Universidad Nacional Autónoma de México

programa de maestría y doctorado en ciencias matemáticas y de la especialización en estadística aplicada

Medida y Categoría: Un enfoque conjuntista

T E S I S

que para optar por el grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS

presenta:

SÁNCHEZ ARÉVALO CÉSAR ALEJANDRO

director de tesis:

Dr. ROBERTO PICHARDO MENDOZA

facultad de ciencias

Ciudad Universitaria, Cd. Mx.

octubre 2018

A mi madre.
Con ella todo, sin ella nada.

AGRADECIMIENTOS

A mis sinodales, por el tiempo y comentarios dedicados en la revisión de la tesis.

A mi familia, por su apoyo incondicional en todo momento a lo largo de mi formación y por siempre creer en mi.

Al M. en C. Edmundo Rodrigo Cepeda Morales, por los años compartidos en las aulas, donde aprendí lecciones invaluables siendo su alumno, contemporáneo, colega y amigo.

Al Dr. Roberto Pichardo Mendoza, a quien debo reconocer el nivel de compromiso en la elaboración del trabajo y la gran paciencia con la que me enseño a ser una mejor persona a lo largo de los años bajo su tutoría, sin duda una gran inspiración en mi desarrollo profesional.

RESUMEN

El estudio de los números reales ha sido una constante en la evolución de las matemáticas por milenios. Sin embargo, gracias al desarrollo que ha tenido la Teoría de Conjuntos en los últimos 50 años, se ha podido profundizar en el estudio de la estructura de los números reales mediante el análisis de las características de sus subconjuntos y las nociones de cómo clasificarlos.

La presente tesis tiene como objetivo principal el estudio de la recta real y sus subconjuntos, particularmente el ideal de subconjuntos nulos y el ideal de subconjuntos magros, utilizando diversos resultados de Teoría de Conjuntos.

El trabajo consta de 4 capítulos, siendo el primero de preliminares y en cada uno de los 3 restantes brinda un contraste diferente de la dualidad entre Medida y Categoría.

En aras de que el trabajo sea autocontenido, todos los resultados que son necesarios para la lectura del mismo relativos a Teoría de Conjuntos, Topología, Teoría de la Medida, Categoría y Teoría de Galois-Tukey, son presentados en el primer capítulo (siempre que la prueba no es incluida se da una referencia en donde el lector puede encontrar ésta).

En el segundo capítulo se presenta el concepto de relación de Galois-Tukey, la herramienta principal con la que demostraremos las desigualdades entre los cardinales de los coeficientes del ideal de nulos y del ideal de magros que abarca el Diagrama de Cichoń. A diferencia de la forma usual en la que se prueban dichas desigualdades, las relaciones de Galois-Tukey son tripletas (A_-, A_+, A) abstraen la noción reto-respuesta que representa la satisfacción de un conjunto de retos (A_-) mediante un conjunto de respuestas (A_+), bajo una relación binaria (A). A la cardinalidad mínima de los conjuntos de respuestas que satisfacen la totalidad de retos de una relación de Galois-Tukey se le denomina norma y la construcción de morfismos entre relaciones de Galois-Tukey nos brinda una desigualdad entre sus normas. Sin embargo, cada relación de Galois-Tukey tiene un dual que, de ser relación de Galois-Tukey, cuenta con una norma propia; y esto, aunado a que un morfismo entre relaciones de Galois-Tukey nos induce un morfismo entre sus duales, reduce la longitud de las pruebas y la iteración de argumentos similares, especialmente en las pruebas por

doble desigualdad.

El tercer capítulo contrasta la relación que existe entre el ideal de nulos y el ideal de magros al dar una descomposición de $\mathbb{R}$ como unión ajena de un subconjunto nulo y un subconjunto magro; mientras que, bajo la Hipótesis del Continuo, se construye una biyección de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que induce una función biyectiva entre estos ideales.

Finalmente, en el cuarto capítulo se abordan resultados de álgebras booleanas y de las álgebras de medida y categoría, generadas a partir del ideal de nulos y el ideal de magros, respectivamente, necesarios para ilustrar propiedades de sus extensiones genéricas producidas al usar Forcing. Dichas propiedades son relativas a los reales nuevos que se agregan en la extensión, la preservación de conjuntos dominantes en ${}^{\omega}\omega$ y la medida de los reales del modelo base.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1: PRELIMINARES

El objetivo de este capítulo es reunir definiciones y resultados que usaremos iteradamente en el texto.

1.1 Teoría de Conjuntos

La notación conjuntista que usaremos será la usual fijando las letras κ, λ, etcétera para cardinales, α, β, etcétera para ordinales y $\wp(X)$ para denotar al conjunto potencia del conjunto X.

A lo largo de la tesis usaremos $\subseteq$ para denotar subconjunto y $\subset$ para hablar de subconjuntos propios.

Si f es una función con dominio A y $B \subseteq A$, usaremos $f \restriction B$ para representar la restricción de f a B. Además $\mathrm{dom}(f)$ y $\mathrm{img}(f)$ serán empleados para denotar al dominio y a la imagen de la función f respectivamente. Si E es un conjunto cualquiera, $f[E]$ denotará la imagen directa de E bajo f. También debemos mencionar lo siguiente.

Definición 1.1. Sean X un conjunto y κ un cardinal.

- $[X]^{<\kappa}$ denotará a la colección de todos los subconjuntos de X de cardinalidad menor a κ.
- $[X]^{\kappa}$ denotará a la colección de todos los subconjuntos de X de cardinalidad igual a κ.
- $[X]^{\leqslant\kappa}$ denotará a la colección de todos los subconjuntos de X de cardinalidad menor o igual a κ.

Definición 1.2. Sean A y B conjuntos. Denotaremos por $\mathrm{Fn}(A, B)$ al conjunto de todas las funciones parciales finitas con dominio A y contradominio B, es decir,

$$\mathrm{Fn}(A, B) = \{p \subseteq A \times B : p \text{ es función y } |p| < \omega\}.$$

Definición 1.3. Sean A y B conjuntos. Denotaremos por ${}^{A}B$ al conjunto de todas las funciones con dominio A y contradominio B. Además, si κ es un cardinal, ${}^{<\kappa}A = \bigcup_{\beta\in\kappa} {}^{\beta}A$.

En particular, ${}^{\omega}\omega$ es la colección de todas las funciones de los números naturales en los números naturales y ${}^{\omega}2$ es el conjunto de todas las funciones de ω en el ordinal $2 = \{0, 1\}$.

Definición 1.4. Sea A un conjunto no vacío. Para cada $n \in \omega$ definimos la función *proyección en la n-ésima coordenada*, $\pi_n : {}^{\omega}A \to A$, *por* $\pi_n(f) = f(n)$.

1.2 Categoría

En esta sección hacemos mención de resultados de categoría que son relevantes al trabajo. Todos los términos que no sean definidos explícitamente aquí deberán ser entendidos tal y como aparecen en [10], libro que será nuestra referencia básica para temas de topología. Presentaremos las definiciones para espacios topológicos en general pero en el texto nos enfocaremos en la recta real $\mathbb{R}$ como espacio topológico con la topología usual (denotada por $\tau_{\mathbb{R}}$, la topología que tiene por base a la colección de todos los intervalos abiertos).

Dados un espacio topológico X y $E \subseteq X$, fijaremos la siguiente notación:

- τ_X representará a la topología de X.
- $\tau_X^+ := \tau_X \setminus \{\emptyset\}$.
- $\operatorname{int} E$ representará al interior de E en X si no hay lugar a confusión, en caso contrario usaremos $\operatorname{int}_X E$.
- $\overline{E}$ representará a la cerradura de E en X si no hay lugar a confusión, en caso contrario usaremos $\operatorname{cl}_X E$.

Definición 1.5. Sea X un espacio topológico.

1. Diremos que un subconjunto A de X es *denso en ninguna parte* si $\operatorname{int} \overline{A} = \emptyset$.
2. Diremos que un subconjunto B de X es *magro* si existe una familia $\{B_n : n \in \omega\}$ de subconjuntos densos en ninguna parte de X tal que $B = \bigcup_{n\in\omega} B_n$.

Observe que todo conjunto denso en ninguna parte B de X es magro ya que $B = \bigcup_{n\in\omega} B_n$ donde $B_n = B$ para toda $n \in \omega$.

La demostración del siguiente resultado puede ser consultada a detalle en [3, proposición 2.30(3), p. 58].

Proposición 1.6. *Sean X un espacio topológico y $E \subseteq X$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *E es denso en ninguna parte en X.*
2. *Para cada $U \in \tau_X^+$ existe $V \in \tau_X^+$ de tal modo que $V \subseteq U \setminus E$.*
3. *$X \setminus E$ contiene un abierto denso de X.*

Proposición 1.7. *Sea X un espacio topológico y sean E, G y F subconjuntos de X tales que E y G son densos en ninguna parte en X. Entonces se cumple lo siguiente:*

1. *$\emptyset$ es denso en ninguna parte en X,*
2. *si $F \subseteq E$, entonces F es denso en ninguna parte en X,*
3. *$E \cup G$ es denso en ninguna parte en X y*
4. *la unión de una cantidad finita de densos en ninguna parte en X es densa en ninguna parte en X.*

Demostración. Como $\operatorname{int}\overline{\emptyset} = \emptyset$, el inciso (1) es cierto. Con respecto a (2), basta recordar que tanto el interior como la cerradura son operadores monótonos.

Ahora, para probar (3) emplearemos el inciso (2) de la proposición anterior. Sea $O \in \tau_X^+$. Como E es denso en ninguna parte, existe $U \in \tau_X^+$ con $U \subseteq O \setminus E$. Del mismo modo, existe $V \in \tau_X^+$ de tal suerte que $V \subseteq U \setminus G$. En resumen, $V \subseteq O \setminus (E \cup G)$.

Claramente, (4) se sigue de (3). □

Lema 1.8. *Sean Y un espacio topológico y Z un subespacio denso en Y. Se cumplen los siguientes enunciados.*

1. *Si E es denso en ninguna parte en Z, entonces E es denso en ninguna parte en Y.*

2. *Si L es denso en ninguna parte en Y, entonces $L \cap Z$ es denso en ninguna parte en Z.*

Demostración. Procedamos por contrapositiva en ambos casos.

Sea $E \subseteq Z$. Supongamos que E no es denso en ninguna parte en Y, luego, $U = \operatorname{int}_Y \operatorname{cl}_Y E$ es no vacío y así $U \in \tau_Y^+$. Como Z es denso, $\operatorname{cl}_Y Z = Y$, lo cual implica que $U \subseteq \operatorname{cl}_Y E$. Lo anterior da lugar a $\emptyset \neq U \cap Z \subseteq (\operatorname{cl}_Y E) \cap Z = \operatorname{cl}_Y E$; en conclusión, E no es denso en ninguna parte en Z.

Sea $L \subseteq Y$ de tal suerte que $L \cap Z$ no es denso en ninguna parte en Z. Por definición, existe $V \in \tau_Y^+$ tal que $V \cap Z \subseteq \operatorname{cl}_Z(L \cap Z) \subseteq \operatorname{cl}_Y L$. Dado que Z es subconjunto denso de Y, sabemos que $\operatorname{cl}_Y(V \cap Z) = \operatorname{cl}_Y V$. Por propiedades básicas del operador cerradura deducimos que $V \cap Z \subseteq \operatorname{cl}_Y L$ implica $\operatorname{cl}_Y(V \cap Z) \subseteq \operatorname{cl}_Y L$. En resumen, $V \subseteq \operatorname{cl}_Y V \subseteq \operatorname{cl}_Y L$, es decir, L no es denso en ninguna parte en Y. $\square$

La demostración del resultado que presentamos a continuación puede ser consultada a detalle en [9, sección 2.1].

Proposición 1.9. *Los siguientes enunciados son equivalentes para cualquier espacio topológico X.*

1. *Ningún $U \in \tau_X^+$ es magro en X.*
2. *El complemento de cualquier magro en X es denso en X.*
3. *La intersección de cualquier familia numerable de abiertos densos en X es densa en X.*

Definición 1.10. Sea X un espacio topológico. Diremos que X es un *espacio de Baire* si satisface cualquiera de las condiciones en la proposición anterior.

El Teorema de Categoría de Baire (ver teorema siguiente) es de gran relevancia por sus diversas aplicaciones en la topología y en el análisis, éstas son el tema central de [15] y [2]; el lector podrá consultar la demostración en [2, Teoremas 1.7.1 y 1.7.2, pp. 39-41]

Teorema 1.11 (Teorema de Categoría de Baire)**.** *Sea X un espacio topológico. Cada una de las siguientes condiciones implica que X es un espacio de Baire.*

1. *X es completamente metrizable.*

2. *X es localmente compacto y de Hausdorff.*

Ejemplo 1.12. *Una aplicación importante del Teorema de Categoría de Baire es que $\mathbb{R}$ no es magro en sí mismo por ser un espacio completamente metrizable.*

Definición 1.13. $\mathcal{M}$ denotará a la familia de conjuntos magros de $\mathbb{R}$. Además, si X es un espacio topológico, $\mathcal{M}(X)$ se usará para representar a la familia de todos los subconjuntos magros de X.

Lema 1.14. *Si X es un espacio topológico, los enunciados siguientes son ciertos.*

1. *$\emptyset \in \mathcal{M}(X)$; cuando X es de Baire, se sigue que $X \notin \mathcal{M}(X)$,*

2. *si $\mathcal{S} \in [\mathcal{M}(X)]^{\leqslant\omega}$, entonces $\bigcup \mathcal{S} \in \mathcal{M}(X)$ y*

3. *si $E \in \mathcal{M}(X)$ y $F \subseteq E$, entonces $F \in \mathcal{M}(X)$.*

Demostración. En vista de la proposición 1.9 y del hecho de que $X \in \tau_X^+$, tenemos que $X \notin \mathcal{M}(X)$ en el caso en que X es de Baire. Por otro lado, la proposición 1.7(1) implica que $\emptyset$ es magro en X.

Para cada $E \in \mathcal{S}$ sea $\mathcal{S}_E$ una familia numerable de subconjuntos densos en ninguna parte de X con $E = \bigcup \mathcal{S}_E$. Luego, $\bigcup\{\mathcal{S}_E : E \in \mathcal{S}\}$ es una familia numerable de densos en ninguna parte cuya unión es igual a $\bigcup \mathcal{S}$.

Como $E \in \mathcal{M}(X)$, existe $\mathcal{S}_E$, una familia numerable de subconjuntos densos en ninguna parte de X cuya unión es E. En vista de la proposición 1.7(2) y la contención $F \subseteq E$, la familia numerable $\mathcal{S}_F = \{W \cap F : W \in \mathcal{S}_E\}$ consta de subconjuntos densos en ninguna parte de X y cumple que $\bigcup \mathcal{S}_F = F$. Por lo tanto $F \in \mathcal{M}(X)$. $\square$

1.3 Teoría de la Medida

En esta sección hacemos mención de resultados de Teoría de la Medida que son relevantes al texto.

Para esta sección utilizaremos como texto base a [5] y todos los términos que no sean definidos explícitamente aquí deberán entenderse tal y como aparecen en dicho libro.

Para cada intervalo I de $\mathbb{R}$ usaremos el símbolo $\ell(I)$ para denotar su longitud. De este modo, si I es un intervalo acotado en $\mathbb{R}$, entonces $\ell(I) = \sup I - \inf I$ y en caso contrario, $\ell(I) = \infty$.

Sea E un subconjunto de $\mathbb{R}$. La *medida exterior de Lebesgue* de E, $\mu^*(E)$, será el ínfimo de todos los números de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} \ell(I_n)$, donde $\{I_n\}_{n\in\omega}$ es una familia de intervalos que cubre a E. La *medida interior de Lebesgue* de E, $\mu_*(E)$, será el supremo de todos los números de la forma $\mu^*(F)$, donde F es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$ con $F \subseteq E$.

Diremos que $E \subseteq \mathbb{R}$ es *Lebesgue medible* si se cumple que $\mu^*(E) = \mu_*(E)$. La colección de los subconjuntos Lebesgue medibles de $\mathbb{R}$ la denotaremos por $\mathcal{L}$. La función $\mu^* \restriction \mathcal{L}$ es la medida de Lebesgue y será denotada por μ.

En particular, si $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo entonces se tiene que $\mu(I) = \ell(I)$.

Teorema 1.15. *$\mathcal{L}$ es una σ-algebra en $\mathbb{R}$, es decir:*

- $\emptyset \in \mathcal{L}, \mathbb{R} \in \mathcal{L}$;
- *$\mathcal{L}$ es cerrada bajo uniones numerables: si $\mathcal{S} \in [\mathcal{L}]^{\leqslant\omega}$, entonces $\bigcup \mathcal{S} \in \mathcal{L}$ y*
- *$\mathcal{L}$ es cerrada bajo complementos: si $E \in \mathcal{L}$, entonces $\mathbb{R} \setminus E \in \mathcal{L}$.*

Además, μ es una medida en $\mathcal{L}$, esto es, $\mu(\emptyset) = 0$ y si $\{E_i\}_{i\in\omega} \subseteq \mathcal{L}$ es ajena por pares, entonces $\mu(\bigcup_{i\in\omega} E_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(E_i)$.

Definición 1.16. Diremos que $E \subseteq \mathbb{R}$ es *nulo* siempre que $\mu(E) = 0$ o, equivalentemente, si para todo $\epsilon > 0$ existe una familia de intervalos $\{I_n\}_{n\in\omega}$ tal que $E \subseteq \bigcup_{n\in\omega} I_n$ y $\sum_{i=0}^{\infty} \mu(I_n) < \epsilon$.

Definición 1.17. $\mathcal{N}$ denotará a la familia de conjuntos nulos de $\mathbb{R}$. Además si $\mathcal{S}$ es una σ-álgebra para el conjunto X y λ es una medida en $\mathcal{S}$, entonces $\mathcal{N}(X, \mathcal{S}, \lambda)$ (o simplemente $\mathcal{N}(X)$ si el espacio de medida queda claro por el contexto) denotará a la colección $\{E \in \mathcal{S} : \lambda(E) = 0\}$.

Lema 1.18. *Los enunciados siguientes son ciertos.*

1. $\mathbb{R} \notin \mathcal{N}$, $\emptyset \in \mathcal{N}$,

2. si $\mathcal{A} \in [\mathcal{N}]^{\leqslant\omega}$, entonces $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{N}$ y

3. si $E \in \mathcal{N}$ y $F \subseteq E$, entonces $F \in \mathcal{N}$.

Demostración. Es un resultado bien conocido que $\mu(\mathbb{R}) = \infty$.

Si $\mathcal{A} = \{A_n : n \in \omega\}$ es un subconjunto de $\mathcal{N}$, entonces $0 \leqslant \mu(\bigcup \mathcal{A}) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) = 0$. Por lo tanto $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{N}$.

El último inciso se sigue de la monotonía de la medida. □

1.4 Ideales

Definición 1.19. Sean X un conjunto y $\mathcal{I} \subseteq \wp(X)$. Diremos que $\mathcal{I}$ es un *ideal* de X si cumple lo siguiente:

1. $\emptyset \in \mathcal{I}$, $X \notin \mathcal{I}$;

2. si $E \in \mathcal{I}$ y $F \subseteq E$, entonces $F \in \mathcal{I}$;

3. si $E, F \in \mathcal{I}$, entonces $E \cup F \in \mathcal{I}$.

Si, adicionalmente, $\mathcal{I}$ es cerrado bajo uniones numerables (es decir, $\bigcup \mathcal{S} \in \mathcal{I}$ siempre que $\mathcal{S} \in [\mathcal{I}]^{\leqslant\omega}$), entonces $\mathcal{I}$ será llamado *σ-ideal. Por otro lado, diremos que el ideal $\mathcal{I}$ cubre a X siempre que $X \subseteq \bigcup \mathcal{I}$.*

Ejemplo 1.20. *Si X no es numerable, entonces $[X]^{\leqslant\omega}$ es un σ-ideal en X.*

Teorema 1.21. *Los conjuntos $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son σ-ideales en $\mathbb{R}$.*

Demostración. Se sigue directamente de los lemas 1.14 y 1.18. □

1.5 Relaciones de Galois-Tukey

Recordemos que si R es una relación binaria, entonces $\text{dom}(R) = \{x : \exists y\ ((x, y) \in R)\}$.

Una tripleta $\mathbb{A} = (A_-, A_+, A)$ que cumpla $A \subseteq A_- \times A_+$ y $\text{dom}(A) = A_-$ será llamada *relación de Galois-Tukey.* A_- será llamado *conjunto de retos* de $\mathbb{A}$ y A_+ *conjunto de respuestas* de $\mathbb{A}$. A la propiedad $(x, y) \in A$ la abreviaremos como $x\ A\ y$ y se deberá leer: *la respuesta y satisface el reto x.*

Además, diremos que $S \subseteq A_+$ es *completo* en $\mathbb{A}$ si para toda $x \in A_-$ existe $y \in S$ tal que $x \ A \ y$. Note que la condición $\mathrm{dom}(A) = A_-$ implica que A_+ es un subconjunto completo en $\mathbb{A}$. De esta manera, la *norma* de $\mathbb{A}$, $||\mathbb{A}||$, es la menor cardinalidad de un conjunto completo en $\mathbb{A}$.

A continuación presentamos varios ejemplos de relaciones de Galois-Tukey. Éstas serán empleadas extensivamente a lo largo del trabajo.

Definición 1.22. Sean $f, g \in {}^{\omega}\omega$. Diremos que

1. $f \leqslant^* g$ si el conjunto $\{n \in \omega : f(n) > g(n)\}$ es finito.

2. $g \ngeqslant^* f$ si el conjunto $\{n \in \omega : f(n) > g(n)\}$ es infinito.

Ejemplo 1.23. *Sea $\mathbb{D} = ({}^{\omega}\omega, {}^{\omega}\omega, \leqslant^*)$. El hecho de que $f \leqslant^* f$ para cualquier $f \in {}^{\omega}\omega$ nos garantiza que $\mathbb{D}$ es una relación de Galois-Tukey. Ahora, por definición, $S \subseteq {}^{\omega}\omega$ es completo en $\mathbb{D}$ si y sólo si para toda $f \in {}^{\omega}\omega$ existe $g \in S$ tal que $f \leqslant^* g$, es decir, si S es un subconjunto dominante de ${}^{\omega}\omega$. Por lo tanto la norma de $\mathbb{D}$ es el número de dominancia: $\mathfrak{d} = ||\mathbb{D}||$.*

Definición 1.24. Sea $\mathbb{A} = (A_-, A_+, A)$ una relación de Galois-Tukey. Definimos el *dual* de $\mathbb{A}$ como la tripleta $\mathbb{A}^{\perp} = (A_+, A_-, A^{\perp})$, donde $A^{\perp} \subseteq A_+ \times A_-$ está definida mediante la fórmula $(x, y) \in A^{\perp}$ si y sólo si $(y, x) \notin A$.

En vista de la definición se concluye que el doble dual de una relación de Galois-Tukey nos devuelve la relación de Galois-Tukey original. Mostremos que, en general, el dual de una relación de Galois-Tukey no es necesariamente una relación de Galois-Tukey.

Ejemplo 1.25. *Sea A un conjunto no vacío. Trivialmente la tripleta $\mathbb{A} = (A, A, B)$, con $B = A \times A$, es una relación de Galois-Tukey, mientras que su dual, $\mathbb{A}^{\perp}$, no lo es, debido a que $\mathrm{dom}(B^{\perp}) = \mathrm{dom}(\emptyset) = \emptyset \neq A$.*

Ejemplo 1.26. *Si $\mathbb{D}$ es como en el ejemplo 1.23, entonces $\mathbb{D}^{\perp} = ({}^{\omega}\omega, {}^{\omega}\omega, \ngeqslant^*)$. Por otro lado, si $g \in {}^{\omega}\omega$, entonces $g \ngeqslant^* g + 1$, por lo que $\mathrm{dom}(\ngeqslant) = {}^{\omega}\omega$ y así, $\mathbb{D}^{\perp}$ es una relación de Galois-Tukey. Ahora, S es completo en $\mathbb{D}^{\perp}$ si y sólo si para toda $f \in {}^{\omega}\omega$ existe $g \in S$ tal que $f \ngeqslant^* g$, es decir, si S es no acotado en ${}^{\omega}\omega$. Por lo tanto la norma de $\mathbb{D}^{\perp}$ es el número de acotamiento: $\mathfrak{b} = ||\mathbb{D}^{\perp}||$.*

Definición 1.27. Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre X con $\bigcup \mathcal{I} = X$. Definimos las siguientes tripletas:

- $\mathrm{Cov}(\mathcal{I}) = (X, \mathcal{I}, \in)$ y
- $\mathrm{Cof}(\mathcal{I}) = (\mathcal{I}, \mathcal{I}, \subseteq)$.

Proposición 1.28. *Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre X con $\bigcup \mathcal{I} = X$.*

1. *Las tripletas* $\mathrm{Cov}(\mathcal{I})$ *y* $\mathrm{Cof}(\mathcal{I})$ *son relaciones de Galois-Tukey.*
2. *Los duales* $\mathrm{Cov}(\mathcal{I})^{\perp}$ *y* $\mathrm{Cof}(\mathcal{I})^{\perp}$ *son relaciones de Galois-Tukey.*

Demostración. Sea $x \in X$. Por hipótesis sabemos que $\bigcup \mathcal{I} = X$, luego, existe $I \in \mathcal{I}$ tal que $x \in I$. Por lo tanto $\mathrm{Cov}(\mathcal{I})$ es una relación de Galois-Tukey.

El hecho de que $\mathrm{Cof}(\mathcal{I})$ es una relación de Galois-Tukey se sigue directamente de la reflexividad de la contención.

Notemos que $\mathrm{Cov}(\mathcal{I})^{\perp} = (\mathcal{I}, X, \in^{\perp})$ y $\mathrm{Cof}(\mathcal{I})^{\perp} = (\mathcal{I}, \mathcal{I}, \subseteq^{\perp})$. Más aún, si $I, J \in \mathcal{I}$ y $x \in X$, entonces $I \in^{\perp} x$ significa que $x \notin I$ y la condición $I \subseteq^{\perp} J$ equivale a que $J \not\subseteq I$.

Sea $I \in \mathcal{I}$. Por definición de ideal, $I \neq X$. Así existe $x \in X$ de tal suerte que $x \notin I$; además como $\bigcup \mathcal{I} = X$, existe $J \in \mathcal{I}$ tal que $x \in J$, luego $J \not\subseteq I$. Lo anterior implica que $\mathrm{Cov}(\mathcal{I})^{\perp}$ y $\mathrm{Cof}(\mathcal{I})^{\perp}$ son relaciones de Galois-Tukey. □

Definición 1.29. Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre X con $\bigcup \mathcal{I} = X$. Definimos los siguientes *coeficientes del ideal* $\mathcal{I}$:

- El *número de cubierta de* $\mathcal{I}$ es el cardinal $\mathrm{cov}(\mathcal{I}) = ||\mathrm{Cov}(\mathcal{I})||$.
- El *número de homogeneidad de* $\mathcal{I}$ es $\mathrm{non}(\mathcal{I}) = ||\mathrm{Cov}(\mathcal{I})^{\perp}||$.
- La *cofinalidad de* $\mathcal{I}$ es $\mathrm{cf}(\mathcal{I}) = ||\mathrm{Cof}(\mathcal{I})||$.
- La *aditividad de* $\mathcal{I}$ es $\mathrm{add}(\mathcal{I}) = ||\mathrm{Cof}(\mathcal{I})^{\perp}||$.

Proposición 1.30. *Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre X con $\bigcup \mathcal{I} = X$. Los siguientes enunciados son ciertos.*

1. $\mathrm{cov}(\mathcal{I}) = \min\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \subseteq \mathcal{I} \ \wedge \ \bigcup \mathcal{F} = X\}$.

2. $\mathrm{non}(\mathcal{I}) = \min\{|E| : E \subseteq X \ \wedge \ E \notin \mathcal{I}\}$.

3. $\mathrm{cf}(\mathcal{I}) = \min\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \subseteq \mathcal{I} \ \wedge \forall L \in \mathcal{I} \ \exists J \in \mathcal{F} \ (L \subseteq J)\}$.

4. $\mathrm{add}(\mathcal{I}) = \min\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \subseteq \mathcal{I} \ \wedge \ \bigcup \mathcal{F} \notin \mathcal{I}\}$.

