



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

H-núcleos en digráficas cuasitransitivas y
3-cuasitransitivas

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

Marco Antonio López Ortiz

TUTORA

María del Rocío Sánchez López



CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., 2018



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno.

López

Ortiz

Marco Antonio

55 51 84 64 82

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Matemáticas

3105554080

2. Datos del tutor.

Dra.

María del Rocío

Sánchez

López

3. Datos del sinodal 1. Dra.

Hortensia

Galeana

Sánchez

4. Datos del sinodal 2. Mat.

Laura

Pastrana

Ramírez

5. Datos del sinodal 3.

Dr

César

Hernández

Cruz

6. Datos del sinodal 4.

M. en C.

German

Benítez

Bobadilla

7. Datos de la tesis.

H-núcleos en digráficas cuasitransitivas y 3-cuasitransitivas

85 p

2018

Índice general

Introducción	3
1. Preliminares	6
1.1. Definiciones básicas	6
1.2. Caminos	10
1.3. Núcleos	11
1.4. Caminos monocromáticos	13
1.5. H -caminos	15
2. Núcleos por trayectorias monocromáticas en digráficas cuasitransitivas	19
2.1. Resultados preliminares	19
2.2. Resultado principal	22
3. Núcleos por trayectorias monocromáticas en digráficas 3-cuasitransitivas	31
3.1. Resultados preliminares	31
3.2. Resultado principal	33
4. H-núcleos en digráficas cuasitransitivas	48
4.1. Propiedad \aleph	48
4.2. Resultados preliminares	52
4.3. Resultado principal	55
5. H-núcleos en digráficas 3-cuasitransitivas	65
5.1. Resultados preliminares	65
5.2. Resultado principal	68
6. Conclusiones	83
Bibliografía	84

Introducción

La Teoría de Núcleos es una rama muy importante de la Teoría de Digráficas y tiene aplicaciones en diversas áreas, entre las cuales están: Teoría de Juegos, Logística, Investigación de Operaciones, Optimización, etcétera.

El concepto de *núcleo* surgió por primera vez en *Theory of Games and Economic Behavior* [13] cuando John von Neumann y Oskar Morgenstern estaban trabajando en Teoría de Juegos y lo llamaron *solución*, posteriormente, al introducir este concepto a la Teoría de Digráficas se puede ver que es algo completamente análogo, es decir, una relación tiene solución si y sólo si la digráfica asociada a esa relación tiene núcleo.

En *On the computational complexity of finding a kernel* [2] Chvátal demostró que determinar la existencia de un núcleo en una digráfica dada es un problema NP completo, por lo cual se han buscado hipótesis para garantizar la existencia de un núcleo en algunas familias de digráficas muy particulares, como son las digráficas cuasitransitivas [8], k -cuasitransitivas [7], entre otras.

Algunas generalizaciones de la noción de núcleo son: el concepto de núcleo por trayectorias monocromáticas [6] y de H -núcleo [3], este último generaliza la idea de núcleo por trayectorias monocromáticas. Un resultado conocido en esta área es que toda digráfica transitiva tiene núcleo. Una generalización de transitividad son las digráficas cuasitransitivas, las cuales fueron introducidas en *Caractérisation des graphes non orientés dont on peut orienter les arrêtes de manière à obtenir le graphe d'une relation d'ordre* [12], las cuales se generalizan a digráficas k -cuasitransitivas.

A diferencia de las digráficas transitivas, no toda digráfica cuasitransitiva tiene núcleo, por ejemplo, es el caso del ciclo dirigido de longitud 3. Por lo tanto, surgió la pregunta ¿qué condiciones son necesarias para garantizar que una digráfica k -cuasitransitiva tenga núcleo, núcleo por trayectorias monocromáticas o H -núcleo?

Para las definiciones básicas nos apoyaremos en *Digraphs: Theory, Algorithms and Applications* [1]. Entre las herramientas que usaremos en este trabajo se encuentra la digráfica de clases de color, introducida por Hortensia Galeana en *Kernels by monochromatic paths and the color-class digraph* [5].

En [10] y [9] Hortensia Galeana Sánchez, Rocío Rojas Monroy y Berta Zavala

Santana dieron algunas condiciones en el caso de núcleo por trayectorias monocromáticas para digráficas cuasitransitivas y 3-cuasitransitivas. El objetivo de este trabajo es generalizar los resultados dados en [10] y [9], respecto a la teoría de H -núcleos.

Para el capítulo 2 nos enfocaremos en dar los conceptos que usaremos para entender la teoría de núcleos, núcleos por trayectorias monocromáticas y H -núcleos, así como, ver la relación que hay entre estos conceptos y algunos resultados clásicos de la teoría de núcleos que usaremos a lo largo de este trabajo.

El capítulo 3 está fundamentado en el artículo *Monochromatic paths and monochromatic sets of arcs in quasitransitive digraphs* [10], en el cual se demostró que si D es una digráfica cuasitransitiva, m -coloreada tal que para cada u vértice de D , el conjunto de flechas que salen de u sea monocromático y si D no tiene ningún C_3 3-coloreados, entonces D tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas.

El capítulo 4 está basado en el artículo *Monochromatic paths and monochromatic sets of arcs in 3-quasitransitive digraphs* [9], en el cual se demostró que si D es una digráfica 3-cuasitransitiva, m -coloreada tal que para cada u vértice de D , el conjunto de flechas que salen de u sea monocromático y si ciertas subestructuras de D cumplen algunas condiciones de coloración, entonces D tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas.

En el capítulo 5 definimos las propiedades \aleph y \beth en la Teoría de H -núcleos, los cuales nos serán de gran utilidad para poder encontrar resultados equivalentes a los vistos en los capítulos 3 y 4. Demostraremos que si D es una digráfica cuasitransitiva H -coloreada con la propiedad \aleph tal que todo ciclo de longitud 3 tiene la propiedad \beth , entonces D tiene H -núcleo.

En el capítulo 6 daremos resultados equivalentes a los obtenidos por Hortensia Galeana Sánchez, Rocío Rojas Monroy y Berta Zavala Santana [9], donde demostramos que si D es una digráfica 3-cuasitransitiva H -coloreada con la propiedad \aleph y todo \tilde{T}_4 y C_4 contenido en D tiene la propiedad \beth , entonces D tiene H -núcleo.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo daremos las nociones básicas de la Teoría de Digráficas; los conceptos que usaremos más tarde como núcleos, núcleos por trayectorias monocromáticas, H -núcleos, así como herramientas que nos ayudarán a relacionar estas ideas como la cerradura de una digráfica y la digráfica de clases de color, además de resultados clásicos de la Teoría de Núcleos que usaremos a lo largo de este trabajo.

1.1. Definiciones básicas

Una **digráfica** D consiste de un conjunto finito $V(D)$ no vacío de objetos llamados vértices y un conjunto $F(D)$ de pares ordenados de vértices llamados flechas.

Por ejemplo, tenemos una digráfica D , donde $V(D) = \{u, v, w, x, y, z\}$ y $F(D) = \{(v, w), (u, w), (w, u), (w, x), (x, y), (x, z), (z, x)\}$.

Una forma de representar geoméricamente a una digráfica en el plano es la siguiente: asociamos un punto en el plano por cada vértice y dibujamos una flecha del punto asociado al vértice u hacia el punto asociado al vértice v si (u, v) es una flecha en D . En la Figura 1.1 podemos ver la representación geométrica de la digráfica D ya mencionada.

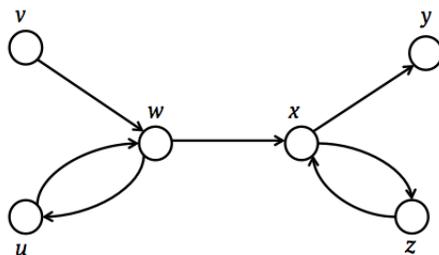


Figura 1.1

Llamamos **lazo** a una flecha de la forma (u, u) para algún u en $V(D)$.

A partir de ahora consideraremos que D es una digráfica sin lazos a menos de que se diga lo contrario.

Dos vértices u y v en D son **adyacentes** si existe una flecha entre ellos. Si (u, v) es una flecha, decimos que u es su **vértice inicial** y v es su **vértice final**. Usaremos $u \rightarrow v$ para denotar que (u, v) está en $F(D)$.

Decimos que (u, v) , una flecha de D , es **simétrica** si $(v, u) \in F(D)$. Análogamente, (u, v) , una flecha de D , es **asimétrica** si $(v, u) \notin F(D)$.

En la Figura 1.1 (x, z) es una flecha simétrica y (w, x) es una flecha asimétrica.

Si D es una digráfica, definimos la **parte simétrica** de D , denotada por $Sim(D)$, como la digráfica tal que $V(Sim(D)) = V(D)$ y $(u, v) \in F(Sim(D))$ si y sólo si (u, v) es una flecha simétrica en D , asimismo, definimos la **parte asimétrica** de D , denotada por $Asim(D)$, como la digráfica tal que $V(Asim(D)) = V(D)$ y $(u, v) \in F(Asim(D))$ si y sólo si (u, v) es una flecha asimétrica en D .

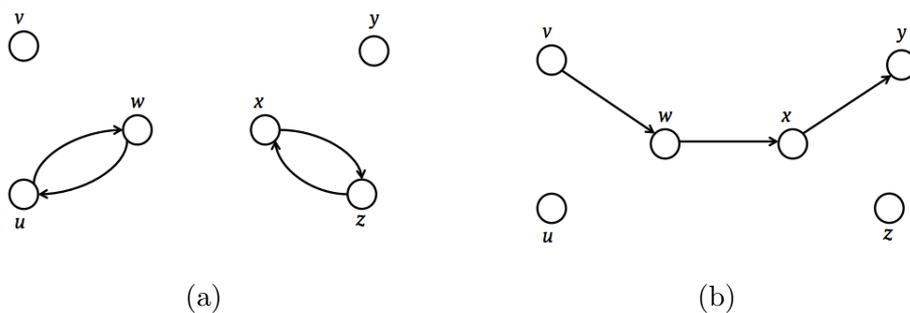


Figura 1.2

Si consideramos la digráfica en la Figura 1.1, entonces en la Figura 1.2(a) se muestra su parte simétrica y en la Figura 1.2(b) se muestra su parte asimétrica.

Dado u un vértice en una digráfica D , la **exvecindad** de u , denotada $N^+(u)$, se define como:

$$N^+(u) = \{v \in V(D) | u \rightarrow v\}.$$

Similarmente, la **invecindad** de u , denotada $N^-(u)$, se define como:

$$N^-(u) = \{w \in V(D) | w \rightarrow u\}.$$

Para referirnos al tamaño de la invecindad o exvecindad de un vertice U , definimos el **ingrado** de u como $\delta_D^-(u) = |N^-(u)|$ y el **exgrado** de u como $\delta_D^+(u) = |N^+(u)|$.

Si consideramos la digráfica D en la Figura 1.3 podemos ver que el vértice x tiene como invecindad $N^-(x) = \{u, v, w\}$ y como exvecindad $N^+(x) = \{y\}$. Por lo tanto, $\delta_D^-(x) = 3$ y $\delta_D^+(x) = 1$.

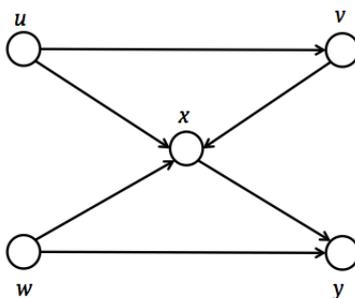


Figura 1.3

Un concepto muy importante en la Teoría de Digráficas es el de subdigráfica. Una digráfica H es una **subdigráfica** de D si $V(H) \subseteq V(D)$ y $F(H) \subseteq F(D)$.

Si X un subconjunto de los vértices de una digráfica D , la **subdigráfica inducida por X en D** , denotado por $D[X]$, es la digráfica tal que $V(D[X]) = X$ y $(u, v) \in F(D[X])$ si y sólo si $\{u, v\} \subseteq X$ y $(u, v) \in F(D)$.

Tomando como ejemplo la digráfica en la Figura 1.3, consideramos $X = \{u, v, x, y\}$ subconjunto de $V(D)$, entonces $V(D[X]) = \{u, v, x, y\}$ y $F(D[X]) = \{(u, v), (v, x), (x, y), (u, x)\}$, lo cual podemos ver en la Figura 1.4.

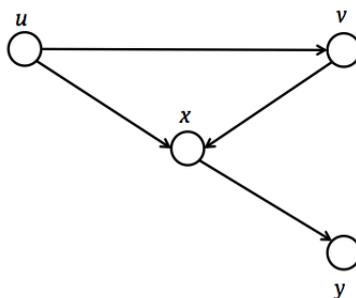


Figura 1.4

Decimos que dos digráficas D y H son **isomorfas**, denotado por $D \cong H$, si existe una función biyectiva $\phi : V(D) \rightarrow V(H)$ tal que para cualesquiera u y v vértices de D tenemos $u \rightarrow v$ en D si y sólo si $\phi(u) \rightarrow \phi(v)$ en H .

Por ejemplo, si vemos la Figura 1.5, podemos ver fácilmente que las digráficas D y H son isomorfas bajo la función $\phi : V(D) \rightarrow V(H)$ dada por $\phi(u) = a$, $\phi(v) = b$, $\phi(w) = d$, $\phi(x) = c$.

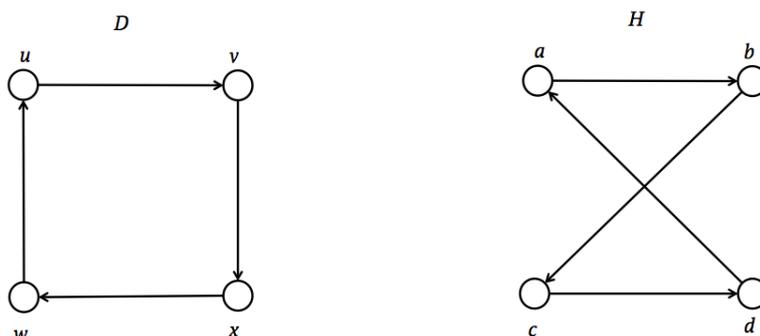


Figura 1.5

Una familia de digráficas importante para este trabajo es el de las digráficas transitivas. Decimos que una digráfica D es **transitiva** si cada vez que tenemos tres vértices distintos u, v, w tales que $\{(u, v), (v, w)\}$ está contenido en $F(D)$, entonces $(u, w) \in F(D)$. Este concepto se puede generalizar de la siguiente manera. D es **cuasitransitiva** si cada vez que tenemos tres vértices distintos u, v, w tales que $\{(u, v), (v, w)\}$ está contenido en $F(D)$, entonces $(u, w) \in F(D)$ o $(w, u) \in F(D)$.

1.2. Caminos

Un **camino dirigido** en D es una sucesión (x_0, \dots, x_n) de vértices donde $(x_i, x_{i+1}) \in F(D)$ para todo i en $\{0, \dots, n-1\}$. Si el camino empieza en x_0 y termina en x_n decimos que es un x_0x_n -camino dirigido.

Podemos obtener varias definiciones basadas en este concepto, tales como:

- La **longitud de un camino dirigido** $W = (x_0, \dots, x_n)$, denotada por $l(W)$, se define como el número n .
- Un **camino dirigido cerrado** es un camino que empieza y termina en el mismo vértice.
- Un **ciclo dirigido** es un camino dirigido cerrado de longitud mayor o igual a dos que sólo repite el primer y último vértice. Denotamos por C_n a un ciclo dirigido con n vértices.
- Una **trayectoria dirigida** es un camino dirigido que no repite vértices. Si una trayectoria empieza en u y termina en v decimos que es una uv -trayectoria.

A partir de ahora omitiremos la palabra “dirigido” cuando hagamos referencia a cualquier tipo de camino.

Decimos que digráfica D es **k -cuasitransitiva** si para cualesquiera u y v vértices de D cada vez que hay una uv -trayectoria de longitud k entonces $(u, v) \in F(D)$ o $(v, u) \in F(D)$.

Teorema 1.2.1. *Sean D una digráfica y $\{u, v\}$ un subconjunto de vértices distintos de D . Si D tiene un uv -camino W , entonces W contiene una uv -trayectoria.*

Demostración. Por inducción sobre $l(W)$

Base de inducción: $l(W) = 1$ entonces $W = (u, v)$, por lo tanto, W es una UV -trayectoria.

Hipótesis de inducción: Si W es un uv -camino de longitud k , con $k \leq n$, entonces W contiene una uv -trayectoria.

Paso inductivo: Sea $W = (u = u_0, \dots, u_n = v)$ un uv -camino de longitud n .

Si W no repite vértices, entonces W es una uv -trayectoria.

Si W repite vértices, sean v_i, v_j vértices que se repitan, con $1 \leq i < j \leq n$, entonces $W' = (u = u_0, u_1, \dots, u_{i-1}, u_i = u_j, u_{j+1}, \dots, u_n = v)$ es un uv -camino de longitud menor a n , entonces, por hipótesis de inducción, W' contiene una uv -trayectoria. Como W' está contenido en W , entonces W contiene una uv -trayectoria.

Consideremos $T = (u = x_1, \dots, x_k = v)$ un uv -camino de longitud mínima contenida en W (sabemos que T existe porque W es un uv -camino contenido en W), mostraremos que T es una trayectoria. Procediendo por contradicción, si $x_i = x_j$ para $1 \leq i < j \leq n$, entonces el camino $T' = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i = x_j, x_{j+1}, \dots, x_n)$ es un uv -camino de longitud menor a T , lo cual es una contradicción. Por lo tanto, T es una uv -trayectoria contenida en W . \square

Teorema 1.2.2. *Sea D una digráfica, si $\delta^-(v) > 0$ para todo v vértice de D , entonces D tiene un ciclo.*

Demostración. Sean D una digráfica tal que $\delta^-(v) > 0$ para todo v vértice de D y $T = (u_0, u_1, \dots, u_n)$ una trayectoria de longitud máxima en D . Como $\delta^-(u_0) > 0$, entonces existe w , un vértice de D , tal que $w \rightarrow u_0$. Si w no es un vértice de T , entonces $T' = (w, u_0, u_1, \dots, u_n)$ sería una trayectoria de longitud mayor a T , lo cual contradice la maximalidad de T . Así, $w = u_j$ para algún j en $\{1, \dots, n\}$. Entonces $C = (u_0, u_1, \dots, u_{j-1}, u_j = w, u_0)$ es un ciclo dirigido contenido en D . \square

1.3. Núcleos

Si I es un subconjunto de vértices de una digráfica D , decimos que I es un **conjunto independiente** si para cualquier subconjunto $\{u, v\}$ de I se tiene que no hay flechas entre u y v .

Si A es un subconjunto de vértices de una digráfica D , decimos que A es un **conjunto absorbente** si para todo u en $V(D) \setminus A$ existe v en A tal que $(u, v) \in F(D)$.

Si N es un subconjunto independiente y absorbente de vértices de una digráfica D , decimos que N es un **núcleo** de D .

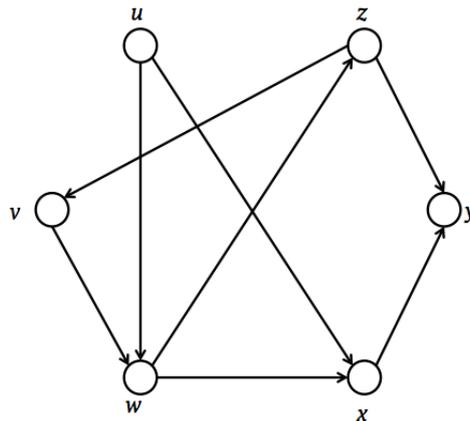


Figura 1.6

En la digráfica de la Figura 1.6 podemos ver que $I = \{u, v, y\}$ es un conjunto independiente, $A = \{w, x, y, z\}$ es un conjunto absorbente y $N = \{w, y\}$ es un núcleo.

Si D es una digráfica tal que toda subdigráfica inducida en D tiene núcleo, decimos D es **núcleo perfecta**.

El siguiente es un teorema clásico en la Teoría de Núcleos, el cual nos ayudará en otras generalizaciones.

Teorema 1.3.1. (Duchet[4]) *Sea D una digráfica. Si todo ciclo en D tiene una flecha simétrica, entonces D tiene núcleo.*

Demostración. Por inducción sobre $|V(D)|$.

Base de inducción: Si $|V(D)| = 1$, entonces $V(D) = \{u\}$ y $\{u\}$ es un núcleo de D .

Hipótesis de inducción: Si D' es una digráfica tal que $|V(D')| = n$ y todo ciclo en D' tiene una flecha simétrica, entonces D' tiene núcleo.

Paso inductivo: Sea D una digráfica con $|V(D)| = n + 1$ tal que todo ciclo en D tiene una flecha simétrica. Consideremos $Asim(D)$.

Como todo ciclo en D tiene una flecha simétrica, entonces no hay ciclos en $Asim(D)$, así, existe w un vértice de D tal que $\delta_{Asim(D)}^-(w) = 0$, de otro modo tendríamos que $\delta_{Asim(D)}^-(v) > 0$ para todo v vértice de $Asim(D)$, por el Teorema 1.2.2. tendríamos un ciclo en $Asim(D)$, el cual sería un ciclo en D sin flechas simétricas, contradiciendo la hipótesis. Luego, existe w en $V(D)$ tal que $\delta_{Asim(D)}^-(w) = 0$.

Consideremos $D - w = D[V(D) \setminus \{w\}]$. Como $D - w$ es una subdigráfica inducida de D , entonces todo ciclo en $D - w$ tiene al menos una flecha simétrica y $|V(D - w)| = n$. Por hipótesis de inducción $D - w$ tiene un núcleo; digamos N . Por lo tanto N es un conjunto independiente y absorbente para $D - w$.

Si $w \rightarrow v$ para algún v en N , entonces N es un conjunto independiente y absorbente en D .

Supongamos que no hay u en N tal que $w \rightarrow u$. Nótese que $N \cup \{w\}$ es un conjunto absorbente en D ; además, $N \cup \{w\}$ es independiente en D , pues si hay v en N tal que $v \rightarrow w$, como $\delta_{Asim(D)}^-(w) = 0$, entonces (v, w) es una flecha simétrica, por lo tanto $w \rightarrow v$, contradiciendo la suposición. Así, $N \cup \{w\}$ es un conjunto independiente en D . Por lo tanto, D tiene núcleo. \square

Corolario 1.3.2. *Sea D una digráfica. Si todo ciclo en D tiene una flecha simétrica, entonces D es núcleo perfecta.*

Demostración. Sean D una digráfica tal que todo ciclo en D tiene una flecha simétrica y G una subdigráfica inducida de D . Como todo ciclo en D tiene al menos una flecha simétrica, entonces todo ciclo en G tiene al menos una flecha

simétrica. Por el Teorema 1.3.1. G tiene núcleo, así, toda subdigráfica inducida de D tiene núcleo, es decir, D es núcleo perfecta. \square

1.4. Caminos monocromáticos

Sea D una digráfica. Una **m -coloración** de las flechas de D es una función $c : F(D) \rightarrow \{1, \dots, m\}$. Si D tiene una m -coloración sobre sus flechas, decimos que D es **m -coloreada**.

Así, si $a \in F(D)$, entonces $c(a)$ es el color de la flecha a .

Decimos que un subconjunto de $F(D)$ es **monocromático**, si todas sus flechas tienen el mismo color.

Teorema 1.4.1. *Sean D una digráfica y $\{u, v\}$ un subconjunto de vértices distintos de D . Si D tiene un uv -camino monocromático W , entonces W contiene una uv -trayectoria monocromática.*

Demostración. Sean D una digráfica y W un uv -camino monocromático. En particular, W es un camino en D , por Teorema 1.2.1. W contiene una uv -trayectoria T . Como T es una subdigráfica de W , entonces $F(T)$ es un subconjunto de $F(W)$. Así, todas las flechas de T tienen el mismo color. Por lo tanto, T es una uv -trayectoria monocromática. \square

Usamos $u \Rightarrow v$ para denotar que existe una uv -trayectoria monocromática.

Si G es una subdigráfica de una digráfica m -coloreada D , decimos que G es **casimonocromática** si con a lo más una excepción todas sus flechas están coloreadas del mismo color.

Si I es un subconjunto de los vértices de una digráfica m -coloreada D , decimos que I es un conjunto **independiente por trayectorias monocromáticas** si para cualquier $\{u, v\}$ subconjunto de I , no hay trayectorias monocromáticas entre u y v .

Si A es un subconjunto de los vértices de una digráfica m -coloreada D , decimos que A es un conjunto **absorbente por trayectorias monocromáticas** si para todo u en $V(D) \setminus A$ existe v en A tal que $u \Rightarrow v$.

Si tenemos D una digráfica m -coloreada una digráfica y N un subconjunto de $V(D)$. Decimos que N es un **núcleo por trayectorias monocromáticas** de D si es un conjunto independiente por trayectorias monocromáticas y absorbente por trayectorias monocromáticas.

En la digráfica de la Figura 1.7 podemos ver que (y, x, w) es una trayectoria monocromática, $\{v, y\}$ es un conjunto independiente por trayectorias monocromáticas, $\{v, x, z\}$ es un conjunto absorbente por trayectorias monocromáticas y $\{v, z\}$ es un núcleo por trayectorias monocromáticas.

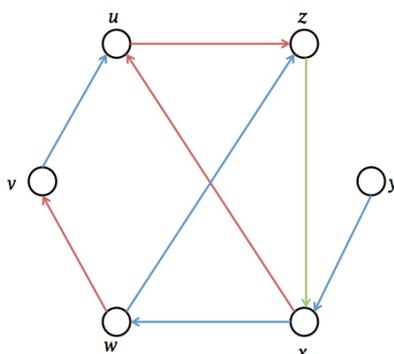


Figura 1.7

Podemos ver que estas definiciones son muy parecidas a las definiciones de conjunto absorbente, conjunto independiente y núcleo. Estas se pueden relacionar a través de las definiciones que daremos a continuación.

Llamamos **multidigráfica** a una digráfica en la cual se permite que hayan varias flechas de un vértice u a un vértice v .

Si D una digráfica m -coloreada. Definimos la **cerradura** de D , denotado por $\mathfrak{C}(D)$, como la multidigráfica m -coloreada tal que $V(\mathfrak{C}(D)) = V(D)$ y para cualesquiera u y v vértices de $\mathfrak{C}(D)$ se tiene que $(u, v) \in F(\mathfrak{C}(D))$ y tiene el color i si y sólo si existe una uv -trayectoria monocromática de color i en D .

Consideremos D la digráfica de la Figura 1.7. Podemos ver que $\mathfrak{C}(D)$ es la multidigráfica representada en la Figura 1.8.

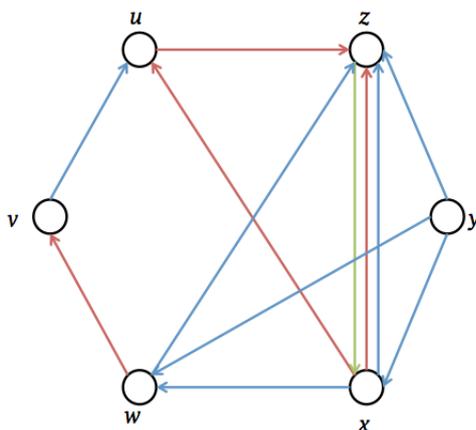


Figura 1.8

Teorema 1.4.2. (Galeana [6]) *Sea D una digráfica m -coloreada. D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas si y sólo si $\mathfrak{C}(D)$ tiene núcleo.*

Demostración. Este teorema es un caso particular del Teorema 1.5.1. □

1.5. H -caminos

A partir de esta sección consideraremos H una digráfica que puede tener lazos.

Sean D y H digráficas. Una **H -coloración** de las flechas de D es una función $c : F(D) \rightarrow V(H)$. Decimos que una digráfica D es **H -coloreada** si tiene una H -coloración de sus flechas.

Durante el resto de la sección consideraremos a H una digráfica y D una digráfica H coloreada.

Decimos que un camino $C = (u_0, u_1, \dots, u_n)$ en D es un **H -camino** si $(c(u_0, u_1), c(u_1, u_2), \dots, c(u_{n-1}, u_n))$ es un camino en H . Análogamente, decimos que una trayectoria $T = (u_0, u_1, \dots, u_n)$ en D es una **H -trayectoria** si $(c(u_0, u_1), c(u_1, u_2), \dots, c(u_{n-1}, u_n))$ es un camino en H .

Usamos $u \Rightarrow^H v$ para denotar que hay una uv - H -trayectoria.

