cristalería.	Equipo cardiovascular.	----	Licadoras industriales, dispensadores, granizadoras.
	4-6	Bocinas, ventiladores, jarrones, lámparas de pie, esculturas.	Cilindros de hidrógeno y contenedores de desechos radioactivos, químicos o biológicos.	----	Licadoras industriales.
0.2	1	Televisores, microondas, monitores, impresoras, triturador de documentos, consolas de video-juegos.	----	Destilador, centrífugas, hornos, incubadoras para cultivos.	Freidoras, salamandras, enfriadores, vitrinas, dispensadores, peladores eléctricos, extractores, rebanadoras.
	2	Calentadores, lavadoras, secadoras, lava-vajillas, organizadores.	Bombas de succión, sistemas de auto-transfusión.	----	Freidoras, salamandras, enfriadores, vitrinas, dispensadores, peladores eléctricos, extractores, rebanadoras.
	3	Archiveros, vitrinas, ventiladores de pedestal, UPS.	Calentador-enfriador.	Incubadora para cultivos.	Estufones, hornos, enfriadores, dispensador, procesador de alimentos.
	4-6	Relojes de pie.	Lámparas de cirugía.	----	Anaqueles, lockers, duplexers.
0.3	1	Amplificadores, televisores, refrigeradores, congeladores, cafeteras, fotocopiadoras, rebanadoras, hornos	Calentador-enfriador.	Incubadora para cultivos	Estufones, hornos, enfriadores, dispensadores, procesadores de alimentos.
	2	Televisores.	Incubadoras, cunas térmicas, máquinas de anestesia.	Refrigeradores.	Carros de servicio, asadores, rosticeros, enfriadores, máquinas productoras de hielo, vitrinas refrigeradas, racks, planchas, refrigeradores.
	3	Vitrinas, refrigeradores, consolas de video-juegos, centros de lavado, espejos de pie, gabinetes.	Máquinas de anestesia, cunas térmicas, ragos - X portables, servidores.	----	Carros de servicio, asadores, rosticeros, enfriadores, máquinas productoras de hielo, vitrinas refrigeradas, racks, planchas, refrigeradores.
0.4-0.5	1	Escritorios, revisteros, fotocopiadoras	Calentador-enfriador, UPS.	Refrigeradores, muflas, incubadores avícolas, liofilizador.	Marmita, enfriadores, rosticeros.
	2-4	Libreros, refrigeradores, racks, estantes, gabinetes, lockers.	Máquinas de anestesia, esterilizadores, UPS, Sistemas DC, cámaras de flujo laminar.	Cabinas de flujo, refrigeradores.	Rosticeros, racks, estantes, lockers.

2.2 CARACTERÍSTICAS DE LA MESA VIBRADORA

Las pruebas se realizaron en una mesa vibradora, de la cual se muestran a continuación los datos técnicos y generales:

- Nombre del edificio: Edificio 9 II UNAM Mesa Vibradora.
- Ubicación: Ciudad Universitaria, Coyoacán. CDMX. C.P. #04510. México.
- Personal a cargo: M.I. Roberto Durán Hernández.
- Mesa MTS (MTS Systems Corporation) con las siguientes características:
- Tres grados de libertad controlados.
- 4x4m de dimensiones.
- Peso máximo de modelos: 20t.
- Desplazamiento horizontal máximo: +/- 15cm.
- Desplazamiento vertical máximo: +/- 7.5cm.
- Aceleración horizontal máxima: 1g con modelo de 20t sobre la mesa.
- Aceleración vertical máxima: 1g con modelo de 20t sobre la mesa.
- Intervalo de frecuencia: 0.1 a 50Hz.
- Cuarto de máquinas con un par de unidades con bombas de pistón y flujo variable.
- Grúa viajera de 10t de capacidad.



Figura 2.4 Mesa vibradora con prototipo P5 instalado.

2.3 CARACTERÍSTICAS DE LAS SEÑALES ANALÍTICAS

Además de ser sometidos a balanceo libre con rotaciones iniciales, los cuerpos se expusieron a diferentes excitaciones en sus bases. En total se utilizaron 18 señales armónicas y 4 señales de sismos reales.

Las familias de señales armónicas utilizadas en esta investigación se clasifican en dos tipos, que son el pulso de Ricker y una señal de movimiento senoidal de amplitud variable (MSAV), las ecuaciones 2.1 y 2.2 muestran la representación de cada una.

$$\ddot{x}_g = A(2a - 1)e^{-a} ; a = \left| \frac{\omega(t-T_s)}{2} \right|^2 \quad (2.1)$$

$$\ddot{x}_g = A \frac{90t^2(t-2T_d)^6}{(2T_d)^8} \sin(\omega(t - 2T_d)) \quad (2.2)$$

Donde A es la amplitud máxima de la aceleración, ω es la frecuencia angular de la señal, T_s es el instante en el que se da la máxima aceleración, T_d es la duración de la fase intensa y t es un instante cualquiera en el tiempo. Se realizaron nueve pruebas de cada tipo de señal con parámetros adecuados a las propiedades de la mesa vibradora. En la siguiente tabla se muestran las diferentes configuraciones que se utilizaron.

Tabla 2.3 Valores de A y ω para cada tipo de movimiento.

Ricker	MSAV	A (m/s²)	ω (rad/s)
A1	A10	2	10
A2	A11	4	10
A3	A12	4	15
A4	A13	6	10
A5	A14	6	15
A6	A15	6	20
A7	A16	8	15
A8	A17	8	20
A9	A18	10	20

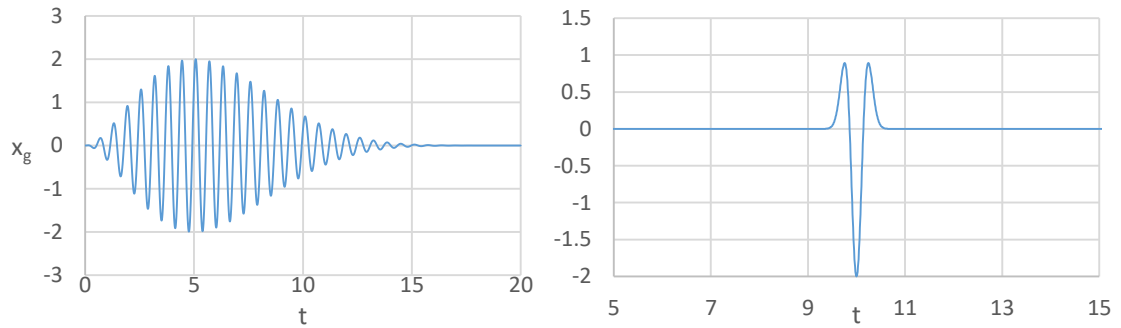


Figura 2.5 Ejemplos de excitación tipo MSAV y pulso de Ricker para movimiento tipo A1 y A10.

La decisión de usar estos dos tipos de señales se debió a que el pulso de Ricker tiende a asemejarse a la respuesta de un sitio cercano a una fuente sísmica, y de manera análoga la señal senoidal de amplitud variable se asemeja a la respuesta de un sitio lejano a la fuente (Arredondo, 2006).

En cuanto a los sismos reales, se utilizaron un total de cuatro señales registradas. Para la selección de las señales se tomó en cuenta que los valores pico tanto de aceleración, velocidad y desplazamiento, no rebasaran las capacidades de la mesa.

Tabla 2.4 Valores pico de acelerogramas utilizados.

Sismo	Fecha	Estación	Aceleración pico (m/s ²)	Velocidad Pico (m/s)	Desplazamiento Pico (m)
Loma Prieta	18-Oct-89	CAP090	4.35	0.29	0.06
Kocaeli	17-Aug-99	DZC270	3.51	0.46	0.18
Landers	28-Jun-92	JOS090	2.79	0.43	0.14
Kobe	16-Jan-95	KJM000	8.06	0.81	0.18

2.4 EQUIPO DE CAPTURA DE SEÑALES DE MOVIMIENTO

2.4.1 Sensor óptico

Uno de los métodos utilizados para la captura de las señales de movimiento fue el uso de un sensor óptico a través del registro de video. Dicho software detecta puntos de interés (marcados con cinta roja en los prototipos) y determina así la posición en un instante t . Dependiendo la frecuencia de imagen del video (fps), se puede así obtener la historia de posiciones de cada uno de los puntos de interés con intervalos de tiempo $dt=1/fps$ y consecuentemente con el uso de relaciones trigonométricas, se puede conocer la historia de rotaciones de los cuerpos rígidos.

Las especificaciones del hardware y software utilizados, de acuerdo a Arredondo (2006) son:

- Programa: GTRACK – TEAM VIEW 3.0.
- Ambiente: LINUX OUBUNTU 2.612.16.
- Zoom óptico: 20X
- Zoom digital: 800X
- Resolución: 720 X 480 píxeles.
- Velocidad de Grabación: 29.97fps.
- Escalas de tiempo: 0.033 segundos.
- Escalas dimensionales: en X=0.0028 m/píxel y en Y=0.0031 m/píxel.

2.4.2 Inclinómetro

Como dispositivo para medición paralela, se utilizó un inclinómetro bi-axial modelo CXTA02, de la marca MEMSIC. Éste fue colocado sobre los prototipos para poder detectar las rotaciones en tiempo real durante las pruebas. La respuesta del dispositivo depende de la magnitud de la fuerza paralela al sensor provocada por la gravedad y arroja una variación de voltaje proporcional a dicho valor de gravedad medido.

Para poder conocer el valor de la rotación en cada instante t , es necesario utilizar una transformación en función del voltaje y la sensibilidad del equipo, la expresión indicada por el proveedor es:

$$\theta = \sin^{-1} \left[\frac{\text{voltaje (V)} - \text{Voltaje en } 0^\circ \text{ (V)}}{\text{Sensibilidad (V/rad)}} \right] \quad (2.3)$$

La razón de utilizar dos dispositivos fue poder validar los resultados de uno contra el otro y así poder tener más certeza de las mediciones.

Specifications	CXTA01	CXTA02	Remarks
Performance			
Linear Angular Range (°)	± 20	± 20	
Full Angular Range (°)	± 75	± 75	
Angular Resolution (° rms)	0.05	0.05	
Sensitivity - small angles (mV/°)	35 ± 2	35 ± 2	Actual value provided with Sensor
Sensitivity Drift (%/°C)	0.01	0.01	
Zero Angle Voltage (Volts)	2.5 ± 0.15	2.5 ± 0.15	Actual value provided with Sensor
Zero Angle Drift (mV/°C)	1.0	1.0	Typical
Zero Angle Drift (°/°C)	0.03	0.03	Typical
Non-Linearity (°)	< 0.4	< 0.4	Over ± 20° not including Arcsine Error
Bandwidth (Hz)	50	50	
Settling Time (sec)	0.2	0.2	
Alignment (°)	± 1	± 1	Typical
Cross-axis Sensitivity (%)	< 5	< 5	Inclusive of alignment error
Environment			
Storage Temperature (°C)	-55 to +85	-55 to +85	Nylon Package
Operating Temperature (°C)	-40 to +85	-40 to +85	Nylon Package
Storage Temperature (°C)	-55 to +105	-55 to +105	-AL High Temperature Package
Operating Temperature (°C)	-40 to +105	-40 to +105	-AL High Temperature Package
Non-Operating Vibration (g rms)	10	10	20-2 kHz random
Shock (g)	2000	2000	1 ms, half sine
Electrical			
Supply Voltage (VDC)	6 - 30	6 - 30	Unregulated
Current (mA)	4	8	
Physical			
Size (Nylon Package)	.78 x 1.75 x 1.07" (1.98 x 4.45 x 2.72 cm)		
(Aluminum Package)	.95 x 2.00 x 1.20" (2.41 x 5.08 x 3.05 cm)		
Weight (Nylon Package)	1.38 oz (43 gm)		
(Aluminum Package)	2.09 oz (65 gm)		

Figura 2.6 Datos técnicos de inclinómetro CXTA02. (MEMSIC Inc.)

3. PROCESAMIENTO DE SEÑALES CAPTURADAS

3.1 SELECCIÓN DE SEÑALES

En total, se realizaron 275 pruebas de vibración forzada y 215 de vibración libre (Arredondo, 2006), sin embargo, la vibración forzada provocó en algunos casos respuestas diferentes al balanceo, por lo que esas pruebas no fueron utilizadas en esta investigación. Se tuvieron al final 88 pruebas de vibración forzada, de las cuales 43 mostraron falla por volteo y en las demás los prototipos regresaron al reposo tras finalizar la excitación. En las tablas 3.1 y 3.2 se muestran las pruebas útiles para esta investigación, así como la configuración de los cuerpos y sus materiales de interfaz, tipo de excentricidad y el tipo de señal al que fueron sometidos. En la tabla 3.3 se muestra la configuración de interfaces así como la altura inicial del pivote libre de cada prueba de balanceo libre.

Tabla 3.1 Pruebas de vibración forzada con respuesta de balanceo sin falla por volteo.

No. De Prueba	Movimiento	Prototipo	Tipo De Excentricidad	Interfase	No. De Prueba	Movimiento	Prototipo	Tipo De Excentricidad	Interfase
3	A3	P2	-	B3/M2	113	A7	P2	-	B3/M3
5	A5	P2	-	B3/M2	114	A8	P2	-	B3/M3
6	A6	P2	-	B3/M2	115	A9	P2	-	B3/M3
8	A8	P2	-	B3/M2	143	A1	P3	-	B3/M3
9	A9	P2	-	B3/M2	144	A2	P3	-	B3/M3
31	A13	P5	-	B3/M2	145	A3	P3	-	B3/M3
32	A14	P5	-	B3/M2	147	A5	P3	-	B3/M3
41	S2	P5	P5c	B2/M2	148	A6	P3	-	B3/M3
43	S2	P5	P5b	B2/M2	150	A8	P3	-	B3/M3
45	S2	P5	P5g	B2/M2	151	A9	P3	-	B3/M3
47	S2	P5	P5f	B2/M2	154	A12	P3	-	B3/M3
51	A1	P3	-	B3/M2	172	S4	P4	-	B2/M5
53	A3	P3	-	B3/M2	190	A11	P4	-	B3/M2
56	A6	P3	-	B3/M2	191	A12	P4	-	B3/M2
58	A8	P3	-	B3/M2	212	S2	P2	P2a	B2/M2
59	A9	P3	-	B3/M2	260	S4	P5	P5a	B3/M4
62	A12	P3	-	B3/M2	262	S4	P5	P5d	B3/M4
66	A16	P3	-	B3/M2	265	S2	P5	P5f	B3/M4
67	A17	P3	-	B3/M2	267	S2	P5	P5g	B3/M4
108	A2	P2	-	B3/M3	269	S2	P5	P5b	B3/M4
109	A3	P2	-	B3/M3	270	S4	P5	P5b	B3/M4
111	A5	P2	-	B3/M3	271	S2	P5	P5c	B3/M4
112	A6	P2	-	B3/M3					

Tabla 3.2 Pruebas de vibración forzada con respuesta de balanceo y con falla por volteo.

No. De Prueba	Movimiento	Prototipo	Tipo De Excentricidad	Interfase	No. De Prueba	Movimiento	Prototipo	Tipo De Excentricidad	Interfase
11	A11	P2	-	B3/M2	161	S1	P3	-	B3/M5
13	A13	P2	-	B3/M2	162	S2	P3	-	B3/M5
42	S4	P5	P5c	B2/M2	163	S3	P3	-	B3/M5
46	S4	P5	P5g	B2/M2	166	S1	P2	-	B3/M5
48	S4	P5	P5f	B2/M2	167	S2	P2	-	B3/M5
52	A2	P3	-	B3/M2	168	S3	P2	-	B3/M5
55	A5	P3	-	B3/M2	178	S4	P1	-	B3/M5
60	A10	P3	-	B3/M2	198	S2	P2	P2c	B2/M2
61	A11	P3	-	B3/M2	199	S4	P2	P2c	B2/M2
63	A13	P3	-	B3/M2	200	S2	P2	P2c	B3/M4
64	A14	P3	-	B3/M2	201	S4	P2	P2c	B3/M4
68	A18	P3	-	B3/M2	202	S2	P2	P2d	B3/M4
94	S2	P2	-	B2/M4	203	S4	P2	P2d	B3/M4
96	S4	P2	-	B2/M4	204	S2	P2	P2d	B2/M2
98	S1	P3	-	B2/M4	205	S4	P2	P2d	B2/M2
99	S2	P3	-	B2/M4	207	S4	P2	P2b	B2/M2
100	S3	P3	-	B2/M4	208	S2	P2	P2b	B3/M4
110	A4	P2	-	B3/M3	209	S4	P2	P2b	B3/M4
149	A7	P3	-	B3/M3	213	S4	P2	P2a	B2/M2
153	A11	P3	-	B3/M3	266	S4	P5	P5f	B3/M4
155	A13	P3	-	B3/M3	272	S4	P5	P5c	B3/M4
156	A14	P3	-	B3/M3					

Tabla 3.3 Organización de pruebas de vibración libre.

		M1	M2	M3	M4	M5	Altura inicial
P1	B1	1 2 3	46 47 48	91 92 93	136 137 138	181 182 183	2.8 5.5 8.1
	B2	16 17 18	61 62 63	106 107 108	151 152 153	196 197 198	2.8 5.5 8.1
	B3	31 32 33	76 77 78	121 122 123	166 167 168	211 212 213	2.8 5.5 8.1
P2	B1	4 5 6	49 50 51	94 95 96	139 140 141	184 185 186	1.4 2.8 4.2
	B2	19 20 21	64 65 66	109 110 111	154 155 156	199 200 201	1.4 2.8 4.2
	B3	34 35 36	79 80 81	124 125 126	169 170 171	214 215 216	1.4 2.8 4.2
P3	B1	7 8 9	52 53 54	97 98 99	142 143 144	187 188 189	1.0 2.1 3.1
	B2	22 23 24	67 68 69	112 113 114	157 158 159	202 203 204	1.0 2.1 3.1
	B3	37 38 39	82 83 84	127 128 129	172 173 174	217 218 219	1.0 2.1 3.1
P4	B1	10 11 12	55 56 57	100 101 102	145 146 147	190 191 192	5.6 11.0 16.3
	B2	25 26 27	70 71 72	115 116 117	160 161 162	205 206 207	5.6 11.0 16.3
	B3	40 41 42	85 86 87	130 131 132	175 176 177	220 221 222	5.6 11.0 16.3
P5	B1	13 14 15	58 59 60	103 104 105	148 149 150	193 194 195	3.4 16.5 24.4
	B2	28 29 30	73 74 75	118 119 120	163 164 165	208 209 210	3.4 16.5 24.4
	B3	43 44 45	88 89 90	133 134 135	178 179 180	223 224 225	3.4 16.5 24.4

3.2 FILTRADO DE SEÑALES

El sensor óptico de movimiento utilizó cintas rojas colocadas en zonas estratégicas de los prototipos para provocar alto contraste visual y así detectar puntos a lo largo del tiempo. Sin embargo, debido a que el software intenta representar con un pixel el centro geométrico de la cinta roja y esta tenía dimensiones de hasta 10cm de longitud y alrededor de 3cm de ancho, se tuvieron complicaciones para empatar de forma consistente el centro geométrico real de la cinta con el centro interpretado por el software. Este efecto tuvo como consecuencia que la señal capturada por el sensor óptico mostrara oscilaciones a lo largo del tiempo, mismas que pueden ser tratadas como ruido de una señal, por ejemplo, en la figura 3.1 donde se aprecia que antes del instante $t=10s$ y después del instante $t=28s$ siguen existiendo excitaciones, cuando en realidad el cuerpo de dicha prueba ya se encontraba en completo reposo. En algunos casos como en el instante $t=32.87s$ el sensor óptico detectó una rotación de 1.98° , misma que de haber sido real o provocada por vibración ambiental, habría significado que el pivote libre se levantara alrededor de 2cm sobre la base, sin embargo con el uso de los fotogramas fue posible comprobar que dicha excitación no se dio.

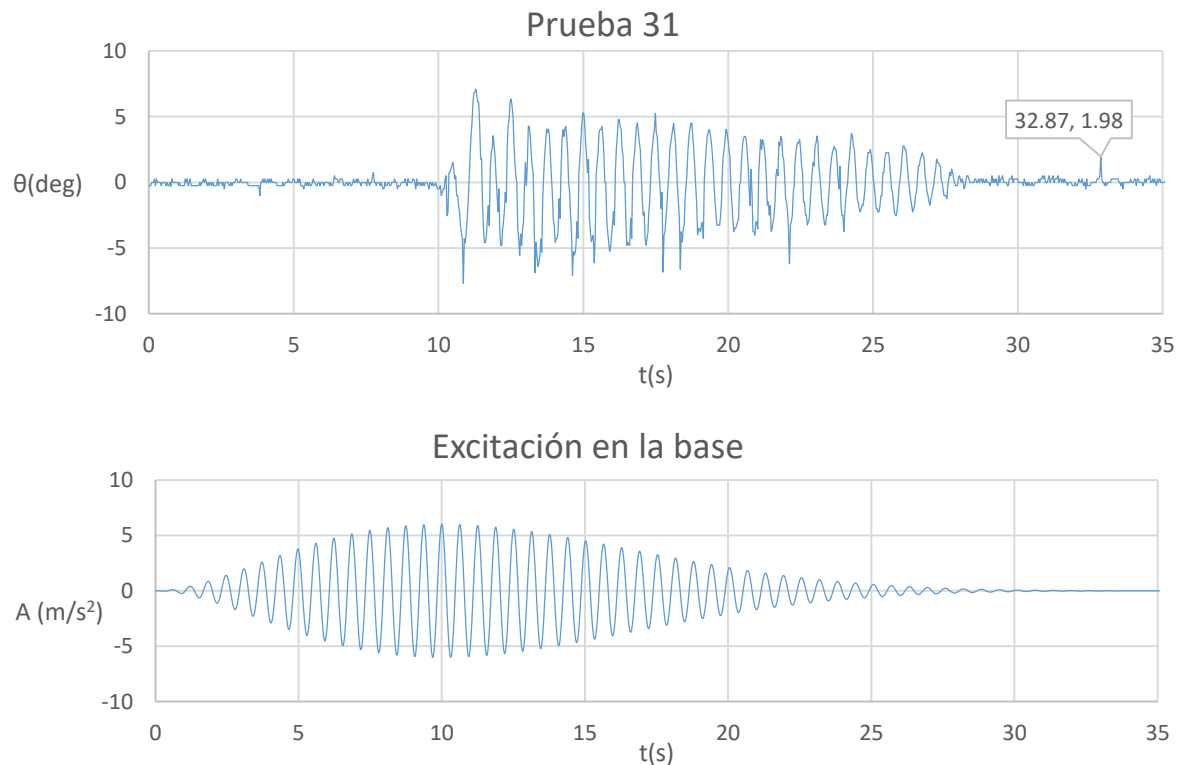


Figura 3.1 (Arriba) Historia de rotaciones original capturada con sensor óptico. (Abajo) Excitación en la base.

De forma análoga, al tratarse de un equipo analógico y mecánico, el inclinómetro también presentó niveles de ruido, como suelen hacer equipos de estas características. En la figura 3.2 se tiene la señal capturada con inclinómetro de la prueba 31 de vibración forzada. En esta se

pueden observar oscilaciones de alta frecuencia (más de 10Hz) a lo largo de la excitación, incluso cuando el cuerpo ya había regresado al reposo alrededor del instante $t=32s$. También es posible que las oscilaciones más pequeñas capturadas cuando los cuerpos se encontraban en reposo fueran provocadas por ruido ambiental ya que el inclinómetro y algunas de las cintas de referencia del sensor se encontraban ubicados en la parte superior de los cuerpos.

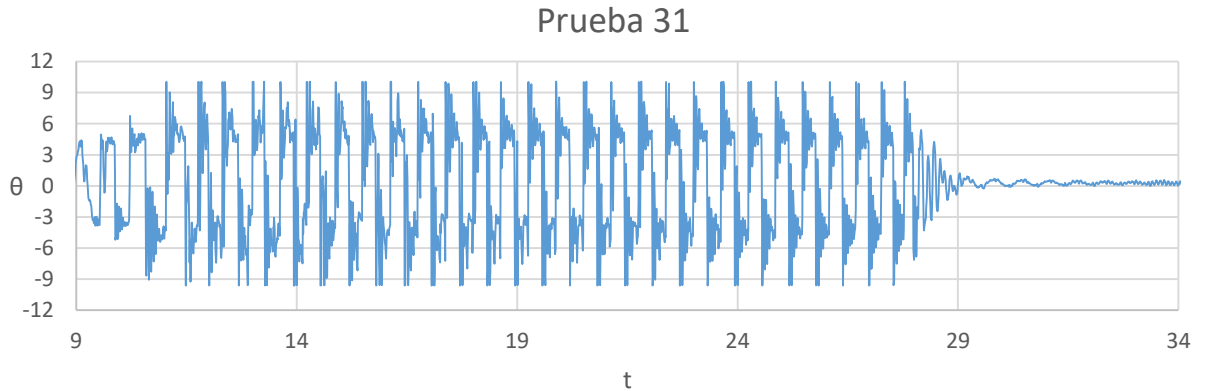


Figura 3.2 Historia de rotaciones original capturada con inclinómetro.

Es por esto que resultó necesario someter a las pruebas de laboratorio a un proceso de filtrado de señales que permita contar con una señal más limpia, puesto que el balanceo se trata de un fenómeno cuasi-caótico y pequeñas perturbaciones en las mediciones podrían generar errores en cascada al momento de intentar replicar los resultados con algún software.

Para filtrar las señales se utilizaron dos metodologías paralelas, que fueron el uso de un filtro pasa-baja con el apoyo del software Degtra V10.3 y un filtrado con el uso de wavelets de la familia *symlet*. El uso de las dos metodologías se decidió debido a que en algunas pruebas parte del ruido de la señal contiene frecuencias que coinciden con las frecuencias del balanceo, y al realizar un filtrado simple existía el riesgo de distorsionar en exceso la señal.

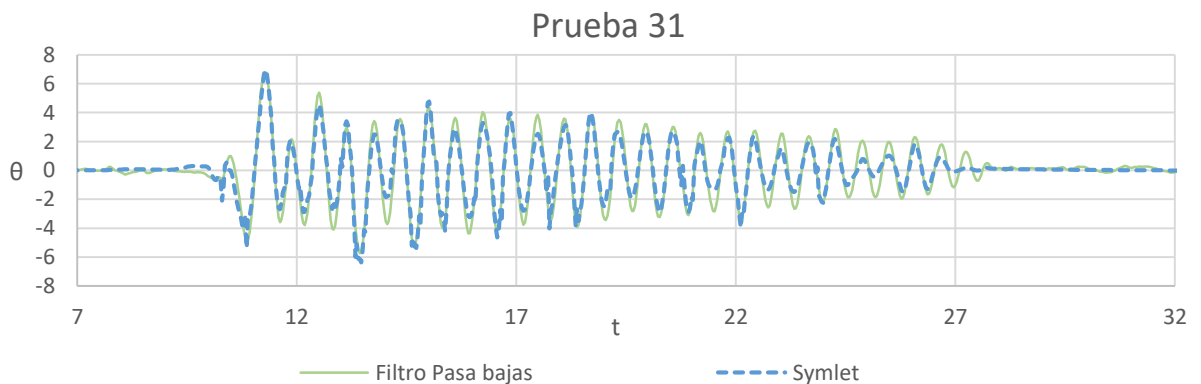


Figura 3.3 Señal de prueba 31 filtrada con filtro pasa-baja $f_{max}=2Hz$ y con wavelets de la familia *symlet*.

Las frecuencias de corte utilizadas para el filtro pasa-baja variaron dependiendo de las características del cuerpo y de la excitación, pero en general se mantuvieron dentro del rango de 1Hz a 2Hz.

La validación de los resultados se hizo a través de comparación visual contra los fotogramas para comprobar que la señal tuviera su línea base en cero cuando no existe excitación y que el balanceo comience en el momento correcto, con la detección de impactos, con la linealidad de los resultados de coeficiente de restitución y, en el caso de la vibración libre, a través del análisis energético con una comparación de los máximos de energía cinética y potencial de cada semi-ciclo (véase capítulo 4).

En general se tuvo en todas las pruebas de vibración libre una deficiencia al momento de liberar los cuerpos desde su rotación inicial. Esto se muestra en la figura 3. 4, donde se aprecia que antes del instante $t=7s$ el cuerpo tenía una rotación absoluta de alrededor de 1.25° , misma que fue provocada de forma manual; posteriormente, en el instante $t=7.43s$, se llevó al cuerpo a una rotación mayor de 2.72° para después ser liberado. Sería de esperarse que tras tener un impacto, la rotación máxima en el otro sentido fuera menor puesto que el cuerpo ya ha perdido energía, sin embargo esto no es lo que se observa, ya que en el instante $t=7.86s$ el cuerpo llegó a una rotación de 3.98° . Esto implica que el cuerpo recibió energía externa, probablemente proveniente de quien liberó los cuerpos.

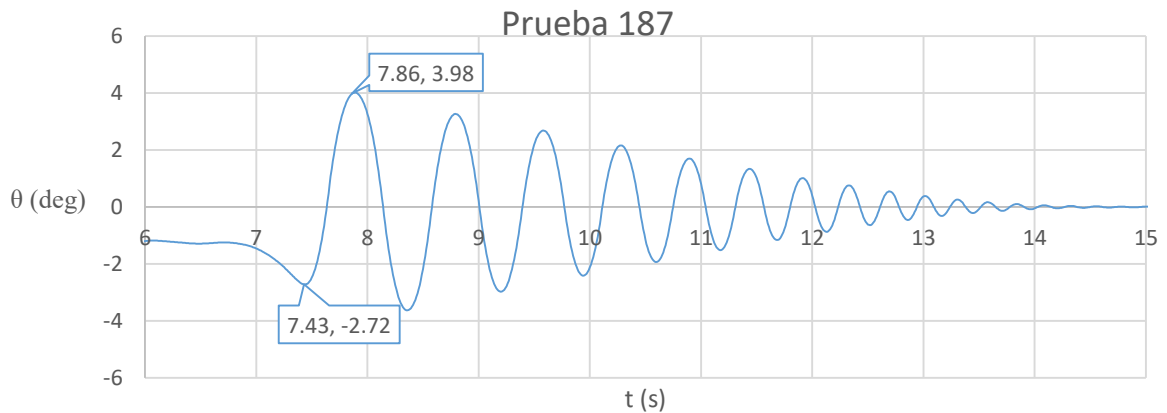


Figura 3.4 Historia de rotaciones de la prueba 78 de balanceo de vibración libre.

En la figura 3.5 se comprueba lo anteriormente mencionado, puesto que en el instante $t=6.33s$ la velocidad rotacional es de $\dot{\theta}=0.05\text{rad/s}$ en vez de ser cero. La imprecisión anterior no compromete los resultados ya que simplemente basta con considerar que el balanceo libre comenzó a partir del segundo semi-ciclo y no desde el instante en que fue liberado.

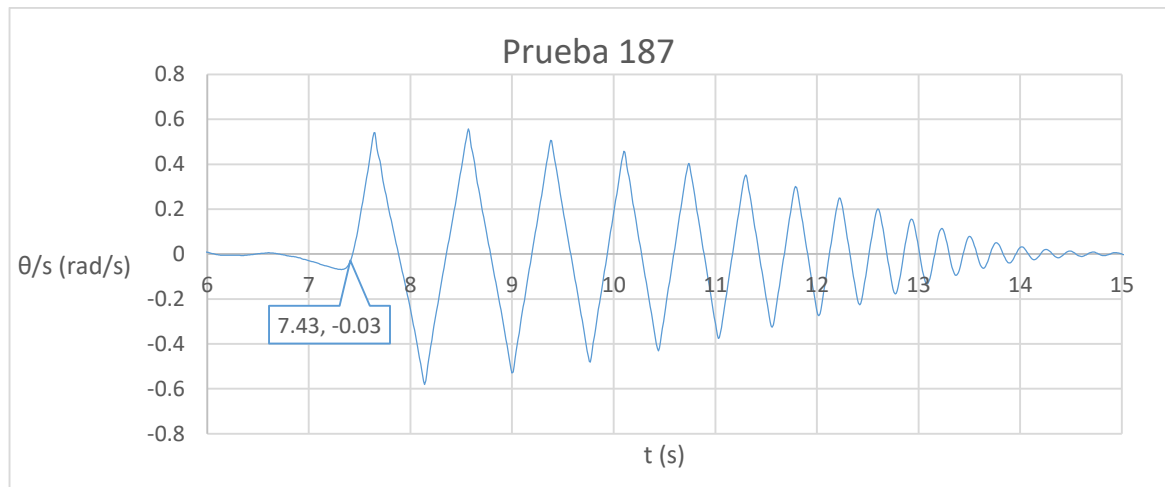


Figura 3.5 Historia de velocidades rotaciones de la prueba 78 de balanceo libre.

Otra deficiencia encontrada en las señales es que para rotaciones menores a $\theta=0.1^\circ$, o en algunos casos incluso de $\theta=0.5^\circ$, los instrumentos de medición no lograron capturar de forma adecuada las amplitudes correctas, además de que las frecuencias de las oscilaciones eran relativamente similares a la frecuencia del ruido de la señal, por lo que aumentar la frecuencia de corte del filtro podría distorsionar la señal. Esto implica que si se utilizara el algoritmo de detección de impactos para intervalos de tiempo grandes donde el cuerpo ya regresó al reposo, se tendría erróneamente que siguen existiendo impactos cuando en realidad solo se trataría de ruido. Estas imprecisiones tampoco representaron inconvenientes con los resultados finales, ya que a través de los fotogramas fue posible comprobar cuando los cuerpos regresaban al reposo y, las amplitudes de esas rotaciones son tan pequeñas, que no representan un riesgo considerable para los contenidos de edificios.