Demostración. Sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{I}$ un conjunto completo de $\mathrm{Cov}(\mathcal{I})$. Por definición, para cada $y \in X$ existe $L \in \mathcal{F}$ tal que $y \in L$. Por lo tanto $\bigcup \mathcal{F} = X$. Y al revés también, esto es, si $\mathcal{F}$ es un subconjunto de $\mathcal{I}$, entonces la igualdad $X = \bigcup \mathcal{F}$ implica que $\mathcal{F}$ es completo en $\mathrm{Cov}(\mathcal{I})$.

Sea $E \subseteq X$ un conjunto completo de $\mathrm{Cov}(\mathcal{I})^{\perp}$. Por definición, para cada $L \in \mathcal{I}$ existe $y \in E$ tal que $y \notin L$. Por lo tanto $E \notin \mathcal{I}$. Ahora suponga que $E \subseteq X$ satisface $E \notin \mathcal{I}$. Como $\mathcal{I}$ es ideal, se sigue que las contenciones $E \subseteq L \subseteq X$ implican que $L \notin \mathcal{I}$. De este modo, para cualquier $L \in \mathcal{I}$ existe $y \in E$ con $y \notin L$.

Para probar (3) es suficiente con notar que, por definición, un conjunto $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{I}$ es completo en $\mathrm{Cof}(\mathcal{I})$ si y sólo si para cada $L \in \mathcal{I}$ existe $J \in \mathcal{F}$ tal que $L \subseteq J$.

Tomemos $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{I}$. Si $\mathcal{F}$ es completo en $\mathrm{Cof}(\mathcal{I})^{\perp}$ y tuviesemos $\bigcup \mathcal{F} \in \mathcal{I}$, se seguiría que existe $J \in \mathcal{F}$ con $J \nsubseteq \bigcup \mathcal{F}$, un absurdo. Así, $\bigcup \mathcal{F} \notin \mathcal{I}$. Y al revés también, si $\mathcal{F}$ no es completo en $\mathrm{Cof}(\mathcal{I})^{\perp}$, entonces existe $L \in \mathcal{I}$ de tal modo que $J \subseteq L$, para cualquier $J \in \mathcal{F}$, esto es, $\bigcup \mathcal{F} \subseteq L$ y, por ende, $\bigcup \mathcal{F} \in \mathcal{I}$. $\square$

Si $\mathcal{I}$ es un ideal en algún conjunto X y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{I}$, diremos que $\mathcal{F}$ es cofinal en $\mathcal{I}$ si para cualquier $L \in \mathcal{I}$ existe $J \in \mathcal{F}$ con $L \subseteq J$. De este modo, definimos $\mathrm{cf}(\mathcal{I})$, la cofinalidad de $\mathcal{I}$, como la mínima cardinalidad de un subconjunto cofinal de $\mathcal{I}$. Note que esta definición aplica aún si $\bigcup \mathcal{I} \neq X$.

Definición 1.31. Sean $\mathbb{A} = (A_-, A_+, A)$ y $\mathbb{B} = (B_-, B_+, B)$ un par de relaciones de Galois-Tukey. Diremos que la pareja $\psi = (\psi_-, \psi_+)$ es un *morfismo* de $\mathbb{A}$ en $\mathbb{B}$ si cumple lo siguiente:

1. ψ_- es una función de B_- en A_-,
2. ψ_+ es una función de A_+ en B_+ y
3. para cualesquiera $b \in B_-$ y $a \in A_+$, si $\psi_-(b) \ A \ a$, entonces $b \ B \ \psi_+(a)$.

Al morfismo ψ se le denotará $\psi : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$. A lo largo del texto usaremos diagramas para reunir información de los morfismos entre relaciones de Galois-Tukey con el siguiente formato.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A} \arrow[d] & A_- & A_+ \arrow[d, "\psi_+"] & A \\ \mathbb{B} & B_- \arrow[u, "\psi_-"'] & B_+ & B \end{tikzcd}$$

Además, dado un morfismo ψ de $\mathbb{A}$ en $\mathbb{B}$ se define $\psi^\perp = (\psi_+, \psi_-)$.

Argumentemos que si ψ es un morfismo de $\mathbb{A}$ en $\mathbb{B}$ y tanto $\mathbb{A}^\perp$ como $\mathbb{B}^\perp$ son relaciones de Galois-Tukey, entonces $\psi^\perp$ es un morfismo de $\mathbb{B}^\perp$ en $\mathbb{A}^\perp$. Claramente, los primeros dos incisos de la definición son satisfechos. Con respecto al tercero, supongamos que $a \in A_+$ y $b \in B_-$ satisfacen $\psi_+(a)\ B^\perp\ b$, esto es, $\neg(b\ B\ \psi_+(a))$. Ahora, como ψ es morfismo, deducimos que $\neg(\psi_+(a)\ A\ b)$, es decir, $b\ A^\perp\ \psi_-(a)$. El diagrama correspondiente al morfismo $\psi^\perp$ se muestra a continuación.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{B}^\perp \arrow[d] & B_+ & B_- \arrow[d, "\psi_-"] & B^\perp \\ \mathbb{A}^\perp & A_+ \arrow[u, "\psi_+"'] & A_- & A^\perp \end{tikzcd}$$

Proposición 1.32. *Sean $\mathbb{A} = (A_-, A_+, A)$ y $\mathbb{B} = (B_-, B_+, B)$ un par de relaciones de Galois-Tukey. Si existe un morfismo $\psi : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$, entonces $||\mathbb{B}|| \leqslant ||\mathbb{A}||$. Más aún, si $\mathbb{A}^\perp$ y $\mathbb{B}^\perp$ son relaciones de Galois-Tukey, entonces $||\mathbb{A}^\perp|| \leqslant ||\mathbb{B}^\perp||$.*

Demostración. Sea X un subconjunto completo de $\mathbb{A}$ de cardinalidad $||\mathbb{A}||$. Entonces definimos $Y = \psi_+[X]$. Así obtenemos que $|Y| \leqslant ||\mathbb{A}||$. Ahora demostraremos que Y es completo en $\mathbb{B}$.

Sea $b \in B_-$. Como X es completo en $\mathbb{A}$, sabemos que existe $a \in X \subseteq A_+$ tal que $\psi_-(b)\ A\ a$, y por la definición de morfismo tenemos que $b\ B\ \psi_+(a)$. Por lo tanto Y es completo, y por definición de norma, $||\mathbb{B}|| \leqslant |Y| \leqslant ||\mathbb{A}||$.

La desigualdad restante es consecuencia de que $\psi^\perp : \mathbb{B}^\perp \to \mathbb{A}^\perp$. $\square$

Proposición 1.33. *Sean $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$ un par de ideales en X con $\bigcup \mathcal{I} = X$. Si $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$, entonces $||\operatorname{Cov}(\mathcal{J})|| \leqslant ||\operatorname{Cov}(\mathcal{I})||$ y $\operatorname{non}(\mathcal{I}) \leqslant \operatorname{non}(\mathcal{J})$.*

Demostración. En vista de la proposición 1.32, basta construir un morfismo de $\mathrm{Cov}(\mathcal{I})$ en $\mathrm{Cov}(\mathcal{J})$. Definimos ψ_- como la función identidad en X y ψ_+ como la inclusión de $\mathcal{I}$ en $\mathcal{J}$. Trivialmente, $\psi = (\psi_-, \psi_+)$ es un morfismo. $\square$

Definición 1.34. Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ un par de relaciones de Galois-Tukey. Definimos la composición secuencial de $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$, denotada por $\mathbb{A}\,;\mathbb{B}$, como la tripleta $(A_- \times {}^{A_+}B_-, A_+ \times B_+, T)$ donde $T \subseteq (A_- \times {}^{A_+}B_-) \times (A_+ \times B_+)$ está definida como sigue: para cualesquiera $x \in A_-$, $f \in {}^{A_+}B_-$, $a \in A_+$ y $b \in B_+$,

$$(x, f)\ T\ (a, b) \text{ si y sólo si } x\ A\ a \text{ y } f(a)\ B\ b.$$

Por el resto de la presente sección emplearemos la letra T para denotar a la relación binaria correspondiente a la composición secuencial.

Proposición 1.35. *Si $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ son relaciones de Galois-Tukey, entonces su composición secuencial $\mathbb{A}\,;\mathbb{B}$ es una relación de Galois-Tukey.*

Demostración. Sea $(x, f) \in A_- \times {}^{A_+}B_-$. Como $\mathbb{A}$ es una relación de Galois-Tukey, existe $a \in A_+$ tal que $x\ A\ a$. Análogamente como $\mathbb{B}$ es una relación de Galois-Tukey y $f(a) \in B_-$, existe $b \in B_+$ de tal suerte que $f(a)\ B\ b$. Luego, $(x, f)\ T\ (a, b)$. $\square$

Proposición 1.36. *Si $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ son un par de relaciones de Galois Tukey con norma infinita y tales que sus duales son relaciones de Galois-Tukey, entonces los enunciados siguientes son ciertos.*

1. $\max\{||\mathbb{A}||, ||\mathbb{B}||\} = ||\mathbb{A}\,;\mathbb{B}||$.

2. $\min\{||\mathbb{A}||, ||\mathbb{B}||\} = ||(\mathbb{A}^\perp\,;\mathbb{B}^\perp)^\perp||$.

Demostración. Dado que las normas de $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ son infinitas, se sigue que $\max\{||\mathbb{A}||, ||\mathbb{B}||\} = ||\mathbb{A}|| \cdot ||\mathbb{B}||$ y tanto A_- y B_- son no vacíos. Verifiquemos la igualdad del inciso (1) de nuestra proposición corroborando ambas desigualdades.

Sean $A^* \subseteq A_+$ y $B^* \subseteq B_+$ conjuntos completos de cardinalidad mínima para $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$, respectivamente. Probaremos que $A^* \times B^* \subseteq A_+ \times B_+$ es un conjunto completo para

$\mathbb{A}\ ;\ \mathbb{B}$. Sea $(x, f) \in A_- \times {}^{A_+}B_-$. Como A^* es completo en $\mathbb{A}$, existe $a \in A^*$ de tal suerte que $x\ A\ a$. Por otro lado, la pertenencia $f(a) \in B_-$ y la completez de B^* nos garantizan que existe $b \in B^*$ tal que $f(a)\ B\ b$. En conclusión, $(x, f)\ T\ (a, b)$ y por ende, $||\mathbb{A}\ ;\ \mathbb{B}|| \leqslant \max\{||\mathbb{A}||, ||\mathbb{B}||\}$.

Sea $C \subseteq A_+ \times B_+$ un conjunto completo de cardinalidad mínima para $\mathbb{A};\mathbb{B}$. Como C es una relación binaria, tiene sentido considerar $C_1 = \operatorname{dom} C$ y $C_2 = \operatorname{img} C$. Afirmamos que C_1 y C_2 son conjuntos completos para $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$, respectivamente. Empecemos por probar nuestra afirmación para C_1: sea $x \in A_-$. En vista de que $B_- \neq \emptyset$, podemos fijar un punto $z \in B_-$. Definamos $f = A_+ \times \{z\}$ para obtener la pertenencia $(x, f) \in A_- \times {}^{A_+}B_-$. Dado que C es completo en $\mathbb{A};\mathbb{B}$, existe $(a, b) \in C$ tal que $(x, f)\ T\ (a, b)$; en particular, $x\ A\ a$ y de este modo, C_1 es completo. Con respecto a la completez de C_2: sea $w \in B_-$, arbitrario. El que $A_- \neq \emptyset$ implica que existe $y \in A_-$. Hagamos $g = A_+ \times \{w\}$ y notemos que (y, g) es un reto de $\mathbb{A};\mathbb{B}$, así que debe existir un $(c, d) \in C$ con $(y, g)\ T\ (c, d)$. Luego, $w\ B\ d$ (recuerde que por definición, $g(c) = w$) y en consecuencia, C_2 es completo.

Del párrafo previo se deduce que tanto $||\mathbb{A}||$ como $||\mathbb{B}||$ son menores o iguales a $||\mathbb{A};\mathbb{B}||$. En suma, $\max\{||\mathbb{A}||, \mathbb{B}||\} \leqslant ||\mathbb{A}\ ;\ \mathbb{B}||$, lo que da por concluida la prueba de (1).

Antes de iniciar el argumento para (2), notemos que

$$\mathbb{A}^\perp\ ;\ \mathbb{B}^\perp = \left(A_+ \times {}^{A_-}B_+, A_- \times B_-, T\right),$$

donde, para cualesquiera $(x, f) \in A_+ \times {}^{A_-}B_+$ y $(a, b) \in A_- \times B_-$ se tiene que

$$(x, f)\ T\ (a, b) \text{ si y sólo si } \neg(a\ A\ x) \text{ y } \neg(b\ B\ f(a)).$$

En consecuencia, $\left(\mathbb{A}^\perp\ ;\ \mathbb{B}^\perp\right)^\perp = \left(A_- \times B_-, A_+ \times {}^{A_-}B_+, T^\perp\right)$.

Para probar que $\min\{||\mathbb{A}||, ||\mathbb{B}||\} \leqslant ||(\mathbb{A}^\perp;\mathbb{B}^\perp)^\perp||$ supongamos que $C \subseteq A_+ \times {}^{A_-}B_+$ satisface $|C| < \min\{||\mathbb{A}||, ||\mathbb{B}||\}$ y mostremos que C no es completo.

Igual que antes, denotemos por C_1 y C_2 al dominio y a la imagen de C, respectivamente. La desigualdad $|C_1| \leqslant |C| < ||\mathbb{A}||$ nos dice que C_1 no es un subconjunto completo de $\mathbb{A}$, esto es, hay $a \in A_-$ de tal suerte que para cada $x \in C_1$ se da $\neg(a\ A\ x)$. Ahora definamos

$D = \{f(a) : f \in C_2\}$ y notemos que $|D| \leqslant |C_2| < ||\mathbb{B}||$. Luego, D no es un subconjunto completo de $\mathbb{B}$ y en consecuencia, existe $b \in B_-$ tal que para cualquier $f \in C_2$ se tiene $\neg(b\ B\ f(a))$. De todo lo anterior se deduce que si $(x, f) \in C$, entonces $\neg(a\ A\ x)$ y $\neg(b\ B\ f(a))$, esto es, $\neg((a,b)\ T^{\perp}\ (x,f))$; en otras palabras, C no tiene respuesta para el desafío (a, b) y así, no es completo.

Concentrémonos ahora en verificar la desigualdad restante. Para esto, suponga que $C \subseteq A_+ \times {}^{A_-}B_+$ y note que C es un subconjunto completo de $(\mathbb{A}^{\perp}\ ;\ \mathbb{B}^{\perp})^{\perp}$ si para cada $(a,b) \in A_- \times B_-$ existe $(x, f) \in C$ tal que $(a,b)\ T^{\perp}\ (x,f)$, esto es, $a\ A\ x$ ó $b\ B\ f(a)$.

Fijemos $y \in A_+$ y $z \in B_+$ (recuerde que los cardinales $\|\mathbb{A}\|$ y $\|\mathbb{B}\|$ son infinitos). Además, convengamos en que si $d \in B_+$, entonces $\underline{d} : A_- \to B_+$ será la función constante d.

Con la idea en mente de probar que $\|(\mathbb{A}^{\perp}\ ;\ \mathbb{B}^{\perp})^{\perp}\| \leqslant \|\mathbb{B}\|$, fijemos C_1, un subconjunto completo de $\mathbb{B}$, y hagamos $E = \{(y, \underline{d}) : d \in C_1\}$ para obtener $|E| \leqslant |C_1|$. Por otro lado, dado $(a,b) \in A_- \times B_-$, existe $d \in C_1$ con $b\ B\ d$; en otras palabras, $(y, \underline{d}) \in E$ y $b\ B\ \underline{d}(y)$. Resumiendo, E es un subconjunto completo de $(\mathbb{A}^{\perp}\ ;\ \mathbb{B}^{\perp})^{\perp}$.

Finalmente, la desigualdad $\|(\mathbb{A}^{\perp}\ ;\ \mathbb{B}^{\perp})^{\perp}\| \leqslant \|\mathbb{A}\|$ es consecuencia de lo siguiente: si C_0 es un subconjunto completo de $\mathbb{A}$ y $(a,b) \in A_- \times B_-$, entonces hay $x \in C_0$ con $a\ A\ x$; esto es, $C_0 \times \{\underline{z}\}$ es un subconjunto completo de $(\mathbb{A}^{\perp}\ ;\ \mathbb{B}^{\perp})^{\perp}$ que, obviamente, es equipotente a C_0. $\square$

1.6 Categoría en el espacio de Cantor

Emplearemos el símbolo $A =^* \emptyset$ para abreviar la frase A *es finito*. Del mismo modo, $A \neq^* \emptyset$ significará que A es infinito. Como estamos considerando a los números naturales como ordinales, se sigue que si $m, n \in \omega$, entonces $m \setminus n = \{k \in \omega : n \leqslant k < m\}$. Por esta razón, al conjunto $m \setminus n$ le llamaremos *intervalo en* ω.

Definición 1.37. Diremos que Π es una *partición de* ω *en intervalos* si Π es una familia ajena por pares de intervalos no vacíos en ω cuya unión es ω.

Si Π es una partición de ω en intervalos, la frase $\{I_n : n \in \omega\}$ *es una enumeracion adecuada de* Π significará que $\Pi = \{I_n : n \in \omega\}$ y que $\min I_{n+1} = \max I_n + 1$, para todo

$n \in \omega$.

Definición 1.38. La colección de todas las particiones de ω en intervalos será denotada por $\mathbb{P}_\omega$.

Dadas $\Pi_0, \Pi_1 \in \mathbb{P}_\omega$, diremos que Π_0 *domina a* Π_1 y usaremos cualquiera de los símbolos $\Pi_1 \lhd \Pi_0$ ó $\Pi_0 \rhd \Pi_1$ cuando

$$\{I \in \Pi_0 : \exists J \in \Pi_1 \ (J \subseteq I)\} \neq^* \emptyset.$$

Equivalentemente, si $\{I_n : n \in \omega\}$ y $\{J_n : n \in \omega\}$ son enumeraciones adecuadas de Π_0 y Π_1, respectivamente, entonces $\Pi_1 \lhd \Pi_0$ si y sólo si existe $m \in \omega$ de tal modo que para cada $k \in \omega \setminus m$ hay $l \in \omega$ tal que $J_l \subseteq I_k$.

Proposición 1.39. *Sea* $\mathbb{D}' = (\mathbb{P}_\omega, \mathbb{P}_\omega, \lhd)$. *Entonces* $\mathbb{D}'$ *y* $\mathbb{D}'^\perp$ *son relaciones de Galois-Tukey. Más aún,* $||\mathbb{D}'|| = \mathfrak{d}$ *y* $||\mathbb{D}'^\perp|| = \mathfrak{b}$.

Demostración. Primero veamos que $\mathbb{D}'$ es una relación de Galois-Tukey: para toda $\Pi \in \mathbb{P}_\omega$ se tiene que $\Pi \lhd \Pi$.

Ahora mostremos que $\mathbb{D}'^\perp$ también es una relación de Galois-Tukey. Sean $\Pi_0 \in \mathbb{P}_\omega$ y $\{I_n : n \in \omega\}$ una enumeración adecuada de Π_0. Para cada $n \in \omega$ hagamos $J_n = I_{2n} \cup I_{2n+1}$ y notemos que $\Pi_1 = \{J_n : n \in \omega\} \in \mathbb{P}_\omega$; además, para cualquiera $n, m \in \omega$, $J_m \not\subseteq I_n$ y así, $\Pi_0 \not\rhd \Pi_1$.

A continuación, emplearemos el teorema 1.32 para deducir las iguadaldes enunciadas en nuestra proposición.

Empecemos por describir cómo hallar un morfismo de $\mathbb{D}'$ en $\mathbb{D}$.

Definamos $\psi_+ : \mathbb{P}_\omega \to {}^\omega\omega$ mediante el algoritmo siguiente: dada $\Pi \in \mathbb{P}_\omega$, sea $\{I_n : n \in \omega\}$ una enumeración adecuada de Π y denotemos por $\psi_+(\Pi)$ a la función de ω en ω cuya regla de correspondencia es (note que $n \leqslant \min I_n$, para cualquier $n \in \omega$)

$$\psi_+(\Pi)(m) = \min I_{n+2}, \text{ siempre que } m \in I_n.$$

Ahora, si $g \in {}^{\omega}\omega$, sea $\overline{g} : \omega \to \omega$ dada por $\overline{g}(0) = 0$ y, para cada $n \in \omega$,

$$\overline{g}(n+1) = \overline{g}(n) + 2 + \max\{g(m) : m \leqslant \overline{g}(n)\}.$$

De esta manera, para cualquier $n \in \omega$ se sigue que el intervalo $[\overline{g}(n), \overline{g}(n+1)) \subseteq \omega$ es no vacío y

$(*)$ cuando $m \in \omega$, la desigualdad $m \leqslant \overline{g}(n)$ implica que $g(m) \leqslant \overline{g}(n+1)$.

Hagamos $\psi_{-}(g) = \{[\overline{g}(n), \overline{g}(n+1)) : n \in \omega\}$ y observemos que $\psi_{-}(g) \in \mathbb{P}_{\omega}$.

Afirmamos que $\psi = (\psi_{-}, \psi_{+})$ es un morfismo de $\mathbb{D}'$ en $\mathbb{D}$. Sean $\Pi \in \mathbb{P}_{\omega}$ y $g \in {}^{\omega}\omega$ tales que $\psi_{-}(g) \triangleleft \Pi$. Fijemos $\{I_n : n \in \omega\}$, la enumeración adecuada de Π, y notemos que la condición $\Psi_{-}(g) \triangleleft \Pi$ implica que para algún $p \in \omega$ se tiene que si $k \in \omega \setminus p$, entonces existe $l \in \omega$ con $[\overline{g}(l), \overline{g}(l+1)) \subseteq I_k$. En aras de verificar que $g \leqslant^{*} \psi_{+}(\Pi)$ mostraremos que si $n = \min I_p$ y $m \in \omega \setminus n$, se sigue que $g(m) \leqslant \psi_{+}(\Pi)(m)$. Como $\Pi \in \mathbb{P}_{\omega}$, hay $k \in \omega$ con $m \in I_k$; más aún, la desigualdad $m \geqslant n$ nos garantiza que $k \geqslant p$. Dado que $k+1 \geqslant p$, podemos hallar $l \in \omega$ con $[\overline{g}(l), \overline{g}(l+1)) \subseteq I_{k+|}$. Luego, $m < \overline{g}(l)$ y por $(*)$,

$$g(m) \leqslant \overline{g}(l+1) \leqslant \max I_{k+1} + 1 = \min I_{k+2} = \psi_{+}(\Pi)(m).$$

De hecho en el párrafo previo se deduce que $\mathfrak{d} = ||\mathbb{D}|| \leqslant ||\mathbb{D}'||$ y $||\mathbb{D}'^{\perp}|| \leqslant ||\mathbb{D}^{\perp}|| = \mathfrak{b}$. Las desigualdades restantes serán consecuencia de la verificación de que $\psi^{\perp} = (\psi_{+}, \psi_{-})$ es un morfismo de $\mathbb{D}'$ en $\mathbb{D}$.

Sean $\Pi \in \mathbb{P}_{\omega}$ y $g \in {}^{\omega}\omega$ con $\psi_{+}(\Pi) \leqslant^{*} g$, es decir, hay $n \in \omega$ de tal forma que $\psi_{+}(\Pi)(m) \leqslant g(m))$, siempre que $m \in \omega \setminus n$. Supongamos que $\{I_s : s \in \omega\}$ es la enumeración adecuada de Π y probemos que para algún $p \in \omega$ se satisface que si $k \in \omega \setminus p$, entonces hay $l \in \omega$ con $I_l \subseteq [\overline{g}(k), \overline{g}(k+1))$. Para empezar, el que $\overline{g}$ sea estrictamente creciente implica que existe $p \in \omega$ con $k \leqslant \overline{g}(p)$. Ahora, si $k \in \omega \setminus p$, se sigue que $n \leqslant \overline{g}(p) \leqslant \overline{g}(k)$ y, en consecuencia, $\psi_{+}(\Pi)(\overline{g}(k)) \leqslant g(\overline{g}(k))$. Por otro lado, la desigualdad $\overline{g}(k) \leqslant \overline{g}(k)$ y $(*)$ nos dan $g(\overline{g}(k)) \leqslant \overline{g}(k+1)$. Luego,

$$\psi_+(\Pi)(\overline{g}(k)) \leqslant \overline{g}(k+1).$$

Tomemos $m \in \omega$ con $\overline{g}(k) \in I_m$ y notemos que, por definición,

$$\psi_+(\Pi)(\overline{g}(k)) = \min I_{m+2} > \max I_{m+1}.$$

Así, $\max I_{m+1} < \overline{g}(k+1)$. Además, la pertenencia $\overline{g}(k) \in I_m$ nos produce $\overline{g}(k) < \min I_{m+1}$. En resumen, $I_{m+1} \subseteq [\overline{g}(k), \overline{g}(k+1))$ y esto finaliza la prueba. $\square$

1.7 Topología en ${}^{\omega}A$

Sea A un conjunto. Recuerde que la métrica discreta en A es la función $e : A \times A \to \mathbb{R}$ dada por $e(x, y) = 0$ si $x = y$ y $e(x, y) = 1$ en otro caso. Ahora, cálculos rutinarios muestran que la función $\rho : {}^{\omega}A \times {}^{\omega}A \to \mathbb{R}$ definida mediante

$$\rho(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e(f(n), g(n))}{2^{n+1}}$$

es una métrica en ${}^{\omega}A$ acotada por 1.

A lo largo del texto, cuando hagamos referencia a ${}^{\omega}A$ visto como espacio topológico, lo pensaremos equipado con la topología generada por la métrica ρ del párrafo anterior.

Por otro lado, si $s \in {}^{<\omega}A$, entonces definimos $[s] := \{x \in {}^{\omega}A : s \subseteq x\}$. En lo que sigue, emplearemos en varias ocasiones el hecho de que la colección $\{[t] : t \in {}^{<\omega}A\}$ es una base para la topología de ${}^{\omega}A$, la prueba a detalle se puede consultar en [13, Proposición 4.1, p. 8]; en particular, la topología del espacio que resulta de multiplicar el espacio discreto A una cantidad infinita numerable de veces consigo mismo coincide con la generada por ρ.

Lema 1.40. *Si A es un conjunto con al menos dos elementos, entonces, para cualesquiera $s, t \in {}^{<\omega}A$ se tiene que $[s] \subseteq [t]$ si y sólo si $t \subseteq s$.*

Demostración. Claramente, la contención $t \subseteq s$ implica que $[s] \subseteq [t]$. Con respecto a la implicación restante, la haremos por contrapuesta, esto es, supongamos que $t \nsubseteq s$. Tenemos dos posibilidades: $|t| \leqslant |s|$ ó $|s| < |t|$. En el primer caso, existe $i < |t|$ con $s(i) \neq t(i)$, así que la función

$$x = s \cup ((\omega \setminus |s|) \times \{s(i)\})$$

es un elemento de ${}^{\omega}A$ que satisface $x \in [s] \setminus [t]$, es decir, $[s] \nsubseteq [t]$. Ahora, cuando $|s| < |t|$, fijamos $a \in A \setminus \{t(|s|)\}$ para deducir que

$$y = s \cup ((\omega \setminus |s|) \times \{a\})$$

es un elemento de $[s]$ que no pertenece a $[t]$. $\square$

Proposición 1.41. *Si $X \in \{{}^{\omega}2, {}^{\omega}\omega\}$, entonces $\mathcal{M}(X)$ es un σ-ideal en X y $\bigcup \mathcal{M}(X) = X$.*

Demostración. Es sabido que ${}^{\omega}2$ es compacto y Hausdorff, por lo que es localmente compacto y Hausdorff. Luego, por el teorema 1.11 y por el lema 1.14 se obtiene que $\mathcal{M}({}^{\omega}2)$ es σ-ideal.

Por otro lado, la métrica discreta es completa y, en consecuencia, ${}^{\omega}\omega$ es un espacio completamente metrizable. Nuevamente, por el teorema 1.11 y el lema 1.14 tenemos que $\mathcal{M}({}^{\omega}\omega)$ es un σ-ideal.