Observación 1.5.1. Sean H una digráfica, D una digráfica H -coloreada, u y v vértices de D . No es cierto que todo uv - H -camino contiene una uv - H -trayectoria como se puede ver en el siguiente ejemplo:

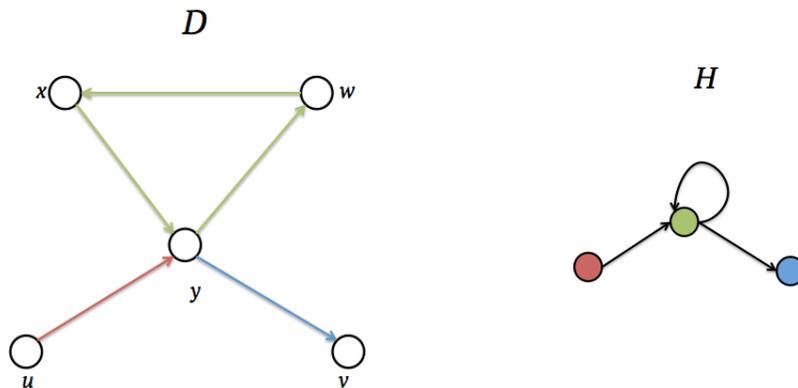


Figura 1.9

Como podemos ver en la Figura 1.9, $C = (u, y, w, x, y, v)$ es un uv - H -camino pero la única uv -trayectoria contenida en C es (u, y, v) la cual no es una uv - H -trayectoria pues en H no hay flechas de rojo a azul.

Si I es un subconjunto de vértices de D , decimos que es un conjunto **H -independiente** si para cualquier $\{u, v\}$ subconjunto de I , no hay H -trayectorias entre u y v .

Si A es un subconjunto de vértices de D , decimos que A es un conjunto **H -absorbente** si para todo u en $V(D) \setminus A$ existe v en A tal que $u \Rightarrow^H v$.

Para ejemplificar la diferencia entre trayectorias monocromáticas y H -trayectorias consideremos la digráfica en la Figura 1.7 con la H coloración en la Figura 1.10. Podemos ver que (x, u, z) es una trayectoria monocromática, pero no es una H -trayectoria, pues no hay lazos en el color rojo; (v, u, z) es una H -trayectoria que no es una trayectoria monocromática. A pesar que podemos encontrar situaciones en las cuales coinciden, por ejemplo (y, x, w, z) es una H -trayectoria y una trayectoria monocromática.

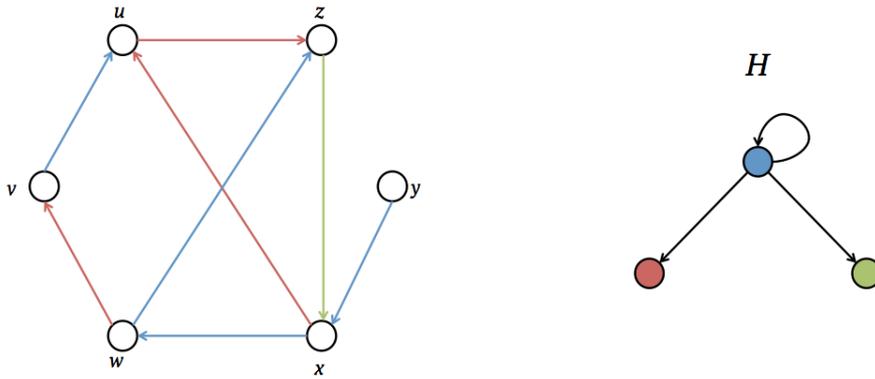


Figura 1.10

Como pudimos ver en la Figura 1.10, cuando nuestra digráfica H tiene un lazo en el color i entonces las trayectorias monocromáticas de color i son H -trayectorias, por este hecho, el concepto de H -trayectorias es una generalización de la idea de trayectorias monocromáticas, ya que en el caso particular en el que la digráfica H sea tal que $F(H) = \{(u, u) | u \in V(H)\}$ entonces las trayectorias monocromáticas coinciden con las H -trayectorias.

Si N es un subconjunto H -independiente y H -absorbente de vértices de D , decimos que N es un **H -núcleo** de D .

Análogamente al caso monocromático, estas definiciones se pueden relacionar con el concepto de núcleo a través de una digráfica, la cual definimos a continuación.

La **H -cerradura** de D , denotada por $\mathfrak{C}_H(D)$, es la digráfica tal que $V(\mathfrak{C}_H(D)) = V(D)$ y para cualesquiera u y v vértices de $\mathfrak{C}_H(D)$, se tiene que $(u, v) \in F(\mathfrak{C}_H(D))$ si y sólo si existe una uv - H -trayectoria en D .

Consideremos la digráfica H -coloreada de la Figura 1.10. Podemos ver que $\mathfrak{C}(D)$ es la digráfica representada en la Figura 1.11.

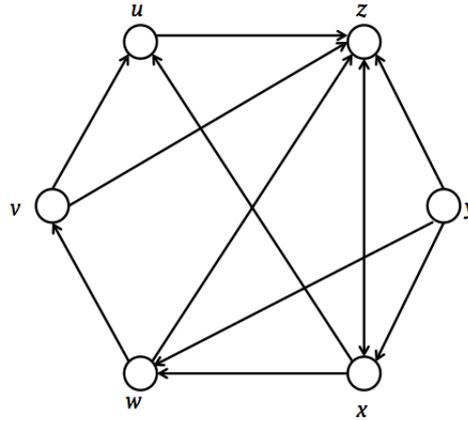


Figura 1.11

Teorema 1.5.1. Sean H una digráfica y D una digráfica H -coloreada. D tiene H -núcleo si y sólo si $\mathfrak{C}_H(D)$ tiene núcleo.

Demostración. Para esta demostración vamos a ver dos observaciones:

Observación 1.5.2. Sean H una digráfica, D una digráfica H -coloreada e I un subconjunto de $V(D)$. I es un conjunto H -independiente en D si y sólo si I es un conjunto independiente en $\mathfrak{C}_H(D)$.

Demostración de la Observación 1.5.2. Sean H una digráfica, D una digráfica H -coloreada e I un subconjunto de $V(D)$.

Si I es un conjunto H -independiente en D , como $V(D) = V(\mathfrak{C}_H(D))$, entonces I es un subconjunto de $V(\mathfrak{C}_H(D))$. Sea $\{u, v\}$ un subconjunto de I . Como I es un conjunto H -independiente en D , entonces no hay H -trayectorias en D entre u y v . Así, no hay flechas entre u y v en $\mathfrak{C}_H(D)$. Por lo tanto, I es un conjunto independiente en $\mathfrak{C}_H(D)$.

Si I es un conjunto independiente en $\mathfrak{C}_H(D)$, entonces I es un subconjunto de $V(D)$. Sea $\{u, v\}$ un subconjunto de I . Como I es un conjunto independiente en $\mathfrak{C}_H(D)$, entonces no hay flechas entre u y v en $\mathfrak{C}_H(D)$, esto implica que no hay H -trayectorias entre u y v en D . Por lo tanto, I es un conjunto H -independiente en D . \square

Observación 1.5.3. Sean H una digráfica, D una digráfica H -coloreada y A un subconjunto de $V(D)$. A es un conjunto H -absorbente en D si y sólo si A es un conjunto absorbente en $\mathfrak{C}_H(D)$.

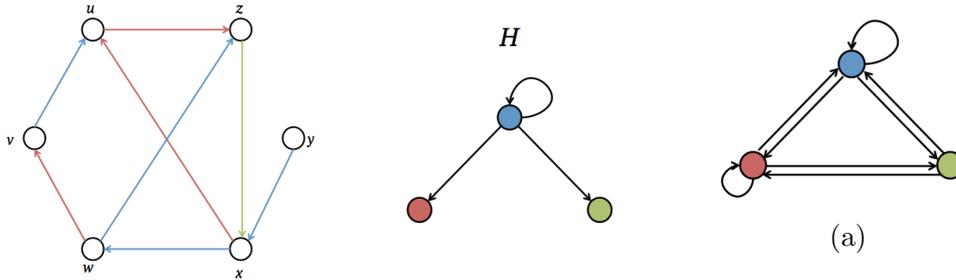
Demostración de la Observación 1.5.3. Sean H una digráfica, D una digráfica H -coloreada y A un subconjunto de $V(D)$.

Si A es un conjunto H -absorbente en D , como $V(D) = V(\mathfrak{C}_H(D))$, entonces A es un subconjunto de $V(\mathfrak{C}_H(D))$. Sea u un v\u00e9rtice de $V(D) \setminus A$. Como A es un conjunto H -absorbente en D , entonces existe v en A tal que $u \Rightarrow^H v$. As\u00ed, $u \rightarrow v$ en $\mathfrak{C}_H(D)$. Por lo tanto, A es un conjunto absorbente en $\mathfrak{C}_H(D)$.

Si A es un conjunto absorbente en $\mathfrak{C}_H(D)$, entonces A es un subconjunto de $V(D)$. Sea u un v\u00e9rtice de $V(D) \setminus A$. Como A es un conjunto absorbente en $\mathfrak{C}_H(D)$, entonces existe v en A tal que $u \rightarrow v$ en $\mathfrak{C}_H(D)$, esto implica que $u \Rightarrow^H v$ en D . Por lo tanto, A es un conjunto H -absorbente en D . \square

As\u00ed, N es un H -n\u00facleo en D si y s\u00f3lo si N es un conjunto H -independiente y H -absorbente, lo cual sucede si y s\u00f3lo si N es un conjunto independiente y absorbente en $\mathfrak{C}_H(D)$, es decir, N es n\u00facleo de $\mathfrak{C}_H(D)$. \square

La **digr\u00e1fica de clases de color** de D , denotado por $\mathcal{C}_C(D)$ es la digr\u00e1fica que cumple $V(\mathcal{C}_C(D)) = \{x \in V(H) \mid c(a) = x \text{ para alg\u00fan } a \in F(D)\}$ y para x y y v\u00e9rtices de $\mathcal{C}_C(D)$ se tiene que $(x, y) \in F(\mathcal{C}_C(D))$ si y s\u00f3lo si existen u, v y w v\u00e9rtices de D tales que $\{(u, v), (v, w)\} \subseteq F(D)$ y $c(u, v) = x, c(v, w) = y$.



Si consideramos la digr\u00e1fica H -coloreada D en la Figura 1.10, entonces la digr\u00e1fica representada en la Figura 1.12a es la digr\u00e1fica de clases de color de D .

Capítulo 2

Núcleos por trayectorias monocromáticas en digráficas cuasitransitivas

Este capítulo está basado en los resultados obtenidos por Hortensia Galeana Sánchez, Rocío Rojas Monroy y Berta Zavala Santana en *Monochromatic paths and monochromatic sets of arcs in quasitransitive digraphs* [10], en el cual veremos que si D es una digráfica cuasitransitiva, m -coloreada tal que para cada u vértice de D , el conjunto de flechas que salen de u es monocromático y si D no tiene ningún C_3 3-coloreado, entonces D tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas.

2.1. Resultados preliminares

Denotamos por $A^+(u)$ al conjunto de flechas de D que tienen a u como vértice inicial.

Si $A^+(u)$ es monocromático usamos $c(u)$ para denotar el color de cualquier flecha que tenga a u como vértice inicial.

Lema 2.1.1. *Sea D una digráfica cuasitransitiva m -coloreada tal que para cada u en $V(D)$, $A^+(u)$ es monocromático. Si $T = (u_0, \dots, u_n)$ es una $u_0 u_n$ -trayectoria monocromática de longitud mínima, entonces $u_i \not\rightarrow u_j$ para cualquier $\{i, j\}$ subconjunto de $\{0, \dots, n\}$ con $j > i + 1$; en particular $u_{i+2} \rightarrow u_i$ para todo i en $\{0, \dots, n - 2\}$.*

Demostración. Procediendo por contradicción. Sea D una digráfica cuasitransitiva tal que para cada u en $V(D)$, $A^+(u)$ es monocromática y supongamos que existe $T = (u_0, \dots, u_n)$ una trayectoria monocromática de longitud mínima tal que $u_i \rightarrow u_j$ para algún $j > i + 1$. Notemos que $c(u_i, u_{i+1}) = c(u_i, u_j)$ pues $A^+(u_i)$

es monocromático. Luego, $T' = (u_0, u_1, \dots, u_i, u_j, u_{j+1}, \dots, u_n)$ es una trayectoria monocromática de longitud menor a T , contradiciendo nuestra suposición sobre T (ver Figura 2.1). Por lo tanto, $u_i \not\rightarrow u_j$ para cualquier $\{i, j\}$ subconjunto de $\{0, \dots, n\}$ con $j > i + 1$.

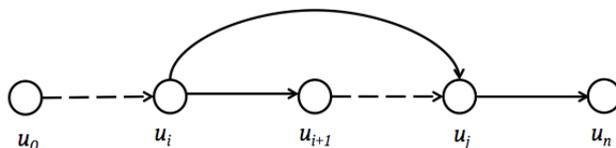


Figura 2.1

En particular, si consideramos $j = i + 2$, como D es cuasitransitiva y $u_i \rightarrow u_{i+1} \rightarrow u_{i+2}$, entonces hay una flecha entre u_i y u_{i+2} . Como sabemos que $u_i \not\rightarrow u_{i+2}$ entonces $u_{i+2} \rightarrow u_i$ para todo i en $\{1, \dots, n - 2\}$. \square

Lema 2.1.2. *Sea D una digráfica cuasitransitiva m -coloreada tal que para cada u en $V(D)$, $A^+(u)$ es monocromático. Si $T = (u_0, \dots, u_n)$ es una $u_0 u_n$ -trayectoria monocromática de longitud mínima, entonces $u_j \rightarrow u_i$ para todo $\{i, j\}$ subconjunto de $\{0, \dots, n\}$ con $j > i + 1$, excepto si $|V(T)| = 4$, en ese caso (u_3, u_0) puede no ser una flecha de D .*

Demostración. Si $|V(T)| = 3$, el resultado se sigue del hecho que D es cuasitransitiva y T es de longitud mínima.

Si $|V(T)| = 4$, entonces $T = (u_0, u_1, u_2, u_3)$. Por el Lema 2.1.1 se tiene $u_3 \rightarrow u_1$ y $u_2 \rightarrow u_0$. La flecha (u_3, u_0) puede no ser una flecha de D (ver Figura 2.2).

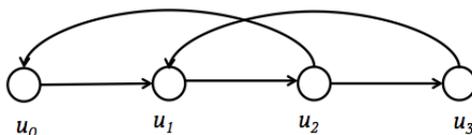


Figura 2.2

Procedemos por inducción sobre $|V(T)|$.

Base de inducción: Si $|V(T)| = 5$, entonces $T = (u_0, u_1, u_2, u_3, u_4)$. Por el Lema 2.1.1. se tiene $u_4 \rightarrow u_2$, $u_3 \rightarrow u_1$, $u_2 \rightarrow u_0$ (ver Figura 2.3).

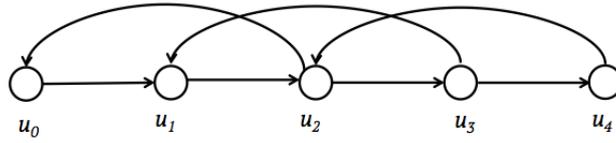


Figura 2.3

Como $u_4 \rightarrow u_2 \rightarrow u_0$ y $u_0 \not\rightarrow u_4$ por el Lema 2.1.1., entonces $u_4 \rightarrow u_0$ (ver Figura 2.4).

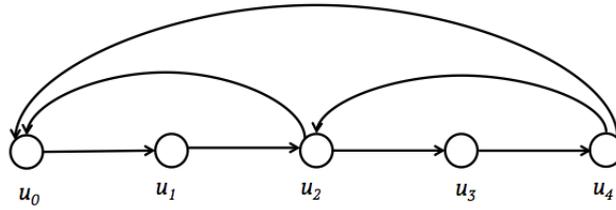


Figura 2.4

Puesto que $u_4 \rightarrow u_0 \rightarrow u_1$ y $u_1 \not\rightarrow u_4$ por el Lema 2.1.1., entonces $u_4 \rightarrow u_1$. Como $u_3 \rightarrow u_4 \rightarrow u_0$ y $u_0 \not\rightarrow u_3$ por el Lema 2.1.1. entonces $u_3 \rightarrow u_0$ (ver Figura 2.5).

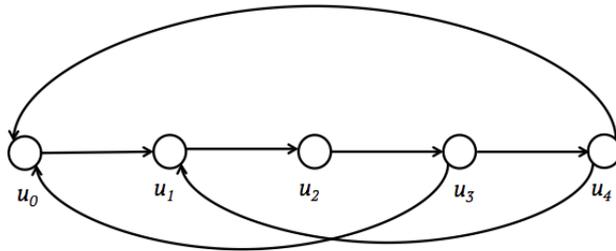


Figura 2.5

Concluimos que $u_j \rightarrow u_i$ para todo i, j en $\{0, \dots, n\}$, con $j > i + 1$ (ver Figura 2.6).

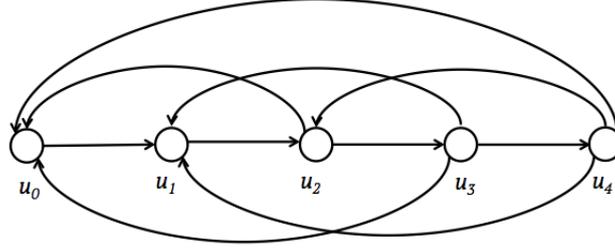


Figura 2.6

Hipótesis de inducción: Si $T = (u_0, \dots, u_k)$ es una u_0u_k -trayectoria monocromática de longitud mínima con $|V(T)| = k$, $5 \leq k < n$, entonces $u_j \rightarrow u_i$ para todo $\{i, j\}$ subconjunto de $\{0, \dots, n\}$, con $j > i + 1$.

Paso inductivo: Sea $T = (u_0, \dots, u_n)$ una u_0u_n -trayectoria monocromática de longitud mínima con $|V(T)| = n$, con $n \geq 6$. Consideremos $T_1 = (u_0, \dots, u_{n-1})$ y $T_2 = (u_1, \dots, u_n)$, entonces $|V(T_1)| = |V(T_2)| \leq n$. Por hipótesis de inducción T_1 y T_2 satisfacen que $u_j \rightarrow u_i$ para toda $j > i + 1$, excepto cuando $j = n$ y $i = 0$, es decir, sólo falta probar que $u_n \rightarrow u_0$. Esto pasa porque $u_n \rightarrow u_2 \rightarrow u_0$ y $u_0 \not\rightarrow u_n$, por el Lema 2.1.1. Por lo que $u_n \rightarrow u_0$ (ver Figura 2.7). \square

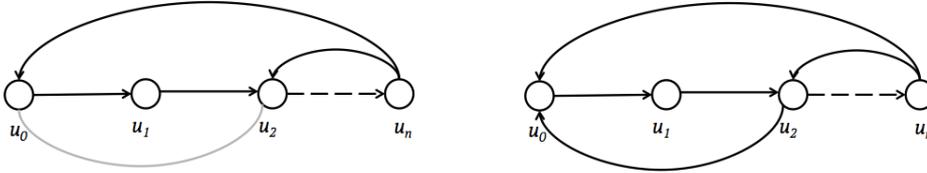


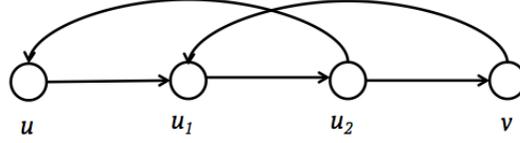
Figura 2.7

2.2. Resultado principal

Lema 2.2.1. Sean D una digráfica cuasitransitiva m -coloreada tal que para cada u en $V(D)$, $A^+(u)$ es monocromático, $\{u, v\}$ un subconjunto de $V(D)$, $u \neq v$, tal que $v \not\rightarrow u$. Si $u \Rightarrow v$, entonces una y sólo una de las siguientes afirmaciones se cumple:

1. $u \rightarrow v$.
2. $u \not\rightarrow v$ y existe una trayectoria monocromática ($u = u_0, u_1, u_2, u_3 = v$) de longitud 3 tal que $u_2 \rightarrow u_0$ y $u_3 \rightarrow u_1$. Además, no existen trayectorias de longitud 2 entre u y v .

Es decir, si $u \nrightarrow v$, entonces tenemos la siguiente estructura:



Demostración. Sea T una uv -trayectoria monocromática de longitud mínima. Si $u \rightarrow v$, entonces se cumple la primer opción. Supongamos que $u \nrightarrow v$. Así, $l(T) \geq 2$.

Si $l(T) \geq 4$, entonces por el Lema 2.1.2. se tiene que $v \rightarrow u$, contradiciendo la hipótesis. Por lo tanto, $l(T) \leq 3$.

Si $l(T) = 3$, entonces $T = (u = u_0, u_1, u_2, u_3 = v)$ y por el Lema 2.1.1. se tiene que $u_2 \rightarrow u_0$ y $u_3 \rightarrow u_1$.

Supongamos que existe T' una trayectoria de longitud 2 entre u y v . Como D es cuasitransitiva entonces $u \rightarrow v$ o $v \rightarrow u$. Por hipótesis $v \nrightarrow u$, entonces $u \rightarrow v$, lo cual contradice la suposición que $u \nrightarrow v$. Por lo tanto, no existen trayectorias de longitud 2 entre u y v . \square

Lema 2.2.2. Sean D una digráfica cuasitransitiva m -coloreada tal que para cada u en $V(D)$, $A^+(u)$ es monocromático y $\{u, v, w\}$ un subconjunto de $V(D)$. Si $u \Rightarrow v$, $v \nRightarrow u$, $v \Rightarrow w$, $w \nRightarrow v$, entonces $w \rightarrow u$ o $u \Rightarrow w$.

Demostración. Como $u \Rightarrow v$, entonces sea T una uv -trayectoria monocromática de longitud mínima. Puesto que $v \nrightarrow u$ se sigue del Lema 2.2.1. que:

$$l(T) = 1 \text{ o } (T = (u, u_1, u_2, v) \text{ y } v \rightarrow u_1, u_2 \rightarrow u). \quad (2.1)$$

Análogamente, consideremos T' una vw -trayectoria monocromática de longitud mínima, entonces, por el Lema 2.2.1. se tiene que:

$$l(T') = 1 \text{ o } (T' = (v, v_1, v_2, w) \text{ y } w \rightarrow v_1, v_2 \rightarrow v). \quad (2.2)$$

Supongamos que $w \nrightarrow u$, por lo que debemos demostrar que $u \Rightarrow w$. Consideremos que $u \nrightarrow w$, de otro modo tendríamos directamente que $u \Rightarrow w$. Como D es cuasitransitiva y no hay flechas entre u y w entonces:

$$N^+(u) \cap N^-(w) = \emptyset = N^-(u) \cap N^+(w). \quad (2.3)$$

Si T y T' tienen el mismo color, entonces por el Teorema 1.4.1. $T \cup T'$ contiene una uw -trayectoria monocromática, por lo tanto $u \Rightarrow w$. Supongamos que T y T' tienen colores distintos.

Si $u \rightarrow v$. Como $v \notin N^+(u) \cap N^-(w)$, entonces $v \nrightarrow w$, así $T' = (v, v_1, v_2, w)$ (por (2.2)). Note que $u \notin V(T')$, porque $v \nrightarrow u$. Si $v_i \rightarrow u$ para algún $i \in \{1, 2\}$

entonces $(v, T, v_i) \cup (v_i, u)$ sería una vu -trayectoria monocromática (porque por hipótesis $c(v_i, x) = c(v_i, u)$ para x en $\{v_2, w\}$) contradiciendo la hipótesis. Por lo tanto, $v_1 \not\Rightarrow u$ y $v_2 \not\Rightarrow u$.

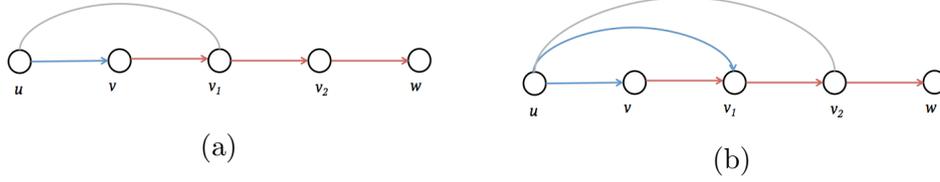


Figura 2.8

Como $u \rightarrow v \rightarrow v_1$ y $v_1 \not\Rightarrow u$, entonces $u \rightarrow v_1$, pues D es cuasitransitiva (ver Figura 2.8(a)). Como $u \rightarrow v_1 \rightarrow v_2$ y $v_2 \not\Rightarrow u$, entonces $u \rightarrow v_2$ (ver Figura 2.8(b)). Así, $v_2 \rightarrow w$ implica que $v_2 \in N^+(u) \cap N^-(w)$ contradiciendo que $N^+(u) \cap N^-(w) = \emptyset$ (por (2.3)).

Por lo tanto, $l(T) = 3$, lo cual implica que $T = (u, u_1, u_2, v)$ y $u_2 \rightarrow u, v \rightarrow u_1$ (por (2.1)).

Note que $w \notin V(T)$ porque $w \not\Rightarrow v$. Si $l(T') = 1$, es decir, $v \rightarrow w$; como $u_2 \rightarrow v \rightarrow w$ y D es cuasitransitiva, entonces $u_2 \rightarrow w$ o $w \rightarrow u_2$ (ver Figura 2.9). Si $w \rightarrow u_2$ entonces $u_2 \in N^+(w) \cap N^-(u)$, lo cual contradice que $N^+(w) \cap N^-(u) = \emptyset$ (por (2.3)) (ver Figura 2.9).

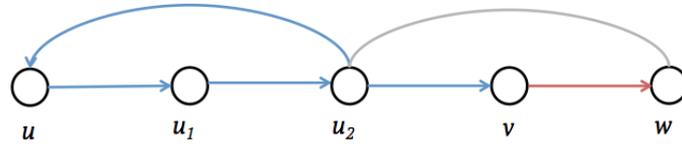


Figura 2.9

Así, $u_2 \rightarrow w$ y (u, u_1, u_2, w) es una uw -trayectoria monocromática (ya que por hipótesis $c(u_2, v) = c(u_2, w)$), lo cual implica que $u \Rightarrow w$ (ver Figura 2.10).

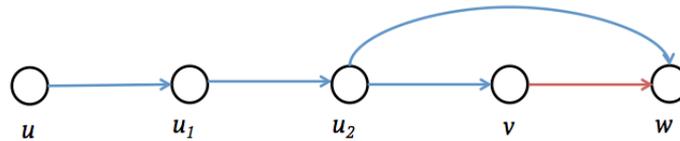


Figura 2.10

Si $l(T') = 3$, entonces $T' = (v, v_1, v_2, w)$. Análogamente, como vimos en la demostración del lema anterior, $v \not\Rightarrow u$ implica que $v_1 \not\rightarrow u$ y $v_2 \not\rightarrow u$. observemos que $u_2 \notin V(T')$ porque T y T' tienen distinto color y $A^+(u_2)$ es monocromático; además $w \not\Rightarrow v$. Como D es cuasitransitiva y $u_2 \rightarrow v \rightarrow v_1$ entonces $u_2 \rightarrow v_1$ o $v_1 \rightarrow u_2$ (ver Figura 2.11(a)). Vamos a ver que $u_2 \rightarrow v_1$, de otra manera tenemos $v_1 \rightarrow u_2 \rightarrow u$, como D es cuasitransitiva y $v_1 \not\rightarrow u$ entonces $u \rightarrow v_1$. Así, $u \rightarrow v_1 \rightarrow v_2$; como D es cuasitransitiva y $v_2 \not\rightarrow u$ tenemos que $u \rightarrow v_2$. Lo cual implica $v_2 \in N^+(u) \cap N^-(w)$, contradiciendo que $N^+(u) \cap N^-(w) = \emptyset$ (por (2.3)). Por lo tanto, $u_2 \rightarrow v_1$ (ver Figura 2.11(b)).