Una forma alternativa de representar el comportamiento de los cuerpos es a través de un retrato de fase, como se ve en la figura 3.6, donde se tienen en el eje de las abscisas las rotaciones en orden consecutivo y en el eje de las ordenadas las velocidades rotacionales que se dieron en el instante de cada rotación. La ventaja de esta representación del balanceo libre es que permite comprobar a simple vista que cuando la rotación es máxima, la velocidad rotacional es cero y viceversa. El comportamiento de este tipo de fenómenos mostraría una elipse si no existiese disipación de energía, sin embargo tras cada cruce del eje de las ordenadas se tiene un impacto, lo que implica una pérdida discreta de velocidad rotacional y genera un efecto de espiral hasta que el cuerpo regresa al reposo. Aquí también se observa la deficiencia mencionada en los párrafos anteriores, ya que idealmente el retrato de fase debería comenzar con una rotación máxima y una velocidad rotacional igual a cero, sin embargo, muestra que la rotación inicial es menor que la rotación de los siguientes dos ciclos, y se aprecia que la pendiente de la velocidad rotacional antes del primer impacto es similar a la de una rotación inicial mayor, lo que implica que el cuerpo cuenta con una aceleración ajena a la del balanceo libre.

Retrato de fase Prueba 187

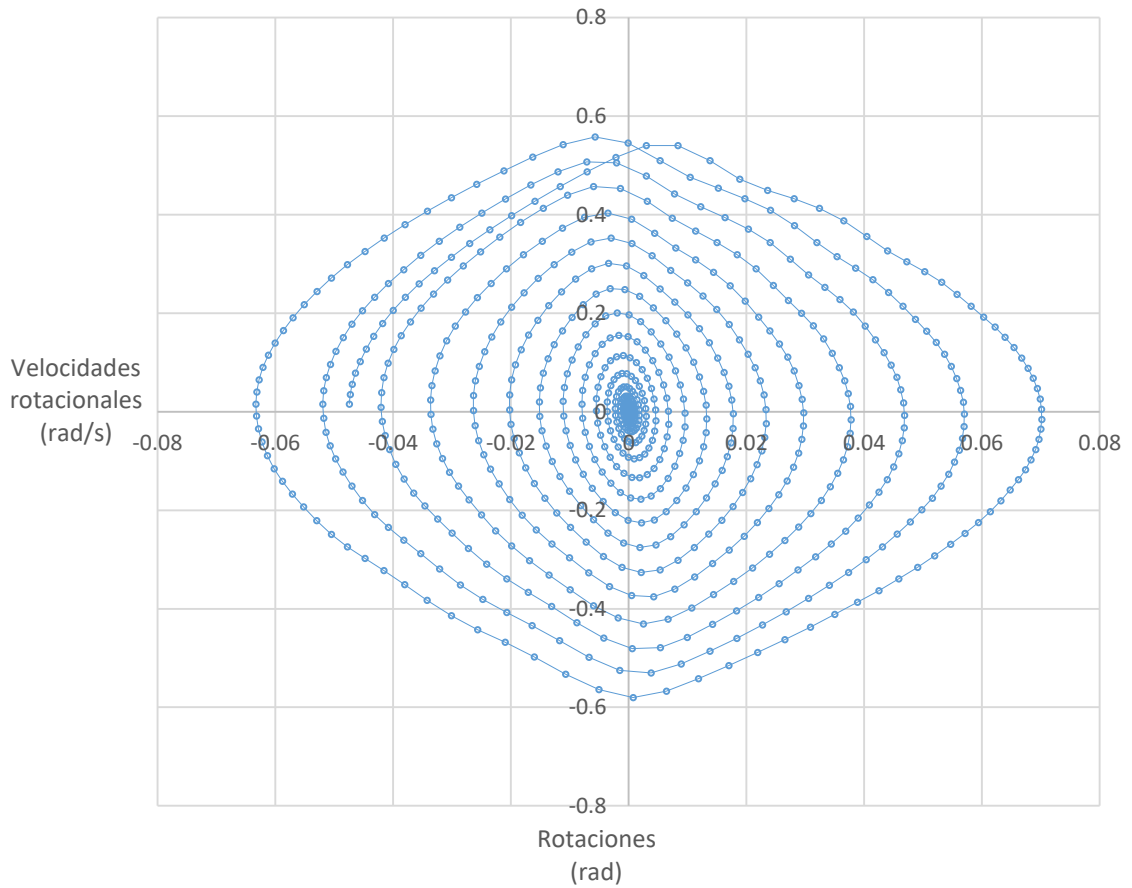


Figura 3. 6 Retrato de fase de la prueba 187 de balanceo libre.

Para validar que los resultados medidos de las pruebas fueran apropiados, se compararon los intervalos de semi-ciclos medido contra los intervalos de semi-ciclos teóricos obtenidos de la expresión 3.1 que depende de la amplitud de la rotación al comienzo del semi-ciclo (Elgawady y Ma, 2011) y de las propiedades geométricas del cuerpo:

$$T_{teórico} = \frac{4 \tanh^{-1} \sqrt{1 - \left(1 - \frac{\theta_n}{\alpha}\right)^2}}{\sqrt{\frac{WR}{I_0}}} \quad (3.1)$$

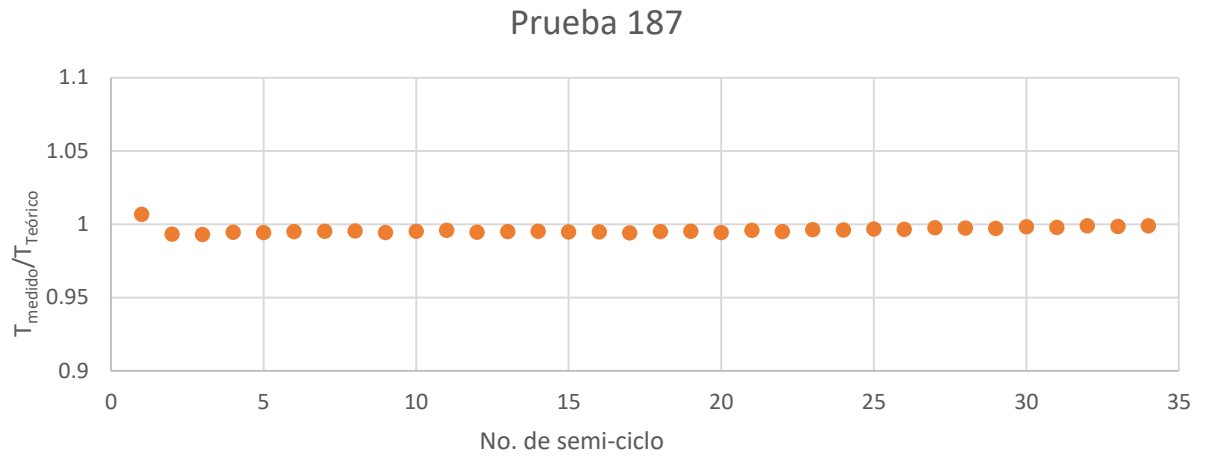


Figura 3. 7 Comparación de duración de intervalos medidos y teóricos de los semi-ciclos para la prueba 187 de balanceo libre.

Como se muestra en la figura 3.7, se debe tener un comportamiento lineal con valores muy cercanos a uno para poder comprobar que los resultados medidos, después del proceso de filtrado, son válidos.

3.3 DETECCIÓN DE IMPACTOS

Existen diversas formas de poder reconocer el instante en el que suceden impactos durante el balanceo partiendo de una señal. La forma utilizada en esta investigación fue ubicar el instante en que la rotación cambia de signo, pues esto implica que se ha realizado una transición de la rotación entre un pivote y el otro, tal que se cumple la siguiente expresión:

$$S(\theta_i) \neq S(\theta_{i+1}) \quad (3.2)$$

Si se deseara, para cuerpos en balanceo libre también sería posible reconocer el instante del impacto a través de la velocidad rotacional o de la energía cinética, ya que el impacto se localiza cuando sus valores son máximos.

Para esta investigación se desarrolló un código que permite revisar paso a paso si las condiciones necesarias de impacto se cumplen y almacena los valores del tiempo de impacto así como la rotación medida en ese instante, la cual debe ser muy cercana a cero para poder tener certeza de que el resultado es apropiado.

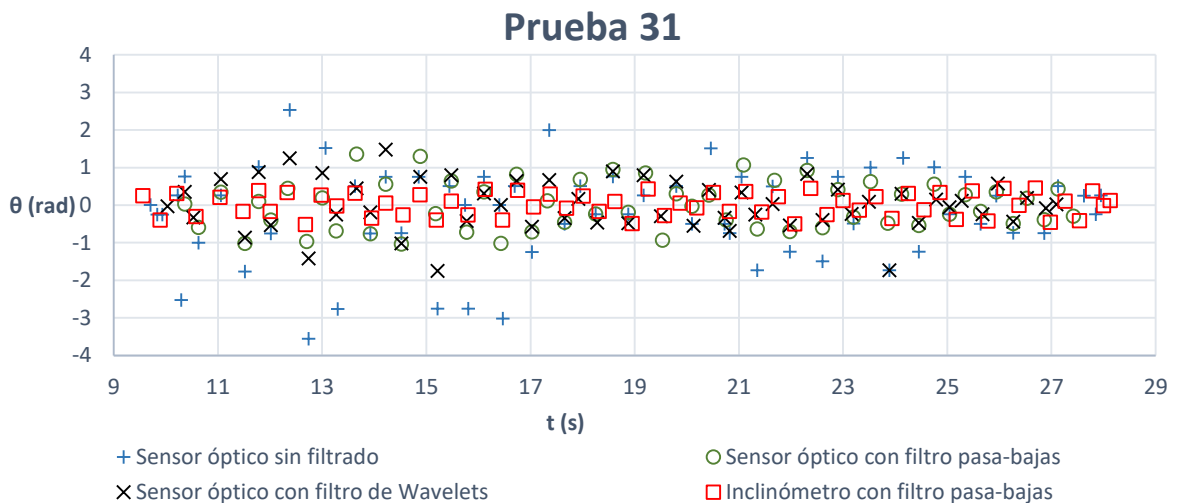
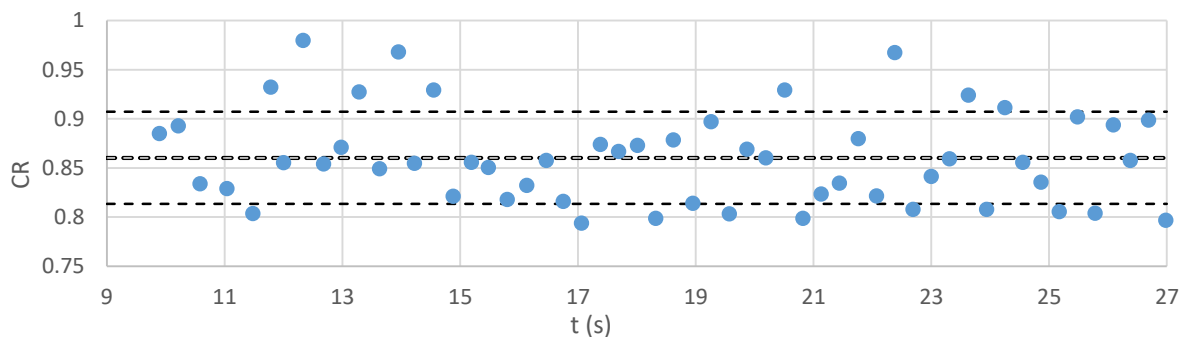


Figura 3.8 Instante t de impactos detectados vs rotación medida para diferentes tipos de filtros de la prueba 31 de balanceo forzado.

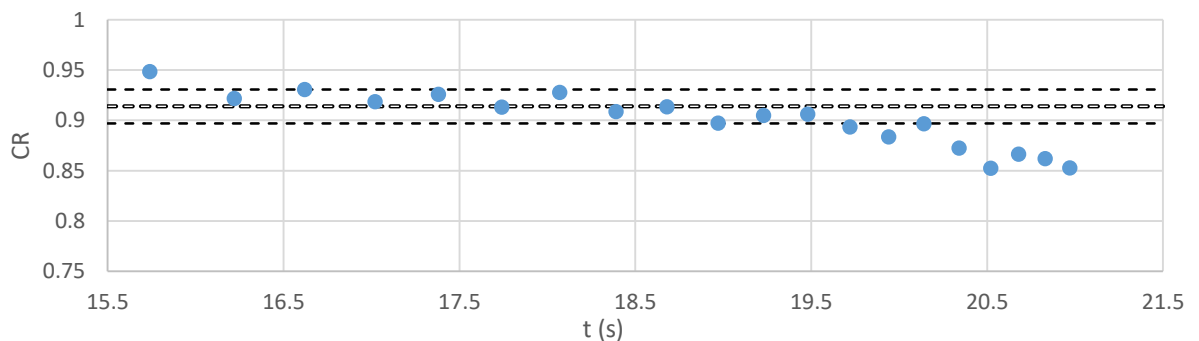
Como ejemplo, en la figura 3.8 se muestra la comparación de los resultados de medición de impactos con diferentes métodos de medición y de filtrado, así como de las señales originales. Se puede apreciar que hay congruencia en el instante del impacto de todas las señales, lo que indica que el signo de las rotaciones no tiene gran dependencia del filtro utilizado. Esto hace que los instantes de impacto de cada prueba sea uno de los parámetros detectados con mejor precisión en esta investigación. También de la figura se puede notar que el método que ofreció un resultado más cercano al giro $\theta=0$ es el filtro pasa-baja de la señal del inclinómetro. Esta conclusión fue consistente con la mayoría de las pruebas salvo algunas excepciones.

3.4 ESTIMACIÓN DE COEFICIENTE DE RESTITUCIÓN DE CADA PRUEBA

Ya que se tienen detectados los instantes de cada impacto, basta con relacionar la rotación medida después del impacto con la rotación medida antes del mismo. Se parte de la hipótesis de que el coeficiente de restitución no depende del tiempo ni de la excitación, por lo que se espera que se obtenga un resultado constante a lo largo de cada prueba.



(a)



(b)

Figura 3.9 (a) Coeficientes de restitución de prueba 58 de vibración forzada comparados contra la media y una desviación estándar. (b) Coeficientes de restitución de prueba 51 de vibración forzada comparados contra la media y una desviación estándar.

En la figura 3.9 es posible apreciar dos ejemplos de los resultados obtenidos. En la parte superior, correspondiente a la prueba 58 de balanceo forzado, se ve un resultado prácticamente constante a lo largo del tiempo, que corresponde a lo esperado. Sin embargo, en la parte inferior, que representa la prueba 51 de balanceo forzado, se ve que aproximadamente después del instante $t=18.5s$, el coeficiente de restitución comienza a disminuir en cada impacto. Este comportamiento puede deberse a dos razones: que tras los impactos se tengan deformaciones permanentes en el prototipo o superficie portante, mismas

que provocarían cambios en las propiedades geométricas y por ello una variación en el CR o, la otra razón posible, es que las imprecisiones de la medición mencionada en la sección anterior haya impedido conocer los valores correctos de velocidad rotacional antes y después de cada impacto ya que en esos instantes las rotaciones máximas eran muy pequeñas.

Estas imprecisiones que se tuvieron en diversas pruebas cuando los prototipos se encontraban muy cerca de regresar al reposo no representan una gran complicación, puesto que los primeros impactos brindaron en general los resultados necesarios para poder obtener valores concluyentes del CR de cada prototipo con su respectiva configuración de interfaz. El valor de CR que se utilizó en esta investigación es el promedio de los datos medidos ya que el comportamiento con respecto al tiempo es normal.

En el caso de las pruebas de vibración forzada, la anterior es la única metodología que permitió la deducción del CR. Para las pruebas de vibración libre se contó con métodos energéticos que permitieron complementar los resultados de este método, para esto se analizaron los valores máximos de la energía potencial y cinética de cada semi-ciclo y se compararon con los del semi-ciclo inmediato anterior para, con el uso de la expresión (1.5), estimar el CR. Esto es válido puesto que la energía total del sistema debe permanecer constante durante cada semi-ciclo por lo que el máximo de energía potencial debe ser equivalente al máximo de energía cinética, de tal manera que, siempre que se utilicen los valores de la energía potencial cuando el cuerpo llega a su rotación máxima del semi-ciclo y los de energía cinética cuando la rotación sea mínima, se tendrá la certeza de que la expresión (1.5) es válida.

4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

4.1 ANÁLISIS ENERGÉTICO DE LOS RESULTADOS DE LAS PRUEBAS DE LA MESA VIBRADORA

Con el fin de revisar que el comportamiento teórico de los cuerpos se empatara con el comportamiento observado, se revisaron, además de las rotaciones y velocidades rotacionales, la energía potencial y cinética de los cuerpos durante la vibración libre, dado que estos pueden ser tomados como indicadores de la eficacia tanto de la instrumentación como del método de filtrado. En la figura 4.1 se muestra la historia de tiempo de la energía potencial, energía cinética y energía total que fueron estimadas con las ecuaciones 1.17, 1.18 y 1.19, respectivamente. De ella se puede apreciar que los máximos de energía potencial son equivalentes a los de energía cinética que se encuentran justo después y en general se tiene un resultado simétrico entre las energías potencial y cinética de cada semi-ciclo. Esto cumple con lo esperado y en general el comportamiento de la energía total tiene un comportamiento correcto, con reducciones discretas tras cada impacto.

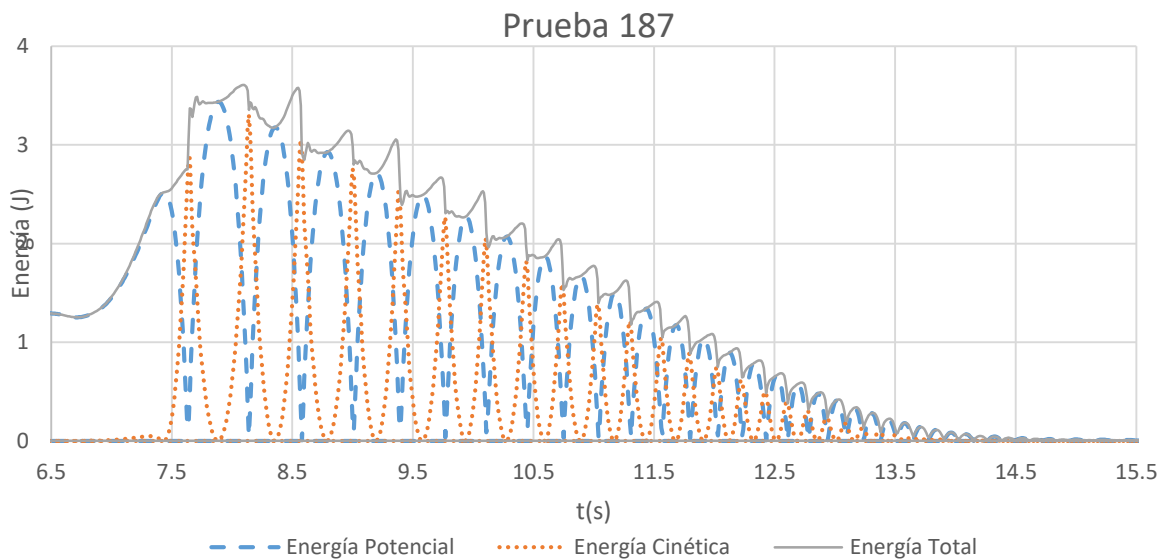


Figura 4.1 Historia de energía potencial, cinética y total de la prueba 188 de balanceo libre.

El análisis de la energía permitió también observar deficiencias de los instrumentos de medición para capturar con certeza las rotaciones cuando la velocidad rotacional del cuerpo es alta, y esto se observa al notar que la energía potencial no consigue llegar al cero cuando se da el impacto. Esto implica que los resultados obtenidos cuando el inclinómetro estaba sometido a altas velocidades (esto es, cerca del impacto) no son del todo confiables. Sin

embargo, dadas las especificaciones de la figura 2.5, el inclinómetro cuenta con la sensibilidad necesaria para poder considerar válidos los resultados de la energía potencial cuando esta se encuentra cerca de sus máximos.

A partir de esto, es entonces posible relacionar los máximos de energía potencial antes y después de cada impacto para así conocer la cantidad de energía total disipada, con lo que fue posible obtener un valor más confiable del CR.

4.2 ECUACIÓN ALTERNATIVA PARA MEDICIÓN DE COEFICIENTE DE RESTITUCIÓN

El análisis de energía potencial y cinética de los cuerpos permitió observar una relación lineal entre la cantidad de energía disipada en cada impacto y la reducción de duración de los semi-ciclos, dicho comportamiento estuvo presente en la mayoría de las pruebas de balanceo libre. En la figura 4.2, se ven representados los valores máximos de energía potencial de cada semi-ciclo donde se puede comprobar que, si se ignora el primer máximo y aquellos que no se hayan dado por una rotación máxima de $\theta=0.01^\circ$ por las razones mencionadas en el capítulo 3, entonces se tiene un comportamiento lineal.

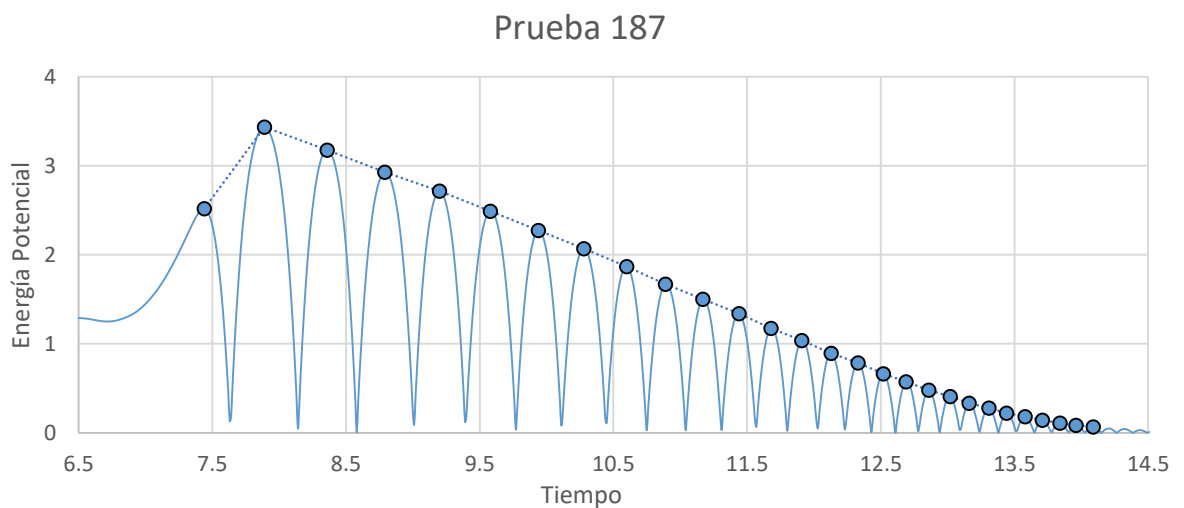


Figura 4.2 Historia de energía potencial de la prueba 187 de balanceo libre.

Tal como se tiene en la tabla 3.3, cada cuerpo fue sometido a tres pruebas distintas de balanceo libre manteniendo los mismos materiales de interfaz, es por ello que se agruparon los resultados en tercias y realizó una regresión lineal de los máximos de energía en función del tiempo cada una de las pruebas, para así obtener de forma estadística una ecuación de una recta, como se muestra en la figura 4.3. Para ese caso, el coeficiente de determinación muestra valores no menores de $R^2=0.995$, lo que valida la consideración de un comportamiento lineal. Además, las pendientes de las rectas mantuvieron una dispersión del orden de milésimas, por lo que se puede considerar que las tres pruebas fueron consistentes.

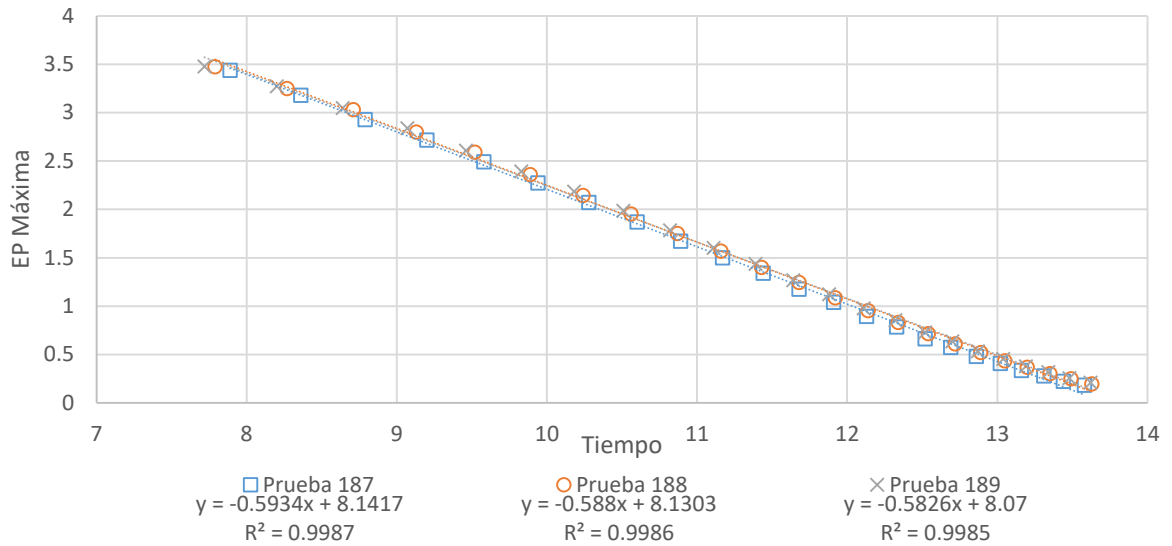


Figura 4.3 Regresión lineal de máximos de energía para la combinación B1/M5 del cuerpo P3.

El término independiente de la ecuación de la recta representa el valor de energía potencial máximo, justo al instante de ser liberado, siempre y cuando la medición del tiempo se comience a hacer justo en ese instante; en este caso el tiempo fue medido varios segundos antes. La pendiente de la recta está relacionada a la cantidad de energía disipada en cada impacto tal como se muestra en la expresión 4.1 por lo que la pendiente está también relacionada con el coeficiente de restitución:

$$m = \frac{E_2 - E_1}{\Delta t} \quad (4.1)$$

donde E_1 y E_2 representan la energía potencial máxima de dos semi-ciclos en el intervalo Δt que los separa. Además, si se toma E_1 como la energía potencial al inicio del balanceo libre y que los posteriores valores máximos de energía E_n son una sucesión de reducciones de energía e determinada por la cantidad n de impactos, se tiene que:

$$E_1 = E_0 \quad (4.2)$$

$$E_2 = E_n = E_0 e^n \quad (4.3)$$

Sustituyendo la expresión (1.5) en (4.3) se tiene:

$$E_n = E_0 CR^{2n} \quad (4.4)$$

Por último, sustituyendo las expresiones (4.2) y (4.4) en (4.1) y resolviendo para CR, se llega a la siguiente expresión:

$$CR = \left(\frac{\Delta t m}{E_0} + 1 \right)^{\frac{1}{2n}} \quad (4.5)$$

Los límites físicos posibles superior e inferior de la pendiente están representados en la siguiente expresión:

$$\frac{-\sqrt{\frac{W^3 R^3}{I_0}} [\cos(\alpha - |\theta_0|) - \cos(\alpha)]}{2 \tanh^{-1} \sqrt{1 - \left(1 - \frac{|\theta_0|}{\alpha}\right)^2}} < m < 0 \quad (4.6)$$

donde el límite superior implicaría que el cuerpo no disipa energía, permanecería en balanceo indefinidamente y daría como resultado un CR=1, mientras que el límite inferior representa una disipación absoluta de energía en el que la duración del balanceo es simplemente la duración de la mitad del primer semi-ciclo puesto que tras el primer impacto el cuerpo regresaría al reposo, lo que implica un CR=0, la duración del primer semi-ciclo se puede estimar con la expresión (3.1).

Esto significa que para cualquier cuerpo es posible conocer el valor del coeficiente de restitución con una prueba simple en la que basta con conocer el tiempo de balanceo, la pendiente de la recta (expresión 4.1), la energía potencial inicial (expresión 1.17) y la cantidad de impactos que hubieron dentro del balanceo. Excepto quizás por el número de impactos, los datos necesarios para este método de medición del coeficiente de restitución son relativamente muy simples de obtener ya que no requieren de equipo sofisticado o costoso.

Este método debería ser válido siempre que el comportamiento de los valores máximos de energía sea lineal. Como se muestra en el apéndice B, en las 225 pruebas realizadas se tuvo en su mayoría un coeficiente de determinación siempre mayor a $R^2=0.98$, lo que permite dar certeza en el método propuesto.

Existieron casos como el mostrado en la figura 4.4 en los que las pendientes de las rectas sufrieron cambios entre una prueba y otra. Esto puede deberse a que tras impactarse, los pivotes o la superficie posiblemente experimentaron deformaciones plásticas, lo que resulta en una geometría levemente modificada y por ello un CR también alterado.

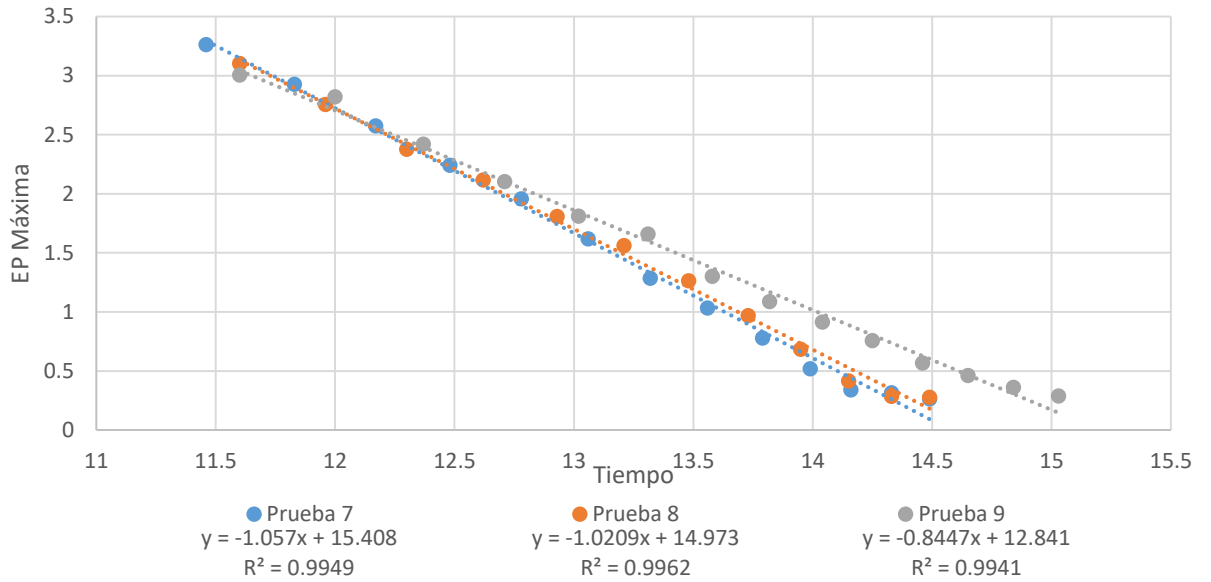


Figura 4.4 Regresión lineal de máximos de energía para la combinación B1/M5 del cuerpo P3.

El comportamiento lineal de los máximos de energía solo se presentó a partir de la vecindad de la rotación inicial de la primera prueba de cada combinación de interfaz, esto es $\theta_0 \leq \alpha/3$. Esto fue consistente con las tres pruebas de cada combinación (véase figura 4.5). Lo anterior es en gran parte debido a que el inclinómetro no logró capturar apropiadamente las rotaciones máximas de los cuerpos cuando estas eran muy grandes y por ello sometidas a una mayor aceleración.

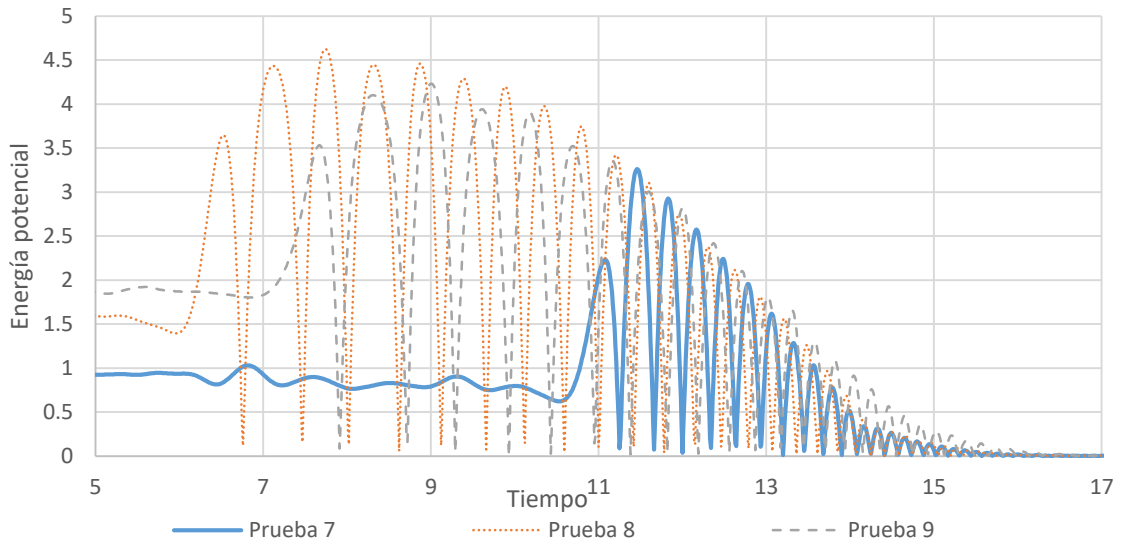


Figura 4.5 Historias de energía potencial de la combinación P3 B1/M1 para balanceo libre.

En la figura 4.6 se muestra la historia de energía total y energía potencial de cuatro pruebas de balanceo libre realizadas por Elgawady y Ma (2011) para diferentes materiales de interfaz

y relaciones de esbeltez. Es notable que, al menos visualmente, los máximos de energía mostrados por los autores provocan también un comportamiento lineal. Si bien los objetivos de la investigación tuvieron alcances diferentes, sus resultados permiten dar certeza y validez a la hipótesis planteada en esta investigación.