Finalmente, note que si $A \in \{2, \omega\}$ y $s \in {}^{<\omega}A$, entonces el correspondiente conjunto básico $[s]$ es infinito. Luego, ni ${}^{\omega}2$ ni ${}^{\omega}\omega$ poseen puntos aislados. $\square$

Definición 1.42. Para cada $E \subseteq \omega$, χ_E representará a la función característica de E, esto es, $\chi_E : \omega \to 2$ está dada por $\chi_E(n) = 1$ si y sólo si $n \in E$.

En la prueba del lema de abajo emplearemos continuamente la notación siguiente: dada $x \in {}^{\omega}\omega$, $\widehat{x}$ es la función de ω en ω definida mediante

$$\widehat{x}(m) = m + \sum_{i=0}^{m} x(i).$$

Lema 1.43. *Si $h : {}^{\omega}\omega \to {}^{\omega}2$ está dada por*

$$h(x) = \chi_{\mathrm{img}(\widehat{x})},$$

entonces h es un encaje topológico con $\overline{\mathrm{img}(h)} = {}^{\omega}2$ *y* $|{}^{\omega}2 \setminus \mathrm{img}(h)| = \omega$.

Demostración. Comencemos nuestro argumento probando el enunciado siguiente.

Afirmación 1. Para cualesquiera $x \in {}^{\omega}\omega$ y $m \in \omega$,

$$\widehat{x}(m+1) = \widehat{x}(m) + x(m+1) + 1$$

$$x(m+1) = \widehat{x}(m+1) - \widehat{x}(m) - 1 \text{ y}$$

$$\widehat{x}(m) = \min\left(\mathrm{img}(\widehat{x}) \setminus \widehat{x}[m]\right)$$

En efecto, las primeras dos igualdades son consecuencia directa de la definición de $\widehat{x}$, mientras que la última es corolario del hecho de que $\widehat{x}$ es una función estrictamente creciente.

Afirmación 2. h es inyectiva.

Fijemos $x, y \in {}^{\omega}\omega$ con $h(x) = h(y)$, esto es, $\mathrm{img}(\widehat{x}) = \mathrm{img}(\widehat{y})$. Verifiquemos por inducción que $\widehat{x} = \widehat{y}$: si $m \in \omega$ satisface $\widehat{x} \restriction m = \widehat{y} \restriction m$, entonces, según la afirmación 1,

$$\widehat{x}(m) = \min\left(\mathrm{img}(\widehat{x}) \setminus \widehat{x}[m]\right) = \min\left(\mathrm{img}(\widehat{y}) \setminus \widehat{y}[m]\right) = \widehat{y}(m).$$

Ahora empleemos la afirmación 1 una vez más para obtener

$$x(m+1) = \widehat{x}(m+1) - \widehat{x}(m) - 1 = \widehat{y}(m+1) - \widehat{y}(m) - 1 = y(m+1)$$

y notemos que $x(0) = \widehat{x}(0) = \widehat{y}(0) = y(0)$. Así, $x = y$.

Convengamos en que para cualesquiera $A \in \{2, \omega\}$ y $s \in {}^{<\omega}A$,

$$[s]_A := \{x \in {}^{\omega}A : s \subseteq x\}.$$

De esta forma, la pertenencia $t \in {}^{<\omega}2$ implica que $[t]_2 \subseteq {}^{\omega}2$ y $[t]_\omega \subseteq {}^{\omega}\omega$.

Afirmación 3. h es continua.

Para cada $n \in \omega$ sea $\pi_n : {}^{\omega}2 \to 2$ la proyección en la n-ésima coordenada (ver definición 1.4). Entonces, sólo debemos probar que $\pi_n \circ h$ es continua. Para esto, tomemos $i \in 2$ y demostremos que $U = (\pi_n \circ h)^{-1}[\{i\}]$ es abierto en ${}^{\omega}\omega$.

Hagamos $m = n+1$ para obtener $n < \widehat{x}(m)$. Dado $x \in U$, mostremos que $[x \restriction (m+1)]_\omega \subseteq U$. Si $y \in {}^\omega\omega$ satisface $x \restriction (m+1) = y \restriction (m+1)$, se sigue que $\widehat{x} \restriction (m+1) = \widehat{y} \restriction (m+1)$ y, en particular, $\operatorname{img}(\widehat{x}) \cap \widehat{x}(m) = \operatorname{img}(\widehat{y}) \cap \widehat{x}(m)$; así,

$$(\pi_n \circ h)(y) = h(y)(n) = \chi_{\operatorname{img}(\widehat{y})}(n) = \chi_{\operatorname{img}(\widehat{x})}(n) = h(x)(n) = i,$$

esto es, $y \in U$.

Afirmación 4. $h : {}^\omega\omega \to \operatorname{img}(h)$ es abierta.

Fijemos $t \in {}^{<\omega}\omega$ y $f \in h[[t]_\omega]$. Así, existe $x \in {}^\omega\omega$ de tal modo que $t \subseteq x$ y $f = h(x)$. Bastará con verificar que si $m := \widehat{x}(|t|)$, entonces

$$\operatorname{img}(h) \cap [f \restriction m]_\omega \subseteq h[[t]_\omega].$$

Con esta idea en mente, sean $g \in {}^\omega 2$ y $y \in {}^\omega\omega$ tales que $g = h(y)$ y $g \restriction m = f \restriction m$. Entonces,

$$\{\widehat{x}(i) : i < |t|\} = m \cap \operatorname{img}(\widehat{x}) = m \cap f^{-1}\{1\} = m \cap g^{-1}\{1\} = m \cap \operatorname{img}(\widehat{y}).$$

Por otro lado, el que tanto $\widehat{x}$ como $\widehat{y}$ sean funciones estrictamente crecientes nos da $\widehat{x}(i) = \widehat{y}(i)$, para cada $i < |t|$. Empleemos ahora la afirmación 1 para deducir que $y \restriction |t| = x \restriction |t| = t$, esto es, $y \in [t]_\omega$ y en consecuencia, $g \in h[[t]_\omega]$.

Como corolario de las tres últimas afirmaciones obtenemos que $h : {}^\omega\omega \to \operatorname{img}(h)$ es un homeomorfismo.

Verifiquemos que $\operatorname{img}(h)$ es denso en ${}^\omega 2$: sea $t \in {}^{<\omega}2$ una función arbitraria. Hagamos $m := |t^{-1}\{1\}|$ y denotemos por $\{\ell_k : k < m\}$ a una enumeración estrictamente creciente de $t^{-1}\{1\}$, esto es, $t^{-1}\{1\} = \{\ell_k : k < m\}$ y además, $\ell_k < \ell_{k+1}$, siempre que $k+1 < m$. La función $x : \omega \to \omega$ dada por

$$x(n) = \begin{cases} \ell_0, & \text{si } n = 0 \\ \ell_n - \ell_{n-1} - 1, & \text{si } 1 \leqslant n < m \\ 0, & \text{si } m \leqslant n \end{cases}$$

satisface que, para cualquier $i < m$, $\widehat{x}(i) = \ell_i$; en consecuencia, $|t| \cap \operatorname{img}(\widehat{x}) = t^{-1}\{1\}$. Luego, $t \subseteq h(x)$, es decir, $h(x) \in [t]_2$.

En aras de comprobar que ${}^{\omega}2 \setminus \operatorname{img}(h)$ es infinito numerable probaremos que

$$\operatorname{img}(h) = \{\chi_E : E \in [\omega]^{\omega}\}.$$

En efecto, dado $E \in [\omega]^{\omega}$, fijemos $\{\ell_k : k < \omega\}$, una enumeración estrictamente creciente de E. De forma similar a como procedimos en el párrafo previo, la función $x : \omega \to \omega$ definida por

$$x(0) = \ell_0 \qquad \text{y} \qquad x(n+1) = \ell_{n+1} - \ell_n - 1$$

satisface que $\widehat{x}(n) = \ell_n$ para cualquier $n \in \omega$, esto es, $\operatorname{img}(\widehat{x}) = E$ y, por ende, $\chi_E = h(x)$. Con respecto a la contención restante, si $x \in {}^{\omega}\omega$, entonces $\operatorname{img}(\widehat{x}) \in [\omega]^{\omega}$. $\square$

La prueba del siguiente lema puede ser consultada a detalle en [13, Proposición 5.2, página 13].

Lema 1.44 (R.L. Baire)**.** *El conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ de números irracionales, como subespacio de $\mathbb{R}$, es homeomorfo a ${}^{\omega}\omega$.*

Lema 1.45. *Si X es un espacio topológico localmente compacto y Hausdorff, entonces para todo $U \in \tau_X^+$, $U \notin \mathcal{M}(X)$.*

Demostración. Sea $U \in \tau_X^*$. Como X es localmente compacto y Hausdorff, U es localmente compacto y de Hausdorff, por lo que U es de Baire. Supongamos que $U \in \mathcal{M}(X)$, luego $U = \bigcup_{n\in\omega} E_n$, donde para cada $n \in \omega$, E_n es denso en ninguna parte en X. Ahora, dado que $E_n \subseteq U$, se sigue que

$$\operatorname{int}_U \operatorname{cl}_U(E_n) = \operatorname{int}_U(U \cap \operatorname{cl}_X E_n) = \operatorname{int}_X(U \cap \operatorname{cl}_X E_n) \subseteq \operatorname{int}_X(\operatorname{cl}_X E_n) = \emptyset.$$

Por lo que para toda $n \in \omega$, E_n es denso en ninguna parte en U y así $U \in \mathcal{M}(U)$, lo cual contradice el inciso (1) de la proposición 1.9. $\square$

Lema 1.46. *Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ un encaje topológico tales que:*

(i) $Z = \operatorname{img}(f)$ *es denso en* Y *y*

(ii) $Y \setminus Z \in \mathcal{M}(Y)$.

Entonces:

1. $\mathcal{M}(Z) \subseteq \mathcal{M}(Y)$,

2. *para cualquier* $E \in \mathcal{M}(Y)$, $E \cap Z \in \mathcal{M}(Z)$ *y*

3. $\mathcal{M}(Y) = \{f[L] \cup E : L \in \mathcal{M}(X) \wedge E \subseteq Y \setminus Z\}$.

Demostración. Observemos que (1) y (2) son consecuencias directas del lema 1.8.

Sean $L \in \mathcal{M}(X)$ y $E \subseteq Y \setminus Z$. Como f es encaje topológico, se sigue que $f[L] \in \mathcal{M}(Z)$; luego, por (1), inferimos que $f[L] \in \mathcal{M}(Y)$. Además, gracias a (ii) y al lema 1.14, obtenemos que $E \in \mathcal{M}(Y)$ y $f[L] \cup E \in \mathcal{M}(Y)$.

Sea $K \in \mathcal{M}(Y)$. En vista de (2), $K \cap Z \in \mathcal{M}(Z)$ y en consecuencia, $f^{-1}[K] \in \mathcal{M}(X)$. Así, $K = (K \cap Z) \cup (K \setminus Z) = f[f^{-1}[K]] \cup (K \setminus Z)$. □

Suponga que E es un espacio topológico de Baire que carece de puntos aislados. De acuerdo al lema 1.14, $\mathcal{M}(E)$ es un σ-ideal. Por otro lado, si $x \in E$, el que x no sea aislado en E garantiza que $\{x\}$ es denso en ninguna parte y, por ende, $\{x\} \in \mathcal{M}(E)$; luego, $\bigcup \mathcal{M}(E) = E$. De este modo, todos los coeficientes de ideal presentados en la definición 1.29 tienen sentido para $\mathcal{M}(E)$.

Teorema 1.47. *Sean* X *y* Y *un par de espacios topológicos de Baire sin puntos aislados y* $f : X \to Y$ *un encaje topológico tales que:*

(i) $Z = \operatorname{img}(f)$ *es denso en* Y *y*

(ii) $Y \setminus Z \in \mathcal{M}(Y)$.

Entonces $\mathcal{M}(X)$ *y* $\mathcal{M}(Y)$ *tienen los mismos coeficientes de ideal, es decir,*

- $\operatorname{cov}(\mathcal{M}(X)) = \operatorname{cov}(\mathcal{M}(Y))$.

- $\operatorname{non}(\mathcal{M}(X)) = \operatorname{non}(\mathcal{M}(Y))$.

- $\operatorname{cf}(\mathcal{M}(X)) = \operatorname{cf}(\mathcal{M}(Y))$.

- $\operatorname{add}(\mathcal{M}(X)) = \operatorname{add}(\mathcal{M}(Y))$.

Demostración. Empecemos por hacer $Z = \mathrm{img}(f)$. Emplearemos la proposición 1.30 para verificar todas las igualdades enunciadas en el teorema.

Sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}(X)$ de cardinalidad $\mathrm{cov}(\mathcal{M}(X))$ tal que $X \subseteq \bigcup \mathcal{F}$. Definimos $\mathcal{G} = \{f[E] \cup (Y \setminus Z) : E \in \mathcal{F}\}$. Claramente $\bigcup \mathcal{G} = Y$. Por lema 1.46(3) obtenemos $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{M}(Y)$; luego, $\mathrm{cov}(\mathcal{M}(Y)) \leqslant |\mathcal{G}| \leqslant |\mathcal{F}| = \mathrm{cov}(\mathcal{M}(X))$. Para probar la desigualdad restante tomemos $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{M}(Y)$ de cardinalidad $\mathrm{cov}(\mathcal{M}(Y))$ tal que $Y \subseteq \bigcup \mathcal{G}$. Definimos $\mathcal{F} = \{f^{-1}[E] : E \in \mathcal{G}\}$. Trivialmente, $\bigcup \mathcal{F} = X$. Ahora, si $E \in \mathcal{G}$, entonces, según el lema 1.46(2), $E \cap Z \in \mathcal{M}(Z)$ y como $f^{-1}[E] = f^{-1}[E \cap Z]$, deducimos que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}(X)$; así, $\mathrm{cov}(\mathcal{M}(X)) \leqslant |\mathcal{F}| \leqslant |\mathcal{G}| \leqslant \mathrm{cov}(\mathcal{M}(Y))$.

Sea $E \subseteq X$ de cardinalidad mínima tal que $E \notin \mathcal{M}(X)$. Veamos que $f[E] \notin \mathcal{M}(Y)$. Si $f[E] \in \mathcal{M}(Y)$, por lema 1.46(2), $f[E] \in \mathcal{M}(Z)$, y como $f : X \to Z$ es un homeomorfismo, se sigue que $E \in \mathcal{M}(X)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\mathrm{non}(\mathcal{M}(Y)) \leqslant |f[E]| \leqslant |E| = \mathrm{non}(\mathcal{M}(X))$. Para verificar la desigualdad opuesta fijemos $E \subseteq X$ de cardinalidad mínima tal que $E \notin \mathcal{M}(Y)$. Supongamos, en busca de una contradicción, que $f^{-1}[E] \in \mathcal{M}(X)$. Como $E \setminus Z \subseteq Y \setminus Z$ y $E = (E \cap Z) \cup (E \setminus Z) = f[f^{-1}[E]] \cup (E \setminus Z)$, podemos aplicar el lema 1.46(3) para deducir que $E \in \mathcal{M}(Y)$, lo cual no es posible. En suma, la inyectividad de f nos da: $\mathrm{non}(\mathcal{M}(X)) \leqslant |f^{-1}[E]| \leqslant |E| \leqslant \mathrm{non}(\mathcal{M}(Y))$.

Sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}(Y)$ un subconjunto cofinal de cardinalidad mínima. Definimos $\mathcal{G} = \{f^{-1}[E] : E \in \mathcal{F}\}$. Para cada $E \in \mathcal{F}$ tenemos lo siguiente: $f^{-1}[E] = f^{-1}[E \cap Z]$ y $E \cap Z \in \mathcal{M}(Z)$ (lema 1.46(2)), así que $f^{-1}[E] \in \mathcal{M}(X)$. En otros términos, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{M}(X)$. Veamos que $\mathcal{G}$ es un subconjunto cofinal en $\mathcal{M}(X)$. Sea $L \in \mathcal{M}(X)$. Por el lema 1.46(1), $f[L] \in \mathcal{M}(Y)$, y así, existe $S \in \mathcal{F}$ con $f[L] \subseteq S$; luego, $L \subseteq f^{-1}[S] \in \mathcal{G}$, esto es, $\mathcal{G}$ es cofinal en $\mathcal{M}(X)$. Por lo tanto, $\mathrm{cf}(\mathcal{M}(X)) \leqslant |\mathcal{G}| \leqslant |\mathcal{F}| \leqslant \mathrm{cf}(\mathcal{M}(Y))$.

Probemos ahora la desigualdad contraria. Sea $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{M}(X)$ un subconjunto cofinal de cardinalidad mínima y definamos $\mathcal{F} = \{f[E] \cup (Y \setminus Z) : E \in \mathcal{G}\}$. Por el lema 1.46(3), $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}(Y)$. Verifiquemos que $\mathcal{F}$ es cofinal en $\mathcal{M}(Y)$. Sea $L \in \mathcal{M}(Y)$. Por el lema 1.46(2), $f^{-1}[L] \in \mathcal{M}(X)$; luego, existe $S \in \mathcal{G}$ de tal suerte que $f^{-1}[L] \subseteq S$ y aplicando f en ambos lados de la contención obtenemos $L \cap Z \subseteq f[S]$. Así, $L \subseteq f[S] \cup (Y \setminus Z)$. Por lo tanto, $\mathrm{cf}(\mathcal{M}(Y)) \leqslant |\mathcal{F}| \leqslant |\mathcal{G}| \leqslant \mathrm{cf}(\mathcal{M}(X))$.

Sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}(X)$ de cardinalidad mínima tal que $\bigcup \mathcal{F} \notin \mathcal{M}(X)$. Definimos $\mathcal{G} = \{f[E] :$

$E \in \mathcal{F}\}$, por el lema 1.46(3), $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{M}(Y)$. Comprobemos que $\bigcup \mathcal{G} \notin \mathcal{M}(Y)$. Si $\bigcup \mathcal{G} \in \mathcal{M}(Y)$, entonces, de acuerdo al lema 1.46(2), $f^{-1}[\bigcup \mathcal{G}] \in \mathcal{M}(X)$. Como f biyectiva obtenemos $f^{-1}[\bigcup \mathcal{G}] = \bigcup \mathcal{F}$, lo que lleva a una contradicción. Luego, $\operatorname{add}(\mathcal{M}(Y)) \leqslant |\mathcal{G}| \leqslant |\mathcal{F}| \leqslant \operatorname{add}(\mathcal{M}(X))$.

Finalicemos nuestro argumento fijando $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{M}(Y)$ de cardinalidad mínima tal que $\bigcup \mathcal{G} \notin \mathcal{M}(Y)$. Definimos $\mathcal{F} = \{f^{-1}[E] : E \in \mathcal{G}\}$, por el lema 1.46(2), $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}(X)$. Demostremos que $\bigcup \mathcal{F} \notin \mathcal{M}(X)$. Si $\bigcup \mathcal{F} \in \mathcal{M}(X)$, por el lema1.46(1), $f[\bigcup \mathcal{F}] \in \mathcal{M}(Y)$. Como $\bigcup \mathcal{G} \setminus Z \subseteq Y \setminus Z$, por el lema1.14, $\bigcup \mathcal{G} \setminus Z \in \mathcal{M}(Y)$. Por otro lado, por la naturaleza de f sabemos que $f[\bigcup \mathcal{F}] = \mathcal{G} \setminus Z$; luego, en vista del lema 1.46(3) concluimos que $\bigcup \mathcal{G} \in \mathcal{M}(Y)$, lo que es absurdo. Por lo tanto, $\operatorname{add}(\mathcal{M}(X)) \leqslant |\mathcal{F}| \leqslant |\mathcal{G}| \leqslant \operatorname{add}(\mathcal{M}(Y))$. □

Corolario 1.48. *Las siguientes igualdades son ciertas.*

1. $\operatorname{cov}(\mathcal{M}) = \operatorname{cov}(\mathcal{M}({}^{\omega}2)) = \operatorname{cov}(\mathcal{M}({}^{\omega}\omega))$.

2. $\operatorname{non}(\mathcal{M}) = \operatorname{non}(\mathcal{M}({}^{\omega}2)) = \operatorname{non}(\mathcal{M}({}^{\omega}\omega))$.

3. $\operatorname{cf}(\mathcal{M}) = \operatorname{cf}(\mathcal{M}({}^{\omega}2)) = \operatorname{cf}(\mathcal{M}({}^{\omega}\omega))$.

4. $\operatorname{add}(\mathcal{M}) = \operatorname{add}(\mathcal{M}({}^{\omega}2)) = \operatorname{add}(\mathcal{M}({}^{\omega}\omega))$.

Demostración. En vista de que los irracionales son un subespacio denso de $\mathbb{R}$ cuyo complemento es magro, el lema 1.44 y el resultado previo nos garantizan que los coeficientes de los ideales $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}({}^{\omega}\omega)$ coinciden entre sí. De modo similar, las igualdades entre los coeficientes de $\mathcal{M}({}^{\omega}\omega)$ y $\mathcal{M}$ es consecuencia de lema 1.43. □

CAPÍTULO 2: EL DIAGRAMA DE CICHOŃ

El Diagrama de Cichoń (ver figura 2.1) es una herramienta visual para plasmar las desigualdades de mayor relevancia entre los cardinales definidos en el capítulo previo. La interpretación deberá ser la siguiente: si κ y λ son cardinales del diagrama, entonces el símbolo $\kappa \to \lambda$ significa que $\kappa \leqslant \lambda$.

$$
\begin{tikzcd}
\operatorname{cov}(\mathcal{N}) \arrow[r] & \operatorname{non}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \operatorname{cf}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \operatorname{cf}(\mathcal{N}) \\
 & \mathfrak{b} \arrow[u] \arrow[r] & \mathfrak{d} \arrow[u] & \\
\operatorname{add}(\mathcal{N}) \arrow[uu] \arrow[r] & \operatorname{add}(\mathcal{M}) \arrow[u] \arrow[r] & \operatorname{cov}(\mathcal{M}) \arrow[u] \arrow[r] & \operatorname{non}(\mathcal{N}) \arrow[uu]
\end{tikzcd}
$$

Figura 2.1: Diagrama de Cichoń

Para el contenido de este capítulo se espera del lector su familiaridad con los resultados y la notación de la sección 1.6. De manera específica, la proposición 1.32. Adicionalmente enunciaremos el siguiente teorema, cuya prueba requiere fundamentos de teoría descriptiva de conjuntos, la cual escapa a los objetivos de esta tesis. La prueba puede consultarse a detalle en [1, Theorem 3.12, p. 501].

Teorema 2.1. $\operatorname{add}(\mathcal{N}) \leqslant \operatorname{add}(\mathcal{M})$ *y* $\operatorname{cf}(\mathcal{M}) \leqslant \operatorname{cf}(\mathcal{N})$.

Lema 2.2. *Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre X con $\bigcup \mathcal{I} = X$. Entonces se cumplen las siguientes desigualdades:*

1. $\operatorname{add}(\mathcal{I}) \leqslant \operatorname{cov}(\mathcal{I}) \leqslant \operatorname{cf}(\mathcal{I})$.

2. $\operatorname{add}(\mathcal{I}) \leqslant \operatorname{non}(\mathcal{I}) \leqslant \operatorname{cf}(\mathcal{I})$.

Demostración. Nuestra intención es producir un morfismo de la relación de Galois-Tukey $\mathrm{Cof}(\mathcal{I})$ en la relación $\mathrm{Cov}(\mathcal{I})$ (ver definición 1.32).

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Cof}(\mathcal{I}) \arrow[d] & \mathcal{I} & \mathcal{I} \arrow[d, "\psi_+"] & \subseteq \\
\mathrm{Cov}(\mathcal{I}) & X \arrow[u, "\psi_-"] & \mathcal{I} & \in
\end{tikzcd}
$$

Empecemos por notar lo siguiente: para cada $x \in X$ existe $I \in \mathcal{I}$ con $x \in I$ y, de este modo, $\{x\} \in \mathcal{I}$. De esta manera, definimos $\psi_- : X \to \mathcal{I}$ mediante $\psi_-(x) = \{x\}$ para toda $x \in X$ y $\psi_+ : \mathcal{I} \to \mathcal{I}$ mediante $\psi_+(E) = E$ para cada $E \in \mathcal{I}$. Hagamos $\psi = (\psi_-, \psi_+)$ y mostremos que $\psi : \mathrm{Cof}(\mathcal{I}) \to \mathrm{Cov}(\mathcal{I})$ es morfismo. En efecto, si $x \in X$ y $E \in \mathcal{I}$ satisfacen $\psi_-(x) \subseteq E$, entonces $x \in E$, es decir, $x \in \psi_+(E)$.

Por la proposición 1.32 obtenemos que

$$\mathrm{cov}(\mathcal{I}) = ||\,\mathrm{Cov}(\mathcal{I})|| \leqslant ||\,\mathrm{Cof}(\mathcal{I})|| = \mathrm{cf}(\mathcal{I})$$

y

$$\mathrm{add}(\mathcal{I}) = ||\,\mathrm{Cof}(\mathcal{I})^{\perp}|| \leqslant ||\,\mathrm{Cov}(\mathcal{I})^{\perp}|| = \mathrm{non}(\mathcal{I}).$$

Para las desigualdades restantes produciremos un morfismo entre $\mathrm{Cof}(\mathcal{I})$ y $\mathrm{Cov}(\mathcal{I})^{\perp}$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Cof}(\mathcal{I}) \arrow[d] & \mathcal{I} & \mathcal{I} \arrow[d, "\phi_+"] & \subseteq \\
\mathrm{Cov}(\mathcal{I})^{\perp} & \mathcal{I} \arrow[u, "\phi_-"] & X & \not\ni
\end{tikzcd}
$$

Fijemos $\phi_+ : \mathcal{I} \to X$, una función de elección para $\{X \setminus E : E \in \mathcal{I}\}$, y denotemos por $\phi_- : \mathcal{I} \to \mathcal{I}$ a la función identidad correspondiente. Si $E, F \in \mathcal{I}$ satisfacen $\phi_-(E) \subseteq F$, entonces $\phi_+(F) \in X \setminus F \subseteq X \setminus E$ y por ende, $E \not\ni \phi_+(F)$.

Análogamente, aplicando la proposición 1.32 obtenemos las siguientes desigualdades

$$\mathrm{non}(\mathcal{I}) = ||\,\mathrm{Cov}(\mathcal{I})^{\perp}|| \leqslant ||\,\mathrm{Cof}(\mathcal{I})|| = \mathrm{cf}(\mathcal{I})$$

y

$$\operatorname{add}(\mathcal{J}) = ||\operatorname{Cof}(\mathcal{J})^{\perp}|| \leqslant ||\operatorname{Cov}(\mathcal{J})|| = \operatorname{cov}(\mathcal{J}).$$

$\square$

Veamos otra aplicación de la proposición 1.32. Para esto, le pedimos al lector que recuerde las relaciones de Galois-Tukey dadas en los ejemplos 1.23 y 1.26.

Teorema 2.3. $\mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{d}$.

Demostración. Sea $\psi_- : {}^{\omega}\omega \to {}^{\omega}\omega$ la función dada por $\psi_-(h) = h + 1$. Por otro lado, denotemos por $\psi_+ : {}^{\omega}\omega \to {}^{\omega}\omega$ a la función identidad correspondiente.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{D} \arrow[d] & {}^{\omega}\omega & {}^{\omega}\omega \arrow[d, "\psi_+"] & \leqslant^* \\
\mathbb{D}^{\perp} & {}^{\omega}\omega \arrow[u, "\psi_-"] & {}^{\omega}\omega & \not\geqslant^*
\end{tikzcd}$$

Debido a la proposición 1.32 basta verificar que $\psi = (\psi_-, \psi_+)$ es morfismo entre $\mathbb{D}$ y $\mathbb{D}^{\perp}$. Supongamos que $h, g \in {}^{\omega}\omega$ son tales que $\psi_-(h) \leqslant^* g$. Entonces $\{i \in \omega : h(i)+1 > g(i)\}$ es finito y, por ende, su complemento $\{i \in \omega : h(i) < g(i)\}$ es infinito, es decir, $h \not\geqslant^* g$. Así, $h \not\geqslant^* \psi_+(g)$. $\square$

Definición 2.4. Sean $x, y \in {}^{\omega}2$ y $\Pi \in \mathbb{P}_{\omega}$. Diremos que x es Π-*compatible* con y, lo cual se denota por $x \cong_{\Pi} y$, si el conjunto $\{I \in \Pi : x \restriction I = y \restriction I\}$ es infinito. Además el conjunto de todos los puntos de ${}^{\omega}2$ que son Π-compatibles con x será denotado por $[x, \Pi] := \{z \in {}^{\omega}2 : x \cong_{\Pi} z\}$.