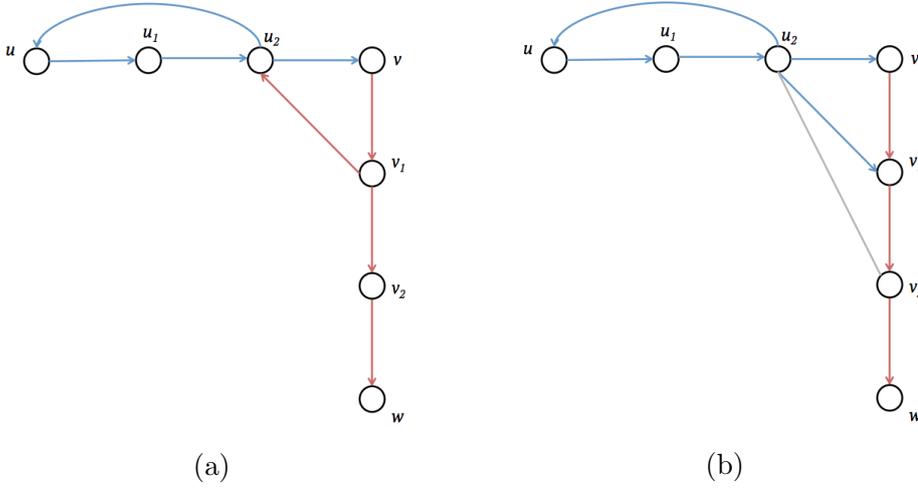


Figura 2.11

Puesto que $u_2 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2$ y D es cuasitransitiva, tenemos que $u_2 \rightarrow v_2$ o $v_2 \rightarrow u_2$. Veamos que $u_2 \rightarrow v_2$, de otro modo como $v_2 \rightarrow u_2 \rightarrow u$ y D es cuasitransitiva y $v_2 \not\rightarrow u$ entonces $u \rightarrow v_2$. Así, $v_2 \in N^+(u) \cap N^-(w)$, contradiciendo que $N^+(u) \cap N^-(w) = \emptyset$ (por (2.3)). Por lo tanto, $u_2 \rightarrow v_2$. Tenemos que $u_2 \rightarrow v_2 \rightarrow w$ y D cuasitransitiva, entonces $u_2 \rightarrow w$ o $w \rightarrow u_2$ (ver Figura 2.12(a)). Si $w \rightarrow u_2$ entonces $u_2 \in N^+(w) \cap N^-(u)$, una contradicción con (2.3). Por lo tanto, $u_2 \rightarrow w$. Así, (u, u_1, u_2, w) es una uw -trayectoria monocromática (por hipótesis $c(u_2, v) = c(u_2, w)$), por lo que $u \Rightarrow w$ (ver Figura 2.12(b)). \square

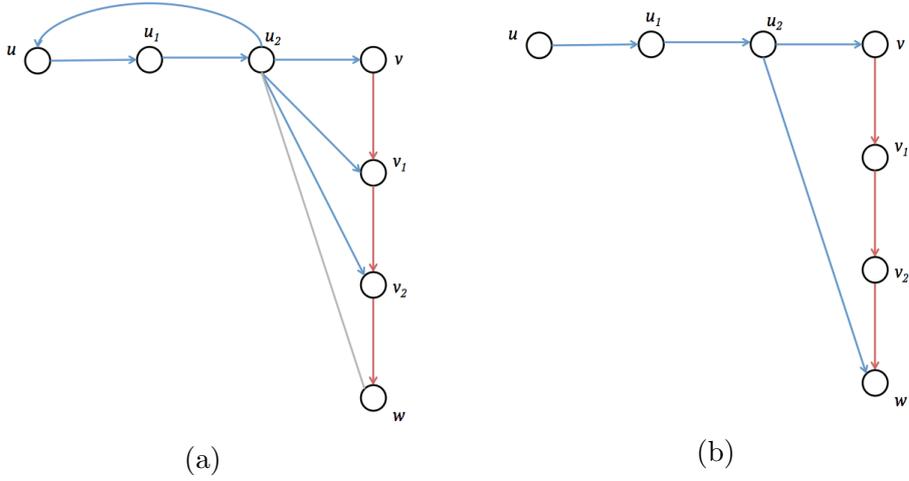


Figura 2.12

Lema 2.2.3. Sean D una digráfica cuasitransitiva m -coloreada tal que para cada u en $V(D)$, $A^+(u)$ es monocromático, $\{u, v, w\}$ un subconjunto de $V(D)$ tal que $u \Rightarrow v$, $v \not\Rightarrow u$, $v \Rightarrow w$, $w \not\Rightarrow v$ y $c(u) \neq c(v)$. Si D no contiene ningún C_3 3-coloreado, entonces $u \Rightarrow w$ y $w \not\Rightarrow u$.

Demostración. Como se cumplen las hipótesis del Lema 2.2.2., entonces se tiene que $w \rightarrow u$ o $u \Rightarrow w$. Basta probar que $w \not\Rightarrow u$, pues si $w \not\Rightarrow u$ entonces, en particular $w \not\rightarrow u$ por lo que tendríamos que $u \Rightarrow w$. Procediendo por contradicción, supongamos que $w \Rightarrow u$. Sea $W = (w = w_0, w_1, w_2, \dots, w_{p-1}, w_p = u)$ una wu -trayectoria monocromática de longitud mínima. Por hipótesis, $v \not\Rightarrow u$ y $w \not\Rightarrow v$, lo cual implica que $c(w) \notin \{c(u), c(v)\}$, de otra manera, como $w \Rightarrow u$ y $u \Rightarrow v$; si $c(w) = c(u)$, entonces $w \Rightarrow v$, lo cual es una contradicción. Si $c(w) = c(v)$, entonces como $v \Rightarrow w$ $w \Rightarrow u$, se tiene que $v \Rightarrow u$, contradiciendo nuestras hipótesis.

Por el Lema 2.2.1., existen T una uv -trayectoria monocromática tal que $l(T) \in \{1, 3\}$ y T' una vw -trayectoria monocromática tal que $l(T') \in \{1, 3\}$.

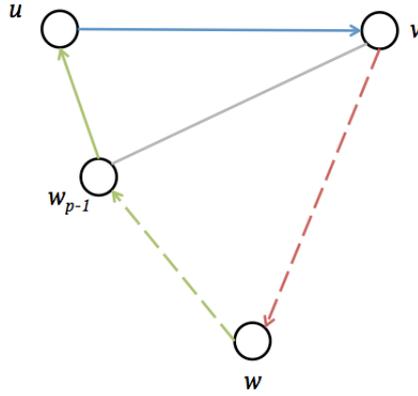


Figura 2.13

Supongamos que $l(T) = 1$, es decir, $u \rightarrow v$. Observe que $v \notin V(W)$ pues $v \not\rightarrow u$. Como D es cuasitransitiva y $w_{p-1} \rightarrow u \rightarrow v$, entonces $w_{p-1} \rightarrow v$ o $v \rightarrow w_{p-1}$ (ver Figura 2.13). Si $w_{p-1} \rightarrow v$, entonces $(w, w_1, \dots, w_{p-1}, v)$ es una wv -trayectoria monocromática (porque $c(w_{p-1}, v) = c(w_{p-1}, u)$ por hipótesis). Por lo tanto, $w \Rightarrow v$ contradiciendo la hipótesis. Si $v \rightarrow w_{p-1}$, entonces $v \rightarrow w_{p-1} \rightarrow u \rightarrow v$, lo que implica que (v, w_{p-1}, u, v) es un C_3 3-coloreado; pues W es una trayectoria monocromática $c(w_{p-1}) = c(w)$, $c(u) \neq c(v)$ y $c(w) \notin \{c(u), c(v)\}$. Por lo tanto $l(T) = 3$ y hay vértices tales que $T = (u, u_1, u_2, v)$, $v \rightarrow u_1$, $u_2 \rightarrow u$; además como $u \not\rightarrow v$, $v \not\rightarrow u$ y D es cuasitransitiva, entonces:

$$N^+(u) \cap N^-(v) = \emptyset = N^+(v) \cap N^-(u). \quad (2.4)$$

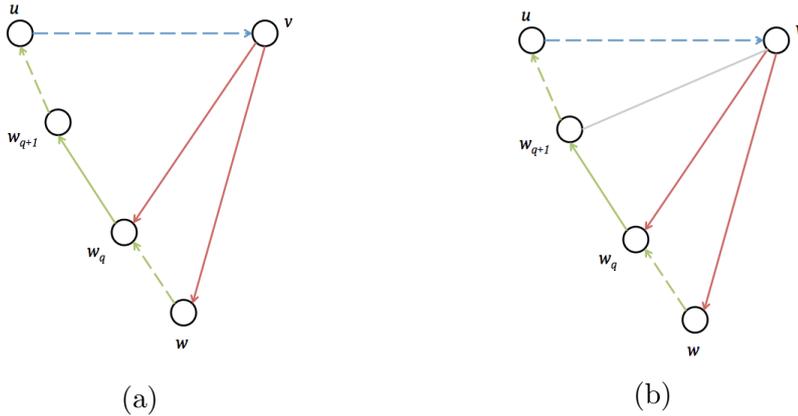


Figura 2.14

Supongamos que $l(T') = 1$, es decir, $v \rightarrow w$. Tenemos que $v \rightarrow w_0 = w$ y $v \not\rightarrow w_p = u$, consideremos el mayor valor q en $\{0, \dots, p-1\}$ tal que $v \rightarrow w_q$ (ver Figura 2.14(a)). Como D es cuasitransitiva y $v \rightarrow w_q \rightarrow w_{q+1}$, tenemos que $v \rightarrow w_{q+1}$ o $w_{q+1} \rightarrow v$. Por maximalidad de q tenemos que $v \not\rightarrow w_{q+1}$, por lo que $w_{q+1} \rightarrow v$ (ver Figura 2.14(b)). Como $u \not\rightarrow v$, entonces $q+1 < p$. Así, $(w, w_1, \dots, w_q, w_{q+1}, v)$ es una wv -trayectoria monocromática (porque $c(w_{q+1}, v) = c(w_{q+1}, w_{q+2})$ por hipótesis), contradiciendo la hipótesis (ver Figura 2.15).

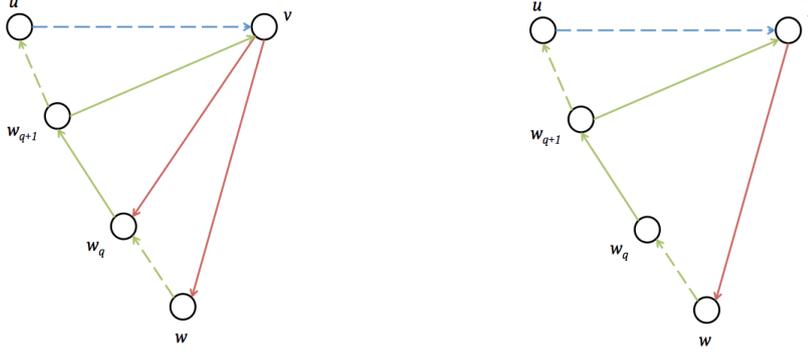


Figura 2.15

Por consiguiente, $l(T') = 3$ y hay vértices tales que $T' = (v, v_1, v_2, w)$, $w \rightarrow v_1$, $v_2 \rightarrow v$. Si $v_i \rightarrow u$ para algún i en $\{1, 2\}$, entonces $(v, T', v_i) \cup (v_i, u)$ contiene una vu -trayectoria monocromática (porque $c(v_i, x) = c(v_i, u)$ para x en $\{v_2, w\}$), contradiciendo que $v \not\rightarrow u$. Por lo tanto, $v_1 \not\rightarrow u$ y $v_2 \not\rightarrow u$. Si $u \rightarrow v_2$, entonces $v_2 \in N^+(u) \cap N^-(v)$ contradiciendo que $N^+(u) \cap N^-(v) = \emptyset$ (por (2.4)) (ver Figura 2.16(a)). Por lo tanto, $u \not\rightarrow v_2$ y $v_2 \not\rightarrow u$; como D es cuasitransitiva, entonces:

$$N^+(u) \cap N^-(v_2) = \emptyset = N^+(v_2) \cap N^-(u). \quad (2.5)$$

Como $v_1 \in N^-(v_2)$, tenemos que $v_1 \notin N^+(u)$, pues $N^+(u) \cap N^-(v_2) = \emptyset$. Puesto que $v_1 \not\rightarrow u$ y D es cuasitransitiva también tenemos que:

$$N^+(u) \cap N^-(v_1) = \emptyset. \quad (2.6)$$

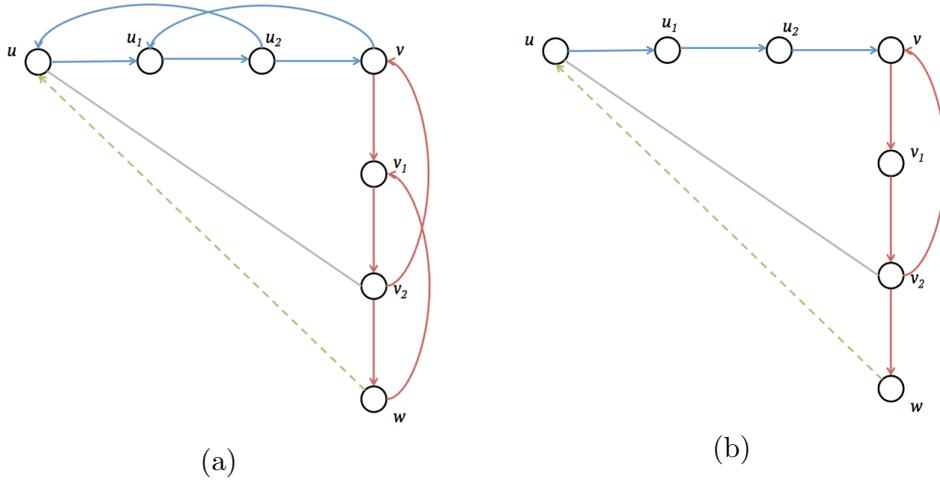


Figura 2.16

Ya que $w \rightarrow v_1$, entonces $u \nrightarrow w$, de otra manera $w \in N^-(v_1) \cap N^+(u)$, lo cual no es posible por (2.6) (ver Figura 2.16(b)). También tenemos que $w \nrightarrow u$, pues $v_2 \rightarrow w$ y $N^+(v_2) \cap N^-(u) = \emptyset$. Por lo tanto, $w \nrightarrow u$ y $u \nrightarrow w$, por el Lema 2.2.1 se tiene que $W = (w, w_1, w_2, u)$, donde además $u \rightarrow w_1$ y $w_2 \rightarrow w$.

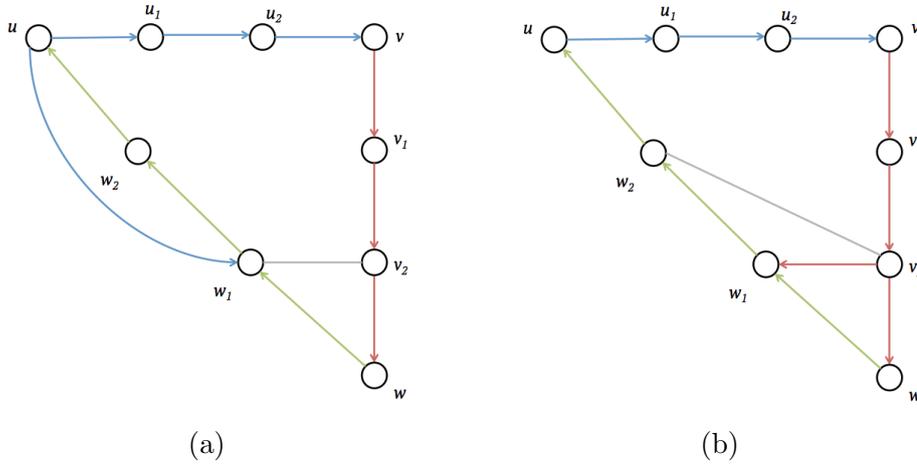


Figura 2.17

Como $v_2 \rightarrow w \rightarrow w_1$ y puesto que D es cuasitransitiva, entonces $v_2 \rightarrow w_1$ o $w_1 \rightarrow v_2$ (ver Figura 2.17(a)). Ya que $u \rightarrow w_1$ y $N^+(u) \cap N^-(v_2) = \emptyset$ (por (2.5)), entonces $w_1 \nrightarrow v_2$, por lo que $v_2 \rightarrow w_1$. Así, $v_2 \rightarrow w_1 \rightarrow w_2$, implica que $v_2 \rightarrow w_2$ o $w_2 \rightarrow v_2$ porque D es cuasitransitiva (ver Figura 2.17(b)). Pero $v_2 \nrightarrow w_2$, pues $w_2 \rightarrow u$ y $N^+(v_2) \cap N^-(u) = \emptyset$ (por (2.5)). En consecuencia $w_2 \rightarrow v_2$. Como $v_2 \rightarrow v$ tenemos $w_2 \rightarrow v_2 \rightarrow v$, lo que nos lleva a $v \rightarrow w_2$ o $w_2 \rightarrow v$, porque D es

cuasitransitiva (ver Figura 2.18(a)). Como $w_2 \rightarrow u$ y $N^+(v) \cap N^-(u) = \emptyset$ tenemos que $v \not\rightarrow w_2$, entonces $w_2 \rightarrow v$. Así, (w, w_1, w_2, v) es una wv -trayectoria monocromática (porque $c(w_2, v) = c(w_2, u)$ por hipótesis), contradiciendo la hipótesis. Por lo tanto, $w \not\rightarrow u$ (ver Figura 2.18(b)). \square

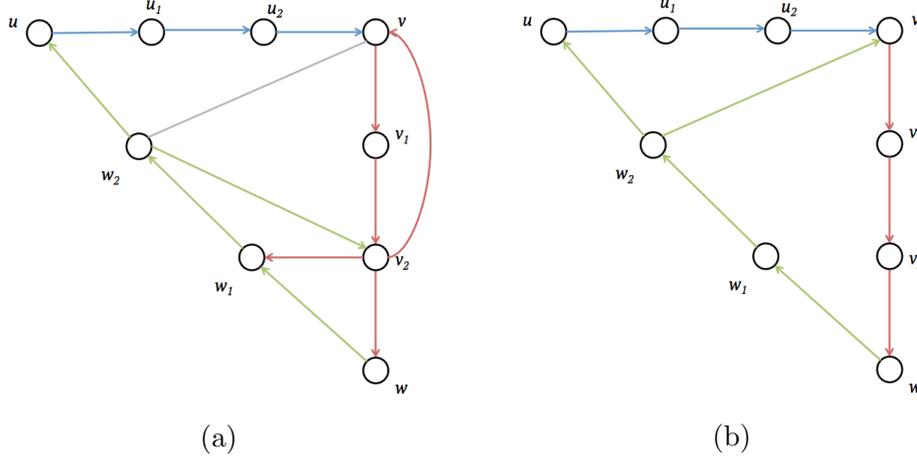


Figura 2.18

Teorema 2.2.4. *Sea D una digráfica cuasitransitiva m -coloreada tal que para cada u en $V(D)$, $A^+(u)$ es monocromático. Si D no contiene ningún C_3 3-coloreado, entonces $\mathfrak{C}(D)$ es una digráfica núcleo perfecta.*

Demostración. Por el Teorema 1.3.1. basta probar que todo ciclo en $\mathfrak{C}(D)$ tiene al menos una flecha simétrica.

Supongamos, por contradicción, que existe un ciclo en $\mathfrak{C}(D)$ sin flechas simétricas. Sea $C = (u_0, u_1, \dots, u_n = u_0)$ un ciclo de longitud mínima sin flechas simétricas en $\mathfrak{C}(D)$. Notemos que $n \geq 2$ y para cada i en $\{0, \dots, n-1\}$ tenemos que $u_i \Rightarrow u_{i+1}$ y $u_{i+1} \not\Rightarrow u_i$. Como C no tiene flechas simétricas podemos asumir sin pérdida de generalidad que $c(u_0) \neq c(u_1)$ (es decir, C no es monocromático). Por el Lema 2.2.3 tenemos que $u_0 \Rightarrow u_2$ y $u_2 \not\Rightarrow u_0$. Así, $n \geq 3$. Entonces el ciclo $(u_0, u_2, u_3, \dots, u_n)$ es un ciclo en $\mathfrak{C}(D)$ sin flechas simétricas con longitud menor a C , contradiciendo que C es de longitud mínima.

Por lo tanto, como todo ciclo en $\mathfrak{C}(D)$ tiene al menos una flecha simétrica, concluimos que $\mathfrak{C}(D)$ es núcleo perfecta. \square

El siguiente corolario es consecuencia directa del Teorema 4.3.4.

Corolario 2.2.5. *Sea D una digráfica cuasitransitiva m -coloreada tal que para cada u en $V(D)$, $A^+(u)$ es monocromático. Si D no contiene ningún C_3 3-coloreado, entonces D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.*

Capítulo 3

Núcleos por trayectorias monocromáticas en digráficas 3-cuasitransitivas

Este capítulo está basado en el artículo *Monochromatic paths and monochromatic sets of arcs in 3-quasitransitive digraphs* [9], donde Hortensia Galeana Sánchez, Rocío Rojas Monroy y Berta Zavala Santana demostraron que si D es una digráfica 3-cuasitransitiva, m -coloreada tal que para cada u vértice de D , el conjunto de flechas que salen de u sea monocromático y si ciertas subestructuras de D cumplen algunas condiciones de coloración, entonces D tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas.

3.1. Resultados preliminares

Lema 3.1.1. *Sea D una digráfica 3-cuasitransitiva m -coloreada tal que para cada u en $V(D)$, $A^+(u)$ es monocromático. Si $\{u, v\}$ es un subconjunto de $V(D)$ y $T = (u = u_0, \dots, u_n = v)$ es una uv -trayectoria monocromática de longitud mínima, con $n \geq 3$, entonces $u_i \rightarrow u_{i-(2k+1)}$ para cada i en $\{3, \dots, n\}$ y k en $\{1, \dots, \lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor\}$. En particular, si $l(T)$ es impar entonces $v \rightarrow u$.*

Demostración. Procediendo por inducción sobre $l(T) = n$.

Base de inducción: Si $n = 3$, entonces $T = (u = u_0, u_1, u_2, u_3 = v)$. Como D es 3-cuasitransitiva, entonces $u \rightarrow v$ o $v \rightarrow u$, como T es trayectoria monocromática de longitud mínima tenemos que $v = u_3 \rightarrow u_0 = u$.

Si $n = 4$, entonces $T = (u = u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 = v)$ y por el caso $n = 3$ tenemos que $u_3 \rightarrow u_0$ y $u_4 \rightarrow u_1$.

Hipótesis de inducción: Si $T' = (u_0, \dots, u_n)$ es una trayectoria monocromática de longitud mínima n con $n \geq 4$, entonces $u_i \rightarrow u_{i-(2k+1)}$ para cada i en $\{3, \dots, n\}$ y k en $\{1, \dots, \lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor\}$.

Paso inductivo: Sea $T = (u = u_0, \dots, u_{n+1} = v)$ una uv -trayectoria monocromática de longitud mínima $n + 1$. Si $T' = (u, T, u_n)$, entonces T' es una uu_n -trayectoria monocromática de longitud mínima. Por hipótesis de inducción tenemos que $u_i \rightarrow u_{i-(2k+1)}$ para cada i en $\{3, \dots, n\}$ y k en $\{1, \dots, \lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor\}$. Por otro lado, si $T'' = (u_1, T, v)$, entonces T'' es una u_1v -trayectoria monocromática de longitud mínima. Por hipótesis de inducción tenemos que $u_i \rightarrow u_{i-(2k+1)}$ para cada i en $\{4, \dots, n + 1\}$ y k en $\{1, \dots, \lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor\}$. Por lo que basta mostrar que $u_{n+1} \rightarrow u_0$ cuando $n + 1$ es impar. Supongamos que $n + 1$ es impar, tenemos que $u_{n+1} \rightarrow u_2 \rightarrow u_3 \rightarrow u_0$. Como D es 3-cuasitransitiva, entonces $u_0 \rightarrow u_{n+1}$ o $u_{n+1} \rightarrow u_0$. Como T es una trayectoria monocromática de longitud mínima, entonces $u_{n+1} \rightarrow u_0$. \square

Definición 3.1.1. Llamaremos \tilde{T}_4 a la digráfica tal que $V(\tilde{T}_4) = \{w, x, y, z\}$ y $F(\tilde{T}_4) = \{(w, x), (x, y), (y, z), (w, z)\}$ (ver Figura 3.1).

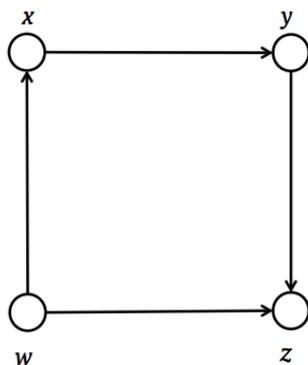


Figura 3.1

Observación 3.1.1. Sea D una digráfica 3-cuasitransitiva m -coloreada. Si todo \tilde{T}_4 o C_4 contenido en D es casimonocromático, entonces D no tiene trayectorias 3-coloreadas de longitud 3.

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que $T = (u_0, u_1, u_2, u_3)$ es una trayectoria 3-coloreada. Como D es 3-cuasitransitiva, entonces $u_0 \rightarrow u_3$ o $u_3 \rightarrow u_0$. Si $u_0 \rightarrow u_3$ generaría un \tilde{T}_4 que no es casimonocromático en D . Si $u_3 \rightarrow u_0$, entonces tendríamos un C_4 con al menos 3 colores, contradiciendo la hipótesis. \square

Observación 3.1.2. Sea D una digráfica 3-cuasitransitiva m -coloreada tal que para todo u en $V(D)$, $A^+(u)$ es monocromático y todo C_3 es casimonocromático. Si (u, u_1, u_2, v) es un camino 3-coloreado, entonces $c(u) \neq c(u_1)$ y $c(u_2) \notin \{c(u), c(u_1)\}$, lo cual implica que:

- $u \neq u_1$, pues $c(u) \neq c(u_1)$.
- $u \neq u_2$, pues $c(u) \neq c(u_2)$.
- $u_1 \neq u_2$, ya que $c(u_1) \neq c(u_2)$.
- $u \neq v$, si no fuera así y por los casos anteriores $(u, u_1, u_2, v = u)$ sería un C_3 3-coloreado, contradiciendo la hipótesis.
- $u_2 \neq v$, pues D es una digráfica sin lazos.

3.2. Resultado principal

Definición 3.2.1. Sea D una digráfica m -coloreada. Un γ -ciclo en D es una sucesión de vértices distintos, con excepción del primer y último vértices, $(u_0, u_1, \dots, u_n, u_0)$ tal que para cada i en $\{0, 1, \dots, n\}$:

- Hay una $u_i u_{i+1}$ -trayectoria monocromática.
- No existe una $u_{i+1} u_i$ -trayectoria monocromática.

La suma sobre los índices de los vértices de γ es módulo $n + 1$ y decimos que la longitud de γ es $n + 1$.

Teorema 3.2.1. Sea D una digráfica 3-cuasitransitiva, m -coloreada tal que para cada u en $V(D)$, $A^+(u)$ es monocromático. Si cada C_3 , C_4 y \tilde{T}_4 contenido en D es casimonocromático, entonces no hay γ -ciclos en D .

Demostración. Procediendo por contradicción. Supongamos que $\gamma = (u_0, u_1, \dots, u_n, u_0)$ es un γ -ciclo en D de longitud mínima. Por la definición de γ -ciclo, sabemos que para toda i en $\{0, \dots, n\}$ existe una $u_i u_{i+1}$ -trayectoria monocromática, sea T_i dicha trayectoria (podemos asumir que T_i es de longitud mínima), además no existe $u_{i+1} u_i$ -trayectoria monocromática en D . Por lo que $u_{i+1} \not\rightarrow u_i$ y por el Lema 3.1.1. $l(T_i)$ es par o $l(T_i) = 1$ para cada i en $\{0, \dots, n\}$. Ahora tenemos las siguientes afirmaciones:

Afirmación 3.1. $l(\gamma) \geq 3$.

Si $l(\gamma) = 2$ entonces $\gamma = (u_0, u_1, u_0)$, lo que implica que hay una $u_1 u_0$ trayectoria monocromática, lo cual contradice la definición de γ -ciclo.

Afirmación 3.2. Hay un índice i en $\{0, \dots, n\}$ tal que $c(u_i) \neq c(u_{i+1})$.

De no ser así, consideramos que $T_0 \cup T_1 \cup \dots \cup T_n$ contiene una $u_0 u_n$ -trayectoria monocromática, lo cual contradice la definición de γ -ciclo. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que T_0 tiene el color 1 y T_1 tiene el color 2.

Afirmación 3.3. No hay $u_2 u_0$ -trayectorias monocromáticas en D .

Supongamos que existe

$$T = (u_2 = x_0, x_1, \dots, x_t = u_0)$$

una $u_0 u_2$ -trayectoria monocromática de longitud mínima, entonces:

Afirmación 3.3.1. El color de T es distinto al color 1 y al color 2.

T no tiene el color 1 pues no hay $u_2 u_1$ -trayectorias monocromáticas. T no tiene el color 2 pues no hay $u_1 u_0$ -trayectorias monocromáticas. Podemos suponer que T tiene el color 3.

Afirmación 3.3.2. $l(T_0) \geq 4$ y $l(T_1) \geq 4$.

Si $l(T_0) = 1 = l(T_1)$, entonces $C = (u_0, u_1, u_2, x_1)$ es un $u_0 x_1$ -camino 3-coloreado de longitud 3. Por la Observación 3.1.2. tenemos que C es una trayectoria 3-coloreada de longitud 3, contradiciendo la Observación 3.1.1.