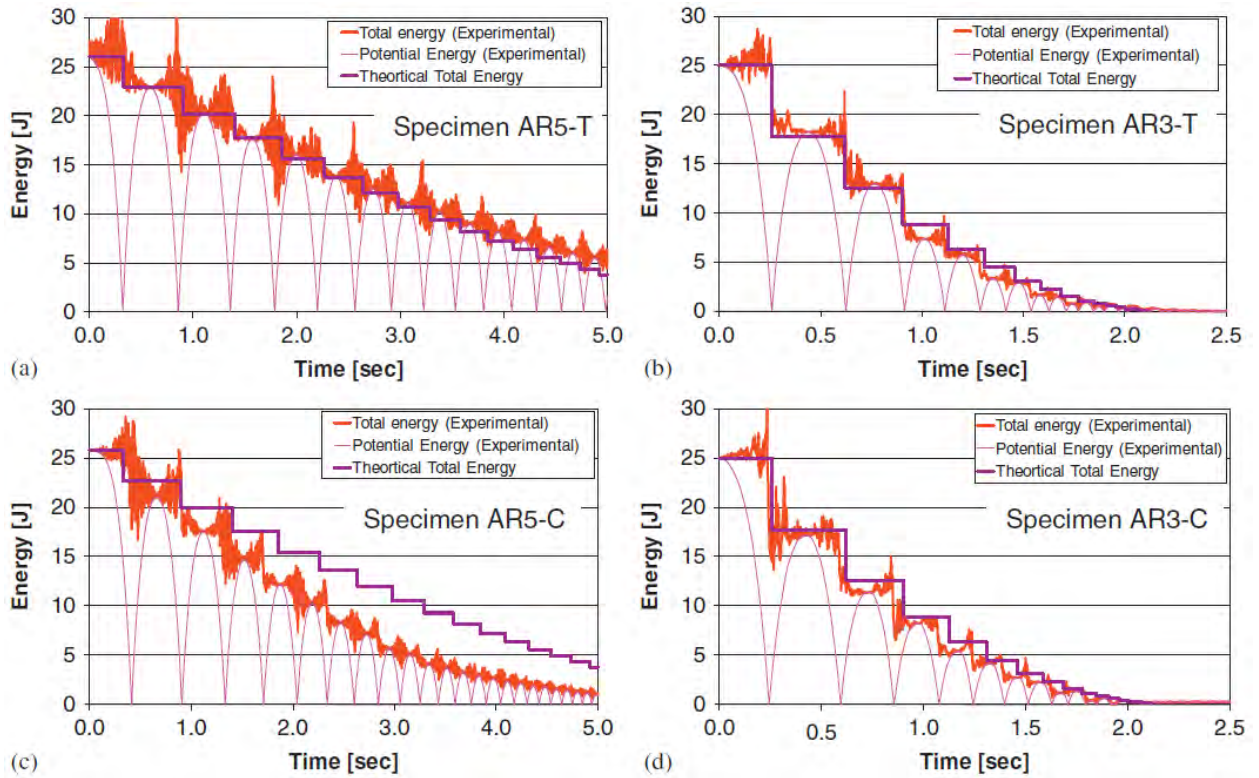


Figura 4.6 Historias de energía total y energía potencial para diferentes pruebas de balanceo libre (Elgawady y Ma 2011).

4.3 ANÁLISIS DEL NÚMERO DE IMPACTOS

Tal como se mencionó en la sección anterior, un parámetro que puede resultar complicado de conocer con una medición a simple vista es la cantidad de impactos de un cuerpo en balanceo libre. Esto es porque dependería de la percepción del observador y cuando el cuerpo está cerca de regresar al reposo experimenta muchos impactos en una cantidad pequeña de tiempo y facilita la posibilidad de errores de medición. Por ello, en caso de que no se cuente con algún dispositivo o método que permita contabilizar los impactos con precisión, se realizó aquí un análisis de la cantidad de impactos que los cuerpos presentaron, en función del tiempo de vibración y del ángulo α del cuerpo en estudio.

Como ejemplo, en la figura 4.7 se muestra la cantidad de impactos que se tuvieron en función del tiempo de balanceo para todas las pruebas de balanceo libre del cuerpo P2 con interfaz Madera/Vinil (B2/M5). El comportamiento del fenómeno mostró que la mayoría de los impactos se dan cuando hay poca duración de balanceo libre, esto concuerda con las predicciones teóricas, ya que como se mostró en la expresión (3.1) la duración de los semi-ciclos es dependiente de la rotación inicial, y si esta es pequeña, el intervalo de tiempo de los semi-ciclos también lo será, lo que provocará que el siguiente semi-ciclo una vez afectado por el CR sea a su vez más corto, y así sucesivamente, resultando en que la mayoría de los impactos se den al final del balanceo.

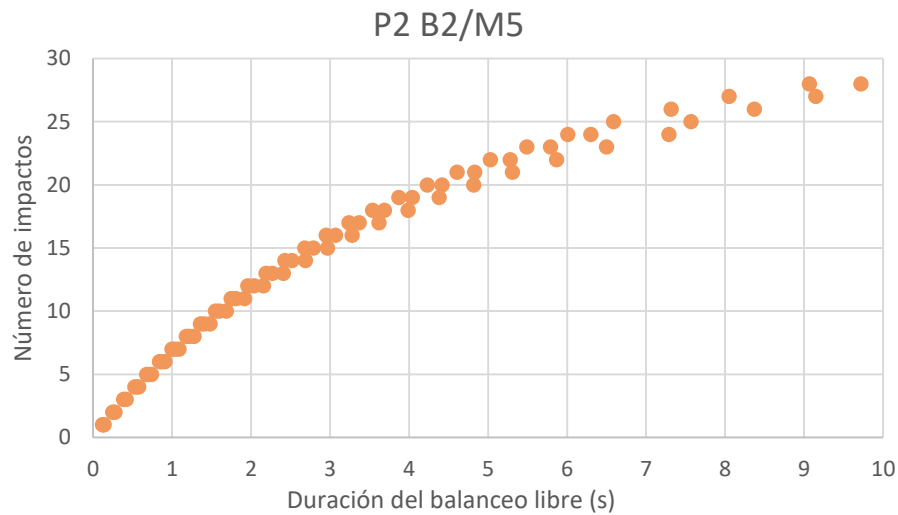


Figura 4.7 Número de impactos en función del tiempo para la combinación de interfaz B2/M5 del cuerpo P2.

Para poder estimar de forma simplificada la cantidad de impactos que se tienen durante el balanceo libre de un cuerpo, se optó por realizar un ajuste de tipo potencial dado que ofreció un coeficiente de determinación en su mayoría superior a $R^2=0.9$. Este ajuste sería irrealista para duraciones de balanceo muy grandes, sin embargo el tiempo de balanceo está limitado por la condición estática de volteo $\theta_0 < \alpha$, además de que el método de medición del CR

ofrecido en la sección anterior sugiere que la rotación inicial sea $\theta_0 \leq \alpha/3$, por lo que el ajuste potencial arroja resultados aceptables. En la Figura 4.8 se muestra el número de impactos en función del tiempo de balanceo libre de todas las pruebas separadas por tipo de cuerpo, independiente de las interfaces.

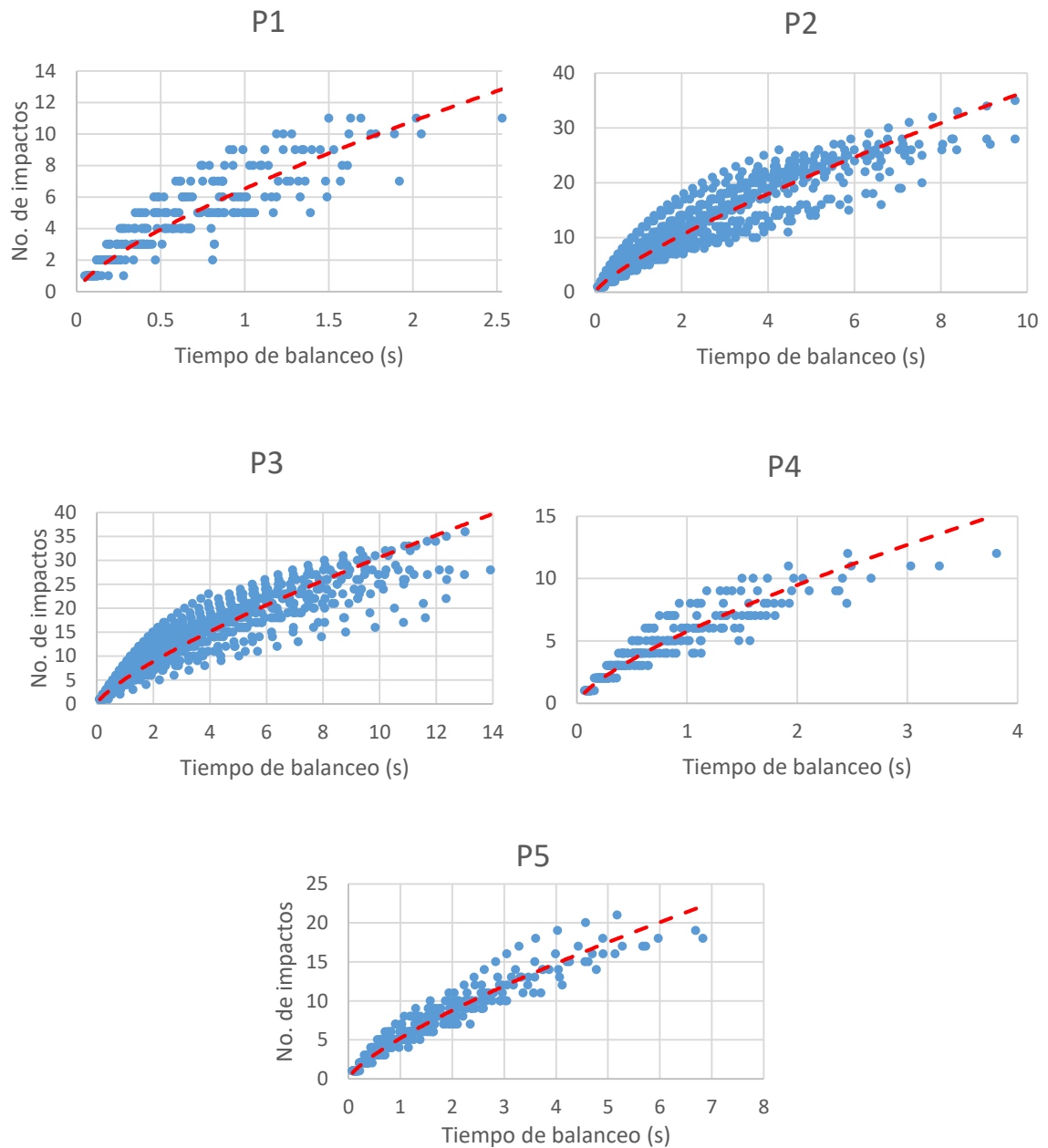


Figura 4.8 Conjunto de resultados de Número de impactos vs tiempo de balanceo de cada cuerpo.

Tanto el ángulo α como el parámetro dinámico p afectan la forma de las curvas anteriores, sin embargo se encontró que si la duración del balanceo es menor a 4s entonces las curvas

ajustadas de número de impactos contra la duración de balanceo mantienen bastante congruencia entre ellas, tal como se muestra en la figura 4.9. Lo anterior puede ayudar a ofrecer una estimación del número de golpes confiable con una expresión sencilla:

$$n \approx 5.7211\Delta t^{0.7521} \quad (4.7)$$

Al comparar contra los resultados medidos, esta expresión provocó errores en la cantidad de impactos de entre 2% cuando su resultado sobreestimó la cantidad de impactos y 5% cuando la subestimaba, sin embargo esto solo generó errores del 1% al 3% en el valor final del CR estimado. Dependiendo de la finalidad del usuario, estos errores pueden ser considerables si se busca un resultado muy preciso, ya que pequeñas variaciones en el valor del CR pueden desencadenar efectos muy diferentes a los de un CR exacto, sin embargo incluso con esa imprecisión se consiguió una mejora razonable sobre los valores de CR obtenido con la ecuación clásica de Housner (ver capítulo 5).

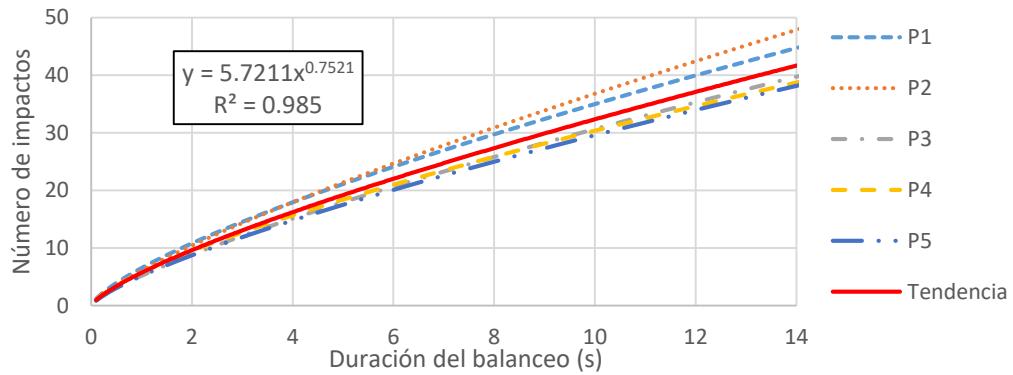


Figura 4.9 Ajuste de curva de Número de impactos vs duración de balanceo para los cinco prototipos.

Debido a que el tiempo de balanceo depende no solo de la rotación inicial sino también del CR y por ello de su ángulo α así como del parámetro dinámico p , no resulta factible realizar una interpolación entre las curvas de tendencia debido a que los parámetros mencionados no provocan un comportamiento lineal en la cantidad de impactos.

De forma paralela, se revisó también la influencia que tienen los materiales de interfaz independientemente de las características geométricas de los cuerpos. Esto permitió notar que la forma de la curva en varios casos mostró gran dependencia de la interfaz y no del cuerpo, como se muestra en la figura 4.10. Esto fue consistente en varias de las pruebas, por lo que si se cuenta con una configuración de interfaz similar a las utilizadas en esta investigación, podría ser conveniente utilizar los ajustes de curva del apéndice C.

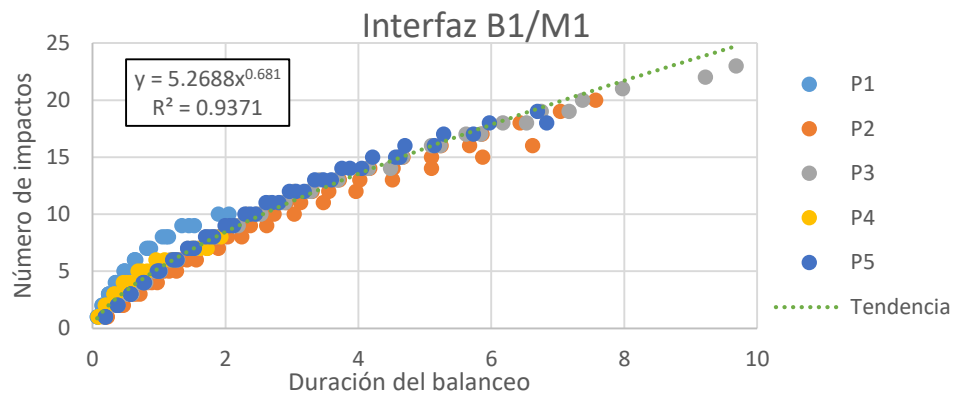


Figura 4.10 Número de impactos Vs Duración del balanceo para la interfaz B1/M1.

4.4 ANÁLISIS DEL EFECTO DE LOS MATERIALES DE INTERFAZ EN EL COEFICIENTE DE RESTITUCIÓN Y AJUSTE A LA ECUACIÓN CLÁSICA

Los resultados del capítulo 3 fueron clasificados de manera tal que fuese posible comparar los efectos de los materiales de interfaz. Para ello, se graficaron los coeficientes de restitución con respecto al α correspondiente. En la figura 4.11 se muestran los resultados experimentales de la interfaz B1/M1 de los cinco prototipos para vibración libre, donde además se comparan contra la expresión clásica propuesta por Housner (1963). Salvo por el cuerpo más esbelto, la expresión clásica parece subestimar los valores medidos de coeficiente de restitución, incluso cuando este valor supone un límite inferior de energía disipada en cada impacto. Estos resultados son consistentes con los mencionados por diversos autores (Muto y col. 1960; Ogawa 1977; Priestley y col. 1978; Aslam 1980; Lipscombe 1990; Fielder 1997; Arredondo 2006; Peña y col. 2007; Kalliontzis 2016). Subestimar el valor del CR al momento de realizar modelos numéricos de balanceo implica considerar que el cuerpo disipa más energía de la que en realidad hace, lo que podría conducir a subestimar los casos de volteo y sobreestimar los casos de regreso al reposo (véase capítulo 5).

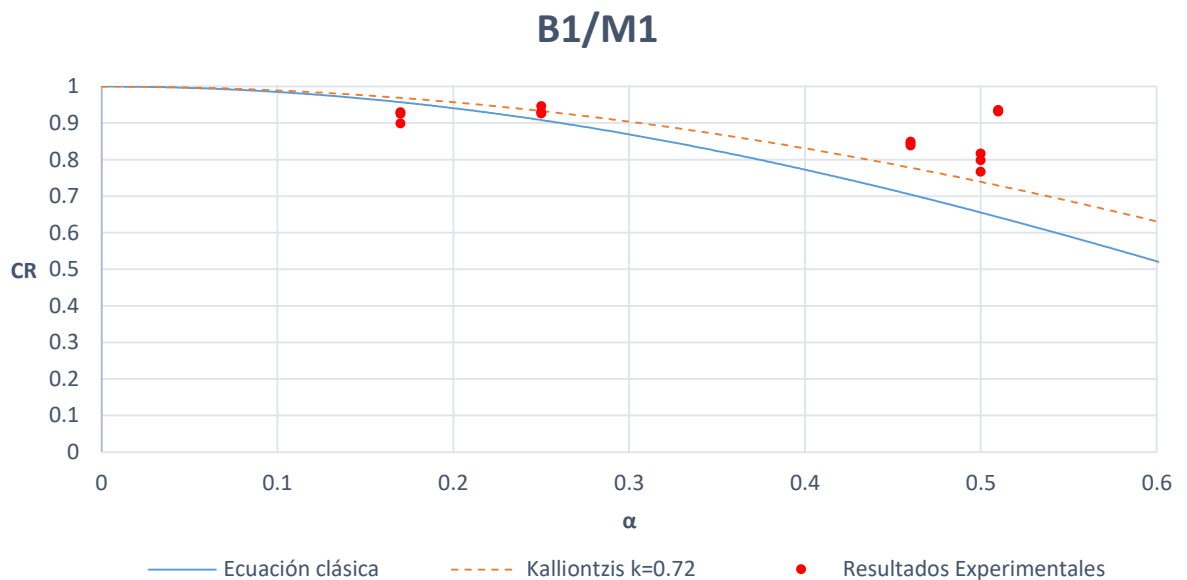


Figura 4.11 Coeficientes de restitución medidos de la interfaz B1/M1 (Caucho/Concreto).

A raíz de esto, algunos autores han realizado propuestas para aproximar de forma más certera el valor del CR. Kalliontzis (2016) realizó la consideración de que el impacto no se da precisamente en los pivotes 0 y $0'$ sino que se da a una distancia menor, lo que resultaría en una semi-base equivalente kb donde $0 \leq k \leq 1$, lo que lleva a la siguiente expresión:

$$CR = \frac{4-3(\sin \alpha)^2(1+k^2)}{4-3(\sin \alpha)^2(1-k^2)} \quad (4.8)$$

Nótese que cuando $k=1$, la expresión regresa a la forma clásica propuesta por Housner, puesto que indicaría que el impacto se da exactamente en los pivotes y no en una distancia modificada. El autor realizó la consideración de que basta con proponer un valor universal del parámetro $k=0.72$ para así poder aproximar los resultados teóricos a los empíricos, y esto se demuestra en la figura 4.12 donde se muestra la expresión de Kalliontzis (2016). Si bien el autor mejoró la ecuación clásica del CR, para fines prácticos se buscará aquí realizar un ajuste que dependa no solo de la esbeltez del cuerpo sino también de la configuración de materialidad de interfaz. Para esto se realizó un ajuste a la ecuación clásica modificando las constantes que intervienen en la expresión, lo que resulta en las siguientes formas:

$$CR = 1 - a(\sin \alpha)^2 \quad (4.9)$$

y

$$CR = 1 - a(\sin \alpha)^b \quad (4.10)$$

Ambas expresiones añaden parámetros de máxima verosimilitud que modifican la forma de la curva de tal manera que logre aproximarse a los resultados experimentales. Esto implica que los parámetros dependen exclusivamente de la configuración de materiales de interfaz. A su vez, se realizó un ajuste a la expresión propuesta por Kalliontzis (2016), de tal manera que se encontró el valor del parámetro k que mejor logró ajustarse a cada una de las configuraciones de interfaz. Por último, se mostró un ajuste en el que la condición de frontera para un cuerpo infinitamente esbelto (esto es $\alpha=0$) no parte desde 1.0, sino desde un valor que se ajuste más a la curva. Sin embargo este último ajuste carece de razón física, puesto que en esta investigación no se contó con las pruebas necesarias para poder estimar lo que sucede con cuerpos demasiado esbeltos. Esto no representa gran inconveniente si se busca utilizar los ajustes para evaluar cuerpos cuyo uso es de contenido de edificios, ya que estos suelen ser más robustos (ver tabla 2.2), o en el caso de ser demasiado esbeltos, suelen ser anclados debido a su alta inestabilidad al volteo. Los ajustes mencionados para la interfaz B1/M1 se muestran en la figura 4.12.

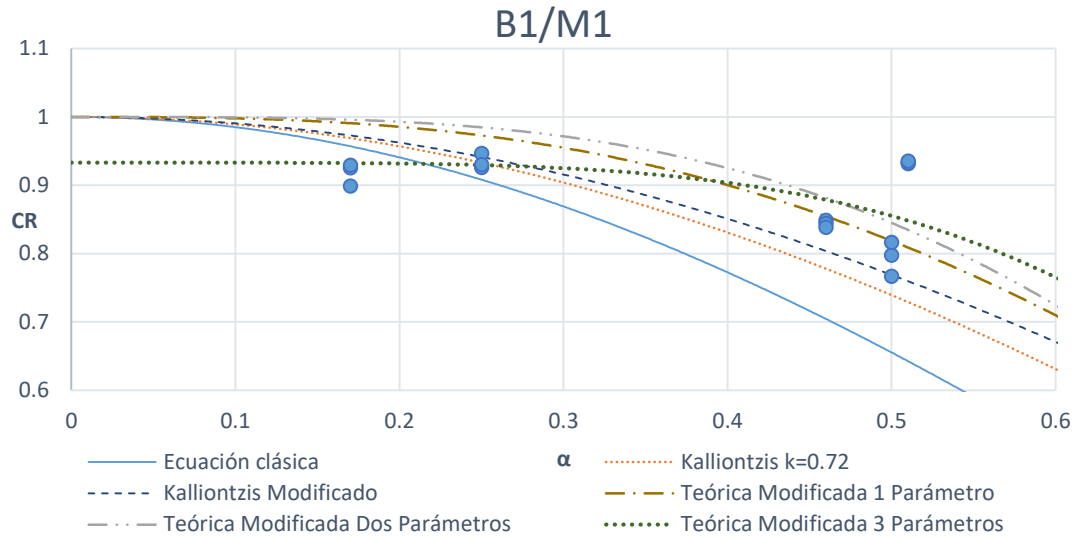


Figura 4.12 Ajustes empíricos a la expresión clásica de Housner para la interfaz B1/M1.

De la figura anterior y de los resultados obtenidos por Peña y col. (2007) se observa que el valor del CR propuesto por Housner (1963) logra aproximarse más a las mediciones experimentales de cuerpos esbeltos que con el caso de cuerpos robustos. Aun así, las mejoras propuestas por Kalliontzis (2016) logran ofrecer mejores resultados ya sea con el parámetro k universal propuesto por él, o por el ajustado en esta investigación, pues consiguen aproximarse más a los resultados medidos. Sin embargo ninguna de las curvas cuyo origen parte de $CR=1$ consiguió capturar de forma precisa los resultados para cuerpos esbeltos, por lo que la curva que mejor logró ajustar los resultados medidos fue la que partió de $CR=0.933$ que tiene la siguiente forma:

$$CR = a - b(\sin \alpha)^c \quad (4.11)$$

En cuanto a los cuerpos robustos, las expresiones (4.9), (4.10) y (4.11) fueron las que mejores resultados ofrecieron. Las observaciones anteriores fueron consistentes para la mayoría de las 15 combinaciones de interfaz. En la tabla 4.1 se muestran los valores de los parámetros que mejor aproximación consiguieron para cada una de las interfaces utilizadas.

Tabla 4.1 Parámetros de ajuste de curvas.

Interfaz	Kalliontzis (2016)	Ajuste 1 Parámetros	Ajuste 2 Parámetros	Ajuste 3 Parámetros
B1/M1	k=0.63	a=2.87	a=2.05 b=3.51	a=0.93 b=2.46 c=4.69
B2/M1	k=0.71	a=0.82	a=1.36 b=2.61	a=0.88 b=1.60 c=4.70
B3/M1	k=0.55	a=0.54	a=1.52 b=3.78	a=0.90 b=1.81 c=6.11
B1/M2	k=0.71	a=0.82	a=1.36 b=2.61	a=0.88 b=1.80 c=4.70
B2/M2	k=0.78	a=0.96	a=1.32 b=2.35	a=0.91 b=1.38 c=3.34

B3/M2	k=0.54	a=0.53	a=1.56 b=3.87	a=0.90 b=2.20 c=7.22
B1/M3	k=0.77	a=0.95	a=1.34 b=2.42	a=0.93 b=1.37 c=3.08
B2/M3	k=0.8	a=1.01	a=1.31 b=2.28	a=0.92 b=1.35 c=2.99
B3/M3	k=0.64	a=0.7	a=1.36 b=2.90	a=0.93 b=1.67 c=4.65
B1/M4	k=0.7	a=0.8	a=1.37 b=2.66	a=0.92 b=1.44 c=3.58
B2/M4	k=0.73	a=0.86	a=1.35 b=2.50	a=0.94 b=1.41 c=3.29
B3/M4	k=0.61	a=0.67	a=1.50 b=3.40	a=0.93 b=1.58 c=4.24
B1/M5	k=0.77	a=0.95	a=0.70 b=1.60	a=0.96 b=1.25 c=2.67
B2/M5	k=0.79	a=1.00	a=0.58 b=1.35	a=0.96 b=1.33 c=2.66
B3/M5	k=0.63	a=0.69	a=0.43 b=1.19	a=0.94 b=1.53 c=4.06

En valor promedio de las constantes k de la expresión de Kalliontzis fue de $k=0.69$ con una desviación estándar $\sigma=0.083$, lo cual es muy cercano al valor universal propuesto por el autor, sin embargo, en algunos casos como la interfaz B3/M1 (figura 4.13), la diferencia fue de casi 0.25 unidades para $\alpha=0.67$, por lo que utilizar una k corregida resulta recomendable, principalmente para cuerpos robustos. En general, si se utiliza alguno de los ajustes mostrados en la tabla anterior se pueden obtener mejoras considerables, principalmente para cuerpos robustos, en algunos casos reduciendo el error de 70% provocado por la ecuación clásica hasta a un 0.005% con alguno de los ajustes propuestos.

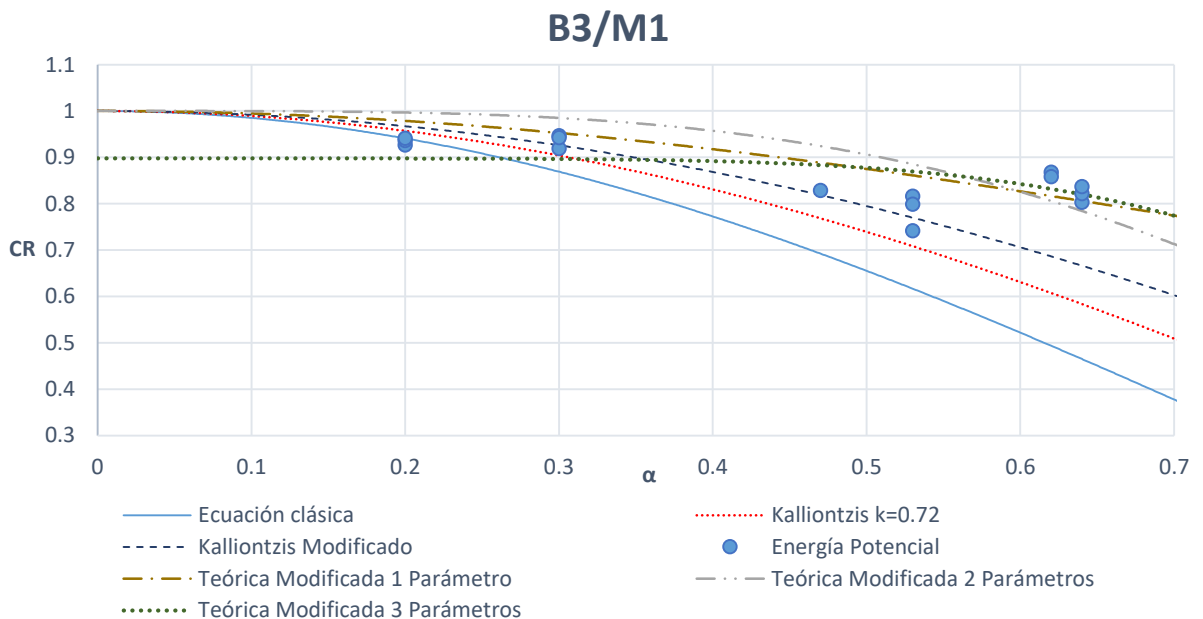


Figura 4.13 Ajustes empíricos a la expresión clásica de Housner para la interfaz B3/M1.

4.5 RESULTADOS DE CUERPOS CON EXCENTRICIDADES

Uno de los objetivos de esta investigación incluía el revisar el efecto que las excentricidades del centro de gravedad de los cuerpos pueden tener sobre el CR debido a que gran parte de los contenidos de edificios cuentan con cierto nivel de excentricidad, ya sea provocado por irregularidades geométricas o por concentración de masas. Sin embargo tras evaluar las señales medidas no se pudieron observar tendencias claras o datos significativos. La razón de este inconveniente se debió principalmente a que la relación entre b_R y b_L fue en algunos casos de hasta 1.72, lo que provocó que el cuerpo fuera bastante más esbelto de un lado que del otro y esto resultó en rebotes durante el balanceo forzado. En la figura 4.14 se muestra la historia de rotaciones medida del cuerpo P5 con excentricidad en el eje horizontal, se puede ver que en algunos instantes como $t=11.91s$ y $t=13.47s$ se dieron impactos que resultaron en que el cuerpo no realizara la transición de un pivote al otro sino que el balanceo continuara en el pivote original. Lo anterior implica que el modelo e hipótesis propuestas en el capítulo 1 no son válidas para los casos estudiados de excentricidades en esta investigación.

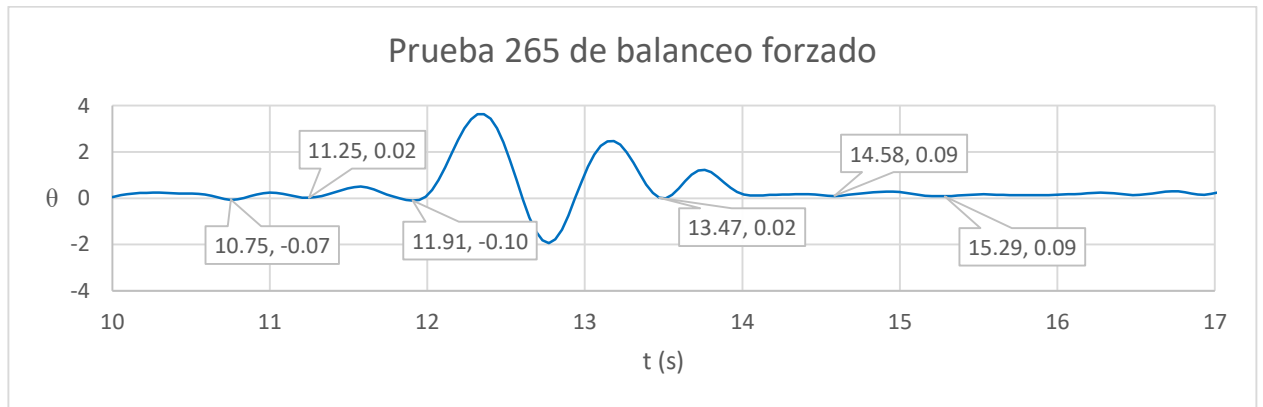


Figura 4.14 Historia de rotaciones de la prueba 265 de balanceo forzado. Cuerpo P5-F con excitación S2.

Debido a que el coeficiente de restitución para cuerpos en balanceo forzado es medible solo en el instante de los impactos, los resultados medidos en la mesa vibradora no resultaron concluyentes para esta investigación.

5. VALIDACIÓN DE RESULTADOS CON MODELOS NUMÉRICOS

Con el fin de poder mostrar la utilidad de un valor de coeficiente de restitución más realista que el obtenido por la ecuación clásica de Housner, en este capítulo se muestran los resultados de simulaciones numéricas de cuerpos en balanceo con características similares a los utilizados en la mesa vibradora.

La forma de comparación de resultados se realizó de tal manera que la única diferencia entre una simulación y otra fuese el valor del CR utilizado, esto permitió mostrar los efectos que la disipación de energía puede llegar a tener incluso cuando la diferencia es de unas cuantas centésimas entre el valor clásico o el valor estimado, ya sea con los valores medidos o con los ajustes propuestos en el capítulo anterior.