Lema 2.5. *El conjunto* $\{{}^{\omega}2 \setminus [x, \Pi] : (x, \Pi) \in {}^{\omega}2 \times \mathbb{P}_{\omega}\}$ *es cofinal en* $\mathcal{M}({}^{\omega}2)$.

Demostración. Primero verifiquemos que efectivamente es un subconjunto de $\mathcal{M}({}^{\omega}2)$. Sea $(x, \Pi) \in {}^{\omega}2 \times \mathbb{P}_{\omega}$ y sea $\{I_n\}_{n\in\omega}$ la enumeración adecuada de Π. Definamos, para cada $k \in \omega$, $U_k = \{y \in {}^{\omega}2 : \exists n \in \omega \setminus k \ (y \restriction I_n = x \restriction I_n)\}$.

Afirmamos que cada U_k es abierto. Sea $y \in U_k$. Así existe $n \geqslant k$ tal que $x \restriction I_n = y \restriction I_n$. Si $m = \max\ I_n + 1$, entonces $[y \restriction m]$ es un abierto en ${}^{\omega}2$ que contiene a y; además, la contención $I_n \subseteq m$ implica que si $z \in [y \restriction m]$, entonces $z \restriction I_n = y \restriction I_n = x \restriction I_n$, es decir, $z \in U_k$.

Mostraremos ahora que cada U_k es denso. Debemos verificar que $[s] \cap U_k \neq \emptyset$ para cada $s \in {}^{<\omega}2$. Definimos $y = s \cup (x \restriction (\omega \setminus |s|))$. Como $\Pi \in \mathbb{P}_\omega$, la colección $\{\min I_n\}_{n\in\omega}$ es un subconjunto no acotado de ω, así que existe $m \in \omega$ tal que min $I_m > |s|$ y haciendo $n = m + k$ obtenemos que $|s| <$ min $I_m \leqslant$ min I_n; luego $I_n \subseteq (\omega \setminus |s|)$ y en suma, $x \restriction I_n = y \restriction I_n$. Por lo tanto $y \in [s] \cap U_k$.

Un argumento rutinario muestra que $\bigcap_{k\in\omega} U_k \subseteq [x, \Pi]$ y de este modo, ${}^{\omega}2 \setminus [x, \Pi] \subseteq \bigcup_{k\in\omega}({}^{\omega}2 \setminus U_k) \in \mathcal{M}({}^{\omega}2)$. Así, ${}^{\omega}2 \setminus [x, \Pi] \in \mathcal{M}({}^{\omega}2)$.

Sea M un subconjunto magro de ${}^{\omega}2$. Por definición existe $\{G_n\}_{n\in\omega}$, una sucesión de subconjuntos densos en ninguna parte en ${}^{\omega}2$, con $M = \bigcup_{n\in\omega} G_n$. Para cada $n \in \omega$, $F_n = \bigcup_{i\leqslant n} G_i$ es un subconjunto denso en ninguna parte de ${}^{\omega}2$ y además, $M = \bigcup_{i\in\omega} F_i$. Adicionalmente, para cada $m \in \omega$ fijemos $\{u_i^m\}_{i<2^m}$, una enumeración de ${}^{m}2$.

Queremos definir $x \in {}^{\omega}2$ y $\Pi \in \mathbb{P}_\omega$ tales que $M \subseteq {}^{\omega}2 \setminus [x, \Pi]$, para lo cual construiremos por recursión dos sucesiónes $\{t_i : i \in \omega\}$ y $\{I_n : n \in \omega\}$ que cumplan lo siguiente para cualquier $n \in \omega$.

1. I_n es un intervalo finito no vacío en ω.

2. $0 \in I_0$.

3. min $I_{n+1} =$ max $I_n + 1$.

4. Si $m(n) = \sup \bigcup_{i<n} I_i + 1$, entonces existen $\{J_i^n : i < 2^{m(n)}\}$ y $\{t_i^n : i < 2^{m(n)}\}$ de tal modo que lo siguiente es cierto para cada $i < 2^{m(n)}$.

    (a) J_i^n es un intervalo finito no vacío en ω.

    (b) $0 \in J_0^0$ y $m(n) = \min J_0^n$ siempre que $n > 0$.

    (c) Cuando $i + 1 < 2^{m(n)}$, se tiene la igualdad $\min J_{i+1}^n = \max J_i^n + 1$.

    (d) t_i^n es una función de J_i^n en 2.

    (e) Ningún elemento de F_n extiende a la función $u_i^{m(n)} \cup \bigcup_{j\leqslant i} t_j^n$.

5. $I_n = \bigcup\{J_i^n : i < 2^{m(n)}\}$ y $t_n = \bigcup\{t_i^n : i < 2^{m(n)}\}$.

Sea $n \in \omega$ de tal forma que tanto $\{I_i : i < n\}$ como $\{t_i : i < n\}$ han sido construidos satisfactoriamente y hagamos $m = \sup \bigcup_{i<n} I_i + 1$.

Construiremos recursivamente a las sucesiones requeridas en (4). Para esto suponga que $k < 2^m$ es tal que las sucesiones $\{J_i^n : i < k\}$ y $\{t_i^n : i < k\}$ ya fueron obtenidas. Como consecuencia de las condiciones (4a)-(4d) y de nuestra definición de m se deduce que $s = u_k^m \cup \bigcup_{i<k} t_i^n$ es un elemento de ${}^{<\omega}2$. Luego, podemos aplicar la proposición 1.6(2) para fijar $w \in {}^{<\omega}2$ de tal forma que $[w] \subseteq [s] \setminus F_n$. Por el lema 1.40 se sigue que $s \subseteq w$. De esta forma, $v = w \cup \{(|w|, 0)\}$ cumple con $v \in {}^{<\omega}2$, $s \subset v$ y $[v] \subseteq [s] \setminus F_n$.

Ahora, si $n = k = 0$, hacemos $t_0^0 = v$ y $J_0^0 = [0, |v|]$. En caso contrario, definimos $J_k^n = [|s|, |v| - 1]$ y $t_k^n = v \upharpoonright J_k^n$. Esto completa nuestra construcción de las sucesiones $\{J_i^n : i < 2^m\}$ y $\{t_i^n : i < 2^m\}$.

Naturalmente, el resto es definir a I_n y t_n como lo dicta la propiedad (5). Esto nos garantiza que existen $\{I_i : i \in \omega\}$ y $\{t_i : i \in \omega\}$. Observe que si hacemos $x = \bigcup_{i\in\omega} t_i$ y $\Pi = \{I_n\}_{n\in\omega}$, entonces $(x, \Pi) \in {}^{\omega}2 \times \mathbb{P}_\omega$.

En aras de comprobar que $M \cap [x, \Pi] = \emptyset$ probaremos que para cualesquiera $n \in \omega$, $y \in F_n$ y $k \in \omega \setminus (n+1)$ se tiene que $x \upharpoonright I_k \neq y \upharpoonright I_k$. En primer término, $y \upharpoonright m(k)$ es, obviamente, un elemento de ${}^{m(k)}2$ y por ende, existe $l \in 2^{m(k)}$ con $y \upharpoonright m(k) = u_l^{m(k)}$. Hagamos

$$s = (y \upharpoonright m(k)) \cup \bigcup_{j \leqslant l} t_j^k = u_l^{m(k)} \cup \bigcup_{j \leqslant l} t_j^k$$

y deduzcamos, empleando nuestra definición de F_k y (4e), que $F_n \cap [s] \subseteq F_k \cap [s] = \emptyset$. Luego, de la hipótesis $y \in F_n$ se sigue que $s \nsubseteq y$, pero como $y \upharpoonright m(k) \subseteq s$, debe tenerse que $t_i^k \nsubseteq y$, para algún $i \leqslant l$. Equivalentemente (ver (4d)), $y \upharpoonright J_i^k \neq t_i^k = x \upharpoonright J_i^k$ y dado que $J_i^k \subseteq I_k$ (condición (5)), concluimos que $y \upharpoonright I_k \neq x \upharpoonright I_k$. □

Proposición 2.6. *Para cualesquiera $x, x' \in {}^{\omega}2$ y $\Pi, \Pi' \in \mathbb{P}_\omega$ se tiene que las condiciones siguientes son equivalentes.*

1. $[x, \Pi] \subseteq [x', \Pi']$.

2. $\{I \in \Pi : \neg\exists J \in \Pi'(J \subseteq I \wedge x \upharpoonright J = x' \upharpoonright J)\} =^* \emptyset$.

Demostración. Suponga que $\{I_n : n \in \omega\}$ y $\{J_m : m \in \omega\}$ son las enumeraciones adecuadas de Π y Π', respectivamente. Hagamos

$$A = \{n \in \omega : \neg\exists m \in \omega(J_m \subseteq I_n \wedge x \restriction J_m = x' \restriction J_m)\}.$$

La implicación directa será abordada por contrapositiva. Supongamos que A es infinito y fijemos $f : \omega \to A$, una función estrictamente creciente y suprayectiva. Entonces, para cualquier $i \in \omega$ se tiene que $i \leqslant f(i)$ y además, si $m \in \omega$, se sigue que la contención $J_m \subseteq I_{f(i)}$ implica que $x \restriction J_m \neq x' \restriction J_m$.

Definamos, para cada $i \in \omega$, $E_i = \{m \in \omega : J_m \subseteq I_{f(i)}\}$ y sea $E = \{k \in \omega : E_k \neq \emptyset\}$. Analizaremos dos casos.

Primeramente suponga que E es infinito, construya recursivamente $\{e_i : i \in \omega\} \subseteq E$ de tal modo que $f(e_i) < e_{i+1} < f(e_{i+2})$ para cada $i \in \omega$ y haga $L = \{f(e_{2i}) : i \in \omega\}$. Note que si $i < \omega$, entonces las desigualdades $f(e_{2i}) < e_{2i+1} < f(e_{2(i+1)})$ son ciertas y en consecuencia, para todo $j \in L$,

$$\{j-1, j+1\} \cap L = \emptyset. \tag{2.1}$$

Denotemos por y al único elemento de ${}^{\omega}2$ que satisface $y \restriction I_k = (1 - x') \restriction I_k$, para cada $k \in \omega \setminus L$, y $y \restriction I_l = x \restriction I_l$ si $l \in L$. Como L es infinito, deducimos que $y \in [x, \Pi]$. Probemos que $y \notin [x', \Pi']$ verificando que si $m \in \omega$ es arbitrario, entonces $y \restriction J_m \neq x' \restriction J_m$. Si algún $l \in L$ satisface que $J_m \subseteq I_l$, entonces nuestra definición de y produce: $x \restriction J_m = (x \restriction I_l) \restriction J_m = (y \restriction I_l) \restriction J_m = y \restriction J_m$; por otro lado, la contención $L \subseteq A$ implica que $x \restriction J_m \neq x' \restriction J_m$ y así $y \restriction J_m \neq x' \restriction J_m$.

Ahora supongamos que $J_m \nsubseteq I_k$ para cada $k \in L$. Afirmamos que existe $n \in \omega \setminus L$ con $J_m \cap I_n \neq \emptyset$. En efecto, como Π es una partición de ω, $J_m \cap I_p \neq \emptyset$ para algún $p \in \omega$; naturalmente, si $p \notin L$, hacemos $n = p$, pero si $p \in L$, entonces observemos que, por nuestra suposición, $J_m \nsubseteq I_p$ y en consecuencia, $J_m \cap I_q \neq \emptyset$ para algún $q \in \{p-1, p+1\}$; luego, (2.1) implica que $q \notin L$ y proponemos $n = q$.

Del párrafo anterior se sigue que existe $i \in J_m \cap I_n$ y así, $y(i) = 1 - x'(i)$, es decir,

$y \restriction J_m \neq x' \restriction J_m$. Esto concluye el caso en que E es infinito.

Cuando E es finito, $E' = \{i \in \omega : E_i = \emptyset\}$ es infinito. Análogamente al caso anterior, existe $\{e_i : i \in \omega\} \subseteq E'$ de tal modo que $f(e_i) < e_{i+1} < f(e_{i+2})$ para cada $i \in \omega$. Hagamos $L' = \{f(e_{2i}) : i \in \omega\}$ y denotemos por y al único elemento de ${}^{\omega}2$ que satisface $y \restriction I_k = x \restriction I_k$ para todo $k \in L'$ y $y \restriction I_k = (1 - x') \restriction I_k$ siempre que $k \in \omega \setminus L'$. Note que si $i < \omega$, entonces las desigualdades $f(e_{2i}) < e_{2i+1} < f(e_{2(i+1)})$ son ciertas y en consecuencia,

$$\text{para todo } j \in L', \{j-1, j+1\} \cap L = \emptyset. \tag{2.2}$$

Note que la elección de y implica que $y \in [x, \Pi]$. Mostremos que $y \notin [x', \Pi']$ de manera similar al caso anterior, esto es, probando que si $m \in \omega$, entonces $x' \restriction J_m \neq y \restriction J_m$.

Sea $m \in \omega$. Asuma que $J_m \cap I_l \neq \emptyset$ para algún $l \in L'$. Entonces, existe $e \in E'$ con $l = f(e)$. Por definición de E', $J_m \nsubseteq I_{f(e)} = I_l$ y, en consecuencia, existen $i \in J_m \setminus I_l$ y $k \in \{l-1, l+1\}$ de tal modo que $i \in I_k$. Según (2.2), $k \notin L'$ y de esta forma $y(i) = 1 - x'(i)$. En conclusión, $y \restriction J_m \neq x' \restriction J_m$.

Si por el contrario, para toda $l \in L'$ se da que $J_m \cap I_l = \emptyset$, como J_m es finito, existe $K \in [\omega \setminus L']^{<\omega}$ tal que $J_m \subseteq \bigcup_{k \in K} I_k$, pero para toda $k \in K$ sabemos que $y \restriction I_k = (1 - x') \restriction I_k$ por lo que $y \restriction J_m \neq x' \restriction J_m$. Esto concluye nuestra prueba de que (1) implica (2).

Conversamente, supongamos que A es finito. Sea $y \in [x, \Pi]$. Luego $B = \{n \in \omega : y \restriction I_n = x \restriction I_n\}$ es infinito, por lo que $B \setminus A \neq^* \emptyset$. Tomemos $n \in B \setminus A$. Entonces $y \restriction I_n = x \restriction I_n$ y, además, existe $g(n) \in \omega$ de tal suerte que $J_{g(n)} \subseteq I_n$ y $x \restriction J_{g(n)} = x' \restriction J_{g(n)}$; en particular, $y \restriction J_{g(n)} = x' \restriction J_{g(n)}$. Así, sólo debemos probar que $g : B \setminus A \to \omega$ es inyectiva para deducir que $y \in [x', \Pi']$. Con esta idea en mente, sean $m, n \in B \setminus A$ con $n \neq m$. Entonces $J_{g(m)} \subseteq I_m$, $J_{g(n)} \subseteq I_n$ y $I_m \cap I_n = \emptyset$. De este modo, $J_{g(m)} \neq J_{g(n)}$ y, naturalmente, $g(m) \neq g(n)$. □

Corolario 2.7. *Sean $x, x' \in {}^{\omega}2$ y $\Pi, \Pi' \in \mathbb{P}_{\omega}$. Si $[x, \Pi] \subseteq [x', \Pi']$, entonces $\Pi' \triangleright \Pi$.*

Demostración. Sean $\{I_n : n \in \omega\}$ y $\{J_n : n \in \omega\}$ las enumeraciones adecuadas de Π y Π', respectivamente. Por la proposición anterior obtenemos que existen $l \in \omega$ y $f : \omega \setminus l \to \omega$ tales que para toda $n \in \omega \setminus l$ tenemos la contención $J_{f(n)} \subseteq I_n$; luego, $\Pi' \triangleright \Pi$. □

La siguiente notación obedece a que A. Blass en su artículo [1] usa el término anglosajón *chopped real* para referirse a los elementos del producto cartesiano ${}^{\omega}2 \times \mathbb{P}_{\omega}$.

Definición 2.8. Denotaremos por CR al producto cartesiano ${}^{\omega}2 \times \mathbb{P}_{\omega}$.

Definición 2.9. Definamos las relaciones binarias $R \subseteq CR \times CR$ y $S \subseteq {}^{\omega}2 \times CR$ como sigue.

- Para cualesquiera $(x, \Pi), (x', \Pi') \in CR$,

$$(x, \Pi) \; R \; (x', \Pi') \text{ si y sólo si } [x', \Pi'] \subseteq [x, \Pi].$$

- Si $y \in {}^{\omega}2$ y $(x, \Pi) \in CR$, entonces

$$y \; S \; (x, \Pi) \text{ si y sólo si } y \notin [x, \Pi].$$

Lema 2.10. *Con la notación de la definición anterior, tanto* $\mathrm{Cof}'(\mathcal{M}({}^{\omega}2)) := (CR, CR, R)$ *como* $\mathrm{Cov}'(\mathcal{M}({}^{\omega}2)) := ({}^{\omega}2, CR, S)$ *son relaciones de Galois-Tukey. Más aún, sus duales también son relaciones de Galois-Tukey.*

Demostración. Sean $(x, \Pi) \in CR$ y $z \in {}^{\omega}2$. El hecho de que $[x, \Pi] \subseteq [x, \Pi]$ nos otorga inmediatamente que $\mathrm{Cof}'(\mathcal{M}({}^{\omega}2))$ es una relación de Galois-Tukey. Por otro lado, trivialmente se tiene que $1 - z \in {}^{\omega}2$ y $z \notin [1 - z, \Pi]$. Así, $\mathrm{Cov}'(\mathcal{M}({}^{\omega}2))$ es una relación de Galois-Tukey.

Sea $(x, \Pi) \in CR$. La pertenencia $x \in [x, \Pi]$ nos garantiza que $\mathrm{Cov}'(\mathcal{M}({}^{\omega}2))^{\perp}$ es una relación de Galois-Tukey. Ahora, como $(1-x, \Pi) \in CR$ y $1-x \in [1-x, \Pi] \setminus [x, \Pi]$, deducimos que $\mathrm{Cof}'(\mathcal{M}({}^{\omega}2))^{\perp}$ también es una relación de Galois-Tukey. □

Proposición 2.11. *Las siguientes igualdades son ciertas.*

1. $|| \mathrm{Cof}(\mathcal{M}({}^{\omega}2)) || = || \mathrm{Cof}'(\mathcal{M}({}^{\omega}2)) ||$.
2. $|| \mathrm{Cov}(\mathcal{M}({}^{\omega}2)) || = || \mathrm{Cov}'(\mathcal{M}({}^{\omega}2)) ||$.
3. $|| \mathrm{Cof}(\mathcal{M}({}^{\omega}2))^{\perp} || = || \mathrm{Cof}'(\mathcal{M}({}^{\omega}2))^{\perp} ||$.
4. $|| \mathrm{Cov}(\mathcal{M}({}^{\omega}2))^{\perp} || = || \mathrm{Cov}'(\mathcal{M}({}^{\omega}2))^{\perp} ||$.

Demostración. En vista de la proposición 1.32 basta dar morfismos en ambas direcciones para los incisos (1) y (2).

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Cof}'(\mathcal{M}({}^{\omega}2)) \arrow[d] & CR & CR \arrow[d, "\psi_+"] & R \\ \mathrm{Cof}(\mathcal{M}({}^{\omega}2)) & \mathcal{M}({}^{\omega}2) \arrow[u, "\psi_-"] & \mathcal{M}({}^{\omega}2) & \subseteq \end{tikzcd}$$

Gracias al lema 2.5 sabemos que para todo $(x, \Pi) \in CR$ se da que ${}^{\omega}2 \setminus [x, \Pi] \in \mathcal{M}({}^{\omega}2)$ y que dado un $M \in \mathcal{M}({}^{\omega}2)$ existe $(x_M, \Pi_M) \in CR$ tal que $M \subseteq {}^{\omega}2 \setminus [x_M, \Pi_M]$. Definamos las funciones $\psi_+ : CR \to \mathcal{M}({}^{\omega}2)$ y $\psi_- : \mathcal{M}({}^{\omega}2) \to CR$ mediante

$$\psi_+(x, \Pi) = {}^{\omega}2 \setminus [x, \Pi] \qquad \text{y} \qquad \psi_-(M) = (x_M, \Pi_M),$$

y verifiquemos que (ψ_-, ψ_+) es un morfismo de $\mathrm{Cof}'(\mathcal{M}({}^{\omega}2))$ en $\mathrm{Cof}(\mathcal{M}({}^{\omega}2))$.

Si $M \in \mathcal{M}({}^{\omega}2)$ y $(x, \Pi) \in CR$ satisfacen $\psi_-(M)\ R\ (x, \Pi)$, entonces $[x, \Pi] \subseteq [x_M, \Pi_M]$ y, por ende, $M \subseteq {}^{\omega}2 \setminus [x_M, \Pi_M] \subseteq {}^{\omega}2 \setminus [x, \Pi]$, lo cual verifica que $M \subseteq \psi_+(x, \Pi)$.

Argumentemos ahora que (ψ_+, ψ_-) es un morfismo de $\mathrm{Cof}(\mathcal{M}({}^{\omega}2))$ en $\mathrm{Cof}'(\mathcal{M}({}^{\omega}2))$. Sean $(x, \Pi) \in CR$ y $M \in \mathcal{M}({}^{\omega}2)$ tales que $\psi_+(x, \Pi) \subseteq M$. Luego,

$${}^{\omega}2 \setminus [x, \Pi] \subseteq M \subseteq {}^{\omega}2 \setminus [x_M, \Pi_M] = {}^{\omega}2 \setminus \psi_-(M)$$

y así, $\psi_-(M) \subseteq [x, \Pi]$; en otras palabras, $(x, \Pi)\ R\ \psi_-(M)$.

Lo anterior prueba que la igualdad (1) es cierta.

Con respecto a (2), conservemos la notación empleada en la prueba de (1) y denotemos por $\Phi : {}^{\omega}2 \to {}^{\omega}2$ a la correspondiente función identidad.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Cov}(\mathcal{M}({}^{\omega}2)) \arrow[d] & {}^{\omega}2 & \mathcal{M}({}^{\omega}2) \arrow[d, "\psi_-"] & \in \\ \mathrm{Cov}'(\mathcal{M}({}^{\omega}2)) & {}^{\omega}2 \arrow[u, "\Phi"] & CR & S \end{tikzcd}$$

Con la idea en mente de mostrar que (Φ, ψ_-) es un morfismo de $\mathrm{Cov}(\mathcal{M}({}^{\omega}2))$ en $\mathrm{Cov}'(\mathcal{M}({}^{\omega}2)$, fijemos $x \in {}^{\omega}2$ y $M \in \mathcal{M}({}^{\omega}2)$ de tal manera que $\Phi(x) \in M$, es decir, $x \in M$.

Dado que $M \subseteq {}^{\omega}2 \setminus [x_M, \Pi_M]$, se sigue que $x \notin \psi_-(M)$, esto es, $x \; S \; \psi_-(M)$.

Finalmente, observe que para cualesquiera $y \in {}^{\omega}2$ y $(x, \Pi) \in CR$ se tiene que la relación $\Phi(y) \; S \; (x, \Pi)$ equivale a que $y \in \psi_+(x, \Pi)$. En particular, (Φ, ψ_+) es un morfismo de $\mathrm{Cov}'(\mathcal{M}({}^{\omega}2))$ en $\mathrm{Cov}(\mathcal{M}({}^{\omega}2))$. $\square$

Proposición 2.12. *Las siguientes desigualdades son ciertas.*

1. $||\mathbb{D}'|| \leqslant ||\operatorname{Cof}'(\mathcal{M}({}^{\omega}2))||$.

2. $||\mathbb{D}'^{\perp}|| \geqslant ||\operatorname{Cof}'(\mathcal{M}({}^{\omega}2))^{\perp}||$.

Demostración. En vista de la proposición 1.32, basta probar (1). Fijemos $z \in {}^{\omega}2$, un elemento arbitrario. Definamos ahora $\psi_- : \mathbb{P}_\omega \to CR$ y $\psi_+ : CR \to \mathbb{P}_\omega$ mediante

$$\psi_-(\Pi) = (z, \Pi) \qquad \text{y} \qquad \psi_+(x, \Pi) = \Pi.$$

Para finalizar nuestro argumento, mostraremos que (ψ_-, ψ_+) es un morfismo de $\operatorname{Cof}'(\mathcal{M}({}^{\omega}2))$ en $\mathbb{D}'$. Si $\Pi \in \mathbb{P}_\omega$ y $(x, \Pi') \in CR$ satisfacen $\psi_-(\Pi) \; R \; (x, \Pi')$, entonces $[x, \Pi'] \subseteq [z, \Pi]$ y por el corolario 2.7, $\Pi \lhd \Pi'$, esto es, $\Pi \lhd \psi_+(x, \Pi')$. $\square$

Teorema 2.13. $\mathfrak{d} \leqslant \operatorname{cf}(\mathcal{M})$ *y* $\operatorname{add}(\mathcal{M}) \leqslant \mathfrak{b}$.

Demostración. Probemos la primer desigualdad: según la proposición 1.39, $\mathfrak{d} \leqslant ||\mathbb{D}'||$, y esto, aunado a la proposición 2.12, nos da $\mathfrak{d} \leqslant ||\operatorname{Cof}'(\mathcal{M}({}^{\omega}2))||$. Ahora empleemos la proposición 2.11(1) para obtener que $\mathfrak{d} \leqslant ||\operatorname{Cof}(\mathcal{M}({}^{\omega}2))||$. Así, $\operatorname{cf}(\mathcal{M}({}^{\omega}2)) \geqslant \mathfrak{d}$. Finalmente, el corolario 1.48(3) nos produce $\operatorname{cf}(\mathcal{M}) \geqslant \mathfrak{d}$.

El argumento que se requiere para la otra desigualdad es similar y por esa razón lo omitiremos. $\square$

Fijemos $f \in {}^{\omega}\omega$ y definamos

$$f_{\downarrow} = \{g \in {}^{\omega}\omega : g \leqslant f\}.$$

En vista de que los elementos de un producto cartesiano son, por definición, funciones de elección, se deduce que

$$f_{\downarrow} = \prod_{n \in \omega} \{k \in \omega : k \leqslant f(n)\}$$

y, por ende, $f_{\downarrow}$ es un subconjunto compacto de ${}^{\omega}\omega$.

Lema 2.14. *Si K es un subconjunto compacto de ${}^{\omega}\omega$, entonces existe $f \in {}^{\omega}\omega$ tal que $K \subseteq f_{\downarrow}$.*

Demostración. Fijemos $n \in \omega$. La proyección $\pi_n : {}^{\omega}\omega \to \omega$ satisface $\pi_n(g) = g(n)$, siempre que $g \in {}^{\omega}\omega$. Así, π_n es continua y, por ende, $\pi_n[K]$ es un subconjunto compacto del discreto ω, esto es, $\pi_n[K]$ es finito. Sea $f(n) \in \omega$ una cota superior del conjunto $\pi_n[K]$.

El párrafo previo nos provee de una función f de ω en ω para la cual

$$K \subseteq \prod_{n \in \omega} \pi_n[K] \subseteq \prod_{n \in \omega} \{\ell \in \omega : \ell \leqslant f(n)\} = f_{\downarrow}.$$

□

Recordemos que un subconjunto H de un espacio topológico X es llamado *σ-compacto en X* si existe $\{K_n : n \in \omega\}$, una familia de subconjuntos compactos de X, con $H = \bigcup_{n \in \omega} K_n$.

Ahora, para cualquier $f \in {}^{\omega}\omega$, hagamos $f_{\downarrow}^{*} = \{g \in {}^{\omega}\omega : g \leqslant^{*} f\}$.

Lema 2.15. *Los enunciados siguientes son ciertos para cualquier $f \in {}^{\omega}\omega$.*

1. *$f_{\downarrow}^{*}$ es un conjunto σ-compacto en ${}^{\omega}\omega$.*

2. *Si $g \in {}^{\omega}\omega$ satisface $g \leqslant^{*} f$, entonces $g_{\downarrow}^{*} \subseteq f_{\downarrow}^{*}$.*

Demostración. Para cada $s \in {}^{<\omega}\omega$ sea $f_s = s \cup (f \restriction (\omega \setminus |s|))$. Note que si probamos la igualdad

$$f_{\downarrow}^{*} = \bigcup \{(f_s)_{\downarrow} : s \in {}^{<\omega}\omega\}, \tag{2.3}$$

entonces habremos demostrado el inciso (1).