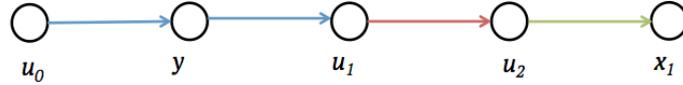


Figura 3.2

Si $l(T_0) = 2$ y $l(T_1) = 1$. Sea $T_0 = (u_0, y, u_1)$, entonces $C = (y, u_1, u_2, x_1)$ es un camino 3-coloreado de longitud 3 (ver Figura 3.2). Por la Observación 3.1.2. tenemos que C es una trayectoria 3-coloreada de longitud 3, contradiciendo la Observación 3.1.1.

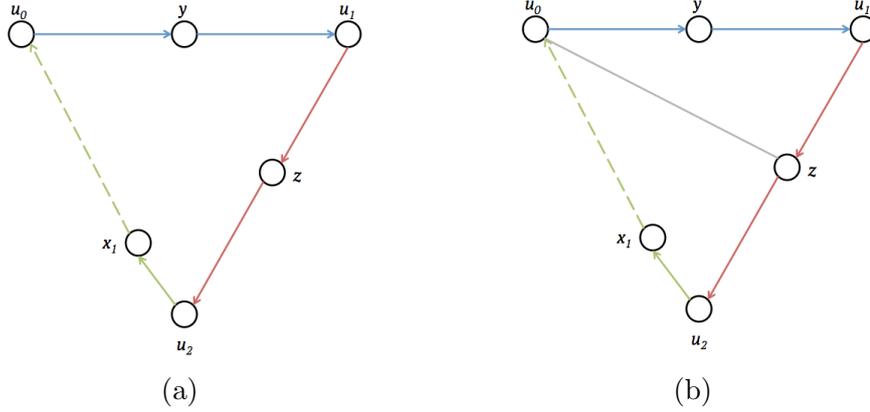


Figura 3.3

Si $l(T_0) = 2 = l(T_1)$, entonces sea $T_0 = (u_0, y, u_1)$ y $T_1 = (u_1, z, u_2)$ (ver Figura 3.3(a)). Como $z \notin V(T_0)$ ya que $c(z, u_2) \notin \{c(u_0, y), c(y, u_1)\}$ y $A^+(z)$ es monocromático, entonces $T_0 \cup (u_1, z) = (u_0, y, u_1, z)$ es una trayectoria de longitud 3. Como D es 3-cuasitransitiva entonces $u_0 \rightarrow z$ o $z \rightarrow u_0$ (ver Figura 3.3(b)). Si $z \rightarrow u_0$ entonces (z, u_0) tendría el color 2, así (u_0, y, u_1, z, u_0) sería un C_4 que no es casimonocromático, contradiciendo la hipótesis (ver Figura 3.4(a)). Por lo tanto, $u_0 \rightarrow z$. Consideremos $C = (u_0, z, u_2, x_1)$, luego C es un camino 3-coloreado, por la Observación 3.1.2. tenemos que C es una trayectoria 3-coloreada de longitud 3, contradiciendo la Observación 3.1.1. (ver Figura 3.4(b)).

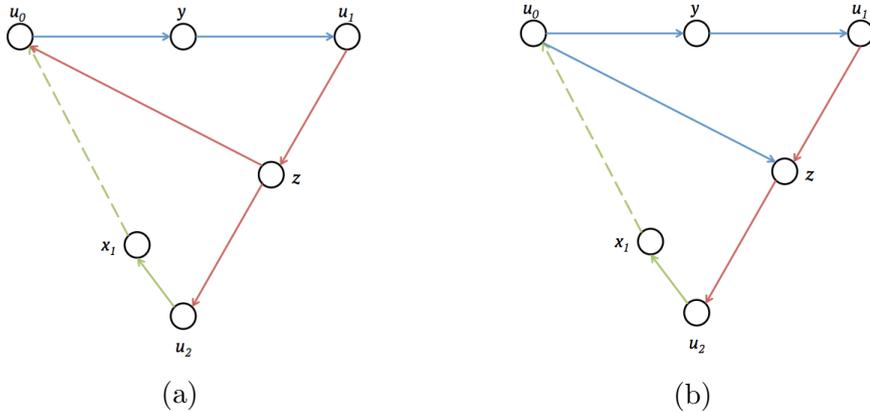


Figura 3.4

Si $l(T_0) = 1$ y $l(T_1) = 2$, entonces sean $T_1 = (u_1, z, u_2)$ y $C = (x_{t-1}, u_0, u_1, z)$. Entonces C es un camino 3-coloreado, por la Observación 3.1.2. Tenemos que C

es una trayectoria 3-coloreada de longitud 3, contradiciendo la Observación 3.1.1. (ver Figura 3.5).

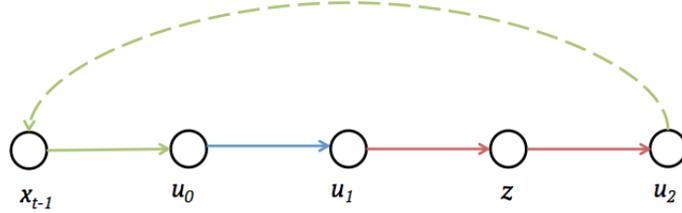


Figura 3.5

Concluimos que $l(T_0) \geq 4$ y $l(T_1) \geq 4$.
Supongamos que

$$T_0 = (u_0 = y_0, \dots, y_l = u_1) \text{ y } T_1 = (u_1 = z_0, \dots, z_k = u_2).$$

Afirmación 3.3.3. $l(T) \geq 3$.

Supongamos por contradicción que $l(T) \leq 3$.

Si $l(T) = 1$, entonces $C = (z_{k-1}, u_2, u_0, y_1)$ es un camino 3-coloreado. La Observación 3.1.2. implica que C es una trayectoria 3-coloreada de longitud 3, lo cual contradice la Observación 3.1.1 (ver Figura 3.6).



Figura 3.6

Si $l(T) = 2$, entonces $C = (z_{k-1}, u_2) \cup (u_2, T, u_0)$ es una $z_{k-1}u_0$ -trayectoria de longitud 3. Como D es cuasitransitiva, entonces $z_{k-1} \rightarrow u_0$ o $u_0 \rightarrow z_{k-1}$ (ver Figura 3.7). Si $z_{k-1} \rightarrow u_0$ entonces $c(z_{k-1}, u_0) = 2$ y $D[\{z_{k-1}, u_2, x_1, u_0\}]$ contiene un \tilde{T}_4 que no es casimonocromático, contradiciendo la hipótesis (ver Figura 3.7(a)). Si $u_0 \rightarrow z_{k-1}$ entonces $c(u_0, z_{k-1}) = 1$, así (u_0, z_{k-1}, u_2, x_1) es una trayectoria 3-coloreada de longitud 3, contradiciendo la Observación 3.1.1. (ver Figura 3.7(b)).

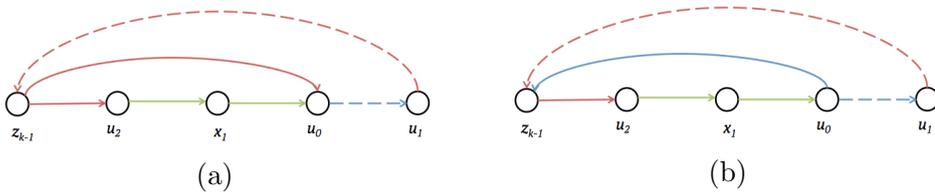


Figura 3.7

Concluimos que $l(T) \geq 3$.

Afirmación 3.3.4. $u_0 \nrightarrow u_2$.

Procediendo por contradicción, supongamos que $u_0 \rightarrow u_2$. Note que $c(u_0, u_2) = 1$, por el Lema 3.1.1. tenemos que $u_2 \rightarrow z_1$ y $c(u_2, z_1) = 3$. Entonces (u_0, u_2, z_1, z_2) es una trayectoria 3-coloreada de longitud 3, lo cual contradice la Observación 3.1.1. (ver Figura 3.8).

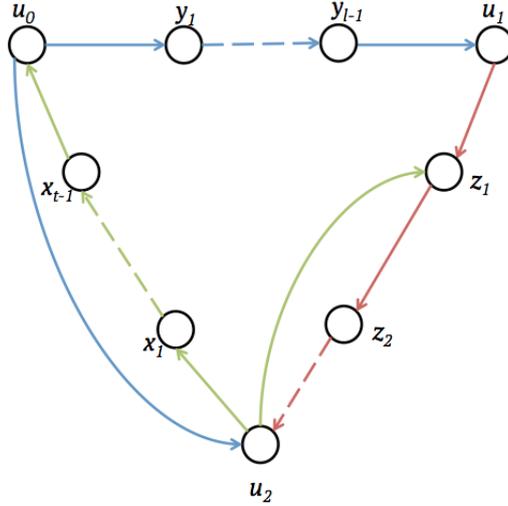


Figura 3.8

Afirmación 3.3.5. $l(T_0) \geq 4, l(T_1) \geq 4, l(T) \geq 4$ y $l(T)$ es par.

Por la Afirmación 3.3.2., tenemos $l(T_0) \geq 4, l(T_1) \geq 4$. Por la Afirmación 3.3.3. tenemos que $l(T) \geq 3$, por lo que basta probar que $l(T)$ es par. Como $l(T) \geq 3$ y como $u_2 \nrightarrow u_0$ (por la Afirmación 3.3.4) se sigue del Lema 3.1.1. que $l(T)$ es par.

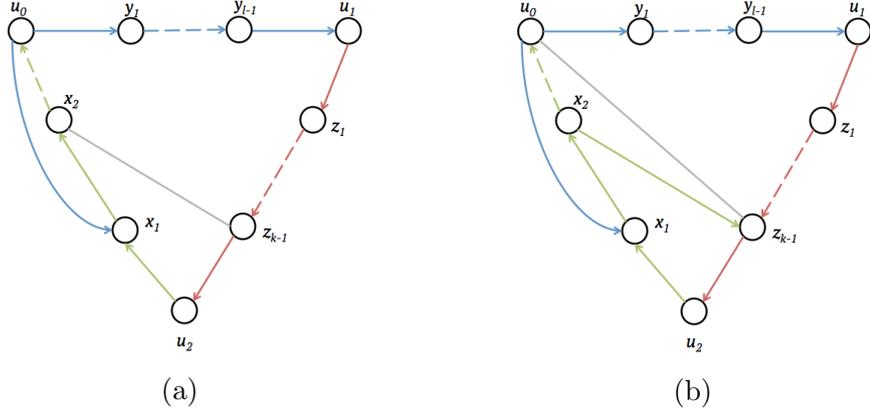


Figura 3.9

Luego, se sigue del Lema 3.1.1. que $u_0 \rightarrow x_1$. Observemos que (z_{k-1}, u_2, x_1, x_2) es una trayectoria de longitud 3 y como D es 3-cuasitransitiva tenemos que $z_{k-1} \rightarrow x_2$ o $x_2 \rightarrow z_{k-1}$ (ver Figura 3.9(a)). Si $z_{k-1} \rightarrow x_2$, entonces $D[\{z_{k-1}, u_2, x_1, x_2\}]$ contiene un \tilde{T}_4 que no es casimonocromático, lo cual es una contradicción. Si $x_2 \rightarrow z_{k-1}$, entonces (u_0, x_1, x_2, z_{k-1}) es una trayectoria de longitud 3, como D es 3-cuasitransitiva tenemos que $u_0 \rightarrow z_{k-1}$ o $z_{k-1} \rightarrow u_0$ (ver Figura 3.9(b)). Si $u_0 \rightarrow z_{k-1}$ entonces $D[\{u_0, z_{k-1}, u_2, x_1\}]$ contiene un \tilde{T}_4 que no es casimonocromático, contradiciendo la hipótesis (ver Figura 3.10(a)). Si $z_{k-1} \rightarrow u_0$ entonces (u_0, x_1, x_2, z_{k-1}) es un C_4 que no es casimonocromático, una contradicción (ver Figura 3.10(b)). Por lo tanto, no existen u_2u_0 -trayectorias monocromáticas.

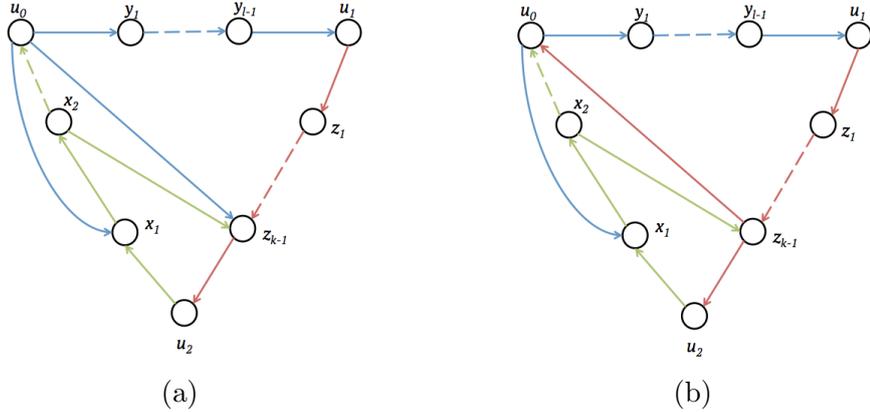


Figura 3.10

Afirmación 3.4. $l(\gamma) \geq 4$.

Se sigue de la Afirmación 3.1. y la Afirmación 3.3.

Afirmación 3.5. *No hay una u_0u_2 -trayectoria monocromática en D .*

Supongamos que existe una u_0u_2 -trayectoria monocromática en D . Entonces $\gamma_1 = (u_0, u_2, u_3, \dots, u_n, u_0)$ sería un γ ciclo con $l(\gamma_1) \leq l(\gamma)$ lo cual contradice la minimalidad de γ .

Afirmación 3.6. *Si T_i y T_{i+1} tienen colores distintos, entonces no existe una $u_{i+2}u_i$ -trayectoria monocromática y no existe una u_iu_{i+2} -trayectoria monocromática.*

Es de manera análoga a la Afirmación 3.3. y la Afirmación 3.5.

Afirmación 3.7. *Si T_i y T_{i+1} tienen colores distintos y $l(T_i) = 1$ para alguna i en $\{0, \dots, n\}$, entonces $l(T_{i+1}) = 1$.*

Sin pérdida de generalidad supongamos que $l(T_0) = 1$. Procediendo por contradicción supongamos que $l(T_1) \geq 2$.

Si $l(T_1) = 2$, sea $T_1 = (u_1, z, u_2)$, entonces (u_0, u_1, z, u_2) es una trayectoria de longitud 3 (ver Figura 3.11(a)) como D es 3-cuasitransitiva tenemos que $u_0 \rightarrow u_2$ o $u_2 \rightarrow u_0$, lo cual contradice la Afirmación 3.3. o la Afirmación 3.5., respectivamente.

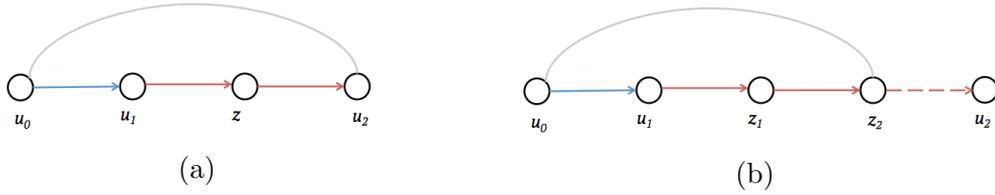


Figura 3.11

Si $l(T_1) \geq 3$, entonces sea $T_1 = (u_1 = z_0, z_1, \dots, z_k = u_2)$. Entonces (u_0, u_1, z_1, z_2) es una trayectoria de longitud 3, como D es 3-cuasitransitiva tenemos que $u_0 \rightarrow z_2$ o $z_2 \rightarrow u_0$. Si $u_0 \rightarrow z_2$ entonces $D[\{u_0, u_1, z_1, z_2\}]$ contiene un \tilde{T}_4 que no es casimonocromático, lo cual es una contradicción. Si $z_2 \rightarrow u_0$, entonces (u_1, z_1, z_2, u_0) es una u_1u_0 -trayectoria monocromática, contradiciendo la definición de γ -ciclo (ver Figura 3.11(b)). Por lo tanto, $l(T_1) = 1$.

Afirmación 3.8. *Si T_i y T_{i+1} tienen colores distintos y $l(T_i) = 1$, entonces T_{i+2} tiene el mismo color que T_i .*

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $i = 0$, T_0 tiene el color 1 y T_1 tiene el color 2; $l(T_0) = 1$. Por la Afirmación 3.7. $l(T_1) = 1$. Sea $T_2 = (u_2, x_1, \dots, x_t = u_3)$. Luego $C = (u_0, u_1, u_2, x_1)$ es un u_0x_1 -camino de longitud 3. Como γ es un γ -ciclo, entonces $x_1 \neq u_1$ y por la Afirmación 3.3. $x_1 \neq u_0$. Así, C es una trayectoria

de longitud 3, como D es 3-cuasitransitiva tenemos que $u_0 \rightarrow x_1$ o $x_1 \rightarrow u_0$ (ver Figura 3.12).

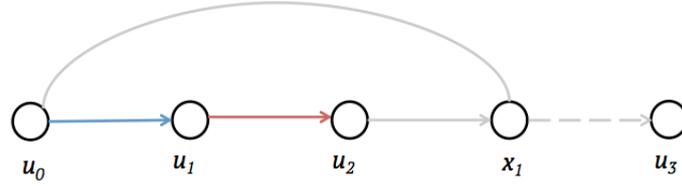


Figura 3.12

Si $u_0 \rightarrow x_1$, entonces $D[u_0, u_1, u_2, x_1]$ contiene un \tilde{T}_4 (ver Figura 3.13(a)). Como todo \tilde{T}_4 es casimonocromático entonces T_2 debe tener el color 1 (ver Figura 3.13(b)).

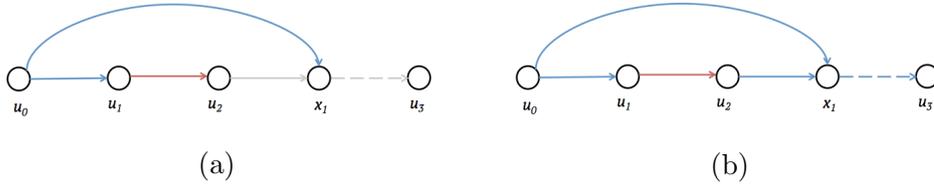


Figura 3.13

Si $x_1 \rightarrow u_0$, entonces $C = (u_0, u_1, u_2, x_1)$ es un C_4 , como debe ser casimonocromático entonces T_2 debe tener el color 1 o el color 2 (ver Figura 3.14(a)). Si T_2 tuviera el color 2, entonces (u_1, u_2, x_1, u_0) sería una u_1u_0 -trayectoria monocromática (ver Figura 3.14(b)) contradiciendo la definición de γ -ciclo.

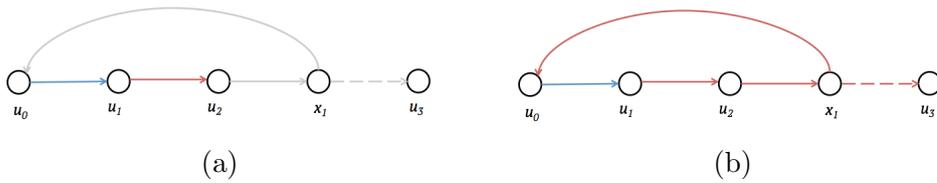


Figura 3.14

Así concluimos que T_2 tiene el mismo color que T_0 .
Para terminar esta demostración, analizaremos cinco posibles casos.

Caso 1. $l(T_0) = 1$.

Aplicando las Afirmaciones 3.7 y 3.8, repetidamente, obtenemos que $l(T_i) = 1$ para cada i en $\{0, \dots, n\}$, T_i tiene el color 1 si i es par y T_i tiene el color 2 si i es impar. Esto implica que γ es un ciclo de longitud par, con lo que n es impar.

Probaremos por inducción sobre i que $u_0 \rightarrow u_i$, con i impar, $i \in \{0, \dots, n\}$.

Base de inducción: Para $i = 1$ tenemos que $u_0 \rightarrow u_i$ pues γ es un ciclo.

Hipótesis de inducción: Si $u_0 \rightarrow u_{2k-1}$ para $i = 2k - 1$, con $k \geq 1$.

Ahora probaremos que $u_0 \rightarrow u_{2k+1}$. Tenemos que $c(u_0, u_1) = c(u_0, u_{2k-1}) = 1$ y $c(u_{2k-1}, u_{2k}) = 2$.

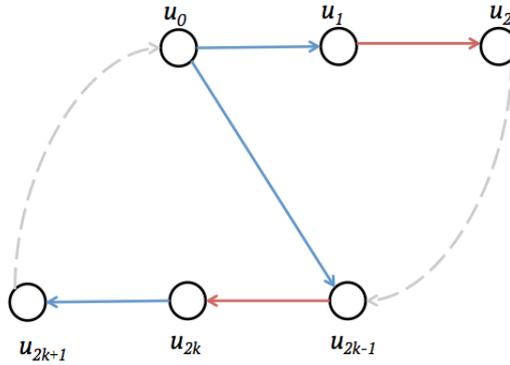


Figura 3.15

Sea $T = (u_0, u_{2k-1}, u_{2k}, u_{2k+1})$. Así, T es una $u_0 u_{2k+1}$ -trayectoria de longitud 3 (ver Figura 3.15). Como D es 3-cuasitransitiva, entonces $u_0 \rightarrow u_{2k+1} \circ u_{2k+1} \rightarrow u_0$. Por lo tanto, $D[V(T)]$ contiene un C_4 o \tilde{T}_4 (ver Figura 3.16).

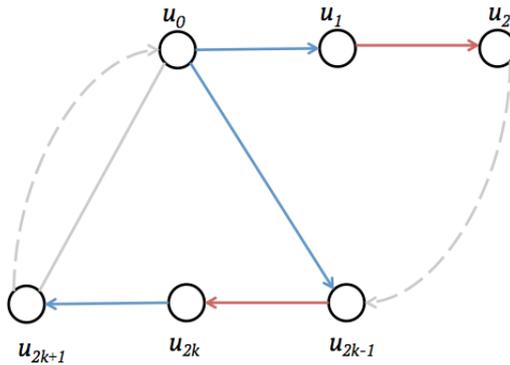


Figura 3.16

Como todo \tilde{T}_4 y C_4 en D es casimonocromático entonces el color de la flecha entre u_0 y u_{2k+1} es de color 1, lo cual implica que $u_{2k+1} \nrightarrow u_0$, pues $A^+(u_{2k+1})$ es de color 2. Así, $u_0 \rightarrow u_{2k+1}$. Por lo tanto, $u_0 \rightarrow u_i$ para toda i en $\{0, \dots, n\}$ impar. Como n es impar esto nos lleva a que $u_0 \rightarrow u_n$ contradiciendo la definición de γ -ciclo.

Caso 2. $l(T_0) = 2$ y $l(T_1) = 1$.

Sea $T_0 = (u_0, x, u_1)$, entonces $C = (u_0, x, u_1, u_2)$ es una trayectoria de longitud 3, como D es 3-cuasitransitiva tenemos que $u_0 \rightarrow u_2$ o $u_2 \rightarrow u_0$, esto contradice la Afirmación 3.5. o 3.3., respectivamente.

Caso 3. $l(T_0) = 2$ y $l(T_1) \geq 2$.

Sean $T_0 = (u_0, x, u_1)$ y $T_1 = (u_1, y_1, y_2, \dots, y_t = u_2)$, con $t \geq 2$. Entonces $C = (u_0, x, u_1, y_1)$ es una trayectoria de longitud 3, como D es 3-cuasitransitiva entonces $u_0 \rightarrow y_1$ o $y_1 \rightarrow u_0$ (ver Figura 3.17).

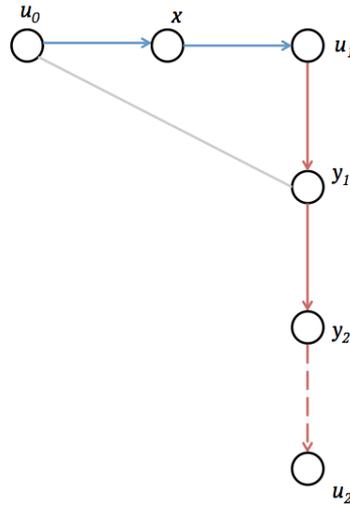


Figura 3.17

Así $D[V(C)]$ contiene un C_4 o \tilde{T}_4 , como debe ser casimonocromático, entonces la flecha entre u_0 y y_1 tiene color 1. Como $y_1 \nrightarrow u_0$ ($A^+(y_1)$ es color 2) entonces $u_0 \rightarrow y_1$. Luego, (x, u_1, y_1, y_2) es una trayectoria de longitud 3, como D es 3-cuasitransitiva tenemos que $x \rightarrow y_2$ o $y_2 \rightarrow x$ (ver Figura 3.18).

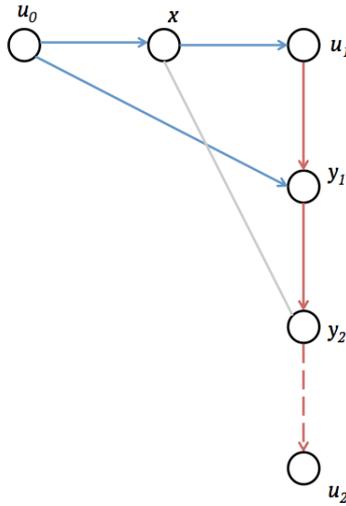


Figura 3.18

Si $x \rightarrow y_2$, entonces $D[\{x, u_1, y_1, y_2\}]$ contiene un \tilde{T}_4 que no es casimonocromático (ver Figura 3.19).

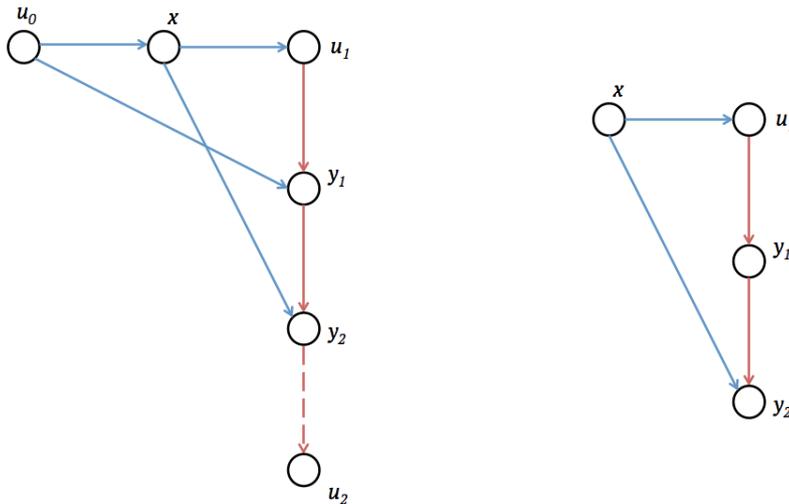


Figura 3.19

Si $y_2 \rightarrow x$, entonces $D[\{u_0, y_1, y_2, x\}]$ contiene un \tilde{T}_4 que no es casimonocromático, una contradicción (ver Figura 3.20).

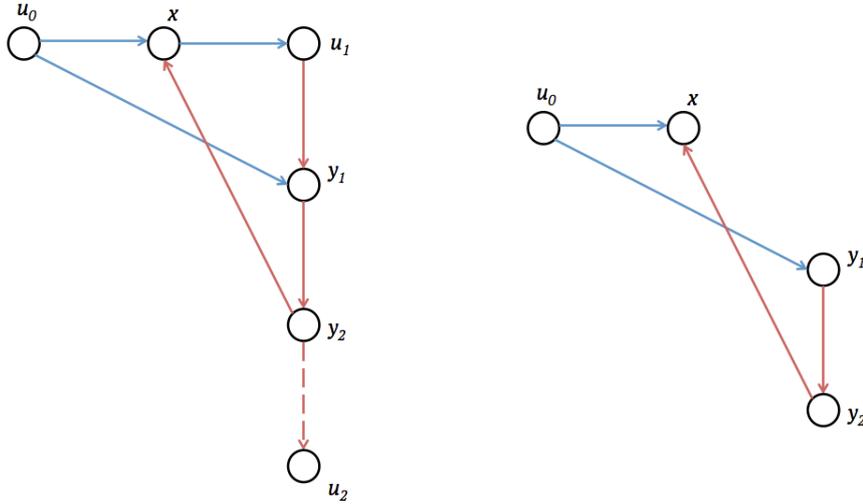


Figura 3.20

Caso 4. Si $l(T_0) \geq 4$ y $l(T_1) = 1$.

Supongamos que $T_0 = (u_0, x_1, x_2, \dots, x_{t-1}, x_t = u_1)$, con $t \geq 4$. Tenemos que $C = (x_{t-2}, x_{t-1}, u_1, u_2)$ es una trayectoria de longitud 3, como D es 3-cuasitransitiva, $x_{t-2} \rightarrow u_2$ o $u_2 \rightarrow x_{t-2}$ (ver Figura 3.21).