5.1 COMPARACIÓN DE RESULTADOS DE LABORATORIO CONTRA SIMULACIONES UTILIZANDO EL VALOR DEL CR CLÁSICO

El uso del CR clásico implica imprecisiones que, si no se corrigen al momento de recrear numéricamente una historia de rotaciones, pueden conllevar a grandes diferencias en los resultados, tanto del modo de respuesta del cuerpo como de la duración del balanceo, amplitudes máximas de las rotaciones o modos de falla.

En la figura 5.1 se tiene la comparación de la historia de rotaciones medida en la mesa vibradora de la prueba 31 de balanceo forzado contra simulaciones numéricas en las que se utilizaron los valores del CR clásico y el CR medido con la metodología del capítulo 4. En esta prueba se utilizó el prototipo P5 con interfaz acero-alfombra (B3/M2) sometido a la excitación armónica senoidal de amplitud variable, A13. El valor clásico del coeficiente de restitución para este cuerpo es $CR=0.465$ mientras que el CR obtenido con la metodología del capítulo 4 es $CR=0.85$, lo que implica una subestimación de casi el 50%. Un efecto muy importante que se aprecia aquí es que el uso del CR clásico anticipó el retorno del cuerpo al reposo, lo cual puede suponer errores graves al momento de intentar realizar diseños o revisiones con el uso de modelos numéricos, puesto que la sobreestimación de la energía disipada, tal como se ha mencionado en los capítulos anteriores, resulta en consideraciones poco conservadoras.

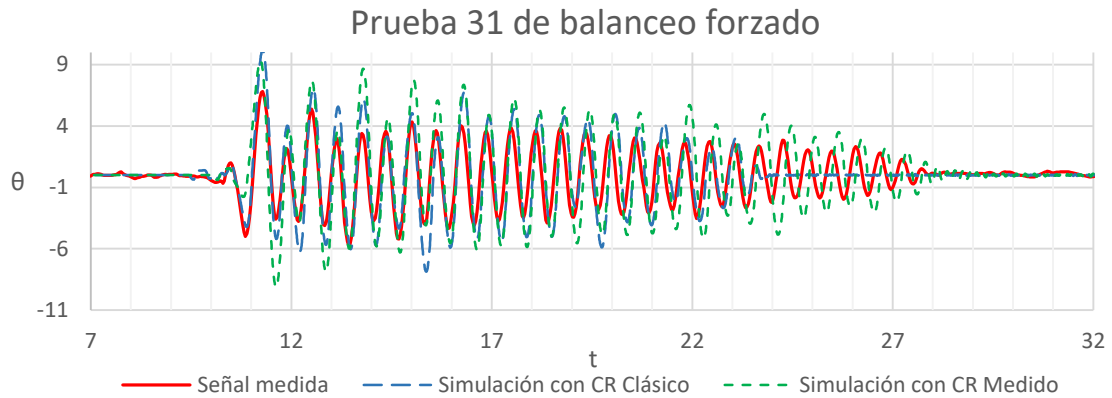


Figura 5.1 Comparación de la simulación numérica contra la señal medida de la prueba 31 de balanceo forzado.

De forma análoga, en la figura 5.2 se muestra una comparación entre la historia de rotaciones de la prueba 155 de balanceo libre contra simulaciones numéricas utilizando los valores del CR clásico y el CR medido. En esta prueba se utilizó el prototipo P2 con interfaz maderamadera (B2/M4). El valor del coeficiente de restitución clásico para este cuerpo es $CR=0.915$ mientras que el valor medido con los métodos energéticos es $CR=0.94$. Se observa que en la simulación que utiliza un CR clásico el cuerpo regresó al reposo alrededor del instante $t=8.5s$ mientras que en la señal medida en el laboratorio el cuerpo continuó el balanceo hasta aproximadamente el instante $t=19s$, además de que las amplitudes máximas de la rotación entre la señal medida y la simulación con el valor clásico del CR variaron hasta en 40%, mientras que la simulación con el CR medido logró replicar con mucha mejor precisión tanto la duración del balanceo como las amplitudes de las rotaciones.

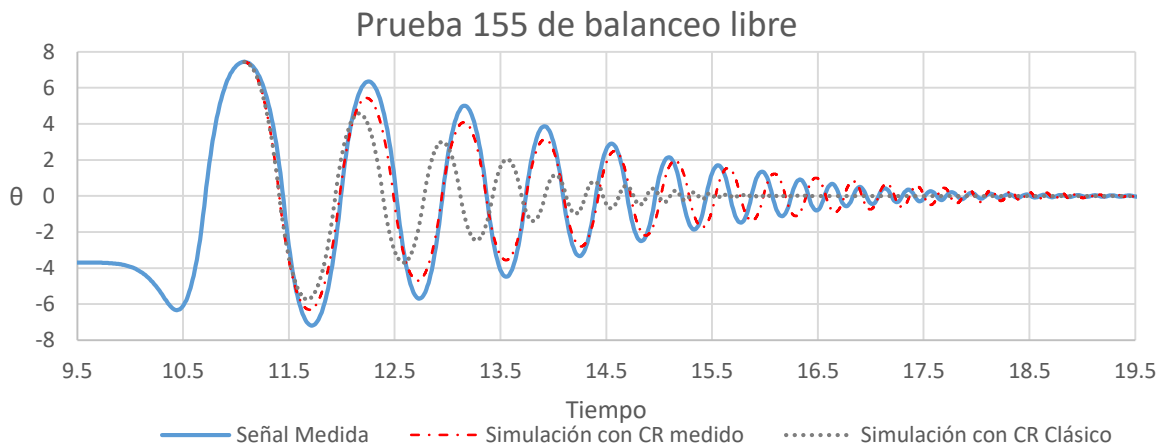


Figura 5.2 Comparación de la simulación numérica contra la señal medida de la prueba 155 de balanceo libre.

De esto, se puede entonces asumir que subestimar el valor del coeficiente de restitución tendrá como consecuencia simulaciones en las que los impactos disipan más energía y por ello el cuerpo tendrá una menor duración de balanceo y menores amplitudes de rotación.

Por otro lado, el hecho de sobreestimar el valor del coeficiente de restitución también resulta en simulaciones no realistas en las que la duración del balanceo, número de impactos y amplitudes máximas de rotación tendrán valores mayores a los reales. En la figura 5.3 se muestra la comparación de la historia de rotaciones medida de la prueba 187 de balanceo libre contra las simulaciones con el valor clásico y el valor medido del CR. En esta prueba se utilizó la interfaz caucho-vinil (B1/M5) con el prototipo P3 cuyo coeficiente de restitución clásico es $CR=0.96$ y el valor medido es $CR=0.92$. Se observa que la simulación que usa el CR clásico resultó en una duración de balanceo de casi el doble que la duración medida en laboratorio, lo que implica que se hayan tenido mayor número de impactos y amplitudes de rotación mayores. Así mismo, el usar el valor del CR medido en la simulación, logró capturar de forma mucho más acertada la duración del balanceo, aunque la duración de los semi-ciclos no fue recreada de forma satisfactoria.

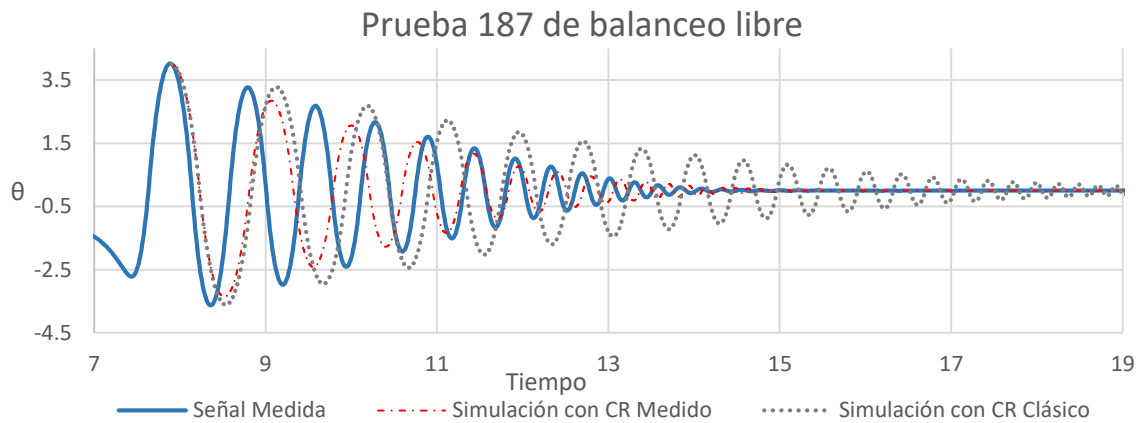


Figura 5.3 Comparación de simulación numérica contra señal medida de la prueba 187 de balanceo libre.

5.2 COMPARACIÓN DEL CR CON CURVAS AJUSTADAS CONTRA EL CR CLÁSICO

Con el fin de evaluar la ventaja de usar las curvas ajustadas estadísticamente propuestas en el capítulo 4, se busca aquí comparar los efectos que el CR ajustado puede tener sobre un modelo numérico de balanceo.

En la figura 5.4 se muestra la historia de rotaciones medida de la prueba 78 de balanceo libre contra las simulaciones considerando 6 diferentes valores de CR que resultaron de los ajustes estadísticos. Esta prueba corresponde a la interfaz acero-alfombra (B3/M2) con el cuerpo P1, cuyo valor clásico del coeficiente de restitución es $CR=0.62$. Debido a que se trata de un cuerpo robusto, para esta prueba los valores de CR que mejor se ajustaron fueron los que resultaron de las expresiones 4.9 y 4.11 cuyos valores del coeficientes de restitución son $CR=0.86$ y $CR=0.87$, respectivamente, ya que son las que más se aproximaron a las amplitudes medidas, se mantuvieron en fase y además tuvieron una duración similar, mientras que las simulaciones obtenidas con el CR de Housner, de Kalliontzis y de Kalliontzis con el parámetro k ajustado mostraron que el cuerpo regresó al reposo en menos de la mitad del tiempo medido de balanceo, además de que no lograron reflejar apropiadamente las amplitudes máximas de la vibración.

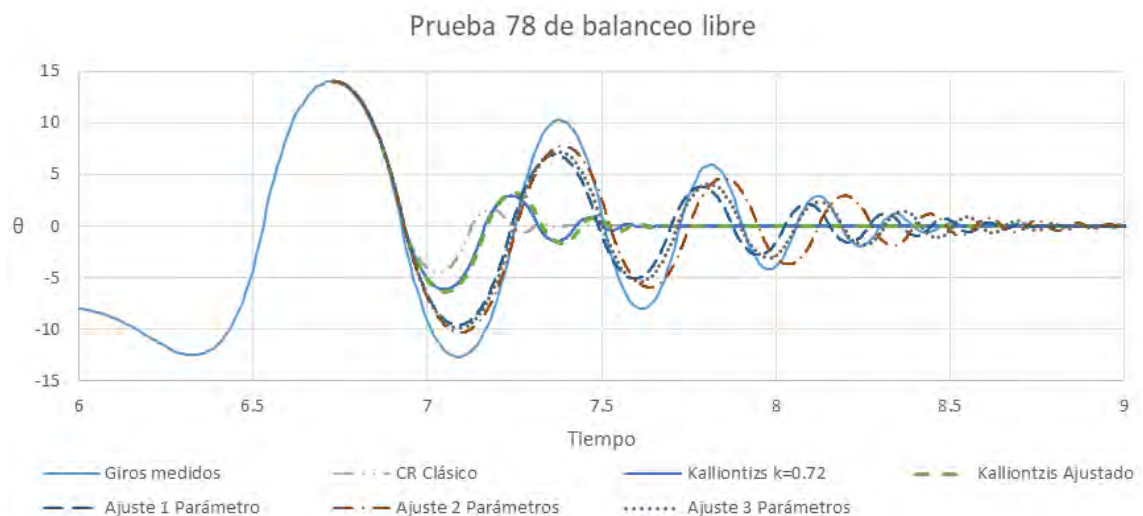


Figura 5.4 Comparación de simulación de prueba 78 con diferentes ajustes del CR.

De forma opuesta, para cuerpos esbeltos se encontró que, para la mayoría de las pruebas, los mejores resultados se obtienen al utilizar ya sea el valor del CR clásico, la propuesta de Kalliontzis con el parámetro $k=0.72$ o con una k ajustada, o en su defecto la expresión 4.11. En la figura 5.5 se muestra la comparación de diferentes simulaciones contra la historia de rotaciones medida de la prueba 15 que corresponde al cuerpo P3 con interfaz madera/madera (B2-M4). De esta, se aprecia que las mejores aproximaciones a los resultados medidos son

los obtenidos por el CR clásico y por el CR ajustado con 3 parámetros. El primero logra replicar satisfactoriamente la duración del balanceo pero sobre estima las amplitudes, lo cual puede resultar conservador y conveniente cuando se desea realizar algún diseño, mientras que el ajuste con tres parámetros logró replicar las amplitudes máximas aunque subestimo la duración del balanceo.

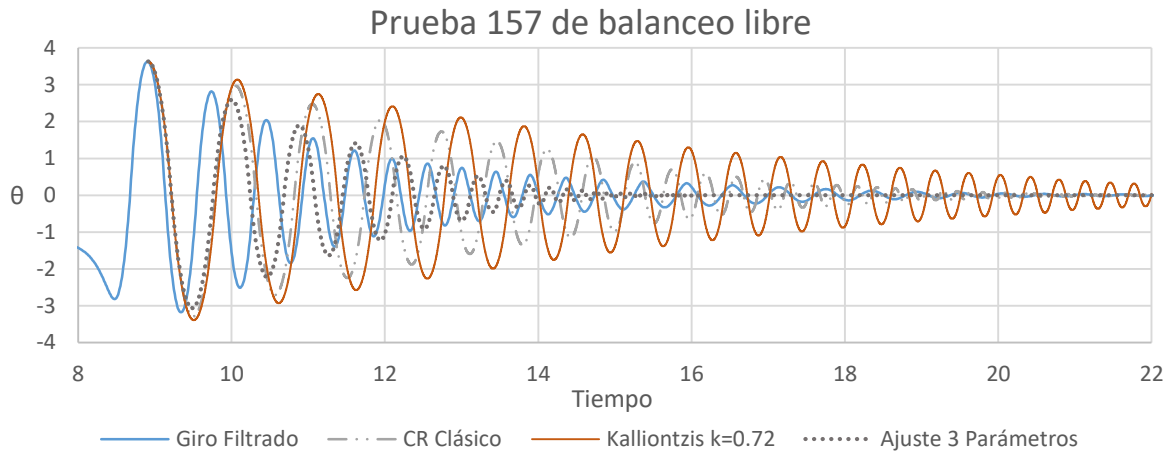


Figura 5.5 Comparación de simulación de prueba 157 con diferentes ajustes del CR.

Como se vio en la sección anterior, si el objetivo es recrear realísimamente el comportamiento de un cuerpo ante balanceo, es recomendable utilizar un valor real y medido del CR, ya sea con mediciones de laboratorio o con el método propuesto en el capítulo 4, sin embargo, si se busca realizar algún diseño, en general se tuvo que para cuerpos esbeltos también puede resultar conveniente utilizar el valor clásico del coeficiente de restitución ya que en estos casos se tendrán por lo regular resultados más conservadores, sin embargo, para cuerpos robustos se notó que los resultados de simulaciones con el CR clásico y con el CR propuesto por Kalliontzis (2016) fueron irreales y poco conservadores, por lo que resulta conveniente utilizar un CR ajustado. Además, en la mayoría de las simulaciones con valores ajustados estadísticamente del CR, la expresión 4.11 fue la que tuvo el mejor desempeño tanto para cuerpos esbeltos como robustos.

CONCLUSIONES Y TRABAJOS POSIBLES A FUTURO

En esta investigación fue posible revisar las consecuencias del uso de diferentes valores de coeficiente de restitución para cuerpos en balanceo ya sea por sobreestimar o por subestimar el valor de este, lo cual es relevante si se desea estimar la vulnerabilidad de contenidos de edificios puesto que los materiales de la interfaz de estos inevitablemente implican modificaciones en los valores teóricos del CR. Se comprobó que pequeñas alteraciones pueden desencadenar diferencias muy grandes tanto en la duración del balanceo y en las amplitudes máximas de la rotación de los cuerpos.

Como herramienta para el usuario, se propusieron diferentes ajustes estadísticos a ecuaciones teóricas para la estimación del CR que toman en cuenta el uso de distintas configuraciones de materiales de interfaz que suelen usarse en los contenidos de edificios. Incluso si dichos ajustes no lograron replicar con exactitud los resultados de laboratorio, presentan una mejora considerable a los resultados si estos se comparan con los obtenidos con un CR clásico. Así mismo se presentó una metodología sencilla y poco exhaustiva para la medición del CR que ya toma en cuenta la combinación de interfaz y las propiedades geométricas del cuerpo en balanceo.

Lamentablemente por limitaciones de las pruebas de laboratorio no fue posible revisar el efecto que las excentricidades horizontales en los cuerpos tienen sobre el coeficiente de restitución y los modos de respuesta y falla de los cuerpos. Es por esto que las excentricidades son un tópico que merece la pena abordar con más detalle, ya que la mayoría de los contenidos de edificios presentan algún nivel de excentricidad.

A partir de este trabajo, queda abierta la posibilidad de investigar más a fondo los modos de respuesta de los cuerpos, esto es, revisar el efecto que el CR puede tener sobre la forma en que los cuerpos no anclados se comportarán ante excitaciones laterales y verticales (reposo, balanceo, deslizamiento, balanceo-deslizamiento).

Otro tema que se abre a la posibilidad de investigación tras este documento, es la realización de curvas de volteo con el uso de CR realistas o al menos ajustados estadísticamente, puesto que las curvas actuales pueden estar ofreciendo estimaciones y sugerencias imprecisas.

APÉNDICE A

En este apéndice se muestra una recopilación de imágenes de daños por sismos a contenidos. Los daños que se muestran fueron provocados por balanceo o volteo en algunos casos combinados con otras respuestas como golpeteo, el deslizamiento, y caída. Con esto se busca presentar al usuario una representación de la importancia de los contenidos y de la vulnerabilidad que el balanceo implica sobre estos, esta importancia ha ido en crecimiento en las últimas décadas, ya que los costos y la necesidad de estos es cada vez mayor. De cada sismo revisado se muestra la fecha, el nombre de la ciudad afectada y la magnitud del evento, seguido de las imágenes correspondientes. Esta recopilación fue realizada en conjunto con Bourguett (2018).

Abril 4, 2010, El Mayor Cucapah, Baja California, México, Mw 7.2



Febrero 22, 2011, Christchurch, Nueva Zelanda, Mw 6.3



Octubre 23, 2011, Turquía, Mw 7.1



Febrero 27, 2010, Chile, Mw 8.8



Febrero 27, 2010, Chile, Mw 8.8





Diciembre 22, 2003, San Simeon, California, Mw 6.5



Septiembre 22, 2003, Puerto Plata, República Dominicana, M6.5



Marzo 25, 2007, Noto, Japón, Mw 6.7



Diciembre 26, 2004, Sumatra, Indonesia, Mw 9.3



Abril 16, 2006, Muisne, Esmeraldas, Ecuador, Mw 7.8



Enero 17, 1994, Northridge, California, EUA, Mw 6.7



Enero 12, 2010, Puerto Principe, Haití, Mw 7.3



Agosto 26, 2012 Brawley, California, EUA, Mw 5.3



Septiembre 19, 1985, Cd. De México, México, Mw 8.2



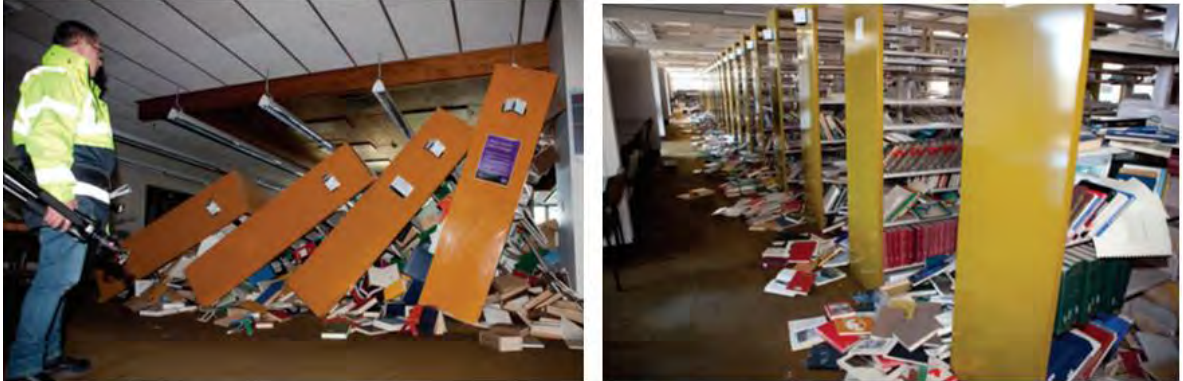
Agosto 17, 1999, Izmit, Turquía, Mw 7.4



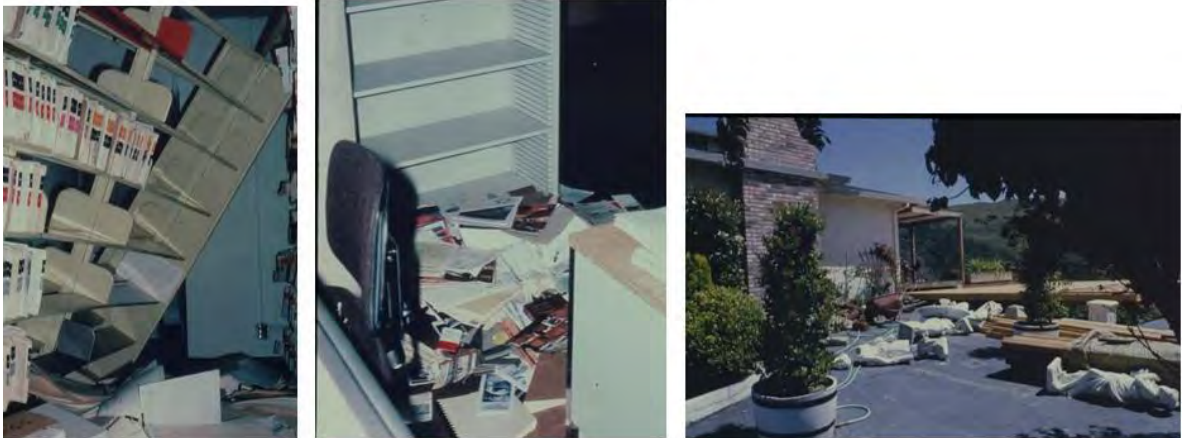
Marzo 11, 2011, Tohoku, Japón, Mw 9.0



Septiembre 4, 2010, Darfield, Canterbury, Nueva Zelanda, Mw 7.1



Abril 24, 1984, Morgan Hill, California, Mw 6.2



Febrero 28, 2001, Nisqually, Mw 6.8



Enero 26, 2014, Cephalonia, Grecia, M5.7



Mayo 1, 2003, Bigöl, Turquía, M6.4



Agosto 23, 2011, Virginia, Estados Unidos, M5.8



Junio 23, 2010, Ottawa, Canadá, M5



Abril 18, 1906, San Francisco, Estados Unidos, M7.8



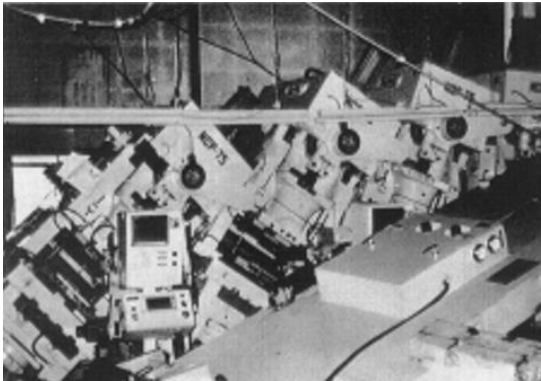
Julio 27, 2017, Mar Egeo, Grecia, M6.6



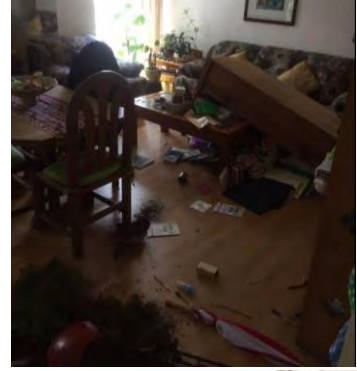
Junio 23, 2010, San Fernando, Estados Unidos, M6.5



Enero 17, 1995, Kobe, Japón M6.9



Septiembre 19, 2017, Puebla, México M7.1



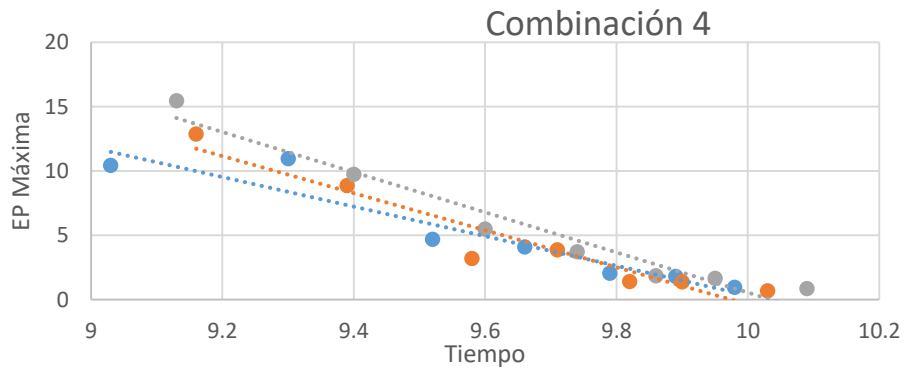
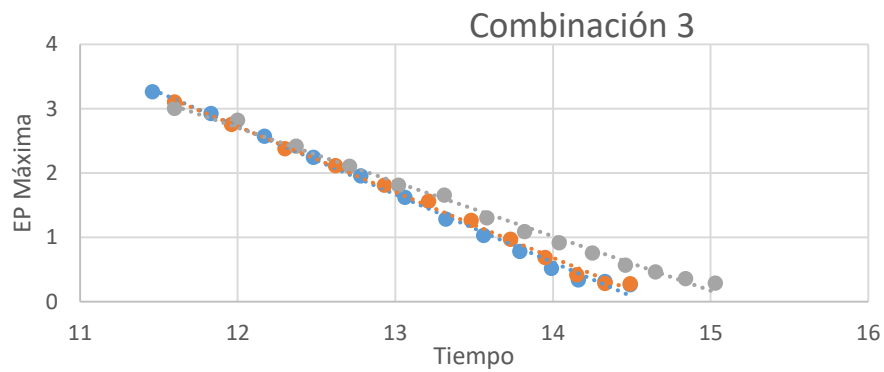
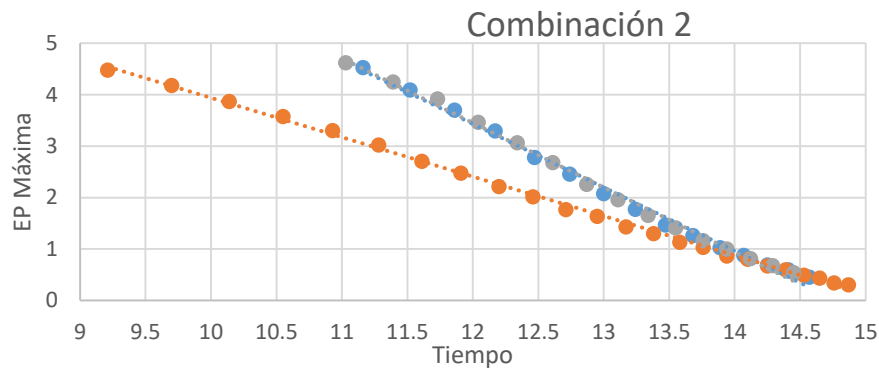
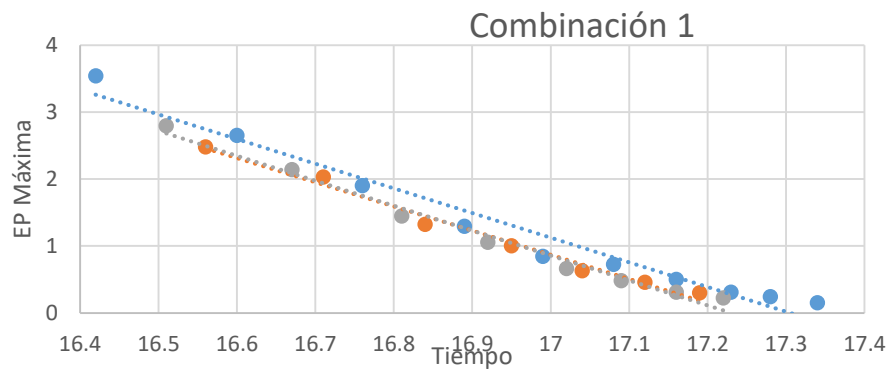
APÉNDICE B

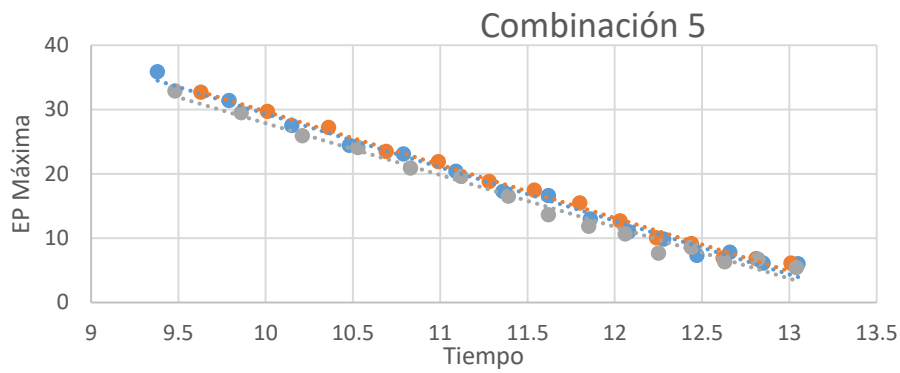
En este apéndice se muestran las líneas ajustadas de los máximos de energía de las pruebas de balanceo libre. En cada figura se muestran las 3 líneas ajustadas y los máximos medidos de la combinación de materiales de interfaz y el prototipo correspondiente. Además, en cada figura se muestran las ecuaciones de recta de cada ajuste para las líneas azules, rojas y grises en ese orden. Si bien las dimensiones de los contenidos de edificios son muy variadas, estas gráficas pueden permitir al lector darse una idea del comportamiento de los cuerpos en función de los materiales de interfaz y de la relación de esbeltez, lo cual abre las posibilidades a más campo de estudio.

Estos resultados están representados en tercias, que son los resultados de las tres pruebas a las que se sometió cada cuerpo y combinación de materiales de interfaz. En la tabla B1 se muestra la configuración de cada conjunto.

Tabla B1 Numeración del conjunto dependiendo de las combinaciones de materiales de interfaz y el prototipo usado.