La contención de derecha a izquierda en (2.3) se argumenta como sigue: si $s \in {}^{<\omega}\omega$ y $g \in (f_s)_\downarrow$, entonces $g(n) \leqslant f(n)$, siempre que $n \in \omega \setminus |s|$; esto es, $g \leqslant^* f$. Con respecto a la inclusión restante, tomemos $g \in f^*_\downarrow$ y fijemos $m \in \omega$ de tal modo que, para cualquier $n \in \omega \setminus m$, $g(n) \leqslant f(n)$. Así, $s = f \restriction m$ satisface que $g \in (f_s)_\downarrow$.

El segundo inciso del lema es corolario de la transitividad de la relación $\leqslant^*$. $\square$

Definición 2.16. Denotaremos por $\mathcal{K}_\sigma$ a la colección dada por la fórmula:

$$E \in \mathcal{K}_\sigma \text{ si y sólo si existe } H, \text{ un } \sigma\text{-compacto en } {}^\omega\omega, \text{ con } E \subseteq H.$$

Una consecuencia del lema 2.15 es que todos los conjuntos de la forma $f^*_\downarrow$ son elementos de $\mathcal{K}_\sigma$. Nuestro resultado siguiente añade información sobre esta colección.

Proposición 2.17. *El conjunto $\mathcal{K}_\sigma$ satisface que*

1. *está contenido en $\mathcal{M}({}^\omega\omega)$,*

2. *es un σ-ideal en ${}^\omega\omega$ y*

3. *tiene a $\{f^*_\downarrow : f \in {}^\omega\omega\}$ como subconjunto cofinal.*

Demostración. En primer término, veamos que $f_\downarrow$ tiene interior vacío en ${}^\omega\omega$, para cada $f \in {}^\omega\omega$. Si $s \in {}^{<\omega}\omega$ y $m = |s|$, entonces $\pi_m : {}^\omega\omega \to \omega$, la proyección en la m-ésima coordenada, es una función continua que satisface $\pi_m[[s]] = \omega$. Como $\pi_m[f_\downarrow]$ es compacto, se sigue que $[s] \nsubseteq f_\downarrow$.

Lo anterior, junto con el lema 2.14, implica que todos los compactos de ${}^\omega\omega$ son densos en ninguna parte. Luego, (1) es cierto.

Note que (1) implica que ${}^\omega\omega \notin \mathcal{K}_\sigma$. Las demás propiedades que debemos verificar para concluir que $\mathcal{K}_\sigma$ es un σ-ideal tienen demostraciones rutinarias, así que las omitiremos. Concentrémonos, entonces, en probar el inciso (3).

Tomemos $E \in \mathcal{K}_\sigma$ y fijemos $\{K_n : n \in \omega\}$, una familia de compactos en ${}^\omega\omega$, con $E \subseteq \bigcup_{n\in\omega} K_n$. De acuerdo al lema 2.14, para cada $n \in \omega$ hay $f_n \in {}^\omega\omega$ con $K_n \subseteq (f_n)_\downarrow$. Definamos $f : \omega \to \omega$ mediante

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} f_k(n)$$

para obtener que $f_n \leqslant^* f$, siempre que $n \in \omega$. Finalmente, empleemos el inciso (2) del lema 2.15 para deducir que

$$E \subseteq \bigcup_{n\in\omega} K_n \subseteq \bigcup_{n\in\omega} (f_n)_{\downarrow} \subseteq \bigcup_{n\in\omega} (f_n)^*_{\downarrow} \subseteq f^*_{\downarrow}.$$

□

Lema 2.18. $\operatorname{cov}(\mathcal{K}_\sigma) = \mathfrak{d}$ *y* $\operatorname{non}(\mathcal{K}_\sigma) = \mathfrak{b}$.

Demostración. De acuerdo a la proposición 1.32, sólo debemos hallar dos morfismos: uno de $\mathrm{Cov}(\mathcal{K}_\sigma)$ en $\mathbb{D}$ y el otro de $\mathbb{D}$ en $\mathrm{Cov}(\mathcal{K}_\sigma)$.

Para el primero: denotemos por $\psi_- : {}^\omega\omega \to {}^\omega\omega$ a la función identidad. Por otro lado, empleemos el inciso (3) del lema 2.17 para producir $\psi_+ : \mathcal{K}_\sigma \to {}^\omega\omega$ de tal modo que $E \subseteq (\psi_+(E))^*_{\downarrow}$, siempre que $E \in \mathcal{K}_\sigma$.

Ahora, si $f \in {}^\omega\omega$ y $E \in \mathcal{K}_\sigma$ satisfacen $\psi_-(f) \in E$, entonces $f \in E \subseteq (\psi_+(E))^*_{\downarrow}$; o sea, $f \leqslant^* \psi_+(E)$. Luego, (ψ_-, ψ_+) es el morfismo deseado.

Definamos $\phi : {}^\omega\omega \to \mathcal{K}_\sigma$ mediante $\phi(f) = f^*_{\downarrow}$, para cada $f \in {}^\omega\omega$. Con la idea en mente de verificar que (ψ_-, ϕ) es el otro morfismo, tomemos $f, g \in {}^\omega\omega$ con $\psi_-(f) \leqslant^* g$, es decir, $f \leqslant^* g$. Naturalmente, $f \in g^*_{\downarrow}$ y esto concluye la prueba. □

Los resultados previos pueden ser ahora usados para probar otro par de desigualdades del Diagrama de Cichoń.

Proposición 2.19. $\mathfrak{b} \leqslant \operatorname{non}(\mathcal{M})$ *y* $\operatorname{cov}(\mathcal{M}) \leqslant \mathfrak{d}$.

Demostración. Por el inciso (1) del lema 2.17, $\mathcal{K}_\sigma \subseteq \mathcal{M}({}^\omega\omega)$. Luego (ver proposición 1.33),

$$\operatorname{cov}(\mathcal{M}({}^\omega\omega)) \leqslant \operatorname{cov}(\mathcal{K}_\sigma) = \mathfrak{d} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{non}(\mathcal{M}({}^\omega\omega)) \geqslant \operatorname{non}(\mathcal{K}_\sigma) = \mathfrak{b};$$

el resto es invocar el corolario 1.48. □

Teorema 2.20. *Las igualdades siguientes son ciertas.*

1. $\operatorname{cf}(\mathcal{M}) = \max\{\operatorname{non}(\mathcal{M}), \mathfrak{d}\}$.

2. $\mathrm{add}(\mathcal{M}) = \min\{\mathrm{cov}(\mathcal{M}), \mathfrak{b}\}$.

Demostración. Las desigualdades que aparecen en el lema 2.2 y en el teorema 2.13 nos garantizan que $\mathrm{cf}(\mathcal{M})$ y $\mathrm{add}(\mathcal{M})$ son, respectivamente, una cota superior de $\{\mathrm{non}(\mathcal{M}), \mathfrak{d}\}$ y una cota inferior de $\{\mathrm{cov}(\mathcal{M}), \mathfrak{b}\}$.

Probemos ahora las desigualdades restantes. En nuestro argumento emplearemos la noción de composición secuencial (definición 1.34), así como las relaciones $\mathrm{Cof}'(\mathcal{M}({}^{\omega}2))$ y $\mathrm{Cov}'(\mathcal{M}({}^{\omega}2))$ (ver definición 2.9 y lema 2.10).

Por definición, $\mathrm{cov}(\mathcal{M}({}^{\omega}2)) = \|\mathrm{Cov}(\mathcal{M}({}^{\omega}2))\|$. De lo anterior y la proposición 2.11 deducimos que $\mathrm{cov}(\mathcal{M}({}^{\omega}2)) = \|\mathrm{Cov}'(\mathcal{M}({}^{\omega}2))\|$. Luego (ver corolario 1.48), $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \|\mathrm{Cov}'(\mathcal{M}({}^{\omega}2))\|$. Este mismo razonamiento se puede emplear para verificar que los cardinales $\mathrm{non}(\mathcal{M})$, $\mathrm{cf}(\mathcal{M})$ y $\mathrm{add}(\mathcal{M})$ son iguales, respectivamente, a

$$\|\mathrm{Cov}'(\mathcal{M}({}^{\omega}2))^{\perp}\|, \qquad \|\mathrm{Cof}'(\mathcal{M}({}^{\omega}2))\| \qquad \text{y} \qquad \|\mathrm{Cof}'(\mathcal{M}({}^{\omega}2))^{\perp}\|.$$

Por otro lado, según la proposición 1.39 , $\|\mathbb{D}'\| = \mathfrak{d}$ y $\|\mathbb{D}'^{\perp}\| = \mathfrak{b}$.

Dado que todo subconjunto finito de $\mathbb{R}$ es denso en ninguna parte, se sigue que $\mathrm{non}(\mathcal{M})$ es infinito. Además, si $n \in \omega$ y $\{f_k : k \leqslant n\} \subseteq {}^{\omega}\omega$, entonces $f = 1 + \sum_{k=0}^{n} f_k$ es un elemento de ${}^{\omega}\omega$ tal que la relación $f \leqslant^* f_k$ falla, para cualquier $k \leqslant n$; luego, ningún conjunto finito es un subconjunto completo de $\mathbb{D}$, esto es, $\mathfrak{d} \geqslant \omega$.

De lo anterior se obtiene que (proposición 1.36) todo se reduce a hallar un morfismo de la composición secuencial $\mathrm{Cov}'(\mathcal{M}({}^{\omega}2))^{\perp}\,;\mathbb{D}'$ en $\mathrm{Cof}'(\mathcal{M}({}^{\omega}2))$.

Como paso previo a la definición del morfismo necesitaremos el resultado siguiente, cuya prueba escribimos a continuación.

Afirmación. Si $x, x' \in {}^{\omega}2$ y $\Pi \in \mathbb{P}_{\omega}$ satisfacen $x' \in [x, \Pi]$, entonces existe $\Pi^* \in \mathbb{P}_{\omega}$ de tal modo que para cada $K \in \Pi^*$ hay $I \in \Pi$ con $I \subseteq K$ y $x \restriction I = x' \restriction I$.

La condición $x' \in [x, \Pi]$ nos garantiza que existe $\{I_n : n \in \omega\} \subseteq \Pi$ de tal modo que, para cada $n \in \omega$, $\max I_n < \min I_{n+1}$ y $x \restriction I_n = x' \restriction I_n$. Definamos recursivamente los siguientes intervalos en ω:

$$K_0 = [0, \max I_0] \qquad \text{y} \qquad K_{n+1} = [1 + \max K_n, \max I_{n+1}]$$

y observemos que $I_n \subseteq K_n$, para cualquier $n \in \omega$. Luego, $\Pi^* = \{K_n : n \in \omega\}$ satisface nuestros requerimientos. Esto completa la prueba de la afirmación.

Notemos que

$$\mathrm{Cov}'(\mathcal{M}({}^{\omega}2))^{\perp} \, ; \mathbb{D}' = (CR \times {}^{({}^{\omega}2)}\mathbb{P}_{\omega}, {}^{\omega}2 \times \mathbb{P}_{\omega}, T) = (CR \times {}^{({}^{\omega}2)}\mathbb{P}_{\omega}, CR, T),$$

donde, para cualesquiera $(x, \Pi), (x', \Pi') \in CR$ y $f \in {}^{({}^{\omega}2)}\mathbb{P}_{\omega}$ se tiene que

$$((x, \Pi), f) \; T \; (x', \Pi') \text{ si y sólo si } x' \in [x, \Pi] \text{ y } f(x') \lhd \Pi'.$$

En consecuencia, necesitamos dos funciones, $\psi_- : CR \to CR \times {}^{({}^{\omega}2)}\mathbb{P}_{\omega}$ y $\psi_+ : CR \to CR$.

$$\begin{array}{cccc}
\mathrm{Cov}'(\mathcal{M}({}^{\omega}2))^{\perp} \, ; \mathbb{D}' & CR \times {}^{({}^{\omega}2)}\mathbb{P}_{\omega} & CR & T \\
\big\downarrow & \psi_- \big\uparrow & \big\downarrow \psi_+ & \\
\mathrm{Cof}'(\mathcal{M}({}^{\omega}2)) & CR & CR & R
\end{array}$$

Hagamos que ψ_+ sea la función identidad. Con respecto a ψ_-, comencemos por definir, para cada $(x, \Pi) \in CR$, la función $\varphi(x, \Pi) : {}^{\omega}2 \to \mathbb{P}_{\omega}$ como sigue: si $x' \in {}^{\omega}2$ satisface $x' \in [x, \Pi]$, entonces $\varphi(x, \Pi)(x')$ será la partición Π^* cuya existencia está garantizada por la afirmación de arriba; en caso contrario, $\varphi(x, \Pi)(x') = \{\{n\} : n \in \omega\}$. Así, proponemos $\psi_-(z) = (z, \varphi(z))$, para cada $z \in CR$.

Finalmente, sean $(x, \Pi), (x', \Pi') \in CR$ tales que $\psi_-(x, \Pi) \; T \; (x', \Pi')$. Esto es, $x' \in [x, \Pi]$ y $\varphi(x, \Pi)(x') \lhd \Pi'$. Debemos argumentar que $(x, \Pi) \; R \; \psi_+(x', \Pi')$; equivalentemente, $[x', \Pi'] \subseteq [x, \Pi]$. Para esto, comprobaremos que la condición (2) de la proposición 2.6 se verifica; en otras palabras, mostraremos que

$$\{J \in \Pi' : \neg \exists I \in \Pi \; (I \subseteq J \; \wedge \; x \restriction I = x' \restriction I)\} =^* \emptyset. \tag{2.4}$$

Para simplificar notación, hagamos $\Pi^* = \varphi(x, \Pi)(x')$. Sean $\{I_n : n \in \omega\}$, $\{J_n : n \in \omega\}$ y $\{K_n : n \in \omega\}$ las enumeraciones adecuadas de las particiones Π, Π' y Π^*, respectivamente.

Como $\Pi^* \lhd \Pi'$, existen $m \in \omega$ y una función $d : \omega \setminus m \to \omega$ de tal modo que $K_{d(n)} \subseteq J_n$, siempre que $n \in \omega \setminus m$. La hipótesis $x' \in [x, \Pi]$ implica que Π^* es como en la afirmación de arriba, así que existe $e : \omega \to \omega$ con la propiedad de que si $n \in \omega$, entonces $I_{e(n)} \subseteq K_n$ y $x \restriction I_{e(n)} = x' \restriction I_{e(n)}$. En particular, si $n \in \omega \setminus m$,

$$I_{e(d(n))} \subseteq K_{d(n)} \subseteq J_n \qquad \text{y} \qquad x \restriction I_{e(d(n))} = x' \restriction I_{e(d(n))};$$

consecuentemente, (2.4) es cierta. $\square$

Para probar las últimas dos desigualdades de este capítulo será conveniente establecer notación y hacer algunas observaciones.

Suponga que $E \subseteq \mathbb{R}$ y $t \in \mathbb{R}$. Definimos $E - t = \{x - t : x \in E\}$. Como consecuencia de [5, Proposition 2, p. 33], $E - t \in \mathcal{N}$, siempre que $E \in \mathcal{N}$. Además, el que la función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = x - t$ sea un homeomorfismo nos garantiza que la condición $E \in \mathcal{M}$ implica que $E - t \in \mathcal{M}$.

Proposición 2.21. $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) \leqslant \mathrm{non}(\mathcal{N})$ *y* $\mathrm{cov}(\mathcal{N}) \leqslant \mathrm{non}(\mathcal{M})$.

Demostración. Sólo debemos exhibir un morfismo (ψ_-, ψ_+) de $\mathrm{Cov}(\mathcal{N})^{\perp}$ en $\mathrm{Cov}(\mathcal{M})$. Para esto, sean $M \in \mathcal{M}$ y $N \in \mathcal{N}$ con $M = \mathbb{R} \setminus N$ (ver lema 3.1).

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Cov}(\mathcal{N})^{\perp} \arrow[d] & \mathcal{N} & \mathbb{R} \arrow[d, "\psi_+"] & \not\ni \\ \mathrm{Cov}(\mathcal{M}) & \mathbb{R} \arrow[u, "\psi_-"] & \mathcal{M} & \in \end{tikzcd}$$

Definamos $\psi_- : \mathbb{R} \to \mathcal{N}$ y $\psi_+ : \mathbb{R} \to \mathcal{M}$ mediante

$$\psi_-(s) = N - s \qquad \text{y} \qquad \psi_+(t) = M - t.$$

Ahora, si $s, t \in \mathbb{R}$ satisfacen $\psi_-(s) \not\ni t$, se sigue que $t \notin N - s$ y, por ende, $t + s \in \mathbb{R} \setminus N = M$; así, $s \in \psi_+(t)$. $\square$

Concluyamos este capítulo mostrando que todos los cardinales que aparecen en el diagrama de Cichoń son *características del continuo*, esto es, si κ es uno de ellos, entonces $\omega_1 \leqslant \kappa \leqslant \mathfrak{c}$.

Proposición 2.22. $\omega_1 \leqslant \mathrm{add}(\mathcal{N}) \leqslant \mathrm{cf}(\mathcal{N}) \leqslant \mathfrak{c}$.

Demostración. Comencemos con la desigualdad de la izquierda. Por el teorema 1.21 se tiene que $\mathcal{N}$ es σ-ideal; esto, aunado a la proposición 1.30(4), imposibilita que $\omega_1 > \operatorname{add}(\mathcal{N})$.

Con la idea en mente de probar que la cofinalidad de $\mathcal{N}$ es, a lo más, $\mathfrak{c}$, denotemos por $\mathcal{B}$ a la colección de todos los intervalos abiertos en $\mathbb{R}$ y hagamos $\mathcal{H} = {}^{\omega\times\omega}\mathcal{B}$. Claramente, $|\mathcal{H}| = \mathfrak{c}$.

Sea $f \in \mathcal{H}$ arbitraria. Para cualesquiera $k, \ell \in \omega$ se tiene que $f(k,\ell)$ es un intervalo abierto en $\mathbb{R}$. En consecuencia,

$$f_k^* = \bigcup\{f(k,n) : n \in \omega\} \qquad \text{y} \qquad f^* = \bigcap_{m\in\omega} f_m^*$$

son subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Tomemos $\mathcal{S} = \{f^* : f \in \mathcal{H}\} \cap \mathcal{N}$ y observemos que $|\mathcal{S}| \leqslant \mathfrak{c}$. Así, bastará con ver que $\mathcal{S}$ es cofinal en $\mathcal{N}$. Para esto, sea $E \in \mathcal{N}$. Si $m \in \omega$, existe $\{I_n^m\}_{n\in\omega}$, una sucesión en $\mathcal{B}$, con $E \subseteq \bigcup_{n\in\omega} I_n^m$ y $\sum_{n=0}^{\infty} \mu(I_n^m) < 2^{-n}$. Luego, la función $f : \omega \times \omega \to \mathcal{B}$ dada por $f(k,\ell) = I_\ell^k$ es un elemento de $\mathcal{H}$ que satisface $E \subseteq f^*$ y (note que $\mu(f^*) \leqslant \mu(f_m^*) \leqslant 2^{-m}$ para cada $m \in \omega$) $f^* \in \mathcal{N}$. □

CAPÍTULO 3: TEOREMA DE ERDŐS-SIERPIŃSKI

En los capítulos previos hemos demostrado lo siguiente: tanto $\mathcal{M}$ como $\mathcal{N}$ son σ-ideales; para cualesquiera $M \in \mathcal{M}$, $N \in \mathcal{N}$ y $t \in \mathbb{R}$ se tiene que $M + t \in \mathcal{M}$ y $N + t \in \mathcal{N}$; $\operatorname{cov}(\mathcal{M}) \leqslant \operatorname{non}(\mathcal{N})$ y $\operatorname{cov}(\mathcal{N}) \leqslant \operatorname{non}(\mathcal{M})$. Estos resultados sugieren la existencia de una relación muy cercana entre estos ideales. En este capítulo probaremos que, en presencia de la Hipótesis del Continuo, hay una biyección de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que induce una biyección entre $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$.

Lema 3.1. *Existen $M \in \mathcal{M}$ y $N \in \mathcal{N}$ tales que $M \cap N = \emptyset$ y $M \cup N = \mathbb{R}$.*

Demostración. Sea $\{q_n\}_{n\in\omega}$ una enumeración de $\mathbb{Q}$. Para cada $n, j \in \omega$ definimos lo siguiente:

$$I_{n,j} = (q_j - 2^{-(n+j+1)}, q_j + 2^{-(n+j+1)}).$$

Luego, $\mu(I_{n,j}) = 2^{-(n+j)}$.

A su vez, para cada $n \in \omega$ definimos $G_n = \bigcup_{i\in\omega} I_{n,i}$ y $N = \bigcap_{n\in\omega} G_n$.

Es claro que para cualquier $j \in \omega$ se tiene que $N \subseteq G_j$ por lo que $\mu(N) \leqslant \mu(G_j)$. Si $\epsilon > 0$, entonces existe $n \in \omega$ tal que $\dfrac{\epsilon}{2} > 2^{-n}$. Por otro lado tenemos las siguientes desigualdades:

$$\mu(N) \leqslant \mu(G_n) \leqslant \mu\left(\bigcup_{j\in\omega} I_{n,j}\right) \leqslant \sum_{j\in\omega} \mu(I_{n,j}) = \sum_{j\in\omega} 2^{-(n+j)} = 2^{1-n} < \epsilon;$$

así, como ϵ es arbitrario, obtenemos que $\mu(N) = 0$ y $N \in \mathcal{N}$.

Para finalizar basta notar que cada G_j es denso abierto por ser unión de abiertos y contener a $\mathbb{Q}$; luego $F_j = \mathbb{R} \setminus G_j$ es denso en ninguna parte. De esta forma, $M = \bigcup_{j\in\omega} F_j$ satisface que $M \in \mathcal{M}$ y, por definición, $M = \mathbb{R} \setminus N$. $\square$

Definición 3.2. Sea X un espacio topológico y $E \subseteq X$.

- Diremos que E es F_σ en X si existe una familia de cerrados en X, $\{E_n : n \in \omega\}$, tal que $E = \bigcup_{n\in\omega} E_n$.
- Diremos que E es G_δ en X si existe una familia de abiertos en X, $\{E_n : n \in \omega\}$, tal que $E = \bigcap_{n\in\omega} E_n$.

Sean X un espacio topológico y $E \subseteq X$. Diremos que $x \in X$ es punto de condensación de E si para todo $U \in \tau_X$ que satisfaga $x \in U$ se tiene que $\omega < |U \cap E|$.

Proposición 3.3. *Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ un G_δ no numerable. Entonces existe $C \in [E]^{\mathfrak{c}} \cap \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$.*

Demostración. Sea $\{G_n : n \in \omega\} \subseteq \tau_\mathbb{R}$ tal que $E = \bigcap_{n\in\omega} G_n$ y $|E| > \omega$. Más aún, fijemos $\mathcal{B}$, una base numerable de $\tau_\mathbb{R}$, y denotemos por F a la colección de todos los elementos de E que son puntos de condensación de E.

Si F fuese vacío, se tendría que para cada $x \in E$ existiría $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x$ y $|B_x \cap E| \leqslant \omega$, por lo que $\{B_x : x \in E\} \subseteq \mathcal{B}$ cubriría a E, pero $|E| = |\bigcup_{x\in E}(E \cap B_x)| \leqslant \omega$, lo cual es imposible, ya que E es no numerable.

De lo anterior se deduce que $F \neq \emptyset$. Mostremos ahora que F no tiene puntos aislados. Supongamos que $x \in F$ es un punto aislado. Así existe $V \in \tau_\mathbb{R}$ tal que $V \cap F = \{x\}$ y como $x \in F$, tenemos que $\omega < |V \cap E|$. Luego, para cada $y \in V \cap E \setminus \{x\}$ existe $B_y \in \mathcal{B}$ tal que $y \in B_y$ y $|B_y \cap E| \leqslant \omega$, por lo que $\{B_y : y \in V \cap E \setminus \{x\}\}$ cubre a $V \cap E \setminus \{x\}$. De esta forma, $\omega < |V \cap E| = |V \cap E \setminus \{x\}| = |\bigcup_{y\in V\cap E\setminus\{x\}}(B_y \cap E)| \leqslant \omega$, lo cual es una contradicción.

Para cualquier $s \in {}^{<\omega}2$ y $j \in \{0, 1\}$ definimos $s^\frown j = s \cup \{(\operatorname{dom} s, j)\}$.

Recursivamente definiremos una familia de intervalos cerrados $\{I_s : s \in {}^{<\omega}2\}$ tales que lo siguiente es cierto para cualquier $s \in {}^{<\omega}2$.

1. $I_s \subseteq G_{|s|}$,
2. para cada $i < 2$, $I_{s^\frown i} \subseteq I_s$,
3. $I_{s^\frown 0} \cap I_{s^\frown 1} = \emptyset$,
4. $F \cap \operatorname{int} I_s \neq \emptyset$ y

5. $\mu(I_s) \leqslant 3^{-|s|}$.

Veamos el caso base. Notemos que por definición, $F \subseteq E \subseteq G_0$. Sea $z \in F \subseteq G_0$. Como G_0 es abierto, existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y $z \in [a, b] \subseteq G_0$. Definimos

$$I_\emptyset = [\max\{a, z - 2^{-1}\}, \min\{b, z + 2^{-1}\}].$$

las propiedades 1 y 4 se cumplen por construcción. Para la quinta propiedad basta notar que la contención $I_\emptyset \subseteq [z - 2^{-1}, z + 2^{-1}]$ junto con la monotonía de μ implica que $\mu(I_\emptyset) \leqslant \mu([z - 2^{-1}, z + 2^{-1}]) = 1 = 3^0$.

Para el caso sucesor supongamos que hay un $n \in \omega$ para el cual ya tenemos definidos los intervalos $\{I_t : t \in {}^n2\}$ de tal modo que estos satisfacen 1-5. Sea $t \in {}^n2$. Por la propiedad 4 sabemos que $F \cap \operatorname{int} I_t$ tiene al menos un punto; por otro lado F no tiene puntos aislados así que existen $x_0, x_1 \in F \cap \operatorname{int} I_t \subseteq G_{|t|+1} \cap \operatorname{int} I_t$ tales que $x_0 < x_1$. Para cada $i < 2$ sea J_i un intervalo abierto tal que $J_0 \cap J_1 = \emptyset$, $x_i \in J_i$ y $J_i \subseteq G_{|t|+1} \cap \operatorname{int} I_t$ (note que $G_{|t|+1} \cap \operatorname{int} I_t$ es abierto). Sabemos por la propiedad 5 que $\mu(I_t) \leqslant 3^{-|t|}$; luego, de forma análoga al caso base podemos encontrar intervalos cerrados y ajenos, $I_{t^\frown 0}$ y $I_{t^\frown 1}$, tales que para toda $i < 2$ se tiene que $x_i \in \operatorname{int} I_{t^\frown i} \subseteq I_{t^\frown i} \subseteq J_i$ y $\mu(I_{t^\frown i}) \leqslant 3^{-(n+1)}$, lo cual da por terminada la recursión.

Notemos que si $h \in {}^\omega 2$, por la propiedad 2, $\{I_{h\restriction n} : n \in \omega\}$ es una familia de intervalos cerrados anidados y así, $\bigcap_{n\in\omega} I_{h\restriction n}$ es no vacío. Por otra parte, la propiedad 5 nos garantiza que dicha intersección consistirá de un solo punto, digamos x_h.

Afirmamos que $C = \bigcap_{n\in\omega} \bigcup\{I_s : s \in {}^n2\}$ es el conjunto deseado.

Observe que si $f \in {}^\omega 2$ y $n \in \omega$, entonces $x_f \in I_{f\restriction n} \subseteq \cup\{I_s : s \in {}^n2\}$. En consecuencia, $\{x_f : f \in {}^\omega 2\} \subseteq C$. Por otro lado si $h, l \in {}^\omega 2$ son funciones distintas, existe $n = \min\{r \in \omega : h(r) \neq l(r)\}$ y en vista de la propiedad 3 y la minimalidad de n obtenemos que $I_{h\restriction(n+1)} \cap I_{l\restriction(n+1)} = \emptyset$. En resumen, $\{x_f : f \in {}^\omega 2\}$ es un conjunto de cardinalidad $\mathfrak{c}$ contenido en C y, en consecuencia, $|C| = \mathfrak{c}$.

