UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

SUBGRUPOS PUROS: UNA GENERALIZACIÓN DE LOS GRUPOS DIVISIBLES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

FERNANDO RICARDO RODRÍGUEZ CRUZ

DIRECTOR DE TESIS:
DRA. MARÍA DEL CARMEN HERÉNDIRA GÓMEZ LAVEAGA

Ciudad Universitaria, Cd. Mx. 2018

1. Datos del alumno
   Rodríguez
   Cruz
   Fernando Ricardo
   57346839
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Matemáticas
   410026595

2. Datos del tutor
   Dra.
   María del Carmen Heréndira
   Gómez
   Laveaga

3. Datos del sinodal 1
   Dr.
   Juan
   Morales
   Rodríguez

4. Datos del sinodal 2
   Mat.
   Ernesto
   Mayorga
   Saucedo

5. Datos del sinodal 3
   Dra.
   Bertha María
   Tomé
   Arreola

6. Datos del sinodal 4
   M. en C.
   Rolando
   Gómez
   Macedo

7. Datos del trabajo escrito
   Subgrupos puros: una generalización de los grupos divisibles
   53 p.
   2018

Agradecimientos

A mi madre, por su absoluta confianza, paciencia, amor y comprensión.

A la Dra. María del Carmen Heréndira Gómez Laveaga, por todas sus enseñanzas, apoyo, cariño, comprensión y paciencia, por todos los consejos que me ha dado y por permitirme trabajar con ella, por ser una de las mejores personas y profesoras que he encontrado en la facultad. A Ernesto Mayorga, por siempre aconsejarme, apoyarme y ser una inspiración como matemático.

A todos mis amigos y profesores dentro de la universidad. A Angel, por ser parte fundamental de mi vida, por toda la confianza, paciencia y comprensión depositada en mí.

A mi mejor amiga Catalina que sin ella no sería posible este gran logro, por siempre estar conmigo con su amistad y confianza, por ser parte esencial de mi vida personal, academica y profesional, por nunca dejarme caer, por ser una de las mejores personas y una excelente confidente, por ser una inspiración y un gran apoyo, por no dejarme rendir y siempre tener palabras de aliento, por ser siempre la mejor y tener la humildad que la caracteriza, por todo esto y más.

Índice general

Introducción

Un de los principales intereses de la matemática es entender las estructuras que surgen en sus diferentes áreas y en álgebra este es uno de los principales problemas. En este trabajo se estudiarán grupos abelianos con el fin de obtener una descomposición en sumandos directos de ciertos tipos de subgrupos y así poder estudiar sus propiedades.

En el primer capítulo presentamos una serie de definiciones y resultado sobre los grupos abelianos en geneal, dando importancia al tema de sumas y sumandos directos. Se estudiarán los p-grupos y los grupos cocíclicos (el dual de los grupos cíclicos), los cuales tienen una relevancia más que excepcional para los capítulos posteriores. Apartir de los grupos cíclicos, como sumandos directos, se clasificarán todos los grupos abelianos acotados.

En el capítulo 2 estudiamos los grupos divisibles, que como su nombre lo índica, son grupos en los cuales todo elemento es dividido por cualquier entero positivo. Explotaremos tres popiedades que los clasifican, es de particular interés que los grupos divisibles son sumandos directos de cualquier grupo que los contenga. Por otra parte se verá que dichos grupos son limitados y dificiles de encontrar en la práctica.

En el capítulo 3 nos centraremos en generalizar la idea de los grupos divisibles. Se introducirá la idea de los subgrupos puros, mismos que estudiaremos en todo este capítulo. Se darán ejemplos y descubriremos que bajo ciertas condiciones el ser un subgrupo puro es equivalente a ser un sumando directo de un grupo que lo contenga. Para finalizar hablaremos de un posible camino a seguir, para continuar el estudio de los subgrupos puros, éste sigue con la visión de esta tesis y además se requerirán de conceptos topológicos.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Sumas directas y p-grupos

Para la lectura y entendimiento de este trabajo se requieren conocimientos básicos de teoría de grupos y teoría de categorías. Al mencionar la palabra "grupo" entenderemos un grupo abeliano a menos que especifiquemos lo contrario.

Si B es un subgrupo de un grupo A lo denotaremos como $B \leq A$ y por $B < A$ se entenderá que B es un subgrupo propio de A. Si $B \leq A$, denotaremos por A/B al grupo cociente de A por B y a los elementos los identificaremos con una barra horizontal $\overline{a}$, donde $a \in A$.

Definición 1.1.1. *Sean A un grupo y $S \subseteq A$. Definimos*

$$\langle S \rangle := \cap\{G \leq A | S \subseteq G\}$$

el subgrupo generado por S.

Notemos que todo elemento de $\langle S \rangle$ es combinación lineal entera de elementos en S.

Definición 1.1.2. *Sean C y B subgrupos de un grupo A. Decimos que C es B-supremo de A si:*

1. *$C \cap B = 0$ (el subgrupo de A que consta únicamente del cero)*
2. *Si $C < H \leq A$, entonces $H \cap B \neq 0$*

De la definición anterior si C es un subgrupo B-supremo de algún grupo A, entonces $B + C = B \oplus C$.

Lema 1.1.3. *Sean G un subgrupo de un grupo A, p_1 y p_2 primos relativos. Entonces $(p_1p_2)G = p_1G \cap p_2G$.*

Demostración. Sea $x \in (p_1p_2)G$, entonces $x = (p_1p_2)g$ para algún $g \in G$ y como

$$\begin{aligned} p_2(p_1g) &\in p_2G \\ p_1(p_2g) &\in p_1G, \end{aligned}$$

se sigue que $x \in p_1G \cap p_2G$.

Si $x \in p_1G \cap p_2G$, entonces $x = p_1g_1 = p_2g_2$ con $g_1, g_2 \in G$ y como p_1 y p_2 son primos relativos, existen s y $t \in \mathbb{Z}$ tales que $sp_1 + tp_2 = 1$,

$$\begin{aligned} g_1 =& sp_1g_1 + tp_2g_1 \\ & sp_2g_2 + tp_2g_1 \\ & p_2(sg_2 + tg_1). \end{aligned}$$

Entonces $g_1 = p_2g_3$, donde $g_3 = sg_2+tg_1$, y por lo tanto $x = p_1g_1 = (p_1p_2)g_3 \in (p_1p_2)G$. □

Proposición 1.1.4. *Sea A un grupo y C un subgrupo B-supremo de A. Si $a \in A$ tal que $pa \in C$, para algún número primo p, entonces $a \in B \oplus C$.*

Demostración. Si $a \in C$ no hay nada que probar. Supongamos que $a \notin C$ y $pa \in C$. Como $C < \langle C \cup \{a\}\rangle \leq A$, por la definición 1.1.2 inciso (b), existe $0 \neq b = c+ka \in \langle C \cup \{a\}\rangle \cap B$, con $c \in C$ y $(k,p) = 1$ (k y p primos relativos). Tomando r y s enteros tales que

$$\begin{aligned} 1 &= rk + sp \\ a &= rka + spa \\ &= r(b-c) + s(pa) \\ &= rb + (-rc + spa) \end{aligned}$$

donde $rb \in B$ y $-rc + spa \in C$. □

Definición 1.1.5. *Sea G un grupo y $a \in G$. Definimos el orden de a, denotado por $o(a)$, como*

$$o(a) = \begin{cases} k & , \textit{ si } k \textit{ es el menor entero positivo tal que } ka = 0 \\ \infty & , \textit{ si } na \neq 0 \textit{ para toda } n \textit{ positiva.} \end{cases}$$

Definición 1.1.6. *Sea p un número primo. Un p-grupo A es un grupo tal que todo elemento distinto de 0 es de orden una potencia de p.*

Ejemplo 1.1.7. *Para todo número primo p y para toda $k \in \mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}_{p^k}$ (enteros módulo p^k) es un p-grupo.*

Lema 1.1.8. *Sean A un p-grupo y q un número natural primo relativo con p. Entonces $qA = A$.*

Demostración. Probaremos que el siguiente morfismo de grupos es biyectivo:

$$\mu_q : A \longrightarrow A$$

$$a \longmapsto qa$$

1. μ_q es inyectiva.
   Sean $a, b \in A$ tales que $qa = qb$, entonces $q(a - b) = 0$ y como A es un p-grupo, necesariamente $a = b$.

2. μ_q suprayectiva.
   Sean $c \in A$ y $k \in \mathbb{Z}^+$ el exponente del orden de c. Como $(q, p^k) = 1$ existen s, t enteros tales que

$$\begin{aligned} 1 &= tq + sp^k \\ c &= tqc + sp^k c \\ &= qtc \\ &= \mu_q(tc) \end{aligned}$$

   por lo que μ_q es suprayectiva.

$\square$

Lema 1.1.9. *Si $\overline{x} \in \mathbb{Z}_{p^k}$, con $p^{k-1}(\overline{x}) = 0$, entonces existe $\overline{y} \in \mathbb{Z}_{p^k}$ tal que $p\overline{y} = \overline{x}$.*

Demostración. Como $\overline{x} \in \mathbb{Z}_{p^k}$ y $p^{k-1}\overline{x} = 0$, entonces $p^k | p^{k-1}x$ y por lo tanto $p|x$. Así $\overline{x} = p(\overline{y})$ para algún $\overline{y} \in \mathbb{Z}_{p^k}$. $\square$

Corolario 1.1.10. *Si $x \in B = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}_p^k$ tal que $o(x) \leq p^{k-1}$, entonces existe $y \in B$ tal que $x = py$.*

Definición 1.1.11. *Sean G un grupo, $a \in G$ y p un número primo. Definimos la p-altura de a con respecto a G, denotado por $h_p(a)$, como*

$$h_p(a) = \begin{cases} k & , \textit{ si } k \textit{ es el mayor número natural tal que la ecuación} \\ & \quad p^k x = a \textit{ tiene solución en } G. \\ \infty & , \textit{ si } p^k x = a \textit{ tiene solución en } G \textit{ para todo } k \textit{ número natural .} \end{cases}$$

Observación 1.1.12. *Si $h_p(a) = n$, entonces la ecuación $p^k x = a$ tiene solución para toda $1 \leq k \leq n$.*

Lema 1.1.13. *Sean G un grupo, $a, b \in G$ y p un número primo. Entonces*

a) $h_p(a) = h_p(-a)$.

b) $h_p(a+b) = min\{h_p(a), h_p(b)\}$, *si* $h_p(a) \neq h_p(b)$.

Demostración. a) Es evidente observando que: la ecuación $nx = a$ tiene solución si y sólo si $nx = -a$ tiene solución.

b) Supongamos sin pérdida de generalidad que $h_p(a) < h_p(b)$. Entonces

$$\begin{aligned} a+b &= p^{h(a)}x_1 + p^{h(b)}x_2 \\ &= p^{h(a)}(x_1 + p^{h(b)-h(a)})x_2 \end{aligned}$$

por otro lado

$$a + b = p^{h(a+b)}x_3$$

por lo que se deduce que $h(a) \leq h(a+b)$. Si $h(a) < h(a+b)$, existen $c_1, c_2 \in G$ tales que $a + b = p^{h(a)+1}c_1$ y $b = p^{h(b)}c_2$ (ver observación 1.1.12), usando ambas igualdades se tiene que $a = p^{h(a)+1}(c_1 - p^{h(b)-h(a)-1}c_2)$ lo cual es una contradicción con respecto a la altura de a. □

Corolario 1.1.14. *Sea G un grupo y $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ elementos en G que tienen alturas distintas entre ellos. Entonces $h(\sum\limits_{i=1}^{n}) = min\{h(a_i)|1 \leq i \leq n\}$.*

Demostración. Por inducción sobre el número de sumandos.
Si $k = 2$, entonces por el lema anterior $h(a_1 + a_2) = min\{h(a_1), h(a_2)\}$.
Supongamos válido que $h(\sum\limits_{i=i}^{k} a_i) = min\{h(a_i)|1 \leq i \leq k\}$.
Demostraremos que el enunciado es cierto para $k+1$. Por hipótesis de inducción se tiene que $h(\sum\limits_{i=i}^{k} a_i) = min\{h(a_i)|1 \leq i \leq k\}$ que es distinto a $h(a_{k+1})$ y por caso $k = 2$ se concluye que $h(\sum\limits_{i=i}^{k+1} a_i) = min\{min\{h(a_i)|1 \leq i \leq k\}, h(a_{k+1})\} = min\{h(a_i)|1 \leq i \leq k+1\}$. □

Proposición 1.1.15. *Sea G un grupo tal que existe un número primo p con la propiedad de que $pG = 0$. Entonces G es un $\mathbb{Z}_p$-espacio vectorial.*

Demostración. Sean $\bar{a} \in \mathbb{Z}_p$ y $g \in G$. Definimos $\bar{a} \cdot g = ag$, lo cual está bien definido ya que si $\bar{a} = \bar{b}$, entonces $a - b = rp$, para algún $r \in \mathbb{Z}$ y por consiguiente

$$ag - bg = (a-b)g = r(pg) = 0,$$

de donde $\bar{a}g = ag = bg = \bar{b}g$. Que cumple las propiedades de $\mathbb{Z}_p$-espacio vectorial se debe a que todo grupo abeliano es un $\mathbb{Z}$-módulo. $\square$

Definición 1.1.16. *Sea A un p-grupo. Definimos el soclo de A como*

$$A[p] = \{a \in A : pa = 0\}.$$

Teorema 1.1.17. *Un p-grupo A es la suma directa de grupos cíclicos si y sólo si A es la unión de una cadena ascendente de subgrupos, es decir,*

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \qquad \text{donde} \qquad A_1 \leq A_2 \leq A_3 \leq \cdots \leq A_n \leq \cdots$$

y tal que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ la altura de los elementos distintos de 0 de A_n están acotados por algún entero k_n.

Demostración.

$\Rightarrow$) $A = \bigoplus_{i \in I} C_i$ donde para todo $i \in I$, C_i es cíclico. Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ consideramos los siguientes conjuntos:

$$J_n = \{j \in I : C_j \cong \mathbb{Z}_{p^n}\},$$
$$B_n = \bigoplus_{j \in J_n} C_j$$

y

$$A_n = \bigoplus_{k=1}^{n} B_k.$$

Claramente $A_1 \leq A_2 \leq A_3 \leq \cdots \leq A_n \leq \cdots$ y además $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$. Por último probaremos que la altura de los elementos distintos de 0 de cada A_n están acotados. Sea $a \in A_n - \{0\}$ y supongamos que la ecuación $p^n x = a$ tiene solución $a_0 \in A$. Como A_n es sumando directo de A, entonces $a_0 \in A = A_n \oplus C$ y así $a_0 = a' + c$, con $a' \in A_n$ y $c \in C$, luego

$$\begin{aligned} a &= p^n(a' + c) \\ &= p^n a' + p^n c \end{aligned}$$

El hecho de que $a, a' \in A_n$, implica que $p^n c = 0$ y $a = p^n a' = 0$. Por la observación 1.1.12 A_n no tiene elementos (salvo el 0) de altura mayor o igual a n.

$\Leftarrow$) Sea $A_1 \leq A_2 \leq A_3 \leq \cdots \leq A_n \leq \cdots$ la cadena ascendente de subgrupos de A que cumplen las hipótesis del teorema. Si la altura de los elementos distintos de cero de A está acotada por cero, entonces $pA = 0$ lo que implica que A (ver teorema 1.1.15) es un $\mathbb{Z}_p$ espacio vectorial y por consiguiente es suma directa de grupos cíclicos. Si por el contrario existe $j \in \mathbb{Z}^+$ tal que los elementos distintos de cero de A_j no están acotados por cero, entonces podemos reetiquetar la cadena de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} A'_1 &= A_j \\ A'_2 &= A_{j+1} \\ A'_3 &= A_{j+2} \\ &\vdots \\ A'_n &= A_{j+(n-1)} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Así $A'_1 \leq A'_2 \leq A'_3 \leq \cdots$ es una cadena que cumple las hipótesis del teorema y además la cota superior de las alturas de cada A'_j es mayor o igual a 1. Por todo lo anterior podemos suponer que la cadena inicial $A_1 \leq A_2 \leq A_3 \leq \cdots \leq A_n \leq \cdots$ cumple con que cero no es cota superior de las alturas de ningún subgrupo A_i.

Acontinuación se enuciarán una serie de pasos a seguir, los cuales serán demostrados al término de ésta.

1. Podemos considerar que la altura de los elementos distintos de 0 de A_n son menores o iguales que n.

2. Si $\mathscr{F}$ es la familia de todas las cadenas $\mathcal{C} : C_1 \leq C_2 \leq C_3 \leq \cdots \leq C_n \leq \cdots$ de subgrupos de A que cumplen para toda $n \in \mathbb{Z}^+$

   a) $A_n \leq C_n$

   b) $C_n \cap p^n A = 0$,

   entonces $\mathscr{F}$ tiene un maximal G

   $$G : G_1 \leq G_2 \leq \cdots \leq G_n \leq \cdots.$$

3. Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, tomemos L_n una base del subgrupo $G_n[p] \cap p^{n-1}A = G_n \cap p^{n-1}A$. Si $L = \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n$, entonces $\langle L \rangle = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \langle L_n \rangle = A[p]$.

4. Para todo $c_i \in L$, con $h_p(c_i) = m_i$, elegimos $a_i \in A$ tal que $p^{m_i} a_i = c_i$. Entonces $A = \bigoplus \langle a_i \rangle$.