Interfaz	P1	P2	P3	P4	P5
B1/M1	1	2	3	4	5
B1/M2	16	17	18	19	20
B1/M3	31	32	33	34	35
B1/M4	46	47	48	49	50
B1/M5	61	62	63	64	65
B2/M1	6	7	8	9	10
B2/M2	21	22	23	24	25
B2/M3	36	37	38	39	40
B2/M4	51	52	53	54	55
B2/M5	66	67	68	69	70
B3/M1	11	12	13	14	15
B3/M2	26	27	28	29	30
B3/M3	41	42	43	44	45
B3/M4	56	57	58	59	60
B3/M5	71	72	73	74	75





$$y = -8.3252x + 112.57$$

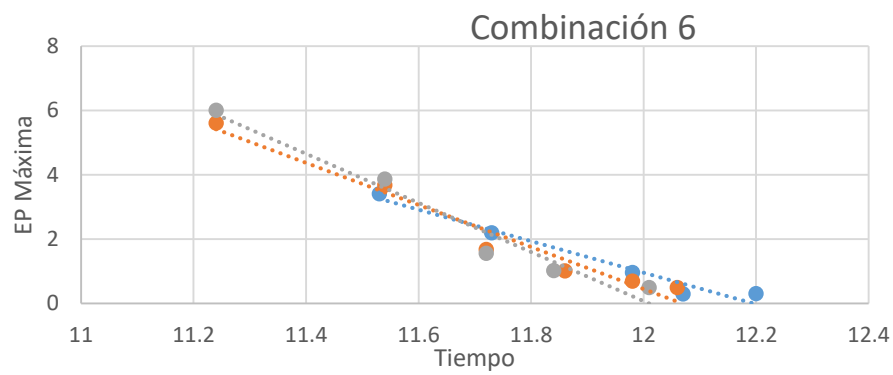
$$R^2 = 0.9896$$

$$y = -8.2778x + 112.48$$

$$R^2 = 0.9944$$

$$y = -8.0555x + 108.44$$

$$R^2 = 0.986$$



$$y = -4.9091x + 59.868$$

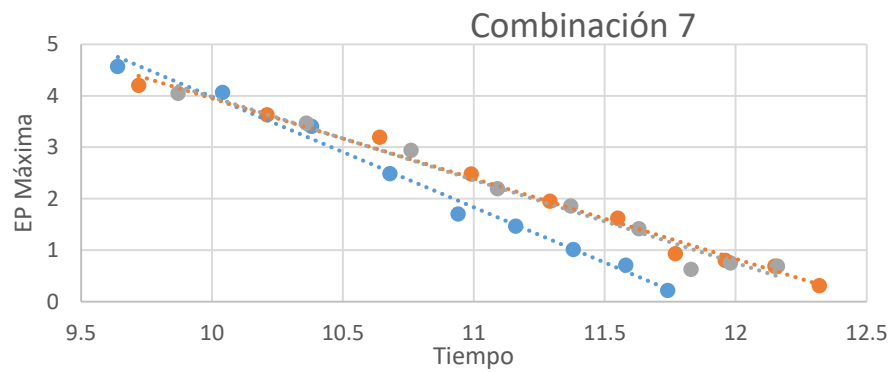
$$R^2 = 0.9666$$

$$y = -6.5417x + 78.954$$

$$R^2 = 0.9624$$

$$y = -7.645x + 91.813$$

$$R^2 = 0.9605$$



$$y = -2.1471x + 25.452$$

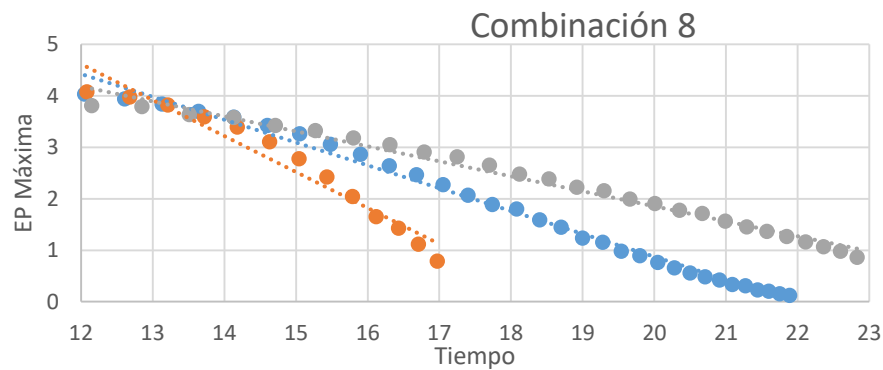
$$R^2 = 0.9891$$

$$y = -1.5599x + 19.547$$

$$R^2 = 0.9882$$

$$y = -1.612x + 20.098$$

$$R^2 = 0.9788$$



$$y = -0.6996x + 13.016$$

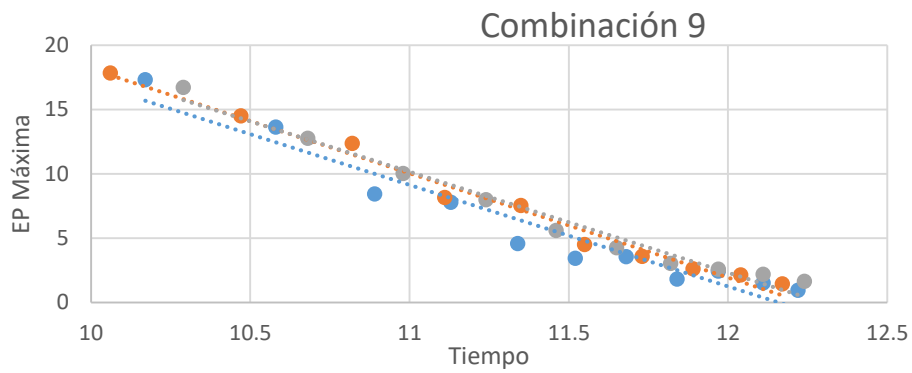
$$R^2 = 0.9486$$

$$y = -0.4436x + 9.7458$$

$$R^2 = 0.9919$$

$$y = -0.291x + 7.6795$$

$$R^2 = 0.9856$$



$$y = -7.8842x + 95.857$$

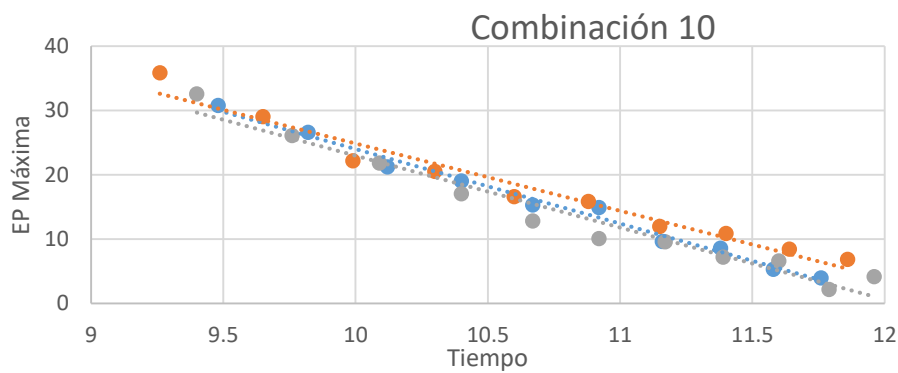
$$R^2 = 0.9386$$

$$y = -8.1132x + 99.295$$

$$R^2 = 0.9848$$

$$y = -7.8416x + 96.415$$

$$R^2 = 0.9776$$



$$y = -11.597x + 139.99$$

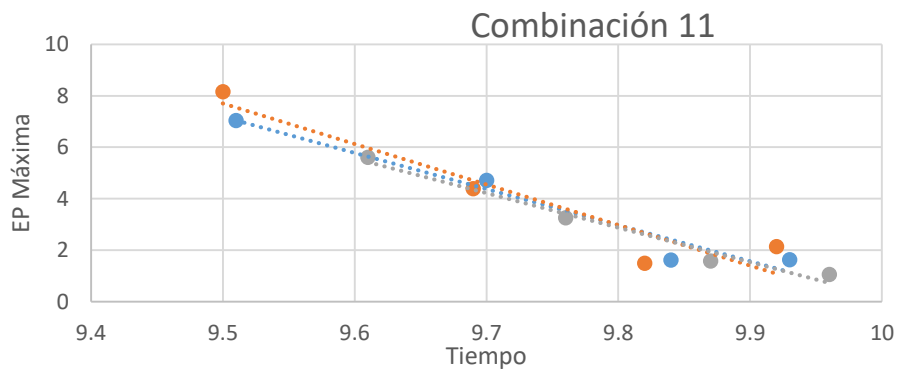
$$R^2 = 0.9893$$

$$y = -10.464x + 129.53$$

$$R^2 = 0.9639$$

$$y = -11.177x + 134.75$$

$$R^2 = 0.9602$$



$$y = -14.043x + 140.59$$

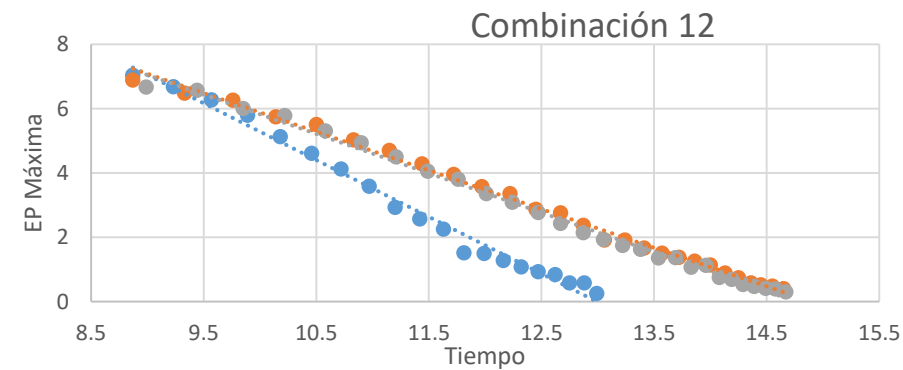
$$R^2 = 0.953$$

$$y = -15.741x + 157.24$$

$$R^2 = 0.8977$$

$$y = -13.442x + 134.6$$

$$R^2 = 0.9767$$



$$y = -1.7661x + 22.947$$

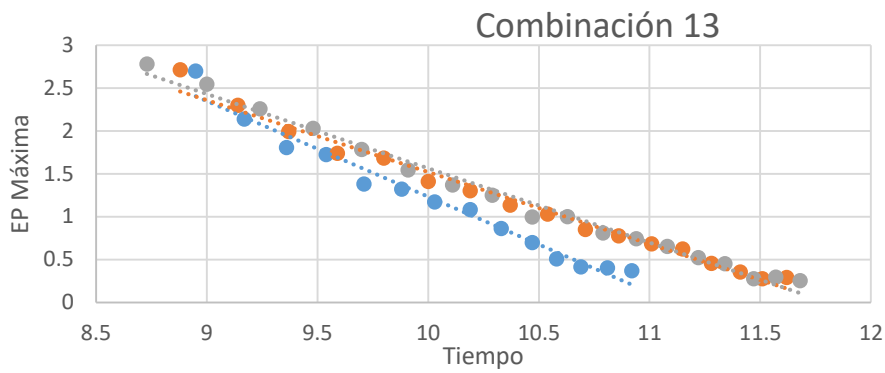
$$R^2 = 0.9885$$

$$y = -1.2006x + 17.889$$

$$R^2 = 0.9955$$

$$y = -1.2226x + 18.059$$

$$R^2 = 0.9951$$



$$y = -1.1147x + 12.379$$

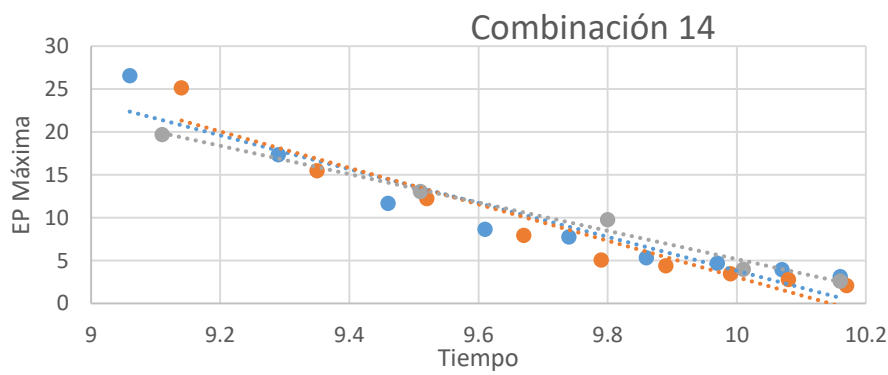
$$R^2 = 0.972$$

$$y = -0.8392x + 9.9111$$

$$R^2 = 0.9839$$

$$y = -0.866x + 10.225$$

$$R^2 = 0.9893$$



$$y = -19.753x + 201.34$$

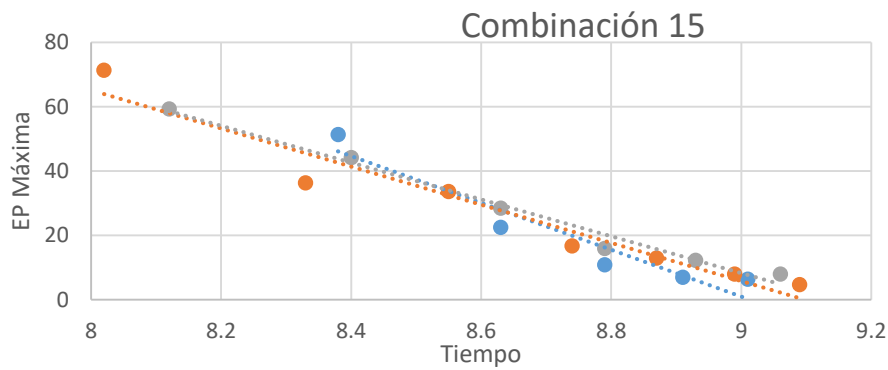
$$R^2 = 0.9036$$

$$y = -21.221x + 215.31$$

$$R^2 = 0.9191$$

$$y = -16.519x + 170.38$$

$$R^2 = 0.9855$$



$$y = -72.808x + 656.23$$

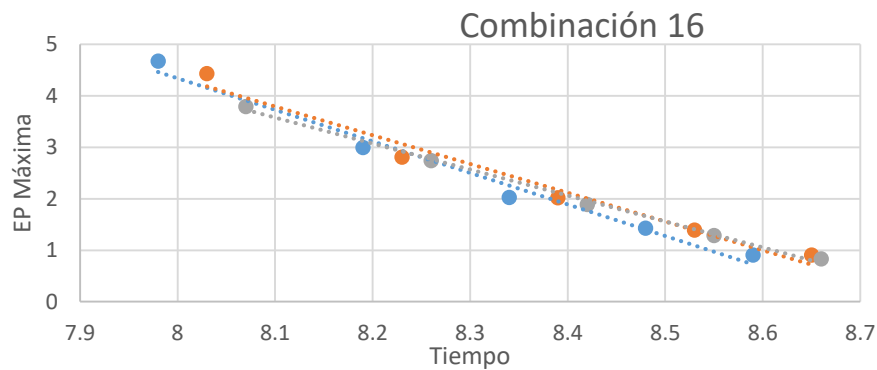
$$R^2 = 0.9135$$

$$y = -59.298x + 539.5$$

$$R^2 = 0.9441$$

$$y = -57.264x + 523.63$$

$$R^2 = 0.9838$$



$$y = -6.1299x + 53.38$$

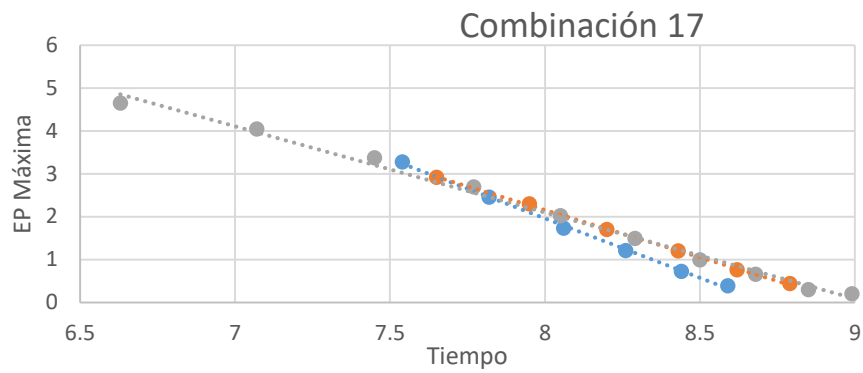
$$R^2 = 0.9814$$

$$y = -5.5854x + 49.037$$

$$R^2 = 0.9758$$

$$y = -5.048x + 44.47$$

$$R^2 = 0.997$$



$$y = -2.7696x + 24.113$$

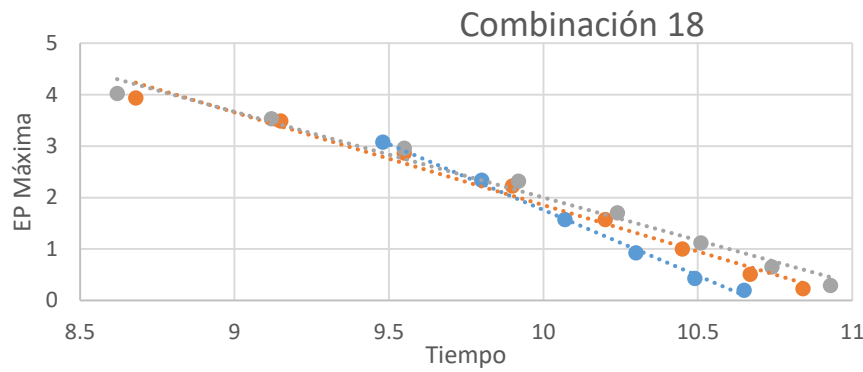
$$R^2 = 0.9983$$

$$y = -2.2065x + 19.806$$

$$R^2 = 0.9993$$

$$y = -2.0121x + 18.194$$

$$R^2 = 0.9945$$



$$y = -2.557x + 27.332$$

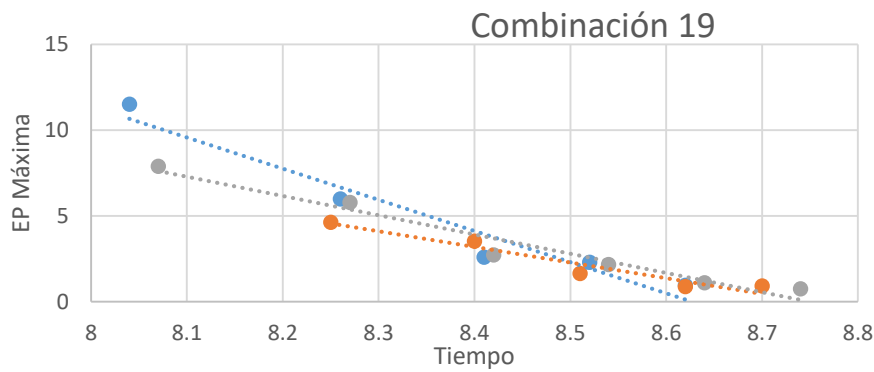
$$R^2 = 0.9961$$

$$y = -1.8002x + 19.857$$

$$R^2 = 0.9839$$

$$y = -1.6671x + 18.672$$

$$R^2 = 0.9837$$



$$y = -18.184x + 156.86$$

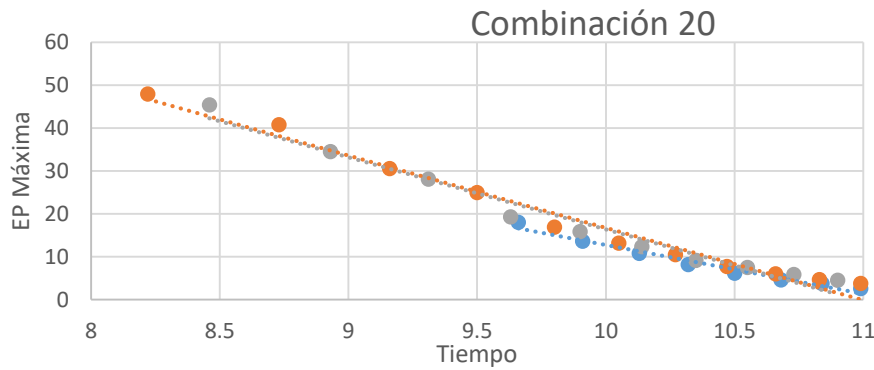
$$R^2 = 0.9475$$

$$y = -9.1461x + 80.017$$

$$R^2 = 0.9364$$

$$y = -11.228x + 98.239$$

$$R^2 = 0.9589$$



$$y = -11.399x + 126.76$$

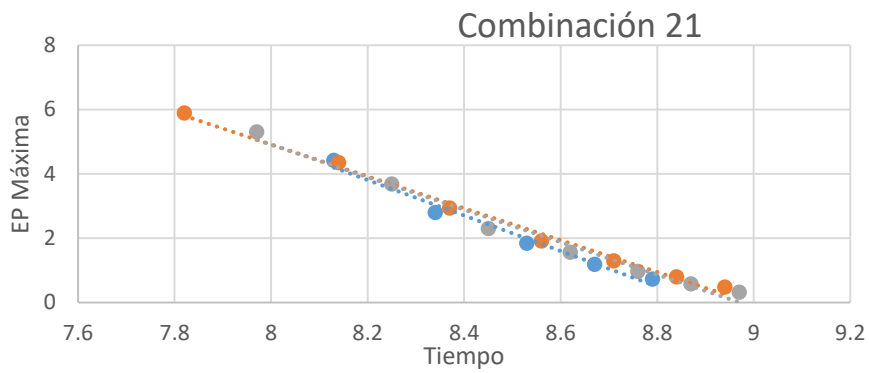
$$R^2 = 0.9717$$

$$y = -16.869x + 185.48$$

$$R^2 = 0.9793$$

$$y = -16.809x + 184.5$$

$$R^2 = 0.9736$$



$$y = -5.5238x + 49.099$$

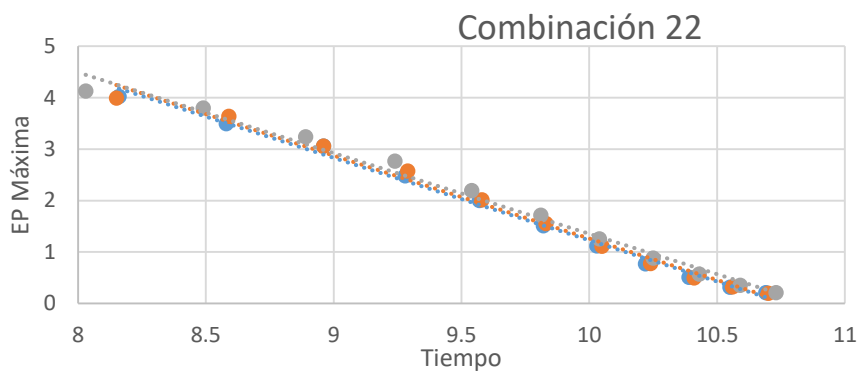
$$R^2 = 0.981$$

$$y = -4.9603x + 44.597$$

$$R^2 = 0.9933$$

$$y = -5.0577x + 45.371$$

$$R^2 = 0.9835$$



$$y = -1.6032x + 17.259$$

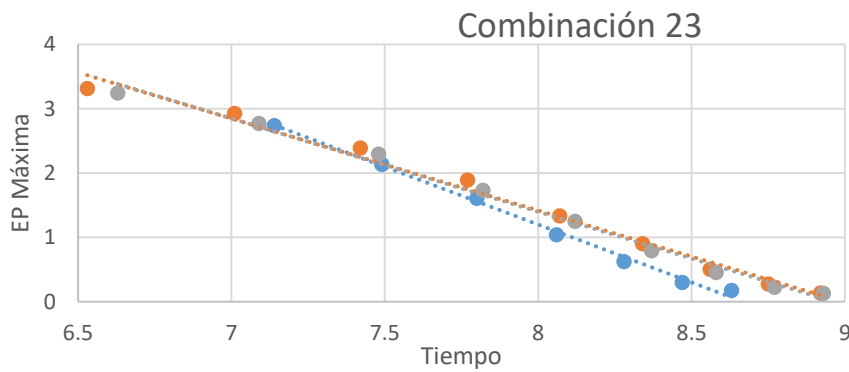
$$R^2 = 0.9944$$

$$y = -1.6113x + 17.376$$

$$R^2 = 0.9917$$

$$y = -1.568x + 17.037$$

$$R^2 = 0.9889$$



$$y = -1.7958x + 15.563$$

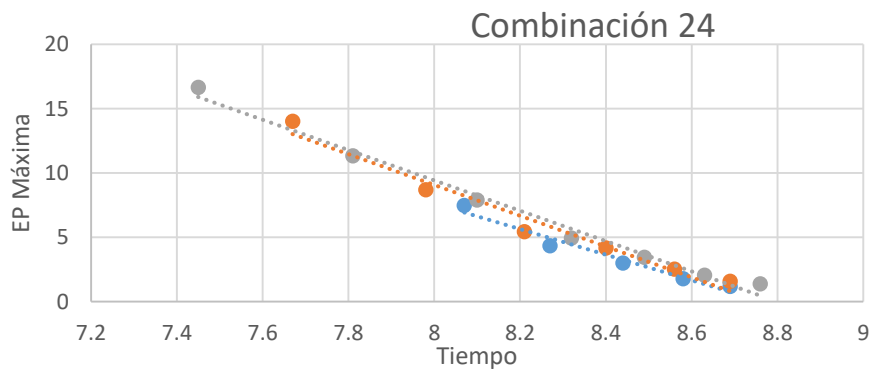
$$R^2 = 0.9955$$

$$y = -1.4298x + 12.856$$

$$R^2 = 0.9899$$

$$y = -1.45x + 12.997$$

$$R^2 = 0.993$$



$$y = -9.9525x + 87.254$$

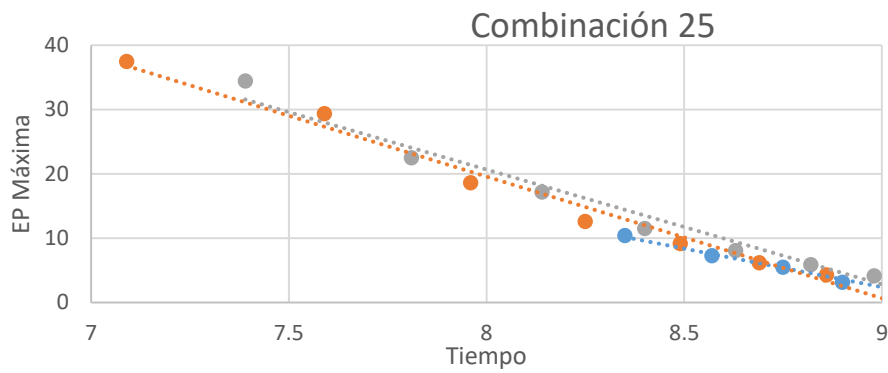
$$R^2 = 0.9632$$

$$y = -11.965x + 104.8$$

$$R^2 = 0.9696$$

$$y = -11.794x + 103.8$$

$$R^2 = 0.9884$$



$$y = -11.947x + 109.9$$

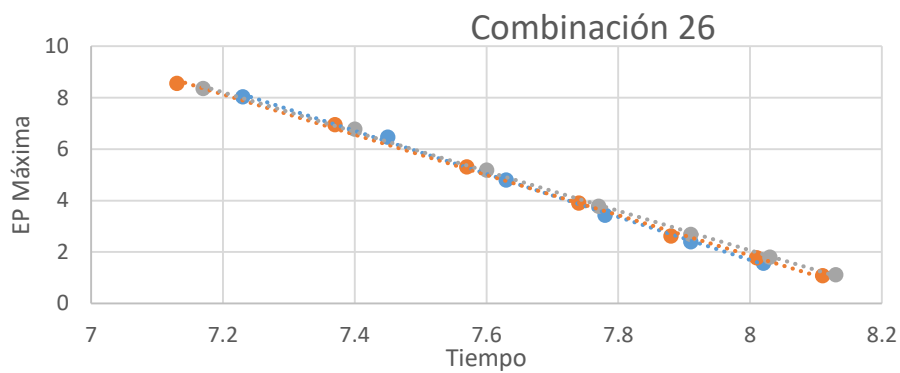
$$R^2 = 0.9886$$

$$y = -18.915x + 170.89$$

$$R^2 = 0.9834$$

$$y = -17.856x + 163.48$$

$$R^2 = 0.9719$$



$$y = -8.3705x + 68.656$$

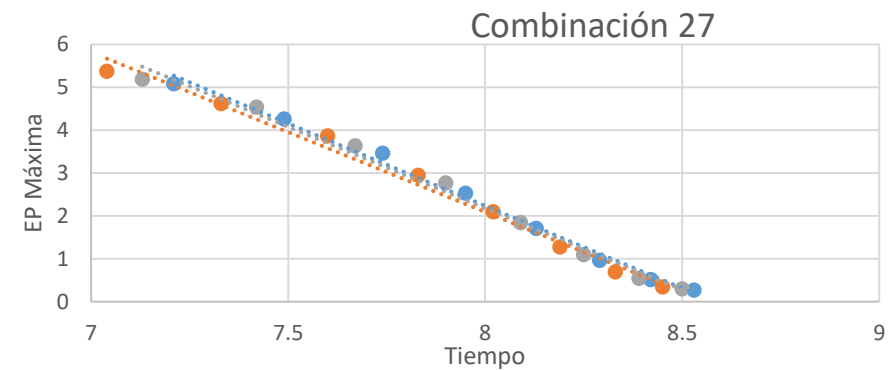
$$R^2 = 0.9983$$

$$y = -7.8331x + 64.533$$

$$R^2 = 0.9982$$

$$y = -7.6805x + 63.508$$

$$R^2 = 0.9992$$



$$y = -3.8478x + 33.015$$

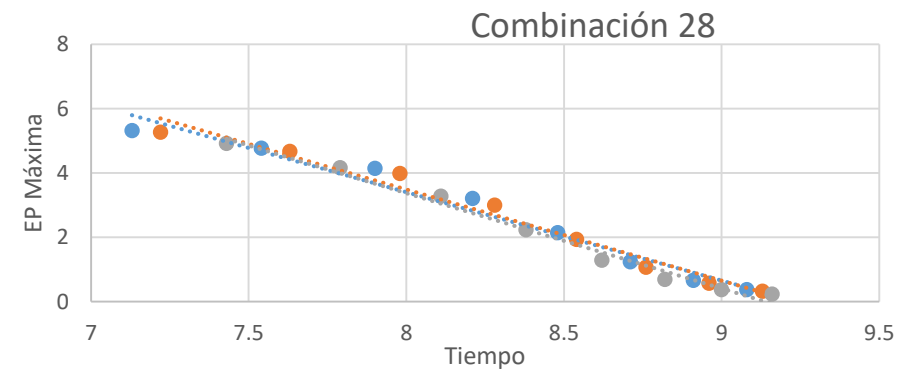
$$R^2 = 0.9935$$

$$y = -3.7268x + 31.903$$

$$R^2 = 0.9888$$

$$y = -3.7961x + 32.549$$

$$R^2 = 0.9899$$



$$y = -2.7498x + 25.404$$

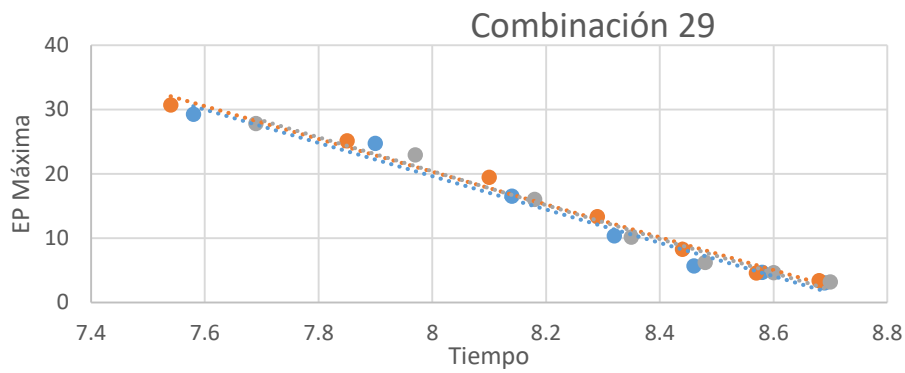
$$R^2 = 0.9722$$

$$y = -2.8322x + 26.147$$

$$R^2 = 0.977$$

$$y = -2.96x + 27.054$$

$$R^2 = 0.9864$$



$$y = -25.894x + 226.77$$

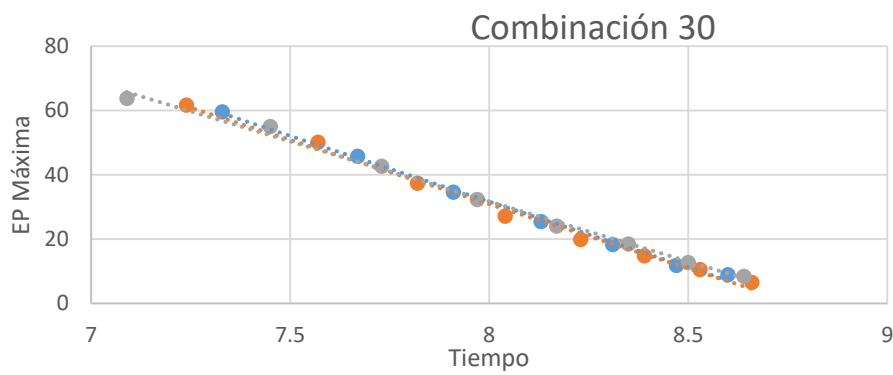
$$R^2 = 0.977$$

$$y = -25.503x + 224.33$$