Para cualquier $n \in \omega$, $\bigcup\{I_s : s \in {}^n2\}$ es cerrado por ser unión finita de cerrados, y de este modo, C es cerrado.

Dado $m \in \omega$, la propiedad 3 nos garantiza que $\{I_s : s \in {}^m2\}$ es ajena por pares y así

$$\mu\left(\bigcup\{I_s : s \in {}^m 2\}\right) = \sum_{s \in {}^m 2} \mu(I_s) \leqslant 2^m \cdot 3^{-m} = \left(\frac{2}{3}\right)^m.$$

De la monotonía de μ se sigue que $\mu(C) = 0$. En particular, $\operatorname{int} C = \emptyset$ y, por ende, $C \in \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$. $\square$

Lema 3.4. *Sean $M \in \mathcal{M}$ y $N \in \mathcal{N}$. Entonces existen $K \in \mathcal{M}$ y $L \in \mathcal{N}$, ambos de cardinalidad $\mathfrak{c}$, tales que $K \subseteq \mathbb{R} \setminus M$ y $L \subseteq \mathbb{R} \setminus N$.*

Demostración. En vista de la proposición 3.3, basta con encontrar un par de conjuntos G_δ que no sean numerables y estén contenidos en los complementos de M y N.

Fijemos $\{G_n : n \in \omega\}$, una familia de conjuntos densos en ninguna parte de $\mathbb{R}$ cuya unión sea igual a M. Para cada $n \in \omega$ hagamos $F_n = \mathbb{R} \setminus \overline{G_n}$ para obtener un subconjunto denso y abierto de $\mathbb{R}$ que está contenido en $\mathbb{R} \setminus G_n$. Así, $F = \bigcap_{n \in \omega} F_n \subseteq \mathbb{R} \setminus M$ es un G_δ. Supongamos que F es numerable, esto es, $F = \{x_i : i \in \omega\}$. Hagamos, para cada $n \in \omega$, $H_n := F_n \setminus \{x_i : i < n\}$ y notemos que H_n es un denso abierto de $\mathbb{R}$. Luego, por el Teorema de Categoría de Baire (teorema 1.11) debería tenerse que $\emptyset = \bigcap_{n \in \omega} H_n$ es denso en $\mathbb{R}$. Este absurdo prueba que F no es numerable.

Finalmente, con respecto a N: dado $\epsilon > 0$, existe una familia de intervalos abiertos $\{I_n : n \in \omega\}$ tal que $N \subseteq \bigcup_{n \in \omega} I_n \subseteq \bigcup_{n \in \omega} \overline{I_n}$ y $\sum_{n \in \omega} \mu(I_n) < \epsilon$; además, para cada $n \in \omega$, $\mu(I_n) = \mu(\overline{I_n})$ por lo que si definimos $E = \bigcap_{n \in \omega}(\mathbb{R} \setminus \overline{I_n}) = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n \in \omega} \overline{I_n} \subseteq \mathbb{R} \setminus N$, obtenemos un G_δ de medida positiva, lo cual implica que debe ser no numerable (recuerde que todo conjunto numerable tiene medida 0). $\square$

Para efectos del resultado siguiente esperamos que el lector tenga presente la proposición 1.30.

Proposición 3.5. *Sea $\mathcal{I}$ un σ-ideal en algún conjunto X tal que $\operatorname{cf}(\mathcal{I}) = \omega_1$ y sea $L \in \mathcal{I}$. Entonces existe $\{G_\alpha\}_{\alpha < \omega_1}$, un subconjunto cofinal de $\mathcal{I}$ que es creciente (esto es, $G_\alpha \subseteq G_\beta$, siempre que $\alpha < \beta < \omega_1$) y satisface $G_0 = L$.*

Demostración. La hipótesis $\operatorname{cf}(\mathcal{I}) = \omega_1$ nos da $\mathcal{F}$, un subconjunto cofinal de $\mathcal{I}$ con $|\mathcal{F}| = \omega_1$. Luego, $\mathcal{F} \cup \{L\}$ también es cofinal y se puede enumerar como $\mathcal{F} \cup \{L\} = \{F_\xi : \xi < \omega_1\}$, con

$F_0 = L$. Definimos para cada $\alpha \in \omega_1$ a $G_\alpha = \bigcup_{\beta \leqslant \alpha} F_\beta$. Dado que $\mathcal{I}$ es σ-ideal, obtenemos la contención $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\omega_1} \subseteq \mathcal{I}$ y, además, si $\alpha < \beta < \omega_1$, entonces $G_\beta = \bigcup_{\theta\leqslant\beta} F_\theta \subseteq \bigcup_{\theta\leqslant\alpha} F_\theta = G_\alpha$. Verifiquemos que $\{G_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ es cofinal en $\mathcal{I}$: para cada $E \in \mathcal{I}$ existe $\rho < \omega_1$ con $E \subseteq F_\rho \subseteq G_\rho$. □

Lema 3.6. *Sean X y $\mathcal{K}$ tales que $|X| = \omega_1$,*

a) *$\mathcal{K}$ es un σ-ideal en X,*

b) *$\bigcup \mathcal{K} = X$,*

c) *$\mathrm{cf}(\mathcal{K}) = \omega_1$ y*

d) *para cada $E \in \mathcal{K}$ existe $F \in \mathcal{K}$ de tal modo que $E \cap F = \emptyset$ y $|F| = \omega_1$.*

Entonces para cada $L \in \mathcal{K} \cap [X]^{\omega_1}$ existe una familia $\{X_\alpha : \alpha \in \omega_1\} \subseteq \mathcal{K}$ tal que:

1. *$X_0 = L$,*
2. *$\bigcup_{\alpha\in\omega_1} X_\alpha = X$,*
3. *si $\alpha < \beta < \omega_1$, entonces $X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset$,*
4. *ningún X_α es numerable y*
5. *para cualquier $E \subseteq X$ se verifica la equivalencia: $E \in \mathcal{K}$ si y sólo si existe $\beta < \omega_1$ con $E \subseteq \bigcup_{\alpha<\beta} X_\alpha$.*

Demostración. Sean $X, \mathcal{K}$ como en las hipótesis y $L \in \mathcal{K}\cap[X]^{\omega_1}$. En vista de la proposición anterior, existe $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}_{\alpha\in\omega_1}$, una familia creciente y cofinal en $\mathcal{K}$, tal que $L = G_0$. Para cada $\alpha \in \omega_1$ definimos $R_\alpha := G_\alpha \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} G_\beta$.

Veamos que $B = \{\alpha \in \omega_1 : \omega < |R_\alpha|\}$ es un subconjunto no acotado de ω_1, esto es, que $|B| = \omega_1$. Supongamos que B es numerable para obtener que $\beta = \sup B + 1 < \omega_1$ y, en consecuencia, $|R_\rho| \leqslant \omega$, siempre que $\beta \leqslant \rho < \omega_1$. Luego, el que $\mathcal{K}$ sea σ-ideal implica que $R = \bigcup_{\alpha<\beta} R_\alpha \in \mathcal{K}$. Empleemos la propiedad (d) para fijar $A \in \mathcal{K}$ tal que $A \cap R = \emptyset$ y $|A| = \omega_1$. El que A no sea numerable implica que $\delta = \min\{\xi < \omega_1 : A \subseteq G_\xi\} \leqslant \beta$; además, la hipótesis $A \cap R = \emptyset$ nos da la contención $A \subseteq \bigcup_{\beta\leqslant\alpha\leqslant\delta} R_\alpha$. De la regularidad de

ω_1 deducimos que debe existir $\rho < \omega_1$ tal que $\beta \leqslant \rho \leqslant \delta$ y $|A \cap R_\rho| = \omega_1$; en particular, $\rho \in B$, lo cual es una contradicción dado que $\rho \geqslant \beta$. Por lo tanto B es no acotado en ω_1.

Definamos recursivamente $\psi : \omega_1 \to B$ mediante $\psi(\alpha) = \min(B \setminus \psi[\alpha])$. Así, ψ es estrictamente creciente y suprayectiva. En particular, ψ es cofinal en ω_1.

Veamos que $\{G_{\psi(\alpha)} : \alpha \in \omega_1\}$ es cofinal en $\mathcal{K}$. Sea $E \in \mathcal{K}$. Como $\mathcal{G}$ es cofinal en $\mathcal{K}$, existe $\rho \in \omega_1$ tal que $E \subseteq G_\rho$; por otro lado, el que ψ sea cofinal en ω_1 implica la existencia de $\alpha < \omega_1$ tal que $\rho < \psi(\alpha)$ y como $\mathcal{G}$ es creciente, obtenemos que $E \subseteq G_\rho \subseteq G_{\psi(\alpha)}$.

Para cada $\alpha < \omega_1$ hagamos $X_\alpha = G_{\psi(\alpha)} \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} G_{\psi(\beta)}$. Dado que $\mathcal{K}$ es ideal y $X_\alpha \subseteq G_{\psi(\alpha)} \in \mathcal{K}$, deducimos que $X_\alpha \in \mathcal{K}$.

Veamos que $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\omega_1}$ cumple lo requerido.

Como $R_0 = G_0 \setminus \emptyset = G_0 = L$ y L es no numerable, entonces $0 \in B$; de este modo, nuestra definición de ψ nos da la igualdad $\psi(0) = 0$ y así se infiere que $X_0 = G_{\psi(0)} \setminus \emptyset = G_0 = L$

Con respecto a (2), tomemos $x \in X$ y empleemos (b) para hallar $C \in \mathcal{K}$ con $x \in C$. El que $\{G_{\psi(\alpha)} : \alpha \in \omega_1\}$ sea cofinal en $\mathcal{K}$ implica que $T = \{\alpha < \omega_1 : C \subseteq G_{\psi(\alpha)}\} \neq \emptyset$ y así $x \in X_{\min T}$. Por lo tanto $\bigcup_{\alpha\in\omega_1} X_\alpha = X$.

Si $\alpha < \beta < \omega_1$, entonces, por definición, $X_\alpha \subseteq \bigcup_{\gamma<\beta} G_{\psi(\gamma)} \subseteq X \setminus X_\beta$. Por lo tanto $\{X_\rho\}_{\rho<\omega_1}$ es una familia de conjuntos ajenos por pares.

Sea $\alpha \in \omega_1$. El que ψ sea estrictamente creciente implica que $R_{\psi(\alpha)} \subseteq X_\alpha$ y como $\psi(\alpha) \in B$, concluimos que X_α no es numerable, esto es, (4) se verifica.

Sea $E \subseteq X$. Si existe $\beta < \omega_1$ tal que $E \subseteq \bigcup_{\alpha<\beta} X_\alpha$, entonces, como $\mathcal{K}$ es σ-ideal, $\bigcup_{\alpha<\beta} X_\alpha \in \mathcal{K}$ y de esta forma $E \in \mathcal{K}$. Por otro lado si $E \in \mathcal{K}$, el que $\{G_{\psi(\alpha)} : \alpha \in \omega_1\}$ sea cofinal implica que existe $\beta < \omega_1$ tal que $E \subseteq G_{\psi(\beta)}$; ahora, un argumento rutinario muestra que $G_{\psi(\beta)} \subseteq \bigcup_{\alpha<\beta} X_\alpha$ y, en consecuencia, hemos probado (5). □

Proposición 3.7. *Sean X un conjunto no numerable y dos σ-ideales, $\mathcal{K}$ y $\mathcal{J}$, de X que cubran a X. Si $K \in \mathcal{K}$ y $J \in \mathcal{J}$ son tales que $K \cup J = X$, entonces K y J son no numerables.*

Demostración. Sean X, $K \in \mathcal{K}$ y $J \in \mathcal{J}$ como en las hipótesis. Supongamos que K es numerable. Así, como $K \subseteq X \subseteq \bigcup \mathcal{J}$, para cada $k \in K$ existe $J_k \in \mathcal{J}$ tal que $k \in J_k$. Por hipótesis, $\mathcal{J}$ es σ-ideal y en consecuencia, $\bigcup_{k\in K} J_k \in \mathcal{J}$; luego, la contención $K \subseteq \bigcup_{k\in K} J_k$

nos da $K \in \mathcal{J}$ y de este modo, $X = K \cup J \in \mathcal{J}$, un absurdo. Un argumento análogo basta para verificar que J es no numerable. $\square$

Lema 3.8. *Sean X un conjunto de cardinalidad ω_1 y dos colecciones, $\mathcal{K}$ y $\mathcal{J}$, que cumplan las hipótesis del lema 3.6 . Supongamos adicionalmente que existen $K \in \mathcal{K}$ y $J \in \mathcal{J}$ tales que $K \cup J = X$ y $K \cap J = \emptyset$. Entonces existe $f : X \to X$ tal que $f = f^{-1}$ y la equivalencia siguiente es cierta para cualquier $E \subseteq X$,*

$$f[E] \in \mathcal{K} \textit{ si y sólo si } E \in \mathcal{J}.$$

Demostración. De acuerdo a la proposición anterior, K y J son no numerables por lo que aplicando el lema 3.6 a las parejas $K, \mathcal{K}$ y $J, \mathcal{J}$ obtenemos un par de familias $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\omega_1} \subseteq \mathcal{K}$ y $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in\omega_1} \subseteq \mathcal{J}$ que cumplen las conclusiones del lema 3.6 para los ideales correspondientes. En particular, $X_0 = K$ y $Y_0 = J$, ver inciso (1) del lema 3.6. Ahora, dadas nuestras hipótesis sobre J y K, podemos emplear estas igualdades y las condiciones (2) y (3) del lema 3.6 para deducir que $K = \bigcup_{0<\alpha<\omega_1} Y_\alpha$ y $J = \bigcup_{0<\alpha<\omega_1} X_\alpha$. De este modo $X = K \cup J = \bigcup_{0<\alpha<\omega_1} Y_\alpha \cup \bigcup_{0<\alpha<\omega_1} X_\alpha$ y como $K \cap J = \emptyset$, la colección $\mathcal{Z} = \{Z : \exists\alpha \in \omega_1 \setminus 1\ (Z \in \{X_\alpha, Y_\alpha\})\}$ es disjunta por pares y cubre a X.

Por el inciso (4) del lema 3.6, cada elemento de $\mathcal{Z}$ tiene cardinalidad ω_1. Así, para cada $\alpha \in \omega_1 \setminus 1$ fijamos $f_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha$, una función biyectiva. Sea $\mathcal{F} = \{f_\alpha : \alpha \in \omega_1 \setminus 1\} \cup \{f_\alpha^{-1} : \alpha \in \omega_1 \setminus 1\}$. Como $\mathcal{Z}$ es disjunta por pares, concluimos que $\mathcal{F}$ es un sistema compatible de funciones biyectivas por lo que $f = \bigcup \mathcal{F}$ es una función biyectiva; por otro lado, el que $\mathcal{Z}$ cubra a X y la igualdad $\mathrm{dom}(f) = \bigcup\{\mathrm{dom}(g) : g \in \mathcal{F}\} = \bigcup \mathcal{Z}$, nos permiten concluir que $f : X \to X$.

Veamos que f cumple lo deseado. Primero observemos que

$$\begin{aligned} f^{-1} &= \bigcup\{g^{-1} : g \in \mathcal{F}\} = \bigcup(\{f_\alpha^{-1} : \alpha \in \omega_1 \setminus 1\} \cup \{(f_\alpha^{-1})^{-1} : \alpha \in \omega_1 \setminus 1\}) = \\ &= \bigcup(\{f_\alpha^{-1} : \alpha \in \omega_1 \setminus 1\} \cup \{f_\alpha : \alpha \in \omega_1 \setminus 1\}) = \bigcup \mathcal{F} = f. \end{aligned}$$

Con respecto a la segunda propiedad de f, empecemos por notar que si $\beta < \omega_1$, entonces

$$f\left[\bigcup_{\alpha<\beta} X_\alpha\right] = \bigcup_{\alpha<\beta} f[X_\alpha] = \bigcup_{\alpha<\beta} Y_\alpha. \tag{3.1}$$

Ahora, si $E \subseteq X$, el inciso (5) del lema 3.6 nos garantiza que $E \in \mathcal{K}$ si y sólo si existe $\beta < \omega_1$ con $E \subseteq \bigcup_{\alpha<\beta} X_\alpha$. Empleemos ahora la biyectividad de f y las igualdades dadas en (3.1) para deducir que la pertenencia $E \in \mathcal{K}$ equivale a la contención $f[E] \subseteq \bigcup_{\alpha<\beta} Y_\alpha$ y así, nuevamente por el lema 3.6(5), se deduce que $E \in \mathcal{K}$ si, y únicamente si, $f[E] \in \mathcal{J}$. $\square$

Teorema 3.9 (Teorema de Erdős-Sierpiński)**.** *Suponiendo la Hipótesis del Continuo, existe una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumple las siguientes propiedades.*

- $f = f^{-1}$.
- $f[E]$ *pertenece a* $\mathcal{M}$ *si y sólo si* E *pertenece a* $\mathcal{N}$.

Demostración. Los conjuntos unitarios son magros y nulos por lo que $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ cubren a X, así debido a los lemas 3.1, 3.4 3.8 y el teorema 1.21 basta ver que $cf(\mathcal{M}) = \omega_1 = cf(\mathcal{N})$. Bajo la Hipótesis del Continuo se tiene que todos los cardinales que integran el Diagrama de Cichon son iguales a ω_1, en particular $\mathrm{cf}(\mathcal{N})$ y $\mathrm{cf}(\mathcal{M})$. $\square$

La siguiente sección tiene por fin establecer la notación y los resultados que serán importantes para el resto del capítulo.

4.1 Álgebras booleanas

Nuestro texto base para álgebras booleanas será [12], aunque, en algunas ocasiones, cambiaremos los símbolos. Por ejemplo, en lugar de usar a' para denotar al complemento booleano de a, emplearemos $-a$.

La frase $(A, \wedge, \vee, -, 0, 1)$ *es un álgebra booleana* será sustituida en esta tesis por la expresión A *es un álgebra booleana* y asumiremos, implícitamente, que A está equipada con las estructura correspondiente: para cualesquiera $a, b \in A$, $a \wedge b$ y $a \vee b$ serán el ínfimo y el supremo del conjunto $\{a, b\}$ en A, respectivamente; mientras que 0 y 1 representarán a los elementos mínimo y máximo de A.

Suponga que A es un álgebra booleana. A la colección $A \setminus \{0\}$ la denotaremos por A^+ y será común referirnos a los elementos de A^+ como *los positivos de* A.

Si κ es un cardinal, se dirá que A es κ*-completa* si para cualquier $S \in [A]^{<\kappa}$ el supremo de S en A (en símbolos, $\bigvee S$) existe. En particular, A será llamada *completa* si es $|A|^+$-completa (aquí, $|A|^+$ es el cardinal sucesor de $|A|$).

Sea $(\mathbb{P}, \leqslant_{\mathbb{P}})$ un conjunto parcialmente ordenado. Dos elementos $p, q \in \mathbb{P}$ son llamados *compatibles* (y usaremos el símbolo $p \mid q$ para abreviar esto) si existe $r \in \mathbb{P}$ de tal forma que $r \leqslant_{\mathbb{P}} p$ y $r \leqslant_{\mathbb{P}} q$; en caso contrario, diremos que p y q son *incompatibles* y escribiremos $p \perp q$. Así, una *anticadena* en $\mathbb{P}$ es un subconjunto de $\mathbb{P}$ tal que cualesquiera dos elementos distintos de éste son incompatibles (note que $\emptyset$ es, por vacuidad, una anticadena en $\mathbb{P}$). De esta manera, una anticadena $W \subseteq \mathbb{P}$ es llamada *anticadena maximal en* $\mathbb{P}$ si para cualquier $r \in \mathbb{P}$ existe $s \in W$ con $r \mid s$. Finalmente, $\mathbb{P}$ *cumple la condición de la cadena contable* (abreviado, $\mathbb{P}$ *cumple la ccc*) si toda anticadena en $\mathbb{P}$ es, a lo sumo, infinita numerable.

Las nociones que aparecen en el párrafo previo para conjuntos parcialmente ordenados se traducen al álgebra booleana A al hacer $\mathbb{P} = A^+$. De forma específica: si $a, b \in A^+$ y $W \subseteq A^+$, entonces

1. a y b son compatibles en A si y sólo si $a \wedge b > 0$;

2. a y b son incompatibles en A si y sólo si $a \wedge b = 0$;

3. W es una anticadena en A si y sólo si $x \wedge y = 0$ para cualesquiera $x, y \in W$ que satisfagan $x \neq y$.

Más aún, *la celularidad de* A, $c(A)$, es el supremo de todas las cardinalidades de las anticadenas de A. En particular, A cumple la ccc si, y únicamente si, $c(A) \leqslant \omega$.

Sea A un álgebra booleana. Dados $a, b \in A$, definimos $a - b = a \wedge (-b)$ y $a \triangle b = (a - b) \vee (b - a)$ (la diferencia simétrica de a y b). Luego, si $\leqslant$ es el orden parcial natural de A, entonces la desigualdad $a \leqslant b$ equivale a que $a - b = 0$.

Proposición 4.1. *Si A es un álgebra booleana $c(A)^+$-completa, entonces A es completa. En especial, toda álgebra booleana ω_1-completa que cumple la ccc es completa.*

Demostración. Fijemos $S \subseteq A$ y argumentemos que S posee supremo en A.

Defina $S^{\downarrow} = \{a \in A : \exists b \in S \ (a \leqslant b)\}$ y denote por $\mathcal{W}$ a la colección de todas las anticadenas de A que son subconjuntos de $S^{\downarrow}$. Notemos que si $W \subseteq A^+$, entonces W es anticadena en A si y sólo si todos los subconjuntos finitos de W son anticadenas en A. En consecuencia, $\mathcal{W}$ es una familia de carácter finito (ver [6, Definición 8.6, p. 181]) y como $\emptyset \in \mathcal{W}$, se sigue del Lema de Tukey-Teichmüller (ver [6, Teorema 8.8, p. 182]) que $\mathcal{W}$ posee un elemento maximal con respecto a la contención directa, es decir, existe $W \in \mathcal{W}$ de tal forma que

$$\text{para cualquier } a \in S^{\downarrow} \setminus \{0\} \text{ existe } z \in W \text{ con } z \wedge a > 0. \tag{4.1}$$

Como W es anticadena, se infiere que $|W| < c(A)^+$. Ahora, dado que A es $c(A)^+$-completa, se sigue que W tiene supremo en A. Hagamos $w = \bigvee W$ y veamos que $w = \bigvee S$.

En busca de una contradicción, supongamos que w no es cota superior de S, esto es, que existe $x \in S$ con $x \nleqslant w$. Luego, $0 < x - w \leqslant x$ así que, por definición, $x - w \in S^{\downarrow} \setminus \{0\}$.

La condición (4.1) nos da $z \in W$ tal que $z \wedge (x - w) > 0$. Por otro lado, la igualdad $w = \bigvee W$ implica que $z \leqslant w$ y de esta forma,

$$0 = z - w \geqslant (z \wedge x) - w = z \wedge (x - w) > 0,$$

el absurdo que estabamos buscando.

Únicamente nos resta comprobar que si $b \in A$ satisface $w \not\leqslant b$, entonces b no es cota superior de S. Dado que $w - b > 0$, se deduce que $w > w - (w - b) = w \wedge b$ y, en consecuencia, hay $z \in W$ con

$$z \not\leqslant w \wedge b. \tag{4.2}$$

Ahora, la hipótesis $z \in W \subseteq S^{\downarrow}$ implica que $z \leqslant w$ y que existe $a \in S$ con $z \leqslant a$. De este modo, la desigualdad $a \leqslant b$ implicaría que $z \leqslant b$ y, por ende, que $z \leqslant w \wedge b$, una contradicción a (4.2). En resumen, $a \in S$ y $a \not\leqslant b$. $\square$

Un conjunto $I \subseteq A$ es un *ideal en A* si las condiciones siguientes son satisfechas.

1. $0 \in I$ y $1 \notin I$.

2. Para cualesquiera $a, b \in I$, $a \wedge b \in I$.

3. Cuando $a \in A$ y $b \in I$ satisfacen $a \leqslant b$, se sigue que $a \in I$.

Si, adicionalmente, se tiene que para cualquier $S \in [I]^{\leqslant\omega}$, $\bigvee S$ existe y es un elemento de I, entonces I recibirá por nombre *σ-ideal en A*.

Un caso particular de la discusión precedente es como sigue:

4.2 Álgebras de medida y categoría

Suponga que X es un espacio topológico y que $E, F \subseteq X$. Si el conjunto

$$E \triangle F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E)$$

es magro en X, escribiremos $E =_c F$. Luego, diremos que E tiene *la propiedad de Baire en X* si existe $U \in \tau_X$ de tal modo que $E =_c U$. Así, emplearemos el símbolo $BP(X)$ para denotar a la familia de todos los subconjuntos de X que tienen la propiedad de Baire en X.

Lema 4.2. *Para cualquier espacio topológico X, se cumple lo siguiente.*

1. *La relación $=_c$ es una relación de equivalencia en $\wp(X)$.*

2. *$\tau_X \subseteq BP(X)$.*

3. *Si F es un subconjunto cerrado de X, entonces $F =_c \operatorname{int} F$.*

4. *Si $G \in \tau_X$, entonces $G =_c \overline{G}$.*

5. *Si $G \in \tau_X$, entonces $\overline{G} =_c \operatorname{int} \overline{G}$.*

Demostración. Con respecto a (1), la definición implica directamente que $=_c$ es simétrica. Ahora, para cualquier $E \subseteq X$ se tiene que $E \triangle E = \emptyset$ y como este conjunto es magro en X, se deduce que $=_c$ es reflexiva. Ahora sean $E, G, H \subseteq X$ tales que $E =_c G$ y $G =_c H$. Definamos $A = E \triangle G$ y $B = G \triangle H$ para obtener que $A, B \in \mathcal{M}(X)$. Dado que $G \triangle G = \emptyset$ y $\emptyset \triangle H = H$, se tiene lo siguiente:

$$E \triangle H = E \triangle ((G \triangle G) \triangle H) = (E \triangle G) \triangle (G \triangle H) = A \triangle B.$$

Luego, como $A \triangle B \subseteq A \cup B$ y $A \cup B \in \mathcal{M}(X)$, se sigue $E \triangle H = A \triangle B \in \mathcal{M}(X)$, es decir, $E =_c H$.

El inciso (2) es corolario directo de la reflexividad de $=_c$.

Concentrémonos en (3): dado que $F \triangle \operatorname{int} F = (F \setminus \operatorname{int} F) \cup (\operatorname{int} F \setminus F) = F \setminus \operatorname{int} F$, sólo debemos verificar que $F \setminus \operatorname{int} F$ es magro. Como este conjunto es cerrado, todo se reduce a mostrar que $W = \operatorname{int}(F \setminus \operatorname{int} F)$ es vacío. Para esto, note que la contención $W \subseteq F$ implica que $W = \operatorname{int} W \subseteq \operatorname{int} F$ mientras que, por definición de W, $W \subseteq X \setminus \operatorname{int} F$. En resumen, $W = \emptyset$.

En forma similar al inciso previo, empecemos por notar que la diferencia simétrica $G \triangle \overline{G}$ es igual al conjunto cerrado $\overline{G} \setminus G$. Luego, las igualdades

$$\operatorname{int}\left(\overline{G} \setminus G\right) = \operatorname{int}\left(\overline{G} \cap (X \setminus G)\right) = \left(\operatorname{int} \overline{G}\right) \cap \operatorname{int}(X \setminus G) = \left(\operatorname{int} \overline{G}\right) \cap \left(X \setminus \overline{G}\right) = \emptyset$$

nos garantizan que $\overline{G} \setminus G$ es magro y, por ende, $G =_c \overline{G}$.

Finalmente, si G es abierto en X, entonces, por (3) y (4), $\overline{G} =_c \operatorname{int} \overline{G}$ y $G =_c \overline{G}$. Luego, según (2), $\overline{G} =_c \operatorname{int} \overline{G}$. □

Lema 4.3. *Para cualquier espacio topológico X, $BP(X)$ es una σ-álgebra en X.*

Demostración. Por el lema 4.2 tenemos que $\{\emptyset, X\} \subseteq \tau_X \subseteq BP(X)$.

Veamos que $PB(X)$ es cerrada bajo complementos. Sea $E \in PB(X)$. Por definición, existe $U \in \tau_X$ de tal suerte que $E =_c U$ y como $E \bigtriangleup U = (X \setminus E) \bigtriangleup (X \setminus U)$, entonces $X \setminus E =_c X \setminus U$. Ahora note que $X \setminus U$ es cerrado en X, así que por el inciso (3) del lema 4.2 obtenemos que $V = \operatorname{int}(X \setminus U)$ es un abierto en X con $X \setminus U =_c V$, y dado que $=_c$ es transitiva, $X \setminus E =_c V$. En conclusión, $X \setminus E \in BP(X)$.