Demostración de 1: Construimos una cadena ascendente de subgrupos de A,

$$A'_1 \leq A'_2 \leq A'_3 \leq \cdots \leq A'_n \leq \cdots,$$

de la siguiente manera: para cada entero positivo n sea k_n la mínima cota superior de las alturas de los elementos distintos de 0 de A_n. Definimos $A'_{k_1} = A_1$ y todos los subgrupos anteriores serán el subgrupo 0.
$A'_{k_1+k_2} = A_2$ y todos los subgrupos intermedios $A'_{k_1+1}, A'_{k_1+2}, ..., A'_{k_1+k_2-1}$ serán el subgrupo A_1.
En general $A'_{k_1+k_2+\cdots+k_n} = A_n$ donde todos los subgrupos entre $A'_{k_1+k_2+\cdots+k_{n-1}}$ y $A'_{k_1+k_2+\cdots+k_n}$ serán el subgrupo A_{n-1}. Así la cadena

$$A'_1 \leq A'_2 \leq A'_3 \leq \cdots \leq A'_n \leq \cdots$$

cumple las hipótesis del teorema y además la altura de los elementos distintos de 0 de A_n es menor o igual que n. Dicho lo anterior, podemos suponer que nuestra cadena inicial cumple lo expuesto en este punto.

Demostración de 2: $\mathscr{F} \neq \varnothing$ ya que $A_1 \leq A_2 \leq A_3 \leq \cdots \leq A_n \leq \cdots \in \mathscr{F}$. Si C y $D \in \mathscr{F}$, definimos el siguiente orden parcial en $\mathscr{F}$:

$$C \preceq D \text{ si y sólo si } C_n \leq D_n \text{ para toda } n \in \mathbb{Z}^+.$$

Aplicaremos el Lema de Zorn a $(\mathscr{F}, \preceq)$ para mostrar que tiene un maximal. Sea $\mathscr{C} = \{\mathcal{C}_i\}_{i\in I}$ una cadena en $\mathscr{F}$ donde

$$\mathcal{C}_i : C_1^i \leq C_2^i \leq C_3^i \leq \cdots \leq C_n^i \leq \cdots$$

para cada $i \in I$.
Si $D_j = \bigcup_{i\in I} C_j^i$, se tiene que

$$\mathcal{D} : D_1 \leq D_2 \leq D_3 \leq \cdots D_n \leq \cdots$$

pertenece a $\mathscr{F}$ ya que para toda $n \in \mathbb{Z}^+$

1. $A_n \leq C_n^i \leq \bigcup_{i\in I} C_n^i$
   y

2. $(\bigcup_{i\in I} C_n^i) \cap p^n A = \bigcup_{i\in I} (C_n^i \cap p^n A) = 0,$

   además, D es una cota superior de $\mathscr{C}$ en $\mathscr{F}$.

Entonces por el Lema de Zorn $\mathscr{F}$ tiene un maximal G

$$G : G_1 \leq G_2 \leq G_3 \leq \cdots \leq G_n \leq \cdots$$

Demostración de 3: Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ el subgrupo $G_n[p] \cap p^{n-1}A = G_n \cap p^{n-1}A$ tiene estructura de $\mathbb{Z}_p$-espacio vectorial (ver 1.1.15) y por consiguiente podemos considerar una base L_n de éste.
Es relevante observar que todo elemento distinto de cero del subgrupo $G_n[p] \cap p^{n-1}A = \langle L_n \rangle$ tiene altura exactamente $n-1$, ya que $G_n \cap p^n A = 0$.
Probaremos que si $L = \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n$, entonces $\langle L \rangle = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \langle L_n \rangle$. Sea $0 = a_{n_1} + a_{n_2} + \cdots + a_{n_m}$ donde $a_{n_i} \in \langle L_{n_i} \rangle$ para toda i con $1 \leq i \leq m$. Por inducción sobre m.
Si $m = 1$ no hay nada que probar.
Si $m = 2$, $a_{n_1} = -a_{n_2}$ lo cual implica que $a_1 = a_2 = 0$ debido al lema 1.1.12.
Supongamos válido para k, es decir, que si $0 = a_{n_1} + a_{n_2} + \cdots + a_k$ se tiene que cada sumando es cero.
Sea $m = k+1$ y $0 = a_{n_1} + a_{n_2} + \cdots + a_{n_m}$. Despejando se llega a que $-a_{n_m} = a_{n_1} + a_{n_2} + \cdots + a_{n_k}$ y usando el corolario 1.1.13, $h(-a_{n_m}) = h(a_{n_1} + a_{n_2} + \cdots + a_{n_k}) = min\{h(a_i) | 1 \leq i \leq k\}$.
Supongamos sin pérdida de generalidad que $min\{h(a_i)|1 \leq i \leq k\} = h(a_k)$, así $a_{n_{k+1}} \in \langle L_k \rangle$ lo cual nos dice que $a_{n_{k+1}} = 0$. Por hipótesis de inducción se tiene que $0 = a_{n_1} = \cdots = a_{n_{k+1}}$ y ya por último que $\langle L \rangle = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \langle L_n \rangle$.
Ahora probaremos que $\langle L \rangle = A[p]$. Basta probar que $A[p] \subseteq \langle L \rangle$.
Sea $c \in A[p] \leq \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, $c \in G_r$ para alguna $r \in \mathbb{Z}^+$, demostración por inducción sobre r que $c \in \langle L \rangle$. Si $r = 1$, $c \in G_1$, entonces $c \in G_1 \cap A[p] = G_1[p] \cap A = \langle L_1 \rangle$ y por lo tanto $c \in \langle L \rangle$.
Supongamos que si $c \in G_k$ con $1 \leq k \leq r$, entonces $c \in \langle L \rangle$.
Sea $c \in G_{r+1} - G_r$. Debido a la maximilidad de la cadena $\{G_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$, necesariamente $\langle G_r, c \rangle \cap p^r A \neq 0$. Sea $0 \neq b = g + kc \in \langle G_r, c \rangle \cap p^r A$ con $(k,p) = 1$. Tomemos $s, t \in \mathbb{Z}$ tales que

$$\begin{aligned} 1 &= sk + tp \\ c &= skc + tpc \\ &= skc. \end{aligned}$$

Multiplicando s y b obtenemos que $sb = sg + skc = sg + c$. Nombramos $b' = sb \in p^r A$ y $g' = sg \in G_r$. $c = b' - g'$ donde $c \in G_{r+1}$ y $g' \in G_r$, entonces $b' \in G_{r+1} \cap p^r A = \langle L_{r+1} \rangle$, más aún, $pg' = p(b' - c) = pb' - pc = 0$ $(g' \in G_r[p])$. Entonces por hipótesis de inducción $g' \in \langle L \rangle$ y por lo tanto $c = b' - g' \in \langle L \rangle$, lo que demuestra que $A[p] = \langle L \rangle$.

Demostración de 4: Primero demostraremos que en efecto $\sum \langle a_i \rangle$ es una suma directa. Definimos para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ el conjunto $l_n = \{c' \in A | p^{h(c)} c' = p^{n-1} c' = c \in L_n\}$. El grupo $\langle l_n \rangle$ cumple que es suma directa de los subgrupos cíclicos $\langle c' \rangle$. Sea $m_1 c'_{r_1} + \cdots + m_s c'_{r_s} = 0$ una combinación lineal igual a cero, donde $m_i c'_{r_i} \in \langle c'_{r_i} \rangle$ para todo $1 \leq i \leq s$. Multiplicando la igualdad por p^{n-1} se obtiene:

$$m_1 c_{r_1} + \cdots + m_s c_{r_s} = 0$$

la cual es una combinación lineal igual a cero de elementos en L_n, lo cual implica que $m_1 = m_2 = \cdots = m_s = 0$ y así $\langle l_n \rangle = \oplus \langle c' \rangle$. Ahora probaremos que $\sum_{i=1}^{\infty} \langle l_i \rangle$ es una suma directa. Sea $a_{r_1} + \cdots + a_{r_m} = 0$, donde $a_{r_i} \in \langle l_{r_i} \rangle - \{0\}$ para todo $1 \leq i \leq m$. Supongamos sin pérdida de genralidad que $r_1 < r_2 < \cdots < r_m$. Mutiplicando la combinación lineal por $p^{r_m - 1}$ obtenemos que $p^{r_m-1} a_{r_i} = 0$ para todo $1 \leq i \leq m-1$ y demás $p^{r_m-1} a_{r_m} = c_{r_m} = 0$ lo cual no puede ocurrir. Esto nos dice que: no puede haber una combinación lineal igual a cero donde los sumandos sean distintos a cero, lo que concluye que $\sum_{i=1}^{\infty} \langle l_i \rangle$ es directa y por lo tanto $\sum \langle a_i \rangle$ también es directa.
Sea $a \in A$. Probaremos que $a \in \bigoplus \langle a_i \rangle$, por inducción sobre la potencia de p en el orden de a.
Si $o(a) = p$, $a \in A[p] = \langle L \rangle \leq \bigoplus \langle a_i \rangle$.
Supongamos que si $o(a) = p^k$ con $1 \leq k \leq n$, entonces $a \in \bigoplus \langle a_i \rangle$.
Si $o(a) = p^{n+1}$, entonces $p^n a \in A[p] = \langle L \rangle$,

$$p^n a = n_1 c_{i_1} + n_2 c_{i_2} + \cdots + n_l c_{i_l} \text{ con } c_{i_j} \in L.$$

Supongamos sin pérdida de generalidad que los $c_{i_1}, c_{i_2}, \cdots, c_{i_s}$ son de altura mayor o igual a n y los $c_{i_{s+1}}, c_{i_{s+2}}, \cdots, c_{i_l}$ son de altura menor a n. Consideremos para cada $j = 1, ..., s$ los a_{i_j} tales que $c_{i_j} = p^{m_{i_j}} a_{i_j}$, Entonces

$$\begin{aligned} p^n a &= n_1 c_{i_1} + n_2 c_{i_2} + \cdots + n_l c_{i_l} \\ &= n_1 p^{m_{i_1}} a_{i_1} + n_2 p^{m_{i_2}} a_{i_2} + \cdots + n_s p^{m_{i_s}} a_{i_s} + n_{s+1} c_{i_{s+1}} + \cdots + n_l + c_{i_l} \end{aligned}$$

como $n \leq m_{i_j}$ para toda $j = 1, ..., s$, $n_j p^{m_{i_j}} a_{i_j} = p^n m'_{i_j} a_{i_j}$ para algún $m'_{i_j} \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} p^n a &= p^n m'_{i_1} a_{i_1} + \cdots + p^n m'_{i_s} a_{i_s} + n_{s+1} c_{i_{s+1}} + \cdots + n_l c_{i_l} \\ p^n (a - m'_{i_1} a_{i_1} + \cdots + m'_{i_s} a_{i_s}) &= n_{s+1} c_{i_{s+1}} + \cdots + n_l c_{i_l} \in G_{n-1} \end{aligned}$$

lo que implica por la condición (b) del inciso 2 que $o(a - (m'_{i_1} a_{i_1} + \cdots + m'_{i_s} a_{i_s})) \leq p^n$. Por hipotesis de inducción $a - m'_{i_1} a_{i_1} + \cdots + m'_{i_s} a_{i_s} \in \bigoplus \langle a_i \rangle$ y por lo tanto $a \in \bigoplus \langle a_i \rangle$. $\square$

Teorema 1.1.18. *Sea B un subgrupo de un grupo A. Si $A/B = \bigoplus_{i \in I} (A_i/B)$ donde $A_i \leq A$ para toda $i \in I$ y B es sumando directo de cada subgrupo ($A_i = B \bigoplus C_i$), entonces B es sumando directo de A.*

Demostración. Demostraremos que $A = B \bigoplus \left(\bigoplus_{i \in I} C_i \right)$. Sean $a \in A$, $\bar{a} \in A/B$ y $\bar{a} =$

$\overline{a_{i_1}} + \overline{a_{i_2}} + \cdots + \overline{a_{i_n}}$, donde cada $\overline{a_{i_j}} \in (A_{i_j}/B)$. Entonces

$$\begin{aligned} a + B &= (a_{i_1} + B) + \cdots + (a_{i_n} + B) \\ &= (b_{i_1} + c_{i_1} + B) + \cdots + (b_{i_n} + c_{i_n} + B) \text{ donde } b_{i_j} \in B \text{ y } c_{i_j} \in C_{i_j} \\ &= (c_{i_1} + \cdots + c_{i_n} + B) \end{aligned}$$

lo que implica que $a = c_{i_1} + \cdots + c_{i_n} + b$ para alguna $b \in B$. Por lo tanto $a \in B \sum \bigoplus C_i$. Sea $b = c_{i_1} + \cdots + c_{i_n}$, donde $b \in B$, $c_{i_j} \in C_{i_j}$. Tomando clases en A/B

$$\begin{aligned} \overline{b} &= \overline{c_{i_1}} + \cdots + \overline{c_{i_n}} \\ 0 &= \overline{c_{i_1}} + \cdots + \overline{c_{i_n}} \end{aligned}$$

entonces $\overline{c_{i_1}} = \cdots = \overline{c_{i_n}} = \overline{0}$, es decir, $c_{i_1}, ..., c_{i_n} \in B$. Como $B \cap C_i = \{0\}$ para toda $i \in I$, luego $c_{i_1} = \cdots = c_{i_n} = 0$ y por lo tanto también $b = 0$.

Todo lo anterior prueba que $A = B \bigoplus \left(\bigoplus_{i \in I} C_i \right)$.

□

Proposición 1.1.19. *Sea A un grupo y B un subgrupo de A. B es un sumando directo de A si y sólo si el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "i"] \arrow[d, "Id_B"'] & A \arrow[dl, "\pi"] \\ B & \end{tikzcd}$$

donde i es el morfismo inclusión y π es un morfismo suprayectivo tal que $\pi^2 = \pi$.

Demostración.

$\Rightarrow$) Sea C un subgrupo de A tal que $A = B \oplus C$ y π la proyección de A sobre B. Evidentemente hacen comutar el diagrama.

$\Leftarrow$) Demostraremos que $A = B \oplus \ker(\pi)$. Sea $x \in B \cap \ker(\pi)$. Como el diagrama conmuta $x = Id(x) = \pi \circ i(x) = \pi(x) = 0$, por lo tanto la intersección de B y del $\ker(\pi)$ es trivial. Para cada $a \in A$ se tiene que $a = \pi(a) + (a - \pi(a))$, $\pi(a) \in B$ y $a - \pi(a) \in \ker(\pi)$. Por lo tanto B es un sumando directo de A. □

1.2. Grupos de torsión

Las siguientes secciones serán fundamentales para el desarrollo del Capítulo 2 (Grupos divisibles).

Definición 1.2.1. *Sea A un grupo. Definimos la parte de torsión de A, denotado por T_A, como el conjunto de todos los elementos de A que son de orden finito.*

Observación 1.2.2. *Si A es un grupo, entonces T_A es un subgrupo de A.*

Ejemplo 1.2.3. *Grupos de torsión*

1. *Si A es un grupo finito, entonces $T_A = A$.*
2. *Si A es un p-grupo, entonces $T_A = A$.*
3. *Para $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}.+)$ y $(\mathbb{C}, +)$ su parte de torsión es el subgrupo propio trivial.*

Observación 1.2.4. *Consideremos el grupo multiplicativo no abeliano A de todas las matrices de 2×2 con entradas reales. Las siguiente matrices son de orden finito $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ sin embargo $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ es una matriz que no es de orden finito. En conclusión, si A es un grupo no abeliano se tiene que T_A no necesariamente es un subgrupo de A.*

Teorema 1.2.5. *Todo grupo de torsión es suma directa de grupos p-primarios.*

Demostración. Sea G un grupo de torsión. Consideramos para cada número primo p

$$G_p := \{x \in G | p^k x = 0, \text{ para algún } k \in \mathbb{N}\}.$$

G_p es un $p-$subgrupo de G. En efecto, si $x, z \in G_p$, entonces $o(x+z) \leq p^{k_1+k_2}$ donde k_1 y k_2 son los enteros que cumplen que $o(x) = p^{k_1}$ y $o(z) = p^{k_2}$, además de que $o(x) = o(-x)$ y es claro que $0 \in G_p$.

Probaremos que $G = \bigoplus\limits_{p\in\mathbb{P}} G_p$, donde $\mathbb{P}$ es el conjunto de todos los números primos.

1. Sea $x \in G$ y $p_1^{r_1} \cdots p_s^{r_s}$ la descomposición única en números primos de $o(x)$. Sea $n_i = \frac{n}{p_i^{r_i}}$ con $1 \leq i \leq s$. Se tiene $(n_1, n_2, ..., n_s) = 1$ y sean $a_1, a_2, ..., a_s \in \mathbb{Z}$ tales que

$$1 = a_1 n_1 + \cdots + a_s n_s$$
$$x = a_1 n_1 x + \cdots + a_s n_s x.$$

   Notemos que $o(n_i x) = p_i^{r_i}$ por lo que $n_i x \in G_{p_i}$ y por lo tanto $G = \sum\limits_{p\in\mathbb{P}} G_p$.

2. Sea $x \in G_p \cap \left\langle \bigcup\limits_{\substack{q\in\mathbb{P}\\ p\neq q}} G_q \right\rangle$ con $o(x) = p^r$ para algún $r \in \mathbb{Z}$. Si $x = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i y_{q_i}$, donde para cada $i \in \{1, ..., n\}$, $y_{q_i} \in G_{q_i}$ y $o(y_{q_i}) = q_i^{s_i} \neq p$. Si $t = \prod\limits_{i=1}^{n} q_i^{s_i}$, entonces $(t, p^r) = 1$.

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que

$$\begin{aligned} 1 &= at + bp^r \\ x &= atx + bp^r x \\ &= 0. \end{aligned}$$

De (1) y (2) se sigue que $G = \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} G_p$.