$$R^2 = 0.9878$$

$$y = -26.33x + 231.03$$

$$R^2 = 0.9839$$



$$y = -40.9x + 358.9$$

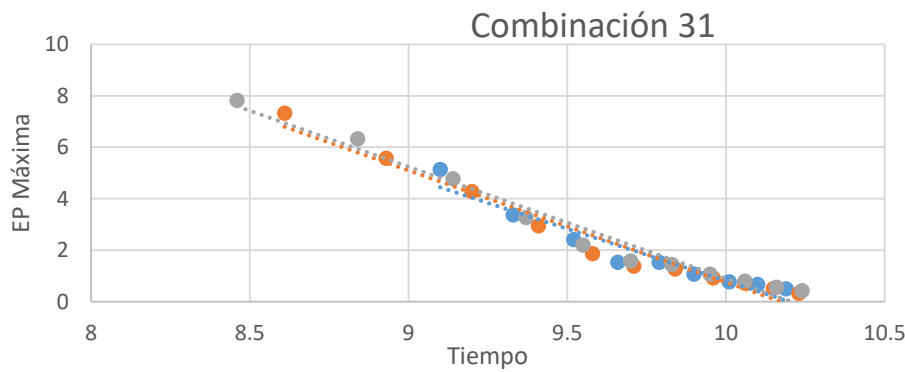
$$R^2 = 0.997$$

$$y = -39.95x + 350.54$$

$$R^2 = 0.9933$$

$$y = -37.332x + 330.42$$

$$R^2 = 0.9947$$



$$y = -4.0321x + 41.132$$

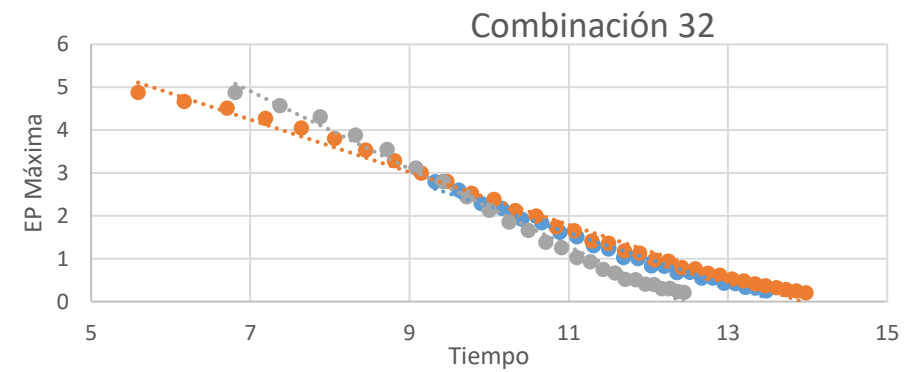
$$R^2 = 0.9272$$

$$y = -4.3482x + 44.237$$

$$R^2 = 0.9639$$

$$y = -4.3462x + 44.355$$

$$R^2 = 0.9731$$



$$y = -0.6101x + 8.3196$$

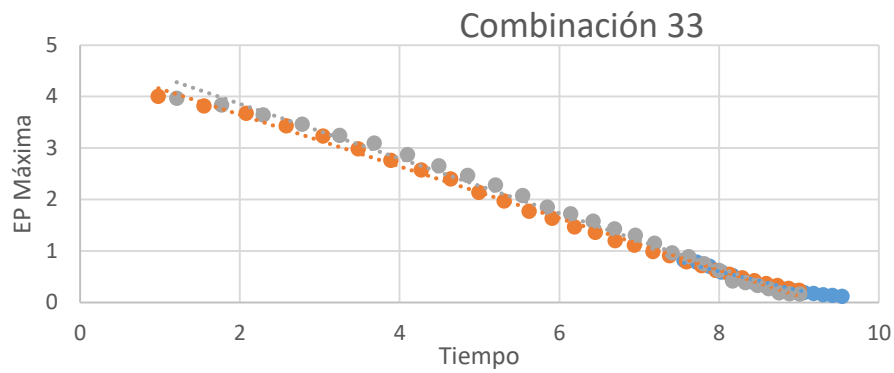
$$R^2 = 0.9847$$

$$y = -0.6127x + 8.5395$$

$$R^2 = 0.9919$$

$$y = -0.9048x + 11.244$$

$$R^2 = 0.9918$$



$$y = -0.3707x + 3.5701$$

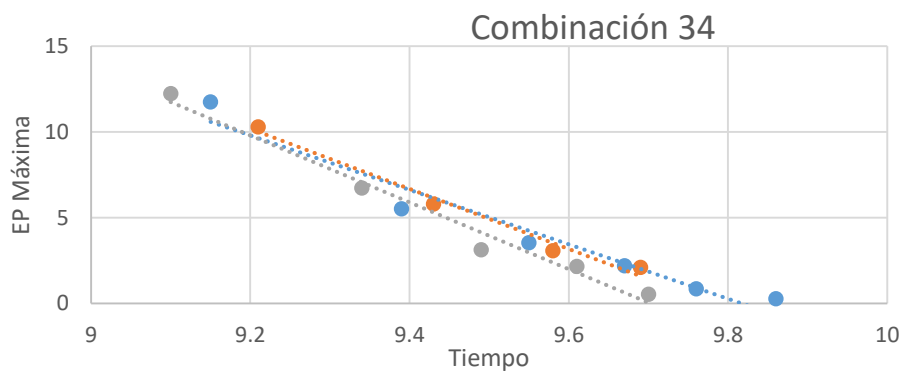
$$R^2 = 0.9545$$

$$y = -0.5028x + 4.6521$$

$$R^2 = 0.9969$$

$$y = -0.5321x + 4.9261$$

$$R^2 = 0.9929$$



$$y = -15.87x + 155.8$$

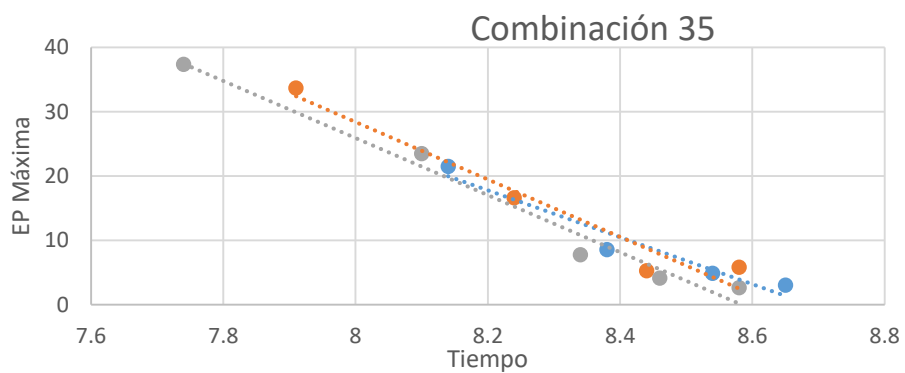
$$R^2 = 0.9516$$

$$y = -17.503x + 171.21$$

$$R^2 = 0.9833$$

$$y = -19.479x + 189$$

$$R^2 = 0.9803$$



$$y = -36.519x + 317.25$$

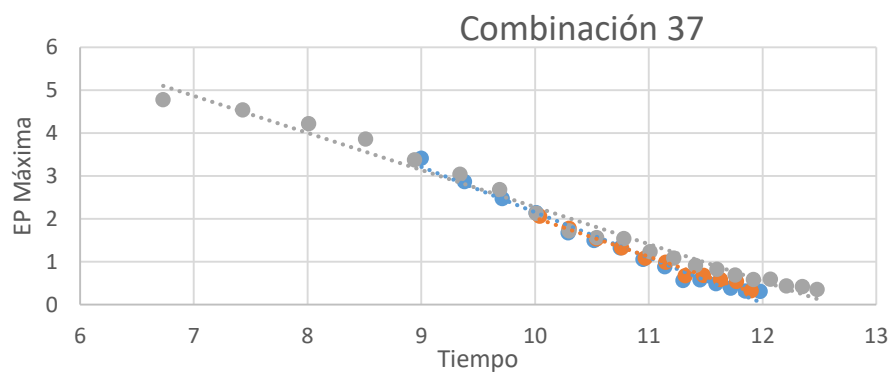
$$R^2 = 0.9406$$

$$y = -44.616x + 385.32$$

$$R^2 = 0.9514$$

$$y = -44.373x + 380.87$$

$$R^2 = 0.976$$



$$y = -1.0603x + 12.758$$

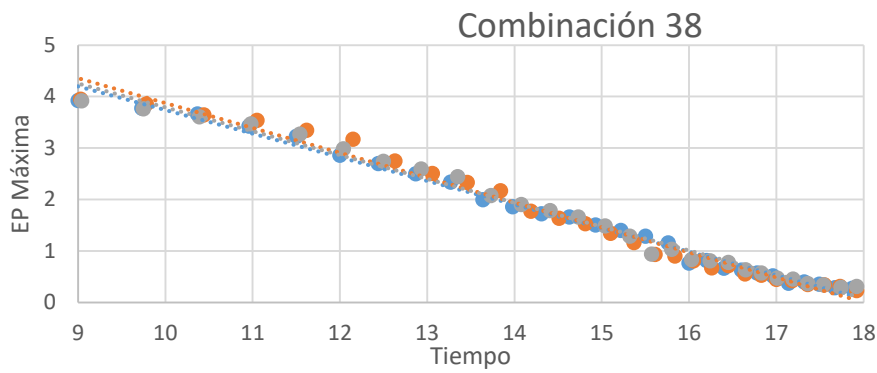
$$R^2 = 0.9836$$

$$y = -0.908x + 11.112$$

$$R^2 = 0.9848$$

$$y = -0.8649x + 10.926$$

$$R^2 = 0.9844$$



$$y = -0.459x + 8.3281$$

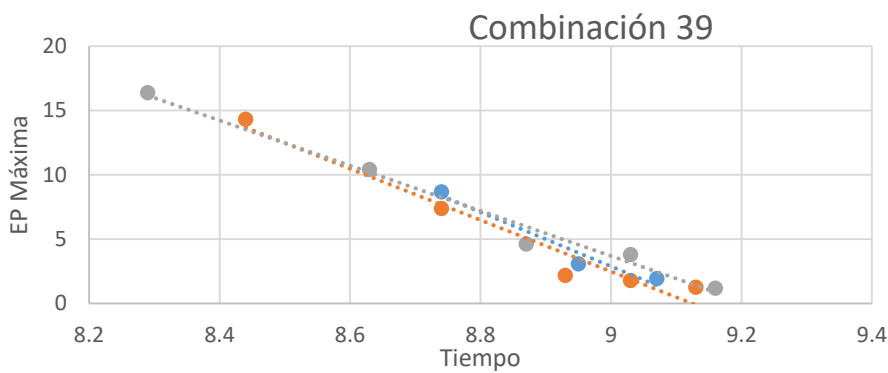
$$R^2 = 0.992$$

$$y = -0.483x + 8.7014$$

$$R^2 = 0.9833$$

$$y = -0.4631x + 8.421$$

$$R^2 = 0.9883$$



$$y = -21.152x + 193.26$$

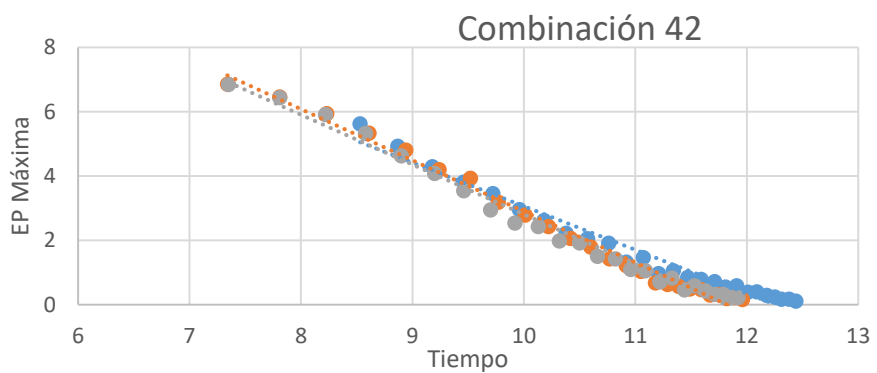
$$R^2 = 0.9571$$

$$y = -19.989x + 182.39$$

$$R^2 = 0.9573$$

$$y = -17.556x + 161.71$$

$$R^2 = 0.9836$$



$$y = -1.3531x + 16.587$$

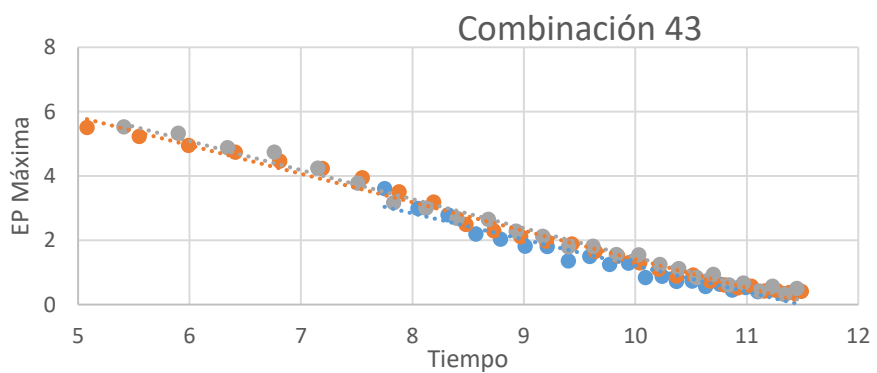
$$R^2 = 0.9736$$

$$y = -1.5908x + 18.808$$

$$R^2 = 0.9907$$

$$y = -1.5476x + 18.282$$

$$R^2 = 0.9876$$



$$y = -0.815x + 9.3622$$

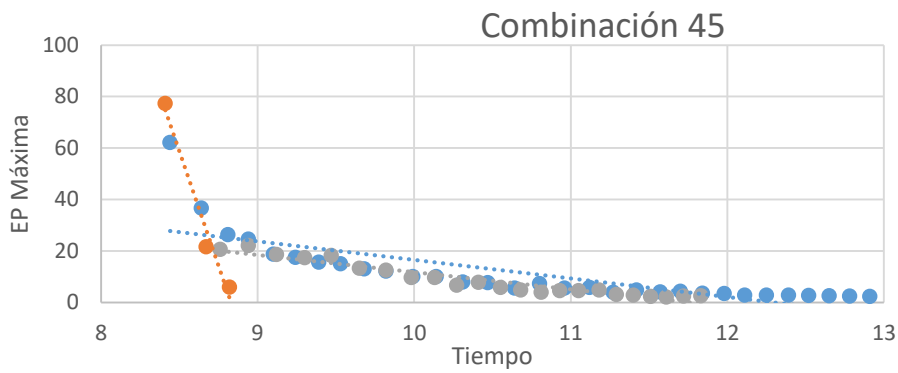
$$R^2 = 0.9439$$

$$y = -0.8859x + 10.276$$

$$R^2 = 0.9881$$

$$y = -0.902x + 10.497$$

$$R^2 = 0.9901$$



$$y = -7.2197x + 88.745$$

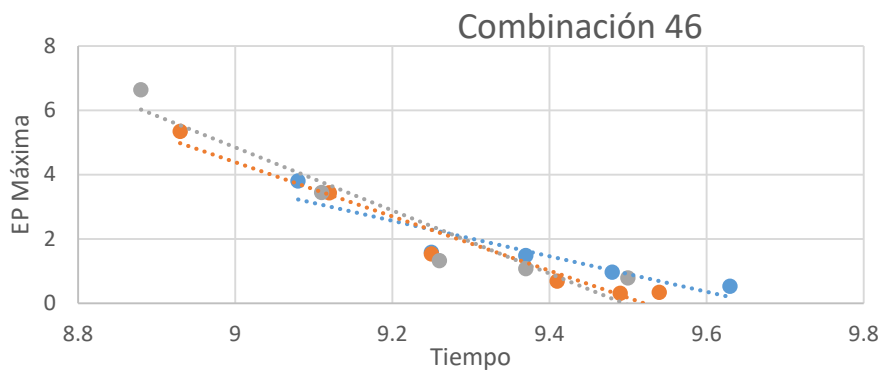
$$R^2 = 0.6139$$

$$y = -178.61x + 1576.9$$

$$R^2 = 0.9746$$

$$y = -6.7066x + 78.811$$

$$R^2 = 0.9206$$



$$y = -5.5156x + 53.302$$

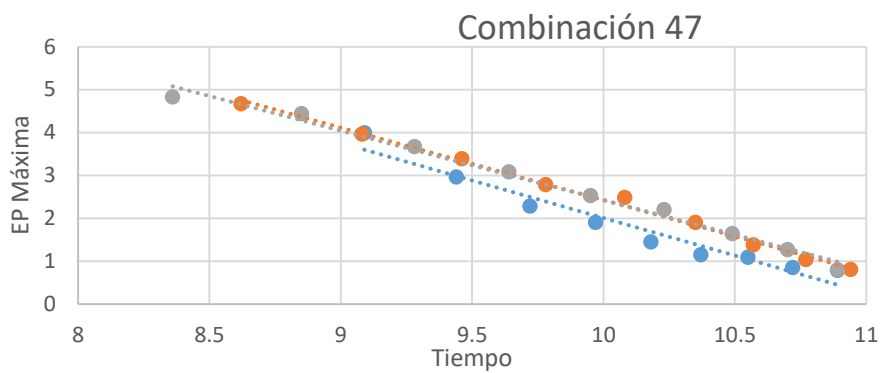
$$R^2 = 0.848$$

$$y = -8.4445x + 80.388$$

$$R^2 = 0.951$$

$$y = -9.8083x + 93.122$$

$$R^2 = 0.9113$$



$$y = -1.7528x + 19.533$$

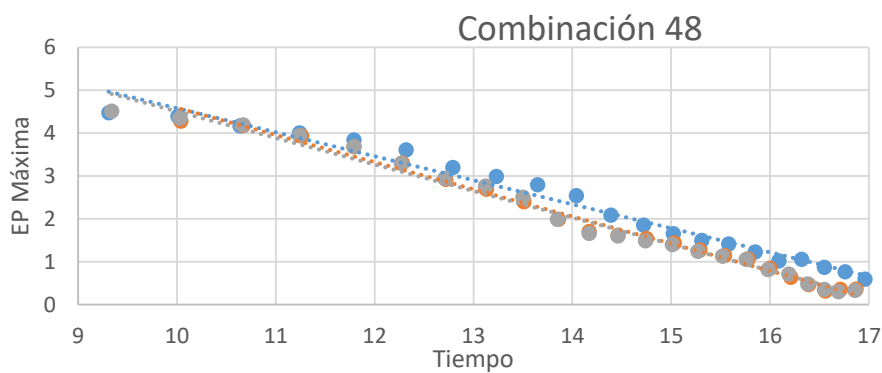
$$R^2 = 0.9519$$

$$y = -1.6887x + 19.31$$

$$R^2 = 0.9952$$

$$y = -1.616x + 18.586$$

$$R^2 = 0.9899$$



$$y = -0.56x + 10.184$$

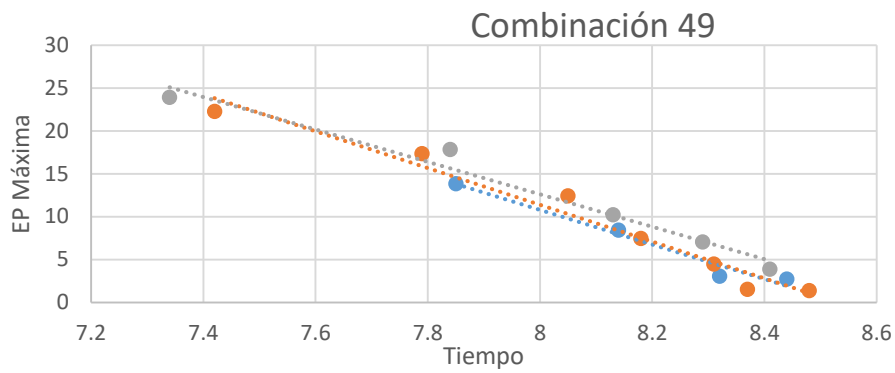
$$R^2 = 0.9786$$

$$y = -0.6336x + 10.93$$

$$R^2 = 0.9901$$

$$y = -0.619x + 10.701$$

$$R^2 = 0.9865$$



$$y = -20.143x + 171.92$$

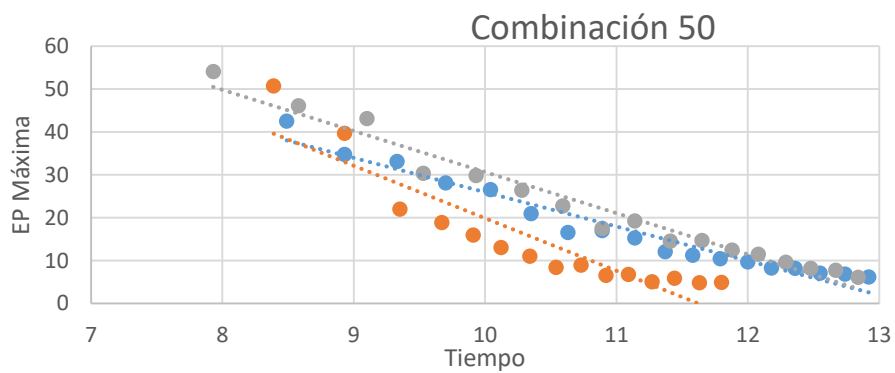
$$R^2 = 0.969$$

$$y = -21.422x + 182.76$$

$$R^2 = 0.9672$$

$$y = -18.899x + 163.8$$

$$R^2 = 0.973$$



$$y = -8.0119x + 106.1$$

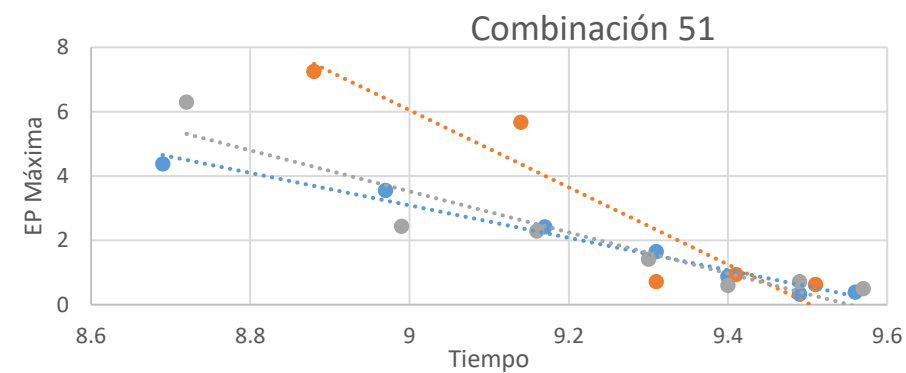
$$R^2 = 0.9554$$

$$y = -12.255x + 142.45$$

$$R^2 = 0.8355$$

$$y = -9.5764x + 126.41$$

$$R^2 = 0.9672$$



$$y = -5.0429x + 48.472$$

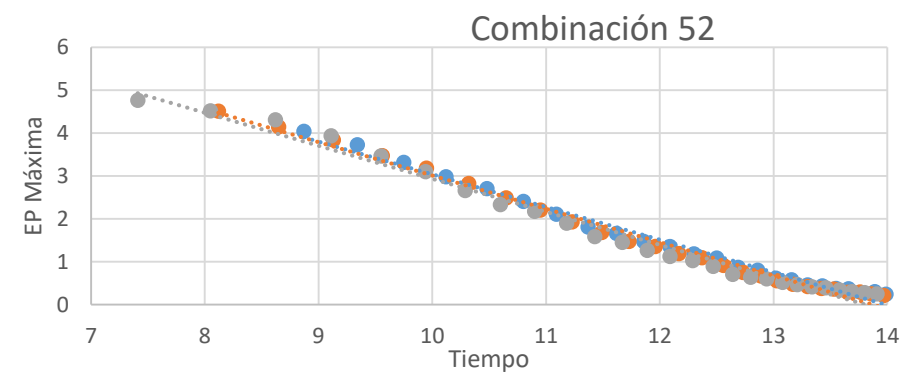
$$R^2 = 0.976$$

$$y = -12x + 114.04$$

$$R^2 = 0.8789$$

$$y = -6.3789x + 60.931$$

$$R^2 = 0.8798$$



$$y = -0.7618x + 10.657$$

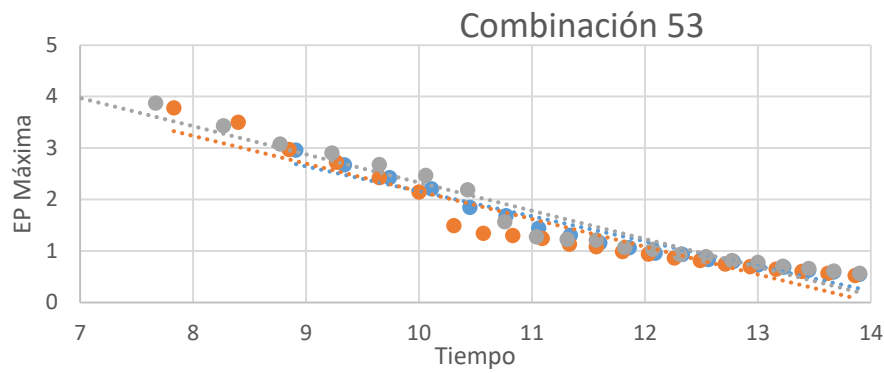
$$R^2 = 0.9888$$

$$y = -0.7772x + 10.787$$

$$R^2 = 0.9898$$

$$y = -0.7708x + 10.644$$

$$R^2 = 0.9839$$



$$y = -0.4852x + 7.0118$$

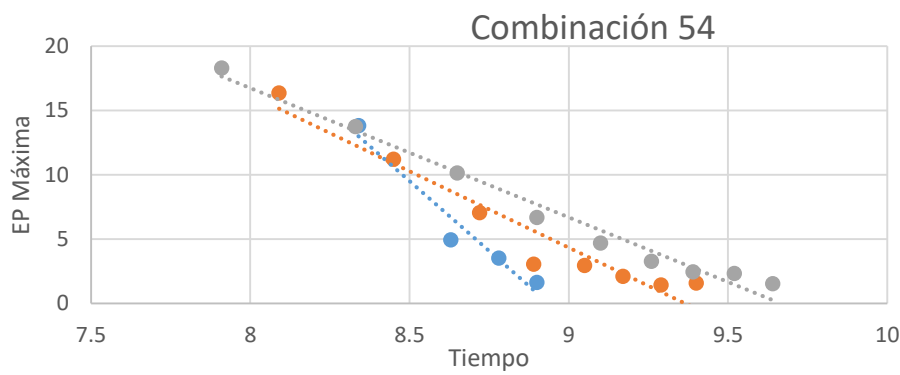
$$R^2 = 0.9476$$

$$y = -0.5385x + 7.546$$

$$R^2 = 0.9052$$

$$y = -0.548x + 7.8123$$

$$R^2 = 0.9564$$



$$y = -21.772x + 194.6$$

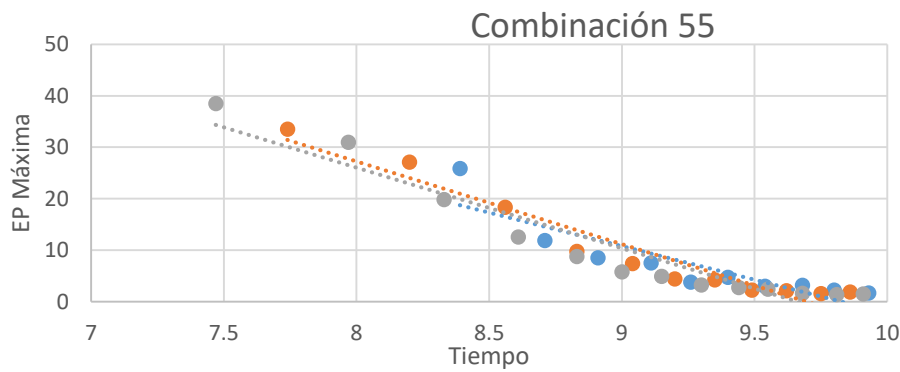
$$R^2 = 0.949$$

$$y = -11.854x + 111.03$$

$$R^2 = 0.9343$$

$$y = -10.045x + 97.104$$

$$R^2 = 0.9794$$



$$y = -13.045x + 128.19$$

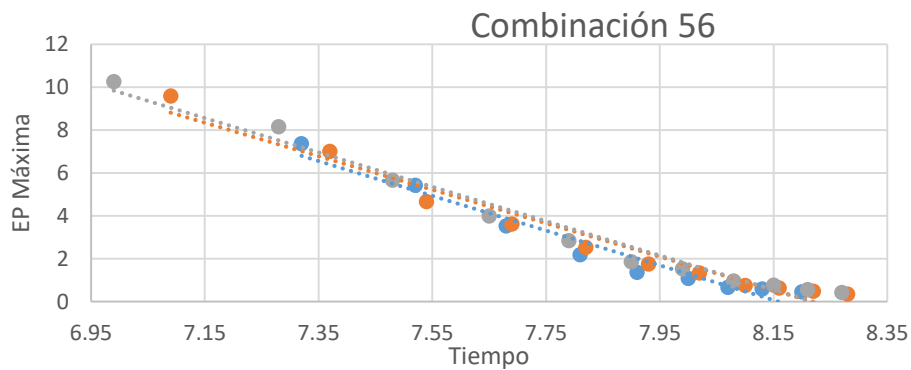
$$R^2 = 0.7886$$

$$y = -16.081x + 155.89$$

$$R^2 = 0.9332$$

$$y = -15.658x + 151.29$$

$$R^2 = 0.9127$$



$$y = -8.1015x + 66.106$$

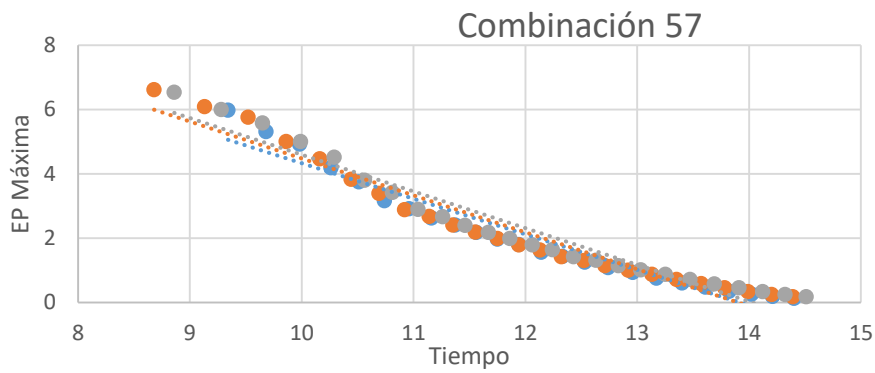
$$R^2 = 0.9555$$

$$y = -7.8088x + 64.184$$

$$R^2 = 0.9666$$

$$y = -8.009x + 65.83$$

$$R^2 = 0.9739$$



$$y = -1.1056x + 15.384$$

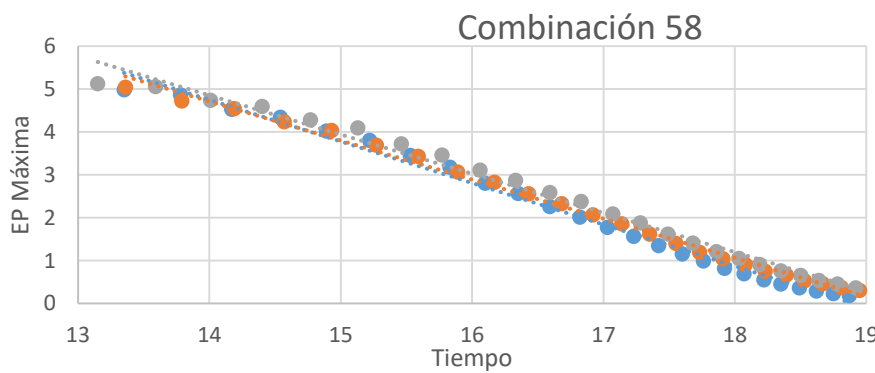
$$R^2 = 0.9398$$

$$y = -1.1489x + 15.966$$

$$R^2 = 0.9467$$

$$y = -1.14x + 15.989$$

$$R^2 = 0.9477$$



$$y = -0.9697x + 18.327$$

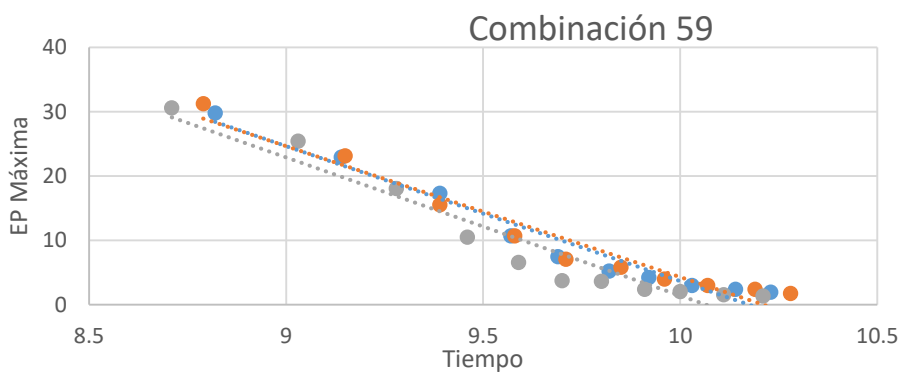
$$R^2 = 0.9925$$

$$y = -0.9115x + 17.473$$

$$R^2 = 0.9951$$

$$y = -0.9147x + 17.662$$

$$R^2 = 0.9893$$



$$y = -20.996x + 213.63$$

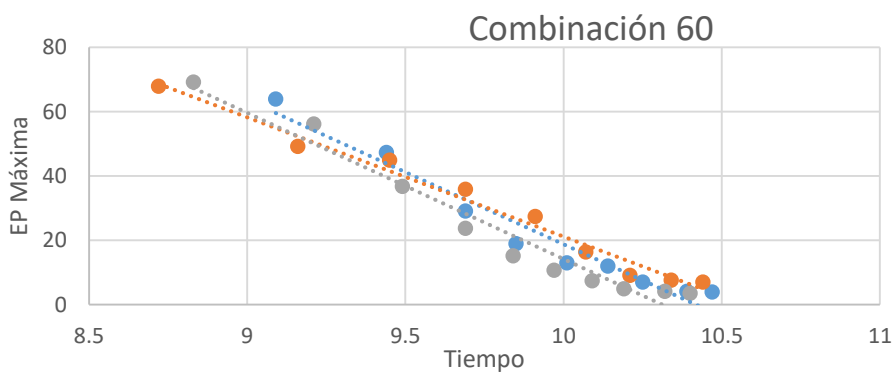
$$R^2 = 0.9599$$

$$y = -20.382x + 208.1$$

$$R^2 = 0.9538$$

$$y = -21.476x + 216.17$$

$$R^2 = 0.9248$$



$$y = -44.819x + 466.99$$

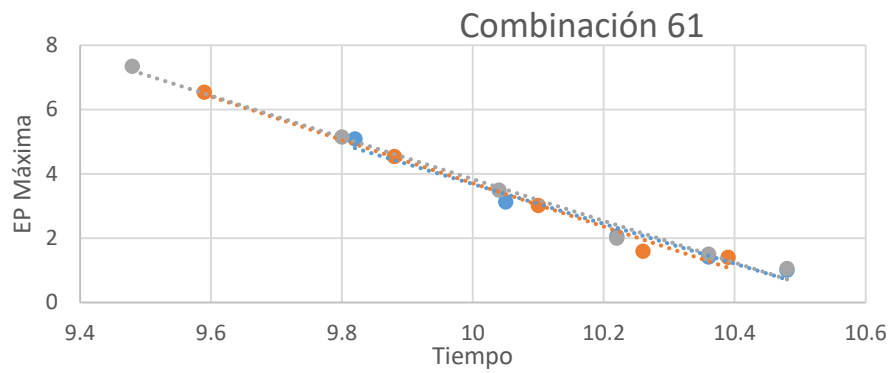