Comprobemos que $BP(X)$ es cerrada bajo uniones numerables. Sea $\{E_n : n \in \omega\} \subseteq BP(X)$ y hagamos $E = \bigcup_{n\in\omega} E_n$. Luego, para cada $n \in \omega$ existe $U_n \in \tau_X$ de tal forma que $E_n =_c U_n$, esto es, $U_n \bigtriangleup E_n \in \mathcal{M}(X)$.

Del párrafo previo se sigue que el conjunto $M = \bigcup_{n\in\omega}(U_n \bigtriangleup E_n)$ es magro en X. Como $U = \bigcup_{n\in\omega} U_n$ es abierto, sólo debemos convencernos de que $E \bigtriangleup U \subseteq M$. Para esto, note que si $m \in \omega$, entonces $U_m \subseteq U$ y de aquí, $E_m \setminus U \subseteq E_m \setminus U_m$. En consecuencia,

$$E \setminus U = \bigcup_{n\in\omega}(E_n \setminus U) \subseteq \bigcup_{n\in\omega}(E_n \setminus U_n) \subseteq M.$$

Similarmente, $U \setminus E \subseteq M$ y esto concluye la prueba. □

Dado un espacio topológico X, la σ-álgebra en X generada por τ_X será llamada *álgebra de Borel* y será denotada por $\mathcal{B}(X)$. Más aún, los elementos de $\mathcal{B}(X)$ recibirán por nombre *conjuntos borelianos en X*.

Observe que, de acuerdo a lemas 4.3 y 4.2, $BP(X)$ es una σ-álgebra en X que contiene a τ_X. En consecuencia, tenemos el resultado siguiente.

Teorema 4.4. *Para cualquier espacio topológico X, $\mathcal{B}(X) \subseteq BP(X)$.*

Notemos que si $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra en algún conjunto X, entonces, de hecho, $\mathcal{A}$ es una subálgebra del álgebra booleana $\wp(X)$ (con las operaciones habituales: el supremo de dos conjuntos es su unión, el ínfimo corresponde a la intersección y el complemento booleano es el complemento con respecto a X). De hecho, el que $\mathcal{A}$ sea cerrada bajo uniones numerables nos dice que $\mathcal{A}$ es ω_1-completa. De manera particular, tenemos lo siguiente.

Ejemplo 4.5. $\mathcal{B}({}^{\omega}2)$ *es un álgebra de Boole* ω_1*-completa (el supremo de* $\mathcal{S} \in [\mathcal{B}({}^{\omega}2)]^{\leqslant\omega}$ *es* $\bigcup \mathcal{S}$*).*

Lema 4.6. *Sea* X *un conjunto no vacío y sea* B *una subálgebra de* $\wp(X)$*. Si* B *es cerrada bajo uniones numerables e* $\mathcal{I}$ *es un* σ*-ideal en* X*, entonces* $B \cap \mathcal{I}$ *es un* σ*-ideal en el álgebra* B*.*

Demostración. Hagamos $\mathcal{J} = B \cap \mathcal{I}$. Como $\{\emptyset, X\} \subseteq B$ e $\mathcal{I}$ es ideal, trivialmente $X \notin \mathcal{J}$ y $\emptyset \in \mathcal{J}$. Por otro lado, si $E \in \mathcal{J}$, se sigue que $E \in \mathcal{I}$ y, por ende, para cualquier $F \in B$ con $F \subseteq E$ tenemos que $F \in \mathcal{I}$, esto es, $F \in \mathcal{J}$. Así, $\mathcal{J}$ es un ideal en B.

Ahora sea $\mathcal{S} \in [\mathcal{J}]^{\leqslant\omega}$. Dado que $\mathcal{I}$ es un σ-ideal y B es cerrada bajo uniones numerables, deducimos que $\bigcup \mathcal{S} \in \mathcal{J}$. □

Enfoquémonos en hacer del conjunto ${}^{\omega}2$ un espacio de medida. Para esto, notemos que la función $\rho : \wp(2) \to [0,1]$ dada por $\rho(\emptyset) = 0$, $\rho(\{0\}) = \rho(\{1\}) = \frac{1}{2}$ y $\rho(2) = 1$ hace que $(2, \wp(2), \rho)$ sea un espacio de medida. De hecho, ρ resulta ser una probabilidad (uno puede pensar a los elementos del ordinal 2 como los posibles resultados de *echar un volado* con una moneda justa y a ρ como la probabilidad correspondiente).

Denotemos por $\mathscr{H}$ a la colección $\{[t] : t \in {}^{<\omega}2\}$ (la base para la topología del producto ${}^{\omega}2$) y hagamos que $\mathscr{A}$ sea la σ-álgebra generada por $\mathscr{H}$. También, definamos la función $\lambda_0 : \mathscr{H} \to [0,1]$ mediante $\lambda_0([t]) = 2^{-|t|}$, para cualquier $t \in {}^{<\omega}2$ (note que $[t]$ puede ser interpretado como el evento que consiste en lanzar $|t|$ volados independientes con una moneda justa y, por ende, $\lambda_0([t])$ es la probabilidad de este evento).

Con todo lo anterior, y el empleo del Teorema de Carathéodory-Hahn (ver [5, p. 356]), se produce una probabilidad $\lambda : \mathscr{A} \to [0,1]$ de tal modo que, para cualquier $t \in {}^{<\omega}2$, $\lambda([t]) = 2^{-|t|}$. En particular, se tiene lo siguiente.

1. $\mathcal{B}({}^{\omega}2) \subseteq \mathscr{A}$,

2. $\lambda(\{x\}) = 0$, siempre que $x \in {}^{\omega}2$, y

3. $\lambda({}^{\omega}2) = 1$.

Así, la colección $\mathcal{N}({}^{\omega}2) = \{E \subseteq {}^{\omega}2 : \lambda(E) = 0\}$ es un σ-ideal en ${}^{\omega}2$ que contiene a todos los unipuntuales.

Corolario 4.7. *Tanto* $\mathcal{M}^* = \mathcal{M}({}^{\omega}2) \cap \mathcal{B}({}^{\omega}2)$ *como* $\mathcal{N}^* = \mathcal{N}({}^{\omega}2) \cap \mathcal{B}({}^{\omega}2)$ *son σ-ideales en el álgebra booleana* $\mathcal{B}({}^{\omega}2)$.

Tomemos I, un ideal en el álgebra booleana A, y definamos la relación binaria $=_I$ en A mediante la fórmula

$$\forall\, a, b \in A \ (a =_I b \ \leftrightarrow \ a \bigtriangleup b \in I)$$

para obtener que $=_I$ es de equivalencia.

Denotemos por A/I a la colección de todas las clases de equivalencia de esta relación y por $\pi_I : A \to A/I$ a la proyección natural, es decir, a la función que a cada $a \in A$ le asocia su clase de equivalencia:

$$\pi_I(a) = \{x \in A : x =_I a\}.$$

Entonces, equiparemos a A/I con la estructura de álgebra booleana que hace que π_I sea un homomorfismo, esto es, para cualesquiera $a, b \in A$ se satisface que

1. $\pi_I(a) \wedge \pi_I(b) = \pi_I(a \wedge b)$,

2. $\pi_I(a) \vee \pi_I(b) = \pi_I(a \vee b)$ y

3. $-\pi_I(a) = \pi_I(-a)$.

En consecuencia, el orden parcial natural de A/I está dado por la fórmula

$$\pi_I(a) \leqslant \pi_I(b) \text{ si y sólo si } a - b \in I.$$

Naturalmente, $\pi_I(0)$ y $\pi_I(1)$ son, respectivamente, el mínimo y el máximo elemento de A/I.

Al álgebra booleana A/I se le conoce como *el cociente de A módulo I*.

Definición 4.8. Con la notación establecida en el corolario 4.7, las álgebras boolenas

$$\mathbb{M} = \mathcal{B}({}^{\omega}2)/\mathcal{N}^* \qquad \text{y} \qquad \mathbb{C} = \mathcal{B}({}^{\omega}2)/\mathcal{M}^*$$

son llamadas, respectivamente, *el álgebra de medida* y *el álgebra de categoría*.

Establezcamos notación que será empleada en el resto de la tesis: dados $E, F \in \mathcal{B}({}^{\omega}2))$, el símbolo $E =_c F$ se usará para abreviar la relación $E =_{\mathcal{M}^*} F$; mientras que $E =_m F$ será empleado cada vez que $E =_{\mathcal{N}^*} F$. También, $[E]_c = \pi_{\mathcal{M}^*}(E)$ y $[E]_m = \pi_{\mathcal{N}^*}(E)$. Naturalmente, los subíndices c y m hacen referencia a **c**ategoría y **m**edida, correspondientemente.

Nos enfocaremos ahora en probar que tanto el álgebra de medida como la de categoría son completas.

Lema 4.9. $\mathbb{M}$ *cumple la ccc.*

Demostración. Mostraremos esto por contradicción: supongamos que W es una anticadena en $\mathbb{M}$ de cardinalidad ω_1 y fijemos $\{a_\xi : \xi \in \omega_1\}$, una enumeración de W, de tal modo que $a_\xi \wedge a_\eta = [\emptyset]_m$, siempre que $\xi < \eta < \omega_1$. Más aún, para cada $\xi < \omega_1$ fijemos un representante $x_\xi \in a_\xi$.

Note que la condición $W \subseteq \mathbb{M}^+ = \mathbb{M} \setminus \{[\emptyset]_m\}$ implica que, para cualquier $\xi < \omega_1$, $x_\xi \notin \mathcal{N}^*$, esto es, $\lambda(x_\xi) > 0$.

Dado $i \in \omega$, hagamos $S_i = \left\{\xi < \omega_1 : \lambda(x_\xi) \geqslant 2^{-i}\right\}$ y notemos que el párrafo previo nos da la igualdad $\bigcup_{n\in\omega} S_n = \omega_1$. Ahora, la regularidad de ω_1 implica que hay $\ell \in \omega$ con $|S_\ell| = \omega_1$. En particular, existe una función inyectiva $f : \omega \to S_\ell$.

Observe que si $k < n < \omega$, entonces $f(k)$ y $f(n)$ son elementos distintos de ω_1 y, por ende,

$$[\emptyset]_m = a_{f(k)} \wedge a_{f(n)} = [x_{f(k)}]_m \wedge [x_{f(n)}]_m = [x_{f(k)} \cap x_{f(n)}]_m,$$

esto es, $x_\xi \cap x_\eta \in \mathcal{N}^*$ (equivalentemente, $\lambda(x_{f(k)} \cap x_{f(n)}) = 0$).

Definamos, para cada $n \in \omega$,

$$y_n = x_{f(n)} \setminus \bigcup_{k<n} x_{f(k)} = x_{f(n)} \setminus \bigcup_{k<n} \left(x_{f(n)} \cap x_{f(k)}\right).$$

Entonces, para cualesquiera $k < j < \omega$ se tiene que $y_k \cap y_j = \emptyset$ y $2^{-\ell} \leqslant \lambda(x_{f(k)}) = \lambda(y_k)$

(ver párrafo previo). Para finalizar nuestro argumento, hagamos $p = 2^{\ell+1}$ y notemos que

$$\lambda\left(\bigcup_{k<p} y_k\right) = \sum_{k<p} \lambda\left(y_k\right) \geqslant \sum_{k<p} 2^{-\ell} = p \cdot 2^{-\ell} = 2;$$

una contradicción al hecho de que λ es una probabilidad. □

Observe que, de acuerdo a la proposición 4.1, si conseguimos probar que $\mathbb{M}$ es ω_1-completa, entonces tendríamos que $\mathbb{M}$ es completa. Con esto en mente, presentamos el resultado siguiente.

Proposición 4.10. *Sea A un álgebra booleana ω_1-completa. Si I es un σ-ideal en A, entonces el cociente A/I es ω_1-completo.*

Demostración. Empecemos por fijar $\mathscr{S} \subseteq A/I$ con $|\mathscr{S}| = \omega$. Entonces, existe $S \in [A]^\omega$ de tal modo que $\{\pi_I(x) : x \in S\} = \mathscr{S}$. Definamos $z = \bigvee S$ (el supremo calculado en A). Claramente, z es cota superior de S y, por ende, $a = \pi_I(z)$ es cota superior de $\mathscr{S}$. Únicamente nos resta probar que a es la mínima cota superior de $\mathscr{S}$ en A/I.

Suponga que $b \in A/I$ satisface que $\pi_I(x) \leqslant b$, para cada $x \in S$. Tomemos $w \in b$ y observemos que nuestras hipótesis implican que $\{x - w : x \in S\}$ es un subconjunto de I. Luego, $z - w = (\bigvee S) - w = \bigvee\{x - w : x \in S\} \in I$ y, en conclusión, $a = \pi_I(z) \leqslant \pi_I(w) = b$. □

Como corolario de la proposición de arriba, del ejemplo 4.5 y de la proposición 4.7 se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 4.11. $\mathbb{M}$ *es un álgebra de Boole completa.*

Recuerde que si X es un espacio topológico y $U \subseteq X$, entonces U es un *abierto regular en X* si $U = \operatorname{int} \overline{U}$. De acuerdo a [12, Ejercicio 2.4.5, p. 40] y [12, Proposición 3.1.10, p. 65], la colección de todos los abiertos regulares de X, $RO(X)$, equipada con las operaciones

$$U \wedge V = U \cap V, \qquad U \vee V = \operatorname{int} \overline{U \cup V} \qquad \text{y} \qquad -U = X \setminus \overline{U},$$

para cualesquiera $U, V \in RO(X)$, es un álgebra booleana cuyo orden natural es la contención directa (y, en particular, sus elementos máximo y mínimo son X y $\emptyset$, respectivamente). Más aún, en [12, Ejemplo 2.4.9, p. 41] se verifica que si $\mathscr{S} \subseteq RO(X)$, entonces

$$\bigvee \mathscr{S} = \operatorname{int}\left(\overline{\bigcup \mathscr{S}}\right) \qquad \text{y} \qquad \bigwedge \mathscr{S} = \operatorname{int}\left(\overline{\bigcap \mathscr{S}}\right),$$

esto es, $RO(X)$ es completa.

Ahora, en el caso en que X es de Baire, se sigue que $\mathcal{M}(X)$ es un σ-ideal en $\wp(X)$ y, por el lema 4.6, $\mathcal{B}(X) \cap \mathcal{M}(X)$ es un σ-ideal en $\mathcal{B}(X)$.

Lema 4.12. *Si X es un espacio de Baire, entonces el cociente $\mathcal{B}(X)/\left(\mathcal{B}(X) \cap \mathcal{M}(X)\right)$ es isomorfo a $RO(X)$. En particular, el álgebra $\mathcal{B}(X)/\left(\mathcal{B}(X) \cap \mathcal{M}(X)\right)$ es completa.*

Demostración. Con la intención de simplificar la escritura de la prueba, convengamos en denotar a $\mathcal{B}(X)$ por $\mathcal{B}$, a $\mathcal{B}(X) \cap \mathcal{M}(X)$ por $\mathcal{M}^\dagger$ y a $\mathcal{B}(X)/\left(\mathcal{B}(X) \cap \mathcal{M}(X)\right)$ por $\mathcal{B}^\dagger$. También, para cualquier $E \in \mathcal{B}$, emplearemos el símbolo $[E]_\dagger$ para representar a la clase de equivalencia $\pi_{\mathcal{M}^\dagger}(E) = \{F \in \mathcal{B} : F \triangle E \in \mathcal{M}^\dagger\} = \{F \in \mathcal{B} : F =_c E\}$.

Las contenciones $RO(X) \subseteq \tau_X \subseteq \mathcal{B}$ nos garantizan que $h : RO(X) \to \mathcal{B}^\dagger$ dada por $h(U) = [U]_\dagger$ está bien definida (note que $RO(X)$ no es una subálgebra de $\mathcal{B}$ porque, en general, si $\{U, V\} \subseteq RO(X)$, entonces el supremo de $\{U, V\}$ calculado en $RO(X)$ no es $U \cup V$).

Es inmediato que $h(\emptyset)$ y $h(X)$ son, respectivamente, el mínimo y el máximo elemento de $\mathcal{B}^\dagger$. Además, para cualesquiera $U, V \in RO(X)$,

$$h(U \wedge V) = h(U \cap V) = [U \cap V]_\dagger = [U]_\dagger \wedge [V]_\dagger = h(U) \wedge h(V).$$

Mostremos que si $U, V \in RO(X)$, entonces $h(U \vee V) = h(U) \vee h(V)$ para deducir que h es un homomorfismo de álgebras booleanas. De acuerdo al inciso (4) del lema 4.2, $\operatorname{int} \overline{U \cup V} =_c U \cup V$ y, de este modo, $\operatorname{int} \overline{U \cup V}$ es un abierto regular en X que satisface $\left[\operatorname{int} \overline{U \cup V}\right]_\dagger = [U \cup V]_\dagger$; luego,

$$h(U \vee V) = h\left(\operatorname{int} \overline{U \cup V}\right) = \left[\operatorname{int} \overline{U \cup V}\right]_\dagger = [U \cup V]_\dagger = [U]_\dagger \vee [V]_\dagger = h(U) \vee h(V).$$

Con respecto a la inyectividad de h: si $U \in RO(X)$ satisface $h(U) = [\emptyset]_\dagger$, entonces

$[U]_\dagger = [\emptyset]_\dagger$ y así, U es magro en X, pero como X es de Baire (ver proposición 1.9), $U = \emptyset$.

Únicamente nos resta mostrar que h es suprayectiva. Con esto en mente, sea $a \in \mathcal{B}^\dagger$, arbitrario, y fije $E \in a$. De aquí, $E \in \mathcal{B}$ y de acuerdo al teorema 4.4 existe $U \in \tau_X$ de tal suerte que $U =_c E$. Ahora note que $V = \operatorname{int} \overline{U}$ es un abierto regular en X e invoque los incisos (4), (5) y (1) del lema 4.2 para deducir que $E =_c V$. En resumen, $V \in RO(X)$ satisface $h(V) = a$. $\square$

El resultado siguiente es corolario inmediato de nuestro lema.

Teorema 4.13. $\mathbb{C}$ *es un álgebra de Boole completa.*

Para concluir esta sección analizaremos algunas propiedades de las álgebras de medida y categoría cuando uno las considera como conjuntos parcialmente ordenados.

Definición 4.14. Suponga que κ es un cardinal, que A es un álgebra booleana y que $S \subseteq A^+$. Diremos que

1. S es un subconjunto *ligado de* A si para cada $F \in [S]^2$, $\bigwedge F > 0$;
2. A es κ*-ligada* si A^+ puede escribirse como la unión de, a lo más, κ subconjuntos ligados de A;
3. S es un conjunto *centrado de* A si para cualquier $F \in [S]^{<\omega}$ se tiene que $\bigwedge F > 0$;
4. A es κ*-centrada* si es posible expresar a A^+ como la unión de, a lo sumo, κ subconjuntos centrados de A.

Omitimos la prueba del lema siguiente porque ésta emplea argumentos rutinarios.

Lema 4.15. *Si κ es un cardinal arbitrario y A es un álgebra booleana, entonces*

1. *todo subconjunto centrado de A es un subconjunto ligado de A,*
2. *A es κ-ligada siempre que A sea κ-centrada y*
3. *si A es ω-ligada, A cumple la ccc.*

Estamos interesados en probar que el álgebra $\mathbb{C}$ es ω-centrada. Para este fin requeriremos algunos preliminares.

Dado $t \in {}^{<\omega}2$, recordemos que $[t] = \{x \in {}^{\omega}2 : t \subseteq x\}$ es un abierto no vacío del producto ${}^{\omega}2$, y como este último es de Baire, se sigue que la clase de equivalencia $[[t]]_c$ es un elemento de $\mathbb{C}^+$.

Proposición 4.16. *La función $e : {}^{<\omega}2 \to \mathbb{C}^+$ dada por $e(t) = [[t]]_c$, para cada $t \in {}^{<\omega}2$, satisface lo siguiente.*

1. *Para cualesquiera $s, t \in {}^{<\omega}2$, $t \supseteq s$ si y sólo si $e(t) \leqslant e(s)$.*

2. *Si $a \in \mathbb{C}^+$, entonces hay $t \in {}^{<\omega}2$ con $e(t) \leqslant a$.*

En especial, $\mathbb{C}$ es la completación booleana del conjunto parcialmente ordenado $({}^{<\omega}2, \supseteq)$ (ver [12]).

Demostración. Argumentos rutinarios muestran que si $s, t \in {}^{<\omega}2$ y $x \in [t] \setminus [s]$, entonces

$$x \in [x \restriction \min\{|s|, |t|\}] \subseteq [t] \setminus [s],$$

esto es, $[t] \setminus [s]$ es un abierto del producto ${}^{\omega}2$. En particular, la condición $[t] \setminus [s] \neq \emptyset$ implica (ver proposición 1.9) que $[t] \setminus [s] \notin \mathcal{M}^*$ y, naturalmente, $e(t) = [[t]]_c \nleqslant [[s]]_c = e(s)$.

Tomemos $s, t \in {}^{<\omega}2$. Es claro que si $t \supseteq s$, entonces $[t] \subseteq [s]$ y, por ende, $e(t) \leqslant e(s)$. Para el recíproco: la hipótesis $t \not\supseteq s$ implica, según el lema 1.40, que $[t] \setminus [s] \neq \emptyset$, así que por el párrafo previo, $e(t) \nleqslant e(s)$. Esto completa la prueba del inciso (1).

Con respecto a (2), sean $a \in \mathbb{C}^+$ y $E \in a$. En vista del teorema 4.4, $E \in BP({}^{\omega}2)$, es decir, existe U, un abierto en ${}^{\omega}2$, de tal suerte que $E =_c U$. Entonces, $a = [U]_c$ y, en consecuencia, $U \neq \emptyset$. Fijemos $t \in {}^{<\omega}2$ con $[t] \subseteq U$. Dado que $[t] \setminus E \subseteq U \setminus E \subseteq E \triangle U \in \mathcal{M}^*$, deducimos que $e(t) = [[t]]_c \leqslant [E]_c = a$. □

Por definición, $({}^{<\omega}2, \supseteq)$ es *la noción de forcing de Cohen* (ver [4, Definición 2.10, p. 26] para más detalles).

Proposición 4.17. $\mathbb{C}$ *es ω-centrada.*

Demostración. Sea e la función definida en la demostración previa. Dado $t \in {}^{<\omega}2$, hagamos

$$C_t = \{a \in \mathbb{C}^+ : e(t) \leqslant a\}.$$

Claramente, si $F \in [\mathbb{C}]^{<\omega}$, entonces $[\emptyset]_c < e(t) \leqslant \bigwedge F$ y así, C_t es un subconjunto ligado de $\mathbb{C}$. Por otro lado, la igualdad $\mathbb{C}^+ = \bigcup\{C_s : s \in {}^{<\omega}2\}$ es corolario de la condición (2) de la proposición 4.16. $\square$

La última parte de la sección está dedicada a mostrar que $\mathbb{M}$ es ω-ligada.

Suponga que $E \subseteq {}^{\omega}2$ es un conjunto medible con respecto a la probabilidad λ y que $x \in {}^{\omega}2$. Para cada $n \in \omega$ definimos el número real

$$d_n(E, x) = \frac{\lambda\left(E \cap [x \restriction n]\right)}{\lambda([x \restriction n])} = 2^n \cdot \lambda\left(E \cap [x \restriction n]\right).$$

Así, si la sucesión $\langle d_n(E, x) : n \in \omega \rangle$ converge al número real δ, diremos que *la densidad de E en x es δ*. Finalmente, denotemos por $\psi(E)$ a la colección de todos los $y \in {}^{\omega}2$ para los que la densidad de E en y es igual a 1.

El resultado siguiente es análogo a uno bien conocido para la medida de Lebesgue, el Teorema de Densidad de Lebesgue (ver [11, Theorem 3.20, p. 17]).

Teorema 4.18. *Si E es un conjunto boreliano en ${}^{\omega}2$, entonces $E =_m \psi(E)$.*

La demostración de este teorema excede los alcances que nos hemos propuesto para el presente trabajo, así que sólo mencionaremos que el resultado de arriba es corolario inmediato de [14, Theorem 2.5, p. 61].

Mostremos que si $a \in \mathbb{M}$ y $E, F \in a$, entonces $\lambda(E) = \lambda(F)$. Dado que E y F pertenecen a la misma clase de equivalencia, se sigue que tanto $\lambda(E \setminus F)$ como $\lambda(F \setminus E)$ son iguales a cero; luego,

$$\lambda(E) = \lambda\left((E \cap F) \cup (E \setminus F)\right) = \lambda\left(E \cap F\right) + \lambda\left(E \setminus F\right) = \lambda\left(E \cap F\right)$$

y, similarmente, $\lambda(F) = \lambda(E \cap F)$.

De este modo, para cualquier $a \in \mathbb{M}$ definimos $\lambda(a) = \lambda(E)$, donde E es un elemento arbitrario de a.

Lema 4.19. *Los enunciados siguientes son ciertos para cualesquiera $a, b \in \mathbb{M}$.*

1. *Si $\{a_n : n \in \omega\} \subseteq \mathbb{M}$ satisface que $a_k \wedge a_\ell = [\emptyset]_m$, siempre que $k < \ell < \omega$, entonces*

$$\lambda\left(\bigvee_{n\in\omega} a_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(a_n).$$

   En particular, cuando $a \wedge b = [\emptyset]_m$, se sigue que $\lambda(a \vee b) = \lambda(a) + \lambda(b)$.

2. *La condición $a \leqslant b$ implica que $\lambda(a) \leqslant \lambda(b)$.*

Demostración. Para verificar (1), empecemos por fijar, para cada $n \in \omega$, $E_n \in a_n$. Note que nuestras hipótesis implican que si $k < \ell < \omega$, entonces $\lambda(E_k \cap E_\ell) = 0$. De este modo, si hacemos $F_n = E_n \setminus \bigcup_{i<n} E_i = E_n \setminus \bigcup_{i<n}(E_n \cap E_i)$, se sigue que $F_n \in a_n$. Más aún, $\{F_n : n \in \omega\}$ es ajena por pares y así,

$$\lambda\left(\bigcup_{n\in\omega} F_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(F_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(a_n);$$

luego, la pertenencia $\bigcup_{n\in\omega} F_n \in \bigvee_{n\in\omega} a_n$ da por terminada la prueba del enunciado principal. Con respecto al caso particular, defina $d_0 = a$, $d_1 = b$ y $d_n = [\emptyset]_m$ para cualquier $n \in \omega \setminus 2$ y aplique (1) a $\{d_n : n \in \omega\} \subseteq \mathbb{M}$.

Veamos el segundo inciso: la desigualdad $a \leqslant b$ nos lleva a que $b = a \vee (b - a)$ y por (1), $\lambda(b) = \lambda(a \vee (b - a)) = \lambda(a) + \lambda(b - a) \geqslant \lambda(a)$. □

Proposición 4.20. $\mathbb{M}$ *es ω-ligado.*

Demostración. En vista de que $\{[t] : t \in {}^{<\omega}2\}$ es una base numerable para la topología de ${}^{\omega}2$, deducimos que este espacio es separable. Fijemos X, un subconjunto denso e infinito numerable de ${}^{\omega}2$. Ahora, para cualesquiera $x \in X$ y $n \in \omega$ hagamos

$$L_n^x = \left\{a \in \mathbb{M} : \lambda\left(a \wedge [[x \restriction n]]_m\right) > 2^{-(n+1)}\right\}.$$

Note que $L_n^x \subseteq \mathbb{M}^+$.

Probaremos que cada L_n^x es un subconjunto ligado de $\mathbb{M}$ por contradicción: supongamos que $a, b \in L_n^x$ satisfacen $a \wedge b = [\emptyset]_m$ y hagamos $c = [[x \upharpoonright n]]_m$. Entonces $\lambda(a \wedge c) > 2^{-(n+1)}$ y $\lambda(b \wedge c) > 2^{-(n+1)}$. Por otro lado, $c \geqslant (a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$ y, en consecuencia (ver lema previo), $2^{-n} = \lambda(c) \geqslant \lambda(a \wedge c) + \lambda(b \wedge c) > 2^{-(n+1)} + 2^{-(n+1)} = 2^{-n}$, que es el absurdo que estabamos buscando.