□

Definición 1.2.6. *Un grupo A se dice que es acotado si existe un número natural n tal que $nA = 0$.*

Proposición 1.2.7. *Un grupo acotado A es suma directa de grupos cíclicos.*

Demostración. Como A es acotado existe un número natural n tal que $nA = 0$, entonces A es de torsión ($A = T_A$) y por el teorema 1.2.5, $A \cong \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} A_p$ es suma directa de p-grupos los cuales están acotados.
Sea $a \in A_p - \{0\}$. Supongamos que $h(a) = m$ y que $o(a) = p^{m'}$, entonces existe $b \in A$ tal que $p^m b = a$, así $p^{m+m'} b = p^{m'} a = 0$ por lo que $p^m \leq o(b)$ y además $b \in A_p$. Debido a que $nb = 0$, entonces $p^m \leq n$ y usando el hecho de que $n \leq p^n$ implica que $p^m \leq p^n$ y por consiguiente la altura de todo elemento distinto de cero de A_p es menor o igual a n. Cada A_p es acotado y debido al teorema 1.1.17 (donde la cadena ascendente está dada por $A_p \leq A_p \leq A_p \cdots$) es suma directa de grupos cíclicos. □

Definición 1.2.8. *Decimos que un grupo A es libre de torsión si $T_A = 0$.*

Proposición 1.2.9. *Sea A un grupo, entonces A/T_A es libre de torsión.*

Demostración. Sea $\bar{x} \in A/T_A$ y suponemos que $\bar{0} = n\bar{x}$. Entonces $nx \in T_A$ y por lo tanto $mnx = 0$ para algúna $m \in \mathbb{Z}$, es decir, $x \in T_A$. Luego $\bar{x} = \bar{0}$. □

Ejemplo 1.2.10. *Grupos libres de torsión*

1. $(\mathbb{Z}, +)$
2. $(\mathbb{Q}, +)$
3. $(\mathbb{R}, +)$

Proposición 1.2.11. *Sea A un grupo y C un B-supremo de A. $A = B \oplus C$ si y sólo si para toda $a \in A$ tal que $pa = b' + c' \in B \oplus C$, con p un número primo, implica $b' = pb$ para algún $b \in B$.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Sea $a \in A = B \oplus C$

$$\begin{aligned} a &= b + c \\ pa &= pb + pc \\ &= b' + c' \in B \oplus C \end{aligned}$$

por lo tanto b es el elemento buscado.

$\Leftarrow$) Sea $a \in A$ tal que $pa = b + c \in B \oplus C$, $b = pb'$ por hipotesis, así $a - b'$ cumple las condiciones de la proposición 1.1.4, es decir, $a - b' \in B \oplus C$ y por lo tanto $a \in B \oplus C$. De lo anterior $A/(B \oplus C)$ no tiene elementos de orden algún primo y entonces es libre de torsión. Sea $a_0 \in A$ tal que $a_0 \notin B \oplus C$. Ya que $C < \langle C \cup \{a_0\} \rangle$, necesariamente existe $b_0 \in \langle C \cup \{a_0\} \rangle \cap B$ con $b_0 \neq$. Si $b_0 = c_0 + na_0$, entonces

$$na_0 = b_0 - c_0 \in B \oplus C$$

lo que contradice que $A/(B \oplus C)$ es libre de torsión, por lo tanto no existen elementos en A que no pertenezcan a $B \oplus C$. □

Teorema 1.2.12. *Si un subgrupo B de un grupo A es tal que A/B es un grupo libre, entonces B es sumando directo de A.*

Demostración. Caso 1. Supongamos que A/B es un grupo cíclico. Entonces A/B es generado por un elemento $\overline{a}$. Para cada $a' \in A$ consideramos $\overline{a'} \in A/B = \langle \overline{a} \rangle$, por lo que $\overline{a'} = n\overline{a}$, para algún entero n. Lo que implica que $a' - na \in B$ y por lo tanto $A = B + \langle a \rangle$. Ahora si $x \in B \cap \langle a \rangle$, $x = ma \in B$ para algún entero positivo m, tomando clases $\overline{ma} = \overline{0}$ lo que demuestra que $m = 0$ y por lo tanto $x = 0$. Podemos concluir que $A = B \oplus \langle a \rangle$.
Caso 2. Supongamos que A/B es suma directa de grupos cíclicos por lo que $A/B = \bigoplus_{i \in I} A_i/B$, donde A_i/B es cíclico para todo $i \in I$. Gracias al caso 1 tenemos que B es sumando directo de cada A_i y por el teorema 1.1.18 se tiene que B es sumando directo de A. □

1.3. Grupos cocíclicos

Definición 1.3.1. *Sea C un grupo. Decimos que C es cocíclico si existe $c \in C$ tal que para todo homomorfismo $\varphi : C \longrightarrow B$ se cumple que, si $c \notin \ker(\varphi)$, entonces φ es inyectiva. Llamamos al elemento c un cogenerado de C.*

Proposición 1.3.2. *Un grupo C es cocíclico si y sólo si la interseccion de todos los subgrupos de C distintos de 0 es no trivial.*

Demostración. $\Rightarrow$) Sean C un grupo cocíclico, c un cogenerador y D un subgrupo no trivial de C. Si $c \notin D$ consideramos $\varphi : C \longrightarrow C/D$ el morfismo canónico. $c \notin \ker(\varphi) = D$ y como D es no trivial φ no es monomorfismo, contradiciendo el hecho de que C es cocíclico. Por lo tanto c está en la interseccion de todos los subgrupos no triviales de C.

$\Leftarrow$) Sea $c \neq 0$ en la intersección de los subgrupos no triviales de C y $\varphi : C \longrightarrow B$ un morfismo tal que $c \notin \ker(\varphi) \leq C$. Entonces $\ker(\varphi) = 0$ y por lo tanto φ es un monomorfismo.

□

Ejemplo 1.3.3. *Si p es un número primo y k un número entero positivo, $\mathbb{Z}_{p^k}$ es un grupo cocíclico.*

Demostración. Sea $D \leq \mathbb{Z}_{p^k}$ distinto del subgrupo trivial cero. $p|\mid D\mid$, entonces D tiene un elemento de orden p, pero los únicos elementos de ese orden en $\mathbb{Z}_{p^k}$ son:

$$\overline{p^{k-1}}, \overline{2p^{k-1}}, \overline{3p^{k-1}}, ..., \overline{(p-1)p^{k-1}}$$

y cualquiera de estos genera al subgrupo $G_p := p^{k-1}, \overline{2p^{k-1}}, \overline{3p^{k-1}}, ..., \overline{(p-1)p^{k-1}}$ que es un grupo cíclico de orden p. Por lo tanto $G_p \leq D$ y por el teorema 1.3.2 $\mathbb{Z}_{p^k}$ es cocíclico. □

Presentaremos a continuación un grupo infinito donde cada elemento es de orden finito. Este grupo será fundamental para la clasificación de los grupos cocíclicos y de los grupos divisibles.

Consideramos a $\mathbb{Q}$ como grupo aditivo. Definimos, para cada número primo p, $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ como la parte p-primaria del grupo cociente $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z}_{p^\infty} := \left\{ \overline{\frac{m}{p^k}} | m, k \in \mathbb{N} \right\} \leq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Teorema 1.3.4. *Sean F el grupo libre generado por un conjunto numerable $\{c_i\}_{i=1}^{\infty}$, p un número primo y H el subgrupo de F generado por el conjunto $\{pc_1, pc_n - c_{n-1};\ \text{para } n \geq 2\}$. Entonces F/H es isomorfo a $\mathbb{Z}_{p^\infty}$.*

Demostración. Sea f la función definida por

$$f : \{c_i\}_{i=1}^{\infty} \longrightarrow \mathbb{Z}_{p^\infty}$$

$$c_n \longmapsto \overline{\frac{1}{p^n}}$$

Entonces existe $\psi : F \longrightarrow \mathbb{Z}_{p^\infty}$ morfismo de grupos que extiende a f.
1) ψ es suprayectiva.

Sea $\overline{\frac{m}{p^k}} \in \mathbb{Z}_{p^\infty}$ para algunos m y $k \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\psi(mc_k) = m\psi(c_k) = mf(c_k) = m\overline{\frac{1}{p^k}} = \overline{\frac{m}{p^k}}$$

lo que prueba que ψ es suprayectiva.
2) $Ker(\psi) = H$.
$\supseteq$) Para esta contensión basta probar que los generadores de H están contenidos en el núcleo de ψ.
a)$\psi(pc_1) = p\psi(c_1) = pf(c_1) = p\overline{\frac{1}{p}} = \overline{\frac{p}{p}} = \overline{1} = \overline{0}$.
b)$\psi(pc_n - c_{n-1}) = p\psi(c_n) - \psi(c_{n-1}) = pf(c_n) - f(c_{n-1}) = \overline{\frac{p}{p^n}} - \overline{\frac{1}{p^{n-1}}} = \overline{0}$.
Por lo anterior H está contenido en el núcleo de ψ.
$\subseteq$) Para esta parte de la demostración necesitamos la ayuda de las siguinetes observaciones.

Observación 1.3.5. *Si para toda $n \in \mathbb{Z}^+$, $\overline{c_n} := c_n + H$, entonces $o(\overline{c_n})|p^n$.*

Demostración. Por inducción sobre n.
$n = 1$, $pc_1 \in H$ y $p\overline{c_1} = \overline{0}$, entonces $o(\overline{c_1})|p$.
Suponemos que, para $n > 1$, $p^n\bar{c_n} = \overline{0}$.

$$\begin{aligned} p^{n+1}\overline{c_{n+1}} &= pp^n\overline{c_{n+1}} - p^n\overline{c_n} \\ &= p^n(p\overline{c_{n+1}} - \overline{c_n}) \\ &= \overline{0}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $o(\overline{c_n})|p^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

□

Observación 1.3.6. *Si n y $m \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$, entonces $p^m\overline{c_n} = \overline{c_{n-m}}$.*

Demostración. Basta observar que

$$p^j c_n - c_{n-j} = \sum_{i=1}^{j} p^{j-i}(pc_{(n+1-i)} - c_{n-i}) \in H.$$

Lo que prueba que $p^j\overline{c_n} = \overline{c_{n-j}}$ en F/H. □

Regresemos a la demostración de la contensión.
Sea $x \in Ker(\psi)$,

$$x = b_1c_{i_1} + b_2c_{i_2} + \cdots + b_nc_{i_n} \text{ donde los } b_k \in \mathbb{Z} \text{ y } c_{i_j} \in \{c_i\}_{i=1}^{\infty}. \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} \overline{0} &= \psi(x) = \psi(b_1c_{i_1} + b_2c_{i_2} + \cdots + b_nc_{i_n}) \\ &= \overline{\tfrac{b_1}{p^{i_1}}} + \overline{\tfrac{b_2}{p^{i_2}}} + \cdots + \overline{\tfrac{b_n}{p^{i_n}}}. \end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad supongamos que $i_j \leq i_n$ para todo $j = 1, 2, 3, ..., n$. Entonces

$$\begin{aligned} z &= \tfrac{b_1}{p^{i_1}} + \tfrac{b_2}{p^{i_2}} \cdots + \tfrac{b_n}{p^{i_n}} \text{ para alguna } z \in \mathbb{Z} \\ &= \tfrac{b_1 p^{i_n - i_1} + b_2 p^{i_n - i_2} + \cdots + b_{n-1} p^{i_n - i_{n-1}} + b_n}{p^{i_n}} \end{aligned}$$

donde $b_n = zp^{i_n} - \sum_{j=1}^{n-1} b_j p^{i_n - i_j}$. Sustituyendo b_n en (1.1)

$$\begin{aligned} x &= b_1 c_{i_1} + b_2 c_{i_2} + \cdots + b_{n-1} c_{i_{n-1}} + zp^{i_n} c_{i_n} - \sum_{j=1}^{n-1} b_j p^{i_n - i_j} c_{i_n} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} b_k c_{i_k} + zp^{i_n} c_{i_n} - \sum_{j=1}^{n-1} b_j p^{i_n - i_j} c_{i_n} \end{aligned}$$

Tomando clases de equivalencia y usando las observaciones 1.3.5 y 1.3.6

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \overline{b_1 c_{i_1} + b_2 c_{i_2} + \cdots + b_{n-1} c_{i_{n-1}} + zp^{i_n} c_{i_n} - \sum_{j=1}^{n-1} b_j p^{i_n - i_j} c_{i_n}} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \overline{b_j c_{i_k}} + \overline{zp^{i_n} c_{i_n}} - \sum_{j=1}^{n-1} \overline{b_j p^{i_n - i_j} c_{i_n}} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \overline{b_k c_{i_k}} - \sum_{j=1}^{n-1} \overline{b_j c_{i_j}} \\ &= \overline{0}. \end{aligned}$$

Lo que prueba que $\mathbb{Z}_{p^\infty} \cong F/H$. □

Observación 1.3.7. *Para cada $\overline{c_n} \in F/H$ se tiene que su orden es p^n.*

Observación 1.3.8. *Si $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ lo consideramos como F/H, entonces todo elemento de él es de la forma $r\overline{c_n}$ para algunos $r \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{Z}^+$.*

De aqui en adelante consideraremos (para uso práctico) a $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ como F/H.

Observación 1.3.9. *Si $B \leq \mathbb{Z}_{p^\infty}$ con B distinto del subgrupo cero, entonces existe un natural n tal que $\overline{c_n} \in B$.*

Demostración. Sea $\overline{0} \neq x \in B$. Por el colorario 1.3.8, $x = r\overline{c_n}$ para algunos $r \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{Z}^+$. Podemos suponer que r y p son primos relativos. Existen t y s enteros tales que $1 = tr + p^n s$, de donde $c_n = (tr)c_n + (p^n s)c_n = (tr)c_n$ y por consiguiente

$$\overline{c_n} = tr\overline{c_n} = tx \in B.$$

□

Lema 1.3.10. *Se cumple que $\langle \overline{c_n} \rangle \leq \langle \overline{c_{n+1}} \rangle$ para todo natural n.*

Demostración. Basta observar que: $\overline{c_n} = p\overline{c_{n+1}} \in \langle \overline{c_{n+1}} \rangle$

□

Lema 1.3.11. *Todo subgrupo propio de $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ es finito y de orden una potencia de p. Más aún está generado por algún $\overline{c_n}$.*

Demostración. Sea $B < \mathbb{Z}_{p^\infty}$ con B distinto del subgrupo cero. Por el corolario 1.3.9 existe l número natural tal que $\overline{c_l} \in B$. Sea $n+1$ el mínimo natural tal que $\overline{c_{n+1}} \notin B$. Demostraremos que $B = \langle \overline{c_n} \rangle$.
Sea $b \in B$. Por el corolario 1.3.8 $b = r\overline{c_m}$ para algunos $r \in \mathbb{Z}$ y $m \in \mathbb{N}$, con r y p primos reltivos. Existen t y s enteros tales que $tr + sp^m = 1$. Multiplicando la igualdad anterior por $\overline{c_m}$

$$\overline{c_m} = tr\overline{c_m} + sp^m\overline{c_m} = tr\overline{c_m} = tb \in B.$$

Entonces $m \leq n$ y por el lema 1.3.10 se tiene que

$$b = r\overline{c_m} \in \langle \overline{c_m} \rangle \leq \langle \overline{c_n} \rangle.$$

□

Teorema 1.3.12. *$\mathbb{Z}_{p^\infty}$ es cocíclico.*

Demostración. Sea $B < \mathbb{Z}_{p^\infty}$ con B distinto del subgrupo cero. Por el lema anterior $B = \langle \overline{c_n} \rangle$ para algún natural n y por el lema 1.3.10 $\langle \overline{c_1} \rangle \leq \langle \overline{c_n} \rangle = B$. Por lo que la intersección de todos los subgrupos de $\mathbb{Z}_{p^\infty}$, distintos del subgrupo cero, es igual al subgrupo generado por $\overline{c_1}$ y por lo tanto $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ es cocíclico (revisar proposición 1.3.2). □

Teorema 1.3.13. *Sea G un grupo y $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... \in G$ tales que*

$$\langle a_1 \rangle < \langle a_2 \rangle < \cdots \langle a_n \rangle < \cdots$$

con $o(a_j) = p^j$ y además $pa_i = a_{i-1}$ para todo $i \geq 2$. Entonces $\bigcup_{j=1}^{\infty} \langle a_j \rangle \cong \mathbb{Z}_p^\infty$.

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\langle a_1 \rangle \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\alpha_1"] & \langle a_2 \rangle \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\alpha_2"] & \langle a_3 \rangle \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\alpha_3"] & ... \arrow[r, "i"] & \langle a_n \rangle \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\alpha_n"] & ... \\
\langle c_1 \rangle \arrow[r, "i"] & \langle c_2 \rangle \arrow[r, "i"] & \langle c_3 \rangle \arrow[r, "i"] & ... \arrow[r, "i"] & \langle c_n \rangle \arrow[r, "i"] & ...
\end{tikzcd}$$

donde los c_j son los elementos del teorema 1.3.4, i es la función inclusión y como $\langle a_j \rangle$ y $\langle c_j \rangle$ son grupos cíclicos del mismo orden, α_j denotará el isomorfismo tal que $\alpha_j(a_j) = c_j$, para cada $j \in \mathbb{Z}^+$. Todo lo anterior indica que el diagrama es conmutativo. Definimos

$$\psi : \bigcup_{j=1}^{\infty} \langle a_j \rangle \longrightarrow \mathbb{Z}_p^\infty$$

$$x \longmapsto \alpha_j(x) \text{ si } x \in \langle a_j \rangle.$$

1)ψ está bien definida.
Sea $x \in \langle a_j \rangle \cap \langle a_k \rangle$, entonces $x = na_j$ donde n es un número entero. Sin pérdida de generalidad supongamos que $j \leq k$, por como se definieron los $a_i' s$ se tiene que $p^{k-j}a_k = a_j$ y así $x = na_j = np^{k-j}a_k$. Por un lado $\psi(x) = \psi(na_j) = \alpha_j(na_j) = nc_j$ y por el otro $\psi(x) = \psi(np^{k-j}a_k) = \alpha_k(np^{k-j}a_k) = np^{k-j}c_k = nc_j$.