$$R^2 = 0.954$$

$$y = -37.057x + 391.78$$

$$R^2 = 0.9815$$

$$y = -45.434x + 468.56$$

$$R^2 = 0.9581$$



$$y = -6.1991x + 65.676$$

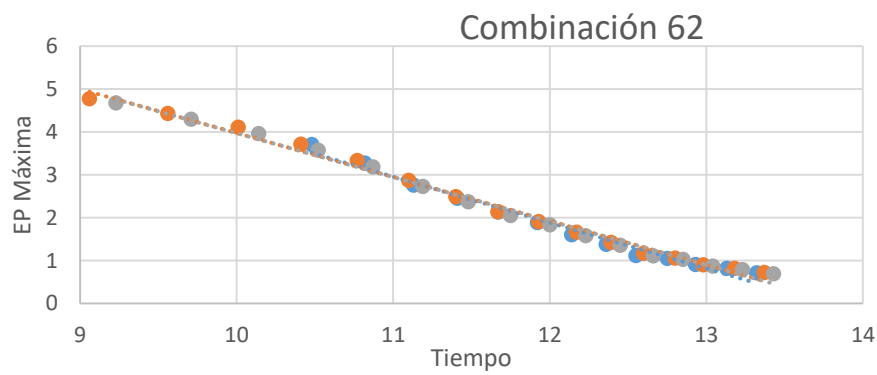
$$R^2 = 0.9719$$

$$y = -6.7393x + 71.102$$

$$R^2 = 0.9871$$

$$y = -6.4932x + 68.763$$

$$R^2 = 0.9899$$



$$y = -1.0695x + 14.719$$

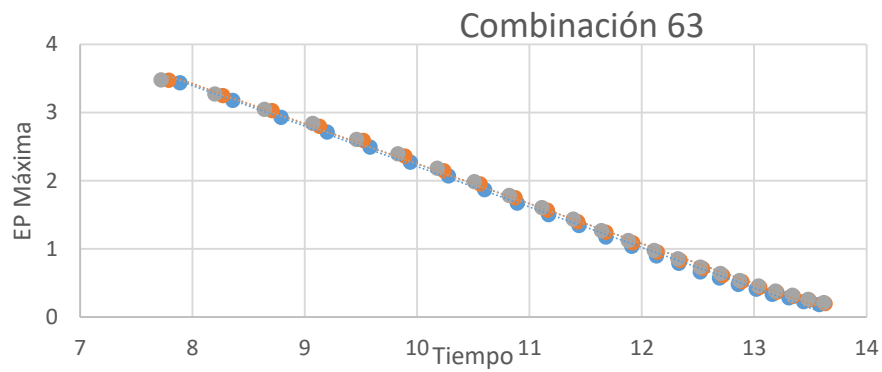
$$R^2 = 0.9805$$

$$y = -1.0254x + 14.232$$

$$R^2 = 0.9924$$

$$y = -1.0237x + 14.211$$

$$R^2 = 0.9924$$



$$y = -0.5934x + 8.1417$$

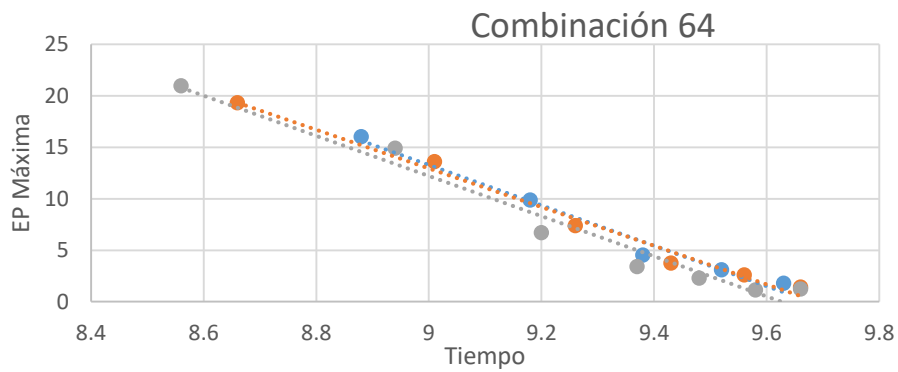
$$R^2 = 0.9987$$

$$y = -0.588x + 8.1303$$

$$R^2 = 0.9986$$

$$y = -0.5826x + 8.07$$

$$R^2 = 0.9985$$



$$y = -19.618x + 189.86$$

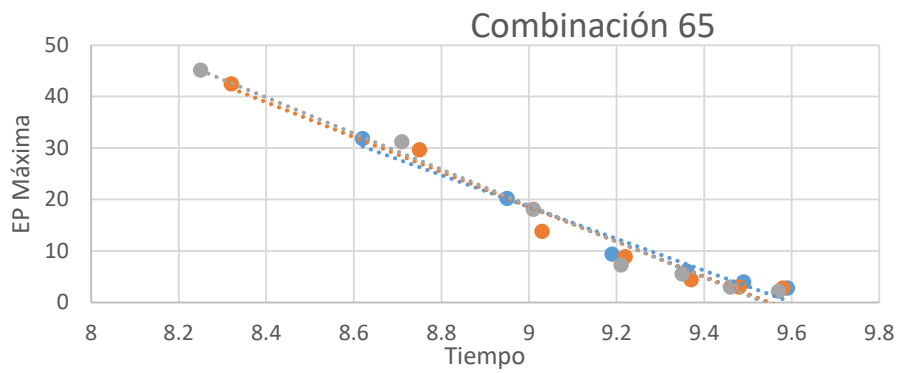
$$R^2 = 0.9807$$

$$y = -18.787x + 182.05$$

$$R^2 = 0.9871$$

$$y = -19.496x + 187.69$$

$$R^2 = 0.9681$$



$$y = -30.846x + 296.16$$

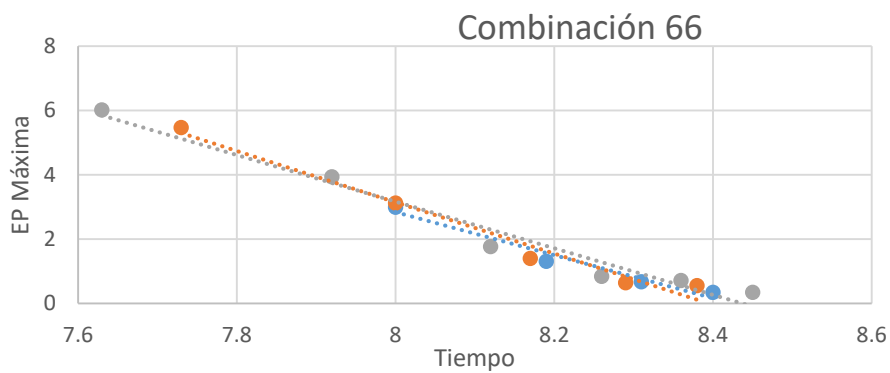
$$R^2 = 0.9668$$

$$y = -33.838x + 323.15$$

$$R^2 = 0.968$$

$$y = -34.984x + 333.69$$

$$R^2 = 0.9786$$



$$y = -6.6936x + 56.391$$

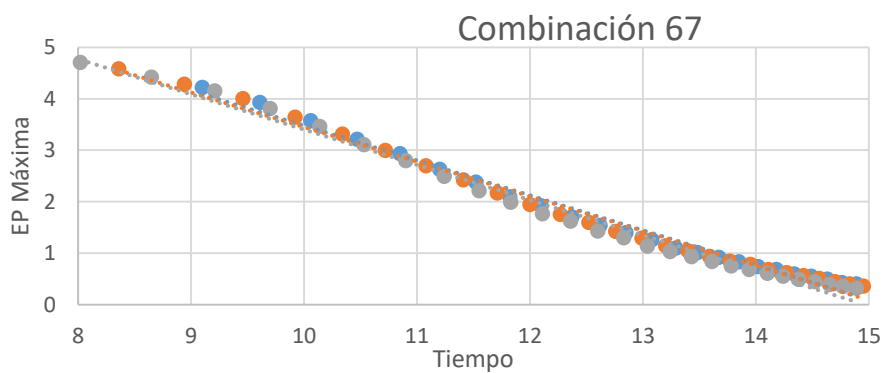
$$R^2 = 0.9685$$

$$y = -7.9743x + 66.945$$

$$R^2 = 0.9761$$

$$y = -7.2501x + 61.17$$

$$R^2 = 0.9699$$



$$y = -0.6775x + 10.25$$

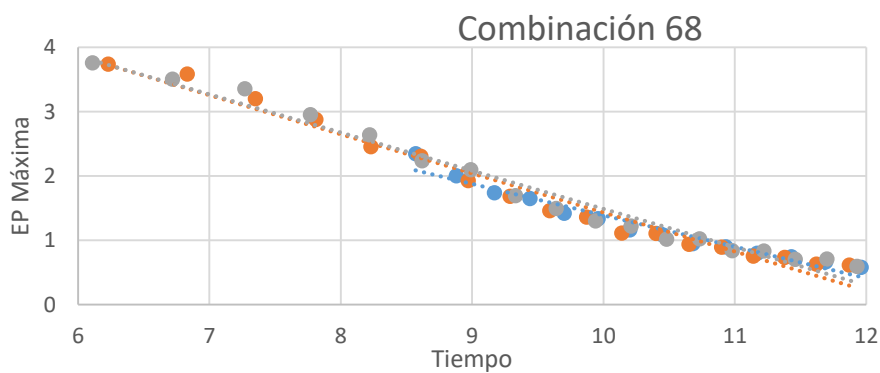
$$R^2 = 0.9879$$

$$y = -0.6731x + 10.182$$

$$R^2 = 0.99$$

$$y = -0.6856x + 10.258$$

$$R^2 = 0.9886$$



$$y = -0.4888x + 6.2765$$

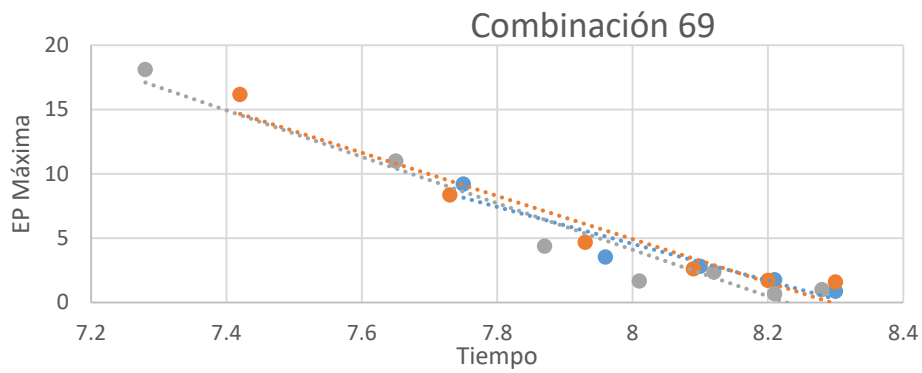
$$R^2 = 0.9553$$

$$y = -0.608x + 7.5153$$

$$R^2 = 0.9762$$

$$y = -0.5945x + 7.4342$$

$$R^2 = 0.978$$



$$y = -14.327x + 119.16$$

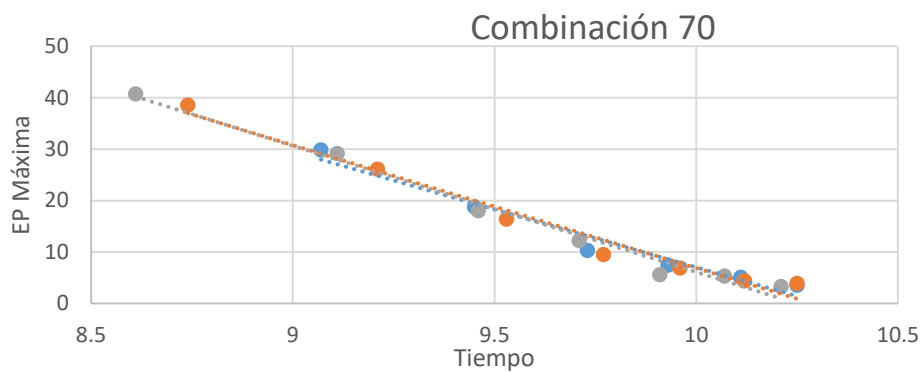
$$R^2 = 0.9008$$

$$y = -16.805x + 139.36$$

$$R^2 = 0.9427$$

$$y = -18.056x + 148.54$$

$$R^2 = 0.9427$$



$$y = -22.476x + 231.8$$

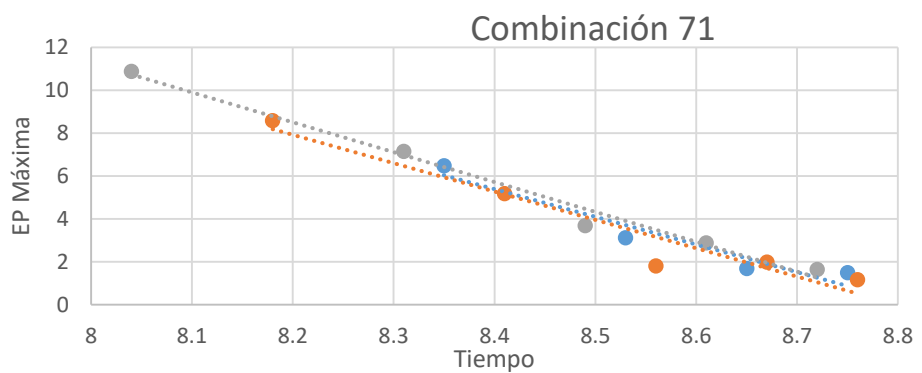
$$R^2 = 0.9644$$

$$y = -23.916x + 246.02$$

$$R^2 = 0.9767$$

$$y = -24.521x + 251.35$$

$$R^2 = 0.9847$$



$$y = -12.904x + 113.78$$

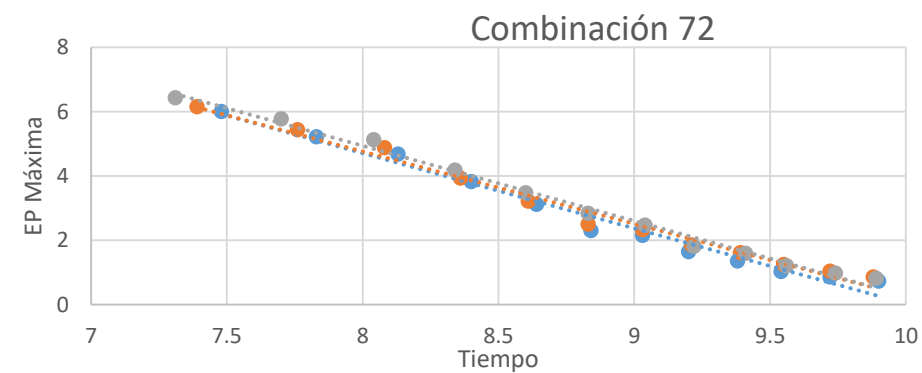
$$R^2 = 0.9281$$

$$y = -13.207x + 116.21$$

$$R^2 = 0.9367$$

$$y = -13.927x + 122.7$$

$$R^2 = 0.9859$$



$$y = -2.3414x + 23.444$$

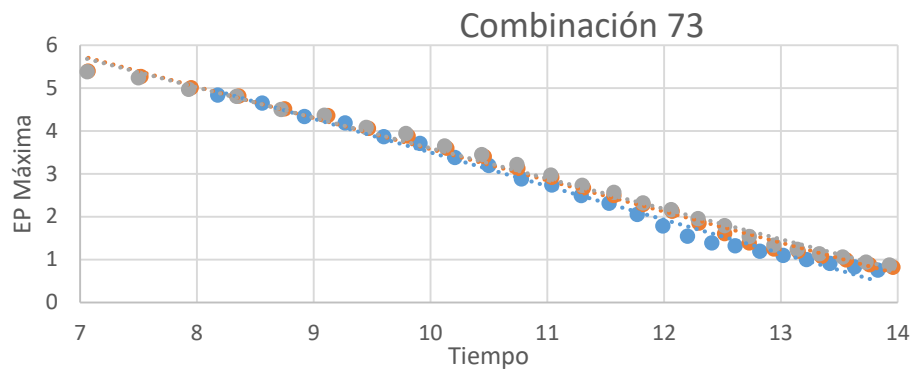
$$R^2 = 0.9817$$

$$y = -2.2492x + 22.756$$

$$R^2 = 0.9869$$

$$y = -2.3364x + 23.638$$

$$R^2 = 0.9921$$



$$y = -0.7843x + 11.342$$

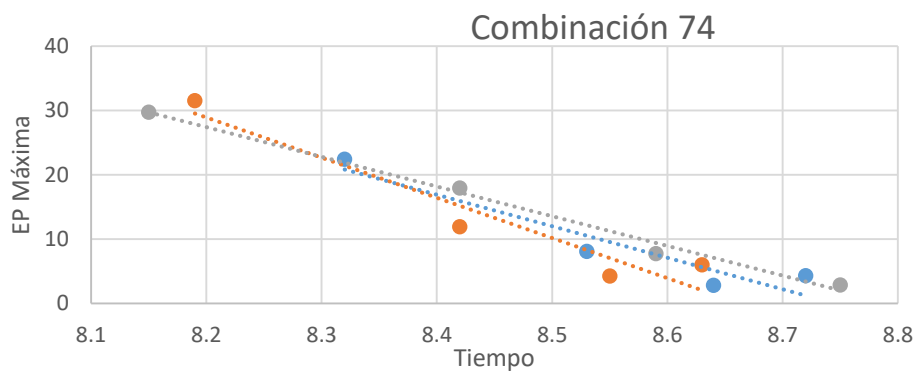
$$R^2 = 0.9921$$

$$y = -0.7268x + 10.844$$

$$R^2 = 0.9932$$

$$y = -0.709x + 10.689$$

$$R^2 = 0.9934$$



$$y = -49.024x + 428.73$$

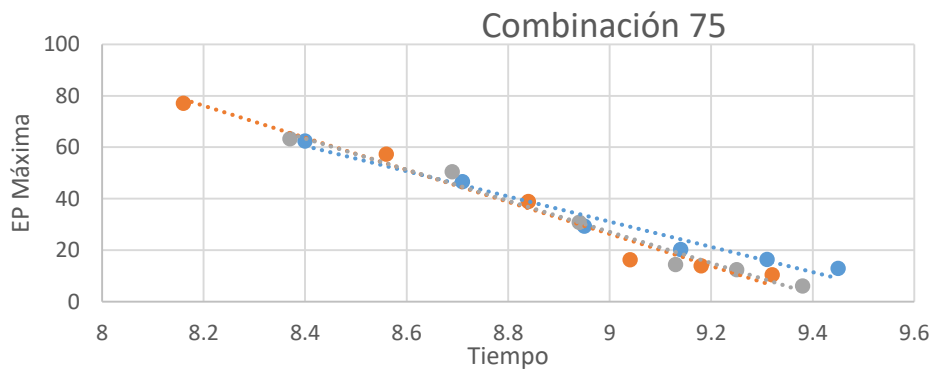
$$R^2 = 0.9024$$

$$y = -62.341x + 540.09$$

$$R^2 = 0.9196$$

$$y = -46.178x + 406.08$$

$$R^2 = 0.9904$$



$$y = -49.036x + 472.34$$

$$R^2 = 0.9711$$

$$y = -62.241x + 586.48$$

$$R^2 = 0.974$$

$$y = -60.43x + 571.02$$

$$R^2 = 0.9806$$

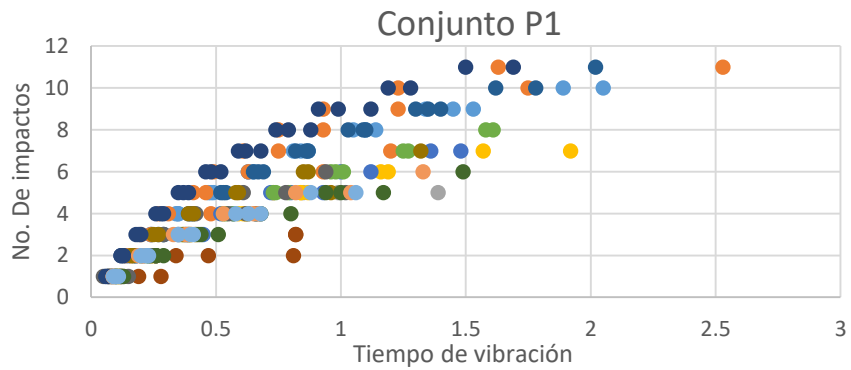
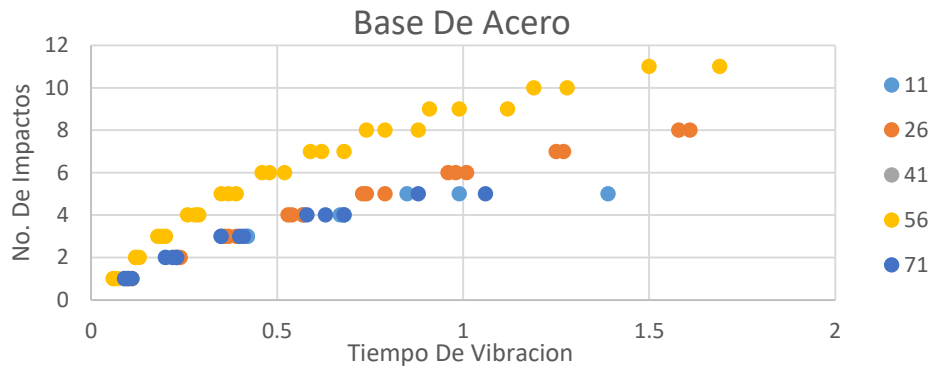
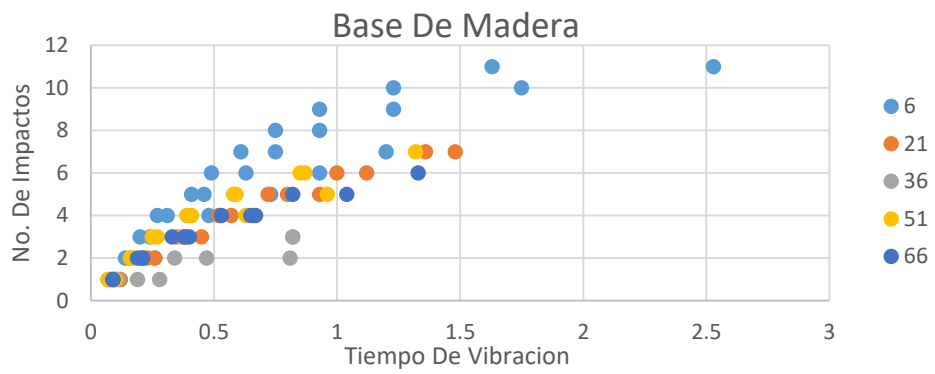
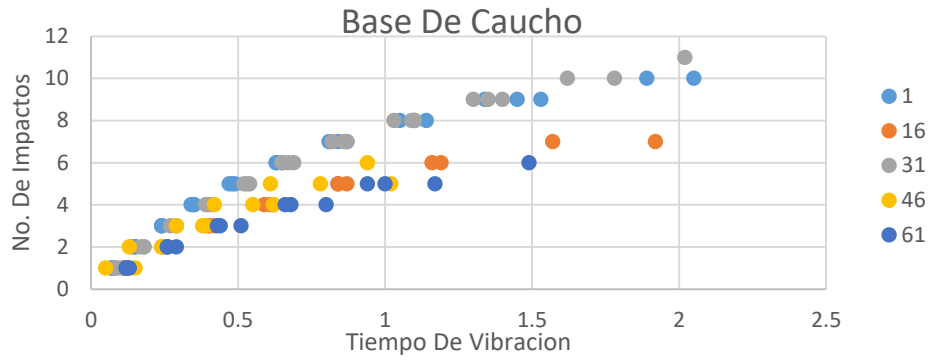
APÉNDICE C

En este apéndice se muestran los resultados del análisis del número de impactos contra la duración del balanceo libre. En la primera parte, se muestran las comparaciones para un mismo tipo de cuerpo (del P1 al P5) y en la segunda parte de muestran las comparaciones para una misma combinación de materiales de interfaz, independientemente del cuerpo que se probó. Con esto se da al usuario una herramienta para analizar casos individuales y específicos de cuerpos rígidos sometidos a balanceo.

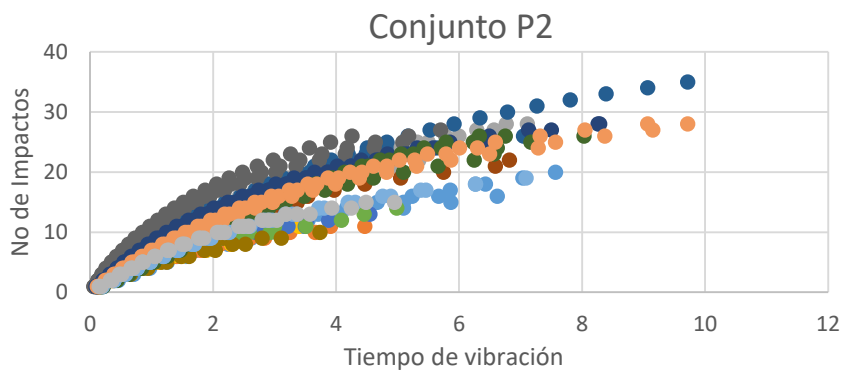
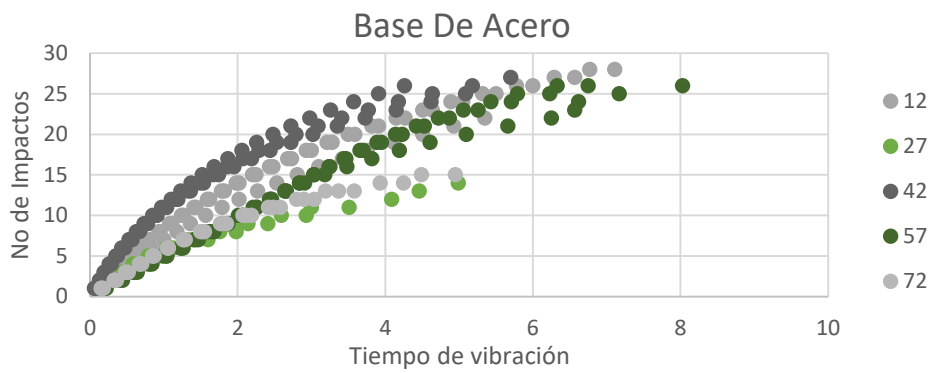
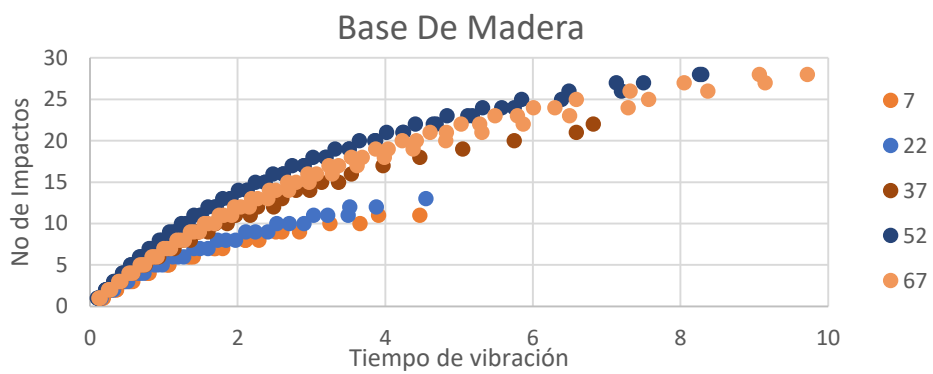
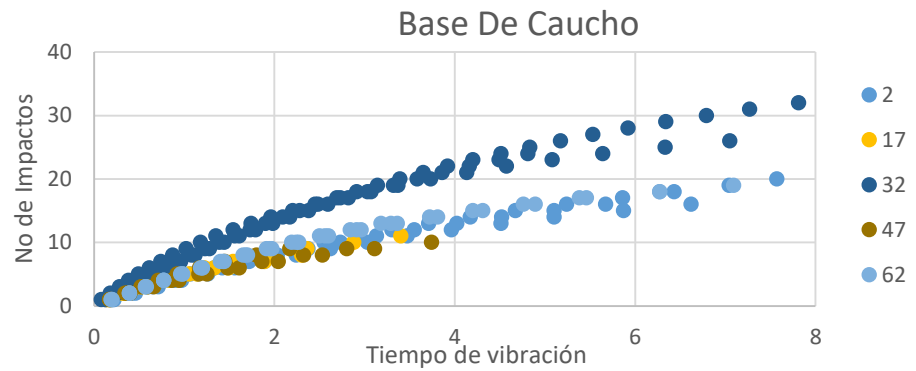
REVISIÓN POR TIPO DE PROTOTIPO

En esta sección, se muestran cuatro figuras por cada tipo de prototipo. Las primeras tres están organizadas por tipo de base, ya que esto no solo afecta la combinación de materiales de interfaz sino también modifica las propiedades geométricas de los cuerpos al desplazar verticalmente el centro de gravedad. Salvo los casos en los que se tuvieron pruebas defectuosas que tuvieron que ser desechadas, cada figura contiene el resultado de cinco combinaciones de pruebas que siguen la misma organización de la tabla B1, por lo que en general cada figura muestra los resultados de 15 pruebas en total. La cuarta figura muestra todas las pruebas realizadas para el prototipo correspondiente.

PROTOTIPO P1

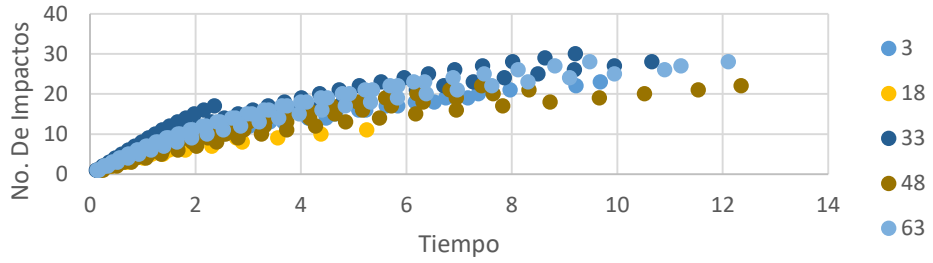


PROTOTIPO P2

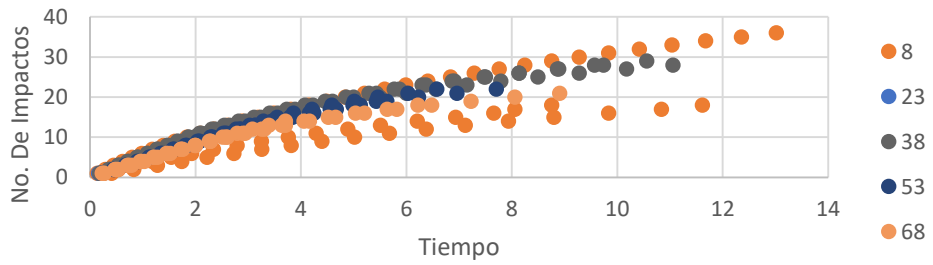


PROTOTIPO P3

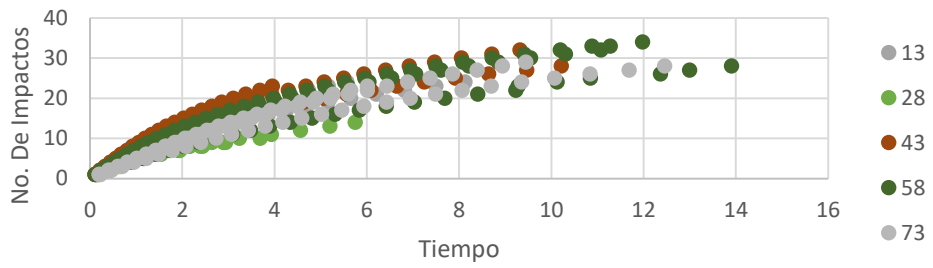
Caucho



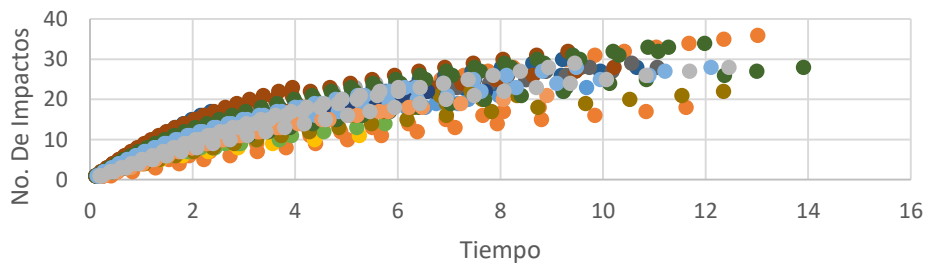
Madera



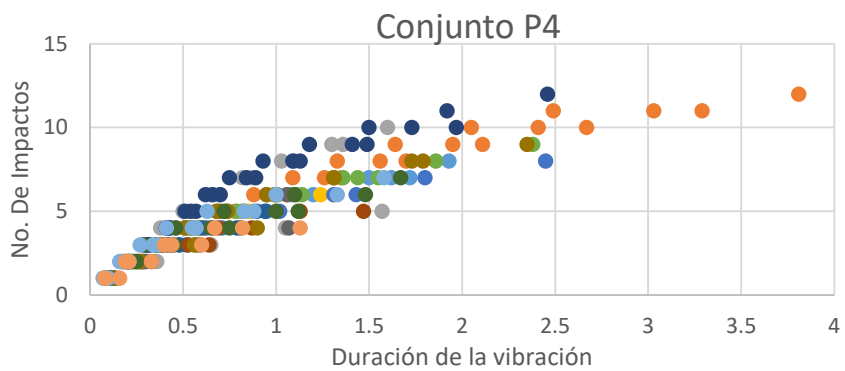
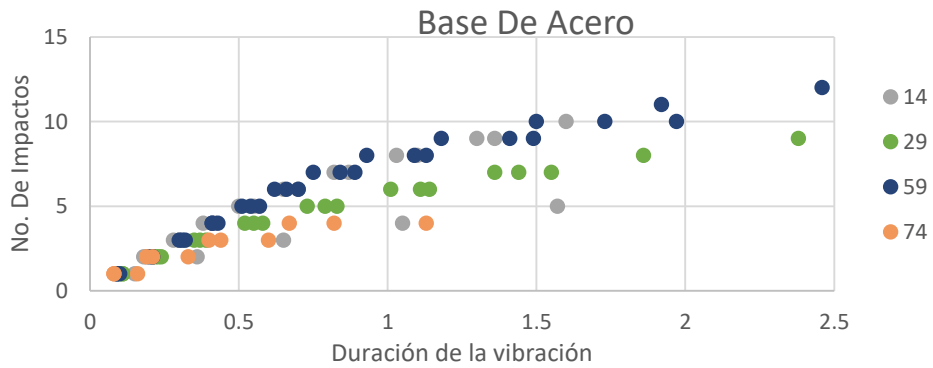
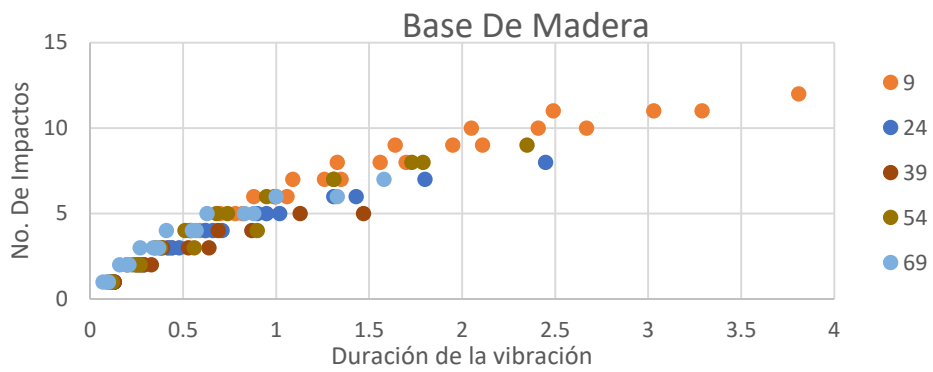
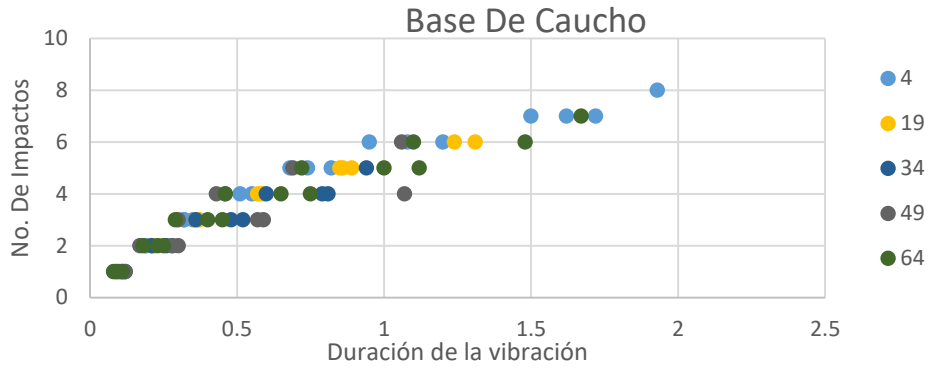
Acero