Dado que $\{L_n^x : (x, n) \in X \times \omega\}$ es una familia numerable, sólo nos resta probar que su unión es $\mathbb{M}^+$. Sean $a \in \mathbb{M}^+$ y $E \in a$ arbitrarios. Note que la igualdad $\psi(E) = \emptyset$, en vista del teorema 4.18, implicaría que $a = [E]_m = [\emptyset]_m$. De este modo, existe $z \in \psi(E)$, es decir, $z \in {}^{\omega}2$ y satisface que $\lim\limits_{n \to \infty} (2^n \cdot \lambda(E \cap [z \upharpoonright n])) = 1$. Por otro lado, para cada $n \in \omega$,

$$0 \leqslant 2^n \cdot \lambda(E \cap [z \upharpoonright n]) \leqslant 2^n \cdot 2^{-n} = 1.$$

En especial, hay $k \in \omega$ con $\frac{1}{2} < 2^k \cdot \lambda(E \cap [z \upharpoonright k])$. Dado que $[z \upharpoonright k]$ es un abierto no vacío de ${}^{\omega}2$, obtenemos que existe $x \in X \cap [z \upharpoonright k]$. Naturalmente, $[x \upharpoonright k] = [z \upharpoonright k]$ y, por ende,

$$2^{-(k+1)} < \lambda(E \cap [z \upharpoonright k]) = \lambda(E \cap [x \upharpoonright k]) = \lambda\left(a \wedge [[x \upharpoonright k]]_m\right).$$

En otras palabras, $a \in L_k^x$. □

4.3 Extensiones genéricas

Para esta última sección de la tesis supondremos que el lector está familiarizado con los resultados establecidos en [7, Chapter VII]. De manera específica hablaremos de algunas propiedades que se verifican en las extensiones genéricas dadas por las álgebras de medida y categoría. Para este fin, recuerde que (tal y como se explica en [7, pp. 223–226]) forzar con un álgebra booleana A es, realmente, forzar con el conjunto parcialmente ordenado que se obtiene al imponerle a A^+ el orden natural del álgebra.

En lo que sigue, V siempre representará a algún modelo transitivo y numerable de la Teoría de Conjuntos. Además, si M es un modelo, $n \in \omega \setminus 1$, $\phi(v_1, \ldots, v_n)$ es una fórmula con todas sus variables libres exhibidas y $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq M$, entonces emplearemos cualquiera de las frases siguientes como sinónimos del enunciado *la relativización* $(\phi(x_1, \ldots, x_n))^M$ *es cierta*.

1. M satisface $\phi(x_1, \ldots, x_n)$.

2. $M \models$ "$\phi(x_1, \ldots, x_n)$".

3. En M, $\phi(x_1, \ldots, x_n)$.

La inclusión del material siguiente en el trabajo tiene por objetivo ejemplificar algunas de las técnicas más socorridas cuando se usan las álgebras de medida y categoría como nociones de forcing.

Antes de enunciar y probar nuestro resultado siguiente hagamos algunas observaciones. Si $\mathbb{P} \in V$ es una noción de forcing, tiene sentido preguntarse si $\mathbb{P}$ añade un *real dominante*, esto es, si para cada G, filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre V, existe $f \in V[G] \cap ({}^{\omega}\omega)$ de tal modo que $g \leqslant^* f$, siempre que $g \in V \cap ({}^{\omega}\omega)$.

Proposición 4.21. *El álgebra de categoría no añade reales dominantes.*

Demostración. Trabajando en V, la proposición 4.16 nos garantiza que e es un encaje denso (ver [4, Definición 2.10, p. 26]) del conjunto parcialmente ordenado $({}^{<\omega}2, \supseteq)$ en $\mathbb{C}$. Luego, de acuerdo a [4, Teorema 2.15, p. 32], toda extensión genérica dada por $\mathbb{C}$ se puede obtener como una extensión genérica producida por $({}^{<\omega}2, \supseteq)$, *la noción de forcing de Cohen*.

Por lo anterior, sólo debemos probar que ${}^{<\omega}2$ no añade reales dominantes. Con esto en mente, supongamos que $\dot{f}$ es un ${}^{<\omega}2$-nombre y que $p \in {}^{<\omega}2$ satisface $p \Vdash \dot{f} : \omega \to \omega$.

En lo que sigue, dado $r \in {}^{<\omega}2$, denotaremos por $r^{\downarrow}$ a la colección $\{t \in {}^{<\omega}2 : t \supseteq r\}$.

Sea $\{p_i : i \in \omega\}$, una enumeración sin repeticiones de $p^{\downarrow}$ y sea $n \in \omega$. La condición $p_n \supseteq p$ nos da $p_n \Vdash \dot{f} : \omega \to \omega$ y, en especial, $p_n \Vdash \exists x\ (x \in \omega\ \wedge\ \dot{f}(\check{n}) = x)$. Así, hay $q_n \in {}^{<\omega}2$ y $k_n \in \omega$ de tal suerte que $q_n \supseteq p_n$ y $q_n \Vdash \dot{f}(\check{n}) = \check{k}_n$.

Empleemos lo hecho en el párrafo previo para definir, en V, la función $g : \omega \to \omega$ mediante $g(n) = k_n + 1$, para cada $n \in \omega$. Únicamente nos resta argumentar que $p \Vdash \check{g} \not\leqslant^* \dot{f}$. Haremos esto por contradicción: suponga que, para algún $s \in {}^{<\omega}2$, se tiene que $s \supseteq p$ y $s \Vdash \check{g} \leqslant^* \dot{f}$, esto es, $s \Vdash \exists\, x \left[x \in \omega\ \wedge\ \forall\, y \in \omega \setminus x \left(\check{g}(y) \leqslant \dot{f}(y)\right)\right]$. Sean $t \in {}^{<\omega}2$ y $\ell \in \omega$ de tal modo que $t \supseteq s$ y $t \Vdash \check{g}(n) \leqslant \dot{f}(n)$, siempre que $n \in \omega \setminus \ell$. Como $t^{\downarrow}$ es un subconjunto infinito de $p^{\downarrow}$, existe $m \in \omega \setminus \ell$ de tal manera que $p_m \supseteq t$. Por la forma en que q_m y k_m fueron elegidos se sigue que $q_m \supseteq t$ y $q_m \Vdash \dot{f}(m) = \check{k}_m$, lo cual, junto con la igualdad

$g(m) = k_m + 1$, nos da $q_m \Vdash \check{g}(m) > \dot{f}(m)$. Por otro lado, las hipótesis $q_m \supseteq t$ y $m \in \omega \setminus \ell$ implican que $q_m \Vdash \check{g}(m) \leqslant \dot{f}(m)$. El absurdo que estabamos buscando. $\square$

A continuación veremos que el álgebra de medida tampoco añade reales dominantes (de hecho, un resultado más fuerte). Para esto, suponga que $A \in V$ satisface $V \models$ "A es un álgebra booleana completa". Ahora, si $p \in A^+$, $\phi(v_1, \ldots, v_n)$ es una fórmula con todas sus variables libres exhibidas y $\{\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n\} \subseteq V$ es una colección de A-nombres, entonces *el valor de verdad de* $\phi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$ *en* A *por debajo de* p se define como ($\leqslant$ es el orden natural en A),

$$[\![\phi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)]\!]_p = \bigvee \{a \in A^+ : a \leqslant p \ \wedge \ a \Vdash \phi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)\}.$$

Una modificación rutinaria de la prueba de [7, Lemma 7.15, p. 224] nos da el resultado siguiente: para cualquier $a \in A^+$ que satisfaga $a \leqslant p$ se tiene que las condiciones siguientes son equivalentes

1. $a \Vdash \phi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$.

2. $a \leqslant [\![\phi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)]\!]$.

Lema 4.22. *Sean A, un álgebra booleana, y $p \in A^+$. Si $E \subseteq A^+$ está acotado superiormente por p y es denso por debajo de p, entonces existe W, una anticadena en A, tal que $W \subseteq E$ y p es el supremo de W en A.*

Demostración. Denotemos por $\mathscr{F}$ a la colección de todas las anticadenas en A que están contenidas en E. Por el Lema de Tukey-Teichmüller, $\mathscr{F}$ posee un elemento maximal con respecto a la contención directa, digamos W.

Claramente, p es una cota superior de W. Por otro lado, si $b \in A$ satisface $p \nleq b$, se deduce que $0 < p - b \leqslant a$ y, en consecuencia, hay $e \in E$ con $e \leqslant p - b \leqslant -b$. Luego, $0 < e = e - b$, es decir, $e \nleq b$. Con esto se prueba que $a = \bigvee W$. $\square$

Notemos que la relación de Galois-Tukey $\mathbb{D}$ dada en la definición 1.23 puede ser relativizada a V. Con esto en mente, suponga que $S \in V$ satisface $V \models$ "S es un subconjunto completo de $\mathbb{D}$" y que $\mathbb{P} \in V$ es una noción de forcing. En este contexto, tiene sentido preguntarse si $\mathbb{P}$ *preserva que* S *es un subconjunto completo de* $\mathbb{D}$, esto es, nos preguntamos si para cualquier G, filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre V, se tiene que $V[G] \models$ "S es un subconjunto completo de $\mathbb{D}$" (observe que aquí estamos hablando de $\mathbb{D}^{V[G]}$, la relativización de $\mathbb{D}$ a la extensión genérica).

Proposición 4.23. *$\mathbb{M}$ preserva subconjuntos completos de $\mathbb{D}$.*

Demostración. Verifiquemos, en primer lugar, el enunciado de abajo.

Afirmación. $\mathbb{M}$ preserva que $V \cap ({}^{\omega}\omega)$ es un subconjunto completo de $\mathbb{D}$.

Para esto, tomemos $\dot{f}$, un $\mathbb{M}$-nombre, y $a \in \mathbb{M}^+$ de tal modo que $a \Vdash \dot{f} : \omega \to \omega$. Fijemos $p \in \mathbb{M}^+$ con $p \leqslant a$ y concentrémonos en probar que

$$\text{existen } p' \in \mathbb{M}^+ \text{ y } g \in V \cap ({}^{\omega}\omega) \text{ tales que } p' \leqslant p \text{ y } p' \Vdash \dot{f} \leqslant^* \check{g}, \tag{4.3}$$

pues la afirmación de arriba es un corolario de este enunciado.

Dado $(n,k) \in \omega \times \omega$, hagamos $a_k^n = [\![\, \dot{f}(\check{n}) \leqslant \check{k} \,]\!]_p$.

Con la notación dada en el párrafo que precede al lema 4.19, comprobaremos que

$$H_n = \left\{k \in \omega : \lambda(a_k^n) > \max\{0, \lambda(p) - 2^{-n}\}\right\} \neq \emptyset \tag{4.4}$$

Tomemos $n \in \omega$. Nuestra elección de p nos garantiza que

$$E = \left\{x \in \mathbb{M}^+ : x \leqslant p \ \wedge \ \exists s \in \omega \left(x \Vdash \dot{f}(\check{n}) = \check{s}\right)\right\}$$

es denso por debajo de p, así que el lema 4.22 produce una anticadena W en $\mathbb{M}$ que satisface $W \subseteq E$ y $\bigvee W = p$. De acuerdo a la proposición 4.20 y al lema 4.15, $|W| \leqslant \omega$; por ende, para algún ordinal $1 \leqslant \alpha \leqslant \omega$ hay $\{w_i : i < \alpha\}$, una enumeración sin repeticiones de W. Empleemos el lema 4.19 para deducir que $\lambda(p) = \sum_{i<\alpha} \lambda(w_i)$ y fijemos $\ell < \alpha$ con $\sum_{i=0}^{\ell} \lambda(w_i) > \lambda(p) - 2^{-n}$. De esta forma, $q = \bigvee_{i=0}^{\ell} w_i$ satisface las desigualdades $q \leqslant p$ y $\lambda(q) > \max\{0, \lambda(p) - 2^{-n}\}$.

Dado $i \leqslant \ell$, la hipótesis $w_i \in W \subseteq E$ nos provee de un número natural s_i para el que $w_i \Vdash \dot{f}(\check{n}) = \check{s}_i$. Mostraremos que $k = \max\{s_j : j \leqslant \ell\}$ es un elemento de H_n para concluir la prueba del enunciado (4.4).

Note que si tuviésemos $q \Vdash \dot{f}(\check{n}) \leqslant \check{k}$, entonces nuestra definición de a_k^n produciría: $q \leqslant a_k^n$ y así, $\lambda(a_k^n) \geqslant \lambda(q) > \max\{0, \lambda(p) - 2^{-n}\}$. Luego, sólo tenemos que verificar que $\{x \in \mathbb{M}^+ : x \leqslant q \ \wedge \ x \Vdash \dot{f}(\check{n}) \leqslant \check{k}\}$ es denso por debajo de q.

Sea $r \in \mathbb{M}^+$ con $r \leqslant q$. La densidad de E por debajo de p nos da la existencia de $s \in \omega$ y $b \in \mathbb{M}^+$ de tal suerte que $b \leqslant r$ y $b \Vdash \dot{f}(\check{n}) = \check{s}$. Además, la condición $0 < b \leqslant q$ nos garantiza que, para algún $i \leqslant \ell$, se tiene que $d = b \wedge w_i \in \mathbb{M}^+$. En vista de las desigualdades $d \leqslant b$ y $d \leqslant w_i$, deducimos que $d \Vdash \dot{f}(\check{n}) = \check{s}$ y $d \Vdash \dot{f}(\check{n}) = \check{s}_i$, esto es, $s = s_i \leqslant k$. En resumen, $d \leqslant r$ y $d \Vdash \dot{f}(\check{n}) \leqslant \check{k}$.

Empleemos (4.4) para definir $g : \omega \to \omega$ mediante $g(n) = \min H_n$, para cada $n \in \omega$. Observe que si $n \in \omega$ y hacemos $a_n = a_{g(n)}^n$, entonces

$$a_n \Vdash \dot{f}(\check{n}) \leqslant \check{g}(\check{n}) \qquad \text{y} \qquad \lambda\left(a_n\right) > \max\{0, \lambda(p) - 2^{-n}\}.$$

Sea $n \in \omega$, arbitrario. Como $a_n \leqslant p$, se sigue que $p = (p - a_n) \vee a_n$ y por el lema 4.19,

$$2^{-n} > \lambda(p) - \lambda\left(a_n\right) = \left[\lambda\left(p - a_n\right) + \lambda\left(a_n\right)\right] - \lambda\left(a_n\right) = \lambda(p - a_n).$$

Para cada $k \in \omega$ hagamos $b_k = \bigwedge_{i=k}^{\infty} a_i$ y notemos que $b_k \leqslant b_{k+1}$. Consecuentemente, si $b = \bigvee_{n \in \omega} b_n$, la continuidad de λ implica que

$$\lambda(b) = \sup\{\lambda(b_n) : n \in \omega\}. \tag{4.5}$$

Además, para cualquier $n \in \omega$,

$$0 \leqslant \lambda(b) = \lambda\left(\bigwedge_{k \in \omega}\left(\bigvee_{i=k}^{\infty}(p - a_i)\right)\right) \leqslant \lambda\left(\bigvee_{i=n}^{\infty}(p - a_i)\right) \leqslant \sum_{i=n}^{\infty} \lambda(p - a_i) \leqslant \sum_{i=n}^{\infty} 2^{-i} = 2^{1-n}.$$

En otras palabras, $\lambda(p - b) = 0$ y esto, aunado a la desigualdad $b \leqslant p$, nos da $\lambda(b) = \lambda(p) > 0$. Así, de acuerdo a (4.5), existe $\ell \in \omega$ con $\lambda(b_\ell) > 0$, o sea, $b_\ell \in \mathbb{M}^+$. Si $n \in \omega \setminus \ell$, entonces $b_\ell \leqslant a_n$ y, naturalmente, $b_\ell \Vdash \dot{f}(\check{n}) \leqslant \check{g}(\check{n})$. En conclusión, g y $p' = b_\ell$ son como se requiere en (4.3).

Estamos, finalmente, en condiciones de probar nuestra proposición: suponga que G

es un filtro $\mathbb{M}$-genérico sobre V y que, en V, S es un subconjunto dominante de $\mathbb{D}$. Si $f \in V[G] \cap ({}^{\omega}\omega)$, la Afirmación nos dice que hay $g \in V \cap ({}^{\omega}\omega)$ con $f \leqslant^* g$. Luego, en V, existe $h \in S$ tal que $g \leqslant^* h$ y, de este modo, $V[G] \models$ "$h \in S$ y $f \leqslant^* h$". $\square$

Para concluir el trabajo mostraremos que forzar con el álgebra de categoría hace que los reales del modelo base tengan medida de Lebesgue cero. Nuestra estrategia para esto será emplear una noción de forcing con la propiedad de que las extensiones genéricas que ésta produce son exactamente las mismas que las dadas por $\mathbb{C}$.

En V, denotemos por $\mathscr{U}$ a la colección de todos los intervalos abiertos en $\mathbb{R}$ que son acotados, no vacíos y poseen extremos racionales. Ahora, para cada $n \in \omega$, definamos el conjunto $\mathbb{P}_n$ mediante la fórmula: $p \in \mathbb{P}_n$ si y sólo si existe $\mathscr{V} \in [\mathscr{U}]^{<\omega}$ de tal modo que (recuerde que μ es la medida de Lebesgue)

$$p = \bigcup \mathscr{V} \qquad \text{y} \qquad \mu(p) < 2^{-n} \tag{4.6}$$

En lo que sigue, siempre pensaremos al conjunto $\mathbb{P}_n$ equipado con el orden parcial dado por la contención inversa.

Note que $\mathbb{P}_n$ es un conjunto numerable y que su máximo elemento es $\emptyset$. Además, si $q, r \in \mathbb{P}_n$ son compatibles, entonces existe $s \in \mathbb{P}_n$ con $s \supseteq q$ y $s \supseteq r$, esto es, $q \cup r \subseteq s$ y, en consecuencia, $\mu(q \cup r) \leqslant \mu(s) < 2^{-n}$. De esta forma, para cualesquiera $q, r \in \mathbb{P}_n$ se tiene que la condición $\mu(q \cup r) \geqslant 2^{-n}$ implica que q y r son incompatibles (en símbolos, $q \perp r$).

Lema 4.24. *La noción de forcing $\mathbb{P}_n$ no es atómica, es decir, para cada $p \in \mathbb{P}_n$ existen $q, r \in \mathbb{P}_n$ tales que $q \supseteq p$, $r \supseteq p$ y $q \perp r$.*

Demostración. Sea $p \in \mathbb{P}_n$, arbitraria. Si $p = \emptyset$, entonces los intervalos $q = (-2^{-(n+1)}, 0)$ y $r = (0, 2^{-(n+1)})$ satisfacen las condiciones dadas en el enunciado (observe que $\mu(q \cup r) = \mu(q) + \mu(r) = 2^{-n}$). Consideremos entonces el caso $p \neq \emptyset$ y hagamos $a = \inf p$ y $d = \sup p$.

Fijemos $\mathscr{V} \in [\mathscr{U}]^{<\omega}$ de tal manera que la condición (4.6) sea satisfecha. Entonces, hay $b, c \in \mathbb{Q}$ para los que los intervalos (a, b) y (c, d) son elementos de $\mathscr{V}$. En vista de que

$$\delta = \tfrac{1}{2}\left(2^{-n} - \mu(p)\right)$$

es un número racional positivo, se sigue que $\mathscr{W} = \{(a-\delta, b)\} \cup (\mathscr{V} \setminus \{(a,b)\})$ es un subconjunto finito de $\mathscr{U}$ y, además, $q = \bigcup \mathscr{V}$ satisface $q = (a-\delta, a] \cup p$; en particular,

$$\mu(q) = \delta + \mu(p) = \tfrac{1}{2}\left(2^{-n} + \mu(p)\right) < \tfrac{1}{2}\left(2^{-n} + 2^{-n}\right) = 2^{-n}.$$

Similarmente, $r = p \cup [d, d+\delta)$ es un elemento de $\mathbb{P}_n$ con $r \supseteq p$. Más todavía,

$$\mu(q \cup r) = \mu\left((a-\delta, a] \cup p \cup [d, d+\delta)\right) = 2\delta + \mu(p) = 2^{-n}$$

y, en consecuencia, $q \perp r$. □

Ahora analizaremos qué sucede con la medida exterior de los reales del modelo base al forzar con $\mathbb{P}_n$.

Lema 4.25. *Si H es un filtro $\mathbb{P}_n$-genérico sobre V, entonces, en $V[H]$, la medida exterior de $\mathbb{R} \cap V$ es menor o igual que 2^{-n}.*

Demostración. Trabajemos en V: para cada $t \in \mathbb{R}$ sea $D_t = \{q \in \mathbb{P}_n : t \in q\}$. En aras de mostrar que D_t es denso en $\mathbb{P}_n$, tomemos $p \in \mathbb{P}_n \setminus D_t$. Igual que antes, fijemos $\mathscr{V} \in [\mathscr{U}]^{<\omega}$ de tal manera que la condición (4.6) se satisfaga. Hagamos $\delta = \frac{1}{4}\left(2^{-n} - \mu(p)\right)$ y hallemos $a, b \in \mathbb{Q}$ con $t - \delta < a < t < b < t + \delta$. Entonces $\mathscr{W} = \{(a,b)\} \cup \mathscr{V}$ es un subconjunto finito de $\mathscr{U}$ y $q = \bigcup \mathscr{W}$ cumple con $q \supseteq p$, $t \in q$ y

$$\mu(q) \leqslant (b-a) + \mu(p) < 2\delta + \mu(p) = \tfrac{1}{2}\left(2^{-n} + \mu(p)\right) < 2^{-n}.$$

Así, q es un elemento de D_t que extiende a p.

Observe que si $a, b \in \mathbb{Q}$ son tales que $a < b$, entonces *el intervalo abierto en* $\mathbb{R}$ *con extremos* a *y* b es una noción que puede relativizarse tanto a V como a $V[H]$. Por ejemplo, la relativización a V, $(a,b)^V$, es un elemento de $\mathscr{U}$, mientras que $(a,b)^{V[H]}$ no lo es. De este modo, si $\mathscr{V} \in [\mathscr{U}]^{<\omega}$ y $p \in \mathbb{P}_n$ satisfacen $p = \bigcup \mathscr{V}$, entonces

$$p^{V[H]} = \bigcup \left\{ U^{V[H]} : U \in \mathscr{V} \right\}.$$

En lo que sigue, μ será la medida de Lebesgue relativizada a V, mientras que $\overline{\mu}$ denotará a dicha medida relativizada a $V[H]$. En especial, para cualquier $p \in \mathbb{P}_n$, se tiene la igualdad $\overline{\mu}\left(p^{V[H]}\right) = \mu(p)$.

En $V[H]$, sea $\{p_i : i \in \omega\}$ una enumeración de H y, para cada $k < \omega$, hagamos

$$E_k = \bigcup \left\{ {p_i}^{V[H]} : i \leqslant k \right\}.$$

Con la idea en mente de probar que $\mathbb{R} \cap V \subseteq \bigcup_{i\in\omega} E_i$, sea $t \in \mathbb{R} \cap V$. Como $V \models$ "D_t es denso en $\mathbb{P}_n$", se sigue que hay $\ell \in \omega$ con $p_\ell \in D_t$, esto es, $t \in p_\ell \subseteq {p_\ell}^{V[H]} \subseteq E_\ell$.

Sea $k \in \omega$, arbitrario. Dado que $\{E_i : i \in \omega\}$ es una sucesión creciente cuya unión contiene a $\mathbb{R} \cap V$, sólo nos resta probar que $\overline{\mu}\left(E_k\right) \leqslant 2^{-n}$. Para esto, note que $\{p_i : i \leqslant k\}$ es un subconjunto finito del filtro H y, por ende, hay $\ell \in \omega$ con $p_\ell \supseteq \bigcup_{i\leqslant k} p_i$. Luego, $E_k \subseteq {p_\ell}^{V[H]}$ y, en consecuencia, $\overline{\mu}\left(E_k\right) \leqslant \overline{\mu}\left({p_\ell}^{V[H]}\right) = \mu(p_\ell) < 2^{-n}$. □

Ya tenemos todo lo necesario para probar el último resultado de la tesis.

Proposición 4.26. *Sea G un filtro $\mathbb{C}$-genérico sobre V. Entonces, en $V[G]$, $\mathbb{R} \cap V$ tiene medida de Lebesgue cero.*

Demostración. Tomemos $n \in \omega$. Verificaremos que, en $V[G]$, la medida exterior de $\mathbb{R} \cap V$ es, a lo más, 2^{-n}.

Trabajemos en V: por un lado, ya vimos que $\mathbb{P}_n$ es una noción de forcing numerable y sin átomos y, por otro lado, argumentos rutinarios muestran que $({}^{<\omega}2, \supseteq)$ también tiene estas características. En consecuencia (ver [4, Teorema 2.28, p. 47] y [4, Teorema 2.15, p. 32]), estos órdenes parciales producen las mismas extensiones genéricas.

Según vimos en el primer párrafo de la prueba de la proposición 4.21, lo anterior implica que $\mathbb{P}_n$ y $\mathbb{C}$ nos dan las mismas extensiones genéricas, esto es, existe H, un filtro $\mathbb{P}_n$-genérico sobre V, para el que $V[G] = V[H]$. Dada la arbitrariedad de n, el resto del argumento es invocar el lema previo. □

Finalizamos la tesis comentando que hay un resultado dual a la proposición previa: si G es un filtro $\mathbb{M}$-genérico sobre V, entonces, en $V[G]$, $\mathbb{R} \cap V$ es magro. La prueba de este enunciado puede consultarse en [8, Theorem 3.20, p. 907]. De hecho, en [8] uno puede hallar una lista extensa de propiedades de las extensiones genéricas dadas por las álgebras $\mathbb{C}$ y $\mathbb{M}$.

[1] A. Blass. *Combinatorial cardinal characteristics of the continuum.* Handbook of set theory. Vol. 1, pp. 395–489, Springer, Dordrecht, 2010.

[2] W. Brito. *El Teorema de Categoría de Baire y Aplicaciones.* Universidad de Los Andes, 2011.

[3] F. Casarrubias, A. Tamariz. *Elementos de Topología General.* Aportaciones Matemáticas Vol. 37, Sociedad Matemática Mexicana.

[4] A. L. Celis Martínez, *Encajes entre nociones de forcing*, Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, 2013.

[5] P. M. Fitzpatrick y H. L. Royden. *Real analysis.* 4ta edición, Pearson Education, Inc., 2010.

[6] F. Hernández Hernández. *Teoría de Conjuntos (una introducción).* Aportaciones Matemáticas, Serie Textos 13, Sociedad Matemática Mexicana, 1998.

[7] K. Kunen. *Set theory. An introduction to independence proofs.* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 102, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1980.

[8] K. Kunen. *Random and Cohen reals.* Handbook of Set Theoretic Topology, pp. 887-913. North-Holland, Amsterdam, 1984.

[9] M. A. Lopez Pérez. *Espacios pseudocompactos y de Oxtoby.* Tesis que para obtener el título de Licenciatura en Matemáticas, presenta Mario Alejandro Lopez Pérez; Asesor Roberto Pichardo Mendoza, Facultad de Ciencias, UNAM, 2014.

[10] J. R. Munkres. *Topology.* Prentice Hall, segunda edición, 2000.

[11] J. C. Oxtoby. *Measure and Category. A survey of the analogies between Topological and Measure Spaces.* Graduate texts in Mathematics vol. 2, Springer, 1970.

[12] R. Pichardo Mendoza y Á. Tamariz Mascarúa. *Álgebras booleanas y espacios topológicos.* Aportaciones Matemáticas, Serie Textos **40**, Sociedad Matemática Mexicana, 2018.

[13] R. Pichardo Mendoza. *Rudimentos de la teoría de espacios polacos*, Topología y sus aplicaciones 4 (J. J. Angoa Amador, R. Escobedo y M. Ibarra, editores). Textos Científicos, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2016, pp. 3–26.

[14] B. Riecan. *On Some Properties of Haar Measure.* Matematický casopis, Vol 17 (1967), No. 1, 59-63.

[15] E. Salgado Matias. *Aplicaciones del Teorema de Categoría de Baire.* Tesis que para obtener el título de Licenciatura en Matemáticas, presenta Erick Salgado Matias; Asesor Iván Martinez Ruíz, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, 2016.