2) ψ es morfismo de grupos.
Sean $x, y \in \bigcup_{j=1}^{\infty} \langle a_j \rangle$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $x, y \in \langle a_j \rangle$. $\psi(x + y) = \alpha_j(x + y) = \alpha_j(x) + \alpha_j(y) = \psi(x) + \psi(y)$.

3) ψ es inyectiva.
Sea $x \in \bigcup_{j=1}^{\infty} \langle a_j \rangle$ tal que $\psi(x) = 0$. Como $x \in \langle a_i \rangle$ para alguna i, entonces $\alpha_i(x) = \psi(x) = 0$, pero α_i es un isomorfismo por lo que $x = 0$.

4) ψ es suprayectiva.
Sea $y \in \mathbb{Z}_p^{\infty}$. Entonces $y \in \langle c_j \rangle$ para algún $j \in \mathbb{N}^+$, por lo que existe $x \in \langle a_j \rangle$ tal que $\alpha_j(x) = y$ y por lo tanto $\psi(x) = y$. $\square$

Teorema 1.3.14. *Un grupo C es cocíclico si y sólo si C es isomorfo a algún $\mathbb{Z}_{p^k}$ o a $\mathbb{Z}_{p^\infty}$.*

Demostración.

$\Leftarrow$) Ver ejemplo 1.3.3 y teorema 1.3.12.

$\Rightarrow$) Sea $c \in C$ un cogenerador. Ya que $\langle c \rangle$ es el subgrupo de C, no trivial, que está contenido en todo subgrupo no trivial de C, entonces $\langle c \rangle$ es de orden un número primo p.
El grupo C cumple las siguientes propiedades:
1) No tiene elementos de orden infinito.
De tener un elemento g de orden infinito, $\langle g \rangle$ sería infinito. Pero $c \in \langle g \rangle$ implicaria que c es de orden infinito, contradiciendo que c es de orden p.
2) Es un p-grupo.
Sea $g \in C$. Del punto anterior se tiene que $o(g)$ es finito. Consideremos $\langle g \rangle$. Como $c \in \langle g \rangle$, entonces $p | o(g)$. Supongamos que $o(g) = p^k m$ con p y m primos relativos. Entonces existe D subgrupo de $\langle g \rangle$ tal que $|D| = m$. Pero $c \in D$ (por ser un cogenerador), lo que implica que $p|m$, contradiciendo que m y p son primos relativos. Por lo tanto $o(g) = p^k$.
Demostraremos que si C tiene un subgrupo de orden p^n, este es cíclico y único, el cual denotaremos por $\langle d_n \rangle$, más aún $\langle d_1 \rangle \leq \rangle d_2 \rangle \leq ... \leq \langle d_n \rangle$.
Por inducción sobre n. $n = 1$. $\langle c \rangle$ es un subgrupo de orden p. Si E es un grupo de orden p,

entonces $\langle c\rangle \leq D$ lo que implica que $\langle c\rangle = \langle d_1\rangle = E$.
Suponemos válido que si A es un subgrupo de C de orden k, con $k \leq n$, entonces $A = \langle d_n\rangle$ y además $\langle d_1\rangle \leq\rangle d_2\rangle \leq ... \leq \langle d_n\rangle = A$
Supongamos que A y B son subgrupos de C de orden p^{n+1}. Si $a \in A$ con $o(a) = p^m \leq p^n$, entonces $\langle a\rangle = \langle d_m\rangle \leq \langle d_n\rangle$. Sean $a \in A$ y $b \in B$ tal que $a, b \notin \langle d_n\rangle$. Entonces $o(a) = o(b) = p^{n+1}$ y pa, $pb \in \langle d_n\rangle$. Luego $pa = rd_n$ y $pb = sd_n$ para algunos $r, s \in \mathbb{Z}$ tales que $(p, r) = (p, s) = 1$. Existen r', s', t, u enteros tales que

$$p^n t + rr' = p^n u + ss' = 1. \tag{1.2}$$

Sean $a' = r'a$ y $b' = s'b$. Entonces $\langle a'\rangle = \langle a\rangle$ y $\langle b'\rangle = \langle b\rangle$ ya que r' y s' son primos relativos con p^n.
Ayudándonos de la igualdad 1.2 tenemos que

$$pa' = p(r'a) = r'pa = r'rd_n = (1 - p^n t)d_n = d_n \tag{1.3}$$

$$pb' = p(s'b) = s'pb = s'sd_n = (1 - p^n u)d_n = d_n \tag{1.4}$$

Por lo que $p(a' - b') = 0$. $a' - b' \in \langle d_1\rangle \leq \langle d_n\rangle$. $a' - b' = ld_n$ para algún $l \in \mathbb{Z}$. Usando lo anterior y las igualdades (1.3) y (1.4) tenemos

$$\begin{aligned} a' &= ld_n + b' = lpb' + b' \in \langle b'\rangle = \langle b\rangle \\ b' &= a' - ld_n = a' - lpa' \in \langle a'\rangle = \langle a\rangle \end{aligned}$$

Así $A = \langle a'\rangle = \langle b'\rangle = B$.
Si C es finito existe k natural tal que $C = \langle d_k\rangle$. Como $\langle d_k\rangle$ es cíclico de orden p^k, entonces C es isomorfo a $\mathbb{Z}_{p^k}$.
Si C es infinito tenemos la siguiente cadena ascendente

$$\langle d_1\rangle \leq \langle d_2\rangle \leq \cdots \leq \langle d_n\rangle \leq \cdots.$$

donde $o(d_i) = p^i$ y $C = \bigcup_{i=1}^{\infty} \langle d_i\rangle$. Dada esta cadena podemos crear una nueva $\langle e_1\rangle \leq \langle e_2\rangle \leq \cdots \leq \langle e_n\rangle \leq \cdots$ de la siguiente manera:
El primer elemento $e_1 = d_1$. En general para $m \geq 1$, $e_m \in \langle d_{m+1}\rangle$, por lo que existe n_m entero tal que $e_m = pn_m d_{m+1}$, definimos $e_{m+1} = n_m d_{m+1}$. Esta nueva cadena cumple que $o(e_i) = p^i$, $C = \bigcup_{i=1}^{\infty} \langle e_i\rangle$ y además $pe_j = e_{j-1}$ para toda $j \geq 2$. Entonces por el teorema 1.3.13, $C \cong \mathbb{Z}_{p^\infty}$.

□

Teorema 1.3.15. *Sea A un grupo y a un elemento de A no cero. Si M es un subgrupo maximal de A con la propiedad de exclusión de a, entonces A/M es cocíclico.*

Demostración. Sea D/M un subgrupo no cero de A/M. Como $M < D$ y M es maximal con la propiedad de exclusión de a, entonces $a \in D$, así $\overline{a} \in D/M$ para todo subgrupo de A/M y por lo tanto A/M es cocíclico. $\square$

Las siguientes dos definiciones serán de suma importancia para el capítulo 3 donde ocuparemos propiedades universales.

Definición 1.3.16. *Un grupo A es finitamente generado si es suma directa de una cantidad finita de grupos cíclicos.*

Definición 1.3.17. *Un grupo A es finitamente cogenerado si es suma directa de una cantidad finita de grupos cocíclicos.*

1.4. Lema del 3×3 para sucesiones exactas

Definición 1.4.1. *Una sucesión de grupos A_i y homomorfismos de grupos α_i*

$$A_0 \xrightarrow{\alpha_1} A_1 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \xrightarrow{\alpha_k} A_k$$

es exacta si $Im(\alpha_i) = \ker(\alpha_{i+1})$ para todo $i = 1, 2, 3, ..., k-1$.

Lema 1.4.2. *(del 3×3) Asúmase que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\lambda_1"] \arrow[dr, phantom, "1"] & B_1 \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "\mu_1"] \arrow[dr, phantom, "2"] & C_1 \arrow[r] \arrow[d, "\eta_1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\lambda_2"] \arrow[dr, phantom, "3"] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\mu_2"] \arrow[dr, phantom, "4"] & C_2 \arrow[r] \arrow[d, "\eta_2"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d] & B_3 \arrow[r, "\beta_3"] \arrow[d] & C_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

y todas las columnas son sucesiones exactas. Si las primeras dos filas o las ultimas dos filas son sucesiones exactas, entonces la fila restante es una susesión exacta.

Demostración. Probaremos que si las primeras dos filas son suseciones exactas, entonces la tercera fila es exacta. La otra demostración es muy parecida a la presentada a continuación.

1) α_3 es inyectiva.
Sea $a_3 \in \ker(\alpha_3)$. Tomemos $a_2 \in A_2$ tal que

$$\lambda_2(a_2) = a_3 \tag{1.5}$$

Como el diagrama 3 conmuta $\mu_2 \circ \alpha_2(a_2) = \alpha_3 \circ \lambda_2(a_2) = 0$. Existe $b_1 \in B_1$ tal que

$$\mu_1(b_1) = \alpha_2(a_2). \tag{1.6}$$

Del diagrama conmutativo 2, $\eta_1 \circ \beta_1(b_1) = \beta_2\mu_1(b_1) = \beta_2 \circ \alpha_2(a_2) = 0$ y por ser η_1 monomorfismo, $\beta_1(b_1) = 0$. Existe $a_1 \in A_1$ tal que $\alpha_1(a_1) = b_1$. Sustituyendo en 1.6 y por el diagrama conmutativo 1, $\alpha_2(a_2) = \mu_1(b_1) = \mu_1 \circ \alpha_1(a_1) = \alpha_2 \circ \lambda_1(a_1)$, lo que implica que $\lambda_1(a_1) = a_2$ por ser α_2 inyectiva. Usando las igualdades anteriores y el hecho de que la primera columna es exacta se tiene que $0 = \lambda_2 \circ \lambda_1(a_1) = \lambda_2(a_2) = a_3$.

2) β_3 es suprayectiva.
Basta observar que $C_3 = Im(\eta_2 \circ \beta_2) = Im(\beta_3 \circ \mu_2) \leq Im(\beta_3) \leq C_3$.

3)$Ker(\beta_3) = Im(\alpha_3)$.
$\beta_3 \circ \alpha_3 \circ \lambda_2 = \beta_3 \circ \mu_2 \cdot \alpha_2 = \eta_2 \circ \beta_2 \circ \alpha_2 = 0$. λ_2 es epimorfismo lo que implica que $\beta_3 \circ \alpha_3$ es la tranformación cero, es decir, $Im(\alpha_3) \subseteq \ker(\beta_3)$.
Sea $b_3 \in \ker(\beta_3)$. Existe $b_2 \in B_2$ tal que $\mu_2(b_2) = b_3$. Del diagrama conmutativo 4, $\eta_2 \circ \beta_2(b_2) = \beta_3 \circ \mu_2(b_2) = 0$. Podemos encontrar $c_1 \in C_1$ que satisface $\beta_2(b_2) = \eta_1(c_1)$, y además por ser β_1 epimorfismo se tiene que existe $b_1 \in B_1$ tal que $\beta_1(b_1) = c_1$. Entonces $\beta_2(b_2 - \mu_1(b_1)) = \beta_2(b_2) - \beta_2 \circ \mu_1(b_1) = \eta(c_1) - \eta_1 \circ \beta_1(b_1) = 0$. Existe $a_2 \in A_2$ tal que $\alpha_2(a_2) = b_2 - \mu_1(b_1)$, entonces $\alpha_3 \circ \lambda_2(a_2) = \mu_2 \circ \alpha_2(a_2) = \mu_2(b_2 - \mu_1(b_1)) = \mu_2(b_2) = b_3 \in Im(\alpha_3)$. $\square$

Capítulo 2

Grupos divisibles

2.1. Definiciones y ejemplos

Definición 2.1.1. *Sean G un grupo, $g \in G$ y $n \in \mathbb{Z}$. Decimos que n divide a g , denotandolo por $n|g$, si existe $b \in G$ tal que $nb = g$.*

Definición 2.1.2. *Un grupo D es divisible si cada elemento de éste es divisible por cada entero positivo.*

Ejemplo 2.1.3. *$(\mathbb{Q}, +)$ y $\mathbb{Z}_p^\infty$ son grupos divisibles.*

Demostración. Que $(\mathbb{Q}, +)$ es un grupo divisible es trivial.
Para $\mathbb{Z}_p^\infty$. Sea $x = \frac{\bar{m}}{p^k} \in \mathbb{Z}_p^\infty$ y $n \in \mathbb{Z}^+$. Si $(p, n) = 1$ existen s y t enteros tales que $sp^k + tn = 1$, así

$$\begin{aligned} x &= sp^k x + tnx \\ &= ntx \\ &= nx'. \end{aligned}$$

Si $(p, n) \neq 1$ signífica que p divide a n. Sea $p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}$ la descomposición en primos de n, donde sin pérdida de generalidad podemos suponer que $p = p_1$. Consideremos $\frac{n}{p^{r_1}}$. Entonces $(\frac{n}{p^{r_1}}, p^k) = 1$ y por lo tanto existen s, t enteros tales que $sp^k + t \cdot \frac{n}{p^{r_1}} = 1$

$$\begin{aligned} x &= sp^k x + t\frac{n}{p^{r_1}} x \\ &= t\frac{n}{p^{r_1}} \left(\frac{\bar{m}}{p^k}\right) \\ &= nt\frac{\bar{m}}{p^{r_1+k}} \end{aligned}$$

donde $t\frac{\bar{m}}{p^{r_1+k}} \in \mathbb{Z}_p^\infty$. □

Teorema 2.1.4. *Si en un p-grupo D todo elemento de orden p es de altura infinita, entonces D es divisible.*

Demostración. Sea $a \in D$, con $a \neq 0$. Probaremos que $p|a$ por inducción sobre la potencia del orden de a. Si $o(a) = p$, entonces existe $b \in D$ tal que es solución de la ecuación $px = a$, por lo que $p|a$. Supongamos que para $n > 1$, todo elemento de orden menor o igual a n es divisible por p. Sea $a \in D$ con $o(a) = p^{n+1}$. Luego $o(p^n a) = p$, por lo que existe $c \in D$ tal que es solución de $p^{n+1}c = p^n a$.

$$p^n a = p^{n+1}c = p^n(pc)$$

lo que implica que $o(a - pc) \leq p^n$ y por hipótesis de inducción $p|a - pc$, así $p|a$. Todo elemento de D es divisible por p, entonces p^k divide a cualquier elemento de D para toda $k \in \mathbb{Z}^+$. Debido al teorema 1.1.8, D es un p-grupo divisible. □

Teorema 2.1.5. *Sea $\{D_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de grupos. El producto directo de $\{D_\alpha\}_{\alpha\in I}$ ($\prod_{\alpha\in I} D_\alpha$) es divisible si D_α es divisible para cada $\alpha \in I$.*

Demostración. Sean $C = \prod_{\alpha\in I} D_\alpha$, donde para cada $\alpha \in I, D_\alpha$ es un grupo divisible, $(x_\alpha)_{\alpha\in I} \in C$ y $n \in \mathbb{Z}^+$. Ya que para cada $\alpha \in I$, D_α es divisible se tiene que dado $x_\alpha \in D_\alpha$ existe $d_\alpha \in D_\alpha$ tal que $nd_\alpha = x_\alpha$: luego, el elemento $(d_\alpha)_{\alpha\in I} \in C$ satisface que $n(d_\alpha)_{\alpha\in I} = (nd_\alpha)_{\alpha\in I} = (x_\alpha)_{\alpha\in I}$.

□

Observación 2.1.6. *Suma directa de grupos divisibles es divisible.*

Demostración. La prueba es análoga al teorema anterior. □

Teorema 2.1.7. *Sea H un subgrupo divisible de un grupo G. Entonces H es un sumando directo de G.*

Demostración. Sea H un subgrupo divisible de G. Consideremos el siguiente conjunto

$$\mathcal{F} = \{L \leq G : L \cap H = 0\}.$$

$\mathcal{F} \neq \varnothing$ ya que el subgrupo trivial cero está. Usaremos el Lema de Zorn para probar que $\mathcal{F}$ con la contensión como orden parcial, tiene elementos maximales. Sea $\mathfrak{C} = \{J_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una cadena en $\mathcal{F}$. Si $D = \bigcup_{\alpha\in I} J_\alpha$, entonces $D \leq G$, debido a que $\mathfrak{C}$ es una cadena y para cada $\alpha \in I$ claramente $J_\alpha \leq D$. Por otro lado

$$D \cap H = \Big(\bigcup_{\alpha\in I} J_\alpha\Big) \cap H = \bigcup_{\alpha\in I}(J_\alpha \cap H) = \bigcup_{\alpha\in I} 0 = 0$$

lo que prueba que $D \in \mathcal{F}$ y por el Lema de Zorn, $\mathcal{F}$ tiene al menos un elemento maximal K.
Probaremos que $H \oplus K = G$. Basta probar que $H + K = G$. Supongamos que existe $x \in G$ tal que $x \notin H + K$. Si $K' = \langle K, \{x\} \rangle$, entonces por la maximalidad de K existe $0 \neq b \in H \cap K'$, $b = k_1 + nx$, con $k_1 \in K$. Luego $nx = b - k_1 \in H + K$, sea m el mínimo entero positivo tal que $mx \in H + K$ y sea p un número primo tal que $p|m$. Si definimos $y = \frac{m}{p}x$, entonces $y \notin H + K$, pero $py = mx = h_2 + k_2 \in H + K$ con $h_2 \in H$ y $k_2 \in K$. Como H es divisible existe $h_3 \in H$ tal que $h_2 = ph_3$. Si $z = y - h_3$, $z \notin H + K$, entonces por la maximalidad de K existe $0 \neq b' \in H \cap \langle K, \{z\} \rangle$, $b' = k_3 + cz$ donde $k_3 \in K$ y $c \in \mathbb{Z}$. El número primo p no divide a c, ya que

$$\begin{aligned} pz &= py - ph_3 \\ &= h_2 + k_2 - ph_3 \\ &= k_2 \end{aligned}$$

lo que implica que $(p, c) = 1$ y existen $r, t \in \mathbb{Z}$ tales que $rp + tc = 1$

$$z = rpz + tcz = rk_2 + t(b' - k_3) = tb' + rk_2 - tk_3 \in H + K$$

contradiciendo que $z \notin H + K$. Por lo tanto $H + K = G$.