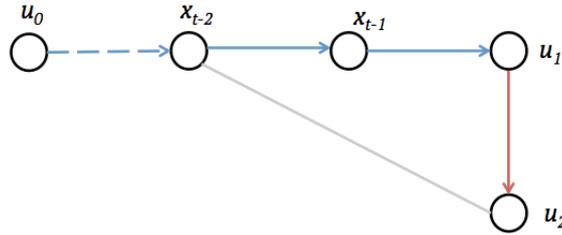


Figura 3.21

Entonces $D[V(C)]$ contiene un \tilde{T}_4 o un C_4 , el cual por hipótesis es casimocromático, por lo que la flecha entre x_{t-2} y u_2 es de color 1. Si $u_2 \rightarrow x_{t-2}$, entonces $(u_2, x_{t-2}, x_{t-1}, u_1)$ es una u_2u_1 -trayectoria monocromática, contradiciendo la definición de γ -ciclo. Si $x_{t-2} \rightarrow u_2$, entonces $(u_0, x_1, x_2, \dots, x_{t-2}, u_2)$ es una u_0u_2 -trayectoria monocromática, contradiciendo la Afirmación 3.5.

Caso 5. Si $l(T_0) \geq 4$ y $l(T_1) \geq 2$.

Supongamos que $T_0 = (u_0, x_1, x_2, \dots, x_{t-1}, u_1)$ y $T_1 = (u_1, y_1, y_2, \dots, y_{l-1}, u_2)$, entonces $C = (x_{t-2}, x_{t-1}, u_1, y_1)$ es una trayectoria de longitud 3, como D es 3-cuasitransitiva, entonces $x_{t-2} \rightarrow y_1$ o $y_1 \rightarrow x_{t-2}$ (ver Figura 3.22).

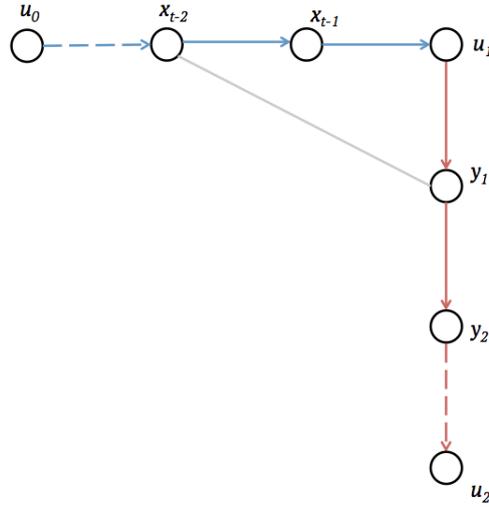


Figura 3.22

Entonces $D[V(C)]$ contiene un \tilde{T}_4 o un C_4 , el cual por hipótesis es casimonocromático. Entonces la flecha entre x_{t-2} y y_1 es de color 1. Como $A^+(y_1)$ es de color 2 entonces $y_1 \not\rightarrow x_{t-2}$, por lo que $x_{t-2} \rightarrow y_1$. Por otro lado, $C' = (x_{t-1}, u_1, y_1, y_2)$ es una trayectoria de longitud 3, como D es 3-cuasitransitiva tenemos que $x_{t-1} \rightarrow y_2$ o $y_2 \rightarrow x_{t-1}$ (ver Figura 3.23).

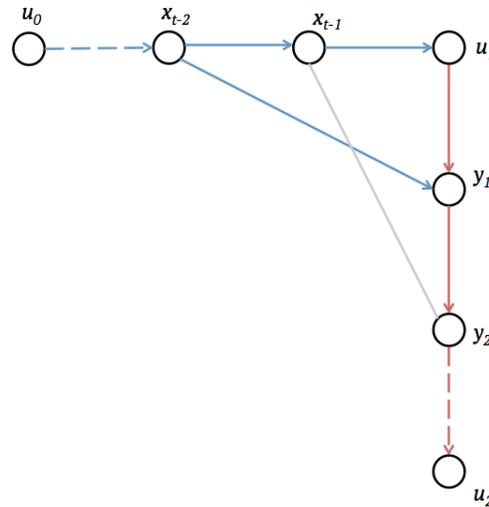


Figura 3.23

Si $x_{t-1} \rightarrow y_2$, entonces $D[\{x_{t-1}, u_1, y_1, y_2\}]$ contiene un \tilde{T}_4 que no es casimonocromático (ver Figura 3.24).

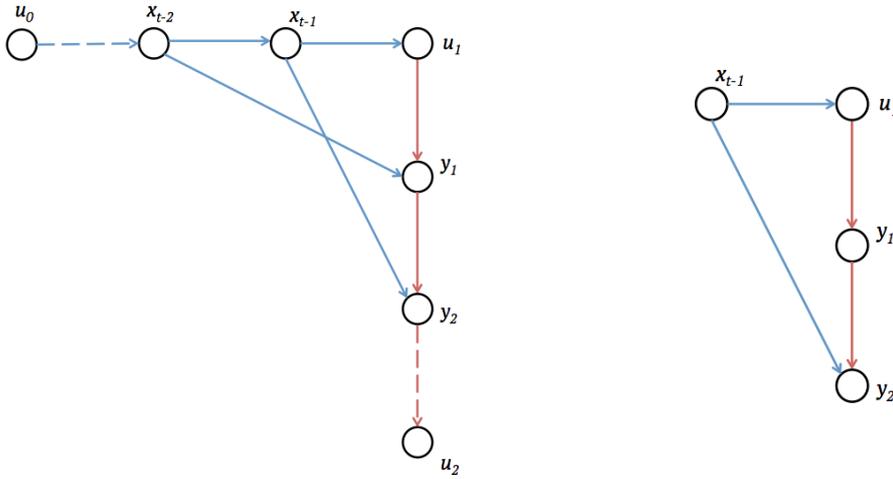


Figura 3.24

Si $y_2 \rightarrow x_{t-1}$, entonces $D[\{x_{t-2}, y_1, y_2, x_{t-1}\}]$ contiene un \tilde{T}_4 que no es casimocromático, una contradicción (ver Figura 3.25).

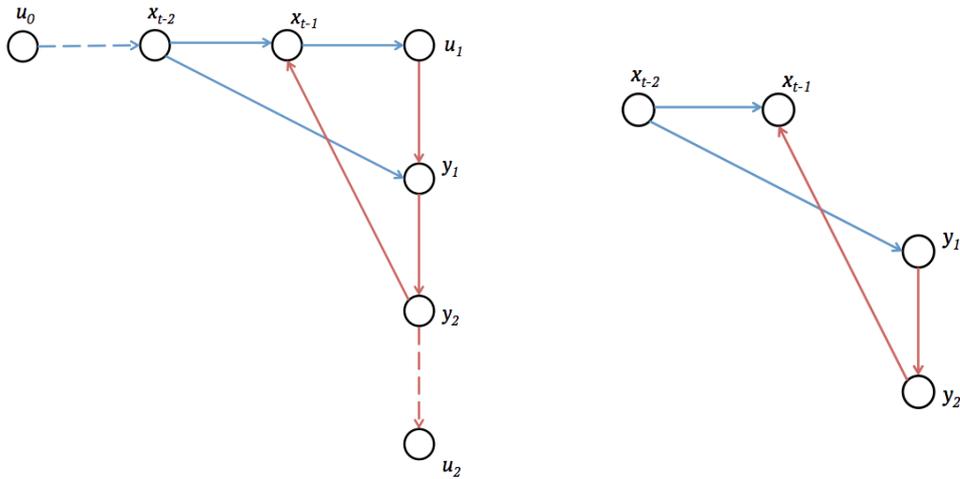


Figura 3.25

Concluimos que D no contiene γ -ciclos

□

Teorema 3.2.2. *Sea D una digráfica 3-cuasitransitiva, m -coloreada tal que para cada u en $V(D)$, $A^+(u)$ es monocromático. Si cada C_3 , C_4 y \tilde{T}_4 contenido en D es casimonocromático, entonces $\mathfrak{C}(D)$ es una digráfica núcleo perfecta.*

Demostración. Probaremos que todo ciclo en $\mathfrak{C}(D)$ tiene una flecha simétrica. Por contradicción, supongamos que C es un ciclo en $\mathfrak{C}(D)$ sin flechas simétricas. Entonces C es un γ -ciclo en D contradiciendo el Teorema 3.2.1.

Por lo tanto, como todo ciclo en $\mathfrak{C}(D)$ tiene una flecha simétrica, entonces $\mathfrak{C}(D)$ es núcleo perfecta. \square

Corolario 3.2.3. *Sea D una digráfica 3-cuasitransitiva, m -coloreada tal que para cada $u \in V(D)$, $A^+(u)$ es monocromático. Si cada C_3 , C_4 y \tilde{T}_4 contenido en D es casimonocromático, entonces D tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas.*

Capítulo 4

H -núcleos en digráficas cuasitransitivas

En este capítulo introducimos las propiedades \aleph y \beth en la teoría de H -núcleos, las cuales nos serán de gran utilidad para poder encontrar resultados equivalentes a los vistos en los capítulos 3 y 4. Demostraremos que si D es una digráfica cuasitransitiva H -coloreada con la propiedad \aleph tal que todo ciclo de longitud 3 tiene la propiedad \beth , entonces D tiene H -núcleo, así extendiendo los resultados mencionados en el capítulo 3.

4.1. Propiedad \aleph

Definición 4.1.1. Sean H una digráfica, D una digráfica H -coloreada, $u \in V(D)$. Definimos $\xi^+(\mathbf{u}) = \{c(u, v) \mid (u, v) \in F(D)\}$.

Definición 4.1.2. Sean H una digráfica, D una digráfica H -coloreada, $\{C_1, \dots, C_p\}$ una partición de $V(\mathcal{C}_C(D))$. Definimos $B_i = \{a \in F(D) \mid c(a) \in C_i\}$.

Lema 4.1.1. Sean H una digráfica, D una digráfica H -coloreada, $\{C_1, \dots, C_p\}$ una partición de $V(\mathcal{C}_C(D))$. Si $\mathcal{C}_C(D)[C_i]$ es una subdigráfica de $H[C_i]$, entonces:

1. Todo camino dirigido en $D[B_i]$ es un H -camino en D .
2. Todo uv -camino en $D[B_i]$ contiene una uv - H -trayectoria en D .

Demostración. 1. Sean H una digráfica y D una digráfica H -coloreada, $\{C_1, \dots, C_p\}$ una partición de $V(\mathcal{C}_C(D))$ tal que $\mathcal{C}_C(D)[C_i]$ es una subdigráfica de $H[C_i]$, T un camino dirigido en $D[B_i]$. Como T está contenido en $D[B_i]$ entonces $\mathcal{C}_C(T) \subseteq \mathcal{C}_C(D)[C_i]$. Por hipótesis $\mathcal{C}_C(D)[C_i] \subseteq H[C_i] \subseteq H$, por lo tanto $\mathcal{C}_C(T) \subseteq H$, es

decir, T es un H -camino en D . En particular, si T es una trayectoria dirigida en $D[B_i]$, entonces T es una H -trayectoria en D .

2. Sea T un uv -camino en $D[B_i]$, por el Teorema 1.2.1. T contiene una uv -trayectoria, digamos T' . Por la parte anterior de este resultado, T' es una uv - H -trayectoria en D . Así, T contiene una uv - H -trayectoria en D . \square

Definición 4.1.3. Sean H una digráfica y D una digráfica H -coloreada. Decimos que D tiene la **propiedad \aleph** si existe $\{C_1, \dots, C_p\}$ una partición de $V(\mathcal{C}_C(D))$ que cumple:

1. $\mathcal{C}_C(D)[C_i]$ es una subdigráfica de $H[C_i]$ para todo i en $\{1, \dots, p\}$.
2. Para cualquier vértice u en $V(D)$ existe C_i , un elemento de la partición de tal forma que $\xi^+(u) \subseteq C_i$.
3. Si T es una H -trayectoria entonces existe C_i , un elemento de la partición, tal que T está contenido en $D[B_i]$.

Denotamos C_u al elemento de la partición de $V(\mathcal{C}_C(D))$ que contiene a $\xi^+(u)$.



Figura 4.1

Para ejemplificar este concepto examinemos la digráfica H y la digráfica D H -coloreada en la Figura 4.1, es fácil ver que la digráfica de clases de color es la digráfica representada en la Figura 4.2.

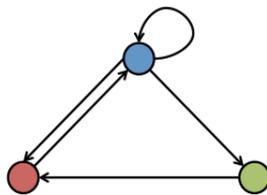


Figura 4.2

Sea $\{C_1 = \{\bullet, \bullet\}, C_2 = \{\bullet\}\}$, partici3n de $V(\mathcal{C}_C(D))$. Podemos ver que:

1. $\mathcal{C}_C(D)[C_1] = H[C_1]$ y $\mathcal{C}_C(D)[C_2] = H[C_2]$ son las digr3ficas en la Figura 4.3.



Figura 4.3

2. $\xi^+(w) = \{\bullet, \bullet\}$ es subconjunto de C_1 , $\xi^+(x) = \{\bullet\}$ es subconjunto de C_1 , $\xi^+(y) = \{\bullet\}$ es subconjunto de C_2 , $\xi^+(z) = \{\bullet\}$ es subconjunto de C_2 .
3. Podemos ver $D[B_1]$, Figura 2.5 (a) y $D[B_2]$, Figura 4.4 (b). Las H -trayectorias de D de longitud mayor a uno son $T = (z, y, w)$ y $T' = (w, x, z)$, por lo tanto, para toda H -trayectoria existe C_i un elemento de la partici3n tal que nuestra H -trayectoria est3 contenida en $D[B_i]$.

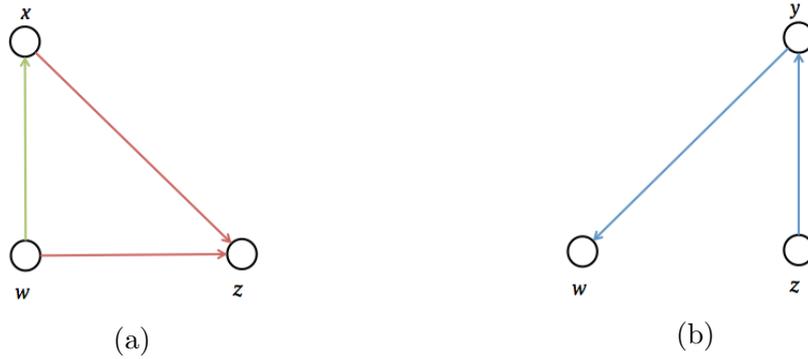


Figura 4.4

As3, D es una digr3fica con la propiedad \aleph .

Definici3n 4.1.4. Sean H una digr3fica y D una digr3fica H -coloreada, $\{C_1, \dots, C_p\}$ una partici3n de $V(\mathcal{C}_C(D))$ y G una subdigr3fica de D . Decimos que G tiene la **propiedad \beth** si existe C_i un elemento de la partici3n tal que los colores de todas las flechas de G , excepto a lo m3s una, est3n en C_i .

Si consideramos la digr3fica D en la Figura 4.1, $\{C_1 = \{\bullet, \bullet\}, C_2 = \{\bullet\}\}$, partici3n de $V(\mathcal{C}_C(D))$. entonces la subdigr3fica representada en la Figura 4.5 (a) tiene la propiedad \beth y la subdigr3fica en la Figura 4.5 (b) no tiene la propiedad \beth .

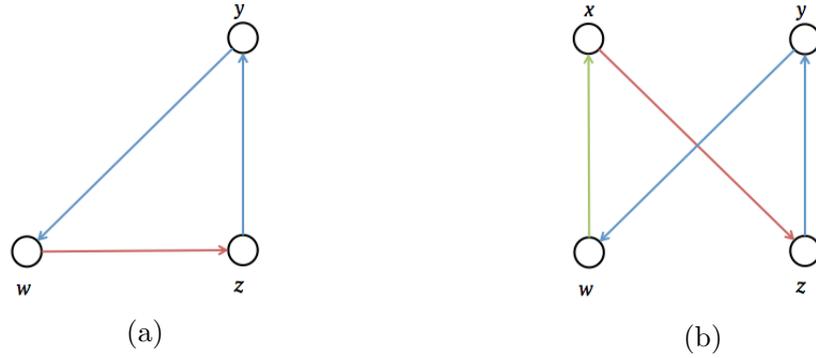


Figura 4.5

Lema 4.1.2. Sean H una digráfica y D una digráfica H -coloreada con la propiedad \aleph , $T = (u = u_0, \dots, u_n = v)$ una uv - H -trayectoria en D y $T' = (v = v_0, \dots, v_m = w)$ una vw - H -trayectoria en D . Si $C_u = C_v$, entonces $T \cup T'$ es un uw - H -camino en D , el cual contiene una uw - H -trayectoria en D .

Demostración. Como $\mathcal{C}_C(T) \subseteq \mathcal{C}_C(D)[C_i]$ para algún C_i (por la propiedad \aleph) y $c(u, u_1) \in C_u$, entonces $C_i = C_u$. Análogamente $\mathcal{C}_C(T') \subseteq \mathcal{C}_C(D)[C_v]$. Como $C_i = C_u = C_v$ entonces $c(x, y) \in B_i$ para todo (x, y) en $F(T \cup T')$. Lo que implica que $T \cup T'$ es un camino en $D[B_i]$, por el Lema 4.1.1. $T \cup T'$ es un uw - H -camino, el cual contiene una uw - H -trayectoria. \square

Lema 4.1.3. Sean H una digráfica y D una digráfica H -coloreada con la propiedad \aleph .

1. Si T es una uv - H -trayectoria en D , entonces $V(\mathcal{C}_C(T))$ está contenido en C_u .
2. Si $T = (u_0, u_1, \dots, u_n)$ es una u_0u_n - H -trayectoria entonces $C_{u_i} = C_{u_j}$ para todo $\{i, j\}$ subconjunto de $\{0, \dots, n-1\}$.
3. Si $T = (u_0, \dots, u_n)$ es una u_0u_n - H -trayectoria y $T' = (u_j = v_0, \dots, v_k)$ es una u_jv_k - H -trayectoria para algún j en $\{0, \dots, n-1\}$, entonces $(u_0, T, u_j) \cup T'$ contiene una u_0v_k - H -trayectoria.

Demostración. 1. Sea $T = (u, u_1, \dots, u_n = v)$ una uv - H -trayectoria. Como D tiene la propiedad \aleph , entonces T está contenido en $D[B_j]$ para algún j en $\{1, \dots, p\}$, así $F(T) \subseteq B_j$. Como $(u, u_1) \in B_u$, entonces $F(T) \subseteq B_u$. Así, $c(u_i, u_{i+1}) \in C_u$ para todo i en $\{0, \dots, n-1\}$. Por lo tanto $V(\mathcal{C}_C(T))$ está contenido en C_u .

2. Como vimos en la demostración del resultado anterior, si $T = (u_0, u_1, \dots, u_n)$ es una u_0u_n - H -trayectoria, entonces $c(u_i, u_{i+1}) \in C_{u_0}$. Por definición $c(u_i, u_{i+1}) \in C_{u_i}$, por lo tanto $C_{u_0} = C_{u_i}$ para todo i en $\{0, \dots, n-1\}$. Además, si $\{i, j\}$ es un subconjunto de $\{0, \dots, n-1\}$, entonces $C_{u_i} = C_{u_0} = C_{u_j}$.

3. Sean $T = (u_0, \dots, u_n)$ una u_0u_n - H -trayectoria y $T' = (u_j = v_0, \dots, v_k)$ una u_jv_k - H -trayectoria para algún j en $\{0, \dots, n-1\}$, entonces por el resultado anterior $C_{u_j} = C_{u_0}$, por el Lema 4.1.2. $T \cup T'$ es un u_0v_k - H -camino, el cual contiene una u_0v_k - H -trayectoria. \square

4.2. Resultados preliminares

Lema 4.2.1. Sean H una digráfica y D una digráfica cuasitransitiva H -coloreada con la propiedad \aleph . Si $T = (u = u_0, \dots, u_n = v)$ es una uv - H -trayectoria de longitud mínima, entonces $u_i \not\rightarrow u_j$ para cualquier $\{i, j\}$ subconjunto de $\{0, \dots, n\}$, con $j > i + 1$, en particular $u_{i+2} \rightarrow u_i$ para todo i en $\{0, \dots, n-2\}$.

Demostración. Sea $T = (u = u_0, \dots, u_n = v)$ una uv - H -trayectoria de longitud mínima. Supongamos que hay $\{i, j\}$ subconjunto de $\{0, \dots, n\}$ tal que $j > i + 1$ y $u_i \rightarrow u_j$. Consideremos $T' = (u = u_0, \dots, u_i, u_j, \dots, u_n = v)$.

Como T es una H -trayectoria, entonces por el Lema 4.1.3. $C_{u_k} = C_u$ para todo k en $\{0, \dots, n-1\}$. En particular $C_{u_i} = C_u$, es decir, $\xi^+(u_i) \subseteq C_u$; lo que implica que $c(u_i, u_j) \in C_u$. Por lo tanto, T' es un camino dirigido en $D[B_u]$. Por el Lema 4.1.1. T' contiene una uv - H -trayectoria, la cual sería de longitud menor a T (ver Figura 4.6). Lo cual contradice que T sea una uv - H -trayectoria de longitud mínima. Por lo tanto, $u_i \not\rightarrow u_j$ para cualquier $\{i, j\}$ subconjunto de $\{0, \dots, n\}$ con $j > i + 1$.

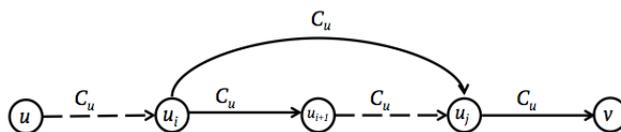


Figura 4.6

En particular, como D es cuasitransitiva y (u_i, u_{i+1}, u_{i+2}) es una trayectoria de longitud 2, entonces $u_i \rightarrow u_{i+2}$ o $u_{i+2} \rightarrow u_i$. Por el resultado anterior $u_i \not\rightarrow u_{i+2}$, entonces $u_{i+2} \rightarrow u_i$. \square

Lema 4.2.2. Sean H una digráfica y D una digráfica cuasitransitiva H -coloreada con la propiedad \aleph . Si $T = (u = u_0, \dots, u_n = v)$ es una uv - H -trayectoria de longitud mínima, entonces $u_j \rightarrow u_i$ para todo $\{i, j\}$ subconjunto de $\{0, \dots, n\}$ con $j > i + 1$, excepto si $|V(D)| = 4$, en ese caso (u_3, u_0) puede no ser una flecha de D .

Demostración. Si $|V(T)| = 3$ el resultado se sigue del hecho que T es de longitud mínima y D es cuasitransitiva.

Si $|V(T)| = 4$, entonces $T = (u_0, u_1, u_2, u_3)$. Por el Lema 4.2.1., $u_3 \rightarrow u_1$ y $u_2 \rightarrow u_0$. La flecha (u_3, u_0) puede no ser una flecha de D (ver Figura 4.7).

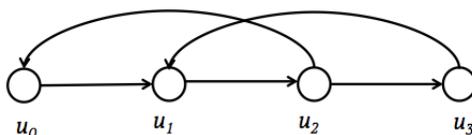


Figura 4.7

Procedemos por inducción sobre $|V(T)|$.

Base de inducción: Si $|V(T)| = 5$, entonces $T = (u_0, u_1, u_2, u_3, u_4)$. Por el Lema 4.2.1. $u_4 \rightarrow u_2, u_3 \rightarrow u_1, u_2 \rightarrow u_0$ (ver Figura 4.8).

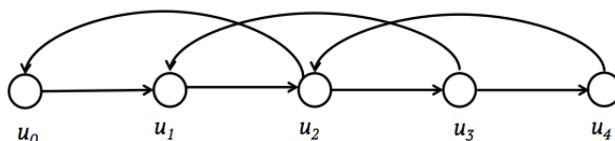


Figura 4.8

Tenemos que $u_4 \rightarrow u_2 \rightarrow u_0$, luego por el Lema 4.2.1. $u_0 \rightarrow u_4$, por lo tanto $u_4 \rightarrow u_0$, pues D es cuasitransitiva (ver Figura 4.9).

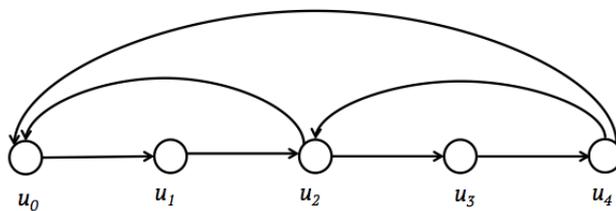


Figura 4.9

Entonces $u_4 \rightarrow u_0 \rightarrow u_1$, por el Lema 4.2.1. sabemos que $u_1 \not\rightarrow u_4$ y como D es cuasitransitiva, entonces $u_4 \rightarrow u_1$. Como $u_3 \rightarrow u_4 \rightarrow u_0$ y por el Lema 4.2.1. $u_0 \not\rightarrow u_3$, entonces $u_3 \rightarrow u_0$, por ser D cuasitransitiva (ver Figura 4.10).

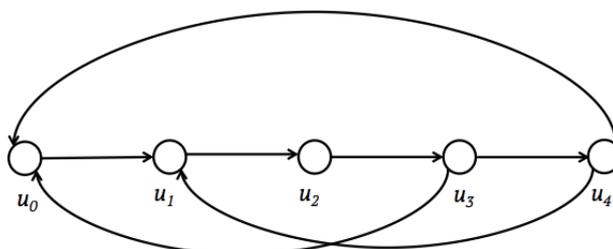


Figura 4.10

Concluimos que $u_j \rightarrow u_i$ para todo $\{i, j\}$ subconjunto de $\{0, \dots, n\}$ con $j > i+1$ (ver Figura 4.11).

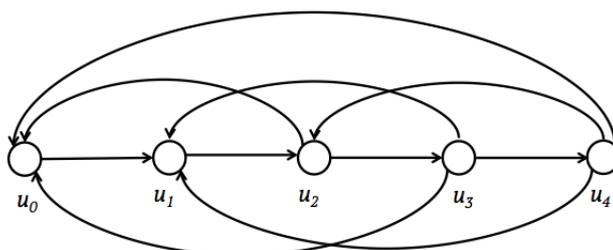


Figura 4.11

Hipótesis de inducción: Si $T = (u_0, \dots, u_m)$ es una $u_0 u_m$ - H -trayectoria de longitud mínima m , con $5 \leq m < n$, entonces $u_j \rightarrow u_i$ para todo $\{i, j\}$ subconjunto de $\{0, \dots, n\}$, con $j > i + 1$.

Paso inductivo: Sea $T = (u_0, \dots, u_n)$ una $u_0 u_n$ - H -trayectoria de longitud mínima n , con $n \geq 6$. Consideremos $T_1 = (u_0, \dots, u_{n-1})$ y $T_2 = (u_1, \dots, u_n)$, entonces $5 \leq |V(T_1)| = |V(T_2)| < n$. Por hipótesis de inducción T_1 y T_2 satisfacen que $u_j \rightarrow u_i$ para toda $j > i + 1$, excepto cuando $j = n$ y $i = 0$, es decir, falta probar que $u_n \rightarrow u_0$. Esto pasa pues $u_n \rightarrow u_2 \rightarrow u_0$. Como D es cuasitransitiva y por el Lema 4.2.1. $u_0 \not\rightarrow u_n$, concluimos que $u_n \rightarrow u_0$ (ver Figura 4.12). \square

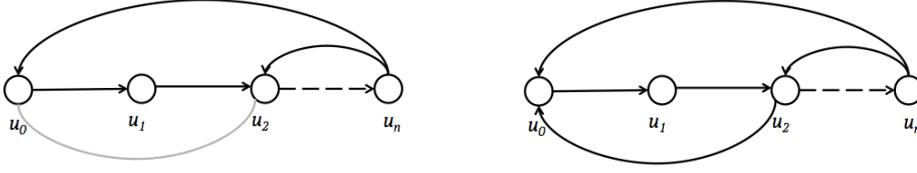


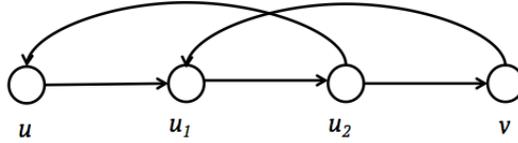
Figura 4.12

4.3. Resultado principal

Lema 4.3.1. Sean H una digráfica y D una digráfica cuasitransitiva H -coloreada con la propiedad \aleph , $\{u, v\}$ un subconjunto de $V(D)$, con $u \neq v$, tales que $v \not\rightarrow u$. Si $u \Rightarrow^H v$, entonces una y sólo una de las siguientes afirmaciones se cumple:

1. $u \rightarrow v$.
2. $u \not\rightarrow v$ y existe una H -trayectoria $(u = u_0, u_1, u_2, u_3 = v)$ de longitud 3 tal que $u_2 \rightarrow u_0$ y $u_3 \rightarrow u_1$. Además no existen trayectorias de longitud 2 entre u y v .