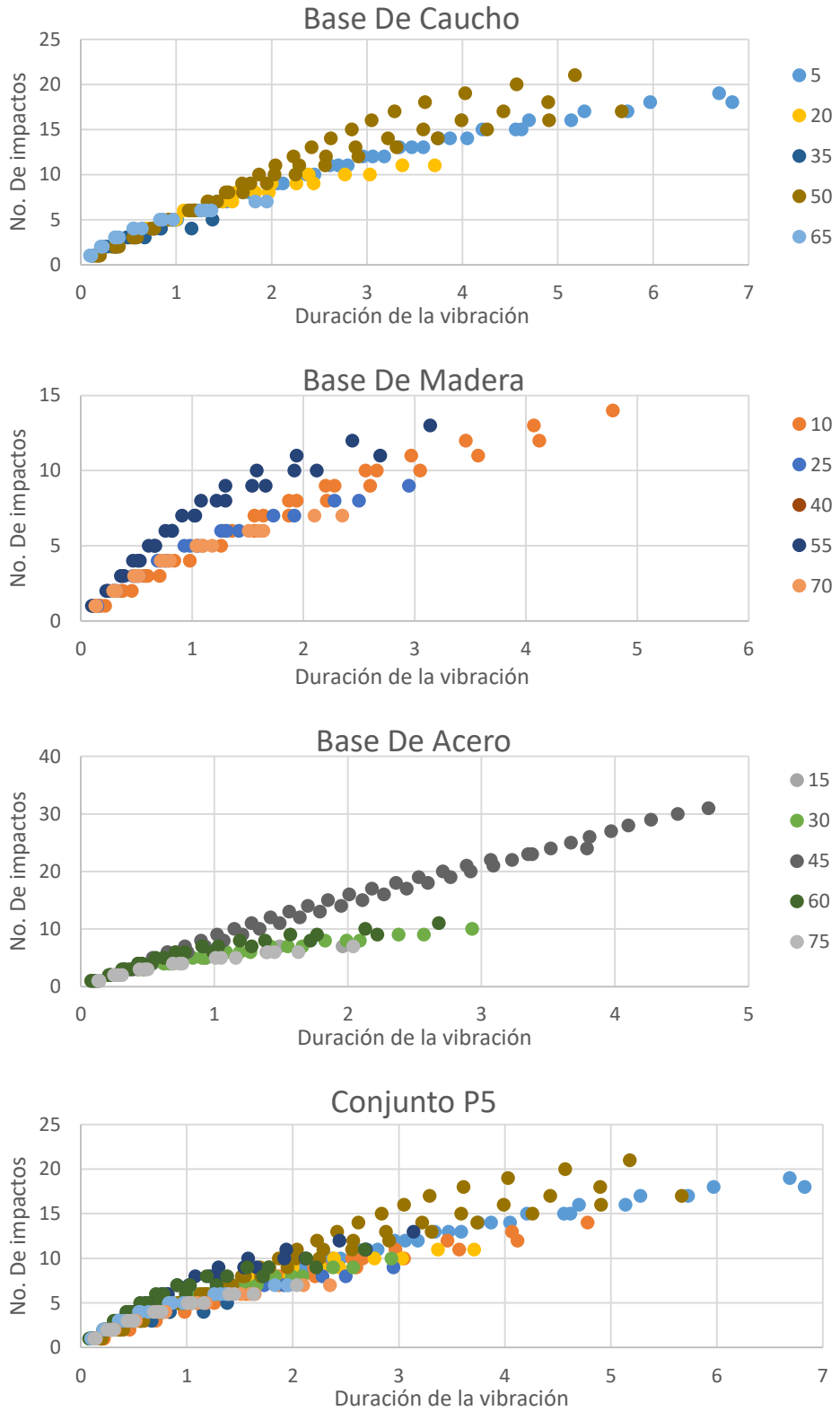
Prototipo 3



PROTOTIPO P4



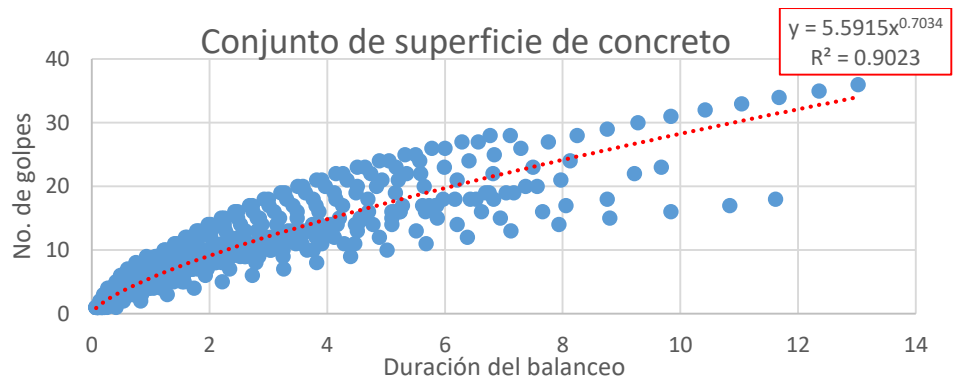
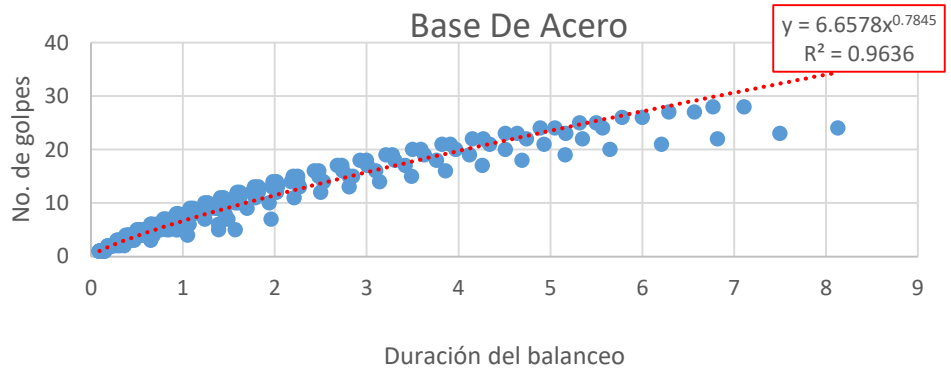
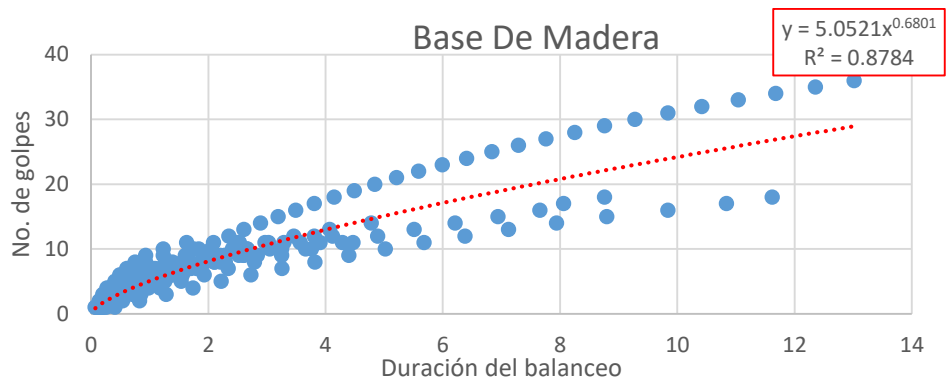
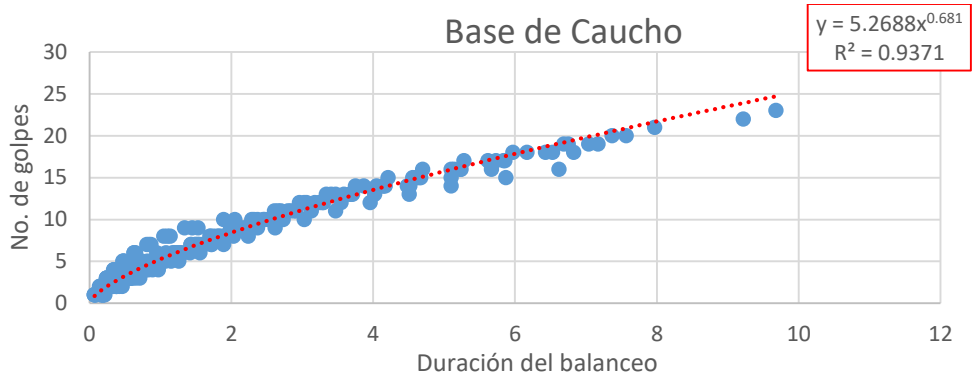
PROTOTIPO P5



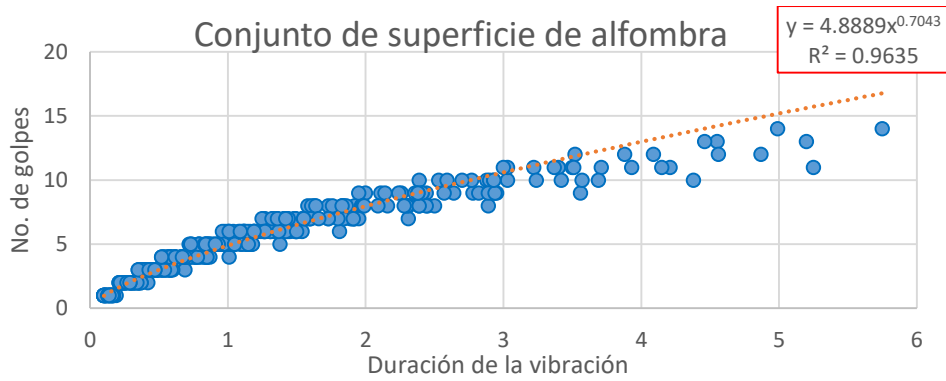
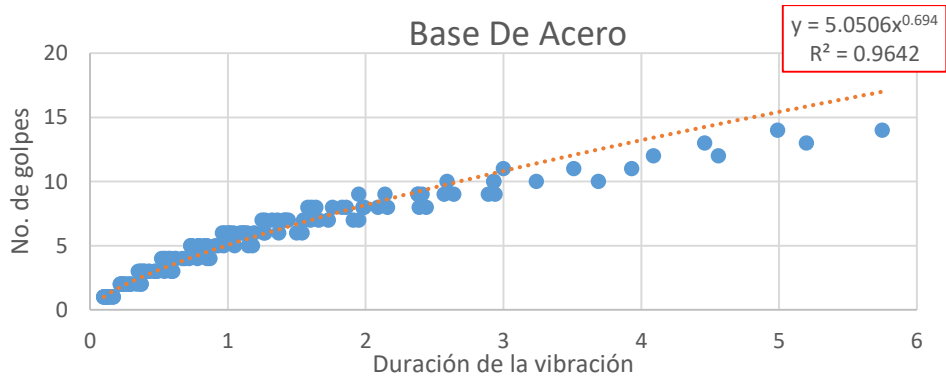
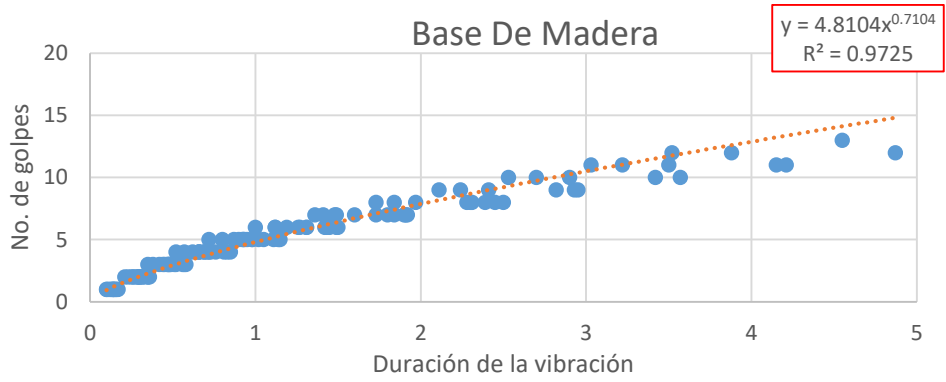
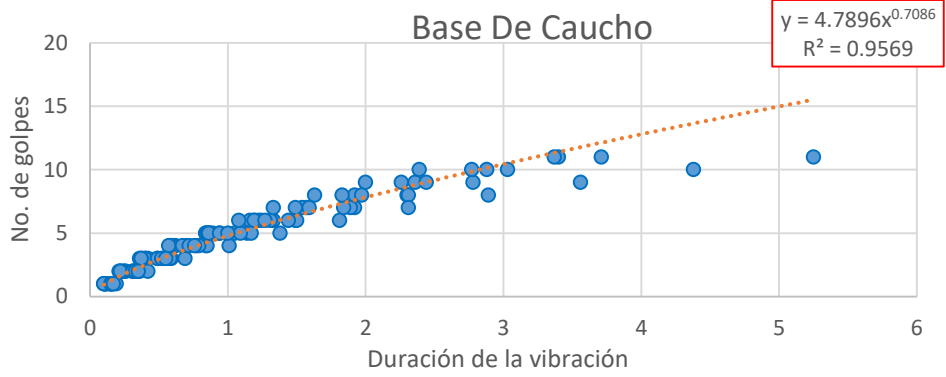
REVISIÓN POR COMBINACIÓN DE MATERIALES DE INTERFAZ

En esta sección, también se muestran en diferentes figuras el número de impactos contra la duración de la vibración de balanceo libre para una misma configuración de materiales de interfaz. Esto permite observar el comportamiento que los cuerpos adquieren en función de los materiales de los que están hechos y de la superficie que los contiene. Como se menciona en el capítulo 4, se observó que la configuración de materiales de interfaz tiene gran influencia en la forma de la curva ajustada, mientras que las propiedades geométricas de los cuerpos parecieron más bien determinar la duración del balanceo. Es por eso que en cada figura se muestra también una curva ajustada de tipo potencial, junto con la ecuación que la define y el coeficiente R^2 que le corresponde.

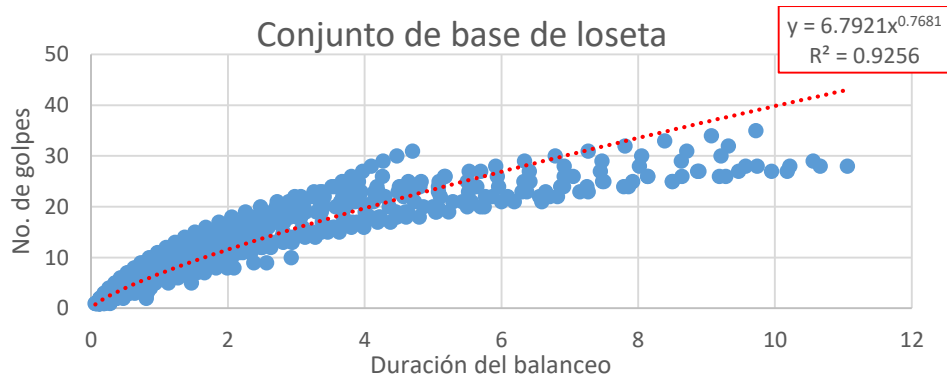
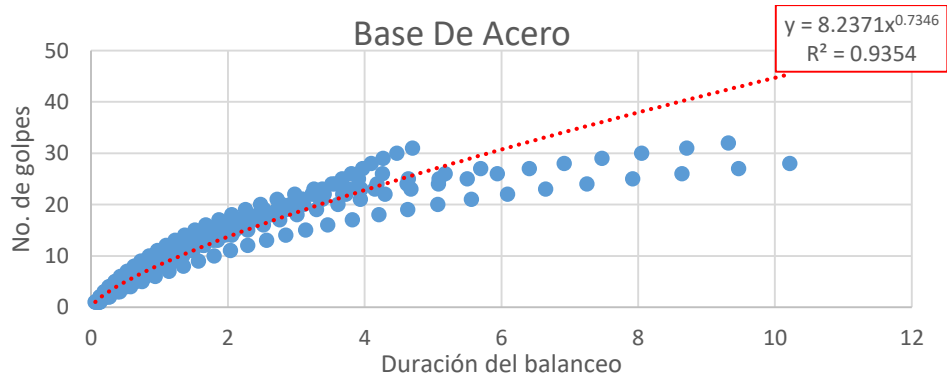
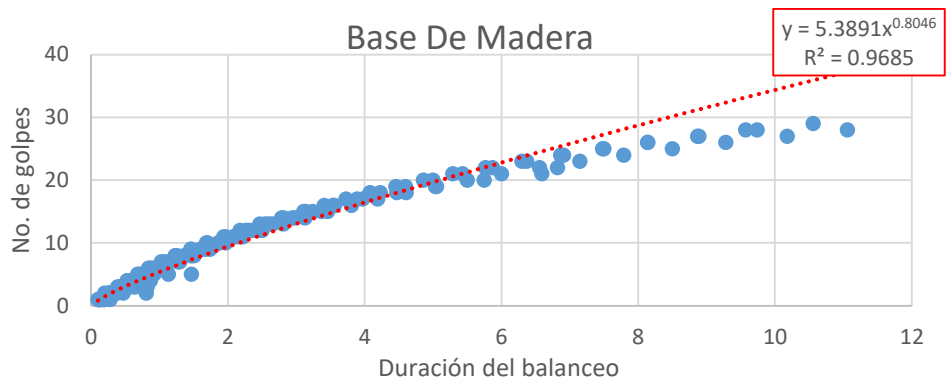
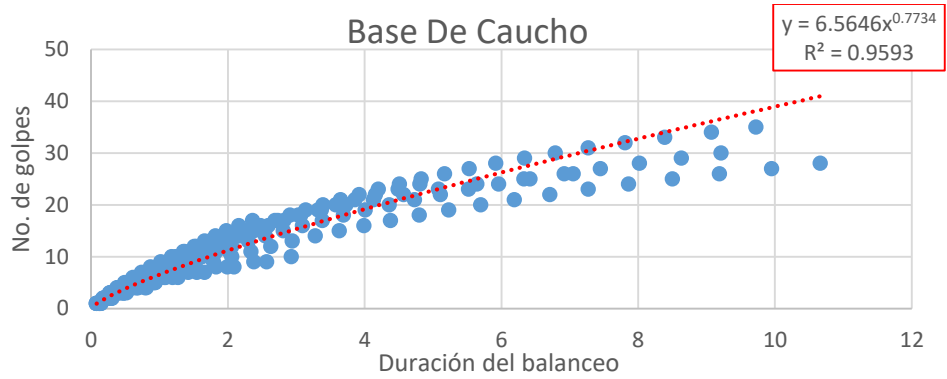
SUPERFICIE DE CONCRETO



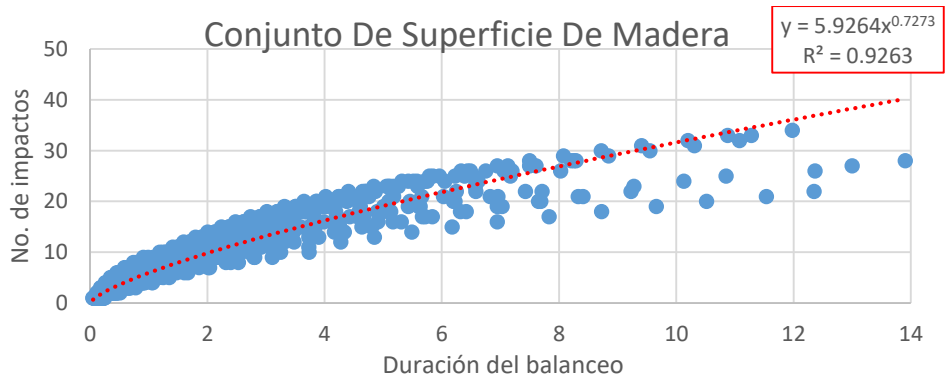
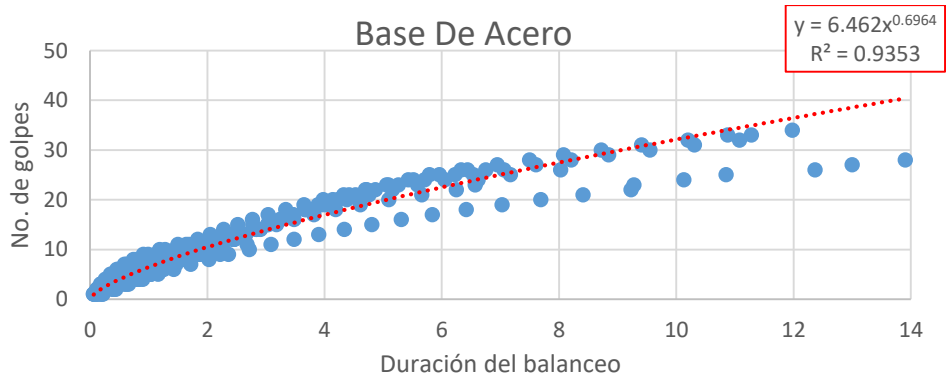
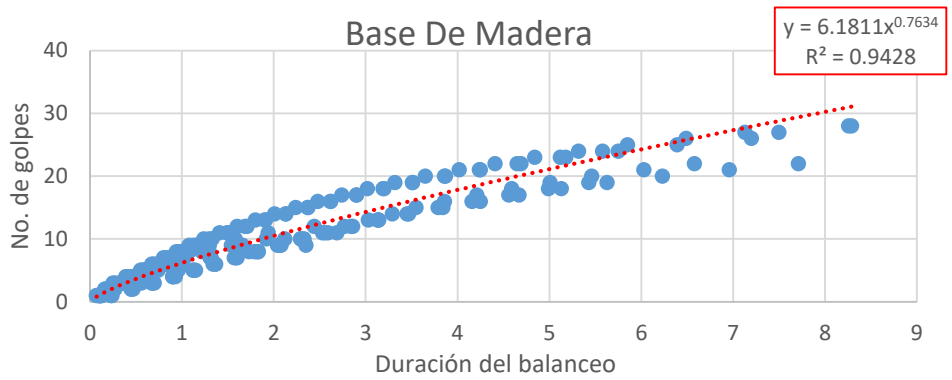
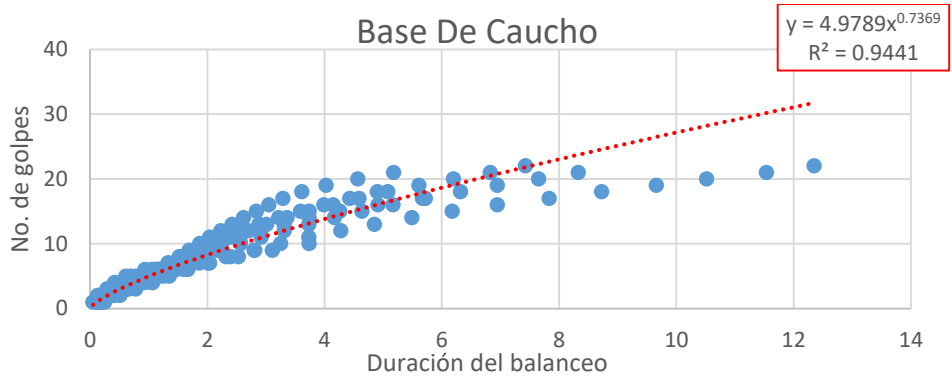
SUPERFICIE DE ALFOMBRA



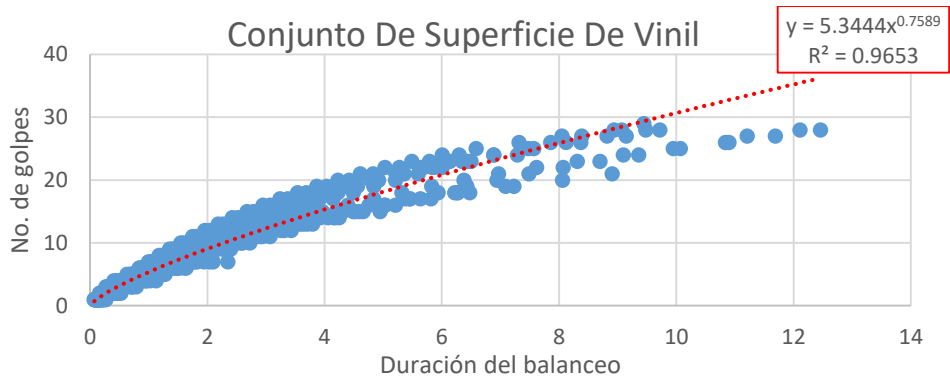
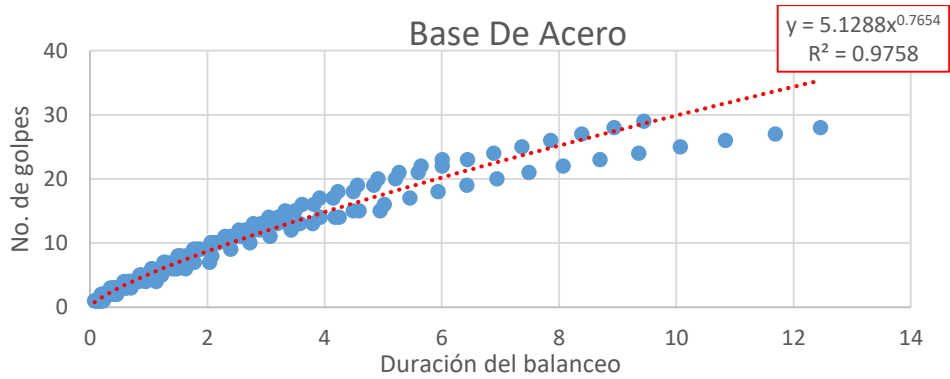
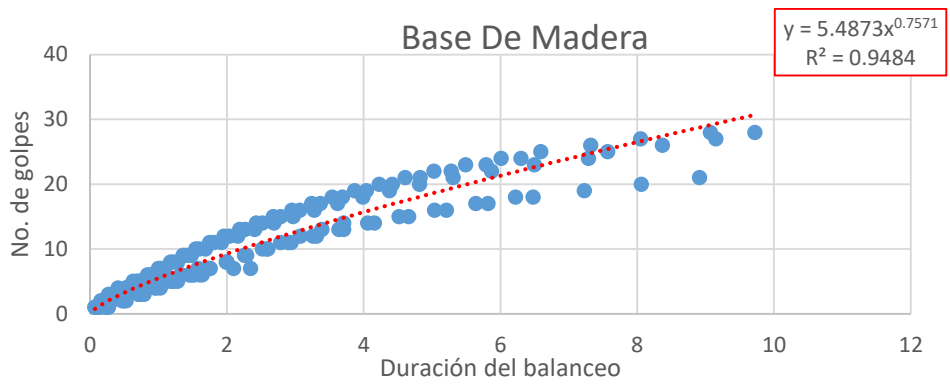
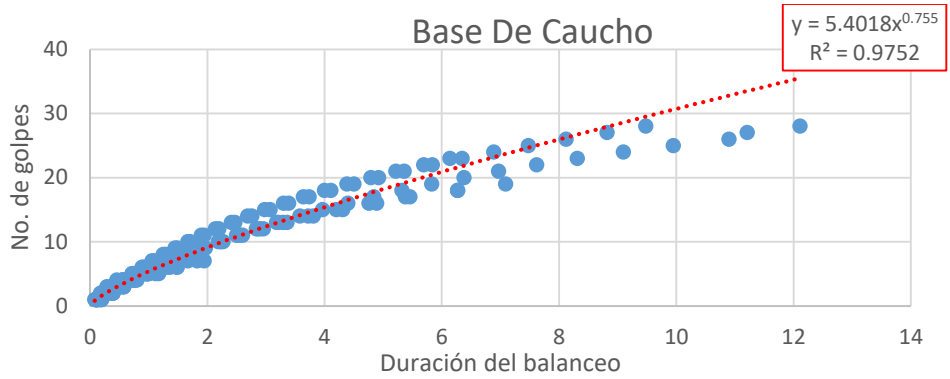
SUPERFICIE DE LOSETA



SUPERFICIE DE MADERA



SUPERFICIE DE VINIL



REFERENCIAS

Arredondo, C. (2006). Comportamiento sísmico de contenido de edificios. Tesis de doctorado, UNAM, Ciudad de México, México.

Arredondo C. Jaimes M. y Reinoso E. (2017). A Simplified Model to Evaluate the Dynamic Rocking Behavior of Irregular Free-Standing Rigid Bodies Calibrated with Experimental Shaking-Table Tests. *Journal of Earthquake Engineering*. doi: 10.1080/13632469.2017.1309601

Aslam, M., Salise, D. T., and Godden, W. G. (1980). Earthquake rocking response of rigid bodies. *J. Struct. Div.*, 106(2), 377–392.

Berto, L. Favaretto, T. Saetta, A. Antonelli, F. y Lazzarini, L. (2012). Assessment os seismic vulnerability of art objects: The Galeria dei Prigioni sculptures at the Accademia Galley in Florence. *Journal of Cultural Heritage*, 13, 7-21.

Bourguett, M. (2018). Curvas de equi-intensidad y equi-excentricidad para cuervos rígidos en balanceo. Tesis de maestría no publicada, UNAM, Ciudad de México, México.

ElGawady, M., et al. (2010). Effects of the interface material on the performance of free rocking blocks. *Earthquake engineering and structural dynamics*. doi: 10.102/eqe.1025.

Fielder, W. y Virgin, L. (1997). Experiments and simulation of overturning of an asymmetric rocking block on an oscillating foundation. *European journal of mechanics, A/Solids*. 16-5, pp. 905-923.

Housner, G. (1963). The behavior of inverted pendulum structures during earthquakes. *Bulletin of the seismological society of America*, 53-2, pp. 403-417.

Jaimes, M., Arredondo, C. y Fernández, L. (2017). Rocking of non-symmetric rigid blocks in buildings considering effects associated with dynamic Soil-Structure interacion. *Journal of earthquake engineering*. doi: 10.1080/13632469.2017.1286620.

Kalliontzis, D., Sritharan, S. y Schultz, A. (2016). Improved coefficient of restitution estimation for free rocking members. *Journal of structural engineering*. 142-12.

Konstantinidis, D. y Makris, N. (2007). The dynamics of a rocking block in three dimensions. Proceedings of the 8th HSTAM (Hellenic Society for Theoretical and Applied Mechanics), *International Congress on Mechanics*, Patras, Greece.

Lipscombe, P. R. (1990). Dynamics of rigid block structures. Tesis de doctorado, *Universidad de Cambridge*, Cambridge, Inglaterra.

Makris, N y Roussos Y (1998). Rocking response and overturning of equipment under horizontal pulse-type motions, Report PEER-1998/05, *Pacific Earthquake Engineering Research Center*, College of Engineering, University of California, Berkeley, October, 1998.

Muto, K., Umemura, H., and Sonobe, Y. (1960). Study of the overturning vibrations of slender structures. Proc., 2nd World Congress Earthquake. *Engineering, Science Council of Japan*, Tokyo, Japan. pp. 1239–1261.

Ogawa, N. (1977). A study on rocking and overturning of rectangular column. Rep. No. 18, *National Research Center for Disaster Prevention*, Tokyo.

Peña, F., et al. (2007). On the dynamics of rocking motion of single rigid-blocks structures. *Earthquake engn. struct. Dyn.*. 36, pp. 2383-2399.

Priestley, M., Evison, R. y Carr, A. (1978). Seismic response of structures free to rock on their foundations. *Bulletin of the New Zealand national society for earthquake engineering*, 11-3, 141-150.