□

Lema 2.1.8. *Si D es un grupo divisible y $f : D \longrightarrow G$ es un homomorfismo de grupos, entonces $Im(f)$ es divisible.*

Demostración. Sean $g \in Im(f)$ y $n \in \mathbb{Z}^+$. Existen $d_1, d_2 \in D$ tales que $g = f(d_1)$ y $d_1 = nd_2$ luego $g = f(d_1) = f(nd_2) = nf(d_2)$ y por lo tanto $Im(f)$ es divisible. □

Corolario 2.1.9. *Si D es un grupo divisible y $f : D \longrightarrow G$ es un homomorfismo suprayectivo, entonces G es divisible.*

Corolario 2.1.10. *Todo cociente de un grupo divisile es divisible.*

Demostración. Basta tomar la proyección canónica la cual es suprayectiva. □

Corolario 2.1.11. *Sea $\{D_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de grupos. Si D es el producto directo de $\{D_\alpha\}_{\alpha \in I}$ o la suma directa y ésta es divisible, entonces D_α es divisible para cada $\alpha \in I$.*

Demostración. Sea $\alpha \in I$. Consideremos π_α la proyección del producto directo al grupo D_α, la cual es un morfismo suprayectivo y por el lema 2.1.7, D es divisible. □

La importancia de estudiar más a fondo los grupos divisibles, y por ende tratar de clasificarlos, nos lo da el siguiente teorema.

Teorema 2.1.12. *Todo grupo se puede expresar como suma directa de un grupo divisible y de un grupo que no contenga subgrupos divisibles salvo el trivial.*

Demostración. Sean G un grupo y $\mathcal{F} = \{D \leq G : D \text{ es divisible }\}$. Si $S := \sum \mathcal{F}$, entonces por el teorema 2.1.5 S es un grupo divisible y además S es el máximo de los subgrupos divisibles de G.
Sean $g \in S$ y $m \in \mathbb{Z}^+$ tales que $g = d_1 + d_2 + \cdots + d_n$, donde cada d_i está en algún grupo divisible D_i, entonces existen $d_1', d_2', ..., d_n'$ tales que $d_i' \in D_i$ y $d_i = md_i'$ para cada $0 \leq i \leq n$. Así $d_1'+d_2'+\cdots+d_n' \in S$ y $g = d_1+d_2+\cdots+d_n = md_1'+md_2'+\cdots+md_n' = m(d_1'+d_2'+\cdots+d_n')$. Por lo tanto S es un subgrupo maximal divisible y debido al teorema 2.1.7, existe R subgrupo de G tal que $G = S \oplus R$. Si L es un subgrupo divisible de G tal que $L \leq R$, entonces $L = 0$ ya que $L \leq S$ y además $L \leq S \cap R = \{0\}$. □

Lo que nos dice el teorema anterior es que los grupos divisibles estan presentes como sumandos directos de cualquier grupo abeliano.

2.2. Grupos inyectivos

Definición 2.2.1. *Si E es un grupo que satisface la condición de que para todo subgrupo A de un grupo B y para todo morfismo $\phi : A \longrightarrow E$ existe un morfismo $\overline{\phi} : B \longrightarrow E$ tal que $\overline{\phi}|_A = \phi$, decimos que E es un grupo inyectivo.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\phi"] & B \arrow[dl, "\overline{\phi}"] \\ E & \end{tikzcd}$$

Teorema 2.2.2. *Todo grupo divisible D es inyectivo.*

Demostración. Sea A un subgrupo de un grupo B y $\phi : A \longrightarrow D$ un morfismo de grupos. Consideremos

$$\mathcal{A} = \{(C, h) | A \leq C \leq B, h : C \longrightarrow D \text{ homomorfimo de grupos tal que } h|_A = \phi\}$$

el cual es no vacio ya que (A, ϕ) está en $\mathcal{A}$. Definimos en $\mathcal{A}$ la relación

$$(C, h) \leq (D, f) \text{ si y sólo si } C \leq D \text{ y } f|_C = h.$$

$(\mathcal{A}, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado. Usaremos el Lema de Zorn para probar que $(\mathcal{A}, \leq)$ tiene elementos maximales. Sea $\{(C_\alpha, h_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ una cadena en $\mathcal{A}$; ya que $\bigcup_{\alpha I} C_\alpha \leq B$, definimos

$$h : \bigcup_{\alpha \in I} C_\alpha \longrightarrow D$$

.

$$c \longmapsto h_\alpha(c) \text{ si } c \in C_\alpha$$

h está bien definida ya que, si $c \in C_{\alpha_1} \cap C_{\alpha_2}$ y $C_{\alpha_1} \leq C_{\alpha_2}$, entonces $h_{\alpha_2}|_{C_{\alpha_2}}(c) = h_{\alpha_1}(c)$. Por otra parte, h es homomorfismo ya que, si $c_1, c_2 \in \bigcup\limits_{\alpha I} C_\alpha \leq B$, es evidente que existe $\alpha_0 \in I$ tal que $c_1, c_2 \in C_{\alpha_0}$, así $h(c_1 + c_2) = h_{\alpha_0}(c_1 + c_2) = h_{\alpha_0}(c_1) + h_{\alpha_0}(c_2) = h(c_1) + h(c_2)$. Es claro que $h|_A = \phi$ ya que $A \leq C_\alpha$ para todo $\alpha \in I$. Todo lo anterior nos dice que $(\bigcup\limits_{\alpha \in I} C_\alpha, h)$ es una cota superior de la cadena. Por el Lema de Zorn $\mathcal{A}$ tiene un elemento maximal (M, g). Probaremos que $M = B$.
Supongamos que $M \neq B$, así existe $b \in B$ tal que $b \notin M$. Entonces $M < \langle M, \{b\} \rangle = M + \langle b \rangle$
.
Caso 1: Si $M \cap \langle b \rangle = 0$, entonces $M + \langle b \rangle = M \oplus \langle b \rangle$.
Si definimos $\overline{g}(m+nb) = g(m)$, $\overline{g}$ resulta un homomorfismo que extiende a g y en este caso $(M + \langle b \rangle, \overline{g}) \in \mathcal{A}$, lo cual es un absurdo debido a la maximalidad de (M, g).
Caso 2: Si $M \cap \langle b \rangle \neq 0$, tomemos k el menor entero positivo tal que $kb \in M$. Notemos que si $m + tb \in M + \langle b \rangle$ se tiene por el algoritmo de la división que $t = kq + r$ con $0 \leq r < k$ y entonces

$$m + tb = m + (qk + r)b = (m + qkb) + rb = m' + rb$$

con $m' \in M$.
Si $m + rb = n + sb$ con $0 \leq s < k$ y $r \leq s$, entonces $m - n = (s - r)b \in M \cap \langle b \rangle$ y por ser k el mínimo entero con la propidad de que es el mínimo entero tal que $kb \in M$ se tiene que $r = s$. Así que la expresión de cada elemento de $M + \langle b \rangle$ de la forma $n + tb$ con $0 \leq t < k$ es única.
Como el grupo D es divisible, entonces existe $d \in D$ tal que $kd = g(kb)$. Sea

$$\overline{g} : M + \langle b \rangle \longrightarrow D$$

el morfismo dado por

$$m + rb \longmapsto g(m) + rd \text{ donde } 0 \leq r < k.$$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "g"] & M + \langle b \rangle \arrow[dl, "\overline{g}"] \\ D & \end{tikzcd}$$

Sólo falta probar que es un morfismo que extiende a g. Sean $m_1 + r_1 b, m_2 + r_2 b \in M + \langle b \rangle$

con $0 \leq r_1, r_2 < k$. Si $r_1 + r_2 < k$, entonces

$$\begin{aligned}
\overline{g}((m_1 + r_1 b) + (m_2 + r_2 b)) &= \overline{g}((m_1 + m_2) + (r_1 + r_2)b) \\
&= g(m_1 + m_2) + (r_1 + r_2)d \\
&= g(m_1) + r_1 d + g(m_2) + r_2 d \\
&= \overline{g}(m_1 + r_1) + \overline{g}(m_2 + r_2).
\end{aligned}$$

Si $k \leq r_1 + r_2$, por el algoritmo de la división $r_1 + r_2 = kq + l$ con $l < k$

$$\begin{aligned}
\overline{g}(m_1 + r_1 b + m_2 + r_2 b) &= \overline{g}(m_1 + m_2 + kqb + lb) \\
&= g(m_1 + m_2 + kqb) + ld \\
&= g(m_1) + g(m_2) + g(kqb) + ld \\
&= g(m_1) + g(m_2) + kqd + ld \\
&= g(m_1) + g(m_2) + (kq + l)d \\
&= g(m_1) + g(m_2) + (r_1 + r_2)d \\
&= g(m_1) + r_1 d + g(m_2) + r_2 d \\
&= \overline{g}(m_1 + r_1) + \overline{g}(m_2 + r_2).
\end{aligned}$$

Que extiende a g es trivial por la forma en que se definio $\overline{g}$. Por lo tanto $(M + \langle b \rangle, \overline{g}) \in \mathcal{A}$ lo cual es una contradicción con la maximalidad de (M, g).
Con lo cual se concluye que $M = B$ y por lo tanto D es inyectivo. □

Lema 2.2.3. *Todo grupo abeliano G es cociente de un grupo abeliano libre.*

Demostración. Tomamos F el grupo libre con base libre G.

$$F := \bigoplus_{g \in G} \mathbb{Z}$$

Definimos

$$\begin{aligned}
f : \{1_g\}_{g \in G} &\longrightarrow G \\
1_g &\longmapsto g
\end{aligned}$$

función de la base libre de F a G. Entonces por la propiedad universal de las bases existe $\overline{f} : F \longrightarrow G$ extensión de f. Como f es suprayectiva, $\overline{f}$ también lo es y por lo tanto $G \cong F/\ker(\overline{f})$. □

Teorema 2.2.4. *Si G y H son grupos divisibles p-primarios, entonces $G \cong H$ si y sólo si $G[p] \cong H[p]$.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Inmediato.

$\Leftarrow$) Supongamos que $\varphi : G[p] \longrightarrow H[p]$ es un isomorfismo de grupos. Entonces existe un morfismo ψ que hace conmutar el siguiente diagrama (teorema 2.2.2)

$$\begin{array}{ccc} G[p] & \xrightarrow{i} & G \\ \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle\psi} \\ H[p] & \xrightarrow{i} & H \end{array}$$

1) ψ es inyectiva
Sea $x \in Ker(\psi)$. Por inducción sobre las potencias de p que anulan a x. Si $px = 0$, entonces $x \in G[p]$, $0 = \psi(x) = \varphi(x)$ y por lo tanto $x = 0$. Supongamos que $p^n x = 0$, implica $x = 0$. Si $p^{n+1}x = 0$, entonces $\psi(px) = p\psi(x) = 0$ y $p^n(px) = 0$. Por hipótesis de inducción $px = 0$ y por consiguiente $x = 0$.

2) ψ es suprayectiva
Sea $y \in H$. Por inducción sobre la potencia del orden de y. Si $o(y) = p$, entonces $y \in H[p] = Im(\varphi) \subseteq Im(\psi)$. Suponemos que si $o(y) \leq p^n$, entonces $y \in Im(\psi)$. Sea $o(y) = p^{n+1}$. Como $o(p^n y) = p$, existe $x \in G[p]$ tal que $\varphi(x) = \psi(x) = p^n y$. El grupo G es divisible por lo que existe $g \in G$ tal que $x = p^n g$

$$p^n y = \psi(x) = \psi(p^n g) = p^n \psi(g)$$

por lo que $o(y - \psi(g)) \leq p^n$. Entonces, por hipótesis de inducción, $y - \psi(g) \in Im(\psi)$, así $y \in Im(\psi)$. $\square$

2.3. Tres teoremas que clasifican a los grupos divisibles

Teorema 2.3.1. *Un grupo D es divisible si y sólo si es suma directa de grupos isomorfos a $\mathbb{Q}$ y/o $\mathbb{Z}_{p^\infty}$.*

Demostración.

$\Leftarrow$) Ver ejemplo 2.1.3 y corolario 2.1.6.

$\Rightarrow$) Sea G un grupo divisible y T su parte de torsión. T es divisible ya que si $x \in T$ y $n \in \mathbb{Z}^+$, existe $y \in G$ tal que $x = ny$ lo que implica que $y \in T$. Debido al teorema 2.1.7, T es sumando directo de G ($G = T \oplus F$) y además por el primer teorema de isomorfismo $F \cong G/T$ y por lo tanto F es libre de torsión.

1. Vamos a dotar a F de estructura de $\mathbb{Q}$-espacio vectorial.
   Para cada $x \in F - \{0\}$ y $n \in \mathbb{N}$ existe una única $y \in F$ tal que $x = ny$. Ya que si $y_1 \in F$ tal que $x = ny_1$, entonces $0 = x - x = n(y - y_1))$ lo que implica que $y = y_1$.

Denotaremos $\frac{x}{n} := y$ donde y es el único elemento en F que satisface que $x = ny$.
Si definimos

$$* : \mathbb{Q} \times F \longrightarrow F$$
$$(\frac{p}{q}, x) \longmapsto p\frac{x}{q}.$$

$*$ está bien definida ya que si $x \in F$ y $\frac{p}{q} = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$, entonces $*(\frac{p}{q}, x) = *(\frac{r}{s}, x)$.

Demostración. Sean y_1 y $y_2 \in F$ tales que $x = qy_1$ y $x = sy_2$. Ahora $q(py_1) = p(qy_1) = px = p(sy_2) = (ps)y_2 = (rq)y_2 = q(ry_2)$, como F es libre de torsión $ry_2 = py_1$, así $*(\frac{p}{q}, x) = *(\frac{r}{s}, x)$. □

Como F es un grupo abeliano sólo falta probar cuatro propiedades para que sea un $\mathbb{Q}-$espacio vectorial. Sean $a, b \in F$ y $\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$. Entonces

a) $*(\frac{1}{1}, a) = a$

b) $*(\frac{p}{q}, a + b) = *(\frac{p}{q}, a) + *(\frac{p}{q}, b)$

Demostración. Sean y_1 y $y_2 \in F$ tales que $a = qy_1$ y $b = qy_2$. $*(\frac{p}{q}, a) + *(\frac{p}{q}, b) = py_1 + py_2 = p(y_1 + y_2) = *(\frac{p}{q}, a + b)$. □

c) $*(\frac{pr}{qs}, a) = *(\frac{p}{q}, *(\frac{r}{s}, a))$.

Demostración. Sean y_1, y_2 y $y_3 \in F$ tales que $a = sy_1, ry_1 = qy_2$ y $a = qsy_3$. Como $*(\frac{p}{q}, *(\frac{r}{s}, a)) = *(\frac{p}{q}, ry_1) = py_2$, entonces $(sq)py_2 = (sp)qy_2 = (sp)ry_1 = (pr)sy_1 = (pr)qsy_3$. Debido a que F es libre de torsión se tiene que $py_2 = pry_3 = *(\frac{pq}{rs}, a)$. □

d) $*((\frac{p}{q} + \frac{r}{s}), a) = *(\frac{p}{q}, a) + *(\frac{r}{s}, a)$.

Demostración. Sean y_1, y_2 y $y_3 \in F$ tales que $a = qy_1, a = sy_2$ y $a = qsy_3$ (observe que $y_1 = sy_3$ y $y_2 = qy_3$). Como $*((\frac{p}{q} + \frac{r}{s}), a) = *((\frac{ps+rq}{qs}), a) = (ps + rq)y_3 = psy_3 + rqy_3 = py_1 + ry_2 = *(\frac{p}{q}, a) + *(\frac{r}{s}, a)$. □

Todo lo anterior prueba que F es un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial y por lo tanto F es suma directa de $\mathbb{Q}$, esto es

$$F = \bigoplus_{j \in J} \mathbb{Q}, \text{ donde } |J| \text{ es la dimensión de } F \text{ sobre } \mathbb{Q}.$$

Ahora nos enfocaremos en el subgrupo T el cual es suma directa de sus partes p-primarias, ver teorema 1.2.5. Consideremos T_p una parte p-primaria de T la cual es disisible, ver corolario 2.1.10. $T_p[p]$ tiene estructura de $\mathbb{Z}_p$-espacio vectorial(ver proposición 1.1.15). Entonces $T_p[p] \cong \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}_p$, donde $|I|$ es la dimensión de $T_p[p]$ sobre $\mathbb{Z}_p$. Por el teorema 2.2.4, $\bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}_{p^\infty} \cong T_p$, ya que $\bigoplus_{i\in I}(\mathbb{Z}_{p^\infty}[p]) = \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}_p$.