Es decir, si $u \not\rightarrow v$, entonces tenemos la siguiente estructura.



Demostración. Sea T una uv - H -trayectoria de longitud mínima. Si $u \rightarrow v$, entonces T cumple la primer opción. Supongamos que $u \not\rightarrow v$. Así $l(T) \geq 2$.

Si $l(T) \geq 4$, entonces por el Lema 4.2.2. se tiene que $v \rightarrow u$, contradiciendo la suposición que $l(T) \geq 2$, por lo tanto $l(T) \leq 3$.

Si $l(T) = 3$, entonces $T = (u = u_0, u_1, u_2, u_3 = v)$ y por el Lema 4.2.1., $u_2 \rightarrow u_0$ y $u_3 \rightarrow u_1$.

Supongamos que existe T' una trayectoria de longitud 2 entre u y v . Como D es cuasitransitiva entonces $u \rightarrow v$ o $v \rightarrow u$. Por hipótesis $v \not\rightarrow u$, entonces $u \rightarrow v$. Lo cual contradice la suposición que $u \not\rightarrow v$. Por lo tanto, no existen trayectorias de longitud 2 entre u y v . \square

Lema 4.3.2. Sean H una digráfica, D una digráfica cuasitransitiva H -coloreada con la propiedad \aleph y un subconjunto $\{u, v, w\}$ de $V(D)$. Si $u \Rightarrow^H v$, $v \not\Rightarrow^H u$, $v \Rightarrow^H w$, $w \not\Rightarrow^H v$, entonces $w \rightarrow u$ o $u \Rightarrow^H w$.

Demostración. Como $u \Rightarrow^H v$, entonces sea T una uv - H -trayectoria de longitud mínima. Como $v \nrightarrow u$ se sigue del Lema 4.3.1. que:

$$l(T) = 1 \text{ o } T = (u, u_1, u_2, v) \text{ y } v \rightarrow u_1, u_2 \rightarrow u. \quad (4.1)$$

Análogamente, consideremos T' una vw - H -trayectoria de longitud mínima, entonces, por el Lema 4.3.1. se tiene que:

$$l(T') = 1 \text{ o } T' = (v, v_1, v_2, w) \text{ y } w \rightarrow v_1, v_2 \rightarrow v. \quad (4.2)$$

Supongamos que $w \nrightarrow u$, por lo que debemos demostrar que $u \Rightarrow^H w$. Supongamos que $u \nrightarrow w$, de otro modo tendríamos directamente que $u \Rightarrow^H w$. Como D es cuasitransitiva y no hay flechas entre u y w , entonces:

$$N^+(u) \cap N^-(w) = \emptyset = N^-(u) \cap N^+(w). \quad (4.3)$$

Si $C_u = C_v$ entonces por el Lema 4.1.2 $u \Rightarrow^H w$. Supongamos que $C_u \neq C_v$.

Si $u \rightarrow v$, es decir, $l(T) = 1$ Como $v \notin N^+(u) \cap N^-(w)$ entonces $v \nrightarrow w$, por lo que $T' = (v, v_1, v_2, w)$ (por (4.2)). Note que $u \notin V(T')$ porque $v \nrightarrow^H u$. Si $v_i \rightarrow u$ para algún i en $\{1, 2\}$, entonces, por el inciso 3 del Lema 4.1.3., $(v, T, v_i) \cup (v_i, u)$ sería una vu - H -trayectoria contradiciendo la hipótesis. Por lo tanto, $v_1 \nrightarrow u$ y $v_2 \nrightarrow u$.

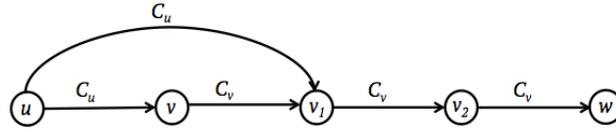


Figura 4.13

Como $u \rightarrow v \rightarrow v_1$ y $v_1 \nrightarrow u$, entonces $u \rightarrow v_1$, pues D es cuasitransitiva (ver Figura 4.13). Como $u \rightarrow v_1 \rightarrow v_2$ y $v_2 \nrightarrow u$, entonces $u \rightarrow v_2$ (ver Figura 4.14).

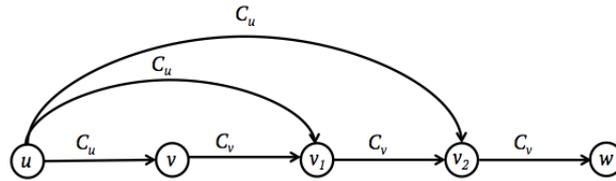


Figura 4.14

Así, como $v_2 \rightarrow w$, entonces $v_2 \in N^+(u) \cap N^-(w)$ contradiciendo que $N^+(u) \cap N^-(w) = \emptyset$ (por (4.3)). Por lo tanto, $l(T) = 3$, esto implica que

$$T = (u, u_1, u_2, v) \text{ y } u_2 \rightarrow u, v \rightarrow u_1.$$

Si $l(T') = 1$, es decir, $v \rightarrow w$. Como $u_2 \rightarrow v \rightarrow w$ y D es cuasitransitiva entonces $u_2 \rightarrow w$ o $w \rightarrow u_2$. Si $w \rightarrow u_2$ entonces $u_2 \in N^+(w) \cap N^-(u)$, lo cual contradice que $N^+(w) \cap N^-(u) = \emptyset$ (ver Figura 4.15).

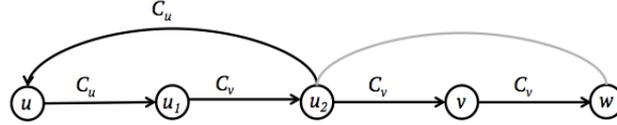


Figura 4.15

Entonces $u_2 \rightarrow w$, luego por el inciso 3 del Lema 4.1.3. (u, u_1, u_2, w) contiene una uw - H -trayectoria, lo cual implica que $u \Rightarrow^H w$ (ver Figura 4.16).

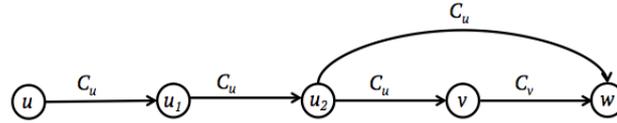


Figura 4.16

Si $l(T') = 3$, entonces $T' = (v, v_1, v_2, w)$ (como en (4.2)). Como pudimos notar previamente en esta demostración, $v \not\Rightarrow^H u$ implica que $v_1 \rightarrow u$ y $v_2 \rightarrow u$. Note que $u_2 \notin V(T')$, pues estamos suponiendo que $C_u \neq C_v$.

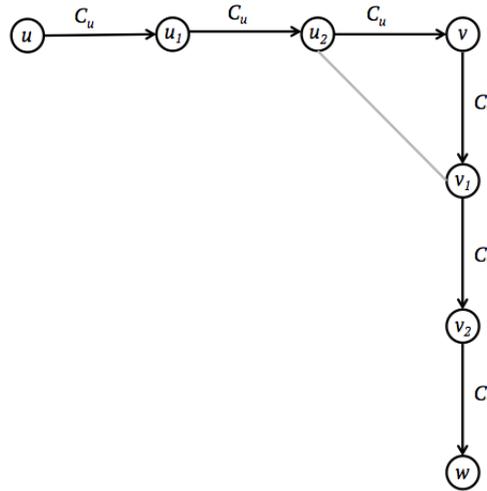


Figura 4.17

Como D es cuasitransitiva y $u_2 \rightarrow v \rightarrow v_1$, entonces $u_2 \rightarrow v_1$ o $v_1 \rightarrow u_2$ (ver Figura 4.17). Vamos a ver que $u_2 \rightarrow v_1$, de otra manera $v_1 \rightarrow u_2 \rightarrow u$, como D es cuasitransitiva y $v_1 \not\rightarrow u$, entonces $u \rightarrow v$ (ver Figura 4.18(a)). De esta manera, $u \rightarrow v_1 \rightarrow v_2$. Como D es cuasitransitiva y $v_2 \not\rightarrow u$ tenemos que $u \rightarrow v_2$ (ver Figura 4.18(b)). Así $v_2 \in N^+(u) \cap N^-(w)$, contradiciendo que $N^+(u) \cap N^-(w) = \emptyset$. Por lo tanto $u_2 \rightarrow v_1$.

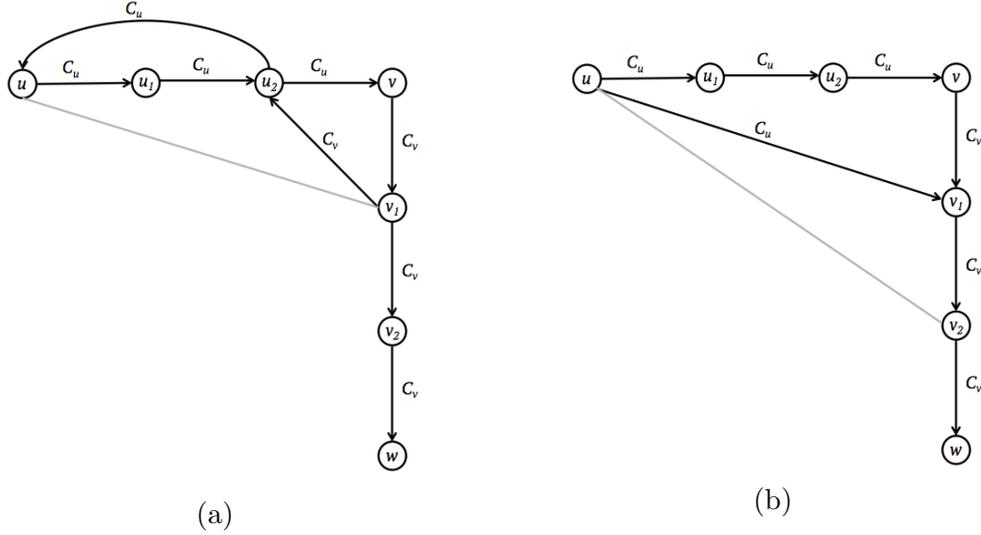


Figura 4.18

Tenemos que $u_2 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2$, como D es cuasitransitiva, se tiene que $u_2 \rightarrow v_2$ o $v_2 \rightarrow u_2$ (ver Figura 4.19(a)). Veamos que $u_2 \rightarrow v_2$, de otro modo $v_2 \rightarrow u_2 \rightarrow u$ y como D es cuasitransitiva y $v_2 \not\rightarrow u$ entonces $u \rightarrow v_2$, así $v_2 \in N^+(u) \cap N^-(w)$, contradiciendo que $N^+(u) \cap N^-(w) = \emptyset$. Por lo tanto $u_2 \rightarrow v_2$, así $u_2 \rightarrow v_2 \rightarrow w$. Como D es cuasitransitiva $u_2 \rightarrow w$ o $w \rightarrow u_2$ (ver Figura 4.19(b)). Si $w \rightarrow u_2$ entonces $u_2 \in N^+(w) \cap N^-(u)$, una contradicción. Por lo tanto $u_2 \rightarrow w$. Por el inciso 3 del Lema 4.1.3. (u, u_1, u_2, w) contiene una uw - H -trayectoria, por lo que $u \Rightarrow^H w$. \square

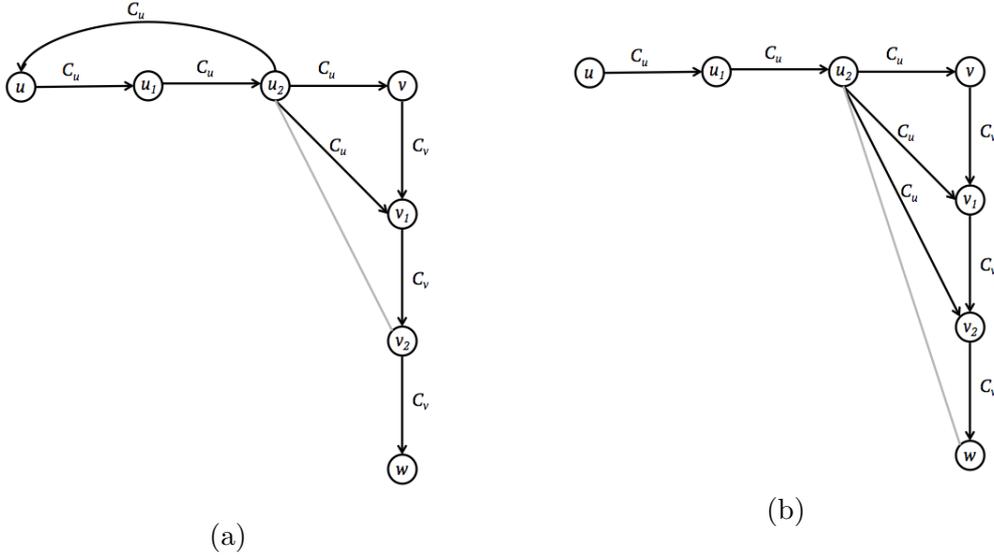


Figura 4.19

Lema 4.3.3. Sean H una digráfica y D una digráfica cuasitransitiva H -coloreada que cumple la propiedad \aleph tal que todo C_3 contenido en D tiene la propiedad \beth . Si $\{u, v, w\}$ es un subconjunto de $V(D)$ tal que $u \Rightarrow^H v$, $v \not\Rightarrow^H u$, $v \Rightarrow^H w$, $w \not\Rightarrow^H v$ y $C_u \neq C_v$ entonces $u \Rightarrow^H w$ y $w \not\Rightarrow^H u$.

Demostración. Como se cumplen las hipótesis del Lema 4.3.2., entonces se tiene que $w \rightarrow u$ o $u \Rightarrow^H w$. Basta probar que $w \not\Rightarrow^H u$, pues $w \not\Rightarrow^H u$ implica que $w \not\rightarrow u$ y por el Lema 4.3.2. tendríamos que $u \Rightarrow^H w$.

Procediendo por contradicción, supongamos que $w \Rightarrow^H u$. Sea $W = (w = w_0, w_1, w_2, \dots, w_{p-1}, w_p = u)$ una wu - H -trayectoria de longitud mínima. Como $v \not\Rightarrow^H u$ y $w \not\Rightarrow^H v$ entonces, $C_w \notin \{C_u, C_v\}$, de otra manera, como $w \Rightarrow^H u$ y $u \Rightarrow^H v$; si $C_w = C_u$, entonces por el Lema 4.1.2. $w \Rightarrow^H v$, lo cual es una contradicción. Si $C_w = C_v$, entonces como $v \Rightarrow^H w$ $w \Rightarrow^H u$ por el Lema 4.1.2. se tiene que $v \Rightarrow^H u$, contradiciendo nuestras hipótesis.

Como lo vimos en la demostración del Lema 4.3.2., existen T una uv - H -trayectoria tal que $l(T) \in \{1, 3\}$ y T' una vw - H -trayectoria tal que $l(T') \in \{1, 3\}$, las cuales satisfacen la conclusión del Lema 4.3.1.

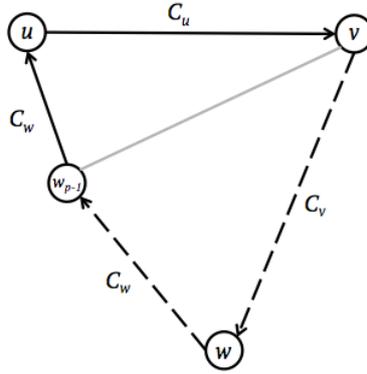


Figura 4.20

Supongamos que $l(T) = 1$, es decir, $u \rightarrow v$. Note que $v \notin V(W)$ pues $v \not\Rightarrow^H u$. Como D es cuasitransitiva y $w_{p-1} \rightarrow u \rightarrow v$, entonces $w_{p-1} \rightarrow v$ o $v \rightarrow w_{p-1}$ (ver Figura 4.20). Si $w_{p-1} \rightarrow v$ entonces, por el inciso 3 del Lema 4.1.3., $(w, w_1, \dots, w_{p-1}, v)$ contiene una wv - H -trayectoria, es decir, $w \Rightarrow^H v$ contradiciendo la hipótesis. Si $v \rightarrow w_{p-1}$, entonces $v \rightarrow w_{p-1} \rightarrow u \rightarrow v$, lo que implica que (v, w_{p-1}, u, v) es un C_3 que no tiene la propiedad \sqsupset , pues por el inciso 2 del Lema 4.1.3. $C_{w_{p-1}} = C_w$ y $|\{C_v, C_u, C_w\}| = 3$. Por lo tanto, $l(T) = 3$ y hay vértices u_1, u_2 tales que $T = (u, u_1, u_2, v)$, $v \rightarrow u_1, u_2 \rightarrow u$; además como $u \not\rightarrow v$, $v \not\rightarrow u$ y D es cuasitransitiva, entonces:

$$N^+(u) \cap N^-(v) = \emptyset = N^+(v) \cap N^-(u). \quad (4.4)$$

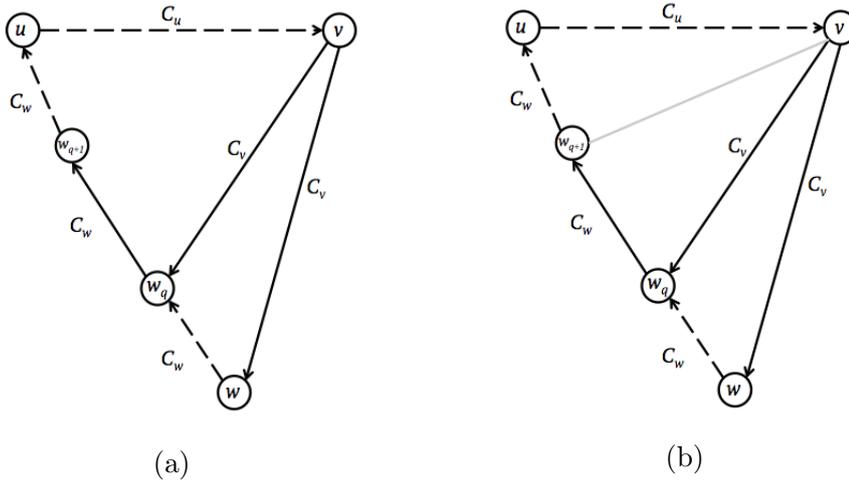


Figura 4.21

Supongamos que $l(T') = 1$, es decir, $v \rightarrow w$. Como $v \rightarrow w_0$ y $v \not\rightarrow w_p = u$, entonces consideremos el mayor valor q en $\{0, \dots, p-1\}$ tal que $v \rightarrow w_q$ (ver Figura 4.21(a)). Como D es cuasitransitiva y $v \rightarrow w_q \rightarrow w_{q+1}$, tenemos que $v \rightarrow w_{q+1}$ o $w_{q+1} \rightarrow v$. Por maximalidad de q tenemos que $v \not\rightarrow w_{q+1}$, por lo que $w_{q+1} \rightarrow v$ (ver Figura 4.21(b)). Como $u \not\rightarrow v$ entonces $q+1 < p$. Por el inciso 3 del Lema 4.1.3. $(w, w_1, \dots, w_q, w_{q+1}, v)$ contiene una wv - H -trayectoria, contradiciendo la hipótesis (ver Figura 4.22).

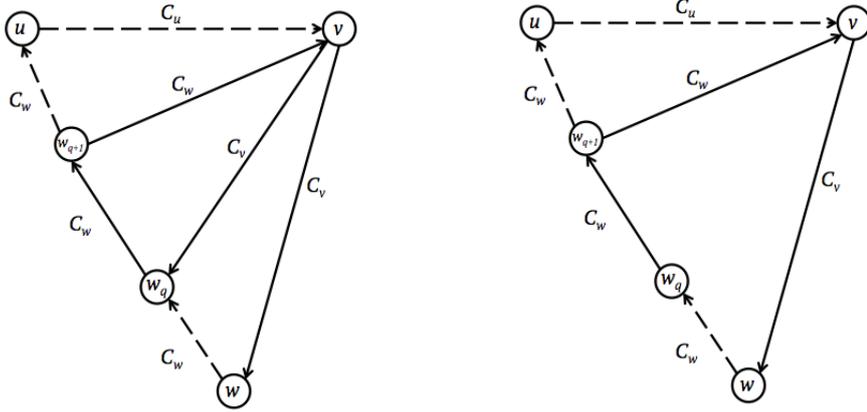


Figura 4.22

Por lo tanto, $l(T') = 3$ y hay vértices v_1, v_2 tales que $T = (v, v_1, v_2, w)$, $w \rightarrow v_1$, $v_2 \rightarrow v$. Si $v_i \rightarrow u$ para algún i en $\{1, 2\}$, entonces, por el inciso 3 del Lema 4.1.3. $(v, T', v_i) \cup (v_i, u)$ contiene una vu - H -trayectoria, contradiciendo que $v \not\rightarrow^H u$. Por lo tanto, $v_1 \not\rightarrow u$ y $v_2 \not\rightarrow u$. Si $u \rightarrow v_2$, entonces $v_2 \in N^+(u) \cap N^-(v)$ contradiciendo que $N^+(u) \cap N^-(v) = \emptyset$ (ver Figura 4.23(a)). Por lo tanto, $u \not\rightarrow v_2$ y $v_2 \not\rightarrow u$. Como D es cuasitransitiva entonces:

$$N^+(u) \cap N^-(v_2) = \emptyset = N^+(v_2) \cap N^-(u). \quad (4.5)$$

Ya que $v_1 \in N^-(v_2)$, tenemos que $v_1 \notin N^+(u)$, pues $N^+(u) \cap N^-(v_2) = \emptyset$. Como $v_1 \not\rightarrow u$ y D es cuasitransitiva también tenemos que:

$$N^+(u) \cap N^-(v_1) = \emptyset. \quad (4.6)$$

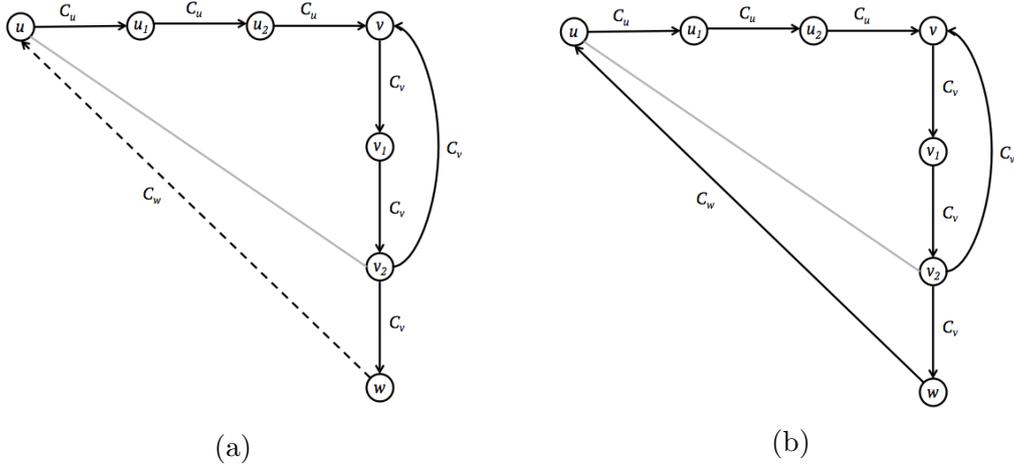


Figura 4.23

Como $w \rightarrow v_1$, entonces $u \nrightarrow w$, de otra manera $w \in N^-(v_1) \cap N^+(u)$, lo cual no es posible (ver Figura 4.23(b)). También tenemos que $w \nrightarrow u$, pues $v_2 \rightarrow w$ y $N^+(v_2) \cap N^-(u) = \emptyset$. Por lo tanto, $w \nrightarrow u$ y $u \nrightarrow w$, por el Lema 4.3.1 se tiene que existen vértices w_1, w_2 tales que $W = (w, w_1, w_2, u)$, donde además $u \rightarrow w_1$ y $w_2 \rightarrow w$.

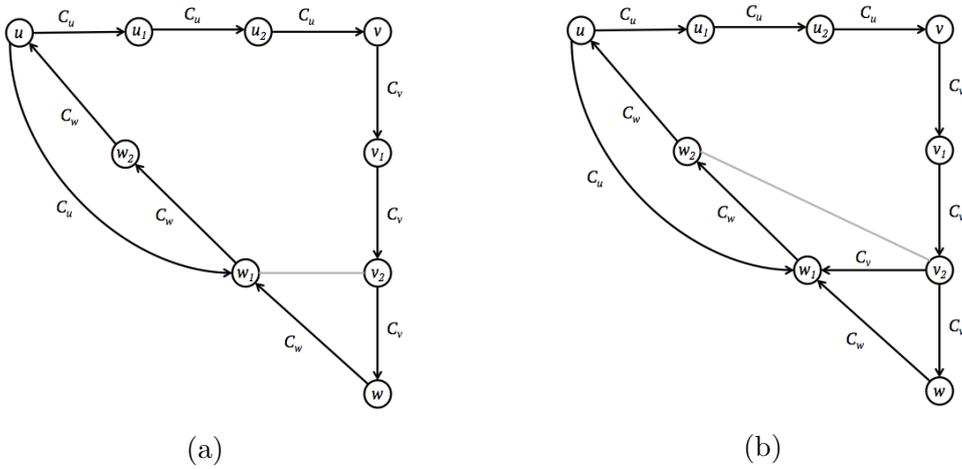


Figura 4.24

Tenemos $v_2 \rightarrow w \rightarrow w_1$, como D es cuasitransitiva entonces $v_2 \rightarrow w_1$ o $w_1 \rightarrow v_2$ (ver Figura 4.24(a)). Como $u \rightarrow w_1$ y $N^+(u) \cap N^-(v_2) = \emptyset$ entonces $w_1 \nrightarrow v_2$ por lo que $v_2 \rightarrow w_1$. Así, $v_2 \rightarrow w_1 \rightarrow w_2$, implica que $v_2 \rightarrow w_2$ o $w_2 \rightarrow v_2$ porque D es cuasitransitiva (ver Figura 4.24(b)). Pero $v_2 \nrightarrow w_2$ pues $w_2 \rightarrow u$ y $N^+(v_2) \cap N^-(u) = \emptyset$. En consecuencia $w_2 \rightarrow v_2$. Como $v_2 \rightarrow v$ tenemos $w_2 \rightarrow$

$v_2 \rightarrow v$, lo que nos lleva a $v \rightarrow w_2$ o $w_2 \rightarrow v$ porque D es cuasitransitiva (ver Figura 4.25(a)). Como $w_2 \rightarrow u$ y $N^+(v) \cap N^-(u) = \emptyset$ tenemos que $v \not\rightarrow w_2$, entonces $w_2 \rightarrow v$. Por el inciso 3 del Lema 4.1.3. (w, w_1, w_2, v) contiene una wv - H -trayectoria, contradiciendo la hipótesis (ver Figura 4.25(b)). Como todos los casos posibles nos llevan a una contradicción, podemos concluir que $w \not\Rightarrow^H u$. \square

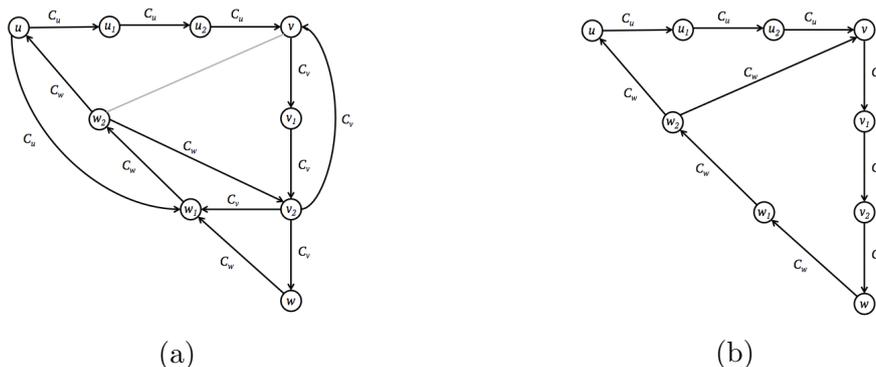


Figura 4.25

Teorema 4.3.4. *Si H es una digráfica y D una digráfica cuasitransitiva H -coloreada con la propiedad \aleph tal que todo C_3 contenido en D tiene la propiedad \beth . Entonces $\mathfrak{C}_H(D)$ es una digráfica núcleo perfecta.*

Demostración. Probaremos que todo ciclo en $\mathfrak{C}_H(D)$ tiene al menos una flecha simétrica.