$\square$

Teorema 2.3.2. *Un grupo D es divisible si y sólo si D es un grupo inyectivo.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Ver teorema 2.2.2

$\Leftarrow$) Sea $q \in D$ y $n \in \mathbb{Z}^+$. Consideremos $n\mathbb{Z} = \{nz : z \in \mathbb{Z}\} \leq \mathbb{Z}$ y ϕ el morfismo de grupos definido por

$$\phi : n\mathbb{Z} \longrightarrow D$$

$$nz \longmapsto zq$$

Como D es inyectivo el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} n\mathbb{Z} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\phi"] & \mathbb{Z} \arrow[dl, "\overline{\phi}"] \\ D & \end{tikzcd}$$

donde $\overline{\phi}$ es el morfismo que extiende a ϕ, $q = \overline{\phi}(n) = \overline{\phi}(n \cdot 1) = n\overline{\phi}(1)$ y por lo tanto D es divisible. $\square$

Teorema 2.3.3. *Un grupo D es divisible si y sólo si D es sumando directo de cualquier grupo que lo contenga.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Ver teorema 2.1.6

$\Leftarrow$) Debido al lema 2.2.3 D es cociente de un grupo abeliano libre

$$D \cong \big(\bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}\big)/A.$$

Observemos que

$$\bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z} \hookrightarrow \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Q}$$

ya que $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$. Entonces

$$\big(\bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}\big)/A \hookrightarrow \big(\bigoplus_{i\in I} \mathbb{Q}\big)/A'$$

Por lo que
$$D \hookrightarrow \big(\bigoplus_{i\in I}\mathbb{Q}\big)/A'.$$
Por hipótesis D es sumando directo, pero $\big(\bigoplus_{i\in I}\mathbb{Q}\big)/A'$ es un grupo divisible (corolarios 2.1.5 y 2.1.8) eso implica que D es divisible (corolario 2.1.9). $\square$

Capítulo 3

Subgrupos puros

La idea de los subgrupos puros nace a partir de los grupos divisibles. De acuerdo con la definición 2.1.2 cada elemento del grupo debe ser divisible por cada número entero positivo, podría pensarse que esta definición es "pedir demasiado" a los elementos de un grupo y a decir verdad lo es. Según el teorema 2.3.1 los únicos grupos divisibles son los grupos aditivos $\mathbb{Q}$, Z_{p^∞} y suma directa de ellos, sin embargo, cada grupo divisible es sumando directo de cualquier grupo que lo contenga (ver teorema 2.3.3) lo cual es una consecuencia muy importante que vale la pena resaltar. En esta sección se estudiaran ciertos grupos a los que se les pedirá "menos" que ser grupos divisibles, pero que a la vez se obtengan varios resultados que culmimen con ser sumandos directos de los grupos que los contengan y una que otra propiedad universal.

3.1. Definiciones, equivalencias y ejemplos

Definición 3.1.1. *Un subgrupo G de un grupo A es puro en A si cada vez que la ecuación $g = nx$ tenga solución en A, con $g \in G$ y n un entero positivo, se cumple que $g = nx$ tiene solución en G. En otras palabras si $n|g$ en A, entonces $n|g$ en G.*

Observación 3.1.2. *Si $n|g$ en G es equivalente a que $g \in nG$.*

Teorema 3.1.3. *G es puro en A si y sólo si $nG = G \cap nA$ para toda $n \in \mathbb{Z}^+$.*

Demostración.

$\Rightarrow$) $nG \leq G$ y $nG \leq nA$, entonces $nG \subseteq G \cap nA$.
Sea $g \in G \cap nA$. Como $n|g$ en A, entonces $n|g$ en G, es decir, existe $g' \in G$ tal que $g = ng'$ y por lo tanto $G \cap nA \subseteq nG$.

$\Leftarrow$) Sean $n \in \mathbb{Z}^+$ y $g \in G$ tales que $n|g$ en A. Existe $a \in A$ que satisface la ecuación $g = nx$, lo que implica que $g \in G \cap nA = nG$, entonces existe g' en G tal que $g = ng'$. $\square$

Ejemplo 3.1.4. *Dado el teorema anterior cualquier grupo divisible D es un subgrupo puro de cualquier grupo que lo contenga.*

Demostración. Basta tener en cuenta que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $nD = D$. □

Definición 3.1.5. *Sea p un número primo y G un subgrupo de un grupo A. Decimos que G es p-puro en A si $p^k G = G \cap p^k A$ para toda k positiva.*

Teorema 3.1.6. *Si G es $p-$puro en A para todo primo p, entonces G es puro en A.*

Demostración. Usaremos el lema 1.1.3 . Sea $n \in \mathbb{Z}^+$. Consideremos la descomposición en primos $p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$ de n

$$\begin{aligned} nG &= (p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k})G \\ &= p_1^{r_1} G \cap \cdots \cap p_k^{r_k} G \\ &= (G \cap p_1^{r_1} A) \cap \cdots \cap (G \cap p_k^{r_k} A) \\ &= G \cap (p_1^{r_1} A \cap \cdots \cap p_k^{r_k} A) \\ &= G \cap nA \end{aligned}$$

y por el teorema 3.1.3, G es puro en A. □

Lema 3.1.7. *Todo sumando directo de un grupo es un subgrupo puro.*

Demostración. Sea B un sumando directo de un grupo A $(A = B \oplus C)$. Sean $n \in \mathbb{Z}^+$ y $g \in B$ tales que $n|g$ en A. Entonces $g = na$ para algún $a \in A = B \oplus C$, $a = b + c$ con $b \in B$ y $c \in C$, así $g = na = n(b + c) = nb + nc$. $g \in B$ y por ser suma directa $nc = 0$, entonces $n|g$ en B. □

Con el lema anterior ya tenemos una cantidad más que suficiente de ejemplos de subgrupos puros.

Ejemplo 3.1.8. *Los subgrupos de $\mathbb{Q}$ no son puros exepto por los triviales.*

Demostración. Sea $I \leq \mathbb{Q}$ subgrupo no trivial y sean $i \in I$ y $q \in \mathbb{Q}$ tal que $q \notin I$. Si $i = \frac{i_1}{i_2}$, $q = \frac{q_1}{q_2}$ donde i_1, i_2, q_1 y $q_2 \in \mathbb{Z}$. Consideremos $n = \frac{i_1 i_2 q_2}{i_2} \in \mathbb{Z}$. $nq = \frac{i_1 i_2 q_2}{i_2} \cdot \frac{q_1}{q_2} = i \cdot i_2 \cdot q_1 \in I$, entonces $n | i \cdot i_2 \cdot q_1$ en $\mathbb{Q}$, pero $q \notin I$. Por lo tanto I no es puro en $\mathbb{Q}$. □

Corolario 3.1.9. $\mathbb{Q}$ *no tiene sumandos directos salvo los triviales.*

Demostración. Es consecuencia inmediata del ejemplo y el lema anteriores. □

Lema 3.1.10. *Sea A un grupo y $G \leq A$. Si A/G es libre de torsión, entonces G es puro en A.*

Demostración. Sean $g \in G$ y $n \in \mathbb{Z}^+$ tales que $n|g$ en A. Así $g = na$ para algún $a \in A$, tomando clases, $\overline{g} = \overline{na} = n\overline{a} = \overline{0}$ y como A/G es libre de torsión se tiene que $\overline{a} = \overline{0}$, es decir, $a \in G$. □

Lema 3.1.11. *Sea A un grupo libre de torsión, entonces la intersección de subgrupos puros es puro en A.*

Demostración. Sean $\{B_i\}_{i\in I}$ una familia de subgrupos puros de A, $g \in \bigcap\limits_{i\in I} B_i$, $n \in \mathbb{Z}^+$ y $a \in A$ solución de la ecuación $g = nx$. Como $g \in \bigcap\limits_{i\in I} B_i$ y B_i es un subgrupo puro de A para toda $i \in I$, podemos encontrar $g_i \in B_i$ tal que $g = na = ng_i$, por lo cual $n(a - g_i) = 0$. Así $a = g_i$ para cada $i \in I$, lo que implica que $a \in \bigcap\limits_{i\in I} B_i$. □

Lema 3.1.12. *Sea A un grupo, y H y G subgrupos de A. Si $G\cap H$ y $G+H$ son subgrupos puros de A, entonces también G y H son puros en A.*

Demostración. Sean $g \in G$, $n \in \mathbb{Z}^+$ y $a \in A$ tales que $g = na$. Como G es un sugbrupo de $G + H$ y $G + H$ es puro en A existen $h_1 \in H$ y $g_1 \in G$ tales que

$$\begin{aligned} g &= n(g_1 + h_1) \\ &= ng_1 + nh_1 \\ nh_1 &= g - ng_1 \in H \cap G, \end{aligned}$$

n divide a nh_1, entonces existe $g_2 \in H \cap G$ tal que $nh_1 = ng_2$. Así

$$\begin{aligned} ng_2 &= g - ng_1 \\ g &= ng_2 + ng_1 \\ &= n(g_2 + g_1) \end{aligned}$$

lo que prueba que G es puro en A.
Que H es puro en A es análogo. □

Lema 3.1.13. *Sea A un grupo y G un subgrupo puro de A. Entonces T_A+G es un subgrupo puro de A.*[1]

Demostración. Sean $t \in T_A$, $g \in G$, $n \in \mathbb{Z}^+$ y $a \in A$ tales que $t + g = na$. Como $t \in T_A$ existe $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que $mt = 0$, luego $m(t+g) = mt+mg = mg$. El subgrupo G es puro A y $(m\cdot n)|[m(t+g) = mg = mna]$, entonces existe $g_1 \in G$ con la propiedad de que $mna = mng_1$ más aún $mn(a - g_1) = 0$, por lo que $a - g_1 \in T_A$, así $a = (a - g_1) + g_1 \in T_A + G$. □

Teorema 3.1.14. *Sean B y C subgrupos de un grupo A que cumplen $C \leq B \leq A$.*

1. *Si C es puro en B y B es puro en A, entonces C es puro en A.*
2. *Si B es puro en A, entonces B/C es puro en A/C.*

[1] Véase la definición 1.2.1.

3. *Si C es puro en A y B/C es puro en A/C, entonces B es puro en A.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{Z}^+$.

1. $$nC = C \cap nB = C \cap (B \cap nA) = (C \cap B) \cap nA = C \cap nA$$

   lo que prueba que C es puro en A.

2. $n(B/C) = nB/C = (B \cap nA)/C = (B/C) \cap (nA/C) = (B/C) \cap (nA/C) = (B/C) \cap n(A/C)$.

3. Sean $b \in B$ y $a \in A$ tales que $b = na$. $n\overline{a} = \overline{na} = \overline{b}$, por hipótesis existe $\overline{b_1} \in B/C$ tal que $\overline{b} = n\overline{b_1}$. Entonces $n(a - b_1) \in C$ por lo que existe $c_1 \in C$ tal que $n(a - b_1) = nc_1$. Finalmente

   $$\begin{aligned} nc_1 &= na - nb_1 \\ &= b - nb_1 \end{aligned}$$

   así

   $$b = nc_1 - nb_1 = n(c_1 - b_1)$$

   y como $C \leq B$ se tiene que $c_1 - b_1 \in B$.

□

Teorema 3.1.15. *Todo subgrupo infinito no puro puede ser encajado en un subgrupo puro de la misma cardinalidad y todo subgrupo finito no puro puede ser encajado en un subgrupo puro numerable.*

Demostración. Sea A un grupo y $B < A$. Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ y $b \in B$ consideramos el conjunto $\mathcal{C}_1 := \{(n, b) \in \mathbb{Z}^+ \times B | nx = b \text{ tiene solución en } A\}$. Por cada pareja ordenada $(n, b) \in \mathcal{C}_1$ tomamos un único elemento $a \in A$ tal que $na = b$, denotamos este elemento como $a_{(n,b)}$, y definimos el conjunto $\mathcal{A}_1 := \{a_{(n,b)} | (n, b) \in C_0\}$. Construiremos una cadena $B_1 \leq B_2 \leq B_3 \leq \cdots B_n \leq \cdots$ de subgrupos de A apartir de B de la siguiente manera:

$$B_1 = \langle B \cup \mathcal{A}_1 \rangle;$$

si definimos de forma recursiva los conjuntos

$$\mathcal{C}_{n+1} := \{(n, b) \in \mathbb{Z}^+ \times B_n | nx = b \text{ tiene solución en } A\}$$

$$\mathcal{A}_{n+1} := \{a_{(n,b)} | (n, b) \in C_{n+1}\}$$

podemos contruir a partir de ellos los subgrupos

$$B_{n+1} = \langle B_n \cup \mathcal{A}_{n+1} \rangle.$$

Si $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, entonces $B \leq G$. Afirmamos que G es un subgrupo puro de A y la cardinalidad de G es $max\{\omega, m\}$, donde ω es la cardinalidad del conjunto de los números naturales y m es la cardinalidad del conjunto B.

1. G es puro en A.
   Sean $g \in G$, $n \in \mathbb{Z}^+$ y $a \in A$ tales que $g = na$. Como $g \in G = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ existe $j \in \mathbb{Z}^+$ tal que $g \in B_j$ y por lo tanto $nx = g$ es una ecuación en B_j que tiene una solución en A, entonces por como se contruyeron los B_j, existe $b' \in B_{j+1} \leq G$ tal que $nb' = g$ y por lo tanto G es puro en A.

2. La cardinalidad de G es $max = \{m\cdot, \omega\}$.
   Observese que para todo $j \in \mathbb{Z}^+$, la cardinalidad de $\mathcal{C}_j$ es menor o igual al $max\{w, m\}$, por lo cual la cardinalidad de $\mathcal{A}_j$ también es menor o igual al $max\{w, m\}$.
   La cardinalidad de $B_1 = \langle B \cup \mathcal{A}_1 \rangle$ es igual que la cardinalidad de $B + \langle \mathcal{A}_1 \rangle$, como el generado conserva cardinalidades infinitas se tiene que la cardinalidad de $B + \langle \mathcal{A}_1 \rangle$ es $2max\{\omega, m\} = max\{\omega, m\}$. Dicho lo anterior para cada $i \in \mathbb{Z}^+$, B_i tiene cardinalidad $max\{\omega, m\}$ y por lo tanto G, que es la unión numerable de conjuntos de cardinalidad $max\{\omega, m\}$, tiene cardinalidad $max\{\omega, m\}$.

$\square$

Proposición 3.1.16. *Sea A un grupo y $B \leq A$. Asumase que B es la suma directa de grupos cíclicos, éstos del mismo orden p^k, donde p es un número primo y $k \in \mathbb{Z}^+$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *B es p-puro en A.*
2. *$B \cap p^k A = 0$.*
3. *B es sumando directo de A.*

Demostración.

1) $\Rightarrow$ 2) Como B es p-puro, entonces $B \cap p^k A = p^k B = 0$. Ver Teorema 3.1.3.

2) $\Rightarrow$ 3) Consideremos $\mathcal{F} = \{D \leq A : p^k A \leq D \text{ y } D \cap B = 0\}$. El conjunto $\mathcal{F} \neq \varnothing$ ya que $p^k A \in \mathcal{F}$. Sea $\mathcal{C}$ una cadena en $(\mathcal{F}, \subseteq)$. Si $G = \bigcup_{D \in \mathcal{C}} D$, entonces se afirma que $G \in \mathcal{F}$

1. $G \leq A$ ya que el orden parcial está dado por la contención y $\mathcal{C}$ es una cadena en $\mathcal{F}$.
2. Si $D_1 \in \mathcal{C}$, $p^k A \leq D_1 \leq G$.
3. $G \cap B = \left(\bigcup_{D \in \mathcal{C}} D \right) \cap B = \bigcup_{D \in \mathcal{C}} (D \cap B) = \bigcup_{D \in \mathcal{C}} 0 = 0.$

Por lo anterior $\mathcal{F}$ tiene al menos un maximal, digamos C. Más aún C es un subgrupo B-supremo de A. Demostraremos que $A = B \oplus C$ y para eso usaremos la proposición 1.2.11. Sea $a \in A$ tal que $qa = b + c$, donde q es un número primo, $b \in B$ y $c \in C$. Si $q = p$, entonces $p^{k-1}b + p^{k-1}c = p^k a \in C$, por lo que $p^{k-1}b = 0$ y por el corolario 1.1.10 $b = pb'$ para algún $b' \in B$. Si $q \neq p$ (ver lema 1.1.8) se tiene que $B = qB$, por lo que $b = qb''$ para algún $b'' \in B$.

3) $\Rightarrow$ 1) Ver lema 3.1.7.

□

Teorema 3.1.17. *Sea A un grupo. Todo elemento de A de orden un primo p y de altura finita puede ser encajado en un subgrupo cíclico finito que es a su vez un sumando directo de A.*

Demostración. Sean $a \in A$ con $h_p(a) = k$ y $b \in A$ solución a la ecuación $p^k x = a$. Demostraremos que $\langle b \rangle$ es p-puro en A y de orden finito.

1. $\langle b \rangle$ es de orden finito ya que $p^{k+1}b = pa = 0$, más aún $|\langle b \rangle| = p^{k+1}$.

2. $\langle b \rangle$ es p-puro. Sea $nb \in \langle b \rangle$ y supongamos que existen $m \in \mathbb{Z}^+$ y $c \in A$ tal que

$$p^m c = nb \tag{3.1}$$

Caso 1. p no divide a n, entonces existen $s, t \in \mathbb{Z}$ tales que

$$\begin{aligned} sp + tn &= 1 \\ spa + tna &= a \\ tna &= a \end{aligned}$$

de la igualdad (3.1) tenemos que

$$\begin{aligned} p^m c &= nb \\ p^k(p^m c) &= p^k nb \\ p^{k+m} c &= np^k b \\ p^{k+m} c &= na \\ tp^{k+m} c &= tna \\ p^{k+m} tc &= a \end{aligned}$$

pero $h_p(a) = k$, por lo que $m = 0$ y así $c = p^m c = nb$.
Caso 2. Si $p|n$, entonces $n = rp^s$ donde $1 \leq s \leq k$ y p no divide a r. Como

$$\begin{aligned} p^m c &= nb = rp^s b \\ p^{k-s}(p^m c &= rp^s b) \\ p^{k-s+m} c &= rp^k b = ra \end{aligned}$$

Por el caso 1, $-s + m = 0$, por lo que $m = s$. Así $p^m(rb) = p^s rb = nb$, donde $rb \in \langle b \rangle$, por lo tanto $\langle b \rangle$ es p-puro de orden p^{k+1}. Usando la proposición 3.1.16 $\langle b \rangle$ es sumando directo de A y además $a \in \langle b \rangle$. □

Corolario 3.1.18. *Si un grupo contiene elementos de orden finito, entonces contiene un sumando directo cocíclico.*

Demostración. Si el grupo contiene un subgrupo isomorfo a $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ para algún p primo, entonces éste es un sumando directo. Si el grupo no contiene ningún grupo isomorfo a algún $\mathbb{Z}_{p^\infty}$, pero contiene elementos de orden p, implica que el grupo tiene elementos de altura finita, ver teorema 2.1.4, lo que concluye junto con el corolario anterior que el grupo tiene un sumando directo cíclico de orden p^{k+1} el cual es cocíclico (ejemplo 1.3.3). □

Lema 3.1.19. *Un p-subgrupo puro acotado es un sumando directo.*

Demostración. Si B es un p-subgrupo acotado de un grupo A, entonces por la proposición 1.2.7, B se puede escribir de la forma $B_1 \oplus C_1$, donde B_1 es suma directa de grupos cíclicos del mismo orden p^k y C_1 es suma directa de grupos cíclicos de orden estrictamente menor a p^k. Se demostrará, por inducción sobre k, que B es sumando directo de A. Si $k = 1$, $B = B_1$ y debido al teorema 3.1.16 se tiene que B es sumando directo de A.
Supongamos que se cumple para $k < n$, es decir, si $p^k B_1 = 0$ implica que B es sumando directo de A. El subgrupo B_1 es sumando directo de B, por lo que es subgrupo puro de B (ver teorema 3.1.7) y por consecuencia también lo es del grupo A. En el caso cuando B_1 es suma directa de grupos cíclicos de orden p^n, se tiene que es sumando directo de A lo que implica que existe A_1 subgrupo de A que cumple que $A = B_1 \oplus A_1$. Si intersectamos A con B, obtenemos que $B = (B_1 \oplus A_1) \cap B = B_1 \oplus (A_1 \cap B)$ luego se deduce que $A_1 \cap B \cong C_1$. Se afirma que $A_1 \cap B$ es subgrupo puro en A_1 ya que

$$m(A_1 \cap B) = mA_1 \cap mB = mA_1 \cap (B \cap mA) = B \cap mA_1$$

y además se cumple que

$$(A_1 \cap B) \cap mA_1 = B \cap mA_1$$

para toda $m \in \mathbb{N}$, lo que prueba que $A_1 \cap B$ es puro en A_1 el cual es isomorfo a C que a su vez es isomorfo a una suma directa de grupos cíclicos de orden estrictamente menor a p^n y por hipótesis de inducción $A_1 \cap B$ es un sumando directo de A_1. Lo que al final demuestre que B es sumando directo de A. $\square$

Teorema 3.1.20. *Todo subgrupo puro acotado G de un grupo A es sumando directo.*

Demostración. Por el teorema 1.2.5, G es suma directa de sus partes p-primarias y junto al teorema anterior cada parte p-primaria es sumando directo de A por lo que G es sumando directo de A. $\square$

Hasta el momento hemos probado una cantidad considerable de resultados que afirman que bajo ciertas condiciones los subgrupos puros son sumandos directos de los grupos que los contienen, pero ¿será cierto en general que los subgrupos puros sean siempre sumandos directos? la respuesta a la pregunta es no y debido al teorema anterior debemos buscar un ejemplo en grupos que no sean de torsión.

Ejemplo 3.1.21. *Sean $G = \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}$ y $H = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}$. H es un subgrupo puro de G que no es sumando directo de G.*

Demostración.

a) Sean $(x_n) \in G$, $m \in \mathbb{Z}^+$ y $(y_n) \in H$ tales que $m(x_n) = (y_n)$. Como (y_n) sólo posee una contidad finita de $y_i \neq 0$ y $m \neq 0$, entonces (x_n) también posee una cantidad finita de $x_i \neq 0$, por lo que se deduce que $(x_n) \in H$. Así H es subgrupo puro de G.

b) Supongamos que H es sumando directo de G, por lo que debe existir I subgrupo de G tal que $G = H \oplus I$. Por el primer teorema de isomorfismos para grupos (ver [3]), $G/H \underset{\varphi}{\cong} I$. Tomemos el elemento $(1, 2, 6, 24, ...) = (n!)_{n\in\mathbb{Z}^+} \in G$ y $m \in \mathbb{Z}^+$

$$\begin{aligned}(n!)_{n\in\mathbb{Z}^+} &= (1, 2!, 3!, ..., (m-1)!, 0, 0, ...) + (0, 0, 0, ..., 0, m!, (m+1)!, ...)\\ &= (1, 2!, 3!, ..., (m-1)!, 0, 0, ...) + m(0, 0, 0, ..., 0, (m-1)!, (m-1)!(m+1), ...)\end{aligned}$$

si tomamos clases en G/H

$$\overline{(n!)_{n\in\mathbb{Z}^+}} = m\overline{(0, 0, 0, ..., 0, (m-1)!, (m-1)!(m+1), ...)}$$

lo que implica que $\overline{(n!)}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es un elemento en G/H que es divisible por cualquier entero m y por consiguiente $\varphi((\overline{n!})_{n\in Z^+})$ es tal que es divisible por cualquier entero m, lo cual es una contradicción ya que implicaria que algún entero tiene una cantidad infinita de divisores enteros. Lo anterior nos dice que H es un ejemplo de un subgrupo puro que no es sumando directo de G.

$\square$

Teorema 3.1.22. *Para un subgrupo B de un grupo A las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *B es puro es A.*

2. *B/nB es un sumando directo de A/nB, para toda $n \in \mathbb{Z}^+$.*

3. *Si $C \leq B$ es tal que B/C es finitamente cogenerado, entonces B/C es un sumando directo de A/C.*

Demostración.

1) $\Rightarrow$ 2) Sea $n \in \mathbb{Z}^+$. Por el teorema 3.1.14, B/nB es puro en A/nB además B/nB es acotado, pues al menos todos sus elementos son anulados por n. Usando el teorema 3.1.20, B/nB es sumando directo de A/nB.

2) $\Rightarrow$ 3) Podemos suponer que B/C es reducible, ya que si tiene subgrupos divisibles éstos serán sumandos directos de A/C. Lo anterior indica que B/C es suma directa de una cantidad finita de grupos cocíclicos los cuales son acotados, así debe existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $n(B/C) = 0$ y por consiguiente $nB \subseteq C$. Por hipótesis $A/nB = B/nB \oplus D$, usado el tercer teorema de isomorfismos tenemos que $A/C \cong (A/nB)/(C/nB) \cong (B/nB)/(C/nB) \oplus D/(C/nB) \cong B/C \oplus D'$.

3) $\Rightarrow$ 1) Consideramos $n \in \mathbb{Z}^+$ y $b \in B$ tales que la ecuación $nx = b$ tenga solución a en A, pero no en B. Sea C un subgrupo de B que contiene a nB y que sea maximal con respecto a la no pertenencia del elemento b. Luego por el teorema 1.3.15, B/C es cocíclico. Por hipótesis $A/C = B/C \oplus D/C$ para algún subgrupo D de A

$$\overline{a} = \overline{b'} + \overline{d}$$

donde $b' \in B$ y $d \in D$

$$\begin{aligned} n\overline{a} &= n\overline{b'} + n\overline{d} \\ \overline{na} &= \overline{nb'} + \overline{nd} \\ \overline{b} &= \overline{nb'} \end{aligned}$$

lo que implica que $b - nb' \in C$ y por lo tanto $b \in C$, lo cual es una contradicción.
De todo lo anterior se concluye que B es puro en A. □

Teorema 3.1.23. *Sea A un grupo y $B \leq A$. B es puro en A si y sólo si toda clase de A/B contiene un elemento del mismo orden que la clase.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Sea $\overline{a} \in A/B$.
Caso 1. Si $o(\overline{a}) = \infty$, entonces todo elemento de $\overline{a}$ es de orden infinito.
Caso 2. Si $o(\overline{a}) = n$, entonces $na \in B$. Por ser B puro existe $b \in B$ tal que $na = nb$, por lo que $n(a - b) = 0$, pero $n = o(\overline{a}) = o(\overline{a - b}) \leq o(a - b)$ lo que significa que $o(a - b) = n$.

$\Leftarrow$) Sean $b \in B$, $n \in \mathbb{Z}^+$ y $a \in A$ tales que $na = b$. Entonces $o(\overline{a})|n$, por lo que existe $a' \in \overline{a}$ tal que $o(a') = o(\overline{a})$, así $na' = 0$, $a - a' \in B$ y $n(a - a') = na - na' = na = b$. $\square$

Teorema 3.1.24. *Si B es un subgrupo puro de A tal que A/B es suma directa de grupos cíclicos, entonces B es un sumano directo de A.*

Demostración. Supongamos que A/B es cíclico, entonces está generado por algún elemento $\overline{a}$. Por el teorema anterior existe $a' \in \overline{a}$ tal que tienen el mismo orden. Por lo que $\langle a' \rangle$ forma un conjunto completo de representantes de A módulo B y $A = B \oplus \langle a' \rangle$.

1. $A = B + \langle a' \rangle$. Si $d \in A$, entonces $\overline{d} \in \langle \overline{a} \rangle \cong A/B$, por lo que $\overline{d} = m\overline{a'}$, para algún $m \in \mathbb{Z}$, y por consiguiente $d - ma' \in B$ lo que demuestra que $d \in B + \langle a' \rangle$.

2. $B \cap \langle a' \rangle = 0$. Sea $c \in B \cap \langle a' \rangle$. Entonces $c = na'$, sacando clase de ambos lados de la igualdad $0 = \overline{c} = n\overline{a'}$, lo que implica que $o(\overline{a'})|n$, así $c = na' = 0$.

Lo que demuestra que $A = B \oplus \langle a' \rangle$.
Para el caso generar basta ver el teorema 1.1.18 y el caso anterior.

$\square$

Teorema 3.1.25. *Las siguientes condiciones son equivalentes para todo subgrupo B de un grupo A*

1. *B es puro en A.*

2. *B es sumando directo de $n^{-1}B := \{a \in A | na \in B\}$, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.*

3. *Si C es un subgrupo entre B y A tal que C/B es finitamenete generado, entonces B es sumando directo de C.*

Demostración.

1) $\Rightarrow$ 2) Es inmediato que $n^{-1}B/B$ es acotado, por lo que es suma directa de grupos cíclicos y por el teorema anterior B es sumando directo de $n^{-1}B$.

2) $\Rightarrow$ 3) El grupo C/B es suma directa de una cantidad finita de grupos cíclicos. Podemos suponer que $C/B = C_1/B \oplus C_2/B$ donde C_1 y C_2 son subgrupos de C tales que C_1/B es un grupo libre y C_2/B es de torsión. Por el teorema 1.2.12, B es sumando directo de C_1. Como C_2/B es de torsión y es suma directa de grupos cíclicos, entonces existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $n(C_2/B) = 0$. $C_2 \leq n^{-1}B$ y por hipótesis $(n^{-1}B) = B \oplus D$, lo que implica que $C_2 = n^{-1}B \cap C_2 = (B \cap C_2) \oplus (D \cap C_2) = B \oplus (D \cap C_2)$, lo cual prueba que B es sumando directo de C_2. Por último usaremos el teorema 1.1.16 que nos asegura que B es sumando directo de C.

3) $\Rightarrow$ 1) Probaremos que toda clase de A/B contiene un elemento del mismo orden que la clase, ver teorema 3.0.24. Sea $\overline{a} \in A/B$ tal que $0 < o(\overline{a}) = n$. Consideremos $C = B + \langle a \rangle$. C/B es isomorfo a algún subgrupo de $\langle \overline{a} \rangle$, por lo que C/B es cíclico. $C = B \oplus D$ luego existen $b \in B$ y $d \in D$ tales que

$$\begin{aligned} a &= b + d \\ a - b &= d \\ n(a-b) &= nd \\ na - nb &= nd \end{aligned}$$

pero $na \in B$ y como $B \cap D = \{0\}$, entonces $n(a-b) = 0$. Así $a - b \in \overline{a}$ y $o(a-b) = n$ que es lo que se quería demostrar. □

3.2. Sucesiones exactas puras

Definición 3.2.1. *Una sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta-pura si $Im(\alpha)$ es un subgrupo puro de B y es exacta-p-pura si $Im(\alpha)$ es p-puro en B.

Teorema 3.2.2. *Sea*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$ *es exacta-pura.*

2. $0 \longrightarrow nA \xrightarrow{\alpha|_{nA}=\alpha_1} nB \xrightarrow{\beta|_{nB}=\beta_1} nC \longrightarrow 0$ *es exacta para cada* $n \in \mathbb{Z}^+$.

3. $0 \longrightarrow A[n] \xrightarrow{\alpha|_{A[n]}=\alpha_2} B[n] \xrightarrow{\beta|_{B[n]}=\beta_2} C[n] \longrightarrow 0$ *es exacta para cada* $n \in \mathbb{Z}^+$.

4. $0 \longrightarrow A/nA \xrightarrow{\overline{\alpha_1}} B/nB \xrightarrow{\overline{\beta_1}} C/nC \longrightarrow 0$ *es exacta para cada* $n \in \mathbb{Z}^+$.

5. $0 \longrightarrow A/A[n] \xrightarrow{\overline{\alpha_2}} B/B[n] \xrightarrow{\overline{\beta_2}} C/C[n] \longrightarrow 0$ *es exacta para cada* $n \in \mathbb{Z}^+$.

Demostración.

1) $\Rightarrow$ 2) Sea $n \in \mathbb{Z}^+$.

a) α_1 está bien definida y es inyectiva.
$\alpha_1(nA) = \alpha(nA) = n\alpha(A) \subseteq nB$.
α_1 es inyectiva pues es restricción de α.

b) β_1 está bien definida y β_1 es supreyectiva.
Sea $nc \in nC$. Como β es suprayectiva existe $b \in B$ tal que $\beta(b)$=c, por lo que $\beta_1(nb) = \beta(nb) = n\beta(b) = nc$.

c) $Im(\alpha_1) = \ker(\beta_1)$.

$\subseteq$) Es claro observando que

$$\beta_1(\alpha_1(nA)) = \beta(\alpha(nA)) = n\beta(\alpha(A)) = n0 = 0.$$

$\supseteq$) Sea $nb \in \ker(\beta_1) \leq \ker(\beta) = Im(\alpha)$. Como $Im(\alpha)$ es puro en B existen $b' \in Im(\alpha)$ y $a \in A$ tales que $nb = nb'$ y $\alpha(a) = b'$, por lo que $nb = nb' = n\alpha(a) = \alpha(na) = \alpha_1(na)$. Así $nb \in Im(\alpha_1)$.

2) $\Rightarrow$ 1) Sea $nb \in Im(\alpha)$. Observese que existe $na \in nA$ tal que $\alpha_2(na) = n\alpha(a) = nb$.

1) $\Rightarrow$ 3) Sea $n \in \mathbb{Z}^+$.

a) α_2 está bien definida y es inyectiva.

Si $a \in A[n]$, entonces $0 = \alpha_2(na) = n\alpha_2(a)$, por lo que α_2 está bien definida. Es inyectiva pues es restricción de α.

b) β_2 está bien definida y es suprayectiva.
Sea $c \in C[n]$. Por el primer teorema de isomorfismos para grupos $B/Im(\alpha) \underset{\widetilde{\beta}}{\cong} C$.
Usando el teorema 3.1.24 , existe $x \in \widetilde{\beta}^{-1}(c)$ tal que $o(x) = o(\widetilde{\beta}^{-1}(c)) = o(c)$, luego $x \in B[n]$ y $\beta(x) = c$ por lo que $\beta_2(x) = \beta(x) = c$. Lo anterior prueba que β_2 es suprayectiva.

c) La sucesión es exacta en $B[n]$, es decir, $Im(\alpha_2) = \ker(\beta_2)$.

$\subseteq$) Es evidente.

$\supseteq$) Sea $b \in \ker(\beta_2) \subseteq \ker(\beta) = Im(\alpha)$. Entonces existe $a \in A$ tal que $\alpha(a) = b$. Así $n\alpha(a) = \alpha(na) = nb = 0$ y como α es inyectiva $na = 0$ ($a \in A[n]$).

3) $\Rightarrow$ 1) Sean $b \in Im(\alpha), b_1 \in B, a \in A$ y $n \in \mathbb{Z}^+$ tales que $\alpha(a) = b = nb_1$. Se observa que $0 = \beta(b) = \beta nb_1 = n\beta(b_1)$, así $\beta(b_1) \in C[n]$. Como β_2 es suprayectiva, existe $b_2 \in B[n]$ tal que $\beta_2(b_2) = \beta(b_1)$ por lo que $\beta(b_1 - b_2) = 0$, así existe $a_2 \in A$ tal que $\alpha(a_2) = b_1 - b_2$. Despejando y sustituyendo $b = nb_1 = n(\alpha(a_2) + b_2) = n\alpha_2(a_2)$, lo que concluye que $Im(\alpha)$ es puro en B.

Para las equivalencias faltantes usaremos: el Lema 1.4.2 (del $3x3$), lo ya demostrado en este teorema y dos diagramas conmutativos.

El primer diagrama que usaremos es

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & nA \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\lambda_1"] & nB \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "\lambda_2"] & nC \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\mu_1"] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\mu_2"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\mu_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A/nA \arrow[r, "\overline{\alpha_1}"] \arrow[d] & B/nB \arrow[r, "\overline{\beta_1}"] \arrow[d] & C/nC \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Donde λ_1, λ_2 y λ_3 son los morfismos inclusión y μ_1, μ_2 y μ_3 son los morfismos proyección sobre $A/nA, B/nB$ y C/nC respectivamente. Es fácil ver que $\ker(\mu_i) = Im(\lambda_i)$, para toda $1 \leq i \leq 3$, por lo que se deduce que las sucesiones columnas son sucesiones exactas. Con la información anterior, el hecho de que α_1 y β_1 son restricciones de α y β respectivamente y además de que $\mu_2 \circ \alpha = \overline{\alpha_1} \circ \mu_1$ y $\mu_3 \circ \beta = \overline{\beta_1} \circ \mu_2$ se concluye que el diagrama es conmutativo.