Supongamos, por contradicción, que existe un ciclo en $\mathfrak{C}_H(D)$ sin flechas simétricas. Sea $C = (u_0, u_1, \dots, u_n = u_0)$ un ciclo de longitud mínima sin flechas simétricas. Notemos que $n \geq 3$. Para cada i en $\{0, \dots, n-1\}$ tenemos que $u_i \Rightarrow^H u_{i+1}$ y $u_{i+1} \not\Rightarrow^H u_i$, es decir, para cada i en $\{0, \dots, n-1\}$ existe P_i una $u_i u_{i+1}$ - H -trayectoria en D (considerando la suma de los índices módulo n). Luego, como C es asimétrico en $\mathfrak{C}_H(D)$ no puede suceder que $C_{u_i} = C_{u_{i+1}}$ para todo i en $\{1, \dots, n-1\}$ ya que de ser así, tendríamos que $C \subseteq B_{u_i}$, el Lema 4.1.1. implica que $u_{i+1} \Rightarrow^H u_i$ para cada i en $\{1, \dots, n-1\}$, lo cual implicaría que C es un ciclo simétrico en $\mathfrak{C}_H(D)$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $C_{u_0} \neq C_{u_1}$. Por el Lema 4.3.3. tenemos que $u_0 \Rightarrow^H u_2$ y $u_2 \not\Rightarrow^H u_0$. Así, $n \geq 3$. Entonces el ciclo $(u_0, u_2, u_3, \dots, u_n)$ es un ciclo en $\mathfrak{C}_H(D)$ sin flechas simétricas con longitud menor a C , contradiciendo que C es de longitud mínima.

Por lo tanto, como todo ciclo en $\mathfrak{C}_H(D)$ tiene al menos una flecha simétrica, por el Teorema 1.3.1. concluimos que $\mathfrak{C}_H(D)$ es núcleo perfecta. \square

El siguiente corolario es consecuencia directa del Teorema 4.3.4.

Corolario 4.3.5. *Sean H una digráfica y D una digráfica cuasitransitiva H -coloreada con la propiedad \aleph tal que todo C_3 contenido en D tiene la propiedad \beth , entonces D tiene H -núcleo.*

Capítulo 5

H -núcleos en digráficas 3-cuasitransitivas

En este capítulo encontramos resultados equivalentes a los obtenidos por Hortensia Galeana Sánchez, Rocío Rojas Monroy y Berta Zavala Santana en [9], demostrando que si D es una digráfica 3-cuasitransitiva H -coloreada con la propiedad \aleph y todo \tilde{T}_4 y C_4 contenido en D tiene la propiedad \beth , entonces D tiene H -núcleo.

5.1. Resultados preliminares

Recordemos algunas definiciones vistas en capítulos anteriores.

Definición 3.1.1 Llamaremos \tilde{T}_4 a la digráfica tal que $V(\tilde{T}_4) = \{w, x, y, z\}$ y $F(\tilde{T}_4) = \{(w, x), (x, y), (y, z), (w, z)\}$ (ver Figura 5.1)

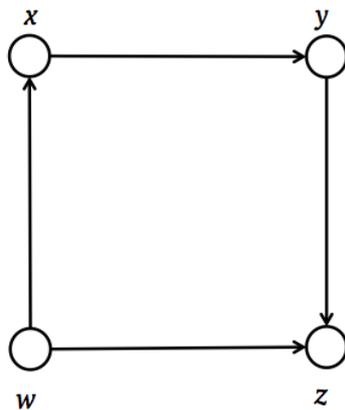


Figura 5.1

Definición 4.1.3 Sean H una digráfica y D una digráfica H -coloreada. Decimos que D tiene la **propiedad \aleph** si existe $\{C_1, \dots, C_p\}$ una partición de $V(\mathcal{C}_C(D))$ que cumple:

1. $\mathcal{C}_C(D)[C_i]$ es una subdigráfica de $H[C_i]$ para todo i en $\{1, \dots, p\}$.
2. Para cualquier vértice u en $V(D)$ existe C_i un elemento de la partición de tal forma que $\xi^+(u) \subseteq C_i$.
3. Si T es una H -trayectoria entonces existe C_i , elemento de la partición, tal que T está contenido en $D[B_i]$.

Definición 4.1.4 Sean H una digráfica y D una digráfica H -coloreada, $\{C_1, \dots, C_p\}$ una partición de $V(\mathcal{C}_C(D))$ y G una subdigráfica de D . Decimos que G tiene la **propiedad \beth** si existe C_i elemento de la partición tal que los colores de todas las flechas de G , excepto a lo más una, están en C_i .

Lema 5.1.1. *Sean H una digráfica y D una digráfica 3-cuasitransitiva H -coloreada con la propiedad \aleph , $\{u, v\}$ un subconjunto de $V(D)$ y $T = (u = u_0, \dots, u_n = v)$ una uv - H -trayectoria de longitud mínima. Si $i < j$ entonces (u_i, T, u_j) es una $u_i u_j$ - H -trayectoria de longitud mínima.*

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que existe T' una $u_i u_j$ - H -trayectoria de longitud menor a $l(u_i, T, u_j)$. Por el inciso 1 del Lema 4.1.3. se tiene que $V(\mathcal{C}_C(T)) \subseteq C_u$. Análogamente $V(\mathcal{C}_C(T')) \subseteq C_{u_i}$. Por el inciso 2 del Lema 4.1.3., $C_u = C_{u_i}$. Por el inciso 3 del Lema 4.1.3. $\tau = (u, T, u_i) \cup (u_i, T', u_j) \cup (u_j, T, v)$ contiene una uv - H -trayectoria, la cual sería de longitud menor a T , contradiciendo la minimalidad de T . \square

Lema 5.1.2. *Sean H una digráfica y D una digráfica 3-cuasitransitiva H -coloreada con la propiedad \aleph , $\{u, v\}$ un subconjunto de $V(D)$ y $T = (u = u_0, \dots, u_n = v)$ una uv - H -trayectoria de longitud mínima. Si $l(T) \geq 3$, entonces $u_i \rightarrow u_{i-(2k+1)}$ para cada i en $\{3, \dots, n\}$ y k en $\{1, \dots, \lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor\}$. En particular, si $l(T)$ es impar entonces $v \rightarrow u$.*

Demostración. Procediendo por inducción sobre $l(T) = n$ demostraremos que $u_i \rightarrow u_{i-(2k+1)}$ para cada i en $\{3, \dots, n\}$ y k en $\{1, \dots, \lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor\}$.

Base de inducción: Si $n = 3$, entonces $T = (u = u_0, u_1, u_2, u_3 = v)$. Como D es 3-cuasitransitiva entonces $u \rightarrow v$ o $u_3 \rightarrow u_0$, como T es una H -trayectoria de longitud mínima tenemos que $u_3 \rightarrow u_0$.

Si $n = 4$, entonces $T = (u = u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 = v)$ y por el caso $n = 3$ tenemos que $u_3 \rightarrow u_0$ y $u_4 \rightarrow u_1$.

Hipótesis de inducción: Si $T = (u', \dots, v')$ es una $u'v'$ - H -trayectoria de longitud mínima n con $n \geq 4$, entonces $u_i \rightarrow u_{i-(2k+1)}$ para cada i en $\{3, \dots, n\}$ y k en $\{1, \dots, \lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor\}$.

Paso inductivo: Sea $T = (u = u_0, \dots, u_{n+1} = v)$ una uv - H -trayectoria de longitud mínima $n + 1$. Consideremos la trayectoria $T' = (u, T, u_n)$, por el Lema 5.1.1. T' es una uu_n - H -trayectoria de longitud mínima. Por hipótesis de inducción tenemos que $u_i \rightarrow u_{i-(2k+1)}$ para cada i en $\{3, \dots, n\}$ y k en $\{1, \dots, \lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor\}$. Por otro lado, sea $T'' = (u_1, T, v)$, entonces T'' es una u_1v - H -trayectoria de longitud mínima (por el Lema 5.1.1). Por hipótesis de inducción tenemos que $u_i \rightarrow u_{i-(2k+1)}$ para cada i en $\{4, \dots, n + 1\}$ y k en $\{1, \dots, \lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor\}$.

Para terminar esta demostración basta mostrar que $u_{n+1} \rightarrow u_0$ cuando $n + 1$ es impar.

Supongamos que $n + 1$ es impar. Tenemos que $\frac{n}{2} - 1$ es un elemento del conjunto $\{1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$, por el resultado anterior con $i = n + 1$ y $k = \frac{n}{2} - 1$ tenemos que $u_{n+1} \rightarrow u_{(n+1)-(2(\frac{n}{2}-1)+1)} = u_2$.

Así, $u_{n+1} \rightarrow u_2 \rightarrow u_3 \rightarrow u_0$. Como D es 3-cuasitransitiva entonces $u_0 \rightarrow u_{n+1}$ o $u_{n+1} \rightarrow u_0$. Como T es una H -trayectoria de longitud mínima entonces $u_{n+1} \rightarrow u_0$. \square

Observación 5.1.1. Sean H una digráfica, D una digráfica 3-cuasitransitiva H -coloreada con la propiedad \aleph . Si todo \tilde{T}_4 y C_4 contenido en D tiene la propiedad \beth , entonces D no tiene trayectorias de longitud 3 sin la propiedad \beth .

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que $T = (u, v, w, x)$ es una trayectoria de longitud 3 en D sin la propiedad \beth . Como D es 3-cuasitransitiva tenemos que $u \rightarrow x$ o $x \rightarrow u$. Si $u \rightarrow x$, entonces $D[(u, v, w, x)]$ contiene un \tilde{T}_4 sin la propiedad \beth . Si $x \rightarrow u$, entonces $D[(u, v, w, x)]$ contiene un C_4 sin la propiedad \beth , contradiciendo nuestras hipótesis. Por lo tanto, D no tiene trayectorias de longitud 3 sin la propiedad \beth . \square

Observación 5.1.2. Sean H una digráfica, D una digráfica 3-cuasitransitiva H -coloreada con la propiedad \aleph tal que todo C_3 tiene la propiedad \beth . Si (u, u_1, u_2, v) es un camino sin la propiedad \beth , entonces $C_u \neq C_{u_1}$ y $C_{u_2} \notin \{C_u, C_{u_1}\}$ lo cual implica que:

- $u \neq u_1$, pues $C_u \neq C_{u_1}$.
- $u \neq u_2$, pues $C_u \neq C_{u_2}$.
- $u_1 \neq u_2$, ya que $C_{u_1} \neq C_{u_2}$.
- $u \neq v$, si no fuera así y por los casos anteriores, $(u, u_1, u_2, v = u)$ sería un C_3 con la propiedad \beth , contradiciendo la hipótesis.
- $u_2 \neq v$, ya que D es una digráfica sin lazos.

5.2. Resultado principal

Definición 5.2.1. Sean H una digráfica, D una digráfica H -coloreada. Un γ_H -ciclo en D es una sucesión de vértices distintos, con excepción del primer y último vértice, $(u_0, u_1, \dots, u_n, u_0)$ tal que para cada i en $\{0, 1, \dots, n\}$.

- Existe una $u_i u_{i+1}$ - H -trayectoria.
- No existe una $u_{i+1} u_i$ - H -trayectoria.

La suma sobre los índices de los vértices de γ_H es módulo $n + 1$ y decimos que la longitud de γ_H es $n + 1$.

Teorema 5.2.1. Sean H una digráfica, D una digráfica 3-cuasitransitiva H -coloreada con la propiedad \aleph . Si cada C_3 , C_4 y \tilde{T}_4 contenido en D tiene la propiedad \beth , entonces no hay γ_H -ciclos en D .

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que D tiene un γ_H -ciclo, sea $\gamma = (u_0, u_1, \dots, u_n, u_0)$ un γ_H -ciclo de longitud mínima. Por la definición de γ_H -ciclo, sabemos que para toda i en $\{0, \dots, n\}$ existe una $u_i u_{i+1}$ - H -trayectoria, sea T_i una $u_i u_{i+1}$ - H -trayectoria de longitud mínima, además, sabemos que no existe una $u_{i+1} u_i$ - H -trayectoria en D , por lo que $u_{i+1} \not\rightarrow u_i$. Por el Lema 5.1.2. tenemos que si $l(T_i) \geq 3$ entonces $l(T_i)$ no puede ser impar, por lo tanto $l(T_i)$ es par o $l(T_i) = 1$ para cada $i \in \{0, \dots, n\}$.

Ahora tenemos las siguientes afirmaciones.

Afirmación 5.1. $l(\gamma) \geq 3$.

Si $l(\gamma) = 2$, entonces $\gamma = (u_0, u_1, u_0)$, con lo que tendríamos que hay una $u_1 u_0$ - H -trayectoria, lo cual contradice la definición de γ_H -ciclo.

Afirmación 5.2. Hay un índice i en $\{0, \dots, n\}$ tal que $C_{u_i} \neq C_{u_{i+1}}$.

Procediendo por contradicción, consideremos $T_0 \cup T_1 \cup \dots \cup T_n$ el cual, por el Lema 4.1.1. contiene una $u_0 u_n$ - H -trayectoria, lo cual contradice la definición de γ_H -ciclo. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $C_{u_0} \neq C_{u_1}$.

Afirmación 5.3. No hay $u_2 u_0$ - H -trayectorias en D .

Supongamos que existe $T = (u_2 = x_0, x_1, \dots, x_t = u_0)$ una $u_2 u_0$ - H -trayectoria de longitud mínima. Entonces:

Afirmación 5.3.1. $C_{u_2} \notin \{C_{u_0}, C_{u_1}\}$.

Si $C_{u_2} = C_{u_0}$ entonces, por el Lema 4.1.2. $T \cup T_0$ contiene una $u_2 u_1$ - H -trayectoria, contradiciendo la definición de γ_H -ciclo. Análogamente si $C_{u_2} = C_{u_1}$, entonces $T_1 \cup T$ contiene una $u_1 u_0$ - H -trayectoria, contradiciendo la definición de γ_H -ciclo.

Afirmación 5.3.2. $l(T_0) \geq 4$ y $l(T_1) \geq 4$.

Si $l(T_0) = 1 = l(T_1)$, entonces $C = (u_0, u_1, u_2, x_1)$ es un u_0x_1 -camino de longitud 3 sin la propiedad \beth , ya que $C_{u_0} \neq C_{u_1}$ y $C_{u_2} \notin \{C_{u_0}, C_{u_1}\}$ (por la Afirmación 5.3.1.). Por la Observación 5.1.2. y del hecho de que $u_1 \neq x_1$ (porque $u_2 \nrightarrow u_1$) tenemos que C es una u_0x_1 -trayectoria sin la propiedad \beth , contradiciendo la Observación 5.1.1.

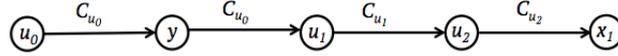


Figura 5.2

Si $T_0 = (u_0, y, u_1)$ y $l(T_1) = 1$, entonces $C = (y, u_1, u_2, x_1)$ es un camino sin la propiedad \beth de longitud 3 (ver Figura 5.2). Por la Observación 5.1.2. y del hecho que $u_1 \neq x_1$ tenemos que C es una trayectoria de longitud 3 sin la propiedad \beth , contradiciendo la Observación 5.1.1.

Si $T_0 = (u_0, y, u_1)$ y $T_1 = (u_1, z, u_2)$. Sabemos que z es distinto de u_0 porque no hay flecha de u_1 hacia u_0 y $z \neq y$ porque a y le sale una flecha con color en C_{u_0} y a z le sale una flecha con color en C_{u_1} , sabemos que estos dos conjuntos son distintos. Así $T_0 \cup (u_1, z) = (u_0, y, u_1, z)$ es una trayectoria de longitud 3 (ver Figura 5.3(a)).

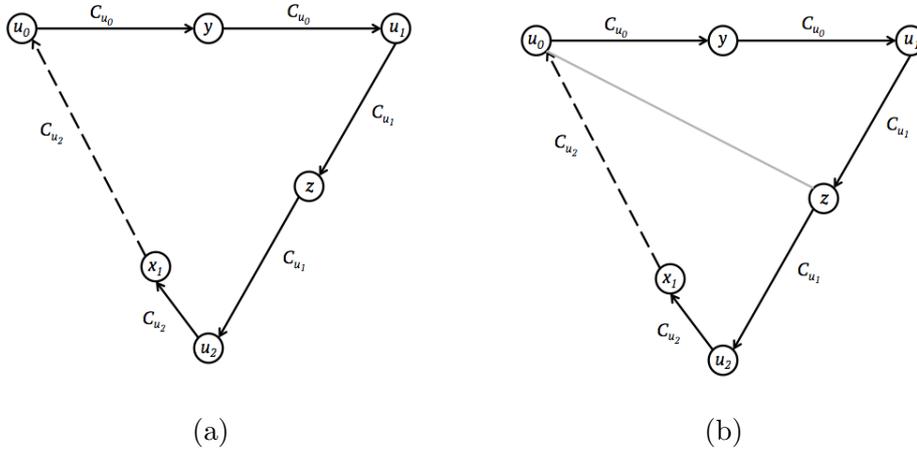


Figura 5.3

Como D es 3-cuasitransitiva entonces $u_0 \rightarrow z$ o $z \rightarrow u_0$ (ver Figura 5.3(b)). Si $z \rightarrow u_0$ tendríamos que $c(z, u_0) \in C_{u_1}$ (porque $\xi^+(z)$ está en C_{u_1}), entonces (u_0, y, u_1, z, u_0) sería un C_4 sin la propiedad \beth , contradiciendo la hipótesis (ver Figura 5.4(a)).

Por lo tanto $u_0 \rightarrow z$. Sea $C = (u_0, z, u_2, x_1)$, así C es un camino de longitud 3 sin la propiedad \sqsupset (ver Figura 5.4(b)). Por la Observación 5.1.2. y del hecho que $z \neq x_1$ tenemos que C es una trayectoria de longitud 3 sin la propiedad \sqsupset , contradiciendo la Observación 5.1.1.

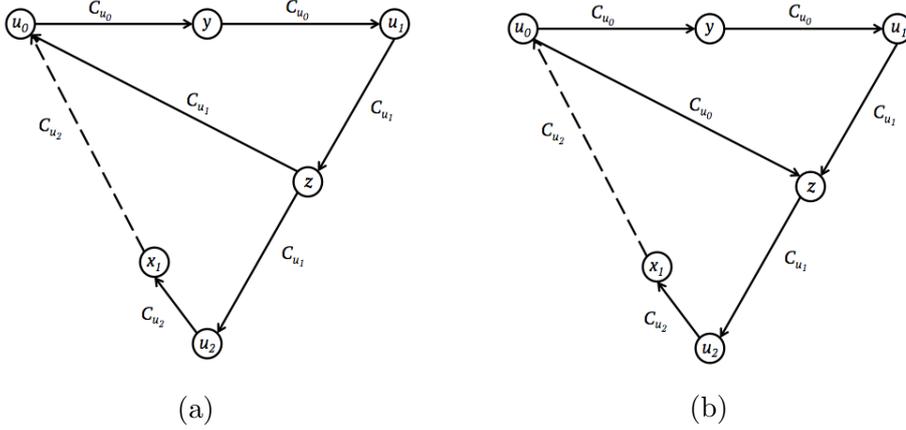


Figura 5.4

Si $l(T_0) = 1$ y $T_1 = (u_1, z, u_2)$, entonces $C = (x_{t-1}, u_0, u_1, z)$ es un camino de longitud 3 sin la propiedad \sqsupset (ver Figura 5.5). Por la Observación 5.1.2. y del hecho que x_{t-1} es distinto de u_1 (porque no hay flecha de u_1 hacia u_0) tenemos que C es una trayectoria de longitud 3 sin la propiedad \sqsupset , contradiciendo la Observación 5.1.1.

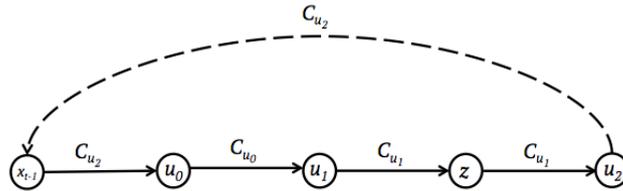


Figura 5.5

Concluimos que $l(T_0) \geq 4$ y $l(T_1) \geq 4$.

Supongamos que

$$T_0 = (u_0 = y_0, y_1, \dots, y_l = u_2) \text{ y } T_1 = (u_1 = z_0, z_1, \dots, z_k = u_2).$$

Afirmación 5.3.3. $l(T) \geq 3$.

Supongamos por contradicción que $l(T) < 3$.

Si $l(T) = 1$ entonces $C = (z_{k-1}, u_2, u_0, y_1)$ es un camino de longitud 3 sin la propiedad \sqsupset (ver Figura 5.6). La Observación 5.1.2. y el hecho que $u_2 \neq y_1$ implican que C es una trayectoria de longitud 3 sin la propiedad \sqsupset , lo cual contradice la Observación 5.1.1.

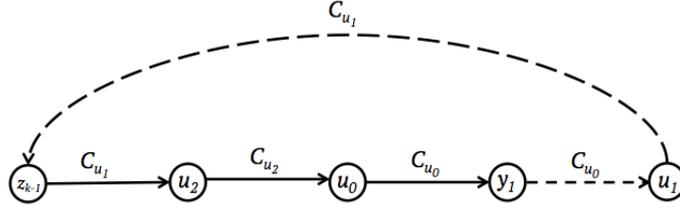


Figura 5.6

Si $T = (u_2, x_1, u_0)$, entonces $C = (z_{k-1}, u_2, x_1, u_0)$ es una $z_{k-1}u_0$ -trayectoria de longitud 3. Como D es cuasitransitiva, entonces $z_{k-1} \rightarrow u_0$ o $u_0 \rightarrow z_{k-1}$ (ver Figura 5.7). Si $z_{k-1} \rightarrow u_0$, entonces $c(z_{k-1}, u_0) \in C_{u_1}$ porque por el inciso 2 del Lema 4.1.3. se tiene que $C_{z_{k-1}} = C_{u_1}$. Así, $D[\{z_{k-1}, u_2, x_1, u_0\}]$ contiene un \tilde{T}_4 sin la propiedad \sqsupset , lo cual contradice la hipótesis. Si $u_0 \rightarrow z_{k-1}$, entonces $c(u_0, z_{k-1}) \in C_{u_0}$, luego (u_0, z_{k-1}, u_2, x_1) es una trayectoria de longitud 3 sin la propiedad \sqsupset contradiciendo la Observación 5.1.1. Concluimos que $l(T) \geq 3$.

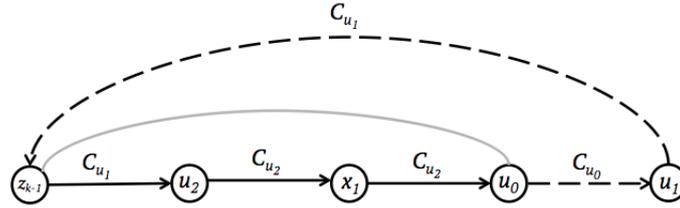


Figura 5.7

Afirmación 5.3.4. $u_0 \not\rightarrow u_2$.

Procediendo por contradicción, supongamos que $u_0 \rightarrow u_2$. Así, $c(u_0, u_2) \in C_{u_0}$. Por el Lema 5.1.2. aplicado a T_1 tenemos que $u_2 \rightarrow z_1$ y $c(u_2, z_1) \in C_{u_2}$, entonces (u_0, u_2, z_1, z_2) es una trayectoria de longitud 3 sin la propiedad \sqsupset , lo cual contradice la Observación 5.1.1. (ver Figura 5.8).

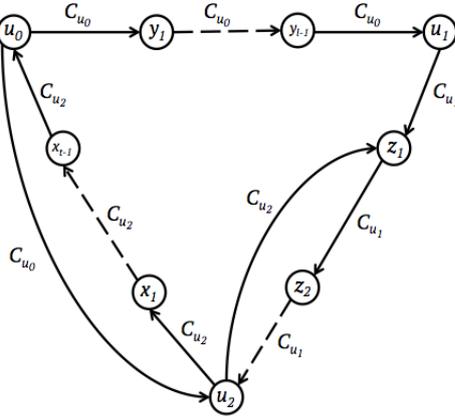


Figura 5.8

Afirmación 5.3.5. $l(T_0) \geq 4, l(T_1) \geq 4, l(T) \geq 4$ y $l(T)$ es par.

Por la Afirmación 5.3.2. tenemos $l(T_0) \geq 4, l(T_1) \geq 4$. Por la Afirmación 5.3.3. tenemos que $l(T) \geq 3$, por lo que basta probar que $l(T)$ es par. Como $l(T) \geq 3$ y $u_2 \not\rightarrow u_0$ (por la Afirmación 5.3.4.), se sigue del Lema 5.1.2. que $l(T)$ es par.

Se sigue del Lema 5.1.2. aplicado a T que $u_0 \rightarrow x_1$. Notemos que (z_{k-1}, u_2, x_1, x_2) es una trayectoria de longitud 3, como D es 3-cuasitransitiva tenemos que $z_{k-1} \rightarrow x_2$ o $x_2 \rightarrow z_{k-1}$ (ver Figura 5.9(a)). Si $z_{k-1} \rightarrow x_2$ entonces $D[\{z_{k-1}, u_2, x_1, x_2\}]$ contiene un T_4 sin la propiedad \square , lo cual es una contradicción (ver Figura 5.9(b)).

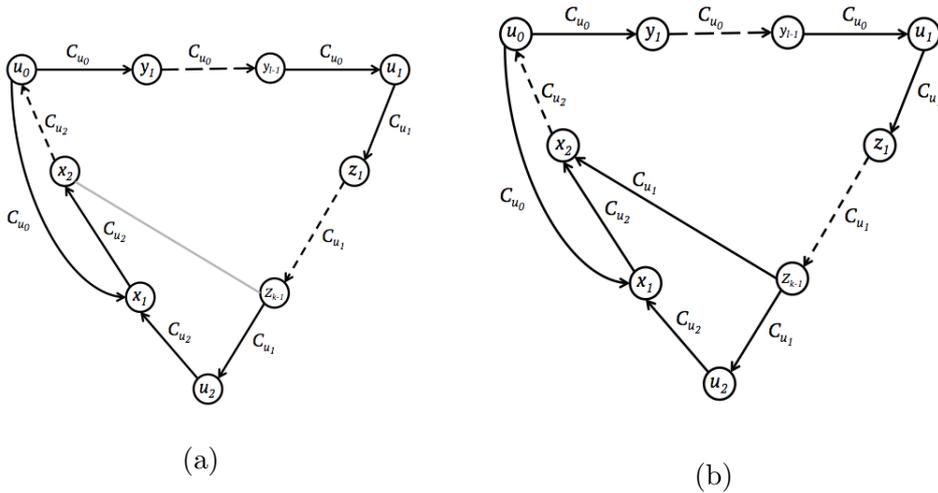


Figura 5.9

Si $x_2 \rightarrow z_{k-1}$, entonces (u_0, x_1, x_2, z_{k-1}) es una trayectoria de longitud 3, como D es 3-cuasitransitiva tenemos que $u_0 \rightarrow z_{k-1}$ o $z_{k-1} \rightarrow u_0$. Si $u_0 \rightarrow z_{k-1}$, entonces $D[\{u_0, z_{k-1}, u_2, x_1\}]$ contiene un \tilde{T}_4 sin la propiedad \supseteq , contradiciendo la hipótesis (ver Figura 5.10(a)). Si $z_{k-1} \rightarrow u_0$, entonces (u_0, x_1, x_2, z_{k-1}) es un C_4 sin la propiedad \supseteq , una contradicción (ver Figura 5.10(b)).

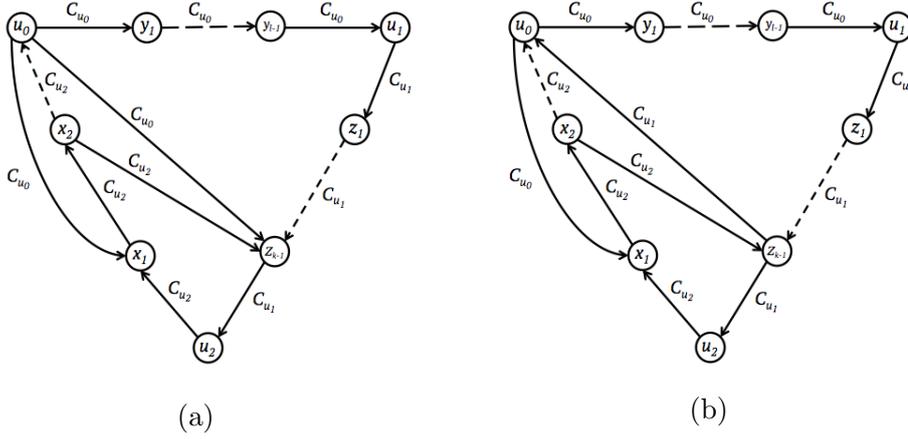


Figura 5.10

Por lo tanto no hay una u_2u_0 - H -trayectoria.

Afirmación 5.4. $l(\gamma) \geq 4$.

Se sigue de las Afirmaciones 5.1. y 5.3.

Afirmación 5.5. No hay una u_0u_2 - H -trayectoria en D .

Supongamos que existe una u_0u_2 - H -trayectoria en D , entonces $\gamma_1 = (u_0, u_2, u_3, \dots, u_n, u_0)$ sería un γ_H -ciclo con $l(\gamma_1) < l(\gamma)$ contradiciendo la minimalidad de γ .

Afirmación 5.6. Sea i en $\{0, \dots, n\}$, si $C_{u_i} \neq C_{u_{i+1}}$ entonces no existe una $u_{i+2}u_i$ - H -trayectoria y no existe una u_iu_{i+2} - H -trayectoria.

Es de manera análoga a las Afirmaciones 5.3. y 5.5.

Afirmación 5.7. Si $C_{u_i} \neq C_{u_{i+1}}$ y $l(T_i) = 1$ para alguna i en $\{0, \dots, n\}$, entonces $l(T_{i+1}) = 1$.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $C_{u_0} \neq C_{u_1}$ y $l(T_0) = 1$. Procediendo por contradicción supongamos que $l(T_1) \geq 2$.

Si $T_1 = (u_1, z, u_2)$, entonces (u_0, u_1, z, u_2) es una trayectoria de longitud 3 (ver Figura 5.11). Como D es 3-cuasitransitiva tenemos que $u_0 \rightarrow u_2$ o $u_2 \rightarrow u_0$, lo cual contradice a la Afirmación 5.3. o la Afirmación 5.5. respectivamente.

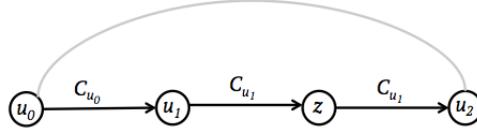


Figura 5.11

Si $l(T_1) \geq 3$, entonces $T_1 = (u_1 = z_0, z_1, \dots, z_k = u_2)$. Así (u_0, u_1, z_1, z_2) es una trayectoria de longitud 3, como D es 3-cuasitransitiva tenemos que $u_0 \rightarrow z_2$ o $z_2 \rightarrow u_0$ (ver Figura 5.12). Si $u_0 \rightarrow z_2$ entonces $D[\{u_0, u_1, z_1, z_2\}]$ contiene un \tilde{T}_4 sin la propiedad \sqsupset , ya que $c(u_0, z_2)$ y $c(u_0, u_1)$ están en C_{u_0} ; $c(z_1, z_2)$ y $c(z_2, u_0)$ están en C_{u_1} , lo cual es una contradicción. Si $z_2 \rightarrow u_0$, entonces por el inciso 3 del Lema 4.1.3., (u_1, z_1, z_2, u_0) es una $u_1 u_0$ - H -trayectoria, contradiciendo la definición de γ_H ciclo.

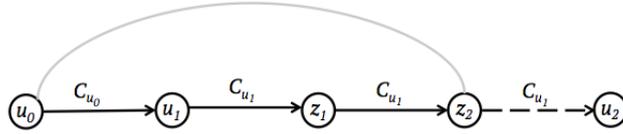


Figura 5.12

Por lo tanto $l(T_1) = 1$.

Afirmación 5.8. Si $C_{u_i} \neq C_{u_{i+1}}$ y $l(T_i) = 1$, entonces $C_{u_{i+2}} = C_{u_i}$.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $i = 0$, $C_{u_0} \neq C_{u_1}$ y $l(T_0) = 1$. Por la Afirmación 5.7. $l(T_1) = 1$.

Sea $T_2 = (u_2, x_1, \dots, x_t = u_3)$. Luego $C = (u_0, u_1, u_2, x_1)$ es un $u_0 x_1$ -camino de longitud 3. Como γ es un γ_H -ciclo no existe una $u_2 u_1$ - H -trayectoria, entonces $x_1 \neq u_1$ y por la Afirmación 5.3. $x_1 \neq u_0$. Así, C es una trayectoria de longitud 3. Como D es 3-cuasitransitiva tenemos que $u_0 \rightarrow x_1$ o $x_1 \rightarrow u_0$ (ver Figura 5.13).

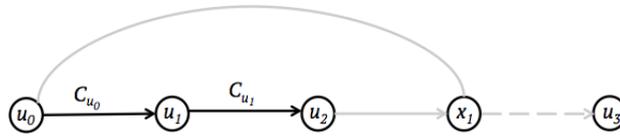


Figura 5.13

Si $u_0 \rightarrow x_1$, entonces $D[u_0, u_1, u_2, x_1]$ contiene un \tilde{T}_4 (ver Figura 5.14).

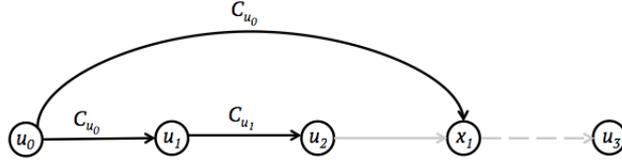


Figura 5.14

Como todo \tilde{T}_4 tiene la propiedad \supseteq , entonces los colores de T_2 deben estar contenidos en C_{u_0} (ver Figura 5.15).

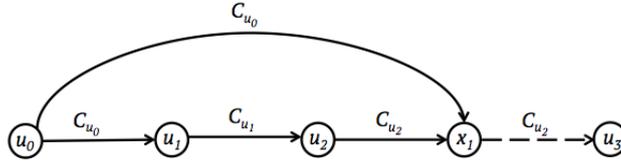


Figura 5.15

Si $x_1 \rightarrow u_0$, entonces $C = (u_0, u_1, u_2, x_1)$ es un C_4 . Como todo C_4 tiene la propiedad \supseteq , entonces $C_{u_2} \in \{C_{u_0}, C_{u_1}\}$ (ver Figura 5.16).

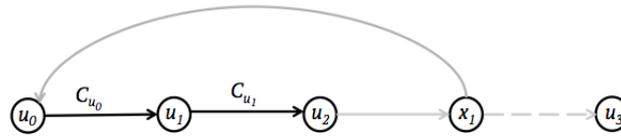


Figura 5.16

Si $C_{u_2} = C_{u_1}$, entonces, por el inciso 3 del Lema 4.1.2. (u_1, u_2, x_1, u_0) sería una u_1u_0 - H -trayectoria (ver Figura 5.17). Contradiciendo la definición de γ -ciclo.

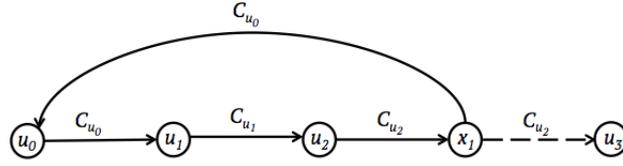


Figura 5.17

Así concluimos que $C_{u_2} = C_{u_0}$.

Para terminar esta demostración analizaremos cinco posibles casos:

Caso 1. $l(T_0) = 1$.

Aplicando las Afirmaciones 5.7 y 5.8 repetidamente obtenemos que $l(T_i) = 1$ para cada i en $\{0, \dots, n\}$, $V(\mathcal{C}_C(T_i)) \subseteq C_{u_0}$ si i es par y $V(\mathcal{C}_C(T_i)) \subseteq C_{u_1}$ si i es impar. esto implica que γ es un ciclo, más aún n es impar.

Probaremos por inducción que $u_0 \rightarrow u_i$ para toda i impar, $i \in \{0, \dots, n\}$.

Base de inducción: Si $i = 1$ tenemos que $u_0 \rightarrow u_1$ pues γ es un ciclo.

Hipótesis de inducción: Supongamos que $u_0 \rightarrow u_i$ para i en $\{1, 3, \dots, 2k-1\}$.

Notemos que $\{c(u_0, u_1), c(u_0, u_{2k-1}), c(u_{2k}, u_{2k+1})\} \subseteq C_{u_0}$ y $c(u_{2k-1}, u_{2k}) \in C_{u_1}$ (ver Figura 5.18).

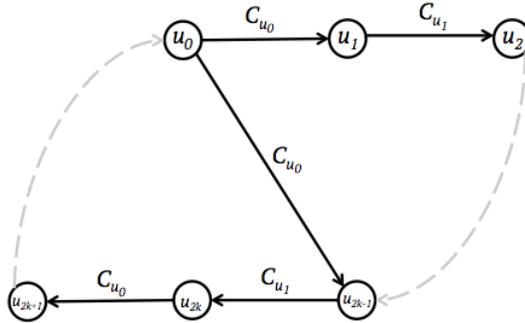


Figura 5.18

Paso inductivo: Sea $T = (u_0, u_{2k-1}, u_{2k}, u_{2k+1})$. Como T es una $u_0 u_{2k+1}$ -trayectoria de longitud 3 y D es 3-cuasitransitiva, entonces $u_0 \rightarrow u_{2k+1}$ o $u_{2k+1} \rightarrow u_0$. Por lo tanto $D[V(T)]$ contiene un C_4 o \tilde{T}_4 (ver Figura 5.19).

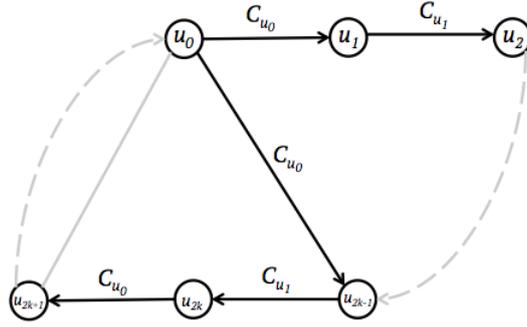


Figura 5.19

Como todo \tilde{T}_4 y C_4 en D tiene la propiedad \sqsupset , entonces el color de la flecha entre u_0 y u_{2k+1} pertenece a C_{u_0} , lo cual implica que $u_{2k+1} \not\rightarrow u_0$, pues $\xi^+(u_{2k+1})$ es subconjunto de $C_{u_1} \neq C_{u_0}$. Así $u_0 \rightarrow u_{2k+1}$. Por lo tanto, $u_0 \rightarrow u_i$ para toda i en $\{0, \dots, n\}$ con i impar. Como n es impar esto implica que $u_0 \rightarrow u_n$ contradiciendo la definición de γ_H -ciclo.

Caso 2. $l(T_0) = 2$ y $l(T_1) = 1$.

Supongamos que $T_0 = (u_0, x, u_1)$, entonces $C = (u_0, x, u_1, u_2)$ es una trayectoria de longitud 3. Como D es 3-cuasitransitiva tenemos que $u_0 \rightarrow u_2$ o $u_2 \rightarrow u_0$, esto contradice la Afirmación 5.3. o la Afirmación 5.5. respectivamente.

Caso 3. $l(T_0) = 2$ y $l(T_1) \geq 2$.

Supongamos que $T_0 = (u_0, x, u_1)$ y $T_1 = (u_1, y_1, y_2, \dots, y_t = u_2)$, con $t \geq 2$, entonces $C = (u_0, x, u_1, y_1)$ es una trayectoria de longitud 3. Como D es 3-cuasitransitiva se sigue que $u_0 \rightarrow y_1$ o $y_1 \rightarrow u_0$ (ver Figura 5.20).

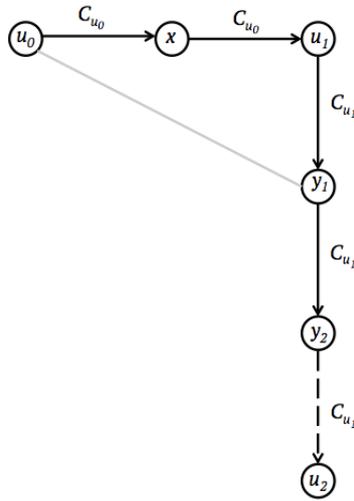


Figura 5.20

Así, $D[V(C)]$ contiene un C_4 o \tilde{T}_4 , como estas digráficas deben tener la propiedad \supseteq , entonces el color de la flecha entre u_0 y y_1 pertenece a C_{u_0} . Por el inciso 2 del Lema 4.1.3. $\xi^+(y_1) \subseteq C_{u_1}$, entonces $y_1 \not\rightarrow u_0$. Luego $u_0 \rightarrow y_1$. Puesto que (x, u_1, y_1, y_2) es una trayectoria de longitud 3 y D es 3-cuasitransitiva, tenemos que $x \rightarrow y_2$ o $y_2 \rightarrow x$ (ver Figura 5.21).

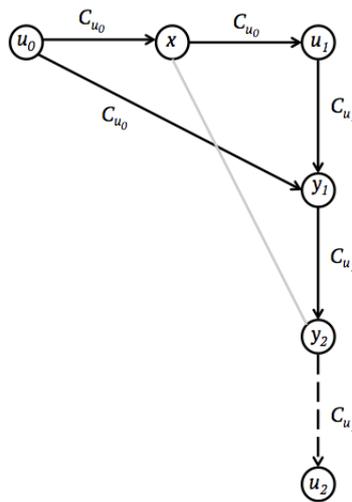


Figura 5.21

Si $x \rightarrow y_2$, entonces $D[\{x, u_1, y_1, y_2\}]$ contiene un \tilde{T}_4 que no tiene la propiedad \sqsupset (ver Figura 5.22).

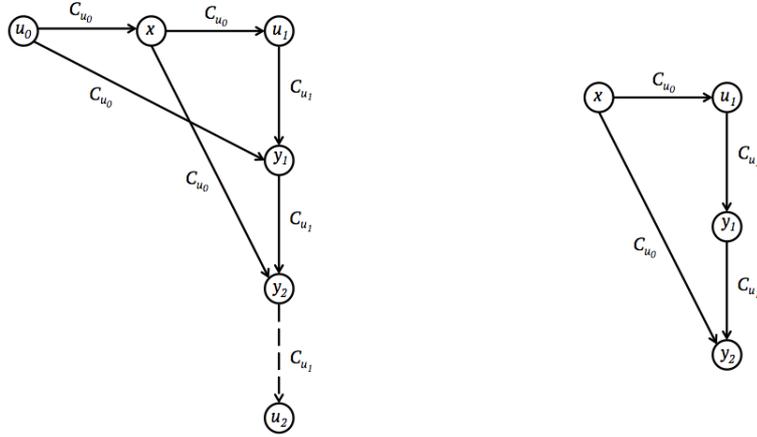


Figura 5.22

Si $y_2 \rightarrow x$, entonces $D[\{u_0, y_1, y_2, x\}]$ contiene un \tilde{T}_4 sin la propiedad \sqsupset , una contradicción (ver Figura 5.23).

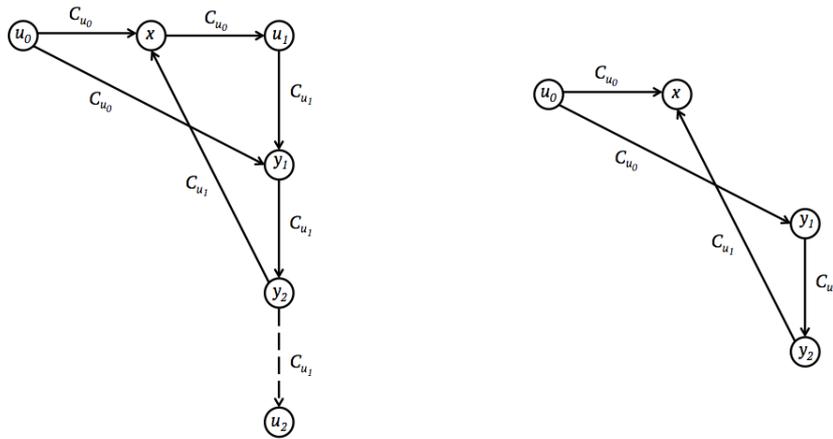


Figura 5.23

Caso 4. $l(T_0) \geq 4$ y $l(T_1) = 1$.

Supongamos que $T_0 = (u_0, x_1, x_2, \dots, x_{t-1}, x_t = u_1)$, con $t \geq 4$. Tenemos que $C = (x_{t-2}, x_{t-1}, u_1, u_2)$ es una trayectoria de longitud 3, como D es 3-cuasitransitiva, entonces $x_{t-2} \rightarrow u_2$ o $u_2 \rightarrow x_{t-2}$ (ver Figura 5.24).

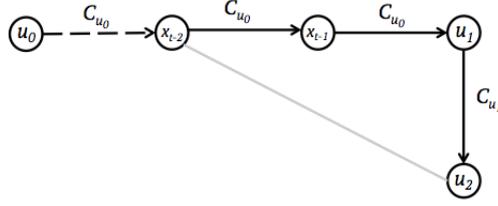


Figura 5.24

Esto implica que $D[V(C)]$ contiene un \tilde{T}_4 o un C_4 , el cual por hipótesis tiene la propiedad \sqsupset . Por lo tanto, el color de la flecha entre x_{t-2} y u_2 pertenece a C_{u_0} . Si $u_2 \rightarrow x_{t-2}$, entonces, por el Lema 4.1.1. $(u_2, x_{t-2}, x_{t-1}, u_1)$ contiene una u_2u_1 - H -trayectoria, contradiciendo la definición de γ_H -ciclo. Si $x_{t-2} \rightarrow u_2$ entonces, por el Lema 4.1.1. $(u_0, x_1, x_2, \dots, x_{t-2}, u_2)$ contiene una u_0u_2 - H -trayectoria, contradiciendo la Afirmación 5.5.

Caso 5. Si $l(T_0) \geq 4$ y $l(T_1) \geq 2$.

Supongamos que $T_0 = (u_0, x_1, \dots, x_{t-1}, u_1)$ y $T_1 = (u_1, y_1, \dots, y_{l-1}, u_2)$. Entonces $C = (x_{t-2}, x_{t-1}, u_1, y_1)$ es una trayectoria de longitud 3, como D es 3-cuasitransitiva, entonces $x_{t-2} \rightarrow y_1$ o $y_1 \rightarrow x_{t-2}$ (ver Figura 5.25).

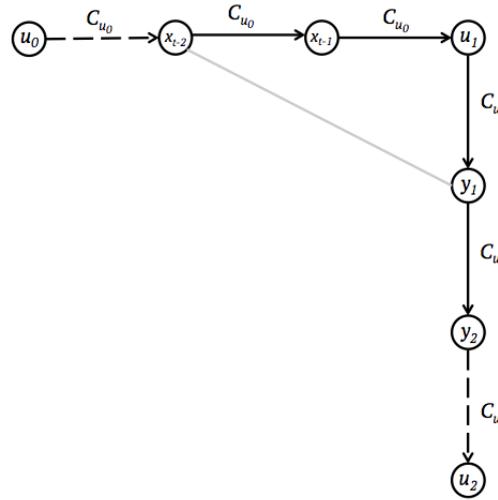


Figura 5.25

Note que $D[V(C)]$ contiene un \tilde{T}_4 o un C_4 , el cual por hipótesis tiene la propiedad \sqsupset . Luego el color de la flecha entre x_{t-2} y y_1 pertenece a C_{u_0} . Como $\xi^+(y_1) \subseteq C_{u_1}$, entonces $y_1 \not\rightarrow x_{t-2}$, por lo que $x_{t-2} \rightarrow y_1$. Por otro lado

$C' = (x_{t-1}, u_1, y_1, y_2)$ es una trayectoria de longitud 3, como D es 3-cuasitransitiva tenemos que $x_{t-1} \rightarrow u_2$ o $u_2 \rightarrow x_{t-1}$ (ver Figura 5.26).

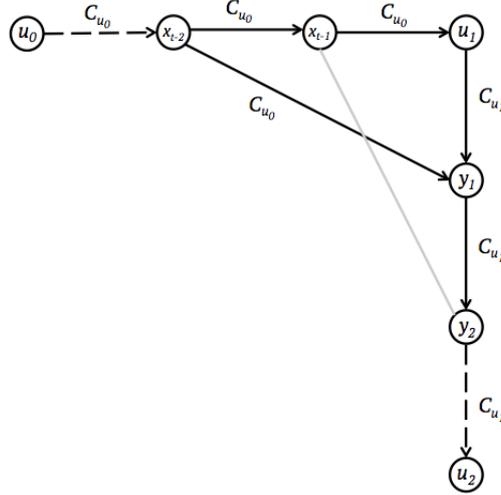


Figura 5.26

Si $x_{t-1} \rightarrow y_2$, entonces $D[\{x_{t-1}, u_1, y_1, y_2\}]$ contiene un \tilde{T}_4 que no tiene la propiedad \sqsupset (ver Figura 5.27).

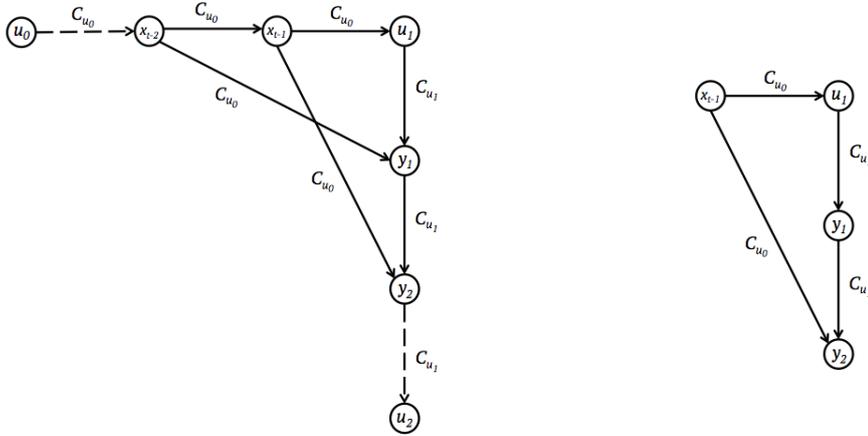


Figura 5.27

Si $y_2 \rightarrow x_{t-1}$, entonces $D[\{x_{t-2}, y_1, y_2, x_{t-1}\}]$ contiene un \tilde{T}_4 sin la propiedad \sqsupset , una contradicción (ver Figura 5.28).

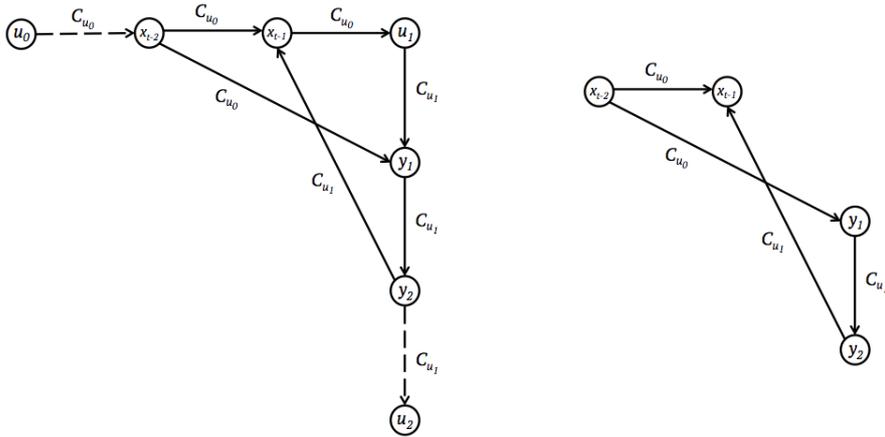


Figura 5.28

Concluimos que D no contiene γ_H -ciclos. □

Teorema 5.2.2. Sean H una digráfica, D una digráfica 3-cuasitransitiva H -coloreada con la propiedad \aleph . Si cada C_3 , C_4 y \tilde{T}_4 contenido en D tiene la propiedad \beth , entonces $\mathfrak{C}_H(D)$ es una digráfica núcleo perfecta.

Demostración. Probaremos que todo ciclo en $\mathfrak{C}_H(D)$ tiene una flecha simétrica. Por contradicción supongamos que C es un ciclo en $\mathfrak{C}_H(D)$ sin flechas simétricas. Entonces C es un γ_H -ciclo en D contradiciendo el Teorema 5.2.1. □

Corolario 5.2.3. Sean H una digráfica, D una digráfica 3-cuasitransitiva H -coloreada con la propiedad \aleph . Si cada C_3 , C_4 y \tilde{T}_4 contenido en D tiene la propiedad \beth , entonces D tiene un H -núcleo.

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo exhibimos resultados equivalentes a los obtenidos por Hortensia Galeana Sánchez, Rocío Rojas Monroy y Berta Zavala Santana en los artículos *Monochromatic paths and monochromatic sets of arcs in quasitransitive digraphs*[10] y *Monochromatic paths and monochromatic sets of arcs in 3-quasitransitive digraphs*[9].

Al hacer este trabajo encontramos una forma de relacionar H -núcleos y núcleos por trayectorias monocromáticas al debilitar nuestra definición de la propiedad \aleph , lo que podemos ver en el siguiente teorema:

Teorema 6.0.4. *Sean H una digráfica, D una digráfica H -coloreada, si existe $\{C_1, \dots, C_p\}$ una partición de $V(\mathcal{C}_C(D))$ que cumple:*

1. $\mathcal{C}_C(D)[C_i]$ es una subdigráfica de $H[C_i]$ para todo $i \in \{1, \dots, p\}$.
2. Si T es una H -trayectoria entonces existe C_i , elemento de la partición, tal que T está contenido en $D[B_i]$.

Consideramos $c' : V(D) \rightarrow \{1, 2, \dots, p\}$, una p -coloración de D como sigue: si $(u, v) \in F(D)$ entonces $c'(u, v) = i$ si $c(u, v) \in C_i$.

En este caso D tiene un H -núcleo con la coloración c si y sólo si D tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas con la coloración c' .

Demostración. Para dar esta demostración basta observar T es una trayectoria monocromática en D con la coloración c' si y sólo si es una H -trayectoria en D con la coloración c .

Sea T una trayectoria monocromática en D con la coloración c' , entonces todas las flechas de T tiene el mismo color; digamos i . Por la manera en que definimos la coloración c' esto quiere decir que en la coloración c todas las flechas de T estaban en el elemento de la partición C_i , es decir, T está contenida en $D[B_i]$. Por el inciso 1 del Lema 4.1.1. tenemos que T es un H -camino. Como T es una trayectoria, entonces T es una H -trayectoria en D con la coloración c .

Sea T una H -trayectoria en D con la coloración c , entonces, por hipótesis, existe C_i , elemento de la partición, tal que T está contenido en $D[B_i]$, es decir, existe C_i tal que el color de todas las flechas de T es un elemento de C_i . Así, todas las flechas de T tienen el color i en c' . Por lo tanto, T es una trayectoria monocromática en D con la coloración c' . \square

Este resultado no sólo nos ayuda a relacionar la teoría de núcleos por trayectorias monocromáticas y H -núcleos, sino que nos da una forma de reducir problemas de H -trayectorias a trayectorias monocromáticas.

Bibliografía

- [1] J. Bang-Jensen, G. Gutin. *Digraphs: Theory, Algorithms and Applications*. London: Springer-Verlag (2002).
- [2] V. Chvátal. *On the computational complexity of finding a kernel*. Centre de Recherches Mathématiques, Université de Montréal, Report CRM300 (1973).
- [3] P. Delgado Escalante, H. Galeana Sánchez. *Restricted domination in arc-colored digraphs*. AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics, 11(2014), pp. 95-104.
- [4] P. Duchet. *Graphes Noyau-Parfaits*. Annals of Discrete Mathematics, 9(1980), pp. 93-101.
- [5] H. Galeana Sánchez. *Kernels by monochromatic paths and the color class digraph*. Discussiones Mathematicae Graph Theory, 31(2011), pp. 273-281.
- [6] H. Galeana Sánchez. *On monochromatic paths and monochromatic cycles in edge coloured tournaments*. Discrete Mathematics, 156 (1996), pp. 103-112.
- [7] H. Galeana Sánchez, C. Hernández Cruz. *K-kernels in k-transitive and k-quasi-transitive digraphs*. Discrete Mathematics. 312 (2012), pp. 2522-2530.
- [8] H. Galeana Sánchez, R. Rojas Monroy. *Kernels in quasi-transitive digraphs*. Discrete Mathematics, 306 (2006), pp. 1969-1974.
- [9] H. Galeana Sánchez, R. Rojas Monroy y B. Zavala Santana. *Monochromatic paths and monochromatic sets of arcs in 3-quasitransitive digraphs*. Discussiones Mathematicae Graph Theory, 29 (2009), pp. 337-347.
- [10] H. Galeana Sánchez, R. Rojas Monroy, B. Zavala Santana, *Monochromatic paths and monochromatic sets of arcs in quasitransitive digraphs*. Discussiones Mathematicae Graph Theory, 30 (2010), pp. 545-553.
- [11] H. Galeana Sánchez, R. Sánchez López. *H-Kernels in Infinite Digraphs*. Graphs and Combinatorics. 29 (2013), pp. 913-920.

- [12] A. Ghouilá-Houri. *Caractrisation des graphes non orientés dont on peut orienter les arêtes de manière à obtenir le graphe d'une relation d'ordre*, C.R. Acad. Sci. Paris, 254 (1962), pp. 1370–1371.
- [13] J. V. Neumann, O. Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, Princeton, NJ (1944).