2) $\Rightarrow$ 4) Para toda $n \in \mathbb{Z}^+$ los primeros dos renglones son sucesiones exactas, luego por el Lema del $3x3$

$$0 \longrightarrow A/nA \overset{\overline{\alpha}}{\to} B/nB \overset{\overline{\beta}}{\to} C/nC \longrightarrow 0$$

es exacta.

4) $\Rightarrow$ 2) Para toda $n \in \mathbb{Z}^+$ los últimos dos renglones son sucesiones exactas, luego por el Lema del $3x3$

$$0 \longrightarrow nA \xrightarrow{\alpha|_{nA}=\alpha_2} nB \xrightarrow{\beta|_{nB}=\beta_2} nC \longrightarrow 0$$

es exacta para cada $n \in \mathbb{Z}^+$.

3) $\Longleftrightarrow$ 5) Es análogo a lo anterior basandose en el diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A[n] & \xrightarrow{\alpha_2} & B[n] & \xrightarrow{\beta_2} & C[n] & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_1} & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_2} & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_3} & & \\
0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \mu_1} & & \downarrow{\scriptstyle \mu_2} & & \downarrow{\scriptstyle \mu_3} & & \\
0 & \longrightarrow & A/A[n] & \xrightarrow{\overline{\alpha_2}} & B/B[n] & \xrightarrow{\overline{\beta_2}} & C/C[n] & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

□

Teorema 3.2.3. *Una sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

es pura-exacta si y sólo si para todo grupo cocíclico G y todo morfismo $\phi : A \longrightarrow G$ existe un morfismo $\psi : B \longrightarrow G$ tal que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\phi"] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[dl, "\psi"] & C \arrow[r] & 0 \\
 & G & & &
\end{tikzcd}$$

Demostración.

$\Rightarrow$) Supongamos que

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta pura. Sean G un grupo cocíclico y $\phi : A \longrightarrow G$ un morfismo de grupos. Sin ningún problema podemos suponer que ϕ es epimorfismo, ya que subgrupo de un grupo cocíclico es también cocíclico. Del hehcho de ser ϕ un epiformismo $A/\ker(\phi)$ es isomorfo a G (primer teorema de isomorfismos). Como α es inyectiva, entonces $\alpha(A/\ker(\phi)) = \alpha(A)/\alpha(\ker(\phi))$ es cocíclico, luego $\alpha(A)/\alpha(\ker(\phi))$ es un sumando directo de $B/\alpha(\ker(\phi))$, teorema 3.1.22, por lo que existe D subgrpo de $B/\alpha(\ker(\phi))$ tal que $B/\alpha(\ker(\phi)) = \alpha(A)/\alpha(\ker(\phi)) \oplus D$. Construimos $\psi : B \longrightarrow G$ de la siguiente manera: para cada $b \in B$, $\overline{b} \in B/\alpha(\ker(\phi)) = \alpha(A)/\alpha(\ker(\phi)) \oplus D$ por lo que existen $a \in A$ y $d \in D$ tales que $\overline{b} = \overline{\alpha(a)} + d$, si definimos $\psi(b) = \phi(a)$ se tienen las siguientes propiedades

1) ψ está bien definida.

Si $\overline{\alpha(a_1)} = \overline{\alpha(a_2)}$, entonces $\alpha(a_1 - a_2) \in \alpha(\ker(\phi))$, luego $a_1 - a_2 \in \ker(\phi)$ lo que concluye que $\phi(a_1) = \phi(a_2)$.

2) ψ es un morfismo de grupos.

Sean $b_1, b_2 \in B$, $a_1, a_2 \in A$ y $d_1, d_2 \in D$ tales que $\overline{b_i} = \overline{alpha(a_i)} + d_i$, para $i = 1, 2$. Es claro que $\overline{b_1 + nb_2} = \overline{\alpha(a_1) + n\alpha(a_2)} + (d_i + nd_2)$, para toda $n \in Z^+$, por lo que $\psi(b_1 + nb_2) = \phi(a_1 + na_2) = \phi(a_1) + n\phi(a_2) = \psi(b_1) + n\psi(b_2)$.

3) ψ hace conmutar el diagrama.

Sea $a \in A$. El elemento $\alpha(a) \in B$, luego $\overline{\alpha(a)} \in \alpha(A)/\alpha(\ker(\phi))$ por lo que $\psi \circ \alpha(a) = \psi(\alpha(a)) = \phi(a)$.

$\Leftarrow$) Para esta parte de la demostración usaremos el teorema 3.1.22. Sea $D \leq Im(\alpha)$ tal que $Im(\alpha)/D$ es fnitamente cogenerado.
Supondremos primero el caso particular cuando $Im(\alpha)/D$ es cocíclico. Consideremos $\phi : A \longrightarrow Im(\alpha)/D$ el mormismo definido de la composición de α seguido del morfissmo $\pi : Im(\alpha) \Rightarrow Im(\alpha)/D$, es decir, para cada $a \in A$, $\phi(a) = \alpha(a) + D$. Se tendrá por hipótesis que existe $\psi : B \longrightarrow Im(\alpha)/D$ y por consiguiente también el mormismo entre los grupos cocientes $\overline{\psi} : B/D \longrightarrow Im(\alpha)/D$ dado por $\overline{\psi}(b + D) = \psi(b)$.
Si tomamos $b + D \in Im(\alpha)/D$, entonces $\overline{\psi}(b + D) = \psi(b) = \alpha(a) + D$ para alguna $a \in A$, volviendo a evaluar la función se tiene que $\overline{\psi}(\alpha(a) + D) = \psi(\alpha(a)) = \phi(a) = \alpha(a) + D = \overline{\psi}(b + D)$ (ya que el diagrama conmuta) por lo que $\overline{\psi}^2 = \overline{\psi}$ lo que asegura, por el teorema 1.1.17, que $Im(\alpha)/D$ es sumando directo de B/D y por lo tanto $Im(\alpha)$ es subgrupo puro de B, ver teorema 3.1.22.
En el caso cuando $Im(\alpha)/D$ sea finitamente cogenerado, es decir, sea isomormo a $(E_1/D) \oplus (E_2/D) \oplus \ldots \oplus (E_n/D)$ donde cada sumando directo es un grupo cocíclico y $E_1, E_2, \cdots, E_n$ son subgrupos de $Im(\alpha)$, se tendrá que trabajar con cada sumando directo y repetir el mismo procedimiento anterior para demostrar que E_i/D es sumando directo de B/D para cada $i = 1, 2, 3, ..., n$ y por ende $(E_1/D) \oplus (E_2/D) \oplus \cdots \oplus (E_n/D)$ es sumando directo de B/D lo que prueba que $Im(\alpha)$ es un subgrupo puro de B. □

El siguiente resultado es el dual del teorema anterior

Teorema 3.2.4. *Una sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

es pura-exacta si y sólo si para todo grupo cíclico F y todo morfismo $\phi : F \longrightarrow C$ existe *un morfismo* $\psi : F \longrightarrow B$ *tal que hace conmutar el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] & B \arrow[r, "\beta"] & C \arrow[r] & 0 \\ & & & F \arrow[ul, "\psi"] \arrow[u, "\phi"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración.

$\Rightarrow$) Supongamos que

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta-pura, y sean F un grupo cíclico y $\phi : F \longrightarrow C$ un morfismo de grupos. El subgrupo $\phi(F)$ es cíclico por ser imagen directa del grupo cíclico F. El conjunto $\beta^{-1}[\phi(F)]$ es un subgrupo de B que contiene a $\ker(\beta)$ y por el primer teorema de isomorfismos $\beta^{-1}(\phi(F))/\ker(\beta) \cong \phi(F)$ el cual es cíclico y por lo tanto existe D subgrupo de B tal que $\beta^{-1}(\phi(F)) = \ker(\beta) \oplus D$, ver teorema 3.1.26 inciso 3. Para toda $f \in F$ existe $x \in \beta^{-1}(\phi(f))$ y por ende $x = b + d$ donde $b \in \ker(\beta)$ y $d \in D$. Si definimos $\psi : F \Rightarrow B$ como $\psi(f) = d$ se tendrá que

1) ψ está bien definida.

Sea $f \in F$. Supongamos que x y $x' \in \beta^{-1}(\phi(f))$, por lo tanto $x = b + d$ y $x' = b' + d'$ donde $b, b' \in \ker(\beta)$ y $d, d' \in D$.

$$\begin{aligned} x - x' &= (b - b') + (d - d') \\ 0 = \beta(x) - \beta(x') &= \beta(b - b') + \beta(d - d') \\ 0 &= \beta(d - d') \end{aligned}$$

luego se tiene que $d - d' \in \ker(\beta) \cap D$ y por tanto $d - d' = 0$ $(d = d')$. Así $\psi(f) = d = d'$ está bien definida.

2) ψ es un morfismo.

Sean $f_1, f_2 \in F$, $b_1, b_2 \in \ker(\beta)$ y $d_1, d_2 \in D$ tales que $b_i + d_i \in \beta^{-1}(\phi(f_i))$, para $i = 1, 2$. Probaremos que $\beta^{-1}(\phi(f_1) + \phi(f_2)) = \beta^{-1}(\phi(f_1)) + \beta^{-1}(\phi(f_2))$. Sea $x \in B$ tal que $\beta(x) = \phi(f_1) + \phi(f_2)$. Existen $x_1, x_2 \in B$ que cumplen que $\phi(f_1) = \beta(x_1)$ y $\phi(f_2) = \beta(x_2)$, así $\beta(x) = \beta(x_1) + \beta(x_2)$ y por lo tanto $\phi(f_1) = \beta(x) - \beta(x_2)$, es decir, $x - x_2 \in \beta^{-1}(\phi(f_1))$. Observese que $x = x_2 + (x - x_2)$, lo que prueba que $\beta^{-1}(\phi(f_1) + \phi(f_2)) \subseteq \beta^{-1}(\phi(f_1)) + \beta^{-1}(\phi(f_2))$. La otra contención es inmediata.
Del parrafo anterior se deduce que $(b_1 + nb_2) + (d_1 + nd_2) \in \beta^{-1}(\phi(f_1 + nf_2))$, para toda $n \in \mathbb{Z}^+$. Evaluando la función ψ en $f_1 + nf_2$ se tiene que $\psi(f_1 + nf_2) = d_1 + nd_2 = \psi(f_1) + n\psi(f_2)$ que es lo que se quería demostrar.

3) ψ hace conmutar el diagrama.

Sea $f \in F$ y $x = b + d \in \beta^{-1}(\phi(f))$ donde $b \in \ker(\beta)$ y $d \in D$.

$$\beta(\psi(f)) = \beta(d)$$

por otro lado

$$\phi(f) = \beta(x) = \beta(b + d) = \beta(d)$$

así $\beta \circ \psi = \phi$.

$\Leftarrow$) Sea $\ker(\beta) \leq D \leq B$ tal que $D/\ker(\beta)$ es finitamente generado. Supongamos el caso particular cuando $D/\ker(\beta)$ es cíclico. Consideremos el morfismo $\phi : D/\ker(\beta) \longrightarrow C$ dado por $\phi(d+\ker(\beta)) = \beta(d)$, así existe, por hipótesis, $\psi : D/\ker(\beta) \longrightarrow B$ morfismo que extiende a ϕ.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] & B \arrow[rr, "\beta"] & & C \arrow[r] & 0 \\ & & & D/ker(\beta) \arrow[ul, "\psi"] \arrow[ur, "\phi"'] & & \end{tikzcd}$$

Se demostrara que $D = ker(\beta) \oplus E$ donde $E = \psi(D/ker(\beta))$.

1) $\ker(\beta) \cap E = \{0\}$
Si $x \in \ker(\beta) \cap E$, $x = \psi(d' + \ker(\beta))$ y por otro lado $0 = \beta(x) = \beta(\psi(d' + \ker(\beta))) = \phi(d' + \ker(\beta)) = \beta(d')$ lo que implica que $d' \in \ker(\beta)$ y por consiguiente $x = 0$.

2) $D = \ker(\beta) + E$
Sea $d \in D$. Entonces $d + \ker(\beta) \in D/ker(\beta)$, así $\beta(\psi(d + \ker(\beta))) = \phi(d + \ker(\beta)) = \beta(d)$. Observemos que $d - \psi(d + \ker(\beta)) \in \ker(\beta)$ lo que demuestra que $d = \psi(d + \ker(\beta)) + b$ para alguna $b \in ker(\beta)$.
Lo anterior prueba que $\ker(\beta)$ es sumando directo de D y por lo tanto $\ker(\beta)$ es un subgrupo puro de B, ver teorema 3.1.26. Ahora supongamos que $D/\ker(\beta)$ es suma directa de grupos cíclicos. Podemos suponer que existe $E_1, E_2, E_3, ..., E_n$ subgrupos de D tales que $E_i/\ker(\beta)$ es cíclico para toda $i = 1, 2, 3, ..., n$ y además $D/\ker(\beta) = \bigoplus_{i=1}^{n}(E_i/\ker(\beta))$. Por lo demostrado en los parrafos ateriores el subgrupo $\ker(\beta)$ es sumando directo de cada E_i y por el teorema 1.1.18, se concluye que $\ker(\beta)$ es sumando directa de D y ahora por el teorema 3.1.26, se tiene que $\ker(\beta)$ es un subgrupo puro de B lo que demuestra que

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

es exacta-pura. $\square$

3.3. Presentación de los grupos algebraicamente compactos

Recordemos que el proposito principal de este capítulo es dar una generalización de los grupos divisibles y en particular se desea explorar la propiedad de ser sumandos directos de grupos que los contengan. El teorema 3.1.7, nos dice que todo sumando directo de un grupo es un subgrupo puro, sin embargo, el reciproco no siempre es cierto, ver ejemplo 3.1.21. Sin embargo, podemos encontrar grupos a los cuales no les pasa este inconveniente.

Ejemplo 3.3.1. *Los grupos divisibles y los grupos acotados son sumandos directos de cualquier grupo que los contenga como subgrupos puros.*

Un segundo inconveniente, sobre la pureza de un grupo A, es que es dependiente del grupo que contenga a A como subgrupo.

Ejemplo 3.3.2. *Consideremos el grupo aditivo de los enteros gaussianos*

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi | a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Es evidente que $\mathbb{Z}[i] = \mathbb{Z} \oplus \langle i \rangle$, por lo que $\mathbb{Z}$ es un subgrupo puro de $\mathbb{Z}[i]$ que además es un sumando directo. Si por otra parte consideramos a $\mathbb{Z}$ como subgrupo de $\mathbb{Q}$, esté no es un subgrupo puro, ver ejemplo 3.1.8.

Teniendo todo esto en cuenta, podemos dar la siguiente definición.

Definición 3.3.3. *Un grupo A es llamadao algebraicamente compacto si es sumando directo de cualquier grupo que lo contenga como un subgrupo puro.*

Corolario 3.3.4. *Los grupos divisibles, grupos cocíclicos y grupos acotados, son algebraicamente compactos.*

Para estudiar y ampliar nuestro conocimiento de los grupos algebraicamente compactos necesitamos nociones básicas sobre topología, como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 3.3.5. *La siguientes condiciones sobre un grupo A son equivalentes:*

1. *A es algebraicamente compacto.*
2. *A es un sumando directo de un grupo que admite una topología compacta.*
3. *Si todo subsistema finito de un sistema de ecuaciones sobre A tiene solución, entonces el sistema completo tiene solución en A.*

Con este último resultado queda claro el nombre usado de grupos algebraicamente compactos. Una nueva equivalencia de éstos está intimamente relacionada con los grupos cíclicos y los grupos cocíclicos.

Teorema 3.3.6. *A es un grupo algebraicamente compacto si y sólo si es un sumando directo de un producto directo de grupos cocíclicos.*

Corolario 3.3.7. *Un grupo reducido algebraicamente compacto es un sumando directo de un producto directo de p-grupos cíclicos.*

Corolario 3.3.8. *Un producto directo es algebraicamente compacto si y sólo si toda componente es algebraicamente compacto.*

Sin duda una de las topologias más sobresalientes que podemos definir en un grupo abeliano A es la topología $\mathbb{Z}$-adica, la cual está intimamente relacionada con los grupos algebraicamente compactos.

Lema 3.3.9. *Sea A un grupo. Si $\mathbb{V} := \{nA : n \in \mathbb{N}\}$, entonces $\mathbb{V}$ cumple las siguientes propiedades:*

1. *$0 \in V$ para todo $V \in \mathbb{V}$*
2. *Para todos $U, V \in \mathbb{V}$, existe $W \in \mathbb{V}$ tal que $W \subseteq U \cap V$*

Teorema 3.3.10. *Para todo elemento x en un grupo A, definimos $\mathbb{V}_x := \{x+nA : n \in \mathbb{N}\}$. Si $\mathbb{B} = \bigcup_{x \in A} \mathbb{V}_x$, entonces existe una topología τ, que la llamaremos la topología $\mathbb{Z}$-adica del grupo A, para la cual $\mathbb{B}$ es una base de vecindades.*

Teorema 3.3.11. *Un grupo A es completo en la topología $\mathbb{Z}$-adica si y sólo si A es un grupo reducido algebraicamente compacto.*

Bibliografía

[1] Fuchs, L. *Infinite abelian groups*, vol. 1. Academic press, 1970.

[2] Kaplansky, I. *Infinite abelian groups.* No. 1. University of Michigan Press Ann Arbor, 1954.

[3] Rotman, J. J. *An introduction to the theory of groups.* WCB/McGraw-Hill, 1988.